

Gráficos e equações: abordagem global qualitativa segundo Raymond Duval

Organizadores:

Méridles Thaden Moretti

Eduardo Sabel

Bárbara Cristina Para

Celia Finck Brandt

Daiana Zanelato dos Anjos

Danieli Binoto

Djerly Simonetti

Lúcia Menoncini

Learcino dos Santos Luiz

Modeline Odete Silva Corrêa

Marcos Henrique Santos Martins

Méridles Thaden Moretti

Roseli Búrigo

Sérgio Florentino da Silva

GPEEM/UFSC

**Méricles Thadeu Moretti
Eduardo Sabel (Orgs.)**

**Gráficos e equações: abordagem global
qualitativa segundo Raymond Duval**

Edição REVMAT/GPEEM/UFSC

Florianópolis

2022

Catálogo na fonte pela Biblioteca Universitária
da Universidade Federal de Santa Catarina

G736 Gráficos e equações [recurso eletrônico]: abordagem global qualitativa segundo Raymond Duval / Méricles Thadeu Moretti, Eduardo Sabel (Orgs.). – Florianópolis: GPEEM/UFSC, 2022.
202 p.: il., gráfs., tab.

E-book (PDF)

Disponível em: < <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/203982>>

ISBN 978-65-00-54388-9

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Gráficos. 3. Equações. 4. Curvas. 5. Funções.
I. Moretti, Méricles Thadeu. II. Sabel, Eduardo.

CDU: 517.5

Elaborada pela bibliotecária Dênira Remedi – CRB-14/1396

SUMÁRIO

CAPÍTULOS	AUTORES	PÁG.LINK
I Introdução: O ensino das funções a partir de uma análise semiocognitiva.	Celia Finck Brandt Roseli Búrigo	<u>6</u>
II Abordagem Global Qualitativa: Parábolas, Equações e Translações.	Djerly Simonetti Roseli Búrigo Méricles Thadeu Moretti	<u>28</u>
III O esboço de gráficos de funções a partir da interpretação global de suas propriedades figurais.	Madeline O. S. Corrêa Méricles Thadeu Moretti	<u>49</u>
IV A interpretação global de propriedades figurais no esboço de retas representadas por equações paramétricas.	Marcos H. S. Martins Méricles Thadeu Moretti	<u>65</u>
V O esboço de curvas de funções modulares lineares a partir da interpretação global figural.	Lucia Menoncini Méricles Thadeu Moretti	<u>92</u>
VI Caminho alternativo para esboçar curvas: possibilidade a partir da taxa de variação da função e da noção de infinitésimo	Bárbara Cristina Pasa Méricles Thadeu Moretti Danieli Binotto	<u>115</u>

VII Um exemplo de esboço de curvas por meio de unidades básicas e interpretação global de propriedades figurais no ensino de cálculo	Learcino dos Santos Luiz Méricles Thadeu Moretti	<u>138</u>
VIII A abordagem das superfícies quádricas na perspectiva da interpretação global.	Sérgio Florentino da Silva Méricles Thadeu Moretti	<u>157</u>
IX Esboço, Leitura e Interpretação de Gráficos por estudantes cegos: uma análise semiocognitiva do DUA em pesquisas	Daiana Zanelato dos Anjos Méricles Thadeu Moretti	<u>180</u>
SOBRE OS PARTICIPANTES DESTA OBRA		<u>197</u>

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO: O ENSINO DAS FUNÇÕES A PARTIR DE UMA ANÁLISE SEMIOCOGNITIVA

Celia Finck Brandt
Roseli Búrigo

No ensino do gráfico de funções, é comum enfatizar o procedimento por pontos, com associação, a cada par ordenado (x, y) , de um ponto no plano cartesiano. Nessa direção, basta construir uma tabela para atribuir valores diferentes para x , obtendo, conseqüentemente, valores para y em função da lei de associação. Esse artifício, segundo Duval, não considera a conceitualização, pois não privilegia os elementos semiocognitivos presentes em diferentes registros de representação semiótica: a língua natural, a linguagem algébrica e a linguagem gráfica. Assim, propor a obtenção do gráfico ou da sentença algébrica a partir da sentença “conjunto de pontos cuja abscissa e ordenada têm o mesmo sinal” é diferente de construir um gráfico a partir da sentença algébrica $xy > 0$, atribuindo valores para x e para y e localizando, no plano cartesiano, o par ordenado (x, y) que respeita a lei de formação, processo que viabiliza a obtenção da região do plano desses pontos.

O mesmo vale para as conversões em sentidos contrários: da sentença algébrica para a sentença em língua natural ou para o gráfico, do gráfico para a sentença algébrica ou para a sentença em língua natural. O

procedimento que privilegia outras abordagens, que se voltam para os elementos semiocognitivos dos diferentes registros de representação, é chamado por Duval de *análise qualitativa global*. Essa análise exige a discriminação das unidades significativas do registro de representação que serão submetidas a variações, que por sua vez provocam modificações nas unidades significativas do registro correspondente. A palavra que representa um número e a escrita arábica podem ser analisadas em relação às suas unidades significantes como exemplo.

Na escrita arábica, o algarismo representa uma potência de dez, conforme a posição que ocupa. Na escrita arábica, esses algarismos são justapostos para representar a magnitude do número que precisa ser adicionados após a multiplicação pela potência de dez, conforme a posição. Na palavra, os sufixos e prefixos representam as potências de dez que também são adicionadas. Conforme o intervalo numérico, a potência de dez é representada por um número de 1 a 9, porém transformados: “ze” em doze significa dez; “vin” em vinte significa dois, enquanto “te” significa dez; “quar” em quarenta significa quatro, enquanto “enta” significa dez. Uma variação de um algarismo na escrita arábica corresponderá a uma variação na palavra. Na escrita arábica, essa variação diz respeito ao algarismo e à posição. Assim, 12 corresponde a doze e 21 corresponde a vinte e um (nesse caso, varia a posição do algarismo no numeral).

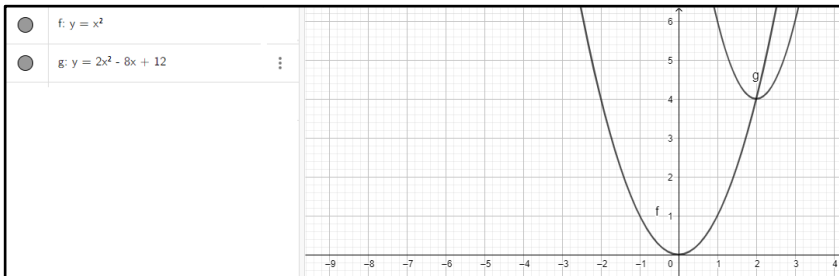
A avaliação global e qualitativa exige, então, operações cognitivas de tratamento e conversão. A operação cognitiva de tratamento implica transformações do registro de representação, no interior do mesmo sistema

semiótico de representação, enquanto a operação cognitiva de conversão demanda a transformação de um registro de representação pertencente a um sistema semiótico em outro registro pertencente a outro sistema semiótico. A operação cognitiva de conversão exige procedimentos metodológicos específicos: a identificação das unidades significativas nos registros de representação; a variação dessas unidades em um registro; a identificação da variação provocada no outro registro pertencente a outro sistema semiótico a ele associado. Às vezes, a identificação dessas unidades é direta, mas às vezes certos tratamentos são exigidos para que as unidades significativas fiquem evidência, cuja variação corresponde a outras unidades significantes no registro associado. Citamos como exemplo o estudo de Moretti (2003) relacionado à translação de uma parábola $y = ax^2$. Essa abordagem compreende um tratamento na sentença algébrica pelo método de completar quadrados, que acaba por explicitar as coordenadas do vértice da parábola, indicando a translação a partir da parábola $y = ax^2$. No caso da parábola, essa alteração é do tipo: $y = ax^2 \Rightarrow y + \frac{b^2 - 4ac}{2a} = a\left(x - \frac{b}{a}\right)^2$, que equivale a: $y - y_v = a(x - x_v)^2$.

Tomamos como exemplo a função $y = 2x^2 - 8x + 12$ como sendo a parábola cujo vértice translada $\pm x$ unidades no eixo das abscissas e $\pm y$ no eixo das ordenadas. O tratamento na sentença seria $y = 2(x^2 - 4x + 4) + 4 \rightarrow y \pm 4 = 2(x \pm 2)^2$. A translação da parábola $y = 2x^2 - 8x + 12$ será a parábola $y = 2x^2$ (cujo vértice que está na origem), transladada 2 unidades à direita na horizontal (eixo das abscissas) e 4 unidades na vertical (eixo das ordenadas).

Essa parábola terá como coordenadas do vértice o par $(2,4)$, que pode ser visualizado na Figura 1.

Figura 1 - Parábolas $y = x^2$ e $y = 2x^2 - 8x + 12$



Fonte: os autores

Esse procedimento exige a operação cognitiva de tratamento para evidenciar as unidades significantes relacionadas ao vértice da parábola transladada em relação à parábola mãe ax^2 .

Outras análises podem ainda ser realizadas em relação a outras unidades significantes da sentença na linguagem algébrica que define uma parábola. Elas compreendem variações diferentes no registro gráfico. Para a função $y = ax^2 + bx + c$, as perguntas orientadoras voltadas para a análise dos coeficientes podem ser: Que tipo de gráfico teremos para as funções:

- $y = x^2$?
- $y = ax^2$, para $a > 0$, $0 < a \leq 1$, $a < 0$;
- $y = a_1x^2$? Qual a função do coeficiente a?
- $y = ax^2 + b$?
- Qual o significado do coeficiente b se compararmos os gráficos definidos por $y = ax^2$ e $y = ax^2 + b$?

- O que significam os coeficientes a e b na função $y = ax^2 + bx$?
Podemos ainda realizar outras perguntas, considerando a intersecção da parábola com o eixo das abscissas e a concavidade.

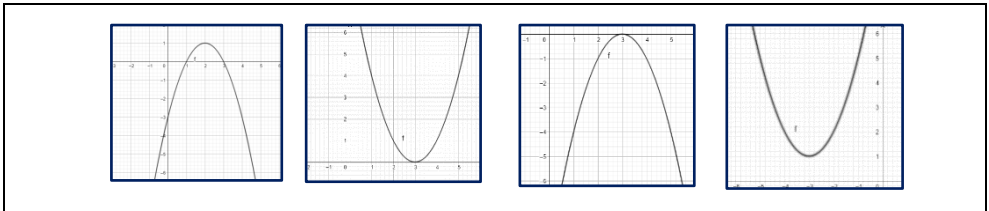
Essas perguntas podem envolver a relação entre coeficientes e raízes de uma equação do segundo grau ($ax^2 + bx + c$), em que $a = 1$. As perguntas podem ser: quais os valores de “ a , b e c ” na função $y = ax^2 + bx + c$ para que:

- a parábola tenha a concavidade voltada para cima e intercepte o eixo x nos pontos de coordenadas $(1,0)$ e $(3,0)$;
- concavidade voltada para baixo e interceptar o eixo x nos pontos de coordenadas $(1,0)$ e $(3,0)$;
- concavidade voltada para baixo e tangenciar o eixo x no ponto de coordenadas $(3,0)$;
- concavidade voltada para cima e tangenciar o eixo x no ponto de coordenadas $(3,0)$;
- concavidade voltada para cima e não interceptar o eixo x .

Nesse caso, a operação de conversão segue o sentido do gráfico para a sentença algébrica, o que dificilmente é feito no ensino. Essa abordagem vai exigir tratamento para a obtenção dos valores dos coeficientes. Parte da análise de unidades significantes da curva se relaciona à intersecção com os eixos e à concavidade, isto é, à realização de soma e produto das raízes que estão contempladas nas abscissas dos pares ordenados: $S = 1 + 3 = 4 \rightarrow -b$ e $P = 1 \cdot 3 = 3 \rightarrow c$ quando $a = 1$.

A função definida pela sentença $y = x^2 - 4x + 3$ representa a parábola solicitada. Outras análises podem ser feitas para a obtenção da sentença algébrica a partir de análises das informações de unidades significativas do gráfico – concavidade e pontos de intersecção da parábola com o eixo das abscissas, como aponta a Figura 2.

Figura 2 - Diferentes parábolas indicando a intersecção com o eixo das abscissas



Fonte: os autores

No caso da função afim $y = ax + b$, as variações dos coeficientes a e b podem ser alvo de análises, buscando caracterizar uma análise global e qualitativa, para identificar a função tanto na sua representação algébrica, como na sua representação gráfica. Perguntas podem direcionar essa análise e comandar o esboço das retas sem a necessidade da utilização de pares de pontos. Tipos de perguntas:

- Que tipo de gráfico teremos para as funções: $y = x$ e $y = ax$?
- Qual a diferença entre as retas construídas pelas funções $y = x$ e $y = ax$?
- Qual a função do coeficiente a no gráfico?

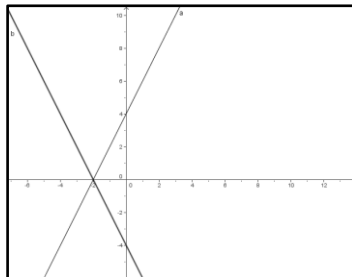
- Na função $y = ax + b$, que define a reta r , o que significam os coeficientes a e b ?
- Qual a posição relativa entre as retas $y = x$ e $y = ax + b$?
- Qual a posição relativa entre as retas $y = ax$ e $y = ax + b$?
- A função $y = a_1x + b$ que define a reta s será paralela ou concorrente com a reta r ? Por quê?
- Quais serão as coordenadas do ponto de intersecção?
- A função $y = ax + c$, sendo $c \neq 0$ e $c \in \mathbb{Z}$, que define a reta t , será paralela ou concorrente com a reta r ? Por quê?

A abordagem que utiliza as transformações geométricas, como translação, simetria ou rotação, também caracteriza abordagens voltadas para a análise global e qualitativa preconizada por Duval.

Retas r e s serão simétricas em relação a um eixo de simetria. Afinal, de acordo com a definição, elas serão simétricas se existir uma reta que é mediatriz de um segmento que une dois pontos $A \in r$ e $B \in s$. Essa definição é utilizada para encontrar uma reta s simétrica à reta r . Ela exigirá a análise de unidades significantes do registro algébrico para o início do esboço do registro gráfico. Por exemplo, vamos encontrar a reta simétrica à reta definida pela sentença $y = 2x + 4$, tendo por eixo de simetria o eixo das abscissas. Precisamos estabelecer a expressão genérica da reta s que será simétrica à reta r em relação ao eixo das abscissas: $y = mx + n$. A partir da análise do coeficiente b (unidade significativa), encontramos o valor de $n = -4$, pois equidista de 4, quando $x = 0$. Outro ponto do gráfico pode ser antecipado para o valor de $y = 0$. Para a reta $y = 2x + 4$, o valor de x será -2 .

A partir de um tratamento na sentença $y = mx + n$, encontramos o valor de m , pois $0 = -2m - 4 \rightarrow m = -2$. Essa análise qualitativa, acompanhada de tratamento, permite encontrar a sentença algébrica da reta s simétrica à reta r definida pela sentença $y = 2x + 4$. A reta s terá como sentença $y = -2x - 4$. Ela será simétrica em relação ao eixo das abscissas, conforme vemos na Figura 3.

Figura 3 - Retas r e s simétricas em relação ao eixo das abscissas



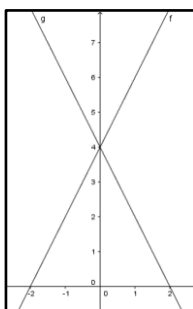
Fonte: os autores

Outras antecipações também podem ser obtidas. Se $P(x, y) \in r(x) = 2x + 4$, então $Q(x, -y) \in s(x) = -2x - 4$, sendo $r(x)$ simétrica a $s(x)$ em relação ao eixo das abscissas. Se a reta simétrica for o eixo das ordenadas, a simétrica da reta $y = 2x + 4$ terá as seguintes propriedades:

- $n = 4$, pois o coeficiente linear equidista do eixo y para um valor de $x = 0$
- Temos que $y' = mx' + 4$
- Se $y = 0 \rightarrow x = -x'$, visto que a reta é simétrica em relação ao eixo y
- Logo $0 = -mx' + 4 \rightarrow m = -2$

- A reta $y = -2x + 4$ será a reta simétrica em relação ao eixo das ordenadas, conforme podemos ver na Figura 4

Figura 4 - Retas simétricas em relação ao eixo das ordenadas



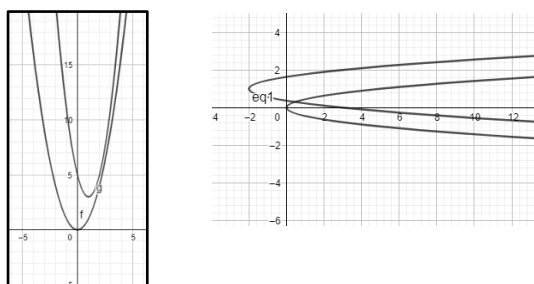
Fonte: os autores

A partir das informações sobre as unidades significantes (coeficiente angular e valores de x e y para intersecção da reta com o eixo x), é possível esboçar a reta transladada, sem a necessidade de uma abordagem ponto a ponto.

Diferentes abordagens podem ser utilizadas para propor sequências didáticas para o ensino de funções que contemplem a operação cognitiva de conversão entre o registro algébrico e o registro gráfico – exigida, segundo Duval, para a conceitualização. Neste trabalho, vamos apresentar abordagens para diferentes funções. Uma dessas abordagens é proposta por Simonetti, Búrigo & Moretti no artigo intitulado “Abordagem global qualitativa: parábolas, equações e translações”. No artigo, a translação da parábola é analisada a partir de sua curva mãe $y = ax^2$, quando o eixo de simetria é o eixo das ordenadas, ou da parábola mãe $x = ay^2$ quando o eixo de simetria é o eixo das abscissas.

Em ambos os casos, a translação pode ser visualizada tanto no registro algébrico como no registro gráfico. Para tanto, é necessário realizar tratamentos na sentença algébrica, se a conversão for do registro algébrico para o registro gráfico. Esse tratamento utiliza o método de completar quadrados. Assim, a parábola representada pela expressão algébrica $y = 2x^2 - 4x + 5$, tendo por simetria o eixo das ordenadas, pode receber tratamento e ser transformada em $y - (+3) = 2(x - (+1))^2$. Assim, evidenciará que a parábola, conforme a representação da Figura 5, terá um vértice que transladará 3 unidades para cima no eixo das ordenadas e 1 unidade para a direita no eixo das abscissas em relação ao vértice da parábola mãe $2x^2$.

Figura 5 - Exemplo de translação de uma parábola $y = 2x^2$ (eixo de simetria é o eixo das ordenadas)



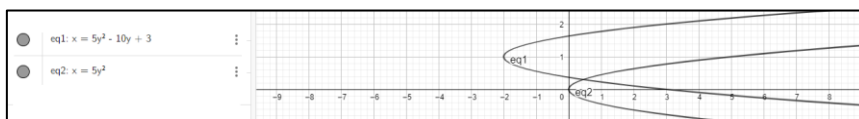
Fonte: os autores

O mesmo procedimento pode ser realizado para a parábola $x = 5y^2 - 10y + 3$, que apresenta o eixo das abscissas como eixo de simetria. Um tratamento na expressão algébrica permite obter uma nova forma de expressão $x - (-2) = 5(y - (+1))^2$, que revela a translação do vértice da

parábola (e de todos os pontos da parábola), 2 unidades para à esquerda e 1 unidade para cima.

Com esse procedimento, é possível esboçar a parábola sem a necessidade de recorrer ao procedimento ponto a ponto. Afinal, não apenas o vértice da parábola translada, mas também todos os pontos da parábola em relação à parábola mãe $x = 5y^2$.

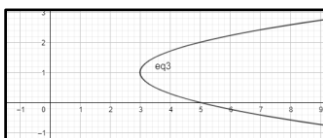
Figura 6 - Exemplo de translação de uma parábola $x = 5y^2$ (eixo de simetria é o eixo das abscissas)



Fonte: os autores

Interessante observar que também pode ser realizada a conversão no sentido inverso, do gráfico para a sentença algébrica. Para isso, basta identificar as coordenadas do vértice, conforme a Figura 7.

Figura 7 - Gráfico de uma parábola translada a partir da parábola mãe ax^2



Fonte: os autores

Essa parábola apresenta como coordenadas do vértice o par (3,1). A sua sentença algébrica será $x - (+3) = a(y - (+1))^2$.

Outra abordagem é proposta por Pasa, Moretti & Binoto, no artigo intitulado “Caminho alternativo para esboçar curvas: possibilidade a partir da taxa de variação da função e da noção de infinitésimo”, que analisa as unidades significativas pertinentes do registro algébrico que representa uma função de uma variável real, antecipando o esboço da curva no registro gráfico em termos de intervalos de crescimento e decrescimento, intersecções com os eixos, além de pontos de máximo e de mínimo. Essa abordagem propõe taxas de variação compreendidas e calculadas por meio da noção de infinitésimo. Ela as utiliza, também, para funções trigonométricas. Essas taxas de variação trazem informações relevantes para a curva. Por essa razão, consideram a conversão entre o registro gráfico e o registro algébrico. O tratamento do registro algébrico é utilizado para obter a taxa de variação de primeira ordem e de segunda ordem, quando necessário.

As unidades básicas da taxa de variação trazem informações importantes sobre a curva, conforme definimos. Essa análise permite a variação das unidades significativas do registro algébrico e a identificação da variação das unidades significativas pertinentes do registro gráfico. Esses valores são analisados em relação ao sinal (>0 , $= 0$ ou < 0). Essa abordagem privilegia funções metadiscursivas, com suas operações cognitivas de tratamento e conversão no sentido estrito. Isto é, contempla os procedimentos metodológicos que caracterizam a operação cognitiva de conversão, para não caracterizar uma simples decodificação.

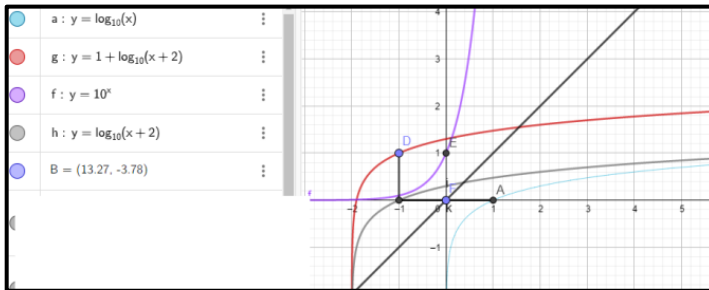
A mesma abordagem é proposta para a senoide $y = a + b(\sin(cx) + d)$ e para as variações do comportamento da curva a partir da comparação com a curva $y = \sin(x)$. Essa abordagem, apresentada por Corrêa e Moretti no artigo intitulado “O esboço de gráficos de funções a partir da interpretação global de suas propriedades figurais”, pode ser contemplada com a ajuda de um software de geometria dinâmica. Também pode ser feita manualmente. Ela considera as translações horizontais ou verticais para a amplitude e para a frequência. Tudo pode ser antecipado a partir de perguntas voltadas para as variações dos coeficientes a , b e d . Algumas perguntas podem ser feitas:

- O que acontece com a curva quando você altera o valor do coeficiente c ?
- O que acontece com a curva quando você altera o valor do coeficiente d ?
- O que acontece com a amplitude da função quando você altera o valor do coeficiente a ?
- O que acontece com a frequência da função quando você altera o valor do coeficiente b ?

Essa análise qualitativa global pode ser realizada tanto no sentido da escrita algébrica para a curva como no sentido da curva para a escrita algébrica. O artigo de Corrêa e Moretti também enfatiza de que maneira a translação e a simetria podem ser unidades de avaliação global e qualitativa para o esboço de curva a partir da translação, na horizontal e na vertical, de uma função logarítmica, considerando a curva simétrica da função logarítmica $y = \log_x$, que é a função $y = 10^x$. A escrita algébrica evidencia a

translação. Assim, a função $y = 1 + \log(x + 2)$, apresentada na Figura 8, pode evidenciar os seguintes deslocamentos: $y - 1 = \log(x - 2)$.

Figura 8 - Translação da função $y = 1 + \log(x + 2)$ em relação à função $y = \log x$



Fonte: os autores

As funções podem ser analisadas como o lugar geométrico de pontos de um plano que correspondem a uma lei que associa o valor de y em função do valor de x . Qualquer ponto desse lugar geométrico é resultado dessa lei de associação. Essa abordagem tem ampla utilidade na física, pois permite a interpretação de fenômenos da natureza. Tanto as equações cartesianas como as paramétricas, que definem essas funções, apresentam vantagens e desvantagens no estudo do lugar geométrico dos pontos.

As interpretações globais das propriedades figurais também podem ser feitas a partir de funções definidas por equações paramétricas, como aponta o artigo de Martins e Moretti intitulado “A interpretação global de propriedades figurais no esboço de retas representadas por equações paramétricas”. Essa interpretação permitirá o esboço da curva e a sua interpretação enquanto lugar geométrico de pontos. Temos que identificar

ainda as unidades significantes pertinentes na equação da função na forma paramétrica, para interpretá-las em termos do esboço do gráfico – isto é, em associação com as unidades significantes do registro gráfico: o sentido da inclinação da reta e a intersecção com o eixo das ordenadas.

Para a análise das unidades significantes, será necessário o tratamento da equação geral para a antecipação do esboço da reta. Nesse caso, a equação geral de uma reta parametrizada é dada por suas equações paramétricas:

$$\begin{cases} x = x_1 + x_0 t \\ y = y_1 + y_0 t \end{cases}$$

Após o tratamento, temos:

$$y = \frac{y_0}{x_0} + \left[y_1 - \frac{y_0}{x_0} x_1 \right]$$

coeficiente angular

coeficiente linear

As unidades simbólicas x_0 , y_0 , x_1 e y_1 permitem antecipar o sentido da inclinação, o ângulo com os eixos e a posição sobre os eixos em casos particulares (reta coincidente com os eixos, paralelismo da reta em relação aos eixos e se a reta passa pela origem). Com isso, temos o esboço da reta sem a necessidade da construção de uma tabela de pontos. A comparação de duas retas também pode ser antecipada pela análise dessas unidades. No caso do paralelismo, consideramos a translação de uma reta em relação à outra. A análise das unidades simbólicas das retas definidas por equações paramétricas é diferente das análises das unidades simbólicas das retas

definidas por equações cartesianas. Ainda assim, elas oferecem informações de mesma natureza em relação ao gráfico, apesar do fato de os coeficientes algébricos não serem os mesmos.

A avaliação qualitativa e global também pode ser realizada para a função modular, cuja representação canônica é $f(x) = |\pm a + kx - (\pm c)|$. Representa a translação da função base $f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{se } x > 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$ na horizontal e na vertical. Essa abordagem encontra-se no artigo de autoria de Menoncini e Moretti, intitulado “O esboço de curvas de funções modulares lineares a partir da interpretação global figural”. Na escrita algébrica, a análise dos coeficientes a , b , k e c vão anunciar: o sentido do traçado e seus respectivos valores; o ângulo do traçado com os eixos e seus valores; a posição do traçado em relação à origem do eixo horizontal e seus valores; e a posição do traçado em relação à origem do eixo vertical e seus valores. Segundo os autores, os coeficientes b e k estão relacionados, respectivamente, à concavidade e ao ângulo do traçado, enquanto os termos constantes a e c indicam as direções e os sentidos dos deslocamentos (translações). Os valores de c e k estão interligados, de forma que o quociente entre eles determina a coordenada, dado o vértice. A análise do gráfico também permite a obtenção da escrita algébrica da função a partir de suas unidades visuais. O esboço da curva pode ser obtido a partir da função base, que apresenta deslocamento da origem de valor $\pm c$. O valor b define o ângulo do traçado com o eixo horizontal, enquanto a constante $\pm a$ define o deslocamento da curva em relação à origem do eixo horizontal. A intersecção com o eixo das ordenadas pode ser antecipada

igualando x a zero. Os vértices podem ser obtidos por meio da relação entre os coeficientes c e k .

Uma análise qualitativa global pode ser realizada em superfícies quádricas. É o que nos mostra o artigo de Silva e Moretti intitulado “A abordagem das superfícies quádricas na perspectiva da interpretação global”. Existem diversos tipos de superfícies quádricas. O exemplo de análise qualitativa global apresentado por Silva e Moretti trata das superfícies quádricas do tipo não cilíndricas e não degeneradas (elipsoides; hiperboloides de uma e duas folhas; cones quádricos elípticos; paraboloides elípticos e hiperbólicos – selas). Essa abordagem considera a grande dificuldade para o processo de ensino e aprendizagem, pois o desempenho cognitivo exigido para a aprendizagem é imenso. Nessa abordagem, é importante levar em consideração as propriedades globais da curva e a sua relação entre o esboço e o registro gráfico de forma simultânea, diferentemente das abordagens comuns de relação entre curva e pontos.

Para essa abordagem, assim como em outros tipos de funções, é necessário discriminar unidades significantes próprias de cada registro de representação (no registro gráfico, são figurais). O procedimento metodológico se assemelha com as outras variedades das funções. É preciso fazer alterações nas unidades significantes do registro simbólico, antecipando as variações no registro gráfico – ou, ao contrário, variar as unidades significantes do registro gráfico e estabelecer relações com as variações no registro algébrico, cuidando para variar uma unidade significativa e manter as outras invariáveis. As diferentes quádricas, com suas

diferentes posições no sistema cartesiano, são responsáveis pelas dificuldades na identificação das unidades significantes. Segundo os autores,

há várias semelhanças e diferenças visuais e algébricas que estão presentes tanto entre os vários casos quanto entre uma mesma quádriga em posições diferentes. Portanto, há oposições qualitativas entre os vários casos e também específicas de cada quádriga, o que pode dificultar a identificação, diferenciação e análise dessas superfícies

Existem ainda outros complicadores relacionados à análise qualitativa global, em especial a correlação entre as variáveis visuais e simbólicas, quando as equações estão em sua forma geral e quando as quádrigas estão em posições rotacionadas. Além disso, outras dificuldades podem evidenciadas. Por essa razão, algumas adaptações foram adotadas pelo autor, ou seja, foram consideradas as variáveis visuais que permitem identificar e analisar as diferenças e semelhanças, tanto entre os vários casos de quádrigas, quanto entre uma mesma quádriga em posições diferentes no sistema cartesiano. A ênfase recai sobre as quádrigas nas posições padrão. As variáveis visuais em relação ao sistema cartesiano foram: posição padrão, rotacionada e transladada.

A partir da posição padrão, é possível verificar que as posições transladadas e rotacionadas relacionam-se com a posição padrão. Ou seja, essas posições podem ser determinadas a partir da posição padrão. Outras variáveis visuais também foram elencadas: intersecção com os planos coordenados (xy , xz e yz) e com os planos paralelos (x , y e z). Os valores visuais dessas intersecções serão cônicos. Segundo os autores, essa decisão determina as unidades significantes da escrita simbólica: os termos quadráticos, os termos lineares, os sinais dos coeficientes e o valor numérico

do termo independente (0 ou 1) da equação quádrlica. Essa escolha permite a análise das unidades significantes, admitindo a identificação do tipo de quádrlica: elipsoide padrão, hiperboloides de uma folha padrão, hiperboloides de duas folhas padrão, cones quádrlicos elípticos padrão, paraboloides elípticos padrão e paraboloides hiperbólicos padrão.

A análise dessas unidades significantes na escrita algébrica é importante em termos semióticos, pois permite identificar as oposições qualitativas entre as diferentes quádrlicas, assim como as combinações que permitem antecipar o tipo de curva em 2D (elipses, parábolas, hipérbolés ou cônicas degeneradas), oriundas da interseção da quádrlica com planos. A análise qualitativa permite entender, de forma semiótica, por que os registros simbólicos e gráficos são correspondentes. Essa análise será realizada após os tratamentos algébricos, por meio dos quais substituímos, na equação da quádrlica, a equação do plano interceptor. O resultado, após o tratamento, revela a curva em 2D. Para os elipsoides padrões, as variáveis visuais qualitativas escolhidas foram os eixos que definem esferoides, elipsoides e superfície esférica. Essas variáveis foram associadas às unidades significantes da escrita algébrica (denominadores dos eixos quadráticos e de relações ou operações envolvendo os denominadores).

Veamos ainda algumas análises relativas aos paraboloides elípticos. O elipsoide é uma superfície quádrlica em que todos os traços são elipses. Traço é a curva resultante da interseção de qualquer plano, paralelo aos planos coordenados xy , xz , yz , à superfície. Elas são apresentadas em referência ao aumento dos eixos e aos coeficientes dos coeficientes dos

termos quadráticos. As quádricas apresentadas no artigo explicitam uma abordagem diferenciada das abordagens explicitadas nos livros didáticos, privilegiadas no ensino com o foco na identificação dos elementos semiocognitivos presentes no registro gráfico e no registro algébrico, considerando ainda as correlações entre eles. Esse enfoque privilegia também as intersecções das quádricas com planos e as cônicas resultantes, sublinhando o desconhecimento dessas intersecções, que configuram desconstruções dimensionais, prejudicando tanto a visualização da quádrica no sistema cartesiano quanto a identificação e a diferenciação entre os vários casos de quádricas.

No ensino do cálculo, o tema da interpretação global das unidades figurais e do esboço de curvas por meio de unidades básicas é apresentado por Luiz & Moretti no artigo desse e-book intitulado “Um exemplo de esboço de curvas por meio de unidades básicas e interpretação global de propriedades figurais no ensino de cálculo”. As unidades básicas são obtidas por meio de tratamento do registro algébrico, sendo associadas às unidades figurais: pontos de inflexão, pontos de máximo e de mínimo, retas tangentes, assíntotas verticais e horizontais, além de limites laterais em um ponto. A curva pode ser esboçada a partir dessa interpretação global e qualitativa. A conversão no sentido contrário também pode ser realizada, com intermediação das unidades gráficas, associadas às unidades básicas simbólicas.

O direito à educação para todos, considerando a diversidade como característica humana é abordado por Anjos e Moretti no último Capítulo

em que a temática da educação matemática inclusiva é tratada por meio de uma revisão de literatura categorizada em três pontos: esboço, leitura e interpretação de gráficos por estudantes cegos. O resultado de tal revisão é analisado pelas lentes da teoria dos Registros de Representação Semiótica no que tange as abordagens utilizadas em tais trabalhos e ainda, buscando verificar a existência da utilização dos princípios do Desenho Universal para a Aprendizagem – DUA.

As diferentes abordagens apresentadas nos artigos deste e-book – ora por meio da análise dos coeficientes, ora por meio das transformações geométricas de translação – caracterizam excelentes contribuições para o que Duval preconiza como importante para as conceitualizações, abordagem chamada de *avaliação qualitativa e global*. Os diferentes resultados dos estudos realizados por meio de pesquisas oriundas de dissertações de mestrado e teses de doutorado explicitam o árduo caminho trilhado para apresentar uma abordagem diferenciada para o ensino de funções bidimensionais e tridimensionais. Nesse sentido, tal abordagem facilita a compreensão da transição das cônicas para as quádras, desenvolvendo e explorando as habilidades de visualização. Ficam evidenciadas as potencialidades para a aquisição da capacidade de visualização e transposição gráfica, com a utilização de uma metodologia da abordagem análise qualitativa global. Os estudantes, ao trabalharem com essa metodologia, diferente das metodologias tradicionais, demonstraram um envolvimento maior na realização das atividades matemáticas, sobretudo considerando as estratégias operantes da transição do espaço

bidimensional para o tridimensional, com resultados mais eficazes no processo de ensino e aprendizagem.

Este caminho inicia com Raymond Duval, em seu estudo apresentado no artigo intitulado “Gráficos e equações: a articulação de dois registros”.

Os autores afirmam que a conversão no sentido gráfico → simbólico é de difícil resolução para a maioria das funções estudadas no ensino superior. Porém, a interpretação global e qualitativa das sentenças algébricas, submetidas a tratamento (derivada primeira, derivada segunda), possibilitam o esboço da curva em função das unidades gráficas dos tratamentos: raiz da função, pontos de inflexão, intervalos de crescimento e decrescimento, além de intervalos de concavidade positiva e concavidade negativa. A análise qualitativa é superior à abordagem por pontos. Nesse contexto, um software de geometria dinâmica pode ser utilizado para corroborar com as interpretações efetuadas.

Referências

Moretti, M. T. (2003). *A translação como recurso no esboço de curvas por meio da interpretação global de propriedades figurais*. In: S. D. A. Machado (Org.). *Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica* (pp. 149-160). Campinas: Papirus.

