

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA**  
**MATHEUS MIOTTO CALIONE**

**UM ESTUDO SOBRE AS SÉRIES DE FOURIER E A  
SOLUÇÃO DO PROBLEMA DA EQUAÇÃO DO  
CALOR NA BARRA FINITA**

Blumenau

2022



Matheus Miotto Calione

UM ESTUDO SOBRE AS SÉRIES DE FOURIER E A  
SOLUÇÃO DO PROBLEMA DA EQUAÇÃO DO  
CALOR NA BARRA FINITA

Trabalho de Conclusão de Curso submetido ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do Grau de Licenciado em Matemática.

**Orientador:** Prof. Dr. Eleomar Cardoso Júnior

Blumenau

2022

Catálogo na fonte pela Biblioteca Universitária da Universidade Federal de Santa Catarina.

Arquivo compilado às 22:31h do dia 8 de dezembro de 2022.

Sobrenome, Nome

UM ESTUDO SOBRE AS SÉRIES DE FOURIER E A SOLUÇÃO DO PROBLEMA DA EQUAÇÃO DO CALOR NA BARRA FINITA : / Matheus Miotto Calione; Orientador, Prof. Dr. Eleomar Cardoso Júnior; - Blumenau, 22:31, 29 de Novembro de 2022.

135 p.

Trabalho de Conclusão de Curso - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Blumenau, Curso de Licenciatura em Matemática.

Inclui referências

1. Palavrál. 2. Palavra2.

I. Prof. Dr. Eleomar Cardoso Júnior II. Curso de Licenciatura em Matemática III. Título

Matheus Miotto Calione

**UM ESTUDO SOBRE AS SÉRIES DE FOURIER E A  
SOLUÇÃO DO PROBLEMA DA EQUAÇÃO DO CALOR  
NA BARRA FINITA**

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi julgado adequado para obtenção do Título de Licenciado em Matemática, e aprovado em sua forma final pelo Curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Blumenau da Universidade Federal de Santa Catarina.

Blumenau, 29 de Novembro de 2022.

---

**Prof. Dr. Francis Felix Cordova Puma**  
Coordenador do Curso de Licenciatura em  
Matemática

**Banca Examinadora:**

---

**Prof. Dr. Eleomar Cardoso Júnior**  
Orientador  
Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC

---

**Prof. Dr. Maicon José Benvenuto**  
Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC

---

**Prof. Dr. Rafael dos Reis Abreu**  
Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC



*Dedico este trabalho a todos que acreditam na ciência e sonham  
por um Brasil melhor.*



## AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais, Michele Miotto e Mauro José Calione por oportunizarem tanto em minha vida. Este trabalho e a conclusão do sonhado curso na Universidade Federal de Santa Catarina só foi possível por causa de todo o amor, apoio e suporte que tive de vocês ao longo de minha vida e, em específico, ao longo de minha graduação. Não existem palavras que possam expressar meu sentimento de gratidão por tê-los junto a mim.

Agradeço às minhas irmãs, Mayara Calione e Bianca Moser Calione Fraga por estarem sempre disponíveis quando precisei, por fazerem parte de minha vida e por serem pessoas tão únicas e maravilhosas.

Agradeço à minha namorada, Bruna Arielly Schulz, por todo o apoio ao longo desta caminhada. Foi você quem me incentivou a iniciar minha escrita no Overleaf, foi você quem esteve ao meu lado em diversos momentos difíceis e desafiadores, e é você que quero que continue. Muito dessa conquista é também sua. Obrigado, meu amor, por todo o suporte e ajuda.

Agradeço à minha tia e dinda, Carolina Cristina Miotto, por todas as conversas, por todas as palavras e momentos juntos. Você me deu coragem para encarar o desafio da Universidade e sempre esteve ao meu lado, e todo o seu suporte certamente somou muito para que eu chegasse até aqui.

Aos meu amigo Caio Bernardo Pereira, você foi e é muito importante para mim, e, ao longo da graduação, sempre esteve ao meu lado.

Agradeço ao meu orientador, Professor Dr. Eleomar Cardoso Junior, pela disponibilidade e paciência, e por ter aceitado me orientar desde a primeira iniciação científica. O Eleomar foi meu supervisor ao longo de duas bolsas de monitorias ao longo do curso. Ele sempre foi aberto para dúvidas e disposto a ajudar. Ele também foi meu professor ao longo da graduação; ministrou as disciplinas de Cálculo II e Análise na Reta I para a minha turma. Obrigado por

todos esses anos! Você é um exemplo de professor para mim.

Agradeço aos docentes Dra. Louise Reips e Dr. Felipe Vieira, esses que tive contato no primeiro ano de UFSC, ainda na Engenharia, e que me abriram os olhos para as possibilidades da Matemática. Ao longo de minha graduação, tive o prazer de cursar as disciplinas de Cálculo I (ainda na Engenharia) e Métodos Numéricos com a Louise. Já, com o Felipe, fiz Cálculo II (ainda na Engenharia) e Álgebra II. Essas disciplinas ministradas por vocês foram maravilhosas, e nunca esquecerei de todos os aprendizados obtidos.

Agradeço ao professor Dr. Alaim Souza Neto por ter me incentivado a ler e a escrever com mais frequência, e por ter sido um ser humano que tanto me abriu os olhos para a docência e para o olhar crítico em relação à escola e ao processo de ensino-aprendizagem. O professor Alaim ministrou para a minha turma as disciplinas de Educação, Ciência e Tecnologia e também de Organização Escolar.

Agradeço à professora Dra. Laís Cristina Viel Gereti pelo suporte e acompanhamento ao longo das disciplinas de Estágio Supervisionado I e II. Tais experiências foram grandiosas, complexas e transformadoras em minha vida. Essas impactaram e marcaram minha história; não apenas em questões de docência, mas também em questões pessoais. Esse processo não teria sido o mesmo sem você, professora Laís!

Agradeço aos docentes Dr. Maicon José Benvenuto e Dr. Rafael dos Reis Abreu por aceitarem o convite de compor a banca do meu Trabalho de Conclusão de Curso e por terem trazido sugestões que aprimoraram este trabalho.

Agradeço aos professores do Departamento de Matemática (MAT) que contribuíram enormemente para a minha formação, em especial aos docentes Dr. André Vanderlinde da Silva, Dr. Bruno Tadeu Costa, Dr. Felipe Delfini Caetano Fidalgo, Dr. Francis Félix Córdova Puma, Dr. Jorge Luiz Deolindo Silva, Dr. Rafael Aleixo de Carvalho e Dr. Roger Behling.

Agradeço aos professores do Departamento de Ciências Exatas e Educação (CEE) que me possibilitaram aprender e vivenciar a

docência, em especial aos docentes Dra. Cíntia Rosa da Silva de Oliveira, Dra. Fabiana Schmitt Corrêa, Dr. Jorge Cássio Costa Nóbriga, Dr. Julio Faria Corrêa e Dra. Renata Orlandi.

Finalmente, agradeço à Universidade Federal de Santa Catarina (Campus Blumenau) por todas as oportunidades, pelas bolsas, estágios, e por ser uma instituição tão comprometida com a aprendizagem dos estudantes. A UFSC é uma das melhores universidades do país, e me formar em uma universidade federal sempre foi um sonho. Dada a situação atual na qual nos encontramos, precisamos cada vez mais reiterar a importância do ensino gratuito de qualidade. Que a UFSC venha a formar, a cada ano que passa, ainda mais profissionais qualificados, especialmente, professores de matemática!



*"One of the endlessly alluring aspects of mathematics is that its thorniest paradoxes have a way of blooming into beautiful theories."*

Philip J. Davis



## RESUMO

Este Trabalho de Conclusão de Curso contempla resultados de estudos sobre o Problema da Equação do Calor na Barra Finita, no qual reflete-se acerca da existência e unicidade da solução para esse problema. O objetivo do trabalho é estudar, portanto, uma das mais importantes Equações Diferenciais Parciais (EDPs) de segunda ordem, a Equação do Calor. Para isso, de início, realiza-se o estudo do Princípio da Superposição e do Método da Separação de Variáveis para a resolução do problema da EDP do calor na barra finita, o que culmina na definição das Séries de Fourier. Na sequência, estuda-se as noções de convergência pontual e uniforme das Séries de Fourier. Usando elementos de análise, como o Teste M de Weierstrass, mostra-se que as Séries de Fourier estão, de certo modo, associadas à identificação de uma única solução suave para o referido problema que envolve a equação do Calor. Finalmente, trata-se a concepção de dependência contínua de soluções e uma versão do problema sujeito a outros tipos de imposições.

**Palavras-chaves:** Equações Diferenciais Parciais. Problema da Equação do Calor. Séries de Fourier.



## ABSTRACT

This undergraduate thesis contains studies about the classic Heat Conduction Problem in a Finite Bar, in which is reflected about the existence and uniqueness of the solution for this problem. Therefore, the goal of this final paper is to study one of the most important Partial Differential Equations (PDE) of second order, the Heat Equation. For that, it's initially studied the The Principle of Superposition and The Method of Separation of Variables for resolving the Heat Conduction Problem in a Finite Bar, which leads us to the definition of Fourier Series. After that, it's studied the notion of poinwise and uniform convergences of Fourier Series. By using elements from Analysis, such as the The Weierstrass M test, it's shown that the Fourier Series are, somehow, assotiated with the identification of a unique smooth solution for the problem that envolves the Heat Equation. Finally, the conception of continuous dependece of solutions is adressed and also it's presented a version of the Heat Equation problem in which are made different impositions than the ones made in the classical problem.

**Keywords:** Partial Differential Equations. Heat Equation Problem. Fourier Series.



## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO . . . . .</b>	<b>19</b>
<b>2</b>	<b>PRELIMINARES . . . . .</b>	<b>23</b>
2.1	DEFINIÇÕES E RESULTADOS DE ANÁLISE . . . . .	23
2.2	FUNÇÕES PERIÓDICAS . . . . .	29
2.3	SIMETRIAS PARES E ÍMPARES . . . . .	31
2.4	CONVERGÊNCIA DE SEQUÊNCIAS E SÉRIES DE FUNÇÕES . . . . .	34
2.5	EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS . . . . .	44
<b>2.5.1</b>	<b>EDOs Lineares de Segunda Ordem . . . . .</b>	<b>45</b>
<b>3</b>	<b>PROBLEMA DA EQUAÇÃO DO CALOR NA BARRA FINITA . . . . .</b>	<b>49</b>
3.1	EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS . . . . .	49
3.2	MOTIVAÇÃO PARA O ESTUDO DO PROBLEMA DA EQUAÇÃO DO CALOR . . . . .	50
3.3	PRINCÍPIO DA SUPERPOSIÇÃO . . . . .	54
3.4	MÉTODO DA SEPARAÇÃO DE VARIÁVEIS . . . . .	57
<b>4</b>	<b>SÉRIES DE FOURIER . . . . .</b>	<b>69</b>
4.1	IMPORTÂNCIA DAS SÉRIES DE FOURIER . . . . .	69
4.2	SÉRIE DE FOURIER E COEFICIENTES DE FOURIER . . . . .	70
4.3	IDENTIFICAÇÃO DA SÉRIE DE FOURIER DE FUNÇÕES . . . . .	74
4.4	CONVERGÊNCIA DAS SÉRIES DE FOURIER . . . . .	77
<b>4.4.1</b>	<b>Convergência Pontual . . . . .</b>	<b>77</b>
<b>4.4.2</b>	<b>Convergência Uniforme . . . . .</b>	<b>96</b>
<b>5</b>	<b>EXISTÊNCIA E UNICIDADE DE SOLUÇÃO DO PROBLEMA DA CONDUÇÃO DO CALOR . . . . .</b>	<b>105</b>
5.1	EXISTÊNCIA DE SOLUÇÃO . . . . .	105
5.2	UNICIDADE DE SOLUÇÃO . . . . .	121

---

5.3	DEPENDÊNCIA CONTÍNUA . . . . .	125
5.4	PROBLEMA DA CONDUÇÃO DO CALOR COM CONDIÇÕES NÃO-HOMOGÊNEAS . . . . .	129
<b>6</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS . . . . .</b>	<b>133</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>135</b>

# 1 INTRODUÇÃO

Em meados do século XVIII, o físico e matemático francês Joseph Fourier (1768-1830), por meio de artigos sobre o problema da condução do calor em uma barra finita, mostrou que uma função periódica e integrável, digamos  $f(x)$ , pode ser representada e entendida via uma série como

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \quad (1.1)$$

em que  $a_0$ ,  $a_n$  e  $b_n$  são constantes reais e  $l > 0$  é fixado. Essa série foi intitulada Série de Fourier e revolucionou a história da matemática e de áreas afins. As séries de Fourier são extremamente relevantes nas engenharias, por exemplo, principalmente na compreensão de problemas modelados via equações diferenciais parciais (EDPs) sujeitas a condições de contorno.

Fourier analisou o Problema da Equação do Calor em uma Barra Finita, que pode ser representado matematicamente por

$$\begin{cases} u_t = \alpha^2 u_{xx}, & (x, t) \in (0, l) \times (0, +\infty) \\ u(0, t) = u(l, t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x, 0) = f(x), & x \in [0, l], \end{cases} \quad (1.2)$$

em que  $u(x, t)$  é a temperatura da barra em um ponto  $x$  no tempo  $t$ ,  $\alpha$  é uma constante escolhida de acordo com o material da barra e  $f$  é uma função que descreve a temperatura da barra no ponto  $x$  quando o tempo for nulo. De tal modo,

$$u(x, 0) = f(x), \quad x \in [0, l], \quad (1.3)$$

é a condição inicial do problema e

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (1.4)$$

a condição de contorno (ou de fronteira).

Fourier utilizou o Método da Separação de Variáveis e o Princípio da Superposição para, então, encontrar que a solução do

problema (1.2) pode ser dada por

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{l} \right) \exp \left( -\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{l^2} t \right), \quad (1.5)$$

em que  $x \in [0, l]$  e  $t \geq 0$ . Para que a solução (1.5) satisfaça o problema (1.2), entretanto, é preciso que

$$u(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{l} \right). \quad (1.6)$$

Percebemos, então, que  $f$  deve ser dada por uma série de Fourier como representada em (1.1) para que a solução do problema (1.2) seja, de fato, a função em (1.5). Nesse contexto, o objetivo deste trabalho é realizar uma abordagem teórico-matemática sobre o problema da equação do calor em uma barra finita, para que então sejamos levados a analisar as séries de Fourier e, em um contexto geral, entender sob quais circunstâncias o problema (1.2) apresenta uma solução que, por sua vez, deve ser única.

Com esta finalidade, será requisitado que percorramos a definição de Função Periódica, a formalização das Sequências e Séries de Funções e os casos de convergência pontual e uniforme, assim como o estudo das Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs). Esses detalhamentos compõem o Capítulo 2 que reverberará, portanto, os conceitos preliminares.

Partindo para uma abordagem mais específica, no Capítulo 3, estaremos interessados em motivar o estudo das séries de Fourier e do Problema da Equação do Calor. Abordaremos as Equações Diferenciais Parciais, assim como o Princípio da Superposição e o Método da Separação de Variáveis. Teremos condições, portanto, para solucionar o Problema da Equação do Calor e o detalhamento nos levará a definir formalmente as Séries de Fourier.

Nos Capítulos 4 e 5, apresentaremos a estrutura matemática do trabalho. O Capítulo 4 será relevante uma vez que abordaremos desde a definição às questões de convergência pontual e uniforme das séries de Fourier, com enfoque em garantir que, dada uma função  $f$  contínua e  $f'$  seccionalmente contínua, então, a série de Fourier de  $f$  converge uniformemente à própria função.

O Capítulo 5 é o capítulo no qual levantaremos todo o aparato matemático desenvolvido ao longo do trabalho para provarmos que o problema (1.2) admite uma única solução. Além disso, estaremos preocupados em abordar a questão da dependência contínua de soluções e apresentaremos o estudo de um outro problema que envolve a equação do calor com as condições de contorno não-homogêneas.

Cabe destacar que esse trabalho fará um detalhamento de conhecimentos que são tratados no livro **EDP Um Curso de Graduação**, de autoria de Valéria Iório, ref. [4].



## 2 PRELIMINARES

Neste capítulo, abordaremos alguns conceitos preliminares sobre Topologia, Funções com Propriedades Especiais, Convergência de Sequências e Séries de Funções e Equações Diferenciais Ordinárias, esses que servirão de base para construirmos nosso estudo em relação ao problema da equação do Calor na barra finita. Entendemos que o leitor tem conhecimento dos conceitos elementares de Cálculo Diferencial e Integral (Limites, Derivadas, Integrais e Séries Numéricas), de Espaços Vetoriais Normados e de Análise Real.

### 2.1 DEFINIÇÕES E RESULTADOS DE ANÁLISE

Essa seção está baseada, sobretudo, em [4] e [5].

**Definição 2.1.** Seja  $E$  um espaço vetorial normado. Então,  $\|\cdot\|_E$  denota a norma do espaço  $E$ .

**Definição 2.2.** Seja  $E$  um espaço vetorial normado,  $a \in E$  e  $r \in \mathbb{R}$ ,  $r > 0$ . A *bola aberta de centro  $a$  e raio  $r$*  é o conjunto

$$B_E(a, r) = \{x \in E : \|x - a\|_E < r\}.$$

A *bola fechada de centro  $a$  e raio  $r$*  é o conjunto

$$B_E[a, r] = \{x \in E : \|x - a\|_E \leq r\}.$$

Nas próximas definições desta seção,  $E$  caracterizará um espaço vetorial normado.

**Definição 2.3.** Seja  $a \in X$ , em que  $X$  é um subconjunto de  $E$ . Dizemos que o ponto  $a$  é interior ao conjunto  $X$  quando existir  $r > 0$  tal que  $B_E(a, r) \subset X$ . O conjunto dos pontos interiores de  $X$  é denotado por  $\text{int}(X)$ .

**Definição 2.4.** Um conjunto  $X \subset E$  é dito aberto quando todos os seus pontos forem interiores, isto é, quando  $X = \text{int}(X)$ .

**Definição 2.5.** Um subconjunto  $V \subset E$  é uma vizinhança do ponto  $a \in E$  se existir um conjunto aberto  $X$  tal que  $a \in X \subset V$ . Equivalentemente, entendemos que  $V$  é uma vizinhança de  $a$  se  $a$  estiver no interior de  $V$ .

**Definição 2.6.** Dizemos que  $a \in E$  é um ponto de acumulação do conjunto  $X \subset E$  quando toda vizinhança  $V$  de  $a$  contiver algum ponto de  $X$  diferente do próprio  $a$ . Equivalentemente,  $a$  é um ponto de acumulação de  $X$  se, para todo  $\varepsilon > 0$ , tem-se que

$$B_E(a, \varepsilon) \cap (X - \{a\}) \neq \emptyset.$$

Denotamos como  $X'$  o conjunto dos pontos de acumulação do conjunto  $X$ .

Nesta seção, o corpo  $\mathbb{K}$  poderá designar  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

**Definição 2.7.** Seja  $X \subset E$ , um conjunto não-vazio. Uma função  $f : X \rightarrow \mathbb{K}$  é dita limitada em seu domínio quando a imagem de seu valor absoluto estiver contida em um intervalo, ou seja, se  $Im(|f|) \subset [\alpha, \beta]$  em que  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Equivalentemente, entende-se que  $f$  é limitada se existir  $M > 0$  tal que  $|f(x)| \leq M$ , para todo  $x \in X$ .

**Definição 2.8.** Seja  $X \subset E$ , um conjunto não-vazio. Uma função  $f : X \rightarrow \mathbb{K}$  é dita contínua no ponto  $a \in X$  quando, para todo  $\varepsilon > 0$  dado arbitrariamente, é possível obter  $\delta > 0$ , tal que se  $x \in X$  e  $\|x - a\|_E < \delta$ , então,  $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ .

**Definição 2.9.** Dizemos que uma função  $f : X \rightarrow \mathbb{K}$  é contínua quando  $f$  for contínua em todos os pontos  $a \in X$ .

**Definição 2.10.** Dizemos que uma função  $f : X \rightarrow \mathbb{K}$  é de classe  $C(X)$  quando  $f$  for contínua. Especificamente no caso em que  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , podemos denotar que tal função é de classe  $C_{\mathbb{C}}(X)$ .

**Definição 2.11.** Seja  $f : X \rightarrow \mathbb{K}$  uma função tal que  $X \subset \mathbb{R}^m$  é um conjunto aberto. Dizemos que  $f$  é de classe  $C^n(X)$  se suas  $k$ -ésimas derivadas forem funções contínuas, para todo  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

**Definição 2.12.** Dizemos que  $f$  é de classe  $C^\infty(X)$  quando  $f$  for de classe  $C^n(X)$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

**Exemplo 2.1.** Consideremos  $a \in \mathbb{R}$ , com  $a \neq 0$ . Os conjuntos de funções

$$\left\{ \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{a} \right) \right\}_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{e} \quad \left\{ \operatorname{cos} \left( \frac{n\pi x}{a} \right) \right\}_{n \in \mathbb{N}}$$

são de classe  $C^\infty(\mathbb{R})$ , pois, suas derivadas de  $n$ -ésima ordem são contínuas (para  $x$  variando em  $\mathbb{R}$ ), para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Na sequência, abordaremos o conceito de produto interno.

**Definição 2.13.** Seja  $Y$  um  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial. Um produto interno sobre  $Y$  é uma função  $\langle \cdot, \cdot \rangle : Y \times Y \rightarrow \mathbb{K}$  que satisfaz:

- (i)  $\langle f, f \rangle \geq 0, \forall f \in Y$ ;
- (ii)  $\langle f, f \rangle = 0 \Leftrightarrow f = 0$ ;
- (iii)  $\langle f, g \rangle = \overline{\langle g, f \rangle}, \forall f, g \in Y$ ;
- (iv)  $\langle \alpha f + g, h \rangle = \alpha \langle f, h \rangle + \langle g, h \rangle, \forall f, g, h \in Y$  e  $\forall \alpha \in \mathbb{K}$ .

Sejam  $\alpha$  e  $\beta$  números reais, com  $\alpha < \beta$ .  $C([\alpha, \beta])$  denota o espaço vetorial das funções contínuas  $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{K}$ . Podemos definir um *produto interno* sobre  $C([\alpha, \beta])$ .

**Definição 2.14.** Se as funções  $f, g \in C([\alpha, \beta])$ , definimos o produto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) \overline{g(x)} \, dx \quad (2.1)$$

no qual  $\overline{g(x)}$  caracteriza o complexo conjugado de  $g(x)$ ,  $x \in [\alpha, \beta]$ .

A justificativa para (2.1) caracterizar um produto interno sobre o espaço  $C([\alpha, \beta])$  está relacionada à utilização da definição de integral e de propriedades de integração de funções contínuas. Optamos por não detalhá-la nesse trabalho.

**Definição 2.15.** Consideremos as funções contínuas  $f, g \in C([\alpha, \beta])$ .

Dizemos que  $f$  e  $g$  são funções ortogonais em  $[\alpha, \beta]$  se o produto interno entre essas funções for igual a zero, ou seja, se

$$\langle f, g \rangle = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) \overline{g(x)} dx = 0.$$

**Definição 2.16.** Um conjunto de funções reais  $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  é ortogonal no intervalo  $[\alpha, \beta]$  se, para  $m \neq n$ ,

$$\langle \varphi_n, \varphi_m \rangle = \int_{\alpha}^{\beta} \varphi_n(x) \overline{\varphi_m(x)} dx = 0.$$

Fixemos  $l > 0$  um número real. Vamos apresentar, na sequência, um relevante conjunto ortogonal de funções reais sobre o intervalo  $[-l, l]$ . Consideremos as funções trigonométricas

$$\varphi_n(x) = \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{l} \right), \quad n \in \mathbb{N} \quad (2.2)$$

e

$$\psi_n(x) = \operatorname{cos} \left( \frac{n\pi x}{l} \right), \quad n \in \mathbb{Z}^+, \quad (2.3)$$

em que  $\mathbb{Z}^+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$ .

Utilizando propriedades de integração, estabelece-se o seguinte resultado (que também não será esmiuçado na monografia):

**Proposição 2.1.** *O conjunto  $\{\psi_n : n \in \mathbb{Z}^+\} \cup \{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$  com  $\varphi_n$  apresentada em (2.2) e  $\psi_n$  apresentada em (2.3) é um conjunto ortogonal no intervalo simétrico  $[-l, l]$ , e são válidas as seguintes relações:*

$$\int_{-l}^l \psi_n(x) \psi_m(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{se } m, n \in \mathbb{Z}^+, m \neq n; \\ l, & \text{se } m = n \in \mathbb{N}; \\ 2l, & \text{se } m = n = 0. \end{cases}$$

$$\int_{-l}^l \varphi_n(x) \varphi_m(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{se } m, n \in \mathbb{N}, m \neq n; \\ l, & \text{se } m = n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

$$\int_{-l}^l \psi_n(x) \varphi_m(x) dx = 0, \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+, \forall m \in \mathbb{N}.$$

No decorrer do estudo de soluções para equações diferenciais, eventualmente, é importante que lidemos com funções que sejam mais gerais que aquelas que entendemos como contínuas. Daremos prosseguimento com a apresentação das funções seccionalmente contínuas.

**Definição 2.17.** Uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$  é dita seccionalmente contínua se, para qualquer  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ , existir uma partição  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  de  $[a, b]$  tal que  $f$  seja contínua em cada subintervalo  $(x_j, x_{j+1})$  e se existirem os limites laterais

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) \text{ e } \lim_{x \rightarrow x_j^\pm} f(x).$$

O conceito de função seccionalmente contínua pode ser adaptado para o caso em que o domínio for uma restrição do conjunto dos números reais (como um intervalo fechado  $[a, b]$ , por exemplo). Basta que as propriedades exigidas na definição geral sejam válidas aplicadas à restrição em questão. Denotaremos por  $SC([a, b])$  o espaço das funções reais seccionalmente contínuas em  $[a, b]$ . Ressaltamos que entendemos que uma função seccionalmente contínua em  $[a, b]$  não está necessariamente definida em todos os pontos do intervalo  $[a, b]$ : a função  $f$  pode estar definida apenas em  $\cup_{j=0}^{n-1} (x_j, x_{j+1})$ .

Podemos identificar facilmente que uma função contínua  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  caracteriza um exemplo de função seccionalmente contínua. Entretanto, como bem mostra o exemplo a seguir, há funções seccionalmente contínuas que não são contínuas.

**Exemplo 2.2.** A função  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  cujo gráfico é mostrado na figura abaixo é seccionalmente contínua, entretanto, a função  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  não é, pois,  $\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = +\infty$ . Ademais, pode-se identificar que  $f'$  também é seccionalmente contínua embora não esteja definida nos pontos  $a, x_0, x_1, x_2$  e  $b$ .

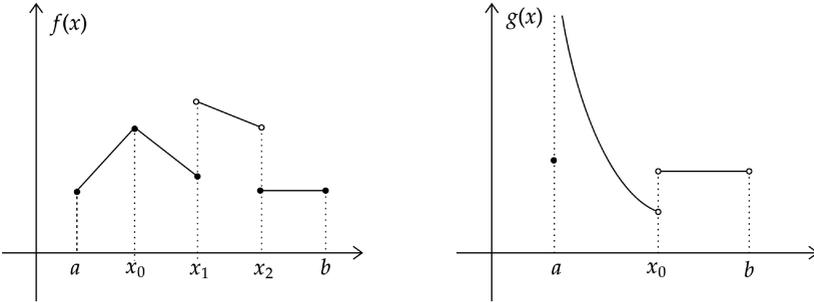


Figura 2.1 –  $f$  é seccionalmente contínua enquanto que  $g$  não é.

