



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO TECNOLÓGICO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

Rodrigo Vaz Pina Cabral Silva

Aplicação de *Analytical Target Cascading* para solução de problemas de *Unit Commitment* hidrotérmico

Florianópolis
2022

Rodrigo Vaz Pina Cabral Silva

Aplicação de *Analytical Target Cascading* para solução de problemas de *Unit Commitment* hidrotérmico

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.
Orientador: Prof. Erlon Cristian Finardi, Dr.

Florianópolis
2022

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Silva, Rodrigo Vaz Pina Cabral

Aplicação de Analytical Target Cascading para solução de problemas de Unit Commitment hidrotérmico / Rodrigo Vaz Pina Cabral Silva ; orientador, Erlon Cristian Finardi , 2022.

103 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Florianópolis, 2022.

Inclui referências.

1. Engenharia Elétrica. 2. Unit Commitment. 3. Sistemas Hidrotérmicos. 4. Analytical Target Cascading. 5. Alternating Direction Method of Multipliers. I. , Erlon Cristian Finardi. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica. III. Título.

Rodrigo Vaz Pina Cabral Silva

Aplicação de *Analytical Target Cascading* para solução de problemas de *Unit Commitment* hidrotérmico

O presente trabalho em nível de Mestrado foi avaliado e aprovado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. Murilo Reolon Scuzziato, Dr.
Instituto Federal De Educação, Ciência e Tecnologia de Santa Catarina

Prof. Antonio Felipe da Cunha de Aquino, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Mauro Augusto da Rosa, Ph.D (Suplente)
Universidade Federal de Santa Catarina

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Prof. Telles Brunelli Lazzarin, Dr.
Coordenador do Programa

Prof. Erlon Cristian Finardi, Dr.
Orientador

Florianópolis, 01 de Setembro de 2022.

Este trabalho é dedicado aos meus colegas de classe,
amigos e aos meus queridos pais.

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus amigos de longa data Igor Empinotti Filho, Lucas Hajiro, Victor Dutra, Stefano Colucci, Larissa Machado, Thainá Zeredo, Nicolle De Souza, Ana Carolina e Cyntia Bastos pelos anos de amizade, longas conversas (recheadas de interrupções) e confraternizações no eterno Cleitinho.

Agradeço também aos colegas e amigos da faculdade pela parceria e amizade: Breno da Silva, Gabriel Rosa, André Macagnan, Maicon Matheus Lehmkuhl, César Slongo, Carlos Ehmke, Pedro Hohendorff, Gustavo Corrêa e Edilberto Costa.

Aos colegas da pós graduação: Fábio Mantelli, Lucas Fritzen, Clayrton Henrique, Gabriel Bolacell, Pedro César Cordeiro, Valmor Zimmer, Jyvago Castello, Samir Fernandes, Guilherme Matiussi e Gilseu Muhlen, pela amizade e ajuda nesta trajetória. Gostaria de agradecer especialmente aos meus amigos Kenny Vinente dos Santos e Bruno Colonetti por todas as discussões sobre o tema de otimização, pelo apoio e grande amizade.

Agradeço aos meus familiares pelo amor, torcida e incentivo: meus pais Maria Henriqueta Vaz de Pina Cabral Silva e Augusto Pereira da Silva, ao meu irmão Rui Pedro Pina Cabral Silva e minha irmã Teresa Sofia Pina Cabral Silva, e aos meus tios Adolfo Maria Vaz Pina Cabral e Maria Odete Chaves da Silva. Tenho eterna gratidão também aos meus animais Rambo, Mimi, Pepper e Fofó por serem companheiros inestimáveis.

Agradeço especialmente a minha companheira, Mariana Sejanos Rodrigues, pelo carinho, apoio e paciência incondicionais durante todos estes anos.

Agradeço ao meu orientador, professor Erlon Cristian Finardi, pela atenção, sabedoria e paciência, fundamentais para a conclusão deste trabalho. Sou muito grato pelas oportunidades propiciadas e por partilhar seu conhecimento durante estes anos.

Aos professores do LabPlan Ildemar Cassana Decker, Diego Issicaba, Erlon Cristian Finardi, Antônio Felipe da Cunha de Aquino e Mauro Augusto da Rosa, por todas as oportunidades propiciadas, pela atenção nas aulas e pela troca de conhecimento e conversas durante os anos.

Agradeço ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica e à Universidade Federal de Santa Catarina por terem proporcionado a oportunidade de realização de minha pós-graduação.

Agradeço ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo apoio financeiro durante a pós-graduação.

Por fim, agradeço a todos que direta ou indiretamente tornaram esse trabalho possível.

*"He who wonders discovers that this in itself is wonder."
(M.C Escher)*

RESUMO

O trabalho utiliza a técnica *Analytical Target Cascading (ATC)* com *Alternating Direction Method of Multipliers (ADMM)* para resolver o problema do *unit commitment* de sistemas hidrotérmicos (UCHT). O ATC, comumente empregado em projetos de sistemas multiníveis, permite que um problema maior seja dividido em subproblemas menos complexos de maior facilidade de resolução. No caso do UCHT, o ATC é usado para obter um subproblema mestre que coordena três outros subproblemas relacionados com as decisões ligadas à operação das usinas termelétricas, das usinas hidrelétricas e do sistema de transmissão. Os resultados obtidos aplicando o ATC com ADMM são comparados com os resultados da solução direta do UCHT via modelo único de Programação Linear Inteira-Mista, analisando-se sua resiliência para variações a diferentes dados de entrada do problema. Além disso, é analisada a importância da escolha de vários parâmetros empregados no ADMM e a importância da escolha de valores iniciais que são utilizados no processo iterativo. Para as análises, se utiliza um sistema de 24 barras com cinco usinas termoelétricas, 14 usinas hidroelétricas e 38 linhas de transmissão, o qual é baseado no subsistema sudeste do Sistema Interligado Nacional.

Palavras-chave: *Unit Commitment. Sistemas Hidrotérmicos. Analytical Target Cascading. Alternating Direction Method of Multipliers.*

ABSTRACT

This work uses Analytical Target Cascading (ATC) with Alternating Direction Method of Multipliers (ADMM) to solve the Hydrothermal Unit Commitment (HTUC) problem. This approach, usually utilized in multilevel systems projects, allows a bigger problem to be broken down in less complex subproblems that are easier to solve. Here, the ATC is applied to the HTUC problem in order to obtain a master subproblem, responsible for coordinating three other subproblems related to the decisions on operating the thermal plants, hydrological plants and, the operation of the transmission system. The results obtained by applying the ATC with ADMM are compared to the direct solution of the HTUC modeled as an unique mixed integer linear program and an analysis is presented related to the resiliency for changes in input data like load and availability of the plants. Furthermore, we study the significance of the parameters necessary for the ADMM and the importance of the initial values used as base for the interactive algorithm. For all analyses, a 24-bus system based in the southeastern SIN subsystem composed of 38 transmission lines with 5 thermal and 14 hydrological power plants is used for the HTUC problem.

Keywords: Unit Commitment. Hydrothermal Power Systems. Analytical Target Cascading. Alternating Direction Method of Multipliers.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Capacidade instalada de geração por tipo de usina.	15
Figura 2 – Malha de transmissão do SIN	16
Figura 3 – Exemplo de <i>convex hull</i> de uma FPH	28
Figura 4 – Sistema-exemplo para o problema de <i>Unit commitment</i> hidrotérmico (UCHT)	32
Figura 5 – Representação de problema hierárquico do ATC	44
Figura 6 – Representação hierárquica do UCHT	45
Figura 7 – Representação esquemática simplificada do sistema de 24 barras utilizado.	61
Figura 8 – Despacho de geração e carga (PLIM)	64
Figura 9 – Geração da usina de Emborcação (PLIM)	64
Figura 10 – Geração da usina de Estreito (PLIM)	65
Figura 11 – Geração da usina de Furnas (PLIM)	65
Figura 12 – Fluxo de potência absoluto nas linhas de transmissão (PLIM)	66
Figura 13 – Despacho de geração e carga (ATC com ADMM)	67
Figura 14 – Fluxo de potência absoluto nas linhas de transmissão (ATC com ADMM)	68
Figura 15 – Geração da usina de Emborcação (ATC com ADMM)	68
Figura 16 – Geração da usina de Estreito (ATC com ADMM)	69
Figura 17 – Geração da usina de Furnas (ATC com ADMM)	69
Figura 18 – Custo do despacho e convergência por iteração (ATC com ADMM)	70
Figura 19 – Resultado do problema com a variação dos meta-parâmetros	71
Figura 20 – Déficit de carga com a variação dos meta-parâmetros	71
Figura 21 – Quantidade de iterações com a variação dos meta-parâmetros	72
Figura 22 – Despacho de geração e carga (PLIM - Variação da demanda)	74
Figura 23 – Fluxo de potência absoluto nas linhas de transmissão (ATC - Variação da demanda)	74
Figura 24 – Custo do despacho e convergência por iteração (ATC - Variação da demanda)	75
Figura 25 – Comparação do custo do despacho com a variação da demanda (Meta-parâmetros $\beta = 1.1, \gamma = 0.2$)	76
Figura 26 – Comparação do custo do despacho com a variação da demanda (Meta-parâmetros $\beta = 1.05, \gamma = 0.4$)	76
Figura 27 – Despacho de geração e carga sem a hidrelétrica Emborcação (ATC com ADMM)	77
Figura 28 – Custo do despacho e convergência por iteração sem a hidrelétrica Emborcação (ATC com ADMM)	78

Figura 29 – Despacho de geração e carga sem a hidrelétrica Itumbiara (ATC com ADMM)	78
Figura 30 – Custo do despacho e convergência por iteração sem a hidrelétrica Itumbiara (ATC com ADMM)	79
Figura 31 – Despacho de geração e carga (ATC com ADMM sem <i>startup</i>)	80
Figura 32 – Custo do despacho e convergência por iteração (ATC com ADMM sem <i>startup</i>)	81
Figura 33 – Detalhe do custo do despacho por iteração (ATC com ADMM sem <i>startup</i>)	81
Figura 34 – Carga total do sistema no horizonte de estudo	95

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Cadeia de modelos utilizado pelo ONS	18
Tabela 2 – Quantidade de variáveis e restrições por tipo de subproblema	52
Tabela 3 – Processo iterativo	59
Tabela 4 – Variação na demanda de cada barra	73
Tabela 5 – Custo Marginal de Operação (PLIM) [R\$]	82
Tabela 6 – Custo Marginal de Operação (ATC) [R\$]	84
Tabela A1 – Dados das usinas termelétricas	91
Tabela A2 – Dados de entrada das usinas termelétricas (cont.)	91
Tabela A3 – Dados de entrada das usinas hidrelétricas	92
Tabela A4 – Dados de entrada das usinas hidrelétricas (cont.)	92
Tabela A5 – Carga no horizonte de estudo por Barra	95
Tabela A6 – Carga no horizonte de estudo por Barra (cont.)	96
Tabela A7 – Carga no horizonte de estudo por Barra (cont.)	97
Tabela A8 – Carga no horizonte de estudo por Barra (cont.)	98
Tabela A9 – Dados das linhas de transmissão	99
Tabela A10 – Geração inicial das usinas termelétricas (em MW)	100
Tabela A11 – Geração inicial das usinas hidrelétricas (em MW)	101
Tabela A12 – Multiplicadores de Lagrange iniciais das usinas termelétricas para os subproblemas térmicos	102
Tabela A13 – Multiplicadores de Lagrange iniciais das usinas termelétricas para o subproblema de atendimento a demanda	103
Tabela A14 – Multiplicadores de Lagrange iniciais das usinas hidrelétricas para o subproblema hídrico	104
Tabela A15 – Multiplicadores de Lagrange iniciais das usinas hidrelétricas para o subproblema de atendimento a demanda	105

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ADMM	<i>Alternating Direction Method of Multipliers</i>
ANEEL	Agência Nacional de Energia Elétrica
ATC	<i>Analytical Target Cascading</i>
CMO	Custo Marginal de Operação
CP	<i>Cutting planes</i>
CVU	Custo Variável Unitário
DB	Decomposição de Benders
FCF	Função de custo futuro
FPH	Função de produtividade hidroelétrica
GW	Gigawatt
HUC	<i>Hydro unit commitment</i>
LA	Lagrangeano aumentado
MW	Megawatt
MWh	Megawatt-hora
ONS	Operador Nacional do Sistema Elétrico
PL	Programação Linear
PLIM	Programação linear inteira mista
RL	Relaxação lagrangeana
SIN	Sistema Interligado Nacional
UC	<i>Unit commitment</i>
UCHT	<i>Unit commitment</i> hidrotérmico
VS	<i>Variable splitting</i>

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	15
1.1	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	19
1.2	OBJETIVOS	21
1.3	ESTRUTURA DO TRABALHO	22
2	MODELAGEM E FORMULAÇÃO DO PROBLEMA	23
2.1	MODELAGEM DE UM SISTEMA HIDROTÉRMICO APLICADO À PROGRAMAÇÃO DIÁRIA DA OPERAÇÃO	23
2.1.1	Usinas termelétricas	23
2.1.2	Usinas hidrelétricas	26
2.1.3	Equações da Rede Elétrica	29
2.2	MODELAGEM DO PROBLEMA	30
3	ESTRATÉGIAS DE SOLUÇÃO	35
3.1	<i>VARIABLE SPLITTING</i>	36
3.2	LAGRANGIANO AUMENTADO (LA)	37
3.2.1	Forma primal e dual de um problema de otimização	37
3.2.2	Problema Primal Relaxado	39
3.2.3	Lagrangiano Aumentado	40
3.3	APLICAÇÃO DO ADMM ESTENDIDO	41
3.4	APLICAÇÃO DO LAGRANGIANO AUMENTADO PARA SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE UCHT COM ADMM	43
3.4.1	Aplicação de <i>variable splitting</i> no UCHT	44
3.4.2	Relaxação das restrições de consistência do UCHT com VS	46
3.4.3	Decomposição do UCHT em subproblemas	49
3.4.3.1	Formulação do subproblema mestre	50
3.4.3.2	Formulação dos subproblemas térmicos	50
3.4.3.3	Formulação do subproblema hídrico	51
3.4.3.4	Formulação do subproblema de atendimento à demanda	51
3.4.4	Análise da quantidade de restrições e variáveis	52
3.4.5	Atualização dos parâmetros de penalidade	53
3.4.6	Algoritmo do ATC com ADMM	54
3.4.6.1	Critério de convergência do algoritmo	55
3.4.6.2	Descrição do Algoritmo	55
3.4.6.3	Exemplo de aplicação do algoritmo	56
4	APLICAÇÃO PRÁTICA DO ATC COM ADMM PARA SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE UCHT	60
4.1	SISTEMA TESTE DE 24 BARRAS	60
4.2	ESCOLHA DOS PONTOS DE PARTIDA	60

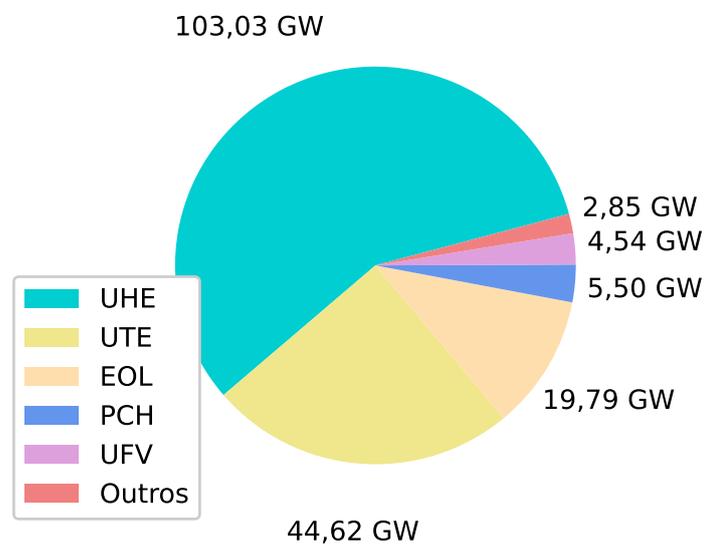
4.3	SOLUÇÃO DO PROBLEMA VIA PLIM ÚNICO	63
4.4	SOLUÇÃO ATRAVÉS DO ATC COM ADMM	66
4.5	ANÁLISE DE SENSIBILIDADE DOS PARÂMETROS	69
4.6	ANÁLISE DE SENSIBILIDADE A VARIAÇÕES NOS DADOS DE EN- TRADA	72
4.6.1	Sensibilidade a variações de demanda pontuais no sistema . . .	72
4.6.2	Sensibilidade a variações de demanda uniformes no sistema . .	73
4.6.3	Sensibilidade à desconexão de usinas	75
4.7	ANÁLISE DE SENSIBILIDADE AOS PONTOS DE PARTIDA	78
4.8	ANÁLISE DO PREÇO <i>SPOT</i> DA ENERGIA ELÉTRICA	80
5	CONCLUSÕES E SUGESTÕES DE TRABALHOS FUTUROS . . .	85
	REFERÊNCIAS	87
	APÊNDICE A – DADOS DAS USINAS TERMELÉTRICAS DO SIS- TEMA TESTE	91
	APÊNDICE B – DADOS DAS USINAS HIDRELÉTRICAS DO SIS- TEMA TESTE	92
	APÊNDICE C – DADOS DE ATENDIMENTO A DEMANDA DO SIS- TEMA TESTE	94
	APÊNDICE D – VALORES INICIAIS DE GERAÇÃO E DOS MULTI- PLICADORES DE LAGRANGE	100

1 INTRODUÇÃO

O Brasil, como a oitava maior economia e o sétimo país mais populoso do mundo (CIA, 2022), depende do bom funcionamento do seu sistema elétrico para suprir as necessidades da população e da indústria. Deste modo, faz-se uso de um sistema eletro-energético de grande porte com uma matriz energética variada para não sofrer com faltas de recursos (naturais, no caso das usinas hidrelétricas, e combustível, no caso das termelétricas) e com capacidade de atender a demanda de maneira econômica e confiável.

O Sistema Interligado Nacional (SIN) atualmente possui mais de 181 Gigawatt (GW) de capacidade instalada de geração, sendo a matriz dividida principalmente entre usinas hidrelétricas (UHE: 57,15%), termelétricas (UTE: 24,75%), eólicas (EOL: 10,98%), pequenas centrais hidrelétricas (PCH: 3,05%) e usinas fotovoltaicas (UFV: 2,49%). Além disso, existem mais 14,5 GW de capacidade em fase de construção que devem entrar nos próximos anos para reforçar a matriz energética atual (ANEEL, 2021). A Figura 1 mostra a representação da matriz energética presente no SIN por tipo de empreendimento de geração.

Figura 1 – Capacidade instalada de geração por tipo de usina.



Fonte: SIGA - ANEEL (2021).

Além da geração, a transmissão de energia é parte fundamental e seu planejamento é de extrema importância para que toda a geração consiga ser escoada para os consumidores, sejam eles grandes pólos industriais ou centros populacionais. Por conta das dimensões continentais do território nacional e do fato dos pólos de geração serem tipicamente afastados das áreas habitadas, o Brasil, em 2020, possuía 147 mil

quilômetros de linhas de transmissão que constituem uma malha que abrange todo o país (EPE, 2020). Na Figura 2, tem-se a ilustração da malha de transmissão do SIN.

Figura 2 – Malha de transmissão do SIN



Fonte: Adaptado de SINDAT - ONS (2021).

Para o atendimento à carga, é necessário que as usinas (e, por consequência, as unidades geradoras) sejam despachadas apropriadamente, de maneira que a geração seja igual à demanda. Por conta da inviabilidade de realizar a previsão da demanda instantânea, a programação da operação é realizada através de curvas históricas e previsões com horizontes e resoluções distintos, enquanto que o casamento da geração e demanda em tempo real é realizado através de sistemas de controle (WOOD; WOLLENBERG; B., 2014). No Brasil, o órgão responsável pelo despacho da geração é o Operador Nacional do Sistema Elétrico (ONS), uma entidade privada sem fins lucrativos que está sob fiscalização e regulação da Agência Nacional de Energia Elétrica (ANEEL).

Para realizar efetivamente o planejamento da operação do SIN, o ONS divide esta tarefa em três problemas com horizontes distintos: médio prazo, curto prazo, e a programação diária da operação. Uma visão geral destes problemas estão descritos a

seguir:

- a) Horizonte de médio prazo: o modelo utilizado para realizar o despacho de médio prazo é o NEWAVE (CEPEL, 2020b), um modelo estocástico que realiza a simulação em um horizonte de 5 anos com agregação de usinas hidrelétricas em reservatórios equivalentes de energia, com a geração de cenários de afluência por modelo auto regressivo. O principal resultado do modelo é a Função de custo futuro (FCF) que representa o valor d'água no horizonte de médio prazo.
- b) Horizonte de curto prazo: o DECOMP (CEPEL, 2020a) é o modelo estocástico que realiza o despacho de curto prazo. Este modelo utiliza um horizonte de dois meses, sendo o primeiro mês com resolução semanal. Neste modelo, as usinas hidrelétricas são representadas individualmente e a estocasticidade das afluências é representada por uma árvore de cenários. O DECOMP fornece a FCF que valora a água no final do horizonte do modelo da programação diária.
- c) Programação diária da operação: neste horizonte, o modelo que o ONS utiliza para fazer o despacho é o DESSEM (CEPEL, 2021). As unidades geradoras das usinas termelétricas são representadas de maneira individualizada e as afluências são consideradas determinísticas. As usinas hidrelétricas, por sua vez, possuem representação similar àquela empregada pelo modelo DECOMP. Os principais dados de saída deste modelo são os despachos das unidades geradoras, que o ONS utilizará para realizar a operação no dia seguinte, e o custo da operação.

Tipicamente, o longo¹ (planejamento da expansão, tipicamente com horizonte de planejamento de vários anos ou décadas), médio e curto prazos sofrem maior influência das características energéticas, enquanto que a programação diária sofre maior influência das características elétricas (PARVEZ *et al.*, 2019), (FOSSO; BELS-NES, 2005). Os fatores que motivam esta diferença são a grande dificuldade em prever fenômenos naturais e a afluência de rios, enquanto que modelos de curto prazo costumam ter um detalhamento maior e imprecisões na descrição das características elétricas acabam impactando negativamente a precisão dos mesmos.

Percebe-se que à medida que os horizontes de tempo vão se estreitando e a resolução aumentando, há uma diminuição da influência de características estocásticas de dinâmica lenta, e.g., as afluências, no problema. Em contrapartida, há maior necessidade de precisão na modelagem das unidades geradoras para se conseguir obter um despacho o mais próximo possível do que será realizado na operação em tempo real

¹ Não representado na Tabela 1.

(MO *et al.*, 2002)². Em todos estes horizontes de planejamento, os modelos utilizados pelo ONS têm como objetivo minimizar o custo total da operação. A Tabela 1 apresenta um resumo esquematizado dos diferentes horizontes e os modelos empregados pelo ONS (ONS, 2020).

Tabela 1 – Cadeia de modelos utilizado pelo ONS

	Médio Prazo	Curto Prazo	Programação diária
Horizonte	5 Anos	2 Meses	1 Semana
Resolução	Mensal	Semanal / Mensal	$\frac{1}{2}$, 1 e blocos de horas
Modelo	NEWAVE	DECOMP	DESSEM
Afluência	Estocástica	Estocástica	Determinística
Modelagem Hidro	Reservatório equivalente	Usina individualizada	Usina individualizada

Em relação ao problema da programação diária da operação, diversos estudos podem ser encontrados na literatura. Quando este envolve sistemas hidrotérmicos, o mesmo é denominado por UCHT, podendo ser encontradas diversas modelagens e técnicas de resolução aplicáveis, cada uma com vantagens e desvantagens (THAEER HAMMID *et al.*, 2020). De maneira simplificada, o problema de otimização do UCHT, foco deste trabalho, envolve o despacho de um sistema de geração constituído de unidades termelétricas e hidrelétricas, determinístico, com modelagem da rede de transmissão detalhada e resolução temporal (duração dos estágios de tempo) horária.

Entre os principais desafios destacados pela literatura (BELLONI *et al.*, 2003) relacionados à modelagem do UCHT aplicado ao caso brasileiro, destacam-se os seguintes:

- Dificuldade em incluir precisamente as funções de produção das unidades hidrelétricas;
- Bacias hidrográficas extensas e interconectadas, que podem possuir várias usinas hidrelétricas ao longo do percurso de seus rios;
- Grande diversidade nas restrições necessárias para a utilização de recursos hidrológicos e operacionais das usinas hídricas e térmicas.
- Uma base de geração hidráulica com reserva energética primariamente térmica, necessitando despachar usinas com alto custo de partida e diferentes restrições de rampa, *uptime* e *downtime*.

Por conta da complexidade inerente à modelagem, o UCHT é formulado como um problema de otimização não-linear inteiro misto (do inglês, MINLP). Particularmente

² Nota-se que existem características estocásticas que podem ter grande influência na programação diária da operação como, por exemplo, o despacho de usinas eólicas.

para o caso brasileiro, este modelo necessita de uma grande quantidade de variáveis e restrições para que sejam consideradas todas as particularidades da modelagem das unidades termelétricas e das funções de produção das unidades hidrelétricas, resultando em um problema de grande escala e difícil resolução (BELLONI *et al.*, 2003). As técnicas de solução foram evoluindo conforme o tempo e hoje existe uma grande gama de métodos que podem ser aplicados, como, por exemplo: Programação linear inteira mista (PLIM), Relaxação lagrangeana (RL), Decomposição de Benders (DB) e o Lagrangeano aumentado (LA). A seguir, uma breve revisão bibliográfica sobre métodos de solução é apresentada, ilustrando sua utilização com diferentes modelagens e técnicas auxiliares para obter resultados satisfatórios em diferentes sistemas e contextos.

1.1 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A literatura contém um vasto referencial teórico sobre o problema do UCHT abordado nesta dissertação. Muitos trabalhos foram desenvolvidos no decorrer dos anos com o fim de melhor definir a problemática do UCHT e aperfeiçoar as técnicas de resolução buscando melhorar o desempenho, tanto em termos computacionais quanto em termos da qualidade da solução. Devido a esses avanços, tornou-se possível a utilização de modelos que representam com maior fidelidade as características físicas do problema, inserindo um maior detalhamento na representação dos sistemas hidrotérmicos, além de um maior detalhamento na discretização temporal do problema. Como consequência, apesar do problema resultante ser mais complexo, as soluções obtidas estão mais próximas daquelas implementadas na operação em tempo real pelos operadores.

A técnica de *Variable splitting* (VS) foi utilizada no trabalho de (NILSSON; SJELV-GREN, 1997), em que os autores propõem a utilização de técnicas de análise de redes e programação dinâmica para a solução do despacho hídrico de curto prazo. Com o intuito de diminuir a complexidade do modelo utilizado, eles utilizam a RL como estratégia para decompor o problema original em subproblemas desacoplados espacialmente (separação das usinas em subproblemas distintos) e temporalmente (separação dos períodos do estudo em subproblemas). Para garantir que as características de rede não serão perdidas por conta da separação dos subproblemas, utiliza-se o VS para que seja possível a utilização de métodos de *network programming* para resolver os subproblemas associados.

Quanto à utilização do LA, em (AL-AGTASH; SU, 1998) é proposta uma metodologia que aplica essa técnica para resolver o UCHT. A formulação matemática do problema apresenta uma modelagem simplificada das unidades geradoras, tanto das usinas termelétricas, quanto hidrelétricas, e apresenta uma separação do modelo em subproblemas utilizando o LA. Por fim, na resolução dos subproblemas utilizam-se

heurísticas a partir do despacho econômico para a alocação das unidades geradoras e seus respectivos níveis de geração.

Em (REDONDO; CONEJO, 1999), é proposta uma estratégia de resolução da versão relaxada do UCHT através de uma variante do *Cutting planes* (CP), denominada de *dynamically constrained cutting plane*, em que a região viável de busca é alterada dinamicamente com base na progressão da solução do problema. Como a solução encontrada não é viável, os autores utilizam de heurísticas e da posterior solução de um despacho econômico para obter uma solução primal viável. Esta técnica é um avanço em relação às anteriores pois propõe a utilização de uma estratégia avançada para a resolução do problema, além do fato da alteração dinâmica da região de viabilidade garantir maior estabilidade para a convergência do algoritmo.

Em (BELLONI *et al.*, 2003), os autores propõem a utilização de um método de *bundle* para solução do problema de UCHT com uma modelagem detalhada do sistema hidrelétrico, incluindo uma representação linear por partes das funções de produção das usinas hidrelétricas. Para decompor o problema, utiliza-se a RL para garantir a separabilidade dos subproblemas e a utilização do LA para realizar a recuperação primal. A utilização de funções lineares por partes é um compromisso entre a representação fiel das funções polinomiais que representam a relação matemática entre a geração de energia e as variáveis de estado das hidrelétricas, e a simplificação utilizada na formulação do problema de otimização necessária para sua solução em um tempo computacional viável.

No artigo (FINARDI; SILVA, 2006), o *Hydro unit commitment* (HUC) é formulado utilizando um modelo não-linear para as funções de produção das usinas hidrelétricas, e o problema é dividido em subproblemas através da aplicação da RL, sendo estes divididos em três categorias: lineares, lineares inteiro-mistos, e não lineares. A resolução dos subproblemas lineares é feita através de pacotes de Programação Linear (PL), os modelos inteiro-mistos são resolvidos através da enumeração das possíveis soluções, e os subproblemas não-lineares tem sua solução obtida através da programação quadrática sequencial.

Em (TAKIGAWA; FINARDI; SILVA, 2010), os autores propõem a utilização da RL com *variable splitting*, permitindo a separabilidade do problema de otimização de interesse em subproblemas, e utilizam o método de *bundle* para resolver o problema de despacho hidrotérmico de curto prazo. Neste trabalho, as usinas hidrelétricas são modeladas individualmente (não utilizando uma modelagem por unidade geradora) e consideram restrições relativas aos limites operacionais. No trabalho, os autores não realizam a etapa de recuperação primal, mas sugerem que a mesma pode ser realizada através do princípio do problema auxiliar, baseado no LA.

Em (ALEMANY; MAGNAGO, 2015), o *Unit commitment* (UC) térmico é resolvido através da utilização da decomposição de Benders em um sistema com horizonte de

planejamento de 24 horas com discretização horária. O problema é modelado como um PLIM e utiliza uma formulação DC para a rede. Neste trabalho, os autores realizam um pre-processamento das restrições do problema de modo a gerar cortes iniciais para o algoritmo da decomposição de Benders e acelerar a convergência.

Fora do escopo da área de sistemas de energia, o artigo (TOSSERAMS *et al.*, 2006) propõe a utilização do LA para a otimização do *design* de sistemas hierárquicos multiníveis, no qual o sistema é modelado por diversos problemas distintos que podem depender dos problemas em um nível de hierarquia superior e ter dependência para problemas em um nível inferior, modelagem esta chamada de *Analytical Target Cascading* (ATC). Além da LA, os autores utilizam da técnica de *variable splitting* para realizar a separabilidade dos problemas e permitir sua resolução paralelizada. Dentre as estratégias propostas no trabalho, os autores aplicam o *Alternating Direction Method of Multipliers* (ADMM) com resultados satisfatórios na resolução dos problemas teste.

Muitos dos métodos descritos aqui não tiveram sua origem na literatura técnica de otimização de problemas de sistemas de energia, tendo sido empregados anteriormente para resolução de problemas de logística, pesquisa operacional, entre outros. Por conta da generalidade das técnicas e algoritmos propostos, e a similaridade estrutural encontrada nos problemas de otimização eletro-energéticos, é possível que as ferramentas de outras áreas de pesquisa sejam utilizadas com desempenho satisfatório.

1.2 OBJETIVOS

O objetivo geral deste trabalho é a aplicação da técnica de Lagrangiano aumentado para a resolução do problema da programação diária de um sistema hidrotérmico, formulado como um problema de programação linear inteira-mista, considerando restrições de rede elétrica e formulações lineares para a função de produção das hidrelétricas e *unit commitment* termelétrico.

De maneira específico, são objetivos deste trabalho:

- a) Implementar e resolver o problema de UCHT para um sistema de médio porte do caso brasileiro utilizando as seguintes formulações:
 - Formulação padrão (PLIM);
 - ATC utilizando ADMM;
- b) Analisar a complexidade dos modelos nos quesitos de quantidade de variáveis, restrições e sub-problemas resolvidos (quando aplicável).
- c) Analisar a sensibilidade do algoritmo proposto frente às variações nos meta-parâmetros da implementação.
- d) Analisar a sensibilidade do algoritmo proposto frente às variações nos dados de entrada do sistema teste.

