



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
CENTRO TECNOLÓGICO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

Daniel Gomes de Pinho Zanco

**Uma análise abrangente do algoritmo de Elo:**  
Modelo estocástico, diretrizes de projeto e resultados  
experimentais

Florianópolis  
2022

Daniel Gomes de Pinho Zanco

**Uma análise abrangente do algoritmo de Elo:**

Modelo estocástico, diretrizes de projeto e resultados experimentais

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação  
em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de  
Santa Catarina para a obtenção do título de mestre  
em Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Rui Seara, Dr.

Florianópolis

2022

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,  
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Zanco, Daniel Gomes de Pinho

Uma análise abrangente do algoritmo de Elo : Modelo estocástico, diretrizes de projeto e resultados experimentais / Daniel Gomes de Pinho Zanco ; orientador, Rui Seara, 2022.

51 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Florianópolis, 2022.

Inclui referências.

1. Engenharia Elétrica. 2. Algoritmo de Elo. 3. Análise estocástica. 4. Sistemas de rating. 5. Diretrizes de projeto. I. Seara, Rui. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica. III. Título.

Daniel Gomes de Pinho Zanco

**Uma análise abrangente do algoritmo de Elo:**

Modelo estocástico, diretrizes de projeto e resultados experimentais

O presente trabalho em nível de mestrado foi avaliado e aprovado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. Rui Seara, Dr.

Universidade Federal de Santa Catarina  
Campus Florianópolis

Prof. Ranniery da Silva Maia, Dr.

Universidade Federal do Rio Grande do Norte  
Campus Natal

Prof. Marcos Vinicius Matsuo, Dr.

Universidade Federal de Santa Catarina  
Campus Blumenau

Prof. Eduardo Luiz Ortiz Batista, Dr.

Universidade Federal de Santa Catarina  
Campus Florianópolis

Prof. Eduardo Vinicius Kuhn, Dr.

Universidade Tecnológica Federal do Paraná  
Campus Toledo

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de mestre em Engenharia Elétrica.

---

Prof. Telles Brunelli Lazzarin, Dr.  
Coordenação do Programa de  
Pós-Graduação

---

Prof. Rui Seara, Dr.  
Orientador

Florianópolis, 2022.

Este trabalho é dedicado aos meus queridos pais e à  
minha vó Suelly.

# Agradecimentos

Inicialmente, agradeço ao meu orientador Prof. Rui Seara pelo apoio e consideração durante a realização do trabalho.

Ao Prof. Eduardo Kuhn, pelas indispensáveis contribuições, tanto ao trabalho de pesquisa, quanto à minha vida pessoal e profissional como pesquisador.

Ao Prof. Leszek Szczecinski, pela supervisão durante meu estágio no INRS e crucial participação no desenvolvimento do trabalho.

Aos colegas do LINSE, pela ótima convivência e constante aprendizado. Em especial, no início do mestrado, ao Prof. Eduardo Batista pela orientação e ao Prof. Ranniery Maia pelas proveitosas discussões sobre aprendizagem de máquina. Agradeço também ao Rogério Paludo pela amizade, ótimas discussões e dicas importantes, ao Walter Gontijo pelos anos de colaboração desde a iniciação científica na graduação e ao Elton Fontão pelo importante apoio administrativo.

Aos meus pais, agradeço pelo apoio incondicional ao longo dos anos. Em especial, ao meu pai pela inspiração de seguir a carreira acadêmica e à minha mãe pela presença constante e ótimos conselhos.

Aos meus amigos e amigas, por sempre me incentivarem e acreditarem em mim. Sou grato às amigadas duradouras, assim como às novas amigadas, que mesmo distantes muito me ajudam.

# RESUMO

O algoritmo de Elo, devido à sua simplicidade, é amplamente utilizado para *rating* em competições esportivas bem como em outras aplicações onde o *rating/ranking* serve como uma ferramenta útil para predição de resultados futuros. Contudo, apesar de ser amplamente utilizado, um estudo detalhado sobre a convergência do algoritmo de Elo não foi apresentado até então. Visando fechar essa lacuna, este trabalho de pesquisa apresenta uma análise estocástica abrangente do algoritmo de Elo, considerando competições com sistema de rodízio. Especificamente, expressões analíticas são derivadas caracterizando o comportamento/evolução das habilidades e métricas de desempenho importantes. Então, levando em conta a relação de compromisso entre o comportamento do algoritmo e o valor do passo de adaptação, que é um hiperparâmetro ajustável, algumas diretrizes de projeto assim como discussões sobre o desempenho do algoritmo são fornecidas. Ainda, para ilustrar a aplicabilidade dos achados teóricos, resultados experimentais são apresentados corroborando um casamento muito bom entre o comportamento predito através das expressões analíticas e aquele obtido a partir do algoritmo considerando dados reais (da liga italiana de voleibol).

**Palavras-chave:** Algoritmo de Elo; análise estocástica; competição; diretrizes de projeto; sistemas de *rating*.



# ABSTRACT

The Elo algorithm, due to its simplicity, is widely used for rating in sports competitions as well as in other applications where the rating/ranking is a useful tool for predicting future results. However, despite its widespread use, a detailed study of the convergence properties of the Elo algorithm is still lacking. Aiming to fill this gap, this research work presents a comprehensive (stochastic) analysis of the Elo algorithm, considering round-robin (one-on-one) competitions. Specifically, analytical expressions are derived characterizing the behavior/evolution of the skills and of important performance metrics. Then, taking into account the relationship between the behavior of the algorithm and the step-size value, which is a hyperparameter that can be controlled, some design guidelines as well as discussions about the performance of the algorithm are provided. To illustrate the applicability of the theoretical findings, experimental results are shown, corroborating the very good match between the analytical predictions and those obtained from the algorithm using real-world data (from the Italian SuperLega, Volleyball League).

**Keywords:** Elo algorithm; stochastic analysis; competition; design guidelines; rating systems.

# Lista de figuras

Figura 1 – Constantes de tempo relacionadas à convergência do algoritmo de <i>rating</i> nos sentidos médio $\tau_1$ [dado por (59)] e quadrático médio $\tau_2$ [dado por (60)] como função de $\beta$ , considerando $M = 15$ , $v = 3$ e $\eta = 0$ . . . .	29
Figura 2 – Limite inferior do custo $\bar{\ell}_{\min}$ [dado por (55)] como função da variância $v$ , considerando diferentes valores de $\eta$ e $M = 15$ . (As assíntotas são representadas aqui por linhas escuras tracejadas.) . . . . .	31
Figura 3 – Custo médio em excesso [dado por (56)] como função do passo de adaptação $\beta$ , considerando diferentes números de jogos $k$ enquanto $\eta = 0$ , $v = 3$ e $M = 15$ . . . . .	32
Figura 4 – Condição de $\beta$ para melhoria sobre a inicialização [dado por (67)] como função de $v$ , considerando $M = 15$ e $\eta = 0$ . . . . .	33
Figura 5 – Passo de adaptação ótimo $\beta_{o,k}$ obtido da solução numérica de (70) (linhas sólidas) e da solução aproximada (71) (linhas tracejadas) como função do número de jogos $k$ , considerando diferentes valores de $v$ enquanto $M = 15$ e $\eta = 0$ . Curvas para outros valores de $\eta$ são omitidas já que tal variável não afeta (71) significativamente. . . . .	34
Figura 6 – Exemplo 1. Evolução do MSD das habilidades (esquerda) e custo médio (direita). Resultados de simulação (linhas sólidas cinzas) e modelo proposto (linhas tracejadas escuras). (a) e (b) $\beta = 0.03$ . (c) e (d) $\beta = 0.87$ . (e) e (f) $\beta = 2.49$ . . . . .	38
Figura 7 – Exemplo 2. Curvas de (a) MSD e (b) custo médio alcançado pelo algoritmo de <i>rating</i> à medida que $k$ se aproxima de $K$ , como funções de $\beta$ . Resultados de simulação (linhas sólidas cinzas), modelo proposto (linhas tracejadas escuras), limite superior da condição de “melhoria sobre a inicialização” (67) (linhas verticais sólidas escuras) e passo de adaptação ótimo (70) assumindo $k = K$ (linhas verticais tracejadas-pontilhadas escuras). . . . .	39

Figura 8 – Evolução das habilidades para um subconjunto de 4 times (esquerda) e MSD das habilidades (direita). Resultados de simulação (linhas sólidas) e modelo proposto (linhas tracejadas). (a) e (b) Temporada 2009/10. (c) e (d) Temporada 2015/16. (e) e (f) Temporada 2017/18. (f) e (g) Temporada 2018/19. . . . .	41
Figura 9 – Passo de adaptação ótimo $\beta_{o,k}$ obtido a partir da solução numérica de (70) (linhas sólidas) e da solução aproximada (81) (linhas tracejadas) em função do número de jogos $k$ , considerando diferentes valores de $v$ enquanto $M = 15$ e $\eta = 0$ . . . . .	48

# Lista de tabelas

Tabela 1 – Resumo do conjunto de dados da SuperLega . . . . .	37
Tabela 2 – Identidades auxiliares utilizadas nas determinações de $\mathbb{E}[f(z)]$ para diferentes funções $f(z)$ . . . . .	46

# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>13</b>
1.1	OBJETIVOS	14
1.2	ESTRUTURA DO TRABALHO	15
1.3	NOTAÇÃO MATEMÁTICA	15
<b>2</b>	<b>FORMULAÇÃO DO PROBLEMA</b>	<b>16</b>
2.1	MODELO DE <i>RATING</i>	16
2.2	PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO E ALGORITMO DE <i>RATING</i>	17
2.3	CONCLUSÕES	18
<b>3</b>	<b>ANÁLISE ESTOCÁSTICA PROPOSTA</b>	<b>19</b>
3.1	HIPÓTESES SIMPLIFICATIVAS	19
3.2	APROXIMAÇÃO QUADRÁTICA DO PROBLEMA DE <i>RATING</i>	21
3.3	COMPORTAMENTO MÉDIO DO VETOR DE HABILIDADES	21
3.4	DESVIO QUADRÁTICO MÉDIO DAS HABILIDADES	23
3.5	VARIÂNCIA DAS HABILIDADES	25
3.6	COMPORTAMENTO MÉDIO DA FUNÇÃO CUSTO	26
3.7	CONCLUSÕES	26
<b>4</b>	<b>DISCUSSÃO</b>	<b>28</b>
4.1	CONSTANTES DE TEMPO	28
4.2	SOBRE O SIGNIFICADO DE “CONVERGÊNCIA”	29
4.3	CONSIDERAÇÕES SOBRE O CUSTO MÉDIO	30
4.4	MELHORIA DE DESEMPENHO SOBRE A INICIALIZAÇÃO	32
4.5	DETERMINAÇÃO DO PASSO DE ADAPTAÇÃO ÓTIMO	33
4.6	CONCLUSÕES	34
<b>5</b>	<b>RESULTADOS EXPERIMENTAIS</b>	<b>36</b>
5.1	EXEMPLO 1	37
5.2	EXEMPLO 2	38
5.3	EXEMPLO 3	39
5.4	CONCLUSÕES	40
<b>6</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	<b>42</b>
6.1	CONCLUSÕES	42
6.2	TRABALHO EM VIA DE PUBLICAÇÃO	43
6.3	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	44
<b>APÊNDICE A</b>	<b>DETERMINAÇÃO DE (30), (41) E (55)</b>	<b>45</b>
<b>APÊNDICE B</b>	<b>DETERMINAÇÃO DE (71)</b>	<b>47</b>
<b>REFERÊNCIAS</b>		<b>49</b>

# Capítulo 1

## Introdução

Ao longo das últimas décadas, diferentes sistemas/algoritmos de *rating*<sup>1</sup> foram criados e usados em torneios/competições (esportes e jogos) para atribuir números aos competidores (times ou jogadores no caso de indivíduos), refletindo assim as habilidades de cada equipe em comparação às outras (veja extensas revisões em [1]–[3]). Tais algoritmos de *rating* vêm sendo usados com sucesso para um entendimento rápido da situação de uma competição, para avaliar a força das equipes e, em seguida, apoiar decisões relacionadas ao agendamento de partidas (definindo agendamentos de partidas mais “interessantes”) ou promoção/rebaixamento (entre ligas de alto e baixo nível) [3], além de fornecer suporte de decisão para apostadores [4], [5]. Como consequência da aplicabilidade, o desenvolvimento e aprimoramento de sistemas de *rating* vêm se tornando um campo de pesquisa importante e ativo (como apropriadamente destacado, por exemplo, em [6] e [7] e suas referências).

O *rating*, do ponto de vista estatístico<sup>2</sup>, consiste em inferir parâmetros desconhecidos (habilidades) a partir dos resultados observados (resultados dos jogos) por meio de um modelo matemático formal de habilidades-resultados (veja [11, Ch. 4] para mais detalhes sobre modelos baseados em objetivos ou resultados, e [12, Apêndice] para uma discussão sobre diferentes esportes). Nesse contexto, diversas soluções vêm sendo propostas e aplicadas oficialmente em ligas desportivas, dentre os quais pode-se citar os métodos de Massey [13, Ch. 2], Colley [13, Ch. 3] e o sistema Glicko [14], dentre outros. Considerando esses métodos, o algoritmo de Elo, criado nos anos 1960 para classificar jogadores de xadrez [15] e comumente referido como *Elo rating system*, é possivelmente o mais conhecido e amplamente utilizado, devido principalmente à sua simplicidade e interpretação intuitiva [3]. Em resumo, esse algoritmo assume que cada time possui um único parâmetro caracterizando o seu desempenho (isto é, “sua verdadeira habilidade”) e, então, o objetivo do algoritmo é realizar uma estimativa (o mais próxima possível) de tal parâmetro (isto é, o

<sup>1</sup> Um *rating* é um valor numérico atribuído a um competidor caracterizando seu desempenho, enquanto um *ranking* é a colocação ordinal baseada nos *ratings* [1]; assim, uma equipe “mais forte” tem um *rating* grande e um *ranking* pequeno [2].

<sup>2</sup> Especificamente, o problema da *rating* faz parte do tópico de modelagem de “comparações pareadas” na área de estatística [8]–[10].

rating); para isso, o algoritmo aumenta a habilidade de um time específico quando a pontuação da partida é maior do que a esperada/predita e vice-versa [15], atualizando assim (após cada partida) o *rating* dos competidores dependendo dos resultados dos jogos [2], [16]. Conseqüentemente, a característica de autocorreção do algoritmo permite que ele (intrinsecamente) rastreie as habilidades dos times ao longo do tempo [17].

