ELEMENTOS

DE

ALGEBRA

COMPILADOS POR

C. B. Ottoni

COMPENDIO ADOPTADO

Pelos estabelecimentos de instrucção secundaria e superior

OITAVA EDIÇÃO

augmentada com muitas notas intercaladas no texto

POR

G. S. M.

(ESTA EDIÇÃO CONTEM TODA A MATERIA DO PROGRAMMA DA ESCOLA POLYTECHNICA)

RIO DE JANEIRO
Livraria Classica de ALVES & COMP.
48 Rua Gonçalves Dias 48

1893

Typ. CONFIANÇA, de José Alves Montenegro, rua da Alfandega 198.

ALGEBRA

Introducção

1. *Algebra* é a parte das mathematicas em que se empregam signaes proprios para abreviar e generalisar os raciocinios que exige a solução das questões relativas aos numeros.

Ha duas especies de questões mui distinctas, a saber :

O *theorema*, que tem por objecto demonstrar certas propriedades de que gozam numeros dados.

O *problema*, cujo fim é determinar o valor de certos numeros, por meio de outros conhecidos com os quaes conservam aquellas relações definidas pelo enunciado da questão.

Os signaes, que a algebra emprega, são os 10 mencionados na arithmetica (n. 99). O seu uso não só abrevia, mas generalisa os raciocinios. Operando sobre numeros representados por signaes genericos, sente-se melhor que uma propriedade pertença a todos os numeros, ou que o modo de resolver um problema seja independente dos numeros particulares comprehendidos no enunciado.

Nos elementos de arithmetica (ns. 99 a 107) se acham enumerados os signaes algebricos e expostos os primeiros principios que regulam o seu emprego e combinações. A exposição citada contém verdadeiros prolegomenos de algebra e deve, por isso, ser repetida n'este logar,

2. As questões tratadas (arith. 105 a 107) são exemplos da maneira por que o emprego dos signaes auxilia a descoberta das propriedades dos numeros, permittindo seguir, com mais facilidade do que no idioma vulgar, a filiação das idéas nos raciocinios necessarios para demonstrar um theorema ou para resolver um problema.

Assim, com referencia ao symbolo algebrico de uma fracção, $\frac{a}{b}$, ficou demonstrado com toda a generalidade que :

(Arith. 105) *ajuntar o mesmo numero a ambos os termos de uma fracção augmenta o valor desta, se é propria; diminue, se é impropria.*

Pelo contrario (arith. 106) *tirar de ambos os termos o mesmo numero diminue o valor da fracção propria, e augmenta o da impropria.*

Estes principios geraes não ficariam logicamente estabelecidos, se nos limitassemos a verificar as propriedades enunciadas sobre fracções particulares representadas por algarismos.

Dos mesmos exemplos se collige a necessidade de estabelecer regras geraes para effectuar sobre as quantidades representadas pelos signaes algebricos, todas as operações que se effectuam sobre os numeros. Estas operações serão o objecto do 1º capitulo; é indispensavel ao estudante familiarisar-se com ellas, para bem comprehender e desenvolver os fecundos recursos que a algebra offerece para a resolução de grande numero de questões.

—2 *a*. Os signaes de que faz uso a algebra são de duas naturezas: os que symbolisam as quantidades e os que indicam as relações que as ligam.

Para designar quantidades usam-se as lettras do alphabeto commum ou do alphabeto grego.

Os signaes que indicam as relações que existem entre as quantidades dividem-se ainda em duas especies, a saber: os que indicam operações a realisar e os que indicam o gráo de comparação em que se acham duas quantidades dadas.

Para indicar as seis operações algebricas que correspondem ás seis que foram estudadas em arithmetica tem-se:

— O signal (+) que se lê « *mais* » e quer dizer, que á quantidade que lhe ficar á esquerda se deve reunir a que lhe ficar á direita: assim, para indicar que á quantidade *a* deve ser reunida a quantidade *b*, escreve-se:

$$a + b$$

e lê-se « a *mais* b »;

— O signal (—) que se lê « *menos* » e quer dizer que da quantidade que lhe ficar á esquerda se deve subtrahir a que lhe ficar á direita: assim, para indicar que da quantidade *a* se deverá subtrahir a quantidade *b* escreve-se:

$$a - b$$

e lê-se « a *menos* b »;

— O signal (×) que se lê « *multiplicado por* » e quer dizer que a quantidade que lhe fica á esquerda deverá ser multiplicada pela que lhe ficar á direita: assim, para indicar que a quantidade *a* deverá ser multiplicada por *b* escreve-se

$$a \times b$$

e lê-se « a *multiplicado por* b ». — Quando se trata da combinação de quantidades litteraes unicamente, ou destas com numeros, póde-se supprimir o signal × e escrever simplesmente ab, $2ab$, que se lê enunciando unicamente as quantidades sem pronunciar *multiplicado por*;

— O signal ($\div$) ou (:) que se lê « *dividido por* » e quer dizer, que a quantidade que lhe ficar á esquerda deverá ser dividida pela que lhe ficar á direita : assim, para indicar que a quantidade *a* deverá ser dividida pela quantidade *b* escreve-se

$$a \div b \text{ ou } a : b$$

e lê-se « a *dividido por* b ». Tambem indica-se esta operação escrevendo $\frac{a}{b}$ e lê-se do mesmo modo;

— O signal constituido por uma quantidade, que se chama expoente, collocada um pouco acima e á direita de outra indica que esta deverá ser elevada á potencia do grão indicado pela primeira : assim, para indicar que a quantidade *a* deverá ser elevada á potencia *m* escreve-se

$$a^m$$

e lê-se « a *elevado a* m »;

— O signal ($\sqrt[m]{\ }$) que se lê « *raiz* m *de* » e quer dizer que da quantidade que lhe ficar á direita se deverá extrahir a raiz do grão indicado pela quantidade *m*, que se chama indice : assim, se se quer indicar a raiz quarta ou a raiz quinta de *a* escreve-se

$$\sqrt[4]{a}\ ,\quad \sqrt[5]{a}$$

e lê-se « *raiz quarta de* a, *raiz quinta de* a ».

Quando se trata de raiz quadrada é desnecessario escrever o numero correspondente (indice) acima do respectivo signal : assim $\sqrt{a}$ lê-se « *raiz quadrada de* a ».

Observações. — Quando as quantidades entre as quaes se tem de indicar operações são já complicadas pela existencia de outras, convém attender, para evitar confusão, ao modo por que se faz a indicação pedida : assim, se occorre que se tenha de subtrahir de uma quantidade o resultado de varias addições e subtracções não bastará interpôr o signal —, seja por ex. para subtrahir de *a* a quantidade $b+c-d+e$, se em seguida a *a* se escrever a quantidade $b+c-d+e$ intercalando simplesmente o signal — teriamos

$$a - b + c - d + e$$

o que significa que de *a* se deverá subtrahir *b*, sommar o resto com *c*, da somma subtrahir *d* e ao resto sommar *e*; isso não era porém nosso intento, mas sim o era subtrahir de *a* o resultado que se obtem reuuindo as tres quantidades *b*, *c* e *e* e da somma subtrahindo *d* : para indicar isto, escreve-se

$$a - (b + c - d + e)$$

Quando se trata de addição é desnecessario attender ao que fica dito.

Em relação á multiplicação cabe inteiramente a observação : assim se se tem de multiplicar a pelo resultado de $b + c - d$ escreve-se

$$a\,(b + c - d)$$

se se tem de multiplicar $a + b$ por $c - d$ escreve-se

$$(a + b)\ (c - d)$$

O que se disse da multiplicação se applica em tudo á divisão : assim, seja para dividir a por $b + c - d$ escreve-se

$$a : (b + c - d) \text{ ou antes } \frac{a}{b + c - d}$$

Para elevar a qualquer potencia m, por ex., uma quantidade complexa como $a - b - c + d$ escreve-se

$$(a - b - c + d)^m$$

Para indicar raiz m de tal quantidade escreve-se

$$\sqrt[m]{}(a - b - c + d) \text{ ou antes } \sqrt[m]{a - b - c + d}$$

— Os signaes que designam os gráos de comparação são :

O signal (=) que se lê « *igual a* » — e quer dizer que a quantidade, ou resultado das operações entre as quantidades que se acham á esquerda do signal é igual á quantidade que se acha á direita do mesmo : assim para indicar que a somma $a + b$ é igual a $c + d$ escreve-se

$$a + b = c + d$$

e lê-se « a *mais* b *igual a* c *mais* d ».

— O signal (>) que se lê « *maior do que* » e significa que a quantidade da esquerda é maior do que a da direita : assim para indicar que $a + b$ é maior do que $c + d$ escreve-se

$$a + b > c + d$$

e lê-se « a *mais* b *maior do que* c *mais* d ».

— O signal (<) indica que a quantidade collocada antes do signal é menor que a collocada depois : assim para indicar que a é menor do que b escreve-se

$$a < b$$

e lê-se « a *menor do que* b ».

— A expressão $(a \gtrless b)$ lê-se « a *maior ou menor do que* b »;

$(a \gtreqless b)$ lê-se « a *maior do que* b *ou igual a* b *ou menor do que* b ».

CAPITULO PRIMEIRO

Operações algebricas

Definições preliminares

3. Toda a quantidade representada por meio dos signaes de algebra se chama *quantidade algebrica* ou *quantidade litteral;* tambem se diz, e com mais propriedade, a *expressão algebrica* de uma quantidade.

Assim $3a$ é a *expressão algebrica* do triplo de a; $5a^3b^2$, *expressão algebrica* de cinco vezes o producto do cubo de a multiplicado pelo quadrado de b.
$2a^2-4b$, a *expressão algebrica* da differença entre o dobro do quadrado de a, e o quadruplo de b.
$3a^2-5ab+4b^3$, a *expressão algebrica* do resultado obtido, subtrahindo do triplo do quadrado de a cinco vezes o producto de a por b e ajuntando-se ao resto quatro vezes o cubo de b.

4. Chama-se *monomio* a quantidade algebrica, que não se acha combinada com outra por algum dos signaes $+$ ou $-$; *polynomio*, a que se compõe de partes reunidas pelos mesmos signaes. O polynomio, pois, é composto de monomios, e cada um destes se denomina *um* *termo*. O polynomio de dous termos toma o nome de *binomio*, e o de tres, *trinomio*.

5. Obtem-se o *valor numerico* de uma expressão algebrica (sendo dados valores particulares ás lettras que nella existem), effectuando as operações arithmeticas que indica a mesma expressão algebrica.

Assim o valor numerico da expressão $2a^3$.

Se fôr $a=3$, será 54, que é o dobro do cubo de 3.

Se fôr $a=5$, será 250, dobro do cubo de 5.

Em geral o valor numerico de uma expressão algebrica *varia com os valores das lettras* que nella se contém.

Ha, porém, casos particulares, em que podem mudar os valores das lettras, conservando-se constante o da expressão algebrica.

$a-b$ não se altera, recebendo a e b augmentos iguaes; $\frac{a}{b}$ se conserva constante, multiplicando ou dividindo a e b por um mesmo numero,

O valor numerico de um polynomio não se altera, invertendo de qualquer modo a collocação dos seus termos comtanto que a cada um se conserve o seu signal. As quantidades $3a^2-5ab+4b^3$; $3a^2+4b^3-5ab$; $4b^3+3a^2-5ab$ têm o mesmo *valor numerico*. E' consequencia da natureza da addição e subtracção; e esta observação nos será util depois.

6. Em qualquer polynomio, os termos precedidos do signal + são *additivos*; do signal — *subtractivos*. Ordinariamente se chamam os primeiros, *termos posi-*

tivos; os outros, *termos negativos;* denominações improprias, mas consagradas pelo uso.

O termo não precedido de signal algum, suppõe-se ter $+$; isso acontece as mais das vezes no 1º termo de um polynomio.

7. Chama-se *dimensão* de um termo cada factor simples litteral, dos que o compõem; *grão* o numero das *dimensões*; neste numero não se conta o coefficiente.

$3\ a$ é termo de uma dimensão, ou do 1º grão, ou *linear*.

$4\ ab$ tem duas dimensões, ou é do 2º grão.

$7a^3bc^2$ sendo equivalente a 7 *aaabcc*, tem seis dimensões ou é do 6º grão.

Em geral, *o grão de um termo é a somma dos expoentes das lettras, que nelle entram*; quando a lettra não tem expoente, subentende-se 1. O grão de $8\ a^2bcd^3$ é $2+1+1+3=7$; o termo é de 7º grão.

Um polynomio se diz *homogeneo,* quando todos os seus termos são do mesmo grão.

8. *Termos semelhantes* são os que se compõem das mesmas lettras, com os mesmos expoentes. Quando um polynomio contém termos semelhantes, é susceptivel de simplificação.

Seja o polynomio

$$4\ a^2b - 3\ a^2c + 9\ ac^2 - 2\ a^2b + 7\ a^2c - 6\ b^3$$

que equivale a

$$4\ a^2b - 2\ a^2b + 7\ a^2c - 3\ a^2c + 9\ ac^2 - 6\ b^3:$$

Ora, evidentemente $4\,a^2b - 2\,a^2b$ se reduz a $2\,a^2b$; e do mesmo modo $7\,a^2c - 3\,a^2c$ reduz-se a $4\,a^2c$. Logo o polynomio póde converter-se em $2a^2b + 4a^2c + 9ac^2 - 6b^3$.

Sejam ainda os seguintes termos pertencentes a um mesmo polynomio,

$$+2\,a^3bc^2 - 4\,a^3bc^2 + 6\,a^3bc^2 - 8\,a^3bc^2 + 11\,a^3bc^2.$$

Em primeiro logar, a somma dos termos additivos $+2a^3bc^2 + 6\,a^3bc^2 + 11\,a^3bc^2$ é evidentemente igual a $19\,a^3bc^2$. Depois, a somma dos termos subtractivos $4\,a^3bc^2$ e $8\,a^3bc^2$ é equivalente a $12\,a^3bc^2$. Logo os cinco termos reunidos equivalem a $19\,a^3bc^2 - 12\,a^3bc^2 = 7\,a^3bc^2$.

Se a somma dos subtractivos fosse maior que a dos additivos, seria preciso tirar esta daquella, e dar ao resultado o signal —. Assim $5\,a^2b - 8\,a^2b = -3\,a^2b$; porque sendo, $8\,a^2b = 5a^2b + 3\,a^2b$, a expressão dada é o mesmo que $5\,a^2b - 5\,a^2b - 3\,a^2b$, ou simplesmente $-3\,a^2b$.

9. Regra geral. *Para reduzir muitos termos semelhantes a um só, sommam-se os coefficientes dos additivos, e á parte os dos subtractivos; tira-se a menor somma da maior; o resto com o signal da maior será o coefficiente do termo pedido.*

O resultado contém as mesmas lettras e expoentes dos termos dados: a reducção sempre se faz unicamente entre os coefficientes.

A reducção de termos semelhantes é operação peculiar á algebra, e a cuja pratica dão frequentes occasiões as operações algebricas da *addição*, *subtracção*, *multiplicação* e *divisão;* operações de que passamos a tratar.

Observação. A idéa que se deve formar destas operações, é a mesma que das operações correspondentes na arithmetica, cujas definições não é necessario reproduzir neste compendio.

Todavia bem se vê que os processos e as regras não podem ser as mesmas, sendo os symbolos differentes. Na algebra algumas vezes as operações se reduzem a meras simplificações, ou ainda são apenas *indicadas* por meio de signaes convencionados, em certos casos, porém, *as operações se effectuam*; e para isso são necessarias regras correspondentes aos symbolos adoptados.

Convêm aqui notar, para bem estabelecer a differença entre o calculo algebrico e o arithmetico, que as operações por meio das quaes se realisam transformações nas expressões algebricas, em nada affectam o symbolo representativo de quantidade, mas unicamente os numeros que acompanham os symbolos que compõem a expressão, esses numeros são os coefficientes e os expoentes; pois a inteira generalidade que se attribue aos symbolos algebricos não poderia subsistir se elles fossem susceptiveis de uma tal influencia. Póde-se mesmo dizer que toda a vantagem do modo de representar os numeros em algebra consiste na natureza inalteravel dos symbolos, que assim tornam-se aptos á perfeita generalidade que se lhes attribue.

Addição algebrica

10. Trata-se de sommar $3a$, $5b$ e $2c$. Indicada a addição, resulta o trinomio $3a+5b+2c$, que não se póde simplificar. Do mesmo modo a somma dos monomios é $4\,a^2b^3 + 2\,a^2b^3 + 7\,a^2b^3$, ou $13\,a^2b^3$, feita a reducção (n. 9).

Sejam agora para sommar os polynomios

$$3\,a^2 - 4\,ab,\ 2\,a^2 - 3\,ab + b^2,\ 2\,ab - 5\,b^2.$$

Para formar um polynomio igual á somma destes tres, notemos, que ajuntar ao primeiro $2\,a^2 - 3\,ab + b^2$ é ajuntar-lhe a differença entre o numero expresso por $2\,a^2 + b^2$ e o que representa $3\,ab$; o que seria facil se déssemos a a e b valores particulares. Observemos, porem, que a operação se reduz a ajuntar ao 1º polynomio $2\,a^2 + b^2$, e tirar-lhe $3\,ab$: o que produz

$$3a^2 - 4\,ab + 2\,a^2 + b^2 - 3\,ab,$$
$$\text{ou } 3\,a^2 - 4\,ab + 2\,a^2 - 3\,ab + b^2.$$

Por uma razão semelhante, para ajuntar a este ultimo polynomio, $2\,ab - 5\,b^2$, basta escrever

$$3a^2 - 4\,ab + 2\,a^2 - 3ab + b^2 + 2\,ab - 5\,b^2$$

somma das tres quantitades dadas que, pela *reducção* dos termos semelhantes, se converte em $5a^2 - 5ab - 4b^2$.

REGRA GERAL. — *Escrevem-se os polynomios uns depois dos outros, com seus signaes, e reduzem-se os termos semelhantes.*

Exemplo. Sommar os polynomios

$$\begin{array}{l} 3a^2 - 4ab + 2b^2 \\ + 5a^2 + 2ab \\ + 3ab - 2b^2 - 3c^3: \\ \hline \end{array}$$

Somma reduzida $8a^2 + ab - b^2 - 3c^3$

Na pratica, à medida que se vão reduzindo os termos semelhantes, assignala-se cada um com um leve traço, para evitar enganos. Os termos, não traçados, são os que falta reduzir e comprehender na somma final.

Subtracção algebrica

11. Proponha-se subtrahir $4b$ de $5\,a$; é claro que o resultado algebrico será $5a - 4b$. E' tambem claro que a differença entre $7a^3b$ e $4a^3b$ deve ser $7a^3b - 4a^3b = 3a^3b$.

Seja, porém, $2b - 3c$ que se pretende subtrahir de $4a$. Em primeiro logar o resultado se póde assim exprimir.

$$4a - (2b - 3c);$$

no que não se faz mais do que indicar a subtracção. Porém, as questões da algebra exigem que se converta aquella expressão em um só polynomio; e *eis em que consiste principalmente a régra da subtracção algebrica.*

Para o conseguir, notemos que, se a, b, c fossem dados em numeros, de $2b$ tirariamos $3c$, e de $4a$ a differença precedente.

Estas operações não se effectuam no estado actual das quantidades; porém se de $4a$ tirarmos $2b$, o que dá $4a - 2b$, a differença pedida estará desfalcada da quantidade $3c$, pois que não era $2b$ por inteiro, mas sim $2b - 3c$ o que queriamos subtrahir; cumpre pois ajuntar $3c$, o que nos dará o resultado $4a - 2b + 3c$.

Se de $8a^2 - 2ab$ se houver de subtrahir

$$5a^2 - 4ab + 3bc - b^2,$$

a operação será indicada deste modo,

$$8a^2 - 2ab - (5a^2 - 4ab + 3bc - b^2);$$

e o raciocinio precedente terá plena applicação, considerando a quantidade a subtrahir como a differença entre a somma dos termos additivos $5a^2 + 3bc$, e a dos subtractivos $4ab$ e b^2. O mesmo raciocinio, pois, demonstrará que cumpre tirar do subtrahendo os termos additivos $5a^2$ e $3bc$, e ajuntar-lhe os subtractivos $4ab$ e b^2, o que conduz ao resultado

$$8a^2 - 2ab - 5a^2 + 4ab - 3bc + b^2,$$

ou, reduzindo, $3a^2 + 2ab - 3bc + b^2$.

Póde-se concluir esta REGRA GERAL, para subtrahir de um polynomio outro: *Escrevem-se em seguida ao primeiro todos os termos do segundo, trocando-lhes os signaes, e faz-se a reducção, se apparecem termos semelhantes.*

12. A passagem de uma subtracção indicada para uma effectuada, e vice versa, dá logar a certas transformações nos polynomios, que muitas vezes são uteis.

Assim, por exemplo

$$6a^2 - 3ab + 2b^2 - 2bc = 6a^2 - (3ab - 2b^2 + 2bc) =$$
$$= 6a^2 - 3ab - (2bc - 2b^2);$$
$$a + b - c + d - e = a + b - c - (e - d)$$
$$= a + b - (c - d + e)$$
$$= a - (c - b - d + e) = a + b + d - (c + e)$$

Multiplicação algebrica

13. Demonstrou-se na arithmetica, que o producto de dous ou mais numeros conserva-se o mesmo, qualquer que seja a ordem em que se multipliquem. Supporemos demonstrado este principio em toda a sua generalidade.

Isto posto, tratemos da multiplicação algebrica; e, em primeiro logar, do caso em que ambos os factores são monomios. Seja $7a^3b^2$ para multiplicar por $4a^2b$.

A 1ª expressão do producto $7a^3b^2 \times 4a^2b$ se poderá simplificar, observando que, segundo o principio precedente e a significação dos symbolos algebricos, o mesmo producto se reduz a $7 \times 4 \times aaaaabbb$. Ora, quanto aos coefficientes, nada impede effectuar a multiplicação 7×4, que dá 28 para coefficiente do producto; e, quanto ás lettras, $aaaaa$ equivale a a^5, e bbb a b^3. Logo será o producto $28a^5b^3$.

Applicando a mesma analyse a outros exemplos, reconhece-se que o producto se fórma sempre segundo esta.

Regra para multiplicar dous monomios. 1.° *Multiplicam-se os coefficientes entre si.* 2.° *Escrevem-se em seguida todas as lettras communs aos dous factores, dando a cada uma, expoente igual á somma dos expoentes, que ella tinha em um e outro factor.* 3.° *Escreve-se tambem cada lettra das que só existiam em um dos factores com o mesmo expoente que ella tinha.*

A analyse supra, e alguma reflexão sobre a natureza dos expoentes, leva á evidencia a regra precedente. Segundo ella,

$$8a^2bc^2 \times 7abcd^3 = 56a^3b^2c^3d^3;$$
$$5ab^3c^2 \times 9bcd^2e^3 = 45ab^4c^3d^2e^3$$

e assim nos mais casos. Passemos á multiplicação dos polynomios.

14. Sejam estes $a+b+c$, e $d+f$, compostos unicamente de termos additivos; o seu producto será $(a+b+c)(d+f)$, a que se trata de dar a fórma de um polynomio; *nisto consiste a multiplicação algebrica.*

Ora, multiplicar $a+b+c$ por $d+f$ é repetir o multiplicando d vezes, repetil-o f vezes e sommar os dous productos. Mas tomar d vezes $a+b+c$ é tomar d vezes a, d vezes b, d vezes c, e ajuntar os tres productos, o que fórma $ad+bd+cd$. Pela mesma razão f vezes o multiplicando equivale a $af+bf+cf$. Logo o producto total é $ad+bd+cd+af+bf+cf$.

Assim, tendo os factores só termos additivos, *multiplicam-se successivamente todos os termos do multi-*

plicando por cada um dos termos do multiplicador, e sommam-se todos os productos.

Se os termos tiverem coefficientes e expoentes, a cada multiplicação parcial se applicará a regra dos monomios. Assim

$$(5a^2+2ab+b^2)(3a+2b)=$$
$$=15a^3+6a^2b+3ab^2+10a^2b+4ab^2+2b^3$$

$$\text{e (feita a reducção)} = 15a^3+16a^2b+7ab^2+2b^3.$$

15. Trataremos agora do caso mais geral, aquelle em que ambos os factores contêm termos additivos e termos subtractivos. Neste caso o multiplicando exprime a differença entre o numero representado pela somma dos termos additivos e o numero representado pela somma dos termos subtractivos. O mesmo se entende do multiplicador.

Do que se segue, que a multiplicação de dous polynomios quaesquer se reduz à de dous binomios da fórma $a-b$, e $c-d$, designando a e c as duas sommas dos termos additivos, b e d as sommas dos termos subtractivos dos dous factores.

Procuremos, pois, effectuar a operação $(a-b)(c-d)$. Multiplicar $a-b$ por $c-d$ é tomar $a-b$ tantas vezes quantas unidades ha em c, *menos* tantas vezes quantas unidades ha em d; por outra, multiplicar $a-b$ por c, e $a-b$ por d, é subtrahir o segundo producto do primeiro. Porém multiplicar $a-b$ por c é tomar c vezes a, menos c vezes b, do que resulta $ac - bc$. Pela mesma razão

$$(a - b)\, d = ad - bd.$$

Logo o producto dos dous binomios

$$(a - b)\,(c - d) = ac - bc - ad + bd.$$

Examinando a maneira por que se fórma este producto, vê-se que é sempre necessario *multiplicar cada termo do multiplicando por cada termo do multiplicador*. Accresce, porém, esta distincção. *Emquanto se multiplicam pelos termos additivos do multiplicador os do multiplicando (additivos e subtractivos), os signaes destes se conservam nos respectivos productos parciaes. Mas, passando a multiplicar pelos termos subtractivos do multiplicador os termos do multiplicando (additivos e subtractivos), o signal de cada producto parcial é o contrario do que affecta o termo respectivo do multiplicando.*

Por outras palavras: *Quando os dous termos que se multiplicam têm o mesmo signal* ($+$ ou $-$), *o producto tem o signal* $+$. *Se os dous termos tiverem signaes diversos, o producto parcial terá o signal* $-$. *Diz-se tambem abreviadamente:*

$$+ \text{ por } +, \text{ ou } - \text{ por } -, \text{ dá } +.$$
$$+ \text{ por } -, \text{ ou } - \text{ por } +, \text{ dá } -.$$

Expressão incorrecta, mas cuja concisão é parte para que melhor se fixe a regra na memoria.

Isto posto, póde ordenar-se a operação, como se vê no seguinte exemplo :

$$
\begin{array}{ll}
\text{Factores} & \left\{\begin{array}{l} 4a^3-5a^2b-8ab^2+2b^3 \\ 2a^2-3ab-4b^2 \end{array}\right. \\
\hline
\begin{array}{l}\text{Productos} \\ \quad\text{parciaes}\end{array} & \left\{\begin{array}{rrrrrr} 8a^5-10a^4b & -16a^3b^2 & +4a^2b^3 & & \\ -12a^4b & +15a^3b^2 & +24a^2b^3 & -6ab^4 & \\ & -16a^3b^2 & +20a^2b^3 & +32ab^4 & -8b^5 \end{array}\right. \\
\hline
\begin{array}{l}\text{Producto} \\ \quad\text{reduzido}\end{array} & \left\{ 8a^5-22a^4b-17a^3b^2+48a^2b^3+26ab^4-8b^5 \right.
\end{array}
$$

Em cada multiplicação termo a termo começa-se por examinar, segundo a regra precedente, qual será o signal do producto parcial respectivo; e em seguida applica-se aos coefficientes, lettras e expoentes, o processo da multiplicação dos monomios. Afinal reduzem-se os termos semelhantes.

Observações relativas á multiplicação algebrica.

16. Multiplicando, um pelo outro, dous polynomios homogeneos (n. 7), *o producto será tambem homogeneo.* E' consequencia das regras relativas a lettras e expoentes na multiplicação dos monomios. Das mesmas regras se segue que o *numero de dimensões do producto é a somma das dimensões do multiplicando e multiplicador*. Serve muitas vezes esta observação para descobrir erros de pratica na multiplicação.

(Quasi todas as questões que se resolvem algebrica-

Isto posto, póde ordenar-se a operação, como se vê no seguinte exemplo :

$$\begin{array}{ll}
\text{Factores} & \left\{\begin{array}{l} 4a^3-5a^2b-8ab^2+2b^3 \\ 2a^2-3ab-4b^2 \end{array}\right. \\
\hline
\begin{array}{l}\text{Productos}\\ \quad\text{parciaes}\end{array} & \left\{\begin{array}{lllllll} 8a^5 & -10a^4b & -16a^3b^2 & +4a^2b^3 & & & \\ & -12a^4b & +15a^3b^2 & +24a^2b^3 & -6ab^4 & & \\ & & -16a^3b^2 & +20a^2b^3 & +32ab^4 & -8b^5 & \end{array}\right. \\
\hline
\begin{array}{l}\text{Producto}\\ \quad\text{reduzido}\end{array} & \left\{ 8a^5-22a^4b-17a^3b^2+48a^2b^3+26ab^4-8b^5 \right.
\end{array}$$

Em cada multiplicação termo a termo começa-se por examinar, segundo a regra precedente, qual será o signal do producto parcial respectivo; e em seguida applica-se aos coefficientes, lettras e expoentes, o processo da multiplicação dos monomios. Afinal reduzem-se os termos semelhantes.

Observações relativas á multiplicação algebrica.

16. Multiplicando, um pelo outro, dous polynomios homogeneos (n. 7), *o producto será tambem homogeneo.* E' consequencia das regras relativas a lettras e expoentes na multiplicação dos monomios. Das mesmas regras se segue que o *numero de dimensões do producto é a somma das dimensões do multiplicando e multiplicador*. Serve muitas vezes esta observação para descobrir erros de pratica na multiplicação.

(Quasi todas as questões que se resolvem algebricamente, e notadamente as questões de geometria, conduzem a expressões homogeneas.)

17. Quando não ha rudueções, *o numero de termos do producto final é igual ao numero de termos de um factor, multiplicado pelo numero de termos do outro factor*. Consequencia da regra (n. 15).

Havendo termos semelhantes, é menor o numero dos termos do producto. Mas notam-se entre elles, alguns que nunca soffrem reducção, a saber : 1°, *o producto dos termos em que uma mesma lettra é affecta do mais alto expoente, no multiplicando e no multiplicador*; 2°, *o producto dos termos em que a mesma lettra tem o menor expoente em cada factor*. Com effeito, nestes productos parciaes a lettra mencionada deve ter expoente maior ou menor do que em qualquer outro; pelo que não acharão elles termos semelhantes, com os quaes soffram reducção.

Assim um producto de dous polynomios nunca póde reduzir-se a menos de dous termos.

Esta observação será de muita utilidade na divisão.

18. A multiplicação de certos polynomios conduz a resultados notaveis e de uso frequente.

1.° O binomio $a+b$ elevado ao quadrado, ou

$$(a+b)^2=(a+b)\ (a+b)=a^2+2ab+b^2$$

mostra que o *quadrado da somma de duas quantidades é igual ao quadrado da primeira, mais o da segunda, mais o dobro do producto das duas quantidades.*

2.° Se em vez de $a+b$ tivessemos $a-b$, seria

$$(a-b)^2=(a-b)\ (a-b)=a^2-2ab+b^2.$$

Isto é, *o quadrado da differença de duas quantidades é igual ao quadrado da primeira, mais o quadrado da segunda, menos o dobro do producto das duas quantidades.*

Assim $(8a^3+5a^2b)^2=64a^6+25a^4b^2+80a^5b$

$$(8a^3-5a^2b)^2=64a^6+25a^4b^2-80a^5b$$

3.° Multiplicando $a+b$ por $a-b$ resulta a^2-b^2. Logo *a somma de duas quantidades multiplicada pela sua differença dá, em producto, a differença dos quadrados das mesmas quantidades.*

Assim $(6a^2+5ab)\ (6a^2-5ab)=36a^4-25a^2b^2$

4.° Tomando a^2+b^2+2ab, quadrado de $a+b$, e tornando a multiplicar por $a+b$ tem-se para producto o cubo de $a+b$: assim

$$(a^2+b^2+2ab)\ (a+b)\ =a^3+b^3+3a^2b+3ab^2:$$

isto se póde enunciar dizendo — *o cubo da somma de duas quantidades é igual á somma dos cubos dessas quantidades, mais o triplice producto do quadrado da primeira multiplicado pela segunda, mais o triplice producto da primeira multiplicada pelo quadrado da segunda.*

5.° Tomando a^2+b^2-2ab, quadrado de $a-b$, e tornando a multiplicar por $a-b$ tem-se o cubo de $a-b$: assim

$$(a^2+b^2-2ab)\ (a-b)\ =a^3-b^3-3a^2b+3ab^2:$$

isto se póde enunciar dizendo — *o cubo da differença entre duas quantidades é igual ao cubo da primeira, menos o da segunda, menos o triplice producto do quadrado da primeira pela segunda, mais o triplice producto da primeira pelo quadrado da segunda.*

6.° Fazendo o producto do quadrado da somma pelo quadrado da differença entre duas quantidades, tem-se

$$(a+b)^2\ (a-b)^2=(a^2+b^2+2ab)\ (a^2+b^2-2ab)=$$
$$=a^4-2a^2b^2+b^4:$$

o que se póde enunciar dizendo — *o producto do quadrado da somma pelo quadrado da differença entre duas quantidades é igual á somma das quartas potencias dessas quantidades menos o duplo producto dos quadrados das mesmas quantidades.*

7.ª Multiplicando o cubo da somma pelo da differença de duas quantidades tem-se

$$(a+b)^3\ (a-b)^3 = (a^3+b^3+3\,a^2b+3\,ab^2)\ (a^3-b^3-3\,a^2b+3\,ab^2) =$$
$$= a^6 - 3\,a^4b^2 + 3\,a^2b^4 - b^6$$

o que se póde enunciar dizendo — *o producto do cubo da somma pelo cubo da differença de duas quantidades é igual á sexta potencia da primeira, menos o triplice producto da quarta potencia da primeira pelo quadrado da segunda, mais o triplice producto do quadrado da primeira pela quarta potencia da segunda, menos a sexta potencia da segunda.*

Estas observações muitas vezes abreviam os calculos.

19. Ha certos polynomios, cuja inspecção basta para poderem decompôr-se em factores, o que é frequentemente util. E' facil de vêr que

$$25\,a^4 - 30\,a^3b + 15\,a^2b^2 = 5\,a^2\,(5\,a^2 - 6\,ab + 3\,b^2)$$

e que $64\,a^4b^6 - 25\,a^2b^8 = (8\,a^2b^3 + 5\,ab^4)\,(8\,a^2b^3 - 5\,ab^4)$.

Applicação

19 *bis. Dividir uma quantidade dada* m *em duas partes taes que seu producto seja o maior possivel.*

Chamemos x o excesso de uma das partes sobre a outra, é claro que uma será representada por

$$\frac{m-x}{2} \text{ e a outra por } \frac{m+x}{2}.$$

e o seu producto será

$$\frac{m-x}{2} \times \frac{m+x}{2} = \frac{m^2-x^2}{4}:$$

esta ultima fracção $\frac{m^2-x^2}{4}$ será tanto maior quanto fôr menor a quantidade x^2, pois diminuindo x^2 cresce m^2-x^2 e portanto a fracção; isto importa dizer que quando x, unica quantidade variavel que ha na tal fracção, fôr nullo, isto é, quando $x=0$, a fracção $\frac{m^2-x^2}{4}$ attingirá o seu maior valor, ora esta fracção sendo o producto das duas partes em que consideramos fosse m dividido, é claro que ella representará o maximo producto que se póde formar com as duas partes em que se póde dividir m e que cada uma d'essas partes deverá ser igual a $\frac{m}{2}$, porque sendo $x=0$ tem-se

$$\frac{m-x}{2}=\frac{m}{2} \quad \text{e} \quad \frac{m+x}{2}=\frac{m}{2}$$

Divisão algebrica

20. A divisão em algebra, como na arithmetica, tem por fim :

Dado um producto e um dos factores, achar o outro.

Consideremos o caso de dous monomios.

Proponha-se dividir $72a^5$ por $8a^3$, o que se póde indicar deste modo $\frac{72a^5}{8a^3}$

Pede-se um terceiro monomio, que, multiplicado pelo segundo, reproduza o primeiro. Ora, segundo as regras da multiplicação dos monomios, o coefficiente pedido multiplicado por 8 deve dar 72, e o expoente da lettra sommado com 3 deve dar 5. Logo cumpre dividir 72 por 8, e do expoente no dividendo 5 tirar 3, expoente no divisor; será, pois, o quociente $9a^2$, o que facilmente se verifica.

Descobre-se do mesmo modo que

$\frac{35a^3b^2c}{7ab}=5a^2bc$; e com effeito $5a^2bc\times 7ab=35a^3b^2c$.

Donde se vê que, para dividir um monomio por outro: 1.° *Divide-se coefficiente por coefficiente.* 2.° *Escreve-se no quociente cada lettra das que existem em ambos os termos, com expoente igual ao excesso do expoente que tem a mesma lettra no dividendo sobre o que tem no divisor.* 3.° *Escrevem-se as lettras que só entram no dividendo, com os mesmos expoentes.*

21. Desta regra resulta que a divisão dos monomios não se póde effectuar : 1°, quando o coefficiente do dividendo não é multiplo do do divisor; 2°, quando o expoente de alguma lettra é maior no divisor que no dividendo; 3°, quando alguma lettra entra no divisor e não no dividendo.

Em qualquer destes casos, o quociente conserva a fórma de um monomio fraccionario, que, porém, muitas vezes se póde simplificar. Consiste a simplificação em supprimir todos os factores que forem communs ao numerador e denominador, o que não altera a fracção (arith. 48).

22. Segue-se da mesma regra que a lettra que tiver o mesmo expoente nos dous termos da divisão não apparecerá no quociente.

$$\text{Por exemplo } \frac{24a^3b^2}{8a^2b^2} = 3a$$

Mas este resultado póde tomar fórma tal, que conserve o vestigio da lettra b, que figurava na questão proposta, e desappareceu por occasião da divisão.

Com effeito, a regra dos expoentes, applicada *por convenção* á expressão $\frac{b^2}{b^2}$ a reduz a $b.^0$ Este novo symbolo b^0 indica que a lettra b *não é factor no quociente,* ou nelle não entra; mas tem a vantagem de conservar a lembrança de que na questão proposta figurava o numero b; e isto *sem alterar o resultado*. Porquanto, provindo b^0 da expressão $\frac{b^2}{b^2}$ que aliás é igual a 1, segue-se que $3\,ab^0=3a\times1=3a$.

Em geral, *toda a quantidade affectada do expoente* 0 *é equivalente á unidade*. Importa reflectir com madureza sobre a origem desta expressão; cumpre formar juizo claro e exacto dos symbolos empregados em algebra.

Divisão dos polynomios

23. Como os processos e raciocinios terão de conduzir-nos a dividir parcialmente um termo do dividendo por um do divisor, para não interromper a analyse por causa de distincções entre termos additivos e subtractivos, antecipemos *a regra dos signaes na divisão*.

Para isso lembremos (n. 15) que na multiplicação dos polynomios o producto de dous termos do mesmo signal é sempre additivo, e subtractivo o de dous termos de signaes contrarios. E, pois que o quociente multiplicado pelo divisor reproduz o dividendo, conclue-se que

1.° *Se ambos os termos da divisão têm o signal* $+$, *o quociente terá* $+$.

2.° *Se ambos têm o signal* $-$, *ainda o quociente tem* $+$.

3.° *Se o termo do dividendo tem* $+$, *o do divisor* $-$, *ou vice-versa, terá sempre o quociente* $-$. Diz-se tambem, por abreviação :

$+$ dividido por $+$, ou $-$ dividido por $-$, dá $+$;
$+$ dividido por $-$, ou $-$ dividido por $+$, dá $-$

24. Proponha-se agora dividir o polynomio
$26a^2b^2 + 10a^4 - 48a^3b + 24ab^3$ por $4ab - 5a^2 + 3b^2$.

Para facilitar o calculo, dispõe-se à semelhança da divisão arithmetica :

$$\begin{array}{r|l}
26a^2b^2 + 10a^4 - 48a^3b + 24ab^3 & 4ab - 5a^2 + 3b^2. \\ \cline{2-2}
+8a^3b - 10a^4 + 6a^2b^2 & -2a^2 + 8ab \text{ (quoc.)} \\ \cline{1-1}
(1^\circ \text{ r.}) \quad 32a^2b^2 - 40a^3b + 24ab^3 & \\
-32a^2b^2 + 40a^3b - 24ab^3 & \\ \cline{1-1}
(2^\circ \text{ r.}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 0 &
\end{array}$$

Da definição da divisão e da regra (n. 15) resulta que o dividendo é a *somma reduzida* de todos os productos parciaes de cada termo do divisor por cada termo do quociente. Mas, segundo a observação (n. 17), o termo do dividendo $+ 10a^4$, em que a lettra a tem o maior expoente, deve provir, *sem reducção*, do termo $-5a^2$, em que a mesma lettra tem o maior expoente no divisor, multiplicado pelo termo analogo do quociente. Este termo, pois, se achará dividindo $+ 10a^4$ por $-5a^2$ o que dá $-$ a^2.

Obtido um termo do quociente, é claro que, multiplicando-o pelo divisor, e subtrahindo do dividendo o producto (para o que se escrevem logo os termos delle com signaes contrarios aos que dá a multiplicação), o resto conterá o producto do divisor pela parte que falta do quociente. Podemos, pois, tratar aquelle resto $32a^2b^2 - 40a^3b + 24ab^3$ como um novo dividendo, e uma analyse semelhante á precedente conduzirá a dividir $-40a^3b$ por $5a^2$, termos do dividendo e do divisor em que a lettra a tem o maior expoente. O resultado desta divisão parcial $+8ab$ é o segundo termo do quociente, que será exactamente $-2a^2 + 8ab$, visto que não ficou segundo resto.

E, quando o houver, é claro que a esse 2º resto, ao 3º, 4º, etc., se applicará sempre o mesmo raciocinio que ao 1º.

Verifica-se o quociente achado, multiplicando-o pelo divisor, o que deve reproduzir o dividendo.

Sendo preciso, em cada divisão parcial, examinar qual o termo em que uma lettra tem o maior expoente, facilita-se este exame *escrevendo-se a priori os termos do dividendo e do divisor de modo que os expoentes de uma lettra vão diminuindo da esquerda para a direita*. Chama-se a isto *ordenal-os a respeito dessa lettra*. Ordenados o dividendo e o divisor, *o primeiro termo* de cada dividendo parcial é sempre o que cumpre dividir pelo primeiro do divisor. Do que fica dito se deduz a seguinte :

25. REGRA GERAL. *Ordenados o dividendo e o divisor a respeito de uma mesma lettra, divide-se o 1° termo do dividendo pelo 1° do divisor e obtem-se o 1° do quociente. Multiplica-se o termo achado pelo divisor, e subtrahe-se o producto do dividendo. Pratica-se com o resto o mesmo que com o dividendo e continuam-se as operações até chegar ao resto* 0. NO QUAL CASO, A DIVISÃO SE DIZ EXACTA.

Quando o 1° termo do dividendo ou de qualquer dos restos não fôr divisivel pelo 1° do divisor, a divisão total é impossivel, isto é, não ha polynomio inteiro que, multiplicado pelo divisor, reproduza o dividendo.

No exame desta divisibilidade do 1° termo de cada resto pelo 1° do divisor devem servir de guia as observações do n. 21.E, não se verificando o 1° ou 3° caso ali mencionados, procederá à seguinte regra :

Uma divisão de polynomios se acha esgotada, quando o expoente da lettra ordenadora é menor no resto do que no divisor.

26. *Observações.* Comquanto se dê toda a analogia entre a divisão algebrica e a arithmetica, já na disposição dos calculos, já nos fins da operação, ha comtudo entre uma e outra sensiveis differenças.

Na arithmetica os quocientes parciaes se acham por tentativas e carecem de verificação, emquanto na algebra a divisão do 1° termo de cada resto pelo 1° do divisor dá sempre exactamente um termo do quociente. No que é mais simples a divisão algebrica.

Nesta é indifferente começar da direita ou da esquerda, depois de ordenados os polynomios; porquanto os raciocinios e processos que applicamos ao mais alto expoente da lettra ordenadora são perfeitamente applicaveis ao menor delles (n. 17). A divisão arithmetica só póde começar da esquerda.

Demais, as divisões parciaes são tão independentes umas das outras, que, depois de achados um ou mais termos do quociente, póde-se ordenar os restos em relação a diversas lettras e continuar o processo.

Assim, no exemplo seguinte ordenamos os polynomios em relação a a para achar o 1º termo do quociente; a b para achar o 2º; e para o 3º outra vez em relação a a.

$$
\begin{array}{ll|l}
 & +10a^4-48a^3b+51a^2b^2+4ab^3-15b^4 & -5a^2+4ab+3b^2 \\
\cline{3-3}
 & -10a^4+8a^3b+6a^2b^2 & -2a^2-5b^2+8ab \\
\text{1º resto} & \qquad -40a^3b+57a^2b^2+4ab^3-15b^4 & \\
\cline{2-2}
\text{ou} & -15b^4+4ab^3+57a^2b^2-40a^3b & 3b^2+4ab-5a^2 \\
\cline{3-3}
 & +15b^4+20ab^3-25a^2b^2 & -5b^2 \\
\text{2º rosto} & \qquad +24ab^3+32a^2b^2-40a^3b & \\
\cline{2-2}
\text{ou} & -40a^3b+32a^2b^2+24ab^3 & -5a^2+4ab+3b^2 \\
\cline{3-3}
 & +40a^3b+32a^2b^2+24ab^3 & +8ab \\
\text{3º resto} & \ldots\ldots\ldots\ldots\ 0 & \\
\end{array}
$$

27. Póde succeder que um dos polynomios ou ambos contenham mais de um termo, em que a lettra escolhida para elles se ordenarem tenha o mesmo expoente. Nesse caso, cumpre tratar como um só termo a totalidade dos que contiverem a mesma potencia da lettra, e na divisão attender a estes termos compostos, pela maneira que se passa a expôr. Seja por exemplo o divisor $5a^2 + 3ab - 5bc$, e o dividendo $11a^2b - 19abc + 10a^3 - 15a^2c + 3ab^2 + 15bc^2 - 5b^2c$ que ordenado se póde reduzir a esta fórma (n. 19)

$$10a^3 + (11b - 15c)\,a^2 + (3b^2 - 19bc)\,a + 15bc^2 - 5b^2c.$$

Tambem se usa da seguinte indicação :

$$10a^3 + \left.\begin{matrix} 11b \\ -15c \end{matrix}\right)\, a^2 + \left.\begin{matrix} 3b^2 \\ -19bc \end{matrix}\right)\, a + 15bc^2 - 5b^2c.$$

Se representassemos por uma lettra cada grupo de quantidades que multiplicam cada potencia de a, isto é, suppondo $11b - 15c = m$, e $3b^2 - 19bc = n$, o dividendo se tornaria em $10a^3 + ma^2 + na + 15bc^2 - 5b^2c$, cuja divisão facilmente seguiria a regra (n.25). Quando, porém, se tratar da divisão do termo ma^2, cumprirá notar que m representa um polynomio, a cuja divisão parcial se deve applicar a mesma regra (25).

O processo, pois, será como se segue :

$$\begin{array}{llllll}
 & +10a^3 + \left.\begin{matrix} 11b \\ -15c \end{matrix}\right) & a^2 + \left.\begin{matrix} 3b^2 \\ -19bc \end{matrix}\right) & a - 5b^2c + 15bc^2 & \Big| & \dfrac{5a^2 + 3ab - 5bc}{2a + b - 3c} \\
 & -10a^3 - 6b. & a^2 + 10bc. & a & & \\
\hline
1^{\circ}\text{ resto } 0 & + \left.\begin{matrix} 5b \\ -15c \end{matrix}\right) & a^2 + \left.\begin{matrix} 3b^2 \\ -9bc \end{matrix}\right) & a - 5b^2c + 15bc^2 & & \\
 & -5b. & a^2 - 3b^2. & a + 5b^2c & & \\
\hline
2^{\circ}\text{ resto} & -15c. & a^2 - 9bc.a + 0 + 15bc^2 & & & \\
 & +15c. & a^2 + 9bc.a \quad -15bc^2 & & & \\
\hline
4^{\circ}\text{ resto} & \ldots\ldots & \ldots\ldots & 0 & & \\
\end{array}$$

Na divisão do 1° resto, tendo de dividir o 1° termo $(5b - 15c)\,a^2$ por $5a^2$, o quociente será

$$\frac{(5b - 15c)\;a^2}{5a^2} = \frac{5b - 15c}{5} = b - 3c$$

$$\text{Divisão parcial } 5b - 15c \;\left|\; \begin{array}{l} 5 \\ \hline b - 3c \end{array}\right.$$

Effectuamos, pois, em separado esta ultima divisão, e o resultado $b - 3c$ se deve ajuntar a $2a$, para formar o quociente pedido.

Basta este exemplo para conhecer como se deve proceder nos mais casos semelhantes.

28. Outro caso notavel da divisão dos polynomios é aquelle *em que o dividendo contém diversas potencias de alguma lettra que não entra no divisor*. Neste caso, ordenado o dividendo em relação a essa lettra, *a divisão só poderá ser exacta, se cada termo do dividendo fôr separadamente divisivel por todo o divisor*. Este theorema, que depois nos será util, póde ser demonstrado pela maneira seguinte:

Seja o dividendo $Ma^4 + Na^3 + Pa^2 + Qa + R$, e o divisor S, sendo M, N, P, Q, R, S monomios ou polynomios, nos quaes não entra a. Pois que o divisor S não contém a lettra a, o quociente a conterá *com os mesmos expoentes que tem no dividendo*, pois só assim multiplicando o quociente pelo divisor se reproduzirá o dividendo. Será, pois, o quociente da fórma $ma^4 + na^3 +$

pa^2+qa+r, sendo m, n, p, q, r monomios ou polynomios, tambem independentes de a.

Ora, multiplicado este quociente pelo divisor S, deve ser o producto $Sma^4+Sna^3+Spa^2+Sqa+Sr=Ma^4+Na^3+Pa^2+Qa+R$.

E como entre os termos que contém diversas potencias de a não póde haver reducção, segue-se que, para poder ter logar esta ultima igualdade, é necessario que seja

$$\left.\begin{array}{l} Sma^4=Ma^4 \\ Sna^3=Na^3 \\ Spa^2=Pa^2 \end{array}\right\} \text{do que se segue} \left\{\begin{array}{l} ma^4=\dfrac{Ma^4}{S} \\ na^3=\dfrac{Na^3}{S} \\ pa^2=\dfrac{Pa^2}{S} \end{array}\right.$$

e assim por diante. O que demonstra o nosso theorema, a saber :

Ordenado um polynomio a respeito de uma lettra, para que seja divisivel por outro polynomio INDEPENDENTE *dessa lettra, é necessario que a parte affecta de cada uma das potencias da mesma lettra seja separadamente divisivel pelo mesmo divisor.*

Sirva de exemplo o polynomio

$$3a^3b+2a^2b^2-4abc^2-6a^3c-4a^2bc+8ac^3$$

que se trata de dividir por $b-2c$.

Posto o dividendo debaixo da fórma

$$(3b-6c)\,a^3+(2b^2-4bc)\,a^2+(8c^3-4bc^2)\,a$$

para dividil-o por $b-2c$, cumpre effectuar parcialmente as seguintes divisões :

$$1^a \ldots \frac{(3b-6c)a^3}{b-2c}=3a^3;\ 2^a \ldots \frac{(2b^2-4bc)a^2}{b-2c}=2ba^2;$$

$$3^a \ldots \frac{(8c^3-4bc^2)a}{b-2c}=-4ac^2$$

Logo, o quociente total será $3a^3+2a^2b-4ac^2$, o que facilmente se verifica.

29. Entre os exemplos de divisão algebrica, nota-se que as expressões desta fórma

$$a^2-b^2,\ a^3-b^3,\ a^4-b^4,\ a^5-b^5, \ldots\ a^m-b^m$$

são todas divisiveis por $a-b$, isto é, *a differença entre potencias do mesmo grão de duas quantidades é sempre divisivel pela differença entre as mesmas quantidades.*

O *facto algebrico* é facil de verificar em cada caso particular. Trataremos comtudo de estabelecer o principio em geral, porque isto offerecerá exemplo de uma especie de raciocinio muitas vezes empregado em algebra.

Procedamos, segundo a regra, á divisão de a^m-b^m por $a-b$.

$$\begin{array}{r|l} +a^m-b^m & a-b \\ \hline -a^m+a^{m-1}b & a^{m-1} \\ \hline 1^o \text{ resto } a^{m-1}-b^m & \\ \text{ou } (a^{m-1}-b^{m-1})\,b. & \end{array}$$

Se o resto fôr divisivel por $a-b$, ou se o fôr a quantidade de $a^{m-1}-b^{m-1}$, tambem o será a^m-b^m.

Logo em geral:

Se a differença entre duas potencias de um certo grão ($^{m-b}$) *de* a *e* b *fôr divisivel por* a — b, *tambem o será a differença entre as potencias do grão* (m) *immediatamente superior.*

Portanto, sendo $\dfrac{a^2-b^2}{a-b}=a+b$, segue-se que a^3-b^3

é tambem divisivel por $a-b$.

Sendo-o a^3-b^3, tambem o é a^4-b^4, e assim por diante.

Um raciocinio semelhante muitas vezes facilita em algebra a descoberta de certas leis ou fórmulas geraes.

30. Terminamos os preceitos da divisão algebrica addicionando aos caracteres de uma divisão impossivel (ns. 21 e 25) as seguintes proposições, que facilmente se deduzem dos principios estabelecidos.

1.° *Um monomio nunca póde ser divisivel por um polynomio.*

2.° *Um polynomio só póde ser divisivel por um monomio, quando este dividir exactamente cada um dos termos do dividendo.*

3.° *Nenhuma divisão é exacta, quando o divisor contém alguma lettra que não exista no dividendo.*

4.° *Um polynomio não é divisivel por outro polynomio, se os termos do dividendo e do divisor, em que* *entra uma mesma lettra com o maior ou o menor expoente, não fôrem divisiveis um pelo outro.*

Esta ultima observação é util na pratica, para evitar tentativas inuteis; e convém verifical-a separadamente em relação a cada uma das lettras de que se compõem o dividendo e o divisor.

5º *Quando o primeiro termo do dividendo e o ultimo forem respectivamente divisiveis pelo primeiro e pelo ultimo do divisor, acontecendo porém, que durante o curso da divisão se venha a encontrar para o quociente um termo do mesmo gráo na lettra ordinotriz, que o quociente do ultimo do dividendo pelo ultimo do divisor sem lhe ser identico, a divisão não se fará exactamente;* porquanto, se fosse inteiro, o quociente conteria um termo que era o quociente do ultimo do dividendo pelo ultimo do divisor e, como admittimos a existencia de outro com o mesmo gráo que este, existiriam no quociente dous termos do mesmo gráo, o que não é possivel porquanto o dividendo e o divisor contém, cada um, um só termo de cada gráo.

6º *Quando na hypothese precedente apparece no quociente um termo identico ao quociente do ultimo termo do dividendo pelo ultimo do divisor, sem que o resto seja nullo, a divisão não se fará exactamente,* pelo motivo antes exposto.

DIVISIBILIDADE DE UM POLYNOMIO INTEIRO EM x POR UM BINOMIO DA FORMA $x - a$

Seja P_x um polynomio inteiro e ordenado segundo as potencias decrescentes de x e cujas condições de divisibilidade por $x - a$ se trata de verificar.

Sendo o divisor $x - a$ do primeiro gráo em x, é claro que o resto da divisão, se não fôr nullo, não conterá x : chamemos R esse resto, teremos

$$P_x = (x - a)\ Q + R \qquad (I)$$

Sendo Q o quociente da divisão; porque o dividendo P_x é sempre igual ao producto do divisor pelo quociente e mais o resto, e portanto a igualdade (I) subsistirá para qualquer valor de x; póde-se pois substituir x por a e tem-se assim :

$$P_a = (a - a)\ Q + R$$
$$\text{ou } P_a = R$$

o que importa dizer que o resto R é o resultado que se obtem substituindo a em logar de x no polynomio P_x; d'onde se conclue que *quando o resultado de tal substituição fôr nullo o resto R da divisão tambem será nullo e portanto a divisão de* P *por* x—a *se fará exactamente,* e tambem que, *quando o resultado de tal substituição não fôr nullo, a divisão não será exacta.*

O que fica dito póde resumir-se na seguinte proposição :

Para que um polynomio inteiro em x *seja exactamente divisivel por* x—a *é necessario e basta que nelle collocando-se a em lugar de* x *o seu valor se annulle.*

Vê-se agora que para determinar o resto da divisão de um polynomio inteiro em x por $x-a$ basta fazer a substituição de que acabamos de fallar: seja v. g. para determinar o resto da divisão de

$$2x^4-7x^3+10x^2-13x+13 \quad \text{por } x-2$$

feita no primeiro polynomio a substituição de x por 2, temos

$$2.2^4-7.2^3+10.2^2-13.2+13=32-56+40-26+13=3$$

será pois o resto 3.

Para determinar qual o modo ou lei de formação do quociente, passamos a executar a divisão e, analysando o resultado d'ella, chegaremos a tal conhecimento.

Seja o polynomio

$$P_x = Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + Dx^{m-3} + \dots M$$

O quociente da divisão deste polynomio por $x-a$ será do grão $m-1$ em x, terá m termos e o resto será independente de x. Effectuando a divisão teremos.

$$
\begin{array}{rr|rr|rr|rr|rr|rr|l|l|l|l}
Ax^m & +\ B & x^{m-1} + & C & x^{m-2} + & D & x^{m-3} + \dots & L & x\ + & M & x - a & & & \\
\cline{11-14}
-Ax^m & +\ Aa & & +\ Aa^2 & & +\ Aa^3 & \dots\ + & Aa^{m-1} & + & Aa^m & Ax^{m-1} + Aa & x^{m-2} + Aa^2 & x^{m-3} + Aa^3 & x^{m-4} + \dots Aa^{m-1} \\
\cline{1-2}
 & & & +\ Ba & & +\ Ba^2 & \dots\ + & Ba^{m-2} & + & Ba^{m-1} & +B & +Ba^2 & +Ba & \dots + \dots Ba^{m-2} \\
0 & -\ Aa & & & & +\ Ca & \dots\ + & Ca^{m-3} & + & Ca^{m-2} & & +C & +Ca & \dots + \dots Ca^{m-3} \\
 & -\ B & & -\ Aa^2 & & & \dots\ + & Da^{m-4} & + & Da^{m-3} & & & +D & \dots + \dots Da^{m-4} \\
 & 0 & & -\ Ba & & -\ Aa^3 & \dots & - & & - & & & & - \\
 & & & -\ C & & -\ Ba^2 & \dots\ + & - & + & - & & & & \dots\ \ - \\
 & & & 0 & & -\ Ca & & - & & - & & & & - \\
 & & & & & -\ D & & - & & - & & & & \dots\ \ - \\
 & & & & & 0 & \dots\ + & Ka & & & & & & - \\
 & & & & & & & & & & & & & \dots + \ - \\
 & & & & & & \dots\ - & Aa^{m-1} & + & La & & & & \dots + \ L \\
 & & & & & & - & Ba^{m-2} & & & & & & \\
 & & & & & & - & Ca^{m-} & & & & & & \\
 & & & & & & - & Da^{m-4} & & & & & & \\
 & & & & & & & - & & & & & & \\
 & & & & & & & - & & & & & & \\
 & & & & & & & - & & & & & & \\
 & & & & & & & - & & & & & & \\
 & & & & & & - & - & & & & & & \\
 & & & & & & - & L & & & & & & \\
 & & & & & & & 0 & & & & & &
\end{array}
$$

Assim o resto, isto é, o polynomio

$$A\,a^m + B\,a^{m-1} + C\,a^{m-2} + D\,a^{m-3} + \ldots.\,L\,a + M$$

é que o se obteria pondo a em logar de x no polynomio P_x.

Quanto á formação do quociente, é facil reconhecer, que *cada potencia de x tem seu coefficiente formado do coefficiente do termo precedente, multiplicado, por a. mais o coefficiente do termo que no dividendo é da mesma ordem que tem no quociente aquelle que se quer formar :* v. g. o quarto termo do quociente, por ser o quociente do gráo m — 1, será formado de x^{m-4}, tendo para coefficiente o do terceiro termo, isto é, $A\,a^2 + B\,a + C$, multiplicado por a, mais o coefficiente D do quarto termo do dividendo; será portanto

$$(A\,a^3 + B\,a^2 + C\,a + D)\,x^{m-4}$$

O que acabamos de vêr acerca da divisibilidade dos polynomios inteiros será para diante de grande alcance; as applicações seguintes são frequentes e de grande importancia.

1ª — $(x^m - a^m)$ *é sempre divisel* por $x - a$: pois substituindo x por a no dividendo

$$x^m - a^m = a^m - a^m = 0.$$

Effectuando a divisão vem

$$\frac{x^m - a^m}{x - a} = x^{m-1} + a x^{m-2} + a^2 x^{m-3} + \ldots.. a^{m-2} x + a^{m-1}$$

2ª — $(x^m + a^m)$ *não póde ser exactamente divisel por* $x - a$: pois substituindo x por a no dividendo elle não se annulla, mas tem-se

$$x^m + a^m = a^m + a^m = 2\,a^m$$

isto é, o resto da divisão é $2\,a^m$.

Effectuando a divisão teremos:

$$\frac{x^m + a^m}{x - a} = x^{m-1} + a x^{m-2} + a^2 x^{m-3} + a^3 x^{m-4} \ldots.\, a^{m-1}$$

$$\text{mais o resto } + \frac{2\,a^m}{x - a}$$

3ª — $(x^m - a^m)$ *é divisel por* $(x + a)$ *sómente quando* m *é um numero par :* porquanto, dando ao divisor actual a fórma do que fez objecto do theorema geral, isto é, fazendo $a = -a$ teremos que o novo divisor deverá ser $x - (-a)$ e portanto deveremos substituir em logar de x no dividendo $(-a)$ e teremos

$$x^m - a^m = (-a)^m - a^m$$

expressão cujo segundo membro só será nullo quando m fôr par pois só então teremos

$$(-a)^m - a^m = a^m - a^m = 0$$

Effectuando a divisão temos, sendo m par,

$$\frac{x \;\; - a^m}{x + a} = x^{m-1} - a\,x^{m-2} + a^2\,x^{m-3} \ldots. - a^{m-2}\,x + a^{m-1}$$

sendo m impar,

$$\frac{x^m - a^m}{x + a} = x^{m-1} - ax^{m-2} + a^2 x^{m-3} - \ldots a^{m-2} x + a^{m-1}$$

$$\text{mais o resto } \frac{2\,a^m}{x + a}$$

Quando um polynomio annulla-se pela substituição de x por qualquer dos valores differentes a, b, c, ..., é divisivel pelo producto.

$$(x - a)\ (x - b)\ (x - c)\ \ldots.$$

Seja P_x um polynomio inteiro em x; pois que elle annulla-se pela substituição de x por a, b. c, .., será separadamente divisivel por $(x - a)$, $(x - b)$, $(x - c)$ ...., ponhamos pois

$$P_x = (x - a)\ Q, \qquad \text{(I)}$$

sendo Q um polynomio inteiro em x; mas, por hypothese, tem-se, substituindo em (P_x) x por b

$$P_b = 0 \text{ ou } 0 = (x - b)\ Q_b$$

e como $x - b$ é differente de 0, vem

$$Q_b = o,$$

isto é, se no polynomio Q se põe b em lugar de x elle annulla-se, portanto, tem-se

$$Q = (x - b)\ Q' \qquad \text{(II)}$$

sendo Q' um polynomio inteiro em x: raciocinando sobre Q' e c, como fizemos sobre Q e b, teremos

$$Q' = (x - c)\ Q'' \qquad \text{(III)}$$

Multiplicando membro a membro as igualdades (I) (II) (III) teremos

$$P_x \times Q \times Q' = (x - a)(x - b)(x - c) \times Q \times Q' \times Q''; \quad \text{(IV)}$$

dividindo ambos os membros d'esta por $Q \times Q'$ temos

$$P_x = (x - a)\ (x - b)\ (x - c)\ Q'',$$

que se queria demonstrar.

