UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
PROGRAMA DE GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Vinícius Scussel Accordi

Álgebras e módulos em categorias monoidais

Florianópolis
2022

Vinícius Scussel Accordi

Álgebras e módulos em categorias monoidais

Trabalho de Conclusão de Curso submetido ao Programa de Graduação em Matemática da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do título de Bacharel em Matemática.
Orientadora: Profa. Dra. Virgínia Silva Rodrigues.

Florianópolis
2022

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Accordi, Vinícius
Álgebras e módulos em categorias monoidais / Vinícius Accordi ; orientadora, Virgínia Silva Rodrigues , 2022.
83 p.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Graduação em Matemática e Computação Científica, Florianópolis, 2022.

Inclui referências.

1. Matemática e Computação Científica. 2. Álgebras. 3. Módulos. 4. Categorias Monoidais. 5. Produto Tensorial. I. , Virgínia Silva Rodrigues. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Graduação em Matemática e Computação Científica. III. Título.

Vinícius Scussel Accordi

Álgebras e módulos em categorias monoidais

O presente trabalho, em versão original e final, foi julgado adequado para obtenção do título de Bacharel em Matemática, bem como, aprovado pelo Curso de Bacharelado em Matemática e Computação Científica.

ICP-Edu
Documento assinado digitalmente
Silvia Martini de Holanda
Data: 19/12/2022 11:21:49-0300
CPF: ***.791.379-**
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Profa. Dra. Silvia Martini de Holanda
Coordenadora do Curso

Banca Examinadora:

ICP-Edu
Documento assinado digitalmente
Virginia Silva Rodrigues
Data: 19/12/2022 11:26:38-0300
CPF: ***.753.416-**
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Profa. Dra. Virgínia Silva Rodrigues
Orientadora
Universidade Federal de Santa Catarina

ICP-Edu
Documento assinado digitalmente
Paulinho Demeneghi
Data: 19/12/2022 11:22:20-0300
CPF: ***.173.280-**
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Prof. Dr. Paulinho Demeneghi
Avaliador
Universidade Federal de Santa Catarina

ICP-Edu
Documento assinado digitalmente
Sergio Tadao Martins
Data: 19/12/2022 16:08:51-0300
CPF: ***.598.118-**
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Prof. Dr. Sergio Tadao Martins
Avaliador
Universidade Federal de Santa Catarina

Florianópolis, 2022.

Aos meus estimados pais, Almiro e Hotília;
às professoras Adriane Scussel Pereira e Camili Garcia.

AGRADECIMENTOS

A priori, agradeço demasiadamente aos meus caros pais, Almiro e Hotília, pelo suporte em mediar o exagero ao estudar matemática, além de incentivar, nos dias ruins, a determinação a fim de alcançar meus sonhos sem que os ocasionais obstáculos promovessem qualquer abalo. Aos queridíssimos amigos, em especial, Samuel, Monica e Samara, responsáveis por excelentes momentos, tanto presenciais quanto remotos nas reuniões do PET Matemática e em chamadas de áudio, resultando na criação de um banco de anedotas, pérolas e gafes.

A posteriori, à minha estimada orientadora, Virgínia, pela inspiração e insistência para o estudo das categorias monoidais e suas propriedades mesmo quando eu demonstrasse uma incerteza devido à generalização das noções estudadas. Ademais, agradeço por suportar as torrenciais mensagens eletrônicas e por aceitar a supervisão neste projeto e na iniciação científica de mesmo assunto.

Por fim, aos professores Paulinho e Jáuber pela orientação e supervisão dos projetos de iniciação científica e monitoria, respectivamente, que proporcionaram mais maturidade e entendimento a respeito do funcionamento das estruturas de pesquisa e ensino. Além do mais, agradeço aos professores aposentados José Luiz Rosas Pinho e Antônio Vladmir Martins, bem como, aos professores Franscisco, Danilo, Felipe e Mariana pelas excelentes experiências durante a graduação.

"I have seen a lot of strange things in my time.
This is one of them."
(Wanda)

RESUMO

O presente trabalho consiste em descrever as estruturas de álgebra e módulo através das noções acerca da teoria de categorias, em particular, tais fundamentos em categorias monoidais. Outrossim, constroem-se as bases necessárias para o desenvolvimento de álgebras de Hopf, bem como, módulos sobre biálgebras; logo, também englobam-se preceitos de dualizações. Dados os parâmetros, faz-se necessário destacar que este projeto é baseado, predominantemente, nos livros Corings and Comodules e Hopf Algebras: An Introduction. Por fim, salienta-se a baixa dependência de conceitos algébricos além dos usuais presentes em uma graduação em matemática. Afinal, a primeira metade deste projeto regozija-se na introdução e aprofundamento da teoria de categorias para que, em seguida, sejam desenvolvidos os paradigmas essenciais envolvendo, a priori, álgebras e, a posteriori, módulos.

Palavras-chave: Álgebra. Módulo. Categoria monoidal.

ABSTRACT

The present work consists in describing algebra and module structures throughout notions of category theory, in particular, such foundations in monoidal categories. Furthermore, the necessary foundations for the development of Hopf algebras are built as well as modules over bialgebras; thus, dualization precepts are also included. Provided those parameters, it is necessary to highlight that this study is primarily based on *Corings and Comodules* and *Hopf Algebras: An Introduction*. Finally, there is a minimal reliance on algebraic additions to the standard ones encountered in undergraduate mathematics. Whereas the very first half of this project rejoices in presenting and developing category theory in order to produce crucial paradigms with respect to, firstly, algebras and, secondly, modules.

Keywords: Algebra. Module. Monoidal category.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A partir de aspectos básicos no tocante à construção axiomática da teoria de conjuntos é possível, em função de certas consequências, promover uma abstração ainda maior a fim de generalizar as noções de conjuntos e suas estruturas, caso existam. Assim, a teoria de categorias permite obter resultados interessantes através de diagramas comutativos, já que são analisadas identidades envolvendo funções que denotam propriedades necessárias.

Por exemplo, na teoria de anéis, existe o resultado do Primeiro Teorema dos Isomorfismos: Sejam A e B anéis tais que $f : A \to B$ é um homomorfismo de anéis; sob tais considerações, existe um único isomorfismo de anéis $\varphi : A \big/ \ker(f) \to \mathrm{Im}(f)$. O motivo de abordar essa famosa observação advém do fato que sua demonstração é, geralmente, associada a este diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_A"'] & B \\ A \big/ \ker(f) \arrow[r, "\varphi"'] & \mathrm{Im}(f) \arrow[u, "\iota_B"'] \end{tikzcd} \tag{1.1}$$

sendo $\pi_A : A \to A \big/ \ker(f)$ a projeção canônica de A e $\iota_B : \mathrm{Im}(f) \to B$ a injeção canônica em B.

Assim, repare que o teorema citado anteriormente pode ser interpretado como o resultado que surge a partir da comutatividade do diagrama apresentado em (1.1), isto é, existe isomorfismo φ tal que $\iota_B \circ \varphi \circ \pi_A = f$. Note que os conjuntos A e B não estavam explicitados, contudo, tendo em vista que f leva elementos de A em B, o leitor já possui a informação que $\iota_B \circ \varphi \circ \pi_A$ é aplicada em um elemento $a \in A$ e o resultado da expressão é um elemento $b \in B$.

Sob tais informações, é imprescindível discorrer no tocante à necessidade de adotar esta representação. Na teoria de categorias, é suficiente observar, em diagramas comutativos, quais são os possíveis caminhos entre dois objetos, bem como, quais as funções envolvidas e quais propriedades são obtidas. Destarte, infere-se que, ao longo do texto, a maior alíquota de resultados, sejam teoremas e corolários, sejam definições e observações, é dada consoante às noções anteriores.

Em relação aos pré-requisitos, presume-se conhecidos os resultados presentes nos cursos de teorias de módulos, anéis e grupos, bem como, conteúdos envolvendo espaços vetoriais e produtos tensoriais entre essas estruturas. Não obstante, o último assunto está disponibilizado na quota de apêndices de modo evidenciar sua definição e algumas propriedades básicas. Dessa forma, a galeria de ferramentas para este trabalho, em relação à graduação em matemática, é baseada nos cursos de álgebra (I e II), álgebra linear (I e II) e estruturas algébricas.

Afinal, premissas envolvendo as estruturas de conjuntos possuem alto caráter de funcionamento textual, além de atrelados, necessariamente, aos parâmetros de alusão de modo a evitar extensões desnecessárias de referência ao longo do texto. Em particular, os livros referenciados, (JACOBSON, 1985), (JACOBSON, 1989) e (ROTMAN, 2003), foram utilizados - e são recomendados ao leitor - a fim de garantir um melhor entendimento a respeito dos temas dispostos em segundo plano.

Outrossim, com o objetivo de evitar certas discussões a respeito da terminologia empregada, é importante que o leitor perceba, ao longo das generalizações de conceitos abstratos, a possibilidade de tratar de expressões como, por exemplo, 'tradução algébrica' para indicar a mudança de uma perspectiva já estabelecida para uma nova versão. Para melhor contextualização, no terceiro capítulo, surgem as categorias monoidais que, de certo modo, são as estruturas advindas da tradução algébrica de um monoide para a teoria de categorias.

Em especial, no próximo capítulo desenvolver-se-ão noções básicas da teoria de categorias de maneira a citar todos os componentes suficientes na construção estrutural de uma categoria monoidal. Nesse sentido, obrigatoriamente, conceitos e exemplos de categorias usuais, funtores covariantes e isomorfismos naturais são evidenciados e demonstrados, quando necessários, de modo a possibilitar ao leitor um aspecto construtivo, concreto e intuitivo do tópico.

Enquanto que, no terceiro capítulo, desenvolve-se exclusivamente a ideia de categoria monoidal, bem como, exemplos devidamente explicitados e resultados envolvendo seus componentes. Particularmente, a demonstração desses seguimentos é essencial para demonstrar teoremas em capítulos futuros, principalmente no último capítulo, o qual possui a maior dependência de resultados em relação ao terceiro.

No quarto capítulo trabalhar-se-ão com preceitos relativos à estrutura de uma álgebra, ora sobre um anel comutativo com unidade ora sobre um corpo. Além disso, caracterizam-se as noções estruturais básicas de uma álgebra e sua dualização, uma coálgebra, de modo que seja possível descrevê-las sob o ponto de vista da categoria dos espaços vetoriais sobre um corpo. Ademais, apresentam-se as biálgebras - conjuntos que possuem, simultaneamente, as estruturas de álgebra e coálgebra - para que, em seguida, sejam descritas as álgebras de Hopf, ou seja, biálgebras cujo morfismo identidade H é inversível em relação a uma operação produto especial.

Por fim, para o quinto capítulo, tem-se a completa generalização das estruturas citadas anteriormente para uma categoria monoidal qualquer. Em seguida, ao tomar proveito dos resultados obtidos, é possível obter paradigmas de modo a envolver uma nova versão de módulos. Em especial, apresentam-se módulos sobre álgebras, comódulos sobre coálgebras e módulos de Hopf - objetos com estrutura, concomitantemente, de módulo sobre álgebra e comódulo sobre coálgebra.

2 NOÇÕES ELEMENTARES DA TEORIA DE CATEGORIAS

Este capítulo serve como contextualização dos esforços necessários para obter a premissa de uma categoria monoidal. Em especial, as principais referências para esta discussão são dadas em (BORCEUX, 1994), (MOMBELLI, s.d.), (MACLANE, 1970) e (PAREIGIS, 1970).

2.1 CATEGORIAS

Uma vez que a estrutura de um conjunto está, usualmente, associada uma noção de um mapeamento que preserva tal característica, uma categoria e seus exemplos mais básicos são apresentados de modo que seja possível tratar de ambos os fatores citados anteriormente. Isto é, faz-se necessário atrelar conjuntos com uma mesma estrutura aos respectivos morfismos descritos a seguir

Definição 2.1.1. Uma categoria $\mathcal{C}$ é composta por:

(i) uma coleção de objetos, denotada por $Obj(\mathcal{C})$;

(ii) para cada par de objetos (X, Y) tais que $X, Y \in Obj(\mathcal{C})$, existe uma coleção de morfismos de X para Y em $\mathcal{C}$, denotada por $Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$;

(iii) para cada $X \in Obj(\mathcal{C})$, existe morfismo $id_X : X \to X$ dito morfismo identidade de X;

(iv) para quaisquer $X, Y, Z \in Obj(\mathcal{C})$, existe uma operação de composição denotada por $\circ$ e definida como

$$\begin{aligned} \circ : Hom_{\mathcal{C}}(Y, Z) \times Hom_{\mathcal{C}}(X, Y) &\to Hom_{\mathcal{C}}(X, Z) \\ (g, f) \qquad\qquad &\mapsto \quad g \circ f. \end{aligned}$$

Ademais, para quaisquer $f \in Hom_{\mathcal{C}}(X, Y), g \in Hom_{\mathcal{C}}(Y, Z)$ e $h \in Hom_{\mathcal{C}}(Z, W)$, a composição satisfaz as seguintes identidades:

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f) \quad \text{e} \quad f \circ id_X = f = id_Y \circ f.$$

Observação 2.1.2. Em especial, é importante reconhecer o abuso de notação do símbolo '$\in$' utilizado anteriormente. Afinal, utiliza-se a preposição 'em' no sentido de X e f estarem nas coleções $Obj(\mathcal{C})$ e $Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$, respectivamente. Contudo, não haverá problemas de interpretação e, destarte, tal aspecto de escrita será mantido ao longo de todo o texto.

Definição 2.1.3. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. Um morfismo $f : X \to Y$ é dito isomorfismo se existe um morfismo $g : Y \to X$ tal que $f \circ g = id_Y$ e $g \circ f = id_X$.

Antes de apresentar o conceito de subcategoria, são expostos exemplos usuais de categorias que o leitor deve possuir certa familiaridade. Particularmente, para os próximos exemplos, não são demonstradas as identidades em (iv); contudo, ambas as coleções propostas em (i) e (ii) são devidamente citadas, isto é, exibem-se objetos e os morfismos.

Exemplo 2.1.4. Diz-se a respeito de Set a categoria cujos objetos são conjuntos quaisquer e os morfismos são quaisquer funções entre tais conjuntos.

Exemplo 2.1.5. Diz-se a respeito de Grp a categoria cujos objetos e morfismos são grupos e homomorfismos de grupos, respectivamente.

Observação 2.1.6. Em particular, ao selecionar a restrição com apenas grupos abelianos, tem-se uma nova categoria, dita Ab.

Exemplo 2.1.7. Diz-se a respeito de $Ring$ a categoria cujos objetos e morfismos são anéis e homomorfismos de anéis, respectivamente.

Observação 2.1.8. Note que ao tratar apenas com anéis que admitem unidade tem-se a categoria $ring$ cujos morfismos $f : A \to B$ são homomorfismos de anéis tais que $f(1_A) = 1_B$, para quaisquer A e B anéis com unidade. Além disso, a restrição em $ring$ para anéis comutativos e com unidade promove a categoria $Cring$.

Exemplo 2.1.9. Para $\mathbb{K}$ um corpo, diz-se a respeito de $Vect_{\mathbb{K}}$ a categoria cujos objetos são espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$ e os morfismos são as transformações lineares.

Observação 2.1.10. Repare na possibilidade considerar apenas $\mathbb{K}$-espaços vetoriais de dimensão finita; assim, tem-se a categoria $vect_{\mathbb{K}}$.

O próximo exemplo envolve a generalização de um produto cartesiano, uma noção essencial ao longo de todo o trabalho, uma vez que tal está diretamente vinculado à definição de uma categoria monoidal.

Exemplo 2.1.11. Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ duas categorias. Diz-se a respeito de $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ a categoria produto entre $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ tal que:

(i) a coleção $Obj(\mathcal{C} \times \mathcal{D})$ é dada pelos pares $(X, X') \in (Obj(\mathcal{C}), Obj(\mathcal{D}))$;

(ii) para quaisquer $(X, X'), (Y, Y') \in Obj(\mathcal{C} \times \mathcal{D})$, tem-se que a coleção de morfismos em $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ é dada por $Hom_{\mathcal{C}\times\mathcal{D}}\big((X, X'), (Y, Y')\big) = \big(Hom_{\mathcal{C}}(X, Y), Hom_{\mathcal{D}}(X', Y')\big)$;

(iii) para todo $(X, X') \in Obj(\mathcal{C} \times \mathcal{D})$, o morfismo identidade em $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ é dado por $id_{(X,X')} = (id_X, id_{X'})$;

(iv) para quaisquer $\overline{X} = (X, X'), \overline{Y} = (Y, Y'), \overline{Z} = (Z, Z') \in Obj(\mathcal{C}\times\mathcal{D})$, a composição é definida entrada-a-entrada, isto é, para $\overline{g} = (g, g')$ e $\overline{f} = (f, f')$, tem-se que

$$\begin{aligned} \circ : Hom_{\mathcal{C}\times\mathcal{D}}(\overline{Y},\overline{Z}) \times Hom_{\mathcal{C}\times\mathcal{D}}(\overline{X},\overline{Y}) &\to Hom_{\mathcal{C}\times\mathcal{D}}(\overline{X},\overline{Z}) \\ (\overline{g},\overline{f}) \qquad\qquad &\mapsto \overline{g}\circ\overline{f} := (g\circ f, g'\circ f'). \end{aligned}$$

Resta demonstrar as identidades que envolvem a composição. Destarte, sejam $\overline{f} \in Hom_{\mathcal{C}\times\mathcal{D}}(\overline{X},\overline{Y}), \overline{g} \in Hom_{\mathcal{C}\times\mathcal{D}}(\overline{X},\overline{Z})$ e $\overline{h} \in Hom_{\mathcal{C}\times\mathcal{D}}(\overline{Z},\overline{W})$. Então

$$\begin{aligned} (\overline{h}\circ\overline{g})\circ\overline{f} &= (h\circ g, h'\circ g')\circ(f,f') \\ &= \big((h\circ g)\circ f, (h'\circ g')\circ f'\big) \\ &= \big(h\circ(g\circ f), h'\circ(g'\circ f')\big) \\ &= (h,h')\circ(g\circ f, g'\circ f') \\ &= \overline{h}\circ(\overline{g}\circ\overline{f}) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \overline{f}\circ id_{\overline{X}} &= (f,f')\circ(id_X, id_{X'}) \\ &= (f\circ id_X, f'\circ id_{X'}) \\ &= \overline{f} \\ &= (id_Y\circ f, id_{Y'}\circ f') \\ &= (id_Y, id_{Y'})\circ(f,f') \\ &= id_{\overline{Y}}\circ\overline{f}. \end{aligned}$$

Logo, $\mathcal{C}\times\mathcal{D}$ é, de fato, uma categoria.

Neste momento, é interessante considerar uma categoria que trata de noções de dualidade. Assim, fixada uma categoria, na tradução de dual, busca-se manter a coleção de objetos, entretanto altera-se a coleção de morfismos em questão de definir qual objeto é o domínio e contradomínio.

Exemplo 2.1.12. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria, diz-se a respeito de $\mathcal{C}^{op}$ a categoria oposta de $\mathcal{C}$ tal que:

(i) $\mathcal{C}^{op}$ e $\mathcal{C}$ possuem a mesma coleção de objetos;

(ii) para quaisquer $X, Y \in Obj(\mathcal{C}^{op})$, tem-se que $Hom_{\mathcal{C}^{op}}(X,Y) = Hom_{\mathcal{C}}(Y,X)$;

(iii) para quaisquer $X, Y, Z \in Obj(\mathcal{C}^{op})$, define-se composição oposta, $\circ^{op}$, por

$$\begin{aligned} \circ^{op} : Hom_{\mathcal{C}^{op}}(Y,Z) \times Hom_{\mathcal{C}^{op}}(X,Y) &\to Hom_{\mathcal{C}^{op}}(X,Z) \\ (g,f) \qquad\qquad &\mapsto g\circ^{op} f := f\circ g. \end{aligned}$$

Repare que a existência do morfismo identidade nesta categoria já é dado em (ii). Logo, sejam $f \in Hom_{\mathcal{C}^{op}}(X,Y), g \in Hom_{\mathcal{C}^{op}}(Y,Z)$ e $h \in Hom_{\mathcal{C}^{op}}(Z,W)$. Note que

$$\begin{aligned}(h \circ^{op} g) \circ^{op} f &= (g \circ h) \circ^{op} f = f \circ (g \circ h) \\ &= (f \circ g) \circ h = h \circ^{op} (f \circ g) = h \circ^{op} (g \circ^{op} f)\end{aligned}$$

e

$$f \circ^{op} id_X = id_X \circ f = f = f \circ id_Y = id_Y \circ^{op} f$$

Com isso, de fato, garante-se que $\mathcal{C}^{op}$ é uma categoria.

Uma noção interessante, a partir da definição de categoria é a noção de restrição, já exemplificada anteriormente em 2.1.6, 2.1.8 e 2.1.10. Em especial, constata-se que a seguinte definição engloba tais informações.

Definição 2.1.13. Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ duas categorias. Diz-se que $\mathcal{D}$ é uma subcategoria de $\mathcal{C}$ se:

(i) para todo $X \in Obj(\mathcal{D})$, segue que $X \in Obj(\mathcal{C})$;

(ii) se $X \in Obj(\mathcal{D})$, então $id_X \in Hom_{\mathcal{D}}(X,X)$;

(iii) para quaisquer $X, Y \in Obj(\mathcal{D})$, se $f \in Hom_{\mathcal{D}}(X,Y)$, então $f \in Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$.

Observação 2.1.14. A partir dessa última definição, concluí-se que Ab, $Cring$, $ring$ e $vect_{\mathbb{K}}$ são subcategorias de Grp, $ring$, $Ring$ e $Vect_{\mathbb{K}}$, respectivamente.

2.2 FUNTORES

Normalmente, a partir do momento que foram definidos os agentes de estudo, são apresentadas relações ou aplicações as quais interligam aqueles. Assim, um funtor é, sob certo abuso, a tradução dessas aplicações na teoria de categorias.

Definição 2.2.1. Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ duas categorias. Um funtor covariante $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ é representado por:

(i) uma atribuição de cada $X \in Obj(\mathcal{C})$ a um objeto $F(X) \in Obj(\mathcal{D})$, isto é,

$$\begin{aligned}F : Obj(\mathcal{C}) &\to Obj(\mathcal{D}) \\ X &\mapsto F(X);\end{aligned}$$

(ii) uma atribuição, semelhante ao item anterior, de cada morfismo $f \in Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$ a um outro morfismo $F(f) \in Hom_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$, isto é,

$$\begin{aligned}F : Hom_{\mathcal{C}}(X,Y) &\to Hom_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y)) \\ f &\mapsto F(f);\end{aligned}$$

(iii) para todo $X \in Obj(\mathcal{C})$, segue que $F(id_X) = id_{F(X)}$;

(iv) se $f \in Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$ e $g \in Hom_{\mathcal{C}}(Y, Z)$, então $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

Definição 2.2.2. Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ duas categorias. Um funtor contravariante $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ é representado por:

(i) uma atribuição de cada $X \in Obj(\mathcal{C})$ a um objeto $F(X) \in Obj(\mathcal{D})$, isto é,

$$\begin{aligned} F : Obj(\mathcal{C}) &\to Obj(\mathcal{D}) \\ X &\mapsto F(X); \end{aligned}$$

(ii) uma atribuição, semelhante ao item anterior, de cada morfismo $f \in Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$ a um outro morfismo $F(f) \in Hom_{\mathcal{D}}(F(Y), F(X))$, isto é,

$$\begin{aligned} F : Hom_{\mathcal{C}}(X, Y) &\to Hom_{\mathcal{D}}(F(Y), F(X)) \\ f &\mapsto F(f); \end{aligned}$$

(iii) para todo $X \in Obj(\mathcal{C})$, segue que $F(id_X) = id_{F(X)}$;

(iv) se $f \in Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$ e $g \in Hom_{\mathcal{C}}(Y, Z)$, então $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$.

Observação 2.2.3. É possível evidenciar as definições de funtores, sejam covariantes sejam contravariantes, através de “diagramas". Em especial, F é dito covariante se é possível explicitá-lo por

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "F"'] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "F"] & Z \arrow[d, "F"] \\ F(X) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[rr, bend right, "F(g) \circ F(f)"'] & F(Y) \arrow[r, "F(g)"] & F(Z); \end{tikzcd} \tag{2.1}$$

e F é dito contravariante se é explicitado por

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "F"'] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "F"] & Z \arrow[d, "F"] \\ F(X) & F(Y) \arrow[l, "F(f)"'] & F(Z). \arrow[l, "F(g)"'] \arrow[ll, bend left, "F(g) \circ F(f)"] \end{tikzcd} \tag{2.2}$$

Observação 2.2.4. Ao longo do texto, os funtores covariantes serão descritos apenas por funtores. Logo, ao trabalhar com funtores contravariantes, tais serão especificados a fim de evitar problemas de interpretação ao longo do texto com certos resultados.