CAPÍTULO II

ABORDAGEM GLOBAL QUALITATIVA: PARÁBOLAS, EQUAÇÕES E TRANSLAÇÕES

Djerly Simonetti
Roseli Búrigo
Méricles Thadeu Moretti

INTRODUÇÃO

As dificuldades presentes no ensino e na aprendizagem de Matemática desafiam os docentes a buscarem novas experiências para melhorar os resultados em sala de aula. Uma das bases teóricas que vem sendo empregada neste sentido é a Teoria dos Registros de Representação Semiótica do filósofo e psicólogo francês Raymond Duval. Segundo ele, quando os professores abordam os objetos matemáticos nas aulas de matemática precisam ter pleno domínio da ideia de representação semiótica envolvida em cada objeto.

Quando o assunto é parábola, às vezes, o aluno conclui o Ensino Médio, entretanto não adquire embasamento e apropriação dos conteúdos matemáticos que possam e devem ser utilizados em diversas áreas do conhecimento. Neste sentido, pretende-se enfatizar o aprendizado da parábola em uma perspectiva semiocognitiva, já que deixar de considerar as representações semióticas envolvidas é desprezar os gestos intelectuais envolvidos na aprendizagem de matemática.

A compreensão das representações semióticas para a apropriação adequada da construção de gráficos da função quadrática ou da parábola é de grande significância. Moretti (2003, p. 149-150) enfatiza que na construção de curvas¹ com o processo de ir marcando pontos e ligar, em geral, não se aborda a analogia que existe entre a equação e o traçado da curva. Por esta razão, para o caso das parábolas, ao esboçarmos os gráficos, deve-se utilizar a noção de translação horizontal e vertical para que o aluno consiga transitar entre as formas simbólicas e gráficas mantendo a perspectiva da interpretação global de propriedades figurais.

Neste sentido, ao discorrermos sobre o esboço de curvas estamos considerando os registros de representação semiótica presentes no esboço, portanto, vamos explicar a Interpretação Global de Propriedades Figurais, preconizada por Duval (2011), para esclarecer a importância da compreensão, por parte do docente, dos elementos primordiais envolvidos no ensino do traçado de qualquer curva no plano cartesiano. Ademais, mostraremos o caso particular do esboço da parábola, o qual pode ser abordado no Ensino Médio, já que envolve conhecimentos básicos como translações, complementação do quadrado e algumas manipulações algébricas.

¹ Estamos considerando no presente trabalho a curva como um conjunto de pontos no sistema cartesiano ortogonal. Pode ser uma reta, circunferência, parábola, entre outras curvas conhecidas.

O OBJETO MATEMÁTICO E AS ATIVIDADES COGNITIVAS ENVOLVIDAS

A parábola pode ser representada discursivamente por uma equação algébrica, por uma argumentação na língua natural, ou de forma não discursiva, a partir de um gráfico cartesiano. Duval (2004) observa que o mesmo objeto matemático não perde sua referência, mesmo que possa ser representado por meio de registros de representação muito diferentes. Para o estudante pode ser fácil reconhecer o número 2 em $10 \div 5$, e ser mais complicado a percepção em $5^0 + 1$, apesar de estarem no mesmo sistema semiótico de representação.

Em inúmeras situações matemáticas, um objeto se apresenta em uma forma de representação que possui um valor cognitivo muito mais trabalhoso para realização de raciocínios e procedimentos de cálculo necessários, logo, a possibilidade de usar outra representação que proporcione tratamentos mais favoráveis é de muita importância para que haja uma efetiva aprendizagem por parte dos alunos.

Sendo assim, vale ressaltar a máxima de Duval (2003) de jamais confundir o objeto representado com sua representação. A ideia é o objeto matemático parábola ser compreendido pelo aluno conforme, ao longo dos anos, as representações gráficas, representações algébricas, representações em texto desse objeto, sejam melhores associadas e compreendidas por ele. Além disso, o “conhecimento começa quando não adotamos mais uma representação do objeto no lugar do próprio objeto” (Duval, 2011b, p. 16).

Duval (2004, p. 43) considera que para um sistema semiótico ser chamado um registro de representação semiótica, ele deve permitir três atividades cognitivas fundamentais, a saber:

- ✓ operações cognitivas de formação (identificação e formação de uma representação do objeto matemático);
- ✓ tratamento (operação cognitiva que envolve uma transformação da representação em outra representação, mas, no interior do mesmo sistema semiótico de representação em que foi formado);
- ✓ conversão (transformação de uma representação em dado registro de representação, em outra representação pertencente a outro sistema semiótico).

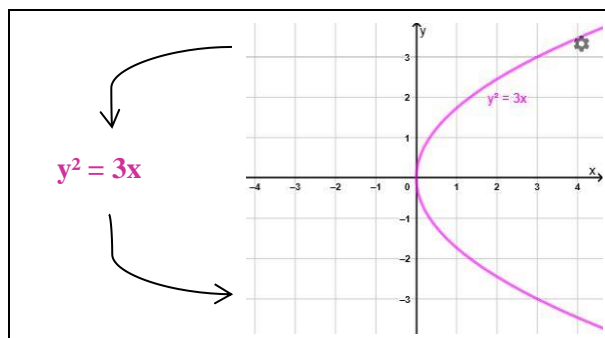
Em geral, as atividades cognitivas de tratamento e de conversão permitem transformar a representação. A transformabilidade é uma característica que pode conservar o conteúdo da representação inicial ou parte dela (Duval, 2004, p. 43).

Quando na Figura 1 iniciamos com a equação algébrica e chegamos à representação gráfica estamos com uma transformação que mudou de registro de representação. Por outro lado, se antes, por exemplo, estava escrito $2y^2 = 6x$ e mudamos para $y^2 = 3x$, temos um tratamento, porque, apenas transformamos a representação sem mudanças de registro de representação semiótica, no caso o registro algébrico permaneceu e conservou o objeto matemático em questão.

A conversão é uma das atividades cognitivas mais complexas a ser realizada. Se observarmos com cautela, quando estamos diante da equação $y^2 = 3x$ podemos até chegar com facilidade ao gráfico correspondente, mas, nada nos garante que conseguimos executar a conversão no sentido contrário, não é mesmo?

Figura 1

Conversão entre registros algébrico e gráfico (os autores)



É interessante destacar o fato de a atividade cognitiva de conversão ocorrer nos dois sentidos, como ilustrado pelas flechas na Figura 1. A situação específica de abordar em sala o trabalho partindo do gráfico para a equação é pouco comum. Mais a frente, mostraremos como fazer isso, considerando o recurso de translações. Nos estudos de Silva (2008) há uma análise de livros didáticos confirmando que quase não se mostra como obter a equação partindo da representação gráfica.

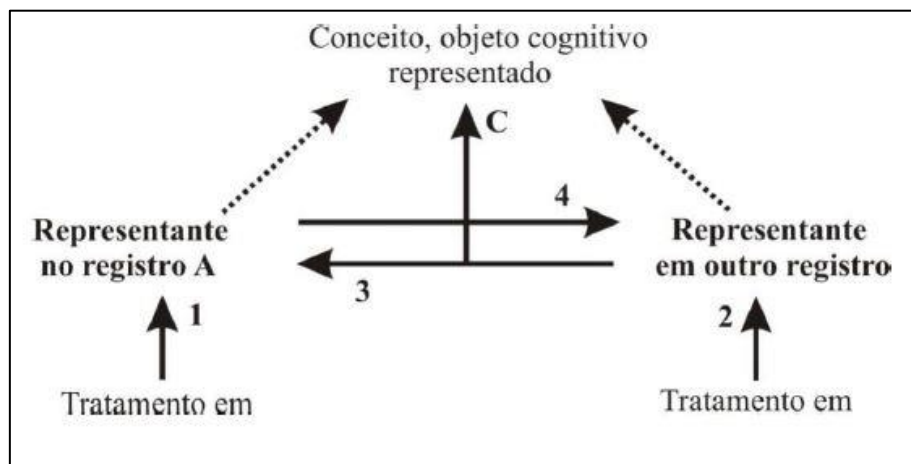
Duval (2004) ao longo de seus estudos frisa muito as atividades cognitivas de transformação, e vale lembrar que, é a aprendizagem do

objeto matemático que mais importa. Sendo assim, precisamos que nosso aluno atinja a coordenação entre os diferentes registros, ou seja, é indispensável a hipótese fundamental de aprendizagem, apresentada na Figura 2.

Na Figura 2 temos toda a situação que envolve a aprendizagem de conceitos e objetos matemáticos na teoria de Duval (2004). No registro A ou em outro qualquer o aluno poderá fazer tratamentos (flechas 1 e 2), ou seja, transformações no interior do registro. E também, deverá ser capaz de realizar conversões (flechas 3 e 4) entre registros diferentes.

Figura 2

Hipótese Fundamental de Aprendizagem (Duval, 2012, p. 282)



Quando o aluno dominar as transformações ele estará coordenando (flecha C) os diferentes registros de representação daquele objeto

matemático. Assim, ele é capaz de discriminar cada unidade significativa² própria da representação de partida e de chegada, e não somente as unidades da representação inicial. A aprendizagem está ocorrendo no conjunto da obra se tudo isso for trabalhado em sala. As flechas pontilhadas remetem a distinção entre objeto e representação.

Em síntese, realizamos um esclarecimento sobre a aprendizagem de matemática sob uma ótica semiocognitiva, ou seja, aprender matemática envolve as três atividades cognitivas da teoria de Duval (2004) e nenhum objeto matemático pode ser acessado se não for por meio de representações. Na seção seguinte vamos nos debruçar especificamente sobre como o objeto parábola deve ser pensado no processo de ensino e de aprendizagem.

INTERPRETANDO UMA CURVA

As curvas são um importante objeto, por poder representar diversos fenômenos e situações e vêm sendo estudadas ao longo dos tempos. Nos últimos anos tem-se enfatizado o tratamento de esboços de curvas, especialmente a partir dos estudos de Duval sobre o procedimento de Interpretação Global de Propriedades Figurais. Estudos nessa perspectiva estão cada vez mais frequentes, como os propostos por Corrêa e Moretti

²No registro gráfico da parábola algumas unidades significantes são foco, diretriz, sentido da abertura. Para Duval (2011b) unidades significantes em um registro são os itens que quando transformados dentro do registro geram significativas alterações em itens da representação em outro registro correspondente.

(2014), Moretti e Luiz (2010), Luiz (2010), Silva (2008), Moretti, Ferraz e Ferreira (2008) e Moretti (2003).

Silva (2008) e Corrêa e Moretti (2014) nos apresentam uma forma de traçar o esboço de curvas de funções trigonométricas, senoide e cossenoide, de modo a relacionar as variáveis visuais gráficas (amplitude e período) com as unidades significativas algébricas (coeficientes e termos constantes).

Duval (2011a) muito contribuiu para pensarmos o estudo de curvas sob uma abordagem cognitiva e não puramente matemática. Com a Interpretação Global de Propriedades Figurais temos um estudo minucioso dos itens que estão presentes na compreensão de uma curva no plano cartesiano.

Duval (1994) faz o seguinte questionamento para discutirmos a importância de uma interpretação global:

Mas no caso dos gráficos, como no caso das figuras geométricas, basta ver para acessar o conteúdo representado, de modo a não confundir a forma da representação com seu conteúdo, que poderia ser tão facilmente “traduzido” ou “convertido” em representações de um registro diferente? (p. 2)

No caso de gráficos é preciso saber o que deve ser visto. E esse ‘saber’ está atrelado à representação em outro registro, pois, é na passagem do gráfico a equação que a forma da representação pode ser observada. Ou seja, compreender um gráfico envolve ao menos dois registros de representação.

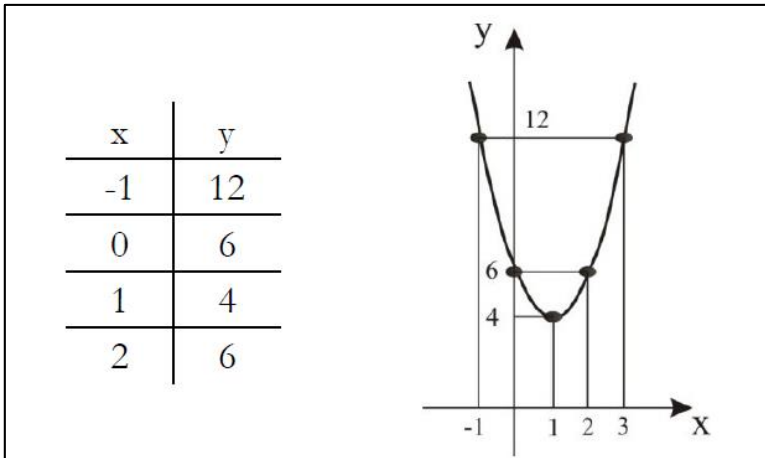
Quando estamos com uma representação gráfica, o funcionamento semiótico presente envolve a relação de duas figuras, a figura-fundo (o plano cartesiano) e a figura-forma (o gráfico em si), mas, essa relação é do tipo regra de codificação (Duval, 1994, p. 4), porque fica presa apenas ao registro gráfico. Por exemplo, se é uma linha reta (figura-forma) e divide igualmente o primeiro e terceiro quadrante passando na origem (figura-forma) já codificamos que é uma função linear com coeficiente angular positivo.

Para além dessa relação, todo registro gráfico permite três processos (Duval, 2011a, p. 98-99):

- *Abordagem ponto a ponto*: a forma/o traçado da figura coincide com os pontos marcados no plano cartesiano. Isso permitirá ler os pares ordenados também. Como na Figura 3.
- *Abordagem de extensão do traçado efetuado*: é uma modificação da forma da figura atrelada a unidade de graduação do plano cartesiano (figura-fundo). Ocorre principalmente quando usamos a ideia de “zoom”, ampliação ou redução da malha quadriculada ou quando consideramos que o traçado tende ao infinito. Ou seja, é uma extensão puramente mental, no sentido que no papel não se faz novos traços.
- *Abordagem de interpretação global de propriedades figurais*: consideramos que o traçado e os eixos formam uma imagem que representa um objeto matemático descrito por uma expressão algébrica. As modificações na imagem provocam modificações na expressão correspondente. Toda modificação gera uma variável visual pertinente para a interpretação gráfica.

Figura 3

Procedimento ponto a ponto para o exemplo $y = 2x^2 - 4x + 6$ (Moretti & Thiel, 2012, p. 388)



A primeira e a segunda abordagem dependem diretamente da relação de codificação entre figura-forma e figura-fundo. Por isso, não nos interessa tanto assim, apesar de também ser útil em alguns momentos. É o terceiro procedimento, abordagem de interpretação global, que permite sair do campo técnico e trabalhar com diferentes representações da mesma curva numa perspectiva semiocognitiva.

Diante disso, partindo da abordagem de interpretação global figural de Duval (2011a) afirmamos que o trabalho do professor em sala de aula volta-se para desenvolver no aluno uma compreensão global da curva, e não apenas, a compreensão pontual de alguns elementos isolados, na qual deixa de lado a representação algébrica.

Compreender uma curva no sistema cartesiano ortogonal envolve discriminar em seu traçado as unidades significantes relacionando-as a cada unidade simbólica significativa da equação correspondente, ou seja, a compreensão da curva está atrelada a cada variável visual que o gráfico apresenta.

Vamos agora pensar no caso da curva em linha reta. Duval (2011a) em seus estudos mostrou com detalhes como considerar a reta dentro de uma interpretação global. A reta apresenta três variáveis visuais: o sentido da inclinação do traçado; os ângulos do traçado com os eixos e a posição do traçado em relação à origem do eixo vertical. Sendo assim, temos:

- dois casos para o sentido: ascendente ou descendente;
- três casos para os ângulos com os eixos: maior que 45° , menor que 45° graus ou igual a 45° ;
- três casos para a posição do traçado: na origem, acima ou abaixo da origem.

Para cada uma dessas oito variáveis visuais particulares conseguimos determinar uma unidade simbólica significativa correspondente na equação algébrica da reta. Por exemplo, para a variável visual descendente a unidade simbólica correspondente é a presença do sinal, $-$, na equação algébrica e o coeficiente é menor que zero.

Assim, fazendo todas as correspondências das variáveis visuais e simbólicas no estudo da reta, encontramos 18 representações de variáveis visuais. Na Figura 4 Duval (2011a) explicitou de modo esquematizado essas correspondências quando o sentido da inclinação é positivo. Para o sentido negativo, a ideia é análoga e está representado na Figura 5.

Figura 4

Identificação e integração, com exemplos, de 18 representações de variáveis visuais (Duval, 2011a, p. 102)

Sentido da inclinação	ângulo	Posição (da reta)	Exemplos
> 0	$= 1$	(na origem)	$y = x$
		+ (acima da origem)	$y = x + 1$
		- (abaixo da origem)	$y = x - 1$
	> 1	(na origem)	$y = 2x$
		+ (acima da origem)	$y = 2x + 1$
		- (abaixo da origem)	$y = 2x - 1$
	< 1	(na origem)	$y = (1/2)x$
		+ (acima da origem)	$y = (1/2)x + 1$
		- (abaixo da origem)	$y = (1/2)x - 1$
< 0			

Figura 5

Exemplos de 9 representações de variáveis visuais (os autores)

Sentido da inclinação	Ângulo	Posição (da reta)	Exemplos
< 0	$= -1$	(na origem)	$y = -x$
		+ (acima da origem)	$y = -x + 1$
		- (abaixo da origem)	$y = -x - 1$
	> -1	(na origem)	$y = -(1/2)x$
		+ (acima da origem)	$y = -(1/2)x + 1$
		- (abaixo da origem)	$y = -(1/2)x - 1$
	< -1	(na origem)	$y = -2x$
		+ (acima da origem)	$y = -2x + 1$
		- (abaixo da origem)	$y = -2x - 1$

Essa proposta de estudo das variáveis visuais pode ser adotada para qualquer curva no plano cartesiano. Se fossemos fazer para a parábola o número de variáveis visuais significativas iria triplicar, possivelmente, já que na parábola, a equação possui três coeficientes e não apenas dois. Além disso, essa abordagem de interpretação global explicita as correspondências existentes entre a reta e sua respectiva equação, mas, ainda não resolve o problema de como abordamos em sala de aula a conversão do gráfico para a equação. Sendo assim, na próxima seção vamos nos debruçar em como usar esse conhecimento para fazer atividades de estudo da reta e da parábola nas aulas de matemática.

DO GRÁFICO À REPRESENTAÇÃO ALGÉBRICA POR MEIO DE TRANSLAÇÕES

Considerando a parábola como objeto geométrico há alguns elementos que nos interessam no estudo e compreensão deste objeto. Estes elementos são unidades significantes e permitem um olhar integral para as associações entre a representação algébrica e gráfica.

Vimos que no caso da reta apresentado por Duval (2011a) temos apenas dois coeficientes, o angular e o linear, o que produz 18 representações de variáveis visuais. Já no caso da parábola, temos três coeficientes, $y = ax^2 + bx + c$, logo, teríamos uma lista muito grande de variáveis visuais se fosse fazer o estudo como Duval fez para o caso da reta, ficando inviável.

Dado isso, Moretti (2003) nos propõe trabalhar com a parábola representada algebricamente por $(y - y_v) = a(x - x_v)^2$ sempre associada

com $y = ax^2$ onde $a \neq 0$, na qual o vértice fica explícito por $V(x_v, y_v)$. A partir dessa representação o gráfico pode ser traçado no plano cartesiano de modo significativo.

De modo prático ao iniciar o esboço da parábola dada sua expressão algébrica, devemos considerar a família de curvas que passa pela origem, em seguida reescrever a parte algébrica de modo que as coordenadas do vértice fiquem explícitas e realizar movimentos de translações no plano cartesiano.

Vejamos: considere a parábola $y = 2x^2 - 4x + 5$. Neste caso, para deixar as coordenadas do vértice explícito vamos fazer um tratamento na representação, completando quadrados:

$$y = 2x^2 - 4x + 5 \quad (1)$$

$$y - 5 = 2x^2 - 4x \quad (2)$$

$$y - 5 = 2(x^2 - 2x) \quad (3)$$

$$y - 5 = 2((x - 1)^2 - 1) \quad (4)$$

$$y - 5 = 2(x - 1)^2 - 2 \quad (5)$$

$$y - 3 = 2(x - 1)^2 \quad (6)$$

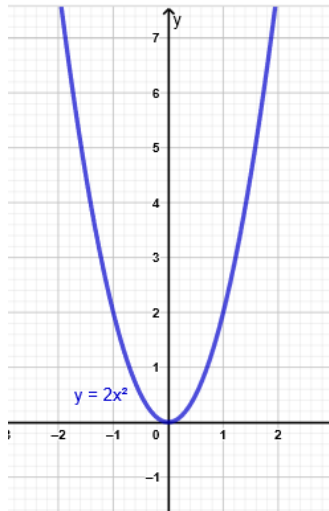
$$y - (+3) = 2(x - (+1))^2 \quad (7)$$

Observe que na equação (3) deixamos o coeficiente $a = 2$ em evidência para fazer referência à família de parábolas $y = 2x^2$. Assim, após as reescritas, chegamos à equação (7), a qual nos mostra que a parábola $y =$

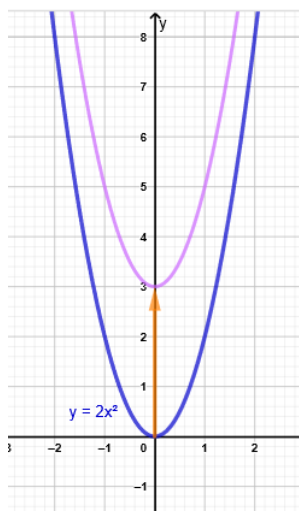
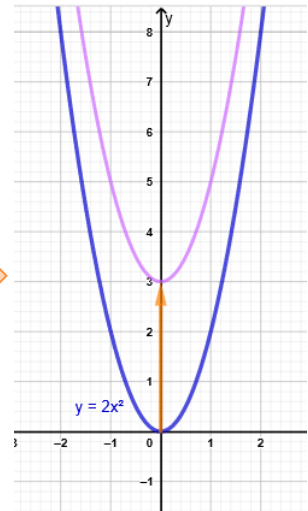
$2x^2$ irá ser deslocar 3 unidades para cima no eixo das ordenadas e 1 unidade para cima no eixo das abscissas.

Figura 6

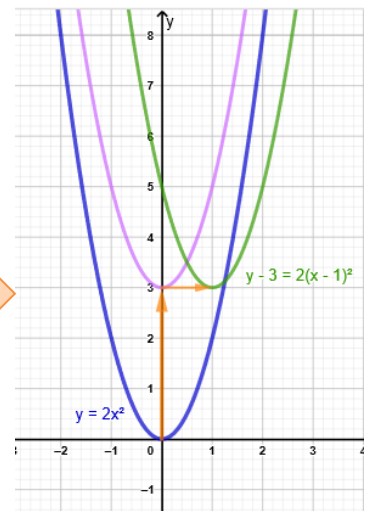
Translações para construção da parábola $y = 2x^2 - 4x + 5$ (os autores)



Translação da
parábola: eixo y



Translação no
sentido do eixo
x



De todo modo, podemos observar que a expressão $y - (+3) = 2(x - (+1))^2$ possui uma relação direta com a representação gráfica. Além disso, se fosse para realizarmos o processo contrário, passar do gráfico a equação, seria mais prático, desde que o foco da parábola fosse fornecido.

Neste exemplo também temos direto o vértice da parábola, no caso $V(1, 3)$ e se quisermos obter as raízes, pensando no caso de uma função polinomial de segundo grau, não é preciso utilizar fórmula de Bhaskara, basta fazer $y = 0$ e substituir na equação (6).

Já nos casos em que a parábola possui simetria no eixo das abscissas, o processo é semelhante. Consideramos a expressão genérica $x = ay^2 + by + c$ com $a \neq 0$. Aqui a nossa parábola referência será $x = ay^2$ quando estiver na origem e para quando não estiver $(x - x_v) = a(y - y_v)$. Lembrando que para $a > 0$ a concavidade estará para a direita e para $a < 0$ concavidade à esquerda.

Vamos esboçar o gráfico de $x = 5y^2 - 10y + 3$.

$$x - 3 = 5(y^2 - 2y) \quad (8)$$

$$x - 3 = 5((y - 1)^2 - 1) \quad (9)$$

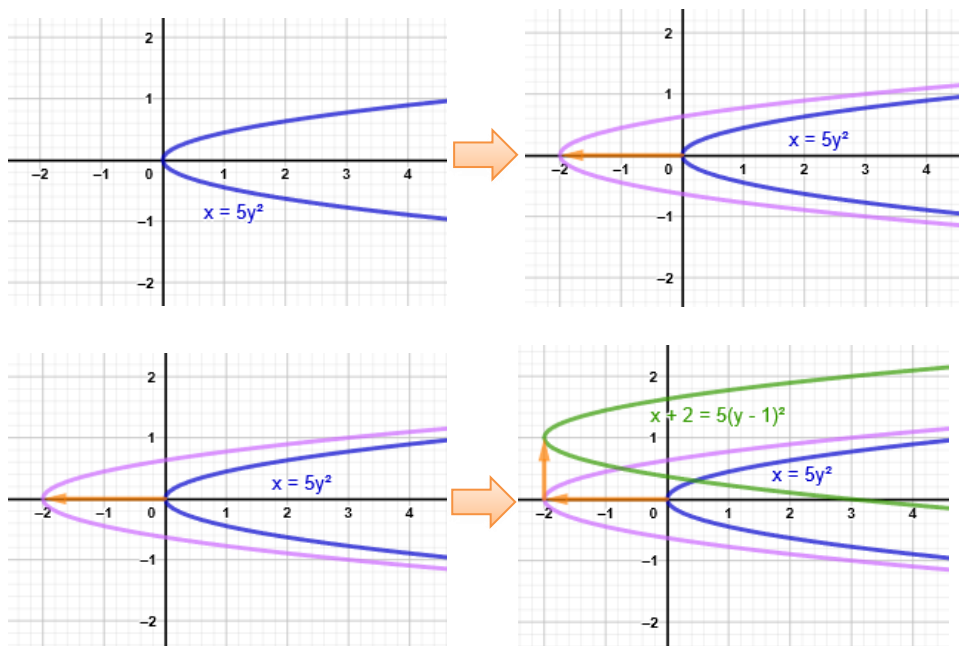
$$x - 3 = 5(y - 1)^2 - 5 \quad (10)$$

$$x + 2 = 5(y - 1)^2 \quad (11)$$

$$x - (-2) = 5(y - (+1))^2 \quad (12)$$

Figura 7

Translações para construção da parábola $x = 5y^2 - 10y + 3$ (os autores)

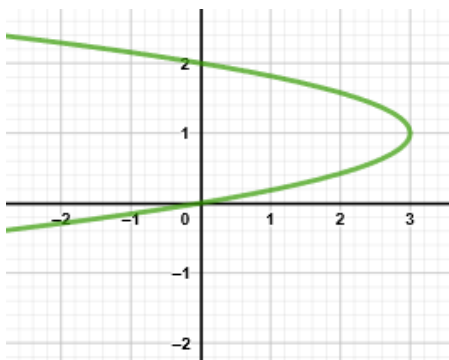


Com a representação gráfica podemos perceber que fazendo à mão as translações fica difícil manter a precisão, embora, sempre podemos obter os valores para as interseções com o eixo y , se existir. Neste nosso exemplo, ao substituir $x = 0$ na equação (11) teremos os pontos de interseção $\left(0, 1 - \sqrt{\frac{2}{5}}\right)$ e $\left(0, 1 + \sqrt{\frac{2}{5}}\right)$.

Agora, vamos fazer a conversão no sentido contrário, dado o gráfico da família $x = -3y^2$, vamos obter a equação correspondente para:

Figura 8

Gráfico qualquer de uma parábola (os autores)



Podemos perceber que da origem do plano cartesiano para transladar até o local que a parábola se encontra precisamos fazer $x - (+3)$, ou seja, transladar a parábola na horizontal 3 unidades para a direita, e $y - (+1)$. Logo, considerando a família informada temos:

$$x - (+3) = -3(y - (+1))^2 \quad (13)$$

$$x - 3 = -3(y^2 - 2y + 1) \quad (14)$$

$$x = -3y^2 + 6y \quad (15)$$

Poderíamos aprofundar as discussões se o foco da parábola fosse informado. Por hora, nos restringimos apenas em informar a família para mostrar como o processo funciona. Enfim, com este procedimento de translações conseguimos mostrar para o estudante as relações pontuais que existem entre a representação da curva com a sua equação, gerando um menor custo cognitivo no estudo de parábolas.

CONSIDERAÇÕES

O ensino da matemática deve estar embasado na diversidade dos registros de representação. Embora, somente dominar cada registro em suas particularidades não nos permite um olhar global do objeto matemático abordado. Com o referencial de Duval fica evidenciada a necessidade de transitar entre dois registros simultaneamente.

Diante disso, discutimos no presente texto como explorar as relações existentes entre a representação gráfica e a representação algébrica da parábola, pontuando os significados diretos da escrita algébrica com o gráfico, possibilitando trabalhar com a passagem do gráfico à sua equação gráfica.

Vale salientar com a realização de conversões entre os registros, tarefas de compreensão são evidenciadas, além de tarefas de produção, quando os alunos realizam tratamentos entre os registros de representação no esboço dos gráficos. No entanto, essas tarefas de produção e de compreensão devem ser estimuladas pelo docente, pois elas interferem na coordenação entre os diferentes registros de representação semiótica e, conseqüentemente, na compreensão do objeto matemático envolvido.

REFERÊNCIAS

Corrêa, M. O. S. & Moretti, M. T. (2014). Esboçando curvas de funções a partir de suas propriedades figurais: uma análise sob a perspectiva dos registros. In: C. F. Brand & M. T. Moretti (orgs). *As contribuições da Teoria dos Registros de Representações Semióticas para o Ensino*

e a Aprendizagem na Educação Matemática (pp. 39-65). Editora Unijuí.

Duval, R. (1994). Les représentations graphiques: fonctionnement et conditions de leur apprentissage. In *Actes du 46th colloque CIEAEM* (p. 3-14). Toulouse, França: Antibi. Université Paul Sabatier.

Duval, R. (2003). Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In: S. D. A. Machado (org.). *Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica* (pp. 11-34). Papyrus.

Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Tradução de Myriam Vega Restrepo. Santiago de Cali: Universidade del Valle – Instituto de Educación y Pedagogía.

Duval, R. (2011a). Gráficos e equações: a articulação de dois registros. *REVEMAT* (Trad. de M. T. Moretti), 6 (2), 96-112. <https://doi.org/10.5007/1981-1322.2011v6n2p96>.

Duval, R. (2011b). *Ver e ensinar a matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar os registros de representações semióticas*. Organização Tânia M. M. Campos. Tradução Marlene Alves Dias. São Paulo: Proem.

Duval, R. (2012). Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. *REVEMAT* (Trad. de M. T. Moretti), 7 (2), 266-297. <https://doi.org/10.5007/1981-1322.2012v7n2p266>.

Luiz, L. S. (2010). *Esboço de curvas no ensino superior: uma proposta baseada na interpretação global de propriedades figurais e uso de tecnologias*. [Dissertação de Mestrado em Educação Científica e Tecnológica, Universidade Federal de Santa Catarina]. <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/93808>.

- Moretti, M. T. (2003). A translação como recurso no esboço de curvas por meio da interpretação global de propriedades figurais. In: S. D. A. Machado (org.). *Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica* (pp. 149-160). Papyrus.
- Moretti, M. T. & Luiz, L. S. (2010). O procedimento informático de interpretação global no esboço de curvas do ensino superior. *Educação Matemática Pesquisa*, 12 (3), 529-547.
- Moretti, M. T. & Thiel, A. A. (2012). O ensino de matemática hermético: um olhar crítico a partir dos registros de representação semiótica. *Práxis Educativa*, 7 (2), 379-396.
<https://doi.org/10.5212/PraxEduc.v.7i2.0004>
- Moretti, M. T., Ferraz, G. A. & Ferreira, V. G. G. (2008). Estudo da conversão de funções entre registros simbólico e gráfico no ensino universitário. *Quadrante – Revista de Investigação em Educação Matemática*, XVII (2), 95-121.
- Silva, M. O. (2008). *Esboço de curvas: uma análise sob a perspectiva dos registros de representação semiótica*. [Dissertação de Mestrado em Educação Científica e Tecnológica, Universidade Federal de Santa Catarina].
<https://repositorio.ufsc.br/xmlui/handle/123456789/92026>.

CAPÍTULO III

O ESBOÇO DE GRÁFICOS DE FUNÇÕES A PARTIR DA INTERPRETAÇÃO GLOBAL DE SUAS PROPRIEDADES FIGURAS

Madeline O. S. Corrêa
Méricles Thadeu Moretti

INTRODUÇÃO

A ação docente, nos componentes curriculares da área de Matemática, deve visar sempre que o ensino dos conteúdos dessa área possui características muito peculiares, tanto pelo fato dos objetos matemáticos não serem diretamente acessíveis aos sentidos quanto pela variedade de formas a serem utilizadas para representar um mesmo objeto.

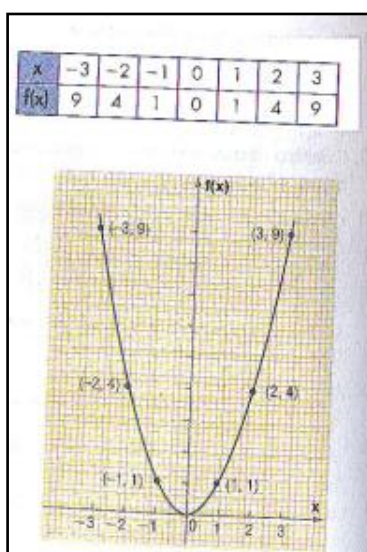
Ao focar o olhar sobre a curva, que é gráfico de uma função, ou mais ainda, sobre o processo de ensino e de aprendizagem deste objeto matemático, ao longo de anos, percebemos o ensino voltado ao método que Duval (1988) nomeia “*procedimento por pontos*”, muito presente nos livros didáticos, ilustrado na Figura 1.

Mesmo que alguns autores mencionassem propriedades da curva e citassem simetria e translação como elementos perceptíveis ao esboço de curvas semelhantes, o recurso para esboçar gráficos de funções, utilizado em livros didáticos de ensino médio, sempre apresentava o caminho: Escolha aleatória de valores do domínio da função – obtenção de pares ordenados de pontos utilizando a lei da função – localização destes pares

ordenados como pontos no plano cartesiano – ligação entre os pontos para obter o esboço da curva. E, sendo o livro didático peça fundamental do ensino de matemática nas escolas de Educação Básica, tem-se aí a apresentação do processo, utilizado no ensino deste objeto matemático.

Figura 1

Ilustração de um livro didático (Dante, 2004, v. 1, p. 130)

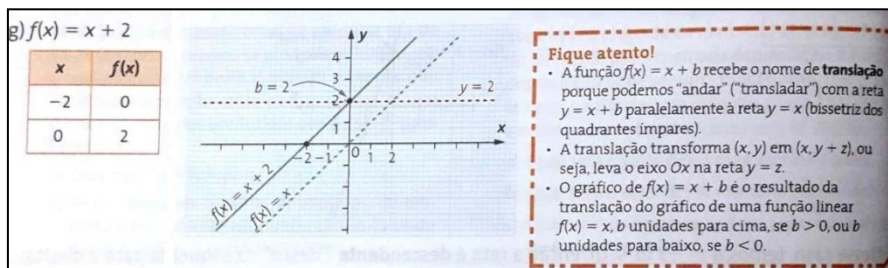


Nos livros didáticos que datam do último Plano Nacional do Livro Didático (PNLD), pouca mudança se observa com relação ao processo utilizado para o esboço de curvas.

Como exemplo, em Dante (2017), a propriedade figural de translação aparece como uma propriedade para ser observada após o esboço da curva e não como recurso para esboço que relaciona a lei da função com o gráfico.

Figura 2

Ilustração de um livro didático (Dante, 2017, v.1, p.80)



Outros livros didáticos como o de Chavante & Prestes (2016), também citam a translação como propriedade figural da função Afim e Modular (vol.1; p.75 e p.95). Vale destacar que estes autores apresentam também, na mesma obra, um capítulo específico sobre as funções que denominam “do tipo trigonométricas”, com todas as propriedades figurais relacionadas às unidades significativas da escrita algébrica, e chamam de *congruentes* aos gráficos de $f(x) = \text{sen } x$ e $f(x) = \text{cos } (x)$ (vol.2;p.31-32). Todavia, limitam-se a esse grupo de funções e não abordam os demais tipos de funções apresentadas na coleção, usando essa mesma perspectiva.

Ainda é predominante, nos livros didáticos atuais, o procedimento que trabalha nos passos intermediários a codificação de pares ordenados de números em pontos no plano, e, apesar de serem pontos de uma mesma curva, não leva à conversão da lei da função ao esboço da curva, e vice-versa, ou seja, não permite por si só que a lei da função e o esboço sejam reconhecidos como representações de um mesmo objeto matemático e, portanto, esse procedimento de ensino, não favorece a aprendizagem do ponto de vista cognitivo.

