

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
CAMPUS FLORIANÓPOLIS

MARCELO HEINZ

UM ESTUDO GEOMÉTRICO DO FIBRADO DE HOPF

FLORIANÓPOLIS  
2022

MARCELO HEINZ

## UM ESTUDO GEOMÉTRICO DO FIBRADO DE HOPF

**Trabalho de Conclusão de Curso submetido à Universidade Federal de Santa Catarina, como requisito necessário para obtenção do grau de licenciado em Matemática.**

**Orientadora: Dra. Marianna Ravara Vago**

Florianópolis, 15 dezembro de 2022

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

MARCELO HEINZ

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi julgado adequado para a obtenção do título de Licenciado em Matemática, sendo aprovado em sua forma final pelo Curso de Matemática.

Florianópolis, 15 de dezembro de 2022.



---

Prof<sup>a</sup>. Silvia Martini de Holanda, Dr.<sup>a</sup>  
Coordenadora do Curso de Matemática

**Banca Examinadora**



---

Prof<sup>a</sup> Marianna Ravara Vago, Dr.<sup>a</sup>  
Orientadora  
Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC



---

Prof<sup>a</sup>. Camila Aparecida Benedito Rodrigues de Lima, Dr.<sup>a</sup>  
Avaliadora  
Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC



---

Prof. Francisco Carlos Caramello Junior, Dr.  
Avaliador  
Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,  
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Heinz, Marcelo

Um Estudo Geométrico do Fibrado de Hopf / Marcelo Heinz  
; orientadora, Marianna Ravara Vago, 2022.  
47 p.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) -  
Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências  
Físicas e Matemáticas, Graduação em Matemática,  
Florianópolis, 2022.

Inclui referências.

1. Matemática. 2. Fibrado de Hopf. 3. Esferas. 4.  
Projeção Estereográfica. I. Ravara Vago, Marianna. II.  
Universidade Federal de Santa Catarina. Graduação em  
Matemática. III. Título.

## Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus, que foi abrindo as portas e me direcionando durante todo o percurso da graduação, e colocou pessoas incríveis que me apoiam e me apoiaram durante todo o percurso.

Agradeço, aos meus pais, Nelso Heinz e Isabel Hasckel Heinz, e minha irmã, Márcia Heinz, que sempre foram e serão meu pilar que me fortalece em momentos difíceis.

Agradeço também as amizades adquiridas ao longo do curso, onde compartilhamos risadas e prestamos socorros. Aos amigos: Bruna Rayssa, Mateus Alves Macedo, Victor Pierri, Silvana Reinhardt Antunes, Vanessa de Andrade, Fábio Junior Huntemam, Tânia Mara, Filipe Hernandes, Lara Lopes de Miranda.

Em particular, quero agradecer minha amiga Valéria Martins Silveira de Andrade. Obrigado por me ajudar nos momentos mais difíceis. Muito obrigado por todas as risadas, pelos conselhos úteis, bem como, pelas palavras motivacionais e puxões de orelha. E mais recentemente, a lendária frase para algumas disciplinas: “você tem que parar de arrumar essas confusões, meu! Não dá pra ir não!”.

Agradeço ainda aos Mestres, que muito para mim representam. Aos professores José Luiz Rosas Pinho, Jónatan Herrera Fernández, Sônia Maria Silva Corrêa de Souza Cruz, Rosilene Beatriz Machado, Paulinho Demeneghi, Melissa Weber Mendonça, Sílvia Martíni de Holanda, Rodrigo Pereira Rocha, Andreia Zanella, Camila Aparecida Benedito Rodrigues de Lima. Obrigado pelos seus ensinamentos e apoios.

Quero agradecer especialmente a professora Marianna por aceitar o desafio de me orientar. Obrigado Mestre por todo o conhecimento, todo o tempo dedicado, e paciência em me explicar tudo nos mínimos detalhe ou melhor desenhando tudo.

Por último, mas não menos importante, agradeço à banca por aceitar o convite para fazer parte deste trabalho.