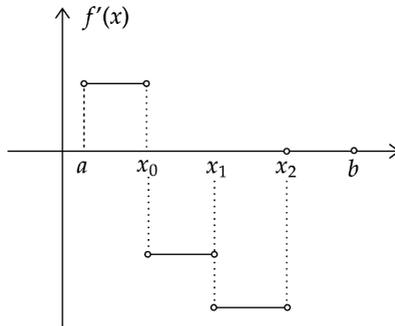


Figura 2.2 –  $f'$  é seccionalmente contínua.

Veremos, a seguir, algumas propriedades das funções seccionalmente contínuas. As demonstrações não serão exploradas neste texto, porém, as provas requerem pequenas adaptações quando comparadas à abordagem que envolve funções contínuas (ver ref. [5]).

**Proposição 2.2.** *Seja  $f$  uma função contínua e  $g$  uma função seccionalmente contínua. Então, a função  $h(x) = f(x) \cdot g(x)$  é seccionalmente contínua.*

**Teorema 2.3.** *Toda função seccionalmente contínua é integrável.*

**Teorema 2.4.** *Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função seccionalmente contínua. Então,  $f$  é limitada, isto é, existe  $M > 0$  tal que  $|f(x)| \leq M$ , para todo  $x \in [a, b]$ .*

**Proposição 2.5.** *Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função seccionalmente contínua. Então,*

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

## 2.2 FUNÇÕES PERIÓDICAS

**Definição 2.18.** Uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é dita periódica se, e somente se, existir  $p \in \mathbb{R}$  tal que, para todo  $x \in \mathbb{R}$ :

$$f(x + p) = f(x). \quad (2.4)$$

Além disso,  $p$  pode ser um dos inúmeros períodos da função  $f$ . Ao menor real positivo  $p$  que satisfaz a propriedade (2.4), denominamos o *período fundamental* de  $f$ . Se  $f$  tiver um período  $p$ , então,  $f$  é dita  $p$ -periódica.

**Exemplo 2.3.** As funções  $f(x) = \text{sen}(x)$  e  $g(x) = \text{cos}(x)$  são  $2\pi$ -periódicas.

**Proposição 2.6.** *Dado  $n \in \mathbb{N}$ , as funções  $\varphi_n$  e  $\psi_n$ , definidas por (2.2) e (2.3), respectivamente, são periódicas e com período fundamental  $T = \frac{2l}{n}$ . Em particular,  $2l$  é um período comum a todas essas funções.*

*Demonstração.* Provaremos o resultado para  $\psi_n$ ; a demonstração para  $\varphi_n$  é análoga. Primeiramente, mostraremos que  $T = \frac{2l}{n}$  é um período para  $\psi_n$ . Com efeito,

$$\psi_n(x + T) = \cos\left(\frac{n\pi(x + T)}{l}\right) = \cos\left(\frac{n\pi x + n\pi T}{l}\right)$$

e substituindo  $T = \frac{2l}{n}$ ,

$$\begin{aligned}\psi_n(x + T) &= \cos\left(\frac{n\pi x + n\pi\frac{2l}{n}}{l}\right) \\ &= \cos\left(\frac{n\pi x}{l} + \frac{n\pi\frac{2l}{n}}{l}\right) \\ &= \cos\left(\frac{n\pi x}{l} + 2\pi\right).\end{aligned}$$

Como a função  $f(x) = \cos(x)$  é periódica e de período  $2\pi$ , então, para um  $x$  qualquer,  $\cos(x) = \cos(x + 2\pi)$ . Assim,

$$\psi_n(x + T) = \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) = \psi_n(x).$$

Suponhamos que exista um período  $T'$ , tal que  $T' \neq T$ . Segue que

$$\psi_n(x + T') = \psi_n(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Daí,

$$\cos\left(\frac{n\pi(x + T')}{l}\right) = \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Isso implica que

$$\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\cos\left(\frac{n\pi T'}{l}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi T'}{l}\right) = \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right). \quad (2.5)$$

Em particular, consideremos  $x = \frac{l}{n}$  em (2.5). Logo,

$$\cos(\pi)\cos\left(\frac{n\pi T'}{l}\right) - \operatorname{sen}(\pi)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi T'}{l}\right) = \cos(\pi). \quad (2.6)$$

Resolvendo (2.6),

$$-\cos\left(\frac{n\pi T'}{l}\right) = -1. \quad (2.7)$$

Em vista de (2.7):

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{n\pi T'}{l}\right) = 1 &\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \text{ tal que } \frac{n\pi T'}{l} = 2k\pi \\ &\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \text{ tal que } T' = \frac{k2l}{n} = kT.\end{aligned}$$

Portanto,  $T'$  é um múltiplo de  $T$ . Por sua vez,  $T$  é o menor período positivo de  $\psi_n$ . ■

É válido salientar que a soma de duas funções  $p$ -periódicas é também uma função  $p$ -periódica. A justificativa é bastante simples e passa por entender a definição de soma de funções.

## 2.3 SIMETRIAS PARES E ÍMPARES

As funções com simetrias pares e ímpares serão extremamente importantes para o desenvolvimento do trabalho. Definiremos, inicialmente, cada uma delas.

**Definição 2.19.** Uma função  $f(x)$  tem *simetria par* ou é dita, simplesmente, *par*, se  $f(x) = f(-x)$ , ou seja, se ela for simétrica em relação ao eixo  $y$ .

**Exemplo 2.4.** As funções  $f(x) = x^2$ ,  $g(x) = |x|$  e  $h(x) = \cos(x)$  são pares.

**Proposição 2.7.** Se  $f$  for uma função par e contínua no intervalo simétrico  $[-l, l]$ , então,

$$\int_{-l}^l f(x) dx = 2 \int_0^l f(x) dx.$$

*Demonstração.* Por hipótese,  $f$  é par. Por propriedades de integração de funções contínuas,

$$\int_{-l}^l f(x) dx = \int_{-l}^0 f(x) dx + \int_0^l f(x) dx.$$

Fazendo  $x = -s$  na primeira integral do lado direito da igualdade,

temos

$$\begin{aligned}
 \int_{-l}^l f(x) dx &= \int_l^0 f(-s) (-ds) + \int_0^l f(x) dx \\
 &= -\int_l^0 f(-s) ds + \int_0^l f(x) dx \\
 &= \int_0^l f(s) ds + \int_0^l f(x) dx \\
 &= 2 \int_0^l f(x) dx.
 \end{aligned}$$

■

**Definição 2.20.** Uma função  $f(x)$  tem *simetria ímpar* ou é dita, simplesmente, *ímpar*, se  $f(-x) = -f(x)$ , ou seja, se ela for simétrica em relação à origem.

**Exemplo 2.5.** As funções  $f(x) = x^3$ ,  $g(x) = \operatorname{tg}(x)$ ,  $h(x) = \operatorname{sen}(x)$  e  $p(x) = \cos(x) \operatorname{sen}(x)$  são ímpares.

**Proposição 2.8.** Se  $f$  for uma função ímpar e contínua no intervalo simétrico  $[-l, l]$ , então,

$$\int_{-l}^l f(x) dx = 0.$$

*Demonstração.* A demonstração desse resultado usa raciocínios análogos à prova da Proposição 2.7. ■

**Proposição 2.9.** Toda função pode ser escrita de forma única como sendo a soma de uma função par com uma função ímpar. Em outros termos,  $f(x) = f_p(x) + f_i(x)$ , em que  $f_p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$  é a parte par e  $f_i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$  a parte ímpar da função.

*Demonstração.* Iniciaremos essa prova garantindo que toda função pode ser escrita como sendo a soma de uma função par com uma função ímpar. Notemos que

$$f_p(-x) = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = f_p(x),$$

logo,  $f_p$  é uma função par. Por outro lado,

$$f_i(-x) = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -f_i(x),$$

o que garante que  $f_i$  é uma função ímpar. Como, por hipótese,  $f(x) = f_p(x) + f_i(x)$ , então, de fato, qualquer  $f$  poderá ser escrita como uma soma de uma função par com uma função ímpar.

Nos resta provar a parte da unicidade. Para isso, consideremos a seguinte afirmação:

*Afirmção 1:* Se  $f(x)$  for par e ímpar, então,  $f(x) = 0$ .

De fato, se  $f$  for par,

$$f(x) = f(-x),$$

para todo  $x$ . Por outro lado, se  $f$  for ímpar,

$$f(x) = -f(-x),$$

para todo  $x$ . Como  $f$  é par e ímpar,

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x) \\ f(-x) &= -f(-x) \\ 2f(-x) &= 0 \\ f(-x) &= 0, \end{aligned}$$

para todo  $x$ . Isso é suficiente para garantir que vale a Afirmação 1.

Voltemos à prova. Assumamos que

$$f(x) = g_1(x) + h_1(x),$$

em que  $g_1$  seja par e  $h_1$  seja ímpar. Ademais, assumamos que

$$f(x) = g_2(x) + h_2(x),$$

em que  $g_2$  seja par e  $h_2$  seja ímpar. Devemos constatar que  $g_1 = g_2$  e  $h_1 = h_2$ .

Com efeito, como  $f(x) = f(x)$ ,

$$\begin{aligned} g_1(x) + h_1(x) &= g_2(x) + h_2(x) \\ g_1(x) - g_2(x) &= h_2(x) - h_1(x). \end{aligned} \tag{2.8}$$

Notemos que o lado esquerdo da identidade (2.8) é uma função par; o lado direito, uma função ímpar. Pela Afirmação 1,

$$g_1(x) - g_2(x) = 0 \Rightarrow g_1(x) = g_2(x)$$

e

$$h_2(x) - h_1(x) = 0 \Rightarrow h_2(x) = h_1(x).$$

Mostramos, portanto, que  $f$  é dada de forma única como uma soma de uma função par com uma função ímpar. ■

**Proposição 2.10.** *São válidas as seguintes propriedades envolvendo a soma e o produto de funções pares e ímpares:*

- (i) *A soma de duas funções pares resulta em uma função par.*
- (ii) *O produto de duas funções pares resulta em uma função par.*
- (iii) *A soma de duas funções ímpares resulta em uma função ímpar.*
- (iv) *O produto de duas funções ímpares resulta em uma função par.*
- (v) *O produto de uma função par com uma função ímpar resulta em uma função ímpar.*

*Demonstração.* A demonstração da Proposição 2.10 decorre diretamente da definição de funções ímpares e pares. ■

## 2.4 CONVERGÊNCIA DE SEQUÊNCIAS E SÉRIES DE FUNÇÕES

Entendemos que o leitor está familiarizado com os conceitos associados às sequências numéricas. Entretanto, deixamos registrados, de imediato, o conceito de sequência de Cauchy e o teorema que garante a completude do conjunto dos números reais - que será requerido ao longo desse estudo.

**Definição 2.21.** Uma sequência de números reais  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  é uma sequência de Cauchy se, dado  $\varepsilon > 0$ , existir  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$|x_n - x_m| < \varepsilon,$$

sempre que  $m, n \geq n_0$ .

**Teorema 2.11.** *Uma sequência de números reais é convergente em  $\mathbb{R}$  se, e somente se, ela for uma sequência de Cauchy.*

*Demonstração.* A demonstração pode ser encontrada na Ref. [5]. ■

Estamos interessados em estudar a convergência de séries de funções. Para isso, abordaremos, primeiramente, a definição de série numérica. Além disso, registraremos as definições de convergência pontual e convergência uniforme de sequências de funções. Esse detalhamento é indispensável para o tratamento seguro de convergência pontual e de convergência uniforme de séries de funções.

**Definição 2.22.** Seja  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  uma sequência numérica. A sequência  $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  em que

$$S_n = \sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$

é chamada de sequência de somas parciais associada a  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Definição 2.23.** Seja  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  uma sequência numérica. Dizemos que a série

$$\sum_{i=1}^{+\infty} a_i$$

converge ao número  $L \in \mathbb{R}$  se

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = L,$$

em que  $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  caracteriza a sequência de somas parciais associada a  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Em outros termos,

$$\sum_{i=1}^{+\infty} a_i = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \sum_{i=1}^n a_i \right).$$

Há vários critérios para identificar se uma série numérica é convergente ou não. Tais critérios são geralmente estudados nas disciplinas de cálculo e análise e não detalharemos nesse trabalho. Como referência, sugere-se o estudo de [5] e [7].

Ressaltamos que, ao longo dessa seção, o conjunto  $\mathbb{K}$  designará  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

**Definição 2.24.** Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^m$  um conjunto. Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , definamos a função  $f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ . Seja  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ , uma outra função. Dizemos que a sequência de funções  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  *converge pontualmente em  $\Omega$  para função  $f$*  se, e somente se, dados  $x \in \Omega$  e  $\varepsilon > 0$ , existir  $N = N(x, \varepsilon) \in \mathbb{N}$  tal que

$$n \geq N \Rightarrow |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

**Exemplo 2.6.** Consideremos a sequência de funções reais  $\{x^n\}_{n=1}^{+\infty}$ , definidas em  $\Omega = (0, 1)$ . Podemos deduzir que essa sequência converge pontualmente para a função

$$f(x) = 0.$$

Com efeito, para cada  $x \in \Omega$  fixado, verifica-se que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x^n = 0$ .

A seguir, definiremos a convergência uniforme de uma sequência de funções:

**Definição 2.25.** Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^m$  um conjunto. Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , definamos a função  $f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ . Seja  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ , uma outra função. Dizemos que a sequência de funções  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  *converge uniformemente em  $\Omega$  para a função  $f$*  se, e somente se, dado  $\varepsilon > 0$ , existir  $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  tal que

$$n \geq N \Rightarrow |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon, \forall x \in \Omega.$$

É interessante notarmos que, na definição de convergência pontual, o índice  $N$  pode depender de  $\varepsilon$  e  $x$ . Entretanto, na convergência uniforme, temos que  $N$  depende apenas de  $\varepsilon$ . Isto nos leva a entender que toda convergência uniforme é, em verdade, uma convergência pontual. A recíproca, entretanto, não é necessariamente verdadeira.

**Exemplo 2.7.** Seja a sequência de funções reais  $\{x^n\}_{n=1}^{+\infty}$ , definidas em  $\Omega = (0, 1]$ . É possível estabelecer que esta sequência converge pontualmente para a função

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in (0, 1); \\ 1, & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

A convergência, entretanto, não é uniforme. A justificativa para essa última afirmação é uma aplicação do Teorema 2.12, abordado a seguir, e usa o fato da função  $f(x)$  apresentar uma descontinuidade.

**Teorema 2.12.** *Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^m$  um conjunto não vazio e  $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$  uma sequência em  $C(\Omega)$ . Se a sequência  $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$  convergir uniformemente para a função  $f$ , então,  $f \in C(\Omega)$ .*

*Demonstração.* Queremos mostrar que  $f$  é contínua. Inicialmente, tomemos  $x_0 \in \Omega$ . Por hipótese, a sequência  $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$  converge uniformemente para a função  $f$ . Então, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $N \in \mathbb{N}$ , tal que

$$x \in \Omega, n \geq N \Rightarrow |f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Por outro lado, como  $f_N$  é contínua em  $x_0$ , existe  $\delta > 0$ , tal que

$$x \in \Omega, \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow |f_N(x) - f_N(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Notemos que, se  $x \in \Omega$ ,

$$\begin{aligned} & |f(x) - f(x_0)| \\ &= |f(x) - f(x_0) + (f_N(x) - f_N(x)) + (f_N(x_0) - f_N(x_0))| \\ &= |(f(x) - f_N(x)) + (f_N(x) - f_N(x_0)) + (f_N(x_0) - f(x_0))| \\ &\leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)|. \end{aligned}$$

Se impusermos que  $x \in \Omega$  satisfaça  $\|x - x_0\| < \delta$ , resulta que

$$\begin{aligned} & |f(x) - f(x_0)| \\ &\leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \end{aligned}$$

o que prova que  $f$  é contínua em  $x_0$ . Sendo  $x_0 \in \Omega$  um ponto arbitrário, concluímos que  $f \in C(\Omega)$ . ■

Assim como definimos as convergências pontual e uniforme de uma sequência de funções, podemos definir as convergências pontual e uniforme de séries de funções (uma vez que uma série está vinculada a uma sequência das somas parciais).

**Definição 2.26.** Dizemos que a série de funções

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$$

converge pontualmente (respectivamente, uniformemente) em  $\Omega$  se, e somente se, a sequência de funções

$$F_n(x) = \sum_{j=1}^n f_j(x), \quad x \in \Omega,$$

convergir pontualmente (respectivamente, uniformemente) em  $\Omega$ .

Provaremos adiante o Teste M de Weiestrass que nos auxilia a garantir a convergência uniforme de uma série de funções comparando-a com uma série numérica:

**Teorema 2.13.** (*Teste M de Weiestrass*). *Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^m$  um conjunto não vazio e  $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$  uma sequência em  $C(\Omega)$ . Suponha que exista uma sequência numérica  $\{M_n\}_{n=1}^{+\infty}$  tal que*

$$|f_n(x)| \leq M_n, \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} M_n < +\infty. \quad (2.9)$$

*Então, a série de funções  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$  converge uniformemente em  $\Omega$ .*

*Demonstração.* Queremos mostrar que  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$  converge uniformemente em  $\Omega$ , ou seja, que a sequência das somas parciais dessa série converge uniformemente em  $\Omega$ . Vamos iniciar essa prova mostrando que  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$  converge pontualmente, para todo  $x \in \Omega$ . Fixemos  $x \in \Omega$ . Como a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} M_n$  converge por hipótese, podemos afirmar que a sequência das somas parciais associada a essa série é convergente. Seja  $\{t_n\}_{n=1}^{+\infty}$ , com  $t_n = \sum_{k=1}^n M_k$ , a sequência de somas parciais da série numérica. Sabemos que uma sequência convergente em  $\mathbb{R}$  é, em particular, uma sequência de Cauchy. Assim, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $N > 0$  tal que se  $l \geq n \geq N$ , então,

$$|t_l - t_{n-1}| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Notemos que

$$0 \leq |t_l - t_{n-1}| = \left| \sum_{k=1}^l M_k - \sum_{p=1}^{n-1} M_p \right| = \left| \sum_{j=n}^l M_j \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Decorre disso que

$$0 \leq \left| \sum_{j=n}^l M_j \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por outro lado, utilizando a desigualdade triangular e a hipótese  $0 \leq |f_n(x)| \leq M_n$ , temos que

$$\left| \sum_{k=n}^l f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n}^l |f_k(x)| \leq \sum_{k=n}^l M_k = \left| \sum_{j=n}^l M_j \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2.10)$$

Assim, podemos concluir que

$$\left| \sum_{k=1}^l f_k(x) - \sum_{p=1}^{n-1} f_p(x) \right| = \left| \sum_{k=n}^l f_k(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Isso significa que se considerarmos a sequência das somas parciais da série  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ , teremos uma sequência de Cauchy. Como toda sequência de Cauchy é convergente, de acordo com o Teorema 2.11, então a sequência das somas parciais da série,  $\sum_{k=1}^n f_k(x)$ , converge pontualmente e, portanto, a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$$

converge pontualmente em  $\Omega$ . Precisamos agora mostrar que essa série converge uniformemente. Denotemos por  $f(x)$  a soma da série, ou seja,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x), \quad x \in \Omega.$$

Para cada  $x \in \Omega$ , tomando o limite (que já sabemos que existe pois  $\{M_k\}_{k=1}^{+\infty}$  é uma sequência numérica e pela convergência pontual) na desigualdade (2.10), quando  $l \rightarrow +\infty$ , obtemos

$$\left| \sum_{k=n}^{+\infty} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n}^{+\infty} M_k \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall n \geq N.$$

Mas então, para quaisquer que sejam  $x \in \Omega$  e  $n \geq N$ , usando a última desigualdade, tem-se que

$$\left| f(x) - \sum_{k=1}^n f_k \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} M_k \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

o que prova que a convergência é, de fato, uniforme (uma vez que a escolha de  $N$  independe de  $x$ ). ■

**Teorema 2.14.** (*Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue*)  
 Seja  $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$  uma sequência em  $C([a, b])$ . Suponha que  $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$  convirja uniformemente em  $[a, b]$  para a função  $f \in C([a, b])$ . Então, qualquer que seja  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  seccionalmente contínua,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x)g(x) dx = \int_a^b f(x)g(x) dx.$$

*Demonstração.* Como  $g$  é uma função seccionalmente contínua, então,  $g$  é limitada. Logo, existe  $M > 0$  tal que

$$|g(x)| \leq M, \forall x \in [a, b].$$

Além disso, como a multiplicação de uma função contínua  $f(x)$  por uma função seccionalmente contínua  $g(x)$  resulta em uma função seccionalmente contínua  $f(x) \cdot g(x)$  e toda função seccionalmente contínua é integrável, então, as integrais

$$\int_a^b f_n(x)g(x) dx \text{ e } \int_a^b f(x)g(x) dx$$

existem como números. Por hipótese, a sequência de funções  $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$  converge uniformemente. Assim, por definição, dado  $\varepsilon > 0$ , escolhamos  $N \in \mathbb{N}$  tal que

$$x \in [a, b], n \geq N \Rightarrow |f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{M(b-a)}.$$

Precisamos mostrar que a sequência de funções  $\{t_n\}_{n=1}^{+\infty}$ , cujo termo geral é  $t_n = \int_a^b f_n(x)g(x) dx$ , converge para  $L = \int_a^b f(x)g(x) dx$ . Se

$n \geq N$ ,

$$\begin{aligned}
 |t_n - L| &= \left| \int_a^b f_n(x)g(x) dx - \int_a^b f(x)g(x) dx \right| \\
 &= \left| \int_a^b [f_n(x)g(x) - f(x)g(x)] dx \right| \\
 &= \left| \int_a^b [f_n(x) - f(x)]g(x) dx \right| \\
 &< \int_a^b |f_n(x) - f(x)| \cdot |g(x)| dx \\
 &< \int_a^b \frac{\varepsilon}{M(b-a)} \cdot M dx \\
 &= \frac{\varepsilon}{(b-a)} \int_a^b dx \\
 &= \varepsilon.
 \end{aligned}$$

Logo,  $|t_n - L| < \varepsilon$ , se  $n \geq N$ . Assim, a sequência  $\{t_n\}_{n=1}^{+\infty}$  converge para o número  $L = \int_a^b f(x)g(x) dx$ . Portanto,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x)g(x) dx = \int_a^b f(x)g(x) dx.$$

■

**Teorema 2.15.** *Seja  $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$  uma sequência em  $C^1([a, b])$ . Suponha que a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x_0)$  convirja em algum ponto  $x_0 \in [a, b]$  e que a série das derivadas  $\sum_{n=1}^{+\infty} f'_n(x)$  convirja uniformemente em  $[a, b]$  a uma função  $g \in C([a, b])$ . Então, a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$  converge uniformemente em  $[a, b]$  a uma função  $f \in C^1([a, b])$  e  $f' = g$ .*

*Demonstração.* Por hipótese,  $\sum_{n=1}^{+\infty} f'_n(x)$  converge uniformemente para a função  $g(x)$ . Iniciaremos essa prova mostrando que existe  $f(x)$  tal que  $f'(x) = g(x)$ . Consideremos a sequência das somas parciais  $\{t_n\}_{n=1}^{+\infty}$ , na qual  $t_n(x) = \sum_{k=1}^n f'_k(x)$ . Utilizando o Teorema 2.14, temos que se  $h(t)$  for uma função seccionalmente contínua,

$$\int_{x_0}^x g(t)h(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{x_0}^x t_n(t)h(t) dt, \quad \forall x \in [a, b].$$

Tomemos  $h(t) = 1$ . Consequentemente,

$$\int_{x_0}^x g(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{x_0}^x t_n(t) dt.$$

Como  $t_n(x) = \sum_{k=1}^n f'_k(x)$ , temos que

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x g(t) dt &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{x_0}^x \sum_{k=1}^n f'_k(t) dt \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \int_{x_0}^x f'_k(t) dt \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n f_k(x) - \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n f_k(x_0). \end{aligned}$$

Notemos que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n f_k(x) = \int_{x_0}^x g(t) dt + \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x_0). \quad (2.11)$$

Logo, a série  $\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x)$  é convergente, para todo  $x \in [a, b]$ , uma vez que a integral é definida e a série em  $x_0$  é convergente por hipótese.

Definamos

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n f_k(x).$$

Como um caso particular, com  $x = x_0$ ,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x_0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n f_k(x_0) = f(x_0).$$

Devido a (2.11),

$$\int_{x_0}^x g(t) dt + f(x_0) = f(x). \quad (2.12)$$

É interessante notarmos que o lado esquerdo dessa igualdade é derivável, pois,  $g$  é contínua e  $f(x_0)$  é constante. Consequentemente, a função  $f(x)$  é derivável. Devemos mostrar que  $f' = g$  e que  $f$  é de classe  $C^1$ . Derivemos o lado esquerdo da igualdade e utilizemos o segundo teorema fundamental do cálculo:

$$\frac{d}{dx} \left( \int_{x_0}^x g(t) dt + f(x_0) \right) = g(x). \quad (2.13)$$

Assim, de (2.12) e (2.13), concluímos que  $f' = g$ . Como  $f' = g$  e  $g$  é contínua por hipótese, então,  $f'$  é contínua. A derivação da  $f$  implica em sua continuidade. Decorre, portanto, que  $f \in C^1([a, b])$ . Nos resta provar que a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$  converge uniformemente em  $[a, b]$  a  $f(x)$ .

Com efeito, sabemos que  $\sum_{n=1}^{+\infty} f'_k(x)$  converge uniformemente para  $g(t)$ . Assim, por definição, dado  $\varepsilon > 0$ , escolhamos  $N_1 \in \mathbb{N}$ , tal que

$$\left| g(t) - \sum_{k=1}^n f'_k(t) \right| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}, \quad \forall t \in [a, b], \forall n \geq N_1, \quad (2.14)$$

na qual  $\sum_{k=1}^n f'_k(t)$  é a seqüência das somas parciais da conhecida série  $\sum_{n=1}^{+\infty} f'_n(x)$ . Além disso, como  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x_0)$  converge para  $f(x_0)$ : dado  $\varepsilon > 0$ , escolhamos  $N_2 \in \mathbb{N}$ , tal que

$$\left| f(x_0) - \sum_{k=1}^n f_k(x_0) \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall n \geq N_2, \quad (2.15)$$

na qual  $\sum_{k=1}^n f_k(x_0)$  é a seqüência das somas parciais de  $\sum_{k=1}^{+\infty} f_n(x_0)$ . Se  $x \in [a, b]$ ,  $n \geq \max \{N_1, N_2\}$ , devemos mostrar que

$$\left| f(x) - \sum_{k=1}^n f_k(x) \right| < \varepsilon.$$

Com efeito, devido a (2.14) e (2.15), para  $x \in [a, b]$ , temos que, se  $n \geq \max \{N_1, N_2\}$ ,

$$\begin{aligned} & \left| f(x) - \sum_{k=1}^n f_k(x) \right| \\ &= \left| \int_{x_0}^x g(t) dt + f(x_0) - \sum_{k=1}^n f_k(x_0) + \sum_{k=1}^n f_k(x_0) - \sum_{k=1}^n f_k(x) \right| \\ &= \left| \int_{x_0}^x g(t) dt - \sum_{k=1}^n (f_k(x) - f_k(x_0)) + f(x_0) - \sum_{k=1}^n f_k(x_0) \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left| \int_{x_0}^x g(t) dt - \sum_{k=1}^n (f_k(x) - f_k(x_0)) \right| + \left| f(x_0) - \sum_{k=1}^n f_k(x_0) \right| \\
&< \left| \int_{x_0}^x g(t) dt - \sum_{k=1}^n (f_k(x) - f_k(x_0)) \right| + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \left| \int_{x_0}^x g(t) dt - \sum_{k=1}^n \int_{x_0}^x f'_k(t) dt \right| + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \left| \int_{x_0}^x g(t) dt - \int_{x_0}^x \sum_{k=1}^n f'_k(t) dt \right| + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \left| \int_{x_0}^x \left[ g(t) - \sum_{k=1}^n f'_k(t) \right] dt \right| + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \left| \int_{\min\{x, x_0\}}^{\max\{x, x_0\}} \left[ g(t) - \sum_{k=1}^n f'_k(t) \right] dt \right| + \frac{\varepsilon}{2} \\
&\leq \int_{\min\{x, x_0\}}^{\max\{x, x_0\}} \left| g(t) - \sum_{k=1}^n f'_k(t) \right| dt + \frac{\varepsilon}{2} \\
&< \int_a^b \frac{\varepsilon}{2(b-a)} dt + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

Portanto, a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$  converge uniformemente para  $f(x)$  em  $[a, b]$ . ■

Será relevante para o desenvolvimento do trabalho definir-mos Equações Diferenciais Ordinárias, ou simplesmente EDOs, e abordarmos as EDOs de segunda ordem homogêneas.

