# ARITHMETICA
E
# GEOMETRIA

PARA O ENSINO DA 1.ª CLASSE (1.º ANNO) DOS LYCEUS

De conformidade com os programmas
approvados por Decreto de 3 de Novembro de 1905


Joaquim d'Azevedo Albuquerque

Lente jubilado da Academia Polytechnica do Porto


ADOPTADO PARA O ENSINO SECUNDARIO

*(Decreto de 19 de outubro de 1898; P. de 11 de junho de 1902, P. de 10 de agosto de 1903, P. de 20 de julho de 1904 e 30 de outubro de 1905, D. de 7 de setembro de 1907)*

**11.ª edição revista e melhorada**


PORTO
IMPRENSA NACIONAL
DE
**JAYME VASCONCELLOS**
Rua da Picaria, 25

1910

Miguel Pile

Porto, 10 de outubro de 1917

Portugal

# ARITHMETICA
E
# GEOMETRIA

PARA O ENSINO DA 1.ª CLASSE (1.º ANNO) DOS LYCEUS

De conformidade com os programmas
approvados por Decreto de 3 de Novembro de 1905

POR

**Joaquim d'Azevedo Albuquerque**

Lente Jubilado da Academia Polytechnica do Porto

---

ADOPTADO PARA O ENSINO SECUNDARIO

*(Decreto de 19 de outubro de 1898; P. de 11 de junho de 1902,
P. de 10 de agosto de 1903, P. de 20 de julho de 1904 e 30 de outubro de 1905,
D. de 7 de setembro de 1907)*

---

**11.ª edição revista e melhorada**

---



PORTO
IMPRENSA NACIONAL
DE
**JAYME VASCONCELLOS**
Rua da Picaria, 35

1910

# ARITHMETICA PRATICA

# PROGRAMMA OFFICIAL

(Decreto de 3 de Novembro de 1905)

---

Noção do numero inteiro, fraccionario e decimal. As quatro operações sobre inteiros e decimaes.

Potencias: definições, multiplicação e divisão, extracção da raiz quadrada inteira, ou a menos de uma unidade decimal de um numero inteiro ou decimal.

Principios e propriedades das operações; applicações praticas d'estas propriedades. Complemento arithmetico; subtracção por complementos.

Definição de multiplo e submultiplo; divisibilidade por 2, 3, 4, 5, 9, por 10, 100, 1000, etc. Maximo divisor commum e menor multiplo commum de dois ou mais numeros.

Numero primo; numeros primos entre si. Decomposição em factores primos e suas applicações.

Fracções: simplificação, reducção ao mesmo denominador, comparação, conversão em dizima.

Adicção, subtracção, multiplicação e divisão de fracções.

Systema metrico. Medidas itinerarias usuaes. Moedas. Unidades de tempo. Divisões da circumferencia. Numero complexo. Reducção e calculo de complexos.

Problemas de uso commum.

# SECÇÃO I

## Numeros inteiros

---

### CAPITULO I

### § 1.º Noções preliminares — § 2.º Numeração decimal de numeros inteiros

---

#### § 1.º

X **1. Grandeza.** — Grandeza [1] é tudo o que é capaz de augmento ou diminuição. Esta qualidade, ou attributo geral que os objectos nos revelam, apresenta-se sob duas fórmas differentes; umas grandezas manifestam-se como uma collecção de partes materialmente separadas *(discontinuas)*, taes como um rebanho, um bosque; outras como um todo sem distincção de parte *(continuas)*, taes como o peso d'um corpo, distancia entre dois pontos.

**2. Unidade. Numero.** — A primeira fórma das grandezas dá-nos a ideia de *pluralidade* e *individualidade*: uma das

---

(1) Actualmente, não parece possivel dar uma definição simples e *precisa* do conceito geral de grandeza. A que adoptamos tem ao menos o merito da tradição sobre as definições modernas, menos simples, de Grassmann, Stolz, etc., não isentas tambem de defeitos logicos.

partes é a *unidade*, e o *numero* é a expressão d'essa *pluralidade*. Assim, n'um rebanho de 60 ovelhas, 60 é o numero: a ovelha, o individuo, ou a parte da grandeza, é a *unidade;* e esta grandeza assim expressa em numero é o que se chama *quantidade*.

O numero enunciado sem indicação das unidades que representa, diz-se *abstracto;* no caso contrario, diz-se *concreto*. Assim, 15, é um numero *abstracto;* 15 homens é um numero *concreto*.

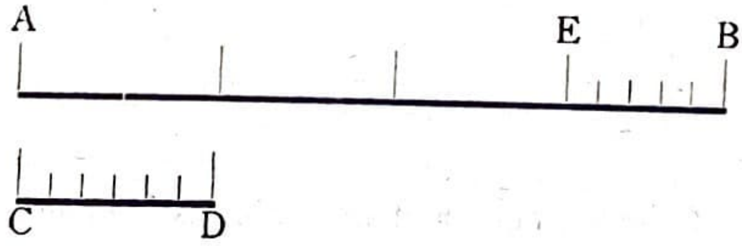
O numero concreto é propriamente uma quantidade.

**3. Numero inteiro e fraccionario. Medida das grandezas.** — As grandezas contínuas, que se apresentam sob a fórma d'um todo sem distincção de partes, não dão, por isso, immediatamente a ideia de numero: para o introduzirmos n'ellas, suppomol-as decompostas em partes iguaes. Para isso escolhe-se *arbitrariamente* uma grandeza da mesma especie, que se toma como unidade, e determina-se o numero de vezes que a grandeza dada contém a grandeza unidade.

Se a grandeza dada contém exactamente a grandeza unidade, essa grandeza póde considerar-se formada por um aggregado de grandezas iguaes á que se escolheu para unidade, e o numero apparece, como nas grandezas discontínuas, exprimindo a pluralidade d'essas partes.

Se, porém, a grandeza dada não contém exactamente a grandeza unidade, divide-se esta n'um certo numero de partes iguaes, e tomando uma d'essas partes para nova unidade, determina-se quantas vezes o resto, que ficou da primeira operação, contém esta nova unidade. Se este resto contém exactamente a nova unidade, a grandeza dada póde-se considerar formada d'um aggregado de grandezas iguaes á que foi tomada primitivamente para unidade, e d'outro aggregado de partes d'ella.

Por exemplo: supponhamos que a grandeza dada é a distancia AB, e que a grandeza que tomamos primeiro para unidade é a distancia CD;




applicando CD sobre AB, vê-se que AB a contém 3 vezes ficando o resto EB. Supponhamos que dividimos a grandeza CD em seis partes iguaes: uma d'estas partes, tomada para a nova unidade, é um *quebrado* ou *fracção* da primeira unidade. Se o resto EB contém 5 d'estas partes, a grandeza AB é expressa pelo numero 3 mais 5 partes (sextos) da unidade: este numero denomina-se *fraccionario*.

Se a grandeza AB contivesse exactamente a unidade CD, esse numero de vezes seria um *numero inteiro*.

Se o resto EB não contivesse exactamente a segunda unidade, subdividia-se de novo esta e procedia-se como na segunda operação; e assim em diante (1).

É n'este processo do entendimento, que faz applicar os numeros á determinação das grandezas contínuas e reduzil-as a quantidades, que consiste a *medida das grandezas*.

**4.** A mesma grandeza contínua reduzida a quantidade póde ser expressa por muitos numeros. Assim, um comprimento expresso pela quantidade 7 metros, póde ser representado pela quantidade 70 decimetros, 700 centimetros, etc. Este facto resulta de ser arbitraria a unidade nas grandezas contínuas.

(1) Na pratica, esta série de operações finalisa sempre; porque se chega sempre a um resto materialmente imperceptivel aos sentidos e instrumentos. Não assim nas questões abstractas, em que as grandezas não figuram materialmente, como se verá n'outro grau mais elevado do ensino da mathematica.

§ 2.º

**5. Formação dos numeros inteiros. Numeração.** — Os numeros inteiros exprimem a unidade ou a reunião de muitas unidades. É sempre sobre elles que recaem as operações; são pois os mais importantes da arithmetica.

Os numeros inteiros obtem-se pela addição successiva da unidade, ou do numero *um*: *um* mais *um* dá o numero *dois*; *dois* mais *um* fórma o numero *tres*; e assim em diante. A série d'estes numeros, que se chama *série natural dos numeros*, é, portanto, illimitada; isto é, por maior que seja um numero fórma-se logo um maior pela addicção de *um*.

Torna-se, portanto, necessario enunciar e representar todos os numeros por meio d'um systema limitado de palavras e de signaes: tal é o fim da *numeração*, sem a qual a arithmetica pratica não seria possivel.

Divide-se naturalmente a numeração em falada e escripta.

**6. Numeração falada.** — O nosso systema de numeração toma os numeros que representam os dedos das mãos, como *numeros simples*, ou dados immediatamente; são: *um*, *dois*, *tres*, *quatro*, *cinco*, *seis*, *sete*, *oito*, *nove*, *dez*.

*Dez* ou *dezena*, é a base da numeração, e porisso se diz *numeração decimal*.

A dezena serve para formar novas unidades, do mesmo modo que se formaram os numeros com unidades simples.

*Dez dezenas* ou o numero *cem*, fórma outra nova unidade, que se chama *centena*, com a qual se formam numeros como com as dezenas.

*Dez centenas* ou o numero *mil*, fórma outra nova unidade, que se chama *milhar*, com a qual se procede do mesmo modo; e assim em diante.

O mechanismo da numeração consiste, portanto, em formar grupos de dez em dez vezes maiores, tomados como *novas unidades* ou unidades de differentes *ordens*. Estas unidades não tiveram todas nomes distinctos: a unidade da quinta ordem, ou o numero dez mil, fórma a *dezena de milhar;* a da sexta ordem, *centena de milhar;* e da setima ordem, ou o numero mil milhares, tem o nome novo *milhão;* a da oitava ordem, ou numero dez milhões, é a *dezena de milhão;* a da nona ordem *centena de milhão;* a da decima ordem, ou *mil milhões*, toma o nome novo de *billião*. De sorte que as unidades das differentes ordens, para a numeração falada, decompõem o numero em *unidades ternarias* ou *classes*, cada uma das quaes vale mil unidades da classe antecedente, como se vê no seguinte quadro:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1.ª | ordem | **Unidades simples** | 1.ª classe |
| 2.ª | » | Dezenas de unidades simples | |
| 3.ª | » | Centenas de unidades simples | |
| 4.ª | » | **Mil** | 2.ª classe |
| 5.ª | » | Dezena de mil | |
| 6.ª | » | Centena de mil | |
| 7.ª | » | **Milhão** (1) | 3.ª classe |
| 8.ª | » | Dezena de milhão | |
| 9.ª | » | Centena de milhão | |
| 10.ª | » | **Billião** (1) | 4.ª classe |
| 11.ª | » | Dezena de billião | |
| 12.ª | » | Centena de billião | |

(1) Quando estas palavras se applicam á contagem de dinheiro portuguez, em vez de milhão de réis, billião de réis, diz-se *conto* de réis, *milhar de contos* de réis.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 13.ª ordem | **Trillião** | | 5.ª classe |
| 14.ª » | Dezena de trillião | | |
| 15.ª » | Centena de trillião | | |
| 16.ª » | **Quatrillião** | | 6.ª classe |

**7. Irregularidades introduzidas pelo uso.** — O uso induziu na numeração falada as modificações seguintes:

| Em vez de se dizer: | | diz-se: |
|---|---|---|
| | uma duzena | dez |
| | duas duzenas | vinte |
| | tres » | trinta |
| | quatro » | quarenta |
| | cinco » | cincoenta |
| | seis » | sessenta |
| | sete » | setenta |
| | oito » | oitenta |
| | nove » | noventa |
| | dez e um | onze |
| | dez e dois | doze |
| | dez e tres | treze |
| | dez e quatro | quatorze |
| | dez e cinco | quinze |

Observação. — Em vez de se dizer *dois, tres, cinco centos*, diz-se *duzentos, trezentos, quinhentos*. Mas estas irregularidades não são permanentes, pois se diz dois, tres, cinco centos de laranjas, por exemplo.

**8. Numeração escripta.** — Os caracteres adoptados para exprimir por escripto o mechanismo da numeração são:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0, | 1, | 2, | 3, | 4, | 5, | 6, | 7, | 8, | 9, |
| zero, | um, | dois, | tres, | quatro, | cinco, | seis, | sete, | oito, | nove, |

Estes signaes chamam-se *algarismos;* os nove ultimos são *algarismos significativos*, que servem para representar os numeros de unidades das differentes ordens; a designação da ordem das unidades que representam é determinada por este engenhoso artificio, que nos veio da India, de collocar os algarismos em linha, exprimindo cada logar á esquerda, unidade dez vezes superiores ás do logar que occupa o algarismo da direita. Assim, no numero 5738, o algarismo 8 exprime as unidades simples, 3 as dezenas, 7 as centenas e 5 os milhares.

Os algarismos teem pois dois valores: um *absoluto* ou de *figura*, que indica o numero de unidades que representa, outro *relativo* ou de *posição*, que designa a ordem das unidades pelo logar que occupa a partir do primeiro algarismo da direita.

Quando n'um numero faltam unidades d'uma ou mais ordens, para se conservar aos algarismos os seus respectivos logares, marcam-se os logares das unidades que faltam com o signal 0, chamado *zero*. O zero não tem, portanto, valor proprio, servindo apenas para dar valor de posição aos numeros: não tem por isso influencia no numero, quando escripto á esquerda do ultimo algarismo da esquerda. Assim o numero 30504, indica que faltaram n'elle as dezenas e os milhares.

**9. Regra para escrever um numero dictado.** — O mecanismo da numeração falada indica immediatamente o numero de centenas, dezenas e unidades de cada classe que o numero contém, começando pela classe mais elevada: *segue-se, portanto, o dictado, escrevendo successivamente, da esquerda para a direita os algarismos que representam as centenas, dezenas e unidades indicadas em cada classe, tendo cuidado de escrever um zero no logar das centenas, dezenas ou unidades que faltarem em cada classe.*

Exemplo: seis centos e trinta e tres milhões e noventa e nove, escrevem-se: 633000099. Escreveram-se tres zeros na classe dos milhares, que faltam, e um zero nas centenas da classe das unidades simples, que tambem faltam.

**10. Regra para ler um numero escripto.** — Como a numeração falada decompõe o numero em classe ou unidades ternarias, para ler um numero escripto, faz-se a sua divisão em classes de tres algarismos a começar da direita, podendo a ultima classe da esquerda ficar com um ou dois algarismos, e lê-se cada classe em separado a começar da esquerda, ennunciando em cada classe o nome das unidades que ella representa.

Exemplo : o numero 34121752512, divide-se assim 34.121.752.512, e lê-se 34 biliões, 121 milhões, 752 mil, 512 unidades.

Observação. — Na escripta dos numeros relativos a dinheiro, usa-se do signal $, denominado *cifrão*, para marcar o algarismo dos milhares, á direita do qual se escreve; e do signal : para marcar o algarismo que representa contos, escripto tambem á direita d'elle.

## EXERCICIOS

**1.** Ler os numeros: 100031002; 80000020010; 23456789123456.

**2.** Escrever em algarismos os numeros: treze mil e vinte cinco; quarenta e dois billiões setenta milhões quatrocentos e vinte e oito.

**3.** Quantas centenas tem um milhão? quantos milhares? quantas dezenas de milhar?

**4.** Quantas unidades simples representa cada algarismo do numero 63245218?

**5.** Quantas centenas tem o numero 2683421? quantos milhares? quantas centenas de milhar?

**6.** Quanto augmenta o numero 3741, pondo-lhe dois zeros entre os algarismos 7 e 4? pondo-lhe trez zeros entre os algarismos 3 e 7?

**7.** Qual é o maior numero de tres algarismos? de cinco? de sete?

**8.** Quantos numeros ha de dois algarismos? de quatro? de seis?

## CAPITULO II

# As quatro operações fundamentaes sobre numeros inteiros

---

### § 1.º Addição

**11. Definições.** — A addição é a operação que corresponde ao acto mecanico da reunião de duas ou mais grandezas da mesma especie n'uma só grandeza.

Exemplo: O peso de um corpo que num prato de uma balança faz equilibrio a dois ou mais corpos postos no outro prato, é a *somma* dos pesos d'estes corpos.

Como as grandezas são representadas por numeros, a operação recae sobre numeros abstractos, e tem por fim formar o numero constituido por todas as unidades dos numeros que representam as grandezas dadas, referidas á mesma unidade concreta. Este numero chama-se *somma* ou *total;* os numeros que o formam chamam-se *parcellas*.

Por exemplo: para obter a extensão de uma propriedade que tem 3 hectares de prados e 8 ares de jardim, a somma recae sobre os numeros abstractos 300 e 8, que são os que representam as grandezas referidas á mesma unidade concreta, are, e temos 308 ares.

**12. Addição.** — É a operação mais simples da arithmetica; está intimamente ligada á formação dos numeros, porque foi pela addição successiva do numero *um* que os numeros inteiros se formaram. A addição indica-se pelo signal + posto entre as parcellas.

Exemplo: $8+4$ significa 8 *mais* 4; 8 e 4 são as parcellas, e o numero 12 formado é a somma ou o total. Exprime-se este resultado escrevendo:

$$8+4=12$$

que se lê: 8 *mais* 4 *igual* a 12 [1].

**13. Addição de numeros d'um só algarismo, ou de numeros digitos.** — A operação faz-se addicionando ao primeiro successivamente todas as unidades que formam o segundo; ao resultado addicionando tambem todas as unidades do terceiro; e assim em diante, até se juntarem todas as unidades da ultima parcella. Assim a somma dos tres numeros 8, 4, 2, faz-se juntando a 8 um, o que dá 9, mais um, o que dá 10, mais um, o que dá 11, mais um, o que dá 12 para somma das duas primeiras parcellas; mais um, o que dá 13, mais um, o que dá 14 para a somma dos tres numeros.

Este caso simples da addição deve tornar-se mental, sem ser necessario passar pelos numeros intermedios; deve dizer-se promptamente: 8 e 4, 12, e 2, 14.

**14. Addição de numeros de mais de um algarismo.** — Ao caso mental antecedente, reduz-se o caso geral da addição, sommando separadamente as unidades da mesma ordem, que são sempre representadas por numeros digitos.

Exemplos:

1.º Addicionar os numeros 13122, 135, 72341;

addicionam-se as unidades simples
$1+5+2=8$ unidades simples,
addicionam-se as unidades de dezena

(1) O signal = de igualdade foi inventado por Recorde, 1500 a 1558.

$4+3+2=9$ dezenas,
addicionam-se as unidades de centena
$3+1+1=5$ centenas,
addicionam-se as unidades de milhar
$2+3=5$ milhares,
addicionam-se as unidades de dezena de milhar
$7+1=8$ dezenas de milhar;
o numero que representa a somma é, pois, immediatamente dado pelo numero 85598.

2.° Addicionar os numeros 9823, 5339;

addicionando as unidades simples
$9+3=12$ unidades simples, ou 2 unidades e 1 dezena
addicionam-se as dezenas
$3+2=5$ dezenas,
addicionam-se as centenas
$3+8=11$ centenas, ou 1 centena e 1 milhar,
addicionam-se os milhares
$5+9=14$ milhares;

o numero que representa a somma é formado por 2 unidades, 6 dezenas (5 dezenas da somma parcial das dezenas e 1 dezena que veio da somma parcial das unidades), 1 centena, e 15 milhares (14 milhares da somma parcial dos milhares e 1 milhar que veio da somma das centenas).

**15.** A pratica da operação torna-se muito commoda, procedendo-se como dispõe a seguinte regra:

*Escrevem-se os numeros, uns por baixo dos outros de maneira que as unidades da mesma ordem fiquem na mesma columna vertical. Faz-se a somma dos algarismos de cada uma das columnas, a começar pela da direita, que é a columna das unidades; se a somma não fôr superior a 9, escreve-se o algarismo que a representa por baixo da respectiva colnmna; se fôr superior a 9 escrevem-se sómente as unidades d'esta somma, e reteem-se as dezenas para as juntar ás da columna seguinte,* *sobre a qual se opéra do mesmo modo; e assim em diante até á ultima columna, por baixo da qual se escreve a respectiva somma.*

Exemplo: Addicionar os numero 9203, 73215, 2125, 20071, 128.

Typo do calculo

| | |
|---|---|
| | 9203 |
| | 73215 |
| | 2125 |
| | 20071 |
| | 128 |
| Somma | 104742 |

**16.** Observações praticas.—É indispensavel começar a operação pela direita salvo no caso de nenhuma das sommas parciaes das columnas ser superior a 9, como no exemplo 1.° do n.° 14.

E' indifferente começar por cima ou por baixo, para fazer as sommas parciaes das columnas.

Quando uma addição se compõe de muitas parcellas, convém decompol-a em addições parciaes, e juntar depois os resultados obtidos.

**17. Prova da addição.**—A prova de uma operação é uma segunda operação pela qual se verifica se o resultado obtido está ou não exacto.

Para verificar uma addição podem escrever-se as parcellas em ordem differente da que se seguiu primeiro; ou, conservando a mesma ordem, operar nas sommas das columnas em sentido inverso do que foi seguido.

Adiante indicaremos outras provas.

Observação.—A concordancia do resultado da operação com o que dá a prova mostra apenas que é *provavel* estar exacta a operação; não dá a *certeza*, pois que póde ter havido o *mesmo erro* nas duas operações, bem que seja raro acontecer. Mas, se a concordancia se não dá, então é *certo* que a operação, ou prova, ou ambas, teem erro; e deve-se rever a operação com todo o cuidado.

**18. Propriedades da addição.**

1.ª Verifica-se praticamente que, por exemplo,

$$9 + 15 + 20 + 50 = 20 + 9 + 50 + 15,$$

isto é, que *uma somma não depende da ordem das parcellas.*

2.ª Verifica-se tambem praticamente que, por exemplo:

$$2 + 8 + 7 + 5 = 10 + 7 + 5 = 10 + 12,$$

isto é, que, *para obter uma somma de muitos numeros, podem-se formar sommas parciaes com alguns d'esses numeros e fazer a somma d'estas sommas parciaes.*

A primeira propriedade denomina-se *commutativa*; a segunda diz-se propriedade *associativa* da addição. É na propriedade commutativa que se funda a prova indicada no n.º 17; e na propriedade associativa se funda a regra de decomposição em addições parciaes indicada no n.º 16. X

## EXERCICIOS

**9.** As extensões de caminhos de ferro explorados na Europa, as superficies e populações dos seus diversos estados constam do seguinte quadro:

| | Extensão kilm. | Superficie kilm. q. | População hab. |
|---|---|---|---|
| Portugal e Hespanha . . . | 6:101 | 584:300 | 19.681:000 |
| França . . . . . . . . . . | 16:954 | 543:051 | 38.192:000 |
| Allemanha . . . . . . . . | 17:322 | 530:367 | 38.326:000 |
| Austria . . . . . . . . . | 8:051 | 620:400 | 32.530:000 |
| Inglaterra . . . . . . . . | 24:760 | 315:640 | 30.157:000 |
| Belgica . . . . . . . . . . | 3:052 | 29:455 | 4.898:000 |
| Italia . . . . . . . . . . . | 5:772 | 283:223 | 25.528:000 |
| Paizes-Baixos . . . . . . | 1:480 | 32:840 | 3.628:000 |
| Russia . . . . . . . . . . | 7:674 | 4.873:786 | 61.232:000 |
| Estados Scandinavos . . . | 2:818 | 796:815 | 7.629:000 |
| Suissa . . . . . . . . . . . | 1:380 | 44:418 | 2.511:000 |
| Turquia e Grecia . . . . . | 524 | 566:089 | 17.786:000 |

Calcular a extensão total dos caminhos de ferro, a superficie, e a população da Europa.

**10.** As estrellas visiveis a olho nú classificam-se pelo seu brilho; a 1.ª classe contém approximadamente 20, a 2.ª classe 65, a 3.ª classe 190, a 4.ª classe 425, a 5.ª classe 1:100, a 6.ª classe 3:200. Qual é, approximadamente, o numero de estrellas visiveis a olho nú?

**11.** A Europa tem 98.000:000 habitantes de raça teutonica, 80.000:000 de raça slava, 70.000:000 de raça grecolatina, 11.000:000 de raça celtica, 2.000:000 de raça lithuania. Qual é a população total da Europa?

**12.** Verificar que em cada um dos dois seguintes grupos de numeros, chamados *quadrados magicos*, obtem-se sempre a mesma somma, quer sommando os numeros d'uma mesma linha, quer sommando os numeros d'uma mesma columna.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 876 | 9666 | 4828 | 8577 | 3490 |
| 7027 | 876 | 6489 | 7668 | 5377 |
| 3497 | 5833 | 7777 | 2878 | 7452 |
| 7381 | 5684 | 7667 | 4818 | 1887 |
| 8656 | 5378 | 676 | 3496 | 9231 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 8476 | 997 | 1889 | 6908 | 2359 |
| 4829 | 3436 | 7871 | 1609 | 2884 |
| 2091 | 3479 | 4834 | 2357 | 7868 |
| 4345 | 7889 | 1688 | 888 | 5819 |
| 888 | 4828 | 4347 | 8867 | 1699 |

**13.** Verificar que, sommando *ordenadamente* os numeros *correspondentes* dos dois quadrados magicos do exercicio precedente, as 25 sommas obtidas formam ainda um quadrado magico.

**14.** Verificar que, n'um dos quadrados magicos do exercicio 12, substituindo cinco dos seus numeros, tomados um de cada linha e de cada columna, por esses numeros augmentados n'um mesmo numero *qualquer*, obtem-se um novo quadrado magico.

**15.** Achar a somma de todos os numeros de que se compõe cada um dos quadrados magicos do exercicio 12.

O exemplo mais antigo de um quadrado magico (4 a 5000 annos) encontra-se n'uma Taboa chineza, e é

| | | |
|---|---|---|
| 8 | 3 | 4 |
| 1 | 5 | 9 |
| 6 | 7 | 2 |

**16.** Um negociante vendeu certa mercadoria por 10$345 réis, perdendo 835 réis; porquanto a teria vendido numa occasião em que ganhava 430 réis?

## § 2.º Subtracção

**19. Definições.** — A subtracção tem por fim determinar a grandeza que addicionada á menor das duas grandezas dadas produz a maior. Esta operação, como a addição, recae sobre os dois numeros que representam as grandezas: o excesso de 12 homens sobre 4 homens, de 12 centenas sobre 4 centenas, é o de 12 sobre 4; e então a operação consiste em achar um numero que, addicionado ao menor dos dois numeros dados, produz o maior.

**20.** A subtracção indica-se pelo signal — (1) posto entre o maior e o menor dos numeros.

Exemplo: 12 — 4 significa: 12 menos 4; 12 é o *diminuendo* 4 o *diminuidor*, e o numero 8 que se obtem é o *resto*, *differença* ou *excesso* do diminuendo sobre o diminuidor.

Ao diminuendo e diminuidor dá-se o nome commum de *termos* da subtracção.

Exprime-se o resultado da operação escrevendo:

$$12 - 4 = 8$$

que se lê: 12 menos 4 igual a 8.

**21. Subtracção em que o diminuidor tem um só algarismo e o diminuendo não o excede em 10 unidades.** — É o caso mais simples da operação, que tem de ser mental: deve saber-se promptamente que 12 menos 4 são 8, 18 menos 9 são 9, etc.

---

(1) Este signal e o signal + appareceram pela primeira vez em 1571 n'uma obra de Michel Stieffel, mas foram inventados por Chistoff Rudolf em 1524.

De resto, estes resultados estão comprehendidos nos que se devem saber mentalmente para a addição: se, por exemplo, se tem de cór que 4 e 8 são 12, tem-se tambem de cór que 12 menos 4 são 8.

**22. Subtracção de dois numeros quaesquer.** — Ao caso mental antecedente, reduz-se o caso geral da subtracção.

Exemplos:

1.º Subtrahir 13245 de 36786:

O diminuendo tem

3 dez. de milh., 6 milh., 7 cent., 8 dez., 6 unidades; o diminuidor tem
1 dez. de milhar, 3 milh., 2 cent., 4 dez., 5 unidades: o resto deve ter
3 — 1 dezena de milhar, ou 2 dezenas de milhar,
6 — 3 milhares, ou 3 milhares,
7 — 2 centenas, ou 5 centenas,
8 — 4 dezenas, ou 4 dezenas,
6 — 5 unidades ou 1 unidade;
é pois o numero 23541.

2.º Subtrahir 13845 de 36783.

Procedendo n'este exemplo como no anterior, encontram-se subtracções parciaes impossiveis de executar: 5 unidades não se podem tirar de 3 unidades; juntam-se então 10 unidades ás 3 do diminuendo, e dizemos: subtrahindo 5 unidades de 13 unidades, restam 8 unidades; depois, passando á subtracção parcial das dezenas, juntam-se as mesmas 10 unidades, ou 1 dezena, ás 4 dezenas do diminuidor, e dizemos: 5 dezenas subtrahidas de 8 dezenas dão de resto 3 dezenas. Na subtracção seguinte encontra-se a mesma difficuldade; 8 centenas não se podem subtrahir de 7 centenas; juntam-se tambem 10 centenas ás 7 do diminuendo, e dizemos: subtrahidas 8 centenas de 17 centenas restam 9 centenas; na operação seguinte juntam-se tambem 10 centenas, ou 1 milhar, aos 3 milhares do diminuidor, e dizemos: 4 milhares subtrahidos de 6 milhares restam 2 milhares; e emfim subtrahida 1 dezena de milhar de 3 dezenas de milhar, restam 2 dezenas de milhar. Obtem-se assim para differença 22938.

O processo praticado n'este caso funda-se no principio que convem enunciar: *A differença de dois numeros não muda, quando a ambos se augmenta o mesmo numero de unidades.*

**23.** Dá-se na pratica a disposição seguinte, muito commoda para a execução das operações:

| | I | | II |
|---|---|---|---|
| | 36786 | | 36783 |
| | 13245 | | 13845 |
| Differença | 23541 | Differença | 22938 |

D'estes exemplos resulta a regra pratica:

*Para fazer a subtracção de dois numeros, escreve-se o menor debaixo do maior, de maneira que os algarismos que representam unidades da mesma ordem fiquem na mesma columna vertical; depois de produzir um traço por baixo do menor, subtrahem-se successivamente, a começar da direita, as unidades de cada algarismo inferior das do algarismo que lhe corresponde superiormente, e escreve-se o resultado na mesma columna por baixo do traço. Se alguma d'estas subtracções fôr impossivel, juntam-se 10 unidades ás do algarismo superior e, ao passar á columna immediata, junta-se uma unidade ás do algarismo inferior.*

**24.** Observações praticas. — 1.º Se o numero menor tiver menos algarismos que o maior, os algarismos que faltam podem substituir-se por zeros, mas é inutil escreve-los.

2.ª No primeiro exemplo do numero antecedente, era indifferente começar a operação pela direita ou pela esquerda;

é porém indispensavel, no segundo exemplo, começar pela direita.

**25. Prova da subtracção.** — Para verificar uma subtracção, addiciona-se o resto ao diminuidor: a somma deve ser igual ao diminuendo. A esta verificação dava-se antigamente o nome de *prova real* da subtracção.

**26.** Do mesmo modo que a addição serve de prova á subtracção, a subtracção póde servir de prova á addição. De facto, se uma addição está exacta, subtrahindo á somma obtida, successivamente todas as parcellas, deve chegar-se ao resto zero.

Assim, no exemplo do n.º 16, faz-se a prova á somma 104672 obtida, executando cinco subtracções successivas:

$$\begin{array}{r} 104672 \\ 9203 \\ \hline 95469 \\ 2125 \\ \hline 93344 \\ 73215 \\ \hline 20129 \\ 20001 \\ \hline 128 \\ 128 \\ \hline 0 \end{array}$$

**27. Complemento arithmetico.** — O complemento arithmetico de um numero é o resto da subtracção d'esse numero da unidade decimal de ordem immediatamente superior á mais elevada do numero.

Assim, o complemento de 6 é 4, porque $10-6=4$; o complemento de 349 é 651, porque $1000-349=651$; o complemento de 15490 é 84510.

Esta operação pratica-se escrevendo

$$\begin{array}{ccc} 9 & 9 & {\scriptstyle (10)} \\ 3 & 4 & 9 \\ \hline 6 & 5 & 1 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccccc} 9 & 9 & 9 & {\scriptstyle (10)} & 0 \\ 1 & 5 & 4 & 9 & 0 \\ \hline 8 & 4 & 5 & 1 & 0 \end{array}$$

isto é, obtem-se o complemento de um numero, tomando *mentalmente* o complemento do seu primeiro algarismo *significativo* da direita para 10, e o dos outros para 9.

**Subtracção por complementos.** — Para subtrahir um numero de outro, póde-se sommar a este o complemento arithmetico d'aquelle, subtrahindo da somma a unidade decimal para a qual se tomou o complemento.

Por exemplo, para subtrahir de 45678 o numero 425, podemos sommar a 45678 o complemento de 425, que é 575, o que dá 46253, e subtrahir uma unidade de mil a este numero; 45253 é a differença dos dois numeros.

Esta regra do complemento funda-se no seguinte principio: *Para subtrahir de um numero uma differença indicada de dois outros,* basta sommar a esse numero o diminuidor da differença e subtrahir da somma o diminuendo. Assim, o numero 425 sendo a differença indicada $1000-575$, juntou-se a 45678 o diminuidor 575 e diminuiu-se á somma o diminuendo 1000. Um exemplo usual torna intuitivo o principio: pagando uma divida de 4\$000 reis com uma nota de 10\$000 réis recebo de troco 6\$000 réis; tirei do meu dinheiro 10\$000 réis e augmentei-o em 6\$000 réis, ou augmentei-o d'esta quantia e diminui-o d'aquella, para effectivamente o diminuir de 4\$000 réis = 10\$000 réis — 6\$000 réis.

Outros principios geraes relativos á subtracção:

*a) Para subtrair de um numero a somma de muitos outros, basta diminuir d'esse numero successivamente as parcellas do total subtractivo.*

Por exemplo, para subtrair de 40 a somma $7 + 12 + 8$, podemos proceder como segue:

$$40 - 7 = 33, \quad 33 - 12 = 21, \quad 21 - 8 = 13$$

Inversamente: *tendo de subtrair de um numero successivamente muitos outros, basta subtrair-lhe a somma d'esses outros.*

Por exemplo, tendo de subtrair a 40 successivamente 7, 12 e 8, basta subtrair a 40 o numero 27, somma d'estes tres numeros, o que dá 13.

*b) Para sommar a um numero a differença indicada de dois numeros, basta juntar ao numero o diminuendo da differença e subtrair da somma o diminuidor.*

Por exemplo, tendo de juntar a 12 a differença $8 - 3$, basta juntar 8 a 12, o que dá 20, e subtrair 3 de 20, o que dá 17.

*c)* Em addições e subtracções successivas, indicadas em muitos numeros, podem-se effectuar de qualquer modo as operações, comtanto que as subtracções se possam executar.

Seja, por exemplo, $18 - 6 + 3 + 5 - 7$; obtem-se o mesmo resultado 13, effectuando as operações n'esta ordem $18 + 5 - 6 - 7 + 3$, ou n'esta $18 + 5 + 3 - 6 - 7$; mas não n'esta $5 - 6 - 7 + 18 + 3$, por não ser possivel executar $5 - 6$.

A ordem mais pratica a dar ás operações é pôr primeiramente as parcellas a sommar e seguidamente os numeros a subtrair; temos no exemplo

$$15 + 3 + 5 - 7 - 6.$$

Effectua-se pois a somma $15 + 3 + 5 = 23$, e depois subtrae-se a este numero successivamente 7 e 6, que, pelo principio *a)*, é subtrair a somma $7 + 6 = 13$.

Assim para achar o resultado final de certo numero de addições e subtracções, faz-se a somma dos numeros additivos separadamente, e a dos subtractivos tambem separadamente, e effectua-se depois a differença das duas sommas.

Teriamos no exemplo para resultado final $23 - 13 = 10$.

## EXERCICIOS

**17.** O nosso notavel mathematico Pedro Nunes, nasceu em Alcacer do Sal, no anno de 1502 (como elle proprio refere n'uma das suas obras), e, provavelmente, morreu no anno de 1578; quantos annos viveu?

**18.** Quantos annos tem decorrido desde a invenção da imprensa, em 1450? desde a invenção da polvora, em 1346? desde o descobrimento da America, em 1492? desde o descobrimento da vaccina, em 1790? desde a invenção da machina de vapor, em 1799; do caminho de ferro, em 1831? da telegraphia electrica, em 1832? da photographia, em 1839?.

**19.** Quanto se deve juntar ao numero 22486 para obter o numero 112321?

**20.** Quantas vezes se póde subtrahir 5439 de 82312 e dos restos successivos?

**21.** A distancia da terra ao Sol varia durante o anno: a maior é 351833000 legoas, e a menor 34017000. Que differença ha entre a maxima e a minima distancia?

**22.** A terra tem a fórma de uma laranja: o raio maior (do equador) é 6376984 metros, e o menor (dos polos) é 6356324 metros. Que differença ha entre os dois raios?

**23.** Um balão, depois de se ter elevado 2200 metros, para encontrar corrente de ar favoravel, desceu 740 metros. Subindo depois 1300, descendo em seguida 1750, elevando-se emfim 1800, e baixando depois á Terra. Qual é a maxima altura a que se elevou o balão?

**24.** Effectue-se sobre um numero qualquer de tres algarismos, em que os dois extremos são differentes, a seguinte serie de operações:

escreva-se esse numero invertendo a ordem dos seus algarismos;

effectue-se a differença dos dois numeros;

escreva-se esta differença invertendo a ordem dos seus algarismos;

ajunte-se este novo numero áquella differença.