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Conceitos Preliminares</b>	<b>9</b>
1.1	Elementos de Variável Complexa . . . . .	9
1.2	Elementos de Geometria Diferencial . . . . .	15
1.3	Esferas . . . . .	23
1.4	Projeção estereográfica . . . . .	25
<b>2</b>	<b>O Fibrado de Hopf</b>	<b>33</b>
2.1	Definição de fibrado . . . . .	33
2.2	Fibrado de Hopf via esfera de Riemann . . . . .	35

## Lista de Figuras

1	Soma dos números $z_1$ e $z_2$ . . . . .	11
2	Pontos $z$ e $\bar{z}$ . . . . .	12
3	Representação polar do produto de dois números complexos . . . . .	15
4	Carta $\varphi_1$ . . . . .	16
5	Carta $\varphi_2$ . . . . .	16
6	União das imagens de $\varphi_1$ e $\varphi_2$ . . . . .	16
7	Carta $\varphi_3$ . . . . .	17
8	Carta $\varphi_4$ . . . . .	17
9	União das imagens de $\varphi_3$ e $\varphi_4$ . . . . .	18
10	União das imagens de $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ e $\varphi_4$ . . . . .	18
11	Carta $\varphi_5$ . . . . .	19
12	Carta $\varphi_6$ . . . . .	19
13	Carta $\psi_1$ . . . . .	20
14	Carta $\psi_2$ . . . . .	20
15	Construção da faixa de Möbius (figura retirada de [2]) . . . . .	21
16	Construção do toro (figura retirada de [2]) . . . . .	22
17	A 0–esfera . . . . .	23
18	A 1–esfera . . . . .	23
19	A 2–esfera . . . . .	24
20	Projeção de $\mathbb{S}^1$ em $\mathbb{R}$ . . . . .	25
21	Projeção do arco direito do hemisfério superior . . . . .	27
22	Projeção do arco esquerdo do hemisfério superior . . . . .	27
23	Projeção do hemisfério inferior . . . . .	27
24	Imagem dos paralelos da esfera pela projeção estereográfica . . . . .	29
25	Imagem dos meridianos da esfera pela projeção estereográfica. . . . .	29
26	Fibrado trivial: cilindro . . . . .	33
27	Fibrado trivial: cilindro . . . . .	34
28	Fibrado trivial: toro . . . . .	34
29	Fibrado não trivial: faixa de Möbius . . . . .	34
30	Representação de $\mathbb{S}^3$ em $\mathbb{R}^2$ . . . . .	35
31	Representação de $L_a$ e $\mathbb{S}^3$ . . . . .	36
32	Representação da interseção de $L_a$ e $\mathbb{S}^3$ . . . . .	39
33	Representação da interseção de $L_\infty$ e $\mathbb{S}^3$ . . . . .	39
34	Representação da fibra $f^{-1}(0)$ . . . . .	40
35	Representação da fibra $f^{-1}(\infty)$ . . . . .	40
36	Pontos $v, q$ e $-q$ sobre a mesma fibra . . . . .	41
37	Fibras linkadas . . . . .	42
38	Fibras de quatro pontos de $\mathbb{S}^2$ . . . . .	42
39	Fibras de pontos sobre um paralelo de $\mathbb{S}^2$ . . . . .	43
40	Fibras de pontos sobre um círculo em $\mathbb{S}^2$ . . . . .	43
41	Fibras de pontos sobre o equador de $\mathbb{S}^2$ . . . . .	44
42	Fibras de pontos sobre uma curva em $\mathbb{S}^2$ . . . . .	44

## Resumo

O objetivo deste trabalho é visualizar a esfera tridimensional  $\mathbb{S}^3$  no espaço ambiente  $\mathbb{R}^3$ . Fazemos isto de uma maneira geométrica, utilizando a projeção estereográfica e explorando o fibrado de Hopf. No primeiro capítulo fazemos um estudo preliminar de tópicos de variável complexa e geometria diferencial; e no segundo capítulo apresentamos a construção do fibrado de Hopf.

**Palavras chave:** fibrado de Hopf, esferas, projeção estereográfica.

## Abstract

The aim of this work is to visualize the three-dimensional sphere  $\mathbb{S}^3$  in ambient space  $\mathbb{R}^3$ . We do this from a geometric point of view, using stereographic projection and exploring the Hopf fibration. In the first chapter we do a preliminary study of topics in complex variable theory and differential geometry; and in the second chapter we present the construction of the Hopf fibration.

**Keywords:** Hopf fibration, spheres, stereographic projection.

# Introdução

A visualização geométrica é um instrumento importante para a compreensão de conceitos matemáticos. Se por um lado as representações analíticas são convenientes para demonstrações e análises de propriedades algébricas, por outro, as visualizações são essenciais para a exploração intuitiva e formulação de hipóteses. Objetos matemáticos tais como a esfera tridimensional  $\mathbb{S}^3$  (uma superfície inicialmente imersa em  $\mathbb{R}^4$ ) podem estar além da imaginação e compreensão que temos em  $\mathbb{R}^3$ , mas veremos que isto não é um obstáculo para sua descrição e estudo.