## 2.5 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

**Definição 2.27.** Uma *equação diferencial ordinária* (EDO) é uma equação que envolve uma variável independente  $x$  e as derivadas ordinárias de uma função (variável dependente)  $y$ . Podemos representar de uma maneira geral uma EDO de ordem  $n$  como

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0.$$

Aqui,  $y = y(x)$  caracteriza uma solução para a referida EDO.

Um caso particular caracteriza a EDO linear:

**Definição 2.28.** Uma equação diferencial ordinária linear, ou EDO linear, de ordem  $n$ , é uma equação da forma

$$P_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + P_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + P_1(x) \frac{dy}{dx} + P_0(x)y = G(x),$$

em que  $P_0, P_1, \dots, P_n$  e  $G$  são funções reais e contínuas em um intervalo  $(\alpha, \beta)$ . Ademais, exige-se que  $P_n(x) \neq 0, \forall x \in (\alpha, \beta)$ .

As equações diferenciais ordinárias são extremamente úteis em diversas áreas do conhecimento, como na Física, Biologia, Economia, entre outras. No âmbito da Matemática, as EDOs são largamente utilizadas, por exemplo, na compreensão de problemas de Topologia, Geometria Diferencial e Cálculo Variacional.

Na próxima seção, detalharemos as EDOs lineares de segunda ordem, pois, elas serão de extrema importância para o desenvolvimento do trabalho.

### 2.5.1 EDOs Lineares de Segunda Ordem

As EDOs de segunda ordem serão úteis na busca de soluções para a clássica Equação do Calor.

**Definição 2.29.** Uma Equação Diferencial Ordinária Linear de Segunda Ordem é uma equação da forma

$$P_2(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + P_1(x) \frac{dy}{dx} + P_0(x)y = G(x), \quad (2.16)$$

em que  $P_0, P_1, P_2$  e  $G$  são funções contínuas, com  $P_2(x) \neq 0$  no intervalo em que  $x$  está definido.

**Definição 2.30.** Se  $G(x) \neq 0$ , para algum  $x$ , a equação (2.16) será dita *EDO não homogênea*. Se  $G(x) = 0$ , para todo  $x$ , a equação (2.16) será dita *homogênea*. De tal modo,

$$P_2(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + P_1(x) \frac{dy}{dx} + P_0(x)y = 0 \quad (2.17)$$

caracteriza uma EDO linear de segunda ordem homogênea.

Há uma vasta literatura sobre as EDOs lineares de segunda ordem homogêneas. Os resultados a seguir são encontrados demonstrados em [8]. Outras referências auxiliares são [3] e [7].

**Teorema 2.16.** *Se  $y_1$  e  $y_2$  forem ambas soluções da equação (2.17) e  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ , então, a função*

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

*também é uma solução de (2.17).*

**Definição 2.31.** Suponha que  $y_1$  e  $y_2$  sejam duas funções. Dizemos que o conjunto  $\{y_1, y_2\}$  é *linearmente independente* se:

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = 0,$$

para todo  $x$  no domínio, se e somente se,  $c_1 = c_2 = 0$ .

**Definição 2.32.** Seja  $\{y_1, y_2\}$  um conjunto linearmente independente, de tal modo que  $y_1$  e  $y_2$  sejam soluções para a EDO linear homogênea (2.17). Denominamos  $\{y_1, y_2\}$  um *conjunto fundamental de soluções* para a equação (2.17).

**Teorema 2.17.** *Sejam  $P_0, P_1$  e  $P_2$  funções contínuas em um intervalo aberto  $I$ , em que  $P_2(x) \neq 0, \forall x \in I$ . Então, existe um conjunto fundamental de soluções para a EDO linear homogênea (2.17).*

**Teorema 2.18.** *Sejam  $y_1$  e  $y_2$  um par de soluções linearmente independentes da equação (2.17) em um intervalo  $I$ . Admita a desigualdade  $P_2(x) \neq 0, \forall x \in I$ . Se  $y(x)$  for uma solução para a equação (2.17), então, existem constantes reais  $c_1$  e  $c_2$ , tais que*

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x). \quad (2.18)$$

À expressão (2.18), denominamos *solução geral da EDO linear homogênea (2.17)*.

De maneira geral, pode ser complicado encontrar um conjunto fundamental de soluções para a EDO linear homogênea de segunda ordem (2.17). Entretanto, há um método interessante que

pode ser aplicado no caso em que os coeficientes  $P_0(x)$ ,  $P_1(x)$  e  $P_2(x)$  forem constantes.

Sejam  $a$ ,  $b$  e  $c$  números reais, tais que  $a \neq 0$ . Consideremos a EDO linear de segunda ordem homogênea com coeficientes constantes

$$ay'' + by' + cy = 0. \quad (2.19)$$

Procuramos uma função  $y$  tal que (2.19) seja satisfeita. Consideremos  $y(x) = e^{mx}$ , com  $m \in \mathbb{R}$ . Trataremos  $y(x)$  como uma solução para (2.19). Substituindo as derivadas de primeira e segunda ordem de  $y(x)$  e a própria função  $y(x) = e^{mx}$  em (2.19), temos

$$\begin{aligned} am^2e^{mx} + bme^{mx} + ce^{mx} &= 0 \\ e^{mx}(am^2 + bm + c) &= 0. \end{aligned}$$

Como  $e^{mx} \neq 0$ ,  $y(x) = e^{mx}$  é solução de (2.19) se  $m$  for raiz da equação

$$am^2 + bm + c = 0.$$

**Definição 2.33.** Se  $ay'' + by' + cy = 0$  for uma EDO linear de segunda ordem homogênea, então,

$$am^2 + bm + c = 0 \quad (2.20)$$

será chamada de equação característica ou auxiliar da EDO.

Queremos encontrar a solução da EDO homogênea

$$ay'' + by' + cy = 0.$$

Definamos  $\Delta = b^2 - 4ac$ . Haverá três casos a estudar a depender do comportamento das raízes da equação característica (2.20):

- (i) Se  $\Delta > 0$ , então, a equação característica admite duas soluções reais e distintas:  $m_1, m_2$ . Logo, a solução geral da EDO (2.19) será

$$y(x) = c_1e^{m_1x} + c_2e^{m_2x}. \quad (2.21)$$

- (ii) Se  $\Delta = 0$ , então, a equação característica tem uma única raiz real. Logo, a raiz dessa equação será  $m = -\frac{b}{2a}$  e a solução geral da EDO (2.19) será

$$y(x) = c_1 e^{mx} + c_2 x e^{mx}. \quad (2.22)$$

Podemos justificar essa afirmação verificando que  $y_1(x) = e^{mx}$  e  $y_2(x) = x e^{mx}$  são soluções linearmente independentes para a equação (2.19).

- (iii) Se  $\Delta < 0$ , a equação característica admite duas raízes imaginárias, isto é,  $m_1 = \alpha + i\beta$  e  $m_2 = \alpha - i\beta$ , em que  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  e  $\beta \neq 0$ . Em princípio, cogitamos que a solução geral da EDO (2.19) seja

$$\begin{aligned} y(x) &= C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x} \\ &= C_1 e^{(\alpha+i\beta)x} + C_2 e^{(\alpha-i\beta)x}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Entretanto, a estrutura pode não ser adequada, pois, não sabemos se (2.23) caracteriza uma função real. Utilizando a *fórmula de Euler*

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta),$$

temos

$$e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x} (\cos(\beta x) + i \operatorname{sen}(\beta x)) \quad (2.24)$$

e

$$e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x} (\cos(\beta x) - i \operatorname{sen}(\beta x)). \quad (2.25)$$

Substituindo (2.24) e (2.25) em (2.23),

$$y(x) = e^{\alpha x} [(C_1 + C_2) \cos(\beta x) + i(C_1 - C_2) \operatorname{sen}(\beta x)].$$

Definindo  $c_1 = C_1 + C_2$  e  $c_2 = i(C_1 - C_2)$ , a solução geral da EDO homogênea (2.19) será

$$y(x) = e^{\alpha x} (c_1 \cos(\beta x) + c_2 \operatorname{sen}(\beta x)). \quad (2.26)$$

### 3 PROBLEMA DA EQUAÇÃO DO CALOR NA BARRA FINITA

No contexto de Equações Diferenciais, temos as Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs), definidas no Capítulo 2, e as Equações Diferenciais Parciais (EDPs), que serão definidas ao longo deste capítulo. Abordaremos a EDP do Calor e apresentaremos o Problema da Equação do Calor na barra finita.

Iniciaremos este capítulo analisando a definição de EDPs, bem como conhecendo algumas EDPs clássicas. Então, apresentaremos uma motivação para o estudo da Equação do Calor. Após, utilizaremos o método da separação de variáveis para encontrar soluções para a EDP do Calor em uma dimensão. A partir disso, seremos levados naturalmente às Séries de Fourier, que serão abordadas no Capítulo 4.

#### 3.1 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS

**Definição 3.1.** Uma *equação diferencial parcial* (EDP) é uma equação que envolve duas ou mais variáveis independentes  $x_1, \dots, x_n$  e as derivadas parciais de uma função (variável dependente)  $u = u(x_1, \dots, x_n)$ . Podemos representar de uma maneira geral uma EDP de ordem  $k$  em  $n$  variáveis independentes  $x_1, \dots, x_n$  como

$$F\left(x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_n}, \dots, \frac{\partial^k u}{\partial x_n^k}\right) = 0$$

em que  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$  no qual  $\Omega$  é um subconjunto do espaço euclidiano  $\mathbb{R}^n$ ,  $F$  é uma função dada e  $u = u(x)$  é a função que estamos preocupados em determinar.

Temos algumas EDPs de segunda ordem que foram historicamente estudadas na matemática, como por exemplo a *Equação da Onda*:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx},$$

em que  $c$  é uma constante, a *Equação de Laplace* em duas dimensões

$$u_{xx} + u_{yy} = 0,$$

ou em três dimensões

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0,$$

e a *Equação do Calor*:

$$u_t = \alpha^2 u_{xx},$$

em que  $\alpha$  é uma constante.

Consideremos, por exemplo, a Equação do Calor com  $\alpha = 1$ , ou seja,  $u_t = u_{xx}$ . Claramente, se  $k \in \mathbb{R}$ ,  $u = k$  é uma solução para a EDP. Além disso,  $u(x, t) = e^{x+t}$  também é uma solução facilmente identificada. Como podemos perceber, a EDP do calor com  $\alpha = 1$  admite uma infinidade de soluções. Em geral, quando não são impostas condições sobre o valor da solução, ou de suas derivadas, uma EDP poderá admitir uma infinidade de soluções de natureza bastante heterogênea.

Estaremos preocupados em trabalhar especificamente com a Equação do Calor considerando o Problema Clássico da Equação do Calor em uma barra finita:

$$\begin{cases} u_t = \alpha^2 u_{xx}, & (x, t) \in (0, l) \times (0, +\infty) \\ u(x, 0) = f(x), & x \in [0, l] \\ u(0, t) = u(l, t) = 0, & t \geq 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

Considerando que  $f$  seja uma função a valores reais, buscaremos identificar as situações em que o problema (3.1) admitirá uma única solução. No contexto das EDPs, (3.1) é conhecido como um problema de valor inicial e de contorno. Dissertaremos sobre essa nomenclatura na seção a seguir, na qual apresentaremos uma motivação para o estudo da equação do calor na barra finita.

### 3.2 MOTIVAÇÃO PARA O ESTUDO DO PROBLEMA DA EQUAÇÃO DO CALOR

Consideremos uma barra reta homogênea de comprimento  $l > 0$  com largura e espessura desprezíveis. Queremos analisar a

condução de calor nessa barra levando em consideração algumas condições:

- (i) A condução de calor ocorre apenas nas extremidades;
- (ii) Não se perde calor ao longo da barra, logo tem-se um problema com apenas uma variável espacial;
- (iii) A temperatura da barra, mesmo após sofrer interferências, busca a estabilidade.

Observemos a ilustração da barra de comprimento  $l$  abaixo, colocada sobre o intervalo  $[0, l]$  do eixo  $x$ :

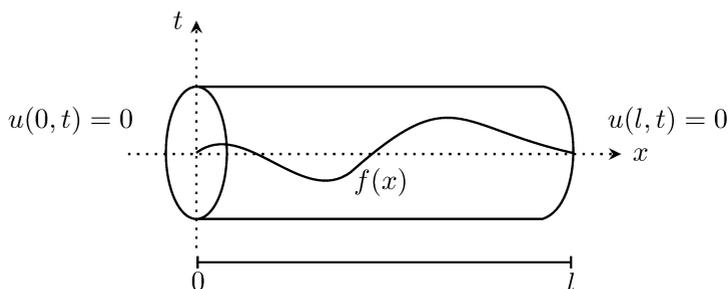


Figura 3.1 – Representação gráfica de uma barra de comprimento  $l$ .

Quando analisamos o aquecimento de uma barra, estudamos sua temperatura em cada posição. No início do processo, no tempo  $t = 0$ , cada ponto da barra admite uma temperatura em particular. Conforme o tempo passa, é possível que, com o aquecimento, a temperatura em cada ponto sofra alguma alteração. Assim, a temperatura de uma barra de comprimento  $l$  pode ser dada por uma função de duas variáveis  $u$  que depende de duas condições simultâneas, o tempo ( $t$ ) e a posição na barra ( $x$ ). Logo,  $u(x, t)$  representa a temperatura da barra em uma posição  $x$  que pertence ao intervalo  $[0, l]$  em um determinado tempo  $t \in [0, +\infty)$  após o início do processo de aquecimento.

A depender do material que compõe a barra, existe uma constante positiva  $\alpha$  e espera-se que a função  $u$  fique sujeita à EDP

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

para todo  $(x, t) \in (0, l) \times (0, +\infty)$ . É importante mencionar que  $\alpha$  é a *constante de difusividade térmica* relativa ao material da barra.

Conforme já comentado, espera-se que a barra tenha, em cada ponto, uma temperatura no início do processo de aquecimento. Sendo assim, para  $t = 0$  fixado, entende-se que a temperatura depende da posição  $x \in [0, l]$ , ou seja, existe uma função  $f$  de forma que

$$u(x, 0) = f(x), \quad x \in [0, l].$$

Tal identidade é chamada de condição inicial, e sua nomenclatura é auto-explicativa.

Além disso, consideraremos também que, durante o processo de aquecimento, as extremidades da barra de comprimento  $l$  serão mantidas a uma temperatura fixa nula, assim, é conhecida a *condição de contorno* do problema da equação do calor, dada por

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad t \geq 0.$$

Considerando que o domínio de  $u$  é  $[0, l] \times [0, +\infty)$ , é imposta portanto, uma condição sobre a fronteira espacial dessa região.

A modelagem do Problema da Equação do Calor sobre uma barra finita é feita por meio de um Problema de Valor Inicial e de Contorno (PVIC) no qual são impostas condições sobre as soluções de uma EDP. Este problema, conforme já indicado em (3.1), pode ser representado matematicamente da seguinte forma:

$$\begin{cases} u_t = \alpha^2 u_{xx}, & (x, t) \in (0, l) \times (0, +\infty), \\ u(0, t) = u(l, t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x, 0) = f(x), & x \in [0, l]. \end{cases}$$

É importante salientar que, para existir solução para o problema (3.1), a função  $f$  precisa satisfazer a condição que foi inici-

almente imposta, isto é,  $f(x) = u(x, 0)$ , para todo  $x \in [0, l]$ . Logo,  $f(0) = u(0, 0) = 0$ , pela condição de contorno. Analogamente,  $f(l) = u(l, 0) = 0$ . Portanto,  $f$  deve satisfazer  $f(0) = 0 = f(l)$ , ou seja, a temperatura no início, no ponto  $x = 0$ , é igual à temperatura no ponto  $x = l$ . Tem-se que  $f(0) = 0 = f(l)$  caracteriza uma condição de compatibilidade a ser imposta à função  $f$ .

No instante inicial, a temperatura sobre a barra altera-se continuamente conforme a posição observada. De tal forma, ao tratarmos do problema (3.1), devemos considerar que  $f$  seja contínua e definida de  $[0, l]$  a valores reais. Mencionaremos, simplesmente,  $f \in C([0, l])$ .

É esperado que a função solução  $u$  seja contínua sobre o seu domínio. Além disso, como a solução  $u$  deve satisfazer uma EDP de segunda ordem, fisicamente, é natural que busquemos identificar  $u \in C^2((0, l) \times (0, +\infty)) \cap C([0, l] \times [0, +\infty))$ . Objetivamos mostrar, ao longo do trabalho, que dada uma função  $f \in C([0, l])$ , satisfazendo a condição de compatibilidade  $f(0) = 0 = f(l)$ , existe uma única função suficientemente regular  $u$  que soluciona o Problema de Valor Inicial e de Contorno (ou simplesmente PVIC) (3.1).

Como informação histórica, o problema (3.1) teve sua solução apresentada pelo matemático e físico Joseph Fourier no século XIX, a partir da aplicação do método da separação de variáveis, que estudaremos à frente.

### Jean B. Joseph Fourier



O matemático e físico francês Jean-Baptiste Joseph Fourier (Auxerre, 21 de março de 1768 — Paris, 16 de maio de 1830) foi um dos primeiros a investigar a Equação do Calor, e propôs, então, a decomposição de funções periódicas em séries trigonométricas como uma forma de aproximar funções (STEWART, 2017).

Estaremos interessados em estudar a solução  $u$  do problema (3.1). Segundo Fourier,  $u$  é aproximada por uma série trigonométrica, que é chamada de série de Fourier, essa que definiremos no Capítulo 4. Antes disso, na próxima seção, estudaremos o Princípio da Superposição de Soluções.

### 3.3 PRINCÍPIO DA SUPERPOSIÇÃO

Consideremos a equação do calor com  $\alpha = 1$ ,  $u_t = u_{xx}$ . Suponhamos que  $u_1$  e  $u_2$  sejam soluções desta EDP e que  $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ . Definamos  $w = k_1u_1 + k_2u_2$ . Afirmamos que  $w_t = w_{xx}$ . De fato,

$$\begin{aligned} w_t = \frac{\partial(w)}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}(k_1u_1 + k_2u_2) \\ &= \frac{\partial}{\partial t}k_1u_1 + \frac{\partial}{\partial t}k_2u_2 \\ &= k_1(u_1)_t + k_2(u_2)_t \\ &= k_1(u_1)_{xx} + k_2(u_2)_{xx} \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}(k_1u_1 + k_2u_2) \\ &= \frac{\partial^2(w)}{\partial x^2} = w_{xx}. \end{aligned}$$

A equação  $u_t = u_{xx}$  satisfaz, portanto, a condição de ser uma EDP linear. Não nos aprofundaremos no estudo dessa classe de equações diferenciais, porém é importante ressaltarmos que essa permite a aplicação do Princípio da Superposição. A seguir, veremos como o Princípio da Superposição poderá ser útil no estudo do problema (3.1).

Seja  $\Omega$  um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^n$  e suponhamos que as funções  $a_{ij}$ ,  $b_j$  e  $c$ ,  $1 \leq i, j \leq n$  sejam contínuas em  $\Omega$  e assumam valores reais. Podemos então definir

$$\begin{aligned} L : C^2(\Omega) &\longrightarrow C(\Omega) \\ u &\longmapsto Lu, \end{aligned}$$

em que

$$Lu = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^n b_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + cu.$$

A cada função  $u \in C^2(\Omega)$ , corresponde uma única função  $Lu \in C(\Omega)$ , e dessa forma entendemos que  $L$  é um *operador diferencial parcial linear de segunda ordem definido sobre um subespaço vetorial de funções de  $C(\Omega)$* . O operador  $L$  está associado ao *Princípio da Superposição*.

**Proposição 3.1.** (*Princípio da Superposição.*) *Seja  $L$  um operador diferencial parcial linear de segunda ordem definido em um espaço vetorial de funções  $C^2(\Omega)$  cujos coeficientes estejam definidos em um aberto  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . Suponha que  $\{u_m\}_{m=1}^{+\infty}$  seja um conjunto de funções da classe  $C^2(\Omega)$  satisfazendo a EDP linear homogênea  $Lu = 0$  e que  $\{\alpha_m\}_{m=1}^{+\infty}$  seja uma sequência de escalares tal que a série*

$$u(x) = \sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_m u_m(x)$$

*seja uniformemente convergente e 2 vezes diferenciável termo a termo em  $\Omega$ . Então,  $u$  satisfaz a EDP homogênea  $Lu = 0$ .*

*Demonstração.* A demonstração dessa proposição pode ser encontrada na página 10 de [4]. ■

Consideremos o problema clássico da Condução do Calor em uma barra finita como proposto em (3.1). Neste caso, temos que  $n = 2$ ,  $\Omega = (0, l) \times (0, +\infty)$  e

$$Lu = \frac{\partial u}{\partial t} - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Portanto, para a equação do calor, é possível aplicar o Princípio da Superposição. Em outras palavras, se  $\{u_m\}_{m=1}^{+\infty} \subset C^2((0, l) \times (0, +\infty))$  for uma sequência de soluções para a equação

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} \tag{3.2}$$

e se  $\{\alpha_m\}_{m=1}^{+\infty}$  for uma sequência de escalares tal que a série

$$u(x, t) = \sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_m u_m(x, t),$$

na qual  $(x, t) \in (0, l) \times (0, +\infty)$ , seja uniformemente convergente e 2 vezes diferenciável termo a termo em  $(0, l) \times (0, +\infty)$ , então, segundo a tese da Proposição 3.1,  $u$  satisfaz a EDP do calor (3.2) para  $(x, t) \in (0, l) \times (0, +\infty)$ .

Na verdade, se considerarmos apenas o problema de valores de contorno associado ao PVIC (3.1), o resultado acima pode ser melhorado. Assim, se  $\{u_m\}_{m=1}^{+\infty} \subset C^2((0, l) \times (0, +\infty)) \cap C([0, l] \times [0, +\infty))$  for uma sequência de soluções para o problema de valores de contorno

$$\begin{cases} u_t = \alpha^2 u_{xx}, (x, t) \in (0, l) \times (0, +\infty) \\ u(0, t) = u(l, t) = 0, t \geq 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

e se  $\{\alpha_m\}_{m=1}^{+\infty}$  for uma sequência de escalares tal que a série

$$u(x, t) = \sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_m u_m(x, t),$$

na qual  $(x, t) \in [0, l] \times [0, +\infty)$ , seja uniformemente convergente e 2 vezes diferenciável termo a termo em  $(0, l) \times (0, +\infty)$ , então,  $u$  também satisfaz o problema de contorno (3.3).

O que acabamos de apresentar motiva a identificação de uma sequência  $\{u_m\}_{m=1}^{+\infty} \subset C^2((0, l) \times (0, +\infty)) \cap C([0, l] \times [0, +\infty))$  de soluções para o problema de contorno (3.3). Se quisermos que a função

$$u(x, t) = \sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_m u_m(x, t)$$

seja uma solução do PVIC (3.1), será preciso que seja satisfeita a condição inicial, isto é,  $u(x, 0) = f(x)$ , para todo  $x \in [0, l]$ . De tal modo, será preciso que

$$f(x) = \sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_m u_m(x, 0).$$

Na próxima seção, visaremos aplicar o método da separação de variáveis com a intenção de identificar uma sequência de funções  $\{u_m\}_{m=1}^{+\infty} \subset C^2((0, l) \times (0, +\infty)) \cap C([0, l] \times [0, +\infty))$ , soluções para

o problema de contorno (3.3). Ademais, espera-se que dada uma função  $f \in C([0, l])$  com  $f(0) = 0 = f(l)$ , exista uma sequência de escalares  $\{\alpha_m\}_{m=1}^{+\infty}$ , de tal modo que

$$f(x) = \sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_m u_m(x, 0),$$

para todo  $x \in [0, l]$ . A expectativa é que

$$u(x, t) = \sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_m u_m(x, t)$$

se torne a solução para o PVIC (3.1).

### 3.4 MÉTODO DA SEPARAÇÃO DE VARIÁVEIS

Estamos interessados em resolver o Problema (3.3) utilizando o método da separação de variáveis, que consiste em supor que a solução da EDP seja dada por um produto entre duas funções de uma variável com variáveis diferentes, fazendo com que, por meio de ferramentas de EDOS, caracterizemos essas funções. Nesse processo, deverão ser consideradas condições de fronteira impostas à EDP. Para isso, procuramos soluções da forma

$$u(x, t) = \varphi(x) \cdot \psi(t), \quad (3.4)$$

em que  $\varphi$  e  $\psi$  são funções suaves a se deduzir. Seja a Equação do Calor:

$$u_t = \alpha^2 u_{xx}. \quad (3.5)$$

Precisamos determinar  $u_t$  e  $u_{xx}$  levando em consideração a separação de variáveis dada em (3.4):

$$u_t = \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \varphi(x)\psi'(t) \quad (3.6)$$

e

$$u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = \varphi''(x)\psi(t). \quad (3.7)$$

Substituindo (3.6) e (3.7) em (3.5), temos

$$\varphi(x)\psi'(t) = \alpha^2\varphi''(x)\psi(t). \quad (3.8)$$

Dividindo ambos os lados da igualdade (3.8) por  $\alpha^2\varphi(x)\psi(t)$  nos pontos em que  $\varphi$  e  $\psi$  não se anulam, separamos  $\varphi$  e  $\psi$  em lados opostos da igualdade:

$$\frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\psi'(t)}{\psi(t)}. \quad (3.9)$$

A expressão do lado esquerdo da equação (3.9) depende apenas de  $x$ , e a expressão do lado direito, apenas de  $t$ . Isso significa que (3.9) pode ser identificada com uma constante. De fato, consideremos duas funções bem definidas  $f(m)$  e  $g(n)$  tais que  $f(m) = g(n)$  para todo  $(m, n) \in \mathbb{R}^2$ . Ao fixarmos  $m$ ,  $g(n)$  não varia. Por outro lado, ao fixarmos  $n$ ,  $f(m)$  não varia. Isto nos leva a constatar que existe uma constante  $p \in \mathbb{R}$  tal que,  $f(m) = g(n) = p$  para todo  $(m, n) \in \mathbb{R}^2$ . Por uma questão de conveniência, assumamos que exista uma constante  $\lambda$ , de tal forma que

$$\frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\psi'(t)}{\psi(t)} = -\lambda. \quad (3.10)$$

Assim, de (3.10), teremos duas EDOs

$$\begin{cases} -\varphi''(x) = \lambda\varphi(x) \\ \psi'(t) = -\alpha^2\lambda\psi(t). \end{cases} \quad (3.11)$$

Procuramos soluções  $u \in C^2((0, l) \times (0, +\infty)) \cap C([0, l] \times [0, +\infty))$ , logo, queremos  $\varphi \in C^2((0, l)) \cap C([0, l])$  e  $\psi \in C^2((0, +\infty)) \cap C([0, +\infty))$ .

Ademais, já sabemos que a função nula soluciona a equação (3.2). Nosso enfoque está em identificar soluções não triviais para a equação do calor. Sendo assim, o caso de solução nula não será aceito em nossa busca.