Reciprocamente conclue-se que, *se um polynomio inteiro em x é divisivel por muitos factores binomios do primeiro gráo e differentes entre si, elle é tambem divisivel por cada um d'esses factores.*

Se se tem $(x^m - a^m)$ para dividir por $(x^n - a^n)$, para que a divisão se faça exactamente é necessario que m seja um multiplo de n, isto é, que se tenha $m = k\ n$, sendo k um numero inteiro: com effeito, tentemos a divisão, virá,

$$\frac{x^m - a^m}{x^n - a^n} = x^{m-n} + a^n x^{m-2n} + a^{2n} x^{m-3n} + \ldots + a^{m-n} + \ldots$$

de onde se vê, que o expoente de x em qualquer termo do quociente é sempre o do precedente menos n e, portanto que, para que o expoente de x venha a ser 0 é necessario que m seja um multiplo de n; por quanto, se assim não fosse, teriamos $m = k\,n + r$, sendo r menor do que n e, por tanto, o resto da ordem k conteria x com o expoente r, o que importaria impossibilidade de proseguir na divisão.

A condição é bastante porque se póde pôr $x^m = x^{kn}$, $a^m = a^{kn}$ e fazendo $a^n = b$, $x^n = x'$ teriamos $x^m - a^m = x'^k - b^k$ e $x^n - a^n = x' - b$, reduzindo-se assim a questão a saber se

$$x'^k - b^k \text{ é ou não divisivel por } x' - b$$

o que é evidente, segundo já vimos.

De modo analogo concluiriamos para os outros casos que foram expostos, e isso será um bom exercicio para os estudantes.

Fracções algebricas; maior divisor commum

31. Chamam-se *fracções algebricas* as expressões como

$$\frac{3a}{2b},\ \frac{a}{b+c},\ \frac{a^2-b^2}{2a+b}, \text{ etc.}$$

que indicam a divisão de quantidades algebricas, seja ou não o quociente exacto ou de fórma inteira.

As fracções algebricas devem ser tomadas na mesma accepção que as numericas, ou arithmeticas. O denominador exprime o numero de partes em que se suppõe a unidade dividida, e o numerador quantas della constituem o valor representado pela fracção; podendo aliás os dous termos serem numeros, monomios ou polynomios.

Assim são applicaveis ás fracções algebricas as regras expostas na arithmetica para *addição, subtracção, multiplicação, divisão* das fracções, e para as diversas transformações que sobre ellas se podem propôr; devendo-se, porém, nos calculos a fazer sobre os numeradores, ou denominadores, seguir os processos especiaes estabelecidos para as expressões algebricas inteiras, monomios ou polynomios.

Dispensamo-nos, pois, de repetir aquellas regras, em que todavia os principiantes devem exercitar-se; da facilidade com que se executa o calculo algebrico muito depende o progresso dos conhecimentos neste ramo de estudos mathematicos.

A denominação de *fracção* que se attribue a taes expressões é absolutamente impropria: essa denominação só póde caber convenientemente á expressão arithmetica de uma quantidade menor do que a unidade; como, porém, a passagem do symbolo numerico, e portanto, particular, para o symbolo algebrico, de maior generalidade, faz-se conservando o mesmo modo de escrever, ella tem tambem sido conservada pelos professores. Convém notar que na passagem do symbolo arithmetico para o algebrico ha unicamente augmento de generalidade, sem que aquelle soffra qualquer restricção em qualquer de suas propriedades primitivas: d'ahi pode-se fazer extensão das operações, ou expressões que dellas têm a fórma, ás algebricas da mesma fórma.

32. Sómente trataremos mais de espaço da doutrina da simplificação das fracções, por causa de circumstancias especiaes que neste ponto offerece o calculo algebrico, e que podem causar embaraços.

Emquanto são monomios os termos da fracção, ou ao menos um delles, facil é reconhecer os factores communs ao numerador e denominador e, omittindo-os, effectuar a simplificação da fracção. Assim

$$\frac{12a^3bc^3}{18a^4bc^2}=\frac{2c}{3a}$$

$$\frac{7a^2bc}{35a^2b^2c} = \frac{1}{5b}$$

$$\frac{8a^2b}{16a^3b^2 - 12a^2b^3 + 4ab^4} = \frac{2a}{4a^2b - 3a^2b + b^3}$$

$$\frac{5a^2 - 10ab + 5a}{5a} = a - 2b + 1$$

em todos estes casos o divisor commum só póde ser monomio; e para reconhecel-o nos dous ultimos exemplos serve de guia a observação (n. 30, e 1º e 2º).

33. Em algumas fracções algebricas se descobrem divisores polynomios communs aos dous termos com o auxilio dos principios estabelecidos (ns. 18, 19 e 20). Por exemplo:

$$\frac{a^2 - b^2}{a^2 - 2ab + b^2} = \frac{(a+b)(a-b)}{(a-b)^2} = \frac{a+b}{a-b}$$

$$\frac{a^2 - 4b^2}{2a + 4b} = \frac{(a+2b)(a-2b)}{2(a+2b)} = \frac{a-2b}{2}$$

$$\frac{5a^3 - 10a^2b + 5ab^2}{8a^3 - 8a^2b} = \frac{5a(a^2 - 2ab + b^2)}{8a^2(a-b)} =$$

$$= \frac{5a(a-b)^2}{8a^2(a-b)} = \frac{5(a-b)}{8a}$$

Fóra destes casos, e sendo polynomios os dous termos da fracção, são só os divisores communs monomios os que se podem reconhecer immediatamente, porque devem dividir em separado cada termo do numerador e do denominador.

Para descobrir o maior divisor polynomio commum a dous polynomios, cumpre recorrer ao processo exposto (arith. 56). Comtudo a applicação algebrica deste processo dependendo de attenções especiaes e, offerecendo alguns embaraços não conhecidos na arithmetica, exige uma nova exposição da theoria.

Maior divisor commum

34. Chamamos *quantidade inteira* a expressão algebrica que não contém denominador algum.

Quantidade *prima*, em algebra, é aquella que não é divisivel exactamente senão por si ou pela unidade. De sorte que, dividindo-a por outra qualquer, não póde o quociente ter a fórma inteira.

E' neste sentido que empregarémos as expressões *polynomio inteiro*, *divisor primo* e outras semelhantes.

São evidentemente as mesmas noções dos numeros applicadas aos novos symbolos genericos.

Dos principios da divisibilidade dos numeros, demonstrados na arithmetica, e especialmente do n. 113, 3°, se conclue, que o maior divisor commum a dous numeros é o producto de todos os divisores primos communs aos ditos numeros.

Actualmente, representadas as quantidades por symbolos genericos, e não se podendo avaliar numericamente *a maior* e *a menor*, cumpre definir o que se chama *maior divisor commum algebrico*.

Dá-se este nome ao producto *de todos os factores primos communs a duas quantidades, sejam estes factores numeros, monomios ou polynomios.*

A determinação do maior divisor commum a dous polynomios depende dos seguintes principios, que são consequencia de propriedades demonstradas na arithmetica, e das noções que acabamos de estabelecer.

35. Primeiro principio. *O maior divisor commum a duas quantidades inteiras não se altera, multiplicando ou dividindo uma dellas por qualquer quantidade inteira, comtanto que esta não tenha divisor commum com a outra.*

Com effeito, esta operação em nada altera os factores primos communs ás duas quantidades; não omittimos algum delles, nem outro de novo se introduz. Logo o producto de todos esses factores primos ou o maior divisor commum não soffre alteração.

Segundo principio. *O maior divisor commum entre dous polynomios é o mesmo que entre o menor e o resto que fica da divisão do maior pelo menor.*

(Maior e menor em relação aos expoentes da mesma lettra.)

Sejam A, B os dous polynomios, Q o quociente, R o resto da divisão de A por B, e D o seu maior divisor commum. Será

$$A=BQ+R, \text{ ou } A-BQ=R$$

d'onde se segue que D, sendo divisor de A e de B, divide a $A—BQ$, e portanto a R. O que demonstra a proposição.

36. Podemos actualmente desenvolver o processo do maior divisor commum algebrico, e sejam os dous polynomios

1° . . $48a^2b^3x^6—120a^3b^3x^5+12a^4b^3x^4—12a^6b^3x^2$

2° . . $48a^3bx^7—88a^4bx^6—64a^5bx^5—8a^6bx^4$

Comecemos por notar que o 1° polynomio é divisivel por $12a^2b^3x^2$, e o 2° por $8a^3bx^4$, e, tendo estes dous monomios o factor commum $4a^2bx^2$, será este um divisor commum aos dous polynomios; pôl-o-hemos de parte para multiplicar pelo divisor commum o polynomio que obtivermos.

Dividindo, pois, o 1° polynomio por $12a^2b^3x^2$, e o 2° por $8a^3bx^4$, os dous quocientes sómente conterão os factores communs polynomios; estes quocientes são

1° . . $4x^4—10ax^3+a^2x^2—a^4$

2° . . $6x^3—11ax^2—8a^2x—a^3$

os quaes não têm divisor commum monomio.

Resta achar o maior divisor polynomio commum aos dous ultimos, e é claro que, se o 1° fôr divisivel pelo segundo, será este o polynomio pedido.

Não sendo o 1° termo $4x^4$ divisivel por $6x^3$, póde-se illudir esta difficuldade, multiplicando o 1° polynomio por 3, que não é factor do 2° (1° principio); feito o que, e dividindo um pelo outro, achamos o quociente

$2x—4a$, e o resto $13a^2x^2—26a^3x—13a^4$

Na segunda divisão parcial se faz tambem preciso multiplicar o dividendo por 3.

Isto posto, pelo segundo principio ficamos reduzidos a procurar o maior divisor commum a

$$6x^3-11ax^2-8a^2x-a^3, \text{ e } 13a^2x^2-26a^3x-13a^4$$

ou em logar do ultimo

$$x^2-2ax-a^2$$

dividindo-o por $13a^2$ que não é factor do 1° polynomio.

O mesmo raciocinio nos conduz a dividir um pelo outro os dous ultimos polynomios, e, sendo a divisão exacta, concluimos que $x^2-2ax-a^2$ é o maior divisor commum polynomio entre as quantidades propostas.

E, multiplicando-o pelo factor commum monomio $4a^2bx^2$, resulta o maior divisor commum pedido; a saber:

$$4a^2bx^4-8a^3bx^3-4a^4bx^2$$

Eis a disposição dos calculos:

Primeira divisão

$$\begin{array}{rl|l}
 & 4x^4-10ax^3+a^2x^2-a^4 & 6x^3-11ax^2-8a^2x-3a \\ \cline{3-3}
\text{Multipl. por } 3 = & 12x^4-30ax^3+3a^2x^2-3a^4 & 2x-4a \\
 & -12x^4+22ax^3+16a^2x^2+2a^3x & \\ \cline{2-2}
\text{1° resto} & 0 \quad -8ax^3+19a^2x^2+2a^3x-3a^4 & \\
\text{Multipl. por } 3 = & -24ax^3+57a^2x^2+6a^3x-9a^4 & \\
 & +24ax^3-44a^2x^2-32a^3x-4a^4 & \\ \cline{2-2}
\text{2° resto} & 0 \quad +13a^2x^2-26a^3x-13a^4 & \\
\text{Simplificando} & x^2-2ax-a^2 &
\end{array}$$

Segunda divisão

$$\begin{array}{rrrr|l}
6x^3 & -11ax^2 & -8a^2x & -a^3 & x^2-2ax-a^3 \\ \cline{5-5}
-6x^3 & +12ax^2 & +6a^2x & & 6x+a \\ \cline{1-4}
0 & +\quad ax^2 & -2a^2x & -a^3 & \\
 & -\quad ax^2 & +2a^2x & +a^3 & \\ \cline{2-4}
 & & & 0 &
\end{array}$$

Se a segunda divisão não fosse exacta, a mesma analyse conduziria a dividir o 1° resto pelo 2°, e assim por diante. Quando apparece um resto 0, o ultimo divisor é evidentemente o maior divisor commum pedido.

Se no decurso dos calculos chegar a desapparecer de um resto a lettra ordenadora, e se por este resto não fôr divisivel o precedente na fórma do n. 28, os dous polynomios são primos entre si. Observação analoga á do n. 57 na arithmetica.

37. Da analyse exposta se deduz a seguinte

Regra geral. *Examina-se se algum monomio é divisor commum de ambos os polynomios, e por elle se os dividem.*

Applica-se aos polynomios resultantes a regra do maior divisor commum numerico.

Em cada divisão parcial começa-se sempre por dividir cada polynomio por qualquer divisor monomio que não o seja do outro polynomio.

Quando o 1° termo do dividendo não é divisivel pelo 1° do divisor, multiplica-se o dividendo pelo *factor que fôr necessario, comtanto que não seja tambem factor do divisor,*

Obtida uma divisão exacta, o ultimo divisor multiplicado pelo divisor commum monomio supprimido no começo da operação é o MAIOR DIVISOR COMMUM PEDIDO.

Para exercicio proporemos, como segundo exemplo, os polynomios

$$x^4 - ax^3 - a^2x^2 - a^3x - 2a^4$$
$$3x^3 - 7ax^2 + 3a^2x - 2a^3$$

cujo maior divisor cummum é $x - 2a$, obtido á terceira divisão.

Se algum dos polynomios está no caso do n. 27, cumpre fazer a divisão pela maneira ali prescripta; mas então, não sendo monomios os coefficientes das diversas potencias da lettra ordenadora, cumpre supprimir, não só os factores monomios, mas ainda polynomios, communs a todos os coefficientes, e independentes da lettra. Não trataremos de discutir este caso, que na pratica, algumas vezes offerece embaraços, porque, não tendo applicações o maior divisor commum algebrico antes da theoria geral das equações, entendemos bastante, incluir nesta compilação a parte mais elementar da doutrina. O complemento della caberá melhor em outra parte do curso, depois de adquiridas mais extensas noções da natureza e propriedade dos polynomios.

Como complemento do presente capitulo aqui apresantamos rapida exposição das operações e propriedades das fracções algebricas, e o fazemos para bem esclarecer o estudante sobre o caracter mais geral que taes symbolos adquirem em algebra.

Reducção das fracções ao mesmo denominador

Para reduzir ao mesmo denominador duas ou mais fracções dadas, póde-se proceder segundo a regra geral demonstrada em arithmetica, isto é, multiplicando ambos os termos de cada fracção pelo producto dos denominadores de todas as outras, ou procurando uma expressão que seja multiplo commum a todos os denominadores, dividindo-a por cada um delles e multiplicando ambos os termos de cada fracção pelo respectivo quociente; ficando assim todas ellas com o mesmo denominador, que é o mencionado multiplo. Neste ultimo caso, a menos que se não encontre promptamente um multiplo commum sufficientemente simples, convém determinar o menor multiplo commum a todos os denominadores : isto se consegue decompondo cada um dos denominadores em seus factores primos (*) e formando um producto em que entre cada um desses factores com o maior expoente com que se o encontrar,

Convém ainda notar que, quasi sempre, será de maior vantagem reduzir cada fracção a termos primos entre si, não só porque as fracções finaes serão de termos tão simples quanto possivel, como porque a determinação do menor multiplo commum se fará com muito maior promptidão, e assim tambem todas as outras operações.

Seja v. g., para reduzir ao mesmo denominador as fracções

$$\frac{1}{5\,a^2x}\;;\;\frac{5\,b}{12\,a^3x^3y}\;;\;\frac{2\,c}{3\,a^6x^5}\;;\;\frac{9\,bc}{10\,a^2x^3y^2}$$

que já estão reduzidas á sua mais simples expressão. Os denominadores podem-se escrever.

$$5\,a^2x\;;\;2^2.3\,a^3x^3y\;;\;3\,a^6x^5\;;\;2.5\,a^2x^3y^2$$

de onde se vê claramente que o menor multiplo commum a todos elles será

$$5.2^2.\,3a^6x^5y^2 = 60\,a^6x^5y^2$$

Para obter o quociente deste m. m. c. por cada um dos denominadores, basta suprimir delle os factores que forem communs a elle e

---

(*) Uma expressão algebrica é prima quando não tem outro divisor além d'ella mesma e da unidade. Duas expressões se dizem primas entre si quando só tem por divisor commum a unidade.

ao denominador considerado : assim teremos, respectivamente, dividindo o menor multiplo commum por cada denominador

$$2^2.3a^4x^4y^2 ;\ \ 5\,a^3x^2y ;\ \ 5.2^2y^2 ;\ \ 2.3\,a^4x^2$$

multiplicando ambos os termos de cada fracção pelo respectivo quociente teremos

$$\frac{12\,a^4x^4y^2}{60\,a^6x^5y^2} ;\ \frac{25\,a^3bx^2y}{60\,a^6x^5y^2} ;\ \frac{40\,cy^2}{60\,a^6x^5y^2} ;\ \frac{54\,a^4bcx^2}{60\,a^6x^5y^2}$$

fracções estas que, tendo todas o mesmo denominador, são respectivamente iguaes ás primeiras.

Addição e subtracção das fracções.

Para effectuar addições ou subtracções indicadas entre fracções, basta reduzil-as ao mesmo denominador e, escrevendo em seguida uns aos outros todos os novos numeradores com o signal da respectiva fracção, dar para denominador á expressão assim formada o denominador commum,

Com effeito seja a expressão

$$\frac{a}{m} - \frac{b}{n} + \frac{c}{p}$$

reduzindo as tres fracções ao mesmo denominador vem

$$\frac{a.n\,p}{m\,n\,p} - \frac{b.m\,p}{m.n.p} + \frac{c.m\,n}{m.n.p} ;$$

como se tem

$$\frac{a\,n\,p}{m\,n\,p} \times m\,n\,p = a\,n\,p ;\ \ \frac{b\,m\,p}{m\,n\,p} \times m\,n\,p = b\,m\,p ;$$

$$\frac{c\,m\,n}{m\,n\,p} \times m\,n\,p = c\,m\,n$$

tem-se tambem

$$\left(\frac{a.n\,p}{m\,n\,p} - \frac{b.m\,p}{m\,n\,p} + \frac{c.m\,n}{m\,n\,p}\right) m\,n\,p = a\,n\,p - b\,m\,p + c\,m\,n$$

e, portanto,

$$\frac{a\,n\,p}{m\,n\,p} - \frac{b\,m\,p}{m\,n\,p} + \frac{c\,m\,n}{m\,n\,p} = \frac{a\,n\,p - b\,m\,p + c\,m\,n}{m\,n\,p}$$

que é a expressão da regra antes mencionada.

Multiplicação e divisão das fracções.

Para formar o producto de muitas fracções multiplicam-se entre si todos os numeradores e tambem os denominadores, tomando estes dous productos, respectivamente, para termos da fracção resultante.

Com effeito seja para formar o producto

$$\frac{a}{b} \times \frac{a'}{b'} \times \frac{a''}{b''}$$

tem-se sempre

$$\frac{a}{b} \times \frac{a'}{b'} \times \frac{a''}{b''} \times b \times b' \times b'' = a \times a' \times a''$$

e, portanto,

$$\frac{a}{b} \times \frac{a'}{b'} \times \frac{a''}{b''} = \frac{a \times a' \times a''}{b \times b' \times b''}$$

— *Para dividir uma fracção por outra invertem-se os termos da fracção divisora e pratica-se a regra de multiplicação.*

Com effeito sendo para dividir $\frac{a}{b}$ por $\frac{a'}{b'}$ e, notando-se que o quociente multiplicado pelo divisor deverá reproduzir o divendo, tem-se

$$\frac{a}{b} : \frac{a'}{b'} = \frac{a\,b'}{a'\,b}$$

porquanto

$$\frac{a\,b'}{a'\,b} \times \frac{a'}{b'} = \frac{a}{b}$$

Propriedade das fracções iguaes

— *Se se tem muitas fracções iguaes entre si, cada uma dellas será igual á que se obtem fazendo a somma dos numeradores, e tambem a dos denominadores e dividindo a primeira somma pela segunda.*

Com effeito, seja que tenhamos

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''} = q$$

como se tem sempre

$$a = b\,q, \quad a' = b'\,q, \quad a'' = b''\,q$$

tem-se, sommando estas igualdades membro a membro,

$$a + a' + a'' = b\,q + b'\,q + b''\,q = (b + b' + b'')\,q$$

e, portanto,

$$\frac{a + a' + a''}{b + b' + b''} = q = \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''}$$

— *Se muitas fracções são iguaes, cada uma dellas será igual á fracção que tem, para numerador a raiz quadrada da somma dos quadrados dos numeradores e para denominador a raiz quadrada da somma dos quadrados dos denominadores.*

Com effeito seja

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''}$$

tem-se

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{a'^2}{b'^2} = \frac{a''^2}{b''^2}$$

e tambem

$$\frac{a^2 + a'^2 + a''^2}{b^2 + b'^2 + b''^2} = \frac{a^2}{b^2}$$

donde

$$\frac{\sqrt{a^2 + a'^2 + a''^2}}{\sqrt{b^2 + b'^2 + b''^2}} = \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''}$$

Noções geraes sobre a theoria das funcções

Quando por meio de uma ou mais das operações algebricas se estabelece relação entre uma quantidade x, cujo valor não é determinado, e outras quantidades conhecidas, fórma-se uma expressão algebrica que se diz ser uma *funcção de x*, tomando esta lettra, pelo seu caracter, o nome de *quantidade variavel* ou, simplesmente, de *variavel*.

Assim a palavra *funcção* serve para designar a dependencia que tem o valor da expressão do valor que por ventura se attribua á quantidade variavel, ou antes, á *variavel x*. Se, portanto, se tem

$$y = a + x, \quad y = a - x, \quad y = ax, \quad y = \frac{a}{b}, \quad y = x^a, \quad y = \sqrt[a]{x} \qquad (I)$$

diz-se, em qualquer dos casos, que y é uma funcção de x; pois, considerando a como uma quantidade conhecida, é claro que o valor de y dependerá do valor que fôr attribuido a x.

As igualdades (I) constituem as funcções de fórma mais simples que se podem apresentar em algebra, dependendo das seis operações que ellas indicam, são por isso denominadas *funcções algebricas elementares*.

Se na expressão da relação uma *variavel x* e a quantidade y, que della é funcção encontra-se signal que indique outra operação que não seja uma das seis acima designadas, a funcção deixa de ser algebrica e toma o nome de *funcção transcendente;* denominação que não tem outro alcance senão lembrar que entre os signaes que ligam as quantidades agora consideradas, ha outros que os até aqui conhecidos.

$$y - a^x \; y = \log. x$$

são *funcções transcendentes.*

Algebricas ou transcendentes podem as funcções ser *inteiras* ou *fraccionarias; racionaes* ou *irracionaes.*

Estas denominações têm o mesmo sentido que as identicas que foram dadas ás expressões algebricas.

Quando o valor da *funcção y* é immediatamente dado por uma expressão em que só entra a *variavel x* ligada a quantidades todas determinadas, como v. g.

$$y = 2b - 5x; \quad y = \sqrt{ax},$$

se diz que y é uma *funcção explicita de* x.

Quando, porém, a *funcção y* não se acha desembaraçada de toda e qualquer outra quantidade, de modo que a determinação de seu valor dependa immediatamente do calculo do valor da expressão que o representa, após a substituição da *variavel* pelo valor que lhe deva ser attribuido, se diz que y é uma *funcção implicita de* x,

Assim

$$3y = 8 - 2x, \quad 5x - a = 2y - \sqrt{ax}$$

são funcções implicitas, quer se considere y como *funcção* e x como *variavel*, quer se considere y como *variavel* e x como *funcção* que della depende.

Convém notar ainda que uma funcção y póde depender de muitas variaveis: v. g. se se tem

$$y = 5x - 3z,$$

sendo x e z quantidades indeterminadas, é bem claro que o valor da funcção y só será determinado quando em lugar de x e de z forem collocados, simultaneamente, os respectivos valores e, portanto, será y uma quantidade cujo valor depende das duas x e z: diz-se por isso que y é uma funcção de x e de z.

Quando nos raciocinios mathematicos não ha necessidade de mencionar quaes as relações que ligam uma funcção com a variavel correspondente é desnecessario escrevel-as ou enuncial-as; bastará indicar abreviadamente o facto principal, isto é, que uma quantidade é funcção da outra, e para isso escreve-se

$$y = f(x); \quad y = \varphi(x, z)$$

quando a funcção é explicita, e

$$f(x, y) = 0; \quad \varphi(x, y, z) = 0$$

quando a funcção é implicita

e pronuncia-se *y igual a funcção* b *de* x; y *igual á funcção* φ *de* x e *de* z, etc., quanto ás explicitas;

funcção f *de* x *e de* y *igual a* 0; *funcção* φ *de* x, y *e* z *igual a* 0, quanto ás implicitas.

Quanto á sua natureza póde uma funcção ser *continua* ou *discontinua*.

A funcção é continua quando, attribuindo-se á variavel dous valores muito proximos, póde-se obter para funcção dous valores correspondentes. cuja differença seja tão pequena quanto se queira, ou, melhor, que essa differença seja menor do que toda a quantidade determinada, por menor que esta seja.

A funcção é *discontinua* quando, fazendo-se mudar de valor a variavel de uma maneira continua, acontece que a funcção, na série dos seus valores correspondentes, soffre mudanças bruscas, isto é, passa de um certo valor a outro sem passar pelos intermediarios; diz-se então que ha *solução de continuidade* na série dos valores que adquire a funcção em consequencia da substituição de uma série continua de valores da variavel. Assim, por exemplo, na funcção

$$y = \frac{1}{x - a}$$

occorre que para quaesquer dous valores de x maiores do que a, mas que sejam muito pouco differentes entre si, obtem-se dous valores para y que differirão tanto menos entre si quanto menor fizermos a differença entre os valores da variavel x e, como podemos tornar essa differença tão pequena quanto quizermos, claro é que o mesmo succederá com a differença entre os valores da funcção y; o mesmo aconteceria se dando a x dous valores menores do que a os fizessemos muito pouco differentes entre si; se, porém, attribuirmos a x dous valores muito pouco differentes entre si, mas taes que um seja muito pouco maior e o outro muito pouco menor do que a acharemos para y dous valores muito differentes entre si, pois é claro que emquanto se tem $x > a$ e que se fazem diminuir successivamente os valores de x, tambem se faz diminuir a differença $x - a$ e portanto o denominador da fracção, crescendo assim o valor désta, que se tornará maior do que qualquer quantidade dada quando o valor do denominador se considerar menor do que qualquer quantidade dada: como a differença $x - a$, que é o denominador, tem signal $(+)$ quando $x > a$, conclue-se que o valor do quociente correspondente ao valor de x nas condições mencionadas terá o signal $(+)$; se se tem $x < a$ o valor algebrico da differença $x - a$, tem signal $(-)$ e, portanto, o quociente correspondente será tambem de signal $(-)$, mas, como a differença $x - a$ é considerada, de valor absoluto, menor do que qualquer quantidade dada, é claro que o quociente correspondente a tal valor de x será maior do que qualquer quantidade dada, quanto ao valor absoluto, tendo porém signal $(-)$.

Assim os dous valores attribuidos a x, sendo um maior outro menor do que a, ainda que muito pouco differentes entre si, forneceram dous valores para a funcção y dos quaes um será de signal $(+)$, tendo valor absoluto muito grande, e outro de signal $(-)$ tendo tambem valor absoluto muito grande, o que é o mesmo que dizer que a differença entre elles é muito grande: com effeito, sejam $+ y'$ e $- y''$ os valores achados para y e que, como vimos, são valores absolutos muito grandes: considerando que $+ y'$ e $- y''$ podem representar valores de dous polynomios calculados e que se tem de subtrahir um do outro, seja $- y''$ a subtrahir de $+ y'$, teremos, segundo a regra de subtracção estabelecida no n. 11,

$$+ y' - (- y'') \text{ ou } + y' + y'' = y' + y'',$$

isto é, a differença entre os dous valores de y é a somma de dous numeros muito grandes y' e y''.

Convém aqui dizer, ainda que de passagem, que o caso de discontinuidade nas funcções mathematicas é, em geral, unicamente consequencia de certos valores singulares attribuidos à variavel. O desenvolvimento deste curso esclarecerá melhor.

CAPITULO SEGUNDO

Problemas do primeiro gráo

Noções preliminares sobre as equações

33. Não considera a algebra, ordinariamente, senão os problemas cujo enunciado traduzido nos symbolos algebricos se acha representado por *equações*. Chama-se *equação* a expressão da igualdade de duas quantidades.

A resolução de taes problemas compõe-se de duas partes distinctas. A primeira tem por fim representar algebricamente as condições do problema, ou *pôl-o em equação*; a segunda ensina a *resolver a equação ou equações*, isto é, derivar dellas o valor ou valores das incognitas.

As regras relativas à 1ª parte deste processo têm, como se verá, alguma cousa de vago, e que fica dependente da sagacidade do calculista; pelo contrario, na 2ª parte se seguem processos definidos e invariaveis. Pelo que, tratamos primeiramente desta 2ª parte, ou da *resolução das equações*.

Consideram-se em algebra diversas especies de igualdades :

1.ª A igualdade que existe entre numeros conhecidos e dados *à priori*, mas representados por lettras; taes são estas

$$a-b=c-d, \quad \frac{a}{b}=\frac{c}{d},$$

que se verificam numericamente substituindo ás lettras numeros particulares, entre os quaes existam as relações indicadas. Esta 1ª especie conserva o nome de *igualdade*.

2.ª A igualdade evidente por si mesma, ou que se verifica sem dependencia dos valores numericos das lettras; taes são

$$19=13+6, \; 3a-5b=a-b+2a-4b.$$

Chama-se esta: *identidade*.

3.ª A igualdade que sómente se verifica substituindo a alguma ou algumas das lettras que representam incognitas *certos valores*, dependentes dos numeros conhecidos que entram na igualdade. A esta é que se dá especialmente o nome de *equação*; e della passamos a occupar-nos.

N. B. As quantidades incognitas se representam, é de estylo, por alguma das ultimas lettras do alphabeto.

4.ª A *equação identica*, que adiante se definirá.

As *equações* são numericas ou *litteraes*. Chamam-se *numericas*, quando nellas só entram numeros particulares, excepto a lettra que representa a incognita; *litteraes* aquellas em que tambem algumas quantidades dadas são representadas por lettras.

Conforme a natureza das funcções que uma equação encerra, toma ella o nome de *equação algebrica* ou de *equação transcendente*, assim é que se dizem *algebricas* todas as equações que não encerram senão daquellas funcções a que denominamos *algebricas*, e *transcendentes* todas as que encerram signal de logarithmo ou quantidade com expoente desconhecido, como, por exemplo

$$\log. x; a^x$$

ou qualquer outra funcção que não esteja comprehendida no numero das algebricas.

39. As equações a uma só incognita tambem se classificam em diversas especies ou *gráos*. (1) Chamam-se *do primeiro gráo*, as que só contèm a 1ª potencia da incognita. *Do segundo gráo*, quando encerram a 2ª potencia da *incognita; do terceiro*, se contêm 3ª potencia; e assim por diante. Damos exemplos de equações numericas e litteraes de diversos gráos:

do 1° $3x-5=17-2x$; $ax+b=c+dx$;
do 2° $4x-5x^2=35-3x^2$; $ax^2-bx=d$;
do 3° $5x^3+4x^2+3x=2-x^2$; $2ax^3-5a^2x^2+ab^2x=a^2b^2$.

A classificação das equações pelo gráo parece a mais natural por que ella attende, em geral, á ordem que, pela difficuldade de serem resolvidas, ellas devem conservar na classificação; deve-se notar porém, que tal modo de ver não tem valor absoluto, pois certas equações, affectam, em vista do numero de termos que ellas encerram, fórma tal, que offerecem muito menor difficuldade, para serem resolvidas algebricamente, do que muitas equações de gráo inferior, como adiante teremos occasião de vêr. Este facto levou os algebristas a classificarem primitivamente as equações pelo numero de termos, classificação esta que mais tarde foi completamente abandonada.

---

(1) A classificação das equações pelo gráo estende-se tambem ás equações a muitas incognitas.

Tratamos por ora sómente das do 1º grão ; a sua resolução tem por fim *procurar um valor para a incognita, que substituido a ella na equação torne o 1º membro identicamente igual ao 2º.*

Chama-se 1º membro a quantidade que precede ao signal =, 2º a que se acha depois do mesmo signal.

Duas equações são ditas *equivalentes* quando a quantidade que posta em logar da incognita em uma dellas, a transforma em uma identidade e tambem transforma a outra, v. g. as equações

$$5\,x - 9 = 6 \text{ e } 20\,x + 36 = 96$$

são equivalentes, porque substituindo-se em ambas x pelo mesmo numero 3 ellas transformam-se em identidades; com effeito temos

$$\text{para a 1ª } 5 \times 3 - 9 = 15 - 9 = 6$$
$$\text{e para a 2ª } 20 \times 3 + 36 = 60 + 36 = 96$$

O numero 3 é a raiz de qualquer das equações dadas.

Como o que se tem em vista resolvendo uma equação é determinar essa raiz, claro fica que tanto importaria, no caso figurado, resolver uma ou outra das equações. Fica pois estabelecido *que entre equações equivalentes póde-se, indifferentemente, tomar uma por outra.*

§ 1.º *Equações e problemas do primeiro grão a uma incognita.*

40. E' principio commum a toda a especie de igualdades, e que se póde ter por evidente, que sem perturbal-as se póde : 1º, *ajuntar ou tirar a ambos os membros a mesma quantidade.*

Com effeito seja a equação

$$A = A' \qquad \text{(I)}$$

representando A e A' polynomios quaesquer, contendo, em geral, a incognita, sommando a ambos os membros a mesma quantidade k teremos

$$A + k = A' + k, \qquad \text{(II)}$$

pois, se a raiz ou raizes da equação (I) faziam, postos em lugar da incognita, o polynomio A identicamente igual a A', é claro que juntando a cada polynomio a mesma quantidade k as sommas obtidas serão iguaes. Assim os valores da incognita que satisfizerem a equação (I), tambem satisfarão (II) e, reciprocamente, os que satisfizerem (II) satisfarão tambem (I); ellas são, portanto, equivalentes.

Se tomarmos agora a equação (II) e de ambos os membros subtrahirmos k, teremos, com analogo raciocinio, chegado a demonstrar a proposição para o caso da subtracção.

2º multiplicar ou dividir ambos os membros pela mesma quantidade.

Este principio deve soffrer uma restricção devida a que, se a quantidade que serve para a multiplicação é tal que, contendo a incognita, se póde annullar pela substituição desta por um valor que não satisfaça á equação dada, a equação que se obtem não é equivalente á primeira e não póde, pois, substituil-a, senão attendendo-se a circumstancia que conheceremos adiante.

Feita a restricção seja a equação

$$A = A' \qquad \text{(I)}$$

e multipliquemos ambos os seus membros pela quantidade k teremos

$$A\,k = A'\,k, \qquad \text{(II)}$$

porquanto os valores que faziam o polynomio A identicamente igual a A' pela substituição em lugar da incognita farão ainda $A\,k$ identicamente igual a $A'\,k$ e reciprocamente.

Se agora dividirmos ambos os membros de (II) por k teremos, com analogo raciocinio, chegado á demonstração para o caso da divisão.

A restricção que fizemos é necessaria, porquanto, se, por exemplo, se toma o factor $(x-3)$ para multiplicar ambos os membros da equação dada, admittindo que 3 não seja raiz de tal equação, é claro que a equação

$$A\,(x-3) = A'\,(x-3), \qquad \text{(III)}$$

que se obtem pela multiplicação, não será equivalente á

$$A = A',$$

porque fazendo $x = 3$, tem-se

$$A\,(3-3) = A'\,(3-3) \qquad \text{isto é}$$
$$0 = 0,$$

o que quer dizer que o valor 3 transformou em uma identidade a equação (II), e como este valor não convém á equação (I), por hypothese, ellas não são equivalentes.

Então, em geral, não convém multiplicar ou dividir as equações por quantidade que possa encerrar a incognita.

O que significa que, se antes da operação eram iguaes os dous membros, tambem o são depois d'ella; isto é evidente. Daqui resultam duas transformações que são de uso continuo na resolução das equações.

1.ª *Transformação*. Convém muitas vezes *passar um termo de um para outro membro;* para o que basta *mudar-lhe o signal.*

Seja por exemplo $5x - 6 = 8 + 2x$. Se tirarmos $2x$ de ambos os membros, teremos

$$5x - 6 - 2x = 8 + 2x - 2x \text{ ; ou } 5x - 6 - 2x = 8.$$

E, se a um e outro membro desta ultima ajuntarmos 6, resultará

$$5x - 6 - 2x + 6 = 8 + 6, \text{ ou } 5x - 2x = 8 + 6.$$

Vê-se, pois, que o termo $2x$, additivo no 2º membro, passa a ser subtractivo no 1º; o termo 6, subtractivo no 1º, tornou-se additivo no 2º.

Do mesmo modo se prova que a equação

$$ax + b = d - cx \text{ se muda em } ax + cx = d - b.$$

Logo, em geral, *póde-se transferir qualquer termo de um membro para outro, mudando-lhe o signal.*

41. 2ª *Transformação*. Quando os termos de uma equação ou alguns delles são fraccionarios, póde ella reduzir-se a outra que só tenha termos inteiros.

Seja a equação

$$\frac{2x}{3}-\frac{3}{4}=11-\frac{x}{5}$$

que, reduzindo as fracções ao mesmo denominador, converte-se nesta

$$\frac{40x}{60}-\frac{45}{60}=11+\frac{12x}{60}$$

Multiplicando ambos os membros por 60, o que se reduz a supprimir o denominador 60 e por elle multiplicar o inteiro 11, teremos

$$40x-45=660-12x.$$

Vê-se, pois, que todo o processo consiste em *reduzir os termos fraccionarios ao mesmo denominador, o qual se omitte; e multiplicar por esse denominador os termos inteiros.*

N. B. Se na reducção ao mesmo denominador houver simplificações, não ha razão para omittil-as; e a sua pratica tornará mais simples a equação final.

Sendo a equação algebrica, à regra precedente tem plena applicação; segundo ella, a equação

$$\frac{ax}{b}-\frac{2c^2x}{ab}+4a=\frac{4bc^2x}{a^3}+\frac{5a^3}{b^2}-3b$$

se muda em $a^4bx-2a^2bc^2x+4a^4b^2=, 4b^3c^2x+5a^6-3a^2b^3$

O denominador commun dos termos fraccionarios a^3b^2.

42. Proponha-se agora resolver o equação

$$\frac{4x}{9}-\frac{3}{5}=2x-\frac{5}{6}$$

a qual, pela segunda transformação, se muda em

$$40x-54=180x-75.$$

Transpondo o termo $180x$ para o 1° membro, para o 2° -54, resulta

$$40x-180x=54-75$$

ou

$$-140x=-21$$

A mesma transposição applicada á ultima equação a converte em :

$$21=140x \text{ ou } 140x=21$$

Se na equação $40x-54=180x-75$ passamos os termos affectos da incognita, não para o 1°, mas para o 2° membro, resulta

$$75-54=180x-40x$$

ou

$$21=140x$$

e finalmente

$$140x=21.$$

Da ultima, dividindo ambos os membros por 140, resulta

$$x=\frac{21}{140}=\frac{3}{20}$$

N. B. Incidentemente ficou provado que *mudar os signaes a ambos os membros não altera a equação.*

Resolvamos tambem a equação litteral acima transformada.

$$a^4bx-2a^3bc^2x+4a^4b^2=4b^3c^2x+5a^6-3a^3b^3$$

Transpondo os termos de modo que no 1º membro sómente existam aquelles em que entra x teremos

$$a^4bx - 2a^2bc^2x - 4b^3c^2x = 5a^6 - 3a^3b^3 - 4a^4b^2$$

Ora, o 1º membro póde ter a fórma de um producto, posto em evidencia o factor x, commum a todos os termos, deste modo

$$(a^4b - 2a^2bc^2 - 4b^3c^2)\,x = 5a^6 - 3a^3b^3 - 4a^4b^2$$

e é claro que dividindo ambos os membros desta equação pelo polynomio multiplicador de x, se obterá o valor desta incognita; o qual será

$$x = \frac{5a^6 - 3a^3b^3 - 4b^4b^2}{a^4b - 2a^2bc^2 - 4b^3c^2}$$

43. REGRA GERAL para resolver uma equação do 1º gráo, numerica ou litteral. 1.º *Expellem-se os denominadores, se os ha. Collocam-se no 1º membro todos os termos em que entra a incognita, no 2º os termos conhecidos. 3.º Reduzem-se os termos semelhantes; e, se a equação é litteral, põe-se em evidencia o factor* x *commum aos termos do 1º membro. 4.º Dividem-se ambos os membros pelo numero ou pelo monomio ou polynomio que multiplica* x.

44. Passemos á 1ª parte da *resolução dos problemas*, cujas regras, como dito fica, não têm a mesma invariabilidade que as da 2ª parte ou *resolução das equações*.

A's vezes o enunciado do problema se traduz immediatamente em equação; outras é necessario sagacida de para perceber nesse enunciado as condições susceptiveis de serem expressadas algebricamente. E ainda succede não serem as mesmas condições propostas, porém outras, dellas derivadas, as que formam a equação ou equações. Neste caso se dá o nome ás propostas de *condições explicitas* e as que dellas se deduzem *condições implicitas.*

Eis aqui o unico preceito geral apropriado para bem encaminhar o estudante nestas investigações : *Considerar o problema como resolvido, e effectuar com o auxilio dos signaes algebricos, sobre as quantidades conhecidas, numeros ou lettras, e sobre a incognita, sempre representada por uma lettra, as mesmas operações e raciocinios que seriam necessarios se o valor da incognita já estivesse determinado e se tratasse de verifical-o.*

A pratica deste preceito não offerece uniformidade que permitta estabelecer-se regra mais precisa e definida ; applicando-o, porém, com discernimento, sempre se obtém duas expressões algebricas da mesma quantidade; e, igualando essas duas expressões, fórma-se a equação. Passemos a exemplos :

45. Primeiro problema. *Achar um numero tal, que a metade delle, mais um terço e mais um quarto juntos a 45 produzam a somma de 448.*

Representa x o numero pedido; conhecido o seu valor, seria preciso *para verifical-o* sommar o valor de $\frac{x}{2}$, o de $\frac{x}{3}$, o de $\frac{x}{4}$ com o numero 45, a vêr se a somma é 448; logo, a equação do problema é

$$\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{4}+45=448,$$

ou tirando 45 de ambos os membros

$$\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{4}=403$$

Expellindo desta os denominadores, temos $6x+4x+3x=4836$, ou reduzindo $13x=4836$; donde

$$x=\frac{4836}{13}=372.$$

Com effeito $\frac{372}{2}+\frac{372}{3}+\frac{372}{4}+45=186+124+93+45=448.$

46. Segundo problema. *Ajustou-se um trabalhador que vence por cada dia de trabalho 1$280, com a condição de pagar por cada dia que não trabalhar 560 réis pelo seu sustento. No fim de 30 dias recebe unicamente 1$600. Pergunta-se quantos dias trabalhou.*

Se conhecessemos este numero de dias, é claro que multiplicando-o por 1280 e o restante dos 30 dias por 560, subtrahindo o 2º producto do 1º, deveria ser o resto 1600. Assim, applicando a regra (n. 44), seja x o numero de dias de trabalho, sera $x\times1280=1280x$ a quantia ganha pelo jornaleiro; $30-x$ os dias de ociosidade;

5

$(30-x)\,560=16800-560x$, a quantia a descontar-se.

Logo, a equação do problemo é $1280x-16800+560x=1600$, que se muda em..... $1840x=16800+1600=18400$.

$$\text{donde } x=\frac{18400}{1840}=10, \text{ e } 30-x=20\,;$$

isto é, o jornaleiro só trabalhou 10 dias dos 30 do ajuste.

Verificação. $(1280\times 10)-(560\times 20)=12800-11200=1600$.

47. Este problema se póde generalisar, representado por

n o numero total dos dias até o ajuste de contas;
a o salario ou ganho de cada dia de effectivo trabalho;
b a perda ou despeza em cada dia deociosidade;
c a quantia que afinal recebe o jornaleiro.

Seja ainda

x o numero de dias de trabalho; será tambem
$n-x$ o numero de dias de ociosidade;
e a equação do problema será $ax-b\,(n-x)=c$ ou, feita a multiplicação,

$$ax-bn+bx=c$$

donde $$ax+bx=c+bn$$

ou $$(a+b)\,x=c+bn$$

e finalmente $$x=\frac{c+bn}{a+b}$$

Esta expressão ou *fórmula* resolve todos os problemas semelhantes ao proposto, isto é, cujas condições fôrem as mesmas, variando sómente os numeros. Semelhante fórmula geral se póde deduzir para qualquer outro problema ; e esta generalidade é das principaes vantagens que offerece o emprego dos symbolos algebricos.

48. Terceiro Problema. *Dividir um numero representado por* a *em quatro partes, que estejam entre si como os numeros* m, n, p, q, *isto é que seja*

$$1^a:2^a:3^a:4^a::m:n:p:q.$$

A' primeira vista parece o problema encerrar quatro incognitas, a saber : as quatro partes do numero dado. Mas, bem entendidas as condições propostas, torna-se evidente que, achada a 1^a parte, será facil determinar cada uma das outras por estas proporções

$$1^a:2^a::m:n$$
$$1^a:3^a::m:p$$
$$1^a:4^a::m:q$$

Pelo que, tratamos como incognita sómente a 1^a parte, que se representa por x. E' claro que as quatro partes sommadas devem reproduzir o numero a, e segundo as proporções precedentes, sendo a 1^a x, teremos

$$\left.\begin{array}{l} x:2^a::m:n \\ x:3^a::m:p \\ x:4^a::m:q \end{array}\right\} \text{Logo a} \left\{\begin{array}{l} 2^a=\frac{nx}{m} \\ 3^a=\frac{px}{m} \\ 4^a=\frac{qx}{m} \end{array}\right.$$

Será, pois, a equação do problema

$$x+\frac{nx}{m}+\frac{px}{m}+\frac{qx}{m}=a$$

ou, expellindo os denominadores,

$$mn+nx+px+qx=ma,$$

ou ainda $(m+n+p+q)\,x=ma$; donde $x=\dfrac{m\,a}{m+n+p+q}$

Obtida a 1ª parte, é facil determinar as outras, cuja expressão algebrica será

$$2^a=\frac{nx}{m}=\frac{na}{m+n+p+q};\quad 3^a=\frac{px}{m}=\frac{pa}{m+n+p+q};$$

$$4^a=\frac{qx}{m}=\frac{qa}{m+n+p+q}$$

Os valores numericos destas quatro expressões se acham facilmente, *dividindo o numero dado pela somma dos numeros* m, n, p, q, *e multiplicando successivamente o quociente por cada um dos mesmos numeros*, regra que coincide com a da arithmetica (n. 188). Assim devia ser, porque o presente problema não é mais do que a Regra de Sociedade, de que trata o numero citado.

Seja por exemplo o numero 351 para dividir em quatro partes proporcionaes a 3, 5, 7, 11; é o mesmo que suppôr $a=351$, $m=3$, $n=5$, $p=7$, $q=11$. E substituindo estes numeros nas fórmulas deduzidas, ou seguindo a regra que dellas se deriva, acha-se para o quociente mencionado

$$\frac{351}{26}=13,5$$

E assim a 1ª parte $= 13,5\times 3 = 40,5$; 2ª $13,5\times 5 = 67,5$; 3ª $= 13,5\times 7 = 94,5$; 4ª $= 13,5\times 11 = 148,5$.

Verificação. $40,5 + 67,5 + 94,5 + 148,5 = 351$.

§ 2.º *Equações e Problemas do 1º grão a duas ou mais incognitas.*

49. Suppõe-se aqui o numero das equações igual ao das incognitas, e depois se verá que só neste caso o problema póde ser determinado, isto é, admittir uma unica solução.

Quando se tem muitas equações, a muitas incognitas, de tal modo ligadas entre si que nenhuma possa ser resolvida independentemente das outras, diz-se que ellas são *simultaneas*. Quando as *equações simultaneas* são taes que o valor ou valores de uma mesma qualquer das incognitas sejam sempre os mesmos em todas as equações em que essa incognita entrar, ellas formarão um *systema de equações*.

— *Solução de um systema de equações*, é a reunião de todos os valores que as incognitas do *systema* podem apresentar.

Quando o *systema de soluções* ou, antes, *a solução de um systema de equações* convém a outro *systema*, os dous se dizem *equivalentes*.

— *Quando se tem um systema de equações simultaneas e que se somma uma das equações com uma ou mais outras do systema, fórma-se uma equação que se póde substituir a qualquer das que foram sommadas.*

Sejam as equações

$$A = B, \quad C = D, \quad E = F, \qquad \text{(I)}$$

sommando as duas primeiras membro a membro teremos

$$A + C = B + D \qquad \text{(II), que}$$

combinado com a ultima e uma das que foram sommadas, $C = D$, por exemplo, dará o systema

$$A + C = B + D; \quad A = B; \quad E = F, \qquad \text{(III)}$$

Neste systema as duas equações ultimas são satisfeitas pelas soluções do systema (I), no qual essas soluções faziam $A = B$ identicamente; $C = D$ identicamente e farão portanto identicamente

$$A + C = B + D,$$

o que é o mesmo que dizer que as soluções do systema (I) são tambem as do systema (III) e, portanto, que este systema é equivalente ao primeiro.

A demonstração seria inteiramente applicavel no caso da subtracção.

— *Se, dado um systema de equações com igual numero de incognitas, se tira o valor de uma das incognitas em uma das equações e se o substitue nas outras, fórma-se um novo systema equivalente ao primeiro.*

$$A = B; \quad C = D; \quad E = F, \qquad \text{(I)}$$

representando todas as lettras funcções de todas as incognitas, e que da primeira equação se tira

$$x = B';$$

collocando depois este valor em logar de x nas outras equações: obtem-se assim o systema

$$x = B'; \quad C' = D'; \quad E' = F' \qquad \text{(II)}$$

que seria equivalente ao (I).

Com effeito, a primeira equação do systema (II) é equivalente á primeira de (I), porque nesta só se fez transposição de quantidades de modo a isolar x no primeiro membro; toda solução do systema (1) fará, pois, x identico a B'; nas duas outras equações do systema (II) foi x substituido pelo seu valor identico B', logo toda solução do primeiro systema tornará C' identico a D', e E' identico a F' isto é, o systema (II) tem as mesmas soluções de (I). O systema (I) contém a equação $A = B$ que é equivalente á equação $x = B'$ de (II) e, portanto, toda a solução de (II) fará A identico a B, mas, como as outras equações de (I) podem ser consideradas como tendo resultado da substituição de B' por x nas correspondentes de (II), é claro que toda a solução de (II) fará C identico a D, E identico a F, isto é toda solução de (II) será tambem de (I). Logo os dous systemas são equivalentes.

Tratando de resolver qualquer systema de equações, comecemos por notar que o valor de cada incognita será facil de calcular, logo que se forme uma equação em que só entre essa incognita; e isto sempre se consegue por algum dos *methodos de eliminação*, de que passamos a tratar.

Sejam em primeiro logar duas equações a duas incognitas

$$5x + 7y = 43$$
$$11x + 9y = 69$$

Se x ou y tivessem em ambas o mesmo coefficiente, é visivel que essa incognita desappareceria pela subtracção das equações membro a membro. Ora, multiplicando os dous membros da 1ª por 9, coefficiente de y na 2ª, os membros da 2ª por 7, coefficiente de y na 1ª, o coefficiente de y em ambas se tornará em 7×9 ou $9 \times 7 = 63$. Resulta

$$45x + 63y = 387$$
$$77x + 63y = 483$$

e subt. a 1ª da 2ª $\qquad 32x = 96$, donde $x = \frac{96}{32} = 3$

Igualmente multiplicando a 1ª equação por 11, a 2ª por 5, temos

$$55x + 77y = 473$$
$$55x + 45y = 345$$ e subtrahindo a 2ª da 1ª

$$32y = 128; \text{ logo } y = \frac{128}{32} = 4.$$

São, pois, 3 e 4 os valores das incognitas nas equações dadas; o que se verifica substituindo estes numeros a x e y, em cada uma dellas, que se tornarão em identidades.

E' claro que, se os termos em x ou em y não tivessem o mesmo signal em ambas as equações, seria preciso empregar em vez de subtracção a addição para eliminar uma incognita e determinar a outra.

Este modo de resolver um *systema de equações* chamam, ordinariamente, os escriptores de *reducção*, porque reduzem-se as equações a terem o mesmo coefficiente para a incognita que se quer eliminar: denomina-se tambem algumas vezes *methodo de addição ou subtracção.*

N. B. Sendo este processo mui analogo á reducção das fracções ao mesmo denominador, seria facil introduzir simplificações no caso de terem os coefficientes algum factor commum; comtudo, as mais das vezes é preferivel empregar a regra geral e simplificar, se fôr possivel, a equação final; o que não embaraça se façam em algum caso particular as abreviações que fôrem obvias.

50. Regra geral. *Multiplica-se cada uma das duas equações pelo coefficiente que tem na outra a incognita que se quer eliminar. Combinam-se as equações resultantes por subtracção ou por addição, conforme tiver nellas a incognita o mesmo ou diversos signaes.*

Resulta uma equação a uma só incognita que se resolve segundo a regra (n. 43).

Póde-se repetir o mesmo processo para cada uma das duas incognitas. Ou, *achado o valor de uma substituil-o* *em qualquer das equações propostas*, que, ficando tambem com uma só incognita, póde ser igualmente resolvida.

51. Passemos a tres equações a tres incognitas, e sejam

$$\begin{aligned} 5x-6y+4z&=15\\ 7x+4y-3z&=19\\ 2x+\ y+6z&=46 \end{aligned}$$

O processo precedente applicado á 1ª e á 2ª póde eliminar dellas z, e do mesmo modo entre a 1ª e a 3ª. Resultarão duas equações só contendo x e y, o que reduz a questão ao precedente caso; tratando-as, pois, segundo o mesmo processo, determina-se x e y, e depois destas z. Eis o calculo mencionado:

$$1^a \text{ e } 2^a \left\{\begin{array}{l} 15x-18y+12z=45\\ 28x+16y-12z=76\\ \hline 43x-2y=121 \end{array}\right.$$

$$1^a \text{ e } 3^a \left\{\begin{array}{l} 30x-36y+24z=90\\ \ \ 8x+\ \ 4y+24z=184\\ \hline 22x-40y=-94 \end{array}\right.$$

São, pois, as duas equações entre x e y

$$\begin{aligned} 43x-2y&=121\\ 11x-20y&=-47 \end{aligned}$$

(dividindo por 2 ambos os membros da 2ª). Ora, tentando applicar a estas duas o processo, nota-se que para eliminar y basta multiplicar a 1ª por 10 e do resultado subtrahir a 2ª; o que dá $419x = 1257$;

donde $$x = \frac{1257}{419} = 3$$

Poder-se-hia recomeçar o processo pora eliminar x e z e determinar y; e, para, eliminando y e x, achar o valor de z. Porém ha methodo mais breve. O valor de x, substituido em uma das ultimas equações, dá $129 - 2y = 121$: donde $2y = 129 - 121 = 8$; e $y = 4$.

Substituidos ambos os valores de x e y em uma das tres equações dadas, por exemplo na 3ª, resulta

$$6 + 4 + 6z = 46, \text{ ou } 6z = 36, \text{ donde } z = 6.$$

O systema de valores $x = 3$, $y = 4$, $z = 6$ satisfaz completamente as equações propostas, como se póde verificar pelas substituições.

52. Bem considerando os processos precedentes, applicaveis a qualquer systema de equações e outras tantas incognitas, somos conduzidos á seguinte

Regra geral.—*Combine-se uma das equações com cada uma das outras, eliminando sempre a mesma incognita; resultará um systema de menos uma equação e menos uma incognita do que o proposto. Pratique-se com este o mesmo que com o 1º systema, e continue-se do mesmo modo até chegar a uma equação a uma incognita. Achado o valor desta, determinam-se os das* *outras por substituições successivas em ordem inversa á das eliminações*. De modo que a 1ª incognita eliminada é a que em ultimo logar se determina.

A pratica melhor esclarecerá esta regra.

53. Tal é o methodo de *eliminação por addição e subtracção*. São conhecidos outros methodos, entre os quaes dous principaes, *por substituição e por comparação*,

O methodo *por substituição* consiste em *tirar de uma equação o valor de uma incognita*, como se as outras stivessem já determinadas, *e substituil-o em cada uma das outras equações*, obtendo assim um systema de menos uma equação e menos uma incognita, o qual se trata do mesmo modo, continuando até chegar a uma só equação; obtido o valor da ultima incognita, acham-se os das outras por meio de substituições successivas em ordem inversa á das eliminações,

Sejam as equações

$$10x + 4y = 3 \qquad (1)$$
$$-5x + 20y = 4 \qquad (2)$$

para resolverem-se por *substituição*.

Tirando em (1) o valor de x teremos

$$x = \frac{3 - 4y}{10};$$

substituindo em (2) este valor no logar de x e preparando a equação resultante vem

$$-5\,\frac{3 - 4y}{10} + 20y = 4$$

ou

$$4y - 3 + 40y = 8$$

$$y = \frac{11}{44} = \frac{1}{4};$$

substituindo este valor de y em (1) vem

$$10x + 4 \times \frac{1}{4} = 3$$

ou

$$x = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

O methodo *por comparação* consiste em *tirar de cada equação o valor da mesma incognita, e igualando um destes valores a cada um dos outros, formar o 2° systema de equações, que se tratam do mesmo modo*, etc,

Sejam as equações

$$\begin{aligned} x + y + z &= 11 \qquad (1) \\ 2x - y + z &= 5 \qquad (2) \\ 3x + 2y + z &= 24; \qquad (3) \end{aligned}$$

tirando em (1) o valor de x temos

$$x = 11 - y - z$$

e

substituindo este valor em (2) e (3) teremos

$$\begin{aligned} 2(11 - y - z) - y + z &= 5 \\ 3(11 - y - z) + 2y + z &= 24 \end{aligned}$$

ou

executando as operações e simplificando

$$\begin{aligned} 3y + z &= 17 \qquad (4) \\ y + 2z &= 9; \qquad (5) \end{aligned}$$

tirando em (5) o valor de y e collocando-o em (4) virà

$$3(9 - 2z) + z = 17$$

e tirando desta o valor de z vem

$$z = \frac{10}{5} = 2; \qquad (6)$$

pondo este valor por z em (5) vem

$$y + 4 = 9$$

ou

$$y = 9 - 4 = 5 \qquad (7)$$

pondo em (1) os dous valores (6) e (7), respectivamente por z e por y teremos

$$x + 5 + 2 = 11$$

ou

$$x = 11 - 7 = 4$$

Além dos tres methodos mencionados outros ha que, como estes, satisfazem ao objecto que se tem em vista : dentre elles mencionaremos o methodo de Bezout (nome do seu inventor) que é incontestavelmente de uso muito vantajoso.

Sejam as equações já dadas

$$\begin{aligned} x + y + z &= 11 & (1)\\ 2x - y + z &= 5 & (2)\\ 3x + 2y + z &= 24 & (3) \end{aligned}$$

multiplicando ambos os membros da (1) e (2), respectivamente, por m e por n; sendo m e n quantidades indeterminadas, mas que não contém nenhuma das incognitas, virá o systema

$$\begin{aligned} mx + my + mz &= 11m & (4)\\ 2nx - ny + nz &= 5n & (5)\\ 3x + 2y + z &= 24 & (6) \end{aligned}$$

que é equivalente ao primeiro. Sommando agora estas tres equações membro a membro, vem a equação

$$mx + my + mz + 2nx - ny + nz + 3x + 2y + z =$$
$$= 11m + 5n + 24$$

ou

$$(m + 2n + 3)x + (m - n + 2)y + (m + n + 1)z = 11m + 5n + 24 \; (7)$$

Se a incognita a determinar for x, por exemplo, será necessario determinar m e n de forma que na equação (7) sejam nullos os termos em y e z; será, pois, preciso que se tenha

$$m - n + 2 = 0; \qquad m + n + 1 = 0,$$

isto é,

$$m - n = -2; \qquad m + n = -1:$$

isto estabelecido teriamos que a equação (7) se reduziria a

$$(m+2n+3)\ x = 11m+5n+24$$

ou

$$x = \frac{11m+5n+24}{m+2n+3} \tag{8}$$

em que nos restaria determinar m e n para conhecer x. Isto se consegue tomando as duas *equações de condição*

$$m-n=-2 \quad \text{e} \quad m+n=-1 \tag{9}$$

e resolvendo-as por algum dos processos antes mencionados ou mesmo pelo de Bezout ou *dos coefficientes indeterminados,* como tambem é conhecido. Assim multiplicando ambos os membros da primeira pela indeterminada a teremos o systema equivalente, sendo a independente de m e n.

$$\begin{aligned} am - an &= -2a \\ m + n &= -1 \end{aligned} \tag{9 a}$$

sommando as duas vem

$$(a+1)m-(a-1)n=-2a-1 \tag{10}$$

fazendo, para conhecer m, $a-1=0$, vem

$$a=1 \tag{11}$$

e a equação (10) reduz-se a

$$(a+1)m=-2a-1$$

donde

$$m=-\frac{2a+1}{a+1} \tag{12}$$

valor que posto em (9 a) dá

$$n=\frac{a}{a+1}. \tag{13}$$

Pondo por a seu valor (11) em (12) e (13) vem

$$m=-\frac{3}{2}; \qquad n=\frac{1}{2}:$$

valores estes que postos em logar de m e n em (8) farão x conhecido assim.

$$x=\frac{\dfrac{-33+5+48}{2}}{\dfrac{-3+2+6}{2}}=\frac{20}{5}=4 \tag{14}$$

Este valor de x substituido em (1) e (2) daria o systema de duas equações a duas incognitas.

$$\begin{aligned} y + z &= 7 \\ -y + z &= -3, \end{aligned} \qquad (15)$$

de que seria facil, por qualquer meio, tirar o valor de y ou de z, mas para proceder de accôrdo com a marcha adoptada, como é mais conveniente, convirá voltar á equação (7) e nella, para tirar o valor de y, eliminar x e z, fazendo para isso.

$$m + 2n + 3 = 0 \quad \text{ou}$$
$$m + 2n = -3 \qquad (16) \quad \text{e}$$
$$m + n + 1 = 0 \quad \text{ou}$$
$$m + n = -1: \qquad (17)$$

condições estas que reduziriam a equação (7) a

$$(m - n + 2)\, y = 11\, m + 5\, n + 24 \qquad \text{donde}$$

$$y = \frac{11\, m + 5\, n + 24}{m - n + 2} \qquad (17\ a)$$

Os valores de m e de n serão agora deduzidos das equações simultaneas (16) e (17): assim, multiplicando ambos os membros da primeira dessas duas equações pela *indeterminada* b, teremos o systema equivalente

$$b\, m + 2\, b\, n = -3\, b; \quad m + n = -1,$$

cujas equações sommadas membro a membro dariam a equação

$$(b + 1)\, m + (2\, b + 1)\, n = -3\, b - 1, \qquad (18)$$

da qual se tirará o valor de m eliminando n, isto é fazendo

$$2\, b + 1 = 0 \quad \text{ou} \quad b = -\frac{1}{2},$$

reduz-se a equação (18) a

$$(b + 1)\, m = -(3\, b + 1) \qquad \text{ou}$$

$$m = -\frac{3\, b + 1}{b + 1} \qquad \text{ou, finalmente}$$

$$m = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1 \qquad (19)$$

Eliminando m para obter n, vem

$$b + 1 = 0 \quad \text{ou} \quad b = -1 \qquad \text{e como}$$

$$(2b + 1)\,n = -(3b + 1) \qquad \text{vem}$$

$$n = -\frac{3b + 1}{2b + 1} \qquad \text{e finalmente}$$

$$n = -\frac{-2}{-1} = -(+2) = -2 \qquad (20)$$

Os valores (19) e (20) de m e de n substituidos em logar destas lettras em a equação (17) dariam

$$y = \frac{11 \times 1 + 5 \times (-2) + 24}{1 - (-2) + 2} = \frac{25}{5} = 5$$

Os dous valores $x = 4$ e $y = 5$ devendo convir ao systema dado, claro que permittirão determinar z, sendo collocados pelas respectivas incognitas em uma qualquer das equações que constituem o systema : assim, escolhendo a equação como mais simples, teremos.

$$4 + 5 + z = 11 \qquad \text{donde}$$
$$z = 11 - 4 - 5 = 2$$

Fica pois bem claro que o methodo de *Bezout* ou dos *coefficientes indeterminados* consiste em multiplicar cada uma das equações, de um dado systema, menos uma, por uma *quantidade indeterminada*; sommar em seguida todas as equações resultantes com a restante, formando assim uma equação unica, na qual se reconhece quaes as condições a estabelecer para que della desappareçam todas as incognitas, menos a que se trata de determinar em primeiro logar : estas condições são estabelecidas igualando a zero os coefficientes das incognitas a eliminar, que são tantas quantas as equações do systema menos uma : tem-se assim um systema com menos uma equação do que o primitivo e em que as incognitas são as indeterminadas (que são independentes das incognitas do systema primitivo).