Embora muitos objetos matemáticos de dimensões superiores sejam generalizações naturais de objetos de dimensões inferiores, o fibrado de Hopf não atende esta situação. De maneira resumida, um fibrado é uma estrutura composta por espaço total, espaço base, fibra e projeção. A ideia é que para cada ponto da base associa-se uma fibra; a união de todas estas fibras dá o espaço total, e a projeção é o mapa que relaciona a fibra com o ponto do espaço base.

O fibrado de Hopf, apresentado pelo matemático alemão Heinz Hopf em meados da década de 1930, consiste em um mapa entre duas esferas de dimensões diferentes, sendo  $\mathbb{S}^3$  o espaço total e  $\mathbb{S}^2$  o espaço base, e fibra  $\mathbb{S}^1$  (também, em si, uma esfera). É um dos primeiros exemplos de um fibrado não trivial. Em meados dos anos 1960, o matemático britânico John Frank Adams mostra que existem apenas quatro fibrados da mesma família do apresentado por Hopf (isto é, para os quais os espaços total e base, e a fibra, são esferas).

Neste trabalho, queremos visualizar a esfera tridimensional  $\mathbb{S}^3$  não em  $\mathbb{R}^4$ , onde ela originalmente “vive”, mas em  $\mathbb{R}^3$ , onde vivemos *nós*. Faremos isto de uma maneira geométrica, explorando o fibrado de Hopf. Para tanto, é preciso primeiro fazer uma revisão de tópicos de variável complexa e geometria diferencial, o que fazemos no Capítulo 1. É importante aqui destacar que a função responsável por trazer a esfera tridimensional a  $\mathbb{R}^3$  é a projeção estereográfica, que descrevemos com detalhe. Para esta parte, utilizamos como referência os livros “Variáveis Complexas e Aplicações”, de James W. Brown e Ruel V. Churchill [1], “Cálculo em uma Variável Complexa”, de Márcio Gomes Soares [3] e “Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies”, de Manfredo Perdigão do Carmo [2]. Após este estudo preliminar, dedicamos o Capítulo 2 à apresentação do fibrado de Hopf e suas propriedades. Para esta parte nos baseamos majoritariamente no texto “A Young Person’s Guide to the Hopf Fibration”, de Zachary Treisman [4].

# 1 Conceitos Preliminares

## 1.1 Elementos de Variável Complexa

Nosso objetivo nesta seção é definir o conjunto dos *números complexos* e exibir suas propriedades básicas. Utilizamos como referência os livros [1] e [3]. Começamos introduzindo um número complexo  $z$  como sendo um par ordenado  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ . O número  $a$  é chamado *parte real* de  $z$ ,  $a = \operatorname{Re}(z)$  e o número  $b$ , a *parte imaginária*,  $b = \operatorname{Im}(z)$ .

Um número real  $a \in \mathbb{R}$  se identifica com o par  $(a, 0) \in \mathbb{R}^2$ ; desta forma, o conjunto dos números complexos contém o conjunto dos números reais. Veja que os números reais estão todos colocados sobre o eixo  $x$  de  $\mathbb{R}^2$ . Um número complexo da forma  $(0, b)$ , com  $b \neq 0$ , será chamado de *imaginário puro*; veja que estão todos dispostos sobre o eixo  $y$  de  $\mathbb{R}^2$ . Desta maneira, faz sentido chamar o eixo  $x$  de *eixo real*, e o eixo  $y$  de *eixo imaginário*.

Podemos introduzir uma primeira operação entre números complexos: se  $z_1 = (a_1, b_1)$  e  $z_2 = (a_2, b_2)$ , definimos

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2, b_1 + b_2) . \quad (1)$$

Isto é, somamos as partes reais, e as partes imaginárias de  $z_1$  e  $z_2$ . As seguintes propriedades seguem da definição e de propriedades dos números reais:

1.  $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$  (associatividade);
2.  $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$  (comutatividade);
3.  $z_1 + (0, 0) = (0, 0) + z_1 = z_1$  (existência de elemento neutro).