Devido à sua simplicidade, o algoritmo de Elo vem sendo adotado como padrão para o *rating* de competições envolvendo xadrez pela FIDE [18], futebol nas seleções femininas em 2003 [19] e nas masculinas em 2018 [20] pela FIFA, *eSports* [21], dentre outros [22]–[24]. Extensões e variações do algoritmo de Elo também vêm sendo derivadas e aplicadas a diversos outros esportes, conforme discutido em [3], [5], [10], [16], [25]–[30]. No entanto, apesar da ampla utilização do algoritmo de Elo em diferentes aplicações, verifica-se que as discussões apresentadas até então na literatura advém geralmente de resultados experimentais e são apoiadas sem grande rigor teórico. Por exemplo, a metodologia de escolha dos hiperparâmetros do algoritmo é em geral heurística, diferindo significativamente de uma aplicação para outra (por exemplo, veja [1, Tabela 10] e/ou [28, Sec. 3]). Além disso, é comum a alegação de que a convergência para o “*rating* verdadeiro” se dá dentro de um número predefinido de (cerca de 30) partidas (conforme destacado em [31] juntamente com outros problemas mais específicos).

Até onde se sabe, a única análise teórica da convergência do algoritmo de Elo é apresentada em [32], a qual demonstra que, em torneios com sistema de rodízio (*round-robin*, “todos enfrentam todos”), as estimativas das habilidades convergem para suas “habilidades verdadeiras” a uma taxa exponencial [32, Theorem 2.2]. Essa é uma conclusão forte que fornece uma justificativa teórica para o uso prático do algoritmo. A partir desse resultado importante, sabe-se que, com hiperparâmetros adequados e após um número suficiente de jogos, é possível se obter uma medida confiável das habilidades (intrínsecas) dos times. Entretanto, como criticamente apontado por [30], existe ainda a necessidade de mais estudos teóricos sobre o comportamento do algoritmo de Elo, assim como de suas extensões e variações.

## 1.1 OBJETIVOS

Neste contexto, reconhecendo a natureza estocástica do algoritmo de Elo em aplicações do mundo real, o presente trabalho de pesquisa visa endereçar os seguintes aspectos:

- realizar uma análise (abrangente) do algoritmo aplicado em uma competição com sistema de rodízio (todos contra todos), considerando um número reduzido de hipóteses e aproximações;
- derivar expressões analíticas caracterizando o comportamento/evolução das habilidades e de outras métricas de desempenho importantes ao longo da competição/torneio;

- investigar e discutir como os hiperparâmetros do algoritmo afetam seu desempenho, visando obter *insights* e diretrizes de projeto úteis; e
- fornecer resultados de simulação usando dados reais da liga italiana de voleibol, confirmando a aplicabilidade dos achados teóricos.

Note que este estudo visa fornecer uma base teórica para suportar discussões sobre a aplicabilidade, as características e o ajuste dos hiperparâmetros do algoritmo de Elo, ao invés de recorrer apenas a procedimentos de tentativa e erro e simulações numéricas extensivas (como usualmente é realizado).

## 1.2 ESTRUTURA DO TRABALHO

Este trabalho está organizado como segue. No Capítulo 2, são revisitados alguns conceitos fundamentais relacionados ao modelo de *rating* e ao algoritmo de Elo. No Capítulo 3, é apresentada a análise estocástica proposta para o algoritmo de Elo. No Capítulo 4, são discutidos alguns *insights* interessantes e diretrizes de projeto obtidas a partir da análise. No Capítulo 5, resultados experimentais são mostrados baseados em dados extraídos da liga italiana de voleibol. Por fim, as conclusões e sugestões para trabalhos de pesquisa futuros são apresentadas no Capítulo 6.

## 1.3 NOTAÇÃO MATEMÁTICA

A notação matemática adotada neste trabalho segue a prática padrão de letras minúsculas em negrito para vetores, letras maiúsculas em negrito para matrizes e letras itálicas para grandezas escalares. O sobrescrito  $\mathsf{T}$  representa o operador de transposição,  $\mathbb{E}(\cdot)$  denota o operador valor esperado que (salvo indicação em contrário) é calculado com respeito a todas variáveis aleatórias que aparecerem dentro dos parênteses/colchetes, enquanto  $[\mathbf{A}]_{m,n}$  representa o escalar na posição  $m,n$  da matriz  $\mathbf{A}$ . Ainda, ao lidar-se com probabilidades, utiliza-se a notação  $\Pr\{a|b\}$  para representar  $\Pr\{A = a|b\}$ , onde  $A$  denota a própria variável aleatória e  $a$  é a sua realização condicionada em  $b$ .



## Capítulo 2

# Formulação do problema

Aqui, primeiro é introduzido o modelo de *rating* considerado juntamente com alguns conceitos fundamentais e, em seguida, é apresentado o algoritmo recursivo utilizado para resolver o problema de *rating*.

### 2.1 MODELO DE *RATING*

Considera-se  $M$  times/jogadores (com índice  $m = 1, \dots, M$ ) disputando entre si em competições/torneios com sistema de rodízio (veja [33] para uma discussão detalhada sobre o *design* de competições) com jogos indexados por  $k = 1, \dots, K$ , onde  $K$  é o número total de jogos observados em um dado período de tempo (e.g., o número de jogos em uma temporada). Em cada jogo  $k$ , os oponentes são agendados por um mecanismo externo que atribui aos times da “casa” e de “fora” os índices  $i_k$  e  $j_k$ , respectivamente. A distinção entre times da casa e de fora é útil em competições nas quais o time da casa tem vantagem, ou seja, quando jogar em casa aumenta a probabilidade de vencer (para mais detalhes, veja [16, Sec. 2]). Os resultados dos jogos são definidos como  $y_k \in \{0,1\}$ , com  $y_k = 1$  quando o time da casa vence e  $y_k = 0$  caso contrário.

No problema de *rating*, o interesse reside em determinar as habilidades dos times  $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1, \dots, \theta_M]^\top$ , visando possibilitar uma comparação direta entre os  $M$  times. A inferência estatística das habilidades  $\boldsymbol{\theta}$  a partir dos resultados observados  $y_k$  requer um modelo que relacione ambas quantidades. Para isso, é adotado aqui o comumente usado modelo de Bradley-Terry [8]

$$\Pr \{y_k = 1 | \boldsymbol{\theta}\} = \sigma(z_k/s + \eta) \quad (1)$$

que se baseia na diferença entre as habilidades dos times participantes

$$\begin{aligned} z_k &= \theta_{i_k} - \theta_{j_k} \\ &= \mathbf{x}_k^\top \boldsymbol{\theta} \end{aligned} \quad (2)$$

sendo o vetor de agendamento  $\mathbf{x}_k = [x_{k,1} \dots x_{k,M}]^\top$  definido como

$$x_{k,m} = \begin{cases} 1, & m = i_k \\ -1, & m = j_k \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3)$$

enquanto

$$\sigma(z) = \frac{1}{1 + e^{-z}} \quad (4)$$

é a função logística e o parâmetro  $\eta$  caracteriza a vantagem do time da casa vencer a partida.

Note que  $s > 0$  em (1) e a base do expoente em (4) são fatores de escala arbitrários utilizados para acomodar o valor das habilidades dentro de um certo intervalo desejável, e.g.,

$$\begin{aligned} \sigma(z/s) &= \frac{1}{1 + e^{-z/s}} \\ &= \frac{1}{1 + 10^{-z/s'}} \end{aligned} \quad (5)$$

onde

$$s' = s \ln(10). \quad (6)$$

Dessa forma, (5) conecta a função logística (4) à função de base 10 comumente utilizada no algoritmo de Elo (apresentado a seguir), confirmando que mudança na escala pode ser vista como troca de base da exponencial (como também apontado em [10]); por isso, considera-se  $s = 1$  daqui em diante por questão de simplicidade.

## 2.2 PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO E ALGORITMO DE *RATING*

Considerando o número total de jogos  $K$ , como também assumindo que a vantagem do time da casa  $\eta$  e os vetores de agendamento  $\mathbf{x}_k$  são conhecidos, o problema em questão trata de estimar a habilidade dos jogadores  $\boldsymbol{\theta}$  a partir dos resultados das disputas  $y_k$ . Para resolver esse problema, que pode ser interpretado como um problema de regressão logística [34, Ch. 4.4], é possível recorrer ao princípio da máxima verossimilhança para escrever

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \underset{\boldsymbol{\theta}}{\operatorname{argmin}} \sum_{k=1}^K \ell_k(\boldsymbol{\theta}) \quad (7)$$

com a função de log-verossimilhança negativa (também referida como função custo) dada por

$$\begin{aligned} \ell_k(\boldsymbol{\theta}) &= -\ln[\Pr\{y_k|\boldsymbol{\theta}\}] \\ &= -y_k \ln[\sigma(\mathbf{x}_k^\top \boldsymbol{\theta} + \eta)] - (1 - y_k) \ln[1 - \sigma(\mathbf{x}_k^\top \boldsymbol{\theta} + \eta)]. \end{aligned} \quad (8)$$

Uma solução para (7) pode ser obtida de forma recursiva através do método do gradiente estocástico (como descrito em [3]), isto é,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\theta}_{k+1} &= \boldsymbol{\theta}_k - \beta \nabla \ell_k(\boldsymbol{\theta}_k) \\ &= \boldsymbol{\theta}_k + \beta [y_k - \sigma(\mathbf{x}_k^\top \boldsymbol{\theta}_k + \eta)] \mathbf{x}_k\end{aligned}\tag{9}$$

onde  $\beta > 0$  denota o parâmetro de passo e  $\boldsymbol{\theta}_0$  é convenientemente inicializado como um vetor  $M$  dimensional de zeros. Note que (9) representa exatamente o algoritmo de Elo descrito em [15].

### 2.3 CONCLUSÕES

Este capítulo tratou de apresentar a formulação do problema de *rating* considerado. Em particular, foi primeiramente apresentado uma descrição breve do problema juntamente com o modelo de Bradley-Terry utilizado para inferência estatística das habilidades dos jogadores com base nos resultados observados das disputas. Vale reforçar que foram introduzidas aqui as principais variáveis envolvidas no problema em questão. Além disso, foi formulado o problema de otimização envolvendo as habilidades dos jogadores e os resultados das disputas utilizando o princípio da máxima verossimilhança. Por fim, a partir do problema de otimização apresentado, foi derivado um algoritmo recursivo para estimar (iterativamente) as habilidades dos jogadores ao longo do campeonato/torneio, o qual é conhecido como algoritmo de Elo.

## Capítulo 3

# Análise estocástica proposta

Neste capítulo, é apresentada uma análise estocástica do algoritmo de *rating*. Para isso, primeiro são introduzidas algumas hipóteses usadas para tornar o desenvolvimento matemático tratável. Em seguida, uma versão aproximada do algoritmo de *rating* é desenvolvida. Por fim, são obtidas expressões matemáticas para caracterizar o comportamento médio do vetor de habilidades, o desvio quadrático médio das habilidades e a variância das habilidades, assim como o comportamento médio da função custo.

### 3.1 HIPÓTESES SIMPLIFICATIVAS

Uma vez que o algoritmo de *rating* [dado por (9)] depende da realização de variáveis aleatórias, a sua análise (no sentido estocástico) se torna viável caso algumas variáveis determinísticas sejam também tratadas como aleatórias. Nesse sentido, são introduzidas as seguintes hipóteses simplificadoras consideradas no desenvolvimento apresentado:

- A1) Embora a sequência de vetores de agendamento  $\mathbf{x}_k$  [veja (3)] seja determinada com antecedência em torneios desportivos, assume-se aqui um sistema de rodízio duplo no qual os índices  $i_k$  e  $j_k$  (que definem  $\mathbf{x}_k$ ) são aleatórios, sorteados uniformemente e sem repetição a partir de um conjunto  $\{1, \dots, M\}$  (isto é, cada time joga em casa e fora contra todos os outros competidores com as mesmas probabilidades) de tal forma que

$$\begin{aligned} \Pr \{i_k = m\} &= \Pr \{j_k = m\}, \quad \forall m \\ &= \frac{1}{M} \end{aligned} \tag{10}$$

e

$$\begin{aligned} \Pr \{j_k = n | i_k = m\} &= \Pr \{i_k = n | j_k = m\}, \quad \forall m \neq n \\ &= \frac{1}{M-1}. \end{aligned} \tag{11}$$

Logo, a correlação entre os elementos de  $\mathbf{x}_k$  pode ser expressa como

$$\mathbb{E}[x_{k,m}x_{k,n}] = \begin{cases} \Pr\{i_k = m\} + \Pr\{j_k = m\}, & m = n \\ -\Pr\{i_k = m\}\Pr\{j_k = n|i_k = m\} \\ -\Pr\{j_k = m\}\Pr\{i_k = n|j_k = m\}, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (12)$$

o que resulta [de (10) e (11)] em

$$\mathbb{E}[x_{k,m}x_{k,n}] = \begin{cases} \frac{2}{M}, & m = n \\ -\frac{2}{M(M-1)}, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (13)$$

Consequentemente, a matriz de autocorrelação de  $\mathbf{x}_k$  pode ser expressa como

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \mathbb{E}[\mathbf{x}_k\mathbf{x}_k^\top] \\ &= \frac{2}{M-1} \left( \mathbf{I} - \frac{1}{M}\mathbf{1}\mathbf{1}^\top \right). \end{aligned} \quad (14)$$

A2) É assumido que o modelo de Bradley-Terry (1) descreve a distribuição de  $y_k$  quando condicionada ao vetor de habilidades “verdadeiro”  $\boldsymbol{\theta}^* = [\theta_1^*, \dots, \theta_M^*]^\top$ , isto é,

$$\Pr\{y_k = 1|\boldsymbol{\theta}^*\} = \sigma(z_k^* + \eta) \quad (15)$$

no qual

$$\begin{aligned} z_k^* &= \theta_{i_k}^* - \theta_{j_k}^* \\ &= \mathbf{x}_k^\top \boldsymbol{\theta}^* \end{aligned} \quad (16)$$

sendo o vetor de agendamento  $\mathbf{x}_k$  dado por (3). Note que  $s = 1$  em (15) por simplicidade.

A3) Dado que  $\boldsymbol{\theta}^*$  é desconhecido *a priori*, assume-se que os seus elementos são extraídos de uma distribuição gaussiana com média nula e variância  $v$ , assim como em [35, Sec. 4.1] e [36]. Como consequência, as características de uma dada competição são unicamente determinadas por  $v$ , cujo valor remete a diferentes contextos competitivos. Em particular, para  $\eta = 0$ ,  $v$  grande implica que a diferença das habilidades entre oponentes  $z_k^*$  [veja (16)] seja provavelmente grande; logo, o resultado do jogo  $y_k$  [gerado aleatoriamente de acordo com (15)] é quase determinístico, isto é, ou  $\Pr\{y_k = 1|\boldsymbol{\theta}^*\} \approx 1$  ou  $\Pr\{y_k = 1|\boldsymbol{\theta}^*\} \approx 0$ . Por outro lado,  $v$  pequeno resulta em  $z_k^* \approx 0$ , o que indica que a incerteza dos resultados condicionados às habilidades é elevada, isto é,  $\Pr\{y_k = 1|\boldsymbol{\theta}^*\} \approx 0,5$ . Exemplos práticos ocorrem: i) em uma liga profissional, onde se espera que

times tenham um desempenho semelhante, uma incerteza significativa no resultado dos jogos é então representada por um  $v$  pequeno; enquanto ii) para torneios/campeonatos internacionais, onde são observadas grandes disparidades na habilidade dos times, geralmente é fácil prever o resultado de jogos envolvendo os melhores e piores times, o que implica um  $v$  grande.