Exemplo 2.2.5. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. Define-se $Id_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ por $Id_{\mathcal{C}}(X) = X$ para todo $X \in Obj(\mathcal{C})$ e $Id_{\mathcal{C}}(f) = f$ para qualquer $f \in Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$. Em especial, $Id_{\mathcal{C}}$ é um funtor covariante denominado funtor identidade e, veja que, de fato, $Id_{\mathcal{C}}$ é funtor, pois para $X \in Obj(\mathcal{C})$, segue que

$$Id_{\mathcal{C}}(id_X) = id_X = id_{Id_{\mathcal{C}}(X)}$$

e dados $f \in Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$ e $g \in Hom_{\mathcal{C}}(Y, Z)$, garante-se que

$$Id_{\mathcal{C}}(g \circ f) = g \circ f = Id_{\mathcal{C}}(g) \circ Id_{\mathcal{C}}(f).$$

Exemplo 2.2.6. Para $\mathbb{K}$ um corpo, considere a categoria dos $\mathbb{K}$-espaços vetoriais, isto é, $Vect_{\mathbb{K}}$. Defina o funtor bidual $B : Vect_{\mathbb{K}} \to Vect_{\mathbb{K}}$ da seguinte forma:

(i) Para todo $V \in Obj(Vect_{\mathbb{K}})$, tem-se que $B(V) = V^{**}$;

(ii) para todo $T \in Hom_{Vect_{\mathbb{K}}}(V, U)$, segue que $B(T) = T^{**}$ tal que

$$\begin{aligned} T^{**} : V^{**} &\to U^{**} \\ g &\mapsto T^{**}(g) := g \circ T^* \end{aligned}$$

em que $T^* : U^* \to V^*$ é definido por $T^*(h) = h \circ T$ para todo $h \in U^*$.

Seja $V \in Obj(\mathcal{C})$, note que $B(id_V) = id_V^{**} = id_{V^{**}} = id_{B(V)}$. Por fim, sejam $T \in Hom_{Vect_{\mathbb{K}}}(V, U)$ e $S \in Hom_{Vect_{\mathbb{K}}}(U, W)$, infere-se que

$$B(S \circ T) = (S \circ T)^{**} = (T^* \circ S^*)^* = S^{**} \circ T^{**} = B(S) \circ B(T)$$

Isto é, B é funtor covariante.

Exemplo 2.2.7. Um funtor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ é dito funtor esquecimento se F "descarta" ou "esquece" algumas ou todas propriedades relativos aos objetos e morfismos em $\mathcal{C}$ com relação aos objetos e morfismos em $\mathcal{D}$.

Repare que $F : Ring \to Set$, $G : Ring \to Grp$ e $H : Grp \to Set$ são funtores esquecimento.

Neste momento, o leitor pode criar a seguinte indagação. Existe alguma relação que permita utilizar a ideia de composição para funtores covariantes? A resposta é apresentada pela próxima proposição.

Proposição 2.2.8. Sejam $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ e $\mathcal{E}$ categorias tais que existam os funtores $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ e $G : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$. Defina $G \circ F : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ por

(i) para todo $X \in Obj(\mathcal{C})$, segue que $(G \circ F)(X) = G\,(F(X))$

(ii) para todo $f \in Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$, tem-se que $(G \circ F)(f) = G\,(F(f))$

Sob tais considerações, se F e G são ou ambos covariantes ou ambos contravariantes, então $G \circ F$ é um funtor covariante; caso contrário, $G \circ F$ é um funtor contravariante.

Demonstração. Sejam $X \in Obj(\mathcal{C}), f \in Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$ e $g \in Hom_{\mathcal{C}}(Y, Z)$. Note que:

$$(G \circ F)(id_X) = G\left(F(id_X)\right) = G\left(id_{F(X)}\right) = id_{G(F(X))} = id_{(G \circ F)(X)}.$$

Se F e G são covariantes, então

$$\begin{aligned}(G \circ F)(g \circ f) &= G\left(F(g \circ f)\right)\\ &= G\left(F(g) \circ F(f)\right)\\ &= G\left(F(g)\right) \circ G\left(F(f)\right)\\ &= (G \circ F)(g) \circ (G \circ F)(f).\end{aligned}$$

Se F e G são contravariantes, então

$$\begin{aligned}(G \circ F)(g \circ f) &= G\left(F(g \circ f)\right)\\ &= G\left(F(f) \circ F(g)\right)\\ &= G\left(F(g)\right) \circ G\left(F(f)\right)\\ &= (G \circ F)(g) \circ (G \circ F)(f).\end{aligned}$$

Se F é covariante e G é contravariante, então

$$\begin{aligned}(G \circ F)(g \circ f) &= G\left(F(g \circ f)\right)\\ &= G\left(F(g) \circ F(f)\right)\\ &= G\left(F(f)\right) \circ G\left(F(g)\right)\\ &= (G \circ F)(f) \circ (G \circ F)(g).\end{aligned}$$

Se F é contravariante e G é covariante, então

$$\begin{aligned}(G \circ F)(g \circ f) &= G\left(F(g \circ f)\right)\\ &= G\left(F(f) \circ F(g)\right)\\ &= G\left(F(f)\right) \circ G(F(g))\\ &= (G \circ F)(f) \circ (G \circ F)(g).\end{aligned}$$

■

2.3 TRANSFORMAÇÕES NATURAIS

Enquanto funtores relacionam categorias, as transformações naturais atuam sobre os primeiros de modo a proporcionar a essência da teoria apresentada, a comutatividade de diagramas.

Definição 2.3.1. Sejam $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ funtores. Diz-se que $\alpha : F \to G$ é uma transformação natural se α consiste em uma coleção de morfismos α_X da forma $\{\alpha_X : F(X) \to G(X) \mid X \in Obj(\mathcal{C})\}$ em $\mathcal{D}$ de modo que, para quaisquer $X, Y \in Obj(\mathcal{C})$ e para todo $f \in Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$, o seguinte diagrama seja comutativo

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\alpha_X"'] & F(Y) \arrow[d, "\alpha_Y"] \\ G(X) \arrow[r, "G(f)"'] & G(Y). \end{tikzcd} \tag{2.3}$$

Observação 2.3.2. Analogamente, uma transformação natural pode envolver funtores contravariantes de modo que a mudança é definida pela inversão do sentido em relação aos morfismos $F(f)$, caso F contravariante, ou $G(f)$, caso G contravariante.

Exemplo 2.3.3. Seja $\mathbb{K}$ um corpo, considere a categoria $Vect_{\mathbb{K}}$ e os funtores bidual e identidade, isto é, B e $Id_{Vect_{\mathbb{K}}}$. Repare que η é uma transformação natural dada por $\{\eta_V : Id_{Vect_{\mathbb{K}}}(V) \to B(V) \mid V \in Obj(Vect_{\mathbb{K}})\} = \{\eta_V : V \to V^{**} \mid V \in Obj(Vect_{\mathbb{K}})\}$ já que o diagrama a seguir é comutativo

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\eta_V"'] & U \arrow[d, "\eta_U"] \\ V^{**} \arrow[r, "T^{**}"'] & U^{**} \end{tikzcd}$$

De fato, a priori, note que:

$$\begin{aligned} \eta_V : V &\to V^{**} \\ v &\mapsto \eta_V(v) : V^* \to \mathbb{K} \\ &\qquad\qquad f \mapsto f(v) \end{aligned}$$

para todo $v \in V$ e $f \in V^*$. A comutatividade do diagrama é dada por

$$\begin{aligned} \left((T^{**} \circ \eta_V)(v)\right)(f) &= \left(\eta_V(v)\right)\left(T^*(f)\right) \\ &= \eta_V(v)(T^*(f)) \\ &= \eta_V(v)(f \circ T) \\ &= (f \circ T)(v) \\ &= \left(\eta_U\left(T(v)\right)\right)(f) \\ &= \left((\eta_U \circ T)(v)\right)(f) \end{aligned}$$

Definição 2.3.4. Uma transformação natural $\alpha : F \to G$ é dita um isomorfismo natural se para todo $X \in Obj(\mathcal{C})$, tem-se que α_X é um isomorfismo. Desta forma, os funtores F e G são ditos equivalentes denotados por $F \sim G$.

Com a definição acima, vale interromper o ritmo e objeto de discurso para promover ao leitor uma breve discussão. Usualmente, em um curso de álgebra, ***e.g.***, teoria de grupos ou anéis, são trabalhadas noções de estruturas isomorfas como, por exemplo, $\mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}_2$ e $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$. O ponto em questão é que, até então, não foram definidas noções envolvendo categorias isomorfas. Portanto, segue que

Definição 2.3.5. Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ duas categorias. Diz-se que $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ são categorias isomorfas se existe um par de funtores $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ e $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ tais que $G \circ F = Id_{\mathcal{C}}$ e $F \circ G = Id_{\mathcal{D}}$.

É importante notar que a premissa de categorias isomorfas é demasiadamente restritiva em função das noções de igualdade presentes nas duas composições dos funtores. Logo, é possível apresentar uma exigência mais interessante - utilizando isomorfismos naturais - a fim de obter uma equivalência entre categorias no seguinte sentido:

Definição 2.3.6. Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ duas categorias. Duas categorias são equivalentes se existem funtores $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ e $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ tais que $G \circ F \sim Id_{\mathcal{C}}$ e $F \circ G \sim Id_{\mathcal{D}}$.

Observação 2.3.7. Repare que, pela Definição 2.3.4, a relação $\sim$ é uma relação de equivalência. Isto é, dados funtores $F, G, H : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, infere-se que

- $F \sim F$;
- se $F \sim G$, então $G \sim F$;
- se $F \sim G$ e $G \sim H$, então $F \sim H$.

Por mais que pareça trivial a afirmação acima, os próximos resultados verificam tal frase.

Exemplo 2.3.8. Seja $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ um funtor. Diz-se a respeito do isomorfismo natural identidade $ID_F : F \to F$ definido por $(ID_F)_X = id_{F(X)}$, para todo $X \in Obj(\mathcal{C})$. Afinal, é fácil notar que, $(ID_F)_X : F(X) \to F(X)$ é isomorfismo para todo $X \in Obj(\mathcal{C})$, bem como, o seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "(ID_F)_X"'] & F(Y) \arrow[d, "(ID_F)_Y"] \\
F(X) \arrow[r, "F(f)"'] & F(Y).
\end{tikzcd}$$

Note que o exemplo anterior indica que $F \sim F$. Neste momento, para garantir a propriedade simétrica da relação $\sim$, considere:

Definição 2.3.9. Seja $\alpha : F \to G$ um isomorfismo natural. Define-se $\alpha^{-1} : G \to F$ como sendo a coleção de morfismos $\{\beta_X = \alpha_X^{-1} : G(X) \to F(X) \mid X \in Obj(\mathcal{C})\}$ em $\mathcal{D}$.

Essa definição sugere que se $F \sim G$ então $G \sim F$ e esse fato é comprovado pela próxima proposição

Proposição 2.3.10. Sejam $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ funtores e $\alpha : F \to G$ um isomorfismo natural. Sob tais considerações, $\beta = \alpha^{-1}$ também é um isomorfismo natural.

Demonstração. Sejam $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ funtores, $\alpha : F \to G$ um isomorfismo natural, $X, Y \in Obj(\mathcal{C})$ e $f \in Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$. Por hipótese, sabe-se que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\alpha_X"'] & F(Y) \arrow[d, "\alpha_Y"] \\ G(X) \arrow[r, "G(f)"'] & G(Y). \end{tikzcd}$$

Uma vez que $\alpha_X : F(X) \to G(X)$ é isomorfismo para todo $X \in Obj(\mathcal{C})$, existe isomorfismo $\beta_X = \alpha_X^{-1} : G(X) \to F(X)$. Logo, o diagrama abaixo comuta

$$\begin{tikzcd} G(X) \arrow[r, "G(f)"] \arrow[d, "\beta_X=\alpha_X^{-1}"'] & G(Y) \arrow[d, "\beta_Y=\alpha_Y^{-1}"] \\ F(X) \arrow[r, "F(f)"'] & F(Y), \end{tikzcd}$$

isto é, β é transformação natural e $\beta_X : G(X) \to F(X)$ é isomorfismo para todo $X \in Obj(\mathcal{C})$. ■

Resta garantir a transitividade da relação $\sim$ e, para tal, necessitar-se-á da noção de composição vertical.

Definição 2.3.11. Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ duas categorias, $F, G, H : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ funtores e $\beta : F \to G$ e $\alpha : G \to H$ transformações naturais. Diz-se que $\alpha \circ \beta : F \to H$ é a composição vertical de α e β de modo que $\alpha \circ \beta$ é definida por $\{(\alpha \circ \beta)_X : F(X) \to H(X) \mid X \in Obj(\mathcal{C})\}$ com $(\alpha \circ \beta)_X := \alpha_X \circ \beta_X$.

Observação 2.3.12. A composição vertical $\alpha \circ \beta$ definida acima é, de fato, uma transformação natural, pois, para quaisquer $X, Y \in Obj(\mathcal{C})$ e para todo $f \in Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$, segue que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "(\alpha\circ\beta)_X=\alpha_X\circ\beta_X"'] & F(Y) \arrow[d, "(\alpha\circ\beta)_Y=\alpha_Y\circ\beta_Y"] \\
H(X) \arrow[r, "H(f)"'] & H(Y)
\end{tikzcd} \tag{2.4}$$

comuta, pois no diagrama

$$\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\beta_X"'] & F(Y) \arrow[d, "\beta_Y"] \\
G(X) \arrow[r, "G(f)"] \arrow[d, "\alpha_X"'] & G(Y) \arrow[d, "\alpha_Y"] \\
H(X) \arrow[r, "H(f)"'] & H(Y),
\end{tikzcd}$$

cada um dos “retângulos" é comutativo - pela definição de α e β serem transformações naturais - e vale que

$$\begin{aligned}
H(f) \circ (\alpha \circ \beta)_X &= H(f) \circ \alpha_X \circ \beta_X \\
&= \alpha_Y \circ G(f) \circ \beta_X \\
&= \alpha_Y \circ \beta_Y \circ F(f) \\
&= (\alpha \circ \beta)_Y \circ F(f)
\end{aligned}$$

Com tal observação, conclui-se que, de fato, $\sim$ é relação de equivalência. Ademais, para tomar proveito do conceito de composição vertical, vale considerar o seguinte exemplo de uma categoria um tanto diferente em relação às apresentadas anteriormente.

Exemplo 2.3.13. Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ categorias. Diz-se a respeito de $Fun(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ a categoria funtor cujos objetos são funtores $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ e, por conseguinte, os morfismos são as transformações naturais. Ademais, repare que:

- o morfismo identidade em $Fun(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ é o isomorfismo natural $ID_F : F \to F$;
- a composição entre morfismos é a composição vertical.

Para simplificar a notação, defina

$$Nat(F, G) := Hom_{Fun(\mathcal{C},\mathcal{D})}(F, G)$$

Logo, sejam $\alpha \in Nat(F, G), \beta \in Nat(G, H), \gamma \in Nat(H, J)$ e X um objeto $\mathcal{C}$. Note que, pela associatividade da composição em $\mathcal{D}$,

$$
\begin{aligned}
((\gamma \circ \beta) \circ \alpha)_X &= (\gamma \circ \beta)_X \circ \alpha_X \\
&= (\gamma_X \circ \beta_X) \circ \alpha_X \\
&= \gamma_X \circ (\beta_X \circ \alpha_X) \\
&= \gamma_X \circ (\beta \circ \alpha)_X \\
&= (\gamma \circ (\beta \circ \alpha))_X
\end{aligned}
$$

e

$$(\alpha \circ ID_F)_X = \alpha_X \circ (ID_F)_X = \alpha_X = (ID_G)_X \circ \alpha_X = (\alpha \circ ID_G)_X.$$

Portanto, $Fun(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ é uma categoria.

Notação. Se $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ são categorias tais que $\mathcal{C} = \mathcal{D}$, então escreve-se $End(\mathcal{C})$, dita categoria dos endofuntores em $\mathcal{C}$, em vez de $Fun(\mathcal{C}, \mathcal{C})$.

Uma vez que o termo 'vertical' é citado na composição de transformações naturais, espera-se que, pelo menos, exista uma outra versão, método ou meio de compor transformações naturais. Essa nova composição é denominada composição horizontal.

Definição 2.3.14. Sejam $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ e $\mathcal{E}$ categorias, $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, bem como, $H, J : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ funtores, ademais, $\beta : F \to G$ e $\alpha : H \to J$ transformações naturais. A composição $\alpha * \beta : H \circ F \to J \circ G$ definida por $\{(\alpha * \beta)_X : (H \circ F)(X) \to (J \circ G)(X) \mid X \in Obj(\mathcal{C})\}$ em que $(\alpha * \beta)_X := \alpha_{G(X)} \circ H(\beta_X)$ é dita composição horizontal.

Observação 2.3.15. Repare que, na definição acima, os funtores $H \circ F$ e $J \circ G$ são funtores que interligam as categorias $\mathcal{C}$ e $\mathcal{E}$. Outrossim, é possível construir o seguinte diagrama comutativo para melhor representar a composição horizontal.

$$
\begin{tikzcd}
(H \circ F)(X) \arrow[rr, "(\alpha * \beta)_X"] \arrow[dr, "H(\beta_X)"'] & & (J \circ G)(X) \\
& (H \circ G)(X). \arrow[ur, "\alpha_{G(X)}"'] &
\end{tikzcd}
\tag{2.5}
$$

Além disso, note que $\alpha * \beta$ é, de fato, uma transformação natural. Afinal, considere $X, Y \in Obj(\mathcal{C})$ e $f \in Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$, infere-se que

$$
\begin{tikzcd}
(H \circ F)(X) \arrow[r, "H(\beta_X)"] \arrow[d, "(H \circ F)(f)"'] \arrow[dr, phantom, "(1)"] & (H \circ G)(X) \arrow[r, "\alpha_{G(X)}"] \arrow[d, "(H \circ G)(f)"] \arrow[dr, phantom, "(2)"] & (J \circ G)(X) \arrow[d, "(J \circ G)(f)"] \\
(H \circ F)(Y) \arrow[r, "H(\beta_Y)"'] & (H \circ G)(Y) \arrow[r, "\alpha_{G(Y)}"'] & (J \circ G)(Y)
\end{tikzcd}
$$

é comutativo. Note que (1) comuta uma vez que $G(f) \circ \beta_X = \beta_Y \circ F(f)$ e, assim, $H(G(f)) \circ H(\beta_X) = H(\beta_Y) \circ H(F(f))$, enquanto que (2) comuta pelo fato de que α é transformação natural. Logo, o diagrama

$$\begin{tikzcd}
(H \circ F)(X) \arrow[r, "(\alpha*\beta)_X=\alpha_{G(X)}\circ H(\beta_X)"] \arrow[d, "(H\circ G)(f)"'] & (J \circ G)(X) \arrow[d, "(J\circ G)(f)"] \\
(H \circ F)(Y) \arrow[r, "(\alpha*\beta)_Y=\alpha_{G(Y)}\circ H(\beta_Y)"'] & (J \circ G)(Y)
\end{tikzcd}$$

comutativo.

A utilização da composição horizontal é evidenciada na categoria $End(\mathcal{C})$, pois é necessária para definir a composição de morfismos os quais são as transformações naturais, e sua diagramação é dada na mesma direção. Logo, o leitor terá mais facilidade de notar quando são descritas as composições verticais e horizontais já que a classificação da composição também é indicada na direção das flechas de um diagrama comutativo. Em especial, a utilização da composição vertical é evidenciada no Exemplo 3.1.9 para definir a estrutura monoidal de $End(\mathcal{C})$.

Proposição 2.3.16. Sejam $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$ e $\mathcal{F}$ categorias, $R, S : \mathcal{F} \to \mathcal{C}$, $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $H, J : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ funtores, bem como, $\gamma : R \to S$, $\beta : F \to G$ e $\alpha : H \to J$ transformações naturais. Sob tais considerações,

(i) a composição horizontal é associativa, isto é, $(\alpha * \beta) * \gamma = \alpha * (\beta * \gamma)$;

(ii) $\beta * ID_{Id_{\mathcal{C}}} = \beta$ e $ID_{Id_{\mathcal{D}}} * \beta = \beta$.

Demonstração. A priori, repare que

$$(\alpha * \beta) * \gamma : (H \circ F) \circ R \to (J \circ G) \circ S$$

e

$$\alpha * (\beta * \gamma) : H \circ (F \circ R) \to J \circ (G \circ S),$$

bem como, todas as composições de funtores acima estão definidas da categoria $\mathcal{F}$ para a categoria $\mathcal{E}$. Logo, para $X \in Obj(\mathcal{F})$, tem-se que

$$\begin{aligned}
(\alpha * (\beta * \gamma))_X &= \alpha_{(G\circ S)(X)} \circ H((\beta * \gamma)_X) \\
&= \alpha_{G(S(X))} \circ H(\beta_{S(X)} \circ F(\gamma_X)) \\
&= \alpha_{G(S(X))} \circ H(\beta_{S(X)}) \circ H(F(\gamma_X)) \\
&= (\alpha * \beta)_{S(X)} \circ (H \circ F)(\gamma_X) \\
&= ((\alpha * \beta) * \gamma)_X.
\end{aligned}$$

A posteriori, note que para todo $Y \in Obj(\mathcal{C})$,

$$\begin{aligned}
(\beta * ID_{Id_{\mathcal{C}}})_Y &= \beta_{Id_{\mathcal{C}}(Y)} \circ F((ID_{Id_{\mathcal{C}}})_Y) \\
&= \beta_Y \circ F\left(id_{Id_{\mathcal{C}}(Y)}\right) \\
&= \beta_Y \circ F(id_Y) \\
&= \beta_Y \circ id_{F(Y)} \\
&= \beta_Y;
\end{aligned}$$

isto é, $\beta * ID_{Id_{\mathcal{C}}} = \beta$. Analogamente, segue que $ID_{Id_{\mathcal{D}}} * \beta = \beta$.

■

3 CATEGORIAS MONOIDAIS EM EVIDÊNCIA

O leitor deve reparar que pelo nome ‘categoria monoidal’ é possível traçar uma relação direta, ainda desconhecida, entre a teoria de categorias e a estrutura de um monoide. Lembre que um monoide é um par composto por um conjunto não-vazio e uma operação binária no conjunto de modo que tal seja fechada, associativa e admita elemento neutro bilateral. Dessa forma, a relação entre a teoria e a estrutura há de ser, na primeira, a tradução algébrica da segunda.

3.1 DEFINIÇÃO E EXEMPLOS USUAIS

Definição 3.1.1. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. Diz-se que a 6-upla $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbf{1}, a, l, r)$ é uma categoria monoidal se

(i) $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ é funtor tal que

$$\begin{aligned} \otimes : \quad \mathcal{C} \times \mathcal{C} &\to \mathcal{C} \\ (X, Y) &\mapsto X \otimes Y \\ (f, g) &\mapsto f \otimes g. \end{aligned}$$

Ademais, o funtor $\otimes$ deve satisfazer a seguinte implicação: Caso $f \in Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$ e $g \in Hom_{\mathcal{C}}(Z, W)$, infere-se que $f \otimes g \in Hom_{\mathcal{C}}(X \otimes Z, Y \otimes W)$;

(ii) $\mathbf{1}$ é objeto de $\mathcal{C}$, dito unidade da categoria;

(iii) a é isomorfismo natural tal que

$$a : \otimes \circ (\otimes \times Id_{\mathcal{C}}) \to \otimes \circ (Id_{\mathcal{C}} \times \otimes)$$

de modo que, para quaisquer $X, Y, Z \in Obj(\mathcal{C})$,

$$a_{X,Y,Z} : (X \otimes Y) \otimes Z \to X \otimes (Y \otimes Z)$$

dito associatividade da categoria;

(iv) l, r são isomorfismos naturais tais que

$$l : \mathbf{1} \otimes - \to Id_{\mathcal{C}} \quad \text{e} \quad r : - \otimes \mathbf{1} \to Id_{\mathcal{C}}$$

de modo que, para todo $X \in Obj(\mathcal{C})$,

$$l_X : \mathbf{1} \otimes X \to X \quad \text{e} \quad r_X : X \otimes \mathbf{1} \to X$$

(v) para quaisquer X, Y, Z, W em $Obj(\mathcal{C})$, os seguintes diagramas são comutativos:

$$\begin{tikzcd}
(X \otimes \mathbf{1}) \otimes Y \arrow[rr, "a_{X,\mathbf{1},Y}"] \arrow[dr, "r_X \otimes id_Y"'] & & X \otimes (\mathbf{1} \otimes Y) \arrow[dl, "id_X \otimes l_Y"] \\
& X \otimes Y &
\end{tikzcd} \tag{3.1}$$

e

$$\begin{tikzcd}
& ((X \otimes Y) \otimes Z) \otimes W \arrow[dl, "a_{X,Y,Z} \otimes id_W"'] \arrow[dr, "a_{X \otimes Y,Z,W}"] & \\
(X \otimes (Y \otimes Z)) \otimes W \arrow[d, "a_{X,Y \otimes Z,W}"'] & & (X \otimes Y) \otimes (Z \otimes W) \arrow[d, "a_{X,Y,Z \otimes W}"] \\
X \otimes ((Y \otimes Z) \otimes W) \arrow[rr, "id_X \otimes a_{Y,Z,W}"'] & & X \otimes (Y \otimes (Z \otimes W)) \,.
\end{tikzcd} \tag{3.2}$$

Usualmente, diz-se que $\mathcal{C}$ é uma categoria monoidal para simplificar a escrita associada à 6-upla $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbf{1}, a, l, r)$. Os diagramas (3.1) e (3.2) são ditos axiomas do triângulo e do pentágono, respectivamente.

