UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
PROGRAMA DE GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Vinícius Marcondes Pereira

Introdução às Álgebras de Caminhos de Leavitt e a Conjectura do Isomorfismo Graduado

Florianópolis
2022

Vinícius Marcondes Pereira

Introdução às Álgebras de Caminhos de Leavitt e a Conjectura do Isomorfismo Graduado

Florianópolis

2022

Ficha de identificação da obra

A ficha de identificação é elaborada pelo próprio autor.

Orientações em:

http://portalbu.ufsc.br/ficha

Vinícius Marcondes Pereira

Introdução às Álgebras de Caminhos de Leavitt e a Conjectura do Isomorfismo Graduado

O presente trabalho, em versão original e final, foi julgado adequado para obtenção do título de Bacharel em Matemática, bem como, aprovado pelo Curso de Bacharelado em Matemática e Computação Científica.

Profa. Dra. Silvia Martini de Holanda
Coordenadora do Curso

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Gilles Gonçalves de Castro
Orientador
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Dr. Eliezer Batista
Avaliador
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Dr. Danilo Royer
Avaliador
Universidade Federal de Santa Catarina

Florianópolis, 2022.

Dedico este trabalho à minha mãe, Silvana Marcondes, meu pai, Noiram Pereira, e a minha avó, Gentília Gomes Marcondes.

AGRADECIMENTOS

Não existem palavras neste mundo para agradecer a meus pais por tudo o que já fizeram por mim. No que concerne à graduação, sou muito grato por permitirem que seguisse o meu sonho e por todo o apoio que me deram ao longo desta jornada. Agradeço também a toda a minha família por terem cuidado de mim por tanto tempo.

À todos amigos que fiz durante este período pela sua companhia, por todo o seu apoio e por todos os bons momentos que carregarei comigo para sempre.

Aos professores por sua dedicação e de quem muito aprendi. Em especial ao professor Gilles por sua paciência em me ajudar em qualquer dúvida que tivesse, e sua disposição a discutir qualquer curiosidade matemática, mesmo as que não possuíam relevância nenhuma com relação a este trabalho.

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo servir de introdução ao tópico de álgebras de caminhos de Leavitt para estudantes que já estejam familiarizados com conceitos encontrados, por exemplo, na disciplina de Estruturas Algébricas, tal qual módulos e módulos projetivos. É desenvolvida toda a teoria de álgebras livres para chegar na definição de uma álgebras de caminhos de Leavitt de um grafo direcionado. Após as definições iniciais, é estudada toda a teoria necessária para se chegar na Conjectura do Isomorfismo Graduado, passando por monoides, graduações e a definição do grupo K_0.

Palavras-chave: Álgebras de caminhos de Leavitt. Conjectura do Isomorfismo Graduado. Graduação.

ABSTRACT

This work aims to serve as an introduction to the topic of Leavitt path algebras to students already familiarized with the concepts of modules and projective modules. The theory of free algebras is developed to reach the definition of a Leavitt path algebra of a directed graph. After the initial definitions, the theory needed to reach the Graded Isomorfism Conjecture is studied, passing through monoids, graduation and the definition of the K_0 group.

Keywords: Leavitt path algebras. Graded Isomorphism Conjecture. Graduation.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Álgebras de caminhos de Leavitt são álgebras que surgem a partir de um grafo direcionado. Inicialmente vistos como análogos à C^*-álgebras de grafos, aos poucos passaram a ser pesquisadas sem referência a nenhuma outra estrutura. Como exemplos destas álgebras figuram tanto álgebras mais usuais, como álgebras de matrizes e álgebras de polinômios de Laurent, assim como alguns exemplos mais exóticos como as álgebras que surgem em analogia com anéis não IBN, que são anéis que geram módulos livres com bases de diferentes cardinalidades.

Visto que estas estruturas possuem propriedades interessantes, surge a questão da classificação, isto é, quais condições são necessárias ou suficientes para que duas álgebras de caminhos de Leavitt sejam isomorfas. Até hoje não se conhece uma resposta definitiva para este problema.

Este trabalho se dedica a ser uma introdução ao tópico das álgebras de caminhos de Leavitt, passando por todas as construções necessárias para chegar na definição destas estruturas. Também tem como objetivo ser uma apresentação a um problema ainda em aberto: a Conjectura do Isomorfismo Graduado, que procura encontrar condições para classificar álgebras de caminhos de Leavitt a menos de isomorfismo graduado.

Este trabalho é dividido em cinco capítulos. No primeiro capítulo são apresentadas algumas noções algébricas necessárias para a definição de álgebras de caminhos de Leavitt, em particular são estudadas álgebras livres, ideais de álgebras gerados por conjuntos e algumas propriedade universais que serão necessárias ao longo do trabalho. O capítulo dois inicia-se com a definição de grafo direcionado, logo após revisamos o vocabulário necessário para chegar nas duas definições equivalentes de álgebras de caminhos de Leavitt e o capítulo se encerra com alguns exemplos. No capítulo três são mostrados alguns conceitos necessários para se chegar na Conjectura do Isomorfismo Graduado, em particular, monoides, graduações, o grupo K_0, além de algumas propriedades destas estruturas, necessárias à apresentação da conjectura. No capítulo quatro a conjectura é apresentada em sua forma final e alguns exemplos são exibidos. No último capítulo seguem as considerações finais de todo o trabalho.

1 ÁLGEBRA LIVRE

Este capítulo dedica-se a explicar o que é necessário para definir uma álgebra de caminhos de Leavitt, então aqui serão encontrados, em particular, a definição e resultados sobre álgebras livres e ideais de álgebras gerados por conjuntos, conceitos que serão relevantes para o resto do trabalho.

Observação 1.1. No decorrer deste trabalho, o conjunto dos números naturais, denotado por $\mathbb{N}$ consistirá nos elementos $\{0, 1, 2, 3 \cdots\}$ e o conjunto dos inteiros positivos $\{1, 2, 3, \cdots\}$ será denotado por $\mathbb{N}^*$. Além disso, serão usadas as notações $\mathbb{N}_n = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq n\}$ e $\mathbb{N}^*_n = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x \leq n\}$ para indicar, respectivamente, o conjunto dos naturais/ inteiros positivos menores ou iguais que algum n natural/ inteiro positivo.

Definição 1.2. Um **semigrupo** é um par $(S, \cdot)$ onde S é um conjunto não vazio e

$$\cdot : S \times S \longrightarrow S$$

é uma operação associativa, isto é, dados a, b e $c \in S$ quaisquer, temos que $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

A motivação para estudar semigrupos, para os propósitos deste trabalho, vem da definição de uma álgebra livre. Como será visto adiante, uma álgebra livre tem um semigrupo como base, além disso, toda álgebra possui uma estrutura de multiplicação que é associativa, e portanto uma estrutura natural de semigrupo.

Definição 1.3. Seja A um conjunto, então se define $A^+ := \bigcup_{n=1}^{\infty} A^n$.

Nesta definição, $A^n = A \times \cdots \times A$ é o produto cartesiano de A por A um total de n-vezes. A deve ser visto como um alfabeto, quer dizer, um conjunto de letras. Um elemento $a = (a_1, \cdots, a_n) \in A^n$ vai ser denotado simplesmente por $a = a_1 \cdots a_n$ e deve ser visto como uma palavra, isto é, uma concatenação de letras do alfabeto. Sob tal interpretação se tem que A é um alfabeto, A^n o conjunto de todas as palavras com n letras do alfabeto e A^+ é o conjunto de todas as palavras finitas do alfabeto.

Exemplo 1.4. Seja $A = \{0, 1\}$ o conjunto binário, então $A^2 = \{00, 01, 10, 11\}$, $A^3 = \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$ e A^+ é o conjunto de todas as sequências finitas de zeros e uns.

Teorema 1.5. A^+ é um semigrupo através da concatenação de palavras.

Demonstração. A concatenação é uma operação em A^+, afinal sejam $a, b \in A^+$, então $a = a_1 \cdots a_i$, $b = b_1 \cdots b_j$ para a_l e $b_m \in A$ para todo $l \in \mathbb{N}^*_i$ e todo $m \in \mathbb{N}^*_j$. Deste modo, $ab = a_1 \cdots a_i b_1 \cdots b_j$ é um elemento de $A^{i+j} \subset A^+$. Isto é, A^+ é fechado pela operação da concatenação de palavras.

Seja c elemento de A^+, logo $c = c_1 \cdots c_k$ para $c_n \in A$ para todo $n \in \mathbb{N}_k^*$, $k \in \mathbb{N}$. Deste modo $(ab)c = (a_1 \cdots a_i b_1 \cdots b_j)c_1 \cdots c_k = a_1 \cdots a_i b_1 \cdots b_j c_1 \cdots c_k = a_1 \cdots a_i(b_1 \cdots b_j c_1 \cdots c_k) = a(bc)$. Então a concatenação é uma operação associativa. ■

Definição 1.6. Para A um conjunto, o semigrupo A^+ com a concatenação de palavras é dito ser o **semigrupo livre** gerado por A.

Como será visto mais adiante, o semigrupo livre será necessário para definir uma álgebra livre, que por sua vez, é necessária para definir uma álgebra de caminhos de Leavitt.

Toda estrutura algébrica tem uma noção de função entre objetos de modo a preservar a estrutura em questão. Por exemplo, a estrutura de espaço vetorial é preservada por transformações lineares e a estrutura de anel é preservada por homomorfismo de anéis. Do mesmo modo se tem a noção de função que preserva a estrutura de semigrupo, que é um homomorfismo de semigrupos.

Definição 1.7. Sejam $(S, +)$ e $(T, \cdot)$ semigrupos. Uma função $f : S \longrightarrow T$ é dita um **homomorfismo de semigrupos** se $f(a + b) = f(a) \cdot f(b)$.

Seja $i^+ : A \longrightarrow A^+$ a função definida por $i^+(a) = a$, chamada de função inclusão. Vale a seguinte propriedade universal.

Teorema 1.8 (Propriedade Universal de Semigrupos Livres)**.** Sejam S um semigrupo e $f : A \longrightarrow S$ uma função. Existe um único homomorfismo de semigrupos $\tilde{f} : A^+ \longrightarrow S$ tal que $\tilde{f} \circ i^+ = f$. Ou seja, o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "i^+"'] & S \\ & A^+ \arrow[u, dotted, "\tilde{f}"'] \end{tikzcd}$$

Demonstração. Seja $a \in A^+$, logo $a = a_1 \cdots a_n$ para algum $n \in \mathbb{N}$ de modo que $a_j \in A$ para todo $j \in \mathbb{N}_n^*$. Definindo $\tilde{f}$ como $\tilde{f}(a) = \tilde{f}(a_1 \cdots a_n) = f(a_1) \cdots f(a_n)$, tem-se que $\tilde{f}(i^+(e)) = f(e)$ para $e \in A$ qualquer. Portanto $\tilde{f} \circ i^+ = f$ e o diagrama acima comuta.

Seja $b = b_1 \cdots b_m \in A^+$, segue que

$$\begin{aligned} \tilde{f}(ab) = \tilde{f}(a_1 \cdots a_n b_1 \cdots b_m) = f(a_1) \cdots f(a_n) f(b_1) \cdots f(b_m) \\ = \tilde{f}(a)\tilde{f}(b). \end{aligned}$$

Então $\tilde{f}$ é um homomorfismo de semigrupos. Por fim, se $\tilde{g} : A^+ \longrightarrow S$ é um homomorfismo de semigrupos tal que $\tilde{g} \circ i^+ = f$, $\tilde{g}$ precisa respeitar a concatenação, isto é, $\tilde{g}(a) = \tilde{g}(a_1) \cdots \tilde{g}(a_n)$, mas $\tilde{g}(i^+(a_i)) = \tilde{g}(a_i) = f(a_i)$ e logo $\tilde{g}(a) = f(a_1) \cdots f(a_n) = \tilde{f}(a)$. Deste modo, existe apenas um homomorfismo de semigrupos que faz o diagrama comutar. ■

A propriedade universal do semigrupo livre garante que dada uma função qualquer de um conjunto A para um semigrupo, existe um modo único de estender esta função para um homomorfismo de semigrupos saindo do semigrupo livre A^+.

Definição 1.9. Seja R um anel comutativo com unidade. Uma **álgebra** $\mathcal{A}$ sobre R (também chamada de uma R-álgebra) é um R-módulo com uma operação adicional $\cdot : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ que é R-bilinear e associativa, isto é, dados a, b, $c \in \mathcal{A}$ e $r \in R$ quaisquer, $r(a \cdot b) = (ra) \cdot b = a \cdot (rb)$ e $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.

Observação 1.10. Como afirmado antes, o par $(\mathcal{A}, \cdot)$ forma um semigrupo para $\mathcal{A}$ uma R-álgebra devido a associatividade da operação.

Seja R um anel comutativo com unidade. Alguns exemplos de álgebras são:

Exemplo 1.11. $M_n(R)$ o conjunto das matrizes quadradas de ordem $n \times n$ com coeficientes em R é uma R-álgebra com as operações de soma, multiplicação e multiplicação por escalar usuais.

Exemplo 1.12. O conjunto dos endomorfismos $\hom_R(M, M)$ de um R-módulo M com as operações de soma e a multiplicação por escalares usuais e a multiplicação da álgebra dada pela composição de homomorfismos de R-módulos.

Exemplo 1.13. O conjunto $C[0,1]$ das funções contínuas do intervalo $[0,1]$ para $\mathbb{C}$ forma uma $\mathbb{C}$-álgebra com as operações de soma e multiplicação escalar usuais e a multiplicação da álgebra dada por $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$.

Assim como se tem a noção de um módulo livre ou de um semigrupo livre, também se tem a noção de uma álgebra livre. Como será visto no próximo capítulo, uma das maneiras de se definir uma álgebra de caminhos de Leavitt é como o quociente de uma álgebra livre.

Definição 1.14. Seja R um anel comutativo com unidade, então

$$RA^+ = \bigoplus_{a \in A^+} R\delta_a$$

é chamada de **álgebra livre** gerada por A. Nesta álgebra, a soma e a multiplicação por escalar são as operações usuais da soma direta de R-módulos e o produto é dado por $\delta_a \delta_b = \delta_{ab}$ estendido bilinearmente para todo o espaço.

Na definição acima, os δ_a indicam a coordenada em RA^+, então o elemento $r\delta_a$ vale r na coordenada a e zero em todas as outras coordenadas.

Observação 1.15. Segue da definição que um elemento de RA^+ vai ser escrito da forma $\sum_{i=1}^{n} r_i \delta_{a_i}$ para algum $n \in \mathbb{N}^*$ onde $r_i \in R$ e $a_i \in A^+$ para todo $i = 1, \cdots, n$. Todo elemento de RA^+ vai ser escrito desta forma a menos da ordem da soma dos termos.

Teorema 1.16. RA^+ é, de fato, uma R-álgebra.

Demonstração. Para concluir que RA^+ é uma R-álgebra, resta apenas verificar a associatividade do produto.

Seja $z \in RA^+$, então $z = \sum_{k=1}^{p} t_k \delta_{c_k}$ para $t_k \in R$ e $c_k \in A^+$ para todo $k \in \mathbb{N}_p^*$. Agora

$$\begin{aligned}(xy)z &= \left(\left(\sum_i r_i \delta_{a_i}\right)\left(\sum_j s_j \delta_{b_j}\right)\right)\sum_k t_k \delta_{c_k} \\ &= \sum_k \sum_j \sum_i (r_i s_j \delta_{a_i}\delta_{b_j}) t_k \delta_{c_k},\end{aligned}$$

porém $(r_i s_j \delta_{a_i}\delta_{b_j}) t_k \delta_{c_k} = r_i \delta_{a_i}(s_j \delta_{b_j} t_k \delta_{c_k})$ e a soma acima pode ser reescrita como

$$\sum_i r_i \delta_{a_i}\left(\left(\sum_j s_j \delta_{b_j}\right)\left(\sum_k t_k \delta_{c_k}\right)\right) = x(yz),$$

então o produto é associativo e segue que RA^+ é uma R-álgebra. ■

Exemplo 1.17. Seja $X = \{x, y, z\}$, então alguns exemplo de elementos da R-álgebra livre gerada por X são $r_1x^3z + r_2zx + r_3y^7$, ou $s_1xy^2z^9 + s_2z$ ou $t_1xyz + t_2xzy + t_3zxy + t_4yxz + t_5zyx + t_6yzx$ onde todos os coeficientes estão no anel R. Isto é, a álgebra livre gerada por X pode ser vista como uma álgebra de polinômios em variáveis não comutativas.

Observação 1.18. Para simplificar a notação, a partir de agora um elemento da álgebra livre $\sum_{i=1}^{n} r_k \delta_{a_k}$ vai ser denotado por $\sum_{i=1}^{n} r_k a_k$, isto é, a notação δ_{a_k} vai ser substituída simplesmente por a_k.

Toda álgebra livre tem uma estrutura natural de módulo livre de modo que a propriedade universal do módulo livre será necessário mais à frente, mas antes, relembremos a definição de base de um módulo livre.

Definição 1.19. Um conjunto B é dito ser uma base de um R-módulo livre se $M = \bigoplus_{b\in B} Rb$, onde $Rb = \{rb \mid r \in R\} \cong R$.

Teorema 1.20 (Propriedade Universal do Módulo Livre)**.** Sejam M um R-módulo livre gerado por uma base B, N um R-módulo e $f : B \longrightarrow N$ uma função e $i : B \longrightarrow M$ a função inclusão. Então existe um único homomorfismo de R-módulos $\tilde{f} : M \longrightarrow N$ tal que o diagrama abaixo comuta

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "i"'] & N \\ & M \arrow[u, dotted, "\tilde{f}"'] \end{tikzcd}$$

isto é, $\tilde{f} \circ i = f$.