Com o novo systema procede-se como com o primeiro, e assim até chegar a uma unica equação encerrando uma incognita (a ultima indeterminada que se introduzio no systema que precedeu a essa equação) cujo valor será substituido no systema anterior, do qual se caminhará, regressando, até os valores das primeiras indeterminadas, que permittirão determinar uma das incognitas do systema dado.

Tomando depois a equação que resultou a principio da somma das equações do systema, depois da multiplicação dellas pelas indeterminadas, e igualando nella a zero cada um dos coefficientes das incognitas, com excepção do da outra incognita que se pretende determinar, e proseguindo como antes se obterá o valor de mais uma incognita. Do mesmo modo se poderá proceder para cada uma das incognitas, e se chegará assim a uma solução completa do systema.

O objecto de todos estes methodos é eliminar successivamente as incognitas, até chegar a uma equação unica. O 1º delles tem sobre os outros a vantagem de concluir a eliminação sem complicar as equações com denominadores; no 2º e 3º quasi sempre cada novo systema de equação contém termos fraccionarios, que é preciso fazer desapparecer.

54. Succede ás vezes que cada uma das equações propostas não contenha todas as incognitas; então, com alguma sagacidade se obtem a eliminação com mais presteza. Sejam por exemplo:

$$\begin{aligned} 2x - 3y + 2z &= 13 \\ 4u - 2x &= 30 \\ 4y + 2z &= 14 \\ 5y + 3u &= 32 \end{aligned}$$

Eliminando z entre a 1ª e 3ª; u entre a 2ª e a 4ª, apparecem logo duas equações contendo x e y, que facilmente se resolvem.

1ª e 3ª............... $7y - 2x = 1;$

2ª e 4ª $\left\{ \begin{aligned} 12u - 6x &= 90 \\ 20y + 12u &= 128 \end{aligned} \right\}$ $20y + 6x = 38.$

Examinando as duas equações em x e y, vê-se que, para eliminar x, basta multiplicar a 1ª por 3 e sommal-as assim

$$\begin{array}{r} 21y - 6x = \ 3 \\ 20y + 6x = 38 \\ \hline 41y = 41, \text{ logo } y = 1\,; \end{array}$$

valor que, substituido na equação $7y - 2x = 1$, dá $7 - 2x = 1$, donde $2x = 6$ e $x = 3$; e na equação $4y + 2z = 14$, dá $4 + 2z = 14$, donde $2z = 10$ e $z = 5$.

Estas abreviações variam, segundo as circumstancias particulares de cada systema de equações, e segundo a sagacidade do calculador.

55. Dissemos (n. 49) que um problema *é determinado* quando dá origem a tantas equações quantas são as incognitas.

O processo da resolução das equações, quando são tantas quantas incognitas, dá para cada uma destas um unico valor o que prova a proposição.

Havendo mais incognitas do que equações, o problema é *indeterminado;* o que é facil de provar.

Seja a equação a duas incognitas $5x - 3y = 12$, da qual se deduz

$$x = \frac{3y + 12}{5}$$

E' claro que x só ficará determinado quando se der a

y um valor, e este valor é arbitrario, pois não ha condição que o determine. Suppondo por exemplo :

$$y=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \&c.,$$

$$\text{será } x=3, 3\frac{3}{5}, 4\frac{1}{5}, 4\frac{4}{5}, 5\frac{2}{5}, 6, 6\frac{3}{5} \&c.;$$

qualquer destes systemas de valores correspondentes de x e y igualmente satisfaz a equação. O problema, pois, tem infinitas soluções.

Se o problema é representado por duas equações a tres incognitas, é claro que *qualquer numero* póde ser substituido a uma das incognitas, resultando duas equações entre as outras duas incognitas, que assim ficam determinadas. Ainda, pois, neste caso ha infinitos systemas de valores das incognitas, ou infinitas soluções do problema. O mesmo se diz de qualquer numero de equações e maior numero de incognitas.

Em outro logar se tratará do caso em que apparece menor numero de incognitas do que de equações. Passemos agora á resolução de alguns problemas.

56. QUARTO PROBLEMA. *Pedem-se dous numeros cuja somma seja* a *e a differença* b.

Representando por x e y os dous numeros, e tendo em vista o preceito n. 44, formam-se as duas equações $x+y=a$, $x-y=b$: das quaez se deduz,

sommando-as $\quad 2x=a+b$, donde $x=\frac{a}{2}+\frac{b}{2}$

e subtrah. a 2^a da 1^a, $2y=a-b$, $y=\frac{a}{2}-\frac{b}{2}$

Estes resultados significam que, dada a somma de dous numeros e a sua differença, *o maior é igual a meia somma, mais meia differença; o menor igual a meia somma, menos meia differença.*

A *verificação* dos valores achados consiste em substitui-los por x e y nas duas equações, que se tornam nas identidades

$$\frac{a}{2}+\frac{b}{2}+\frac{a}{2}+\frac{b}{2}=a;$$
$$\frac{a}{2}+\frac{b}{2}-\frac{a}{2}+\frac{b}{2}=b;$$

57. QUINTO PROBLEMA. *Sabe-se que ajuntando 1 ao numerador de certa fracção, ficará esta* $=\frac{1}{3}$, *e que ajuntando 1 ao denominador, valerá* $\frac{1}{4}$; *pede-se o numerador e denominador da fracção.*

Seja esta $\frac{x}{y}$, será, segundo as condições do problema,

$$\frac{x+1}{y}=\frac{1}{3}; \qquad \frac{x}{y+1}=\frac{1}{4}$$

ou expellindo os denominadores, $3x+3=y, 4x=y+1$

Destas equações resulta $x=4, y=15$, sendo pois, a fracção pedida $\frac{4}{15}$. Com effeito

$$\frac{4+1}{15}=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}. \qquad \frac{4}{15+1}=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$$

58. Sexto Problema. *Sendo o peso especifico do ouro 19,26, o da prata 10,47, fez-se uma liga dos dous metaes, cujo peso especifico é 15,37; pergunta-se, qual a porção de ouro, qual a de prata que entraram na liga?*

N. P. Peso especifico é o peso de uma unidade de volume. Sabe-se por experiencia que no mesmo volume o peso do ouro é 19,26 vezes o da agua distillada, e o da prata 10,47 vezes; assim, tomando por unidade o *peso especifico* da agua distillada, 19,25 é o do ouro, 10,47 o da prata.

Tomemos da liga dos metaes uma unidade de volume que pesará 15,37, e seja x a quantidade de ouro, y o da prata nella contidas; x e y serão fracções proprias, e

$$x+y=1.$$

Para formar segunda equação, notemos que, se 1 de ouro pesa 19,26, x pesará $19,26x$, por uma razão semelhante o volume y de prata pesa $10,47y$; logo

$$19,26x+10,47y=15,37$$

Cumpre, pois, rosolver as duas equações (evitando fracções)

$$x + y = 1$$
$$1926x + 1047y = 1537.$$

A 1ª se muda nesta

$$1047\,x + 1047\,y = 1047,$$

que subtrahida da segunda produz

$$879x = 490, \text{ donde } x = \frac{490}{879} = 0{,}57$$

e por substituição na 1ª $y = 1 - x = 0{,}443$.

Assim, qualquer volume da liga dos metaes contém 56 °/ₒ de ouro e 44 °/ₒ de prata.

59. Setimo Problema. *Suppondo ligados ouro, prata e cobre, e sendo o peso especifico do cobre 8,79, do ouro e prata os já mencionados, seja o da liga dos tres metaes 14,23; pede-se a porção de ouro, a de prata e a de cobre,* que chamaremos respectivamente x, y, z.

Este enunciado encerra duas condições, que se traduzem nas equações

$$x + y + z = 1$$
$$19{,}26x + 10{,}47y + 8{,}79z = 14{,}23$$

O problema, pois, é indeterminado; póde-se dar a uma das incognitas qualquer valor e, substituido nas duas equações, determinar os valores das outras duas incognitas.

Se, porém, contivesse o enunciado mais outra condição, por exemplo, se fosse a quantidade de ouro o triplo da de cobre ou

$$x = 3z,$$

seria o problema determinado, pois se traduziria em 3 equações a 3 incognitas. Para resolvel-as, pois que a ultima não comtêm y, convèm eliminar esta incognita entre as duas primeiras; eis o processo;

$$\begin{array}{r}
1047x + 1047y + 1047z = 1047 \\
1926x + 1047y + \ \ 879z = 1423 \\
\hline
879x \qquad\qquad - \ \ 168z = \ \ 376
\end{array}$$

substituindo na ultima o valor $x = 3z$,

$$2637z - 168z = 376$$

ou $2469z = 376$, donde $z = \dfrac{376}{2469} = 0{,}152$

e por substituições na 3ª equação e na 1ª

$$x = 0{,}456, \text{ e } y = 0{,}392.$$

Logo, em cada unidade de volume da liga entra 0,456 de ouro; 0,392 de prata; 0,152 de cobre.

N. B. Todos os problemas, como os dous ultimos, em que se trata de ligas de metaes, misturas de liquidos, e questões semelhantes, são por alguns reunidos debaixo do titulo — Regra de Liga —, de que em muitas arithmeticas se encontram preceitos e methodos. Estes foram omittidos na nossa compilação de arithmetica; porque, em geral, ou as questões de ligas se resolvem por simples multiplicações e divisões, ou, se são mais complicadas, o recurso ás equações algebricas é preferivel a regras não demonstradas, como algumas que se encontram na arithmetica de Bezout.

60. Sirvam para exercicio os seguintes problemas, de que damos sómente o enunciado das condições e o resultado.

8.º PROBLEMA. *Suppondo que em 32 kilos d'agua do mar ha um de sal, pergunta-se quantos kilos d'agua doce devem ajuntar-se áquelles 32, para que em 32 kilos da mistura só haja duas grammas de sal?*

Solução. . . . 15968 kilos

9.º PROBLEMA. *A somma dos tres algarismos de um numero é* 11; *o das unidades é o dobro do das centenas; e sommando a esse numero* 297, *a somma se fórma dos mesmos algarismos em ordem inversa. Pede-se o numero que goza de taes propriedades.*

Solução. E' o numero 326.

10.º PROBLEMA. *Alguem emprega um capital de* 53:600$000 *parte a* 5 *e parte a* 6 %, *e recebe de juros* 2:934$000 *em um anno. Pergunta-se que parte do capital rende a* 5 %, *que parte a* 6 %.

S. 28:200$000 *a* 5 % 25:400$000 *a* 6 %

11.º PROBLEMA. *Uma pessoa tem em giro um capital que rende certo juro; outra que tem* 10,000 *contos mais do que a primeira e percebe mais* 1 %, *realisa* *annualmente* 800 *contos mais que a* 1ª; *e uma* 3ª *pessoa. tendo* 15,000 *contos mais que a* 1ª, *e vencendo demais* 2 °/₀, *tem de renda mais* 1,500 contos *pede-se os capitaes e juros respectivos.*

. 1ª, 30,000 contos a 4 °/₀; 2ª, 40,000 contos a 5 °/₀; 3ª, 45,000 contos a 6°/₀.

§ 3º *Soluções negativas dos problemas; theoria das quantidades negativas.*

61. A resolução dos problemas pelas regras da algebra apresenta algumas vezes circumstancias singulares que, à primeira vista, causam embaraço; mas, bem interpretadas, dão a conhecer novas propriedades que ampliam e generalisam a *lingua algebrica*. A analyse de dous problemas mui simplices, em que apparecem as circumstancias a que nos referimos, tornará mais claras algumas reflexões e preceitos, que ensinarão a interpretar circumstancias semelhantes.

Proponha-se esta questão: *achar um numero, que, sommado ao numero* b, *produza somma igual ao numero* a.

Chamando x o numero pedido, a equação será evidentemente $b+x=a$, donde $x=a-b$. Expressão ou *fórmula*, que dará o valor de x para cada caso particular da questão proposta.

Sendo $a=46$, $b=27$; $x=46-27=19$.

Se fôr $a=25$, $b=38$; $x=25-38$,

diminuição que não se póde effectuar.

Reflectindo, porém, que $38 = 26 + 13$, o valor ultimo de x pode tomar a forma

$$x = 25 - 25 - 13 = -13.$$

Eis o resultado a que se chama *uma solução negativa;* procuremos interpretal-o.

A questão proposta é, no caso presente, *achar o numero que sommado a 38 produz 25*. E' claro que nenhum numero póde satisfazer tal condição; o problema, qual se propõe, é impossivel.

Entretanto, mudando na equação x em $-x$, será para este caso particular $38 - x = 25$, donde se deduz $x = 13$.

Ora, a ultima equação representa evidentemente este problema : *achar um numero que, subtrahido de 38, dê o resto 25*; problema que só differe do proposto em que o numero pedido, de additivo que era, se tornou subtrativo.

E considerado que bastou mudar o signal ao valor de x, para tornar possivel a questão, conclue-se que *a solução negativa* $x = -13$ indica que o problema como foi enunciado é impossivel, mas que, modificado convenientemente, tem por solução o mesmo numero absoluto que apparecêra affecto do signal —.

62. Seja a 2ª questão : *sendo actualmente* a *a idade de um pai*, b *a de seu filho, pergunta-se daqui a quantos annos será a idade do filho a quarta parte da do pai.*

Solução. Seja x o numero de annos pedido; será no fim delles a idade do pai $a+x$, e a do filho $b+x$, será pois a equação

$$b+x=\frac{a+x}{4}, \text{ ou } 4b+4x=a+x, \text{ ou } 3x=a-4b;$$

donde $x=\dfrac{a-4b}{3}$.

Se por exemplo, fôr $a=54$, $b=9$, teremos

$$x=\frac{54-36}{3}=6$$

Com effeito, sendo actualmente as idades do filho e do pai 9 e 54 annos, d'aqui a 6 serão 15 e 60; e $15=\dfrac{60}{4}$.

Seja, porém, $a=46$ e $b=15$, será

$$x=\frac{45-60}{3}=15-20=-5.$$

Para interpretar este resultado, voltemos á equação do problema, que no presente caso particular é

$$15+x=\frac{45+x}{4}.$$

E' facil de vêr que esta equação encerra contradicção; porque, reduzindo o segundo membro á forma $\dfrac{45}{4}+\dfrac{x}{4}$ é claro que ambas estas addições são menores respectivamente do que as duas $15+x$; pelo que não podem as sommas ser iguaes. Portanto, o resultado negativo $x=-5$ indica impossibilidade, como no primeiro caso.

Mudando, pórem, x em $-x$, a equação se tornará em

$-15x = \frac{45-x}{4}$, da qual se deduz $x=5$.

Pois que nesta equação o intervallo de tempo x se subtrahe das duas idades, segue-se que ella exprime este problema : *Sendo actualmente* 45 *a idade de um pai,* 15 *a de seu filho, pergunta-se, ha quantos annos era a idade do filho a quarta parte da do pai?* Enunciado que só differe do primeiro em que o intervallo decorrido se subtrahe, em vez de sommar-se ás duas idades. Interpretação que coincide com a do resultado precedente.

Neste ultimo caso a impossibilidade do problema se verifica por outro meio.

Sendo actualmente a relação entre as idades $\frac{15}{45}=\frac{1}{3}$ e crescendo de quantidades iguaes os dous termos desta fracção, póde ella tornar-se igual a $\frac{1}{4}$? não, porque ficou provado em outra parte que ajuntando o mesmo numero ao numer. e denomin. a fracção cresce; e $\frac{1}{4}<\frac{1}{3}$.

63. A analogia conduz ao seguinte principio geral : 1.° *Em um prablema do 1° gráo todo o valor negativo da incognita indica um vicio na expressão das condições, ou na equação que as representa.* 2.° *Esse valor, prescindindo do signal, é solução de um problema que só differe do proposto em que certas quantidades, de* *additivas que eram, se tornáram subtractivas, ou reciprocamente.*

Demonstração. Toda a solução negativa resulta sempre de que o problema e sua equação nos conduziram a subtrahir um numero maior de outro menor, *operação inexequivel.* A questão, pois, que della depende, tal qual foi a proposta, não tem solução possivel.

Quanto à 2ª parte do principio, jà notamos, em dous exemplos que a mudança de x em $-x$ torna a equação em outra que representa uma questão possivel, e tendo por solução o mesmo numero absoluto, que apparecêra com o signal.

Esta observação póde ser generalisada. Seja a solução negativa $x = -p$; pois que esta expressão, resultando da equação primitiva por meio de transformações que não a alteram essencialmente, não é mais do que a sua expressão resumida; querendo mudar x em $-x$ na equação do problema, é bastante introduzir a hypothese na expressão resumida $n = -p$; ora, feita a mudança, resulta $-x = -p$, donde $x = p$, solução de um problema possivel.

Se a mudança se effectuar na equação primitiva, será o resultado que os termos affectos da incognita se tornarão, os additivos em subtractivos, e os subtractivos em additivos. Logo, a nova equação exprimirá problema só diverso do proposto, em que algumas quantidades passam de additivas a subtractivas, e vice versa. Eis o que se tratava de demonstrar.

Para enunciar o novo problema, o meio mais seguro é *mudar na equação* x *em* —x, *e traduzir a nova equação em linguagem ordinaria.*

64. *Observação.* — O principio estabelecido no numero precedente é rigorosamente verdadeiro para as equações; mas, para que seja applicavel tambem aos problemas, necessario é que as suas condições tenham sido completa e exactamente representadas pelos signaes algebricos. Em alguns problemas ha circumstancias, que as equações não exprimem (do que se verão exemplos, principalmente nas applicações a questões de Geometria), e então a regra (n. 63), verdadeira quanto á equação, póde não ser applicavel á questão proposta. Ter-se-ha notado que os raciocinios empregados referem-se todos ás equações e não á enunciação dos problemas.

65. A interpretação das soluções negativas dos problemas torna necessario considerar expressões negativas isoladas, e applicar-lhes as regras dos signaes estabelecidos para sommar, diminuir, multiplicar ou dividir os termos subtractivos dos polynomios. Porém semelhante *extensão* não parece susceptivel de uma *à priori*; ao menos aquelles que tentáram dá-la não puderam fazêl-o com tal methodo e clareza, que satisfaça os espiritos reflectidos. As demonstrações de regras de signaes no capitulo 1° todas consideram os termos subtractivos dos polynomios, como devendo effectivamente ser diminuidos da somma dos additivos, essas demonstrações nenhuma idéa clara offerecem ao espirito, quando se tenta applica-las a expressões totalmente negativas.

Assim, por exemplo, tendo-se provado que $(a-b)c=ac-cb$, póde notar-se que, se fôr $a<b$, será tambem $ac<bc$, o que significa que a expressão negativa $a-b$, multiplicada pela quantidade positiva c, dá producto negativo $ac-bc$. Porem o raciocinio que nos conduzio á igualdade $(a-b)\,c=ac-bc$ suppõe essencialmente que seja possivel a subtracção $a-b$, ou $a>b$, mas ninguem comprehende o que seja tirar 9 de 5, ou 4 de 0; assim logo que occorre a hypothese $a<b$, o mesmo raciocinio perde toda a significação.

A difficuldade provém de que no calculo das expressões negativas se procede, como se ellas representassem quantidades de especie particular, distincta das positivas; proposição que alguns têm avançado, mas que ninguem conseguio demonstrar, e nem ainda tornar sufficientemente clara e comprehensivel, para poder ser incluida nos elementos da algebra.

Qual seja, em geral, a significação das expressões negativas é questão que tem occupado os maiores genios que illustraram a historia das mathematicas. Comtudo, todas as theorias que pretendem dar-lhes existencia propria e distincta das positivas parecem-nos origem de duvidas, contradicções e obscuridade. A noção mais clara e intelligivel é a que deriva da propria origem destes symbolos, a saber:

Uma expressão negativa é a indicação de uma subtracção impossivel.

Ou *é uma formula algebrica que exprime a differença de duas quantidades, das quaes a que se suppoz maior na deducção da formula achou-se menor em certa hypothese particular.*

Comtudo, *por abreviação*, tratam no calculo as expressões negativas como quantidades; e applicam-lhes, *por convenção*, as regras dos signaes, tornando extensivos aos monomios negativos os preceitos do calculo dos termos subtractivos dos polynomios. Esta *extensão convencional* dos processos demonstrados é confirmada *á posteriori* pela exactidão dos resultados a que conduzem as regras e principios algebricos.

Processos desta natureza são especiaes e caracteristicos da algebra. Em arithmetica e geometria os raciocinios se referem a objectos reaes, cuja existencia sem difficuldade comprehendemos; em algebra, porém, muitas vezes se discorre e se combinam expressões, que realmente não significam quantidade alguma; symbolos representando operações inexequiveis.

Se estes symbolos, depois de praticadas as operações que exige a questão, conservam o seu caracter de inexequibilidade, prestam o serviço de indicar a existencia de alguma contradicção ou impossibilidade nas hypotheses em que se baseou o calculo. E' esta, como vimos, a significação das soluções negativas dos problemas.

Se, porém, os mesmos symbolos se modificam no decurso dos calculos, de modo que venham exprimir relações ou combinações possiveis, a questão proposta se acha resolvida. Muitas vezes um problema, que depende de calculo de quantidades negativas, recebe a final uma solução directa positiva, que satisfaz completamente as condições propostas.

Em um dos capitulos seguintes se encontrará nova confirmação da observação precedente; veremos que as expressões $\sqrt{-3}$ $\sqrt{-a}$ (que se chamam *imaginarias*) não representam quantidade alguma; e, todavia, estas formulas incluindo symbolos de operações inexequiveis, sendo sujeitas aos processos ordinarios, algumas vezes se modificam e conduzem a resultados verdadeiros, que por outros meios podem verificar-se.

E' consequencia da convenção — *tratar como quantidades as expressões negativas, e applicar-lhe as regras ordinarias da algebra* —, é consequencia, que as palavras *somma* e *differença* em algebra não têm a mesma accepção que na arithmetica; em algebra nem a addição inclue necessariamente a idéa de augmento, nem a subtracção a idéa de diminuição.

A somma de $-b$ com a é $a-b$, menor que a. A differença entre as mesmas quantidades é $a+b$, maior que b.

O polynomio $2a^3-3a^2b+5ab^2-7b^3$ é a *somma algebrica* dos monomios $2a^3$, $-3a^2b$, $5ab^2$, e $-7b^3$; entretanto, a sua accepção propria é a differença arithmetica entre a somma dos termos additivos e a dos subtractivos.

7

66. A necessidade de praticar sobre as *expressões negativas* as mesmas operações que sobre as quantidades absolutas, conduz o algebrista a proposições que parecem absurdas, e têm sido objecto de interminaveis controversias. Taes são estas:

1.ª *Toda a quantidade negativa é menor que zero.*

2.ª *De duas quantidades negativas é menor aquella cujo valor absoluto ou positivo é maior.*

Assim $-1 < 0, -2 < -1, -3 < -2$ etc Os que pretendem demonstrar estas proposições fundam-se no seguinte raciocinio: pois que de 0 é preciso tirar 1 para chegar ao resto -1, segue-se que este resto é menor que zero; e de 0 tirando 2, 3, 4, etc., os restos $-2, -3, -4$, etc., devem ser successivamente menores; porque do mesmo subtrahendo 0 quanto mais se tira menos deve restar.

Por muito obscuro que saia este raciocinio, parece que não o podem regeitar os que consideram as expressões negativas como quantidades. Todavia, é forçoso confessar que tirar de zero 1, 2, 3, etc., são palavras que não exprimem idéa clara, nem podem levar aos espiritos a convicção dos principios enunciados.

Admittimos, pois, aquellas expressões, não como relações entre quantidades existentes, mas simplesmente como symbolos algebricos resultantes da convenção — applicar *por extensão* as regras da algebra ás expressões negativas.

Dissemos que esta extensão se confirma *á posteriori*, porque, proseguindo os calculos e modificados os symbolos, conduzem a resultados verdadeiros e exactos, aliunde verificaveis.

Ora, admittindo $0 > -a$ e tambem $-a > -(a+m)$; ajuntando a ambos os membros $a+m$, resulta $a+m > m$, $m > 0$, proposições evidentes (a e m são aqui numeros absolutos).

Em resumo, aceitamos o calculo das expressões negativas, e bem assim os corollarios $-1 < 0$, $-2 < -1$, etc., não como combinações e relações entre quantidades, mas simplesmente como convenções, por meio das quaes a Algebra combina resumidamente os seus symbolos para chegar ao resultado pelo caminho mais curto.

§ 4.° *Discussão dos problemas e equações do 1° grão*

67. Resolvido um problema genericamente, isto é, representando os dados por lettras, convém examinar a que se reduzem os valores das incognitas, em cada hypothese particular que se possa formar ácerca dos dados ; esta investigação é o que se chama a *discussão de um problema* ou de sua equação ou equações. Para poder estabelecer os principios que regulam esta discussão, comecemos por deduzir fórmulas geraes dos valores das incognitas para uma equação, ou para um systema de duas ou tres equações.

Em primeiro logar, toda a equação a uma incognita póde reduzir-se á fórma $ax=b$, exprimindo a a somma algebrica dos multiplicadores de x, b, a dos termos conhecidos préviamente transferidos para o segundo membro.

Desta equação se deduz.

$$x=\frac{b}{a}$$

fórmula geral do valor da incognita, unico que satisfaz à equação $ax=b$.

68. Sejam agora duas equações a duas incognitas ; é claro que cada uma dellas se póde reduzir á fórma $ax+by=c$, expellindo os denominadores e chamando a, b, c as sommas algebricas dos multiplicadores de x, dos de y, e dos termos conhecidos. Tomemos, pois, por equações geraes a duas incognitas

$$ax+by=c$$
$$a'x+b'y=c'.$$

Applicando a estas qualquer dos methodos de eliminação (ns. 50 a 53), se concluem os seguintes valores das incognitas (*fórmulas geraes*) :

$$x=\frac{cb'-bc'}{ab'-ba'} \qquad y=\frac{ac'-ca'}{ab'-ba'}$$

Nestas fórmulas é facil reconhecer como se poderá deduzir immediatamente a expressão de cada uma das incognitas sem applicação dos processos até aqui estudados. Observemos que as duas incognitas são expressas por uma fracção cada uma, tendo, porém, o mesmo denominador, e que para formar este bastará escrever as equações como foram antes e formar os dous productos, do coefficiente de x na primeira pelo de y na segunda e do coefficiente de x na segunda pelo de y na primeira, e indicar que o ultimo deverá ser subtrahido do primeiro e tem-se assim $ab' - ba'$ para denominador commum. Para formar o numerador do valor de x bastará multiplicar o termo conhecido c da primeira equação pelo coefficiente de y na segunda, multiplicar o termo conhecido na segunda, isto é, c' pelo coefficiente de y na primeira e subtrahir este producto do primeiro, teremos assim, para numerador do valor de x, $cb' - bc'$; para formar o numerador do valor de y, bastará multiplicar o termo conhecido c da segunda equação pelo coefficiente de x na primeira e o termo conhecido c da primeira pelo coefficiente de x na segunda, subtrahindo o ultimo producto do primeiro, teremos assim, $ac' - ca'$.

Mais resumidamente fariamos, escrevendo os dous arranjos ab e ba dos coefficientes das incognitas, accentuando as segundas lettras nos dous e separando-os, na mesma ordem, pelo signal —, formando assim o denominador commum aos dous valores.

Para formar o numerador de uma qualquer das incognitas bastará substituir no denominador commum os coefficientes dessa incognita pelos termos conhecidos correspondentes, sem tocar nos accentos, isto é, para ter o numerador do valor de x tomariamos o denominador $ab' - ba'$ e nelle substituiriamos a por c em todos os logares, para o de y substituiriamos b por c em todos os logares.

69. Semelhantemente tres equações a tres incognitas poderão sempre tomar a fórma

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= d \\ a'x + b'y + c'z &= d' \\ a''x + b''y + c''z &= d'' \end{aligned}$$

das quaes se pódem deduzir fórmulas geraes dos valores das incognitas. O estudante applicado não deixará de resolver estas equações e estabelecer as fórmulas.

Resolvendo o systema acima, de tres equações a tres incognitas obteriamos as fórmulas.

$$x = \frac{bc'd'' - bd'c'' + db'c'' - cb'd'' + cd'b'' - dc'b''}{ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a''}$$

$$y = \frac{ac'd'' - ad'c'' + da'c'' - ca'd'' + cd'a'' - dc'a''}{ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a''}$$

$$z = \frac{ab'd'' - ad'b'' + da'b'' - ba'd'' + bd'a'' - db'a''}{ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a''}$$

em que os valores das tres incognitas têm todos o mesmo denominador. Para formar este denominador bastaria escrever os dous arranjos *ab* e *ba* e em seguida collocar a lettra *c* em todos os logares em que cada um delles a podesse receber, accentuando depois a segunda lettra de cada grupo uma vez e a terceira duas vezes.

$$ab \text{ e } ba$$

sendo os dous arranjos, colloquemos *c* em terceiro, em segundo e em primeiro logar em *ab* e tambem em *ba* teremos

$$abc,\ acb,\ cab; \quad bac,\ bca,\ -\ cba$$

accentuando como dissemos vem

$$ab'c'',\ ac'b'',\ ca'b''\ ;\ ba'c'',\ bc'a'',\ cb'a''$$

Escrevendo estes termos na ordem em que estão e dando-lhes signaes alternativamente positivo e negativo, teremos

$$ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a''$$

que é o denominador commum aos tres valores de x, y e z.

Para formar os numeradores notemos que bastaria; para x escrever os dous arranjos *bc* e *cb* dos coefficientes das outras incognitas, y e z, e nelles collocar d em todos os logares possiveis; teriamos

$$bcd,\ bdc,\ dbc\ ; \quad cbd,\ cdb,\ dcb\ ;$$

accentuando como para o denominador e escrevendo do mesmo modo teremos

$$bc'd'' - bd'c'' + db'c'' - cb'd'' + cd'b'' - dc'b''\ ;$$

para y tomariamos os arranjos *ac* e *ca* dos coefficientes das outras incognitas e nelles introduziriamos d como antes e teriamos

$$ab'd'' - bd'c'' + da'c'' - ca'd'' + cd'a'' - da'c''$$

para z tomariamos *ab* e *ba* e teriamos, procedendo em tudo como antes,

$$ab'd'' - ad'b'' + da'b'' + ba'd'' + bd'a'' - bd'a''$$

Será facil, bem que longo, organizar fórmulas semelhantes para o caso de quatro ou mais incognitas.

70. A applicação destas fórmulas consiste em substituir nellas em logar de a, b, c, a', b', etc., os valores numericos que competem a cada caso particular. Por exemplo, o problema 10º (n. 60), posto em equação, e expellidos os denominadores, conduz ás duas equações

$$x + y = 53600$$
$$5x + 6y = 293400 \text{ (*)}$$

e confrontadas estas com as duas equações geraes a duas incognitas, resulta $a=1, b=1, c=53600, a'=5, b'=6, c'=293400$, valores que, substituidos nas fórmulas geraes de n e y, as tornam em

$$x = \frac{53600\times6-293400\times1}{6-5} = \frac{321600-293400}{1} = 28200$$

$$y = \frac{293400\times1-53600\times5}{6-5} = \frac{293400\times268000}{1} = 25400$$

Quando alguma das lettras tem valor negativo, cumpre attender ao signal na substituição e nas operações arithmeticas.

Passamos á discussão das fórmulas geraes.

71. Tendo cada valor da incognita a fórma de fracção, em que cada termo póde ser positivo, negativo ou zero, facilmente se vê que nas applicações particulares as incognitas podem ter cinco especies de valores, a saber ; 1º *o valor* 0; 2º *valores positivos* ; 3º *negativos*; 4º *da fórma* $\frac{A}{0}$; 5º da *fórma* $\frac{0}{0}$. Pretende-se esta-

(*) Toma-se por unidade o *mil réis*, para simplificar os calculos.

belecer de modo geral a significação de cada um destes resultados.

1.º O valor 0 ordinariamente representa uma solução no problema, no sentido das condições com que foi enunciado.

Se, *v. gr.*, a incognita é a differença entre duas quantidades, aquelle resultado significa que ellas são iguaes; se a questão é de um lapso de tempo, o valor 0 indica a origem do movimento, ou o 1º instante do tempo; a interpretação em cada caso é simples, attendendo ás circumstancias particulares.

2.º Os *valores positivos* são tambem de ordinario soluções do problema tal qual foi proposto. Exceptúa-se o caso em que alguma condição essencial não tenha sido expressa na equação; pois, neste caso, os valores de x, que satisfazem á equação, pódem não satisfazer ao problema. Se, por exemplo, além das condições traduzidas algebricamente se exige que sejam inteiros os numeros pedidos, qualquer valor fraccionario positivo, embora verifique a equação, não é solução do problema.

3.º A interpretação dos *valores negativos* das incognitas ficou estabelecida no n. 63. E ainda que alli se tratou sómente de uma incognita, reflectindo nos raciocinios então empregados, se conhece que são applicaveis ao caso de duas ou mais incognitas; o principio, pois, é geral, e a elle voltaremos nas applicações.

72. 4.º Procuremos agora interpretar as expressões da fórma $\frac{A}{0}$.

Em primeiro logar, seja a equação a uma incognita

$$ax = b, \text{ donde } x = \frac{b}{a}.$$

Se de alguma hypothese particular ácerca dos dados resulta $a = 0$, o valor de x será

$$x = \frac{b}{0}$$

Ora, neste caso, a equação se muda em $0 \times x = b$, que nenhum numero determinado póde verificar. O problema, pois, é impossivel.

E', porém, de notar que, podendo a equação ultima reduzir-se á fórma

$$0 = \frac{b}{x},$$

se dermos a x valores crescentes indefinidamente, quanto maiores forem, mais a fracção $\frac{b}{x}$ se approximará de 0, e assim a equação será proximamente exacta. Podemos, pois, tomar para valor de x um numero tão grande, que torne a fracção $\frac{b}{x}$ menor que qualquer fracção que se determine por pequena que seja.

Por esta razão se diz que o *infinito* satisfaz neste caso á equação, ou que o valor de x é *infinito*.

Tal é a significação do valor $\frac{b}{0}$.

Este valor em algum caso constitue verdadeira solução, do que se verão exemplos nos problemas de geometria; mas é certo que a equação não admitte para x valor algum determinado, ou *finito*.

73. Sejam agora as duas equações a duas incognitas

$$\left.\begin{array}{l} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{array}\right\} \text{das quaes deduzimos} \left\{ x=\frac{cb'-bc'}{ab'-ba'}\;\; y=\frac{ac'-ca'}{ab'-ba'} \right.$$

Admittamos que seja $ab'-ba'=0$, não o sendo os dous numeradores, que por abreviação chamamos A e B; teremos

$$x=\frac{A}{0},\; y=\frac{B}{0}$$

Para interpretar estes resultados (que como vimos, só podem ter por valor o *infinito*), notemos que da hypothese

$ab'-ba'=0$ se deduz $a'=\frac{ab'}{b}$, valor que substituido

na segunda equação $a'x+b'y=c'$, a converte nesta

$$\frac{ab'}{b}x+b'y=c', \text{ ou em } ax+by=\frac{bc'}{b'},$$

expellindo os denominadores e dividindo por b'. Ora, sendo o 1º membro desta ultima equação identico com o da 1ª $ax + by = c$, deverão tambem ser iguaes os 2ºs membros, isto é,

$$c = \frac{bc'}{b} \text{ ou } cb' = bc' ;$$

mas esta igualdade é impossivel, pois que o numerador do valor de x não é zero. Vê-se, pois, que *as equações, são incompativeis*, isto é, *não podem ser ambas satisfeitas por nenhum systema de valores finitos de x e y.*

N. B. E' de vêr que não póde x tomar a fórma $\frac{A}{0}$ sem que y se reduza tambem a $\frac{B}{0}$

Se fossem tres ou mais equações, provar-se hia de modo analogo que *todo o valor de qualquer incognita da fórma $\frac{A}{0}$ corresponde a uma impossibilidade de resolver o problema, ou ao menos de verificar a equação.*

74. 5.º Passamos aos valores que se tornam em $\frac{0}{0}$. Terá esta fórma o valor de x no caso de uma equação a uma incognita, se fôr ao mesmo tempo $a = 0$, e $b = 0$. Porém, na mesma hypothese, a equação é $0 \times x = 0$; e todo o numero *finito* positivo ou negativo póde satisfazer a esta equação. *Assim, o problema é indeterminado.*

75. Antes de passar ás duas equações, notemos uma excepção que occorre frequentemente ao principio que se acaba de estabelecer. Algumas vezes o *symbolo* $\frac{0}{0}$ *indica apenas a existencia de um factor commum aos termos da fracção, factor que se torna em zero na hypothese particular que produziu o symbolo; então a fracção simplificada póde ter valor determinado.* Nos exemplos melhor se comprehende esta observação.

Supponhamos que, resolvendo um problema, chegamos ao resultado $x=\frac{a^3-b^3}{a^2-b^2}$ que, no caso de ser $a=b$, se muda em $x=\frac{0}{0}$.

Notemos, porém, que o numerador a^3-b^3 é o producto de dous factores $(a^2+ab+b^2)(a-b)$; e o denominador $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$; assim o valor de x se transforma em

$$x=\frac{(a^2+ab+b^2)(a-b)}{(a+b)(a-b)}$$

o factor $a-b$ aniquila-se na hypothese $a=b$, e é isso o que reduz a expressão a $\frac{0}{0}$. Porém, supprimindo o factor commum, será

$$x=\frac{a^2+ab+b^2}{a+b},$$

expressão que, sendo $a=b$, se reduz a

$$x=\frac{3a^2}{2a}=\frac{3a}{2},$$

desapparecendo assim o symbolo de indeterminação.

Seja para segundo exemplo

$$x=\frac{a^2-b^2}{a^2-2ab+b^2}=\frac{(a+b)(a-b)}{(a-b)(a-b)},$$

Suppondo $a=b$, apparece $x=\frac{0}{0}$ por causa do factor commum $a-b$; supprimindo este e na mesma hypothese,

$$x=\frac{a+b}{a-b}=\frac{2a}{0}$$

valor *infinito*, ou symbolo de impossibilidade de satisfazer a equação.

Vê-se, pois, que *o symbolo* $\frac{0}{0}$ *algumas vezes desapparece, simplificando-se a fracção que tomou aquella fórma antes de applicar-lhe a hypothese particular que reduzira a zero os dous termos.*

76. Sejam agora as duas equações a duas incognitas (n. 68), e nellas supponha-se $cb'-bc'=0, ab'-ba'=0$; será $x=\frac{0}{0}$.

Reflectamos, porém, que, admittida a hypothese

$ab' - ba' = 0$, as duas equações se transformão nas seguintes, como já vimos (n. 63):

$$ax + by = c$$
$$ax + by = \frac{bc'}{b'};$$

e que da outra hypothese $bc' = cb'$ se deduz $c = \frac{bc'}{b'}$; pelo que as duas equações coincidem; e o *problema*, sendo de duas incognitas e uma só equação, é *indeterminado* (n. 55).

Em geral, *quando o valor de uma incognita toma a fórma* $\frac{0}{0}$, a não dar-se o caso de um factor commum (n. 76), *este valor é indeterminado; e tambem o é o problema, se alguma outra incognita não tomar a fórma* $\frac{A}{0}$ *ou se não apparecer outro symbolo de impossibilidade,*

E' facil de vêr que no caso de duas equações sendo x indeterminado, ou da fôrma $\frac{0}{0}$, o mesmo succede a y.

Com effeito, combinando as duas hypotheses $cb' - bc' = 0$, e $ab' - ba' = 0$, deduzimos da 2ª $b = \frac{ab'}{a'}$, e substituindo este valor na 1ª.

$$cb - \frac{ab'c'}{a'} = 0, \text{ ou } ab'c' - ab'c' = 0, \text{ ou } ca' - ac' = 0.$$

Logo, o valor de y tambem se reduz a $\frac{0}{0}$. Esta propriedade não pertence ao maior numero de equações, mas sòmente ao caso de duas.

77. Na pratica muitas vezes se produzem signaes de indeterminação ou de impossibilidade, apparentemente diversos dos mencionados. Se na resolução de equações particulares se faz uso das formulas geraes, resulta sempre alguns dos symbolos analysados; resolvendo, porém, directamente as equações numericas, ás vezes os resultados parecem diversos. Por exemplo, succede que, eliminando alguma incognita, appareça $0=0$, que exprime tambem indeterminação; ou, $0 = a$ (sendo a um numero *finito*), que exprime impossibilidade.

Porém, $0=0$ realmente não differe de $0\times x=0$, donde $x=\frac{0}{0}$; $0=a$ equivale a $0\times x=a$, que dá $x=\frac{a}{0}$.

Já se provou (n. 55) que todo o problema que contem menor numero de equações que de incognitas é *indeterminado*, E' tempo de examinar o caso de apparecerem mais equações do que incognitas.

Sejam em geral m equações a n incognitas, sendo $m>n$. Applicando o processo da eliminação, póde-se fazer desapparecer todas as incognitas, restarão $m-n$ equações ou igualdades entre os dados da questão. *Se* *estas igualdades (que se chamam equações de condição) se verificarem, o problema será possivel ; e, no caso contrario, absurdo.*

Em resumo : 1.° Havendo menos equações do que incognitas, o problema é indeterminado.

2.° E' possivel e determinado o problema que conduz a tantas equações quantas incognitas.

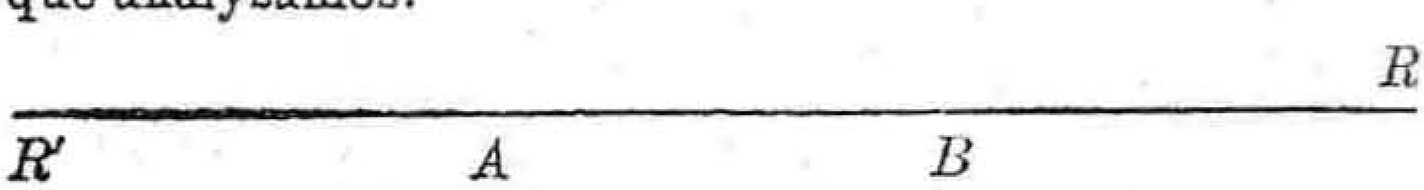
3.° Sendo maior o numero de equações que o das incognitas, o problema só é possivel se se verificarem as *equações de condição*, que resultam de eliminar todas as incognitas.

N. B. Para que sejam verdadeiros os principios precedentes, devem as equações ser distinctas ; se alguma resultar de uma ou de outras, ou nellas estiver comprehendida, não póde essa entrar na conta das mencionadas na recopilação precedente. De tudo veremos exemplos na

---

Discussão de alguns problemas (67)

78. Tomemos para 1° exemplo o seguinte problema, cuja discussão offerece as principaes circumstancias que analysamos.



12° Problema. *Um correio parte de* A *e caminha na direcção* AR, *fazendo* m *leguas por hora ; no mesmo* *instante outro parte de B na mesma direcção, caminhando* n *leguas por hora. Pergunta-se, a que distancias dos pontos* A e B *terão de encontrar-se.*

Solução. Seja R o ponto de encontro; x e y as duas distancias AR e BR em leguas; e a a distancia conhecida AB. Segue-se do enunciado da questão, que

$$x-y=a$$

e será esta a primeira equação do problema. Para formar a outra, notemos que os caminhos x e y devem ser feitos em tempos iguaes. Ora, se o 1º correio anda m leguas em uma hora, andará x leguas no tempo $\frac{x}{m}$, o que se conclue da proporção

$$m:1::x:\frac{x}{m}$$

Do mesmo modo para o segundo correio

$n:1::y:\frac{y}{n}$, tempo em que anda y leguas.

Será, pois, a segunda equação

$$\frac{x}{m}=\frac{y}{n}, \text{ ou } nx-my=0.$$

Combinada esta com a primeira $x-y=a$, obtem-se

$$x=\frac{am}{m-n},\ y=\frac{an}{m-n}$$

Discussão. 1.º Seja para primeira hypothese $a=0$, (sendo m differente de n); della resulta $x=0$, $y=0$. Porém $a=0$ significa evidentemente que os correios partem do mesmo ponto; e então $x=y=0$ indica que o encontro é no ponto da partida, o que aliás é evidente.

2.° Não sendo $a=0$, emquanto fôr $m>n$, os valores de x e y são positivos e exprimem uma solução da questão. Com effeito $m>n$ quer dizer que o correio que está mais atrazado anda mais; logo, depois de certo tempo ha-de alcançar o outro.

3.° Se fôr $m<n$, ou $m-n$ negativo, os valores de x e y, serão negativos e podem assim exprimir-se

$$x=-\frac{am}{n-m};\ y=-\frac{an}{n-m}.$$

Estes valores negativos devem indicar uma modificação nas condições do problema, para que seja possivel; para descobrir em que consiste esta modificação, notamos que, segundo a hypothese $m<n$, o correio que está mais atrazado tem menor velocidade, e assim é impossivel que alcance o outro depois da partida. Porém a clausula de sòmente se moverem de A e B não foi expressada algebricamente, e sim a de partirem (ou passarem) no mesmo instante pelos dous pontos. Supponha-se, pois, que elles se moviam anteriormente por tempo indefinido, segundo a linha AB, e ambos da esquerda para a direita, achando-se o 1° em A, quando o 2° passou por B. Então os dous correios devem ter-se encontrado antes desse momento em um ponto R', depois do qual o

de mais velocidade começou a adiantar-se. As distancias AR' e BR' são precisamente os valores negativos do x e y. Com effeito, para exprimir algebricamente a nova hypothese, basta mudar-se os signaes de x e de y, e então as duas equações se mudam em

$$\left.\begin{array}{r} y - x = a \\ my - nx = a \end{array}\right\} \text{e os valores das incognitas em} \quad x = \frac{am}{n-m},\ y = \frac{an}{n-m},$$

solução do problema modificado, suppondo o encontro antes e não depois da estada simultanea dos dous correios em A e B.

E' facil a verificação dos ultimos valores de x e y por meio das equações respectivas.

4.° Seja agora $m=n$, ou $m-n=0$; os valores das incognitas serão

$$x = \frac{am}{0},\ y = \frac{an}{0},$$

symbolos do *infinito*, que revelam impossibilidade do problema, como ficou provado. Recorrendo ao enunciado, o mesmo se descobre, pois sendo $m=n$, os dous correios têm igual velocidade, e assim, partindo de pontos diversos na mesma direcção, conservam sempre entre si a mesma distancia, e, pois, *nunca se encontram*.

O *infinito* se representa tambem pelo signal ∞; pelo que uma quantidade menor do que qualquer grandeza dada,

ou 0, póde tambem representar-se por $\frac{A}{\infty}$. Assim

$$\frac{A}{0}=\infty\,;\frac{A}{\infty}=0.$$

5.° Se tivermos ao mesmo tempo $m-n=0$ e $a=0$, os valores das incognitas serão

$$x=\frac{0}{0},\ =\frac{0}{0}$$

que significam ser o problema indeterminado, ou ter uma infinidade de soluções. Com effeito, $a=0$ significa que os correios partem do mesmo ponto ; $m=n$ indica que as velocidades são iguaes ; ora, nessas circumstancias, nunca se separam elles, e pois, o encontro é em todos os instantes do movimento.

As equações do problema tambem mostram a indeterminação ; porque, sendo $a=0$, e $m=n$, ellas se mudam em

$$\left.\begin{array}{r}x-y=0\\ mx-my=0\end{array}\right\}\text{ ou }\left\{\begin{array}{l}x-y=0\\ x-y=0\end{array}\right.$$

Temos, pois, uma só equação a duas incognitas, que exprimem um problema indeterminado.

79. 13° Problema. *Tem-se duas especies de moedas; o numero* a *das primeiras faz uma dobla; e são precisas* b *das segundas para fazer a mesma quantia. Quer-se fazer pagamento de uma dobla em* c *moedas dos dous valores; pergunta-se : quantas se darão de cada especie?*

As equações são:

$$x+y=c,\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1;\ \text{donde}$$

$$x=\frac{a\,(c-b)}{a-b},\ \text{e}\ y=\frac{b\,(a-c)}{a-b}$$

Servirá de exercicio á discussão destas fórmulas, e, para encaminhal-a, apontaremos as hypotheses que conduzem a resultados notaveis.

1ª hyp. $c=b$, ou $c=a$... uma incognita positiva, outra igual a zero; *pagamento em moedas de um só valor.*

2ª hyp. $a>c>b$... valores positivos; *resolvem o problema (se forem inteiros) tal qual foi proposto.*

3ª hyp. $c>a>b$, ou $c<b<a$... valores, um positivo outro negativo; *pagamento em uma especie e troco em outra.*

4ª hyp. $a=b$ sendo c differente... valores infinitos; *problema impossivel.*

5ª hyp. $a=b=c$; *problema indeterminado.*

80. 14º Problema. *Pedem-se dous numeros, que estejam entre si como* m : n, *e taes que, ajuntando* a *ao primeiro e* b *ao segundo, o producto dos dous receba o augmento* p. As equações são

$$nx=my$$
$$bx+ay=p-ab;$$

$$\text{logo } x = \frac{m(p - ab)}{na + mb} \text{ e } y = \frac{n(p - ab)}{na + mb}.$$

A discussão destes resultados tem toda a analogia com a dos precedentes.

CAPITULO TERCEIRO

Problemas indeterminados

81. Dos principios e regras estabelecidas no capitulo precedente, especialmente no n. 55, se conclue que todo o problema representado por menor numero de equações do que o das incognitas é *indeterminado*. Isto significa que as suas equações podem ser satisfeitas por uma infinidade de *systemas de valores* das incognitas.

A's vezes, porém, exige a natureza da questão que os numeros pedidos sejam inteiros; e então, á incognita ou incognitas, cujo valor é arbitrario, sómente se podem attribuir valores inteiros, e ainda unicamente aquelles que, substituidos nas equações, fizerem tambem inteiros os valores das outras incognitas. Esta condição restringe muito o numero das soluções, maximo tratando sómente das soluções directas, isto é, em numeros positivos, caso em que podem até reduzir-se a uma só, ou mesmo a nenhuma; do que se verão exemplos.

Resolver em numeros inteiros os problemas indeterminados do 1° grão é o objecto do presente capitulo; e sòmente incluimos nestes Elementos as questões em que se considera *mais uma incognita* do que o numero das equações.

---

§ 1.° Questões de duas incognitas

82. Toda a equação numerica do 1° grão a duas incognitas póde reduzir-se à fórma $ax + by = c$ (n. 68), sendo a, b, c numeros inteiros, positivos ou negativos.

Quando os coefficientes a, b *têm algum divisor commum que não o seja de* c, *a equação não póde ser satisfeita em numeros inteiros*. Porque, chamando h o divisor commum de a e b, e dividindo por elle a equação, temos

$$\frac{a}{h}x + \frac{b}{h}y = \frac{c}{h};$$

ora, segundo a hypothese, o 1° membro é a somma de dous numeros inteiros; logo, só poderá verificar-se a equação, se fôr c divisivel de h.

E, pois, que o factor commum aos tres coefficientes póde ser supprimido, segue-se que sempre *podemos suppor* a e b *primos entre si*.

Isto posto, passemos à resolução dos problemas indeterminados; e notemos que todos os systemas de valo res das incognitas facilmente se determinam, uma vez obtidas expressões desta fórma

$$x = mp + n$$
$$y = m'p + n'$$

sendo m, m' n, n' numeros conhecidos, e p qualquer numero, todos inteiros. Porquanto, fazendo $p = 0, 1, 2, 3$, etc., cada um destes numeros substituido nas fórmulas dá para x e y valores tambem inteiros.

Os valores geraes das incognitas da fórma mencionada costumam denominar-se *funcções inteiras* de uma indeterminada; fórmam-se ellas em cada caso particular por meio de um artificio analytico, que nos exemplos facilmente se percebe, mas que não é igualmente simples traduzir em regra geral.

83. 1º PROBLEMA. *Pagar 159 contos, tendo sómente notas de 8 e de 13 contos.*

Seja x o numero de notas de 8 contos, y o de 13. Será a equação do problema.

$$8x + 13y = 159,$$

equação que se trata de resolver em numeros *inteiros e positivos*. Della se deduz

$$x = \frac{159 - 13y}{8} = 19 - y + \frac{7 - 5y}{8} \text{ (esgotando a divisão).}$$

Ora, sendo y inteiro, para que o seja tambem x é *necessario e é bastante* que o valor de y seja tal, que torne em numero inteiro a fracção $\frac{7-5y}{8}$. Chamando a este numero inteiro, temos a equação

$$\frac{7-5y}{8}=a;\ \text{ou}\ 7-5y=8a;\ \text{donde}$$

$$y=\frac{7-8a}{5}=1-a+\frac{2-3a}{5}.$$

O valor de x se muda $19-y+a$. Pelo que todo o valor inteiro de a que fizer $2-3\ a$ divisivel por 5, dará para x e y valores inteiros; tudo, pois, se reduz á condição de que a fracção $\frac{2-3a}{5}$ se torne em numero inteiro; representando-o por b, será

$$\frac{2-3a}{5}=b;\ \text{ou}\ 2-3a=5b;\ \text{donde}$$

$$a=\frac{2-5b}{3}=-b+\frac{2-2b}{3}.$$

Esta ultima fracção deve ainda tornar-se inteira; seja

$$\frac{2-2b}{2}=c,\ \text{será}\ 2-2b=3c,\ b=\frac{2-3c}{2}=1-c-\frac{c}{2}.$$

E suppondo finalmente $\frac{2}{c}=d$, resulta $c=2\ d$ de fórma inteira.

Substituindo este valor nos de b, a, y, x, obtemos

$$b = 1 - 2d - d = 1 - 3d$$
$$a = -1 + 3d + 2d = -1 + 5d$$
$$y = 1 + 1 - 5d + 1 - 3d = 3 - 8d$$
$$x = 19 - 3 + 8d - 1 + 5d = 15 + 13d.$$

As duas ultimas expressões ou valores das incognitas representam o problema, do mesmo modo que a equação $8x + 13y = 159$. Com effeito, esta equação se reproduz, eliminando entre aquelles dous valores a quantidade d, o que serve de verificação.

Fazendo successivamente $d = 0, 1, 2, 3, 4$, etc., ou $d = -1, -2, -3$, etc., teremos para x e y *uma infinidade de systemas de valores inteiros*, positivos ou negativos. Desejando, porém, sómente os positivos, o seu numero se torna mui limitado; porque o valor

$$y = 3 - 8d$$

sómente é positivo, suppondo d negativo ou zero; pelo que ficam excluidas todas as hypotheses $d = 1, 2, 3, 4$, etc. Demais, sendo $d = -2, -3, -4$, etc., em todos estes casos a formula

$$x = 15 + 13d$$

se torna negativa; unicamente $d = -1$ faz x positivo.

Existem, pois, duas unicas soluções directas da questão, a saber:

Sendo $d = 0$; $x = 15$, e $y = 3$

» $d = -1$; $x = 2$, e $y = 11$.

O que significa : que se podem pagar os 159 contos, ou com 15 notas de 8 contos e 3 de 13, ou com duas das primeiras e 11 das outras. Com effeito

$$8\times 15+13\times 3=120+39=159$$

e tambem $8\times 2+13\times 11=16+143=159$

84. Um processo analogo ao precedente deve sempre conduzir a uma ultima expressão, em que o coefficiente de uma indeterminada seja *a unidade*; porquanto, analysada a operação, vemos que se dividio *o maior pelo menor dos coefficientes de* x *e* y (13 *por* 8); *o menor pelo resto da 1ª divisão* (8 *por* 5); e assim por diante; o que equivale a procurar o maior divisor commum dos dous coefficientes; sendo estes primos entre si, apparecerá necessariamente um resto igual a 1, que será divisor na seguinte transformação; logo, as fracções hão de desapparecer.

Ter-se-ha tambem notado que o coefficiente da indeterminada na expressão final de x é o de y na equação primitiva ; e na de y ao contrario é o de x.

85. Este facto é consequencia da seguinte propriedade, que se demonstra sem dependencia do processo exposto.

Se $x=m$, $y=n$ *representam uma solução inteira, da equação* $ax+by=c$, *tem-se necessariamente*

$$x=m+bp$$
$$y=n-ap$$

sendo p um numero inteiro indeterminado, positivo ou negativo.

Com effeito, segundo a hypothese

$$am+bn=c$$

e subtrahindo esta da proposta,

$$a(x-m)+b(y-n)=o$$

$$\text{donde } y-n=-\frac{a(x-m)}{b}.$$

O segundo membro deve ser numero inteiro, pois que o é o primeiro $y-n$; logo, sendo a e b primos entre si, conclue-se do principio estabelecido (arithm. 112), que $x-m$ deve ser divisel por b; chamando p o quociente inteiro, temos

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{x-m}{b}=p\\[2ex] y-n=-ap\end{array}\right\}\text{ donde }\left\{\begin{array}{l}x=m+bp\\[2ex] y=n-ap\end{array}\right.$$

o que demostra a proposição enunciada.

86. Se entre os dous coefficientes houver divisor commum, que não se tenha advertido, o calculo mostrará a impossibilidade de verificar a equação em numeros inteiros. Por exemplo

$$49x-35y=11$$

7 divide 49 e 35 não divide 11. Deduz-se,

$$y=\frac{49x-11}{35}=x+\frac{14x-11}{35}$$

Suppondo $\frac{14x-11}{35}=a$ ou $14x-11=35a$,

resulta $x=\frac{35a+11}{14}=2a+\frac{7a+11}{14}$.

Seja tambem $\frac{7a+11}{14}=b$, ou $7a+11=14b$,

conclue-se $a=\frac{14b-11}{7}=2b-1-\frac{4}{7}$,

equação evidente *impossivel sendo* a *e* b *numeros inteiros*. Logo, tambem o é a equação proposta.

87. Este processo admitte frequentemente simplificações que abreviam o resultado; simplificações que consistem em tornar o menor que fôr possivel o coefficiente de cada indeterminada nas transformações successivas; mostremos em um exemplo estas abreviações. Seja a equação

$$17x-49y=-8$$

della se deduz $x=\frac{49y-8}{17}=2y+\frac{15y-8}{17}$.

Verifica-se esta divisão parcial, notando que $49=2\times17+15$, porém, como tambem $49=3\times17-2$, podemos, em logar da expressão supra, admittir esta

$$x=\frac{49y-8}{17}=3y+\frac{-2y-8}{17}=3y-\frac{2(y+4)}{17};$$

mais vantajosa que a 1ª, por ter y menor coefficiente.

Demais, devendo a ultima fracção converter-se em inteiro, e sendo 2 primo com 17, deve ser $y+4$ divisivel por 17; pelo que

$$\frac{y+4}{17}=a, y+4=17a, y=17a-4.$$

Logo, $x=51a-12-2a=49a-12$.

Neste exemplo, a não se empregarem as abreviações, seriam necessarias mais duas transformações para chegar ao resultado precedente.

As fórmulas $x=49a-12$, $y=17a-4$ mostram que todas as hypotheses $a=0, -1, -2, -3$, etc., tornam as incognitas negativas; porém estas $a=1$, 2, 3, etc., ao infinito as fazem positivas. Logo, a questão tem infinitas soluções. Assim:

Sendo $a=1, x=37, y=13$
» $a=2, x=86, y=30$
» $a=3, x=135, y=47$

e assim por diante.

O methodo seguido, assim como as abreviações, sómente se explicam com clareza em exemplos particulares; porém dos casos tratados facilmente se collige o que em outros se deve praticar.

88. 2.º PROBLEMA. *Achar o numero que, dividido por 9, dê o resto 7, e, dividido por 11, dê o resto 4.*

Chamando N o numero pedido, x e y os quocientes da divisão por 9 e por 11 deve ser

$$N=9x+7, \text{ e } N=11y+4$$

Temos, pois, a equação

$$9x+7=11y+4, \text{ ou } 9x-11y=-3.$$

Applicando a esta as conhecidas transformações, temos

$$x=\frac{11y-3}{9}=y+\frac{2y-3}{9}$$

$$\frac{2y-3}{9}=a, 2y-3=9a, y=\frac{9a+3}{2}=4a+1+\frac{a+1}{2}$$

$$\frac{a+1}{2}=b, a=2b-1.$$

Logo $y=8b-4+1=9b-3$.

Seria facil obter o valor de x por semelhante substituição, mas isso é inutil; pois x e y não são mais do que *incognitas auxiliares*, sendo N o numero pedido ou a incognita da questão. Ora, substituido o valor de y na expressão $N=11y+4$, resulta

$$N=99b-33+4=99b-29$$

que resolve o problema.

Vê-se desta fórmula que todos os valores negativos dados a b, e ainda a hypothese $b=0$ fazem N negativo mas que todo o valor inteiro e positivo de b produz para

N valor inteiro e positivo. Tem, pois, a questão infinitas soluções, a saber:

$$b = 1, 2, 3, 4, \text{ etc.}$$
$$N = 70, 169, 268, 367, \text{ etc.}$$

Estes numeros fórmam progressão por differença, e o mesmo acontece todas as vezes que a questão tem infinitas soluções.