O resultado d'esta ultima operação é sempre 1089, qualquer que seja o numero que primitivamente se tomou, comtanto que os seus dois algarismos extremos sejam differentes.

---

## § 3.° Multiplicação

**28. Definições.** — A addição de muitas parcellas ou numeros apresenta um caso notavel; é aquelle em que todas as grandezas ou parcellas são iguaes. Por exemplo: $8+8+8+8+8=40$; o numero 8, ou a grandeza que elle representa, está repetido cinco vezes; diz-se que 8 está multiplicado por 5.

*Multiplicar um numero por outro é repetir como parcella o primeiro tantas vezes quantas são as unidades do segundo.*

O primeiro que exprime a grandeza repetida, chama-se *multiplicando*, o segundo *multiplicador*, e o resultado é o *producto*.

**29.** A multiplicação indica-se pelo signal $\times$ [1] ou por

---

(1) Este signal foi inventado por Oughtred (1631), e o ponto, que o substitue, por Harriot, 1631.

um ponto. Exemplo: $8 \times 5$ ou $8.5$ significa 8 multiplicado por 5; e o resultado da operação exprime-se assim

$$8 \times 5 = 40 \quad \text{ou} \quad 8.5 = 40.$$

Ao multiplicando e multiplicador dá-se o nome commum de *factores* do producto.

**30.** O producto é sempre da mesma especie do multiplicando: assim, 6 vezes 7 homens dá 42 homens. O multiplicador é sempre um numero abstracto.

Se o multiplicando é igual a *um*, o producto é igual ao multiplicador; se o multiplicando é igual a *zero*, o producto é *zero*. Assim

$$1 \times 8 = 8 \quad \text{e} \quad 0 \times 8 = 0.$$

**31.** Como o multiplicador exprime o numero de parcellas iguaes da somma, o menor valor que póde ter é 2. Mas é conveniente considerar ainda como casos de multiplicação os do multiplicador ter o valor 1 ou zero; e estabelece-se, por definição, que,

$$8 \times 1 = 8 \quad \text{e} \quad 8 \times 0 = 0.$$

**32.** Tambem se diz que o producto é multiplo do multiplicando; em geral, chamam-se *multiplos* d'um numero os productos que se obteem multiplicando esse numero por qualquer numero inteiro.

Exemplo: os multiplos de 3 são

$$3 \times 1, \quad 3 \times 2, \quad 3 \times 3, \quad 3 \times 4, \quad 3 \times 5, \quad 3 \times 6, \quad \text{etc.}$$

ou

$$3, \quad 6, \quad 9, \quad 12, \quad 15, \quad 18, \quad \text{etc.}$$

Os factores d'um producto dizem-se tambem *submultiplos* do producto; assim, 5 e 3 são submultiplos de 15.

**33. Multiplicação de dois numeros d'um só algarismo; taboa de multiplicação.** — É o caso mais simples da multiplicação, que tem de ser mental; isto é, devem se saber de cór os productos de dois numeros digitos. Estes resultados acham-se na seguinte taboa, que facilita esse exercicio da memoria:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 |
| 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 |
| 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | 32 | 36 |
| 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 |
| 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 | 42 | 48 | 54 |
| 7 | 14 | 21 | 28 | 35 | 42 | 49 | 56 | 63 |
| 8 | 16 | 24 | 32 | 40 | 48 | 56 | 64 | 72 |
| 9 | 18 | 27 | 36 | 45 | 54 | 63 | 72 | 81 |

A primeira linha horisontal contém os numeros digitos escriptos na sua ordem natural, e as outras oito linhas horisontaes conteem os numeros correspondentes, repetidos o numero de vezes que indica a ordem da linha horisontal; de sorte que para obter um producto, por exemplo $7 \times 5$, procura-se na linha horisontal que começa por 5 o numero que pertence á columna vertical que começa por 7, o qual é 35. Tambem se obtinha o mesmo numero, procurando na linha horisontal que começa por 7 o numero que pertence á columna vertical que começa por 5. Resulta, como facto numerico, que $7 \times 5$ é o mesmo que $5 \times 7$; e a taboa mostra que o mesmo facto se dá com dois outros factores quaesquer. Observe-se que uma columna e uma linha que começam pelo mesmo numero são constituidas pelos mesmos numeros; e que os numeros da taboa alinhados de 1 a 81 são productos de dois numeros iguaes.

**Multiplicação de um numero qualquer por 10, 100, 1000, etc.** — N'este caso, em que o multiplicador é um numero formado pela unidade seguida de zeros, obtem-se immediatamente o producto pelo mechanismo da numeração; basta escrever á direita do multiplicando, um, dois, tres, etc., zeros.

Assim

$$4215 \times 10 = 42150$$
$$4215 \times 100 = 421500$$
$$4215 \times 1000 = 4215000$$

**34. Multiplicação de um numero qualquer por um outro numero digito.** — Seja 3426 a multiplicar por 5: é repetir as 6 unidades do multiplicando 5 vezes, o que faz

30 unidades . . . . . . . . . . . . . . 30,
as 2 dezenas do multiplicando 5 vezes, o que faz 10 dezenas . . . . . . . . . . . . . . 100,
as 4 centenas do multiplicando 5 vezes, o que faz 20 centenas . . . . . . . . . . . . . . 2000,
os 3 milhares do multiplicando 5 vezes, o que faz 15 milhares . . . . . . . . . . . . . . 15000,
e juntar estes productos parciaes, que se encontram na taboa de multiplicação; obtem-se o producto. 17130.

Na pratica juntam-se os productos parciaes á medida que se vão formando, e dá-se ao calculo a seguinte disposição:

$$\begin{array}{lr} & 3426 \\ & 5 \\ \hline \text{Producto} & 17130 \end{array}$$

e diz-se: 5 vezes 6 unidades dão 30 unidades; escreve-se 0 e retem-se tres dezenas; 5 vezes 2 dezenas dão 10 dezenas, com 3 dezenas retidas, 13 dezenas; escreve-se 3 na casa das dezenas e retem-se 1 centena; 5 vezes 4 centenas dão 20 centenas, com uma centena retida, 21 centenas; escreve-se 1 na casa das centenas e retem-se 2 milhares; 5 vezes 3 milhares dão 15 milhares, com 2 milhares retidos, 17 milhares, que se escrevem á esquerda dos tres algarismos obtidos.

**35. Multiplicação de um numero qualquer por um numero formado de um algarismo significativo, differente de um, seguidos de zeros.** — Seja 3426 a multiplicar por 500: é repetir o multiplicando 5 vezes e o resultado 100 vezes. Temos pois a regra:

*Para multiplicar um numero por um numero formado de um algarismo significativo seguido de zeros, multiplica-se o primeiro numero por este algarismo, como se representasse unidades simples, e escrevem-se á direita do producto tantos zeros quantos ha á direita do dito algarismo.*

**36. Multiplicação de dois numeros quaesquer.** — Seja 341 a multiplicar por 286; é repetir 341, successivamente, 6 vezes, 80 vezes, e 200 vezes, e juntar os resultados

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 341 | | | | | | |
| 286 | | | | | | |
| 2046 . . | producto parcial | de | 341 | por | | 6 |
| 27280 . . | » | » | » | » | » | 80 |
| 68200 . . | » | » | » | » | » | 200 |
| 97526 | | | | | | |

Na pratica dispensa-se a escripta dos zeros, que servem para dar o valor de posição ao primeiro algarismo dos productos parciaes; o calculo n'este exemplo, escrevia-se assim

```
  341
  286
 ----
 2046
2728
682
-----
97526
```

Outro exemplo: 341 × 2086.

Typo do calculo

```
   341
  2086
  ----
  2046
 2728
 682
------
711326
```

Regra geral pratica da multiplicação. — *Para multiplicar dois numeros quaesquer, escreve-se o multiplicador por baixo do multiplicando e sublinha-se o multiplicador; multiplica-se o multiplicando por cada um dos algarismos significativos do multiplicador, a partir da direita; escrevem-se estes productos parciaes, uns por baixo dos outros, de modo que o primeiro algarismo da direita de cada um fique debaixo do algarismo do multiplicador que deu esse producto parcial; e sommam-se todos os productos parciaes. Esta somma é o producto dos dois numeros dados.*

**37.** Observações praticas. — 1.ª É indifferente começar a formação dos productos parciaes pela direita ou pela esquerda do multiplicador; a disposição material do calculo é que varia

| | | |
|---|---|---|
| 341 | | |
| 286 | | |
| 682 | . . . | producto parcial de por 2 |
| 2728 | . . . | » » » » 8 |
| 2046 | . . . | » » » » 6 |
| 97526 | | |

Seria preferivel, como fez notar Lagrange, que executassemos a multiplicação por este modo, pois que elle tem a vantagem de fazer logo conhecer os algarismos das unidades mais elevadas do producto, que são na multiplicação de grandes numeros o que ordinariamente mais interessa conhecer do producto.

2.ª Se os factores terminam em zeros, faz-se a multiplicação dos numeros sem os zeros, e escrevem-se á direita do resultado obtido tantos zeros quantos ha nos dois factores.

Exemplo: $378000 \times 2700$: o producto de 378 por 27 é 10206; o producto pedido é 1020600000.

3.ª Se o multiplicando tem menos algarismos que o multiplicador, convém inverter a ordem dos factores, pois que d'este modo escrevem-se menos productos parciaes.

**38. Producto de muitos factores.** — Fazer o producto de muitos factores é multiplicar os dois primeiros, o resultado obtido pelo terceiro, este resultado pelo quarto, e assim em diante.

Exemplo: $2 \times 3 \times 5 \times 6$ significa: producto de 2 por 3, ou 6, multiplicado por 5, ou 30, multiplicado por 6 ou 180.

Na pratica é frequente ter de fazer estes productos successivos: por exemplo, para achar o numero de minutos que teem 4 semanas, temos de multiplicar 4 por 7, depois o producto por 24, e o novo producto por 60; isto é $4 \times 7 \times 24 \times 60$.

**39. Propriedades da multiplicação.** — Verifica-se praticamente que, por exemplo,

$$5 \times 3 \times 7 = 7 \times 3 \times 5;$$
$$6 \times 5 \times 2 \times 7 = 6 \times 10 \times 7 = 6 \times 70;$$

isto é:

1.º *O producto não muda quando se inverte a ordem dos factores* (propriedade commutativa);

2.º *O producto não muda quando se substituem alguns dos factores pelo seu producto effectuado* (propriedade associativa).

O emprego pratico d'estas duas propriedades dá uma prova da multiplicação; inverte-se a ordem dos factores e forma-se outra vez o producto, que deve ser igual ao que se obteve. Se os factores são mais de dois, executam-se productos com alguns d'elles, e faz-se o producto de todos, que deve ser igual ao que se obteve.

Observação. — A pratica da propriedade associativa da multiplicação torna, em certos casos, mais expedito o calculo do producto. Exemplo:

$$5 \times 9785 \times 25 \times 140 \times 4 \times 2;$$

executam-se primeiramente as multiplicações

$$5 \times 2 = 10 \quad \text{e} \quad 25 \times 4 = 100,$$

e teremos depois a calcular o producto final

$$9785 \times 10 \times 100 \times 140 = 9785 \times 140 \times 1000;$$

3.º *Multiplica-se uma somma por um numero, multiplicando cada parcella por esse numero, e sommando os productos parciaes.*

Exemplo: $3 + 7$ a multiplicar por $5$ dá $15 + 35 = 50$.

E pela propriedade commutativa (1.º), póde-se tambem dizer: *Multiplica-se um numero por uma somma, multiplicando o numero successivamente por cada uma das parcellas da somma, e sommando os productos.*

Esta propriedade da multiplicação diz-se *distributiva* relativamente á somma.

É n'esta propriedade que se fundam os casos dos n.os 34 e 35 da regra pratica da multiplicação.

4.º *Multiplica-se uma differença de dois numeros por um numero, multiplicando cada termo da differença por esse numero, e subtrahindo ao producto parcial do diminuendo o producto parcial do diminuidor.*

Exemplo: $8 - 2$ a multiplicar por 3 dá $24 - 6 = 18$.

E pela propriedade commutativa (1.º), póde-se tambem dizer: *Multiplica-se um numero por uma differença, multiplicando esse numero por cada termo da differença, e subtrahindo ao producto maior o outro.*

Esta propriedade da multiplicação diz-se *distributiva* relativamente á subtracção.

168
504

## EXERCICIOS

**25.** $1122334455667789 \times 594$.

**26.** Verificar com exemplos que, tomando quatro numeros consecutivos quaesquer o producto dos dois médios excede em duas unidades o producto dos dois extremos.

**27.** Uma machina produz 300 prégos por minuto: trabalhou 6 dias, respectivamente durante 8, 5, 7, 2, 1 e 5 horas: quantos prégos fabricou?

**28.** Um negociante comprou 146 metros de panno a 2$000 réis o metro; vendeu 110 metros a 3$500 réis e o resto a 1$500 réis; quanto ganhou?

**29.** Um bico de gaz custa 3 réis por hora; quanto custa

456
168
588

a illuminação d'um theatro que tem 786 bicos, havendo durado o espectaculo 16 noites, a 5 horas por noite?

**30.** Quantas pancadas dá n'um anno o relogio d'uma torre que dá e repete as horas?

**31.** Qual a distancia em kilometros do planeta Neptuno ao Sol? A distancia de Neptuno ao Sol é 30 vezes maior que a da Terra ao Sol; esta é 24000 raios terrestres, e o raio terrestre é 6370 kilometros.

**32.** Quantos segundos tem o anno de 1908? Este anno tem 366 dias, o dia 24 horas, a hora 60 minutos, e o minuto 60 segundos.

**33.** O som propaga-se no ar caminhando 340 metros por segundo: a que distancia está de nós uma tempestade cujo trovão foi ouvido 14 segundos depois de apparecer o relampago?

**34.** Um livro compõe-se de 23 folhas de 16 paginas cada uma; suppondo, em média, 32 linhas por pagina e 48 letras por linha, quantas letras tem o livro?

X

---

## § 4.º Divisão

19.

**40. Definições.** — Sob dois aspectos se póde encarar a operação da *divisão*, que litteralmente significa decomposição em diversas partes: 1.º dividir uma grandeza por um numero inteiro é decompôr a grandeza em tantas partes eguaes quantas as unidades d'esse numero; exemplo, dividir 20 metros por 4 é decompôr $20^m$ em 4 partes iguaes; 2.º dividir uma grandeza por outra grandeza é medir a primeira por meio da segunda tomada com unidade; é determinar o numero de vezes que a primeira contém a segunda; exemplo, dividir $20^m$ por $5^m$ é achar o numero de grupos de $5^m$ em que se póde decompôr $20^m$. No primeiro aspecto, procura-se o valor d'uma das partes em que a grandeza se decompõe: 5 metros no exemplo. No segundo aspecto, procura-se o numero em que a primeira grandeza se decompõe em partes eguaes á segunda grandeza: 4 no exemplo.

As grandezas são em arithmetica representadas por numeros; a operação recae sobre dois numeros inteiros, e os dois aspectos indicados na divisão ficam comprehendidos na seguinte definição:

*Dividir um numero inteiro por outro numero inteiro, é achar um terceiro numero que multiplicado pelo segundo produza o primeiro.* Assim, dividir 20 por 4 é achar o numero que repetido 4 vezes produza 20, isto é, 5. O primeiro numero, que se quer dividir chama-se *dividendo.*

O numero pelo qual o dividendo se divide, chama-se *divisor;* no exemplo, 4 é o divisor.

O numero que se procura chama-se *quociente* (1); no exemplo, 5 é o quociente.

O dividendo e divisor teem a denominação commum de *termos* da divisão.

**41.** Nem sempre existe o quociente em numero inteiro, isto é, o dividendo não é sempre o producto do divisor por um numero inteiro; exemplo, 23 a dividir por 4, facto que se exprime dizendo que 23 *não é divisivel* por 4. N'este caso muito importante, de que adiante nos occuparemos, a operação em numeros inteiros tem por fim achar o *maior* numero de vezes que o dividendo contém o divisor, ou o *maior* multiplo do divisor contido no dividendo, e o que se deve juntar a este multiplo para formar o dividendo. No exemplo, trata-se de decompôr o numero 23 em duas partes, uma das quaes seja o maior multiplo de 4 contido em 23, que é $4 \times 5$, ou 20, e o numero que junto a 20 produz 23, que é 3.

---

(1) É do segundo ponto de vista da divisão que a palavra quociente tira a sua origem do latim *quotiens* (quantas vezes).

Este numero que se junta, chama-se *resto*. O resto é sempre menor que o divisor.

N'este caso não se determina completamente o quociente, mas só a sua *parte inteira*. No exemplo, 5 é a parte inteira do quociente de 23 dividido por 4.

O dividendo é, portanto, o producto do divisor pela parte inteira do quociente, augmentado esse producto com o resto.

Por extensão, quando o dividendo é divisivel pelo divisor, diz-se que *o resto é zero*.

**42.** Se D representa um numero inteiro qualquer, tomado como dividendo, e $d$ outro numero inteiro, tomado como divisor, $q$ a parte inteira do quociente, e $r$ o resto, temos, o que foi indicado em linguagem vulgar, expresso mais concisamente por

$$\mathrm{D} = d \times q + r,$$

subentendendo-se que $r$ é menor que $d$.

No exemplo, $23 = 4 \times 5 + 3$.

**43.** A divisão indica-se por dois pontos ([1]), postos a separar o dividendo do divisor, ou por um traço sobre o qual se colloca o dividendo e por baixo o divisor. Assim 23 a dividir por 4, escreve-se:

$$23 : 4, \quad \text{ou} \quad \frac{23}{4}.$$

**44. Casos simples da divisão em que o quociente tem um só algarismo.** — O quociente tem um só algarismo se escrevendo um zero á direita do divisor, isto é, multiplicando o divisor por 10, o numero resultante fôr maior que o dividendo.

---

([1]) Este signal foi inventado por Leibniz. O traço de divisão é muito mais antigo; já era empregado por Leonardo de Pisa (1202).

Exemplo: o quociente da divisão de 56238 por 7853 tem um só algarismo, pois que $7853 \times 10 = 78530$ é maior que o dividendo.

1.º Caso. — *O divisor tem tambem um só algarismo.* É o caso mental dado pela taboa da multiplicação, que se tem de cór. Assim, 81 dividido por 9 dá 9 para o quociente; 75 dividido por 9 dá 8 para parte inteira do quociente e 3 para resto.

2.º Caso. — *O divisor tem mais d'um algarismo.*

Regra. — *Separa-se á esquerda do dividendo o numero que representa as unidades da mesma ordem do primeiro algarismo da esquerda do divisor; divide-se aquelle numero por este algarismo (caso mental); a parte inteira do quociente d'esta divisão é o algarismo do quociente procurado ou um algarismo maior. Para verificar se é o verdadeiro algarismo do quociente, multiplica-se o algarismo achado pelo divisor; se o producto se poder subtrahir do dividendo, o algarismo achado é o verdadeiro; no caso contrario diminue-se-lhe uma unidade, e procede-se do mesmo modo até se chegar a uma subtracção possivel.*

Exemplo 1.º : 56238 a dividir por 7853:

56 dividido por 7 dá 8; $7853 \times 8 = 62824$: como este producto é maior que o dividendo o algarismo 8 é demasiado grande; passa-se a ensaiar 7; $7853 \times 7 = 54971$; como este producto não é agora maior que o dividendo, 7 é a verdadeira parte inteira do quociente.

Dá-se á operação a disposição seguinte, fazendo mentalmente os ensaios (sem nada escrever):

$$
\begin{array}{r|l}
56238 & \underline{7853} \\
54971 & 7\ldots \quad \text{quociente} \\
\cline{1-1}
\text{Resto}\ldots \quad 1267 &
\end{array}
$$

Antes de escrever o algarismo 8 no quociente, indicado pela divisão de 56 por 7, multiplicam-se por 8, sem nada escrever, os dois primeiros algarismos da esquerda do divisor: 8

vezes 8, 64; conserva-se 6 de memoria; 7 vezes 8, 56 e 6, 62, sendo este numero maior que 56, o algarismo 8 é elevado.

Tambem na pratica faz-se a subtracção ao dividendo, ao mesmo tempo que se vão formando os productos parciaes do divisor pelo quociente:

Typo pratico do calculo

| | |
|---|---|
| 56238 | 7853 |
| 1267 | 7 |

Exemplo 2.º: 66538 a dividir por 7000; 66 dividido por 7 dá 9 e resto 3; 9 é, sem ensaio, a parte inteira do quociente, e o resto é 3 seguido de 538, ou 3538.

Quando o divisor é formado por um algarismo significativo seguido de zeros, o algarismo do quociente determina-se sem ensaios.

**45. Caso geral em que o quociente tem mais de um algarismo.**— Determina-se de antemão o numero de algarismos da parte inteira do quociente, escrevendo successivamente zeros á direita do divisor até se formar um primeiro numero maior que o dividendo: o numero de zeros que foi necessario escrever para isso, indica o numero de algarismos do quociente.

Exemplo: 4785632 : 6321; a parte inteira do quociente tem tres algarismos, por que 63210, 632100, são menores que o dividendo, mas 6321000 é maior que elle.

Regra. — *Escreve-se o divisor á direita do dividendo, separando-os por um traço vertical, e passa-se por baixo do divisor um traço horisontal, debaixo do qual se escreve o quociente. Separam-se á esquerda do dividendo os algarismos necessarios para se formar um numero que contenha o divisor; é* o primeiro dividendo parcial. *Divide-se este dividendo parcial pelo divisor (44, 2.º caso): esta divisão dá o primeiro algarismo da esquerda do quociente. Multiplica-se este algarismo pelo divisor e subtrahe-se o* *producto do primeiro dividendo parcial; á direita do resto, escreve-se o algarismo do dividendo seguinte ao primeiro dividendo parcial, o que fórma* o segundo dividendo parcial. *Opera-se com este dividendo parcial exactamente como se operou com o primeiro; obtem-se o segundo algarismo do quociente; e continua-se até se terem empregado todos os algarismos do dividendo. O ultimo resto é o resto da divisão.*

*Quando algum dividendo parcial é menor que o divisor, escreve-se um zero no quociente, e baixa-se o algarismo seguinte do dividendo para formar outro dividendo parcial.*

Exemplo:

1.° Dividir 4785632 por 6321.

Typo do calculo

| | | |
|---|---|---|
| | 1.° dividendo parcial | |
| | 47856.32 | 6321 |
| | 44247 | 757. parte inteira do quociente. |
| 1.° resto . . . . . | 3609 | |
| 2.° divid. parcial . . | 3609 3 | |
| | 3160 5 | |
| 2.° resto . . . . . | 448 8 | |
| 3.° divid. parcial . . | 488 82 | |
| | 442 47 | |
| resto final. . . . . | 6 35 | |

### Typo pratico do calculo

(Com as simplificações indicadas, n.º 44, na formação dos restos parciaes)

| | | |
|---|---|---|
| | 47856.32 | 6321 |
| | 3609 3 | 757 |
| | 448 82 | |
| Resto... | 6 35 | |

2.º Dividir 8988186 por 596.

| | | |
|---|---|---|
| | 898.8186 | 596 |
| 2.º divid. parcial.... | 302 8 | 15080 |
| 3.º » » .... | 4 81 | |
| 4.º » » .... | 4 818 | |
| Resto... | 506 | |

3.º Dividir 1054854 por 351.

| | | |
|---|---|---|
| | 1054.854 | 351 |
| 2.º divid. parcial...... | 1 8 | 3005 |
| 3.º » » ...... | 1 85 | |
| 4.º » » ...... | 1 854 | |
| Resto...... | 99. | |

**46. Observações praticas.** — 1.ª Quando o divisor tem um só algarismo, dispensa-se na pratica a escripta dos dividendos parciaes, e escreve-se logo o quociente. Exemplo: 7187432 a dividir por 8; procede-se do seguinte modo: a oitava parte de 71 é 8, a oitava parte de 78 é 9, a oitava parte de 67 é 8, a oitava parte de 34 é 4, a oitava parte de 23 é 2, a oitava parte de 72 é 9, com o resto final zero. O quociente exacto é 898429.

Vê-se pois: «a parte inteira do quociente de dois numeros tem tantos algarismos quantas as unidades da differença dos numeros de algarismos dos dois termos da divisão, ou este numero augmentado em 1».

2.ª Quando o divisor termina em zeros, desprezam-se esses zeros, e separam-se na direita do dividendo outros tantos algarismos; divide-se a parte do dividendo que ficou á esquerda, pelo divisor privado dos zeros; o quociente d'esta divisão é precisamente a parte inteira do quociente da divisão proposta; mas, para obter o resto, devem escrever-se, á direita do resto da divisão que se effectuou, os algarismos desprezados no dividendo.

Exemplo: 683257 : 5200.

| | | |
|---|---|---|
| | $6832\overline{56}$ | $52\overline{00}$ |
| | 163 | 131 |
| | 72 | |
| Resto... | 2056 | |

3.ª Quando o quociente deve ter muitos algarismos e o divisor tambem tem bastantes, ha vantagem pratica em formar de antemão uma taboa dos nove primeiros multiplos do divisor; a operação corre depois com rapidez e segurança.

Exemplo: Dividir 3170704126891752 por 37418652.

| | |
|---|---|
| 317070412.6891752 | 37418652 |
| 17721196 6 | 84735926 |
| 2753735 88 | |
| 134430 249 | |
| 22174 2931 | |
| 3464 96717 | |
| 97 288495 | |
| 22 4511912 | |
| 0 | |

Taboa dos multiplos do divisor

| | |
|---|---|
| 37418652 .. | 1 vez |
| 74837304... | 2 vezes |
| 112255956... | 3 » |
| 149674608... | 4 » |
| 187093260... | 5 » |
| 224511912... | 6 » |
| 261930564... | 7 » |
| 299349216... | 8 » |
| 336767868... | 9 » |

Pela taboa determina-se immediatamente o maior multiplo do divisor contido em cada dividendo parcial, o que dá logo cada algarismo do quociente sem ensaios; e não ha a fazer senão subtracções.

— 19 — 21

**47. Prova da divisão.** — Para se verificar uma divisão, tirando-lhe a prova que antigamente se chamava *real*, multiplica-se o divisor pelo quociente e junta-se ao producto o resto; se a somma dér o dividendo haverá muita probabilidade de que a divisão foi bem feita. Subentende-se que o resto é menor que o divisor.

No exemplo 1.° do n.° 45 a pratica da prova é:

```
   6321
    757
-------
  44247
 31605
44247
-------
4784997
    635
-------
4785632...  igual ao dividendo.
```

**Prova da multiplicação.** — A prova da multiplicação faz-se pela divisão do producto por um dos factores: a multiplicação está *provavelmente* exacta, se a divisão se fizer sem resto e o quociente fôr o outro factor. É o que antigamente se chamava *prova real.*

**Principios relativos á divisão exacta.**

*a) Se as parcellas de uma somma são divisiveis por um numero, para dividir a somma por esse numero basta dividir por elle cada parcella da somma, e addicionar os quocientes parciaes.*

Assim, 12, 20, 24 e 40 são divisiveis por 4, a somma $12 + 20 + 24 + 40 = 96$ é divisivel por 4, e o quociente de 96 por 4 obtem-se addicionando os quocientes parciaes 3, 5, 6 e 10, o que dá 24 para quociente de 96 por 4.

*b) Se os termos de uma differença são divisiveis por um numero, para dividir a differença por esse numero basta dividir cada termo de differença, por elle, e do maior quociente subtrair o menor.*

Por exemplo, 30 e 12 são divisiveis por 6; o quociente da differença $30 - 12 = 18$ dividida por 6 é a differença $5 - 2 = 3$ dos quocientes dos dois termos 30 e 12.

Estes dois principios exprimem as propriedades distributivas da divisão relativamente á somma e á subtracção.

*c) Quando um dos factores de um producto é divisivel por um numero, o producto é divisivel por esse numero, e obtem-se o quociente do producto dividindo o referido factor por esse numero.*

Assim, considerando o producto $4 \times 15 \times 7$, 15 é divisivel por 3; o producto é pois divisivel por 3; o quociente do producto por 3 é pois $4 \times 5 \times 7 = 140$.

Portanto: *para dividir um producto de factores por um d'elles, basta supprimir esse factor.*

O quociente da divisão de $3 \times 4 \times 5$ por 4 é o producto $3 \times 5$, obtido pela suppressão do factor 4.

*d) Para dividir um numero pelo producto de factores,* *basta dividir esse numero pelo primeiro factor, o quociente obtido pelo segundo factor, o novo quociente pelo terceiro factor, e assim andando até ao ultimo factor.*

Por exemplo, para dividir 108 pelo producto $3 \times 4$, póde-se dividir primeiramente por 3, o que dá 36, depois dividir 36 por 4, o que dá 9; o quociente de 108 por $3 \times 4$ é pois 9.

Portanto: *para dividir um producto de factores pelo producto de alguns dos seus factores, basta supprimir no producto dividendo os factores que constituem o divisor.*

Assim, o quociente do producto $2 \times 4 \times 7 \times 3 \times 5$ pelo producto $3 \times 5 \times 4$ é o producto $2 \times 7$, obtido pela suppressão n'aquelle dos factores 3, 5 e 4.

*c) Dividindo por um numero o dividendo e o divisor, suppostos divisiveis por esse numero, o quociente da divisão fica o mesmo, mas o resto vem dividido por esse numero.*

Por exemplo, a divisão de 35000 por 8000 dá 4 de quociente e 3000 de resto; a divisão de 35 por 8 dá pois o mesmo quociente 4, e o resto 3.

21

---

## EXERCICIOS

**35.** Qual é o maior numero que multiplicado por 271 dá para producto um numero não superior a 8461576?

**36.** Quantas vezes se deve subtrahir 96 de 421659 e dos restos successivos para obter um resto inferior a 96?

**37.** N'uma divisão, o divisor é 9356 e o resto 1835; quanto se deve tirar ao dividendo para que o quociente diminua em 4 unidades e a divisão se faça exactamente?

**38.** N'uma divisão, o divisor é 386 e o resto 105; quanto se deve juntar ao dividendo para que o quociente augmente 3 e a divisão se faça exactamente?

**39.** N'uma divisão, o divisor é 53 e o resto 26; quanto se deve juntar ao dividendo para que o quociente augmente 5 e o resto seja 18?

**40.** A luz vem do Sol á Terra em 493 segundos; quanto anda por segundo, sabendo-se que a distancia do Sol á Terra é de 152880000 kilometros?

**41.** Dois comboios partem ao mesmo tempo de duas estações distantes 70800 metros, ao encontro um do outro; o primeiro anda 730 metros por minuto, o segundo 470 metros; passado que tempo se encontram os dois comboios e quanto andou cada um?

**42.** Um typographo empregou 3 folhas de papel para fazer as capas de 48 exemplares d'uma obra; quantas folhas do mesmo papel precisa ainda para as capas de toda a edição, que tem 2700 exemplares?

**43.** Um anno começou á sexta-feira; em que dia da semana cahirá 4 de agosto?

**44.** O som propaga-se com a velocidade de 340 metros por segundo; passados quantos segundos ouviremos uma explosão feita a 20060 metros de distancia?

**45.** A luz gasta em vir até nós da estrella mais proxima, que é a mais brilhante da constellação do Centauro, 4 annos e meio; da estrella Vega, a mais brilhante da constellação da Lyra, 21 annos; da estrella *polar*, 36 annos; quantas vezes estão estas estrellas mais afastadas de nós que o Sol?

**46.** Indicar o modo geral de obter todos os numeros, que divididos cada um por 299, deem um quociente igual ao resto.

**47.** N'uma divisão o dividendo é 4765 e o quociente 12; quaes são os numeros que podem ser divisor e resto?

## CAPITULO III

# Exercicios de calculo mental

**48.** O calculo póde fazer-se ou executando as operações, segundo as regras indicadas, sobre numeros *escriptos*, ou (dentro de certos limites) executando-as *mentalmente*, como se os numeros estivessem escriptos no papel ou na pedra.

A execução do calculo escripto suppõe sempre, para cada operação, o calculo mental da operação analoga sobre os numeros simples, como expressamente indicamos. Assim, o calculo escripto da addição, suppoz a addição mental de numero digito; o da multiplicação, a multiplicação mental de dois numeros digitos (taboa de multiplicação). Alargar mais o campo do exercicio mental necessario ao calculo escripto, afim de dispensar este em certos casos, é o que propriamente se quer indicar pela designação de *calculo mental* ou *oral.*

Os limites d'essa extensão são mui variaveis segundo os individuos e a idade; mas póde-se, e muito util é, exercitar no ensino da arithmetica pratica essa disposição mental.

Nos actos diarios de venda e de compra, o calculo recae frequentemente em pequenos numeros, ou em numeros cujo calculo póde ser reduzido ao de numeros mais simples ou mesmo digitos.

Não se póde submetter a regras fixas e precisas o processo do calculo mental; é, na maior parte dos casos, o bom senso e a sagacidade do calculador que as indica.

**49.** Eis alguns exemplos d'este genero de calculo para servirem de norma a outros que ao professor cumpre variar.

1.° *Addição e subtracção.*—Addicionar 74 e 43; opera-se assim: 70 e 40, 110; mais 4, mais 3, 117.

Addicionar 48 e 35; opera-se assim: 50 e 30, 80; mais 5, menos 2, 83.

Addicionar 368 e 129; opera-se assim: 37 dezenas e 13 dezenas, 50 dezenas, ou 500; menos 3, 497.

Subtrahir 26 de 89; opera-se assim: subtrahe-se 26 de 86, 60, e ajunta-se 3, 63.

Um individuo deu 10$000 réis para pagar a despeza de 7$385 réis de uma compra, quanto deve dar o vendedor? Opera-se assim: vão-se retendo os numeros 2, 6, 1, 5 que são respectivamente as differenças dos algarismos do numero, partindo da esquerda, para 9, sendo a do ultimo para 10, e obtem-se mui promptamente 2$615 réis para resto.

2.° *Multiplicação.*—As multiplicações por 20, 10, etc., reduzem-se ás multiplicações por 2, 3, etc., referindo o resultado a dezenas.

Exemplo: $23 \times 30$; $23 \times 3$ dezenas, ou 69 dezenas, ou 690.

Para multiplicar por 9, multiplica-se por 10 e subtrahe-se o multiplicando. Do mesmo modo para multiplicar por 19 ou 29 multiplica-se por 20 ou por 30 e subtrahe-se o multiplicando.

Para multiplicar por 5, multiplica-se por 10 e toma-se a metade do resultado; por 25, multiplica-se por 100 e divide-se o resultado por 4; por 125, multiplica-se por 1000 e divide-se o resultado por 8.

A multiplicação d'um numero de *dois* algarismos por 11, faz-se promptamente formando o numero com esses algarismos, intercalando entre elles a sua somma. Se a somma é maior que 9, intercala-se o algarismo das unidades da somma e augmenta-se uma unidade ao algarismo das dezenas do numero multiplicando. Assim, $71 \times 11$ dá 781, fazendo a somma $7+1=8$, e pondo o 8 entre 7 e 1: $79 \times 11$ dá 869, fazendo a somma $7+9=16$; e pondo o algarismo 6 entre 7 augmentado em 1, ou 8, e 9.

3.º A divisão por 5, faz-se dividindo por 10 e multiplicando o quociente por 2; por 25, dividindo por 100 e multiplicando o quociente por 4; por 125, dividindo por 1000 e multiplicando o resultado por 8; por 15, dividindo successivamente por 3 e por 5.

**50.** Observação.—É muito necessario exercitar os alumnos nas divisões oraes ou mentaes de um numero por 2 e por 3, poisque por esse exercicio se obtem as divisões por 4 (por 2 e o quociente por 2) por 6 (por 2 e o quociente por 3), por 9 (por 3 e o quociente ainda por 3), por 12 (por 3 e o quociente por 4).

## CAPITULO IV

## Expressões numericas

21

**51.** Quando se quer mostrar como um numero se fórma por meio de outros numeros, indicam-se, pelo emprego dos respectivos signaes, as operações, que se devem fazer sobre estes numeros para obter aquelle outro; essa indicação chama-se uma *expressão numerica ou formula numerica*. Por exemplo: para mostrar como o numero 23 se formou com 4 como divisor, 5 como quociente, e 3 como resto, escreve-se

$$4 \times 5 + 3;$$

é uma expressão numerica.

A numeração representa os numeros por uma expressão numerica especial, que é a de uma somma de algarismos digitos multiplicados cada um pela unidade seguida de zeros, com excepção do algarismo das unidades. Assim, o numero 34567 é a representação da expressão numerica

$$3 \times 10000 + 4 \times 1000 + 5 \times 100 + 6 \times 10 + 7.$$

**52.** É muitas vezes neccessario indicar que se tem de operar sobre um numero que está representado por uma expressão numerica; por exemplo, que o numero 5 expresso pela differença indicada $12 - 7$ tem de ser multiplicado por 3: emprega-se para isso o paranthesis () [1], collocando dentro d'elle a expressão $12 - 7$, e fóra a indicação de multiplicação por 3; isto é, escreve-se

$$(12 - 7) \times 3,$$

cujo valor é 15.

Do mesmo modo $(12 - 7) \times (2 + 8)$ significa que a differença $12 - 7$ ou 5 tem de ser multiplicada pela somma $2 + 8$ ou 10, o que dá 50;

$$(20 - 3 + 4) : 7$$

significa que $20 - 3 + 4$, ou 21, tem de ser dividido por 7, o que dá 3;

$$60 : (4 \times 3)$$

significa que 60 deve ser dividido por $12 = 4 \times 3$, o que dá 5.

N'uma palavra, o parenthesis emprega-se para exprimir que é sobre o resultado das operações indicadas dentro d'elle que recaem as que estão indicadas fóra d'elle.

---

(1) O emprego do parenthesis deve-se a Alberto Girard (1629).

