UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS

Lívia Tudela Del Mastre

Mercado de opções: compreensão de modelo Black & Scholes para precificação de ativos.

Florianópolis
2022

Lívia Tudela Del Mastre

Mercado de opções: compreensão de modelo Black & Scholes para precificação de ativos.

Projeto de Trabalho de Conclusão do Curso de Graduação em Licenciatura em Matemática do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina como requisito para a obtenção do título de Licenciada em Matemática.
Orientador: Vinicius Viana Luiz Albani

Florianópolis
2022

AGRADECIMENTOS

Necessito desse espaço para poder agradecer todos aqueles que contribuíram para que eu realizasse meu sonho de me tornar licenciada em Matemática.

Primeiramente, agradeço a Deus que sempre me ouviu nos momentos da angustia e se fez presente em todas as minhas conquistas.

Agradeço também a minha família que, mesmo de longe, se fez presente na minha caminhada dos últimos cinco anos como graduanda. Ao meu pai Alexandre Del Mastre e minha mãe Andréa Tudela Del Mastre por sempre me incentivarem e apoiarem minhas escolhas, desde os primeiros passos até os dias de hoje. Agradeço também aos meus irmãos Leonardo e Felipe por todo apoio e por serem exemplos para mim.

Aos amigos que já vem de longa data, bem como àqueles que fiz em Florianópolis, tanto aos que vieram através dos diversos vínculos empregatícios que tive durante essa jornada, quanto aquelas que dividiram casa e, principalmente, aqueles que foram meus companheiros salas de aula. Em especial, agradeço às amizades que fiz e cultivei no PET-Matemática, as quais foram essenciais na minha persistência no curso.

Agradeço também meu namorado Léo Amaro de Abreu Dias por ter sido meu porto seguro ao longo da maior parte desses cinco anos.

Por fim, agradeço meu orientador Vinícius Albani por me indicar os caminhos e fazer com que este trabalho fosse possível.

RESUMO

O presente trabalho aborda o Modelo de Black-Scholes para a precificação de opções. Iniciamos com um panorama do mercado financeiro brasileiro, adentrando no mercado de derivativos e, mais especificamente, na precificação de opções. Além disso, estudamos alguns assuntos como elementos da Teoria de Probabilidade, o Movimento Browniano, a Integral de Itô e a volatilidade implícita, essenciais para o desenvolvimento do modelo de Black-Scholes.

Palavras-chave: Derivativos, opções, precificação, Black & Scholes.

ABSTRACT

In this work, we present the Black-Scholes model for pricing options. We start with an overview of the Brazilian financial market, introducing the derivatives market and, more specifically, the option pricing problem. We also present a small survey on Probability Theory, the Brownian motion, Itô's integral, and implied volatility. All these concepts are essential to the development of the Black-Scholes model.

Keywords: Derivatives, options, pricing, Black & Scholes

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Entre os diversos mercados financeiros que constituem o Sistema Financeiro Nacional (SFN), o mercado dos derivativos é um mercado que merece destaque. Um dos motivos para essa visibilidade é devido ao grande crescimento desse mercado nas últimas décadas em todo o mundo. Dentro do mercado de derivativos encontramos uma divisão em quatro grupos, são eles: os contratos futuros, contratos a termo, swaps e opções. Este trabalho está fundamentado nesse último.

Opções são contratos que fornecem a seu titular o direito, mas não a obrigação, da compra ou venda de um ativo, sendo que no caso do direito a compra ela é chamada de opção de compra ou call option, já no segundo caso temos uma opção de venda ou put option. Para a aquisição de uma opção o titular deve pagar, no momento presente, o preço da opção, o qual chamamos de prêmio. Já o valor que poderá ser pago ou cobrado na data futura pelo ativo subjacente é chamado de preço de exercício, de forma que para o titular de uma opção de compra é interessante que o preço do ativo cresça até essa data, uma vez que ele conseguirá vender este título no mercado à vista obtendo lucro. Ao passo que para o titular de uma opção de venda acontece o contrário, se no mercado à vista o título de sua opção estiver mais barato do que o preço de exercício, será vantajoso exercer a opção de venda.

Dessa forma, fica evidente a importância de conseguirmos avaliar um preço justo ou ainda descontado na hora de adquirirmos uma opção e, para isso, podemos pensar em diferentes maneiras de calcular e avaliar essa precificação.

Pensando nisso, Fischer Black e Myron Scholes, no final da década de 60, desenvolveram um modelo matemático como meio para obter tal precificação, o qual ficou conhecido como modelo de Black & Scholes em homenagem a seus criadores e culminou, em 1997, em um prêmio Nobel de Economia para Scholes - Fischer Black já havia falecido então não pôde ser condecorado. Tal modelo se mostra muito eficaz no cotidiano do mercado financeiro, uma vez que consegue fornecer uma resposta rápida para seus usuários e é relativamente simples.

Destarte, este trabalho procura entender esse modelo, esclarecendo, inicialmente, o funcionamento do mercado financeiro brasileiro, apresentando sua evolução ao longo dos anos e como é feita a sua repartição. Mais adiante nos preocupamos em desvendar o mercado de derivativos e, em especial, o mercado de opções, detalhando suas classificações e como ocorrem suas operações, além da apresentação de exemplos práticos. Outros aspectos importantes das opções como sua volatilidade e a possibilidade de *hedge* também são abordados.

Ademais, se fez necessária a introdução de alguns conhecimentos básicos para o desenvolvimento do modelo como, por exemplo, alguns conceitos da Teoria de Probabilidade, o Movimento Browniano e a Integral de Itô, que são conceitos essenciais para a dedução da equação de Black & Scholes. Por fim, são apresentadas a dedução da equação e a fórmula de solução para a Equação Diferencial Parcial de Black & Scholes para que consigamos compreender os passos de desenvolvimento e os benefícios desse modelo.

2 O MERCADO FINANCEIRO BRASILEIRO

Chamamos de mercado financeiro ambientes em que ocorrem negociações, como compra e venda, de produtos financeiros. No Brasil, o Sistema Financeiro Nacional (SFN) é um conjunto de instituições e instrumentos financeiros que têm como um de seus principais objetivos regulamentar a transferência de recursos dos agentes poupadores para os agentes tomadores, de modo que o processo seja seguro e transparente, financiando o crescimento econômico.

Durante sua história, segundo (SELAN, 2015) o SFN passou por quatro grandes fases, sendo a primeira no período entre a Família Real até a Primeira Guerra Mundial (1808 – 1914). A segunda entre a Primeira Guerra Mundial até a Segunda Guerra Mundial (1914 – 1945). A terceira fase veio após a Segunda Guerra Mundial e durou até a assim chamada Grande Reforma Financeira (1945 – 1964). E por fim, a fase que durou da Grande Reforma Financeira até hoje (1964 – dias atuais).

Atualmente o Sistema Financeiro Nacional é dividido em dois subsistemas, a saber, o Subsistema Normativo, o qual é mais voltado para a regulamentação, tendo como um de seus objetivos fiscalizar as atividades do outro subsistema, chamado de Subsistema de Intermediação, o qual, por sua vez, é responsável pela parte operacional e intermediação financeira.

O Subsistema Normativo se divide entre o Conselho Monetário Nacional, onde ficam as comissões consultivas; Banco Central do Brasil; Comissão de Valores Mobiliários e instituições especiais, as quais compreendem o Banco do Brasil, Banco Nacional de Desenvolvimento Econômico e Social, Caixa Econômica Federal. E o Subsistema de Intermediação se divide entre as instituições financeiras bancárias e as não bancárias; o sistema brasileiro de poupança e empréstimo; as instituições auxiliares e as instituições não financeiras.

Responsável pelo funcionamento do mercado financeiro e suas instituições, o Subsistema Normativo tem como órgão fundamental o Conselho Monetário Nacional (CMN), principal responsável pelas normas e regulações do SFN.

A respeito da intermediação financeira, explica-se que:

> "Para a realização de intermediação financeira devem existir, entre outros pré-requisitos, bases institucionais adequadas para o bom funcionamento do mercado financeiro, sistema jurídico eficiente e respeito ao cumprimento dos contratos, existência de agentes econômicos com excesso de caixa e agentes que desejam gastar mais do que recebem de rendimentos (agentes superavitários e deficitários). A alocação de recursos através da intermediação financeira produz um maior dinamismo à economia, elevando a produção e oferecendo maior capacidade de consumo."(NETO, A. A., 2014)

Além dessa divisão entre os dois subsistemas e as demais partições dentro de cada um deles, ainda temos uma separação entre os mercados financeiros. Diversos autores fazem essa separação de maneiras distintas, no entanto, pode-se destacar, o Mercado de Ações, o Mercado de Títulos, o Mercado de Câmbio, o Mercado de Commodities e o Mercado de Derivativos. Neste trabalho adentraremos neste último, isto é, o Mercado de Derivativos.

3 DERIVATIVOS

O mercado de derivativos cresceu expressivamente nas últimas décadas, tanto em volume quanto na diversidade instrumentos financeiros (AMARAL, 2003). Mesmo com o crescimento impressionante na atualidade, os derivativos já têm uma vida longa. Segundo (PAULETTO, 2012), os derivativos datam da Antiguidade e os primeiros registros conhecidos a respeito desse instrumento fazem parte do código de Hammurabi, o qual foi rei da Babilônia por volta de 1792 a 1750 a.C.

Os derivativos foram os primeiros instrumentos usados para o fornecimento de commodities e facilitar o comércio, além de funcionarem como um seguro aos agricultores em casos de quebra de safra. A estreita relação desse instrumento financeiro com o mercado agrícola se deve ao fato de que alguns produtos têm suas colheitas concentradas em apenas alguns períodos do ano e os derivativos podem proteger os agricultores de possíveis qubras nessas safras.

O mercado de derivativos, como o próprio nome sugere, é o mercado em que são negociados contratos financeiros cujos preços derivam dos preços de outros ativos, chamados de ativo subjacente, que são negociados no mercado à vista, tais como ouro e outras commodities, ações e taxas de câmbio.