Note que as hipóteses introduzidas a respeito do vetor de agendamento  $\mathbf{x}_k$  e do vetor de habilidades verdadeiro  $\boldsymbol{\theta}^*$  são de certo modo fortes e questionáveis; ainda assim, tais hipóteses são necessárias para tornar o desenvolvimento matemático tratável e levam a resultados satisfatórios (como mostrado mais adiante no Capítulo 5).

### 3.2 APROXIMAÇÃO QUADRÁTICA DO PROBLEMA DE *RATING*

Visando tornar a análise do algoritmo de Elo [dado por (9)] matematicamente tratável, é utilizada uma expansão em série de Taylor de segunda ordem centrada em  $\boldsymbol{\theta}^*$  para aproximar (8) como

$$\begin{aligned}\tilde{\ell}_k(\boldsymbol{\theta}) &= \ell_k(\boldsymbol{\theta}^*) + [\nabla \ell_k(\boldsymbol{\theta}^*)]^\top (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^*) + \frac{1}{2} (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^*)^\top \nabla^2 \ell_k(\boldsymbol{\theta}^*) (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^*) \\ &= \ell_k(\boldsymbol{\theta}^*) + g_k \mathbf{x}_k^\top (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^*) + \frac{1}{2} h_k (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^*)^\top \mathbf{x}_k \mathbf{x}_k^\top (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^*)\end{aligned}\quad (17)$$

com

$$g_k = y_k - \sigma(\mathbf{x}_k^\top \boldsymbol{\theta}^* + \eta) \quad (18)$$

e

$$h_k = \mathcal{L}(\mathbf{x}_k^\top \boldsymbol{\theta}^* + \eta) \quad (19)$$

onde

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(z) &= \sigma(z)[1 - \sigma(z)] \\ &= \sigma(z)\sigma(-z)\end{aligned}\quad (20)$$

é a função densidade de probabilidade (PDF - *probability density function*) da distribuição logística. Dessa forma, (9) pode ser simplificada a partir de (17) como

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\theta}_{k+1} &\approx \boldsymbol{\theta}_k - \beta \nabla \tilde{\ell}(\boldsymbol{\theta}_k) \\ &= \boldsymbol{\theta}_k - \beta h_k \mathbf{x}_k \mathbf{x}_k^\top (\boldsymbol{\theta}_k - \boldsymbol{\theta}^*) + \beta g_k \mathbf{x}_k.\end{aligned}\quad (21)$$

### 3.3 COMPORTAMENTO MÉDIO DO VETOR DE HABILIDADES

A fim de caracterizar o comportamento médio das habilidades, inicialmente é tomado o valor esperado de ambos os lados de (21) de tal modo que

$$\mathbb{E}[\boldsymbol{\theta}_{k+1}] = \mathbb{E}[\boldsymbol{\theta}_k] - \beta \mathbb{E}[h_k \mathbf{x}_k \mathbf{x}_k^\top \boldsymbol{\theta}_k] + \beta \mathbb{E}[h_k \mathbf{x}_k \mathbf{x}_k^\top] \boldsymbol{\theta}^* + \beta \mathbb{E}[g_k \mathbf{x}_k]. \quad (22)$$

Então, visto que  $\mathbf{x}_k$  é estatisticamente independente<sup>3</sup> de  $\boldsymbol{\theta}_k$ , o segundo e terceiro termos do lado direito de (22) podem ser reescritos como

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[h_k \mathbf{x}_k \mathbf{x}_k^\top \boldsymbol{\theta}_k] &= \mathbb{E}[h_k \mathbf{x}_k \mathbf{x}_k^\top] \mathbb{E}[\boldsymbol{\theta}_k] \\ &= \mathbf{H} \mathbb{E}[\boldsymbol{\theta}_k]\end{aligned}\quad (23)$$

e

$$\mathbb{E}[h_k \mathbf{x}_k \mathbf{x}_k^\top] \boldsymbol{\theta}^* = \mathbf{H} \boldsymbol{\theta}^* \quad (24)$$

onde

$$\mathbf{H} = \text{diag}(\mathbf{H}' \mathbf{1}) - \mathbf{H}' \quad (25)$$

é a matriz de informação de Fisher [37, Sec. 3.7] e os elementos de  $\mathbf{H}'$  são dados por

$$[\mathbf{H}']_{m,n} = \frac{1}{M(M-1)} [\mathcal{L}(\theta_m^* - \theta_n^* + \eta) + \mathcal{L}(\theta_n^* - \theta_m^* + \eta)]. \quad (26)$$

Por sua vez, a partir da Hipótese A2) e devido ao princípio da ortogonalidade [38, Sec. 3.3], o último termo do lado direito de (22) é reduzido a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[g_k \mathbf{x}_k] &= \mathbb{E}_{\mathbf{x}_k, y_k} \{ [y_k - \sigma(\mathbf{x}_k^\top \boldsymbol{\theta}^* + \eta)] \mathbf{x}_k \} \\ &= \mathbb{E}_{\mathbf{x}_k} \{ [\sigma(\mathbf{x}_k^\top \boldsymbol{\theta}^* + \eta) - \sigma(\mathbf{x}_k^\top \boldsymbol{\theta}^* + \eta)] \mathbf{x}_k \} \\ &= \mathbf{0}.\end{aligned}\quad (27)$$

Por fim, substituindo (23), (24), e (27) em (22), tem-se

$$\mathbb{E}[\boldsymbol{\theta}_{k+1}] = \mathbb{E}[\boldsymbol{\theta}_k] - \beta \mathbf{H} (\mathbb{E}[\boldsymbol{\theta}_k] - \boldsymbol{\theta}^*). \quad (28)$$

Dado que (28) depende do conhecimento de  $\boldsymbol{\theta}^*$ , recorre-se à hipótese de ergodicidade para aproximar as estatísticas amostrais de  $\boldsymbol{\theta}^*$  [em (25)] por seus valores esperados (o que é válido apenas para um número grande de jogadores  $M$ ). Assim, utilizando as Hipóteses A1) e A3),  $\mathbf{H}$  pode agora ser substituído pelo seu valor esperado obtido da distribuição de probabilidade de  $\boldsymbol{\theta}^*$ , isto é,

$$\begin{aligned}\mathbf{H} &\approx \mathbb{E}_{\boldsymbol{\theta}^*} [\mathbf{H}] \\ &= \bar{h} \mathbf{R}\end{aligned}\quad (29)$$

com

$$\begin{aligned}\bar{h} &= \mathbb{E}_{\boldsymbol{\theta}^*, \mathbf{x}_k} [\mathcal{L}(\mathbf{x}_k^\top \boldsymbol{\theta}^* + \eta)] \\ &\approx \frac{\sqrt{\pi}}{2} \mathcal{N}(\eta; 0, 2v + 2) \\ &= \frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{v+1}} \exp \left[ \frac{-\eta^2}{4(v+1)} \right]\end{aligned}\quad (30)$$

<sup>3</sup> Note em (21) que  $\boldsymbol{\theta}_{k+1}$  depende de  $\mathbf{x}_k$ , mas não de  $\mathbf{x}_{k+1}$ .

(para mais detalhes, veja o Apêndice A). Em seguida, substituindo (14) e (29) em (28), e lembrando da propriedade do algoritmo de Elo a qual estabelece que a soma das habilidades permanece constante ao longo no tempo [13, Ch. 5], o comportamento médio da habilidade individual de cada time pode ser expresso como

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\theta_{k+1,m}] &\approx \mathbb{E}[\theta_{k,m}] - \frac{2\beta\bar{h}}{M-1} \left( \mathbb{E}[\theta_{k,m}] - \theta_m^* - \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \mathbb{E}[\theta_{k,i} - \theta_i^*] \right) \\ &= \alpha_1 \mathbb{E}[\theta_{k,m}] + (1 - \alpha_1) \theta_m^*\end{aligned}\quad (31)$$

onde

$$\alpha_1 = 1 - \frac{2\beta\bar{h}}{M-1} \quad (32)$$

caracteriza a velocidade de convergência das habilidades no sentido médio.

Portanto, visto que  $\boldsymbol{\theta}_0 = \mathbf{0}$  em (9), (31) pode ser expressa de forma mais compacta como

$$\boxed{\mathbb{E}[\theta_{k,m}] = (1 - \alpha_1^k) \theta_m^*} \quad (33)$$

a qual converge para  $\boldsymbol{\theta}^*$  à medida que  $k$  evolui na direção de  $K$  caso  $|\alpha_1| < 1$ , isto é,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\theta_{k,m}] = \theta_m^*. \quad (34)$$

Note que, a partir de (33), pode-se prever a evolução temporal da habilidade dos diferentes  $M$  times envolvidos em um dado torneio (como mostrado mais adiante no Capítulo 5), convergindo para a “habilidade verdadeira” em uma taxa exponencial (conforme já estabelecido em [32, Theorem 2.2]).

### 3.4 DESVIO QUADRÁTICO MÉDIO DAS HABILIDADES

É importante ainda avaliar a incerteza relacionada à estimativa das habilidades, isto é, as flutuações aleatórias em torno do valor médio. Para isso, recorre-se ao desvio quadrático médio (MSD - *mean-square deviation*) das habilidades, definido como

$$\bar{d}_k = \mathbb{E}[\tilde{\boldsymbol{\theta}}_k^T \tilde{\boldsymbol{\theta}}_k] \quad (35)$$

onde

$$\tilde{\boldsymbol{\theta}}_k = \boldsymbol{\theta}_k - \boldsymbol{\theta}^* \quad (36)$$

representa o vetor de erro de estimação das habilidades. Então, expressando (21) em função de  $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_k$  como

$$\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{k+1} = (\mathbf{I} - \beta h_k \mathbf{x}_k \mathbf{x}_k^T) \tilde{\boldsymbol{\theta}}_k + \beta g_k \mathbf{x}_k \quad (37)$$



determinando o produto interno  $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_k^\top \tilde{\boldsymbol{\theta}}_k$ , notando que  $\mathbf{x}_k^\top \mathbf{x}_k = 2$ , e tomando o valor esperado de ambos os lados da expressão resultante, obtém-se

$$\begin{aligned} \bar{d}_{k+1} &= \bar{d}_k - 2\beta \mathbb{E}[h_k \tilde{\boldsymbol{\theta}}_k^\top \mathbf{x}_k \mathbf{x}_k^\top \tilde{\boldsymbol{\theta}}_k] + 2\beta^2 \mathbb{E}[h_k^2 \tilde{\boldsymbol{\theta}}_k^\top \mathbf{x}_k \mathbf{x}_k^\top \tilde{\boldsymbol{\theta}}_k] \\ &\quad + 2\beta \mathbb{E}[g_k \mathbf{x}_k^\top \tilde{\boldsymbol{\theta}}_k] - 4\beta^2 \mathbb{E}[g_k h_k \mathbf{x}_k^\top \tilde{\boldsymbol{\theta}}_k] + 2\beta^2 \mathbb{E}[g_k^2]. \end{aligned} \quad (38)$$

Agora, utilizando as Hipóteses A1) e A3) da mesma forma que em (29), aproxima-se o segundo e terceiro termos do lado direito de (38) como

$$\mathbb{E}[h_k \tilde{\boldsymbol{\theta}}_k^\top \mathbf{x}_k \mathbf{x}_k^\top \tilde{\boldsymbol{\theta}}_k] \approx \bar{h} \mathbb{E}[\tilde{\boldsymbol{\theta}}_k^\top \mathbf{R} \tilde{\boldsymbol{\theta}}_k] \quad (39)$$

e

$$\mathbb{E}[h_k^2 \tilde{\boldsymbol{\theta}}_k^\top \mathbf{x}_k \mathbf{x}_k^\top \tilde{\boldsymbol{\theta}}_k] \approx \bar{h}^2 \mathbb{E}[\tilde{\boldsymbol{\theta}}_k^\top \mathbf{R} \tilde{\boldsymbol{\theta}}_k] \quad (40)$$

com  $\bar{h}$  definido em (30),

$$\begin{aligned} \bar{h}^2 &= \mathbb{E}_{\boldsymbol{\theta}^*, \mathbf{x}_k}[\mathcal{L}^2(\mathbf{x}_k^\top \boldsymbol{\theta}^* + \eta)] \\ &\approx \frac{\sqrt{2\pi}}{16} \mathcal{N}(\eta; 0, 2v + 1) \\ &= \frac{1}{16} \sqrt{\frac{1}{2v + 1}} \exp\left[\frac{-\eta^2}{2(2v + 1)}\right] \end{aligned} \quad (41)$$

(para mais detalhes, veja o Apêndice A), enquanto

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\tilde{\boldsymbol{\theta}}_k^\top \mathbf{R} \tilde{\boldsymbol{\theta}}_k] &= \frac{2}{M - 1} \mathbb{E}[\tilde{\boldsymbol{\theta}}_k^\top \tilde{\boldsymbol{\theta}}_k] - \frac{2}{M(M - 1)} \mathbb{E}[\tilde{\boldsymbol{\theta}}_k^\top \mathbf{1} \mathbf{1}^\top \tilde{\boldsymbol{\theta}}_k] \\ &= \frac{2}{M - 1} \bar{d}_k \end{aligned} \quad (42)$$

visto que  $\mathbf{1}^\top \tilde{\boldsymbol{\theta}}_k = 0$ . Em seguida, recorrendo à Hipótese A2) e ao princípio da ortogonalidade [38, Sec. 3.3], é possível mostrar que o quarto e quinto termos do lado direito de (38) se reduzem a

$$\mathbb{E}[g_k h_k \mathbf{x}_k^\top \tilde{\boldsymbol{\theta}}_k] = 0 \quad (43)$$

e

$$\mathbb{E}[g_k \mathbf{x}_k^\top \tilde{\boldsymbol{\theta}}_k] = 0. \quad (44)$$

Ainda, o último termo do lado direito de (38) é determinado de (18) usando as Hipóteses A1) e A3) como

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[g_k^2] &= \mathbb{E}_{\boldsymbol{\theta}^*, \mathbf{x}_k, y_k} \{[y_k - \sigma(\mathbf{x}_k^\top \boldsymbol{\theta}^* + \eta)]^2\} \\ &= \mathbb{E}_{\boldsymbol{\theta}^*, \mathbf{x}_k, y_k} [y_k^2 - 2y_k \sigma(\mathbf{x}_k^\top \boldsymbol{\theta}^* + \eta) + \sigma^2(\mathbf{x}_k^\top \boldsymbol{\theta}^* + \eta)] \\ &= \mathbb{E}_{\boldsymbol{\theta}^*, \mathbf{x}_k} \{\sigma(\mathbf{x}_k^\top \boldsymbol{\theta}^* + \eta)[1 - \sigma(\mathbf{x}_k^\top \boldsymbol{\theta}^* + \eta)]\} \\ &= \mathbb{E}_{\boldsymbol{\theta}^*, \mathbf{x}_k} [\mathcal{L}(\mathbf{x}_k^\top \boldsymbol{\theta}^* + \eta)] \\ &= \bar{h}. \end{aligned} \quad (45)$$

Finalmente, substituindo (39)-(45) em (38), obtém-se

$$\bar{d}_{k+1} = \alpha_2 \bar{d}_k + 2\beta^2 \bar{h} \quad (46)$$

onde

$$\alpha_2 = 1 - \frac{4}{M-1} \beta(\bar{h} - \beta \bar{h}^2) \quad (47)$$

caracteriza a velocidade de convergência no sentido quadrático médio. Alternativamente, quando  $|\alpha_2| < 1$ , (46) pode ser reescrita como

$$\boxed{\bar{d}_k = \alpha_2^k (\bar{d}_0 - \bar{d}_\infty) + \bar{d}_\infty} \quad (48)$$

onde

$$\bar{d}_0 = Mv \quad (49)$$

devido à inicialização considerada em (9) e

$$\begin{aligned} \bar{d}_\infty &= \frac{2\beta^2 \bar{h}}{1 - \alpha_2} \\ &= \frac{\beta \bar{h} (M-1)}{2(\bar{h} - \beta \bar{h}^2)} \end{aligned} \quad (50)$$

é derivada de (46) assumindo  $d_\infty = d_{k+1} = d_k$ . Portanto, considerando (48), torna-se possível prever a evolução do MSD (como mostrado mais adiante no Capítulo 5).