89. Ter-se-ha notado nas equações e questões resolvidas que o numero de soluções positivas é ás vezes illimitado, outras vezes mui circumscripto. A' simples inspecção dos signaes da equação $ax + by = c$ se póde determinar se o numero de soluções positivas é ou não limitado.

1.° *Se os dous termos* ax *e* by *tiverem o mesmo signal, o numero de valores positivos é necessariamente limitado.*

Com effeito, a equação neste caso tem a fórma

$$ax + by = \pm c, \text{ donde } x = \frac{\pm c - by}{a};$$

ora, suppondo $-c$, será x essencialmente negativo; pelo que o *problema não tem, solução alguma em numeros positivos.*

E quando tivermos na fórmula $+c$, para ser x positivo, é preciso que seja

$$by < c, \text{ ou } y < \frac{c}{b},$$

o que *limita* o numero de soluções.

2.° *O numero de soluções positivas é illimitado, quando os termos* ax *e* by *têm signaes diversos na equação.*

Demonstração. Da equação $ax - by = \pm c$ se deduz

$$x = \frac{by \pm c}{a}.$$

Este valor no caso de $+c$ é essencialmente positivo, para todo o valor positivo de x; logo, existem infinitas soluções.

Se tivermos na fórmula $-c$ para fazer x positivo é necessario que seja $by > c$ ou $y > \frac{c}{b}$. Mas esta condição não limita o numero de valores de y, porque acima do numero determinado $\frac{c}{b}$ se podem tomar infinitos valores para y, o que fornece *infinitas soluções.*

---

§ 2.° Problemas indeterminados a tres ou mais incognitas

90. Se em logar de uma equação a duas incognitas conduzir a questão a duas equações a tres incognitas, eliminando uma dellas, ficaremos reduzidos ao caso precedente; e, depois de achadas as fórmulas para as duas incognitas, será necessario substituil-as em alguma das equações, achar o valor da incognita eliminada; e se este tiver fórma fraccionaria, sujeital-o ás mesmas transformações que ficam expostas. Esta regra se tornará clara nos exemplos.

3.° PROBLEMA. *Tendo-se moedas de ouro do valor de* 20$, 16$, *e* 9$, *quer-se perfazer a quantia de* 750$, *em* 47 *moedas dos tres valores.*

N. B. Tomando por unidade *um mil réis,* as quantias que figuram no problema ficam reduzidas a 20, 16, 9, 750, supprimidos em cada uma tres zeros. Esta simplificação occorre muitas vezes nos calculos da nossa moeda.

$$x+y+z=47$$
$$20x+16y+9z=750$$

A eliminação de z se obtem, multiplicando a 1ª por 9, e, subtrahindo o resultado da 2ª, assim se fórma a equação

$$11x+7y=327, \text{ da qual } y=\frac{327-11x}{7}=$$
$$=46-x+\frac{5-4x}{7}.$$

$$\text{Seja } \frac{5-4x}{7}=a, \text{ teremos } x=\frac{5-7a}{4}=1-2a+\frac{1+a}{4}$$

$$\text{»} \quad \frac{1+a}{4}=b, \qquad \text{»} \quad a=4b-1$$

e fazendo as substituições em x e y na 1ª equação

$$x=\ 1-8b+2+b=3-7b$$
$$y=46-3+7b+4b-1=42+11b$$
$$z=47-3+7b-42-11b=2-4b.$$

N. B. Por ter z na 1ª equação o coefficiente 1, o seu valor se achou logo de fórma inteira; se assim não fosse proseguiria a transformação do valor de z, e nos de x e y se substituiria por b o seu valor expresso na ultima indeterminada.

Examinando os tres valores das incognitas, concluimos:

1.º Sendo b positivo, para que sejam x e z é preciso que seja $7b < 3$ e $4b < 2$, ou $b < \frac{3}{7}$, $b < \frac{2}{4}$; logo, devendo b ser inteiro, não póde ter valor algum positivo.

2.º Sendo $b = 0$, $x = 3$, $y = 42$, $z = 2$, 1ª solução do problema.

3.º Se fôr b negativo, serão positivos x e z, porém y unicamente no caso de ser $11b < 42$, ou $b < 3\frac{9}{11}$.

Logo, são sómente admissiveis as hypotheses $b = -1$, -2, -3. Mais tres soluções.

Resumindo; a questão proposta se resolve de quatro maneiras, que se acham pelas fórmulas supra, a saber:

Suppondo	$b = 0$;	$x = 3$,	$y = 42$,	$z = 2$
»	$b = -1$;	$x = 10$,	$y = 31$,	$z = 6$
»	$b = -2$;	$x = 17$,	$y = 20$,	$z = 10$
»	$b = -3$;	$x = 24$,	$y = 9$,	$z = 14$

E' facil verificar que qualquer destes systemas de numeros satisfaz ás equações e á questão proposta.

91. O mesmo processo se applica ao caso de tres equações a quatro incognitas, ou ainda a maior numero dellas, suppondo sempre mais uma incognita do que equações. Por meio de eliminações sempre se obtem afinal uma equação a duas incognitas; achadas as expressões destas duas, substituem-se nas equações e sujeita-se cada uma das outras incognitas a semelhantes transformações, até que todas sejam *funcções inteiras* da mesma indeterminada.

4.° PROBLEMA. *Achar para* x *um valor inteiro, que torne tambem numeros inteiros as expressões.*

$$\frac{x-11}{29},\ \frac{x-17}{19},\ \frac{x-7}{15}.$$

A questão é verdadeiramente de tres equações a quatro incognitas; porque, chamando y, z, v os quocientes indicados, teriamos

$$x-11=29y$$
$$x-17=19z$$
$$x-\ \ 7=15v$$

Porém neste caso é mais commodo prescindir das equações e operar as transformações sobre as proprias fracções propostas.

1.ª Devendo $\frac{x-11}{29}$ ser numero inteiro, e representando-o por a, temos a equação

$$\frac{x-11}{29}=a, \text{ da qual } x=29a+11.$$

Qualquer que seja o valor inteiro dado a a, tornará x numero inteiro, que satisfará a primeira condição.

2.° Pela segunda deve tornar-se numero inteiro a fracção.

$$\frac{x-17}{19}=\frac{29a+11-17}{19}=\frac{29a-6}{19}=a+\frac{10a-6}{19}.$$

Não tendo esta expressão a fórma inteira, cumpre ainda igualar a ultima fracção á outra indeterminada b, e proseguir em transformações semelhantes até chegar a exprimir as indeterminadas umas nas outras, sem denominadores. Assim se obtem

$$b=\ \ 6-10c,$$
$$a=12-19c;$$

conseguintemente $x=348-551c+11=359-551c$.

3.° Este 2° valor de x verifica as duas primeiras condições; para examinar se satisfaz tambem a 3ª ou transformal-o para esse fim, cumpre substituil-o por x na ultima fracção assim :

$$\frac{x-7}{15}=\frac{352-551c}{15}=23-36c+\frac{7-11c}{15}$$

e, operando sobre a ultima fracção de modo analogo ao precedente, chegamos aos resultados

$$e=4f\ -3,$$
$$d=10\ -11f,$$
$$c=15f-13;$$

e portanto $x = 359 - 8265f + 7163 = 7522 - 8265f$.

Vê-se nesta fórmula, 1° que, sendo $f = 0$, $x = 7522$, 1ª solução do problema : 2° que para todos os valores $f = 1, 2, 3, 4$, etc., x é negativo ; 3° suppondo $f = -1, -2, -3$, etc., teremos infinitas soluções. Pois que f deve ser negativo, para x tornar-se positivo, é mais commodo mudar-lhe o signal na expressão de x, e serão todas as soluções da questão representadas directamente pela fórmula

$$x = 7522 + 8265f,$$

na qual se podem attribuir a f, indifferentemente, os valores, o, 1, 2, 3, 4... ao infinito.

92. Sirva para exercicio mais esta questão :

5.° PROBLEMA. *Achar tres numeros taes, que a somma de seus productos respectivamente por 3, 5, 7, seja igual a 560 ; e a somma dos productos por 9, 25, 49, seja igual a 2920.*

As equações do problema são

$$3x + 5y + 7z = 560$$
$$9x + 25y + 49z = 2920,$$

das quaes se deduzem estas fórmulas :

$$x = 35b - 20, \quad y = 124 - 42b, \quad z = 15b\,;$$

conclue-se que o problema tem sòmente duas soluções directas, a saber :

$$b = 1\,; x = 15, y = 82, z = 15.$$
$$b = 2; x = 50, y = 40, z = 30.$$

CAPITULO IV

Resolução dos Problemas e Equações do Segundo Gráo

93. Introducção. Quando as condições de um problema traduzidas algebricamente conduzem a uma *equação em que apparece a incognita multiplicada por si mesma*, a equação se diz do segundo gráo, e por analogia tambem o problema. Neste caso os principios estabelecidos nos dous capitulos precedentes não são bastantes para se achar o valor da incognita. Porém, quando a equação tem a fórma $ax^2 = b$, podendo esta mudar-se em

$$x^2 = \frac{b}{a},$$

a questão se reduz a *extrahir a raiz quadrada da quantidade representada por* $\frac{b}{a}$.

Se em logar de b e a tivessemos na equação numeros particulares, a extracção da raiz seguiria às regras da arithmetica; tratando-se, porém, de equações litteraes, convém antes de entrar na sua resolução estabelecer os preceitos relativos á extracção da raiz quadrada das quantidades algebricas ou litteraes.

---

§ 1.º Formação do quadrado e extracção da raiz das quantidades algebricas, calculo dos radicaes do segundo gráo.

94. Tratemos primeiro dos monomios; e analysemos a formação dos seus quadrados para descobrir o processo de extracção da raiz.

Segundo as regras da multiplicação, para elevar um monomio ao quadrado *quadra-se o coefficiente e dobram-se os expoentes de todas as lettras*. Logo, para voltar do quadrado á raiz será necessario: 1º, *extrahir a raiz quadrada do coefficiente; 2º, tomar metada de cada um dos expoentes*. Assim

$$\sqrt{64a^6b^4} = 8a^3b^2, \text{ e com effeito,}$$
$$(8a^3b^2)^2 = 8a^3b^2 \times 8a^3b^2 = 64a^6b^4$$
$$\sqrt{625a^2b^4c^8} = 25ab^2c^4, \text{ porque}$$
$$(25ab^2c^4)^2 = 625a^2b^4c^8.$$

Resulta desta regra que um monomio só póde ser o quadrado de outro, 1º *sendo o coefficiente quadrado perfeito*, 2º *sendo pares todos os expoentes*. Não sendo o monomio quadrado perfeito, como succede o $18a^2bc^2$, a raiz indica-se com o signal $\sqrt{}$ e as expressões, desta especie chamam-se *monomios irracionaes*, ou *radicaes do segundo grão*.

95. Taes expressões, porém, admittem muitas vezes simplificações fundadas neste principio: *A raiz de um* *producto de dous ou mais factores é igual ao producto das raizes dos factores, isto é,*

$$\sqrt{a.b.c....} = \sqrt{a}.\ \sqrt{b}.\ \sqrt{c....}$$

Demonstração. Segundo a definição de raiz quadrada, é claro que

$$\sqrt{(a.b.c.)^2} = a.b.c...$$

mas tambem $(\sqrt{a}.\ \sqrt{b}.\ \sqrt{c.....})^2 = (\sqrt{a})^2.\ (\sqrt{b})^2.\ (\sqrt{c})^2....$ $= a.b.c....$

Logo, sendo iguaes os quadrados de $\sqrt{a.b.c....}$ e de $\sqrt{a}.\ \sqrt{b}.\ \sqrt{c...}$, estas quantidades tambem o são.

Isto posto, a expressão precedente $\sqrt{18a^3bc^2}$ póde transformar-se em $\sqrt{9a^2c^2 \times 2ab} = \sqrt{9a^2c^2} \times \sqrt{2ab}$; e, pois que $\sqrt{9a^2c^2} = 3\ ac$, será

$$\sqrt{18a^3bc^2} = 3ac \times \sqrt{2ab}.$$

Em regra, para simplificar um monomio irracional, *extrahem-se as raizes de todos os factores quadrados perfeitos, e essas raizes se escrevem á esquerda do signal* $\sqrt{\ }$, *ao qual se submettem os factores quadrados.* Assim

$$\sqrt{45a^2b^4c^2d} = \sqrt{9a^2b^2c^2 \times 5bd} = 3abc\sqrt{5bd}$$
$$\sqrt{39a^3b^2} = \sqrt{a^2b^2 \times 39a} = ab\sqrt{39a}$$

As quantidades fóra do radical, como nos exemplos precedentes $3ac$, $3abc$, ab chamam-se *coefficientes do radical.*

96. Para completar a regra do n. 94 cumpre attender ao signal do monomio que se eleva ao quadrado, ou de que se extrahe a raiz. Sendo o quadrado o producto do monomio por si mesmo, segue-se, do n. 15, que *seja qual fôr o seu signal, o quadrado será positivo* $(+5a^2b^3)^2$ ou $(-5a^2b^3)^2$ produz igualmente $+25a^4b^6$.

Do que se segue que, *sendo positivo um monomio, a sua raiz quadrada póde ter indifferentemente o signal* $+$ ou $-$. Por exemplo, $\sqrt{4a^2}=\pm 2a$, $\sqrt{25a^2b^6}=\pm 5ab^3$. O signal $\pm$ se lê *mais ou menos*.

Sendo negativo um monomio, a extracção de sua raiz é impossivel, porque todo o quadrado é essencialmente positivo. Assim $\sqrt{-9}$, $\sqrt{-4a^2}$ $\sqrt{-5}$ são symbolos algebricos que representam operações impossiveis. Costumam elles ser denominados *quantidades* ou *expressões imaginarias;* são signaes de *impossibilidade* ou de *absurdo*, que muitas vezes apparecem na resolução dos problemas do segundo grão.

Comtudo, por extensão, se usa applicar a estes symbolos as mesmas simplificações que ás expressões irracionaes. Assim, segundo o n. 75,

$$\sqrt{-9}=\sqrt{9\times-1}=3\sqrt{-1}$$
$$\sqrt{-4a^2}=\sqrt{4a^2\times-1}=2a.\sqrt{-1}$$
$$\sqrt{-8a^3b}=\sqrt{-4a^2\times 2ab}=2a.\sqrt{2a}.\sqrt{-b}.$$

97. Procuremos agora, para qualquer polynomio, a lei da formação do seu quadrado, da qual se deduza o processo da extracção da raiz.

Vimos (n. 18) que o quadrado de qualquer binomio $a+b$ tem a fórma $a^2+2ab+b^2$.

Tratando do trinomio $a+b+c$, acha-se pela multiplicação.

$$(a+b+c)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2$$

do que se infere que o *quadrado de um trinomio se compõe da somma dos quadrados dos tres termos, e do dobro de cada producto dos mesmos termos, multiplicados dous a dous*. Composição em tudo semelhante á do quadrado de um binomio.

Elevando ao quadrado polynomios de 4, 5, e mais termos, observa-se sempre a mesma *lei* ou principio geral. Segundo elle, se fórmam estes quadrados :

$$(3a^2-2ab+4b^2)^2 = 9a^4 - 12a^3b + 4a^2b^2 - 16ab^3 + 16b^4$$
$$+24a^2b^2 = 9a^4 - 12a^3b + 28a^2b^2 - 16ab^3 + 16b^4.$$
$$(5a^2-4ab+6bc-3ac)^2 = 25a^4 - 40a^3b + 16a^2b^2 + 60a^2bc$$
$$-30a^3c - 48ab^2c + 24a^2bc + 36b^2c^2 - 36abc^2 + 9a^2c^2.$$

98. Póde-se tambem demonstrar rigorosamente o principio, que por uma inducção acabamos de estabelecer, a saber :

O quadrado de qualquer polynomio é a somma dos quadrados de todos os termos, mais o dôbro de cada um dos productos dos mesmos termos multiplicados dous a dous.

Bastará provar que, verificada esta propriedade para um polynomio de m termos, será ella verdadeira para outro de $m+1$ termos.

Seja o polynomio de m termos $a+b+c+\ldots+l$, e procuremos o quadrado do polynomio que contém mais um termo k.

Chamando s o 1° polynomio, é o 2° $s+k$, e

$$(s+k)^2=s^2+2sk+k^2$$

ou substituindo o valor de s,

$$(a+b+\ldots+b+k)=(a+b+c+,\ldots+l)^2$$
$$+2(a+b+c+\ldots+l)\,k+k^2.$$

A primeira parte do 2° membro contém os quadrados dos m termos, e dôbro de cada um dos productos delles dous a dous. A 2ª parte encerra o dôbro dos productos dos mesmos m termos pelo novo termo k. Ao que se ajunta o quadrado do ultimo k^2.

Assim, o principio está provado para $m+1$ termos, e daqui facilmente se estende a todo e qualquer polynomio.

E' este um methodo de demonstração analogo ao que já empregámos. (n. 29.)

O mesmo principio se póde enunciar deste outro modo:

O quadrado de qualquer polynomio é igual ao quadrado do 1° *termo, mais o dôbro do producto do* 1° *pelo* 2°, *mais o quadrado do* 2°, *mais o dôbro de cada um dos dous primeiros pelo* 3°, *mais o quadrado do* 3°, *e assim até o ultimo.*

Passemos á extracção da raiz quadrada.

99. Designemos por N o polynomio cuja raiz se pede, e por R esta raiz; e conceda-se que os dous polynomios acham-se *ordenados* em relação a uma lettra, v. g. a.

Isto posto, examinando a formação do quadrado de R (n. 98), facilmente se conhece que os dous primeiros termos desse quadrado não soffrem reducção com outros, pois contém a lettra a com expoentes maiores do que todos os termos seguintes: estes dous primeiros termos são o quadrado do primeiro da raiz e o dôbro do primeiro pelo segundo. Logo, *se* N *é quadrado perfeito,* 1°, *o seu primeiro termo tambem o deve ser, e a raiz desse primeiro termo é o 1° do polynomio pedido;* 2°, *o 2° termo de* N *será divisivel pelo dôbro do termo achado, e o quociente será o 2° da raiz pedida.*

Para obter os termos seguintes, *formemos o quadrado do binomio achado e diminua-se de* N. O resto, que chamaremos N'., contém ainda o dôbro dos productos do 1° e 2° termos pelos seguintes, e as mais partes do quadrado. Porém o dôbro do 1° pelo 3° contém expoente superior ao das seguintes partes de N'., com as quaes não soffre reducção. Portanto, *dividindo o* 1° *termo do resto pelo dôbro do* 1° *da raiz, se obterá o* 3°.

Semelhantemente, *elevando o trinomio ao quadrado, subtrahindo-o do polynomio proposto* N, *e dividindo o* 1° *termo do resto pelo dôbro do* 1° *da raiz, se achará o* 4°. O processo continúa do mesmo modo (*).

(*) Sejam os expoentes da raiz ordenada m, $m-1$, $m-2$. $m-3$... Os do quadrado serão, $2m$, $2(m-1)$, $2(m-2)$, $2(m-3)$, $2(m-4)$. A analyse dos termos do quadrado, a que pertencem estes expoentes, demonstra a regra.

N. B. E' absolutamente indispensavel, depois de ter achado os dous termos da raiz, subtrahir do polynomio N o quadrado do binomio obtido; porque de ordinario o quadrado do 2° termo de R tem o mesmo expoente de a, que o dôbro do 1° pelo 3°; portanto, estas duas partes podem ter soffrido reducção. Assim, é preciso subtrahir o quadrado do 2° para poder affirmar-se que o 1° termo do resto é o dôbro do 1° pelo 3° da raiz. Semelhante observação se applica aos 3, 4, etc., primeiros termos da raiz.

Facil é actualmente organizar a regra para a extracção da raiz quadrada de um polynomio; basta para isso reunir as diversas phrases que no decurso deste numero se acham *em caracteres italicos*. Servirá de exercicio aos alumnos o ennunciado desta regra, bem como o desenvolvimento dos raciocinios, de que apenas apontámos os fundamentos.

Seja exemplo extrahir a raiz de

$$49a^2b^2 - 24ab^3 + 25a^4 - 30a^3b + 16b^4.$$

$$\begin{array}{ll|l}
 & 25a^4 - 30a^3b + 49a^2b^2 - 24ab^3 + 16b^4 & 5a^2 - 3ab + 4b^2 \\
 & -25a^4 + 30a^3b - 9a^2b^2 & 10a^2 \\
\hline
1^{\circ}\ \text{resto} & 40a^2b^2 - 24ab^3 + 16b^4 & \\
 & -40a^2b^2 + 24ab^3 - 16b^4 & \\
\hline
2^{\circ}\ \text{resto}\ldots\ldots\ldots\ldots & 0 &
\end{array}$$

Verificação : $(5a^2 - 3ab + 4b^2)^2 =$

$$= 25a^4 - 30a^3b + 49a^2b^2 - 24ab^3 + 16b^4.$$

Ordenado o polynomio em relação a a, extrahe-se a raiz do 1° termo, que é $5a^2$, e divide-se o 2°, $-30a^3b$, por $10a^2$; serão os 1os termos da raiz $5a^2-3ab$.

Eleva-se este binomio ao quadrado, subtrahe-se do polynomio proposto e divide-se por $10a^2$ o 1° termo do resto, $+40a^2b^2$; o quociente $4b^2$ é o 3° termo da raiz.

Eleva-se ao quadrado o trinomio $5a^2-3ab+4b^2$; subtrahe-se do polynomio proposto; sendo 0 o resto, conclue-se que o trinomio achado é a raiz pedida exacta.

A observação do n. 96, applicada aos polynomios, mostra que a raiz precedente tambem póde ser tomada com signaes contrarios; assim, os trinomios $5a^2-3ab+4b^2$ e $-(5a^2-3ab+4b^2)$ ou $-5a^2+3ab-4b^2$ são, indistinctamente, raizes do polynomio proposto, como se póde verificar.

100. Terminamos com estas observações:

1.ª *Um monomio não póde ser quadrado de um polynomio.*

2.ª *Um binomio nunca póde ser quadrado perfeito.*

3.ª *Um trinomio só póde ser quadrado perfeito sendo quadrados o 1° e 3° termos* (suppondo o trinomio ordenado) *e, demais, sendo o 2° termo o dôbro do producto das raizes do 1° e 3°.* Resulta da formação do quadrado de um binomio.

4.ª Quando na extracção da raiz de um polynomio apparecer algum resto, cujo primeiro termo não seja divisivel pelo dôbro do 1° da raiz, póde concluir-se que o polynomio dado não é quadrado perfeito.

5.ª As simplificações do n. 95 podem applicar-se ás raizes dos polynomios que não são *quadrados perfeitos* Sirva de exemplo a expressão $\sqrt{a^3b+4a^2b^2+4ab^3}$.

A quantidade affecta do signal $\sqrt{\ }$ não é quadrado; mas póde decompôr-se em dous factores $ab(a^2+4ab+4b^2)$, o segundo dos quaes é evidentemente o quadrado de $a+2b$. Será, pois,

$$\sqrt{a^3b+4a^2b^2+4ab^3}=\sqrt{ab\,(a^2+4ab+4b^2)}=$$
$$=(a+2b)\sqrt{ab}.$$

E assim nos casos semelhantes.

Calculo dos radicaes do segundo gráo

101. Da extracção da raiz quadrada das quantidades litteraes se origina uma nova especie de *expressões, algebricas*, denominadas *quantidades irracionaes* ou *radicaes do segundo gráo;* convém, pois, estabelecer as regras necessarias para effectuar sobre estas quantidades as quatro operações fundamentaes,

Definição. Dous radicaes do segundo gráo se dizem *semelhantes*, quando a quantidade submettida ao signal $\sqrt{\ }$ é a mesma em ambos os radicaes. Assim, $3a\sqrt{b}$ e $5c\sqrt{b}$, $9\sqrt{2}$ e $7\sqrt{2}$ são *radicaes semelhantes*.

Addição e subtracção. Para sommar ou subtrahir radicaes semelhantes *sommam-se ou subtrahem-se os dous* *coefficientes, e a somma ou differença se escreve á esquerda do radical commum.* Assim,

$$3a\sqrt{b} \pm 5c\sqrt{b} = (3a \pm 5c)\sqrt{b}$$
$$7\sqrt{2a} + 3\sqrt{2a} = 10\sqrt{2a}\,;\; 7\sqrt{2a} - 3\sqrt{2a} = 4\sqrt{2a}.$$

Dous radicaes não semelhantes algumas vezes vêm a sêl-o por virtude das simplificações do n. 95. Por exemplo,

$$\sqrt{48ab^2} + b\sqrt{75a} = 4b\sqrt{3a} + 5b\sqrt{3a} = 9b\sqrt{3a}\,;$$
$$2\sqrt{45} - 3\sqrt{5} = 6\sqrt{5} - 3\sqrt{5} = 3\sqrt{5}.$$

Não sendo semelhantes os radicaes, não se faz mais do que indicar a addição ou subtracção.

102. *Multiplicação*. Para multiplicar dous radicaes, *multiplicam-se as quantidades debaixo do signal* $\sqrt{\ }$ *e affecta-se o producto do mesmo signal* $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ é consequencia do principio n. 95.

Havendo coefficientes, *multiplicam-se um pelo outro e o producto é o coefficiente do resultado*. Exemplos :

$$3\sqrt{5ab} \times 4\sqrt{20a} = 12\sqrt{100a^2b} = 120a\sqrt{b}.$$

$$2a\sqrt{a^2+b^2} \times (-3a\sqrt{a^2+b^2}) = -6a^2\sqrt{(a^2+b^2)^2} =$$
$$= -6a^2(a^2+b^2).$$

N. B. Succede muitas vezes, como no ultimo exemplo, que o producto de duas expressões irracionaes, mesmo imaginarias, é uma quantidade racional.

103. *Divisão*. Para dividir um radical por outro *di-*

videm-se as quantidades affectas do signal $\sqrt{\ }$ *e o quociente se affecta do mesmo signal.* Assim

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$$

Com effeito os quadrados de ambas estas expressões são iguaes á mesma quantidade $\frac{a}{b}$; logo, são ellas iguaes. Se ha

$$5a\sqrt{b}:2b\sqrt{c}=\frac{5a}{2b}\sqrt{\frac{b}{c}}$$

$$12ac\sqrt{6bc}:4c\sqrt{2b}=\frac{12ac}{4c}\sqrt{\frac{6bc}{2b}}=3a\sqrt{3c}$$

104. Ha duas *transformações* que são de muito uso, já na avaliação numerica dos radicaes, já preparando-se para facilitar o seu calculo algebrico.

A *primeira transformação* consiste em fazer passar o coefficiente do radical para baixo do signal $\sqrt{\ }$. Seja a expressão $3a\sqrt{5b}$, que (por ser $3a=\sqrt{9a^2}$ se póde converter em

$$\sqrt{9a^2}\times\sqrt{5b}=\sqrt{45a^2b}$$

Regra geral. *Para se fazer passar para dentro do radical um factor que se acha fóra, basta elevar esse factor ao quadrado.*

Eis aqui uma applicação numerica desta transformação. Querendo avaliar em numeros inteiros $6\sqrt{13}$, mudamos esta expressão em

$$\sqrt{6^2 \times 13} = \sqrt{468} = 21$$

sem differença de uma unidade. Se se extrahisse em inteiros a raiz de 13, como indica a primeira expressão, a fracção despresada, tendo de multiplicar-se por 6, poderia avultar a mais de 1.

105. A *segunda transformação* tem por fim tornar racionaes os denominadores de expressões da fórma

$$\frac{a}{p+\sqrt{q}} \text{ ou } \frac{a}{p-\sqrt{q}}$$

sendo a, p, q, quaesquer numeros, e não sendo q *quadrado perfeito*. A resolução dos problemas conduz muitas vezes a taes expressões; e é facil de vêr que, sendo o denominador racional, mais simplesmente se ajuiza da grandeza representada pela fracção, ou do grão de approximação obtido nas applicações numericas.

Effectúa-se a transformação multiplicando ambos os termos da primeira fracção por $p-\sqrt{q}$, ou os da segunda por $p+\sqrt{q}$.

Em ambos os casos apparece no denominador o producto da somma pela differença das duas quantidades p e $\sqrt{q}$; e como este producto é a differença dos quadrados das mesmas quantidades, será o denominador p^2-q, expressão racional.

$$\frac{a}{p+\sqrt{q}}=\frac{a(p-\sqrt{q})}{(p+\sqrt{q})(p-\sqrt{q})}=\frac{ap-a\sqrt{q}}{p^2-q}$$

$$\frac{a}{p-\sqrt{q}}=\frac{a(p+\sqrt{q})}{(p-\sqrt{q})(p+\sqrt{q})}=\frac{ap+a\sqrt{q}}{p^2-q}$$

Póde-se reunir as duas expressões em uma fórmula desta sorte

$$\frac{a}{p\pm\sqrt{q}}=\frac{a(p\mp\sqrt{q})}{(p\pm\sqrt{q})(p\mp\sqrt{q})}=\frac{ap\mp a\sqrt{q}}{p^2-q}$$

Para bem julgar da utilidade desta transformação, appliquemol-a a dous exemplos numericos :

$$1^\circ\ \frac{7}{3-\sqrt{5}}=\frac{7(3+\sqrt{5})}{9-5}=\frac{21+7\sqrt{5}}{4}=\frac{21+\sqrt{245}}{4}$$

$$2^\circ\ \frac{7\sqrt{5}}{\sqrt{11}+\sqrt{3}}=\frac{7\sqrt{5}(\sqrt{11}-\sqrt{3})}{11-3}=\frac{7\sqrt{55}-7\sqrt{15}}{8}=$$

$$=\frac{\sqrt{2695}-\sqrt{735}}{8}$$

Resta sómente extrahir as raizes dos tres numeros 245, 2695 e 705; limitando-nos á parte inteira dessas raizes, teremos a 1ª fracção approximada até o valor $\frac{1}{4}$ e a 2ª até $\frac{1}{8}$; facil é, porém, obter maior approximação.

§ 2.º Equações e problemas do segundo gráo a uma incognita

106. As equações do segundo gráo se classificam em duas especies : *equações a dous termos ou incompletas*, *equações completas ou de tres termos.*

As primeiras sómente contém termos conhecidos e termos affectos do quadrado da incognita. Chamam-se *a dous termos*, porque, mediante transformações, é sempre possivel reduzil-as á fórma $ax^2 = b$. Por exemplo, a equação

$$\frac{7}{11} + \frac{1}{5}x^2 = \frac{2}{23}x^2 + \frac{8}{7}$$

se converte, expellindo os denominadores, em

$$5635 + 1771x^2 = 770x^2 + 10120$$

ou, transpondo e reduzindo, $1001\,x^2 = 4485$.

Se a equação fôr litteral, como esta

$$a - bx^2 + c = ex^2 + d - fx^2$$

tambem se reduzirá a dous termos, dando-lhe a fórma

$$(f - b - e)\,x^2 = d - a - c.$$

107. *A equação a dous termos* $ax^2 = b$ resolve-se facilmente ; della se deduz

$$x^2 = \frac{b}{a} \text{ donde } x = \sqrt{\frac{b}{a}}.$$

Quando $\frac{b}{a}$ fôr quantidade negativa, o valor de x será *imaginario* (n. 96), o que significa que o *problema é impossivel*, ou que não ha numero inteiro ou fraccionario exacto ou approximado, que satisfaça a equação.

Mas, se $\frac{b}{a}$ fôr numero positivo, a sua raiz póde ter o signal $+$ ou $-$, e serão os valores da incognita

$$x = \pm\sqrt{\frac{b}{a}}.$$

Applicando este processo ás duas equações do numero precedente, temos

$x = \pm\sqrt{\frac{4485}{1001}} = \pm\sqrt{4,48} = \pm 2,12$ sem differença de 0,005; e

$$x = \pm\sqrt{\frac{d-a-c}{f-b-e}}.$$

Pela substituição se verifica que qualquer destes valores satisfaz á respectiva equação.

108. *Equação completa do 2º grão.* Toda a equação desta natureza, contendo termos conhecidos, termos affectos da incognita e outros do seu quadrado, póde, mediante transformações, reduzir-se á fórma $ax^2+bx=c$, e dividindo todos os termos pelo coefficiente de x^2, e suppondo por abreviação.

$$\frac{a}{b}=p, \frac{c}{b}=q$$

tomará a equação a fórma $x^2+px=q$, que se trata de resolver.

N. B. Reduzir uma equação do 2º gráo a esta fórma é o que se chama *preparal-a.*

Observemos que, se fôr possivel converter o primeiro membro no quadrado de um binomio, uma simples extracção de raiz quadrada reduzirá a equação a outra do mesmo gráo.

Ora, comparando o 1º membro x^2+px com o quadrado do binomio $x+a$ ou com $x^2+2ax+a^2$, vê-se que além do 1º termo commum, basta suppôr $a=\frac{p}{2}$, para que seja $2ax=px$; e assim para que x^2+px se torne no quadrado de $x+a$ ou de $x+\frac{p}{2}$ só falta ajuntar-lhe o termo a^2 ou $\frac{p^2}{4}$; e, sendo preciso, para não alterar a equação, ajuntar a mesma quantidade ao 2º membro, teremos :

$$x^2+px+\frac{p^2}{4}=q+\frac{p^2}{4} \text{ ou } \left(x+\frac{p}{2}\right)^2$$

Logo, extrahindo a raiz,

$$x+\frac{p}{2}=\pm\sqrt{\left(q+\frac{p^2}{4}\right)}\text{; donde } x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(q+\frac{p^2}{4}\right)}$$

Assim, em toda a equação do 2º grão a incognita tem dous valores, ambos representados na *fórmula* precedente.

Esta *fórmula* se póde traduzir na seguinte

REGRA GERAL. *Preparada a equação, iguala-se a incognita á metade do seu coefficiente tomado com o signal contrario, mais ou menos a raiz quadrada do termo conhecido, sommado com o quadrado da metade do coefficiente da incognita,*

109. Exemplo :

Seja a equação $\frac{5}{6}x-\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}=8-\frac{2}{3}x-x^2+\frac{273}{12}$

que se reduz, expellidos os denominadores a

$$10x^2-6x+9=96-8x-12x^2+273$$

ou $\quad 22x^2+2x=360$, e, dividindo por 22

$$x^2+\frac{2}{22}x=\frac{360}{22}\text{, donde } x=-\frac{1}{22}\pm\sqrt{\frac{360}{22}+\left(\frac{1}{22}\right)^2}$$

Para effectuar os calculos numericos, convêm começar por converter a quantidade affecta do signal $\sqrt{\ }$ em uma sò fracção, cujo denominador seja quadrado perfeito; ora

$$\frac{360}{22}+\left(\frac{1}{22}\right)^2=\frac{360\times22+1}{(22)^2}=\frac{7921}{22^2}$$

logo $$\sqrt{\frac{360}{22}+\frac{1}{22}^2}=\sqrt{\frac{7921}{(22)^2}}=\frac{89}{22}.$$

Serão, pois, os valores de x

$$x=-\frac{1}{22}\pm\frac{89}{22}=\frac{-1\pm89}{22},$$

ou separando-os

$$x=\frac{-1+89}{22}=\frac{88}{22}=4, \text{ e } x=\frac{-1-88}{22}=\frac{-90}{22}=-\frac{45}{11}$$

Seja agora a equação litteral

$$4a^2-2x^2+2ax=18ab+18b^2$$

que se transforma nesta

$$x^2-ax=2a^2-9ab+9b^2;$$

applicando-lhe a regra, serão os valores da incognita

$$x=\frac{a}{2}\pm$$

$$\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}+2a^2-9ab+9b^2}=\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{9a^2}{4}-9ab+9b^2}=$$

$$=\frac{a}{2}\pm\ \frac{3a}{2}-3b$$

ou separando-os e fazendo as reducções,

$$x=\frac{a}{2}+\frac{3a}{2}-3b=2a-3b;\ x=\frac{a}{2}-\frac{3a}{2}+3b=3b-a$$

110. Apliquemos estes principios e regras á resolução de alguns problemas

1º Problema. *Achar um numero, cujo triplo junto ao dobro do seu quadrado fórme a somma* 65.

Chamando x o numero pedido, será a equação do problema

$$2x^2+3x=65$$

$$\text{ou } x^2+\frac{2}{3}x=\frac{65}{2}; \text{ donde}$$

$$x=-\frac{3}{4}\pm\sqrt{\frac{9}{16}+\frac{65}{2}}=-\frac{3}{4}\pm\frac{23}{4}.$$

Separando estes valores, e effectuando os calculos temos $x=5$ e $x=-\frac{13}{2}$. O primeiro valor 5 satisfaz á questão, como foi proposta, porque

$$2\,(5)^2+3\times5=50+15=65.$$

Para interpretar o valor negativo, notaremos que mudando na equação x em $-x$ a nova equação $2x^2-3x=65$ exprime evidentemente outra questão em que se proponha *achar um numero, cujo triplo diminuido* (não sommado) *do dôbro do seu quadrado deixe o* *resto* 65. Esta nova questão é resolvida pelo valor $\frac{13}{2}$; com effeito, resolvendo a equação $2x^2 - 3x = 65$, apparecem os mesmos valores precedentes, mas de signaes contrarios, isto é,

$$x = -5, \text{ e } x = \frac{13}{2};$$

é facil verificar que este ultimo numero satisfaz ao problema tal qual foi ultimamente enunciado.

111. 2.° PROBLEMA. *Alguem comprou duas peças do mesmo panno, cada uma por* 53$; *uma, porém, tem* 7 *covados menos que a outra e custou por isso cada covado mais* 100 *reis. Pergunta-se : qual o numero de covados da peça maior?*

Conhecido este numero, tirando-lhe 7 resta o numero de covados da menor; e, dividindo por cada um o custo 53$, obtem-se os dous preços, cuja differença deve ser 100 réis. Logo, chamando x o numero pedido,

$$\frac{53000}{x-7} - \frac{53000}{x} = 100.$$

Preparando esta equação e resolvendo-a se acha $x = 64{,}5$ e $x = -57{,}5$. O primeiro valor satisfaz ao problema, como se póde verificar; quanto ao segundo $-57{,}5$ mudando na equação x em $-x$ resulta

$$\frac{53000}{-x-7} - \frac{53000}{-x} = 100, \text{ ou } \frac{53000}{x} - \frac{53000}{x+7} = 100,$$

da qual se deduz $x = 57,5$ e $x = -64,5$. Ora, esta ultima equação (e, portanto, o valor 57,5) resolve este problema : *Custando duas peças de panno a mesma quantia,* 53$, *mas, tendo uma* 7 *covados mais que a outra, custou cada covado menos* 100 *réis. Pede-se o numero de covados da peça menor.*

N. B. Vê-se que nos dous problemas precedentes os resultados negativos têm a mesma significação que nas equações do 1° grào ; porêm, o ultimo offerece esta observação especial, que os dous enunciados não differem senão em chamar-se x o comprimento da peça maior ou da menor. E os dous valores dados por uma só equação, prescindindo dos signaes, exprimem os tamanhos das duas peças 64,5 e 57,5 cuja differença è 7 covados.

112. 3.° Problema. Um mercador vendendo um cavallo por 24 *doblas perdeu tantos por cento do preço da compra quantas doblas tinha custado o animal. Pede-se o preço da compra.*

Equação $\frac{x^2}{100} = x - 24$, ou $x^2 - 100x = -2400$.

Valores da incognita $x = 60$ e $= 40$.

Discussão dos problemas do 2º gráo.

Ambos estes valores satisfazem ao problema, que tem duas soluções, Com effeito, sendo a compra por 60 doblas, a perda ou 60 por cento de 60 doblas é 36, e o preço da venda 24.

Sendo 40 doblas, os 40 por cento desta quantia importam em 16 doblas, perda que deduzida de 40 dá 24 para preço da venda.

---

§ 3.º Discussão geral da equação e problemas do segundo gráo

113. Quando as quantidades conhecidas nos problemas do segundo gráo, em vez de serem numeros particulares como até aqui, forem representadas por lettras ou symbolos genericos, os resultados obtidos representarão, como nos do primeiro gráo, *fórmulas geraes* proprias para resolver todos os problemas semelhantes, uma vez dados em numeros os valores das lettras. Interpretar estes resultados segundo as diversas circumstancias em que se acharem os dados, é o objecto da *discussão dos problemas do segundo gráo*.

Antes, porém, de entrar na discussão, será conveniente fazer sobresahir alguns *factos analyticos*, que se encerram nas expressões do n. 98, e são aliás casos particulares da *theoria geral da composição das equações*, que será tratada em outra parte deste curso.

Consideremos a equação preparada do 2º grào na fórma $x^2+px-q=0$, e representemos os dous valores de x por x' e x'' para melhor distinguil-os; assim

$$x'=-\frac{p}{2}+\sqrt{q+\frac{p^2}{4}}$$

$$x''=-\frac{p}{2}-\sqrt{q+\frac{p^2}{4}}$$

Eis os factos de que fallamos.

1.º E' facil verificar que a multiplicação dos dous binomios $x-x'$, $x-x''$ reproduz o 1º membro da equação primitiva. Com effeito,

$$(x-x')(x-x'')=\left(x+\frac{p}{2}-\sqrt{q+\frac{p^2}{4}}\right)\left(x+\frac{p}{2}+\sqrt{q+\frac{p^2}{4}}\right)$$

$$=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\left(q+\frac{p^2}{4}\right)=x^2+px-q.$$

Assim, *o 1º membro de toda a equação preparada do 2º grào se decompõe em dous factores do 1.º grào em* x, *da fórma* $x-x'$, $x-x''$, *sendo* x', x'' *os valores de* x.

Estes valores se chamam raizes da equação.

Em geral dá-se o nome *raiz de uma equação a toda a expressão numerica ou algebrica, real ou imagina-*

ria, que, substituida por x, *torna a equação identica,*

Toda a equação do 2º gráo tem duas raizes.

2.º Sommando as raizes obtem-se

$$x' + x'' = -p$$

O coefficiente do 2º termo da equação com signal contrario é a somma algebrica das raizes.

3.º Multiplicando-as

$$x'\,x'' = \frac{p^2}{4} - q - \frac{p^2}{4} = -q.$$

O terceiro termo com o mesmo signal é o producto das raizes.

Voltemos á discussão dos problemas do 2º gráo, começando pela analyse da equação preparada e dos respectivos valores de x, a saber:

$$x^2 + px = q,\quad x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{q + \frac{p^2}{4}}$$

Notemos em primeiro logar que estes valores de x só serão *reaes*, isto é, poderão ser avaliados exactamente ou por approximação, quando a quantidade submettida ao radical fôr positiva.

Ora, qualquer que seja o signal de p, é sempre positivo o termo $\frac{p^2}{4}$; e, portanto, o signal da quantidade $q + \frac{p^2}{4}$ depende do signal de q ou do termo conhecido da equação.

11

114. 1.° *Sejam, pois,* q *e* p *ambos positivos;* separemos os dous valores de x.

$$x=-\frac{p}{2}+\sqrt{q+\frac{p^2}{4}}; \quad x=-\frac{p}{2}-\sqrt{q+\frac{p^2}{4}}$$

Estes dous valores são ambos reaes e se podem avaliar exacta ou approximadamente, segundo a quantidade debaixo do radical fôr ou não fôr *quadrado perfeito.*

O 1° valor é *essencialmente positivo,* por ser $\sqrt{q+\frac{p^2}{4}}>\frac{p}{2}$, como é facil de vêr. Este valor satisfaz á equação e ao problema que ella representa.

O segundo valor *evidentemente negativo,* satisfaz não a mesma equação proposta, mas depois de mudar-lhe x em $-x$. Com effeito, praticada esta mudança e resolvida a equação, apparecem os mesmos valores precedentes, mas de signaes contrarios.

115. 2.° *Seja ainda* q *positivo e* p *negativo.* A equação tomará a fórma

$$x^2-px=q; \text{ donde } x=\frac{p}{2}\pm\sqrt{q+\frac{p^2}{4}};$$

prova-se do mesmo modo que ainda estes dous valores são, o 1° positivo e o 2° negativo; pelo que têm as mesmas significações que os precedentes.

116. 3.° *Seja agora* q *negativo e* p *positivo*. A equação será da fórma

$$x^2+px=-q, \text{ donde } x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}.$$

A raiz indicada só póde extrahir-se sendo $q<\frac{p^2}{4}$; mas satisfeita esta condição os dous valores são reaes. E, demais, sendo numericamente

$$\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}<\frac{p}{2},$$

os dous valores de x são *ambos negativos*.

117. 4.° *Sejam finalmente* p *e* q *ambos negativos*. Teremos a equação $x^2-px=-q$, e os dous valores

$$x=\frac{p}{4}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}, \text{ e } x=\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$$

ambos positivos.

N. B. Este ultimo caso merece particular attenção.

A equação respectiva mudando-lhe os signaes se torna

$$px-x^2=q, \text{ ou } x(p-x)=q$$

a traducção algebrica deste problema : *Dividir o numero* p *em dúas partes, cujo producto seja igual ao numero* q.

Porque chamando x uma das partes, a outra será $p-x$, e o seu producto $x(p-x)$, que se deve igualar a q.

E note-se, que a equação é a mesma, ou seja x a maior ou a menor parte; pelo que a mesma equação deve dar o valor de ambas; e tal é a razão da existencia das duas soluções directas ou positivas.

118. Recopilando: *se a quantidade* q *é positiva, qualquer que seja o signal de* p, *os dous valores de* x *são reaes e de signaes contrarios.*

Se q *é negativo e* p *positivo, os dous valores são ambos negativos.*

Sendo p *e* q *negativos, são os valores ambos positivos*

E finalmente nos dous ultimos casos serão os valores de x *imaginarios, se fôr*

$$q>\frac{p^2}{4},$$

caso em que o problema é impossivel.

119. Além das hypotheses até agora feitas a respeito dos signaes de p e de q, podem occorrer circumstancias particulares dependentes das grandezas representadas por essas duas lettras; e ainda que em cada problema especial melhor se apreciam os resultados notaveis, todavia podem elles indicar-se geralmente com referencia ás fórmulas estabelecidas; eis aqui os principaes:

No 3° e 4° (116 e 117) representados pela equação x^2+ $+px=-q$ (sendo p positivo ou negativo) se acontecer que seja $q=\frac{p^2}{4}$, o termo $\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$, que entra em ambos os valores de x, é igual a zero, logo, os dous valores se tornarão em $x=-\frac{p}{2}$, valores iguaes.

Se fôr $q=0$, os valores de x serão

$x=-\frac{p}{2}+\frac{p}{2}$; ou $x=0$, e $x=-p$.

Sendo ao mesmo tempo $q=0$, e $p=0$, teremos $x=0$, $x=0$.

Qualquer destes tres resultados se verifica introduzindo a hypothese respectiva na equação geral x^2+px $=q$, e resolvendo-a de novo.

Por nos parecer interessante apresentamos aqui outra marcha para discutir a equação do segundo grão.

Seja a equação

$$mx^2+nx+p=0 \qquad (I);$$

resolvendo-a temos

$$x=-\frac{n}{2m}\pm\sqrt{\frac{n^2-4mp}{4m^2}}$$

ou

$$x=\frac{-n\pm\sqrt{n^2-4mp}}{2m} \qquad (II)$$

e chamando x' e x'' os valores de x relativos aos signaes $+$ e $-$ isto é, as raizes da equação, teremos

$$(1)\ x'=\frac{-n+\sqrt{n^2-4mp}}{2m};\ (2)\ x''=\frac{-n-\sqrt{n^2-4mp}}{2m}$$

Admittamos que se tenha sempre $m > 0$, o que sempre é possivel, e façamos todas as hypotheses relativas ao valor de $n^2 - 4mp$, para discutir cada uma : essas hypotheses só podem ser

$$n^2 - 4mp > 0; \; n^2 - 4mp = 0; \; n^2 - 4mp < 0$$

1.° — Se $n^2 - 4mp > 0$, temos que as duas raizes x' e x'' serão reaes e desiguaes, porque sendo positivo o valor de $n^2 - 4mp$, não haverá mudança nos signaes do radical nas igualdades (1) e (2) e, como os valores x' e x'' só differem pelo signal do radical, este não mudando, os valores continuarão a soffrer a influencia desses signaes e se conservarão, portanto, differentes entre si.

Este caso póde-se subdividir em tres outros conforme é $p > 0$, ou $p = 0$ ou $p < 0$:

Se $p > 0$ temos

$$n^2 - 4mp < n^2$$

ou

$$\sqrt{n^2 - 4mp} < n,$$

em valor absoluto e se nas igualdades (1) e (2) puzermos esse valor pelo radical, é claro que os dous numeradores conservarão o signal do termo $(-n)$; o que importa dizer que então as duas raizes x' e x'' terão signaes differentes de n na equação (1)

Se $p = 0$ temos

$$n^2 - 4mp = n2$$

ou

$$\sqrt{n^2 - 4mp} = n,$$

isto é

$$x' = 0 \text{ e } x'' = -\frac{2n}{2m} = -\frac{n}{m};$$

Com effeito sendo $p = 0$ a equação (1) reduz-se a

$$mx^2 + nx = 0$$

ou

$$x(mx + n) = 0;$$

sendo o primeiro membro então um producto de dous factores, para que seja nullo é bastante e necessario que um dos factores o seja, ponhamos pois,

$$mx + n = 0$$

teremos

$$x = -\frac{n}{m};$$

mas como a equação é tambem satisfeita para

$$x = 0$$

teremos de concluir que ella tem as duas raizes $-\frac{n}{m}$ e 0;

Se $p < 0$ temos

$$n^2 - 4mp > n^2$$

ou

$$\sqrt{n^2 - 4mp} > n,$$

em valor absoluto, e portanto concluiremos que os valores dos numeradores de x' e x'' serão de signaes contrarios e assim tambem as duas raizes x' e x''.

Para reconhecer qual destes dous valores absolutos é o maior attenda-se a que, sendo n positivo, tem-se que, na equação (1), o valor absoluto

$$-n - \sqrt{n^2 - 4mp}$$

será maior do que o valor absoluto

$$-n + \sqrt{n^2 - 4mp}:$$

se n fôr negativo, teremos que o valor absoluto

$$-n + \sqrt{n^2 - 4mp}$$

será maior do que o valor absoluto

$$-n + \sqrt{n^2 - 4mp},$$

pois o primeiro, por ser n negativo, se torna em

$$+n + \sqrt{n^2 - 4mp}$$

e o segundo em

$$+n - \sqrt{n^2 - 4mp}:$$

— 2.° Si se tem $n^2 - 4mp = 0$, as expressões (1) e (2) dão simultaneamente

$$x' = -\frac{n}{2m} \quad \text{e} \quad x'' = -\frac{n}{2m},$$

isto é, as igualdades (1) e (2) fornecerão o mesmo valor $-\frac{n}{2m}$ para x e x'': a equação (I) terá pois uma unica raiz, o que facilmente se evidencia das seguintes considerações:

A igualdade

$$n^2 - 4mp = 0$$

dá, dividindo ambos os seus membros por $4m^2$,

$$\frac{p}{m} = \frac{n^2}{4m^2};$$

ora, da equação (I) tira-se

$$x^2 + \frac{n}{m}x + \frac{p}{m} = 0$$

ou collocando em vez de $\frac{p}{m}$ o seu valor acima,

$$x^2 + \frac{m}{n}x + \frac{n^2}{4m^2} = 0$$

ou ainda

$$\left(x + \frac{n}{2m}\right)^2 = 0;$$

equação esta que só será satisfeita quando se tiver

$$x = -\frac{n}{2m}.$$

Ainda que só haja um valor $\left(-\frac{n}{2m}\right)$ que collocado em lugar de x na equação (I) torna o seu primeiro membro igual, identicamente, ao segundo, se diz que a equação tem *duas raizes iguaes*.

— 3.º Sendo $n^2 - 4mp < 0$, isto é, negativo, os radicaes nas expressões (1) e (2) indicariam raizes que se não podem extrahir, e essas expressões tomariam a forma imaginaria.

Examinemos entretanto o caso para completar esta discussão.

Sendo

$$n^2 - 4mp < 0$$

é claro que, sem alterar o sentido da desigualdade, se poderão **dividir** ambos os seus membros por $4m^2$, e assim teremos

$$\frac{n^2}{4m^2} - \frac{p}{m} < 0$$

ou

$$\frac{p}{m} = \frac{n^2}{4m^2} + k^2;$$

sendo k^2 uma quantidade positiva e não nulla.

Dividindo ambos os membros da equação (1) por m teremos

$$x^2 + \frac{n}{m}x + \frac{p}{m} = 0$$

e, pondo em vez de $\frac{p}{m}$ o seu valor acima, virá

$$x^2 + \frac{n}{m}x + \frac{n^2}{4m^2} + k^2 = 0$$

ou

$$\left(x^2 + 2m\right)^2 + k^2 = 0$$

Examinando esta ultima expressão nota-se que, sendo k^2 uma quantidade positiva differente de zero, e sendo o termo $\left(n^2 + \frac{n}{2m}\right)^2$ positivo por natureza, nenhum valor haverá que, collocado em logar de x, torne o primeiro membro desta ultima equação nullo e, portanto, que *é impossivel resolver a equação*.

Passemos á discussão de um problema

Discussão dos problemas do 2° grào.

Suppõe-se conhecido este principio de physica : *as intensidades de uma luz a distancias diversas são na razão inversa dos quadrados dessas distancias.*

120. 4° Problema. *Achar na linha em que se acham duas luzes differentes* A *e* B *o ponto que ambas allumiam com igual intensidade.*

Solução. Seja a a distancia AB entre as duas luzes, b e c as intensidades dellas na distancia 1. Seja C o ponto pedido e $AC = x$; donde $BC = a - x$. Procuremos a equação do problema.

Pois que a luz A tem a intensidade b, e a luz B a intensidade c na distancia 1, para saber a intensidade de cada uma nas distancias x e $a - x$ teremos, applicando o principio da physica, para a 1ª luz

$$x^2 : 1 :: b : \frac{b}{x^2}; \text{ para a } 2^{\text{a}}\ (a-x)^2 : 1 :: c : \frac{c}{(a-x)^2}$$

devendo ser iguaes estas duas intensidades, temos a equação

$$\frac{b}{x^2} = \frac{c}{(a-x)^2}, \text{ ou preparando-a } x^2 - \frac{2ab}{b-c}x = -\frac{a^2 b}{b-c};$$

resolvendo-a e reduzindo segundo o n. 109, teremos

$$x = \frac{a(b \pm \sqrt{bc})}{b - c}$$

Esta expressão ainda se póde simplificar por que

$$b \pm \sqrt{bc} = \sqrt{b} \times \sqrt{b} \pm \sqrt{b} \times \sqrt{c} = (\sqrt{b} \pm \sqrt{c})\sqrt{b}$$

$$b - c = (\sqrt{b})^2 - (\sqrt{c})^2 = (\sqrt{b} + \sqrt{c})(\sqrt{b} - \sqrt{c});$$

logo, separando os valores,

$$x = \frac{a(b - \sqrt{bc})}{b - c} = \frac{a(\sqrt{b} - \sqrt{c})\sqrt{b}}{(\sqrt{b} + \sqrt{c})(\sqrt{b} - \sqrt{c})} = \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b} + \sqrt{c}}$$

$$x = \frac{a(b + \sqrt{bc})}{b - c} = \frac{a(\sqrt{b} + \sqrt{c})\sqrt{b}}{(\sqrt{b} + \sqrt{c})(\sqrt{b} - \sqrt{c})} = \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b} - \sqrt{c}}$$

Trata-se de discutir estes dous valores de x ou da distancia AB.

121. *Discussão*. 1.º Seja em primeiro lugar $b > c$, ou a luz A mais forte do que B. Então os dous valores são ambos positivos, isto é, o problema tem duas soluções. Demais, o 1º ponto existe entre os dous A e B e mais proximo deste, porque sendo $\sqrt{b} > \sqrt{c}$, conclue-se $2\sqrt{b} > \sqrt{b} + \sqrt{c}$

donde $\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{b} + \sqrt{c}} > \dfrac{1}{2}$, e, pois, AC ou $\dfrac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b} + \sqrt{c}} > \dfrac{a}{2}$.

O segundo ponto fica à direita do ponto B, porque evidentemente

$$\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}>1,\text{ logo }\frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}>a.$$

2.° *Seja* b < c. O 1° valor de x será ainda positivo, porém menor que a, porque sendo $\sqrt{b}<\sqrt{c}$ teremos

$$2\sqrt{b}<\sqrt{b}+\sqrt{c},\text{ pelo que}$$

$$\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}<\frac{1}{2},\text{ donde } x \text{ ou } \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}<\frac{a}{2}.$$

Conclue-se que este 1° ponto ainda se acha entre A e B, porém mais proximo de A.

O 2° valor de x é negativo, e só póde ter significação suppondo um ponto C' á esquerda de A. Era de esperar este resultado por se ter supposto a luz B mais forte do que A.

Seja agora $b=c$, serão os dous valores de x

$$x=\frac{a}{2};\ x=\frac{a\sqrt{b}}{0}=\infty.$$

O 1° destes valores indica o meio da linha AB, o que, mesmo *a priori*, era evidente. O valor ∞ mostra que não se póde marcar um outro ponto, que satisfaça á condição do problema.

N. B. Observemos de passagem, que se esta ultima hypothese $b=c$ se applicasse aos valores não simplificados que deduzimos da equação

$$x=\frac{a(b-\sqrt{bc})}{b-c} \text{ se mudaria em } x=\frac{0}{0}$$

$$x=\frac{a(b+\sqrt{bc})}{b-c} \text{ tornar-se-hia } x=\frac{2ab}{0}.$$

O symbolo de indeterminação que aqui apparece depende do factor commum que foi omittido $\sqrt{b}-\sqrt{c}$, o qual, com effeito, se torna zero na presente hypothese.

4.° Se fôr $a=0$ será $x=0$, isto é, reunidas no mesmo ponto duas luzes desiguaes, só esse mesmo ponto póde ser por ambas igualmente allumiado.

5.° Se além de $a=0$, fôr tambem $b=c$, será $x=0$, $x=\frac{0}{0}$. O 1° valor indica o ponto em que estão as luzes, mas o 2° um ponto qualquer. Em verdade duas luzes iguaes no mesmo ponto prestarão igual claridade a um ponto qualquer no espaço.

Se de cada valor de x ou AC derivarmos o correspondente de $a-x$, ou BC, analysados estes nas mesmas hypotheses darão resultados em harmonia com os precedentes.

Esta discussão é mais um exemplo da precisão com que a algebra resolve as questões e deduz os corollarios de todas as circumstancias comprehendidas no enunciado do problema.

Das Desigualdades

122. Nas discussões dos problemas temos tido occasião de estabelecer entre certas quantidades relações de desigualdade representadas pelo signal, $>$, e de sujeitar estas *desigualdades* a transformações analogas ás que soffrem as equações. Ora, ainda que em geral os principios dos n.os 35 e 36 sejam applicaveis tanto a igualdades como a desigualdades, comtudo a respeito destas soffrem elles excepções provenientes da applicação das regras do calculo ás *expressões negativas*, como se fossem quantidades absolutas; dessas excepções cumpre estar prevenido para evitar erros.

Recapitulemos todas as transformações que soffre uma desigualdade, tornando salientes as excepções.

123. Transformação por addição e subtracção. — *Sommando ou diminuindo a mesma quantidade aos dous membros de uma desigualdade, esta subsiste no mesmo sentido.* E' evidente.

Sendo

$$8>3, \qquad \text{é tambem}$$

$$8+5>3+5, 8-5>3-5$$

$$-3<-1, -3+5<-1+5, -3-5<-1-5, \text{etc.}$$

Sommando membro a membro duas ou mais desi-

gualdades no mesmo sentido, nesse mesmo subsiste a desigualdade resultante.

Sendo $a > b$, $c > d$, evidentemente $a + c > b + d$.

Estes dous principios não soffrem excepção.

Não acontece o mesmo subtrahindo membro a membro duas ou mais desigualdades. Por exemplo, sendo

$$\left.\begin{matrix} 4 < 7 \\ 2 < 3 \end{matrix}\right\}, \text{ tambem } 4 - 2 < 7 - 3, \text{ ou } 2 < 4.$$

Mas, ainda que $9 < 10$, $6 < 8$, não é $9 - 6 < 10 - 8$

ou $$3 < 2,$$

Póde mesmo desapparecer a desigualdade; *v. gr.* $11 < 19$, e $8 < 16$, e todavia $11 - 8 = 19 - 16$.

124. Transformação por multiplicação e divisão. *Multiplicando ou dividindo ambos os membros por um numero positivo ou absoluto, a desigualdade, subsiste no mesmo sentido.*

Principio evidente e que serve para eliminar os denominadores.

Multiplicando ou dividindo ambos os membros por quantidade negativa a desigualdade subsiste em sentido contrario.

Sendo $8 > 5$, $8 \times -3 < 5 \times -3$ ou $-24 < -15$.

Logo, *para usar desta transformação sendo o multi-*

plicador ou divisor algebrico, cumpre examinar se o dito multiplicador ou divisor é positivo ou negativo.

Corollario. *Mudando os signaes a ambos os membros inverte-se a desigualdade,* porque isto equivale a multiplical-os por -1.

125. Transformação por quadrado e raiz quadrada. *Sendo os dous membros da desigualdade ambos positivos, entre os seus quadrados ou as suas raizes subsiste a desigualdade no mesmo sentido.*

Sendo $8 > 5$, $8^2 > 5^2$, ou $64 > 25$ e $\sqrt{8} > \sqrt{5}$. E' evidente.

Se forem ambos os membros negativos, a desigualdade entre os quadrados é em sentido contrario.

Sendo $-11 < -7$, $(-11)^2 > (-7)^2$, ou $121 > 49$.

Tendo os dous membros signaes diversos, nada se póde decidir sobre o sentido da desigualdade entre os quadrados. Por exemplo,

$-5 < 6$ se transforma $(-5)^2 < (6)^2$, ou $25 < 36$.

$-5 < 3$ reduz-se a $(-5)^2 > (3)^2$, ou $25 > 9$.

N. B. Nos dous ultimos casos não se trata de extracção de raiz, porque a raiz quadrada do membro negativo é imaginaria.

126. Para exercicio dos principiantes propomos novos problemas do 2º grão.

5.° Problema. *Dous negociantes se associaram para uma empreza ; o 1° concorreu com a quantia* a *e o 2° não se sabe com quanto ; mas ganharam ao todo a quantia* b, *e a entrada do 2° é tal, que sommada com o lucro respectivo fórma o valor* c. *Pede-se a entrada do 2° e o ganho de cada um.*

$$\text{Equação } x^2 + (a + b - c)\, x = ac.$$

6.° Problema. *Achar um numero, cujo quadrado seja para o producto das differenças entre o mesmo numero e dous dados* a *e* b *em uma razão conhecida,* p : q,

$$\text{Equação } x^2 - \frac{(a+b)\,p}{p-q}\, x = \frac{abp}{q-p}$$

7.° Problema. *Devia repartir se a quantia* a *por certo numero de pessôas ; mas algumas* (m *pessôas) por ausentes perdem o direito, e esta circumstancia augmenta a quantia* b *ao quinhão de cada um dos presentes. Pergunta-se : quantas eram as pessôas ?*

$$\text{Equação } x^2 - mx = \frac{ma}{b}.$$

N. B. A equação deste problema é a mesma do problema 2° (n, 111) ; as condições de um e de outro, ainda que á primeira vista differentes, reduzem-se ao mesmo a saber : *um numero* a *dividir por* x *e por* x — m, *sendo* *dada a differença dos quocientes*. Á mesma equação se reduz o seguinte:

8.° PROBLEMA. *Obrigaram-se alguns negociantes a pagar entre si a quantia* a; *mas fallindo alguns* (m), *cresceu a cada um dos outros a despeza* b. *Quantos eram?*

Estas diversas questões reduzidas á mesma equação são proprias para mostrar a extensão das applicações de uma fórmula algebrica e a utilidade de, na resolução dos problemas, representar por lettras as quantidades conhecidas.