Devemos impor a condição de contorno  $u(0, t) = u(l, t) = 0$ ,  $t \geq 0$ , na substituição (3.4). Considerando, inicialmente,  $u(0, t) =$

0 com  $t \geq 0$ , temos

$$0 = u(0, t) = \varphi(0)\psi(t)$$

e assim, se  $\psi(t) = 0$ , teremos uma solução trivial para a EDP. Logo,

$$\varphi(0) = 0. \quad (3.12)$$

Fazendo  $u(l, t) = 0$  com  $t \geq 0$ ,

$$0 = u(l, t) = \varphi(l)\psi(t)$$

e assim, se  $\psi(t) = 0$  teremos uma solução trivial para a EDP, portanto,

$$\varphi(l) = 0. \quad (3.13)$$

Como não estamos interessados em soluções identicamente nulas, partindo de (3.11), temos que, para  $x \in (0, l)$ ,  $\varphi$  é solução do problema que envolve EDO de segunda ordem

$$\begin{cases} \varphi''(x) + \lambda\varphi(x) = 0, \\ \varphi(0) = \varphi(l) = 0. \end{cases} \quad (3.14)$$

Partindo novamente de (3.11), para  $t \in (0, +\infty)$ ,  $\psi$  é uma solução da EDO

$$\psi'(t) + \alpha^2\lambda\psi(t) = 0. \quad (3.15)$$

Um valor de  $\lambda$  para o qual (3.14) tem solução não trivial (isto é, diferente de zero) é denominado *autovalor* do Problema (3.14). As soluções não triviais que estão relacionadas a esses autovalores são chamadas de autofunções correspondentes ao autovalor  $\lambda$ . Uma vez que procuramos soluções reais não triviais e  $-\lambda$  é igual a ambos os lados da equação (3.10), então apenas nos interessam os casos nos quais  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Enunciaremos a seguir uma proposição que garante que os autovalores do Problema (3.14) são sempre reais e positivos.

**Proposição 3.2.** *O problema (3.14) tem os autovalores sempre reais e positivos.*

Denotaremos por  $C_{\mathbb{C}}^2((a, b))$  o espaço vetorial das funções  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{C}$  que são duas vezes diferenciáveis.

*Demonstração.* Admitamos que a EDO

$$\varphi''(x) + \lambda\varphi(x) = 0 \quad (3.16)$$

tenha soluções complexas e retomemos a definição de Produto Interno feita em (2.1). Consideremos  $\lambda \in \mathbb{C}$  um autovalor e  $\varphi$  uma autofunção associada a esse autovalor tal que  $\varphi \in C_{\mathbb{C}}^2((0, l)) \cap C_{\mathbb{C}}([0, l])$ . Provaremos algumas propriedades que nos permitirão integrar as funções  $\varphi''$  e  $\varphi'$  sobre o intervalo  $[0, l]$ .

Podemos reescrever (3.16) como

$$\varphi''(x) = -\lambda\varphi(x) \quad (3.17)$$

para todo  $x \in (0, l)$ . Percebemos que, devido à igualdade (3.17) e ao fato de  $\varphi$  ser contínua (por ser uma função que satisfaz o Problema (3.14)) no ponto  $x = 0$ , existem os limites

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi''(x) = -\lambda \lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = -\lambda\varphi(0) = 0.$$

Observemos que  $\varphi''(x)$  não está definida para  $x = l$ , entretanto, como  $\varphi(x)$  está, podemos determinar  $\lim_{x \rightarrow l^-} \varphi''(x)$ :

$$\lim_{x \rightarrow l^-} \varphi''(x) = -\lambda \lim_{x \rightarrow l^-} \varphi(x) = -\lambda\varphi(l) = 0.$$

Ademais, devemos garantir que também existem os limites

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} \varphi'(a) \quad \text{e} \quad \lim_{b \rightarrow l^-} \varphi'(b).$$

De fato, como  $\varphi$  é contínua no intervalo fechado, então podemos aplicar a integral em ambos os lados da igualdade, entretanto, devemos atentar para o fato de que  $\varphi''(x)$  não é definida em  $x = 0$  e nem em  $x = l$ .

Fixando  $x \in (0, l)$ :

$$\begin{aligned} -\lambda \int_0^x \varphi(y) dy &= \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^x \varphi''(y) dy = \lim_{a \rightarrow 0^+} (\varphi'(y)) \Big|_a^x \\ &= \lim_{a \rightarrow 0^+} [\varphi'(x) - \varphi'(a)] = \varphi'(x) - \lim_{a \rightarrow 0^+} \varphi'(a). \end{aligned}$$

Assim,

$$-\lambda \int_0^x \varphi(y) dy = \varphi'(x) - \lim_{a \rightarrow 0^+} \varphi'(a),$$

isto é,

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} \varphi'(a) = \lambda \int_0^x \varphi(y) dy + \varphi'(x).$$

De maneira análoga, fixando  $x \in (0, l)$ ,

$$\begin{aligned} -\lambda \int_x^l \varphi(y) dy &= \lim_{b \rightarrow l^-} \int_x^b \varphi''(y) dy = \lim_{b \rightarrow l^-} (\varphi'(y)) \Big|_x^b \\ &= \lim_{b \rightarrow l^-} [\varphi'(b) - \varphi'(x)] = \lim_{b \rightarrow l^-} \varphi'(b) - \varphi'(x). \end{aligned}$$

Assim,

$$-\lambda \int_x^l \varphi(y) dy = \lim_{b \rightarrow l^-} \varphi'(b) - \varphi'(x).$$

Logo,

$$\lim_{b \rightarrow l^-} \varphi'(b) = \varphi'(x) - \lambda \int_x^l \varphi(y) dy.$$

Portanto, existem os limites

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} \varphi'(a) \text{ e } \lim_{b \rightarrow l^-} \varphi'(b). \quad (3.18)$$

Essas propriedades nos permitem integrar as funções  $\varphi''$  e  $\varphi'$  sobre o intervalo  $[0, l]$ . Utilizando a EDP do calor, integração por partes e considerando que  $\varphi''(x) = \lambda\varphi(x)$  sobre  $(0, l)$ , temos que:

$$\begin{aligned} \lambda \langle \varphi, \varphi \rangle &= \langle \lambda\varphi, \varphi \rangle = \langle -\varphi'', \varphi \rangle \\ &= - \int_0^l \varphi''(x) \overline{\varphi(x)} dx \\ &= - \lim_{a \rightarrow 0^+} \lim_{b \rightarrow l^-} \int_a^b \varphi''(x) \overline{\varphi(x)} dx. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Daremos prosseguimento com o auxílio da integral indefinida

$$\int \varphi''(x) \overline{\varphi(x)} dx = \overline{\varphi(x)} \varphi'(x) - \int \varphi'(x) \overline{\varphi'(x)} dx. \quad (3.20)$$

Substituindo (3.20) em (3.19), temos

$$\begin{aligned}
 \lambda \langle \varphi, \varphi \rangle &= - \lim_{a \rightarrow 0^+ \ b \rightarrow l^-} \left[ \left( \overline{\varphi(x)} \varphi'(x) \right) \Big|_a^b - \int_a^b \varphi'(x) \overline{\varphi'(x)} dx \right] \\
 &= - \lim_{a \rightarrow 0^+ \ b \rightarrow l^-} \left[ \overline{\varphi(b)} \varphi'(b) - \overline{\varphi(a)} \varphi'(a) \right] + \int_0^l |\varphi'(x)|^2 dx \\
 &= \int_0^l |\varphi'(x)|^2 dx \\
 &= \langle \varphi', \varphi' \rangle > 0,
 \end{aligned}$$

pois, como  $\varphi \neq 0$  e  $\varphi$  não é constante, então  $\varphi' \neq 0$ , e, devido à continuidade da função  $\varphi'$  em  $(0, l)$ ,

$$0 < \int_0^l |\varphi'(x)|^2 dx = \int_0^l |\varphi'(x)| |\varphi'(x)| dx = \langle \varphi', \varphi' \rangle.$$

Assim,  $\lambda \langle \varphi, \varphi \rangle > 0$ . Como  $\langle \varphi, \varphi \rangle > 0$ , só nos resta concluir que  $\lambda > 0$ , como queríamos demonstrar. ■

A seguir, provaremos um resultado relevante para os cálculos que serão realizados na sequência.

**Proposição 3.3.** *Sejam  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  autofunções de (3.14) correspondentes a autovalores distintos digamos  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  tal que  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ . Então  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  serão autofunções ortogonais em relação ao produto interno, isto é,  $\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle = 0$ .*

*Demonstração.* Sabemos que os limites

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} \varphi'(a) \quad \text{e} \quad \lim_{b \rightarrow l^-} \varphi'(b) \quad (3.21)$$

existem. Então, podemos calcular produtos internos entre as funções  $\varphi''$  e  $\varphi'$  sobre o intervalo  $[0, l]$ . Notemos que

$$\lambda_1 \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle = \langle \lambda_1 \varphi_1, \varphi_2 \rangle = \langle -\varphi_1'', \varphi_2 \rangle = - \int_0^l \varphi_1''(x) \overline{\varphi_2(x)} dx. \quad (3.22)$$

Além disso,

$$- \int_0^l \varphi_1''(x) \overline{\varphi_2(x)} dx = \int_0^l \varphi_1'(x) \overline{\varphi_2'(x)} dx = - \int_0^l \varphi_1(x) \overline{\varphi_2''(x)} dx. \quad (3.23)$$

Então,

$$-\int_0^l \varphi_1(x) \overline{\varphi_2''(x)} = \langle \varphi_1, -\varphi_2'' \rangle = \langle \varphi_1, \lambda_2 \varphi_2 \rangle = \lambda_2 \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle. \quad (3.24)$$

Decorre de (3.22), (3.23) e (3.24) que

$$\lambda_1 \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle = \lambda_2 \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle.$$

Daí,

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle = 0,$$

mas como  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , como supomos, então  $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$  e portanto  $\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle = 0$ . ■

Após provarmos que  $\lambda > 0$  e também que se considerarmos duas autofunções de (3.14) correspondentes a autovalores distintos, essas autofunções serão ortogonais em relação ao produto interno, estamos interessados em retornar ao método da separação de variáveis. Devemos encontrar as funções  $\varphi$  e  $\psi$  que satisfazem (3.11).

Considerando o Problema (3.14), para  $x \in (0, l)$ ,  $\varphi$  é solução do problema

$$\varphi''(x) + \lambda \varphi(x) = 0 \quad (3.25)$$

em que  $\varphi(0) = 0 = \varphi(l)$  e  $\lambda > 0$ , sabemos que a solução desse tipo EDO é dada por (2.26). O polinômio característico de (3.25) é

$$m^2 + 0m + \lambda = 0. \quad (3.26)$$

Reescrevendo (3.26),

$$m^2 = -\lambda,$$

cujas raízes são  $m_1 = 0 + \sqrt{\lambda}i$  e  $m_2 = 0 - \sqrt{\lambda}i$ . Sabemos que  $m = \alpha \pm \beta i$ . Assim, como a parte real de  $m$  é  $\alpha = 0$ , conseqüentemente, ao termo  $e^{\alpha x}$  vale  $e^0 = 1$ . Já, analisando a parte imaginária, a constante  $\beta$  do argumento  $\text{sen}(\beta x)$  e  $\text{cos}(\beta x)$  será  $\beta = \sqrt{\lambda}$ . Logo, a solução do Problema (3.14) é

$$\varphi(x) = a \cos(\sqrt{\lambda}x) + b \text{sen}(\sqrt{\lambda}x) \quad (3.27)$$

com  $a, b \in \mathbb{R}$ . Impondo as condições de contorno  $\varphi(0) = 0 = \varphi(l)$  temos

$$0 = \varphi(0) = a \cos(\sqrt{\lambda}0) + b \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}0) = a \cos(0) + b \operatorname{sen}(0) = a,$$

ou seja,  $a = 0$  e

$$0 = \varphi(l) = a \cos(\sqrt{\lambda}l) + b \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}l) = b \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}l),$$

isto é,

$$b \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}l) = 0.$$

Se  $b = 0$ , obtemos a solução trivial. Logo,  $b \neq 0$  e  $\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}l) = 0$ . Então,

$$\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}l) = 0.$$

Como consequência,  $\sqrt{\lambda}l = n\pi$  para algum  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $n \neq 0$ . Logo,

$$\begin{aligned} \sqrt{\lambda}l = n\pi &\Rightarrow (\sqrt{\lambda}l)^2 = (n\pi)^2 \\ &\Rightarrow \lambda l^2 = n^2 \pi^2 \\ &\Rightarrow \lambda = \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \end{aligned}$$

com  $n \in \mathbb{Z}$ . Assim,  $\lambda = \lambda_n$  são autovalores de (3.14) e

$$\varphi(x) = \varphi_n(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \quad (3.28)$$

são as autofunções associadas a esses autovalores.

Notemos que os valores negativos de  $n$  acabam não fornecendo novas soluções, uma vez que  $\operatorname{sen}(\theta)$  é uma função ímpar, isto é,  $\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}(\theta)$ . Portanto, todas as autofunções associadas a  $\lambda_n$  são múltiplos de  $\varphi_n$ .

Nos resta resolver a EDO (3.15),  $\psi'(t) + \alpha^2 \lambda \psi(t) = 0$ . Utilizaremos o método da separação de variáveis:

$$\begin{aligned} \psi' &= -\alpha^2 \lambda \psi \\ \frac{d\psi}{\psi} &= -\alpha^2 \lambda dt \\ \int \frac{d\psi}{\psi} &= -\alpha^2 \lambda \int dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ln |\psi| &= -\alpha^2 \lambda t + C \\ e^{\ln |\psi|} &= e^{-\alpha^2 \lambda t + C} \\ |\psi| &= e^{-\alpha^2 \lambda t} k \\ \psi(t) &= k e^{-\alpha^2 \lambda t},\end{aligned}$$

em que  $k$  é uma constante. Como  $\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{l^2}$  com  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned}\psi_n(t) &= k e^{-\alpha^2 \lambda_n t} \\ &= k \exp\left(-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{l^2} t\right).\end{aligned}\quad (3.29)$$

Substituindo (3.28) e (3.29) em (3.4),

$$u_n(x, t) = \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \exp\left(-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{l^2} t\right), \quad (3.30)$$

em que  $x \in [0, l]$  e  $t \geq 0$ . Com base no estudado, seria interessante obtermos uma seqüência de números reais  $\{b_n\}_{n=1}^{+\infty}$  de tal forma que

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \exp\left(-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{l^2} t\right), \quad (3.31)$$

com  $x \in [0, l]$  e  $t \geq 0$ , seja uma solução para o PVIC (3.1). Será preciso, de início, que a função  $u$  satisfaça a condição inicial. Sendo assim,  $\{b_n\}_{n=1}^{+\infty}$  deve ser obtida de modo a garantir que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \quad x \in [0, l]. \quad (3.32)$$

Provaremos à frente que se  $\{b_n\}_{n=1}^{+\infty}$  satisfizer (3.32), então, a série (3.31) converge uniformemente para  $u$ , essa que, por sua vez é solução de (3.3). Na verdade, isso é uma aplicação natural do princípio da superposição.

Vamos identificar o comportamento de  $b_n$  a seguir.

Podemos calcular formalmente o produto interno de  $f$  com  $\varphi_n$ ,  $\langle f, \varphi_n \rangle$ . Notemos que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \varphi_n(x) \quad (3.33)$$

uma vez que  $\varphi_n(x) = \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$ , com  $n$  fixado. Assim,

$$\begin{aligned}\langle f, \varphi_n \rangle &= \left\langle \sum_{m=1}^{+\infty} b_m \varphi_m(x), \varphi_n \right\rangle = \sum_{m=1}^{+\infty} b_m \langle \varphi_m, \varphi_n \rangle \\ &= b_n \langle \varphi_n, \varphi_n \rangle,\end{aligned}$$

pois, devido à ortogonalidade,  $\langle \varphi_m, \varphi_n \rangle = 0$  se  $m \neq n$ . Em resumo,

$$\begin{aligned}\langle f, \varphi_n \rangle &= b_n \langle \varphi_n, \varphi_n \rangle \\ &= b_n \int_0^l \text{sen}^2\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx = b_n \frac{l}{2},\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\langle f, \varphi_n \rangle = b_n \frac{l}{2}.$$

Aplicando a definição de produto interno, estabelecemos que

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx. \quad (3.34)$$

É importante notarmos que os coeficientes  $b_n \in \mathbb{R}$  são calculados por meio de (3.34) e estão bem definidos pois estamos assumindo que  $f \in C([0, l])$ .

Ao longo deste capítulo, utilizamos o Princípio da Superposição e o Método da Separação de Variáveis para caracterizar a função  $u$ , que é solução do Problema (3.1). Concluímos, então, que se a função  $f$  puder ser escrita da forma

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \quad x \in [0, l], \quad (3.35)$$

então é possível encontrar um candidato à solução do problema (3.1).

Existe um outro problema da equação do calor que tem suas hipóteses alteradas. Nesse problema, a barra na qual estamos interessados em analisar a temperatura possui suas extremidades isoladas. Além disso, o fluxo de calor em cada uma de suas extremidades é proporcional à temperatura na extremidade. Essas hipóteses adicionais

geram uma mudança na condição de contorno da EDP do Problema (3.1), que agora passa a ser descrito, matematicamente, por

$$\begin{cases} u_t = \alpha^2 u_{xx}(x, t) \in (0, l) \times (0, +\infty), \\ u_x(0, t) + u(0, t) = 0 = u_x(l, t) + u(l, t), t \geq 0, \\ u(x, 0) = f(x), x \in [0, l]. \end{cases} \quad (3.36)$$

Fazendo ajustes no processo que foi detalhado acima, a referência [4] garante que a função  $f$  deste problema pode ser dada por

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \quad (3.37)$$

em que  $a_0, a_n$  e  $b_n$  são constantes a se determinar.

Percebemos que (3.35) e (3.37) são maneiras muito parecidas de descrevermos uma função por meio de séries trigonométricas. Na verdade, (3.35) é um caso particular de (3.37), porém com os coeficientes  $a_0$  e  $a_n$  zerados. Portanto, o método da separação de variáveis nos leva à definição das séries do tipo (3.37), as chamadas *Séries de Fourier*, que serão nosso objeto de estudo no próximo Capítulo 4.



## 4 SÉRIES DE FOURIER

No Capítulo 3, realizamos a análise do problema (3.1) e, utilizando o método da separação de variáveis e o princípio da superposição de soluções, concluímos que  $f$  deve ser dada por uma série:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{l} \right), \quad x \in [0, l],$$

em que  $b_n$  é um coeficiente real, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , a fim de que tenhamos um candidato à solução do PVIC (3.1).

Reescrevendo a função  $f$  como

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos \left( \frac{n\pi x}{l} \right) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{l} \right), \quad (4.1)$$

em que  $a_0 = 0$  e  $a_n = 0$  são constantes, somos levados a uma soma infinita que possui coeficientes  $a_0$ ,  $a_n$  e  $b_n$ . À série com a estrutura do lado direito da igualdade (4.1) damos o nome de Série de Fourier.

Iniciaremos este Capítulo analisando a importância histórica das séries de Fourier. Após, definiremos as séries de Fourier real e complexa assim como seus respectivos coeficientes de Fourier. Em seguida, estaremos interessados em entender quais funções podem ser aproximadas por uma série de Fourier, e nesse processo, realizaremos a identificação da série de Fourier de algumas funções. Posteriormente, abordaremos as condições para que a série de Fourier de uma função convirja pontualmente ou uniformemente.

Essa seção está baseada, principalmente, em [2], [4] e [6].

### 4.1 IMPORTÂNCIA DAS SÉRIES DE FOURIER

No século XVII, segundo Boyer e Merzback em [1], as ferramentas do Cálculo desenvolvidas pelo matemático Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716) e pelo físico Isaac Newton (1643 - 1727) foram de extrema relevância na matemática. Segundo Guilherme e Flemming (2019), nessa época alguns matemáticos criticavam a teoria desenvolvida por esses cientistas, afirmando que essa desprovia

de um rigor lógico. Naquele tempo, a matemática ainda era muito associada à física, e assim, levou aproximadamente um século e meio para que a teoria das funções como conhecemos hoje, fosse desenvolvida.

No século XVIII, a questão de representar uma função como uma série de senos e cossenos foi bastante explorada. O matemático Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) introduziu, em 1807, o conceito de série de Fourier de uma função periódica, que consistia na representação de uma função por uma combinação “infinita” de senos e cossenos. Desde então, essa ferramenta matemática deslumbra os pesquisadores nas áreas de matemática, física, estatística, engenharia, entre outras. Escrever uma função como uma combinação de senos e cossenos nos permite descrever uma função eventualmente complicada de uma maneira mais simples e eficaz para a visualização e manipulação de um problema a ser solucionado. É extremamente interessante a forma com a qual a história das séries de Fourier nos mostra como a resolução de um problema físico (como por exemplo o problema da equação do Calor) revolucionou a matemática.

Objetivamos, ao longo das próximas seções, explorar as séries de Fourier, visando o entendimento acerca de quais funções podem ser aproximadas por uma série de Fourier e sobre quais condições a série de Fourier de uma função converge (e de qual forma converge).

## 4.2 SÉRIE DE FOURIER E COEFICIENTES DE FOURIER

Nesta seção definiremos a série de Fourier complexa e os coeficientes de Fourier complexos de uma função integrável. Além disso, em particular, também definiremos a série de Fourier real e os coeficientes de Fourier reais.

As séries de Fourier são construídas levando em consideração as funções periódicas trigonométricas *seno* e *cosseno*. Como consequência, faz sentido que a definição de série de Fourier deva ser restrita a uma classe de funções com comportamento periódico.

**Definição 4.1.** Seja  $f(x) = f(x + 2l)$  uma função integrável sobre o intervalo  $[-l, l]$  e  $n \in \mathbb{N}$ . A série de Fourier real de  $f$  é a série

trigonométrica:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \quad (4.2)$$

em que  $a_0$ ,  $a_n$  e  $b_n$  são os Coeficientes Reais de Fourier da série relacionada à função  $f$  a serem convenientemente estabelecidos.

Podemos denotar

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right). \quad (4.3)$$

O símbolo  $\sim$  é utilizado uma vez que não podemos simplesmente afirmar que a série de funções trigonométricas converge, de fato, para  $f$ . Entretanto, se  $f$  for uma função  $2l$ -periódica e seccionalmente contínua (como definida em 2.17), conseguiremos obter uma convergência (pontual ou uniforme) da série trigonométrica, assunto esse que será tratado neste Capítulo 4, e com isso, podemos substituir o símbolo  $\sim$  por um eventual sinal de igualdade.

Se

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

for a série de Fourier de  $f$  no ponto  $x$  pertencente ao domínio de  $f$ , utilizaremos a notação  $S[f](x)$  para descrevê-la, isto é,

$$S[f](x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right).$$

Suponhamos que a série de Fourier de  $f$  definida em (4.3) convirja a  $f$ . Podemos encontrar uma fórmula explícita para calcularmos os coeficientes reais de Fourier utilizando a Proposição 2.1.

Integrando todos os termos da igualdade  $f(x) = S[f](x)$  em relação a  $x$  no intervalo  $[-l, l]$  e utilizando a paridade das funções seno e cosseno, encontramos

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx. \quad (4.4)$$

Utilizando a Proposição 2.1, multiplicando a igualdade  $f(x) = S[f](x)$  por  $\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$ , integrando todos os termos dessa igualdade em relação a  $x$  no intervalo  $[-l, l]$  e utilizando a paridade das funções seno e cosseno, encontramos

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (4.5)$$

Finalmente, realizando um processo análogo ao que fizemos para encontrar  $a_n$  porém multiplicando a igualdade  $f(x) = S[f](x)$  por  $\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$  ao invés de  $\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$ , garantimos que

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (4.6)$$

Cabe ressaltar que, no Capítulo 3, usamos propriedades de autovalores e autofunções no estudo dos coeficientes de Fourier. Neste Capítulo, por meio de propriedades calculacionais distintas, garantimos a validade de propriedades equivalentes àquelas que foram mostradas anteriormente.

A estrutura da série de Fourier real não será suficiente em algumas demonstrações que realizaremos ao longo deste capítulo. Por isso, será importante trabalharmos com a série de Fourier complexa, que estende o conceito da série de Fourier usual e aparecerá em algumas provas. Definiremos a seguir a série de Fourier complexa. Antes, entretanto, apresentaremos uma dedução que a justifica.

Podemos reescrever a série real de Fourier de  $f$  utilizando exponenciais complexas. Sabemos que se  $\theta \in \mathbb{R}$ , vale a fórmula de Euler:

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta). \quad (4.7)$$

De (4.7), estabelece-se que, via resolução de sistema,

$$\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) = \frac{e^{in\pi x/l} + e^{-in\pi x/l}}{2} \quad (4.8)$$

e

$$\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) = \frac{e^{in\pi x/l} - e^{-in\pi x/l}}{2i}. \quad (4.9)$$

Substituindo (4.8) e (4.9) na série de Fourier real,

$$\begin{aligned} S[f](x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[ \frac{a_n - ib_n}{2} e^{in\pi x/l} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-in\pi x/l} \right] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(n) e^{in\pi x/l}, \end{aligned}$$

em que a série de  $-\infty$  a  $+\infty$  deve ser interpretada no sentido de valor próprio, isto é,

$$S[f](x) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=-N}^N \widehat{f}(n) e^{in\pi x/l}.$$

Registra-se que os coeficientes  $\widehat{f}(n)$ , chamados de *coeficientes de Fourier complexos* de  $f$ , são dados por

$$\widehat{f}(0) = \frac{a_0}{2}, \quad (4.10)$$

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{-in\pi x/l} dx, \quad n \in \mathbb{Z} - \{0\} \quad (4.11)$$

ou

$$\widehat{f}(n) = \frac{a_n - ib_n}{2}, \quad n \in \mathbb{N} \quad (4.12)$$

e

$$\widehat{f}(-n) = \frac{a_n + ib_n}{2}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (4.13)$$

Esses coeficientes são calculados, portanto, a partir dos coeficientes reais denotados  $a_0$ ,  $a_n$  e  $b_n$ , em (4.4), (4.5) e (4.6), respectivamente.

De maneira a formalizar o estudo, define-se a série de Fourier complexa:

**Definição 4.2.** Seja  $f(x) = f(x + 2l)$  uma função integrável sobre o intervalo  $[-l, l]$  e  $n \in \mathbb{N}$ . A série de Fourier complexa de  $f$  é a série:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(n) e^{in\pi x/l}.$$

Em muitas situações, somos instigados a identificar as séries de Fourier de funções que não são necessariamente periódicas. Seja  $f$  uma função não periódica definida sobre o intervalo  $[-l, l)$ . Será possível construirmos a extensão  $2l$ -periódica de  $f$ , digamos  $\tilde{f}$ . A partir disso, estuda-se a série de Fourier dessa extensão.

Na próxima seção, identificaremos a série de Fourier de algumas funções sem levar em consideração para quais pontos do domínio em que  $f(x) = S[f](x)$ . A análise rigorosa acerca da validade dessa igualdade requer conceitos de convergência de séries de Fourier que serão abordados apenas na Seção 4.4.

### 4.3 IDENTIFICAÇÃO DA SÉRIE DE FOURIER DE FUNÇÕES

Dada uma função  $f(x)$ , estamos interessados em exibir sua série de Fourier. Se essa função for  $2l$ -periódica e integrável em  $[-l, l]$ , podemos encontrar  $S[f](x)$  diretamente. Entretanto, se  $f(x)$  não for  $2l$ -periódica, precisaremos estender periodicamente essa função para que então consigamos estabelecer sua série de Fourier.

Seja  $f$  uma função na qual estamos interessados em exibir a série de Fourier. Faremos algumas considerações acerca dos valores que coeficientes de Fourier assumem de acordo com a paridade da função  $f$ .