### 3.5 VARIÂNCIA DAS HABILIDADES

A fim de se obter um melhor entendimento das estatísticas das habilidades, é utilizada a decomposição em viés-variância (veja [31, Sec. 4.4]) para reescrever o MSD [definido em (35)] como

$$\begin{aligned} \bar{d}_k &= \mathbb{E}[(\tilde{\boldsymbol{\theta}}_k - \mathbb{E}[\tilde{\boldsymbol{\theta}}_k])^\top (\tilde{\boldsymbol{\theta}}_k - \mathbb{E}[\tilde{\boldsymbol{\theta}}_k])] + \mathbb{E}[\tilde{\boldsymbol{\theta}}_k^\top] \mathbb{E}[\tilde{\boldsymbol{\theta}}_k] \\ &= \bar{\omega}_k + \bar{b}_k \end{aligned} \quad (51)$$

onde

$$\bar{b}_k = \alpha_1^{2k} \bar{d}_0 \quad (52)$$

é o viés da estimativa ao quadrado obtido de (33), enquanto

$$\boxed{\bar{\omega}_k = (\alpha_2^k - \alpha_1^{2k}) \bar{d}_0 + (1 - \alpha_2^k) \bar{d}_\infty} \quad (53)$$

é a variância total (isto é, a soma de todas as variâncias) derivada de (48) e (52). Note em (51)-(53) que o compromisso de viés-variância é na verdade função de  $k$ . Em particular, para  $k = 0$ , a variância total é nula (isto é,  $\bar{\omega}_0 = 0$ ) e o viés da estimação ao quadrado está no seu máximo (isto é,  $\bar{b}_0 = \bar{d}_0$ ). Por outro lado, à medida que  $k$  evolui na direção de  $K$ , o viés da estimação tende a zero (isto é,  $\bar{b}_\infty = 0$ ) e a variância total alcança o seu valor máximo (isto é,  $\bar{\omega}_\infty = \bar{d}_\infty$ ).

### 3.6 COMPORTAMENTO MÉDIO DA FUNÇÃO CUSTO

Visto que a função custo é o critério de desempenho utilizado aqui na derivação do algoritmo de Elo, busca-se determinar uma expressão caracterizando o seu comportamento no sentido médio. Assim, substituindo (18) e (19) em (17), tomando o valor esperado de ambos os lados da expressão resultante e usando (44), obtém-se

$$\begin{aligned}\bar{\ell}_k &= \mathbb{E}[\tilde{\ell}_k(\boldsymbol{\theta}_k)] \\ &= \mathbb{E}[\ell_k(\boldsymbol{\theta}^*)] + \frac{1}{2}\mathbb{E}[h_k\tilde{\boldsymbol{\theta}}_k^\top \mathbf{x}_k \mathbf{x}_k^\top \tilde{\boldsymbol{\theta}}_k].\end{aligned}\quad (54)$$

Em seguida, utilizando a hipótese de ergodicidade em conjunto com o desenvolvimento apresentado no Apêndice A, o primeiro termo do lado direito de (54) é determinado utilizando as Hipóteses A1)-A3) como

$$\begin{aligned}\bar{\ell}_{\min} &= \mathbb{E}_{\boldsymbol{\theta}^*, \mathbf{x}_k, y_k}[\ell_k(\boldsymbol{\theta}^*)] \\ &= \mathbb{E}_{\boldsymbol{\theta}^*, \mathbf{x}_k, y_k} \{-y_k \ln[\sigma(\mathbf{x}_k^\top \boldsymbol{\theta}^* + \eta)] - (1 - y_k) \ln[\sigma(-\mathbf{x}_k^\top \boldsymbol{\theta}^* + \eta)]\} \\ &= \mathbb{E}_{\boldsymbol{\theta}^*, \mathbf{x}_k} \{-\sigma(\mathbf{x}_k^\top \boldsymbol{\theta}^* + \eta) \ln[\sigma(\mathbf{x}_k^\top \boldsymbol{\theta}^* + \eta)] - \sigma(-\mathbf{x}_k^\top \boldsymbol{\theta}^* + \eta) \ln[\sigma(-\mathbf{x}_k^\top \boldsymbol{\theta}^* + \eta)]\} \\ &\approx 2 \ln(2) \sqrt{2 \ln(2) \pi} \mathcal{N}(\eta; 0, 2v + 4 \ln(2)) \\ &= \ln(2) \sqrt{\frac{2 \ln(2)}{v + 2 \ln(2)}} \exp \left[ \frac{-\eta^2}{4v + 8 \ln(2)} \right]\end{aligned}\quad (55)$$

representando o limite inferior atingível da função custo. Por sua vez, o segundo termo do lado direito de (54) pode ser obtido de (39) e (42) como

$$\begin{aligned}\bar{\ell}_{\text{ex},k} &\approx \frac{\bar{h}}{2} \mathbb{E}[\tilde{\boldsymbol{\theta}}_k^\top \mathbf{R} \tilde{\boldsymbol{\theta}}_k] \\ &= \frac{\bar{h}}{M-1} \bar{d}_k\end{aligned}\quad (56)$$

caracterizando o custo em excesso introduzido pelo algoritmo de otimização (gradiente estocástico), o qual é uma função linear de  $\bar{d}_k$ . Portanto, a partir de (55) e (56), a evolução da função custo pode ser predita através de

$$\boxed{\bar{\ell}_k \approx \bar{\ell}_{\min} + \bar{\ell}_{\text{ex},k}}\quad (57)$$

(como mostrado mais adiante no Capítulo 5).

### 3.7 CONCLUSÕES

Neste capítulo, foram derivadas expressões analíticas caracterizando o comportamento do algoritmo de Elo, considerando um número reduzido de hipóteses simplificativas; especificamente, foi assumido que o vetor de agendamento tem distribuição uniforme, que

o modelo de Bradley-Terry descreve adequadamente o problema, e que o vetor de habilidades “verdadeiro” possui distribuição gaussiana. A partir disso, expressões caracterizando o comportamento/evolução do vetor de habilidades, o desvio quadrático médio das habilidades, a variância das habilidades e a função custo foram obtidas. Baseado em tais expressões, alguns *insights* a respeito do algoritmo de Elo podem ser estabelecidos. Vale destacar que a metodologia desenvolvida aqui pode ser diretamente aplicada a outras extensões ou variantes do algoritmo de Elo, levando-se em conta as especificidades do algoritmo considerado.

# Capítulo 4

## Discussão

Baseado nas expressões do modelo proposto desenvolvidas até agora (conforme mostrado no Capítulo 3), são discutidos a seguir alguns *insights* sobre o comportamento do algoritmo de *rating* (com respeito ao número de jogos  $k$ , à variância  $v$ , ao parâmetro de vantagem  $\eta$  e ao valor do passo de adaptação  $\beta$ ), visando estabelecer algumas diretrizes úteis de projeto.

### 4.1 CONSTANTES DE TEMPO

Visando uma interpretação mais intuitiva de convergência, o conceito de constante de tempo, associado aos termos exponenciais observados em (33) e (48), pode ser usado para reescrever o termo exponencial de base  $\alpha_1$  em (33) da seguinte forma:

$$\alpha_1^k = e^{-\frac{k}{\tau_1}}. \quad (58)$$

Logo, a convergência das habilidades  $\theta_k$  no sentido médio pode ser caracterizada pela constante de tempo  $\tau_1 = -[\ln(\alpha_1)]^{-1} \approx (1 - \alpha_1)^{-1}$ . Assim, de (32), tem-se

$$\tau_1 \approx \frac{M - 1}{2\beta\bar{h}}. \quad (59)$$

Similarmente, a constante de tempo  $\tau_2 = -[\ln(\alpha_2)]^{-1} \approx (1 - \alpha_2)^{-1}$  associada à convergência no sentido médio quadrático [veja (48)] pode ser determinada por

$$\tau_2 \approx \frac{M - 1}{4\beta(\bar{h} - \beta\bar{h}^2)}. \quad (60)$$

Vale destacar que as aproximações utilizadas em (59) e (60) são válidas para valores de  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  próximos de 1.

A Figura 1 mostra as constantes de tempo  $\tau_1$  [dada por (59)] e  $\tau_2$  [dada por (60)] referentes à velocidade de convergência do algoritmo de *rating* nos sentidos médio e quadrático médio, respectivamente, como funções do valor do passo de adaptação  $\beta$ ,

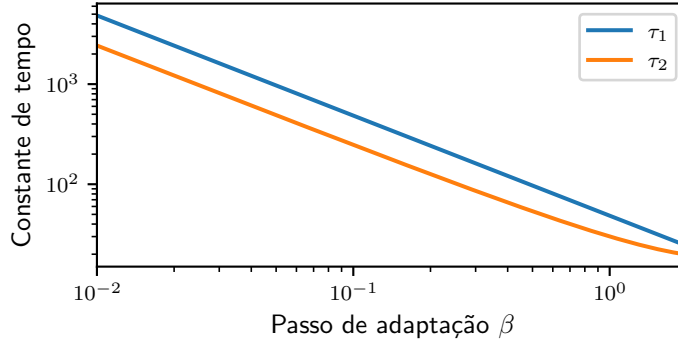


Figura 1 – Constantes de tempo relacionadas à convergência do algoritmo de *rating* nos sentidos médio  $\tau_1$  [dado por (59)] e quadrático médio  $\tau_2$  [dado por (60)] como função de  $\beta$ , considerando  $M = 15$ ,  $v = 3$  e  $\eta = 0$ .

considerando  $M = 15$ ,  $v = 3$  e  $\eta = 0$ . (Outros valores de  $v$  não são considerados, visto que seu impacto em  $\tau_1$  e  $\tau_2$  não é significativo.) Observe que essas constantes de tempo são inversamente proporcionais ao valor do passo de adaptação; consequentemente, a velocidade de convergência do algoritmo se torna mais lenta conforme  $\beta$  é reduzido e vice-versa. Também, verifica-se que o algoritmo apresenta diferentes requisitos para a convergência em termos de  $\tau_1$  (associado à estimativa das habilidades  $\theta_k$ ) e  $\tau_2$  (relacionado à incerteza na estimativa das habilidades  $\bar{d}_k$ ); especificamente,  $\bar{d}_k$  decai mais rapidamente do que  $\theta_k$ , melhorando para  $\beta$  pequeno, isto é,  $\tau_1 \approx 2\tau_2$  visto que o termo  $\beta\bar{h}^2$  em (60) pode ser ignorado. Ainda, além dos aspectos mencionados, a Figura 1 dá uma ideia de que (59) e (60) podem ser úteis na escolha de  $\beta$ , de forma que o algoritmo alcance a convergência dentro de um número pré-estabelecido de jogos.

## 4.2 SOBRE O SIGNIFICADO DE “CONVERGÊNCIA”

Agora, busca-se diferenciar o conceito de convergência entendido como uma condição matemática, garantindo que  $\theta_k$  tenda a  $\theta^*$  conforme  $k$  evolui na direção de  $K$ , e aquele utilizado coloquialmente na literatura de *rating*, no qual se assume vagamente que a convergência ao ótimo é atingida após um número arbitrário e pré-definido de jogos<sup>4</sup> (como apontado criticamente em [39, Sec. 3] e usado em aplicações práticas [18], [40]). No entanto, esse significado coloquial de convergência não se sustenta, visto que a convergência não pode ser caracterizada de forma determinística; em outras palavras, não se pode estabelecer quaisquer garantias determinísticas de obtenção do ótimo dentro de um número de jogos finito  $k$ . Consequentemente, discussões sobre a convergência do algoritmo de *rating* só podem ser realizadas no sentido assintótico ou probabilístico por meio de conceitos heurísticos, tais como:

- o erro de aproximação  $|\mathbb{E}[\theta_{k,m}] - \theta_m^*|$  se torna pequeno o suficiente quando

<sup>4</sup> Vale salientar que o número de jogos é comumente contado por time; logo, para fins de comparação, é importante usar  $2k/M$  como o número de jogos em vez de  $k$ .

comparado ao inicial  $|\theta_{0,m} - \theta_m^*|$ , o que define a convergência no sentido médio; ou

- $\bar{d}_k$  (ou, similarmente,  $\bar{\ell}_k$ ) é suficientemente pequeno quando comparado a  $\bar{d}_0$  (ou, similarmente,  $\bar{\ell}_0$ ), o que define a convergência no sentido quadrático médio.