- e) Analisar a sensibilidade do algoritmo proposto frente à necessidade de utilização técnicas de partida quente, ou seja, utilização de pontos de partida para a primeira iteração.

1.3 ESTRUTURA DO TRABALHO

O restante deste trabalho está dividido conforme descrito a seguir:

O capítulo 2 contém a formulação do problema do UCHT, introduzindo um sistema-exemplo para demonstração do problema, além da modelagem dos diversos elementos que compõem o sistema.

O capítulo 3 contém a descrição das técnicas de VS e LA utilizadas para a solução de problemas de otimização do tipo PLIM, em que se utiliza o ATC com ADMM para encontrar uma solução viável para o problema de otimização do UCHT, sem a necessidade de uma etapa de recuperação primal.

No capítulo 4, é apresentado o sistema teste que é utilizado nas implementações computacionais, os resultados obtidos para o problema de UCHT proposto e comparações das diferentes soluções encontradas, assim como contém uma breve discussão acerca da precisão e da complexidade dos métodos utilizados.

No capítulo 5 tem-se as conclusões deste trabalho assim como sugestões de trabalhos e desenvolvimentos futuros nos temas de programação diária da operação e outros temas correlatos.

2 MODELAGEM E FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Devido à grande quantidade de tecnologias, ainda é irreal o desenvolvimento de uma formulação que capture todas as peculiaridades de cada tipo de turbina, gerador, subestação, e linha de transmissão que pertence ao SIN. Essa formulação possuiria uma grande quantidade de variáveis (contínuas e inteiras) e restrições (algumas, não-lineares), tornando-a inexecutável dado a limitação de tempo computacional requerida para resolver o problema de programação diária da operação.

Considerando isso, é possível compreender a necessidade do desenvolvimento de modelos que consigam obter resultados coerentes com poucas variáveis e restrições. A maneira mais simples de diminuir a complexidade computacional dos problemas é introduzir simplificações nos modelos, conforme é detalhado a seguir.

2.1 MODELAGEM DE UM SISTEMA HIDROTÉRMICO APLICADO À PROGRAMAÇÃO DIÁRIA DA OPERAÇÃO

Existem diversas maneiras de realizar a modelagem dos vários componentes de um sistema hidrotérmico no contexto do problema de UCHT. Contudo, apesar das diferentes modelagens serem comparáveis em termo dos resultados obtidos, elas possuem características distintas que podem facilitar a resolução do problema: seja por que facilitam o *solver* no processo de otimização, ou por que permitem a utilização de diferentes técnicas para agilizar a resolução do problema. A seguir é apresentada uma modelagem tipicamente utilizada no problema de UCHT para as usinas termelétricas, hidrelétricas e dos outros elementos presentes no sistema (FINARDI; SILVA, 2006), (TAKIGAWA; FINARDI; SILVA, 2010), (BELLONI *et al.*, 2003).

2.1.1 Usinas termelétricas

As usinas termelétricas operam através do aquecimento de fluídos (usualmente, vapor d'água) ou combustão (por exemplo, gás natural) em alta pressão, que excitam a turbina da unidade geradora convertendo a energia cinética em energia elétrica. No caso de usinas a vapor, o aquecimento do fluído se dá por um processo exotérmico que pode ocorrer a partir da queima de combustíveis (carvão, gás natural, diesel, biomassa) ou de processos de fissão nuclear (usinas nucleares) (BREEZE, 2019). Em usinas com turbinas a combustão, a tecnologia mais eficiente realiza o processo exotérmico dentro da própria turbina, aumentando a eficiência energética e garantindo maior agilidade para o despacho da usina.

No problema de UCHT, parte da otimização do despacho envolve a tomada de decisão de quais unidades geradoras vão estar operantes em cada estágio de tempo, sendo que o modelo deve também escolher os estágios ótimos para desligar/acionar

os ativos de geração para obter a melhor resposta em termos de custo, respeitando as demais restrições impostas pelo modelo. A maneira mais usual de modelar este comportamento do estado das unidades termelétricas é através de três variáveis binárias que representam se a usina é despachada, desligada ou se já está operando no instante de tempo t , respectivamente. Esta modelagem é apresentada na Equação (1).

$$z_{it} - w_{it} = u_{it} - u_{it-1} \quad \forall i \in \Omega^{GT}, t \in \Omega^T \quad (1)$$

onde:

- Ω^{GT} é o conjunto de todas as unidades termelétricas;
- Ω^T é o conjunto de todos os instantes de tempo;
- z_{it} é uma variável binária que indica se a termelétrica i foi ligada no instante t ;
- u_{it} é uma variável binária que indica o estado da termelétrica i no instante t ;
- w_{it} é uma variável binária que indica se a termelétrica i foi desligada no instante t .

Apesar da literatura usualmente apresentar uma formulação do custo variável da operação de uma usina termelétrica como um polinômio de segundo grau (WOOD; WOLLENBERG; B., 2014), o ONS emprega uma formulação linear através do Custo Variável Unitário (CVU), cujo custo em reais (R\$) cobre os gastos e a remuneração da usina por cada Megawatt-hora (MWh) gerado, dado em R\$/MWh. Além do CVU, é comum modelar o custo de partida das usinas termelétricas (R\$), sendo este relacionado ao combustível necessário para colocar as mesmas em faixa operativa nominal e à depreciação dos componentes envolvidos na operação (SCHILL; PAHLE; GAMBARDELLA, 2016).

Neste trabalho, o custo de partida (ou *start-up cost*) é modelado como um valor constante. A parcela da função objetivo referente aos custos de despacho e partida das termelétricas é apresentada na Equação (2).

$$\sum_{i \in \Omega^{GT}} \sum_{t \in \Omega^T} (\mathbf{CP}_i z_{it} + \mathbf{CT}_i g_{it}) \quad (2)$$

onde:

- \mathbf{CP}_i é o custo de partida da usina termelétrica i [R\$];
- \mathbf{CT}_i é o CVU da usina termelétrica i [R\$/MWh];
- g_{it} é a geração da termelétrica i no instante t [MWh].

Uma alternativa a esta modelagem constante é a utilização de um custo linear que depende da quantidade de estágios que a usina está desligada, modelando a dinâmica térmica da caldeira (FINARDI, 2003).

Além do CVU e do custo de partida, existem restrições de rampa que modelam a dinâmica da caldeira, capacidade exotérmica dos combustíveis e limitações da turbina. Estas restrições limitam o incremento/decremento de geração em um único estágio de tempo (TALER *et al.*, 2015). Além da rampa, coloca-se uma restrição para que a usina tenha que estar no seu limite mínimo de geração no primeiro estágio após ser ligada, e no estágio anterior ao seu desligamento. Finalmente, existem restrições de geração mínima e máxima que limitam o quanto uma usina termelétrica pode gerar em cada instante de tempo. Estas restrições são apresentadas na Equação (3)

$$\begin{aligned}
 gt_{it} - gt_{it-1} &\leq \Delta_i u_{it-1} + \mathbf{GT}_i^{\min} z_{it} & \forall i \in \Omega^{GT}, t \in \Omega^T \\
 gt_{it-1} - gt_{it} &\leq \Delta_i u_{it} + \mathbf{GT}_i^{\min} w_{it} & \forall i \in \Omega^{GT}, t \in \Omega^T \\
 \mathbf{GT}_i^{\min} u_{it} &\leq gt_{it} \leq \mathbf{GT}_i^{\max} u_{it} & \forall i \in \Omega^{GT}, t \in \Omega^T
 \end{aligned} \tag{3}$$

onde:

- Δ_i é a rampa de geração da termelétricas i [MW];
- \mathbf{GT}_i^{\min} é a geração mínima da termelétricas i [MWh];
- \mathbf{GT}_i^{\max} é a geração máxima da termelétricas i [MWh].

Finalmente, existem restrições de *uptime* e *downtime* mínimos que a usina termelétrica deve permanecer ligada/desligada por questões estruturais da caldeira ou de outros componentes do sistema. Com base nisso, o conjunto de equações (4) representa a modelagem destes fatores:

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=t-T_i^{UP}+1}^t z_{in} &\leq u_{it} & \forall i \in \Omega^{GT}, t \in \Omega^T \\
 \sum_{n=t-T_i^{DOWN}+1}^T w_{in} &\leq 1 - u_{it} & \forall i \in \Omega^{GT}, t \in \Omega^T
 \end{aligned} \tag{4}$$

onde:

- \mathbf{T}_i^{UP} é o tempo mínimo de *uptime* da termelétricas i [h];
- \mathbf{T}_i^{DOWN} é o tempo mínimo de *downtime* da termelétricas i [h].

Tipicamente em turbinas movidas a vapor, por motivos de eficiência energética, possuem grandes caldeiras para otimizar a troca térmica do calor entre o processo exotérmico e o fluido sob pressão. Dada a grande inércia térmica, apresentam uma dinâmica lenta em relação a turbinas de combustão com ciclos de aquecimento e esfriamento mais longos, acarretando um compromisso entre maior flexibilidade no despacho (*hot/warm start* mais rápidos que *cold start*) e maior custo fixo de partida (manutenção e insumos) (TALER *et al.*, 2015).

2.1.2 Usinas hidrelétricas

No contexto do problema da programação diária da operação, é necessário considerar uma representação individualizada do reservatório de cada usina hidrelétrica, dado que as simplificações tipicamente utilizadas nos problemas de longo e médio prazo (bacias hidrográficas e reservatórios equivalentes de energia) são pobres em detalhes e diminuem consideravelmente a qualidade da solução encontrada pelo UCHT (BELLONI *et al.*, 2003).

Quanto a descrição da função de produção das unidades hidrelétricas, faz-se necessário uma análise quanto ao modelo que será utilizado pois é possível fazer uso desde uma modelagem mais simplificada com produtividade constante, até funções que consideram a variação de queda e vazão na produção de energia.

As restrições mais importantes para os reservatórios das usinas hidrelétricas são provenientes dos limites operacionais e do balanço hídrico, sendo este último baseado na conservação da massa d'água (FINARDI, 2003; TAKIGAWA; FINARDI; SILVA, 2010). As restrições de limite operacional muitas vezes estão relacionadas à defluência mínima por questões ambientais ou sociais (pertinente para a população que habita a região onde a usina se encontra instalada).

Neste trabalho, utiliza-se uma modelagem agregada das unidades geradoras das hidrelétricas e o tempo de viagem da água defluente das usinas a montante até o reservatório das usinas a jusante é considerado nulo. Assim, seguem as restrições do balanço hidráulico e dos limites operacionais das usinas hidrelétricas conforme a Equação (5):

$$\begin{aligned}
 v_{it} - v_{it-1} + \kappa \cdot [q_{it} + s_{it} - \sum_{j \in \Theta_i^{GH}} (q_{jt} + s_{jt})] &= \kappa \cdot y_{it} & \forall i \in \Omega^{GH}, t \in \Omega^T \\
 \mathbf{V}_i^{min} \leq v_{it} \leq \mathbf{V}_i^{max} & & \forall i \in \Omega^{GH}, t \in \Omega^T \\
 \mathbf{Q}_i^{min} \leq v_{it} \leq \mathbf{Q}_i^{max} & & \forall i \in \Omega^{GH}, t \in \Omega^T \\
 0 \leq s_{it} \leq \mathbf{S}_i^{max} & & \forall i \in \Omega^{GH}, t \in \Omega^T
 \end{aligned} \tag{5}$$

onde:

V_i^{min}	é o volume mínimo do reservatório da hidrelétrica i [hm^3];
V_i^{max}	é o volume máximo do reservatório da hidrelétrica i [hm^3];
Q_i^{min}	é o turbinamento mínimo da usina hidrelétrica i [m^3/s];
Q_i^{max}	é o turbinamento máximo da usina hidrelétrica i [m^3/s];
S_i^{max}	é o vertimento máximo da usina hidrelétrica i [m^3/s];
Ω^{GH}	é o conjunto de todas as usinas hidrelétricas
Θ_i^{GH}	é o conjunto de usinas hidrelétricas a montante da usina i ;
q_{it}	é a quantidade de água turbinada pela usina i no instante t [m^3/s];
v_{it}	é o volume no reservatório da usina i no instante t [hm^3];
s_{it}	é a quantidade de água vertida pela usina i no instante t [m^3/s];
y_{it}	é a afluência natural incidente no reservatório da usina i no instante t [m^3/s];
τ_j	é o tempo de viagem da água do reservatório j [h];
κ	é uma constante que converte m^3/s em hm^3/h .

Apesar de a água ser um recurso natural renovável e sem custo operativo direto, a política de utilização dos reservatórios pode implicar na necessidade do despacho de usinas termelétricas que tenham um CVU mais caro ou até déficit de energia caso o parque térmico e a reserva de geração hidráulica não consigam suprir a demanda em um determinado instante de tempo (STOLL *et al.*, 2017). Por conta deste potencial risco de déficit futuro ou do aumento considerável do custo da energia, os modelos de despacho hidrotérmico costumam empregar restrições adicionais que considerem a política de utilização da água no curto prazo (FINARDI, 2003). Neste trabalho, é utilizada uma restrição no volume final do último estágio de tempo, que deve ser igual ao volume inicial do reservatório, garantindo a manutenção do volume dos reservatórios para despachos futuros. Outra possibilidade seria a utilização de uma função recurso, ou FCF, que transforma a disponibilidade e utilização do recurso hídrico em expectativa do aumento do custo do despacho (FOSSO; GJELSVIK *et al.*, 1999). A restrição de manutenção do volume entre o primeiro e o último estágio do estudo é dada pela Equação (6), abaixo:

$$v_{iT^{max}} - V_i^0 = 0 \quad \forall i \in \Omega^{GH} \quad (6)$$

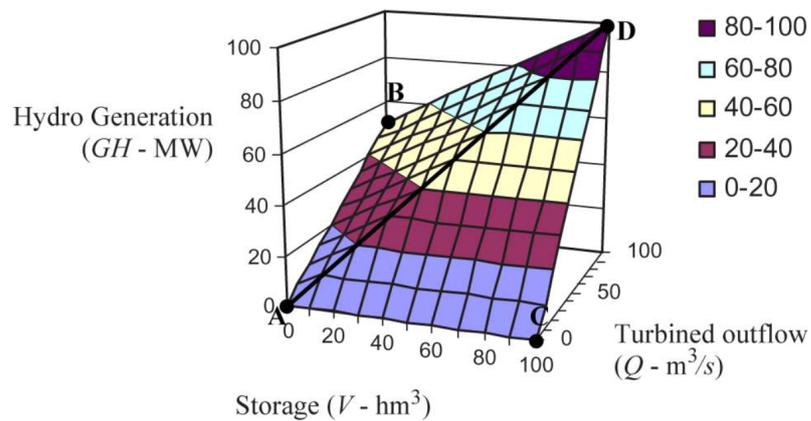
onde:

T^{max}	é o estágio final do problema;
V_i^0	é o volume inicial da usina hidrelétrica i [hm^3].

A energia produzida em uma hidrelétrica depende de diversos fatores, incluindo o nível da água a montante, o nível a jusante, e o rendimento das unidades, sendo que essas variáveis são função do turbinamento de cada unidade geradora, do volume do reservatório e da defluência na usina. Por conta destas interdependências, a Função de produtividade hidroelétrica (FPH) é multivariada, não linear e não convexa (FINARDI; SILVA, 2006).

Neste trabalho, a FPH é modelada através de uma função linear por partes que depende do volume no reservatório, da vazão turbinada, e do vertimento da hidrelétrica. Os cortes da função linear por partes podem ser obtidos através de diversos métodos, sendo os mais comuns o método de *Convex Hull* que cria uma envoltória superior convexa da função (representada na Figura 3) (DINIZ; MACEIRA, 2008), e o método da minimização da soma do erro quadrático, que resolve um problema quadrático inteiro misto para encontrar hiperplanos que aproximam a FPH (KANG; CHEN; WANG, 2018).

Figura 3 – Exemplo de *convex hull* de uma FPH



Fonte: (DINIZ; MACEIRA, 2008)

No conjunto de equações (7) são apresentadas as restrições necessárias para modelar a FPH através de uma função linear por partes:

$$\begin{aligned}
 gh_{it} &\leq \mathbf{P0}_{pi} \cdot q_{it} + \mathbf{P1}_{pi} \cdot v_{it} + \mathbf{P2}_{pi} \cdot s_{it} + \mathbf{P3}_{pi} & \forall i \in \Omega^{GT}, t \in \Omega^T, p \in P_i \\
 0 &\leq gh_{it} \leq \mathbf{GH}_i^{\max} & \forall i \in \Omega^{GT}, t \in \Omega^T
 \end{aligned} \tag{7}$$

em que:

\mathbf{GH}_i^{max}	é geração máxima da hidrelétrica i [MWh];
\mathbf{gh}_{it}	é a geração da hidrelétrica i no instante t [MWh];
$P0_{pi}$	é o coeficiente do corte p relacionado ao turbinamento da usina i [MWh/m ³ /s];
$P1_{pi}$	é o coeficiente do corte p relacionado ao volume final da usina i [MWh/hm ³];
$P2_{pi}$	é o coeficiente do corte p relacionado ao vertimento da usina i [MWh/m ³ /s];
$P0_{pi}$	é o coeficiente constante do corte p da usina i [MWh];
P_i	é o conjunto de cortes da FPH da usina i .

2.1.3 Equações da Rede Elétrica

Essas equações se referem ao balanço de potência ativa nas barras e limites de carregamento das linhas de transmissão. Neste trabalho, a rede é modelada por um fluxo de potência DC, utilizando ângulos das barras e impedâncias das linhas. Além disso, para garantir a convergência do modelo de otimização é necessário considerar a possibilidade de não atender a demanda. Aqui, esse aspecto é modelado através de usinas fictícias de altíssimo custo (tipicamente, 10 vezes mais caras que o maior CVU do sistema) em cada barra de carga. A influência das usinas fictícias no custo do despacho e as restrições de atendimento a demanda e fluxo de transmissão são apresentadas abaixo:

$$\sum_{i \in \Omega_j^{GT}} gt_{it} + \sum_{i \in \Omega_j^{GH}} gh_{it} + ls_{jt} + \sum_{l \in \Omega_j^{LTIN}} f_{lt} - \sum_{l \in \Omega_j^{LTOUT}} f_{lt} - \mathbf{L}_{jt} = 0 \quad \forall t \in T, j \in \Omega^B$$

$$f_{lt} - \frac{1}{X_l} \cdot (\theta_{B_{lt}^{from}} - \theta_{B_{lt}^{to}}) = 0 \quad \forall t \in T, l \in \Omega^{LT}$$

$$\mathbf{F}_l^{min} \leq f_{lt} \leq \mathbf{F}_l^{max} \quad \forall t \in T, l \in \Omega^{LT}$$

(8)

em que:

CS	é o custo por MW/h das termelétricas fictícias [R\$/MWh];
ls_{it}	é a geração sem atendimento na barra i no instante t [MWh];
Ω^B	é o conjunto de todas as barras;
Ω_j^{GT}	é o conjunto de usinas termelétricas conectadas a barra j ;
Ω_j^{GH}	é o conjunto de usinas hidrelétricas conectadas a barra j ;
Ω_j^{LTIN}	é o conjunto de linhas de transmissão com fluxo entrando na barra j ;
Ω_j^{LTOUT}	é o conjunto de linhas de transmissão com fluxo saindo da barra j ;
Ω^{LT}	é o conjunto de linhas de transmissão;
f_{lt}	é o intercâmbio na linha de transmissão l no instante t [MWh];
θ_{it}	é o ângulo da tensão na barra i no instante t [°]
L_{it}	é a carga na barra j no instante t [MWh]
F_l^{min}	é o limite mínimo de carregamento da linha de transmissão l [MWh];
F_l^{max}	é o limite máximo de carregamento da linha de transmissão l [MWh].

2.2 MODELAGEM DO PROBLEMA

A partir das equações apresentadas, é possível desenvolver o modelo completo do problema de UCHT que será utilizado neste trabalho. Conforme pode ser visto a seguir, trata-se de um modelo de PLIM, em que as decisões 0-1 estão associadas com a operação das unidades termelétricas.

$$\min \sum_{i \in \Omega^{GT}} \sum_{t \in \Omega^T} CP_i z_{it} + CT_i g_{it} + \sum_{i \in \Omega^B} \sum_{t \in \Omega^T} CS l_{s_{it}} \quad (9a)$$

s.a.

$$z_{it} - w_{it} = u_{it} - u_{it-1} \quad \forall i \in \Omega^{GT}, t \in \Omega^T \quad (9b)$$

$$g_{it} - g_{it-1} \leq \Delta_i u_{it-1} + GT_i^{min} z_{it} \quad \forall i \in \Omega^{GT}, t \in \Omega^T \quad (9c)$$

$$g_{it-1} - g_{it} \leq \Delta_i u_{it} + GT_i^{min} w_{it} \quad \forall i \in \Omega^{GT}, t \in \Omega^T \quad (9d)$$

$$GT_i^{min} u_{it} \leq g_{it} \leq GT_i^{max} u_{it} \quad \forall i \in \Omega^{GT}, t \in \Omega^T \quad (9e)$$

$$\sum_{n=t-T_i^{UP}+1}^t z_{in} \leq u_{it} \quad \forall i \in \Omega^{GT}, t \in \Omega^T \quad (9f)$$

$$\sum_{n=t-T_i^{DOWN}+1}^T w_{in} \leq 1 - u_{it} \quad \forall i \in \Omega^{GT}, t \in \Omega^T \quad (9g)$$

$$v_{it} - v_{it-1} +$$

$$\kappa \cdot [q_{it} + s_{it} - \sum_j^{\Theta_i^{GH}} (q_{jt-\tau_j} + s_{jt-\tau_j})] = \kappa \cdot y_{it} \quad \forall i \in \Omega^{GH}, t \in \Omega^T \quad (9h)$$

$$\mathbf{V}_i^{min} \leq v_{it} \leq \mathbf{V}_i^{max} \quad \forall i \in \Omega^{GH}, t \in \Omega^T \quad (9i)$$

$$\mathbf{Q}_i^{min} \leq q_{it} \leq \mathbf{Q}_i^{max} \quad \forall i \in \Omega^{GH}, t \in \Omega^T \quad (9j)$$

$$0 \leq s_{it} \leq \mathbf{S}_i^{max} \quad \forall i \in \Omega^{GH}, t \in \Omega^T \quad (9k)$$

$$v_{iT^{max}} - V_i^0 = 0 \quad \forall i \in \Omega^{GH} \quad (9l)$$

$$gh_{it} \leq \mathbf{P0}_{pi} \cdot q_{it} + \mathbf{P1}_{pi} \cdot v_{it} + \mathbf{P2}_{pi} \cdot s_{it} + \mathbf{P3}_{pi} \quad \forall i \in \Omega^{GH}, t \in \Omega^T, p \in P_i \quad (9m)$$

$$0 \leq gh_{it} \leq \mathbf{GH}_i^{max} \quad \forall i \in \Omega^{GT}, t \in \Omega^T \quad (9n)$$

$$\sum_{i \in \Omega_j^{GT}} gt_{it} + \sum_{i \in \Omega_j^{GH}} gh_{it} + ls_{jt} + \sum_{l \in \Omega_j^{LTIN}} flt - \sum_{l \in \Omega_j^{LTOUT}} flt -$$

$$\mathbf{L}_{jt} = 0 \quad \forall t \in T, j \in \Omega^B \quad (9o)$$

$$flt - \frac{1}{X_l} \cdot (\theta_{B_{lt}^{from}} - \theta_{B_{lt}^{to}}) = 0 \quad \forall t \in T, l \in \Omega^{LT} \quad (9p)$$

$$\mathbf{F}_l^{min} \leq flt \leq \mathbf{F}_l^{max} \quad \forall t \in T, l \in \Omega^{LT} \quad (9q)$$

$$z_{it}, w_{it}, u_{it} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in \Omega^{GT}, t \in \Omega^T \quad (9r)$$

$$ls_{it} \geq 0 \quad \forall i \in \Omega^B, t \in \Omega^T \quad (9s)$$

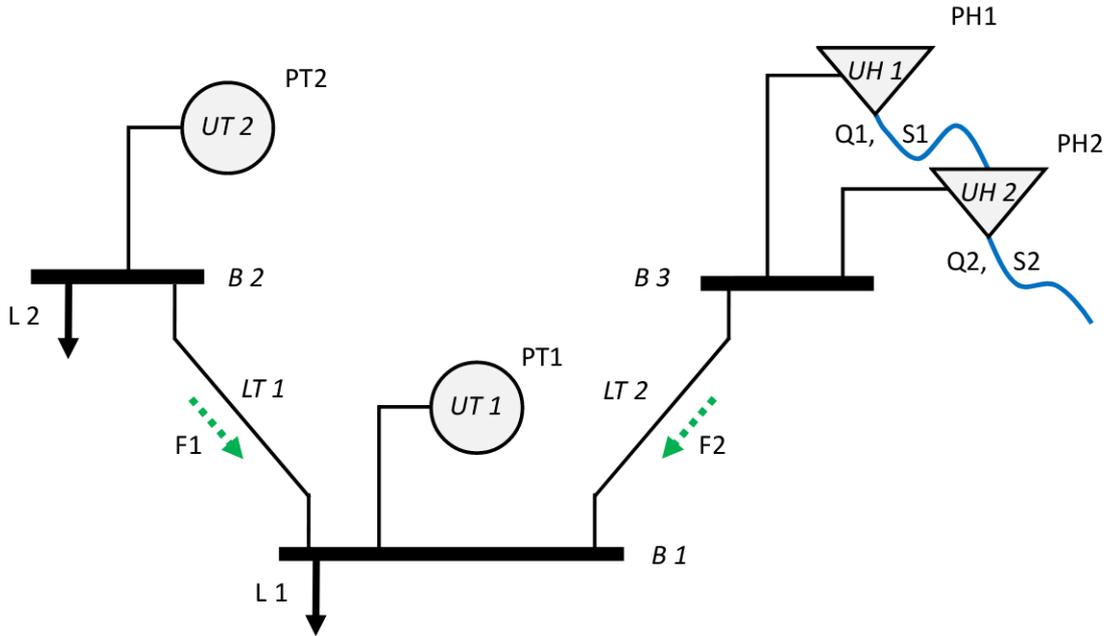
Para exemplificar a modelagem desenvolvida neste trabalho, é apresentado o sistema-exemplo da Figura 4, um sistema com três barras ($B 1$, $B 2$ e $B 3$), duas linhas de transmissão conectando as barras ($LT 1$ e $LT 2$), duas usinas termelétricas ($UT 1$ e $UT 2$), duas usinas hidrelétricas ($UH 1$ e $UH 2$) e duas cargas ($L 1$ e $L 2$). Apesar de pequeno, este sistema abrange todos os elementos da modelagem proposta o UCHT que será utilizado no trabalho.

O sistema-exemplo está eletricamente configurado da seguinte maneira: Na barra $B 1$, está conectada a carga $L 1$ e a unidade geradora termelétrica $UT 1$. Na barra $B 2$, está conectada a carga $L 2$ e a unidade termelétrica $UT 2$. Na barra $B 3$, estão eletricamente conectadas as duas unidades geradoras hidrelétricas $UH 1$ e $UH 2$. Topologicamente, a configuração do sistema é a seguinte: a linha de transmissão $LT 1$ conecta a barra $B 2$ a barra $B 1$, enquanto a linha de transmissão $LT 2$ conecta as barras $B 3$ e $B 1$. As duas usinas hidrelétricas estão na mesma bacia hidrográfica, sendo que a usina $UH 1$ está a montante da usina $UH 2$.

Para o sistema-exemplo, o tempo de viagem da água¹ entre os dois reservatórios igual a 1 hora, os *uptime* e *downtime* mínimos das duas usinas termelétricas são de 2 horas. Aplicando todas as modelagens descritas anteriormente ao problema exemplo descrito na Figura 4, para um horizonte de duas horas, se chega no seguinte

¹ O tempo de viagem da água é apresentado aqui para garantir que o exemplo seja o mais completo possível, porem ele não será considerado no sistema utilizado nos experimentos da dissertação.