Existem dois meios de negociação dos derivativos. O mercado de bolsa é o mercado em que as negociações padronizadas. No Brasil, o órgão que regula a bolsa é a B3, a qual é controlada pela Comissão de Valores Mobiliários (CVM). Há também o mercado de balcão, menos conhecido que a bolsa, onde são realizadas operações que não são registradas na bolsa de valores. Neste mercado as negociações podem acontecer envolvendo apenas as duas partes, sem que o resto do mercado saiba das especificidades da negociação, diminuindo a sua burocracia. Mas isso não significa que seja um mercado desorganizado, assim como a bolsa, no Brasil, ele está regularizado pela CVM. Os derivativos também são divididos em quatro grupos com diferentes modelos de negociação, são eles: contratos a termo, contratos futuro, swaps e opções.

Contrato a termo é um contrato de compra e venda para uma data futura, de forma que essa data e o preço do ativo já são definidos previamente. Esse instrumento costuma ser negociado em balcão e enquanto uma parte assume a posição de compra, a outra assume a posição de venda. O contrato futuro funciona dessa mesma forma, sendo a principal diferença para o contrato a termo o fato de que os futuros são negociados apenas na bolsa, a qual especifica regras do contrato e possui um mecanismo que garante que, mesmo que as partes não se conheçam, o compromisso será honrado.

Swap, em tradução literal, significa "troca". Um swap trata-se de um acordo feito entre duas partes o qual estabelece a troca de fluxo de caixa em uma data específica, baseando-se na comparação de rentabilidade de dois bens, em um prazo e em outros critérios que podem ser preestabelecidos (SANTOS, 2020). Os swaps também são conhecidos como trocas de "riscos". Por último, as opções serão tratadas com mais detalhes na seção a seguir, por serem o principal objeto de estudo deste trabalho.

"Os mercados de derivativos são importantes instrumentos de proteção e investimento para pessoas físicas e jurídicas, financeiras e não financeiras"(RAÍCES, 2010), dessa forma, os investidores desse mercado, em linhas gerais, se dividem em três classes.

Aqueles que procuram esse mercado para administrar riscos, praticam o que chamamos de *hedge*. Em tradução literal *hedge* significa barreira, assim, no mercado de derivativos esse procedimento consiste em tentar reduzir os riscos da operação, fixando um valor e se protegendo de oscilações bruscas do valor do ativo subjacente no futuro. Divididos em compra e venda, o *hedge* de compra é voltado para aqueles que procuram se proteger de uma alta nos preços, enquanto o *hedge* de venda é direcionado àqueles que pretendem se proteger da queda no preço no futuro.

Se opondo aos *hedgers* estão os especuladores. (AMARAL, 2003) conclui que este mercado surge naturalmente, com uma porção que busca proteção, os *hedgers*, os quais transferem seus riscos para aqueles que estão procurando assumir tais riscos, os especuladores. Para tanto, enquanto os *hedgers* evitam exposição a variação de preços, os especuladores buscam assumir esses riscos, apostando na alta ou baixa dos valores e, portanto, considerando apenas o lucro em relação ao valor inicial de compra ou venda, sem priorizar o preço do ativo em si.

Por fim, temos a classe de arbitradores que procura obter lucro sem correr riscos e, preferencialmente, sem utilizar os próprios recursos. Os arbitradores buscam diferenças nos preços dos ativos em diferentes mercados, comumente utilizando-se de uma combinação do mercado à vista com o mercado futuro.

4 OPÇÕES

O início das operações com opções como as conhecemos aconteceu na Bolsa de Chicago, a Chicago Board Options Exchange (CBOE), em 1973, mas as negociações com esses objetos não alcançaram muita popularidade imediatamente. Tal mercado só se popularizou pelas Bolsas do mundo quando a Chicago Board Options of Trade lançou opções sobre os títulos do Tesouro Americano, as assim chamadas T-Bills (NETO, L. A. S., 1996)

Segundo o dicionário, uma opção é:

> 1. ato, faculdade ou efeito de optar; escolha, preferência. 2. aquilo por que se opta; uma de duas ou mais possibilidades pelas quais se pode optar; alternativa. (LANGUAGES, 2022).

As opções financeiras possuem um significado semelhante e, por isso, a escolha desse nome.(NETO, L. A. S., 1996) define uma opção como "um instrumento que dá ao titular, ou comprador, um direito futuro sobre algo, mas não uma obrigação; e a seu vendedor, uma obrigação futura, caso solicitado pelo comprador da opção".

Na negociação de uma opção temos de um lado o titular que é quem está comprando a opção e do outro lado o lançador que é quem vende a opção para o titular. Uma opção pode ser classificada como opção de compra (*call option*) ou de venda (*put option*), sendo que no primeiro caso o titular ganha o direito, mas não o dever, de compra no futuro e o lançador fica com a obrigação da venda caso solicitado. Já no segundo caso, o titular recebe o direito à venda do título, novamente sem obrigação, enquanto a outra parte fica com a obrigatoriedade da compra, caso seja o interesse do titular. Nos dois casos, a venda ou compra da opção será efetivada, se, e somente se, o titular da opção assim solicitar. Em resumo, o titular de uma opção terá a escolha de acordo com a classificação da sua opção, para uma *call option* ele poderá fazer uma compra no futuro e para uma *put option* terá o direito de uma venda, enquanto o lançador faz o contrário, para uma *call option*, ele assume uma responsabilidade de venda, já para uma *put option*, ele assume a responsabilidade de uma possível compra no futuro.

Como consequência desse funcionamento das opções, temos que o vendedor deve receber um valor no tempo presente, já que assume uma responsabilidade com o comprador em uma data futura. Ao mesmo passo que o comprador deve pagar por esse direito de escolha que está adquirindo em relação ao futuro. Portanto, toda opção tem um valor e esse valor que é pago na data presente pelo comprador da opção para o vendedor desse título é chamado de prêmio ou de preço da opção. Já o valor a ser pago (*call option*) ou cobrado (*put option*) no futuro, mas que é definido na data presente, é chamado de preço de exercício ou de *strike*. Ademais, a data em que a opção será exercida é chamada de Data de Vencimento ou maturidade da opção. Na

B3, temos a Data de Vencimento estabelecida para a terceira sexta-feira do mês de vencimento da opção. Caso não haja sessão de negociação em tal data, o vencimento ocorrerá na data imediatamente anterior em que houver sessão de negociação. (NETO, L. A. S., 1996) explica que quando falamos de uma opção precisamos conhecer seu tipo, sua classe e sua série, para termos uma especificidade da opção a qual estamos nos referindo. Segundo o autor, o tipo define se a ação é uma *call* ou *put option*. A classe é definida pela data de vencimento, enquanto a série diz respeito ao preço de exercício dessa opção.

Essa classe de derivativos se divide em dois grupos quando se trata do momento do exercício do direito. As opções europeias são aquelas em que o exercício de compra ou venda pode acontecer apenas no fim do contrato ou vencimento da opção. Já nas opções americanas, o direito pode ser exercido em qualquer momento até a sua maturidade. Quanto ao meio de negociação, como comentado a respeito dos derivativos em geral, as opções podem ser negociadas tanto nas Bolsas, onde os contratos devem seguir algumas regras de padronização determinadas pela Comissão de Valores Mobiliários (no Brasil); quanto em Balcão, onde esses padrões não precisam necessariamente existir.

Existe ainda uma classificação para as opções que relaciona o preço de exercício com o preço do objeto dessa opção, que acontece da seguinte forma para **opções de compra**:

- **In the money (dentro-do-dinheiro):** Preço do objeto > preço de exercício.
- **At the money (no-dinheiro):** Preço do objeto = preço de exercício.
- **Out of the money (fora-do-dinheiro):** Preço do objeto < preço de exercício.

Já para as **opções de venda**, a classificação acontece de maneira oposta:

- **In the money (dentro-do-dinheiro):** Preço do objeto < preço de exercício.
- **At the money (no-dinheiro):** Preço do objeto = preço de exercício.
- **Out of the money (fora-do-dinheiro):** Preço do objeto > preço de exercício.

Um bom exemplo de opção de compra, que se apresenta no nosso cotidiano, é um contrato de seguro de carro. Nesse tipo de contrato, o segurado está no lado do comprador da opção, adquirindo o direito de ser ressarcido caso haja algum sinistro com seu veículo. Por outro lado, a seguradora é a vendedora da opção, que possui a obrigatoriedade de ressarcir o segurado, caso o mesmo queira/precise exercer sua opção. Para a seguradora é interessante que nunca haja um acidente com o veículo, já que isso significa que a opção não será efetivada, por outro lado, ao ter seu veículo danificado, o titular do seguro acionará a seguradora, com a possibilidade de conseguir o conserto do veículo, economizando o que gastaria com um mecânico, por exemplo.

4.1 EXEMPLO DE NEGOCIAÇÃO DE OPÇÃO NA B3

Nessa seção vamos ver um pequeno exemplo de como se dá a negociação de opções na Bolsa brasileira, a B3. A seguir apresenta-se um recorte da página do site da B3 onde estavam sendo negociadas as opções da empresa AMBEV S.A. no dia 04/12/2022 com vencimento para o dia 16/12/2022.