O valor “suficientemente pequeno” pode ser pré-definido especificando o número de jogos para alcançar convergência  $K_C$  como um múltiplo das constantes de tempo  $\tau_1$  ou  $\tau_2$ . Por exemplo, para  $K_C = 3\tau_1$ , a curva exponencial (58) decai 95% do seu valor inicial, tornando-se achatada o suficiente para declarar convergência por meio de observação. Como resultado, para  $k > K_C$ , o erro de aproximação  $|\mathbb{E}[\theta_{k,m}] - \theta_m^*|$  se torna menor do que 5% do valor inicial  $|\theta_{0,m} - \theta_m^*|$ ; além disso, visto que  $\tau_1 \approx 2\tau_2$  para  $\beta$  suficientemente pequeno, a convergência no sentido médio implica que  $\bar{d}_k$  é praticamente igual ao seu valor final  $\bar{d}_\infty$ . Diante do exposto,  $\tau_1$  e  $\tau_2$  podem assim auxiliar no ajuste do valor do passo de adaptação  $\beta$  para que o algoritmo alcance a convergência dentro de um dado número de jogos  $k$  (ao contrário do comumente considerado).

### 4.3 CONSIDERAÇÕES SOBRE O CUSTO MÉDIO

Baseando-se em (57), é possível verificar que o custo médio  $\bar{\ell}_k$  alcançado pelo algoritmo é composto pela soma de dois termos (não-negativos), isto é,  $\bar{\ell}_{\min}$  [dado por (55)] e  $\bar{\ell}_{\text{ex},k}$  [dado por (56)], os quais dependem da variância  $v$ , parâmetro de vantagem  $\eta$ , número de times  $M$ , número de jogos  $k$  e valor do passo de adaptação  $\beta$ . Em particular,  $\bar{\ell}_{\min}$  só depende da aplicação (ou cenário de operação) considerada (em especial, através de  $v$  e  $\eta$ ), não sendo afetado pelo valor do passo de adaptação  $\beta$ , número de times  $M$  ou o de jogos  $K$ . Por outro lado,  $\beta$  e  $k$  desempenham papéis importantes no custo médio em excesso  $\bar{\ell}_{\text{ex},k}$ , aumentando de certa forma o valor do custo médio  $\bar{\ell}_k$  obtido pelo algoritmo de *rating*. Diante disso, alguns outros detalhes sobre a contribuição de  $\bar{\ell}_{\min}$  e  $\bar{\ell}_{\text{ex},k}$  para  $\bar{\ell}_k$  são discutidos a seguir, tendo em vista o ilustrado nas Figuras 2 e 3.

A Figura 2 mostra o limite inferior do custo  $\bar{\ell}_{\min}$  [dado por (55)] como uma função da variância  $v$ , para diferentes valores de  $\eta$  com  $M = 15$ . Tal figura enfatiza que o desempenho do algoritmo se degrada à medida que  $v$  diminui devido à alta incerteza dos resultados, levando a valores maiores de  $\bar{\ell}_{\min}$ . Por outro lado, quando  $v$  aumenta, as diferenças entre as habilidades dos jogadores podem ser maiores, tornando mais fácil a predição do resultado de disputas entre esses jogadores; logo,  $\bar{\ell}_{\min}$  é menor. Observa-se também que o impacto do parâmetro de vantagem  $\eta$  em  $\bar{\ell}_{\min}$  é menos significativo conforme  $v$  aumenta, corroborando o argumento que  $\eta$  pode ser ignorado em (55) quando as diferenças entre habilidades são grandes. Ainda, visando caracterizar o significado de variância  $v$  pequena ou grande (alta ou baixa incerteza, respectivamente), aproxima-se as curvas na Figura 2 usando duas assíntotas, sendo uma delas válida para  $v \rightarrow 0$  e a outra para  $v \rightarrow \infty$ . Dessa forma, pode-se estabelecer um limiar  $v_{\text{th}}$  a partir da interseção entre

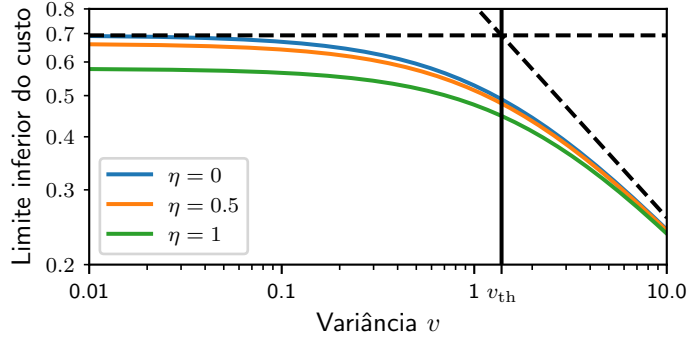


Figura 2 – Limite inferior do custo  $\bar{\ell}_{\min}$  [dado por (55)] como função da variância  $v$ , considerando diferentes valores de  $\eta$  e  $M = 15$ . (As assíntotas são representadas aqui por linhas escuras tracejadas.)

as duas assíntotas [oriundas de (55)], isto é,

$$\bar{\ell}_{\min}\Big|_{v=0} = \bar{\ell}_{\min}\Big|_{v \gg 2 \ln(2)} \quad (61)$$

o que resulta em

$$\begin{aligned} v_{\text{th}} &= 2 \ln(2) \\ &\approx 1.4 \end{aligned} \quad (62)$$

estabelecendo-se assim um limiar que separa as regiões de alta e baixa incerteza (valor pequeno ou grande de  $v$ , respectivamente).

A Figura 3 mostra o custo médio em excesso  $\bar{\ell}_{\text{ex},k}$  [dado por (56)] como função de  $\beta$ , considerando diferentes números de jogos  $k$  enquanto  $\eta = 0$ ,  $v = 3$ , e  $M = 15$ . Essa figura confirma o impacto de  $\beta$  e  $k$  no custo em excesso resultante do uso do algoritmo de *rating*. Especificamente, para um grande número de jogos ( $k \rightarrow \infty$ ), o custo em excesso exibe uma característica de crescimento monotônico com respeito a  $\beta$ , isto é,  $\beta$  grande produz valores altos de  $\bar{\ell}_{\text{ex},k}$ . Por outro lado, para  $k$  finito (e.g., 50, 100 ou 200 jogos), uma característica “aproximadamente” convexa é observada no custo em excesso médio<sup>5</sup> devido à relação de compromisso de viés-variância (veja Seção 3.5); logo, existe um valor de passo ótimo  $\beta_{\text{o},k}$  que leva ao mínimo valor atingível de  $\bar{\ell}_{\text{ex},k}$  para um dado número de jogos  $k$  (como discutido adiante na Seção 4.5). Tal característica se dá pelo fato de que o algoritmo de *rating* não é capaz de convergir dentro de  $k$  jogos para valores pequenos de  $\beta$ ; por consequência,  $\bar{\ell}_{\text{ex},k}$  pode ser maior do que o obtido com valores intermediários de  $\beta$ . Portanto, como  $k$  é geralmente finito, torna-se importante a escolha de um valor apropriado para  $\beta$ .

<sup>5</sup> Por consequência,  $\bar{\ell}_k$  [dado por (57)] também exibe a mesma característica “aproximadamente” convexa.



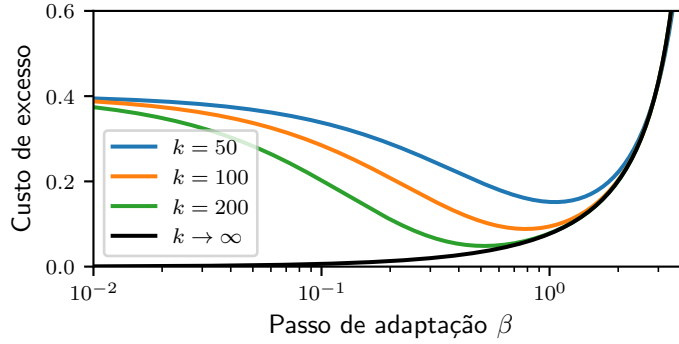


Figura 3 – Custo médio em excesso [dado por (56)] como função do passo de adaptação  $\beta$ , considerando diferentes números de jogos  $k$  enquanto  $\eta = 0$ ,  $v = 3$  e  $M = 15$ .

#### 4.4 MELHORIA DE DESEMPENHO SOBRE A INICIALIZAÇÃO

Uma condição para o passo de adaptação  $\beta$  é agora derivada visando garantir que a incerteza sobre as habilidades estimadas  $\theta_k$  (caracterizada por  $\bar{d}_k$ ) seja reduzida em relação ao seu valor inicial à medida que  $k$  evolui, isto é,

$$\bar{d}_k < \bar{d}_0. \quad (63)$$

Nesse sentido, substituindo (48) em (63), obtém-se

$$(1 - \alpha_2^k)(\bar{d}_0 - \bar{d}_\infty) > 0. \quad (64)$$

Então, já que  $|\alpha_2| < 1$  implica que  $(1 - \alpha_2^k)$  seja positivo, reduz-se (64) a<sup>6</sup>

$$\bar{d}_\infty < \bar{d}_0. \quad (65)$$

Em seguida, usando (49) e (50) em (65), tem-se

$$\frac{\beta \bar{h}(M-1)}{2(\bar{h} - \beta \bar{h}^2)} < Mv \quad (66)$$

e resolvendo a expressão resultante para  $\beta$ , é possível mostrar que

$$0 < \beta < \left[ \frac{(1 - 1/M)}{2v} + \frac{\bar{h}^2}{\bar{h}} \right]^{-1}. \quad (67)$$

Note ainda que, para  $M$  grande, (67) pode ser aproximada assintoticamente por

$$0 < \beta < \left( \frac{1}{2v} + \frac{\bar{h}^2}{\bar{h}} \right)^{-1} \quad (68)$$

<sup>6</sup> Note que (65) pode ser reinterpretada em termos do compromisso de viés-variância como  $\bar{w}_\infty < \bar{b}_0$ ; logo, uma melhoria ocorre quando a variância máxima  $\bar{w}_\infty$  é menor do que o viés inicial ao quadrado  $\bar{b}_0$ .

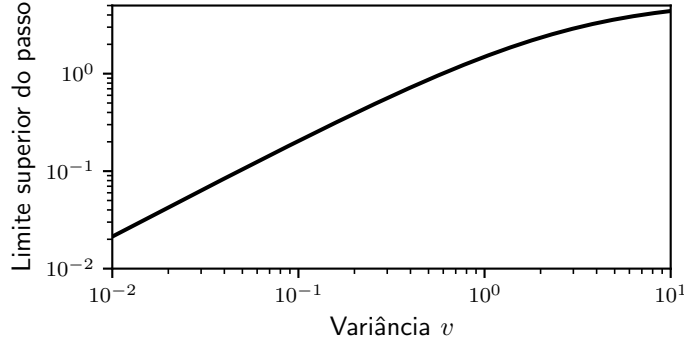


Figura 4 – Condição de  $\beta$  para melhoria sobre a inicialização [dado por (67)] como função de  $v$ , considerando  $M = 15$  e  $\eta = 0$ .

e, dado que  $\overline{h^2}/\overline{h}$  é limitado a  $[\sqrt{2}/8, 1/4]$  tal que pode ser ignorado para  $v$  pequeno, tem-se<sup>7</sup>

$$0 < \beta < 2v. \quad (69)$$

A Figura 4 mostra o limite superior para o passo de adaptação  $\beta$  dado em (67) como função de  $v$ , considerando  $M = 15$  e  $\eta = 0$ . Outros valores de  $M$  e  $\eta$  não foram utilizados já que não afetam (67) significativamente. Note que o limite superior de  $\beta$  é menor à medida que  $v$  diminui, exibindo uma característica quase linear em  $v$ ; por isso, (69) é válida como uma “regra prática”. Ainda assim, enfatiza-se que tal limite pode ser muito relaxado e apenas garante uma melhoria em relação à inicialização; portanto, na prática, pode ser preferível escolher um valor de  $\beta$  menor [do que (69)] sobretudo quando o número de jogos  $k$  é limitado.

#### 4.5 DETERMINAÇÃO DO PASSO DE ADAPTAÇÃO ÓTIMO

Um valor ótimo para o passo de adaptação  $\beta$ , considerando um número específico de jogos  $k$ , pode ser determinado a fim de minimizar (48) [ou, similarmente, o custo médio (57)]; especificamente, isso se resume em encontrar uma solução para o seguinte problema de otimização:

$$\beta_{o,k} = \operatorname{argmin}_{\beta} \overline{d}_k. \quad (70)$$

Como uma solução fechada para (70) não pode ser diretamente obtida para um  $k$  arbitrário, recorre-se a algumas aproximações (como mostrado no Apêndice B) para se derivar

$$\beta_{o,k} \approx \frac{1}{2} \left[ \frac{(1 - 1/M)}{2v} + \frac{\overline{h^2}}{\overline{h}} + \frac{2\overline{h^2}(k - 1)}{M - 1} \right]^{-1}. \quad (71)$$

<sup>7</sup> Na prática,  $\beta$  é tipicamente escolhido menor do que dado em (69). Por exemplo, a FIFA [20] usa  $\beta \in [0.003, 0.04]$  em aplicações envolvendo futebol e a FIDE [18] considera  $\beta \in [0.01, 0.04]$  em aplicações envolvendo xadrez. Vale mencionar que esses valores foram obtidos escalando o tamanho do passo  $\beta'$  fornecido pela FIFA ou pela FIDE através de  $\beta = \beta'/s'$ , com  $s'$  definido em (6).

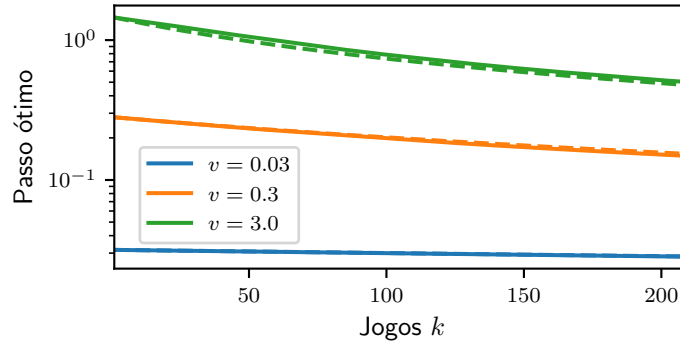


Figura 5 – Passo de adaptação ótimo  $\beta_{o,k}$  obtido da solução numérica de (70) (linhas sólidas) e da solução aproximada (71) (linhas tracejadas) como função do número de jogos  $k$ , considerando diferentes valores de  $v$  enquanto  $M = 15$  e  $\eta = 0$ . Curvas para outros valores de  $\eta$  são omitidas já que tal variável não afeta (71) significativamente.

Note que  $\beta_{o,k}$  obedece à condição de melhoria de desempenho sobre a inicialização, visto que o valor de  $\beta_{o,0}$  é a metade do limite superior da condição e  $\beta_{o,k+1} \leq \beta_{o,k}$ .