Demonstração. Seja $m \in M$, então $m = \sum_{k=1}^{p} r_k x_k$ onde $p \in \mathbb{N}^*$, $r_k \in R$ para todo $k \in \mathbb{N}_p^*$ e onde todos os x_k são distintos entre si, isto é, $x_k \neq x_j$ para todo $k \neq j$. Definindo $\tilde{f} : M \longrightarrow N$ por $\tilde{f}(m) = \sum_{k=1}^{p} r_k f(x_k)$, mostra-se que $\tilde{f}$ é um homomorfismo de R-módulos. Sejam m, $n \in M$, então sem perda de generalidade, é possível escrever m e n na mesma base, completando com coeficientes nulos onde for necessário, então $n = \sum_{k=1}^{p} s_k x_k$ e portanto $m + n = \sum_{k=1}^{p} (r_k + s_k) x_k$ segue que $\tilde{f}(m + n) = \sum_{k=1}^{p} (r_k + s_k) f(x_k) = \sum_{k=1}^{p} r_k f(x_k) + \sum_{k=1}^{p} s_k f(x_k) = \tilde{f}(m) + \tilde{f}(n)$ o que significa que $\tilde{f}$ preserva a soma. Agora seja $s \in R$, então $sm = \sum_{k=1}^{p} (sr_k) x_k$ e portanto $\tilde{f}(sm) = \sum_{k=1}^{p} (sr_k) f(x_k) = s \sum_{k=1}^{p} r_k f(x_k) = s\tilde{f}(m)$ e logo $\tilde{f}$ também preserva a multiplicação por escalar e deste modo é um homomorfismo de R-módulos.

Agora, seja $b \in B$, então $\tilde{f}(b) = \tilde{f}(i(b)) = f(b)$ e portanto o diagrama comuta. Seja $\tilde{g} : M \longrightarrow N$ um homomorfismo de R-módulos tal que $\tilde{g} \circ i = f$, então $\tilde{g}(m) = \sum_{k=1}^{p} r_k \tilde{g}(x_k) = \sum_{k=1}^{p} r_k \tilde{g}(i(x_k)) = \sum_{k=1}^{p} r_k f(x_k) = \tilde{f}(m)$. Ou seja, tal homomorfismo é único. ■

A propriedade universal do módulo livre permite estender uma função para um homomorfismo de modo não apenas natural, mas também único. Uma aplicação da propriedade universal do módulo livre se encontra no próximo resultado.

Teorema 1.21 (Propriedade Universal da Álgebra Livre)**.** Sejam $\mathcal{B}$ uma R-álgebra e $f : A \longrightarrow \mathcal{B}$ uma função, então existe um único homomorfismo de R-álgebras $\hat{f} : RA^+ \longrightarrow \mathcal{B}$ tal que $\hat{f}(r\delta_a) = rf(a)$, ou seja, o diagrama abaixo comuta

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & \mathcal{B} & \qquad & \mathcal{B} \\ {\scriptstyle i^+}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle \hat{f}} & & \uparrow{\scriptstyle \tilde{f}} \\ A^+ & \xrightarrow[i]{} & RA^+ & & A^+ \end{array}$$

Demonstração. Seja $f : A \longrightarrow \mathcal{B}$ uma função. Como $\mathcal{B}$ é R-álgebra, tem estrutura de semigrupo e portanto pela propriedade universal do semigrupo livre (1.8), existe único homomorfismo de semigrupos $\tilde{f} : A^+ \longrightarrow \mathcal{B}$ tal que $\tilde{f} \circ i = f$ para $i : A^+ \longrightarrow A$ a função inclusão.

Agora, A^+ é base do R-módulo livre RA^+ e pela propriedade universal do módulo livre (1.20) existe um único homomorfismo de R-módulos $\hat{f} : RA^+ \longrightarrow \mathcal{B}$ tal que $\hat{f} \circ j = \tilde{f}$ para $j : A^+ \longrightarrow RA^+$ a função inclusão. Com isto, seja $x \in RA^+$, então $x = \sum_{k=1}^{n} r_k x_k$ para $x_k \in A^+$ e $r_k \in R$ e portanto $\hat{f}(x) = \sum_{k=1}^{n} r_k \hat{f}(x_k) = \sum_{k=1}^{n} r_k \tilde{f}(x_k)$.

Sejam a, $b \in A^+$, então $\hat{f}(ab) = \tilde{f}(ab) = \tilde{f}(a)\tilde{f}(b) = \hat{f}(a)\hat{f}(b)$ e portanto $\hat{f}$ preserva a multiplicação por elementos da base. Seja $y \in RA^+$, então $y = \sum_{l=1}^{m} s_l y_l$

onde $s_l \in R$ e $y_l \in A^+$ e deste modo

$$\begin{aligned}\hat{f}(xy) = \sum_{l=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} r_k s_l \hat{f}(x_k y_l) &= \sum_{k=1}^{n}(r_k \tilde{f}(x_k))(s_l \tilde{f}(y_l)) \\ &= (\sum_{k=1}^{n} r_k \tilde{f}(x_k))(\sum_{l=1}^{m} s_l \tilde{f}(y_l)) \\ &= \hat{f}(x)\hat{f}(y).\end{aligned}$$

Isto é, $\hat{f}$ preserva a multiplicação e portanto é homomorfismo de R-álgebras. Sejam $a \in A$, e $r \in R$ então $\hat{f}(ra) = r\hat{f}(a) = r\tilde{f}(a) = rf(a)$. Resta agora verificar que $\hat{f}$ é o único homomorfismo de R-álgebras tal que $\hat{f}(ra) = rf(a)$.

Seja $\hat{g} : RA^+ \longrightarrow \mathcal{B}$ um homomorfismo de R-álgebras tal que $\hat{g}(ra) = rf(a)$, deste modo

$$\begin{aligned}\hat{g}(x) &= \hat{g}\left(\sum_{k=1}^{n} r_k x_k\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} r_k \hat{g}(x_k).\end{aligned}$$

Como $x_k \in A^+$, $x_k = x_1^k \cdots x_{n_k}^k$ para $x_i^k \in A$ para todo k e para todo i e deste modo $\hat{g}(x_k) = \hat{g}(x_1^k) \cdots \hat{g}(x_{n_k}^k)$. Mas se sabe que $\hat{g}(x_i^k) = f(x_i^k)$ e portanto, $\hat{g}(x) = \sum_{k=1}^{n} r_k f(x_1^k) \cdots f(x_{n_k}^k) = \sum_{k=1}^{n} r_k \tilde{f}(x_k) = \hat{f}(x)$. Por fim, existe um único homomorfismo de R-álgebras $\hat{f}$ tal que $\hat{f}(ra) = rf(a)$. ■

Assim como a propriedade universal do semigrupo livre, a propriedade universal da álgebra livre indica que só existe um modo natural de se estender uma função de um conjunto qualquer A para uma álgebra $\mathcal{B}$ em um homomorfismo partindo da álgebra livre RA^+ para $\mathcal{B}$.

Tal qual anéis, álgebras também possuem uma noção de ideal. O ideal é a estrutura necessária para se tomar o quociente de uma álgebra.

Definição 1.22. Seja $\mathcal{A}$ uma R-álgebra. Um ideal à esquerda (à direita) I de $\mathcal{A}$ é um submódulo de $\mathcal{A}$ tal que para $a \in \mathcal{A}$ e $b \in I$, $ab \in I$ ($ba \in I$). Se I for ao mesmo tempo, ideal à direita e à esquerda, I é dito ser um ideal bilateral.

A noção de ideal gerado por um conjunto é importante para entender o que é uma álgebra livre sujeita à relações. Sejam $a, b \in RA^+$. Induzir a relação $a = b$ dentro de RA^+ significa fazer o quociente de RA^+ pelo ideal I gerado pelo elemento $a - b$. Ou seja, significa tomar o quociente RA^+/I.

Mais geralmente, seja Λ um conjunto de índices e sejam $a_i, b_i \in RA^+$ para todo $i \in \Lambda$. Induzir as relações $a_i = b_i$ para todo $i \in \Lambda$ significa tomar o quociente de RA^+ pelo ideal gerado pelo conjunto de relações $\mathcal{R} = \{a_i - b_i \mid i \in \Lambda\}$, isto é, tomar o quociente $RA^+ \big/ \langle \mathcal{R} \rangle$.

Teorema 1.23. Sejam $\mathcal{A}$ uma R-álgebra e $X \subset \mathcal{A}$ e $\langle X \rangle = \bigcap_{X \subset I} \{I \mid I$ é ideal bilateral de $\mathcal{A}\}$ a intersecção de todos os ideais bilaterais de $\mathcal{A}$ que contém X. Então $\langle X \rangle$ é um ideal bilateral de $\mathcal{A}$.

Demonstração. Sejam x_0, $x_1 \in \langle X \rangle$, então x_0, $x_1 \in I$ para I um ideal qualquer que contém X. Como I é ideal, segue que $x_0 + x_1 \in I$, ou seja, $x_0 + x_1 \in I$ para qualquer ideal I que contém X, ou seja, $x_0 + x_1 \in \bigcap_{X \subset I} \{I \mid I$ é ideal bilateral de $\mathcal{A}\} = \langle X \rangle$. Por outro lado, seja $r \in R$, então, do mesmo modo, $rx_0 \in I$ para I um ideal qualquer de A que contém X, segue que rx está na intersecção de todos estes ideais e portanto $rx \in \langle X \rangle$. Portanto $\langle X \rangle$ é fechado pela soma e pela multiplicação por escalar, ou seja, é um submódulo de $\mathcal{A}$. Para concluir que $\langle X \rangle$ é um ideal, resta verificar se $\langle X \rangle$ absorve os elementos de $\mathcal{A}$.

Seja $a \in \mathcal{A}$, então $ax_0 \in I$ para I ideal qualquer que contém X e portanto $ax_0 \in \langle X \rangle$. Analogamente se mostra que $x_0 a \in \langle X \rangle$. Então $\langle X \rangle$ é um ideal bilateral de $\mathcal{A}$. ■

Definição 1.24. Sejam $\mathcal{A}$ uma R-álgebra e $X \subset \mathcal{A}$. O ideal $\langle X \rangle$ é dito **ideal gerado** por X.

O resultado anterior mostra que $\langle X \rangle$ é o menor ideal bilateral que contém X, já que qualquer outro ideal bilateral que contenha X, vai por definição conter $\langle X \rangle$.

É possível definir de maneira explícita o que é o ideal de uma R-álgebra gerado por um conjunto X. Para isto, devem ser introduzidas as notações $RX \coloneqq \{\sum_{i=1}^{n} r_i x_i \mid n \in \mathbb{N}^*$, $r_i \in R$ e $x_i \in X\}$, $\mathcal{A}X \coloneqq \{\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \mid n \in \mathbb{N}^*$, $r_i \in R$ e $x_i \in X\}$. De maneira análoga se definem $X\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}X\mathcal{A}$. Além disso, $RX + \mathcal{A}X + X\mathcal{A} + \mathcal{A}X\mathcal{A} = \{a+b+c+d \mid (a, b, c, d) \in RX \times \mathcal{A}X \times X\mathcal{A} \times \mathcal{A}X\mathcal{A}\}$.

Teorema 1.25. Seja $\mathcal{A}$ uma R-álgebra e $X \subset \mathcal{A}$, então $\langle X \rangle = RX + \mathcal{A}X + X\mathcal{A} + \mathcal{A}X\mathcal{A}$.

Demonstração. Para simplificar a notação, seja $S = RX + AX + XA + AXA$. Vou demonstrar inicialmente que S é um ideal de $\mathcal{A}$. Sejam s_0, $s_1 \in S$, então $s_0 = a_0 + b_0 + c_0 + d_0$ e $s_1 = a_1 + b_1 + c_1 + d_1$ de acordo com a notação dada anteriormente para S. Deste modo $s_0 + s_1 = (a_0 + a_1) + (b_0 + b_1) + (c_0 + c_1) + (d_0 + d_1)$, onde $a_0 + a_1$ é a soma de duas combinações lineares de termos do tipo rx para $r \in R$ e $x \in X$ e portanto a soma $a_0 + a_1$ também é uma combinação linear de termos no tipo rx. Segue que $a_0 + a_1 \in RX$. Por um argumento análogo, se percebe que $a_1 + b_1 \in \mathcal{A}X$, $a_2 + b_2 \in X\mathcal{A}$ e que $a_3 + b_3 \in \mathcal{A}X\mathcal{A}$. Seja $r \in R$, então $rs_0 = ra_0 + rb_0 + rc_0 + rd_0$, onde ra_0 é a combinação linear de termos do tipo $rr_k x_k$ para $r_k \in R$ e $x_k \in X$ e então $ra_0 \in RX$. Do mesmo modo rb_0 é uma soma de termos do tipo $(ra_k)x_k \in \mathcal{A}X$ e portanto $rb_0 \in \mathcal{A}X$. Por argumento análogo se mostra que $rc_0 \in X\mathcal{A}$ e que $rd_0 \in \mathcal{A}X\mathcal{A}$ e deste modo $rs_0 \in S$ então S é submódulo de $\mathcal{A}$.

Seja $a \in \mathcal{A}$, então é necessário verificar que $as_0 = a(a_0 + b_0 + c_0 + d_0) \in S$. Como $a_0 \in RX$, então $a_0 = \sum_{k=1}^{n} r_k x_k$ e portanto $aa_0 = \sum_{k=1}^{n}(r_k a)x_k$, mas $r_k a \in \mathcal{A}$ e portanto aa_0 é uma combinação linear de termos do tipo $a_k x_k$ para $a_k \in \mathcal{A}$, segue que $aa_0 \in AX \subset S$. Do mesmo modo, como $b_0 \in AX$, então ab_0 ainda é uma combinação linear de termos do tipo bx para $b \in \mathcal{A}$ e $x \in X$ e logo $ab_0 \in \mathcal{A}X \subset S$. Como c_0 é uma combinação linear de elementos do tipo xc para $c \in \mathcal{A}$, então ac_0 é uma combinação linear de termos axc e portanto $ac_0 \in \mathcal{A}X\mathcal{A} \subset S$. Por fim, como $d_0 \in \mathcal{A}X\mathcal{A}$, segue que $ad_0 \in \mathcal{A}X\mathcal{A} \subset S$ por argumento análogo ao do b_0. Deste modo $as_0 \in S$ e portanto S é ideal de $\mathcal{A}$ e por argumento análogo se obtém que este ideal é bilateral.

Seja $x \in X$, então como R é um anel com unidade, $x = 1x + 0 + 0 + 0 \in S$, isto é, $X \subset S$. Então S é um ideal que contém X, logo $\langle X \rangle \subset S$. Agora, como $\langle X \rangle$ é um ideal bilateral que contém X, é fechado para somas do tipo rx para $r \in R$ e $x \in X$, então $a_0 \in \langle X \rangle$, é fechado para somas do tipo $a'x$ para $a' \in A$, portanto $b_0 \in \langle X \rangle$ e é fechado por somas do tipo xa', portanto $c_0 \in \langle X \rangle$ e $d_0 \in \langle X \rangle$. Como $\langle X \rangle$ é fechado pela soma, $s_0 = a_0 + b_0 + c_0 + d_0 \in \langle X \rangle$, isto é, $S \subset \langle X \rangle$. Portanto $S = \langle X \rangle$. ■

Observação 1.26. Em particular, para álgebras comutativas com unidade, $\mathcal{A}X = X\mathcal{A} = \mathcal{A}X\mathcal{A}$ e também $r = r \cdot 1_{\mathcal{A}} \in \mathcal{A}$ e segue que $RX \subset \mathcal{A}$ portanto o ideal gerado por X é dado por $\langle X \rangle = \mathcal{A}X$.

Exemplo 1.27. Com o resultado acima, é fica mais fácil calcular explicitamente alguns ideais. Por exemplo, vendo $\mathbb{Z}$ como uma $\mathbb{Z}$-álgebra, então o ideal gerado por $n \in \mathbb{Z}$ é dado por $\langle n \rangle = n\mathbb{Z}$, ou seja, é o conjunto de todos os múltiplos de n.

Observação 1.28. Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ R-álgebras e I um ideal bilateral de $\mathcal{A}$. Todo homomorfismo de R-álgebras $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ induz uma "função" $\tilde{f} : {}^{\mathcal{A}}/_{I} \longrightarrow \mathcal{B}$ onde $\tilde{f}(a + I) = f(a)$. Mas para que $\tilde{f}$ seja uma função, é necessário que $\tilde{f}$ esteja bem definida, isto é, que se $a + I = b + I$ para $a, b \in \mathcal{A}$, então $\tilde{f}(a + I) = \tilde{f}(b + I)$.

Como $a + I = b + I$ se, e somente se, $a - b \in I$ e como, da definição de $\tilde{f}$, $\tilde{f}(a+I) = \tilde{f}(b+I)$ se, e somente se, $f(a-b) = 0$. Sendo $x = a-b$, a boa definição de $\tilde{f}$ é equivalente à

$$x \in I \implies f(x) = 0 \iff I \subset \ker f.$$

Um resultado que vai ser útil posteriormente é a propriedade universal da álgebra sujeita à relações abaixo.

Teorema 1.29 (Propriedade universal da álgebra sujeita à relações)**.** Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ R-álgebras e seja I ideal bilateral de $\mathcal{A}$. Seja $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ homomorfismo de R-álgebras tal que $f(x) = 0$ para todo $x \in I$, então existe um único homomorfismo de R-álgebras $\tilde{f} : {}^{\mathcal{A}}/_{I} \longrightarrow \mathcal{B}$ tal que $\tilde{f}(a + I) = f(a)$ para todo $a \in \mathcal{A}$.

Demonstração. Uma das hipóteses do teorema é justamente de que $I \subset \ker(f)$, portanto a função $\tilde{f} : {}^{\mathcal{A}}/_{I} \longrightarrow \mathcal{B}$ dada por $\tilde{f}(a + I) = f(a)$ é bem definida.

Seguindo para demonstrar que $\tilde{f}$ é um homomorfismo. $\tilde{f}((a+I)+(b+I)) = \tilde{f}(a+b+I) = f(a+b)$, mas como f é um homomorfismo $f(a+b) = f(a)+f(b) = \tilde{f}(a+I)+\tilde{f}(b+I)$, então $\tilde{f}$ respeita a soma. Seja $r \in R$, então $r\tilde{f}(a+I) = rf(a) = f(ra) = \tilde{f}(ra+I)$, então $\tilde{f}$ respeita a multiplicação por escalar. Por fim, $\tilde{f}(a+I)\tilde{f}(b+I) = f(a)f(b) = f(ab) = \tilde{f}(ab+I)$. Então $\tilde{f}$ é, de fato, um homomorfismo.