Sabemos que

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

- (a) Se  $f$  for par, decorre do item II da Proposição 2.10 e da Proposição 2.7 que

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx. \quad (4.14)$$

- (b) Se  $f$  for ímpar, decorre do item V da Proposição 2.10 e da Proposição 2.8 que

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx = 0. \quad (4.15)$$

Por outro lado,

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{l} \right) dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(a) Se  $f$  for ímpar, decorre do item IV da Proposição 2.10 e da Proposição 2.7 que

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{l} \right) dx. \quad (4.16)$$

(b) Se  $f$  for par, decorre do item V da Proposição 2.10 e da Proposição 2.8 que

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{l} \right) dx = 0. \quad (4.17)$$

**Exemplo 4.1.** Vamos aproximar a função  $f(x) = x$ , com  $x \in [-\pi, \pi)$ , por uma série de Fourier. Consideremos a extensão  $2\pi$ -periódica de  $f$  denotada por  $\tilde{f}$ .

O gráfico de  $\tilde{f}$  é

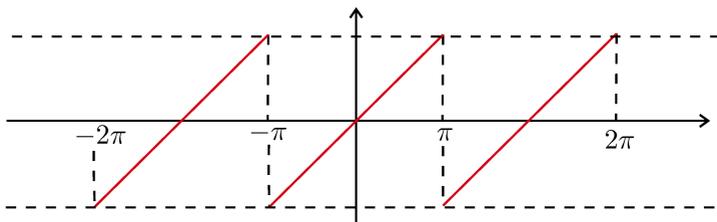


Figura 4.1 – Gráfico de  $\tilde{f}$ .

Calculemos os coeficientes de Fourier relacionados à  $\tilde{f}$ . Note-mos que a função  $\tilde{f}$  é ímpar. Decorre da Proposição 2.8 que  $a_0 = 0$ . Calculando  $a_n$ , de (4.15), temos que

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos(nx) dx = 0.$$

Utilizando (4.16) para encontrar  $b_n$ , temos que

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \operatorname{sen}(nx) dx.$$

Essa integral pode ser calculada utilizando integração por partes. Temos que

$$b_n = -\frac{2 \cos(n\pi)}{n}.$$

Notemos que

$$-\frac{2 \cos(n\pi)}{n} = \begin{cases} -\frac{2}{n}, & \text{se } n \text{ for par;} \\ \frac{2}{n}, & \text{se } n \text{ for ímpar.} \end{cases}$$

Logo,

$$b_n = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}.$$

Assim, a série de Fourier de  $\tilde{f}$  é tal que

$$S[\tilde{f}](x) = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} \operatorname{sen}(nx)}{n}.$$

**Exemplo 4.2.** Vamos calcular a série de Fourier da função  $f(x) = x^2$  definida para  $x \in [-\pi, \pi]$ . Consideremos  $\tilde{f}$  a extensão  $2\pi$ -periódica de  $f$ .

O gráfico de  $\tilde{f}$  é

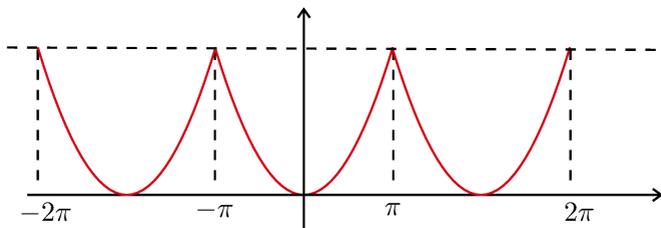


Figura 4.2 – Gráfico de  $\tilde{f}$ .

Calculemos os coeficientes de Fourier de  $\tilde{f}$ . Como  $\tilde{f}$  é par, os coeficientes de Fourier ímpares (os  $b_n$ 's) serão nulos. Pela Proposição 2.7, temos que

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{\pi} \left( \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^{\pi} = 0.$$

Decorre de (4.14), que

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x^2 \cos(nx) dx = \frac{4 \cos(n\pi)}{n^2}.$$

Notemos que

$$\frac{4 \cos(n\pi)}{n^2} = \begin{cases} \frac{4}{n^2}, & \text{se } n \text{ for par;} \\ -\frac{4}{n^2}, & \text{se } n \text{ for ímpar.} \end{cases}$$

Então,

$$a_n = \frac{4(-1)^n}{n^2}.$$

Assim,

$$S[\tilde{f}](x) = 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cos(nx)}{n^2}.$$

Ao longo dessa seção, identificamos a série de Fourier de algumas funções. Na seção a seguir, estaremos preocupados em estudar a convergência das séries de Fourier.

## 4.4 CONVERGÊNCIA DAS SÉRIES DE FOURIER

Quando representamos uma função por sua série de Fourier, é relevante identificarmos se a série converge à função. Esta seção dedica-se a analisar a convergência das séries de Fourier, que pode ser classificada como convergência Pontual ou Uniforme.

### 4.4.1 Convergência Pontual

Como sabemos, as séries de Fourier são definidas para funções periódicas na reta e integráveis em intervalos fechados. As funções seccionalmente contínuas, em particular, segundo o Teorema 2.3, são integráveis. Vamos estudar as séries de Fourier para funções seccionalmente contínuas. Entendemos que uma função  $f \in SC([-l, l])$  se  $f$  for seccionalmente contínua e definida de  $[-l, l]$  a valores reais.

Dada  $f \in SC([-l, l])$ , se  $f(-l) = f(l)$ , podemos estendê-la a uma função periódica  $\tilde{f}$ , de período  $2l$ , de tal forma que se  $x \in [(2k-1)l, (2k+1)l]$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , e se  $f$  estiver definida em  $x - 2kl \in [-l, l]$ , então a extensão  $\tilde{f}$  será dada por

$$\tilde{f}(x) = f(x - 2kl).$$

Como observação,  $\tilde{f}$  é seccionalmente contínua em cada intervalo  $[a, b]$ .

Nesta seção estamos preocupados em estudar condições suficientes para que  $S[\tilde{f}](x)$  convirja pontualmente para  $f(x)$  em cada ponto  $x$  do domínio de  $f$ .

Denotaremos por  $SC_{\text{per}}(2l)$  o espaço das funções periódicas de período  $2l$  que são seccionalmente contínuas em qualquer intervalo  $[a, b]$ . De forma similar, denotaremos por  $C_{\text{per}}(2l)$  o espaço das funções  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  contínuas e periódicas de período  $2l$ .

Dados  $f \in SC_{\text{per}}(2l)$  e  $x_0 \in \mathbb{R}$ , denotaremos por  $f(x_0^+)$  e  $f(x_0^-)$  os limites laterais

$$f(x_0^+) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x), \quad f(x_0^-) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x).$$

Desejamos demonstrar que, sendo  $f$  e  $f'$  funções seccionalmente contínuas e  $2l$ -periódicas, então para qualquer  $x_0 \in \mathbb{R}$ , a série de Fourier de  $f$  no ponto  $x_0$  converge para a média dos limites laterais  $f(x_0^-)$  e  $f(x_0^+)$ . Antes disso, provaremos duas propriedades importantes das séries de Fourier e das funções seccionalmente contínuas: a desigualdade de Bessel e a desigualdade de Cauchy-Bunyakovsky-Schwartz (CBS).

Ressaltamos que, neste Capítulo, consideramos que  $\varphi_n$  e  $\psi_n$  atendem, respectivamente, às definições (2.2) e (2.3). Além disso, quando não citado e somente apresentado  $f \in SC([-l, l])$ , entendemos que a série de Fourier da função  $f$  é, na realidade, a série de Fourier de sua extensão  $2l$ -periódica sobre a reta.

**Proposição 4.1.** *Seja  $f \in SC([-l, l])$  e seja*

$$S[f] = \frac{a_0}{2}\psi_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n\psi_n + b_n\varphi_n)$$

sua série de Fourier, então as séries numéricas

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2, \sum_{n=1}^{+\infty} b_n^2$$

convergem e vale a desigualdade de Bessel

$$l \left( \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n^2 \right) \leq \|f\|^2, \quad (4.18)$$

em que

$$\|f\|^2 = \int_{-l}^l (f(x))^2 dx.$$

*Demonstração.* Para cada  $N, M \in \mathbb{N}$ , usando as relações de ortogonalidade estabelecidas na Proposição 2.1, os coeficientes de Fourier e a definição de produto interno feita em 2.14, temos

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left\| f - \frac{a_0}{2} \psi_0 - \sum_{n=1}^N a_n \psi_n - \sum_{m=1}^M b_m \varphi_m \right\|^2 \\ &= \int_{-l}^l \left( f - \frac{a_0}{2} \psi_0 - \sum_{n=1}^N a_n \psi_n - \sum_{m=1}^M b_m \varphi_m \right)^2 dx \\ &= \langle f, f \rangle - \frac{a_0}{2} \langle f, \psi_0 \rangle - 2 \sum_{n=1}^N a_n \langle f, \psi_n \rangle - \sum_{m=1}^M b_m \langle f, \varphi_m \rangle - \frac{a_0}{2} \langle \psi_0, f \rangle \\ &+ \frac{a_0^2}{4} \langle \psi_0, \psi_0 \rangle - \sum_{n=1}^N a_n \langle \psi_n, f \rangle + \sum_{n=1}^N a_n^2 \langle \psi_n, \psi_n \rangle \\ &- 2 \sum_{m=1}^M b_m \langle \varphi_m, f \rangle + \sum_{m=1}^M b_m^2 \langle \varphi_m, \varphi_m \rangle. \end{aligned}$$

Podemos verificar que, se  $m \neq n$ ,  $\langle \psi_n, \varphi_m \rangle = \langle \varphi_n, \varphi_m \rangle = \langle \psi_0, \psi_n \rangle = \langle \psi_0, \varphi_m \rangle = 0$ . Logo, usando (4.4), (4.5) e (4.6),

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left\| f - \frac{a_0}{2} \psi_0 - \sum_{n=1}^N a_n \psi_n - \sum_{m=1}^M b_m \varphi_m \right\|^2 \\ &= \langle f, f \rangle - l \frac{a_0^2}{2} - l \sum_{n=1}^N a_n^2 - l \sum_{m=1}^M b_m^2. \end{aligned}$$

Assim, para  $N, M \in \mathbb{N}$ ,

$$0 \leq \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^N a_n^2 + \sum_{m=1}^M b_m^2 \leq \frac{1}{l} \|f\|^2. \quad (4.19)$$

Como toda série limitada de termos positivos é convergente, a desigualdade (4.19) implica na convergência das séries

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} b_n^2.$$

Podemos então tomar o limite quando  $N, M \rightarrow +\infty$  em (4.19) para obtermos a desigualdade de Bessel. ■

Um Corolário que segue imediatamente da desigualdade de Bessel e que será extremamente importante para demonstrarmos a convergência pontual das séries de Fourier é o Lema de Riemann-Lebesgue em suas formas reais e complexas:

**Corolário 4.2.** (*Lema de Riemann-Lebesgue na forma real*) Seja  $f \in SC([-l, l])$  e seja

$$S[f] = \frac{a_0}{2} \psi_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \psi_n + b_n \varphi_n)$$

sua série de Fourier. Então

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n.$$

*Demonstração.* Decorre da Proposição 4.1, mais especificamente da desigualdade de Bessel apresentada em (4.18),

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} b_n^2$$

são convergentes. Pelo Teste do Termo Geral,  $a_n^2$  e  $b_n^2$  tendem a zero. Daí,  $a_n$  e  $b_n$  tendem a zero quando  $n \rightarrow \infty$ . Portanto,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n,$$

como queríamos provar. ■

**Corolário 4.3.** (*Lema de Riemann-Lebesgue na forma complexa*) Se  $f : [-l, l] \rightarrow \mathbb{C}$  for seccionalmente contínua, então  $\widehat{f}(n) \rightarrow 0$  quando  $|n| \rightarrow +\infty$ .

*Demonstração.* Do Corolário 4.2, sabemos que  $a_n$  e  $b_n$  tendem a zero quando  $|n| \rightarrow \infty$ .

De (4.12), sabemos que

$$\widehat{f}(n) = \frac{a_n - ib_n}{2}$$

e

$$\widehat{f}(-n) = \frac{a_n + ib_n}{2},$$

com  $n \in \mathbb{N}$ . Portanto,  $\widehat{f}(n)$  tende a zero quando  $|n| \rightarrow \infty$ . ■

Para que possamos enunciar e provar a desigualdade de Cauchy-Bunyakovsky-Schwartz (CBS), precisamos definir uma forma bilinear entre duas funções seccionalmente contínuas:

**Definição 4.3.** Se  $f, g \in SC([-l, l])$ , então a forma bilinear entre as funções  $f$  e  $g$  é definida por

$$\langle f, g \rangle = \int_{-l}^l f(x)g(x) dx. \quad (4.20)$$

Notemos que a forma bilinear introduzida na Definição 4.3 não é um produto interno conforme a Definição 2.14, pois falha a propriedade (ii) da Proposição 2.13. Não é válido, para uma forma bilinear como definida em 4.3, que

$$\langle f, f \rangle = 0 \Leftrightarrow f = 0,$$

pois, uma vez que as funções que pertencem ao espaço vetorial  $SC([-l, l])$ , de uma maneira geral não são contínuas, então existe  $f \in SC([-l, l])$  com  $\langle f, f \rangle = 0$  mas que  $f(x) \neq 0$  para algum  $x \in [-l, l]$ .

Toda forma bilinear satisfaz a *Desigualdade de CBS*:

**Proposição 4.4.** *Se  $f, g \in SC([-l, l])$ , então, é válida a desigualdade de Cauchy-Bunyakovsky-Schwartz (CBS)*

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \|g\|, \quad (4.21)$$

em que

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} \quad (4.22)$$

é uma seminorma.

*Demonstração.* Dado  $r \in \mathbb{R}$ , utilizando a definição da forma bilinear em (4.20), calcularemos  $\langle rf + g, rf + g \rangle$ . Sabemos que, pela positividade da forma bilinear, essa expressão é maior ou igual a zero. Logo,

$$\begin{aligned} 0 \leq \langle rf + g, rf + g \rangle &= \int_{-l}^l (rf + g)^2 dx \\ &= \int_{-l}^l r^2 f^2 + 2rf g + g^2 dx \\ &= r^2 \int_{-l}^l [f(x)]^2 dx + 2r \int_{-l}^l f(x)g(x) dx \\ &\quad + \int_{-l}^l [g(x)]^2 dx \\ &= r^2 \langle f, f \rangle + 2r \langle f, g \rangle + \langle g, g \rangle \\ &= r^2 \|f\|^2 + 2r \langle f, g \rangle + \|g\|^2 \end{aligned}$$

Assim,

$$0 \leq \langle rf + g, rf + g \rangle = r^2 \|f\|^2 + 2r \langle f, g \rangle + \|g\|^2 \quad (4.23)$$

e como (4.23) é válida para todo  $r \in \mathbb{R}$ , temos um polinômio do segundo grau do tipo  $ar^2 + br + c$ . Notemos que essa expressão é sempre positiva. Assim, o discriminante precisa ser menor ou igual a zero, ou seja,

$$\Delta \leq 0 \Leftrightarrow \Delta = 4(\langle f, g \rangle)^2 - 4\|f\|^2\|g\|^2 \leq 0$$

e, portanto, a desigualdade (4.21) é válida. ■

Nosso principal objetivo nesta seção é demonstrar o seguinte Teorema:

**Teorema 4.5.** *Seja  $f \in SC_{per}(2l)$  e suponha que  $f$  seja diferenciável, a menos de um número finito de pontos em  $(-l, l)$ , com  $f' \in SC_{per}(2l)$ . Então, para qualquer que seja  $x_0 \in \mathbb{R}$ , a série de Fourier de  $f$  no ponto  $x_0$  converge a*

$$\frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}.$$

Se  $f$  for contínua em  $x_0$ , então essa soma é igual ao  $f(x_0)$ . Nessas condições, a série de Fourier de  $f$  no ponto  $x_0$  converge a  $f(x_0)$ . Antes de provarmos esse resultado em toda a sua generalidade, mostraremos que ele é válido em um caso mais simples:

**Lema 4.1.** *Seja  $f \in SC_{per}(2l)$  e suponha que  $f$  seja diferenciável, a menos de um número finito de pontos em  $(-l, l)$ , com  $f' \in SC_{per}(2l)$ . Além disso, suponha que  $f$  seja contínua na origem com  $f(0) = 0$ . Então, a série de Fourier de  $f$  na origem converge para  $f(0)$ , ou seja*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(0) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \operatorname{sen}(0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n) = 0.$$

*Demonstração.* Utilizaremos a forma complexa da série de Fourier para essa prova. Definiremos, inicialmente, uma função auxiliar  $g(x)$  tal que

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{e^{i\pi x/l} - 1}, & \text{se } x \neq 0, x \in [-l, l), \\ -\frac{ilf'(0^+)}{\pi}, & \text{se } x = 0, \end{cases} \quad (4.24)$$

$$g(x + 2l) = g(x), x \in \mathbb{R}.$$

Vamos provar que  $g$  é uma função seccionalmente contínua. Para isso, notemos que  $g$  possui limites laterais quanto  $x \rightarrow 0$ , uma vez

que

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{e^{i\pi x/l} - 1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[ \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \cdot \frac{x}{e^{i\pi x/l} - 1} \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[ \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \cdot \left( \frac{e^{i\pi x/l} - 1}{x} \right)^{-1} \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right) \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{e^{i\pi x/l} - 1}{x} \right)^{-1}.
 \end{aligned}$$

Definamos  $h(x) = e^{i\pi x/l}$ . Notemos que  $h$  é derivável em todo o seu domínio. Derivando  $h$ , temos que  $h'(x) = \frac{i\pi}{l} e^{i\pi x/l}$ . Notemos que  $h'(0) = \frac{i\pi}{l}$ . Por outro lado, por definição,

$$h'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{i\pi x/l} - 1}{x}.$$

Logo,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{i\pi x/l} - 1}{x} = h'(0) = \frac{i\pi}{l}.$$

Então,

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) &= f'(0^+) \cdot (i\pi/l)^{-1} \\
 &= \left( f'(0^+) \cdot \frac{1}{i\pi/l} \right) \cdot \left( \frac{i}{i} \right) \\
 &= -\frac{il}{\pi} f'(0^+) = g(0).
 \end{aligned}$$

Por um procedimento análogo, podemos provar que

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = -\frac{il f'(0^-)}{\pi}.$$

Devido às considerações apresentadas, se  $x \neq 2kl$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , vemos que

$$g(x) = \frac{f(x)}{h(x) - 1}.$$

A função  $f(x)$  é, por hipótese, seccionalmente contínua. A função  $h(x) - 1$  é contínua,  $2l$ -periódica e diferente de zero se  $x \neq 0$ . Essas considerações são suficientes para determinar que  $g(x)$  é seccionalmente contínua, justificando aquilo que foi acima afirmado.

Como  $g$  é seccionalmente contínua, utilizando o Lema de Riemann-Lebesgue em sua forma complexa, enunciado como Corolário 4.3,

$$\lim_{|n| \rightarrow +\infty} \widehat{g}(n) = 0.$$

Por outro lado,

$$\widehat{f}(n) = \frac{a_n - ib_n}{2} = \frac{1}{2}(a_n - ib_n).$$

Isto é, se  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} \widehat{f}(n) &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx - i \cdot \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \left[ \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) - i \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right] dx \right] \\ &= \frac{1}{2l} \left[ \int_{-l}^l f(x) \left[ \cos\left(-\frac{n\pi x}{l}\right) + i \operatorname{sen}\left(-\frac{n\pi x}{l}\right) \right] dx \right] \\ &= \frac{1}{2l} \left[ \int_{-l}^l f(x) \cdot \exp\left(-\frac{in\pi x}{l}\right) dx \right] \\ &= \frac{1}{2l} \left[ \int_{-l}^l \left\{ g(x) \cdot \left[ \exp\left(\frac{i\pi x}{l}\right) - 1 \right] \right\} \cdot \exp\left(-\frac{in\pi x}{l}\right) dx \right] \\ &= \frac{1}{2l} \left[ \int_{-l}^l \left[ g(x) \cdot \exp\left(\frac{i\pi x}{l}\right) - g(x) \right] \cdot \exp\left(-\frac{in\pi x}{l}\right) dx \right] \\ &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l \left[ g(x) \cdot \exp\left(\frac{i\pi x(1-n)}{l}\right) - g(x) \cdot \exp\left(-\frac{in\pi x}{l}\right) \right] dx \\ &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l g(x) \cdot \exp\left(\frac{i\pi x(1-n)}{l}\right) dx \\ &\quad - \frac{1}{2l} \int_{-l}^l g(x) \cdot \exp\left(-\frac{in\pi x}{l}\right) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l g(x) \cdot \left[ \cos\left(\frac{\pi x(1-n)}{l}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x(1-n)}{l}\right) \right] dx \\
&- \frac{1}{2l} \int_{-l}^l g(x) \cdot \left[ \cos\left(-\frac{n\pi x}{l}\right) + i \operatorname{sen}\left(-\frac{n\pi x}{l}\right) \right] dx \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{l} \int_{-l}^l g(x) \left[ \cos\left(\frac{\pi x(n-1)}{l}\right) - i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x(n-1)}{l}\right) \right] dx \\
&- \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{l} \int_{-l}^l g(x) \left[ \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) - i \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right] dx \\
&= \frac{a_{n-1} - b_{n-1}}{2} - \frac{a_n - b_n}{2} = \widehat{g}(n-1) - \widehat{g}(n).
\end{aligned}$$

Se  $n$  for inteiro não negativo, chegamos à análise similar, e podemos estabelecer que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-n}^m \widehat{f}(k) &= \widehat{f}(-n) + \widehat{f}(-n+1) + \cdots + \widehat{f}(m-1) + \widehat{f}(m) \\
&= \widehat{g}(-n-1) - \widehat{g}(-n) + \widehat{g}(-n) - \widehat{g}(-n+1) \\
&+ \widehat{g}(-n+1) \cdots + \widehat{g}(m-1) - \widehat{g}(m) \\
&= \widehat{g}(-n-1) - \widehat{g}(m) \rightarrow 0
\end{aligned}$$

quando  $n, m \rightarrow +\infty$ , devido ao fato de  $g$  ser seccionalmente contínua. Com isso, concluímos o que queríamos provar. ■

O Lema 4.1 é imprescindível para a demonstração do caso geral do Teorema 4.5. Devemos fazer, entretanto, um processo de transformação de  $f$  até obtermos uma função atendendo às condições do referido Lema. Façamos a seguir a demonstração do Teorema 4.5.

*Demonstração.* (Teorema 4.5) Seja  $x_0 \in \mathbb{R}$  arbitrário e fixado. Definamos, primeiramente, uma transformação no plano que leve o ponto  $(x_0, [f(x_0^+) + f(x_0^-)]/2) \in \mathbb{R}^2$  na origem. A transformação mais simples é

$$\begin{aligned}
T : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\
(x, y) &\mapsto (x - x_0, y - [f(x_0^+) + f(x_0^-)]/2).
\end{aligned}$$

É claro que

$$T((x_0, [f(x_0^+) + f(x_0^-)]/2)) = (0, 0).$$

Notemos que

$$T(x, y) = T(x, f(x)) = (x - x_0, f(x) - [f(x_0^+) + f(x_0^-)]/2),$$

assim,  $T$  leva o gráfico de  $f$  nos pontos da forma

$$(x - x_0, f(x) - [f(x_0^+) + f(x_0^-)]/2).$$

Façamos uma mudança de variável  $z = x - x_0$ . Daí,  $x = z + x_0$ . Logo,

$$\begin{aligned} T(x, f(x)) &= T(z + x_0, f(z + x_0)) \\ &= ((z + x_0) - x_0, f(z + x_0) - [f(x_0^+) + f(x_0^-)]/2) \\ &= (z, f(z + x_0) - [f(x_0^+) + f(x_0^-)]/2). \end{aligned}$$

Como estamos utilizando a variável  $x$ , consideremos  $z = x$  na caracterização proposta imediatamente acima e estudaremos o comportamento do par

$$(x, f(x + x_0) - [f(x_0^+) + f(x_0^-)]/2),$$

que é exatamente o gráfico da função definida por

$$g(x) = f(x + x_0) - [f(x_0^+) + f(x_0^-)]/2.$$

A função  $g$  pode ainda não ser como no Lema 4.1, pois não é, em geral, contínua em  $x = 0$ ; obviamente, se  $f$  não for contínua em  $x_0$ ,  $g$  não será contínua em  $x = 0$ . No entanto, notemos que

$$\begin{aligned} [g(0^+) + g(0^-)]/2 &= \frac{1}{2} \cdot \left[ \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) + \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) \right] \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left[ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x + x_0) - \frac{1}{2} \cdot [f(x_0^+) + f(x_0^-)] \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \cdot \left[ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x + x_0) - \frac{1}{2} \cdot [f(x_0^+) + f(x_0^-)] \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \cdot \left[ f(x_0^+) - \frac{1}{2}f(x_0^+) - \frac{1}{2}f(x_0^-) \right] \\
&+ \frac{1}{2} \cdot \left[ f(x_0^-) - \frac{1}{2}f(x_0^+) - \frac{1}{2}f(x_0^-) \right] \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left[ \frac{1}{2}f(x_0^+) - \frac{1}{2}f(x_0^-) \right] \\
&+ \frac{1}{2} \cdot \left[ \frac{1}{2}f(x_0^-) - \frac{1}{2}f(x_0^+) \right] \\
&= 0,
\end{aligned}$$

e assim, podemos estabelecer uma função contínua na origem fazendo a seguinte definição auxiliar

$$h(x) = \begin{cases} [g(x) + g(-x)]/2, & \text{se } x \neq 0, x \in [-l, l], \\ 0, & \text{se } x = 0, \end{cases} \quad (4.25)$$

$$h(x + 2l) = h(x).$$

Como  $f, f' \in SC_{\text{per}}(2l)$  é claro que  $g, g' \in SC_{\text{per}}(2l)$ , e assim, por consequência,  $h, h' \in SC_{\text{per}}(2l)$ .

Provemos que  $h$  é contínua em  $x = 0$ . Notemos que

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2} \cdot [g(x) + g(-x)] \\
&= \frac{1}{2} \cdot [g(0^+) + g(0^-)] = 0.
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{2} \cdot [g(x) + g(-x)] \\
&= \frac{1}{2} \cdot [g(0^-) + g(0^+)] = 0.
\end{aligned}$$

Então,

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0.$$

Como consequência,  $h$  é contínua em 0, pois, por definição,  $h(0) = 0$ .