---

§ 4.° Equações e problemas do segundo gráo a duas ou mais incognitas

127. Esta theoria não póde ser aqui completamente desenvolvida, porque (como depois se verá) a resolução de duas equações do 2° gráo a duas incognitas depende, em geral, da resolução de uma equação do 4° gráo a uma incognita. Comtudo ha casos especiaes, em que se consegue, pelos methodos precedentes, resolver o problema; por exemplo, este:

Achar dous numeros cujo producto seja p, *e taes, que* a *vezes o primeiro, mais* b *vezes o segundo, fórme a somma* 2s.

Equações do problema

$$xy = p$$
$$ax + by = 2s$$

Da 2ª se deduz $y = \frac{2s - ax}{b}$, e, substituindo este valor na 1ª,

$$ax^2 - 2sx = -bp,$$

donde

$$x = \frac{s}{a} \pm \frac{1}{a}\sqrt{s^2 - abp},$$ e, por

substituição no valor precedente,

$$y = \frac{s}{b} \pm \frac{1}{b}\sqrt{s^2 - abp}.$$

Estes valores serão reaes, quando s^2 não fôr menor do que abp.

Sendo reaes, são todos positivos, porque

$$s > \sqrt{s^2 - abp}.$$

logo o problema tem duas soluções directas representadas pelos dous systemas de valores de x e y.

Sendo $a = b = 1$, os valores supra mudam-se em

$$x = s \pm \sqrt{s^2 - p}, \quad y = s \pm \sqrt{s^2 - p}.$$

Nota-se aqui que os valores de y são os mesmos de x em ordem inversa, isto é, que tendo cada incognita dous valores, comtudo o problema tem uma só solução; o que se torna claro separando os valores;

$$1^{\circ}\ x=s+\sqrt{s^2-p};\quad y=s-\sqrt{s^2-p}$$

$$2^{\circ}\ x=s-\sqrt{s^2-p};\quad y=s+\sqrt{s^2-p}.$$

Para bem interpretar esta circumstancia, voltemos ás equações do problema, que na hypothese presente se mudam em

$$xy=p$$

$$x+y=2s.$$

Estas em nada se alteram mudando x em y, y em x, logo, as duas incognitas devem depender da mesma equação do segundo gráo, e esta dar ao mesmo tempo os dous valores de x e de y. Tivemos um exemplo semelhante no problema n. 111.

128. Entre as equações do 4º gráo, e, em geral, de gráo par, ha algumas que se resolvem pela fórmula das do segundo gráo; são as que têm a fórma

$$x^{2m}+px^{m}+q=0.$$

Porque esta, suppondo $x^{m}=y$, se transforma em

$$y^2+py+q=0,$$

equação do segundo grão, que facilmente se resolve. Será, pois, y ou

$$x^m = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}, \qquad \text{donde}$$

$$x = \sqrt[m]{-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}}.$$

A ultima fórmula contém dous valores de x, quando m é impar; valores que serão imaginarios se fôr negativa a quantidade $\frac{p^2}{4} - q$; reaes, se esta quantidade fôr positiva.

Quando m fôr par a fórmula dará quatro valores para x, pois verdadeiramente deve escrever-se neste caso

$$x = \pm \sqrt[m]{-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}}$$

valores que serão todos reaes, ou todos imaginarios; ou dous reaes e dous imaginarios, conforme os valores de p e q fizerem positivas ou negativas as quantidades submettidas a cada um dos radicaes.

129. Muitos problemas conduzem a equações da natureza da precedente; v. g. este:

Achar dous numeros, cujo producto seja 6 e a somma dos cubos 35.

As equações são

$$xy=6$$

$$x^3+y^3=35$$

O valor de y dado pela 1ª e substituido na 2ª conduz á equação

$$x^6-35x^3=-216; \text{ donde}$$

$$x=\sqrt[3]{\frac{35}{2}\pm\sqrt{\frac{(35)^2}{4}-216}}=\sqrt[3]{\frac{35\pm19}{2}}$$

Separando os dous valores de x e calculando os correspondentes de y, temos

$$x=\sqrt[3]{\frac{35+19}{2}}=3;\ y=\frac{6}{x}=2$$

$$x=\sqrt[3]{\frac{35-19}{2}}=2;\ y=3.$$

Donde se vê, que cada incognita tem dous valores, sendo na realidade, uma unica solução,

Cabe aqui a observação que termina o n. 127.

130. Quando m é superior a 3, a resolução da equação depende de extracção de raizes, sobre as quaes ainda nos faltam preceitos; comtudo, tratando de numeros, essas raizes se podem extrahir por logarithmos (Arith. 207).

Seguem tres exemplos de equações do 4º grão, que, resolvidas pela fórmula precedente, dão á incognita quatro valores eguaes :

$$x^4-25x^2=-144;\ x=\pm 4,\ \text{e}\ x=\pm 3.$$

Dous reaes e dous imaginarios :

$$x^4-7x^2=8:\ x=\pm\sqrt{8}=\pm 2\sqrt{2},\ \text{e}\ x=\pm\sqrt{-1}.$$

Todos os valores imaginarios :

$$x^4+12x^2+11=0;\ x=\pm\sqrt{-1},\ \text{e}\ x=\pm\sqrt{-11}.$$

CAPITULO V

Potencias e raizes de todos os gráos

131. *Introducção.* Assim como a resolução das equações do segundo gráo suppõe conhecidas as regras para extracção da raiz quadrada, do mesmo modo para se poder resolver as equações do 3°, 4° gráo, etc., é necessario saber extrahir as raizes dos gráos respectivos de qualquer quantidade numerica ou litteral.

Trataremos no presente capitulo da elevação ás potencias, da extracção das raizes e do calculo dos radicaes *de qualquer gráo.*

Ainda que qualquer potencia de uma quantidade se póde formar pelas regras da multiplicação arithmetica ou algebrica entretanto essas potencias seguem uma *lei de composição* que é indispensavel conhecer, porque é della que se derivam as regras para a extracção das raizes.

Já se monstrou (n. 98) que a composição do quadrado de qualquer quantidade, algebrica ou numerica, depende da expressão do *quadrado de um binomio.*

Veremos agora que, em geral, a *lei de composição* de uma potencia de qualquer quantidade deduz-se facilmente da expressão algebrica da potencia do mesmo gráo de um binomio.

Começamos, pois esta nova theoria, procurando o *desenvolvimento da potencia de qualquer gráo de um binomio.*

---

§ 1.º Binomio de Newton

132 Proponha-se elevar a qualquer potencia o binomio $x+a$.

Por meio de multiplicações successivas se formam os seguintes resultados:

$$(x+a)^2=x^2+2ax+a^2$$

$$(x+a)^3=x^3+3ax^2+3a^2x+a^3$$

$$(x+a)^4=x^4+4ax^3+6a^2x^2+4a^3x+a^4$$

$$(x+a)^5=x^5+5ax^4+10a^2x^3+10a^3x^2+5a^4x+a^5, etc.$$

A' simples inspecção destes polynomios, facilmente se conhece a lei que todos elles seguem, pelo que toca aos expoentes de a e de x; mas não assim quanto aos coefficientes, a não ser o do 1º termo, que é 1, e o do 2º igual ao expoente da potencia. Para descobrir a composição dos outros coefficientes recorre-se a um artificio algebrico, que consiste em analysar os productos de qualquer numero de binomios, tendo sómente o 1º termo commum, taes como $x+a$ $x+b, x+c$, etc.; e depois suppôr iguaes os segundos termos, o que converte os productos em potencias. Nesses productos não apparecem reducções; e, assim evitados os resultados numericos, mais facilmente se conhece o como são formados os multiplicadores ou coefficientes de cada termo. Eis aqui alguns dos productos mencionados:

$$(x+a)(x+b)=x^2+\left.\begin{array}{l}a\\+b\end{array}\right\}x+ab$$

$$(x+a)(x+b)(x+c)=x^3+\left.\begin{array}{l}a\\+b\\+c\end{array}\right\}x^2+\left.\begin{array}{l}ab\\+ac\\+bc\end{array}\right\}x+abc$$

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=x^4+\left.\begin{array}{l}a\\+b\\+c\\+d\end{array}\right\}x^3+\left.\begin{array}{l}ab\\+ac\\+ad\\+bc\\+bd\\+cd\end{array}\right\}x^2+\left.\begin{array}{l}abc\\+abd\\+acd\\+bcd\end{array}\right\}x+abcd$$

Do mesmo modo se podem formar outros productos de qualquer numero de binomios, sempre applicando as regras ordinarias da multiplicação algebrica.

O exame attento destes productos descobre que são elles constantemente formados segundo as leis seguintes:

1.° O expoente de x começa por ser igual ao numero de binomios multiplicados; decresce uma unidade de termo em termo, até o ultimo em que é zero.

2.° Os multiplicadores das potencias de x são:

No 1° termo a unidade;

No 2° a somma dos segundos termos dos binomios;

No 3° a somma dos productos distinctos que se póde formar com os mesmos segundos termos combinados dous a dous.

No 4° a somma dos productos distinctos que se fórmam dos segundos termos dos binomios, tres a tres;

No 5° a somma dos productos dos segundos termos, quatro a quatro.

E assim por diante até o ultimo termo, igual ao producto dos segundos termos dos binomios.

133. Podemos demonstrar, em geral, que a mesma *lei de composição* rege os productos de qualquer numero de binomios; e para este fim empregaremos um raciocinio analogo ao dos ns. 97 e 98.

Supponha-se verificada a lei para o producto de m binomios $x+a$, $x+b$, ... $x+k$; provaremos que ella subsiste multiplicando esse producto por um novo factor $x+l$. Se o producto dos m binomios

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + \dots Mx^2 + Nx + P;$$

multiplicando este polynomio pelo novo factor $x + l$, resulta

$$x^{m+1} + \left.\begin{matrix} A \\ +l \end{matrix}\right\} x^m + \left.\begin{matrix} B \\ +Al \end{matrix}\right\} x^{m-1} + \left.\begin{matrix} C \\ +Bl \end{matrix}\right\} x^{m-2} + \ldots + \left.\begin{matrix} N \\ +Ml \end{matrix}\right\} x^2 + \left.\begin{matrix} P \\ +Nl \end{matrix}\right\} x + Pl$$

A lei dos expoentes é evidentemente a mesma que no producto de m binomios.

Quanto aos coefficientes ·

1.° O do 1° termo é a *unidade*;

2.° O do 2° $A + l$ é manifestamente a somma dos $m + 1$ segundos termos dos binomios.

3.° B é por hypothese a somma dos productos dos m segundos termos dois a dois; Al é a somma dos productos dos mesmos m segundos termos pelo novo segundo termo l. Logo $B + Al$ é a somma total dos productos dos $m + 1$ segundos termos dois a dois.

4.° Do mesmo modo se reconhece $C + Bl$ é a somma dos productos dos $m + 1$ segundos termos tres a tres.

E assim os mais coefficientes.

O ultimo Pl é claramente o producto dos $m + 1$ segundos termos.

Assim a lei verificada para m binomios é necessariamente applicavel a $m + 1$.

O que serve para estabelecel-a em toda a sua generalidade.

134. Actualmente suppondo em todos os productos acima $a=b=c=...$, os mesmos productos se tornarão em $(x+a)^2$, $(x+a)^3$, $(x+a)^4$... e em geral, sendo m o numero de binomios, $(x+a)^m$.

Quanto aos multiplicadores das diversas potencias de x.

O do 1° termo é sempre 1.

O do 2° $a+b+c+...$ se muda evidentemente em ma.

O do 3° termo $ab+ac+bc+$ ... torna-se $a^2+a^2+a^2+...$ ou a^2 repetido tantas vezes, quantos são os productos de m lettras combinadas duas a duas.

O do 4° $abc+abd+acd+...$ muda-se em a^3, tomando tantas vezes quantos productos se fórmam de m lettras tres a tres.

O do 5° será a^4 multiplicado pelo numero de productos de m lettras quatro a quatro.

E' facil continuar esta lei, estendendo-a a todos os outros coefficientes.

Logo, representando por M, N, P, Q, R, etc., o numero de productos de m lettras, 2 a 2, 3 a 3, 4 a 4, 5 a 5, 6 a 6, etc., será

$$(x+a)^m = x^m + max^{m-1} + Ma^2x^{m-2} + Na^3x^{m-3} + \\ + Pa^4x^{m-4} + \dots a^m.$$

Pelo que, para ficar determinado o desenvolvimento da potencia $(x+a)^m$ só nos resta descobrir, em geral os valores de *M, N, P, etc.*, a saber : o numero de productos distinctos de *m* lettras, combinadas, 2 a 2, 3 a 3, 4 a 4, etc. Este problema e outros semelhantes fazem parte da *theoria das combinações*, cujos principios nos serão uteis em outras occasiões.

135. *Theoria das combinações.* Para comprehender o que temos de expôr a este respeito, cumpre ter bem presente ao espirito algumas definições.

Chamam-se *permutações de um producto,* as diversas collocações em que se podem achar os factores do mesmo producto ; *abc, acb, cab, bca, etc.*, são *permutações* do producto *abc*.

Combinações são arranjos de certo numero de lettras, 2 a 2, 3 a 3, etc., não entrando em cada um delles lettra alguma repetida. As cinco lettras, *a, b, c, d, e*, combinadas 2 a 2 dão as *combinações ab, ba, ac, ca,* além de outras. Combinadas 3 a 3 dão *abc, acb, abd, cab*, e outras mais.

Productos distinctos são combinações que differem uma da outra pelo menos em uma lettra, como *ab, ac, bc*, etc.

Os principios da *theoria das combinações* necessarios e uteis á demonstração da *fórmula do binomio* se resumem na resolução dos tres problemas que se seguem.

136. 1º PROBLEMA. *Determinar o numero total de permutações de um producto de* n *lettras*. Seja x esse numero.

Um producto de 2 lettras evidentemente só póde escrever-se de dous modos, ab e ba. *Numero de permutações* 1×2.

Sendo de 3 lettras abc é claro que, fixando uma lettra inicial a, restam duas a permutar, o que dará 1×2 permutações; mas, podendo ser qualquer das tres a lettra inicial, o numero de permutações será tres vezes o precedente, ou $1 \times 2 \times 3$.

Em um producto de 4 lettras começando por uma dellas, e permutando as tres restantes, temos $1 \times 2 \times 3$ permutações; e, como cada uma das quatro póde ser collocada em primeiro lugar, será o numero total de permutações $1 \times 2 \times 3 \times 4$.

Continuando estes raciocinios, conclue-se por inducção, tão clara quanto rigorosa, que, para o producto de n lettras, o numero pedido de permutações será

$$x = 1 \times 2 \times 3 \times \dots\dots\dots \times n,$$

isto é, *o producto de todos os numeros inteiros desde* 1 *até* n *inclusivamente*.

137. 2º Problema. *Determinar o numero total de combinações de* m *lettras* n *a* n. Chamemos a incognita y.

Para combinar m lettras 2 a 2 é claro que cumpre combinar cada uma dellas com todas as restantes, que são $m - 1$; logo, o numero de combinações 2 a 2 é $m(m-1)$.

Combinemos as m lettras 3 a 3. Cada combinação de

2 com cada uma das lettras restantes, que são $m-2$, dará $m-2$ combinações de tres, e, pois, que o mesmo se applica a cada uma das $m(m-1)$ combinações de duas, será o numero total das combinações de 3, $m(m-1)(m-2)$.

Por um raciocinio em tudo semelhante se mostra que o numero de combinações 4 a 4 é $m(m-1)(m-2)(m-3)$.

E as combinações 5 a 5, $m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)$.

Analysando o ultimo factor de cada um destes productos, vemos que, para o caso da combinação das lettras n a n, será o dito ultimo factor $(m-n+1)$ ou $m-n+1$. Logo, combinadas m lettras n a n, é o numero das combinações

$$y = m(m-1)(m-2)(m-3)\ldots\ldots\ldots(m-n+1)$$

Isto é, *o producto de todos os numeros inteiros desde o numero das lettras* m *até* m $-$ n $+$ 1 *inclusivamente.*

Sendo $m=n$, esta fórmula se muda em

$$n(n-1)(n-2)\ldots\times 1$$

ou o producto de todos os numeros inteiros desde n até 1 inclusive, producto que é o mesmo da fórmula precedente (n. 136) em ordem contraria.

Com effeito, a hypothese $m=n$ converte as *combinações* em permutações de um producto de n lettras.

Observação. As duas fórmulas que acabamos de deduzir por um methodo de inducção (n[os] 136, 137) podem ser generalisadas por meio de raciocinios inteiramente semelhantes aos que empregámos em os n[os] 29,98 e 133. E' para desejar que o principiante se exercite, organisando essas demonstrações.

138. 3º PROBLEMA. *Quantos productos distinctos se fórmam de* m *lettras* n *a* n?

Representemos este numero por z.

Se fossem conhecidos os *productos distinctos*, formar-se-hiam as combinações, escrevendo cada producto de todos os modos possiveis; assim, *o numero dos productos, multiplicado pelo numero de permutações de um delles, dá o numero total das combinações*. Logo. entre as quantidades x, y, z ha necessariamente esta relação

$$y = xz$$

da qual se deduz o numero de productos distinctos

$$z\frac{y}{x} = \frac{m\,(m-1)\,(m-2)\,(m-3)\ldots\,(m-n+1)}{1,\ 2,\ 3\ldots\ n}$$

139. *Fórmula do binomio; conclusão*. Voltando á expressão do n. 123, é claro que, para achar os valores de M, N, P, etc., basta no valor de z, que se acaba de deduzir, suppôr $n = 2, 3, 4$, etc... successivamente.

Assim teremos :

Suppondo $n=2$, $M=\dfrac{m\,(m-1)}{1\times2}$

» $n=3$, $N=\dfrac{m\,(m-1)\,(m-2)}{1\times2\times3}$

» $n=4$, $P=\dfrac{m\,(m-1)\,(m-2)\,(m-3)}{1\times2\times3\times4}$

E assim por diante. Estes valores substituidos na expressão de $(x+a)^m$ (n. 133) a tornam em

$$(x+a)^m=x^m+max^{m-1}+\frac{m\,(m-1)}{1\times2}a^2x^{m-2}$$

$$+\frac{m\,(m-1)\,(m-2)}{1\times2\times3}a^3x^{m-3}+\ldots+a^m,$$

fórmula do desenvolvimento de qualquer potencia de um binomio, e que se denomina *O binomio de Newton*; do nome do celebre geometra que o descobrio.

140. Analysando os diversos termos da *Fórmula do binomio*, facilmente se descobre o modo simples de formar qualquer coefficiente por meio do anterior.

Forma-se o coefficiente de qualquer termo, multiplicando o coefficiente do termo precedente pelo expoente *de* x *no mesmo termo, e dividindo o producto pelo numero dos termos que precedem ao termo pedido.*

Por esta regra, que é méra traducção da fórmula, é facil elevar um binomio a uma potencia em particular. Formados os primeiros dous, termos (o que é simples, á vista da formula $x^m + max^{m-1}$, os seguintes se formarão calculando os coefficientes pela regra, e successivamente augmentando 1 ao expoente de a, diminuindo 1 ao de x. Assim.

$$(x+a)^6 = x^6 + 6ax^5 + 15a^2x^4 + 20a^3x^3 + 15a^4x^2 + 6a^5x + a^6$$

$$(x+a)^{10} = x^{10} + 10ax^9 + 45a^2x^8 + 120a^3x^7 + 210a^4x^6 +$$

$$+ 252a^5x^5 + 210a^6x^4 + 120a^7x^3 + 45a^8x^2 + 10a^9x + a^{10}.$$

N. B. Se acaso os coefficientes e expoentes do binomio não são iguaes a 1, como em $x+a$, cumpre não confundir estes coefficientes e expoentes com os que resultam da elevação a uma potencia; indicando os calculos para depois effectual-os em cada termo, evitam-se enganos e obtem-se o resultado com segurança. Por exemplo :

$$(2b^4 - 3c^3)^5 = (2b^4)^5 + 5(-3c^3)(2b^4)^4 + 10(-3c^3)^2(2b^4)^3 +$$

$$+ 10(-3c^3)^3(2b^4)^2 + 5(-3c^3)^4 2b^4 + (-3c^3)^5 = 32b^{20} -$$

$$- 250b^{16}c^3 + 720b^{12}c^6 - 1080b^8c^9 + 810b^4c^{12} - 243c^{15}.$$

141. A lei da serie (n. 139) se póde exprimir resumida e analyticamente pela fórmula de um termo qualquer,

$$T = m\frac{(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{1.2.3\dots n}a^n x^{m-n}$$

sendo n o numero de termos que precedem ao termo T. Estabelece-se por inducção esta fórmula analysando cada um dos termos do desenvolvimento de $(x+a)^m$.

O numero de termos deste desenvolvimento se determina suppondo $T=0$, para o que deve ser

$$m-n+1=0, \text{ ou } n=m+1.$$

Assim, $m+1$ è o numero de termos que precedem o termo *zero* ou o numero total de termos da serie, o que aliàs è evidente.

Para o ultimo termo $n=m$, donde

$$T=\frac{m(m-1)\dots 1}{1,2\dots m}a^m x^0 = a^m.$$

142. Suppondo na fórmula do binomio $x=a=1$, conclue-se

$$2^m = 1+m+m\frac{m-1}{2}+m\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}+\text{ etc.}$$

O que prova que a *somma dos coefficientes da potencia* m *de um binomio é igual á potencia* m *de* dous.

§ 2.º Extracção das raizes dos numeros

Os processos expostos na arithmetica para extrahir, de qualquer numero, a raiz quadrada e a raiz cubica podem ser ampliados de modo que se appliquem ás raizes de todos os gráos. Ou antes, do processo geral que passamos a tratar são casos particulares os relativos ás raizes quadrada e cubica.

Assim, tendo já desenvolvido convenientemente o modo de extrahir estas duas raizes, bastará expôr a regra geral para que se applique aos casos particulares da extracção da raiz 4ª, da raiz 5ª, etc.

143. *Extracção da raiz do gráo* n *de um numero inteiro.* Representa-se este numero por N.

Se o numero dado não tiver mais de n *algarismos, a sua raiz* (ou a parte inteira della) *terá um só. Para descobrir esse algarismo formam-se as potencias do gráo* n *dos numeros 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; se alguma destas potencias coincidir com o numero* N, *a sua raiz será a pedida exactamente; senão, a raiz não se poderá obter exactamente, e será a sua parte inteira a raiz do menor dos dous numeros, entre os quaes se achar o proposto* N.

Funda-se esta regra em que a potencia n de 10 ou $(10)^n$ é a unidade seguida de n zeros, ou o menor dos numeros de $n+1$ algarismos.

Quando o numero tiver mais de n algarismos, a sua raiz terá dous ou mais, isto é, poderá decompôr-se em dezenas e unidades; pelo que, chamando a as dezenas, b as unidades, será o numero dado

$$N=(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+n\frac{n-1}{2}a^{n-2}b^2+\text{etc.}$$

Donde se vê que o numero N considerado como potencia n de outro numero constará de diversas partes, a saber: a potencia n das dezenas na raiz (a^n) mais n vezes a potencia $n-1$ das dezenas, multiplicadas pelas unidades ($na^{n-1}b$), mais outras partes. Porém, a potencia n das dezenas, devendo ser um numero seguido de n zeros, não se contém nem influe nos ultimos n algarismos, dos quaes por este motivo se póde prescindir por emquanto; logo:

Separando os ultimos n *algarismos, se os restantes forem* n *ou menos, a raiz desse numero será as dezenas da raiz pedida.*

Se restarem á esquerda mais de n algarismos, um raciocinio semelhante nos conduz a separar outros n, e procurar a raiz dos restantes á esquerda.

Em geral, *divide-se o numero em classes de* n *lettras da direita para a esquerda, e procura-se qual a maior potencia* n *contida na classe da esquerda; a raiz dessa potencia será o 1° algarismo da raiz pedida,* ou as dezenas da raiz do numero composto das duas classes da esquerda.

Subtrahe-se da 1ª classe a potencia achada; ao resto se ajunta a classe seguinte. Assim fórma-se um numero que contém, além de outras partes, n vezes a potencia $n - 1$ do 1º algarismo (dezenas), multiplicada pelo segundo (unidades). E porque a potencia $n - 1$ das dezenas é numero terminado em $n - 1$ zeros.

Prescinde-se de n — 1 *algarismos; e, dividindo os restantes* (que vem a ser o resto anterior com o 1º algarismo da 2ª classe) *por* n *vezes a potencia* n — 1 *do algarismo achado, obtem-se o segundo algarismo da raiz, ou um algarismo um pouco acima delle.*

Para verifical-o, *eleva-se a raiz achada á potencia* n, *e subtrahe-se das duas classes já consideradas,* se esta subtracção é possivel. Não o sendo, tira-se 1 á raiz achada e repete-se a verificação.

A' direita do 2 resto escreve-se o 1.º algarismo da 3 classe; e divide-se por n *vezes a potencia* n — 1 *da raiz achada.*

Continua-se do mesmo modo até haver contemplado todas as classes do numero dado.

144. Sirva de exemplo extrahir a raiz 5ª de 550731776,

$$
\begin{array}{r|l}
5507.31776 & \ 56 \\
\underline{3125} & \overline{3125} \\
2382\,3 & \\
\underline{550731776} & \\
0 &
\end{array}
$$

Separados os cinco algarismos da direita, o resto

5507 se comprehende entre 3125, 5ª potencia de 5, e 7,795, 5ª potencia de 6. Pelo que as dezenas são 5, e a sua 5ª potencia 3,125, subtrahida da classe, 5,507 deixa o resto 2382, que, com o 1º algarismo da 2ª classe, fórma o dividendo 23823. O divisor é 3125, 5 vezes a 4ª potencia de 5, e o quociente 7. Mas, como elevado 57 á 5ª potencia produz numero maior que o proposto, verificamos 56, que é, em numeros inteiros, a raiz pedida.

Acha-se do mesmo modo

$$\sqrt[7]{94931877133}=37 \text{ exactamente.}$$

$$\sqrt[5]{2090455}=18 \text{ com o resto } 200887.$$

145. *Extracção de raizes por approximação.* A raiz de qualquer grão de numero que não seja potencia perfeita do mesmo grão é sempre *incommensuravel,* isto é, impossivel de ser determinada exactamente.

Esta proposição, já demonstrada pelo que toca ás raizes quadrada e cubica, é geral, e funda-se em que, segundo os principios demonstrados (Arith. 113, 2º), sendo $\frac{a}{b}$ uma fracção irreductivel, a sua potencia n ou $\frac{a^n}{b^n}$ igualmente o será, isto é, a^n e b^n serão primos entre si sempre que o forem a e b.

Do que se segue, que não póde haver fracção, cuja potencia n seja numero inteiro; e, portanto, o numero inteiro que não tiver raiz exacta e inteira, tambem não a terá fraccionaria. Esta, comtudo, se póde approximar em decimaes, tanto quanto se queira.

146. *Pede-se*, por exemplo, *a raiz* 6ª de 23 *até os centesimos*. Pois que, centesimos elevado á 6ª potencia devem produzir 12 algarismos decimaes; daremos ao numero proposto esta fórma

$$23.000000.000000$$

e, extrahindo a raiz 6ª deste numero como se fôsse inteiro, teremos 168, de que separando duas casas de dizima, será finalmente

$$\sqrt[6]{23}=1,68 \text{ sem differença de } 0,01.$$

Em geral; *ajuntam-se ao numero tantas classes de n zeros, quantas casas de dizima se querem na raiz; e, extrahida esta como nos inteiros, separam-se com a virgula as casas decimaes que exige a questão proposta.*

Se o numero proposto tem algarismos decimaes, os zeros devem ser os necessarios para completar á direita da virgula tantas classes de n algarismos, quantas casas de dizima se pedem. Assim se determina

$$\sqrt[4]{29,437}=2,329 \text{ sem differença de } 0,001.$$

Estas regras são simples corollarios da formação das potencias e do calculo dos decimaes.

§ 3.º Potencias e raizes das quantidades algebricas

Tratamos, em primeiro logar, das regras para elevar um monomio a qualquer potencia ou extrahir-lhe a raiz de qualquer grão.

147. Seja o monomio $2a^3b^2$ para elevar á 5ª potencia, teremos segundo a definição

$$(2a^3b^2)^5 = 2a^3b^2 \times 2a^3b^2 \times 2a^3b^2 \times 2a^3b^2 \times 2a^3b^2.$$

Ora, neste producto o coefficiente 2 é 5 vezes factor, e cada expoente deve ser repetido 5 vezes; logo,

$$(2a^3b^2)^5 = 32a^{15}b^{10} \text{ e do mesmo modo}$$

$$(5ab^3c^4)^6 = 15625a^6b^{18}c^{24}.$$

Regra geral para elevar um monomio a qualquer potencia: *eleva-se a ella o coefficiente, e multiplica-se cada expoente pelo indice da potencia.*

Logo, reciprocamente, para extrahir qualquer raiz de um monomio, *extrahe-se a do coefficiente e divide-se cada um dos expoentes pelo indice da raiz.*

Donde se segue, que um monomio só póde ser potencia perfeita de qualquer grão quando: 1º o *coefficiente fôr potencia perfeita*; 2º *cada um dos expoentes fôr divisivel pelo indice da raiz.*

Não se dando qualquer destas circumstancias, conserva-se o signal indicador da raiz, e a sua expressão em muitos casos simplifica-se, como depois veremos.

148. Pelo que toca aos signaes póde affirmar-se :

1.° *Toda a potencia par de quantidade positiva ou negativa é essencialmente positiva.*

Porque a potencia do grão $2n$ é equivalente á potencia n do quadrado da mesma quantidade $a^{2n}=(a^2)^n$; mas o quadrado a^2 é essencialmente positivo. Assim,

$$(\pm 3a^2bc^3)^4 = +81a^8b^4c^{12}.$$

2.° *Toda a potencia impar deve ter o mesmo signal da quantidade*. Porque a potencia impar é sempre igual a uma potencia par, multiplicada pela mesma quantidade;

$$a^{2n+1} = a^{2n} \times a.$$

149. Destes principios se conclue que

1.° *A raiz de grão impar de qualquer monomio deve ter o mesmo signal da quantidade.*

$$\sqrt[5]{+32a^{10}b^5} = +2a^2b\,; \quad \sqrt[5]{-32a^{10}b^5} = -2a^2b$$

2.° *A raiz de grão par de qualquer monomio positivo* *póde ter indifferentemente o signal + ou* — Exemplo :

$$\sqrt[4]{81b^4c^8} = \pm 3bc^2$$

3.º *A raiz de grão par de quantidade negativa é uma raiz impossivel.* Porque não ha quantidade que elevada á potencia par dê resultado negativo.

$\sqrt[4]{-a}$, $\sqrt[6]{-b}$ *são symbolos imaginarios*, como $b\sqrt{-a}$.

Passemos aos polynomios.

150. Tendo já mostrado como pela fórmula de Newton se eleva um binomio a qualquer potencia, indicaremos agora o meio de applicar a mesma fórmula aos trinomios e a quasquer outros polynomios. Seja o trinomio $x+y+z$ que se trata de elevar ao cubo. Suppondo $x+y=u$, teremos

$$(x+y+z)^3 = (u+z)^3 = u^3 + 3zu^2 + 3z^2u + z^3 =$$

$$= (x+y)^3 + 3z(x+y)^2 + 3z^2(x+y) + z^3 =$$

$$= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 + 3zx^2 + 6xyz + 3zy^2 + 3z^2x$$
$$+ 3z^2y + z^3.$$

Para applicar commodamente este methodo a qualquer trinomio convirá representar cada termo por uma lettra, desenvolver a potencia, e depois fazer substituições e effectuar os calculos indicados.

Por modo semelhante se eleva qualquer outro polynomio a uma potencia de qualquer grão.

151. *Extracção da raiz* m *de um polynomio.* Seja P o polynomio, que supporemos ordenado em relação a uma lettra; e seja a raiz $x+y+z+\ldots$ que se póde suppôr tambem ordenada em relação á mesma lettra, a. por exemplo. Elevando esta raiz á potencia m, e tratando como um só termo a quantidade $y+z+\ldots$ será $(x+y+z\ldots)^m$ ou

$$P=x^m+mx^{m-1}(y+z+\ldots)+m\frac{m-1}{2}x^{m-2}(y+z+\ldots)^2+\text{etc.}$$

Dos principios da multiplicação algebrica se conclue que o termo x^m, devendo conter um expoente de a superior aos de todos os outros termos, não soffre reducção alguma, e é necessariamente o 1° termo do polynomio P. *Extrahindo, pois, a raiz deste 1° termo, ter-se-ha* x, *1° da raiz pedida.*

Subtrahindo x^m de P teremos, chamando ao resto R

$$R=P-x^m=$$

$$=mx^{m-1}(y+z+\ldots)+m\frac{m-1}{2}x^{m-2}(y+z+\ldots)^2+\text{etc.}$$

Neste ultimo polynomio é facil de provar que o termo $mx^{m-1}y$ contém o maior dos expoentes de a e não soffre reducção. Com effeito, tomando sómente o 1° termo de cada producto dos que estão indicados (sómente os 1^os^ termos, porque nesses entram os maiores expoentes de a), cumpre mostrar que $x^{m-1}y$ é de um grão a respeito de a, superior

a $x^{m-2}y^2, x^{m-3}y^3 x^{m-4}y^4$, etc., em geral, $x^{m-n}y^n$.

Ora, as duas expressões que comparamos

$$x^{m-1}y \text{ e } x^{m-n}y^n$$

divididas ambas por $x^{m-n}y$, reduzem-se a

$$x^{n-1} \text{ e } y^{n-1}$$

e nestas é evidente que o grão da 1ª excede o da 2ª, pois que, x contém maior expoente de a do que y.

Logo $mx^{m-1}y$ representa o 1° termo do polynomio ordenado R, e dividindo-o por mx^{m-1} teremos o 2° termo da raiz y.

Diminuindo de P a potencia $m+x$, prova-se semelhantemente que $mx^{m-1}z$ é o 1° termo do 2° resto R' ou $P-(x+y)^m$. Pelo que, dividindo este 1° termo por mx^{m-1}, obtem-se o 3° z da raiz.

152. Desta analyse resulta a seguinte,

REGRA GERAL. *Ordenado o polynomio extrahe-se a raiz do 1° termo que será o 1° da raiz pedida.*

Divide-se o 2° termo por m *vezes a potencia* m — 1 *do 1° termo da raiz, e o quociente será o 2° termo.*

Eleva-se o binomio á potencia m, *subtrahe-se do polynomio dado, e divide-se o 1° termo do novo resto pelo mesmo divisor precedente; será o quociente o 3° termo da raiz.*

Continúa-se do mesmo modo; a cada novo termo achado eleva-se toda a raiz á potencia m, subtrahe-se do polynomio dado, divide-se o 1° termo do resto por m vezes a potencia $m - 1$ do 1° termo da raiz. Este divisor é sempre o mesmo.

Facilmente se applica esta regra á raiz 3ª, 4ª, 5ª, etc.

Calculo dos Radicaes.

153. A extracção da raiz do monomio ou polynomio, que não fôr potencia perfeita do grão proposto, sómente póde indicar-se, fazendo preceder á quantidade o signal $\sqrt{\ }$, dentro do qual se colloca o numero que exprime o grão da raiz; este numero toma o nome de *indice do radical.*

Esta indicação dá origem ás *expressões radicaes,* ou *irracionaes* de diversos grãos. Taes expressões admittem muitas vezes simplificações, fundadas em um principio analogo ao do n. 95, a saber : *A raiz de um pro-*

ducto é igual ao producto das raizes do mesmo grão de cada factor. Em termos algebricos.

$$\sqrt[m]{a.b.c.d.,.} = \sqrt[m]{a}.\sqrt[m]{b}.\sqrt[m]{c}.\sqrt[m]{d...}$$

Com effeito, elevando estas duas expressões à potencia m, ambos conduzem ao resultado $abcd,..$; o que só é possivel sendo ellas iguaes.

Isto posto, seja a expressão $\sqrt[3]{54a^4b^3c^2}$, que não é equivalente a monomio algum racional, porque 54 não é cubo perfeito, e os expoentes de a e c não divisiveis por 3. Porém,

$$\sqrt[3]{54a^4b^3c^2} = \sqrt[3]{27a^3b^3} \times \sqrt[3]{2ac^2} = 3ab\sqrt[3]{2ac^2};$$

do mesmo modo

$$\sqrt[6]{192a^7bc^{12}} = \sqrt[6]{64a^6c^{12}} \times \sqrt[6]{3ab} = 2ac^2\sqrt[6]{3ab}.$$

Nas expressões finaes as quantidades, como $3ab$, $2ac^2$, que precedem ao radical e que o multiplicam, se chamam *coefficientes do radical*.

154. Outra simplificação tem lugar algumas vezes, *dividindo o indice do radical por um numero, e extrahindo a raiz do mesmo grão da quantidade sujeita ao* *signal* $\sqrt{\ }$. Por exemplo, dividindo o indice por 2, e tirando a raiz quadrada á quantidade, conclue-se

$$\sqrt[6]{4a^2} = \sqrt[3]{2a}$$

$$\sqrt[4]{36a^2b^2} = \sqrt{6ab} ...$$

E, em geral,

$$\sqrt[mn]{a^n} = \sqrt[m]{a}.$$

Com effeito, para elevar um numero á potencia mn, cumpre eleval-o á potencia m. e o resultado á potencia n; do que segue-se que extrahir a raiz mn equivale a extrahir a raiz n, e do resultado a raiz m. Uma destas raizes nos exemplos adoptados e nos casos semelhantes extrahe-se exactamente, a outra se conserva indicada.

155. Reciprocamente póde-se *multiplicar o indice do radical por qualquer numero, elevando á* potencia do mesmo gráo a *quantidade submettida ao signal* $\sqrt{\ }$.

Serve este principio para *reduzir dous ou mais radicaes ao mesmo gráo*, o que é muitas vezes util.

Multiplica-se o indice de cada radical pelo producto dos outros indices, e eleva-se a quantidade á potencia do gráo indicado pelo mesmo producto.

Assim

$$\sqrt{2a} \text{ e } \sqrt{(a+b)}$$

se reduzem a

$$\sqrt[12]{(2a)^4} \text{ ou } \sqrt[12]{16a^4} \text{ e } \sqrt[12]{(a+b)^3}.$$

Passemos ás operações sobre os radicaes.

156. *Addição e subtracção*. Dous radicaes se dizem semelhantes quando são do mesmo grão e é a mesma a quantidade debaixo do radical.

A subtracção e addição dos radicaes que não são semelhantes, apenas póde ser indicada. Se são semelhantes, opera-se sobre os cofficientes, cuja somma ou differença se faz coefficiente do mesmo radical. Muitas vezes reconhece-se a semelhança dos radicaes depois das simplificações, ns. 153 e 154.

Exemplos :

$$3\sqrt[3]{b} + 2\sqrt[3]{b} = 5\sqrt[3]{b}; \quad 3\sqrt[3]{b} - 2\sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{b}.$$

$$3a\sqrt[4]{b} \pm 2c\sqrt[4]{b} = (3a \pm 2c)\sqrt[4]{b}$$

$$\sqrt{48ab^2} + b\sqrt{75a} = 4b\sqrt{3a} + 5b\sqrt{3a} = 9b\sqrt{3a}$$

$$3\sqrt[6]{4a^2} - 2\sqrt[3]{2a} = 3\sqrt[3]{2a} - 2\sqrt[3]{2a} = \sqrt[3]{2a}$$

157. *Multiplicação e divisão.* Sejam primeiramente dous radicaes do mesmo gráo para multiplicar ou dividir, por exemplo :

$$\sqrt[m]{a} \text{ e } \sqrt[m]{b}$$

É facil de ver que

$$\sqrt[m]{a} \times \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{ab}, \text{ e } \sqrt[m]{a} : \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{\frac{a}{b}}$$

Porquanto, elevando á potencia m os dous membros de cada uma destas igualdades, os da primeira conduzem ambos a ab, e os da segunda a $\frac{a}{b}$

Logo, *para multiplicar ou dividir radicaes do mesmo gráo multiplicam-se ou dividem-se as quantidades affectas do signal* $\sqrt{\ }$, *e submette-se o resultado ao mesmo signal.* Havendo coefficientes, por elles se começa a operação.

Assim

$$2a\sqrt[3]{\frac{a^2+b^2}{c}} \times -3a\sqrt[3]{\frac{(a^2+b^2)^2}{d}} = -6a^2\sqrt[3]{\frac{(a^2+b^2)^3}{cd}}$$

ou simplificando,

$$\frac{-6a^2\,(a^2+b^2)}{\sqrt[3]{cd}}$$

$$\frac{\sqrt[3]{a^2b^2+b^4}}{\sqrt[3]{\frac{a^2-b^2}{8b}}} = \sqrt[3]{\frac{8b(a^2b^2+b^4)}{(a^2-b^2)}} = 2b\sqrt[3]{\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}}$$

Se os radicaes não fôrem do mesmo grão, cumpre reduzi-los (n. 155).

158. *Formação de potencias e extracção de raizes.* Porquanto

$$(\sqrt[m]{a})^n = \sqrt[m]{a} \times \sqrt[m]{a} \times \sqrt[m]{a} \times \ldots = \sqrt[m]{a^n};$$

para elevar á potencia **n** *um radical basta elevar a quantidade affecta do signal.* O coefficiente se eleva á mesma potencia.

Exemplos :

$$(\sqrt[4]{4a^3})^2 = \sqrt[4]{16a^6} = 2a\sqrt[4]{a^2} = 2a\sqrt{a}$$

$$(3\sqrt[3]{2a})^5 = 243\sqrt[3]{32a^5} = 486a\sqrt[3]{4a^2}$$

Quanto á extracção das raizes, cumpre *multiplicar o indice do radical pelo da raiz que se extrahir, sem alterar a quantidade submettida ao radical.*
Essa regra é simples corollario do n. 153.

$$\sqrt[3]{\sqrt[4]{3c}} = \sqrt[12]{3c} \; ; \; \sqrt[3]{\sqrt{5a}} = \sqrt[6]{5a}$$

Todas as vezes que se calculam radicaes, cumpre examinar, se o resultado admitte alguma das simplificações, n^os 153 e 154, e pratical-a para abreviar as expressões finaes.

159. *Observação.* O calculo dos radicaes qual fica exposto, quando se applica a expressões imaginarias, isto é, a *symbolos puramente algebricos,* soffre algumas vezes modificações e excepções, que sómente se poderão reduzir a preceitos geraes quando se houverem mostrado as diversas fórmas que póde tomar a raiz de qualquer gráo de uma expressão algebrica; o que depende de noções da theoria geral das equações, que não podemos anticipar. Contentamo-nos de dar aqui alguns exemplos destas modificações com os resultados do calculo.

1.° Pela regra geral

$$\sqrt{-a} \times \sqrt{-a} = \sqrt{+a^2} = \pm a.$$

Porém, o signal $\pm$ exprime a duvida se $+a^2$ proveio de multiplicar $+a$ por $+a$, ou $-a$ por $-a$; e, como esta duvida no caso presente não existe, deve adoptar-se o 2° valor $-a$. Aliás

$$\sqrt{-a} \times \sqrt{-a} = (\sqrt{-a})^2 = -a.$$

2.° Peça-se o producto $\sqrt{-a} \times \sqrt{-b}$, que, pela regra geral seria $\sqrt{+ab}$. Attendendo, porém, a que

$$\sqrt{-a} = \sqrt{a} \times \sqrt{-1}, \text{ e } \sqrt{-b} = \sqrt{b} \times \sqrt{-1}$$

será $\sqrt{-a} \times \sqrt{-b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b} \times \sqrt{-1} \times \sqrt{-1} =$

$$= \sqrt{ab} \times (\sqrt{-1})^2 = \sqrt{ab} \times -1 = -\sqrt{ab}.$$

3.° Proponha-se multiplicar $\sqrt[4]{-a}$ pela $\sqrt[4]{-b}$.

Empregando um artificio semelhante ao precedente, para destacar de uma e outra quantidade o factor imaginario obtemos

$$\sqrt[4]{-a}=\sqrt[4]{a}\times\sqrt[4]{-1}, \text{ e } \sqrt[4]{-b}=\sqrt[4]{b}\times\sqrt[4]{-1}$$

$$\text{porém, } \sqrt[4]{-1}\times\sqrt[4]{-1}=(\sqrt[4]{-1})^2=\left(\sqrt{\sqrt{-1}}\right)^2=$$
$$=\sqrt{-1}$$

Logo

$$\sqrt[4]{-a}\times\sqrt[4]{-b}=\sqrt[4]{a}\times\sqrt[4]{b}\times(\sqrt[4]{-1})^2=$$
$$=\sqrt[4]{ab}\times\sqrt{-1}.$$

4.° Semelhantemente se fórmam as diversas potencias de $\sqrt{-1}$,

$$(\sqrt{-1})^1=\sqrt{-1}$$

$$(\sqrt{-1})^2=-1$$

$$(\sqrt{-1})^3=-1\times\sqrt{-1}=-\sqrt{-1}$$

$$(\sqrt{-1})^4=-1\times-1=+1$$

Continuando, reconhece-se que as potencias pares de $\sqrt{-1}$ são reaes e alternadamente -1 e $+1$; as impares são todas alternativamente

$$\sqrt{-1} \text{ e } -\sqrt{-1}$$

Dos expoentes em geral

160. E' tempo de dar a conhecer dous novos symbolos de uso mui commodo nos calculos algebricos, a saber : os *expoentes fraccionarios* e os *expoentes negativos*. São origem destes symbolos as regras estabelecidas para a extracção das raizes e para a divisão dos monomios.

1.° Proponha-se extrahir a raiz n da quantidade a^m. Vimos que se fôr m multiplo de n, cumpre dividir o expoente m pelo indice n. Mas se esta divisão não é exacta, caso em que a extracção da raiz é impossivel algebricamente, póde ser indicada a operação, indicando-se a divisão dos expoentes. Assim, segundo a regra da extracção das raizes dos monomios

$$\sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{2}{3}}; \ \sqrt[4]{a^7} = a^{\frac{7}{4}}; \ \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

2.° Haja de dividir-se a^m por a^n; será o quociente a^{m-n}. Se, porém, fôr $m < n$, caso em que a divisão é impossivel algebricamente, convém indical-a praticando quanto fôr possivel a subtracção dos expoentes.

Seja p a differença absoluta entre m e n, isto é $n = m + \mathrm{p}$. Donde

$$\frac{a^{\mathrm{m}}}{a^{\mathrm{n}}} = \frac{a^{\mathrm{m}}}{a^{\mathrm{m}}\, a^{\mathrm{m}+\mathrm{p}}} = a^{\mathrm{m}-\mathrm{m}-\mathrm{p}} = a^{-\mathrm{p}}$$

mas, tambem $\dfrac{a^{\mathrm{m}}}{a^{\mathrm{m}+\mathrm{p}}} = \dfrac{a^{\mathrm{m}}}{a^{\mathrm{m}} \times a^{\mathrm{p}}} = \dfrac{1}{a^{\mathrm{p}}}$. Logo, $a^{-\mathrm{p}} = \dfrac{1}{a^{\mathrm{p}}}$.

Portanto a expressão $a^{-\mathrm{p}}$ é *o symbolo de uma divisão que não se póde effectuar*; e o seu verdadeiro valor é 1 *dividido por* a *elevado ao mesmo expoente* p, *tomado positivamente*. Assim

$$a^{-3} = \frac{1}{a^3};\ a^{-5} = \frac{1}{a^5} \text{ etc.}$$

Estas notações têm a vantagem de simplificar as expressões algebricas, omittindo os radicaes nas expressões irracionaes, e dando ás fraccionarias a fórma inteira.

3.º Da combinação de ambas as notações precedentes resulta outra, o *expoente fraccionario negativo*.

Se houver de extrahir-se a raiz n de $\dfrac{1}{a^{\mathrm{m}}}$, que equivale $\mathrm{a}^{-\mathrm{m}}$, será

$$\sqrt[\mathrm{n}]{\frac{1}{a^{\mathrm{m}}}} = \sqrt[\mathrm{n}]{a^{-\mathrm{m}}} = a^{-\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{n}}}$$

Concluiremos que as expressões $a^{\frac{m}{n}}$, a^{-p}, $a^{-\frac{m}{n}}$ são convenções fundadas nas regras da algebra; ellas equivalem a estas indicações respectivamente

$$\sqrt[n]{a^m},\ a^{\frac{1}{p}},\ \sqrt[n]{a^{\frac{1}{m}}}$$

e podem substituir-se umas ás outras reciprocamente.

161. *O calculo das quantidades affectas de expoentes fraccionarios ou negativos se pratica segundo as mesmas regras applicaveis aos expoentes inteiros e positivos.*

Demonstra-se este preceito em relação a qualquer das operações de algebra, passando das expressões dadas para a indicação de radicaes ou de fracções, effectuando as operações, e exprimindo os resultados pelos novos symbolos. Demonstremos o principio pelo que toca á *multiplicação*; e ficará claro o modo de proceder a respeito da *divisão, formação das potencias e extracção das raizes.*

Affirma-se que

$$a^{\frac{3}{5}} \times a^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{3}{5}+\frac{2}{3}} = a^{\frac{19}{15}}.$$

Ora, $a^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{a^3}$, e $a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2}$; logo,

$$a^{\frac{3}{5}} \times a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[5]{a^3} \times \sqrt[3]{a^2} = \sqrt[15]{a^9} \times \sqrt[15]{a^{10}} = \sqrt[15]{a^{19}} = a^{\frac{19}{15}}.$$

Do mesmo modo

$a^{-7}\times a^{-3}=\frac{1}{a^7}\times\frac{1}{a^3}=\frac{1}{a^{10}}=a^{-10}$; ora -10 é a somma algebrica dos expoentes $-7, -3$.

Em geral,

$$a^{-\frac{m}{n}}\times a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[n]{\frac{1}{a^m}}\times\sqrt[q]{a^p}=\sqrt[nq]{\frac{1}{a^{mq}}}\times\sqrt[nq]{a^{np}}=\sqrt[nq]{\frac{a^{np}}{a^{mq}}}=$$

$$=\sqrt[nq]{a^{np-mq}}=a^{\frac{np-mq}{nq}}$$

e é facil de ver que o ultimo expoente é igual à somma algebrica dos dous $-\frac{m}{n}$ e $\frac{p}{q}$.

Logo, a regra da multiplicação dos monomios é sempre a mesma, quaesquer que sejam os expoentes; e o mesmo se diz da divisão, da formação de potencias e extracção de raizes.

Applicações da fórmula do binomio.

162. Pois que as regras das operações algebricas se applicam ao caso de expoentes fraccionarios, positivos ou negativos, é natural pensar que a lei das potencias, representada pela *fórmula do binomio*, tambem se estende a quaesquer expoentes, isto é, que o desenvolvimento de $(x+a)^m$ conserva a mesma fórma, quer m seja inteiro, quer fraccionario positivo ou negativo; porquanto, a fórmula do binomio foi deduzida, analysando-se as multiplicações e outras operações necessarias á formação de uma potencia; operações e regras que não são peculiares aos expoentes inteiros e positivos. Esta illação nos parece sufficientemente clara, para dispensar uma demonstração directa; accresce que applicando a fórmula a expoentes fraccionarios ou negativos os resultados obtidos se podem verificar e acham-se sempre exactos.

A demonstração da fórmula do binomio em toda a sua generalidade se deduz pelo *methodo dos coefficientes indeterminados*, de que depois trataremos; póde ver-se na Algebra de Bourdon essa demonstração, que omittimos na presente compilação.

Para fazer applicação a quaesquer expoentes convém uma transformação na fórmula

$$(x+a)^m = x^m + max^{m-1} + m\frac{m-1}{2}a^2x^{m-2}$$

$$+ m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}a^3x^{m-3} + \ldots \text{ etc.};$$

transformação que consiste em pôr em evidencia o factor commum x^m de todos os termos; o que muda a fórmula nesta

$$(x+a)^m =$$

$$x^m \left(1 + m\frac{a}{x} + m\,\frac{m-1}{2x^2}a^2 + m\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3x^3}a^3 + \dots \text{ etc.}\right)$$

Veremos que com esta nova fórma o binomio de Newton presta-se mui commodamente á maior parte das explicações.

163. *Desenvolver em série a expressão*

$$\sqrt{x+a} = (x+a)^{\frac{1}{n}}.$$

Suppondo $m = \frac{1}{n}$, e fazendo substituições na fórmula precedente obtem-se

$$\sqrt[n]{(x+a)} = x^{\frac{1}{n}}\left(1 + \frac{1}{n}\cdot\frac{a}{x} + \frac{1}{n}\,\frac{n-1}{2}\,\frac{a^2}{x^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{n}\cdot\frac{\frac{1}{n}-1}{2}\,\frac{\frac{1}{n}-2}{3}\cdot\frac{a^3}{x^3} + \dots\right) =$$

$$= x^{\frac{1}{n}}\left(1 + \frac{1}{n}\cdot\frac{a}{x} - \frac{1}{n}\cdot\frac{n-1}{2n}\cdot\frac{a^2}{x^2} + \frac{1}{n}\,\frac{n-1}{2n}\cdot\frac{2n-1}{3n}\cdot\frac{a^3}{x^3}\text{etc.}\right)$$

Basta observar a lei destes quatro termos, para ver o modo de formar os seguintes ; façamos desta série uma applicação numerica.

Pede-se a raiz cubica de 31. Sendo 27 o maior cubo contido em 31, façamos $x=27$, $a=4$, e, ao mesmo tempo.

$$n=3\,;\ \text{será}\ \frac{a}{x}=\frac{4}{27}\ \text{e}\ x^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{27}=3\,;\ \text{portanto}$$

$$\sqrt{31}=(27+4)^{\frac{1}{3}}=3\left(1+\frac{1}{3}\times\frac{4}{27}-\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{16}{729}+\frac{1}{3}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{1}{5}\times\frac{5}{9}\times\frac{64}{19693}-\ldots\ \text{etc.}\right)=$$

$$=3+\frac{4}{27}-\frac{16}{2187}+\frac{320}{531441}-\ldots\ \text{etc.}$$

$$=3+0{,}14815=0{,}00731+0{,}00060-\ldots\ \text{etc.}$$

O termo seguinte só terá unidade da 5ª casa de dizima ; querendo approximar sòmente 4 algarismos decimaes, contentamo-nos com os 4 termos acima, que reduzidos dão $\sqrt{31}=3{,}1414$. Para maior approximação seria preciso continuar a série.

164. A exemplo do que acabamos de praticar com a raiz cubica, se pode extrahir qualquer raiz approximalamente. *Querendo a raiz* n *de um numero, divide-se este em duas partes, uma das quaes seja potencia perfeita do gráo* n; *e, substituindo estas partes, na formula por* x *e* a, *desenvolve-se a série, da qual se aproveitam os termos necessarios segundo a approximação que se deseja.*

Este methodo é tanto mais vantajoso, quanto menor é a fracção $\frac{a}{x}$; porque então os termos da serie decrescem mais rapidamente, o que habilita a calcular poucos termos. Quando a serie é pouco convergente, a necessidade de aproveitar muitos termos obriga a calculos muito laboriosos. Convém, pois, que seja $x > a$, e a differença a maior possivel.

Applicando a regra á raiz 4ª de 260, decompõe-se este numero em 256 e 4; sendo 256 a 4ª potencia de 4, faremos $n=4$, $x=256$, $a=4$; será.

$$x^{\frac{1}{4}}\sqrt[4]{256}=4,\ \frac{a}{x}=\frac{4}{256}=\frac{1}{64},\text{ logo,}$$

$$\sqrt[4]{260}=\sqrt[4]{(256+4)}=4\left(1+\frac{1}{4}\times\frac{1}{64}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{4}\times\frac{3}{8}\times\frac{3}{4096}\times\ldots\text{etc.}\right)=$$

$$=4+\frac{1}{64}-\frac{3}{32768}+\ldots\text{etc.}=4{,}01553$$

exacta até os decimos millesimos.

Acha-se do mesmo modo

$$\sqrt[7]{108} = \sqrt[7]{(182-20)} = 1,95204.$$ com a mesma approximação.

165. *Outras applicações*. A fórmula do binomio serve tambem para desenvolver em series as expressões algebricas. Seja a expressão

$$\frac{1}{1-z} = (1-z)^{-1}$$

Na fórmula $(x+a)^m = x^m + max^{m-1}$... etc., faremos $m = -1$, $x = 1$, $a = -z$; e, substituindo, teremos

$$(1-z)^{-1} = 1 - 1.(-z) - 1.\frac{-1-1}{2}(-z)^2 - 1.\frac{-1-1}{2}$$

$$\frac{-1-2}{3}(-z^3) - \ldots \text{ etc. ou;}$$

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + \ldots \text{ etc}$$

O mesmo resultado se obtém praticando a divisão de 1 por $1-z$ ao modo ordinario.

Seja segundo exemplo a expressão

$$\frac{2}{(1-z)^3}=2\,(1-z)^{-3}$$

Neste caso, $m=-3$, $x=1$, $a=-z$; e assim

$$2\,(1-z)^{-3}=2\,(1-3)\,(-z)-3\times\frac{-3-1}{2}\,(-z)^2-$$

$$-3\times\frac{-3-1}{2}\times\frac{-3-2}{3}\,(-z)^3+\ldots\text{ etc.,}$$

ou

$$\frac{2}{(1-z)^3}=2\,(1+3z+6z^2+10z^3+15z^4+\ldots\text{ etc.})$$

Para desenvolver em série $\sqrt[3]{2z-z^2}$, começamos por esta transformação

$$\sqrt[3]{2z-z^2}=\sqrt[3]{2z\left(1-\frac{z}{2}\right)}=\sqrt[3]{2z}\left(1-\frac{z}{2}\right)^{\frac{1}{3}},$$

e applicando a fórmula do binomio ao factor $1-\frac{z}{2}^{\frac{1}{3}}$,

teremos $x=1$, $a=-\frac{z}{2}$; $m=\frac{1}{3}$; e logo,

$$\sqrt[3]{2z-z^2}=\sqrt{2z}\ (1+\frac{1}{3}\times\left(-\frac{z}{2}\right)+\frac{1}{3}\times\frac{\frac{1}{3}-1}{2}\left(-\frac{z}{2}\right)^2$$

$$+\frac{1}{3}\times\frac{\frac{1}{3}-1}{2}\times\frac{\frac{1}{3}-2}{3}\left(-\frac{z}{2}\right)^3+\text{etc.},$$

$$=\sqrt[3]{2z}\left(1-\frac{1}{6}z-\frac{1}{36}z^2\frac{5}{648}z^3-\text{etc.}\right)$$

---

§ 4.º Methodo dos coefficientes indeterminados.

166. Tem este nome o methodo empregado frequentemente em Algebra para desenvolver em série qualquer expressão algebrica. Para expol-o com clareza, supponha-se que se trata de desenvolver $\frac{b+cx}{a}$ em uma série que proceda segundo a ordem ascendente das potencias de x inteiras e positivas. E' claro que tal póde ser a série, porque a expressão dada se reduz a $a\,(b+cx)^{-1}$, e esta potencia desenvolvida pela fórma do binomio segue a lei indicada.

Seja, pois,

$$\frac{a}{b+cx}=A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+\ldots\text{etc.},$$

sendo os coefficientes A, B, C, D, E... funcções de a, b,

c, independentes de x; coefficientes que se trata de determinar, e que por isso se costuma chamar (bem que sem muita propriedade) *coefficientes indeterminados*.

Para determinal-os expellem-se os denominadores da equação precedente; e, transpondo todos os termos para o 2° membro e, ordenando, obtem-se

$$0 = (Ab - a) + (Bb + Ac)x + Cb + Bc)x^2 + (Db + Cc)x^3 + (Eb + Dc)x^4, + \dots \text{ etc.}$$

Ora, esta equação, assim como a 1ª de que ella se deriva deve verificar-se qualquer que seja o valor de x; porém suppondo $x = 0$, torna-se ella em

$$0 = Ab - a, \text{ donde } A = \frac{a}{b};$$

será, pois, este o valor de A, independente de x; a sua substituição na equação faz desapparecer o termo $(Ab - a)$. Supprimindo-o e dividindo a equação por x, resulta

$$0 = (Bb + Ac) + (Cb + Bc)x + Db + Cc)x^2 + (Eb + + Dc)x^3 + \dots \text{ etc.}$$

Applicando a esta 3ª equação o mesmo raciocinio que á segunda, teremos para $x = 0$

$$Bb + Ac = 0; \text{ logo, } B = -\frac{Ac}{b} = -\frac{c}{b} \times \frac{a}{b} = -\frac{ac}{b^2};$$

e este será o valor de B, independente de x. Supprimindo pois, o termo $Bb + Ac$, e dividindo a equação por x, apparece

$$0 = (Cb + Bc) + (Db + Cc)\,x + (Eb + Dc)\,x^3 + \dots \text{ etc.}$$

e como precedentemente suppondo $x = 0$,

$$Cb + Bc = 0,\ C = -\frac{Bc}{b} = -\frac{c}{b} \times -\frac{ac}{b^2} = \frac{ac^2}{b^3}.$$

Acha-se do mesmo modo

$$Db + Cc = 0,\ D = -\frac{Cc}{b} = -\frac{c}{b} \times \frac{ac^2}{b^3} = -\frac{ac^3}{b^4},$$

e assim por diante.

Logo,

$$\frac{a}{b + cx} = \frac{a}{b} - \frac{ac}{b^2}x + \frac{ac^2}{b^3}x^2 - \frac{ac^3}{b^4}x^3 + \dots \text{ etc.}$$

167. Reflectindo sobre a analyse presente, vê-se que o fundamento do methodo consiste neste principio; *Uma equação da fórma* $0 = \mathrm{M} + \mathrm{N}x + \mathrm{P}x^2 + \mathrm{Q}x^3 + \dots$ *etc. (sendo M, N, P, Q..., independentes de* x*) só poderá verificar-se para todo e qualquer valor de* x*, se fôr cada um dos coefficientes separadamente igual a zero.*

A analyse empregada no exemplo constitue uma demonstração deste principio, que aliàs se póde dar por evidente. Porquanto, sendo M, N, P, etc., independentes de x, não póde haver reducção entre M e Nx, entre Nx e Px^2, etc., logo, deve ser

$$M=0, \quad N=0, \quad P=0, \quad Q=0, \text{ etc.}$$

formam-se deste modo tantas equações quantos coefficientes se tem de determinar.

A equação que se acha nas circumstancias da precedente, isto é que *deve verificar-se, qualquer que seja o valor da lettra, a cujo respeito se acham ordenados os termos*, toma o nome de *equação identica*; distingue-se da *equação ordinaria* em que esta só póde ser verificada por certos valores attribuidos á mesma lettra.