A regra de codificação só permite, portanto, duas coisas: ou a leitura de uma dupla de números sobre o gráfico a partir de um ponto designado, ou a designação de um ponto a partir de uma dupla de números. A repetição destas duas operações elementares não é suficiente para a conversão de representações entre os dois registros (Duval, 1993, p. 45)

Para que haja aprendizagem, de fato, deste objeto matemático, é necessário levar em consideração no processo de ensino, não pares ordenados como registros de saída e pontos no plano como registros de chegada, todavia considere-se sim os valores escalares das equações (coeficientes) enquanto registros de saída e as variáveis visuais próprias da representação gráfica (inclinação, concavidade, intersecção com os eixos) enquanto registro de chegada.

Essa forma de considerar o Esboço de Curvas é nomeada por Duval (1988) como “procedimento de interpretação global das propriedades figurais”. No mesmo documento, o autor fez um estudo do esboço de Retas relacionando as Variáveis Visuais do esboço de Retas no plano cartesiano com as Unidades Simbólicas Correspondentes presentes na Equação algébrica da Reta.

Moretti (2003) também apresenta o esboço de Parábolas, mantendo a relação entre variável visual de representação e unidade significativa da escrita algébrica, utilizando paralelamente a técnica algébrica de “completar o quadrado” (na equação algébrica da parábola na forma $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)) e a operação de translação na curva (da parábola $y = ax^2$ ($a \neq 0$)). Além de

considerar também a relação do coeficiente a com a abertura da parábola e sua concavidade.

Se pensarmos em Interpretação de propriedades figurais para além de retas e parábolas, tomando por base o ensino na Educação Básica, não teremos uma tarefa tão simples, uma vez que algumas noções de cálculo de limite e de derivada podem se fazer necessárias nessa abordagem (na qual não se conhece a forma da curva a priori) e estes conteúdos não fazem parte, costumeiramente, do currículo deste nível de Ensino.

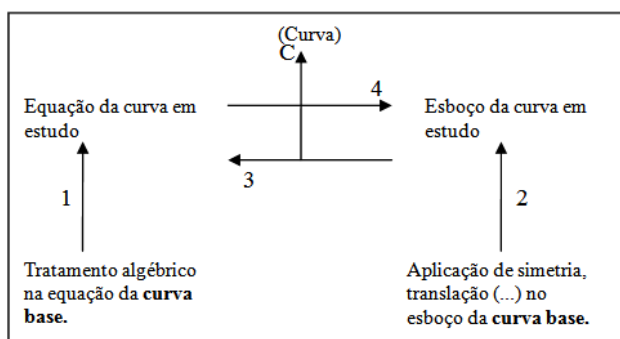
ASPECTOS DE UMA ABORDAGEM DIFERENTE DO *PROCEDIMENTO POR PONTOS*

Sendo fato que a associação entre a lei da função e o esboço da curva que a representa, pode se tornar cognitivamente mais compreensível, do ponto de vista da aprendizagem, a partir da interpretação de propriedades de ambas, do que pelo intermédio da associação de pares ordenados a pontos gráficos no plano, e, considerando que alguns elementos do cálculo diferencial não devem tecer essa abordagem por estarem longe da realidade dos discentes, se faz necessária a busca de outros elementos para a construção de uma nova abordagem, levando-se em conta a coordenação de ao menos dois registros de representação, via atividade de conversão, conforme preconiza Duval (1993) e é apresentada na forma de diagrama por Duval (2004).

A figura seguinte esquematiza a proposta de uma abordagem do Esboço de Curvas, considerando a hipótese de aprendizagem de Duval.

Figura 3

Esquema das atividades cognitivas envolvidas no esboço de curvas (Silva, 2008, p. 85)



Nessa abordagem, verificaremos quais modificações nos coeficientes da expressão algébrica da curva (executadas por operações de tratamento) refletem em modificações no esboço do gráfico (que também ficam aparentes por operações de tratamento no esboço), e assim, na execução de operações de tratamento em paralelo entre os dois registros, chegamos à conversão da equação na curva e vice-versa.

Essa abordagem supõe o conhecimento prévio de uma curva que denominamos *base* e sua equação algébrica (*lei da função*) e, a partir dela, é feito o estudo de curvas semelhantes. Neste momento, para efeito de apresentação da *curva base*, podemos utilizar o procedimento por pontos ou um software matemático, a fim de minimizarmos os problemas de primeiro contato com o esboço da curva, haja vista a ausência de elementos

do Cálculo Diferencial.

Tomemos por exemplo, a função Seno, cuja lei é $y = \text{sen}(x)$, o esboço de sua curva e o conjunto das características que são estudadas sobre essa função (domínio, periodicidade, amplitude etc.). Todas essas características são marcantes tanto na lei da função quanto no esboço de sua curva, todavia, são vistas como algo à parte quando o estudo não é feito relacionando propriedades figurais com escrita algébrica.

Outro exemplo que podemos destacar são as funções Exponenciais e Logarítmicas, que além de todas as características que são estudadas na Educação Básica, têm a questão marcante de uma ser a função inversa da outra – propriedade muito relevante para este tipo de abordagem que estamos propondo e pouco considerada nos livros didáticos como elemento de importância para o Esboço destas curvas, conforme Silva (2008).

O ESBOÇO DE SENÓIDES DO TIPO $y = a + b \text{sen}(cx + d)$ POR MEIO DA INTERPRETAÇÃO GLOBAL DAS PROPRIEDADES FIGURAIS

O esboço de curvas das funções do tipo senóide que busque considerar suas propriedades figurais e variáveis visuais (amplitude, período, simetria...), relacionando-as aos coeficientes das expressões algébricas, procurando mostrar que tipo de alterações na curva geram variações nos coeficientes de suas expressões, pode ser realizado trilhando o seguinte caminho:

1º) Obtenção da curva base: curva da função seno dada por $f: [-2\pi, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $y = \text{sen } x$, através de uma tabela de pontos para o intervalo $[0, 2\pi]$, simetria em relação à origem do sistema cartesiano para conhecê-la em $[-2\pi, 0]$ obtendo-a em todo o intervalo $[-2\pi, 2\pi]$.

2º) Comparações, modificações em paralelo no esboço da curva e na lei da função, a fim de que seja levada de uma (função Seno) na outra (uma senóide dada) tanto por variações na escrita algébrica quanto por modificações no esboço da curva.

Nesse processo de transformação, as tabelas seguintes relatam de maneira comparativa, as relações entre as unidades significativas da escrita algébrica e propriedades figurais:

Tabela 1

Características da curva base cuja expressão é $y = \text{sen } x$ (Silva, 2008, p.109)

Coefficiente	Expressão (unidades da escrita algébrica)	Curva (variáveis visuais)
$b = 1$	O coeficiente não aparece.	Amplitude 2, intervalo de imagem $[-1,1]$.
$k = 1$	O coeficiente não aparece.	Período (comprimento do intervalo de repetição da curva) igual a 2π .
$a = 0$ e $c = 0$	Os coeficientes não aparecem.	Não há translações; O ponto $(0,0)$ pertence à curva; A curva é simétrica em relação à origem do sistema cartesiano.

Tabela 2

Características das senóides em geral (Silva, 2008, p.109)

Coeficiente	Expressão (unidades da escrita algébrica)	Curva (variáveis visuais)
b	Positivo: Ausência do sinal +; Presença do valor numérico desde que seja diferente de 1.	Amplitude 2b, intervalo imagem [-b, b].
	Negativo: Presença do sinal -; Presença do valor numérico desde que seja diferente de 1.	Amplitude 2b , intervalo imagem [b, -b], curva simétrica em relação ao eixo X àquela que apresenta coeficiente b positivo.
k	Positivo: Ausência do sinal +; Presença do valor numérico desde que seja diferente de 1.	Período (comprimento do intervalo de repetição da curva) igual a $\frac{2\pi}{k}$.
	Negativo: Presença do sinal -; Presença do valor numérico desde que seja diferente de 1.	Período (comprimento do intervalo de repetição da curva) igual a $\frac{2\pi}{ k }$; Curva simétrica em relação ao eixo X àquela que apresenta coeficiente k positivo.
a	Positivo: +a (presença do coeficiente com o sinal +).	Translação no eixo Y de a unidades para cima em relação à senóides onde a = 0. Modificação do intervalo imagem para [-b+a, b+a] se b > 0 ou para [b+a, -b+a] se b < 0.

a	Negativo: $-a$ (presença do coeficiente com o sinal -).	Translação no eixo Y de a unidades para baixo em relação à senóides onde $a = 0$. Modificação do intervalo imagem para $[-b-a, b-a]$ se $b > 0$ ou para $[b-a, -b-a]$ se $b < 0$.
c	Positivo: $+c$ (presença do coeficiente com o sinal +).	Translação no eixo X de $\left \frac{c}{k}\right $ unidades para a direita em relação à senóides onde $c = 0$.
	Negativo: $-c$ (presença do coeficiente com o sinal -).	Translação no eixo X de $\left \frac{c}{k}\right $ unidades para a esquerda em relação à senóides onde $c = 0$.

Para facilitar a compreensão do modelo, vamos ilustrá-lo com um exemplo de aplicação, o qual consiste em esboçar o gráfico da função $y = 3 + \text{sen} \frac{x}{2}$.

Figura 4

Esboço de curva representativa da função seno com variações (Côrrea & Moretti, 2014, p. 47)

**EQUAÇÃO DA CURVA
EM ESTUDO**

$$f_3: y = 3 + \text{sen} \frac{x}{2}$$



$$f_3: y - (+3) = \text{sen} \frac{1}{2}x$$



$$f_2: y = \text{sen} \frac{1}{2}x$$

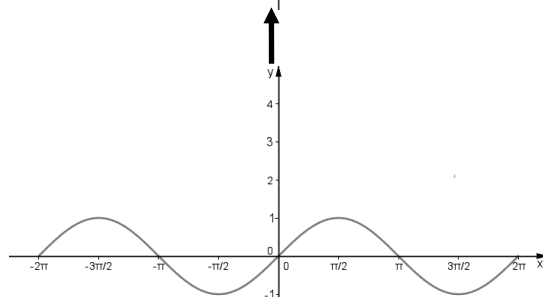
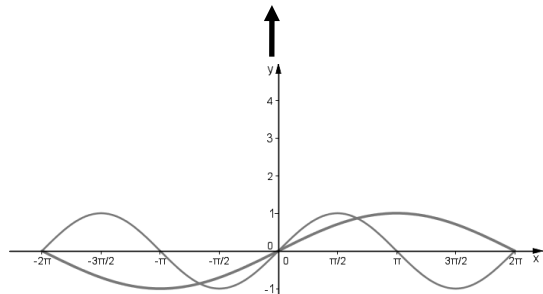
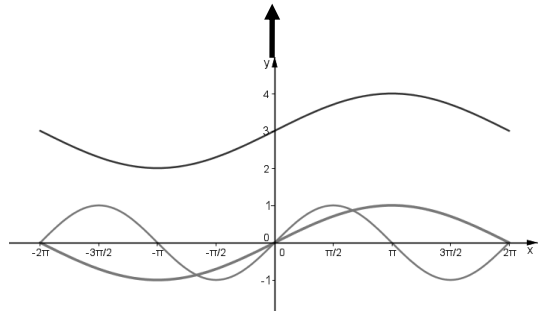
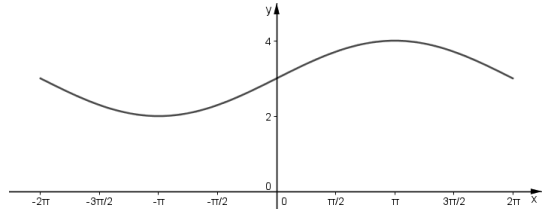


$$f_1: y = \text{sen} x$$


1

Tratamento algébrico na equação da **curva base**, acrescentando os coeficientes um a um até obter a equação dada.

(Curva)

ESBOÇO DA CURVA EM ESTUDO

2

Tratamento no esboço da **curva base**, aplicando as modificações figurais a partir dos coeficientes (amplitude, translação).

O ESBOÇO DE CURVAS DE FUNÇÕES LOGARÍTMICAS POR MEIO DA INTERPRETAÇÃO GLOBAL DAS PROPRIEDADES FIGURAIS

Ao tratar do esboço de curvas de funções logarítmicas é possível o uso da simetria e da translação como propriedades figurais, partindo-se do esboço da função exponencial como *curva base*, pelo fato principal da inversibilidade presente entre esses dois tipos de funções.

Consideremos como exemplo, a necessidade de esboçar o gráfico da função $f(x) = 1 + \ln(x+2)$.

Podemos partir da curva de $y = e^x$, como *curva base*, que pode ser obtida com o auxílio de uma tabela de pontos ou de um software matemático. Conhecendo essa curva, podemos utilizá-la para obter a curva da função inversa $y = \ln x$, aplicando simetria em relação à reta $y = x$.

Conhecendo a curva $y = \ln x$, podemos obter a curva $y = 1 + \ln(x+2)$, observando que a expressão $y = 1 + \ln(x+2)$ pode ser escrita como $y - 1 = \ln(x + 2)$ e essa representação deixa evidente que a translação da curva de $y = \ln(x)$ em duas unidades para a esquerda e uma unidade verticalmente para cima resultará no esboço de $y - 1 = \ln(x + 2)$, ou seja, $y = 1 + \ln(x+2)$. Ressaltamos aqui o uso de translações nas curvas em consonância com as modificações nas unidades de escrita algébrica: translação *para cima* e escrita de +1 e translação para a *esquerda* e escrita de -2. Duas operações de tratamento, com similaridade entre sinais e sentidos, realizadas em paralelo, em registros de representação diferentes de um mesmo objeto matemático que, todavia, facilitam a conversão entre

um e outro, isto é, permite obter o esboço da curva $y = 1 + \ln(x+2)$, partindo da sua expressão algébrica. Ilustramos nas figuras seguintes esse procedimento:

Figura 5

Obtenção da curva $f_2: y = \ln(x)$ por simetria em relação à reta $y=x$, tendo como base a curva $f_1: y = e^x$ (Os autores)

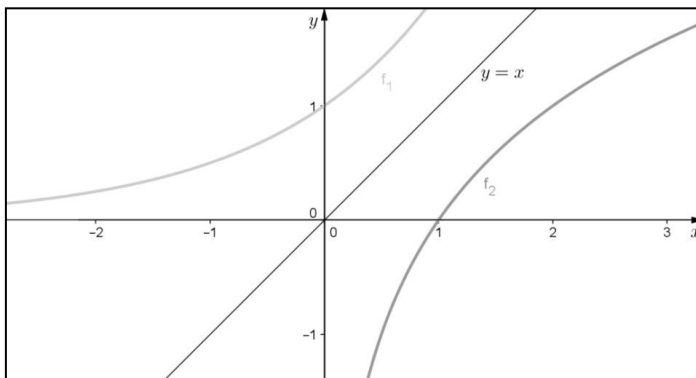
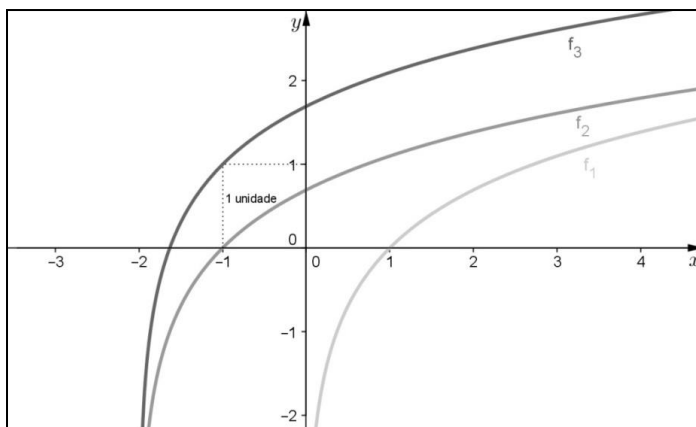


Figura 6

$f_1: y = \ln x$, f_2 : translação horizontal de f_1 ($y = \ln(x-2)$)
 $f_3: y = 1 + \ln(x+2)$ (Os autores)



Se pensarmos na dificuldade que os alunos apresentam naturalmente na compreensão do conceito de logaritmo e no cálculo desses valores, notaremos um custo cognitivo menor em fazê-los perceber a simetria entre funções logarítmicas e exponenciais de mesma base e as translações necessárias para se obter o gráfico de uma função logarítmica, a partir de uma *curva base* exponencial, conforme apresentamos aqui. Induzir que calculem diversos valores de logaritmos para compor uma tabela, a fim de utilizar o *procedimento por pontos*, além de pouco eficiente em mostrar lei da função e esboço da curva como representações de um mesmo objeto matemático, ainda é uma atividade que demanda um esforço cognitivo alto – no que diz respeito aos cálculos de logaritmos, dadas as grandes dificuldades de compreensão. Sendo assim, calcular logaritmos de números reais deve ser ferramenta de outras atividades onde se mostre mais necessária e eficiente do que naquelas que tem por objetivo o esboço de curvas de funções logarítmicas.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Tratar o esboço de curvas considerando as propriedades figurais relacionadas às unidades significativas da escrita algébrica possibilita a sua visualização como um todo, reforçando a relação entre o esboço e a lei da função e não entre a curva e alguns pontos. Duval (2004) preconiza esta forma de trabalhar o esboço de curvas por ser ela a que favorece a conversão no sentido inverso, ou seja, à compreensão de maneira

qualitativa do que ocorre com seus coeficientes e uma leitura correta do gráfico. Além disso, é possível ainda, a partir do gráfico se chegar à expressão algébrica (desde que sejam conhecidos alguns valores numéricos).

Na Educação Básica, as funções estudadas são bem elementares e isso proporciona a conversão nos dois sentidos preconizada por Duval. No entanto, “para a maioria das funções que são tratadas no ensino universitário, a conversão nos dois sentidos se torna impraticável” (Moretti & Luiz, 2010, p. 529). Todavia, uma análise qualitativa, observando o tipo de modificação, sem se preocupar com valores exatos também é de grande valia na interpretação de fenômenos, quando trabalhamos com a aplicação da matemática e, mais precisamente do esboço de curvas, em outras áreas.

REFERÊNCIAS

- Chavante, E. & Prestes, D. (2016) *Matemática. Vol.1-2*. Edições SM.
- Corrêa, M. O. S. & Moretti, M. T. (2014). Esboçando curvas de funções a partir de suas propriedades figurais: uma análise sob a perspectiva dos registros. In: C. F. Brand & M. T. Moretti (Orgs). *As contribuições da Teoria dos Registros de Representações Semióticas para o Ensino e a Aprendizagem na Educação Matemática*. (p. 39-65) Editora Unijuí.
- Dante, L. R. (2004). *Matemática*. Editora Ática.
- Dante, L. R. (2017) *Matemática Contexto & Aplicações*. Editora Ática.
- Duval, R. (1988) *Graphiques e équations: l'articulation de deux régistres. Annales de didactique et de sciences cognitives*, v1, pp.235-253.

- Duval, R. (1993) *Registre de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée*. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives. Strasbourg : IREM – ULP.
- Duval, R. (2004) *Semiosis y Pensamiento Humano – Registros Semióticos y Aprendizajes Intelectuales*. Universidad del Valle. Instituto de Educación e Pedagogía. Ciudad Universitaria Meléndez.
- Moretti, M. T. (2003). A translação como recurso no esboço de curvas por meio da interpretação global de propriedades figurais. In: S. D. A. Machado (org.). *Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica* (pp. 149-160). Papirus.
- Moretti, M. T. & Luiz, L. S. (2010). O procedimento informático de interpretação global no esboço de curvas do ensino superior. *Educação Matemática Pesquisa*, 12 (3), 529-547.
- Silva, M. O. (2008). *Esboço de curvas: uma análise sob a perspectiva dos registros de representação semiótica*. [Dissertação de Mestrado em Educação Científica e Tecnológica, Universidade Federal de Santa Catarina]. <https://repositorio.ufsc.br/xmlui/handle/123456789/920>

CAPÍTULO IV

A INTERPRETAÇÃO GLOBAL DE PROPRIEDADES FIGURAIS NO ESBOÇO DE RETAS REPRESENTADAS POR EQUAÇÕES PARAMÉTRICAS

Marcos Henrique Santos Martins
Méricles Thadeu Moretti

1. INTRODUÇÃO

A aprendizagem em Matemática se constitui de atividades cognitivas que requerem a compreensão e manipulação dos seus variados sistemas de representação. Entre esses sistemas temos as chamadas **representações algébricas** e as suas correspondentes **representações gráficas**, em um contexto de diferentes formas de representação de um mesmo objeto matemático.

Qualquer que seja o grau de ensino, o esboço de gráficos acaba se restringindo às funções reais de variáveis reais. No entanto, se pensarmos num gráfico como representante do movimento de uma partícula no plano (tão importante para a física), a curva descrita pode não caracterizar uma função do tipo $y = f(x)$ e isto não implica que não possamos analisá-lo e dele extrairmos uma série de informações, tanto matemáticas quanto físicas.

Ainda há de ser considerado o formato das equações que representam algebricamente tais curvas, pois dependendo do contexto algébrico na qual determinada equação é apresentada, dela podemos obter diferentes dados, dependendo do foco desejado no estudo. Assim, equações cartesianas e equações paramétricas funcionam, ambas, como modelos analíticos (algébricos) no estudo de trajetórias descritas por partículas em movimento, cada uma delas apresentando vantagens e desvantagens, dependendo da informação que queremos obter.

No contexto educacional, fazer a mudança do sistema de representação algébrica para a representação gráfica e vice-versa, pode caracterizar-se como um obstáculo epistemológico e didático para a maioria dos alunos, o que justifica as muitas pesquisas realizadas no campo da Educação Matemática, numa busca incessante por respostas e consequentes teorizações a respeito.

Uma dessas teorias é a chamada *Teoria dos Registros de Representação Semiótica* (TRRS) de Raymond Duval (1988), onde por meio da chamada ***interpretação global de propriedades figurais***, expõe sobre as correspondências entre as variações visuais nos gráficos e as alterações significativas na escrita algébrica, tratando especificamente do esboço de retas e suas relações com as equações polinomiais do primeiro grau, considerando o sentido das conversões realizadas e verificando quais procedimentos são explorados no respectivo registro gráfico.

Daqui para frente, com o objetivo de simplificar a escrita e leitura, nos referiremos ao procedimento de interpretação global das propriedades figurais apenas como “interpretação global”.

Neste artigo, analisaremos como aplicar a Interpretação Global a curvas planas com grau de concavidade nulo, ou seja, retas, cujas representações algébricas são dadas por equações paramétricas.

2. A INTERPRETAÇÃO GLOBAL

O procedimento de interpretação global foi desenvolvido por Duval (1988) para o caso das retas em seu trabalho: “Gráficos e equações: a articulação entre dois registros”. Neste trabalho ele fez uma análise a respeito das modificações nas variáveis visuais (gráficas) e suas correspondentes modificações nas unidades simbólicas (algébricas) para equações representantes de retas no plano, ou seja, para estruturas algébricas representadas por equações explícitas do tipo $y = ax + b$; $a, b \in \mathbb{R}$. Ressaltamos aqui que temos algebricamente o objeto matemático “função Afim”.

Para Duval (1988), a conversão da equação (representação algébrica) para sua representação gráfica e vice-versa se constitui num obstáculo para a maioria dos alunos, visto que as dificuldades em ler e interpretar as representações gráficas parece estar associada à falta de conhecimento das regras de correspondência semiótica entre os registros algébrico e gráfico,

onde o procedimento mais comum adotado nessa articulação é o tratamento ponto a ponto.

Neste contexto, o autor sugere uma descrição sistemática das variáveis visuais (gráficas) que leve em consideração o procedimento de interpretação global, possibilitando desta forma a identificação das modificações realizadas na equação e no gráfico que a representa.

O quadro 1 expõe a proposta de Duval no que tange a identificação das variáveis visuais na representação gráfica de uma reta e suas correspondentes unidades simbólicas nas equações algébricas:

Quadro 1

Valores e variáveis visuais para $y = ax + b$ no plano cartesiano (Duval, 1988, p. 240)

Variáveis visuais	Valores	Unidades simbólicas correspondentes
Sentido da inclinação	Ascendente Descendente	Coeficiente > 0 : ausência do símbolo – Coeficiente < 0 : presença do símbolo –
Ângulos com os eixos	Partição simétrica Ângulo menor (45°) Ângulo maior (45°)	Coeficiente variável = 1 (não tem coeficiente escrito) Coeficiente variável < 1 Coeficiente variável > 1
Posição sobre o eixo	Corta acima Corta abaixo Corta na origem	Acrescenta-se uma constante (sinal +) Subtrai-se uma constante (sinal –) Não tem correção aditiva (ausência de sinal)

No quadro 1 podemos observar que as modificações nos coeficientes da expressão algébrica (equação cartesiana) geram modificações no esboço gráfico da reta e vice-versa. Assim, considerando a função $y = ax + b$; $a, b \in \mathbb{R}$, temos que o coeficiente “ b ”, chamado de coeficiente linear¹ indica a posição da reta no eixo dos “ y ” (ordenadas) e o coeficiente “ a ”, chamado de coeficiente angular² indica o ângulo (a inclinação) que a reta forma com os eixos, indicando o crescimento ou decréscimo.

Então, em se tratando da equação explícita $y = ax + b$; $a, b \in \mathbb{R}$, representante algébrica do objeto matemático “função afim”, qualquer modificação nos coeficientes “ a ” e/ou “ b ” é responsável por modificações na reta que a representa no plano cartesiano e vice-versa.

O procedimento de interpretação global desenvolvido por Duval para o estudo das retas facilita a conversão da representação algébrica para a correspondente representação gráfica e vice-versa, pois associamos as variáveis gráficas às suas correspondentes unidades simbólicas, o que pode conduzir a uma melhor compreensão das características do objeto matemático em questão, provenientes de cada um dos registros envolvidos.

Duval considera um equívoco quando se presume que os sentidos de conversão entre dois registros são equivalentes, visto que desta forma, por exemplo, estaríamos considerando que uma conversão partindo da representação algébrica para a representação gráfica, englobaria as mesmas

¹ Duval chama apenas de “coeficiente”.

² Também chamado por Duval apenas como “coeficiente”.

estruturas e conceitos ao convertê-la da representação gráfica para a representação algébrica.

Porque passar de um registro de representação a outro não é somente mudar de modo de tratamento, é também explicar as propriedades ou os aspectos diferentes de um mesmo objeto. Vemos, então, que duas representações de um mesmo objeto, produzidas em dois registros diferentes, não têm de forma alguma o mesmo conteúdo. (Duval, 2003, p. 22)

O procedimento de interpretação global corresponde à associação das *variáveis visuais* pertinentes à representação gráfica com as variáveis simbólicas da representação algébrica, permitindo a percepção de que uma modificação na escrita algébrica implica uma mudança correspondente na representação gráfica e vice-versa. "Neste tipo de tratamento não estamos em presença da associação um ponto \leftrightarrow um par de números, mas na associação variável visual da representação \leftrightarrow unidade significativa da escrita algébrica." (Duval, 1988, p. 237)

Através do procedimento de interpretação global podemos evitar a representação de um gráfico pelo método ponto a ponto previamente definido pela construção de uma tabela com a escolha de valores às variáveis, mas sim através da interpretação do registro algébrico em associação com suas características gráficas.

Uma expressão algébrica é composta por variáveis visuais (ou unidades significativas) que são: os símbolos de relações ($>$, $<$, $=$), os símbolos de operações ou sinais ($-$, $+$), os símbolos de variáveis e os

símbolos de expoentes de coeficientes e constantes. (Duval, 1998, apud Traldi, 2002, p. 27)

Muitas outras pesquisas têm utilizado a TRRS de Duval em estudos relacionados à interpretação global de curvas, tais como polinomiais do segundo grau, trigonométricas, exponenciais, logarítmicas e outras curvas que surgem no ensino superior.

Porém, salientamos que as curvas apresentadas nessas pesquisas são todas representantes de funções e expressas através de equações explícitas, pois as variáveis independente e dependente estão devidamente definidas e escritas em seu formato cartesiano, ou seja, equações cujas manipulações ocorrem num sistema de coordenadas cartesianas.

Nesse sentido, nos surge o seguinte questionamento: E se quisermos aplicar a interpretação global de Duval para retas na qual conhecemos sua representação algébrica expressa por equações paramétricas?

3. EQUAÇÕES PARAMÉTRICAS

Podemos utilizar a interpretação global proposta por Duval em sua TRRS adotando um ponto de vista dinâmico, se pensarmos em qualquer curva do plano (ou do espaço) como a trajetória descrita por uma partícula, sendo que neste artigo restringiremos nosso estudo às retas apresentadas através de equações paramétricas.

Neste contexto, as equações paramétricas permitem relacionar a posição do objeto com o tempo transcorrido, o que a equação cartesiana não permite. Além disso, eliminando o parâmetro a partir das equações paramétricas, podemos reconstruir o modelo cartesiano, e assim obter todas as informações fornecidas somente pela equação cartesiana, como por exemplo, a declividade da trajetória seguida.

Pensar numa reta como a trajetória percorrida por ponto móvel no plano nos remete à reflexão de outra área do saber, componente do rol da chamada ciências da natureza: a Física e seu estudo do movimento retilíneo. Infelizmente, é comum a inexistência de uma relação de interdisciplinaridade entre o ensino da matemática e da física, o que é um prejuízo no processo de ensino e aprendizagem, visto que a física utiliza a linguagem simbólica matemática e os conhecimentos desta a respeito de equações e gráficos para representar modelos que descrevem os fenômenos na qual estuda, pois as utiliza para comprovações científicas.

É útil e importante saber deduzir os dois tipos de equações a partir de uma situação problema e obter uma a partir da outra. As equações paramétricas envolvem uma variável extra, em geral o tempo, e à primeira vista, por envolver mais do que uma equação, parecem ser mais complicadas do que a (única) equação cartesiana para descrever determinado movimento. O exemplo seguinte mostra como isto pode ser feito.

Exemplo 1³: As equações paramétricas que descrevem a trajetória seguida por um avião são dadas por $x(t) = -12 + 5t$ e $y(t) = -30 + 8t$. Obtenha a equação cartesiana desse movimento.

- ✓ Para obtermos a equação cartesiana, a partir das equações paramétricas, basta fazermos um “tratamento” isolando a variável t numa das equações paramétricas dadas e, a seguir, substituir o resultado obtido na outra equação paramétrica.
- ✓ Assim, da primeira equação paramétrica vem:

$$x = -12 + 5t \Leftrightarrow x + 12 = 5t \Leftrightarrow t = \frac{x + 12}{5}$$

- ✓ Substituindo $t = \frac{x+12}{5}$ em $y(t) = -30 + 8t$, temos:

$$\begin{aligned} y &= -30 + 8t \Rightarrow y = -30 + 8\left(\frac{x + 12}{5}\right) \Rightarrow y \\ &= -30 + \frac{8}{5}x + \frac{96}{5} \Rightarrow y = \frac{8}{5}x - \frac{54}{5} \end{aligned}$$

Logo, $y = \frac{8}{5}x - \frac{54}{5}$ é a equação cartesiana que descreve a trajetória descrita pelo referido avião.

4. INTERPRETAÇÃO GLOBAL DA RETA DADA POR EQUAÇÕES PARAMÉTRICAS

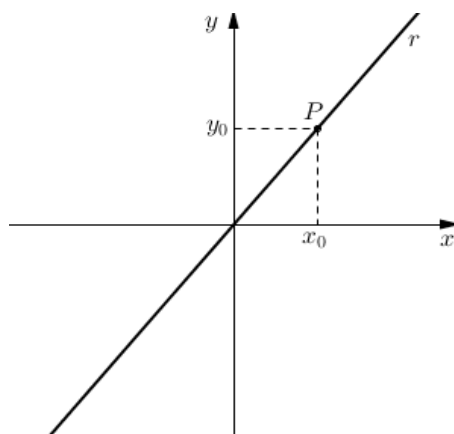
Consideremos inicialmente uma reta r passando pela origem (Figura 1), da qual P seja um ponto qualquer de coordenadas $(x_0, y_0) \in r$.

³ Adaptado de Martins (2010, p. 55).

A declividade desta reta é $m = \frac{y_0}{x_0}$, donde $y = \frac{y_0}{x_0}x$, da qual se tira $\frac{y}{y_0} = \frac{x}{x_0} = t$, e as equações paramétricas da reta são: $\begin{cases} x = x_0 t \\ y = y_0 t \end{cases} (*)$

Quadro 2

Reta r passando pela origem

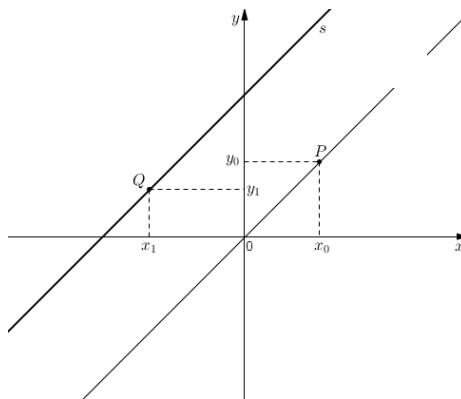


Para o caso de uma reta qualquer (Quadro 3), definiremos esta reta s traçando uma reta r paralela passando pela origem. Consideraremos sobre r um ponto P de coordenadas (x_0, y_0) e sobre s um ponto Q conhecido de coordenadas (x_1, y_1) . Transportemos a origem para este ponto Q .

Escrevendo como $(*)$, vem: $X = x_0 t$ e $Y = y_0 t$, onde teremos:
 $\begin{cases} x = x_1 + X = x_1 + x_0 t \\ y = y_1 + Y = y_1 + y_0 t \end{cases}$, que são as equações paramétricas de s .

Quadro 3

Reta s qualquer



Então, sendo $\begin{cases} x = x_1 + x_0 t \\ y = y_1 + y_0 t \end{cases}$ as equações paramétricas para uma reta qualquer, através de um tratamento, vêm:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x = x_1 + x_0 t \rightarrow t = \frac{x - x_1}{x_0} \\ y = y_1 + y_0 t \end{cases} &\Rightarrow y = y_1 + y_0 \left(\frac{x - x_1}{x_0} \right) \\ &= \underbrace{\frac{y_0}{x_0}}_{\text{coeficiente angular}} x + \underbrace{\left[y_1 - \frac{y_0}{x_0} x_1 \right]}_{\text{coeficiente linear}} \end{aligned}$$

Desta forma, podemos reestruturar o Quadro 1 (seção anterior), obtido da obra de Duval, referente aos valores e variáveis visuais para a reta dada pela equação cartesiana $y = ax + b$. O quadro 4 mostra então a adaptação feita para o quadro 1 considerando a reta agora dada por equações paramétricas.

Quadro 4

Valores e variáveis visuais para a reta no plano dada por equações paramétricas (autores)

Variáveis visuais	Unidades simbólicas correspondentes				Valores
	x_0	y_0	x_1	y_1	Característica
Casos Particulares	$= 0$		$= 0$		Reta coincide com o eixo y
		$= 0$		$= 0$	Reta coincide com o eixo x
		$= 0$		$\neq 0$	Reta paralela ao eixo x
	$= 0$		$\neq 0$		Reta paralela ao eixo y
			$= 0$		Reta passa pela origem
Sentido da inclinação	Sinais iguais				Reta Ascendente
	Sinais diferentes				Reta Descendente
Ângulo com os eixos	$ x_0 = y_0 $				Partição simétrica
	$ x_0 < y_0 $				Ângulo maior (45°)
	$ x_0 > y_0 $				Ângulo menor (45°)
Posição sobre o eixo	$y_1 - \frac{y_0}{x_0} x_1 = 0$				Corta na origem (não tem correção aditiva)
	$y_1 - \frac{y_0}{x_0} x_1 > 0$				Corta acima (acrescenta-se $y_1 - \frac{y_0 x_1}{x_0}$)
	$y_1 - \frac{y_0}{x_0} x_1 < 0$				Corta abaixo (subtrai-se $y_1 - \frac{y_0 x_1}{x_0}$)

Os exemplos a seguir confirmam os dados constituintes do quadro 4.