Opções de Compra

Opções de Compra - Empresa: ABEV Tipo: ON Vencimento: 16/12/2022

Série	Preço de Exercício	Quantidade em Aberto				Nº de Clientes	
		Coberto	Trava	Descoberto	Total	Titular	Lançador
ABEVL113	11,39	0	3.000	30.400	33.400	3	6
ABEVL123	12,39	0	12.000	15.800	27.800	3	13
ABEVL128	12,89	2.300	15.900	22.500	40.700	3	10
ABEVL133	13,39	1.800	59.800	51.800	113.400	4	22
ABEVL136	13,64	1.400	29.500	141.200	172.100	4	23
ABEVL138	13,89	11.900	117.300	68.800	198.000	4	22
ABEVL141	14,14	7.700	55.700	127.700	191.100	6	35
ABEVL143	14,39	10.500	103.000	86.500	200.000	8	45
ABEVL146	14,64	14.600	250.500	726.400	991.500	16	55
ABEVL151	15,14	115.400	786.700	125.600	1.027.700	25	165

Figura 1 – Opção de Compra na B3

Opções de Venda

Opções de Venda - Empresa: ABEV Tipo: ON Vencimento: 16/12/2022

Série	Preço de Exercício	Quantidade em Aberto				Nº de Clientes	
		Coberto	Trava	Descoberto	Total	Titular	Lançador
ABEVX113	11,39	0	250.200	216.600	466.800	15	17
ABEVX118	11,89	0	51.600	135.100	186.700	6	4
ABEVX123	12,39	0	7.600	125.800	133.400	18	11
ABEVX128	12,89	0	174.300	230.200	404.500	13	5
ABEVX133	13,39	0	220.800	556.600	777.400	37	23
ABEVX136	13,64	0	68.300	204.100	272.400	19	23
ABEVX138	13,89	0	187.900	345.900	533.800	31	28
ABEVX141	14,14	0	28.400	346.400	374.800	21	29
ABEVX143	14,39	0	1.989.000	3.306.200	5.295.200	49	61
ABEVX146	14,64	0	1.010.300	223.900	1.234.200	21	53

Figura 2 – Opção de Venda na B3

O código das opções é formado por cinco letras e três números. As quatro primeira letras identificam o ativo-subjacente que está sendo negociado, no nosso exemplo temos que ABEV é o código de uma opção da empresa AMBEV S.A. A quinta letra do código diz respeito ao mês de vencimento da opção, sendo que as letras de A a L são usadas para as opções de compra, enquanto as letras de M a X para o mês de vencimento das opções de venda, como mostra a tabela a seguir.

Já os três números do código da opção revelam o preço de exercício dessa opção. Por exemplo, o código ABEVL113, visto na primeira linha da figura 1 refere-se a uma opção da empresa AMBEV S.A., que terá vencimento no mês de Dezembro e tem preço de exercício R$11,39.

Tabela 1 – Identificação da data de exercício de opções na B3

	Opção de compra	Opção de venda
Janeiro	A	M
Fevereiro	B	N
Março	C	O
Abril	D	P
Maio	E	Q
Junho	F	R
Julho	G	S
Agosto	H	T
Setembro	I	U
Outubro	J	V
Novembro	K	W
Dezembro	L	X

Em relação a divisão entre "coberto", "trava" e "descoberto" feita pela B3, temos que a venda coberta de uma opção é uma estratégia que visa diminuir os riscos, uma vez que se vende opções de compra de um ativo-subjacente na mesma quantidade de ações desse mesmo ativo que o investidor já possui na sua carteira, de modo que as próprias ações servem como garantia da operação. O lançador descoberto não possui nenhum ação do ativo-subjacente em sua carteira, portanto precisa deixar algum outro tipo de garantia para a bolsa. Por fim, a estratégia de trava, também não conta com ativos-subjacentes na carteira do titular, mas combina compra e venda de uma mesma opção em vencimentos diferentes.

Sabendo que no dia 04/12/2022 a ação ABEV3 fechou o mercado custando R$16,33, o comprador da opção ABEVL113, citada anteriormente, espera que a ação ABEV3 esteja acima de R$11,39 até a data de vencimento, para que seja vantajosa a execução da opção. Por outro lado, o lançador dessa opção está esperando uma queda no preço do dia 14/12/2022, pois caso ele se mantenha o lançador venderá uma ação por R$11,39, mas que poderia estar sendo vendida por R$16,33, ou seja, ele obtém um prejuízo.

Olhando para a opção de venda ABEVX113 acontece um movimento contrário. Supondo que o preço permaneceu R$16,33 até a data de vencimento, o titular da opção não irá exercê-la, uma vez que ele pode vender sua ação no mercado à vista por um preço maior do que o preço de exercício, enquanto o lançador tem interesse que o preço da ação permaneça assim, pois no dia do vencimento ele não precisará vender sua ação e ainda ficará com o prêmio da opção.

Dessa forma, veja que comprador dessa opção de venda ainda pode obter lucro, mesmo não efetuando a opção, isso depende do valor do prêmio e da diferença entre o valor pago no ativo-subjacente e o valor que ele será vendido no mercado à vista. Da mesma forma, para o titular da opção de compra o valor do prêmio interfere diretamente no seu ganho.

Por fim, como o comprador de uma opção não possui a obrigatoriedade do exercício, um valor deve ser pago para adquirir essa opção e, por outro lado, o vendedor deve receber um valor pelo compromisso assumido, que é o valor do prêmio. Assim, podemos pensar que em qualquer compra que fazemos, ficamos interessados em saber o seu custo-benefícios, ponderamos se o valor do objeto ou serviço está barato ou caro. O mesmo acontece com as opções, queremos saber se o preço da opção é barato ou caro.

É compulsório, no estudo dos históricos de valores de ativos, sabermos que não conseguiremos determinar com exatidão o futuro dos preços. Todavia, analisando o passado, podemos encontrar respostas prováveis para o futuro, como o aumento ou a queda nos preços. Além de que, com esses dados, conseguimos obter medidas estatísticas como médias e variância.

Assim, é notório que o preço a ser pago depende do preço atual do ativo e do que pensamos sobre o futuro daquele ativo. Portanto, vê-se que é interessante conseguirmos encontrar preços justos para as opções, através de modelos matemáticos.

5 VOLATILIDADE

Para (NETO, L. A. S., 1996) a volatilidade pode ser considerada a variável mais importante quando se trata do mercado de opções, em especial para aqueles que usam modelos teóricos de determinação de prêmios, como é o caso do modelo de Black & Scholes. O autor ainda explica que qualquer investidor tem interesse em prever o mercado, conhecendo suas tendências de alta ou baixa, mas para aqueles que trabalham com o mercado de opções, a velocidade com que essas alterações acontecem também é uma informação valiosa. A volatilidade é uma medida dessa velocidade do mercado, de forma que se o mercado se move lentamente, diz-se que este mercado tem baixa volatilidade, enquanto para mercados que se movem velozmente, a volatilidade é alta. Tal fato, interfere diretamente no valor do prêmio de uma opção, uma vez que um mercado de baixa volatilidade deve implicar em opções com prêmios baixos, devido a baixa movimentação nos preços dos ativos, enquanto um mercado de alta volatilidade pode implicar em prêmios mais altos, devido a maior movimentação no preço dos ativos.

Além de ser uma medida de velocidade importante, temos diferentes variáveis utilizadas para a precificação de uma opção, mas a única delas que não é encontrada diretamente no mercado é a volatilidade. Portanto, considerar que uma opção não está bem apreçada significa dizer que a sua volatilidade está calculada de maneira incorreta.(RIBEIRO, 2016)

De forma mais concreta, volatilidade é o nome dado ao desvio-padrão no mercado financeiro. Existem diferentes tipos de volatilidade então é importante especificarmos a qual dela estamos nos referindo em cada caso. São elas:

- Volatilidade futura.
- Volatilidade histórica.
- Volatilidade prevista ou projetada.
- Volatilidade implícita.

A volatilidade futura possui apenas um interesse teórico, uma vez que diz respeito a volatilidade de um ativo no futuro, o que é impossível especificar. A possibilidade da sua especificação implicaria no fim do mercado de opções, já que este se tornaria previsível.

Em contrapartida, não sendo possível prever uma volatilidade futura, temos a possibilidade de nos basear em séries passadas para conseguir fazer previsões futuras. A volatilidade histórica é baseada em séries temporais, então necessita da determinação de um período, no passado, para ser medida. Dessa forma, ao escolhermos diferentes períodos (três meses, um ano, etc.) ou diferentes modos de controle durante esse período (diário, semanal, etc.), obteremos diferentes resultados para a volatilidade histórica, contudo fazendo uma análise criteriosa, podemos conseguir informações relevantes sobre o futuro. (SANTOS, 2020) explica que esse tipo de volatilidade é usado em variados modelos de precificação e ainda como indicador de uma análise técnica conhecida por Bandas de Bollinger, utilizada para identificar oportunidades de compra e venda de ativos.

A volatilidade prevista é uma estimativa probabilística da volatilidade futura. Também se baseia em dados do passado, mas utiliza-se de séries históricas para fazer suas projeções (NETO, L. A. S., 1996).

Por fim, damos destaque à volatilidade implícita. Enquanto os demais tipos de volatilidade tratam do comportamento de mercadorias em si, a volatilidade implícita diz respeito à opções. Essa volatilidade não é obtida através dos dados do retorno do ativo, mas sim baseando-se no preço dos prêmios que estão sendo negociados no mercado, assim o uso dessa volatilidade permite a compreensão das estimativas que o mercado está utilizando em seus modelos. Em resumo ela consegue, a partir do prêmio da opção, identificar a volatilidade histórica utilizada pelo mercado.

Veja o que (NETO, L. A. S., 1996) diz a respeito da importância dessa volatilidade:

> "Todos os tipos de volatilidade são de interesse para estudo teórico. Contudo, duas são de importância fundamental: a futura e a implícita. A futura, se pudéssemos calculá-la, nos habilitaria a conhecer o valor das opções referentes a dada mercadoria. A implícita nos dá o preço das opções no mercado. O que precisamos saber de fato, nos mercados, é a diferença entre valor e preço. Quem pudesse obter este conhecimento saberia imediatamente quando comprar e quando vender."(NETO, L. A. S., 1996)

Portanto, vê-se porque o modelo de Black & Scholes se faz tão importante no mercado, uma vez que é uma ferramenta muito útil para encontrar a volatilidade implícita.