Figura 4 – Sistema-exemplo para o problema de UCHT



Fonte: Autor

modelo completo:

$$\min_{z, gt, ls} \sum_{i=1}^2 \sum_{t=1}^2 CP_i \cdot z_{it} + CT_i \cdot gt_{it} + \sum_{i=1}^3 \sum_{t=1}^2 CS \cdot ls_{it} \quad (10a)$$

s.a.

$$z_{11} - w_{11} = u_{11} - \mathbf{u}_{10}$$

$$z_{21} - w_{21} = u_{21} - \mathbf{u}_{20}$$

$$gt_{11} - \mathbf{gt}_{10} \leq \Delta_1 \mathbf{u}_{10} + \mathbf{GT}_1^{\min} z_{11}$$

$$gt_{21} - \mathbf{gt}_{20} \leq \Delta_2 \mathbf{u}_{20} + \mathbf{GT}_2^{\min} z_{21}$$

$$\mathbf{gt}_{10} - gt_{11} \leq \Delta_1 u_{11} + \mathbf{GT}_1^{\min} w_{11}$$

$$\mathbf{gt}_{20} - gt_{21} \leq \Delta_2 u_{21} + \mathbf{GT}_2^{\min} w_{21}$$

$$\mathbf{GT}_1^{\min} u_{11} \leq gt_{11} \leq \mathbf{GT}_1^{\max} u_{11}$$

$$\mathbf{GT}_2^{\min} u_{21} \leq gt_{21} \leq \mathbf{GT}_2^{\max} u_{21}$$

$$\mathbf{z}_{10} + z_{11} \leq u_{11}$$

$$\mathbf{z}_{20} + z_{21} \leq u_{21}$$

$$\mathbf{w}_{10} + w_{11} \leq 1 - u_{11}$$

$$\mathbf{w}_{20} + w_{21} \leq 1 - u_{21}$$

$$z_{12} - w_{12} = u_{12} - u_{11}$$

$$\begin{aligned}
z_{22} - w_{22} &= u_{22} - u_{21} \\
gt_{12} - gt_{11} &\leq \Delta_1 u_{11} + \mathbf{GT}_1^{\min} z_{12} \\
gt_{22} - gt_{21} &\leq \Delta_2 u_{21} + \mathbf{GT}_2^{\min} z_{22} \\
gt_{11} - gt_{12} &\leq \Delta_1 u_{12} + \mathbf{GT}_1^{\min} w_{12} \\
gt_{21} - gt_{22} &\leq \Delta_2 u_{22} + \mathbf{GT}_2^{\min} w_{22} \\
\mathbf{GT}_1^{\min} u_{12} &\leq gt_{12} \leq \mathbf{GT}_1^{\max} u_{12} \\
\mathbf{GT}_2^{\min} u_{22} &\leq gt_{22} \leq \mathbf{GT}_2^{\max} u_{22} \\
z_{11} + z_{12} &\leq u_{12} \\
z_{21} + z_{22} &\leq u_{22} \\
w_{11} + w_{12} &\leq 1 - u_{12} \\
w_{21} + w_{22} &\leq 1 - u_{22} \\
v_{11} - \mathbf{v}_{10} + \kappa \cdot [q_{11} + s_{11}] &= \kappa \cdot \mathbf{y}_{11} \\
v_{21} - \mathbf{v}_{20} + \kappa \cdot [q_{21} + s_{21} - (\mathbf{q}_{10} + \mathbf{s}_{10})] &= \kappa \cdot \mathbf{y}_{21} \\
\mathbf{V}_1^{\min} &\leq v_{11} \leq \mathbf{V}_1^{\max} \\
\mathbf{V}_2^{\min} &\leq v_{21} \leq \mathbf{V}_2^{\max} \\
\mathbf{Q}_1^{\min} &\leq q_{11} \leq \mathbf{Q}_1^{\max} \\
\mathbf{Q}_2^{\min} &\leq q_{21} \leq \mathbf{Q}_2^{\max} \\
s_{11} &\leq \mathbf{S}_1^{\max} \\
s_{21} &\leq \mathbf{S}_2^{\max} \\
gh_{11} &\leq \mathbf{P0}_{p1} \cdot q_{11} + \mathbf{P1}_{p1} \cdot v_{11} + \mathbf{P2}_{p1} \cdot s_{11} + \mathbf{P3}_{p1} \quad \forall p \in P_1 \\
gh_{21} &\leq \mathbf{P0}_{p2} \cdot q_{21} + \mathbf{P1}_{p2} \cdot v_{21} + \mathbf{P2}_{p2} \cdot s_{21} + \mathbf{P3}_{p2} \quad \forall p \in P_2 \\
v_{12} - v_{11} + \kappa \cdot [q_{12} + s_{12}] &= \kappa \cdot \mathbf{y}_{12} \\
v_{22} - v_{21} + \kappa \cdot [q_{22} + s_{22} - (q_{11} + s_{11})] &= \kappa \cdot \mathbf{y}_{22} \\
\mathbf{V}_1^{\min} &\leq v_{12} \leq \mathbf{V}_1^{\max} \\
\mathbf{V}_2^{\min} &\leq v_{22} \leq \mathbf{V}_2^{\max} \\
\mathbf{Q}_1^{\min} &\leq q_{12} \leq \mathbf{Q}_1^{\max} \\
\mathbf{Q}_2^{\min} &\leq q_{22} \leq \mathbf{Q}_2^{\max} \\
s_{12} &\leq \mathbf{S}_1^{\max} \\
s_{22} &\leq \mathbf{S}_2^{\max} \\
gh_{12} &\leq \mathbf{P0}_{p1} \cdot q_{12} + \mathbf{P1}_{p1} \cdot v_{12} + \mathbf{P2}_{p1} \cdot s_{12} + \mathbf{P3}_{p1} \quad \forall p \in P_1 \\
gh_{22} &\leq \mathbf{P0}_{p2} \cdot q_{22} + \mathbf{P1}_{p2} \cdot v_{22} + \mathbf{P2}_{p2} \cdot s_{22} + \mathbf{P3}_{p2} \quad \forall p \in P_2 \\
gt_{11} + f_{11} + f_{21} - \mathbf{L}_{1,1} &= 0 \\
gt_{21} - f_{11} - \mathbf{L}_{2,1} &= 0 \\
gh_{11} + gh_{21} - f_{21} - \mathbf{L}_{3,1} &= 0
\end{aligned}$$

$$f_{11} - \frac{1}{X_1} \cdot (\theta_{B_{11}^{from}} - \theta_{B_{11}^{to}}) = 0$$

$$f_{21} - \frac{1}{X_2} \cdot (\theta_{B_{21}^{from}} - \theta_{B_{21}^{to}}) = 0$$

$$\mathbf{F}_1^{\min} \leq f_{1,1} \leq \mathbf{F}_1^{\max}$$

$$\mathbf{F}_2^{\min} \leq f_{2,1} \leq \mathbf{F}_2^{\max}$$

$$gt_{12} + f_{12} + f_{22} - \mathbf{L}_{1,2} = 0$$

$$gt_{22} - f_{12} - \mathbf{L}_{2,2} = 0$$

$$gh_{12} + gh_{22} - f_{22} - \mathbf{L}_{3,2} = 0$$

$$f_{12} - \frac{1}{X_1} \cdot (\theta_{B_{12}^{from}} - \theta_{B_{12}^{to}}) = 0$$

$$f_{22} - \frac{1}{X_2} \cdot (\theta_{B_{22}^{from}} - \theta_{B_{22}^{to}}) = 0$$

$$\mathbf{F}_1^{\min} \leq f_{1,1} \leq \mathbf{F}_1^{\max}$$

$$\mathbf{F}_2^{\min} \leq f_{2,1} \leq \mathbf{F}_2^{\max}$$

3 ESTRATÉGIAS DE SOLUÇÃO

Analisando as variáveis e restrições apresentadas na formulação do problema de UCHT (Equação (9)), é possível observar que existem acoplamentos distintos entre as variáveis no espaço (diferentes térmicas e usinas hidrelétricas) e no tempo (diferentes instantes de tempo na mesma restrição). O acoplamento no tempo se dá nas restrições de *uptime*, *downtime*, rampa e estado (variáveis binárias) das termelétricas, e nas restrições de balanço hídrico dos reservatórios das usinas hidrelétricas. O acoplamento espacial é presente nas restrições de atendimento à demanda, e também no balanço hídrico. Pode-se simplificar a escrita das equações de modo a salientar os diferentes conjuntos de restrições da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i \in \Omega^{GT}} \sum_{t \in \Omega^T} \mathbf{CP}_i \cdot z_{it} + \mathbf{CT}_i \cdot gt_{it} + \sum_{i \in \Omega^B} \sum_{t \in \Omega^T} \mathbf{CS} \cdot ls_{it} \\ \text{s.a.} \quad & \Phi_{u,z,w,gt}^{GT} \cup \Phi_{q,v,s,gh}^{GH} \cup \Phi_{gt,gh,f,\theta,ls}^T \end{aligned} \quad (11)$$

em que:

- $\Phi_{u,z,w,gt}^{GT}$ é o conjunto de restrições relacionadas às usinas termelétricas
- $\Phi_{q,v,s,gh}^{GH}$ é o conjunto de restrições relacionadas aos reservatórios e a FPH das hidrelétricas j
- $\Phi_{gt,gh,f,\theta,ls}^T$ é o conjunto de restrições relacionadas aos elementos topológicos do sistema (balanço de potência, rede, etc.)

A formulação apresentada para o UCHT descrita na Equação (11) não é separável, devido aos acoplamentos temporais e espaciais comentados anteriormente, e por conta da quantidade de variáveis e restrições, sua resolução se torna difícil e custosa computacionalmente. Caso não existissem estes acoplamentos, o problema seria separável e, desta forma, poderia ser resolvido a partir da resolução de subproblemas mais simples, que contêm um número menor de variáveis e restrições e que permitem a aplicação de técnicas de processamento paralelo para a solução simultânea dos mesmos. As restrições que acoplam o problema são denominadas de restrições complicantes e as demais restrições são ditas não-complicantes (CONEJO, 2011).

Como as restrições complicantes acoplam o problema e não permitem que o mesmo seja separado, diversas pesquisas foram desenvolvidas para contornar esta dificuldade, cujas motivações foram, dentre outros fatores, pelo aumento da complexidade dos modelos e do custo computacional requerido para a resolução destes problemas. Duas técnicas que vêm sendo utilizadas nas últimas décadas são a Relaxação Lagrangiana (RL) e Lagrangiano Aumentado (LA). É possível encontrar na literatura diversos artigos que utilizam estas técnicas de decomposição para a resolução do problema de

UCHT (NILSSON; SJELVGREN, 1997), (DINIZ; SAGASTIZABAL; MACEIRA, 2007), (TAKIGAWA; FINARDI; SILVA, 2010). Nestes trabalhos, os autores utilizam do VS que permite, com o auxílio de métodos de relaxação, separar o problema do UCHT em subproblemas menores, com características específicas.

A seguir, serão apresentadas as técnicas utilizadas neste trabalho para permitir a separação do problema de UCHT proposto na Equação (9), nominalmente o VS, o LA, e a aplicação da teoria de *system design* hierárquico com ADMM (TOSSERAMS *et al.*, 2006).

3.1 VARIABLE SPLITTING

O objetivo do VS é realizar a separação das variáveis complicantes (variáveis que se relacionam nas restrições complicantes) em conjuntos distintos através da duplicação de variáveis e introdução de novas restrições, chamadas de restrições de consistência, que garantem a igualdade dos pares de variáveis duplicadas.

Neste trabalho, optou-se por utilizar a separação das variáveis de geração pois estas permitem quebrar o problema em subproblemas com restrições exclusivas das unidades termelétricas, da operação das usinas hidrelétricas e reservatório e da rede elétrica.

O VS não permite a separabilidade do problema, pois as restrições de consistência são complicantes e isto insere um acoplamento ao problema. No entanto, sua utilização junto com a RL ou o LA torna o problema separável e mais simples de ser resolvido caso se opte pela relaxação das restrições complicantes introduzidas.

Como um exemplo da aplicação do VS, considere o seguinte problema de otimização:

$$\max \quad x^2 - y^2 \quad (12a)$$

s.a.

$$x - 5 \leq 0 \quad (12b)$$

$$y^2 - 10 \leq 0 \quad (12c)$$

$$x + y - 5 = 0 \quad (12d)$$

$$x \geq 0 \quad (12e)$$

Neste exemplo, a restrição de igualdade é a complicante pois a mesma é que mantém o acoplamento entre todas as demais restrições. Em outras palavras, caso na ausência dessa restrição, o problema original pode ser resolvido por meio de dois problemas de otimização com uma única variável. Pode-se aplicar o VS a partir da duplicação das variáveis x e y , da seguinte maneira:

$$\max \quad x^2 - y^2 \quad (13a)$$

s.a.

$$x - 5 \leq 0 \quad (13b)$$

$$y^2 - 10 \leq 0 \quad (13c)$$

$$\bar{x} + \bar{y} - 5 = 0 \quad (13d)$$

$$x - \bar{x} = 0 \quad (13e)$$

$$y - \bar{y} = 0 \quad (13f)$$

$$x, \bar{x} \geq 0 \quad (13g)$$

Apesar do problema continuar não sendo separável por conta das restrições de consistência (equações (13e) e (13f)), a utilização da técnica do VS transforma as variáveis complicantes (x e y) em restrições complicantes que podem ser relaxadas a fim de obter a separabilidade dos subproblemas. Em um primeiro momento, a introdução destas variáveis redundantes e restrições adicionais pode parecer contraintuitivo pois se está aumentando um problema; contudo, permite que seja feita a separação em subproblemas em torno de características individuais, como a separação dos problemas térmicos e hidrotérmicos em dois conjuntos distintos.

Na próxima seção apresenta-se o ferramental necessário que, junto do VS, transforma o problema de otimização em um problema separável.

3.2 LAGRANGIANO AUMENTADO (LA)

Neste trabalho, utiliza-se o LA para contornar a dificuldade que as restrições complicantes inserem no problema com as variáveis duplicadas pelo VS. Esta técnica, similarmente à RL, utiliza a função Lagrangiana derivada do princípio da dualidade para acoplar as restrições relaxadas na função objetivo através de uma função de penalidade quadrática. Nesta seção será discutido a teoria básica do princípio da dualidade e do funcionamento do LA.

3.2.1 Forma primal e dual de um problema de otimização

O conceito do princípio da dualidade, na teoria de otimização matemática, afirma que todo problema de otimização pode ser interpretado tanto na sua forma primal (usualmente a representação canônica) quanto na sua forma dual (NOCEDAL; WRIGHT, 2006)¹. Apesar de serem representações distintas do mesmo problema, o valor ótimo

¹ Para determinadas categorias de problemas de otimização, não há garantia da definição de uma formulação fechada para a forma dual, no entanto, o princípio da dualidade garante a existência de um problema cujo valor da função objetivo é relacionado ao problema original.

da função objetivo no caso primal não necessariamente irá coincidir com o valor ótimo do caso dual, sendo que a distância entre os dois ótimos globais é chamada de *gap* de dualidade. Problemas de otimização convexos não apresentam *gap* de dualidade, enquanto problemas não-convexos podem possuir *gap* diferente de zero, sendo que o valor ótimo da função objetivo do problema dual é um *lower bound* para o primal (considerando o primal como um problema de minimização).

Apesar de existirem diferentes formas de representar o problema dual, uma das formulações mais comuns encontrada na literatura é obtida a partir da função Lagrangiana. O problema, nesta formulação, tem sua função objetivo primal substituída por uma função que incorpora as restrições do problema original na função objetivo através de variáveis chamadas multiplicadores de Lagrange. Dado o seguinte problema de otimização primal na forma canônica apresentado na equação (14):

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & f(\mathbf{x}) \\ \text{s.a.} \quad & \\ & \mathbf{A}(\mathbf{x}) = 0 \\ & \mathbf{B}(\mathbf{x}) \leq 0 \end{aligned} \tag{14}$$

A função Lagrangiana é derivada através do acoplamento das restrições do problema (14) na função objetivo e é dada através da equação (15):

$$\mathcal{L}(\lambda, \mu, \mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \lambda^T \mathbf{A}(\mathbf{x}) + \mu^T \mathbf{B}(\mathbf{x}) \tag{15}$$

Através da função Lagrangiana se pode definir a função dual que é usada no problema dual da seguinte forma:

$$\phi(\lambda, \mu) = \inf_{\mathbf{x}} \mathcal{L}(\lambda, \mu, \mathbf{x}) = \inf_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) + \lambda^T \mathbf{A}(\mathbf{x}) + \mu^T \mathbf{B}(\mathbf{x}) \tag{16}$$

A forma dual, que transforma o problema de minimização em um problema de maximização, é apresentada na equação (17). Os multiplicadores de Lagrange λ associados ao conjunto de restrições de igualdade $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ são irrestritos, enquanto os multiplicadores de Lagrange μ associados ao conjunto de restrições de desigualdade $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ são não-negativos. Neste trabalho, não é utilizada diretamente a forma dual do problema de otimização, mas sim o problema primal relaxado, que utiliza uma função objetivo similar à função Lagrangiana onde apenas algumas restrições (denominadas restrições relaxadas) são consideradas (CONEJO, 2011).

$$\begin{aligned} \max_{\lambda, \mu} \quad & \inf_{\mathbf{x}} \mathcal{L}(\lambda, \mu, \mathbf{x}) \\ \text{s.a.} \quad & \\ & \mu \geq 0 \end{aligned} \tag{17}$$

3.2.2 Problema Primal Relaxado

A principal motivação por trás de estudar técnicas de relaxação de problemas de otimização é que, dado a escolha correta das restrições a serem relaxadas, o problema se torna separável e se consegue quebrá-lo em subproblemas menores. A separabilidade do problema não só permite que os subproblemas sejam resolvidos de maneira independente (muitas vezes paralela), como também permite a utilização de técnicas mais eficientes, o que permite trabalhar com modelos mais completos. Considere inicialmente o problema de otimização primal em sua forma canônica, com ênfase na separabilidade do conjunto de variáveis, abaixo:

$$\begin{aligned}
 \min_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} \quad & z = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{y}) \\
 \text{s.a.} \quad & \\
 & \mathbf{R}_{\text{eq}}(\mathbf{x}) = 0 \\
 & \mathbf{R}_{\text{iq}}(\mathbf{x}) \leq 0 \\
 & \mathbf{R}_{\text{eq}}(\mathbf{y}) = 0 \\
 & \mathbf{R}_{\text{iq}}(\mathbf{y}) \leq 0 \\
 & \mathbf{C}_{\text{eq}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0
 \end{aligned} \tag{18}$$

Tem-se que o problema da equação (18) busca minimizar o valor da função objetivo z sujeito a cinco conjuntos distintos de restrições. Os conjuntos \mathbf{R}_{eq} e \mathbf{R}_{iq} representam restrições triviais (não complicantes) sobre os vetores de variáveis \mathbf{x} e \mathbf{y} e incidem estritamente sobre variáveis em seus respectivos vetores. Já o conjunto \mathbf{C}_{eq} representa restrições complicantes que, por dependerem ao mesmo tempo de \mathbf{x} e \mathbf{y} , não permitem que haja o desacoplamento em subproblemas distintos. A escolha das restrições complicantes que serão relaxadas definirá em quantos subproblemas o problema original será quebrado, quais tipos de informação serão mantidas diretamente nos subproblemas e quais serão relaxadas para a construção da função dual. Este tipo de escolha é importante pois pode influenciar no tamanho do *gap* de dualidade.

Uma solução para alcançar a separabilidade do modelo da equação (18) é aplicar uma relaxação sobre o problema primal onde as restrições complicantes são removidas do seu domínio (CONEJO, 2011). Como as restrições relaxadas não restringem mais o conjunto de soluções viáveis, elas são reintroduzidas no problema acoplando-as na função objetivo através de uma função de penalidade. O principal objetivo desta função é transferir de volta ao modelo a influência das restrições no espaço de soluções possíveis, penalizando o valor caso elas não estejam sendo atendidas (BONNANS, 2010). Vale destacar que existem diferentes funções de penalidade, cada uma apresenta características diferentes e cabe ao usuário escolher a que mais faz sentido para o problema proposto. A equação (19) apresenta de forma genérica a representação do problema primal relaxado onde a função de penalidade é representada

por $\mathcal{P}(C_{\text{eq}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}))$.

$$\begin{aligned}
 \min_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} \quad & z = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{y}) + \mathcal{P}(C_{\text{eq}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \\
 \text{s.a.} \quad & \\
 & \mathbf{R}_{\text{eq}}(\mathbf{x}) = 0 \\
 & \mathbf{R}_{\text{iq}}(\mathbf{x}) \leq 0 \\
 & \mathbf{R}_{\text{eq}}(\mathbf{y}) = 0 \\
 & \mathbf{R}_{\text{iq}}(\mathbf{y}) \leq 0
 \end{aligned} \tag{19}$$

A solução de problemas com relaxação onde a penalização é feita através da função Lagrangiana não é trivial pois esta forma aumenta a quantidade de variáveis livres na função objetivo, sendo que estas não estão diretamente atreladas à física do problema. Além dos vetores de variáveis primais, as técnicas baseadas na função Lagrangiana ainda dependem da adição do vetor λ^T que não é derivado das restrições do problema, mas que ainda necessita ter seus valores otimizados para que seja possível garantir que o máximo da função dual seja obtido. Diversas técnicas existem para encontrar o valor dos multiplicadores de Lagrange, como os métodos de *bundle*, e CP. Estes métodos são eficientes, mas necessitam de uma etapa de recuperação primal para problemas não-convexos por conta do *gap* de dualidade.

Neste trabalho, utiliza-se o LA como função de penalidade para garantir separabilidade do problema de UCHT pois, sob certas condições, garante convexidade a problemas não-convexos, facilitando a solução. A utilização do LA, alinhado a utilização de uma função apropriada para atualização dos multiplicadores de Lagrange permite que sejam obtidas soluções viáveis sem a necessidade de uma etapa de recuperação primal.

3.2.3 Lagrangiano Aumentado

A função do LA é similar à função Lagrangiana original aplicada às restrições relaxadas, onde adicionalmente é inserido um termo quadrático que penaliza a violação da restrição e garante convexidade em torno da solução ótima do problema. Utilizando o exemplo anterior, tem-se que a forma do LA é apresentada na equação (20). O conjunto de restrições complicantes $C_{\text{eq}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ não restringe mais o espaço de soluções viáveis do problemas diretamente através do conjunto de restrições, mas sim influencia o problema na função objetivo através da função de penalidade.

$$\begin{aligned}
& \min_{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \lambda} \mathcal{L}_{\mathcal{A}} = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{y}) + \lambda^T \mathbf{C}_{\text{eq}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \frac{\mathbf{r}^T}{2} \|\mathbf{C}_{\text{eq}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\|_2^2 \\
& \text{s. a.} \\
& \mathbf{R}_{\text{eq}}(\mathbf{x}) = 0 \\
& \mathbf{R}_{\text{iq}}(\mathbf{x}) \leq 0 \\
& \mathbf{R}_{\text{eq}}(\mathbf{y}) = 0 \\
& \mathbf{R}_{\text{iq}}(\mathbf{y}) \leq 0
\end{aligned} \tag{20}$$

Na equação (20) é introduzido o conjunto de parâmetros \mathbf{r}^T , chamados de parâmetros de penalidade. O objetivo destes parâmetros é modular a influência das restrições relaxadas no valor da função objetivo; caso as restrições não estejam sendo atendidas com o correto grau de importância, pode-se incrementar os valores de r de modo a aumentar a contribuição da parcela da restrição, incentivando que o modelo escolha soluções que pertencem ao domínio de busca original. Cabe salientar que a notação apresentada anteriormente se refere unicamente a problemas onde existem apenas restrições complicantes de igualdade. Em (CONEJO, 2011), (BONNANS, 2010) é apresentada a definição completa do LA incluindo as restrições de desigualdade e uma análise mais formal acerca das propriedades matemáticas desta função de penalidade.

Na próxima seção é apresentada a técnica do ADMM, estendida para múltiplos conjuntos de restrições, que será utilizada para permitir a paralelização do UCHT relaxado.

3.3 APLICAÇÃO DO ADMM ESTENDIDO

O ADMM é um algoritmo onde são resolvidos subproblemas simplificados de maneira coordenada com o objetivo de encontrar a solução de um problema de grande porte. Apesar da complexidade por trás da definição formal do ADMM utilizando teoria de conjuntos e análise de convexidade, uma alternativa é descrever de forma reducionista o algoritmo como uma versão inexata do LA com a aplicação de uma única iteração do método de Gauss-Seidel² (TOSSERAMS *et al.*, 2006), (CHEN *et al.*, 2014). A formulação estendida do algoritmo trata da separabilidade de três ou mais conjuntos de restrições, conforme Problema (21):

² Existem autores que discordam desta representação do ADMM pois difere bastante dos resultados obtidos através da análise formal de convergência do método (ECKSTEIN, 2012).

$$\begin{aligned}
& \min_{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}} f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{y}) + h(\mathbf{z}) \\
& \text{s.a.} \\
& \mathbf{Ax} + \mathbf{By} + \mathbf{Cz} = \mathbf{d} \\
& R_x(\mathbf{x}) \leq 0 \\
& R_y(\mathbf{y}) \leq 0 \\
& R_z(\mathbf{z}) \leq 0
\end{aligned} \tag{21}$$

Para o problema (21), a função do LA pode ser formulado da seguinte maneira:

$$\mathcal{L}_A(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \lambda) = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{y}) + h(\mathbf{z}) + \lambda^T (\mathbf{Ax} + \mathbf{By} + \mathbf{Cz} - \mathbf{d}) + \frac{\mathbf{r}^T}{2} \|\mathbf{Ax} + \mathbf{By} + \mathbf{Cz} - \mathbf{d}\|^2 \tag{22}$$

onde λ são os multiplicadores de Lagrange e $\mathbf{r}^T > 0$ são os parâmetros de penalidade.

A aplicação do algoritmo do ADMM consiste em resolver versões simplificadas do problema original, mas onde cada subproblema possui um conjunto de variáveis a serem otimizadas e os demais conjuntos de variáveis são mantidos constantes no valor da última iteração disponível. Cada iteração do algoritmo de ADMM, para encontrar o ponto ótimo que minimiza o problema (21), envolve a resolução de três subproblemas:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}^{k+1} &= \arg \min \{ \mathcal{L}_A(\mathbf{x}, \mathbf{y}^k, \mathbf{z}^k, \lambda^k) \mid \text{s.a. } R_x(\mathbf{x}) \leq 0 \} \\
\mathbf{y}^{k+1} &= \arg \min \{ \mathcal{L}_A(\mathbf{x}^{k+1}, \mathbf{y}, \mathbf{z}^k, \lambda^k) \mid \text{s.a. } R_y(\mathbf{y}) \leq 0 \} \\
\mathbf{z}^{k+1} &= \arg \min \{ \mathcal{L}_A(\mathbf{x}^{k+1}, \mathbf{y}^{k+1}, \mathbf{z}, \lambda^k) \mid \text{s.a. } R_z(\mathbf{z}) \leq 0 \} \\
\lambda^{k+1} &= \lambda^k + \mathbf{r}(\mathbf{Ax}^{k+1} + \mathbf{By}^{k+1} + \mathbf{Cz}^{k+1} - \mathbf{d})
\end{aligned} \tag{23}$$

onde k representa a iteração atual do algoritmo do ADMM.

A etapa onde é obtido do valor de λ para a próxima iteração é tratada de maneira separada e é usualmente chamada de etapa de atualização dos multiplicadores. A fórmula aqui apresentada atualiza o valor de λ com a minimização de $-\mathcal{L}_A$ através do gradiente em relação a λ com um passo de tamanho \mathbf{r} .

A formulação original do algoritmo de ADMM considera apenas dois conjuntos de variáveis que constituem restrições não separáveis e foi ostensivamente explorada na literatura técnica (GABAY; MERCIER, 1976). Uma evolução quase natural motivada pelo aumento da complexidade dos algoritmos foi a definição da formulação apresentada na equação (23) aplicando o algoritmo para N conjuntos de variáveis, chamada de ADMM estendido.

A principal diferença entre os dois algoritmos se dá na capacidade de convergência para diferentes categorias de problemas de otimização; enquanto a formulação original possui garantia de convergência para problemas convexos e algumas classes de problemas não-lineares (e.g: (ECKSTEIN; BERTSEKAS, 1992), (GABAY; MERCIER, 1976)), a convergência do ADMM estendido não possui essa garantia para problemas

convexos e não convexos (CHEN *et al.*, 2014). No entanto, diversos trabalhos aplicaram esta variação com êxito e o interesse na utilização do ADMM tem ressurgido nos últimos anos para aplicações em visão computacional, *machine learning* entre outros (PENG *et al.*, 2012), (ROCKAFELLAR, 1976), (BOYD *et al.*, 2011), (WANG *et al.*, 2019), (DHAR *et al.*, 2015).

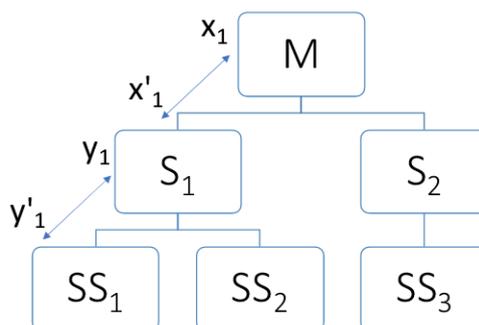
3.4 APLICAÇÃO DO LAGRANGIANO AUMENTADO PARA SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE UCHT COM ADMM

No trabalho de (TOSSERAMS *et al.*, 2006), os autores apresentam a aplicação do LA com ADMM para otimizar problemas de *system design* através de uma técnica chamada ATC, comumente utilizada em problemas multi-nível hierárquicos. Neste tipo de problema, o elemento (subproblema) mestre da cadeia representa o sistema completo, enquanto que cada subproblema subjacente na hierarquia representa uma característica específica que deve ser otimizada. Como cada aspecto do problema pode ser construído com a composição de várias outras características, o resultado é uma cadeia de subproblemas distintos, cada um com seu próprio conjunto de restrições e variáveis (KIM *et al.*, 2003).

O ATC conduz o processo de propagação das características sob otimização entre os diferentes níveis da hierarquia através de dois conjuntos de variáveis, chamadas de *target variables* e *response variables*. As *target variables* de um subproblema representam as dependências deste nó em relação aos nós subjacentes, enquanto que as *response variables* representam a melhor solução possível de cada nó subjacente para a respectiva *target variable*. Idealmente, a solução ótima do sistema apresenta *response variables* iguais às *target variables*, significando que todos os componentes individuais do sistema concordam em valores únicos (e ótimos) para cada característica, garantindo otimalidade da solução geral. A Figura 5 ilustra um sistema hierárquico onde o subproblema M está ligado ao subproblema S_1 através da *target variable* x_1 e a respectiva *response variable* x'_1 que por sua vez está ligado ao problema SS_1 através da variável y_1 e a respectiva variável y'_1 (MICHELENA; PARK; PAPALAMBROS, 2003), (MICHALEK; PAPALAMBROS, 2004).

Como os valores destes dois conjuntos de variáveis devem coincidir na solução ótima do problema, é necessário colocar uma restrição na otimização do sistema de que as *target variables* coincidem com o valor das *response variables* dos nós dependentes, acoplando todos os níveis da hierarquia já que o problema mestre depende de cada subproblema subjacente, e cada problema subjacente depende dos subproblemas abaixo deles, gerando uma dependência lógica entre o problema mestre e toda a cadeia. No exemplo anterior, a variável x_1 acaba dependendo da variável y_1 já que o ponto ótimo do subproblema S_1 depende das duas variáveis (ou das respectivas *response variables*). Estas restrições de consistência entre os dois conjuntos de variáveis

Figura 5 – Representação de problema hierárquico do ATC



Fonte: Autor

é um conjunto de restrição complicante que, em um primeiro momento, não permite que cada nó seja modelado e otimizado individualmente (TOSSERAMS *et al.*, 2006).

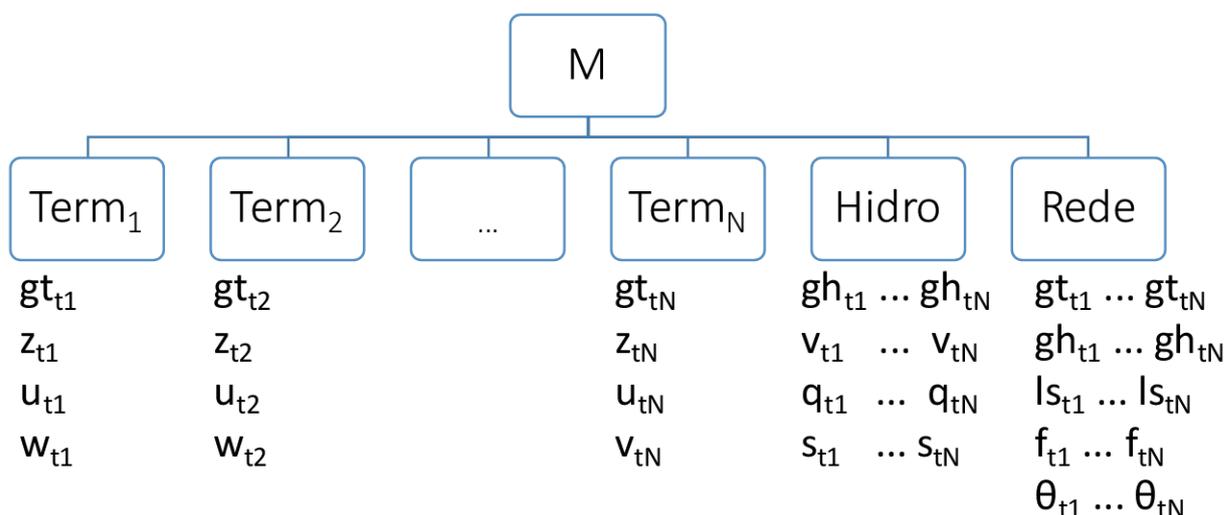
A implementação do ATC conforme o artigo proposto por (TOSSERAMS *et al.*, 2006) é um algoritmo iterativo composto por dois laços: um interno que busca convergir os valores das *target* e *response variables* a fim de obter uma estimativa da solução do problema, e um laço externo que atualiza os valores dos multiplicadores de Lagrange e dos parâmetros de penalidade com o objetivo de tentar conduzir o laço interno à estimativas mais próximas do ponto ótimo. No caso da utilização do ADMM, o laço interno consiste em apenas uma iteração onde são mantidos constantes os valores dos multiplicadores de Lagrange e dos parâmetros de penalidade, resolvendo os subproblemas com os valores da iteração anterior (ou uma estimativa inicial para o caso da primeira iteração).

3.4.1 Aplicação de *variable splitting* no UCHT

Ao analisar o conjunto (9), é possível notar que existe acoplamento temporal nas restrições relativas as unidades termelétricas (*uptime/downtime* e rampa), acoplamento espacial e temporal entre as unidades hidrelétricas (balanço hídrico) e acoplamento espacial nas restrições de atendimento a demanda. Estas restrições formam o conjunto de restrições complicantes e não permitem que o modelo seja decomposto em subproblemas simplificados. Pode-se representar o problema de UCHT deste trabalho

através de uma forma hierárquica onde existem apenas dois níveis, onde o problema mestre representa a solução completa do UCHT e cada subproblema representa um conjunto de restrições de acordo com os acoplamentos descritos anteriormente.