Assim, para calcular a expressão numerica

$$(36 + 17) \times 45 + 18 \times (48 - 6),$$

faz-se a addição $36 + 17$ e a subtracção $48 - 6$, e obtem-se a nova expressão numerica equivalente

$$53 \times 45 + 18 \times 42,$$

depois calculam-se os dois productos e addicionam-se, o que dá o numero 314, para valor da expressão proposta.

**53.** Duas expressões são iguaes quando os valores d'ellas, isto é, os numeros obtidos executando todas as operações nellas indicadas, são identicos. A *igualdade* representa-se pelo signal $=$, collocado a separar as duas expressões numericas. Por exemplo,

$$5 + 7 = 48 - 36.$$

Quando os valores de cada uma das expressões numericas não são identicos, as expressões são desiguaes. A *desigualdade* representa-se pelo signal $>$, voltando a abertura para a que é maior [1]. Por exemplo,

$$5 + 7 < 59 - 36.$$

A expressão primeiro escripta é o *primeiro membro*, a segunda o *segundo membro* da igualdade ou da desigualdade.

---

[1] Este signal foi inventado por Harriot (1560-1621).

## EXERCICIOS

Observação sobre a ordem das operações. — Quando se tem de calcular uma expressão numerica, não é indifferente a ordem em que se deve executar as operações indicadas n'essa expressão. Em geral as operações *directas* (addição e multiplicação), que são sempre completamente executaveis, effectuam-se antes das operações *inversas* (subtracção e divisão), que nem sempre se podem executar.

**48.** Calcular a expressão

$$436 - 648 + 125 - 36 + 450.$$

**49.** Calcular a expressão

$$(36 + 17) \times 45 + 18 \times (16 - 9) : 14.$$

**50.** Calcular a expressão

$$\frac{100 \times (21 - 9) \times (8 - 3 + 4)}{5 \times (6 - 1 + 2 - 4)}.$$

**51.** Calcular as expresssões

$$(49 + 75) \times (758 - 42) \times (32169 + 45 - 1002);$$
$$\big((1745 + 89) \times (827 - 37) + (48 \times 76)\big) : (150 \times 38 + 11 \times 42).$$

**52.** Em certa familia o pae ganha 1$200 réis diarios, a mãe ganha 450 réis, e dois filhos 300 réis cada um. Quanto póde esta familia economisar por anno, gastando 45$000 por mez?

**53.** Uma peça de panno de 15 metros, custou 1$500 réis o metro ao negociante; a como deve vender o metro para obter o ganho de 3$500 réis?

**54.** Um taberneiro misturou 90 litros de vinho, de 80 réis o litro, com 120 litros de vinho de 110 réis o litro, e com 75 litros de 90 réis o litro; a quanto lhe sae o litro da mistura?

**55.** N'uma cidade de 94050 habitantes, a cada 16 homens correspondem 17 mulheres; quantos são os homens e as mulheres?

**56.** N'uma fabrica para cada 3 homens empregam-se 7 mulheres e 5 creanças: sendo 255 o total dos operarios, quantos são os homens, as mulheres e as creanças?

**57.** Um taberneiro recebeu 4$400 réis de vinho que vendeu a 110 réis o litro; depois vendeu 30 litros do mesmo vinho a 105 réis o litro; o resto foi vendido a 95 réis, apurando ao todo 9$450 réis. Quanto vinho tinha o taberneiro?

**58.** Duas fontes, deitando agua juntamente, encheram um reservatorio, de 64000 litros de capacidade, em 32 horas; uma das fontes por si só encheria o reservatorio em 40 horas. Quantas horas a outra fonte por si só gastaria a encher o reservatorio?

**59.** Um barbeiro recebe 50 réis por cada barba que faz, e 120 réis por cada cabello que corta; n'um dia apurou 1$000 réis fazendo mais tres das primeiras operações que das segundas. Quantas barbas fez?

**60.** Em cada minuto a roda d'um moinho dá 40 giros; a cada giro da roda correspondem 7 giros da mó; e de cada 120 giros da mó sahe moido um kilogramma de trigo. Que tempo se gasta para moer 2590 kilogrammas de trigo?

**61.** Tres pessoas começaram a jogar, tendo ao todo réis 13$200; uma ganhou á outra 1$200 réis e 480 réis á terceira, e n'esse momento tinham todas tres a mesma quantia. Quanto tinha cada uma antes do jogo?

16 : [illegible] : 94050 : x

## CAPITULO V

# Potencia

1-3

**54. Definições e notações.** — O producto de muitos factores apresenta um caso particular notavel que é dos factores serem iguaes; assim

$$2 \times 2 \times 2 = 8.$$

Chama-se *potencia* d'um numero o producto de factores iguaes a esse numero; 8 é uma potencia de 2.

O producto d'um numero, 2, 3, 4, 5, 6, etc., vezes como factor, chama-se *segunda*, *terça*, *quarta*, *quinta*, *sexta*, etc., potencia d'esse numero. A segunda potencia d'esse numero tambem se chama *quadrado*, e a terceira *cubo* d'esse numero.

Assim,

$2 \times 2 = 4$ é a 2.ª potencia ou o quadrado de 2.
$2 \times 2 \times 2 = 8$ é a 3.ª potencia ou o cubo de 2.
$2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ é a 4.ª potencia de 2; etc.

**55.** A potencia d'um numero fica completamente determinada quando se dá esse numero, que se chama *base*, e se indica o numero de vezes que elle entra como factor, o qual se chama *expoente* ou *grau*. Assim na 4.ª potencia de 2, ou 16, 2 é a base, e 4 é o expoente ou grau da potencia. Qualquer potencia de 1 é sempre 1.

A consideração do expoente permitte representar uma potencia d'um numero por uma notação muito simples e importantissima (¹): escreve-se o expoente acima e á direita da base. Assim a 4.ª potencia de 2 exprime-se por $2^4$, que se lê: dois *elevado* ou *levantado* á quarta.

As potencias $2^2$, $2^3$, lêem-se: 2 levantado ao quadrado, 2 levantado ao cubo.

**56.** As potencias successivas de 10, 100, 1000, etc., são:

$$10^2 = 100, \quad 100^2 = 10000, \quad 1000^2 = 1000000$$
$$10^3 = 1000, \quad 100^3 = 1000000, \quad 1000^3 = 1000000000$$
$$10^4 = 10000, \quad 100^4 = 100000000, \quad 1000^4 = 1000000000000$$

etc.

Regra.—*Forma-se uma potencia de 10, escrevendo 1 seguido de tantos zeros quantas são as unidades do expoente da potencia; de 100, quantas as do dobro do expoente; de 1000, quantas as do triplo do expoente; etc.*

X 18-4

**57. Multiplicação e divisão de potencias da mesma base, e do mesmo grau.**

1.° O producto de duas ou mais potencias da mesma base é uma potencia da mesma base cujo expoente é a somma dos expoentes das potencias.

Assim

6

$$2^3 \times 2^4 = 2^{3+4} = 2^7; \quad 2^3 \times 2^4 \times 2^6 = 2^{3+4+6} = 2^{13}$$

18-4

6 2.° O quociente de duas potencias da mesma base é uma

(¹) Introduzida por Descartes, celebre philosopho e mathematico francez, em 1637.

potencia da mesma base cujo expoente é a differença dos expoentes da potencia dividendo e da potencia divisor.

Assim

$$2^7 : 2^4 = 2^{7-4} = 2^3 .$$

3.º O producto de duas potencias do mesmo grau é uma potencia do mesmo grau cuja base é o producto das bases das potencias factores.

Assim

$$2^4 \times 3^4 = (2 \times 3)^4 = 6^4 ;$$
$$2^3 \times 5^3 \times 7^3 = (2 \times 5 \times 7)^3 = 70^3 .$$

Lendo inversamente estas igualdades, a mesma propriedade enuncia-se: *a potencia de um producto é o producto das potencias do mesmo grau dos seus factores.*

4.º O quociente de duas potencias do mesmo grau é uma potencia do mesmo grau cuja base é o quociente das bases das potencias que são as dos termos da divisão.

Assim

$$6^4 : 2^4 = (6 : 2)^4 = 3^4 .$$

Lendo inversamente esta igualdade, a mesma propriedade enuncia-se: *a potencia de um quociente é o quociente das potencias do mesmo grau dos dois termos da divisão.*

O calculo de uma potencia de um numero constitue uma operação que se chama *elevação ás potencias* ou *potenciação.* Porém esta operação não differe de multiplicações successivas em que o multiplicador é sempre o mesmo numero, a base.

A propriedade fundamental 57, 1.º permitte abreviar a pratica d'estas multiplicações successivas.

Querendo, por exemplo, elevar 3 á potencia do grau 11, decompor-se-ha 11 em duas partes, tão pouco differentes entre

746



si quanto possivel, taes como 6 e 5. Pela referida propriedade, temos

$$3^{11} = 3^6 \times 3^5 ;$$

ora,

$$3^6 = 3^3 \times 3^3 = 27 \times 27 = 729,$$
$$3^5 = 3^3 \times 3^2 = 27 \times \ \ 9 = 243;$$

consequentemente

$$3^{11} = 729 \times 243 = 177147.$$

D'este modo effectuaram-se cinco multiplicações em vez de dez, como exigiria o processo directo.

5.° Obtem-se uma potencia de uma potencia elevando a base ao producto dos dois expoentes.

Assim,

$$(3^4)^5 = 3^4 \times 3^4 \times 3^4 \times 3^4 \times 3^4$$
$$= 3^{4+4+4+4+4} \, (27, \, 1.^\circ) = 3^{4 \times 5} = 3^{20}.$$

6

CAPITULO VI

## § 1.º Regra pratica para achar o resto da divisão d'um numero por 10, 100, 1000, etc., e por 2, 3, 4, 5 e 9

**58.** O resto da divisão d'um numero por 10, 100, 1000, etc., ou por uma potencia de 10, é o numero formado pelos algarismos da direita do dividendo contados pelo expoente da potencia de 10.

Por exemplo, 43857023 a dividir

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| por | 10 | da | de | resto | 3 |
| » | 100 | » | » | » | 23 |
| » | 1000 | » | » | » | 023 = 23 |
| » | 10000 | » | » | » | 7023 |
| » | 100000 | » | » | » | 57023 |

**59.** O resto da divisão d'um numero por 2 é o mesmo que o resto obtido pela divisão por 2 do algarismo das unidades do dividendo. Por exemplo, o resto da divisão de 24567 por 2 é o resto de 7 : 2 ou 1; o da divisão de 24568 é o resto de 8 : 2 ou zero, isto é, o numero 24568 é exactamente divisivel por 2, o qual se chama numero *par*. Os numeros pares são pois os que terminam em 0, 2, 4, 6, 8, que se chamam algarismos pares. Os outros chamam-se numeros impares.

**60.** O resto da divisão d'um numero por 5 é o mesmo que o resto obtido pela divisão por 5 do algarismo das unidades do dividendo. Por exemplo, o resto da divisão de 24567 por 5 é o resto de 7 : 5 ou 2; o resto da divisão de 24560 e 24565 é zero.

Os numeros terminados em zero ou 5 são os unicos numeros exactamente divisiveis por 5.

**61.** O resto da divisão d'um numero por 3 é o mesmo que o resto obtido pela divisão por 3 da somma dos algarismos do dividendo. Por exemplo, o resto da divisão de 24565 por 3 é o resto de $(2 + 4 + 5 + 6 + 5) : 3$, ou 1.

**62.** O resto da divisão de um numero por 4 é o mesmo que o resto obtido pela divisão por 4 da parte do numero formado pelos dois primeiros algarismos da direita do numero. Por exemplo, o resto da divisão de 576849 por 4 é o resto de 49 : 4, ou 1.

**63.** O resto da divisão d'um numero por 9 é o mesmo que o resto obtido pela divisão por 9 da somma dos algarismos do dividendo. Por exemplo, o resto da divisão de 5384021 por 9 é o resto de $(5+3+8+4+2+1) : 9$ ou 5.

Na pratica, obtem-se mais rapidamente o resto diminuindo em 9 as sommas parciaes que excedem 9; é o que significa a expressão escolar dos *noves fóra*. Diz-se no exemplo: 5 e 3, 8 e 8, 16, menos 9, restam 7 (nove fóra, 7); 7 e 4, 11, menos 9, restam 2 (nove fóra, 2); 2 e 2, 4, e 1, 5; o resto é 5.

Observação. — Como um numero se diz divisivel por outro quando a divisão se effectua exactamente, isto é, sem resto ou resto zero, estas regras são as de *divisibilidade* pelos respectivos numeros, quando o resto, que ellas determinam, é zero.

Todas estas regras se fundam no principio: *o resto da divisão de dois numeros não muda quando se diminue o dividendo em um multiplo do divisor.*

## § 2.° Provas dos nove

**64.** Emprega-se com vantagem na pratica do calculo a facil determinação do resto da divisão d'um numero por 9 para verificar as operações, o que se chama tirar a prova dos nove ([1]).

**65. Addição.** —Determina-se o resto da divisão por 9 de cada parcella, e o resto da somma d'estes restos por 9; este resto deve ser igual ao que se obtem da divisão da somma por 9. Por exemplo: tira-se a prova dos nove á somma do exemplo do n.° 15, determinando o resto da som-

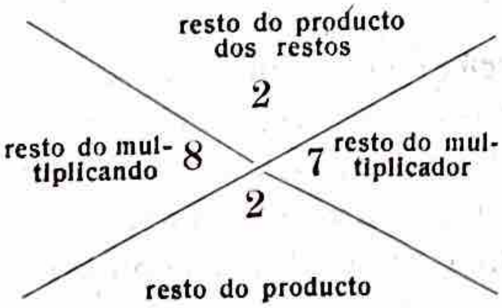
([1]) O persa Avicenne (Abou-Ali-Al-Hossein), 980-1037, foi o primeiro que indicou esta especie de prova das quatro operações ma $5 + 0 + 1 + 3 + 2$, somma dos restos das parcellas, o qual é 2, e vendo que é este mesmo numero o resto da somma 104672.

**66. Subtracção.** — Determina-se o resto da divisão por 9 do diminuidor e da differença, e sommam-se estes restos; esta somma e o diminuendo divididos por 9 devem dar o mesmo resto. Por exemplo: tira-se a prova dos nove á differença do exemplo II do n.º 22, determinando os restos 3 e 6 do diminuidor e da differença, cuja somma é 9 e o resto zero, e vendo que é tambem zero o resto do diminuendo.

Convém notar que por ser muito simples e expedita a prova real da subtracção é esta sempre preferivel.

**67. Multiplicação.** — Determinam-se os restos da divisão por 9 do multiplicando, multiplicador, e producto; o resto da divisão por 9 do producto dos dois primeiros restos deve ser igual ao terceiro resto. Por exemplo: tira-se a prova dos nove á multiplicação do primeiro exemplo do n.º 37, determinando os restos 8, 7 dos dois factores, o resto 2 de $(8 \times 7) : 9$, e vendo que o resto do producto é tambem 2.

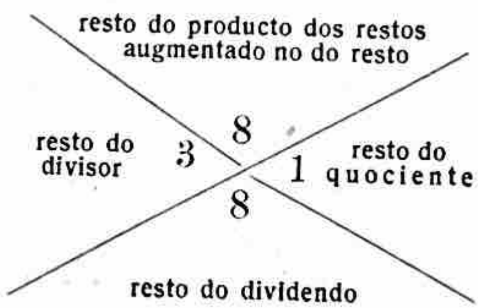
Typo pratico da prova




**68. Divisão.** — Determinam-se os restos da divisão por 9 do divisor, quociente e resto; multiplicam-se os dois primeiros, juntando ao producto o terceiro, e determinando o resto da divisão da somma por 9; deve achar-se o mesmo resto que se obtem pela divisão do dividendo por 9.

Na divisão do exemplo I do n.º 45, os restos do divisor e quociente são 3 e 1; o resto de $(3 \times 1) : 9$ é 3; o *resto da divisão* dá o resto 5; o resto de $(3 + 5) : 9$ é 8; o resto do dividendo é tambem 8.

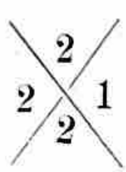
Typo pratico da prova




**69.** Observação. — A prova dos nove não é segura. Vê-se nos seguintes exemplos da multiplicação, cujos resultados estão visivelmente errados, que a prova dos nove não accusa o erro.

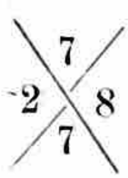
I

$$\begin{array}{r} 2315 \\ 253 \\ \hline 6945 \\ 11575\phantom{0} \\ 4630\phantom{00} \\ \hline 4648250 \end{array}$$




II

$$\begin{array}{r} 236 \\ 6200 \\ \hline 472\phantom{00} \\ 1416\phantom{000} \\ \hline 14632\phantom{00} \end{array}$$




Sempre que o erro n'uma operação não altere a somma dos valores de figura do resultado obtido, ou que a altere augmentando-a ou diminuindo-a n'um multiplo de 9, a prova dos nove não accusará o erro.

## CAPITULO VII

# Numeros primos. Maximo divisor commum e menor multiplo commum

**70. Definições.** — Um numero maior que 1 chama-se *primo* quando não é divisivel senão pela unidade e por si mesmo.

Exemplo: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 são numeros primos, que se devem conhecer.

Dois ou mais numeros são *primos entre si* quando não tem outro divisor commum a não ser a unidade.

Exemplos: 8 e 9 são dois numeros primos entre si; 8, 9 e 12 são tres numeros primos entre si.

**71.** Reconhecer se um numero é primo. — REGRA. — *Para reconhecer se um numero é primo, ensaia-se successivamente a divisão d'elle pelos numeros primos 2, 3, 5, 7, 11, etc.; se todas as divisões derem resto, chegando a uma, cuja parte inteira do quociente não seja superior ao respectivo divisor de ensaio, póde-se affirmar que o numero dado é primo.*

Por exemplo o numero 167 é primo, porque não é divisivel por 2, 3, 5, 7, 11, 13, e a parte inteira de 167 : 13, ou 12, é menor que o divisor 13.

Exceptuando os numeros 49, 77 e 91, que são respectivamente, divisiveis por 7, 7 e 11, 7 e 13, as regras dadas de divisibilidade por 2, 3 e 5 permittem reconhecer se um numero inferior a 100 é primo ou não.

A taboa seguinte dá os numeros primos até 2399. Por meio d'ella, empregando a regra indicada, póde-se reconhecer se os numeros, fóra do seu limite, são primos ou não até 5755201, quadrado de 2399.

Os numeros primos são em numero illimitado; quer dizer que obtido um numero primo existe sempre outro maior. A apparição dos numeros primos na escala natural dos numeros não está sujeita a nenhuma lei.

Taboa dos numeros primos até 2399

| | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 79 | 191 | 311 | 439 | 577 | 709 | 857 | 1009 | 1151 | 1297 | 1459 | 1607 | 1759 | 1933 | 2089 | 2269 |
| 3 | 83 | 193 | 313 | 443 | 587 | 719 | 859 | 1013 | 1153 | 1301 | 1471 | 1609 | 1777 | 1949 | 2099 | 2273 |
| 5 | 89 | 197 | 317 | 449 | 593 | 727 | 863 | 1019 | 1163 | 1303 | 1481 | 1613 | 1783 | 1951 | 2111 | 2281 |
| 7 | 97 | 199 | 331 | 457 | 599 | 733 | 877 | 1021 | 1171 | 1307 | 1483 | 1619 | 1787 | 1973 | 2113 | 2287 |
| 11 | 101 | 211 | 337 | 461 | 601 | 739 | 881 | 1031 | 1181 | 1319 | 1487 | 1621 | 1789 | 1979 | 2129 | 2293 |
| 13 | 103 | 223 | 347 | 463 | 607 | 743 | 883 | 1033 | 1187 | 1321 | 1489 | 1627 | 1801 | 1987 | 2131 | 2297 |
| 17 | 107 | 227 | 349 | 467 | 613 | 751 | 887 | 1039 | 1193 | 1327 | 1493 | 1637 | 1811 | 1993 | 2137 | 2309 |
| 19 | 109 | 229 | 353 | 479 | 617 | 757 | 907 | 1049 | 1201 | 1361 | 1499 | 1657 | 1823 | 1997 | 2141 | 2311 |
| 23 | 113 | 233 | 359 | 487 | 619 | 761 | 911 | 1051 | 1213 | 1367 | 1511 | 1663 | 1831 | 1999 | 2143 | 2333 |
| 29 | 127 | 239 | 367 | 491 | 631 | 769 | 919 | 1061 | 1217 | 1373 | 1523 | 1667 | 1847 | 2003 | 2153 | 2339 |
| 31 | 131 | 241 | 373 | 499 | 641 | 773 | 929 | 1063 | 1223 | 1381 | 1531 | 1669 | 1861 | 2011 | 2161 | 2341 |
| 37 | 137 | 251 | 379 | 503 | 643 | 787 | 937 | 1069 | 1229 | 1399 | 1543 | 1693 | 1867 | 2017 | 2179 | 2347 |
| 41 | 139 | 257 | 383 | 509 | 647 | 797 | 941 | 1087 | 1231 | 1409 | 1549 | 1697 | 1871 | 2027 | 2203 | 2351 |
| 43 | 149 | 263 | 389 | 521 | 653 | 809 | 947 | 1091 | 1237 | 1423 | 1553 | 1699 | 1873 | 2029 | 2207 | 2357 |
| 47 | 151 | 269 | 397 | 523 | 659 | 811 | 953 | 1093 | 1249 | 1427 | 1559 | 1709 | 1877 | 2039 | 2213 | 2371 |
| 53 | 157 | 271 | 401 | 541 | 661 | 821 | 967 | 1097 | 1259 | 1429 | 1567 | 1721 | 1879 | 2053 | 2221 | 2377 |
| 59 | 163 | 277 | 409 | 547 | 673 | 823 | 971 | 1103 | 1277 | 1433 | 1571 | 1723 | 1889 | 2063 | 2237 | 2381 |
| 61 | 167 | 281 | 419 | 557 | 677 | 827 | 977 | 1109 | 1279 | 1439 | 1579 | 1733 | 1901 | 2069 | 2239 | 2383 |
| 67 | 173 | 283 | 421 | 563 | 683 | 829 | 983 | 1117 | 1283 | 1447 | 1583 | 1741 | 1907 | 2081 | 2243 | 2389 |
| 71 | 179 | 293 | 431 | 569 | 691 | 839 | 991 | 1123 | 1289 | 1451 | 1597 | 1747 | 1913 | 2083 | 2251 | 2393 |
| 73 | 181 | 307 | 433 | 571 | 701 | 853 | 997 | 1129 | 1291 | 1453 | 1601 | 1753 | 1931 | 2087 | 2267 | 2399 |

**72. Processo pratico da determinação do maximo divisor commum de dois ou mais numeros.**

**Definição.** — O maior divisor commum de dois ou mais numeros, é o maior numero que divide todos exactamente.

1.° Caso. Regra. — *Para determinar o maximo divisor commum de dois numeros, divide-se o maior pelo menor; depois o menor pelo resto da divisão; e continua-se assim do mesmo* *modo a dividir cada divisor pelo resto correspondente até que uma d'essas divisões se faça exactamente; o divisor d'esta divisão é o maximo divisor commum procurado.*

Este processo da determinação do maximo divisor commum denomina-se *processo de divisões successivas*. O maximo divisor commum indica-se abreviadamente pelas letras iniciaes m. d. c.

Exemplos:

1.° Determinar o m. d. c. de 24647 e 1519.

Typo do calculo

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 16 | 4 | 2 | 3 |
| 24647 | 1519 | 343 | 147 | 49 |
| 9457 | 147 | 49 | 0 | |
| 343 | | | | |

Os quocientes escrevem-se por cima do respectivo divisor. O maximo divisor commum é 49.

2.° Determinar o m. d. c. de 756 e 535.

Typo do calculo

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | 11 |
| 756 | 353 | 221 | 93 | 35 | 23 | 12 | 11 | 1 |
| 221 | 93 | 35 | 23 | 12 | 11 | 1 | 0 | |

O m. d. c. é a unidade; os numeros 756 e 535 são primos entre si.

2.° Caso. Regra. — *Para achar o m. d. c. de mais de dois numeros, começa-se por achar o m. d. c. de dois d'esses numeros, pela regra precedente; em seguida busca-se, pela mesma regra, o m. d. c. do numero obtido e d'um terceiro numero dado; depois o m. d. c. do numero novamente obtido e de outro dos numeros dados; e assim em diante até se emprega-*

*rem todos os numeros dados. O m. d. c. obtido d'este modo é o m. d. c. dos numeros dados.*

Na pratica d'esta regra, ha vantagem em começar pelos dois menores dos numeros dados.

Exemplo: Determinar o m. d. c. dos quatro numeros 270, 210, 774, 843.

270 210 774 843

m. d. c. 30

m. d. c. 6

m. d. c. 3

O m. d. c. dos quatro numeros é 3.

Tambem n'este caso se póde proceder pela seguinte regra:

*Para buscar o m. d. c. de muitos numeros, dividem-se pelo menor todos os outros; se as divisões se fazem exactamente, o menor dos numero é o m. d. c. de todos; se ha restos, pelo menor d'elles se dividem todos os outros e o divisor precedente; e assim successivamente até se achar um divisor e uma série de restos exactamente divisiveis pelo menor d'elles. O resto que divide exactamente os outros da série e o divisor precedente é o m. d. c. que se busca.*

Para applicar esta regra ao mesmo exemplo, dividem-se os tres numeros maiores por 210. Depois, porque as divisões não são exactas, dividem-se 210 e os dois restos maiores, que são 144 e 60, pelo menor, que é 3; e, como agora estas divisões se fazem exactamente, 3 é o m. d. c. procurado.

**Propriedades.** — Todo o divisor do m. d. c. de muitos numeros, e sómente elle, é divisor commum d'esses numeros.

Dividindo os numeros pelo m. d. c. os quocientes são primeiros entre si.

**73. Menor multiplo commum de dois ou mais numeros.** — Um numero multiplo d'outro numero é um numero que tem esse outro como factor (n.º 32), ou, o que é o mesmo, que é divisivel por esse outro. Um numero divisivel por dois ou mais numeros diz-se *multiplo commum* d'esses numeros. Por exemplo, 12 é multiplo commum dos numeros 2, 3, 4, 6; 24, 36, 48 tambem são multiplos communs, mas 12 é o *menor*.

**Definição.** — O menor multiplo commum de muitos numeros é o menor numero divisivel por cada um d'sses numeros.

O numero multiplo commum designa-se abreviadamente pelas letras iniciaes m. m. c.

1.º Caso. Regra.—*Para achar o m. m. c. de dois numeros divide-se o producto d'esses numeros pelo maximo divisor commum d'elles; ou divide-se um dos dois numeros pelo m. d. c. de ambos, e multiplica-se o quociente pelo outro numero.*

Exemplo, m. m. c. de 18 e 12: o producto é 216; o m. d. c. é 6; temos, pela regra, $216 : 6 = 36$, para m. m. c. de 18 e 12; ou $18 : 6 = 3$, $12 \times 3 = 36$.

2.º Caso. Regra. — *Para calcular o m. m. c. de mais de dois numeros, busca-se o m. m. c. de dois d'elles, pela regra do 1.º caso; depois o m. m. c. d'este numero obtido e d'um terceiro dos numeros dados; e, do mesmo modo, busca-se o m. m. c. do novo numero obtido e d'outro dos numeros dados: e assim se continua até empregar todos os numeros; o ultimo m. m. c. obtido é o m. m. c. dos numeros dados.*

Exemplo: Achar o m. m. c. de 48, 56, 86, 15.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 48 | 56 | 86 | 15 |
| m. m. c. | 336 | | | |
| m. m. c. | | 14448 | | |
| m. m. c. | | | 72240 | |

O m. m. c. dos quatro numeros é 72240.

Observações. — 1.ª Se o maior dos numeros dados fôr divisivel por todos os outros, é esse o m. m. c. de todos. Por exemplo: o m. m. c. de 2, 3, 4, 6, 12 é o numero 12.

2.ª Abrevia-se o calculo do m. m. c. quando se reconhece que alguns dos numeros dados dividem exactamente alguns dos outros: supprimem-se então aquelles submultiplos, e calcula-se o m. m. c. dos numeros restantes. Por exemplo: o calculo do m. m. c. de

180, 360, 1000, 37000

recae sobre os numeros 37000 e 360, pois se vê que os dois outros, 1000 e 180, são respectivamente submultiplos d'aquelles.

3.ª Todo o multiplo do m. m. c. de muitos numeros é multiplo commum d'estes.

**74. Decomposição em factores primos.** — Um numero não primo, ou composto, é sempre o producto de factores primos: decompol-o em factores primos é achar esses factores.

Regra. — *Para decompôr um numero em factores primos, divide-se o numero pelo menor dos seus divisores, que se obtem ensaiando a divisão d'elle pelos divisores primos 2, 3, 5, etc.; opera-se do mesmo modo com o quociente; e assim se continua até se obter o quociente 1. Todos os divisores empregados são os factores primos do numero proposto.*

Exemplo: Decompôr 360 em factores primos.

### Typo do calculo

| | |
|---|---|
| 360 | 2 |
| 180 | 2 |
| 90 | 2 |
| 45 | 3 |
| 15 | 3 |
| 5 | 5 |
| 1 | |

O menor divisor primo de 360 é 2: o quociente 180 ainda tem o divisor 2, que dá o quociente 90, em que 2 é ainda divisor, dando quociente 45.

O menor divisor primo d'este numero é agora 3, que dá o quociente 15, em que 3 é ainda divisor, dando o quociente 5, que é numero primo, o qual é elle proprio divisor, e dá o quociente 1.

Temos:

$$360 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 2^3 \times 3^2 \times 5.$$

Observação. — 1.ª Um numero não póde ser decomposto em factores primos senão por uma unica maneira. Isto é, para que dois productos de factores primos sejam iguaes é necessario e sufficiente que elles sejam constituidos pelos mesmos factores, com o mesmo expoente, respectivamente, nos dois productos.

2.ª Uma potencia de 10 decomposta em factores primos é sempre o producto de duas potencias de 2 e 5, cujo grau é o da potencia de 10.

Exemplo: $10^4 = 2^4 \times 5^4$.

3.ª Quando o numero para decompor em factores primos termine em zeros, a operação effectiva recae no numero privado de zeros, tomando depois em conta os factores primos da potencia de 10 indicada pelos zeros supprimidos.

Exemplo: A decomposição de 2400 reduz-se á decomposição de 24 que é $2^3 \times 3$; portanto,

$$2400 = 2^3 \times 3 \times 2^2 \times 5^2 = 2^3 \times 2^2 \times 3 \times 5^2 = 2^5 \times 3 \times 5^2$$

**75. Applicação á determinação do m. d. c. e do m. m. c. de muitos numeros, e á divisibilidade.** — Obtem-se facilmente o m. d. c. de muitos numeros pela decomposição dos numeros em factores primos.

Regra. — *Para achar o maximo divisor commum de muitos numeros, decompõe-se estes numeros em factores primos, e forma-se o producto dos factores primos communs, dando a cada um o seu menor expoente.*

Exemplo: Achar o m. d. c. de 792, 864, 936.

Estes numeros decompostos em factores primos dão:

$$\begin{aligned} 792 &= 2^3 \times 3^2 \times 11, \\ 864 &= 2^5 \times 3^3 \\ 936 &= 2^3 \times 3^2 \times 13; \end{aligned}$$

os factores primos communs são 2 e 3; o expoente menor de cada um d'elles é, respectivamente, 3 e 2; o m. d. c. é, portanto,

$$2^3 \times 3^2 = 72.$$

Obtem-se tambem facilmente o m. m. c. de muitos numeros pela decomposição dos numeros em factores primos.

Regra. — *Para achar o menor multiplo commum de muitos numeros, decompõem-se estes numeros em factores primos, e forma-se o producto de todos os factores primos ~~differentes~~ ~~dando a cada um~~ o seu maior expoente.*

com

communs e não communs

Exemplo. Achar o m. m. c. de 24, 30, 45, 18.

Estes numeros decompostos nos seus factores primos dão:

$$\begin{aligned} 24 &= 2^3 \times 3 \\ 30 &= 2 \times 3 \times 5 \\ 45 &= 3^2 \times 5 \\ 18 &= 2 \times 3^2\,; \end{aligned}$$

os factores primos differentes são 2, 3, 5, o expoente maior de cada um d'elles é, respectivamente, 3, 2, 1; o m. m. c. é, portanto,

$$2^3 \times 3^2 \times 5 = 360.$$

Se dois numeros estão decompostos em factores primos, pela simples inspecção se reconhece se um é divisivel pelo outro; basta que o maior contenha todos os factores primos do outro, pelo menos, com os mesmos expoentes. O quociente será o numero que resulta da suppressão no maior de todos os factores primos do menor.

Por exemplo: $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$, $24 = 2^3 \times 3$; vê-se immediatamente que 360 é divisivel por 24, e que o quociente é $3 \times 5 = 15$.

## EXERCICIOS

**62.** Achar o m. d. c. dos numeros

469499 e 169743;
88543, 214669, 249557 e 651343.

**63.** Achar o m. m. c. dos numeros

77, 35, 42, 91, 126, 26, 60 e 65;
105, 126, 168, 210, 231 e 294.

**64.** Tres acontecimentos deram-se no mesmo anno; o 1.° repete-se todos os 14 annos, o 2.° todos os 18 e o 3.° todos os 24; quando se tornarão a dar no mesmo anno?

**65.** Reconhecer immediatamente que 30 é o m. d. c., e 360 o m. m. c. dos numeros 30, 60, 120, 90, 180, 360.

**66.** Reconhecer se os seguintes numeros são primos:

2851, 4679, 8423, 9677, 9907.

**67.** Decompôr em factores primos os numeros

83076, 165048, 164928, 164528, 790920.

**68.** Calcular, pela decomposição em factores primos, o m. d. c. e o m. m. c. de cada grupo de numeros que estão na mesma linha horizontal:

49980, 33810, 28428, 4116;

2, 4, 8, 32, 3, 9, 27, 6, 12, 24

5, 8, 12, 21, 28, 30, 15, 60;

105, 126, 168, 210, 231, 294.

# SECÇÃO II

# Numeros fraccionarios

## CAPITULO I

## Fracções ordinarias

**76.** Dividindo em partes iguaes, ou suppondo dividida, uma grandeza que se tomou para unidade, uma ou muitas d'estas partes formam o que se chama uma *fracção* ou *quebrado* d'essa grandeza. Por exemplo, um numero de horas é uma fracção do dia; um numero de minutos é uma fracção da hora.

A grandeza que se divide é a unidade *principal* ou *primitiva;* uma das suas partes que se chama *parte aliquota*, é uma nova unidade, ou *unidade secundaria.*

**77.** O numero de partes em que a unidade principal se divide é chamado *denominador*, porque denomina essas partes, dá nome á nova unidade; o numero que se toma d'essas partes é chamado *numerador*, porque numera, conta as novas unidades que se tomaram; e a ambos dá-se o nome de *termos* da fracção. Assim na fracção 5 horas da unidade dia, 24 é o denominador, porque o dia (unidade principal) suppôz-se dividido em 24 partes ou horas (unidade secundaria), e 5 é o numerador; 24 e 5 são os termos da fracção.

Vê-se que, tomando a parte aliquota da unidade principal para nova unidade, a grandeza que uma fracção exprime, é representada por um numero inteiro, o numerador da fracção. Esta observação é importantissima. No exemplo tomando a hora para unidade, o tempo que se considera é representado por 5 (horas).

**78.** Para representar uma fracção, escreve-se o numerador por cima do denominador, separados por um traço horisontal. Por exemplo, a fracção acima indicada, escreve-se $\frac{5}{24}$.

Para lêr uma fracção, enuncia-se primeiro o numerador e depois o denominador seguido da terminação *ávos*. Ha excepção a esta regra de leitura para os denominadores 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 10; diz-se *meios*, *terços*, *quartos*, *quintos*, *sextos*, *setimos*, *oitavos*, *nonos e decimos*.

Assim,

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{3}{4}, \quad \frac{2}{9},$$

lêem-se: um meio, tres quartos, dois nonos.

Tambem ha excepção para os denominadores que são potencias de 10; a terminação ávos é substituida pela desinencia *esimo*.

Assim as fracções

$$\frac{3}{100}, \quad \frac{9}{1000}, \quad \frac{7}{10000}, \quad \text{etc.}$$

lêem-se: tres cent*esimos*, nove mill*esimos*, sete *decimos* mill*esimos*, etc.

**79.** Se o numerador d'uma fracção é igual ao denominador, a fracção representa a unidade.

Assim,

$$\frac{7}{7} = 1, \quad \frac{9}{9} = 1, \text{ etc.}$$

Se o numerador é menor que o denominador, a fracção é menor que a unidade; diz-se então que é uma fracção *propria*, ou *quebrado proprio*. Assim, $\frac{3}{7}$, $\frac{2}{5}$, são fracções proprias.

Se o numerador é maior que o denominador, a fracção é maior que a unidade; a fracção diz-se então *impropria* ou *quebrado improprio*. Assim $\frac{22}{7}$ é uma fracção impropria.

Dá-se o nome commum de *numero fraccionario* a uma fracção propria e impropria.

**80.** Uma fracção impropria contém unidades e uma fracção propria: determina-se esse numero d'unidades, dividindo o numerador pelo denominador, o que se chama *extrahir os inteiros* ao numero fraccionario, e a fracção propria é formada pelo resto da divisão para numerador e do mesmo denominador da fracção impropria.

Assim,

$$\frac{22}{7} = 3 + \frac{1}{7}$$

que, abreviadamente, se escreve $3\frac{1}{7}$, e se lê 3 e $\frac{1}{7}$. Sob esta fórma, o numero fraccionario diz-se *numero mixto*.