Seja $\tilde{g} : \mathcal{A}/_I \longrightarrow \mathcal{B}$ um homomorfismo tal que $\tilde{g}(a+I) = f(a)$. Neste caso, $\tilde{g}(a+I) = \tilde{f}(a+I)$ para todo $a \in \mathcal{A}$. Segue que $\tilde{f} = \tilde{g}$ e que existe um único homomorfismo que satisfaz as condições desejadas. ■

Esta propriedade universal, assim como as outras, indica condições necessárias para estender uma função para um homomorfismo de maneira única.

Teorema 1.30. Sejam I e J ideais bilaterais de uma R-álgebra $\mathcal{A}$, então $I+J$ é um ideal bilateral de $\mathcal{A}$ e $I+J = \langle I \cup J\rangle$.

Demonstração. Seja $s_0, s_1 \in I+J$, então $s_0 = i_0 + j_0$ para $i \in I$ e $s_1 = i_1 + j_1$ deste modo $s_0 + s_1 = (i_0+i_1)+(j_0+j_1) \in I+J$, afinal I e J são ideais e portanto são fechados pela soma. Seja $r \in R$, então $rs_0 = ri_0 + rj_0 \in I+J$ pois I e J são fechados pela multiplicação por escalar. Então $I+J$ é um submódulo de $\mathcal{A}$.

Seja $a \in \mathcal{A}$, então $as_0 = ai_0 + aj_0 \in I+J$ já que I e J são fechados pela multiplicação por elementos da álgebra. Analogamente se mostra que $s_0 a \in I+J$ e então $I+J$ é um ideal bilateral de $\mathcal{A}$. Seja $p \in I \cup J$, como todo ideal precisa ter o elemento nulo 0, segue que $p \in I+J$, isto é, $I \cup J \subset I+J$ e portanto $\langle I \cup J\rangle \subset I+J$.

Verificando agora a inclusão no sentido contrário. Considerando $s_0 = i_0 + j_0 \in I+J$, como $\langle I \cup J\rangle$ é o menor ideal que contém $I \cup J$, segue que $i_0, j_0 \in \langle I \cup J\rangle$ e portanto $i_0 + j_0 \in \langle I \cup J\rangle$, ou seja, $I+J \subset \langle I \cup J\rangle$. Segue que $I+J = \langle I \cup J\rangle$. ■

Abaixo segue um resultado análogo, mas desta vez para ideais gerados por conjuntos especificamente.

Teorema 1.31. Sejam X e Y subconjuntos de uma R-álgebra $\mathcal{A}$, então $\langle X \cup Y\rangle = \langle X\rangle + \langle Y\rangle$.

Demonstração. Seja $z \in R(X \cup Y)$, então $z = \sum_{i=1}^{n} r_k z_k$ onde $z_k \in X \cup Y$. Denotando z_k por x_k caso $z_k \in X$ e y_k caso $z_k \in Y$ se percebe que $z = \sum_{i \in I} r_k x_k + \sum_{i \in I'} r_k y_k$ onde I é um subconjunto de $\mathbb{N}_n^*$ no qual $z_k \in X$ e $I' = \mathbb{N}_n^* \setminus I$. Deste modo, $z \in RX + RY$.

Por outro lado, se $z \in RX+RY$, então $z = \sum_{i=1}^{n} r_k x_k + \sum_{j=n+1}^{m} r_k y_k = \sum_{i=1}^{m} r_k z_k$ onde $z_k \in X \cup Y$ e logo $z \in R(X \cup Y)$. Então $R(X \cup Y) = RX + RY$.

Usando o mesmo argumento se nota que $\mathcal{A}(X \cup Y) = \mathcal{A}X + \mathcal{A}Y$, que $(X \cup Y)\mathcal{A} = X\mathcal{A} + Y\mathcal{A}$ e que $\mathcal{A}(X \cup Y)\mathcal{A} = \mathcal{A}X\mathcal{A} + \mathcal{A}Y\mathcal{A}$ e que portanto $\langle X\rangle + \langle Y\rangle = RX + \mathcal{A}X + X\mathcal{A} + \mathcal{A}X\mathcal{A} + RY + \mathcal{A}Y + Y\mathcal{A} + Y\mathcal{A}Y = R(X \cup Y) + \mathcal{A}(X \cup Y) + (X \cup Y)\mathcal{A} + \mathcal{A}(X \cup Y)\mathcal{A} = \langle X \cup Y\rangle$. ■

Teorema 1.32. Sejam I e J ideais bilaterais de uma R-álgebra $\mathcal{A}$ e $\pi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}/_I$ a função projeção, então $\pi(J) = (I + J)/_I$.

Demonstração. Seja $x \in \pi(J)$, então $x = j_x + I$ para algum $j_x \in J$, mas como $i_x + I = 0 + I$ para qualquer $i_x \in I$, segue que $x = (j_x + I) + (i_x + I) = (j_x + i_x) + I \in I + J/_I$ ou seja, $\pi(J) \subset (I + J)/_I$.

Por outro lado, seja $y \in I + J/_I$, então $y = (i_y + j_y) + I$ para $i_y \in I$ e $j_y \in J$, ou seja, $y = (i_y + I) + (j_y + I) = j_y + I = \pi(j_j) \in \pi(J)$, ou seja, $I + J/_I \subset \pi(J)$. Juntando as duas inclusões se conclui que $(I + J)/_I = \pi(J)$. ■

O teorema anterior informa uma outra maneira de visualizar a imagem de um ideal pela projeção. Para finalizar o capítulo, um resultado que vai ser importante posteriormente é o teorema do isomorfismo.

Teorema 1.33. Seja $\mathcal{A}$ uma R-álgebra e sejam I e J ideais bilaterais de $\mathcal{A}$ e $\pi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}/_I$ a projeção. Então $\pi(J)$ é ideal bilateral de $\mathcal{A}/_I$ e

$$\frac{\mathcal{A}/_I}{\pi(J)} = \frac{\mathcal{A}/_I}{(I + J)/_I} \cong \frac{\mathcal{A}}{I + J}.$$

Demonstração. Sejam $p,q \in \pi(J)$, então $p = j_0 + I$ e $q = j_1 + I$ para j_0, $j_1 \in J$ e seja $r \in R$. Deste modo, por J ser um ideal bilateral de $\mathcal{A}$, é fechado pela soma e pela multiplicação por escalar, portanto $p + q = (j_0 + j_1) + I \in \pi(J)$ e $rp = (rj_0) + I \in \pi(J)$. Isto é, $\pi(J)$ é submódulo de $\mathcal{A}/_I$.

Agora, seja $a \in \mathcal{A}$, deste modo $ap = (aj_0 + I) \in \pi(J)$, afinal J também é fechado pela multiplicação por elementos da álgebra. Por um argumento análogo, $pa \in \pi(J)$ e portanto $\pi(J)$ é um ideal bilateral de $\mathcal{A}/_I$.

Agora, vou mostrar que

$$\psi\colon \frac{\mathcal{A}/_I}{\pi(J)} \to \frac{\mathcal{A}}{I + J}$$
$$(a + I) + \pi(J) \mapsto a + (I + J)$$

é um isomorfismo de álgebras. Inicialmente, é necessário verificar a boa definição de ψ. Sejam a, $b \in \mathcal{A}$ tal que $(a + I) + \pi(J) = (b + I) + \pi(J)$, mas isto acontece se, e somente se, $(a+I)-(b+I) = (a-b)+I \in \pi(J)$, isto é, apenas quando $(a-b)+I \in \{j+I \mid j \in J\}$, ou seja, $(a-b)+I = j'+I$ para algum $j' \in J$, o que por sua vez acontece se, e somente se, $a - b - j' \in I$, ou seja, existe $i' \in I$ tal que $a - b - j' = i'$ e portanto $a = b + j' + i'$.

Deste modo dois elementos $(a + I) + \pi(J)$ e $(b + I) + \pi(J)$ de $\frac{\mathcal{A}/_I}{\pi(J)}$ tem a mesma classe apenas quando $a - b - j' \in I$. Nesta situação, $\psi((a + I) + \pi(J)) = \psi(((b + i' - j') + I) + \pi(J)) = (b + i' - j') + (I + J)$ e como $i' \in I$ e $j' \in J$ o termo $i' - j'$ é absorvido pelo ideal $I + J$, ou seja, $\psi((a + I) + \pi(J)) = b + (I + J) = \psi((b + I) + \pi(J))$.

Agora verifica-se que ψ é um homomorfismo de R-álgebras. Sejam a, $b \in \mathcal{A}$, então $\psi(((a+I)+\pi(J))+((b+I)+\pi(J))) = \psi(((a+I)+(b+I))+\pi(J)) = \psi(((a+b)+I)+$

$\pi(J)) = (a+b)+(I+J) = a+(I+J)+b+(I+J) = \psi((a+I)+\pi(J))+\psi((b+I)+\pi(J))$ então ψ preserva a soma. Do mesmo modo, $\psi(((a+I)+\pi(J))((b+I)+\pi(J))) = \psi((a+I)(b+I)+\pi(J)) = \psi((ab+I)+\pi(J)) = ab+(I+J) = (a+(I+J))(b+(I+J))$ e portanto ψ preserva a multiplicação de elementos da álgebra. Por fim, seja $r \in R$, então $\psi(r((a+I)+\pi(J))) = \psi(r(a+I)+\pi(J)) = \psi((ra+I)+\pi(J)) = ra+(I+J) = r(a+(I+J)) = r\psi((a+I)+\pi(J))$ e então ψ preserva a multiplicação por escalar. Segue que ψ é um homomorfismo de R-álgebras.

Resta agora mostrar que ψ é bijetiva. Seja $u \in \frac{\mathcal{A}}{I+J}$, então $u = a+(I+J)$ para algum $a \in A$. Deste modo, $u = \psi((a+I)+\pi(J))$ e portanto ψ é sobrejetiva. A injetividade segue do núcleo de ψ. O núcleo de ψ é o conjunto $\ker\psi = \{x \in \frac{A/I}{\pi(J)} \mid \psi(x) = 0+(I+J)\} = \{(a+I)+\pi(J) \mid a \in \mathcal{A}$ e $a+(I+J) = 0+(I+J)\}$. Como $a+(I+J) = 0+(I+J)$ se, e apenas se, $a \in I+J$, preciso saber quais são as classes $(a+I)+\pi(J)$ com $a = i+j$ para algum $i \in I$ e algum $j \in J$. Se percebe que $((i+j)+I)+\pi(J) = (j+I)+\pi(J)$ e como $j+I \in \pi(J)$, segue que $(j+I)+\pi(J) = (0+I)+\pi(J)$ e deste modo $(a+I)+\pi(J) = (0+I)+\pi(J)$ para todo $a \in I+J$. Recapitulando, $\psi((a+I)+\pi(J)) = a+(I+J) = 0+(I+J)$ se, e somente se $a \in I+J$, mas neste caso $(a+I)+\pi(J) = (0+I)+\pi(J)$ e portanto $\ker\psi = 0$, afinal só existe uma classe que ψ mapeia para o zero. Deste modo ψ é injetivo e portanto ψ é um isomorfismo de R-álgebras. ■

2 ÁLGEBRA DE CAMINHOS (DE LEAVITT)

O objetivo principal deste capítulo é o de apresentar duas definições equivalentes de uma álgebra de caminhos de Leavitt. Para isto serão necessárias outras definições tais como a de um grafo direcionado e uma álgebra de caminhos.

Definição 2.1. Um **grafo direcionado** E é uma quádrupla (E^0, E^1, r, s) onde E^0 é um conjunto de vértices, E^1 um conjunto de arestas tal que $E^0 \cap E^1 = \varnothing$, r e s são funções

$$r, s : E^1 \longrightarrow E^0.$$

chamadas de *range* e *source* respectivamente.

O “caminho"da álgebra de caminhos de Leavitt se refere a um caminho em um grafo direcionado, abaixo seguem algumas definições iniciais.

Definição 2.2. Um **caminho** em um grafo direcionado E é uma sequência de arestas $\mu = e_1 e_2 \cdots e_n$ (isto é, sequência de elementos de E^1) tal que $r(e_i) = s(e_{i+1})$ para $i \in \{1, \cdots, n-1\}$.

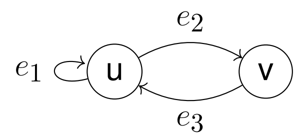
- O tamanho de um caminho μ, denotado por $|\mu|$ é a quantidade de arestas que formam o caminho.
- Vértices são caminhos de comprimento zero e arestas são caminhos de comprimento um.
- É possível definir o source e o range de um caminho. Seja $\rho = f_1 \cdots f_n$ um caminho, então $s(\rho) = s(f_1)$ e $r(\rho) = r(f_n)$. Se v é um vértice, $r(v) = s(v) = v$.
- O conjunto de todos os caminhos de comprimento igual a n no grafo E é denotado por E^n e $path(E) = \bigcup_{n=0}^{\infty} E^n$ é o conjunto de todos os caminhos finitos no grafo E.
- Um caminho infinito é uma sequência infinita de arestas tal que $r(e_i) = s(e_{i+1})$ para todo i.
- Um ciclo no grafo é uma sequência de arestas $e_1 \cdots e_n$ tal que $r(e_n) = s(e_1)$.
- Uma sink no grafo é um vértice v que recebe arestas, mas não emite nenhuma, isto é, $r^{-1}(v) \neq \varnothing$ e $s^{-1}(v) = \varnothing$.

Exemplo 2.3. Seja E um grafo direcionado com $E^0 = \{u, v, w\}$, $E^1 = \{e, f\}$, a função range dada por $r(e) = v$ e $r(f) = w$ e a função source dada por $s(e) = u$ e $s(f) = v$. Este grafo pode ser representado da seguinte maneira

$$\mathrm{u} \xrightarrow{e} \mathrm{v} \xrightarrow{f} \mathrm{w}.$$

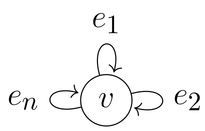
Nesta representação a função r informa para onde uma aresta “vai"e função s informa de onde a aresta “vem". As arestas e e f formam o caminho $\mu = ef$ em E, afinal $r(e) = s(f)$. O caminho μ tem comprimento $|\mu| = 2$.

Exemplo 2.4. Seja E o grafo com $E^0 = \{u, v\}$, $E^1 = \{e_1, e_2, e_3\}$ e onde as funções source e range são dadas por $s(e_1) = r(e_1) = u$, $s(e_2) = u$, $r(e_2) = v$, $s(e_3) = v$ e $r(e_3) = u$ com representação gráfica abaixo



Como a aresta e_1 tem range igual ao source, faz sentido falar no caminho $e_1e_1e_1\cdots$, ou seja, este grafo possui um caminho de tamanho infinito. Outro caminho de tamanho infinito no mesmo grafo é dado por $e_2e_3e_2e_3\cdots$.

Exemplo 2.5. O grafo abaixo é chamado de rosa em n pétalas. O grafo tem um vértice v e n arestas $e_1, \cdots, e_n$. Este grafo resulta em um importante exemplo de álgebra de caminhos de Leavitt como será visto logo mais.



Definição 2.6. Seja $E = (E^0, E^1, s, r)$ um grafo direcionado. A **álgebra de caminhos** sobre um anel comutativo com unidade R, denotada por $P_R(E)$, é a R-álgebra livre $R(E^0 \sqcup E^1)^+$ sujeita às seguintes relações

- (V) $vw = v\delta_{v,w}$ para todo v, $w \in E^0$;
- (E1) $s(e)e = e = er(e)$ para todo $e \in E^1$.

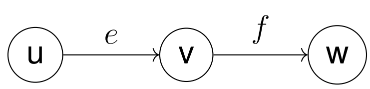
Ou seja,

$$P_R(E) = \frac{R(E^0 \sqcup E^1)^+}{\langle X \rangle}$$

para $X = \{vw - v\delta_{v,w} \mid v, w \in E^0\} \cup \{s(e)e - e \mid e \in E^1\} \cup \{er(e) - e \mid e \in E^1\}$.

Observação 2.7. Vale ressaltar que na definição acima a notação $\delta_{v,w}$ se refere ao delta de Kronecker, onde $\delta_{u,v} = 0$ se $u \neq v$ e $\delta_{u,u} = 1$. O delta de Kronecker difere do δ_a usado anteriormente na definição de álgebra livre que era usado para indexar a soma direta do mesmo anel.

Exemplo 2.8. O grafo do exemplo 2.3



tem base formada pelos elementos $\{u, v, w, e, f, ef\}$ pois estes são os únicos caminhos no grafo, deste modo o grafo E dá origem a um espaço vetorial de dimensão 6. As relações (V) e (E1) implicam que, por exemplo, $uv = vw = 0$, $vv = v$, $ww = w$, $uu = u$, $vf = f = fw$.

Exemplo 2.9. Já os grafos dos exemplos 2.4 e 2.5 dão origem a um espaço vetorial de dimensão infinita. Como já foi mostrado, no exemplo 2.4 é sempre possível concatenar o caminho e_1 infinitas vezes. Mais geralmente, qualquer grafo com pelo menos um loop ou pelo menos um ciclo vai dar origem a uma álgebra de caminhos com dimensão infinita.

Definição 2.10. Um vértice v em um grafo E é dito **regular** se $s^{-1}(v)$ é finito e não vazio. O conjunto de vértices regulares de E é denotado por $Reg(E)$.

Vértices regulares são aqueles que emitem arestas, mas apenas uma quantidade finita.

Exemplo 2.11. No grafo do exemplo 2.3, os vértices e e f são regulares, pois $s^{-1}(u) = \{e\}$ e $s^{-1}(v) = \{f\}$, enquanto w não é um vértice regular, pois $s^{-1}(w) = \varnothing$.

Exemplo 2.12. Seja R_∞ a rosa em infinitas pétalas, então o único vértice v deste grafo não é regular, pois $s^{-1}(v) = E^1$ que é infinito.