Exemplo2: Obter o gráfico e fazer o estudo das retas representadas pelas equações:

a) $x = t$ e $y = 2t, t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 + 1t \\ y = 0 + 2t \end{cases} \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 2 \\ x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \end{cases}$$

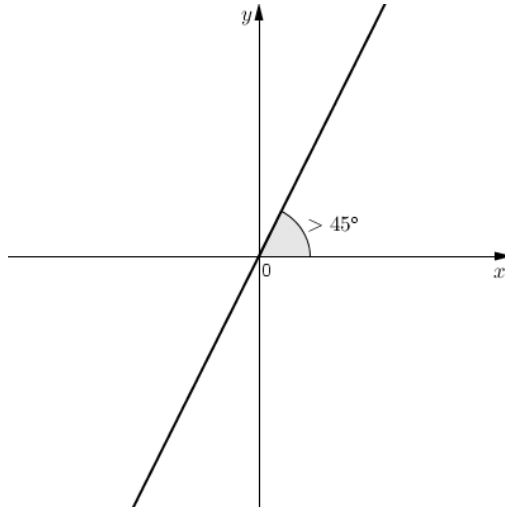
Quadro 5

Valores e variáveis visuais para $\begin{cases} x = t \\ y = 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ no plano cartesiano (autores)

Variáveis Visuais	Valores	Unidades simbólicas
Sentido da Inclinação	Ascendente	x_0 e y_0 (sinais iguais: +)
Ângulo com os eixos	Ângulo maior que 45°	$ x_0 = 1 < y_0 = 2$
Posição sobre o eixo	Corta na origem	$x_1 = y_1 = 0$ (não tem correção aditiva)

Quadro 6

Gráfico de $\begin{cases} x = t \\ y = 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ no plano cartesiano (autores)



b) $x = t$ e $y = 2t + 1, t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 + 1t \\ y = 1 + 2t \end{cases} \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 2 \\ x_1 = 0 \\ y_1 = 1 \end{cases}$$

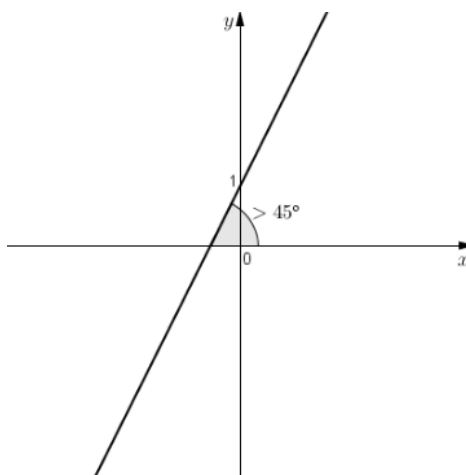
Quadro 7

Valores e variáveis visuais para $\begin{cases} x = t \\ y = 2t + 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ no plano cartesiano (autores)

Variáveis Visuais	Valores	Unidades simbólicas
Sentido da Inclinação	Ascendente	x_0 e y_0 (sinais iguais: +)
Ângulo com os eixos	Ângulo maior que 45°	$ x_0 = 1 < y_0 = 2$
Posição sobre o eixo	Corta acima da origem	$y_1 - \frac{y_0}{x_0} x_1 = 1 > 0$ (correção aditiva: +1)

Quadro 8

Gráfico de $\begin{cases} x = t \\ y = 2t + 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ no plano cartesiano (autores)



c) $x = -2t$ e $y = 3t + 1, t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x = -2t \\ y = 3t + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 - 2t \\ y = 1 + 3t \end{cases} \begin{cases} x_0 = -2 \\ y_0 = 3 \\ x_1 = 0 \\ y_1 = 1 \end{cases}$$

Quadro 9

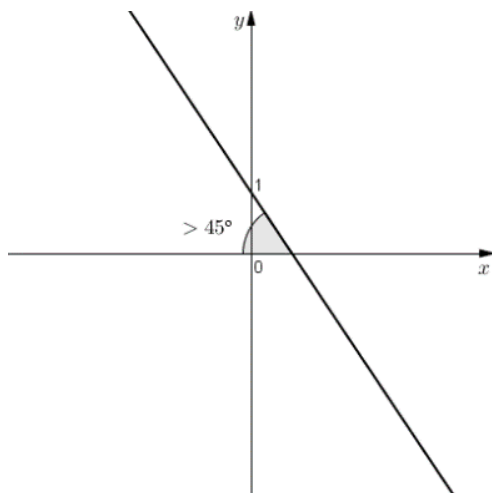
Valores e variáveis visuais para $\begin{cases} x = -2t \\ y = 3t + 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ no plano cartesiano

(autores)

Variáveis Visuais	Valores	Unidades simbólicas
Sentido da Inclinação	Descendente	x_0 e y_0 (sinais diferentes: - e +)
Ângulo com os eixos	Ângulo maior que 45°	$ x_0 = 2 < y_0 = 3$
Posição sobre o eixo	Corta acima da origem	$y_1 - \frac{y_0}{x_0} x_1 = 1 > 0$ (correção aditiva: +1)

Quadro 10

Gráfico de $\begin{cases} x = -2t \\ y = 3t + 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ no plano cartesiano (autores)



d) $x = t + 2$ e $y = -\frac{t}{2} - 4, t \in \mathbb{R}.$

$$\begin{cases} x = t + 2 \\ y = -\frac{t}{2} - 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 + 1t \\ y = -4 - \frac{1}{2}t \end{cases} \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = -\frac{1}{2} \\ x_1 = 2 \\ y_1 = -4 \end{cases}$$

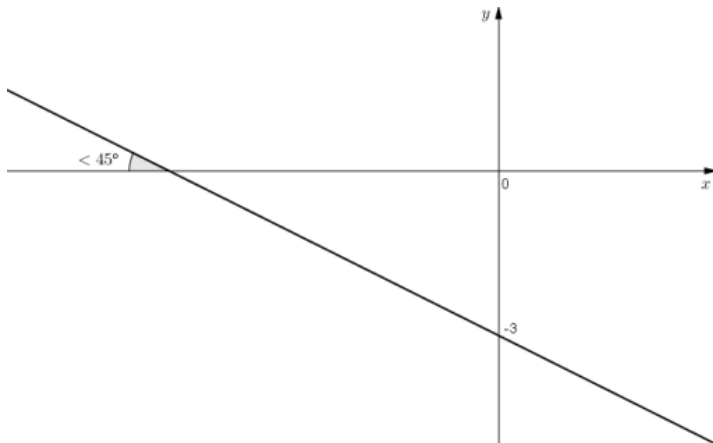
Quadro 11

Valores e variáveis visuais para $\begin{cases} x = t + 2 \\ y = -\frac{1}{2}t - 4 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ no plano cartesiano
(autores)

Variáveis Visuais	Valores	Unidades simbólicas
Sentido da Inclinação	Descendente	x_0 e y_0 (sinais diferentes: + e -)
Ângulo com os eixos	Ângulo menor que 45°	$ x_0 = 1 > y_0 = \frac{1}{2}$
Posição sobre o eixo	Corta abaixo da origem	$y_1 - \frac{y_0}{x_0}x_1 = -3 < 0$ (correção aditiva: - 3)

Quadro 12

Gráfico de $\begin{cases} x = t + 2 \\ y = -\frac{1}{2}t - 4 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ no plano cartesiano (autores)



e) $x = -7 - 10t$ e $y = 1 + 10t, t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x = -7 - 10t \\ y = 1 + 10t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = -10 \\ y_0 = 10 \\ x_1 = -7 \\ y_1 = 1 \end{cases}$$

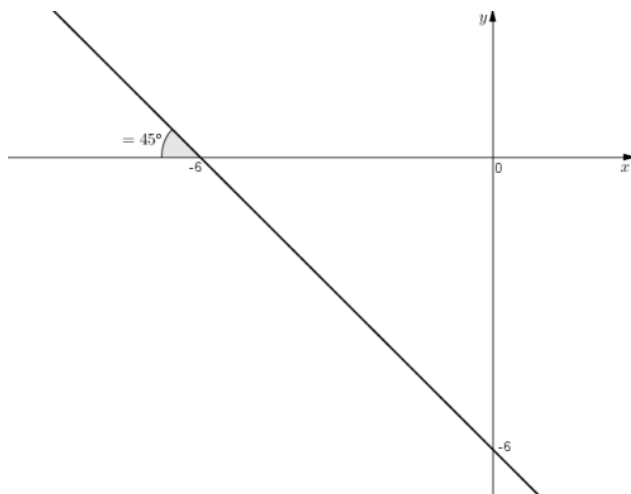
Quadro 13

Valores e variáveis visuais para $\begin{cases} x = -7 - 10t \\ y = 1 + 10t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ no plano cartesiano (autores)

Variáveis Visuais	Valores	Unidades simbólicas
Sentido da Inclinação	Descendente	x_0 e y_0 (sinais diferentes: + e -)
Ângulo com os eixos	Partição simétrica (=45°)	$ x_0 = y_0 = 10$
Posição sobre o eixo	Corta abaixo da origem	$y_1 - \frac{y_0}{x_0}x_1 = -6 < 0$ (correção aditiva: - 6)

Quadro 14

Gráfico de $\begin{cases} x = -7 - 10t \\ y = 1 + 10t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ no plano cartesiano (autores)



f) $x = 3 - 3t$ e $y = 2 - 2t, t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x = 3 - 3t \\ y = 2 - 2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = -3 \\ y_0 = -2 \\ x_1 = 3 \\ y_1 = 2 \end{cases}$$

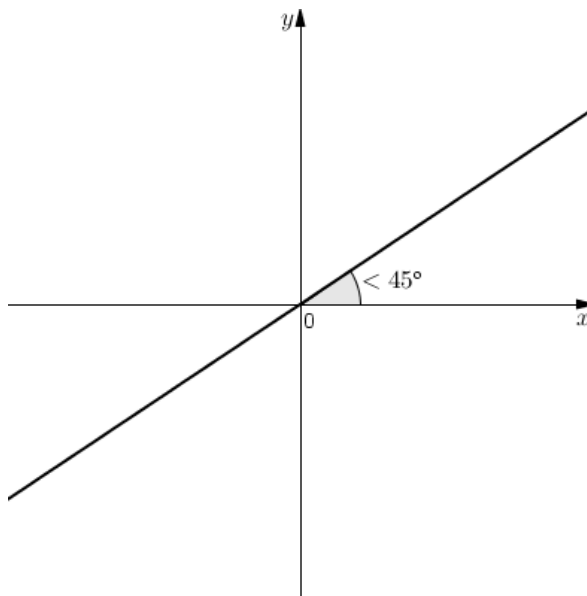
Quadro 15

Valores e variáveis visuais para $\begin{cases} x = 3 - 3t \\ y = 2 - 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ no plano cartesiano (autores)

Variáveis Visuais	Valores	Unidades simbólicas
Sentido da Inclinação	Ascendente	x_0 e y_0 (sinais iguais: - e -)
Ângulo com os eixos	Ângulo menor que 45°	$ x_0 = 3 > y_0 = 2$
Posição sobre o eixo	Corta na origem	$y_1 - \frac{y_0}{x_0} x_1 = 0$

Quadro 16

Gráfico de $\begin{cases} x = 3 - 3t \\ y = 2 - 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ no plano cartesiano (autores)

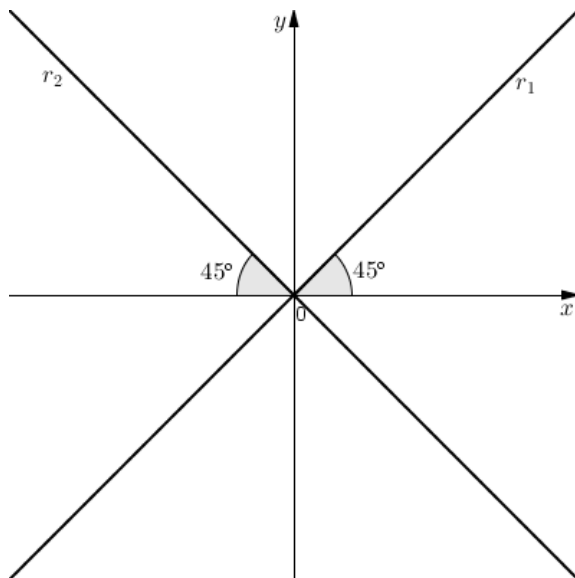


Complementando o trabalho de Duval em relação ao estudo da reta sob a ótica da interpretação global no que tange a translação de retas no plano, temos:

- 1º. A reta r_1 dada pelas equações paramétricas $\begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ e a reta r_2 dada por $\begin{cases} x = -t \\ y = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ representam, no plano cartesiano, as bissetrizes dos quadrantes ímpares e pares, respectivamente, como pode ser observado na figura 9.

Quadro 17

Gráfico de $\begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ e $\begin{cases} x = -t \\ y = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ no plano cartesiano (autores)



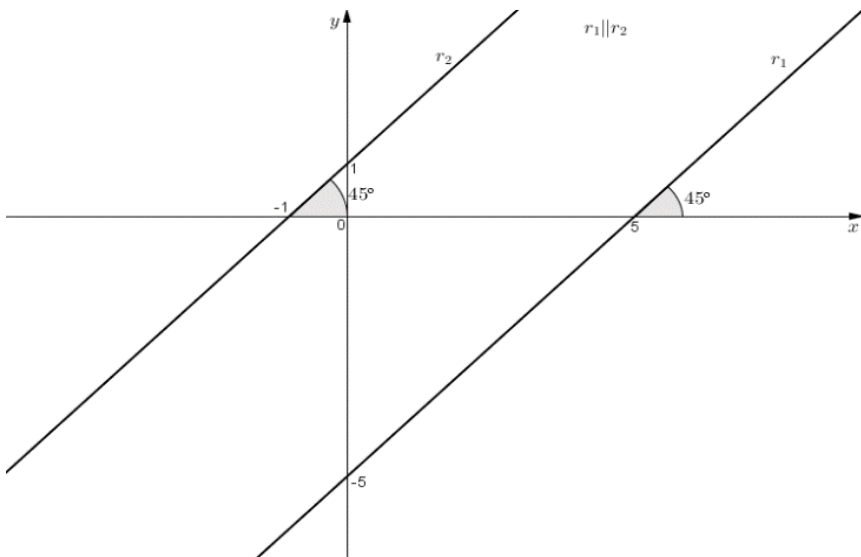
- 2º. Seja a reta r_1 dada pelas equações paramétricas $\begin{cases} x = x_1 + x_0 t \\ y = y_1 + y_0 t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ e a reta r_2 dada por $\begin{cases} x = x_3 + x_2 t \\ y = y_3 + y_2 t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$. Dizemos que r_1 é paralela a r_2 somente quando a igualdade $y_0 x_2 = x_0 y_2$ é verificada. Por exemplo, as retas dadas pelas equações paramétricas $\begin{cases} x = 3 - t \\ y = -2 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ e $\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 4 - 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ são retas paralelas, pois:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x = 3 - t \\ y = -2 - t \end{cases} &\rightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ y_0 = -1 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 4 - 2t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_2 = -2 \\ y_2 = -2 \end{cases} \Rightarrow \\ &\underbrace{(-1)(-2) = (-1)(-2)}_{y_0 x_2 = x_0 y_2} \end{aligned}$$

No Quadro 18 você pode visualizar graficamente o que acabamos de expor, onde pode ser percebido que r_2 corresponde a uma translação vertical de r_1 em 6 unidades para cima, o que caracteriza que as duas terão a mesma variável visual corresponde ao ângulo entre elas e o eixo dos x (eixo das abscissas).

Quadro 18

Paralelismo entre as retas $\begin{cases} x = 3 - t \\ y = -2 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ e $\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 4 - 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$
(autores)



- 3º. No ponto onde a reta intercepta o eixo das abscissas temos que a ordenada é nula, ou seja, $y = 0$. A abscissa deste ponto de intersecção da reta com o eixo dos x pode ser obtida pelo “tratamento”:

$$\begin{cases} x = x_1 + x_0 t \\ y = y_1 + y_0 t \rightarrow 0 = y_1 + y_0 t \rightarrow t = -\frac{y_1}{y_0} \Rightarrow x = x_1 + x_0 \left(-\frac{y_1}{y_0}\right) \\ \Rightarrow x = x_1 - \frac{x_0}{y_0} y_1 \end{cases}$$

No caso do exemplo das retas dadas pelas equações paramétricas

$$\begin{cases} x = 3 - t \\ y = -2 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \text{ e } \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 4 - 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}, \text{ temos:}$$

$$\begin{cases} x = 3 - t \\ y = -2 - t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ y_0 = -1 \\ x_1 = 3 \\ y_1 = -2 \end{cases} \Rightarrow x = 3 - \frac{(-1)}{(-1)}(-2) = 5 \text{ [Verifique na}$$

figura 3.15]

e

$$\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 4 - 2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = -2 \\ y_0 = -2 \\ x_1 = 3 \\ y_1 = 4 \end{cases} \Rightarrow x = 3 - \frac{(-2)}{(-2)}(4) = -1 \text{ [Verifique na}$$

figura 3.15]

Observe que, neste caso, ocorreu um deslocamento horizontal da reta $\begin{cases} x = 3 - t \\ y = -2 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ em 6 unidades para a esquerda, pois afinal, está garantido o paralelismo como já comentado acima.

O estudo que acabamos de fazer em relação ao objeto matemático “reta no plano cartesiano” corresponde a uma adaptação, ou seja, uma

complementação do estudo realizado por Raymond Duval sobre o estudo do mesmo objeto, conforme apresentado anteriormente. A diferença está no fato de que Duval considerou retas dadas por equações cartesianas e aqui estendemos para as retas dadas por equações paramétricas.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Fizemos um detalhamento resumido sobre o esboço de retas que averiguaram as correspondências entre as variações visuais nos gráficos e as alterações significativas na escrita algébrica da relação por meio da chamada ***interpretação global de propriedades figurais***, preconizada por Raymond Duval (1988).

Considerando que a equação de uma reta pode também ser apresentada através de equações paramétricas, fizemos uma análise criteriosa sobre as variações visuais e suas correspondentes variações algébricas.

A análise realizada respondeu ao nosso problema ao constarmos que a ***interpretação global de propriedades figurais***, constante na Teoria dos Registros de Representação Semiótica é válida também para retas parametrizadas.

Ao discutirmos as conversões estruturadas por Duval (2009) para o estudo da reta, verificamos que as unidades básicas (simbólicas e gráficas)

podem também ser consideradas ao interpretarmos globalmente o gráfico de uma reta dada por uma equação paramétrica.

Assim, acabamos fazendo uma complementação do estudo realizado por Raymond Duval sobre o estudo da reta, visto que ao tratarmos as retas parametrizadas, os coeficientes algébricos constantes nas equações não são os mesmos presentes nas equações cartesianas.

Um fator importante a ser considerado é a constatação de que para esboçarmos o gráfico de retas dadas por equações paramétricas não precisamos utilizar o procedimento por pontos, mas sim mantermos foco no uso de operações em um dos registros verificando as modificações no outro, no caso, algébrico e gráfico, ou seja, estar atento às relações entre as variáveis visuais da representação gráfica e as unidades simbólicas na expressão algébrica.

Por fim, deixamos para reflexão: Como efetuar um estudo a respeito de outras curvas parametrizadas, como por exemplo, as cônicas (parábola, circunferência, hipérbole e elipse), lembrando sempre que tal estudo pode ser de extrema importância, principalmente quando a curva representa a trajetória do movimento de uma partícula no plano?

Na dissertação de Mestrado intitulada como “A interpretação global de propriedades figurais no esboço de curvas dadas por equações paramétricas” (Martins, 2016), é feito o estudo da interpretação global para as parábolas representadas por equações paramétricas, deixando a

descrição dos dados e a análise destes à luz do quadro teórico, que pode ser aplicado às demais cônicas.

REFERÊNCIAS

- Duval, R. (1988). Graphiques et équations: L'articulation de deux registres. *Annalles de Didactiques et de Sciences Cognitives*, v1, p.235-253.
- Duval, R. (2003). Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: *Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica*. Org. Sílvia Dias Alcântara Machado. Campinas: Papirus.
- Duval, R. (2009). *Semiósis e Pensamento Humano: Registros semióticos e aprendizagens intelectuais*. Fascículo I. Tradução de Myriam Vega Restrepo. Santiago de Cali: Universidade del Valle – Instituto de Educación y Pedagogía.
- Duval, R. (2011a) Gráficos e equações: a articulação de dois registros. *REVEMAT* (Trad. de M. T. Moretti), 6 (2), 96-112. <https://doi.org/10.5007/1981-1322.2011v6n2p96>.
- Duval, R. (2011b). *Ver e ensinar a matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar os registros de representações semióticas*. Organização Tânia M. M. Campos. Tradução Marlene Alves Dias. São Paulo: Proem.
- Martins, M.H. S. & Pereira, R. (2010). Cálculo III e IV. Florianópolis: UFSC/EAD/CED/CFM.
- Moretti, M. T. (2003). *A translação como recurso no esboço de curvas por meio da interpretação global de propriedades figurais*. In *Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica*. Org. Sílvia Dias Alcântara Machado. Campinas: Papirus.

CAPÍTULO V

O ESBOÇO DE CURVAS DE FUNÇÕES MODULARES LINEARES A PARTIR DA INTERPRETAÇÃO GLOBAL FIGURAL

Lucia Menoncini
Méricles Thadeu Moretti

INTRODUÇÃO

A história da Matemática nos mostra que por um longo tempo a Geometria e a Álgebra se desenvolveram de forma independentes e desarticuladas. Somente no século XVIII, com os trabalhos de René Descartes e Pierre de Fermat, foi possível estabelecer conexões entre estas subáreas da matemática, as quais impulsionaram o surgimento de uma nova geometria, conhecida como Geometria Analítica (Boyer & Merzbach (2012); Eves (2011)).

A Geometria Analítica possibilitou explorar propriedades geométricas de curvas por meio de métodos algébricos. Mais especificamente, ao criar o Sistema de Coordenadas Cartesianas, Descartes mostrou que os pontos de um plano cartesiano poderiam ser escritos como pares ordenados e que o esboço de curvas poderia ser descrito por equações algébricas. Isso permitiu analisar as propriedades de curvas a partir do estudo das propriedades algébricas das equações correspondentes. Desta forma, o esboço de curvas passou a ser abordado de diferentes formas, por

representações geométrica e algébrica, abrindo espaço à exploração e articulação entre a Geometria e a Álgebra.

De modo geral, o esboço de curvas está associado às funções. No ensino, é uma prática comum introduzir funções partindo-se da expressão algébrica para posteriormente esboçar a curva, dando a falsa impressão de que o gráfico é uma consequência da tal expressão. Há que se destacar que a expressão algébrica e o gráfico representam o mesmo objeto matemático denominado *funções* e não podem ser confundidos com o próprio objeto que é um ente abstrato. Também é comum utilizar a abordagem ponto a ponto para construir o gráfico, em que os pares ordenados ficam associados a pontos no plano cartesiano e a curva é o resultado da ligação entre esses pontos. Tal abordagem tende para uma visão pontual e local da função, não favorecendo a articulação entre as representações algébrica e gráfica e por conta disso podendo dificultar o reconhecimento e a distinção das duas formas que representam o mesmo objeto matemático.

Neste trabalho buscamos mostrar que o estudo de funções pode ser introduzido a partir da representação gráfica, que enfatiza os aspectos visuais da curva, em contraposição àquela forma tradicional e comum que considera a representação algébrica como ponto de partida. Para tal, recorreremos à abordagem de Interpretação Global de Propriedades Figurais a qual permite que sejam identificadas as variáveis visuais pertinentes e sejam estabelecidas associações destas variáveis com as unidades algébricas.

Em particular, dentre os diversos tipos de funções que poderiam ser exploradas, consideramos as funções modulares lineares, por entender que um estudo similar poderia ocorrer com os demais tipos de funções. Assim, propomos explicitar e fortalecer a articulação entre os registros gráfico e algébrico, contribuindo para a compreensão do conceito de função modular linear.

ABORDAGEM DE INTERPRETAÇÃO GLOBAL DE PROPRIEDADES FIGURAIS

Segundo Duval (2011), na abordagem ponto a ponto existe uma forte associação entre pontos e pares ordenados, uma vez que os eixos graduados são referências e sobre eles são marcados pontos que correspondem a pares ordenados. Tal abordagem é uma prática utilizada quando parte-se da representação algébrica para construir o gráfico. Em sentido inverso, em que se busca a expressão algébrica da função, essa prática é quase inoperante, pois mesmo que haja “congruência semântica entre um par ordenado e a sua representação cartesiana, o mesmo não se pode dizer de um conjunto de pontos no plano cartesiano e uma regra matemática a ele equivalente” (Corrêa & Moretti, 2014, p. 43). Desta forma, a abordagem ponto a ponto dificulta a percepção da articulação entre os registros, especialmente quando a representação gráfica é o registro de partida.

Ainda neste tipo de abordagem, a construção do gráfico se resume à marcação de determinados pontos no plano cartesiano e o esboço da curva é entendido como uma simples junção de pontos, oriundos da aplicação de regras de codificação. Contudo, ela é adequada ao estudo de funções

(especialmente das funções polinomiais do primeiro e segundo grau) no qual se faz necessária uma leitura pontual, como encontrar pontos de intersecções, pontos de máximos e mínimos, conforme destaca Duval (2011).

Em contraste com a abordagem ponto a ponto, Duval (2011) enuncia a abordagem de interpretação global de propriedades figurais, em que o conjunto traçado/eixos forma uma imagem que representa um objeto descrito pela expressão algébrica. Nela é possível compreender que o gráfico e a expressão algébrica estão articulados entre si, uma vez que as modificações feitas num registro podem ser visualizadas e reconhecidas no outro.

O olhar pontual oriundo da abordagem ponto a ponto cede espaço para um olhar mais amplo e geral da curva. Neste sentido, Duval (2011, p. 99, grifos do autor) destaca que **“não estamos mais na presença da associação “um ponto – um par de números”, mas na presença da associação “variável visual de representação – unidade significativa da expressão algébrica”**. Isso implica que para além da observação de pontos específicos numa curva é preciso uma interpretação global, como o nome já sugere, em que as propriedades da curva sejam destacadas, analisadas e correlacionadas com a escrita algébrica. Desta forma, é possível identificar alterações conjuntas do gráfico e da expressão algébrica e estabelecer correspondências entre as variáveis visuais da representação gráfica e as unidades significativas da expressão algébrica.

Estabelecer correspondências entre registros e perceber como eles estão articulados depende da operação cognitiva denominada conversão. A conversão possibilita o trânsito entre os registros gráfico e algébrico de modo que a sua rapidez e espontaneidade implicará na coordenação dos registros, que por sua vez, conduzirá à compreensão integral do conceito de função modular, de acordo com Duval (2012).

No ensino, as conversões acontecem com maior intensidade num único sentido: partindo da expressão algébrica para chegar ao gráfico, dando a impressão de haver certa relação de dependência entre as representações, como se a segunda estivesse subordinada à primeira. As razões que levam a priorizar esse sentido de conversão podem estar atreladas à dificuldade da análise simultânea das propriedades visuais e algébricas das funções, visto que a maioria das funções possuem alto grau de complexidade. Para realizar a conversão em sentido inverso, tendo como ponto de partida o registro gráfico, é necessária a abordagem de interpretação global de propriedades figurais. Mais do que identificar as variáveis visuais gráficas e as unidades algébricas significativas, a interpretação global permite que as correspondências entre os registros gráfico e algébrico sejam estabelecidas e coordenadas.

CORRESPONDÊNCIAS ENTRE AS PROPRIEDADES DA CURVA E A EXPRESSÃO ALGÉBRICA

As funções são objetos matemáticos importantes porque modelam fenômenos da natureza e das ciências, além de descreverem o comportamento de partes da realidade e com certa precisão. A área de uma elipse, a variação da posição de um objeto em relação ao tempo ou o trabalho realizado por uma força, são alguns exemplos de fenômenos que podem ser expressos por meio de funções.

As funções são foco de estudos ao longo dos tempos. Contudo, nos últimos anos, pesquisas têm dado maior atenção ao esboço de curvas de funções, especialmente a partir dos trabalhos de Duval sobre o procedimento de interpretação global de propriedades figurais. Nesta perspectiva, destacamos os trabalhos de Menoncini e Moretti (2017), Corrêa e Moretti (2014), Moretti e Luiz (2010), Luiz (2010), Silva (2008), Moretti et al. (2008), Moretti (2003).

Com base no trabalho dos autores supracitados e amparados pela proposta de Duval (2012) acerca da abordagem de interpretação global figural, buscamos articular as representações gráfica e algébrica da função modular linear, partindo da visualização do traçado da curva, para então apresentar a expressão algébrica. Para isso, propomos a realização de três etapas, enunciadas a seguir:

Etapa I – visualização de esboços de curva de funções modulares lineares e identificação das variáveis visuais e de seus valores;

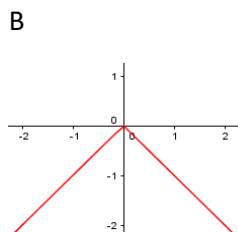
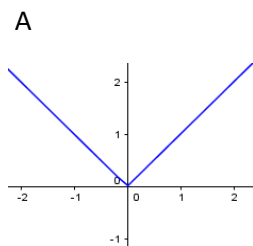
Etapa II – associação das variáveis visuais às unidades algébricas significativas;

Etapa III – descrição geral das características da curva e estabelecimento de correspondências entre as unidades significativas algébricas e as unidades visuais gráficas.

A etapa I consiste em visualizar esboços de curvas de funções modulares lineares e identificar as variáveis visuais pertinentes e seus respectivos valores, sem a preocupação com a representação algébrica. Vejamos alguns esboços conforme Figuras 1 a 4.

Figura 1

Variável visual **Sentido do traçado** e seus respectivos valores (Autores)



Variáveis visuais:
Sentido do traçado

Valores das variáveis visuais:
A - O traçado está voltado para cima
B - O traçado está voltado para baixo

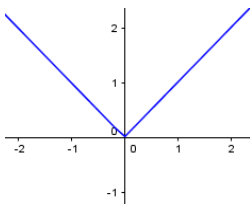
Na Figura 1 identificamos a variável visual *sentido do traçado* que possui apenas dois valores visuais, ou seja, duas possibilidades de traçar a curva: para cima ou para baixo.

As Figuras 2, 3 e 4, abaixo, exploram as variáveis visuais e seus respectivos valores considerando-se o sentido do traçado voltado para cima. Contudo, de forma análoga poderíamos explorar a curva voltada para baixo.

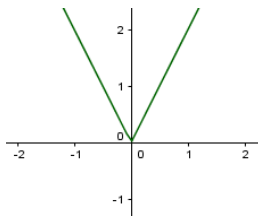
Figura 2

*Variável visual **Ângulo do traçado com os eixos** e seus valores (Autores)*

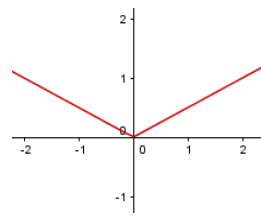
A



B



C



Variáveis visuais:

Ângulos do traçado com os eixos

Valores das variáveis visuais:

A - Repartição simétrica dos quadrantes

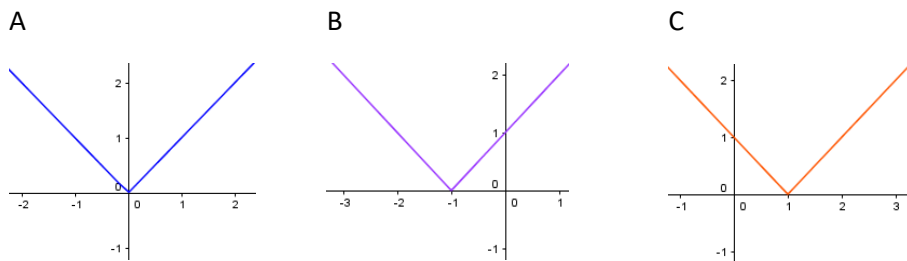
B - O ângulo com o eixo horizontal é maior que o ângulo com o eixo vertical

C - O ângulo com o eixo horizontal é menor que o ângulo com o eixo vertical

A Figura 2 mostra que o traçado da curva possui ângulos distintos em relação aos eixos coordenados. Na Figura 2A, o traçado forma um ângulo de 45° com os eixos, enquanto que nas Figuras 2B e 2C os traçados em relação eixo horizontal formam um ângulo maior e menor que 45° , respectivamente.

Figura 3

Variável visual **Posição do traçado em relação à origem do eixo horizontal** e seus valores (Autores)



Variáveis visuais:

Posição do traçado em relação à origem do eixo horizontal

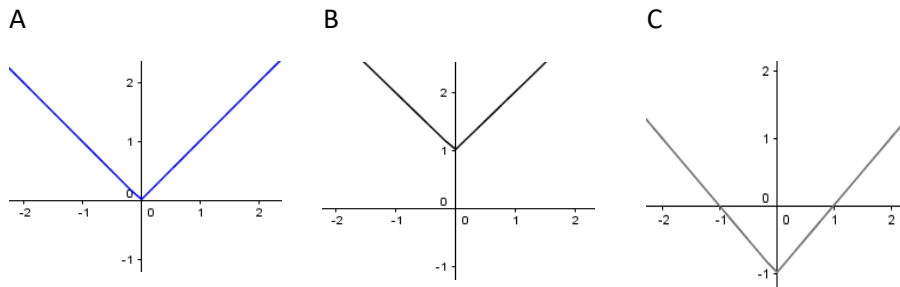
Valores das variáveis visuais:

- A - O traçado passa pela **origem**
- B - O traçado se desloca para a **esquerda da origem**
- C - O traçado se desloca para a **direita da origem**

Esta figura explicita a posição do traçado em relação ao eixo horizontal. Aqui, o traçado pode passar pela origem ou se deslocar para a esquerda ou para a direita, mas permanecendo sobre o eixo horizontal.

Figura 4

Variável visual **Posição do traçado em relação à origem do eixo vertical** e seus valores (Autores)



Variáveis visuais:

Posição do traçado em relação à origem do eixo vertical

Valores das variáveis visuais:

A - O traçado passa pela **origem**

B - O traçado se desloca para **cima da origem**

C - O traçado se desloca para **baixo da origem**

Na Figura 4, a curva pode passar pela origem ou se deslocar para cima ou para baixo em relação à origem do eixo vertical.

Em síntese, nas Figuras 1 a 4 são identificadas quatro variáveis visuais pertinentes: o *sentido do traçado*, os *ângulos do traçado com os eixos*, a *posição do traçado em relação à origem do eixo horizontal* e a *posição do traçado em relação à origem do eixo vertical*.

Na etapa II apresentamos a representação canônica da função modular linear no registro algébrico e associamos as quatro variáveis visuais identificadas na Etapa I às unidades algébricas significativas. As unidades algébricas significativas são os termos ou coeficientes reais a , b , c , k , com $b \neq 0$, $k \neq 0$, que aparecem na representação canônica $f(x) = (\pm a) + b|kx - (\pm c)|$. A função $f(x) = |x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$, que associa cada x real a um único valor $|x|$ é chamada *função base* e a partir dela formaremos as demais funções modulares lineares $f(x) = (\pm a) + b|kx - (\pm c)|$, modificando-se os termos a , b , c , k .

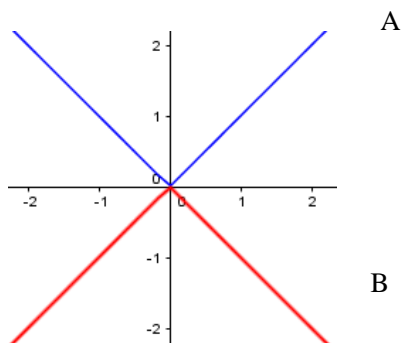
Conhecida a representação gráfica da função base (Etapa I) e a representação algébrica das funções modulares lineares, vamos executar a etapa II (Figura 5) que estabelece as associações entre estas duas formas de representação, conforme propõe Duval.