Observação 3.1.2. A unidade **1** de uma categoria monoidal $\mathcal{C}$ é única a menos de isomorfismo. Afinal, suponha que $\overline{\mathbf{1}} \in Obj(\mathcal{C})$ seja outra unidade de $\mathcal{C}$. Então, existe um isomorfismo natural $\bar{l}$ tal que $\bar{l}_X : \overline{\mathbf{1}} \otimes X \to X$ e note que:

$$r_{\overline{\mathbf{1}}} \circ (\bar{l}_{\mathbf{1}})^{-1} : \mathbf{1} \to \overline{\mathbf{1}}$$

é composição de isomorfismos; logo, um isomorfismo. Portanto, **1** e $\overline{\mathbf{1}}$ são isomorfos.

Observação 3.1.3. Seja $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ o funtor definido anteriormente em (i) e sejam f, f', g, g' morfismos em $\mathcal{C}$ tais que $f : X \to Y$, $g : Y \to W$, $f' : X' \to Y'$ e $g' : Y' \to W'$. A relação entre o funtor $\otimes$ e a composição de morfismos é dada por

$$(g \otimes g') \circ (f \otimes f') = (g \circ f) \otimes (g' \circ f'),$$

uma vez que

$$\begin{aligned}
(g \otimes g') \circ (f \otimes f') &= \otimes(g, g') \circ \otimes(f, f') \\
&= \otimes \big((g, g') \circ (f, f')\big) \\
&= \otimes(g \circ f, g' \circ f') \\
&= (g \circ f) \otimes (g' \circ f').
\end{aligned}$$

Já a relação entre o funtor $\otimes$ e o morfismo identidade é dada por

$$id_{X\otimes Y} = id_X \otimes id_Y,$$

já que

$$id_{X\otimes Y} = id_{\otimes(X,Y)} = \otimes\left(id_{(X,Y)}\right) = \otimes(id_X, id_Y) = id_X \otimes id_Y.$$

Exemplo 3.1.4. Seja $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbf{1}, a, l, r)$ uma categoria monoidal. A categoria com a seguinte estrutura $(\mathcal{C}, \otimes^{rev}, \mathbf{1}, a^{rev}, l^{rev}, r^{rev})$ tal que

$$\begin{aligned} \otimes^{rev}: \ \mathcal{C}\times\mathcal{C} &\to \ \mathcal{C} \\ (X,Y) &\mapsto Y\otimes X \\ (f,g) &\mapsto g\otimes f \end{aligned}$$

bem como, para quaisquer $X, Y, Z \in Obj(\mathcal{C})$, $a^{rev}_{X,Y,Z} = a^{-1}_{Z,Y,X}$, $l^{rev}_X = r_X$ e $r^{rev}_X = l_X$ é, notoriamente, uma categoria monoidal dita categoria reversa de $\mathcal{C}$ e denotada por $\mathcal{C}^{rev}$.

Ainda que algumas questões no tocante ao funtor $\otimes$ estejam bem-estabelecidas, é interessante considerar duas novas identidades.

Proposição 3.1.5. Seja $\otimes : \mathcal{C}\times\mathcal{C} \to \mathcal{C}$ funtor definido em (i) e sejam f, g morfismos em $\mathcal{C}$ tais que $f : X \to Y$ e $g : Z \to W$. Sob tais considerações, os seguintes itens são verdadeiros:

(i) $f\otimes g = (id_Y \otimes g)\circ(f\otimes id_Z)$, bem como, $f\otimes g = (f\otimes id_W)\circ(id_X\otimes g)$;

(ii) se f e g são isomorfismos, então $f\otimes g$ é um isomorfismo e $(f\otimes g)^{-1} = f^{-1}\otimes g^{-1}$.

Demonstração. Seja $\otimes : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ o funtor definido em (i). Considere os morfismos, em $\mathcal{C}$, f, g tais que $f : X \to Y$ e $g : Z \to W$. Infere-se, pela relações estabelecidas previamente, que

$$f\otimes g = (id_Y\circ f)\otimes(g\circ id_Z) = (id_Y\otimes g)\circ(f\otimes id_Z)$$

$$f\otimes g = (f\circ id_X)\otimes(id_W\circ g) = (f\otimes id_W)\circ(id_X\otimes g).$$

Suponha que f e g sejam inversíveis, *i.e.*, existem $f^{-1} : Y \to X$ e $g^{-1} : W \to Z$ morfismos em $\mathcal{C}$. Assim, $f\otimes g$ é morfismo inversível e $(f\otimes g)^{-1} = f^{-1}\otimes g^{-1}$, pois

$$\begin{aligned} (f^{-1}\otimes g^{-1})\circ(f\otimes g) &= (f^{-1}\circ f)\otimes(g^{-1}\circ g) \\ &= id_X\otimes id_Z \\ &= id_{X\otimes Z} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}(f \otimes g) \circ (f^{-1} \otimes g^{-1}) &= (f \circ f^{-1}) \otimes (g \circ g^{-1}) \\ &= id_Y \otimes id_W \\ &= id_{Y \otimes W}.\end{aligned}$$

■

A partir deste momento, apresentam-se quatro exemplos de categorias monoidais.

Exemplo 3.1.6. A categoria Set é monoidal.

- o funtor $\otimes$ representa o produto cartesiano $\times : Set \times Set \to Set$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\times : Obj(Set) \times Obj(Set) &\to Obj(Set) \\ (X, Y) \qquad &\mapsto X \times Y\end{aligned}$$

bem como,

$$\begin{aligned}\times : Hom_{Set}(X, Y) \times Hom_{Set}(W, Z) &\to Hom_{Set}(X \times W, Y \times Z) \\ (f, g) \qquad\qquad &\mapsto \qquad f \times g\end{aligned}$$

Relembre que $f \times g : X \times W \to Y \times Z$ associa elementos às respectivas entradas, isto é, $(f \times g)(x, w) = (f(x), g(w))$. De fato, $\times$ é funtor, já que

$$\times\left(id_{(X,Y)}\right) = \times(id_X, id_Y) = id_X \times id_Y = id_{X \times Y} = id_{\times(X,Y)}$$

pois

$$(id_X \times id_Y)(x, y) = (id_X(x), id_Y(y)) = (x, y) = id_{X \times Y}(x, y).$$

Suponha $f : X \to Y$, $g : W \to Z$, $f' : Y \to U$ e $g' : Z \to V$, tem-se que

$$\begin{aligned}\times((f', g') \circ (f, g)) &= \times(f' \circ f, g' \circ g) \\ &= (f' \circ f) \times (g' \circ g) \\ &= \times(f', g') \circ \times(f, g),\end{aligned}$$

já que

$$\begin{aligned}((f' \circ f) \times (g' \circ g))(x, w) &= ((f' \circ f)(x), (g' \circ g)(w)) \\ &= (f' \times g')(f(x), g(w)) \\ &= ((f' \times g') \circ (f \times g))(x, w) \\ &= (\times(f', g') \circ \times(f, g))(x, w).\end{aligned}$$

- A identidade é um conjunto unitário qualquer, adote $\{\xi\}$;
- A associatividade a é dada por:

$$\begin{aligned} a_{X,Y,Z} : (X \times Y) \times Z &\to X \times (Y \times Z) \\ ((x,y),z) &\mapsto (x,(y,z)). \end{aligned}$$

Note que, para quaisquer $X, Y, Z \in Obj(Set)$, $a_{X,Y,Z}$ é isomorfismo; logo, resta mostrar que a é transformação natural, isto é, o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{tikzcd} (X \times W) \times U \arrow[r, "(f\times g)\times h"] \arrow[d, "a_{X,W,U}"'] & (Y \times Z) \times V \arrow[d, "a_{Y,Z,V}"] \\ X \times (W \times U) \arrow[r, "f\times(g\times h)"'] & Y \times (Z \times V) \end{tikzcd}$$

De fato, já que

$$\begin{aligned} \big((f \times (g \times h)) \circ a_{X,W,U}\big)\,((x,w),u) &= (f \times (g \times h))\,(x,(w,u)) \\ &= (f(x),(g(w),h(u))) \\ &= a_{Y,Z,V}((f(x),g(w)),h(u)) \\ &= \big(a_{Y,Z,V} \circ ((f \times g) \times h)\big)\,((x,w),u). \end{aligned}$$

- Os isomorfismos naturais l, r são dados por

$$\begin{aligned} l_X :\ \{\xi\} \times X &\to X \\ (\xi, x) &\mapsto x \end{aligned} \quad \text{e} \quad \begin{aligned} r_X :\ X \times \{\xi\} &\to X \\ (x, \xi) &\mapsto x. \end{aligned}$$

Note que, para qualquer $X \in Obj(Set)$, l_X e r_X são isomorfismos; assim, basta garantir que l, r sejam transformações naturais, ou seja, os diagramas a seguir sejam comutativos:

$$\begin{tikzcd} \{\xi\} \times X \arrow[r, "id_{\{\xi\}}\times f"] \arrow[d, "l_X"'] & \{\xi\} \times Y \arrow[d, "l_Y"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd} \quad \text{e} \quad \begin{tikzcd} X \times \{\xi\} \arrow[r, "f\times id_{\{\xi\}}"] \arrow[d, "r_X"'] & Y \times \{\xi\} \arrow[d, "r_Y"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y. \end{tikzcd}$$

Certamente, pois

$$(f \circ l_X)(\xi, x) = f(x) = l_Y(\xi, f(x)) = \left(l_Y \circ \left(id_{\{\xi\}} \times f\right)\right)(\xi, x)$$

e

$$(f \circ r_X)(x,\xi) = f(x) = r_Y(f(x),\xi) = \left(r_Y \circ \left(f \times id_{\{\xi\}}\right)\right)(x,\xi).$$

Note que o axioma do triângulo é válido, já que para quaisquer $X, Y \in Obj(Set)$,

$$\begin{aligned}\left((id_X \times l_Y) \circ a_{X,\{\xi\},Y}\right)((x,\xi),y) &= (id_X \times l_Y)(x,(\xi,y)) \\ &= (x,y) \\ &= (r_X \times id_Y)((x,\xi),y).\end{aligned}$$

O axioma do pentágono é válido, pois para quaisquer $X, Y, W, Z \in Obj(Set)$

$$\begin{aligned}&\left((id_X \times a_{Y,Z,W}) \circ a_{X,Y\times Z,W} \circ (a_{X,Y,Z} \times id_W)\right)(((x,y),z),w) = \\ &= \left((id_X \times a_{Y,Z,W}) \circ a_{X,Y\times Z,W}\right)((x,(y,z)),w) \\ &= (id_X \times a_{Y,Z,W})(x,((y,z),w)) \\ &= (x,(y,(z,w))) \\ &= a_{X,Y,Z\times W}((x,y),(z,w)) \\ &= (a_{X,Y,Z\times W} \circ a_{X\times Y,Z,W})(((x,y),z),w).\end{aligned}$$

Exemplo 3.1.7. Para $\mathbb{K}$ um corpo, a categoria $Vect_{\mathbb{K}}$ é monoidal.

- O funtor $\otimes = \otimes_{\mathbb{K}} : Vect_{\mathbb{K}} \times Vect_{\mathbb{K}} \to Vect_{\mathbb{K}}$ representa o produto tensorial sobre $\mathbb{K}$ tal que

$$\begin{aligned}\otimes : Obj(Vect_{\mathbb{K}}) \times Obj(Vect_{\mathbb{K}}) &\to Obj(Vect_{\mathbb{K}}) \\ (U,V) &\mapsto U \otimes V\end{aligned}$$

bem como,

$$\begin{aligned}\otimes : Hom_{Vect_{\mathbb{K}}}(U,V) \times Hom_{Vect_{\mathbb{K}}}(W,Z) &\to Hom_{Vect_{\mathbb{K}}}(U \otimes W, V \otimes Z) \\ (T,S) &\mapsto T \otimes S\end{aligned}$$

$\otimes$ é funtor, pois

$$(id_X \otimes id_Y)(x \otimes y) = id_X(x) \otimes id_Y(y) = x \otimes y = id_{X\otimes Y}(x \otimes y).$$

Suponha $f : X \to Y$, $g : W \to Z$, $f' : Y \to U$ e $g' : Z \to V$, tem-se que

$$\begin{aligned}(\otimes((f',g') \circ (f,g)))(x \otimes w) &= (\otimes(f' \circ f, g' \circ g))(x \otimes w) \\ &= ((f' \circ f) \otimes (g' \circ g))(x \otimes w) \\ &= ((f' \circ f)(x) \otimes (g' \circ g)(w)) \\ &= (f' \otimes g')(f(x) \otimes g(w)) \\ &= (f' \otimes g') \circ (f \otimes g))(x \otimes w) \\ &= \otimes(f',g') \circ \otimes(f,g))(x \otimes w).\end{aligned}$$

- A identidade é o corpo $\mathbb{K}$;
- A associatividade a é dada por:

$$\begin{aligned} a_{V,U,W} : (V \otimes U) \otimes W &\to V \otimes (U \otimes W) \\ (v \otimes u) \otimes w &\mapsto v \otimes (u \otimes w). \end{aligned}$$

Repare que, para quaisquer $U, V, W \in Obj(Vect_{\mathbb{K}})$, $a_{U,V,W}$ é isomorfismo; logo, resta mostrar que a é transformação natural, ou seja, o diagrama a seguir é comutativo:

$$\begin{tikzcd} (U \otimes V) \otimes W \arrow[r, "(T\otimes S)\otimes F"] \arrow[d, "a_{U,V,W}"'] & (X \otimes Y) \otimes Z \arrow[d, "a_{X,Y,Z}"] \\ U \otimes (V \otimes W) \arrow[r, "T\otimes(S\otimes F)"'] & X \otimes (Y \otimes Z). \end{tikzcd}$$

Certamente, afinal

$$\begin{aligned} \big((T \otimes (S \otimes F)) \circ a_{U,V,W}\big) ((u \otimes v) \otimes w) &= (T \otimes (S \otimes F)) (u \otimes (v \otimes w)) \\ &= T(u) \otimes (S(v) \otimes F(w)) \\ &= a_{X,Y,Z}((T(u) \otimes S(v)) \otimes F(w)) \\ &= \big(a_{X,Y,Z} \circ ((T \otimes S) \otimes F))\big) ((u \otimes v) \otimes w) \end{aligned}$$

- Os isomorfismos naturais l, r são dados por

$$\begin{aligned} l_V :\ \mathbb{K} \otimes V &\to V \\ \alpha \otimes v\ &\mapsto \alpha v \end{aligned} \qquad \begin{aligned} r_V :\ V \otimes \mathbb{K} &\to V \\ v \otimes \alpha\ &\mapsto v\alpha. \end{aligned}$$

Note que, para qualquer $U \in Obj(Vect_{\mathbb{K}})$, l_U e r_U são isomorfismos; assim, resta mostrar que l, r são transformações naturais. Portanto, considere os diagramas

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K} \otimes U \arrow[r, "id_{\mathbb{K}}\otimes T"] \arrow[d, "l_U"'] & \mathbb{K} \otimes V \arrow[d, "l_V"] \\ U \arrow[r, "T"'] & V \end{tikzcd} \quad \text{e} \quad \begin{tikzcd} U \otimes \mathbb{K} \arrow[r, "T\otimes id_{\mathbb{K}}"] \arrow[d, "r_U"'] & V \otimes \mathbb{K} \arrow[d, "r_V"] \\ U \arrow[r, "T"'] & V \end{tikzcd}$$

comutativos com $T \in Hom_{Vect_{\mathbb{K}}}(U, V)$, já que

$$\begin{aligned}(T \circ l_U)(\alpha \otimes u) &= T(\alpha u)\\ &= \alpha T(u)\\ &= l_V(\alpha \otimes T(u))\\ &= (l_V \circ (id_{\mathbb{K}} \otimes T))\,(\alpha \otimes u)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}(T \circ r_U)(u \otimes \alpha) &= T(u\alpha)\\ &= T(u)\alpha\\ &= r_V(T(u) \otimes \alpha)\\ &= (r_V \circ (T \otimes id_{\mathbb{K}}))\,(u \otimes \alpha).\end{aligned}$$

O axioma do triângulo é verídico, pois, para quaisquer $U, V \in Obj(Vect_{\mathbb{K}})$, tem-se que

$$\begin{aligned}\big((id_U \otimes l_V) \circ a_{U,\mathbb{K},V}\big)\,((u \otimes \alpha) \otimes v) &= (id_U \otimes l_V)\,(u \otimes (\alpha \otimes v))\\ &= u \otimes \alpha v\\ &= u\alpha \otimes v\\ &= (r_U \otimes id_V)\,((u \otimes \alpha) \otimes v)\end{aligned}$$

O axioma do pentágono é verificado, uma vez que é possível inferir, para quaisquer $U, V, W, Z \in Obj(Vect_{\mathbb{K}})$, que

$$\begin{aligned}&\big((id_U \otimes a_{V,W,Z}) \circ a_{U,V\otimes W,Z} \circ (a_{U,V,W} \otimes id_Z)\big)\,(((u \otimes v) \otimes w) \otimes z) =\\ &= \big((id_U \otimes a_{V,W,Z}) \circ a_{U,V\otimes W,Z}\big)\,((u \otimes (v \otimes w)) \otimes z)\\ &= (id_U \otimes a_{V,W,Z})(u \otimes ((v \otimes w) \otimes z))\\ &= u \otimes (v \otimes (w \otimes z))\\ &= a_{U,V,W\otimes Z}((u \otimes v) \otimes (w \otimes z))\\ &= (a_{U,V,W\otimes Z} \circ a_{U\otimes V,W,Z})(((u \otimes v) \otimes w) \otimes z).\end{aligned}$$

Exemplo 3.1.8. Analogamente, para $\mathbb{K}$ um corpo, a categoria $vect_{\mathbb{K}}$ é monoidal.

Exemplo 3.1.9. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. A categoria $End(\mathcal{C})$ é monoidal quando

- O funtor $\otimes$ representar a composição de funtores, bem como, a composição horizontal de transformações naturais, já que

$$\begin{aligned}\circ : Obj(End(\mathcal{C})) \times Obj(End(\mathcal{C})) &\to Obj(End(\mathcal{C}))\\ (F, G) &\mapsto \otimes(F, G) = F \otimes G := G \circ F\end{aligned}$$

bem como,

$$\begin{aligned} * : Nat(H,J) \times Nat(F,G) &\to Nat(H \circ F, J \circ G) \\ (\alpha,\beta) \qquad\qquad &\mapsto \otimes(\alpha,\beta) = \alpha \otimes \beta := \alpha * \beta. \end{aligned}$$

Repare que, de fato, as composições acima definem um funtor, já que, para todo $X \in Obj(\mathcal{C})$,

$$\begin{aligned} \left(\otimes\left(ID_{(F,G)}\right)\right)_X &= (\otimes(ID_F, ID_G))_X \\ &= (ID_F * ID_G)_X \\ &= (ID_F)_{G(X)} \circ F((ID_G)_X) \\ &= ID_{F(G(X))} \circ F\left(ID_{G(X)}\right) \\ &= ID_{F(G(X))} \circ ID_{F(G(X))} \\ &= ID_{(F\circ G)(X)} \\ &= (ID_{F\circ G})_X \\ &= (ID_{F\otimes G})_X; \end{aligned}$$

logo, $\otimes\left(ID_{(F,G)}\right) = ID_{\otimes(F,G)}$. Ademais, sejam $\beta : F \to G$, $\alpha : H \to J$, bem como, $\gamma : G \to M$ e $\delta : J \to N$ morfismos em $End(\mathcal{C})$. Assim,

$$\alpha * \beta : H \circ F \to J \circ G \quad \text{e} \quad \delta * \gamma : J \circ G \to N \circ M,$$

tais que, para todo $X \in Obj(\mathcal{C})$, as igualdades

$$(\alpha * \beta)_X = \alpha_{G(X)} \circ H(\beta_X) \quad \text{e} \quad (\delta * \gamma)_X = \delta_{M(X)} \circ J(\gamma_X)$$

sejam verdadeiras, bem como, seja possível compor tais morfismos de modo a obter

$$\gamma \circ \beta : F \to M \quad \text{e} \quad \delta \circ \alpha : H \to N.$$

Destarte,

$$\begin{aligned} (\otimes(\delta,\gamma) \circ (\alpha,\beta))_X &= (\otimes(\delta\circ\alpha, \gamma\circ\beta))_X \\ &= ((\delta\circ\alpha) * (\gamma\circ\beta))_X \\ &= (\delta\circ\alpha)_{M(X)} \circ H((\gamma\circ\beta)_X) \\ &= \delta_{M(X)} \circ \alpha_{M(X)} \circ H(\gamma_X \circ \beta_X) \\ &= \delta_{M(X)} \circ \alpha_{M(X)} \circ H(\gamma_X) \circ H(\beta_X) \end{aligned}$$

Neste momento, utiliza-se a naturalidade de α, uma vez que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} H(G(X)) & \xrightarrow{H(\gamma_X)} & H(M(X)) \\ {\scriptstyle \alpha_{G(X)}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \alpha_{M(X)}} \\ J(G(X)) & \xrightarrow[J(\gamma_X)]{} & J(G(X)) \end{array}$$

é comutativo. Assim, $\alpha_{M(X)} \circ H(\gamma_X) = J(\gamma_X) \circ \alpha_{G(X)}$ e, por conseguinte,

$$\begin{aligned} (\otimes(\delta,\gamma) \circ (\alpha,\beta))_X &= \delta_{M(X)} \circ \alpha_{M(X)} \circ H(\gamma_X) \circ H(\beta_X) \\ &= \delta_{M(X)} \circ J(\gamma_X) \circ \alpha_{G(X)} \circ H(\beta_X) \\ &= (\delta * \gamma)_X \circ (\alpha * \beta)_X \\ &= ((\delta * \gamma) \circ (\alpha * \beta))_X \\ &= ((\delta \otimes \gamma) \circ (\alpha \otimes \beta))_X . \end{aligned}$$

Portanto, segue que

$$\otimes((\delta,\gamma) \circ (\alpha,\beta)) = \otimes(\delta,\gamma) \circ \otimes(\alpha,\beta).$$

- A identidade é o funtor $Id_{\mathcal{C}}$;

No mais, a categoria $End(\mathcal{C})$ é estrita, isto é, $(F \otimes G) \otimes H = F \otimes (G \otimes H)$, bem como, $Id_{\mathcal{C}} \otimes F = F = F \otimes Id_{\mathcal{C}}$, para quaisquer $F, G, H \in Obj(End(\mathcal{C}))$. De fato,

$$(F \otimes G) \otimes H = (F \circ G) \circ H$$

e, notoriamente, para todo $X \in Obj(\mathcal{C})$

$$\begin{aligned} ((F \circ G) \circ H)(X) &= (F \circ G)(H(X)) = F(G(H(X))) \\ &= F((G \circ H)(X)) = (F \circ (G \circ H))(X); \end{aligned}$$

enquanto que, para todo $f \in Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$,

$$\begin{aligned} ((F \circ G) \circ H)(f) &= (F \circ G)(H(f)) = F(G(H(f))) \\ &= F((G \circ H)(f)) = (F \circ (G \circ H))(f). \end{aligned}$$

Logo, $(F \circ G) \circ H = F \circ (G \circ H)$ e, por conseguinte,

$$(F \otimes G) \otimes H = (F \circ G) \circ H = F \circ (G \circ H) = F \otimes (G \otimes H).$$

Além disso, é fácil notar que $Id_{\mathcal{C}} \otimes F = Id_{\mathcal{C}} \circ F = F = F \circ Id_{\mathcal{C}} = F \otimes Id_{\mathcal{C}}$.

- A associatividade a é dada por $a_{F,G,H} = ID_{(F\circ G)\circ H}$, lembrando que

$$ID_{(F\circ G)\circ H} = a_{F,G,H} : (F \circ G) \circ H \to F \circ (G \circ H).$$

Note que, para $\rho \in Nat(F,S)$, bem como, $\nu \in Nat(G,R)$ e $\tau \in Nat(H,J)$ morfismos em $End(\mathcal{C})$, o diagrama

$$\begin{tikzcd}
(F \circ G) \circ H \arrow[r, "(\rho*\nu)*\tau"] \arrow[d, "a_{F,G,H}=ID_{(F\circ G)\circ H}"'] & (S \circ R) \circ J \arrow[d, "a_{J,M,N}=ID_{(S\circ R)\circ J}"] \\
F \circ (G \circ H) \arrow[r, "\rho*(\nu*\tau)"'] & S \circ (R \circ J)
\end{tikzcd}$$

é comutativo pela associatividade da composição horizontal garantida pela Proposição 2.3.16.

- Os isomorfismos naturais l, r são dados por $l_F = ID_F = r_F$, lembrando que

$$ID_F = l_F : Id_{\mathcal{C}} \circ F \to F \quad \text{e} \quad ID_F = r_F : F \circ Id_{\mathcal{C}} \to F.$$

Por mais que seja trivial, vale apresentar os diagramas responsáveis pela naturalidade de l e r:

$$\begin{tikzcd}
Id_{\mathcal{C}} \circ F \arrow[r, "ID_{Id_{\mathcal{C}}}*\alpha"] \arrow[d, "ID_F"'] & Id_{\mathcal{C}} \circ G \arrow[d, "ID_G"] \\
F \arrow[r, "\alpha"'] & G
\end{tikzcd} \quad \text{e} \quad \begin{tikzcd}
F \circ Id_{\mathcal{C}} \arrow[r, "\alpha*ID_{Id_{\mathcal{C}}}"] \arrow[d, "ID_F"'] & G \circ Id_{\mathcal{C}} \arrow[d, "r_G"] \\
F \arrow[r, "\alpha"'] & G.
\end{tikzcd}$$

Evidentemente tais são comutativos pelo item (ii) da Proposição 2.3.16.