6 CONHECIMENTOS PRÉVIOS

6.1 A TEORIA DA PROBABILIDADE

O estudo de Matemática é gradativo e compreender um conceito pode depender do entendimento de muitos outros conceitos. Para o entendimento da dedução e solução da fórmula de Black & Scholes são imprescindíveis alguns conhecimentos prévios que serão apresentado a seguir. Este capítulo está fundamentado em (ALBANI, 2019)

Considere o conjunto Ω. Denotaremos $A \in \Omega$, o subconjunto A de Ω, bem como A^C como sendo o conjunto complementar de A em Ω, ou ainda $\Omega - A$

Definição 1. *Dizemos que $\mathcal{A}$ é uma família de subconjuntos de Ω, se seus elementos são subconjuntos de Ω, ou seja, $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A \subset \Omega$*

Definição 2. *Chamamos de σ - álgebra uma família $\mathcal{F}$ de subconjuntos de Ω que satisfaz as seguintes propriedades:*

i. *$\varnothing \in \mathcal{F}$ e $\Omega \in \mathcal{F}$*

ii. *Se $A \in \mathcal{F}$, então $A^C \in \mathcal{F}$*

iii. *Se a sequência de conjuntos $\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ está contida em $\mathcal{F}$, então a união e a intersecção de todos os A_j's também estarão em $\mathcal{F}$. Matematicamente, temos que*

$$\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j \in \mathcal{F} \quad e \quad \bigcap_{j\in\mathbb{N}} A_j \in \mathcal{F}$$

Exemplo 6.1.1. *Considere o conjunto $\Omega = \{0,1,2\}$. Podemos formar as seguintes σ-álgebras:*

$$\mathcal{F}_1 = \{\varnothing, \{0,1,2\}\}$$

$$\mathcal{F}_2 = \{\varnothing, \{0,1,2\}, \{0\}, \{1,2\}\}$$

$$\mathcal{F}_3 = \{\varnothing, \{0,1,2\}, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{0,2\}, \{0,1\}\}$$

E também conseguimos concluir que os seguintes conjuntos são exemplos de famílias que não são σ-álgebras de Ω:

$$\mathcal{F}_4 = \{\varnothing, \{0,1,2\}, \{0\}\}$$

$$\mathcal{F}_5 = \{\varnothing, \{0,1,2\}, \{0,1\}\}$$

$$\mathcal{F}_6 = \{\varnothing, \{0,1,2\}, \{0\}, \{1\}, \{2\}\}$$

*Ora, vê-se que as famílias de subconjuntos $\mathcal{F}_4$, $\mathcal{F}_5$ e $\mathcal{F}_6$ atendem ao item **i** que define uma σ-álgebra, porém, todas elas não atendem o que se pede no item **ii**.*

Exemplo 6.1.2. *Seja $\Omega = \{\mathbb{R}\}$ e $\mathcal{F} = \{A \subset \mathbb{R} \mid A$ é enumeravel ou A^C é enumeravel$\}$. Vamos mostrar que $\mathcal{F}$ é uma σ-álgebra de Ω.*

i. *Note que $\varnothing$ é enumerável por vacuidade, então $\varnothing \in \mathcal{F}$. Além disso, $\Omega^C = \varnothing$, portanto Ω^C é enumerável, o que implica que $\Omega \in \mathcal{F}$.*

ii. *Considere $A \in \mathcal{F}$, então, por definição, A é enumerável ou A^C é enumerável. Supondo A enumerável, então A^C é não enumerável, todavia como $(A^C)^C = A$, temos que $A^C \in \mathcal{F}$ também. O mesmo acontece para A^C enumerável.*

iii. *Se $A_1, A_2, A_3 ... \in \mathcal{F}$, então temos dois possíveis casos:*

Caso 1: $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ são todos enumeráveis. O que implica que $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j$ e $\bigcap_{j \in \mathbb{N}} A_j$ são enumeráveis. Logo, $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j \in \mathcal{F}$ e $\bigcap_{j \in \mathbb{N}} A_j \in \mathcal{F}$.

Caso 2: Pelo menos um dos elementos da sequência $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ é não enumerável. Mas isso implica que $\bigcap_{j \in \mathbb{N}} A_j^C$ é enumerável e, pelas leis de Morgan, $\bigcap_{j \in \mathbb{N}} A_j^C = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j$. Portanto, $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j \in \mathcal{F}$ e o mesmo acontece para $\bigcap_{j \in \mathbb{N}} A_j$.

Exemplo 6.1.3. *A menor σ-álgebra contendo todos os conjuntos abertos de $\mathbb{R}$ é chamada de σ-álgebra de Borel. Denota-se $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ e chamamos de boreliano todo $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.*

Os borelianos contém reuniões e intersecções de intervalos semiabertos, abertos, fechados e também de pontos isolados, assim contém todos os eventos da reta real que são de interesse para a medida de probabilidade, cuja definição veremos mais adiante. Ou seja, é uma σ-álgebra muito interessante para resolução de problemas práticos. Além disso, qualquer medida definida em um espaço de abertos também pode definida utilizando as álgebras de Borel deste espaço e precisamos dessa álgebra para definir a medida de Lebesgue.

Definição 3. *Seja Ω um conjunto não-vazio e $\mathbb{F}$ uma σ-álgebra de Ω. Dizemos que (Ω, $\mathcal{F}$) é um espaço mensurável.*

Definido um espaço mensurável, conseguimos agora definir o conceito de *medida de probabilidade*.

Definição 4. *Seja (Ω, $\mathcal{F}$) um espaço mensurável e uma função P que associa cada conjunto de $\mathcal{F}$ a um valor no intervalo $[0, 1]$, ou seja,*

$$P : \mathcal{F} \to [0, 1]$$

Dizemos que P é uma medida de probabilidade sobre ($\Omega, \mathcal{F}$) se satisfizer as seguintes condições:

i. *$P(\varnothing) = 0$ e $P(\Omega) = 1$*

ii. *Se a sequência de conjuntos $\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ estiver contida em $\mathcal{F}$, então tem-se a seguinte desigualdade:*

$$P\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j\right) \leqslant \sum_{j\in\mathbb{N}} P(A_j).$$

Tal desigualdade também é conhecida por sub-aditividade.

iii. *Valerá a igualdade da expressão acima se a sequência ${A_j}_{j\in\mathbb{N}}$ for formada por conjuntos dois a dois disjuntos. Ou seja, para todos $j \neq k$, temos que*

$$A_j \cap A_k = \varnothing \ \forall\ j \neq k \Rightarrow P\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j\right) = \sum_{j\in\mathbb{N}} P(A_j).$$

Dessa definição conseguimos concluir que:

$$A \subset B \Rightarrow P(A) \leqslant P(B).$$

Definição 5. *Um espaço de probabilidade é uma trinca $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ cujo Ω é um conjunto não-vazio, $\mathcal{F}$ é uma σ-álgebra de Ω e P é uma medida de probabilidade definida em $\mathcal{F}$.*

Exemplo 6.1.4. *Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ integrável em $\mathbb{R}^n$ e tal que $\int\limits_{\mathbb{R}_n} f(x)dx = 1$. Defina*

$$P(B) = \int\limits_B f(x)dx,$$

para todo $B \in \mathcal{B}$. Então P é uma medida de probabilidade em $\mathcal{B}$. Além disso, a função f é chamada de função de densidade de probabilidade da medida P. A trinca $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}, P)$ é um espaço de probabilidade.

Nesse contexto, temos alguns termos que merecem destaque:

Evento: um subconjunto $A \subset \Omega$.

Ponto amostral: um ponto $\omega \in \Omega$.

Espaço amostral: todo o conjunto Ω.

Definição 6. *Sejam $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ um espaço de probabilidade e uma função $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$. X é chamada de variável aleatória n-dimensional se, para cada $B \in \mathcal{B}$, tem-se que a pré-imagem de B por X está na σ-álgebra $\mathcal{F}$, isto é, $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$. Ainda, podemos dizer que X é $\mathcal{F}$-mensurável.*

Exemplo 6.1.5. *A função indicadora do conjunto $A \in \mathcal{F}$ definida como:*

$$\mathcal{X}_A(\omega) = \begin{cases} 0, se\ \omega \notin A, \\ 1, se\ \omega \in A, \end{cases}$$

é uma variável aleatória. Mais geralmente, se os conjuntos $A_1, A_2, ..., A_n$ são elementos de $\mathcal{F}$, tais que $\bigcap_{j=1}^{n} A_j = \Omega$, e $a_1, a_2, ..., a_n$ são números reais, então

$$X = \sum_{j=1}^{n} a_j \mathcal{X}_{A_j}$$

é uma variável aleatória chamada função simples.

Apresentada a função indicadora, vamos a um exemplo de espaço de probabilidade.

Exemplo 6.1.6. *Vamos imaginar o exemplo de jogar um dado em uma mesa regular. Dessa forma, considere que $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e a nossa σ-álgebra é $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$, ou seja, o conjunto das partes de Ω, tal qual contém todos os subconjuntos possíveis de Ω. Defina $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0, 1]$, tal que*

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in \Omega} P_{\omega} \cdot \mathcal{X}_A(\omega)$$

em que $P_{\omega} \in [0, 1]$, $\forall \omega \in \Omega$ e $\sum_{\omega \in \Omega} P_{\omega} = 1$

Mostraremos que a função $\mathbb{P}$ definida acima é uma medida de probabilidade.

i. $\mathbb{P}(\varnothing) = \sum_{\omega \in \Omega} P_{\omega} \cdot \mathcal{X}_{\varnothing}(\omega) = 0$.