Figura 5

Associação das variáveis visuais às unidades algébricas significativas para

$f(x) - (\pm a) = b \cdot |k \cdot x - (\pm c)|$ (Autores)

5.1 Representação gráfica de $f(x) = b \cdot |x|$ Representação algébrica de $f(x) = b \cdot |x|$



A - $f(x) = |x|$, com $b = 1$

B - $f(x) = -|x|$, com $b = -1$

Variáveis visuais:

Sentido do traçado

Valores das variáveis visuais:

do A - O traçado está voltado para **cima**

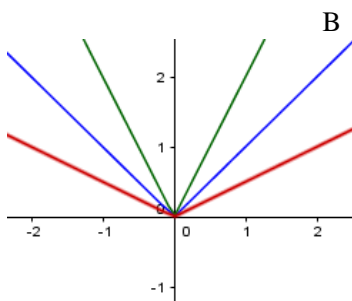
B - O traçado está voltado para **baixo**

Unidade algébrica significativa:

A - Valor de $b > 0$

B - Valor de $b < 0$

5.2 Representação gráfica de $f(x) = |k \cdot x|$ Representação algébrica de $f(x) = |k \cdot x|$



A - $f(x) = |x|$, com $k = 1$

B - $f(x) = |2x|$, com $k = 2$

C - $f(x) = |\frac{1}{2}x|$, com $k = \frac{1}{2}$

Variáveis visuais:

Ângulos do traçado com os eixos

Valores das variáveis visuais:

A - Repartição **simétrica** dos quadrantes

B - Ângulo com o eixo horizontal é **maior** que o ângulo com o eixo vertical

C - Ângulo com o eixo horizontal é **menor** que o ângulo com o eixo vertical

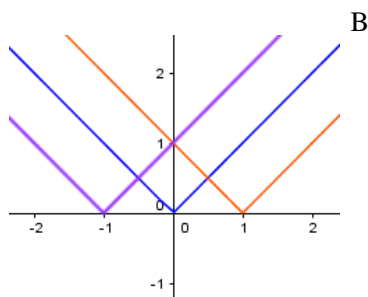
Unidade algébrica significativa:

A- Coeficiente angular $k = 1$

B- Coeficiente angular $k > 1$

C- Coeficiente angular $k < 1$

5.3 Representação gráfica de $f(x) = |x - (\pm c)|$ Representação algébrica de $f(x) = |x - (\pm c)|$



A - $f(x) = |x|$, com $c = 0$

C - $f(x) = |x - (-1)|$, com $c = -1$

C - $f(x) = |x - (1)|$, com $c = 1$

Variáveis visuais:

Posição do traçado em relação à origem do eixo horizontal

Valores das variáveis visuais:

A- O traçado passa pela **origem**

B- O traçado se desloca para a **esquerda** em relação à origem

C- O traçado se desloca para a **direita** em relação à origem

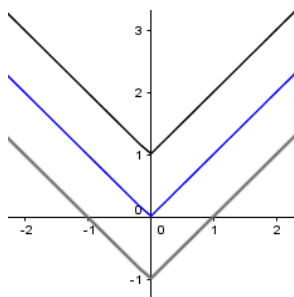
Unidade algébrica significativa:

A- **Ausência** da constante **c**

B- Presença da constante **negativa c**

C- Presença da constante **positiva c**

5.4 Representação gráfica de $f(x) = (\pm a)|x|$ – Representação algébrica de $f(x) = (\pm a)|x|$



B

A - $f(x) = |x|$, com $a = 0$

A

B - $f(x) - (1) = |x|$, com $a =$

C

1

C - $f(x) - (-1) = |x|$, com $a =$

-1

Variáveis visuais:

Posição do traçado em relação à origem do eixo vertical

Valores das variáveis visuais:

- A- O traçado passa pela **origem**
- B- O traçado se desloca para **cima**
- C- O traçado se desloca para **baixo**

Unidade algébrica significativa:

- A – **Ausência** da constante a
- B – Presença da constante **positiva a**
- C – Presença da constante **negativa a**

A Figura 5 mostra como as variáveis visuais estão associadas às unidades algébricas significativas. Assim, qualquer alteração nas unidades algébricas acarretará em alteração no esboço da curva e vice-versa. Para exemplificar, seja a função $f(x) = 2|x|$, com $b = 2$, em que o traçado está voltado para cima. Se alterarmos a unidade algébrica para $b = -2$, teremos $f(x) = -2|x|$ e o traçado da curva também será alterado, ficando voltado para baixo (Figura 5.1).

Na etapa III descrevemos as características gerais das curvas de funções modulares lineares de modo a estabelecer as correspondências entre as unidades algébricas e as variáveis visuais (Quadro 1).

Quadro 1

Características das curvas da forma $f(x) = (\pm a) = b|kx - (\pm c)|$ (Autores)

Coefficiente	Unidades significativas (expressão algébrica)	Variáveis visuais (curva)
<i>a</i>	Para $a = 0$: Ausência de valor numérico	Traçado corta o eixo y na origem
	Para $a > 0$: Ausência do sinal (+); Presença de valor numérico (+)	Deslocamento no eixo y de a unidades para cima em comparação com a função base
	Para $a < 0$: Presença de valor numérico (-)	Deslocamento no eixo y de a unidades para baixo em comparação com a função base
<i>b</i>	Para $b > 0$: Ausência do sinal (+); Presença de valor numérico sempre que $b \neq 1$	Traçado voltado para cima
	Para $b < 0$: Presença do sinal (-); Presença de valor numérico sempre que $b \neq -1$	Traçado voltado para baixo
<i>k</i>	Para $k = 1$ ou $k = -1$: Presença de valor numérico sempre que $k \neq \pm 1$; Ausência do sinal (+) ou presença de sinal (-)	O traçado forma ângulos simétricos com os eixos x e y (45°)

k	Para $k > 1$ ou $k < -1$: Presença de valor numérico; Ausência do sinal (+) ou presença de sinal (-)	O ângulo formado com o eixo x é maior que o ângulo formado com o eixo y
	Para $-1 < k < 1$: Presença de valor numérico; Ausência do sinal (+) ou presença de sinal (-)	O ângulo formado com o eixo x é menor que o ângulo formado com o eixo y
c	Para $c = 0$: Ausência de valor para a constante c	Traçado corta o eixo y na origem
	Para $c > 0$: Ausência do sinal (+); Presença de valor numérico (+)	Deslocamento no eixo x de c unidades para a direita em comparação com a função base
	Para $c < 0$: Presença de valor numérico (-)	Deslocamento no eixo x de c unidades para a esquerda em comparação com a função base

De acordo com o Quadro 1, a expressão algébrica escrita na forma canônica $f(x) - (\pm a) = b|kx - (\pm c)|$ fornece informações relevantes acerca do comportamento da curva. Os coeficientes **b** e **k** estão relacionados, respectivamente, à concavidade e ao ângulo do traçado, enquanto que os termos constantes **a** e **c** indicam as direções e os sentidos dos deslocamentos (translações). Os valores de **c** e **k** estão interligados de forma que o quociente entre eles determina a coordenada abscissa do vértice. Resumidamente, temos:

- a) Coeficiente ***b*** (indica a concavidade do traçado): o traçado está voltado para cima (se $b > 0$) ou para baixo (se $b < 0$);
- b) Coeficiente ***k*** (indica o ângulo de abertura do traçado): ângulo simétrico (se $k = 1$), ângulo com o eixo horizontal é maior (se $k > 1$), ângulo com o eixo horizontal é menor (se $k < 1$);
- c) Termo constante ***a*** (indica o deslocamento do traçado no eixo *y*): o traçado se desloca ***a*** unidades para cima (se $a > 0$) ou para baixo (se $a < 0$);
- d) Termo constante ***c*** (indica o deslocamento no eixo *x*): o traçado se desloca ***c*** unidades para a direita (se $c > 0$) ou para a esquerda (se $c < 0$);
- e) O vértice $V = (x_v, y_v)$ da curva possui coordenadas $x_v = \frac{c}{k}$ e $y_v = a$.

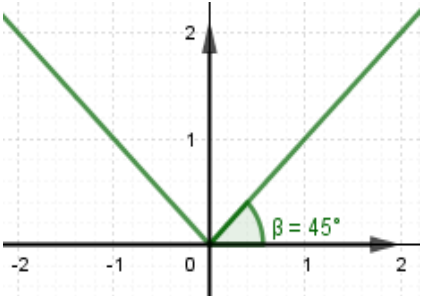
O Quadro 1 explicita as correspondências possíveis, em duplo sentido, entre os registros gráfico e algébrico das funções modulares lineares. Ao mesmo tempo que é possível associar as alterações na expressão algébrica aos resultados gráficos, é também possível, a partir da visualização e das mudanças realizadas no gráfico, reconhecer as mudanças nos termos algébricos correspondentes. É esta correspondência biunívoca que fortalece a relação existente entre as duas formas de representação, explicitando que ambas se complementam e representam o mesmo objeto matemático, a saber, a função modular linear.

ESBOÇANDO A CURVA DE UMA FUNÇÃO MODULAR LINEAR

Nesta seção, vamos exemplificar a construção da curva da função $f(x) - 1 = 3|x - (-2)|$ via abordagem de interpretação global figural. Partindo da função base $f(x) = |x|$, que possui os termos algébricos $a = 0$, $b = 1$, $k = 1$ e $c = 0$, serão alterados os valores destes termos para identificar o resultado destas alterações no gráfico, de modo que se perceba a articulação entre os registros de representação. Para facilitar a compreensão, podemos pensar que cada alteração na função base origina uma nova função e assim teremos uma sequência de funções f_1, f_2, \dots, f_n , como mostra a Figura 6. Tenhamos em mente a forma canônica $f(x) - (\pm a) = b|kx - (\pm c)|$.

Figura 6

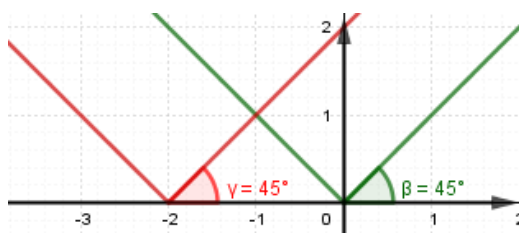
Esboço da curva de $f(x) - 1 = 3|x - (-2)|$ (Autores)

Representação algébrica	Representação gráfica
<p>Passo 1: Esboçar a curva da função base:</p> $f_1(x) = x $ <p>Como $b = 1$, então o traçado da curva se volta para cima.</p> <p>Como $k = 1$, então o traçado é simétrico em relação aos eixos, formando ângulo de 45°.</p>	

Passo 2: Acrescentar à função $f_1(x)$ a constante $c = -2$.

$$f_2(x) = |x - (-2)|$$

O valor absoluto 2 da constante c indica que a curva se desloca duas unidades, enquanto que o sinal negativo indica o sentido do deslocamento, à esquerda.

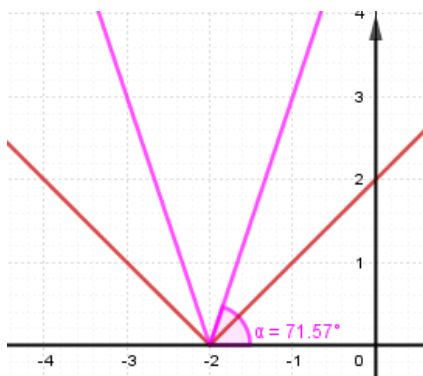


Passo 3: Multiplicar a função $f_2(x)$ por 3.

$$f_3(x) = 3|x - (-2)|$$

Ao atribuir o valor $k = 3$, altera-se o ângulo do traçado com o eixo horizontal.

Como $k > 1$, então o ângulo com o eixo x é maior que 45° .

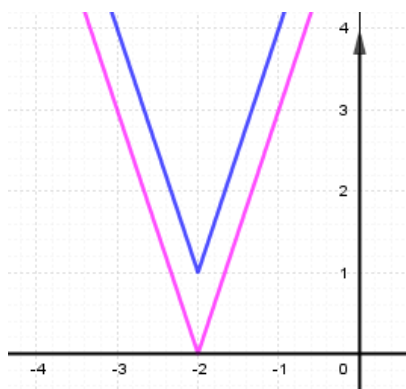


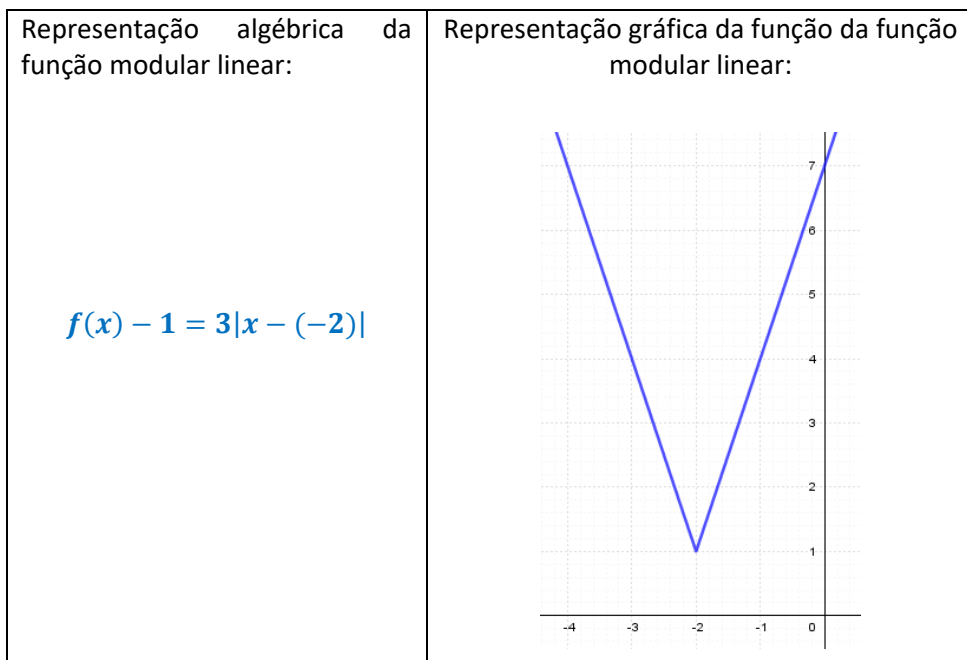
Passo 4: Acrescentar à função $f_3(x)$ a constante $a = 1$.

$$f_4(x) - 1 = 3|x - (-2)|$$

O sinal positivo da constante a indica que a curva se desloca para cima em relação à origem do eixo vertical.

O valor 1 indica o deslocamento de uma unidade.





De acordo com passos desenvolvidos na Figura 6, o esboço final da curva pode ser entendido como uma sequência de funções, em que a nova função se origina a partir de modificações nos termos algébricos da função anterior.

Observando a curva $f(x) - 1 = 3 \cdot |x - (-2)|$ percebe-se que ela intercepta o eixo y no ponto $(0,7)$ e seu vértice possui coordenadas $(-2, 1)$. Para mostrar algebricamente a interseção da curva com o eixo y , basta atribuir valor nulo para a variável x , ou seja, fazer $f(0) - 1 = 3 \cdot |0 - 2| \Rightarrow f(0) = 7$. Para verificar no registro algébrico que o vértice $V = (x_v, y_v)$ possui coordenadas $(-2, 1)$, basta fazer $x_v = \frac{c}{k} = -\frac{2}{1} = -2$ e $y_v = a = 1$.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Apesar de ser comumente adotada no ensino, a abordagem ponto a ponto pode ser considerada uma abordagem fragmentada, à medida que privilegia o olhar para um conjunto específico de pontos e o esboço de curvas é visto como a simples junção desses pontos. Esta abordagem acaba limitando o reconhecimento e a compreensão das relações entre as representações da função no registro algébrico e gráfico.

Como alternativa para o esboço de curvas de forma mais ampla e profunda, Duval (2011) apresenta a abordagem de interpretação global de propriedades figurais que permite estabelecer correspondências entre as duas formas de representação: gráfica e algébrica. Para o autor, as duas representações são igualmente importantes e necessárias para a compreensão do objeto matemático. Esta abordagem apresenta uma maneira diferente de visualizar o gráfico, que vai para além da identificação de pontos e pares ordenados. Ela recorre à interpretação das propriedades qualitativas das curvas e considera a representação gráfica no mesmo patamar de importância das representações algébricas.

Com base na abordagem de interpretação global de propriedades figurais foi possível mostrar que a função modular linear também pode ser tratada no ensino a partir do esboço de curvas e de modo a ressaltar a conexão entre duas formas de representação.

A identificação das unidades visuais e a correlação com às variáveis algébricas significativas permitiu identificar as respectivas alterações

gráficas e algébricas e assim, apontar uma linha de raciocínio que possa servir de guia para a construção do esboço de curvas, de forma mais global e para além das curvas relativas à função modular linear.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Boyer, C. B. & Merzbach, U. C. (2012). *História da matemática*. Blücher.

Corrêa, M. O. S. & Moretti, M. T. (2014). Esboçando curvas de funções a partir de suas propriedades figurais: uma análise sob a perspectiva dos registros de representação semiótica. In: C. F. Brandt & M. T. Moretti (orgs.). *As Contribuições da teoria das representações semióticas para o ensino e pesquisa na Educação Matemática* (pp. 39-65). Editora Unijuí.

Duval, R. (2011) Gráficos e equações: a articulação de dois registros. *REVEMAT* (Trad. de M. T. Moretti), 6 (2), 96-112. <https://doi.org/10.5007/1981-1322.2011v6n2p96>.

Duval, R. (2012). Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. *REVEMAT* (Trad. de M. T. Moretti), 7 (2), 266-297. <https://doi.org/10.5007/1981-1322.2012v7n2p266>.

Eves, H. W. (2011). *Introdução a história da matemática*. UNICAMP.

Luiz, L. dos S. (2010). *Esboço de curvas no ensino superior: uma proposta baseada na interpretação global das propriedades figurais e uso de tecnologias*. [Dissertação de Mestrado em Educação Científica e Tecnológica, Universidade Federal de Santa Catarina]. <http://repositorio.ufsc.br/xmlui/handle/123456789/93808>.

- Menoncini, L. & Moretti, M. T. (2017). A interpretação global figural como recurso para o esboço de curvas de funções modulares lineares. *Educação Matemática em Revista – RS, Ano 18, 1 (18)*, 126-134.
- Moretti, M. T. (2003). A translação como recurso no esboço de curvas por meio da interpretação global de propriedades figurais. In: S. D. A. Machado (org.). *Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica* (pp. 149-160). Papirus.
- Moretti, M. T., Ferraz, A. G. & Fereira, G. G. (2008). Estudo da conversão entre registros simbólico e gráfico no ensino universitário. *Quadrante – Revista de Investigação em Educação Matemática, XVII (2)*, 95-121.
- Moretti, M. T. & Luiz, L. dos S. (2010). O procedimento informático de interpretação global no esboço de curvas no ensino universitário. *Educação Matemática Pesquisa, 12 (3)*, 529-547.
- Silva, M. O. (2008). *Esboço de curvas: uma análise sob a perspectiva dos registros de representação semiótica*. [Dissertação de Mestrado em Educação Científica e Tecnológica, Universidade Federal de Santa Catarina].
<https://repositorio.ufsc.br/xmlui/handle/123456789/92026>.

CAPÍTULO VI

CAMINHO ALTERNATIVO PARA ESBOÇAR CURVAS: POSSIBILIDADE A PARTIR DA TAXA DE VARIAÇÃO DA FUNÇÃO E DA NOÇÃO DE INFINITÉSIMO

Bárbara Cristina Pasa
Méricles Thadeu Moretti
Danieli Binotto

As representações gráficas ocupam significativo espaço na vida cotidiana contemporânea, organizando dados, divulgando pesquisas, representando relações entre variáveis, possibilitando a leitura e interpretação de diversos fenômenos nas distintas áreas do conhecimento. A necessidade de ler, interpretar, compreender por meio das representações gráficas e, por conseguinte, de aprendê-las enquanto representação semiótica de um objeto matemático, as torna foco de estudos e pesquisas na área de Educação Matemática, além de ocuparem considerável espaço nas atividades de ensino estando presentes nos currículos do ensino fundamental, médio e superior. As discussões propostas neste capítulo são acerca das representações gráficas específicas de funções, ou seja, do esboço de curvas enquanto representação geométrica de uma função real de variável real.

Preocupação frequente, revelada tanto em sala de aula de ensino fundamental e médio, como em pesquisas sobre os processos de ensino e

aprendizagem do esboço de curvas é com relação à forma como este objeto matemático é trabalhado na escola refletindo diretamente nas dificuldades de aprendizagem dos estudantes. A abordagem exclusivamente por meio da junção de pontos localizados no plano cartesiano obtidos a partir da substituição de valores na expressão algébrica, nomeada por Duval (2011a) de abordagem “ponto a ponto”, quando única utilizada no ensino, impossibilita que se perceba que modificações na expressão algébrica são responsáveis por modificações no gráfico e vice-versa. Essa percepção ou identificação de modificações é característica da atividade cognitiva de conversão¹, o que, de acordo com a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval, é essencial para a aprendizagem matemática.

Segundo a teoria cognitiva de Duval um objeto matemático pode somente ser compreendido integralmente por meio de suas representações semióticas e, mais do que isso, a partir das conversões entre ao menos duas representações semióticas distintas do mesmo objeto matemático. No caso do esboço de curvas de funções de uma variável real, as representações semióticas principais e comumente utilizadas são a gráfica (plano cartesiano) e a algébrica (lei da função). Apesar de a abordagem “ponto a ponto” ser usada quase que exclusivamente nos processos de ensino aprendizagem ainda atualmente, ela limita a compreensão de características pertinentes da função, como movimento, transformação e dinamismo, além de não conduzir para as possibilidades de conversões entre registros.

¹ Operação cognitiva de transformação de representações que consiste em mudar de registro, conservando o objeto.

Levando em conta as questões supracitadas, com o objetivo de proporcionar a compreensão integral de uma curva e do fenômeno que ela representa, Duval (2011a) apresenta a *abordagem de interpretação global de propriedades figurais*, cuja premissa consiste em identificar variáveis visuais significativas ao registro de representação gráfico e unidades simbólicas significativas ao registro algébrico, articulando-os a partir de algum recurso/elemento. Esta apresentação é feita a partir da análise da função afim $y = ax + b$, utilizando os coeficientes a e b como unidades básicas simbólicas e a inclinação da reta e os ângulos com os eixos como as variáveis visuais.

Ancorados nessas ideias de Duval (2011a) e de outros autores (Moretti (2003), Silva (2008), Luiz (2010); Moretti et al. (2008); Menoncini e Moretti (2017); Martins (2017)) que buscam possibilidades para o ensino de funções por meio da abordagem de interpretação global, construímos e apresentamos um *caminho alternativo* (Pasa, 2017) para o esboço de curvas de funções específicas do ensino médio, podendo envolver o ensino superior. Este caminho perpassa a abordagem de interpretação global das propriedades figurais adotando como recurso de articulação entre unidades significativas as taxas de variação de uma função, compreendidas e calculadas por meio da noção de infinitésimos. Essa abordagem ou, como nomeado por Pasa (2017), *caminho alternativo*, pode sinalizar mudanças na cultura e prática do ensino de funções neste nível de ensino.

Para tanto, organizamos o capítulo de forma que inicialmente apresentamos a abordagem de interpretação global de propriedades

figurais, direcionando nosso olhar para as taxas de variação de uma função enquanto recurso orientador da articulação de unidades significativas básicas. Na sequência, expomos o *caminho alternativo* para esboçar e compreender curvas das funções reais polinomiais do segundo e terceiro graus e de algumas funções trigonométricas. Por fim, visando elucidar a prática do *caminho alternativo* e possibilitar discussões sobre as potencialidades e limitações do esboço de curvas nesta perspectiva, apresentamos construções de um estudante no esboço de curvas. Salientamos, que este capítulo aborda ideias apresentadas na tese de Pasa (2017) e, desta forma, as construções apresentadas fazem parte da pesquisa empírica realizada entre os anos de 2016 e 2017 da referida tese.

INTERPRETAÇÃO GLOBAL PAUTADA NA ANÁLISE DA TAXA DE VARIAÇÃO: POSSIBILIDADE MEDIANTE A NOÇÃO DE INFINITÉSIMOS

Para Duval (2004) a compreensão integral de uma função só é obtida se o estudante conhecer ao menos dois registros de representação semiótica, e mais do que isso, possuir a capacidade de realizar conversões entre eles. A *abordagem de interpretação global de propriedades figurais* (Duval, 2011a), sugerida pelo autor, perpassa a realização de uma análise das propriedades peculiares de partes constituintes da curva (Moretti et al., 2008), isto é, a identificação de variáveis visuais significativas ao registro de representação gráfico e as unidades simbólicas significativas ao registro algébrico, a fim de proporcionar as conversões necessárias. Para

exemplificar a abordagem proposta, Duval (2011a) apresenta a análise para a função afim, $y = ax + b$ destacando a importância, por exemplo, de compreender que o sentido de inclinação da reta se dá pelo coeficiente angular a .

O *caminho alternativo* proposto perpassa o sentido da abordagem sugerida por Duval (2011a), fazendo uso da compreensão de elemento do Cálculo – derivada², enquanto orientador de conversão, entretanto, isento da formalidade via limites, que é comumente utilizada no ensino superior em disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral. Os elementos/recursos para interpretação global são, então, as taxas de variação da função, as quais carregam informações valiosas sobre a função representada pela curva. Essas taxas são calculadas e compreendidas a partir da noção de infinitésimos³, não no sentido de seu rigor e formalização, e sim no de possibilitar o entendimento de variação, fundamental no esboço de curvas e sem recorrer à formalização das noções de limite e derivada.

Admitindo que as inconsistências matemáticas relacionadas à noção de infinitésimos foram superadas, o potencial didático dos infinitésimos se encontra na possibilidade de entendimento da variação de uma função,

² A derivada em um ponto de uma função $y = f(x)$ representa a taxa de variação instantânea de y em relação a x neste ponto. Geometricamente, a derivada no ponto $x = a$ de $y = f(x)$ representa a inclinação da reta tangente ao gráfico desta função no ponto $(a, f(a))$.

³ Os infinitésimos pertencem ao conjunto dos Números Hiper-Reais, que é uma extensão dos Reais que contém os infinitos e os infinitesimais. Este conjunto foi introduzido para dar rigor a uma abordagem intuitiva do Cálculo Infinitesimal. Por infinitésimos, consideraremos um número tão pequeno quanto se queira, porém, maior que zero.

característica fundamental para o esboço de curvas e compreensão da conversão entre registros de representação. Nesta perspectiva, corroboramos com Cabral e Baldino (2006) ao defenderem o uso de infinitésimos para a construção das noções iniciais de Cálculo para não matemáticos profissionais, ao afirmarem que os infinitésimos fazem parte das concepções espontâneas dos estudantes. O uso de infinitésimos torna-se, nesta perspectiva, um recurso interessante de ensino para o cálculo de taxas de variação das funções no ensino médio, oportunizando ao estudante a compreensão de variabilidade necessária para esboçar curvas e interpretar fenômenos e situações de diversas áreas do conhecimento.

Deste modo, a obtenção da taxa de variação instantânea de primeira⁴ ordem ($TVI_1(x)$) de uma função ocorre a partir da obtenção da taxa média de variação (TMV) da função para um intervalo genérico $[x, x + \Delta x]$, $TMV = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$, na qual considera-se Δx um infinitésimo.

ESBOÇO DE CURVAS: UM CAMINHO ALTERNATIVO

O emprego de elementos do Cálculo no ensino médio visando a aprendizagem de funções, conforme Ávila (1991), Duclos (1992), Rezende

⁴ $TVI(x)$ ou $TVI_1(x)$ é a taxa de variação instantânea de primeira ordem de uma função. O índice "1" é necessário quando se acrescenta às análises a ideia de variação da taxa de variação instantânea, relacionada à concavidade de uma curva e representada por $TVI_2(x)$, ou, taxa de variação instantânea de segunda ordem da função.

(2003, 2007) e Silva et al. (2013) pontuam, é desafiador, mas em contrapartida e sobretudo com elevado potencial para compreensões integrais e efetivas de conceitos matemáticos, neste caso, de variação de funções com vistas ao esboço de curvas. O *caminho alternativo* para o esboço de curvas perpassa, desta forma, a variabilidade da função obtida por meio do estudo do sinal da taxa de variação instantânea de primeira ordem ou, quando se fizer necessário, de segunda ordem ($TVI_2(x)$).

Sendo assim, as unidades básicas simbólicas identificadas são da expressão algébrica da taxa de variação de primeira ordem enquanto as unidades básicas gráficas identificadas são as relacionadas à análise da variação da curva como os intervalos de crescimento e de decrescimento e os pontos de máximo e mínimo. A taxa de variação de segunda ordem, quando necessária, possibilita concluir a respeito da concavidade e dos pontos de inflexão.



A função polinomial do segundo grau

Considerando a função real polinomial do segundo grau, $y = ax^2 + bx + c$, a taxa de variação instantânea de primeira ordem - $TVI_1(x)$, para um valor qualquer de x , na perspectiva do *caminho alternativo*, será: $TVI_1(x) = 2ax + b$. O mesmo processo é utilizado para obter $TVI_2(x) = 2a$, que no caso destas funções é desnecessária para o esboço. Em posse destas taxas de variação, são analisadas variáveis referentes à função e essenciais para a compreensão global relacionadas à

variabilidade, como crescimento, decrescimento, valor máximo e mínimo e concavidade (quadro 1).

Quadro 1

Unidades simbólicas e gráficas de uma função polinomial do segundo grau (Pasa, 2017, p. 146)

Unidades básicas simbólicas				Unidades básicas gráficas			
TVI_1	Valor de a	TVI_1	Valor de x	Reta Tangente	Concav. (TVI_2)	Ponto crítico	Esboço curva
$2ax + b$	$a > 0$	< 0	$x < -b/2a$	Decrescente	Para cima (positiva)	Mínimo absoluto em $x = -b/2a$	
		$= 0$	$x = -b/2a$	Constante			
		> 0	$x > -b/2a$	Crescente			
	$a < 0$	< 0	$x > -b/2a$	Crescente	Para baixo (negativa)	Máximo absoluto em $x = -b/2a$	
		$= 0$	$x = -b/2a$	Constante			
		> 0	$x < -b/2a$	Decrescente			

A identificação de unidades básicas simbólicas relativas à expressão algébrica da taxa de variação possibilita inferir sobre as unidades básicas gráficas que são as características da curva relativas à variabilidade, o que pode ser visualizado no quadro 1.







A função polinomial do terceiro grau

No esboço de funções reais polinomiais de terceiro grau, além da análise da $TVI_1(x)$, algumas funções requerem impreterivelmente a análise da $TVI_2(x)$, a qual é obtida através da expressão algébrica da $TVI_1(x)$, possibilitando concluir sobre a concavidade da curva. Deste modo, sendo $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, com $a \neq 0$, obtém-se $TVI_1(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ e $TVI_2(x) = 6ax + 2b$. Os quadros apresentados a seguir, apresentam o processo de esboço de curva pelo

caminho alternativo para funções polinomiais de terceiro grau baseado na $TVI_1(x)$ (quadro 2) e na $TVI_2(x)$ (quadro 3).

Quadro 2

Esboço de curvas de funções reais polinomiais do terceiro grau a partir da análise da $TVI_1(x)$ (Pasa, 2017, p. 149)

Unidades básicas simbólicas				Unidades básicas gráficas			
TVI_1	Coef. a	NR*	TVI_1	Valores de x	RT**	Esboço curva	Pontos críticos
$3ax^2 + 2bx + c$	> 0	2	< 0	$\frac{-b - \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a} < x < \frac{-b + \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}$	Decres		Máx. e mín. relativos ($TVI_1(x) = 0$).
			$= 0$	$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}$	Const		Ponto Inflexão ($TVI_2(x) = 0$)
			> 0	$x < \frac{-b - \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a} e x > \frac{-b + \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}$	Cresc		
		1	$= 0$	$x = \frac{-b}{3a}$	Const		Ponto inflexão ($TVI_2(x) = 0$)
			> 0	$x < \frac{-b}{3a} e x > \frac{-b}{3a}$	Cresc		
		0	> 0	$x \in \mathbb{R}$ Esboço a partir da análise da $TVI_2(x)$ - tabela 3.	Cresc		Ponto inflexão ($TVI_2(x) = 0$)
	< 0	2	< 0	$x < \frac{-b - \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a} e x > \frac{-b + \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}$	Decres		Máx. e mín. relativos ($TVI_1(x) = 0$).
			$= 0$	$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}$	Const		Ponto inflexão ($TVI_2(x) = 0$)
			> 0	$\frac{-b - \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a} < x < \frac{-b + \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}$	Cresc		
		1	$= 0$	$x = \frac{-b}{3a}$	Const		Ponto inflexão ($TVI_2(x) = 0$)
< 0			$x < \frac{-b}{3a} e x > \frac{-b}{3a}$	Decres			
0		< 0	$x \in \mathbb{R}$ Esboço a partir da análise da $TVI_2(x)$ - tabela 3.	Decres		Ponto inflexão ($TVI_2(x) = 0$)	

*NR = Número de Raízes

**RT = Reta Tangente

No quadro 2, o estudo do sinal da $TVI_1(x)$ revela o comportamento da reta tangente à curva, permitindo concluir a respeito da variação da curva e dos pontos máximos e mínimos relativos. Para algumas funções de terceiro grau a $TVI_1(x)$ é inconclusiva, por isso, torna-se necessário conhecer e estudar a $TVI_2(x)$, inferindo sobre a concavidade, permitindo assim, inferir sobre a curva, apresentado no quadro 3.

Quadro 3

Análise da concavidade de curvas de funções reais polinomiais do terceiro grau a partir da $TVI_2(x)$ (Pasa, 2017, p. 150)

Unidades básicas simbólicas				Unidades básicas gráficas	
TVI_2	Coef. a	Sinal da TVI_2	Valor de x	Concavidade	Possíveis esboços da curva
$6ax + 2b$	$a > 0$	< 0	$x < -b/3a$	Negativa – para baixo	
		$= 0$	$x = -b/3a$	Local de Inflexão	
		> 0	$x > -b/3a$	Positiva – para cima	
	$a < 0$	> 0	$x < -b/3a$	Positiva – para cima	
		$= 0$	$x = -b/3a$	Local de Inflexão	
		< 0	$x > -b/3a$	Negativa – para baixo	

As funções trigonométricas

As funções trigonométricas $y = \text{sen } x$, $y = \text{cos } x$ e $y = \text{tg } x$ também podem ser problematizadas na perspectiva proposta, presumindo um custo cognitivo significativo devido às compreensões trigonométricas demandadas, mas ainda assim, permitindo inferências na direção do *caminho alternativo*. A função seno, definida como $y = \text{sen } x$, possui taxa média de variação (TMV) para o intervalo $[x, x + \Delta x]$ definida como

$$TMV = \frac{\text{sen}(x + \Delta x) - \text{sen } x}{\Delta x}.$$

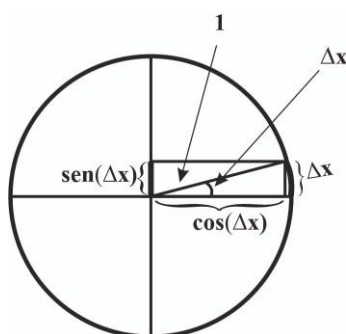
Assim, utilizando o seno da adição de dois arcos ($\text{sen}(x + \Delta x) = \text{sen } x \cdot \cos \Delta x + \text{sen } \Delta x \cdot \cos x$), ela pode ser reescrita

$$TMV = \frac{\text{sen } x \cdot \cos \Delta x + \text{sen } \Delta x \cdot \cos x - \text{sen } x}{\Delta x},$$

e encontrada utilizando o ciclo trigonométrico da figura 1, que, ao considerar um arco Δx , torna-se evidente que os segmentos que definem $\text{sen } \Delta x$ e $\cos \Delta x$, assumem os valores Δx e 1, respectivamente.

Figura 1

Valores de $\text{sen } \Delta x$ e de $\cos \Delta x$ a partir do ciclo trigonométrico sendo Δx infinitesimal (Pasa, Binotto e Moretti, 2020, p. 8).



A taxa de variação instantânea de primeira ordem da função $y = \text{sen } x$ é, então, encontrada a partir da taxa média de variação para um intervalo $[x, x + \Delta x]$,

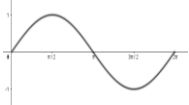
$$TVI_1(x) = \frac{\text{sen } x \cdot 1 + \Delta x \cdot \cos x - \text{sen } x}{\Delta x}$$

$$TVI_1(x) = \frac{\Delta x \cdot \cos x}{\Delta x} \rightarrow TVI_1(x) = \cos x.$$

O estudo do sinal da $TVI_1(x) = \cos x$ possibilita inferir sobre o comportamento (crescimento e decrescimento) da curva da função $y = \text{sen } x$ ao longo de seu domínio, apresentado no quadro 4, e assim, concluir sobre o esboço da sua curva.

Quadro 4

Esboço das propriedades da função $y = \text{sen } x$ no domínio de $[0, 2\pi]$ (Pasa, 2017. p. 152)

Unidades básicas simbólicas		Unidades básicas gráficas		
$TVI_1(x)$	Valor de x	Reta tangente	Ponto crítico	Esboço da curva
> 0	$0 < x < \pi/2$ $3\pi/2 < x < 2\pi$	Crescente	Mínimo absoluto em $(3\pi/2, -1)$	
$= 0$	$x = \pi/2$ e $x = 3\pi/2$	Constante		
< 0	$\pi/2 < x < 3\pi/2$	Decrescente	Máximo absoluto em $(\pi/2, 1)$	

Para a função $y = \cos x$, o cálculo é análogo ao da função $y = \text{sen } x$: encontra-se a taxa média de variação para um intervalo $[x, x + \Delta x]$, aplica-se o cosseno da soma de dois arcos, considera-se Δx um infinitésimo e, com base na figura 1, obtém-se:

$$TMV = \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x}$$

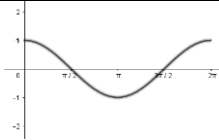
$$TMV = \frac{\cos x \cdot \cos \Delta x - \text{sen } x \cdot \text{sen } \Delta x - \cos x}{\Delta x}$$

$$TVI_1(x) = -\text{sen } x.$$

A análise do sinal da $TVI_1(x)$ e a coordenação entre registro algébrico desta e seu gráfico estão apresentados no quadro 5.