Alternativamente, a álgebra de caminhos $P_R(E)$ pode ser definida como o R-módulo livre cuja base é formada pelos caminhos em E e cuja multiplicação de vetores é dado pela concatenação de caminhos da seguinte forma. Sejam $p = p_1 \cdots p_n$ e $q = q_1 \cdots q_m$ caminhos em um grafo, então $p \cdot q = pq$ caso $r(p) = s(q)$ e $p \cdot q = 0$ caso contrário. Em particular, dois caminhos de comprimento nulo concatenam apenas caso sejam o mesmo vértice, isto é, $vv = v$ e $vw = 0$ para todo $v \neq w$, além disso, $s(e)e = e$ e $er(e) = e$, pois ambas as multiplicações resultam em caminhos não nulos e concatenar um caminho de comprimento zero não altera o resultado do caminho original. Estendendo a concatenação bilinearmente nos escalares do anel R se obtém uma álgebra isomorfa a álgebra de caminhos. Para demonstrar este resultado, serão necessários o resultado auxiliar abaixo.

Teorema 2.13. Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ R-álgebras e $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ um homomorfismo de R-álgebras. Então $\ker f = \{a \in \mathcal{A} \mid f(a) = 0\}$ é um ideal bilateral de $\mathcal{A}$.

Demonstração. Primeiramente será demonstrado que $\ker f$ é um submódulo de $\mathcal{A}$. Sejam $a, b \in \ker f$, então $f(a) = f(b) = 0$ e logo $f(a) + f(b) = f(a + b) = 0$. Seja $r \in R$, então $f(ra) = rf(a) = r0 = 0$, então $ra \in \ker f$. Com isto $\ker f$ é um submódulo de $\mathcal{A}$.

Agora, seja $c \in \mathcal{A}$, então $f(ac) = f(a)f(c) = 0f(c) = 0$ e então $ac \in \ker f$. Analogamente, $ca \in \ker f$ e deste modo $\ker f$ é um ideal bilateral de $\mathcal{A}$. ■

Com estes dois resultados em mãos é possível demonstrar a equivalência das duas definições de álgebras de caminhos.

Teorema 2.14. Seja M a R-álgebra livre gerada pelo conjunto $path(E)$ com multiplicação dada pela concatenação de caminhos estendida bilinearmente. Então $M \cong P_R(E)$.

Demonstração. Seja $i : E^0 \cup E^1 \longrightarrow M$ a função inclusão. Pela propriedade universal do semigrupo livre, existe uma única maneira de estender i para um homomorfismo $f : (E^0 \cup E^1)^+ \longrightarrow M$. Esta função mapeia uma palavra nas letras do conjunto $E^0 \cup E^1$ para um caminho com estas letras, isto é, seja $a \in (E^0 \cup E^1)^+$, então $a = a_1 \cdots a_n$ e se define $f(a) = f(a_1 \cdots a_n) = a_1 \cdots a_n$ e se, por exemplo, $r(a_1) \neq s(a_2)$, então $f(a) = a_1 a_2 \cdots a_n = 0$. Pela propriedade universal do módulo livre, f estende unicamente para um homomorfismo de R-módulos $\varphi : R(E^0 \cup E^1)^+ \longrightarrow M$ onde, por construção, $\varphi \mid_{(E^0 \cup E^1)^+}$ homomorfismo de semigrupos e portanto φ preserva a multiplicação dos elementos da base de $R(E^0 \cup E^1)^+$. Por linearidade, segue que φ é homomorfismo de R-álgebras.

Para estender φ para um homomorfismo do quociente $\tilde{\varphi} : R(E^0 \cup E^1)^+ \big/ \langle X \rangle \longrightarrow M$, é necessário calcular o núcleo de φ. De um resultado visto anteriormente, $\ker \varphi$ é um ideal bilateral de $R(E^0 \cup E^1)^+$ e além disso, este ideal contém X, afinal, seja $x \in X$, então para v, $w \in E^0$ e $e \in E^1$, x pode ser escrito como $vv - v$, como vw caso $v \neq w$, como $s(e)e - e$ ou como $er(e) - e$. De modo que $\varphi(vv - v) = \varphi(v)\varphi(v) - \varphi(v) = vv - v = 0$, $\varphi(vw) = vw = 0$ e como $er(e)$ e $s(e)e$ concatenam para o caminho e, $\varphi(er(e) - e) = er(e) - e = 0$ e $\varphi(s(e)e - e) = s(e)e - e = 0$. Ou seja, $x \in X$, então $\varphi(x) = 0$ e portanto $X \subset \ker \varphi$ que, por sua vez, implica que $\langle X \rangle \subset \ker \varphi$. Então $\tilde{\varphi}$ está bem definida. Para mostrar que $\tilde{\varphi}$ é um isomorfismo, é suficiente encontrar um homomorfismo inverso.

Seja $\psi : path(E) \longrightarrow R(E^0 \cup E^1)^+ \big/ \langle X \rangle$ definida por $\psi(q) = q_1 \cdots q_n + I$, isto é, ψ pega um caminho no grafo E e leva para a concatenação das letras do caminho sujeito às relações de impostas por $\langle X \rangle$. Como $path(E)$ é a base do R-módulo livre M, segue que ψ se estende para um único homomorfismo de R-módulos $\tilde{\psi} : M \longrightarrow R(E^0 \cup E^1)^+ \big/ \langle X \rangle$. Sejam p, $q \in path(E)$, então $\tilde{\psi}(pq) = p_1 \cdots p_n q_1 \cdots q_m + \langle X \rangle = (p_1 \cdots p_n + \langle X \rangle)(q_1 \cdots q_m + \langle X \rangle) = \tilde{\psi}(p)\tilde{\psi}(q)$, em particular, se $pq = 0$, então $r(p)s(q) = 0$ e neste caso, $p_1 \cdots p_n q_1 \cdots q_m + I = 0 + I = \tilde{\psi}(0)$.

Agora, seja $a \in R(E^0 \cup E^1)^+$, então $a = \sum_{k=1}^n r_k q_k$ onde $q_k \in (E^0 \cup E^1)^+$ e portanto $\tilde{\psi}(\tilde{\varphi}(a + I)) = \tilde{\psi}(\varphi(a))$. Relembrando que $\varphi(a) = \sum_{k=1}^n r_k f(q_k) = \sum_{k=1}^n r_k q_k$. Deste modo, $\tilde{\psi}(\sum_{k=1}^n r_k q_k) = \sum_{k=1}^n r_k \psi(q_k) = \sum_{k=1}^n r_k(q_k + I) = (\sum_{k=1}^n r_k q_k) + I$.

Por outro lado, seja $m \in M$, então $m = \sum_{k=1}^n s_k p_k$, onde $p_k \in path(E)$. Então $\tilde{\psi}(m) = \sum_{k=1}^n s_k \psi(q_k) = \sum_{k=1}^n s_k(q_k + \langle X \rangle)$ e portanto $\tilde{\varphi}(\tilde{\psi}(m)) = \tilde{\varphi}(\sum_{k=1}^n s_k(q_k + \langle X \rangle)) = \sum_{k=1}^n s_k \tilde{\varphi}(p_k + \langle X \rangle) = \sum_{k=1}^n s_k p_k = m$. Deste modo $\tilde{\psi}$ é um homomorfismo de R-álgebras que é o inverso de $\tilde{\varphi}$. Deste modo $\tilde{\varphi}$ é um isomorfismo de R-álgebras que é o que ser queria demonstrar.

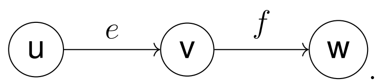
■

Agora já se tem a definição de uma álgebra de caminhos, mas uma álgebra de caminhos de Leavitt demanda um pouco mais de estrutura tal qual a estrutura de um grafo estendido.

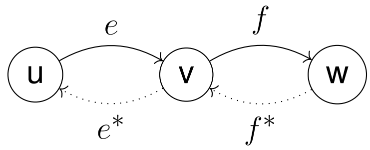
Definição 2.15. Seja $E = (E^0, E^1, r, s)$ um grafo direcionado. O grafo estendido de E, denotado por $\hat{E}$ é o grafo formado pela quádrupla $(E^0, E^1 \sqcup (E^1)^*, \hat{r}, \hat{s})$ onde $(E^1)^* = \{e^* \mid e \in E^1\}$ é o conjunto de arestas fantasma e as funções $\hat{r}$ e $\hat{s}$ são dadas por

$$\begin{aligned} \hat{r} \colon E^1 \sqcup (E^1)^* &\to E^0 \\ e &\mapsto r(e) \\ e^* &\mapsto s(e) \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \hat{s} \colon E^1 \sqcup (E^1)^* &\to E^0 \\ e &\mapsto s(e) \\ e^* &\mapsto r(e). \end{aligned}$$

Exemplo 2.16. Seja E o grafo direcionado abaixo



É possível estender E adicionando as arestas e^* e f^* (chamadas de arestas fantasma) que possuem o range e o source invertidos com relação as arestas originais. Tal grafo estendido é mostrado abaixo.



Observação 2.17. Para simplificar a notação, as funções $\hat{r}$ e $\hat{s}$ serão denotadas por r e s respectivamente.

Observação 2.18. Para que a relação (E1) seja estendida para $\hat{E}$ é necessário acrescentar a seguinte relação (E2) para todo $e \in E^1$

$$r(e)e^* = e^*s(e) = e^*.$$

Para a construção da álgebra de caminhos de Leavitt será necessária a utilização das relações abaixo em um grafo E

- (CK1) $e^*f = r(e)\delta_{e,f}$ para todo $e, f \in E^1$
- (CK2) $v = \sum_{e \in s^{-1}(v)} ee^*$ para todo $v \in Reg(E)$.

Observação 2.19. Na relação (CK1), o $\delta_{e,f}$ também se trata do delta de Kronecker.

Dadas todas estas definições prévias, é possível construir a álgebra de caminhos de Leavitt.

Definição 2.20. Seja R um anel com unidade e E um grafo. A **álgebra de caminhos de Leavitt** do grafo E sobre R, denotada por $L_R(E)$ é a R-álgebra livre gerada pelo conjunto $E^0 \cup E^1 \cup (E^1)^*$ sujeita às relações (V), (E1), (E2), (CK1) e (CK2), isto é,

$$L_R(E) = \frac{R(E^0 \cup E^1 \cup (E^1)^*)^+}{\langle X \cup Y \rangle}$$

onde X é o conjunto com as relações (V) e (E1) e Y é o conjunto com as relações (E2), (CK1) e (CK2).

Assim como na definição de álgebra de caminhos, a álgebra de caminho de Leavitt pode ser definida alternativamente como a álgebra de caminhos no grafo estendido sujeita às relações (E2), (CK1) e (CK2). A demonstração segue no teorema abaixo.

Teorema 2.21. Seja E um grafo direcionado e R um anel com unidade, então $L_R(E) \cong P_R(\hat{E}) \big/ \pi(\langle Y \rangle)$.

Demonstração. Para simplificar a notação, nesta demonstração denotarei $R(E^0 \cup E^1 \cup (E^1)^*)^+$ por $R\hat{E}$. Do teorema 1.31, $\langle X \cup Y \rangle = \langle X \rangle + \langle Y \rangle$ e portanto

$$\frac{R\hat{E}}{\langle X \cup Y \rangle} = \frac{R\hat{E}}{\langle X \rangle + \langle Y \rangle}.$$

Do teorema 1.32, $\langle X \rangle + \langle Y \rangle \big/ \langle X \rangle = \pi(\langle Y \rangle)$ e do teorema 1.33 seguem que,

$$\frac{R\hat{E}}{\langle X \rangle + \langle Y \rangle} \cong \frac{R\hat{E} \big/ \langle X \rangle}{\langle X \rangle + \langle Y \rangle \big/ \langle X \rangle} = \frac{P_R(\hat{E})}{\pi(\langle Y \rangle)}.$$

■

Teorema 2.22. Seja E um grafo com uma quantidade finita de vértices, então $L_R(E)$ é unitária com unidade sendo a soma de todos os vértices.

Demonstração. Seja $s = \sum_{i=1}^{n} v_i$ a soma de todos os vértices de E, então $spq^* = \sum_{i=1}^{n} v_i pq^*$, mas $v_i pq^* = pq^*$ caso $s(p) = v_i$ e $v_i pq^*$ é nulo caso contrário, deste modo, $\sum_{i=1}^{n} v_i pq^* = pq^*$. Analogamente, $pq^*s = \sum_{i=1}^{n} pq^* v_i$ onde $pq^* v_i = pq^*$ caso $s(q) = v_i$ e $pq^* v_i$ é nulo caso contrário, segue que $\sum_{i=1}^{n} pq^* v_i = pq^*$ de modo que $spq^* = pq^* = pq^* s$.

Como todo elemento de $L_R(E)$ é escrito como uma combinação linear de termos do tipo pq^* para $p, q \in path(E)$, segue que s é a unidade da álgebra. ■

Mesmo que nem todas as álgebras de caminhos de Leavitt sejam unitárias, todas tem unidades locais.

Teorema 2.23. Seja E um grafo qualquer, então $L_R(E)$ é uma álgebra com unidades locais, isto é, dados $x, y \in L_R(E)$, existe $u \in L_R(E)$ tal que $xu = ux = x$ e $yu = uy = y$.

Demonstração. Sejam x, $y \in L_R(E)$, então x e y são combinações lineares de caminhos em E, isto é, $x = \sum_{k=1}^{n} r_k q_k$ e $y = \sum_{j=1}^{m} s_j p_j$ para r_k, $s_j \in R$ e q_k, $p_j \in path(E) \cup path(E)^*$ onde $path(E)^*$ é o conjunto dos caminhos fantasma. Seja $C_{x,y} = \{s(q_k), r(q_k), s(p_j), r(p_J) \mid k = 1, \cdots, n$ e $j \in 1, \cdots, m\}$. Definindo $u = \sum_{v \in C_{x,y}} v$ e usando um argumento análogo ao teorema acima, se obtém que $xu = ux = x$ e que $uy = yu = y$. ■

Uma das motivações para se estudar álgebras de caminhos de Leavitt vem do fato de que muitas álgebras conhecidas surgem como exemplos de álgebras de caminhos de Leavitt. Abaixo seguem alguns exemplos que demonstram este fato.

Exemplo 2.24. Em livros e artigos sobre álgebras de caminhos de Leavitt, um exemplo recorrente de álgebras de caminhos de Leavitt surge a partir de anéis não IBN.

Um anel com unidade R é dito ter a propriedade do *invariant basis number* (ou é dito ser IBN) se para quaisquer n, $m \in \mathbb{N}$, $R^m \cong R^n$ implicar que $m = n$. Vendo R^n e R^m como R-módulos livres, um anel é dito ser IBN se dois R-módulos livres são isomorfos se, e somente se, as bases destes R-módulos tem a mesma cardinalidade.

Seja R um anel não IBN, então $R^n \cong R^m$ para algum n, $m \in \mathbb{N}$ com $n > m$ e deste modo, R é dito ter *módulo tipo* (m, n). Em particular, neste exemplo serão tratados sobre módulos do tipo $(1, n)$, isto é, anéis para o qual $R^n \cong R$.

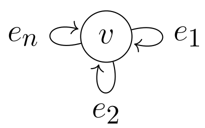
Seja R um anel de módulo tipo $(1, n)$, então R tem uma base com um elemento $\{1_R\}$, afinal R tem unidade e R tem uma base $\{e_1, \cdots, e_n\}$. Como $R \cong R^n$, existem isomorfismos $\phi : R \longrightarrow R^n$ e $\psi : R^n \longrightarrow R$ tal que $\phi \circ \psi = 1_{R^n}$ e $\psi \circ \phi = 1_R$. Sejam $x_1, \cdots, x_n \in R$ tais que $\phi(1_R) = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$ e sejam $y_1, \cdots, y_n \in R$ tais que $\psi(e_i) = y_i$. Deste modo, $\phi(\psi(e_i)) = \phi(y_i) = y_i \phi(1) = y_i x_1 e_1 + \cdots y_i x_n e_n = e_i$, ou seja, $y_i x_j = \delta_{i,j} 1_R$. Por outro lado, $\psi(\phi(1_R)) = \psi(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \psi(e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 1_R$.

Deste modo, se $R \cong R^n$ devem existir elementos $x_1, \cdots, x_n$ e $y_1, \cdots, y_n$ de tal modo que $y_i x_j = \delta_{i,j} 1_R$ e $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 1_R$. Tomando isto como base, se define a álgebra de Leavitt $L(1, n)$ do seguinte modo

$$L_S(1, n) = \frac{S(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n)}{I}$$

onde I é o ideal gerado pelas relações $y_i x_j = \delta_{i,j} 1$ e $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 1$ onde S é um anel com unidade. Por construção $L_S(1, n) \cong L_S(1, n)^n$ como S-módulos.

Para $n \geq 2$, seja R_n o grafo abaixo, chamado de rosa em n-pétalas.



Seja $f : E^0 \cup E^1 \cup (E^1)^* \longrightarrow L_R(1, n)$ onde $f(v) = 1$, $v(e_i) = x_i$ e $f(e_i^*) = y_i$. Considerando a função f, o ideal I é igual ao ideal gerado pelas relações (CK1) e (CK2). A relação (V), dentro de R_n se reduz a $vv = v$ e as relações (E1) e (E2) se reduzem a $ev = ve = e$, ou seja, as relações (V), (E1) e (E2) implicam que v é a unidade de $L_R(R_n)$. Deste modo, ambas as álgebras podem ser vistas como álgebras livres geradas por $2n$ elementos que estão sujeitas as mesmas relações e portanto são isomorfas, ou seja, $L_R(R_n) \cong L(1, n)$ e deste modo, $L_R(R_n) \cong L_R(R_n)^n$.