Se o numerador da fracção impropria é o multiplo do denominador, a fracção exprime um numero inteiro. Por exemplo:

$$\frac{28}{4} = 7, \quad \frac{15}{3} = 5.$$

A um numero inteiro póde sempre dar-se a fórma de numero fraccionario de denominador dado; basta tomar para numerador o producto do numero inteiro para esse denominador dado.

Assim,

$$8 = \frac{8 \times 5}{5} = \frac{40}{5} = \frac{48}{6}.$$

O numero fraccionario comprehende, como se vê, a fórma inteira como caso particular.

A medida das grandezas, como já se disse no n.º 3, conduz, a maior parte das vezes a um numero fraccionario.

**81.** As fracções cujos denominadores não são potencias de 10, chamam-se fracções *ordinarias:* tomam o nome particular de fracções *decimaes* quando os denominadores são potencias de 10.

**82.** Multiplicando ou dividindo o numerador d'uma fracção por um numero inteiro, a fracção torna-se maior ou menor, tantas vezes quantas as indicadas pelo inteiro. Exemplo: a fracção $\frac{8}{9}$, multiplicando o numerador por 4, temos o numero fraccionario $\frac{32}{9}$ (32 unidades *nonos*), que é 4 vezes maior que a fracção $\frac{8}{9}$ (8 unidades *nonos*); dividindo o numerador por 4, temos a fracção $\frac{2}{9}$ (2 unidades *nonos*), que é 4 vezes menor que a fracção $\frac{8}{9}$ (8 unidades *nonos*).

Multiplicando ou dividindo o denominador d'uma fracção por um numero inteiro, a fracção torna-se esse numero de vezes, indicado pelo inteiro, menor ou maior. Exemplo: na fracção $\frac{8}{9}$ (8 unidades *nonos*), multiplicando o denominador por 3, temos a fracção $\frac{8}{27}$ (8 unidades *vinte e sete ávos*) que é 3 vezes menor, porque *um vinte e sete avos* é 3 vezes menor que um *nono*; dividindo o denominador por 3, temos o numero fraccionario $\frac{8}{3}$ (8 *terços*) que é 3 vezes maior, porque *um terço* é 3 vezes menor que *um nono*.

Consequentemente, multiplicando ou dividindo ambos os termos d'uma fracção por um numero inteiro, a fracção não muda de valor; pois fica multiplicada e dividida, ou dividida e multiplicada por um mesmo numero.

Assim,

$$\frac{3}{7}=\frac{3\times 2}{7\times 2}=\frac{6}{14};\quad \frac{12}{8}=\frac{12:4}{8:4}=\frac{3}{2}.$$

Vê-se que o mesmo valor d'uma fracção póde exprimir-se por uma infinidade de fórmas fraccionarias. Por exemplo:

$$\frac{2}{3}=\frac{8}{12}=\frac{16}{24}=\frac{6}{9}=\text{etc.}$$

**83.** *Simplificar uma fracção* é achar uma fracção que exprime o mesmo valor da proposta, mas de termos menores que o d'esta.

Uma fracção que não póde ser simplificada, diz-se *reduzida á sua expressão mais simples* ou *irreductivel.*

Regra. — *Para se simplificar uma fracção reduzindo-a logo á sua fórma irreductivel, busca-se o maximo divisor commum dos seus dois termos, e dividem-se ambos por esse numero.*

Exemplo: seja a simplificação $\frac{30}{555}$; o m. d. c. de 555 e 30 é 15; a fracção simplificada é

$$\frac{30:15}{555:15}=\frac{2}{37}.$$

Se os termos da fracção são primos entre si, a fracção já está na sua fórma irreductivel. Exemplo: $\frac{8}{25}$.

**84.** *Reduzir muitas fracções ao mesmo denominador* é achar outras tantas fracções respectivamente equivalentes (representando o mesmo valor que as propostas), mas tendo todas o mesmo denominador.

Exemplos:

1.º Reduzir ao mesmo denominador as fracções

$$\frac{2}{3} \text{ e } \frac{4}{5}.$$

Multiplicando por [illegible] os dois termos da primeira e por 3 os dois termos da segunda, temos as fracções respectivamente equivalentes

$$[illegible] \text{ e } \frac{12}{15}.$$

2.º Reduzir ao mesmo denominador as fracções

$$\frac{5}{[illegible]}, \quad \frac{3}{8}, \quad \frac{3}{4}, \quad \frac{1}{6},$$

[illegible] temos as fracções respectivamente equivalentes

$$\frac{5\times8\times4\times6}{7\times8\times4\times6}, \quad \frac{3\times7\times4\times6}{8\times7\times4\times6}, \quad \frac{3\times7\times8\times6}{4\times7\times8\times6}, \quad \frac{1\times7\times8\times4}{6\times7\times8\times4},$$

ou, effectuando as multiplicações,

$$\frac{960}{1344}, \quad \frac{504}{1344}, \quad \frac{1008}{1344}, \quad [illegible]$$

Regra. — *Para reduzir muitas fracções ao mesmo denominador, multiplicam-se os dois termos de cada uma pelo producto dos denominadores de todas as outras.*

**85.** Em muitos casos póde obter-se um denominador commum menor que o producto dos denominadores; na sua determinação consiste a *reducção ao menor denominador commum.*

Regra. — *Para reduzir muitas fracções ao menor denominador commum reduzem-se primeiramente as fracções á sua expressão mais simples; busca-se depois o m. m. c. dos denominadores das fracções reduzidas, que será o menor denominador commum; divide-se este m. m. c. pelos denominadores de cada uma d'ellas, e multiplicam-se pelo respectivo quociente os dois termos das fracções correspondentes.*

Exemplo. Reduzir ao menor denominador commum as fracções que ... d'um ... po ... de fórma ...

$$\frac{8}{18}, \qquad \frac{4}{6};$$

estas fracções reduzidas á expressão mais simples são

$$\frac{4}{9}, \quad \frac{3}{5}, \quad \frac{2}{3};$$

... ção que ... men...

o m. m. c. dos denominadores 9, 5, sim' 45; os quocientes de 45 por cada um d'estes denominadores são 5, 9, 15, e assim temos

$$\frac{4\times5}{45}, \quad \frac{3\times9}{45}, \quad \frac{2\times15}{45},$$

ou ... eja a sin ... cção simplif...

$$\frac{27}{45}, \quad \frac{30}{45}.$$

Observação. — Os productos dos denominadores pelos respectivos quocientes são sempre o m. m. c., achado de antemão.

**86.** A reducção ao mesmo denominador permitte comparar entre si o valor de muitas fracções: a fracção que corresponde á de maior numerador depois da reducção, é a maior. Assim no exemplo, a fracção $\frac{4}{6}$ é a maior das tres, porque lhe corresponde a fracção $\frac{30}{45}$ de maior numerador.

$\frac{3}{7}$

## EXERCICIOS

**69.** Tomando a semana por unidade principal, qual é a fracção que representa tres dias? qual a que representa 5 horas?

**70.** O volume da Terra é 49 vezes maior que o da Lua; que parte da Terra tem o mesmo volume que a Lua?

**71.** O volume do Sol é 1260000 vezes maior que o da Terra; que parte do Sol tem o mesmo volume que a Terra? que parte do Sol tem o mesmo volume que a Lua?

**72.** Simplificar as fracções

$$\frac{318}{94827},\quad \frac{2436}{567216},\quad \frac{43785}{56835},\quad \frac{56794}{843452},\quad \frac{436725}{573345}.$$

**73.** Um negociante tinha um capital de 6:164$100 réis, mas perdeu no seu negocio 1:369$800 réis; exprimir pela fracção mais simples possivel a parte do capital que perdeu.

**74.** Reduzir ao menor denominador commum as fracções

$$\frac{225}{405},\quad \frac{108}{144},\quad \frac{336}{480},\quad \frac{66}{198},\quad \frac{216}{72},\quad \frac{530}{592}.$$

## CAPITULO II

## As quatro operações sobre fracções

---

### § 1.º Addicção e Subtracção

**87.** Estas operações conservam o mesmo sentido e definições que teem nos numeros inteiros; observando-se que estas operações suppõe sempre que os numeros, que se addicionam, ou se subtrahem, exprimem as grandezas em unidades da mesma especie.

**88. Addição.** — 1.º CASO. — As fracções teem o mesmo denominador, isto é, exprimem grandezas referidas á mesma unidade secundaria.

Exemplo: Addicionar as fracções

$$\frac{1}{7}, \quad \frac{2}{7}, \quad \frac{3}{7};$$

é o mesmo que addicionar 1 *setimo*, com 2 *setimos*, com 3 *setimos*, o que dá $1 + 2 + 3$ ou 6 *setimos*; e assim

$$\frac{1}{7} + \frac{2}{7} + \frac{3}{7} = \frac{1 + 2 + 3}{7} = \frac{6}{7}.$$

2.º CASO. — As fracções não teem o mesmo denominador, isto é, exprimem grandezas referidas a unidades secundarias differentes. Reduzem-se ao mesmo denominador, e procede-se como no 1.° caso.

Exemplo: addicionar as fracções

$$\frac{2}{5}, \quad \frac{4}{7}, \quad \frac{2}{3}.$$

Reduzindo-as ao mesmo denominador, temos

$$\frac{42}{105}, \quad \frac{60}{105}, \quad \frac{70}{105};$$

e assim

$$\frac{2}{5}+\frac{4}{7}+\frac{2}{3}=\frac{42}{105}+\frac{60}{105}+\frac{70}{105}$$

$$=\frac{42+60+70}{105}=\frac{172}{105}=1\,\frac{67}{105}$$

Regra. — *Para addicionar fracções, reduzem-se ao mesmo denominador, se teem denominadores differentes, e sommam-se depois os numeradores, dando a esta somma o denominador commum.*

Observação. — Na pratica da regra, convém sempre empregar o menor denominador commum.

**89.** Se as parcellas são numeros mixtos, addicionam-se primeiramente as fracções, extrahem-se os inteiros a esta somma, se os houver, e juntam-se esses inteiros aos inteiros dos numeros mixtos. Exemplo:

$$9\,\frac{3}{5}+\frac{7}{8}+11\,\frac{7}{28};$$

a somma das fracções é

$$\frac{69}{40}=1\,\frac{29}{40};$$

a somma proposta é, portanto,

$$(9+11+1)+\frac{29}{40}=21\,\frac{29}{40}.$$

Observações. — 1.ª A somma d'um inteiro com uma fracção, ou numero mixto, póde ser reduzida á forma fraccionaria, cujo numerador é o producto do inteiro pelo denominador da fracção augmentado no numerador d'esta, e o denominador o mesmo da fracção.

Assim,

$$3+\frac{2}{5}=\frac{3\times 5+2}{5}=\frac{17}{5}.$$

É o inverso da extracção dos inteiros.

2.ª As propriedades *commutativa* e *associativa* da addição dos numeros inteiros (18, 1.ª e 2.ª) subsistem na addição de numeros fraccionarios.

Assim, por exemplo,

$$\frac{2}{7}+\frac{5}{7}+\frac{11}{7}=\frac{2+5+11}{7}=\frac{11+2+5}{7}=\frac{11}{7}+\frac{2}{7}+\frac{5}{7};$$

$$\frac{2}{7}+\frac{5}{7}+\frac{11}{7}=\frac{2+5+11}{7}=\frac{2+(5+11)}{7}=\frac{2}{7}+\left(\frac{5+11}{7}\right).$$

**90. Subtracção.** — Regra. — *Para subtrahir uma fracção de outra, reduzem-se as fracções ao mesmo denominador, se tiverem differentes denominadores, e subtrahem-se depois os numeradores, dando á differença o denominador commum.*

Exemplos:

1.º Subtrahir $\frac{2}{9}$ de $\frac{5}{9}$

$$\frac{5}{9}-\frac{2}{9}=\frac{5-2}{9}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$$

2.° Subtrahir $\frac{3}{8}$ de $\frac{5}{7}$

$$\frac{5}{7} - \frac{3}{8} = \frac{40}{56} - \frac{21}{56} = \frac{40 - 21}{56} = \frac{19}{56}.$$

**91.** Se a subtracção é de numeros mixtos, faz-se primeiramente a subtracção das fracções e depois a dos numeros inteiros. Quando a fracção do diminuendo fôr menor que a do diminuidor, junta-se-lhe uma unidade tirada á parte inteira do diminuendo.

Exemplo 1.°:

$$8\,\frac{6}{7} - 5\,\frac{7}{9} = (8 - 5) + \left(\frac{6}{7} - \frac{7}{9}\right) = 3 + \frac{5}{63} = 3\,\frac{5}{63}\ ;$$

$$28\,\frac{2}{7} - 12 = (28 - 12) + \frac{2}{7} = 16\,\frac{2}{7}\ ;$$

$$20\,\frac{3}{5} - \frac{2}{7} = 20 + \left(\frac{3}{5} - \frac{2}{7}\right) = 20 + \frac{11}{35} = 20\,\frac{11}{35}$$

Exemplo 2.°

$$15\,\frac{1}{3} - 4\,\frac{5}{9} = 14 + \left(1 + \frac{1}{3}\right) - 4\,\frac{5}{9} = 14\,\frac{4}{3} - 4\,\frac{5}{9}$$

$$= (14 - 4) + \left(\frac{4}{3} - \frac{5}{9}\right) = 10\,\frac{7}{9};$$

$$16 - 4\,\frac{7}{9} = (15 - 4) + \left(1 - \frac{7}{9}\right) = 11\,\frac{2}{9}\ ;$$

$$1 - \frac{2}{3} = \frac{3}{3} - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}\ ;$$

$$14 - \frac{6}{11} = 13 + \left(1 - \frac{6}{11}\right) = 13\,\frac{5}{11}.$$

## EXERCICIOS

**75.** Calcular as expressões:

$$\left(3 + 9\,\frac{4}{5} + \frac{11}{10}\right) - \left(2 + 7\,\frac{13}{20}\right);$$

$$\left(\frac{34}{3} + \frac{11}{9} - \frac{2}{5}\right) - \left(\frac{12}{10} - \frac{3}{4}\right)$$

$$\left(\left(4\,\frac{3}{2} + 5\,\frac{7}{8} - \frac{15}{24}\right) - \left(1\,\frac{2}{7} + \frac{11}{21}\right)\right)$$

$$-\left(\left(8 - 6\,\frac{2}{15}\right) - \frac{12}{56}\right).$$

**76.** Quanto falta a $\frac{5}{11}$ para fazer a unidade? a $\frac{1}{7}$ para fazer 10?

**77.** O verdadeiro valor do anno (tropico), como hoje se sabe, é 365 dias e $\frac{12111}{50000}$; o Calendario Juliano (decretado por Julio Cesar, posto em vigor no anno 45 antes da era christã, e seguido ainda pelos russos, gregos e alguns povos do Oriente) suppõe o anno (tropico) de 365 dias e $\frac{1}{4}$; o Calendario Gregoriano (decretado pelo papa Gregorio XIII, em março de 1582, e hoje geralmente seguido), suppõe o anno tropico de 365 dias e $\frac{97}{400}$. Que erro se commette no valor do anno tropico em cada um dos calendarios? e que differença ha entre o anno Juliano e Gregoriano?

**78.** Tres fontes dão respectivamente 2 litros de agua em 3 minutos, 6 litros em 5 minutos, e 7 litros e 9 minutos. Quanta agua deitam juntas em um minuto?

## § 2.º Multiplicação

**92.** 1.º Caso. — **O multiplicador é um numero inteiro.** — A operação conserva o mesmo sentido e definição que tem nos numeros inteiros: calcular a somma de tantas parcellas iguaes á fracção multiplicando quantas são as unidades do numero inteiro multiplicador.

E, como se viu no n.º 82, póde fazer-se de dois modos: ou multiplicar o numerador pelo numero inteiro, sem alterar o denominador, ou dividir o denominador por esse numero inteiro, sem alterar o numerador. Mas, este segundo modo, só se póde praticar quando o denominador fôr multiplo do numero inteiro.

Exemplo 1.º:

$$\frac{2}{7} \times 3 = \frac{2}{7} + \frac{2}{7} + \frac{2}{7} = \frac{2 \times 3}{7} = \frac{6}{7}.$$

Exemplo 2.º:

$$\frac{5}{18} \times 3 = \frac{5}{18:3} = \frac{5}{6}.$$

Exemplo 3.º:

$$\frac{13}{4} \times 4 = \frac{13}{4:4} = \frac{13}{1} = 13;$$

isto é, multiplicando uma fracção pelo seu denominador obtem-se para producto o numerador.

Observação. — Um numero fraccionario $\frac{13}{4}$ representa pois o *quaciente completo* da divisão de 13 por 4, pois que multiplicado pelo divisor 4 dá o dividendo 13. É isto que justifica a notação das fracções servir tambem para signal da divisão.

A fórma fraccionaria dos numeros tornou sempre possivel a divisão de dois numeros inteiros.

**93.** 2.° Caso. — **Multiplicador fraccionario.** — A operação consiste em repetir a *parte* do multiplicando, *indicada pelo denominador do multiplicador,* tantas vezes quantas são as unidades do numerador do multiplicador. Diz-se mais abreviadamente, multiplicar por uma fracção $\frac{3}{5}$, por exemplo, é *tomar os* $\frac{3}{5}$ *do multiplicando.*

Exemplo 1.°:

$$20 \times \frac{3}{5} = (20:5) \times 3 = 4 \times 3 = 12.$$

Exemplo 2.°:

$$7 \times \frac{3}{5} = (7:5) \times 3 = \frac{7}{5} \times 3 = \frac{7 \times 3}{5} \text{(1.° caso)} = \frac{21}{5}.$$

Regra. — *Multiplica-se o numero inteiro (multiplicando) pelo numerador da fracção e dá-se ao producto o denominador da fracção.*

Exemplo 3.°:

$$\frac{2}{5} \times \frac{3}{7}.$$

A parte $\frac{1}{7}$ do multiplicando $\frac{2}{5}$ ou a divisão de $\frac{2}{5}$ por 7, obtem-se (n.° 82) multiplicando o denominador desta fracção por 7, o que dá $\frac{2}{5 \times 7}$, e então temos, por definição,

$$\frac{2}{5} \times \frac{3}{7} = \frac{2}{5 \times 7} \times 3 = \frac{2 \times 3}{5 \times 7} \text{(1.° caso)} = \frac{6}{35}.$$

Regra. — *Multiplicam-se duas fracções, fazendo o produ-*

*cto dos numeradores e dos denominadores, e tomando o primeiro producto para numerador e o segundo para denominador.*

Observações. — 1.ª Esta regra contém as outras, considerando um numero inteiro sob a fórma apparente de numero fraccionario, em que elle é o numerador e o denominador a unidade.

2.ª A multiplicação por uma fracção propria dá sempre um producto *menor* que o multiplicando.

3.ª Para justificar o emprego da palavra multiplicação no caso que vimos de tratar; consideremos uma questão de uso pratico.

Supponhamos que o preço de 1 metro de panno é $\frac{7}{10}$ da libra. Para obter o custo de 3 metros, é necessario repetir 3 vezes o preço *unitario* $\frac{7}{10}$ da libra ou *multiplicar*, no primitivo sentido da palavra, $\frac{7}{10}$ por 3; para obter o de $\frac{1}{5}$ de metro, dividir o preço unitario por 5; para obter o preço de $\frac{3}{5}$ do metro, tem de se procurar primeiramente o preço de $\frac{1}{5}$ do metro, e depois repetil-o, (multiplical-o) por 3. São manifestamente tres casos da mesma questão: «*achar o preço de certa quantidade de panno, conhecido o preço de certa unidade d'elle*»; e, posto que a operação varie de um para outro caso, sendo, ora uma multiplicação, ora uma divisão, ora o conjuncto d'estas duas, convém, pois que a questão é sempre a mesma na essencia, conservar á operação arithmetica o nome que lhe corresponde no caso mais simples (o primeiro); e assim se dirá:

*Multiplicar por* $\frac{1}{5}$, em vez de se dizer *dividir por* 5.

*Multiplicar por* $\frac{3}{5}$, em vez de se dizer *dividir por* 5, e *multiplicar por* 3 o quociente.

D'este modo desapparece a distincção dos tres casos da questão: e pode-se dizer que para obter o preço de certa quantidade de uma mercadoria (panno por exemplo), multiplica-se o preço da unidade da mercadoria pelo numero que representa essa quantidade, referido á mesma unidade.

**94. Multiplicação de dois numeros mixtos.** — Reduzem-se á forma fraccionaria (n.° 89, obs. 1.ª), e applica-se a regra geral antecedente.

Exemplo.

$$5\frac{2}{3}\times 6\frac{4}{7}$$

$$5\frac{2}{3}=\frac{17}{3},\quad 6\frac{4}{7}=\frac{46}{7};$$

$$5\frac{2}{3}\times 6\frac{4}{7}=\frac{17}{3}\times\frac{46}{7}=\frac{17\times 46}{3\times 7}=\frac{782}{21}=37\frac{5}{21};$$

é o producto na fórma de numero mixto.

**95. Producto de muitas fracções.** — Define-se este producto como o dos numeros inteiros: multiplicam-se as duas primeiras fracções, o resultado obtido pela terceira, este resultado pela quarta, e assim em diante até se empregarem todas as fracções.

A regra do n.° 93 dá para producto de muitas fracções uma fracção tendo por numerador o producto dos numeradores, e para denominador o producto dos denominadores.

Exemplo:

$$\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{2}{7}\times\frac{8}{11}=\frac{2\times 4\times 2\times 8}{3\times 5\times 7\times 11}=\frac{128}{1155}.$$

Observações.—1.ª Na pratica não convém effectuar logo os productos dos numeradores e denominadores; é preferivel deixal-os indicados, supprimir os divisores do numerador e denominador que houver em commum, os quaes facilmente se manifestam quando os termos das fracções são numeros pequenos.

Por exemplo: se o producto das fracções está indicado por

$$\frac{2 \times 4 \times 6 \times 9}{5 \times 3 \times 11 \times 4},$$

supprimem-se o divisor 4 patente no numerador e denominador e o divisor 3, que se reconhece existir no factor 9 do numerador e está patente no denominador; e fica a indicação mais simples

$$\frac{2 \times 6 \times 3}{5 \times 11},$$

sem haver agora mais divisores communs aos dois termos; e obtem-se promptamente

$$\frac{36}{55}$$

para producto, reduzido á expressão mais simples.

2.ª As propriedades *commutativa, associativa* e *distributiva* da multiplicação dos numeros inteiros (39) subsistem na multiplicação dos numeros fraccionarios.

Assim, por exemplo:

$$\frac{2}{3}\times\frac{5}{7}\times\frac{11}{8}=\frac{2\times 5\times 11}{3\times 7\times 8}=\frac{5\times 11\times 2}{7\times 8\times 3}=\frac{5}{7}\times\frac{11}{8}\times\frac{2}{3};$$

$$\frac{2}{3}\times\frac{5}{7}\times\frac{11}{8}=\frac{2\times 5\times 11}{3\times 7\times 8}=\frac{2\times(5\times 11)}{3\times(7\times 8)}=\frac{2}{3}\times\frac{(5\times 11)}{(7\times 8)}$$

$$=\frac{2}{3}\times\left(\frac{5}{7}\times\frac{11}{8}\right);$$

16
4
105

$$7\times\left(\frac{2}{3}+\frac{9}{5}\right)=7\times\frac{2}{3}+7\times\frac{9}{5}.$$

21

**Applicação da propriedade distributiva.** — Para multiplicar, por exemplo, 132 por $\frac{23}{28}$ póde-se proceder assim:

como $$\frac{23}{28} = \frac{14}{28} + \frac{7}{28} + \frac{2}{28} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{14},$$

$$132 \times \frac{23}{28} = 132 \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{14}\right) =$$

$$= 132 \times \frac{1}{2} + 132 \times \frac{1}{4} + 132 \times \frac{1}{14}$$ (propriedade distributiva)

| | |
|---|---|
| metade de 132. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . | 66 |
| um quarto de 132 é a metade de 66 . . . . . . . . . | 33 |
| $\frac{1}{14}$ de 132 é um setimo da metade 66 . . . . . . . . . | $9\frac{3}{7}$ |
| | $108\frac{3}{7}$ |

Diz-se fazer a multiplicação *por partes aliquotas* do multiplicador.

**96. Potencias de fracções.** — Se as fracções d'um producto de fracções são iguaes, temos, como no caso analogo dos numeros inteiros, uma potencia de fracção. Por exemplo:

$$\frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{2 \times 2 \times 2}{5 \times 5 \times 5} = \frac{2^3}{5^3} = \frac{8}{125}.$$

As potencias das fracções designam-se e representam-se como as dos numeros inteiros: a *base* é a fracção factor, o *expoente* ou *grau* é o numero (essencialmente inteiro) que indica quantos são os factores.

No exemplo, $\frac{2}{5}$ é a base, e 3 o expoente; a potencia é a terceira ou o cubo, que se representa por $\left(\frac{2}{5}\right)^3$.

A segunda potencia ou o quadrado de $\frac{2}{5}$ seria

$$\left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25};$$

a quarta potencia de $\frac{2}{5}$ seria

$$\left(\frac{2}{5}\right)^4 = \frac{16}{625}; \text{ etc.}$$

Regra. — *Para* elevar *uma fracção, ou numero fraccionario, a uma potencia, eleva-se a essa potencia cada um dos dois termos da fracção, ou do numero fraccionario.*

Uma potencia de fracção *irreductivel* é tambem uma fracção irreductivel.

## EXERCICIOS

**79.** Effectuar as seguintes multiplicações, obtendo logo os resultados na sua fórma mais simples:

$$\frac{5}{8} \times 4; \quad \frac{17}{40} \times 20; \quad \frac{112}{21} \times 7; \quad \frac{225}{999} \times 9.$$

**80.** Effectuar as seguintes multiplicações:

$$\frac{3}{19} \times 6; \quad \frac{2}{9} \times 5; \quad 8\frac{4}{9} \times 3; \quad 19\frac{5}{14} \times 7.$$

**81.** Um metro de panno custa 2$000 réis, quanto custam $\frac{2}{5}$ do metro?

**82.** Effectuar as seguintes multiplicações:

$$\frac{3}{4} \times \frac{5}{7}; \quad \frac{2}{6} \times \frac{9}{2}; \quad \frac{85}{311} \times \frac{315}{628}; \quad 3\frac{2}{7} \times \frac{5}{8};$$

$$20 \times 11\frac{7}{12}; \quad 12\frac{3}{18} \times 18\frac{10}{19}.$$

**83.** Um grau do thermometro de Réaumur vale 1 grau e $\frac{1}{4}$ do thermometro centigrado; 26 graus Réaumur a quantos graus centigrados correspondem? 25 centigrados a quantos Réaumur?

**84.** Uma locomotiva anda 38 $^{\text{kilom}}\frac{2}{3}$ por hora; quantos kilometros anda em 27 horas?

**85.** Effectuar as seguintes multiplicações:

$$\frac{9}{13} \times \frac{2}{7} \times \frac{11}{3};$$

$$\frac{8}{9} \times \frac{21}{5} \times \frac{15}{4} \times \frac{6}{7};$$

$$\frac{315}{113} \times \frac{315}{113} \times \frac{315}{113} \times \frac{25}{48}.$$

**86.** As nossas moedas de prata teem $\frac{11}{12}$ do seu peso de prata pura; que porção de prata pura ha em dez moedas de cinco tostões, cujo peso é de 125 grammas?

**87.** Fazer a multiplicação

$$176 \times \frac{35}{48},$$

por partes aliquotas.

Indicação:

$$\frac{35}{48} = \frac{24}{48} + \frac{6}{48} + \frac{3}{48} + \frac{2}{48} =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8}$$

## § 3.º Divisão

**97.** Esta operação tem por fim, dados dois numeros (dividendo e divisor), achar um terceiro numero, chamado *quociente*, que multiplicado pelo divisor produza o dividendo.

Em quociente inteiro, esta operação não é sempre possivel: com quociente fraccionario é sempre possivel.

**98.** 1.º Caso. — O divisor é um numero inteiro, e o dividendo fraccionario.

Regra. — *Multiplica-se o denominador pelo inteiro, ou divide-se o numerador pelo inteiro, quando fôr possivel* (n.º 82).

Exemplo 1.º:

$$\frac{4}{5} : 3 = \frac{4}{5 \times 3} = \frac{4}{15}.$$

Exemplo 2.º:

$$\frac{12}{15} : 6 = \frac{12}{15 \times 6} = \frac{12}{90} = \frac{2}{15},$$

ou

$$\frac{12}{15} : 6 = \frac{12:6}{15} = \frac{2}{15}.$$

Observação. — Deve preferir-se o segundo modo indicado na regra, quando se poder applicar, isto é, quando o numerador fôr multiplo do divisor.

**99.** 2.º Caso — O divisor é uma fracção e o dividendo um numero inteiro.

Regra. — *Multiplica-se o numero inteiro pela fracção invertida, isto é, trocando os logares aos numeros quo são os termos da fracção.*

$$5 : \frac{3}{4} = 5 \times \frac{4}{3} = \frac{5 \times 4}{3} = \frac{20}{3} = 6\,\frac{2}{3}.$$

O numero procurado (quociente) deve, por definição (97), ser tal que multiplicado por $\frac{3}{4}$ reproduza 5; ora *multiplicar* por $\frac{3}{4}$ significa (n.º 93, obs. 3.ª) dividir por 4 e multiplicar por 3; portanto, para que esse numero possa dar 5, deve ser 5 multiplicado por 4 e dividido por 3, ou *multiplicado* por $\frac{4}{3}$; como indica a regra.

**100.** 3.º Caso. — O dividendo e o divisor são ambos fraccionarios.

Regra. — *Multiplica-se a fracção dividendo pela fracção divisor* invertida; *ou divide-se termo a termo, isto é, numerador da primeira por numerador da segunda, denominador d'aquella por denominador d'esta, quando fôr possivel.*

Exemplo 1.º:

$$\frac{2}{3} : \frac{5}{7} = \frac{2}{3} \times \frac{7}{5} = \frac{2 \times 7}{3 \times 5} = \frac{14}{15}.$$

Exemplo 2.º:

$$\frac{8}{9} : \frac{2}{3} = \frac{8}{9} \times \frac{3}{2} = \frac{8 \times 3}{9 \times 2} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3},$$

ou

$$\frac{8}{9} : \frac{2}{3} = \frac{8 : 2}{9 : 3} = \frac{4}{3}.$$

**101.** Observações. — 1.ª Deve preferir-se o segundo modo da regra, quando se poder praticar, isto é, quando os termos da fracção dividendo forem respectivamente multiplos dos termos da fracção divisor.

2.ª A regra do n.º 100 comprehende as dos outros casos, pondo um numero inteiro sob a fórma apparente de um numero fraccionario em que o numerador é esse numero inteiro e o denominador a unidade.

3.ª Se o divisor é uma fracção propria, o quociente é *maior* que o dividendo; se é impropria, o quociente é *menor* que o dividendo.

**102.** O dividendo e divisor são numeros mixtos.

Regra. — *Reduzem-se á fórma de numeros fraccionarios e applica-se a regra do n.° 100.*

Exemplo:

$$5\frac{3}{4} : 4\frac{2}{7}$$

$$5\frac{3}{4} = \frac{23}{4}, \quad 4\frac{2}{7} = \frac{30}{7};$$

$$5\frac{3}{4} : 4\frac{2}{7} = \frac{23}{4} : \frac{30}{7} = \frac{23 \times 7}{4 \times 30} = \frac{161}{120} = 1\frac{41}{120}.$$

Observações. — 1.ª Se um só dos termos da divisão fosse numero mixto, reduzia-se esse á fórma do numero fraccionario, e depois entrava n'uma das regras dos dois primeiros casos.

2.ª A propriedade distributiva relativamente á somma e á subtracção subsiste na divisão dos numeros fraccionarios.

Temos, por exemplo,

$$\left(\frac{2}{3} + \frac{4}{5}\right) : \frac{8}{11} = \left(\frac{2}{3} + \frac{4}{5}\right) \times \frac{11}{8} = \frac{2}{3} \times \frac{11}{8} + \frac{4}{5} \times \frac{11}{8}$$

$$= \frac{2}{3} : \frac{8}{11} + \frac{4}{5} : \frac{8}{11}.$$

$$\left(\frac{6}{7} - \frac{1}{3}\right) : \frac{3}{8} = \frac{6}{7} : \frac{3}{8} - \frac{1}{3} : \frac{3}{8}.$$

3.ª As propriedades das potencias dos numeros inteiros indicadas no n.° 57 applicam-se ás dos numeros fraccionarios.

Assim temos, por exemplo:

$$\left(\frac{2}{5}\right)^3 \times \left(\frac{2}{5}\right)^4 = \left(\frac{2}{5}\right)^{3+4};$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^7 : \left(\frac{2}{5}\right)^4 = \left(\frac{2}{5}\right)^{7-4};$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^4 \times \left(\frac{3}{7}\right)^4 = \left(\frac{2}{5} \times \frac{3}{7}\right)^4 = \left(\frac{6}{35}\right)^4;$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^4 : \left(\frac{3}{7}\right)^4 = \left(\frac{2}{5} : \frac{3}{7}\right)^4 = \left(\frac{14}{15}\right)^4.$$

---

## EXERCICIOS

**88.** Executar as seguintes divisões, obtendo logo os resultados na sua fórma mais simples:

$$\frac{16}{51} : 4; \quad \frac{99}{111} : 3; \quad \frac{250}{999} : 10; \quad \frac{360}{907} : 30; \quad \frac{10}{9} : \frac{2}{3}.$$

**89.** Executar as seguintes divisões:

$$\frac{11}{17} : 3; \quad \frac{13}{21} : 10; \quad \frac{38}{39} : \frac{19}{5}; \quad \frac{37}{6} : \frac{74}{7} : \quad 300 : \frac{41}{48};$$

$$3\,\frac{2}{7} : 5\,\frac{3}{7}; \quad 14\,\frac{3}{11} : \frac{3}{5}; \quad 6\,\frac{3}{8} : 12; \quad 6\,\frac{2}{7} : 8\,\frac{2}{7}.$$

**90.** Os $\frac{4}{5}$ d'um numero são 2464; qual é esse numero?

**91.** Peneirando-se farinha perdem-se $\frac{3}{25}$ do seu peso; quanta se deve peneirar para se obter 15 kilogrammas de farinha peneirada?

**92.** A roda d'uma sege tem $5^{m} \frac{5}{7}$ de circumferencia; quantos giros fez a roda no fim do percurso de 28:000 metros?

**93.** Um parafuso avança $\frac{3}{5}$ de millimetro em cada giro; quatro giros deve fazer o parafuso para avançar 4 millimetros e $\frac{1}{5}$?

**94.** Compraram-se dois objectos por 13$000 réis; um d'elles custou os $\frac{5}{8}$ do custo do outro; qual foi o custo de cada um?

**95.** Uma bola elastica resalta a uma altura que é $\frac{2}{5}$ de altura de que cahiu; depois de ter resaltado tres vezes, elevou-se $\frac{16}{15}$ do metro; qual foi a altura de que primitivamente cahiu?

**96.** Uma vasilha contém 210 litros de vinho; tiram-se-lhe 45 litros de vinho que se substituem por igual quantidade de agua; da mistura tiram-se tambem 45 litros substituindo-os por outros tantos de agua; e pratica-se ainda outra vez a mesma operação; que porção de agua e de vinho ficou tendo a vasilha?

**97.** Uma fonte dá 2 litros de agua em 2 minutos, outra 6 litros em 5 minutos, e uma terceira 7 litros em 2 minutos; que tempo gastam, correndo juntas, a encher um tanque de 6:000 litros?

**98.** Quanto se deve subtrahir a um numero para que o resultado seja o mesmo que tomar-lhe os $\frac{5}{6}$?

**99.** N'um relogio, em cada giro do ponteiro dos minutos, o das horas faz $\frac{1}{12}$ de giro; que fracção de giro andou este ponteiro quando o dos minutos fez 3 giros e $\frac{11}{60}$?

**100.** Um creado cuja soldada annual era 69$000 réis, foi despedido no fim de 7 mezes e meio de serviço; havendo já recebido $\frac{3}{5}$ do que tinha ganho, quanto tem ainda a receber?

**101.** Multiplicando um numero por $\frac{3}{15}$, diminuiu $\frac{4}{9}$; achar o numero.

**102.** Um negociante vendeu $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{5}$ d'uma mercadoria e $\frac{3}{8}$ do resto; se a tivesse vendido toda, receberia a mais 2$400 réis; qual era o custo de toda a mercadoria?

**103.** Dividir 53 em duas partes de modo que $\frac{5}{6}$ d'uma iguale $\frac{3}{7}$ da outra.

**104.** Dividindo um numero por $\frac{3}{4}$ augmentou $\frac{7}{36}$: achar o numero.

**105.** Uma estaca está cravada em um lago; tem a quarta parte espetada no fundo do lago, um terço na agua, e a parte fóra da agua tem o comprimento $2^m\,{}^1/_2$; qual é o comprimento total da estaca?

**106.** Uma locomotiva consome por kilometro $\frac{1}{60}$ da agua que é sua provisão completa; partiu com $\frac{3}{5}$ sómente d'essa provisão, reconhecendo-se que na primeira estação tinha apenas $\frac{2}{15}$; quantos kilometros andou?