E $\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{\omega \in \Omega} P_{\omega} \cdot \mathcal{X}_{\Omega}(\omega) = \sum_{\omega \in \Omega} P_{\omega}$ *e, por definição,* $\sum_{\omega \in \Omega} P_{\omega} = 1$

ii. *Considere a sequência $\{A_j\}_{j \in \mathbf{N}}$ contida em $\mathcal{F}$, da definição temos que*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j\right) = \sum_{\omega \in \Omega} P_{\omega} \cdot \mathcal{X}_{\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j}(\omega)$$

Temos que $\mathcal{X}_{\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j}(\omega) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{X}_{A_j}(\omega)$, $\forall \omega \in \Omega$, assim:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j\right) \leq \sum_{\omega \in \Omega} P_{\omega} \cdot \left(\sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{X}_{A_j}(\omega)\right)$$

Como a sequência $\{A_j\}_{j \in \mathcal{N}}$ está contida em $\mathcal{F}$ então ela é limitada, portanto podemos trocar a ordem dos somatórios acima ficando com:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{\omega \in \Omega} P_{\omega} \cdot \mathcal{X}_{A_j}(\omega)$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_j)$$

iii. *Se a sequência $\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ está contida em $\mathcal{F}$ e todos seus elementos forem disjuntos, temos, por definição, que:*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j\right) = \sum_{\omega\in\Omega} P_\omega \cdot \mathcal{X}_{\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j}(\omega)$$

Como $\mathcal{X}_{\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j}(\omega) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{X}_{A_j}(\omega)$, $\forall\omega\in\Omega$ então,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j\right) = \sum_{\omega\in\Omega} P_\omega \cdot \left(\sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{X}_{A_j}(\omega)\right)$$

Como os elementos A_j são disjuntos, o somatório das funções indicadoras possui apenas um ou nenhum elemento, então podemos trocar a ordem das somas sem perdas. Assim, ficamos com:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{\omega\in\Omega} P_\omega \cdot \mathcal{X}_{A_j}(\omega)$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_j)$$

Definição 7. *Seja $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ uma variável aleatória. Então a menor σ – lgebra contendo esse conjunto, é chamada σ-álgebra gerada por X e é definida como*

$$\mathcal{F}(X) = \{X^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}\}$$

Definição 8. *Uma coleção $\{X(t) : t \in \mathbb{R}_+\}$ de variáveis aleatórias é chamada de processo estocástico. Assim, para cada $t \geqslant 0$, $X(t) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ é uma variável aleatória e para cada ω em Ω o mapa $t \mapsto X(t,\omega)$ é o correspondente caminho amostral de X.*

Um bom gráfico para elucidar essa ideia é o seguinte:

Definição 9. *Um processo estocástico $\{X(t) : t \in T\}$ é dito a tempo discreto se o conjunto de índices T associado é enumerável.*

6.1.1 Probabilidade Condicional e Independência

Definição 10. *(Probabilidade Condicional) Sejam $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ um espaço de probabilidade e $A, B \in \mathcal{F}$ dois eventos, sendo $P(B) > 0$. Então a probabilidade condicional de A dado B é dada por:*

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

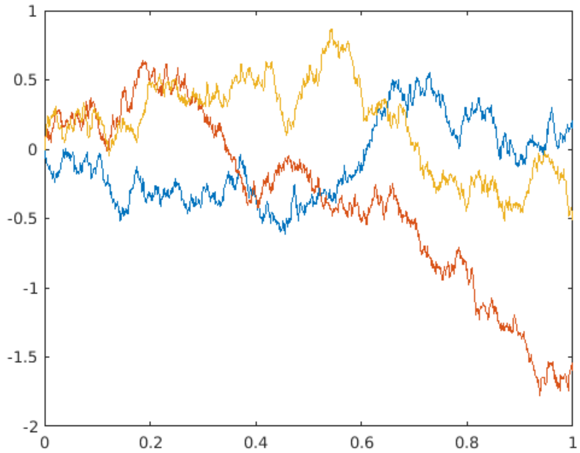

Figura 3 – Exemplo de ilustração de um processo estocástico

No caso em que os eventos A e B são independentes, temos que a ocorrência do evento B não interfere na probabilidade de ocorrência de A, deste modo:

$$P(A) = P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Dito isso, podemos introduzir outros conceitos fundamentais para as análises em finanças, a esperança condicional e os martingals, ambos nos mostram que, por mais que o futuro seja incerto, podemos reduzir a nossa incerteza baseando-se nas informações que temos até determinado momento.

A esperança condicional também é conhecida como valor esperado condicional ou ainda média condicional é o valor que nos transmite a ideia de média para um número arbitrariamente grande de ocorrências.

Definição 11. *Sendo (B, F', P') um espaço de probabilidade em que $F' = \{C \cap B > C \in \mathcal{F}\}$ e $P' = P|P(B)$, se $P(B) > 0$, então definimos o valor esperado da variável aleatória X condicionada ao evento B como:*

$$E(X|B) = \frac{1}{P(B)} \int_B XdP$$

Diante dessa definição podemos nos indagar também sobre a definição do valor esperado da variável aleatória X dada a ocorrência da variável aleatória Y.

Definição 12. *Sejam $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ um espaço de probabilidade e $Y : \Omega \to \mathbb{R}^n$ uma variável aleatória. A esperança condicional $E(X|Y)$ de uma variável aleatória integrável X dada Y é qualquer variável aleatória $\mathcal{F}(Y)$-mensurável que satisfaça:*

$$\int_A XdP = \int_A E(X|Y)dP$$

para todo evento $A \in \mathcal{F}(Y)$

Dessa forma, conseguimos perceber que a σ-álgebra $\mathcal{F}(Y)$ é o que importa na esperança condicional e não propriamente a variável aleatória Y.

Definição 13. *Sejam* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *um espaço de probabilidade e* $\mathcal{G}$ *uma* σ*-álgebra contida em* $\mathcal{F}$*. Se* $X : \omega \to \mathbf{R}^n$ *é uma variável aleatória integrável, então a esperança condicional de* X *com respeito a* $\mathcal{G}$*, denotada por* $E(X|\mathcal{G})$ *é qualquer variável aleatória definida em* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *satisfazendo:*

i. $E(X|\mathcal{G})$ *é* $\mathcal{G}$*-mensurável.*

ii. $\int_A XdP = \int_A E(X|\mathcal{G})dP \forall A \in \mathcal{G}$

Temos a existência e a unicidade das esperanças condicionais garantidas pelo teorema a seguir:

Teorema 6.1.7. *Sejam* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *um espaço de probabilidade e* $X : \Omega \to \mathbf{R}^n$ *uma variável aleatória. Então, para cada* σ*-álgebra* $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$*, existe a esperança condicional* $E(X|\mathcal{G})$*. A unicidade ocorre exceto para conjuntos* $\mathcal{G}$*-mensuráveis com probabilidade zero.*

Algumas propriedades são:

i. $E(X|Y) = E(X|\mathcal{F}(Y))$.

ii. $E(E(X|\mathcal{G})) = E(X)$.

iii. $E(X|\mathcal{G}) = E(X)$ quando $\mathcal{G} = \{\varnothing, \Omega\}$, isto é, $\mathcal{G}$ é a σ-álgebra trivial.

6.2 O MOVIMENTO BROWNIANO

Ao observar o movimento de dispersão de partículas microscópicas de pólen na água, o botânico Robert Brow, em 1827, conseguiu identificar um fenômeno físico, o qual é chamado de movimento browniano e em 1905, Einstein conseguiu apresentar uma descrição matemática para tal movimento utilizando as leis da física e, mais adiante, N. Wiener formalizou a teoria matematicamente e é por isso que movimento também é chamado da Processo de Wiener (MISTURINI, 2010).

Definição 14. *Seja* $(\omega, \mathcal{F}, P)$ *um espaço de probabilidade. Um movimento browniano* $(W_t)_{t \geq 0}$ *em* $\mathbb{R}$ *é um processo estocástico* $W(\cdot, \cdot) : \omega \times [0, +\infty) \to \mathbb{R}$*, tal que*

i. *Para quase todo* $\omega \in \Omega$ *fixado,* $W(\omega, \cdot) : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *é uma função contínua e* $W_0(\omega) = W(\omega, 0) = 0$*;*

ii. *Os incrementos* $W(t) - W(s)$*, com* $0 < s < t$*, são variáveis aleatórias normais de média zero e variância* $t - s$*, ou seja,* $W(t) - W(s) \sim N(0, t - s)$*;*

iii. *Incrementos em intervalos de tempo disjuntos são independentes. Ou seja, as variáveis aleatórias* $W(t_1), W(t_2) - W(t_1), ..., W(t_m) - W(t_{m-1})$*, são independentes sempre que* $0 < t_1 < t_2 < ... < t_m$*.*

Algumas propriedades são:

1. $W(t) \sim N(0,t)$

2. $E((W(t_2) - W(t_1))(W(t_4) - W(t_3))) = 0$

3. $cov(W(t), W(s)) = min(s,t)$

4. $E(W(t) - W(a), W(s) - W(a)) = min(s-a, t-a)$

Demonstrações:

1. Temos que $W(t) = W(t) - W(0)$ e pela definição **(ii)** $W(t) - W(0) \sim N(0,(t-0))$. Agora, usando a definição **(i)** concluímos que $W(t) \sim N(0,t)$

2. Se $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$, então temos que $E[(W(t_2) - W(t-1))(W(t_4) - W(t_3))] \rightarrow E[(W(t_2) - W(t_1))] \cdot E[(W(t_4) - W(t_3))]$. Como $W(t_2) - W(t_1) \sim N(0, t_2 - t_1)$ e $W(t_4) - W(t_3) \sim N(0, t_4 - t_3)$, então $E[(W(t_2) - W(t_1))] = 0$ bem como $E[(W(t_4) - W(t_3))] = 0$. Logo, $E[(W(t_2) - W(t-1))(W(t_4) - W(t_3))] = 0$.

3. Se $t > s$, podemos escrever que $W(t) = W(s) + (W(t) - W(s))$. Assim:

$$
\begin{gathered}
Cov(W(t), W(s)) \\
= E[W(t)W(s)] - E(W(t))E(W(s)) \\
= E[(W(s) + (W(t) - W(s)))W(s)] \\
= E(W(s)^2) + (W(t) - W(s)W(s)) \\
= E(W(s)^2) + E((W(t) - W(s))W(s)) \\
= V(W(s)) + E^2(W(s)) + E(W(t) - W(s)) \cdot E(W(s))
\end{gathered}
$$

Então todas as esperanças zeram e ficamos apenas com $V(W(s)) = s$. No caso em que $t < s$ os passos funcionam da mesma maneira, apenas trocando t com s.

4. A demonstração é análoga ao item **(3)**, basta pensarmos que anteriormente tínhamos $W(t) = W(t) - W(0)$ e $W(s) = W(s) - W(0)$.