Aplicando o Lema 4.1, obtemos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=-n}^n \widehat{h}(k) = 0. \quad (4.26)$$

Por outro lado, pela linearidade da expressão que define o coeficiente de Fourier complexo,  $\widehat{h}(k) = \frac{\widehat{g}(k) + \widehat{g}(-k)}{2}$ . De fato, para  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned}
 \widehat{h}(k) &= \frac{a_k(h) - ib_k(h)}{2} \\
 &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{l} \int_{-l}^l h(x) \cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right) dx \right. \\
 &\quad \left. - i \frac{1}{l} \int_{-l}^l h(x) \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{l}\right) dx \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{l} \int_{-l}^l \left( \frac{g(x) + g(-x)}{2} \right) \cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right) dx \right. \\
 &\quad \left. - i \frac{1}{l} \int_{-l}^l \left( \frac{g(x) + g(-x)}{2} \right) \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{l}\right) dx \right] \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{l} \int_{-l}^l g(x) \cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right) dx \right. \\
 &\quad \left. - i \frac{1}{l} \int_{-l}^l g(x) \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{l}\right) dx \right] \\
 &\quad + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{l} \int_{-l}^l g(-x) \cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right) dx \right. \\
 &\quad \left. - i \frac{1}{l} \int_{-l}^l g(-x) \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{l}\right) dx \right] \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \widehat{g}(k) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{l} \int_{-l}^l g(-x) \cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right) dx \right. \\
 &\quad \left. - i \frac{1}{l} \int_{-l}^l g(-x) \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{l}\right) dx \right].
 \end{aligned}$$

Devemos ter

$$\frac{1}{2} \left[ \frac{1}{l} \int_{-l}^l g(-x) \cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right) dx - i \frac{1}{l} \int_{-l}^l g(-x) \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{l}\right) dx \right] = \widehat{g}(-k).$$

Lembremos que

$$\widehat{g}(-k) = \frac{a_k(g) + ib_k(g)}{2}.$$

Para provarmos a afirmação anterior, consideremos a substituição  $u = -x$ . Assim,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{l} \int_{-l}^l g(-x) \cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right) dx - i \frac{1}{l} \int_{-l}^l g(-x) \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{l}\right) dx \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{l} \int_l^{-l} g(u) \cos\left(\frac{(-k)\pi u}{l}\right) (-du) \right. \\ & \quad \left. - i \frac{1}{l} \int_l^{-l} g(u) \operatorname{sen}\left(\frac{(-k)\pi u}{l}\right) (-du) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{l} \int_{-l}^l g(u) \cos\left(\frac{k\pi u}{l}\right) du + i \frac{1}{l} \int_{-l}^l g(u) \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi u}{l}\right) du \right] \\ &= \frac{1}{2} \cdot [a_k(g) + ib_k(g)] = \widehat{g}(-k). \end{aligned}$$

Então, para  $k \in \mathbb{N}$ , estabelecemos

$$\widehat{h}(k) = \frac{\widehat{g}(k) + \widehat{g}(-k)}{2}.$$

Se  $k = 0$ , essa igualdade também vale. De fato, por definição,

$$\begin{aligned} \widehat{h}(0) = \frac{1}{2} \cdot a_0(h) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{l} \int_{-l}^l h(x) dx \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{l} \int_{-l}^l \frac{g(x) + g(-x)}{2} dx \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{l} \int_{-l}^l g(x) dx + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{l} \int_{-l}^l g(-x) dx \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \widehat{g}(0) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{l} \int_l^{-l} g(u) (-du) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \widehat{g}(0) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{l} \int_{-l}^l g(u) du \right] \\ &= \frac{1}{2} [\widehat{g}(0) + \widehat{g}(0)]. \end{aligned}$$

O caso no qual  $k \in \mathbb{Z} - \{\{0\} \cup \mathbb{N}\}$  é análogo ao que  $k \in \mathbb{N}$  e não detalharemos a explicação. Percebamos que

$$\begin{aligned} \sum_{k=-n}^n \widehat{h}(k) &= \widehat{h}(-n) + \cdots + \widehat{h}(n) \\ &= \frac{\widehat{g}(-n) + \widehat{g}(n)}{2} + \cdots + \frac{\widehat{g}(n) + \widehat{g}(-n)}{2} \\ &= \widehat{g}(-n) + \cdots + \widehat{g}(n) \end{aligned}$$

ou seja, o somatório em  $\widehat{h}(k)$  pode ser substituído por um somatório em  $\widehat{g}(k)$ , isto é, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\sum_{k=-n}^n \widehat{h}(k) = \sum_{k=-n}^n \widehat{g}(k). \quad (4.27)$$

Como consequência de (4.26) e (4.27),

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=-n}^n \widehat{g}(k) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=-n}^n \widehat{h}(k) = 0. \quad (4.28)$$

Por definição,

$$g(x) = f(x + x_0) - \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2},$$

se  $x \neq 0$ . Sabemos que os coeficientes complexos de  $g$  são da forma

$$\widehat{g}(k) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l g(x) e^{-ik\pi x/l} dx, \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Daí,

$$\begin{aligned} \widehat{g}(k) &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l \left[ f(x + x_0) - \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2} \right] e^{-ik\pi x/l} dx \\ &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x + x_0) e^{-ik\pi x/l} dx \\ &\quad - \frac{1}{2l} \int_{-l}^l \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2} e^{-ik\pi x/l} dx. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Analisemos em casos. Consideremos  $k = 0$ . Então,

$$\widehat{g}(0) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x + x_0) dx - \frac{1}{2l} \int_{-l}^l \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2} dx.$$

Consideremos a substituição  $u = x + x_0$ . Daí,

$$\widehat{g}(0) = \frac{1}{2l} \int_{x_0-l}^{x_0+l} f(u) \, du - \frac{1}{2l} \left[ \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2} \right] \int_{x_0-l}^{x_0+l} du.$$

Como  $f$  é  $2l$ -periódica,

$$\begin{aligned} \widehat{g}(0) &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(u) \, du - \frac{1}{2l} \left[ \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2} \right] \int_{-l}^l du \\ &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(u) \, du - \left[ \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2} \right] \frac{1}{2l} \cdot 2l \quad (4.30) \\ &= \widehat{f}(0) - \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}. \end{aligned}$$

Agora trabalharemos com o caso em que  $k \neq 0$ . Lembremos, de (4.29), que

$$\begin{aligned} \widehat{g}(k) &= \frac{1}{2l} \left[ \int_{-l}^l f(x + x_0) e^{-ik\pi x/l} \, dx \right. \\ &\quad \left. - \int_{-l}^l \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2} e^{-ik\pi x/l} \, dx \right]. \end{aligned}$$

Analisemos essa igualdade por etapas. Consideremos, inicialmente, a primeira parcela. Utilizando a substituição  $u = x + x_0$  e o fato de  $f(x + x_0)$  e  $e^{-ik\pi x/l}$  serem funções periódicas de período  $2l$ ,

$$\begin{aligned} \int_{-l}^l f(x + x_0) e^{-ik\pi x/l} \, dx &= \int_{-l+x_0}^{l+x_0} f(u) e^{-ik\pi(u-x_0)/l} \, du \\ &= \int_{-l}^l f(u) e^{-ik\pi u/l} e^{ik\pi x_0/l} \, du \\ &= e^{ik\pi x_0/l} \int_{-l}^l f(u) e^{-ik\pi u/l} \, du. \end{aligned}$$

Assim,

$$\int_{-l}^l f(x + x_0) e^{-ik\pi x/l} \, dx = e^{ik\pi x_0/l} \int_{-l}^l f(u) e^{-ik\pi u/l} \, du. \quad (4.31)$$

Na segunda parcela, temos, com  $\frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2} = p \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} \int_{-l}^l p e^{-ik\pi x/l} dx &= p \int_{-l}^l e^{-ik\pi x/l} dx \\ &= p \frac{l}{-ik\pi} \left( e^{-ik\pi x/l} \right) \Big|_{-l}^l \\ &= p \frac{l}{-ik\pi} (e^{-ik\pi} - e^{ik\pi}). \end{aligned}$$

Notemos que, utilizando a fórmula de Euler e a paridade das funções seno e cosseno,

$$\begin{aligned} e^{i(-k\pi)} - e^{i(k\pi)} &= \cos(-k\pi) + i \operatorname{sen}(-k\pi) - (\cos(k\pi) + i \operatorname{sen}(k\pi)) \\ &= \cos(k\pi) - i \operatorname{sen}(k\pi) - \cos(k\pi) - i \operatorname{sen}(k\pi) = 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$\int_{-l}^l p e^{-ik\pi x/l} dx = 0. \quad (4.32)$$

Assim, por (4.31) e (4.32),

$$\widehat{g}(k) = \frac{1}{2l} e^{ik\pi x_0/l} \int_{-l}^l f(u) e^{-ik\pi u/l} du.$$

Porém,

$$\frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(u) e^{-ik\pi u/l} du = \widehat{f}(k),$$

e assim,

$$\widehat{g}(k) = \widehat{f}(k) \cdot e^{ik\pi x_0/l}.$$

Observemos que, utilizando (4.30), se  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{k=-n}^n \widehat{g}(k) &= \widehat{g}(0) + \sum_{k=-n, k \neq 0}^n \widehat{g}(k) \\ &= \widehat{f}(0) - \left[ \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2} \right] + \sum_{k=-n, k \neq 0}^n \widehat{f}(k) e^{ik\pi x_0/l} \\ &= - \left[ \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2} \right] + \sum_{k=-n}^n \widehat{f}(k) e^{ik\pi x_0/l}. \end{aligned}$$

Daí,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=-n}^n \widehat{g}(k) = - \left[ \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2} \right] + \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=-n}^n \widehat{f}(k) e^{ik\pi x_0/l}.$$

Por (4.28),

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=-n}^n \widehat{g}(k) = 0,$$

e finalmente,

$$S[f](x_0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=-n}^n \widehat{f}(k) e^{ik\pi x_0/l} = \left[ \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2} \right],$$

como queríamos provar. ■

**Exemplo 4.3.** Consideremos uma função  $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  com o gráfico

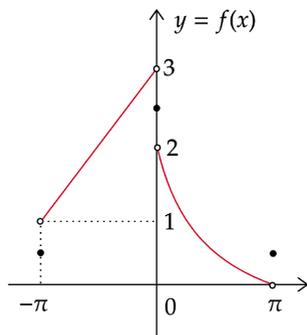


Figura 4.3 – Gráfico de  $y = f(x)$ .

Se estendermos periodicamente  $f$  para uma função  $2\pi$ -periódica  $\tilde{f}$ , o gráfico de  $\tilde{f}$  é tal que

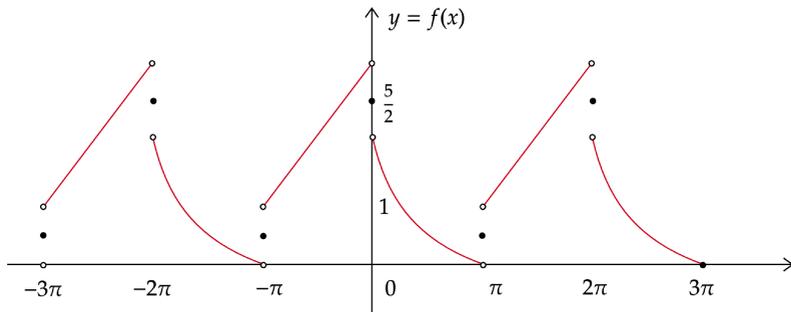


Figura 4.4 – Gráfico da extensão  $2\pi$ -periódica de  $y = f(x)$ .

Utilizando o Teorema 4.5, podemos calcular o valor de  $S[\tilde{f}](x)$  para  $x = 0$ , por exemplo:

$$S[\tilde{f}](0) = \frac{f(0^+) + f(0^-)}{2} = \frac{2 + 3}{2} = \frac{5}{2} = f(0).$$

Podemos calcular também  $S[\tilde{f}](x)$  para  $x = \pi$  e  $x = -\pi$ :

$$S[\tilde{f}](\pi) = \frac{f(\pi^+) + f(\pi^-)}{2} = \frac{0 + 1}{2} = \frac{1}{2} = f(\pi),$$

e

$$S[\tilde{f}](-\pi) = \frac{f(-\pi^+) + f(-\pi^-)}{2} = \frac{0 + 1}{2} = \frac{1}{2} = f(-\pi).$$

Podemos, então, verificar que  $S[\tilde{f}](x) = f(x), \forall x \in [-\pi, \pi]$ , pois  $\tilde{f}$  é uma função seccionalmente contínua (da mesma forma que  $\tilde{f}'$  também atende a essa regularidade).

Com o intuito de estudarmos a convergência das séries de Fourier, vimos então que, dadas certas condições, uma série de Fourier pode convergir pontualmente. Provaremos, no Capítulo 5, que a série (3.31),

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{l} \right) \exp \left( -\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{l^2} t \right), \quad x \in [0, l], t \geq 0,$$

converge para a função  $u$  que é a solução do problema (3.1) lembrando que os coeficientes  $b_n$  satisfazem (3.34).

Como queremos estudar uma possível convergência dessa série na região  $[0, l] \times [0, +\infty)$ , gostaríamos que essa série convergisse a  $u$  não somente em um ponto fixado (o que podemos mostrar pela convergência pontual), mas sim uniformemente sobre essa região. Para isso, precisaremos explorar a Convergência Uniforme das Séries de Fourier, que abordaremos na sequência.

#### 4.4.2 Convergência Uniforme

Para conseguirmos, mais adiante, garantir a convergência uniforme da série (3.31), estudaremos nesta seção a convergência uniforme das séries de Fourier. Provaremos que se  $f$  for periódica e contínua (não apenas seccionalmente contínua como na convergência pontual) e  $f'$  for periódica e seccionalmente contínua, então a série de Fourier de  $f$  converge uniformemente a  $f$ . Antes de discutirmos esse resultado, abordaremos um caso particular no qual adicionaremos a hipótese de que  $f'' \in SC_{\text{per}}(2l)$ , para, a partir disso, provarmos o caso geral.

Inicialmente, estudaremos uma relação entre os coeficientes de Fourier das funções  $f$  e  $f'$ .

A convergência uniforme implica a convergência pontual, entretanto a recíproca não é necessariamente verdadeira. Na proposição a seguir, colocaremos mais hipóteses para conseguirmos, adiante, uma convergência mais suave.

**Proposição 4.6.** *Suponha que  $f \in C_{\text{per}}(2l)$  seja diferenciável em  $(-l, l)$  a menos de um número finito de pontos com  $f' \in SC_{\text{per}}(2l)$ . Então, os coeficientes de Fourier complexos de  $f$  e  $f'$  satisfazem*

$$(\widehat{f'})(n) = \frac{in\pi}{l} \widehat{f}(n), \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (4.33)$$

Quanto aos coeficientes reais, se as séries de Fourier de  $f$  e  $f'$  forem dadas, respectivamente, por

$$S[f] = \frac{a_0}{2} \psi_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \psi_n + b_n \varphi_n)$$

e

$$S[f'] = \frac{a'_0}{2} \psi_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a'_n \psi_n + b'_n \varphi_n),$$

então,

$$\begin{aligned} a'_0 &= 0 \\ a'_n &= \frac{n\pi}{l} b_n, \quad n \in \mathbb{N}, \\ b'_n &= -\frac{n\pi}{l} a_n, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{4.34}$$

*Demonstração.* Começemos essa prova mostrando que os coeficientes de Fourier complexos de  $f$  e  $f'$  satisfazem

$$(\widehat{f'})(n) = \frac{in\pi}{l} \widehat{f}(n), \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{4.35}$$

De fato, como definido em (4.11)

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{-in\pi x/l} dx, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

De maneira análoga,

$$\widehat{f'}(n) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f'(x) e^{-in\pi x/l} dx, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Utilizando integração por partes, temos

$$\begin{aligned} \int_{-l}^l f'(x) e^{-in\pi x/l} dx &= f(x) e^{-in\pi x/l} \Big|_{-l}^l \\ &\quad - \int_{-l}^l f(x) e^{-in\pi x/l} \left( -\frac{in\pi}{l} \right) dx \\ &= f(l) e^{-in\pi} - f(-l) e^{in\pi} \\ &\quad + \left( \frac{in\pi}{l} \right) (2l) \widehat{f}(n) \\ &= f(l) e^{-in\pi} - f(-l) e^{in\pi} + 2in\pi \widehat{f}(n). \end{aligned}$$

Sabemos, pela fórmula de Euler, que

$$e^{i(n\pi)} = \cos(n\pi) + i \operatorname{sen}(n\pi)$$

e

$$e^{i(-n\pi)} = \cos(-n\pi) + i \operatorname{sen}(-n\pi),$$

e, pela paridade das funções seno e cosseno,

$$e^{i(-n\pi)} = \cos(n\pi) - i \operatorname{sen}(n\pi).$$

Assim, como  $\operatorname{sen}(n\pi) = 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} \int_{-l}^l f'(x)e^{-in\pi x/l} dx &= f(l)e^{-in\pi} - f(-l)e^{in\pi} + 2in\pi \widehat{f}(n) \\ &= f(l)[\cos(n\pi) - i \operatorname{sen}(n\pi)] \\ &\quad - f(-l)[\cos(n\pi) + i \operatorname{sen}(n\pi)] + 2in\pi \widehat{f}(n) \\ &= -2f(-l)i \operatorname{sen}(n\pi) + 2in\pi \widehat{f}(n) \\ &= 2in\pi \widehat{f}(n). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \widehat{f}'(n) &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f'(x)e^{-in\pi x/l} dx \\ &= \frac{1}{2l} (2in\pi \widehat{f}(n)) \\ &= \frac{in\pi}{l} \widehat{f}(n). \end{aligned}$$

Por outro lado, por hipótese,

$$S[f'] = \frac{a'_0}{2} \psi_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a'_n \psi_n + b'_n \varphi_n).$$

Calculemos os Coeficientes de Fourier da série:

$$a'_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f'(x) dx = \frac{1}{l} f(x) \Big|_{-l}^l = \frac{1}{l} (f(l) - f(-l)) = 0.$$

Utilizando integração por partes e a paridade da função cosseno,

$$a'_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f'(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{l} \left[ \left( f(x) \cos \left( \frac{n\pi x}{l} \right) \right) \Big|_{-l}^l \right. \\
&+ \left. \left( \frac{n\pi}{l} \right) l \cdot \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{l} \right) dx \right] \\
&= \frac{1}{l} [f(l) \cos(n\pi) - f(-l) \cos(-n\pi) + n\pi b_n] \\
&= \frac{1}{l} [f(l) \cos(n\pi) - f(l) \cos(n\pi) + n\pi b_n] \\
&= \frac{n\pi}{l} b_n.
\end{aligned}$$

O processo para garantirmos que

$$b'_n = -\frac{n\pi}{l} a_n$$

é análogo ao desenvolvimento que fizemos para  $a'_n$ . ■

Utilizando a relação (4.33), podemos provar, por indução, que se  $f$  for  $k \geq 1$  vezes diferenciável com  $f^{(k)} \in SC_{\text{per}}(2l)$ , então

$$\widehat{f}(n) = \left( \frac{l}{in\pi} \right)^k \widehat{f^{(k)}}(n), \quad n \in \mathbb{Z}, n \neq 0. \quad (4.36)$$

Se tivermos  $f, f' \in C_{\text{per}}(2l)$  e  $f'' \in SC_{\text{per}}(2l)$ , ou seja, se exigirmos que  $f'$  também seja contínua, o que será um caso particular para nossa abordagem, teremos que a série de Fourier de  $f$  convergirá uniformemente para  $f$ . Essa afirmação será o objeto de prova de nosso próximo resultado.

**Proposição 4.7.** *Se  $f, f' \in C_{\text{per}}(2l)$  e  $f'' \in SC_{\text{per}}(2l)$ , então a série de Fourier de  $f$  converge uniformemente.*

*Demonstração.* De fato, relembremos que

$$S[f](x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(n) e^{in\pi x/l}.$$

Queremos mostrar que essa série converge uniformemente utilizando o Teorema 2.10, o Teste M de Weierstrass. Para isso, precisamos encontrar uma série numérica convergente que seja "maior ou

igual"que o valor absoluto de  $S[f](x)$ . Notemos que, para  $N \in \mathbb{N}$  suficientemente grande, utilizando a desigualdade triangular, temos

$$\left| \sum_{n=-N}^{+N} \widehat{f}(n)e^{in\pi x/l} \right| \leq \sum_{n=-N}^{+N} |\widehat{f}(n)e^{in\pi x/l}|. \quad (4.37)$$

Decorre da fórmula de Euler que  $|e^{in\pi x/l}| = 1, \forall x$ . Assim,

$$\left| \widehat{f}(n)e^{in\pi x/l} \right| = |\widehat{f}(n)| \cdot |e^{in\pi x/l}| = |\widehat{f}(n)|. \quad (4.38)$$

De (4.36), para  $k = 2$ , temos que

$$\widehat{f}(n) = \left( \frac{l}{in\pi} \right)^2 \widehat{f''}(n), \quad n \in \mathbb{Z}, n \neq 0. \quad (4.39)$$

Por outro lado, como  $f, f' \in C_{\text{per}}(2l)$  e  $f'' \in SC_{\text{per}}(2l)$ , pelo Lema de Riemann-Lebesgue, enunciado como Corolário 4.3,  $\widehat{f''}(n) \rightarrow 0$  quando  $|n| \rightarrow +\infty$ . Assim,

$$\left\{ \widehat{f''}(n) \right\}_{n \in \mathbb{Z}} = \left\{ \widehat{f''}(n) \right\}_{n=-\infty}^0 \cup \left\{ \widehat{f''}(n) \right\}_{n=1}^{+\infty}$$

é uma sequência convergente e, portanto, é limitada, ou seja, existe uma constante  $K > 0$  tal que

$$\left| \widehat{f''}(n) \right| \leq K, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Utilizando (4.39) e a limitação de  $|\widehat{f''}(n)|$ ,

$$\begin{aligned} |\widehat{f}(n)| &= \left| \left( \frac{l}{in\pi} \right)^2 \widehat{f''}(n) \right| \\ &= \frac{l^2}{|i|^2 n^2 \pi^2} |\widehat{f''}(n)| \\ &= \frac{l^2}{n^2 \pi^2} |\widehat{f''}(n)| \\ &\leq \frac{l^2}{n^2 \pi^2} K \\ &= \frac{Kl^2}{\pi^2} \cdot \frac{1}{n^2}, \quad n \in \mathbb{Z}, n \neq 0. \end{aligned}$$

A partir de (4.37), (4.38), (4.39) e do fato de

$$|\widehat{f}(n)| \leq \frac{Kl^2}{\pi^2} \cdot \frac{1}{n^2}, \quad n \in \mathbb{Z}, n \neq 0,$$

temos,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=-N, n \neq 0}^N \widehat{f}(n)e^{in\pi x/l} \right| &\leq \sum_{n=-N, n \neq 0}^N |\widehat{f}(n)e^{in\pi x/l}| \\ &= \sum_{n=-N}^{-1} |\widehat{f}(n)e^{in\pi x/l}| + \sum_{n=1}^N |\widehat{f}(n)e^{in\pi x/l}| \\ &\leq \sum_{n=-N}^{-1} \frac{Kl^2}{\pi^2} \cdot \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^N \frac{Kl^2}{\pi^2} \cdot \frac{1}{n^2} \\ &= \frac{2Kl^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2}. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Como a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

converge, e, devido a (4.40), então

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(n)e^{in\pi x/l}$$

também converge pelo Teste M de Weierstrass. ■

Enunciaremos a seguir um Teorema que apresenta um caso que generaliza a proposição demonstrada, em que enfraquecemos a hipótese de  $f' \in C_{\text{per}}(2l)$  exigindo apenas  $f' \in SC_{\text{per}}(2l)$ , e não apresentamos exigências sobre  $f''$ .

**Teorema 4.8.** *Suponha que  $f \in C_{\text{per}}(2l)$  seja diferenciável em  $(-l, l)$  a menos de um número finito de pontos, com  $f' \in SC_{\text{per}}(2l)$ . Então, a série de Fourier de  $f$  converge uniformemente em  $\mathbb{R}$  para  $f$ .*

*Demonstração.* Precisamos mostrar que

$$S[f](x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(n)e^{in\pi x/l}$$

converge uniformemente. No Teorema 4.5, provamos que essa série de Fourier converge pontualmente. Além disso, pelo fato de  $f$  ser contínua, podemos afirmar que sua série de Fourier em um ponto  $x$  do domínio converge exatamente para  $f(x)$ . Estamos interessados em utilizar o Teorema 2.13, ou seja, o Teorema do Teste M de Weiestrass, para provar que essa série de Fourier converge uniformemente para  $f$ . Levando em consideração o enunciado do Teorema 2.13, temos que considerar, para essa demonstração,

$$f_n(x) = \widehat{f}(n)e^{in\pi x/l}.$$

Daí,

$$|f_n(x)| = |\widehat{f}(n)e^{in\pi x/l}| = |\widehat{f}(n)|.$$

Podemos afirmar, dessa forma, que

$$|f_n(x)| \leq |\widehat{f}(n)|.$$

Notemos que  $M_n = |\widehat{f}(n)|$ . Assim, nos resta provar que a série

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(n)|$$

converge, ou seja, existe uma constante  $K > 0$  tal que

$$\sum_{n=-N}^N |\widehat{f}(n)| \leq K, \forall N \in \mathbb{N}.$$

Notemos que

$$\begin{aligned} \sum_{n=-N}^N |\widehat{f}(n)| &= |\widehat{f}(0)| + \sum_{1 \leq |n| \leq N} |\widehat{f}(n)| \\ &\stackrel{(4.36)}{=} |\widehat{f}(0)| + \sum_{1 \leq |n| \leq N} \left| \frac{l}{in\pi} \widehat{f}'(n) \right| \\ &= |\widehat{f}(0)| + \frac{l}{|i|\pi} \sum_{1 \leq |n| \leq N} \left| \frac{1}{n} \right| |\widehat{f}'(n)| \\ &= |\widehat{f}(0)| + \frac{l}{\pi} \sum_{1 \leq |n| \leq N} \frac{1}{|n|} |\widehat{f}'(n)| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= |\widehat{f}(0)| + \frac{l}{\pi} \left\langle \left\{ \frac{1}{|n|} \right\}, \left\{ |\widehat{f}'(n)| \right\} \right\rangle_{\mathbb{R}^{2N}} \\
&\leq |\widehat{f}(0)| + \frac{l}{\pi} \left| \left\langle \left\{ \frac{1}{|n|} \right\}, \left\{ |\widehat{f}'(n)| \right\} \right\rangle_{\mathbb{R}^{2N}} \right| \\
(4.21) \quad &\leq |\widehat{f}(0)| + \frac{l}{\pi} \left\| \left\{ \frac{1}{|n|} \right\} \right\|_{\mathbb{R}^{2N}} \cdot \left\| \left\{ |\widehat{f}'(n)| \right\} \right\|_{\mathbb{R}^{2N}} \\
&\leq |\widehat{f}(0)| \\
&+ \frac{l}{\pi} \left\langle \left\{ \frac{1}{|n|} \right\}, \left\{ \frac{1}{|n|} \right\} \right\rangle_{\mathbb{R}^{2N}}^{\frac{1}{2}} \left\langle \left\{ |\widehat{f}'(n)| \right\}, \left\{ |\widehat{f}'(n)| \right\} \right\rangle_{\mathbb{R}^{2N}}^{\frac{1}{2}} \\
&= |\widehat{f}(0)| + \frac{l}{\pi} \left( \sum_{1 \leq |n| \leq N} \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{1 \leq |n| \leq N} |\widehat{f}'(n)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
(4.12) \quad &= |\widehat{f}(0)| + \frac{l}{\pi} \left( 2 \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left( 2 \sum_{n=1}^N \frac{a_n'^2 + b_n'^2}{4} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= |\widehat{f}(0)| + \frac{l\sqrt{2}}{\pi} \left( \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{n=1}^N \frac{a_n'^2 + b_n'^2}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \\
(4.6) \quad &= |\widehat{f}(0)| + \frac{l}{\pi} \left( \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{a_0'^2}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n'^2 + b_n'^2) \right)^{\frac{1}{2}} \\
(4.18) \quad &\leq |\widehat{f}(0)| + \frac{l}{\pi} \left( \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{l}} \|f'\| \\
&= |\widehat{f}(0)| + \frac{\sqrt{l}}{\pi} \left( \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \|f'\| \leq K,
\end{aligned}$$

como queríamos. Claramente a constante  $K$  foi obtida pois a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

converge uniformemente. Nos resta garantir que  $S[f](x)$  converge exatamente para  $f(x)$ . Pelo Teorema 4.5, sabemos que  $S[f](x)$  converge pontualmente para  $f(x)$ , ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S[f](x) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

uma vez que  $f$  é contínua. Por outro lado, provamos que a série  $S[f](x)$  converge uniformemente, ou seja, existe uma função  $g$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S[f](x) = g(x).$$

Como a convergência uniforme implica em convergência pontual, então se  $S[f](x)$  converge uniformemente para  $g$ , ela converge pontualmente para  $g$ . Daí, pela unicidade do limite,  $g = f$ .

