



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Antônio Crispim Lourenço

**Correlações genuínas multipartidas em sistemas invariantes por permutações
de partículas**

Florianópolis
2022

Antônio Crispim Lourenço

**Correlações genuínas multipartidas em sistemas invariantes por permutações
de partículas**

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação
em Física da Universidade Federal de Santa Cata-
rina para a obtenção do título de Doutor em Física.
Orientador: Prof. Dr. Eduardo Inacio Duzzioni
Coorientador: Prof. Dr. Tiago Debarba

Florianópolis
2022

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Lourenço, Antônio Crispim

Correlações genuínas multipartidas em sistemas
invariantes por permutações de partículas / Antônio Crispim
Lourenço ; orientador, Eduardo Inacio Duzzioni,
coorientador, Tiago Debarba, 2022.

125 p.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Santa
Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas,
Programa de Pós-Graduação em Física, Florianópolis, 2022.

Inclui referências.

1. Física. 2. Informação quântica. 3. Correlações genuínas
multipartidas. 4. Transição de fase quântica. 5. Estados
totalmente simétricos. I. Duzzioni, Eduardo Inacio. II.
Debarba, Tiago. III. Universidade Federal de Santa
Catarina. Programa de Pós-Graduação em Física. IV. Título.

Antônio Crispim Lourenço

**Correlações genuínas multipartidas em sistemas invariantes por permutações
de partículas**

O presente trabalho em nível de doutorado foi avaliado e aprovado por banca
examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. Dr. Fernando Roberto de Luna Parisio Filho
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Marcelo Henrique Romano Tragtenberg
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Dr. Marcos Cesar de Oliveira
Universidade Estadual de Campinas

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi
julgado adequado para obtenção do título de Doutor em Física.

Coordenação do Programa de
Pós-Graduação

Prof. Dr. Eduardo Inacio Duzzioni
Orientador

Florianópolis, 2022.

Este trabalho é dedicado à minha mãe, Lindaura, e ao meu pai, Osvaldo.

AGRADECIMENTOS

Sou grato a todos que de alguma forma tornaram este trabalho possível. Primeiramente, agradeço aos meus pais, minha mãe Lindaura e meu pai Osvaldo, são o princípio de tudo e sempre estiveram junto comigo. Tenho bastante familiares para agradecer, pois, muitos me ajudaram nos piores e melhores momentos da vida, sou grato a todos por isso. Aos que não puderam auxiliar, agradeço por não terem tornado o processo mais difícil.

Sou extremamente grato aos meus orientadores, o Prof. Duzzioni e o Prof. Debarba. Agradeço ao Prof. Duzzioni pelo apoio, paciência, que às vezes eu não tinha, e por acreditar em mim, talvez mais do que eu acreditava. Agradeço ao Prof. Debarba por estar junto sempre que eu precisei e pelo bom trabalho paralelo desenvolvido na pesquisa. Todos os colaboradores que aprendi junto na pesquisa, sou-lhes grato. Agradeço também aos professores membros da banca por estarem disponíveis e terem aceito o convite de participação.

Aos amigos sou grato a todos que estando perto ou longe ainda se lembram da gente. Agradeço à Giselle por esse tempo todo de amizade e a ajuda mútua. O Aster, meu amigo desde a infância e por muito tempo vizinho, esteve do meu lado sempre que precisei, inclusive nos momentos que tudo parecia perdido, sou muito grato por tudo! Aos amigos que conheci na graduação agradeço a todos por estarem presente mesmo longe, em especial ao Wagner, à Deborah, ao Leandro, à Carline, ao Ismael e ao Alexandro pelas conversas esporádicas, que mesmo por mensagem me lembram os tempos da graduação na UFSC. Sou grato à Karyna, que da mesma forma que dou apoio a ela, também me aconselha quando esqueço os próprios que conselhos que dei a ela, também por me fazer gostar mais ainda de literatura, que tem me ajudado muito nesses tempos difíceis. À Sandrinha, agradeço pelas boas risadas que damos juntos seja presencialmente ou no whats.

Agradeço a UFSC e a todos os seus servidores técnicos. Em especial ao Antônio ex-secretário da pós-graduação, e aos novo(a)s secretário(a)s que assumiram. Também agradeço aos profissionais de saúde, tanto os que lutaram contra o coronavírus na pandemia, quanto aqueles que me auxiliaram a entender minhas dores que não aliviam com remédios.

Por fim, agradeço a FAPESC e a CAPES pelo apoio financeiro.

*"Our virtues and our failings are nonseparable, like entangled particles.
When they separate, man is no more."
(Nikola Tesla, adaptada.)*

RESUMO

Sistemas invariantes por permutações de partículas estão presentes em muitos modelos físicos, tais como o modelo Lipkin-Meshkov-Glick (LMG), modelo de Dicke, modelo do Cristal Temporal de Fronteira (CTF), entre outros. Esses sistemas possuem fenômenos críticos nos quais o conhecimento da correlação desempenha um papel fundamental, principalmente para descrever Transição de Fase Quântica (TFQ). Geralmente, as correlações, como emaranhamento e discórdia quântica, são estudadas entre bipartições, ou entre todos os N subsistemas para estados puros. A questão se k partículas quaisquer estão genuinamente correlacionadas é menos restrita e mais informativa, sendo abordada muito recentemente na literatura. Assim, o objetivo desta tese é estudar as correlações genuínas k -partidas em dois sistemas invariantes por permutação de partículas, o modelo LMG e o modelo CTF. Além disso, investigamos a presença de emaranhamento genuíno k -partido no modelo CTF, uma vez que o emaranhamento é um recurso importante em tarefas quânticas. O primeiro modelo estudado é o modelo LMG, um modelo que pode ser representado por N spins $1/2$ com interações de alcance infinito, com um campo magnético sendo aplicado transversalmente à cadeia de spins. Nesse modelo, verificamos que as ordens de Correlações Genuínas Multipartidas (CGM) assinalam a TFQ de segunda ordem, tal como é conhecido que outras medidas de correlações, como emaranhamento e discórdia quântica, também o fazem. Além disso, notamos que as correlações genuínas k -partidas apresentam um comportamento não trivial com a variação da ordem de correlação. A explicação desse comportamento está ligada ao número de partições dos estados produto utilizados para calcular CGM. Além disso, calculamos através do Escalonamento de Tamanho Finito (ETF) os expoentes críticos para várias ordens de CGM, observando que os expoentes estão num intervalo de $[-1/2, 1/2]$ e conjecturamos que todas as ordens estão neste intervalo. O segundo modelo analisado nesta tese é o modelo do CTF, um estado da matéria de não-equilíbrio em contato com um ambiente que quebra a simetria de translação temporal. Mostramos que as CGM captam as oscilações da fase CTF e com análises de escalonamento das correlações totais, constatamos também que o tempo de vida das oscilações diverge no limite termodinâmico, no qual emerge o fenômeno do CTF. Além disso, no Estado Estacionário de Não Equilíbrio (EENE) observamos que as CGM são extensivas com número de partículas na fase CTF, enquanto que são subextensivas na fase ferromagnética. As CGM contam as correlações clássicas e quânticas na medida, então para saber se há emaranhamento genuíno k -partido nas duas fases do modelo, utilizamos a Informação quântica de Fisher (IQF) como testemunha. Verificamos que há emaranhamento genuíno k -partido na fase ferromagnética, contudo, nada pode ser dito na fase CTF na qual a IQF não testemunha emaranhamento genuíno k -partido. Através de uma análise de mapa de cores da matriz de densidade do EENE, mostramos que na fase CTF o estado se aproxima de um estado superradiante, que não é emaranhado, porém tem uma grande quantidade de CGM.

Palavras-chave: Informação quântica. Correlações genuínas multipartidas. Transição de fase quântica. Estados totalmente simétricos.

ABSTRACT

Systems invariant by particle permutations are present in many physical models, such as LMG model, Dicke model, CTF model, among others. These systems possess critical phenomena where the knowledge of correlation plays a key role, mainly to describe TFQ. Generally, the correlations, such as with entanglement entropy and quantum discord, are studied between bipartitions, or among all the subsystems for pure states. The question if k -particles are genuinely correlated is less restricted and more informative, being addressed very recently in the literature. So, the objective of this thesis is to study the genuine k -partite correlations in two systems invariant by particle permutation, the LMG model and the CTF model. In addition, we investigate the presence of genuine k -partite entanglement in the CTF model, since entanglement is an important resource in quantum tasks. The first model studied is the LMG model, a model that can be represented by N spins $1/2$ with infinite range interactions, with a magnetic field applied transversely to the spins chain. In this model, we verify that all orders of CGM signal the second order TFQ, as other measures of correlations, such as entanglement and quantum discord, also do. Additionally, we notice that the genuine k -partite correlations present a non-trivial behavior with the variation of the correlation order. The explanation of this behavior is linked to the number of partitions of the product state used to calculate CGM. Furthermore, we calculate through ETF the critical exponents for several orders of CGM, observing that the exponents are in an interval $[-1/2, 1/2]$ and we conjecture that all orders of CGM are in this interval. The second model analyzed in this thesis is the CTF model, a non-equilibrium state of matter in contact with an environment that breaks time translation symmetry. We show that the CGM capture the oscillations of the CTF phase and with scaling analyses of total correlations we also verify that the lifetime of the oscillations diverges in the thermodynamic limit, where the CTF phenomenon emerges. Moreover, in the EENE we observe that the CGM are extensive with particle number in the CTF phase, while they are subextensive in the ferromagnetic phase. The CGM count the classical and quantum correlations in the measure, then to know if there are genuine k -partite entanglement in the phases of the model, we use IQF as a witness. We find that there are genuine k -partite entanglement in the ferromagnetic phase, however, nothing can be said in the CTF phase where the IQF does not witness genuine k -partite entanglement. Through a color map analyses of the density matrix of the EENE, we show that in the CTF phase the state approaches a superradiant state, which is not entangled but it has a great amount of CGM.

Keywords: Quantum information. Genuine multipartite correlations. Quantum phase transition. Totally symmetric states.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Esquema exemplificando a ocorrência de CTF a partir de cadeias de <i>spins</i> bidimensionais. Figura retirada de [77].	23
Figura 2 – Informação mútua de dois subsistemas é dada pela intersecção no diagrama de Venn das informações contidas nos dois estados do sistema, representando a informação (correlação) que têm em comum. 30	30
Figura 3 – Hierarquia de correlação multipartida para um sistema de N partículas, os conjuntos P_k , $k = 1, 2, \dots, N$, consistem dos estados que possuem correlações até ordem k . As esferas amarelas representam o maior subconjunto (k) da partição dada pelas linhas tracejadas vermelhas. A quantidade de correlações genuínas k -partidas no estado é a diferença entre a distância dos conjuntos P_{k-1} e P_k . Figura retirada de [41].	36
Figura 4 – Formas de estados produtos com $N = 4$, sem contar as permutações. Em P_1 existe somente uma possibilidade de estado produto, quatro partições com um subsistema cada ($1 1 1 1$, número '1' é um subsistema e ' ' é produto tensorial). Em $P_2 - P_1$, em verde, existem duas formas de estados produtos, duas partições com dois subsistemas ($2 2$), ou três partições, uma com dois subsistemas e duas com um ($2 1 1$). Em $P_3 - P_2$, amarelo, há um estado produto da forma $3 1$ e $P_4 - P_3$, vermelho, somente σ_4 não fatorável.	37
Figura 5 – Estados produtos para $k = 2$ e $k = 3$ para subsistemas distinguíveis. São mostradas todas as permutações possíveis para os estados produtos possíveis de formar com dado k e $N = 4$	38
Figura 6 – Todas as partições para $N = 4$ quando temos invariância por permutações de subsistemas. Figura retirada de trabalho de qualificação de Susane Calegari.	39
Figura 7 – Representação de um estado qualquer do modelo LMG. São dois níveis N vezes degenerados com uma diferença de energia ε	48
Figura 8 – Diferença de energia entre o primeiro estado excitado e o estado fundamental, Δ , do modelo LMG em função do campo externo h para $N = 100$, com fator de anisotropia $\gamma = 1$. O gráfico é linear somente para $\gamma = 1$. No inset é mostrada a diferença de energia Δ com $h = 0$ para valores de N de 100 a 1000 partículas.	53
Figura 9 – Entropia de emaranhamento do estado fundamental do modelo LMG para $N = 500$ e bipartições com $k = 25, 75, 125, 250$ partículas, nas quais $k = N - L$ como na equação (64). Reproduz a Figura 2 de [15]. 56	56

Figura 10 – Entropia de emaranhamento do estado fundamental do modelo LMG para $N = 500$ e partição com $k = 125$ partículas, e o mapa de cores corresponde ao valor da entropia de emaranhamento. Reproduz a Figura 1 de [15].	57
Figura 11 – Correlações genuínas de ordem maior do que k no estado fundamental do modelo LMG para $N = 100$ e $\gamma = 0.5$. As pseudo-distâncias $S^{k \rightarrow N}$ são calculadas até $k = 7$, todas capturam a transição de fase, e seus valores em $h = 0$ são iguais ao número de partições no estado produto tomado como base para o cálculo da pseudo-distância para cada k	60
Figura 12 – Correlações genuínas de ordem maior do que k no estado fundamental do modelo LMG para $N = 100$ e $\gamma = 0.5$. As pseudo-distâncias $S^{k \rightarrow N}$ são calculadas de $k = 6$ a $k = 20$, as que possuem a mesma quantidades de partições no estado produto tomado como base para calcular a pseudo-distância apresentam valores iguais no começo da fase paramagnética diferenciando somente próximo da transição. Este gráfico ajuda a entender o comportamento das correlações genuínas k -partidas da Figura 13.	61
Figura 13 – Correlações genuínas k -partidas presentes no estado fundamental do modelo LMG para $N = 100$, $\gamma = 0.5$, e $k = 6$ a $k = 20$ em função h . Na fase que $h > 1$ os <i>spins</i> estão alinhados com o campo externo, assim estão descorrelacionados.	62
Figura 14 – Correlações genuínas k -partidas presentes no estado fundamental do modelo LMG para $N = 156$, $\gamma = 0.5$ e $k = 2,3,4,13$ em função de h . Na fase em $h > 1$ os <i>spins</i> estão alinhados com o campo externo, então não estão correlacionados.	65
Figura 15 – O inset é um zoom da figura para uma melhor visualização do comportamento das CGM de ordem $k = 13$ próximo da transição de fase. Outros valores de k 's têm comportamento parecido próximo ao ponto crítico.	66
Figura 16 – CGM de ordem maior do que k , $S^{k \rightarrow N}$, em função de k para $N = 200$, $\gamma = 0.5$ e $h = 1$. Na Figura (a) todos valores inteiros de k de $1 \leq k \leq N$ são considerados, enquanto na Figura (b) somente os valores de k que satisfazem a restrição $N \bmod k = 0$ são levados em conta.	67
Figura 17 – A derivada de primeira ordem das correlações totais em função do parâmetro de controle externo. Conforme N aumenta o valor mínimo da derivada se aproxima de $h_c = 1$	68

Figura 18 – A derivada de primeira ordem das correlações totais ($k = 1$) e CGM de ordem $k = 2,3,N$ em função do parâmetro de controle externo. O valor mínimo das derivadas ocorrem para valores de h cada vez mais próximos de $h_c = 1$ conforme N aumenta.	69
Figura 19 – Valores do parâmetro de controle h em que a derivada de primeira ordem das correlações totais e CGM de ordens $k = 2,3,N$ é mínima em função do número de <i>spins</i> do sistema N . As linhas sólidas são um ajuste logarítmico dos pontos para mostrar que no limite termodinâmico ($N \rightarrow \infty$) $h_{min} \rightarrow h_c = 1$. As restrições $N \bmod 6 = 0$ foram impostas para as curvas com $k = 2,3$	70
Figura 20 – Valores do parâmetro de controle h em que a derivada de primeira ordem da correlações totais e CGM de ordens $k = 2,3,N$ em função do número de <i>spins</i> no sistema N . No intervalo em que o comportamento dos pontos utilizados para o ajuste da lei de potência são visualizados.	71
Figura 21 – Os expoentes críticos são obtidos dos coeficientes angulares curvas que têm o formato $\log(S^k) = \alpha * \log(N) + A$ para correlações totais e para CGM de ordem $k = 2,3,N$. Para $k = 2,3$ a restrição $N \bmod 6 = 0$ foi imposta.	72
Figura 22 – <i>Weaving</i> no estado fundamental do modelo LMG, para $N = 50, 100, 150, 200$ e $\gamma = 0.5$ em função de h . Para $h > 1$ vemos o <i>weaving</i> tendendo a zero, fase onde os <i>spins</i> se alinham ao campo e são descorrelacionados, e praticamente constante para $0 \leq h < 1$	74
Figura 23 – <i>Weaving</i> em função N com peso $\omega = k - 1$ para obtenção do expoente crítico associado a essa grandeza. O expoente crítico foi obtido ajustando por uma lei de potência o <i>weaving</i> , calculado em $h = 1$ em função de N	76
Figura 24 – Cristal temporal discreto em cadeia unidimensional de <i>spins</i> . Figura retirada Physics viewpoint "How to Create a Time Crystal" de APS/Alan Stonebraker/Phil Richerme [120].	78
Figura 25 – Esquema exemplificando a ocorrência do CTF a partir de rede de <i>spins</i> bidimensionais. Figura retirada de [77].	80
Figura 26 – Valores dos observáveis $\langle J_\alpha \rangle / N_b$ e de suas variâncias nas duas fases do modelo do CTF para $N_b = 600$. Figura adaptada do material suplementar de [77].	82

Figura 27 – Parte real dos autovalores no EENE na fase ferromagnética, painel esquerdo, e CTF, painel direito, em função do inverso do número de partículas. No limite termodinâmico, a fase ferromagnética possui autovalores diferentes de zero e um <i>gap</i> . Na fase CTF todos os autovalores tendem a zero, caracterizando uma divergência no tempo de vida das oscilações. Figura adaptada do material suplementar de [77].	83
Figura 28 – Partes real e imaginária dos autovalores do Liouvilliano do modelo do CTF no EENE nas fases ferromagnética (painel esquerdo) e CTF (painel direito). Figura retirada de [77].	84
Figura 29 – Parte real e imaginária dos autovalores do Liouvilliano no EENE na fase CTF em função do inverso do número de <i>spins</i> . No limite termodinâmico, a parte real dos autovalores tende a zero e as partes imaginárias não, ao invés mantém o mesmo <i>gap</i> . Figura adaptada de [77].	85
Figura 30 – Magnetização na fase CTF variando com o tempo, para diferentes números de <i>spins</i> e no limite termodinâmico, no qual o tempo de vida das oscilações diverge. As partes cinzas nos picos correspondem aos <i>spins</i> para cima e a azul no vale corresponde <i>spins</i> para baixo, conforme ilustrado na Figura 25. Figura adaptada de [77].	86
Figura 31 – Módulo da parte imaginária do autovalor do primeiro estado excitado nos fornece a frequência de oscilação do CTF. Na fase ferromagnética, esse módulo é igual a zero e na fase CTF aumenta com o aumento da frequência do <i>drive</i> . Figura adaptada do material suplementar de [77].	87
Figura 32 – No painel esquerdo, transformada de Fourier da magnetização média na dinâmica para a fase CTF. Os picos nos dão as frequências que são as separações das bandas da parte imaginária apresentada no painel direito da Figura 29. No painel direito, decaimento das oscilações com o aumento do número de <i>spins</i> e módulo da parte real dos autovalores, apresenta uma relação direta entre o decaimento e o módulo da parte real dos autovalores. Figura adaptada de [77].	88
Figura 33 – Dinâmica das CGM para $N = 120$ e diferentes ordens k na fase ferromagnética com $\omega_0 = 0.5$. Todas as CGM apresentam um comportamento semelhante e a correlação existente vem do campo fraco do <i>drive</i> que impede o sistema decair completamente no estado $ 0\rangle^{\otimes N}$ para tempos longos.	90

Figura 34 – Mapa de cores da matriz densidade na fase ferromagnética com $\omega_0 = 0.5$ para diferentes tempos que capturam pontos no crescimento, no pico, na queda, no vale e no EENE das CGM apresentados na Figura 33.	91
Figura 35 – Dinâmica das CGM para $N = 120$ e diferentes ordens k na fase CTF com $\omega_0 = 2$. Todas as ordens capturam as oscilações e apontam para um EENE altamente correlacionado.	92
Figura 36 – Mapa de cores da matriz densidade na base de Dicke na fase CTF para $\omega_0 = 2$, com diferentes tempos que capturam pontos de picos e vales das oscilações. Os vales apresentam maior coerência do que os picos.	93
Figura 37 – Correlações totais na dinâmica com $\omega_0 = 2$ para valores de N crescentes. Para número de partículas maiores as oscilações capturadas pelas correlações totais persistem por um tempo maior, indicando a presença de CTF no limite termodinâmico.	94
Figura 38 – Taxa de decaimento das oscilações em função do número de partículas, obtida com ajustes das correlações totais para diferentes N 's. Quanto maior o número de partículas menor o valor do amortecimento das oscilações.	94
Figura 39 – Módulo das correlações totais em função do tempo menos seu valor no EENE. A inclinação da reta em torno da média de oscilações nos fornece o amortecimento das oscilações, para valores altos de números de <i>spins</i> a inclinação se aproxima da horizontal, ou seja, tende a zero.	95
Figura 40 – Dinâmica da IQF na fase ferromagnética $\omega_0 = 0.5$ variando o número de <i>spins</i> . A evolução temporal cria emaranhamento genuíno 2-partido e o emaranhamento criado persiste até o EENE.	97
Figura 41 – Dinâmica da IQF na fase CTF para $\omega_0 = 2$ variando o número de <i>spins</i> . Somente na região próxima de $t = 0.5$ da dinâmica é testemunhado emaranhamento genuíno 2-partido e no EENE não é detectado emaranhamento. As oscilações estão presentes e possuem a mesma frequência ν dada pelas CGM.	98
Figura 42 – Módulo da IQF em função do tempo menos seu valor no EENE. A inclinação da reta em torno da média de oscilações nos fornece o amortecimento das oscilações. Para valores altos de números de <i>spins</i> a inclinação se aproxima da horizontal, ou seja, tende a zero.	99

Figura 43 – CGM no EENE variando a frequência do <i>drive</i> com $N = 128$ e para algumas ordens de correlações. A fase ferromagnética é subextensiva com número de <i>spins</i> e a fase CTF é extensiva para todas as ordens de CGM.	101
Figura 44 – Escalonamento das CGM no EENE em função do número de partículas na fase CTF. As CGM são extensivas e aumentam na ordem de N com o aumento no número de partículas. Para números pequenos de partículas efeitos de tamanho finito relacionados ao número de partições no estado produto aparecem.	102
Figura 45 – Mapa de cores da matriz densidade na base de Dicke para o EENE na fase ferromagnética, variando os valores de <i>drive</i> até a transição de fase.	103
Figura 46 – Mapa de cores da matriz densidade na base de Dicke para o EENE na fase CTF com $\omega_0 = 2$ para diferentes números de partículas. Conforme aumentamos o número de partículas, mais próxima de uma matriz diagonal o estado se aproxima. Porém, mesmo para valores maiores de N apresenta um pouco de coerência nas diagonais secundárias.	104
Figura 47 – Mapa de cores da matriz densidade na base de Dicke para o EENE na fase CTF $\omega_0 = 500$ para $N = 850$. A matriz densidade se torna um matriz diagonal com valores dos elementos da diagonal iguais. .	105
Figura 48 – IQF para o EENE variando o <i>drive</i> entre as duas fases do modelo e aumentando o número de partículas. Na fase ferromagnética, há emaranhamento genuíno 2-partido e na transição tem um pico de detecção de emaranhamento, apresentando até emaranhamento genuíno 5-partido para $N = 256$	106
Figura 49 – IQF na fase CTF variando o número de partículas e o <i>drive</i> aplicado. Para todos os valores de <i>drive</i> a IQF diminui numa taxa semelhante com o aumento do número de partículas, a IQF é subextensiva nessa fase.	107

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Ranqueamento de alguns estados através do <i>weaving</i> (W_S) com peso $\omega_k = k - 1$ para distinguir a distribuição de correlações.	44
Tabela 2 – Expoentes críticos para diferentes valores de k das CGM (S^k vs. h) através da TFQ de segunda ordem no modelo LMG.	73

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AOG	Aproximação de Onda Girante
CGM	Correlações Genuínas Multipartidas
CPPT	Completamente Positivo que Preserva o Traço
CQD1	Computação Quântica Determinística com um qubit
CTF	Cristal Temporal de Fronteira
EENE	Estado Estacionário de Não Equilíbrio
ETF	Escalonamento de Tamanho Finito
IQF	Informação quântica de Fisher
LMC	Localização de Muitos Corpos
LMG	Lipkin-Meshkov-Glick
OLCC	Operações Locais e Comunicação Clássica
SETC	Simetria Espacial Translacional Contínua
SETD	Simetria Espacial Translacional Discreta
STTC	Simetria Temporal Translacional Contínua
STTD	Simetria Temporal Translacional Discreta
TFQ	Transição de Fase Quântica

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	19
1.1	COMO ESTÁ ORGANIZADA A TESE?	24
1.2	PUBLICAÇÕES	24
2	CORRELAÇÕES GENUÍNAS MULTIPARTIDAS	26
2.1	ENTROPIA	26
2.1.1	Entropia de von Neumann	26
2.1.2	Informação mútua quântica	29
2.1.3	Entropia relativa quântica	32
2.2	CORRELAÇÕES GENUÍNAS MULTIPARTIDAS	34
2.2.1	Hierarquia de correlações multipartidas	35
2.2.2	Correlações genuínas multipartidas	39
2.2.3	<i>Weaving</i>	43
2.3	NATUREZA DAS CORRELAÇÕES	44
2.3.1	Emaranhamento	45
3	O MODELO LIPKIN-MESHKOV-GLICK E A TRANSIÇÃO DE FASE QUÂNTICA	48
3.1	MODELO LIPKIN-MESHKOV-GLICK	48
3.1.1	Transição de fase quântica no modelo Lipkin-Meshkov-Glick	52
3.1.2	Matriz densidade reduzida e entropia de emaranhamento do estado fundamental do modelo Lipkin-Meshkov-Glick	54
3.1.3	Escalonamento de tamanho finito no modelo Lipkin-Meshkov-Glick	57
3.2	RESULTADOS E DISCUSSÕES	58
3.2.1	Correlações genuínas multipartidas na transição de fase quântica de segunda ordem do modelo Lipkin-Meshkov-Glick	58
3.2.1.1	Correlações genuínas k -partidas no estado fundamental do modelo Lipkin-Meshkov-Glick	59
3.2.1.2	Transição de fase quântica e correlações genuínas k -partidas	68
3.2.1.3	Análises dos expoentes com escalonamento de tamanho finito das correlações genuínas k -partidas	71
3.2.1.4	<i>Weaving</i> e transição de fase quântica no estado fundamental do modelo Lipkin-Meshkov-Glick	74
4	CRISTAIS TEMPORAIS DE FRONTEIRA	77
4.1	CRISTAIS TEMPORAIS DE FRONTEIRA	77
4.1.1	Cristais temporais	77
4.1.2	Cristais temporais de fronteira	79
4.2	RESULTADOS E DISCUSSÕES	89

4.2.1	Correlações em cristais temporais de fronteira	89
4.2.1.1	Dinâmica	89
4.2.1.1.1	<i>Correlações genuínas multipartidas</i>	<i>89</i>
4.2.1.1.2	<i>Informação quântica de Fisher</i>	<i>95</i>
4.2.1.2	Estado estacionário de não equilíbrio	99
4.2.1.2.1	<i>Correlações genuínas multipartidas</i>	<i>100</i>
4.2.1.2.2	<i>Informação quântica de Fisher</i>	<i>105</i>
5	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS	108
	Bibliografia	111
	APÊNDICE A – CORRELAÇÕES GENUÍNAS MULTIPARTIDAS PARA ALGUNS ESTADOS COM QUATRO PARTÍCULAS	123

1 INTRODUÇÃO

Saber como sistemas de muitos corpos estão correlacionados é importante para detectar e caracterizar as transições de fases e também, no caso de correlações quânticas, para realização de tarefas quânticas [1, 2]. O conhecimento de como duas partes do sistema estão correlacionadas nos fornece preciosa informação, como quantidade de recurso e fases de sistemas, porém, algo mais difícil e mais informativo é saber como grupos quaisquer de k -partículas estão correlacionados. Com isso sabemos, por exemplo, como se comporta cada grupo de partículas do sistema durante a transição e o quanto de correlação há nessas k -partículas. Outro fator importante de se conhecer sobre as correlações presentes no sistema é sua natureza, se é de origem clássica ou quântica, e se é quântica, se há emaranhamento nesses grupos de k -partículas, pois emaranhamento é um importante recurso em tarefas quânticas [1]. Com essas questões em mente sobre correlações, o modelo LMG e o CTF serão estudados na tese.

Correlações são relações estatísticas obtidas entre variáveis pertencentes a um fenômeno observado, por exemplo, para um caso simples, podemos dizer que as horas de estudo estão correlacionadas com a nota na prova. Quanto maior o tempo de estudo, maiores as notas tendem a ser. Assim, há uma correlação positiva. Em sistemas de muitos corpos, precisamos conhecer as correlações, pois com acesso somente às partes individuais do sistema, não sabemos como são as propriedades globais do sistema. Ainda assim, com o conhecimento das correlações, não sabemos como é a forma completa do estado quântico. Porém, se temos informação de como as partes estão "ligadas", isso diferencia fases e a transição nas TFQ. Da mesma forma, imaginemos a situação hipotética em que pudéssemos ver em uma construção somente um tijolo por vez, não saberíamos se estão ligados ou não, ou se pertencem algum tipo de construção. O tijolo pode ser parte de um muro, um arco, uma casa e a forma de cada construção depende da relação, ligações entre os tijolos. Num sistema físico, com acesso a como estão correlacionadas as partes e com medidas de observáveis, temos uma descrição melhor de como é o estado quântico estudado. As TFQs são mudanças que ocorrem no estado fundamental do sistema a zero kelvin de temperatura variando algum parâmetro de controle físico como, por exemplo, pressão ou campo magnético [3]. As mudanças são devidas às flutuações quânticas e às correlações complexas entre os constituintes microscópicos do sistema, assim, medidas de correlações são úteis no estudo desse processo.

Em transições de fase clássica e quântica ocorre a divergência do comprimento de correlação ξ no ponto crítico [4], embora na TFQ o análogo ao comprimento de correlação seja o inverso do gap de energia entre o estado fundamental e estados excitados [3, 5]. Nos anos 2000, acreditava-se ser a TFQ de característica puramente

quântica e o emaranhamento responsável pelas correlações de longo alcance [6]. De maneira análoga, pensava-se que na transição poderia ser que o comprimento de emaranhamento também fosse divergente. Em 2002 já surgem trabalhos com estudo de emaranhamento em sistemas de *spins* como modelo de Ising e XY, nos quais são realizados escalamento do emaranhamento e comparação com limite termodinâmico [4]. Alguns trabalhos mostraram que o emaranhamento entre dois sítios calculado com a concorrência [7] é de curto alcance na transição [4, 8]. Enquanto que mais tarde define-se comprimento de emaranhamento e mostra-se que é divergente na transição de fase para sistemas de *spins* [9]. Também mostra-se que emaranhamento multipartido apresenta um pico na transição de fase e que o comprimento de emaranhamento diverge sendo metade do comprimento de correlação para sistema de spin XY [10, 11]. Além disso, por ter caráter universal, algumas propriedades do sistema na transição são invariantes, dependendo somente da dimensionalidade do sistema e simetrias. Exponentes críticos podem ser utilizados para determinar o comportamento do parâmetro de ordem no ponto crítico. Para alguns modelos de *spins* (XY e Ising) mostrou-se que estão na mesma classe de universalidade [12]. Portanto, é bem conhecido na literatura o papel do emaranhamento na TFQ e seu caráter divergente no ponto crítico para alguns modelos e medidas de emaranhamento. Trabalhos mostram que o emaranhamento medido de diversas formas, com concorrência [4, 8, 13], emaranhamento de formação [14], entropia de emaranhamento [15], emaranhamento multipartido global [10, 11, 16] e negatividade [17] apresentam um pico na transição.

Na mesma época dos primeiros estudos sobre emaranhamento em TFQ, surgem trabalhos definindo outros tipos de correlações quânticas, além do emaranhamento, como por exemplo a discórdia quântica, um tipo de correlação presente em mais estados quânticos [18, 19]. Discórdia quântica pode ser pensada de duas formas: quando baseada em medida, mede a informação mútua que não é acessível localmente em um sistema multipartido [18] e quando baseada em distância, mede, através de minimização sobre projetores, quão distante está um estado do conjunto de estados clássicos [20, 21]. Por volta de 2010, percebeu-se que a discórdia quântica também assinala a transição de fase [13, 22–25], e se espalha no ponto crítico linearmente com o número de partículas [2]. Para além da discórdia quântica, existe a coerência¹, um tipo de correlação quântica mais geral ainda que também pode detectar TFQ e tem atraído interesse recentemente [26–31].

Na informação quântica, correlações quânticas podem ser utilizadas como recursos para diversas tarefas, por exemplo, o emaranhamento pode ser recurso em computação quântica [1], teleporte quântico [1], correção de erros [32], metrologia quântica [33], entre outras tarefas quânticas. Por volta dos anos 2000, notou-se que com estados puros o emaranhamento é necessário para o speed-up de alguns algorit-

¹ Não estamos levando em conta a coerência presente em um único *spin*, por exemplo.

mos quânticos, como o algoritmo de Shor e o de Grover [34–36]. Porém, para estados mistos não é claro se é necessário ou não a presença de emaranhamento para o *speed-up* [36]. Por outro lado, em alguns protocolos quânticos a presença de discórdia quântica pode ser importante recurso, como no modelo da Computação Quântica Determinística com um qubit (CQD1) [21, 37] e para preparação remota de estados quânticos [38]. Recentemente, surgiu um trabalho na literatura sugerindo a possibilidade de transferência de calor de uma fonte fria para quente com uso de correlação quântica [39], sendo mais uma forma de aplicação dessas correlações em máquinas térmicas quânticas. Portanto, é interessante saber se nos sistemas estudados na tese há correlação não-clássicas, e inclusive saber quantas partículas exatamente possuem essa correlação.

Apesar de grandes avanços no estudo de correlações quânticas, nosso conhecimento ainda é limitado para correlações além das bipartidas, pois com o aumento do número de partes a serem calculadas a correlação a complexidade do problema cresce rapidamente. Por exemplo, só considerando as possíveis formas de distribuir em 3 partições 20 partículas podemos fazer de $\binom{19}{2} = 171$ formas, sem contar as formas de permutações das partículas dentro de cada partição. Caso considerássemos as permutações para um caso de duas partições iguais com dez partículas em cada, já teríamos $\binom{20}{10}/2 = 184756$ formas de fazer isso para partículas distinguíveis. Assim, vemos que é uma tarefa que se torna impraticável devido ao grande número de partições que devem ser levadas em conta e formas de organizar as partículas nas partições, mesmo para sistemas de poucas partículas. Além disso, no caso das CGM temos dificuldades para construir medidas dessas correlações [40]. Recentemente, uma medida formal e consistente baseada em entropia relativa foi proposta por Girolami *et al.* [41]. Com essa medida é possível saber o quanto de correlações genuínas k -partidas possui um sistema de N partículas para qualquer $2 \leq k \leq N$, quantificando tanto correlações clássicas e quânticas juntas na mesma medida. Um estado possui correlações genuínas k -partidas se pode ser representado como estado produto no qual as partições possuem até k -subsistemas correlacionados. Convém ressaltar que as correlações genuínas k -partidas capturam as correlações presentes somente nas partições com k -subsistemas, de forma que nessas partições todos os subsistemas estão correlacionados entre si. Além disso, dentro de cada grupo de k -subsistemas não há estados produto em qualquer corte bipartido [40], por isso que as correlações são chamadas de genuínas². A consistência da medida de CGM[41] é devida a esta obedecer os critérios para medidas de correlações N -partidas propostos por Bennett *et al.* [40] que foram generalizados para o caso das correlações k -partidas. A medida

² Na literatura é comumente utilizada a palavra "genuína" em emaranhamento para estados mistos nos quais todas as partículas estão emaranhadas, possui emaranhamento genuíno N -partido, que não pode ser produzido por Operações Locais e Comunicação Clássica (OLCC) sem o uso de estado emaranhado multipartido [33, 42].

de correlações feita através da entropia relativa simplifica os cálculos [40, 43] e quando há simetria por troca de partículas no sistema, simplifica ainda mais o cálculo das correlações.

O primeiro modelo que será analisado nesta tese com as CGM é o modelo LMG. O modelo LMG surgiu na física nuclear para descrever transição de fase dentro do núcleo dos átomos [44–46], porém, com o passar dos anos esse modelo tem sido utilizado como *toy model* em outras áreas da física, como na mecânica estatística [47–49] e informação quântica [15, 50–55], entre outras aplicações. Esse modelo, consiste de um sistema fermiônico de *spin* $1/2$ de dois níveis N degenerado. Neste trabalho, o modelo será visto na forma de *spins* dispostos no plano anisotrópico $x - y$, com campo magnético sendo aplicado transversalmente ao plano, tanto o campo magnético quanto o fator de anisotropia podem ser variados e essa variação pode ocasionar TFQ no sistema. Devido à aplicação do campo magnético sobre o sistema, os *spins* se alinham ao campo, de modo que para um valor crítico do campo ocorre TFQ no sistema. No modelo de LMG, alguns trabalhos na literatura estudaram a TFQ através de correlações quânticas como parâmetro de ordem [13, 15, 23, 50–62]. Quase todos os trabalhos calculam correlações quânticas bipartidas, ou calculam emaranhamento multipartido, sem calcular emaranhamento genuíno k -partido [41]. Em sistemas que possuem transição de fase de segunda ordem, ou contínuas, algumas grandezas no ponto crítico se comportam com uma lei de potência que podem ser descritas por expoentes críticos. Para calcular esses expoentes podemos utilizar o ETF, um método de obter uma estimativa dos expoentes críticos em sistemas com número de partículas grandes, mas finitos, sem precisar estar no limite termodinâmico. A transição de fase e ETF no modelo de LMG já foram estudados por muitos autores na área de informação quântica. A transição de fase foi estudada através do emaranhamento [15, 50–57] e outras correlações [13, 23, 58–62] e o ETF por Ref. [13, 54, 55, 57, 58, 60–62]. Apesar desses trabalhos, não se tem estudos sobre correlações genuínas k -partidas. Através da proposta de Girolami *et al.* [41] para o cálculo das CGM, fomos capazes de calcular correlações genuínas k -partidas, mostrar que as correlações assinalam a transição de fase de segunda ordem e extraímos os expoentes críticos através de análises ETF no modelo LMG.

O outro modelo estudado com as CGM na tese é o CTF, que pelo nome podemos dizer que é um cristal temporal que acontece na fronteira do sistema. Porém, antes de explicarmos o que é um CTF é importante definir cristais temporais. Cristais temporais são cristais que possuem uma estrutura bem organizada, rígida e persistente na dimensão temporal. Os cristais espaciais quebram espontaneamente Simetria Espacial Translacional Contínua (SETC), de forma que apresentam um estrutura espacial com Simetria Espacial Translacional Discreta (SETD), são padrões que se repetem na dimensão espacial. Nos cristais temporais, as repetições de padrões acontecem no

tempo. Por exemplo, o cristal pode ficar oscilando entre dois estados durante o passar do tempo. Contudo, essa oscilação não é igual à oscilação imposta ao sistema por um pulso de laser como *drive*, por exemplo. Além disso, devido às correlações de longo alcance, o sistema permanece oscilando indefinidamente no tempo no limite termodinâmico, caracterizando uma cristalização no tempo, por isso o nome cristais temporais. A ideia dos cristais temporais quânticos surgiu em 2012 com Wilczek [63]. No entanto, sua ideia de Cristal temporal com estados fundamentais em um anel bosônico, no qual é aplicado um fluxo magnético e os bósons formariam pares que rotacionam para sempre, foi demonstrada ser impossível através de um teorema *no-go* [64]. Após isso, mostrou-se ser impossível gerar cristais temporais em equilíbrio térmico em hamiltonianos sem correlações de longo alcance [65]. Mesmo com esses impedimentos, buscou-se propostas e aplicações experimentais bem sucedidas de cristais temporais em sistemas fora do equilíbrio ou com correlações de longo alcance [66–75]. Os cristais temporais realizados até então eram discretos, quebravam Simetria Temporal Translacional Discreta (STTD). Ou seja, o hamiltoniano possui uma simetria discreta no tempo, dada pelo pulso do *drive*, e o estado do sistema possui uma simetria diferente. Geralmente, o *drive* oscila num período T e o estado do sistema em $2T$, em sistemas de dois níveis, podendo oscilar em $3T$ se for um sistema de três níveis [76].

Os CTFs surgem com uma ideia dos cristais temporais que acontecem na fronteira do sistema e quebram Simetria Temporal Translacional Contínua (STTC) [77]. O sistema global, volume e fronteira, é independente do tempo, mas a fronteira quebra STTC no limite termodinâmico, apresentando um EENE³ oscilatório. Como característica de quebra STTC o EENE oscila numa frequência que é incomensurável em relação à frequência do *drive*. Na Figura 1, é ilustrado um CTF em sistemas de *spins*, após aplicar o traço no banho de osciladores harmônicos do volume, a fronteira oscila com rigidez, persistência e numa frequência diferente do *drive* no limite termodinâmico.

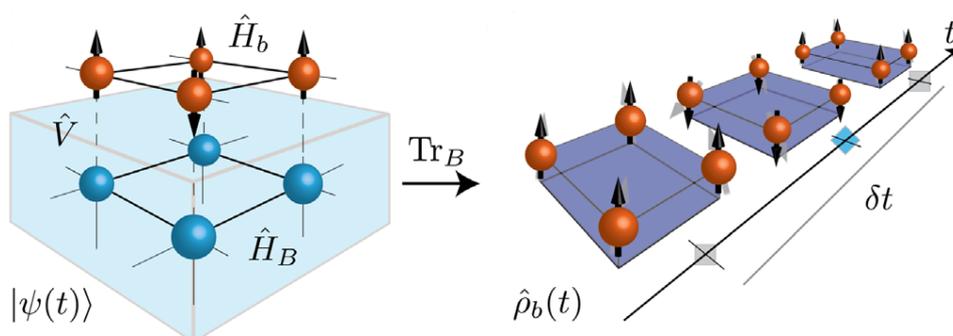


Figura 1 – Esquema exemplificando a ocorrência de CTF a partir de cadeias de *spins* bidimensionais. Figura retirada de [77].

³ O EENE é um estado estacionário que não obedece o balanço detalhado, mas o balanço circular, precisando assim de uma força externa de *drive* e ser aberto para o ambiente [78]. A energia do *drive* é balanceada com a energia de dissipação [79].

Nos CTFs fez-se estudos generalizando a ideia para d -níveis [80], bem como análise de correlações mostrando que nos CTFs o EENE apresenta correlações que diferem de estados estacionário clássicos que operam em ciclos e que é realmente uma fase da matéria [81]. Recentemente, um modelo de CTF foi realizado experimentalmente [82]. Entretanto, não há estudos com as CGM e sobre emaranhamento genuíno k -partido nos CTFs, como é parte do propósito da tese.

1.1 COMO ESTÁ ORGANIZADA A TESE?

- Capítulo 2 - Apresentamos as CGM, passando pela definição de entropia de Shannon e von Neumann, informação mútua quântica e entropia relativa quântica. Apresentamos também um estudo breve sobre a natureza das correlações, passando por emaranhamento, discórdia quântica e IQF, de forma a melhor compreender os capítulos posteriores.
- Capítulo 3 - Estudamos o modelo LMG na forma de cadeia de *spins* com olhar da informação quântica e a TFQ de segunda ordem presente no modelo, e também como é feito o ETF no modelo LMG na tese. Apresentamos os resultados dos cálculos das CGM no estudo da TFQ e dos cálculos dos expoentes críticos.
- Capítulo 4 - Descrevemos brevemente um exemplo de cristal temporal discreto e o CTF com mais detalhes. Calculamos as CGM no CTF nas duas fases do modelo e mostramos que no limite termodinâmico teremos um CTF. Ainda nesse sistema, calculamos IQF como testemunha de emaranhamento genuíno k -partido nas duas fases do modelo.
- Capítulo 5 - Apresentamos as conclusões e perspectivas.

1.2 PUBLICAÇÕES

Na tese

- Antônio C. Lourenço, Susane Calegari, Thiago O. Maciel, Tiago Debarba, Gabriel T. Landi e Eduardo I. Duzzioni. “Genuine multipartite correlations distribution in the criticality of the Lipkin-Meshkov-Glick model”. Em: Phys. Rev. B 101 (5 fev. de 2020), p. 054431.
- Antônio C. Lourenço, Luis Fernando dos Prazeres, Thiago O. Maciel, Fernando Iemini e Eduardo I. Duzzioni. “Genuine multipartite correlations in a boundary time crystal”. Em: Phys. Rev. B 105 (13 abr. de 2022), p. 134422.

Fora da tese

- Susane Calegari, Antônio C. Lourenço, Gabriel T. Landi e Eduardo I. Duzzioni. “Genuine multipartite correlations in Dicke superradiance”. Em: Phys. Rev. A 101 (5 mai. de 2020), p. 052310.

2 CORRELAÇÕES GENUÍNAS MULTIPARTIDAS

Neste capítulo, apresentaremos a medida de correlação genuína nomeada como CGM de Girolami *et al.* [41], a qual será utilizada para o cálculo das correlações genuínas k -partidas no modelo LMG e nos CTF. Definiremos também a entropia de von Neumann, informação mútua quântica e entropia relativa quântica, que serão úteis para definirmos correlações genuínas k -partidas. Apresentaremos também o *weaving*, conceito introduzido por Girolami *et al.* [41], utilizado para classificar os estados que possuem diferentes tipos de padrões de correlações. Além disso, na seção da natureza das correlações será apresentado emaranhamento genuíno k -partido, um tipo especial de correlação quântica.

2.1 ENTROPIA

A entropia surge no contexto da termodinâmica e está relacionada com a segunda lei, a qual estabelece que é impossível realizar um processo cujo único efeito é fazer o calor fluir de um corpo frio para um quente [83]. Equivalente à segunda lei, o princípio do aumento da entropia afirma que a entropia de um sistema isolado termicamente nunca decresce, não se altera em processos reversíveis e aumenta em processos irreversíveis [83]. Clausius (1822-1888) cunhou o nome entropia, significando mudança, transformação [84]. Na época em que foi criada tinha um significado de desordem de um sistema, e ainda não se tinha um conhecimento atomístico na física e a matéria era vista como um continuum. Com o desenvolvimento da mecânica estatística e mecânica quântica e, posteriormente, informação quântica, o conceito de entropia e seu significado evoluiu. Na teoria de informação clássica e quântica, a entropia de uma distribuição de probabilidades quantifica o grau de incerteza sobre a distribuição ou o quanto de informação podemos ganhar sobre o sistema que possui uma dada distribuição de probabilidade [85]. Na teoria de informação clássica, a entropia é medida através de entropia de Shannon e sua correspondente quântica é a entropia de von Neumann. Nas distribuições de probabilidades clássicas não há superposição de estados possíveis para os eventos existentes, enquanto que no caso quântico, distribuições de probabilidades capturam superposição de estados.

2.1.1 Entropia de von Neumann

Antes de falarmos sobre entropia de von Neumann, vamos introduzir a entropia de Shannon para elucidar seu significado e utilizá-la em uma distribuição de probabilidade. No entanto, antes de tudo, precisamos definir variável aleatória e distribuição de probabilidade. Uma variável aleatória X representa os estados possíveis que a variável pode assumir, por exemplo para moedas, é tal que $X = \{cara, coroa\}$, $x_1 = cara$ e $x_2 =$

coroa. Associada a uma variável aleatória X existe uma distribuição de probabilidade $P(X)$ que representa a probabilidade de ocorrência de cada estado da variável aleatória. Por exemplo, para uma moeda viciada podemos ter $P(X) = \{p_1, p_2\} = \{1/4, 3/4\}$, assim, a probabilidade de obter cara é $P(X = x_1) = p_1 = 1/4$ e de obter coroa é $P(X = x_2) = p_2 = 3/4$. A entropia de Shannon mede a incerteza relacionada a uma distribuição de probabilidades clássica $P(X)$, e é definida como

$$H(X) := H(p_1, \dots, p_d) := - \sum_{i=1}^d p_i \log p_i, \quad (1)$$

em que p_i são os elementos do vetor da distribuição de probabilidade associada à variável aleatória X [85], sendo d a cardinalidade de X . Na tese, a base do logaritmo é dois, como sistema de qubits. A entropia de Shannon varia entre zero e $\log(d)$, zero para uma distribuição de probabilidade sem nenhuma incerteza, somente um evento é possível e $\log(d)$ para uma distribuição de probabilidade com incerteza máxima, onde todos os d eventos são igualmente prováveis. Por exemplo, para uma moeda não viciada temos uma distribuição de probabilidade $P(X_1) = \{1/2, 1/2\}$, para uma grande quantidade de lançamentos vamos obter aproximadamente metade das vezes cara e outra metade coroa. Nesse caso, vemos facilmente que a $H(X_1) = 1$. Temos total incerteza sobre o resultado de qual face da moeda irá cair ao lançá-la no ar. Caso a moeda fosse viciada e em 75% dos resultados caísse cara e 25% coroa, teríamos uma distribuição de probabilidade $P(X_2) = \{1/4, 3/4\}$ e entropia de Shannon igual a $H(X_2) = -1/4 \log(1/4) - 3/4 \log(3/4) \simeq 0.81$, ou seja, a incerteza não é máxima e esperamos cair mais vezes caras do que coroas. Quanto mais enviesada é a moeda menos incerteza temos sobre seu resultado.