**107.** Calcular as expressões numericas:

$$\left(9\frac{2}{3}-\frac{3}{7}\times\frac{2}{5}\right):\left(\frac{2}{9}+11\frac{4}{5}\right)\times\frac{5}{12}$$

$$\left(\frac{3}{4}:\frac{1}{2}+\frac{5}{7}\times\frac{2}{5}\right):\left(\frac{3}{4}+7\frac{4}{5}-2\right)$$

$$\left(\frac{53}{48}+\frac{15}{3}-\frac{81}{17}-\frac{1}{2}\right):\left(36-\frac{124}{48}-15\right)$$

$$\left(34\frac{6}{11}+4\frac{2}{3}-16\frac{5}{9}\right):\left(6\frac{3}{4}+9\frac{11}{12}\right):62\frac{5}{13}$$

$$\left(6\frac{2}{3}+4\frac{5}{8}\right)\times\left(3\frac{2}{3}:\frac{5}{9}-\frac{12}{17}:\frac{9}{7}\right):\left(15\frac{7}{16}-5\frac{11}{12}\right).$$

## CAPITULO III

# Numeros decimaes

**103.** Como dissemos no numero 81, as fracções ou quebrados que teem por denominador uma potencia de 10, tomam a denominação particular de fracções *decimaes.* Estas fracções suppõem que a divisão da unidade principal ou primitiva, para formar as unidades secundarias, se fez em 10 partes, depois cada uma d'estas novamente em 10, ou a unidade primitiva em 100, e assim em diante. Estas partes denominam-se *decimaes;* e chamam-se *decimas, centesimas, millesimas, decimas-millessimas*, etc., respectivamente as partes

$$\frac{1}{10}, \quad \frac{1}{100}, \quad \frac{1}{1000}, \quad \frac{1}{10000}, \text{ etc.,}$$

da unidade principal.

Nos numeros inteiros, partindo d'uma unidade de qualquer ordem, por exemplo, dos milhares, as unidades das ordens inferiores, na sua ordem descendente, dão a mesma lei de divisão da unidade de milhar, tomada como primitiva; uma centena ou $\frac{1}{10}$ de milhar, uma dezena, ou $\frac{1}{100}$ de milhar, uma unidade simples, ou $\frac{1}{1000}$ de milhar. Assim, marcando com um signal (a virgula) (1) as unidades simples, póde continuar-se para a direita, conforme a mesma lei, a divisão da unidade

(1) O emprego da virgula deve-se a Kepler (1571-1630).

simples; representando a primeira casa da direita da virgula as decimas, ou $\frac{1}{10}$ da unidade simples, a segunda casa as centesimas, ou $\frac{1}{100}$ da unidade simples, etc.

Portanto, uma fracção decimal póde escrever-se do mesmo modo que os numeros inteiros, applicando-lhes o principio do valor de posição ou relativa dos algarismos. É n'isto que está a vantagem d'esta fórma de fracções sobre a fórma ordinaria.

Exemplos:

O numero fraccionario decimal

$$\frac{123456}{10000} = 12 + \frac{3}{10} + \frac{4}{100} + \frac{5}{1000} + \frac{6}{10000}$$

escreve-se

$$12{,}3456.$$

A fracção decimal

$$\frac{235}{1000}$$

escreve-se

$$0{,}235.$$

A fracção decimal

$$\frac{27}{10000}$$

escreve-se

$$0{,}0027.$$

Regra. — *Representa-se uma fracção decimal na numeração dos numeros inteiros, escrevendo o numerador e separando d'elle, por uma virgula, tantos algarismos para a direita quan-*

*tos os zeros do denominador. Se o numerador não tem algarismos sufficientes, supprem-se com zeros escriptos á esquerda d'esse numerador, e põe-se ainda um zero á esquerda da virgula, no logar dos inteiros que faltam.*

**104.** Uma fracção decimal escripta na fórma dos numeros inteiros, chama-se *numero decimal;* a parte da esquerda da virgula, chama-se *parte inteira;* a da direita *parte decimal* ou *mantissa.*

Observações. — 1.ª Os zeros escriptos á direita da parte decimal não alteram o numero decimal.

Exemplo: 43,5 = 43,50 = 43,500, etc.

2.ª Inversamente, escreve-se um numero decimal no typo das fracções, supprimindo a virgula ao numero, e dando-lhe por denominador a unidade seguida de tantos zeros quantos os algarismos decimaes.

**105.** Um numero decimal póde ser lido de quatro modos:

1.ª Regra. — *Lê-se a parte inteira, seguindo a numeração falada dos numeros inteiros, e depois a parte decimal como se fosse tambem um numero inteiro, dizendo no fim o nome da unidade decimal representada pelo ultimo algarismo.*

Exemplo: 54,024; lê-se 54 unidades e 24 millesimas.

2.ª Lê-se primeiramente a parte inteira, como na 1.ª regra, e depois lêem-se os algarismos decimaes um a um com a designação da unidade decimal que cada um representa.

Exemplo: 32,452678; lê-se 32 unidades, 4 decimas, 5 centesimas, etc.

3.ª Lê-se a parte inteira, como nas duas regras antecedentes, depois a parte decimal em classes de tres algarismos a partir da virgula, que se correspondem com as unidades ternarias da numeração falada dos numeros inteiros; as quaes são millesimas, millionesimas, billionesimas, trillionesimas, etc.

Exemplo: 235,830.025.030; lê-se: 235 unidades, 830 millesimas, 25 millionesimas e 30 billionesimas.

4.º Lê-se todo o numero decimal como sendo inteiro, prescindindo da virgula, dizendo após o ultimo algarismo decimal o numero das unidades que elle representa.

Exemplo: 25,302 lê-se: 25:302 millesimas.

**106.** A escripta do ditado de um numero decimal faz-se acompanhando o ditado, segundo um dos quatro modos porque elle é feito.

**107.** A mudança da virgula equivale a multiplicar o numero decimal (deslocação para a direita) ou a dividil-o (deslocação para a esquerda) por uma potencia de 10 cujo expoente é o numero de casas que a virgula andou para um ou outro lado.

Exemplos:

$$3{,}127 \times 100 = 312{,}7$$

$$455{,}22 : 100 = 4{,}5522$$

$$3{,}14 \times 1000 = 3140$$

$$3{,}14 : 1000 = 0{,}00314.$$

## CAPITULO IV

# As quatro operações sobre numeros decimaes

---

### § 1.º Addição e Subtracção

**108.** Estas operações fazem-se sobre os numeros decimaes como nos numeros inteiros, tendo o cuidado de escrever os numeros de modo que as unidades da mesma ordem decimal se correspondam na mesma linha vertical; bastando para isso fazer corresponder as virgulas na mesma columna, e pondo na somma, ou na differença, a virgula na linha das virgulas.

Exemplo:

$$2{,}345 + 1{,}23 + 0{,}3456.$$

**Typo do calculo**

$$\begin{array}{rl} & 2{,}345 \\ & 1{,}23 \\ & 0{,}3456 \\ \hline \text{Somma} \ldots & 3{,}9206 \end{array}$$

Observação. — Para tornar a operação identica á dos numeros inteiros, deveria escrever-se um zero á direita da 1.ª parcella, e dois á direita da 2.ª, o que corresponde a reduzir as fracções decimaes ao mesmo denominador; mas na pratica é inutil escrevel-os.

Exemplos. Fazer as subtracções seguintes:

I. 7,286—5,432    II. 9,5—3,657    III. 1—0,324

Typo do calculo

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| I. | 7,286 | II. | 9,500 | III. | 1,000 |
| | 5,432 | | 3,658 | | 0,324 |
| resto . . . | 1,854 | resto . . . | 5,842 | resto . . . | 0,676 |

Observação. — Na pratica não é necessario escrever os zeros, como está indicado no diminuendo dos dois ultimos exemplos: suppõem-se escriptos.

## § 2.º Multiplicação

**109.** Regra. — *Para fazer a multiplicação de dois numeros decimaes, procede-se como se fossem inteiros, isto é, sem fazer caso das virgulas; depois separam-se na direita do producto, com a virgula, tantos algarismos quantos são os algarismos decimaes dos dois factores. Se o producto não tiver algarismos sufficientes, supprem-se com zeros escriptos á esquerda, tendo o cuidado de pôr um zero no logar dos inteiros.*

Exemplos:

I. $6,43 \times 3,4$    II. $0,023 \times 0,0021$

### Typo do calculo

$$
\begin{array}{lr}
 & 6{,}43 \\
 & 3{,}4 \\
\hline
 & 2572 \\
 & 1929\phantom{0} \\
\hline
\text{Producto...} & 21{,}862
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rl}
0{,}023 & \\
0{,}0021 & \\
\hline
23 & \\
46\phantom{0} & \\
\hline
0{,}0000483\ldots & \text{Producto}
\end{array}
$$

Com effeito, visto ser (n.º 104)

$$6{,}43 = \frac{643}{100} \quad \text{e} \quad 3{,}4 = \frac{34}{10}.$$

no primeiro exemplo será:

$$6{,}43 \times 3{,}4 = \frac{643}{100} \times \frac{34}{10} = \frac{643 \times 24}{1000},$$

pela regra da multiplicação das fracções (n.º 93); e no segundo exemplo,

$$0{,}023 = \frac{23}{1000}, \quad 0{,}0021 = \frac{21}{10000},$$

portanto

$$0{,}023 \times 0{,}0021 = \frac{23}{1000} \times \frac{21}{10000} = \frac{23 \times 21}{10000000};$$

resultados que justificam a regra estabelecida.

Na multiplicação dos numeros decimaes seria preferivel seguir um processo differente do habitual, que vem de ser indicado, como judiciosamente fez notar o grande geometra Lagrange; pois, quando os factores tem algarismos decimaes, o que mais importa obter é os algarismos da parte inteira do producto, e ir successivamente obtendo os da parte decimal até á unidade decimal que nos baste conhecer. Eis a regra indicada por Lagrange: escreve-se o multiplicador debaixo do multiplicando, de modo que o algarismo das unidades do multiplicador fique debaixo do ultimo algarismo do multiplicando. Depois, começa-se a operação pelo ultimo algarismo da esquerda do multiplicador, que multiplicará, como no modo ordinario da direita para a esquerda, todos os algarismos do multiplicando; escrevendo-se o primeiro algarismo d'este producto debaixo do algarismo do multiplicador que o produziu e os outros successivamente á esquerda d'elle. Procede do mesmo modo com o segundo algarismo do multiplicador, escrevendo tambem debaixo d'elle o primeiro algarismo do producto por elle produzido; e assim andando. O logar da virgula nestes productos é o mesmo que tem no multiplicando, isto é, as unidades dos productos e as do multiplicando ficam na mesma linha vertical; por consequencia, o algarismo das unidades da somma d'elles, ou do producto total, fica tambem nessa linha. D'este modo facilmente se calculam sómente os algarismos decimaes que se queira obter. Tomemos o proprio exemplo de Lagrange para se ver a execução da regra: multiplicando **437,25** e multiplicador **27,34**.

$$\begin{array}{r|l}
\multicolumn{2}{c}{437,25} \\
\multicolumn{2}{r}{27,34} \\
\hline
8745 & 0 \\
3060 & 75 \\
131 & 175 \\
17 & 4900 \\
\hline
11954 & 4150
\end{array}$$

A linha vertical é para marcar mais visivelmente o logar da virgula (1).

## § 3.° Divisão

**110.** 1.° Caso. — O divisor é um numero inteiro. *A divisão faz-se precisamente do mesmo modo que nos numeros inteiros, separando depois, com a virgula, á direita do quociente, tantos algarismos quantos decimaes tem o dividendo.*

Exemplo 1.°:

$$899,43 : 21.$$

Typo do calculo

```
899,43 | 21
 59    |________
 17 4    42,83...   quociente completo.
   63
    0
```

É dividir 89943 *centesimas* por 21; o quociente exprime *centesimas*.

Exemplo 2.°:

$$0,00276 : 23.$$

Typo do calculo

```
0,0027.6 | 23
         |__________
     4 6   0,00012...   quociente completo.
       0
```

---

(1) *L'enseignement mathématique*, 10.° anno, n.° 1, pag. 66.—*Journal de l'Ecole Polytechnique*, tomo II, pag. 192.

É dividir 276 *centesimas-millesimas* por 23; o quociente exprime *centesimas-millesimas*.

35,123 : 15

Typo do calculo

$$\begin{array}{l|l}
35{,}123 & 15 \\ \cline{2-2}
\;\;5\,1 & 2{,}341 \text{ quociente incompleto, approximado a } 0{,}001 \\
\;\;\;62 & \\
\;\;\;\;\;23 & \\
\;\;\;\;\;\;\;8 &
\end{array}$$

N'este exemplo, a divisão deixa um resto; o quociente achado é incompleto. Para se obter o quociente completo deve-se juntar ao quociente achado uma fracção ordinaria tendo por numerador o resto 8 e por denominador o divisor seguido de tantos zeros quantos são os algarismos decimaes do dividendo. Assim, o quociente completo é

$$2{,}341 + \frac{8}{15000}.$$

Na pratica, porém, prefere-se quasi sempre, completar o quociente com decimaes; o que em muitos casos, se póde conseguir, como adiante se verá.

**111.** 2.º Caso. — O divisor é um numero decimal.

Regra. — *Torna-se o divisor inteiro, supprimindo-lhe a virgula, e transpondo-a no dividendo para a direita, tantas casas quantos são os algarismos decimaes que tinha o divisor, supprindo-se com zeros escriptos á direita do dividendo, a falta de algarismos que houver; effectua-se depois a divisão como no primeiro caso.*

Exemplos:

I. 13,044 : 1,2; II. 3,015 : 0,015; III. 25,2 : 0,018.

Typo do calculo

```
I.     130,44 | 12
       10 4     10,87   quociente completo.
          84
           0

II.    3015 | 15
         15   201   quociente completo.
          0

III.   25200 | 18
        72     1400   quociente completo.
         0
```

**112.** As provas das quatro operações sobre os numeros decimaes fazem-se exactamente como ficou indicado a proposito dos numeros inteiros.

16-4-12

## § 4.º Reducção de fracções a dizima e de dizima limitada a fracção

**113. Definição.**—Reduzir uma fracção ordinaria a numero decimal ou, como tambem se diz, reduzir uma fracção a *dizima*, é achar um numero decimal que seja equivalente á fracção proposta.

Regra.—*Para reduzir uma fracção, ou numero fraccionario, a dizima, divide-se o numerador pelo denominador, e vão-se formando os dividendos parciaes escrevendo zeros á direita de cada resto.*

Exemplos. Converter em dizimas as fracções:

I. $\frac{15}{8}$; II. $\frac{3}{4}$; III. $\frac{3}{7}$; IV. $\frac{5}{12}$

Typo do calculo

I. 

```
15 | 8
70   1,875 é a conversação exacta de 15/8
 60
  40
   0
```

II.

```
30 | 4
20   0,75 é a conversão exacta de 3/4
 0
```

III.

```
30 | 7
 20   0,4285714...
  60
   40
    50
     10
      30
       20
        .
        .
        .
```

N'este exemplo, a operação nunca termina: reproduzem-se *periodicamente* os algarismos 428571 *(periodo)*; a conversão não se póde fazer exactamente, e sómente se obtem o valor de $\frac{3}{7}$ em dizima approximadamente. Assim parando na 3.ª casa decimal, obtem-se 0,428 para valor de $\frac{3}{7}$ approximado até millesimas.

IV.

```
50 | 12
 20   0,4166...
  80
   80
    .
    .
    .
```

Tambem aqui a operação nunca termina, apparecendo agora algarismos que se não reproduzem, 41, (algarismos *não periodicos)* e um algarismo, 6, que se reproduz *(periodo).*

Estes exemplos mostram, como *facto numerico*, que a conversão d'um numero fraccionario em dizima, póde fazer-se exactamente, ou não; e n'este segundo caso ha algarismos que se reproduzem indefinidamente, e cujo conjuncto fórma o que se chama *periodo*, apparecendo logo a partir da virgula, ou havendo, entre esta e o primeiro algarismo do periodo, outros algarismos que se não reproduzem, e cujo conjuncto fórma a parte *não periodica* ou *ante-periodo.*

**114.** Quando a conversão se faz exactamente, diz-se que a dizima é finita, ou limitada; no caso contrario, diz-se que a dizima é *periodica simples*, como na de $\frac{3}{7}$, *periodica mixta*, como na de $\frac{5}{12}$.

**115.** A reducção d'uma dizima limitada a quebrado faz-se immediatamente, tornando patente o denominador da dizima, que é sempre uma potencia de 10 subentendida pela virgula, como já se disse no n.º 104 e aqui se repete na seguinte

Regra. — *Para reduzir uma dizima á fórma de numero fraccionario ordinario, toma-se para numerador o numero decimal sem a virgula, e para denominador a unidade seguida de tantos zeros quantos os algarismos da parte decimal.*

Exemplos:

$$3{,}245 = \frac{3245}{1000} = \frac{649}{200}; \quad 0{,}64 = \frac{64}{100} = \frac{16}{25}.$$

**116.** A reducção a dizima, exacta ou approximada, das fracções ordinarias é praticamente exigida em todas as questões de grandezas expressas no Systema Metrico.

Exemplo. Dividir $19^m$ em 3 partes iguaes: temos $19^m : 3$

$= 6^m \frac{1}{3}$; como os submultiplos do metro são decimaes, deve-se converter em dizima $\frac{1}{3}$, o que sómente se póde fazer approximadamente. O valor approximado de $\frac{1}{3}$ a menos de 0,001, é 0,333, e $\frac{1}{3}$ do metro é pois approximadamente 333 millimetros.

Praticamente não tem importancia que a conversão em dizima se faça ou não exactamente; porque basta conhecer n'essa conversão os algarismos decimaes até áquelle que exprime o infimo submultiplo da unidade concreta empregado. Assim: nas questões commerciaes basta calcular a expressão das grandezas de comprimento até ao algarismo que exprime *centimetros*; nas grandezas agrarias até ao *centiare*; nas de capacidade até ao *centilitro*; nos pezos até ao *gramma* nas questões commerciaes communs, até ao *milligramma* nas pesagens delicadas da pharmacia; no preço de uma mercadoria até ao maior multiplo de 5 reis contido no numero concreto.

---

## EXERCICIOS

### Sobre numeros decimaes e calculo d'expressões numericas que envolvem as operações fundamentaes sobre decimaes e quebrados

**108.** Escrever na fórma decimal dos numeros inteiros as seguintes fracções decimaes:

$$\frac{3}{100};\quad \frac{235}{10};\quad \frac{21}{1000};\quad \frac{3}{100000};\quad \frac{1}{1000000}.$$

**109.** Escrever na fórma decimal dos numeros inteiros cada uma das seguintes sommas:

$$12 + \frac{3}{100} + \frac{2}{1000} + \frac{7}{10000} + \frac{2}{1000000}.$$

$$\frac{9}{10} + \frac{6}{100} + \frac{5}{1000} + \frac{6}{10000} + \frac{5}{100000}.$$

**110.** Escrever na fórma ordinaria das fracções os seguintes numeros decimaes:

$$0{,}18;\quad 0{,}00125;\quad 8{,}0425;\quad 113{,}00084,$$

reduzindo as fracções á expressão mais simples.

**111.** O mar cobre 0,734 da superficie da Terra; qual é a fracção decimal da superficie que representa a parte que o mar não cobre?

**112.** O anno tropico tem $\overset{\text{dias}}{365{,}242217}$ (Le Varrier), e o anno do nosso calendario (gregoriano) dá-lhe $\overset{\text{dias}}{365{,}2425}$: qual é o valor da differença no fim de 400 annos? e quantos annos devem decorrer para que a differença attinja um dia?

**113.** Converter em dizimas as fracções

$$\frac{5}{8},\ \frac{2}{5},\ \frac{5}{32},\ \frac{11}{640},\ \frac{4}{25},\ 365 + \frac{97}{406}$$ (valor do anno tropico no calendario gregoriano).

$$\frac{1}{2048000},\ \frac{47}{71000000}.$$

**114.** Calcular a conversão em dizima, até ás decimas-millesimas, das seguintes fracções:

$$\frac{1}{13},\ \frac{1}{23},\ \frac{1}{29},\ \frac{1}{37},\ \frac{1}{47},$$

**115.** Converter em dizima as fracções

$$\frac{5}{13},\ \frac{7}{53},\ \frac{13}{49},\ \frac{15}{17},\ \frac{9}{22},\ \frac{7}{26},\ \frac{8}{85},\ \frac{36}{700},\ \frac{7}{72},$$

indicando o periodo da dizima periodica que se obtem, e o anteperiodo das que o tiverem.

**116.** Calcular o valor de cada uma das seguintes expressões:

$$\frac{96,62}{14}+\frac{0,627}{28,1}-\frac{77}{44,6};$$

$$123\times\left(\frac{82,6}{156}-\frac{26,7}{2,67}+36\right);$$

$$\frac{77}{15,1}+32\times\left(\frac{7,1}{7,2}-\frac{12}{13}+1\right);$$

$$\frac{\left(3+\frac{26}{25}\right)+75\times\left(\frac{43}{12}-1\right)}{26+\frac{14}{0,01}-\frac{14}{0,1}\times(81-74)}.$$

**117.** Verificar que $916\frac{2}{3}$ millesimas é o mesmo que a fracção $\frac{11}{12}$.

Observação. — No calculo d'uma expressão que envolve numeros fraccionarios e decimaes, como as do exercicio n.º 116, reduzem-se os decimaes á fórma de fracção ordinaria, e o calculo recáe sempre sobre fracções ordinarias, visto que a reducção de tudo á fórma decimal não é possivel, sem erro, senão em casos mui particulares.

## CAPITULO V

# Processo pratico da extracção da raiz quadrada d'um numero inteiro, decimal ou fracção

**117. Definição.**—Chama-se *raiz quadrada* d'um numero dado, ao numero que elevado ao quadrado produz esse numero.

Assim, 12 é a raiz quadrada de 144, porque $12^2 = 144$; $\frac{2}{3}$ é a raiz quadrada de $\frac{4}{9}$, porque $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$; 2,5 é a raiz quadrada de 6,25 porque $2{,}5^2 = 6{,}25$.

A operação pela qual se determina a raiz quadrada d'um numero, chama-se *extracção da raiz quadrada*; e indica-se pelo signal $\sqrt{\phantom{x}}$, *radical*, (1) debaixo do qual se colloca o numero dado.

Exemplo: $\sqrt{144}$ indica a raiz quadrada de 144 que é 12.

**118.** Os numeros digitos são raizes quadradas de outros tantos numeros todos inferiores a 100, quadrado de 10 (primeiro numero de dois algarismos); isto é,

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Raizes quadradas | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| Quadrados | 1 | 4 | 9 | 16 | 25 | 36 | 49 | 64 | 81 |

Devem ter-se de memoria os quadrados dos numeros digitos; o que, de resto, já se deve saber de cór porque estes quadrados estão na taboa da multiplicação.

**119.** Nem todos os numeros são quadrados; é até a me-

(1) O signal radical, na sua fórma actual, apparece pela primeira vez n'uma obra allemã de Christoff Rudolff, 1526.

nor parte. Nos 99 primeiros numeros inteiros não ha se não 9 que são quadrados, os acima indicados.

Quando um numero não é quadrado, a operação da extracção da raiz tem por fim *achar a raiz do maior quadrado contido no numero, e a differença ou resto d'este sobre esse maior quadrado.*

Exemplo: 99 não é quadrado; o maior quadrado contido em 99 é 81, cuja raiz é 9; o resto é 18.

O numero 9 não é pois *raiz exacta* de 99; nem a ha nas duas fórmas de numeros (inteira e fraccionaria) que por agora se conhecem.

O numero 9 diz-se que é a *raiz inteira approximada*, ou simplesmente *raiz inteira* de 99; ou ainda *a raiz a menos de uma unidade por defeito.*

A extracção da raiz a numeros não superiores a 99 constitue o *caso mental* da operação.

**120.** Regra.—*Para extrahir a raiz quadrada a um numero inteiro:*

1.º *Decompõe-se o numero em classes de dois algarismos, a partir da direita, podendo a ultima classe da esquerda ficar com um só algarismo.*

2.º *Extrae-se a raiz quadrada ao maior quadrado contido na primeira classe da esquerda (caso mental); o que dá o primeiro algarismo da raiz, e determina-se o resto, á direita do qual se escreve a classe seguinte.*

3.º *Dividem-se as dezenas do numero assim formado pelo dobro do algarismo achado para a raiz, sendo esse quociente o segundo algarismo da raiz, ou um algarismo maior que o verdadeiro; para o verificar, escreve-se este quociente á direita do numero que serviu de divisor, multiplica-se o numero resultante pelo dito quociente, e subtrahe-se o producto do numero obtido quando se abaixou a segunda classe; se fôr possivel a subtracção, o algarismo achado é o verdadeiro; senão fôr possivel, diminue-se-lhe uma unidade, e torna-se a verifical-o do mesmo modo, até que a subtracção seja possivel.*

4.º *Determinado o segundo resto parcial, escreve-se-lhe á direita a terceira classe; dividem-se as dezenas do numero assim formado pelo dobro da parte já obtida da raiz, e procede-se á verificação d'este segundo quociente, pelo qual se obtem o terceiro algarismo da raiz.*

5.º *Continúa-se sempre do mesmo modo para se obterem successivamente os outros algarismos da raiz, os quaes ficarão determinados quando se baixar a ultima classe. Se o ultimo resto fôr zero, o numero dado é um quadrado, cuja raiz exacta se obteve: se não, a raiz é obtida a menos d'uma unidade.*

Exemplo 1.º: Calcular $\sqrt{285970396644}$.

### Typo do calculo

com todas as operações, para se vêr a applicação da regra

```
28.5 9.7 0.3 9.6 6.4 4
25
——
 3.5.9
 3 0 9
 ——
  5 0.7 0
  4 2 5 6
  ———
   8 1 4.3 9
   7 4 8 0 9
   ————
    6 6 3 0.6 6
    6 4 1 6 7 6
    —————
     2 1 3 9 0.4 4
     2 1 3 9 0 4 4
     ——————
             0
```

| 534762 | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 103 | 1064 | 10687 | 106946 | 1069522 |
| 3 | 4 | 7 | 6 | 2 |
| 309 | 4256 | 74809 | 641676 | 2139044 |

A raiz é exactamente 534762.

### Typo do calculo na pratica

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 28.59.70.39.66.44 | 534762 | | | | |
| 3 59 | 103 | 1064 | 10687 | 106946 | 1069522 |
| 50 70 | 3 | 4 | 7 | 6 | 2 |
| 8 14 39 | | | | | |
| 66 30 66 | | | | | |
| 2 13 90 44 | | | | | |
| 0 | | | | | |

Exemplo 2.º: Calcular $\sqrt{41232}$

| | | |
|---|---|---|
| 4.1 2.3 2 | 203 | |
| 4 | 40 | 403 |
| 0 1 2 | 0 | 3 |
| 0 | 0 | 1209 |
| 1 2 3 2 | | |
| 1 2 0 9 | | |
| 2 3 | | |

A raiz é 203, com o resto 23. Exemplificou-se o caso d'uma das divisões dar de quociente zero; escreve-se então 0 na raiz e abaixa-se a classe seguinte.

Exemplo 3.º: Calcular $\sqrt{393}$

| | |
|---|---|
| 3.9 3 | 19 |
| 2 9 3 | 29 |
| 2 6 1 | 9 |
| 3 2 | 261 |

A raiz é 19, com o resto 32. Exemplificou-se o caso de haver uma divisão que dê um quociente maior que 9; toma-se sómente 9, e verifica-se se 9 serve.

**121.** Observações. — 1.ª No correr da operação do calculo da raiz, o duplo da parte achada da raiz obtem-se immediatamente juntando o algarismo que vem de sêr calculado ao numero que elle multiplicou.

Assim, no exemplo 1.º, o duplo de 53 obtem-se pela somma $103 + 3$ dos dois factores da verificação do algarismo 3; o duplo de 534 é dado pela somma $1064 + 4$; e analogamente em diante.

2.ª Obtidos os dois primeiros algarismos da raiz, nunca será necessario fazer mais do que um ensaio inutil na verificação de cada um dos outros algarismos; e o mesmo se dará obtido sómente o primeiro algarismo, se este não fôr inferior a 5.

**122.** Para fazer a prova da operação, junta-se o resto final ao quadrado da raiz achada; deve a somma ser o numero dado. No ultimo exemplo

$$32 + 19^2 = 32 + 361 = 393.$$

Observação. — O resto obtido na extracção de uma raiz quadrada não deve exceder o dobro da raiz; e o mesmo se deve dar entre cada *resto parcial* e a parte correspondente da raiz.

**123.** Regra. — *Para extrahir a raiz quadrada a uma fracção, cujos termos são quadrados perfeitos, extrahe-se a raiz quadrada aos dois termos, segundo a regra dos numeros inteiros, e as duas raizes obtidas são respectivamente os termos de uma nova fracção que é a raiz quadrada da proposta.*

Exemplo: Calcular a raiz quadrada de $\frac{49}{81}$

$$\sqrt{\frac{49}{81}} = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{81}} = \frac{7}{9}.$$

Se só o denominador fôr quadrado perfeito, por exemplo $\frac{7}{16}$ temos, applicando a regra,

$$\sqrt{\frac{7}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4},$$

e a raiz de $\frac{7}{16}$ está comprehendida entre $\frac{2}{4}$ e $\frac{3}{4}$.

Se o denominador não fôr quadrado perfeito, por exemplo $\frac{4}{7}$ multiplicam-se ambos os termos da fracção pelo denominador (o que a não altera, n.º 82) e assim entra-se no caso precedente; temos

$$\frac{4}{7} = \frac{4 \times 7}{7 \times 7} = \frac{28}{7^2}$$

$$\sqrt{\frac{4}{7}} = \frac{\sqrt{28}}{\sqrt{7^2}} = \frac{\sqrt{28}}{7}$$

e a raiz de $\frac{4}{7}$ está comprehendida entre $\frac{5}{7}$ e $\frac{6}{7}$.

**124.** Regra. — *Para extrahir a raiz quadrada a um numero decimal, torna-se par o numero de algarismos decimaes (quando o numero d'elles fôr impar) escrevendo um zero á direita da parte decimal; depois extrahe-se a raiz ao numero resultante sem fazer caso da virgula e, na raiz obtida, separa-se para dizima metade do numero de algarismos decimaes que tem o numero proposto.*

Exemplo 1.º: Extrahir a raiz quadrada a 13,69.

Temos

$$\sqrt{13{,}69} = \sqrt{\frac{1369}{100}} = \frac{\sqrt{1369}}{10};$$

extrahe-se a raiz quadrada a 1369, o que dá 37 para raiz exacta; a raiz de 13,69 é pois 3,7.

Exemplo 2.º: Calcular $\sqrt{0,144}$.

Temos

$$\sqrt{0,144} = \sqrt{0,1440} = \sqrt{\frac{1440}{10000}} = \frac{\sqrt{1440}}{100}.$$

### Typo do calculo

$$\begin{array}{r|r} 0,14.40 & 37 \\ \cline{2-2} 5\ 40 & 67 \\ 71 & 7 \\ \cline{2-2} & 469 \end{array}$$

A raiz é 0,37 approximada a menos de 0,01 com o resto 0,0071.

## EXERCICIOS

**118.** Extrahir a raiz quadrada aos numeros:

4096; 254016; 978191; 5764801; 243087455521.

**119.** Extrahir a raiz quadrada a menos d'uma unidade aos seguintes numeros:

1615370; 76527504; 191102976; 4750104241.

**120.** Extrahir a raiz quadrada ás seguintes fracções:

$$\frac{25}{49};\quad \frac{64}{81};\quad \frac{144}{225};\quad \frac{15129}{175668516}.$$

121. Extrahir a raiz quadrada até ás centesimas aos seguintes numeros decimaes:

0,1897; 28,532; 0,034.

122. Multiplicando a metade d'um numero pelo terço do mesmo numero, obtem-se 95256; calcular esse numero.

CAPITULO VI

# Systema metrico
# (Systema legal de pesos e medidas)

## § 1.º Preliminares

**125.** As grandezas de mais frequente uso na vida pratica são: *o comprimento, a superficie, o volume ou capacidade, o peso, e o valor monetario.*

Para medir uma grandeza (n.º 3) é necessario tomar outra grandeza da mesma especie, que se chama *unidade* de medida. Um systema de medidas, para os usos mais communs da vida, tem pois de ter tantas unidades de medida quantas as grandezas que acima se indicaram. Mas, sómente uma unidade de medida para cada uma das grandezas não é commodo na expressão d'essas grandezas em quantidade; poisque, tendo de medirem-se grandezas d'uma mesma especie muito grandes e muito pequenas, por exemplo, o comprimento de uma meza, o comprimento d'uma estrada, a espessura d'uma lamina, teriamos numeros expressos por muitos algarismos na representação d'essas grandezas em quantidade. D'aqui resulta a necessidade de haver no systema de medidas *unidades secundarias,* que derivem da unidade de medida da respectiva grandeza *(unidade principal)* segundo uma lei escolhida, a qual muito convém que seja a propria lei da numeração, ou a lei decimal.

Além d'isso, as unidades principaes devem ser escolhidas de modo que se possam reproduzir exactamente em todas as épocas; pois só a tradição não seria bastante para as transmittir sem alteração atravez dos tempos.

O systema metrico francez [1] satisfaz a todos estes requisitos; é o que está em uso no nosso paiz, e foi mandado adoptar por decreto de 13 de dezembro de 1852, para estar em pleno vigor dez annos depois do mesmo decreto.

Actualmente, é tambem obrigatorio por lei na Hespanha, França, Italia, Suissa, Hollanda, Belgica, Dinamarca, Suecia, Noruega, Allemanha, Austria, Hungria, Romania, Grecia, Turquia, Mexico, Guatemala, Colombia, Venezuela, Equador, Chili, Perú, Republica Argentina, Uruguay e Brazil.

**126.** As medidas secundarias são multiplos ou submultiplos decimaes da unidade principal, e por isso se chama ao systema legal, *systema metrico decimal.*

Os multiplos designam-se com as palavras de origem grega:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Deca** | que | significa | dez, e | abreviadamente | se escreve | D |
| **Hecto** | » | » | cem, | » | » | H |
| **Kilo** | » | » | mil, | » | » | K |
| **Myria** | » | » | dez mil, | » | » | M |

Os submultiplos designam-se com as palavras de origem latina:

---

[1] Votado na *Assembleia nacional* em 20 de março de 1791 sob parecer de Tayllerand.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **deci** | que significa | decimo, | e abreviadamente se escreve | d |
| **centi** | » » | centesimo, | » » | c |
| **milli** | » » | millesimo, | » » | m |

### § 2.° Medidas de comprimento

**127.** **O metro** (que em grego significa medida) é theoricamente, a decima millionesima parte do quarto do meridiano terrestre. Representa-se abreviadamente por *m*.

O metro é a unidade de que todas as outras derivam; é porisso a unidade fundamental de todas as medidas.

A seguinte tabella indica as unidades de comprimento (ou lineares) secundarias.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Multiplos | .......... | | | | | |
| | Myriametro, | ou | 10000 | metros, | abreviadamente | Mm. |
| | Kilometro, | » | 1000 | » | » | Km. |
| | Hectometro, | » | 100 | » | » | Hm. |
| | Decametro, | » | 10 | » | » | Dm. |

**Metro** (unidade principal).

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Submultiplos | Decimetro, | ou | 0,1 | do metro, | | abreviadamente | dm. |
| | Centimetro, | » | 0,01 | » | » | » | cm. |
| | Millimetro, | » | 0,001 | » | » | » | mm. |
| | ......... | | | | | | |

**128.** O metro *legal* é uma *medida effectiva*, isto é, está materialmente realisado n'uma regoa de pau, ou de metal, (inteiriça ou de dobrar) dividida em decimetros e centimetros, e tendo, quasi sempre, o primeiro decimetro dividido tambem em millimetros.

Um padrão de platina foi archivado em França, em 22 de junho de 1799, que, á temperatura de gelo fundente, fixa o *comprimento legal* do metro (1).

O *metro-padrão* do nosso paiz é de latão; rigorosamente aferido por um padrão francez, está archivado no Ministerio das Obras Publicas.

Emprega-se o metro na medida dos comprimentos medianos.

O decametro é a unidade de que usam os agrimensores, ou medidores de terras; está materialmente realisado n'uma cadeia, chamada *cadeia metrica*, formada de fusís com dois decimetros de comprimento cada um. Tambem ha decametros e duplos decametros formados por uma fita que se póde enrolar dentro d'uma caixa.

A unidade das medidas *itinerarias*, ou dos caminhos, é $5^{km}$, e denomina-se *legua itineraria* (2). Esta unidade fracciona-se em kilometros e em hectometros. Os kilometros indicam-se por meio de marcos, balisas ou postes, tendo o numero designativo dos kilometros de distancia a um ponto determinado; os hectometros por postes mais pequenos. Estas unidades, porém, não são effectivas, isto é, não estão materialmente realisadas n'um objecto como o decametro.

O myriametro serve para as medidas de grandissimas distancias, como do Porto a Paris, etc. (3).

Na navegação emprega-se como unidade a *legua marinha* (de 20 ao grau), que vale $5555^m,555$.

(1) O *metro legal* differe da decima millionesima parte do comprimento actualmente admittido para o quarto do meridiano terrestre, duas decimas-millesimas do metro legal, para menos, approximadamente. O comprimento do quarto do meridiano terrestre, segundo Faye, é 10002008 metros; segundo Clarke, 10001877 metros.

(2) Decreto de 2 de maio de 1855.

(3) Recentemente introduziu-se a palavra *megâmetro* para designar um *milhão* de metros.

O decimetro e centimetro servem para fraccionar o metro nas medidas medianas. O *duplo* decimetro é uma medida effectiva realisada em reguas de buxo, osso ou marfim, empregadas no desenho.

O millimetro serve para medidas de precisão, como da grossura d'um vidro, etc.; os submultiplos, decimillimetro, centimillimetro e millesimo do millimetro [1], são medidas de *conta*, que sómente se empregam nas sciencias.

**129.** Obtem-se immediatamente os numeros que exprimem a mesma quantidade de comprimento, quando se muda de unidade: basta mudar a virgula no numero primitivo. E' a vantagem das unidades secundarias seguirem a lei decimal.