Exemplo 2.25. Considerando o exemplo anterior, é natural perguntar o que acontece com a álgebra de caminhos de Leavitt do grafo R_1. A álgebra $L_R(R_1)$ vai ser gerada pelo conjunto $G = \{v, e, e^*, ee, e^*e^*, eee, e^*e^*e^*, \cdots\}$. Seja $f : G \longrightarrow R[x, x^{-1}]$ onde $f(v) = 1$, $f(e^n) = x^n$ e $f((e^*)^n) = x^{-1}$ para $e^n = e \cdots e$ a concatenação de e com e n vezes e $(e^*)^n$ a concatenação de e^* com e^* n vezes. Esta função se estende para um isomorfismo de R-álgebras e portanto $L_R(R_1) \cong R[x, x^{-1}]$.

Exemplo 2.26. Seja E um grafo com finitas arestas e finitos vértices onde nenhum ciclo tem saída. É dado em (VAŠ, 2022, pg 9) que se o grafo tem n sinks $v_1, \cdots, v_n$ com k_i caminhos acabando em v_i e tem m ciclos $c_1, \cdots, c_m$ com l_i caminhos acabando em algum vértice de c_i de modo que o caminho não contém o ciclo, então $L_K(E) \cong \bigoplus_{i=1}^n M_{k_i}(K) \oplus \bigoplus_{i=1}^m M_{l_i}(K[x, x^{-1}])$ para K um corpo.

Seja E o grafo

$$\begin{tikzcd} u \arrow[r, "e"] & v \arrow[r, "f"] & w \end{tikzcd}.$$

E tem uma única sink, que é w e possui 3 caminhos acabando em w que são, w, v e uv, então $n = 1$ e $k_i = 3$. Este grafo não possui nenhum ciclo, logo $m = 0$ e portanto a fórmula acima indica que $L_K(E) \cong M_3(K)$.

3 MONOIDES E GRADUAÇÕES

A conjectura de classificação de álgebras de caminhos de Leavitt vai evoluir a partir de construções algébricas envolvendo monoides e posteriormente uma teoria de graduação. Os objetivos principais deste capítulo são o de apresentar o grupo K_0 e de mostrar que toda álgebra de caminhos de Leavitt é $\mathbb{Z}$-graduada.

Definição 3.1. Um **monoide** é um semigrupo $(M, \cdot)$ com um elemento identidade.

Definição 3.2. Se a operação do monoide for comutativa, o monoide é dito comutativo.

Exemplo 3.3. O conjunto dos naturais $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \cdots\}$ forma um monoide com a operação usual de soma. Tal monoide é comutativo.

Exemplo 3.4. Todo grupo tem uma operação com identidade, associativa e com elementos inversos, então todo grupo é também um monoide.

Teorema 3.5. Seja $A^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} A^n$ onde $A^0 = \{\varepsilon\}$ é visto como a palavra vazia, então é A^* um monoide com a concatenação de palavras.

Demonstração. A associatividade de A^* segue de um argumento análogo ao dado na demonstração do teorema 1.5, restando apenas verificar a existência do elemento identidade. Seja $a \in A^*$, denotando a palavra vazia A^0 por ε, então $a\varepsilon = \varepsilon a = a$, então A^* é, de fato, um monoide. ■

Definição 3.6. O monoide $A^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} A^n$ do teorema acima é chamado de **monoide livre** gerado pelo conjunto A.

Esta definição deve ser vista como um análogo da definição 1.3 de semigrupo livre, com a diferença que aqui $A^0 = \{\varepsilon\}$ é a palavra vazia. Na notação do teorema 1.3, $A^* = \{\varepsilon\} \cup A^+$.

Exemplo 3.7. Seja $A = \{0, 1\}$, então monoide livre gerado por A é dado por $A^* = \{\varepsilon, 0, 1, 00, 01, 10, 11, \cdots\}$.

Definição 3.8. Sejam $(M, +)$ e $(N, \cdot)$ monoides com identidades e_M e e_N respectivamente. Uma função $f : M \longrightarrow N$ é dito um homomorfismo de monoides se para todo $a, b \in M$, $f(a + b) = f(a) \cdot f(b)$ e se $f(e_M) = e_N$.

Todo objeto livre satisfaz alguma propriedade universal, neste caso particular, o monoide livre precisa satisfazer a a propriedade universal de monoides livres.

Teorema 3.9 (Propriedade Universal de Monoides Livres)**.** Sejam A um conjunto, M um monoide e $f : A \longrightarrow M$ uma função. Existe um único homomorfismo de monoides

$\tilde{f} : A^* \longrightarrow M$ tal que $\tilde{f}(a) = f(a)$ para todo $a \in A$. Isto é, o seguinte diagrama comuta para $i^* : A \longrightarrow A^*$ a função inclusão.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "i^*"'] & M \\ & A^* \arrow[u, dotted, "\tilde{f}"'] \end{tikzcd}$$

Observação 3.10. Antes de demonstrar o teorema, é necessária realizar uma pequena observação. Sejam M e N monoides quaisquer, então o conjunto $\hom(M, N)$ dos homomorfismos de monoides entre M e N não é vazio, afinal sempre existe o homomorfismo $z : M \longrightarrow N$ dado por $z(m) = e_N$ para todo $m \in M$. Tal função é homomorfismo, afinal $z(e_M) = e_N$ e $z(m + m') = e_N = z(m) + z(m')$ para todo m, $m' \in M$.

Demonstração. Com base na observação acima, existe um pelo menos um homomorfismo de monoides $\tilde{f} : A^* \longrightarrow M$. Seja $a^* \in A^*$, então a^* é a concatenação de elementos de A, isto é, $a^* = a_1 \cdots a_n$ onde $a_i \in A$ para todo i. Deste modo, $\tilde{f}(a^*) = \tilde{f}(a_1) \cdots \tilde{f}(a_n)$ caso a^* seja uma palavra de comprimento positivo. Como a única palavra de comprimento nulo é ε que é a identidade de A^*, tal elemento é mapeado no zero do monoide M, isto é, $\tilde{f}(\varepsilon) = e_M$.

Isto significa que qualquer homomorfismo φ de A^* para M é determinado pelos elementos $\varphi(a)$ onde $a \in A$. Escolhendo $\tilde{f}(a) = f(a)$ para todo $a \in A$, tem-se o homomorfismo $\tilde{f}$ dado por $\tilde{f}(a^*) = \tilde{f}(a_1) \cdots \tilde{f}(a_n) = f(a_1) \cdots f(a_n)$ e deste modo, $\tilde{f} \circ i^* = f$.

Resta agora, verificar a unicidade. Se $\tilde{g} : A^* \longrightarrow M$ é um homomorfismo de monoides tal que $\tilde{g}\mid_A = \tilde{g} \circ i^* = f$, então $\tilde{g}(a) = f(a)$ para todo $a \in A$ e portanto $\tilde{g}$ precisa ser igual a $\tilde{f}$. ■

Mais a frente será encontrada a definição do monoide M_E que é um monoide livre sujeito à relações e para saber o que isto significa é necessário estudar um pouco sobre relações binárias em monoides.

Definição 3.11. Uma congruência em um monoide $(M, \cdot)$ é uma relação de equivalência $\sim$ em M onde $a \sim b$ implica que $a \cdot c \sim b \cdot c$ para todo $c \in M$.

A definição de congruência é necessária para o monoide quociente tal qual definido abaixo.

Teorema 3.12. Seja $(M, +)$ um monoide e $\sim$ uma relação de congruência em M, então o quociente ${}^{M}/_{\sim} = \{[x] \mid x \in M\}$ é um monoide com soma dada por $[x] + [y] = [x + y]$.

Demonstração. Primeiramente é necessário verificar a boa definição da soma, isto é, se $[x] = [a]$ e $[y] = [b]$, então $[x] + [y] = [a] + [b]$. Como $[x] = [a]$, segue que $x \sim a$ e como a relação é de congruência, segue que $x + y \sim a + y$, por outro lado, como $y \sim b$, $a + y \sim a + b$ e portanto $x + y \sim a + b$ de onde segue que $[x + y] = [a + b]$ e portanto $[x] + [y] = [a] + [b]$ e a soma está bem definida.

O elemento neutro de $M/_{\sim}$ é dado por $[0]$ onde 0 é o elemento neutro do monoide, afinal $[x] + [0] = [x + 0] = [x]$ e $[0] + [x] = [0 + x] = [x]$.

A soma é associativa, afinal $[x] + ([y] + [z]) = [x] + [y + z] = [x + (y + z)]$ e como a soma do monoide é associativa, $x + (y + z) = (x + y) + z$ e portanto $[x + (y + z)] = [(x + y) + z]$ que, por sua vez $[(x + y) + z] = [x + y] + [z] = ([x] + [y]) + [z]$. Ou seja, $[x] + ([y] + [z]) = ([x] + [y]) + [z]$. ∎

Definição 3.13. Seja R uma relação binária no monoide livre M^*. O **fecho simétrico** de R, denotado por $R \cup R^{-1}$ é a menor relação de equivalência em M^* que contém R e que é uma relação simétrica. Analogamente se define o fecho transitivo e o fecho reflexivo.

Teorema 3.14. Seja R uma relação binária em M^*. Seja $E \subset M^* \times M^*$ uma relação binária onde $x \sim_E y$, se e somente, se $x = sut$ e $y = svt$ para $u, v, s, t \in M^*$ com $(u, v) \in R \cup R^{-1}$. Então E é uma relação simétrica.

Demonstração. Sejam x, $y \in M^*$ de modo que $x \sim_E y$, então existem s, t, u e $v \in M^*$ com u, $v \in R \cup R^{-1}$ de modo que $x = sut$ e $y = svt$.

Agora, $y \sim_E x$ se, e somente se exitem elementos a, b, w, $z \in M^*$ com w, $z \in M^*$ tal que $y = awb$ e $x = azb$. Tomando $a = s$, $t = b$, $w = v$ e $z = u$ se recupera a relação $x \sim_E y$. Deste modo a relação E é simétrica. ∎

Teorema 3.15. Seja E como no teorema acima então tomando o fecho transitivo e o fecho reflexivo de E se tem que $M^* \Big/ \sim_E$ é uma relação de congruência.

Demonstração. A relação $\sim_E$ é de equivalência pois como visto no teorema acima é uma relação reflexiva e tomando o fecho transitivo e o fecho reflexivo se tem uma relação de equivalência.

Sejam x, y e $a \in M^*$ de modo que $x \sim_E y$, isto é, existem s, t, u, $v \in M^*$ com u, $v \in R \cup R^{-1}$ de modo que $x = sut$ e $y = svt$ e portanto $ax = asut$ e $ay = asvt$ de modo que $ax \sim_E ay$. Do mesmo modo se tem que $xa \sim ya$ e então $\sim_E$ é uma relação de congruência. ∎

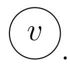
Definição 3.16. Seja $\overline{E}$ o fecho transitivo e reflexivo de E assim como no teorema acima, então o monoide quociente $M^* \Big/ \sim_{\overline{E}}$ é dito a **apresentação do monoide** por geradores e relações e é denotado por $\langle M \mid R \rangle$.

Com isto se consegue definir o monoide quociente a partir de uma relação binária qualquer no monoide livre.

Definição 3.17. Seja E um grafo direcionado e seja R a relação binária em E^0 onde $[v] = \sum_{e \in s^{-1}(v)} [r(e)]$ para todo vértice $v \in E^0$ regular e onde $[u] + [v] = [v] + [u]$ para todos os vértices u e v do grafo. Então $M_E = \langle E^0 \mid R \rangle$.

O estudo de monoides feito até o momento foi para chegar na definição acima. O monoide M_E é o monoide abeliano livre gerado pelos vértices do grafo E sujeito às relações $[v] = \sum_{e \in s^{-1}(v)} [r(e)]$ para todo vértice regular $v \in Reg(E)$.

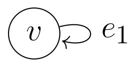
Exemplo 3.18. Seja R_0 o grafo abaixo com um vértice e nenhuma aresta



Então o único vértice do grafo não é regular, afinal não emite nenhuma aresta. Deste modo M_{R_0} é o monoide abeliano livre sem estar sujeito a nenhuma relação, isto é, $M_{R_0} = \{0, [v], [v] + [v], [v] + [v] + [v], \cdots \}$.

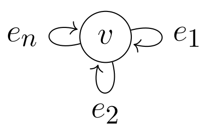
Seja $f : \mathbb{N} \longrightarrow M_{R_0}$ a função definida por $f(n) = n[v]$, onde $n[v]$ é a soma de $[v]$ n vezes. Esta função é um isomorfismo de monoides já que é bijetiva e $f(n + m) = (n + m)[v] = n[v] + m[v] = f(n) + f(m)$ e portanto $M_E \cong \mathbb{N}$.

Exemplo 3.19. A rosa em uma pétala R_1



tem o monoide M_{R_1} gerado pela relação $[v] = \sum_{e \in s^{-1}(v)} [r(e)] = \sum_{e \in s^{-1}(v)} [v]$ e como $s^{-1}(v) = \{e_1\}$, segue que M_{R_1} é o monoide livre gerado pelo vértice $[v]$ sujeito à relação $[v] = [v]$. Como esta relação é trivialmente verdadeira, pelo mesmo argumento do exemplo anterior, $M_{R_1} \cong M_{R_0} \cong \mathbb{N}$.

Exemplo 3.20. A rosa em n pétalas para $n \geq 2$



tem o monoide livre gerado pelo vértice v sujeito à relação $[v] = \sum_{e \in s^{-1}(v)} [r(e)]$. Como v emite n vértices, todos com o mesmo range, se tem que $[v] = \sum_{i=1}^{n} [v] = n[v]$ e portanto $M_{R_n} = \{0, [v], 2[v], \cdots (n - 1)[v]\}$.

Por exemplo, para $n = 5$, $M_{R_5} = \{0, [v], 2[v], 3[v], 4[v]\}$. Aqui $3[v] + 4[v] = 7[v] = 2[v] + 5[v] = 3[v]$, afinal $5[v] = [v]$. Igualmente, $2[v] + 4[v] = 6[v] = [v] + 5[v] = [v] + [v] = 2[v]$ e do mesmo modo, $[v] + 4[v] = [v]$ e portanto $4[v]$ é quase uma identidade aditiva, afinal $m[v] + 4[v] = m[v]$ para todo $m \neq 0$.

Vale a pena observar que o monoide não é cancelativo, afinal $(n - 1)[v] + [v] = n[v] = [v] = 0[v] + [v]$, ou seja, $(n - 1)[v] + [v] = 0[v] + [v]$, porém $(n - 1)[v] \neq 0[v]$.

Definição 3.21. Seja R um anel com unidade, então $\mathcal{V}(R)$ é o conjunto das classes de isomorfismo de R-módulos projetivos finitamente gerados.

Teorema 3.22. O conjunto $\mathcal{V}(R)$ tem estrutura de monoide comutativo com a operação $[P] + [Q] \coloneqq [P \oplus Q]$.

Demonstração. Sejam $[P]$, $[Q]$, $[S] \in \mathcal{V}$, então $([P]+[Q])+[S] = [P\oplus Q]+[S] = [(P\oplus Q)\oplus S]$, mas $(P\oplus Q)\oplus S \cong P\oplus(Q\oplus S)$, então $[(P\oplus Q)\oplus S] = [P\oplus(Q\oplus S)] = [P]+([Q]+[S])$, portanto $\mathcal{V}(R)$ forma um semigrupo com a soma direta. O módulo trivial, denotado por 0, é projetivo, afinal para qualquer módulo livre F, $F \cong F \oplus 0$ e é finitamente gerado pelo conjunto vazio, então $\mathcal{V}(R)$ é um monoide.

Resta verificar a comutatividade. Como $P \oplus Q \cong Q \oplus P$, segue que $[P] + [Q] = [P \oplus Q] = [Q \oplus P] = [Q] + [P]$. ■

Exemplo 3.23. Um dos poucos exemplos de anéis cujo cálculo do monoide $\mathcal{V}$ é razoável é de um corpo.

Seja K um corpo, então todo K-módulo projetivo finitamente gerado é um K-espaço vetorial de dimensão finita. Isto é, $\mathcal{V}(K) = \{[P] \mid P$ é um K-espaço vetorial de dimensão finita $\}$ e como um espaço vetorial é classificado a menos de isomorfismo pela dimensão, segue que $\mathcal{V}(K) = \{0, 1, 2 \cdots\} = \mathbb{N}$.

Teorema 3.24. Seja E um grafo e K um corpo, então $M_E \cong \mathcal{V}(L_K(E))$.

A demonstração deste teorema, que envolve alguns conceitos categóricos, pode ser encontrada em (ABRAMS; ARA; SILES MOLINA, 2017, pg 78)

Dado um monoide comutativo M, surge a pergunta de como estender M para um grupo abeliano, um possível modo de fazer isto é através da construção do grupo de Grothendieck. Antes de passar para a definição, é necessário considerar a relação de equivalência abaixo.

Teorema 3.25. Seja M um monoide comutativo. A relação $\sim$ em $M \times M$ dada por $(a, b) \sim (c, d)$ se, e somente se, existe $m \in M$ tal que $a + d + m = b + c + m$, é uma relação de equivalência.

Demonstração. Esta relação é reflexiva, afinal $0 \in M$ e $a + b + 0 = a + b + 0$, logo $(a, b) \sim (a, b)$.
Se $(a, b) \sim (c, d)$, então existe $m \in M$ tal que $a+d+m = b+c+m$ e logo $(c, d) \sim (a, b)$.
Por fim, basta verificar a transitividade. Se $(a, b) \sim (c, d)$ e $(c, d) \sim (e, f)$, então existem m e $n \in M$ tal que $a + d + m = b + c + m$ e $c + f + n = d + e + n$, então somado estas duas igualdades, $(a + d + m) + (c + f + n) = (b + c + m) + (d + e + n)$. Seja $p = c + d + n + m \in M$, logo $a + f + p = b + e + p$ e então $(a, b) \sim (e, f)$. ■

Definição 3.26. Seja M um monoide comutativo e seja $\sim$ a relação de equivalência em $M\times M$ dada por $(a, b) \sim (c, d)$ se, e somente se, existe $m \in M$ tal que $a+d+m = b+c+m$

do teorema anterior. O **grupo de Grothendieck** de M, denotado por $G(M)$ é definido como $(M \times M)/_{\sim}$.