A validade do axioma do triângulo é trivial, basta reparar que, em $End(\mathcal{C})$, tem-se

$$\begin{tikzcd}
(F \circ Id_{\mathcal{C}}) \circ G \arrow[rr, "ID_{(F\circ Id_{\mathcal{C}})\circ G}"] \arrow[dr, "ID_F*ID_G"'] & & F \circ (Id_{\mathcal{C}} \circ G) \arrow[dl, "ID_F*ID_G"] \\
& F \circ G, &
\end{tikzcd}$$

isto é,

$$\begin{tikzcd}
F \circ G \arrow[rr, "ID_{F\circ G}"] \arrow[dr, "ID_F*ID_G"'] & & F \circ G \arrow[dl, "ID_F*ID_G"] \\
& F \circ G. &
\end{tikzcd}$$

Similarmente, o axioma do pentágono é facilmente obtido, afinal o diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & ((F\circ G)\circ H)\circ J \arrow[dl, "ID_{(F\circ G)\circ H} * ID_J"'] \arrow[dr, "ID_{((F\circ G)\circ Z)\circ W}"] & \\
(F\circ (G\circ H))\circ J \arrow[d, "ID_{(F\circ(G\circ H))\circ J}"'] & & (F\circ G)\circ (H\circ J) \arrow[d, "ID_{(F\circ G)\circ(H\circ J)}"] \\
F\circ ((G\circ H)\circ J) \arrow[rr, "ID_F * ID_{(G\circ H)\circ J}"'] & & F\circ (G\circ (H\circ J))
\end{tikzcd}$$

obviamente comuta.

3.2 CARACTERÍSTICAS NECESSÁRIAS

É interessante elaborar uma sequência de resultados envolvendo os componentes de uma categoria monoidal.

Proposição 3.2.1. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria monoidal e sejam $f, g \in Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$. Sob tais considerações, se $f \neq g$, então $id_{\mathbf{1}} \otimes f \neq id_{\mathbf{1}} \otimes g$ e $f \otimes id_{\mathbf{1}} \neq g \otimes id_{\mathbf{1}}$.

Um breve comentário à prova referente à proposição acima. A relação de inferência dada é melhor comprovada por contraposição através de diagramas comutativos.

Demonstração. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria monoidal e considere f, g morfismos em $\mathcal{C}$ tais que $f, g : X \to Y$. Uma vez que l é transformação natural, os seguintes diagramas são comutativos:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{1}\otimes X \arrow[r, "id_{\mathbf{1}}\otimes f"] \arrow[d, "l_X"'] & \mathbf{1}\otimes Y \arrow[d, "l_Y"] \\
X \arrow[r, "f"'] & Y
\end{tikzcd}
\quad \text{e} \quad
\begin{tikzcd}
\mathbf{1}\otimes X \arrow[r, "id_{\mathbf{1}}\otimes g"] \arrow[d, "l_X"'] & \mathbf{1}\otimes Y \arrow[d, "l_Y"] \\
X \arrow[r, "g"'] & Y
\end{tikzcd}$$

Suponha $id_{\mathbf{1}} \otimes f = id_{\mathbf{1}} \otimes g$; logo, pelos diagramas acima, segue que:

$$f \circ l_X = l_Y \circ (id_{\mathbf{1}} \otimes f) = l_Y \circ (id_{\mathbf{1}} \otimes g) = g \circ l_X.$$

Assim, já que l é isomorfismo natural, ao compor $(l_X)^{-1}$ à direita na identidade final, $f \circ l_X = g \circ l_X$, segue que $f = g$.

Analogamente, como r é transformação natural, os seguintes diagramas são comutativos:

$$\begin{tikzcd} X \otimes \mathbf{1} \arrow[r, "f\otimes id_{\mathbf{1}}"] \arrow[d, "r_X"'] & Y \otimes \mathbf{1} \arrow[d, "r_Y"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd} \quad \text{e} \quad \begin{tikzcd} X \otimes \mathbf{1} \arrow[r, "g\otimes id_{\mathbf{1}}"] \arrow[d, "r_X"'] & Y \otimes \mathbf{1} \arrow[d, "r_Y"] \\ X \arrow[r, "g"'] & Y. \end{tikzcd}$$

Suponha $f \otimes id_{\mathbf{1}} = g \otimes id_{\mathbf{1}}$; logo, pelos diagramas acima, segue que:

$$f \circ r_X = r_Y \circ (f \otimes id_{\mathbf{1}}) = r_Y \circ (g \otimes id_{\mathbf{1}}) = g \circ r_X$$

Tendo em vista que r é isomorfismo natural, ao compor $(r_X)^{-1}$ à direita na identidade $f \circ r_X = g \circ r_X$, segue que $f = g$.

■

Em seguida, vale considerar três resultados que utilizam todas as noções de uma categoria monoidal.

Proposição 3.2.2. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria monoidal. Sob tal consideração, para todo $X \in Obj(\mathcal{C})$, infere-se que $l_{\mathbf{1}\otimes X} = id_{\mathbf{1}} \otimes l_X$ e $r_{X\otimes \mathbf{1}} = r_X \otimes id_{\mathbf{1}}$.

Demonstração. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria monoidal. Uma vez que l e r são transformações naturais, segue que os diagramas

$$\begin{tikzcd} \mathbf{1} \otimes (\mathbf{1} \otimes X) \arrow[r, "id_{\mathbf{1}}\otimes l_X"] \arrow[d, "l_{1\otimes X}"'] & \mathbf{1} \otimes X \arrow[d, "l_X"] \\ \mathbf{1} \otimes X \arrow[r, "l_X"'] & X \end{tikzcd} \quad \text{e} \quad \begin{tikzcd} (X \otimes \mathbf{1}) \otimes \mathbf{1} \arrow[r, "r_X\otimes id_{\mathbf{1}}"] \arrow[d, "r_{X\otimes \mathbf{1}}"'] & X \otimes \mathbf{1} \arrow[d, "r_X"] \\ X \otimes \mathbf{1} \arrow[r, "r_X"'] & X \end{tikzcd}$$

são comutativos. Isto é,

$$l_X \circ l_{\mathbf{1}\otimes X} = l_X \circ (id_{\mathbf{1}} \otimes l_X) \quad \text{e} \quad r_X \circ r_{X\otimes \mathbf{1}} = r_X \circ (r_X \otimes id_{\mathbf{1}}).$$

Uma vez que l e r são isomorfismos naturais, ao compor $(l_X)^{-1}$ e $(r_X)^{-1}$ à esquerda nas respectivas identidades, obtém-se:

$$l_{1\otimes X} = id_{\mathbf{1}} \otimes X \quad \text{e} \quad r_{X\otimes \mathbf{1}} = r_X \otimes id_{\mathbf{1}}.$$

■

Teorema 3.2.3. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria monoidal. Sob tal consideração, os seguintes diagramas são comutativos

$$
\begin{tikzcd}
(\mathbf{1} \otimes X) \otimes Y \arrow[rr, "a_{\mathbf{1},X,Y}"] \arrow[dr, "l_X \otimes id_Y"'] \arrow[rr, phantom, shift right=5ex, "(1)"] & & \mathbf{1} \otimes (X \otimes Y) \arrow[dl, "l_{X \otimes Y}"] \\
& X \otimes Y & \\
(X \otimes Y) \otimes \mathbf{1} \arrow[rr, "a_{X,Y,\mathbf{1}}"'] \arrow[ur, "r_{X \otimes Y}"] \arrow[rr, phantom, shift left=5ex, "(2)"] & & X \otimes (Y \otimes \mathbf{1}). \arrow[ul, "id_X \otimes r_Y"']
\end{tikzcd}
$$

Demonstração. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria monoidal. Considere $X, Y, Z \in Obj(\mathcal{C})$ e, pelo axioma do pentágono, o seguinte diagrama é comutativo:

$$
\begin{tikzcd}
((X \otimes \mathbf{1}) \otimes Y) \otimes Z \arrow[rr, "a_{X,\mathbf{1},Y} \otimes id_Z"] \arrow[d, "a_{X \otimes \mathbf{1},Y,Z}"'] & & (X \otimes (\mathbf{1} \otimes Y)) \otimes Z \arrow[d, "a_{X,\mathbf{1} \otimes Y,Z}"] \\
(X \otimes \mathbf{1}) \otimes (Y \otimes Z) \arrow[dr, "a_{X,\mathbf{1},Y \otimes Z}"'] & & X \otimes ((\mathbf{1} \otimes Y) \otimes Z) \arrow[dl, "id_X \otimes a_{\mathbf{1},Y,Z}"] \\
& X \otimes (\mathbf{1} \otimes (Y \otimes Z)). &
\end{tikzcd}
$$

Por tal diagrama, é possível obter:

$$
\begin{tikzcd}
((X \otimes \mathbf{1}) \otimes Y) \otimes Z \arrow[rr, "a_{X,\mathbf{1},Y} \otimes id_Z"] \arrow[dr, "(r_X \otimes id_Y) \otimes id_Z"'] \arrow[ddd, "a_{X \otimes \mathbf{1},Y,Z}"'] \arrow[rr, phantom, shift right=5ex, "(i)"] & & (X \otimes (\mathbf{1} \otimes Y)) \otimes Z \arrow[dl, "(id_X \otimes l_Y) \otimes id_Z"] \arrow[ddd, "a_{X,\mathbf{1} \otimes Y,Z}"] \\
& (X \otimes Y) \otimes Z \arrow[d, "a_{X,Y,Z}"'] \arrow[dl, phantom, "(ii)"] \arrow[dr, phantom, "(iii)"] & \\
& X \otimes (Y \otimes Z) & \\
(X \otimes \mathbf{1}) \otimes (Y \otimes Z) \arrow[ur, "r_X \otimes id_{Y \otimes Z}"] \arrow[dr, "a_{X,\mathbf{1},Y \otimes Z}"'] \arrow[r, phantom, "(iv)"] & & X \otimes ((\mathbf{1} \otimes Y) \otimes Z) \arrow[ul, "id_X \otimes (l_Y \otimes id_Z)"'] \arrow[dl, "id_X \otimes a_{\mathbf{1},Y,Z}"] \arrow[l, phantom, "(v)"] \\
& X \otimes (\mathbf{1} \otimes (Y \otimes Z)). \arrow[uu, "id_X \otimes l_{Y \otimes Z}"] &
\end{tikzcd}
$$

Repare que o axioma do triângulo garante a comutatividade dos diagramas (i) e (iv); afinal, tal axioma garante que $(id_X \otimes l_Y) \circ a_{X,\mathbf{1},Y} = r_X \otimes id_Y$. Enquanto que a comutatividade dos trapézios laterais (ii) e (iii) é dada pela naturalidade de a, lembrando que $id_{Y\otimes Z} = id_Y \otimes id_Z$.

Resta garantir a comutatividade do diagrama triangular inferior direito (v). Isto é,

$$(id_X \otimes l_{Y\otimes Z}) \circ (id_X \otimes a_{\mathbf{1},Y,Z}) = id_X \otimes (l_Y \otimes id_Z).$$

Uma vez que todo morfismo da coleção a é isomorfismo natural, é interessante utilizar a^{-1}; assim, a partir dessa noção atrelada à comutatividade dos diagramas citados anteriormente, o axioma do pentágono garante que

$$id_X \otimes a_{\mathbf{1},Y,Z} = a_{X,\mathbf{1},Y\otimes Z} \circ a_{X\otimes \mathbf{1},Y,Z} \circ (a_{X,\mathbf{1},Y} \otimes id_Z)^{-1} \circ a^{-1}_{X,\mathbf{1}\otimes Y,Z}.$$

O diagrama (iv) proporciona

$$id_X \otimes l_{Y\otimes Z} = (r_X \otimes id_{Y\otimes Z}) \circ a^{-1}_{X,\mathbf{1},Y\otimes Z};$$

o diagrama (ii) infere

$$r_X \otimes id_{Y\otimes Z} = a_{X,Y,Z} \circ ((r_X \otimes id_Y) \otimes id_Z) \circ a^{-1}_{X\otimes \mathbf{1},Y,Z};$$

o diagrama (i) garante

$$(r_X \otimes id_Y) \otimes id_Z = (id_X \otimes l_Y) \otimes id_Z) \circ (a_{X,\mathbf{1},Y} \otimes id_Z);$$

por fim, o diagrama (iii) promove

$$(id_X \otimes l_Y) \otimes id_Z = a^{-1}_{X,Y,Z} \circ (id_X \otimes (l_Y \otimes id_Z)) \circ a_{X,\mathbf{1}\otimes Y,Z}.$$

Assim, a partir de $(id_X \otimes l_{Y\otimes Z}) \circ (id_X \otimes a_{\mathbf{1},Y,Z})$, obtém-se:

$$\begin{aligned}
&(id_X \otimes l_{Y\otimes Z}) \circ (id_X \otimes a_{\mathbf{1},Y,Z}) = \\
&= (r_X \otimes id_{Y\otimes Z}) \circ a^{-1}_{X,\mathbf{1},Y\otimes Z} \circ \\
&\quad a_{X,\mathbf{1},Y\otimes Z} \circ a_{X\otimes \mathbf{1},Y,Z} \circ (a_{X,\mathbf{1},Y} \otimes id_Z)^{-1} \circ a^{-1}_{X,\mathbf{1}\otimes Y,Z} \\
&= (r_X \otimes id_{Y\otimes Z}) \circ a_{X\otimes \mathbf{1},Y,Z} \circ (a_{X,\mathbf{1},Y} \otimes id_Z)^{-1} \circ a^{-1}_{X,\mathbf{1}\otimes Y,Z} \\
&= a_{X,Y,Z} \circ ((r_X \otimes id_Y) \otimes id_Z) \circ a^{-1}_{X\otimes \mathbf{1},Y,Z} \circ \\
&\quad a_{X\otimes \mathbf{1},Y,Z} \circ (a_{X,\mathbf{1},Y} \otimes id_Z)^{-1} \circ a^{-1}_{X,\mathbf{1}\otimes Y,Z} \\
&= a_{X,Y,Z} \circ ((r_X \otimes id_Y) \otimes id_Z) \circ (a_{X,\mathbf{1},Y} \otimes id_Z)^{-1} \circ a^{-1}_{X,\mathbf{1}\otimes Y,Z} \\
&= a_{X,Y,Z} \circ (id_X \otimes l_Y) \otimes id_Z) \circ (a_{X,\mathbf{1},Y} \otimes id_Z) \circ \\
&\quad (a_{X,\mathbf{1},Y} \otimes id_Z)^{-1} \circ a^{-1}_{X,\mathbf{1}\otimes Y,Z} \\
&= a_{X,Y,Z} \circ ((id_X \otimes l_Y) \otimes id_Z) \circ a^{-1}_{X,\mathbf{1}\otimes Y,Z} \\
&= a_{X,Y,Z} \circ (a^{-1}_{X,Y,Z} \circ (id_X \otimes (l_Y \otimes id_Z)) \circ a_{X,\mathbf{1}\otimes Y,Z}) \circ a^{-1}_{X,\mathbf{1}\otimes Y,Z} \\
&= id_X \otimes (l_Y \otimes id_Z).
\end{aligned}$$

Logo, o diagrama (v) é comutativo. Assim, por tal, quando $X = \mathbf{1}$, infere-se que

$$id_{\mathbf{1}} \otimes (l_{Y\otimes Z} \circ a_{\mathbf{1},Y,Z}) = (id_{\mathbf{1}} \otimes l_{Y\otimes Z}) \circ (id_{\mathbf{1}} \otimes a_{\mathbf{1},Y,Z}) = id_{\mathbf{1}} \otimes (l_Y \otimes id_Z).$$

Pela proposição 3.2.1, segue que

$$l_{Y\otimes Z} \circ a_{\mathbf{1},Y,Z} = l_Y \otimes id_Z.$$

Este resultado garante a comutatividade do diagrama superior em 3.2.3. Repare que, para o diagrama inferior, basta considerar a categoria monoidal reversa $\mathcal{C}^{rev}$ e o diagrama superior. Logo, para quaisquer $X, Y \in Obj(\mathcal{C})$, garante-se que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
(\mathbf{1} \otimes^{rev} X) \otimes^{rev} Y \arrow[rr, "a^{rev}_{\mathbf{1},X,Y}"] \arrow[dr, "l^{rev}_X \otimes^{rev} id_Y"'] & & \mathbf{1} \otimes^{rev} (X \otimes^{rev} Y) \arrow[dl, "l^{rev}_{X\otimes^{rev} Y}"] \\
& X \otimes^{rev} Y &
\end{tikzcd}$$

é comutativo, *i.e.*,

$$\begin{tikzcd}
(Y \otimes X) \otimes \mathbf{1} \arrow[rr, "a_{\mathbf{1},X,Y}"] \arrow[dr, "r_{Y\otimes X}"'] & & Y \otimes (X \otimes \mathbf{1}) \arrow[dl, "id_Y \otimes r_X"] \\
& Y \otimes X. &
\end{tikzcd}$$

■

Corolário 3.2.4. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria monoidal. Sob tal consideração, $l_{\mathbf{1}} = r_{\mathbf{1}}$.

Demonstração. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria monoidal. Pelo axioma do triângulo e pelo Teorema 3.2.3, ao admitir $X = Y = \mathbf{1}$, infere-se que

$$(id_{\mathbf{1}} \otimes l_{\mathbf{1}}) \circ a_{\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{1}} = r_{\mathbf{1}} \otimes id_{\mathbf{1}} \quad \text{e} \quad r_{\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}} = (id_{\mathbf{1}} \otimes r_{\mathbf{1}}) \circ a_{\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{1}}.$$

Pela Proposição 3.2.2, segue que $r_{\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}} = r_{\mathbf{1}} \otimes id_{\mathbf{1}}$; logo,

$$(id_{\mathbf{1}} \otimes l_{\mathbf{1}}) \circ a_{\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{1}} = (id_{\mathbf{1}} \otimes r_{\mathbf{1}}) \circ a_{\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{1}}.$$

No mais, tendo em vista que $a_{\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{1}}$ é um isomorfismo, infere-se que

$$id_{\mathbf{1}} \otimes l_{\mathbf{1}} = id_{\mathbf{1}} \otimes r_{\mathbf{1}}.$$

Por fim, pela Proposição 3.2.1, segue que $l_{\mathbf{1}} = r_{\mathbf{1}}$. ■

4 A MANIFESTAÇÃO DA ESTRUTURA DE ÁLGEBRA

A partir deste momento, retira-se, parcialmente, o foco das generalizações da teoria de categorias de modo a promover uma visão, a qual discute definições equivalentes e propriedades envolvendo o conceito de uma álgebra. A referência principal é dada em (DASCALESCU; NASTASESCU; RAIANU, 2001) e, aproveita-se também, parte da perspectiva tratada em (BRZEZINSKI; WISBAUER, 2003) no tocante às coálgebras, bem como, (ETINGOF *et al.*, 2015) para a etapa categórica.

4.1 DEFINIÇÕES EQUIVALENTES E PROPRIEDADES

Em um primeiro momento, apresenta-se a definição usual de uma R-álgebra, para R um anel comutativo unitário para que, em um próximo momento, seja possível traduzir cada uma das propriedades em uma visão de diagramas comutativos.

Definição 4.1.1. Seja R um anel comutativo com unidade dada por 1_R. Diz-se que A é uma R-álgebra se

(i) A é um anel com unidade dada por 1_A;

(ii) A um R- módulo, isto é, existe uma operação de multiplicação $M : R \times A \to A$ dada por

$$\begin{aligned} M : R \times A &\to A \\ (\lambda, a) &\mapsto M(\lambda, a) := \lambda a \end{aligned}$$

tal que, para quaisquer $\lambda, \mu \in R$ e para quaisquer $a, b \in A$, satisfaz:

- $(\lambda\mu)a = \lambda(\mu a)$;
- $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$;
- $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$;
- $1_R a = a$;
- $\lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b)$.

É importante ressaltar que o leitor possa conhecer uma outra definição de R-álgebra, disponível em (DUMMIT; FOOTE, 2003), dada como segue.

Definição 4.1.2. Seja R um anel comutativo cuja unidade é dada por 1_R. Diz-se que A é uma R-álgebra se existe um homomorfismo de anéis $\varphi : R \to A$ tal que $\varphi(1_R) = 1_A$

$$\operatorname{Im}(\varphi) \subseteq Z(A) = \{a \in A \mid ab = ba, \forall b \in A\},$$

para $Z(A)$ o centro do anel A.

Um breve comentário a respeito do próximo resultado é indispensável. O motivo, pelo qual não será introduzida a terceira definição no tocante à estrutura de uma álgebra, concentra-se na ideia de progredir e desenvolver o texto de modo mais cômodo e, sob certa perspectiva, manso. Afinal, acredita-se que a escrita acelerada entre o trajeto envolvendo as definições equivalentes de uma álgebra, ora clássica ora pela teoria de categorias, acarreta na perda de nuances envolvendo exemplos e maior familiaridade com o tema de modo a dispersar o leitor frente a um processo gradual de enriquecimento estrutural advindo de tradução algébrica. Dito isso, segue:

Proposição 4.1.3. Seja R um anel comutativo com unidade dada por 1_R. Sob tal consideração, as definições 4.1.1 e 4.1.2 são equivalentes.

Demonstração. Seja R um anel comutativo com unidade dada por 1_R. Suponha A uma R-álgebra de acordo com 4.1.1. Considere a função φ tal que

$$\begin{aligned} \varphi : R &\to A \\ \lambda &\mapsto \varphi(\lambda) := M(\lambda, 1_A) = \lambda 1_A. \end{aligned}$$

Note que

$$\varphi(\lambda + \mu) = (\lambda + \mu)1_A = \lambda 1_A + \mu 1_A = \varphi(\lambda) + \varphi(\mu),$$

bem como,

$$\varphi(\lambda\mu) = (\lambda\mu)1_A = \lambda(1_A(\mu 1_A)) = (\lambda 1_A)(u 1_A) = \varphi(\lambda)\varphi(\mu)$$

e $\varphi(1_R) = 1_R 1_A = 1_A$. No mais, seja $z \in \mathrm{Im}(\varphi)$. Repare que existe $r \in R$ tal que $\varphi(r) = r1_A = z$. Assim, para $a \in A$, tem-se, pela quinta identidade da definição, que

$$za = (r1_A)a = r(1_A a) = ra = r(a1_A) = a(r1_A) = az,$$

isto é, $z \in Z(A)$. Pela arbitrariedade de z, segue que $\mathrm{Im}(\varphi) \subseteq Z(A)$.

Reciprocamente, suponha A uma R-álgebra de acordo com 4.1.2, ou seja, suponha que exista $\varphi : R \to A$ um homomorfismo de anéis tal que $\varphi(1_R) = 1_A$ e $\mathrm{Im}(\varphi) \subseteq Z(A)$. Repare que, por hipótese, A já é um anel com unidade. Desta forma, resta garantir as cinco propriedades envolvendo uma operação de multiplicação. Assim, considere

$$\begin{aligned} M : R \times A &\to A \\ (\lambda, a) &\mapsto M(\lambda, a) := \varphi(\lambda)a \end{aligned}$$

Sejam $\lambda, \mu \in R$ e $a, b \in A$. Note que, como φ é homomorfismo de anéis tal que $\varphi(1_R) = 1_A$ seguem as seguintes identidades:

$$(\lambda\mu)a \overset{*}{=} M(\lambda\mu, a) = \varphi(\lambda\mu)a = (\varphi(\lambda)\varphi(\mu))\, a = \varphi(\lambda)\,(\varphi(\mu)a) \overset{*}{=} \lambda(\mu a)$$
$$(\lambda + \mu)a \overset{*}{=} M(\lambda + \mu, a) = \varphi(\lambda + \mu)a = (\varphi(\lambda) + \varphi(\mu))\, a = \varphi(\lambda)a + \varphi(\mu)a \overset{*}{=} \lambda a + \mu a$$

bem como,

$$\begin{aligned}\lambda(a+b) &\overset{*}{=} M(\lambda, a+b) = \varphi(\lambda)(a+b) = \varphi(\lambda)a + \varphi(\lambda)b \overset{*}{=} \lambda a + \lambda b\\ 1_R a &\overset{*}{=} M(1_R, a) = \varphi(1_R)a = 1_A a = a.\end{aligned}$$

Por fim, como $\mathrm{Im}(\varphi) \subseteq Z(A)$, infere-se que

$$\lambda(ab) \overset{*}{=} m(\lambda, ab) = \varphi(\lambda)(ab) = (\varphi(\lambda)a)\, b \overset{*}{=} (\lambda a)b$$

e

$$\lambda(ab) \overset{*}{=} m(\lambda, ab) = \varphi(\lambda)(ab) = (\varphi(\lambda)a)\, b = (a\varphi(\lambda))b = a(\varphi(\lambda)b) \overset{*}{=} a(\lambda b)$$

O símbolo $*$, utilizado anteriormente, explicita a tradução das propriedades procuradas de acordo com a Definição 4.1.1. ■

A partir desse momento, vale apresentar uma singela quantidade de exemplos.

Exemplo 4.1.4. Todo anel com unidade A é uma $\mathbb{Z}$-álgebra. Basta notar que

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{Z} &\to A\\ n &\mapsto \varphi(n) := n1_A\end{aligned}$$

é um homomorfismo tal que $\varphi(1) = 1_A$ e $\mathrm{Im}(\varphi) \subseteq Z(A)$. Em especial, φ é explicitada por

$$\varphi(n) = \begin{cases} 1_A + 1_A + \cdots + 1_A & (n \text{ vezes}), \quad \text{se } n > 0\\ 0_A, & \text{se } n = 0\\ (-1_A) + (-1_A) + \cdots + (-1_A) & (-n \text{ vezes}), \quad \text{se } n < 0\end{cases}$$

Para garantir todas afirmações, recorre-se à prova por indução e, dado o escopo do trabalho, a demonstração é dispensada.