De maneira similar, a entropia de von Neumann mede a incerteza ou quantidade de informação, clássica e quântica, que podemos ganhar a partir de um estado em um sistema quântico. A entropia de von Neumann é definida como

$$S(\rho) := - \text{Tr}(\rho \log \rho), \quad (2)$$

em que ρ é a matriz densidade do sistema. Na prática diagonalizamos a matriz densidade e se temos λ_i como autovalores da matriz $\rho = \sum_i \lambda_i |i\rangle\langle i|$, a entropia de von Neumann pode ser escrita como,

$$S(\rho) = - \sum_i (\lambda_i \log \lambda_i). \quad (3)$$

Essa forma que utilizamos para os cálculos [85], e quando representada assim a entropia de von Neumann torna-se a entropia de Shannon associada aos autovalores do estado ρ ,

$$S(\rho) = H(\{\lambda_i\}). \quad (4)$$

A entropia de von Neumann possui algumas propriedades, apresentaremos as seguintes:

- (i) É mínima para estados puros, máxima sobre distribuições de probabilidade uniforme e temos $0 \leq S(\rho) \leq \log(d)$. Para estados puros $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ a entropia é nula $S(\rho) = 0$, pois a matriz densidade ρ diagonalizada possui apenas um autovalor igual um e os restantes iguais a zero, assim $S(\rho) = -1 \log 1 = 0$. É sempre maior ou igual a zero, pois os autovalores são $0 \leq \lambda_i \leq 1$. Para distribuições uniformes todos os autovalores são iguais, $\lambda_i = 1/d$, como no caso clássico a entropia é máxima e igual a $S(\rho) = \log d$.
- (ii) É invariante por transformações unitárias, ou seja, $S(\mathbb{U}\rho\mathbb{U}^\dagger) = S(\rho)$, em que \mathbb{U} é uma transformação unitária. Essa propriedade vem dos autovalores de uma matriz serem independentes da base e a entropia de von Neumann depende apenas dos autovalores.
- (iii) É côncava, dado $\alpha_i \geq 0$ e $\sum_i \alpha_i = 1$, temos

$$S\left(\sum_i \alpha_i \rho_i\right) \geq \sum_i \alpha_i S(\rho_i).$$

Ou seja, quando há incerteza de origem clássica sobre o estado do sistema isso também aumenta a entropia de von Neumann. A incerteza é devido a não sabermos exatamente quais estados o sistema preparado pode estar, essa incerteza é representada por α_i .

- (iv) É subaditiva, para um estado bipartido qualquer vale a inequação

$$S(\rho_{AB}) \leq S(\rho_A) + S(\rho_B).$$

Existe mais informação, menos incerteza, no todo do que na soma das partes de uma sistema bipartido. A igualdade vale para dois estados independentes, ou seja, $\rho_{AB} = \rho_A \otimes \rho_B$.

Uma propriedade particularmente importante da entropia de von Neumann para entendermos as CGM é a aditividade sobre o produto tensorial de matrizes

$$S(\rho_A \otimes \rho_B) = S(\rho_A) + S(\rho_B). \quad (5)$$

Para demonstrar essa propriedade vamos utilizar que $\log(A \otimes B) = \log(A) \otimes I_d + I_d \otimes \log(B)$

$\log(B)$ assim

$$\begin{aligned}
S(\rho_A \otimes \rho_B) &= -\text{Tr}((\rho_A \otimes \rho_B) \log(\rho_A \otimes \rho_B)) \\
&= -\sum_{m,n} \langle a_m | \langle b_n | \rho_A \otimes \rho_B \log(\rho_A \otimes \rho_B) | b_n \rangle | a_m \rangle \\
&= -\sum_{m,n} \langle a_m | \langle b_n | \rho_A \otimes \rho_B \log(\rho_A) | b_n \rangle | a_m \rangle \\
&\quad - \sum_{m,n} \langle a_m | \langle b_n | \rho_A \otimes \rho_B \log(\rho_B) | b_n \rangle | a_m \rangle \\
&= -\sum_m \langle a_m | \rho_A \otimes \sum_n \langle b_n | \rho_B | b_n \rangle \log(\rho_A) | a_m \rangle \\
&\quad - \sum_n \langle b_n | \sum_m \langle a_m | \rho_A | a_m \rangle \otimes \rho_B \log(\rho_B) | b_n \rangle \\
&= -\sum_m \langle a_m | \rho_A \log(\rho_A) | a_m \rangle - \sum_n \langle b_n | \rho_B \log(\rho_B) | b_n \rangle \\
&= -\text{Tr}_A(\rho_A \log(\rho_A)) - \text{Tr}_B(\rho_B \log(\rho_B)) = S(\rho_A) + S(\rho_B),
\end{aligned} \tag{6}$$

onde foi utilizado que o traço de uma matriz densidade é igual um. Para saber mais sobre propriedades de entropia de Shannon e de von Neumann veja o capítulo 11 de livro "Quantum computation and quantum information" [85].

2.1.2 Informação mútua quântica

A informação mútua quântica, de agora em diante mencionada somente como informação mútua, mede toda a correlação comum entre dois subsistemas ou mais, ela captura as correlações de origem clássica e quântica existentes. Para dois subsistemas a informação mútua é definida como

$$I(\rho_{AB}) := S(\rho_A) + S(\rho_B) - S(\rho_{AB}), \tag{7}$$

a qual é uma extensão da informação mútua clássica, a diferença é que na clássica calculamos entropias de Shannon de distribuições de probabilidade clássicas na equação (7).

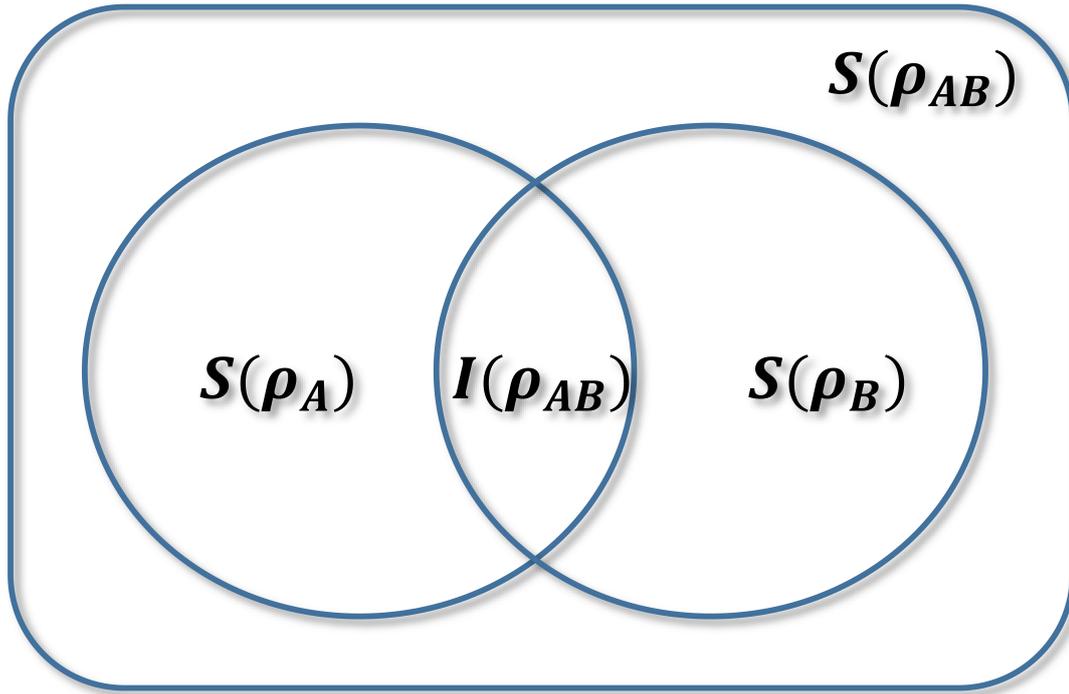


Figura 2 – Informação mútua de dois subsistemas é dada pela intersecção no diagrama de Venn das informações contidas nos dois estados do sistema, representando a informação (correlação) que têm em comum.

Quando ρ_{AB} é um estado fatorável $\rho_{AB} = \rho_A \otimes \rho_B$, pela propriedade de aditividade da entropia de von Neumann, a informação mútua desse estado resulta em

$$\begin{aligned} I(\rho_{AB}) &= S(\rho_A) + S(\rho_B) - S(\rho_{AB}) \\ &= S(\rho_A) + S(\rho_B) - (S(\rho_A) + S(\rho_B)) = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Isso mostra que para um sistema fatorável os subsistemas não compartilham nenhuma correlação, seja ela clássica ou quântica. Para um estado clássico maximamente correlacionado de duas partículas dado pela matriz densidade

$$\rho_{AB} = \frac{1}{2}(|00\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11|),$$

esse estado carrega incerteza sobre seus possíveis estados, com 50% de chance de estar em cada um dos dois estados, assim possui entropia igual a $S(\rho_{AB}) = 1$. As matrizes densidades reduzidas desse estado são iguais a

$$\rho_A = \rho_B = \frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|),$$

são maximamente mistas e a incerteza sobre seu estado é máxima, como na distribuição de probabilidade de lançamento de uma moeda não enviesada, o que resulta em $S(\rho_A) = S(\rho_B) = 1$. Com isso, a informação mútua desse estado é

$$I(\rho_{AB}) = S(\rho_A) + S(\rho_B) - S(\rho_{AB}) = 1 + 1 - 1 = 1.$$

Para um estado puro maximamente emaranhado a informação mútua é máxima. Por exemplo, para o estado de Bell puro de duas partículas

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle),$$

com matriz densidade igual a

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| = \frac{1}{2}(|00\rangle\langle 00| + |00\rangle\langle 11| + |11\rangle\langle 00| + |00\rangle\langle 00|),$$

este estado possui uma forma diagonal com apenas uma autovalor igual a um, e toda informação sobre esse estado é dada, não temos incerteza sobre qual estado se encontra. Assim, a entropia é igual $S(\rho_{AB}) = 0$. Aplicando o traço parcial, as matrizes densidade reduzidas são

$$\rho_A = \rho_B = \frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|),$$

as quais representam estados maximamente mistos, não temos nenhuma informação em qual estado estão, então $S(\rho_A) = S(\rho_B) = 1$. Ou seja, fornece a entropia de emaranhamento que é igual a um, o conhecimento de partes do sistema não nos dá informação sobre o estado global emaranhado, mesmo sendo totalmente conhecido o estado puro. A informação mútua do estado de Bell é

$$I(\rho_{AB}) = S(\rho_A) + S(\rho_B) - S(\rho_{AB}) = 1 + 1 - 0 = 2.$$

Nesse estado emaranhado toda informação que contém é comum entre os dois subsistemas, ou seja, estão maximamente correlacionados. Como a informação mútua captura correlações clássicas e quânticas, não sabemos se a $I(\rho_{AB}) = 2$ vem toda de correlação do tipo emaranhamento. No entanto, de acordo com Groisman e colaboradores [86] o estado de Bell possui um bit de emaranhamento puro e um bit de correlação clássica secreta, que são necessários para transformar em um estado sem correlação nenhuma. Assim, se pudéssemos comparar as quantificações de correlação dada pela entropia de emaranhamento e a informação mútua, o estado de Bell possui emaranhamento igual um, máximo, porém a informação mútua é igual a dois, existe uma quantidade de correlação a mais devido à correlação clássica. O mesmo, informação mútua máxima, acontece para o estado

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2}(|100\rangle + |010\rangle + |001\rangle + |111\rangle),$$

que é um estado tipo GHZ¹ [15], essa forma de estado representa o estado fundamental do modelo LMG, conforme será visto no capítulo 3. O estado Greenberger-Horne-Zeilinger (GHZ) [88–90] para três partículas corresponde a $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle + |111\rangle)$.

¹ É um estado tipo GHZ porque possui *three-tangle* não nulo [87].

2.1.3 Entropia relativa quântica

A entropia relativa para distribuições de probabilidades clássicas pode ser considerada como uma medida do quão diferentes são duas distribuições de probabilidades, de forma que se são iguais, a entropia relativa é igual a zero e quanto mais "distantes" estão uma da outra maior a entropia relativa. A entropia relativa é definida como

$$H(p||q) := \sum_i p_i \log p_i - p_i \log q_i = \sum_i p_i \log \frac{p_i}{q_i}, \quad (9)$$

onde p e q são distribuições de probabilidades clássicas [91]. Apesar de satisfazer algumas propriedades de medidas de distâncias, a entropia relativa não é simétrica e não satisfaz a desigualdade triangular. Por exemplo, para distribuições de probabilidades das moedas $P(X_1) = \{1/2, 1/2\}$ e $P(X_2) = \{3/4, 1/4\}$ a entropia relativa vale

$$H(p_{x_1}||q_{x_2}) = \sum_x p_{x_1} \log \frac{p_{x_1}}{q_{x_2}} = \frac{1}{2} \log \frac{1/2}{3/4} + \frac{1}{2} \log \frac{1/2}{1/4} \simeq 0.2075, \quad (10)$$

enquanto que a entropia relativa de

$$H(q_{x_2}||p_{x_1}) = \sum_x q_{x_2} \log \frac{q_{x_2}}{p_{x_1}} = \frac{3}{4} \log \frac{3/4}{1/2} + \frac{1}{4} \log \frac{1/4}{1/2} \simeq 0.188. \quad (11)$$

A diferença não é tão grande também porque as distribuições não são muito distantes, mas já para esse caso vemos que a entropia não é simétrica.

A entropia relativa quântica segue a mesma ideia de sua versão clássica e é definida como

$$S(\rho||\sigma) := \text{Tr}(\rho \log \rho) - \text{Tr}(\rho \log \sigma), \quad (12)$$

sendo igual ∞ quando o suporte de ρ tem intersecção não trivial com o núcleo de σ , ou seja, quando um ou mais autovalores λ_i diferentes de zero de ρ têm correspondentes autovalores $\mu_i = 0$ de σ , pois isso leva a $\lambda_i \log 0 := -\infty \rightarrow S(\rho||\sigma) := \infty$ [85]. Do mesmo modo que a sua versão clássica, a entropia relativa quântica pode ser pensada como uma medida de distância entre o estado ρ e σ , porém, novamente não possui todas as propriedades para induzir uma métrica, pois não é simétrica, ou seja, não temos em geral $S(\rho||\sigma) = S(\sigma||\rho)$ e não obedece a desigualdade triangular. Por isso, a entropia relativa quântica é considerada uma pseudo-distância. Mas ainda assim é útil para medirmos quão distintos são dois estados quânticos e, além disso, a entropia relativa quântica possui algumas propriedades para medidas de distância. Dentre as propriedades interessantes para medidas de distância, a entropia relativa quântica possui as seguintes [92]:

- (i) é não negativa para qualquer dois estados quânticos, ou seja, $S(\rho||\sigma) \geq 0$.
- (ii) É igual a zero se, e somente se, os estados quânticos forem iguais $S(\rho||\sigma) = 0 \Leftrightarrow \rho = \sigma$.

- (iii) É monotônica sobre mapas que preservam o traço e são completamente positivos (Completamente Positivo que Preserva o Traço (CPPT) em inglês), assim para um mapa CPPT Φ , vale a desigualdade $S(\rho||\sigma) \geq S(\Phi(\rho)||\Phi(\sigma))$.

Um mapa CPPT leva um estado quântico em outro estado quântico, fazendo os estados ficarem cada vez mais próximos, por isso, a distância fica igual ou cada vez menor sobre mapas desse tipo.

A entropia relativa quântica será a ferramenta fundamental para o cálculo das CGM, para entendê-la um pouco mais acrescentaremos um adendo sobre informação mútua e sua relação com a entropia relativa quântica. A informação mútua pode ser generalizada para mais de duas partes. No caso clássico, para definir a informação mútua para três ou mais partes será utilizada a entropia relativa clássica na forma $I(X_1, X_2, \dots, X_N) = H(p_{x_1, x_2, \dots, x_N} | p_{x_1} p_{x_2} \dots p_{x_N})$, onde p_{x_1, x_2, \dots, x_N} é a probabilidade conjunta de N partes das distribuição de probabilidades $P(X_i)$ e p_{x_i} é a probabilidade individual da i -ésima distribuição de probabilidade [92]. Pode ser feito o mesmo para o caso quântico, primeiramente para o caso de duas partes no sistema composto, por exemplo, para o estado $\rho = \rho_{AB}$, $\sigma = \rho_A \otimes \rho_B$, mostraremos que a informação mútua pode ser escrita através de entropia relativa quântica como $S(\rho_{AB}||\rho_A \otimes \rho_B)$. Pela definição de entropia relativa quântica

$$S(\rho||\sigma) = S(\rho_{AB}||\rho_A \otimes \rho_B) = -\text{Tr}(\rho_{AB} \log(\rho_A \otimes \rho_B)) - S(\rho_{AB}).$$

Calculando somente o primeiro termo, com o uso de $\log(A \otimes B) = \log(A) \otimes I_d + I_d \otimes \log(B)$

$$\begin{aligned} -\text{Tr}(\rho_{AB} \log(\rho_A \otimes \rho_B)) &= -\sum_{m,n} \langle a_m | \langle b_n | \rho_{AB} \log(\rho_A \otimes \rho_B) | b_n \rangle | a_m \rangle \\ &= -\sum_{m,n} \langle a_m | \langle b_n | \rho_{AB} \log(\rho_A) | b_n \rangle | a_m \rangle \\ &\quad - \sum_{m,n} \langle a_m | \langle b_n | \rho_{AB} \log(\rho_B) | b_n \rangle | a_m \rangle \\ &= -\sum_m \langle a_m | \sum_n \langle b_n | \rho_{AB} | b_n \rangle \log(\rho_A) | a_m \rangle \\ &\quad - \sum_n \langle b_n | \sum_m \langle a_m | \rho_{AB} | a_m \rangle \log(\rho_B) | b_n \rangle \\ &= -\sum_m \langle a_m | \rho_A \log(\rho_A) | a_m \rangle - \sum_n \langle b_n | \rho_B \log(\rho_B) | b_n \rangle \\ &= -\text{Tr}_A(\rho_A \log(\rho_A)) - \text{Tr}_B(\rho_B \log(\rho_B)), \end{aligned} \tag{13}$$

onde foi aplicado o traço parcial $\text{Tr}_{A(B)}(\rho_{AB})$ na equação acima, restando somente a matriz reduzida de cada subsistema ($\rho_{A(B)}$). Com isso, mostramos que

$$S(\rho_{AB}||\rho_A \otimes \rho_B) = S(\rho_A) + S(\rho_B) - S(\rho_{AB}). \tag{14}$$

Ou seja, a entropia relativa entre um sistema composto por duas partes e o produto tensorial das duas partes é igual à informação mútua. De outra forma, a distância do estado ρ_{AB} para o estado de duas partes totalmente independentes $\rho_A \otimes \rho_B$ é a informação mútua, se o estado ρ_{AB} é igual ao estado fatorável a informação mútua é zero e quanto mais distante está do estado fatorável mais informação mútua possui, ou mais correlacionadas estão as duas partes do sistema. Para três ou mais partes vale o mesmo, utilizando a generalização feita para o caso clássico, ou seja $\rho = \rho_{k_1 k_2 \dots k_N}$ e $\sigma = \rho_{k_1} \otimes \rho_{k_2} \otimes \dots \otimes \rho_{k_N}$, a informação mútua generalizada, também chamada de informação mútua multipartida [93, 94], é

$$S(\rho_{k_1 k_2 \dots k_N} || \rho_{k_1} \otimes \rho_{k_2} \otimes \dots \otimes \rho_{k_N}) = S(\rho_{k_1}) + S(\rho_{k_2}) + \dots + S(\rho_{k_N}) - S(\rho_{k_1 k_2 \dots k_N}), \quad (15)$$

em que k_i é a i -ésima parte do sistema composto de N partes. Assim, a entropia relativa quântica mede correlação entre sistemas de duas ou mais partes quando têm a forma de equação (15).

A entropia relativa quântica também pode ser utilizada juntamente com um processo de minimização para encontrar um estado mais próximo dentro de um conjunto de estados possíveis. Dependendo do conjunto de estados onde é feita a minimização o resultado calcula diferentes quantidades. Por exemplo, quando é feita a minimização da entropia relativa quântica sobre um conjunto convexo de estados σ que pertencem ao conjunto dos estados separáveis \mathcal{S} , da forma

$$E = \min_{\sigma \in \mathcal{S}} S(\rho || \sigma), \quad (16)$$

o resultado da minimização fornece a entropia relativa de emaranhamento. Ou ainda, para minimização feita no conjunto dos estados produtos \mathcal{P} , tal que

$$I = \min_{\sigma \in \mathcal{P}} S(\rho || \sigma), \quad (17)$$

a minimização resulta na informação mútua total [21]. Podemos ter outros conjuntos para fazer a minimização na entropia relativa quântica, como o conjunto de estados clássicos \mathcal{C} , onde a minimização da entropia relativa mede a discórdia quântica D , ou ainda se o conjunto é dos estados incoerentes \mathcal{I} a minimização mede a entropia relativa de coerência C [95, 96].

2.2 CORRELAÇÕES GENUÍNAS MULTIPARTIDAS

Com o que foi discutido até aqui, estamos aptos a definir correlações genuínas k -partidas através da entropia relativa quântica. É importante conhecer como subsistemas estão correlacionados e com as correlações genuínas k -partidas sabemos quanto de correlações existem devido aos grupos com k -subsistemas e são oriundas somente desses grupos, por isso o termo genuíno. Para definir correlações genuínas k -partidas, discutiremos primeiro hierarquia de correlações multipartidas.

2.2.1 Hierarquia de correlações multipartidas

Considere um sistema N -partido descrito pela a matriz densidade $\rho_N \in (\mathcal{H}_N = \mathcal{H}_{[1]} \otimes \mathcal{H}_{[2]} \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_{[N]})$, em que cada $\rho_j = \text{Tr}_{N/j}(\rho_N)$ é o estado do subsistema j e $\text{Tr}_{N/j}$ é o traço sobre todas as partições exceto a partição j , $\rho_j \in \mathcal{H}_j$. O índice j sozinho indica o número de subsistemas na partição, o índice $[j]$ é o j -ésimo subsistema. Notando que cada partição do sistema pode possuir mais de um subsistema, e isso será necessário para definirmos as correlações genuínas.

Considerando um sistema com m -partições $\{\mathcal{H}_{k_j}\}_{j=1}^m$ e que k_j denota o número de subsistemas em cada partição

$$\mathcal{H}_{k_j} = \{\mathcal{H}_{[1]}, \dots, \mathcal{H}_{[k_j]}\}, \quad k_j \leq k, \quad (18)$$

em que $\sum_{j=1}^m k_j = N$ e aqui $\mathcal{H}_{[i]}$ é um sistema de um qubit. As correlações presentes em \mathcal{H}_N dependem da estrutura tensorial do espaço de Hilbert-Schmidt induzido pela partição $\{\mathcal{H}_{[i]}\}$, isso é usualmente devido às restrições físicas próprias do sistema, como separação espacial.

As distribuições de probabilidades clássicas $p_{\alpha_1, \dots, \alpha_N}$ estão embutidas em matrizes densidades da forma

$$\sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_N} p_{\alpha_1, \dots, \alpha_N} |\alpha_1, \dots, \alpha_N\rangle \langle \alpha_1, \dots, \alpha_N|, \quad (19)$$

em que $\{\alpha_i\}$ são elementos de uma base ortonormal do espaço de Hilbert de cada subsistema $\mathcal{H}_{[i]}$. Como cada termo α_i não possui superposição de auto-estados, as probabilidades no estado da equação (19) são de origem somente clássica.

O número de partições tem uma relação direta de quão descorrelacionado um estado está, porém aqui para um dado estado levaremos em conta o número máximo de subsistemas (k) que uma ou mais partições possuem para definir hierarquia de correlações multipartidas. Dado um $1 \leq k \leq N$ definimos a partição $\tilde{P}_k = \sigma_{k_1} \otimes \dots \otimes \sigma_{k_m} \in \{\mathcal{H}_{k_1} \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_{k_m}\}$, em que cada cluster \mathcal{H}_{k_j} inclui no máximo k subsistemas [41], um estado desse tipo não possui correlações de ordem maiores do que k . Na partição \tilde{P}_k os estados σ_{k_i} são matrizes densidades reduzidas arbitrárias, sem necessidade de serem advindas de matrizes densidade reduzidas do estado ρ_N . Podemos então definir o conjunto de estados descorrelacionados genuínos para uma dada ordem maior do que k .

Definição 1 (estados produto genuínos k -partidos). *É definido um conjunto de estados que tem até k subsistemas como*

$$P_k := \left\{ \sigma_N = \bigotimes_{j=1}^m \sigma_{k_j}, \sum_{j=1}^m k_j = N, k = \max\{k_j\} \right\}, \quad (20)$$

em que σ_{k_j} é uma partição de k_j subsistemas, este conjunto contém todos os conjuntos $P_{k'}$ com $k' < k$, tal que $P_1 \subset P_2 \dots \subset P_{N-1} \subset P_N$.

Cada um desses conjuntos P_k engloba todos os $P_{k'}$ quando $k > k'$, pois um sistema que tem correlação máxima de ordem k pode ter correlações de ordens menores também, porém, não correlação de ordem maior. Isso forma um hierarquia de correlações multipartidas como ilustrado pela Figura 3.

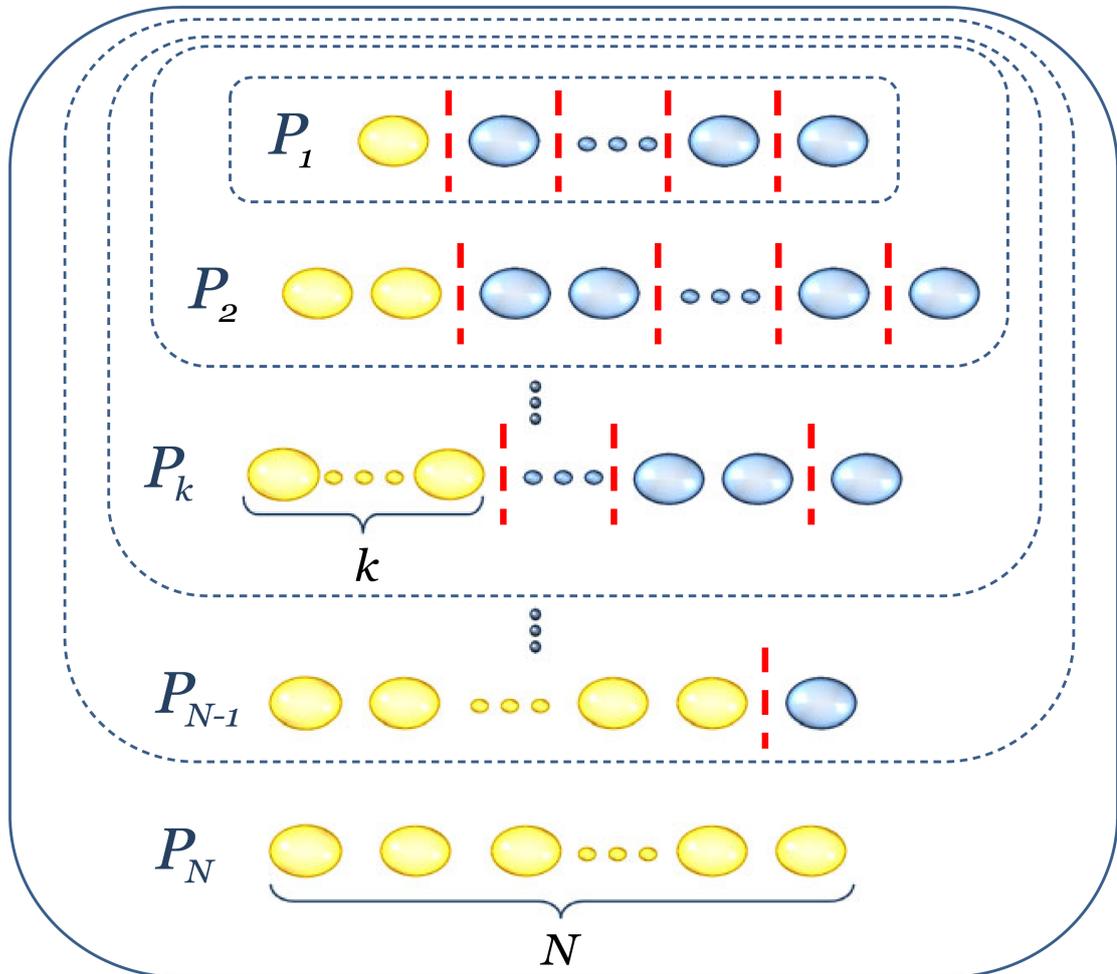


Figura 3 – Hierarquia de correlação multipartida para um sistema de N partículas, os conjuntos P_k , $k = 1, 2, \dots, N$, consistem dos estados que possuem correlações até ordem k . As esferas amarelas representam o maior subconjunto (k) da partição dada pelas linhas tracejadas vermelhas. A quantidade de correlações genuínas k -partidas no estado é a diferença entre a distância dos conjuntos P_{k-1} e P_k . Figura retirada de [41].

Para entender melhor o que são os estados produtos genuínos k -partidos apresentaremos um exemplo. Como ilustrado pela Figura 4, seja o número de subsistemas $N = 4$, o conjunto P_1 consiste dos estados produtos $\otimes_{j=1}^4 \sigma_{[j]}$. P_2 inclui P_1 , e também produtos da forma $\sigma_2 \otimes \sigma_2$, e suas permutações, e produtos da forma $\sigma_2 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_1$ e suas permutações. P_3 inclui P_2 e também produtos da forma $\sigma_3 \otimes \sigma_1$, e suas permutações. Por fim, P_4 contém P_3 e as matrizes densidades não fatoráveis σ_4 . Para um estado

com N subsistemas a cadeia total de estados produtos genuínos k -partidos leva a $P_1 \subset P_2 \dots \subset P_{N-1} \subset P_N$, como na Figura 3.

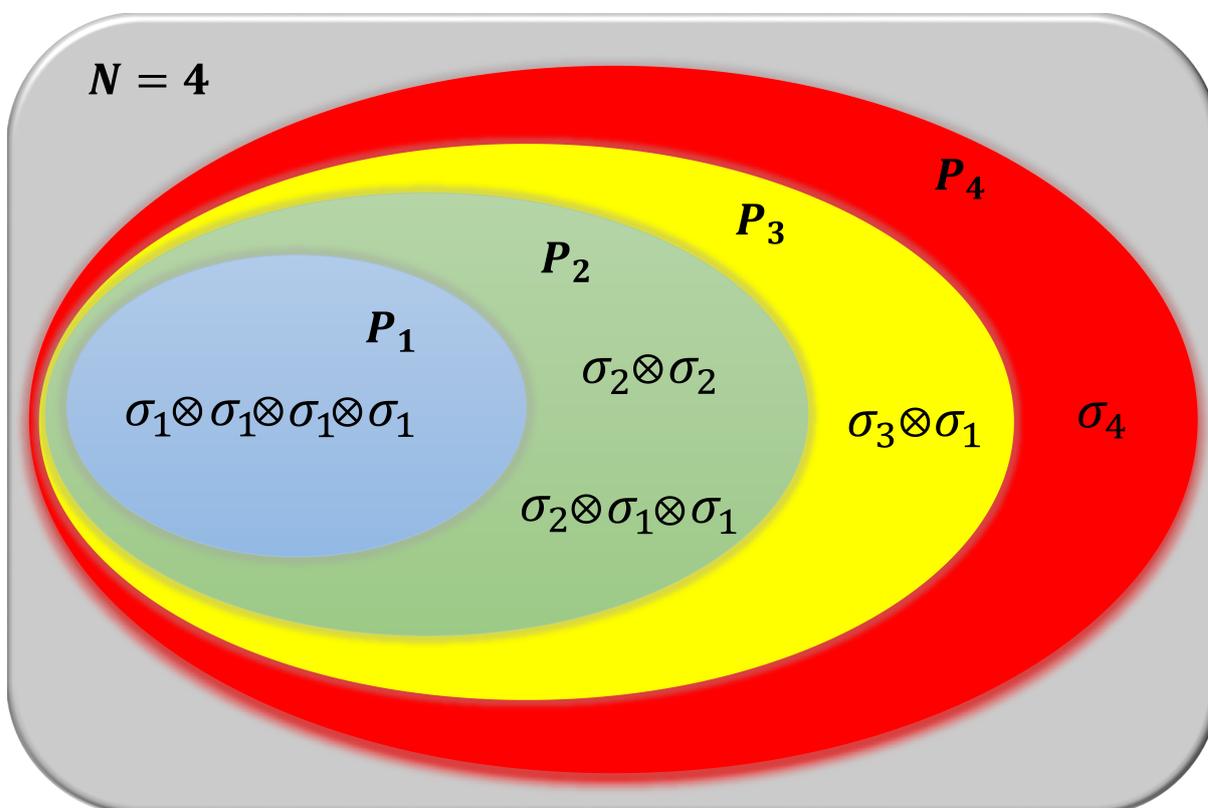


Figura 4 – Formas de estados produtos com $N = 4$, sem contar as permutações. Em P_1 existe somente uma possibilidade de estado produto, quatro partições com um subsistema cada (1|1|1|1, número '1' é um subsistema e '|' é produto tensorial). Em $P_2 - P_1$, em verde, existem duas formas de estados produtos, duas partições com dois subsistemas (2|2), ou três partições, uma com dois subsistemas e duas com um (2|1|1). Em $P_3 - P_2$, amarelo, há um estado produto da forma 3|1 e $P_4 - P_3$, vermelho, somente σ_4 não fatorável.

Ainda com o exemplo de quatro subsistemas para o conjunto P_2 e P_3 quando os subsistemas são distinguíveis existem várias maneiras de agrupar os subsistemas em cada partição, ou seja, várias permutações para os casos $\sigma_2 \otimes \sigma_2, \sigma_2 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_1 \in P_2$ e $\sigma_3 \otimes \sigma_1 \in P_3$. Para P_2 e $N = 4$ no caso de duas partições com dois subsistemas cada (2|2) há $\binom{4}{2}/2 = 3$ formas de fazer isso, como na Figura 5. Caso fosse $N = 20$ em duas partições com dez subsistemas cada (10|10) já teríamos $\binom{20}{10}/2 = 184756$ possibilidades. Ainda para P_2 e $N = 4$ e três partições (2|1|1) há seis possibilidades, caso fosse $N = 20$ já existem 28 formas só de fazer as três partições e, por comparação, para partições como 18|1|1 temos 190 possibilidades. Conforme N aumenta as diferentes quantidades de partições que podem ser feitas aumentam e as formas de agrupar os subsistemas mais ainda. Se tivéssemos $N = 30$ e $k = 15$ para duas partições do tipo (15|15) o número de possibilidades seria $\binom{30}{15}/2 = 10341168$. Essa digressão é apenas para mostrar que aumentando em poucas dezenas o número

de subsistemas a quantidade de estados em P_k aumenta na ordem de um problema combinatório, com vários binomiais com números muito grandes.

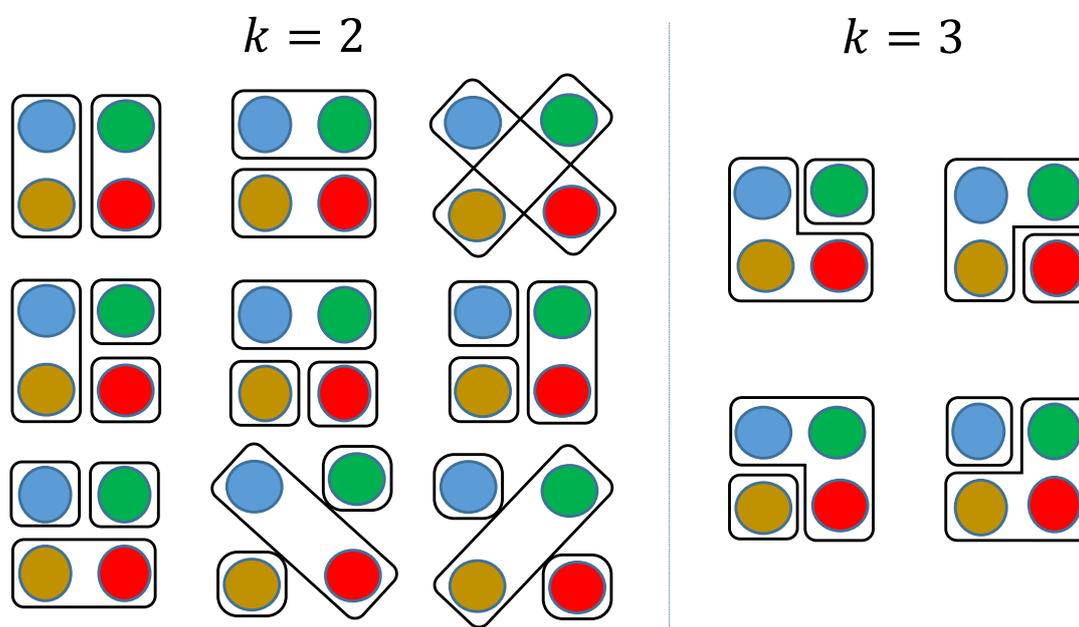


Figura 5 – Estados produtos para $k = 2$ e $k = 3$ para subsistemas distinguíveis. São mostradas todas as permutações possíveis para os estados produtos possíveis de formar com dado k e $N = 4$.

As permutações que são levadas em conta nos estados produtos só são necessária quando temos subsistemas distinguíveis, caso tenhamos sistemas que são invariantes pela a troca de subsistemas, o número de estados diferentes que precisamos levar em conta para os produtos em P_k diminui bastante. Só há diferentes formas de particionar os subsistemas, não há necessidade de permutar os subsistemas uma vez que são indistinguíveis. Na Figura 6 podemos observar como seriam os estados produtos k -partidos para todas partições com $N = 4$ e para todos os k 's, o número de estados k -partidos a serem considerados diminui e conforme N aumenta a diferença de estados para o caso de subsistemas distinguíveis se torna cada vez maior. Por exemplo, no caso de $N = 30$ e as partições do tipo $(15|15)$, de $\binom{30}{15}/2 = 10341168$ possibilidades para subsistema distinguíveis passa para somente uma possibilidade quando há invariância por permutação de subsistemas.

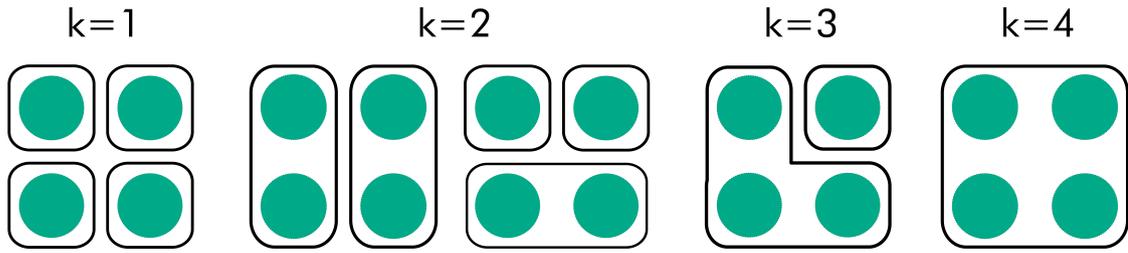


Figura 6 – Todas as partições para $N = 4$ quando temos invariância por permutações de subsistemas. Figura retirada de trabalho de qualificação de Susane Calegari.

2.2.2 Correlações genuínas multipartidas

Utilizaremos os conjuntos P_k para definirmos as CGM, nesse conjunto estão os estados que não possuem correlações envolvendo mais do que k subsistemas, e com medidas de distâncias ou pseudo-distâncias e minimização sobre todos os elementos de P_k será possível calcular correlações maiores do que k . Dessa forma, fazendo a minimização da distância entre um estado qualquer ρ_N e os estados pertencentes à P_k , se for igual a zero significa que ρ_N não possui correlações maiores que k e quanto maior for o valor da distância mais correlações maiores do que k ρ_N tem. Assim, as correlações genuínas multipartidas de ordem maior ou igual do que k são quantificadas pela distância do estado global para o conjunto P_k da forma

$$D^{k \rightarrow N}(\rho_N) := \min_{\sigma \in P_k} D(\rho_N, \sigma), \quad (21)$$

onde D é uma distância² que possui as seguintes propriedades

$$\begin{aligned} D(\rho, \sigma) &\geq 0, \\ D(\rho, \sigma) &= 0 \Leftrightarrow \rho = \sigma, \\ D(\rho, \sigma) &\geq D(\Phi(\rho), \Phi(\sigma)), \end{aligned} \quad (22)$$

em que Φ é um mapa CPPT [41], essas propriedades são as mesmas que a entropia quântica relativa possui [92]. Assim, para qualquer distância pode ser definida uma medida de correlações k -partidas como a diferença entre as correlações de ordem maior do que $k - 1$ e aquelas de ordem maior que k

$$D^k(\rho_N) := D^{k-1 \rightarrow N}(\rho_N) - D^{k \rightarrow N}(\rho_N). \quad (23)$$

Como as correlações de ordem maior do que $k - 1$ são as correlações que envolvem $\{k, k+1, \dots, N\}$ subsistemas e as maiores que k envolvem $\{k+1, k+2, \dots, N\}$ subsistemas, a diferença entre as duas resulta em somente as correlações genuínas k -partidas.

² Para ser uma distância propriamente dita deveria se acrescentar a propriedade de simetria $D(\rho, \sigma) = D(\sigma, \rho)$. A medida que será utilizada na tese é a entropia relativa quântica, que não possui a propriedade de simetria e assim é considerada uma pseudo-distância.

Uma boa interpretação das CGM de ordem k introduzidas acima é que a soma de todas as CGM resultam nas correlações totais no sistema

$$\begin{aligned}
\sum_k D^k(\rho_N) &= D^2(\rho_N) + D^3(\rho_N) + \dots + D^N(\rho_N) \\
&= D^{1 \rightarrow N}(\rho_N) - D^{2 \rightarrow N}(\rho_N) + D^{2 \rightarrow N}(\rho_N) - D^{3 \rightarrow N}(\rho_N) \\
&\quad + D^{3 \rightarrow N}(\rho_N) - D^{4 \rightarrow N}(\rho_N) + \dots + D^{N-1 \rightarrow N}(\rho_N) - D^{N \rightarrow N}(\rho_N) \\
&= D^{1 \rightarrow N}(\rho_N) - D^{N \rightarrow N}(\rho_N) = D^{1 \rightarrow N}(\rho_N)
\end{aligned} \tag{24}$$

A correlação total é definida de forma que representa a informação codificada em ρ_N que não é acessível para observadores que têm acesso somente a cada subsistema $\rho_{[i]}$. Com essa definição de correlações totais, podemos estendê-la para definir correlações genuínas multipartidas de ordens maiores do que k , $2 \leq k \leq N - 1$, como a informação que falta sobre ρ_N para observadores mais informados que somente têm acesso a estados ρ_k pertencentes a P_k . Enquanto que a correlação genuína N -partidas corresponde à informação que ainda falta para observadores que têm acesso somente a ρ_k pertencentes a P_{N-1} [41]. Outra forma de pensar as CGM é se o estado tem, por exemplo, correlação genuína de ordem 2 este possui pelo menos dois subsistemas que estão correlacionadas e não podem ser decompostas como dois subsistemas independentes ($\dots \otimes \rho_2 \otimes \dots \neq \dots \otimes \rho_1 \otimes \rho_1 \otimes \dots$). Ou ainda, se um estado possui correlação genuína de ordem 3 este possui pelo menos três subsistemas que estão correlacionados e não pode ser decomposto da forma de um subsistema independente nem de três subsistemas independentes ($\dots \otimes \rho_3 \otimes \dots \neq \dots \otimes \rho_2 \otimes \rho_1 \otimes \dots$ ou $\dots \otimes \rho_3 \otimes \dots \neq \dots \otimes \rho_1 \otimes \rho_1 \otimes \rho_1 \otimes \dots$).

Para calcular as CGM através da equação (23) temos que fazer uma minimização que se torna custosa computacionalmente conforme N aumenta, pois são muitos estados em P_k que precisamos comparar a distância para fazer a minimização. Contudo, o processo de minimização é simplificado bastante ao utilizarmos como distância a pseudo-distância entropia relativa quântica. O estado σ que minimiza $S^{k \rightarrow N}(\rho_N)$ é o produto dos estados reduzidos de ρ_N [40, 41, 43]. Com isso,

$$S^{k \rightarrow N}(\rho_N) = \min_{\sigma \in P_k} S(\rho_N || \sigma) \tag{25}$$

$$\begin{aligned}
&= S(\rho_N || \otimes_{i=1}^m \rho_{k_i}) \\
&= \sum_{i=1}^m S(\rho_{k_i}) - S(\rho_N).
\end{aligned} \tag{26}$$

A minimização teria que ser feita sobre todos os estados produtos $\sigma = \otimes_{i=1}^m \sigma_{k_i} \in P_k$, no entanto, para entropia relativa quântica sabemos que o estado mais próximo é o produto dos estados reduzidos de ρ_N . O conhecimento do estado mais próximo simplifica o processo de minimização, que pode ser simplificado ainda mais para sistemas

invariantes por permutação, conforme Figura 6, e o que foi discutido na seção 2.2.1. Para estados com simetria de permutação, o estado que minimiza a entropia é o estado mais compacto $\sigma_N = \bigotimes_{i=1}^{\lfloor N/k \rfloor} \rho_k \otimes \rho_{N \bmod k}$, devido à subaditividade da entropia de von Neumann. Assim, a equação (26) pode ser simplesmente escrita como

$$\begin{aligned} S^{k \rightarrow N}(\rho_N) &= S(\rho_N \| \bigotimes_{i=1}^{\lfloor N/k \rfloor} \rho_k \otimes \rho_{N \bmod k}) \\ &= \lfloor N/k \rfloor S(\rho_k) + (1 - \delta_{N \bmod k, 0}) S(\rho_{N \bmod k}) - S(\rho_N), \end{aligned} \quad (27)$$

em que $\lfloor N/k \rfloor$ é a função piso, a qual é o maior inteiro menor ou igual que $\frac{N}{k}$, e $N \bmod k$ é o resto da divisão $\frac{N}{k}$. O $\rho_{N \bmod k}$ descreve o subsistema $S_{N \bmod k}$ que não se encaixa nos grupos ρ_k quando N não é múltiplo de k . Se escolhermos $k = 1$,

$$S^{1 \rightarrow N}(\rho_N) = NS(\rho_1) - S(\rho_N) \quad (28)$$

descreve as correlações totais presentes no sistema. Aqui também é válido $S^{1 \rightarrow N}(\rho_N) = \sum_{k=2}^N S^k(\rho_N)$. Com isso, as correlações genuínas de ordem k , utilizando a entropia de von Neumann, são definidas como

$$S^k(\rho_N) = S^{k-1 \rightarrow N}(\rho_N) - S^{k \rightarrow N}(\rho_N). \quad (29)$$

E para sistemas invariantes por permutações de subsistemas as correlações genuínas de ordem k podem ser escritas como

$$\begin{aligned} S^k(\rho_N) &= S^{k-1 \rightarrow N}(\rho_N) - S^{k \rightarrow N}(\rho_N) \\ &= \lfloor N/(k-1) \rfloor S(\rho_{k-1}) - \lfloor N/k \rfloor S(\rho_k) \\ &\quad + (1 - \delta_{N \bmod k-1, 0}) S(\rho_{N \bmod k-1}) - (1 - \delta_{N \bmod k, 0}) S(\rho_{N \bmod k}). \end{aligned} \quad (30)$$

Notamos que a entropia relativa quântica satisfaz todas as propriedades da equação (22), sendo assim, boa para medir correlações genuínas de ordem maiores do que k , conforme estabelecido por Girolami *et al.* [41]. Além disso, os autores das Refs [41, 97] mostram que a medida de distância da equação (27) e de correlação em (29) satisfazem as restrições desejáveis para boas medidas de distância ou correlações [40]. Essas restrições são as seguintes:

(I) Adicionar um sistema n -partido disjunto não aumenta correlações de ordem maiores que n :

$$\begin{aligned} S^{n \rightarrow N}(\rho_N) &= S(\rho_N \| \tilde{\rho}_N^n) = S(\rho_N \otimes \rho_n \| \tilde{\rho}_N^n \otimes \rho_n) \\ &\geq S(\rho_N \otimes \rho_n \| \tilde{\rho}_{N+n}^n) = S^{n \rightarrow N+n}(\rho_{N+n}). \end{aligned} \quad (31)$$

Ou seja, adicionando ρ_n , com ordem de correlação máxima igual a k , $\rho_n = \rho_k \otimes \rho_{k-1} \otimes \dots$, em um sistema ρ_N da forma $\rho_N \otimes \rho_n$, a contribuição máxima de correlação ao sistema

total que ρ_n fornece é de ordem $k \leq n$.