Exemplo 3.27. A construção do grupo de Grothendieck é mais geral que a construção dos inteiros a partir dos naturais, de modo que $G(\mathbb{N}) \cong \mathbb{Z}$.

Teorema 3.28. Seja M um monoide comutativo, então $G(M)$ é um grupo abeliano com a operação de soma dada por $[a,b]+[c,d]=[a+c,b+d]$.

Demonstração. Antes de qualquer coisa é necessário verificar se a soma como dado no enunciado do teorema está bem definida, ou seja, se $[a,b]=[a',b']$ e $[c,d]=[c',d']$, então $[a+c,b+d]=[a'+c',b'+d']$.

Se $[a,b]=[a',b']$, então existe $m \in M$ tal que $a+b'+m=a'+b+m$ e se $[c,d]=[c',d']$ então existe $n \in M$ tal que $c+d'+n=c'+d+n$. Somando estas duas igualdades, $a+b'+c+d+m+n=a'+b+c'+d+m+n$, ou seja, $[a+c,b+d]=[a'+c',b'+d']$, afinal existe $m+n \in M$ tal que as duas classes são iguais.

Sejam $[a,b]$, $[c,d]$ e $[e,f] \in G(M)$, então $[a,b]+([c,d]+[e,f])=[a,b]+[c+e,d+f]=[a+(c+e),b+(d+f)]=[(a+c)+e,(b+d)+f]=([a,b]+[c,d])+[e,f]$, então a soma é associativa.

O elemento identidade de $G(M)$ é dado por $[0,0]$, afinal $[a,b]+[0,0]=[a+0,b+0]=[a,b]$ e o elemento inverso de $[a,b]$ é dado por $[b,a]$, afinal, $[a,b]+[b,a]=[a+b,a+b]$, mas como $(a+b,a+b) \sim (0,0)$, segue que $[a,b]+[b,a]=[0,0]$.

Então $G(M)$ é um grupo e resta apenas verificar que este grupo é abeliano. Sejam $[a,b]$, $[c,d] \in G(M)$, então $[a,b]+[c,d]=[a+c,b+d]=[c+a,d+b]=[c,d]+[a,b]$. ■

Para que o grupo de Grothendieck seja um bom modo de se estender um monoide, é esperado que tenha algumas boas propriedades, por exemplo, se H é um grupo, então $G(H)$ continue sendo isomorfo à H, exatamente isto acontece.

Teorema 3.29. Seja M um monoide comutativo, então M é um grupo se, e somente se, $G(M) \cong M$.

Demonstração. ($\longrightarrow$) Seja M um grupo e $\varphi : M \longrightarrow G(M)$ uma função onde $\varphi(g)=[g,0]$. Tal função é um homomorfismo de grupos, afinal, $\varphi(g+h)=[g+h,0]=[g,0]+[h,0]=\varphi(g)+\varphi(h)$. Além disso, $\varphi(g)=0$, se e somente se, existe $m \in M$ tal que $g+m=0+m$, mas como M é um grupo, tem inverso e portanto $g+m=0+m$ se, e somente se, $g=0$, segue que φ é injetivo. Agora, seja $[a,b] \in G(M)$, por se tratar de um grupo, todo elemento é inversível e neste caso, $\varphi(-b+a)=[-b+a,0]=[a,b]$ e então φ é sobrejetivo. Segue que $G(M) \cong M$.

($\longleftarrow$) Se $G(M) \cong M$ como monoides, então existe um isomorfismo de monoides $\psi : M \longrightarrow G(M)$. Sendo $G(M)$ um grupo, todo elemento tem inverso, isto é, dado

$g \in G(M)$, existe $g' \in G(M)$ tal que $g+g' = 0$ e deste modo, por ψ ser uma sobrejeção, existem m, $m' \in M$ tal que $\psi(m) = g$ e $\psi(m') = g'$ e tais elementos m e m' são únicos, de onde segue que $\psi(m) + \psi(m') = \psi(m + m') = 0 = \psi(0)$. Isto por sua vez, implica que $m + m' = 0$, afinal ψ é injetor e deste modo todo elemento $m \in M$ tem um inverso adivito m'. Então M é um grupo. ∎

Uma das maneiras alternativas de se definir o grupo de Grothendieck é através da seguinte propriedade universal.

Teorema 3.30 (Propriedade Universal do Grupo de Grothendieck)**.** Sejam M um monoide abeliano, A um grupo abeliano, $i : M \longrightarrow G(M)$ a função inclusão dada por $i(m) = [m, 0]$ para todo $m \in M$, $f : M \longrightarrow A$ um homomorfismo de monoides, então existe único $\tilde{f} : G(M) \longrightarrow A$ homomorfismo de grupos tal que $\tilde{f} \circ i = f$, ou seja, o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "i"'] & A \\ & G(M). \arrow[u, dotted, "\tilde{f}"'] \end{tikzcd}$$

Demonstração. Seja $g \in G(M)$, então $g = [a, b]$ para a, $b \in M$, deste modo, $g = [a, 0] + [0, b] = i(a) + (-i(b))$ que será denotado apenas por $g = i(a) - i(b)$. Isto quer dizer que todo elemento de $G(M)$ pode ser visto como uma diferença de elementos do monoide M, mas isto é bem definido apenas quando esta diferença seja igual para quaisquer dois representantes da mesma classe. Sejam c, $d \in M$ tal que $[a, b] = [c, d]$ que é equivalente a $[a + d, 0] = [b + c, 0]$, ou seja, $i(a + d) = i(b + c)$, como i é um homomorfismo de monoides, segue que $i(a) + i(d) = i(b) + i(c)$ e já que a inclusão leva elementos do monoide M para o grupo $G(M)$, é possível tomar os inversos aditivos de modo que $i(a) - i(b) = i(c) - i(d)$ e deste modo, a diferença está bem definida independentemente do representante da classe.

Definindo a função $\tilde{f}$ por $\tilde{f}(g) = \tilde{f}(i(a)-i(b)) := f(a)-f(b)$ é necessário verificar a boa definição de $\tilde{f}$, isto é, se $[a, b] = [c, d]$ então $f(a) - f(b) = f(c) - f(d)$. Como $[a, b] = [c, d]$ se, e somente se, existe $m \in M$ tal que $a + d + m = b + c + m$ então $f(a + d + m) = f(b + c + m)$. Como f é homomorfismo, é possível separar a soma e como a imagem de f é um grupo abeliano, todo elemento tem inverso e deste modo, $f(a) - f(b) = f(c) - f(d)$, isto é, $\tilde{f}$ está bem definida.

Seja $h \in G(M)$, então $h = i(p) - i(q)$ para p, $q \in M$, deste modo $\tilde{f}(g + h) = \tilde{f}((i(a)-i(b))+(i(p)-i(q))) = \tilde{f}((i(a)+i(p))-(i(b))+i(q))$ e como i é um homomorfismo, isto se reduz à $\tilde{f}(i(a + p) - i(b + q)) = f(a + p) - f(b + q)$ e do mesmo modo, f é homomorfismo e então segue que $\tilde{f}(g+h) = (f(a)-f(b))+(f(p)-f(q)) = \tilde{f}(g)+\tilde{f}(h)$, ou seja $\tilde{f}$ é, de fato, um homomorfismo de grupos.

Resta agora verificar que $\tilde{f} \circ i = f$ e que $\tilde{f}$ é único. Seja $m \in M$, então $\tilde{f}(i(m)) = f(m)$, ou seja, o diagrama comuta. Supondo que $\tilde{g} : G(M) \longrightarrow A$ seja um homomorfismo de grupos tal que $\tilde{g}(i(m)) = f(m)$, então $\tilde{g}(h) = \tilde{g}(i(p) - i(q)) = \tilde{g}(i(p)) - \tilde{g}(i(q)) = f(p) - f(q) = \tilde{f}(h)$. Então existe um único homomorfismo de grupos $\tilde{f}$ tal que $\tilde{f} \circ i = f$. ■

Esta propriedade universal garante que, num certo sentido, $G(M)$ é o menor grupo que contem o monoide M, pois existe um único modo de estender um homomorfismo de monoides para um homomorfismo de grupos.

Dado um anel com unidade, é possível encontrar o grupo K_0 associado a tal anel que preserva algumas propriedades da estrutura original.

Definição 3.31. Seja R um anel com unidade, o grupo $K_0(R)$ é definido por $K_0(R) = G(\mathcal{V}(R))$.

Observação 3.32. Como todos os grafos que serão usados no restante do trabalho tem finitos vértices, a álgebra de caminhos de Leavitt vai ter unidade e portanto faz sentido tomar o K_0 desta álgebra ao se esquecer a estrutura de multiplicação por escalar, porém a conjectura a ser apresentada no próximo capítulo ainda é válida para anéis sem unidade. Uma maneira de estender K_0 para anéis sem unidade é através de uma outra construção do K_0 envolvendo idempotentes de matrizes. Esta construção, que pode ser encontrada em (ROSENBERG, 1994) não depende de que o anel tenha unidade.

A construção do K_0 por idempotentes é a adotada no artigo original (HAZRAT, 2013) onde a conjectura do isomorfismo graduado é apresentada.

Gene Abrams, um dos precursores do desenvolvimento da teoria de álgebras de caminhos de Leavitt, mostra em (ABRAMS, 2015) que uma das vias do desenvolvimento da teoria da álgebra de caminhos de Leavitt aconteceu foi através de C^*-álgebras de grafos. Visto que estas duas estruturas possuem várias similaridades e que a K-teoria é uma ferramenta importante na classificação de C^*-álgebras, por exemplo, as C^*-álgebras AF são completamente classificadas pelo grupo K_0. Hazrat em (HAZRAT, 2013) conjectura que o mesmo seja válido para álgebras de caminhos de Leavitt. Daí o motivo de se usar o grupo K_0 para tentar classificar as álgebras de caminhos de Leavitt.

Como será visto no próximo capítulo, apenas o grupo K_0 não é suficiente para classificar as álgebras de caminhos de Leavitt, de modo que é necessário levar em conta mais estrutura, tal qual a estrutura de graduação apresentada abaixo.

Definição 3.33. Sejam $\mathcal{A}$ uma R-álgebra e G um grupo. A álgebra $\mathcal{A}$ é dita **graduada** pelo grupo G (ou G-graduada) se existe uma família de submódulos $\{\mathcal{A}_\gamma \mid \gamma \in G\}$ onde $\mathcal{A} = \bigoplus_{\gamma \in G} \mathcal{A}_\gamma$ tal que $\mathcal{A}_\delta \mathcal{A}_\gamma \subset \mathcal{A}_{\delta\gamma}$ para todo γ, $\delta \in G$.

Como será visto logo mais, toda álgebra de caminhos de Leavitt é $\mathbb{Z}$-graduada e portanto faz sentido levar em conta a estrutura de graduação para tentar classificar estas estruturas.

Exemplo 3.34. Seja $\mathcal{A}$ uma R-álgebra e G um grupo, então $\mathcal{A}$ sempre pode ser G-graduada pela graduação trivial onde $\mathcal{A}_e = \mathcal{A}$ para e a identidade do grupo G e $\mathcal{A}_g = 0$ para todo $g \neq e$. Deste modo, $\mathcal{A} = \bigoplus_{g \in G} \mathcal{A}_g$ e $\mathcal{A}_g \mathcal{A}_h \subset \mathcal{A}_{gh}$.

Exemplo 3.35. A álgebra $R[x, x^{-1}] = \{\sum_{i=-n}^{n} r_k x^k \mid n \in \mathbb{N}, r_k \in R\}$ dos polinômios de Laurent é $\mathbb{Z}$-graduado pelas componentes $R[x, x^{-1}]_n = Rx^n$.

Cada componente Rx^n é fechada pela soma e pela multiplicação por escalar, portanto é um submódulo. Além disso, $R[x, x^{-1}]$ e $\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} Rx^n$ são iguais como conjuntos e $(Rx^n)(Rx^m) \subset R^{n+m}$.

Definição 3.36. Seja $\mathcal{A} = \oplus_{g \in G} \mathcal{A}_g$ uma R-álgebra G-graduada. Os elementos de $\mathcal{A}_g$ para qualquer $g \in G$ são ditos **homogêneos**.

Exemplo 3.37. Considerando a álgebra $R[x, x^{-1}]$ com a graduação dada no exemplo 3.35 se tem que o elemento x^{10} é homogêneo, enquanto $x^{-59} + x^7$ não é.

Teorema 3.38. Seja I ideal de uma R-álgebra $\mathcal{A}$ graduada por um grupo G, então as duas condições são equivalentes

1. Seja $x = \sum_{g \in G} x_g \in I$, então $x_g \in I$ para todo $g \in G$.
2. $I \subset \sum_{g \in G} (I \cap \mathcal{A}_g)$.

Demonstração. $(2 \longrightarrow 1)$ Seja $x \in I$, então $x \in \sum_{g \in G} I \cap \mathcal{A}_g$, isto é, $x = \sum_{g \in G} x_g$ onde $x_g \in I \cap \mathcal{A}_g$ para todo $g \in G$, em particular, $x_g \in I$ para todo $g \in G$.
$(1 \longleftarrow 2)$ Seja $x \in I$, então separando x na soma de elementos homogêneos se tem $x = \sum_{g \in G} x_g$ onde $x_g \in \mathcal{A}_g$ onde, por hipótese, $x_g \in I$, então $x_g \in I \cap \mathcal{A}_g$ e portanto $x \in \sum_{g \in G} I \cap \mathcal{A}_g$. ∎

Definição 3.39. Seja I ideal bilateral de uma R-álgebra $\mathcal{A}$ que é G-graduada, então I é dito ser um **ideal graduado** se satisfaz alguma das condições equivalentes do teorema acima.

Teorema 3.40. Seja I ideal de uma R-álgebra G-graduada $\mathcal{A}$ onde I é gerado por elementos homogêneos de $\mathcal{A}$, então I é um ideal graduado.

Demonstração. Seja $S \subset \bigcup_{g \in G} \mathcal{A}_g$ um subconjunto de homogêneos que gera o ideal I, isto é, $I = \langle S \rangle$.

Inicialmente vai ser demonstrado que se $x \in AS$, então todas as componentes homogêneas de x também está em I. Seja $x \in AS$, então $x = \sum_{k=1}^{n} a_k s_k$ para $a_k \in \mathcal{A}$ e $s_k \in S$. Como $a_k \in \mathcal{A}$, segue que $a_k = \sum_{g \in G} a_g^k$ e portanto $x = \sum_{k=1}^{n} \sum_{g \in G} a_g^k s_k$

e como $a_g^k \in \mathcal{A}$ e $s_k \in S$, então o produto $a_g^k s_k \in I$. Por outro lado, seja h_k o grau de s_k, isto é, $s_k \in \mathcal{A}_{h_k}$ e portanto $a_g^k s_k \in \mathcal{A}_{gh_k}$, ou seja, $a_g^k s_k$ é homogêneo. Deste modo, sendo x_h a soma de todos os elementos do tipo $a_g^k s_k$ que aparecem na expressão de x de grau h se tem que x_h é uma soma de homogêneos de ordem h e portanto é homogêneo de ordem h e que $x_h \in I$. Deste modo, $x = \sum_{h \in G} x_g$ é tal que $x_g \in I$ para todo $g \in G$.

Usando argumento análogo se percebe que o mesmo vale para $S\mathcal{A}$ e para $\mathcal{A}S\mathcal{A}$, isto é, se $u = \sum_{g \in G} u_g \in S\mathcal{A}$ e $v = \sum_{g \in G} v_g$, então $u_g, v_g \in I$ para todo $g \in G$. Também é verdade que se $r = \sum_{j=1}^{m} r_j s_j \in RS$ cada componente homogênea de r vai estar em I, afinal $r_j s_j \in I$ e o grau de $r_j s_j$ vai ser igual ao grau de s_j e como I é fechado pela soma, $r = \sum_{g \in G} r_g$ é tal que $r_g \in I$ para todo $g \in G$.

Agora, seja $z \in I = \langle S \rangle$. Pelo teorema 1.25, $I = RS + \mathcal{A}S + S\mathcal{A} + \mathcal{A}S\mathcal{A}$ e portanto $z = r + x + u + v$ para $r \in RS$, $x \in \mathcal{A}S$, $u \in S\mathcal{A}$ e $v \in \mathcal{A}S\mathcal{A}$. Seja $z = \sum_{g \in G} z_g$ a soma em componentes homogêneas onde $z_g = r_g + x_g + u_g + v_g$. Como foi visto anteriormente, $r_g, x_g, v_g, u_g \in I$ para todo $g \in G$ e deste modo $z_g = r_g + x_g + u_g + v_g \in I$ para todo $g \in G$. Portanto cada componente homogênea de z está em I e disto segue que I é ideal graduado. ■

Agora seguimos para a demonstração de que o quociente de uma álgebra G-graduada por um ideal graduado é também graduada e tal graduação é induzida pela graduação da álgebra original, mas antes de prosseguir para o teorema é necessário mostrar que uma expressão do tipo $A_g \big/ (A_g \cap I)$ está bem definida.

Observação 3.41. Sejam $\mathcal{A}$ uma R-álgebra, I um ideal de $\mathcal{A}$ e M um submódulo de $\mathcal{A}$, então $M \cap I$ é um submódulo de M. Como todo ideal é por definição um submódulo e como a intersecção de submódulos é submódulo, segue que $M \cap I$ é submódulo de M e portanto o quociente é bem definido.

Teorema 3.42. Seja $\mathcal{A}$ uma R-álgebra G-graduada e I ideal graduado de $\mathcal{A}$, então

$$\bigoplus_{g \in G} \frac{A_g}{A_g \cap I}$$

tem estrutura de R-álgebra.