Quadro 5

Esboço das propriedades da função $y = \cos x$ no domínio de $[0, 2\pi]$. (Pasa, 2017, p. 152)

Unidades básicas simbólicas		Unidades básicas gráficas		
$TVI_1(x)$	Valor de x	Reta tangente	Ponto crítico	Esboço da curva
> 0	$\pi < x < 2\pi$	Crescente	Mínimo absoluto em $(\pi, -1)$	 <p>Gráfico do cosseno em $[0, 2\pi]$. O eixo horizontal representa x com marcas em $0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi$. O eixo vertical representa y com marcas em $-2, -1, 1, 2$. A curva começa em $(0, 1)$, cruza o eixo x em $\pi/2$, atinge o mínimo absoluto em $(\pi, -1)$, cruza o eixo x novamente em $3\pi/2$, e termina em $(2\pi, 1)$.</p>
$= 0$	$x = 0$ e $x = \pi$	Constante		
< 0	$0 < x < \pi$	Decrescente	Máximo absoluto em $(0, 1)$ e $(2\pi, 1)$	

Por fim, a análise da função $y = \text{tg } x$ perpassa analogamente o cálculo da taxa média de variação para um intervalo $[x, x + \Delta x]$, a aplicação do seno e do cosseno da soma de dois arcos, a consideração de Δx como um infinitésimo e a figura 1, bem como ajustes algébricos e substituições possíveis. Assim,

$$TMV = \frac{tg(x + \Delta x) - tg x}{\Delta x}$$

$$TMV = \frac{\frac{\text{sen}(x + \Delta x)}{\cos(x + \Delta x)} - \frac{\text{sen } x}{\cos x}}{\Delta x}$$

$$TMV = \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{\text{sen}(x + \Delta x)}{\cos(x + \Delta x)} - \frac{\text{sen } x}{\cos x} \right)$$

$$TMV = \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{\text{sen } x \cdot \cos \Delta x + \text{sen } \Delta x \cdot \cos x}{\cos x \cdot \cos \Delta x - \text{sen } x \cdot \text{sen } \Delta x} - \frac{\text{sen } x}{\cos x} \right)$$

$$TMV = \frac{1}{\cos^2 x - \Delta x \text{sen } x \cdot \cos x}$$

$$TVI_1(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

Como a função $TVI_1(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$ nunca será zero, para $x \in [0, 2\pi]$, o domínio da taxa de variação instantânea será todos os reais exceto $x = \frac{\pi}{2}$ e $x = \frac{3\pi}{2}$. Assim, o esboço da curva será ascendente e não terá pontos máximos ou mínimos. Uma visão mais detalhada do esboço da curva pode ser obtida a partir da $TVI_2(x)$, a qual informa a respeito da concavidade:

$$TMV_{da\ TVI_1} = \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{1}{\cos^2(x + \Delta x)} - \frac{1}{\cos^2 x} \right).$$

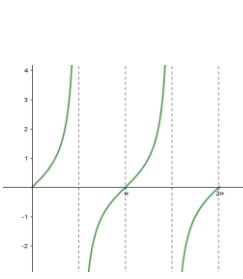
A qual resulta na taxa de variação instantânea de segunda ordem,

$$TMV_2(x) = \frac{2 \text{sen } x}{\cos^3 x}.$$

No quadro 6 a seguir, apresentamos as possibilidades de inferências sobre o esboço da curva da função tangente.

Quadro 6

Esboço das propriedades da função $y = \operatorname{tg} x$ no domínio de $[0, 2\pi]$ (Pasa, Binotto e Moretti, 2020, p. 15)

Unidades básicas simbólicas			Unidade básica gráfica	
$TVI_1(x)$	$TVI_2(x)$	Valor de x	Concavidade	Esboço do gráfico
> 0	> 0	$0 < x < \frac{\pi}{2}$ ou $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$	Positiva – para cima	
	$= 0$	$= 0$	Mudança de concavidade – ponto de inflexão	
	< 0	$\frac{\pi}{2} < x < \pi$ ou $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$	Negativa – para baixo	

O estudo das taxas de variação de funções permite que propriedades pertinentes das curvas fiquem explícitas e sejam compreendidas, como os pontos críticos, as raízes e os pontos máximos e mínimos, sejam eles absolutos ou relativos, o que torna esta abordagem necessária em sala de aula do ensino médio.

Na figura a seguir, a fim de clarificar a prática do *caminho alternativo*, apresentamos a construção de um estudante que o percorreu para o esboçar a curva da função $y = 3x^2 - 6x + 3$.

Figura 2

Esboço da curva da função $y = 3x^2 - 6x + 3$ (Pasa, 2017, p. 279-280)

Inicialmente calcularemos a TVI₁ da função:

$$TVI_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{[3(x+h)^2 - 6(x+h) + 3] - (3x^2 - 6x + 3)}{(x+h) - x}$$

$$TVI_1 = 6x - 6$$

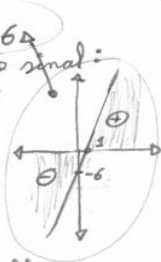
Analisando o sinal:

$$TVI_1 = 6x - 6$$

$$0 = 6x - 6$$

$$6x = 6$$

$$x = 1$$



Estamos trabalhando com uma parábola, desta forma, como em $x = 1$, $TVI_1 = 0$, a abscissa do vértice da parábola é 1 e sua ordenada correspondente é:

$$y = 3x^2 - 6x + 3$$

$$y = 3 \cdot (1)^2 - 6 \cdot (1) + 3$$

$$y = 3 \cdot 1 - 6 \cdot 1 + 3$$

$$y = 3 - 6 + 3$$

$$y = 0$$

Portanto, a função:

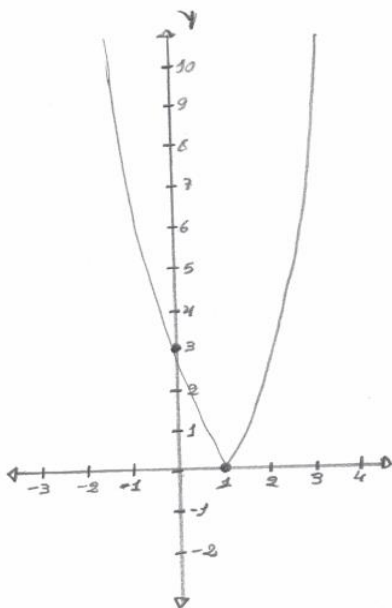
- é decrescente para $x < 1$;

- é constante para $x = 1$;

- é crescente para $x > 1$;

- possui seu vértice em $(1, 0)$.

Com essas informações é irrelevante saber que $TVI_2 = 6$.



Na figura 2, é possível verificar o engajamento do estudante àquilo que quer expressar. A partir de explicações em língua natural e em forma de gráficos, utilizando setas e léxicos sistemáticos, o estudante expande seu discurso mesclando a forma natural e lógica, realizando as conversões entre

as representações simbólicas e gráficas a partir da identificação de unidades básicas referentes à $TVI_1(x)$ e inferindo a respeito do gráfico.

Figura 3

Esboço da curva da função $y = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$ a partir da $TVI_1(x)$ (Pasa, 2017, p.277)

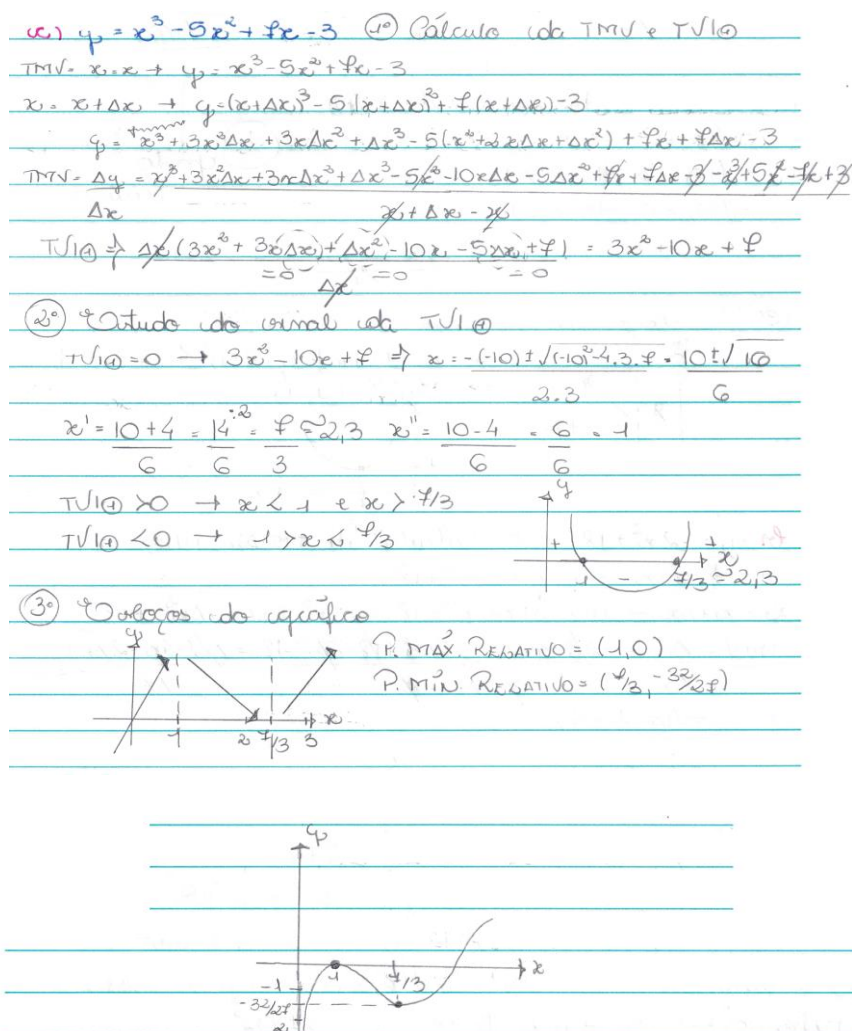


Figura 4

Esboço da curva da função $y = x^3 + 3x$ (Pasa, 2017, p.278)

$$d) y = x^3 + 3x$$

$$[x; x + \Delta x]$$

$$y = x^3 + 3x$$

$$y = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3 + 3x + 3\Delta x$$

$$TmV = \frac{x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3 + 3x + 3\Delta x - x^3 - 3x}{\Delta x}$$

$$TmV = 3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2 + 3$$

$$TmV = 3x^2 + 3$$

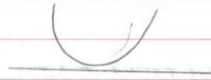
$$y = 3x^2 + 3 = 0$$

$$3x^2 = -3$$

$$x^2 = -1$$

$x = \emptyset \rightarrow$ Não conta com

eixo x , precisa calcular a TVI_2



$$TVI_2 = 3x^2 + 3$$

$$[x; x + \Delta x]$$

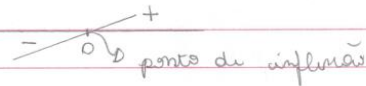
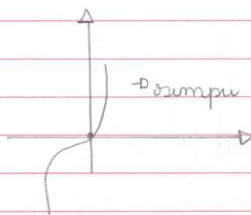
$$T_2 = 3x^2 + 3$$

$$y = \frac{3x^2 + 6x\Delta x + 3\Delta x^2 + 3 - 3x^2 - 3}{\Delta x} = 6x + 3\Delta x = 6x$$

$$6x = 0$$

$$x = 0$$

\rightarrow sempre crescente



Na figura 3, a função a ser esboçada é polinomial do terceiro grau, então, a $TVI_1(x)$ é uma função polinomial do segundo grau, neste caso, com

duas raízes reais e distintas, cuja análise do sinal foi realizada esboçando a parábola por meio das suas raízes e da concavidade, identificada pelo sinal do coeficiente de x^2 da $TVI_1(x)$. A concavidade da curva da função não foi analisada uma vez que a $TVI_1(x)$ é suficiente. No caso da figura 4, foi necessário encontrar e analisar a $TVI_2(x)$, uma vez que a $TVI_1(x)$ é positiva para todo o domínio e informa apenas que a curva é crescente. Assim, o estudante calculou a $TVI_2(x)$, a qual informa sobre os pontos de inflexão e a concavidade. Porém, não fica claro se o estudante utilizou a relação entre a $TVI_2(x)$ e a concavidade para esboçar a curva pois não está explícito se o estudo do sinal da $TVI_2(x)$ foi realizado para avaliar a concavidade.

As figuras 2, 3 e 4 foram apresentadas com o intuito de elucidar a prática do *caminho alternativo* para funções polinomiais, podendo ser expandida para as funções trigonométricas.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Uma análise do *caminho alternativo* proposto para o esboço de curvas de funções perpassa a importância das representações semióticas no processo de aprendizagem matemática. Duval (2011b) destaca que as representações semióticas são cruciais para que o estudante obtenha compreensão total de um objeto matemático, uma vez que, o acesso a esse se dá somente através de suas distintas representações. Entretanto, o autor salienta que a questão cognitiva da natureza da atividade matemática e funcionamento do pensamento, relacionada às habilidades intelectuais

exigidas em atividades como transformações e conversões são igualmente essenciais para o processo.

Em vista disso, a abordagem de esboçar curvas “ponto a ponto”, costumeiramente utilizada no ensino, pode tornar-se um processo mecânico que não possibilita compreender as correspondências semióticas entre os registros algébrico e gráfico, deste modo, desencadeando dificuldades de compreensão e interpretação do objeto matemático. Esboçar curvas na perspectiva do *caminho alternativo* é desafiador, uma vez que perpassa uma mudança de concepção no ensino de Matemática como um todo e pode exigir uma “bagagem” de conceitos por parte dos alunos, especialmente para as funções trigonométricas, para que o processo de aprendizagem ocorra de forma mais eficiente. Por outro lado, e sobretudo, a compreensão e o esboço de uma curva a partir da sua variabilidade e mediada pela utilização da noção de infinitésimos no âmbito do ensino médio possibilita uma ampla e profunda compreensão do conceito de função relacionada ao dinamismo, transformação e movimento inerentes a este objeto matemático.

De acordo com a teoria dos registros de representação semiótica de Raymond Duval, uma abordagem precisa levar em conta o ponto de vista cognitivo e perpassar a análise de gestos intelectuais, das conjecturas elaboradas pelos estudantes, hipóteses, relações e interferências que possam ocorrer para que o problema seja sanado. Essas ações necessárias aparecem nas resoluções apresentadas e demonstram um profundo

entendimento por parte do estudante sobre a função e o esboço da sua curva.

É necessário propiciar um ensino de funções em sintonia com as realidades e possibilidades de aprendizagem dos estudantes, deste modo, uma abordagem nesta perspectiva possibilita um entendimento sobre as funções condizente com seu real significado.

REFERÊNCIAS

- Ávila, G. (1991). O ensino de Cálculo no 2º grau. *Revista do Professor de Matemática*, 18, pp. 1– 9.
- Cabral, T. C. B & Baldino, R. R. (2006). Cálculo infinitesimal para um curso de engenharia. *Revista de Ensino e Engenharia*, 25 (1), pp. 3-16.
- Duclos, R. C. (1992). Cálculo no 2º grau. *Revista do Professor de Matemática*, 20, p. 28.
- Duval, R. (2004). Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Tradução de Myriam Vega Restrepo. Santiago de Cali: Universidade del Valle – Instituto de Educación y Pedagogía.
- Duval, R. (2011a) Gráficos e equações: a articulação de dois registros. Trad. Méricles Thadeu Moretti. *Revemat*, 6 (2), p.91-112.
- Duval, R. (2011b). Ver e ensinar a matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar os registros de representações semióticas. Organização Tânia M. M. Campos. Tradução Marlene Alves Dias. São Paulo: Proem.

- Luiz, L. S. (2010). *Esboço de curvas no ensino superior: uma proposta baseada na interpretação global de propriedades figurais e uso de tecnologias*. [Dissertação de Mestrado em Educação Científica e Tecnológica, Universidade Federal de Santa Catarina]. <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/93808>.
- Martins, M. H. S. (2017). *A interpretação global de propriedades figurais no esboço de curvas dadas por equações paramétricas*. [Dissertação de Mestrado em Educação Científica e Tecnológica, Universidade Federal de Santa Catarina]. <https://repositorio.ufsc.br/xmlui/handle/123456789/176711>.
- Menoncini, L. & Moretti, M. T. (2017). A interpretação global figural como recurso para o esboço de curvas de funções modulares lineares. *Educação Matemática em Revista – RS*, 1 (18), pp. 126-134.
- Moretti, M. T. (2003). A translação como recurso no esboço de curvas por meio da interpretação global de propriedades figurais. In: S. D. A. Machado (Org.). *Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica* (pp. 149-160). Papirus.
- Moretti, M. T., Ferraz, G. A. & Ferreira, V. G. G. (2008). Estudo da conversão de funções entre registros simbólico e gráfico no ensino universitário. *Quadrante – Revista de Investigação em Educação Matemática*, XVII (2), pp. 95-121.
- Pasa, B. C. (2017). *A noção de infinitésimo no esboço de curvas no ensino médio: por uma abordagem de interpretação global de propriedades figurais*. [Tese de Doutorado em Educação Científica e Tecnológica, Universidade Federal de Santa Catarina]. <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/187061>.
- Pasa, B. C, Binotto, D. & Moretti, M. T. (2020). Esboçando curvas de funções trigonométricas a partir da noção de infinitésimo. *Anais do VIII Jornada Nacional de Educação Matemática – JEM*.

- Rezende, W. M. (2003). O ensino de Cálculo: dificuldades de natureza epistemológica. [Tese de Doutorado em Educação, Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo]. <https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/48/48134/tde-270220>.
- Rezende, W.M. (2007). Um mapeamento do ensino de funções reais no ensino básico. *Anais do IX ENEM – Encontro Nacional de Educação Matemática*. Belo Horizonte, Minas Gerais.
- Silva, M. O. (2008). Esboço de curvas: uma análise sob a perspectiva dos registros de representação semiótica [Dissertação de Mestrado em Educação Científica e Tecnológica, Universidade Federal de Santa Catarina]. <https://repositorio.ufsc.br/xmlui/handle/123456789/9>.
- Silva, C. C; Andrade, A. P. R. & Azevedo, C. L. V. R. (2013). O Cálculo no Ensino Médio: as taxas de variação e o conceito de derivada. *Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática – ENEM*.

CAPÍTULO VII

UM EXEMPLO DE ESBOÇO DE CURVAS POR MEIO DE UNIDADES BÁSICAS E INTERPRETAÇÃO GLOBAL DE PROPRIEDADES FIGURAS NO ENSINO DE CÁLCULO

Learcino dos Santos Luiz
Méricles Thadeu Moretti

INTRODUÇÃO

Neste trabalho trazemos um exemplo de uma possibilidade didática para o trabalho com esboço de curvas nas disciplinas de Cálculo no ensino superior. O ensino de Cálculo nas Universidades brasileiras merece mais atenção por parte da comunidade de pesquisa educacional no sentido de incentivarem trabalhos que revisem as práticas pedagógicas até então adotadas e contribuam para o avanço desta disciplina tão importante para a formação de diversos profissionais. Diversas pesquisas apontam para a relevância de metodologias importantes para o ensino de matemática como a resolução de problemas, a modelagem matemática e o uso de tecnologias da informação e comunicação nas aulas de Cálculo. Atualmente contamos com laboratórios de informática na maioria de nossas universidades e há uma variedade de *softwares* educacionais, inclusive livres para uso, que não são aproveitados pelos professores em suas aulas de matemática no ensino superior.

Estudos tais como os de Barufi (1999), Rezende (2003), Sad (2002), Nascimento (2001), entre outros, mostram-nos que a metodologia tradicional utilizada no ensino de Cálculo tem provocado grande número de evasão e repetência nas disciplinas iniciais de Cálculo. Isso nos leva a crer que apenas uma parte dos alunos consegue ter sucesso neste tipo de metodologia e, como afirma Barufi (1999, p. 3) “observamos médias de aproveitamento muitas vezes sofríveis e elevados números referentes a alunos que não foram aprovados, caracterizando uma situação que no mínimo, pode ser considerada problemática”.

Baseado na Teoria dos Registros de Representação Semiótica do pesquisador Raymond Duval, apresentamos uma possibilidade de esboçar curvas de funções por meio do que chamamos unidades básicas e pela estratégia de interpretação global de propriedades figurais. Este artigo é baseado em um capítulo da dissertação de mestrado intitulada “Esboço De Curvas No Ensino Superior: Uma Proposta Baseada Na Interpretação Global De Propriedades Figurais E Uso De Tecnologias” (Luiz & Moretti, 2010).

A TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS E O ESBOÇO DE CURVAS

Um objeto matemático não existe no mundo físico. Não podemos tocá-los, observa-los ou formular uma experiência empírica com ele. É necessária a criação de uma representação ou um sistema de representação para que possamos interagir com este objeto. Duval (2004, p. 14) nos afirma

que é essencial não confundirmos o objeto matemático com sua representação. Neste mesmo sentido Duval continua:

[...] Não pode haver compreensão em matemática se não se distingue um objeto de sua representação. Desde esta perspectiva, é essencial não confundir jamais os objetos matemáticos, por exemplo, os números, as funções, as retas, etc., com suas representações, por exemplo, as escritas decimais ou fracionárias, os símbolos, os gráficos, os traçados das figuras... pois um mesmo objeto matemático pode ter diferentes representações. (Duval, 2004, p. 14)

DUVAL (2003, p. 11), em relação ao objetivo do ensino de Matemática, afirma:

[...] o objetivo do ensino de Matemática, em formação inicial, não é nem formar futuros matemáticos, nem dar aos alunos instrumentos que só lhes serão eventualmente úteis muito mais tarde, e sim contribuir para o desenvolvimento geral de suas capacidades de raciocínio, de análise e de visualização

De acordo com Flores e Moretti (2006), para Raymond Duval, criador da Teoria das Representações Semióticas, o processo de ensino de Matemática deve ser baseado na criação de possibilidades para o desenvolvimento geral das capacidades de raciocínio, de análise e de visualização. De acordo com Duval (2003) existem diversas formas de Representação Semióticas que são agrupadas em quatro grandes registros: a língua natural, as escritas algébricas e formais, as figuras geométricas e as representações gráficas.

Ainda de acordo com a Teoria das Representações Semióticas um objeto matemático pode conter diversas formas de representações. Como

ele não faz parte do mundo físico é através de sua representação que podemos ter acesso a ele. Duval utiliza a expressão registro de representação semiótica para caracterizar um registro que apresenta algumas características: permite a formação de uma representação identificável e permite também o tratamento e a conversão. Quando ocorre a transformação de uma representação de um objeto matemático em um mesmo sistema de representação temos o que Duval chama de tratamento. Do contrário, quando esta transformação se dá em outro sistema de representação temos uma conversão.

Segundo Duval é muito importante a coordenação de diferentes registros de representação, sendo a articulação destes uma condição de acesso à compreensão em matemática, e mais precisamente, a compreensão em Matemática supõe a coordenação de ao menos dois registros de representação semiótica, sendo a **conversão** de extrema importância na assimilação de um objeto matemático. Duval (2003, p. 16) completa: “(...) do ponto de vista cognitivo, é a atividade de conversão que, ao contrário, aparece como a atividade de transformação representacional fundamental, aquela que conduz aos mecanismos subjacentes à compreensão”.

Muitas vezes, as dificuldades enfrentadas na construção do conhecimento matemático estão relacionadas às formas de abordagens dos conteúdos em sala de aula decorrentes do descompasso entre o desenvolvimento cognitivo do aluno e o tipo de operações dele requerido pelo ensino. Tudo indica que se exigem do aprendiz a construção e aplicação

de conhecimentos matemáticos para os quais ele não possui, ainda, estruturas cognitivas adequadas aos raciocínios requeridos nas situações-problema propostas. A construção de estruturas necessárias à compreensão de conceitos matemáticos deve ser o principal objetivo do ensino dos professores de Matemática e aqui nos referimos, em particular, ao ensino de álgebra, objeto de estudo deste trabalho de pesquisa.

Não raro encontramos em livros didáticos conteúdos matemáticos explorados através de exercícios onde é exigido do aluno apenas realizar uma mudança de registro de representação semiótica dentro de um mesmo sistema de representação (tratamento) ou apenas a conversão em um único sentido. Por exemplo, ao estudar-se funções, os exercícios propostos aos alunos são, na grande maioria das vezes, atividades em que é dado ao aluno uma função na linguagem algébrica, por exemplo, " $f(x) = 2x + 3$ ", e é lhe pedido que construa uma tabela de valores para esta função e posteriormente um gráfico, que neste caso são linguagens gráficas. Neste caso estamos propondo apenas uma conversão da representação simbólica para gráfica, e para Duval (2003) seria necessário realizar também o caminho inverso, ou seja, partir de gráficos e tabelas e chegar a uma fórmula Matemática, que neste caso seria uma atividade de extrema importância para o aprendizado matemático deste conceito.

No ensino superior, nas disciplinas introdutórias de Cálculo, o esboço de curvas tem um papel importantíssimo na formação do graduando. Os gráficos de funções são importantes ferramentas para a interpretação de fenômenos físicos, químicos e biológicos, bem como de fenômenos sociais e

econômicos. Nesta fase da formação matemática, são estudadas ferramentas poderosas para o esboço de curvas onde podemos ressaltar os tratamentos matemáticos do Cálculo, tais como cálculo de limites, determinação de intervalos de crescimento e decrescimento da função, pontos de inflexão, pontos de máximo e de mínimos relativos e absolutos, tratamento estes realizados através da análise da derivada de primeira e de segunda ordem da função estudada.

O trabalho de Duval (1998) aponta duas possibilidades para o esboço de gráficos no ensino formal, mais precisamente, faz referência a dois tipos diferentes de procedimentos para a conversão entre as representações de uma mesma função:

1. Procedimento de obtenção, a partir de *forma de representação simbólica (algébrica)*, da *forma gráfica* através de alguns pontos que são determinados por substituição na expressão analítica da função. Estes pontos são “plotados” em um sistema de eixos cartesianos e em seguida é traçada uma curva pela união desses pontos.

2. Procedimento de *interpretação global das propriedades figurais*, onde o conjunto traçado/eixo forma uma imagem que representa um objeto descrito por uma expressão analítica que permite que se identifiquem as modificações possíveis conjuntamente na imagem e na expressão analítica.

O primeiro procedimento é muito usado no ensino de funções tanto no ensino fundamental quanto no ensino médio, onde são utilizadas tabelas auxiliares para determinação dos pares ordenados da função. Notamos que aqui não há ligação direta entre o gráfico e a expressão analítica da função correspondente, e como afirma Moretti, Ferraz e Ferreira (2008, p. 3), diversos problemas podem surgir desta forma de proceder devido ao fato de que se há congruência¹ semântica entre um par ordenado e a sua representação cartesiana, o mesmo não se pode dizer de um conjunto de pontos no plano cartesiano e uma regra matemática (expressão analítica) a ele equivalente.

Já no segundo procedimento temos uma associação da *variável visual da representação* à *unidade significativa da escrita algébrica*, que neste caso facilita a conversão das representações em ambos os sentidos.

UNIDADES BÁSICAS

Como descrito anteriormente o processo de esboço de gráfico de uma função através do processo de interpretação global das propriedades figurais foi proposto por Duval em seu artigo "*Graphiques e équations: l'articulation de deux registres*" (1998), onde usava este procedimento para propor uma nova maneira de trabalhar o esboço de gráficos da função linear. Mais adiante, Moretti (2003) e Silva (2008) apresentaram de forma

¹ A congruência semântica para Duval é uma medida que procura estabelecer o grau de transparência de duas representações de um mesmo objeto matemático.

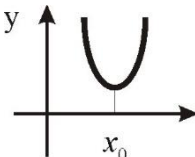
análoga, uma interpretação do procedimento de interpretação global de propriedades figurais para o esboço de funções quadráticas. O uso deste procedimento inovador para o esboço de curvas é praticamente inexistente no ensino superior.

Para preencher esta lacuna, Moretti, Ferraz e Ferreira (2008), apresenta em seu artigo “*Estudo da conversão de funções entre registros simbólico e gráfico no ensino universitário*” a elaboração de um conjunto de elementos chamada unidades básicas que têm como objetivo orientar as conversões entre as formas simbólicas e gráficas das funções estudadas no ensino superior, mais especificamente no ensino de Cálculo.

Estes elementos orientadores, que a partir de agora chamaremos **Unidades básicas** são divididos em dois grupos: unidades simbólicas e unidades gráficas. Denotaremos y' e y'' as derivadas de primeira e segunda ordem respectivamente da função y em relação a x . Denotaremos por $V(x_0)$ uma vizinhança de x_0 e $V^-(x_0)$ a vizinhança a esquerda de x_0 e $V^+(x_0)$ a vizinhança a direita x_0 . Na tabela abaixo vemos um exemplo de uma destas unidades básicas:

Tabela 1

Tabela com 13 unidades básicas (Moretti, Ferraz & Ferreira, 2008, p. 106)

Unidade básica gráfica	Unidade básica lingüística	Unidade básica simbólica
 <p>Um gráfico de uma função em um plano cartesiano. O eixo horizontal é rotulado com x_0 e o eixo vertical com y. A curva é uma parábola voltada para cima, com seu vértice no ponto (x_0, y).</p>	<p>Mínimo relativo</p> <p>Derivada primeira de y muda de sinal negativo para positivo na vizinhança de x_0</p>	$\begin{cases} y'(x_0) = 0 \\ y'(x) < 0, x \in V^-(x_0) \\ y'(x) > 0, x \in V^+(x_0) \end{cases}$

Nesta tabela temos uma unidade básica referente a um ponto crítico de uma função, mais especificamente um ponto de mínimo relativo. A unidade básica gráfica visualmente perceptível em um esboço da curva de uma função é relacionada com a unidade básica simbólica correspondente, que neste caso denota a derivada primeira da função igual a zero e a mudança de sinal de negativo para positivo na vizinhança de x_0 . Acompanhando o anexo 1 deste trabalho podemos observar que as unidades básicas podem ser usadas para definirem grande parte dos **componentes significativos**² do esboço de curva de uma função, tais como: Pontos de máximo e de mínimo, pontos de inflexão, retas tangentes,

² Referimo-nos aqui às partes da curva associada à uma função que nos permite uma interpretação física e/ou matemática através de seu traçado. Como nos referimos no texto, estamos tratando principalmente dos componentes mais usuais no estudo de Cálculo I, tais como Pontos de máximo e de mínimo, pontos de inflexão, retas tangentes e Assíntotas verticais e horizontais.

Assíntotas verticais e horizontais e limites laterais em um determinado ponto.

Moretti, Ferraz e Ferreira (2008, p. 104) explicam com mais precisão o uso e a importância destas unidades básicas:

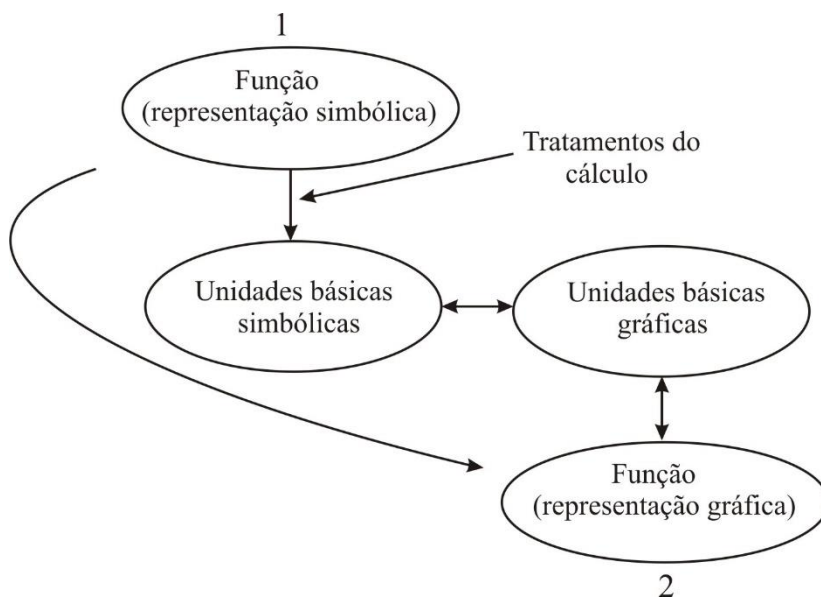
Cada elemento em um dos grupos, relaciona-se com um elemento do outro grupo. Pretendemos que as unidades básicas gráficas e simbólicas funcionem como unidades significativas ou pertinentes das representações da função. As conversões entre as representações de uma função, tanto em um sentido como em outro, poderão ser tratadas da mesma forma tendo como intermediação essas unidades básicas

Deste modo, é proposto pelo autor o uso destas unidades básicas a fim de possibilitar a conversão entre o registro de representação simbólico e o registro de representação gráfico da função e vice-versa. Esta proposta vai além daquela vista na maioria dos livros de cálculo que, como já salientamos, dá conta de apenas um sentido desta conversão. Como bem comentou Duval a respeito do esboço gráfico das retas (1998), *“é uma avaliação qualitativa da curva que permite destacar as unidades básicas gráficas fundamentais da função”*. Deste modo, também é objetivo desta proposta que o aluno consiga, em um primeiro momento, avaliar de forma qualitativa a função (na forma gráfica ou simbólica), identificando suas unidades básicas.

A figura 1 nos mostra uma descrição dos tipos de conversão possíveis nesta proposta de trabalho que utiliza as unidades básicas para o esboço de curvas através da interpretação global de propriedades figurais:

Figura 1

Esquema de conversão entre representações simbólicas e gráficas (Moretti, Ferraz & Ferreira, 2008, p. 110)



Baseado no que já falamos anteriormente podemos destacar alguns pontos pertinentes relacionados com o esquema apresentado na figura 1:

- Notamos que a conversão no sentido $1 \rightarrow 2$ associada simultaneamente à conversão no sentido $2 \rightarrow 1$ pode ocorrer para grupos muito restrito de funções (Moretti, Ferraz e Ferreira, 2008, p. 110).
- A conversão no caminho $1 \rightarrow 2$ pode ser realizada facilmente através de um software gráfico ou passando pelas unidades básicas simbólicas (obtidas através de tratamentos do cálculo) e gráficas.

- A conversão 2→1 é de difícil resolução para a maioria das funções estudadas no ensino superior.
- É proposta a conversão 2→1 através das unidades básicas gráficas e simbólicas. Neste caso a conversão se dará entre a representação gráfica da função e as unidades básicas simbólicas, nos dando uma descrição qualitativa deste objeto matemático.

EXEMPLO DO USO DAS UNIDADES BÁSICAS PARA ESBOÇO DE CURVAS

Moretti, Ferraz e Ferreira (2008) nos apresenta um exemplo da proposta de uso das unidades básicas para o esboço do gráfico e análise da

função $y = \frac{x^2}{x^2 + 1}$. Destacaremos a seguir os dois caminhos possíveis para a conversão no sentido 1→2, ou seja a conversão da registro simbólico para o gráfico.

Caminho A: Conversão 1→2 através das unidades básicas

Com alguns tratamentos do cálculo, obtemos: $y' = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$,

$y'' = \frac{2(1 - 3x^2)}{(x^2 + 1)^3}$ e $\lim_{x \rightarrow \infty} y = 1$ e destacamos a seguir as unidades básicas

simbólicas que consideramos mais importantes. Junto com essas unidades destacamos também algumas unidades numéricas:

- pontos e retas

$x = 0$ é raiz de y' (e também de y);

$(0, 0)$ é ponto de mínimo absoluto;

$(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{4})$ e $(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{4})$ são pontos de inflexão;

$y = 1$ é assíntota horizontal.

y é decrescente no intervalo $(-\infty, 0)$

y é crescente no intervalo $(0, +\infty)$

y possui concavidade positiva em $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$

y possui concavidade negativa em $(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}) \cup (\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty)$

Deste modo podemos concluir:

- no intervalo $(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3})$ y é decrescente com concavidade voltada para baixo e a reta $y = 1$ é assíntota horizontal;

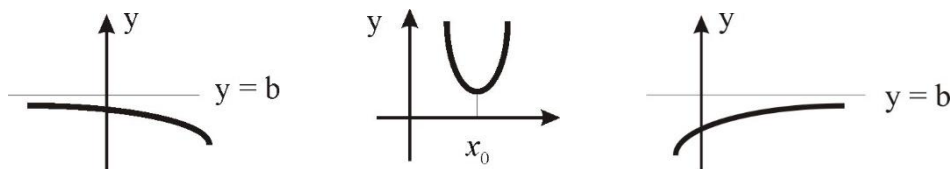
- no intervalo $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$ y tem concavidade voltada para cima, $(0, 0)$ é raiz e ponto de mínimo e a reta $y = 1$ é assíntota horizontal;

- no intervalo $(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty)$ y é crescente com concavidade voltada para baixo e a reta $y = 1$ é assíntota horizontal.