(II) Mapas CPPT locais ($\Pi_i \Phi_{[i]}$)

$$\Pi_i \Phi_{[i]}, \quad \Phi_{[i]} = I_1 \otimes \dots \otimes \Phi_i \otimes \dots \otimes I_N, \quad (32)$$

não podem criar correlações de qualquer ordem k

$$S^k(\rho_N) = 0 \rightarrow S^k(\Pi_i \Phi_{[i]}(\rho_N)) = 0, \quad (33)$$

como o mapa é local não muda a estrutura tensorial de ρ_N , assim não pode criar correlações de nenhuma ordem além das que já possui ρ_N , por não correlacionar subsistemas separados pela estrutura tensorial. E mapas CPPT locais não podem aumentar a quantidade de correlações maiores do que qualquer ordem k

$$S^{k \rightarrow N}(\rho_N) \geq S^{k \rightarrow N}(\Pi_i \Phi_{[i]}(\rho_N)), \forall k. \quad (34)$$

Essa restrição é devido à contratividade, ou seja, monotonicidade, da entropia relativa quântica sobre mapas CPPT.

(III) Traço parcial de $N - k$ subsistemas pode criar até k -partidas correlações de N -partidas correlações existentes,

$$S^N(\rho_N) \geq S^k(\rho_k), \quad (35)$$

como a entropia relativa é contrativa sobre a operação quântica de traço parcial vale essa restrição.

(IV) Destilando n subsistemas por *fine-graining*, $\mathcal{H}_{[i]} \rightarrow \mathcal{H}_{i'} = \{\mathcal{H}_{i_j}\}, j = 1, \dots, n + 1$, $\mathcal{H}'_{N+n} = \{\mathcal{H}_{[1]}, \mathcal{H}_{[2]}, \dots, \mathcal{H}_{[i-1]}, \{\mathcal{H}_{i_j}\}, \mathcal{H}_{[i+1]} \dots, \mathcal{H}_{[N]}\}$ não pode criar correlações de ordem maior do que $k + n$, para qualquer k ,

$$S^{k+n \rightarrow N+n}(\rho_{N+n}) = S^{k \rightarrow N}(\rho_N) = 0. \quad (36)$$

Para um estado que não tem correlações maiores do que k , ou seja, $\rho_N = \rho_k \otimes \rho_{k-1} \otimes \dots$, se destilarmos n subsistemas em alguma partição a ordem máxima de correlação que podemos obter é $k + n$, para o caso $\rho_{N+n} = \rho_{k+n} \otimes \rho_{k-1} \otimes \dots$, qualquer outro caso o estado possui correlação somente de ordem menores do que $k + n$.

(V) Correlações totais são super-aditivas, dada a partição de *coarse-graining*

$\{S_{k_1}, S_{k_2}, \dots, S_{k_l}\}, \sum_{j=1}^l k_j = N$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^l S^{1 \rightarrow k_j}(\rho_{k_j}) &= \sum_{i=1}^N S(\rho_{[i]}) - \sum_{j=1}^l S(\rho_{k_j}) \leq \sum_{i=1}^N S(\rho_{[i]}) - S(\rho_N) \\ &\leq S^{1 \rightarrow N}(\rho_N), \end{aligned} \quad (37)$$

em que a inequação satura para $\rho_N = \otimes_j \rho_{k_j}$. Qualquer partição de *coarse-graining* de ρ_N terá correlações totais menores ou iguais às existentes em próprio ρ_N , uma vez

que podemos mudar a estrutura tensorial de ρ_N destruindo correlações que podem existir. Como Girolami *et al.* [41] apontam essas restrições estão presentes na medida de CGM, enquanto que muitas das medidas de correlações vastamente utilizadas não satisfazem todas essas propriedades.

2.2.3 Weaving

Após definirmos as CGM, podemos nos perguntar como diferenciar estados que possuem a mesma quantidade de correlação total ou de uma dada ordem k , por exemplo, mas se diferenciam em outras ordens de correlações? Conforme Girolami *et al.* [41], os estados, para valores de N par, $|\psi_{N/2}\rangle = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)\right]^{\otimes N/2}$ e $|GHZ_N\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle^{\otimes N} + |1\rangle^{\otimes N})$, possuem a mesma quantidade de correlações totais, $S^{1 \rightarrow N}(|\psi_{N/2}\rangle) = S^{1 \rightarrow N}(|GHZ_N\rangle) = N$, enquanto que o primeiro possui $S^N = 0$ e o segundo $S^N = 2$. Além disso, como diferenciar estados que possuem a mesma quantidade de correlações totais e N -partidas? Podemos ter estados com mesma quantidade de correlações N -partidas e correlações totais, como ocorre com os estados $|GHZ_N\rangle$ e $|\Phi_{N/2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{\binom{N}{N/2}}} \sum_i \mathcal{P}_i (|0\rangle^{N/2} \otimes |1\rangle^{N/2})^3$, porém, esses estados têm diferentes usos para processamento da informação e um não pode ser transformado no outro com OLCC.

Pensando nessas questões expostas acima, Girolami *et al.* [41] definem um novo conceito, chamado de *weaving*, definido como

$$W_D(\rho_N) = \sum_{k=2}^N \omega_k D^k(\rho_N) = \sum_{k=1}^{N-1} \Omega_k D^{k \rightarrow N}(\rho_N), \quad (38)$$

em que $\omega_k = \sum_{i=1}^{k-1} \Omega_i$, $\omega_k \in \mathbb{R}^+$. A distância que utilizaremos aqui é a entropia de relativa quântica, o *weaving* (W_S) calculado assim é contrativo sobre operações locais e traço parcial, e é aditivo. O *weaving* é a soma com pesos de todas as correlações genuínas de ordem k , conforme o peso utilizado no cálculo do *weaving*, este mede uma grandeza diferente, para $\omega_k = 1, \forall k$ mede as correlações totais, para $\omega_l = \delta_{k,l}, \forall l$ mede as correlações genuínas k -partidas. Para diferenciar estados com correlações totais e/ou N -partidas iguais, podemos utilizar um peso ω_k diferente para cada ordem de correlação $D^k(\rho_N)$ no *weaving*, equação (38). Girolami *et al.* [41] propõe $\omega_k = k - 1 \Rightarrow \Omega_i = 1, \forall i$ para fazer um escalonamento das correlações em função de N . Com o peso $\omega_k = k - 1$ no cálculo do *weaving*, há um ranqueamento dos estados com correlações totais e/ou N -partidas iguais. Na tabela 1, apresentamos o cálculo do *weaving* para os estados mencionados anteriormente que possuem correlações totais iguais ou correlações totais e N -partidas iguais. Esses resultados são retirados

³ \mathcal{P}_i corresponde ao operador de permutações.

do artigo [41] do Girolami e colaboradores e são obtidos para limite assintótico de N grandes.

ρ_N, N par	S^N	$S^{1 \rightarrow N}$	$W_S, \omega_k = k - 1$
$ \psi_{N/2}\rangle = [1/\sqrt{2}(00\rangle + 11\rangle)]^{\otimes N/2}$	0	N	N
$ GHZ_N\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(0\rangle^{\otimes N} + 1\rangle^{\otimes N})$	2	N	$\sim 1.13N \log N$
$[1/\sqrt{\binom{N}{1}}] \sum_i \mathcal{P}_i(0\rangle^{\otimes(N-1)} \otimes 1\rangle)$	~ 0	$\sim \log(N)$	$\sim 2.61N$
$[1/\sqrt{\binom{N}{N/2}}] \sum_i \mathcal{P}_i(0\rangle^{\otimes N/2} \otimes 1\rangle^{\otimes N/2})$	2	N	$\sim 0.01N^2$

Tabela 1 – Ranqueamento de alguns estados através do *weaving* (W_S) com peso $\omega_k = k - 1$ para distinguir a distribuição de correlações.

Os quatro estados da tabela 1 possuem *weaving* diferentes, conseguimos assim diferenciar os estados que antes possuíam correlações totais e/ou genuínas N -partidas iguais.

2.3 NATUREZA DAS CORRELAÇÕES

Apesar do foco principal da tese ser o estudo dos sistemas físicos com CGM, essa medida não distingue a natureza da correlação, de forma que a quantidade calculada é sempre a soma de correlações clássicas e quânticas entre os subsistemas, em qualquer ordem das correlações genuínas k -partidas. Desse modo, estudaremos brevemente algumas ferramentas para ajudar a entender os resultados da tese nas discussões sobre a natureza das correlações presentes nos sistemas físicos estudados e também veremos uma ferramenta para detectar uma forma especial de correlação quântica: emaranhamento genuíno k -partido.

Num estado quântico puro temos toda informação sobre ele e, portanto, este possui entropia igual a zero, uma vez que entropia está relacionada com a falta de informação sobre um sistema. Na prática é difícil termos estados totalmente puros devido a algum tipo de interação com o ambiente, transformando o estado em uma mistura estatística. Quando temos um estado puro $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ valem as seguintes igualdades

$$\rho^2 = \rho,$$

$$\text{Tr}(\rho^2) = \text{Tr}(\rho) = 1.$$

Na última equação $\text{Tr}(\rho^2)$ é definida como pureza de um estado quântico, para estados puros é igual a 1 e para estados totalmente mistos é $1/d$, em que d refere-se à dimensão

do sistema, assim a entropia é máxima. Uma forma de medir o grau de mistura em um sistema é através da entropia linear, definida como

$$S_L = \frac{d}{d-1} \left(1 - \text{Tr}(\rho^2)\right). \quad (39)$$

Para estados puros é igual a zero e estados maximamente mistos é igual a um [98]. A entropia linear vem de uma aproximação de primeira ordem da entropia de von Neumann $S(\rho) = -\text{Tr}(\rho \ln(\rho)) \sim S_L \sim -\text{Tr}(\rho(\rho - 1)) = \text{Tr}(\rho) - \text{Tr}(\rho^2) = 1 - \text{Tr}(\rho^2)$, em que foi feita a aproximação $\ln \rho \sim \rho - 1$. Para os valores de entropia linear variar de zero a um foi introduzido o termo de normalização $\frac{d}{d-1}$.

2.3.1 Emaranhamento

O emaranhamento é uma forma de correlação quântica que está presente em muitos sistemas quânticos, apesar de sua fragilidade é muito útil, sendo ele o principal recurso da teoria da informação quântica. O consumo de emaranhamento permite realizar tarefas quânticas, como teleporte quântico, codificação superdensa, criptografia quântica [1], melhorar precisão de medidas de observáveis em metrologia quântica [33], entre outras. O emaranhamento pode, inclusive, ser um parâmetro de ordem em transições de fases quânticas [4, 8], como será mostrado nesta tese. Emaranhamento em sistemas de muitas partículas é intrincado de se definir e calcular. Primeiramente, um estado fatorável, ou separável, para estados puros de N partículas pertencente ao espaço de Hilbert $H = H_1 \otimes H_2 \otimes \dots \otimes H_N$ pode ser definido como

$$|\Psi\rangle = |\phi_1\rangle \otimes |\phi_2\rangle \otimes \dots \otimes |\phi_N\rangle. \quad (40)$$

Se um estado não pode ser descrito dessa forma ele é emaranhado de alguma forma, ou emaranhado k -partido, ou emaranhado multipartido. De uma forma geral um estado misto é dito separável se pode ser escrito na forma

$$\rho = \sum_i p_i \rho_j \otimes \rho_k \otimes \dots \otimes \rho_n.$$

Caso contrário é emaranhado de alguma forma. Quando um estado é misto e separável não existe correlação quântica do tipo emaranhamento, mas pode haver correlação quântica no sistema do tipo discórdia quântica [18, 99, 100]. É fácil definir um estado não emaranhado, assim a forma de definir emaranhamento vem de sua negação, o que torna difícil e custoso caracterizar e quantificar se um estado é emaranhado ou não. Em sistemas bipartidos temos resultados teóricos para medição de emaranhamento de estados puros e mistos, mesmo que para estados mistos algumas medidas de emaranhamento sejam custosas computacionalmente [1], é mais fácil definir emaranhamento em bipartições. No entanto, conforme aumenta o número de partículas e partições e queremos certificar ou medir emaranhamento multipartido, o problema vai

se tornando muito difícil de tratar, pois existem muitas formas das partículas estarem emaranhadas, análogo ao que acontece com as CGM. Há, no entanto, medida operacional que calcula emaranhamento multipartido com uso da média da entropia linear sobre todas as partições do sistema [101]. Ao se calcular o emaranhamento, nota-se que o número de partições no sistema cresce muito rapidamente de forma que para N na ordem de dezenas o problema se torna intratável computacionalmente, salvo para os casos em que levamos em conta simetrias existentes no sistema. Uma forma de tratar esse problema é definindo k -separabilidade para estados puros como

$$|\Psi_{k-sep}\rangle := \bigotimes_{i=1}^k |\phi_{\alpha_i}\rangle,$$

em que $\alpha_i \subseteq \{1, 2, \dots, N\}$ são subconjuntos mutuamente disjuntos do sistema da coleção de N partes. Para $k = N$ o estado é dito *totalmente separável* e para $k = 1$ *emaranhado multipartido* [42]. No caso de estados mistos k -separabilidade é definida como

$$\rho_{k-sep} := \sum_i p_i |\Psi_{k-sep}^i\rangle \langle \Psi_{k-sep}^i|,$$

onde cada $|\Psi_{k-sep}^i\rangle$ pode ser separável com diferentes k -partições, e para $k = N$ novamente é *totalmente separável* e $k = 1$ é *emaranhado genuíno multipartido*, ou seja, não pode ser preparado com OLCC sem o uso de estado emaranhado multipartido [42].

Mesmo com essas formas de tratar o problema, a caracterização dos estados emaranhados multipartidos não fica completa. Para ver isso, adicionamos uma outra maneira de definir emaranhamento, a profundidade de emaranhamento. O grau de profundidade de emaranhamento para estados puros é dado pelo maior número de partículas emaranhadas nos grupos de partículas emaranhadas num estado multipartido. Por exemplo, o estado $|\Psi_N\rangle = |\phi_{12}\rangle \otimes |\phi_{3456}\rangle$ possui grau de profundidade $k = 4$, enquanto que o estado $|\Psi_N\rangle = |\phi_{123}\rangle \otimes |\phi_{456}\rangle$ tem profundidade $k = 3$, no entanto, os dois estados são bi-separáveis [42]. Enquanto que para k -separabilidade os estados são semelhantes, para profundidade de emaranhamento são diferentes. A partir da profundidade de emaranhamento podemos definir k -producibilidade. Para um estado misto dizemos que ele é k -produzível se puder ser escrito como uma mistura de produtos de estados com k -partículas na forma

$$\rho_{k-prod} := \sum_i p_i (\rho_{k_1} \otimes \rho_{k_2} \otimes \dots \otimes \rho_{k_M})_i, \quad (41)$$

em que ρ_{k_j} possui até k -partículas emaranhadas. Para $k = 1$ o estado é totalmente separável, para $k = N$ o estado possui emaranhamento genuíno N -partido e para um k qualquer emaranhamento genuíno k -partido. Se um estado não é k -produzível possui pelo menos profundidade de emaranhamento igual a $k + 1$. Poderíamos ficar tentados

a utilizar a definição de k -producibilidade para calcular emaranhamento genuíno k -partido na equação apresentada anteriormente

$$E = \min_{\sigma \in \mathcal{S}} S(\rho || \sigma), \quad (42)$$

Fazendo $\sigma = \rho_{k\text{-prod}}$, poderíamos fazer isso se esse estado fosse o que minimiza a entropia relativa, porém, não sabemos se isso é verdade, ainda assim teríamos que lidar com a soma dentro o logaritmo. Caso isso fosse verdadeiro, seria uma maneira de calcular emaranhamento genuíno k -partido de um modo geométrico (distância) através da entropia relativa. No entanto, para estados puros o conjunto P_k se torna o conjunto dos estados k -produzíveis P'_k , dessa forma podemos definir emaranhamento genuíno k -partido como

$$E^k = \min_{\sigma \in P'_{k-1}} S(\rho || \sigma) - \min_{\sigma' \in P'_k} S(\rho || \sigma'), \quad (43)$$

onde P'_k é o conjunto dos estados puros k -produzíveis. O primeiro termo da equação mostra quão distante está ρ dos estados $k - 1$ produzíveis, assim mede os estados com profundidade de emaranhamento maior ou igual k e o segundo termo exclui os estados com profundidade de emaranhamento maior ou igual $k + 1$, restando somente emaranhamento genuíno k -partido. Assim, para estados puros podemos definir emaranhamento genuíno k -partido de maneira análoga do que foi feito para correlação genuína k -partida.

3 O MODELO LIPKIN-MESHKOV-GLICK E A TRANSIÇÃO DE FASE QUÂNTICA

Neste capítulo, apresentaremos o modelo LMG e suas duas formas diferentes entre as versões que aparecem na literatura. Estudaremos a forma do estado fundamental e a transição de fase de segunda ordem que ocorre nesse modelo usando ferramentas da informação quântica, como as CGM. Ainda, calcularemos as matrizes densidades reduzidas e entropia de emaranhamento do estado fundamental. Além disso, mostraremos uma forma de obter expoentes críticos no modelo LMG através do ETF.

3.1 MODELO LIPKIN-MESHKOV-GLICK

O modelo LMG surgiu no contexto da física nuclear para descrever o núcleo dos átomos, por ser um modelo integrável para algumas configurações de parâmetros, tornou-se útil para verificar a validade de aproximações, como a aproximação de fase aleatória, em física nuclear [44–46]. O modelo LMG representa um conjunto de N férmions interagentes com força de interação igual para todos, que podem estar em dois níveis N vezes degenerados e separados por uma diferença de energia igual ϵ . Na Figura 7, é ilustrado um estado qualquer do modelo LMG.

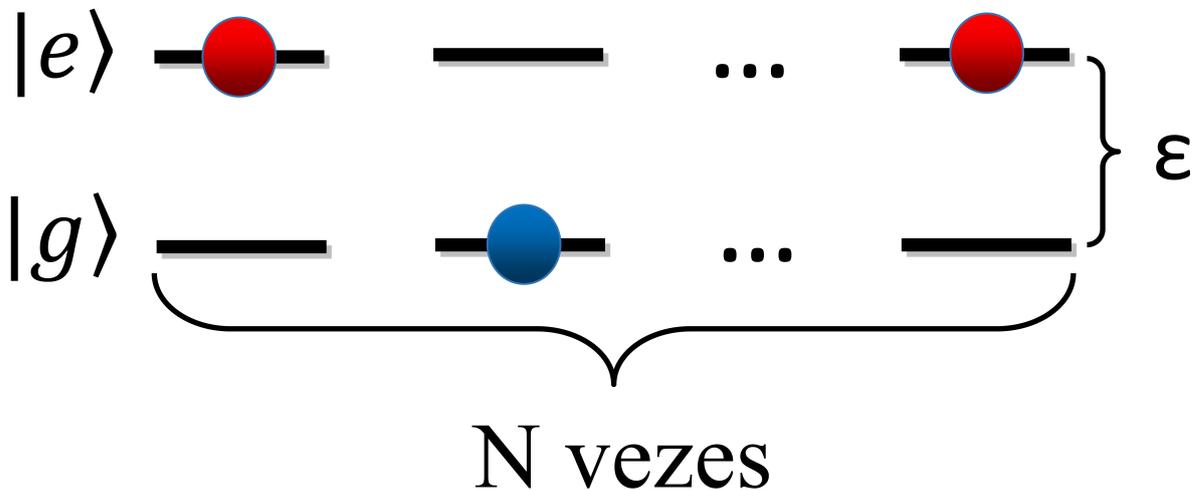


Figura 7 – Representação de um estado qualquer do modelo LMG. São dois níveis N vezes degenerados com uma diferença de energia ϵ .

Na física nuclear o modelo LMG pode ser descrito no formalismo da segunda quantização com operadores de Fermi na forma do hamiltoniano

$$H = \frac{\epsilon}{2} \sum_{p,s} s a_{ps}^\dagger a_{ps} + \frac{V}{2N} \sum_{p,p',s} a_{ps}^\dagger a_{p's}^\dagger a_{p'-s} a_{p-s} + \frac{W}{2N} \sum_{p,p',s} a_{ps}^\dagger a_{p'-s}^\dagger a_{p's} a_{p-s}, \quad (44)$$

no qual os operadores de Fermi satisfazem as relações de anticomutação $\{a_{ps}, a_{p's'}\} = 0$, $\{a_{ps}^\dagger, a_{p's'}^\dagger\} = 0$, $\{a_{ps}, a_{p's'}^\dagger\} = \delta_{pp'} \delta_{ss'}$ e $s = \pm 1, \epsilon > 0$ e $p = 1, 2, \dots, N$. Nesse hamil-

toniano, o índice p corresponde ao p -ésimo férmion e s aos dois estado de energia degenerados em que os férmions podem estar. O primeiro termo do hamiltoniano representa a energia dos férmions, o segundo refere-se ao levantamento ou abaixamento dos níveis de energia de dois férmions e o terceiro é o levantamento seguido de abaixamento ou vice-versa dos férmions.

Não será nessa linguagem que descreveremos o modelo LMG, mas numa linguagem de operadores de *spins* coletivos, na qual os férmions podem ser interpretados como *spins* de partículas com *spin* $1/2$, semelhantes a qubits. Assim, faremos uma mudança na forma de descrever o hamiltoniano tomando $s = -1, 1$ e introduzindo os operadores de *spins* coletivos como

$$J_+ = \sum_{p=1}^N a_{p1}^\dagger a_{p-1}, \quad J_- = \sum_{p=1}^N a_{p-1}^\dagger a_{p1}, \quad J_z = \frac{1}{2} \sum_{p,s} s a_{ps}^\dagger a_{ps},$$

em que J_z corresponde à projeção do momento angular coletivo na direção z e J_- e J_+ refere-se aos operadores coletivos de abaixamento e levantamento, respectivamente, [102, 103]. De imediato vemos que o primeiro termo da equação (44) se torna $\frac{\varepsilon}{2} J_z$ e obtemos

$$\begin{aligned} H = & \varepsilon J_z + \frac{V}{2N} \sum_p \sum_{p'} (a_{p1}^\dagger a_{p'1}^\dagger a_{p'-1} a_{p-1} + a_{p-1}^\dagger a_{p'1}^\dagger a_{p'1} a_{p1}) \\ & + \frac{W}{2N} \sum_p \sum_{p'} (a_{p1}^\dagger a_{p'-1}^\dagger a_{p'1} a_{p-1} + a_{p-1}^\dagger a_{p'1}^\dagger a_{p'-1} a_{p1}). \end{aligned} \quad (45)$$

Todos os operadores comutam quando $p \neq p'$, para o caso em que $p = p'$ os dois operadores de aniquilação atuando sobre o mesmo férmion resultam em zero, com isso podemos rearranjar os termos dos somatórios,

$$\begin{aligned} H = & \varepsilon J_z + \frac{V}{2N} \left(\sum_p a_{p1}^\dagger a_{p-1} \sum_{p'} a_{p'1}^\dagger a_{p'-1} + \sum_p a_{p-1}^\dagger a_{p1} \sum_{p'} a_{p'1}^\dagger a_{p'-1} \right) \\ & + \frac{W}{2N} \left(\sum_p a_{p1}^\dagger a_{p-1} \sum_{p'} a_{p'-1}^\dagger a_{p'1} + \sum_p a_{p-1}^\dagger a_{p1} \sum_{p'} a_{p'1}^\dagger a_{p'-1} \right). \end{aligned} \quad (46)$$

Finalmente, podemos ver que o hamiltoniano pode ser escrito todo em termos de operadores de *spins* coletivos como

$$H = \varepsilon J_z + \frac{V}{2N} (J_+^2 + J_-^2) + \frac{W}{2N} (J_+ J_- + J_- J_+). \quad (47)$$

Trocando os termos para $\varepsilon = -2h$, $V = -(1 - \gamma)$ e $W = -(1 + \gamma)$, o hamiltoniano tem a forma

$$H = -\frac{(1 + \gamma)}{2N} (J_+ J_- + J_- J_+) - 2h J_z + \frac{1 - \gamma}{2N} (J_+^2 + J_-^2), \quad (48)$$

ainda escrevendo $J_+ J_- = J_x^2 + J_y^2 - J_z$ e $J_- J_+ = J_x^2 + J_y^2 + J_z$, na tese utilizamos $\hbar = 1$, e adicionando um acréscimo de energia $(1 + \gamma)/2$, obtemos

$$H = -\frac{(1 + \gamma)}{N} (\mathbf{J}^2 - J_z^2 - N/2) - 2h J_z + \frac{1 - \gamma}{2N} (J_+^2 + J_-^2), \quad (49)$$

no qual o termo $\mathbf{J}^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$ corresponde ao operador de Casimir da álgebra $SU(2)$. Essa forma do hamiltoniano do modelo LMG é utilizada por vários autores [15, 50, 52, 54, 55], foi nessa descrição que os cálculos numéricos foram feito na tese.

O hamiltoniano do modelo LMG é uma versão quântica de um modelo do tipo Ising com campo transverso, podemos ver isso fazendo a transformação de *spins* coletivos para *spins* individuais. Primeiramente, iremos representá-lo como *spins* coletivos em uma forma mais próxima do modelo de Ising bidimensional com campo transverso.

$$\begin{aligned}
H &= -\frac{2}{N}\{(1+\gamma)(\mathbf{J}^2 - J_z^2) + \frac{(1-\gamma)}{4}(J_+^2 + J_-^2) - \frac{(1+\gamma)}{2}(J_x^2 + J_y^2)\} + (1+\gamma)/2 \\
&\quad - 2hJ_z \\
&= -\frac{2}{N}\{(1+\gamma)(\mathbf{J}^2 - J_z^2) + \frac{1}{4}[(J_+^2 + J_-^2) - (J_+J_- + J_-J_+)] \\
&\quad - \gamma(J_+^2 + J_-^2 + J_+J_- + J_-J_+)\} + (1+\gamma)/2 - 2hJ_z \\
&= -\frac{2}{N}\left\{(1+\gamma)(\mathbf{J}^2 - J_z^2) - \left[\left(\frac{J_+ - J_-}{2i}\right)^2 + \gamma\left(\frac{J_+ + J_-}{2}\right)^2\right]\right\} + (1+\gamma)/2 - 2hJ_z \\
&= -\frac{2}{N}[(1+\gamma)(\mathbf{J}^2 - J_z^2) - (J_y^2 + \gamma J_x^2)] + (1+\gamma)/2 - 2hJ_z \\
&= -\frac{2}{N}[\mathbf{J}^2 - J_z^2 - J_y^2 + \gamma(\mathbf{J}^2 - J_z^2 - J_x^2)] + (1+\gamma)/2 - 2hJ_z \\
&= -\frac{2}{N}(J_x^2 + \gamma J_y^2) + (1+\gamma)/2 - 2hJ_z. \tag{50}
\end{aligned}$$

Agora podemos fazer a transformação de forma que $J_\alpha = \sum_{i=1}^N \sigma_\alpha^i/2$, assim teremos

$$J_\alpha^2 = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2}\sigma_\alpha^i \sum_{j=1}^N \frac{1}{2}\sigma_\alpha^j = \frac{1}{4}\left(2\sum_{i<j}\sigma_\alpha^i\sigma_\alpha^j + \sum_i\sigma_\alpha^i\sigma_\alpha^i\right) = \frac{1}{2}\sum_{i<j}\sigma_\alpha^i\sigma_\alpha^j + \frac{N}{4}. \tag{51}$$

Substituindo na equação (50) obtemos,

$$H = -\frac{\lambda}{N}\sum_{i<j}(\sigma_x^i\sigma_x^j + \gamma\sigma_y^i\sigma_y^j) - h\sum_{i=1}^N\sigma_z^i, \tag{52}$$

na qual foi adicionado λ , fator de acoplamento ferromagnético, o γ e h , adicionados anteriormente, correspondem ao fator de anisotropia e ao campo magnético transverso, respectivamente, e σ_α^k refere-se às matrizes de Pauli na posição k e $\alpha = x, y, z$. Para $\lambda = -1$ temos um acoplamento antiferromagnético no qual existe um transição de fase de primeira ordem no modelo e para $\lambda = 1$ temos o acoplamento ferromagnético com transição de fase de segunda ordem ao variar o campo externo, transições que podem ser capturadas através de emaranhamento [52, 104]. Existe no sistema inclusive transição de fase de terceira ordem, formas mais gerais de estudar transições de fases no modelo LMG são encontradas no trabalho dos autores [105, 106]. O hamiltoniano da equação (49) preserva a magnitude do *spin* total, ou seja, conserva o número total

de partículas e não acopla estados com diferentes números de spins apontando na direção de z para qualquer valor de γ , tem simetria *spin-flip*, pois

$$[H, \mathbf{J}^2] = 0 \quad \text{e} \quad \left[H, \prod_{i=1}^N \sigma_z^i \right] = 0. \quad (53)$$

O estado fundamental corresponde ao setor em que o valor do *spin* resultante é máximo, onde $|\mathbf{J}| = N/2$, e o estado fundamental é uma combinação linear de estados de Dicke $|\mathbf{J}, J_z\rangle = |N/2, M\rangle$. Os estados de Dicke são autoestados dos operadores \mathbf{J}^2 e J_z ,

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^2 |N/2, M\rangle &= N(N+2)/4 |N/2, M\rangle, \\ J_z |N/2, M\rangle &= M |N/2, M\rangle, \end{aligned} \quad (54)$$

com $M = -N/2, -N/2 + 1, \dots, N/2 - 1, N/2$. Os estados de Dicke são totalmente simétricos por troca de partículas. O estado fundamental do modelo LMG para duas partículas na representação $|N/2, M\rangle$ é dado por

$$|\Psi\rangle = \alpha |1, -1\rangle + \beta |1, 0\rangle + \gamma |1, 1\rangle, \quad (55)$$

e na base produto com a representação de níveis,

$$|\Psi\rangle = \alpha |g, g\rangle + \frac{\beta}{\sqrt{2}} (|g, e\rangle + |e, g\rangle) + \gamma |e, e\rangle, \quad (56)$$

em que e, g refere-se aos dois possíveis estados em que cada férmion pode estar, excitado e fundamental, respectivamente. Mudando um pouco a notação de g, e para $0, 1$, respectivamente, e ainda representando o estado de Dicke de N partículas $|N/2, M\rangle$ como $|N, n_e\rangle$, no qual n_e corresponde ao número de excitações, encontramos

$$|N, n_e\rangle = \frac{1}{\sqrt{\binom{N}{n_e}}} \sum_i \mathcal{P}_i \left(|0\rangle^{N-n_e} \otimes |1\rangle^{n_e} \right), \quad (57)$$

sendo a soma efetuada sobre todas as permutações possíveis de n_e descrita pelo operador de permutação \mathcal{P} e $\binom{N}{n_e}$ é um binomial necessário para normalização do estado de Dicke. Assim, o estado fundamental do modelo LMG é descrito por

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &= \sum_{n_e=0}^N P_{n_e} |N, n_e\rangle = \frac{P_0}{\sqrt{\binom{N}{0}}} |0, 0, \dots, 0\rangle + \frac{P_1}{\sqrt{\binom{N}{1}}} (|1, 0, 0, \dots, 0\rangle + |0, 1, 0, 0, \dots, 0\rangle + \\ &+ \dots + |0, 0, \dots, 0, 1\rangle) + \frac{P_2}{\sqrt{\binom{N}{2}}} (|1, 1, 0, 0, \dots, 0\rangle + |1, 0, 1, 0, \dots, 0\rangle + \\ &+ \dots + |0, 0, \dots, 0, 1, 1\rangle) + \dots + \frac{P_{N-1}}{\sqrt{\binom{N}{N-1}}} (|1, 1, 1, \dots, 1, 0\rangle + \\ &+ |1, 1, 1, \dots, 0, 1\rangle + \dots + |0, 1, 1, \dots, 1, 1\rangle) + \frac{P_N}{\sqrt{\binom{N}{N}}} |1, 1, 1, \dots, 1\rangle, \end{aligned} \quad (58)$$

no qual P_{n_e} está atribuída a amplitude de probabilidade de ocorrência do estado de Dicke com n_e excitações. Essas amplitudes de probabilidades são obtidas através da diagonalização numérica do hamiltoniano na equação (49) e o estado fundamental contém as amplitudes de probabilidades P_{n_e} .

O modelo LMG possui TFQ, o foco da tese é estudar a TFQ do ponto de vista da informação quântica com as CGM. Diversos autores estudaram transição de fase no modelo LMG [47, 106–109], citando somente alguns, e também há estudos feitos do ponto de vista da informação quântica [15, 23, 50, 54, 55], novamente citando somente alguns.

3.1.1 Transição de fase quântica no modelo Lipkin-Meshkov-Glick

Em geral, a TFQ ocorre aproximadamente a zero Kelvin, devido às flutuações quânticas causadas pela variação de um parâmetro de controle externo que muda o estado do sistema de forma que aparecem fases detectáveis por parâmetros de ordem [3]. O parâmetro de controle pode ser um campo magnético, pressão ou força de interação, por exemplo. Quando acontece a zero Kelvin a TFQ é governada puramente por flutuações quânticas, para alguns sistemas há combinações de valores de temperaturas pequenas e de valores de parâmetro de controle que flutuações térmicas e quânticas coexistem [3, 110]. A dominância de flutuações térmicas acontece conforme aumenta temperatura e a energia térmica é muito maior que a energia associada ao parâmetro de controle [110]. Para um hamiltoniano como

$$H(h) = H_0 + hH_1,$$

em que h refere-se ao parâmetro de controle, conforme variamos esse parâmetro observamos que para um determinado valor h_c crítico existe uma transição de fase e h_c é um ponto crítico quântico. Um ponto crítico quântico é tal que a energia do estado fundamental, ou suas derivadas, são não analíticas em relação a algum parâmetro de controle. Nesse ponto, a diferença de energia Δ entre o primeiro estado excitado e o estado fundamental torna-se zero, ou aproximadamente zero. Para TFQ de primeira ordem há um cruzamento dos níveis, enquanto que uma TFQ de segunda ordem há um anticruzamento [110]. Além disso, próximo ao ponto crítico $h = h_c$ alguns observáveis \mathcal{O} se comportam como uma lei de potência, e o parâmetro de ordem pode se comportar como

$$\mathcal{O} \begin{cases} \propto (h_c - h)^\beta & h < h_c \\ = 0 & h > h_c. \end{cases} \quad (59)$$

O parâmetro de ordem é a primeira derivada da energia livre em relação ao campo externo, assim, quando o parâmetro de ordem é descontínuo em relação ao parâmetro de controle, temos TFQ de primeira ordem. Por outro lado, se a primeira derivada, ou derivadas de ordem superiores em relação ao parâmetro de controle

são descontínuas, ocorre TFQ de segunda ordem ou de ordens superiores[111]. O parâmetro de ordem para o nosso problema será as correlações genuínas k -partidas.

Na Ref. [55] os autores, através de campo médio variacional, estudam o diagrama de fase no modelo LMG. Para TFQ de segunda ordem, obtêm como resultado para a diferença entre a energia do primeiro estado excitado e a energia do estado fundamental a seguinte relação

$$\Delta = \begin{cases} 2[(h-1)(h-\gamma)]^{1/2} & h > 1, \\ 0 & h < 1. \end{cases} \quad (60)$$

O valor de $\Delta = 0$ para $h < 1$ é alcançado no limite termodinâmico. Para mostrar isso, diagonalizamos o hamiltoniano da equação (49), calculamos os autovalores e fizemos a diferença entre o autovalor de energia do estado fundamental e do primeiro estado excitado. O resultado pode ser observado na Figura 8. Mostramos, também, no inset da Figura 8 o valor de Δ calculado em $h = 0$ para diferentes valores de N partículas. Notamos que Δ fica cada vez mais próximo de zero conforme se aproxima do limite termodinâmico ($N \rightarrow \infty$) e concordando com o resultado da equação (60).

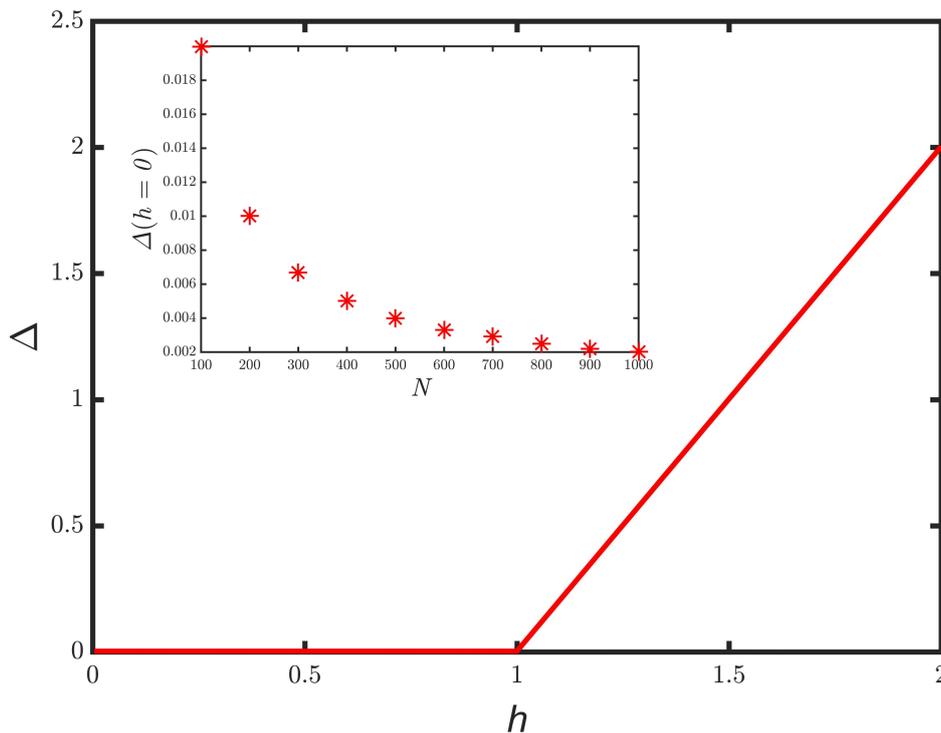


Figura 8 – Diferença de energia entre o primeiro estado excitado e o estado fundamental, Δ , do modelo LMG em função do campo externo h para $N = 100$, com fator de anisotropia $\gamma = 1$. O gráfico é linear somente para $\gamma = 1$. No inset é mostrada a diferença de energia Δ com $h = 0$ para valores de N de 100 a 1000 partículas.

A TFQ no modelo LMG acontece quando variamos o campo magnético externo h , que é o parâmetro de controle e é devida a uma competição entre a interação dos

spins e o efeito do campo externo aplicado sobre a cadeia de *spins* [55]. Para valores de campo magnético $1 < h \leq 2$ temos uma fase simétrica, quando os *spins* se alinham com o campo externo e a simetria *spin-flip* é conservada.. Nesse momento, esperamos que as correlações sejam zero, uma vez que com todos os *spins* apontando para uma mesma direção, temos um estado separável e, como o estado é puro, temos também um estado fatorável, ou seja, sem correlações, nessa fase o estado fundamental é único. Para valores de campo magnético $0 \leq h \leq 1$ temos a fase quebrada, quebra simetria *spin-flip*, com estado fundamental duplamente degenerado no limite termodinâmico. Por causa de uma perturbação externa infinitesimalmente pequena o sistema escolhe um dos dois estados degenerados e há quebra espontânea de simetria no limite termodinâmico, como acontece no modelo de Ising [3]. Na fase quebrada, os *spins* perdem a direção preferencial do eixo z e para $h = 0$ e $\gamma = 0$ assumem a forma de um estado tipo GHZ [15], o qual para três partículas possui a forma

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2}(|100\rangle + |010\rangle + |001\rangle + |111\rangle).$$

Esse estado é a superposição de um estado W ($|W\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|100\rangle + |010\rangle + |001\rangle)$) com um estado com todos os *spins* no sentido do campo magnético, espera-se que as correlações sejam máximas para $h = 0$.

3.1.2 Matriz densidade reduzida e entropia de emaranhamento do estado fundamental do modelo Lipkin-Meshkov-Glick

Para o cálculo de emaranhamento e correlações muitas vezes precisamos das matrizes densidades reduzidas. Agora mostraremos como obter a matriz densidade reduzida do estado fundamental do modelo LMG. O estado fundamental do modelo LMG é totalmente simétrico e pode ser decomposto através da seguinte decomposição de Schmidt [112, 113]

$$|\Psi\rangle = \sum_{n_e=0}^N P_{n_e} \sum_{l_e=0}^L \lambda_{l_e} |L, l_e\rangle \otimes |N - L, n_e - l_e\rangle, \quad (61)$$

em que os coeficientes de Schmidt de cada estado de Dicke correspondem a

$$\lambda_{l_e} = \sqrt{\binom{L}{l_e} \binom{N-L}{n_e-l_e} \binom{N}{n_e}^{-1}},$$

e sua correspondente matriz densidade é

$$\rho = \sum_{n'_e, n_e=0}^N \sum_{l'_e, l_e=0}^L \left[\frac{\sqrt{\binom{L}{l'_e} \binom{L}{l_e} \binom{N-L}{n'_e-l'_e} \binom{N-L}{n_e-l_e}}}{\sqrt{\binom{N}{n'_e} \binom{N}{n_e}}} \right] P_{n_e} P_{n'_e}^* |L, l_e\rangle \langle L, l'_e| \otimes |N - L, n_e - l_e\rangle \langle N - L, n'_e - l'_e|. \quad (62)$$

Para calcular a matriz densidade reduzida de $N - L$ partículas efetuamos o traço de L partículas, da seguinte forma

$$\sum_{l''_e=0}^L \langle L, l''_e | \rho | L, l''_e \rangle = \sum_{l''_e=0}^L \sum_{n'_e, n_e=0}^N \sum_{l_e, l'_e=0}^L \left[\frac{\sqrt{\binom{L}{l_e} \binom{L}{l'_e} \binom{N-L}{n_e-l_e} \binom{N-L}{n'_e-l'_e}}}{\sqrt{\binom{N}{n_e} \binom{N}{n'_e}}} \right] \quad (63)$$

$$P_{n_e} P_{n'_e}^* \langle L, l''_e | L, l_e \rangle \langle L, l'_e | L, l''_e \rangle \otimes$$

$$|N - L, n_e - l_e \rangle \langle N - L, n'_e - l'_e |.$$

Note que quando aplicado o traço, o termo $\langle L, l''_e | L, l_e \rangle = \delta_{l''_e, l_e}$ e, assim, o termo $\langle L, l'_e | L, l''_e \rangle = \langle L, l'_e | L, l_e \rangle = \delta_{l'_e, l_e}$. Com essas deltas de Kronecker as somas em l'_e e em l''_e são canceladas. Com isso, obtemos a matriz densidade reduzida de $N - L$ spins

$$\rho_{N-L} = \sum_{n'_e, n_e=0}^N \sum_{l_e=0}^L \left[\frac{\binom{L}{l_e} \sqrt{\binom{N-L}{n_e-l_e} \binom{N-L}{n'_e-l'_e}}}{\sqrt{\binom{N}{n_e} \binom{N}{n'_e}}} \right] \quad (64)$$

$$P_{n_e} P_{n'_e}^* |N - L, n_e - l_e \rangle \langle N - L, n'_e - l'_e |,$$

na qual $0 \leq n_e - l_e \leq N - L$ e $0 \leq n'_e - l'_e \leq N - L$. Com essa matriz densidade reduzida podemos calcular entropia de emaranhamento, assim como fizeram Latorre *et al.* na Ref. [15] para $N = 500$ e $N = 1000$ spins, no entanto, em nosso cálculo computacional fizemos apenas para $N = 500$, pois acima de 517 spins ocorre um erro numérico. Para calcular a entropia de emaranhamento utilizamos a entropia de von Neumann e a matriz densidade reduzida da equação (64). Notamos que o emaranhamento tem um pico no ponto crítico, assinalando a transição de fase quântica de segunda ordem [4, 8].

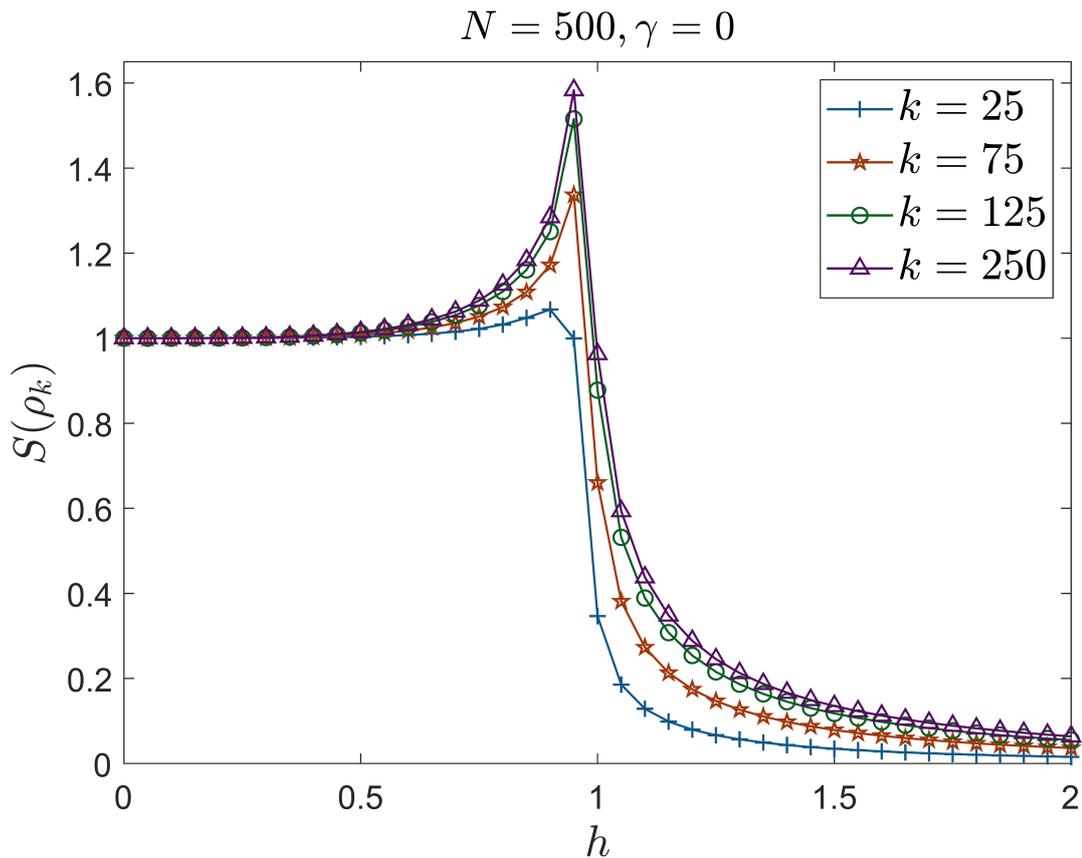


Figura 9 – Entropia de emaranhamento do estado fundamental do modelo LMG para $N = 500$ e bipartições com $k = 25, 75, 125, 250$ partículas, nas quais $k = N - L$ como na equação (64). Reproduz a Figura 2 de [15].

A entropia de emaranhamento vista na Figura 9 não muda muito quando variamos a anisotropia em $-1 \leq \gamma \leq 1$. Na Figura 10, vemos que o parâmetro γ não tem tanta relevância no estudo que faremos, pois não muda muito o comportamento ao variar h , exceto para $\gamma = 1$, onde o estado fundamental é infinitamente degenerado e é onde há outra transição de fase de primeira ordem, que não será estudada aqui. Podemos notar na figura 10 que para $\gamma = 1$ o gráfico apresenta alguns erros numéricos, nessa parte do gráfico não fizemos tratamento dos estados para levar em conta a degenerescência.