A Figura 5 mostra o valor ótimo do passo de adaptação  $\beta_{o,k}$  considerando tanto a solução numérica de (70) quanto a solução aproximada (71) como função do número de jogos  $k$ , para diferentes valores de  $v$  enquanto  $M = 15$  e  $\eta = 0$ . Observe a partir dessa figura que:

- os resultados calculados de (71) condizem muito bem com aqueles determinados a partir da solução numérica de (70) independentemente de  $v$  e  $k$ , confirmando assim a aplicabilidade da solução derivada aproximada;
- o impacto de  $v$  sobre o valor do passo de adaptação ótimo é mais significativo do que o número de jogos  $k$ ; em particular, para  $v$  muito pequeno,  $k$  pode ser desprezado e pode-se usar  $\beta_{o,k} \approx v$ ;
- o passo de adaptação ótimo  $\beta_{o,k}$  exibe uma característica decrescente (à medida que  $v$  aumenta) em relação ao número de jogos  $k$ , isto é, valores de  $\beta$  maiores são requeridos para melhorar a convergência do algoritmo de *rating* quando  $k$  é pequeno.

Portanto, a partir de (71) e das observações estabelecidas, o passo de adaptação  $\beta$  do algoritmo de *rating* pode ser apropriadamente ajustado.

## 4.6 CONCLUSÕES

Neste capítulo, discussões interessantes sobre o impacto dos parâmetros do algoritmo de Elo em seu desempenho foram apresentadas, resultando no estabelecimento de importantes diretrizes de projeto. Especificamente, algumas considerações sobre as características de convergência do algoritmo foram primeiramente apresentadas, visando estabelecer um paralelo entre o valor do passo de adaptação e o número de jogos neces-

sários para atingir a convergência. Em seguida, foi tratado sobre o impacto do passo de adaptação no desempenho do algoritmo em regime permanente, enfatizando a existência de um valor ótimo para tal hiperparâmetro dependendo do número de jogos. Por fim, uma expressão aproximada para determinar o passo de adaptação ótimo em função do número de jogos foi apresentada.

## Capítulo 5

# Resultados experimentais

Visando avaliar a precisão das expressões derivadas bem como verificar alguns dos *insights* discutidos até então, resultados produzidos pelo algoritmo de *rating* [dado em (9)] são comparados ao comportamento descrito através do modelo proposto<sup>8</sup>; em outras palavras, o objetivo aqui é verificar se a análise realizada caracteriza bem o comportamento do algoritmo de *rating* para um cenário de operação conhecido, confirmando assim os *insights* discutidos. Para tal, dados reais da Liga Italiana de Voleibol Masculino (SuperLega) são utilizados, abrangendo 10 temporadas (de 2009/10 até 2018/19), disponíveis no site de resultados esportivos *FlashScore* [41]. Em particular, somente jogos regulares da temporada são considerados, ignorando as eliminatórias que ocorrem ao final de cada temporada; com isso, garante-se que todos os times disputem entre si a mesma quantidade de partidas, o que torna apropriado modelar os agendamentos como uniformes.

Por sua vez, o parâmetro de vantagem  $\eta$  (usado no algoritmo de *rating*) e a variância das habilidades  $v$  (necessária para o modelo estocástico) são assumidos conhecidos *a priori* em cada temporada, de modo que se pode calcular adequadamente  $\bar{h}$  [veja (30)],  $\overline{h^2}$  [veja (41)] e  $\bar{\ell}_{\min}$  [veja (55)]. Particularmente,  $\eta$  é tratado como um parâmetro em conjunto com  $\theta$  em (7) e, portanto, ambos são estimados (a partir dos dados de cada temporada da SuperLega) usando uma abordagem popular de aprendizado de máquina [42] obtendo-se assim  $\hat{\eta}$  e  $\hat{\theta}$ ; a partir disso, determina-se  $\hat{v}$  diretamente da variância amostral (não-enviesada) de  $\hat{\theta}$ , já que o agendamento é uniforme<sup>9</sup>. Vale mencionar que o método de otimização do gradiente estocástico é usado aqui, com um passo de adaptação muito pequeno e uma grande quantidade de iterações, de forma que a incerteza (flutuações aleatórias) ao redor de  $\theta_k$  se torna insignificante.

Um resumo dos dados da SuperLega é apresentado na Tabela 1, destacando o número de times  $M$  e jogos  $K$ , assim como os valores estimados do parâmetro de vantagem  $\eta$  e a variância das habilidades  $v$ . Observe que  $M$  é variável (em um intervalo de 12 a

<sup>8</sup> O código utilizado nos experimentos está disponível em <https://github.com/dangpzanco/elo-rating>.

<sup>9</sup> Em um cenário mais genérico, é mais apropriado estimar  $v$  como metade da variância amostral de  $z_k^*$ .

Tabela 1 – Resumo do conjunto de dados da SuperLiga

Temporada	$M$	$K$	$\hat{\eta}$	$\hat{v}$
2009	15	210	0.662625	2.738321
2010	14	182	0.321430	1.576293
2011	14	182	0.348231	1.222075
2012	12	132	0.402100	1.916473
2013	12	132	0.551887	1.307860
2014	13	156	0.469551	2.932582
2015	12	132	0.055876	2.364083
2016	14	182	0.771591	2.373615
2017	14	182	0.223695	3.023535
2018	14	182	0.485662	3.683417

15 times); como consequência,  $K$  muda (de 132 a 210 jogos) dependendo da temporada considerada. Ainda, verifica-se que os valores estimados de  $\eta$  e  $v$  não se alteram significativamente; na prática, esses valores poderiam ser estimados a partir dos resultados das competições anteriores.

### 5.1 EXEMPLO 1

Este exemplo visa i) avaliar a capacidade do modelo proposto de caracterizar o comportamento do algoritmo de *rating*; e ii) mostrar como  $\beta$  afeta o MSD das habilidades (48) e o custo médio (57). Para isso, são utilizados diferentes valores de passo de adaptação, a saber:  $\beta = 0.03$  (dentro do intervalo utilizado por [18], [20]),  $\beta = 0.87$  [obtido da média, sobre as temporadas, do passo de adaptação ótimo (71) para  $k = K/4$ ] e  $\beta = 2.49$  [determinado pela média, sobre as temporadas, da condição de “melhoria sobre a inicialização” (67)]. Note que o algoritmo de *rating* é usado para cada temporada e o seu comportamento médio é computado (sobre as temporadas) limitando o número de jogos ao da temporada mais curta (isto é,  $K = 132$ ).

A Figura 6 apresenta a evolução do MSD das habilidades e do custo médio, considerando  $\beta = 0.03$  [Figuras 6(a) e (b)],  $\beta = 0.87$  [Figuras 6(c) e (d)] e  $\beta = 2.49$  [Figuras 6(e) e (f)]. Observe a partir dessas figuras que o modelo proposto descreve muito bem o comportamento do algoritmo de *rating* tanto na fase transitória quanto em regime permanente, independente do valor de  $\beta$  considerado. Além desse aspecto, a partir das Figuras 6(a) e (b), verifica-se que o algoritmo de *rating* não é capaz de alcançar convergência até o final da temporada para valores pequenos de  $\beta$  (como os valores sugeridos por [18], [20]). Por sua vez, quando  $\beta$  é ajustado para o valor ótimo [dado por (71)] assumindo  $k$  igual a um quarto da temporada (isto é,  $k = K/4$  jogos), constata-se que a velocidade de convergência do algoritmo de *rating* é melhorada significativamente [como mostrado nas Figuras 6(c) e (d)]; nessa situação, a solução ótima é alcançada pelo algoritmo no

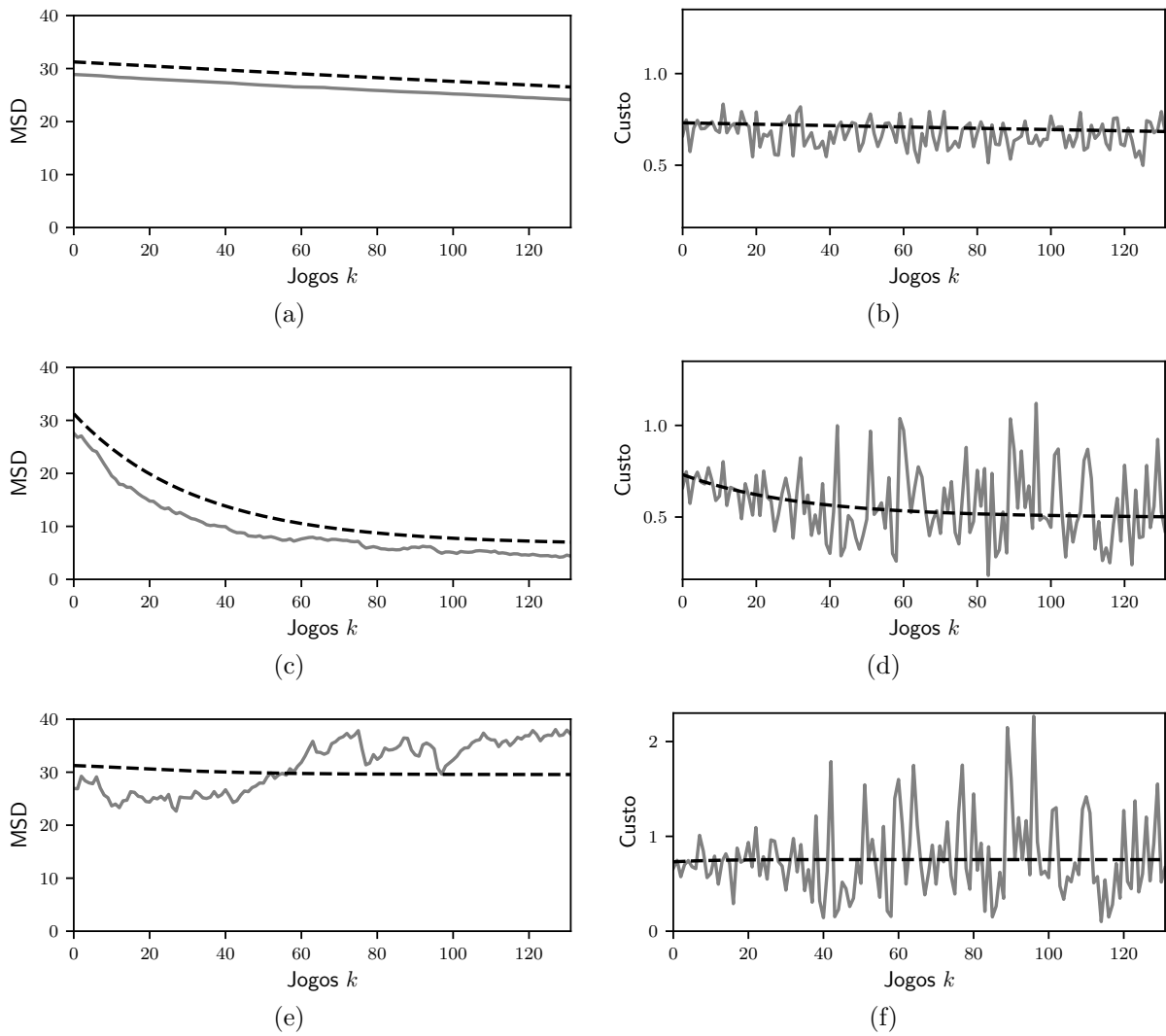


Figura 6 – Exemplo 1. Evolução do MSD das habilidades (esquerda) e custo médio (direita). Resultados de simulação (linhas sólidas cinzas) e modelo proposto (linhas tracejadas escuras). (a) e (b)  $\beta = 0.03$ . (c) e (d)  $\beta = 0.87$ . (e) e (f)  $\beta = 2.49$ .

decorrer de  $K$  jogos. Por fim, ao se aumentar o valor de  $\beta$  para a condição denominada aqui como “melhoria sobre a inicialização” [definida por (67)], pouca ou nenhuma melhoria efetiva é percebida no decorrer da temporada [como mostrado nas Figuras 6(e) e (f)]. Portanto, verifica-se que a convergência do algoritmo de *rating* é afetada pela escolha de  $\beta$ , confirmando a relevância do uso de (71).

## 5.2 EXEMPLO 2

Neste exemplo, os principais objetivos são i) avaliar a precisão das expressões propostas do modelo derivadas caracterizando o MSD (48) e o custo médio (57) quando  $k$  chega ao final da temporada; ii) investigar o impacto de  $\beta$  no MSD e no custo; e iii) verificar a aplicabilidade prática das diretrizes de projeto fornecidas quanto à escolha de

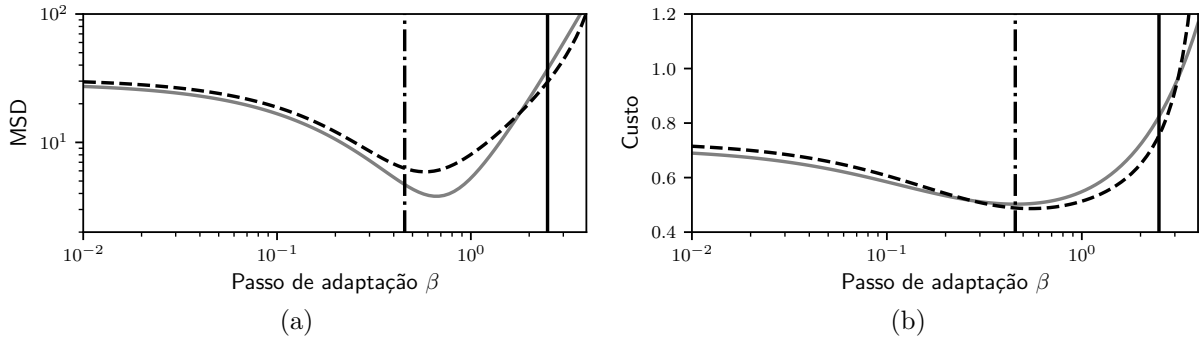


Figura 7 – Exemplo 2. Curvas de (a) MSD e (b) custo médio alcançado pelo algoritmo de *rating* à medida que  $k$  se aproxima de  $K$ , como funções de  $\beta$ . Resultados de simulação (linhas sólidas cinzas), modelo proposto (linhas tracejadas escuras), limite superior da condição de “melhoria sobre a inicialização” (67) (linhas verticais sólidas escuras) e passo de adaptação ótimo (70) assumindo  $k = K$  (linhas verticais tracejadas-pontilhadas escuras).

$\beta$  (conforme discutido no Capítulo 4). Para tal, considera-se diferentes valores para o passo de adaptação, isto é,  $\beta \in (0.01, 4)$ . Vale salientar que, assim como no Exemplo 1, o número de jogos é limitado ao da temporada mais curta. Ainda, o comportamento médio do algoritmo de *rating* é computado (sobre as temporadas) a partir da média das últimas 10 amostras da variável de interesse a fim de proporcionar uma melhor visualização dos resultados experimentais.