168. Póde acontecer que a alguma expressão algebrica não convenha a fórma do desenvolvimento, segundo as potencias inteiras de x; neste caso o methodo dos coefficientes indeterminados não terá immediata applicação; o mesmo calculo o advertirá. Trata-se, por exemplo, de desenvolver

$$\frac{1}{3x-x^2}=A+Bx+Cx^2+Dx^3+\dots \text{ etc.}$$

Expellindo desta equação os denominadores, resulta

$$0=-1+3Ax+(3B-A)x^2+(3C-B)x^3+$$
$$+(3D-C)x^4+\dots \text{ etc.};$$

e applicando a esta o principio precedente, conclue-se

$$-1=0,\ 3A=0,\ 3B-A=0,\ \text{etc.}$$

Ora, a 1ª condição, $-1=0$, sendo absurda, mostra que a serie $A+Bx+Cx^2+\ldots$ etc., não convém á fracção proposta. Se esta, porém, se transforma em $\frac{1}{x}\times\frac{1}{3-x}$, poderá $\frac{1}{3-x}$ igualar-se ao polynomio $A+Bx+Cx^2$, etc., e teremos

$$\frac{1}{3x-x^2}=\frac{1}{x}\times\frac{1}{3-x}=\frac{1}{x}\,(A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+$$

$+\ldots$ etc.); applicando o methodo se acha

$$A=\frac{1}{3},\ B=\frac{1}{9},\ C=\frac{1}{27},\ D=\frac{1}{81}.$$

Logo,

$$\frac{1}{3x-x^2}=\frac{1}{x}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{9}\,x+\frac{1}{27}x^2+\ldots\ \text{etc.}\right)=$$

$$=\frac{1}{3}x^{-1}+\frac{1}{9}x^0+\frac{1}{27}\,x+\frac{1}{81}x^2+\ldots\ \text{etc.}$$

A fórmula do binomio e o methodo dos coefficientes indeterminados têm muitas outras applicações e consequencias uteis, algumas das quaes se verão em outra parte deste curso; reunimos aqui sómente o que nos pareceu mais proprio da *Algebra elementar*.

APPENDICE AO CAPITULO IV

I

Propriedades do trinomio do segundo gráo maxima e minima

Chama-se *trinomio do 2º gráo* a expressão da fórma

$$mx^2 + nx + p, \qquad (1)$$

na qual as quantidades m, n, p são consideradas constantes, emquanto que x póde tomar todos os valores desde $-\infty$ até $+\infty$.

Todo o valor que collocado em lugar de x no trinomio faz com que elle se annulle, chama-se *raiz do trinomio.*

— *O trinomio do 2º gráo póde sempre ser decomposto em factores do 1º.*

Com effeito, igualemos a zero o trinomio dado e teremos assim a equação do 2º gráo.

$$mx^2 + nx + p = 0 \qquad (11)$$

e, segundo o n. 113.

$$x' + x'' = -\frac{n}{m} \text{ e } x'x'' = \frac{p}{m},$$

chamando x' e x'' as raizes da equação (II).

Se o valor dado á variavel x não ficar comprehendido entre x' e x'' isto é, se fôr menor do que x' ou maior do que x'', os dous factores $(x-x')$ e $(x-x'')$ terão, no primeiro caso signal negativo e no segundo signal positivo e, portanto, seu producto será sempre de signal positivo, e conseguintemente o producto $m\,(x-x')\,(x-x'')$ será do signal de m.

2.° — *Se as raizes do trinomio forem iguaes este terá sempre o signal do coefficiente do primeiro termo.*

Sendo as raizes iguaes vimos (nota — 2ª ao n. 119) que

$$\frac{p}{m}=\frac{n^2}{4m^2}$$

e, sendo

$$mx^2+nx+p=m\left(x^2+\frac{n}{m}x+\frac{p}{m}\right)$$

identicamente, pode-se escrever

$$mx^2+nx+p=m\left(x^2+\frac{n}{m}+\frac{n^2}{4m^2}\right);$$

o trimonio se reduzirá a

$$m\left(x+\frac{n^2}{2m}\right)^2,$$

expressão na qual o factor entre parenthesis, devendo ser elevado ao quadrado, será sempre positivo e, portanto, o seu producto por m terá sempre o signal desta quantidade.

Conviria, de certo modo, fazer uma pequena restricção ao caso que acabamos de estudar, e é que, quando o trinomio tem as raizes iguaes e que em vez de x se colloca esse valor, que sabemos ser a raiz dupla da equação obtida igualando o trinomio a zero e que, no caso em questão, seria $-\frac{n}{2m}$, a expressão $m\left(x+\frac{n}{2m}\right)^2$ torna-se nulla.

3.° *Sendo imaginarias as raizes do trinomio elle conserva sempre o signal do coefficiente de seu primeiro termo.*

Com effeito, nós temos.

$$mx^2+nx+p=m\left(x^2+\frac{n}{m}x+\frac{p}{m}\right)$$

Sommando e subtrahindo simultaneamente a mesma quantidade $\frac{n^2}{4m^2}$ á que está dentro do parenthesis, temos que o segundo membro da igualdade ficará

$$m\left(x^2+\frac{m}{m}x+\frac{n^2}{4m^2}-\frac{n^2}{4m^2}+\frac{p}{m}\right).$$

ou

$$m\left[\left(x+\frac{n}{2m}\right)^2+\frac{4mp-n^2}{4m^2}\right]$$

Mas nós vimos (nota — 3ª — ao n. 119) que sendo imaginarias as raizes tem-se

$$n^2-4mp<0$$

e, conseguintemente,

$$4mp-n^2>0,$$

e temos que $4m^2$ é sempre positivo, donde se vê que o segundo termo dentro da chave é positivo sempre e, como o primeiro é um quadrado e portanto positivo, concluiremos que toda a quantidade dentro da chave é positiva e dahi que

$$m\left[\left(x+\frac{n}{2m}\right)^2+\frac{4mp-n^2}{4m^2}\right]$$

será sempre do signal de m.

Discussão das variações do trinomio do 2º gráo

Na expressão $y=mx^2+nx+p$ *o valor da funcção* y *varia continuamente quando se faz variar* x *de um modo continuo.*

Com effeito, demos a x um accrescimo h tão pequeno quanto se queira, é claro que y soffrerá uma mudança de valor : a differença entre os dous valores de y, antes do accrescimo dado a x e depois, será chamada *accrescimo correspondente de y* e o designaremos por k.

A funcção dada acima se tornará em

$$y + k = m(x + h)^2 + n(x + h) + p$$

ou

$$y + k = mx^2 + mh^2 + 2mxh + nx + nh + p$$

Se désta ultima equação subtrahirmos, membro a membro, á equação

$$y = mx^2 + nx + p$$

teremos

$$k = mh^2 + 2mxh + nh$$

ou

$$k = h(mh + 2mx + n)$$

Admittindo agora que a quantidade h, que é um dos factores do 2º membro, tenha um valor tão proximo de zero quanto se queira, é claro que, para um dado valor de x, o valor do producto de h pelo factor entre parenthesis se tornará tão proximo de zero quanto se queira e, portanto, tambem o valor de k: isto exprime-se dizendo que *quando o accrescimo* h *dado a* x *tende para zero tambem tende o accrescimo* k *correspondente que soffre* y.

— Tomemos agora a equação

$$y = mx^2 + nx + p$$

e transformemos o seu segundo membro de modo a termos

$$y = mx^2 + nx + p = m\left[\left(x + \frac{n}{2m}\right)^2 + \frac{4mp - n^2}{4m^2}\right]$$

Nesta expressão a quantidade de $\frac{4mp - n^2}{4m^2}$ é constante e, dentro da clave, só o termo $\left(x + \frac{n}{2m}\right)^2$ soffrerá alteração quando variarem os valores de x.

Sem fazer, por agora, attenção ao factor m façamos

$$K = \left(x + \frac{n}{2m}\right)^2 + \frac{4mp - n^2}{4m^2} \qquad (1)$$

e vejamos que variações apresentará K quando variar x:

Seja $x = -\infty$.

E' claro que o 2º membro de (1) será igual a $+\infty$, temos pois $K = +\infty$.

Fazendo crescer x desde $-\infty$ até $-\frac{n}{2m}$ o termo $\left(x + \frac{n}{m2}\right)^2$ irá crescendo até que se tornará igual a zero, temos então

$$K = \frac{4mp - n^2}{4m^2}$$

Continuando x a crescer de $-\frac{n}{2m}$ até $+\infty$, o valor do termo $\left(x + \frac{n}{2m}\right)^2$ crescerá do mesmo modo e teremos assim, para $x = +\infty$,

$$K = +\infty$$

Recapitulando teremos então

para	$x = -\infty$	$y = m \times +\infty$
»	$x = -\frac{n}{2m}$	$y = m \times \frac{4mp - n^2}{4m^2}$
»	$x = +\infty$	$y = m \times +\infty$.

Então, emquanto m fôr uma quantidade positiva, y variará decrescendo de $+\infty$ até $m\,\frac{4mp - n^2}{4m^2}$ e depois crescendo até $+\infty$.

Fica pois estabelecido que, emquanto *m* é positivo, o menor valor que *y* póde adquirir é

$$y = m\,\frac{4mp - n^2}{4m^2},$$

e isto se dá, como vimos quando $x = -\frac{n}{2m}$.

Se *m* é uma quantidade negativa, o valor de *y* parte de $-\infty$ e cresce até $m\,\frac{4mp - n^2}{4m^2}$, decrescendo depois até $-\infty$ infinito.

Do estudo feito vê-se que para *m* negativo o maior valor que *y* póde attingir é $m\,\frac{4mp - n^2}{4m^2}$.

Convém aqui notar que, *quando se attribúe a x dois valores equidistantes de* $-\frac{n}{2m}$, *y toma valores iguaes entre si.*

Com effeito, dous valores taes de *x* terão necessariamente a fórma

$$x = -\left(\frac{n}{2m} + h\right) \text{ e } x'' = -\left(\frac{n}{2m} - h\right)$$

e portanto o termo $\left(x + \frac{n}{2m}\right)$ se tornará em

$$\left(x + \frac{n}{2m}\right) = -h \text{ e } \left(x + \frac{n}{2m}\right) = +h$$

e a equação $y = m\left[\left(x + \frac{n}{2m}\right)^2 + \frac{4mp - n^2}{4m^2}\right]$

ficará

$$y = m\left(h^2 + \frac{4mp - n^2}{4m^2}\right)$$

ou

$$y = m\,h^2 + \frac{4mp - n^2}{4m}$$

Maxima e minima

Quando se tem uma funcção, tal que se sabe ser continua entre dous valores dados da variavel, póde acontecer que dando á variavel accrescimos de um modo continuo, a funcção varie ora em um sentido ora em outro, isto é, que sendo crescente passe a ser decrescente ou vice versa.

Se a funcção variando continuamente cessa de ser crescente para tornar-se decrescente se diz que ella attinge nesse ponto a um *valor maximo* ou simplesmente a um *maximum :*

Se a funcção cessa de ser decrescente para tornar-se crescente diz-se que nesse ponto ella attinge a um *valor minimo* ou simplesmente a um *minimum.*

Como dentro de dous valores dados póde acontecer que a funcção seja muitas vezes crescente e decrescente, fica entendido que ella poderá ter, entre esses limites, muitos *maxima* e muitos *minima :* isto estabelece claramente a differença entre as accepções technica e vulgar das palavras *maximum* e *minimum.*

THEOREMA. — *O producto de duas quantidades variaveis cuja somma é constante, é maximum e igual ao quadrado da semi-somma dos dous factores quando estes forem iguaes entre si.*

Com effeito, seja x a differença entre duas quantidades e M a sua somma, que deverá ser constante. A maior das quantidades será $\frac{M+x}{2}$ e a menor será $\frac{M-x}{2}$; o seu producto será $\frac{M^2-x^2}{4}$: quantidade esta que terá seu valor maximo quando a quantidade x, variavel de que ella depende, fôr igual a zero, e então se terá $\frac{M^2}{4}$.

EXEMPLO. — O *maximum* de todos os productos que se poderão formar com as duas partes em que se dividir o numero 8 é 4×4 ou o quadrado da metade de 8. Formemos todos esses productos e teremos uma verificação material do facto.

$$8 = 7 + 1 \qquad 7 \times 1 = 7$$
$$8 = 6 + 2 \qquad 6 \times 2 = 12$$
$$8 = 5 + 3 \qquad 5 \times 3 = 15$$
$$8 = 4 + 4 \qquad 4 \times 4 = 16$$

Sempre que o resultado a que se chega igualando os dous factores, como acima, não se oppõe ás condições e propriedades das quantidades que entram na questão, a solução achada, isto é, $\frac{M^2}{4}$ *é acceita-*

vel; se, porém, chega-se a um resultado opposto á natureza das quantidades que entram na questão ou ás condições previas que ellas devem satisfazer, o maximum procurado será menor do que $\frac{M^2}{4}$.

A primeira parte comprehende-se claramente em vista do theorema; quanto á segunda vamos examinar um exemplo para bem esclarecel-a.

Seja que tenhamos de achar o *maximum* do producto

$$(5 - \text{sen } x)\ (2 + \text{sen } x) \qquad (I)$$

Sommando os dous factores temos

$$5 - \text{sen } x + 2 + \text{sen } x = 7$$

e, portanto, fazendo immediata applicação do theorema, acharemos para *maximum* do producto $\frac{49}{4}$; mas vamos agora indagar se os dous factores podem ser iguaes, escrevamos isso

$$5 - \text{sen } x = 2 + \text{sen } x:$$

desta equação tira-se

$$\text{sen } x = \frac{3}{2}$$

o que é absurdo porque *sen x* não póde ser maior do que 1.

Vamos pois vêr que condição deverá preencher *sen x* para que se obtenha o *maximum* do producto em questão.

Já vimos que a somma dos dous factores dados é 7; a sua differença será $3 - 2$ *sen x*, que, por abreviar, chamaremos *y*. Façamos um dos factores procurados igual a $\frac{7 - y}{2}$ e o outro a $\frac{7 + y}{2}$: o seu producto será

$$\frac{49 - y^2}{4}, \qquad (II)$$

producto este que será *maximum* quando y fôr minimo; mas

$$y = 3 - 2 \text{ sen } x$$

logo y será *minimum* quando *sen* x fôr *minimum*, isto é. quando se tiver *sen* $x = 1$ ou $x = 90°$, assim $y = 1$, e portanto

$$\frac{49 - y^2}{4} = \frac{48}{4} = 12$$

o *maximum* pedido será pois 12 e se realisará quando *sen* $x = 1$: donde se conclue que os factores dados

$$(5 - \text{sen } x) \quad \text{e} \quad (2 + \text{sen } x)$$

são $\quad 4 \quad$ e $\quad 3$

O producto de muitos numeros variaveis cuja somma é constante é maximum quando esses numeros forem iguaes.

Com effeito, seja p um numero dado que se divide em n partes; seu producto será menor do que p^n, isto é, haverá um *maximum* para esse producto; ora em quanto houver duas partes desiguaes, o producto poderá ser augmentado substituindo-se cada uma dellas pela semisomma das duas; é claro pois que o producto será *maximum* quando as partes forem todas iguaes.

Resolução de questões de maxima e minima com auxilio da equação do segundo gráo

PROBLEMA I. — *Dividir um numero dado* a *em duas partes taes, que o producto de uma por outra seja maximum.*

Chamando x uma das partes a outra será $a - x$, seja m o producto das duas, assim

$$x(a - x) = m \qquad \text{ou}$$

$$x^2 - ax + m = 0$$

$$x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - m}$$

para que o valor do radical seja real é necessario que m não exceda a $\frac{a^2}{4}$ e, portanto, o maior valor de m, para que o problema seja possivel, será :

$$m = \frac{a^2}{4}$$

que corresponde a

$$x = \frac{a}{2},$$

o que importa dizer que o producto é *maximum* quando o numero dado fôr dividido em duas partes iguaes.

Problema II. — *Dividir um numero dado a em duas partes taes, que dividindo uma pela outra e depois a segunda pela primeira, a somma dos quocientes seja minimum.*

Sendo x uma das partes a outra será $a - x$ e sendo m a somma dos quocientes tem-se

$$\frac{x}{a - x} + \frac{a - x}{x} = m$$

preparando a equação, vem

$$(m + 2)\, x^2 - a\,(m + 2)\, x + a^2 = 0$$

ou

$$x^2 - ax + \frac{a^2}{m + 2} = 0$$

donde

$$x = \frac{a}{2} \pm \frac{a}{2} \sqrt{\frac{m - 2}{m + 2}}$$

Considerando que m é uma quantidade positiva, é claro que o signal da fracção que está sob o radical dependerá do signal do numerador, e este será negativo para todo valor de m menor do que 2, e positivo para todo valor maior do que 2; então o valor minimo que póde ser attribuido a m será 2, que corresponde a $x = \frac{a}{2}$, isto é, o numero dado deverá ser dividido em duas partes iguaes.

PROBLEMA III. — *Conhecendo o producto* p *de dous numeros, determinar o minimum de sua somma.*

Chamando x um dos factores de p, o outro factor será $\frac{p}{x}$ e sua somma

$$x + \frac{p}{x}$$

seja m o minimum dessa somma, teremos

$$x + \frac{p}{x} = m$$

ou

$$x^2 - mx + p = 0$$

donde

$$x = \frac{m}{2} \pm \sqrt{\frac{m^2}{4} - p}$$

O radical só será real emquanto $\frac{m^2}{4}$ não fôr menor do que p, demos pois á fracção $\frac{m^2}{4}$ o menor valor que ella possa ter, isto é, p e teremos

$$\frac{m^2}{4} = p$$

ou

$$m^2 = 4p$$

e

$$m = 2\sqrt{p}$$

que corresponde a

$$x = \sqrt{p}$$

Se se houvesse de determinar o maximum da somma em questão, seria facil verificar que elle não existe, porquanto se tomarmos para um dos factores do producto p um numero x tão grande quanto se queira o outro sendo $\frac{p}{x}$ a somma será $x + \frac{p}{x}$ que sendo maior do que x poderá exceder a toda quantidade dada.

PROBLEMA IV. — *Qual o valor de* x *que torna maximum ou minimum e trinomio* $x^2 - 8x + 12$?

Seja m o maximum ou minimum que se procura, teremos

$$x^2 - 8x + 12 = m$$

donde

$$x = 4 \pm \sqrt{16 - 12 + m}$$

$$x = 4 \pm \sqrt{4 + m}$$

Para todo o valor positivo que se attribúa a m o radical se conservará real e, portanto, somos conduzidos a dizer que não existe maximum nem minimum positivo para o trinomio dado; façamos, porém

$$m = -m'$$

teremos

$$x = 4 \pm \sqrt{4 - m'}$$

O maior valor absoluto que póde ser attribuido a m' conservando-se real o radical, será 4 que corresponde a $x=4$. e assim teremos

$$x^2 - 8x + 12 = 16 - 32 + 12 = -4 = m$$

Sendo 4 o maior valor absoluto de que é susceptivel m, o menor valor negativo correspondente a m será -4, que será por isso um *minimum*.

Problema V. — *Qual o valor de* x *que torna maximum ou minimum*

$$\frac{x^2 - 2x + 2}{2x - 2}$$

Seja m o maximum ou o minimum, teremos

$$\frac{x^2 - 2x + 2}{2x - 2} = m$$

donde resolvendo,

$$x = 1 + m \pm \sqrt{m^2 - 1}$$

ou ainda

$$x = 1 + m \pm \sqrt{(m+1)(m-1)}$$

Quanto aos valores positivos de m, reconhece-se facilmente que todo valor menor do que 1 tornaria imaginario o radical e, portanto, concluiremos que seu menor valor positivo será 1, que corresponde a $x=2$: quanto aos valores negativos vê-se que todo valor menor do que -1 (será em valor absoluto maior do que 1) tornará imaginario o radical e, conseguintemente -1 será o maior valor negativo de m, que corresponde a $x=0$.

Assim a expressão dada terá para minimum 1, sendo $x=2$, e para maximum -1, sendo $x=0$.

Problema VI. — *Determinar o maximum e o minimum da expressão*

$$\frac{2x}{1+x^2}$$

façamos

$$\frac{2x}{1+x^2}=m$$

teremos

$$m\,x^2-2\,x+m=0$$

ou

$$x=\frac{1}{m}\pm\sqrt{\frac{1}{m^2}-1}$$

ou ainda

$$x=\frac{1\pm\sqrt{(1+m)\,(1-m)}}{m}$$

Todo o valor positivo de m maior do que 1 torna imaginario o radical, será portanto seu maior valor positivo, que corresponderá a $x=1$, todo o valor negativo de m menor do que -1 fará imaginario o radical, e portanto, será -1 o menor valor de que m é susceptivel e que corresponde a $x=-1$.

Assim será

Maximum de $m=1$, sendo $x=1$
Minimum de $m=-1$, sendo $x=-1$

Problema VII. — *Qual o valor de* x *que torna maximum ou minimum a expressão*

$$\frac{x^2+2x-1}{x^2-2x+1}\;?$$

façamos

$$\frac{x^2 + 2x - 1}{x^2 - 2x + 1} = m$$

virá

$$(m - 1)\, x^2 - 2\,(m + 1)\, x + m + 1 = 0$$

ou

$$x = \frac{m + 1 \pm \sqrt{2\,(m + 1)}}{m - 1}$$

Todos os valores positivos convindo a m a expressão não tem maximum.

O menor valor negativo que se póde, convenientemente, dár a m é -1 que corresponde a $x = 0$.

Assim -1 é o minimum que convém,

Problema VIII. — *Qual é o valor de* x *que torna maximum ou minimum a expressão.*

$$\frac{x^2 + 14x + 9}{x^2 + 2x + 3}$$

Ponhamos

$$\frac{x^2 + 14x + 9}{x^2 + 2x + 3} = m$$

teremos. preparando a equação,

$$(m - 1)\, x^2 + (2m - 14)\, x + 3m - 9 = 0$$

resolvendo vem

$$x = \frac{m - 7}{m - 1} \pm \sqrt{\frac{(m - 7)^2}{(m - 1)^2} - 3m + 9}$$

ou

$$x = \frac{7 - m \pm \sqrt{-2m^2 - 2m + 40}}{m - 1}$$

Resta-nos agora estudar os valores que *m* póde receber sem que o radical da expressão acima se torne imaginario. Notemos para isso que a quantidade que se acha sob o signal $\sqrt{\ }$ é um trinomio do segundo grão em *m*, e appliquemos-lhe o methodo já conhecido para decompol-o em factores do primeiro grão.

Resolvendo a equação

$$-2m^2 - 2m + 40 = 0$$

ou antes

$$m^2 + m - 20 = 0$$

acharemos para raizes -5 e $+4$ e portanto teremos

$$m^2 + m - 20 = (m + 5)(m - 4)$$

ou

$$-2m^2 - 2m + 40 = -2(m + 5)(m - 4)$$

A equação que nos dá o valor de *x* póde pois escrever-se

$$x = \frac{7 - m \pm \sqrt{2(m + 5)(m - 4)}}{m - 1}$$

Facilmente, agora, poderemos reconhecer quaes os valores reaes que poderão ser attribuidos a *m* sem tornar imaginario o radical.

Com effeito, emquanto se attribue a *m* valores positivos taes que seja sempre

$$m = 4 \text{ ou } m > 4$$

o radical conserva-se real e, ao contrario, torna-se imaginario para os valores positivos $m < 4$: assim pois $m = 4$ representa um maximum da fracção dada: este maximum corresponderá a $x = \frac{7-m}{m-1} = 1$

Se forem negativos os valores dados a m a quantidade sob o radical se conservará negativa emquanto se tiver

$$-m < -5$$

e portanto o radical será imaginario: se se tiver

$$-m > -5$$

o radical se conservará real: diremos, portanto, que -5 é o menor valor negativo que póde ser dado a m e consequentemente que -5 é o minimum da fracção dada, para o qual se terá

$$x = \frac{7-m}{m-1} = \frac{7-(-5)}{-5-1} = -2.$$

Assim a fracção dada será maximum quando se tiver $x = 1$, e minimum quando $x = -2$.

PROBLEMA IX. — *Determinar o maximum de* m *na expressão*

$$x^2 - 8x + 4m + 11 = m^2$$

Resolvendo a equação dada em relação a x vem

$$x = 4 \pm \sqrt{16 - 4m - 11 + m^2}$$

donde

$$x = 4 \pm \sqrt{m^2 - 4m + 5} \qquad (1)$$

Decompondo o trinomio sob a radical acha-se

$$m^2 - 4m + 5 = [m - (2 + \sqrt{-1})] [m - (2 - \sqrt{-1})]$$

O que quer dizer que só os valores imaginarios $2 \pm \sqrt{-1}$ postos por m annullam o trinomio, isto é, o trinomio sob a radical será sempre positivo quando m fôr real; o que importa dizer que a expressão dada m, não tem maximum.

Estabelecendo porém a condição de serem os dous valores de x tirados da equação (1), positivos, a questão modifica-se como vamos vêr.

Para que na equação

$$x = 4 \pm \sqrt{m^2 - 4m + 5}$$

os dous valores de x sejam sempre positivos é necessario que se tenha

$$\sqrt{m^2 - 4m + 5} < 4$$

ou

$$m^2 - 4m + 5 < 16$$

ou ainda

$$m^2 - 4m - 11 < 0$$

Decompondo o trinomio primeiro membro desta ultima desigualdade tem-se,

$$m^2 - 4m - 11 = [m - (2 + \sqrt{15})] [m - (2 - \sqrt{15})]$$

isto é, o trinomio annullar-se-ha quando se fizer

$$m = 2 \pm \sqrt{15}$$

Mas para que se tenha

$$m^2 - 4m - 11 = [m - (2 + \sqrt{15})]\ [m - (2 - \sqrt{15})]$$

sendo

$$m^2 - 4m - 11 < 0$$

é preciso que os dous factores do segundo membro tenham signaes contrarios, ora, isso não se dá quer quando $m > 2 + \sqrt{15}$ quer quando $m < 2 - \sqrt{15}$, logo m deverá estar comprehendido entre $2 + \sqrt{15}$ e $2 - \sqrt{15}$, isto é, será

$$maximum\ de\ m = 2 + \sqrt{15}$$

$$minimum\ de\ m = 2 - \sqrt{15}.$$

Até aqui nos temos occupado de casos em que se trata de *maximum absoluto* e de *minimum absoluto,* isto é, de maximum ou minimum que representa o maior ou menor de todos os valores que uma dada funcção póde adquirir; não se deve porém confundir isso com o que se chama *maximum relativo* e *minimum relativo,* pois, *maximum relativo* dá-se quando uma funcção, crescendo continuamente em consequencia de uma successão continua de valores attribuidos á variavel de que ella depende, attinge a um valor tal que immediatamente após elle principia a decrescer, sem solução de continuidade *minimum relativo* dá-se quando, após haver decrescido continuamente, em consequencia da successão continua de valores da variavel, attinge a funcção a um valor após o qual passa ella a crescer sem ter apresentado solução de continuidade.

Do que fica dito acerca do maximum e do minimum relativos, bem se comprehende que uma funcção dada poderá, não só apresentar muitos maxima e muitos minima, como apresentar maximum menor do que minimum.

Os dous problemas que se seguem offerecem casos de maxima e minima relativos.

PROBLEMA X. — *Determinar quaes os valores de* x *que tornam maximum ou minimum a funcção*

$$\frac{x^2 + 34x - 71}{x^2 + 2x - [illegible]}$$

façamos

$$\frac{x^2 + 34x - 71}{x^2 + 2x - 7} = m$$

e resolvamos a equação em relação a x, virá

$$x = \frac{17 - m \pm \sqrt{8\,(m^2 - 14m + 45)}}{m - 1}$$

ou, decompondo o trinomio entre parenthesis.

$$x = \frac{17 - m \pm \sqrt{8\,(m - 5)\,(m - 9)}}{m - 1}$$

E' claro que para todo o valor real de m, comprehendido entre 5 e 9, a quantidade sob o radical se tornaria negativa e, x seria imaginario; excluidos pois esses valores nota-se, que para $m = 5$, ou outro valor menor do que 5, positivo ou negativo, que seja attribuido a m teremos sempre valores reaes para x; que para $m = 9$, ou outro valor maior do que 9 que seja attribuido a m tambem se tem sempre valores reaes de x.

Se considerarmos que m, a partir de $-\infty$, vá sempre crescendo notaremos, que após haver attingido a 5 não poderá exceder, com variação continua, esse valor sem que x se torne imaginario e, portanto, diremos que $m = 5$ é um maximum da funcção dada : se a partir de $+\infty$, fizermos decrescer continuamente m até $m = 9$ o decrescimento não poderá ir além sem que x torne-se imaginario, diremos pois, que $m = 9$ é um minimum da funcção dada.

Para $m = 5$, maximum da funcção, tem-se $x = 3$; para $m = 9$, minimum da funcção, tem-se $x = 1$.

Para com o presente exemplo ficarmos fazendo uma idéa clara do que seja um *maximum relativo* ou *minimum relativo* vamos vêr o que acontecerá a m quando se fizer variar x desde $-\infty$ até $+\infty$. Para isso tomemos a funcção dada e, decompondo os dous trinomios que constituem os termos da fracção, escrevemos, depois de transformar

$$\frac{(x + 17)^2 - 360}{(x + 1)^2 - 8} = m$$

Fazendo variar x crescendo a partir de $-\infty$ notaremos que quando o seu valor está nas proximidades de 1, m está decrescendo e proximo de 9; até que se x attinge a 1, tem-se $m=9$: com effeito se x está crescendo para 1 e muito proximo de 1, o primeiro termo do denominador da fracção está crescendo continuamente para 2 e portanto seu quadrado para 4 e a differença $(x+1)-8$ approxima-se muito, decrescendo em valor absoluto, de -4; quanto ao numerador, o primeiro termo vai crescendo para 18 e portanto seu quadrado para 324 e a differença $(x+17)^2-360$, em valor absoluto, vai decrescendo para -36 até que se $x=1$, tem-se

$$\frac{(x+17)^2-360}{(x+)^2-8}=\frac{36}{4}=9$$

Continuando a crescer x de uma maneira continua observaremos que o valor de m vai crescendo a partir de 9 até que quando se tem $x+1\sqrt{8}$, m torna-se infinito, se diz então que a funcção soffreu uma solução de continuidade para o valor da variavel $x=\sqrt{8-1}$, pois se continua x a crescer passará tambem a funcção a crescer de novo e de um modo continuo até que quando se tem $x=3$ tem-se $m=5$ depois do que, continuando x a crescer m decresce.

Como já dissemos 9 é um minimum da funcção dada, isto é, um valor que ella adquirio quando variava em sentido decrescente e após o qual entrou a crescer; 5 é um *maximum* de acôrdo com a definição. Este maximum e este minimum tem o nome de *maximum* e *minimum relativos*, pois acontece que justamente o maior valor da funcção é o que tem o nome de *minimum* e o menor de *maximum*.

Problema XI. — *Determinar os valores de x que tornam maximum ou minimum a funcção*

$$\frac{x^2-3}{x-2}$$

fazendo

$$\frac{x^2-3}{x-2}=m$$

tem-se

$$x^2-mx+2m-3=0$$

Resolvendo esta equação em relação a x vem

$$x = \frac{m \pm \sqrt{(m^2) - 8m + 12}}{2}$$

Decompondo-se o trinomio sob o radical vem

$$x = \frac{m \pm \sqrt{(m - 2)(m - 6)}}{2}$$

O valor de x só será real quando os dous factores sob o radical tiverem o mesmo signal, donde se conclue que m só poderá ser ou maior do que 6 ou menor do que 2, isto é, se se fizer variar m desde $-\infty$ o maior valor que elle poderá attingir sem soffrer solução de continuidade será 2, assim diremos que dous é um maximum; continuando a crescer m, x conserva-se imaginario até que se tenha $m = 6$, depois deste valor poderá m crescer até $+\infty$, pelo que 6 constitue um minimum de m.

O maximum 2 corresponde a $x = 1$, o minimum 6 a $x = 3$.

O estudo de algumas questões de geometria traria por certo mais clareza aos estudantes; não o apresentamos aqui porque o limite de nosso trabalho não o comporta, mas o aconselhamos como muito util.

II

O estudo das *equações binomias*, isto é, das equações da fórma

$$ax^m + b = 0$$

não póde ser feito de modo completo dentro dos limites deste trabalho, porque exige conhecimentos que não pertencem ao dominio da algebra elementar; pelo que nos occuparemos unicamente de certos e determinados casos. A equação

$$ax^m + b = 0$$

póde sempre ser reduzida á fórma

$$x^m \pm A = 0$$

ou

$$x^m = \mp A \qquad (1)$$

Sendo α e β duas raizes da equação (1) tem-se

$$\alpha^m = \mp A \text{ e } \beta^m = \mp A$$

donde, dividindo uma pela outra membro a membro,

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^m = \pm 1,$$

isto é, a relação entre duas quaesquer das raizes da equação (1) é sempre uma raiz da equação

$$x^m = \pm 1:$$

portanto, se conhecermos uma qualquer das raizes da equação (1), poderemos obter todas as outras multiplicando essa por cada uma das raizes do gráo m da unidade.

O que acabamos de dizer, ácerca do modo de obter as raizes da equação (1), tem toda a generalidade, porém convem lembrar que quando A fôr imaginario nos faltarão elementos para calcular arithmeticamente a sua raiz do gráo m; não nos occuparemos, pois, senão do caso de ser A real: convindo ainda limitar o nosso trabalho a alguns dos valores de m.

No n. 106 já foi tratada a equação

$$x^2 = \pm 1$$

1.° *Seja para resolver a equação* $x^3 = \pm 1$.

Escrevamos

$$x^3 - 1 = 0 \text{ e } x^3 + 1 = 0$$

para resolver a primeira vamos dividir ambos os seus membros por $x-1$ e teremos que a equação poderá tomar a fórma

$$(x-1)(x^2+x+1)=0,$$

equação cujas raizes serão dadas pelas equações

$$x-1=0 \text{ e } x^2+x+1=0$$

A primeira destas fornece a unica raiz real da equação em questão, a segunda as suas raizes imaginarias: teremos assim as tres raizes

$$x'=1; \quad x''=\frac{-1+\sqrt{3}.\sqrt{-1}}{2}; \quad x''=\frac{-1-\sqrt{3}.\sqrt{-1}}{2}$$

Para resolver a segunda das equações em que decompuzemos a equação dada, isto é, $x^3+1=0$, bastará reflectir que as raizes dessa equação serão as da precedente com signaes contrarios; serão, pois.

$$x'=-1; \; x''=\frac{1+\sqrt{3}.\sqrt{-1}}{2}; \; x'''=\frac{1-\sqrt{3}.\sqrt{-1}}{2}$$

2.º *Seja para resolver a equação* $x^4=\pm 1$

Ponhamos

$$x^4=1 \qquad \text{e} \qquad x^4=-1$$

ou

$$x^4-1=0 \qquad \text{e} \qquad x^4+1=0$$

A primeira se póde escrever

$$(x^2+1)(x^2-1)=0$$

portanto suas raizes serão dadas pelas equações

$$x^2+1=0 \quad \text{e} \quad x^2-1=0$$

dos quaes tira-se

$$x=\pm\sqrt{-1} \quad \text{e} \quad x=\pm 1$$

Quanto á segunda equação, sommemos a ambos os seus membros $2x^2$, teremos

$$x^4+2x^2+1=2x^2$$

ou

$$(x^2+1)^2=2x^2$$

e

$$(x^2+1)^2-2x^2=0$$

Como 2 é o quadrado de $\sqrt{2}$ temos, decompondo o primeiro membro desta ultima equação,

$$(x^2+1+\sqrt{2}.\,x)\,(x^2+1-\sqrt{2}.\,x)=0:$$

igualando a 0 os dous factores vem

$$x^2+\sqrt{2}.\,x+1=0 \quad \text{e} \quad x^2-\sqrt{2}.\,x+1=0$$

equações que nos fornecerão as raizes da proposta, que serão

$$x=\frac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{2}.\sqrt{-1}}{2} \quad x=\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{2}.\sqrt{-1}}{2}$$

3.ª *Seja para resolver a equação* $x^5 = \pm 1$

Ponhamos

$$x^5 - 1 = 0 \quad \text{e} \quad x^5 + 1 = 0$$

O primeiro membro da primeira sendo divisivel por $x - 1$, se póde escrever

$$(x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = 0$$

donde se tira

$$x - 1 = 0 \quad \text{ou} \quad x = 1$$

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$$

Dividindo ambos os membros desta ultima equação por x^2 temos

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \left(x + \frac{1}{x}\right) + 1 = 0$$

fazendo

$$x + \frac{1}{x} = z \qquad (1)$$

obteremos

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = z^2 - 2$$

e, substituindo,

$$z^2 + z - 1 = 0$$

donde

$$z = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

pondo por z este valor em (I) vem, preparando,

$$x^2 - \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} x + 1 = 0$$

ou

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}.}{4} \pm \frac{\sqrt{10 \pm 2\sqrt{5}}.\sqrt{-1}}{4}$$

ou

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{5} \pm \sqrt{10 \pm 2\sqrt{5}}.\sqrt{-1}}{4}$$

Quanto á segunda das equações em que decomposemos a proposta, tem ella as suas raizes iguaes ás da primeira tomadas com signal contrario, serão pois.

$$x = \pm \frac{1 \pm \sqrt{5} \pm \sqrt{10 \pm 2\sqrt{5}}.\sqrt{-1}}{4}$$

4.° — *Seja para resolver a equação* $x^6 = \pm 1$

Ponhamos

$$x^6 = 1 \quad \text{e} \quad x^6 = -1$$

A primeira, isto é,

$$x^6 - 1 = 0$$

dá

$$(x^3 + 1)(x^3 - 1) = 0$$

donde

$$x^3 + 1 = 0 \quad \text{e} \quad x^3 - 1 = 0,$$

cujas raizes facilmente se determinam.

Quanto á equação $x^6 + 1 = 0$, temos que suas raizes poderão ser consideradas como raizes quadradas das raizes de

$$y^3 = -1.$$

5.º — *Seja para resolver a equação* $x^8 = \pm 1$

Ponhamos

$$x^8 - 1 = 0 \quad \text{e} \quad x^8 + 1 = 0$$

A primeira decompõe-se dando

$$(x^4 + 1)(x^4 - 1) = 0$$

donde

$$x^4 + 1 = 0 \quad \text{e} \quad x^4 - 1 = 0$$

Quanto á segunda tem ella as suas raizes iguaes ás raizes quadradas de

$$y^4 = -1$$

Equações irracionaes

Uma equação póde apresentar-se sob a fórma irracional, isto é, conter a incognita affecta de signal $\sqrt{\ }$, de modo que esse signal não possa ser expelido praticando-se a extracção da raiz indicada : é então necessario lançar mão de multiplicações de modo a dar á equação a fórma racional : isto só se consegue em geral formando uma nova equação que não é equivalente á dada, mas que muitas vezes contem as soluções desta.

Para dar idéa do modo de tractar de taes equações damos um exemplo que se resolve por meio de uma equação do segundo gráo.

Seja a equação

$$\sqrt{2x+7}+\sqrt{3x-18}=\sqrt{7x+1}$$

Elevando ao quadrado ambos os membros desta equação obtem-se

$$2x+7+3x-18+2\sqrt{(2x+7)(3x-18)}=7x+1$$

Reduzindo e isolando o radical em um dos membros, vem

$$2x+12=2\sqrt{(6x^2-15x-12b}$$

Elevando ambos os membros desta ultima equação ao quadrado e fazendo as convenientes reducções acha-se a equação racional do segundo gráo

$$5x^3-27x-162=0$$

Resolvendo esta equação tem-se

$$x=\frac{27\pm\sqrt{3960}}{10}$$

donde

$$x' = 9 \quad \text{e} \quad x'' = -\frac{18}{5}$$

Sendo muito provavel que as successivas elevações ao quadrado tenham introduzido soluções extranhas na equação dada, é indispensavel verificar se as soluções da equação obtida por meio de taes transformações podem servir a essa equação.

Procedendo á substituição em lugar de x, na equação dada, dos valores de x' e de x'' tem-se que, para $x = x' = 9$, esta equação daria

$$\sqrt{18 + 7} + \sqrt{27 - 18} = \sqrt{63 + 1}$$

ou

$$5 + 3 = 8$$

assim 9 é raiz da equação dada; para $x = x'' = -\frac{13}{5}$ obtem-se

$$\sqrt{-\frac{+1}{5}} + 12\sqrt{-\frac{1}{5}} = 11\sqrt{-\frac{1}{5}}$$

O que é absurdo, pois que o segundo membro, em vez de ser a somma dos dous termos do primeiro, é a sua differença : assim o valor $x' = -\frac{18}{5}$ não convém á equação dada e, portanto, constitue uma solução extranha, que foi introduzida pelas successivas elevações ao quadrado. Isto bem se comprehenderá reflectindo em que a equação final, obtida pelas successivas elevações ao quadrado, seria a mesma para outras combinações de signaes dos radicaes, isto é, para equações que são differentes da primeira e que deveriam ter soluções differentes; com effeito, combinando de todos os modos os signaes dos radicaes obtem-se as quatro equações

$$\begin{aligned}
\sqrt{2x + 7} + \sqrt{3x - 18} &= \sqrt{7x + 1} \\
\sqrt{2x + 7} - \sqrt{3x - 18} &= \sqrt{7x + 1} \\
-\sqrt{2x + 7} + \sqrt{3x - 18} &= \sqrt{7x + 1} \\
-\sqrt{2x + 7} - \sqrt{3x - 18} &= \sqrt{7x + 1}
\end{aligned}$$

que conduziriam a uma mesma equação final, sem que, entretanto, fossem todas satisfeitas pelas soluções achadas, pois a primeira só é satisfeita quando se tem $x = -\frac{18}{5}$; sendo que estas soluções não convém nem á segunda nem á quarta.

Concluiremos pois fazendo notar que o methodo empregado é em muitos casos falho, como aconteceria com a segunda e a quarta das equações precedentes.

II

Transformação da expressão $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$

Tratando da resolução das equações de gráo par reductiveis ao 2º gráo (n. 128 e 129), viu-se que a expressão das raizes de taes equações era sempre da fórma $\sqrt[m]{A \pm \sqrt{B}}$: sendo $m = 4$ a equação biquadrada

$$x^4 + px^2 + q = 0$$

teria suas raizes expressas por

$$x = \pm \sqrt{-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}},$$

expressão esta que muitas vezes offerece difficuldade para ser calculada exactamente. Seria, portanto, conveniente effectuar tal transformação que permitta, quanto possivel, evitar as difficuldades que provém de uma tal fórma. E' o que vamos fazer : para isso notemos que o radical do segundo membro poderá sempre tomar a fórma

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}}.$$

Seja para decompor a expressão

$$\sqrt{A + \sqrt{B}}$$

em uma somma de dous radicaes simples, sendo $\sqrt{B}$ incommensuravel,

$$\sqrt{x} + \sqrt{y}$$

de modo tal que, sendo A e B commensuraveis, tambem o sejem x e y:

Escrevamos, pois

$$\sqrt{A + \sqrt{B}} = \sqrt{x} + \sqrt{y} \qquad \text{(I)}$$

Elevando ao quadrado ambos os membros desta equação, vem

$$A + \sqrt{B} = x + y + 2\sqrt{xy}; \qquad \text{(II)}$$

isolando o radical do segundo membro e tornando a elevar ao quadrado ambos os membros desta equação vem

$$4xy = (x + y - A)^2 + B - 2(x + y - A)\sqrt{B}$$

ou passando todos os termos para o primeiro membro,

$$[(x + y - A)^2 + B - 4xy] - 2(x + y - A)\sqrt{B} = 0$$

Como se tem A, x, y, B commensuraveis, póde-se escrever

$$(x+y-A)^2+B-4xy=M$$

e

$$2(x+y-A)=-N$$

sendo M e N quantidades commensuraveis : assim podemos por

$$M+N\sqrt{B}=0 \qquad \text{(III)}$$

Como $\sqrt{B}$ é incommensuravel, para que esta igualdade exista é preciso que se tenha

$$M=0 \quad \text{e} \quad N=0$$

Pondo por M e por N seus valores teremos as equações

$$(x+y-A)^2+B-4xy=0$$

$$x+y-A=0$$

que se reduzem a

$$\begin{cases} xy=\dfrac{B}{4} & \text{(IV)} \\ x+y=A & \text{(V)} \end{cases}$$

A equação resultante deste systema devendo conter as duas raizes x e y seria do segundo e grão da fórma

$$z^2-Az+\frac{B}{4}=0$$

em que os valores de z seriam os valores correspondentes a x e a y e assim teriamos

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2} \\ y &= \frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2} \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VI)}$$

Mas, foi previamente estabelicido que x e y seriam commensuraveis, e portanto será necessario que, para que os valores achados respondam á questão, $A^2 - B$ seja um quadrado perfeito.

Convém notar que os valores a que chegamos, para x e y, seriam os mesmos para qualquer das equações

$$\sqrt{A+\sqrt{B}} = \pm\sqrt{x} \pm \sqrt{y} \qquad \text{(VII)}$$

e que, assim, séria indispensavel verificar se esses valores convém á equação dada: conseguiremos isso procedendo por exclusão de partes.

Com effeito, a equação (VII) desdobra-se nas quatro seguintes

$$\sqrt{A+\sqrt{B}} = \sqrt{x}+\sqrt{y} \qquad (1)$$

$$\sqrt{A+\sqrt{B}} = -\sqrt{x}-\sqrt{y} \qquad (2)$$

$$\sqrt{A+\sqrt{B}} = \sqrt{x}-\sqrt{y} \qquad (3)$$

$$\sqrt{A+\sqrt{B}} = -\sqrt{x}+\sqrt{y} \qquad (4)$$

Quanto á (2) comprehende-se facilmente que não pode ser satisfeita para nenhum valor real de x e de y, porquanto taes valores collocados por x e y nessa equação fariam o segundo membro de signal differente do primeiro: excluida esta resta-nos ver o que será de (3) e (4).

Estas duas ultimas equações forneceriam, pela primeira elevação ao quadrado, a mesma transformada

$$A + \sqrt{B} = x + y - 2\sqrt{xy} \qquad \text{(VIII)}$$

mas, quando tratamos de (1) vimos que os valores achados para x e y deveriam satisfazer á condição

$$x + y = A$$

e então teriamos, subtrahindo esta ultima equação de (VIII)

$$\sqrt{B} = -2\sqrt{xy},$$

o que é absurdo.

Seja agora para transformar o radical $\sqrt{A - \sqrt{B}}$

façamos, todas as condições como no caso anterior,

$$\sqrt{A - \sqrt{B}} = \sqrt{x} - \sqrt{y}$$

elevando ambos os membros ao quadrado vem

$$A - \sqrt{B} = x + y - 2\sqrt{xy};$$

isolando $-2\sqrt{xy}$ em um dos membros e elevando de novo ao quadrado tem-se

$$(A - x - y)^2 + B - 4xy - 2(A - x - y)\sqrt{B} = 0;$$

mas, $\sqrt{B}$ sendo incommensuravel é necessario, para que esta equação seja possivel, que se tenha

$$(A-x-y)^2+B-4xy=0$$

e

$$2(A-x-y)=0$$

donde se tira o systema

$$x+y=A$$

$$xy=\frac{B}{4}:$$

systema este que forneceria os mesmos valores (VI), achados no caso anterior, para x e y.

Assim podemos escrever, correspondendo-se os signaes nos dous membros,

$$\sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}\pm\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}$$

Exemplo. — *Transformar o radical* $\sqrt{6\pm\sqrt{20}}$ *em dois radicaes simples.*

Como observámos, é necessario que se tenha A^2-B quadrado perfeito para que a questão seja possivel : isto verifica-se no presente exemplo, em que se tem

$$36-20=16$$

Verificado isto appliquemos a fórmula aos dados da questão, virá

$$\sqrt{6 \pm \sqrt{20}} = \sqrt{\frac{6 + \sqrt{36 - 20}}{2}} \pm \sqrt{\frac{6 - \sqrt{36 - 20}}{2}}$$

ou

$$\sqrt{6 \pm \sqrt{20}} = \sqrt{\frac{10}{2}} \pm \sqrt{\frac{2}{2}} =$$

$$= \sqrt{5} \pm \sqrt{1}$$

Será conveniente que o estudante faça applicação da fórmula a alguns exemplos algebricos.

CAPITULO VI

Applicação dos principios da Algebra ás progressões e logarithmos

Este capitulo completa os conhecimentos de Algebra absolutamente indispensaveis ao estudo da *Trigonometria* e da *Applicação* da Algebra á Geometria.

§ 1.º Progressões por differença

169. Provámos na Arithmetica (**nº 192**), que em uma progressão por differença

$$\div a.b.c\ldots h.i.l\ldots$$

qualquer termo l póde ser calculado pela fórmula

$$l = a \pm (n-1)\,r$$

sendo o signal $+$ applicavel ás progressões crescentes, $-$ ás decrescentes.

Actualmente a extensão dada ao uso dos signaes algebricos simplifica aquella fórmula, autorizando a suppressão do duplo signal $\pm$. Com effeito, uma vez que r póde receber valores positivos e negativos, a fórmula

$$l = a + (n - 1)r$$

se torna applicavel a todos os casos; esta equação caracterisa as progressões por differença.

Por ella se calcula qualquer das quatro quantidades a, l, n, ou r, sendo conhecidas as outras tres; do que se viram exemplos na Arithmetica.

170. É tambem muitas vezes util *determinar a somma de qualquer numero de termos,* v. gr., desde a até l inclusive.

Para tal fim consideremos a progressão geral

$$\div a.b.c....h.i.l.$$

terminada no termo l, e a invertida

$$\div l.i.h....c.b.a.$$

Chamando s a somma dos termos da primeira, e sommando os de ambas, resulta

$$2s=(a+l)+(b+i)+(c+h)+\ldots+(h+c)+(i+b)+(l+a)$$

Ora, segundo o principio demonstrado (Arit. 195)

$$a+l=b+i=c+h=\ldots=h+c=i+b=l+a$$

logo,

$$2s=(a+l)\,n,\ s=\frac{n\,(a+l)}{2}.$$

171. As fórmulas $l=a+(n-1)\,r,\ s=\dfrac{(a+l)\,n}{2}$, em que se acham combinadas as 5 quantidades a, l, n, r, s, prestam-se á resolução deste problema geral :

Das cinco quantidades, primeiro e ultimo termo de uma progressão, razão, numero de termos, e a sua somma, sendo dadas tres, calcular as duas restantes.

Este problema se subdivide em tantos problemas quantos são os productos distinctos de cinco lettras combinadas duas a duas, numero que póde ser determinado pela fórmula $m\,\dfrac{m-1}{2}$ (n. 139), a qual suppondo $m=5$, se muda em $5\times\dfrac{4}{2}=10$.

Estes problemas dependem de equações do 1º grào, á excepção de dous, nos casos em que forem as incognitas a e n ou l e n; porque, estas lettras entrando em ambas as equações, na segunda se acham multiplicadas uma pela outra, o que eleva a equação ao 2º grào. Seguem exemplos de algumas destas questões.

172. Sendo dados a, r, n, isto é, o primeiro termo, a razão e o numero dos termos, para calcular o ultimo l, e a somma s, servem sem modificação as duas fórmulas.

$$l = a + (n - 1)r,\ s = \frac{n(a + l)}{2}.$$

Se fôr a série dos numeros inteiros

$$\div 1.2.3\ldots \text{ etc.}$$

$$a = 1, r = 1, \text{ donde } l = n, s = \frac{n(n + 1)}{2}$$

Para a série dos numeros pares

$$\div 2.\ 4.\ 6.\ 8.., \text{ etc.}$$

$$a = 2, r = 2, l = 2n, s = \frac{n(2 + 2n)}{2} = n(n + 1)$$

E para a série dos impares

$$\div 1.\ 3.\ 5 \ldots \text{etc.}$$

$$a=1, r=2, l=2n-1, s=\frac{n \times 2n}{2}=n^2$$

A somma dos 50 primeiros termos de cada uma destas tres séries é respectivamente

$$s=\frac{50 \times 51}{2}=1275$$

$$s=50 \times 51=2550$$

$$s=(50)^2 \qquad =2500$$

173. *Conhecendo* a, l, n, *determinar* r *e* s, isto é, *dados o 1° termo o ultimo e o numero dos termos de uma progressão, calcular a somma delles e a razão.*

Da fórmula $l=a+(n-1)r$ se deduz a razão $r=\frac{l-a}{n-1}$

e a segunda fórmula $s=\frac{(a+l)n}{2}$ dá immediatamente a somma dos termos.

O valor de r, que acabamos de determinar, ensina a inserir meios differenciaes entre dous numeros a e l.

Por exemplo, para inserir 12 meios differenciaes entre 12 e 77 basta fazer $a=12$, $l=77$, $n=14$, e será

$$r=\frac{77-12}{13}=\frac{65}{13}=5$$

Logo, $\div 12.17.22.27.32\ldots72.77.$

A somma dos termos será $s=\frac{(12+77)\,14}{2}=623.$

---

§ 2º. Progressões por quociente

174. Seja a progressão de numero limitado de termos

$$\div\!\div a:b:c:\ldots:h:i:l.$$

A fórmula $l=a.\,r^{n-1}$ (Arith. 197) determina qualquer termo sem dependencia dos anteriores.

175. Proponha-se *achar a somma dos termos da progressão* desde a até l inclusive.

Segundo a definição temos

$$b=ar,\ c=br,\ d=cr,\ e=dr,\ \ldots\ i=hr,\ l=ir,$$

e sommando estas equações,

$$b+c+d+\ldots+i+l=(a+b+c+\ldots+h+i)r$$

ou, chamando s a somma dos termos,

$$s-a=(s-l)r=sr-lr;\ \text{donde}\ s=\frac{lr-a}{r-1}$$

Ou substituindo em logar de l o seu valor ar^{n-1},

$$s=\frac{a\,(r^n-1)}{r-1}$$

Exemplos. 1.ª Pede-se o 8º termo e a somma dos 8 termos da progressão $\div\!\div\ 2:6:18:$ etc. Temos $a=2$, $r=3$, $n=8$; logo,

$$l=ar^{n-1}=2\times3^7=4374$$

e $$s=\frac{a\,(r^n-1)}{r-1}=\frac{2\,(3^8-1)}{2}=6560.$$

2.º Seja a progressão decrescente, com doze termos,

$$\div\!\div\ 64:16:4:1:\frac{1}{4}\ldots\ \text{etc.}$$

Teremos, $a=64$, $r=\frac{1}{4}$, $n=12$; logo,

$$l=ar^{n-1}=64\times\left(\frac{1}{4}\right)^{11}=\frac{1}{65536}$$

$$s=\frac{a-lr}{1-r}=\frac{64-\frac{1}{65536}\times\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=$$

$$=\frac{256-\frac{1}{65536}}{3}=85\,\frac{21845}{65536}$$

176. Suppondo $r=1$ no segundo valor de s (n. 175), muda-se elle em $\frac{0}{0}$. Este resultado, que algumas vezes é symbolo da indeterminação, outras vezes indica a existencia de um factor commum aos dous termos da fracção, o qual se aniquila na hypothese particular de que se trata. A 2ª interpretação do symbolo é a que convem ao presente caso : porque sendo r^n-1 divisivel exactamente por $r-1$, e sendo o quociente $r^{n-1}+r^{n-2}+r^{n-3}+\ldots+r+1$, será

$$s=ar^{n-1}+ar^{n-2}+ar^{n-3}+\ldots+ar+a,$$

e no caso particular $r=1$, $s=a+a+\ldots=na$.

O factor $r-1$, commum aos dous termos da fracção, é o que a reduzia à fórma $\frac{0}{0}$.

177. *Progressões infinitas.* Se a progressão é decrescente, ou $r<1$, ao valor de s (n. 175) mais convem esta fórma

$$s=\frac{a(1-r^n)}{(1-r)}=\frac{a}{1-r}-\frac{ar^n}{1-r}$$

Ora, pois que r é fracção propria, r^n será tanto menor quanto maior fôr n; logo, quantos mais termos se tomarem da progressão, menor se tornará a quantidade $\frac{ar^n}{1-r}$ e mais, portanto, a somma dos termos se approximará de ser igual a $\frac{a}{1-r}$. Assim, suppondo n superior a qualquer numero dado,
ou $n=\infty$, $\frac{ar^n}{1-r}$ será menor do que qualquer numero conhecido, ou pode reputar-se igual a zero e será neste caso

$$s=\frac{a}{1-r},$$

somma dos termos de uma progressão decrescente ao infinito.

Este valor de s é propriamente o *limite*, para o qual tendem todas as sommas parciaes que se obtem pela addição de um numero cada vez maior de termos da progressão. A differença entre cada uma destas sommas e a expressão $\frac{a}{1-r}$ póde tornar-se tão pequena quanto se queira, sómente é nulla quando se tomam *infinitos* termos.

178. A forma precedente póde verificar-se, desenvolvendo em série a expressão $\frac{a}{1-r}$ pela divisão ordinaria; o quociente $s=a+ra+r^2a+\ldots$ é evidentemente a somma dos termos da progressão proposta, substituindo ao 2º e seguintes os seus valores em funcção de a.

Igualmente se póde derivar da ultima expressão o valor precedente de s; porquanto, sendo

$$s=a+ra+r^2a+r^3a+\ldots$$

será $$rs=ra+r^2a+r^3a+\ldots$$

Logo, $s-rs=a$, donde $s=\frac{a}{1-r}$

Exemplos. A progressão decrescente ao infinito

$$\div 1 : \frac{1}{3} : \frac{1}{9} : \ldots \text{ etc.}$$

tem por expressão da somma de todos os termos

$$s = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3}.$$

E na progressão $\div 1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{8} \ldots$ etc., $s = \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$

179. *Observação.* A fórmula $s = \dfrac{a}{1-r}$ não póde ter applicação alguma ás series crescentes; porque na sua deducção se suppõe essencialmente r uma fracção propria. Sendo $r > 1$, quanto maior fôr n maior se tornará a quantidade $\dfrac{ar^n}{1-r}$; e cada vez a somma dos termos $s = \dfrac{ar^n}{r-1} - \dfrac{a}{r-1}$ mais será differente de $\dfrac{a}{r-1}$.

180. As progressões por quociente dão occasião aos mesmos dez problemas, que se podem propôr a respeito das progressões por differença; porquanto as mesmas cinco quantidades se acham combinadas nas duas fórmulas $l = ar^{n-1}, s = \frac{lr-a}{r-1}$.

Ha comtudo esta distincção. Nas progressões por differença todos os dez problemas dependem de equações do 1° ou do 2° gráo; nas progressões por quociente algumas das questões dependem de equações de gráos superiores, a saber : sempre que fôr r uma das incognitas, a equação $l = ar^{n-1}$ será do gráo $n-1$ se a fôr conhecido, e no caso contrario do gráo n. E, além disso, se n fôr incognita, teremos equação de uma natureza particular, em que a incognita é expoente, equação que não se resolve pelos principios até agora expostos. Excluindo estas combinações de incognitas, restam sómente quatro problemas, que as fórmulas resolvem immediatamente, a saber : sendo pedidos l e s, ou a e s, ou a e l, ou r e s. Esta ultima depende de equação do gráo $n-1$, porém, a dous termos.

Eis-aqui as fórmulas transformadas como convém a cada um destes problemas. Tratando-se de calcular

$$l \text{ e } s \ldots \quad l = ar^{n-1}, \; s = \frac{lr-a}{r-1} = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$$

$$a \text{ e } s \ldots \quad a = \frac{l}{r^{n-1}}, \; s = \frac{l}{r^{n-1}} \, \frac{(r^n-1)}{r-1}$$

$$a \text{ e } l \ldots a=\frac{s(r-1)}{r^n-1},\ l=\frac{sr^{n-1}(r-1)}{r^n-1}$$

$$r \text{ e } s \ldots r=\sqrt[n-1]{\frac{l}{a}},\ s=\frac{\sqrt[n-1]{l^n}-\sqrt[n-1]{a^n}}{\sqrt[n-1]{l}-\sqrt[n-1]{a}}$$

181. O ultimo valor de r resolve esta questão; *inserir meios proporcionaes entre dous numeros* a *e* l, *isto é, formar uma progressão de numero dado de termos, em que* a *e* l *sejam os extremos.*

Exemplo. Querendo inserir 6 meios proporcionaes entre 3 e 384, será

$$a=3,\ l=384,\ n=8;\ r \sqrt[7]{\frac{384}{3}} \sqrt[7]{128}=2,$$

donde a progressão $\div$ 3 : 6 : 12 : 24 : 48 : 96 : 192 : 384.

Algumas das questões que acabamos de tratar já foram resolvidas na Arithmetica. Aqui, porém, ter-se-ha occasião de notar quanto os principios da Algebra simplificam a sua resolução, e ao mesmo tempo generalisam os resultados e consequencias.

§ 3.º Theoria dos exponenciaes e dos logarithmos

Alguns dos problemas a que dão logar as progressões por quociente conduzem, como já vimos, a equações em que a incognita é o expoente de algum numero conhecido. Estas equações se chamam *exponenciaes*, e no caso mais simples se reduzem á fórma $a^x = b$; procuremos meio de achar um valor para x, exacto ou approximado.

Resolução da equação $a^x = b$

182. Reduz-se a questão a *achar o expoente da potencia a que se deve elevar o numero dado* a, *para obter outro numero tambem dado* b.

Seja, por exemplo, $2^x = 64$. Elevando 2 á 2^a, 3^a, 4^a... potencias, reconhece-se que $2^5 = 64$; logo, $x = 5$.

Seja ainda $3^x = 343$. Formando as potencias de 3, se verifica que $x = 5$.

Em geral, o valor de x é inteiro na equação $a^x = b$, quando b é potencia perfeita de a.

Ha outro caso particular em que o valor de x se determina immediatamente, a saber: quando a e b são potencias perfeitas de um mesmo numero. Se fôr $a = c^m$, $b = c^n$, segue-se

$$c^{mx} = c^n; \text{ donde } mx = n,\ x = \frac{n}{m}$$

Procuremos. porém, um processo geral para determinar exacta ou approximadamente o valor de x; seja a equação $2^x = 6$.

Sendo $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, é claro que x se achará entre 2 e 3. Seja

$$x = 2 + \frac{1}{x'}$$

Substituindo na equação proposta, temos

$$2^{2+\frac{1}{x'}} = 6, \text{ ou } 2^2 \times 2^{\frac{1}{x'}} = 6 \text{ ou } 2^{\frac{1}{x'}} = \frac{3}{2},$$

ou elevando ambos os membros à potencia x'

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{x'} = 2.$$

Para determinar x' procedemos como para com x, elevando $\frac{2}{3}$ às diversas potencias; e porque.

$$\left(\frac{3}{2}\right)^1 = \frac{3}{2} < 2 \text{ e } \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} > 2.$$

Segue-se, $x' = 1 + \frac{1}{x''}$,

e substituindo este valor na equação,

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{1+\frac{1}{x''}} = 2 \text{ ou } \frac{3}{2} \times \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x''}} = 2$$

$$\text{ou } \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x''}} = \frac{4}{3}$$

ou elevando ambos os membros á potencia x'',

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{x''} = \frac{3}{2}$$

A esta 3ª equação se applica processo semelhante; eis os resultados :

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{1} = \frac{4}{3} < \frac{3}{2}, \left(\frac{4}{3}\right)^{2} = \frac{16}{9} > \frac{3}{2}.$$

$$\text{Logo, } x'' = 1 + \frac{1}{x'''},$$

substituindo,

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{1+\frac{1}{x'''}} = \frac{3}{2} \text{ ou } \frac{4}{3} \times \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{x'''}} = \frac{3}{2}$$

$$\text{ou } \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{x'''}} = \frac{9}{8} \text{ ou } \left(\frac{9}{8}\right)^{x'''} = \frac{4}{3}.$$

Continuando o mesmo processo, acha-se x'' comprehendido entre 2 e 3; pelo que

$$x''' = +2\frac{1}{x^{\text{IV}}}$$

e a equação ultima se muda em

$$\left(\frac{256}{243}\right)^{x^{\text{IV}}} = \frac{9}{8}.$$

Desta se conclue, $x^{\text{IV}} = 2 + \dfrac{1}{x^{\text{V}}}$.