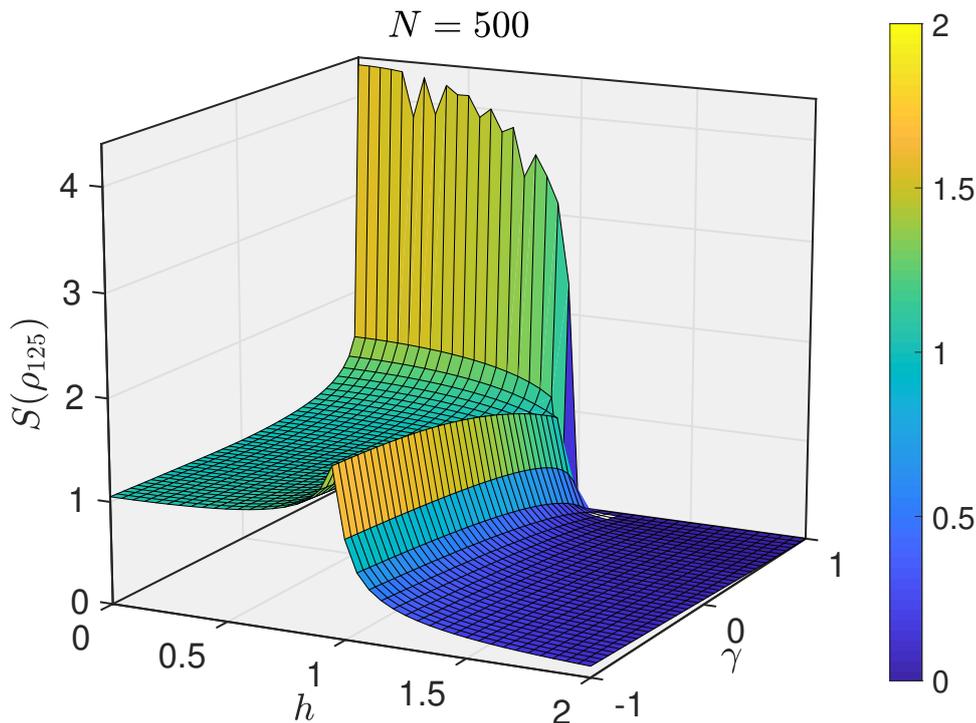


Figura 10 – Entropia de emaranhamento do estado fundamental do modelo LMG para $N = 500$ e partição com $k = 125$ partículas, e o mapa de cores corresponde ao valor da entropia de emaranhamento. Reproduz a Figura 1 de [15].

3.1.3 Escalonamento de tamanho finito no modelo Lipkin-Meshkov-Glick

Como o modelo LMG se refere um sistema de interação de infinito alcance, no qual todas as partículas interagem com todas as outras igualmente, o sistema não possui o conceito de comprimento e dimensionalidade definidos [114], tal como é feito com sistemas sem interação de infinito alcance estudado no ETF. Assim, o número de partículas N será nossa variável na análise dos expoentes do ETF.

Vamos mostrar agora porque é válido utilizar N na análise ETF. Sabemos que alguns observáveis se comportam como uma lei de potência próximos ao ponto do crítico numa transição de fase de segunda ordem no limite termodinâmico. E, além disso, de acordo com a equação (59) os observáveis podem ser descritos como

$$M \propto (h - h_c)^\beta, \quad (65)$$

esses observáveis M podem ser entropia de emaranhamento, magnetização, correlações, etc. Contudo, para N grande, mas finito, M deve se comportar, de acordo com a hipótese do ETF, como

$$M \propto (h - h_c)^\beta F(N(h - h_c)^\gamma), \quad (66)$$

no qual F refere-se a uma função que é diferente para cada observável que satisfaz

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = cte.$$

Com isso, quando $N \rightarrow \infty$ e $h \neq h_c$, recuperamos equação (65) e satisfaz,

$$\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = x^{-\beta/\gamma}.$$

Satisfazendo essa propriedade, quando o campo externo se aproxima do ponto crítico $h = h_c$, obtemos

$$M \propto (h - h_c)^\beta (N(h - h_c)^\gamma)^{-\beta/\gamma} = N^{-\beta/\gamma}, \quad (67)$$

assim, no ponto crítico $h = h_c$ devemos ter

$$M \propto N^{-\beta/\gamma}, \quad (68)$$

que tende a zero quando $N \rightarrow \infty$, como deveria ser. Os observáveis que estudamos obedecem uma lei de potência, como veremos a seguir, portanto, podemos utilizar métodos para extrair os expoentes críticos relacionados aos observáveis estudados. O método a ser utilizado aqui será o seguinte: para extrair os expoentes críticos vamos calcular a derivada do parâmetro de ordem, tomar o mínimo e calcular o valor do parâmetro de ordem nesse ponto mínimo em função de N . Como o parâmetro de ordem em função de N obedece uma lei de potência, podemos calcular o logaritmo de ambas as variáveis e, com isso, extrair o expoente crítico relacionado ao parâmetro de ordem. Assim, teremos

$$\log(M) \propto \nu \log(N), \quad (69)$$

para extrair ν calculamos vários valores de M para vários valores de N , e após aplicar o logaritmo o coeficiente angular da reta é o expoente crítico. Podemos notar ainda a relação $\nu = -\frac{\beta}{\gamma}$.

Na próxima seção, apresentaremos os primeiros resultados da tese, o cálculo das CGM na transição de fase do modelo LMG e os expoentes críticos obtidos para correlações genuínas k -partidas.

3.2 RESULTADOS E DISCUSSÕES

3.2.1 Correlações genuínas multipartidas na transição de fase quântica de segunda ordem do modelo Lipkin-Meshkov-Glick

Nesta seção, apresentaremos os resultados obtidos com o cálculo numérico das CGM, proposta por Girolami *et al.*, no estado fundamental do modelo LMG. Assim, calculamos numericamente as entropias relativas e as correlações genuínas k -partidas para N quaisquer e para N múltiplos de k para $0 \leq h \leq 2$, fazemos o mesmo para pseudo-distância na transição de fase $h = 1$ para vários k 's. Mostramos, para alguns

valores de k , que as CGM assinalam a transição de fase e que a transição ocorre em $h = 1$. Ainda, calculamos os expoentes críticos, através de escalonamento de tamanho finito, para alguns valores de k e notamos que os expoentes críticos calculados estão no intervalo $[-1/2, 1/2]$, evidenciando que todos os outros expoentes também estejam nesse intervalo. Por fim, calculamos o *weaving* para alguns valores de N e expoente crítico do *weaving* para $\omega = k - 1$.

3.2.1.1 Correlações genuínas k -partidas no estado fundamental do modelo Lipkin-Meshkov-Glick

Para o cálculo das CGM precisamos da matriz densidade reduzida $\rho_k = \text{Tr}_{N/k} \rho_N$ de ρ_N , obtida através da equação (64), para então computar a pseudo-distância dada pela equação (27). Mas antes, para obtenção da matriz densidade reduzida, diagonalizamos numericamente o hamiltoniano do modelo LMG (49). Então, com o autovetor do estado fundamental construímos a matriz densidade reduzida. Com isso, podemos calcular as pseudo-distâncias, dadas pela equação (27), que medem as correlações maiores do que k presentes no estado fundamental. A Figura 11 tem os resultados para a pseudo-distância entre o estado fundamental do modelo LMG e os estados produtos de ordem k para $N = 100$, com essa figura podemos ver a relação das pseudo-distâncias com o número de partições. Escolhemos fixar $\gamma = 0.5$ para todas as análises numéricas das CGM do estado fundamental do modelo LMG, pois, de acordo com a Figura 10 não há muita diferença nas correlações conforme variamos γ , exceto para $\gamma = 1$. Como todas as matrizes densidade reduzidas do estado puro tipo GHZ são totalmente mistas e a entropia de von Neumann é igual a um, as pseudo-distâncias calculam também aproximadamente o número de partições do estado que se está medindo a distância. Por exemplo, para $k = 1$ esse estado $\sigma_{100} = \rho_1 \otimes \rho_1 \otimes \dots \otimes \rho_1$ consiste do produto de 100 matrizes reduzidas de uma partícula ou 100 partições. Ou ainda, para $k = 3$, $\sigma_{100} = \rho_3 \otimes \rho_3 \otimes \dots \otimes \rho_1$, são 33 matrizes densidades reduzidas com três partículas e uma matriz densidade reduzida com uma partícula, resultando em 34 partições que é aproximadamente o valor de $S^{3 \rightarrow N}$ para $h = 0$, neste ponto sabemos que o estado corresponde ao tipo GHZ. Com aumento do valor de k aparecem pseudo-distâncias que têm a mesma quantidade de partições no estado produto usado como base. Isso pode ser visto dividindo 100 por k e o resultado da divisão fornece o número de partições quando não há resto, caso haja resto, há uma partição a mais com o número de partículas restantes.

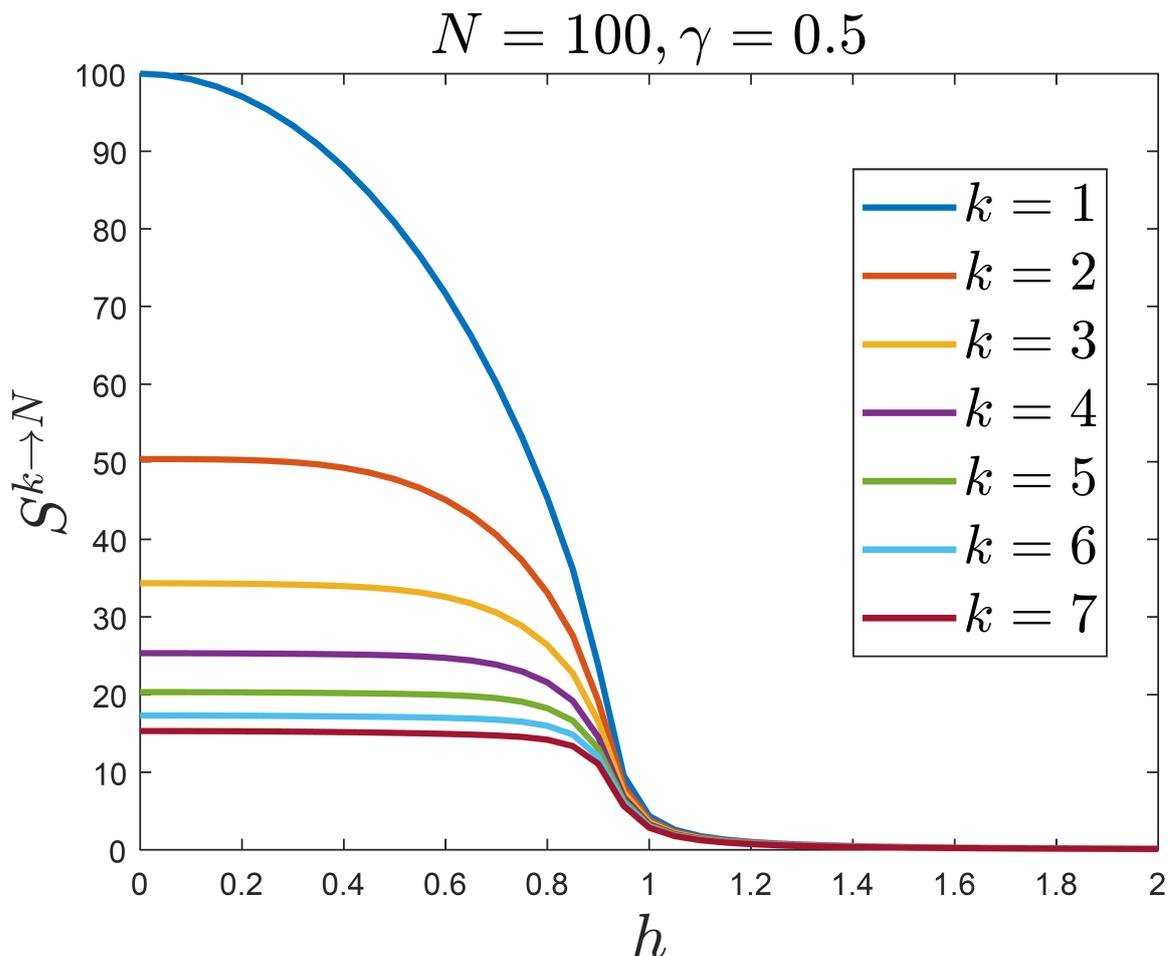


Figura 11 – Correlações genuínas de ordem maior do que k no estado fundamental do modelo LMG para $N = 100$ e $\gamma = 0.5$. As pseudo-distâncias $S^{k \rightarrow N}$ são calculadas até $k = 7$, todas capturam a transição de fase, e seus valores em $h = 0$ são iguais ao número de partições no estado produto tomado como base para o cálculo da pseudo-distância para cada k .

Isso acontece primeiramente em $k = 10$ e $k = 11$ que possuem 10 partições, na Figura 12, podemos ver esse comportamento acontecendo, comportamento que não aparecia na figura anterior. As pseudo-distâncias $S^{10 \rightarrow 100}$ e $S^{11 \rightarrow 100}$ em $h = 0$ têm aproximadamente o mesmo valor, se diferenciando somente em $h \simeq 0.6$. Pois, na transição de fase o emaranhamento apresenta um pico e matrizes densidades com números maiores de partículas apresentam um pico acentuado de emaranhamento em $h = 1$ de acordo com a Figura 9. E as CGM capturam todas as correlações clássicas e quânticas, inclusive emaranhamento. As Figuras 11 e 12 mostram a relação entre as pseudo-distâncias e o número de partições, além disso, nos ajudam entender o cálculo das correlações genuínas k -partidas, para obtê-las basta fazer a diferença das pseudo-distância $k - 1$ e k .

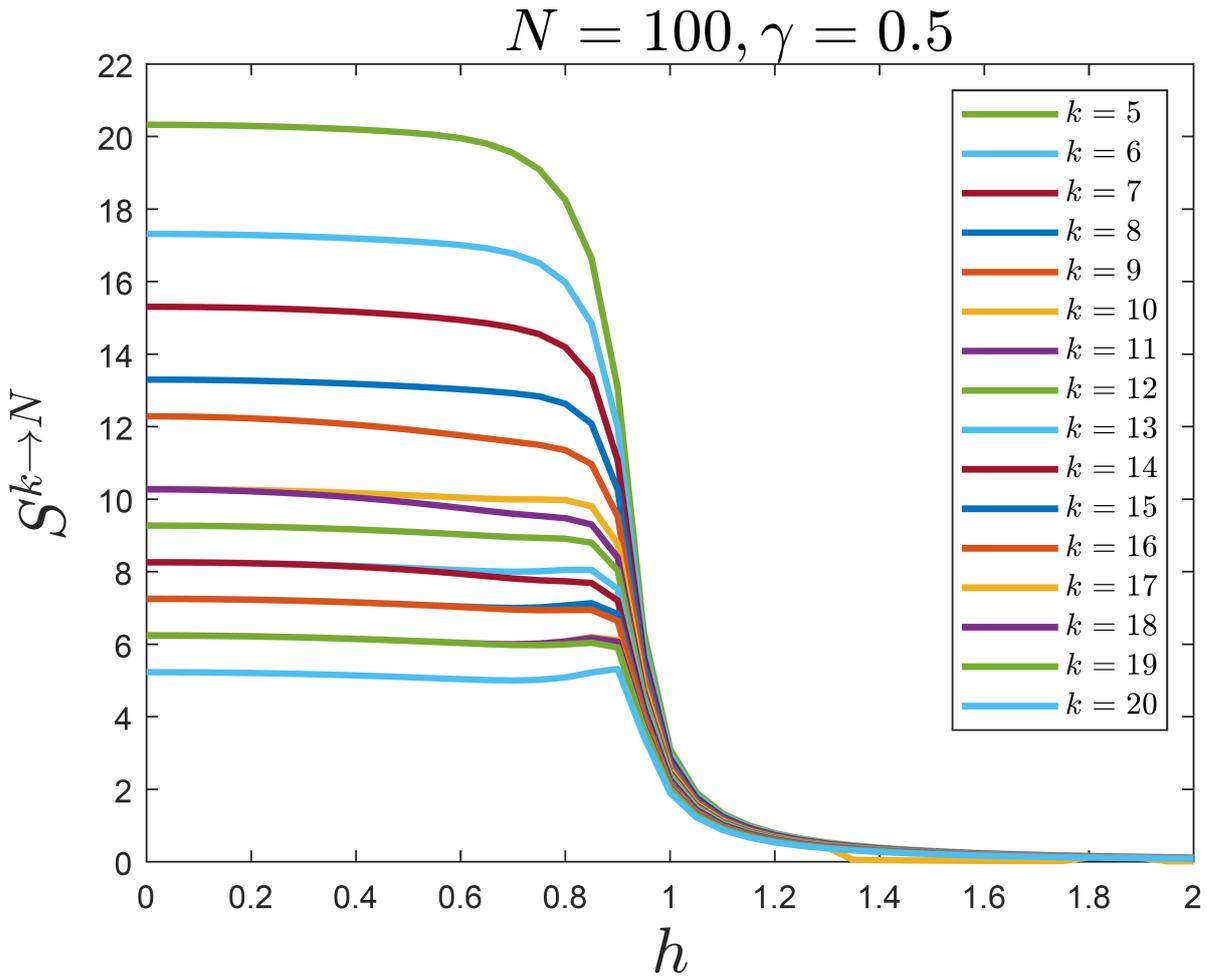


Figura 12 – Correlações genuínas de ordem maior do que k no estado fundamental do modelo LMG para $N = 100$ e $\gamma = 0.5$. As pseudo-distâncias $S^{k \rightarrow N}$ são calculadas de $k = 6$ a $k = 20$, as que possuem a mesma quantidade de partições no estado produto tomado como base para calcular a pseudo-distância apresentam valores iguais no começo da fase paramagnética diferenciando somente próximo da transição. Este gráfico ajuda a entender o comportamento das correlações genuínas k -partidas da Figura 13.

Na figura 13, calculamos as correlações genuínas k -partidas primeiramente para $N = 100$, k de 6 a 20. Podemos observar que as correlações genuínas k -partidas aumentam conforme k diminui, porém, notamos que isso, às vezes, não acontece de forma regular. Mais uma vez isso se deve ao número de partições, por exemplo, as correlações genuínas de ordem $k = 9$ e $k = 10$ trocam de ordem. Pois, para calcular S^9 fazemos a diferença de $S^{8 \rightarrow 100}$, que possui 13 partições, e $S^{9 \rightarrow 100}$, possui 12 partições, assim a diferença é igual a um no número de partições. Enquanto que para $k = 10$, como $S^{10 \rightarrow 100}$ possui 10 partições, a diferença entre as pseudo-distâncias é dois no número de partições. O número de partições nos estados produtos tem um efeito no cálculo das correlações, pois quanto mais partições temos, menos correlacionado pode ser o estado, análogo ao que acontece com k -separabilidade no caso do emaranhamento.

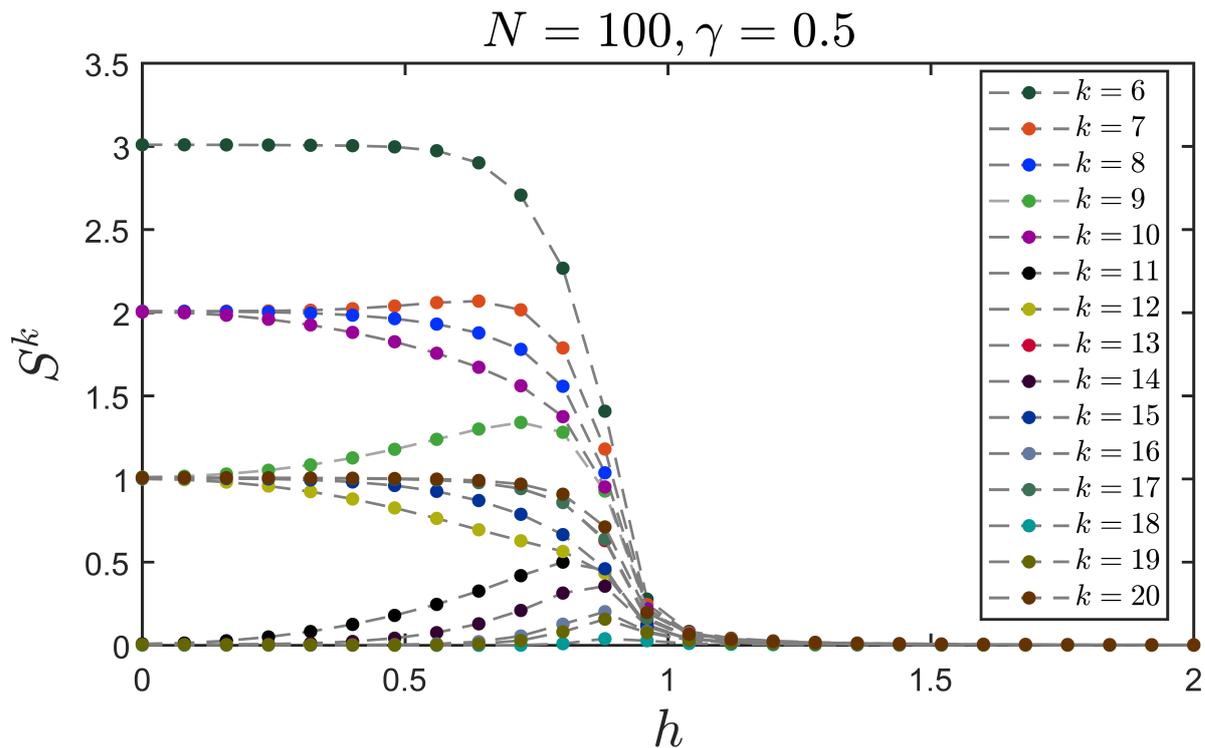


Figura 13 – Correlações genuínas k -partidas presentes no estado fundamental do modelo LMG para $N = 100$, $\gamma = 0.5$, e $k = 6$ a $k = 20$ em função h . Na fase que $h > 1$ os *spins* estão alinhados com o campo externo, assim estão descorrelacionados.

Para $k = 9$, por exemplo, temos correlação genuína 9-partida menor do que correlações genuínas 10-partidas, o mesmo acontece para outros k 's, para $k = 11$ e $k = 12$, $k = 14$ e $k = 15$, $k = 16$ e $k = 17$. Como $k = 20$ é um divisor de $N = 100$ as correlações genuínas de ordem $k = 20$ resultaram maior do que as de ordem $k = 11, 14, 16, 18, 19$ em $h = 0$. Isso vem do número de partições de duas pseudo-distâncias consecutivas utilizadas no cálculo de correlações genuínas k -partidas, como foi explicado acima. Uma forma de evitar esse tipo de comportamento é utilizar $N \bmod k = 0$ para todos os k 's que desejamos calcular, assim o número de partições é dado pela divisão exata e não gera o problema de ter número iguais de partições nos estados de P_k . Além disso, há também a subtração na equação (29) do cálculo das correlações genuínas k -partidas que influencia nos casos em que as correlações começam aproximadamente do zero. Isso acontece quando duas pseudo-distâncias consecutivas têm o mesmo número de partições, devido à função piso aproximar, quando $N \bmod k \neq 0$, a divisão N/k para o mesmo número para dois k 's consecutivos. Por exemplo, para $S^{11}(\rho_{100}) = S^{10 \rightarrow 100}(\rho_{100}) - S^{11 \rightarrow 100}(\rho_{100})$, na pseudo-distância $S^{10 \rightarrow 100}(\rho_{100}) = S(\rho_{100} || \rho_{10} \otimes \rho_{10} \otimes \dots \otimes \rho_{10})$ o estado produto $\sigma_{100} \in P_{10}$ possui 10 partições e na $S(\rho_{100} || \rho_{11} \otimes \rho_{11} \otimes \dots \otimes \rho_{11})$ o estado produto $\sigma_{100} \in P_{11}$ possui 10 também, 9 com 11 subsistemas e uma com um subsistema. Portanto, $S^{11}(\rho_{100}) \simeq 10 - 10 \simeq 0$ em $h = 0$. Nos outros casos similares as correlações genuínas k -partidas são

aproximadamente zero também e na Figura 13 alguns k 's tem esse comportamento. No caso $k = 20$, como P_{20} tem 5 partições e P_{19} tem 6, $S^{20}(\rho_{100}) \simeq 1$ em $h = 0$, resultado maior do que correlações de ordem $k = 11, 14, 16, 18, 19$ que são aproximadamente zero em $h = 0$. Enquanto que próximo de $h = 1$ todas as CGM tendem para zero, como esperado para fase ferromagnética.

A distribuição das correlações genuínas k -partidas na Figura 13, em $h = 0$, é aproximadamente igual à expressão das correlações para o estado GHZ na tabela 1 de Girolami *et al.* [41]

$$S^k(\rho_N) = \lceil N/(k-1) \rceil - \lceil N/k \rceil. \quad (70)$$

Pois, para $h = 0$ a matriz $S(\rho_k) \simeq 1$ para o estado fundamental do modelo LMG, que é tipo GHZ e a função teto possui sempre valores discretos, resultando nesses resultados discretos para as CGM. Para demonstrar isso utilizamos a definição de correlações genuínas k -partidas e o fato de que para todas as matrizes densidades reduzidas $S(\rho_k) \simeq 1$, de forma que

$$\begin{aligned} S^k(\rho_N) &= S^{k-1 \rightarrow N}(\rho_N) - S^{k \rightarrow N}(\rho_N) \\ &= \left(\left\lfloor \frac{N}{k-1} \right\rfloor S(\rho_{k-1}) + S(\rho_{N \bmod k-1}) \right) - \left(\left\lfloor \frac{N}{k} \right\rfloor S(\rho_k) + S(\rho_{N \bmod k}) \right) \\ &\simeq \left(\left\lfloor \frac{N}{k-1} \right\rfloor + 1 \right) - \left(\left\lfloor \frac{N}{k} \right\rfloor + 1 \right) = \left\lfloor \frac{N}{k-1} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{N}{k} \right\rfloor. \end{aligned}$$

Além disso, a equação (70) é a diferença do número de partições dos estados produtos reduzidos para as duas pseudo-distâncias consecutivas do cálculo de S^k . O comportamento das CGM quando variamos h está de acordo com os resultados das Refs. [15, 51], onde para $0 \leq h \leq 1$ temos correlações (entropia de emaranhamento para Latorre e colaboradores [15]) diferente de zero e para $1 \leq h \leq 2$ temos correlações iguais a zero. Exceto para os casos que explicamos anteriormente que possuem correlações iguais a zero em $h = 0$, se a medida das CGM estiver correta o emaranhamento genuíno k -partido também deve ser zero.

Além da explicação do número de partições, não temos significado físico para o comportamento das CGM não ser regular com o aumento de k . Porém, para uma explicação qualitativa por analogia, a frustração de *spins* pode ser uma alternativa. A frustração em *spins* ocorre quando há configurações em que há *spins* com mais de uma possibilidade de estrutura que minimiza a energia do estado total. Por exemplo, em sistemas de 3 *spins* com acoplamento antiferromagnético em uma configuração triangular, na qual dois *spins* estão com alinhamento antiparalelos, assim o terceiro para minimizar a energia teria que estar antiparalelo com os dois, todavia isso não é possível, gerando a frustração [115]. A comparação com as CGM surge com os casos em que há partículas desemparelhadas, ou seja, quando N não divisível por k . Por exemplo, para o caso em que $N = 100$ e $k = 9$, haveriam 11 partições com 9 partículas

e uma com uma partícula, não existe nenhuma forma de agrupar essa partícula desemparelhada em um grupo com 11 partículas. Para as CGM de ordem k , no caso em que há desemparelhamento e as duas pseudo-distâncias consecutivas têm o mesmo número de partições no estado produto pertencente a P_{k-1} e P_k , a correlação é menor do que a próxima ordem $k+1$, em que $k+1$ é divisor de N . Isso ocorre porque quando $k+1$ é divisor emparelha todas as partículas, como no caso em que $k=10$ e $N=100$, $S^{10}(\rho_{100}) > S^9(\rho_{100})$. Ao analisarmos, agora, só os estados produtos pertencentes a P_k , os que apresentam uma partícula desemparelhada possuem maior "produtibilidade" (mais partições). Ainda, se acrescentamos uma partícula por vez na partição com desemparelhamento, aumentamos o grau de correlação dessa partição, até que o grupo fique com número de partículas igual a k e, assim, aumenta as correlações genuínas k -partidas em uma unidade. Lembrando que é apenas uma analogia com a frustração, pois o acoplamento utilizado no modelo LMG foi o ferromagnético e, portanto, não existe frustração. No entanto, em sistemas não frustrados podem haver efeitos de monogamia de correlações [116], que pode ser também responsável pelo comportamento não regular das CGM com o aumento de k . Na monogamia (poligamia no caso das CGM) de correlação, grupos de partículas que estão maximamente correlacionados entre si não se correlacionam tanto com novas partículas adicionadas, até formar um grupo mais coeso ou maximamente correlacionados entre si [117].

No entanto, como o modelo LMG possui simetria por troca de partículas, talvez seja mais adequado no momento do cálculo das CGM selecionarmos os k 's que dividem N exatamente, ou seja, N deve ser múltiplo dos k 's escolhidos. Com essa ideia em mente, escolhemos o $N=156$ que é múltiplo de $k=2,3,4,13$ e calculamos as CGM em função de h , assim na Figura 14 podemos notar que o comportamento das CGM se regulariza.

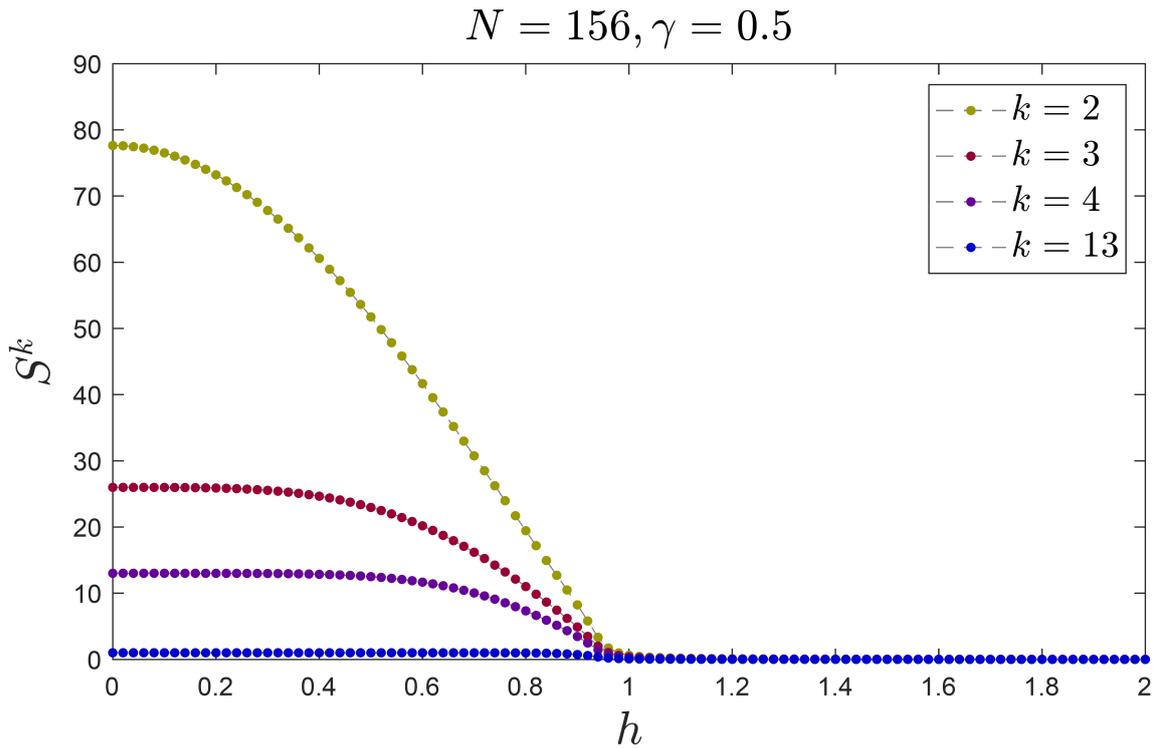


Figura 14 – Correlações genuínas k -partidas presentes no estado fundamental do modelo LMG para $N = 156$, $\gamma = 0.5$ e $k = 2, 3, 4, 13$ em função de h . Na fase em $h > 1$ os *spins* estão alinhados com o campo externo, então não estão correlacionados.

Novamente, o estado fundamental obedece a equação (70), que explica o comportamento em $h = 0$ das CGM na Figura 14. Além disso, de acordo com a Figura 15, conforme aumentamos k mais resistentes às variações do campo externo se tornam as correlações. Essa tendência também está presente na Figura 9 do trabalho da Ref. [15], partições maiores possuem quantidade de emaranhamento maior e são mais resistentes às mudanças no campo na região $0 \leq h \leq 1$. Na Figura 14 não temos o comportamento irregular que acontece para alguns k 's na Figura 13, por esse motivo e por questões de simetria talvez seja mais adequado no cálculo das CGM considerar apenas N de modo que $N \bmod k = 0$.

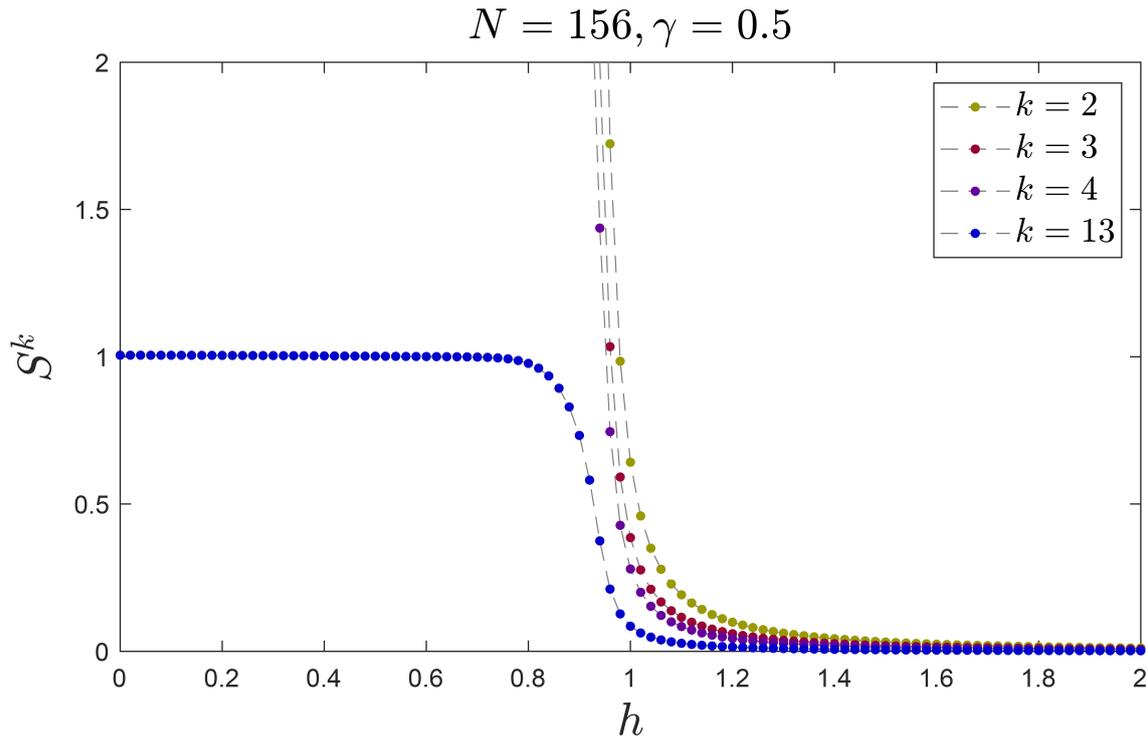


Figura 15 – O inset é um zoom da figura para uma melhor visualização do comportamento das CGM de ordem $k = 13$ próximo da transição de fase. Outros valores de k 's têm comportamento parecido próximo ao ponto crítico.

Na transição de fase $h = 1$ todas as correlações genuínas k -partidas presentes na Figura 15 já possuem valores bem menores do que na fase paramagnética, e tendem rapidamente a zero para $h > 1$.

Antes de começarmos a análise das CGM na TFQ de segunda ordem no modelo LMG, chamaremos a atenção para o comportamento da medida de pseudo-distância $S^{k \rightarrow N}$ para diferentes valores de k e sua conexão com o número total de *spins* N . Na Figura 16 a) temos a pseudo-distância $S^{k \rightarrow N}$ para $N = 200$ e $h = 1$ em função de k . A pseudo-distância é monotonicamente decrescente com o tamanho do bloco k . Para pequenos valores de k o decrescimento é suave, porém, conforme k se torna comparável com N , mudanças abruptas ocorrem em forma de escadas, que ocorrem quando o número de partições começa a ficar igual até mudar o valor $\lfloor N/k \rfloor$ e ter um novo degrau de tamanho igual $\lfloor N/\lfloor N/k \rfloor - k \rfloor$ para $N \bmod k \neq 0$ e para o primeiro k tal que $\lfloor N/k \rfloor = \lfloor N/(k-1) \rfloor + 1$, ou seja, o começo de um novo degrau. Esse efeito já foi verificado para estados de Dicke na Ref. [118], acreditava-se que viria direto da função piso, mas podemos ver uma explicação mais completa a partir do número de partições que também está relacionada com a função piso, uma vez que fornece o número de partições para divisão exata, ou o número de partições menos um caso contrário. Para valores de k 's pequenos isso não se torna relevante, pois o número de partições sempre resulta números diferentes entre duas pseudo-distâncias consecutivas. Somente quando chegamos a valores de k tais que $\lfloor N/k \rfloor = \lfloor N/(k +$

1)] = $\lfloor N/(k+2) \rfloor \dots$ é que os degraus começam a aparecer.

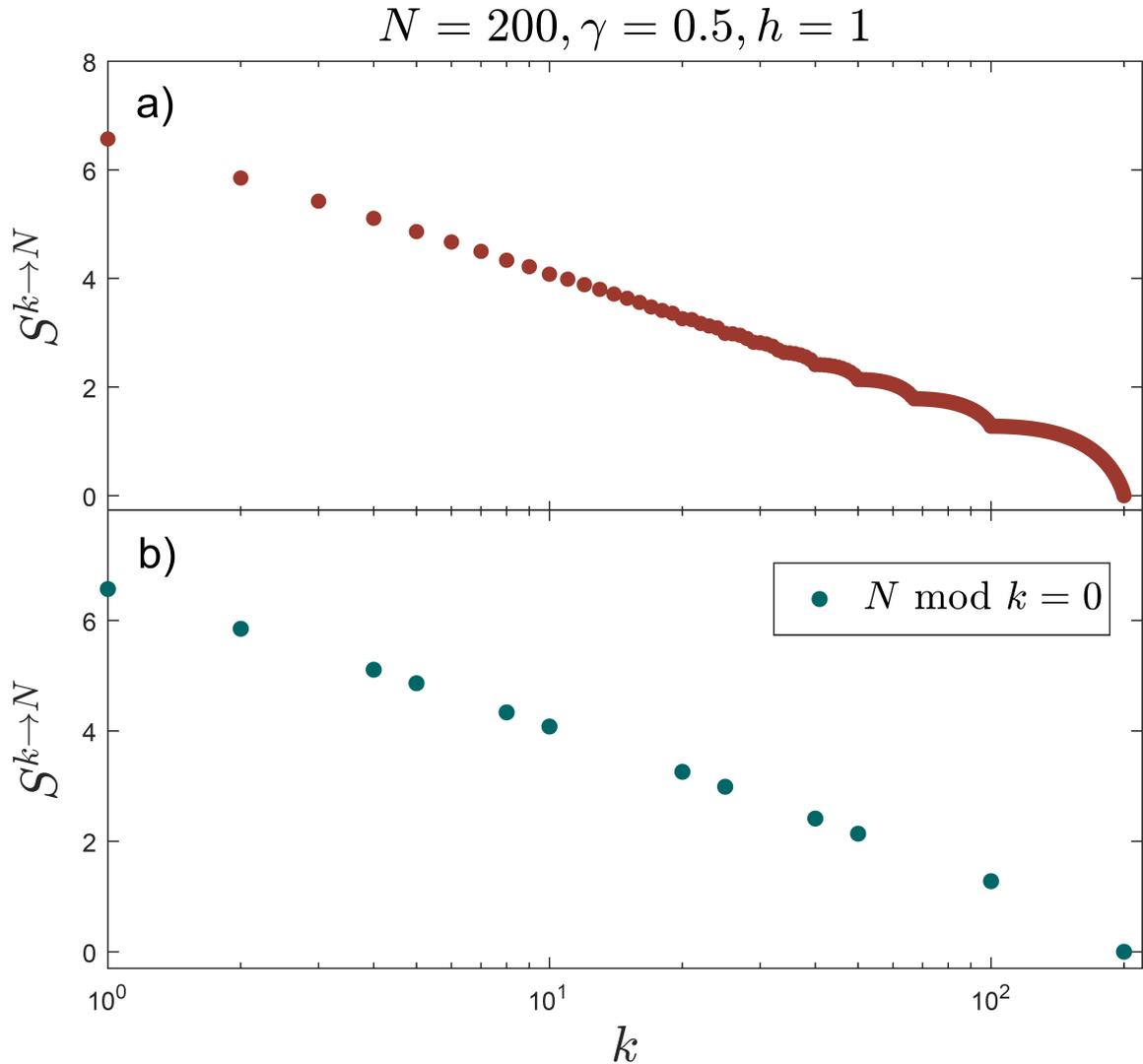


Figura 16 – CGM de ordem maior do que k , $S^{k \rightarrow N}$, em função de k para $N = 200$, $\gamma = 0.5$ e $h = 1$. Na Figura (a) todos valores inteiros de k de $1 \leq k \leq N$ são considerados, enquanto na Figura (b) somente os valores de k que satisfazem a restrição $N \bmod k = 0$ são levados em conta.

Por outro lado, na Figura 16 b) podemos ver a dependência de $S^{k \rightarrow N}$ com k , mas com a restrição $N \bmod k = 0$. Como podemos notar, isso é suficiente para remover o comportamento de escadas, isso corrobora a proposta de ser mais adequado utilizar a restrição $N \bmod k = 0$ para sistema com simetria por troca de partículas. Esse tipo de imposição nos permite obter os expoentes críticos facilmente, pois são os blocos de partículas que restam da divisão de N/k que causam as mudanças abruptas nas CGM de ordem k .

3.2.1.2 Transição de fase quântica e correlações genuínas k -partidas

Primeiramente, mostraremos que as correlações totais e todas as ordem k ($2 \leq k \leq N$) das CGM assinalam a TFQ de segunda ordem. Para verificar que as CGM assinalam a TFQ nós calculamos a primeira derivada de S^k em relação ao parâmetro de controle h e mostramos que no limite termodinâmico a primeira derivada é descontínua para algum valor de h , nomeado como ponto crítico h_c , igual a um para o modelo LMG. Na Figura 17, podemos ver que existe uma descontinuidade da derivada de S^{Total} próxima ao ponto crítico conforme nos aproximamos do limite termodinâmico, caracterizando um transição de fase de segunda ordem.

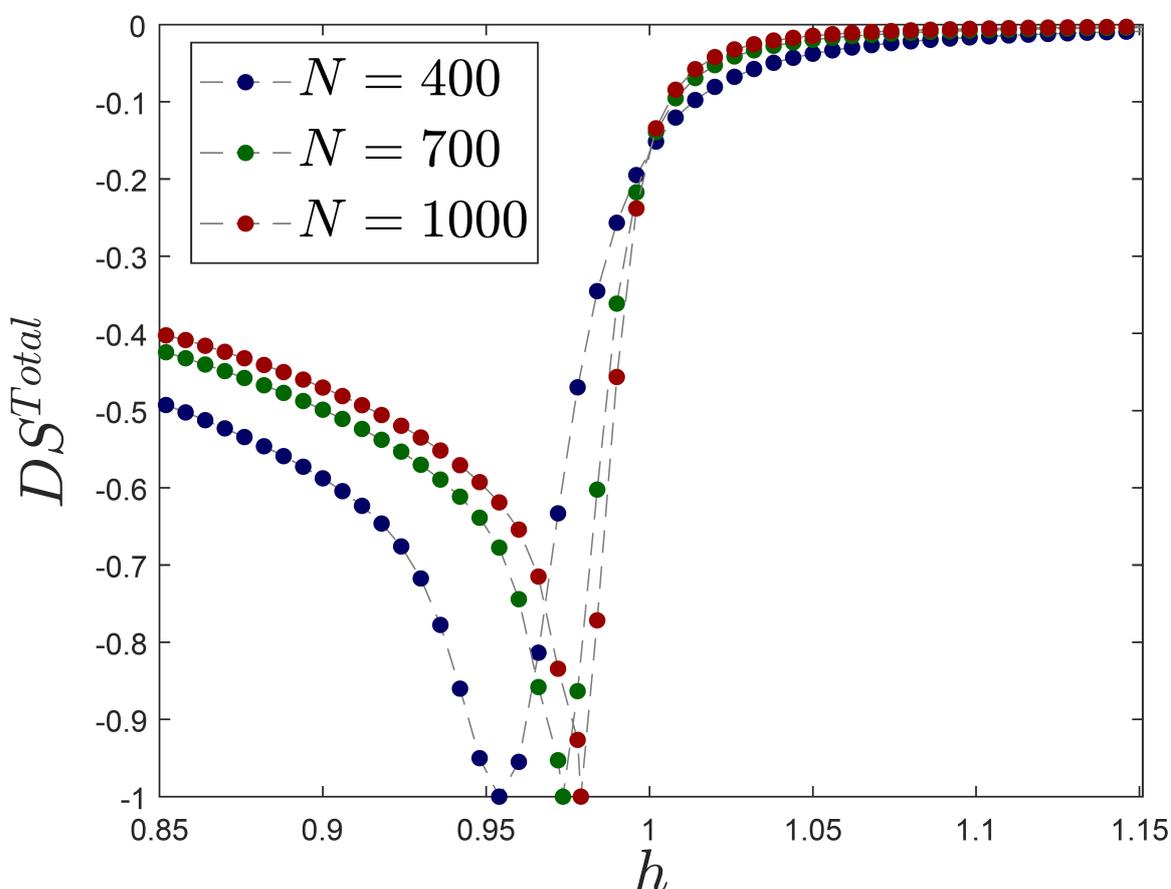


Figura 17 – A derivada de primeira ordem das correlações totais em função do parâmetro de controle externo. Conforme N aumenta o valor mínimo da derivada se aproxima de $h_c = 1$.

Na Figura 18, tomamos um intervalo de h menor para ver melhor a variação do ponto mínimo, com outras ordens de correlações sendo apresentadas e os N sendo escolhidos para serem múltiplos de $2 \times 3 = 6$. Com a Figura 18 concluímos que o valor mínimo de dS^k/dh (para correlações totais e $k = 2, 3, N$), ponto de descontinuidade, ocorre para algum valor do parâmetro de controle h_{min} , o qual tende para $h_c = 1$ para $N \rightarrow \infty$. Esse resultado está de acordo com a Figura 11, na qual as pseudo-distância

de ordem k menores têm um ponto de inflexão mais próximos de $h_c = 1$, assim, correlações totais e de ordem N têm um mínimo mais próximo de $h = 1$ para todos os N do que para ordem $k = 2$ e $k = 3$. Notamos também, na Figura 18, que a derivada das correlações totais (S^{Total}) é igual a de S^N , cuja explicação se deve ao fato de que a entropia de von Neumann de ρ_1 ser igual a de ρ_{N-1} devido à simetria do sistema, e essas são as matrizes densidades que precisamos para calcular a correlações totais (ρ_1) e a correlação de ordem N (ρ_{N-1}).