Exemplo 4.1.5. Seja $\mathbb{K}$ um corpo. Perceba que $\mathbb{K}$ é uma álgebra sobre si. De fato, o resultado segue diretamente da definição 4.1.1, afinal, todo corpo é anel comutativo com unidade, a operação de multiplicação M é o produto $\cdot$ de elementos no anel, bem como, a última identidade é dada pela associatividade e comutatividade de $\mathbb{K}$.

Observação 4.1.6. A respeito do último exemplo, é interessante reparar que uma $\mathbb{K}$-álgebra é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$.

4.2 TRADUÇÃO PRIMÁRIA EM ESPAÇOS VETORIAIS

Na presente seção, adote, a priori, a categoria monoidal $Vect_{\mathbb{K}}$ como parâmetro de desenvolvimento diante de todas as considerações a seguir. Além disso, a fim de simplificar a notação, utilizar-se-á o símbolo $\otimes$ como produto tensorial atrelado ao símbolo $\otimes_{\mathbb{K}}$. A próxima definição é o conceito de álgebra na categoria monoidal $Vect_{\mathbb{K}}$; essa definição é estendida para uma categoria monoidal qualquer de maneira análoga, apresentada, apenas, no próximo capítulo.

Definição 4.2.1. Seja $\mathbb{K}$ um corpo. Diz-se que a terna (A, m, u) é uma $\mathbb{K}$-álgebra se

(i) A é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial;

(ii) $m : A \otimes A \to A$ e $u : \mathbb{K} \to A$ são morfismos de $\mathbb{K}$-espaços vetoriais;

(iii) os seguintes diagramas são comutativos:

$$\begin{tikzcd}
 & (A \otimes A) \otimes A \arrow[dl, "a_{A,A,A}"'] \arrow[dr, "m \otimes id_A"] & \\
A \otimes (A \otimes A) \arrow[d, "id_A \otimes m"'] & & A \otimes A \arrow[d, "m"] \\
A \otimes A \arrow[rr, "m"'] & & A
\end{tikzcd} \tag{4.1}$$

e

$$\begin{tikzcd}
 & A \otimes A \arrow[dd, "m"'] & \\
\mathbb{K} \otimes A \arrow[ur, "u \otimes id_A"] & & A \otimes \mathbb{K} \arrow[ul, "id_A \otimes u"'] \\
 & A \arrow[ul, "\alpha"] \arrow[ur, "\beta"'] &
\end{tikzcd} \tag{4.2}$$

com α e β isomorfismos tais que

$$\begin{aligned} \alpha : A &\to \mathbb{K} \otimes A \qquad \text{e} \qquad & \beta : A &\to A \otimes \mathbb{K} \\ a &\mapsto 1_{\mathbb{K}} \otimes a & a &\mapsto a \otimes 1_{\mathbb{K}} \end{aligned}$$

com respectivas inversas α^{-1} e β^{-1} dadas por

$$\begin{aligned} \alpha^{-1} : \mathbb{K} \otimes A &\to A \qquad \text{e} \qquad & \beta^{-1} : A \otimes \mathbb{K} &\to A \\ k \otimes a &\mapsto ka & a \otimes k &\mapsto ak. \end{aligned}$$

Observação 4.2.2. Usualmente, associada à terna (A, m, u), diz-se que A é $\mathbb{K}$-álgebra; outrossim, os morfismos m e u são ditos multiplicação e unidade, respectivamente, da álgebra.

Observação 4.2.3. A comutatividade de (4.2), garante que $m \circ (u \otimes id_A) = \alpha^{-1}$, logo, $m \circ (u \otimes id_A) \circ \alpha = id_A$, bem como, $m \circ (id_A \otimes u) \circ \beta = id_A$.

Neste momento, o leitor não deve se questionar a respeito da apresentação de uma terceira definição para a estrutura de uma álgebra, mas sim reparar que, pelo comentário anterior à Proposição 3.2.1, o processo de tradução algébrica é acelerado e, de certo modo, mais complicado frente ao próximo resultado apresentado.

Proposição 4.2.4. Seja $\mathbb{K}$ um corpo cuja unidade dada por $1_{\mathbb{K}}$. Sob tal consideração, se $R = \mathbb{K}$, então as definições 4.1.1, 4.1.2 e 4.2.1 são equivalentes.

Um breve comentário prévio à demonstração no tocante à proposição acima refere-se ao modo de prova que será utilizado. Pela Proposição 4.1.3, sabe-se que as definições dadas em 4.1.1 e 4.1.2 já são equivalentes; logo, basta mostrar que a Definição 4.2.1 é equivalente às demais. Em especial, provar-se-ão duas implicações:

- A Definição 4.1.1 implica na Definição 4.2.1;
- A Definição 4.2.1 implica na Definição 4.1.2.

Demonstração. Seja $\mathbb{K}$ um corpo e suponha A uma $\mathbb{K}$-álgebra de acordo com 4.1.1. Diretamente desse fato, garante-se, trivialmente, que A satisfaz todos os requisitos de um $\mathbb{K}$-espaço vetorial. Uma vez que, A é grupo abeliano aditivo e para quaisquer $a, a_1, a_2 \in A$ e $k, k_1, k_2 \in \mathbb{K}$, segue que

$$k_1(k_2 a) = (k_1 k_2)a, \quad 1_{\mathbb{K}} a = a, \quad k(a_1 + a_2) = ka_1 + ka_2 \quad \text{e} \quad (k_1 + k_2)a = k_1 a + k_2 a$$

Considere $m : A \otimes A \to A$ e $u : \mathbb{K} \to A$ duas funções definidas por

$$\begin{aligned} m : A \otimes A &\to A \\ a \otimes b &\mapsto m(a \otimes b) := ab \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} u : \mathbb{K} &\to A \\ k &\mapsto u(k) := k1_A \end{aligned}$$

Note que m e u preservam a estrutura de $\mathbb{K}$-espaço vetorial e, assim, resta garantir a comutatividade dos diagramas (4.1) e (4.2). Para (4.1), note que:

$$\begin{aligned} \big(m \circ (id_A \otimes m) \circ a_{A,A,A}\big)\left((a \otimes b) \otimes c\right) &= \left(m \circ (id_A \otimes m)\right)\left(a \otimes (b \otimes c)\right) \\ &= m(a \otimes (bc)) \\ &= a(bc) \\ &= (ab)c \\ &= m((ab) \otimes c) \\ &= \left(m \circ (m \otimes id_A)\right)\left((a \otimes b) \otimes c\right). \end{aligned}$$

Já para (4.2),

$$\begin{aligned}
(m \circ (u \otimes id_A) \circ \alpha)(a) &= (m \circ (u \otimes id_A))(1_{\mathbb{K}} \otimes a) = m(1_{\mathbb{K}} 1_A \otimes a) \\
&= m(1_A \otimes a) \\
&= 1_A a \\
&= a \\
&= m(a \otimes 1_A) \\
&= m(a \otimes 1_{\mathbb{K}} 1_A) \\
&= (m \circ (id_A \otimes u))(a \otimes 1_{\mathbb{K}}) \\
&= (m \circ (id_A \otimes u) \circ \beta)(a).
\end{aligned}$$

Reciprocamente, suponha A uma $\mathbb{K}$-álgebra de acordo com 4.2.1. Note que A é grupo abeliano aditivo e existe operação de produto $\cdot : A \times A \to A$ dada por

$$\begin{aligned}
\cdot : A \times A &\to A \\
(a, b) &\mapsto a \cdot b := m(a \otimes b)
\end{aligned}$$

que, para quaisquer $a, b, c \in A$, satisfaz

$$\begin{aligned}
(a \cdot b) \cdot c &= m(a \otimes b) \cdot c \\
&= m(m(a \otimes b) \otimes c) \\
&= (m \circ (m \otimes id_A))((a \otimes b) \otimes c) \\
&= \big(m \circ (id_A \otimes m) \circ a_{A,A,A}\big)((a \otimes b) \otimes c) \\
&= (m \circ (id_A \otimes m))(a \otimes (b \otimes c)) \\
&= m(a \otimes (b \cdot c)) = a \cdot (b \cdot c);
\end{aligned}$$

$$a \cdot (b + c) = m(a \otimes (b + c)) = m(a \otimes b) + m(a \otimes c) = a \cdot b + a \cdot c;$$

$$(a + b) \cdot c = m((a + b) \otimes c) = m(a \otimes c) + m(b \otimes c) = a \cdot c + b \cdot c;$$

$$\begin{aligned}
u(1_{\mathbb{K}}) \cdot a &= m(u(1_{\mathbb{K}}) \otimes a) \\
&= (m \circ (u \otimes id_A))(1_{\mathbb{K}} \otimes a) \\
&= (m \circ (u \otimes id_A) \circ \alpha)(a) \\
&= id_A(a) \\
&= a
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} a \cdot u(1_{\mathbb{K}}) &= m(a \otimes u(1_{\mathbb{K}})) \\ &= (m \circ (id_A \otimes u))\,(a \otimes 1_{\mathbb{K}}) \\ &= (m \circ (u \otimes id_A) \circ \beta)\,(a) \\ &= id(a) \\ &= a. \end{aligned}$$

Com essas propriedades, segue que A é anel com unidade de modo que $1_A = u(1_{\mathbb{K}})$. Considere $\varphi : \mathbb{K} \to A$ uma função definida por

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{K} &\to A \\ k &\mapsto \varphi(k) := u(k) \end{aligned}$$

Note, para quaisquer $k_1, k_2 \in \mathbb{K}$, que

$$\varphi(k_1 + k_2) = u(k_1 + k_2) = u(k_1) + u(k_2) = \varphi(k_1) + \varphi(k_2),$$

$$\begin{aligned} \varphi(k_1 k_2) &= u(k_1 k_2) \\ &= k_1 u(k_2) \\ &= \alpha^{-1}(k_1 \otimes u(k_2)) \\ &= (m \circ (u \otimes id_A))\,(k_1 \otimes u(k_2)) \\ &= m(u(k_1) \otimes u(k_2)) \\ &= u(k_1)u(k_2) \\ &= \varphi(k_1)\varphi(k_2) \end{aligned}$$

e

$$\varphi(1_{\mathbb{K}}) = u(1_{\mathbb{K}}) = 1_A$$

Isto é, φ é homomorfismo de anéis tal que $\varphi(1_{\mathbb{K}}) = 1_A$. Sejam $a \in \mathrm{Im}(\varphi)$ e $b \in A$, note que existe $k \in \mathbb{K}$ tal que $\varphi(k) = u(k) = a$, bem como,

$$\begin{aligned} ab &= \varphi(k)b = u(k)b = m(u(k) \otimes b) = (m \circ (u \otimes id_A))\,(k \otimes b) \\ &= \alpha^{-1}(k \otimes b) = kb = bk = \beta^{-1}(b \otimes k) \\ &= (m \circ (id_A \otimes u))\,(b \otimes k) = m(b \otimes u(k)) = bu(k) = b\varphi(k) \\ &= ba. \end{aligned}$$

Logo, $a \in Z(A)$ e, pela arbitrariedade de a, $\mathrm{Im}(\varphi) \subseteq Z(A)$.

■

Observação 4.2.5. Pelo resultado acima, ao adotar $m(a \otimes b) = ab$, não há perda de informação, nem espera-se um obstáculo interpretativo consoante a escrita simplificada do morfismo multiplicação m.

Exemplo 4.2.6. Sejam A e B duas $\mathbb{K}$-álgebras, $T : B \otimes A \to A \otimes B$ morfismo de $\mathbb{K}$-espaços vetoriais e $\phi : \mathbb{K} \to \mathbb{K} \otimes \mathbb{K}$ isomorfismo tais que

$$\begin{aligned} T : B \otimes A &\to A \otimes B \\ b \otimes a &\mapsto a \otimes b \end{aligned} \qquad \text{e} \qquad \begin{aligned} \phi : \mathbb{K} &\to \mathbb{K} \otimes \mathbb{K} \\ k &\mapsto k \otimes 1_{\mathbb{K}}. \end{aligned}$$

Diz-se a respeito de $X = A \otimes B$ a $\mathbb{K}$-álgebra com os morfismos dados por

$$\begin{aligned} m_X &:= (m_A \otimes m_B) \circ (id_A \otimes T \otimes id_B) : X \otimes X \to X \\ u_X &:= (u_A \otimes u_B) \circ \phi : \mathbb{K} \to X \end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned} m_X \left((a_1 \otimes b_1) \otimes (a_2 \otimes b_2)\right) &= \left((m_A \otimes m_B) \circ (id_A \otimes T \otimes id_B)\right) \left((a_1 \otimes b_1) \otimes (a_2 \otimes b_2)\right) \\ &= (m_A \otimes m_B) \left((a_1 \otimes a_2) \otimes (b_1 \otimes b_2)\right) \\ &= a_1 a_2 \otimes b_1 b_2 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} u_X(1_{\mathbb{K}}) &= \left((u_A \otimes u_B) \circ \phi\right)(1_{\mathbb{K}}) \\ &= (u_A \otimes u_B)(1_{\mathbb{K}} \otimes 1_{\mathbb{K}}) \\ &= 1_A \otimes 1_B = 1_{A \otimes B}. \end{aligned}$$

De fato, $X = A \otimes B$ é um espaço vetorial pelo produto tensorial de espaços vetoriais. Note que m_X e u_X são morfismos de $\mathbb{K}$-espaços vetoriais. Basta garantir a comutatividade dos diagramas (4.1) e (4.2); para isso, admita $x_i = a_i \otimes b_i$ com $i \in \mathbb{N}$. Para (4.1), tem-se que

$$\begin{aligned} \left(m_X \circ (id_X \otimes m_X) \circ a_{X,X,X}\right) \left((x_1 \otimes x_2) \otimes x_3\right) &= \left(m_X \circ (id_X \otimes m_X)\right) \left(x_1 \otimes (x_2 \otimes x_3)\right) \\ &= m_X(x_1 \otimes (x_2 x_3)) \\ &= x_1(x_2 x_3) \\ &= a_1(a_2 a_3) \otimes b_1(b_2 b_3) \\ &= (a_1 a_2) a_3 \otimes (b_1 b_2) b_3 \\ &= (x_1 x_2) x_3 \\ &= m_X((x_1 x_2) \otimes x_3) \\ &= \left(m_X \circ (m_X \otimes id_X)\right) \left((x_1 \otimes x_2) \otimes x_3\right). \end{aligned}$$

Enquanto que, para (4.2) e $x \in X$,

$$\begin{aligned}(m_X \circ (u_X \otimes id_X) \circ \alpha_X)(x) &= (m_X \circ (u_X \otimes id_X))(1_{\mathbb{K}} \otimes x) \\ &= m_X(1_X \otimes x) \\ &= x \\ &= m_X(x \otimes 1_X) \\ &= (m_X \circ (id_X \otimes u_X))(x \otimes 1_{\mathbb{K}}) \\ &= (m_X \circ (id_X \otimes u_X) \circ \beta_X)(x).\end{aligned}$$

Seguindo a listagem de definições, vale considerar aquela que trata a respeito do morfismo que preserva a estrutura de $\mathbb{K}$-álgebra.

Definição 4.2.7. Sejam A e B duas $\mathbb{K}$-álgebras. Diz-se que um morfismo de $\mathbb{K}$-espaços vetoriais $\varphi : A \to B$ é um morfismo de $\mathbb{K}$-álgebras se os diagramas a seguir são comutativos

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \arrow[r, "\varphi \otimes \varphi"] \arrow[d, "m_A"'] & B \otimes B \arrow[d, "m_B"] \\ A \arrow[r, "\varphi"'] & B \end{tikzcd} \quad \text{e} \quad \begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\varphi"] & & B \\ & \mathbb{K}. \arrow[ul, "u_A"] \arrow[ur, "u_B"'] & \end{tikzcd} \tag{4.3}$$

Observação 4.2.8. Repare que, para quaisquer $a_1, a_2 \in A$ e para todo $\lambda \in \mathbb{K}$, os diagramas são, respectivamente, equivalentes a

$$\varphi(a_1 a_2) = \varphi(a_1)\varphi(a_2) \quad \text{e} \quad \varphi(1_A) = 1_B$$

e, uma vez que φ é morfismo de $\mathbb{K}$-espaços vetoriais, segue que

$$\varphi(a_1 + a_2) = \varphi(a_1) + \varphi(a_2) \quad \text{e} \quad \varphi(\lambda a_1) = \lambda\varphi(a_1)$$

Isto é, φ é homomorfismo de anéis com unidade com $\varphi(1_A) = 1_B$, bem como, é morfismo de $\mathbb{K}$-espaços vetoriais satisfazendo a homogeneidade por um escalar, como esperado a partir da definição clássica.

Uma nota importante a respeito da definição 4.2.1 refere-se à facilidade em dualizar a estrutura de álgebra que, na simplicidade das palavras, indica a inversão no sentido das setas nos diagramas (4.1) e (4.2). Assim, considere

Definição 4.2.9. Seja $\mathbb{K}$ um corpo. Diz-se que a terna (C, Δ, ε) é uma $\mathbb{K}$-coálgebra se

(i) C é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial;

(ii) $\Delta : C \to C \otimes C$ e $\varepsilon : C \to \mathbb{K}$ são morfismos de $\mathbb{K}$-espaços vetoriais;

(iii) os seguintes diagramas são comutativos:

$$\begin{tikzcd}
 & (C \otimes C) \otimes C & \\
C \otimes (C \otimes C) \arrow[ur, "a^{-1}_{C,C,C}"] & & C \otimes C \arrow[ul, "\Delta \otimes id_C"'] \\
C \otimes C \arrow[u, "id_C \otimes \Delta"] & & C \arrow[ll, "\Delta"] \arrow[u, "\Delta"']
\end{tikzcd} \tag{4.4}$$

e

$$\begin{tikzcd}
 & C \otimes C \arrow[dl, "\varepsilon \otimes id_C"'] \arrow[dr, "id_C \otimes \varepsilon"] & \\
\mathbb{K} \otimes C \arrow[dr, "\gamma"'] & & C \otimes \mathbb{K} \arrow[dl, "\theta"] \\
 & C \arrow[uu, "\Delta"] &
\end{tikzcd} \tag{4.5}$$

com γ e θ isomorfismos tais que

$$\begin{aligned} \gamma : \mathbb{K} \otimes C &\to C \\ k \otimes c &\mapsto kc \end{aligned} \qquad \text{e} \qquad \begin{aligned} \theta : C \otimes \mathbb{K} &\to C \\ c \otimes k &\mapsto ck \end{aligned}$$

com respectivas inversas γ^{-1} e θ^{-1} dadas por

$$\begin{aligned} \gamma^{-1} : C &\to \mathbb{K} \otimes C \\ c &\mapsto 1_{\mathbb{K}} \otimes c \end{aligned} \qquad \text{e} \qquad \begin{aligned} \theta^{-1} : C &\to C \otimes \mathbb{K} \\ c &\mapsto c \otimes 1_{\mathbb{K}}. \end{aligned}$$

Observação 4.2.10. Em especial, o diagrama (4.4) admite uma trivial equivalência, a qual é esteticamente mais agradável, dada por

$$\begin{tikzcd}
 & C \arrow[dl, "\Delta"'] \arrow[dr, "\Delta"] & \\
C \otimes C \arrow[d, "\Delta \otimes id_C"'] & & C \otimes C \arrow[d, "id_C \otimes \Delta"] \\
(C \otimes C) \otimes C \arrow[rr, "a_{C,C,C}"'] & & C \otimes (C \otimes C).
\end{tikzcd} \tag{4.6}$$

Além disso, analogamente às álgebras, seguem duas observações triviais no tocante à escrita e aos morfismos associados às coálgebras.

Observação 4.2.11. Usualmente, associada à terna (C, Δ, ε), diz-se que C é $\mathbb{K}$-coálgebra. Ademais, os morfismos Δ e ε são ditos comultiplicação e counidade, respectivamente, de C.

Observação 4.2.12. A comutatividade de (4.5), garante que $(id_C \otimes \varepsilon) \circ \Delta = \theta^{-1}$ implicando em $\theta \circ (id_C \otimes \varepsilon) \circ \Delta = id_C$; além disso, $\theta \circ (\varepsilon \otimes id_C) \circ \Delta = id_C$.

Exemplo 4.2.13. Seja $\mathbb{K}$ um corpo. Note que $\mathbb{K}$ é uma coálgebra sobre si. Afinal, defina $\varepsilon(k) := k$ e $\Delta(k) := k \otimes 1_{\mathbb{K}}$. Trivialmente, ε e Δ são morfismos de $\mathbb{K}$-espaços vetoriais, afinal, para $a, b, c \in \mathbb{K}$, segue que

$$\begin{aligned}
\varepsilon(a+b) &= a + b = \varepsilon(a) + \varepsilon(b) \\
\varepsilon(ab) &= ab = a\varepsilon(b)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\Delta(a+b) &= (a+b) \otimes 1_{\mathbb{K}} = a \otimes 1_{\mathbb{K}} + b \otimes 1_{\mathbb{K}} = \Delta(a) + \Delta(b) \\
\Delta(ab) &= (ab) \otimes 1_{\mathbb{K}} = a(b \otimes 1_{\mathbb{K}}) = a\Delta(b).
\end{aligned}$$

Resta inferir a comutatividade dos diagramas (4.5) e (4.6). Seja $k \in \mathbb{K}$, para (4.6), obtém-se

$$\begin{aligned}
\left(a_{\mathbb{K},\mathbb{K},\mathbb{K}} \circ (\Delta \otimes id_{\mathbb{K}}) \circ \Delta\right)(k) &= \left(a_{\mathbb{K},\mathbb{K},\mathbb{K}} \circ (\Delta \otimes id_C)\right)(k \otimes 1_{\mathbb{K}}) \\
&= a_{\mathbb{K},\mathbb{K},\mathbb{K}}((k \otimes 1_{\mathbb{K}}) \otimes 1_{\mathbb{K}}) \\
&= k \otimes (1_{\mathbb{K}} \otimes 1_{\mathbb{K}}) \\
&= (id_{\mathbb{K}} \otimes \Delta)(k \otimes 1_{\mathbb{K}}) \\
&= ((id_{\mathbb{K}} \otimes \Delta) \circ \Delta)(k).
\end{aligned}$$

Para (4.5), segue que

$$\begin{aligned}
(\gamma \circ (\varepsilon \otimes id_{\mathbb{K}}) \circ \Delta)(k) &= (\gamma \circ (\varepsilon \otimes id_{\mathbb{K}}))(k \otimes 1_{\mathbb{K}}) \\
&= \gamma(k \otimes 1_{\mathbb{K}}) \\
&= k \\
&= \theta(k \otimes 1_{\mathbb{K}}) \\
&= (\theta \circ (id_{\mathbb{K}} \otimes \varepsilon))(k \otimes 1_{\mathbb{K}}) \\
&= (\theta \circ (id_{\mathbb{K}} \otimes \varepsilon) \circ \Delta)(k).
\end{aligned}$$

Exemplo 4.2.14. Seja C um $\mathbb{K}$-espaço vetorial com base $\{x, y\}$ e sejam Δ, ε morfismos de $\mathbb{K}$-espaços vetoriais tais que

$$\begin{aligned} \Delta : C &\to C \otimes C & \qquad \varepsilon : C &\to \mathbb{K} \\ x &\mapsto x \otimes y + y \otimes x & x &\mapsto 0 \\ y &\mapsto y \otimes y - x \otimes x & y &\mapsto 1_{\mathbb{K}} \end{aligned}$$

Sob tais considerações, a terna (C, Δ, ε) é uma coálgebra sobre $\mathbb{K}$. Em particular, basta garantir a comutatividade dos diagramas dados em (4.5) e (4.6) para os elementos da base de C.