A Figura 7 ilustra os resultados obtidos para o MSD [Figura 7(a)] e o custo médio [Figura 7(b)] como funções de  $\beta$ . Com base nessa figura, pode-se extrair as seguintes observações:

- o modelo proposto descreve muito bem o comportamento do algoritmo de *rating* (ao se aproximar do final da temporada) em uma ampla faixa de valores de passo de adaptação  $\beta$ ;
- valores  $\beta$  que excedem o limiar de “melhoria sobre a inicialização” [dado por (67)] implicam uma incerteza muito alta sobre as habilidades e previsões (MSD e função custo, respectivamente) e, por isso, não devem ser utilizados na prática;
- o ajuste de  $\beta$  de acordo com valor ótimo [dado por (71)] permite ao algoritmo de *rating* alcançar um MSD e custo muito próximos aos seus mínimos frente a um certo número de jogos  $k$ .

Portanto, as diretrizes de projeto fornecidas (no Capítulo 4) são válidas também para dados experimentais e devem ser levadas em consideração na prática.

### 5.3 EXEMPLO 3

Aqui, busca-se mostrar que o modelo estocástico proposto caracteriza satisfatoriamente a evolução da estimativa  $\theta_k$  [via (33)] e do MSD das habilidades [dado em



(48)]. Além disso, pretende-se verificar o impacto dos dados de diferentes temporadas na capacidade do modelo proposto de descrever o comportamento do algoritmo de *rating*. Especificamente, o algoritmo é avaliado utilizando dados das temporadas de 2009/10, 2010/11, 2015/16 e 2018/2019. O passo ótimo é calculado [de (71)] para cada temporada, assumindo  $k = K/4$ . Note que, em vez de analisar uma média sobre as temporadas, são comparados os resultados de uma única aplicação do algoritmo (isto é, uma realização de um processo aleatório) com o comportamento médio descrito pelo modelo.

A Figura 8 apresenta a evolução das habilidades (para quatro times selecionados) e as correspondentes curvas de MSD, obtidas a partir do algoritmo de *rating* e do modelo proposto. Especificamente, são mostrados os resultados para as temporadas 2009/10 [Figuras 8(a) e (b)], 2015/16 [Figuras 8(c) e (d)], 2017/18 [Figuras 8(e) e (f)] e 2018/19 [Figuras 8(f) e (g)]. Observe que a evolução das habilidades obtida pela utilização do algoritmo possui uma característica constante por partes devido à realização específica do agendamento, ou seja, as habilidades permanecem constantes quando o time não está jogando. Ainda, verifica-se que o modelo caracteriza muito bem a evolução do vetor de habilidades assim como o MSD obtido pelo algoritmo de *rating*, independente da temporada considerada. Portanto, conclui-se que o modelo proposto caracteriza satisfatoriamente o comportamento do algoritmo de *rating*, o que ratifica a sua aplicabilidade para suportar as diretrizes de projeto estabelecidas aqui (veja o Capítulo 4).

## 5.4 CONCLUSÕES

Neste capítulo, foram apresentados resultados de simulação, visando verificar a precisão das expressões analíticas obtidas que caracterizam o comportamento do algoritmo de Elo, assim como atestar a aplicabilidade prática das diretrizes de projeto estabelecidas. Os resultados obtidos por meio de simulações numéricas foram comparados com o comportamento descrito pelas expressões analíticas desenvolvidas. Como se pôde verificar a partir dos resultados de simulação, a análise estocástica apresentada caracteriza muito bem o algoritmo de Elo, tanto durante a fase transitória quanto em regime permanente, para diferentes valores de passo de adaptação, assim como frente a dados reais obtidos da SuperLiga. Além disso, os resultados apresentados confirmaram a aplicabilidade das expressões propostas para o ajuste do passo de adaptação (ótimo) do algoritmo. Vale salientar que a precisão observada se deve à forma como valores esperados importantes foram computados durante a derivação das expressões analíticas.

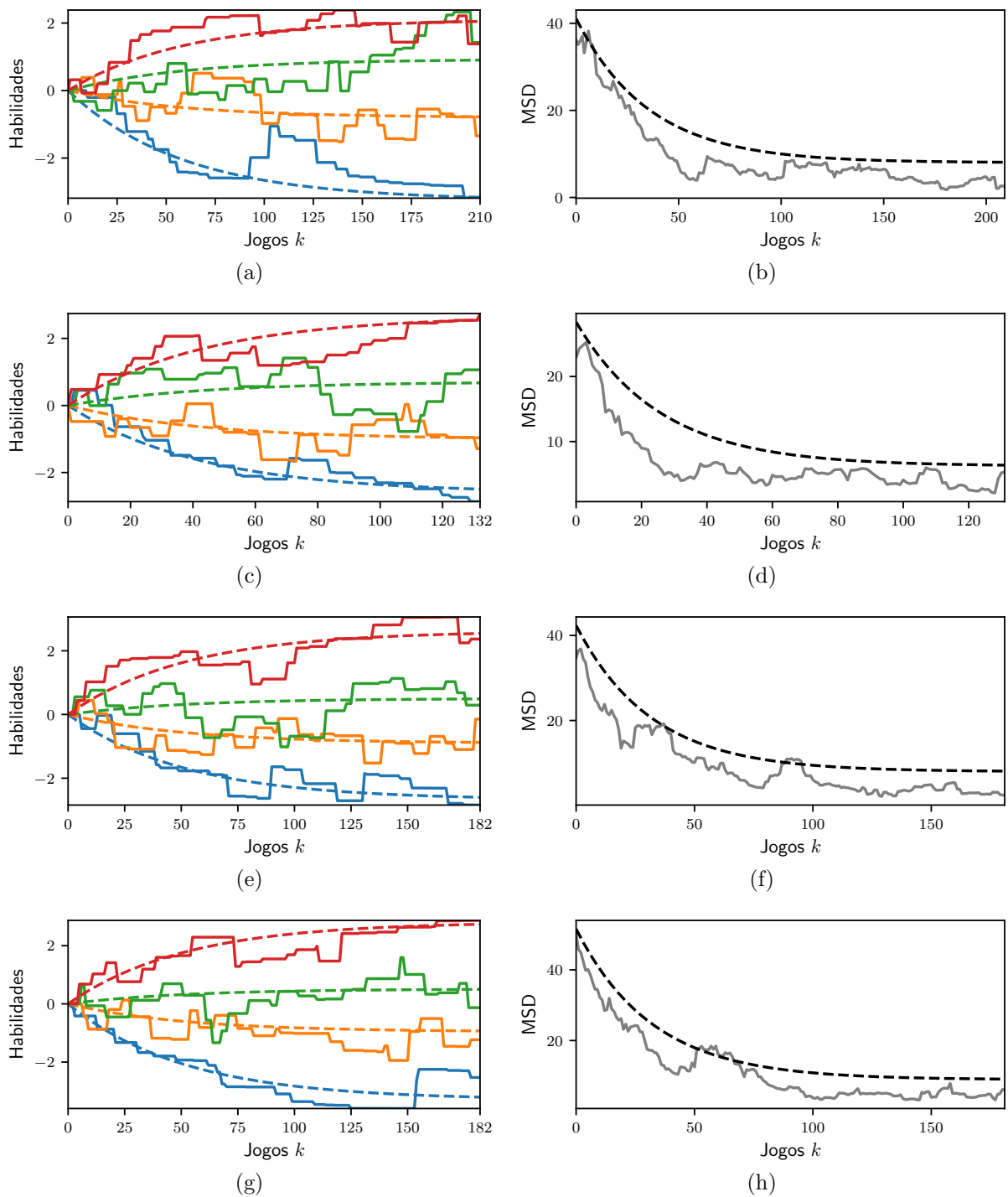


Figura 8 – Evolução das habilidades para um subconjunto de 4 times (esquerda) e MSD das habilidades (direita). Resultados de simulação (linhas sólidas) e modelo proposto (linhas tracejadas). (a) e (b) Temporada 2009/10. (c) e (d) Temporada 2015/16. (e) e (f) Temporada 2017/18. (f) e (g) Temporada 2018/19.

# Capítulo 6

## Considerações finais

Neste capítulo, as considerações finais do presente trabalho de pesquisa são apresentadas. Inicialmente, é realizada uma discussão sobre os principais e mais relevantes resultados obtidos. Em seguida, é listado o trabalho em via de publicação decorrente da pesquisa desenvolvida. Por fim, algumas sugestões para trabalhos de pesquisa futuros na área são apresentadas.

### 6.1 CONCLUSÕES

No Capítulo 1, foi apresentada uma breve revisão da literatura sobre o problema de *rating*, visando contextualizar o presente trabalho de pesquisa. Em tal revisão, foram destacadas algumas das principais aplicações do mundo real em que algoritmos de *rating* constituem uma parte importante da competição esportiva. Dentre tais algoritmos disponíveis na literatura, uma atenção especial foi destinada à descrição do algoritmo de Elo, o qual é um dos mais relevantes e amplamente utilizados em aplicações práticas. Ainda, foram trazidas algumas limitações importantes observadas nos resultados teóricos apresentados até então na literatura versando sobre a análise do algoritmo de Elo. Por fim, os objetivos deste trabalho de pesquisa foram estabelecidos.

No Capítulo 2, foi apresentada uma breve formulação do problema de *rating*. Primeiro, foram introduzidos conceitos básicos de competições e o modelo estatístico de Bradley-Terry utilizado para a inferência das habilidades dos competidores. Em seguida, usando o princípio da máxima verossimilhança, foi formulado um problema de otimização para estimar a habilidade dos jogadores a partir dos resultados observados das disputas. A partir de tal problema de otimização, um algoritmo recursivo foi então derivado através do método do gradiente estocástico para estimar (iterativamente) as habilidades dos jogadores, o qual é conhecido como algoritmo de Elo (considerado no desenvolvimento do presente trabalho de pesquisa).

No Capítulo 3, foi apresentada a análise (estocástica) do algoritmo de Elo, considerando uma competição com sistema de rodízio (todos contra todos). Para tal, algumas

hipóteses simplificativas e aproximações foram estabelecidas para tornar o desenvolvimento matematicamente tratável, as quais são fortes, mas parecem razoáveis do ponto de vista prático. Baseado em tais hipóteses simplificativas, foram derivadas expressões analíticas caracterizando o comportamento/evolução das habilidades e de algumas métricas importantes de desempenho, ao longo da competição. Também, foram determinadas soluções analíticas para computar (de forma precisa) alguns valores esperados surgidos durante a análise estocástica do algoritmo de Elo. Ainda, a partir das expressões analíticas obtidas, algumas características sobre o algoritmo de Elo foram observadas e discutidas.

No Capítulo 4, foram discutidos alguns *insights* interessantes sobre o impacto dos hiperparâmetros do algoritmo de Elo em seu desempenho, os quais fornecem uma base teórica importante para o estabelecimento de diretrizes de projeto consistentes. Em particular, foi mostrado que existe uma relação de compromisso entre o número de jogos necessários para a convergência do algoritmo e o valor do passo de adaptação. Também, foi descrito que a escolha do passo de adaptação impacta o desempenho do algoritmo em regime permanente. Ainda, uma expressão aproximada foi derivada para determinação de um valor ótimo para o passo de adaptação, em função do número de jogos. Vale reforçar que essa expressão aproximada exibe uma precisão muito boa, quando comparado com o valor obtido por meio da solução numérica do problema em questão.

No Capítulo 5, resultados de simulação foram apresentados considerando dados de aplicações do mundo real extraídos da liga italiana de voleibol. Tais resultados de simulação confirmaram a precisão das expressões analíticas derivadas caracterizando o comportamento/evolução do algoritmo de Elo assim como comprovam a aplicabilidade prática das diretrizes de projeto estabelecidas. Essa precisão foi verificada, tanto na fase transitória quanto em regime permanente, para diferentes valores de passo de adaptação. Também, os resultados apresentados confirmaram a validade das expressões desenvolvidas para determinação do passo de adaptação (ótimo) para o algoritmo de Elo. Vale salientar que a precisão observada se deve, sobretudo, a forma como foram computados os valores esperados surgidos durante a análise estocástica. Portanto, frente aos resultados apresentados, as expressões analíticas obtidas aqui podem servir de base teórica para outras discussões sobre o comportamento do algoritmo de Elo.

Diante do exposto, acredita-se que os objetivos inicialmente estabelecidos foram alcançados com sucesso durante o desenvolvimento deste trabalho de pesquisa, fornecendo ainda uma metodologia de análise que pode ser aplicada a outras variantes e extensões do algoritmo de Elo tendo em vista as especificidades do algoritmo considerado.

## 6.2 TRABALHO EM VIA DE PUBLICAÇÃO

As contribuições originais decorrentes do presente trabalho de pesquisa deram origem ao seguinte artigo científico, destinado a um importante periódico internacional da área:

- D. G. P. Zanco, L. Szczecinski, E. V. Kuhn, and R. Seara, “A comprehensive analysis of the Elo rating algorithm: Stochastic model, convergence, design guidelines, and some experimental results”, *Statistical Science*, Aug. 2022 (em revisão).

### 6.3 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Como proposta para trabalhos de pesquisa futuros, sugere-se:

- Aplicar a metodologia desenvolvida aqui para outras extensões e variantes do algoritmo de Elo.
- Aprofundar o estudo da aplicabilidade das expressões analíticas derivadas para caracterizar a convergência do algoritmo em um número pré-definido de jogos.
- Avaliar a precisão das expressões analíticas obtidas aqui para outros conjuntos de dados, tal como aquele fornecido em [43].
- Incorporar, na modelagem do problema, a possibilidade de ocorrência de empates como resultado de jogos.
- Estender a análise estocástica apresentada considerando o caso de agendamento não-uniforme das partidas.
- Desenvolver regras de ajuste (iterativas) para o passo de adaptação do algoritmo visando melhorar suas características de convergência.