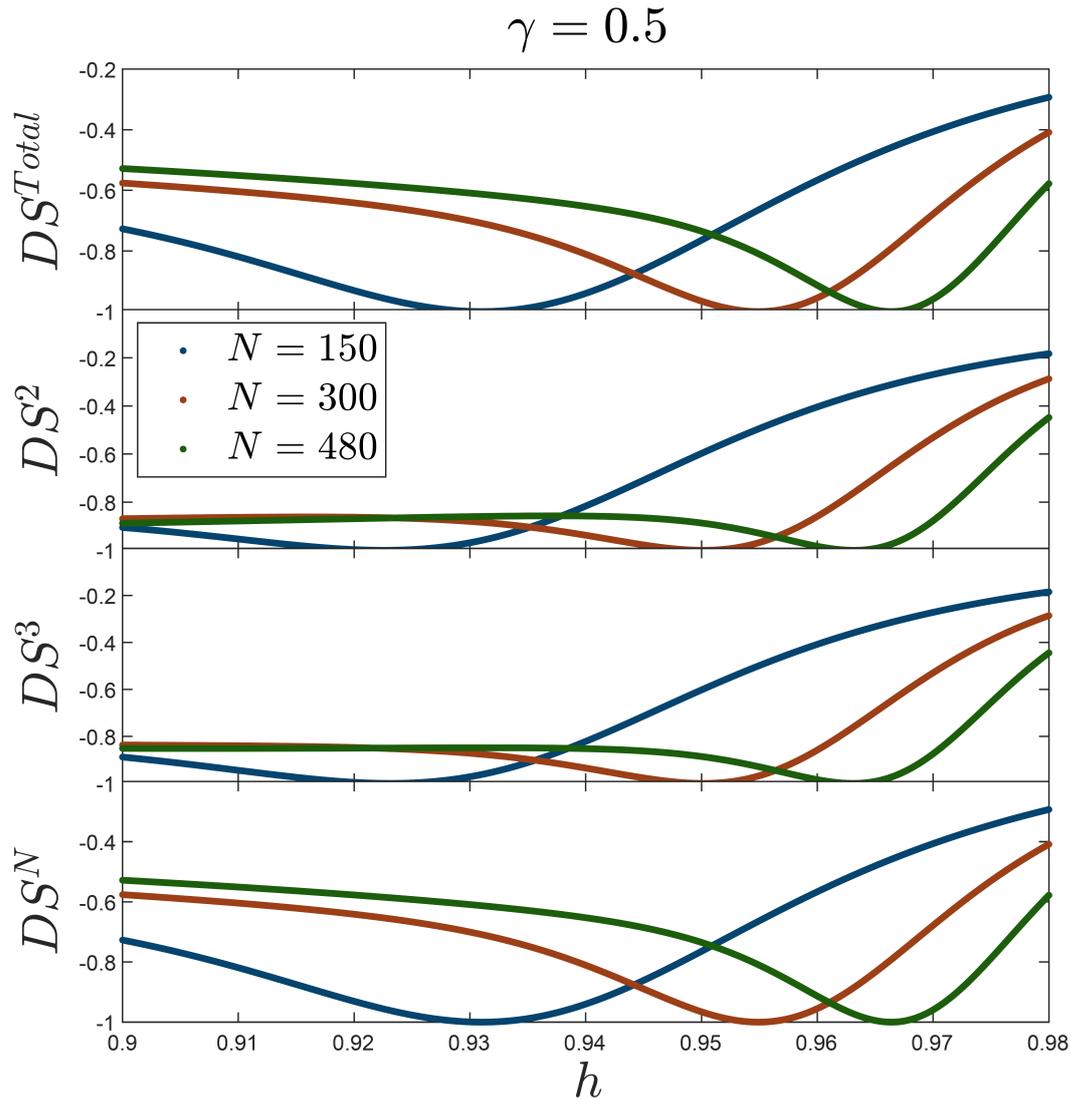


Figura 18 – A derivada de primeira ordem das correlações totais ($k = 1$) e CGM de ordem $k = 2, 3, N$ em função do parâmetro de controle externo. O valor mínimo das derivadas ocorrem para valores de h cada vez mais próximos de $h_c = 1$ conforme N aumenta.

Na Figura 19, temos mais uma forma de evidenciar que o parâmetro de controle h_{min} tende para $h_c = 1$, porém, nessa figura exploramos o limite termodinâmico através de um ajuste por uma lei de potência que extrapola os valores das correlações totais, e de ordem $k = 2, 3, N$ iniciais. Todas as correlações se aproximam da reta $h_{min} = 1$ para

N da ordem de 10^4 , apenas $k = 3$ passou um pouco de $h_{min} = 1$, isso pode ser erro do ajuste por uma lei de potência. As correlações totais e genuínas de ordem $k = 2$ estão atrás da linha da correlação de ordem N na Figura 19.

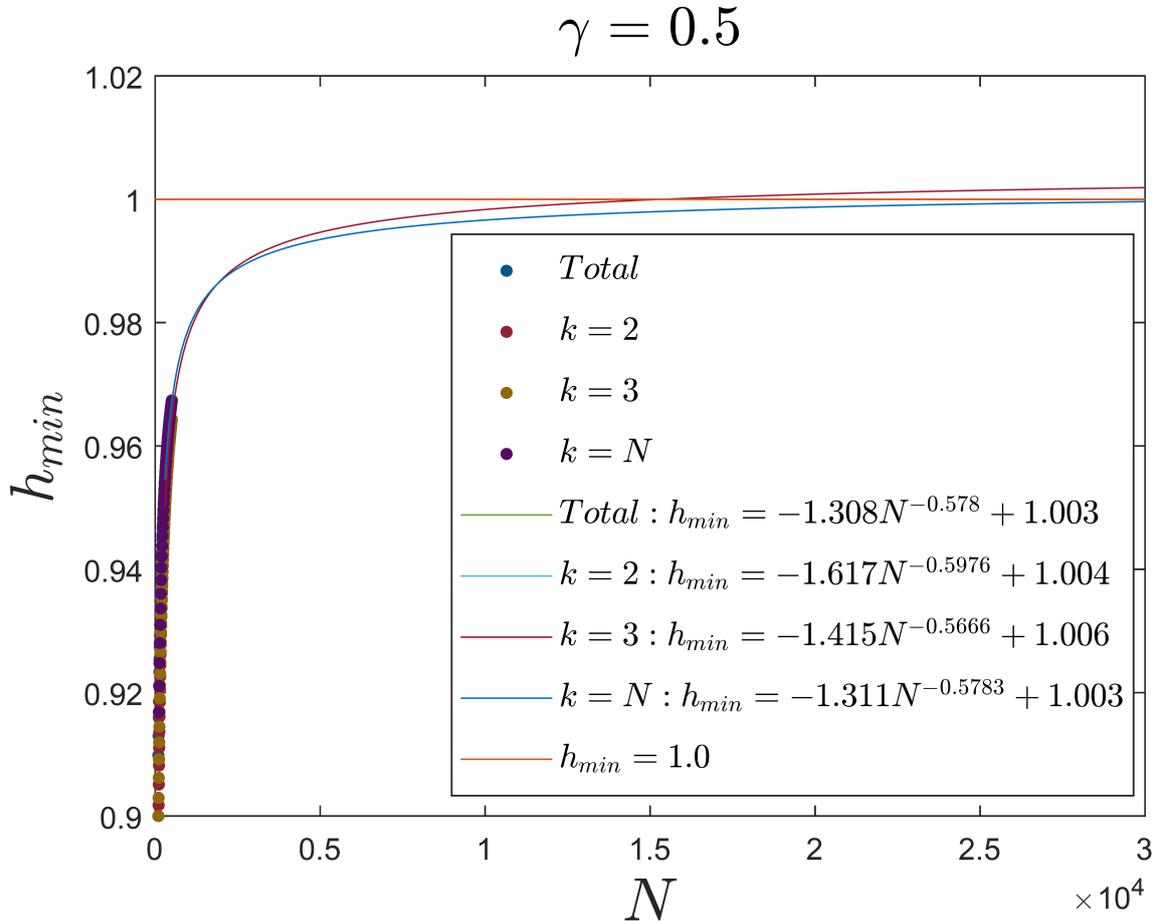


Figura 19 – Valores do parâmetro de controle h em que a derivada de primeira ordem das correlações totais e CGM de ordens $k = 2, 3, N$ é mínima em função do número de *spins* do sistema N . As linhas sólidas são um ajuste logarítmico dos pontos para mostrar que no limite termodinâmico ($N \rightarrow \infty$) $h_{min} \rightarrow h_c = 1$. As restrições $N \bmod 6 = 0$ foram impostas para as curvas com $k = 2, 3$.

Na Figura 20, mostramos o gráfico para valores de N até 600, no qual os pontos utilizados para o ajuste por lei de potência estão localizados. Nesse gráfico, precisamos aumentar bastante a precisão dos passos em h e tomar somente os valores de k que são divisores de N para termos curvas suaves.

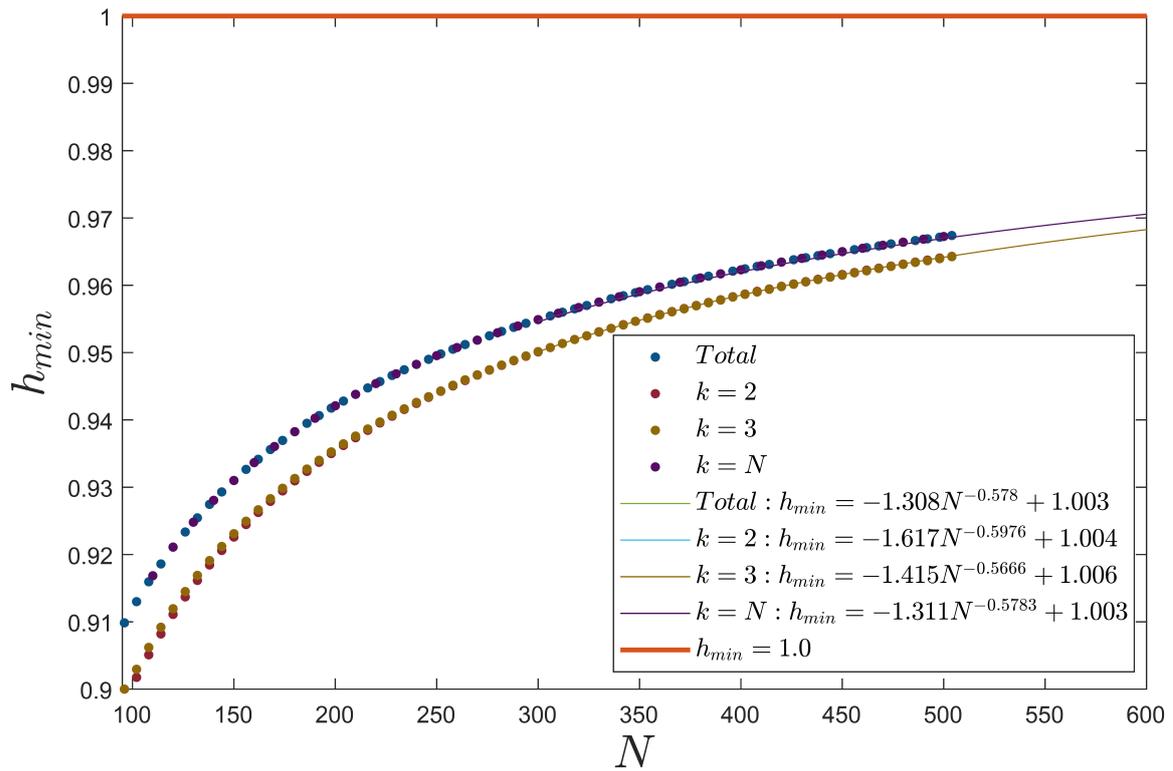


Figura 20 – Valores do parâmetro de controle h em que a derivada de primeira ordem das correlações totais e CGM de ordens $k = 2, 3, N$ em função do número de *spins* no sistema N . No intervalo em que o comportamento dos pontos utilizados para o ajuste da lei de potência são visualizados.

De acordo com o que foi visto na Figura 18, o mínimo da derivada das correlações genuínas de ordem k tendem para $h_c = 1$ e a Figura 19 vemos que de fato no limite termodinâmico os h_{min} tendem para $h_c = 1$. Portanto, as CGM de ordem k assinalam a já conhecida TFQ de segunda ordem no modelo LMG em $h_c = 1$ [55].

3.2.1.3 Análises dos expoentes com escalonamento de tamanho finito das correlações genuínas k -partidas

A aplicação do método de ETF para encontrar os expoentes que governam o comportamento do parâmetro de ordem próximo ao ponto de transição pode ser feita utilizando diferentes procedimentos. Aqui, para calcular os expoentes críticos das correlações genuínas k -partidas, tomamos o ponto mínimo h_{min} da primeira derivada das correlações em função do número de partículas N . Assim, o expoente crítico α é obtido da função $S^k(h_{min}) = AN^\alpha$, onde A é alguma constante. Como o custo computacional para os cálculos numéricos aumenta rapidamente com o número de partículas N , nós calculamos os expoentes críticos levando N até 500 *spins*, este é nosso limite termodinâmico na prática.

Os valores dos expoentes podem variar um pouco, diminuindo conforme N aumenta ou quando excluímos os menores valores de N no gráfico. A estratégia

utilizada aqui para obter os expoentes críticos considera somente os valores de N de forma que $N \bmod (k - 1) = 0$ e $N \bmod k = 0$. Como mencionado antes, a vantagem de utilizar essa abordagem é que isso evita mudanças abruptas no valor das CGM de ordem k e, assim, permite-nos obter valores bem definidos para os expoentes críticos. Contudo, conforme k aumenta, temos que selecionar N múltiplos de $k - 1$ e k , assim sobram poucos pontos nos gráficos para calcular os expoentes críticos. Com esse método aplicado, obtivemos os expoentes das correlações totais e das correlações genuínas de ordem $k = 2, 3, N$, como mostrado na Figura 21.

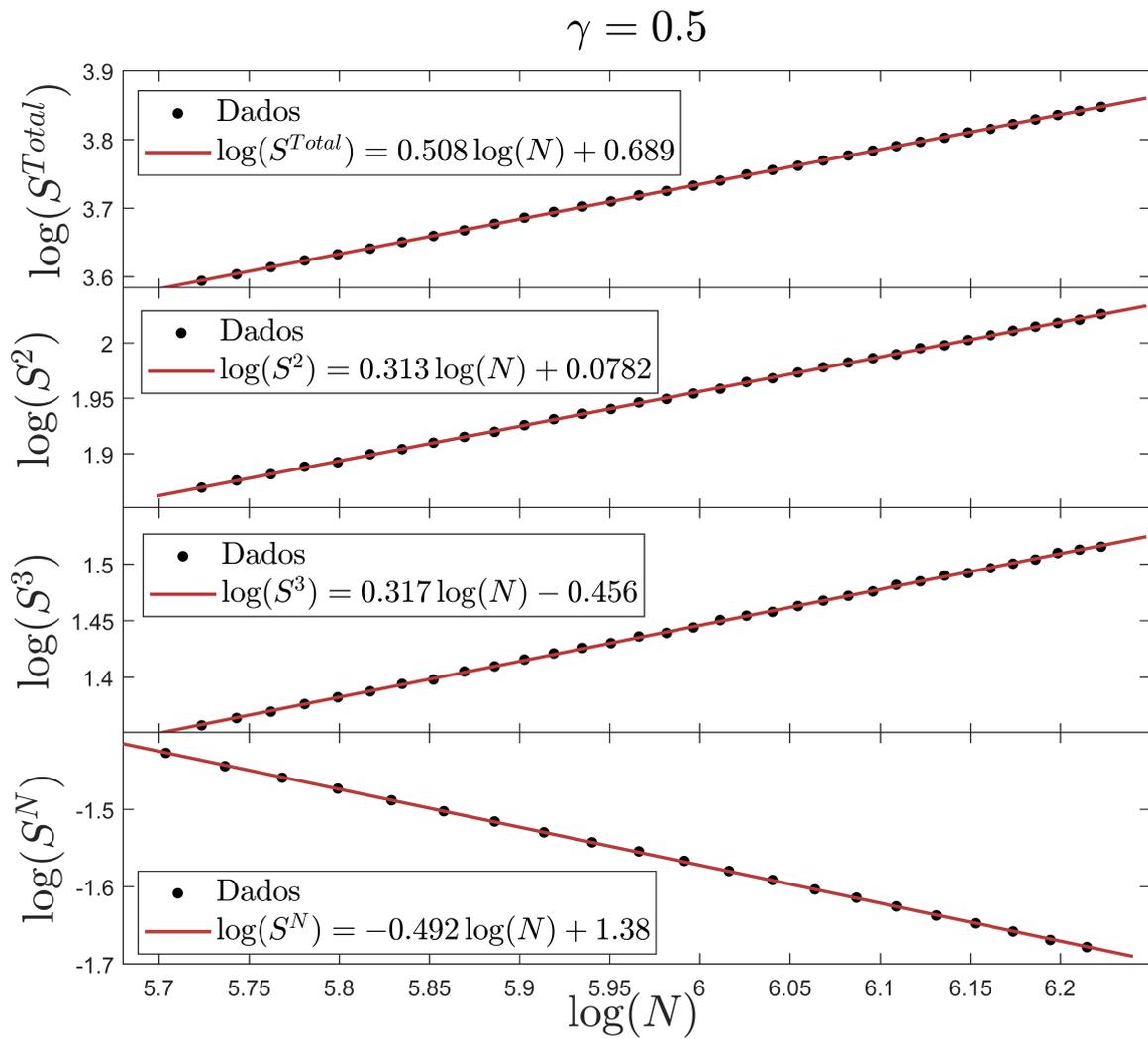


Figura 21 – Os expoentes críticos são obtidos dos coeficientes angulares curvas que têm o formato $\log(S^k) = \alpha * \log(N) + A$ para correlações totais e para CGM de ordem $k = 2, 3, N$. Para $k = 2, 3$ a restrição $N \bmod 6 = 0$ foi imposta.

Resultados adicionais para $k = 4, 5, N/4, N/2$ são apresentados na Tabela 2. Embora nós não haveremos testado todos os valores possíveis dos expoentes críticos, parece que todos eles estão dentro do intervalo $[-1/2, 1/2]$.

k	Critical exponent
1	0.508
2	0.313
3	0.317
4	0.333
5	0.350
$N/4$	-0.377
$N/2$	-0.4540
N	-0.492

Tabela 2 – Expoentes críticos para diferentes valores de k das CGM (S^k vs. h) através da TFQ de segunda ordem no modelo LMG.

Na literatura, encontramos os expoentes críticos somente para emaranhamento bipartido, o qual é $1/3$ para entropia de emaranhamento [15] e concorrência [52]. Contudo, a definição de correlações bipartidas dos autores mencionados não é a mesma que a definição de correlações genuínas 2-partidas de Girolami *et al.* [41]. Na tabela 2, notamos que para as partições de tamanho fixo $k = 1, 2, 3, 4, 5$ os expoentes críticos são positivos, porém, quando o tamanho da partição aumenta com o número de *spins* ($k = N/4, N/2, N$), os expoentes críticos são negativos. Além disso, as CGM diminuem mais rápido na transição de fase para ordens maiores de k quando há dependência em N . As CGM de ordem $k = N$, em particular, vão para zero mais rápido do que as outras ordens das CGM no cálculo dos expoentes, mesmo para as outras que dependem de N . O método utilizado para calcular as CGM dependentes de N é diferente do utilizado para outras correlações. Para calcular as correlações de ordem dependente de N , aproximamos a expressão da distância na equação (27) para o caso de $N \rightarrow \infty$. Por exemplo, para o caso de $N/2$, no limite termodinâmico ($N \rightarrow \infty$) e N pares as pseudo-distâncias são

$$S^{N/2 \rightarrow N}(\rho_N) = \lfloor N/(N/2) \rfloor S(\rho_{N/2}) - S(\rho_N) = 2S(\rho_{N/2}) - S(\rho_N) \quad (71)$$

e

$$\begin{aligned} S^{N/2-1 \rightarrow N}(\rho_N) &= \lfloor N/(N/2 - 1) \rfloor S(\rho_{N/2}) \\ &+ (1 - \delta_{N \bmod N/2-1, 0}) S(\rho_{N \bmod N/2-1}) - S(\rho_N) \\ &\simeq 2S(\rho_{N/2-1}) + S(\rho_2) - S(\rho_N), \end{aligned} \quad (72)$$

na qual utilizamos $\lim_{N \rightarrow \infty} \lfloor N/(N/2 - 1) \rfloor \simeq 2$ na equação (72). Assim a correlação $S^{N/2}$ utilizada para o cálculo do expoente crítico foi

$$S^{N/2} = 2[S(\rho_{N/2-1}) - S(\rho_{N/2})] + S(\rho_2). \quad (73)$$

Para as outras CGM dependentes de N foi feito esse mesmo processo de aproximação no limite termodinâmico. Se analisarmos as CGM de ordem k por partícula no limite

termodinâmico na TFQ de segunda ordem, $\lim_{N \rightarrow \infty} S^k(\rho_N)/N$, essa razão se torna nula, como esperado no mundo clássico.

3.2.1.4 Weaving e transição de fase quântica no estado fundamental do modelo Lipkin-Meshkov-Glick

O *weaving*, conceito introduzido por Girolami *et al.* [41], dependendo do peso ω escolhido na equação (38), é uma forma de classificar os estados de acordo com seus padrões de correlações que não são distinguíveis através do cálculo de correlações isoladas, como visto na seção 2.2.3. Tal grandeza consiste basicamente de uma soma de todas as correlações de diferentes ordens, o que muda é que acrescentamos pesos de diferentes formas dependendo do que queremos calcular. Por exemplo, conforme a equação (38) se $\omega = 1$ o *weaving* calcula as correlações totais. O peso para calcular *weaving* que será considerado aqui é $\omega = k - 1$ que calcula como escalam as correlações, assim, calculamos o *weaving* em função de h para $\gamma = 0.5$, e os seguintes números de partículas $N = 50, 100, 150, 200$. Não é possível para o cálculo do *weaving* selecionar N múltiplos de k , uma vez que para o cálculo do *weaving* k vai de 2 até N . Ou seja, precisamos de todas as ordens de correlação para calcular o *weaving*.

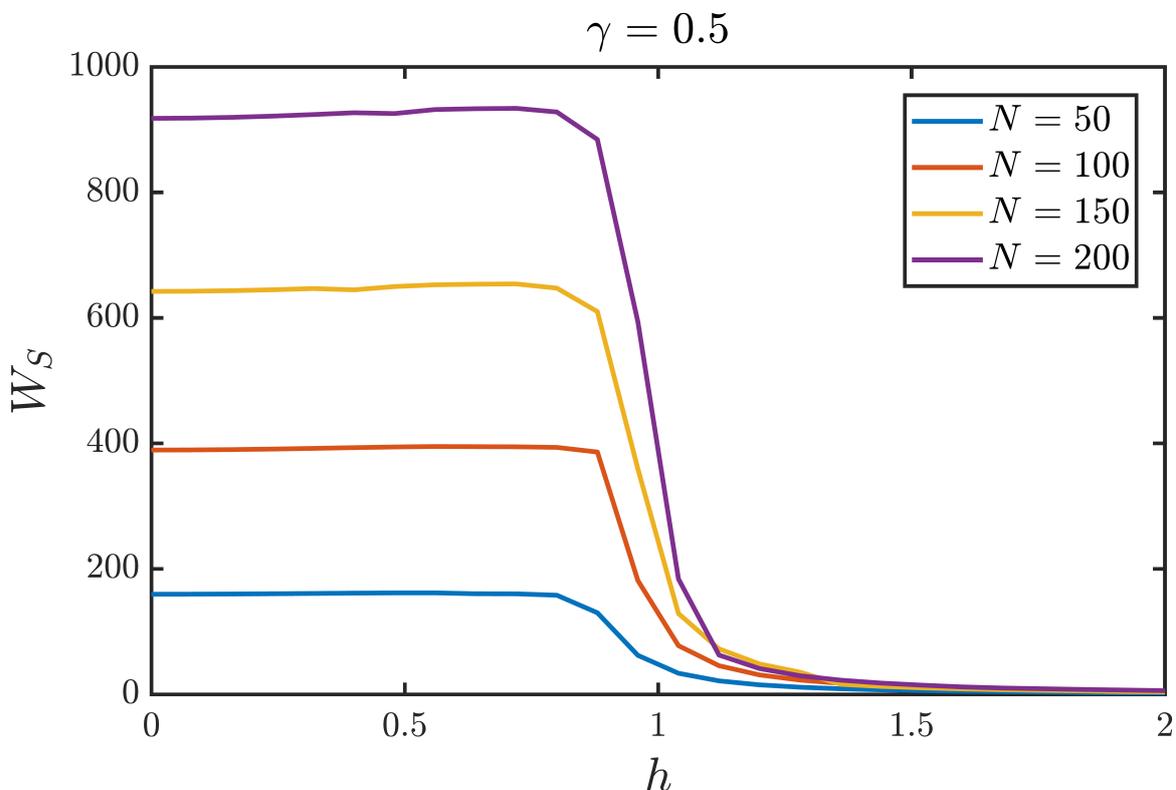


Figura 22 – *Weaving* no estado fundamental do modelo LMG, para $N = 50, 100, 150, 200$ e $\gamma = 0.5$ em função de h . Para $h > 1$ vemos o *weaving* tendendo a zero, fase onde os *spins* se alinham ao campo e são descorrelacionados, e praticamente constante para $0 \leq h < 1$.

Como podemos observar na Figura 22, o *weaving* com peso $k - 1$ tem um comportamento parecido com o que vimos para as CGM de ordem k em geral. Mesmo não mostrando isso, nos parece que o *weaving* detecta a transição de fase, porém, não é evidente onde é assinalada a transição de fase. Através do *weaving* podemos notar dois comportamentos bem diferentes relativos às duas fases, a paramagnética corresponde a $0 \leq h \leq 1$ e a ferromagnética refere-se a $1 \leq h \leq 2$. Na fase paramagnética, o *weaving* é não nulo, já que as correlações genuínas de ordem k também não são, enquanto que na fase ferromagnética o *weaving* é nulo. Como o cálculo do *weaving* requer o cálculo de todas as correlações até ordem $k = N$, sendo este um cálculo que tem bastante custo computacional, por esta razão, conseguimos calcular para número de partículas até $N = 200$ apenas.

Como o estado é tipo GHZ em $h = 0$, ou seja, sobreposição de um estado W com uma parte do GHZ $|111\rangle^{\otimes N}$, fizemos um *fitting* do *weaving* com $N = 50, 100, 150, 200$ em $h = 0$. Primeiramente, realizamos um *fitting* supondo que teríamos um estado GHZ e depois um estado W . Temos conhecimento de como as correlações escalam com N para esses estados através dos resultados para o *weaving* de Girolami e colaboradores [41] apresentados na Tabela 1. Quando tentamos realizar o *fitting* com o escalonamento das correlações do estado GHZ, $\simeq 1.13N \log N$, ajustando, assim, para $a * N \log N$, obtemos $a = 0.5958 < 1.13$. Porém, ao ajustar como um estado W , $\simeq 2.61N$, terceiro estado da Tabela 1, fazendo $b * N$, obtemos $b = 4.358 > 2.61$. Ou seja, o estado em $h = 0$ tipo GHZ tem um escalonamento de correlações que está entre um estado W e um GHZ, pois o *weaving* para o estado GHZ aumenta mais rápido do que o estado W .

Ensaíamos aqui um cálculo do expoente crítico do *weaving*, com $\omega = k - 1$. Para tal, como sabemos que a transição de fase no modelo LMG ocorre em $h = 1$, calculamos o *weaving* no ponto crítico como função de N , após isso, fizemos um ajuste para aproximar o gráfico a uma lei de potência, fornecendo assim o expoente crítico. Esse método é diferente do que foi feito até aqui para as CGM, onde calculamos as correlações no ponto mínimo da derivada de primeira ordem das CGM de ordem k e aplicamos o logaritmo para extrair os expoentes. Utilizamos o método que aproxima por uma lei de potência porque nos deu um ajuste melhor.

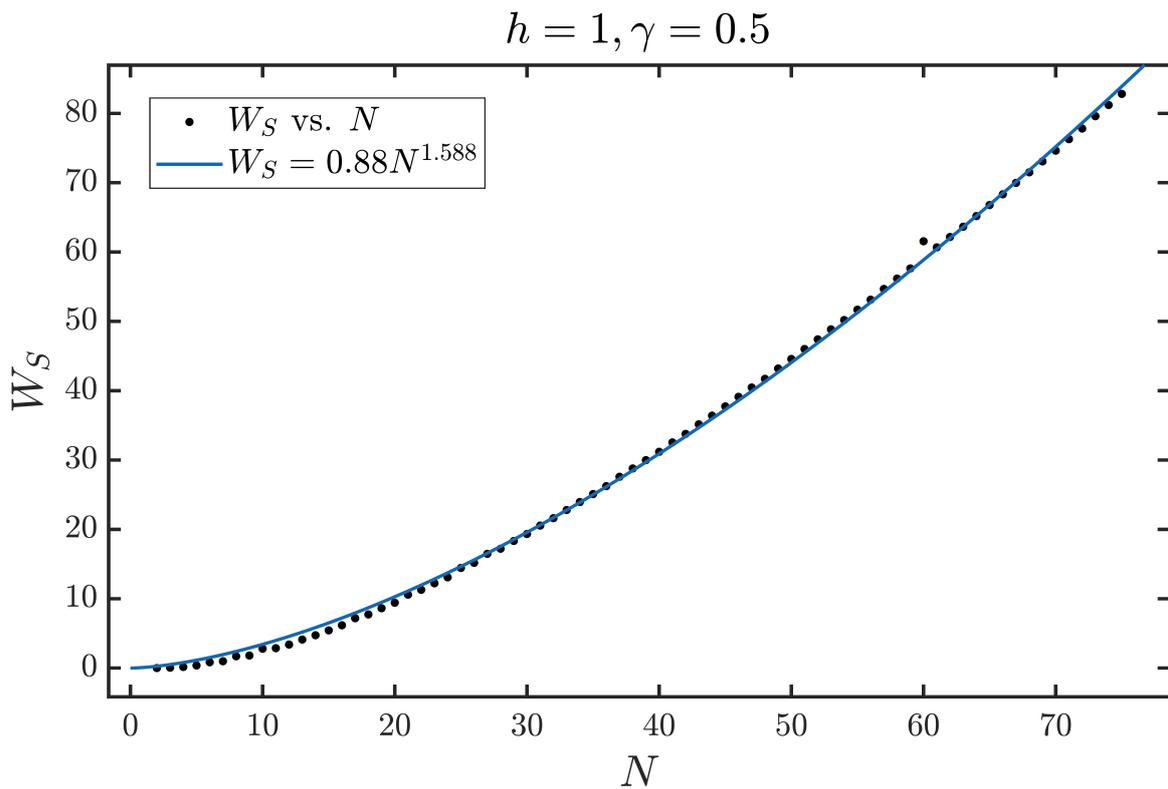


Figura 23 – *Weaving* em função N com peso $\omega = k - 1$ para obtenção do expoente crítico associado a essa grandeza. O expoente crítico foi obtido ajustando por uma lei de potência o *weaving*, calculado em $h = 1$ em função de N .

Notamos na Figura 23 que o *weaving* aumenta com N por uma lei de potência que nos fornece o expoente crítico $\zeta = 1.588$, maior do que o valor do expoente crítico obtido para correlações totais ($\simeq 0.5$), uma vez que optamos por dar um peso maior para correlações de ordens maiores, assim o expoente crítico também resulta diferente. Não temos na literatura cálculo do *weaving* para o modelo LMG e nem dos expoentes críticos, mas temos indícios que o *weaving* também comporta-se como uma lei de potência próximo a transição de fase.

4 CRISTAIS TEMPORAIS DE FRONTEIRA

Neste capítulo, introduziremos o conceito de cristal temporal e CTF, com ênfase no último. Através das CGM as fases ferromagnética e CTF serão diferenciadas na dinâmica e no EENE. Mostraremos que no limite termodinâmico o decaimento das oscilações das CGM tende a zero na fase CTF. Além disso, com o intuito de distinguir a natureza das CGM presentes nos estados durante a dinâmica e no EENE, calcularemos a IQF. Assim, verificaremos se há emaranhamento genuíno k -partido nas duas fases. Na fase CTF, através do mapa de cores da matriz densidade, mostraremos que o sistema se aproxima de um estado presente na superradiância de Dicke, explicando a presença de CGM e não de emaranhamento.

4.1 CRISTAIS TEMPORAIS DE FRONTEIRA

4.1.1 Cristais temporais

Para facilitar o entendimento dos CTFs, iremos primeiramente apresentar brevemente um exemplo de cristal temporal discreto. Cristais temporais correspondem a estados da matéria que quebram simetria temporal, assim como cristais espaciais quebram SETC. A quebra de SETC em sistemas que formam cristais espaciais acontece quando o sistema começa em um estado mais simétrico (é igual em todas as direções) e termina em um estado menos simétrico (com SETD), apresenta estruturas que se repetem no espaço para um dado tempo. Os cristais temporais apresentam estados que se repetem no tempo, assim podem oscilar entre dois estados no tempo para um dado espaço. Com período diferente do hamiltoniano e com tempo de vida divergente no limite termodinâmico. A ideia dos time crystals surgiu com Frank Wilczek que propôs um sistema supercondutor fechado de bósons em um anel com estado fundamental capaz de quebrar simetria temporal [63], no qual aplicando fluxo magnético sobre o anel apropriadamente poderia fazer os bósons formarem pares e rotacionarem no anel no estado fundamental. No limite termodinâmico, essa rotação perduraria para sempre.

Porém, a ideia dos cristais temporais de Wilczek foi demonstrada ser impossível através de um teorema no-go [64]. Patrick Bruno mostrou que o estado fundamental que quebra simetria temporal aumenta energia na rotação e também que estado em equilíbrio térmico em referencial rotacional, com hamiltoniano independente do tempo, não pode rotacionar sem gasto de energia. Após Bruno, Watanabe e Oshikawa mostraram que não é possível ter cristais temporais em estado fundamental ou em equilíbrio térmico sem correlação de longo alcance [65]. Para mostrar isso, utilizaram função de correlação temporal de dois pontos e obtiveram que a função de correlação não apresentava dependência temporal para tempos longos e no limite termodinâmico [65]. As demonstrações de Watanabe e Oshikawa nos informam em quais situações

não é possível ter cristais temporais. No entanto, elas apontam o caminho de como realizá-los, além de auxiliar no método que permite verificarmos a presença ou não da fase cristal temporal. Com isso, mesmo que a ideia original dos cristais temporais tenha se mostrado impossível, buscou-se outras formas de realizar esse fenômeno. Surgiram cristais temporais fora do equilíbrio em sistema com *drive*, aplicando pulsos de *spin-flip* [66–72]. Boas referências de revisão sobre cristais temporais encontram-se em [75, 119].

Para dar uma ideia de como criar cristais temporais, apresentaremos um cristal temporal discreto com cadeia de *spins* unidimensionais. Para tal fim, na Figura 24 o processo de criação de time crystal é ilustrado [69]. Iniciamos um sistema representado por uma cadeia de *spins* no estado fundamental com todos os *spins* para baixo, acionamos um pulso de laser por um tempo para realizar a operação *spin-flip* e levar os *spins* para cima. Após isso, esperamos o sistema interagir, com um pouco de desordem aleatória aplicada nos *spins* para não haver termalização, e aplicamos novamente o *spin-flip* que levará os *spins* para baixo e deixamos o sistema interagir. Esse procedimento se mantém fazendo *spin-flip* e deixando o sistema livre para interações e com desordem aleatória. Na figura 24, notamos que o pulso tem um período de aplicação T e a cadeia de *spins* tem um período de oscilação $2T$, havendo, assim, uma quebra de simetria temporal discreta. O hamiltoniano apresenta uma simetria enquanto que o estado (a cadeia de *spins*) apresenta uma simetria diferente. Porém, não é só isso que é necessário para considerar o sistema como cristal temporal, mesmo com cadeia de *spins* desacoplados podem apresentar uma simetria diferente quando sujeita a tal dinâmica de pulsos. Acrescentando interações entre os *spins*, o sistema torna-se mais robusto, pois além de ter uma oscilação rígida, ela cristaliza no tempo, de forma que é resistente a um certo grau de desordem, pulsos aleatórios [69].

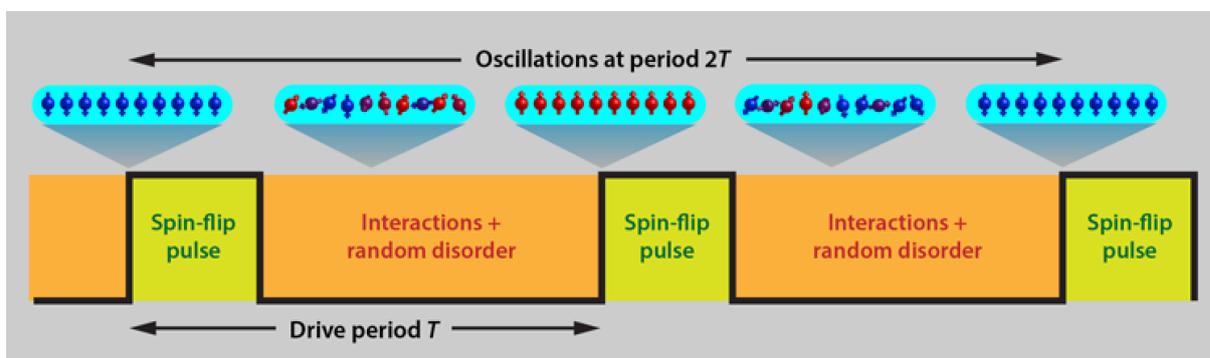


Figura 24 – Cristal temporal discreto em cadeia unidimensional de *spins*. Figura retirada Physics viewpoint “How to Create a Time Crystal” de APS/Alan Stonebraker/Phil Richerme [120].

Portanto, dois pontos importantes para caracterizar esse sistema como cristal temporal são a quebra de simetria temporal e, além disso, as oscilações do cristal

temporal devem ser resistentes às desordens aplicadas [69, 74]. Sendo assim, quando aplicarmos um pulso ligeiramente diferente o sistema continuará oscilando com o mesmo período $2T$. Quando aumentamos o número de partículas na cadeia a tendência é o comportamento de cristal temporal durar por mais tempo, de forma que no limite termodinâmico essas oscilações perdurariam para sempre, se não houvesse perdas, criando assim efetivamente um *time crystal*, que existe somente no limite termodinâmico. Por fim, o cristal temporal não thermaliza devido à propriedade de Localização de Muitos Corpos (LMC) [121], o sistema com desordem não atinge o equilíbrio térmico, a informação sobre o estado inicial do sistema persiste no estado por tempo infinito. Além disso, também não leva a estados com temperatura infinita devido a ficar no estado de LMC, o que impede o sistema de tirar energia do pulso do *drive*. Sistemas com hamiltoniano do tipo Floquet possuem a propriedade de $H(t + T) = H(t)$ e a evolução temporal dos autoestados, estados do tipo Floquet, possui o mesmo período do hamiltoniano $|\psi(t + T)\rangle = |\psi(t)\rangle$ [122, 123]. Nesse cristal temporal discreto apresentado, o que torna possível a quebra de simetria temporal é a desordem e a LMC [67, 69], de modo que o autoestado evolui com $|\psi(t + 2T)\rangle = |\psi(t)\rangle$ e o hamiltoniano com $H(t + T) = H(t)$.

Agora prescrevemos que para se ter cristais temporais, em geral, algumas condições precisam ser satisfeitas [74], dado um observável tal que

$$f(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \langle \psi(t) | O | \psi(t) \rangle, \quad (74)$$

devemos ter no limite termodinâmico:

- (I) quebra de simetria temporal translacional: $f(t + \tau) \neq f(t)$ para $H(t + \tau) = H(t)$. A quebra de simetria pode ser discreta ou contínua, está última geralmente ocorre quando hamiltoniano é independente do tempo em algum sistema de referência e existe um auto-estado do hamiltoniano que possui dependência temporal.
- (II) Rigidez: $f(t)$ possui um período de oscilação fixo, sem precisar fazer *fine-tuning* nos parâmetros do hamiltoniano. O período não muda mesmo aplicando efeitos de desordem no sistema.
- (III) Persistência: as oscilações devem permanecer por um tempo infinitamente longo.

A seguir apresentaremos os CTFs, o tipo de cristal temporal que será estudado neste capítulo da tese.

4.1.2 Cristais temporais de fronteira

O que será apresentado nesta seção são resultados dos autores que criaram a ideia de CTF [77]. O CTF refere-se ao fenômeno de cristal temporal que acontece na fronteira do sistema, o sistema global é o volume e a fronteira. O sistema global permanece independente do tempo e a fronteira quebra a STTC espontaneamente

somente no limite termodinâmico. Por exemplo, podemos pensar num sistema quântico com volume tridimensional V e uma fronteira com rede bidimensional de *spins* H_b , conforme ilustrado pela Figura 25. Aplicando o traço sobre o volume maior H_B , ficamos somente com a fronteira, essa rede de *spins* que sobra é onde ocorre o fenômeno do CTF no limite termodinâmico. No CTF, dependendo do referencial considerado, podemos ter um hamiltoniano independente do tempo e o estado do sistema na fronteira oscila com uma frequência fixa quebrando a STTC. Mesmo que o hamiltoniano tenha dependência temporal, a STTC pode ser quebrada quando a fronteira oscila com uma dependência temporal que é incomensurável em relação ao *drive*. Isso ocorre quando o *drive* atua com uma frequência ω_0 e a fronteira oscila com uma frequência diferente ω_{CTF} , em que a razão entre as frequências não é um número racional ($\frac{\omega_{CTF}}{\omega_0} \in \mathbb{I}$). Diferentemente do que acontece nos cristais temporais discretos, a simetria temporal translacional quebrada é contínua. Recentemente, uma demonstração experimental dos CTFs foi realizada [82].

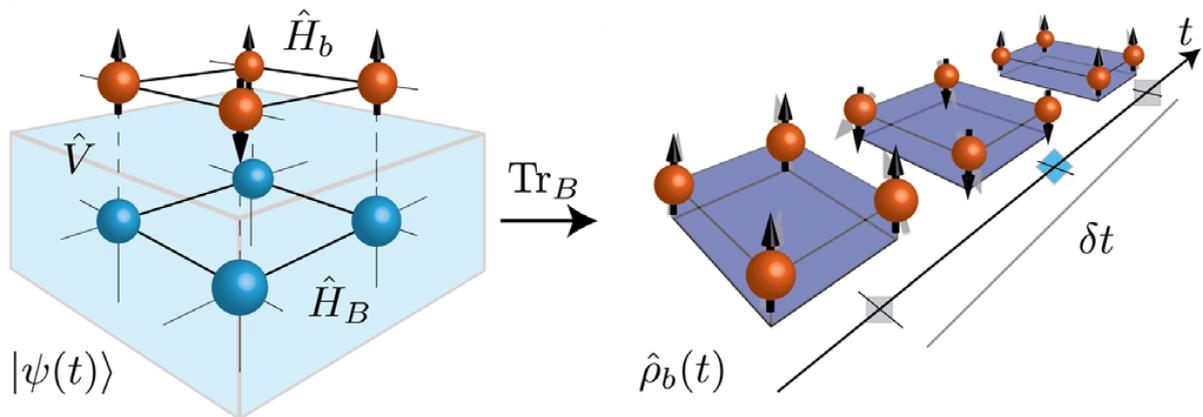


Figura 25 – Esquema exemplificando a ocorrência do CTF a partir de rede de *spins* bidimensionais. Figura retirada de [77].

No modelo de CTF estudado na tese, a fronteira é uma coleção de *spins* $1/2$ interagindo coletivamente com um único modo bosônico de um volume que é representado por uma cadeia infinita unidimensional de modos bosônicos, tal configuração é atingida com a técnica de *chain mapping* [124, 125]. O *chain mapping* transforma os osciladores harmônicos (modos bosônicos) em uma rede infinita com interações locais ou de primeiros vizinhos, com os *spins* $1/2$ ficando na fronteira da rede. Esse sistema é representado pelo hamiltoniano $H = H_B + H_b + V$ e o hamiltoniano da fronteira é

$$H_b = \omega_0 J_x, \quad (75)$$

no qual ω_0 se refere à frequência do *drive*, que é igual à frequência de transição de cada spin. O volume H_B corresponde ao análogo a um banho infinito com um único modo bosônico interagindo com os *spins* da fronteira. A evolução temporal do sistema

é dada pela equação de Schrödinger $|\psi(t)\rangle = e^{-iHt} |\psi(0)\rangle$, após feito o traço sobre H_B , o estado da fronteira é $\rho_b = \text{tr}_B |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|$. A evolução na rede da fronteira é representada por

$$\frac{d}{dt}\rho_b = \mathcal{L}[\rho_b], \quad (76)$$

em que \mathcal{L} é um mapa CPPT.

Para obter a equação mestra é feita aproximação de Born-Markov [126, 127]. Na aproximação de Born, consideramos um fraco acoplamento entre a fronteira e o banho. Como o banho é muito maior do que a fronteira, sua matriz densidade pode ser considerada constante no tempo, assim $\rho(t) \approx \rho_b(t) \otimes \rho_B$. Já na aproximação de Markov, são desprezados os efeitos de memória do banho, uma vez que escala de tempo da interação entre o sistema de *spins* e do banho (frequência óptica $t_0 \sim 10^{-15} s$) é bem menor do que a escala de tempo de mudanças de estados dos *spins* ($t_b \sim 10^{-8} s$). Com essas aproximações e com Aproximação de Onda Girante (AOG) a equação mestra tem a forma $\mathcal{L}[\cdot] = i[\cdot, H_b] + \sum_{\alpha} (L_{\alpha} \cdot L_{\alpha}^{\dagger} - \frac{1}{2}\{L_{\alpha}^{\dagger} L_{\alpha}, \cdot\})$, na qual L_{α} está atribuído os operadores de Lindblad e \mathcal{L} é o Liouvilliano. Na representação de interação, a dinâmica é dada por

$$\frac{d}{dt}\rho_b = i\omega_0 [\rho_b, J_x] + \frac{\epsilon}{J} \left(J_- \rho_b J_+ - \frac{1}{2} \{J_+ J_-, \rho_b\} \right), \quad (77)$$

em que ϵ é a taxa de decaimento efetiva e $J = N/2$.

Há diversas formas de modelar os hamiltonianos que levam à dinâmica dada pela equação mestra (77), uma delas é dado pelo hamiltoniano dependente do tempo

$$H_b = \omega_0 J_z + J_x \cos \omega_0 t, \quad V = J_x (B + B^{\dagger}), \quad (78)$$

no qual B corresponde a uma combinação de operadores de banho, em que se realiza a técnica do *chain mapping*. Esse hamiltoniano representa átomos interagindo coletivamente com uma cavidade, nesse modelo é preciso ter frequência de *drive* ω_0 alta, como a frequência óptica, para eliminar os termos contra-girantes. Sendo o *drive* ω_0 uma frequência óptica, a AOG é válida e os termos contra-girantes são eliminados. Existem outras formas de hamiltonianos para os quais na AOG existe um referencial que os tornam independentes do tempo através de transformações unitárias, como no seguinte

$$H_b = \omega_0 J_z + J_+ e^{-i\omega_0 t} + J_- e^{i\omega_0 t}, \quad V = J_+ B + J_- B^{\dagger}. \quad (79)$$

Para baixas frequências a AOG não é válida e não existe um referencial em que o hamiltoniano é independente do tempo. Assim, somente estados Floquet com período múltiplo do período do *drive* são possíveis, como ocorre nos cristais temporais discretos. Todos os detalhes de como obter a equação mestra (77) são longos e difíceis de seguir em alguns casos, e estão fora do escopo da tese, boas referências para estudar o assunto encontram-se em [126–128].

No modelo do CTF, existe uma transição de fase dependente dos parâmetros de acoplamento ω_0 e ϵ . Quando $\omega_0 < \epsilon$ o sistema apresenta uma fase ferromagnética, na qual os *spins* no EENE ficam preferencialmente no estado fundamental $|N/2, -N/2\rangle = |0\rangle^{\otimes N}$. E quando $\omega_0 > \epsilon$, o sistema entra em uma fase paramagnética, na qual o EENE fica preferencialmente em algum ponto próximo do estado $i|-\rangle^{\otimes N}$. A fase paramagnética corresponde à fase em que ocorre a quebra de STTC. Na Figura 26, no painel esquerdo, visualizamos o comportamento para o EENE dos valores esperados dos observáveis $\langle J_\alpha \rangle / N_b$ para $N_b = 600$, e, no painel direito, de suas variâncias. Notamos que há uma competição entre a parte da evolução coerente e unitária da dinâmica que tende a deixar o estado em $i|-\rangle^{\otimes N}$ e o decaimento incoerente do lindbladiano, que tende a levar o estado para $|0\rangle^{\otimes N}$, cujo comportamento é mostrado na Figura 26.

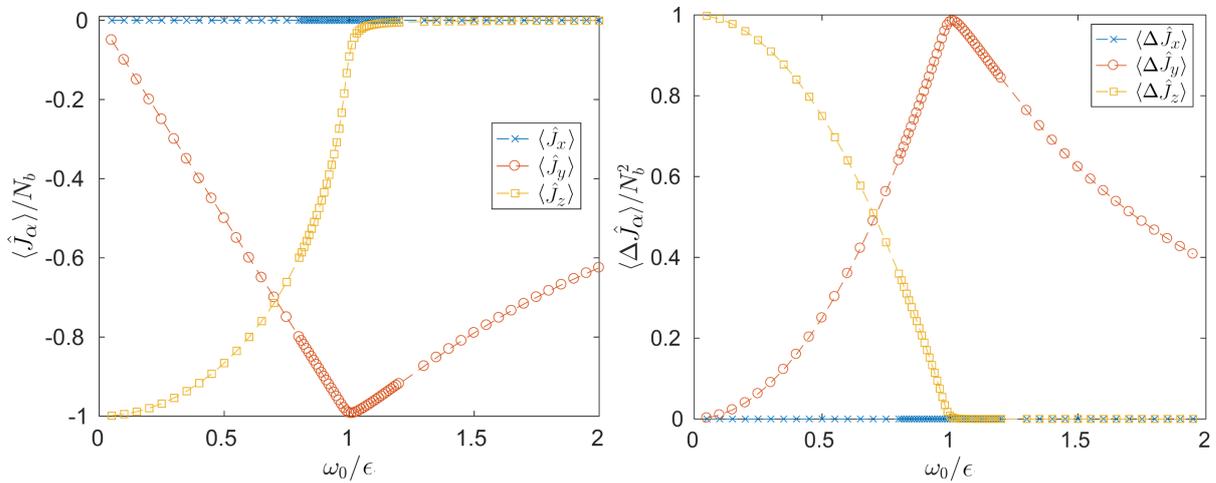


Figura 26 – Valores dos observáveis $\langle J_\alpha \rangle / N_b$ e de suas variâncias nas duas fases do modelo do CTF para $N_b = 600$. Figura adaptada do material suplementar de [77].