Exemplo:

$$\overset{\text{m.}}{345{,}23} = \overset{\text{Dm.}}{34{,}523} = \overset{\text{Hm.}}{3{,}4523} = \overset{\text{Km.}}{0{,}34523} = \overset{\text{dm.}}{3452{,}2}$$

$$= \overset{\text{cm.}}{34523} = \overset{\text{mm.}}{345230.}$$

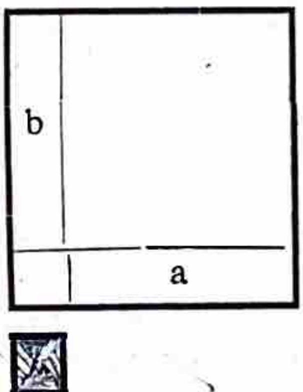
**130.** A leitura d'um numero que exprime uma quantidade de comprimento, faz-se seguindo uma das quatro regras, indicadas no n.° 105, para a leitura dos numeros abstractos decimaes.

(1) Este submultiplo foi recentemente denominado *micron*, palavra grega que significa *pequeno*, e representado pela letra grega $\mu$ (mi). E' o submultiplo do metro de que o megámetro é o multiplo correspondente. É a unidade de medida na Anatomia microscopica.

## § 3.º Medidas de superficie

**131.** A unidade principal das medidas de superficie é o *metro quadrado*. É um quadrado que tem um metro de lado; representa-se abreviadamente por *m. q.* ou $m^2$.

Supponhamos que a figura representa o quadrado de um metro de lado: a figura póde-se suppôr formada por 10 fitas iguaes á fita *a* de um decimetro de largura, cruzadas com 10 fitas *b* iguaes a estas; os cruzamentos das fitas dão $10 \times 10 = 100$ pequenas figuras como *c*, que são quadrados d'um decimetro de lado ou decimetro quadrado. Um metro quadrado contém pois em si 100 decimetros quadrados.




E agora vê-se immediatamente que um decimetro quadrado contém em si 100 centimetros quadrados; um decametro quadrado contém em si 100 metros quadrados; etc.

Em geral nas medidas de superficie o quadrado d'uma qualquer das unidades lineares vale 100 vezes o quadrado da unidade linear immediatamente inferior; ou é a centesima parte $\left(\frac{1}{100}\right)$ do quadrado da unidade linear immediatamente superior.

**132.** As unidades de superficie constam da seguinte tabella:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Myriametro quadrado, | $Mm^2$, | vale | $100\ Km^2 = 100^4 m^2$ | |
| Kilometro » | $Km^2$, | » | $100\ Hm^2 = 100^3 m^2$ | |
| Hectometro » | $Hm^2$, | » | $100\ Dm^2 = 100^2 m^2$ | |
| Decametro » | $Dm^2$, | » | $100\ m^2$ | |
| **Metro quadrado** (unidade principal) | | | $m^2$ | |
| decimetro quadrado, | $dm^2$, | vale | $100\ cm^2 = 0{,}01$ | do $m^2$ |
| centimetro » | $cm^2$, | » | $100 mm^2 = 0{,}0001$ | do $m^2$ |
| millimetro » | $mm^2$, | » | $0{,}000001$ | do $m^2$ |

Vê-se, portanto, que, n'um numero que exprime a medida d'uma superficie, cada ordem de unidades quadradas comprehende uma classe de dois algarismos.

Exemplo: $23452^{m^2},10356$.

$$\underbrace{02}_{Hm^2}\ \underbrace{34}_{Dm^2}\ \underbrace{52}_{m^2}\ \underbrace{10}_{dm^2}\ \underbrace{35}_{cm^2},\ \underbrace{60}_{mm^2}$$

**133.** A mudança de unidade na medida de uma superficie faz-se, no numero que exprime essa medida, transportando a virgula para a direita da classe de dois algarismos que designa a unidade quadrada para a qual se mudou.

Exemplo:

$$\overset{m^2}{345,678} = \overset{dm^2}{34567,8} = \overset{Dm^2}{3,45678} = \overset{Hm^2}{0,0345678} = \overset{Km^2}{0,000345678}$$

$$= \overset{cm^2}{3456780} = \overset{mm^2}{345678000}.$$

**134.** Nas medidas das superficies destinadas á agricultura, ou *medidas agrarias*, toma-se para unidade principal o decametro quadrado, que então se chama *are* (1), e se representa no calculo pela abreviatura *a*.

O are tem, portanto, 100 metros quadrados.

As unidades agrarias usadas são:

Hectare (ha) $= 1$ $Hm^2 = 100$ a $= 10000$ $m^2$.
Are (a) $= 1$ $Dm^2 = 100$ $m^2$.
Centiare (ca) $= 0,01$ do are $= 1$ $m^2$.

Nenhuma das unidades de superficie é effectiva; são todas unidades de conta, ou de calculo.

---

(1) Do latim *area*—superficie de terra ou geira.

**135.** Para se ler um numero referido a uma unidade qualquer de superficie, basta observar que as unidades de superficie, succedem-se de duas em duas casas a partir da virgula para um e outro lado d'ella. Se o numero de algarismos da parte decimal é impar, escreve-se um zero á direita, e depois procede-se á leitura em conformidade com esta observação.

## § 4.º Medidas de volume

**136.** A unidade principal é o *metro cubico*, de cuja fórma dá exacta ideia o dado de jogar. As seis faces do metro cubico são quadrados iguaes d'um metro de lado; representa-se por m. c. ou $m^3$.

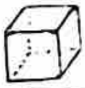
Fig. 1


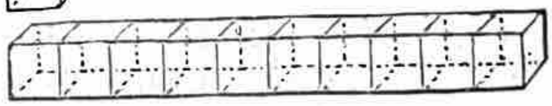
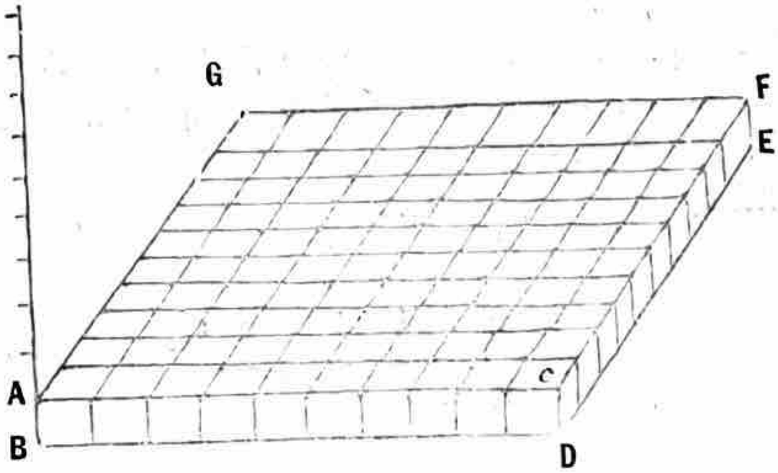
Fig. 2


Fig. 3



A figura 1 representa um cubo cujas faces são quadrados de $1^{dm}$ de lado; a figura 2 representa um filete formado com 10 d'estes cubos; e a figura 3 uma camada A B C D E F G formada por 10 d'estes filetes. A camada tem, pois, $10 \times 10 = 100$ decimetros cubicos.

Empilhando 10 d'estas camadas, cuja espessura é $1^{dm}$, temos o metro cubico, que, por isso, conta 100 decimetros cubicos $\times 10 = 1000$ decimetros cubicos.

Assim, o cubo d'uma das unidades lineares vale 1000 cubos da unidade immediatamente inferior; ou é a millesima parte $\left(\frac{1}{1000}\right)$ do cubo da unidade linear immediatamente superior.

As unidades de volume formam, pois a seguinte série:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Myriametro | cubico, | $Mm^3$, | vale | $1000\ Km^3 = 1000^4\ m^3$ |
| Kilometro | » | $Km^3$, | » | $1000\ Hm^3 = 1000^3\ m^3$ |
| Hectometro | » | $Hm^3$, | » | $1000\ Dm^3 = 1000^2\ m^3$ |
| Decametro | » | $Dm^3$, | » | $1000\ m^3$ |

**Metro cubico** (unidade principal) $m^3$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| decimetro | cubico, | $dm^3$, | vale | $1000\ cm^3 = 0{,}001$ do $m^3$ |
| centimetro | » | $cm^3$, | » | $1000\ mm^3 = 0{,}000001\ m^3$ |
| millimetro | » | $mm^3$, | » | $0{,}000000001\ m^3$ |

Vê-se que n'um numero, exprimindo a medida de volume, cada ordem de unidades cubicas comprehende uma classe de tres algarismos.

Exemplo: $12345,^{m^3}6702$.

$$\overbrace{012}^{Dm^3}\ \overbrace{345}^{m^3},\ \overbrace{670}^{dm^3}\ \overbrace{200}^{cm^3}$$

**137.** A mudança de unidade na medida dum volume faz-se no numero que exprime essa medida, transportando a virgula para a direita da classe de tres algarismos que designa a unidade cubica para a qual se mudou.

Exemplo:

$$\overset{m^3}{3456{,}78102} = \overset{Dm^3}{3{,}45678102} = \overset{Hm^3}{0{,}00345678102}$$

$$= \overset{dm^3}{3456781{,}02} = \overset{cm^3}{3456781020.}$$

**138.** Para a medida das madeiras de construcção, de lenha, do carvão, emprega-se como unidade principal o metro cubico com a denominação de *stere* (do grego, solido), cuja abreviatura no calculo é *s*.

É a unica unidade de volume effectiva, realisada por meio d'um estrado de madeira, sobre o qual se levantam dois prumos d'um metro de altura e distanciados um metro um do outro.

O stere tem um unico multiplo usado, que é o *decastere* (10 steres); e um unico submultiplo, que é o *decistere* $\left(\frac{1}{10} \text{ do stere}\right)$.

## § 5.º Medidas de capacidade

**139.** As medidas de *capacidade*, ou de volume interno de um recipiente, são destinadas a medir o volume de liquidos, como vinho, azeite, e de seccos, como milho, trigo.

A unidade principal é o *litro*, que tem a capacidade de um decimetro cubico; representa-se por *l*.

Um *litro padrão*, exactamente aferido por um padrão francez, acha-se archivado no Ministerio das Obras Publicas; é o que fixa o litro *legal*.

A tabella seguinte indica os multiplos e submultiplos do litro:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Multiplos | Hectolitro, | abreviatura Hl, | vale | 100 | litros |
| | Decalitro, | » Dl, | » | 10 | » |

**Litro** (unidade principal) l

Submultiplos:
- decilitro, abreviatura dl, vale $\frac{1}{10}$ do litro
- centilitro, » cl, » $\frac{1}{100}$ do »

Além das medidas indicadas, a lei auctorisa ainda, para facilidade das transacções commerciaes, as seguintes: o *meio hectolitro*, o *duplo decalitro*, o *meio decalitro*, o *duplo litro*, o *meio litro*, o *duplo decilitro*, o *meio decilitro*, e o *duplo centilitro*.

Todas as treze medidas de capacidade são effectivas; teem a fórma de cylindro, de cobre, estanho, folha de Flandres, ou madeira, cuja altura interior é dupla do diametro interior da base nas que são destinadas á medida dos liquidos, e a altura igual ao diametro da base nas que são destinadas a seccos (grãos).

| Medidas effectivas | Diametro da base | |
|---|---|---|
| | para os secos<br>centimetros | para os liquidos<br>centimetros |
| Hectolitro | 50,31 | 39,93 |
| Meio hectolitro | 39,93 | 31,69 |
| Duplo decalitro | 29,42 | 23,35 |
| Decalitro | 23,35 | 18,53 |
| Meio decalitro | 18,53 | 14,71 |
| Duplo litro | 13,66 | 10,84 |
| Litro | 10,84 | 8,60 |
| Meio litro | 8,60 | 6,83 |
| Duplo decilitro | 6,34 | 5,03 |
| Decilitro | 5,03 | 3,99 |
| Meio decilitro | 3,99 | 3,17 |
| Duplo centilitro | — | 2,34 |
| Centilitro | — | 1,85 |

Para os grãos e materias seccas, as effectivas são onze, desde o hectolitro até ao meio decilitro.

**140.** As medidas de capacidade e de volume (medidas da mesma especie) reduzem-se facilmente umas ás outras, recordando que

$$
\begin{array}{rcccl}
1000^{l.} & = & 1^{m3} & & \\
1^{Hl.} & = & 100^{l.} & = & 100^{dm3} \\
1^{Dl.} & = & 10^{l.} & = & 10^{dm3} \\
1^{l.} & = & 1^{dm3} & & \\
1^{dl.} & = & 0^{l.},1 & = & 100^{cm3} \\
1^{cl.} & = & 0^{l.},01 & = & 10^{cm3} \\
 & & 0^{l.},001 & = & 1^{cm3}
\end{array}
$$

## § 6.º Medidas de peso

**141.** A unidade principal é o *gramma*, que é o peso, no vacuo, d'um centimetro cubico de agua destillada á temperatura de 4 graus centigrados acima de 0 (1). Representa-se abreviadamente no calculo pela letra *g*.

Os multiplos e submultiplos são:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Multiplos | Myriagramma, | Mg. | vale | 10000 | grammas. |
| | Kilogramma, | Kg. | » | 1000 | » |
| | Hectogramma, | Hg. | » | 100 | » |
| | Decagramma, | Dg. | » | 10 | » |

(1) O peso absoluto de um corpo, isto é, considerado como a força que attrahe o corpo para a terra, varia com os logares em que n'esta se avalia. Mas, como na pratica o peso de um corpo se determina pela balança, isto é, pela comparação com pesos graduados e aferidos pelo peso-padrão do logar, o peso de um corpo assim avaliado, e se diz *peso librado*, fica independente do logar da terra em que se faz a sua determinação. Assim, um corpo que no Porto tem o peso librado de 80 kilogrammas, esse corpo tem em Paris o mesmo peso librado; mas o peso absoluto d'esse corpo em Paris excede em seus 6 decimos-millesimos (approx.) o peso absoluto do corpo no Porto.

**Gramma** (unidade principal) g.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Submul-tiplos | Decigramma, | dg. | vale | 0,1 | do gramma |
| | Centigramma, | cg. | » | 0,01 | » » |
| | Milligramma, | mg. | » | 0,001 | » » |

Um *kilogramma-padrão,* exactamente aferido por um padrão francez, acha-se archivado no Ministerio das Obras Publicas; é o que fixa o peso *legal* do kilogramma.

**142.** A passagem d'umas unidades para outras na medida d'um peso faz-se, no numero que a exprime, do mesmo modo que nas medidas de comprimento.

Exemplo:

$$\overset{\text{Mg.}}{32{,}541} = \overset{\text{Kg.}}{325{,}41} = \overset{\text{Hg.}}{3254{,}1} = \overset{\text{g.}}{325410}, \text{ etc.}$$

**143.** Para grandes pesos, como a carga de embarcações e navios, emprega-se o *quintal metrico (q),* que vale 100 kilogrammas; e a *tonelada (t)* que vale 1000 kilogrammas, ou o peso de um metro cubico de agua nas mesmas condições da que formou o gramma.

No commercio por miudo, a unidade de peso mais usada é o kilogramma.

A lei auctorisa os pesos effectivos seguintes:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 50, | 20, | 10, | 5, | 2, | 1, | $\frac{1}{2}$ | ... Kilogrammas |
| | | | | 2, | 1, | $\frac{1}{2}$ | ... Hectogrammas |
| | | | | 2, | 1, | $\frac{1}{2}$ | ... Decagrammas |
| | | | | 2, | 1, | $\frac{1}{2}$ | ... grammas |
| | | | | 2, | 1, | $\frac{1}{2}$ | ... decigrammas |
| | | | | 2, | 1, | $\frac{1}{2}$ | ... centigrammas |
| | | | | 2, | 1, | | ... milligrammas. |

Estes pesos são em ferro fundido ($50^{kg.}$ a $50^{g.}$), que teem a fórma de tronco de pyramide de base rectangular os dois maiores e os outros de base hexagonal, com uma argola; em cobre ou latão ($5^{kg.}$ a $1^{g.}$) de fórma cylindrica, encimada por um botão; os nove ultimos pesos a contar de $\frac{1}{2}$ gramma, são de cobre, prata ou platina, e teem a fórma de placa fina, rectangular, com um canto levantado para mais facilmente se pagar n'elles.

Os pesos mais pequenos só se empregam em pesagens delicadas, como são as de pharmacia.

É util ter presente a correspondencia que existe entre as medidas de volume e de peso quando o corpo que se mede é a agua pura; a saber: um volume de agua pura pesa tantos kilogrammas quantos os decimetros cubicos que contém; e uma porção dada de agua pura representa o volume de tantos decimetros cubicos quantos os kilogrammas que pesa.

Assim se obtem a tabella seguinte, que é inportante fixar na memoria:

| Agua destillada á temperatura de 4 cent. | Seu peso |
|---|---|
| $m^3$ | t |
| Hl | q |
| $dm^3 = l$ | kg. |
| $cm^3$ | g |
| $mm^3$ | mg |

Os volumes de agua e os respectivos pesos d'esta tabella dizem-se *unidades correspondentes*. Os numeros que exprimem um volume de agua e o seu peso em unidades correspondentes são iguaes.

Observação geral. — As medidas *effectivas*, isto é, os instrumentos de madeira ou de metal que servem effectivamente para medir, não são legaes sem serem reconhecidos exactamente conformes aos respectivos *padrões* archivados. Esse reconhecimento indica-se com uma *marca de aferimento* feita na repartição competente da *verificação dos pesos e medidas.*

## § 7.º Moedas portuguezas

**144.** A unidade principal do valor monetario, ou da moeda, é o *real* cujo plural é *réis*. E' uma unidade de conta, isto é, que não está em *peça* de moeda.

**145.** As moedas são sempre feitas de uma *liga* [1] de metaes (cobre, estanho, zinco, nickel, prata, oiro).

Chama-se *toque* ou *titulo* d'uma liga em que entra prata, ou oiro, o numero de millesimas de prata pura *(fina)*, ou de oiro puro *(fino)* que a liga contém. Por exemplo, um objecto de liga de prata ou de oiro que pesa $3^{kg.}$ será de toque de 0,531 se a prata pura, ou o oiro puro, que entrar na liga, fôr $3^{kg.} \times 0{,}531 = 1^{kg.},593$.

Assim obtem-se o toque de uma liga, calculando o quociente, até ás millesimas, da divisão do peso do oiro, puro ou da prata pura, contido na liga, pelo peso total da liga.

Os graus de pureza são 1000; porisso dizendo-se que o toque de uma liga é 0,900, isto significa que em 1000 partes da liga ha 900 de oiro ou de prata pura.

**146.** A lei [2] estabeleceu que as moedas de oiro e de prata tivessem o toque de $916\ \frac{2}{3}$ millesimas [3], tolerando

---

(1) Liga é o resultado da fusão de metaes.

(2) Lei de 29 de julho de 1854.

(3) Outr'ora o toque avaliava-se em *quilates* para o oiro, e em *dinheiros* para a prata. O quilate era o peso de oiro puro contido em $\frac{1}{24}$ de uma barra. Por exemplo: se dividindo uma barra de liga de oiro em 24 partes iguaes, 22 d'essas partes são de oiro puro, dizia-se que o oiro d'essa barra era de 22 quilates. O oiro de 24 quilates

que nas moedas de oiro houvesse para mais ou para menos 2 millesimas em peso [1] e 2 millesimas em toque; e nas de prata admittindo, a tolerancia de 3 millesimas em peso, e de 2 millesimas em toque.

**147.** As moedas legaes são as indicadas na seguinte tabella, onde se acha o seu valor em réis, o seu peso e diametro.

Todas as peças de moeda teem valor excedente ao seu toque e peso; este excesso representa a despeza de fabrico e chama-se *braceagem*, e o excesso sobre este chama-se *senhoriagem*.

Em pesos iguaes, a peça de oiro vale 14 vezes mais, approximadamente, que a peça de prata; e a peça de prata, tambem em peso igual, vale 24 vezes mais que a de bronze.

---

era, pois, oiro sem liga, oiro puro ou *fino*. O dinheiro era o peso de prata pura contido em $\frac{1}{12}$ de uma barra. Por exemplo: dividindo uma barra de liga de prata em 12 partes iguaes, 11 d'essas partes são de prata pura, dizia-se que a prata d'essa barra era de 11 dinheiros. Prata de 12 dinheiros não continha liga, era prata pura, *fina*. O toque legal 0,916 $\frac{2}{3} = \frac{11}{12} = \frac{22}{24}$, representava-se por 22 quilates de oiro, e 11 dinheiros de prata.

(1) As peças de moeda são *fortes* quando sahem mais abonadas em peso; são *febres* ou *falhas* no caso contrario.

| Denominações | Valor em réis | Peso em grammas | Diametro em millimetros |
|---|---|---|---|
| **Oiro** (1) | | | |
| Corôa ........... | 10$000 | 17,735 | 30 |
| Meia corôa........ | 5$000 | 8,868 | 23 |
| Quinto de corôa... | 2$000 | 3,547 | 18,5 |
| Decimo de corôa.. | 1$000 | 1,774 | 14 |
| **Prata** (2) | | | |
| Dez tostões........ | 1$000 | 25 | 37 |
| Cinco tostões...... | 500 | 12,5 | 30 |
| Dois tostões....... | 200 | 5 | 23 |
| **Nickel** (3) | | | |
| Tostão .......... | 100 | 4 | 22 |
| Meio tostão ....... | 50 | 2,5 | 18 |
| **Bronze** (4) | | | |
| Vintem .......... | 20 | 12 | 30 |
| Dez réis.......... | 10 | 6 | 25 |
| Cinco réis......... | 5 | 3 | 20 |

(1) Mandadas cunhar pela Lei de 29 de julho de 1854.

(2) Mandadas cunhar pelas Leis de 24 de abril de 1835, 29 de julho de 1854 e 21 de junho de 1899.

Ninguem é obrigado a receber mais de 5$000 réis em prata em qualquer pagamento.

Em 1898 fez-se uma cunhagem especial de 500 contos de moedas de 10, 5 e 2 tostões em prata, commemorativas das festas do centenario da India.

(3) Mandadas cunhar pela Lei de 21 de julho de 1899. São feitas de uma liga de nickel e cobre, na razão 0,25 em peso do primeiro metal e 0,75 em peso do segundo. A tolerancia n'estas moedas é de 15 millesimas em peso.

Em qualquer pagamento os particulares não são obrigados a receber moedas de nickel ou de cobre ou de ambos conjunctamente em quantia superior a 1$000 réis, e o Estado é obrigado a receber n'essa moeda até á quantia de 5$000 réis (art. 4.º).

(4) Mandadas cunhar pela Lei de 31 de maio de 1882 e de 21 de julho de 1899. O bronze das moedas é uma liga de 0,96 de cobre, 0,02 de estanho e 0,02 de zinco. A tolerancia n'estas moedas é de 3 centesimos em peso.

O decimo de corôa, ou 1$000 réis é a unidade principal *effectiva* do systema monetario portuguez.

Este systema diz-se *monometallico* de typo oiro, isto é, que o metal escolhido para base do systema ou o *typo metallico*, é o oiro (1).

Chama-se *córte da moeda* á determinação do numero de peças de moedas, que deve produzir certo peso de metal.

O *córte* da moeda de oiro, como indica a tabella, é na razão de 17,735 grmmas de oiro padrão por peça de 10$000 réis por duas peças de 5$000, por 5 de 2$000 réis, e por 10 de 1$000 réis; o córte da moeda de prata é na razão de 25 grammas por peça de *dez tostões*, 2 de *cinco tostões*, e 5 de *dois tostões*.

**148.** Ha ainda moedas (2) antigas portuguezas toleradas na circulação (pela Lei de 29 de julho de 1854); são:

as *peças* ou *dobras* de oiro, do valor de 8$000 réis, do peso $14^{g},188$, e diametro $31^{mm}$;

---

(1) A Lei de 29 de julho de 1854, considerando como *moedas subsidiarias* as de prata e cobre, estabeleceu o oiro como padrão ou *typo metallico*. A Inglaterra, Allemanha, Brazil, Japão, Romania, e outras, teem tambem o systema monometallico de typo oiro; a America Central, Indias, Mexico, Equador, China, e outras, de typo prata. A União latina (França, Italia, Belgica, Suissa e Grecia), Republica Argentina, Hespanha, Estados-Unidos, Hollanda e Haiti, adoptaram o *systema bimetallico*, isto é a adopção de uma moeda de oiro e de prata cuja relação de valores é legalmente determinada, e foi 15,5 em peso igual; sendo as moedas de oiro e de prata cunhadas com o mesmo toque, peso e diametro, com curso commum entre os estados da União; o que está em vigor desde 1 de janeiro de 1886.

(2) As moedas de oiro de maior valor que se cunharam no nosso paiz foram os *dobrões* de 24$000 réis, e os *meios dobrões* de 12$000 réis (1721); e as *dobras* de 12$800 réis. (Lei de 4 de Abril de 1722).

as *meias peças* ou *meias dobras* de oiro, do valor de 4$000 réis, do peso $7^{g},094$, e diametro $25^{mm}$.

Tambem correm no nosso paiz as moedas de oiro inglezas chamadas libras sterlinas [1] £ ou *soberanos*, cujo valor é 4$500 réis, peso $7^{g},981$ e diametro $22^{mm}$; e as *meias libras* ou *meios soberanos*, cujo valor é 2$250 réis, peso $3^{g},990$ e diametro $19^{mm}$.

Todas teem tambem o toque de $916\frac{2}{3}$ millesimas.

**149.** Observação pratica.—Tendo de verificar-se uma quantia consideravel de moedas de bronze, nickel, prata ou oiro, obtem-se facilmente o valor em réis, determinando o peso das moedas expresso em grammas e multiplicando esse numero por $\frac{5}{3}$, se as moedas forem de bronze; por 25, se forem de nickel; por 40, se as moedas forem de prata. Sendo de oiro, exprime-se o peso em miligrammas e multiplica-se esse numero pela fracção $\frac{500}{887}$.

Exemplos:

Um monte de moedas de bronze pesa $45^{kg.},5$; vale $40500 \times \frac{5}{3}$ réis, ou 67$500 réis.

Um monte de moedas de prata pesa $3^{kg.},452$; vale $3452 \times 40$ réis, ou 138$080 réis.

Um monte de moedas de oiro pesa $561^{g.}$; vale $561000 \times \frac{500}{887}$ réis, ou 316$235 réis.

Moeda papel.—Ha tambem moedas em papel representando oiro ou prata, em *notas* do Banco de Portugal, cuja emissão exclusiva foi auctorisada a este banco por Decreto de 9 de julho de 1891.

A circulação da moeda papel *(circulação fiduciaria)* tem actualmente notas de 100$000, 50$000, 20$000, 10$000 réis, representando oiro; e 5$000 réis, representando prata.

---

(1) Admittidas á circulação por Decreto de 23 de julho de 1846. É a unidade principal do systema monetario inglez; a libra esterlina *(sterling)* divide-se em 20 *shillings* (xelins), *shilling* (xelin) em 12 *pence*.

## EXERCICIOS

Sobre o systema metrico, mentaes e escriptos. Applicação á resolução de questões de uso commum.

### Calculo mental

**123.** Quantos decimetros ha em $6^{Dm}$? Quantos millimetros.

Custando o Dm 2$000 réis, quanto custa o Hm, o Km, o metro, o decimetro?

**124.** Quantos $dm^2$ tem 0,1 do $m^2$? quantos $cm^2$ tem 0,01 do $m^2$?

Quantos ares ha em 2500 $m^2$? Quantos centiares tem 8 Ha?

**125.** Quantos $dm^3$ tem 0,1 do $m^3$? Quantos $cm^3$ tem 0,01 do $m^3$?

Custando o litro de vinho 80 réis, quanto custam 6 Hl?

O volume d'um carro de lenha é $1^{m3},54$; quantos steres e decisteres tem?

Um cubo tem 5 metros de aresta; quantos metros cubicos tem?

**126.** Quantos kilogrammas pesam 5 metros cubicos de agua pura? quantos quintaes? quantas toneladas?

Um objecto mergulhado n'um vaso cheio de agua pura, expulsou do vaso 35 grammas de agua; que volume tem o objecto em centimetros cubicos? em millimetros cubicos?

**127.** Quanto pesam: 20 moedas de *cinco tostões*? 40 moedas de *dois tostões*? 100 moedas de *vintem*? 2000 de *dez réis*?

Quanto valem $20^g$ de prata amoedada? Quantas moedas de *dois tostões* são necessarias para fazer o peso d'um kilogramma? quantas de *cinco tostões*?

## Calculo escripto

**128.** Lêr o numero 25078,12043, referindo todas as unidades metricas que contém, na supposição da unidade ser o metro, ou o metro quadrado, ou o metro cubico, ou o litro, ou o gramma.

**129.** Subiram-se 211 degraus para chegar ao vertice de uma torre; qual é a altura da torre, sabendo que cada degrau tem 195 millimetros de altura?

**130.** O papel conta-se assim: *bala*, com 32 *resmas;* a resma, com 20 *mãos;* a mão, com 5 *cadernos;* o caderno, com 5 ou 6 *folhas*.

Ha resmas de 480 e 500 folhas; nas 20 mãos de cada resma, duas ou 3 são *costaneiras*.

A grossura de uma bala de certo papel é $34^{dm},20$; qual é a grossura d'um caderno d'este papel?

**131.** Qual é o comprimento, em metros, do grau do meridiano terrestre? (o quarto do meridiano terrestre tem 90 graus).

A *legua marinha* é a vigesima parte do comprimento do grau do meridiano terrestre (*legua de 20 ao grau); qual é o seu comprimento metrico.

A legua marinha tem 3 *milhas geographicas:* qual é o comprimento metrico da milha?

**132.** O comprimento do metro foi calculado tomando para comprimento do quarto meridiano terrestre 5130740 *toezas;* mas uma verificação rigorosa mostrou que se devia ter tomado para aquelle comprimento 5131758 *toezas.* Qual é a fracção de millimetro que exprime a differença, para menos, do metro legal ao seu valor mais exacto, sabendo-se que a toeza vale $1^{m},9490$?

**133.** Um pavimento tem $25^{m2},35$ de superficie; quantos tijolos de $1^{dm2},5$ de superficie são necessarios para revestir o pavimento?

**134.** Calcular em ares a superficie que as folhas de uma resma de papel podem cobrir, tendo cada folha $3^{dm},03$ de comprimento e 195 millimetros de largura.

**135.** Uma vasilha pesa vazia 25 kilogrammas, e cheia de agua 83625 grammas; qual é a sua capacidade?

**136.** Sabe-se que quando a agua congela, o seu volume augmenta $\frac{1}{15}$; qual é o peso d'um pedaço de gelo que tem $0^{m3},914$ de volume?

**137.** Que peso de oiro puro ha em 20 corôas?

**138.** Uma liga de oiro de $\frac{11}{12}$ de toque, tem toque legal?

**139.** Que peso póde perder uma meia corôa de oiro sem deixar de ser legal? e a moeda de prata de dez tostões?

**140.** A agua do mar contém 28 por mil em peso de sal commum, e um litro de agua do mar pesa $1^{k},025$; quanto sal se póde extrahir de $210^{m3}76^{dm3}$ e $83^{cm3}$?

**141.** Pozeram-se em linha moedas de cinco tostões, cobrindo um comprimento de $3^{m},6$; quantas são?

**142.** Qual é o peso do ar contido n'uma sala rectangular que tem $2^{m},5$ de largura, $3^{m},5$ de altura, e $5^{m},2$ de comprimento, sabendo-se que, em igualdade de volume, o ar pesa 773 vezes menos que agua pura?

**143.** Uma vasilha tem $3^{Hl}10^{l}$ e $24^{cl}$ de vinho; quantas garrafas de $73^{cl}$ enche? E se o vinho custou 85$000 réis, por quanto se deve vender cada garrafa para se ganharem $\frac{2}{5}$ do preço do custo?

**144.** N'um campo de producção de batatas de $2^{Ha},4$ de superficie, tiraram-se $5^{Dl}9^{l}$ n'uma facha de $49^{m}$ de comprimento sobre 0,80 de largura; quantos hectolitros se podem esperar da colheita? e que volume virão occupar no logar da arrecadação?

**145.** Obtem-se approximadamente, o comprimento da circumferencia d'um circulo, multiplicando o comprimento do diametro por 3,1416. Que comprimento deve ter uma chapa de ferro para calçar uma roda cujo raio é $624^{mm}$?

**146.** N'um bico de gaz ardem $125^{l},5$ de gaz por hora, e um metro cubico de gaz custa 45 réis. Que despeza fazem 60 bicos identicos de gaz ardendo $4^{horas},5$?

**147.** Um corpo mergulhado na agua perde (em apparencia) tanto do seu peso quanto pesa um volume de agua igual ao seu. Ora um corpo fóra de agua pesou $2^{k},45$ e na agua $1^{k},92$; qual é o volume d'esse corpo?

**148.** Qual é o valor em réis d'um gramma de prata amoedada? de oiro amoedado? de cobre amoedado?

**149.** Quanto vale o oiro, em peso igual, o valor da prata no nosso systema legal monetario?

(Busque o valor em réis de um gramma de oiro puro, deduzindo-o de uma qualquer moeda de oiro, por exemplo, do *decimo da corôa*, o qual é $1\$000^{réis}$: $(1,774 \times \frac{11}{12}) = 615$ réis; do mesmo modo, calcule o valor em réis de um gramma de *prata pura*, deduzindo-o da moeda de *dois tostões*, por exemplo, o qual é $200^{réis} \times \frac{12}{55} = 43^{réis},63$; e determine o quociente d'esses dois valores, que será 14, approximadamente).

**150.** Ainda hoje se usam as seguintes medidas:

**Medida de arco para seccos:**

O moio = 60 alqueires. A fanga = 4 alqueires. O alqueire = 4 quartas. A quarta = 2 oitavas. A oitava = 2 maquias. A maquia = 2 selamins.

Sabendo que o alqueire do Porto equivale a $17^{l},350$, qual é o valor metrico do moio?

**Medidas de arco para liquidos:**

O tonel = 2 pipas. A pipa = 25 almudes. O almude ou 2 cantaros = 12 canadas. A canada = 4 quartilhos.

As pipas de vinho do Porto teem 21 almudes e 6 canadas. (Alvará de 21 de dezembro de 1773).

Qual é o valor metrico da pipa de vinho do Porto, sabendo que a canada do Porto equivale, a $2^{l},120$?

**Medidas para pedras preciosas:**

Marco = 8 onças. Onça = 8 oitavas. Oitava = 3 escropulos. Escropulo = 6 quilates. Quilate = 4 grãos.

Os diamantes, as esmeraldas, os rubis, as safiras e as perolas é costume venderem-se por quilates; os topazios, por oitavas. Os diamantes, que podem ser polidos, avaliam-se pelos quilates que pesam; mas o valor dos que excedem um quilate é na razão do quadrado do seu peso. Esta regra não é fixa, pois o valor estimativo depende da pureza da *agua* do diamante.

Um diamante de um quilate reputa-se em 8$000 réis; quanto vale um diamante da mesma agua, cujo peso é 3 quilates?

**151.** O antigo systema das medidas portuguezas de comprimento era: para pequenas extensões,

Toeza = 6 pés, pé = 12 pollegadas, pollegada = 12 linhas, linha = 12 pontos; para fazendas, estofos, cabos, etc.

Braça = 2 varas, vara = 5 palmos, palmo = 8 pollegadas, pollegada = 12 linhas = 144 pontos.

O covado tinha 2 pés.

Sabendo que a toeza equivale a $1^m,98$ e que a braça equivale a $2^m,20$ — calcular o valor metrico das outras subdivisões; e o da braça quadrada, vara quadrada, palmo quadrado; pé cubico, palmo cubico, pollegada cubica.

**152.** O antigo systema de medidas portuguezas de peso era:

Tonelada = 13 $^1/_2$ quintaes; quintal = 4 arrobas; arroba = 32 arrateis, arratel = 16 onças, onça = 8 oitavas, oitava = 3 escropulos, escropulo = 24 grãos; e para a pharmacia: Libra = 12 onças, onça = 8 drachmas, drachma = 3 escropulos, escropulo = 24 grãos.

Sabendo que o arratel equivale a 459 grammas — calcular o valor metrico da libra de pharmacia, e de todas as outras unidades de peso.

## CAPITULO VII

# Numeros complexos

**§ 1.º Definição de numero complexo e incomplexo. Reducção d'um numero complexo á sua unidade de infima especie ou qualquer outra: conversão em quebrado. Reducção d'um complexo a incomplexo.**

**150.** Um numero concreto referido *explicitamente* a uma só especie de unidade, diz-se *numero incomplexo.*

Exemplos: 35 metros, 26 horas são numeros incomplexos.

Um numero concreto formado pela reunião *explicita* de numeros incomplexos de unidades homogeneas, ligadas entre si por certa lei, diz-se *numero complexo.*

Exemplo: 3 *decametros* e 5 *metros*: 1 *dia* e 3 *horas*, são numeros complexos. No primeiro, a lei que liga as duas unidades que n'elle entram, é a lei decimal; no segundo a lei é outra.

A unidade menor que está no numero complexo é a unidade da *infima especie.*

O metro é a unidade da infima especie, no primeiro exemplo; no segundo é a hora.

**151.** A reducção ou conversão d'um numero complexo a incomplexo póde fazer-se a qualquer das unidades da grandeza que o complexo exprime.