As unidades básicas gráficas associadas às unidades básicas simbólicas são, na ordem, as seguintes (Tabela 2, Tabela 3 e Tabela 1³):

Figura 2

Unidades básicas gráficas identificadas a partir das unidades simbólicas (Moretti, Ferraz & Ferreira, 2008, p. 112)



e sintetizadas da seguinte forma:

Figura 3

Junção das unidades básicas gráficas da Figura 2 (Moretti, Ferraz & Ferreira, 2008, p. 112)



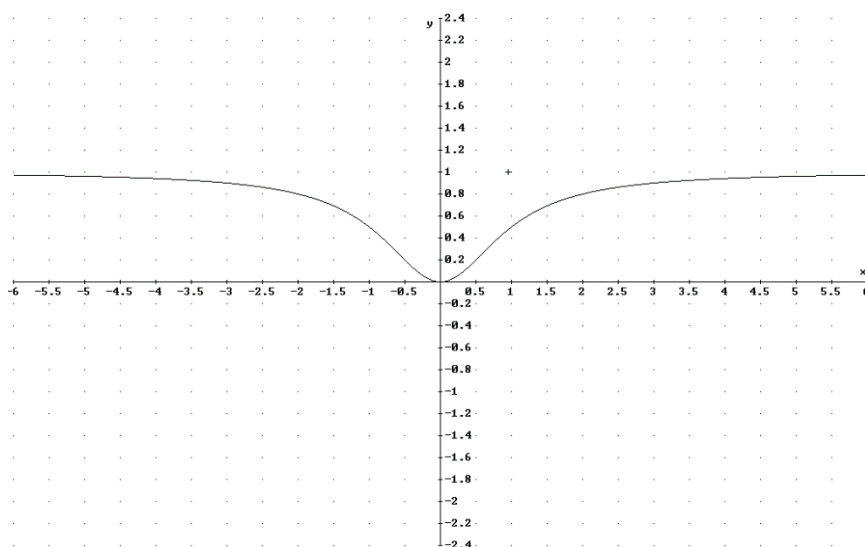
Este processo é semelhante ao utilizado na maioria dos livros de Cálculo e aplicado por grande parte dos professores desta disciplina. Sem

³ Nos anexos. Para ver a lista completa de tabelas de unidades básicas acessar o trabalho: Luiz & Moretti (2010).

muita dificuldade, já com os dados em mãos, podemos traçar um esboço do gráfico como descrito na figura 4.

Figura 4

Gráfico da função $y = \frac{x^2}{x^2 + 1}$ obtida no software Derive (os autores)



CONCLUSÕES

A teoria de registros de representações semióticas nos permite um aprofundamento no entendimento das ideias matemáticas e nos traz uma gama de possibilidades de melhorarmos o ensino de matemática. Sabemos que os saberes a serem ensinados passam por um processo de didatização meio da transposição didática (Chevallard, 1985). Este processo nem sempre

é salutar, pois consolida certas práticas, deixando de fora outras. Este é o caso do esboço de curvas. Livros didáticos apresentam quase que na sua totalidade apenas um sentido de conversão de registros e, também, apenas um esquema de esboço de curvas por meio da identificação de pontos notáveis da função.

Neste artigo apresentamos uma alternativa que leva o aluno à uma melhor compreensão do conceito da função e também possibilita a conversão de registros de representações semióticas de funções polinomiais no sentido da representação gráfica para a simbólica.

REFERÊNCIAS

- Barufi, M. C. B. (1999). *A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral*. [Tese de doutorado em Educação, Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo–FEUSP]. <https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/48/48133/tde-06022004-105356/publico/Tese.pdf>
- Chevallard, Yves. *La transposition didactique: du savoir savant au savoir enseigné*. Paris: La Pensée Sauvage, 1985.
- Duval, R. (1988). *Graphiques e équations: l'articulation de deux régistres. Annales de didactique et de sciences cognitives, v1*, IREM de Strasbourg.
- Duval, R. (2003). *Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática*. In: S. D. A. Machado

(org.). *Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica*. (pp. 11-33). Papirus.

Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Tradução de Myriam Vega Restrepo. Santiago de Cali: Universidade del Valle – Instituto de Educación y Pedagogía.

Luiz, L. S. & Moretti, M. T. (2010). *Esboço de curvas no ensino superior: uma proposta baseada na interpretação global de propriedades figurais e uso de tecnologias*. [Dissertação de Mestrado em Educação Científica e Tecnológica, Universidade Federal de Santa Catarina]. <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/93808>.

Moretti, M. T. & Flores, C. R. (2006). As figuras geométricas enquanto suporte para a aprendizagem em geometria: um estudo sobre a heurística e a reconfiguração. *Revemat : Revista Eletrônica de Educação Matemática*, v. 1, p. 5/1-13, 2006.

Moretti, M. T. (2003). A translação como recurso no esboço de curvas por meio da interpretação global de propriedades figurais. In: S. D. A. Machado (org.). *Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica* (pp. 149-160). Papirus.

Moretti, M. T., Ferraz, G. A. & Ferreira, V. G. G. (2008). Estudo da conversão de funções entre registros simbólico e gráfico no ensino universitário. *Quadrante – Revista de Investigação em Educação Matemática*, XVII (2), 95-121.

Rezende, W. M. (2003). *O Ensino de Cálculo: Dificuldades de Natureza Epistemológica*. [Tese de doutorado em Educação, Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo–FEUSP]. https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/48/48134/tde-27022014-121106/publico/WANDERLEY_REZENDE.pdf

Sad, L. A. (2003). *Abordagem epistemológica da história da matemática: é um interesse ou interessa?* V Seminário Nacional de História da Matemática. Anais. UNESP: Rio Claro.

Silva, M. O. (2008). *Esboço de curvas: uma análise sob a perspectiva dos registros de representação semiótica*. [Dissertação de Mestrado em Educação Científica e Tecnológica, Universidade Federal de Santa Catarina].

<https://repositorio.ufsc.br/xmlui/handle/123456789/92026>.

ANEXO – UNIDADES BÁSICAS GRÁFICA, LINGUÍSTICA E SIMBÓLICA

Retas Assintóticas

Tabela 1

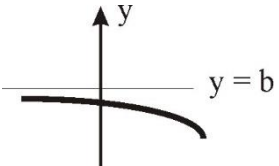
Unidade básica gráfica	Unidade básica linguística	Unidade básica simbólica
 <p>Um gráfico de um plano cartesiano com o eixo vertical rotulado 'y'. Uma linha horizontal é traçada e rotulada 'y = b'. Uma curva desce da esquerda para a direita, aproximando-se da linha horizontal 'y = b' à medida que se move para a direita.</p>	<p>Assíntota horizontal</p>	$\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = b$ <p style="text-align: center;">$y = b$</p>

Tabela 2

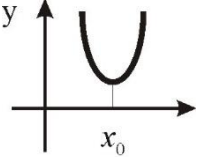

Unidade básica gráfica	Unidade básica lingüística	Unidade básica simbólica
	<p>Mínimo relativo</p> <p>Derivada primeira de y muda de sinal negativo para positivo na vizinhança de x_0</p>	$\begin{cases} y'(x_0) = 0 \\ y'(x) < 0, x \in V^-(x_0) \\ y'(x) > 0, x \in V^+(x_0) \end{cases}$

Tabela 3

Unidade básica gráfica	Unidade básica lingüística	Unidade básica simbólica
	<p>Assíntota horizontal</p>	$\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = b$ $y = b$

CAPÍTULO VIII

A ABORDAGEM DAS SUPERFÍCIES QUÁDRICAS NA PERSPECTIVA DA INTEPRETAÇÃO GLOBAL

Sérgio Florentino da Silva
Méricles Thadeu Moretti

INTRODUÇÃO

Entre as superfícies estudadas no Ensino Superior incluem-se as *superfícies quádricas* não cilíndricas e não degeneradas (elipsoides; hiperboloides de uma e duas folhas; cones quádricos elípticos; paraboloides elípticos e hiperbólicos - selas). Por uma questão de simplicidade de escrita, daqui para frente quando dissermos quádricas estamos nos referindo apenas as que são não cilíndricas e não degeneradas.

O ensino dessas superfícies, bastante comum nas disciplinas de Geometria Analítica e Cálculo Diferencial e Integral, não é simples e, além disso, sua aprendizagem possui um grande custo cognitivo para os alunos. Diante dessa problemática, neste artigo temos como objetivo discutir como abordar as superfícies quádricas estando em sintonia com a interpretação global de propriedades figurais de Raymond Duval (1988).

A ABORDAGEM DE INTERPRETAÇÃO GLOBAL

As dificuldades na aprendizagem de gráficos são reconhecidas por Duval (1988; 2011) e para seu enfrentamento ele propõe o que chamou de *abordagem de interpretação global de propriedades figurais* (também chamaremos de abordagem de interpretação global). É apenas com essa abordagem que a compreensão integral (ou integrativa) dos gráficos é possível. Nesse entendimento, não nos limitamos em apenas “olhar” um desenho no papel ou em um *software* que representa uma equação e nem nos reduzimos a analisar elementos pontuais ou particulares presentes num gráfico. Mais do que isso, na concepção dessa teoria, a potencialidade da aprendizagem (integral) têm exigências mais amplas e específicas aos quais necessitam de uma abordagem que permita a interpretação global das propriedades figurais e que, com isso, possibilita efeitos duradouros na aprendizagem dos alunos.

Na abordagem de interpretação global, leva-se em consideração as propriedades globais da curva ou da superfície possibilitando “[...] sua visualização como um todo, reforçando a relação entre o esboço e sua expressão algébrica e não entre a curva e alguns pontos” (Corrêa & Moretti, 2014, p.62). Ela é feita com a discriminação e a correspondência explícita das *unidades significantes* próprias a cada registro de representação. No caso do registro gráfico, as unidades significantes, que chamamos de *variáveis visuais*, são figurais e indicam o que é visualmente diferente de modo significativo. Para Duval (2009, p. 109), recorrendo ao clássico princípio de oposição de Ferdinand de Saussure, elas são “[...] puramente visuais e

devem corresponder às oposições qualitativas no reconhecimento visual da forma do gráfico [...]”.

Metodologicamente, para a identificação das variáveis visuais e conseqüentemente das *unidades significantes simbólicas* correspondentes (pertinentes as representações simbólicas - equações), fazem-se todas as modificações possíveis no registro gráfico e observam-se quais delas geram modificações no registro simbólico. Deve-se variar, dentro de um mesmo registro, uma unidade significativa e manter todas as outras constantes e ver o que acontece no outro registro.

O processo no sentido inverso, ou seja, do registro simbólico para o gráfico, não deve ser negligenciado e, assim, a abordagem de interpretação global exige *conversões* (mudança de registro de representação) nos dois sentidos do processo. Dessa forma, permite que se identifiquem as modificações possíveis conjuntamente na imagem e na equação. No entanto, no caso das quádricas há complicadores no uso dessa abordagem.

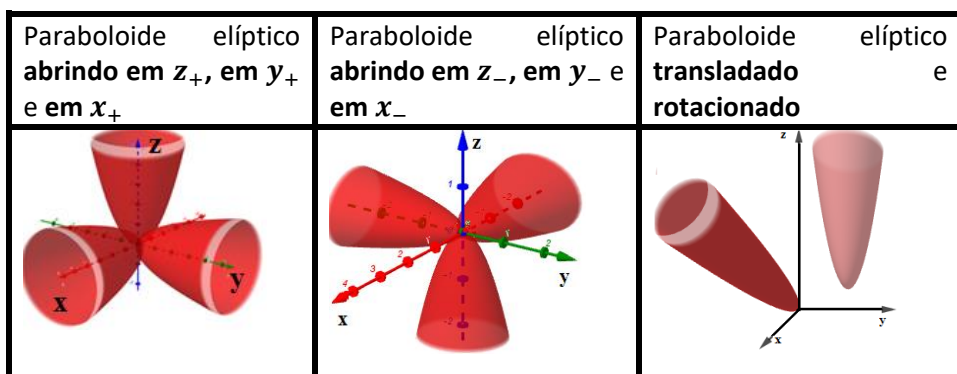
A ABORDAGEM DAS QUÁDRICAS NA PERSPECTIVA DA INTERPRETAÇÃO GLOBAL: DIFICULDADES E POSSIBILIDADES

Para o caso das quádricas há dificuldades específicas na análise e identificação das variáveis cognitivas. Em primeiro lugar, as quádricas incluem vários *casos* (elipsoides; hiperboloides; ...) e, além disso, cada um desses casos pode estar em *posições diferentes no sistema cartesiano* (paraboloide elíptico padrão abrindo em z_+ ; paraboloide elíptico padrão

abrindo em y_- ; ...; parabolóide elíptico trasladado; parabolóide elíptico rotacionado; ...). O Quadro a seguir representa, no sistema cartesiano, essas diferentes posições para o caso do parabolóide elíptico.

Quadro 1

Diferentes posições do parabolóide elíptico (os autores)



Nessas diferentes situações, há várias semelhanças e diferenças visuais e algébricas que estão presentes tanto entre os vários casos quanto entre uma mesma quádrica em posições diferentes. Portanto, há oposições qualitativas entre os vários casos e também específicas de cada quádrica o que pode dificultar a identificação, diferenciação e análise dessas superfícies.

Há ainda outros complicadores. Em especial, à identificação e a correlação entre as variáveis visuais e as unidades significantes simbólicas (por vezes chamadas apenas unidades simbólicas) são bem mais difíceis quando esse trabalho é feito com as equações em certas formas como, por exemplo, aquela que costumamos chamar de forma geral. Além disso,

quando as quádricas estão em posições rotacionadas (veja o Quadro 1), além da dificuldade de visualização dos registros gráficos, sobretudo no que diz respeito às simetrias e interseções com planos, os cálculos algébricos tornam-se mais extensos e, inclusive, exigem conhecimentos de Álgebra Linear tais como autovalores, autovetores e base que em geral ainda não são de conhecimento dos alunos no nível de ensino em que se estudam essas superfícies.

Diante dessas dificuldades para abordar as quádricas em sintonia com a interpretação global propomos algumas adaptações. Primeiro, tomamos variáveis visuais que permitem identificar e analisar as diferenças e semelhanças tanto entre os vários casos de quádricas quanto entre uma mesma quádrica em posições diferentes no sistema cartesiano. Assim, consideramos as oposições qualitativas que existem entre os vários casos e as que são específicas de cada quádrica. Adiantamos que as *interseções com planos* são variáveis visuais fundamentais nesse processo e que permitem tal análise e identificação. Em segundo lugar, para minimizar as dificuldades anteriormente citadas, sobretudo as algébricas, propomos que seja dado *ênfase* as quádricas nas posições padrão.

Nas quatro seções a seguir discutiremos as variáveis visuais que tomamos bem como as unidades simbólicas correspondentes. Para fins de delimitação, em todo este artigo só utilizaremos o sistema de coordenadas ortogonais. Além disso, por uma questão de economia de termos por vezes omitiremos o termo “posição” ao dizer *posição padrão, posição transladada*

ou *posição rotacionada*. Assim, por exemplo, diremos apenas *elipsoide padrão* e não *elipsoide na posição padrão*.

A POSIÇÃO DA QUÁDRICA NO SISTEMA CARTESIANO

A primeira variável visual que tomamos é a posição da quádrlica em relação ao sistema cartesiano e ela assume três *valores visuais*: padrão, transladada e rotacionada. Como exemplo, veja o Quadro 1 em que representamos essas diferentes posições para o caso do parabolóide elíptico.

Nossa intenção em incluir tal variável visual é principalmente para dar uma breve noção das diferentes posições no sistema cartesiano e, a partir daí, privilegiar o estudo de uma dessas posições (a posição padrão). Além disso, com essa variável podemos analisar que as posições transladadas e rotacionadas se correlacionam com a posição padrão, pois aquelas posições podem ser determinadas a partir desta. Com tais compreensões, temos uma visão global e articulada das diferentes posições. No entanto, em decorrências das dificuldades anteriormente discutidas os aspectos algébricos, incluindo as conversões com as representações simbólicas (equações), podem ser mais enfatizados apenas nas posições padrão. Mesmo assim, em Silva (2018), Silva e Moretti (2018a) há algumas propriedades que permitem algumas análises algébricas também para as quádrlicas transladadas e rotacionadas.

Além da variável visual que acabamos de expor também tomamos outras para o caso das quádrlicas padrão. As 3 seções seguintes tratam delas.

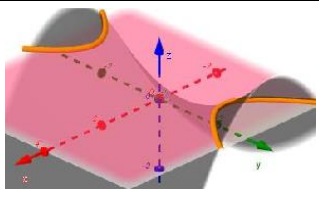
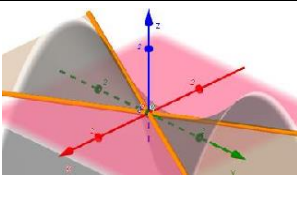
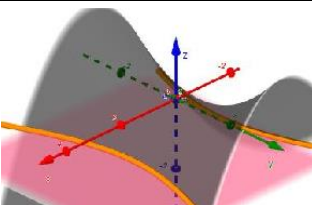
INTERSEÇÕES DA SUPERFÍCIE QUÁDRICA

Entre as variáveis visuais que tomamos as mais importantes são as interseções com planos coordenados (1) e com planos paralelos aos planos coordenados (2). Para simplificar, ao dizermos *interseções com planos* estamos nos referindo apenas a esses dois tipos de intersecções. No primeiro caso (1), elas se dividem em interseção com o plano xy , interseção com o plano xz e interseção com o plano yz . No segundo caso (2), de forma análoga, elas também se dividem em 3.

Em todas essas interseções sabemos que os valores visuais determinados são cônicas. Além disso, a visualização de tais valores visuais pode ser custosa para os alunos devendo, assim, ser trabalhado no ensino. Como exemplo de tal custo, considere as figuras do Quadro a seguir em que estão registradas as interseções do parabolóide hiperbólico (sela) de equação $z = -x^2 + y^2$ com planos de equação $z = k; k \in R$. Veja que se $k = 0$, então o valor visual determinado nas interseções são retas concorrentes (cônica degenerada). Já nos demais valores reais de k os valores visuais determinados são hipérbolas. Porém, a direção que essas hipérbolas abrem muda conforme $k > 0$ ou $k < 0$. No caso das interseções com os planos de equações $x = k$ e $y = k; k \in R$, há complicadores análogos.

Quadro 2

Interseções da sela de equação $z = -x^2 + y^2$ com planos de equação $z = k$; $k \in \mathbb{R}$ (os autores)

Interseção da sela com o plano $z = k$; $k > 0$	Interseção da sela com o plano $z = k$; $k = 0$	Interseção da sela com o plano $z = k$; $k < 0$
		

Nas interseções com planos as correspondentes unidades simbólicas são os termos quadráticos, os termos lineares, os sinais dos coeficientes desses termos e o valor numérico do termo independente (zero ou um) das equações das quádricas. Os Quadros 3 ao 8 tratam do conjunto dessas unidades além de como elas estão combinadas. Neles, ao dizermos “termo quadrático com sinal positivo/negativo” queremos dizer que o coeficiente desse termo é positivo/negativo.

Quadro 3

Unidades simbólicas dos elipsoides padrões (os autores)

Registro simbólico do elipsoide	básico do	1º membro da equação	2º membro da equação
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	3 termos quadráticos com sinais iguais e positivos		Um só termo igual a 1

Sabemos que um hiperboloide de uma folha padrão pode estar em três posições diferentes no sistema cartesiano (*abrindo em z, em y ou em x*) e que conforme é essa posição há uma equação correspondente. Por isso há três equações para essa quádrlica no Quadro seguinte. O análogo também vale para as demais quádrlicas seguintes.

Quadro 4

Unidades simbólicas dos hiperbolidos de uma folha padrão (os autores)

Registro básico simbólico dos hiperbolidos de uma folha	1º membro da equação	2º membro da equação
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	3 termos quadráticos sendo 2 com sinais iguais e positivos e 1 com sinal diferente e negativo.	Um só termo igual a 1

Quadro 5

Unidades simbólicas dos hiperbolidos de duas folhas padrão (os autores)

Registro básico simbólico dos hiperbolidos de duas folhas	1º membro da equação	2º membro da equação
$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$	3 termos quadráticos sendo 2 com sinais iguais e negativos e 1 com sinal diferente e positivo.	Um só termo igual a 1

Quadro 6

Unidades simbólicas dos cones quádricos elípticos padrão (os autores)

Registro básico simbólico dos cones quádricos elípticos	1º membro da equação	2º membro da equação
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$ $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$	<p>3 termos quadráticos sendo 2 com sinais iguais e positivos e 1 com sinal diferente e negativo.</p> <p>Se multiplicarmos as equações por (-1) teremos uma equação com 3 termos quadráticos sendo 2 com sinais iguais e negativos e 1 com sinal diferente e positivo. O que é importante é que em ambos os casos a variável com sinal diferente é a mesma.</p>	Um só termo igual a 0

Quadro 7

Unidades simbólicas dos paraboloides elípticos padrão (os autores)

Registro básico simbólico dos paraboloides elípticos			1º membro da equação	2º membro da equação
$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$	$y = \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2}$	$x = \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$	1 termo linear com coeficiente igual a 1	2 termos quadráticos com mesmo sinal (sinal positivo)
$z = -\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$	$y = -\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2}$	$x = -\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}$	Idem	2 termos quadráticos com mesmo sinal (sinal negativo)

Quadro 8

Unidades simbólicas dos paraboloides hiperbólicos padrão (os autores)

Registro básico simbólico dos paraboloides hiperbólicos			1º membro da equação	2º membro da equação
$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ $z = -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$	$y = \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2}$ $y = -\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2}$	$x = \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}$ $x = -\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$	1 termo linear com coeficiente igual a 1	2 termos quadráticos com sinais opostos (1 positivo e o outro negativo)

Didaticamente, diferente da prática de ensino recorrente em que se limita a apenas apresentar as equações como um todo, a partir das unidades significantes dos Quadros anteriores é semioticamente importante reconhecer os elementos que constituem *conjunto das unidades simbólicas* da equação além de como é a *combinação* desses elementos na equação em questão. Em primeiro lugar, esse reconhecimento é fundamental para identificar as oposições qualitativas das diferentes equações das quádricas. Ademais, é desse conjunto/combinação que podemos analisar se haverá ou não os valores visuais elipses, hipérbolas, parábolas ou cônicas degeneradas (o conjunto vazio; um ponto; uma única reta; um par de retas paralelas; um par de retas concorrentes) nas interseções com planos. Inclusive, podemos “prever” o que é definido na interseção de uma quádrica com um desses planos. Nesse caminho, podemos entender semioticamente por que os registros simbólicos e gráficos (da superfície quádrica como um todo e das interseções determinadas) se correspondem da maneira como conhecemos.

Algebricamente para o estudo da interseção de uma quádrlica de equação Q com um dos planos coordenados ou com um dos planos paralelos aos planos coordenados costumasse substituir a equação do plano na correspondente variável de Q e, a seguir, fazer simplificações. Feito essa substituição sabemos que a variável da equação da quádrlica que foi substituída pela equação do plano se *transformará* numa constante e, conseqüentemente, determinaremos uma equação com duas variáveis que irá se referir a uma das cônicas. No uso desse procedimento, mesmo que ele seja algébrico, pensamos que é relevante considerar sua interpretação geométrica. Para simplificar a comunicação chamaremos o referido de *procedimento P*. Como exemplo, para determinar algebricamente a interseção entre o plano de equação $z = 3$ e a quádrlica de equação $z = -x^2 + y^2$, basta substituir a equação desse plano na variável z da equação da quádrlica e, assim, ficamos com a equação $3 = -x^2 + y^2 \rightarrow -\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{3} = 1$. Note que essa última equação é tal que no primeiro membro há dois termos quadráticos com sinais opostos e no segundo membro há apenas o número 1, ou seja, trata-se das unidades simbólicas de uma hipérbole. Logo, concluímos que na interseção em questão determinamos uma hipérbole contida no plano de equação $z = 3$. A primeira figura do Quadro 2 representa no sistema cartesiano essa interseção.

VARIÁVEIS VISUAIS ESPECÍFICAS DOS ELIPSOIDES PADRÃO

Especificamente para os elipsoides padrão, adotamos como variável visual a comparação entre o tamanho dos eixos (maior, médio e menor ou do diâmetro) e temos 3 valores visuais que são os seguintes: (1) os três eixos são diferentes (chamaremos de *elipsoide em α e β*); (2) dois eixos são iguais e um é diferente (*esferoide*); (3) os eixos são iguais (*superfície esférica*). Para cada um desses casos ainda adotamos outras variáveis visuais. Para (1), tomamos a posição dos eixos maior, médio e menor em relação aos eixos coordenados como variável visual. Para (2) tomamos duas variáveis visuais: a comparação entre o tamanho do eixo com medida diferente em relação aos outros dois com medidas iguais (podendo aquele ser maior – *esferoide alongado em α* - ou menor que estes iguais - *esferoide achatado em α*); a posição do eixo com medida diferente em relação aos eixos coordenados. Para (3) tomamos a medida do raio como variável visual.

Diante das variáveis visuais tomadas, considere o sistema cartesiano $\alpha\beta\gamma$. Nesse sistema os eixos coordenados são os eixos α , β e δ . Destacamos explicitamente as correlações semióticas no quadro seguinte.

Quadro 9

Variáveis visuais específicas dos elipsoides padrões (os autores)

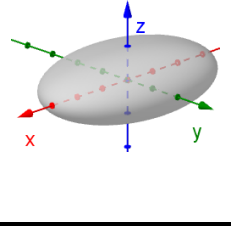
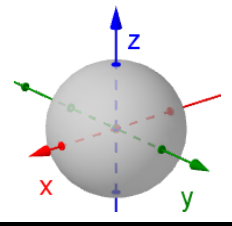
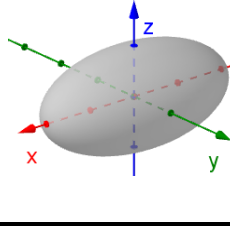
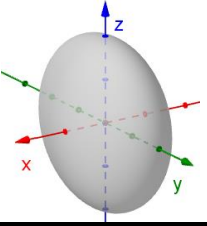
Registros básicos em língua natural	Variáveis visuais	Unidades correspondentes simbólicas
-------------------------------------	-------------------	-------------------------------------

<p>Elipsoide em α e β</p>	<p>- Os três eixos (maior, menor e médio) do elipsoide têm medidas diferentes; - e o eixo maior está contido no eixo α e o eixo médio está contido no eixo β. Comentário: por expansão discursiva o eixo menor está contido no terceiro eixo coordenado (eixo γ).</p>	<p>- Os denominadores dos três termos quadráticos são diferentes; - entre os três termos quadráticos o maior denominador está sobre a variável α^2, o médio está sobre β^2 e o menor está sobre a outra variável quadrática (γ^2).</p>
<p>Superfície esférica com $R = R_0$ <i>(Considere que o 2º membro da equação é igual a 1.)</i></p>	<p>- Os três eixos têm medidas iguais; - a medida do raio R é R_0.</p>	<p>- Os denominadores dos três termos quadráticos são iguais; - o denominador de cada termo quadrático é numericamente igual ao quadrado da medida do raio.</p>
<p>Esferoide alongado em α</p>	<p>- Dois eixos têm medidas iguais e o terceiro eixo tem medida maior que os outros dois; - o eixo maior está contido no eixo α. Comentário: por expansão discursiva os eixos menores do elipsoide estão contidos nos eixos β e γ.</p>	<p>- Entre os três denominadores dos termos quadráticos, dois são iguais e o terceiro é maior que os outros dois; - entre os três termos quadráticos o maior denominador está sobre a variável α^2.</p>
<p>Esferoide achatado em α</p>	<p>- Dois eixos têm medidas iguais e o terceiro eixo tem medida menor que os outros dois; - o eixo menor está contido no eixo α. Comentário: por expansão discursiva os eixos maiores do elipsoide estão contidos nos eixos β e γ.</p>	<p>- Entre os três denominadores dos termos quadráticos, dois são iguais e o terceiro é menor que os outros dois; - entre os três termos quadráticos o menor denominador está sobre a variável α^2.</p>

No Quadro anterior as unidades simbólicas são provenientes da identificação dos denominadores dos termos quadráticos da equação e de relações ou operações envolvendo esses denominadores (relação de ordem; posição em relação às variáveis; raiz quadrada,). A seguir, exemplos.

Quadro 10

Exemplos dos tipos de elipsoide padrão (os autores)

Elipsoide em x e y	Superfície esférica com $R = 1$	Esferoide alongado em x .	Esferoide achatado em x .
			
$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1$	$x^2 + y^2 + z^2 = 1$	$\frac{x^2}{4} + y^2 + z^2 = 1$	$x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4} = 1$

POSIÇÕES PADRÃO E REGISTROS EM LÍNGUA NATURAL

Tomamos as *diferentes posições padrão*¹ como uma variável visual *importante*, mas pouco explorada no ensino. Ela se refere às diferentes posições que as quádricas padrão podem estar no sistema cartesiano. Para cada uma delas ainda propomos *registros em língua natural*. Como exemplo, veja a figura da esquerda e a do centro do Quadro 1 e note que o paraboloides

¹ Também se pode pensar em diferentes posições transladadas ou rotacionadas.

elíptico padrão tem 6 posições padrão (cada um com seu respectivo registro em língua natural que detalharemos a seguir). Neste artigo, discutiremos brevemente apenas o caso dos paraboloides elípticos nas posições padrão, para as demais quádricas, veja Silva (2018), Silva e Moretti (2018a, 2018b).

Para os paraboloides elípticos padrão, sabemos que as interseções com planos paralelos a um dos planos coordenados determinam infinitas elipses ou cônicas degeneradas. Genericamente, chamaremos de eixo α o eixo coordenado perpendicular a esses planos e indicaremos respectivamente por α_+ e α_- as partes positivas e negativas de α . Voltando as referidas elipses, visualmente é significativo que os *eixos maior e menor (ou diâmetro) dessas elipses aumentam* de tamanho à medida que elas se afastam da origem seguindo em α_+ ou em α_- .

Para essas cônicas usaremos os termos “*elipses com eixos aumentando*” e note que o aumento de seus eixos dá a noção de que as quádricas correspondente estão abrindo. A partir da posição das “*elipses com eixos aumentando*” em relação aos eixos coordenados podemos reconhecer *as diferentes posições padrão* e, ainda, propor *registros em língua natural* conforme mostra quadro seguinte.

Quadro 11

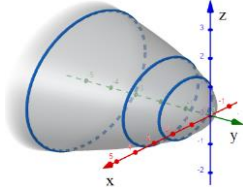
Registros em língua natural para os paraboloides elípticos padrão (os autores)

Registros básicos em língua natural	Variável visual	Unidades simbólicas correspondentes
Paraboloides elípticos <i>abrindo em</i> α_+ .	Elipses com eixos aumentando “perpendiculares” ao semieixo α_+ .	A variável linear é α ; as variáveis quadráticas têm coeficientes positivos .
Paraboloides elípticos <i>abrindo em</i> α_- .	Elipses com eixos aumentando perpendiculares ao semieixo α_- .	A variável linear é α ; as variáveis quadráticas têm coeficientes negativos .

Como exemplo, considere o paraboloides elíptico de equação $y = -\frac{x^2}{4} - z^2$. Nessa equação a variável linear é y e as variáveis quadráticas têm coeficientes negativos. Logo, segundo o Quadro anterior, as elipses com eixos aumentando são perpendiculares ao semieixo y_- e, portanto, a partir dessas elipses podemos reconhecer a posição do paraboloides no sistema cartesiano (veja o Quadro seguinte). Além disso, também podemos usar os seguintes registros em língua natural para se referir a essa quádrlica: *paraboloides elíptico abrindo em* y_- .

Quadro 12

Registros do parabolóide elíptico de equação $y = -\frac{x^2}{4} - z^2$ (os autores)

Registro básico simbólico	Registro cartesiano	Registro básico em língua natural
$y = -\frac{x^2}{4} - z^2$		<p><i>Parabolóide elíptico abrindo em y_-</i></p>

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Diferente do sistema didático vigente tais como em Leithold (1994), Winterle (2000) e Lehmann (2007), nosso enfoque na abordagem das quádricas dá ênfase explícita aos elementos semiocognitivos presentes nos registros em língua natural, gráfico e simbólico. Nele, as identificações e correlações que existem entre esses diferentes tipos de registros não deve ser negligenciado, pois tratam-se de aprendizagens que não são naturais e espontâneas.

Para minimizar as dificuldades de como abordar as quádricas propomos que seja dado *ênfase* as quádricas nas posições padrão. Tratam-se de “posições privilegiadas”, pois mesmo sem ter que recorrer a Álgebra Linear é possível o estudo extenso dos registros simbólicos de maneira mais simples do que no caso das outras posições. Nesse caminho, para as demais posições (transladadas e rotacionadas) sugerimos que a abordagem seja feita a partir das posições padrão. No caso das posições transladadas

propomos uma abordagem análoga as de Moretti (2003), Moretti e Thiel (2012). Já para as posições rotacionadas, é necessário avançar nos estudos didáticos incluindo tópicos da Álgebra Linear. Do ponto de vista matemático essa sugestão é assegurada pelo Teorema Espectral. Didaticamente, as posições padrão são as que os livros didáticos trabalham sendo que o que pretendemos é apenas contribuir para o debate de como abordar o ensino das quádricas em sintonia com a interpretação global diante das citadas dificuldades. Dessa forma, buscamos aprimorar a prática de ensino.

Entre as variáveis visuais que tomamos as mais importantes são as interseções. Mesmo que contrarie a prática pedagógica recorrente, consideramos que todos os valores visuais (cônicas) determinados por todos os casos de interseções (não apenas as curvas de nível) sejam reconhecidos, pois o desconhecimento delas, que são desconstruções dimensionais que permitem visualizar dimensões menores do que três, prejudica a visualização da quádrica no sistema cartesiano e, além disso, a identificação e diferenciação tanto entre os vários casos de quádricas quanto entre uma mesma quádrica em posições diferentes no sistema cartesiano. Porém, em função do tempo de sala de aula, propomos que o citado reconhecimento seja feito com algum *software*, como o Geogebra, para *apenas uma das posições* que cada caso de quádrica padrão pode estar no sistema cartesiano. A partir daí, as interseções das quádricas que estão em outras posições padrão podem ser entendidas usando o recurso das *reflexões em torno de planos*. Em Silva (2018), Silva e Moretti (2018a) há mais detalhamento sobre as reflexões (incluindo propriedades), aqui cabe apenas

dizer que dada uma quádrlica numa das posições padrão podemos determinar as outras posições padrão a partir de reflexões em torno de planos. Assim, podemos estender o que soubermos acerca de uma das quádrlicas numa das posições padrão para as demais posições padrão.

Consideramos que os registros em língua natural podem contribuir para a abordagem das quádrlicas na perspectiva da interpretação global. Com eles, almejamos as seguintes possibilidades: (1) criar designações linguísticas que não apresentem problemas de referência aos objetos e que possuam articulações explícitas entre os registros em língua natural com as unidades simbólicas e as variáveis visuais tomadas; (2) explorar linguisticamente todas as diferentes posições de uma quádrlica no sistema cartesiano; (3) a partir dos registros em língua natural, explorar de maneira imediata ao menos uma propriedade global da figura e por *expansões discursivas* (relição de uma proposição matemática a outras de forma coerente) permitir explorar outras propriedades; (4) realizar conversões entre os registros em língua natural, gráfico e simbólico. Assim, pode-se dar mais destaque aos aspectos semióticos e cognitivos presentes nos registros em língua natural sem, com isso, fazer com que um termo linguístico tenha apenas a função de codificação.

Em Silva (2018), Silva e Moretti (2020), mediados pelo Geogebra, há propostas de atividades que mostram como abordar as quádrlicas na perspectiva da interpretação global. Nelas, o processo de ensino e aprendizagem não se limita a apenas informar aos alunos os conhecimentos matemáticos pois, ao invés disso, criamos oportunidades para que os

estudantes sejam ativos no processo e incentivamos uma forma de abordar em que eles participem de atividades investigativas tais que, inclusive, possam testar, validar ou refutar conjecturas e, paralelamente, desenvolver sua autonomia. Nessas propostas, o citado *software* é um potencializador e facilitador.

REFERÊNCIAS

- Corrêa, M. O. S. & Moretti, M. T. (2014). Esboçando curvas de funções a partir de suas propriedades figurais: uma análise sob a perspectiva dos registros. In: C. F. Brand & M. T. Moretti (Orgs). *As contribuições da Teoria dos Registros de Representações Semióticas para o Ensino e a Aprendizagem na Educação Matemática*. (p. 39-65) Editora Unijuí.
- Duval, R. (1988). *Graphiques et équations: L'articulation de deux registres. Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives*. v.1. Strasbourg: ULP – IREM.
- Duval, R. (2009). *Semiósis e pensamento humano: registros semióticos e aprendizagens intelectuais* (fascículo I). São Paulo: Livraria da Física. 120 p. (Coleção contextos da ciência). Trad de: Lênio Fernandes Levy & Marisa Rosâni Abreu da Silveira.
- Duval, R. (2011) Gráficos e equações: a articulação de dois registros. *REVEMAT* (Trad. de M. T. Moretti), 6 (2), 96-112. <https://doi.org/10.5007/1981-1322.2011v6n2p96>.
- Lehmann, C. H. (2007). *Geometria analítica*. 8. ed. 1. imp. São Paulo: Globo. Tradução de: Ruy Pinto da Silva Sieczkowski.