A fase paramagnética nomearemos como fase CTF. O fenômeno de quebra de simetria vem da própria estrutura do Liouvilliano, o estado inicial não importa. Na fase ferromagnética, ocorre um *gap* entre as partes reais dos autovalores do Liouvilliano no limite termodinâmico. E esse *gap* se fecha para a fase CTF e todos os autovalores tendem a zero, sinalizando a quebra de simetria temporal e divergência no tempo de vida do CTF, Figura 27. O valor absoluto do autovalor do primeiro estado excitado do Liouvilliano que possui parte imaginária diferente de zero fornece a frequência de oscilação do CTF, que depende somente de ω_0 / ϵ .

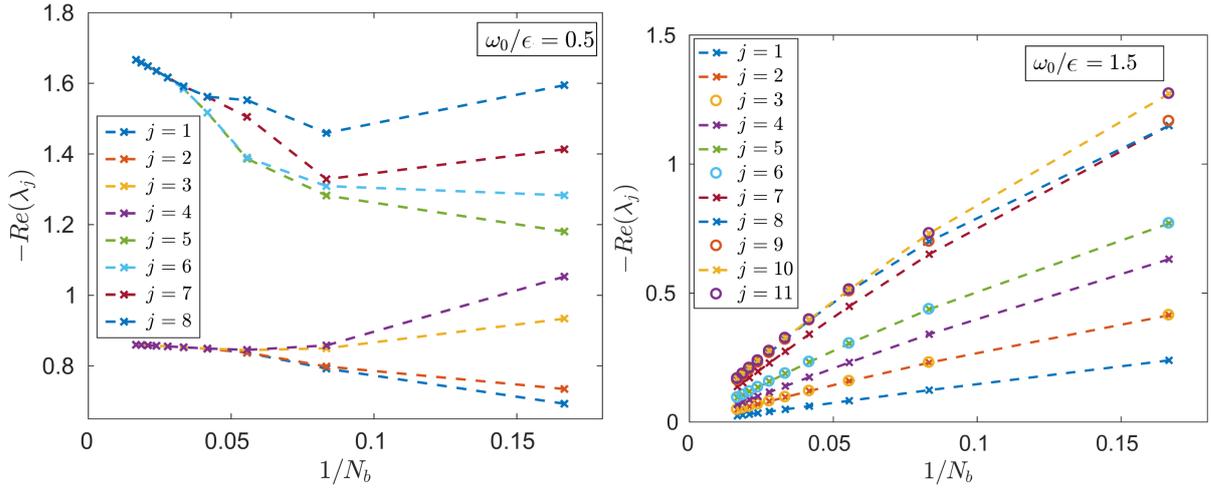


Figura 27 – Parte real dos autovalores no EENE na fase ferromagnética, painel esquerdo, e CTF, painel direito, em função do inverso do número de partículas. No limite termodinâmico, a fase ferromagnética possui autovalores diferentes de zero e um *gap*. Na fase CTF todos os autovalores tendem a zero, caracterizando uma divergência no tempo de vida das oscilações. Figura adaptada do material suplementar de [77].

A emergência do fenômeno CTF acontece somente no limite termodinâmico e apresenta um EENE oscilante. Analisando a estrutura do espectro liouvilliano, vemos que na fase ferromagnética os autovalores maiores possuem parte imaginária igual a zero, Figura 28 painel esquerdo, assim não apresenta oscilação no estado estacionário. Para tentar ver isso melhor, consideramos a equação (76)

$$\frac{d}{dt}\rho_b = \mathcal{L}[\rho_b] \longrightarrow \rho_b(t) = e^{\mathcal{L}t}\rho_b(0), \quad (80)$$

na qual observamos que a exponencial do liouvilliano fornece a dependência temporal. O estado estacionário está associado à parte real do autovalor do liouvilliano igual a zero e com uma parte imaginária diferente de zero, implica em um estado estacionário oscilatório devido à exponencial complexa temporal. Na fase CTF, os maiores autovalores começam a ter parte imaginária diferente de zero, assim terão EENE oscilante com a frequência dada pela parte imaginária, como mostra a Figura 28 painel direito.

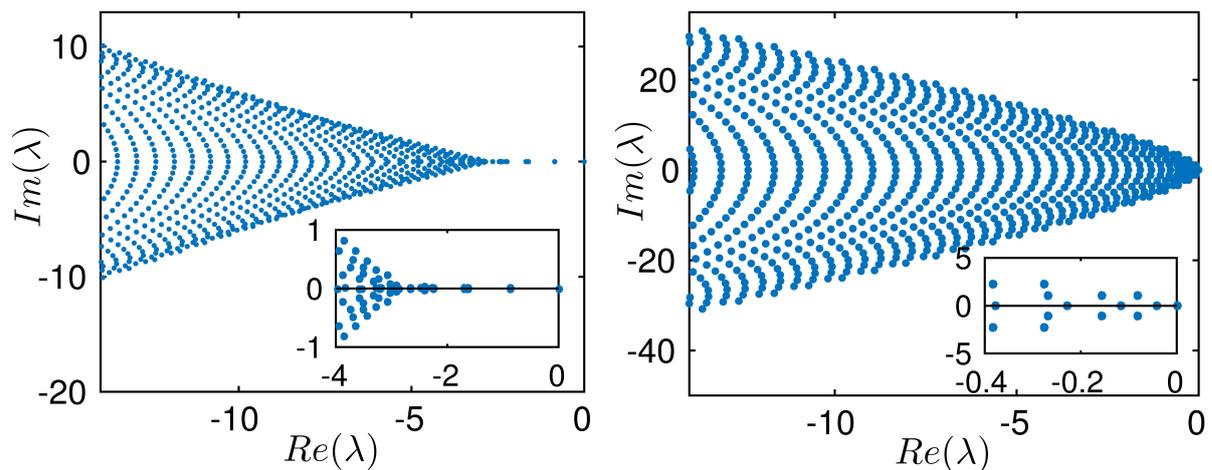


Figura 28 – Partes real e imaginária dos autovalores do Liouvilliano do modelo do CTF no EENE nas fases ferromagnética (painel esquerdo) e CTF (painel direito). Figura retirada de [77].

No painel esquerdo da Figura 29, é apresentado um escalonamento de tamanho finito para o negativo das partes reais para dez autovalores do liouvilliano, vemos que todos tendem a zero numa taxa diferente, os autovalores de ordens maiores tendem mais rápido para zero. Com isso, o decaimento das oscilações tende a zero e o tempo de vida das oscilações diverge. Além disso, no painel direito da Figura 29, é feito um escalonamento com número de *spins* na parte imaginária do autovalores para mostrar que mesmo no limite termodinâmico os espaçamentos das bandas continuam os mesmos. A frequência de oscilação não muda muito e não tende a zero, mostrando assim com as duas figuras que haverá quebra de STTC e que as oscilações serão persistentes.

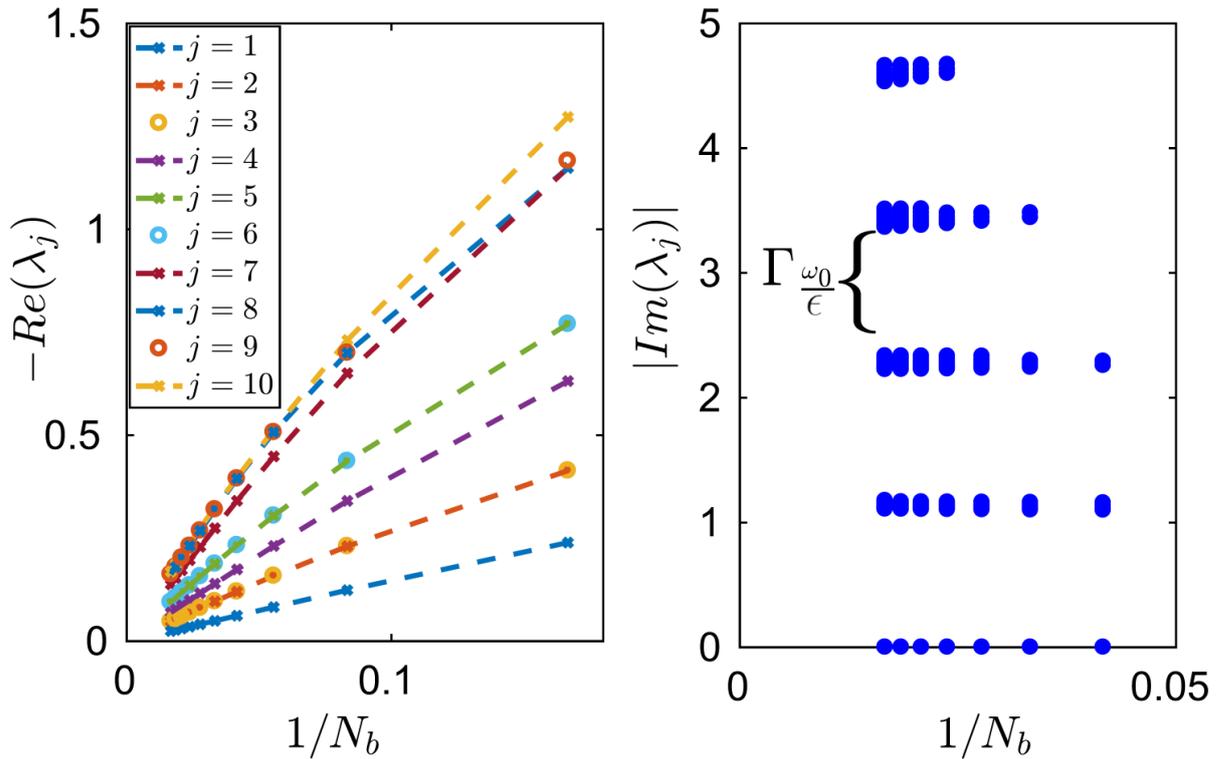


Figura 29 – Parte real e imaginária dos autovalores do Liouvilliano no EENE na fase CTF em função do inverso do número de *spins*. No limite termodinâmico, a parte real dos autovalores tende a zero e as partes imaginárias não, ao invés mantém o mesmo *gap*. Figura adaptada de [77].

Quanto maior o número de *spins* no CTF, por mais tempo o sistema oscila antes de atingir o EENE, de tal forma que no limite termodinâmico $N_b \rightarrow \infty, N_B \rightarrow \infty, N_b/N_B \rightarrow 0$ as oscilações ocorrerão para "sempre". A dependência temporal dos CTFs e suas oscilações podem ser capturadas por observáveis locais como magnetização, atuando como parâmetro de ordem \mathcal{O}_b tal que $\lim_{N_b, N_B \rightarrow \infty} \text{Tr}\{\mathcal{O}_b \rho_b\} = f(t)$, em que $f(t)$ é uma função periódica no tempo. Na Figura 30, podemos observar a magnetização em função do tempo para vários valores de N_b para o modelo do CTF aqui estudado. Conforme N_b aumenta, por mais tempo o sistema oscila de tal forma que no limite termodinâmico não há amortecimento das oscilações.

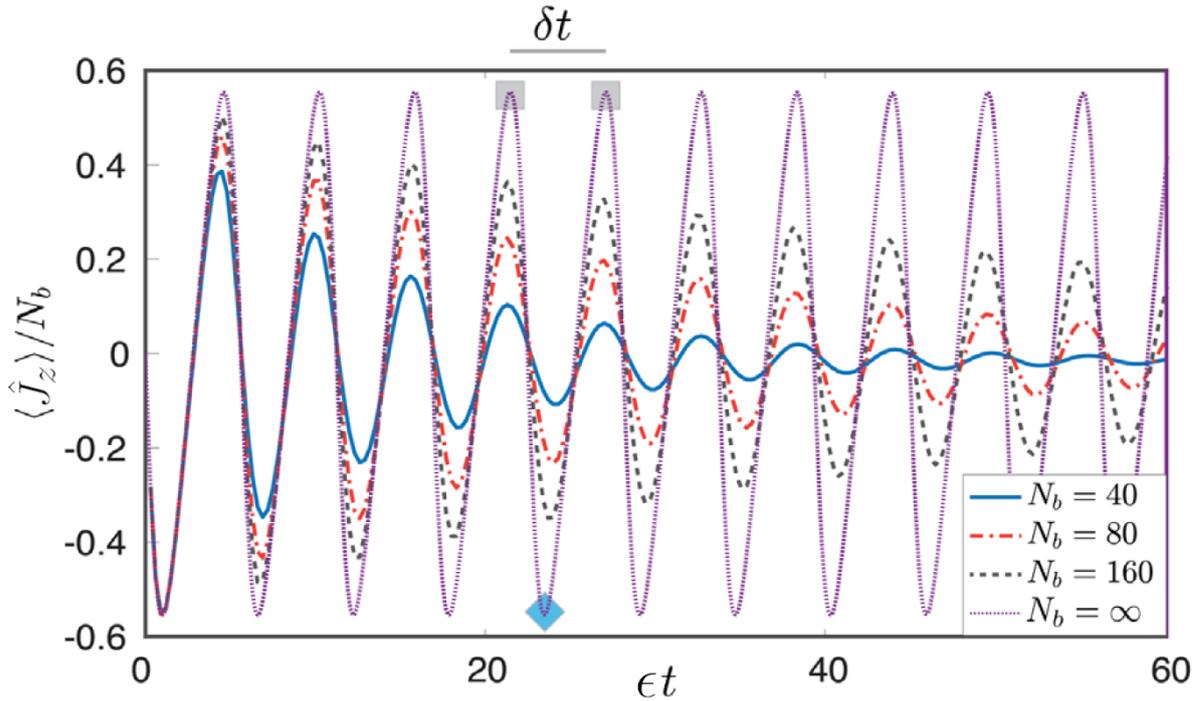


Figura 30 – Magnetização na fase CTF variando com o tempo, para diferentes números de *spins* e no limite termodinâmico, no qual o tempo de vida das oscilações diverge. As partes cinzas nos picos correspondem aos *spins* para cima e a azul no vale corresponde *spins* para baixo, conforme ilustrado na Figura 25. Figura adaptada de [77].

Conforme mencionado anteriormente, o valor absoluto do autovalor do primeiro estado excitado do Liouvilliano que possui parte imaginária diferente de zero nos fornece a frequência do CTF, seus valores podem ser verificados na Figura 31. Na fase ferromagnética, a parte imaginária é igual a zero, assim o EENE não possui oscilações, não haverá presença de CTF. Conforme se aproxima da transição de fase, a parte imaginária não é mais igual a zero e aumenta com o aumento do *drive*, o valor também não é múltiplo do *drive* como se espera em cristais temporais discretos. Essa parte imaginária é igual aos espaçamentos obtidos no painel direito da Figura 29. Para valores maiores de N_b , o módulo da parte imaginária continua sendo zero até um ponto mais próximo de um, ponto de transição de fase. Na parte dos nossos resultados, na fase CTF, utilizaremos uma frequência de *drive* igual a dois ($\omega_0 = 2$). A frequência esperada para o CTF com tal *drive* é em torno de $\omega_{CTF} = 1.57$, assim $\omega_{CTF} \simeq \pi/2 \in \mathbb{I}$, ou seja, uma dependência incomensurável em relação à frequência do *drive* ($\omega_{CTF}/\omega_0 = \pi/4$).

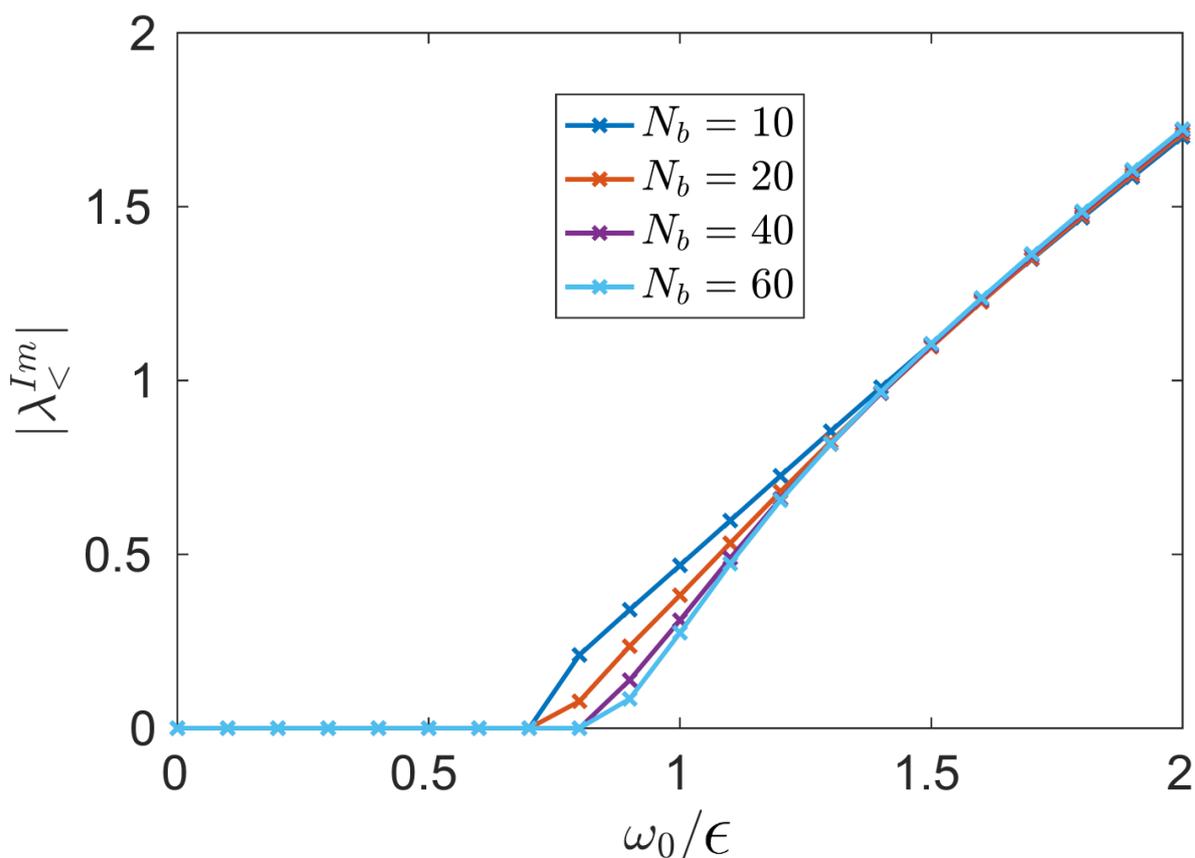


Figura 31 – Módulo da parte imaginária do autovalor do primeiro estado excitado nos fornece a frequência de oscilação do CTF. Na fase ferromagnética, esse módulo é igual a zero e na fase CTF aumenta com o aumento da frequência do *drive*. Figura adaptada do material suplementar de [77].

Através da transformada de Fourier da magnetização calculada na Figura 30, é possível obter as frequências dadas pelos *gaps* da Figura 29. As frequências encontradas podem ser visualizadas no painel esquerdo da Figura 32. Notamos que coincidem com as encontradas na parte imaginária dos autovalores, Figura 29. Os picos das frequências se tornam mais agudos conforme nos aproximamos do limite termodinâmico, de forma que nesse limite o pico se torna um ponto com uma frequência bem definida.

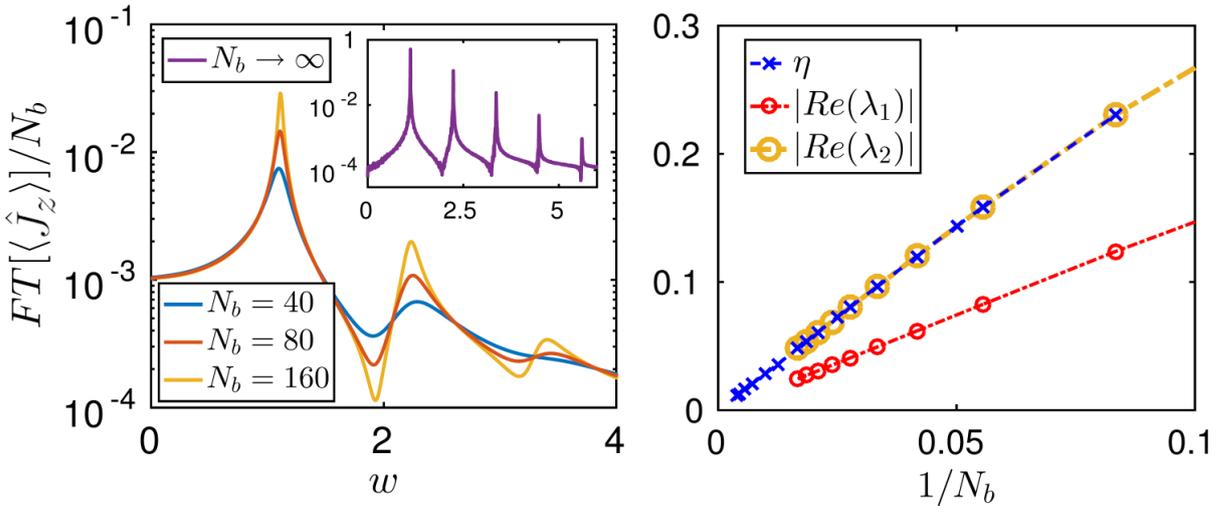


Figura 32 – No painel esquerdo, transformada de Fourier da magnetização média na dinâmica para a fase CTF. Os picos nos dão as frequências que são as separações das bandas da parte imaginária apresentada no painel direito da Figura 29. No painel direito, decaimento das oscilações com o aumento do número de *spins* e módulo da parte real dos autovalores, apresenta uma relação direta entre o decaimento e o módulo da parte real dos autovalores. Figura adaptada de [77].

Além disso, no painel direito da Figura 32, é calculado o decaimento das oscilações η com número de *spins*. Vemos que o decaimento das oscilações tende a zero conforme se aproxima do limite termodinâmico, como o que acontece com o módulo da parte real dos autovalores. Assim, há uma relação direta com o decaimento das oscilações e o módulo da parte real dos autovalores. Gerando uma relação inversa com o tempo de vida das oscilações na fase CTF e o módulo da parte real dos autovalores.

O CTF é um sistema robusto de forma que podemos acrescentar perturbações no sistema que ele continuará a oscilar. Porém, diferentemente dos cristais temporais discretos que oscilam com a mesma frequência quando acionada a perturbação, o CTF pode oscilar diferentemente dependendo dos parâmetros do sistema. Um exemplo de hamiltoniano que podemos trabalhar para acrescentar perturbações é

$$H_b = \omega_0 J_x + \omega_x (J_x^2) / J + \omega_z (J_z^2) / J,$$

nesse hamiltoniano há várias combinações de parâmetros em que ainda leva a um CTF. Os autores [129] mostram uma série de combinações de parâmetros que ainda teremos o fenômeno dos CTFs. Enquanto o termo ω_x ajuda na estabilidade dos CTFs, o termo ω_z tem que ficar em valores pequenos. Acima de um limiar de valores de ω_z , a existência do CTF depende das condições iniciais do sistema. Lembrando que no modelo em que vimos a emergência dos CTFs não depende do estado inicial. Porém, pode ser diferente se perturbações acrescentadas ao sistema são muito fortes. Além disso, os cristais temporais discretos não termalizam porque apresentam o fenômeno

de LMC. Nos CTFs o que impede o sistema de termalizar são interações de longo alcance, levando para um EENE.

Nesta seção, apresentamos um exemplo de time crystal discreto e estudamos os CTFs baseado no trabalho dos autores [77] e será com esse modelo que continuaremos na próxima seção, na qual apresentaremos nossos resultados obtidos com estudo das correlações no CTF.

4.2 RESULTADOS E DISCUSSÕES

4.2.1 Correlações em cristais temporais de fronteira

4.2.1.1 Dinâmica

Nesta seção, apresentaremos nossos resultados da aplicação do cálculo das CGM e IQF na dinâmica do CTF. O estado do CTF apresenta simetria por permutação de partículas, durante a dinâmica o estado é uma matriz densidade mista escrita na base de Dicke, por isso a aplicação das correlações genuínas se torna mais prática. Primeiramente, analisaremos as CGM durante a dinâmica do sistema e depois investigaremos se na dinâmica existe emaranhamento genuíno k -partido.

4.2.1.1.1 Correlações genuínas multipartidas

Como a matriz densidade do modelo estudado aqui é representada na base de Dicke, calculamos as CGM da mesma forma que foram calculadas as CGM para no modelo LMG. A diferença é que aqui a matriz densidade vai se tornando cada vez mais mista devido à dinâmica, porém, isso só altera os valores das probabilidades na equação (62). Para análise nesta seção, compararemos o comportamento das CGM nas fases ferromagnética e CTF, também calcularemos as CGM para vários valores de N e verificaremos o que acontece com o decaimento das oscilações. Como o modelo do CTF é propício de se fazer esse escalonamento, verificaremos se no limite termodinâmico teremos um CTF, no qual ocorre a persistência das oscilações e a quebra de STTC.

Durante a dinâmica evoluímos a equação mestra (76) com o estado inicial sendo estado fundamental de $H_b = \omega_0 J_x$, o qual é um estado puro descorrelacionado da forma $|\psi(0)\rangle = |-\rangle^{\otimes N}$. Na fase ferromagnética, o sistema não quebra simetria temporal no limite termodinâmico e assim não esperamos que oscilações rígidas e sincronizadas ocorram nessa fase. Na Figura 33, calculamos as CGM até a sexta ordem, com $N = 120$ e $\omega_0 = 0.5$. Observamos que há um crescimento das correlações na fase transiente, até $t \simeq 0.6$, seguido de um decaimento para um valor constante (EENE). Todas as ordens de correlação apresentam o mesmo comportamento, isso

vem da simetria que o sistema apresenta pela conservação de J^2 , simetria presente inclusive no banho com decaimento coletivo.

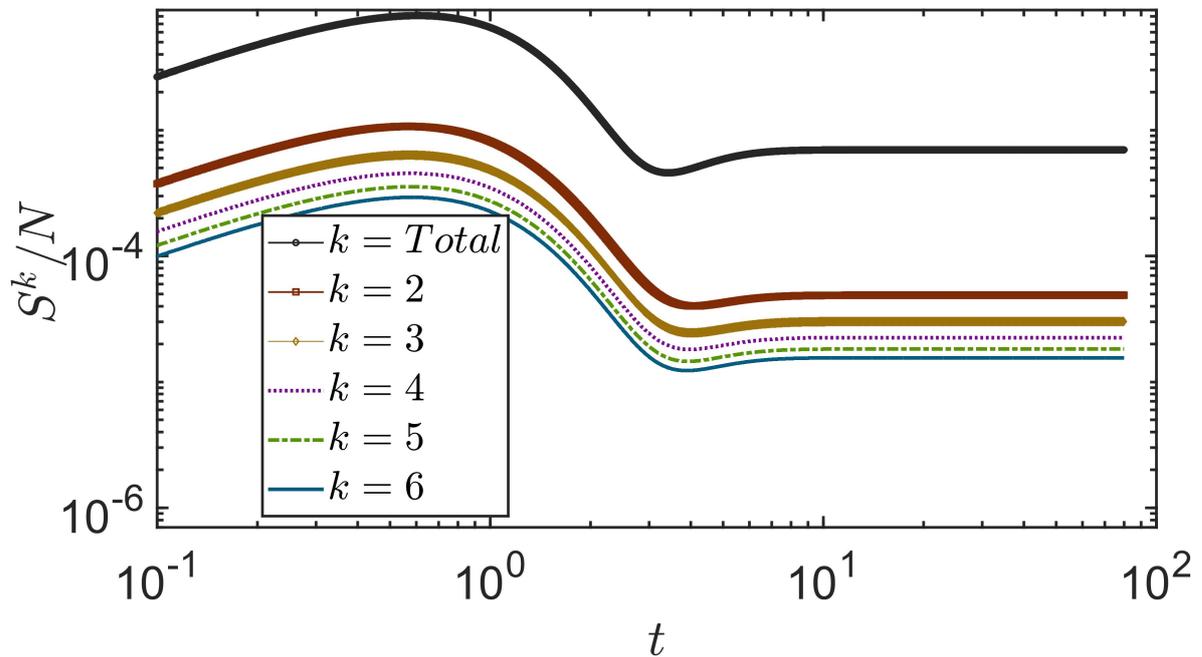


Figura 33 – Dinâmica das CGM para $N = 120$ e diferentes ordens k na fase ferromagnética com $\omega_0 = 0.5$. Todas as CGM apresentam um comportamento semelhante e a correlação existente vem do campo fraco do *drive* que impede o sistema decair completamente no estado $|0\rangle^{\otimes N}$ para tempos longos.

A quantidade de CGM nessa fase é pequena e o EENE tende para um estado quase puro igual $|0\rangle^{\otimes N}$. Sabemos que esse estado é separável. Esse estado não possui correlação, seja de natureza quântica ou clássica, por isso há um valor baixo para as CGM nessa fase. O que impede de o sistema decair completamente para $|0\rangle^{\otimes N}$ é o pequeno campo $\omega_0 = 0.5$, que atua levando os *spins* para o estado $i|-\rangle^{\otimes N}$. Na Figura 34, a imagem do valor absoluto dos elementos da matriz densidade do sistema, na base de Dicke, é visualizada através de um mapa de cores. Linhas e colunas são ordenadas de forma que o índice 1 corresponde ao estado $|N/2, N/2\rangle$, todos *spins* excitados. O índice 2 refere-se ao estado $|N/2, N/2 - 1\rangle$, um *spin* no estado fundamental e o restantes no estado excitados, e 120 é o estado $|N/2, -N/2\rangle$, no qual todos os *spins* estão no estado fundamental. Nessa Figura 34, vemos a matriz densidade e suas transformações na fase ferromagnética ($\omega_0 = 0.5$) com o passar do tempo. Os tempos foram escolhidos de forma a capturar o crescimento das correlações em $t = 0.21$, o pico em $t = 0.59$, a queda em $t = 2.0$, o vale em $t = 3.4$ e o EENE em $t = 30.0$, como na dinâmica apresentada na Figura 33. Para um tempo $t = 2.0$, na queda das correlações, os valores maiores da matriz densidade já se concentram em torno do estado $|N/2, -N/2\rangle$. O banho com decaimento coletivo predomina no

comportamento do sistema, por ser mais forte do que o *drive* ($\epsilon > \omega_0$) nessa fase.

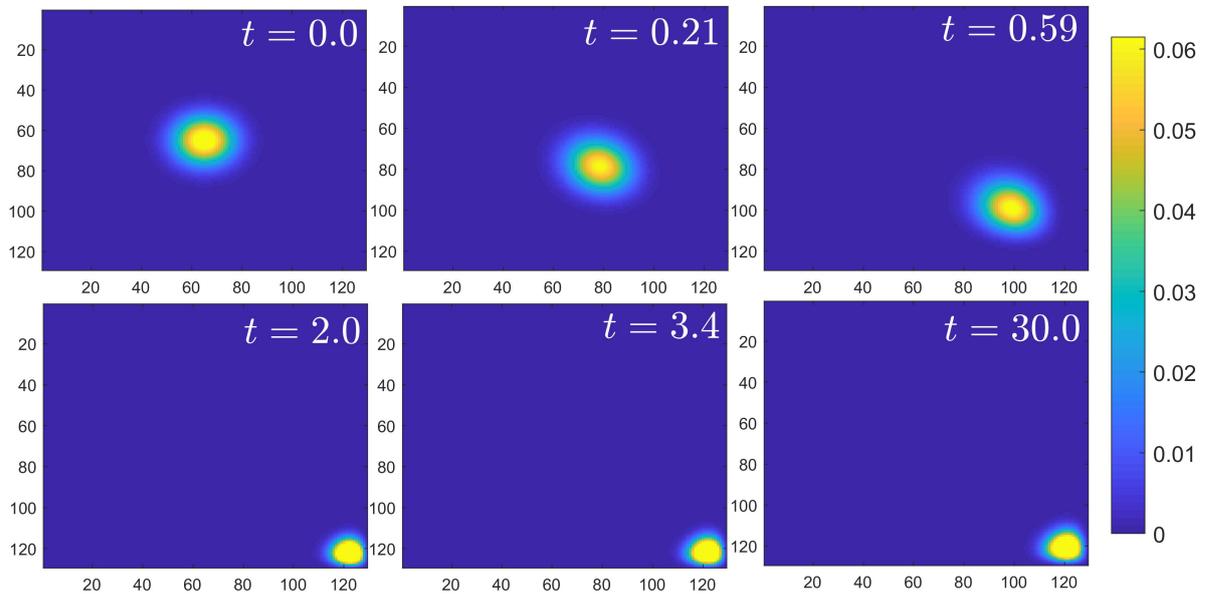


Figura 34 – Mapa de cores da matriz densidade na fase ferromagnética com $\omega_0 = 0.5$ para diferentes tempos que capturam pontos no crescimento, no pico, na queda, no vale e no EENE das CGM apresentados na Figura 33.

A dinâmica na fase CTF apresenta, para valores finitos de N , oscilações que são capturadas pelas CGM. Nessa fase, há quebra de STTC no limite termodinâmico, o hamiltoniano pode ser representado num sistema de referência no qual é independente do tempo. Enquanto que o estado do sistema apresenta dependência temporal, numa frequência incomensurável em relação à frequência do *drive*. O modelo do CTF permite que façamos um escalonamento com número de partículas para sabermos se no limite termodinâmico teremos mesmo um CTF. Assim, já para valores finitos de número de *spins* N o sistema é oscilante por um tempo finito. Na figura 35, as CGM são calculadas em função do tempo para $N = 120$, $\omega_0 = 2$ e $\epsilon = 1$. Notamos o comportamento oscilante para todas as ordens de correlações (até $k = 6$), com o mesmo período de oscilação. A frequência encontrada, através de otimização não-linear e por transformada de Fourier, para os parâmetros definidos acima. Além das oscilações, há um crescimento no tempo para todas as CGM calculadas, como veremos mais adiante isso está relacionado com o estado estacionário do sistema.

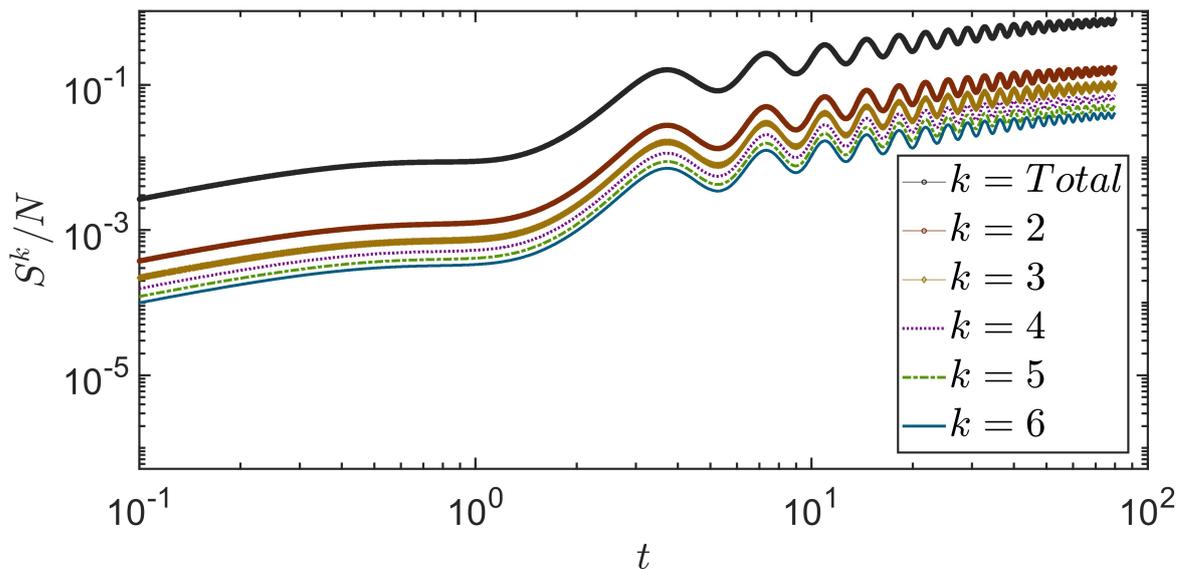


Figura 35 – Dinâmica das CGM para $N = 120$ e diferentes ordens k na fase CTF com $\omega_0 = 2$. Todas as ordens capturam as oscilações e apontam para um EENE altamente correlacionado.

Analisaremos, novamente, a matriz densidade do sistema na dinâmica, agora na fase CTF. Na figura 36, representamos a matriz densidade com mapa de cores, como foi feito para fase ferromagnética, os tempos foram escolhidos para capturar os picos e os vales das oscilações. No primeiro tempo capturado, em $t = 5.34$, há um vale e em $t = 7.26$ um pico, e assim vai alternando. Nos vales a matriz densidade possui uma maior coerência na base de Dicke e nos picos a matriz se aproxima de uma matriz diagonal. Veremos nas próximas seções, que o estado estacionário tende a uma matriz diagonal próxima da identidade ou totalmente mista no subespaço simétrico, por isso ainda possui correlação. Além disso, que essa matriz densidade é similar aquela que ocorre no fenômeno da superradiância, na qual há grande quantidade de CGM [118].

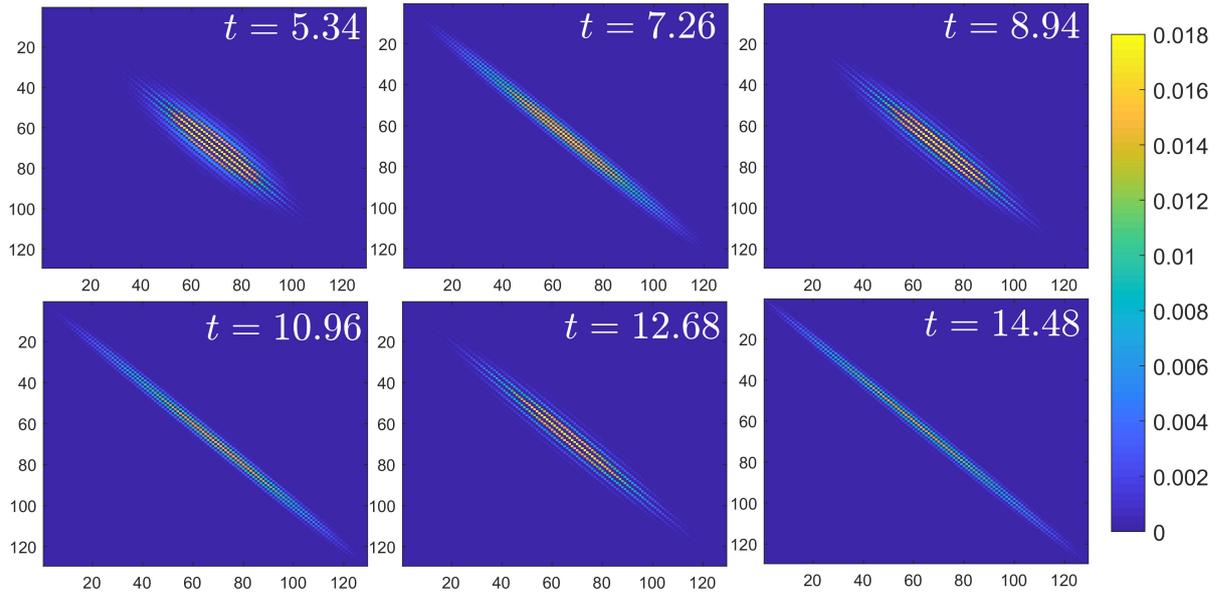


Figura 36 – Mapa de cores da matriz densidade na base de Dicke na fase CTF para $\omega_0 = 2$, com diferentes tempos que capturam pontos de picos e vales das oscilações. Os vales apresentam maior coerência do que os picos.

Como mencionado anteriormente, o modelo do CTF permite fazer um escalonamento com número de *spins* para verificar a existência de um CTF no limite termodinâmico. Para verificar isso, calculamos as correlações totais para vários valores de número de *spins* N e o resultado pode ser visto na Figura 37. Nessa figura, vemos que conforme aumentamos o número de *spins* as oscilações persistem por mais tempo, sinalizando que no limite termodinâmico o decaimento das oscilações tende a zero. O comportamento de S^k obtido através dos cálculos numéricos pode ser aproximado pela relação

$$S^k \propto t^{\beta_N} e^{-\Gamma_N t} \cos(\nu t) + S_{EENE}^k, \quad (81)$$

em que β_N refere-se ao expoente do crescimento através da lei de potência, Γ_N corresponde à taxa de decaimento das oscilações, ν é a frequência do CTF e S_{EENE}^k o valor da correlação no EENE. Apesar de não apresentados aqui, para outros valores de k o comportamento é similar ao das correlações totais, conforme vimos na Figura 35.

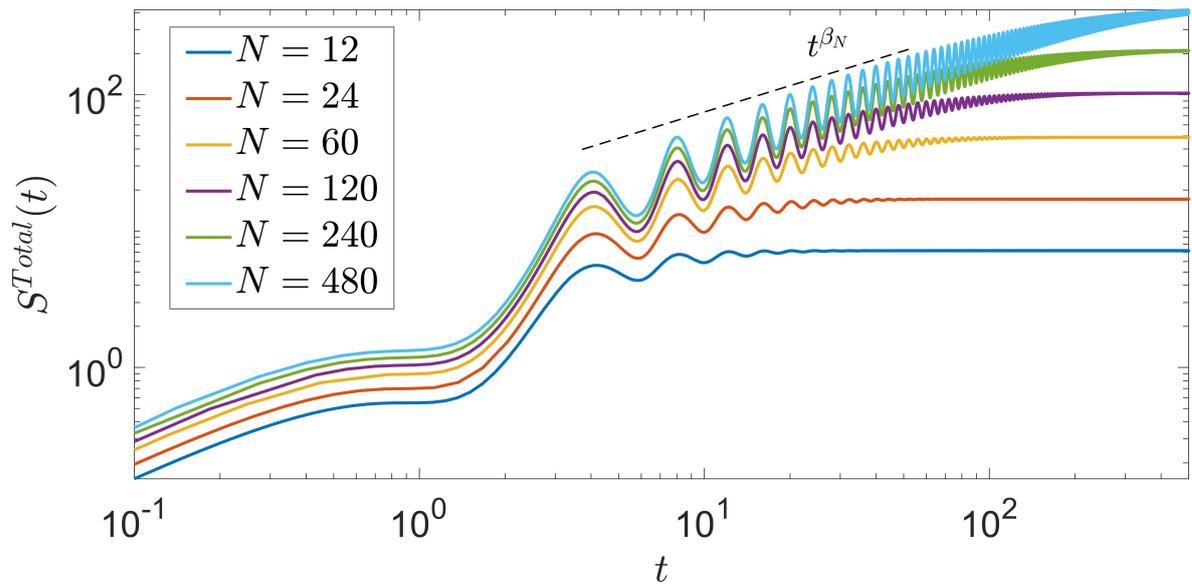


Figura 37 – Correlações totais na dinâmica com $\omega_0 = 2$ para valores de N crescentes. Para número de partículas maiores as oscilações capturadas pelas correlações totais persistem por um tempo maior, indicando a presença de CTF no limite termodinâmico.

Na Figura 38, notamos que a taxa de decaimento tende para zero conforme N tende ao infinito, assim no limite termodinâmico o decaimento é zero e o sistema apresenta um EENE oscilante. Além disso, existe a quebra de STTC, com período de oscilação incomensurável em relação ao período do *drive*.

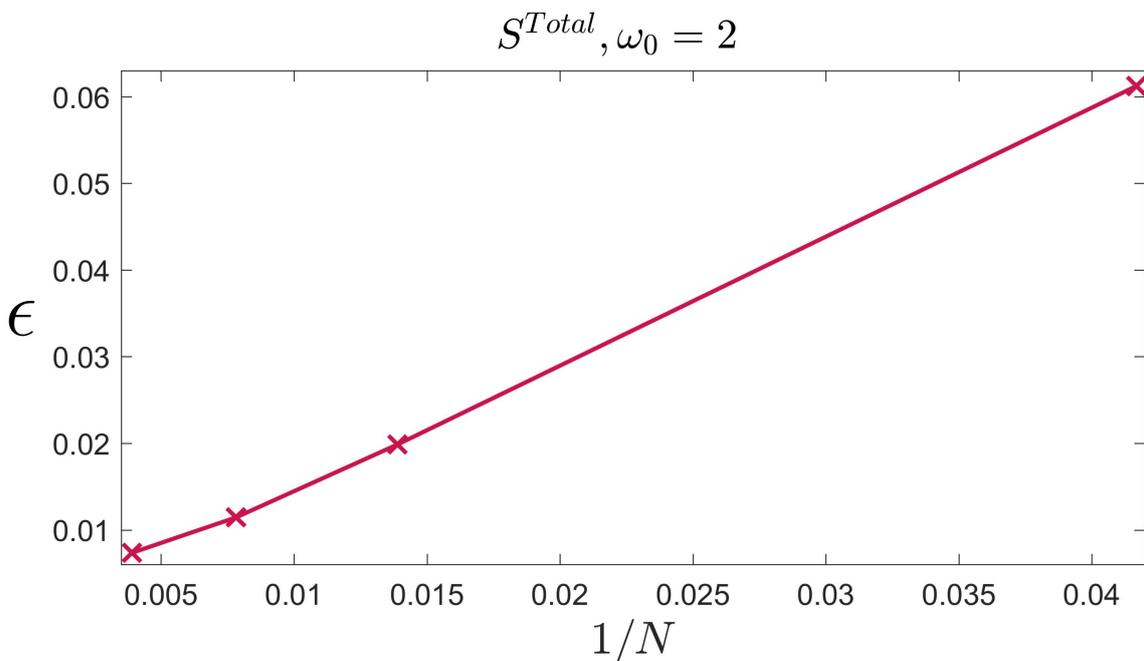


Figura 38 – Taxa de decaimento das oscilações em função do número de partículas, obtida com ajustes das correlações totais para diferentes N 's. Quanto maior o número de partículas menor o valor do amortecimento das oscilações.

A taxa de decaimento foi obtida através de ajustes com otimização não-linear de gráficos das correlações totais como da Figura 37. Ainda, para análise de que teremos um CTF no limite termodinâmico é apresentado na Figura 39 o valor absoluto das correlações totais num tempo qualquer menos o seu valor no estado estacionário. Com a equação (81), notamos porque esse cálculo da Figura 39 nos fornece a taxa de decaimento, pois, $\log(|S^k - S_{EENE}^k|) \propto -\Gamma_N t + C$, C é dependente de $\log(t^{\beta_N} \cos(\nu t))$. Conforme aumentamos o número de partículas, a inclinação da reta, que é aproximadamente igual a Γ_N , tende a zero. Portanto, no limite termodinâmico, esperamos que o amortecimento seja zero e o tempo de oscilação tenda ao infinito.