1.º Caso: Regra. — *Para reduzir qualquer numero de unidades a outras de especie inferior, e, determinadamente, á da immediatamente inferior, multiplica-se esse numero pela relação entre as duas unidades, isto é, pelo numero de vezes que a primeira unidade contém a segunda.*

Exemplo:

$$3^{H} = 3^{m} \times 100 = 300^{m};\ 3^{H} = 3^{D} \times 10 = 30^{D};$$

$$\overset{\text{dias}}{3} = \overset{\text{minutos}}{3} \times 1440 = 4320 \text{ minutos};$$

$$\overset{\text{dias}}{3} = \overset{\text{horas}}{3} \times 24 = 72 \text{ horas};$$

pois que a relação entre o H e o m é 100, entre o H e o D é 10; entre o dia e o minuto é 1440; entre o dia e a hora é 24.

2.º Caso: Regra. — *Para reduzir qualquer numero de unidades a outras da especie superior, e, determinadamente, da immediatamente superior, divide-se esse numero pela relação entre as duas unidades.*

Exemplos:

$$2500^{m} = 2500^{H} : 100 = 25^{H};\ 2500^{m} = 2500^{D} : 10 = 250^{D};$$

$$\overset{\text{minutos}}{2880} = \overset{\text{dias}}{2880} : 1440 = 2 \text{ dias};\ \overset{\text{minutos}}{2880} = \overset{\text{horas}}{2880} : 60 = 48^{h}$$

**152.** Regra. — *Para reduzir um numero complexo á sua unidade da infima especie, pratica-se successivamente a regra do 1.º caso, começando, pelas unidades da maior especie, e addicionando, aos numeros que se vão obtendo as unidades da respectiva especie que tem o numero complexo.*

Exemplo: Reduzir $365^{d.}\ 5^{h.}\ 48^{m.}\ 47^{s.}$ a incomplexo da infima especie. As letras são as abreviaturas usadas para designar *dia, hora, minuto, segundo.*

Typo do calculo

$$
\begin{array}{r}
365^{d.} \\
\times\ 24 \\
\hline
1460 \\
730\phantom{0} \\
\hline
8760^{h.} \\
+\ 5^{h.} \\
\hline
8765^{h.} \\
\times 60 \\
\hline
525900^{m.} \\
+\ 48^{m.} \\
\hline
525948^{m.} \\
\times\ 60 \\
\hline
31556880^{s.} \\
+\ 47^{s.} \\
\hline
31556927^{s.}
\end{array}
$$

.... É o incomplexo pedido.

**153.** Regra. — *Para reduzir um numero complexo á unidade de qualquer especie, reduz-se primeiramente, pela regra precedente, o numero á da infima especie; depois reduz-se o numero incomplexo obtido á unidade indicada, praticando a regra do 2.º caso do n.º 151.*

Exemplo: reduzir $3^{d.}\ 4^{h.}\ 2^{m.}\ 5^{s.}$ a horas.

Reduzindo á infima especie (segundos), obtem-se 273725 segundos; a relação entre a hora e o segundo é $60 \times 60 = 3600$: o numero pedido é, portanto,

$$\frac{273725^{h.}}{3600} = 75^{h.}\ \frac{125}{3600} = 76^{h.}\ \frac{5}{144}.$$

**154.** Regra. — *Para reduzir um numero incomplexo a complexo, se fôr inteiro, converte-se em unidades da especie immediatamente superior* (regra do n.º 152 2.º caso); *o resto da divisão effectuada exprime unidades da especie dada, e a parte inteira do quociente, unidades d'essa especie superior; applica-se á parte inteira do quociente a mesma regra citada; e assim successivamente. Se o numero dado fôr fraccionario, extrae-se, primeiramente, a parte inteira, e procede-se sobre essa parte como ficou indicado; quanto ao quebrado, que está referido á especie dada, reduz-se o numerador á especie immediatamente inferior (se a houver) pela regra do n.º 153, 1.º caso, e divide-se pelo denominador para extrahir a parte inteira; e continúa-se do mesmo modo.*

Exemplos:

1.º Reduzir a complexo 31556927 segundos de tempo.

**Typo do calculo**

| | | | |
|---|---|---|---|
| $315.56927^{s}.$ | 60 | | |
| 15 5 | $525.948^{m}.$ | 60 | |
| 3 56 | 45 9 | $87.65^{h}.$ | 24 |
| 569 | 3 94 | 15 6 | $365^{d}.$ |
| 292 | 348 | 1 25 | |
| 527 resto... | $48^{m}.$ resto $5^{h}.$ | | |
| resto... $47^{s}.$ | | | |

O numero procurado é $365^{d.}\ 5^{h.}\ 48^{m.}\ 47^{s.}$

2.º Reduzir a complexo $\frac{273725^{h.}}{3600}.$

Extrahindo a parte inteira, temos $76^{h.}\ \frac{5}{144}$; reduzindo a parte inteira $76^{h.}$ a complexo, temos $3^{d.}\ 4^{h.}$; reduzindo a minutos o quebrado $\frac{5}{144}$, temos:

$$\frac{5^{m.} \times 60}{144} = \frac{300^{m.}}{144} = \frac{25^{m.}}{12} = 2^{m.}\frac{1}{12};$$

reduzindo a segundos o quebrado $\frac{1^{m.}}{12}$ temos:

$$\frac{60^{s.}}{12} = 5^{s.}$$

O numero procurado é $3^{d.}\ 4^{h.}\ 2^{m.}\ 5^{s.}$.

**155.** A execução de todas estas regras relativas á conversão dos numeros complexos em incomplexos, e vice-versa, torna-se muito simples nos complexos do systema metrico, pois que se reduz simplesmente á mudança da virgula: é a grande vantagem, para o calculo, das medidas expressas n'aquelle systema. Mas ha ainda duas grandezas importantes — o tempo e a circumferencia — cujas medidas ficaram de fóra do systema decimal.

No tempo, a unidade da infima especie é o *segundo*, e as unidades superiores são o *minuto* ou 60 segundos; a *hora* ou 60 minutos; o *dia civil* [1] ou 24 horas, que começa á meia noite em toda a Europa occidental, se divide em dois periodos

---

(1) O dia civil é o *dia solar medio*. Os astronomos usam o *dia sideral*, isto é a duração completa de uma rotação da Terra ao redor do seu eixo. A relação entre o dia civil e o sideral é 365,242264 (dias civis) = 366,242264 (dias sideraes).

de 12 horas cada um (1); a *semana* ou sete dias (2); o *mez*, que póde ter 30 ou 31, e um (fevereiro) de 28 ou 29 dias (3), o *anno civil* ou 12 mezes, que tem 365 dias, havendo um chamado *bissexto*, de quatro em quatro annos, com 366 dias; *lustro* que tem 5 annos, e o *seculo* que tem 100 annos. Nos annos bissextos o mez de fevereiro tem 29 dias.

Os tempos menores que um segundo, exprimem-se em fracção decimal do segundo.

O anno bissexto é o que é indicado por um numero multiplo de 4; por exemplo, 1912, 1916, etc., serão bissextos. Exceptuam-se os annos seculares, (indicados por um numero terminado em dois zeros) que são bissextos de quatro em quatro; assim, os annos seculares 1700, 1800, 1900, não foram bissextos, e não serão bissextos 2100, 2200, etc., isto é, os annos seculares em que o numero das centenas não é multiplo de 4 (4).

Para os usos commerciaes reputa-se o anno de 360 dias, ou composto de 12 mezes iguaes, de 30 dias cada um.

O tempo conta-se, nas nações christãs, a partir do nasci-

---

(1) Para os antigos egypcios e Ptolomeu, o dia começava ao meio dia e seguidamente se contavam as 24 horas; como é ainda o habito dos astronomos modernos.

(2) Esta unidade era, desde tempos immemoriaes, de uso universal no Oriente. O imperador Theodosio (IV seculo) introduziu-a no Occidente, e desde então foi geralmente adoptada.

(3) Mnemonisam-se os mezes d'estes respectivos numeros de dias pela seguinte quadra:

Trinta dias tem novembro;
Abril, junho e setembro;
Vinte e oito terá um (fevereiro)
E os outros trinta e um.

(4) A intercalação do anno bissexto, ou do dia complementar no mez de fevereiro, foi decretada por Julio Cesar no anno 45 *a. J. C.*, para attender ao excesso (menos de $^1/_4$ de dia) que o anno astronomico tem sobre o anno civil de 365 dias; prescrevendo Julio Cesar que esse dia fosse a repetição do dia 24 de fevereiro;

mento de Jesus Christo, suppondo que elle nascera á meia noite de 31 de dezembro do anno de Roma 753. O anno seguinte, anno 754 de Roma, ficou sendo o primeiro anno. Um acontecimento marca-se pois no tempo por meio de um numero que indica os annos e fracções do anno decorridos desde aquella *origem dos tempos* ou *era vulgar*, e se diz a *data* do acontecimento. Assim, um acontecimento que se deu no meio do decimo anno, terá a data de 9,5; outro que se tenha dado no fim do decimo quarto seculo terá por data 1300; e é assim que a data actual 1910 indica que estamos no seculo vinte da era vulgar.

Os acontecimentos anteriores á era vulgar, designam-se por 1 anno, 2 annos, . . .; 1 seculo, 2 seculos . . . *antes de Jesus Christo*, que abreviadamente se escreve *a. J. C.* (1).

Na circumferencia, a unidade da infima especie é o *segundo*, que se indica abreviadamente por ″; e as unidades superiores são o *minuto* ou 60 segundos, cuja abreviatura é ′, o *grau* ou 60 minutos, cuja abreviatura é °, o *quadrante* ou 90 graus, e a circumferencia, que tem 4 quadrantes ou 360 graus.

Os arcos menores que um segundo, exprimem-se em fracção decimal do segundo de arco.

Tambem se divide a circumferencia em 400 partes, e

---

e, como os romanos denominavam este dia o 6.º antes das calendas de março (1.º de março), em que commemoravam a expulsão de Tarquino, designou-se o dia complementar por *ante bi-sexto calendas martii*, d'onde veio a denominação de bissexto dada ao anno de 366 dias. A reducção de quatro annos seculares consecutivos a tres communs e sómente um bissexto, para attenuar o excesso produzido pela reforma julianna, foi decretada em 1582 pelo papa Gregorio XIII, que por isso se diz reforma gregoriana.

A Igreja grega conservou o uso do calendario Juliano. Na Europa, a Russia e a Suecia).

(1) Esta origem de contar o tempo foi apresentada pela primeira vez em 532 por Denys, *O Pequeno*, monge da Igreja romana, nascido em Scythia.

o quadrante em 100, que se chamam *grados* ou *graus centesimaes*; o grado em 100 partes ou *minutos centesimaes*, e cada um d'estes em 100 *segundos centesimaes*.

O numero complexo 5 grados, 3 minutos centesimaes, e 15 segundos centesimaes, converte-se immediatamente no incomplexo $5^G,0315$.

Como um quadrante expresso em graus vale 90 e expresso em grados vale 100, um grau é $\frac{10}{9}$ de um grado; e um grado é $\frac{9}{10}$ de um grau.

Assim, de um numero expresso em graus passa-se para o correspondente em grados multiplicando o por $\frac{10}{9}$, ou juntando-lhe o seu nono; e, se está expresso em grados, passa-se para o correspondente em graus multiplicando-o por $\frac{9}{10}$, ou diminuindo-lhe o seu decimo.

### § 2.º As quatro operações sobre numeros complexos

**156. Addição e subtracção.** — Estas operações executam-se do mesmo modo que no systema decimal, attendendo, porém, a que os agrupamentos das unidades das differentes especies fazem-se segundo a lei da divisão da grandeza a que o complexo se refere.

1.º Addicionar 2° 3′ 55″, 45° 25′ 59″, 3° 42″.

Typo do calculo

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 2° | 3′ | 55″ |
| | 45 | 25 | 59 |
| | 3 | | 42 |
| Total . . . | 50° | 30′ | 36″ |

A columna dos segundos deu $156''=120''+36''=2'+36''$ de somma; escreveram-se 36″ debaixo d'essa columna, e levaram-se 2′ para juntar á columna seguinte.

2.º Subtrahir de 15° 2′ 2″, 9° 15′ 20″.

Typo do calculo

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 15° | 3′ | 2″ |
| | 9 | 15 | 20 |
| Differença... | 5° | 47′ | 42″ |

Para se tornar possivel a subtracção na columna dos segundos, juntaram-se 60″, ou 1′, á parte 2″ do diminuendo, e, com o mesmo fim, juntaram-se 60′, á parte 3′ do diminuendo; juntando 1′ á parte 15′ e 1° á parte 9° do diminuidor.

**157. Multiplicação de complexos.** — 1.° Caso. — *Multiplicando complexo e multiplicador incomplexo.*

Regra. — *Multiplica-se cada uma das partes do numero complexo pelo multiplicador, tomado como numero abstracto, começando por a da infima especie; extrahindo de cada producto parcial as unidades da ordem immediata, para as juntar ao producto parcial seguinte.*

Exemplo: Um individuo estuda $3^{h.}$ $58^{m.}$ $50^{s.}$ por dia, quanto tempo estuda por semana?

Temos a multiplicar aquelle complexo por 7, numero de dias da semana:

Typo do calculo

| | | | |
|---|---|---|---|
| | $3^{h.}$ | $58^{m.}$ | $50^{s.}$ |
| | | | 7 |
| Producto... | $27^{h.}$ | $51^{m.}$ | $50^{s.}$ |

O primeiro producto parcial ($50^{s.} \times 7$) deu $350^{s.} = 5^{m.} + 50^{s.}$; ao segundo producto parcial ($58^{m.} \times 7$) juntando-se os $5^{m.}$, temos $411^{m.} = 6^{h.} + 51^{m.}$; ao terceiro producto parcial ($3^{h.} \times 7$) juntaram-se as $6^{h.}$, o que deu $27^{h.}$.

2.º Caso. — *Multiplicando complexo* ou *incomplexo, mas multiplicador complexo.*

Póde-se reduzir este caso ao antecedente, convertendo o multiplicador em numero incomplexo referido á unidade que a questão indicar.

Exemplo: um movel anda, sobre uma circumferencia de circulo, 25° 16′ 10″ n'um minuto de tempo; quanto anda em $8^{m.}\ 14^{s.}$?

Temos de multiplicar o primeiro complexo pelo segundo, considerado como multiplicador, sendo o minuto de tempo a unidade principal da questão,

$$8^{m.}\ 14^{s.} = 8^{m.} + \frac{14^{m.}}{60} = 8^{m.} + \frac{7^{m.}}{30} = \frac{247^{m.}}{30}.$$

Temos, portanto, a multiplicar 25° 16′ 10″ por $\frac{247}{30}$,

$$10'' \times \frac{247}{30} = \frac{247''}{3} = 82''\,\frac{1}{3} = \ldots \qquad 1'\ 22''\tfrac{1}{3}$$

$$16' \times \frac{247}{30} = \frac{16 \times 247}{30} = \frac{3952'}{30}$$

$$= 131'\,\frac{22}{30} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad 2^{\circ}\ 11'\ 44''$$

$$25^{\circ} \times \frac{347}{30} = \frac{25^{\circ} \times 247}{30} = \frac{6175^{\circ}}{30}$$

$$= 205^{\circ}\,\frac{25}{30} = 205^{\circ}\,\frac{5}{6} = \ldots\ldots\ldots \qquad 205^{\circ}\ 50'$$

Producto ... $208^{\circ}\ 3'\ 6''\tfrac{1}{3}$

Este processo é laborioso; na pratica procede-se pelo *methodo das partes aliquotas*, que indicaremos depois da divisão.

**158. Divisão de complexos.** — A divisão dos numeros complexos comprehende dois casos: 1.° o quociente deve ser da mesma especie do dividendo; 2.° o quociente deve ser d'outra especie.

1.° Caso.—Exemplo 1.° Um relogio atrazou-se regularmente, $6^{h.}\ 25^{m.}\ 10^{s.}$ em 4 mezes: quanto se atrazou por mez?

Temos de dividir o complexo pelo incomplexo, tornado abstracto.

**Typo do calculo**

$$
\begin{array}{rrrr|l}
 & 6^{h} & 25^{m} & 10^{s} & \ 4 \\
\cline{5-5}
 & 2^{h} & & & 1^{h}\ \ 36^{m}\ \ 17^{s} \\
 & \times\ 60 & & & \\
\cline{2-2}
 & 120^{m} & & & \\
 & +\ 25^{m} & & & \\
\cline{2-2}
 & 145^{m} & & & \\
 & 25 & & & \\
 & 1^{m} & & & \\
 & \times\ 60 & & & \\
\cline{2-2}
 & 60^{s} & & & \\
 & +\ 10^{s} & & & \\
\cline{2-2}
 & 70^{s} & & & \\
 & 30 & & & \\
\text{Resto}\ \ldots & 2^{s} & & & \\
\end{array}
$$

O atrazo por mez foi de

$$1^{h}\ 36^{m}\ 17^{s}\,\frac{2}{4} = 1^{h}\ 36^{m}\ 17^{s}\,\frac{1}{2} = 1^{h}\ 36^{m}\ 17^{s},5.$$

Exemplo 2.° Um relogio atrazou-se, regularmente, $2^{h}\ 40^{m}\ 20^{s}$ em $6^{d}\ 5^{h}$: quanto se atrazou em 1 hora?

Reduz-se o divisor, que agora é complexo, a incomplexo referido á hora: $6^{d}\ 5^{h} = 149^{h}$; e temos o caso do exemplo antecedente de divisor incomplexo.

## Typo do calculo

$$\begin{array}{llll} 2^h & 40^m & 20^s & \underline{|\;149\qquad} \\ \times\, 60 & & & 0^h\ \ 1^m\ \ 4^s \\ \cline{1-1} 120^m & & & \\ +\, 40^m & & & \\ \cline{1-1} 160^m & & & \\ 11^m & & & \\ \times\, 60 & & & \\ \cline{1-1} 660^s & & & \\ +\, 20 & & & \\ \cline{1-1} 680^s & & & \\ 84^s & & & \end{array}$$

O atrazo n'uma hora é de $1^m\ 4^s\ \frac{84}{149}$.

Exemplo 3.º Se no exemplo antecedente se pedisse o atrazo do relogio n'um dia, a reducção do divisor a incomplexo referido ao dia daria o numero fraccionario $\frac{149}{24}$; podia procurar-se o atrazo em uma hora que é de $1^m\ 4^s\ \frac{84}{149}$, e multiplicar este complexo por 24, numero de horas do dia, segundo a regra do n.º 159, 1.º caso, o que dava $25^m\ 49^s\ \frac{79}{149}$. Mas é preferivel reduzir tambem o dividendo a incomplexo referido á infima especie, effectuar a divisão, e converter em complexo a parte inteira do resultado; assim,

$$2^h\ 40^m\ 20^s = 9620^s,$$

$$9620^s : \frac{149}{24} = \frac{9620^s \times 24}{149} = \frac{230880^s}{149} = 1549^s\ \frac{79}{149}$$

$$= 25^m\ 49^s\ \frac{79}{149}.$$

Regra. — *Reduz-se o divisor a incomplexo referido á unidade que a questão facilmente indica; se essa unidade fôr a da infima especie do divisor, divide-se cada uma das partes do dividendo pelo numero inteiro que representa o divisor, começando pelas de maior especie, e convertendo o resto em unidades do dividendo immediatamente inferiores, a que se juntam as da mesma especie do dividendo para continuar a divisão. Se a reducção do divisor á unidade indicada pela questão der um numero fraccionario, reduz-se tambem o dividendo á sua infima especie, e effectua-se a divisão do numero inteiro, que o exprime, por aquelle numero fraccionario, convertendo depois o quociente em numero complexo da especie do dividendo.*

2.º Caso: Regra. — *Reduzem-se o dividendo e divisor á especie infima de ambos; effectua-se a divisão dos dois incomplexos: e converte-se depois o quociente em complexo da grandeza que a questão indicar.*

Exemplo. Um arco de circulo de $1^\circ\ 20'\ 10''$ tem de comprimento 1 metro; qual é o comprimento do arco $5^\circ\ 12'$ do mesmo circulo?

Temos de dividir o segundo complexo pelo primeiro, e exprimir o quociente em metros e seus submultiplos. Reduzindo os dois complexos a segundos do grau, temos

$$5^\circ\ 12' = 18720'', \qquad 1^\circ\ 20'\ 10'' = 4810'';$$

$$\text{o quociente é } \frac{18720}{4810} \text{ metros} = 3^{\text{m}}\,\frac{429}{481} = 3^{\text{m}},891\ldots$$

**159. Multiplicação por partes aliquotas.** — Vamos indicar este processo no exemplo do n.º 157, 2.º caso.

## Typo do calculo

| | | | |
|---|---|---|---|
| $25^\circ$ | $16'$ | $10''$ | |
| | $8^{m.}$ | $14^{s.}$ | |
| $202^\circ$ | $9'$ | $20''$ | ... para 8 minutos (quanto andou em $8^{m}$) |
| $4^\circ$ | $12'$ | $41''\frac{2}{3}$ | ... para $\frac{1}{6}$ de minuto, ou 10 segundos |
| $0^\circ$ | $50'$ | $32''\frac{1}{3}$ | ... para $\frac{1}{5}$ de 10 segundos, ou 2 segundos |
| $0^\circ$ | $50'$ | $32''\frac{1}{3}$ | ... » » » » » |
| $208^\circ$ | $3'$ | $6''\frac{1}{3}$ | ... producto. |

Formou-se o primeiro producto parcial, que corresponde á multiplicação por 8 (n.° 157, 1.° caso); depois, para obter o producto parcial correspondente a $14^{s.}$, decompoz-se $14^{s.}$ em $10^{s.} + 2^{s.} + 2^{s.}$, ou em $\frac{1}{6}$ de 1 minuto $+ \frac{1}{5}$ d'este sexto $+ \frac{1}{5}$ d'este sexto, e é isto que se chama decompôr $14^{s.}$ em *partes aliquotas* do minuto; considerando que o multiplicando corresponde a 1 minuto, tomou-se $\frac{1}{6}$ d'elle (n.° 158, regra do 1.° caso), $\frac{1}{5}$ d'este 2.° producto parcial, que se escreveu duas vezes. A somma d'estes quatro productos parciaes deu o producto procurado.

## EXERCICIOS

*sobre complexos de tempo e da circumferencia*

**153.** O anno (tropico) tem, segundo o celebre astronomo Le Verrier, $365^{d.},242217$; converter este numero em dias, horas, minutos, segundos e decimaes do segundo.

**154.** Póde-se dizer que o mez é $\frac{1}{12}$ do anno civil?

**155.** Justificar que o anno commum acaba sempre em dia identico áquelle em que principia.

**156.** Quantos dias tem o seculo que começou em 1900?

**157.** Quantas horas são? perguntava alguem a Pythagoras; e o philosopho respondeu: *Falta ainda do dia* ($24^{h.}$) ***duas vezes os dois terços da parte já decorrida.***

(R. $10^{h.}$ $17^{m.}$ $8^{s.}$).

**158.** A Lua faz o seu giro completo ao redor da Terra em $27^{d.}$ $7^{h.}$ $43^{m.}$ $11^{s.},49$: converter este numero em incomplexo, tomando, successivamente, o dia, a hora, o minuto e o segundo, para unidade principal.

**159.** Converter em annos, dias, horas, minutos e segundos, as durações das revoluções sideraes dos planetas ao redor do Sol expressas em dias médios, as quaes são:

| Nomes dos planetas | Duração das revoluções |
|---|---|
| Mercurio . . . . . . . . . . . . . . . | $87^{d.},969258$ |
| Venus . . . . . . . . . . . . . . . . | $224^{d.},700787$ |
| Terra. . . . . . . . . . . . . . . . . | $365^{d.},256374$ |
| Marte. . . . . . . . . . . . . . . . . | $686^{d.},979646$ |
| Jupiter . . . . . . . . . . . . . . . . | $4332^{d.},588171$ |
| Saturno . . . . . . . . . . . . . . . | $10759^{d.},236360$ |
| Urano . . . . . . . . . . . . . . . . | $30688^{d.},39036$ |
| Neptuno. . . . . . . . . . . . . . . | $60181^{d.},11316$ |

**160.** Calcular o numero de segundos que tem uma circumferencia.

**161.** Calcular o numero de graus, minutos e segundos que tem um arco expresso pelo incomplexo $205265''$.

**162.** Um arco está expresso por $15^\circ\ 31'\ 25''$; qual é a sua expressão em grados?

**163.** Um arco está expresso por $22^G,2345$: qual é a sua expressão em graus, minutos e segundos?

**164.** A duração da primavera é $93^d\ 20^h\ 25^m$, a do verão $93^d\ 18^h\ 23^m$, a do outomno $89^d\ 17^h\ 57^m$, e a do inverno $89^d\ 1^h\ 5^m$, qual é a duração do anno (tropico) por estes dados?

**165.** N'um eclipse total do Sol (o de 1860, observado em Paris) este astro desappareceu ás $2^h\ 47^m\ 33^s$ e reappareceu ás $2^h\ 50^m\ 48^s$; quanto durou o eclipse?

**166.** O diametro apparente do Sol, isto é, o angulo pelo qual um observador vê o diametro do disco solar, varia de $31'\ 31''$ a $32'\ 35'',6$; qual é o diametro apparente médio do Sol, isto é, a semi-somma dos diametros extremos?

**167.** A Terra descreve ao redor do Sol uma circumferencia em $365^d\ 5^h\ 48^m\ 47^s$; que arco (médio) descreve em 1 dia?

**168.** Converter 430$600 réis em libras esterlinas, shillings e pences ou *dinheiros* ($1\ £ = 20^{sh}$, $1^{sh} = 12^{pen}$).

**169.** Um relogio dá n'este momento a hora exacta, mas adeanta-se regularmente $7^m\ 25^s$ por dia; que tempo deve recorrer para indicar outra vez a hora exacta?

**170.** Um chronometro adeanta-se regularmente $9^s,5$ por dia; ao meio dia exacto de 8 de maio de 1895 indicava $3^h\ 25^m\ 57^s$; em 30 de maio de 1896 vê-se que indica $8^h\ 11^m\ 56^s,4$ da tarde; qual é a hora exacta?

**171.** Calcular o producto de $53^\circ\ 28'\ 47''$ por 294, pelo processo das partes aliquotas (o que é sempre preferivel quando o multiplicador é um numero de muitos algarismos). Indicações: forme-se o producto de 53 por 294, que exprime graus; decomponha-se $28'$ em $20' + 6' + 2'$; e $47''$ em $40'' + 4'' + 2'' + 1''$, observando que $40''$ é o terço de $120''$ ou $2'$.

$a = \alpha$

$b = \beta$

$r = \rho$

$p = \pi$

$p = \pi$ que é uma letra do al-
beto grego que vale

3,1416

$a = \alpha$

$b = \beta$

$r = \rho$

$p = \pi$

$p = \pi$ que é uma letra do al
fabeto grego que vale 3,1416

# GEOMETRIA PRATICA

# PROGRAMMA OFFICIAL

(Decreto de 3 de Novembro de 1905)

---

**GEOMETRIA (Noções praticas).** — Solido, superficie, linha, ponto. Linha recta. Perpendiculares, parallelas, obliquas. Construcções graphicas usuaes sobre a linha recta, por meio de perpendiculares e parallelas.

Angulo; angulo recto, agudo, obtuso, raso, nullo.

Linha curva. Circumferencia, raio, diametro, corda. Circulo, segmento, sector. Secante, tangente. Perimetro de uma linha curva; regra pratica para a avaliação do perimetro da circumferencia.

Polygonos. Polygonos regulares. Area e perimetro. Regras praticas para a avaliação da area do rectangulo, triangulo, parallelogrammo, trapezio, polygonos regulares, polygono qualquer, circulo e sector.

Applicação da medição das superficies a problemas de uso commum.

PRIMEIRAS NOÇÕES

DE

# GEOMETRIA INTUITIVA

---

## § 1.º Preliminares

**1. Volume.** — Os corpos suggerem-nos a ideia de *fórma* ou *figura*, e de *extensão*; por exemplo, a *fórma* d'um caixão, d'uma montanha, d'um homem; e a *extensão* d'estas coisas. A extensão *completa* d'um objecto é o *volume* d'esse objecto, a sua *extensão* em *solidez*. Essa extensão consta do seu *comprimento*, *largura* e *altura*, que se chamam as *tres dimensões* dos corpos.

Observação. — Empregam-se denominações differentes para indicar a dimensão altura: diz-se *altura* d'uma casa, d'um homem; *espessura* d'uma parede; *grossura* d'uma taboa; *profundidade* do mar; *fundura* d'um poço.

**2. Superficie, linha, ponto.** — Os corpos dão-nos ainda outras especies de extensão: o *limite* ou contorno da extensão em solidez é uma extensão chamada *superficie*, que não tem senão *duas* dimensões, largura e comprimento.

Reduzindo indefinidamente a espessura d'um corpo, por exemplo, d'uma taboa, caminha-se para a ideia abstracta de superficie.

O limite ou contorno da superficie é uma nova extensão chamada *linha*, que sómente tem *uma* dimensão, o comprimento. Por exemplo a superficie da parede d'uma sala é limitada por linhas, geralmente quatro.

Duas superficies que se encontram limitam-se reciprocamente, e a *intersecção* é uma linha. Por exemplo, a superficie d'uma parede é limitada pela superficie do tecto, do pavimento e das outras paredes.

Reduzindo indefinidamente a espessura e a largura d'um corpo, por exemplo, d'um fio de arame, caminha-se para a ideia abstracta de linha.

O limite da linha chama-se *ponto*, que não offerece nenhuma especie de extensão. O ponto não tem nenhuma dimensão.

A linha póde ser limitada por outra linha, ou por uma superficie. Por exemplo, as linhas do tecto d'uma sala limitam-se duas a duas, e são limitadas pela superficie das paredes.

Assim, a intersecção de duas linhas, ou de uma linha e d'uma superficie, é um ponto.

Reduzindo indefinidamente as tres dimensões d'um corpo (a extensão em solidez), caminha-se para a ideia abstracta de ponto. Por exemplo, um grão de areia muito fina, a ponta d'um lapis, extremamente aparado, dão a representação material do ponto.

Um ponto representa-se por uma pequena marca de lapis, tinta ou giz, com uma letra escripta ao lado, para o indicar.

Observação. — As extremidades de uma linha são dois pontos; mas uma linha póde não ter extremidades, ou por que se considere *indefinida*, ou por que seja fechada, como, por exemplo, a linha que fórma a letra O.

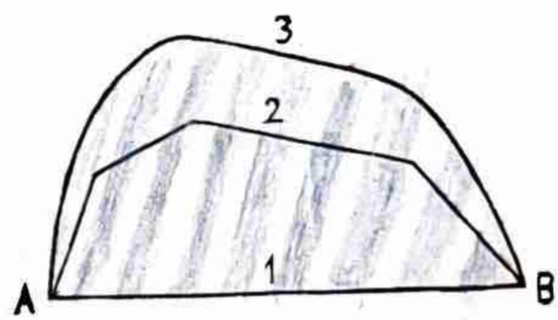
O limite, ou contorno, d'uma superficie é uma linha: mas uma superficie póde não ter linha limite, ou porque se considere *indefinida*, ou porque seja fechada, como, por exemplo, a superficie d'uma bola.

**3.** Partindo do ponto e por meio do movimento, podemos considerar a linha como o conjuncto das posições successivas d'um ponto que se move. A ponta d'um lapis movendo-se sobre o papel dá a representação material da linha.

Por isso, uma linha póde considerar-se composta de innumeros pontos successivos.

Tambem se póde considerar a superficie como o conjuncto das posições d'uma linha que se move.

**4. Linha recta, quebrada, curva.** — Entre dois pontos A e B, podem-se conceber muitas linhas, cuja representação material se póde fazer por meio de fios de arame aos quaes se póde dar a fórma que se quizer.




Entre estas linhas existe uma de fórma mais simples de todas; é a d'um fio bem puxado pelas extremidades A e B: chama-se *linha recta*, ou simplesmente *recta*. É o traço habitual da luz, d'um raio de sol entrando, n'um recinto ás escuras, pelo orificio aberto n'uma porta.

Afastando indefinidamente os dois pontos A e B temos sempre uma linha recta, indefinida, illimitada; é o que se quer significar quando se diz uma *recta*.

Entre dois pontos A e B não se póde fazer passar mais que uma linha recta; isto é, duas rectas que teem dois pontos communs confundem-se completamente.

A recta dá a ideia de *direcção* d'um ponto para outro.

Uma recta indica-se por duas letras, que designam dois pontos quaesquer d'ella.

Uma recta limitada por dois de seus pontos, ou uma *porção* de recta, como a representada em 1 da figura, é um *segmento rectilineo*, ou simplesmente um *segmento*.

Um segmento indica-se por duas letras que designam os pontos limites *(termos, extremidades)* d'elle.

Uma recta limitada sómente por um dos seus pontos, diz-se *semi-recta*. Um ponto de uma recta divide-a sempre em duas semi-rectas. Esse ponto é o *ponto origem* d'ellas.

Dizem-se *prolongamentos* de um segmento as duas semi-rectas que os termos do segmento formam na recta a que elle pertence.

*Linha quebrada* ou *polygona* é uma linha formada pela continuação de muitos segmentos rectilineos dispostos em differentes direcções, como a representada em 2 da figura.

A linha quebrada diz-se *convexa*, se a recta de que um dos segmentos é parte, a deixa ficar toda da mesma banda.

*Linha curva*, ou simplesmente *curva*, é uma linha que não é recta nem composta de linhas rectas, como a representada em 3 da figura.

**5. Superficie plana, polyedrica, curva, convexa.** — Uma superficie tem duas faces: por exemplo, uma folha de papel tem a *frente* e o *verso*. Unindo dois pontos A e B d'uma superficie por meio d'uma recta, o segmento AB da recta, comprehendido entre os dois pontos, fica da banda d'uma ou da outra face da superficie; diz-se que a superficie é *concava* da banda da face em que fica o segmento, ou *convexa* da outra face.

A experiencia dá-nos certas superficies, como as das aguas tranquillas (a agua dos tanques) que não são concavas de nenhuma das duas faces, isto é, taes que uma recta assenta perfeitamente sobre ellas. Uma superficie d'estas chama-se *superficie plana* ou simplesmente *plano*.

Um plano é, pois, a superficie onde se póde ajustar perfeitamente uma recta em todas as posições e direcções: uma taboa de desenho, as paredes d'uma sala, são porções de plano.

O plano, como a recta, considera-se indefinido, isto é, sem limites.

Uma recta assente n'um plano divide-o em duas partes, que se dizem *semi-planos*. Cada um d'estes diz-se *prolongamento* do outro.

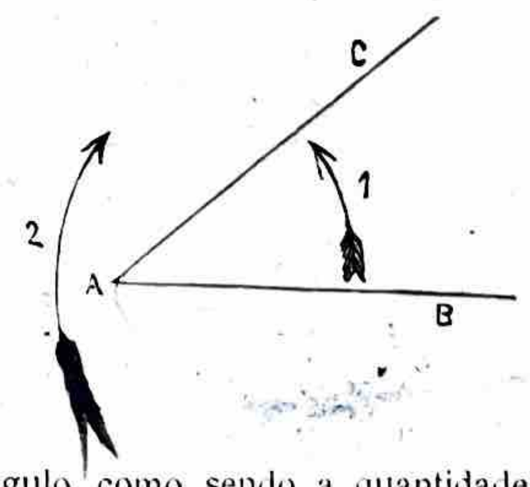
Uma superficie não plana, mas composta de porções de planos, denomina-se *superficie polyedrica*: por exemplo, a superficie de um dado de jogar.

Uma superficie que não é plana nem polyedrica, chama-se *superficie curva*; por exemplo a superficie d'um ovo.

**6.** Uma *figura* é um conjuncto de pontos, linhas, superficies, *invariavelmente ligados entre si*. Diz-se *figura plana* quando todos os seus pontos estão n'um plano; diz-se *solida*, quando os seus pontos não estão todos n'um mesmo plano; tal é o contorno d'um corpo qualquer.

## § 2.º Figuras planas

**7. Angulos; angulos adjacentes.** — Duas semi-rectas, como AB e AC, traçadas n'um plano tendo o mesmo ponto origem A, decompõe o plano em duas partes, cada uma das quaes é uma figura plana que se chama *angulo*.




Recortando a folha do papel pelas duas rectas AB, AC obtem-se a imagem material dos dois angulos em que o plano da folha ficou dividido.

Póde considerar-se o angulo como sendo a quantidade maior ou menor de que se deve fazer girar uma semi-recta n'um plano ao redor da sua origem A, para a levar d'uma posição AB para outra posição AC; levando-a como indica a flecha 1, ou, em sentido contrario, como indica a flecha 2.

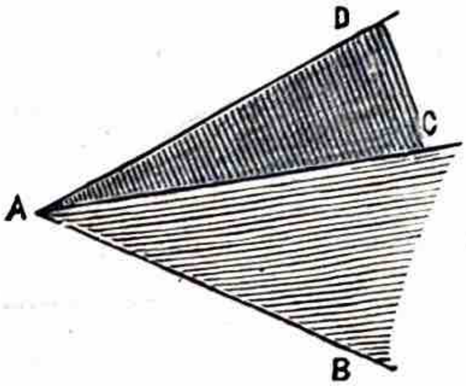
As duas semi-rectas, AB, AC chamam-se *lados* do angulo; o ponto commum A é o *vertice* do angulo.

Distinguem-se os dois angulos um do outro, pela circumstancia do prolongamento além do vertice de qualquer dos lados não entrar n'um d'elles, e entrar no outro. Na figura, é no angulo indicado pela flecha 1 em que os prolongamentos não entram. Diz-se que o primeiro angulo é *convexo* e o segundo *concavo.*

Se os dois lados estão *em direitura,* isto é, formam uma só recta, os dois angulos, em que o plano está dividido, não são concavos nem convexos; dizem-se angulos *rasos.* Se estão sobrepostos o angulo é *nullo.*

Para indicar um angulo, escrevem-se tres letras a seguir, sendo a do meio a que representa o vertice, e as outras duas as que estão escriptas sobre os lados. Por exemplo, o angulo representado na figura, lê-se e escreve-se *ang.* BAC, ou simplesmente BAC; subentendendo-se sempre que é o angulo convexo que se considera, salvo declaração em contrario.