Para (4.6), tem-se que

$$\begin{aligned} \big(a_{C,C,C} \circ (\Delta \otimes id_C) \circ \Delta\big)(x) &= \big(a_{C,C,C} \circ (\Delta \otimes id_C)\big)(x \otimes y + y \otimes x) \\ &= a_{C,C,C}((x \otimes y) \otimes y + (y \otimes x) \otimes y + \\ &\quad (y \otimes y) \otimes x - (x \otimes x) \otimes x) \\ &= x \otimes (y \otimes y) + y \otimes (x \otimes y) + \\ &\quad y \otimes (y \otimes x) - x \otimes (x \otimes x) \\ &= x \otimes (y \otimes y) - x \otimes (x \otimes x) + \\ &\quad y \otimes (x \otimes y) + y \otimes (y \otimes x) \\ &= (id_C \otimes \Delta)(x \otimes y + y \otimes x) \\ &= ((id_C \otimes \Delta) \circ \Delta)(x) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \big(a_{C,C,C} \circ (\Delta \otimes id_C) \circ \Delta\big)(y) &= \big(a_{C,C,C} \circ (\Delta \otimes id_C)\big)(y \otimes y - x \otimes x) \\ &= a_{C,C,C}((y \otimes y) \otimes y - (x \otimes x) \otimes y - \\ &\quad (x \otimes y) \otimes x - (y \otimes x) \otimes x) \\ &= y \otimes (y \otimes y) - x \otimes (x \otimes y) - \\ &\quad x \otimes (y \otimes x) - y \otimes (x \otimes x) \\ &= y \otimes (y \otimes y) - y \otimes (x \otimes x) - \\ &\quad x \otimes (x \otimes y) - x \otimes (y \otimes x) \\ &= (id_C \otimes \Delta)(y \otimes y - x \otimes x) \\ &= ((id_C \otimes \Delta) \circ \Delta)(y) \end{aligned}$$

Enquanto que para (4.5),

$$\begin{aligned}
(\gamma \circ (\varepsilon \otimes id_C) \circ \Delta)(x) &= (\gamma \circ (\varepsilon \otimes id_C))(x \otimes y + y \otimes x) \\
&= \gamma(0 \otimes y + 1_{\mathbb{K}} \otimes x) \\
&= x \\
&= \theta(x \otimes 1_{\mathbb{K}} + y \otimes 0) \\
&= (\theta \circ (id_C \otimes \varepsilon))(x \otimes y + y \otimes x) \\
&= (\theta \circ (id_C \otimes \varepsilon) \circ \Delta)(x)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
(\gamma \circ (\varepsilon \otimes id_C) \circ \Delta)(y) &= (\gamma \circ (\varepsilon \otimes id_C))(y \otimes y - x \otimes x) \\
&= \gamma(1_{\mathbb{K}} \otimes y - 0 \otimes x) \\
&= y \\
&= \theta(y \otimes 1_{\mathbb{K}} - x \otimes 0) \\
&= (\theta \circ (id_C \otimes \varepsilon))(y \otimes y + x \otimes x) \\
&= (\theta \circ (id_C \otimes \varepsilon) \circ \Delta)(y)
\end{aligned}$$

Por fim, segue um último exemplo de $\mathbb{K}$-coálgebra, semelhante ao exemplo 4.2.6. Em especial, ambas as versões admitem atuação considerável na demonstração de um futuro resultado. Além disso, nesse momento, é interessante considerar a Notação de Sweedler, disponibilizada em anexo, com referência principal dada em (DASCALESCU; NASTASESCU; RAIANU, 2001).

Exemplo 4.2.15. Sejam C e D duas $\mathbb{K}$-coálgebras, $T : C \otimes D \to D \otimes C$ morfismo de $\mathbb{K}$-espaços vetoriais e $\phi' : \mathbb{K} \otimes \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ isomorfismo tais que

$$\begin{aligned}
T : C \otimes D &\to D \otimes C \\
c \otimes d &\mapsto d \otimes c
\end{aligned}
\qquad \text{e} \qquad
\begin{aligned}
\phi' : \mathbb{K} \otimes \mathbb{K} &\to \mathbb{K} \\
\tilde{k} \otimes k &\mapsto \tilde{k}k.
\end{aligned}$$

Diz-se a respeito de $E = C \otimes D$ a $\mathbb{K}$-coálgebra com os morfismos dados por

$$\begin{aligned}
\Delta_E &:= (id_C \otimes T \otimes id_D) \circ (\Delta_C \otimes \Delta_D) : E \to E \otimes E \\
\varepsilon_E &:= \phi' \circ (\varepsilon_C \otimes \varepsilon_D) : E \to \mathbb{K}.
\end{aligned}$$

Trivialmente, $E = C \otimes D$ é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial pelo produto tensorial de $\mathbb{K}$-espaços vetoriais e repare que Δ_E e ε_E são morfismos de $\mathbb{K}$-espaços vetoriais. Destarte, resta assegurar que os diagramas (4.5) e (4.6) são comutativos. Para (4.6), tem-se que

$$
\begin{aligned}
&\left(a_{E,E,E}\circ(\Delta_E\otimes id_E)\circ\Delta_E\right)(c\otimes d)=\\
&=\left(a_{E,E,E}\circ(\Delta_E\otimes id_E)\right)\left(\sum\left(c_{(1)}\otimes d_{(1)}\right)\otimes\left(c_{(2)}\otimes d_{(2)}\right)\right)\\
&=a_{E,E,E}\left(\sum\left(\left(c_{(1)}\right)_{(1)}\otimes\left(d_{(1)}\right)_{(1)}\otimes\left(c_{(1)}\right)_{(2)}\otimes\left(d_{(1)}\right)_{(2)}\right)\otimes\left(c_{(2)}\otimes d_{(2)}\right)\right)\\
&=\sum\left(\left(\left(c_{(1)}\right)_{(1)}\otimes\left(d_{(1)}\right)_{(1)}\right)\otimes\left(\left(\left(c_{(1)}\right)_{(2)}\otimes\left(d_{(1)}\right)_{(2)}\right)\otimes\left(c_{(2)}\otimes d_{(2)}\right)\right)\right)\\
&=\sum\left(c_{(1)}\otimes d_{(1)}\right)\otimes\left(\left(\left(c_{(2)}\right)_{(1)}\otimes\left(d_{(2)}\right)_{(1)}\right)\otimes\left(\left(c_{(2)}\right)_{(2)}\otimes\left(d_{(2)}\right)_{(2)}\right)\right)\\
&=(id_E\otimes\Delta_E)\left(\sum\left(c_{(1)}\otimes d_{(1)}\right)\otimes\left(c_{(2)}\otimes d_{(2)}\right)\right)\\
&=((id_E\otimes\Delta_E)\circ\Delta_E)(c\otimes d).
\end{aligned}
$$

Para (4.5), utiliza-se a propriedade da counidade, isto é, $\sum\varepsilon(c_2)c_1=c=\sum\varepsilon(c_1)c_2$; logo,

$$
\begin{aligned}
(\gamma_E\circ(\varepsilon_E\otimes id_E)\circ\Delta_E)(c\otimes d)&=(\gamma_E\circ(\varepsilon_E\otimes id_E))\left(\sum\left(c_{(1)}\otimes d_{(1)}\right)\otimes\left(c_{(2)}\otimes d_{(2)}\right)\right)\\
&=\gamma_E\left(\sum\left(\varepsilon_C\left(c_{(1)}\right)\otimes\varepsilon_D\left(d_{(1)}\right)\right)\otimes\left(c_{(2)}\otimes d_{(2)}\right)\right)\\
&=\sum\left(\varepsilon_C\left(c_{(1)}\right)\otimes\varepsilon_D\left(d_{(1)}\right)\right)\left(c_{(2)}\otimes d_{(2)}\right)\\
&=\sum\varepsilon_C\left(c_{(1)}\right)c_{(2)}\otimes\varepsilon_D\left(d_{(1)}\right)d_{(2)}\\
&=c\otimes d\\
&=\sum c_{(1)}\varepsilon_C\left(c_{(2)}\right)\otimes d_{(1)}\varepsilon_D\left(d_{(2)}\right)\\
&=\sum\left(c_{(1)}\otimes d_{(1)}\right)\left(\varepsilon_C\left(c_{(2)}\right)\otimes\varepsilon_D\left(d_{(2)}\right)\right)\\
&=\theta_E\left(\sum\left(c_{(1)}\otimes d_{(1)}\right)\otimes\left(\varepsilon_C\left(c_{(2)}\right)\otimes\varepsilon_D\left(d_{(2)}\right)\right)\right)\\
&=(\theta_E\circ(id_E\otimes\varepsilon_E))\left(\sum\left(c_{(1)}\otimes d_{(1)}\right)\otimes\left(c_{(2)}\otimes d_{(2)}\right)\right)\\
&=(\theta_E\circ(id_E\otimes\varepsilon_E)\circ\Delta_E)(c\otimes d).
\end{aligned}
$$

Previamente à introdução das estruturas de biálgebras, resta apresentar a definição categórica, em espaços vetoriais, de morfismos de $\mathbb{K}$-coálgebras.

Definição 4.2.16. Sejam C e D duas $\mathbb{K}$-coálgebras. Diz-se que um morfismo de $\mathbb{K}$-espaços vetoriais $\varphi : C\to D$ é um morfismo de $\mathbb{K}$-coálgebras se os diagramas a seguir são comutativos:

$$
\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\Delta_C"'] & D \arrow[d, "\Delta_D"] \\
C\otimes C \arrow[r, "\varphi\otimes\varphi"'] & D\otimes D
\end{tikzcd}
\quad \text{e} \quad
\begin{tikzcd}
C \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\varepsilon_C"'] & & D \arrow[dl, "\varepsilon_D"] \\
& \mathbb{K}. &
\end{tikzcd}
\tag{4.7}
$$

Enfim, por intermédio das noções e resultados acima, é possível descrever um espaço vetorial com estrutura de álgebra e, concomitantemente, de coálgebra. Em especial, a partir dessa ideia é possível extrair uma equivalência envolvendo os morfismos multiplicação e unidade (m e u) com os morfismos de comultiplicação e counidade (Δ e ε). Assim, segue:

Definição 4.2.17. Seja $\mathbb{K}$ um corpo. Diz-se que a 5-upla $(B, m, u, \Delta, \varepsilon)$ é uma $\mathbb{K}$-biálgebra se

(i) a terna (B, m, u) for uma $\mathbb{K}$-álgebra;

(ii) a terna (B, Δ, ε) for uma $\mathbb{K}$-coálgebra;

(iii) Δ e ε são morfismos de álgebras.

Observação 4.2.18. Usualmente, associada à 5-upla $(B, m, u, \Delta, \varepsilon)$, diz-se que B é $\mathbb{K}$-biálgebra.

Notação. Seja B uma $\mathbb{K}$-biálgebra. Escreve-se B^a e B^c como as representações da estrutura de $\mathbb{K}$-álgebra e $\mathbb{K}$-coálgebra de B, respectivamente.

Exemplo 4.2.19. Seja $\mathbb{K}$ um corpo. A 5-upla $(\mathbb{K}, \cdot, id_{\mathbb{K}}, \Delta, id_{\mathbb{K}})$ é uma $\mathbb{K}$-biálgebra. De fato, pois pelo Exemplo 4.1.5 e pela Proposição 4.2.4, segue que $(\mathbb{K}, \cdot, id_{\mathbb{K}})$ é uma $\mathbb{K}$-álgebra. Enquanto que pelo Exemplo 4.2.13, segue que $(\mathbb{K}, \Delta, id_{\mathbb{K}})$ é uma $\mathbb{K}$-coálgebra.

O exemplo anterior será, em breve, generalizado como uma proposição, em particular, em 5.1.4, a qual afirma que toda unidade de categoria monoidal é uma biálgebra. Prosseguindo o desenvolvimento estrutural, tem-se resultado no tocante a uma equivalência entre morfismos de uma biálgebra.

Proposição 4.2.20. Sejam $\mathbb{K}$ um corpo e B uma $\mathbb{K}$-biálgebra. Sob tais considerações, Δ e ε são morfismos de $\mathbb{K}$-álgebras se, e somente se, m e u são morfismos de $\mathbb{K}$-coálgebras.

Demonstração. Sejam $\mathbb{K}$ um corpo e B uma $\mathbb{K}$-biálgebra. Considere os seguintes diagramas

$$\begin{tikzcd}
B \otimes B \arrow[r, "\Delta_B \otimes \Delta_B"] \arrow[dd, "m_B"'] & B \otimes B \otimes B \otimes B \arrow[d, "id_B \otimes T \otimes id_B"'] \\
(1) & B \otimes B \otimes B \otimes B \arrow[d, "m_B \otimes m_B"'] \\
B \arrow[r, "\Delta_B"'] & B \otimes B
\end{tikzcd}
\quad \text{e} \quad
\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "\Delta_B"] & B \otimes B \\
(2) & \mathbb{K} \otimes \mathbb{K} \arrow[u, "u_B \otimes u_B"'] \\
\mathbb{K} \arrow[uu, "u_B"] \arrow[r, "id_{\mathbb{K}}"'] & \mathbb{K}. \arrow[u, "\phi = \Delta_{\mathbb{K}}"']
\end{tikzcd}$$

Note que (1) e (2) são comutativos se, e somente se, Δ_B é morfismo de $\mathbb{K}$-álgebras. Ademais, admita

$$
\begin{tikzcd}
B \otimes B \arrow[r, "\varepsilon_B \otimes \varepsilon_B"] \arrow[d, "m_B"'] \arrow[dr, phantom, "(3)"] & \mathbb{K} \otimes \mathbb{K} \arrow[d, "\psi = m_{\mathbb{K}}"] \\
B \arrow[r, "\varepsilon_B"'] & \mathbb{K}
\end{tikzcd}
\quad \text{e} \quad
\begin{tikzcd}
B \arrow[rr, "\varepsilon_B"] & & \mathbb{K} \\
& \mathbb{K}. \arrow[ul, "u_B"] \arrow[ur, "u_{\mathbb{K}} = id_{\mathbb{K}}"'] \arrow[u, phantom, "(4)"] &
\end{tikzcd}
$$

Note que (3) e (4) são comutativos se, e somente se, ε_B é morfismo de $\mathbb{K}$-álgebras. Além disso, tome

$$
\begin{tikzcd}
B \otimes B \arrow[r, "m_B"] \arrow[d, "\Delta_B \otimes \Delta_B"'] & B \arrow[dd, "\Delta_B"] \\
B \otimes B \otimes B \otimes B \arrow[d, "id_B \otimes T \otimes id_B"'] \arrow[r, phantom, "(5)"] & \\
B \otimes B \otimes B \otimes B \arrow[r, "m_B \otimes m_B"'] & B \otimes B
\end{tikzcd}
\quad \text{e} \quad
\begin{tikzcd}
B \otimes B \arrow[r, "m_B"] \arrow[d, "\varepsilon_B \otimes \varepsilon_B"'] & B \arrow[dd, "\varepsilon_B"] \\
\mathbb{K} \otimes \mathbb{K} \arrow[d, "\psi = m_{\mathbb{K}}"'] \arrow[r, phantom, "(6)"] & \\
\mathbb{K} \arrow[r, "id_{\mathbb{K}}"'] & \mathbb{K}.
\end{tikzcd}
$$

Note que (5) e (6) são comutativos se, e somente se, m_B é morfismo de $\mathbb{K}$-coálgebras. Por fim, considere

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{K} \arrow[r, "u_B"] \arrow[d, "\phi = \Delta_{\mathbb{K}}"'] \arrow[dr, phantom, "(7)"] & B \arrow[d, "\Delta_B"] \\
\mathbb{K} \otimes \mathbb{K} \arrow[r, "u_B \otimes u_B"'] & B \otimes B
\end{tikzcd}
\quad \text{e} \quad
\begin{tikzcd}
B \arrow[rr, "\varepsilon_B"] & & \mathbb{K} \\
& \mathbb{K}. \arrow[ul, "u_B"] \arrow[ur, "u_{\mathbb{K}} = id_{\mathbb{K}}"'] \arrow[u, phantom, "(8)"] &
\end{tikzcd}
$$

Note que (7) e (8) são comutativos se, e somente se, u_B é morfismo de $\mathbb{K}$-coálgebras. Por construção, infere-se, trivialmente, que

- Os diagramas (1) e (5) são iguais;
- Os diagramas (2) e (7) são iguais;
- Os diagramas (3) e (6) são iguais;
- Os diagramas (4) e (8) são iguais.

Suponha Δ_B e ε_B são morfismos de $\mathbb{K}$-álgebras. Logo, os diagramas (1), (2), (3) e (4) são comutativos; assim, por equivalência, os diagramas (5), (7), (6) e (8) também são comutativos. Destarte, por (5) e (6), m_B é morfismo de $\mathbb{K}$-coálgebras, enquanto que, por (7) e (8), u_B é morfismo de $\mathbb{K}$-coálgebras.

Reciprocamente, suponha m_B e u_B são morfismos de $\mathbb{K}$-coálgebras. Logo, os diagramas (5), (6), (7) e (8) são comutativos; logo, por equivalência, os diagramas (1), (3), (2) e (4) também são comutativos. Portanto, por (1) e (2), Δ_B é morfismo de $\mathbb{K}$-álgebras, ao passo que (3) e (4) implicam em ε_B ser morfismo de $\mathbb{K}$-álgebras.

■

Definição 4.2.21. Sejam B e C duas $\mathbb{K}$-biálgebras. Diz-se que $\varphi : B \to C$ é um morfismo de $\mathbb{K}$-biálgebras se

(i) $\varphi : B^a \to C^a$ é morfismo de $\mathbb{K}$-álgebras;

(ii) $\varphi : B^c \to C^c$ é morfismo de $\mathbb{K}$-coálgebras.

Notação. Seja φ um morfismo de $\mathbb{K}$-biálgebras. Escreve-se φ^a e φ^c as representações da estrutura de morfismo de $\mathbb{K}$-álgebra e $\mathbb{K}$-coálgebra de φ, respectivamente.

Sejam $\mathbb{K}$ um corpo, C uma $\mathbb{K}$-coálgebra e A uma $\mathbb{K}$-álgebra. A partir deste momento, a fim de construir a definição de uma Álgebra de Hopf, faz-se necessário definir o produto de convolução responsável por gerar uma estrutura de $\mathbb{K}$-álgebra sobre $Hom_{Vect_{\mathbb{K}}}(C, A) := \{f : C \to A \mid f \text{ é } \mathbb{K}\text{-linear}\}$.

Teorema 4.2.22. Sejam $\mathbb{K}$ um corpo, C uma $\mathbb{K}$-coálgebra e A uma $\mathbb{K}$-álgebra. Sob tais considerações, o $\mathbb{K}$-espaço vetorial $Hom_{Vect_{\mathbb{K}}}(C, A)$ admite estrutura de $\mathbb{K}$-álgebra quando define-se uma multiplicação, dita produto de convolução e denotada por $*$, a qual é dada por

$$\begin{aligned} * : Hom_{Vect_{\mathbb{K}}}(C, A) \times Hom_{Vect_{\mathbb{K}}}(C, A) &\to Hom_{Vect_{\mathbb{K}}}(C, A) \\ (f, g) &\mapsto f * g \end{aligned}$$

tal que

$$\begin{aligned} f * g : C &\to A \\ c &\mapsto (f * g)(c) := \sum f(c_1)g(c_2). \end{aligned}$$

Isto é, o produto de convolução é dado por $(m_A \circ (f \otimes g) \circ \Delta_C)$ de modo a ser associado a comutatividade do seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "f*g"] \arrow[d, "\Delta_C"'] & A \\ C \otimes C \arrow[r, "f\otimes g"'] & A \otimes A. \arrow[u, "m_A"'] \end{tikzcd}$$

Um breve comentário prévio à demonstração referente ao teorema acima refere-se ao modo de prova que será utilizado. Em particular, utilizar-se-á a noção de $\mathbb{K}$-álgebra advinda da Definição 4.1.1 e, como a terna $(Hom_{Vect_{\mathbb{K}}}(C, A), +, \cdot)$ é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial, em particular, grupo abeliano aditivo, basta garantir a validade dos seguintes itens em relação a 4-upla $(Hom_{Vect_{\mathbb{K}}}(C, A), +, *, \cdot)$:

- A operação $*$ é associativa;
- A operação $*$ satisfaz a distributividade à esquerda em relação à soma;
- A operação $*$ satisfaz a distributividade à direita em relação à soma;
- A operação $*$ admite elemento neutro;
- A operação $*$ satisfaz a homogeneidade do escalar;

Demonstração. Sejam $f, g, h \in Hom_{Vect_{\mathbb{K}}}(C, A)$ e $c \in C$, note que $*$ é associativa, pois

$$\begin{aligned}
((f * g) * h)(c) &= \sum (f * g)(c_1)h(c_2) \\
&= \sum \left(\sum f\left(\left(c_{(1)}\right)_{(1)} \right) g\left(\left(c_{(1)}\right)_{(2)} \right) \right) h(c_2) \\
&= \sum f\left(\left(c_{(1)}\right)_{(1)} \right) g\left(\left(c_{(1)}\right)_{(2)} \right) h(c_2) \\
&= \sum f(c_1) \left(\sum g\left(\left(c_{(2)}\right)_{(1)} \right) h\left(\left(c_{(2)}\right)_{(2)} \right) \right) \\
&= \sum f(c_1)(g * h)(c_2) \\
&= (f * (g * h))(c).
\end{aligned}$$

Repare que distributividade de $*$ à esquerda em relação a soma é satisfeita, já que

$$\begin{aligned}
(f * (g + h))(c) &= \sum f(c_1)(g + h)(c_2) \\
&= \sum f(c_1) \left(g(c_2) + h(c_2)\right) \\
&= \sum f(c_1)g(c_2) + f(c_1)h(c_2) \\
&= \sum f(c_1)g(c_2) + \sum f(c_1)h(c_2) \\
&= (f * g)(c) + (f * h)(c).
\end{aligned}$$

Analogamente, segue a distributividade de $*$ à direita em relação a soma; ademais, a unidade em relação ao produto de convolução é dada por $u_A \circ \varepsilon_C$, pois, a partir de

$$u_A(\varepsilon_C(c)) = u_A(\varepsilon_C(c)1_{\mathbb{K}}) = \varepsilon_C(c)u_A(1_{\mathbb{K}}) = \varepsilon_C(c)1_A = \varepsilon_C(c), \ \forall c \in C$$

e da propriedade da counidade, garante-se que

$$\begin{aligned}
(f*(u_A\circ\varepsilon_C))(c) &= \sum f(c_1)(u_A\circ\varepsilon_C)(c_2) = \sum f(c_1)u_A(\varepsilon_C(c_2)) \\
&= \sum f(c_1)\varepsilon_C(c_2)u_A(1_{\mathbb{K}}) = \sum f(c_1)\varepsilon_C(c_2)1_A \\
&= \sum f(c_1)\varepsilon_C(c_2) = \sum f(c_1\varepsilon_C(c_2)) \\
&= f\left(\sum c_1\varepsilon_C(c_2)\right) \\
&= f(c) \\
&= f\left(\sum \varepsilon_C(c_1)c_2\right) \\
&= \sum f(\varepsilon_C(c_1)c_2) = \sum \varepsilon_C(c_1)f(c_2) \\
&= \sum \varepsilon_C(c_1)1_A f(c_2) = \sum \varepsilon_C(c_1)u_A(1_{\mathbb{K}})f(c_2) \\
&= \sum u_A(\varepsilon_C(c_1))f(c_2) = \sum (u_A\circ\varepsilon_C)(c_1)f(c_2) \\
&= ((u_A\circ\varepsilon_C)*f)(c).
\end{aligned}$$

Por fim, note, para $\lambda\in\mathbb{K}$, que

$$\lambda(f*g)(c) = \lambda\left(\sum f(c_1)g(c_2)\right) = \sum\left(\lambda f(c_1)\right)g(c_2) = ((\lambda f)*g)(c)$$

bem como,

$$\lambda(f*g)(c) = \lambda\left(\sum f(c_1)g(c_2)\right) = \sum f(c_1)\left(\lambda g(c_2)\right) = (f*(\lambda g))(c)$$

■

Definição 4.2.23. Seja H uma $\mathbb{K}$-biálgebra. Diz-se que a função $S: H\to H$ é antípoda de H se $S*id_H = u_{H^a}\circ\varepsilon_{H^c} = id_H*S$.

Observação 4.2.24. Por definição do produto de convolução, diz-se que a antípoda S de H é a função inversa da identidade id_H.

Proposição 4.2.25. Seja H uma $\mathbb{K}$-biálgebra. Sob tal consideração, se existe antípoda S de H, então S é única.

Demonstração. Sejam H uma $\mathbb{K}$-biálgebra e S_1, S_2 as antípodas de H. Por hipótese, tem-se que

$$S_1*id_H = u_{H^a}\circ\varepsilon_{H^c} = id_H*S_1 \quad \text{e} \quad S_1*id_H = u_{H^a}\circ\varepsilon_{H^c} = id_H*S_1.$$

Uma vez que $u_{H^a}\circ\varepsilon_{H^c}$ é a unidade em $Hom_{\mathbb{K}}(H^c, H^a)$, infere-se que

$$S_1 = S_1 * (u_{H^a} \circ \varepsilon_{H^c}) = S_1 * (id_H * S_2) = (S_1 * id_H) * S_2 = (u_{H^a} \circ \varepsilon_{H^c}) * S_2 = S_2$$

■

Definição 4.2.26. Seja $\mathbb{K}$ um corpo. Diz-se que a 6-upla $(H, m, u, \Delta, \varepsilon, S)$ é uma $\mathbb{K}$-álgebra de Hopf se

(i) a 5-upla $(H, m, u, \Delta, \varepsilon)$ for uma $\mathbb{K}$-biálgebra;

(ii) S for a antípoda de H.