Figura 6 – Representação hierárquica do UCHT



Fonte: Autor

Através da Figura 6 fica evidente quais variáveis acoplam os subproblemas e não permitem que eles sejam resolvidos de maneira independente entre si, tornando-se excelentes candidatas para a técnica de VS. Com isso, pode-se reescrever o problema gerando as réplicas necessárias das variáveis para o subproblema mestre (*target variables*) e os subproblemas que dependam delas (*response variables*). Neste trabalho, cada térmica possui seu próprio subproblema, tem-se um único subproblema para todas as hidrelétricas e um único subproblema para as restrições de rede e atendimento à demanda. As variáveis que usam o VS são as gerações térmicas e as gerações hídricas, sendo que os conjuntos originais de gt_{it} e gh_{it} mantem-se apenas na função objetivo do problema. Deste modo, a Equação (24) apresenta as restrições adicionais necessárias para o VS, (25) apresenta as restrições atualizadas para a geração termelétrica que dependem de gt_{it} , (26) apresenta as restrições atualizadas para a geração hidrelétrica que dependem de gh_{it} , e a Equação (27) apresenta as restrições de atendimento à demanda que dependem de gt_{it} e gh_{it} atualizadas com as respectivas

variáveis³:

$$\begin{aligned}
gt_{it} - gtr_{it} &= 0 & \forall i \in \Omega^{GT}, t \in \Omega^T \\
gt_{it} - gts_{it} &= 0 & \forall i \in \Omega^{GT}, t \in \Omega^T \\
gh_{it} - ghr_{it} &= 0 & \forall i \in \Omega^{GT}, t \in \Omega^T \\
gh_{it} - ghs_{it} &= 0 & \forall i \in \Omega^{GT}, t \in \Omega^T
\end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned}
gts_{it} - gts_{it-1} &\leq \Delta_i u_{it-1} + \mathbf{GT}_i^{\min} z_{it} & \forall i \in \Omega^{GT}, t \in \Omega^T \\
gts_{it-1} - gts_{it} &\leq \Delta_i u_{it} + \mathbf{GT}_i^{\min} w_{it} & \forall i \in \Omega^{GT}, t \in \Omega^T \\
\mathbf{GT}_i^{\min} u_{it} &\leq gts_{it} \leq \mathbf{GT}_i^{\max} u_{it} & \forall i \in \Omega^{GT}, t \in \Omega^T
\end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned}
ghs_{it} &\leq \mathbf{P0}_{pi} \cdot q_{it} + \mathbf{P1}_{pi} \cdot v_{it} + \mathbf{P2}_{pi} \cdot s_{it} + \mathbf{P3}_{pi} & \forall i \in \Omega^{GT}, t \in \Omega^T, p \in P_i \\
0 &\leq ghs_{it} \leq \mathbf{GH}_i^{\max} & \forall i \in \Omega^{GT}, t \in \Omega^T
\end{aligned} \tag{26}$$

$$\sum_{i \in \Omega_j^{GT}} gtr_{it} + \sum_{i \in \Omega_j^{GH}} ghr_{it} + ls_{jt} + \sum_{l \in \Omega_j^{LTIN}} flt - \sum_{l \in \Omega_j^{LTOU}} flt - \mathbf{L}_{jt} = 0 \quad \forall t \in T, j \in \Omega^B \tag{27}$$

A inserção do conjunto de restrições de consistência apresentado na Equação (24) garante que a solução do novo problema de otimização seja igual ao problema apresentado na Equação (9) de acordo com (DEMIGUEL; MURRAY, 2006). Esta alteração transforma o problema acoplado através de variáveis complicantes em um problema acoplado através de restrições complicantes, de modo que é possível aplicar um método de relaxação que permitirá a separação do problema de UCHT em subproblemas conforme a Figura 6.

3.4.2 Relaxação das restrições de consistência do UCHT com VS

A próxima etapa para alcançar a separabilidade dos subproblemas é realizar a relaxação das restrições de consistência que acoplam os subproblemas térmicos e hídrico com o subproblema da rede. Neste trabalho é utilizada uma relaxação com uma função de penalidade de Lagrangiano aumentado conforme (CONEJO, 2011), (BONNANS, 2010). A função de penalidade do LA descrita na Equação (20) é aplicada ao problema de UCHT de acordo com a Equação (28):

$$\phi_{LA} = \phi_L + \frac{1}{2} \phi_A \tag{28}$$

onde:

³ A inserção destas novas variáveis não afeta o resultado obtido pelo modelo pois as restrições de consistência garantem que os valores obtidos e utilizados nas restrições atualizadas coincidem com as variáveis originais

$$\begin{aligned} \phi_L = & \sum_{i \in \Omega^{GT}} \sum_{t \in \Omega^T} \lambda^T_{it} (gt_{it} - gts_{it}) + \sum_{i \in \Omega^{GH}} \sum_{t \in \Omega^T} \lambda^H_{it} (gh_{it} - ghs_{it}) + \\ & \sum_{i \in \Omega^{GT}} \sum_{t \in \Omega^T} \pi^T_{it} (gt_{it} - gtr_{it}) + \sum_{i \in \Omega^{GH}} \sum_{t \in \Omega^T} \pi^H_{it} (gh_{it} - ghr_{it}) \end{aligned} \quad (29)$$

e,

$$\begin{aligned} \phi_A = & \sum_{i \in \Omega^{GT}} \sum_{t \in \Omega^T} \rho^T_{it} (gt_{it} - gts_{it})^2 + \sum_{i \in \Omega^{GH}} \sum_{t \in \Omega^T} \rho^H_{it} (gh_{it} - ghs_{it})^2 + \\ & \sum_{i \in \Omega^{GT}} \sum_{t \in \Omega^T} \sigma^T_{it} (gt_{it} - gtr_{it})^2 + \sum_{i \in \Omega^{GH}} \sum_{t \in \Omega^T} \sigma^H_{it} (gh_{it} - ghr_{it})^2 \end{aligned} \quad (30)$$

Na Equação (29) os termos λ^T , λ^H , π^T e π^H são os multiplicadores de Lagrange, e na Equação (30), os termos ρ^T , ρ^H , σ^T e σ^H são os parâmetros de penalidade. Realizando a manipulação dos termos de ϕ_A e substituindo ϕ_{LA} na equação do UCHT relaxado é obtida a nova formulação completamente separável conforme mostra a Equação (31).

$$\begin{aligned} \min \quad \mathcal{L}_P = & \sum_{i \in \Omega^{GT}} \sum_{t \in \Omega^T} (\mathbf{CP}_i \cdot z_{it} + \mathbf{CT}_i \cdot gts_{it}) + \\ & \sum_{i \in \Omega^B} \sum_{t \in \Omega^T} \mathbf{CS} \cdot ls_{it} + \\ & \sum_{i \in \Omega^{GT}} \sum_{t \in \Omega^T} \lambda^T_{it} (gt_{it} - gts_{it}) + \\ & \sum_{i \in \Omega^{GH}} \sum_{t \in \Omega^T} \lambda^H_{it} (gh_{it} - ghs_{it}) + \\ & \sum_{i \in \Omega^{GT}} \sum_{t \in \Omega^T} \pi^T_{it} (gt_{it} - gtr_{it}) + \\ & \sum_{i \in \Omega^{GH}} \sum_{t \in \Omega^T} \pi^H_{it} (gh_{it} - ghr_{it}) + \\ & \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i \in \Omega^{GT}} \sum_{t \in \Omega^T} [\rho^T_{it} (gt_{it}^2 - 2gt_{it}gts_{it} + gts_{it}^2) + \right. \\ & \quad \left. \sigma^T_{it} (gt_{it}^2 - 2gt_{it}gtr_{it} + gtr_{it}^2)] + \right. \\ & \left. \sum_{i \in \Omega^{GH}} \sum_{t \in \Omega^T} [\rho^H_{it} (gh_{it}^2 - 2gh_{it}ghs_{it} + ghs_{it}^2) + \right. \\ & \quad \left. \sigma^H_{it} (gh_{it}^2 - 2gh_{it}ghr_{it} + ghr_{it}^2)] \right\} \end{aligned} \quad (31a)$$

s.a.

$$z_{it} - w_{it} = u_{it} - u_{it-1} \quad \forall i \in \Omega^{GT}, t \in \Omega^T \quad (31b)$$

$$gts_{it} - gts_{it-1} \leq \Delta_i u_{it-1} + \mathbf{GT}_i^{\min} z_{it} \quad \forall i \in \Omega^{GT}, t \in \Omega^T \quad (31c)$$

$$gts_{it-1} - gts_{it} \leq \Delta_i u_{it} + \mathbf{GT}_i^{\min} w_{it} \quad \forall i \in \Omega^{GT}, t \in \Omega^T \quad (31d)$$

$$\mathbf{GT}_i^{min} u_{it} \leq gts_{it} \leq \mathbf{GT}_i^{max} u_{it} \quad \forall i \in \Omega^{GT}, t \in \Omega^T \quad (31e)$$

$$\sum_{n=t-T_i^{UP}+1}^t z_{in} \leq u_{it} \quad \forall i \in \Omega^{GT}, t \in \Omega^T \quad (31f)$$

$$\sum_{n=t-T_i^{DOWN}+1}^T w_{in} \leq 1 - u_{it} \quad \forall i \in \Omega^{GT}, t \in \Omega^T \quad (31g)$$

$$v_{it} - v_{it-1} + \kappa \cdot [q_{it} + s_{it} - \sum_{j \in \Theta_i^{GH}} (q_{jt-\tau_j} + s_{jt-\tau_j})] = \kappa \cdot y_{it} \quad \forall i \in \Omega^{GH}, t \in \Omega^T \quad (31h)$$

$$\mathbf{V}_i^{min} \leq v_{it} \leq \mathbf{V}_i^{max} \quad \forall i \in \Omega^{GH}, t \in \Omega^T \quad (31i)$$

$$\mathbf{Q}_i^{min} \leq v_{it} \leq \mathbf{Q}_i^{max} \quad \forall i \in \Omega^{GH}, t \in \Omega^T \quad (31j)$$

$$0 \leq s_{it} \leq \mathbf{S}_i^{max} \quad \forall i \in \Omega^{GH}, t \in \Omega^T \quad (31k)$$

$$V_{iT^{max}} - V_{i0} = 0 \quad \forall i \in \Omega^{GH} \quad (31l)$$

$$ghs_{it} \leq \mathbf{P0}_{pi} \cdot q_{it} + \mathbf{P1}_{pi} \cdot v_{it} + \mathbf{P2}_{pi} \cdot s_{it} + \mathbf{P3}_{pi} \quad \forall i \in \Omega^{GH}, t \in \Omega^T, p \in P_i \quad (31m)$$

$$0 \leq ghs_{it} \leq \mathbf{GH}_i^{max} \quad \forall i \in \Omega^{GT}, t \in \Omega^T \quad (31n)$$

$$\sum_{i \in \Omega_j^{GT}} gtr_{it} + \sum_{i \in \Omega_j^{GH}} ghr_{it} + ls_{jt} + \sum_{l \in \Omega_j^{LTIN}} f_{lt} - \sum_{l \in \Omega_j^{LTOUT}} f_{lt} - \mathbf{L}_j = 0 \quad \forall t \in T, j \in \Omega^B \quad (31o)$$

$$f_{lt} - \frac{1}{X_l} \cdot (\theta_{B_t^{from}} - \theta_{B_t^{to}}) = 0 \quad \forall t \in T, l \in \Omega^{LT} \quad (31p)$$

$$\mathbf{F}_l^{min} \leq f_{lt} \leq \mathbf{F}_l^{max} \quad \forall t \in T, l \in \Omega^{LT} \quad (31q)$$

Após a introdução da relaxação das restrições de consistência no problema (31), o valor ótimo deixa de ser igual ao encontrado na formulação original (Equação (9)) por conta do gap de dualidade. A escolha dos valores dos multiplicadores de Lagrange e dos parâmetros de penalidade se torna fundamental para a redução do erro de relaxação e obtenção de resultados satisfatórios (MICHALEK; PAPALAMBROS, 2005). Neste trabalho, as restrições de consistência foram relaxadas com o fim de obter a separabilidade dos subproblemas térmicos, hídrico e rede, resultando em problemas mais simples de serem resolvidos. A escolha do LA como função de penalidade é motivada pela sua capacidade de obter bons resultados mesmo em problemas não-lineares e pela vasta literatura técnica aplicada em problemas de otimização com características similares ao UCHT apresentado (BERTSEKAS, 1999), (AL-AGTASH; SU, 1998), (BELLONI *et al.*, 2003).

3.4.3 Decomposição do UCHT em subproblemas

Como discutido no início da seção 3.4, pode-se representar o problema do UCHT de maneira hierárquica, conforme a Figura 6 onde o problema do topo da hierarquia, denominado problema mestre, representa o sistema sob estudo de maneira generalizada. O problema mestre se conecta aos demais problemas da hierarquia através das *target variables* e *response variables*, coordenando os valores destas variáveis entre os subproblemas. Por conta das restrições de consistência introduzidas anteriormente, o resultado do problema mestre será um *upper bound*⁴ do resultado da formulação integral do UCHT. A decomposição do problema original em subproblemas é feita com base no algoritmo de ADMM apresentado na seção 3.3, ou seja, cada subproblema deriva da minimização do Lagrangiano do UCHT (Equação (31a)) em relação a um conjunto específico de variáveis de interesse ao subproblema.

Neste trabalho, a formulação relaxada apresentada na Equação (31) é dividida em quatro categorias de subproblemas distintas:

- a) Subproblema mestre: Responsável por coordenar a consistência das soluções obtidas dos demais subproblemas através das *target variables*.
- b) Subproblemas térmicos: Representam individualmente o despacho de uma única usina termelétrica, tendo como *response variables* a geração da usina em cada estágio de tempo do despacho.
- c) Subproblema hídrico: Representa o despacho de todas as usinas hidrelétricas em um único subproblema, tendo como *response variables* a geração de cada usina hidrelétrica em cada estágio de tempo do despacho.
- d) Subproblema de atendimento a demanda: Representa o fluxo de energia nas linhas de transmissão, o ângulo (do fluxo DC) em cada barra e, as restrições de atendimento a demanda em cada barra. Tem como *response variables* as variáveis das gerações termelétricas e hidrelétricas de todas as usinas em todos os estágios de tempo.

Estes subproblemas definem a etapa do laço interno do algoritmo do ATC com ADMM, sendo que os valores obtidos para as variáveis de decisão representam uma estimativa da solução do problema de UCHT. Estes problemas, com exceção do subproblema mestre, podem ser resolvidos de forma paralela a fim de obter uma melhoria da performance do método iterativo, diminuindo o tempo para solução de cada iteração do laço interno.

⁴ Salienta-se que em problemas convexos, o gap de dualidade será nulo e o resultado do problema mestre é igual ao problema original.

3.4.3.1 Formulação do subproblema mestre

O subproblema mestre é um problema de minimização irrestrito que deriva das variáveis originais de geração do UCHT que se mantém no problema por conta das restrições de consistência, presentes apenas na função objetivo conforme a Equação (31a). A formulação do subproblema mestre é apresentada na Equação (32):

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i \in \Omega^{GT}} \sum_{t \in \Omega^T} gt_{it} (\lambda_{it}^T + \pi_{it}^T - \rho_{it}^T gts_{it} - \sigma_{it}^T gtr_{it}) + \\ & \sum_{i \in \Omega^{GH}} \sum_{t \in \Omega^T} gh_{it} (\lambda_{it}^H + \pi_{it}^H - \rho_{it}^H ghs_{it} - \sigma_{it}^H ghr_{it}) + \\ & \sum_{i \in \Omega^{GT}} \sum_{t \in \Omega^T} \frac{1}{2} gt_{it}^2 (\rho_{it}^T + \sigma_{it}^T) + \sum_{i \in \Omega^{GH}} \sum_{t \in \Omega^T} \frac{1}{2} gh_{it}^2 (\rho_{it}^H + \sigma_{it}^H) \end{aligned} \quad (32)$$

Este subproblema, por ser irrestrito e separável nas variáveis de decisão, pode ser resolvido analiticamente, de modo que sua solução é computacionalmente eficiente. As equações (33) e (34) mostram as fórmulas para o cálculo das variáveis de geração termelétrica e hidrelétrica, respectivamente.

$$gt_{it} = \frac{\rho_{it}^T gts_{it} + \sigma_{it}^T gtr_{it} - \lambda_{it}^T - \pi_{it}^T}{\rho_{it}^T + \sigma_{it}^T} \quad (33)$$

$$gh_{it} = \frac{\rho_{it}^H ghs_{it} + \sigma_{it}^H ghr_{it} - \lambda_{it}^H - \pi_{it}^H}{\rho_{it}^H + \sigma_{it}^H} \quad (34)$$

3.4.3.2 Formulação dos subproblemas térmicos

Os subproblemas térmicos são problemas de minimização que derivam das variáveis duplicadas gts de geração térmica do UCHT com VS presentes na função objetivo conforme a Equação (31a), e das restrições relativas ao despacho das usinas termelétricas. Neste trabalho, utiliza-se um subproblema para cada usina termelétrica que abrange todos os estágios de tempo do despacho⁵. A formulação dos subproblemas térmicos para uma usina ω é apresentada na Equação (35):

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{t \in \Omega^T} (\mathbf{CP}_\omega \cdot z_{\omega t} + \mathbf{CT}_\omega \cdot gts_{\omega t} + \frac{1}{2} \rho_{\omega t}^T gts_{\omega t}^2 - \\ & \rho_{\omega t}^T gt_{\omega t} gts_{\omega t} - \lambda_{\omega t}^T gts_{\omega t}) \end{aligned} \quad (35a)$$

s.a.

$$z_{\omega t} - w_{\omega t} = u_{\omega t} - u_{\omega t-1} \quad \forall t \in \Omega^T \quad (35b)$$

$$gts_{\omega t} - gts_{\omega t-1} \leq \Delta_\omega u_{\omega t-1} + \mathbf{GT}_\omega^{\min} z_{\omega t} \quad \forall t \in \Omega^T \quad (35c)$$

⁵ Para validar a utilização do ATC para solução de problemas de UCHT, optou-se por utilizar o desacoplamento aqui apresentado. Contudo, admite-se que há a possibilidade de uma desacoplamento maior do problema, o que pode trazer melhorias na performance da solução.

$$gts_{\omega t-1} - gts_{\omega t} \leq \Delta_{\omega} u_{\omega t} + \mathbf{GT}_{\omega}^{\min} w_{\omega t} \quad \forall t \in \Omega^T \quad (35d)$$

$$\mathbf{GT}_{\omega}^{\min} u_{\omega t} \leq gts_{\omega t} \leq \mathbf{GT}_{\omega}^{\max} u_{\omega t} \quad \forall t \in \Omega^T \quad (35e)$$

$$\sum_{n=t-T_{\omega}^{UP}+1}^t z_{\omega n} \leq u_{\omega t} \quad \forall t \in \Omega^T \quad (35f)$$

$$\sum_{n=t-T_{\omega}^{DOWN}+1}^T w_{\omega n} \leq 1 - u_{\omega t} \quad \forall t \in \Omega^T \quad (35g)$$

$$z_{it}, w_{it}, u_{it} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in \Omega^{GT}, t \in \Omega^T \quad (35h)$$

3.4.3.3 Formulação do subproblema hídrico

O subproblema hídrico é um problema de minimização que deriva das variáveis duplicadas ghs de geração hídrica do UCHT com VS, presentes na função objetivo conforme a Equação (31a), e das restrições relativas ao despacho das usinas hidrelétricas. Neste trabalho, utiliza-se um único subproblema para todas as usinas hidrelétricas, que abrange todos os estágios de tempo do despacho. A formulação do subproblema hídrico é apresentada na Equação (36):

$$\min \sum_{i \in \Omega^{GH}} \sum_{t \in \Omega^T} \left(\frac{1}{2} \rho^H_{it} ghs_{it}^2 - \rho^H_{it} gh_{it} ghs_{it} - \lambda^H_{it} ghs_{it} \right)$$

s.a.

$$v_{it} - v_{it-1} +$$

$$\kappa \cdot [q_{it} + s_{it} - \sum_{j \in \Theta_i^{GH}} (q_{jt-\tau_j} + s_{jt-\tau_j})] = \kappa \cdot y_{it} \quad \forall i \in \Omega^{GH}, t \in \Omega^T \quad (36a)$$

$$\mathbf{V}_i^{\min} \leq v_{it} \leq \mathbf{V}_i^{\max} \quad \forall i \in \Omega^{GH}, t \in \Omega^T \quad (36b)$$

$$\mathbf{Q}_i^{\min} \leq v_{it} \leq \mathbf{Q}_i^{\max} \quad \forall i \in \Omega^{GH}, t \in \Omega^T \quad (36c)$$

$$0 \leq s_{it} \leq \mathbf{S}_i^{\max} \quad \forall i \in \Omega^{GH}, t \in \Omega^T \quad (36d)$$

$$v_{iT^{\max}} - V_i^0 = 0 \quad \forall i \in \Omega^{GH} \quad (36e)$$

$$ghs_{it} \leq \mathbf{P0}_{pi} \cdot q_{it} + \mathbf{P1}_{pi} \cdot v_{it} +$$

$$\mathbf{P2}_{pi} \cdot s_{it} + \mathbf{P3}_{pi} \quad \forall i \in \Omega^{GH}, t \in \Omega^T, p \in P_i \quad (36f)$$

$$0 \leq ghs_{it} \leq \mathbf{GH}_i^{\max} \quad \forall i \in \Omega^{GT}, t \in \Omega^T \quad (36g)$$

3.4.3.4 Formulação do subproblema de atendimento à demanda

O subproblema de atendimento à demanda é um problema de minimização que deriva das variáveis duplicadas gtr e ghr de geração térmica e hídrica, respectivamente, do UCHT com VS presentes na função objetivo conforme a Equação (31a), e das restrições relativas ao atendimento à demanda, limites de transmissão nas linhas e do fluxo de rede DC. Neste trabalho, utiliza-se um único subproblema para todas as

usinas, barras e linhas de transmissão, que abrange todos os estágios de tempo do despacho. A formulação do subproblema de atendimento a demanda é apresentada a seguir na Equação (37):

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i \in \Omega^{GT}} \sum_{t \in \Omega^T} \left(\frac{1}{2} \sigma^T_{it} gtr_{it}^2 - \sigma^T_{it} gtr_{it} gtr_{it} - \pi^T_{it} gtr_{it} \right) + \\ & \sum_{i \in \Omega^{GH}} \sum_{t \in \Omega^T} \left(\frac{1}{2} \sigma^H_{it} ghr_{it}^2 - \sigma^H_{it} ghr_{it} ghr_{it} - \pi^H_{it} ghr_{it} \right) + \\ & \sum_{i \in \Omega^B} \sum_{t \in \Omega^T} CS \cdot ls_{it} \end{aligned} \quad (37a)$$

s.a.

$$\begin{aligned} \sum_{i \in \Omega_j^{GT}} gtr_{it} + \sum_{i \in \Omega_j^{GH}} ghr_{it} + ls_{jt} + \sum_{l \in \Omega_j^{LTIN}} f_{lt} - \\ \sum_{l \in \Omega_j^{LTOUT}} f_{lt} - \mathbf{L}_{jt} = 0 \end{aligned} \quad \forall t \in T, j \in \Omega^B \quad (37b)$$

$$f_{lt} - \frac{1}{X_l} \cdot (\theta_{B_{lt}^{from}} - \theta_{B_{lt}^{to}}) = 0 \quad \forall t \in T, l \in \Omega^{LT} \quad (37c)$$

$$\mathbf{F}_l^{min} \leq f_{lt} \leq \mathbf{F}_l^{max} \quad \forall t \in T, l \in \Omega^{LT} \quad (37d)$$

$$ls_{it} \geq 0 \quad \forall i \in \Omega^B, t \in \Omega^T \quad (37e)$$

3.4.4 Análise da quantidade de restrições e variáveis

Uma vez apresentados os quatro subproblemas que serão utilizados no algoritmo de ATC com ADMM, pode-se fazer uma análise acerca da quantidade de variáveis e restrições em cada um dos modelos, com o fim de entender melhor a complexidade computacional por trás de cada etapa do algoritmo. A Tabela 2 apresenta a quantidade de variáveis e restrições de cada categoria de subproblema⁶, onde Q^T é a quantidade de estágios do problema, Q^{GT} é a quantidade de usinas termelétricas do sistema, Q^{GH} é a quantidade de usinas hidrelétricas do sistema, Q^B é a quantidade de barras do sistema, e Q^{LT} é a quantidade de linhas de transmissão do sistema.

Tabela 2 – Quantidade de variáveis e restrições por tipo de subproblema

Subproblema	Variáveis contínuas	Variáveis binárias	Restrições Lineares
Master	$Q^T(Q^{GT} + Q^{GH})$	0	0
Térmico	$Q^T * Q^{GT}$	$Q^T * 3Q^{GT}$	$Q^T * 6Q^{GT}$
Hidrológico	$Q^T * 4Q^{GH}$	0	$Q^{GH} + Q^T(5 + P_i)Q^{GH}$
Atendimento a demanda	$Q^T(Q^{GT} + Q^{GH} + 2Q^B + Q^{LT})$	0	$Q^T(Q^B + 2Q^{LT})$

⁶ Apesar da formulação do subproblema térmico tratar de apenas uma única usina, os dados aqui apresentados representam todo o conjunto de usinas termelétricas.

Percebe-se que o aumento da quantidade de usinas termelétricas ou hidrelétricas tem um impacto maior em seu respectivo subproblema (e em menor grau nos subproblemas mestre e de atendimento a demanda), enquanto que o aumento da quantidade de estágios do estudo impacta globalmente a complexidade do problema. É possível ver também que apenas o subproblema térmico utiliza variáveis binárias, permitindo maior maleabilidade nas técnicas empregadas na solução dos subproblemas.

3.4.5 Atualização dos parâmetros de penalidade

Por conta da utilização do ADMM estendido e da natureza inteira-mista do subproblema térmico, a aplicação do algoritmo não garante mais as características de convergência anteriormente observadas individualmente em cada uma das metodologias. No entanto, o artigo de (TOSSERAMS *et al.*, 2006) propõe a utilização de um laço externo que busca conduzir o resultado obtido no laço interno para estimativas mais coerentes através da atualização dos parâmetros de penalidade e dos multiplicadores de Lagrange.

A formulação original do LA utiliza parâmetros de penalidade constantes e que não se alteram entre as iterações do algoritmo. Apesar de computacionalmente mais simples, esta implementação coloca grande peso na escolha dos parâmetros de penalidade, podendo degradar consideravelmente a resposta obtida através do ATC caso sejam escolhidos parâmetros distantes dos valores ótimos. De fato, dependendo das características do problema, pode não existir um valor finito para os parâmetros de penalidade que faça a solução do ATC convergir para a solução ótima do problema original; no entanto, a utilização de valores arbitrariamente grandes não necessariamente será melhor que a utilização de um valor finito ótimo de acordo com (MICHALEK; PAPALAMBROS, 2005).

Para contornar a dificuldade na escolha do valor dos parâmetros de penalidade, em (MICHALEK; PAPALAMBROS, 2005) é proposto que seja feita uma etapa de atualização dos parâmetros que leve em consideração a diferença entre as *target* e *response variables*. Após cada iteração do ADMM⁷, é avaliada a necessidade de atualizar os parâmetros de penalidade de acordo com o erro⁸ dos valores das variáveis à fim de melhorar a qualidade da resposta obtida dentro de um limiar ϵ imposto ao algoritmo.

A metodologia empregada para a atualização dos parâmetros é feita conforme proposto por (BERTSEKAS, 1999), seguindo algumas considerações: o valor inicial dos parâmetros não pode ser muito alto evitando mal condicionamento nas primeiras iterações do algoritmo, a taxa de crescimento dos valores não pode ser demasiada-

⁷ Menciona-se especificamente o ADMM pois esta é a metodologia empregada neste trabalho, no entanto, os valores dos parâmetros de penalidade devem ser avaliados após a convergência do laço interno independente de qual for o método escolhido para tal.

⁸ Aqui, o erro se refere a diferença entre uma *target variable* e a *response variable* correspondente.

mente elevada a fim também de evitar mal condicionamento durante a resolução do problema, e não pode ser baixa demais pois isto implicaria em redução da velocidade de convergência de modo geral.

Dada uma variável genérica x , sua contraparte \bar{x}^9 e um parâmetro de penalidade r atrelado à restrição de consistência entre x e \bar{x} , a atualização do parâmetro é feita da seguinte maneira:

$$r^{k+1} = \begin{cases} \beta r^k, & \text{if } \|x^k - \bar{x}^k\| > \gamma \|x^{k-1} - \bar{x}^{k-1}\| \\ r^k, & \text{if } \|x^k - \bar{x}^k\| \leq \gamma \|x^{k-1} - \bar{x}^{k-1}\| \end{cases} \quad (38)$$

onde k representa a iteração atual do algoritmo.

Na Equação (38), o parâmetro β é um escalar, sendo $\beta > 1$, e representa o quanto o valor dos parâmetros de penalidade deve aumentar caso o incremento seja necessário. O parâmetro γ é um escalar, sendo $0 < \gamma < 1$, e serve como um fator limitante para as atualizações do parâmetro de penalidade, de modo que é incrementado o valor do parâmetro caso a estimativa do laço interno ainda esteja fornecendo soluções coerentes e com bom grau de convergência.

A escolha dos valores de β e γ^{10} é importante pois afetará a velocidade da convergência do método e a sua capacidade de encontrar boas estimativas da solução no laço interno. Valores de β maiores são interessantes quando utilizados com implementações do laço interno mais agressivas (isto é, que conseguem convergir mais rapidamente), enquanto valores mais baixos são preferíveis em métodos com menor resiliência à mal condicionamento do problema (BERTSEKAS, 1999). O valor escolhido para os parâmetros comumente é escolhido de maneira empírica através de testes, sendo necessária reavaliar os valores escolhidos de acordo com modificações nos modelos ou grandes alterações nos dados de entrada.

Neste trabalho, todos os parâmetros de penalidade são inicializados no valor unitário. Esta decisão é puramente empírica e optou-se por utilizar estes valores como ponto inicial do problema de otimização através de testes. Os meta-parâmetros γ e β são dados constantes durante a solução de um problema.

3.4.6 Algoritmo do ATC com ADMM

Como descrito nas subseções anteriores, a implementação do ATC com ADMM é um algoritmo iterativo composto de um laço interno que fornece estimativas para a solução do problema de otimização, e de um laço externo responsável pela atualização dos multiplicadores de Lagrange e dos parâmetros de penalidade. A cada iteração do algoritmo é necessário avaliar se a resposta encontrada é satisfatória ou se é

⁹ A variável contraparte é obtida através da aplicação do VS conforme a seção 3.1.

¹⁰ No restante deste trabalho, β e γ são referidos como meta-parâmetros.

necessário continuar a execução do mesmo a fim de melhorar a qualidade da solução obtida.

3.4.6.1 Critério de convergência do algoritmo

Por conta da dificuldade em avaliar analiticamente as condições de Karush-Kuhn-Tucker para cada estimativa fornecida pelo laço interno, garantir a otimalidade da resposta encontrada em uma determinada iteração não é factível, sendo necessário impor condições de convergência para a parada do algoritmo.

Primeiramente, é estabelecido um número máximo de iterações k^{max} . A motivação por trás deste critério é por conta da falta de garantia de convergência geral do ATC por se tratar de um problema do tipo PLIM. Ao atingir o limite máximo de iterações, considera-se que o algoritmo não convergiu e a estimativa obtida é descartada.

O segundo critério de convergência avalia o erro das restrições de consistência relaxadas entre duas iterações consecutivas, de modo que o critério é considerado atendido caso a norma euclidiana do vetor da diferença de erros entre as duas iterações esteja dentro de um limiar ϵ . A Equação (39) ilustra o critério para um vetor de variáveis x e suas respectivas variáveis duplicadas \bar{x} :

$$\|(\mathbf{x}^k - \bar{\mathbf{x}}^k) - (\mathbf{x}^{k-1} - \bar{\mathbf{x}}^{k-1})\| \leq \epsilon \quad (39)$$

onde k é a iteração atual do algoritmo.

O último critério avalia o tamanho do erro das restrições de convergência relaxadas, sendo o critério considerado atendido quando a norma euclidiana do vetor de erros estiver dentro de um limiar ϵ , conforme a Equação (40).

$$\|\mathbf{x}^k - \bar{\mathbf{x}}^k\| \leq \epsilon \quad (40)$$

Para que o algoritmo seja considerado convergido, ambos os critérios relacionados ao erro devem ser atendidos dentro do limite máximo de iterações, sendo as estimativas obtidas na última iteração do laço interno consideradas como a solução do problema de otimização.