Ainda, cabe dizer que o movimento browniano é um processo Gaussiano, ou seja, é uma combinação linear $b_1 W(t_1) + b_2 W(t_2) + ... + b_n W(t_n)$ e cada $W(t_j)$ pode ser escrito como combinação linear dos seus elementos anteriores: $W(t_j) = (W(t_j) - W(t_{j-1})) + (W(t_{j-1}) - W(t_{j-2})) + (W(t_{j-2}) - W(t_{j-3})) + ... + (W(t_1) - W(t_0))$

Definição 15. *Um processo estocástico $X(\cdot)$ e sua história são chamados de processo de Markov se:*

$$P(X(t) \in B | \mathcal{F}(s)) = P(X(t) \in B | X(s)) \text{ quase certamente}$$

para todo $0 \leq s \leq t$ e todo conjunto boreliano $B \in \mathcal{B}$, em que $\mathcal{F}(t) = \{\mathcal{F}(X(s) : 0 \leq s \leq t)\}$ é a história do processo $X(\cdot)$

Portanto, pelo item (iii) da definição conseguimos concluir que temos um processo de Markov. A definição estabelece que, sendo $s < t$, tem-se que $W(t) - W(s)$ é independente dos acontecimentos do processo no intervalo $[0, s]$. Assim, se conhecemos o valor de $W(s)$, nenhuma informação sobre $W(r)$, sendo $r < s$ é relevante para o nosso conhecimento acerca da distribuição de probabilidade de $W(t) - W(s)$. Matematicamente, temos que se $t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_n < t$, então:

$$P(W(t) \leq x | W(t_0) = x_0, W(t_1) = x_1, ..., W(t_n) = x - n) = P(W(t) \leq x | W(t_n) = x_n)$$

Dito isso, podemos enunciar o seguinte teorema:

Teorema 6.2.1. *Se $W(\cdot)$ é um movimento browniano n-dimensional, então $W(\cdot)$ é um processo de Markov e:*

$$P(W(t) \in B | W(s)) = \frac{1}{(2\pi(t-s))^{\frac{n}{2}}} \int_B e^{-\frac{|x-W(s)|^2}{2(t-2)}} dx \text{ quase certamente,}$$

para todo $0 \leq s \leq t$ e todo boreliano B

Exemplo 6.2.2. *Neste e no exemplo a seguir consideraremos o espaço $\sigma^2 w(t)$. Considere que uma partícula se mova de acordo com um movimento Browniano com $\sigma^2 = 10$ e que t é medido em hora. Qual é a probabilidade de que em duas horas a partícula tenha um valor maior do que 10?*

Temos da propriedade 1 que $W(t) \sim N(0, \sigma^2 t)$, assim para $\sigma^2 = 10$ e $t = 2$, temos que $W(2) \sim N(0, 20)$. Então $P\left(\frac{W(2)-0}{\sqrt{20}} > \frac{10-0}{\sqrt{20}}\right) = P\left(z > \frac{10}{\sqrt{20}}\right) = 1,2\%$

Exemplo 6.2.3. *E qual é a probabilidade de que em 5 horas ela tenha um valor maior do que 30, sabendo que nas três primeiras horas ela valia 20?*

Representando esse problema matematicamente temos:

$$P(W(5) > 30 | W(3) = 20)$$

Como sabemos que $W(5) = W(3) + (W(5) - W(3))$, podemos reescrever o problema acima como:

$$P(W(3) + (W(5) - W(3)) > 30 | W(3) = 20) \Rightarrow P(W(5) - W(3)) > 10$$

Sabemos ainda que $W(5) - W(3) \sim N(0, \sigma^2(5-3)) = N(0, 20)$. Portanto, novamente chegamos em $P(I > 10) = P\left(\frac{I-0}{\sqrt{20}} > \frac{10-0}{\sqrt{20}}\right) = P\left(I > \frac{10}{\sqrt{20}}\right) = 1,2\%$ novamente.

Dentre as propriedades do movimento browniano, uma que cabe destaque é o fato dele ser um Martingal, como apresentaremos a seguir. Mas antes, para definirmos o conceito de martingales em tempo contínuo, precisamos da definição de história de um processo estocástico.

Definição 16. *Seja $\{X(t) : t \geq 0\}$ um processo estocástico tal que $E(|X(t)|) < \infty$, $\forall t \geq 0$*

1. *Se $X(s) = E(X(t)|\mathcal{F}(s))$ quase certamente, para todo $t \geq s \geq 0$, então o processo estocástico $X(\cdot)$ é chamado martingal.*

2. *Se $X(s) \leq E(X(t)|\mathcal{F}(s))$ quase certamente, para todo $t \geq s \geq 0$, então o processo estocástico $X(\cdot)$ é chamado sub-martingal.*

3. *Se $X(s) \geq E(X(t)|\mathcal{F}(s))$ quase certamente, para todo $t \geq s \geq 0$, então o processo estocástico $X(\cdot)$ é chamado super-martingal.*

6.3 O CÁLCULO ESTOCÁSTICO

O Cálculo Estocástico procura generalizar o cálculo para processos estocásticos. Um problema de valor inicial (PVI) de uma equação ordinária de primeira ordem é dado por:

$$\begin{cases} x(t) = f(x(t), t) t \in (0, T) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Sendo que $f : \mathbb{R} \times [0, T] \to \mathbb{R}$ e t_0 e x_0 são conhecidos.

Podemos também escrevê-lo em sua forma diferencial:

$$\begin{cases} dx(t) = f(x(t), t) dt \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Todavia, existem situações em que o sistema sofre influência de efeitos aleatórios, como perturbações ou ruídos. Nesse caso, precisamos recorrer a às equações diferenciais estocásticas:

$$\begin{cases} dX(t) = f(X(t), t) dt + g(X(t), t) dW(t) \\ X(0) = x_0 \end{cases}$$

Onde $f, g : \mathbb{R} \times [0, T] \to \mathbb{R}$ são funções e $W(t)$ com $t \in [0, T]$ é um movimento browniano. Dessa forma, a solução do sistema é um processo estocástico $X(t)$, com $t \in [0, T]$.

Traduzindo a equação acima para uma equação integral ficamos com:

$$X(t) = x_0 + \int_0^t f(X(s), s) ds + \int_0^t g(X(s), s) dW(s)$$

Para conseguirmos definir com clareza uma equação diferencial estocástica, essencial no estudo de precificação de ativos, precisamos antes entender sobre a integral e a fórmula de Itô, as quais discutiremos a seguir.

Como o objetivo do trabalho não é a respeito do cálculo estocástico recomendamos ao leitor, caso queira adentrar mais no assunto, o artigo de (EVANS, s.d.).

6.3.1 A Integral de Itô

Kiyoshi Itô é um matemático japonês que, por suas contribuições, leva o nome ao Cálculo de Itô, tal qual estende os métodos do cálculo ao processo estocástico, como o movimento browniano. Para tanto, nosso intuito nessa seção é explorar brevemente a seguinte expressão:

$$\int_{\alpha}^{\beta} X(t)dW(t)$$

onde $W(t)$, com $t \geq 0$ é um movimento browniano e $X(t)$, com $t \in [\alpha, \beta]$ é um processo estocástico que satisfaz algumas condições que serão explicitadas mais adiante.

Definição 17. *Sejam* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *um espaço de probabilidade e* $W(\cdot)$ *um movimento unidimensional.*

1. A sigma-álgebra $\mathcal{W}(t) = \mathcal{F}(W(s) : 0 \leq s \leq t)$ *é chamada de história do movimento browniano até o tempo t.*

2. Uma família $\mathcal{G}(\cdot)$ *de* σ*-álgebras contida em* $\mathcal{F}$ *é chamada de não antecipativa e de filtro ou filtração se:*

(i) $\mathcal{G}(s) \subset \mathcal{G}(t)$ *para todo* $0 \leq s \leq t$.

(ii) $\mathcal{W}(t) \subset \mathcal{G}(t)$ *para todo* $t \neq 0$.

(iii) $\mathcal{G}(t)$ *é independente de* $\mathcal{W}^{+}(t) = \mathcal{F}(W(s) - W(t) : s \leq t)$, *para todo* $t \neq 0$.

3. Um processo estocástico $G(\cdot)$ *é não antecipativo se, para cada* $t \neq 0$, $G(t)$ *for* $\mathcal{G}(t)$*-mensurável, ou seja, a pré-imagem de todo conjunto boreliano por* $G(,\cdot)$ *pertence a* $\mathcal{G}(t)$.

Definição 18. *Um processo estocástico* $X(t), t \neq 0$ *é chamado processo de Itô se ele possui caminhos contínuos, quase certamente, e pode ser representado como*

$$X(T) = X(0) + \int_0^T a(t)dt + \int_0^T b(t)dW(t) \text{ quase certamente}$$

Esse processo possui as seguintes restrições:

i. b(t) é um processo pertencente a $M_T^2, \forall T > 0$, sendo que M_T^2 é um conjunto que advém de aproximações de funções escada.

ii. a(t) é um processo tal que

$$\int_0^T |a(t)|dt < \infty \text{quase certamente}$$

para todo $T \geq 0$.

A classe de todos os processo $a(t)$ que satisfazem a condição dada para algum $T > 0$ será denotada por $\mathcal{L}_T^1$

Podemos também derivar a equação acima, chagando em uma expressão para $dX(t)$, que é a diferencial estocástica de $X(t)$:

$$dX(t) = a(t)dt + b(t)dW(t)$$

Definição 19. *Suponha que:*

- $F(t,x)$ *é uma função de valor real;*
- $\frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$ *contínuas* $\forall t \geq 0$ *e* $x \in \mathbf{R}$
- *O processo* $\frac{\partial F}{\partial x}$ *pertence a* $M - T^2$ *para todo* $T \geq 0$

Então $F(t, W(t))$ *é um processo de Itô tal que*

$$F(T, W(T)) - F(0, W(0)) = \int_0^T (\frac{\partial F}{\partial t}(t, W(t)) + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, W(t)))dt + \int_0^T \frac{\partial F}{\partial x}(t, W(t))dW(t)$$

Mais ainda, em notação diferencial

$$dF(t, W(t)) = (\frac{\partial F}{\partial t}(t, W(t)) + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, W(t)))dt + \frac{\partial F}{\partial x}(t, W(t))dW(t)$$

Exemplo 6.3.1. *Considerando o processo* $X(t) = W(t) + 4t$*. Tomamos a função* $F(t,x) = x + 4t$*. Então, para todo* $t \geq 0$ *e* $x \in \mathbf{R}$*, temos que:*

$$\frac{\partial F}{\partial t} = 4; \frac{\partial F}{\partial x} = 1; \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0; \frac{\partial F}{\partial x} \in M_T^2, \forall T \geq 0.$$

Dessa forma, $X(T)$ *é um processo de Itô, já que:*

$$X(T) = F(T, W(T)) = 0 + \int_0^T 4dt + \int_0^T 1dW(t).$$

Dado esse resumo a respeito dos conhecimentos prévios, podemos agora entender o modelo de Black & Scholes.