Mostramos que  $S[f](x)$  converge uniformemente para  $f$  se  $f \in C_{\text{per}}(2l)$  e  $f' \in SC_{\text{per}}(2l)$ . ■

Nesta seção exploramos desde a definição até as convergências pontual e uniforme das séries de Fourier. Percorremos esse processo para que possamos, ao longo do próximo Capítulo, abordar questões relativas à solução do problema da equação do Calor do problema enunciado em (3.1).

## 5 EXISTÊNCIA E UNICIDADE DE SOLUÇÃO DO PROBLEMA DA CONDUÇÃO DO CALOR

Neste capítulo, estamos interessados em discutir acerca de algumas propriedades que envolvem o Problema Clássico da Equação do Calor, analisando-o a partir de uma dimensão espacial, ou seja, dependendo apenas de uma variável  $x$  no espaço.

Inicialmente, enunciaremos novamente o Problema da Transmissão do Calor sobre uma barra finita, discutido no Capítulo 3, esse que nos levou à definição da série de Fourier no Capítulo 4. Provaremos que existe uma única solução para esse PVIC. Além disso, abordaremos a questão da dependência contínua de soluções do problema da equação do calor e discutiremos um resultado relativo à solução do problema da equação do calor com condições de contorno não-homogêneas.

### 5.1 EXISTÊNCIA DE SOLUÇÃO

Voltemos ao problema de valor inicial e contorno (3.1) do Capítulo 3:

$$\begin{cases} u_t = \alpha^2 u_{xx}, & (x, t) \in (0, l) \times (0, +\infty) \\ u(0, t) = u(l, t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x, 0) = f(x), & x \in [0, l], \end{cases} \quad (5.1)$$

no qual  $\alpha \in \mathbb{R}$  e  $f \in C([0, l])$  satisfaz a condição de compatibilidade

$$f(0) = 0 = f(l).$$

Vimos em (3.31) que procuramos uma solução para o problema (5.1) que seja da forma

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{l} \right) \exp \left( -\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{l^2} t \right), \quad (5.2)$$

em que  $x \in [0, l]$ ,  $t \geq 0$  e

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{l} \right) dx, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (5.3)$$

Como consequência, espera-se que

$$f(x) = u(x, 0) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{l} \right). \quad (5.4)$$

Estamos interessados em provar que a série exibida em (5.2) converge para uma função  $u \in C([0, l] \times [0, +\infty)) \cap C^\infty([0, l] \times (0, +\infty))$  e satisfaz o problema (5.1). Para isso, enunciaremos o Teorema a seguir:

**Teorema 5.1.** *Suponha que  $f \in C([0, l])$ , com  $f(0) = f(l) = 0$ . Suponha que  $f$  seja diferenciável em  $[0, l]$  a menos de um conjunto finito de pontos com  $f' \in SC([0, l])$ . Então, a série*

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{l} \right) \exp \left( -\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{l^2} t \right)$$

com  $x \in [0, l]$  e  $t \geq 0$ , em que

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{l} \right) dx, \quad n \in \mathbb{N},$$

converge uniformemente em  $[0, l] \times [0, +\infty)$  para uma função  $u \in C([0, l] \times [0, +\infty)) \cap C^\infty([0, l] \times (0, +\infty))$ , que é a solução do problema de valor inicial e de contorno

$$\begin{cases} u_t = \alpha^2 u_{xx}, & (x, t) \in (0, l) \times (0, +\infty) \\ u(0, t) = u(l, t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x, 0) = f(x), & x \in [0, l]. \end{cases} \quad (5.5)$$

*Observação 1.* Antes de fazermos essa prova, precisamos justificar o motivo pelo qual podemos interpretar  $f(x)$  como

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{l} \right),$$

com  $x \in [0, l]$ , em que

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{l} \right) dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Assumamos que  $f : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$  seja uma função contínua, sujeita à condição de compatibilidade  $f(0) = 0 = f(l)$ . Definamos

$$\begin{aligned} \tilde{f} : [-l, l] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} f(x), & \text{se } x \in [0, l] \\ -f(-x), & \text{se } x \in [-l, 0]. \end{cases} \end{aligned} \quad (5.6)$$

Abaixo, a situação hipotética da função  $f$  e de sua extensão,  $\tilde{f}$ :

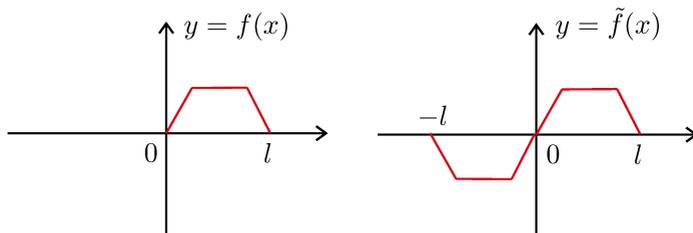


Figura 5.1 – Gráficos das funções  $f$  e  $\tilde{f}$ .

Notemos que  $\tilde{f}$  é uma função ímpar, por construção. De fato, seja  $a \in [-l, 0]$ , então,

$$\tilde{f}(a) = -f(-a) = -(f(-a)). \quad (5.7)$$

Como  $-a \in [0, l]$ ,

$$\tilde{f}(-a) = f(-a). \quad (5.8)$$

Substituindo (5.8) em (5.7), temos que

$$\tilde{f}(a) = -\tilde{f}(-a).$$

De forma análoga, se  $a \in [0, l]$ , observamos que  $\tilde{f}(a) = -\tilde{f}(-a)$ , o que é suficiente para garantirmos que a função  $\tilde{f}$  é ímpar.

Consideremos  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a extensão de período  $2l$  da função  $\tilde{f}$ . Como  $\psi$  herda propriedades da  $f$ , podemos fazer algumas afirmações sobre essa função. Uma vez que  $f$  é contínua e  $f(0) = 0 = f(l)$ ,

$\psi$  é contínua. Além disso,  $\psi \in C_{\text{per}}(2l)$ ,  $\psi' \in SC_{\text{per}}(2l)$  e  $\psi$  é uma função ímpar. Daí,

$$S[\psi](x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[ a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + b_n \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right], \quad (5.9)$$

na qual os coeficientes  $a_0$ ,  $a_n$  e  $b_n$  são os Coeficientes de Fourier associados à função  $\psi$ . Pelo Teorema 4.8, a série de Fourier da função  $\psi$  converge uniformemente para a função  $\psi(x)$ . Observemos que, restringindo  $\psi$  ao intervalo  $[-l, l]$ , tem-se  $\psi = \tilde{f}$ . Utilizando a definição de  $\tilde{f}$  e o fato da função seno ser ímpar, temos

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l \psi(x) \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx \\ &= \frac{1}{l} \int_{-l}^0 \psi(x) \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx + \frac{1}{l} \int_0^l \psi(x) \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx \\ &= \frac{1}{l} \int_{-l}^0 -f(-x) \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx + \frac{1}{l} \int_0^l f(x) \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx \\ &= \frac{1}{l} \int_l^0 -f(u) \text{sen}\left(\frac{n\pi(-u)}{l}\right) (-du) + \frac{1}{l} \int_0^l f(x) \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx \\ &= \frac{1}{l} \int_0^l f(u) \text{sen}\left(\frac{n\pi u}{l}\right) du + \frac{1}{l} \int_0^l f(x) \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx \\ &= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx. \end{aligned}$$

Analogamente, podemos provar que  $a_0 = 0$  e, para todo  $n \geq 1$  e  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n = 0$ . Daí, de (5.9), temos que

$$S[\psi](x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \quad (5.10)$$

com

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx.$$

Pelo exposto acima, interpretamos que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right),$$

se  $x \in [0, l]$ .

*Demonstração.* (Teorema (5.1)) Devemos garantir que

i) A série

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{l} \right) \exp \left( -\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{l^2} t \right),$$

com  $x \in [0, l]$  e  $t \geq 0$ , em que

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{l} \right) dx, \quad n \in \mathbb{N},$$

converge uniformemente para  $u$  em  $[0, l] \times [0, +\infty)$ ;

ii) A função  $u$  satisfaz a regularidade

$$C([0, l] \times [0, +\infty)) \cap C^\infty([0, l] \times (0, +\infty));$$

iii) A função  $u(x, t)$  é, de fato, solução do problema (5.5).

Provemos, inicialmente, que a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{l} \right) \exp \left( -\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{l^2} t \right),$$

com  $x \in [0, l]$  e  $t \geq 0$ , em que

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{l} \right) dx, \quad n \in \mathbb{N},$$

converge uniformemente para  $u$  em  $[0, l] \times (0, +\infty)$ . Como a extensão  $2l$ -periódica de  $f$  é  $\psi \in C_{\text{per}}(2l)$ , então  $\psi \in SC_{\text{per}}(2l)$ . Assim, pelo Lema de Riemann-Lebesgue na forma real, Corolário 4.2,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \{b_n\} = 0.$$

A sequência  $\{b_n\}$  é convergente, portanto, pelo Teorema 2.11, é limitada. Daí, existe  $K > 0$  tal que  $|b_n| \leq K, \forall n \in \mathbb{N}$ .

*Afirmção 1:* A série

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{l} \right) \exp \left( -\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{l^2} t \right),$$

com  $x \in [0, l]$  e  $t \geq 0$ , converge uniformemente em  $[0, l] \times [\varepsilon, +\infty)$  para todo  $\varepsilon > 0$  arbitrário, porém, fixado.

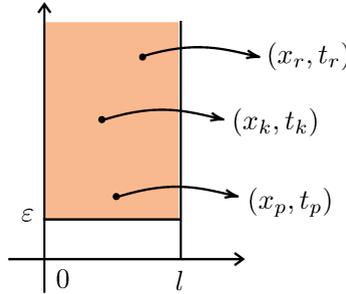


Figura 5.2 – Ilustração de pontos sobre a faixa  $[0, l] \times [\varepsilon, +\infty)$ .

Com efeito, seja  $\varepsilon > 0$  e consideremos  $(x, t) \in [0, l] \times [\varepsilon, +\infty)$ . Seja  $n \in \mathbb{N}$ . Temos que, como  $|b_n| \leq K$ ,  $|\text{sen}(\alpha)| \leq 1$  e  $t \in [\varepsilon, +\infty)$ ,

$$\begin{aligned}
 & \left| \sum_{n=1}^N b_n \text{sen} \left( \frac{n\pi x}{l} \right) \exp \left( -\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{l^2} t \right) \right| \\
 & \leq \sum_{n=1}^N |b_n| \left| \text{sen} \left( \frac{n\pi x}{l} \right) \right| \cdot \left| \exp \left( -\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{l^2} t \right) \right| \\
 & \leq K \sum_{n=1}^N \exp \left( -\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{l^2} t \right) \\
 & \leq K \sum_{n=1}^N \exp \left( -\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{l^2} \varepsilon \right). \tag{5.11}
 \end{aligned}$$

Podemos definir uma função auxiliar

$$F(x) = \exp \left( -\frac{\alpha^2 x^2 \pi^2}{l^2} \varepsilon \right).$$

Notemos que

$$F(n) = \exp \left( -\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{l^2} \varepsilon \right),$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Podemos verificar que  $F$  é uma função contínua, decrescente,  $F(x) \geq 0$  sempre que  $x \in [1, +\infty)$  e

$$\int_1^{+\infty} F(x) dx$$

converge. Pelo Teste da Integral, que pode ser encontrado na seção 11.3 de [7], na página 663, a série numérica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \exp\left(-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{l^2} \varepsilon\right)$$

é convergente. Utilizando a desigualdade (5.11), pelo Teste M de Weierstrass, Teorema 2.13, garantimos que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \exp\left(-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{l^2} t\right)$$

é uniformemente convergente e converge para a função  $u(x, t)$  na região  $[0, l] \times [\varepsilon, +\infty)$ . Isto conclui a prova da Afirmação 1. Fazendo  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , a convergência uniforme ocorre na região  $[0, l] \times (0, +\infty)$ . Para garantirmos a convergência uniforme no domínio  $[0, l] \times [0, +\infty)$ , nos falta avaliar o caso em que  $t = 0$ . Sabemos que

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \exp\left(-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{l^2} t\right),$$

e assim,

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \\ &= S[\psi](x) \\ &\stackrel{4.8}{=} \psi(x) \\ &= f(x), \quad \forall x \in [0, l]. \end{aligned}$$

Lembrando que a igualdade dada em (4.8) caracteriza uma convergência uniforme, vamos mostrar que a série descrita em (5.2) converge para  $u(x, t)$  uniformemente sobre o domínio  $[0, l] \times [0, +\infty)$ .

Para isso, devemos garantir que dado  $\gamma > 0$ , existe  $N_0 = N_0(\gamma)$  tal que se  $m, k \in \mathbb{N}$  com  $m > k > N_0$ , ocorra

$$\left| \sum_{n=k}^m b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \exp\left(-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{l^2} t\right) \right| < \gamma,$$

para todo  $(x, t) \in [0, l] \times [0, +\infty)$ . Vamos passar por alguns conceitos e informações:

1) A função

$$t \mapsto \exp\left(-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{l^2} t\right)$$

é contínua e decrescente. Dessa forma, pela definição de continuidade, existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $|t - 0| \leq \varepsilon$  implica

$$\left| \exp\left(-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{l^2} t\right) - \exp(0) \right| < \frac{1}{2}.$$

Fixemos  $\varepsilon$  e assumamos que  $0 < t < \varepsilon$ . Daí, pela desigualdade triangular, tem-se que

$$\left| \exp\left(-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{l^2} t\right) - \exp\left(-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{l^2} \varepsilon\right) \right| < 1.$$

Sabendo que  $0 < t < \varepsilon$ ,

$$\exp\left(-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{l^2} t\right) < 1 + \exp\left(-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{l^2} \varepsilon\right).$$

Como

$$\exp\left(-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{l^2} \varepsilon\right) < \exp\left(-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{l^2} t\right),$$

com  $t < \varepsilon$ , podemos entender que existe um “erro”  $\eta(t) \in [0, 1]$  tal que

$$\exp\left(-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{l^2} t\right) = \eta(t) + \exp\left(-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{l^2} \varepsilon\right).$$

2) Conforme já apresentado, a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \exp\left(-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{l^2} t\right)$$

converge uniformemente em  $[0, l] \times [\varepsilon, +\infty)$ . Daí, dado  $\gamma > 0$ , existe  $N_1 = N_1(\gamma)$  tal que se  $m, k \in \mathbb{N}$ , com  $m > k > N_1$ ,

$$\left| \sum_{n=k}^m b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \exp\left(-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{l^2} t\right) \right| < \frac{\gamma}{2},$$

para todo  $(x, t) \in [0, l] \times [\varepsilon, +\infty)$ . Em particular,  $m > k > N_1$  implica

$$\left| \sum_{n=k}^m b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \exp\left(-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{l^2} \varepsilon\right) \right| < \frac{\gamma}{2} < \gamma.$$

3) Pela teoria de Fourier,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{l} \right)$$

converge uniformemente em  $[0, l]$ . Para  $\gamma > 0$ , existe  $N_2 = N_2(\gamma)$  tal que se  $m, k \in \mathbb{N}$ ,  $m > k > N_2$ ,

$$\left| \sum_{n=k}^m b_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{l} \right) \right| < \frac{\gamma}{2} < \gamma, \quad (5.12)$$

para todo  $x \in [0, l]$ . Definamos  $N_0 = \max \{N_1, N_2\}$ . Se  $m, k \in \mathbb{N}$ , com  $m > k > N_0$ , temos que

$$\left| \sum_{n=k}^m b_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{l} \right) \exp \left( -\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{l^2} t \right) \right| < \frac{\gamma}{2} < \gamma,$$

para todo  $(x, t) \in [0, l] \times \tau$ , em que  $\tau = \{0\} \cup [\varepsilon, +\infty)$ . Nos resta analisar a convergência uniforme para  $(x, t) \in [0, l] \times (0, \varepsilon)$  a fim de contemplar o desejado. Com base no que foi abordado, para  $(x, t) \in [0, l] \times (0, \varepsilon)$ , se  $m, k \in \mathbb{N}$  com  $m > k > N_0$ ,

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{n=k}^m b_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{l} \right) \exp \left( -\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{l^2} t \right) \right| \\ &= \left| \sum_{n=k}^m b_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{l} \right) \left[ \eta(t) + \exp \left( -\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{l^2} \varepsilon \right) \right] \right| \\ &= \left| \sum_{n=k}^m b_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{l} \right) \eta(t) + \sum_{n=k}^m b_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{l} \right) \exp \left( -\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{l^2} \varepsilon \right) \right| \\ &\leq \left| \sum_{n=k}^m b_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{l} \right) \eta(t) \right| + \left| \sum_{n=k}^m b_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{l} \right) \exp \left( -\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{l^2} \varepsilon \right) \right| \\ &= |\eta(t)| \cdot \left| \sum_{n=k}^m b_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{l} \right) \right| \\ &+ \left| \sum_{n=k}^m b_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{l} \right) \exp \left( -\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{l^2} \varepsilon \right) \right| \\ &< 1 \cdot \frac{\gamma}{2} + \frac{\gamma}{2} = \gamma, \end{aligned}$$

o que finaliza a justificativa da validade da convergência uniforme.

Ademais, também garantimos que  $u$  satisfaz a condição inicial do Problema da Equação do Calor, que é

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{l} \right) = f(x). \quad (5.13)$$

Na sequência, mostraremos que  $u$  satisfaz a regularidade

$$u \in C([0, l] \times [0, +\infty)) \cap C^\infty([0, l] \times (0, +\infty)). \quad (5.14)$$

Para isso, consideremos  $(x, t) \in [0, l] \times [\varepsilon, +\infty)$ , com  $\varepsilon > 0$ . Garantimos anteriormente que a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{2}{l} \int_0^l f(y) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi y}{l} \right) dy \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{l} \right) \exp \left( -\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{l^2} t \right)$$

converge uniformemente à  $u(x, t)$ . Devido à convergência uniforme da série estudada, podemos deduzir que

$$u(x, t) = \int_0^l f(y) \left[ \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi y}{l} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{l} \right) \exp \left( -\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{l^2} t \right) \right] dy. \quad (5.15)$$

Definamos o *núcleo do calor* como

$$K(x, y, t) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi y}{l} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{l} \right) \exp \left( -\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{l^2} t \right). \quad (5.16)$$

Claramente, de (5.15) e (5.16), simplificamos que

$$u(x, t) = \int_0^l f(y) \cdot K(x, y, t) dy. \quad (5.17)$$

Usando o Teste M de Weierstrass é possível mostrar que a série dada em (5.16) converge uniformemente para  $K(x, y, t)$  em  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [\varepsilon, +\infty)$ , para todo  $\varepsilon > 0$ . Não repetiremos, entretanto, a descrição do processo, pois, há inúmeras similaridades com a justificativa de validade da Afirmção 1.

*Afirmção 2: O núcleo do calor*

$$K(x, y, t) \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times (\varepsilon, +\infty))$$

sempre que  $\varepsilon > 0$ .

Para provarmos o desejado, devemos mostrar que  $K$  é contínuo e que qualquer derivada parcial de  $K$  também é contínua.

Para mostrarmos, inicialmente, que  $K$  é contínua, basta garantir que  $K$  é uniformemente convergente, pois cada um dos fatores que aparece na construção das parcelas da sequência de somas parciais relativa à série (5.16) é uma função contínua no domínio estudado. Como já citado, esse processo de demonstração será omitido aqui, pois está associado à utilização do Teste M de Weierstrass, Teorema 2.13. Com isso, temos que

$$K(x, y, t) \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [\varepsilon, +\infty))$$

sempre que  $\varepsilon > 0$ .

Precisamos estabelecer que qualquer derivada parcial de  $K$  é contínua sobre  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times (\varepsilon, +\infty)$ . Vamos descrever brevemente tal justificativa. Seja  $k \in \mathbb{N}$  e suponhamos que  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$  sejam números inteiros não-negativos de forma que  $k = \alpha + \beta + \gamma$  seja a soma dos referidos índices. Como as funções seno e exponencial são infinitamente deriváveis, estabelece-se que, para todo  $n \in \mathbb{N}$ , a função

$$\frac{\partial^k}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial t^\gamma} \left[ \text{sen} \left( \frac{n\pi y}{l} \right) \text{sen} \left( \frac{n\pi x}{l} \right) \exp \left( -\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2 t}{l^2} \right) \right] \quad (5.18)$$

é contínua em  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times (\varepsilon, +\infty)$ . No que segue, usamos o Teorema 2.12 como embasamento. Devemos garantir que a série de funções

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\partial^k}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial t^\gamma} \left[ \text{sen} \left( \frac{n\pi y}{l} \right) \text{sen} \left( \frac{n\pi x}{l} \right) \exp \left( -\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2 t}{l^2} \right) \right]$$

é uniformemente convergente em  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times (\varepsilon, +\infty)$ . Não detalharemos essa prova passo a passo, pois demandaria a abordagem com múltiplos índices e seria um processo longo. Porém, a ideia está pautada no uso conveniente de adaptações do Teste M de Weierstrass, Teorema 2.13, assim como abordado anteriormente para que pudéssemos garantir a continuidade de  $K(x, y, t)$ .

Como ilustração, consideremos o caso  $k = 1$ . Daí, poderão ocorrer três situações:  $\alpha = 1, \beta = 0, \gamma = 0$ ;  $\alpha = 0, \beta = 1, \gamma = 0$ ; e  $\alpha = 0,$

$\beta = 0$  e  $\gamma = 1$ . Utilizando essa metodologia detalhada, pode-se estabelecer que todas as derivadas de primeira ordem da função em (5.18) serão contínuas em  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times (\varepsilon, +\infty)$ . Isso é suficiente para deduzir que  $K(x, t, y) \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times (\varepsilon, +\infty))$ . Continuando esse processo para qualquer  $k$  suficientemente grande, garantimos que

$$K(x, y, t) \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times (\varepsilon, +\infty)).$$

Fazendo  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , conseguimos estabelecer que

$$K(x, y, t) \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times (0, +\infty)),$$

o que finaliza a justificativa da validade da Afirmação 2. A regularidade de  $K$  e a expressão (5.17) são usadas para determinar que é válida a pertinência tratada em (5.14).

Finalmente, provemos que a função  $u(x, t)$  é, de fato, a solução do Problema da Equação do Calor enunciado em (5.5).

Com efeito, iniciaremos mostrando que  $u(x, t)$  soluciona a EDP

$$u_t = \alpha^2 u_{xx}.$$

Como

$$u(x, t) = \int_0^l f(y) \cdot K(x, y, t) dy,$$

então, as convergências uniformes das séries que descrevem  $K$  e  $K_t$  permitem estabelecer que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(u) &= u_t \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \int_0^l f(y) \cdot K(x, y, t) dy \right) \\ &= \int_0^l \frac{\partial}{\partial t} (f(y) \cdot K(x, y, t)) dy \\ &= \int_0^l f(y) \frac{\partial}{\partial t} (K(x, y, t)) dy \\ &= \int_0^l f(y) K_t(x, y, t) dy, \end{aligned}$$

ou seja,

$$u_t = \int_0^l f(y) K_t(x, y, t) dy.$$

Analogamente,

$$u_x = \int_0^l f(y) K_x(x, y, t) dy$$

e

$$u_{xx} = \int_0^l f(y) K_{xx}(x, y, t) dy.$$

Calculemos as seguintes derivadas parciais de  $K$ , definido em (5.16)

$$K_t = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{-\alpha^2 n^2 \pi^2}{l^2} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi y}{l} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{l} \right) \exp \left( -\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{l^2} t \right),$$

$$K_x = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\pi}{l} \cos \left( \frac{n\pi x}{l} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi y}{l} \right) \exp \left( -\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{l^2} t \right)$$

e

$$K_{xx} = -\frac{2}{l} \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{n\pi}{l} \right)^2 \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{l} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi y}{l} \right) \exp \left( -\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{l^2} t \right).$$

Se  $(x, y, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times (0, +\infty)$ ,

$$\begin{aligned} \alpha^2 K_{xx} &= -\frac{2}{l} \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{n\pi\alpha}{l} \right)^2 \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{l} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi y}{l} \right) \exp \left( -\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{l^2} t \right) \\ &= K_t. \end{aligned}$$

Portanto, se  $(x, t) \in [0, l] \times (0, +\infty)$ ,

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= \left( \int_0^l f(y) \cdot K(x, y, t) dy \right)_t \\ &= \int_0^l f(y) \cdot K_t(x, y, t) dy \\ &= \int_0^l f(y) \cdot \alpha^2 K_{xx}(x, y, t) dy \\ &= \alpha^2 \int_0^l f(y) \cdot K_{xx}(x, y, t) dy \\ &= \alpha^2 u_{xx}(x, t). \end{aligned}$$

Assim, garantimos que  $u_t = \alpha^2 u_{xx}$  na região desejada. Logo,  $u(x, t)$  soluciona a EDP. Nos resta apenas provar a condição de fronteira, uma vez que a condição de valor inicial foi garantida anteriormente em (5.13). Notemos que, para  $t \geq 0$ ,

$$u(0, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \operatorname{sen}(0) \exp\left(-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{l^2} t\right) = 0$$

e

$$u(l, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \operatorname{sen}(n\pi) \exp\left(-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{l^2} t\right) = 0.$$

Logo,  $u(x, t)$  soluciona o Problema da Equação do Calor.

Finalmente, garantimos que dada uma função  $f \in C([0, l])$ , com  $f(0) = f(l) = 0$  e  $f$  diferenciável em  $[0, l]$  a menos de um conjunto finito de pontos, com  $f' \in SC([0, l])$ , então, a série

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \exp\left(-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{l^2} t\right),$$

com  $x \in [0, l], t \geq 0$ , em que

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx, \quad n \in \mathbb{N},$$

converge uniformemente em  $[0, l] \times [0, +\infty)$  para uma função suave  $u \in C([0, l] \times [0, +\infty)) \cap C^\infty([0, l] \times (0, +\infty))$ , que é a solução do problema (5.5). ■

Vejamos um exemplo de aplicação direta do Teorema 5.1:

**Exemplo 5.1.** Consideremos a equação do calor com a constante de difusividade  $\alpha = 1$  e o seguinte PVIC:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & (x, t) \in (0, \pi) \times (0, +\infty) \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x, 0) = f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ -x + \pi, & \text{se } x \in (\frac{\pi}{2}, \pi]. \end{cases} \end{cases} \quad (5.19)$$

Estamos interessados em encontrar a solução do problema (5.19). Notemos que, quando  $t = 0$ , a temperatura varia de acordo com a função  $f$ , cujo gráfico é

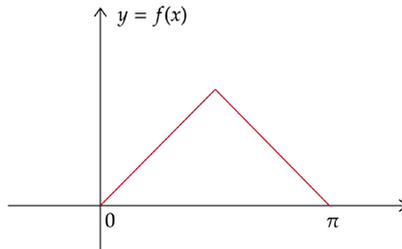


Figura 5.3 – Gráfico de  $y = f(x)$ .

Notemos que  $f \in C([0, \pi])$  e  $f(0) = 0 = f(\pi)$ , ou seja,  $f$  satisfaz a condição de compatibilidade. Além disso,  $f$  é diferenciável em  $(0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi)$ . Registra-se que  $f'(x) = 1$  se  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$  e  $f'(x) = -1$  se  $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ . Por consequência, estabelece-se que  $f' \in SC([0, \pi])$ . Com isso, temos que todas as hipóteses do Teorema 5.1 são satisfeitas. Calculemos os coeficientes  $b_n$ , com  $n \in \mathbb{N}$ . De (5.3), temos

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \operatorname{sen}(nx) \, dx + \frac{2}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-x + \pi) \operatorname{sen}(nx) \, dx \\ &= \frac{4}{\pi n^2} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{2}\right). \end{aligned} \quad (5.20)$$

Substituindo (5.20) em (5.2), temos que a série

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[ \frac{4}{\pi n^2} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{2}\right) \right] \operatorname{sen}(nx) \exp(-n^2 t) \quad (5.21)$$

converge uniformemente em  $[0, \pi] \times [0, +\infty)$  para uma função  $u \in C([0, \pi] \times [0, +\infty)) \cap C^\infty([0, \pi] \times (0, +\infty))$ , que é a solução do PVIC (5.19).