3.4.6.2 Descrição do Algoritmo

A execução do algoritmo de ATC com ADMM pode ser sintetizada nos seguintes passos:

- Passo 1: Inicializar os valores das estimativas de solução do subproblema mestre, multiplicadores de Lagrange, parâmetros de penalidade, e o contador de iteração $k = 1$;

- Passo 2: Resolver os subproblemas térmicos, hídrico e de atendimento a demanda conforme (35), (36) e (37) respectivamente;
- Passo 3: Resolver o subproblema mestre (com base nos valores obtidos no passo 2) conforme (32);
- Passo 4: Verificar os critérios de convergência conforme (39) e (40). Caso a convergência tenha sido obtida ou $k = k^{max}$, parar o algoritmo. Caso contrário, fazer $k = k + 1$ e continuar o algoritmo.
- Passo 5: Atualizar os multiplicadores de Lagrange e parâmetros de penalidade conforme (23) e (38) respectivamente, com base nos resultados obtidos nos passos 2 e 3;

3.4.6.3 Exemplo de aplicação do algoritmo

Para exemplificar a execução do algoritmo, o problema (12) foi resolvido utilizando o ATC com ADMM apresentado. Após aplicação do VS, é obtido o problema (41) com duplicação das variáveis necessárias para aplicação do ADMM.

$$\begin{aligned}
 \min \quad & x^2 - y^2 \\
 \text{s.a.} \quad & \\
 & x_p - 5 \leq 0 \\
 & y_p^2 - 10 \leq 0 \\
 & x_a + y_a - 5 = 0 \\
 & x_p \geq 0 \\
 & x - x_p = 0 \\
 & x - x_a = 0 \\
 & y - y_p = 0 \\
 & y - y_a = 0
 \end{aligned} \tag{41}$$

Este problema é quebrado nos quatro subproblemas que serão utilizados no algoritmo de ATC com ADMM:

O subproblema mestre:

$$\min \quad x(\lambda^x + \pi^x - \rho^x x_p - \delta^x x_a) + y(\lambda^y + \pi^y - \rho^y y_p - \delta^y y_a) \tag{42}$$

O subproblema da variável x :

$$\begin{aligned}
\min \quad & x_p^2 + \frac{1}{2}\rho^x x_p^2 - \rho^x x x_p - \lambda^x x_p \\
\text{s.a.} \quad & \\
& x_p - 5 \leq 0 \\
& x_p \geq 0
\end{aligned} \tag{43}$$

o subproblema da variável y :

$$\begin{aligned}
\min \quad & -y_p^2 + \frac{1}{2}\rho^y y_p^2 - \rho^y y y_p - \lambda^y y_p \\
\text{s.a.} \quad & \\
& y_p^2 - 10 \leq 0
\end{aligned} \tag{44}$$

o subproblema da restrição comum:

$$\begin{aligned}
\min \quad & \frac{1}{2}\delta^x x_a^2 - \delta^x x x_a - \pi^x x_a + \frac{1}{2}\delta^y y_a^2 - \delta^y y y_a - \pi^y y_a \\
\text{s.a.} \quad & \\
& x_a + y_a - 5 = 0
\end{aligned} \tag{45}$$

onde λ e π são os multiplicadores de Lagrange relacionados às restrições de consistência, e ρ e δ são os parâmetros de penalidade do ADMM. Os valores iniciais são $x = 0$, $y = 4$, $\lambda^x, \lambda^y, \pi^x, \pi^y = 0$ e $\rho^x, \rho^y, \delta^x, \delta^y = 1$. Quanto aos metaparâmetros, são utilizados os valores de $\beta = 2$ e $\gamma = 0.2$ e para os critérios de convergência é usado um limite de 300 iterações e $\epsilon = 10^{-3}$.

Na primeira iteração tem-se os seguintes resultados:

- Passo 2: Os subproblemas (43), (44) e (45) são resolvidos, obtendo-se $x_p = 0$, $x_a = 0, 5$, $y_p = 3, 162$ e $y_a = 4, 5$;
- Passo 3: O subproblema mestre (42) é resolvido e obtém-se $x = 0, 25$ e $y = 3, 831$;
- Passo 4: Considerando os critérios de convergência:
 - Primeiro critério (39): $c_1 = (((x^1 - x_p^1) - (x^0 - x_p^0))^2 + ((x^1 - x_a^1) - (x^0 - x_a^0))^2 + ((y^1 - y_p^1) - (y^0 - y_p^0))^2 + ((y^1 - y_a^1) - (y^0 - y_a^0))^2)^{\frac{1}{2}} = 1, 010$. Como o valor obtido para o critério está acima de ϵ , não houve convergência do algoritmo.
 - Segundo critério (40): $c_2 = ((x^1 - x_p^1)^2 + (x^1 - x_a^1)^2 + (y^1 - y_p^1)^2 + (y^1 - y_a^1)^2)^{\frac{1}{2}} = 1, 010$. Como o valor obtido para o critério está acima de ϵ , não houve convergência do algoritmo.
- Passo 5: Os multiplicadores são atualizados para $\lambda^x = 0 + 1 * (0, 25 - 0) = 0, 25$, $\pi^x = 0 + 1 * (0, 25 - 0, 5) = -0, 25$, $\lambda^y = 0 + 1 * (3, 831 - 3, 162) = 0, 669$, $\pi^y = 0 + 1 * (3, 831 - 4, 5) = -0, 669$. Os parâmetros de penalidade são ajustados para $\rho^x, \rho^y, \delta^x, \delta^y = 2$;

Na segunda iteração, tem-se os seguintes resultados:

- **Passo 2:** Os subproblemas das variáveis são resolvidos, obtendo-se $x_p = 0,188$, $x_a = 0,814$, $y_p = 3,162$ e $y_a = 4,186$;
- **Passo 3:** O subproblema mestre (42) é resolvido e obtém-se $x = 0,501$ e $y = 3,674$;
- **Passo 4:** Considerando os critérios de convergência:
 - **Primeiro critério (39):** $c_1 = (((x^1 - x_p^1) - (x^0 - x_p^0))^2 + ((x^1 - x_a^1) - (x^0 - x_a^0))^2 + ((y^1 - y_p^1) - (y^0 - y_p^0))^2 + ((y^1 - y_a^1) - (y^0 - y_a^0))^2)^{\frac{1}{2}} = 0,240$. Como o valor obtido para o critério está acima de ϵ , não houve convergência do algoritmo.
 - **Segundo critério (40):** $c_2 = ((x^1 - x_p^1)^2 + (x^1 - x_a^1)^2 + (y^1 - y_p^1)^2 + (y^1 - y_a^1)^2)^{\frac{1}{2}} = 0,849$. Como o valor obtido para o critério está acima de ϵ , não houve convergência do algoritmo.
- **Passo 5:** Os multiplicadores são atualizados para $\lambda^x = 0,25 + 2*(0,501 - 0,188) = 0,877$, $\pi^x = -0,25 + 2*(0,501 - 0,814) = -0,877$, $\lambda^y = 0,669 + 2*(3,674 - 3,162) = 1,692$, $\pi^y = -0,669 + 2*(3,674 - 4,186) = -1,692$. Os parâmetros de penalidade são ajustados para $\rho^x, \rho^y, \delta^x, \delta^y = 4$;

O algoritmo levou 20 iterações até convergir para $x = 1.840$ e $y = 3.161$, com o valor ótimo da função objetivo de -6,607. O resultado obtido pela solução direta do problema é $x = 1.838$, $y = 3.162$ e valor ótimo da função objetivo de -6.6227. O resultado de todas as iterações é apresentado na Tabela 3, sendo que os valores de λ e π são idênticos mas com sinal invertido. Por sua vez, os valores de ρ e δ são todos idênticos.

Tabela 3 – Processo iterativo

k	Erro	x_p	x_a	x	y_p	y_a	y	λ^x, π^x	λ^y, π^y	$\rho^x, \rho^y, \delta^x, \delta^y$
1	1,010	0,000	0,500	0,250	3,162	4,500	3,831	0,250	0,669	2
2	0,849	0,188	0,814	0,501	3,162	4,186	3,674	0,877	1,692	4
3	0,694	0,480	1,015	0,748	3,162	3,985	3,573	1,947	3,337	8
4	0,541	0,793	1,174	0,983	3,162	3,826	3,494	3,472	5,992	16
5	0,406	1,067	1,323	1,195	3,162	3,677	3,419	5,523	10,107	32
6	0,294	1,287	1,460	1,373	3,162	3,540	3,351	8,277	16,158	64
7	0,204	1,457	1,573	1,515	3,162	3,427	3,295	11,969	24,642	128
8	0,137	1,584	1,660	1,622	3,162	3,340	3,251	16,825	36,046	256
9	0,088	1,674	1,723	1,698	3,162	3,277	3,220	23,022	50,775	512
10	0,055	1,737	1,766	1,752	3,162	3,234	3,198	30,648	69,027	1024
11	0,032	1,778	1,796	1,787	3,162	3,204	3,183	39,636	90,625	2048
12	0,018	1,804	1,814	1,809	3,162	3,186	3,174	49,662	114,768	4096
13	0,009	1,820	1,826	1,823	3,162	3,174	3,168	60,013	139,719	8192
14	0,004	1,830	1,832	1,831	3,162	3,168	3,165	69,414	162,395	16384
15	0,001	1,835	1,836	1,835	3,162	3,164	3,163	75,826	177,864	32768
16	0,000	1,838	1,838	1,838	3,162	3,162	3,162	76,200	178,763	32768
17	0,001	1,840	1,839	1,840	3,162	3,161	3,162	65,899	153,891	65536
18	0,002	1,841	1,840	1,840	3,162	3,160	3,161	39,201	89,434	131072
19	0,001	1,840	1,840	1,840	3,162	3,160	3,161	-11,578	-16,581	262144
20	0,001	1,840	1,839	1,840	3,161	3,161	3,161	-	-	-

4 APLICAÇÃO PRÁTICA DO ATC COM ADMM PARA SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE UCHT

Neste capítulo, será apresentada a configuração do sistema elétrico que é utilizada para experimentação do método de ATC com ADMM. Inicialmente é apresentado o resultado do caso base (solução direta via PLIM), seguido de uma análise sobre os meta-parâmetros de atualização dos parâmetros de penalidade e a sensibilidade do algoritmo frente a variação da demanda do sistema. Todos os experimentos foram conduzidos em um computador com processador Intel Core i7-9750H com 16 gigabytes de memória RAM e sistema operacional Windows 10 Home. A implementação dos problemas de otimização e do algoritmo de ATC com ADMM foi feita inteiramente na linguagem Julia, utilizando o Gurobi como solver.

4.1 SISTEMA TESTE DE 24 BARRAS

O sistema utilizado para experimentação é baseado no subsistema sudeste/centro-oeste do SIN e é composto de 24 barras, 38 linhas de transmissão, cinco usinas termelétricas e 14 usinas hidrelétricas, configuradas conforme a Figura 7. A representação da figura do sistema agrupa usinas na mesma barra em um único símbolo, sendo que o T representa a existência de pelo menos uma usina termelétrica conectada a barra.

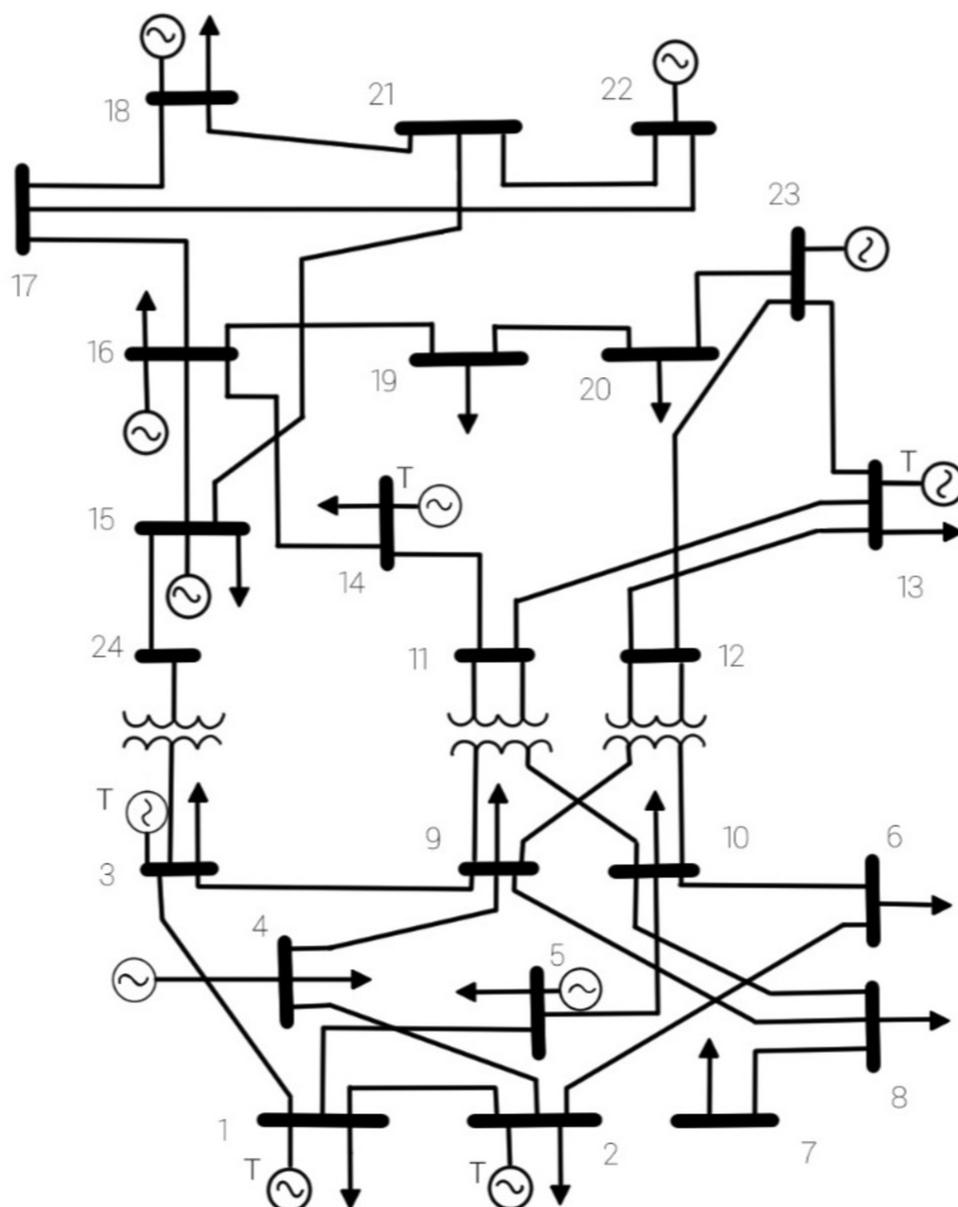
Por motivos de organização do documento, os valores das constantes utilizadas nos subproblemas se encontram nos apêndices A, B e C para os subproblemas termoelétricos, hídrico e de atendimento a demanda, respectivamente. O modelo resultante apresenta oito subproblemas distintos sendo um subproblema mestre, cinco subproblemas térmicos, um subproblema hídrico e um subproblema de atendimento a demanda.

4.2 ESCOLHA DOS PONTOS DE PARTIDA

Um dos principais aspectos da utilização de um método iterativo como o apresentado neste trabalho é a dependência da escolha de um bom ponto de partida. A escolha de um ponto de partida ruim pode gerar convergência para um valor viável de baixa qualidade, ou até mesmo divergir.

Efetivamente, o modelo necessita de um ponto de partida para os valores de geração térmica e hídrica que é utilizado no laço interno da primeira iteração, um ponto de partida para os multiplicadores de Lagrange que será utilizado tanto no laço interno quanto no laço externo da primeira iteração, e de um ponto de partida para os parâmetros de penalidade. No entanto, por conta da dificuldade em estimar um bom valor inicial para os parâmetros, decidiu-se começar todos os parâmetros de

Figura 7 – Representação esquemática simplificada do sistema de 24 barras utilizado.



Fonte: Autor

penalidade no valor 1 e permitir que o algoritmo tenha maior liberdade em conduzir a progressão do mesmo durante as iterações.

A metodologia utilizada para obter o ponto inicial para os multiplicadores de Lagrange e as variáveis de geração foi empregar uma relaxação contínua do PLIM original do UCHT. Por conta da facilidade dos *solvers* modernos em resolver esta versão simplificada do problema, esta metodologia pode ser empregada como uma etapa prévia à execução do algoritmo sem comprometer excessivamente o tempo computacional despendido no processo.

Nesta versão simplificada do problema, as variáveis binárias das térmicas são

substituídas por variáveis contínuas limitadas entre 0 e 1, e é feita a separação das variáveis de geração do modelo conforme o VS mas sem a relaxação das restrições de consistência, obtendo-se um problema maior do que o original (por conta da duplicação das variáveis) mas linear, conforme Equação (46). Por conta das simplificações feitas aqui, o resultado obtido será um *lower-bound* do problema original, pois haverá maior liberdade no despacho das usinas termelétricas.

$$\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i \in \Omega^{GT}} \sum_{t \in \Omega^T} \mathbf{CP}_i \cdot z_{it} + \mathbf{CT}_i \cdot gt_{it} + \sum_{i \in \Omega^B} \sum_{t \in \Omega^T} \mathbf{CS} \cdot ls_{it} & (46a) \\
\text{s.a.} \quad & \\
z_{it} - w_{it} = u_{it} - u_{it-1} & \forall i \in \Omega^{GT}, t \in \Omega^T \\
gts_{it} - gts_{it-1} \leq \Delta_i u_{it-1} + \mathbf{GT}_i^{\min} z_{it} & \forall i \in \Omega^{GT}, t \in \Omega^T \\
gts_{it-1} - gts_{it} \leq \Delta_i u_{it} + \mathbf{GT}_i^{\min} w_{it} & \forall i \in \Omega^{GT}, t \in \Omega^T \\
\mathbf{GT}_i^{\min} u_{it} \leq gts_{it} \leq \mathbf{GT}_i^{\max} u_{it} & \forall i \in \Omega^{GT}, t \in \Omega^T \\
\sum_{n=t-T_i^{UP}+1}^t z_{in} \leq u_{it} & \forall i \in \Omega^{GT}, t \in \Omega^T \\
\sum_{n=t-T_i^{DOWN}+1}^T w_{in} \leq 1 - u_{it} & \forall i \in \Omega^{GT}, t \in \Omega^T \\
v_{it} - v_{it-1} + \\
\kappa \cdot [q_{it} + s_{it} - \sum_{\Theta_i^{GH}}^j (q_{jt-\tau_j} + s_{jt-\tau_j})] = \kappa \cdot y_{it} & \forall i \in \Omega^{GH}, t \in \Omega^T \\
\mathbf{V}_i^{\min} \leq v_{it} \leq \mathbf{V}_i^{\max} & \forall i \in \Omega^{GH}, t \in \Omega^T \\
\mathbf{Q}_i^{\min} \leq v_{it} \leq \mathbf{Q}_i^{\max} & \forall i \in \Omega^{GH}, t \in \Omega^T \\
0 \leq s_{it} \leq \mathbf{S}_i^{\max} & \forall i \in \Omega^{GH}, t \in \Omega^T \\
v_{iT^{\max}} - V_i^0 = 0 & \forall i \in \Omega^{GH} \\
ghs_{it} \leq \mathbf{P0}_{pi} \cdot q_{it} + \mathbf{P1}_{pi} \cdot v_{it} + \mathbf{P2}_{pi} \cdot s_{it} + \mathbf{P3}_{pi} & \forall i \in \Omega^{GH}, t \in \Omega^T, p \in P_i \\
0 \leq ghs_{it} \leq \mathbf{GH}_i^{\max} & \forall i \in \Omega^{GT}, t \in \Omega^T \\
\sum_{i \in \Omega_j^{GT}} gtr_{it} + \sum_{i \in \Omega_j^{GH}} ghr_{it} + ls_{jt} + \sum_{l \in \Omega_j^{LTIN}} flt - \sum_{l \in \Omega_j^{LTOUT}} flt - \\
\mathbf{L}_{jt} = 0 & \forall t \in T, j \in \Omega^B \\
flt - \frac{1}{X_l} \cdot (\theta_{B_{lt}^{from}} - \theta_{B_{lt}^{to}}) = 0 & \forall t \in T, l \in \Omega^{LT} \\
\mathbf{F}_l^{\min} \leq flt \leq \mathbf{F}_l^{\max} & \forall t \in T, l \in \Omega^{LT} \\
0 \leq z_{it} \leq 1 & \forall i \in \Omega^{GT}, t \in \Omega^T \\
0 \leq w_{it} \leq 1 & \forall i \in \Omega^{GT}, t \in \Omega^T
\end{aligned}$$

$$0 \leq u_{it} \leq 1 \quad \forall i \in \Omega^{GT}, t \in \Omega^T$$

$$gt_{it} - gts_{it} = 0 \quad \forall i \in \Omega^{GT}, t \in \Omega^T \quad (46b)$$

$$gt_{it} - gtr_{it} = 0 \quad \forall i \in \Omega^{GT}, t \in \Omega^T \quad (46c)$$

$$gh_{it} - ghs_{it} = 0 \quad \forall i \in \Omega^{GH}, t \in \Omega^T \quad (46d)$$

$$gh_{it} - ghr_{it} = 0 \quad \forall i \in \Omega^{GH}, t \in \Omega^T \quad (46e)$$

A partir da solução deste problema de PLIM relaxado, é obtido o resultado inicial das variáveis de geração do problema mestre (que será utilizado no laço interno da primeira iteração para resolução dos subproblemas térmicos, hídrico e de atendimento a demanda), assim como também é obtido o valor inicial dos multiplicadores de Lagrange relacionados às restrições de consistência (46b), (46c), (46d) e (46e), que foram inseridas com a duplicação das variáveis de geração. Os valores obtidos para as gerações e multiplicadores de Lagrange se encontram no apêndice D. O resultado obtido para o *lower bound* do custo de despacho do UCHT foi de \$620.756,77.

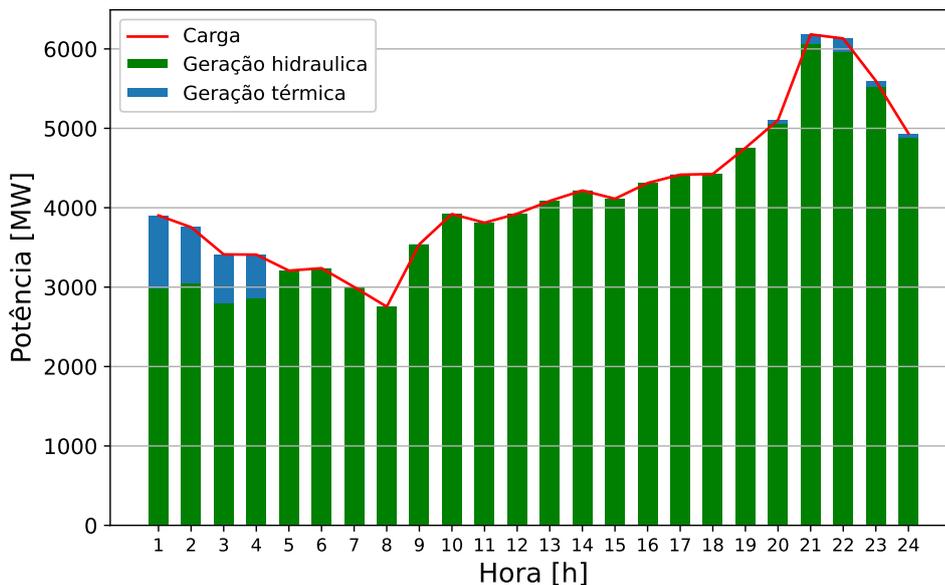
4.3 SOLUÇÃO DO PROBLEMA VIA PLIM ÚNICO

Neste trabalho, são utilizados os resultados do PLIM (Equação (9)) como referência para comparação dos resultados obtidos pelo ATC com ADMM. A Figura 8 mostra a geração das usinas termelétricas e hidrelétricas contra a carga total do sistema. Como é possível ver, a geração hidráulica cobre grande parte da carga exceto nos horários de maior carga quando é necessário despachar a geração térmica para suprir a demanda.

As figuras 9, 10 e 11 mostram os perfis de geração das usinas hidrelétricas de Emborcação, Estreito e Furnas respectivamente, sendo possível perceber uma diferença considerável entre o despacho das três usinas motivado principalmente pela diferença nos valores de afluência incremental e na capacidade de regularização das usinas. A usina de Estreito, apesar de ter menos afluência incremental em relação às demais, é uma usina a fio d'água, consistentemente transformando a água disponível em eletricidade, salvo quando não consegue escoar a geração por conta de limites de transmissão. As usinas de Furnas e Emborcação são grandes usinas de reservatório; no entanto, as linhas de transmissão conectadas à barra 16 (onde se encontra a conexão de Emborcação com o sistema) estão intermitentemente perto de seus limites, traduzindo em um perfil de intermitência na geração da usina. Estas usinas hidrelétricas apresentaram vertimento por conta de excesso de água no sistema e, por conta disto, há água suficiente para que as usinas intercalem seus perfis de geração de modo a contemplar toda a carga não atendida pelas termelétricas, explicando em parte a grande intermitência entre estágios de tempo da geração das mesmas.

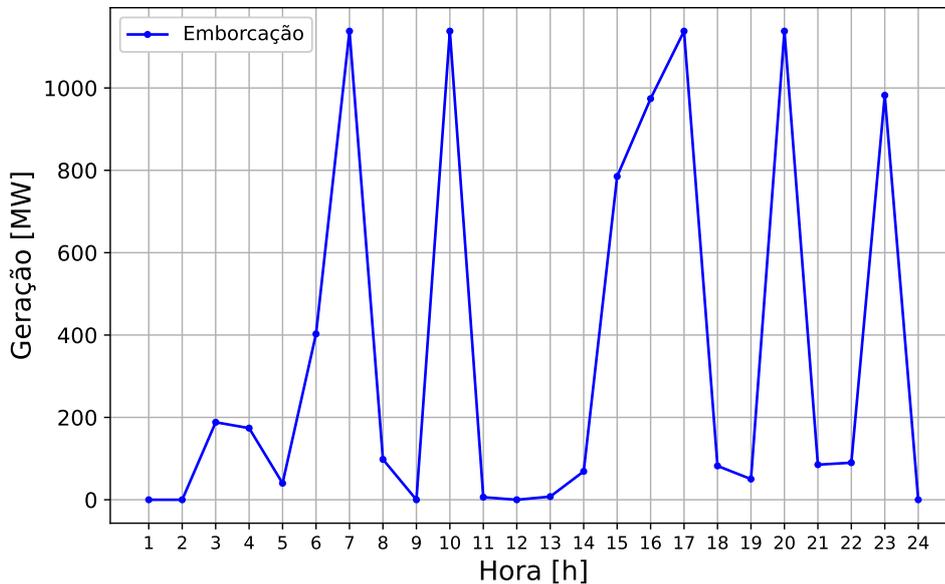
A Figura 12 mostra o fluxo de potência absoluto total nas linhas de transmissão para cada instante de tempo, de modo que, à medida que a carga no sistema vai

Figura 8 – Despacho de geração e carga (PLIM)



Fonte: Autor

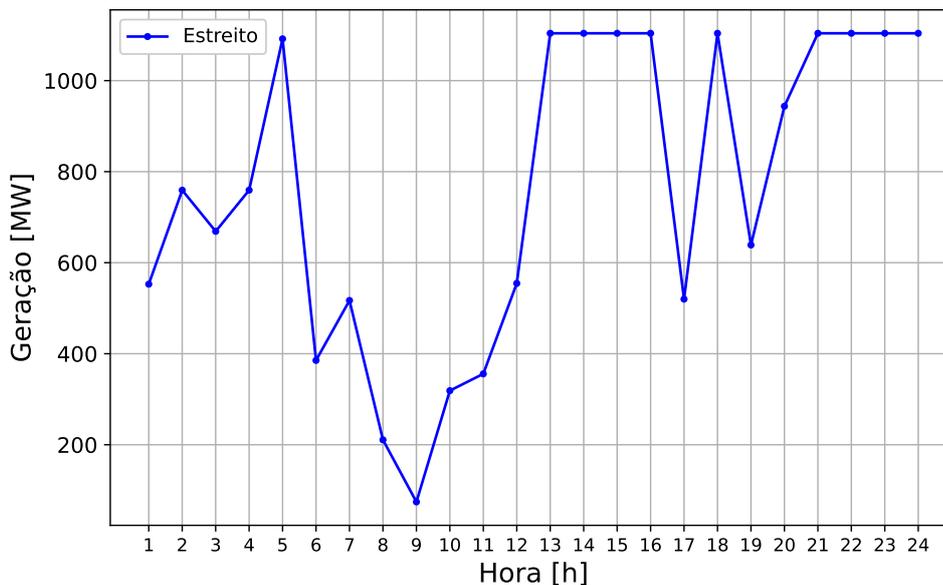
Figura 9 – Geração da usina de Emborcação (PLIM)



Fonte: Autor

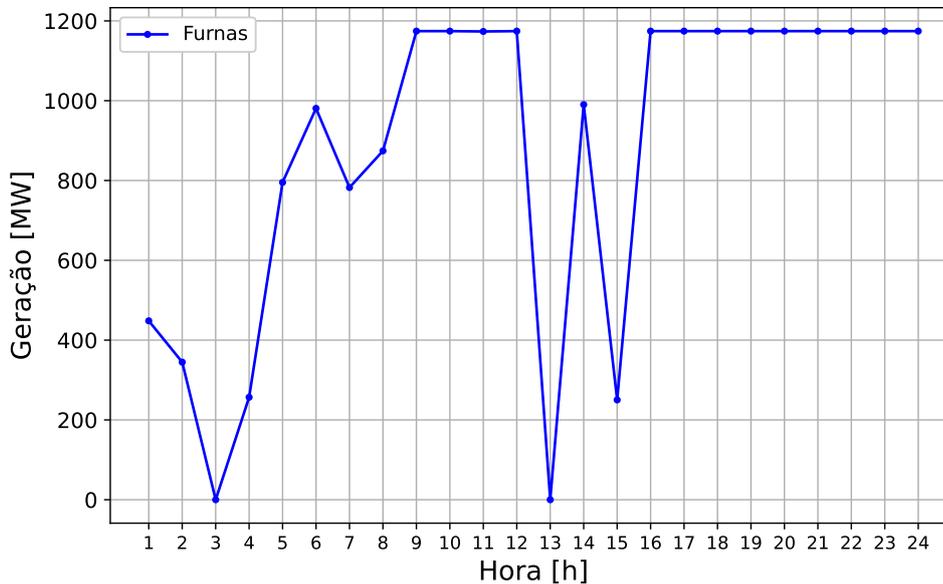
aumentando, percebe-se a maior necessidade de transmitir potência entre as barras com predominância de geração e as barras com maior carga. Naturalmente, o pico no valor absoluto total de transmissão nas linhas se dá no pico de carga do sistema, evidenciando essa diferença entre as barras predominantemente de geração e os centros de carga.

Figura 10 – Geração da usina de Estreito (PLIM)



Fonte: Autor

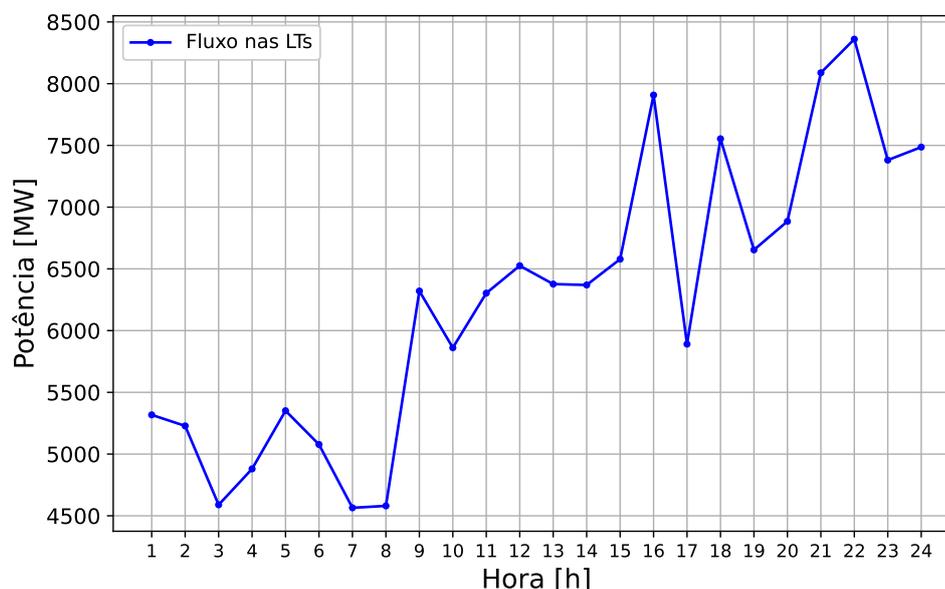
Figura 11 – Geração da usina de Furnas (PLIM)



Fonte: Autor

O resultado obtido para o PLIM foi um custo de despacho de R\$637.683,30 sem a necessidade de corte de carga em nenhuma das horas do estudo. Este resultado é 2,73% maior que o lower-bound encontrado no despacho do modelo relaxado, justificado pela perda de flexibilidade do despacho das usinas térmicas por conta da utilização de variáveis binárias. Em comparação com o modelo obtido através da se-

Figura 12 – Fluxo de potência absoluto nas linhas de transmissão (PLIM)



Fonte: Autor

paração dos subproblemas através do ADMM com VS, o PLIM possui apenas 3888 variáveis, i.e., 18,32% a menos que o total de variáveis em todos os subproblemas do algoritmo de ATC.

Apesar de a execução do PLIM para o sistema aqui utilizado ser suficientemente rápida (aproximadamente 1 segundo) para que seja possível utilizá-lo como paradigma de comparação, a solução direta de problemas de grande porte pode ser limitante dado a quantidade de variáveis e restrições no modelo final. A utilização de técnicas de solução baseadas em decomposição é uma opção atrativa pois não só é possível reduzir o tempo de processamento através da solução em paralelo dos subproblemas, mas também reduzir a quantidade de memória necessária para operação dos *solvers*.