Continuando do mesmo modo ou se chegará a uma equação em que o expoente a determinar seja numero inteiro, e neste caso ficará conhecido o valor exacto de x, ou no caso contrario será aquelle valor tanto mais approximado quanto maior numero de operações se praticarem.

Com effeito, da combinação dos valores de x, x', x'', x''', etc., resulta.

$$x = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{x'}}}}}$$

assim, pois que x toma a fórma de uma fracção continua, será commensuravel ou não, segundo fôr limitado ou infinito o numero de integrantes. Em todo o caso o valor de x se achará com tanto maior approximação, quanto mais integrantes se calcularem. O ultimo valor de x, prescindindo de $\frac{1}{x^v}$ e feitos todos os calculos, conduz ao resultado

$$x = 2{,}583.$$

A analyse da equação $a^x = b$ póde conduzir a preceitos geraes para distinguir os casos em que x é commensuravel ou incommensuravel. Omittimos essas investigações por brevidade, e porque os logarithmos offerecem meio commodo de resolver as equações exponenciaes. Sómente, para evitar um circulo vicioso, era preciso mostrar que sem dependencia dos logarithmos ha *possibilidade* de resolver aquellas equações; e para isso bastam as noções expendidas.

Theoria dos logarithmos

183. — *Introducção*. Pelo que fica dito, sendo a constante e positivo na equação $a^x = y$, será sempre possivel, dando um valor a y, calcular o valor correspondente de x, ou exactamente ou com a approximação que se quizer. Reciprocamente, dando valor a x, é facil determinar y.

Estes valores de x e de y fórmam duas séries, cuja confrontação conduz a consequencias importantes; demos a x todos os valores imaginaveis, inteiros, fraccionarios, positivos ou negativos, e analysemos os valores correspondentes de y; consideremos os valores inteiros, ficando subentendidos os intermedios ou fraccionarios. Seja

$$x = \ldots -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\ldots$$

$$y = \ldots \frac{1}{a^5}, \frac{1}{a^4}, \frac{1}{a^3}, \frac{1}{a^2}, \frac{1}{a}, 1, a, a^2, a^3, a^4, a^5\ldots$$

A série dos valores de y comprehende todos os numeros absolutos maiores ou menores que a unidade, qualquer que seja o valor de a.

Com effeito, sendo $a > 1$, os termos $\frac{1}{a}, \frac{1}{a^2}, \frac{1}{a^3}$ etc., são fracções proprias que decrescem indefinidamente do termo 1 para a esquerda, e os termos a, a^2, a^3, etc., são pelo contrario numeros maiores que 1, crescendo em progressão ao infinito,

Sendo $a < 1$, ainda a série dos valores de y contém todos os numeros absolutos, com a differença de se acharem á direita os menores que a unidade a, a^2, a^3, etc., e á esquerda os maiores $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{a^3}$ etc.

E resultando todos estes valores da equação $y=a^x$, segue-se que *todos os numeros absolutos imaginaveis podem ser potencias de um numero invariavel* a, *sendo os expoentes inteiros ou fraccionarios, positivos ou negativos.*

N. B. — Cumpre todavia que a seja differente de 1, porque todas as potencias de 1 são iguaes a 1.

184. Isto posto, chama-se logarithmo de um numero *o expoente a que é necessario elevar um numero invariavel para formar o proposto.*

Collocados em uma taboa todos os numeros inteiros e á direita de cada um o seu logarithmo, isto é, o expoente a que é preciso elevar o numero constante a para formar os mesmos numeros inteiros, ter-se-ha uma *taboa de logarithmos.* O numero invariavel toma o nome de base do systema de logarithmos.

Em qualquer systema *o logarithmo de base é* 1, *e o de* 1 *é zero.* Porque, para qualquer valor de a temos

$$a^1=a, \quad \text{donde } lg.\ a=1$$

$$a^0=1, \quad \text{donde } lg.\ 1=0$$

(designa-se o logarithmo de um numero collocando á esquerda delle as lettras lg).

185. Ter-se-ha notado que a noção dos logarithmos aqui dada differe da definição da Arithmetica; porém, a differença não é fundamental, porquanto os dous systemas de valores deduzidos da equação $a^x = y$ (n. 183)

$$x = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\ldots$$

$$y = 1,\ a, a^2, a^3, a^4, a^5\ldots$$

constituem as duas progressões fundamentaes a que se refere a definição arithmetica.

A noção ultima é muito mais analytica e caracteristica; della com mais facilidade que da outra se deduzem as propriedades dos logarithmos. Mas, a utilidade destes, para simplificar os calculos, fez nascer o desejo de os incluir na Arithmetica, e em falta de conhecimento das equações, especialmente das exponenciaes, não havia outro meio de estabelecer a doutrina senão o das progressões.

Demonstremos agora algebricamente as propriedades dos logarithmos.

186. *Multiplicação*. Representem y, y', y''.. diversos numeros, $x, x', x'', \ldots$ os seus logarithmos, sendo a a base do systema. Conforme a definição, teremos

$$y = a^x,\ y' = a^{x'},\ y'' = a^{x''}, \ldots$$

Donde $y \times y' \times y'' \times \ldots = a^x \times a^{x'} \times a$
$a^{x+x'+x''+\ldots}$ e conseguintemente

$$lg(y \times y' \times y'' \times \ldots) = x + x' + x'' \ldots$$
$$= lg\,y + lg\,y' + lg\,$$

Logo, *o logarithmo de um producto é igu*
dos logarithmos dos factores.

187. *Divisão.* Das mesmas equações acim

$$\frac{y}{y'} = \frac{ax}{ax'} = a^{x-x'}, \text{ donde } lg\left(\frac{y}{y'}\right) = x - x' =$$

isto é, *o lg. de um quociente é igual ao l*
dendo menos o lg. do divisor.

188. *Potencias e raizes.* Proponha-se el
mero y á potencia $\frac{m}{n}$. Da equação $y = a^x$ se

$$y^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}x}, \text{ e portanto } lg\left(y^{\frac{m}{n}}\right) = \frac{m}{n}x =$$

O lg. de qualquer potencia de um numer
ao lg. desse numero, multiplicado pelo ex
potencia.

Suppondo $m=1$, temos

$$lg\, y^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} lg\, y = \frac{lg\, y}{n}.$$

Logo, *o lg. da raiz de um numero é igual ao lg. do numero, dividido pelo indice da raiz.*

Já mostrámos na Arithmetica o uso que, para abreviar os calculos, se póde fazer destas propriedades, que pertencem a todos os systemas de logarithmos; novos exemplos destas applicações terminarão o presente capitulo. Cumpre, porém, antes disso, e á vista da definição de logarithmos, expôr o modo por que póde ser calculada uma Taboa em um systema determinado.

189. Os logarithmos vulgares que a Taboa de Callet contém até o numero 108000 pertencem ao systema em que a base $a=10$; dependem elles, portanto, da equação $10^x=y$. Fazendo successivamente $y=1, 2, 3, 4, 5..$, será preciso para calcular a Taboa resolver estas equações

$$10^x=1;\ 10^x=2;\ 10^x=3;\ \text{etc.}$$

a cada uma das quaes é applicavel o methodo **n. 102.** E', porém, de notar que basta calcular os log. dos numeros primos 2, 3, 5, 7, 11..., porque, segundo o que fica provado

$$lg\ 4 = 2 \times lg 2$$
$$lg\ 6 = lg 2 + lg 3$$
$$lg\ 8 = 3 \times lg 2$$
$$lg\ 12 = lg 4 + lg 3$$

e assim por diante.

190. O systema dos logarithmos vulgares dependente da equação $10^x = y$ possue propriedades importantes, em parte já expostas na Arithmetica, e que tornam muito commodas as applicações. Sendo

$$x = \ldots -3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ \ldots$$

$$y = \ldots 0{,}001;\ 0{,}01;\ 0{,}1;\ 1;\ 10;\ 100;\ 1000;\ldots$$

e destas series facilmente se collige que :

1.° *Os logarithmos dos numeros maiores que 1 são positivos, e negativos os das fracções proprias.*

2.° *A caracteristica de qualquer logarithmo tem tantas unidades quantas lettras menos uma tem o numero na parte inteira.*

3.° *Quando dous ou mais numeros só differem na posição da virgula, isto é, são decuplos uns dos outros,* *os seus algarismos têm a mesma parte decimal* (só differem na caracteristica).

Funda-se nestes principios o uso das Taboas de Callet.

191. Calculada a Taboa de logarithmos de um systema é facil construir a de outro qualquer. Com effeito, seja b a base do systema que se pretende calcular e X o logarithmo de um numero N no mesmo systema, designando-se o do systema conhecido por lg N. Teremos $b^x = N$, e tomando os lg. de ambos os membros no systema já calculado

$$Xlg\,b = lg\,N, \text{ donde } X = \frac{lg\,N}{lg\,b}.$$

Logo, *o lg. de um numero em qualquer systema a determinar é igual ao lg, do mesmo numero em outro systema já conhecido, dividido pelo lg. da nova base, tomado no mesmo systema conhecido.*

O que fica dito do numero N, se applica a todos os outros, os quaes é necessario dividir por lg. b; ou multiplicar por $\frac{1}{lg\,b}$. Este multiplicador invariavel se chama o MODULO da nova Taboa em relação à outra.

192. *Logarithmos das fracções.* O calculo destes logarithmos não foi desenvolvido completamente na arithmetica, porque, para dar-lhe a necessaria extensão, cumpria primeiramente estabelecer as regras do calculo das quantidades negativas. Actualmente as applicações nenhuma difficuldade offerecem, tendo toda a generalidade as propriedades demonstradas (ns. 186 a 189), porque podem os valores de x na equação $a^x = y$ ser positivos ou negativos.

Quando, pois, se houver de sommar ou diminuir logarithmos positivos ou negativos, ou uns e outros, applicando as regras da addição e da subtracção algebrica, será facil chegar ao resultado e determinar o seu signal.

Sirva de exemplo o calculo por logarithmos da expressão

$$x = \sqrt[5]{\frac{(8{,}07 \times 0{,}0317 \times 0{,}00019)^3}{(0{,}037 \times 84 \times 0{,}000002)^7}}.$$

Acha-se, applicando os principios da arithmetica, e fazendo uso da Taboa de Callet,

$$lg\, 8{,}07 = +\, 0{,}9068735$$
$$lg\, 0{,}0317 = -\, 1{,}4989407$$
$$lg\, 0{,}00019 = -\, 3{,}7212464$$

A somma destes tres logarithmos é, attendendo aos signaes,

$$0{,}9068735 - 5{,}2201871 = -\, 4{,}3133136$$

e multiplicando por 3

$$lg \text{ numerador} = -12{,}9399408$$

O lg. do denominador se calcula do mesmo modo, a saber;

$$lg\ 0{,}037 = -1{,}4317983$$
$$lg\ 84 = +1{,}9242793$$
$$lg\ 0{,}000002 = -5{,}6989700$$

Effectuando a somma segundo os principios da Algebra e multiplicando por 7

$$lg \text{ denominador} = -36{,}4454230.$$

Para terminar o calculo cumpre subtrahir este logarithmo do numerador, e do resto tomar a quinta parte. Assim:

$$\begin{array}{rr} lg \text{ Num...} & -12{,}9399408 \\ -\,lg \text{ Denom..} & +36{,}4454230 \\ \hline \text{resto} & +23{,}5054822 \\ 5^{a} \text{ parte, } lg\, x = & 4{,}7010964 \end{array}$$

Logo, $x = 50245{,}4$.

Passemos a outras applicações.

193. *Equações exponenciaes.* Da equação $a^x = b$ se deduz $x \, lg\, a = lg\, b$, donde $x = \frac{lg\, b}{lg\, a}$

Seja, por exemplo, a equação tratada no n. 182, $2^x = 6$, applicando a formula, temos:

$$x = \frac{lg 6}{lg 2} = \frac{0{,}7781512}{0{,}3010300} = 2{,}585,$$

que pouco differe do valor achado $x = 2{,}583$.

194. A resolução destas equações facilita a de alguns dos problemas apontados no numero 180, então impossiveis de resolver. Estão, neste caso, todos os problemas, em que seja incognita n ou o numero dos termos da progressão por quocientes; porque então a equação $l = ar^{n-1}$ se torna *exponencial*.

Desta equação se deduz $r^{n-1} = \frac{l}{a}$; logo,

$$(n-1)\, lg\, r = lg\, l - lg\, a, \text{ e } n = 1 + \frac{lg\, l - lg\, a}{lg\, r}.$$

Proponha-se, por exemplo, *achar o numero dos termos da progressão que principia por 3 e acaba em* 6144, *sendo a razão* 2.

Neste caso, $a=3$, $l=6144$, $r=2$; e substituindo na fórmula supra

$$n=1+\frac{lg6144-lg3}{lg2}=1+\frac{3{,}3113300}{0{,}3010300}=12.$$

195. As questões de *juros compostos* tambem muito se simplificam com o emprego dos logarithmos; e, principalmente, quando a incognita é o tempo em que certo capital venceu juros. A fórmula dos juros compostos deduzida na Arithmetica é

$$C=c\left(\frac{100+i}{100}\right)^t$$

representando c o capital empregado, i a taxa, t o numero de annos ou de mezes, C a quantia produzida afinal, ou a somma do capital com os juros de juros. Para evitar fracções, supponha-se

$$\frac{i}{100}=r, \text{ e será } C=c\,(1+r)^t.$$

1.° *Posta uma quantidade* c *a juros compostos á taxa* r, *qual a quantia accumulada no fim do tempo* t?

A fórmula, tal qual se acha, resolve esta questão.

2.° *Tendo a quantia* c *empregada a juro composto* *pelo tempo* t *produzido a quantia* C, *qual a taxa do juro?*

$$(1+r)^t = \frac{C}{c}; \text{logo, } 1+r = \sqrt[t]{\frac{C}{c}},\ r = \sqrt[t]{\frac{C}{c}} - 1.$$

O termo $\sqrt[t]{\frac{C}{c}}$ calcula-se facilmente por logarithmos.

3.° *Qual o capital que empregado a juro composto á taxa* r, *pelo tempo* t, *produz a quantia dada* C?

Resolve-se dando á equação esta fórma

$$c = \frac{C}{(1+r)^t}$$

E' esta uma questão de *desconto composto*.

4.° *Qual o tempo em que uma quantia dada* c, *empregada a juro composto á taxa* r, *produzirá a quantia dada* C?

Sendo agora t a incognita, a equação é exponencial, e se resolve pelos logarithmos deste modo

$$lg\,C = lg\,c + t\,lg\,(1+r),\ t = \frac{lgC - lgc}{lg\,(1+r)}$$

Exemplo. *Em quantos annos se duplicará uma quantia* c, *a juro composto de 10 °/₀?*

Neste caso $r=0,1$; $C=2c$; e, substituindo,

$$t=\frac{lg2c-lgc}{lg1,1}=\frac{lg2+lgc-lgc}{lg1,1}=\frac{lg2}{lg1,1}=7a.^s\,3m.^s\,8d.^s$$

Se o capital se pretendesse triplicar, quadruplicar, etc., as fórmulas serão respectivamente

$$t=\frac{lg3}{lg\,(1+r)},\ t=\frac{lg4}{lg\,(1+r)},\ \text{etc.}$$

O tempo t é *independente da quantia empregada* c.

196. Examinando as series do n. 183 se conhece que os valores de y são todos essencialmente positivos, e assim *os numeros negativos não têm logarithmos*. Comtudo, tendo de calcular numeros com diversos signaes, muitas vezes se póde applicar os logarithmos prescindindo dos signaes dos numeros, e, achado o resultado examinar segundo os dados qual deve ser o seu signal.

Seja, por exemplo, $x=-2\times5\times-3$.

Prescindindo dos signaes, se fórma o resultado 30, calculavel por logarithmos; e, com effeito, $x=30$.

Sendo $x=(-8)^{\frac{5}{3}}$, $lgx=\frac{5}{3}lg(-8)$.

Abstrahindo do signal —, acha-se $lg\,x = 32$; mas, como $(-8)^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{(-8)^5}$ é resultado negativo, $x = -32$.

Cumpre, porém, não esquecer, que este processo, consistindo em meras tentativas, póde conduzir a falsos resultados, principalmente quando a expressão encerra explicita ou implicitamente a fórma imaginaria.

A expressão $x = (-4)^{\frac{3}{2}}$ conduziria ao resultado $x = 8$; mas, $(-4)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{(-4)^3} = \sqrt{-64}$, valor imaginario.

197. Terminamos resolvendo dous problemas, que dependem de equações uteis em muitas circumstancias.

1.º Problema. *Sabendo-se que a população de um paiz cresce cada anno um centesimo do que era no fim do precedente, pergunta-se em quantos annos se tornará dez vezes maior?*

Chamando r a percentagem do augmento annual da população, é claro que póde ter aqui applicação a fórmula dos juros compostos

$$C = c(1+r)^t$$

dando por valores a c e C os algarismos de população no principio e no fim de periodo, e a t o numero de annos. Assim no caso proposto $C = 10$ c; $r = 0{,}01$; e, substituindo,

$$10\,c = c\,(1{,}01)^t$$

$$\text{donde } t = \frac{lg\,10}{lg\,1{,}01} = 231.$$

2.º Problema. *Pede-se a quantia que deve ser empregada a juro composto de* 9 *por cento ao anno, de modo que, recebendo-se* 700 $ *réis annualmente, no fim de* 15 *annos fique embolsado capital e juros.*

Sendo r a percentagem do juro, c a quantia emprestada, esta no fim de t annos produz

$$c\,(1 + r)^t$$

quantia que deve ser igual á somma total das annuidades com seus juros compostos. A cada uma destas se applica a mesma fórmula; a ultima annuidade não vence juros, a penultima o vence por um anno, a anterior por dous, e assim por diante. Devemos, pois, sommar estas quantidades :

$$a,\ a\,(1 + r),\ a\,(1 + r)^2,\ a\,(1 + r)^3, \ldots\ a\,(1 + r)^{t-1}$$

que são evidentemente os termos de uma progressão por quocientes : a somma é (n. 175)

$$\frac{a(1+r)^{t-1}(1+r)-a}{r(1+r)^t}=\frac{(1+r)^t-1}{r}a,$$

Pelo que será a equação do problema

$$c(1+r)^t=\frac{(1+r)^t-1}{r}a, \text{ donde}$$

$$c=\frac{(1+r)^t-1}{r(1+r)^t}a$$

Applicando esta fórmula aos numeros propostos, acha-se $c = 5:642\$520$.

As fórmulas de juros compostos e de annuidades têm applicação em grande numero de questões economicas.

CAPITULO VII

Noções sobre as séries

198. Lemma I. — *Sendo* a *uma quantidade positiva e maior do que* 1, a^m *crescerá indefinidamente com* m.

Podendo m ser inteiro ou fraccionario, supponhamol-o, a principio inteiro. Como se tem $a > 1$ póde-se escrever

$$a = 1 + \alpha,$$

sendo α uma quantidade positiva qualquer, tem-se

$$(1 + \alpha)^2 = 1 + 2\alpha + \alpha^2$$

ou

$$(1 + \alpha)^2 > 1 + 2\alpha;$$

multiplicando ambos os membros desta desigualdade por $(1 + \alpha)$, viria

$$(1 + \alpha)^3 > 1 + 3\alpha + 2\alpha^2$$

ou ainda

$$(1 + \alpha)^3 > 1 + 3\alpha$$

Procedendo sempre de modo analogo, concluiriamos

$$(1+\alpha)^m > 1 + m\alpha$$

ou

$$a^m > 1 + m\alpha$$

e, como m cresce indefinidamente, tambem cresce o termo $m\alpha$ e, portanto, o segundo membro desta desigualdade, o que importa dizer que a^m, que é maior, tambem crescerá indefinidamente.

199. Seja agora m fraccionario e façamos

$$m = n + \frac{p}{q},$$

sendo n a parte inteira de m, tem-se pois,

$$a^m = a^n \times a^{\frac{p}{q}}.$$

Não podendo $a^{\frac{p}{q}}$ tornar-se menor do que a unidade e a^n crescendo sempre com n, é claro que o producto $a^n \times a^{\frac{p}{q}}$ crescerá tambem com n, e portanto, com m.

200. Lemma II. — *Para todo o valor positivo de* a, *menor do que* 1, a^m *tende para zero quando* m *cresce indefinidamente.*

Seja $a < 1$ e igual a $\frac{1}{a'}$: nesta fracção o denominador a' é necessariamente maior do que 1 e, como se tem

$$a^m = \frac{1}{a'}$$

e a' cresce sempre com m é claro que $\frac{1}{a'}$ ou a^m diminue indefinidamente quando m cresce do mesmo modo, isto é, a^m tende para zero.

201. Lemma III. — *Qualquer que seja o valor positivo de* a, $\sqrt[m]{a}$ *tende sempre para* 1, *crescendo* m *indefinidamente.*

Supponhamos, a principio, que seja

$$a > 1$$

ter-se-ha

$$\sqrt[m]{a} > 1$$

e poderemos portanto pôr

$$\sqrt[m]{a} = 1 + \alpha$$

donde

$$(1 + \alpha)^m = a$$

porém temos pelo lemma (1)

$$1 + m\alpha < a$$

ou

$$\alpha < \frac{a-1}{m} :$$

não podendo α ser negativo, é claro que quando m crescer indefinidamente α tenderá para zero e, portanto, $1 + \alpha$ ou $\sqrt[m]{a}$ para a unidade.

Supponhamos agora a ⟨1 e façamos

$$a = \frac{1}{a'}$$

teremos

$$\sqrt[m]{a} = \frac{1}{\sqrt[m]{a'}}$$

Sendo a' maior do que 1, $\sqrt[m]{a'}$ tende para a unidade, quando m cresce indefinidamente e, portanto, tambem $\dfrac{1}{\sqrt[m]{a'}}$ ou $\sqrt[m]{a}$

A expressão $\sqrt[m]{a}$ quando $a > 1$ diminue sempre de valor augmentando m e, como $\sqrt[m]{a}$ não póde vir a ser menor do que a unidade diremos que 1 é limite inferior de $\sqrt[m]{a}$, quando se tem

$$a > 1;$$

a expressão $\sqrt[m]{a}$, quando $a < 1$, cresce indefinidamente com m e como não póde vir a ser maior do que a unidade, diremos que 1 é limite superior $\sqrt[m]{a}$ quando se tem.

$$a < 1.$$

202. *Chama-se série uma sequencia indefinida de termos taes que, a partir de um certo, cada um fórma-se de algum ou de alguns dos precedentes segundo uma certa lei.*

Desta definição conclue-se que sendo conhecida a lei de formação dos termos da série e a ordem n de um qualquer, poder-se-ha sempre compor uma funcção $F(n)$ tal que exprima esse termo: esta funcção $F(n)$ toma por isso o nome de *termo geral da série.*.

As funcções algebricas que não pódem ser calculadas exactamente podem, em geral, ser transformadas em séries: assim as divisões e extracções de raizes que se não pódem fazer exactamente dão sempre nascimento a séries, como sejam

$$\frac{x+1}{x-1} = 1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^3} + \ \ldots\ldots \qquad \text{(I)}$$

$$\frac{1}{a+x} = \frac{1}{a} - \frac{x}{a^2} + \frac{x^2}{a^3} - \frac{x^3}{a^4} + \frac{x^4}{a^5} \ \ldots\ldots \qquad \text{(II)}$$

$$\sqrt{a^2+x} = a + \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{a} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{x^2}{a^3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{x^3}{a^5} -$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{x^4}{a^7} \ \ldots\ldots \qquad \text{(III)}$$

Na série (I) nota-se que a partir do segundo, exclusive, cada termo fórma-se multiplicando o precedente sempre pela mesma quantidade $\frac{1}{x}$; assim sendo n a ordem de um termo qualquer a partir do segundo, inclusive, teremos que o *termo geral* da série será

$$F(n) = 2\left(\frac{1}{x}\right)^{n-1}$$

pois, fazendo nesta expressão $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$., etc., obteremos successivamente o segundo, o terceiro, o quarto, o quinto, etc., termos da série.

Na série (II) cada termo fórma-se do precedente multiplicado sempre pela mesma quantidade $-\frac{x}{a}$, de sorte que o *termo geral*, isto é, a expressão que dá, em funcção da sua ordem n, um termo qualquer da série, será

$$F(n) = \frac{(-x)^{n-1}}{a^n}$$

Na série (III) cada termo fórma-se do precedente multiplicado por

$$-\frac{2n-5}{2n-2}\cdot\frac{x}{a^2}$$

e o seu *termo geral* será

$$F(n) = \left[(-1)^{n-1}\times\frac{-1}{2}\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{6}\times\frac{5}{8}\times\ldots\frac{(2n-5)}{(2n-2)}\right]\frac{x^{n-1}}{a^{2n-3}}$$

Dentro da chave existirão tantos factores quantas forem as unidades de n. O termo geral acima permittirá calcular qualquer termo da ordem n da série, tomando dentro do parenthesis tantos factores quantas forem as unidades de n.

Até aqui só temos visto casos de séries em que cada termo só depende da sua ordem e do precedente; ha porém casos em que um termo depende tambem de mais de um dos precedentes: assim

$$\frac{a+x}{p+qx+x^2} = \frac{a}{q} + \left(1-\frac{ap}{q}\right)x + \left[-\frac{a}{q}.\frac{1}{q} - \left(1-\frac{ap}{q}\right)\frac{p}{q}\right]x^2 + \ldots$$

é um caso em que o quociente achado representa uma série em que cada termo, a partir do terceiro, fórma-se sommando os productos que se obtem tomando os dous termos que precedem ao que se quer calcular e multiplicando o primeiro delles por $-\frac{x^2}{q}$ e o segundo por $-\frac{px}{q}$

Esta série bem como as duas primeiras que foram mencionadas e que, como esta, representam desenvolvimento de fracções racionaes, denomina-se *série recorrente* e bem definiremos dizendo que — *serie recorrente é aquella em que cada termo, a partir de um determinado, fórma-se multiplicando um ou mais dos que o precedem, cada um sempre por uma mesma quantidade, e sommando os productos assim formados.*

Sobre o modo de desenvolver em série uma quantidade cujo valor não se póde calcular senão de um modo approximado, já se fallou no capitulo V onde foram estudadas as applicações da formula do binomio e o methodo dos coefficientes indeterminados: não nos occuparemos por isso senão do estudo da série segundo a sua natureza.

O caracter de *indefinido* que é inherente ás séries não permitte introduzil-as nos calculos como quantidade de valor exacto, deve-se por isso ter em vista, antes do seu emprego, o erro que se commetterá tomando um determinado numero de termos em uma série dada, de modo a certificar-se que esse erro ficará dentro de um limite tal, que o erro de que virá affecto o resultado final não exceda a uma quantidade préviamente determinada.

A somma algebrica de n termos de uma série, quando se suppõe n infinitamente grande, é o que se chama *somma* da série. Para calcular tão approximadamente quanto se queira a *somma* de uma série, quando esta *somma* não póde crescer indefinidamente, fornece a algebra recursos que adiante estudaremos.

As séries podem ser *convergentes*, *indeterminadas* e *divergentes*.

Uma série se diz convergente quando a somma de n *termos, a partir de um certo, podendo* n *ser tão grande quanto se queira, não póde exceder a um limite dado.*

Uma progressão por quociente cuja razão é menor do que a unidade é exemplo, facil de reconhecer, de uma série convergente.

Uma série é indeterminada quando, dando-se a n *valor indefinidamente crescente, a somma dos* n *termos varia entre limites fixos, tendendo ora para um ora para outro.*

A série

$$+1-1+1-1+1.....$$

está no caso das séries indeterminadas, pois é claro que, para n par, a somma dos n termos é igual a zero e que, sendo n impar a somma dos n termos é igual a 1.

Uma serie é divergente quando a somma dos n *termos cresce indefinidamente com* n.

Uma progressão por quociente cuja razão é maior do que a unidade é exemplo de uma série divergente.

As séries dividem-se ainda em dous *generos, ao primeiro genero pertencem as series que têm o mesmo signal em todos os termos; ao segundo as que têm seus termos com signaes alternados.*

Só as séries convergentes serão consideradas aqui, porque só ellas encontram applicação nos calculos, e notaremos que só ás séries convergentes e ás indeterminadas tem applicação as expressões *somma de uma série, limite de uma série,* pois em relação ás séries divergentes nenhuma applicação teriam taes expressões.

Propriedades das séries convergentes

203. Propriedade I. — *Em toda a série convergente o termo geral tem para limite zero.*

Seja u_n um termo de ordem n de uma série convergente, representemos por S_n a somma desses termos e por R_n o resto da série, isto é, a somma dos termos depois dos n primeiros, sendo S a somma da série, teremos

$$S_n + R_n = S$$

tomando em vez de n termos $n - 1$, teremos

$$S_{n-1} + R_{n-1} = S$$

Subtrahindo a segunda equação da primeira, membro a membro, teremos que, sendo $S_n - S_{n-1} = u_n$ virá

$$u_n + R_n - R_{n-1} = 0$$

Mas quando as sommas S_n e S_{n-1} approximam-se indefinidamente do limite S os respectivos restos, isto é, R_n e R_n , tendem para zero e, portanto, tambem u_n, podemos pois escrever

$$lim.\ u_n = 0$$

204. Propriedade II. — *A somma de um numero constante p qualquer, dos termos consecutivos de uma serie convergente tem para limite zero.*

Seja S_{n+p} a somma dos $n + p$ primeiros termos, o resto correspondente será R_{n+p}; poderemos escrever

$$S_n + R_n = S; \qquad S_{n+p} + R_{n+p} = S$$

Subtrahindo a primeira igualdade da segunda membro a membro e notando que $S_{n+p} - S_n$ = aos p termos que se seguem ao de ordem n, teremos

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots\ldots u_{n+p} + R_{n+p} - R_n = 0$$

Mas sendo os restos R_{n+p} e R_n nullos no limite, tambem o será a somma $u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots\ldots u_{n+p}$ temos pois

$$lim. \left(u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots\ldots u_{n+p}\right) = 0$$

205. Propriedade III. — *Uma série cujos termos são, em valor absoluto, respectivamente menores do que os termos de uma série convergente cujos termos todos têm o mesmo signal, é convergente.*

Seja S'_n a somma dos n primeiros termos da primeira série, que poderá ter os termos alternadamente positivos e negativos. Sejam a' e b' respectivamente a somma dos seus termos positivos e negativos; S_n a somma dos n primeiros termos da segunda série, a a somma dos termos correspondentes a a' e b a somma dos termos correspondentes a b': teremos

$$S_n = a + b \quad e \quad S'_n = a' - b'$$

Sendo *a* e *b* sommas positivas, que crescem com *n*, e tendendo cada uma para um limite, temos

$$lim.\ S = lim.\ a + lim.\ b$$

e portanto *a'* e *b'* que, sendo crescentes, conservam-se respectivamente menores do que *a* e *b*, tenderão tambem para limites determinados, e teremos pois

$$lim.\ S = lim.\ a' - lim.\ b',$$

isto é, a somma S'_n dos *n* primeiros termos da série em questão tende para um limite fixo, que é a differença entre os limites de *a'* e b'.

206. Propriedade IV. — *Em toda série convergente a somma de um numero qualquer* p *de termos, que se seguem ao de ordem* n, *tende para zero quando* n *cresce indefinidamente.*

Com effeito, seja a série convergente.

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots u_n + u_{n+1} + \ldots\ldots$$

Seja S_n a somma dos *n* primeiros termos e S_{n+p} a somma dos $n + p$ teremos

$$S_{n+p} - S_n = S_p$$

sendo S_p a somma dos *p* termos que se consideram em seguida ao da ordem *n*.

Mas, crescendo *n* indefinidamente, a somma dos termos que se lhe seguem tende constantemente para zero, isto é, S_p tende para zero, qualquer que seja o numero *p* de termos que se considerem.

Esta proposição tem sido geralmente enunciada de modo que a circumstancia de tender *p* para zero tem sido considerada como sufficiente para que a série que a satisfaz seja convergente, porém Catalan no seu *Traité des séries* demonstra a inexactidão desta parte da proposição; pelo que não a enunciamos senão em relação á primeira parte

Regras de convergencia

207. Regra I. — *Uma série em que, a partir de certa ordem, a relação de um termo para com o precedente tende para um limite menor do que 1, é convergente.*

Com effeito, $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ sendo uma funcção de n que tende para um limite l menor do que 1, quando se faz n crescer indefinidamente, e devendo, depois de certo ponto, variar sempre no mesmo sentido, é claro que se ella fôr decrescente acabará por ser menor do que qualquer numero α comprehendido entre 1 e l e, se fôr crescente, devendo ser sempre inferior a l o será com maior razão a α, tem-se pois sempre

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \alpha,\ \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} < \alpha,\ \frac{u_{n+3}}{u_{n+2}} < \alpha, \ldots\ldots \frac{u_{n+p}}{u_{n+p-1}} < \alpha \quad (1)$$

Multiplicando ambos os membros da primeira dessas desigualdades por u_n; multiplicando depois membro a membro a desigualdade resultante pela segunda, a nova que assim se fórma, pela terceira e assim por diante, achamos

$$u_{n+1} < \alpha\, u_n,\ u_{n+2} < \alpha^2\, u_n,\ u_{n+3} < \alpha^3 u_n, \ldots\ u_{n+p} < \alpha^p\, u_n,$$

como porém

$$\alpha u_n + \alpha^2\, u_n + \alpha^3\, u_n + \ldots + \alpha^p\, u_n$$

fórma uma progressão geometrica em que a razão α é menor do que 1, e como a série

$$u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \ldots .\ u_{n+p}$$

tem seus termos menores do que os correspondentes nessa progressão, será convergente, porque a progressão o é.

A série dada poderia ter os termos alternadamente positivos e negativos, mas isso não destróe a demonstração, que se funda na propriedade (III).

208. Observação. — As desigualdades (1) dão como vimos

$$u_{n+1} < \alpha u_n,\ u_{n+2} < \alpha^2 u_n,\ u_{n+3} < \alpha^3 u_n, \ldots\ u_{n+p} < \alpha^p u_n$$

sommando estas desigualdades membro a membro e ajuntando o termo u_n a ambos os membros da que resulta, acha-se

$$u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \ldots u_{n+p} < u_n \times$$
$$\times (1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \ldots + \alpha^p);$$

o segundo membro contém dentro do parenthesis uma progressão geometrica cuja somma é $\frac{1}{1-\alpha}$, e por isso tem-se

$$u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p} < \frac{1}{1-\alpha} u_n$$

Podendo-se tomar o termo u_n tão afastado quanto se queira, se o poderá fazer menor do que qualquer quantidade dada e, portanto, tambem o seu producto por $\frac{1}{1-\alpha}$: donde se conclue que a quantidade $\frac{1}{1-\alpha} u_n$ representará o erro que se commette tomando para *somma da série* a somma dos n primeiros termos.

209. Regra II. — *Uma série de termos positivos é convergente ou divergente segundo* $\sqrt[n]{u_n}$ *tende para um limite* l *inferior ou superior á unidade.*

Sendo l inferior a 1 póde-se admittir $\sqrt[n]{u_n}$ sempre inferior a um numero dado α, comprehendido entre 1 e l e assim teremos

$$\sqrt[n]{u_n} < \alpha,\ \sqrt[n+1]{u_{n+1}} < \alpha, \ldots\ \sqrt[n+p]{u_{n+p}} < \alpha$$

ou

$$u_n < \alpha^n, \quad u_{n+1} < \alpha^{n+1}, \quad u_{n+2} < \alpha^{n+2}, \ldots,$$
$$u_{n+p} < \alpha^{n+p}$$

sommando estas desigualdades membro a membro vem

$$u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p} < \alpha^n + \alpha^{n+1} + \alpha^{n+2} +$$
$$+ \ldots + \alpha^{n+p}$$

e como o segundo membro desta desigualdade é uma progressão geometrica cuja razão é menor do que 1 e que, portanto, tem um limite, conclue-se que o primeiro membro, que lhe é constantemente inferior, tambem o terá, isto é, a série dada é convergente.

Se lim. $\sqrt[n]{u_n} > 1$ a quantidade α seria tambem maior do que 1 e, portanto, a somma dos termos da progressão

$$\alpha^n + \alpha^{n+1} + \alpha^{n+2} + \ldots + \alpha^{n+p}$$

seria limitada, e como $\sqrt[n]{u_n}$ é uma funcção de n que tem o limite l maior do que 1 é claro que se a póde considerar sempre maior do que o numero α comprehendido entre em 1 e l e assim ter-se-hia

$$\sqrt[n]{u_n} > \alpha, \sqrt[n+1]{u_{n+1}} > \alpha, \ldots, \sqrt[n+p]{u_{n+p}} > \alpha$$

ou

$$u_n > \alpha^n, \; u_{n+1} > \alpha^{n+1}, \ldots, \; u_{n+p} > \alpha^{n+p}$$

e portanto a série dada teria os seus termos sempre maiores do que os correspondentes de uma progressão crescente e seria por isso divergente.

Damos em seguida algumas applicações dos principios precedentes.

210. 1.º *A série exponencial*

$$1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\ldots+\frac{x^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}+\ldots$$

será convergente para qualquer valor de x

Com effeito, façamos o termo de ordem n, $\dfrac{x^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}=u_n$

o seguinte seria u_{n+1} e como tem-se evidentemente

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{x}{n}$$

teremos no limite, isto é, quando se suppõe n infinitamente grande,

$$\lim\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\frac{x}{n}=0$$

Esta serie resulta do desenvolvimento de e^x

211. 2.º *A série logarithmica*

$$\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots\ldots\frac{x^n}{n}+\ldots\ldots$$

é convergente para todo valor de x *comprehendido entre* $+1$ *e* -1.

Com effeito, tem-se

$$\sqrt[n]{\frac{x^n}{n}}=\frac{x}{\sqrt[n]{n}}$$

e, como $\sqrt[n]{n}$ tende para 1 quando n cresce indefinidamente, teremos

$$\lim \sqrt[n]{\frac{x^n}{n}} = \lim \frac{x}{\sqrt[n]{n}} = x$$

isto é o limite de $\sqrt[n]{u_n}$ é inferior, em valor absoluto, a 1 porque suppuzemos x comprehendido entre $+1$ e -1.

Da mesma sorte reconheceriamos que o desenvolvimento do binomio $(1-x)^m$ seria uma serie convergente em quanto x fosse comprehendido entre $+1$ e -1.

212. Regra III. *Se em uma série de termos positivos e negativos, em ordem qualquer, se mudam os signaes dos termos negativos e disso resulta uma serie convergente a primeira tambem o será.*

Com effeito, seja a série cujos termos tem signaes quaesquer

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots\ldots u_n \ldots\ldots \qquad \text{(I)}$$

e seja

$$u'_1 + u'_2 + u'_3 + \ldots\ldots\ldots u'_n \ldots\ldots \qquad \text{(II)}$$

a série que se obtem depois de mudados os signaes negativos em positivos. Na série (II), que é convergente, temos

$$\lim R'_n = 0$$

Porém na série (I) o resto R_n podendo conter termos positivos e negativos não póde exceder a R'_n que só os contêm positivos e iguaes em valor absoluto aos de R_n: ora se tem-se $\lim R'_n = 0$ tem-se tambem $\lim R_n = 0$.

213. Regra IV. *Uma série de termos alternadamente positivos e negativos é convergente se seus termos acabam por decrescer indefinidamente.*

Esta condição evidentemente necessaria segundo a propriedade (III) é, como vamos vêr, sufficiente.

Seja a série

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots\ldots - u_n + u_{n+1} - u_{n+2} + \ldots\ldots - u_{n+p}:$$

sejam $S_n, S_{n+1}, S_{n+2}, \ldots\ldots S_{n+p}$ as sommas dos n, $n+1$

$n+2$, ... $n+p$ primeiros termos : teremos

$$S_{n+1} = S_n + u_{n+1}\ ;\ \ S_{n+2} = S_{n+1} - u_{n+2};$$

$$S_{n+3} = S_{n+1} - (u_{n+2} - u_{n+3});$$

$$S_{n+4} = S_{n+1} - (u_{n+2} - u_{n+3} + u_{n+4})$$

Utilisando convenientemente estas igualdades e notando que consideramos n par, acharemos as desigualdades

$$S_n < S_{n+2} < S_{n+1}\ ;\ \ S_n < S_{n+3} < S_{n+1};$$

$$S_n < S_{n+4} < S_{n+1} \ldots\ldots\ldots\ \ S_n < S_{n+p} < S_{n+1} \ldots\ldots$$

Se em vez de partir do termo de ordem n, partissemos do de ordem $n+1$ demonstrariamos do mesmo modo que, qualquer que fôsse p, teriamos sempre S_{n+p} comprehendido entre S_{n+1} e S_{n+2} e portanto entre S_{n+3} e S_{n+4} etc.... Isto dá-se qualquer que seja p e, como as differenças entre as differentes sommas consecutivas

$$S_n,\ S_{n+1},\ S_{n+2} \ldots\ S_{n+p}$$

tendem para zéro quando n cresce indefinidamente, por decrescerem indefinidamente os termos da serie quando n cresce do mesmo modo, é claro que a serie tem um limite.

Séries recurrentes

214. Nos ns. 177 e 178 vimos como se poderia obter a *somma* ou antes o *limite da somma* de um numero indefinidamente crescente de termos da progressão por quociente, de numero illimitado de termo quando a razão é inferior á unidade : assim, a progressão

$$a + ra + r^2a + r^3a + ..$$

tem sua somma S, no limite, igual a $\frac{a}{1-r}$.

Se á expressão $\frac{a}{1-r}$ applicarmos um dos processos proprios desenvolvel-a em série, obteremos em resultado a progressão acima, que é uma *série recurrente* em que cada termo fórma-se sempre do precedente multiplicado pela mesma quantidade r.

Vamos porém dar maior generalidade á definição de *série recurrente*. Seja a série

$$A + A_1x + A_2x^2 + ... A_{n-3}x^{n-3} + A_{n-2}x^{n-2} + A_{n-1}x^{n-1} + A_nx^n + ...,$$

se podermos formar a equação.

$$A_n + a_1A_{n-1} + a_2A_{n-2} + ... a_{k-1}A_{n-k+1} + a_kA_{n-k} = 0 \qquad (I)$$

em que a_1, a_2, $a_3 .....a_k$ representam quantidades constantes e em numero qualquer k, diremos que a série dada é *recurrente*.

Poderemos pois enunciar assim a definição que acabamos de constituir : *Série recurrente é aquella em que um termo qualquer, a partir de uma certa ordem, forma-se do precedente multiplicado sempre pela mesma quantidade ou da somma de alguns dos precedentes multiplicados respectivamente por quantidades sempre as mesmas, a_1, a_2..... em numero igual ao dos termos a sommar.*

A equação (I) constitue a *escala de relação* da série.

As séries recurrentes classificam-se por ordem segundo se tem $k = 1$, $k = 2$, $k = 3$....., isto é, segundo o numero das quantidades a_1, a_2, a_3 ....., chamando-se respectivamente da *primeira* de *segunda* da *terceira... ordem.*

215. O desenvolvimento de uma fracção simples $\frac{a}{a' + b'x}$ dá sempre nascimento a uma *série recurrente da primeira ordem*, isto é, a uma progressão por quociente, com effeito pode-se escrever sempre

$$\frac{a}{a + b'x} = a\left(a' + b'x\right)^{-1}$$

e desenvolver o segundo membro pela fórmula do binomio, verificando assim a proposição; ou ainda, applicar o methodo dos *coefficientes a determinar*, como se segue.

Faça-se.

$$\frac{a}{a' + b'x} = A + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \dots + A_nx^n + \dots$$

expellindo o denominador tem-se, reunindo todos os termos em um só membro.

$$\left.\begin{array}{l|l|l|l|l|}
a'A & x^0 + a'A_1 & x^1 + a'A_2 & x^2 + a'A_3 & x^3 + \dots + a'A_nx^n \\
-a & + b'A_2 & + b'A_1 & + b'A_2 & + b'A_{n-1}
\end{array}\right\} = 0 :$$

equação esta que deverá subsistir para qualquer valor de x, pelo que todos os coefficientes de x deverão ser iguaes a zéro, e, assim, tem-se

$$\begin{array}{lll}
a'A - a = 0 & \text{donde} & A = \dfrac{a}{a'} \\[2ex]
a'A_1 + b'A = 0 & \text{»} & A_1 = -\dfrac{b'}{a'}A \\[2ex]
a'A_2 + b'A_1 = 0 & \text{»} & A_2 = -\dfrac{b'}{a'}A_1 \\[2ex]
a'A_3 + b'A_2 = 0 & \text{»} & A_3 = -\dfrac{b'}{a'}A_2 \\
\dots\dots\dots\dots & & \dots\dots\dots\dots \\
\dots\dots\dots\dots & & \dots\dots\dots\dots \\
a'A_n + b'A_{n-1} = 0 & & A_n = -\dfrac{b'}{a'}A_{n-1}
\end{array}$$

e a serie

$$A + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots\ldots + A_n x^n + \ldots\ldots$$

se tornaria

$$\frac{a'}{b'} - \frac{a'}{b'} Ax - \frac{a'}{b'} A_1 x^2 - \frac{a'}{b'} A_2 x^3 + \ldots\ldots - \frac{a'}{b'} A_{n-1} x^n + \ldots$$

na qual cada termo forma-se do precedente multiplicado por $-\frac{a'}{b'}x$, isto é, o coefficiente de cada termo forma-se do precedente multiplicado sempre por $-\frac{a'}{b'}$.

216. Theorema. — *Toda a fracção racional pode ser transformada em uma serie recurrente.*

Com effeito, toda a fracção racional póde ser transformada em uma somma de fracções simples, e como estas podem ser, cada uma por sua vez, desenvolvidas em serie, a somma das series a que ellas dão nascimento constituirá uma serie total que, como as parciaes, será recurrente. (Vide a nota abaixo sobre a decomposição das fracções (1).

---

(1) Quando se tem uma fracção racional em que o gráo do numerador é maior do que o do denominador, póde-se sempre decompôl-a, praticando a divisão depois de ordenados os dous termos segundo as potencias crescentes de x, em um certo polynomio inteiro em x e uma fracção, cujo denominador é de gráo superior ao numerador. O que vamos dizer acerca da decomposição das fracções racionaes só é applicavel ao caso de ter o numerador gráo inferior ao denominador.

Seja a fracção racional, nas condições propostas,

$$\frac{a + bx + cx^2 \ldots kx^n}{a' + b'x + c'x^2 \ldots k'x^m}$$

que se quer decompôr em fracções simples; preparemol-a de modo que o termo x^m do denominador tenha para coefficiente a unidade, basta para isso fazer

$$\frac{a}{k'} = \alpha,\ \frac{b}{k'} = \beta,\ \frac{c}{k'} = \gamma, \ldots\ldots \frac{k}{k'} = \lambda;\ \frac{a'}{k'} = \alpha',\ \frac{b'}{k'} = \beta',\ \frac{c'}{k'} = \gamma', \ldots$$

e praticar a substituição dos novos valores em lugar dos primeiros, Vimos já que a fracção simples $\dfrac{a}{a' + b'u}$ dava nascimento a uma *série recurrente da primeira ordem* e como tendo-se uma fracção racional qualquer

$$\frac{a + bx + cx^2 + \ldots\ldots\ px^{m-1}}{a' + b'x + c'x^2 + \ldots\ldots\ qx^m}$$

se a póde transformar em uma somma de fracções simples em numero igual a m, podendo cada uma dellas dar nascimento a uma série da primeira ordem, é claro que a fracção considerada poderá ser trans-

---

effectuando as transformações convenientes: obtem-se assim a fracção

$$\frac{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \ldots + \lambda x^n}{\alpha' + \beta' x + \lambda' x^2 + \ldots + x^m} \tag{1}$$

Façamos o denominador

$$\alpha' + \beta' x + \lambda' x^2 + \ldots + x^m = 0 \tag{II}$$

e representemos por p, q, r.... as m raizes desta equação; poderemos escrever a igualdade

$$\frac{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \ldots + \lambda x^n}{\alpha' + \beta' x + \gamma' x^2 + \ldots + x^m} = \frac{A}{x-p} + \frac{A'}{x-q} + \frac{A''}{x-r} + \ldots \tag{III}$$

na qual $(x-p)$, $(x-q)$, $(x-r)$,..... são os factores em què se póde decompôr o primeiro membro da equação (II) e A, A', A''..... são quantidades a determinar e que são funcções das quantidades $\alpha, \beta, \ldots$ $\alpha', \beta' \ldots$ p, q, r.

Isto feito, para simplificar escreveremos a fracção (I) assim $\dfrac{f(x)}{F(x)}$ e como se tem

$$F(x) = (x-p)(x-q)(x-r)\ldots\ldots$$

poderemos pôr

$$f(x) = \frac{A(x-p)(x-q)(x-r)\ldots}{x-p} + \frac{A'(x-p)(x-q)(x-r)\ldots}{x-q} +$$

formada em uma série da ordem m, formada pela somma das séries provenientes das m fracções simples : fica pois estabelecido, que a ordem da série recurrente é igual ao maior expoente do denominador da fracção geratriz. Sendo m o numero de séries parciaes formadas, e o primeiro termo de cada uma sendo independente da lei de formação, haverão m termos da série total, a partir do primeiro inclusive, que não serão sujeitos á lei de formação, que, portanto, só se manifestará do termo de ordem $m+1$, inclusive, por diante.

Proponhamos-nos, por exemplo a desenvolver a fracção

$$\frac{a+bx+cx^2}{a'+b'x+c'x^2+d'x^3}$$

e façamos

$$\frac{a+bx+cx^2}{a'+b'x+c'x^2+d'x^3}=A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4\ldots\ldots$$

$$+\frac{A''(x-p)(x-q)(x-r)\ldots}{x-r}+\ldots\ldots$$

ou

$$f(x)=A(x-q)(x-r)\ldots+A'(x-p)(x-r)\ldots+A''(x-p)(x-q)\ldots$$

Fazendo nesta equação successivamente

$$x=p,\ x=q,\ x=r\ldots\ldots$$

ter-se-hia

$$f(p)=A(p-q)(p-r)\ldots;\ f(q)=A'(q-p)(q-r)\ldots;\ f(r)=A''(r-p)(r-q)\ldots$$

ou

$$A=\frac{f(p)}{(p-q)(p-r)};\quad A'=\frac{f(q)}{(q-p)(q-r)};\quad A''=\frac{f(r)}{(r-p)(r-q)\ldots}\ldots\ldots$$

Terminando esta nota que, excedendo aos limites deste trabalho, aqui inserimos unicamente para de algum modo justificar a proposição que a determinou, observaremos que o methodo de decomposição empregado aqui só tem inteira e demonstrada applicação quando as raizes $p,\ q,\ r\ldots\ldots$ são desiguaes e commensuraveis. Não indicamos aqui o modo de attender ao caso de haverem raizes iguaes porque excede, como já dissemos, os limites deste trabalho e pouco adiantaria para o que nos resta dizer sobre as séries recurrentes.

Expellindo o denominador, reunindo todos os termos em um membro e ordenando-o em relação ás potencias crescentes de x, vem

$$\left.\begin{array}{r|r|r|r|r|r}
a'A & x^0 + a'B & x + a'C & x^2 + a'D & x^3 + a'E & x^4 + \text{etc.} \\
-A & +b'A & +b'B & +b'C & +b'D & + \text{etc.} \\
 & -b & +c'A & +c'B & +c'C & + \text{etc.} \\
 & & -c & +d'A & +d'B & + \text{etc.}
\end{array}\right\} = 0$$

Como esta equação deve verificar-se para qualquer valor de x é necessario que se tenha

$$\left.\begin{array}{r}
a'A - a = 0 \\
a'B + b'A - b = 0 \\
a'C + b'B + c'A - c = 0 \\
a'D + b'C + c'B + d'A = 0 \\
a'E + b'D + c'C + d'B = 0
\end{array}\right\} \text{donde} \left\{\begin{array}{l}
A = \dfrac{a}{a'} \\
B = \dfrac{b - b'A}{a'} \\
C = \dfrac{c - b'B - c'A}{a'} \\
D = \dfrac{-b'C - c'B - d'A}{a'} \\
E = \dfrac{-b'B - c'C - d'B}{a'}
\end{array}\right.$$

Teriamos pois

$$\frac{a + bx + cx^2}{a' + b'x + c'x^2 + d'x^3} = \frac{a}{a'} + \frac{b - b'A}{a'}x + \frac{c - b'B - c'A}{a'}x^2 +$$

$$+ \frac{-d'A - c'B - b'C}{a'}x^3 + \frac{-d'B - c'C - b'D}{a'}x^4 + \ldots\ldots$$

o segundo membro desta igualdade é uma série em que, a partir do quarto inclusive, cada termo fórma-se da somma algebrica dos productos que se obtem multiplicando os tres termos que o precedem, respectivamente por $-\frac{d'}{a'}x^3$, $-\frac{c'}{a'}x^2$, $-\frac{b'}{a'}x$. Assim, a escala da relação de tal série será constituida pelas tres quantidades constantes

$$-\frac{d'}{a'} \quad -\frac{c'}{a'} \quad -\frac{b'}{a'}.$$

217. Agora que temos definido o que é uma série recurrente e dado idéa do modo por que ellas se originam, resta-nos estudar os meios de introduzir o seu uso nas applicações a que ellas se prestam, como auxiliar, na analyse mathematica.

Tres questões teremos para isso a resolver, a saber :

1.° *Determinar o termo geral de uma série recurrente dada, de modo a poder determinar um qualquer de seus termos sem ser necessario determinar todos os que o precedem.*

2.° *Determinar a somma de um dado numero de termos da serie.*

3.° *Determinar o limite* S_n *da somma de um numero* n *illimitado de termos.*

Termo geral. — Para bem comprehendermos a marcha a seguir para determinar o termo geral de uma série recurrente principiemos pela serie que se origina do desenvolvimento da fracção racional simples

$$\frac{a}{a' + b'x}$$

e que é uma progressão por quociente cuja razão é $-\frac{b'}{a'}x$ e cujo primeiro termo é $\frac{a}{a'}$: nesta série um termo de ordem qualquer n tem por expressão

$$\frac{a}{a'}\left(-\frac{b'}{a'}x\right)^{n-1} = \pm\frac{ab'^{n-1}}{a'^n}x^{n-1}$$

correspondendo o signal superior ao caso de n ser impar e o inferior ao caso de n par.

218. Recordando agora que uma fracção racional qualquer dá nascimento a uma série recurrente, que é a somma, termo a termo, das séries que resultariam das fracções simples em que se póde decompor a fracção primitiva, comprehendemos facilmente que o termo geral da série que resultar desta fracção, será a somma dos termos geraes das series produzidas pelas fracções simples : assim, a fracção

$$\frac{a + bx}{a' + b'x + c'x^2}$$

já vimos que póde ser transformada em

$$\frac{\alpha + \beta x}{\alpha + \beta' x + x^2}$$

e decomposta em duas fracções simples, dando

$$\frac{\alpha + \beta x}{\alpha' + \beta' x + x^2} = \frac{A}{p - x} + \frac{B}{q - x}$$

sendo A e B quantidades que se podem determinar em funcção $\alpha, \beta, \alpha' \beta'$; e p e q raizes da equação

$$\alpha' + \beta' x + x^2 = 0;$$

sendo pois A e B constantes, as duas fracções acima darão, cada uma, lugar a uma série recurrente de primeira ordem cujos termos geraes serão respectivamente

$$\frac{Ax^{n-1}}{p^n} \quad \text{e} \quad \frac{Bx^{n-1}}{q^n}$$

e o termo geral da série que resulta do desenvolvimento da fracção primitiva será, segundo o que dissemos

$$\frac{Ax^{n-1}}{p^n} + \frac{Bz^{n-1}}{p^n} = \left(\frac{A}{p^n} + \frac{B}{q^n}\right)x^{n-1}$$

219. Occore agora considerar o caso em que as raizes $p, q, r...$ não são todas desiguaes, pois neste caso a decomposição da fracção dada em fracções simples não poderia ter lugar do modo porque temos procedido, porquanto se se tem $p = q$ a decomposição da fracção de que tratamos acima daria

$$A \frac{\alpha + \beta p}{0} \text{ e } B = \frac{\alpha + \beta q}{0};$$

mas, se $p = q$ póde-se escrever a fracção dada sob a fórma

$$\frac{\alpha + \beta x}{(x - p)^2}$$

e decompôl-a em

$$\frac{\alpha}{(x-p)^2} \text{ e } \frac{\beta x}{(x-p)^2}$$

podendo a ultima destas fracções escrever-se

$$\frac{\beta}{(x-p)} \times \frac{x}{(x-p)}$$

ou

$$\frac{\beta}{x-p}\left(1 + \frac{p}{(x-p)}\right)$$

e, portanto,

$$\frac{\alpha + \beta x}{(x-p)^2} = \frac{\alpha}{(x-p)^2} + \frac{\beta}{x-p} + \frac{\beta p}{(x-p)^2} =$$

$$= \frac{\alpha + \beta p}{(x-p)^2} - \frac{\beta}{p-x}$$

Fracções estas ultimas, cujos numeradores são independentes de x

O desenvolvimento da fracçao $\frac{\alpha + \beta p}{(x-p)^2}$ ou antes $\frac{\alpha + \beta p}{(p-x)^2}$ seria

$$(\alpha + \beta p)(p - x)^{-2} = (\alpha + \beta p)\left(\frac{1}{p^2} + 2\frac{x}{p^3} + 3\frac{x^2}{p^4} + 4\frac{x^3}{p^5} + 5\frac{x^4}{p^6} + \ldots\right)$$

ou

$$(\alpha + \beta p)(p - x)^{-2} = \frac{\alpha + \beta p}{p^2}\left(1 + 2\frac{x}{p} + 3\frac{x^2}{p^2} + 4\frac{x^3}{p^3} + 5\frac{x^4}{p^4} + \ldots\right)$$

O factor entre parenthesis é uma serie, cujo termo geral ou de ordem qualquer n, é representado pela expressão $\frac{n\,x^{n-1}}{p^{n-1}}$, e portanto o termo geral da serie toda será

$$\frac{\alpha + \beta p}{p^2} \quad \frac{n\,x^{n-1}}{p^{n-1}}$$

O desenvolvimento da segunda fracção, isto é, de $\frac{\beta}{p-x}$ será

$$\frac{\beta}{p-v} = \beta\left(\frac{1}{p} + \frac{x}{p^2} + \frac{x^2}{p^3} + \frac{x^4}{p^5} + \ldots..\right)$$

cujo termo geral será $\frac{\beta x^{n-1}}{p^n}$ e, como se tem

$$\frac{\alpha + \beta x}{(x-p)^2} = \frac{\alpha + \beta p}{(p-x')^2} - \frac{\beta}{p-x'}$$

é claro que a differença das series obtidas, desenvolvendo as duas fracções que se acham no segundo membro, representará o desenvolvimento do primeiro, e, portanto, a differença entre os termos geraes das mesmas duas series será o termo geral do desenvolvimento da fracção que se acha no primeiro membro, isto é, no caso de se ter $p = q$ a fracção

$$\frac{\alpha + \beta x}{\alpha' + \beta' x + x^2}$$

daria lugar a uma serie recurrente, cujo termo geral seria

$$\frac{\alpha + \beta p}{p^2} \cdot \frac{n\, x^{n-1}}{p^{n-1}} - \frac{\beta\, x^{n-1}}{p^n} = \left[\frac{n\,\alpha + (n-1)\,\beta\, p}{p^2}\right]\frac{x^{n-1}}{p^{n-1}}$$

Vê-se, pois, que no caso de conter raizes iguaes a equação que se fórma igualando a zero o denominador da fracção dada a decomposição dessa fracção não poderá fornecer sempre fracções simples da fórma $\frac{A}{x-p}$, mas dará como vimos acima expressões taes como $\frac{A}{(x-p)^m}$; o que não é entretanto obstaculo á applicação do processo seguido para determinar o termo geral no caso de serem todas as raizes desiguaes, pois as expressões de tal forma podem-se facilmente desenvolver pela formula do binomio e determinar o termo geral do desenvolvimento.

220. Não tendo sido feita a hypothese particular de haverem raizes imaginarias póde parecer á primeira vista que o processo empregado venha em tal caso a produzir expressões de forma imaginaria; porém é facil, fazendo a hypothese, verificar que os imaginarios se reduzem completamente em consequencia das transformações porque passa a expressão do termo geral.

Somma de um numero determinado de termos de uma serie recurrente.

Seja a serie recurrente da terceira ordem

$$A_1 + A_2 + A_3 + ,,\ldots\ldots A_{n-3} + A_{n-2} + A_{n-1} + A_n$$

Como vimos, pelo theorema com que encetamos o estudo das series recurrentes, a serie de que se trata dará lugar ás seguintes equações

$$\left.\begin{array}{l} a\,A_1 + a'\,A_2 + a''\,A_3 + A_4 = 0 \\ a\,A_2 + a'\,A_3 + a''\,A_4 + A_5 = 0 \\ a\,A_3 + a'\,A_4 + a''\,A_5 + A_6 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a\,A_{n-3} + a'A_{n-2} + a''A_{n-1} + A_n = 0 \end{array}\right\} \quad (*)$$

Designemos por S_n a somma do numero n, determinado, de termos desta serie e sommemos membro a membro as equações precedentes, virá

$$a(A_1 + A_2 + A_3 + \dots A_{n-3}) + a'(A_2 + A_3 + A_4 + \dots A_{n-2}) +$$
$$+ a''(A_3 + A_4 + A_5 + \dots A_{n-1}) + (A_4 + A_5 + A_6 + A_n)$$

e, portanto, substituindo S_n em lugar da somma dos n termos,

$$a(S_n - A_{n-2} - A_{n-1} - A_n) + a'(S_n - A_1 - \tilde{A}_{n-1} - A_n) +$$
$$+ a''(S_n - A_1 - A_2 - A_n) + S_n - A_{1} - A_2 - A_3$$

donde

$$S_n = \frac{a(A_{n-2}+A_{n-1}+A_n)+a'(A_1+A_{n-1}+A_n)+a''(A_1+A_2+A_n)A_1+A_2+A_3}{a + a' + a'' + 1}$$

Vendo assim S_n; expresso em funcção unicamente dos tres primeiros termos da série, dos tres ultimos e das quantidades que formam a escala de relação.

Da marcha seguida no caso presente se conclue, por simples inducção que para uma série de ordem m entrarão na somma de um numero limitado de termos, os m primeiros e os m ultimos.