7 O MODELO DE BLACK & SCHOLES

Na busca da resposta se é possível encontrar um hedge que não apresente riscos, Fisher Black e Myron Scholes chegaram, no final da década de 60, à "primeira solução para a fórmula de equilíbrio geral na avaliação do prêmio de opções"(NETO, L. A. S., 1996). Após a frustração com a tentativa de ganhos no mercado, já que não souberam lidar com os riscos, Black e Scholes voltaram a concentrar seus esforços na área acadêmica e, em 1973, tiveram sua fórmula publicada em um artigo intitulado "The Pricing of Options and Corporate Liabilities". Posteriormente, o economista Robert K. Merton também desenvolve trabalhos importantes a partir de tal fórmula, a qual foi nomeada de Black & Scholes em homenagem aos seus criadores e culminou, em 1997. no Prêmio Nobel de Economia para Scholes e Merton. Infelizmente Fisher Black não foi premiado pois já havia falecido.

Segundo (WILMOTT, 2014):

> "O equilíbrio de Black-Scholes para a formulação da teoria de precificação de opções é atraente, pois a avaliação final dos preços de opções de seu modelo depende de algumas variáveis observáveis, exceto uma, os parâmetros de volatilidade. Portanto a precisão do modelo pode ser verificada por testes empíricos diretos com dados de mercado. Quando julgada por sua capacidade de explicar os dados epíricos, a teoria de precificação de opções é amplamente aclamada como a teoria mais bem-sucedida não apenas em finanças, mas em todas as áreas da economia."(WILMOTT, 2014).

A seguir, apresenta-se a dedução para tal modelo e a solução desta famosa e importante equação da economia, a saber:

$$\frac{\partial \mathbb{C}}{\partial t} + \mu S^2 \frac{\partial^2 \mathbb{C}}{\partial S^2} + rS\frac{\partial \mathbb{C}}{\partial S} - r\mathbb{C} = 0 \tag{1}$$

Sendo que:

$\mathbb{C} = \mathbb{C}(S, t)$: o "preço justo"ou preço de "não arbitragem".

σ: volatilidade.

$\mu = \frac{\sigma^2}{2}$, ou seja, μ é uma constante.

S: preço atual.

r: taxa de juros.

K: preço de exercício.

t: tempo atual.

T: tempo final ou data de exercício.

- Não possui condição inicial

- A condição de contorno final é $\mathbb{C}(T, s) = \text{máx}\,\{S - K, 0\}$.

7.1 DEDUÇÃO DA EQUAÇÃO DE BLACK & SCHOLES

O conteúdo dessa subseção foi retirado do livro (WILMOTT, 2014) e do artigo (SCHOLES, 1973)

O modelo de Black-Scholes pode ser usado em diferentes tipos de ativos, todavia, para facilitar a dedução a seguir usaremos, primeiramente, das suposições a seguir:

i. O preço do ativo é um movimento browniano:

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dX(t) \tag{2}$$

ii. A taxa de juros livre de risco (r) e a volatilidade (σ) são funções conhecidas.

iii. A transação não possui custos (sem taxa de corretagem).

iv. O ativo não paga dividendos durante a vida da opção.

v. Não há possibilidade de arbitragem.

vi. A negociação do ativo pode acontecer em qualquer momento.

vii. A venda descoberto é permitida.

viii. Pode-se comprar ou vender qualquer quantidade de ativos.

Começaremos supondo uma opção, que pode ser tanto de compra quanto de venda, cujo valor é dado por $\mathbb{C}(S, t)$, ou seja, o valor depende apenas do valor e do tempo atual da opção. Usando o Lema de Itô e da condição estabelecida em (i) temos que:

$$d\mathbb{C} = \left(\mu S\frac{\partial \mathbb{C}}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 \mathbb{C}}{\partial S^2} + \frac{\partial \mathbb{C}}{\partial t}\right)dt + \sigma S\frac{\partial \mathbb{C}}{\partial S}dX(t) \tag{3}$$

Logo, chegamos em um processo estocástico e exigimos que $\mathbb{C}$ tenha ao menos a primeira derivada em t e a segunda derivada em S.

Para o modelo, vamos considerar uma carteira que consiste em comprar uma opção e vender um número δ de ativos subjacentes. Nesse caso, se $\delta < 0$ estamos considerando que houve uma compra de δ ativos subjacentes. Essa estratégia está relacionada com a tentativa de minimizar o risco, em que combinamos a compra de uma opção com a compra de seu ativo subjacente.

A ideia do modelo de Black-Scholes então é encontrar o valor de δ que faça com que a equação 3 torne-se determinística. Vê-se que o valor da carteira seguindo essa estratégia é dado por:

$$\Pi(t) = \mathbb{C} - \delta S \tag{4}$$

E a variação do valor dessa carteira de acordo com um intervalo de tempo dt e assumindo que δ se mantém fixo nesse intervalo, é dada por:

$$d\Pi(t) = d\mathbb{C} - \delta dS \tag{5}$$

Agora, substituindo (2) e (3) na equação (5), chegamos a:

$$d\Pi(t) = \left(\mu S\frac{\partial \mathbb{C}}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 \mathbb{C}}{\partial S^2} + \frac{\partial \mathbb{C}}{\partial t} - \mu\delta S\right) dt + \sigma S \left(\frac{\partial \mathbb{C}}{\partial S} - \delta\right) dX(t) \tag{6}$$

Da equação acima temos que $\left(\mu S\frac{\partial \mathbb{C}}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 \mathbb{C}}{\partial S^2} + \frac{\partial \mathbb{C}}{\partial t} - \mu\delta S\right) dt$ é um termo determinístico, enquanto o termo $\sigma S \left(\frac{\partial \mathbb{C}}{\partial S} - \delta\right) dX(t)$ é estocástico, já que possui o processo de Wiener $X(t)$. Mas note que se tomarmos $\delta = \frac{\partial \mathbb{C}}{\partial S}$ a parte estocástica ficará zero, nos restando apenas a parte determinística:

$$d\Pi = \left(\mu S\frac{\partial \mathbb{C}}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 \mathbb{C}}{\partial S^2} + \frac{\partial \mathbb{C}}{\partial t} - \mu\delta S\right) dt \tag{7}$$

A partir de agora usaremos a suposição (iii) e temos que nos ancorar em alguns conceitos de arbitragem. Um montante Π investido em ativos livres de risco, teria um retorno com um crescimento $r\Pi dt$ no intervalo dt. Perceba que se $d\Pi > r\Pi dt$, um árbitro poderia obter um lucro livre de risco tomando emprestado um valor Π para o investimento na carteira. Além disso, se $d\Pi < r\Pi dt$ então um árbitro venderia a carteira e investiria Π no banco. Portanto, em qualquer um desses casos um árbitro obteria um lucro imediato e ainda sem custo nem risco. Esse fato garante que o retorno da carteira e da conta sejam quase iguais, assim consideramos $d\Pi = r\Pi dt$ e chegamos a:

$$r\Pi dt = \left(\mu S\frac{\partial \mathbb{C}}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 \mathbb{C}}{\partial S^2} + \frac{\partial \mathbb{C}}{\partial t} - \mu\delta S\right) dt \tag{8}$$

Por fim vamos substituir (4) na equação acima e também reescrever δ como $\frac{\partial \mathbb{C}}{\partial S}$, além de dividir ambos lados por dt, ficando com:

$$\frac{\partial \mathbb{C}}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 \mathbb{C}}{\partial S^2} + rS\frac{\partial \mathbb{C}}{\partial S} - r\mathbb{C} = 0 \tag{9}$$

E chegamos a Equação Diferencial de Black-Scholes.

7.2 A FÓRMULA DE SOLUÇÃO DE BLACK & SCHOLES

A seguir, apresentaremos como obter a solução para a equação de Black e Scholes. Lembrando, o referido problema é:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbb{C}}{\partial t} + \mu S^2 \frac{\partial^2 \mathbb{C}}{\partial S^2} + rS\frac{\partial \mathbb{C}}{\partial S} - r\mathbb{C} = 0, com\ t \in (0, T)\ eS > 0 \\ \mathbb{C}(0, t) = 0, \mathbb{C}(S, t) \approx S,\ quando\ S \to \infty \\ \mathbb{C}(S, T) = (S - K)^t \end{cases}$$

Primeiramente, fazemos uma mudança de variáveis de modo a transformarmos essa equação inicial em uma equação de coeficientes constante. Assim, defina:

$S = K \cdot e^x \Rightarrow x = ln\left(\frac{S}{K}\right)$
$\tau = \mu(T - t)$

E a nossa nova função incógnita será:

$\mathbb{C}(S, t) = K \cdot v(x, \tau)$

Veja então que, utilizando a regra da cadeia, temos que:

$$\frac{\partial \mathbb{C}}{\partial t} = -\mu \cdot K \cdot \frac{\partial v}{\partial \tau}$$
$$\frac{\mathbb{C}}{\partial S} = \frac{K}{S} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$
$$\frac{\partial^2 \mathbb{C}}{\partial S^2} = -\frac{K}{S^2} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{K}{S^2} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

Assim, fazendo as devidas substituições na equação original, chegamos em:

$$-\mu \cdot K \cdot \frac{\partial v}{\partial \tau} + \mu \cdot S^2 \cdot \left(-\frac{K}{S^2} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{K}{S^2} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) + r \cdot S \cdot \frac{K}{S} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} - r \cdot \mathbb{C} = 0$$

$$\Rightarrow -\mu \cdot K \cdot \frac{\partial v}{\partial \tau} - \mu \cdot K \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \mu \cdot K \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + r \cdot K \cdot \frac{\partial v}{\partial x} - r \cdot \mathbb{C} = 0$$

$$\Rightarrow \mu \cdot K \cdot \frac{\partial v}{\partial \tau} = \mu \cdot K \cdot \left(-\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{r}{\mu} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{r \cdot \mathbb{C}}{\mu K}\right)$$

Lembrando que $\frac{\mathbb{C}}{K} = v$, cancelando $\mu \cdot K$ que aparece dos dois lados da equação e considerando $\frac{r}{\mu} = k$, a nova equação encontrada é:

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - (1 - k) \cdot \frac{\partial v}{\partial x} - kv \tag{10}$$

Agora, fazemos uma nova mudança de variáveis, considerando:

$v(x, \tau) = e^{\alpha x + \beta \tau} \cdot u(x, \tau)$, para constantes α e β apropriadas.