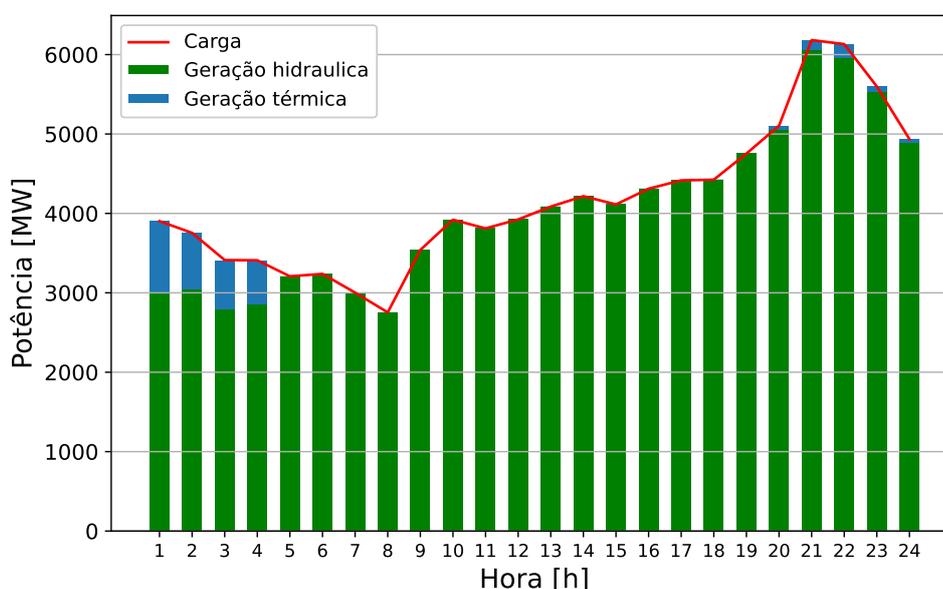
4.4 SOLUÇÃO ATRAVÉS DO ATC COM ADMM

A execução do algoritmo do ATC com ADMM segue o algoritmo descrito na subseção 3.4.6.2, utilizando um limite de 300 iterações e $\epsilon = 0.001$ para os critérios de parada descritos na subseção 3.4.6.1. O valor de geração inicial do subproblema mestre e dos multiplicadores de Lagrange estão no Apêndice D, os quais são obtidos de acordo com o modelo relaxado (46). Os valores iniciais dos parâmetros de penalidade são iguais a 1. Além disso, foi utilizado um valor de $\beta = 1.1$ e um valor de $\gamma = 0.2$ para a atualização dos parâmetros de penalidade. Na implementação, os subproblemas térmicos, hídrico e de atendimento a demanda são resolvidos sequencialmente já que a licença disponível para o *solver* não permite a resolução distribuída de problemas de

otimização; no entanto, ressalta-se que, caso seja possível, eles podem ser resolvidos em paralelo sem degradação do resultado obtido pelo processo iterativo.

O algoritmo necessitou de 147 iterações e levou um total de 19,83 segundos para convergir. O custo ótimo foi de R\$638.066,38, ou seja, uma diferença de apenas 0,06% em relação ao resultado do PLIM único. O resultado da geração termelétrica e hidrelétrica se encontra na Figura 13, cujo perfil é parecido com o obtido pelo PLIM (Figura 8).

Figura 13 – Despacho de geração e carga (ATC com ADMM)



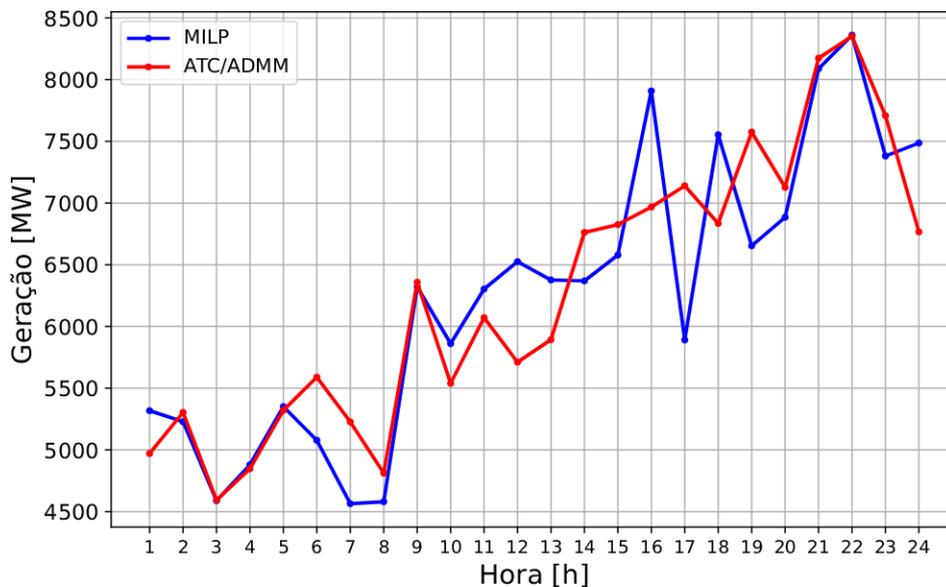
Fonte: Autor

O perfil da curva do fluxo absoluto das linhas de transmissão se manteve parecido, porém com alterações pontuais por conta de diferenças no despacho das usinas hidrelétricas, conforme Figura 14.

O despacho das usinas termelétricas se manteve igual entre o PLIM e o ATC, no entanto, o despacho individual das usinas hidrelétricas foi consideravelmente diferente quando se comparam os valores horários da geração. Analisando a geração das usinas de Emborcação, Estreito e Furnas apresentadas anteriormente, percebe-se uma mudança no despacho, conforme figuras 15, 16 e 17. É possível perceber que, apesar do custo dos dois métodos (regido pela geração térmica) ser muito próximo, existem diferentes configurações possíveis para o despacho das usinas hidrelétricas justamente por conta do excesso de água comentado anteriormente.

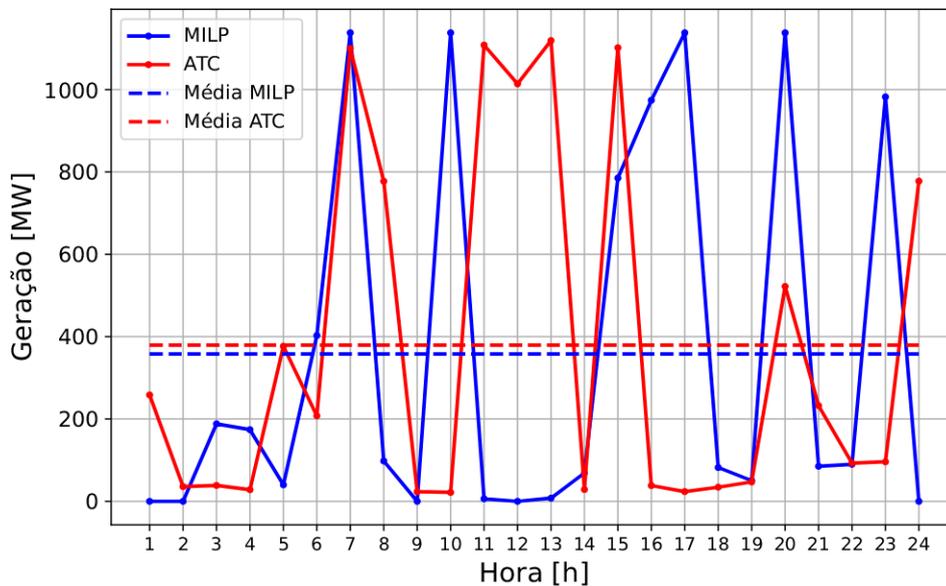
A Figura 18 mostra a progressão do custo e do valor do critério de convergência em relação ao desvio de atendimento das restrições de consistência (conforme Equação (40)). À medida que o algoritmo vai convergindo e o valor do erro diminui, o custo também tende a convergir para o resultado. Como não há garantia da convergência do

Figura 14 – Fluxo de potência absoluta nas linhas de transmissão (ATC com ADMM)



Fonte: Autor

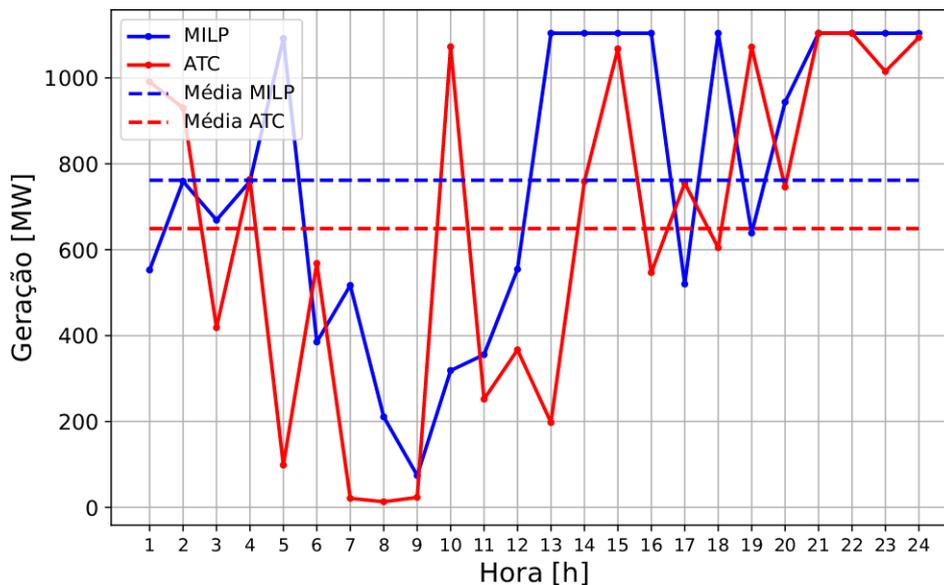
Figura 15 – Geração da usina de Emborcação (ATC com ADMM)



Fonte: Autor

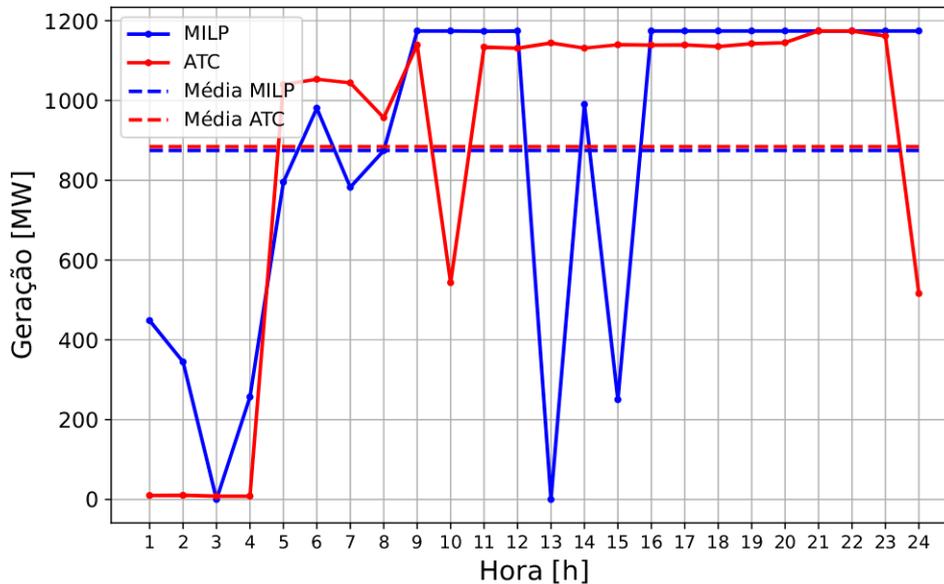
algoritmo, é esperado que existam momentos em que o gradiente do custo irá mudar de sentido, como evidenciado pelo *overshoot* entre as iterações 20 e 40.

Figura 16 – Geração da usina de Estreito (ATC com ADMM)



Fonte: Autor

Figura 17 – Geração da usina de Furnas (ATC com ADMM)

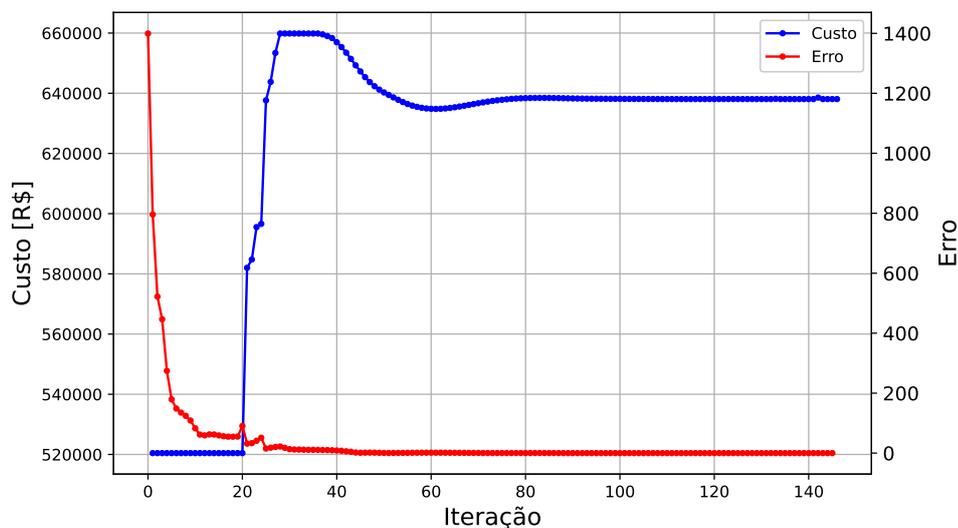


Fonte: Autor

4.5 ANÁLISE DE SENSIBILIDADE DOS PARÂMETROS

Como comentado anteriormente, a escolha dos meta-parâmetros β e γ é de extrema importância para a qualidade dos resultados, pois estes valores regem o comportamento do passo de atualização dos parâmetros de penalidade do ADMM.

Figura 18 – Custo do despacho e convergência por iteração (ATC com ADMM)



Fonte: Autor

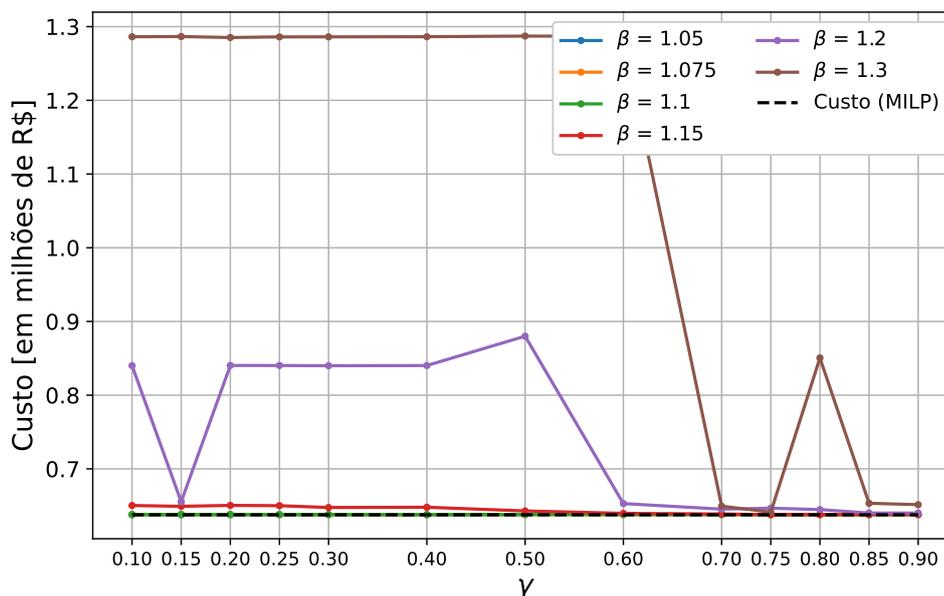
Como exemplo do impacto da escolha dos meta-parâmetros, caso seja feita a alteração $\beta = 1,2$ (aumento de aproximadamente 10%), o custo vai para R\$840.315,38, um valor 31,77% maior em relação ao PLIM com 48 MW de déficit. Para estudar o impacto dos meta-parâmetros no algoritmo de ATC com ADMM, diversas versões do algoritmo foram executadas variando o valor de β entre 1,05 e 1,3 e o valor de γ entre 0,1 e 0,9, gerando 78 pontos distintos.

A Figura 19 mostra como o custo pode variar consideravelmente com pequenas variações nos meta-parâmetros, indo desde um mínimo de R\$637.835,64 (0,02% maior em relação ao custo do PLIM) em $\beta = 1,05$, $\gamma = 0,4$, até um máximo em R\$1.286.262,88 (101,71% maior em relação ao PLIM) em $\beta = 1,3$, $\gamma = 0,5$. Isto mostra como a escolha dos meta-parâmetros é essencial e uma análise criteriosa deve ser feita para cada problema.

O maior responsável pela deterioração do resultado das curvas onde β igual a 1,3 e 1,2 se dá pela necessidade do corte de carga na solução obtida como mostrado na Figura 20, sendo possível perceber a similaridade entre o gráfico do corte de carga e o gráfico do custo. O resultado degradado do despacho na ordem de R\$1,3 milhões e R\$850 mil se dá pela dificuldade do algoritmo em convergir até o mínimo global do PLIM, considerados os parâmetros utilizados.

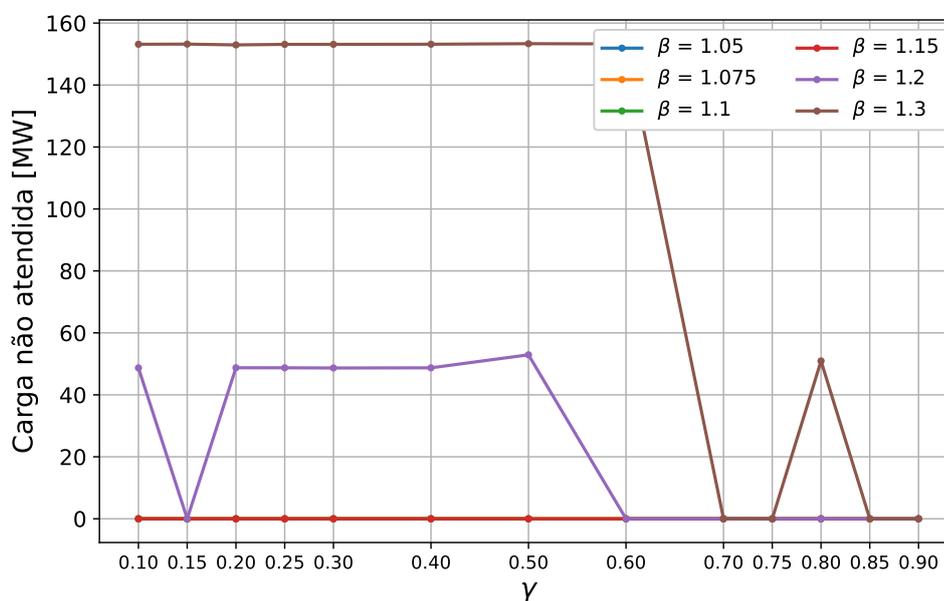
Quanto à execução do processo iterativo, a Figura 21 mostra a quantidade de iterações necessárias para alcançar a convergência em cada par de meta-parâmetro. Como o valor de β rege o tamanho do passo de atualização dos parâmetros de penalidade, percebe-se a diminuição da quantidade de iterações necessárias para a convergência do algoritmo, com o *trade-off* da diminuição da qualidade da solução

Figura 19 – Resultado do problema com a variação dos meta-parâmetros



Fonte: Autor

Figura 20 – Déficit de carga com a variação dos meta-parâmetros

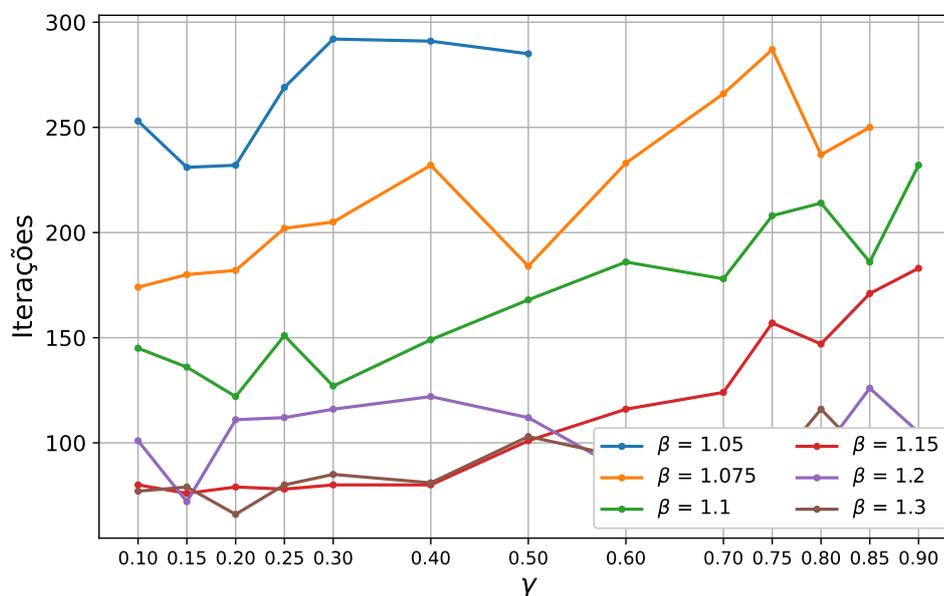


Fonte: Autor

encontrada. A diminuição da qualidade pode ser explicada pelo fato de não haver inversão do sentido de crescimento dos multiplicadores, impedindo o método de apropriadamente seguir o gradiente da função de custo do problema e levando para uma solução viável, mas não ótima. Os pontos em falta no gráfico são pares de β e γ onde

não houve convergência do algoritmo.

Figura 21 – Quantidade de iterações com a variação dos meta-parâmetros



Fonte: Autor

4.6 ANÁLISE DE SENSIBILIDADE A VARIAÇÕES NOS DADOS DE ENTRADA

Dados como demanda, disponibilidade dos elementos do sistema e limites operacionais variam constantemente durante a operação de um sistema elétrico. Um importante aspecto a ser considerado na execução do algoritmo é a resiliência do processo iterativo quanto a variações nos dados de entrada e sua capacidade de alcançar convergência apesar destas variações.

4.6.1 Sensibilidade a variações de demanda pontuais no sistema

Durante a operação de um sistema de grande porte como o SIN, é esperado que existam variações pontuais em determinadas barras do sistema por conta de feriados regionais, sazonalidade da operação de indústrias eletrointensivas, eventos climáticos localizados, etc. Com o intuito de analisar o impacto de uma variação não uniforme¹ da demanda na efetividade do algoritmo, realiza-se um estudo onde a demanda de cada barra é variada com um valor gerado aleatoriamente entre 95% e 105%, com passos de 1%. Os valores de meta-parâmetros utilizados foram $\beta = 1.1$ e $\gamma = 0.2$, iguais aos utilizados na análise inicial do algoritmo na seção 4.4. A tabela 4 apresenta a variação aplicada em cada barra.

¹ Cada barra apresenta uma variação na sua demanda sem correlação com as demais.

Tabela 4 – Variação na demanda de cada barra

Barras	Variação da demanda
Barra 1	98%
Barra 2	99%
Barra 3	97%
Barra 4	103%
Barra 5	102%
Barra 6	96%
Barra 7	102%
Barra 8	97%
Barra 9	104%
Barra 10	102%
Barra 13	99%
Barra 14	104%
Barra 15	99%
Barra 16	99%
Barra 18	98%
Barra 19	101%
Barra 20	102%

A solução do PLIM único obteve um custo de R\$657.475,48 sem corte de carga e apresentou um perfil de geração parecido ao cenário sem variação da carga, necessitando do despacho de mais geração termelétrica nos últimos estágios do estudo conforme a Figura 22. Isto evidencia o elevado carregamento do sistema de transmissão que não consegue escoar a geração hidrelétrica disponível.

A execução do ATC convergiu para um custo de R\$657.718,28 (0,037% maior em relação ao PLIM) e também não necessitou de corte de carga. O perfil da geração é, para a margem de erro da solução, idêntico ao encontrado pelo PLIM. O algoritmo convergiu em 166 iterações e levou 27,03 segundos para convergir.

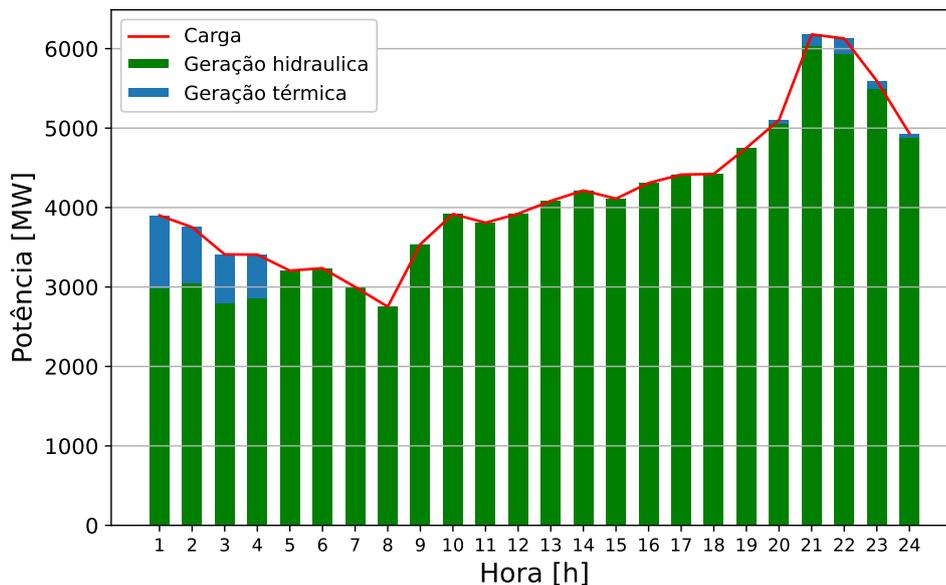
A Figura 23 mostra a comparação entre o fluxo de potência nas linhas de transmissão do sistema. É possível perceber que as maiores diferenças na quantidade de potência sendo transmitida se dão nos instantes de carga leve, quando há maior liberdade para o modelo utilizar a geração hidrelétrica disponível do sistema.

Finalmente, a Figura 24 mostra a o custo e o valor do critério de convergência em relação ao desvio de atendimento das restrições de consistência por iteração. Percebe-se que não houve um *overshoot* tão grande quando comparado à Figura 18 e uma maior estabilidade do processo iterativo.

4.6.2 Sensibilidade a variações de demanda uniformes no sistema

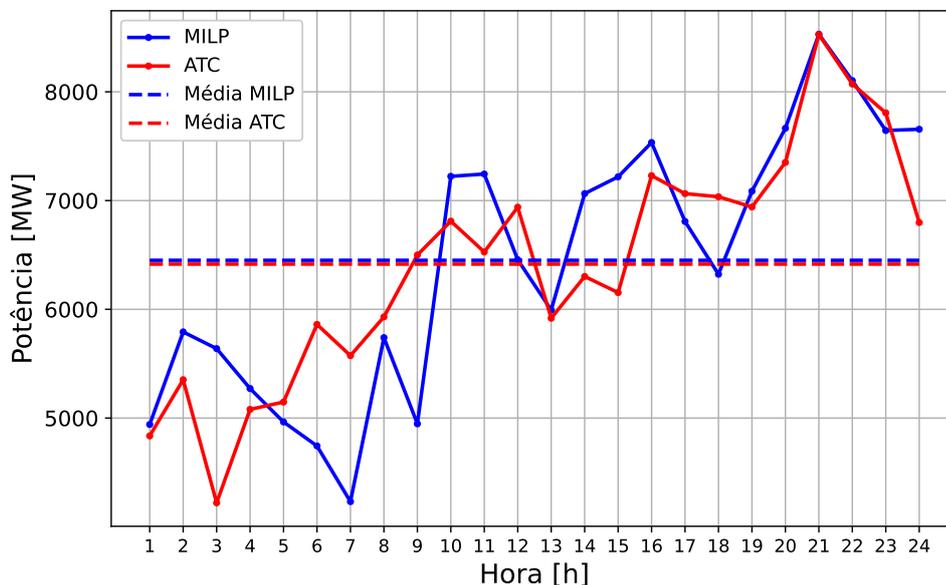
Na operação do SIN, a demanda global do sistema elétrico apresenta variações sazonais conforme as estações do ano (e.g: utilização de ar condicionado no

Figura 22 – Despacho de geração e carga (PLIM - Variação da demanda)



Fonte: Autor

Figura 23 – Fluxo de potência absoluto nas linhas de transmissão (ATC - Variação da demanda)

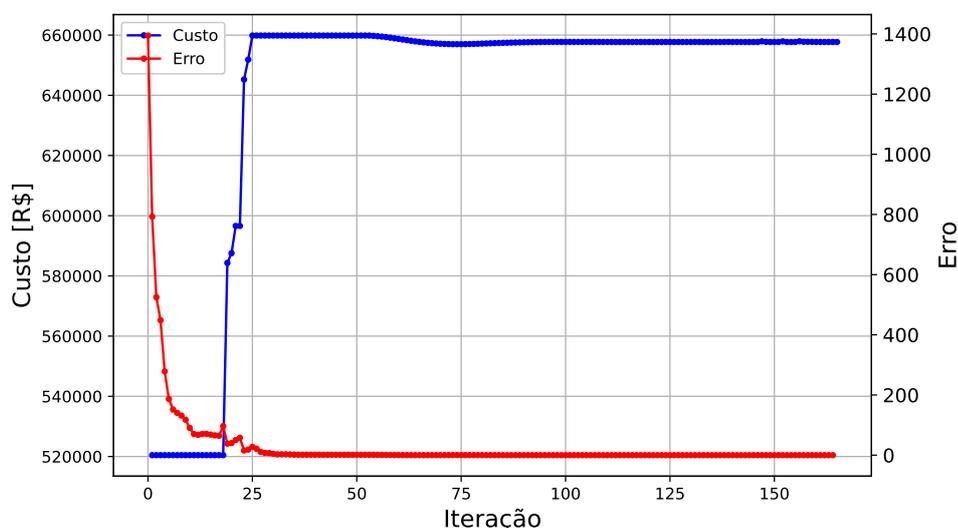


Fonte: Autor

período de maior intensidade de calor no verão) ou por conta de feriados nacionais, eventos cívicos entre outros. Para analisar o impacto de uma variação² da demanda no algoritmo, foram executadas 11 estudos variando a carga uniformemente em todas

² Aplicada igualmente à todas as barras do sistema.

Figura 24 – Custo do despacho e convergência por iteração (ATC - Variação da demanda)



Fonte: Autor

as barras entre 95% e 105%, com passos de 1%. Os valores de meta-parâmetros utilizados foram $\beta = 1.1$ e $\gamma = 0.2$, iguais aos utilizados na análise inicial do algoritmo na seção 4.4.

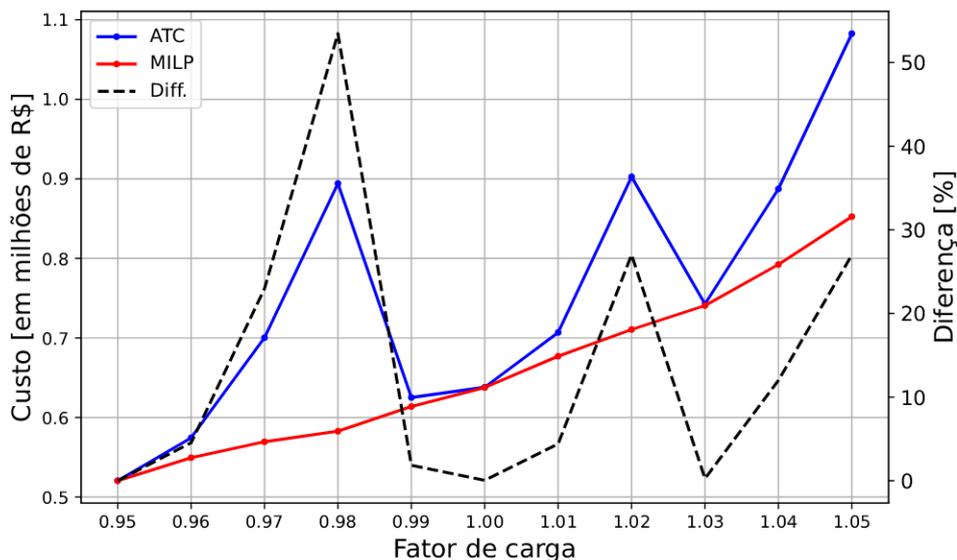
A Figura 25 mostra a comparação dos resultados obtidos usando o ATC contra os resultados obtidos variando a carga no PLIM. Para os valores de fator de carga igual a 97% 98%, 102% e 105%, os custos de operação foram consideravelmente maiores do que os encontrados pelo PLIM, principalmente por conta da presença de corte de carga na solução.