Observação 4.2.27. Seja H uma $\mathbb{K}$-álgebra de Hopf. O diagrama associado a H é dado por:

$$\begin{tikzcd}
& H \otimes H \arrow[rr, "S \otimes id_H"] & & H \otimes H \arrow[dr, "m"] & \\
H \arrow[ur, "\Delta"] \arrow[rr, "\varepsilon"] \arrow[dr, "\Delta"'] & & \mathbb{K} \arrow[rr, "u"] & & H \\
& H \otimes H \arrow[rr, "id_H \otimes S"'] & & H \otimes H. \arrow[ur, "m"'] &
\end{tikzcd}$$

Exemplo 4.2.28. Sejam $\mathbb{K}$ um corpo e G um grupo multiplicativo. A álgebra de grupo $\mathcal{G} := \mathbb{K}[G]$ é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial que admite estrutura de $\mathbb{K}$-álgebra de Hopf. A priori, lembre que

$$\mathcal{G} := \mathbb{K}[G] = \bigoplus_{g \in G} \mathbb{K}g = \left\{ \sum_g \alpha_g g \;\middle|\; \alpha_g \in \mathbb{K} \right\},$$

bem como, repare que $\mathcal{G}$ é, de fato, $\mathbb{K}$-espaço vetorial com operações dadas por

$$\sum_g \alpha_g g + \sum_g \beta_g = \sum_g (\alpha_g + \beta_g) g \quad \text{e} \quad \beta \sum_g \alpha_g g = \sum_g (\beta \alpha_g) g$$

para todo $\beta \in \mathbb{K}$. Resta garantir a estrutura de álgebra de Hopf; logo, considere

- multiplicação induzida pelo grupo;
- unidade dada pelo elemento neutro;
- comultiplicação dada por $\Delta(g) := g \otimes g$, para todo $g \in G$;
- counidade dada por $\varepsilon(g) := 1_{\mathbb{K}}$, para todo $g \in G$;
- antípoda dada por $S(g) := g^{-1}$, para todo $g \in G$.

Note que m, u, Δ, ε e S são morfismos de $\mathbb{K}$-espaços vetoriais e, para quaisquer $x, y, z \in \mathcal{G}$, obtenha

$$\begin{aligned}\big(m \circ \big(id_{\mathcal{G}} \otimes m\big) \circ a_{\mathcal{G},\mathcal{G},\mathcal{G}}\big)\left((x \otimes y) \otimes z\right) &= \big(m \circ \big(id_{\mathcal{G}} \otimes m\big)\big)\left(x \otimes (y \otimes z)\right)\\ &= m(x \otimes yz) = x(yz)\\ &= (xy)z = m((xy) \otimes z)\\ &= \big(m \circ \big(m \otimes id_{\mathcal{G}}\big)\big)\left((x \otimes y) \otimes z\right),\end{aligned}$$

bem como,

$$\big(m \circ \big(u \otimes id_{\mathcal{G}}\big) \circ \alpha\big)(x) = \big(m \circ \big(u \otimes id_{\mathcal{G}}\big)\big)(1_{\mathbb{K}} \otimes x) = m(e \otimes x) = x = id_{\mathcal{G}}(x)$$

e

$$\big(m \circ \big(id_{\mathcal{G}} \otimes u\big) \circ \beta\big)(x) = \big(m \circ \big(id_{\mathcal{G}} \otimes u\big)\big)(x \otimes 1_{\mathbb{K}}) = m(x \otimes e) = x = id_{\mathcal{G}}(x).$$

Logo, $\mathcal{G}$ é uma $\mathbb{K}$-álgebra. Outrossim,

$$\begin{aligned}\big(a_{\mathcal{G},\mathcal{G},\mathcal{G}} \circ \big(\Delta \otimes id_{\mathcal{G}}\big) \circ \Delta\big)(x) &= \big(a_{\mathcal{G},\mathcal{G},\mathcal{G}} \circ \big(\Delta \times id_{\mathcal{G}}\big)\big)(x \otimes x) = a_{\mathcal{G},\mathcal{G},\mathcal{G}}((x \otimes x) \otimes x)\\ &= x \otimes (x \otimes x) = \big(id_{\mathcal{G}} \otimes \Delta\big)(x \otimes x)\\ &= \big(\big(id_{\mathcal{G}} \otimes \Delta\big) \circ \Delta\big)(x),\end{aligned}$$

bem como,

$$\big(\big(\varepsilon \otimes id_{\mathcal{G}}\big) \circ \Delta\big)(x) = \big(\varepsilon \otimes id_{\mathcal{G}}\big)(x \otimes x) = 1_{\mathbb{K}} \otimes x = \gamma^{-1}(x)$$

e

$$\big(\big(id_{\mathcal{G}} \varepsilon\big) \circ \Delta\big)(x) = \big(id_{\mathcal{G}} \varepsilon\big)(x \otimes x) = x \otimes 1_{\mathbb{K}} = \theta^{-1}(x).$$

Isto é, $\mathcal{G}$ é uma $\mathbb{K}$-coálgebra. Resta a comutatividade do diagrama da antípoda; assim,

$$\begin{aligned}\big(m \circ \big(S \otimes id_{\mathcal{G}}\big) \circ \Delta\big)(x) &= \big(m \circ \big(S \otimes id_{\mathcal{G}}\big)\big)(x \otimes x) = m(x^{-1} \otimes x) = x^{-1}x\\ &= e = u(1_{\mathbb{K}}) = (u \circ \varepsilon)(x)\end{aligned}$$

bem como,

$$\begin{aligned}\big(m \circ \big(id_{\mathcal{G}} \otimes S\big) \circ \Delta\big)(x) &= \big(m \circ \big(id_{\mathcal{G}} \otimes S\big)\big)(x \otimes x) = m(x \otimes x^{-1}) = xx^{-1}\\ &= e = u(1_{\mathbb{K}}) = (u \circ \varepsilon)(x)\end{aligned}$$

Definição 4.2.29. Sejam H e J duas $\mathbb{K}$-álgebra de Hopf. Diz-se que $\varphi : H \to J$ é morfismo de $\mathbb{K}$-álgebras de Hopf se φ é morfismo de $\mathbb{K}$-biálgebras.

5 GENERALIZAÇÃO PARA CATEGORIAS MONOIDAIS

Neste breve capítulo, apresentam-se características de álgebras a fim de garantir, naturalmente, noções já conhecidas na categoria monoidal dos espaços vetoriais; para tal, deve-se considerar uma categoria para progressão básica, em especial, $\mathcal{C}$ uma categoria monoidal.

Em particular, algumas mudanças são facilmente conquistadas como, por exemplo, as definições de morfismos ao passo que outras necessitam sutileza, *e.g.*, os morfismos inversíveis de $\mathbb{K}$-espaços vetoriais α, β, γ e θ são substituídos pelos isomorfismos presentes nas coleções de l ou r.

Por fim, a partir das noções apresentadas, é possível obter definições para módulos sobre álgebras e comódulos sobre coálgebras em $\mathcal{C}$, bem como, uma série de exemplos a fim de garantir o objetivo deste trabalho.

5.1 CATEGORIFICAÇÃO DE UMA ÁLGEBRA

Definição 5.1.1. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria monoidal. Diz-se que a terna (A, m, u) é uma álgebra em $\mathcal{C}$ se

(i) A é um objeto em $\mathcal{C}$;

(ii) $m : A \otimes A \to A$ e $u : \mathbf{1} \to A$ são morfismos em $\mathcal{C}$;

(iii) os seguintes diagramas são comutativos:

$$\begin{tikzcd}
 & (A \otimes A) \otimes A \arrow[dl, "a_{A,A,A}"'] \arrow[dr, "m \otimes id_A"] & \\
A \otimes (A \otimes A) \arrow[d, "id_A \otimes m"'] & & A \otimes A \arrow[d, "m"] \\
A \otimes A \arrow[rr, "m"'] & & A
\end{tikzcd} \tag{5.1}$$

e

$$\begin{tikzcd}
 & A \otimes A \arrow[dd, "m"'] & \\
\mathbf{1} \otimes A \arrow[ur, "u \otimes id_A"] \arrow[dr, "l_A"'] & & A \otimes \mathbf{1} \arrow[ul, "id_A \otimes u"'] \arrow[dl, "r_A"] \\
 & A. &
\end{tikzcd} \tag{5.2}$$

Definição 5.1.2. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria monoidal. Diz-se que a terna (C, Δ, ε) é uma coálgebra em $\mathcal{C}$ se

(i) C é um objeto em $\mathcal{C}$;

(ii) $\Delta : C \to C \otimes C$ e $\varepsilon : C \to \mathbf{1}$ são morfismos em $\mathcal{C}$;

(iii) os seguintes diagramas são comutativos:

$$\begin{tikzcd}
 & C \arrow[dl, "\Delta"'] \arrow[dr, "\Delta"] & \\
C \otimes C \arrow[d, "\Delta \otimes id_C"'] & & C \otimes C \arrow[d, "id_C \otimes \Delta"] \\
(C \otimes C) \otimes C \arrow[rr, "a_{C,C,C}"'] & & C \otimes (C \otimes C)
\end{tikzcd} \tag{5.3}$$

e

$$\begin{tikzcd}
 & C \otimes C \arrow[dl, "\varepsilon \otimes id_C"'] \arrow[dr, "id_C \otimes \varepsilon"] & \\
\mathbf{1} \otimes C \arrow[dr, "l_C"'] & & C \otimes \mathbf{1} \arrow[dl, "r_C"] \\
 & C. \arrow[uu, "\Delta"] &
\end{tikzcd} \tag{5.4}$$

Definição 5.1.3. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria monoidal. Diz-se que a 5-upla $(B, m, u, \Delta, \varepsilon)$ é uma biálgebra em $\mathcal{C}$ se

(i) a terna (B, m, u) for uma álgebra em $\mathcal{C}$;

(ii) a terna (B, Δ, ε) é uma coálgebra em $\mathcal{C}$;

(iii) Δ e ε são morfismos de álgebras.

Proposição 5.1.4. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria monoidal. Sob tal consideração, a unidade de $\mathcal{C}$ é uma biálgebra.

Demonstração. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria monoidal com unidade **1**. Defina

$$m = r_{\mathbf{1}} = l_{\mathbf{1}}, \quad u = id_{\mathbf{1}}, \quad \Delta = r_{\mathbf{1}}^{-1} = l_{\mathbf{1}}^{-1} \quad \text{e} \quad \varepsilon = (id_{\mathbf{1}})^{-1} = id_{\mathbf{1}}.$$

Basta garantir a comutatividade dos diagramas dados em (5.1), (5.2) (5.3) e (5.4); para tal, é suficiente utilizar os resultados apresentados no capítulo três como, por exemplo, o Teorema 3.2.3. Para (5.1), note que

$$\begin{aligned} m \circ (id_{\mathbf{1}} \otimes m) \circ a_{\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{1}} &= r_{\mathbf{1}} \circ (id_{\mathbf{1}} \otimes r_{\mathbf{1}}) \circ a_{\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{1}} = r_{\mathbf{1}} \circ r_{\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}} \\ &= r_{\mathbf{1}} \circ (r_{\mathbf{1}} \otimes id_{\mathbf{1}}) = m \circ (m \otimes id_{\mathbf{1}}). \end{aligned}$$

Para (5.2), repare que

$$m \circ (u \otimes id_{\mathbf{1}}) = l_{\mathbf{1}} \circ (id_{\mathbf{1}} \otimes id_{\mathbf{1}}) = l_{\mathbf{1}} \circ id_{\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}} = l_{\mathbf{1}}$$

e

$$m \circ (id_{\mathbf{1}} \otimes u) = r_{\mathbf{1}} \circ (id_{\mathbf{1}} \otimes id_{\mathbf{1}}) = r_{\mathbf{1}} \circ id_{\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}} = r_{\mathbf{1}}.$$

Logo, a terna $(\mathbf{1}, m, u)$ é uma álgebra em $\mathcal{C}$. Em seguida, para (5.3), infere-se que

$$\begin{aligned} a_{\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{1}} \circ (\Delta \otimes id_{\mathbf{1}}) \circ \Delta &= a_{\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{1}} \circ (l_{\mathbf{1}}^{-1} \otimes id_{\mathbf{1}}) \circ l_{\mathbf{1}}^{-1} = l_{\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}}^{-1} \circ l_{\mathbf{1}}^{-1} \\ &= (id_{\mathbf{1}} \otimes l_{\mathbf{1}}^{-1}) \circ l_{\mathbf{1}}^{-1} = (id_{\mathbf{1}} \otimes \Delta) \circ \Delta; \end{aligned}$$

por fim, para (5.4), obtém-se

$$\Delta \circ l_{\mathbf{1}} \circ (\varepsilon \otimes id_{\mathbf{1}}) = l_{\mathbf{1}}^{-1} \circ l_{\mathbf{1}} \circ (id_{\mathbf{1}} \otimes id_{\mathbf{1}}) = id_{\mathbf{1}} \otimes id_{\mathbf{1}} = id_{\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}}$$

e

$$\Delta \circ r_{\mathbf{1}} \circ (id_{\mathbf{1}} \otimes \varepsilon) = r_{\mathbf{1}}^{-1} \circ r_{\mathbf{1}} \circ (id_{\mathbf{1}} \otimes id_{\mathbf{1}}) = id_{\mathbf{1}} \otimes id_{\mathbf{1}} = id_{\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}}.$$

Assim, a terna $(\mathbf{1}, \Delta, \varepsilon)$ é uma coálgebra em $\mathcal{C}$.

■

A proposição acima implica que, em Set, todo conjunto unitário é uma biálgebra; bem como, todo funtor identidade é uma biálgebra na categoria dos endofuntores.

Definição 5.1.5. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria monoidal. Diz-se que a 6-upla $(H, m, u, \Delta, \varepsilon, S)$ é uma álgebra de Hopf em $\mathcal{C}$ se

(i) a 5-upla $(H, m, u, \Delta, \varepsilon)$ é uma biálgebra em $\mathcal{C}$;

(ii) $S : H \to H$ é morfismo em $\mathcal{C}$;

(iii) o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & H \otimes H \arrow[rr, "S\otimes id_H"] & & H \otimes H \arrow[dr, "m"] & \\
H \arrow[ur, "\Delta"] \arrow[rr, "\varepsilon"] \arrow[dr, "\Delta"'] & & \mathbf{1} \arrow[rr, "u"] & & H \\
 & H \otimes H \arrow[rr, "id_H\otimes S"'] & & H \otimes H. \arrow[ur, "m"'] &
\end{tikzcd} \tag{5.5}$$

Exemplo 5.1.6. Na categoria Set, todo conjunto com estrutura de grupo é álgebra de Hopf. De fato, considere G um grupo e defina:

$$\begin{aligned} m : G \times G &\to G \\ (g,h) &\mapsto m(g,h) := gh \end{aligned} \qquad \text{e} \qquad \begin{aligned} u : \{\xi\} &\to G \\ \xi &\mapsto u(\xi) := e; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta : G &\to G \times G \\ g &\mapsto \Delta(g) := (g,g) \end{aligned} \qquad \text{e} \qquad \begin{aligned} \varepsilon : G &\to \{\xi\} \\ g &\mapsto \varepsilon(g) := \xi. \end{aligned}$$

Repare que m, u, Δ, ε e S são funções e, portanto, morfismos em Set. Ademais, obtém-se, para quaisquer $g, h, j \in G$,

$$\begin{aligned} \big(m \circ (id_G \times m) \circ a_{G,G,G}\big)\,((g,h),j) &= (m \circ (id_G \times m)\,(g,(h,j)) \\ &= m(g,hj) \\ &= g(hj) \\ &= (gh)j \\ &= m((gh),j) \\ &= (m \circ (m \times id_G))\,((g,h),j), \end{aligned}$$

bem como,

$$(m \circ (u \times id_G))\,(\xi, g) = m(e,g) = g = l(\xi, g)$$

e

$$(m \circ (id_G \times u))\,(g, \xi) = m(g,e) = g = r(g, \xi).$$

Isto é, G é uma álgebra em Set. Além disso,

$$\begin{aligned} \big(a_{G,G,G} \circ (\Delta \times id_G) \circ \Delta\big)\,(g) &= \big(a_{G,G,G} \circ (\Delta \times id_G)\big)\,(g,g) \\ &= a((g,g),g) \\ &= (g,(g,g)) \\ &= (id_G \times \Delta)(g,g) \\ &= ((id_G \times \Delta) \circ \Delta)\,(g), \end{aligned}$$

$$(l_G \circ (\varepsilon \times id_G) \circ \Delta)\,(g) = (l_G \circ (\varepsilon \times id_G))\,(g,g) = l_G(\xi, g) = g = id_G(g)$$

e

$$(r_G \circ (id_G \times \varepsilon) \circ \Delta)\,(g) = (r_G \circ (id_G \times \varepsilon))\,(g,g) = r_G(g, \xi) = g = id_G(g).$$

Isto é, G é uma coálgebra em Set. Resta garantir a comutatividade do diagrama dado em (5.5); logo, defina

$$\begin{aligned} S : G &\to G \\ g &\mapsto S(g) := g^{-1} \end{aligned}$$

e repare que

$$\begin{aligned} (m \circ (S \times id_G) \circ \Delta)(g) &= (m \circ (S \times id_G))(g, g) \\ &= m(g^{-1}, g) \\ &= e \\ &= u(\xi) \\ &= (u \circ \varepsilon)(g), \end{aligned}$$

assim como,

$$\begin{aligned} (m \circ (id_G \times S) \circ \Delta)(g) &= (m \circ (id_G \times S))(g, g) \\ &= m(g, g^{-1}) \\ &= e \\ &= u(\xi) \\ &= (u \circ \varepsilon)(g). \end{aligned}$$

Definição 5.1.7. Sejam A e B duas álgebras em $\mathcal{C}$. Diz-se que $\varphi : A \to B$ é um morfismo de álgebras se os diagramas a seguir são comutativos:

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \arrow[r, "\varphi \otimes \varphi"] \arrow[d, "m_A"'] & B \otimes B \arrow[d, "m_B"] \\ A \arrow[r, "\varphi"'] & B \end{tikzcd} \quad \text{e} \quad \begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\varphi"] & & B \\ & \mathbf{1}. \arrow[ul, "u_A"] \arrow[ur, "u_B"'] & \end{tikzcd} \tag{5.6}$$

Definição 5.1.8. Sejam C e D duas coálgebras em $\mathcal{C}$. Diz-se que $\varphi : C \to D$ é um morfismo de coálgebras se os diagramas a seguir são comutativos:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\Delta_C"'] & D \arrow[d, "\Delta_D"] \\ C \otimes C \arrow[r, "\varphi \otimes \varphi"'] & D \otimes D \end{tikzcd} \quad \text{e} \quad \begin{tikzcd} C \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\varepsilon_C"'] & & D \arrow[dl, "\varepsilon_D"] \\ & \mathbf{1}. & \end{tikzcd} \tag{5.7}$$

Definição 5.1.9. Sejam B e C duas biálgebras em $\mathcal{C}$. Diz-se que $\varphi : B \to C$ é um morfismo de biálgebras em $\mathcal{C}$ se

(i) $\varphi : B^a \to C^a$ é morfismo de álgebras;

(ii) $\varphi : B^c \to C^c$ é morfismo de coálgebras.

Definição 5.1.10. Sejam H e J duas álgebras de Hopf em $\mathcal{C}$. Diz-se que $\varphi : H \to J$ é morfismo de álgebras de Hopf em $\mathcal{C}$ se φ é morfismo de biálgebras $\mathcal{C}$.

O leitor deve reparar que, na definição anterior, há mais estruturas atreladas as biálgebras H e J, mas o morfismo não demanda, explicitamente, a validade de alguma relação envolvendo as antípodas S_H e S_J. Todavia, a próxima proposição evidencia uma propriedade entre as antípodas.

Proposição 5.1.11. Sejam H e J duas álgebras de Hopf em $\mathcal{C}$ tais que $\varphi : H \to J$ seja um morfismo de álgebras de Hopf em $\mathcal{C}$. Sob tais considerações, S_H e S_J, as respectivas antípodas de H e J, são tais que $S_J \circ \varphi = \varphi \circ S_H$.

Demonstração. Sejam H e J duas álgebras de Hopf em $\mathcal{C}$, cujas respectivas antípodas são S_H e S_J, tais que $\varphi : H \to J$ seja um morfismo de álgebras de Hopf em $\mathcal{C}$. Assim,

$$S_J \circ \varphi, \varphi \circ S_H \in Hom_{\mathcal{C}}(H, J).$$

Dessa forma, é possível considerar o produto de convolução em $Hom_{\mathcal{C}}(H, J)$ tal que

$$(S_J \circ \varphi) * \varphi = m_J \circ ((S_J \circ \varphi) \otimes \varphi) \circ \Delta_H$$

e

$$\varphi * (\varphi \circ S_H) = m_J \circ (\varphi \otimes (S_J \circ \varphi)) \circ \Delta_H.$$

Por conseguinte, para $h \in H$,

$$\begin{aligned}
((S_J \circ \varphi) * \varphi)(h) &= \sum (S_J \circ \varphi)(h_1)\varphi(h_2) \\
&= \sum S_J(\varphi(h)_1)\varphi(h)_2 \\
&= \varepsilon_J(\varphi(h))1_J \\
&= \varepsilon_H(h)1_J \\
&= \varphi(\varepsilon_H(h)1_H) \\
&= \varphi\left(\sum h_1 S(h_2)\right) \\
&= \sum \varphi(h_1)\varphi(S(h_2)) \\
&= \sum \varphi(h_1)(\varphi \circ S_H)(h_2) \\
&= (\varphi * (\varphi \circ S_H))(h).
\end{aligned}$$

■

5.2 CATEGORIFICAÇÃO DE UM MÓDULO

Nesta seção, adotam-se convenções para reduzir a notação ao longo das definições e resultados apresentados. Em especial, as estruturas de álgebra, coálgebra e biálgebra em uma categoria monoidal $\mathcal{C}$ qualquer são atreladas, respectivamente, às letra A, C e B. Além disso, os morfismos m, u, Δ e ε estão devidamente identificados consoante seção anterior e, portanto, estarão aparentes apenas em diagramas e equações.

Definição 5.2.1. Seja A uma álgebra em $\mathcal{C}$. Diz-se que o par (P, σ) é um A-módulo à esquerda em $\mathcal{C}$ quando

(i) P é um objeto em $\mathcal{C}$;

(ii) $\sigma : A \otimes P \to P$ é morfismo em $\mathcal{C}$;

(iii) os seguintes diagramas são comutativos:

$$\begin{tikzcd}
 & (A \otimes A) \otimes P \arrow[dl, "a_{A,A,P}"'] \arrow[dr, "m \otimes id_P"] & \\
A \otimes (A \otimes P) \arrow[d, "id_A \otimes \sigma"'] & & A \otimes P \arrow[d, "\sigma"] \\
A \otimes P \arrow[rr, "\sigma"'] & & P
\end{tikzcd} \tag{5.8}$$

e

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \otimes P \arrow[rr, "u \otimes id_P"] \arrow[dr, "l_P"'] & & A \otimes P \arrow[dl, "\sigma"] \\
 & P. &
\end{tikzcd} \tag{5.9}$$

Observação 5.2.2. Usualmente, associado ao par (P, σ), diz-se que ${}_AP$ é A-módulo à esquerda em $\mathcal{C}$. No mais, é possível definir, simetricamente, P_A, um A-módulo à direita.

Exemplo 5.2.3. Em $\mathcal{C}$, toda álgebra é um módulo bilateral sobre si; afinal, trivialmente, considera-se $\sigma = m$.

Exemplo 5.2.4. Em $\mathcal{C}$, se X e A são objetos em $\mathcal{C}$ de modo que A seja uma álgebra, então $Y = A \otimes X$ tem estrutura de A-módulo à esquerda ao admitir

$$\sigma = (m \otimes id_X) \circ a^{-1}_{A,A,X} : A \otimes Y \to Y.$$

Realmente, Y é objeto em $\mathcal{C}$ e σ é morfismo em $\mathcal{C}$; logo, para $a, b, c \in A$ e $x \in X$,

$$\begin{aligned}\big(\sigma \circ (id_A \otimes \sigma) \circ a_{A,A,Y}\big)\,((a \otimes b) \otimes (c \otimes x)) &= (\sigma \circ (id_A \otimes \sigma))\,(a \otimes (b \otimes (c \otimes x)))\\ &= \sigma(a \otimes (bc \otimes x)))\\ &= abc \otimes x\\ &= \sigma(ab \otimes (c \otimes x))\\ &= (\sigma \circ (m \otimes id_Y))\,((a \otimes b) \otimes (c \otimes x)).\end{aligned}$$

Outrossim, como A é uma álgebra, segue, pelo Teorema 3.2.3 e pela Observação 3.1.3, que

$$\begin{aligned}\sigma \circ (u \otimes id_Y) &= \sigma \circ (u \otimes id_{A\otimes X})\\ &= \sigma \circ (u \otimes (id_A \otimes id_X))\\ &= (m \otimes id_X) \circ a^{-1}_{A,A,X} \circ (u \otimes (id_A \otimes id_X))\\ &= (m \otimes id_X) \circ ((u \otimes id_A) \otimes id_X) \circ a^{-1}_{\mathbf{1},A,X}\\ &= ((m \circ (u \otimes id_A)) \otimes id_X) \circ a^{-1}_{\mathbf{1},A,X}\\ &= (l_A \otimes id_X) \circ a^{-1}_{\mathbf{1},A,X}\\ &= l_{A\otimes X} = l_Y\end{aligned}$$

É interessante reparar que a comutatividade dos diagramas apresentados na última definição, com relação ao exemplo anterior, é dada de duas formas distintas. Em particular, repare que a compatibilidade entre a ação σ do módulo e a multiplicação m da álgebra foi dada a partir de cálculos envolvendo elementos do objeto. Enquanto que a compatibilidade entre σ e a unidade u da álgebra é dada exclusivamente pelo viés categórico de manipulação algébrica.

Proposição 5.2.5. Seja $X \in Obj(\mathcal{C})$. Sob tal consideração, X é um **1**-módulo à esquerda quando $\sigma = l_X$.