Demonstração. Denotando $\frac{\mathcal{A}_g}{\mathcal{A}_g \cap I}$ por $\overline{\mathcal{A}_g}$, então $\bigoplus_{g \in G} \overline{\mathcal{A}_g}$ tem estrutura natural de R-módulo, sendo necessário verificar apenas a estrutura de multiplicação. Sejam a, $b \in \bigoplus_{g \in G} \overline{\mathcal{A}_g}$ então $a = \sum_{g \in G} a_g + (\mathcal{A}_g \cap I)$ e $b = \sum_{g \in G} b_g + (\mathcal{A}_g \cap I)$ e definido a multiplicação por $a \cdot b = \sum_{h \in G} \sum_{g \in G} a_g b_h + (\mathcal{A}_{gh} \cap I)$ se percebe que o produto é bem definido já que $a_g b_h \in \mathcal{A}_{gh}$ e que é bilinear, afinal é sempre possível tirar o escalar para fora dos somatórios.

Por outro lado, seja $c = \sum_{i\in G} c_i + (\mathcal{A}_i \cap I)$, então

$$(ab)c = \sum_{i\in G}\sum_{h\in G}\sum_{g\in G} a_g b_h c_i + (\mathcal{A}_{ghi} \cap I) = a(bc).$$

E então o produto é associativo e bilinear fazendo de $\bigoplus_{g\in G} \overline{\mathcal{A}_g}$ uma R-álgebra. ■

Teorema 3.43. Seja $\mathcal{A} = \bigoplus_{g\in G} \mathcal{A}_g$ uma R-álgebra G-graduada e I um ideal graduado de $\mathcal{A}$, então

$$\frac{\mathcal{A}}{I} = \frac{\bigoplus_{g\in G} \mathcal{A}_g}{I} \cong \bigoplus_{g\in G} \frac{\mathcal{A}_g}{\mathcal{A}_g \cap I}.$$

Além disso, $\mathcal{A}/I$ é G-graduada pelas componentes $\mathcal{A}_g \big/ \mathcal{A}_g \cap I$.

Demonstração. Primeiramente, a função projeção

$$\begin{aligned} \pi\colon \bigoplus_{g\in G} \mathcal{A}_g &\to \bigoplus_{g\in G} \frac{\mathcal{A}_g}{\mathcal{A} \cap I} \\ \sum_{g\in G} a_g &\mapsto \sum_{g\in G} (a_g + \mathcal{A}_g \cap I) \end{aligned}$$

é um homomorfismo de R-álgebras. Sejam $a, b \in \mathcal{A}$, então $a = \sum_{g\in G} a_g$ e $b = \sum_{g\in G} b_g$ de modo que $a + b = \sum_{g\in G}(a_g + b_g)$ e portanto $\pi(a+b) = \sum_{g\in G}((a_g+b_g) + \mathcal{A}_g \cap I) = \sum_{g\in G}(a_g + \mathcal{A}_g \cap I) + \sum_{g\in G}(b_g + \mathcal{A}_g \cap I) = \pi(a) + \pi(b)$. Seja $r \in R$, então $\pi(ra) = \pi(\sum_{g\in G} ra_g) = \sum_{g\in G}(ra_g + \mathcal{A}_g \cap I) = r\pi(a)$. Por fim, $ab = (\sum_{g\in G} a_g)(\sum_{h\in G} b_h) = \sum_{h\in G}\sum_{g\in G} a_g b_h$ e como π preserva a soma,

$$\pi(ab) = \sum_{h\in G}\sum_{g\in G} \pi(a_g b_h) = \sum_{h\in G}\sum_{g\in G} a_g b_h + (\mathcal{A}_{gh} \cap I).$$

Do teorema acima, a multiplicação é dada por $a_g b_h + (\mathcal{A}_{gh} + I) = (a_g + (\mathcal{A}_g \cap I))(b_h + (\mathcal{A}_h \cap I))$ e reescrevendo os somatórios se obtém que $\pi(ab) = \pi(a)\pi(b)$. Portanto π é um homomorfismo de R-álgebras.

Para passar π para um homomorfismo quociente, é necessário calcular $\ker \pi$. Por definição, $\ker \pi = \{a \in \bigoplus_{g\in G} \mathcal{A}_g \mid \pi(a) = \sum_{g\in G} 0 + (\mathcal{A}_g \cap I)\}$ ou equivalentemente, $\ker \pi = \{\sum_{g\in G} a_g \in \mathcal{A}_g \mid a_g \in \mathcal{A}_g\ ,\sum_{g\in G} a_g + (\mathcal{A}_g \cap I) = \sum_{g\in G} 0 + (\mathcal{A}_g \cap I)\}$. Porém $\sum_{g\in G} a_g + (\mathcal{A}_g \cap I) = \sum_{g\in G} 0 + (\mathcal{A}_g \cap I)$ se, e somente se para todo $g \in G$, $a_g + (\mathcal{A}_g \cap I) = 0 + (\mathcal{A}_g \cap I)$, que é equivalente a $a_g \in \mathcal{A}_g \cap I$, porém, por definição $a_g \in \mathcal{A}_g$ então a condição $a_g \in \mathcal{A}_g \cap I$ implica que $a_g \in I$ para todo $g \in G$. Recapitulando, $\ker \pi = \{\sum_{g\in G} a_g \in \mathcal{A}_g \mid a_g \in \mathcal{A}_g\ ,\sum_{g\in G} a_g + (\mathcal{A}_g \cap I) = \sum_{g\in G} 0 + (\mathcal{A}_g \cap I)\} = \{\sum_{g\in G} a_g \mid a_g \in I\}$. Deste modo, se $x = \sum_{g\in G} x_g \in \ker \pi$, $x_g \in I$ para todo G, mas como I é ideal, é fechado pela soma e portanto $x = \sum_{g\in G} x_g \in I$. Por outro lado, como I é graduado, se $x = \sum_{g\in G} x_g \in I$, então $x_g \in I$ para todo $g \in G$ e deste modo $x \in \ker \pi$. Portanto $\ker \pi = I$

Agora é possível passar π para um homomorfismo de R-álgebras no quociente

$$\varphi\colon \frac{\mathcal{A}}{I} \to \bigoplus_{g\in G} \frac{\mathcal{A}_g}{\mathcal{A}_g \cap I}$$
$$a + I \mapsto \pi(a).$$

De modo que $\varphi(a+I) = \pi(a) = 0 \iff a \in I$ e portanto $\ker\varphi = 0$. Agora, seja $u \in \bigoplus_{g\in G} \mathcal{A}_g \Big/ (\mathcal{A}\cap I)$, então $u = \sum_{g\in G} u_g + (\mathcal{A}_g \cap I)$ e então $\varphi(\sum_{g\in G} u_g + I) = \pi(\sum_{g\in G} u_g) = u$. Então φ é um isomorfismo de R-álgebras o que conclui a demonstração. Resta mostrar que as componentes $\mathcal{A}_g \Big/ \mathcal{A}_g \cap I$ formam uma G-graduação de $\mathcal{A}/I$.

Seja $\overline{\mathcal{A}} = \mathcal{A}/I$ e sejam $\overline{\mathcal{A}_g} = \mathcal{A}_g \Big/ (\mathcal{A}_g \cap I)$, então $\overline{\mathcal{A}} = \bigoplus_{g\in G} \overline{\mathcal{A}_g}$. Agora, sejam g, $h \in G$, então $\overline{\mathcal{A}_g} \cdot \overline{\mathcal{A}_h} = \{xy + (\mathcal{A}_{gh} + I) \mid (x,y) \in \mathcal{A}_g \times \mathcal{A}_h\} \subset \{z + (\mathcal{A}_{gh} + I) \mid z \in \mathcal{A}_{gh}\} = \overline{\mathcal{A}_{gh}}$ e portanto $\overline{\mathcal{A}}$ é graduada pela graduação induzida por $\mathcal{A}$. ■

Teorema 3.44. Seja E um grafo direcionado, então a álgebra de caminhos no grafo estendido $P_R(\hat{E})$ é $\mathbb{Z}$-graduada pelo comprimento dos caminhos.

Demonstração. Sejam $v \in E^0$ e $e \in E^1$, definindo o grau destes termos por $\deg(v) = 0$, $\deg(e) = 1$ e $\deg(e^*) = -1$. Por fim, definindo o grau de um caminho no grafo estendido $x_1 \cdots x_m$ por $\deg(x_1 \cdots x_m) = \sum_{i=1}^{m} \deg(x_i)$. Agora, para $n \in \mathbb{Z}$, definindo $P_n = span_R\{x_1 \cdots x_m \mid x_i \in E^0 \cup E^1 \cup (E^1)^*$ e $\deg(x_1 \cdots x_m) = n\}$ se tem que todos os P_n são fechados pela soma, afinal a soma de dois termos de grau n continua tendo grau n e a multiplicação por escalar também não afeta o grau e como todo caminho vai ter algum grau, segue que $P_R(\hat{E}) = \oplus_{n\in\mathbb{Z}} P_n$.

Seja $m \in \mathbb{Z}$, seja $\mu \in P_n P_m$, então $\mu = (\sum_{i=1}^{n'} r_k q_k)(\sum_{j=1}^{m'} s_j p_j)$, onde r_k, $s_j \in R$ e onde $\deg(q_k) = n$ e $\deg(p_j) = m$ para todo k e todo j. Deste modo, $\mu = \sum_{i=1}^{n'} \sum_{j=1}^{m'} r_k s_j q_k p_j$ de modo que $\deg(q_k p_j) = n + m$ para todo k e todo j e portanto $P_n P_m \subset P_{n+m}$. ■

Um outro modo de deduzir o mesmo resultado é considerar a mesma $\mathbb{Z}$-graduação na álgebra $R(E^0 \cup E^1 \cup (E^1)^*)^+$ e perceber que o ideal I gerado pelas relações (E), (V1) e (V2) é um ideal gerado por elementos homogêneos e portanto é graduado. Com isto a álgebra $R(E^0 \cup E^1 \cup (E^1)^*)^+ / I \cong P_R(\hat{E})$ é também $\mathbb{Z}$-graduada pelo teorema 3.43.

Analogamente ao resultado acima, toda álgebra de caminhos de Leavitt $L_R(E)$ também é $\mathbb{Z}$-graduada. Para demonstrar isto é necessário o resultado abaixo.

Teorema 3.45. Sejam γ, λ, μ e $\rho \in path(E)$ de algum grafo E onde $\gamma\lambda^*$ e $\mu\rho^*$ são não nulos. Dentro de $L_R(E)$ a expressão do produto é dado por

$$(\gamma\lambda^*)(\mu\rho^*) = \begin{cases} \gamma\kappa\rho^* \text{ se } \mu = \lambda\kappa \text{ para algum } \kappa \in path(E) \\ \gamma\sigma^*\rho^* \text{ se } \lambda = \mu\sigma \text{ para algum } \sigma \in path(E) \\ 0 \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Demonstração. Pela associatividade do produto, $(\gamma\lambda^*)(\mu\rho^*) = \gamma(\lambda^*\mu)\rho$. Sejam $\lambda = \lambda_1 \cdots \lambda_n$ e $\mu = \mu_1 \cdots \mu_m$. Deste modo, $\lambda^*\mu = \lambda_n^* \cdots \lambda_1^*\mu_1 \cdots \mu_m$.

Caso $m \geq n$ e $\lambda_i = \mu_i$ para todo $i = 1, \cdots, n$, então $\lambda^*\mu = \mu_{n+1} \cdots \mu_m$. Seja $\kappa = \mu_{n+1} \cdots \mu_m$, então $\mu = (\lambda_1 \cdots \lambda_n)(\mu_{n+1} \cdots \mu_m) = \lambda\kappa$ e portanto $(\gamma\lambda^*)(\mu\rho^*) = \gamma\kappa\rho^*$ que é o primeiro caso.

Caso $m < n$ e $\lambda_i = \mu_i$ para todo $i = 1, \cdots, m$, então $\lambda = (\mu_1 \cdots \mu_m)(\lambda_{m+1} \cdots \lambda_n)$. Seja $\sigma = \lambda_{m+1} \cdots \lambda_n$, então $\lambda = \mu\sigma$ e portanto $\lambda^*\mu = \sigma^*\mu^*\mu = \sigma^*$ e logo $(\gamma\lambda^*)(\mu\rho^*) = \gamma\sigma^*\rho^*$.

Por fim, caso $\lambda_i \neq \mu_i$ para algum i, o produto $\lambda^*\mu$ é nulo e este é o último caso. ∎

O resultado acima mostra que o conjunto $\{\gamma\lambda^* \mid \gamma, \lambda \in path(E)$ onde $r(\gamma) = r(\lambda)\}$ gera a álgebra $L_R(E)$, afinal qualquer elemento da álgebra vai ser escrita como uma combinação linear de produtos deste tipo.

Teorema 3.46. Seja E um grafo direcionado e R um anel comutativo com unidade, então $L_R(E)$, a álgebra de caminhos de Leavitt é $\mathbb{Z}$-graduada pelas componentes $span\{\gamma\mu^* \mid \gamma,\mu \in path(E)$ e $|\gamma| - |\mu| = n\}$.

Demonstração. Considerando a graduação em $R(E^0 \cup E^1 \cup (E^1)^*)^+$ dado pelo grau dos monômios assim como na demonstração do teorema 3.44 e que os conjuntos X e Y da definição 2.20 são homogêneos, segue que $\langle X \cup Y \rangle$ é ideal graduado e portanto $L_R(E) \cong R(E^0 \cup E^1 \cup (E^1)^*) \big/ \langle X \cup Y \rangle$ pelo teorema 3.43 é também $\mathbb{Z}$-graduado com graduação induzida pela graduação de $R(E^0 \cup E^1 \cup (E^1)^*)^+$. ∎

Definição 3.47. Sejam $\mathcal{A} = \bigoplus_{g\in G} \mathcal{A}_g$ e $\mathcal{B} = \bigoplus_{g\in G} \mathcal{B}_g$ R-álgebras G-graduadas e $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ um homomorfismo de R-álgebras. A função f é dita um **homomorfismo graduado** se $f(\mathcal{A}_g) \subset \mathcal{B}_g$ para todo $g \in G$. A função f é dita ser um **isomorfismo graduado** se for um homomorfismo graduado que é bijetivo

Analogamente a definição de álgebra graduada, também se tem as noções de anel graduado e de módulo graduado.

Definição 3.48. Sejam R um anel e G um grupo. R é dito ser G-graduado se $R = \bigoplus_{g\in G} R_g$ onde R_g é subgrupo aditivo de R e $R_gR_h \subset R_{gh}$ para todo $g, h \in G$.

Definição 3.49. Sejam R um anel G-graduado e M um R-módulo. M é dito ser G-graduado se $M = \bigoplus_{g\in G} M_g$ e se $R_gM_h \subset M_{gh}$ para todo $g, h \in G$.

Para um módulo graduado M, transladar as componentes da graduação resulta em outro módulo graduado.

Teorema 3.50. Sejam $M = \bigoplus_{g\in G} M_g$ um R-módulo G-graduado e seja $\delta \in G$, então $M(\delta) = \bigoplus_g M_{g\delta}$ é um módulo G-graduado.

Demonstração. Sejam $g, h \in G$, então $R_g M(\delta)_h = R_g M_{h\delta}$ que pela graduação de M está contido em $M_{gh\delta} = M(\delta)_{gh}$. Portanto $M(\delta)$ é graduado com a graduação induzida pela graduação M. ∎

Definição 3.51. Seja M um R-módulo G graduado, então de acordo com a notação do teorema acima, o módulo $M(\delta)$ é chamado de δ-**shift** de M.

Definição 3.52. Sejam R um anel G-graduado e M um R-módulo G-graduado, então M é dito ser **graduado livre** se $M \cong \bigoplus_{g\in G} R(g)$ onde $R(g)$ é o shift com relação a graduação trivial.

Definição 3.53. Um R-módulo é dito **projetivo graduado** se for o somando direto de um módulo livre graduado.

Definição 3.54. Seja R um anel G-graduado, então $\mathcal{V}^G(R)$ é o conjunto das classes de isomorfismo graduado de R-módulos projetivos graduados.

Teorema 3.55. $\mathcal{V}^G(R)$ é um monoide comutativo com operação dada pela soma direta.

Demonstração. A demonstração deste teorema é análoga a demonstração do teorema 3.22. Já que 0 é um módulo G-graduado e que $P\oplus 0 \cong P \cong 0\oplus P$, segue que $[P]+[0] = [P] = [0] + [P]$ e portanto $[0]$ é identidade de $\mathcal{V}^G(R)$. Como $P \cong Q \iff Q \cong P$, segue que $[P] + [Q] = [Q] + [P]$ e portanto a soma é comutativa. Por fim, $(P \oplus Q) \oplus S \cong P\oplus(Q\oplus S)$ e logo $[P\oplus Q]+[S] = [P]+[Q\oplus S]$, e então $([P]+[Q])+[S] = [P]+([Q]+[S])$, isto é, a soma é associativa. ∎

Definição 3.56. O grupo de Grothendieck de $\mathcal{V}^G(R)$ é denotado por $K_0^G(R)$ e é dito ser o G-**grupo de Grothendieck**.

Se $G = \mathbb{Z}$, o grupo $K_0^G(R)$ tem duas ações por G

$$\begin{aligned} G \times K_0^G(R) &\to K_0^G(R) \\ (m, P(n)) &\mapsto [P(n)^m] \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} G \times K_0^G(R) &\to K_0^G(R) \\ (m, P(n)) &\mapsto [P(n+m)]. \end{aligned}$$

Onde a primeira é a ação do grupo, que leva um módulo $[P]$ na soma de $[P]$ com si mesmo m vezes, enquanto a segunda ação é dada pelo shift da graduação.

Para evitar confusão, a ação do shift é denotada multiplicativamente, então $x^m[R(n)] = [R(n+m)]$ onde $\mathbb{Z} \cong \langle x \rangle \cong \{x^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

O monoide M_E de um grafo R também tem sua versão graduada dada na definição abaixo.

Definição 3.57. Sejam E um grafo direcionado, $C = \{x^n[v] \mid n \in \mathbb{Z}$ e $v \in Reg(E)\}$ e $R \subset C^* \times C^*$ a relação binária dada por $R = \{([v], \sum_{e \in s^{-1}(v)} xr[e]) \mid v \in Reg(E)\} \cup \{([u]+[v], [v]+[u]) \mid v, u \in E^0\}$. Define-se $T_E = \langle C \mid R \rangle$.