Uma alternativa para diminuir o erro em relação aos resultados base é a alteração dos meta-parâmetros escolhidos. Por exemplo, a alteração dos valores para $\beta = 1.05$ e $\gamma = 0.4$ corrige o custo do despacho para os fatores de carga 97% 98% e 102%, alcançando um patamar de 1% de erro em relação ao custo do PLIM mas não converge dentro de 300 iterações para o fator de carga de 103%, conforme Figura 26. Este resultado ressalta a importância da escolha dos meta-parâmetros e a constante reavaliação da qualidade dos resultados obtidos após alterações consideráveis nos dados de entrada.

4.6.3 Sensibilidade à desconexão de usinas

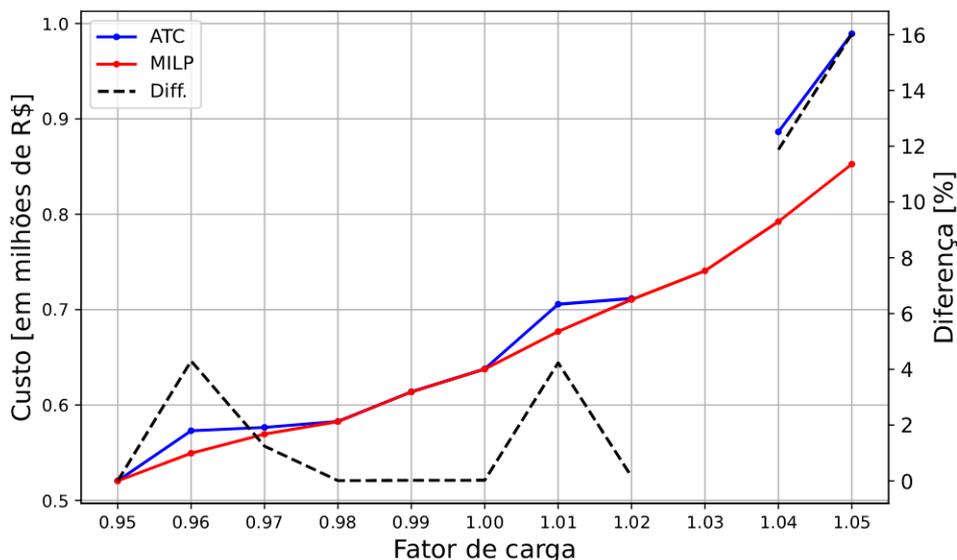
Para este estudo, duas hidrelétricas foram escolhidas para serem desligadas não-concomitantemente do modelo com o fim de avaliar a qualidade da solução encontrada com os mesmos meta-parâmetros da seção 4.4 na hipótese onde uma usina é desligada do sistema, situação que pode ocorrer por conta de manutenção das uni-

Figura 25 – Comparação do custo do despacho com a variação da demanda (Meta-parâmetros $\beta = 1.1, \gamma = 0.2$)



Fonte: Autor

Figura 26 – Comparação do custo do despacho com a variação da demanda (Meta-parâmetros $\beta = 1.05, \gamma = 0.4$)

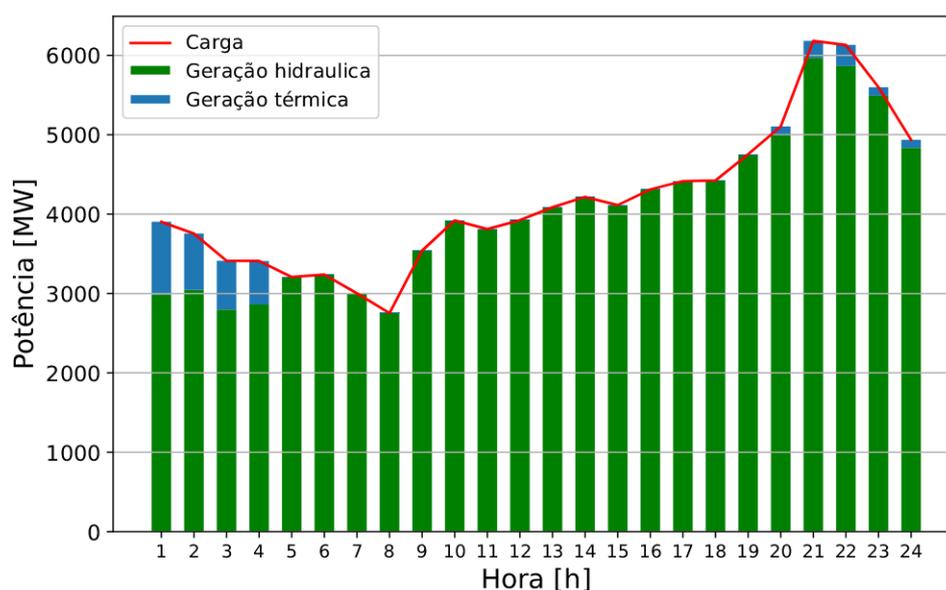


Fonte: Autor

dades geradoras ou falhas nos ativos de transmissão. As usinas removidas foram as hidrelétricas de Emborcação com potência máxima de 1192 MW e reservatório com capacidade de regularização, e a hidrelétrica de Itumbiara com potência máxima de 2082 MW e também com reservatório com capacidade de regularização.

No estudo com a remoção da usina de Emborcação, a execução do PLIM obteve um custo de despacho de R\$703.036,72 por conta da necessidade de maior despacho das usinas termelétricas nos estágios de maior carga. O algoritmo de ATC alcançou um custo de R\$704.198,44, uma diferença de apenas 0.16% em relação ao custo do PLIM. O algoritmo convergiu em 134 iterações e a sua execução levou 20,03 segundos. As figuras 27 e 28 mostram o perfil de geração contra a carga e a progressão do custo e erro das restrições de consistências da execução do algoritmo iterativo, respectivamente.

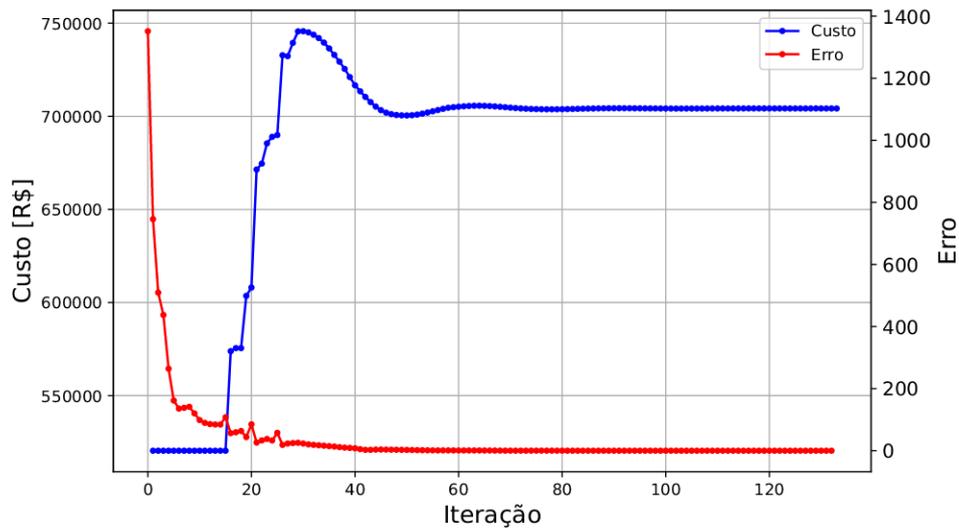
Figura 27 – Despacho de geração e carga sem a hidrelétrica Emborcação (ATC com ADMM)



Fonte: Autor

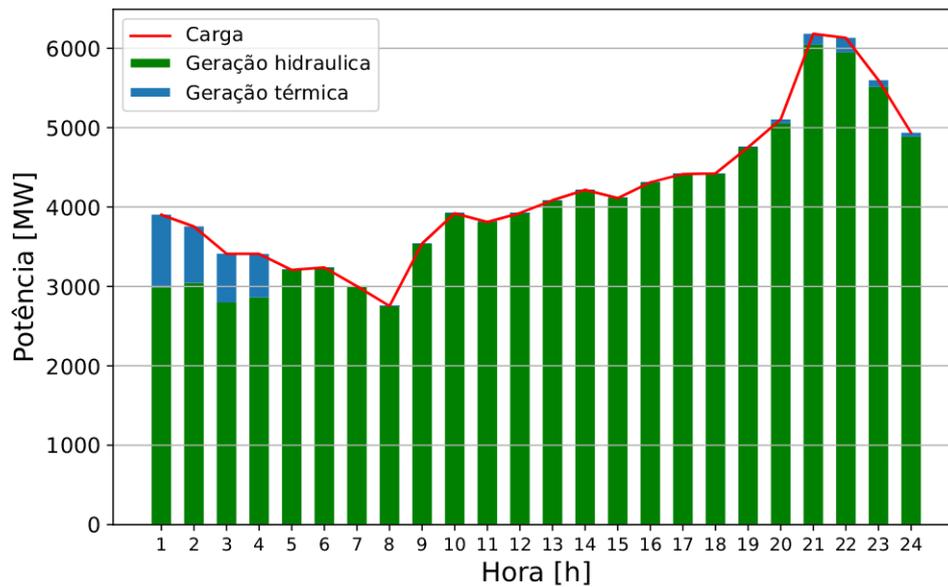
No estudo com a remoção da usina de Itumbiara, o PLIM obteve um custo de R\$648.873.60, levemente superior ao valor original de R\$637.683,30. O algoritmo iterativo alcançou um custo de R\$649.467,49, 0.09% superior ao resultado obtido pelo PLIM. O algoritmo convergiu em 138 iterações e a sua execução levou 19,79 segundos. A Figura 29 mostra o perfil de geração contra a carga do algoritmo, visualmente parecido com o resultado original do PLIM dada a pequena diferença na geração termelétrica sendo despachada em relação ao modelo original. A Figura 30 mostra a progressão do custo do despacho e o erro das restrições de consistência durante as iterações do algoritmo.

Figura 28 – Custo do despacho e convergência por iteração sem a hidrelétrica Emborcação (ATC com ADMM)



Fonte: Autor

Figura 29 – Despacho de geração e carga sem a hidrelétrica Itumbiara (ATC com ADMM)

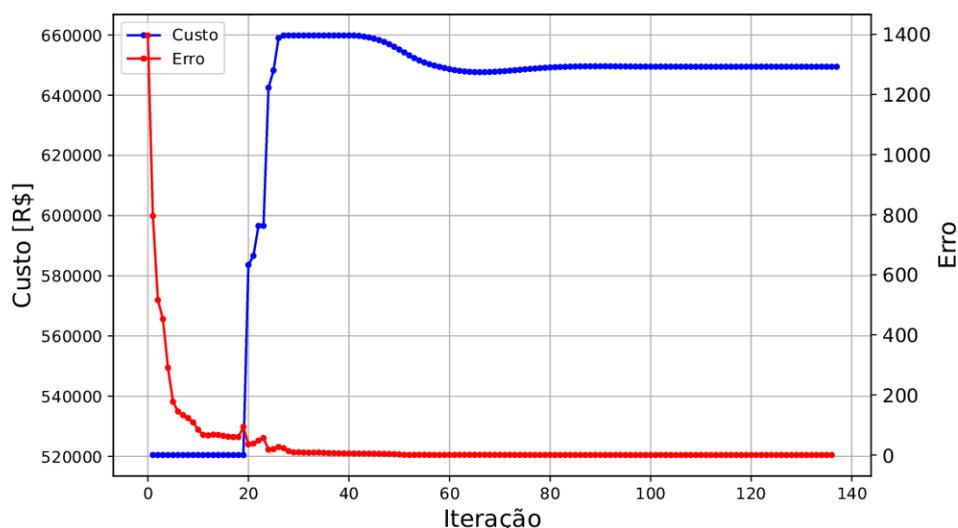


Fonte: Autor

4.7 ANÁLISE DE SENSIBILIDADE AOS PONTOS DE PARTIDA

Para demonstrar a importância da utilização de bons pontos de partida para o algoritmo, o mesmo modelo foi executado sem a utilização do subproblema relaxado da Equação (46), com os mesmos meta-parâmetros de $\beta = 1.1$ e $\gamma = 0.2$. Para os

Figura 30 – Custo do despacho e convergência por iteração sem a hidrelétrica Itumbiara (ATC com ADMM)



Fonte: Autor

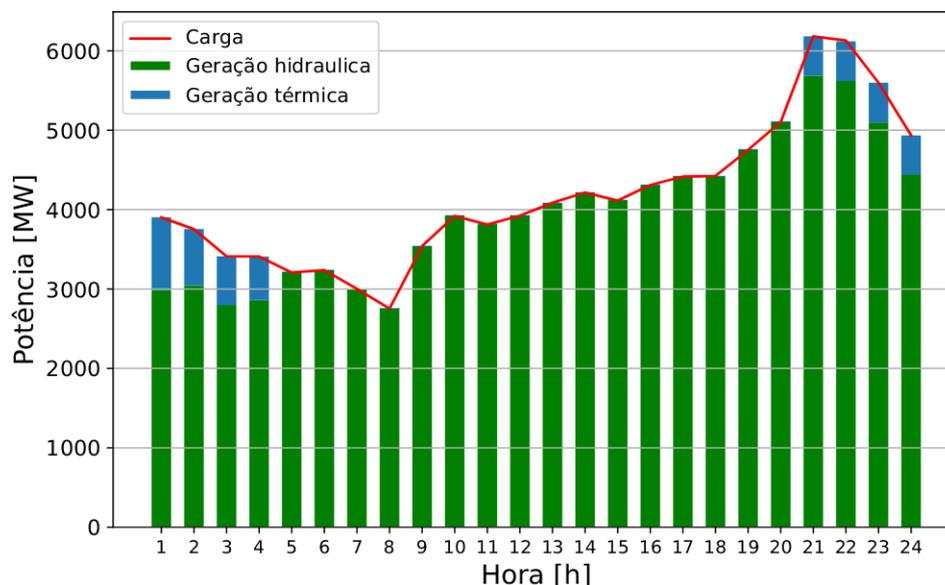
valores de geração utilizados na primeira iteração do algoritmo, tanto a geração térmica quanto hidrelétrica foram iniciadas com o valor 0, e os valores dos multiplicadores de Lagrange foram todos iniciados no valor 1.

A primeira grande diferença se dá no valor do custo obtido para o despacho da geração de R\$944.905,04, um valor 48,18% maior que o valor obtido pelo PLIM na seção 4.3. O algoritmo sem a utilização de bons pontos de partida convergiu em 168 iterações, levou 25,16 segundos até convergir e 12,68 MW de carga não foram atendidos. Apesar de uma parcela do resultado deteriorado ser causado pela carga não atendida³, o algoritmo convergiu para um ponto diferente do encontrado anteriormente.

A Figura 31 mostra o perfil de geração sem a utilização de técnicas de partida quente e, apesar da proximidade à sua contraparte com bons valores de partida, os últimos quatro estágios apresentam uma maior quantidade de despacho de geração termelétrica, aumentando consideravelmente o custo da geração.

Quanto ao valor do custo de despacho durante o processo iterativo e o erro de atendimento às restrições de consistência para o algoritmo sem *startup*, é possível perceber que o valor do custo de geração e do erro iniciam em valores muito superiores aos encontrados no estudo inicial, conforme a Figura 32. Uma inspeção mais detalhada dos valores de custo do despacho entre as iterações 11 e 80, evidenciado na Figura 33, mostra que o valor da geração atingiu um limite inferior de R\$881.450,00 antes de convergir até o resultado final, este salto se dá muito provavelmente por conta da

³ Especificamente, R\$63.426,59 dos R\$307.221,74 adicionais são causados pelo custo da perda de carga

Figura 31 – Despacho de geração e carga (ATC com ADMM sem *startup*)

Fonte: Autor

influência⁴ dos parâmetros de penalidade que impactam diretamente a convergência do algoritmo.

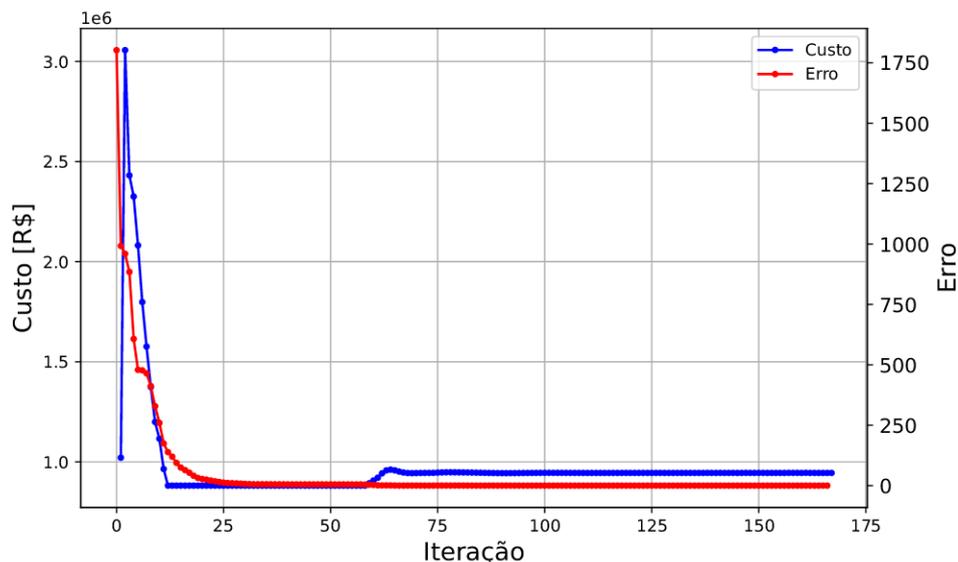
4.8 ANÁLISE DO PREÇO *SPOT* DA ENERGIA ELÉTRICA

Um dos resultados mais importantes dos estudos de despacho de um sistema hidrotérmico é o preço da energia elétrica para o mercado de curto prazo. No caso brasileiro, o preço *spot* da energia é formado pelo Custo Marginal de Operação (CMO) e, dado o problema de UCHT, seu valor corresponde aos multiplicadores de Lagrange das restrições de atendimento à demanda de cada barra. Pode-se interpretar os multiplicadores como a derivada da função objetivo para variações na restrição de atendimento a demanda, ou seja, a variação no custo de despacho por conta de variações na carga do sistema.

Por conta do UCHT ser modelado como um PLIM, a utilização de variáveis binárias nas restrições das térmicas insere descontinuidades no problema, impossibilitando a obtenção dos multiplicadores de Lagrange por conta da descontinuidade da função que relacionam a função objetivo com as restrições. Uma alternativa que permite encontrar valores para o CMO é a solução de uma relaxação do Problema (9) onde as variáveis binárias são fixadas nos valores obtidos na solução do PLIM único, gerando um problema linear contínuo.

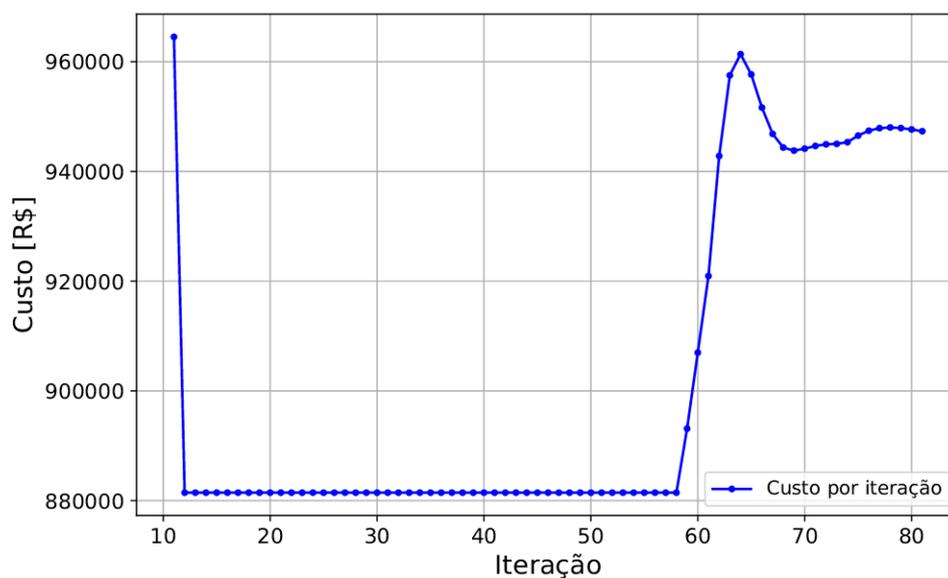
⁴ Como comentado na seção 3.4.5, os parâmetros de penalidade não só são essenciais para permitir a convergência do algoritmo para algum ponto candidato, como são importantes para melhorar a qualidade a solução encontrada.

Figura 32 – Custo do despacho e convergência por iteração (ATC com ADMM sem *startup*)



Fonte: Autor

Figura 33 – Detalhe do custo do despacho por iteração (ATC com ADMM sem *startup*)



Fonte: Autor

Após a relaxação do PLIM, os multiplicadores de Lagrange das restrições (9o) foram extraídos da solução. Como há possibilidade de atender grande parte da demanda utilizando os reservatórios das usinas hidrelétricas, os valores de CMO de todos os estágios de tempo, exceto 21 e 22, são nulos, e estes dois estágios de tempo são apresentados na Tabela 5.

Tabela 5 – Custo Marginal de Operação (PLIM) [R\$]

Barras	$t = 21$	$t = 22$
Barra 1	177,89	355,78
Barra 2	179,76	359,52
Barra 3	118,79	237,58
Barra 4	185,17	370,33
Barra 5	190,16	380,32
Barra 6	197,42	394,84
Barra 7	196,28	392,57
Barra 8	196,28	392,57
Barra 9	189,59	379,18
Barra 10	202,98	405,96
Barra 11	174,61	349,21
Barra 12	254,66	509,32
Barra 13	253,00	506,00
Barra 14	84,17	168,33
Barra 15	0,00	0,00
Barra 16	0,00	0,00
Barra 17	0,00	0,00
Barra 18	0,00	0,00
Barra 19	485,42	970,84
Barra 20	425,26	850,52
Barra 21	0,00	0,00
Barra 22	0,00	0,00
Barra 23	392,44	784,89
Barra 24	45,40	90,80

No caso do algoritmo do ATC, o subproblema de atendimento a demanda que inclui as restrições de atendimento à demanda é um PL pois não sofre influência das variáveis binárias do subproblema termoeletrico de modo que seria possível obter multiplicadores de Lagrange sem necessidade de uma relaxação do modelo. Contudo, o subproblema como apresentado no Problema (37) não captura a influência do custo das usinas termelétricas em sua solução, sendo necessário reintroduzir a contribuição do despacho das térmicas na função objetivo do modelo, conforme apresentado no Problema (47), sendo os multiplicadores que representam o CMO obtidos a partir da restrição (47b).

$$\min \sum_{i \in \Omega^{GT}} \sum_{t \in \Omega^T} (CT_{i} gtr_{it} + \frac{1}{2} \sigma^T_{it} gtr_{it}^2 - \sigma^T_{it} gtr_{it} - \pi^T_{it} gtr_{it}) +$$

$$\sum_{i \in \Omega^{GH}} \sum_{t \in \Omega^T} (\frac{1}{2} \sigma^H_{it} ghr_{it}^2 - \sigma^H_{it} ghr_{it} - \pi^H_{it} ghr_{it}) +$$

$$\sum_{i \in \Omega^B} \sum_{t \in \Omega^T} \text{CS} \cdot ls_{it} \quad (47a)$$

s.a.

$$\sum_{i \in \Omega_j^{GT}} gtr_{it} + \sum_{i \in \Omega_j^{GH}} ghr_{it} + ls_{jt} + \sum_{l \in \Omega_j^{LTIN}} f_{lt} - \sum_{l \in \Omega_j^{LTOUT}} f_{lt} - \mathbf{L}_{jt} = 0 \quad \forall t \in T, j \in \Omega^B \quad (47b)$$

$$f_{lt} - \frac{1}{X_l} \cdot (\theta_{B_{it}^{from}} - \theta_{B_{it}^{to}}) = 0 \quad \forall t \in T, l \in \Omega^{LT} \quad (47c)$$

$$\mathbf{F}_l^{min} \leq f_{lt} \leq \mathbf{F}_l^{max} \quad \forall t \in T, l \in \Omega^{LT} \quad (47d)$$

$$ls_{it} \geq 0 \quad \forall i \in \Omega^B, t \in \Omega^T \quad (47e)$$

Apesar da inserção do custo do despacho das térmicas na função objetivo ser um incremento no custo do subproblema de atendimento a demanda, não há alteração das variáveis de interesse do problema por conta do peso dos demais componentes da função objetivo, de modo que é mais vantajoso manter o despacho ótimo encontrado a fim de evitar incrementos na penalização por violação das restrições de consistência.

De fato, como estes multiplicadores estão atrelados à variação da função objetivo por conta da variação das variáveis da restrição, o CMO encontrado diretamente através do método proposto pouco reflete o custo real da operação e tende a capturar mais a influência da penalização imbuída no LA, conforme apresentado na tabela 6⁵. Os estágios de tempo entre 5 e 19 foram omitidos da tabela pois diferem muito pouco entre os demais intervalos próximos.

⁵ Para limitar o tamanho da tabela são mostrados apenas duas casas decimais, no entanto, os valores apresentam pequenas diferenças na quarta casa decimal

Tabela 6 – Custo Marginal de Operação (ATC) [R\$]

Barras	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	$t = 4$		$t = 20$	$t = 21$	$t = 22$	$t = 23$	$t = 24$
Barra 1	0.15	0.16	0.18	0.10		0.04	135.17	109.41	197.82	59.68
Barra 2	0.15	0.16	0.18	0.10		0.04	135.17	109.41	197.82	59.68
Barra 3	0.15	0.16	0.18	0.10		0.04	135.17	109.41	197.82	59.68
Barra 4	0.15	0.16	0.18	0.10		0.04	135.17	109.41	197.82	59.68
Barra 5	0.15	0.16	0.18	0.10		0.04	135.17	109.41	197.82	59.68
Barra 6	0.15	0.16	0.18	0.10		0.04	135.17	109.41	197.82	59.68
Barra 7	0.15	0.16	0.18	0.10		0.04	135.17	109.41	197.82	59.68
Barra 8	0.15	0.16	0.18	0.10		0.04	135.17	109.41	197.82	59.68
Barra 9	0.15	0.16	0.18	0.10		0.04	135.17	109.41	197.82	59.68
Barra 10	0.15	0.16	0.18	0.10		0.04	135.17	109.41	197.82	59.68
Barra 11	0.15	0.16	0.18	0.10		0.04	135.17	109.41	197.82	59.68
Barra 12	0.15	0.16	0.18	0.10		0.04	135.17	109.41	197.82	59.68
Barra 13	0.15	0.16	0.18	0.10	...	0.04	135.17	109.41	197.82	59.68
Barra 14	0.15	0.16	0.18	0.10		0.04	135.17	109.41	197.82	59.68
Barra 15	0.15	0.16	0.18	0.10		0.04	135.17	109.41	197.82	59.68
Barra 16	0.15	0.16	0.18	0.10		0.04	135.17	109.41	197.82	59.68
Barra 17	0.15	0.16	0.18	0.10		0.04	135.17	109.41	197.82	59.68
Barra 18	0.15	0.16	0.18	0.10		0.04	135.17	109.41	197.82	59.68
Barra 19	0.15	0.16	0.18	0.10		0.04	135.17	109.41	197.82	59.68
Barra 20	0.15	0.16	0.18	0.10		0.04	135.17	109.41	197.82	59.68
Barra 21	0.15	0.16	0.18	0.10		0.04	135.17	109.41	197.82	59.68
Barra 22	0.15	0.16	0.18	0.10		0.04	135.17	109.41	197.82	59.68
Barra 23	0.15	0.16	0.18	0.10		0.04	135.17	109.41	197.82	59.68
Barra 24	0.15	0.16	0.18	0.10		0.04	135.17	109.41	197.82	59.68

5 CONCLUSÕES E SUGESTÕES DE TRABALHOS FUTUROS

Neste trabalho, a aplicação do ATC com ADMM foi empregada para resolver o problema do UCHT relacionado com o caso brasileiro. A utilização permite resolver problemas complexos de otimização através da separação em subproblemas paralelizáveis, o que permite obter resultados em menos tempo e utilizando menos recursos computacionais.

Para um caso base, o algoritmo de decomposição obteve resultados promissores quando comparado ao resultado exato obtido com o MILP, tendo um erro de 0,06% no custo ótimo, sem a necessidade de corte de carga. Este resultado foi obtido em 147 iterações com a utilização de valores de geração e multiplicadores de Lagrange obtidos através da solução de uma versão relaxada do modelo.

Análises sobre a influência dos dados do modelo mostram que, dada a escolha apropriada dos metaparâmetros β e γ , o algoritmo continua convergindo para pequenas variações na demanda do sistema elétrico e na hipótese onde distintas usinas hidroelétricas são retiradas do modelo por conta de falhas nos ativos de transmissão ou manutenção das usinas.

A escolha dos metaparâmetros é essencial para o sucesso do método pois são eles que controlam a agressividade do crescimento dos parâmetros de penalidade: maiores valores de β implicam em um crescimento acentuado do valor dos parâmetros, resultando em um menor número de iterações até a convergência, mas com soluções menos precisas em relação ao caso base. Os resultados apresentados mostram que existem diversos pares que alcançam resultados parecidos em relação aos encontrados com os valores base de $\beta = 1.1$ e $\gamma = 0.2$, permitindo uma margem na escolha dos valores dependendo das características do sistema e das necessidades do estudo.

Finalmente, a utilização de uma estratégia de escolha dos valores iniciais de geração das usinas e dos multiplicadores de Lagrange para serem utilizados na primeira iteração é fundamental para que o algoritmo consiga obter bons resultados. O modelo utilizando os mesmos valores de metaparâmetros, mas com valores padrão de geração e dos multiplicadores de Lagrange apresenta uma degradação considerável no resultado obtido, levando 5,33 segundos a mais até a convergência quando comparado com a utilização do modelo relaxado, obtendo um custo da função objetivo 48,18% maior em relação ao obtido pelo MILP e um corte de carga de 12,68 MW. Este resultado degradado se dá por conta da dificuldade do algoritmo em convergir para o ótimo global, sendo que, sem a utilização de bons pontos de partida, o algoritmo acaba convergindo para respostas de pior qualidade.

Como sugestão de trabalhos futuros, propõe-se a aplicação do algoritmo em modelos mais detalhados das usinas hidroelétricas, nas quais o despacho das unidades geradoras é feito individualmente e levando em consideração as faixas de operação

dos conjuntos de máquinas. Outra sugestão é estudar a possibilidade de se utilizar metaparâmetros variáveis por conta da característica monotônica da função de atualização dos parâmetros de penalidade: a escolha de valores constantes de β altos é pouco vantajosa, apesar da maior velocidade de convergência dado a deterioração dos resultados obtidos, mas pode ser vantajosa quando aplicados apenas nas primeiras iterações em que o algoritmo ainda está longe dos valores dos parâmetros de penalidade ótimos. Finalmente, sugere-se o estudo da utilização de diferentes funções de penalidade para aplicação com o ATC, além do LA, a fim de buscar melhorar a eficiência computacional do algoritmo.

REFERÊNCIAS

AGÊNCIA NACIONAL DE ENERGIA ELÉTRICA. **SIGA - Sistema de Informações de Geração da ANEEL**. Brasília: [s.n.], nov. 2021.

AL-AGTASH, S.; SU, Renjeng. Augmented lagrangian approach to hydro-thermal scheduling. **IEEE Transactions on Power Systems**, v. 13, n. 4, p. 1392–1400, 1998. DOI: 10.1109/59.736282.

ALEMANY, J.; MAGNAGO, F. Benders decomposition applied to security constrained unit commitment: Initialization of the algorithm. **International Journal of Electrical Power Energy Systems**, v. 66, p. 53–66, 2015. ISSN 0142-0615. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijepes.2014.10.044>. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0142061514006474>.

BELLONI, A. *et al.* Bundle Relaxation and Primal Recovery in Unit Commitment Problems. The Brazilian Case. **Annals of Operations Research**, v. 120, n. 1/4, p. 21–44, 2003. DOI: 10.1023/a:1023314026477.