Demonstração. Em $\mathcal{C}$, seja X um objeto qualquer e considere $l_1 \otimes id_X$. Pelo Teorema 3.2.3 e pela Proposição 3.2.2,

$$a_{\mathbf{1},\mathbf{1},X} \circ (id_{\mathbf{1}} \otimes l_X) = a_{\mathbf{1},\mathbf{1},X} \circ l_{1\otimes X} = l_1 \otimes id_X;$$

logo, ao compor l_X à esquerda, segue que

$$l_X \circ (id_{\mathbf{1}} \otimes l_X) \circ a_{\mathbf{1},\mathbf{1},X} = l_X \circ (l_1 \otimes id_X).$$

Isto é, o diagrama (5.8) é comutativo. A comutatividade do diagrama (5.9) é trivial, uma vez que

$$l_X \circ (id_{\mathbf{1}} \otimes id_X) = l_X \circ id_{\mathbf{1} \otimes X} = l_X.$$

■

Observação 5.2.6. Analogamente, todo objeto X em $\mathcal{C}$ é um **1**-módulo à direita quando $\sigma = r_X$.

Com essas noções, é interessante tratar a respeito de comódulos sobre uma estrutura e, dada a utilização de módulos sobre álgebras, é natural pensar em comódulos sobre coálgebras em $\mathcal{C}$.

Definição 5.2.7. Seja C uma coálgebra em $\mathcal{C}$. Diz-se que o par (Q, η) é um C-comódulo à esquerda em $\mathcal{C}$ quando

(i) Q é um objeto em $\mathcal{C}$;

(ii) $\eta : Q \to C \otimes Q$ é morfismo em $\mathcal{C}$;

(iii) os seguintes diagramas são comutativos:

$$\begin{tikzcd} & Q \arrow[dl, "\eta"'] \arrow[dr, "\eta"] & \\ C \otimes Q \arrow[d, "\Delta \otimes id_Q"'] & & C \otimes Q \arrow[d, "id_C \otimes \eta"] \\ (C \otimes C) \otimes Q \arrow[rr, "a_{C,C,Q}"'] & & C \otimes (C \otimes Q) \end{tikzcd} \tag{5.10}$$

e

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[rr, "\eta"] & & C \otimes Q \arrow[dl, "\varepsilon \otimes id_Q"] \\ & \mathbf{1} \otimes Q. \arrow[ul, "l_Q"] & \end{tikzcd} \tag{5.11}$$

Observação 5.2.8. Usualmente, associado ao par (Q, η), diz-se que ${}_CQ$ é C-comódulo à esquerda em $\mathcal{C}$. Além disso, é possível definir, simetricamente, Q_C, um C-comódulo à direita.

Exemplo 5.2.9. Em $\mathcal{C}$, toda coálgebra é comódulo bilateral sobre si; afinal, trivialmente, considera-se $\eta = \Delta$.

Exemplo 5.2.10. Em $\mathcal{C}$, se X e C são objetos em $\mathcal{C}$ de modo que C seja uma coálgebra, então $Y = C \otimes X$ tem estrutura de C-comódulo à esquerda ao admitir

$$\eta = a_{C,C,X} \circ (\Delta \otimes id_X) : Y \to C \otimes Y.$$

Basta garantir a comutatividade dos diagramas; desta forma, para $c \otimes x \in Y$, repare que

$$\begin{aligned}
\left(a_{C,C,Y} \circ (\Delta \otimes id_Y) \circ \eta\right)(c \otimes x) &= \left(a_{C,C,Y} \circ (\Delta \otimes id_Y)\right)\left(\sum c_{(1)} \otimes \left(c_{(2)} \otimes x\right)\right) \\
&= a_{C,C,Y}\left(\sum \left(\left(c_{(1)}\right)_{(1)} \otimes \left(c_{(1)}\right)_{(2)}\right) \otimes \left(c_{(2)} \otimes x\right)\right) \\
&= \sum \left(c_{(1)}\right)_{(1)} \otimes \left(\left(c_{(1)}\right)_{(2)} \otimes \left(c_{(2)} \otimes x\right)\right) \\
&= \sum c_{(1)} \otimes \left(\left(c_{(2)}\right)_{(1)} \otimes \left(\left(c_{(2)}\right)_{(2)} \otimes x\right)\right) \\
&= (id_C \otimes \eta)\left(\sum c_{(1)} \otimes \left(c_{(2)} \otimes x\right)\right) \\
&= ((id_C \otimes \eta) \circ \eta)(c \otimes x).
\end{aligned}$$

Ademais, segue que

$$\begin{aligned}
\left(l_Q \circ (\varepsilon \otimes id_Y) \circ \eta\right)(c \otimes x) &= \left(l_Q \circ (\varepsilon \otimes id_Y)\right)\left(\sum c_{(1)} \otimes \left(c_{(2)} \otimes x\right)\right) \\
&= l_Q\left(\sum \varepsilon\left(c_{(1)}\right) \otimes \left(c_{(2)} \otimes x\right)\right) \\
&= c \otimes x \\
&= id_Y(c \otimes x).
\end{aligned}$$

Outrossim, é possível obter resultados duais para a Proposição 5.2.5 e a Observação 5.2.6. Além disso, dada a simplicidade de demonstração por ser análoga a apresentada anteriormente para A-módulos, evitar-se-á escrever ambas as demonstrações.

Proposição 5.2.11. Todo objeto X em $\mathcal{C}$ é um **1**-comódulo à esquerda quando $\eta = l_X^{-1}$ (à direita quando $\eta = r_X^{-1}$).

Resta tratar de módulos que envolvam ambas as noções de A-módulo e C-comódulo; logo, dadas as informações obtidas ao longo do texto, é possível definir um módulo de Hopf lateral.

Definição 5.2.12. Seja B uma biálgebra em $\mathcal{C}$. Diz-se que a terna (M, σ, η) é um B-módulo de Hopf à esquerda quando

(i) o par (M, σ) é um B-módulo à esquerda;

(ii) o par (M, η) é um B-comódulo à esquerda;

(iii) o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{tikzcd}
& B \otimes M \arrow[dl, "\Delta\otimes\eta"'] \arrow[dr, "\sigma"] & \\
B \otimes B \otimes B \otimes M \arrow[d, "id_B\otimes T\otimes id_M"'] & & M \arrow[d, "\eta"] \\
B \otimes B \otimes B \otimes M \arrow[rr, "m\otimes\sigma"'] & & B \otimes M.
\end{tikzcd} \tag{5.12}$$

Observação 5.2.13. Usualmente, associado à terna (M, σ, η), diz-se que ${}_BM$ é B-módulo de Hopf à esquerda em $\mathcal{C}$; no mais, é possível definir, simetricamente, M_B, um B-módulo de Hopf à direita, em $\mathcal{C}$.

Exemplo 5.2.14. Em $\mathcal{C}$, toda biálgebra é um B-módulo de Hopf bilateral com $\sigma = m$ e $\eta = \Delta$.

Exemplo 5.2.15. Em $\mathcal{C}$, todo objeto X é um **1**-módulo de Hopf à esquerda com $\sigma = l_X$ e $\eta = l_X^{-1}$ (à direita quando $\sigma = r_X$ e $\eta = r_X^{-1}$).

Exemplo 5.2.16. Em $\mathcal{C}$, se X e B são objetos em $\mathcal{C}$ de modo que B é uma biálgebra, então $Y = B \otimes X$ admite estrutura de B-módulo de Hopf à esquerda. De fato, basta considerar

$$\sigma = (m_B \otimes id_X) \circ a^{-1}_{B,B,X} : B \otimes Y \to Y \quad \text{e} \quad \eta = a_{B,B,X} \circ (\Delta_B \otimes id_X) : Y \to B \otimes Y$$

e garantir a comutatividade de (5.12). Logo, para $x \in X$ e $a, b, c \in B$,

$$\begin{aligned}
&((m_B \otimes \sigma) \circ (id_B \otimes T \otimes id_Y) \circ (\Delta \otimes \eta))\,(a \otimes (b \otimes x)) = \\
&= ((m_B \otimes \sigma) \circ (id_B \otimes T \otimes id_Y)) \left(\sum a_{(1)} \otimes a_{(2)} \otimes \left(b_{(1)} \otimes \left(b_{(2)} \otimes x\right)\right)\right) \\
&= (m_B \otimes \sigma) \left(\sum a_{(1)} \otimes b_{(1)} \otimes \left(a_{(2)} \otimes \left(b_{(2)} \otimes x\right)\right)\right) \\
&= \sum a_{(1)}b_{(1)} \otimes \left(a_{(2)}b_{(2)} \otimes x\right) \\
&= \sum (ab)_{(1)} \otimes \left((ab)_{(2)} \otimes x\right) \\
&= \eta(ab \otimes x) \\
&= (\eta \circ \sigma)(a \otimes (b \otimes x)).
\end{aligned}$$

Por fim, vale a pena, pelo menos, definir os morfismos entre às estruturas tratadas nesta seção de modo a estimular o leitor no tocante à possibilidade de construir categorias com tais aparatos.

Definição 5.2.17. Sejam A uma álgebra, P e P' dois A-módulos à esquerda em $\mathcal{C}$. Diz-se que $\varphi : P \to P'$ é um morfismo de A-módulos à esquerda se

(i) φ for um morfismo em $\mathcal{C}$;

(ii) o diagrama, à seguir, é comutativo:

$$\begin{tikzcd} A \otimes P \arrow[r, "id_A \otimes \varphi"] \arrow[d, "\sigma_P"'] & A \otimes P' \arrow[d, "\sigma_{P'}"] \\ P \arrow[r, "\varphi"'] & P'. \end{tikzcd} \tag{5.13}$$

Definição 5.2.18. Sejam C uma coálgebra, Q e Q' dois C-comódulos à esquerda em $\mathcal{C}$. Diz-se que $\varphi : Q \to Q'$ é um morfismo de C-comódulos à esquerda se

(i) φ for um morfismo em $\mathcal{C}$;

(ii) o diagrama, à seguir, é comutativo:

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\eta_Q"'] & Q' \arrow[d, "\eta_{Q'}"] \\ C \otimes Q \arrow[r, "id_C \otimes \varphi"'] & C \otimes Q'. \end{tikzcd} \tag{5.14}$$

Definição 5.2.19. Sejam B uma biálgebra, M e M' dois B-módulos de Hopf à esquerda em $\mathcal{C}$. Diz-se que $\varphi : M \to M'$ é um morfismo de módulos de Hopf à esquerda se

(i) φ^a for um morfismo de B^a-módulos à esquerda;

(ii) φ^c for um morfismo de B^c-comódulos à esquerda.

Observação 5.2.20. É possível definir, simetricamente, morfismos à direita para as três definições anteriores.

REFERÊNCIAS

BORCEUX, F. **Handbook of Categorical Algebra 1: Basic Category Theory**. 2. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1994. v. 1.

BRZEZINSKI, T; WISBAUER, R. **Corings and Comodules**. Cambridge: Cambridge University Press, 2003.

DASCALESCU, S; NASTASESCU, C; RAIANU, S. **Hopf Algebras: An Introduction**. Nova York: Marcel Dekker, 2001.

DUMMIT, D. S; FOOTE, R. M. **Abstract algebra**. 3. ed. Hoboken: John Wiley e Sons, 2003.

ETINGOF, P. I; GELAKI, S; NIKSHYCH, D.; OSTRIK, V. **Tensor Categories**. Providence: American Mathematical Society, 2015. v. 205.

JACOBSON, N. **Basic Algebra I**. 2. ed. Nova York: W. H. Freeman e Company, 1985.

JACOBSON, N. **Basic Algebra II**. 2. ed. Nova York: W. H. Freeman e Company, 1989.

MACLANE, S. **Categories for the Working Mathematician**. 2. ed. Londres: Springer - Verlag, 1970. v. 39.

MOMBELLI, J. M. **Una introducción a las categorías tensoriales y sus representaciones**. [*S.l.*: *s.n.*]. Notas de aula. Acesso em 04 de dezembro de 2022. Disponível em: <http://www.famaf.unc.edu.ar/~mombelli/categorias-tensoriales3.pdf>.

PAREIGIS, B. **Categories and Functors**. 1. ed. Nova York: Academic Press, 1970.

ROTMAN, J. **Advanced Modern Algebra: Graduate Studies in Mathematics**. 2. ed. Providence: American Mathematical Society, 2003. v. 114.

Apêndices

APÊNDICE A – PRODUTO TENSORIAL ENTRE ESPAÇOS VETORIAIS

Um comentário prévio às futuras exposições é fundamentado na necessidade de atentar-se ao produto cartesiano de conjuntos, o qual é denotado por × ao invés do símbolo usual da teoria de conjuntos.

Definição A.0.1. Sejam $\mathbb{K}$ um corpo, bem como, V e U dois $\mathbb{K}$-espaços vetoriais. Um produto tensorial entre V e U é um par (T, φ) em que

(i) T é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial;

(ii) $\varphi : V \times U \to T$ é aplicação bilinear;

(iii) Para qualquer aplicação bilinear $f : V \times U \to W$, existe única aplicação linear $\psi : T \to W$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} V \times U \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "f"'] & & T \arrow[dl, "\psi"] \\ & W & \end{tikzcd}$$

seja comutativo.

Em especial, descreve-se T por $V \otimes_{\mathbb{K}} U$; contudo, a fim de simplificar a notação, adote $V \otimes U$. Além disso, é interessante reparar que o item (iii) é uma propriedade universal e, consequentemente, obtém-se um resultado usual.

Proposição A.0.2. O produto tensorial entre dois espaços vetoriais, caso exista, é único a menos de isomorfismo.

É importante reparar que sempre existe o produto tensorial entre dois espaços vetoriais sobre um mesmo corpo. Afinal, considere o espaço vetorial gerado por $V \times U$, isto é,

$$\langle V \times U \rangle = \mathbb{K}^{(V \times U)} = \bigoplus_{(v,u) \in V \times U} \mathbb{K} e_{(v,u)}.$$

Seja I o subespaço de $\langle V \times U \rangle$ gerado por elementos da forma

$$e_{(v_1+v_2,u)} - e_{(v_1,u)} - e_{(v_2,u)}, \quad e_{(v,u_1+u_2)} - e_{(v,u_1)} - e_{(v,u_2)},$$

bem como,

$$e_{(\lambda v,u)} - \lambda e_{(v,u)} \quad \text{e} \quad e_{(v,\lambda u)} - \lambda e_{(v,u)}.$$

Assim, denote $V \otimes U$ por $\langle V \times U \rangle /_{I}$ e $v \otimes u$ por $[e_{(v,u)}]$; em seguida, defina

$$\begin{aligned} \varphi : V \times U &\to V \otimes U \\ (v, u) &\mapsto v \otimes u \end{aligned}$$

e repare que φ é bilinear. Resta garantir a propriedade universal, logo, tome uma função $f : V \times U \to W$ bilinear; defina $\psi : V \otimes U \to W$ por

$$\psi\left(\sum_{i,j} \alpha_{ij} v_i \otimes u_j\right) = \sum_{i,j} \alpha_{ij} f(v_i, u_j).$$

Mostrar-se-á, apenas, que ψ está bem-definida, ou seja, espera-se que o leitor prove que ψ é a única aplicação linear tal que $\psi \circ \varphi = f$. Dessa forma, seja $\sum_{i,j} \alpha_{ij} v_i \otimes u_j = 0 \in V \otimes U$; logo,

$$\sum_{i,j} \alpha_{ij} v_i \otimes u_j = \sum_{\lambda \in \Lambda} [x_\lambda]$$

com $x_\lambda \in I$, para todo $\lambda \in \Lambda$. Com isso, basta mostrar que $\psi([x]) = 0$ para todo x gerador de I; para $x = e_{(v_1+v_2,u)} - e_{(v_1,u)} - e_{(v_2,u)}$, tem-se que

$$\begin{aligned}\psi([x]) &= f(v_1 + v_2, u) - f(v_1, u) - f(v_2, u) \\ &= f(v_1, u) + f(v_2, u) - f(v_1, u) - f(v_2, u) = 0.\end{aligned}$$

Para $x' = e_{\lambda v,u)} - \lambda e_{(v,u)}$, tem-se que

$$\psi([x']) = f(\lambda v, u) - \lambda f(v, u) = \lambda f(v, u) - \lambda f(v, u) = 0.$$

Em particular, os geradores $e_{(v,u_1+u_2)} - e_{(v,u_1)} - e_{(v,u_2)}$ e $e_{(v,\lambda u)} - \lambda e_{(v,u)}$ seguem analogamente.

Os próximos resultados são importantes a fim de evitar algumas verificações ao longo do texto principal.

Proposição A.0.3. Sejam V_1, V_2, U_1 e U_2 quatro espaços vetoriais sobre um corpo, bem como, $f : V_1 \to V_2$ e $g : U_1 \to U_2$ duas aplicações lineares. Sob tais considerações, existe única aplicação linear

$$\begin{aligned} f \otimes g : V_1 \otimes U_1 &\to V_2 \otimes U_2 \\ v \otimes u\ &\mapsto (f \otimes g)(v \otimes u) := f(v) \otimes g(w). \end{aligned}$$

A demonstração desse resultado é dada ao definir $T_{f,g} : V_1 \times U_1 \to V_2 \otimes U_2$ por $T_{f,g}(v, u) = f(v) \otimes g(u)$ e, em seguida, utiliza-se a propriedade universal do produto tensorial de $V_1 \otimes U_1$.

Proposição A.0.4. Sejam V, U e W três espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$. Sob tais considerações,

(i) $(V \otimes U) \otimes W \cong V \otimes (U \otimes W)$;

(ii) $U \otimes V \cong V \otimes U$;

(iii) $\mathbb{K} \otimes V \cong V$;

(iv) $Hom_{Vect_{\mathbb{K}}}(V \otimes U, W) \cong Hom_{Vect_{\mathbb{K}}}(V, Hom_{Vect_{\mathbb{K}}}(U, W))$;

(v) Existe monomorfismo[1] $f : U \otimes V^* \to Hom_{Vect_{\mathbb{K}}}(V, U)$ e, caso a dimensão de V seja finita, então f é isomorfismo;

(vi) Existe monomorfismo $g : U^* \otimes V^* \to (V \otimes U)^*$ e, caso as dimensões de V e U sejam finitas, então g é isomorfismo;

A demonstração de cada afirmação é dada a partir da propriedade universal do produto tensorial e, em seguida, é construído o morfismo inverso. Em particular, mostrar-se-á o processo apenas para os itens (i) e (iii). Para aquele, defina, a priori,

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{V,U,W} : \quad (V \otimes U) \times W &\to \quad V \otimes (U \otimes W) \\ \left(\sum v_i \otimes u_i, w\right) &\mapsto \sum v_i \otimes (u_i \otimes w), \end{aligned}$$

que, pela propriedade universal, garante a existência de um único $a_{V,U,W}$ dado por

$$\begin{aligned} a_{V,U,W} : \quad (V \otimes U) \otimes W \quad &\to \quad V \otimes (U \otimes W) \\ \sum (v_i \otimes u_i) \otimes w_i &\mapsto \sum v_i \otimes (u_i \otimes w_i). \end{aligned}$$

A posteriori, defina

$$\begin{aligned} \tilde{b}_{V,U,W} : \quad V \times (U \otimes W) &\to \quad (V \otimes U) \otimes W \\ \left(v, \sum u_i \otimes w_i\right) &\mapsto \sum (v \otimes u_i) \otimes w_i, \end{aligned}$$

que, pela propriedade universal, garante a existência de um único $b_{V,U,W}$ dado por

$$\begin{aligned} b_{V,U,W} : \quad V \otimes (U \otimes W) \quad &\to \quad (V \otimes U) \otimes W \\ \sum v_i \otimes (u_i \otimes w_i) &\mapsto \sum (v_i \otimes u_i) \otimes w_i, \end{aligned}$$

Para o outro item, basta notar que

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_V : \mathbb{K} \times V &\to V \\ (\alpha, v) &\mapsto \alpha v \end{aligned}$$

[1] Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. O morfismo $f : X \to Y$ em $\mathcal{C}$ é dito um monomorfismo se, para quaisquer morfismos $g, h : Z \to X$ em $\mathcal{C}$ tais que $f \circ g = f \circ h$, então $g = h$.

é bilinear e, assim, existe único λ_V dado por

$$\begin{aligned}\lambda_V : \mathbb{K} \otimes V &\to V\\ \alpha \otimes v &\mapsto \alpha v\end{aligned}$$

com inversa dada por

$$\begin{aligned}\lambda_V^{-1} : V &\to \mathbb{K} \otimes V\\ v &\mapsto 1 \otimes v.\end{aligned}$$

Anexos

ANEXO A – NOTAÇÃO DE SWEEDLER

Dado $c \in C$, tem-se que

$$\begin{aligned}((id_C \otimes \Delta) \circ \Delta)(c) &= \overbrace{(id_C \otimes \Delta)}^{\mathbb{K}-\text{linear}} \left(\sum_{i=1}^{n} c_i \otimes c'_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (id_C \otimes \Delta)(c_i \otimes c'_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} c_i \otimes \Delta(c'_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} c_i \otimes \left(\sum_{j=1}^{m} d_{ij} \otimes d'_{ij} \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_i \otimes (d_{ij} \otimes d'_{ij}),\end{aligned}$$

assim, a presença de apenas dois $\Delta' s$ no cálculo implica na existência de somatório duplo. O problema da alta quantidade de índices surge ao realizar sucessivos cálculos com o Δ. Com o objeto de evitar tal problema de notação carregada, é utilizada uma notação muito útil e conhecida como Notação de Sweedler.

Defina, recorrentemente, a sequência de funções $(\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ por

$$\Delta_1 = \Delta : C \to C \otimes C \quad \text{e} \quad \Delta_n : C \to C \otimes \cdots \otimes C \ \ (n+1 \text{ vezes}),$$

em que $n \in \mathbb{N}$, a forma recursiva é definida por $\Delta_n = (\Delta \otimes id^{n-1}) \circ \Delta_{n-1}$ de modo que $id^{n-1} = id_C \otimes \cdots \otimes id_C$ $(n-1$ vezes). Em particular $\Delta_2 = (\Delta \otimes id_C) \circ \Delta$, em que $\Delta_2 : C \to C \otimes C \otimes C$.

A fórmula recursiva dada acima, para $n \geq 2$, pode ser desenvolvida de várias formas, como mostra a proposição seguinte. Isso seria o dual de associar de várias maneiras um tensor $A \otimes \cdots \otimes A$ (n vezes), em que A é uma álgebra.

Proposição A.0.1. (DASCALESCU; NASTASESCU; RAIANU, 2001) - Proposição 1.1.7. Seja (C, Δ, ε) uma coálgebra. Então, para todo $n \geq 2$ e todo $p \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$, vale a igualdade dada por

$$\Delta_n = (id^p \otimes \Delta \otimes id^{n-1-p}) \circ \Delta_{n-1}.$$

Para $n = 2$, note que $(id_C \otimes \Delta) \circ \Delta = \Delta_2 = (\Delta \otimes id_C) \circ \Delta$, isso é exatamente a coassociatividade. Seja $c \in C$, denote

$$\Delta(c) = \sum c_1 \otimes c_2.$$

No caso geral, isto é, para $n \in \mathbb{N}$, escreve-se

$$\Delta_n(c) = \sum c_1 \otimes c_2 \otimes \cdots \otimes c_{n+1}.$$

Logo, seguem as identidades

$$\begin{aligned}((id_C \otimes \Delta) \circ \Delta)(c) &= (id_C \otimes \Delta)\left(\sum c_1 \otimes c_2\right) \\ &= \sum c_1 \otimes \Delta(c_2) \\ &= \sum c_1 \otimes \left(\sum c_{2_1} \otimes c_{2_2}\right) \\ &= \sum c_1 \otimes c_{2_1} \otimes c_{2_2}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}((\Delta \otimes id_C) \circ \Delta)(c) &= (\Delta \otimes id_C)\left(\sum c_1 \otimes c_2\right) \\ &= \sum \Delta(c_1) \otimes c_2 \\ &= \sum \left(\sum c_{1_1} \otimes c_{1_2}\right) \otimes c_2 \\ &= \sum c_{1_1} \otimes c_{1_2} \otimes c_2.\end{aligned}$$

Pela coassociatividade, infere-se que

$$\sum c_1 \otimes c_{2_1} \otimes c_{2_2} = \sum c_{1_1} \otimes c_{1_2} \otimes c_2 = \sum c_1 \otimes c_2 \otimes c_3.$$

Ademais, pela comutatividade do segundo diagrama, tem-se que $(id_C \otimes \varepsilon) \circ \Delta = \theta$. Logo, ao compor γ à esquerda, obtém-se $\gamma \circ (id_C \otimes \varepsilon) \circ \Delta = \gamma \circ \theta = id_C$. Assim, para todo $c \in C$, temos

$$\begin{aligned}c = id_C(c) &= (\gamma \circ (id_C \otimes \varepsilon) \circ \Delta)(c) \\ &= (\gamma \circ (id_C \otimes \varepsilon))\left(\sum c_1 \otimes c_2\right) \\ &= \gamma\left(\sum c_1 \otimes \varepsilon(c_2)\right) \\ &= \sum \gamma(c_1 \otimes \varepsilon(c_2)) \\ &= \sum c_1 \varepsilon(c_2).\end{aligned}$$

Portanto, $c = \sum \varepsilon(c_2)c_1$. Ao obter a comutatividade do outro lado do segundo diagrama, tem-se, analogamente, que $c = \sum \varepsilon(c_1)c_2$. A propriedade dada por

$$\sum \varepsilon(c_2)c_1 = c = \sum \varepsilon(c_1)c_2$$

é denominada propriedade da counidade.