Póde tambem representar-se só pela letra do vertice, angulo A, quando não haja outro angulo com esse vertice.

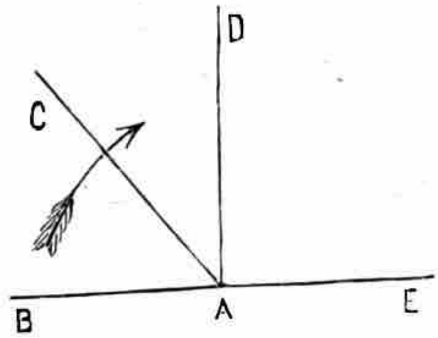



Traçando tres semi-rectas n'um plano, com o mesmo ponto origem A, formam-se tres angulos, BAC, CAD, BAD. O terceiro diz-se a *somma* dos outros dois, que são *adjacentes.*

Dois angulos dizem-se *adjacentes* quando teem o vertice e um lado commum, e os outros dois lados ficam de uma e da outra banda d'esse lado.

Observação. —Para abreviar, diz-se angulo de dois segmentos em vez de angulo das duas semi-rectas que os segmentos representam.

**8. Recta perpendicular, obliqua. Angulo recto, agudo, obtuso; angulos supplementares e complementares.** —Consi-




deremos n'um plano, traçada a recta BE, e uma semi-recta AC a girar no plano em torno do ponto A da recta, como fazem os ponteiros d'um relogio, e indica a flecha; tendo a semi-recta AC partido de AB, diz-se que AC fez um *giro inteiro,* quando volta á sua primitiva posição AB; *meio giro,* quando chega á posição AE, prolongamento da primeira. Em todas as outras posições, faz sempre com AB e AE dois angulos adjacentes, taes como BAC e CAE; ha uma posição AD, *unica,* em que os dois angulos adjacentes BAD e DAE são iguaes; é quando faz um *quarto de giro;* n'essa posição diz-se *perpendicular* á primeira AB, e os angulos adjacentes são chamados *angulos rectos.*

Uma recta é *perpendicular* a outra quando fórma com esta dois angulos adjacentes iguaes.

A recta que não é perpendicular a outra diz-se *obliqua.* Por exemplo, a recta AC é obliqua sobre a recta BE.

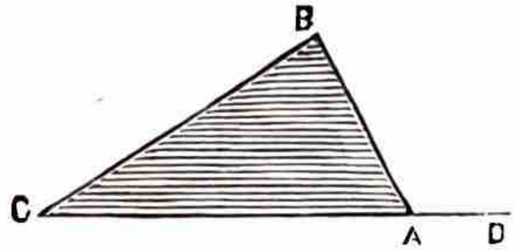
Os angulos comparam-se com o angulo recto; um angulo é *agudo,* se é menor que um recto; *obtuso,* se é maior que um angulo recto.

Para se fazer materialmente o angulo recto, dobre-se uma folha de papel, e dobre-se de novo de modo que as duas partes da primeira préga se ajustem exactamente; desdobrando a folha, as duas prégas indicam duas rectas perpendiculares uma á outra, e a folha apparece dividida em quatro angulos rectos.

Dois angulos cuja somma vale dois rectos, dizem-se *supplementares.* Exemplo: BAC e CAE.

Dois angulos cuja somma vale um recto, dizem-se *complementares.* Exemplo: BAC e CAD.

**9. Triangulo.** — *Triangulo* ou *trilatero* é uma porção de plano limitada por tres segmentos de recta.




Esta figura tem tres angulos convexos A, B e C, formados pelos segmentos, que são considerados os angulos do triangulo. Os tres segmentos AB, BC e CA, chamam-se *lados* do triangulo.

Os tres angulos e os tres lados são os *seis elementos* do triangulo.

Para indicar um triangulo escrevem-se e lêem-se as tres letras dos vertices; por exemplo triangulo ABC.

O angulo BAD formado por um lado AB e o prolongamento AD de outro lado CA, diz-se *angulo externo* do triangulo.

**10.** O triangulo, relativamente aos lados, diz-se:

*escaleno,* quando os tres lados são desiguaes;

*isosceles,* quando dois lados são iguaes; o terceiro lado diz-se *base*;

*equilatero,* quando os tres lados são iguaes.

Relativamente aos seus angulos, o triangulo é *rectangulo,* quando tem um angulo recto. Chamam-se *cathetos* os lados do angulo recto do triangulo rectangulo, e chama-se *hypotenusa* o lado opposto ao angulo recto.

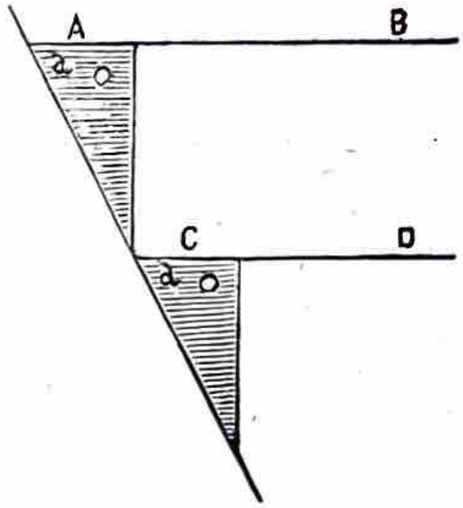
Um esquadro de desenho é um triangulo rectangulo material.

O triangulo é *obtusangulo,* ou *amblygono,* quando tem um angulo obtuso.

É *acutangulo,* ou *oxygono,* quando tem os angulos agudos.

Os triangulos obtusangulos e acutangulos, dizem-se *obliquangulos.*

**11. Linhas parallelas.** — Rectas parallelas são as que, situadas n'um plano, não podem encontrar-se, por mais que se prolonguem de ambos os lados.




Fazendo escorregar um angulo de grandeza invariavel (por exemplo, feito de madeira, como o angulo *a* d'um esquadro) ao longo de uma regua fixa encostada a um de seus lados, o lado não encostado destaca-se completamente da sua primeira posição AB, e não conserva com ella nenhum ponto commum; não a póde encontrar. São ***parallelas*** as posições successivas AB, CD, etc., do lado não encostado.

Dando sentido inverso ao movimento do esquadro, leva-se o lado não encostado á coincidencia com a primeira posição AB.

A distancia entre duas parallelas avalia-se ajustando um dos cathetos do esquadro com uma d'ellas, e tomando, ao longo do outro catheto, o comprimento do segmento que vae até ao encontro da outra parallela.

Duas parallelas, guardam a mesma distancia em todos os seus pontos. É n'esta propriedade que se funda o ***graminho***, instrumento de carpinteiro para traçar parallelas n'uma determinada direcção.

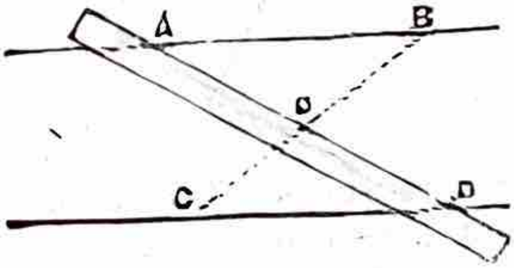
Por esta propriedade tambem se verifica se duas rectas traçadas são parallelas, comparando as distancias entre ellas tomadas, como se indicou, em dois pontos, o mais afastados possivel, para que a differença das distancias, se a houver, se torne mais sensivel.

**12. Construcções graphicas usuaes sobre a linha recta, por meio de perpendiculares e parallelas.** — Estas construcções graphicas fazem-se com o esquadro e a regua.

1.º ***Por um ponto dado conduzir uma parallela a uma recta dada.***

Se a recta dada é AB e D o ponto dado (fig. do numero antecedente), colloca-se a hypotenusa do esquadro sobre a recta AB, encostado a uma regua por um dos seus cathetos, e faz-se resvalar ao longo da regua como se disse, até que a hypotenusa venha passar pelo ponto D, e traça-se por ella a recta CD, que será a pedida.

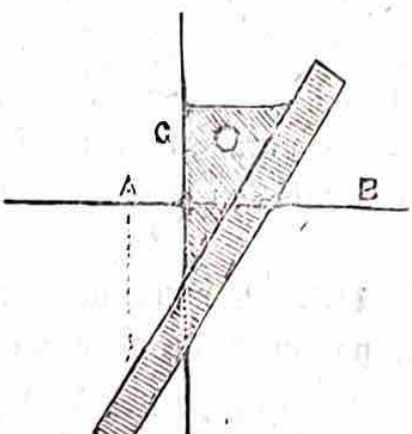
Tambem se póde traçar a parallela sem esquadro. Córta-se uma tira de papel com bordo bem rectilineo; applica-se a tira por esse bordo no ponto D, e marca-se na tira este ponto e o ponto A em que o bordo encontra a recta dada AB; dobra-se depois a tira de modo que os pontos D e A se ajustem exactamente; desdobra-se a tira, a préga marcou o ponto O meio do segmento AD, e colloca-se de novo a tira como estava; traça-se com uma regua uma recta que una O a um ponto qualquer B da recta dada AB; toma-se OC = OB, e lança-se com a regua, a recta CD, que será a parallela perdida.




2.º *Por um ponto dado conduzir a perpendicular a uma recta dada.*

Se o ponto está sobre a recta dada AB, seja A, basta applicar um catheto do esquadro sobre a recta de modo que o vertice do angulo recto se ajuste ao ponto A; pelo outro catheto traça-se a perpendicular pedida.

Se o ponto está fóra da recta, mas ao alcance do esquadro, seja C, então, posto o esquadro, como vem de ser dito, faz-se escorregar, encostado pela hypotenusa a uma regua, até que o catheto, que estava per-



pendicular á recta dada, venha passar pelo ponto dado C: a recta traçada por este catheto é a perpendicular pedida.

Este segundo caso tem emprego frequente na construcção graphica das *alturas* das figuras.

Por estas duas construcções graphicas, obtem-se: a construcção de um triangulo rectangulo cujos cathetos são dados; a de um triangulo, cuja base e altura são dadas; a *distancia* entre duas parallelas; os innumeros parallelogrammos e triangulos que tem a mesma base e a mesma altura.

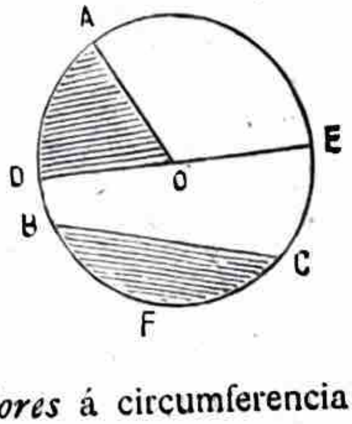
**13. Circulo.** — *Circumferencia* é uma curva fechada cujos pontos são todos igualmente afastados d'um ponto interior denominado *centro.* Fazendo girar um compasso em torno d'uma das suas pontas, a outra deixa no papel a representação material d'uma circumferencia; o ponto que a ponta fixa marcou, é o centro.

A porção de plano limitada por uma circumferencia é o *circulo.*

O sol mostra-se no céu como um circulo luminoso.

Ás vezes tambem, para abreviar, se diz circulo em vez de circumferencia.

*Raio* do circulo ou da circumferencia, é todo o segmento como OA, que parte do centro O e termina na circumferencia.




Todos os raios são iguaes.

*Diametro* do circulo é todo o segmento que passa pelo centro e termina na circumferencia, como DE.

Um diametro vale dois raios; todos os diametros são iguaes.

Os pontos cuja distancia ao centro é menor que o raio dizem-se *interiores* á circumferencia; aquelles cuja distancia ao centro é maior que o raio dizem-se *exteriores.*

*Arco* de circulo é cada uma das partes de uma circumferencia que dois dos seus pontos n'ella separam. Esses dois pontos dizem-se *termos* do arco.

*Corda* de circulo é o segmento que une dois quaesquer pontos de circumferencia, e é limitado por esses pontos, como o segmento BC. A uma corda correspondem dois arcos. A corda é chamada tambem *subtensa* dos respectivos arcos.

Para se indicar um arco põe-se uma letra sobre o arco entre as que estão nas extremidades, a fim de o distinguir da corda e do outro arco que tem as mesmas extremidades. Por exemplo, corda BC; arco BFC.

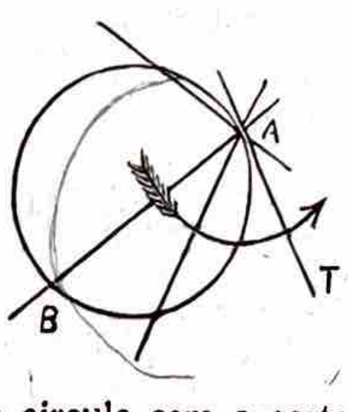
*Segmento de circulo* é a porção de circulo comprehendida entre a corda e um dos respectivos arcos, como BFC. A corda diz-se *base* do segmento.

*Sector* é a parte do circulo comprehendida entre dois raios, como OAD. Os dois raios dizem-se *lados* do sector; e o arco, que com os lados limita o sector, diz-se *base* do sector.

Se o angulo AOD é recto, o sector diz-se *quadrante;* e se é um angulo raso, diz-se *semi-circulo.*

*Secante* é a recta que corta o circulo, como AB.

Se fizermos girar a secante AB em torno d'um dos seus pontos A de córte (como indica a flecha), o outro ponto de córte B caminha para aquelle, confunde-se com elle, e depois apparece do outro lado d'elle; a posição *unica* da secante, quando os dois pontos de córte estão confundidos n'um só, é a da recta AT, que se chama *tangente.*

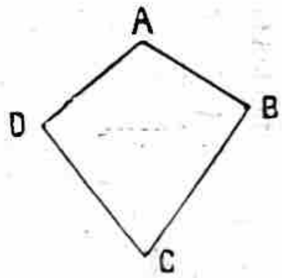



A tangente é uma recta que *toca* o circulo sem o cortar, não tendo assim senão um ponto commum com a circumferencia.

**14. Quadrilateros.** — O *quadrilatero* é uma porção de plano limitada por quatro segmentos de recta. Os quatro segmentos são os *lados* do quadrilatero.

O quadrilatero representado na fig. 1 differe do que está representado nas figuras 2 e 3 em que, no primeiro, prolongando-se indefinidamente qualquer dos seus lados, a figura fica toda da mesma banda da recta, emquanto que, no segundo, prolongando-se o lado CB ou CD, e, no terceiro, AB ou CD, a figura fica parte n'uma banda da recta, parte na outra. O primeiro quadrilatero diz-se *convexo;* os outros dois dizem-se *concavos*.

Fig. 1



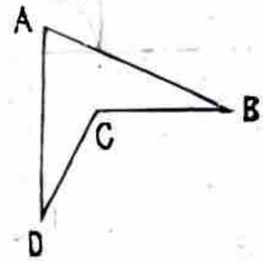




Fig. 2

O quadrilatero tem quatro lados (d'aqui o nome), e quatro angulos.

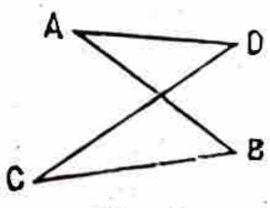



Fig. 3

No quadrilatero convexo, fig. 1, a cada angulo oppõe-se um angulo, a cada lado um lado; os angulos A e C, B e D são *angulos oppostos;* os lados AB e CD, AD e BC são *lados oppostos*.

Dois lados ou dois angulos que não são oppostos, dizem-se *consecutivos;* taes são, por exemplo, os lados AB e BC, os angulos A e B. O segmento que une dois vertices de dois angulos oppostos, chama-se *diagonal;* o quadrilatero convexo tem duas diagonaes, AC e BD.

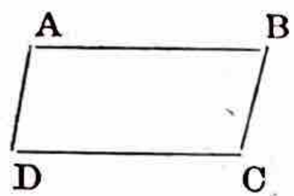
No quadrilatero representado na fig. 2, se $AB = AD$, $BC = CD$ obtem-se uma figura de uso pratico, que os inglezes denominam *ferro de lança* (*spear-head*); e no quadrilatero da fig. 3, se $AB = CD$, $AD = CB$, temos uma figura tambem de uso pratico, que se chama *anti-parallelogrammo*.

Ha os quadrilateros convexos indicados e definidos no seguinte quadro:

5-4-12

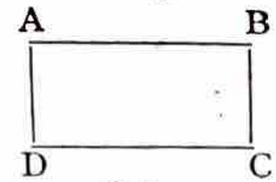
QUADRILÁTEROS

**Parallelogrammo**



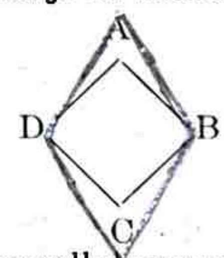

É o quadrilatero que tem os lados oppostos parallelos.

**Rectangulo**



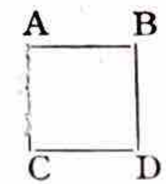

É o parallelogrammo que tem os seus angulos rectos.

**Losango ou Rhombo**



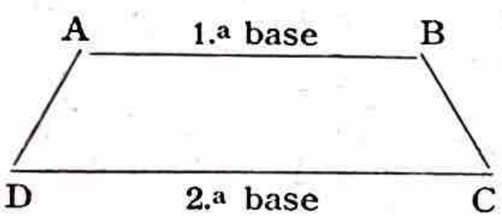

É o parallelogrammo que tem os seus lados iguaes.

**Quadrado**



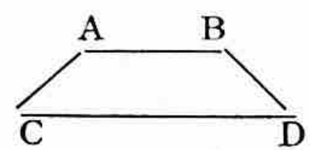

É o parallelogrammo que é rectangulo e losango; isto é, que tem os angulos rectos e os lados iguaes.

**Trapesio**



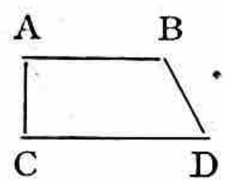

É o quadrilatero que tem sómente dois lados oppostos parallelos. Os lados parallelos chamam-se *bases*.

**Trapesio isosceles**




É o trapesio em que os lados não parallelos são iguaes; $AC = BD$.

**Trapesio rectangulo**



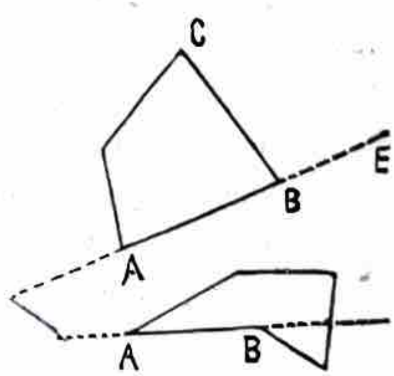

É o trapesio em que dois angulos, cujos vertices são as extremidades d'um lado não parallelo, taes como A e C, são rectos.

Fóra d'este quadro deve ainda indicar-se uma fórma de quadrilatero convexo de uso pratico, que se obtem suppondo na fig. 1 os lados AB e AD iguaes e tambem os lados BC e CD, sem que sejam iguaes entre si. Tal quadrilatero denomina-se *rhomboide* (fórma de rhombo), a que os inglezes chamam *papagaio (kite)*.

**15. Polygonos.** — Uma porção de plano limitada por segmentos de recta é uma figura que se denomina ***polygono*** (muitos angulos).

Os segmentos são os *lados* do polygono; as extremidades, os *vertices* do polygono. Os angulos (convexos), cada um dos quaes é formado por dois lados consecutivos, são os *angulos* do polygono.

Um polygono tem sempre tantos lados quantos os angulos, quantos os vertices.




Um polygono póde ser *convexo* ou *concavo*: é convexo, se prolongando qualquer dos lados, AB, fica todo da mesma banda da recta; é concavo quando não fica. Cada uma d'estas duas especies está representada em sua figura.

Os polygonos de uso mais commum são os convexos.

O triangulo é o polygono mais simples; é sempre convexo.

Os polygonos designam-se pelo numero de seus angulos ou lados (que é o mesmo). Depois do *quadrilatero*, ou *quadrangulo* ou *tetrágono*, o poligono de

| | | | |
|---|---|---|---|
| 5 | lados | chama-se | *pentágono*, |
| 6 | » | » | *hexágono*, |
| 7 | » | » | *heptágono*, |
| 8 | » | » | *octógono*, |
| 9 | » | » | *eneágono*, |

10 lados chama-se *decágono*,
11 » » *endecágono*,
12 » » *dodecágono*,
15 » » *pentadecágono*.
20 » » icosagono

Os outros polygonos designam-se indicando o numero de seus lados; assim, polygono de 13, 14, 16, etc., lados.

Se os lados do polygono são iguaes, o polygono diz-se *equilatero*. Se os angulos do polygono são iguaes, o polygono diz-se *equiangulo*.

Um polygono é *regular* quando é equilatero e equiangulo.

O triangulo equilatero e o quadrado são polygonos regulares um de 3 lados, e outro de 4 lados.

*Diagonaes* d'um polygono são os segmentos de recta que unem os vertices não consecutivos do polygono. O numero de diagonaes é a metade do producto do numero de lados por este numero diminuido em 3 unidades. Por exemplo: o numero de diagonaes do hexágono é

$$\frac{1}{2} \times 6 \times (6 - 3) = 9;$$

o das do decágono é

$$\frac{1}{2} \times 10 \times (10 - 3) = 35.$$

A somma dos lados d'um polygono é o *perimetro* do polygono.

Um angulo formado por um lado e pelo prolongamento do lado consecutivo, tal como CBE na primeira figura, é chamado *angulo externo* do polygono.

**16. Perimetro d'uma linha curva; regra pratica para a avaliação do perimetro da circumferencia.** — Construir um segmento rectilineo cujo comprimento representa a extensão linear da curva, — como materialmente se obteria pela tensão de um fio flexivel e inextensivel que houvesse tomado a fórma da curva — é obter o *perimetro* d'esta; é o que se chama a *rectificação* da curva. A rectificação na maioria dos casos não se póde obter senão approximadamente, com uma approximação, porém, tão grande quanto se queira.

A rectificação da circumferencia, ou a avaliação do seu perimetro, está n'este caso: é absolutamente impossivel obtel-a exacta por construcção geometrica.

A rectificação approximada da circumferencia obtem-se pela seguinte regra pratica:

*Multiplica-se o diametro da circumferencia pelo numero 3,1416.*

Exemplo:

Se o raio de uma circumferencia é $8^m$, a sua rectificação é $16^m \times 3,1416 = 50^m,265$, com um erro menor que um millimetro.

N'uma circumferencia de um kilometro de raio, o erro commettido pela applicação da regra é inferior a um decimetro.

Obtem-se, por isso, o diametro de uma circumferencia dividindo a sua rectificação por 3,1416, ou, o que é mais commodo, multiplicando a rectificação por 0,3183. Exemplo: mediu-se com uma fita metrica o comprimento da circumferencia do tampo de uma pipa, e achou-se $2^m,15$; o diametro do tampo é $2^m,15 \times 0,3183$ ou $0^m,684$ com um erro menor que um millimetro.

5-6-12

### § 3.º Regras praticas para a avaliação de areas

**17.** O numero que exprime a medida de uma superficie, tomando a de um quadrado para unidade de superficie, diz-se *area*. O lado do *quadrado unitario* é a unidade linear escolhida, o metro *(metro quadrado)*.

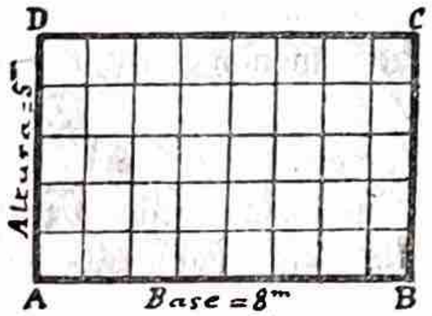
Regras praticas:

1.ª **Area do rectangulo.** — *Multiplicam-se os numeros que medem dois lados adjacentes do rectangulo* (base e altura).

Exemplo:

Se a base é $8^m$ e a altura $5^m$, a area do rectangulo é 40 *metros quadrados*; como visivelmente mostra o rectangulo ABCD da figura.

Observações. 1.ª — O enunciado da regra precedente suppõe essencialmente que as unidades de comprimento e de superficie sejam *correspondentes*, isto é, que a unidade de area seja a do quadrado que tem de lado a unidade de comprimento.

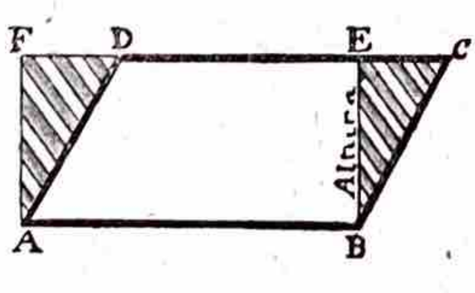



2.ª A area do quadrado é a segunda potencia do numero que mede o seu lado. D'aqui vem denominar-se quadrado de um numero a sua 2.ª potencia.

2.ª **Area do parallelogrammo.** — *A area é o producto dos numeros que medem a base e a altura do parallelogrammo.*

Tome-se para base um qualquer dos lados, e a altura é então a distancia d'esse lado ao seu parallelo.

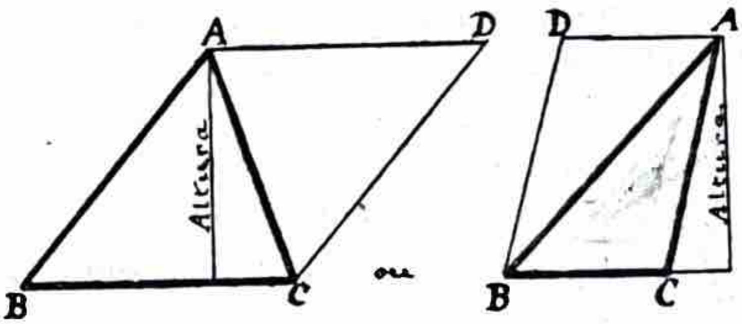
A figura mostra, em intuição immediata, a reducção do parallelogrammo ABCD ao rectangulo ABEF, supprimindo o triangulo BEC (assombrado) ao parallelogrammo para o collocar, pelo transporte em papel ladrão, em AFD.




3.ª **Area do triangulo.** — *A area é a metade do producto dos numeros que medem a base e a altura correspondente.*

Toma-se para base um qualquer dos tres lados, e então a altura correspondente é o segmento da perpendicular, baixada do vertice opposto á base, sobre esta.

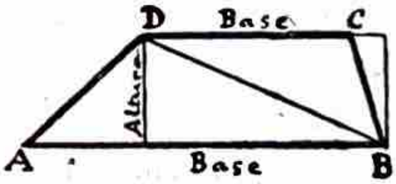
A altura póde caír dentro ou fóra do triangulo.




A figura mostra intuitivamente que a area do triangulo ABC é a *metade* da area do parallelogrammo ABCD da mesma base e da mesma altura; poisque os dois triangulos, em que o parallelogrammo está decomposto, são iguaes, como se verifica levando com papel ladrão um d'elles a sobrepôr no outro.

4.ª **Area do trapezio.**—*A area é o semi-producto da somma dos numeros que medem as bases do trapezio pelo que mede a* altura *no trapezio.*

A altura do trapezio é a distancia das bases.




A figura mostra que, tirando a diagonal BD, o trapezio fica dividido nos dois triangulos ADB, BDC, que teem respectivamente por bases as do trapezio, e por altura DE = BF do trapezio.

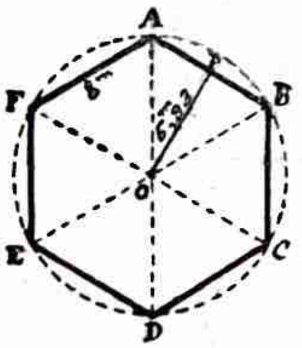
Sejam base AB = $25^m,5$, base DC = $18^m$, altura $10^m,5$. Pela regra precedente, temos

$$\frac{1}{2} \times 25^m,5 \times 10^m,5 + \frac{1}{2} \times 18^m \times 10^m,5 =$$

$$= \frac{1}{2}(25^m,5 + 18^m) \times 10^m,5 \text{ (Arith. 95, obs. 2.}^a\text{)} = 228^m,37.$$

5.ª **Area de um polygono regular.** — *A area é o semi-producto dos numeros que medem o perimetro e o* **apothema** *do polygono.*

Um polygono regular gosa da propriedade de existir sempre uma circumferencia que passa por todos os seus vertices, que se diz *circumscripta* ao polygono; a distancia do centro d'esta circumferencia a um dos lados do polygono, igual para todos os lados, é o que se chama *apothema* do polygono.




A figura mostra o polygono regular ABCDEF decomposto em triangulos iguaes, cujas bases são os lados iguaes do polygono e a altura o apothema OP, igual em todos.

Pela regra 3.ª temos

$$\frac{1}{2} \times 8^{m} \times 6^{m},93 \times 6 = \frac{1}{2} \times (8^{m} \times 6) \times 6^{m},93 = 166^{m^2},32.$$

O perimetro do polygono é $8^{m} \times 6 = 48^{m}$.

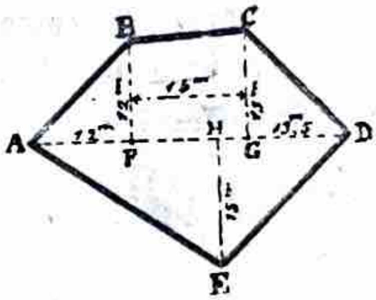
6.ª **Area de um polygono qualquer.** — *Para obter a area, decompõe-se o polygono em triangulos, unindo os vertices a um ponto interior, ou, mais frequentemente, por meio de diagonaes saídas do mesmo vertice; e depois, calculadas as areas de cada um dos triangulos* (3.ª), *faz-se a somma d'ellas.*

Pela primeira decomposição, o numero de triangulos é o dos lados; pela segunda, o seu numero é o dos lados menos dois.

Observações. — 1.ª É pela segunda decomposição que se obtem a regra da area do trapezio.

É pela primeira decomposição que se obtem a regra da area do polygono regular.

2.ª Ainda se póde obter a area de um polygono qualquer por outra decomposição frequentemente usada no terreno *(methodo dos trapezios).*




Tira-se, de preferencia, a maior diagonal AD do polygono, como se vê na figura, e baixam-se as perpendiculares BF, CG, EH dos outros vertices sobre ella: o polygono fica decomposto em triangulos rectangulos e em trapezios rectangulos (um, na figura); calculam-se as areas d'estas partes e sommam-se.

| | | |
|---|---|---|
| Area de triangulo AFB | $= \frac{1}{2} \times 12 \times 12 =$ | $72^{m2}$ |
| „ trapezio BFGC | $= \frac{1}{2} \times (13 + 12) \times 14 =$ | $175^{m2}$ |
| „ triangulo CGD | $= \frac{1}{2} \times 13 \times 13{,}5 =$ | $87^{m2},75$ |
| „ „ AED | $= \frac{1}{2} \times (12 + 14 + 13{,}5) \times 15 =$ | $296^{m2},25$ |
| | Area do polygono $=$ | $631^{m2}$ |

7.ª **Area de um circulo.** — *Obtem-se approximadamente a area de um circulo, multiplicando a rectificação da sua circumferencia pela metade do numero que mede o raio; ou multiplicando a segunda potencia do numero que mede o raio pelo numero 3,1416.*

Isto constitue o celebre problema da *quadratura do circulo*, que, como a rectificação, é absolutamente impossivel resolver exactamente.

Exemplo:

O raio do circulo é $8^m$: a rectificação da sua circumferencia é (n.º 16) $50^m,265$; a area do circulo é pois

$$50,^m265 \times 4^m = 201^{m2},06$$

com um erro inferior a $1^{dm2}$.

Pela segunda fórma da regra:

$$(8^m)^2 \times 3,1416 = 64^{m2} \times 3,1416 = 201^{m2},06$$

limitando o producto ás centesimas.

8.ª **Area do sector.** — *Obtem-se a area de um sector dividindo a area do circulo, que tem o raio do sector, por 360 e multiplicando o resultado pela graduação do angulo do sector.*

Exemplos:

O raio do sector é $8^m$ e o angulo é $20^o$:

$$\text{area do sector} = (8^m)^2 \times 3{,}1416 \times \frac{20}{360}$$
$$= 201^{m2}{,}06 \times \frac{1}{18} = 11^{m2}{,}17$$

Se o angulo do sector fosse $30^o 20'$, reduzia-se a minutos este complexo e $360^o$, e teriamos:

$$\text{area} = 201^{m2}{,}06 \times \frac{1820}{21600} = 201^{m2}{,}06 \times \frac{91}{1080}$$
$$= 18^{m2}{,}79$$

com um erro inferior a $1^{dm2}$.

## Applicação da avaliação das areas a problemas de uso commum

---

**1.** Pretende-se tapetar uma sala rectangular que tem $6^m,50$ de comprimento e $4^m,8$ de largura, com tapete de $0^m,80$ de largura; quantos metros de tapete são necessarios?

**2.** Uma gleba de terra de fórma de trapezio, cujas bases são $76^m,60$ e $76^m,30$, e a altura $11^m$, custou 100\$000 réis; a como saiu o metro quadrado?

**3.** Quer-se cobrir a armação d'uma casa, formada por dois trapezios isosceles iguaes cujas bases são $8^m,20$, $12^m,30$ e a altura $4^m,40$, e dois triangulos isosceles iguaes de base $5^m$ e altura $3^m,10$, com telha do typo de Marselha cujas dimensões uteis de cada telha são $0^m,21$ e $0^m,38$: quantas telhas são necessarias?

**4.** Quantos pés de videira se podem pôr n'um hectare de terreno, plantando-os a distancias de $0^m,80$ entre si e em filas de igual distancia?

**5.** Um desenho topographico está feito n'uma escala de 1 para 1250 (quer dizer que a cada metro no desenho corresponde-lhe 1250 metros no terreno); que area no terreno corresponderá a um hexagono regular que no desenho tem $4^{cm}$ de lado e $3^{cm},46$ de apothema?

**6.** Quer-se espalhar adubo chimico em um terreno rectangular cujas dimensões são $34^m,50$ e $38^m,25$, na razão de $750^{kg}$ por hectare: que quantidade em pezo de adubo é necessaria?

**7.** Uma sala tem $6^m,50$ de comprimento, $4^m,80$ de largura e $5^m$ de altura; tem uma porta de $2^m,50$ por $1^m,50$ e dúas janellas de $1^m,80$ por $1^m,20$ cada uma. Quantas peças de papel são necessarias para forrar as paredes da dita sala sabendo-se que cada peça de papel tem $8^m$ com a largura $0^m,50$, e que se deixa de forrar nas paredes, tanto em baixo como em cima, uma faxa de $0^m,30$ e de $0^m,20$ respectivamente.

**8.** Um cavallo percorre um hypodromo circular de $50^m,5$ de raio em $5^m\ 5^s$: quantos metros anda em um segundo?

**9.** Um tronco de arvore, medido em volta com uma fita metrica, deu $8^m$: qual é o raio do tronco?

**10.** Os lados perpendiculares de um esquadro de desenho tem de comprimento $0^m,15$ e $0^m,28$: que superficie sobre o papel este esquadro cobre?

**11.** Um circulo de cartão tem $0^m,60$ de raio; descreveu-se n'elle outro circulo concentrico com $0^m,30$ de raio vasando-se este circulo: qual é a area da figura que ficou formada, e se chama *corôa circular*?

**12.** Calcular a area do sector que o ponteiro maior de um relogio descreve em 25 minutos, sabendo que esse ponteiro tem $2^{cm},8$ de comprimento.

**13.** O diametro da nossa moeda de prata de dez tostões é 37 millimetros: que area tem uma das faces d'esta moeda?

**14.** O raio de uma roda de uma carroça é $62^{cm}$: que caminho percorreu a carroça quando a roda fez mil giros?

**15.** Calcular a area de um quadrado cujo perimetro é o de uma circumferencia de $1^m$ de raio.

**16.** Um sector tem o angulo de $15^o$ e uma area de $24^{m^2}$: qual é o seu raio?

**17.** Qual é o raio da circumferencia do meridiano terrestre com comprimento que lhe dá o systema metrico?

**18.** Um terreno rectangular é 4 vezes mais comprido do que largo, e a sua area é 841 ares: que dimensões tem?

**19.** Um taboleiro circular de relva tem $7^{m^2},2583$ de area: que raio tem?

# INDICE

## ARITHMETICA

---

## GEOMETRIA

[illegible]

Livros do curso completo de mathematica do ensino secundario, pelo professor Joaquim d'Azevedo Albuquerque, approvados por D. de 7 de setembro de 1907.

**Arithmetica e Geometria** (noções praticas) para a 1.ª classe 11.ª edição — 600 réis cartonado

**Arithmetica, Contabilidade e Geometria** (noções praticas) para a 2.ª classe, 10.ª edição — 60[illegible] réis [illegible]do.

**Algebra, Contabilidade e Geometria plana** para a 3.ª classe, 8.ª edição — 1$000 réis cart.

**Algebra,** para a 4.ª e 5.ª classe, 2.ª ed. — [illegible]00 rs. cart.

**Geometria,** para a 4.ª e 5.ª classe, 3.ª ed., **unico approvado** — 1$600 rs. cart.

**Arithmetica racional** para a 6.ª classe, 6.ª ed., **unico adoptado** até ao anno lectivo de 1911-1912 inclusivè — 1$000 rs. cart.

**Algebra,** para a 6.ª e 7.ª classe **unico approvado** — 1$000 rs. cart.

**Geometria,** para a 6.ª e 7.ª classe (secções conicas, methodos geometricos exemplificados em problemas-typos; noções de geometria analytica plana) — 1$600 rs. cart. — **approvado.**

**Trigonometria plana,** para a 7.ª classe — 1$000 rs. cart. — **approvado.**