Então T_E pode ser visto como o monoide abeliano livre gerado por $\{x^n[v] \mid n \in \mathbb{Z}$ e $v \in Reg(E)\}$ sujeito às relações $[v] = \sum_{e \in s^{-1}(v)} x[r(e)]$ para vértices regulares.

O monoide T_E indica o comprimento do caminho conectando dois vértices como mostrado abaixo.

Exemplo 3.58. Seja E o grafo

$$\begin{tikzcd} \mathrm{u} \arrow[r, "e"] & \mathrm{v} \arrow[r, "f"] & \mathrm{w} \end{tikzcd}.$$

Então T_E é o monoide abeliano livre gerado por $[u]$, $[v]$ e $[w]$ onde $[u] = x[v]$ e $[v] = x[w]$ indicando que existe um caminho de comprimento um conectando o vértice u com o vértice v e um caminho de comprimento um conectando o vértice v com o vértice $[w]$. Além disso, $[u] = x^2[w]$ o que implica que existe um caminho de comprimento dois conectando u até w.

Teorema 3.59. Seja E um grafo e K um corpo, então $T_E \cong \mathcal{V}^{\mathbb{Z}}(L_K(E))$.

O resultado de cima pode ser visto como a versão graduada do teorema 3.24 e sua demonstração pode ser encontrada em (ARA *et al.*, 2018, Proposition 5.7).

4 CONJECTURA DO ISOMORFISMO GRADUADO

Neste capítulo a conjectura do isomorfismo graduado será apresentada, mas antes serão passados contraexemplos que indicam serem necessários a utilização de mais estruturas até chegar na conjectura final.

Por se tratar de álgebras geradas a partir de grafos direcionados, uma primeira tentativa de classificação das álgebras de caminhos de Leavitt poderia vir dos grafos, isto é, a princípio, pode-se perguntar se duas álgebras de caminhos de Leavitt são isomorfas apenas quando seus grafos subjacentes são isomorfos. Abaixo segue um contraexemplo.

Definição 4.1. Sejam $E = (E^0, E^1, r_E, s_E)$ e $F = (F^0, F^1, r_F, s_F)$ grafos direcionados. O par (φ_0, φ_1) é dito ser um **homomorfismo de grafos** para $\varphi_0 : E^0 \longrightarrow F^0$ e $\varphi_1 : E^1 \longrightarrow F^1$ funções que preservam as relações de adjacência, isto é, se $u \in E^0$ e $e \in E^1$, então $s_F(\varphi_1(u)) = \varphi_0(s_E(u))$ e $r_F(\varphi_1(u)) = \varphi_0(r_E(u))$.

Exemplo 4.2. Sejam E_2 o grafo

$$\text{u'} \xrightarrow{e'} \text{v'}$$

e E_3 o grafo

$$\text{u} \xrightarrow{e} \text{v} \xrightarrow{f} \text{w}$$

Então existe um homomorfismo de grafos $E_2 \longrightarrow E_3$ através das funções φ_0 e φ_1 onde $\varphi_0(u') = u$ e $\varphi_0(v') = v$ e $\varphi_1(e') = e$.

Definição 4.3. Dois grafos E e F são **grafos isomorfos** se existe um homomorfismo de grafos entre E e F cujas funções são bijetoras e que se tenha um homomorfismo de grafos inverso.

Exemplo 4.4. Sejam E_3 o grafo

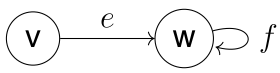
$$\text{u} \xrightarrow{e} \text{v} \xrightarrow{f} \text{w}$$

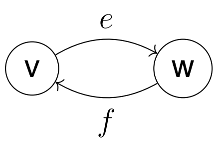
e E_3' o grafo

$$\text{u'} \xleftarrow[e']{} \text{v'} \xleftarrow[f']{} \text{w'}.$$

Então existe um isomorfismo entre os grafos induzido pela função $\varphi : E^0 \longrightarrow (E^0)'$ onde $\varphi(u) = w'$, $\varphi(v) = v'$ e $\varphi(w) = u'$ e pela função $\varphi_1 : E^1 \longrightarrow (E^1)'$ onde $\varphi_1(e) = f'$ e $\varphi_1(f) = v'$ e e'.

Exemplo 4.5. Sejam F_1 e F_2 os grafos abaixo.

F_1 :


F_2 :


Então os grafos não são isomorfos, afinal existe um loop no primeiro grafo e não existe nenhum loop no segundo de modo que nenhuma função bijetiva vai conseguir preservar as relações de adjacência.

Calculando as álgebras de caminhos destes dois grafos através da fórmula do exemplo 2.26 se percebe que o grafos F_1 e F_2 tem zero sinks e que ambos tem um ciclo. No primeiro grafo são dois caminhos que acabam no vértice w e que não contém o ciclo, que são w e e. Deste modo, $L_R(F_1) \cong M_2(K[x, x^{-1}])$. Por outro lado, F_2 também tem dois caminhos que acabam em algum vértice do ciclo, digamos v, e que não contém o ciclo que são v e f. Deste modo $L_R(F_2) \cong M_2(K[x, x^{-1}])$.

Portanto $L_R(F_1) \cong L_R(F_2)$ mesmo os grafos F_1 e F_2 não sendo isomorfos o que mostra que analisar apenas os grafos não é suficiente para classificar álgebras de caminhos de Leavitt subjacentes.

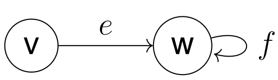
Visto que apenas o grafo não é suficiente para classificar as álgebras, pode-se tentar classificar com o K_0, mas isto também não é possível mostra o exemplo abaixo.

Exemplo 4.6. Assim como visto nos exemplos 3.18 e 3.19, $M_{R_0} \cong M_{R_1} \cong \mathbb{N}$ e portanto ambos os monoides vão ter o mesmo K_0, isto é, $K_0(L_R(R_0)) \cong K_0(L_R(R_1))$. Percebe-se, porém, que estes grafos dão origem a álgebras de caminhos de Leavitt distintas, afinal $L_R(R_0)$ tem dimensão um por possuir apenas um vértice e nenhuma aresta e nenhuma aresta fantasma. Por outro lado, $L_R(R_1)$ tem dimensão infinita, afinal é sempre possível concatenar a aresta e consigo mesma qualquer quantidade de vezes.

Visto que o K_0 também não funciona, o próximo passo é tentar classificar usando $K_0^{\mathbb{Z}}$.

Exemplo 4.7. Considerando novamente o grafo R_1. O monoide T_{R_1} é o monoide livre gerado por $x^n[v]$ sujeito a relação $[v] = x[v]$. Deste modo, $x^2[v] = x(x[v]) = x[v] = v$, mais geralmente, $x^n[v] = [v]$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ e portanto o grupo $\langle x \rangle \cong \mathbb{Z}$ age trivialmente no monoide T_{R_1} de modo que $T_{R_1} \cong \mathbb{N}$ e portanto $G(T_{R_1}) \cong K_0^{\mathbb{Z}}(L_R(R_1)) \cong \mathbb{Z}$.

Por outro lado, considerando novamente o grafo F_1 do exemplo 4.5



Este grafo tem monoide T_{F_1} gerado por$x^n[v]$ e $x^m[w]$ onde $[v] = \sum_{e \in s^{-1}(v)} x[r(e)] = x[w]$ e onde $[w] = \sum_{e \in s^{-1}(w)} x[r(e)] = x[w]$. Isto é, a ação de x implica que, dentro do monoide, $[v] = [w]$. Então T_{F_1} pode ser visto como um monoide abeliano livre em geradores $x^n[v]$, ou seja, $T_{F_1} \cong \mathbb{N}$ e portanto $K_0^{\mathbb{Z}}(L_K(F_1)) \cong \mathbb{Z}$.

Sabe-se, contudo, que $L_K(R_1) \cong K[x, x^{-1}]$ e que $L_K(F_1) \cong M_2(K[x, x^{-1}])$ e portanto $L_K(R_1) \ncong L_K(F_1)$. Deste modo $K_0^{\mathbb{Z}}$ não é suficiente para classificar.

As ferramentas estudadas até agora ainda não são suficientes para classificar as álgebras de caminhos de Leavitt, é necessário mais estrutura ainda.

Definição 4.8. Um conjunto direcionado é um conjunto X não vazio com uma relação binária que é reflexiva e transitiva.

Existem muitos exemplos de conjuntos direcionados, alguns deles estão abaixo.

Exemplo 4.9. Seja $(\mathbb{Z}, \leq)$ o conjunto dos inteiros com a relação de menor ou igual usual. Tal conjunto é direcionado já que a relação $\leq$ é reflexiva e transitiva.

Exemplo 4.10. Seja $(\mathbb{Z}, |\,)$ o conjunto dos inteiros com a relação de divisão. É verdade que $x \mid x$ para todo $x \in \mathbb{Z}$ e que, para se $a \mid b$ e $b \mid c$, então $a \mid c$ e deste modo se trata de um conjunto direcionado.

Exemplo 4.11. Seja X um conjunto, então $(P(X), \subseteq)$ é um conjunto dirigido onde $P(X)$ é o conjunto das partes de X.

Teorema 4.12. Seja R um anel com unidade, então $\mathcal{V}(R)$ é direcionado com a ordem $[P] \leq [Q]$ se existe P' tal que $Q \cong P \oplus P'$.

Demonstração. Seja $\leq$ a relação em $\mathcal{V}(R)$ dada por $[P] \leq [Q]$ se, e somente se, P é isomorfo a algum somando direto de Q, isto é, se $Q \cong P \oplus P'$.

Tal relação é reflexiva, afinal $P \cong P \oplus 0$ e portanto $[P] \leq [P]$ e é transitiva, pois se $[P] \leq [Q]$ e $[Q] \leq [S]$, então $S \cong Q \oplus Q' \cong P \oplus P' \oplus Q'$ e portanto $[S] \leq [P]$. ■

Observação 4.13. Seja R anel com unidade, então para qualquer P um R-módulo projetivo finitamente gerado, $P \oplus P' \cong R^n$ para algum n inteiro e portanto $[P] \leq [R^n] = n[R]$. Por ter esta propriedade, $[R]$ é dito ser uma unidade ordem de $\mathcal{V}(R)$.

Quando o grupo $K_0(R)$ é considerado com uma unidade ordem, é dito um grupo **pontuado**. Analogamente, $[R]$ é dito ser uma unidade ordem de $\mathcal{V}^{\mathbb{Z}}(R)$.

A conjectura do isomorfismo graduado pergunta

$$L_R(E) \cong_{gr} L_R(F) \iff K_0^{\mathbb{Z}}(L_R(E)) \cong K_0^{\mathbb{Z}}(L_R(E))$$

onde os $K_0^{\mathbb{Z}}$ são considerados como grupos pontuados.

Observação 4.14. De acordo com (VAŠ, 2022, pg 19),se E é um grafo com quantidade finita de vértices, a unidade ordem de $\mathcal{V}^G(L_R(E))$ é dado por $[L_R(E)]$ que, por sua vez é isomorfo a $\sum_{v\in E^0}[v]$ através do isomorfismo do monoide T_E.

Abaixo seguem alguns exemplos

Exemplo 4.15. Seja E o grafo

$$\begin{tikzcd} \text{u} \arrow[r, "e"] & \text{v} \arrow[r, "f"] & \text{w} \end{tikzcd}.$$

Então T_E é gerado por $x^n[u]$, $x^m[v]$ e $x^p[w]$ para n, m, $p \in \mathbb{Z}$ com as relações $[u] = x[v]$ e $[v] = x[w]$. Como $\{x^n[u] \mid n \in \mathbb{Z}\} = \{x^n[v] \mid n \in \mathbb{Z}\} = \{x^n[w] \mid n \in \mathbb{Z}\}$, T_E pode ser visto como um monoide com um único conjunto gerador $\{x^n[w] \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

Seja $a \in T_E$, então $a = \sum_{i=1}^{m} n_k x^{k_i}[w] = (\sum_{i=1}^{m} n_k x^{k_i})[w]$ para $n_k \in \mathbb{N}$. Definindo a função $f : T_E \longrightarrow \mathbb{N}[x, x^{-1}]$ por $f(a) = f((\sum_{i=1}^{m} n_k x^{k_i})[w]) = \sum_{i=1}^{m} n_k x^{k_i}$ se tem que f é homomorfismo. Seja $b \in T_E$, então $b = (\sum_{j=1}^{l} b_j x^{i_j})[w]$ e portanto $f(a+b) = f((\sum_{i=1}^{m} n_k x^{k_i})[w] + (\sum_{j=1}^{l} b_j x^{i_j})[w]) = f((\sum_{i=1}^{m} n_k x^{k_i} + \sum_{j=1}^{l} b_j x^{i_j})[w]) = \sum_{i=1}^{m} n_k x^{k_i} + \sum_{j=1}^{l} b_j x^{i_j} = f(a) + f(b)$ e também é verdade que $f(0) = 0$.

Tal homomorfismo é isomorfismo, afinal se $z \in \mathbb{N}[x, x^{-1}]$, então $z = \sum_{i=1}^{n} z_i x^{k_i} = f((\sum_{i=1}^{n} z_i x^{k_i}) + [w])$, isto é, f é injetiva. Por outro lado, se $f(a) = 0$, então $\sum_{i=1}^{m} n_k x^{k_i} = 0$ de modo que todos os coeficientes precisam ser nulos e logo $a = 0$. Deste modo, $G(T_E) \cong G(\mathbb{N}[x, x^{-1}) = \mathbb{Z}[x, x^{-1}]$.

A unidade ordem de T_E é dado por $[u] + [v] + [w] = [w] + x[w] + x^2[w]$ e portanto $f([w] + x[w] + x^2[w]) = 1 + x + x^2$.

Exemplo 4.16. Seja F o grafo abaixo

$$\begin{tikzcd} \text{u} \arrow[r, "e"] & \text{v} & \text{w} \arrow[l, "f"'] \end{tikzcd}.$$

Então T_F é gerado por $x^n[u]$, $x^m[v]$ e $x^p[w]$ para n, m, $w \in \mathbb{Z}$ sujeitos as relações $[u] = x[v]$, $w = x[v]$ e como v não é vértice regular, não está sujeito a nenhuma relação. Novamente $\{x^n[u] \mid n \in \mathbb{Z}\} = \{x^n[v] \mid n \in \mathbb{Z}\} = \{x^n[w] \mid n \in \mathbb{Z}\}$ de modo que T_F pode ser visto como tendo apenas um conjunto gerador $\{x^n[v] \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

Usando o mesmo argumento do exemplo anterior, $G(T_F) \cong \mathbb{Z}[x, x^{-1}]$. Neste caso a unidade ordem é dada por $[u] + [v] + [w] = x[v] + [v] + x[v] = 2x[v] + [v]$. Pelo mesmo isomorfismo do exemplo anterior, $f(2x[v] + [v]) = 2x + 1$.

Nos dois exemplos anteriores se percebe que $K_0^{\mathbb{Z}}(L_K(E)) \cong K_0^{\mathbb{Z}}(L_K(F))$, então o K_0 graduado não distingue E de F, porém considerando as unidades ordem são distintos, isto é, $(K_0^{\mathbb{Z}}(L_K(E)), x^2 + x + 1) \ncong (K_0^{\mathbb{Z}}(L_K(F)), 2x + 1)$.

5 CONCLUSÕES

Neste trabalho, com o propósito de definir álgebras de caminhos de Leavitt, foram estudados semigrupos livres, álgebras livres, ideais de álgebras gerados por conjuntos, bem como algumas propriedades universais.

Foram apresentadas duas definições equivalentes de álgebras de caminhos de Leavitt, obtidas através de um grafo direcionado. Após isto, foram vistos alguns exemplos destas álgebras, com ênfase na álgebra de caminhos de Leavitt da rosa em $n \geq 2$ pétalas, $L_R(R_n)$, sendo mostrado que tal álgebra é isomorfa a álgebra de Leavitt de tipo $(1, n)$.

No capítulo três foram definidos alguns conceitos algébricos como a graduação, o grupo K_0 e a apresentação de monoides com o objetivo de chegar na conjectura do isomorfismo graduado, um problema em aberto sobre a classificação de álgebras de caminhos de Leavitt a menos de isomorfismo graduado.

A conjectura do isomorfismo graduado foi apresentada através de alguns contraexemplos que demonstram que para classificar álgebras de caminhos de Leavitt é necessário utilizar de todo o ferramental desenvolvido no capítulo três.

Até o momento se sabe que a conjectura do isomorfismo graduado é válida para grafos finitos no qual todos os caminhos levam para uma sink, um ciclo ou uma rosa (VAŠ, 2022, pg 19), mas não se sabe a veracidade desta conjectura para um grafo qualquer.

REFERÊNCIAS

ABRAMS, Gene. Leavitt path algebras: the first decade. English. **Bull. Math. Sci.**, v. 5, n. 1, p. 59–120, 2015. ISSN 1664-3607.

ABRAMS, Gene; ARA, Pere; SILES MOLINA, Mercedes. **Leavitt path algebras**. [*S.l.*]: Springer, London, 2017. v. 2191, p. xiii+287. (Lecture Notes in Mathematics). ISBN 978-1-4471-7343-4; 978-1-4471-7344-1.

ARA, Pere; HAZRAT, Roozbeh; LI, Huanhuan; SIMS, Aidan. Graded Steinberg algebras and their representations. English. **Algebra Number Theory**, v. 12, n. 1, p. 131–172, 2018. ISSN 1937-0652.

HAZRAT, R. The graded Grothendieck group and the classification of Leavitt path algebras. English. **Math. Ann.**, v. 355, n. 1, p. 273–325, 2013. ISSN 0025-5831.

ROSENBERG, Jonathan. **Algebraic K-theory and its applications**. [*S.l.*]: New York, NY: Springer-Verlag, 1994. v. 147. (Grad. Texts Math.). ISBN 0-387-94248-3.

VAŠ, Lia. Introduction to Graph Algebras and Attempts at their Classification. English. **Disponível em : *https://liavas.net/files/CIMPA_Floripa_talk.pdf.* Acessado em 07, fevereiro de 2022**, 2022.