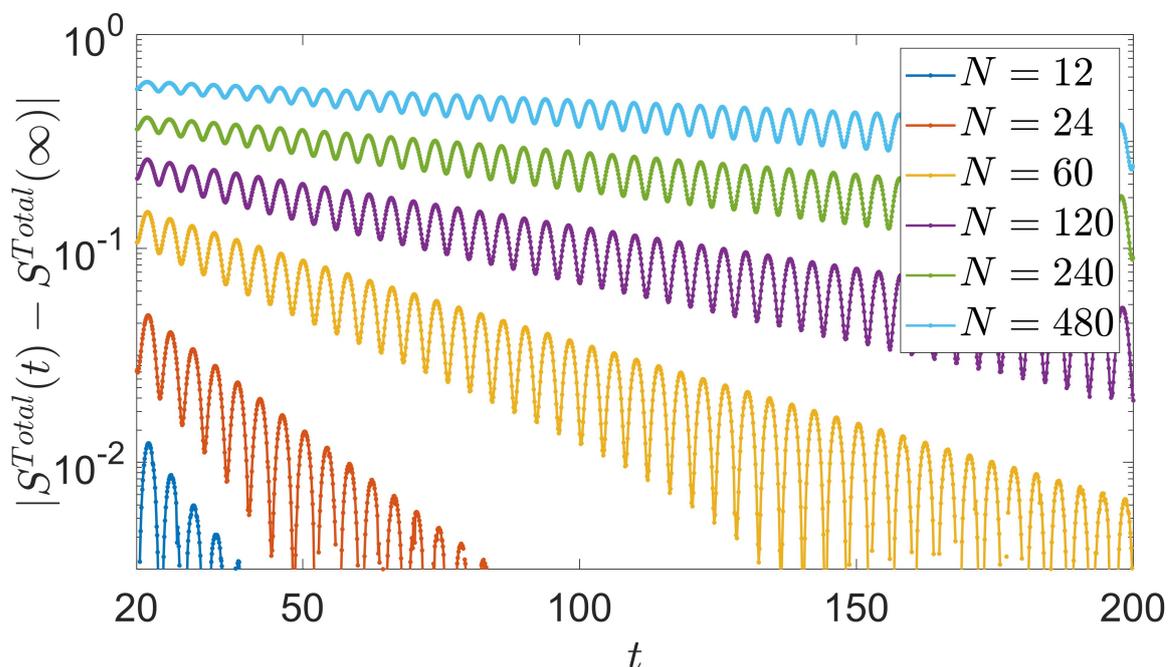


Figura 39 – Módulo das correlações totais em função do tempo menos seu valor no EENE. A inclinação da reta em torno da média de oscilações nos fornece o amortecimento das oscilações, para valores altos de números de *spins* a inclinação se aproxima da horizontal, ou seja, tende a zero.

Portanto, as CGM capturam assinaturas essenciais das duas fases na dinâmica do modelo e verificamos que no limite termodinâmico de fato há quebra de STTC e o tempo de vida das oscilações diverge, assim teremos a emergência de um CTF nesse limite.

4.2.1.1.2 Informação quântica de Fisher

Nesta seção, o objetivo é estudar a dinâmica através da IQF para verificarmos se é detectado emaranhamento genuíno k -partido nas duas fases do sistema. Lembrando que as CGM somam as quantidades de correlações clássicas e quânticas presentes em um estado, sem diferenciá-las. Assim, saber se possui correlação quântica no

sistema, como emaranhamento, é importante para conhecer os tipos de recursos existentes. Recursos que podem ser utilizados, por exemplo, para fazer trânsito de calor de uma fonte fria para uma fonte quente em máquinas térmicas [39]. Primeiramente, introduziremos a IQF como testemunha de emaranhamento genuíno k -partido em sistemas de *spins* coletivos. Com a IQF estudaremos a fase ferromagnética e na sequência a fase CTF. O estado inicial do sistema é puro, porém a dinâmica faz o estado se tornar altamente misto com o passar do tempo. Estados mistos não são triviais para calcular qualquer tipo de emaranhamento, por isso, utilizaremos a IQF como testemunha para tentar detectar emaranhamento genuíno k -partido.

Inicialmente, vamos introduzir a IQF na forma que será utilizada na tese. A IQF é uma ferramenta muito utilizada em estimação de parâmetros e metrologia [130], pois pode nos dar informação de um limite de quão precisa pode ser uma medida de um observável, porém, sua aplicabilidade se estende a outras áreas também [131–136]. Uma outra aplicação da IQF é como testemunha de emaranhamento genuíno k -partido [33, 133, 137], aqui é com esse propósito que a IQF será estudada. Nesta tese a IQF será utilizada em sistemas de spins que possuem simetria por troca de partículas, assim, para calculá-la, tomamos o máximo da IQF otimizado sobre todos os spins coletivos \hat{J}_α . Seja ρ um estado misto, o máximo da IQF é dado pelo máximo autovalor da matriz 3×3

$$[\Gamma]_{kl} = 2 \sum_{i,j} \frac{(p_i - p_j)^2}{p_i + p_j} \langle j | \frac{J_k}{2} | i \rangle \langle i | \frac{J_l}{2} | j \rangle, \quad (82)$$

em que $k, l = x, y, z$, $p_i + p_j > 0$, e $\hat{\rho} = \sum_i p_i |i\rangle\langle i|$ é a decomposição espectral do estado misto. O máximo da IQF é denotado por F_{\max} , para detecção de emaranhamento genuíno k -partido utilizamos a seguinte inequação a $F_{\max}(\hat{\rho}) > N(k-1)$, quando é satisfeita a inequação o sistema de N partículas tem emaranhamento genuíno k -partido [133]. Por exemplo, num sistema com $N = 10$ se $10 < F_{\max}(\hat{\rho}) \leq 20$ o sistema possui emaranhamento genuíno 2-partido, para o caso $20 < F_{\max}(\hat{\rho}) \leq 30$ tem emaranhamento genuíno 3-partido. Caso $F_{\max} < N$ não podemos dizer nada sobre existência de emaranhamento, pois pode ser que a testemunha tenha falhado em detectá-lo, principalmente se o estado do sistema é altamente misto, a IQF não é uma boa testemunha.

Com a equação (82), calculamos a IQF através de cálculo numérico para fase ferromagnética $\omega_0 = 0.5$, vemos o resultado na Figura 40. Na fase ferromagnética, a dinâmica apresenta um crescimento rápido, seguido de queda para um valor constante da IQF, detectando emaranhamento genuíno 2-partido ($1 < F_{\max}/N \leq 2$). Para tempos longos o sistema atinge o EENE, no qual há emaranhamento genuíno 2-partido. O estado durante a dinâmica na fase ferromagnética é próximo a um estado puro da forma $|-\rangle^{\otimes N}$, e como o estado inicial possui coerência, a dinâmica incoerente pode estar criando esse emaranhamento a partir da coerência [96]. Notamos que o compor-

tamento da IQF e CGM são similares na fase ferromagnética, no sentido de ter um rápido crescimento seguido de uma queda para um valor constante.

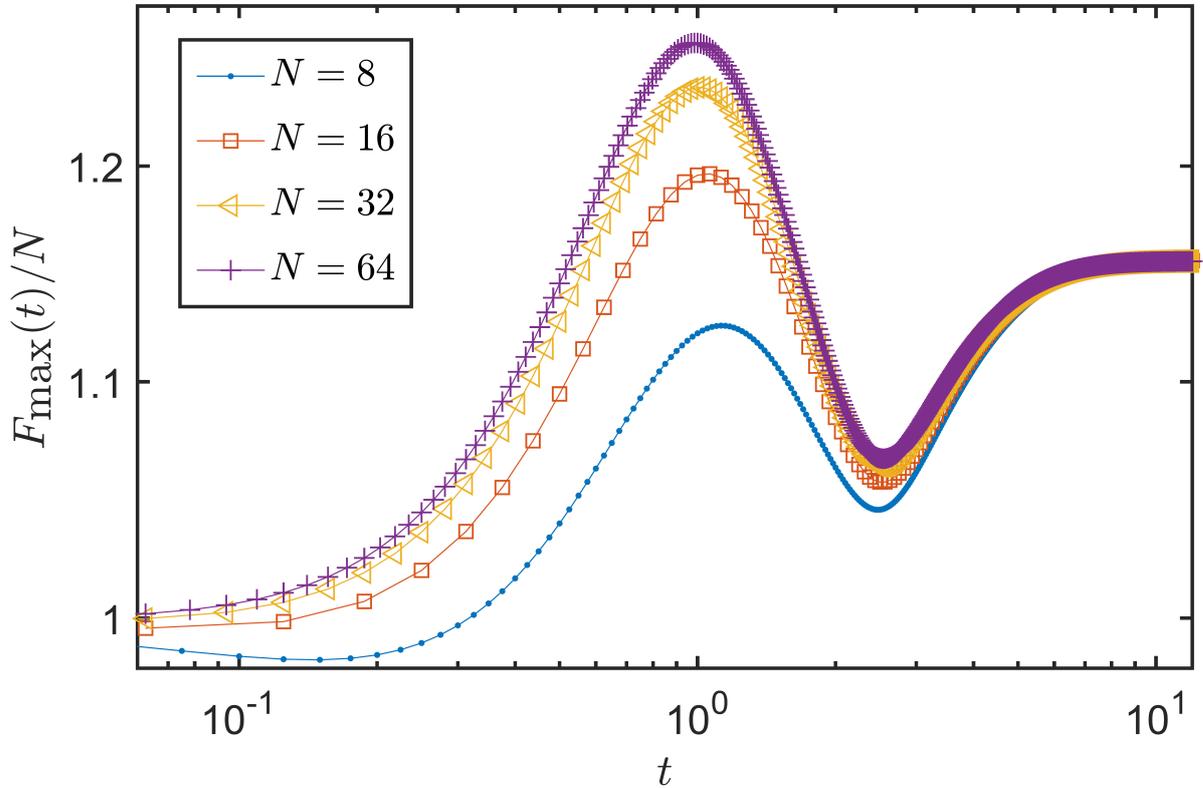


Figura 40 – Dinâmica da IQF na fase ferromagnética $\omega_0 = 0.5$ variando o número de *spins*. A evolução temporal cria emaranhamento genuíno 2-partido e o emaranhamento criado persiste até o EENE.

Na Figura 41, observamos a IQF na dinâmica para $\omega_0 = 2.0$ na fase CTF. Há detecção de emaranhamento por volta de $t = 0.5$ para números de *spins* maiores do que $N = 8$, quanto maior o número de *spins* mais evidente é a ultrapassagem do limite. No entanto, há no máximo emaranhamento genuíno 2-partido, ou seja, a IQF fica no intervalo $1 < F_{\max} < 2$. É somente em $t \sim 0.5$ que há detecção de emaranhamento, depois a IQF apresenta queda com oscilações. Conforme a IQF vai decaindo, menos coerência a matriz densidade contém, como mostrado na Figura 36. Na literatura alguns autores associam IQF com medida de coerência [134], porém, devemos lembrar que coerência é dependente da base considerada. As oscilações capturadas pela IQF têm a mesma frequência das capturadas pelas CGM ν , aparecendo um padrão parecido de oscilações, com um decaimento das oscilações um pouco diferente, porém com uma queda global da IQF com o tempo. Por esse comportamento similar descrevemos o comportamento da IQF pela relação

$$F_{\max} \propto t^{-\alpha_N} e^{-\tilde{\Gamma}_N t} \cos(\nu t) + F_{\max}^{EENE}, \quad (83)$$

na qual α_N está atribuído o expoente do decaimento através da lei de potência, $\tilde{\Gamma}_N$ refere-se à taxa de decaimento das oscilações, ν corresponde à frequência do CTF e F_{\max}^{EENE} é o valor da IQF no EENE.

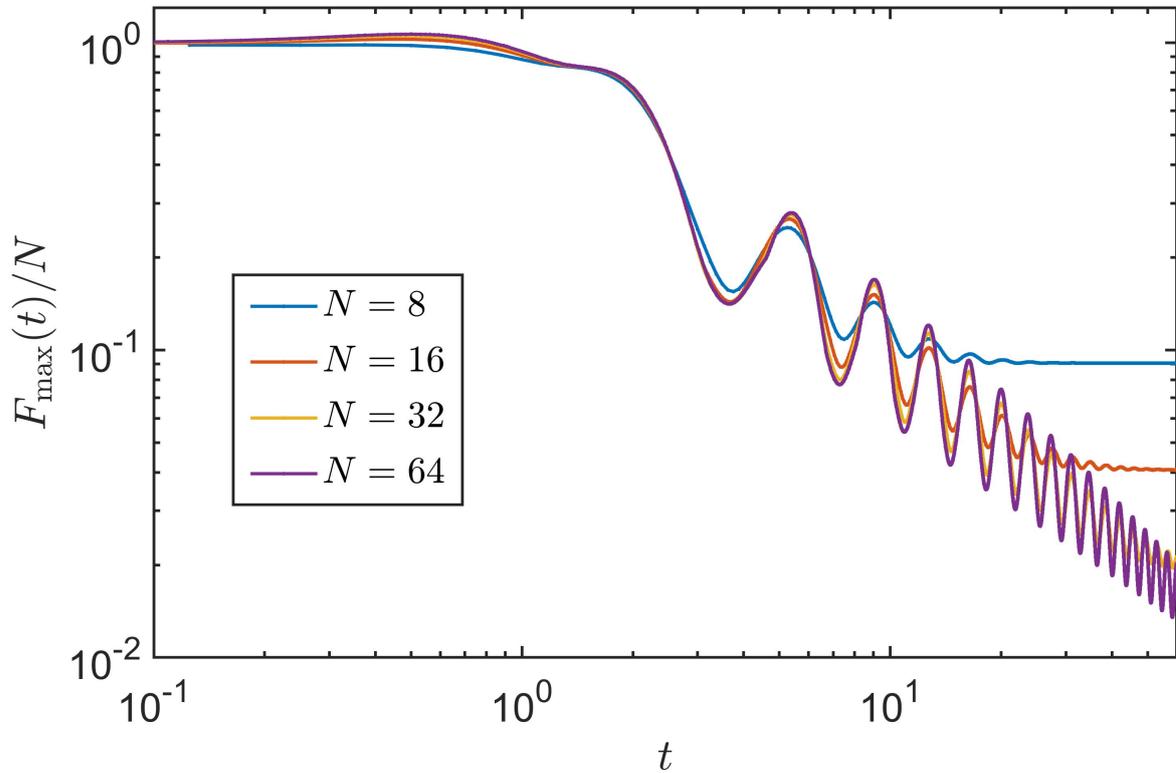


Figura 41 – Dinâmica da IQF na fase CTF para $\omega_0 = 2$ variando o número de *spins*. Somente na região próxima de $t = 0.5$ da dinâmica é testemunhado emaranhamento genuíno 2-partido e no EENE não é detectado emaranhamento. As oscilações estão presentes e possuem a mesma frequência ν dada pelas CGM.

Com o mesmo procedimento realizado para as CGM no cálculo da taxa de decaimento através da equação (81), calculamos a taxa de decaimento na IQF com a equação (83). Na Figura 42, vemos que a taxa de decaimento $\tilde{\Gamma}_N$ tende a zero conforme aumentamos o número de *spins*, análogo ao que acontece com as CGM. A curva para $N = 64$ não aparece na Figura 42 porque dificulta a visualização do comportamento dos outros números de *spins* e apresenta erros numéricos.

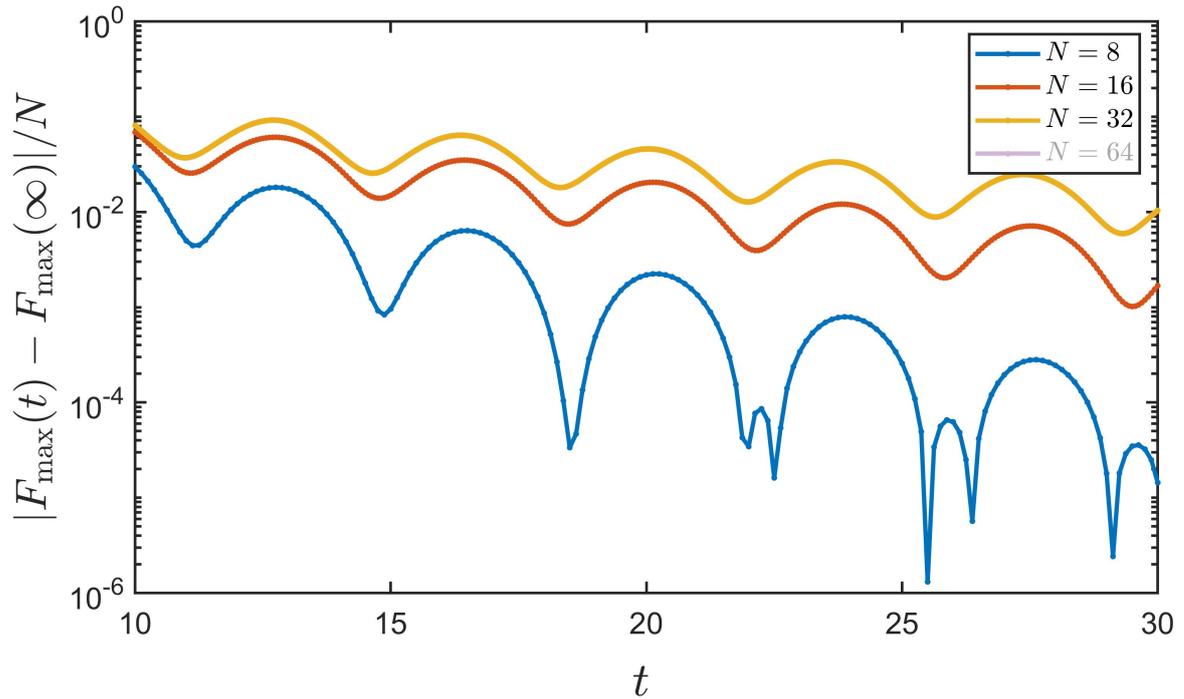


Figura 42 – Módulo da IQF em função do tempo menos seu valor no EENE. A inclinação da reta em torno da média de oscilações nos fornece o amortecimento das oscilações. Para valores altos de números de *spins* a inclinação se aproxima da horizontal, ou seja, tende a zero.

Com isso, vimos que a IQF detectou emaranhamento genuíno 2-partido na dinâmica na fase ferromagnética e não detectou emaranhamento na fase CTF, não significa que não exista emaranhamento genuíno k -partidos, talvez a IQF falhou em detectar. Além disso, a IQF também apresenta oscilações com a mesma frequência obtida pelas CGM, e a IQF apresenta um comportamento gerido por uma relação semelhante às CGM.

4.2.1.2 Estado estacionário de não equilíbrio

Nesta seção, iremos analisar o EENE com as CGM e a IQF nas duas fases do sistema, do mesmo modo da análise realizada para a dinâmica. Primeiramente, mostraremos como obter o estado estacionário a partir de uma equação mestra, depois estudaremos as CGM no estado estacionário obtido de forma numérica. Por fim, calcularemos a IQF para verificar se detecta emaranhamento genuíno k -partido.

Dada uma equação de evolução como a equação (76) o estado estacionário é tal que

$$\frac{d}{dt}\rho_{EENE} = 0, \quad (84)$$

ou seja, para um estado estacionário não trivial devemos ter

$$\mathcal{L}[\rho_{EENE}] = 0. \quad (85)$$

Para $\rho_{EENE} \neq 0$ temos que o estado estacionário é o autoestado de equação (85) com autovalor do liouvilliano igual a zero. Como o liouvilliano é um superoperador que atua sobre operadores, para obtermos o autovalor zero do liouvilliano através de cálculo numérico é preciso fazer uma vetorização através do isomorfismo de Choi-Jamiolkowski [138, 139]. A vetorização para matriz densidade é feita da forma

$$\rho = \sum_{i,j} \rho_{i,j} |i\rangle\langle j| \rightarrow \text{vec}(\rho) = \sum_{i,j} \rho_{i,j} |i\rangle \otimes |j\rangle,$$

e para o superoperator \mathcal{L} é feito um procedimento semelhante que o transforma em uma matriz, tal que teremos

$$\mathcal{L}[\text{vec}(\rho_{EENE})] = 0. \quad (86)$$

Realizando a vetorização, o liouvilliano se transforma em um operador (matriz) e a matriz densidade em vetor unidimensional, que é o autoestado do liouvilliano. O estado estacionário é alcançado depois de um tempo longo e, no modelo que emerge o CTF, quanto maior o número de *spins* maior o tempo para alcançar o estado estacionário. O EENE apesar de ser um estado estacionário existem trocas entre o *drive* e o sistema e entre o sistema e o banho, mas a energia injetada pelo *drive* é balanceada com a energia de dissipação do banho [79]. Por isso, é um estado estacionário de não equilíbrio.

4.2.1.2.1 Correlações genuínas multipartidas

Obtendo o estado estacionário a partir do liouvilliano através de cálculo numérico, desfazemos a vetorização de ρ_{EENE} , assim o EENE é escrito na forma matricial e as CGM são calculadas do modo realizado na parte da dinâmica. Na figura 43, apresentamos os resultados para as CGM para $N = 128$ em função do *drive*. Na fase ferromagnética, as CGM são subextensivas com o número de partículas, ou seja, $\lim_{N \rightarrow \infty} S^k/N = 0$, mas ainda $\lim_{N \rightarrow \infty} S^k \neq 0$. Nessa fase, a quantidade das CGM presentes no EENE é pequena, pois este se aproxima de um estado puro totalmente separável, bem próximo de $|0\rangle^{\otimes N}$, conforme vimos nas Figuras 34 e 45. Porém, próximo da transição de fase em $\omega_0 = 1$, apesar de o sistema ter pequena quantidade de CGM, ainda pode apresentar emaranhamento, como veremos na próxima seção. Além disso, é conhecido na literatura sobre o comportamento divergente do emaranhamento em TFQ de segunda ordem [4, 8]. O Liouvilliano, na fase ferromagnética, possui um único estado fundamental, enquanto que na fase CTF o estado fundamental é degenerado, e as CGM têm um comportamento similar ao que acontece na TFQ de segunda ordem no modelo LMG. A fase com degenerescência apresenta bastante CGM e tende a zero na fase não degenerada [140]. Na figura 43, vemos que as CGM são crescentes

e da ordem de N na fase CTF, para $\omega_0 > 1$, diminuindo de acordo com a ordem da correlação. Notamos, além do mais, que as CGM se comportam de maneira semelhante novamente, isso devido à simetria do sistema que conserva J^2 . Na Figura 1.d da Ref. [141], Lourenço e colaboradores mostram, com o cálculo das CGM como apresentado na Figura 43, que há uma TFQ no ponto $(\omega_0)_c = 1$ no limite termodinâmico. Além disso, verificam que todas as ordens de correlação multipartidas têm um comportamento crítico na transição com uma lei de potência $S^k/N \sim (\omega_0 - (\omega_0)_c)^\beta$ e o expoente crítico $\beta \sim 0.3$.

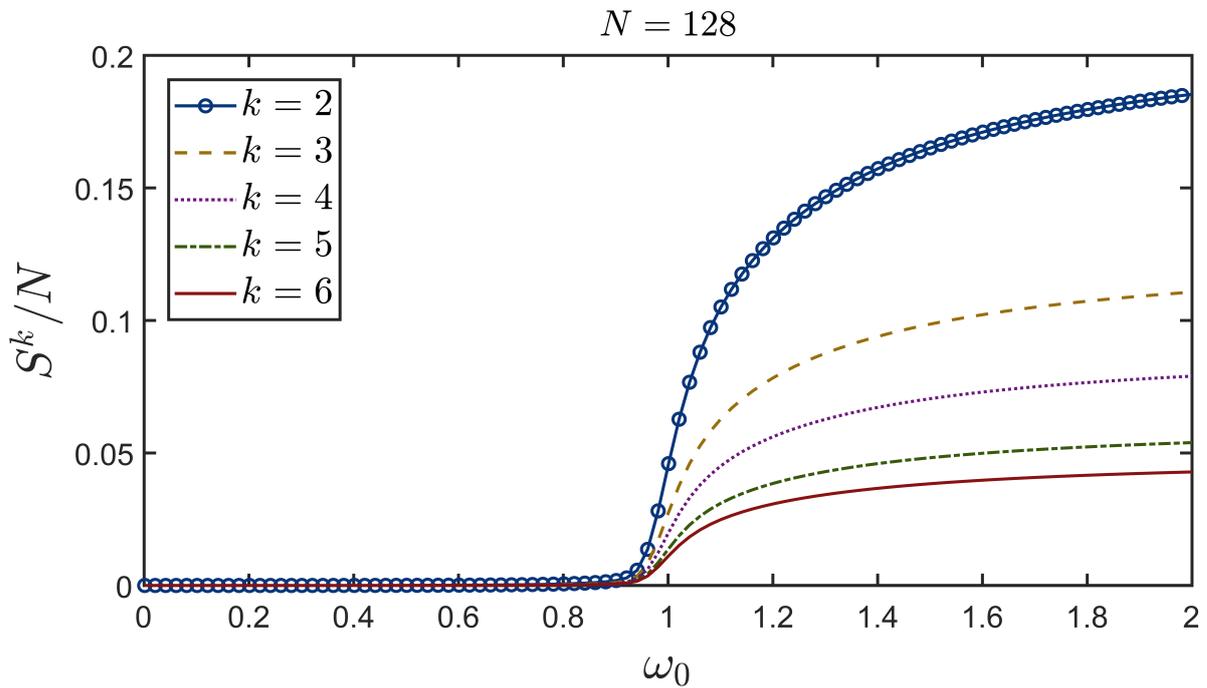


Figura 43 – CGM no EENE variando a frequência do *drive* com $N = 128$ e para algumas ordens de correlações. A fase ferromagnética é subextensiva com número de *spins* e a fase CTF é extensiva para todas as ordens de CGM.

Na fase CTF, as CGM são extensivas, ou seja, $\lim_{N \rightarrow \infty} S^k/N \neq 0$, na figura 44 notamos que todas as ordens de CGM, em $\omega_0 = 2$, são extensivas. Além disso, para valores pequenos de N , as CGM apresentam peculiaridades devido à ordem da correlação e o tamanho finito de *spins*, há trocas de ordens de correlações ao invés de serem decrescente conforme aumenta a ordem da correlação. Do mesmo modo que acontece para outros modelos, isso pode ser devido ao fato de termos que levar em conta o número de partições no estado produto em que estamos calculando as CGM, como foi visto para o modelo LMG no capítulo 3. Como vimos o número de partições no estado produto está ligado à função piso no cálculo da distância, e esse comportamento não trivial das CGM acontece também no fenômeno da superradiância de Dicke [118] e no modelo LMG [140]. Por exemplo na Figura 44, em $N = 12$ inverte a ordem em $S^6 > S^5$. Isso ocorre por que no cálculo de S^5 , calculamos $S^5(\rho_{12}) =$

$S^{4 \rightarrow 12}(\rho_{12}) - S^{5 \rightarrow 12}(\rho_{12}) = S(\rho_{12} || \rho_4 \otimes \rho_4 \otimes \rho_4) - S(\rho_{12} || \rho_5 \otimes \rho_5 \otimes \rho_2)$, os dois estados produtos $\rho_4 \otimes \rho_4 \otimes \rho_4$ e $\rho_5 \otimes \rho_5 \otimes \rho_2$ têm o mesmo número partições, 3 partições. Assim, estamos medindo a distância de ρ_{12} aos dois estados com quantidades parecidas de correlações. Enquanto que para $S^6(\rho_{12}) = S^{5 \rightarrow 12}(\rho_{12}) - S^{6 \rightarrow 12}(\rho_{12}) = S(\rho_{12} || \rho_5 \otimes \rho_5 \otimes \rho_2) - S(\rho_{12} || \rho_6 \otimes \rho_6)$, o estado produto $\rho_5 \otimes \rho_5 \otimes \rho_2$ é menos correlacionado do que o estado produto $\rho_6 \otimes \rho_6$, portanto se ρ_{12} apresenta muita correlação está mais distante do primeiro e menos do segundo estado produto. Isso explica a quantidade de correlação de ordem 5 ser menor do que de ordem 6. Outros casos assim podem acontecer que explicam outras trocas de ordem na quantidade de correlação. Esses casos também podem ser explicados por analogia com frustração e monogamia conforme realizado no capítulo 3.

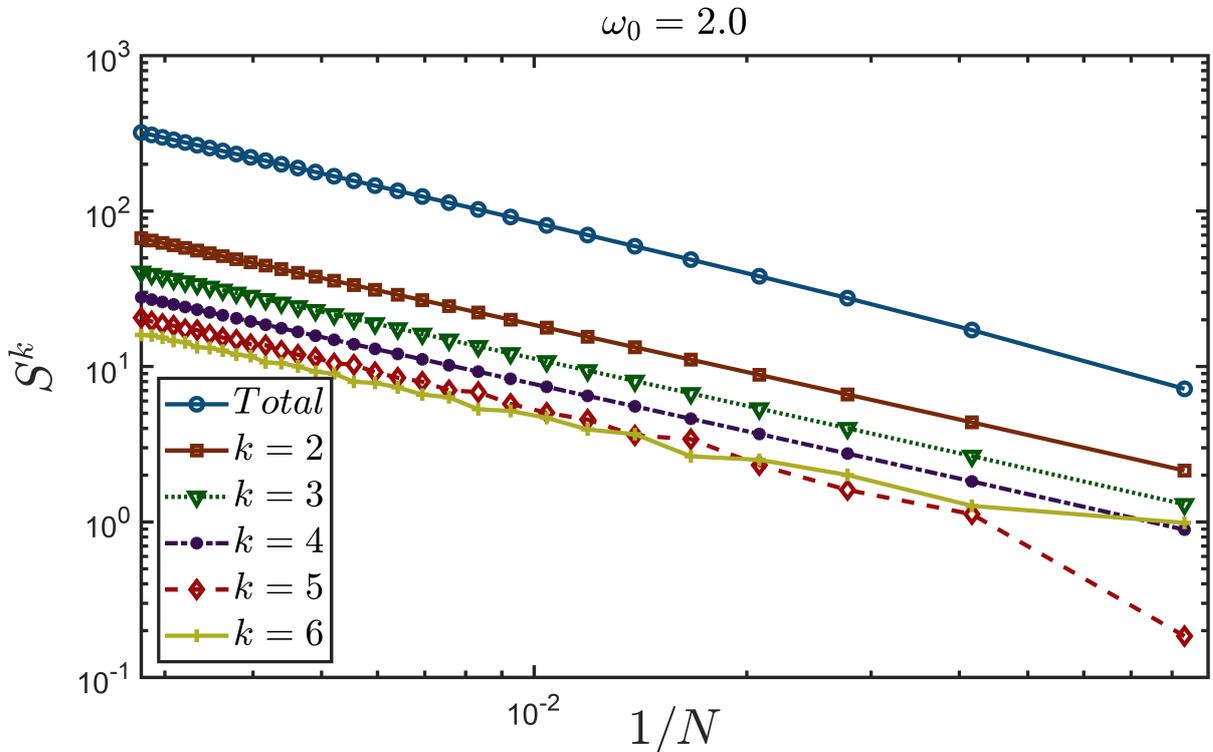


Figura 44 – Escalonamento das CGM no EENE em função do número de partículas na fase CTF. As CGM são extensivas e aumentam na ordem de N com o aumento no número de partículas. Para números pequenos de partículas efeitos de tamanho finito relacionados ao número de partições no estado produto aparecem.

Os elementos da matriz densidade com valores maiores na fase ferromagnética partem da região próxima de $|N/2, -N/2 \rangle \langle N/2, -N/2|$ e caminham em direção ao centro da diagonal conforme ω_0 aumenta, como mostra a Figura 45. Nesse processo, a coerência vai se tornando maior e os termos da diagonal se tornam mais ocupados próximo da transição de fase. Existe no EENE uma competição entre o *drive* e o banho que provoca um decaimento coletivo, enquanto o *drive* leva o estado para $i |-\rangle^{\otimes N}$,

o banho leva à $|0\rangle^{\otimes N}$. Vimos que nesse sistema o estado puro tende a ser uma circunferência no mapa de cores da matriz densidade, vide Figura 34. O EENE para ω_0 pequenos se aproxima do estado puro inicial, porém deslocado para o fim da diagonal da matriz. Conforme o campo vai aumentando o estado se desloca com uma forma de estado puro com coerência e na transição de fase fica com característica mista entre estado puro e diagonal. Apesar de no EENE haver pouca quantidade de CGM na fase ferromagnética, nessa fase o sistema apresenta coerência e está próximo de um estado puro separável. A presença de coerência na base de Dicke pode ser indicativo de presença de alguma forma de correlação quântica, no entanto, pequena quantidade em relação às CGM presentes na fase CTF. Mesmo apresentando uma quantidade pequena de CGM na ferromagnética, isso não impede a presença de correlação quântica.

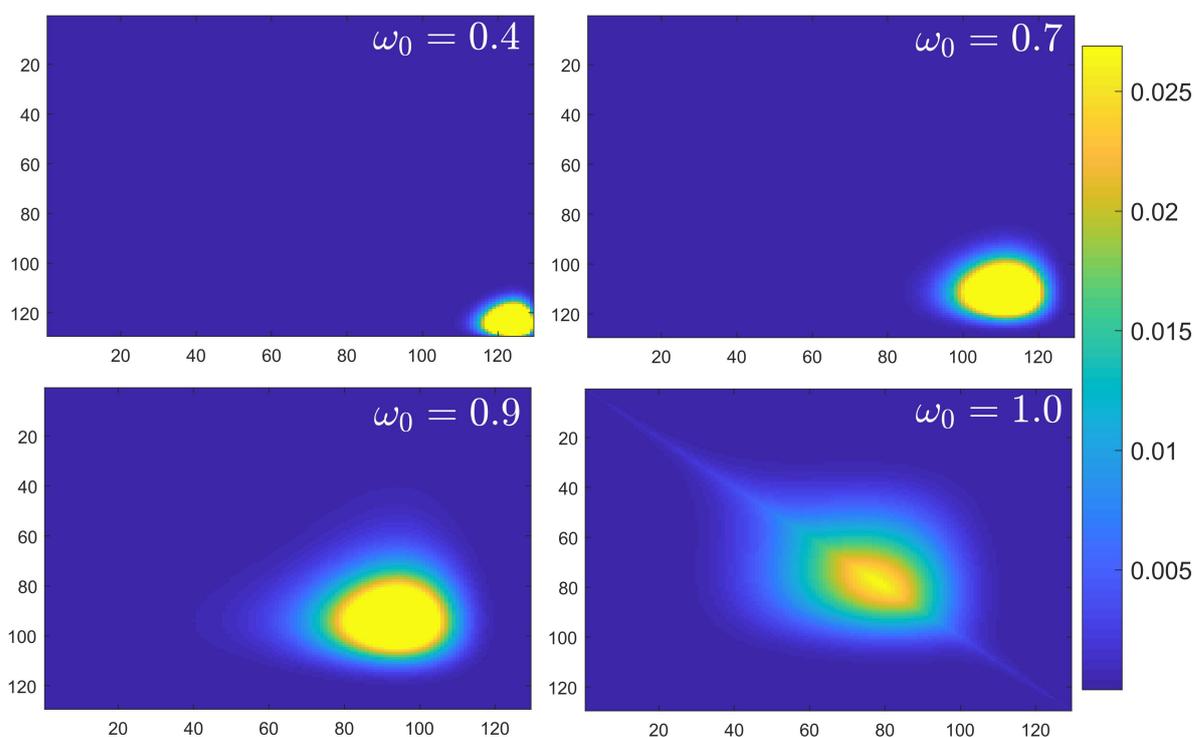


Figura 45 – Mapa de cores da matriz densidade na base de Dicke para o EENE na fase ferromagnética, variando os valores de *drive* até a transição de fase.

Na fase CTF, o EENE se aproxima de uma matriz diagonal e conforme levamos ao limite termodinâmico, no qual o fenômeno do CTF emerge, a matriz densidade é quasi-diagonal, com poucas diagonais secundárias e os elementos da diagonal com valores próximos entre si [17, 129]. Na figura 46, notamos esse comportamento acontecendo. Quanto mais próxima de uma matriz diagonal, com valores quase iguais nas populações, mais próxima da matriz densidade que aparece no fenômeno da

superradiância de Dicke [142]. Porém, aqui é fenômeno que surge no EENE, enquanto que na superradiância de Dicke é um fenômeno transiente, faz parte da dinâmica.

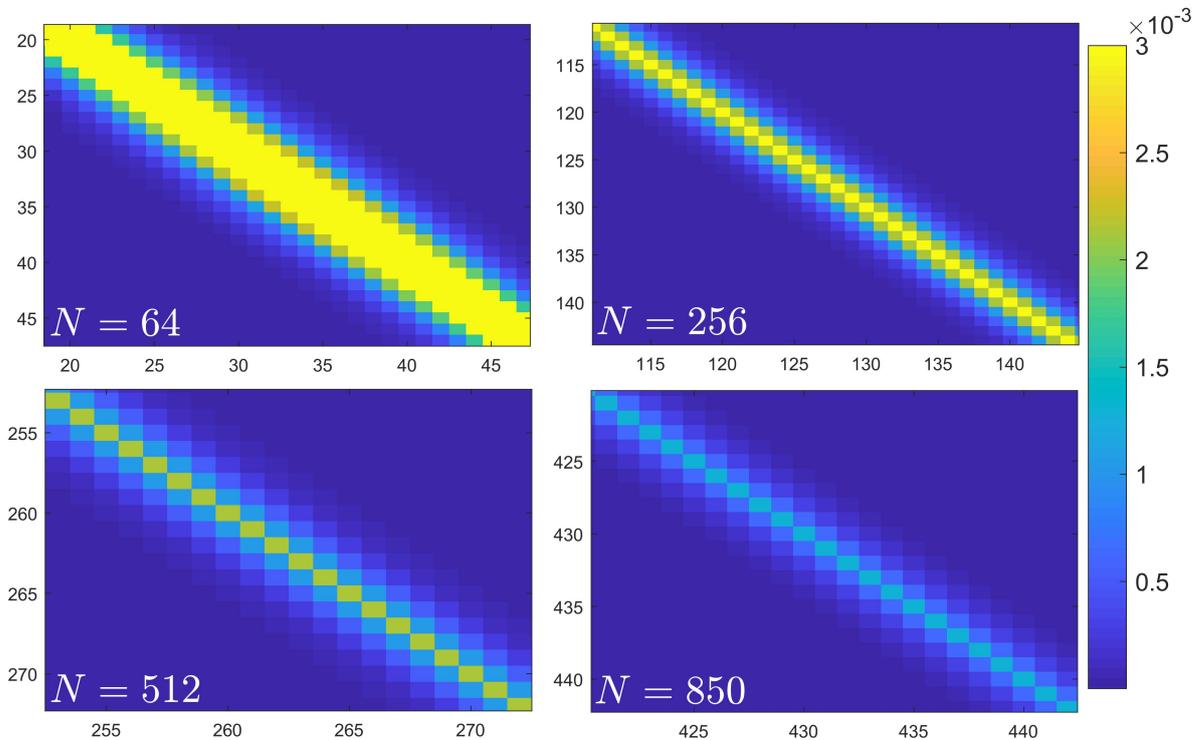


Figura 46 – Mapa de cores da matriz densidade na base de Dicke para o EENE na fase CTF com $\omega_0 = 2$ para diferentes números de partículas. Conforme aumentamos o número de partículas, mais próxima de uma matriz diagonal o estado se aproxima. Porém, mesmo para valores maiores de N apresenta um pouco de coerência nas diagonais secundárias.

Além disso, na Figura 47, aplicamos um *drive* bem forte com $\omega_o = 500$, assim a matriz de fato se torna diagonal com elementos da diagonal com mesmo valor. Porém, essa matriz é próxima da identidade no subespaço simétrico, assim não é totalmente decorrelacionada. Essa matriz próxima da diagonal na base de Dicke é conhecida no fenômeno da superradiância de Dicke [142] e também é conhecido que no momento da emissão superradiante as CGM apresentam um pico [118]. Assim, entendemos melhor porque na fase CTF as CGM são extensivas e apresentam uma grande quantidade de correlação. Pois, de acordo com a literatura na superradiância não há emaranhamento [143], no entanto, existe um pico de correlação quântica do tipo discórdia quântica [144].

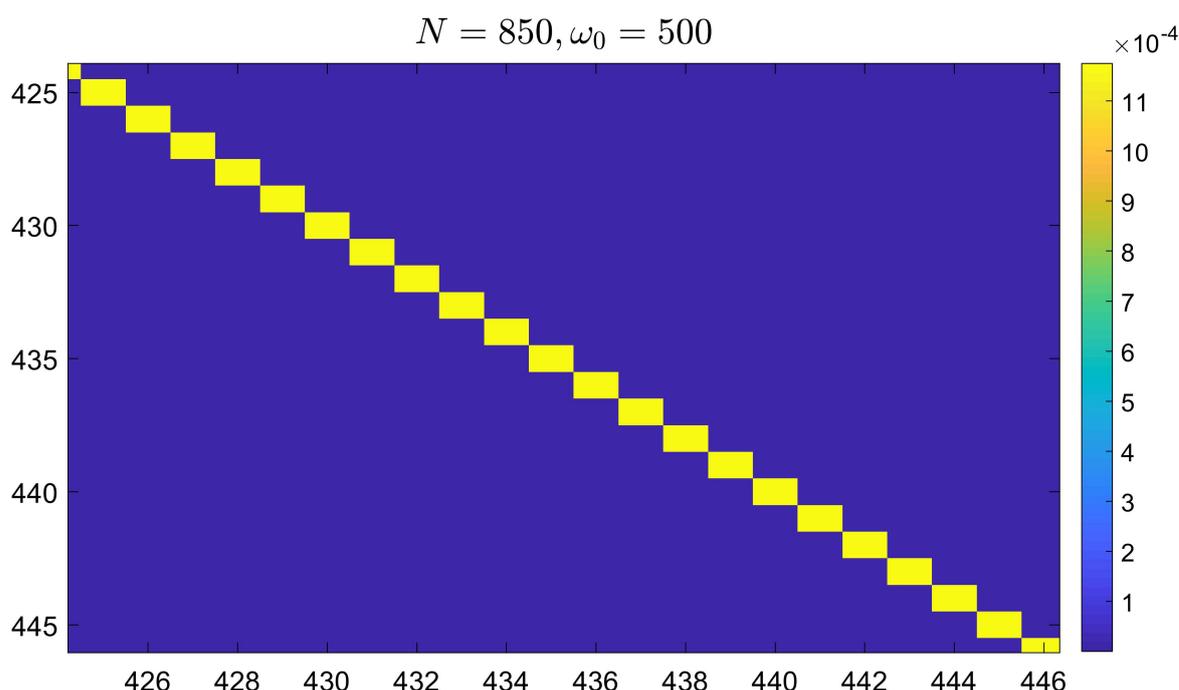


Figura 47 – Mapa de cores da matriz densidade na base de Dicke para o EENE na fase CTF $\omega_0 = 500$ para $N = 850$. A matriz densidade se torna um matriz diagonal com valores dos elementos da diagonal iguais.

Portanto, vimos que na fase ferromagnética o EENE possui pequena quantidade de CGM, elas são subextensivas com número de partículas. Por outro lado, na fase CTF o EENE possui extensividade com número de partículas. Isso acontece devido à forma que o estado assume na fase CTF, próximo a um estado superradiante, bastante misto. Na fase ferromagnética, o estado é mais próximo de um estado puro com coerência, o que pode sinalizar presença de correlações quântica e até emaranhamento. Para saber se há emaranhamento genuíno k -partido no EENE na próxima seção vamos calcular a IQF.

4.2.1.2.2 Informação quântica de Fisher

As CGM não diferenciam a natureza das correlações, assim utilizaremos a IQF como testemunha para tentarmos detectar emaranhamento genuíno k -partido no EENE nas duas fases do sistema.

Na fase ferromagnética, o estado possui principalmente emaranhamento genuíno 2-partido, como vemos na figura 48. Para todos os N 's a IQF ultrapassa o limite de detecção de emaranhamento genuíno 2-partido, e a IQF é extensiva com número de partículas nessa fase. Sabemos que na fase ferromagnética o sistema se aproxima bem de um estado puro, vide Figura 45. Assim, além de coerência presente nesse estado puro, existe emaranhamento. Apesar da existência de coerência na base de

Dicke poderia haver uma base em que não haja coerência, que é dependente da base, enquanto que emaranhamento é independente da base considerada. Existem, no entanto, medidas de coerência que mede coerência independente da base [145–147]. Caso não haja coerência em alguma base, as medidas de coerência independente da base resultam em zero coerência. Quando o sistema se aproxima da transição de fase $\omega_0 = 1$ a IQF apresenta um pico, de forma que para números de *spins* maiores cada vez grupos maiores de partículas estão emaranhadas. Por exemplo, para $N = 256$ em $\omega_0 \simeq 1$ a $F_{\max} > 4$, ou seja, grupos de até 5 partículas estão emaranhadas, há emaranhamento genuíno 5-partido, no entanto não sabemos a quantidade de emaranhamento genuíno 5-partido. Essa característica divergente de IQF na TFQ de segunda ordem é bem conhecida na literatura, na qual é reportado que emaranhamento assinala a TFQ com pico de emaranhamento no ponto de transição [4, 8, 10, 11, 15, 17]. Também verificamos isso com a entropia de emaranhamento na TFQ para o modelo de LMG, Figura 9.

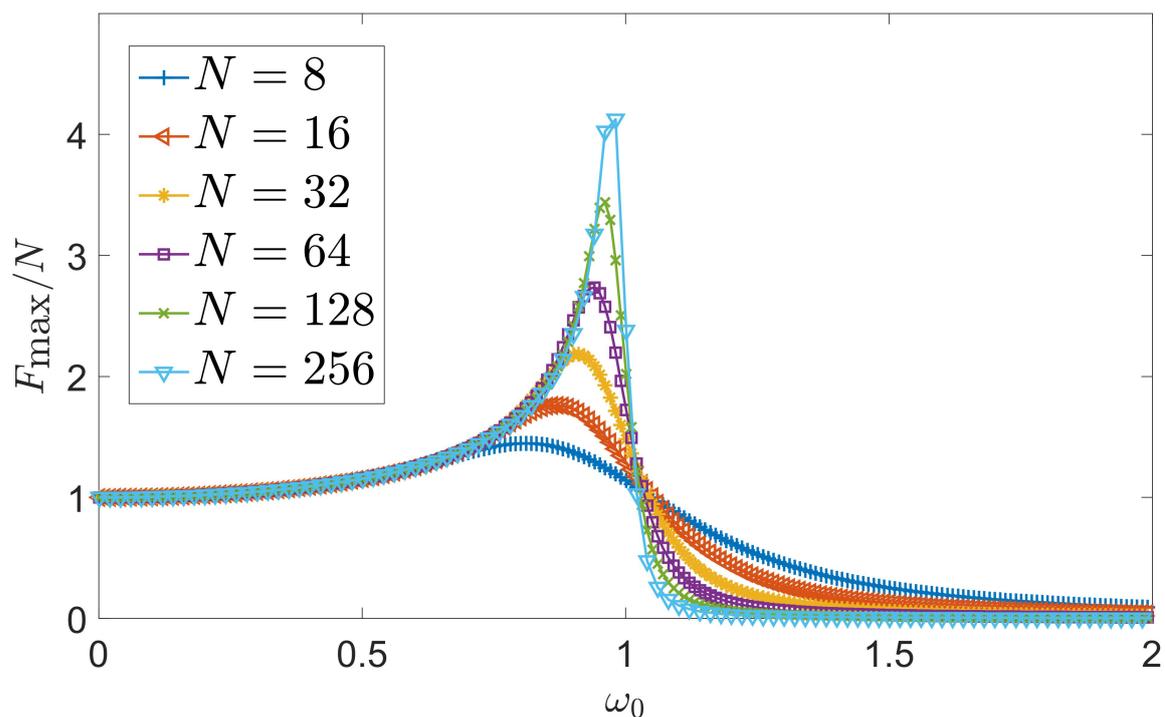


Figura 48 – IQF para o EENE variando o *drive* entre as duas fases do modelo e aumentando o número de partículas. Na fase ferromagnética, há emaranhamento genuíno 2-partido e na transição tem um pico de detecção de emaranhamento, apresentando até emaranhamento genuíno 5-partido para $N = 256$.

Contudo, na fase CTF, não foi detectado emaranhamento com a IQF, a qual é subextensiva com número de partículas nessa fase, como mostra Figura 48. Além disso, na fase CTF, verificamos na Figura 49 que para vários valores de *drive* dentro dessa fase que de fato a IQF é subextensiva. Também, a IQF diminui conforme aumentamos o número de partículas para todos os valores de *drive* numa taxa semelhante.

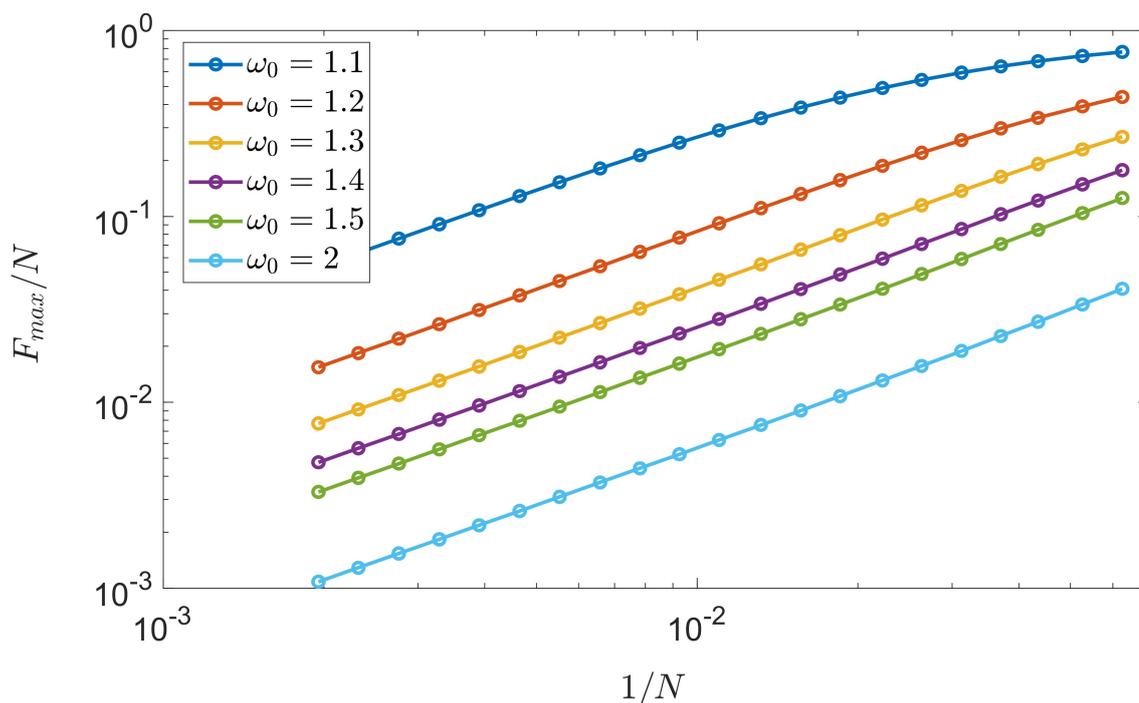


Figura 49 – IQF na fase CTF variando o número de partículas e o *drive* aplicado. Para todos os valores de *drive* a IQF diminui numa taxa semelhante com o aumento do número de partículas, a IQF é subextensiva nessa fase.