# APÊNDICE A

## Determinação de (30), (41) e (55)

Neste apêndice, é revisitada a metodologia utilizada para o cálculo de alguns valores esperados [veja (30), (41) e (55)] oriundos do desenvolvimento do modelo proposto, levando em consideração a aproximação de Laplace [44, Ch. 5]. Tais valores esperados envolvem uma variável aleatória da forma  $f(z)$ , sendo  $f(\cdot)$  uma função estritamente positiva, duplamente diferenciável e absolutamente integrável, enquanto  $z$  é uma variável aleatória gaussiana com média  $\mu_z$  e a variância  $v_z$ . Assim, utilizando a definição de valor esperado [45], pode-se expressar

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[f(z)] &= \int f(z)\mathcal{N}(z; \mu_z, v_z) dz \\ &= \int e^{\ln[f(z)]}\mathcal{N}(z; \mu_z, v_z) dz.\end{aligned}\quad (72)$$

Em seguida, realizando a expansão de  $\ln[f(z)]$  usando a série de Taylor de segunda ordem centrada em  $z = 0$ , (72) pode ser aproximada por

$$\mathbb{E}[f(z)] \approx \int e^{\ln[f(0)] + [f'(0)/f(0)]z + \frac{1}{2}\{f''(0)/f(0) - [f'(0)/f(0)]^2\}z^2} \mathcal{N}(z; \mu_z, v_z) dz. \quad (73)$$

Então, assumindo que  $f(z)$  atinge seu máximo em  $z = 0$  tal que  $f'(0) = 0$ , (73) se reduz a

$$\mathbb{E}[f(z)] = f(0) \int e^{\frac{1}{2}[f''(0)/f(0)]z^2} \mathcal{N}(z; \mu_z, v_z) dz. \quad (74)$$

Alternativamente, como o termo exponencial se assemelha à PDF de uma variável gaussiana, pode-se reescrever (74) como

$$\mathbb{E}[f(z)] = f(0) \sqrt{2\pi v_f} \int \mathcal{N}(z; 0, v_f) \mathcal{N}(z; \mu_z, v_z) dz \quad (75)$$

em que

$$v_f = -\frac{f(0)}{f''(0)}. \quad (76)$$

Por fim, lembrando da Hipótese A3) (veja Capítulo 3), implicando que  $\mu_z = \eta$  e  $v_z = 2v$ , (75) pode ser expressa como

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[f(z)] &\approx f(0) \sqrt{2\pi v_f} \mathcal{N}(0; \mu_z, v_z + v_f) \\ &= f(0) \sqrt{\frac{v_f}{2v + v_f}} \exp\left[\frac{-\eta^2}{2(2v + v_f)}\right]. \end{aligned} \quad (77)$$

Note que, por conveniência, são apresentados na Tabela 2 alguns dos valores pré-calculados de  $v_f$  e  $f(0)$  usados aqui para a determinação de (30), (41) e (55).

Tabela 2 – Identidades auxiliares utilizadas nas determinações de  $\mathbb{E}[f(z)]$  para diferentes funções  $f(z)$

$f(z)$	$v_f$	$f(0)$
$\mathcal{L}(z)$	2	1/4
$\mathcal{L}^2(z)$	1	1/16
$-\sigma(z) \ln[\sigma(z)] - \sigma(-z) \ln[\sigma(-z)]$	$4 \ln(2)$	$\ln(2)$

# APÊNDICE B

## Determinação de (71)

Neste apêndice, uma solução aproximada para (70) é determinada, tendo em vista que uma solução exata (fechada) não pode ser diretamente obtida para um  $k$  arbitrário. Para tal, recorre-se inicialmente à expansão em série de Taylor em  $\beta = 0$  para aproximar (48) tal que

$$\bar{d}_k \approx \bar{d}_k \Big|_{\beta=0} + \beta \left( \frac{\partial \bar{d}_k}{\partial \beta} \Big|_{\beta=0} \right) + \frac{1}{2} \beta^2 \left( \frac{\partial^2 \bar{d}_k}{\partial \beta^2} \Big|_{\beta=0} \right) \quad (78)$$

na qual

$$\frac{\partial \bar{d}_k}{\partial \beta} \Big|_{\beta=0} = -\frac{4k\bar{h}Mv}{M-1} \quad (79)$$

e

$$\frac{\partial^2 \bar{d}_k}{\partial \beta^2} \Big|_{\beta=0} = \frac{8k\bar{h}Mv}{M-1} \left[ \frac{2\bar{h}(k-1)}{M-1} + \frac{\bar{h}^2}{\bar{h}} + \frac{1-1/M}{2v} \right]. \quad (80)$$

Então, substituindo (79) e (80) em (78), derivando a expressão resultante em relação a  $\beta$ , igualando a zero e encontrando a solução para  $\beta$ , obtém-se

$$\beta_{o,k} \approx \frac{1}{2} \left[ \frac{(1-1/M)}{2v} + \frac{\bar{h}^2}{\bar{h}} + \frac{2\bar{h}(k-1)}{M-1} \right]^{-1}. \quad (81)$$

Em seguida, visando avaliar a precisão da solução aproximada obtida, a Figura 9 mostra os resultados, em função de  $k$ , obtidos de (81) em conjunto com aqueles oriundos da solução numérica de (70), considerando diferentes valores de  $v$ , com  $M = 15$  e  $\eta = 0$ . A partir de tal figura, verifica-se que (81) apresenta um descasamento importante em comparação aos resultados numéricos. Tal descasamento é mais perceptível à medida que  $k$  aumenta, indicando que (possivelmente) a contribuição do termo dependente de  $k$

$$\frac{2\bar{h}(k-1)}{M-1} \quad (82)$$



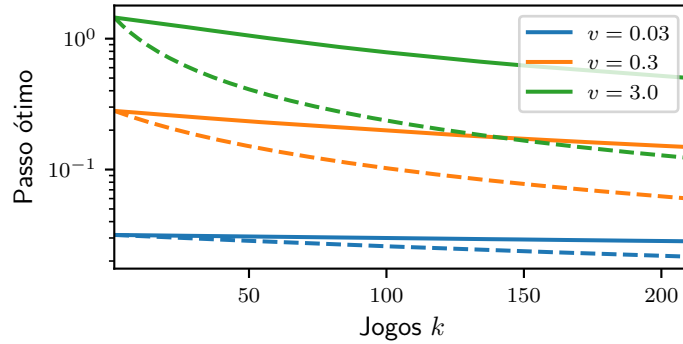


Figura 9 – Passo de adaptação ótimo  $\beta_{o,k}$  obtido a partir da solução numérica de (70) (linhas sólidas) e da solução aproximada (81) (linhas tracejadas) em função do número de jogos  $k$ , considerando diferentes valores de  $v$  enquanto  $M = 15$  e  $\eta = 0$ .

não esteja devidamente balanceada. Ainda, para o caso especial de  $k = 1$ , uma solução analítica para (70) pode ser derivada (de forma exata) como

$$\beta_{o,1} = \frac{1}{2} \left[ \frac{(1 - 1/M)}{2v} + \frac{\bar{h}^2}{\bar{h}} \right]^{-1} \quad (83)$$

na qual (82) não aparece (como é esperado); com isso, reforça-se a ideia de que a contribuição do termo dependente de  $k$  em (81) deve ser revista. Após uma extensa análise para diferentes cenários, foi observado que  $\bar{h}$  em (82) é dominante e deveria ser então substituído por  $\bar{h}^2$ ; como resultado, uma solução mais precisa [do que (81)] para o cálculo do passo de adaptação ótimo é finalmente determinada como segue (71).

# REFERÊNCIAS

- [1] R. Stefani, “The Methodology of Officially Recognized International Sports Rating Systems”, *Journal of Quantitative Analysis in Sports*, v. 7, 4, Article ID: 10 2011.
- [2] D. Barrow, I. Drayer, P. Elliott, G. Gaut e B. Osting, “Ranking rankings: an empirical comparison of the predictive power of sports ranking methods”, *Journal of Quantitative Analysis in Sports*, v. 9, pp. 187–202, 2 2013.
- [3] J. Lasek e M. Gagolewski, “Interpretable sports team rating models based on the gradient descent algorithm”, *International Journal of Forecasting*, v. 37, n. 3, pp. 1061–1071, 2021.
- [4] L. M. Hvattum e H. Arntzen, “Using ELO ratings for match result prediction in association football”, *International Journal of Forecasting*, v. 26, n. 3, pp. 460–470, 2010.
- [5] S. Wolf, M. Schmitt e B. Schuller, “A football player rating system”, *Journal of Sports Analytics*, v. 6, n. 4, pp. 243–257, 2020.
- [6] L. Vaughan Williams e H. O. Stekler, “Editorial: Sports forecasting”, *International Journal of Forecasting*, v. 26, n. 3, pp. 445–447, 2010.
- [7] I. McHale e T. Swartz, “Editorial: Forecasting in sports”, *International Journal of Forecasting*, v. 35, n. 2, pp. 710–711, 2019.
- [8] R. A. Bradley e M. E. Terry, “Rank Analysis of Incomplete Block Designs: I. The Method of Paired Comparisons”, *Biometrika*, v. 39, n. 3-4, pp. 324–345, 1952. eprint: <https://academic.oup.com/biomet/article-pdf/39/3-4/324/930466/39-3-4-324.pdf>.
- [9] M. E. Glickman, “Paired comparison models with time-varying parameters”, tese de dout., Harvard University, 1993.

- [10] C. Leitner, A. Zeileis e K. Hornik, “Forecasting sports tournaments by ratings of (prob)abilities: A comparison for the EURO 2008”, *International Journal of Forecasting*, v. 26, n. 3, pp. 471–4481, 2010.
- [11] S. Dobson e J. Goddard, *The Economics of Football*, Second. Cambridge, MA, USA: Cambridge University Press, 2011.
- [12] H. O. Stekler, D. Sendor e R. Verlander, “Issues in sports forecasting”, *International Journal of Forecasting*, v. 26, n. 3, pp. 606–621, jul. de 2010.
- [13] A. N. Langville e C. D. Meyer, *Who’s #1, The Science of Rating and Ranking*. Princeton University Press, 2012.
- [14] M. E. Glickman, “Parameter Estimation in Large Dynamic Paired Comparison Experiments”, *Journal of the Royal Statistical Society: Series C (Applied Statistics)*, v. 48, n. 3, pp. 377–394, 1999, ISSN: 1467-9876.
- [15] A. E. Elo, *The Rating of chessplayers, past and present*. New York, NY, USA: Arco Publishing Inc., 1978.
- [16] R. Ryall e A. Bedford, “An optimized ratings-based model for forecasting Australian Rules football”, *International Journal of Forecasting*, v. 26, n. 3, pp. 511–517, 2010.
- [17] M. E. Glickman, “A comprehensive guide to chess ratings”, *American Chess Journal*, n. 3, pp. 59–102, 1995.
- [18] Fédération Internationale des Échecs, *FIDE Handbook: Rating Regulations effective from 1 January 2022*, <https://archive.ph/T5Rb3>, Accessed: 2021-12-07.
- [19] FIFA, *FIFA/Coca-Cola Women’s World Ranking*, mai. de 2007. endereço: <https://digitalhub.fifa.com/m/3d9cb1decbbb2ac7/original/rxqyxdjhbs2qdtstluy6-pdf.pdf>.
- [20] Fédération Internationale de Football Association, *FIFA: Mens Ranking Procedure*, <https://archive.ph/3Ch5V>, Accessed: 2021-12-07, 2018.
- [21] Play! Pokémon, *Ratings and Rankings FAQ*, <https://archive.ph/ZTec0>, Accessed: 2021-12-07.

- 
- [22] N. Silver, *Introducing NFL Elo ratings*, 2014. endereço: <https://fivethirtyeight.com/features/introducing-nfl-elo-ratings/>.
- [23] J. Carbone, T. Corke e F. Moisiadis, “The Rugby League Prediction Model: Using an Elo-based approach to predict the outcome of National Rugby League (NRL) matches”, *International Educational Scientific Research Journal*, v. 2, pp. 26–30, 5 mai. de 2016.
- [24] FiveThirtyEight, *NBA Elo Ratings*, <https://fivethirtyeight.com/tag/nba-elo-ratings/>, Accessed: 2022-06-01.
- [25] M. E. Glickman, “Parameter Estimation in Large Dynamic Paired Comparison Experiments”, *Journal of the Royal Statistical Society: Series C (Applied Statistics)*, v. 48, n. 3, pp. 377–394, 1999.
- [26] E. Wheatcroft, “Forecasting football matches by predicting match statistics”, *Journal of Sports Analytics*, v. 7, pp. 77–97, 2021.
- [27] R. Herbrich e T. Graepel, “TrueSkill(TM): A Bayesian Skill Rating System”, rel. técn., jan. de 2006. endereço: <https://www.microsoft.com/en-us/research/publication/trueskilltm-a-bayesian-skill-rating-system-2/>.
- [28] J. Lasek, Z. Szlávik e S. Bhulai, “The predictive power of ranking systems in association football”, *International Journal of Applied Pattern Recognition*, v. 1, n. 1, pp. 27–46, 2013.
- [29] J. Dorsey, “Elo regression extending the Elo rating system”, Masters thesis, University of Akron, Akron, OH, USA, 2019.
- [30] S. Kovalchik, “Extension of the Elo rating system to margin of victory”, *International Journal of Forecasting*, v. 36, n. 4, pp. 1329–1341, 2020.
- [31] D. Aldous, “Elo Ratings and the Sports Model: A Neglected Topic in Applied Probability?”, *Statistical Science*, v. 32, n. 4, pp. 616–629, nov. de 2017.
- [32] P.-E. Jabin e S. Junca, “A Continuous Model For Ratings”, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, v. 75, n. 2, pp. 420–442, mar. de 2015.

- 
- [33] P. Scarf e M. Bilbao, “The Optimal Design of Sporting Contests”, *Salford Business School Working Paper Series*, 1–17, Article ID: 320/06, set. de 2006.
- [34] T. Hastie, J. Friedman, R. Tibshirani et al., *The Elements of Statistical Learning*. Springer series in statistics New York, 2001, vol. 1.
- [35] R. Darrell Bock, “Estimating item parameters and latent ability when responses are scored in two or more nominal categories”, *Psychometrika*, v. 37, n. 1, pp. 29–51, 1972.
- [36] R. Gramacy, S. Jensen e M. Taddy, “Estimating player contribution in hockey with regularized logistic regression”, v. 9, n. 1, pp. 97–111, 2013.
- [37] S. M. Kay, *Fundamentals of Statistical Signal Processing: Estimation Theory*. USA: Prentice-Hall, Inc., 1993, ISBN: 0133457117.
- [38] B. Farhang-Boroujeny, *Adaptive Filters: Theory and Applications*. Wiley, 2013, ISBN: 9781118591338.
- [39] D. Aldous, “Elo Ratings and the Sports Model: A Neglected Topic in Applied Probability?”, *Statist. Sci.*, v. 32, n. 4, pp. 616–629, nov. de 2017.
- [40] eloratings.net, *World Football Elo Ratings*, 2020. endereço: <https://www.eloratings.net/>.
- [41] FlashScore.ca, *Volleyball: SuperLega Results Archive*, <https://archive.ph/gP3Ea>, Accessed: 2021-11-15.
- [42] I. Goodfellow, Y. Bengio e A. Courville, *Deep Learning*. MIT Press, 2016, <http://www.deeplearningbook.org>.
- [43] Lichess.org, *Lichess games and puzzles (open database)*, <https://database.lichess.org/>, Accessed: 2022-07-27.
- [44] R. D. Peng, *Advanced Statistical Computing*. 2018-2021.
- [45] C. W. Therrien, *Discrete Random Signals and Statistical Signal Processing*. Englewood Cliffs, NJ, USA: Prentice Hall, 1992.