BERTSEKAS, Dimitri P. **Nonlinear programming**. [S.l.]: Athena Scientific, 1999.

BONNANS, Joseph F. **Numerical optimization: Theoretical and practical aspects**. [S.l.]: Springer, 2010.

BOYD, Stephen *et al.* **Distributed Optimization and Statistical Learning via the Alternating Direction Method of Multipliers**. [S.l.]: Now Foundations e Trends, 2011.

BREEZE, Paul A. **Power Generation Technologies**. 3. ed. [S.l.]: Newnes, 2019. v. 1.

CEPEL. **MANUAL DE METODOLOGIA MODELO DESSEM**. [S.l.]: Centro de Pesquisas de Energia Elétrica - CEPEL, abr. 2021.

CEPEL. **MANUAL DE REFERÊNCIA MODELO DECOMP**. [S.l.]: Centro de Pesquisas de Energia Elétrica - CEPEL, jan. 2020.

CEPEL. **MANUAL DO USUARIO MODELO NEWAVE**. [S.l.]: Centro de Pesquisas de Energia Elétrica - CEPEL, jul. 2020.

CHEN, Caihua *et al.* The direct extension of ADMM for multi-block convex minimization problems is not necessarily convergent. **Mathematical Programming**, v. 155, n. 1-2, p. 57–79, 2014. DOI: 10.1007/s10107-014-0826-5.

CIA. **Brazil - The World Factbook**. [S.l.]: Central Intelligence Agency, 2022. Disponível em: <https://www.cia.gov/the-world-factbook/countries/brazil/#people-and-society>.

CONEJO, Antonio J. **Decomposition techniques in mathematical programming: engineering and science applications**. 1. ed. [S.l.]: Springer, 2011.

DEMIGUEL, Victor; MURRAY, Walter. A local convergence analysis of bilevel decomposition algorithms. **Optimization and Engineering**, v. 7, n. 2, p. 99–133, 2006. DOI: 10.1007/s11081-006-6835-3.

DHAR, Sauprik *et al.* ADMM based scalable machine learning on Spark. *In: 2015 IEEE International Conference on Big Data (Big Data)*. [S.l.: s.n.], 2015. P. 1174–1182. DOI: 10.1109/BigData.2015.7363871.

DINIZ, A. L.; SAGASTIZABAL, C.; MACEIRA, M.E.P. Assessment of lagrangian relaxation with variable splitting for hydrothermal scheduling. **2007 IEEE Power Engineering Society General Meeting**, 2007. DOI: 10.1109/pes.2007.386246.

DINIZ, A.L.; MACEIRA, M.E.P. A four-dimensional model of Hydro Generation for the short-term hydrothermal dispatch problem considering head and spillage effects. **IEEE Transactions on Power Systems**, v. 23, n. 3, p. 1298–1308, 2008. DOI: 10.1109/tpwrs.2008.922253.

ECKSTEIN, Jonathan. Augmented Lagrangian and Alternating Direction Methods for Convex Optimization: A Tutorial and Some Illustrative Computational Results. *In:*

ECKSTEIN, Jonathan; BERTSEKAS, Dimitri P. On the Douglas—rachford splitting method and the proximal point algorithm for maximal monotone operators. **Mathematical Programming**, v. 55, n. 1-3, p. 293–318, 1992. DOI: 10.1007/bf01581204.

EPE. **Anuário Estatístico de Energia Elétrica 2021**. 1. ed. [S.l.]: EPE, 2020.

FINARDI, E.C.; SILVA, E.L. da. Solving the Hydro Unit Commitment Problem via dual decomposition and sequential quadratic programming. **IEEE Transactions on Power Systems**, v. 21, n. 2, p. 835–844, 2006. DOI: 10.1109/tpwrs.2006.873121.

FINARDI, Erlon Cristian. 2003. Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Santa Catarina. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/85210>.

FOSSO, O.B.; BELSNES, M.M. Short-term hydro scheduling in a liberalized power system. **2004 International Conference on Power System Technology, 2004. PowerCon 2004.**, jul. 2005. DOI: 10.1109/icpst.2004.1460206.

FOSSO, O.B.; GJELSVIK, A. *et al.* Generation scheduling in a deregulated system. the Norwegian case. **IEEE Transactions on Power Systems**, v. 14, n. 1, p. 75–81, fev. 1999. DOI: 10.1109/59.744487.

GABAY, Daniel; MERCIER, Bertrand. A dual algorithm for the solution of nonlinear variational problems via finite element approximation. **Computers amp; Mathematics with Applications**, v. 2, n. 1, p. 17–40, 1976. DOI: 10.1016/0898-1221(76)90003-1.

KANG, Chuanxiong; CHEN, Cheng; WANG, Jinwen. An efficient linearization method for long-term operation of Cascaded Hydropower Reservoirs. **Water Resources Management**, v. 32, n. 10, p. 3391–3404, 2018. DOI: 10.1007/s11269-018-1997-2.

KIM, Hyung Min *et al.* Target Cascading in Optimal System Design. **Journal of Mechanical Design**, v. 125, n. 3, p. 474–480, set. 2003. ISSN 1050-0472. DOI: 10.1115/1.1582501. eprint: <https://asmedigitalcollection.asme.org/mechanicaldesign/article-pdf/125/3/474/5799301/474\1.pdf>. Disponível em: <https://doi.org/10.1115/1.1582501>.

MICHALEK, Jeremy J.; PAPALAMBROS, Panos Y. An efficient weighting update method to achieve acceptable consistency deviation in analytical target cascading. **Journal of Mechanical Design**, v. 127, n. 2, p. 206–214, 2005. DOI: 10.1115/1.1830046.

MICHALEK, Jeremy J.; PAPALAMBROS, Panos Y. Weights, Norms, and Notation in Analytical Target Cascading. **Journal of Mechanical Design**, v. 127, n. 3, p. 499–501, jun. 2004. ISSN 1050-0472. DOI: 10.1115/1.1862674. eprint: <https://asmedigitalcollection.asme.org/mechanicaldesign/article-pdf/127/3/499/5601328/499\1.pdf>. Disponível em: <https://doi.org/10.1115/1.1862674>.

MICHELENA, Nestor; PARK, Hyungju; PAPALAMBROS, Panos Y. Convergence properties of analytical target cascading. **AIAA Journal**, v. 41, n. 5, p. 897–905, 2003. DOI: 10.2514/2.2025.

MO, B *et al.* Short-term and medium-term generation scheduling in the norwegian hydro system under a competitive power market. **Tech. Rep**, 2002.

NILSSON, O.; SJELVGREN, D. Variable splitting applied to modelling of start-up costs in short term Hydro Generation Scheduling. **IEEE Transactions on Power Systems**, v. 12, n. 2, p. 770–775, 1997. DOI: 10.1109/59.589678.

NOCEDAL, Jorge; WRIGHT, Stephen J. **Numerical optimization**. [S.l.]: Springer, 2006.

ONS. **Procedimentos de Rede, Submódulo 23.4**. 1. ed. [S.l.]: Operador Nacional do Sistema Elétrico, 2020.

PARVEZ, Iram *et al.* Modeling and solution techniques used for Hydro Generation Scheduling. **Water**, v. 11, n. 7, p. 1392, 2019. DOI: 10.3390/w11071392.

PENG, Yigang *et al.* RASL: Robust alignment by sparse and low-rank decomposition for linearly correlated images. **IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence**, v. 34, n. 11, p. 2233–2246, 2012. DOI: 10.1109/tpami.2011.282.

REDONDO, N.J.; CONEJO, A.J. Short-term hydro-thermal coordination by lagrangian relaxation: Solution of the dual problem. **IEEE Transactions on Power Systems**, v. 14, n. 1, p. 89–95, 1999. DOI: 10.1109/59.744490.

ROCKAFELLAR, R. T. Augmented lagrangians and applications of the proximal point algorithm in convex programming. **Mathematics of Operations Research**, v. 1, n. 2, p. 97–116, 1976. DOI: 10.1287/moor.1.2.97.

SCHILL, Wolf-Peter; PAHLE, Michael; GAMBARDELLA, Christian. On start-up costs of thermal power plants in markets with increasing shares of fluctuating renewables. **SSRN Electronic Journal**, jan. 2016. DOI: 10.2139/ssrn.2723897.

STOLL, Brady *et al.* **Hydropower modeling challenges**. [S.l.], 2017.

TAKIGAWA, F.; FINARDI, E.; SILVA, E. da. A decomposition strategy to solve the short-term hydrothermal scheduling based on lagrangian relaxation. **2010 IEEE/PES Transmission and Distribution Conference and Exposition: Latin America (Tamp;D-LA)**, 2010. DOI: 10.1109/tdc-la.2010.5762957.

TALER, Jan *et al.* Optimization of the boiler start-up taking into account thermal stresses. **Energy**, v. 92, p. 160–170, 2015. DOI: 10.1016/j.energy.2015.03.095.

THAEER HAMMID, Ali *et al.* A review of optimization algorithms in solving hydro generation scheduling problems. **Energies**, v. 13, n. 11, p. 2787, 2020. DOI: 10.3390/en13112787.

TOSSERAMS, S. *et al.* An augmented lagrangian relaxation for analytical target cascading using the alternating direction method of multipliers. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 31, n. 3, p. 176–189, 2006. DOI: 10.1007/s00158-005-0579-0.

WANG, Junxiang *et al.* ADMM for Efficient Deep Learning with Global Convergence. *In: PROCEEDINGS of the 25th ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining*. Anchorage, AK, USA: Association for Computing Machinery, 2019. (KDD '19), p. 111–119. DOI: 10.1145/3292500.3330936. Disponível em: <https://doi.org/10.1145/3292500.3330936>.

WOOD, Allen J.; WOLLENBERG, Bruce F.; B., Sheblé Gerald. **Power generation, operation, and control**. [S.l.]: John Wiley e Sons, 2014.

APÊNDICE A – DADOS DAS USINAS TERMELÉTRICAS DO SISTEMA TESTE

O sistema teste possui cinco usinas termelétricas em sua composição, sendo uma nuclear, uma a óleo combustível e três a gás natural, contabilizando 1540 MW de geração máxima. As Tabelas A1 e A2 apresentam os dados das usinas conforme utilizadas no capítulo 4.

Tabela A1 – Dados das usinas termelétricas

Nome	Barra	GT^{max} [MW]	GT^{min} [MW]	T^{ON} [h]	T^{UP} [h]	T^{DOWN} [h]
Angra 1	1	710	500	4	8	5
Igarapé	13	200	50	4	5	5
St. Cruz 12	2	150	50	34	5	5
St. Cruz 34	14	250	50	34	5	5
Piratininga	3	230	50	24	5	5

Tabela A2 – Dados de entrada das usinas termelétricas (cont.)

Nome	Δ [MW/h]	GT^0 [MW]	CT [\$/MWh]	CP [\$/h]
Angra 1	60	500	180	1000
Igarape	100	50	253	250
St. Cruz 12	70	84	210	450
St. Cruz 34	60	220	210	475
Piratininga	45	200	190	500

Na Tabela A1, T^{ON} representa a quantos estágios de tempo a usina termelétrica se encontra ligada, necessário como condição inicial nos primeiros estágios de tempo das restrições de *uptime/downtime*. Na Tabela A2, GT^0 representa a geração no instante de tempo anterior ao início do modelo, necessário como condição inicial no primeiro estágio de tempo para as restrições de rampa.

APÊNDICE B – DADOS DAS USINAS HIDRELÉTRICAS DO SISTEMA TESTE

O sistema teste possui 14 usinas hidrelétricas em sua composição, sendo cinco usinas a fio d'água, totalizando 10.071 MW de geração máxima. As Tabelas A3 e A4 apresentam os dados das usinas conforme utilizadas no capítulo 4.

Tabela A3 – Dados de entrada das usinas hidrelétricas

NOME	BARRA	JUSANTE	V^{MIN} [hm^3]	V^{MAX} [hm^3]
Furnas	1	M. De Moraes	5733	22950
M. De Moraes	2	Estreito	1540	4040
Estreito	13	Igarapava	1423	1423
Igarapava	13		480	480
Caconde	4	E. Da Cunha	51	555
E. Da Cunha	5	A. S. Oliveira	14	14
A. S. Oliveira	13		25	25
Emborcação	16	Itumbiara	4669	17725
Nova Ponte	15	Miranda	2412	12792
Miranda	15	Itumbiara	974	1120
Corumbá I	15	Itumbiara	470	1500
Itumbiara	18	Cach. Dourada	4573	17027
Cach. Dourada	22	São Simão	460	460
São Simão	22		7000	12540

Tabela A4 – Dados de entrada das usinas hidrelétricas (cont.)

NOME	V^0 [%]	Q^{MAX} [hm^3/h]	GH^{MAX} [MW]	Y^T [hm^3/h]
Furnas	10.1	1692	1312	1295
M. De Moraes	10	1328	478	149
Estreito		2028	1104	31
Igarapava		1480	210	49
Caconde	50	94	80.4	85
E. Da Cunha		148	108.8	55
A. S. Oliveira		178	32	2
Emborcação	53.5	1048	1192	671
Nova Ponte	73.4	576	510	493
Miranda	100	675	408	78
Corumbá I	62.9	570	375	661
Itumbiara	54.1	2940	2082	444
Cach. Dourada		2513	658	112
São Simão	84.7	2670	1710	1150

Na Tabela A4, V^0 representa o volume inicial em termos de porcentagem do volume útil do reservatório, onde os campos sem valor são referentes à usinas a fio d'água. Na mesma tabela, Y^T representa a afluência esperada constante em todos os

estágios de tempo do estudo. Considera-se que Q^{min} e GH^{min} são ambos iguais a 0 e que S^{max} é ilimitado para todas as usinas.

APÊNDICE C – DADOS DE ATENDIMENTO A DEMANDA DO SISTEMA TESTE

Neste trabalho, utiliza-se um horizonte de planejamento de 24 horas com resolução horária. Tanto a demanda horária em cada barra quanto o limite de transmissão horário são modulados pelo patamar de carga do sistema. A Figura 34 ilustra a carga total do sistema junto com os intervalos onde cada patamar é vigente. Os limites de transmissão são iguais para todas as linhas de transmissão e variam conforme o patamar de carga. O sistema está sujeito a três patamares de carga diferentes:

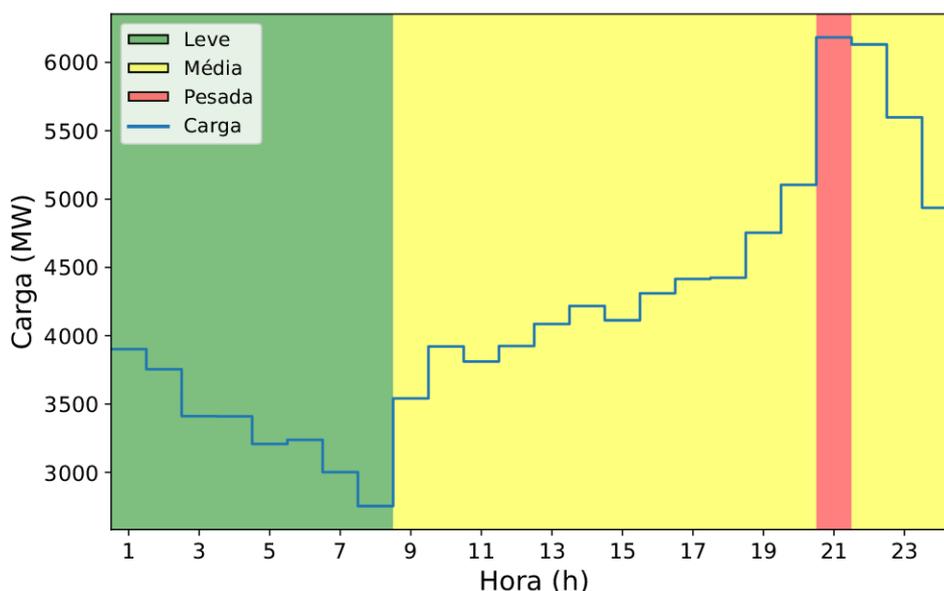
- Carga leve: Compreende o período entre os primeiros 8 instantes de tempo do estudo. Neste patamar, a carga é reduzida e os limites de transmissão também são reduzidos. O limite de transmissão¹ de todas as linhas é de 350 Megawatt (MW).
- Carga média: compreende os períodos entre instante de tempo 9 e 20, e entre o instante 22 e 24 do horizonte do estudo. Este patamar é considerado o nível basal do sistema. O limite de transmissão de todas as linhas é de 450 MW.
- Carga pesada: presente unicamente no instante 21 do estudo, este patamar apresenta uma maior carga em cada barra e um maior nível de carregamento permitido nas linhas de transmissão. O limite de transmissão de todas as linhas é de 475 MW.

As Tabelas A5, A6, A7, A8 apresentam a carga de cada barra² para cada um das 24 horas do estudo. Percebe-se uma grande variação entre os valores médios de carga de cada barra, sendo algumas delas mais carregadas que as outras, representando maiores centros de carga do sistema. Algumas barras (nominalmente, as barras 11, 12, 17, 21, 22, 23 e 24) não apresentam carga e servem apenas de barras de passagem no fluxo de potência. A Tabela A9 apresenta os dados das 38 linhas de transmissão presentes no modelo utilizado.

¹ O limite de transmissão é válido tanto para fluxos entrando na linha de transmissão quanto para fluxos saindo da mesma.

² Nas tabelas, o subscrito i em L_i representa o número da barra, não estando representado o subscrito t do instante do estudo.

Figura 34 – Carga total do sistema no horizonte de estudo



Fonte: Autor

Tabela A5 – Carga no horizonte de estudo por Barra

Hora	L_1 [MW]	L_2 [MW]	L_3 [MW]	L_4 [MW]	L_5 [MW]	L_6 [MW]
1	113,64	102,05	189,34	77,87	74,71	143,07
2	100,07	89,87	166,73	68,57	65,78	125,98
3	91,13	81,84	151,84	62,45	59,91	114,73
4	94,00	84,42	156,62	64,41	61,80	118,34
5	88,82	79,76	147,98	60,86	58,39	111,81
6	87,16	78,27	145,23	59,72	57,30	109,73
7	78,78	70,74	131,25	53,98	51,79	99,17
8	75,02	67,37	125,00	51,41	49,32	94,45
9	100,20	90,01	167,05	68,66	65,90	126,22
10	104,73	94,08	174,60	71,77	68,88	131,93
11	101,90	91,53	169,88	69,83	67,02	128,36
12	102,47	92,04	170,83	70,21	67,39	129,07
13	105,86	95,09	176,49	72,54	69,62	133,35
14	104,02	93,44	173,42	71,28	68,41	131,04
15	103,18	92,68	172,01	70,70	67,86	129,97
16	105,16	94,46	175,31	72,06	69,16	132,46
17	106,57	95,73	177,67	73,03	70,09	134,24
18	108,98	97,89	181,68	74,67	71,67	137,28
19	124,12	111,49	206,93	85,05	81,63	156,35
20	132,61	119,12	221,09	90,87	87,22	167,05
21	166,32	149,38	277,19	113,97	109,33	209,37
22	170,40	153,06	284,08	116,76	112,07	214,65
23	155,97	140,10	260,02	106,87	102,57	196,46
24	138,98	124,84	231,70	95,23	91,40	175,07

Tabela A6 – Carga no horizonte de estudo por Barra (cont.)

Hora	L_7 [MW]	L_8 [MW]	L_9 [MW]	L_{10} [MW]	L_{11} [MW]	L_{12} [MW]
1	131,48	179,92	184,16	205,18	0,00	0,00
2	115,78	158,43	162,17	180,67	0,00	0,00
3	105,44	144,29	147,69	164,54	0,00	0,00
4	108,76	148,83	152,34	169,72	0,00	0,00
5	102,76	140,62	143,93	160,36	0,00	0,00
6	100,84	138,00	141,25	157,37	0,00	0,00
7	91,14	124,72	127,66	142,23	0,00	0,00
8	86,80	118,78	121,58	135,46	0,00	0,00
9	116,03	158,66	162,38	180,96	0,00	0,00
10	121,27	165,83	169,72	189,14	0,00	0,00
11	117,99	161,35	165,13	184,03	0,00	0,00
12	118,65	162,25	166,05	185,05	0,00	0,00
13	122,58	167,63	171,55	191,19	0,00	0,00
14	120,45	164,71	168,57	187,87	0,00	0,00
15	119,47	163,37	167,20	186,33	0,00	0,00
16	121,76	166,51	170,41	189,91	0,00	0,00
17	123,40	168,75	172,70	192,47	0,00	0,00
18	126,19	172,56	176,60	196,81	0,00	0,00
19	143,72	196,54	201,14	224,16	0,00	0,00
20	153,56	209,98	214,90	239,50	0,00	0,00
21	192,45	263,27	269,46	300,23	0,00	0,00
22	197,31	269,82	276,14	307,74	0,00	0,00
23	180,60	246,96	252,74	281,67	0,00	0,00
24	160,93	220,07	225,22	251,00	0,00	0,00

Tabela A7 – Carga no horizonte de estudo por Barra (cont.)

Hora	L_{13} [MW]	L_{14} [MW]	L_{15} [MW]	L_{16} [MW]	L_{17} [MW]	L_{18} [MW]
1	278,80	344,06	562,31	177,36	0,00	590,68
2	245,51	352,19	575,61	181,55	0,00	604,65
3	223,58	319,65	522,41	164,78	0,00	548,77
4	230,62	312,67	511,02	161,18	0,00	536,80
5	217,90	293,30	479,36	151,20	0,00	503,54
6	213,84	301,82	493,29	155,59	0,00	518,18
7	193,27	284,39	464,79	146,60	0,00	488,24
8	184,06	254,55	416,03	131,22	0,00	437,02
9	245,91	318,72	520,57	164,29	0,00	547,15
10	257,02	367,23	599,81	189,29	0,00	630,43
11	250,08	356,79	582,77	183,91	0,00	612,52
12	251,47	372,97	609,18	192,25	0,00	640,28
13	259,80	390,18	637,30	201,12	0,00	669,83
14	255,29	414,70	677,34	213,76	0,00	711,92
15	253,20	400,61	654,34	206,50	0,00	687,74
16	258,07	426,69	696,94	219,94	0,00	732,52
17	261,54	439,73	718,24	226,67	0,00	754,91
18	267,44	435,56	711,42	224,51	0,00	747,74
19	304,61	451,73	737,83	232,85	0,00	775,50
20	325,45	486,68	794,92	250,87	0,00	835,50
21	408,01	576,59	941,71	297,25	0,00	989,61
22	418,19	559,19	913,34	288,24	0,00	959,98
23	382,76	509,63	832,40	262,70	0,00	874,90
24	341,08	445,99	728,46	229,89	0,00	765,65

Tabela A8 – Carga no horizonte de estudo por Barra (cont.)

Hora	L_{19} [MW]	L_{20} [MW]	L_{21} [MW]	L_{22} [MW]	L_{23} [MW]	L_{24} [MW]
1	321,15	226,97	0,00	0,00	0,00	0,00
2	328,74	232,34	0,00	0,00	0,00	0,00
3	298,36	210,87	0,00	0,00	0,00	0,00
4	291,85	206,27	0,00	0,00	0,00	0,00
5	273,77	193,49	0,00	0,00	0,00	0,00
6	281,73	199,11	0,00	0,00	0,00	0,00
7	265,45	187,61	0,00	0,00	0,00	0,00
8	237,60	167,93	0,00	0,00	0,00	0,00
9	297,36	210,29	0,00	0,00	0,00	0,00
10	342,62	242,30	0,00	0,00	0,00	0,00
11	332,89	235,42	0,00	0,00	0,00	0,00
12	347,98	246,09	0,00	0,00	0,00	0,00
13	364,04	257,45	0,00	0,00	0,00	0,00
14	386,91	273,62	0,00	0,00	0,00	0,00
15	373,77	264,33	0,00	0,00	0,00	0,00
16	398,10	281,54	0,00	0,00	0,00	0,00
17	410,27	290,14	0,00	0,00	0,00	0,00
18	406,38	287,39	0,00	0,00	0,00	0,00
19	421,46	298,06	0,00	0,00	0,00	0,00
20	454,07	321,12	0,00	0,00	0,00	0,00
21	538,01	380,48	0,00	0,00	0,00	0,00
22	521,72	368,96	0,00	0,00	0,00	0,00
23	475,49	336,26	0,00	0,00	0,00	0,00
24	416,11	294,27	0,00	0,00	0,00	0,00

Tabela A9 – Dados das linhas de transmissão

LT	De [Barra]	Para [Barra]	X_l [% Ω]
1	1	2	1.390
2	1	3	21.120
3	1	5	8.450
4	2	4	12.670
5	2	6	19.200
6	3	9	11.900
7	3	24	8.390
8	4	9	10.370
9	5	10	8.830
10	6	10	6.050
11	7	8	6.140
12	8	9	16.510
13	8	10	16.510
14	9	11	8.390
15	9	12	8.390
16	10	11	8.390
17	10	12	8.390
18	11	13	4.760
19	11	14	4.180
20	12	13	4.760
21	12	23	9.660
22	13	23	8.650
23	14	16	3.890
24	15	16	1.730
25	15	21	4.900
26	15	21	4.900
27	15	24	5.190
28	16	17	2.590
29	16	19	2.310
30	17	18	1.440
31	17	22	10.530
32	18	21	2.590
33	18	21	2.590
34	19	20	3.960
35	19	20	3.960
36	20	23	2.160
37	20	23	2.160
38	21	22	6.780

APÊNDICE D – VALORES INICIAIS DE GERAÇÃO E DOS MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

A Tabela A10 (A11) mostra os resultados obtidos para geração das usinas termelétricas (hidrelétricas), enquanto as Tabelas A12 e A13 mostram os multiplicadores de Lagrange iniciais para as restrições de consistência das usinas termelétricas relacionadas aos subproblemas térmicos e de atendimento a demanda, respectivamente. Por sua vez, as Tabelas A14 e A15 mostram os multiplicadores de Lagrange iniciais para as restrições de consistência das usinas hidrelétricas relacionadas aos subproblemas hídrico e de atendimento a demanda respectivamente.

Tabela A10 – Geração inicial das usinas termelétricas (em MW)

Hora	Piratininga	St. Cruz 34	Igarapé	St. Cruz 12	Angra 1
1	155,00	160,00	50,00	24,29	500,00
2	110,00	100,00	0,00	0,00	500,00
3	65,00	41,67	0,00	0,00	500,00
4	16,67	0,00	0,00	0,00	500,00
5	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
6	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
7	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
8	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
9	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
10	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
11	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
12	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
13	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
14	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
15	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
16	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
17	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
18	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
19	0,00	0,00	36,39	0,00	0,00
20	0,00	0,00	36,39	0,00	0,00
21	0,00	0,00	122,78	0,00	0,00
22	0,00	0,00	169,80	0,00	0,00
23	0,00	0,00	69,80	0,00	0,00
24	0,00	0,00	13,61	0,00	0,00

Tabela A11 – Geração inicial das usinas hidrelétricas (em MW)

Hora	A. S. Oliveira	Emborcação	Corumba I	Estreito	Cach. Dourada	Furnas	Itumbiara	Cacondé	M. Moraes	N. Ponte	S. Simão	E. Da Cunha	Igarapava	Miranda
1	12,43	1121,28	0,00	604,24	564,00	0,00	0,00	0,00	354,31	106,86	0,00	40,34	210,00	0,00
2	12,43	0,00	0,00	691,68	0,00	0,00	1225,90	0,00	354,31	510,00	0,00	40,34	210,00	0,00
3	12,43	324,89	375,00	589,74	0,00	0,00	0,00	0,00	354,31	510,00	598,91	40,34	0,00	0,00
4	12,43	78,62	0,00	705,64	0,00	0,00	523,38	0,00	0,00	510,00	602,37	0,00	210,00	250,54
5	0,00	1138,02	0,00	489,03	0,00	998,62	0,00	0,00	354,31	187,51	0,00	40,34	0,00	0,00
6	0,00	1058,12	0,00	96,81	33,06	1064,09	0,00	0,00	255,25	0,00	533,60	40,34	157,16	0,00
7	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	950,32	754,92	0,00	352,00	0,00	0,00	40,34	210,00	319,24
8	12,43	0,00	0,00	0,00	0,00	1026,81	0,00	0,00	263,49	510,00	600,55	40,34	161,66	138,37
9	12,43	0,00	0,00	0,00	0,00	1063,03	580,77	0,00	354,31	510,00	769,50	40,34	210,00	0,00
10	12,43	0,00	375,00	300,39	0,00	1174,42	1456,09	0,00	352,00	0,00	0,00	40,34	210,00	0,00
11	0,00	1138,02	0,00	759,30	658,00	775,42	0,00	0,00	354,31	0,00	0,00	40,34	86,03	0,00
12	12,43	0,00	0,00	754,60	0,00	1174,42	112,78	0,00	352,00	510,00	757,67	40,34	210,00	0,00
13	12,43	1138,02	0,00	717,37	33,06	1174,42	0,00	0,00	352,00	0,00	0,00	40,34	210,00	408,00
14	12,43	332,61	375,00	175,20	0,00	1174,42	0,00	0,00	354,31	361,34	773,11	40,34	210,00	408,00
15	0,00	509,54	0,00	141,56	0,00	1174,42	0,00	0,00	354,31	510,00	765,08	40,34	210,00	408,00
16	12,43	0,00	0,00	614,96	0,00	1174,42	841,61	0,00	284,15	0,00	762,14	40,34	172,95	408,00
17	12,43	4,90	312,60	285,03	0,00	1174,42	737,65	0,00	354,31	510,00	774,47	40,34	210,00	0,00
18	0,00	523,84	70,53	341,89	0,00	1174,42	1709,45	0,00	354,31	0,00	0,00	40,34	210,00	0,00
19	12,43	35,94	375,00	589,13	0,00	1174,42	758,25	0,00	271,67	111,02	774,47	40,34	166,13	408,00
20	12,43	0,00	375,00	858,09	0,00	1174,42	865,69	0,00	354,31	0,00	769,84	40,34	210,00	408,00
21	32,00	85,17	215,19	1104,00	0,00	1174,42	971,39	69,07	354,31	510,00	817,50	108,80	210,00	408,00
22	32,00	89,98	375,00	1104,00	0,00	1174,42	942,72	69,04	354,31	319,11	774,47	108,80	210,00	408,00
23	29,42	209,39	375,00	898,75	0,00	1174,42	934,49	58,76	354,31	0,00	766,97	108,80	210,00	408,00
24	31,68	773,65	0,00	1104,00	0,00	426,92	1104,59	72,53	354,31	0,00	739,70	104,93	210,00	0,00

Tabela A12 – Multiplicadores de Lagrange iniciais das usinas termelétricas para os subproblemas térmicos

Hora	Piratininga	St. Cruz 34	Igarapé	St. Cruz 12	Angra 1
1	190,00	210,00	253,00	210,00	180,00
2	190,00	210,00	253,00	210,00	180,00
3	190,00	210,00	253,00	210,00	180,00
4	190,00	210,00	253,00	210,00	180,00
5	190,00	210,00	253,00	210,00	180,00
6	190,00	210,00	253,00	210,00	180,00
7	190,00	210,00	253,00	210,00	180,00
8	190,00	210,00	253,00	210,00	180,00
9	190,00	210,00	253,00	210,00	180,00
10	190,00	210,00	253,00	210,00	180,00
11	190,00	210,00	253,00	210,00	180,00
12	190,00	210,00	253,00	210,00	180,00
13	190,00	210,00	253,00	210,00	180,00
14	190,00	210,00	253,00	210,00	180,00
15	190,00	210,00	253,00	210,00	180,00
16	190,00	210,00	253,00	210,00	180,00
17	190,00	210,00	253,00	210,00	180,00
18	190,00	210,00	253,00	210,00	180,00
19	190,00	210,00	253,00	210,00	180,00
20	190,00	210,00	253,00	210,00	180,00
21	11,81	83,75	-126,50	-59,64	-86,83
22	-47,58	41,67	-253,00	-149,52	-175,78
23	190,00	210,00	253,00	210,00	180,00
24	190,00	210,00	253,00	210,00	180,00

Tabela A13 – Multiplicadores de Lagrange iniciais das usinas termelétricas para o sub-problema de atendimento a demanda

Hora	Piratininga	St. Cruz 34	Igarapé	St. Cruz 12	Angra 1
1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
2	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
3	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
4	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
5	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
6	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
7	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
8	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
9	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
10	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
11	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
12	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
13	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
14	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
15	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
16	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
17	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
18	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
19	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
20	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
21	178,19	126,25	379,50	269,64	266,83
22	237,58	168,33	506,00	359,52	355,78
23	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
24	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