Ao observarmos a matriz densidade na fase CTF na Figura 46, vemos que a matriz é altamente mista, e sabemos que a IQF é uma testemunha ruim para estados desse tipo. Com isso, pode ainda haver emaranhamento nessa fase, que possui CGM extensivas e IQF subextensiva com número de partículas, e, assim, talvez a IQF pode ter falhado em detectar emaranhamento genuíno k -partido. Também, observamos que a IQF é apenas uma testemunha e não um quantificador de emaranhamento. Pode parecer estranho haver no EENE pequena quantidade de CGM na fase ferromagnética e testemunhar emaranhamento nessa fase, porém não sabemos a quantidade de emaranhamento genuíno k -partido presente. Enquanto que na fase CTF o EENE possui grande quantidade de CGM e a IQF não testemunha emaranhamento. No entanto, caso não haja emaranhamento, pode haver correlação de origem clássica ou do tipo discórdia quântica. Pois, o estado do EENE é uma matriz quasi-diagonal, próxima da matriz densidade num pico de emissão na superradiância de Dicke, na qual há um pico de discórdia quântica [144]. Sabemos que no caso extremo em que $\omega_0 \rightarrow \infty$ (na Figura 47) a matriz se torna como no caso da superradiância de Dicke.

5 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Na primeira parte desta tese, estudamos a TFQ no modelo LMG através das CGM. Observamos que todas as ordens das correlações genuínas k -partidas assinalam a transição e possuem comportamento similar com a variação do parâmetro de controle. Contudo, constatamos um comportamento não-trivial das CGM, houve trocas de ordem das correlações genuínas de modo que $S^k(\rho) < S^{k+1}(\rho)$ para alguns valores de k . Tal comportamento está relacionado ao número de partições dos estados produtos vizinhos utilizados para calcular as correlações genuínas k -partidas. Também verificamos que como a transição é de segunda ordem, a descontinuidade apareceu na primeira derivada do parâmetro de ordem, as CGM, e constatamos que a transição acontece, de fato, em $h = 1$ no limite termodinâmico. Mostramos, assim, que as CGM são propícias para capturar os padrões de correlações diferentes que existem nas duas fases do modelo LMG, sendo relativamente simples de calcular para sistemas simétricos. As CGM nos mostram que no modelo LMG todos os grupos com k partículas estão praticamente maximamente correlacionados. No entanto, como as CGM são da forma de uma informação mútua generalizada, somam-se na medida as correlações quânticas e clássica. Além disso, calculamos os expoentes críticos para algumas ordens de correlações e constatamos que estão no intervalo $[-1/2, 1/2]$. Conjecturamos, então, que todas as ordens de correlações genuínas k -partidas podem estar nesse intervalo para o modelo LMG. Para valores de $k = 2, 3, 4, 5$ obtivemos os expoentes críticos bem parecidos $\simeq 0.333$ na tabela 2, possuindo um dimensionalidade fractal, ou seja, expoente fracional, isso pode estar relacionado à auto-similaridade e, assim, todas essas ordens de correlação terem comportamento parecido na transição. Além do mais, com o *weaving* notamos que em $h = 0$ o padrão de correlação capturado está entre um estado W e um GHZ.

Na segunda parte, apresentamos o modelo do CTF, realizamos uma análise do modelo através das CGM e investigamos a presença de emaranhamento genuíno k -partido com a IQF. Durante a dinâmica ($0 < t < \infty$) as CGM não apresentam oscilações na fase ferromagnética do modelo. Nessa fase, vimos que todas as ordens das CGM crescem rapidamente e decaem para um valor constante rapidamente. Também, para tempos longos o sistema se aproxima do estado $|0\rangle^{\otimes N}$. Além disso, na dinâmica, na fase CTF todas as ordens das CGM capturam as oscilações, com a mesma frequência e com decaimento dependente do número de partículas. Mostramos através das correlações totais que o amortecimento das oscilações tende a zero conforme aumentamos o número de partículas, implicando que no limite termodinâmico haverá a presença de um CTF. Ainda na dinâmica, com a IQF verificamos que o estado do sistema na fase ferromagnética apresenta emaranhamento genuíno 2-partido inclusive para tempos longos, ou seja, o EENE é emaranhado. Enquanto que na fase CTF o

estado não possui emaranhamento genuíno k -partido e a IQF apresenta oscilações com um decaimento geral até alcançar o NESS. Encontramos uma relação semelhante entre as CGM e IQF no comportamento na fase CTF para a dinâmica, diferenciando no fato da primeira ir aumentando no tempo e a última decaindo, porém, com frequências iguais e decaimento das oscilações próximos, porém diferentes.

Outrossim, na segunda parte da tese, observamos para o EENE do CTF que na fase ferromagnética as CGM possuem subextensividade com o número de partículas, enquanto que na fase CTF tem caráter extensivo. Isso é semelhante ao comportamento das CGM no modelo LMG também, quando notamos que a fase CTF corresponde à fase paramagnética. Com mapa de cores da matriz densidade reduzida, percebemos que o estado fundamental da fronteira se aproxima de uma matriz quase-diagonal com aumento do número de partículas. Esse fato, explicou o comportamento extensivo das CGM, pois se aproxima de um estado da superradiância de Dicke, que sabíamos que possui bastante CGM [118]. Isso também explica termos encontrado valores baixos para IQF no EENE na fase CTF, pois já se sabe que um estado superradiante não possui emaranhamento [143]. Por outro lado, com a IQF, mostramos que na fase ferromagnética há emaranhamento genuíno k -partido e ocorre um pico na IQF na transição da fase, na qual há um aumento da ordem do emaranhamento genuíno k -partido detectado pela IQF com o número de partículas no sistema. Vimos que a IQF é extensiva na fase ferromagnética e subextensiva na fase CTF. Novamente, agora em outro modelo, observamos que as CGM são capazes de descrever diferentes padrões de correlações nas duas fases do sistema no EENE. E na dinâmica as CGM descreveram bem o comportamento oscilatório na fase CTF e notamos que cada parte do sistema se comporta de maneira igual e possui correlação, porém não há emaranhamento genuíno k -partido.

Como perspectivas futuras, seria interessante tentar descobrir a natureza das correlações, poderia ser feita na base produto uma minimização sobre rotações locais das correlações genuínas k -partidas, calculando, assim, uma espécie de discórdia quântica global k -partida. O cálculo irá alcançar poucas partículas, uma vez que o cálculo da discórdia é um problema NP-completo para subsistemas distinguíveis. No modelo LMG, podem ser investigadas formas de mostrar que os expoentes críticos estão de fato dentro do intervalo $[-1/2, 1/2]$. Outra investigação pode ser feita sobre a dimensionalidade fractal dos expoentes críticos k 's e se há alguma relação com comportamento parecido na transição. Também é interessante estudar as escalabilidade das correlações através do *weaving* no ponto crítico no modelo LMG. No modelo do CTF, é possível pensar em formas de utilizá-lo em máquinas térmicas quânticas, uma vez que possui bastante correlação na fase CTF e torna possível utilizá-las para reverter fluxo de calor [39], caso haja correlação quântica. Poderia também se utilizar o cálculo de discórdia genuína k -partida baseada em distância, proposta aqui como

trabalhos futuros, para verificar a presença de correlação quântica na fase CTF. Ainda, poderia ser investigado se é uma característica das CGM, na transição de fase de segunda ordem, ser extensiva na fase paramagnética e subextensiva na ferromagnética. Outro modelo em que estamos calculando as CGM é modelo de Dicke, sendo esse comportamento extensivo/subextensivo das CGM aparentemente também está presente, embora haja limitação no número de partículas alcançado.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Ryszard Horodecki, Paweł Horodecki, Michał Horodecki e Karol Horodecki. “Quantum entanglement”. Em: *Reviews of modern physics* 81.2 (2009), p. 865.
- [2] Kavan Modi, Aharon Brodutch, Hugo Cable, Tomasz Paterek e Vlatko Vedral. “The classical-quantum boundary for correlations: Discord and related measures”. Em: *Rev. Mod. Phys.* 84 (4 nov. de 2012), pp. 1655–1707.
- [3] Subir Sachdev. *Quantum phase transitions*. 2nd. New York: Cambridge University Press, 2011.
- [4] A. Osterloh, Luigi Amico, G. Falci e Rosario Fazio. “Scaling of entanglement close to a quantum phase transition”. Em: *Nature* 416.6881 (abr. de 2002), pp. 608–610.
- [5] P. Christe e M. Henkel. *Introduction to Conformal Invariance and Its Applications to Critical Phenomena*. Springer Berlin Heidelberg, 1993.
- [6] Tobias J. Osborne e Michael A. Nielsen. “Entanglement, quantum phase transitions, and density matrix renormalization”. Em: *Quantum Information Processing* 1.1/2 (2002), pp. 45–53.
- [7] William K Wootters. “Entanglement of formation and concurrence.” Em: *Quantum Information & Computation* 1.1 (2001), pp. 27–44.
- [8] Tobias J. Osborne e Michael A. Nielsen. “Entanglement in a simple quantum phase transition”. Em: *Phys. Rev. A* 66 (3 set. de 2002), p. 032110.
- [9] F. Verstraete, M. Popp e J. I. Cirac. “Entanglement versus Correlations in Spin Systems”. Em: *Phys. Rev. Lett.* 92 (2 jan. de 2004), p. 027901.
- [10] Thiago R. de Oliveira, Gustavo Rigolin e Marcos C. de Oliveira. “Genuine multipartite entanglement in quantum phase transitions”. Em: *Phys. Rev. A* 73 (1 jan. de 2006), p. 010305.
- [11] Thiago R. de Oliveira, Gustavo Rigolin, Marcos C. de Oliveira e Eduardo Miranda. “Multipartite Entanglement Signature of Quantum Phase Transitions”. Em: *Phys. Rev. Lett.* 97 (17 out. de 2006), p. 170401.
- [12] G. Vidal, J. I. Latorre, E. Rico e A. Kitaev. “Entanglement in Quantum Critical Phenomena”. Em: *Phys. Rev. Lett.* 90 (22 jun. de 2003), p. 227902.
- [13] Chen Wang, Yu-Yu Zhang e Qing-Hu Chen. “Quantum correlations in collective spin systems”. Em: *Phys. Rev. A* 85 (5 mai. de 2012), p. 052112.

- [14] Neill Lambert, Clive Emary e Tobias Brandes. “Entanglement and the Phase Transition in Single-Mode Superradiance”. Em: *Phys. Rev. Lett.* 92 (7 fev. de 2004), p. 073602.
- [15] José I Latorre, Román Orús, Enrique Rico e Julien Vidal. “Entanglement entropy in the Lipkin-Meshkov-Glick model”. Em: *Physical Review A* 71.6 (2005), p. 064101.
- [16] Thiago R. de Oliveira, Gustavo Rigolin, Marcos C. de Oliveira e E. Miranda. “Symmetry-breaking effects upon bipartite and multipartite entanglement in the XY model”. Em: *Phys. Rev. A* 77 (3 mar. de 2008), p. 032325.
- [17] Julia Hannukainen e Jonas Larson. “Dissipation-driven quantum phase transitions and symmetry breaking”. Em: *Phys. Rev. A* 98 (4 out. de 2018), p. 042113.
- [18] Harold Ollivier e Wojciech H. Zurek. “Quantum Discord: A Measure of the Quantumness of Correlations”. Em: *Phys. Rev. Lett.* 88 (1 dez. de 2001), p. 017901.
- [19] Leah Henderson e Vlatko Vedral. “Classical, quantum and total correlations”. Em: *Journal of physics A: mathematical and general* 34.35 (2001), p. 6899.
- [20] Borivoje Dakić, Vlatko Vedral e Ćaslav Brukner. “Necessary and Sufficient Condition for Nonzero Quantum Discord”. Em: *Phys. Rev. Lett.* 105 (19 nov. de 2010), p. 190502.
- [21] Kavan Modi, Tomasz Paterek, Wonmin Son, Vlatko Vedral e Mark Williamson. “Unified View of Quantum and Classical Correlations”. Em: *Phys. Rev. Lett.* 104 (8 fev. de 2010), p. 080501.
- [22] Raoul Dillenschneider. “Quantum discord and quantum phase transition in spin chains”. Em: *Phys. Rev. B* 78 (22 dez. de 2008), p. 224413.
- [23] MS Sarandy. “Classical correlation and quantum discord in critical systems”. Em: *Physical Review A* 80.2 (2009), p. 022108.
- [24] T. Werlang, C. Trippe, G. A. P. Ribeiro e Gustavo Rigolin. “Quantum Correlations in Spin Chains at Finite Temperatures and Quantum Phase Transitions”. Em: *Phys. Rev. Lett.* 105 (9 ago. de 2010), p. 095702.
- [25] Yi-Xin Chen e Sheng-Wen Li. “Quantum correlations in topological quantum phase transitions”. Em: *Phys. Rev. A* 81 (3 mar. de 2010), p. 032120.
- [26] Simon Braun et al. “Emergence of coherence and the dynamics of quantum phase transitions”. Em: *Proceedings of the National Academy of Sciences* 112.12 (2015), pp. 3641–3646. eprint: <https://www.pnas.org/doi/pdf/10.1073/pnas.1408861112>.

- [27] Yan-Chao Li e Hai-Qing Lin. “Quantum coherence and quantum phase transitions”. Em: *Scientific Reports* 6.1 (mai. de 2016).
- [28] Yong-Jia He, Jing Zhou, Su-Peng Li e Zheng-Hang Sun. “Quantum coherence as indicators of quantum phase transitions, factorization and thermal phase transitions in the anisotropic XY model”. Em: *Quantum Information Processing* 17.11 (out. de 2018).
- [29] Yan Chao Li, Jing Zhang e Hai-Qing Lin. “Quantum coherence spectrum and quantum phase transitions”. Em: *Phys. Rev. B* 101 (11 mar. de 2020), p. 115142.
- [30] Meng Qin. “Renormalization of quantum coherence and quantum phase transition in the Ising model”. Em: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 561 (2021), p. 125176. ISSN: 0378-4371.
- [31] Tingting Wang, Rongzhang Yin, Mingquan Ye, Nan Wan e Jiadong Shi. “Coherence and Quantum Phase Transition in Spin Models”. Em: *International Journal of Theoretical Physics* 60.4 (mar. de 2021), pp. 1507–1515.
- [32] A. J. Scott. “Multipartite entanglement, quantum-error-correcting codes, and entangling power of quantum evolutions”. Em: *Phys. Rev. A* 69 (5 mai. de 2004), p. 052330.
- [33] Géza Tóth. “Multipartite entanglement and high-precision metrology”. Em: *Phys. Rev. A* 85 (2 fev. de 2012), p. 022322.
- [34] Richard Jozsa e Noah Linden. “On the role of entanglement in quantum-computational speed-up”. Em: *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. Vol. 459. 2036. The Royal Society. 2003, pp. 2011–2032.
- [35] Samuel L. Braunstein e Arun K. Pati. “Speed-up and Entanglement in Quantum Searching”. Em: 2.5 (ago. de 2002), pp. 399–409. ISSN: 1533-7146.
- [36] ShengChao Ding e Zhi Jin. “Review on the study of entanglement in quantum computation speedup”. Em: *Chinese Science Bulletin* 52.16 (ago. de 2007), pp. 2161–2166.
- [37] Animesh Datta, Anil Shaji e Carlton M. Caves. “Quantum Discord and the Power of One Qubit”. Em: *Phys. Rev. Lett.* 100 (5 fev. de 2008), p. 050502.
- [38] Borivoje Dakić et al. “Quantum discord as resource for remote state preparation”. Em: *Nature Physics* 8.9 (ago. de 2012), pp. 666–670.
- [39] Kaonan Micadei, John PS Peterson, Alexandre M Souza, Roberto S Sarthour, Ivan S Oliveira, Gabriel T Landi, Tiago B Batalhão, Roberto M Serra e Eric Lutz.

- “Reversing the direction of heat flow using quantum correlations”. Em: *Nature communications* 10.1 (2019), pp. 1–6.
- [40] Charles H. Bennett, Andrzej Grudka, Michał Horodecki, Paweł Horodecki e Ryszard Horodecki. “Postulates for measures of genuine multipartite correlations”. Em: *Phys. Rev. A* 83 (1 jan. de 2011), p. 012312.
- [41] Davide Girolami, Tommaso Tufarelli e Cristian E. Susa. “Quantifying Genuine Multipartite Correlations and their Pattern Complexity”. Em: *Phys. Rev. Lett.* 119 (14 out. de 2017), p. 140505.
- [42] Nicolai Friis, Giuseppe Vitagliano, Mehul Malik e Marcus Huber. “Entanglement certification from theory to experiment”. Em: *Nature Reviews Physics* 1.1 (2019), pp. 72–87.
- [43] Szilárd Szalay. “Multipartite entanglement measures”. Em: *Phys. Rev. A* 92 (4 out. de 2015), p. 042329.
- [44] Harry J Lipkin, N Meshkov e AJ Glick. “Validity of many-body approximation methods for a solvable model:(I). Exact solutions and perturbation theory”. Em: *Nuclear Physics* 62.2 (1965), pp. 188–198.
- [45] N Meshkov, AJ Glick e HJ Lipkin. “Validity of many-body approximation methods for a solvable model:(II). Linearization procedures”. Em: *Nuclear Physics* 62.2 (1965), pp. 199–210.
- [46] AJ Glick, HJ Lipkin e N Meshkov. “Validity of many-body approximation methods for a solvable model:(III). Diagram summations”. Em: *Nuclear Physics* 62.2 (1965), pp. 211–224.
- [47] F. Leyvraz e W. D. Heiss. “Large- N Scaling Behavior of the Lipkin-Meshkov-Glick Model”. Em: *Phys. Rev. Lett.* 95 (5 jul. de 2005), p. 050402.
- [48] Gang Chen e J-Q Liang. “Unconventional quantum phase transition in the finite-size Lipkin–Meshkov–Glick model”. Em: *New Journal of Physics* 8.12 (dez. de 2006), pp. 297–297.
- [49] Ricardo Puebla e Armando Relaño. “Irreversible processes without energy dissipation in an isolated Lipkin-Meshkov-Glick model”. Em: *Phys. Rev. E* 92 (1 ago. de 2015), p. 012101.
- [50] Julien Vidal, Guillaume Palacios e Claude Aslangul. “Entanglement dynamics in the Lipkin-Meshkov-Glick model”. Em: *Physical Review A* 70.6 (2004), p. 062304.

- [51] Julien Vidal, Sébastien Dusuel e Thomas Barthel. “Entanglement entropy in collective models”. Em: *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment* 2007.01 (2007), P01015.
- [52] Julien Vidal, Guillaume Palacios e Rémy Mosseri. “Entanglement in a second-order quantum phase transition”. Em: *Physical Review A* 69.2 (2004), p. 022107.
- [53] Tommaso Caneva, Rosario Fazio e Giuseppe E. Santoro. “Adiabatic quantum dynamics of the Lipkin-Meshkov-Glick model”. Em: *Phys. Rev. B* 78 (10 set. de 2008), p. 104426.
- [54] Sébastien Dusuel e Julien Vidal. “Finite-size scaling exponents of the Lipkin-Meshkov-Glick model”. Em: *Physical Review Letters* 93.23 (2004), p. 237204.
- [55] Sébastien Dusuel e Julien Vidal. “Continuous unitary transformations and finite-size scaling exponents in the Lipkin-Meshkov-Glick model”. Em: *Physical Review B* 71.22 (2005), p. 224420.
- [56] Thomas Barthel, Sébastien Dusuel e Julien Vidal. “Entanglement entropy beyond the free case”. Em: *Physical Review Letters* 97.22 (2006), p. 220402.
- [57] HT Cui. “Multiparticle entanglement in the Lipkin-Meshkov-Glick model”. Em: *Physical Review A* 77.5 (2008), p. 052105.
- [58] Jian Ma, Lei Xu, Heng-Na Xiong e Xiaoguang Wang. “Reduced fidelity susceptibility and its finite-size scaling behaviors in the Lipkin-Meshkov-Glick model”. Em: *Phys. Rev. E* 78 (5 nov. de 2008), p. 051126.
- [59] Jian Ma e Xiaoguang Wang. “Fisher information and spin squeezing in the Lipkin-Meshkov-Glick model”. Em: *Physical Review A* 80.1 (2009), p. 012318.
- [60] Ho-Man Kwok, Wen-Qiang Ning, Shi-Jian Gu e Hai-Qing Lin. “Quantum criticality of the Lipkin-Meshkov-Glick model in terms of fidelity susceptibility”. Em: *Phys. Rev. E* 78 (3 set. de 2008), p. 032103.
- [61] Román Orús, Sébastien Dusuel e Julien Vidal. “Equivalence of Critical Scaling Laws for Many-Body Entanglement in the Lipkin-Meshkov-Glick Model”. Em: *Phys. Rev. Lett.* 101 (2 ago. de 2008), p. 025701.
- [62] Ching-Yee Leung, Wing Chi Yu, Ho-Man Kwok, Shi-Jian Gu e Hai-Qing Lin. “Scaling behavior of the ground-state fidelity in the Lipkin–Meshkov–Glick Model”. Em: *International Journal of Modern Physics B* 26.31 (2012), p. 1250170.
- [63] Frank Wilczek. “Quantum Time Crystals”. Em: *Phys. Rev. Lett.* 109 (16 out. de 2012), p. 160401.

- [64] Patrick Bruno. “Impossibility of Spontaneously Rotating Time Crystals: A No-Go Theorem”. Em: *Phys. Rev. Lett.* 111 (7 ago. de 2013), p. 070402.
- [65] Haruki Watanabe e Masaki Oshikawa. “Absence of Quantum Time Crystals”. Em: *Phys. Rev. Lett.* 114 (25 jun. de 2015), p. 251603.
- [66] Dominic V. Else, Bela Bauer e Chetan Nayak. “Floquet Time Crystals”. Em: *Phys. Rev. Lett.* 117 (9 ago. de 2016), p. 090402.
- [67] Vedika Khemani, Achilleas Lazarides, Roderich Moessner e S. L. Sondhi. “Phase Structure of Driven Quantum Systems”. Em: *Phys. Rev. Lett.* 116 (25 jun. de 2016), p. 250401.
- [68] C. W. von Keyserlingk, Vedika Khemani e S. L. Sondhi. “Absolute stability and spatiotemporal long-range order in Floquet systems”. Em: *Phys. Rev. B* 94 (8 ago. de 2016), p. 085112.
- [69] N. Y. Yao, A. C. Potter, I.-D. Potirniche e A. Vishwanath. “Discrete Time Crystals: Rigidity, Criticality, and Realizations”. Em: *Phys. Rev. Lett.* 118 (3 jan. de 2017), p. 030401.
- [70] Wen Wei Ho, Soonwon Choi, Mikhail D. Lukin e Dmitry A. Abanin. “Critical Time Crystals in Dipolar Systems”. Em: *Phys. Rev. Lett.* 119 (1 jul. de 2017), p. 010602.
- [71] Biao Huang, Ying-Hai Wu e W. Vincent Liu. “Clean Floquet Time Crystals: Models and Realizations in Cold Atoms”. Em: *Phys. Rev. Lett.* 120 (11 mar. de 2018), p. 110603.
- [72] Reyhaneh Khasseh, Rosario Fazio, Stefano Ruffo e Angelo Russomanno. “Many-Body Synchronization in a Classical Hamiltonian System”. Em: *Phys. Rev. Lett.* 123 (18 out. de 2019), p. 184301.
- [73] Krzysztof Sacha. “Modeling spontaneous breaking of time-translation symmetry”. Em: *Phys. Rev. A* 91 (3 mar. de 2015), p. 033617.
- [74] Angelo Russomanno, Fernando Iemini, Marcello Dalmonte e Rosario Fazio. “Floquet time crystal in the Lipkin-Meshkov-Glick model”. Em: *Phys. Rev. B* 95 (21 jan. de 2017), p. 214307.
- [75] Vedika Khemani, Roderich Moessner e S. L. Sondhi. *A Brief History of Time Crystals*. 2019. arXiv: 1910.10745 [cond-mat.str-el].
- [76] Krzysztof Sacha. *Time Crystals*. Springer International Publishing, 2020.

- [77] F. Iemini, A. Russomanno, J. Keeling, M. Schirò, M. Dalmonte e R. Fazio. “Boundary Time Crystals”. Em: *Phys. Rev. Lett.* 121 (3 jul. de 2018), p. 035301.
- [78] Hao Ge, Min Qian e Hong Qian. “Stochastic theory of nonequilibrium steady states. Part II: Applications in chemical biophysics”. Em: *Physics Reports* 510.3 (2012), pp. 87–118. ISSN: 0370-1573.
- [79] Tatsuhiko N. Ikeda, Koki Chinzei e Masahiro Sato. “Nonequilibrium steady states in the Floquet-Lindblad systems: van Vleck’s high-frequency expansion approach”. Em: *SciPost Phys. Core* 4 (2021), p. 033.
- [80] Luis Fernando dos Prazeres, Leonardo da Silva Souza e Fernando Iemini. “Boundary time crystals in collective d -level systems”. Em: *Phys. Rev. B* 103 (18 mai. de 2021), p. 184308.
- [81] Federico Carollo e Igor Lesanovsky. *Exact solution of a boundary time-crystal phase transition: time-translation symmetry breaking and non-Markovian dynamics of correlations*. 2021. arXiv: 2110.00030 [cond-mat.stat-mech].
- [82] Phatthamon Kongkhambut, Jim Skulte, Ludwig Mathey, Jayson G. Cosme, Andreas Hemmerich e Hans Keßler. “Observation of a continuous time crystal”. Em: *Science* 377.6606 (2022), pp. 670–673. eprint: <https://www.science.org/doi/pdf/10.1126/science.abo3382>.
- [83] Herch M Nussenzveig. *Curso de Física Básica: Fluídos, oscilações e ondas, calor*. Ed. por Edgard Blucher. 4th. Vol. 02. Jan. de 2002. ISBN: 9788521202998.
- [84] Arieh Ben-Naim. *Entropy Demystified: The Second Law Reduced To Plain Common Sense*. Ed. por Toh Tuck Link. World Scientific, 2007. ISBN: 9812700552.
- [85] Michael A Nielsen e Isaac L Chuang. *Quantum computation and quantum information*. 10th Anniversary. United Kingdom: Cambridge University Press, 2010.
- [86] Berry Groisman, Sandu Popescu e Andreas Winter. “Quantum, classical, and total amount of correlations in a quantum state”. Em: *Phys. Rev. A* 72 (3 set. de 2005), p. 032317.
- [87] W. Dür, G. Vidal e J. I. Cirac. “Three qubits can be entangled in two inequivalent ways”. Em: *Phys. Rev. A* 62 (6 nov. de 2000), p. 062314.
- [88] Daniel M. Greenberger, Michael A. Horne e Anton Zeilinger. “Going Beyond Bell’s Theorem”. Em: *Bell’s Theorem, Quantum Theory and Conceptions of the Universe*. Ed. por Menas Kafatos. Dordrecht: Springer Netherlands, 1989, pp. 69–72. ISBN: 978-94-017-0849-4.

- [89] Dik Bouwmeester, Jian-Wei Pan, Matthew Daniell, Harald Weinfurter e Anton Zeilinger. "Observation of Three-Photon Greenberger-Horne-Zeilinger Entanglement". Em: *Phys. Rev. Lett.* 82 (7 fev. de 1999), pp. 1345–1349.
- [90] Jian-Wei Pan, Dik Bouwmeester, Matthew Daniell, Harald Weinfurter e Anton Zeilinger. "Experimental test of quantum nonlocality in three-photon Greenberger–Horne–Zeilinger entanglement". Em: *Nature* 403.6769 (fev. de 2000), pp. 515–519.
- [91] Mark M Wilde. *Quantum information theory*. Cambridge University Press, 2013.
- [92] V. Vedral. "The role of relative entropy in quantum information theory". Em: *Rev. Mod. Phys.* 74 (1 mar. de 2002), pp. 197–234.
- [93] David Avis, Patrick Hayden e Ivan Savov. "Distributed compression and multiparty squashed entanglement". Em: *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 41.11 (mar. de 2008), p. 115301.
- [94] Dong Yang, Karol Horodecki, Michal Horodecki, Pawel Horodecki, Jonathan Oppenheim e Wei Song. "Squashed Entanglement for Multipartite States and Entanglement Measures Based on the Mixed Convex Roof". Em: *IEEE Transactions on Information Theory* 55.7 (2009), pp. 3375–3387.
- [95] Tillmann Baumgratz, Marcus Cramer e Martin B Plenio. "Quantifying coherence". Em: *Physical review letters* 113.14 (2014), p. 140401.
- [96] Alexander Streltsov, Uttam Singh, Himadri Shekhar Dhar, Manabendra Nath Bera e Gerardo Adesso. "Measuring quantum coherence with entanglement". Em: *Physical review letters* 115.2 (2015), p. 020403.
- [97] Cristian E. Susa e Davide Girolami. "Weaving and neural complexity in symmetric quantum states". Em: *Optics Communications* 413 (dez. de 2017). ISSN: 0030-4018.
- [98] Gerardo Adesso, Fabrizio Illuminati e Silvio De Siena. "Characterizing entanglement with global and marginal entropic measures". Em: *Phys. Rev. A* 68 (6 dez. de 2003), p. 062318.
- [99] Gerardo Adesso, Marco Cianciaruso e Thomas R. Bromley. *An introduction to quantum discord and non-classical correlations beyond entanglement*. 2016. Disp. em: <https://arxiv.org/abs/1611.01959>.
- [100] Anindita Bera, Tamoghna Das, Debasis Sadhukhan, Sudipto Singha Roy, Aditi Sen(De) e Ujjwal Sen. "Quantum discord and its allies: a review of recent progress". Em: *Reports on Progress in Physics* 81.2 (dez. de 2017), p. 024001.

- [101] Gustavo Rigolin, Thiago R. de Oliveira e Marcos C. de Oliveira. “Operational classification and quantification of multipartite entangled states”. Em: *Phys. Rev. A* 74 (2 ago. de 2006), p. 022314.
- [102] Antonio Mandarino. “Quantum probing and characterization techniques for systems of interest in quantum information processing”. Tese de dout. Milão: Università degli Studi di Milano, jan. de 2015.
- [103] V.V. Ulyanov e O.B. Zaslavskii. “New methods in the theory of quantum spin systems”. Em: *Physics Reports* 216.4 (1992), pp. 179–251. ISSN: 0370-1573.
- [104] Julien Vidal, Rémy Mosseri e Jorge Dukelsky. “Entanglement in a first-order quantum phase transition”. Em: *Phys. Rev. A* 69 (5 mai. de 2004), p. 054101.
- [105] Elvira Romera, Manuel Calixto e Octavio Castaños. “Phase space analysis of first-, second- and third-order quantum phase transitions in the Lipkin–Meshkov–Glick model”. Em: *Physica Scripta* 89.9 (ago. de 2014), p. 095103.
- [106] Octavio Castaños, Ramón López-Peña, Jorge G Hirsch e Enrique López-Moreno. “Classical and quantum phase transitions in the Lipkin-Meshkov-Glick model”. Em: *Physical Review B* 74.10 (2006), p. 104118.
- [107] HT Cui, K Li e XX Yi. “Geometric phase and quantum phase transition in the Lipkin–Meshkov–Glick model”. Em: *Physics Letters A* 360.2 (2006), pp. 243–248.
- [108] K. -K. Kan, P. C. Lichtner, M. Dworzecka e J. J. Griffin. “Time-dependent Hartree-Fock dynamics and phase transition in Lipkin-Meshkov-Glick model”. Em: *Phys. Rev. C* 21 (3 mar. de 1980), pp. 1098–1103.
- [109] Robert Gilmore e Da Hsuan Feng. “Studies of the ground-state properties of the Lipkin-Meshkov-Glick model via the atomic coherent states”. Em: *Physics Letters B* 76.1 (1978), pp. 26–28. ISSN: 0370-2693.
- [110] Matthias Vojta. “Quantum phase transitions”. Em: *Reports on Progress in Physics* 66.12 (2003), p. 2069.
- [111] Pavel Stránský, Martin Dvořák e Pavel Cejnar. “Exceptional points near first- and second-order quantum phase transitions”. Em: *Physical Review E* 97.1 (2018), p. 012112.
- [112] John K. Stockton, J. M. Geremia, Andrew C. Doherty e Hideo Mabuchi. “Characterizing the entanglement of symmetric many-particle spin- $\frac{1}{2}$ systems”. Em: *Phys. Rev. A* 67 (2 fev. de 2003), p. 022112.

- [113] Géza Tóth. “Detection of multipartite entanglement in the vicinity of symmetric Dicke states”. Em: *J. Opt. Soc. Am. B* 24.2 (fev. de 2007), pp. 275–282.
- [114] R Botet e R Jullien. “Large-size critical behavior of infinitely coordinated systems”. Em: *Physical Review B* 28.7 (1983), p. 3955.
- [115] H T Diep. *Frustrated Spin Systems*. WORLD SCIENTIFIC, jan. de 2005.
- [116] K. Rama Koteswara Rao, Hemant Katiyar, T. S. Mahesh, Aditi Sen (De), Ujjwal Sen e Anil Kumar. “Multipartite quantum correlations reveal frustration in a quantum Ising spin system”. Em: *Phys. Rev. A* 88 (2 ago. de 2013), p. 022312.
- [117] Himadri Shekhar Dhar, Amit Kumar Pal, Debraj Rakshit, Aditi Sen(De) e Ujjwal Sen. “Monogamy of Quantum Correlations - A Review”. Em: *Lectures on General Quantum Correlations and their Applications*. Ed. por Felipe Fernandes Fanchini, Diogo de Oliveira Soares Pinto e Gerardo Adesso. Cham: Springer International Publishing, 2017, pp. 23–64. ISBN: 978-3-319-53412-1.
- [118] Susane Calegari, Antônio C. Lourenço, Gabriel T. Landi e Eduardo I. Duzzioni. “Genuine multipartite correlations in Dicke superradiance”. Em: *Phys. Rev. A* 101 (5 mai. de 2020), p. 052310.
- [119] Krzysztof Sacha e Jakub Zakrzewski. “Time crystals: a review”. Em: *Reports on Progress in Physics* 81.1 (nov. de 2017), p. 016401.
- [120] Phil Richerme. *How to Create a Time Crystal*. Jan. de 2017. Disp. em: <https://physics.aps.org/articles/v10/5>.
- [121] Dmitry A. Abanin, Ehud Altman, Immanuel Bloch e Maksym Serbyn. “Colloquium: Many-body localization, thermalization, and entanglement”. Em: *Rev. Mod. Phys.* 91 (2 mai. de 2019), p. 021001.
- [122] Jon H. Shirley. “Solution of the Schrödinger Equation with a Hamiltonian Periodic in Time”. Em: *Phys. Rev.* 138 (4B mai. de 1965), B979–B987.
- [123] Hideo Sabe. “Steady States and Quasienergies of a Quantum-Mechanical System in an Oscillating Field”. Em: *Phys. Rev. A* 7 (6 jun. de 1973), pp. 2203–2213.
- [124] Javier Prior, Alex W. Chin, Susana F. Huelga e Martin B. Plenio. “Efficient Simulation of Strong System-Environment Interactions”. Em: *Phys. Rev. Lett.* 105 (5 jul. de 2010), p. 050404.
- [125] Robert Rosenbach, Javier Cerrillo, Susana F Huelga, Jianshu Cao e Martin B Plenio. “Efficient simulation of non-Markovian system-environment interaction”. Em: *New Journal of Physics* 18.2 (fev. de 2016), p. 023035.

- [126] H.P. Breuer, P.I.H.P. Breuer, F. Petruccione e S.P.A.P.F. Petruccione. *The Theory of Open Quantum Systems*. Oxford University Press, 2002. ISBN: 9780198520634.
- [127] M.A. Schlosshauer. *Decoherence: And the Quantum-To-Classical Transition*. The Frontiers Collection. Springer, 2007. ISBN: 9783540357735.
- [128] François Damanet, Andrew J. Daley e Jonathan Keeling. “Atom-only descriptions of the driven-dissipative Dicke model”. Em: *Phys. Rev. A* 99 (3 mar. de 2019), p. 033845.
- [129] Giulia Piccitto, Matteo Wauters, Franco Nori e Nathan Shammah. “Symmetries and conserved quantities of boundary time crystals in generalized spin models”. Em: *Phys. Rev. B* 104 (1 jul. de 2021), p. 014307.
- [130] Luca Pezzè, Augusto Smerzi, Markus K. Oberthaler, Roman Schmied e Philipp Treutlein. “Quantum metrology with nonclassical states of atomic ensembles”. Em: *Rev. Mod. Phys.* 90 (3 set. de 2018), p. 035005.
- [131] Xiao-Ming Lu, Xiaoguang Wang e C. P. Sun. “Quantum Fisher information flow and non-Markovian processes of open systems”. Em: *Phys. Rev. A* 82 (4 out. de 2010), p. 042103.
- [132] Jing Liu, Haidong Yuan, Xiao-Ming Lu e Xiaoguang Wang. “Quantum Fisher information matrix and multiparameter estimation”. Em: *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 53.2 (dez. de 2019), p. 023001.
- [133] Philipp Hyllus, Wiesław Laskowski, Roland Krischek, Christian Schwemmer, Witlef Wieczorek, Harald Weinfurter, Luca Pezzé e Augusto Smerzi. “Fisher information and multiparticle entanglement”. Em: *Phys. Rev. A* 85 (2 fev. de 2012), p. 022321.
- [134] X. N. Feng e L. F. Wei. “Quantifying quantum coherence with quantum Fisher information”. Em: *Scientific Reports* 7.1 (nov. de 2017).
- [135] Min Yu, Dongxiao Li, Jingcheng Wang, Yaoming Chu, Pengcheng Yang, Musang Gong, Nathan Goldman e Jianming Cai. “Experimental estimation of the quantum Fisher information from randomized measurements”. Em: *Phys. Rev. Research* 3 (4 nov. de 2021), p. 043122.
- [136] Min Yu et al. “Quantum Fisher information measurement and verification of the quantum Cramér–Rao bound in a solid-state qubit”. Em: *npj Quantum Information* 8.1 (mai. de 2022).
- [137] Luca Pezzé e Augusto Smerzi. “Entanglement, Nonlinear Dynamics, and the Heisenberg Limit”. Em: *Phys. Rev. Lett.* 102 (10 mar. de 2009), p. 100401.

- [138] Man-Duen Choi. “Completely positive linear maps on complex matrices”. Em: *Linear Algebra and its Applications* 10.3 (1975), pp. 285–290. ISSN: 0024-3795.
- [139] A. Jamiólkowski. “Linear transformations which preserve trace and positive semidefiniteness of operators”. Em: *Reports on Mathematical Physics* 3.4 (1972), pp. 275–278. ISSN: 0034-4877.
- [140] Antônio C. Lourenço, Susane Calegari, Thiago O. Maciel, Tiago Debarba, Gabriel T. Landi e Eduardo I. Duzzioni. “Genuine multipartite correlations distribution in the criticality of the Lipkin-Meshkov-Glick model”. Em: *Phys. Rev. B* 101 (5 fev. de 2020), p. 054431.
- [141] Antônio C. Lourenço, Luis Fernando dos Prazeres, Thiago O. Maciel, Fernando Lemini e Eduardo I. Duzzioni. “Genuine multipartite correlations in a boundary time crystal”. Em: *Phys. Rev. B* 105 (13 abr. de 2022), p. 134422.
- [142] Robert H Dicke. “Coherence in spontaneous radiation processes”. Em: *Physical Review* 93.1 (1954), p. 99.
- [143] Jordi Tura, Albert Aloy, Ruben Quesada, Maciej Lewenstein e Anna Sanpera. “Separability of diagonal symmetric states: a quadratic conic optimization problem”. Em: *Quantum* 2 (2018), p. 45.
- [144] Eduardo M. dos Santos e Eduardo I. Duzzioni. “Elucidating Dicke superradiance by quantum uncertainty”. Em: *Phys. Rev. A* 94 (2 ago. de 2016), p. 023819.
- [145] Sébastien Designolle, Roope Uola, Kimmo Luoma e Nicolas Brunner. “Set Coherence: Basis-Independent Quantification of Quantum Coherence”. Em: *Phys. Rev. Lett.* 126 (22 jun. de 2021), p. 220404.
- [146] Yao Yao, Xing Xiao, Li Ge e C. P. Sun. “Quantum coherence in multipartite systems”. Em: *Phys. Rev. A* 92 (2 ago. de 2015), p. 022112.
- [147] Alexander Streltsov, Hermann Kampermann, Sabine Wölk, Manuel Gessner e Dagmar Bruß. “Maximal coherence and the resource theory of purity”. Em: *New Journal of Physics* 20.5 (mai. de 2018), p. 053058.

APÊNDICE A – CORRELAÇÕES GENUÍNAS MULTIPARTIDAS PARA ALGUNS ESTADOS COM QUATRO PARTÍCULAS

Neste apêndice, apresentaremos alguns cálculos das correlações genuínas k -partidas para alguns estados da tabela presente no artigo do Girolami et al. [41].

Para o estado com correlações clássicas com invariância por permutação de subsistemas

$$\rho_N = \frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0|^{\otimes N} + |1\rangle\langle 1|^{\otimes N}),$$

considerando apenas $N = 4$, os estados reduzidos são

$$\rho_i = \frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0|^{\otimes i} + |1\rangle\langle 1|^{\otimes i}).$$

Assim, os valores da entropia dos estados global e reduzidos são $S(\rho_1) = S(\rho_2) = S(\rho_3) = S(\rho_4) = 1$.

Para calcular as CGM, calcularemos primeiro as correlações de ordem maiores do que k . Primeiramente, as correlações totais são iguais a

$$S^T = S^{1 \rightarrow 4}(\rho_4) = S(\rho_4 || \rho_1 \otimes \rho_1 \otimes \rho_1 \otimes \rho_1) = 4S(\rho_1) - S(\rho_4) = 3.$$

O estado em P_2 que minimiza entropia relativa é $\rho_2 \otimes \rho_2$ no cálculo das correlações de ordem maiores do que $k = 2$, assim

$$S^{2 \rightarrow 4}(\rho_4) = S(\rho_4 || \rho_2 \otimes \rho_2) = 2S(\rho_2) - S(\rho_4) = 1.$$

Os estados em P_3 que minimizam a entropia relativa são $\rho_2 \otimes \rho_2$ e $\rho_3 \otimes \rho_1$, portanto, as correlações de ordem maiores do que $k = 3$ são

$$S^{3 \rightarrow 4}(\rho_4) = S(\rho_4 || \rho_3 \otimes \rho_1) = S(\rho_3) + S(\rho_1) - S(\rho_4) = 1.$$

Com isso, a correlação genuína 2-partida é

$$S^2(\rho_4) = S^{1 \rightarrow 4}(\rho_4) - S^{2 \rightarrow 4}(\rho_4) = 2.$$

E a correlação genuína 3-partida é

$$S^3(\rho_4) = S^{2 \rightarrow 4}(\rho_4) - S^{3 \rightarrow 4}(\rho_4) = 0.$$

Enquanto que a correlação genuína 4-partida é

$$S^4(\rho_4) = S^{3 \rightarrow 4}(\rho_4) = 1.$$

Confirmando, assim, que as correlações totais são

$$S^T(\rho_4) = S^2(\rho_4) + S^3(\rho_4) + S^4(\rho_4) = 3.$$

Conforme visto no capítulo 3 a troca de ordem no valor das correlações com aumento de k , temos $S^3 < S^4$. Isso é devido aos estados que minimizam a entropia em $S^{2 \rightarrow 4}(\rho_4)$ e $S^{3 \rightarrow 4}(\rho_4)$ terem o mesmo número de partições e a entropia de todos estados reduzidos serem iguais. Finalmente, os valores das correlações genuínas k -partidas estão de acordo com os resultados gerais para N pares, presente na tabela do trabalho do Girolami *et al.* [41], a saber $S^k(\rho_N) = \left\lceil \frac{N}{k-1} \right\rceil - \left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil$, $S^N(\rho_N) = 1$ e $S^{1 \rightarrow N}(\rho_N) = N - 1$.

O próximo estado que calcularemos as CGM é o GHZ

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle^{\otimes N} + |1\rangle^{\otimes N}),$$

considerando, novamente, $N = 4$. A matriz densidade do estado GHZ

$$\rho_4 = \frac{1}{2}(|0000\rangle\langle 0000| + |0000\rangle\langle 1111| + |1111\rangle\langle 0000| + |1111\rangle\langle 1111|),$$

e seus estados reduzidos são

$$\rho_i = \frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0|^{\otimes i} + |1\rangle\langle 1|^{\otimes i}).$$

Assim, os valores da entropia dos estados reduzidos são $S(\rho_1) = S(\rho_2) = S(\rho_3) = 1$ e do estado global $S(\rho_4) = 0$.

Para calcular as CGM, calcularemos primeiro as correlações de ordem maiores do que k . Primeiramente, as correlações totais são iguais a

$$S^T = S^{1 \rightarrow 4}(\rho_4) = S(\rho_4 || \rho_1 \otimes \rho_1 \otimes \rho_1 \otimes \rho_1) = 4S(\rho_1) - S(\rho_4) = 4.$$

Novamente, o estado em P_2 que minimiza entropia relativa é $\rho_2 \otimes \rho_2$ no cálculo das correlações de ordem maiores do que $k = 2$, assim

$$S^{2 \rightarrow 4}(\rho_4) = S(\rho_4 || \rho_2 \otimes \rho_2) = 2S(\rho_2) - S(\rho_4) = 2.$$

E também os estados em P_3 que minimizam a entropia relativa são $\rho_2 \otimes \rho_2$ e $\rho_3 \otimes \rho_1$, portanto, as correlações de ordem maiores do que $k = 3$ são

$$S^{3 \rightarrow 4}(\rho_4) = S(\rho_4 || \rho_3 \otimes \rho_1) = S(\rho_3) + S(\rho_1) - S(\rho_4) = 2.$$

Com isso, a correlação genuína 2-partida é

$$S^2(\rho_4) = S^{1 \rightarrow 4}(\rho_4) - S^{2 \rightarrow 4}(\rho_4) = 2.$$

E a correlação genuína 3-partida é

$$S^3(\rho_4) = S^{2 \rightarrow 4}(\rho_4) - S^{3 \rightarrow 4}(\rho_4) = 0.$$

Enquanto que a correlação genuína 4-partida é

$$S^4(\rho_4) = S^{3 \rightarrow 4}(\rho_4) = 2.$$

Novamente, confirmando que as correlações totais são

$$S^T(\rho_4) = S^2(\rho_4) + S^3(\rho_4) + S^4(\rho_4) = 4.$$

Mais uma vez, acontece a troca de ordem nos valores das correlações e pelos mesmos motivos dos estado com correlações clássicas anterior. Os resultados estão de acordo com a tabela do Girolami *et al.* [41], $S^k(\rho_N) = \left\lceil \frac{N}{k-1} \right\rceil - \left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil$, $S^N(\rho_N) = 2$ e $S^{1 \rightarrow N}(\rho_N) = N$. Vale ressaltar como os estados são invariantes por permutações de partículas pode ser utilizado direto

$$S^{k \rightarrow N}(\rho_N) = \lfloor N/k \rfloor S(\rho_k) + (1 - \delta_{N \bmod k, 0})S(\rho_{N \bmod k}) - S(\rho_N),$$

pois o estado que minimiza a entropia é

$$\sigma_N = \bigotimes_{i=1}^{\lfloor N/k \rfloor} \rho_k \otimes \rho_{N \bmod k}.$$