Ora:

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \beta \cdot e^{\alpha x + \beta \tau} \cdot u + e^{\alpha x + \beta \tau} \cdot \frac{\partial u}{\partial \tau}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \alpha \cdot e^{\alpha x + \beta \tau} \cdot u + e^{\alpha x + \beta \tau} \cdot \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \alpha^2 \cdot e^{\alpha x+\beta\tau} \cdot u = 2 \cdot \alpha \cdot e^{\alpha x+\beta\tau} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + e^{\alpha x+\beta\tau} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Então, fazendo as devidas substituições na equação 4, chegamos que

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = u\{-\beta + [(\alpha - 1) \cdot (\alpha + k)]\} + \frac{\partial u}{\partial x}(2\alpha - 1 + k) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Assim, consideraremos:

$$2\alpha - 1 + k = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{1-k}{2}$$

E:

$$-\beta + [(\alpha - 1) \cdot (\alpha + k)] = 0$$

$$\Rightarrow -\beta + \left[\left(\frac{1-K}{2} - 1\right) \cdot \left(\frac{1-k}{2} + k\right)\right] = 0$$

$$\Rightarrow \beta = -\frac{(k+1)^2}{4}$$

Dessa forma, encontramos os valores apropriados para α e β e conseguimos afirmar que a mudança de variável que nos interessa é:

$$v(x,\tau) = e^{\left(\frac{1-k}{2}\right)x - \frac{(k+1)^2}{4}\cdot\tau} \cdot u(x,\tau) \tag{11}$$

E é a partir dessa mudança de variável que conseguimos chegar a equação do calor:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Disso, u satisfaz o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial \tau} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} com\ \tau > 0\ e x \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = \left(e^{\frac{k+1}{2}\cdot x} - e^{\frac{k-1}{2}\cdot x}\right) =: u_0(x) \end{cases}$$

A solução da equação acima já é conhecida, a saber:

$$u(x,\tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[e^{\frac{k+1}{2}x} - e^{\frac{k-1}{2}x}\right] \cdot e^{-\frac{(x-s)^2}{4\tau}} ds$$

Utilizando a mudança de variável $x' = \dfrac{(s-x)}{\sqrt{2\tau}}$, obtemos:

$$u(x,\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(x'\sqrt{2\tau} + x) e^{-\frac{x'^2}{2}} dx'$$

$$\Rightarrow u(x,\tau) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{x}{\sqrt{2\pi}}}^{+\infty} e^{\frac{1}{2}(k+1)(x+x'\sqrt{2\tau})}\cdot e^{-\frac{x'^2}{2}}dx' - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{x}{\sqrt{2\pi}}}^{+\infty} e^{\frac{1}{2}(k-1)(x+x'\sqrt{2\tau})}\cdot e^{-\frac{x'^2}{2}}dx'$$

Considerando:

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{x}{\sqrt{2\pi}}}^{+\infty} e^{\frac{1}{2}(k+1)(x+x'\sqrt{2\tau})}\cdot e^{-\frac{x'^2}{2}}dx'$$

E

$$I_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{x}{\sqrt{2\pi}}}^{+\infty} e^{\frac{1}{2}(k-1)(x+x'\sqrt{2\tau})}\cdot e^{-\frac{x'^2}{2}}dx'$$

Temos que:

$$u(x,\tau) = I_1 - I_2$$

Vamos completar quadrados em I_1:

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{x}{\sqrt{2\pi}}}^{+\infty} e^{\frac{1}{2}(k+1)(x+x'\sqrt{2\pi})\cdot e^{(-\frac{x'^2}{2})}}dx'$$

$$= \frac{e^{\frac{1}{2}(k+1)x}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{x}{\sqrt{2\pi}}}^{+\infty} e^{\frac{1}{4}(k+1)^2\tau}\cdot e^{-\frac{1}{2}(x'-\frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau})^2}dx'$$

Fazendo a substituição $p = x' - \frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau}$, chegamos a:

$$I_1 = \frac{e^{\frac{1}{2}(k+1)x+\frac{1}{4}(k+1)^2\tau}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{+\infty} e^{-\frac{p^2}{2}}dp$$

Então, considerando $d_1 = \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau}$ e sendo $N(d_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\infty}^{d_1} e^{-\frac{s^2}{2}}ds$ a distribuição comutativa normal, concluímos que:

$$I_1 = e^{\left(\frac{1}{2}(k+1)x+\frac{1}{4}(k+1)^2\tau\right)}$$

O cálculo de I_2 acontece de forma análoga, apenas trocamos $(k+1)$ por $(k-1)$ e teremos $N(d_2)$ ao invés de $N(d_1)$.

Por fim, como

$$v(x,\tau) = e^{-\frac{1}{2}(k-1)x-\frac{1}{4}(k+1)^2}u(x,\tau)$$

$$x = log\left(\frac{S}{K}\right)$$

$$\tau = \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)$$

$$\mathbb{C} = K\cdot v(x,\tau)$$

Concluímos que:

$$\mathbb{C}(S,t) = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2)$$

Sendo que,

$$d_1 = \frac{log\left(\frac{S}{K}\right) + (r + \mu)(T - t)}{\sqrt{2\mu(T - t)}}$$

$$d_2 = \frac{log\left(\frac{S}{K}\right) + (r - \mu)(T - t)}{r\sqrt{2\mu(T - t)}}$$

Portanto conseguimos encontrar uma equação um tanto quanto simplificada para a precificação de uma opção.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Segundo a bolsa brasileira, B3, entre os benefícios das opções estão a "possibilidade de elaboração de estratégias, diversificação de investimentos e arbitragem, possibilidade de fazer proteção aos investimentos em ações e a possibilidade de investir em ações sem utilizar muito dinheiro."

Como consequência dos seus diversos benefícios, como vimos, esse mercado tem tido crescimento significante nos últimos anos e é por isso que um modelo de precificação de opções se torna de grande valia para os investidores. O modelos de Black & Scholes se mostra valioso para tal objetivo. (RIBEIRO, 2016) explica que Black & Scholes é o modelo padrão utilizado no mercado, resultado causado pela simplicidade do modelo, tal qual, como apresentado, tem todas as variáveis de apreçamento conhecidas, disponíveis facilmente no mercado, exceto pela volatilidade. A equação encontrada (ou criada) por Fisher B. e Myron S. consegue relacionar a volatilidade do ativo subjacente com o preço da sua opção de maneira descomplicada, o que faz com que o mercado, em muitas situações, negocie as opções a partir de sua volatilidade e não diretamente pelo seu preço.

Sendo assim, o estudo e compreensão desse modelo são importantes para aqueles que procuram ingressar nesse mercado de opções

REFERÊNCIAS

ALBANI, Vinícius. Uma Introdução aos Métodos Matemáticos em Finanças. I Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional - UFSC Blumenau. [*S.l.*], 2019.

AMARAL, Carlos Antonio Lopes Vaz do. Derivativos: o que são e a evolução quanto ao aspecto contábil. **Revista Contabilidade & Finanças**, n. 32, 2003.

EVANS, Lawrence C. An introduction to stochastic differential equations. S.I. [*S.l.*].

LANGUAGES, Oxford. **OPÇÃO**. [*S.l.*: *s.n.*], 2022. v. 2.

MISTURINI, Ricardo. **Movimento Browniano, Integral de Itô e Introdução às Equações Diferenciais Estocásticas**. 2010. Diss. (Mestrado) – Universidade Fedeal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

NETO, Alexandre Assaf. **Mercado Financeiro**. [*S.l.*]: Atlas, 2014.

NETO, Lauro Araújo Silva. **Opções:** do tradicional ao exótico. [*S.l.*]: Atlas S.A., 1996. v. 2.

PAULETTO, Steve Kummer; Christian. The History of Derivatives: A Few Milestones. **EFTA Seminar on Regulation of Derivatives Markets**, 2012.

RAÍCES, Arnaldo Luiz Corrêa; Carlos. **Derivativos Agrícolas**. [*S.l.*]: Editora Globo, 2010.

RIBEIRO, Gustavo Silva Araujo; Ricardo Alves Carmo. Mercado de Opções no Brasil é Eficiente? Um Estudo a partir da Estratégia Delta-Gama-Neutra com Opções de Petrobras. **Trabalhos para Discussão**, n. 441, 2016.

SANTOS, Karen Tonini dos. **Avaliação de Opções pelo Modelo Binomial**. 2020. Universidade Federal de Santa Catarina.

SCHOLES, Fisher Black; Myron. The Pricing of Options and Corporate Liabilities. **The Journal of Political Economy**, n. 81, 1973.

SELAN, Beatriz. **Mercado Financeiro**. [*S.l.*]: SESES Estácio, 2015.

WILMOTT, Sam Howison; Jeff Dewynne; Paul. **The Mathematics of Financial Derivatives**. [*S.l.*]: Press Syndicate of the University of Cambridge, 2014.