221. *Somma total ou limite de uma serie recurrente.* — Se applicando o methodo precedente considerarmos que as equações (*) sejam em numero illimitado, poderemos determinar o *limite de uma série* de qualquer ordem ou a respectiva *fracção geratriz.*

Com effeito, seja que, como antes, se tenha uma serie recurrente de terceira ordem, cuja fracção geratriz se quer conhecer: teremos as equações seguintes em numero illimitado

$$a A_1 + a' A_2 + a'' A_3 + A_4 = 0$$
$$a A_2 + a' A_3 + a'' A_4 + A_5 = 0$$
$$a A_3 + a' A_4 + a'' A_5 + A_6 = 0$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Sommando membro a membro estas equações obtem-se

$$a(A_1 + A_2 + A_3 + \dots) + a'(A_2 + A_3 + A_4 + \dots) +$$
$$+ a''(A_3 + A_4 + A_5 + \dots) + (A_4 + A_5 + A_6 + \dots) = 0$$

Designando por S a *somma total* ou *limite* da serie em questão e substituindo S na ultima equação em lugar das quantidades que se acham dentro dos parenthesis, vem

$$aS + a'(S - A_1) + a''(S - A_1 - A_2) + S - A_1 - A_2 - A_3 = 0$$

ou

$$S(a + a' + a'' + 1) - a'A_1 - a''(A_1 + A_2) - (A_1 + A_2 + A_3)$$

ou ainda, tirando o valor de S,

$$S = \frac{a'A_1 + a''(A_1 + A_2) + (A_1 + A_2 + A_3)}{a + a' + a'' + 1}$$

O segundo membro desta igualdade constitue a fracção geratriz da serie dada.

O mesmo methodo applicado á serie de primeira ordem daria

$$S = \frac{A_1}{a + 1};$$

á de segunda ordem

$$S = \frac{a'A_1 + (A_1 + A_2)}{a + a' + 1};$$

á de terceira

$$S = \frac{a'A_1 + a''(A_1 + A_2) + (A_1 + A_2 + A_3)}{a + a' + a'' + 1}$$

á de quarta

$$S = \frac{a'A_1 + a''(A_1 + A_2) + a'''(A_1 + A_2 + A_3) - (A_1 + A_2 + A_3 + A_4)}{a + a' + a'' + a''' + 1}$$

de onde se poderá facilmente concluir a lei para uma serie de ordem qualquer m.

222. Vamos agora ver como se poderá reconhecer se uma serie dada recurrente, para isso principiemos por demonstrar o seguinte.

Theorema. — *Toda a serie recurrente convergente da fórma.*

$$A + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots\ldots A_{n-1} x^{n-1} + A_n x^n + \ldots\ldots$$

provem do desenvolvimento de uma fracção racional, que é seu limite e é da forma

$$\frac{S_k + S_{k-1} \alpha_1 x + S_{k-2} \alpha_2 x^2 + \ldots\ldots S_1 \alpha_{k-1} x^{k-1}}{1 + \alpha_1 x + \ldots . \alpha_k x^k},$$

na qual k representa o numero de quantidades $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, etc., que constituem a escala de relação da serie e S_k a somma dos k primeiros termos.

Com effeito, vimos quando definimos uma serie recurrente, que ella dava sempre lugar á equação

$$A_n + \alpha_1 A_{n-1} + \alpha_2 A_{n-2} + \alpha_3 A_{n-3} + \ldots . \alpha_k A_{n-k} = 0,$$

qualquer que fosse n; assim, pois, fazendo successivamente

$$n = k,\ n = k + 1,\ n = k + 2, \ldots .\ n = k + l$$

formaremos as equações

$$\left.\begin{array}{r}
A_k x^k + A_{k-1} x^{k-1} \alpha_1 x + A_{k-2} x^{k-2} \alpha_2 x^2 + \ldots . A . \alpha_k x^k = 0 \\
A_{k+1} x^{k+1} + A_k x^k \alpha_1 x + A_{k-1} x^{k-1} \alpha_2 x^2 + \ldots . A_1 x . \alpha_k x^k = 0 \\
A_{k+2} x^{k+2} + A_{k+1} x^{k+1} \alpha_1 x + A_k x^k \alpha_2 x^2 + \ldots . A_2 x^2 . \alpha_k x^k = 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
A_{k+l} x^{k+l} A_{k+l-1} x^{k+l-1} . \alpha_1 x + A_{k+l-2} x^{k+l-2} \alpha_2 x^2 + \ldots A_l x^l . \alpha_k x^k = 0
\end{array}\right\} (B)$$

e como se tem tambem, pela mesma definição,

$$S_k + S_{k-1} \alpha_1 x + S_{k-2} \alpha_2 x^2 + \ldots . S_1 . \alpha_{k-1} x^{k-1} = 0,$$

temos que, sommando membro a membro as igualdades (B), e subtrahindo da resultante a igualdade C, e grupando os termos semelhantes, vem

$$(S_{k+l+1} - S_k) + (S_{k+1} - S_{k-1})\alpha_1 x + (S_{k+l-1} - S_{k-2})\alpha_2 x^2 + \ldots\ldots$$
$$+ (S_{k-l-(k-2)} S_1)\alpha_{k-1}{}^{k-1} + S_{l+1} \cdot \alpha_k x^k = 0$$

porém $S_{k+l+1}, S_{k+1}, S_{k+l-1}, \ldots S_{l+1}$ têm o mesmo limite S e, portanto, pondo S em lugar destas quantidades na ultima equação e tirando seu valor, vírá

$$S = \frac{S_k + S_{k-1} \cdot \alpha_1 x + S_{k-2} \cdot \alpha_2 x^2 + \ldots . S_1 \alpha_{k-1} x^{k-1}}{1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots . \alpha x^k}$$

223. O methodo que se segue, para verificar se uma serie é recurrente, é devido a Lagrange.

Sendo dada uma serie S, se ella fôr recurrente de primeira ordem, terá provindo de fracção racional da fórma $\dfrac{a}{a' + b'x}$ e então teremos

$$S = \frac{a}{a' + b'x}$$

ou

$$\frac{1}{S} = \frac{a' + b'x}{a} = \frac{a'}{a} + \frac{b'}{a} x = p + qx,$$

isto é, a unidade dividida pela serie dada dará lugar a um quociente composto de dous termos e que é uma funcção inteira de x da fórma $p + qx$.

Si a serie S fosse de segunda ordem, teria provindo de fracção racional da fórma $\dfrac{a + bx}{a' + b'x + c'x^2}$ e teriamos

$$\frac{1}{S} = \frac{a' + b'x + c'x^2}{a + bx} = \frac{a'}{a} + \frac{ab' - ba'}{a^2} x + \frac{a^2 c' - b(ab' - ba')}{a^2(a + bx)} x^2 =$$
$$= p + qx + \frac{A}{a + bx} x^2$$

e substituinda-o na que a procede para conhecer S_{n-2}, e assim por diante, chegariamos á expressão de S, que teria a forma de uma fracção racional.

Applicações

225. 1.ª — Seja a serie

$$S = 2 + 4x + 8x^2 + 16x^3 + \ldots\ldots$$

Façamos a divisão da unidade por esta serie

$$\begin{array}{r|l}
 & 2 + 4x + 8x^2 + 16x^3 + \ldots\ldots \\ \hline
 & \dfrac{1}{2} - x \\ \hline
\multicolumn{2}{l}{-1 - 2x - 4x^2 - 8x^3 - 16x^4 - \ldots\ldots\ldots} \\
\multicolumn{2}{l}{\quad\ + 2x + 4x^2 + 8x^3 + 16x^4 + \ldots\ldots\ldots} \\ \hline
\multicolumn{2}{l}{\quad\ + 0 + 0 + 0 + 0}
\end{array}$$

assim temos $p = \dfrac{1}{2}$, $q = -1$, donde $\dfrac{1}{S} = \dfrac{1}{2} - x$ e, tirando o valor de S, vem

$$S = \frac{2}{1 - 2x}$$

isto é, a serie dada é proveniente da fracção racional simples $\dfrac{2}{1 - 2x}$

226. 2.ª — Seja a serie

$$1,\ 3,\ 7,\ 18,\ 47,\ 123,\ 322,\ 843,\ 2207,\ 5778 \ldots\ldots$$

que poderemos escrever, sendo

$$S = 1 + x + 3x^2 + 7x^3 + 18x^4 + 47x^5 + 123x^6 + 322x^7 + 843x^8 +$$
$$+ 2207x^9 + 5778x^{10} + \ldots$$

e substituinda-o na que a procede para conhecer S_{n-2}, e assim por diante, chegariamos á expressão de S, que teria a fórma de uma fracção racional.

Applicações

225. 1.ª — Seja a serie

$$S = 2 + 4x + 8x^2 + 16x^3 + \dots\dots$$

Façamos a divisão da unidade por esta serie

$$\begin{array}{l|l} & 2 + 4x + 8x^2 + 16x^3 + \dots\dots \\ \hline & \frac{1}{2} - x \\ \hline -1 - 2x - 4x^2 - 8x^3 - 16x^4 - \dots\dots & \\ \quad + 2x + 4x^2 + 8x^3 + 16x^4 + \dots\dots & \\ \hline \quad + 0 + 0 + 0 + 0 & \end{array}$$

assim temos $p = \frac{1}{2}$, $q = -1$, donde $\frac{1}{S} = \frac{1}{2} - x$ e, tirando o valor de S, vem

$$S = \frac{2}{1 - 2x}$$

isto é, a serie dada é proveniente da fracção racional simples $\frac{2}{1 - 2x}$

226. 2.ª — Seja a serie

$$1, 3, 7, 18, 47, 123, 322, 843, 2207, 5778 \dots\dots$$

que poderemos escrever, sendo

$$S = 1 + x + 3x^2 + 7x^3 + 18x^4 + 47x^5 + 123x^6 + 322x^7 + 843x^8 + \\ + 2207x^9 + 5778x^{10} + \dots$$

teriamos

$$p + q\,x = 1 - x$$

$$S_1 = -2 - 4\,x - 11\,x^2 - 29\,x^3 - 76\,x^4 - 199\,x^5 - 521\,x^6 - \ldots\ldots,$$

$$p_1 + q_1\,x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,x$$

e

$$S_2 = -\frac{1}{2} - 2x - \frac{11}{2}\,x^2 - \frac{29}{2}\,x^3 - 38\,x^4 - \frac{199}{2}\,x^5 - \frac{521}{2}\,x^6 - \ldots\ldots;$$

$$p_2 + q_2\,x = 4 - 8\,x$$

e

$$S_3 = -5 - 15\,x - 40\,x^2 - 105\,x^3 - \ldots\ldots$$

$$p_3 + q_3\,x = \frac{1}{10} + \frac{1}{10}\,x$$

e resta zero.

Assim teriamos

$$\frac{S_3}{S_2} = \frac{1}{\frac{1}{10} + \frac{1}{10}\,x}\,; \quad \frac{S_2}{S_1} = \frac{1}{4 - 8\,x + \frac{S_3\,x^2}{S_2}}\,; \quad \frac{S_1}{S} = \frac{1}{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,x + \frac{S_2\,x^2}{S_1}}\,;$$

$$S = \frac{1}{1 - x + \frac{S_1\,x^2}{S}}\,;$$

fazendo as necessarias substituições achariamos finalmente

$$S = \frac{1 - 2\,x + x^2 - x^3}{1 - 3\,x + x^2}$$

e, como o numerador tem maior grão do que o denominador, fariamos a divisão e achariamos

$$S = -x - 2 + \frac{3 - 7x}{1 - 3x + x^2}$$

Este resultado nos leva a concluir que a serie S era uma serie recurrente, resultante da fracção $\frac{3-7x}{1-3x+x^2}$, á qual se haviam reunido os dous termos $-x$ e -2: acontecendo por isso que a lei de recurrencia manifeste-se no quinto termo em vez de o ser no terceiro, como succederia se fossem suppressos os dous primeiros termos.

Séries exponenciaes e logarithmicas

227. Já vimos, ns. 183 e 184, como da equação $y = a^x$ se tirava

$$\lg y = x \lg a$$

e, admittindo que a fosse a base do systema de logarithmos considerado, tinhamos que $\lg y = x$. O objecto que temos agora em vista é exprimir o numero y em funcção de seu logarithmo x: para isso escrevamos

$$a^x = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots, \qquad \text{(I)}$$

sendo A, B, C, D.... coefficientes a determinar e independentes de x, e

$$a^z = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \ldots;$$

subtrahindo a segunda equação da primeira, membro a membro, vem

$$a^x - a^z = B(x - z) + C(x^2 - z^2) + D(x^3 - z^3) + \ldots;$$

dividindo ambos os membros desta igualdade por $x - z$ a divisão do segundo membro se fará exactamente e teremos

$$\frac{a^x - a^z}{x - z} = B + C(x + z) + D(x^2 + xz + z^2) + E(x^3 + x^2z + xz^2 + z^3) + \ldots$$

Para desenvolver o numerador do primeiro membro poremos

$$a^x - a^z = a(a^{x-z} - 1)$$

e, fazendo dentro do parentheses $a = 1 + b$, teremos de desenvolver pela formula do binomio a quantidade $(1+b)^{x-z}$ e teriamos

$$(1+b)^{x-z} = 1 + \frac{x-z}{1}b + \frac{(x-z)(x-z-1)}{1.2}b^2 +$$
$$+ \frac{(x-z)(x-z-1)(x-z-2)}{1.2.3}b^3 + \ldots.$$

e, portanto,

$$a^z\left(a^{x-z}-1\right) = a^z\left[(x-z)\,b + \frac{(x-z)(x-z-1)}{2}b^2 +\right.$$
$$\left. + \frac{(x-z)(x-z-1)(x-z-2)}{2.3}b^3 + \ldots\right];$$

a quantidade que se acha dentro do parenthesis sendo divisivel por $x-z$ tem-se então

$$a^z\left[b + \frac{x-z-1}{2}b^2 + \frac{(x-z-1)(x-z-2)}{2.3}b^3 + \ldots\right] =$$
$$= B + C(x+z) + D(x^2+xz+z^2) + E(x^3+x^2z+xz^2+z^3) + \ldots$$

fazendo agora $x = z$ tem-se

$$a^x\left(b - \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3} + \frac{b^4}{4} + \frac{b^5}{5} + \ldots\right) = B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + \ldots; \quad \text{(II)}$$

fazendo

$$b - \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3} + \frac{b^4}{4} + \ldots. = k \qquad \text{(III)}$$

e pondo em lugar de a^x o seu valor na egualdade (I) vem

$$Ak + Bk\,x + Ck\,x^2 + Dk\,x^3 + \ldots. = B + 2\,Cx + 3\,Dx^2 + 4\,Ex^3 + \ldots.,$$

e disto conclue-se

$$B = Ak,\ C = \frac{Bk}{2},\ D = \frac{Ck}{3},\ E = \frac{Dk}{4}, \ldots.$$

A equação

$$a^x = A + Bx + Cx^2 + \ldots.$$

devendo ser satisfeita por todos os valores de x o será para $a = o$, e então teremos $A = 1$ e conseguintemente

$$B = k,\ C = \frac{k^2}{3},\ D = \frac{k^3}{2.3},\ E = \frac{k^4}{2.3.4},\ F = \frac{k^5}{2.3.4.5} \ldots;$$

substituindo-se estes valores na igualdade (1) e della tirando o valor a^x tem-se

$$y = a^x = 1 + kx + \frac{k^2\ x^2}{2} + \frac{x^3\ x^3}{2.3} + \frac{k^4\ x^4}{2.3.4} + \ldots \qquad \text{(IV)}$$

228. Se se suppõe $x = 1$ tem-se

$$a = 1 + \frac{k}{1} + \frac{k^2}{2} + \frac{k^2}{2.3} + \frac{k^4}{2.3.4} + \ldots,$$

isto é, a expressão de a em k.

Se nesta ultima igualdade se suppõe $k = 1$ e chama-se e o valor correspondente de a vem

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \ldots,$$

serie convergente esta em que a somma dos onze primeiros termos daria

$$e = 2{,}7182818$$

229. Se em vez de $x=1$ na fórmula (IV) fizessemos $x=\frac{1}{k}$ teriamos

$$y=a^{\frac{1}{k}}=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}+\ldots,$$

ou

$$y=a^{\frac{1}{k}}=e;$$

tomando os logarithmos viria

$$l.\,y=\frac{1}{k}\,l.\,a=l.\,e$$

ou

$$l.\,a=k\,l.\,e;$$

sendo a a baze de um systema de logarithmos cujo caracteristico é l, tira-se ainda

$$k=\frac{1}{l.\,e}$$

Pondo este valor de k na formula (IV) vem

$$y=a^x=1+\frac{x}{1.\,(l.\,e)}+\frac{x^2}{1.2.\,(l.\,e)^2}+\frac{x^3}{1.2.3\,(l.\,e)^3}+\ldots:$$

formula esta que exprime y em funcção de seu logarithmo x, podendo a baze a, a que elle pertence, ser qualquer. Para calcular y bastará pois conhecer x e $l.\,e$ no systema considerado.

230. Se fosse $a=e$ viria y expresso em funcção do seu logarithmo tomado com a baze e teriamos

$$y=e^x=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\ldots$$

porque, em um dado systema, o logarithmo da baze é sempre igual a 1.

Expressão de um logarithmo em funcção do numero que lhe corresponde

231. Tomando a equação já estabelecida k l. e = l a. sendo *a* uma quantidade qualquer, e collocando em vez de *k* o seu valor, depois de haver nelle substituido *b* por seu valor *a — 1*, obtem-se

$$l.\, a = l.\, e \left[\frac{a-1}{1} - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - \frac{(a-1)^4}{4} + \ldots\right]$$

isto é, o logarithmo de *a* expresso em funcção de *a* e do logarithmo, em um systema de baze qualquer, do numero conhecido *e*: porém a série do segundo membro só é sufficientemente convergente para os valores de *a* muito proximos da unidade, o que importa grande inconveniente para o calculo de *l. a*. Para obviar a tal inconveniente notemos que se tem

$$l.\, a = m\, l.\, \sqrt[m]{a}$$

$$l.\, \sqrt[m]{a} = l.\, e \left[\frac{\left(\sqrt[m]{a}-1\right)}{1} - \frac{\left(\sqrt[m]{a}-1\right)^2}{2} + \frac{\left(\sqrt[m]{a}-1\right)^3}{3} - \ldots\right]$$

donde

$$l.\, a = m\, l.\, e \left[\frac{\sqrt[m]{a}-1}{1} - \frac{\left(\sqrt[m]{a}-1\right)^2}{2} + \frac{\left(\sqrt[m]{a}-1\right)^3}{3} - \frac{\left(\sqrt[m]{a}-1\right)^4}{4} + \ldots\right]$$

Podendo-se tomar *m* tão grande quanto se queira, se poderá fazer $\sqrt[m]{a}$ tão proxima da unidade quanto convenha para tornar a série assaz convergente, obtendo-se assim um meio facil para calcular $l.\,a$, quando m fôr escolhido entre os numeros da série.

$$2.\ 4.\ 8.\ 16.\ 32\ldots$$

porque então se realisará a extração da raiz m de a por successivas extracções de raizes quadradas.

232. Ha ainda meios mais faceis de calcular o logarithmo, do que fornece a ultima expressão achada; com effeito, tendo-se admittido que a fosse uma quantidade qualquer poderemos escrever

$$x = \mathrm{l.}\, y = \mathrm{l.}\, e \left[\frac{y-1}{1} - \frac{(y-1)^2}{2} + \frac{(y-1)^3}{3} - \frac{(y-1)^4}{4} \cdots\cdots \right]$$

fazendo $y = 1 + u$ e $y = 1 - u$, obteriamos as duas igualdades

$$\mathrm{l.}\,(1+u) = \mathrm{l.}\, e \left[\frac{u}{1} - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \cdots\cdots \right]$$

$$\mathrm{l.}\,(1-u) - \mathrm{l.}\, e \left[+ \frac{u}{1} - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} - \cdots\cdots \right]$$

subtrahindo a segunda da primeira, membro a membro, vem

$$\mathrm{l.}\,\frac{(1+u)}{(1-u)} = 2\,\mathrm{l.}\, e \left[\frac{u}{1} + \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + \frac{u^7}{7} + \cdots\cdots \right] \quad (I)$$

Sendo u uma fracção, a serie que se acha no segundo membro será tanto mais convergente quanto menor for u.

233. Póde-se ainda obter serie muito mais rapidamente convergente, suppondo

$$\frac{(1+u)}{(1-u)} = 1 + \frac{z}{n}$$

e, portanto

$$u = \frac{z}{2\,n + z}$$

donde

$$l.\left(1 + \frac{z}{n}\right) = l.\frac{n+z}{n} = l.(n+z) - l.\,n =$$

$$= 2\,l.\,e\left[\frac{z}{2\,n+z} + \frac{1}{3}.\frac{z^3}{(2\,n+z)^3} + \frac{1}{5}\frac{z^5}{(2\,n+z)^5} + \frac{1}{7}\frac{z^7}{(2\,n+z)^7} + \dots\right] \text{(II)} \text{ ou}$$

$$l.\,(n+z) = l.\,n + 2\,l.\,e\left[\frac{z}{2\,n+z} + \frac{1}{3}.\frac{z^3}{(2\,n+z)^3} + \frac{1}{5}.\frac{z^5}{(2\,n+z)^5)} + \right.$$

$$\left.\frac{1}{7}.\frac{z^7}{(2\,n+z)^7} + \dots\dots\right] \qquad \text{(III)}$$

234. Esta série é sufficientemente convergente para fornecer, com grande approximação, o logarithmo de $n + z$, conhecendo-se $l.\ n$, $l.\ e$ e z: assim, fazendo

$$z = 1 \text{ e } n = 1$$

teriamos

$$l.\ 2 = 2\,l.\ e\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3}.\frac{1}{3^3} + \frac{1}{5}.\frac{1}{5^5} + \frac{1}{7}.\frac{1}{7^7} + \dots\dots\right]$$

Expressão esta em que a somma dos oito primeiros termos da série forneceria l. 2, com approximação igual á das taboas ordinarias, pois tinha-se

$$l.\ 2 = 0{,}6931472 \times l.\ e:$$

como se vê o l. 2 depende, nesta fórmula, de $l.\ e$ ou $l.\ 2{,}7182818$, que deveria ser tomado no systema considerado: assim, no systema cuja baze é o proprio numero e, ter-se-hia

$$l.\ 2 = 0{,}6931472;$$

se o systema considerado fosse o ordinario, isto é, tivesse para baze 10, seria necessario tomar o $l.\ e$ em tal systema e achariamos

$$\log.\ e = 0{,}4342945$$

e portanto

$$\log.\ 2 = 0{,}6931472 \times 0{,}4342945 = 0{,}3010300.$$

235. Os logarithmos do systema cuja baze é o numero e têm o nome de — *logarithmos neperianos* — que lembra o nome de seu inventor Neper (Napier) a quem se attribue a invenção dos logarithmos. Para os logarithmos deste systema reservaremos a notação $L.$ e para os ordinarios a notação *log*.

Os *logarithmos neperianos* são tambem chamados *logarithmos naturaes* ou *hyperbolicos*.

Se na formula (III) se suppõe que a baze dos logarithmos seja o numero e poder-se-ha, como vimos construir a taboa dos *logarithmos neperianos*, e para passar deste systema para outro qualquer será necessario conhecer $l.\ e$ nesse systema, o que se obtem applicando a formula do n. 191: com effeito, seja x o logarithmo de e no systema que se quer calcular, b a baze desse systema teremos.

$$b^x = e$$

tomando os logarithmos do *systema neperiano* nesta formula, tem-se

$$x\ L.\ b = L.\ e = 1$$

ou, tomando $l.\ e$ na baze b

$$l.\ e = x = \frac{1}{L.\ b.}$$

236. Se o systema a calcular fosse o ordinario, cuja baze é 10, teriamos

$$\log.\ e = \frac{1}{L.\ 10}$$

A expressão $\frac{1}{L.\ 10}$ é representada pelo numero 0,4342944819...... e constitue o *modulo* para passar do *systema neperiano* para o *systema decimal* ou de baze 10: para effectuar essa passagem é necessario, segundo a formula ( ) multiplicar este *modulo* pelo logarithmo neperiano do numero dado.

O modulo para passar do *systema ordinario* para o *systema neperiano* seria

$$L\ 10 = \frac{1}{\log.\ e} = 0{,}3025851$$

Outros muitos processos têm sido empregados para calcular as taboas existentes, com mais ou menos facilidade, porém o que acabamos de dizer permitte fazer idéa completa do modo de construil-as com facilidade e por isso nada mais adiantaremos a esse respeito.

CAPITULO VIII

Theoria elementar das derivadas

237. Quando em uma funcção $y = f(x)$ se dá a x um accrescimo h, a funcção y soffre por isso um accrescimo correspondente : se a funcção é continua póde-se fazer h tão pequeno que o accrescimo correspondente de y seja menor do que qualquer quantidade dada. A expressão $f(x+h) - f(x)$ representa o accrescimo que soffreu a funcção em consequencia do accrescimo h que se attribuio á variavel x.

Convém antes de proseguir neste estudo relembrar as noções que, ácerca das funcções, foram dadas no fim do cap. I, e por isso chamamos a attenção do estudante.

Seja que se considere uma funcção continua $f(x)$ e que se tenha

$$f(x) = Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \dots Lx^2 + Mx + N.$$

Attribuindo á variavel x um accrescimo h teremos

$$f(x+h) = A(x+h)^m + B(x+h)^{m-1} + C(x+h)^{m-2} + \dots$$
$$L(x+h)^2 + M(x+h) + N$$

Desenvolvendo o segundo membro pela formula do binomio teremos

$$x + h) = A\left[x^m + m\,h\,x^{m-1} + \frac{m(m-1)\,h^2}{1.2}x^{m-2} + \dots\right.$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-m+3)\,h^{m-2}}{1.2.3\ldots\qquad(m-2)}x^2+$$

$$\left.+\frac{m(m-1)\ldots\ldots(m-m+2)\,h^{m-1}}{1.2.3\ldots(m-1)}x+h^m\right]+$$

$$+B\left[x^{m-1}+(m-1)\,h\,x^{m-2}+\frac{(m-1)(m-2)\,h^2}{1.2.}x^{m-3}+.\right.$$

$$\left.+\frac{(m-1)(m-2)\ldots(m-m+2)\,h^{m-2}}{1.2.3\ldots(m-2)}x+h^{m-1}\right]+$$

$$+C\left[x^{m-2}+(m-2)h\,x^{m-3}+\frac{(m-2)(m-3\,h^2}{1.2}x^{m-4}\ldots\ldots h^{m-2}\right]+$$

. . . .

. . . .

$$+L(x^2+2hx+h^2)+$$

$$+Mh+$$

$$+N;$$

grupando separadamente os termos que contêm as mesmas potencias de h e collocando-os em ordem crescente dessas potencias, tem-se

$$f(x+h)=$$

(1) $= [A\,x^m + B\,x^{m-1} + C\,x^{m-2} + \ldots\ldots\ L\,x^2 + M\,x + N]\,h^0 +$

(2) $+ [A\,m\,x^{m-1} + B(m-1)\,x^{m-2} + C(m-2)x\,h^{m-3} + \ldots M]\,h +$

(3) $[A\,m(m-1)\,x^{m-2} + B(m-1)(m-2)\,x^{m-3} + C(m-2)(m-3)\,x^{m-4} + \ldots$

$$\ldots+\ldots L1.2]\,\frac{h^2}{1.2}+\ldots\ldots$$

(4) $+\left[A\,m\,(m-1)\,(m-2)\ldots.(m-m+3)\,x^2+B\,(m-1)\,(m-2)\ldots\right.$

$$\left.\ldots(m-m+2)\,x+C\,1.\,2.\,3\ldots(m-2)\right]\frac{h^{m-2}}{1.\,2.\,3\ldots(m-2)}+$$

(5) $+\left[A\,m(m-1)(m-2)\ldots(m-m+2)x+B(m-1)(m-2)\ldots3.2.1.\right]+$

$$+\frac{h^{m-1}}{1.\,2.\,3\ldots(m-1)}+$$

(6) $+\left[A\,m\,(m-1)\,(m-2)\ldots.\,3.\,2.\,1.\right]\dfrac{h^m}{1.\,2.\,3\ldots.(m-1)\,m}$

Analysando os termos deste desenvolvimento nota-se, que o termo (1), coefficiente de h^0, isto é, independente de h, é o polynomio f (x); que o termo (2), coefficiente de h, foi derivado do precedente f (x) multiplicando cada um de seus termos pelo respectivo expoente de x e diminuindo esse expoente de uma unidade; que o termo (3), coefficiente de $\frac{h^2}{1.2}$, foi derivado do precedente como este de f (x) e, finalmente, que o termo (6), coefficiente de h^m derivou-se do que o precede segundo a mesma lei. O coefficiente de h é o que se chama a *primeira derivada* ou *derivada de primeira ordem* de f (x); o coefficiente de $\frac{h^2}{1.2}$ *derivada da segunda ordem* de f (x) e, finalmente, o coefficiente de $\frac{h^m}{1.2.3\ldots(m-1)m}$ *a derivada de ordem m* de f (x).

238. Representando respectivamente por f' (x), f'' (x), f''' (x) as derivadas das differentes ordens de f (x), poderemos escrever :

$$f(x+h)-f(x)=h.\,f'(x)+\frac{h^2}{1.2}.\,f''(x)+\frac{h^3}{1.2.3}.\,f'''(x)+\ldots..$$

ou dividindo ambos os membros por h,

$$f\frac{(x+h)-f(x)}{h}=f(x)+\frac{h}{1.2}f'(x)+\frac{h^2}{1.2.3}f'''(x)+\ldots\ldots$$

$$+\frac{h^m}{1.2.3\ldots(m-1)\,m}f^m(x)$$

239. Considerando agora que o accrescimo h póde tender para zero na medida que se queira, reconhece-se que os termos do segundo membro desta igualdade, com excepção de $f'(x)$, tendem tambem para zero, e portanto a sua somma : assim poderemos escrever

$$\text{limite de } \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x),$$

o que se póde exprimir dizendo que

A derivada de uma funcção é o limite para o qual tende a relação entre o accrescimo da funcção e o da variavel, quando este tende para zero.

Attendendo á marcha que temos seguido reconhece-se que a derivada de $f(x)+a$, sendo a constante, será identica á derivada de $f(x)$; que a derivada de $af(x)$ será $af'(x)$ e que a de $-f(x)$ será $-f'(x)$.

Observação. — Do modo de formação das derivadas de $f(x)$ conclue-se logo, que essas derivadas não podem ser senão em numero m, porquanto a potencia m de h não se encontrando senão no termo Ah^m, do desenvolvimento de $f(x+h)$, que é independente de x, a derivada de ordem m seria $1.2.3.... m \times A$, isto é, uma quantidade constante cuja derivada seria nulla.

240. Seja que se tenha X, Y, Z, U funcções quaesquer de uma mesma variavel x; X_1, Y_1, Z_1, U_1 o que se tornam essas funcções depois que x recebe o accrescimo h, e X', Y', Z', U' as derivadas correspondentes; se tivermos

$$X = Y + Z + U$$

teremos tambem

$$\frac{X_1 - X}{h} = \frac{Y_1 - Y}{h} + \frac{Z_1 - Z}{h} :: \frac{U_1 - U}{h}$$

e, como tem-se no limite,

$$\frac{X_1 - X}{h} = X', \quad \frac{Y_1 - Y}{h} = Y', \quad \frac{Z_1 - Z}{h} = Z', \quad \frac{U_1 - U}{h} = U',$$

teremos tambem, no limite

$$X' = Y' + Z' + U',$$

isto é, *a derivada de uma somma de funcções de uma mesma variavel é igual á somma das derivadas de todas essas funcções.*

241. Se se tiver $X = Y \times Z$, guardando as notações precedentes, teremos

$$X_1 - X = Y_1.Z_1 - Y.Z = Y(Z_1 - Z) + Z(Y_1 - Y)$$

e portanto

$$\frac{X_1 - X}{h} = Y_1 \frac{Z_1 - Z}{h} + Z \frac{Y_1 - Y}{h}$$

e, como quando se tem $h = o$ Y_1 torna-se em Y, tem-se no limite

$$X' = YZ' + ZY',$$

isto é, *a derivada de um producto de duas funcções é igual á somma dos productos que se formam, multiplicando cada funcção pela derivada da outra,*

242. Se se tem $X = Y.Z.U.V....$, fazendo.

$$Z.\ U.\ V = F(x)$$

tem-se

$$X' = Y'\ F(x) + Y\ F'(x);$$

fazendo

$$U.\ V.... = F_1(x) \text{ donde } F(x) = Z\ F_1(x)$$

vem

$$F'(x) = Z'\ F_1(x) + Z\ F_1'(x)$$

e, portanto,

$$X' = Y' \times Z.\ U.\ V..... + Z' \times Y.\ U.\ V.... + Y.\ Z. \times F'_1(x).$$

23

Continuando a proceder do mesmo modo, até quando $F_{n-1}(x)$ comprehender só um dos factores dados, deduziremos a regra seguinte: *A derivada de um producto de muitos factores, funcções de uma mesma variavel x, é igual á somma dos productos que se obtem multiplicando a derivada de cada um dos factores pelo producto de todos os outros.*

243. Admittindo agora que todas as funcções Y. Z. U. V.... sejam iguaes, isto é que se tenha

$$X = Y^m$$

é claro que X' será igual, pela regra precedente, á somma de m termos que contém Y' como factor e outro factor formado com o producto de $m-1$ das funcções dadas e que será Y^{m-1} e, portanto,

$$X' = m\, Y^{m-1} \times Y' :$$

assim pois estabelecemos a regra que : *A derivada da potencia m de uma fracção é igual ao producto do expoente m da funcção pela potencia $m-1$ da mesma funcção e pela derivada da funcção.*

$$\text{Seja } f(x) = x^m \times (a-x)^p \text{, tem-se}$$

$$f'(x) = (a-x)^p \times m\, x^{m-1} - x^m \times p\,(a-x)^{p-1}$$

ou

$$f'(x) = x^{m-1}.\ (a-x)^{p-1}\,[m\,(a-x) - p\,x]$$

244. Se se tem $X = \frac{1}{Z}$, tem-se, depois de haver dado a x o accrescimo,

$$X_1 - X = \frac{1}{Z_1} - \frac{1}{Z} = \frac{-(Z_1 - X)}{Z_1 . Z}$$

$$\frac{X_1 - X}{h} = -\frac{1}{Z_1 . Z} . \frac{Z_1 - Z}{h}$$

e, passando ao limite,

como Z_1 se torna em Z e $\frac{Z_1 - Z}{h}$ em Z quando h tende para zero, tem-se

$$X' = -\frac{Z'}{Z^2}$$

Tendo agora $X = \frac{Y}{Z}$ que é o mesmo que $X + Y \times \frac{1}{Z}$ tem-se, segundo as regras estabelecidas,

$$X' = \frac{Z\,Y' - Z'\,Y}{Z^2}$$

O que se póde enunciar dizendo que : *A derivada de uma fracção é igual á differença entre os productos que se obtem multiplicando a derivada do numerador pelo denominador e vice-versa, dividido pelo quadrado do denominador.*

Applicando a regra precedente á expressão $x = \frac{1}{Z^m}$ obtem-se

$$X' = -\frac{m\,Z^{m-1}.\,Z'}{Z^{2m}} = -\frac{m\,Z'}{Z^{m+1}}$$

ou

$$X' = -m\,Z^{-m-1}.\,Z';$$

mas a derivada de $\frac{1}{Z^m}$ é tambem a de Z^{-m}, temos, portanto, que o ultimo valor de X' será tambem a derivada de Z^{-m}, o que confirma. para as potencias negativas, a regra do n. (243)

Appliquemos as regras dadas á fracção $\frac{2x^2 - 5x - 3}{3x^2 - 5x + 4}$ a derivada será

$$\frac{(4x - 5)(3x^2 - 5x + 4) - (6x - 5)(2x^2 - 5x - 3)}{(3x^2 - 5x + 4)^2} =$$

$$= \frac{5x^2 + 34x - 5}{3x^2 - 5x + 4)^2}$$

245. Se se tem $y = f(x)$ e $z \times F(y)$, a funcção z, que depende immediatamente de y, que por sua vez depende de x, toma o nome de *funcção de funcção de x*. Dando a x o accrescimo h, y receberá um accrescimo correspondente k e z um accrescimo l; sendo z uma funcção mediata de x que recebeu um accrescimo l em consequencia do accrescimo h dado á variavel x, a sua derivada em relação a esta variavel será $\frac{h}{l}$, e, como se tem no limite

$$\frac{1}{h} = \frac{1}{k} \times \frac{k}{h}, \quad \frac{1}{k} = F'(y), \quad \frac{k}{h} = f'(x),$$

tem-se tambem

$$\text{limite } \frac{1}{h} = F'(y) \times f'(x)$$

o que se póde exprimir dizendo que : *A derivada de uma funcção de funcção é igual ao producto das derivadas de todas as funcções, tomadas em relação á variavel de que ella depende immediatamente.*

246. Quando se tem duas variaveis x e y ligadas por tal relação que, para qualquer valor conhecido de uma dellas a outra fique determinada, se diz que as variaveis x e y são funcções uma da outra e se pode escrever $y = f(x)$ e $x = \varphi(y)$. Estas duas $f(x)$ e $\varphi(y)$ se dizem *inversa uma da outra*: v. g. se se tem $y = x^m$, tem-se tambem $u = \sqrt[m]{y}$; se se tem $y = a^x$, tem-se tambem $x = l.\ y$, sendo a a base do systema considerado; isto é, raiz m é inversa da potencia m; o logarithmo é a funcção inversa da exponencial.

Se tendo $y = f(x)$ e $x = \varphi(y)$ se colloca em lugar de y seu valor $f(x)$ tem-se

$$x = \varphi[f(x)]$$

cuja derivada, pela regra das *funcções de funcções*, seria

$$1 = \varphi'(y) \times f'(x), \text{ sendo } \varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

ou, pondo em lugar de x seu valor φ (y),

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'[\beta(1)]}$$

Assim, *para obter a derivada de uma funcção inversa da outra, divide-se a unidade pela derivada desta e substitue-se a variavel de que ella depende, pela funcção correspondente.*

Supponhamos $y = \sqrt[n]{x}$, tem-se $x = y^n$ e $x' = ny^{n-1}$ e. portanto,

$$y' = \frac{1}{ny^{n-1}}$$

e, substituindo y por seu valor $\sqrt[n]{x}$

$$y' = \frac{1}{nx^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n} 1}$$

Tendo-se $X = \sqrt[m]{Y}$, sendo X e Y funcções quaesquer de x tem-se

$$X' = \frac{1}{n} Y^{\frac{1}{n-1}} Y'$$

247. Sendo $X = \sqrt[n]{Ym} = \left(Y^{\frac{1}{n}}\right)^m$ conclue-se, pela regra das funcções de funcções,

$$X' = \frac{m}{n} Y^{\frac{m}{n}-1} Y'$$

donde se conclue que a regra do n. (243). para achar a derivada de uma potencia, é extensiva ás potencias fraccionarias.

Applicando o que fica dito á expressão $Z = \sqrt{U}$ ou $Z = U^{\frac{1}{2}}$, vem

$$Z' = \frac{1}{2} U^{-\frac{1}{2}} \quad U' = \frac{1}{2\sqrt{U}} U',$$

isto é, *a derivada de um radical do segundo grão é igual á derivada da quantidade sob o radical, dividida pelo dobro do radical.*

Seja $f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$, tomando a derivada segundo as regras precedentes teremos

$$f'(x) = \frac{\frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2}}{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} = \frac{-(1+x)-(1-x)}{2(1+x)^2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} =$$

$$= -\frac{1}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}$$

Seja $y = l.\, x.$ indicando l um logarithmo de baze qualquer, dando a x o accrescimo h teremos, sendo k o correspondente de y,

$$y + k = l.\,(x+h)$$

donde $$\frac{k}{h} = \frac{l.\,(x+h) - l.\,x}{h} = \frac{1}{h} l.\left(1 + \frac{h}{x}\right)$$

fazendo $$\frac{h}{x} = \frac{1}{\alpha},\ \text{donde}\ \frac{1}{h} = \frac{\alpha}{x},\ \text{tem-se,}$$

$$\frac{k}{h} = \frac{\alpha}{x} l.\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) = \frac{1}{x} l.\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha}$$

Decrescendo h até zero, α cresce até o ∞ e portanto, $\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha}$ tende para o valor de e: assim ter-se-ha no limite

$$\text{limite } \frac{k}{h} = y' = \frac{\text{l. e}}{x}$$

Se a baze do systema de logarithmos fôr e teremos

$$y' = \frac{1}{x}$$

Sendo X e Y funcções quaesquer de x e tendo-se $X = l.\ Y$ teremos

$$X' = \frac{Y' \text{l. e}}{Y},$$

isto é, *a derivada de um logarithmo é igual á derivada da quantidade de que se deve tomar o logarithmo, multiplicada pelo logarithmo de e, na base considerada, tudo dividido por essa quantidade.*

248. Seja $y = a^{x}$, donde $l.\ y = x\, l.\ a$ ou $x = \text{l. } y$, sendo a a baze do systema, pelo que dissemos antes teremos,

$$x' = \frac{\text{l. e}}{y}$$

ou, por serem x e y funcções inversas,

$$y' = \frac{y}{\text{l. e}} = a^{x} \cdot \frac{1}{\text{l. e}} = a^{x}\, \text{L. a}$$

se a base a do systema considerado fosse igual a e, teriamos

$$y' = e^{x}$$

Se tivessemos, pois, $X = a^Y$ teriamos

$$X' = a^Y . Y' L a,$$

isto é, *a derivada de uma funcção exponencial é igual a funcção, multiplicada pela derivada do expoente e pelo lo; neperiano da base.*

A derivada de $L. \left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$, segundo as regras já estab será

$$= \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}} L. e$$

ou

$$= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} L. e = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

249. Se se tem $z = u^v$, tomando logarithmos a ambos os m da igualdade, tem-se

$$l. z = v\, l. u$$

tomando as derivadas dos dous membros, tem-se

$$\frac{z'\, l. e}{z} = v'\, l. u + v \frac{u'\, l. e}{u}$$

donde

$$z' = z \left(v' \frac{l. u}{l. e} + v \frac{u'}{u}\right);$$

se a base de systema fosse e teriamos

$$z' = z \left(v' L. u + v \frac{u'}{u}\right)$$

Sendo $u = v = x$ ter-se-hia $z = x^x$ e

$$z' = x^x \left(\frac{l.\ x}{l.\ e} + 1\right)$$

e sendo os logarithmos neperianos

$$z' = x^x\ (L.\ x + 1)$$

250. *Quando a derivada de uma quantidade é constantemente nulla, essa quantidade é constante.*

Com effeito, seja $f(x)$ uma quantidade cuja derivada é constantemente igual a zero. Tomemos dous valores x_1 e x_2 quaesquer da variavel x e façamos $x_2 - x_1 = n\,h$ donde $h = \frac{x_2 - x_1}{n}$. Sendo n muito grande h será muito pequeno. Mas pelo n. (240) temos que o limite de $\frac{f(x + h) - f(x)}{h}$ é a derivada de $f(x)$ e, portanto, podemos escrever

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} = f'(x) + \varepsilon$$

sendo ε uma quantidade que póde ser tão proxima de zero quanto se queira, tomando h sufficientemente pequeno. Segundo a hypothese tem-se $f'(x) = 0$ e, portanto, tem-se

$$\frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h} = \varepsilon_1,$$

$$\frac{f(x_1 + h) - f(x_1 + h)}{h} = \varepsilon_2,$$

....

$$\frac{f(x_1 + n\,h) - f[x_1 + (n - 1)\,h]}{h} = \varepsilon_n$$

Sommando membro a membro e expellindo o denominador, viria, notando que o primeiro termo do primeiro membro de cada igualdade destróe-se com o segundo da seguinte,

$$f(x_1 + n\,h) - f(x_1) = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots \varepsilon n)\,h\,;$$

mas como se tem $x_1 + n\,h = x_2$ e $h = \frac{x_2 - x_1}{n}$, temos, fazendo a substituição,

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots \varepsilon n}{n}(x_2 - x_1)$$

Supponhamos ε igual em valor absoluto á maior das quantidades $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots \varepsilon n$, como estas são em numero n teremos

$$f(x_2) - f(x_1) < \varepsilon \times (x_2 - x_1)\,;$$

como se póde tomar n tal que h seja tão pequeno quanto se queira, póde-se tornar assim ε tão proximo de zero quanto se queira, e, portanto, $f(x_2) - f(x_1)$ póde-se tornar menor do que qualquer quantidade dada, isto é, nullo : o que importa dizer que, qualquer que seja o valor de x, $\varphi(x)$ tem sempre o mesmo valor.

251. *Duas funcções cujas derivadas são iguaes não differem senão por uma constante.*

Porque se $f'(x) = \varphi^1(x)$ para todos os valores de x, a differença $f'(x) - \varphi^1(x)$ é constantemente nulla; mas, como esta differença é a derivada de $f(x) - \varphi(x)$, sendo essa derivada nulla é porque a differença que a produziu é constante.

252. Quando se tem uma derivada Ax^α, sendo A e α quantidades constantes, a funcção primitiva é

$$\frac{Ax^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,$$

isto é *obtem-se a funcção primitiva augmentando de uma unidade o expoente de* x; *dividindo tudo por esse expoente assim augmentado e sommando depois uma constante arbitraria* C

Quando, porém, $\alpha = -1$ esta regra falha, mas então a derivada póde ser posta sob a fórma $\frac{A}{x}$ e a funcção primitiva será

$$A\,L.\,x + C.$$

253. Quando a derivada de uma funcção $f(x)$ é positiva para um valor particular a de x, sendo h muito pequeno, a relação $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ é tambem positiva e, portanto, sendo h positivo, tem-se

$$f(a+h) > f(a),$$

o que importa dizer f (x) cresce com x. Se, porém, a derivada é negativa para $x = a$, a relação $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ é tambem negativa para h muito pequeno; sendo, pois, h positivo, tem-se

$$f(a+h) < f(a),$$

isto é, f (x) decresce quando x augmenta.

Derivadas das funcçoes circulares

254. Derivada de *sen x*. Dando a x o accrescimo h tem-se, por definição, derivada de *sen x* igual a

$$\frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h};$$

mas

$$\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen} \frac{h}{2} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right)$$

logo

$$\frac{\text{sen}\,(x+h)-\text{sen}\,x}{h}=\frac{2\,\text{sen}\,\frac{h}{2}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)}{h}$$

ou, dividindo no segundo membro ambos os termos da fracção por 2

$$\frac{\text{sen}\,(x+h)-\text{sen}\,x}{h}=\frac{\text{sen}\,\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)$$

Sendo h uma quantidade muito pequena, a relação $\frac{\text{sen}\,\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$ tende para 1 quando h diminue, e $\frac{h}{2}$ tende então para zero, tem-se, pois, no limite

$$\lim.\frac{\text{sen}\,(x+h)-\text{sen}\,x}{h}=\cos x$$

Assim : derivada de *sen x* é *cos x*, isto é $(\text{sen}\,x)'=\cos x$.

255. Derivada de *cos x*. Tem-se

$$\cos x=\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$

isto é, cos x fica sendo uma funcção de funcção de $\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

A regra do n. (245) daria

$$\left(\cos x\right)'\times\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\times\left(-1\right)=$$

$$=-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=-\text{sen}\,x,$$

isto é, derivada de cos x igual a — sen x

$$(\cos x)' = -\operatorname{sen} x$$

256. Derivada de *tang x* — Tem-se

$$\operatorname{tang} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

donde, tomando a derivada dos dous membros

$$(\operatorname{tang} x)' = \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(\operatorname{tang} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

257. Derivada de *cot. x*. Tem-se

$$\cot. x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

donde, tomando as derivadas dos dous membros,

$$(\cot x)' = \frac{-\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$$

$$(\cot. x)' = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$$

258. Derivada de *sec. x*. Tem-se

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$

donde, tomando as derivadas,

$$(\sec. x)' = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}$$

259. Derivada de *cosec. x*. Tem-se

$$\text{cosec. } x = \frac{1}{\text{sen } x}$$

donde, tomando as derivadas

$$(\text{cosec. } x)' = -\frac{\cos x}{\text{sen}^2 x}$$

260. Passamos agora a considerar as funcções *arc, sen x, arc. cos x, arc. tang x, arc. cot x, arc. sec x, arc cosex. x*, que são as inversas de *sen x, cos x, tang x, cot. x, sec x. cosec x*. A funcção arc. sen x entende-se arco cujo seno é igual a *x* assim dos mais.

— Derivada de *arc. sen x*. Tem-se fazendo

$$y = \text{arc sen } x,$$

$$x = \text{sen } y$$

mas, como

$$\text{sen } y = x \text{ tem-se } \cos y = \pm\sqrt{1 - x^2}$$

tem-se, applicando a regra das funcções inversas,

$$y = \frac{1}{\pm\sqrt{1 - x^2}}$$

isto é,

$$(\text{arc sen } x)' = \frac{1}{\pm\sqrt{1 - x_2}}$$

261. Derivada de *arc. cos x*. Ponhamos

$$y = \text{arc. } \cos x$$

donde

$$x = \cos y \quad \text{e} \quad x' = -\text{sen } y;$$

mas tem-se sen $y = \dfrac{1}{\pm\sqrt{1-2^2}}$ e, portanto, applicando a regra das funcções inversas, tem-se,

$$y' = -\frac{1}{\pm\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\pm\sqrt{1-x^2}},$$

isto é

$$\text{derivada de arc cos } x = \frac{1}{\pm\sqrt{1-x^2}}$$

262. Derivada de *arc. tang x.* Ponhamos

$$y = \text{arc. tang. } x$$

donde

$$x = \text{tang } y \quad \text{e} \quad x' = \frac{1}{\cos^2 y} = 1 + \text{tang}^2\, y,$$

mas $1 + \text{tang}^2\, y = 1 + x^2$, portanto, procedendo como acima, vem

$$y' = \frac{1}{1+x^2},$$

isto é,

$$\text{derivada de arc. tang } x = \frac{1}{1+x^2}$$

263. O theorema do nº (251) permitte, sendo dada uma derivada qualquer, estudar o meio de restabelecer a funcção que lhe deu nascimento, porém, offerece em grande numero de casos séria e muitas vezes insuperavel difficuldade: não nos estenderemos, pois, sobre tal assumpto e nos limitaremos, além do que dissemos no nº (252), a indicar alguns casos d'entre os mais simples.

— Qual a funcção que deu nascimento á derivada *cos m x*?

$$E' = \frac{\text{sen } m x}{m}.$$

— Qual a funcção que deu nascimento á derivada *sen m x*?

$$E' = -\frac{\cos m x}{m}.$$

— Qual a funcção que deu nascimento á derivada a^x?

$$E' = \frac{a^x \text{ l. } e}{\text{l. } a}.$$

— Qual a funcção cuja derivada é $\frac{2 - x^3}{1 - x}$?

Effectuando a divisão acha-se

$$\frac{2 - x^3}{1 - x} = x^2 + x + 1 + \frac{1}{1 - x}$$

a derivada que está no segundo membro é uma somma em que cada termo deve ser a derivada de um termo da funcção de que ella provém, temos que a funcção será

$$\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + \text{L. } (1 + x).$$

Theoria elementar das differenças

264. Se se tem uma serie de quantidades, que se succedem segundo uma lei qualquer,

$$u_0 \; u_1 \; u_2 \; u_3 \ldots\ldots\ldots\ldots u_n$$

e se a subtrahe cada uma dellas do seguinte, fórma-se uma nova serie de quantidades, que se chamam *differenças primeiras* das quantidades .

primitivas. Para designar estas differenças adopta-se o caracteristico Δ collocado antes da quantidade que foi subtrahida: assim teriamos

$$\Delta u_0 = u_1 - u_0,\ \Delta u_1 = u_2 - u_1,\ \Delta u_2 = u_3 - u_2 \ldots\ldots \Delta u_{n-1} = u_n - u_{n-1}$$

Se entre as quantidades

$$\Delta u_0,\ \Delta u_1,\ \Delta u_2,\ \Delta u_3 \ldots\ldots \Delta u_{n-1}$$

se tomam de novo as differenças, como fizemos para as primeiras, obtem-se nova serie de quantidades, que são as *differenças segundas* das da primeira serie. Para designar essas novas differenças adopta-se o caracteristico Δ^2, assim tem-se

$$\Delta^2 u_0 = \Delta u_1 - \Delta u_0,\ \Delta^2 u_1 = \Delta u_2 - \Delta u_1,\ \Delta^2 u_2 = \Delta u_3 - \Delta u_2 \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots \Delta^2 u_{n-1} = \Delta u_n - \Delta u_{n-1}$$

265. As *differenças segundas* forneceriam, do mesmo modo, as *differenças terceiras* e assim por diante.

Sendo as quantidades $u_0\ u_1\ u_2 \ldots\ u_n$ em numero $n+1$ as differenças primeiras seriam evidentemente n, as segundas $n-1$, as terceiras $n-2$, etc., de modo que as differenças Δ^k seriam em numero de $n-k+1$ e, finalmente, da ordem n a differença Δ^n seria uma unica, isto é. $n-n+1$.

Uma differença de ordem qualquer póde ser expressa em funcção das quantidades primitivas; com effeito tem-se, pelo que vemos acima

$$\Delta^2 u_0 = \Delta u_1 - \Delta u_0 \text{ e } \Delta^2 u_1 = \Delta u_2 - \Delta u_1$$

mas

$$\Delta u_0 = u_1 - u_0,\ \Delta u_1 = u_2 - u_1,\ \Delta u_2 = u_3 - u_2 \text{ e } \Delta u_3 = u_4 - u_3,$$

logo tem-se

$$\Delta^2 u_0 = u_2 - u_1 - (u_1 - u_0),\ \Delta^2 u_1 = u_3 - u_2 - (u_2 - u_1) \text{ e } \Delta^2 u_2 = u_4 - u_3 - (u_3 - u_2)$$

e

$$\Delta^2 u_0 = u_2 - 2u_1 + u_0,\ \Delta^2 u_1 = u_3 - 2u_2 + u_1 \text{ e } \Delta^2 u_2 = u_4 - 2u_3 + u_2$$

e como

$$\Delta^3 u_0 = \Delta^2 u_1 - \Delta^2 u_0 \quad \Delta^3 u_1 = \Delta^2 u_2 - \Delta^2 u_1$$

tem-se

$$\Delta^3 u_0 = u_3 - u_2 - (u_2 - u_1) - [u_2 - u_1 - (u_1 - u_0)] =$$
$$= u_3 - 3u_2 + 3u_1 - u_0 ;$$

e

$$\Delta^3 u_1 = u_4 - 2u_3 + u_2 - u_3 + 2u_2 - u_1 =$$
$$= u_4 - 3u_2 + 3u_2 - u_1$$

Dos valores deduzidos para as differenças $\Delta^2 u_0$, $\Delta^2 u_1$, $\Delta^2 u_2$ e $\Delta^3 u_0$, $\Delta^3 u_1$ induz-se claramente a lei que liga uma differença de ordem qualquer, ás quantidades primitivas, pois os coefficientes numericos dos valores dos Δ^2 e Δ^3 são respectivamente os mesmos do quadrado, do cubo de $(x - a)$, o que leva a crêr que para uma differença Δ^n os coefficientes seriam identicos aos do desenvolvimento do binomio $(x + a)^n$. Com effeito, seja para exprimir, em funcção das quantidades primitivas, a differença $\Delta^n u_0$.

Ponhamos a principio

$$\Delta^{n-1} u_0 = u_{n-1} - Au_{n-2} + Bu_{n-3} - Cu_{n-4} + \ldots\ldots\ldots \pm u_0$$

e

$$\Delta^{n-1} u_1 = u_n - Au_{n-1} + Bu_{n-2} - Cu_{n-3} + \ldots\ldots\ldots \pm u_1$$

o que é sempre possivel porquanto os coefficientes da expressão de duas differenças da mesma ordem são sempre os mesmos, teremos depois

$$\Delta^n u_0 = \Delta^{n-1} u_1 - \Delta^{n-1} u_0 =$$

$$= u_n - (A+1)u_{n-1} + (A+B)u_{n-2} - (B+C)u_{n-3} + (C+D)u_{n-4} + \dots\dots$$

$$\mp (N+1)\, u_{m-n-1} \pm u_0$$

donde se vê que na passagem da differença Δ^{n-1} á differença Δ^n os coefficientes de u_n u_{n-1} ..... formam-se segundo a mesma lei com que se passa da potencia $n-1$ do binomio $x-a$ á sua potencia n e que, portanto, sendo os coefficientes de uma differença Δ^2 os do quadrado de $x-a$, os de Δ^3 serão os do cubo, os de Δ^4 os da quarta potencia e finalmente os de Δ^n os da potencia n de $x-a$. Assim

$$\Delta^n u_0 = u_n - n\, u_{n-1} + \frac{n\,(n-1)}{1.2}\, u_{n-2} - \frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{1.2.3.}\, u_{n-3} + \dots$$

266. *Um termo de ordem qualquer u_p pode ser expresso em funcção de u_0 e de suas p differenças successivas.*
com effeito, tem-se

$$A \left\{ \begin{array}{l} u_1 = u_0 + \Delta\, u_0 \\[2mm] u_2 = u_1 + \Delta\, u_1 = u^0 + \Delta\, u_0 + \Delta\, u_0 + \Delta^2 u_0 = u_0 + 2\Delta\, u_0 + \Delta^2 u_0 \\[2mm] u_3 = u_2 + \Delta\, u_2 = u_0 + 2\,\Delta\, u_0 + \Delta^2 u_0 + \Delta\, u_1 + \Delta^2 u_1 = u_0 + \\[2mm] + 2\,\Delta\, u_0 + \Delta^2 u_0 + (\Delta\, u_0 + \Delta^2 u_0) + (\Delta^2 u_0 + \Delta^3 u_0) = u^0 + \\[2mm] + 3\,\Delta\, u_0 + 3\,\Delta^2 u_0 + \Delta^3 u_0 \end{array} \right.$$

donde se conclue immediatamente a lei seguinte :

O termo u_p de ordem $p+1$ forma-se multiplicando u_0 e suas differenças successivas, respectivamente pelos coefficientes do desenvolvimento de $(x+a)^p$

267. As formulas (A) permittem tambem, sendo dado o termo u_0 e suas n differenças successivas Δu_0, $\Delta^2 u_0$... calcular os termos u_1, u_2, u_3... u_n

A lei deduzida para o termo u_p é geral, como vamos ver. Admittindo que ella seja verificada para um termo de ordem dada,

$$u^p = u_0 + p\Delta u_0 + \frac{p(p-1)}{1.2}\Delta^2 u_0 + \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}\Delta^3 u_0 + \dots \Delta^p u_0 \quad (B)$$

Se esta fórmula dá a expressão do termo u_p de ordem $p+1$ de uma serie qualquer u_0, u_1, u_2.... u_p poderiamos applical-a á serie de quantidades Δu_0, Δu_1, Δu_2,... Δu_p e conhecer assim a expressão do termo Δu_p, de ordem $p+1$, em funcção do primeiro Δu_0 e de suas p differenças successivas $\Delta^2 u_0$, $\Delta^3 u_0$,.... $\Delta^{p-1} u_0$ e teremos

$$\Delta u^p = \Delta u_0 + p\Delta^2 u_0 + \frac{p(p-1)}{1.2}\Delta^3 u_0 + \dots \Delta^{p+1} u_0 \quad (C)$$

Comparando esta fórmula com a fórmula (B), nota-se que ella é formada augmentando em (B) uma unidade aos indices dos Δ.

Sommando (B) com (C) tem-se

$$u_p + \Delta u_p = u_{p+1} = u_0 + (p+1)\Delta u_0 + \left(\frac{p(p+1)}{1.2} + p\right)\Delta^2 u_0 + \dots + \Delta^{p-1} u_0$$

ou

$$u_{p+1} = u_0 + (p+1)\Delta u_0 + \frac{(p+1)p}{1.2}\Delta^2 u_0 + \frac{(p+1)p(p-1)}{1.2.3.}\Delta^3 u_0 + \dots$$

Nesta ultima formula o primeiro termo tem para coefficiente a somma dos coefficientes do 1º e do 2º da formula (B); o segundo tem a somma dos coefficientes do 2º e do 3º da mesma formula, e, como na formula do binomio a somma dos coefficientes de dous termos consecutivos da potencia p é o coefficiente do termo que tem a ordem do primeiro desses dous na potencia $p+1$, concluimos que se a lei é verdadeira para o termo u_p o é tambem para o termo u_{p-1} e consequentemente para um termo qualquer.

268. *Differenças das funcções inteiras.* — Seja $u = f(x)$ e u_0. u_1, u_2,.... etc. valores da funcção correspondentes a valores equidistantes da variavel x. Ponhamos

$$u = Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-1} \ldots + $$

e seja h a differença constante de dous valores consecutivos de x, teremos

$$\Delta u = A[(x-h)^n - x^n] + B[(x+h)^{n-1} - x^{n-1}] + C[(x+h)^{n-2} - x^{n-2}] + \ldots$$

expressão esta que é do gráo $n-1$ em relação a x e da fórma

$$\Delta u = n\,A\,h\,x^{n-1} + B_1\,h\,x^{n-2} + C_1\,h\,x^{n-3} + \ldots$$

Para obter a differença $\Delta^2 u$, bastará substituir nesta x por $x + h$ e, como $\Delta^2 u = \Delta u_1 - \Delta u_0$, acha-se

$$\Delta^2 u = n(n-1)\,A\,h^2\,x^{n-2} + B_2\,h^2\,x^{n-3} + C_2\,h^2\,x^{n-4} + \ldots$$

O gráo das differenças Δu_0, $\Delta^2 u_0$, etc. diminuindo de uma unidade para a seguinte, a differença $\Delta^n u_0$ de ordem n será independente de x e, portanto, constante, e será

$$\Delta^n u = 1.\,2.\,3 \ldots n\,A\,h^n$$

Sendo esta differença constante, as das ordens seguintes serão todas nullas.

269. Tal propriedade das funcções inteiras permitte obter, por addições successivas, todos os valores de uma funcção, correspondentes a valores equidistantes da variavel, quando se tem calculado um numero destes valores igual ao gráo da funcção.

Seja o polynomio

$$y = x^3 - 5\,x_2 + 6\,x - 1$$

Temos, segundo o que dissemos acima,

$$\Delta^3 y = 1.\,2.\,3.\,h^3$$

Se no polynomio dado um lugar de x se substituem os valores equidistantes $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$, acham-se para y os valores -13, -1, 1.

Disponhamos os elementos do modo seguinte :

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
				6
				6
				6
$= -1$	$= -13$	12	-10	6
$= 0$	$= -3$	2		6
$- 1$	$= +1$			6

Para obter novos valores de y será necessario sommar ou subtrahir successivamente a $\Delta^2 y$ o valor de $\Delta^3 y$; obtendo-se assim as differenças segundas, passa-se ás differenças primeiras e destas aos valores de y, pois tem-se

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
-5	-281	112	-34	6
-4	-169	78	-28	6
-3	-91	50	-22	6
-2	-41	28	-16	6
-1	-13	12	-10	6
0	-1	2	-4	6
$+1$	$+1$	-2	$+2$	6
$+2$	-1	0	$+8$	6
$+3$	-1	$+8$	$+14$	6
$+4$	$+7$	$+22$	$+20$	6
$+5$	$+29$	$+42$	$+26$	6
$+6$	$+71$	$+68$	$+32$	6
$+7$	$+139$	$+100$		
$+8$	$+239$			

INDICE ANALYTICO

COM

INDICAÇÃO DOS NUMEROS DO PROGRAMMA
DA ESCOLA POLYTECHNICA