Podemos aproximar o gráfico da temperatura  $u$  na posição  $x$  da barra no tempo  $t$  considerando uma quantidade finita de parcelas da série (5.21). Utilizando os trinta primeiros termos dessa série, a

aproximação do gráfico de  $u(x, t)$  considerando  $x \in [0, \pi]$  e  $t \in [0, 10]$  é representada por

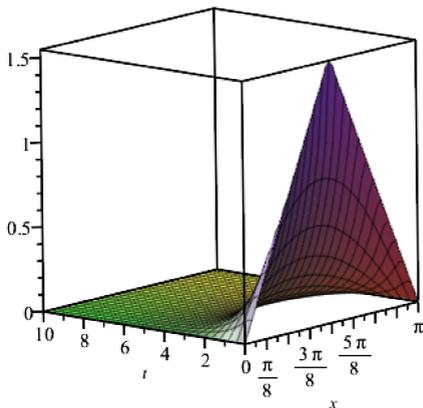


Figura 5.4 – Gráfico da função dada pela soma dos trinta primeiros termos da série (5.21), plotado com auxílio do software *Maple*.

Podemos ilustrar a diminuição da temperatura por meio de uma análise gráfica considerando  $x$  arbitrário e  $t$  fixo:

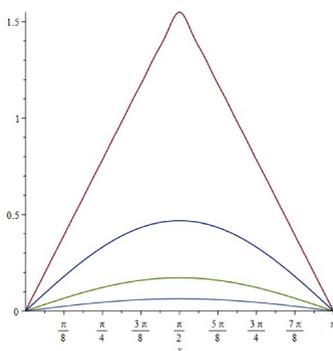


Figura 5.5 – Gráficos da função que aproxima  $u(x, t)$ , respectivamente, com  $t = 0$  (vermelho),  $t = 1$  (azul escuro),  $t = 2$  (verde) e  $t = 3$  (azul claro), plotados com auxílio do software *Maple*.

Notemos que, quando  $t$  tende a infinito, a temperatura da barra tende a se estabilizar em 0 unidades.

## 5.2 UNICIDADE DE SOLUÇÃO

O Teorema 5.1 dá condições para a existência de solução para o problema (5.5). Nada até o momento foi comentado acerca de unicidade de solução.

Nesta seção, definiremos o conceito de Integral de Energia. Em seguida, provaremos uma propriedade importante sobre essa integral que nos possibilitará a dedução da desigualdade

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2},$$

em que  $L^2$  é o espaço das funções quadrado-integráveis e

$$\|f\|_{L^2} = \left( \int_0^l (f(x))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

O conceito de Integral de Energia será extremamente relevante para provarmos a unicidade da solução do Problema da Equação do Calor.

**Definição 5.1.** Suponhamos que  $u(x, t)$  seja uma solução do problema (5.5) que existe conforme o Teorema 5.1. Então, podemos definir a Integral de Energia como

$$E(t) = \int_0^l (u(x, t))^2 dx, \quad t \geq 0.$$

Notemos que  $E(t) \geq 0$  para todo  $t \geq 0$ , uma vez que  $E(t)$  é dada por uma integral do quadrado de uma função real.

**Proposição 5.2.** *Seja  $u(x, t)$  uma solução do problema (5.5). Então,  $E(t) \leq E(0)$ .*

*Demonstração.* Para provarmos que  $E(t) \leq E(0)$ , devemos garantir que  $E(t)$  é uma função não-crescente. No contexto físico, isso significa provarmos que a energia em um certo tempo começa em um

valor e vai diminuindo com o desenrolar da análise. Para provarmos que  $E(t)$  é não-crescente, basta mostrar que sua derivada,  $E'(t)$ , é negativa. Relembramos que  $u(x, t)$  está sujeita à regularidade

$$C([0, l] \times [0, +\infty)) \cap C^2([0, l] \times (0, +\infty)).$$

Daí, como  $u(x, t)$  é suave, se  $t > 0$ ,

$$\begin{aligned} E'(t) &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \int_0^l (u(x, t))^2 dx \right) \\ &= \int_0^l \frac{\partial}{\partial t} [(u(x, t))^2] dx \\ &= \int_0^l 2u(x, t) \cdot \frac{\partial}{\partial t} (u(x, t)) dx \\ &= 2 \int_0^l u(x, t) \cdot u_t(x, t) dx \\ &= 2\alpha^2 \int_0^l u(x, t) \cdot u_{xx}(x, t) dx. \end{aligned}$$

Utilizando integração por partes, temos

$$\begin{aligned} E'(t) &= 2\alpha^2 \left[ (u(x, t) \cdot u_x(x, t)) \Big|_0^l - \int_0^l (u_x(x, t))^2 dx \right] \\ &= 2\alpha^2 \left[ u(l, t) \cdot u_x(l, t) - u(0, t) \cdot u_x(0, t) - \int_0^l (u_x(x, t))^2 dx \right] \\ &= -2\alpha^2 \int_0^l (u_x(x, t))^2 dx, \end{aligned}$$

uma vez que  $u(0, t) = u(l, t) = 0$ , pela condição de contorno. Temos então que

$$E'(t) = -2\alpha^2 \int_0^l (u_x(x, t))^2 dx.$$

Como  $E'(t)$  é o produto entre uma constante  $C = -2\alpha^2 < 0$  e uma integral definida em um intervalo  $[0, l]$  do quadrado de uma função real, então  $E'(t)$  é, certamente, menor ou igual a zero. Daí,  $E(t)$  é não-crescente em  $[0, +\infty)$ , portanto, se  $t \geq 0$ , tem-se  $E(t) \leq E(0)$ . ■

Observemos que  $E(t)$  é, na verdade, a norma ao quadrado da função  $u(x, t)$ , isto é,

$$\|u(\cdot, t)\|^2 = \int_0^l (u(x, t))^2 dx.$$

Além disso,

$$E(0) = \int_0^l (u(x, 0))^2 dx = \int_0^l (f(x))^2 dx = \|f\|_{L^2}^2.$$

O que acabamos de provar na Proposição 5.2 é que  $E(t) \leq E(0)$ , ou, em outros termos, que

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2},$$

para todo  $t \geq 0$ , em que  $L^2$  é o espaço das funções quadrado-integráveis.

Ao longo deste capítulo, no Teorema 5.1, provamos a existência da solução para o problema (5.5). Nos interessa garantirmos que, impostas as condições de fronteira e a condição inicial, a solução desse PVIC será única. Para isso, provaremos o seguinte Teorema:

**Teorema 5.3.** *Se o problema (5.5) tiver solução em  $C([0, l] \times [0, +\infty)) \cap C^2([0, l] \times (0, +\infty))$ , então ela será única.*

*Demonstração.* Suponhamos que existam duas soluções para o problema (5.5), digamos  $u_1$  e  $u_2$ , sujeitas à regularidade do enunciado. Daí,

$$\begin{cases} (u_1)_t = \alpha^2(u_1)_{xx}, & (x, t) \in (0, l) \times (0, +\infty) \\ u_1(0, t) = u_1(l, t) = 0, & t \geq 0 \\ u_1(x, 0) = f(x), & x \in [0, l], \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} (u_2)_t = \alpha^2(u_2)_{xx}, & (x, t) \in (0, l) \times (0, +\infty) \\ u_2(0, t) = u_2(l, t) = 0, & t \geq 0 \\ u_2(x, 0) = f(x), & x \in [0, l]. \end{cases}$$

Definamos  $\omega = u_1 - u_2$ . Observemos que

$$\begin{cases} \omega_t = (u_1)_t - (u_2)_t = \alpha^2(u_1)_{xx} - \alpha^2(u_2)_{xx} = \alpha^2\omega_{xx}, & (x, t) \in (0, l) \times (0, +\infty) \\ \omega(0, t) = u_1(0, t) - u_2(0, t) = 0 = u_1(l, t) - u_2(l, t) = \omega(l, t), & t \geq 0 \\ \omega(x, 0) = u_1(x, 0) - u_2(x, 0) = f(x) - f(x) = 0, & x \in [0, l]. \end{cases}$$

Assim,  $\omega$  satisfaz um PVIC auxiliar,

$$\begin{cases} \omega = \alpha^2\omega_{xx}, & (x, t) \in (0, l) \times (0, +\infty) \\ \omega(0, t) = \omega(l, t) = 0, & t \geq 0 \\ \omega(x, 0) = 0, & x \in [0, l]. \end{cases}$$

Utilizando a definição de integral de energia e a Proposição 5.2, podemos afirmar que, para  $t \geq 0$ ,

$$E_\omega(t) \leq E_\omega(0),$$

isto é,

$$\int_0^l (\omega(x, t))^2 dx \leq \int_0^l (\omega(x, 0))^2 dx = \int_0^l (0)^2 dx = 0,$$

para  $t \geq 0$ . Notemos que

$$0 \leq \int_0^l (\omega(x, t))^2 dx \leq 0.$$

Como  $\omega$  é contínua (pois herda a continuidade de  $u_1$  e  $u_2$ ) e

$$\int_0^l (\omega(x, t))^2 dx = 0,$$

segue que

$$\omega(x, t) = 0$$

para todo  $(x, t) \in [0, l] \times [0, +\infty)$ . Como consequência,

$$u_1(x, t) - u_2(x, t) = \omega(x, t) = 0.$$

Finalmente,

$$u_1(x, t) = u_2(x, t),$$

para todo  $(x, t) \in [0, l] \times [0, +\infty)$ . Portanto, a solução é única. ■

Utilizando conceitos de Integral de Energia, conseguimos, então, com o Teorema 5.3, garantir a unicidade de solução do problema (5.5). Na próxima seção, abordaremos mais um aspecto relevante sobre o problema (5.5), a dependência contínua.

## 5.3 DEPENDÊNCIA CONTÍNUA

Uma outra particularidade do problema (5.5) é a dependência contínua. Isto é, se tomarmos condições iniciais próximas, as soluções que geraremos estarão, de certa forma, próximas. É sobre isso que trataremos no próximo resultado. Antes, entretanto, será preciso que definamos  $\|\cdot\|_\infty$ .

**Definição 5.2.** Seja  $f \in C([0, l])$ . Então,

$$\|f\|_\infty = \max_{x \in [0, l]} |f(x)|.$$

**Teorema 5.4.** *Suponha que  $f, \tilde{f} \in C([0, l])$ , com  $f(0) = f(l) = 0$  e  $\tilde{f}(0) = \tilde{f}(l) = 0$ . Suponha que  $f$  e  $\tilde{f}$  sejam diferenciáveis em  $[0, l]$ , a menos de um conjunto finito de pontos, com  $f', \tilde{f}' \in SC([0, l])$  e considere que  $u, \tilde{u} \in C([0, l] \times [0, +\infty)) \cap C^\infty([0, l] \times (0, +\infty))$  de tal forma que*

$$\begin{cases} u_t = \alpha^2 u_{xx}, & (x, t) \in (0, l) \times (0, +\infty) \\ u(0, t) = u(l, t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x, 0) = f(x), & x \in [0, l] \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} \tilde{u}_t = \alpha^2 \tilde{u}_{xx}, & (x, t) \in (0, l) \times (0, +\infty) \\ \tilde{u}(0, t) = \tilde{u}(l, t) = 0, & t \geq 0 \\ \tilde{u}(x, 0) = \tilde{f}(x), & x \in [0, l]. \end{cases}$$

Então, existe  $M$  que pode depender de  $t$  mas que não depende de  $x$ , tal que

$$|u(x, t) - \tilde{u}(x, t)| \leq M \cdot \|f - \tilde{f}\|_\infty,$$

para todo  $(x, t) \in [0, l] \times [0, +\infty)$ .

*Demonstração.* Utilizando os Teoremas 5.1 e 5.3, podemos afirmar que

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{l} \right) \exp \left( -\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{l^2} t \right)$$

e

$$\tilde{u}(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{l} \right) \exp \left( -\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{l^2} t \right),$$

nas quais

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{l} \right) dx$$

e

$$c_n = \frac{2}{l} \int_0^l \tilde{f}(x) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{l} \right) dx.$$

Se  $(x, t) \in [0, l] \times [0, +\infty)$ ,

$$\begin{aligned} |u(x, t) - \tilde{u}(x, t)| &= \left| \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{l} \right) \exp \left( -\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{l^2} t \right) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{l} \right) \exp \left( -\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{l^2} t \right) \right| \\ &= \left| \sum_{n=1}^{+\infty} (b_n - c_n) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{l} \right) \exp \left( -\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{l^2} t \right) \right| \\ &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} |b_n - c_n| \left| \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{l} \right) \right| \exp \left( -\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{l^2} t \right) \end{aligned}$$

e, como  $|\operatorname{sen}(\alpha)| \leq 1$ ,

$$|u(x, t) - \tilde{u}(x, t)| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |b_n - c_n| \exp \left( -\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{l^2} t \right). \quad (5.22)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} |b_n - c_n| &= \left| \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{l} \right) dx - \frac{2}{l} \int_0^l \tilde{f}(x) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{l} \right) dx \right| \\ &\leq \frac{2}{l} \left| \int_0^l [f(x) - \tilde{f}(x)] \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{l} \right) dx \right| \\ &\leq \frac{2}{l} \int_0^l |f(x) - \tilde{f}(x)| \cdot \left| \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{l} \right) \right| dx \\ &\leq \frac{2}{l} \sup_{x \in [0, l]} |f(x) - \tilde{f}(x)| \int_0^l \left| \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{l} \right) \right| dx \\ &\leq \frac{2}{l} \sup_{x \in [0, l]} |f(x) - \tilde{f}(x)| \int_0^l dx \\ &\leq 2 \|f - \tilde{f}\|_\infty. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Logo, se  $n \in \mathbb{N}$ , de (5.22) e (5.23), temos que

$$|b_n - c_n| \leq 2\|f - \tilde{f}\|_\infty. \quad (5.24)$$

Daí, se  $(x, t) \in [0, l] \times [0, +\infty)$ , de (5.22) e (5.24), temos que

$$\begin{aligned} |u(x, t) - \tilde{u}(x, t)| &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} 2\|f - \tilde{f}\|_\infty \exp\left(-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{l^2} t\right) \\ &\leq 2\|f - \tilde{f}\|_\infty \sum_{n=1}^{+\infty} \exp\left(-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{l^2} t\right). \end{aligned}$$

Definamos

$$M := M(t) = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \exp\left(-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{l^2} t\right).$$

Pelo Teste da Integral, que pode ser encontrado na seção 11.3 de [7], na página 663, podemos concluir que  $M$  é convergente.

Se  $(x, t) \in [0, l] \times [0, +\infty)$ , então

$$|u(x, t) - \tilde{u}(x, t)| \leq M\|f - \tilde{f}\|_\infty,$$

como queríamos demonstrar. ■

**Teorema 5.5.** *Consideremos  $f(x)$  e  $u(x, t)$  como no enunciado do Teorema 5.1, de forma que o problema*

$$\begin{cases} u_t = \alpha^2 u_{xx}, & (x, t) \in (0, l) \times (0, +\infty) \\ u(0, t) = u(l, t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x, 0) = f(x), & x \in [0, l] \end{cases}$$

seja solucionado. Fixemos  $t \in [0, +\infty)$  e seja  $\varepsilon > 0$ . Então, existe  $\delta > 0$  tal que se

$$\|f - \tilde{f}\|_\infty < \delta,$$

com  $\tilde{f}$  satisfazendo as mesmas condições impostas a  $f$ , tem-se que

$$|u(x, t) - \tilde{u}(x, t)| < \varepsilon$$

para todo  $(x, t) \in [0, l] \times [0, +\infty)$ , lembrando que  $\tilde{u}$  é a solução do problema de valor inicial e de contorno

$$\begin{cases} \tilde{u}_t = \alpha^2 \tilde{u}_{xx}, & (x, t) \in (0, l) \times (0, +\infty) \\ \tilde{u}(0, t) = \tilde{u}(l, t) = 0, & t \geq 0 \\ \tilde{u}(x, 0) = \tilde{f}(x), & x \in [0, l]. \end{cases}$$

*Demonstração.* Fixemos  $t \geq 0$ . Seja  $\varepsilon > 0$ . Definamos

$$\delta = \frac{\varepsilon}{3M},$$

no qual

$$M := M(t) = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \exp\left(-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{l^2} t\right).$$

Notemos que, se  $f$  e  $\tilde{f}$  forem tais que  $f(0) = 0 = f(l)$ ,  $\tilde{f}(0) = 0 = \tilde{f}(l)$  e

$$\|f - \tilde{f}\|_{\infty} < \delta,$$

então, dado  $x \in [0, l]$ , pelo Teorema 5.4

$$\begin{aligned} |u(x, t) - \tilde{u}(x, t)| &\leq M \|f - \tilde{f}\|_{\infty} \\ &< M \cdot \delta \\ &\leq M \cdot \frac{\varepsilon}{3M} \\ &\leq \frac{1}{3} \varepsilon \\ &< \varepsilon, \end{aligned}$$

como desejado. ■

Notemos que a teoria que foi desenvolvida em relação ao problema da equação do calor dadas certas condições de fronteira e de valor inicial vale exclusivamente para essa configuração de problema. Se mudarmos as condições, estaremos lidando com um outro problema associado à equação do calor. Para esse eventual novo problema, seria necessária outra análise, e essa poderia não ser necessariamente similar ao que discutimos até então.

Na próxima seção, enunciaremos um problema envolvendo a condução do calor em que as condições de contorno não serão homogêneas. Veremos que a abordagem reflete outros aspectos.

## 5.4 PROBLEMA DA CONDUÇÃO DO CALOR COM CONDIÇÕES NÃO-HOMOGÊNEAS

Nesta seção, discutiremos um problema que envolve a equação do calor diferente do abordado em (5.5), pois possui condições de fronteira não homogêneas:

$$\begin{cases} u_t = \alpha^2 u_{xx}, (x, t) \in (0, l) \times (0, +\infty) \\ u(0, t) = T_1, u(l, t) = T_2, t \geq 0 \\ u(x, 0) = f(x), x \in [0, l], \end{cases} \quad (5.25)$$

no qual  $T_1$  e  $T_2$  são constantes e  $f$  deve satisfazer a condição de compatibilidade

$$f(0) = T_1, f(l) = T_2. \quad (5.26)$$

Notemos que, se  $T_1 = T_2 = 0$ , teremos exatamente o mesmo PVIC abordado ao longo do trabalho. O PVIC apresentado em (5.25) é mais geral que o PVIC trabalhado até então.

Pelo fato de termos condições de contorno não homogêneas (não nulas), não será possível aplicarmos diretamente o método da separação de variáveis no problema (5.25) e, portanto, não se aplica o Teorema 5.1.

A partir dessas considerações e dos Teoremas 5.1 e 5.3, podemos enunciar o seguinte resultado:

**Teorema 5.6.** *Se  $f \in C([0, l])$  com  $f(0) = T_1$  e  $f(l) = T_2$  for diferenciável em  $(0, l)$  a menos de um número finito de pontos com  $f' \in SC([0, l])$ , então a única solução de (5.25) em  $C([0, l] \times [0, +\infty)) \cap C^2([0, l] \times (0, +\infty))$  será dada por*

$$u(x, t) = (T_2 - T_1) \frac{x}{l} + T_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{l} \right) \exp \left( -\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{l^2} t \right) \quad (5.27)$$

na qual

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l \left( f(y) - \frac{T_2 - T_1}{l} y - T_1 \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi y}{l} \right) dy, n \in \mathbb{N}. \quad (5.28)$$

Além disso, a série em (5.27) converge uniformemente em  $\mathbb{R} \times [0, +\infty)$  e  $u \in C^\infty([0, l] \times (0, +\infty))$ .

*Demonstração.* Consideremos o problema de EDO de segunda ordem

$$\begin{cases} v''(x) = 0, & x \in (0, l), \\ v(0) = T_1, & v(l) = T_2, \end{cases}$$

que tem

$$v(x) = (T_2 - T_1)\frac{x}{l} + T_1, \quad x \in [0, l],$$

como uma solução. Definamos a função auxiliar

$$h(x) = f(x) - v(x), \quad x \in [0, l].$$

Notemos que  $v$  tem derivada contínua. Devido às hipóteses assumidas para  $f$ , podemos afirmar que a condição inicial  $h$  atende à regularidade exigida no Teorema 5.1. Podemos garantir que  $h$  satisfaz a condição de compatibilidade, isto é,  $h(0) = 0 = h(l)$ . De fato,

$$h(0) = f(0) - v(0) = T_1 - T_1 = 0$$

e

$$h(l) = f(l) - v(l) = T_2 - T_2 = 0.$$

Pelo Teorema 5.1,

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \exp\left(-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{l^2} t\right), \quad x \in [0, l], t \geq 0, \quad (5.29)$$

na qual

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l h(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx, \quad n \in \mathbb{N},$$

satisfaz

$$\begin{cases} w_t = \alpha^2 w_{xx}, & (x, t) \in (0, l) \times (0, +\infty) \\ w(0, t) = 0 = w(l, t), & t \geq 0, \\ w(x, 0) = h(x) = f(x) - v(x), & x \in [0, l]. \end{cases}$$

Ademais, a série (5.29) converge uniformemente em  $[0, l] \times [0, +\infty)$  para uma função  $w \in C([0, l] \times [0, +\infty)) \cap C^\infty([0, l] \times (0, +\infty))$ .

Definamos, conforme (5.27),

$$\begin{aligned} u(x, t) &= v(x) + w(x, t) \\ &= (T_2 - T_1) \frac{x}{l} + T_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{l} \right) \exp \left( -\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{l^2} t \right). \end{aligned}$$

Percebamos que  $b_n$  atende a (5.28). Agora vejamos que (5.25) é satisfeito pela função  $u$ .

Sobre  $(0, l) \times (0, +\infty)$ , identificamos que

$$\begin{aligned} u_t &= v_t + w_t = 0 + \alpha^2 w_{xx} = \alpha^2 v'' + \alpha^2 w_{xx} \\ &= \alpha^2 (v'' + w_{xx}) = \alpha^2 (v_{xx} + w_{xx}) = \alpha^2 u_{xx}. \end{aligned}$$

Para  $t \geq 0$

$$u(0, t) = v(0) + w(0, t) = T_1 + 0 = T_1$$

e

$$u(l, t) = v(l) + w(l, t) = T_2 + 0 = T_2.$$

Para  $x \in [0, l]$ ,

$$u(x, 0) = v(x) + w(x, 0) = v(x) + [f(x) - v(x)] = f(x).$$

Utilizando a mesma estratégia empregada na prova do Teorema 5.3, pode-se mostrar que, dadas as hipóteses do Teorema 5.6, a função  $u$ , apresentada em (5.27), é a única solução do PVIC (5.25). ■

Percebemos, então, que podemos utilizar alguns resultados que provamos anteriormente e, a partir de certas adaptações, conseguimos garantir a validade do Teorema 5.6. Isso amplia o leque de problemas que envolvem a Equação do Calor que admitem soluções conhecidas.



## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esse Trabalho de Conclusão de Curso foi elaborado a partir de estudos estruturados ao longo de quase dois anos de Iniciação Científica voluntária.

No decorrer do trabalho, analisamos o problema clássico da equação do calor. A partir do princípio da superposição e do método da separação de variáveis, fomos levados à definição das Séries de Fourier. Essa teoria construída, sobretudo no Capítulo 3, foi extremamente relevante para que pudéssemos conduzir um estudo teórico, formal e consistente acerca de Séries de Fourier e uma de suas muitas aplicações.

Demos continuidade aos nossos estudos relativos às Séries de Fourier, principalmente no que se refere às questões de convergência. Nesse processo, nos deparamos com alguns desafios. Um desses desafios foi estudar propriedades distintas relativas às funções seccionalmente contínuas para que pudéssemos demonstrar, com o devido rigor, os teoremas de convergências pontual e uniforme de Séries de Fourier. Além disso, após estudarmos essas convergências, foi necessário que nos atentássemos às diferenças entre a convergência pontual e uniforme, e mais do que isso, que entendéssemos o porquê da convergência uniforme ser tão relevante para o prosseguimento de nossos estudos. Todos os resultados relativos ao processo descrito neste parágrafo encontram-se detalhados, majoritariamente, no Capítulo 4.

No Capítulo 5, enfatizamos o que entendemos como a principal parte de nosso estudo: provar a existência de uma única solução para um problema de valor inicial e de contorno (PVIC) associado à equação do calor. Levando em consideração nossa principal referência, [4], adentramos nos teoremas que embasam essa teoria. Encontramos alguns obstáculos no processo, principalmente pelo fato das demonstrações realizadas em [4] serem essencialmente breves e desprovidas de detalhes. Assim sendo, estudamos as demonstrações desses teoremas e, além disso, mais alguns resultados relativos à de-

pendência contínua de soluções, o que parece ser algo de bastante interesse na área das equações diferenciais parciais (EDPs).

Podemos afirmar que o processo realizado de detalhar as demonstrações presentes no Capítulo 5 foi árduo, mas extremamente gratificante. Cada processo foi feito com cautela e com muito entusiasmo, principalmente quando víamos os resultados demonstrados e o trabalho tomando forma.

Por fim, ressaltamos também o desafio de trabalhar com as EDPs, em específico, com a EDP do calor juntamente com seu PVIC. Toda a teoria desenvolvida e justificada ao longo de nosso trabalho vale, especificamente, para um caso muito particular de PVIC. Caso façamos mudanças nas condições iniciais ou de contorno, como visto na Seção 5.4, a metodologia utilizada para garantir a existência e uma eventual unicidade de solução para o problema poderá não ser necessariamente a mesma e, eventualmente, requererá estratégias não imaginadas.

Para estudos futuros, nosso interesse estaria pautado em explorar o Problema da Equação do Calor na barra infinita, ao qual seria necessário explorarmos a definição e propriedades da Transformada de Fourier. Além disso, o estudo relativo às outras classes de EDPs mencionadas ao longo do trabalho, como a Equação da Onda e a Equação de Laplace, também seria uma opção futura de continuidade para esse trabalho. Por fim, há a possibilidade de entender como lidar com a Equação do Calor em âmbito  $n$ -dimensional.

## REFERÊNCIAS

- [1] BOYER, C. B.; MERZBACH, U.C. **História da Matemática**. São Paulo: Blucher, 2012.
- [2] FIGUEIREDO, Djairo Guedes; NEVES, Aloisio Freiria. **Equações Diferenciais Aplicadas**. 3. ed. Rio de Janeiro: Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, IMPA, (Coleção Matemática Universitária), 2015.
- [3] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um Curso de Cálculo**, Volume 1. 5. ed. Rio de Janeiro: Ltc, 2001.
- [4] IÓRIO, Valéria de Magalhães. **EDP: Um Curso de Graduação**. Coleção Matemática Universitária: Instituto de Matemática Pura e Aplicada. Rio de Janeiro, 2010.
- [5] LIMA, Elon Lages. **Análise Real: Funções de Uma Variável**. 12. ed. Rio de Janeiro: Impa, 2016.
- [6] SODRÉ, Ulysses. **Notas de Séries de Fourier**. Notas de aula, UEL, 2003.
- [7] STEWART, James. **Cálculo: volume 2**. 8<sup>a</sup> ed. SÃO PAULO: Cengage Learning, 2016.
- [8] ZILL, Dennis G. **Equações diferenciais com aplicações em modelagem**: 9<sup>a</sup> ed. São Paulo: Cengage Learning, 2016.