- Leithold, L. (1994). *O cálculo com geometria analítica*. 3. ed. São Paulo: Harbra. Tradução de: Cyro de Carvalho Patarra. Revisão técnica de: Wilson Castro Ferreira Júnior e Sílvia Pregnoatto.
- Moretti, M. T. (2003). A translação como recurso no esboço de curvas por meio da interpretação global de propriedades figurais. In: S. D. A. Machado (org.). *Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica*, 149-160. Papirus.
- Moretti, M. T & Thiel, A. A. (2012). *O ensino de matemática hemético: um olhar crítico a partir dos registros de representação semiótica*. PRÁXIS EDUCATIVA, Ponta Grossa, Paraná, v.7, n.2, 379-396.
- Silva, S. F. (2018). *Ensino e aprendizagem das superfícies quádricas no ensino superior: uma análise baseada na teoria dos registros de representações semióticas com o uso do GeoGebra*. [Tese de Doutorado em Educação Científica e Tecnológica, Universidade Federal de Santa Catarina]. <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/198598>
- Silva, S. F & Méricles, T. M. (2018a). *A abordagem de interpretação global no ensino e na aprendizagem das superfícies quádricas*. Educação Matemática Pesquisa, São Paulo, v.20, n.2, 283-308.
- Silva, S. F & Méricles, T. M. (2018b). *Registros em língua natural das superfícies quádricas: análise semiótica e possibilidades de uso de novos registros*. Educação Matemática Pesquisa, São Paulo, v.20, n.1, 294-314.
- Silva, S. F & Méricles, T. M. (2020). Ensino e aprendizagem das superfícies quádricas mediado pelo geogebra: articulações entre a abordagem de interpretação global e a teoria das situações didáticas. In: M. T. Moretti & C. F. Brandt (orgs.). *Florilégio de pesquisas que envolvem a teoria semiocognitiva de aprendizagem matemática de Raymond Duval*, 104-128. REVEMAT/UFSC.

Stewart, J. (2010). *Cálculo*. v. 2. 2. ed. 5 imp. São Paulo: Cengage Learning. 541 p. Tradução: Antonio Carlos Moretti; Antonio Carlos Gilli Martins. Revisão técnica: Helena Maria Ávila de Castro.

Winterle, P. (200). *Vetores e geometria analítica*. São Paulo: Pearson Makron Books, 232 p.

CAPÍTULO IX

ESBOÇO, LEITURA E INTERPRETAÇÃO DE GRÁFICOS POR ESTUDANTES CEGOS: UMA ANÁLISE SEMIOCOGNITIVA DO DUA EM PESQUISAS¹

Daiana Zanelato dos Anjos
Méricles Thadeu Moretti

INTRODUÇÃO

O direito à Educação para todos preconizado pela Constituição Federal brasileira (BRASIL, 1988) nos faz refletir sobre a abrangência da palavra “todos” levando-nos a considerar a característica humana da diversidade nesta reflexão. Educar a todos é, então, considerar as pessoas com deficiência, estatura alta, cabelos escuros, transtornos e toda e qualquer dificuldade de aprendizagem, considerando assim, as diferenças que nos constituem enquanto sujeitos. O direito às diferenças é uma das dimensões da Educação para todos e, neste sentido, o que se deseja é diminuir as desigualdades no percurso educacional nos mais variados segmentos da sociedade (SANTA CATARINA, 2014, p. 53). Nos voltando às aulas de matemática, pensar no direito às diferenças é levar em conta o perfil dos alunos da sala inclusiva, lembrando que este componente curricular tem como principal objetivo a formação integral do sujeito

¹ Adaptação do artigo apresentado ao VIII Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (SIPEM) ocorrido de 22 a 27 de novembro de 2021.

promovendo a dignidade humana, o que vai muito além de somente aplicar técnicas.

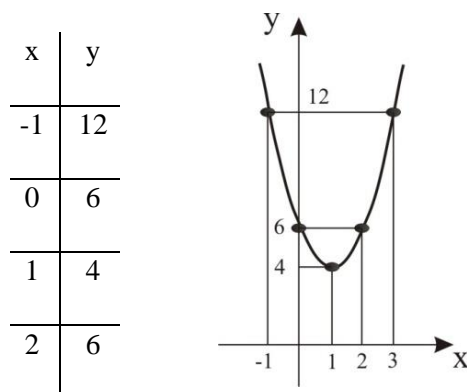
Tendo esse entendimento como ponto de partida, consideramos que, tanto no material didático dos estudantes quanto durante as aulas de matemática, as atividades que compreendem o esboço, a leitura e a interpretação de curvas são utilizadas com muita frequência. Entre outros motivos, a capacidade de esboçar, ler e interpretar um gráfico requer dos estudantes a “discriminação de variáveis visuais pertinentes constituintes deste tipo de representação” (DUVAL, 2011a, p. 96), seja para os gráficos estatísticos, como os histogramas ou para aqueles que mostram as curvas originadas de funções, entre outras situações.

Nos estudos realizados por Duval (2011a, 2011b), percebe-se que o que se tem feito no ensino, de forma geral, é a utilização de regras de codificação para construir os gráficos (abordagem ponto a ponto), associando pares ordenados de pontos no plano. Dessa forma se constrói um abismo cognitivo, pois perde-se a possibilidade da interpretação global das unidades figurais visuais (DUVAL, 2011a). Quando se leva em conta a abordagem de interpretação global, ao contrário da abordagem ponto a ponto, são analisadas unidades significantes figurais e as suas correspondentes nos registros algébricas das funções. As mudanças em um dos registros imprimem alterações no outro e permitem uma interpretação global do conceito em questão.

No procedimento de esboço de curva, denominado ponto a ponto, que se observa bastante no ensino básico, uma tabela de duas colunas é usada, por atribuição de valores na expressão matemática da curva. A Figura 1, a seguir, mostra um exemplo típico para o caso da curva *para* $y = 2x^2 - 4x + 6$.

Figura 1

Procedimento ponto a ponto para $y = 2x^2 - 4x + 6$ (Moretti; Thiel, 2012, p. 388)



O procedimento ilustrado na Figura 1, em que cada par ordenado tem um ponto assinalado no plano cartesiano e a curva pode ser traçada juntando estes pontos, reforça a ideia da curva como um aglomerado de pontos e, com isso, o estudante perde de vista a percepção global da curva e o papel da expressão algébrica que fica, muitas vezes, apenas como uma fornecedora de pares ordenados no início do processo (DUVAL, 2011a, 97-99).

Levando em conta essa abordagem de pensar o esboço, a leitura e a interpretação de gráficos e trabalhando em uma perspectiva inclusiva, pensamos como esse tipo de atividade tão comumente realizada e solicitada em matemática impacta a aprendizagem desses estudantes. Em um trabalho recente (ANJOS, 2019) apresentam-se os gráficos estatísticos a uma estudante da terceira série do Ensino Médio e se confirma a dificuldade de acesso semiótico ao objeto de conhecimento, como também a dificuldade relacionada à natureza da escrita Braille que impossibilitava, por exemplo, o esboço do gráfico com a máquina Braille. No caso da dificuldade relacionada ao acesso semiótico, deparou-se com a situação de uma transcrição de um histograma que não apresentava as linhas de grade horizontais dificultando que a estudante cega identificasse os valores de referência das barras horizontais no eixo coordenado das ordenadas. Logicamente, uma questão como essa pode ser resolvida com a melhoria da transcrição, mas em sala de aula trouxe dificuldades no acesso, na leitura e na interpretação dos dados da questão pela estudante. Como percebemos há um impacto para a aprendizagem. De forma mais específica, o que acontece em relação ao esboço, leitura e interpretação de outros tipos de gráficos e o que têm nos dito as pesquisas?

Para intentar responder a estes questionamentos realizamos uma revisão de literatura na temática específica apresentada anteriormente. Levamos em consideração três categorias: leitura, interpretação e esboço de gráficos, como também a abordagem utilizada: ponto a ponto ou de interpretação global de propriedades figurais. Pensando na perspectiva

inclusiva e em suas aplicações em sala de aula, analisamos os trabalhos investigados buscando encontrar neles os princípios do Desenho Universal para a Aprendizagem – DUA que, além de outros aspectos, pensa uma aprendizagem que inclua as diferenças.

OS PRINCÍPIOS DO DESENHO UNIVERSAL PARA A APRENDIZAGEM - DUA

O ensino das pessoas com deficiência nem sempre aconteceu em classes de ensino comum como acontece atualmente. Ainda longe de um ideal de educação inclusiva, mas almejando alcançar este objetivo, nossas classes de ensino regular passaram a receber matrículas de estudantes público- alvo da Educação Especial a partir da Política Nacional da Educação Especial na perspectiva da Educação Inclusiva (BRASIL, 2008) que, entre outros pontos, instituiu a migração de estudantes com deficiência das instituições privado-assistenciais para as classes de ensino regular fazendo com que essas últimas perdessem tais matrículas. Dessa forma, o serviço de Atendimento Educacional Especializado (AEE) passou de substitutivo ao ensino comum (BRASIL, 2008) a status de complementar e suplementar a este ensino, respectivamente, disponibilizando recursos de acessibilidade, estratégias e serviços, assim como, enriquecendo o currículo (GARCIA; MICHELS, 2018, p. 61).

Nesse íterim os professores das classes comuns têm se mobilizado não somente para receber os estudantes com deficiência, mas para pensar uma prática pedagógica que atinja a todos os estudantes dessa classe inclusiva. Sabemos que, como bem apontado por Zerbato e Mendes (2018, p. 148), essa modificação no ato de ensinar não se faz sozinha e não é fácil,

nem simples de ser realizada. Há que se pensar em currículo, estratégias de ensino, espaço físico da sala de aula, formação docente e outras ações que mobilizem toda uma rede de profissionais nesta direção.

A escola inclusiva não se faz apenas por professores e ações pontuais surgem inspiradas no conceito de Design Universal utilizado para a projeção de edifícios e espaços públicos, o Desenho Universal para a Aprendizagem – DUA (ZERBATO; MENDES, 2018). Como mencionado, a proposta trazida com este conceito não está voltada apenas a acessibilidade em espaços físicos, mas sim, com a ideia de “transformar escolas de ensino comum em ambientes inclusivos e favoráveis à aprendizagem de todos” (Idem, p. 149). Este conceito surgiu nos Estados Unidos em 1999 por alguns pesquisadores do *Center for Applied Special Technology (CAST)*.

O DUA se constitui por três princípios fundamentais que embasam as estratégias inclusivas que devem ser pensadas por toda a equipe escolar e não somente professores da Educação Especial e professores regentes de classes de ensino comum. Os princípios são: de Engajamento, de Representação e de Ação e Expressão. O primeiro dos princípios tem relação com a capacidade comunicacional entre os professores e os estudantes em sala de aula, pois deve embasar a elaboração de atividades acessíveis oferecendo oportunidades de interação entre todos os estudantes, pensando no nível dos desafios que a atividade exigirá e proporcionando incentivos para a aprendizagem (ZERBATO; MENDES, 2018). No princípio da representação preocupa-se com a apresentação e o reconhecimento da informação que será aprendida e neste caso, em especial, que utilize

recursos táteis e uma apresentação na linguagem Braille e em tinta para que todos da classe possam usufruir e aprender juntos. Por fim, o terceiro dos princípios leva em conta a forma de avaliação de tal aprendizagem e que, segundo o DUA, deve apresentar uma diversidade de estratégias para que o estudante possa demonstrar o que aprendeu.

O ESBOÇO DE CURVAS, LEITURA E INTERPRETAÇÃO DE GRÁFICOS POR ESTUDANTES CEGOS: REVISÃO DE LITERATURA

Foram investigados artigos de periódicos das grandes áreas de Educação e Ensino, em ambas buscando o campo de Educação Matemática para verificar três categorias de análise pensadas por nós: a leitura de gráficos, a interpretação de gráficos e o esboço de gráficos. Em matemática cada uma dessas ações vai mobilizar diferentes habilidades dos estudantes e pode apresentar mais ou menos custo cognitivo.

Os artigos foram pesquisados em periódicos de estratos diversos. A utilização de descritores facilitou a busca, mas foi necessário fazer a leitura atenta de todos os resumos para, posteriormente, identificar se o trabalho se enquadrava em nossa pesquisa. Os descritores utilizados foram: Esboço de curvas e cegos, Gráficos e cegos, Esboço de curvas e deficiência visual e Gráficos e deficiência visual. Encontramos sete artigos com essas especificações apresentadas acima. Analisando de forma mais apurada, dois deles foram desconsiderados, pois apenas analisavam materiais didáticos e os registros gráficos, não apresentando análises que envolvessem os estudantes cegos e a leitura, interpretação e esboço de gráficos de funções.

Os cinco trabalhos analisados foram mais bem detalhados nas linhas que seguem.

No artigo de Manrique e Ferreira (2010) publicado na Revista Contrapontos, os autores tinham o intuito de analisar o uso de uma ferramenta para representação de gráficos por estudantes cegos. A construção da ferramenta foi detalhada e o material utilizado foi uma placa de latão, papel milimetrado e tiras de uma manta imantada. No relato de experiência de Fontes, Cardoso e Ramos (2012) publicado na Revista Thema, detalhou-se como ocorreu o processo de ensino-aprendizagem de gráficos nas aulas de física e matemática. O trabalho de Araujo e Aguiar (2018) teve como objetivo investigar o acesso aos diferentes tipos de registros de representação da função quadrática. Nesse estudo foram analisados modelos de gráficos e tabelas desenvolvidos através de dois softwares (Monet e Braille Fácil) e impressos em Braille. Na pesquisa de Uliana (2013), o objetivo é mostrar a criação, confecção e experimentação de um kit pedagógico que possibilita a realização de diversas atividades matemáticas com variados conceitos, entre eles, o de função polinomial. O último trabalho investigado foi desenvolvido por Pasquarelli e Manrique (2016) e fez uso de uma tecnologia assistiva (simulador de gráficos dot-plot) para investigar no processo de ensino e aprendizagem de medidas de tendência central (média, moda e mediana).

Na sequência apontamos, em específico, o que cada trabalho mostrou em relação às três categorias levadas em consideração na elaboração de tal pesquisa, assim como a abordagem em relação aos

gráficos utilizados, assim como indicada nos estudos de Duval (2011a, 2011b). Por fim, analisamos se os trabalhos mostram indícios de aplicação das ideias do DUA ou mesmo se apontam o seu uso.

Leitura

O trabalho de Araujo e Aguiar (2018), mostrou que a estudante cega fez a leitura e o reconhecimento de eixos e pares ordenados do sistema cartesiano que foi elaborado pelos pesquisadores com o apoio de softwares, nada foi relatado em relação à função como um todo e a sua interpretação global. Nesse trabalho, o gráfico era seguido de uma tabela que mostrava os pontos que faziam parte da curva da função quadrática esboçada. Dessa forma, podemos inferir que a abordagem utilizada neste caso foi a ponto a ponto. Interessante pontuar, que mesmo este trabalho tendo foco na leitura de gráficos por estudantes cegos, ou seja, não pensando na aprendizagem dos outros estudantes fazendo uso deste material, foi pensado na relação comunicacional entre professor que enxerga e estudante cego, já que o material tem, ao mesmo tempo, os escritos em tinta e em Braille. De certa forma, poderíamos dizer que se iniciou aqui a ideia do princípio do engajamento do DUA.

Interpretação

Apesar de não mostrar os detalhes da interpretação, o trabalho de Manrique e Ferreira (2010) que apresentou uma ferramenta² para

² Não apresentamos a figura da ferramenta, pois não consta no trabalho de Manrique e Ferreira (2010).

construção de gráficos por estudantes cegos apontou que a ferramenta foi utilizada e favoreceu a interpretação dos gráficos de uma função de primeiro grau.

No relato de experiência de Fontes, Cardoso e Ramos (2012), o recurso utilizado foi uma prancheta de papelão revestida de uma fina tela plástica e o multiplano. Os professores esboçavam neste material retas e curvas e solicitavam a identificação pelo estudante. Não houve detalhes do que era solicitado para identificar, mas há apontamentos de êxito do estudante na identificação.

A pesquisa de Uliana (2013) mostrou resultados positivos no que cerca a interpretação de um gráfico de função polinomial com um material concreto com metal, Braille e fios de arame. A autora não detalhou como essas interpretações eram realizadas pelo estudante, pois o foco principal era mostrar as melhorias feitas no kit pedagógico em desenvolvimento e a aplicação com outro conceito matemático.

Esboço

No trabalho de Manrique e Ferreira (2010) percebemos que a ferramenta desenvolvida favoreceu a identificação de pontos no plano cartesiano e a construção de gráficos de função do primeiro grau, ou seja, a abordagem utilizada pelos autores foi a ponto a ponto. Apesar de os autores (2010, p. 14, Grifo Nosso) terem apontado que os estudantes sem

deficiência visual adotam “estratégias inteiramente pontuais em suas interpretações de gráficos, vendo-os como instrumentos para localizar pontos, não sendo capazes de interpretar as relações de forma mais global”, tal estratégia fez parte da utilização da ferramenta com os estudantes cegos. Essa ideia de interpretação global é estudada por Duval (2011a), mas no trabalho de Manrique e Ferreira (2010) faz parte dos estudos de Eisenberg e Dreyfus (1990)³, Kerslake (1981)⁴ e Monk (1992)⁵.

No relato de experiência de Fontes, Cardoso e Ramos (2012), a prancheta também foi utilizada para a construção de gráficos. Pelas imagens mostradas no trabalho, há indícios de esboço de algumas curvas e a abordagem utilizada para o esboço foi a ponto a ponto, mesmo não sendo indicada especificamente no relato.

A pesquisa de Uliana (2013) apresentou resultados positivos no esboço de gráficos de funções polinomiais com o material pedagógico criado, inicialmente, com um plano cartesiano físico de metal com eixos em Braille e fios de arame para esboçar as curvas das funções. A autora indicou que o estudante cego localizava pontos da função no gráfico, assim como os estudantes com acuidade visual, o que nos indica que aqui também era

³ Eisenber; Dreyfus. Sobre la resistencia para visualizar en matemáticas. In W.Zimmerman & S. Cunningham (Eds.), MAA notes number 19: Visualization in Teaching and Learning Mathematics. *Mathematical Association of America*. Traducción Hitt y Arteaga. DME. Cinvestav - IPN. 1990.

⁴ Kerslake, D. Graphs in Hart “Children’s understanding of mathematics. Windsor, IJK: NFER-Nelson, 1981.

⁵ Monk, S. Students’ Understanding of a Function Given by a Physical Model, em G. Harel e Ed Dubinsky, 1992

utilizada a abordagem ponto a ponto. O material foi aprimorado, mas a autora a partir daí, fez experimentações com uma estudante cega e considerou outro objeto de conhecimento em matemática, a saber, figuras planas.

Na pesquisa de Pasquarelli e Manrique (2016), a construção de gráficos era realizada por meio da tecnologia assistiva dot-plot e com isso, não se tratava de um esboço, mas de uma construção, uma vez que os gráficos de barras aqui trabalhados eram construídos em uma plataforma que lembra um ábaco com varetas que os estudantes iam inserindo a quantidade indicada de bolinhas. Como nessa pesquisa, a construção não se tratava de gráficos de funções, não havia como analisar a abordagem trabalhada. Os conceitos de moda, média e mediana foram aprendidos de maneira satisfatória pelos estudantes com e sem deficiência visual, conforme indicado pelas autoras e ainda, o uso da tecnologia assistiva proporcionou maior autonomia aos estudantes cegos.

Dentre todos os trabalhos mencionados, percebemos que neste último os princípios do DUA foram utilizados mesmo sem serem mencionados pelos autores. Houve o princípio do engajamento, uma vez que a relação comunicacional entre os professores e os estudantes com e sem deficiência se fez na utilização da tecnologia assistiva. Percebemos que a utilização da tecnologia acessível possibilitou uma forma acessível de apresentar os conceitos estudados e ainda permitiu a interação entre todos da classe. No que se refere ao princípio da representação, percebemos que houve a preocupação com a linguagem do estudante cego, já que a

tecnologia assistiva foi apresentada também em Braille e permitia assim, o uso também pelos estudantes cegos. Em relação ao último dos princípios, como não houve a avaliação das atividades não podemos fazer observações, mas acreditamos que tal tecnologia utilizada poderia fazer parte das possibilidades de avaliações a serem pensadas na classe inclusiva.

CONSIDERAÇÕES E PERSPECTIVAS

Primeiramente é interessante pontuar que são poucos os trabalhos que se debruçam sobre a temática levantada para estudo. Na revisão de literatura que investimos em periódicos das áreas de Educação e Ensino, encontramos apenas 5 (cinco) trabalhos que estavam relacionados à temática do esboço, leitura e interpretação de gráficos por estudantes cegos. Vale lembrar que não houve pesquisas por dissertações e teses, o que nos possibilita pensar na continuidade da investigação possibilitando resultados de pesquisas com maior profundidade na temática.

Duval (2011b), mesmo não estudando a aprendizagem de estudantes cegos especificamente, trabalha com a ideia de interpretação global de propriedades figurais em contraposição à abordagem ponto a ponto, comumente usada no ensino. Foi com este intuito que pensamos na investigação dos trabalhos por este olhar. Também porque investimos na teoria em trabalhos anteriores, em que investigamos o Código Matemático Unificado para a Língua Portuguesa – CMU (ANJOS, 2015) e o acesso aos objetos de saber em matemática fazendo o uso do livro didático de matemática em Braille (ANJOS, 2019). Mas os trabalhos analisados

utilizaram apenas a abordagem ponto a ponto para a leitura, interpretação ou esboço dos gráficos, o que nos leva a concluir que a temática não é estudada na perspectiva indicada nos estudos de Duval (2011a, 2011b). Ainda vale pontuar que, ao encontrar apenas os pontos no plano cartesiano, os estudantes perdem a ideia de uma percepção global da curva esboçada e da sua relação com as unidades significantes da expressão algébrica.

Entre outras percepções relacionadas à leitura, interpretação e esboço de gráficos, percebemos que houve indícios da utilização dos princípios do DUA. Sabemos que essa ideia ainda é pouco utilizada em trabalhos que pensam a inclusão de estudantes com deficiência em classes inclusivas, principalmente àqueles voltados ao componente curricular de matemática. Os princípios indicados pelo DUA puderam ser percebidos de forma inicial nos trabalhos de Pasquarelli e Manrique (2016, p. 319) e de Araujo e Aguiar (2018). No trabalho de Araujo e Aguiar (2018) percebemos, de forma sutil, o princípio do engajamento, já que os autores se preocuparam em manter a comunicação relacional entre professores e estudantes cegos mostrando os gráficos em tinta e em Braille. As autoras apontaram que se preocupavam com o cumprimento dos princípios da Declaração de Salamanca, ao entenderem que o “atendimento a todas as pessoas de modo igualitário” é a forma mais correta de atendimento. Também sem apontar os princípios do DUA, essa pesquisa mostrou que o princípio do engajamento estava presente na proposta, uma vez que o uso da tecnologia assistiva se fez por todos os estudantes envolvidos e de maneira que houve interação entre eles no processo de ensino e

aprendizagem. Assim, como o princípio da representação, já que a linguagem Braille estava presente e permitiu a leitura pelos estudantes cegos.

Como mencionado anteriormente, o DUA ainda não é utilizado amplamente nas pesquisas em Educação Matemática, mas mostra importantes ideias para se pensar as classes inclusivas e as estratégias para a aprendizagem dos estudantes com e sem deficiência. Pontuamos positivamente a utilização de indícios do DUA e acreditamos que os estudos apoiados nesta ideia têm perspectiva futura na área da Educação Matemática Inclusiva.

REFERÊNCIAS

- ANJOS, D. Z. (2015). *Da tinta ao Braille: estudo de diferenças semióticas e didáticas dessa transformação no âmbito do Código Matemático Unificado para a Língua Portuguesa - CMU e do livro didático em Braille*. 161fl. Dissertação (Mestrado em Educação Científica e Tecnológica). Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis. 2015.
- ANJOS, D. Z. (2019). *O que se revela quando o olhar não alcança? Em busca do acesso semio-cognitivo aos objetos do saber matemático por uma estudante cega*. 389fl. Tese (Doutorado em Educação Científica e Tecnológica). Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis.
- ARAUJO, L. F. F; AGUIAR, R. (2018). *Função quadrática para estudantes cegos: uma proposta de padronização de gráficos táteis*. Anais COLBEDUCA, p. 1-15.

- BRASIL. (1988). *Constituição da República Federativa do Brasil*. Brasília, DF: Senado Federal: Centro Gráfico.
- BRASIL. (2008). Ministério da Educação. Secretaria de Educação Especial. *Política Nacional de Educação Especial na Perspectiva da Educação Inclusiva*. Brasília: MEC/SEESP.
- DUVAL, R. (2011a). *Gráficos e equações: a articulação de dois registros*. Trad. Mércles Thadeu Moretti. *Revemat*, 6 (2), p.91-112
- DUVAL, R. (2011b). *Ver e Ensinar Matemática de outra Forma*. Entrar no modo matemático de pensar: os registros de representação semióticos. São Paulo: PROEM.
- FONTES, A. S; CARDOSO, F. A. R; RAMOS, F. V. (2012). *Como trabalhar gráficos com aluno deficiente visual – Relato de Experiência*. *Revista Thema*, v 9, n. 1, p. 1-13.
- GARCIA, R. M. C.; MICHELS, M. H. (2018). *Política de educação especial e currículo: disputas sobre natureza, perspectiva e enfoque*. *Revista Teias*, v. 19, n. 55, p. 54-70.
- MANRIQUE, A. L.; FERREIRA, G. L. (2010). *Mediadores e mediação: a inclusão em aulas de matemática*. *Revista Contrapontos*, v. 10, n. 1, p. 7-13.
- MORETTI, M. T.; THIEL, A. (2012). *O ensino de matemática hermético: um olhar crítico a partir dos registros de representação semiótica*. *Práxis Educativa*. Ponta Grossa, v. 7.2.
- PASQUARELLI, R. C. C.; MANRIQUE, A. L. (2016). *A inclusão de estudantes com deficiência visual no ensino e aprendizagem de estatística: medidas de tendência central*. *Educação Matemática Pesquisa*, São Paulo, v. 18, n. 1, p. 309-329.
- SANTA CATARINA. (2014). Governo do Estado. Secretaria de Estado da Educação. *Proposta Curricular de Santa Catarina: formação integral na*

educação básica. Estado de Santa Catarina. Secretaria de Estado da Educação.

ULIANA, M. R. (2013). *Inclusão de estudantes cegos nas aulas de matemática: a construção de um kit pedagógico*. Bolema, Rio Claro, v. 27, n. 46, p. 597-612.

ZERBATO, A. P.; MENDES, E. G. (2018). Desenho Universal para a Aprendizagem como estratégia de inclusão escolar. Educação Unisinos, 22 (2), p. 147-155.

SOBRE OS PARTICIPANTES DESTE E-BOOK

Bárbara Cristina Pasa é licenciada em Matemática pela Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões - URI. Mestre em Matemática Aplicada pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul - UFRGS. Doutora em Educação Científica e Tecnológica pela Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC. Atualmente é professora adjunta da Universidade Federal da Fronteira Sul - UFFS, Campus de Erechim, RS, ministrando disciplinas de Matemática e atuando como professora colaboradora no Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Educação – PPGPE. Membro do Grupo de Pesquisa em TIC, Matemática e Educação Matemática, do Grupo de Estudo e Pesquisa em Educação em Ciências, Matemática e Tecnologias - GEPECMaT, ambos da UFFS, e do Grupo de Pesquisa em Epistemologia e Ensino de Matemática - GPEEM, da UFSC.

Celia Finck Brandt é professora adjunta da Universidade Estadual de Ponta Grossa. Possui Licenciatura em Matemática pela Universidade Federal do Paraná. Possui Especialização em Educação pela UFPR. Possui Mestrado em Educação pela Universidade Estadual de Ponta Grossa. Possui Doutorado em Educação Científica e Tecnológica pela Universidade Federal de Santa Catarina. Possui Pós Doutorado em Educação Científica e Tecnológica pela Universidade Federal de Santa Catarina. Atua no Curso de Licenciatura em Matemática do Departamento de Matemática e Estatística da UEPG como

professora de Estágio Curricular Supervisionado. Atua como professora do Curso de Pós Graduação em Educação – Mestrado e Doutorado da UEPG e do Curso de Mestrado em Ciências e Educação Matemática da UEPG Atua nos seguintes grupos de Pesquisa registrados no CNPq GEPAM - Grupo de Estudo e Pesquisa em Aprendizagem da Matemática - UEPG (líder), Grupo de Estudo e Pesquisa em Educação Matemática - UEPG (pesquisador) e Grupo de Pesquisa em Epistemologia e Ensino de Matemática - GPEEM - UFSC (pesquisador). Recebeu no ano de 2016 o Professor Mércles Thadeu Moretti como professor Visitante no programa de Pós Graduação em Educação da UEPG com desenvolvimento de pesquisas com subsídios teóricos de Raymond Duval. Atua com pesquisas no campo da Educação Matemática.

Daiana Zanelato dos Anjos é Doutora em Educação Científica e Tecnológica pela UFSC, licenciada em Matemática pela mesma Universidade e em Pedagogia pela Uninter. Atualmente é técnica da gerência de ensino fundamental da SED/SC. pesquisadora dos grupos de pesquisa GEPAM/UFSC e GEDUA/UDESC e também é vice-líder do GPEEM/UFSC. É revisora de periódicos em Educação e Educação Matemática e tem interesse em estudos sobre a deficiência, em registros de representação Semiótica e numeramento.

Danieli Binotto possui graduação em Engenharia Ambiental e Sanitária pela Universidade Federal da Fronteira Sul - Campus Erechim (2022). Durante a graduação atuou como voluntária nas áreas de qualidade da água e toxicologia ambiental e como bolsista de iniciação científica em

projetos de pesquisa voltados ao ensino e aprendizagem de funções no âmbito da interpretação global de propriedades figurais. Atualmente é analista ambiental na empresa Alto Uruguai Engenharia e Planejamento de Cidades.

Djerly Simonetti é licenciada em Matemática pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Câmpus Toledo, no ano de 2015. Mestra em Educação Científica e Tecnológica em 2020 na UFSC. Especialização concluída no ano de 2019 em EJA-PROEJA pelo Instituto Federal de Santa Catarina (IFSC), Câmpus Cerfead - Florianópolis. Em 2010 concluiu o curso de Formação de Docentes - modalidade normal, nível médio. Foi monitora voluntária das disciplinas Cálculo Zero e Álgebra Linear. Fez iniciação científica voluntária em Álgebra. Bolsista PIBID. Bolsista TCC. Com experiência na Educação Básica pública e ensino superior.

Eduardo Sabel é Doutorando em Educação Científica e Tecnológica (2021-2025) pelo PPGECT/UFSC, Mestre pelo mesmo programa e instituição e Graduado em Licenciatura em Matemática pela UFSC Campus Blumenau. Lecionou em escolas da Secretaria do Estado da Educação (SED/SC), entre 2015 e 2021. É membro Grupo de Pesquisa em Epistemologia e Ensino de Matemática (GPEEM/UFSC) e colabora como Assistente de Editoração na REVEMAT/UFSC. Atualmente, além de Doutorando, trabalha como Especialista de Ensino III em Matemática, no Centro de Educação Digital (CDI) - SENAI Florianópolis. Pesquisa na área de ensino e aprendizagem da matemática, com a base teórica Dos Registros De Representação Semiótica de Duval e no Enfoque Ontossemiótico de Godino e colaboradores. Investiga

os materiais manipulativos na educação matemática para os Anos Iniciais e é bolsista do programa UNIEDU/FUMDES da Secretaria de Estado da Educação de Santa Catarina.

Learcino dos Santos Luiz é doutor em Educação pela UFPR na linha Cultura, Escola e Ensino. Professor do departamento de matemática do Centro de Ciências Tecnológicas da UDESC. Pesquisa temas relacionados com cibercultura e uso de tecnologias digitais para ensino de matemática na educação básica. Possui graduação em Matemática - Licenciatura Plena pela Universidade Federal de Santa Catarina (2001) e Especialização em Educação Matemática (UNISUL-2007). Mestre em Educação Científica e Tecnológica (PPGECT - UFSC - 2010). Tem experiência na área de Educação, com ênfase em Metodologia do Ensino de Matemática e Formação de Professores, atuando principalmente nos seguintes temas: Metodologia de ensino de matemática, Ensino de matemática (níveis Fund. Médio e Superior), Formação de Professores e Uso de Tecnologias na Educação. É membro dos grupos de pesquisa PEMSA - Grupo de Pesquisa em Educação Matemática e Sistemas Aplicados ao Ensino" (UDESC) e "Formação Docente, Currículo e práticas pedagógicas: paradigmas contemporâneos"

Lucia Menoncini possui graduação em Licenciatura em Matemática e Habilitação em Física pela Universidade do Oeste de Santa Catarina - Chapecó (2001), Mestrado em Matemática e Computação Científica pela Universidade Federal de Santa Catarina (2005) e Doutora em Educação Científica e Tecnológica pelo Programa de Pós-graduação em Educação Científica e Tecnológica - PPGECT da Universidade Federal de Santa Catarina

(2018). Atualmente é professora titular de Matemática da Universidade Federal da Fronteira Sul, *campus* Chapecó.

Madeline O.S. Corrêa é graduada em Licenciatura em Matemática pela Universidade Federal de Santa Catarina (2005), e Mestre pelo Programa de Pós graduação em Educação Científica e Tecnológica, na mesma instituição (2008). Linha de Pesquisa Educação Matemática. Lecionou na Educação de jovens e Adultos; na Educação Básica do Estado de SC; foi tutora UFSC do curso de Licenciatura em Física na modalidade à Distância; foi professora temporária na mesma instituição. Atualmente é professora Efetiva no Instituto Federal de Santa Catarina - campus São José.

Marcos Henrique Santos Martins é Bacharel em Física, Licenciado em Matemática e Mestre em Educação Científica e Tecnológica pela Universidade Federal de Santa Catarina. Professor de matemática da Secretaria de Estado de Educação de Santa Catarina. Experiência na área de matemática do ensino fundamental, médio e superior, com ênfase na utilização de softwares educacionais e programação de jogos em linguagem Lua, Python, C e C++, atuando principalmente nos seguintes temas: geometria dinâmica, Geogebra, educação à distância, cálculo diferencial e integral e estudo de curvas planas.

Méricles Thadeu Moretti é professor do Programa de Pós-graduação em Educação Científica e Tecnológica da UFSC. Doutor em didática da Matemática sob a orientação do professor François Pluvinage e pós-doutor pelas Universidades de Estrasburgo e de Lisboa. Líder do Grupo de Pesquisa em Epistemologia e Ensino de Matemática (GPEEM) cujo foco de pesquisa é

semiótica e aprendizagem matemática. Editor da Revista Eletrônica de Educação Matemática (REVEMAT) e pesquisador do CNPq.

Sergio Florentino da Silva é Licenciado em Matemática (2003) pela Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), mestre (2011) e doutor (2018) em Educação Científica e Tecnológica também pela UFSC. Tem experiência na área de Educação Matemática, atuando principalmente nos seguintes temas: Teoria dos Registros de Representações Semióticas; Modelagem Matemática; Etnomatemática. É membro do Grupo de Pesquisa em Epistemologia e Ensino de Matemática - GPEEM/UFSC. Atualmente é professor efetivo do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Santa Catarina e leciona nos cursos de Licenciatura em Química, Engenharia de Telecomunicações e cursos Técnicos Integrado em Telecomunicações e em Refrigeração e Climatização. Também orienta trabalhos de Conclusão de Curso e monografias de Pós-graduação principalmente na área de Ensino de Ciências e Matemática.

Roseli Búrigo possui graduação em Licenciatura Plena em Matemática pela Fundação Educacional de Criciúma- FUCRI/UNESC (1996), Pós Doutorado em Educação Científica e Tecnológica - pela Universidade Federal de Santa Catarina UFSC (2018). Doutorado em Engenharia e Gestão do Conhecimento pela Universidade Federal de Santa Catarina-UFSC- (2009) Mestrado em Educação pela Universidade do Sul de Santa Catarina - UNISUL-(2000). Área de Atuação: Ensino da matemática Ensino Superior e Médio; Metodologia do Ensino da Matemática; Formação de Professores (Modelagem Matemática).