Observe que o elemento neutro da soma de números reais é também o elemento neutro da soma de números complexos:  $0 = (0, 0)$ ; e, se  $z_1, z_2$  são números reais, então  $b_1 = b_2 = 0$  e  $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2, 0)$ ; ou seja, quando restrita aos números reais, a soma de números complexos corresponde à soma de números reais. Portanto podemos concluir que a operação “soma de números complexos” é uma extensão da operação “soma de números reais”. Além disso, definindo  $-z_1 = (-a_1, -b_1)$ , obtemos uma nova propriedade:

4.  $z_1 + (-z_1) = (-z_1) + z_1 = 0$  (existência de inverso aditivo).

A propriedade 4 nos apresenta uma nova operação, derivada da soma, que chamaremos *subtração* e definimos como segue: dados  $z_1, z_2$  números complexos,  $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) = (a_1 - a_2, b_1 - b_2)$ .

A segunda operação, o produto, é um pouco mais elaborada:

$$z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1) . \quad (2)$$

Vejamos porque o produto de números complexos tem esta forma. Uma outra maneira de introduzir/definir um número complexo  $z$  é dizer que  $z$  corresponde à matriz  $2 \times 2$  com entradas reais dada por

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} .$$

Desta forma, a soma de dois números complexos é obtida como a soma de matrizes:

$$z_1 + z_2 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ -(b_1 + b_2) & a_1 + a_2 \end{pmatrix} .$$

Observe que a soma de números complexos vistos como matrizes é compatível com a soma de números complexos vistos como pares ordenados, que havíamos definido em (1). Inspirados por isto, de maneira análoga definimos o produto de números complexos utilizando o produto de matrizes:

$$z_1 \cdot z_2 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1a_2 - b_1b_2 & a_1b_2 + a_2b_1 \\ -(a_1b_2 + a_2b_1) & a_1a_2 - b_1b_2 \end{pmatrix} .$$

Portanto, para que as duas definições de produto de números complexos sejam compatíveis, é necessário definir o produto como fizemos na equação (2).

Obtemos assim que as duas interpretações de um número complexo, par ordenado e matriz, coincidem na definição das operações soma e produto. Cada uma delas tem sua importância: se por um lado herdamos o produto de matrizes de forma natural, de modo que a interpretação matriz tem importância algébrica, por outro veremos em breve que a interpretação par ordenado tem importância geométrica na hora de “desenhar” os números complexos.

Da definição e das propriedades dos números reais, valem:

5.  $z_1(z_2z_3) = (z_1z_2)z_3$  (associatividade);
6.  $z_1z_2 = z_2z_1$  (comutatividade);
7.  $z_1 \cdot (1, 0) = (1, 0) \cdot z_1 = z_1$  (existência de elemento neutro).

Veja que se  $z_1, z_2$  são números reais,  $b_1 = b_2 = 0$  e então  $z_1z_2 = (a_1a_2, 0)$ ; além disso, o elemento neutro do produto complexo,  $(1, 0)$ , corresponde ao elemento neutro do produto real, o número 1. Assim, como anteriormente, concluímos que o produto complexo é uma extensão do produto real.

Agora, se  $z_1 \neq 0$ , podemos encontrar um número complexo  $w_1$  tal que  $z_1w_1 = (1, 0) = 1$ ; de fato, tome  $w_1 = \left( \frac{a_1}{a_1^2 + b_1^2}, \frac{-b_1}{a_1^2 + b_1^2} \right)$ . Chamamos  $w_1$  de *inverso multiplicativo* de  $z_1$  e o denotamos  $\frac{1}{z_1}$ , ou  $z_1^{-1}$ . Com isto obtemos mais uma propriedade:

8. se  $z_1 \neq 0$ ,  $z_1 \cdot \frac{1}{z_1} = \frac{1}{z_1} \cdot z_1 = 1$  (existência de inverso multiplicativo).

Como antes, ganhamos mais uma operação derivada do produto, que chamaremos *quociente*: dados números complexos  $z_1, z_2$ , com  $z_2 \neq 0$ , definimos  $\frac{z_1}{z_2} = z_1z_2^{-1}$ .

A última propriedade relaciona as duas operações:

9.  $z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$  (distributiva).

Considere agora o número complexo  $(0, 1)$ . Veja que

$$(0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) ;$$

ou seja, encontramos um número (imaginário puro) cujo quadrado é o número real  $-1$ . Devido à importância desta descoberta, daremos um símbolo especial a este número:

$$i = (0, 1) .$$

Com isso, acabamos de mostrar que  $i^2 = -1$ . Consequentemente, se temos um número imaginário puro  $(0, b)$ , podemos escrevê-lo  $(0, b) = (b, 0)(0, 1) = bi$ , onde  $b$  é um número real. Agora, como

$$z = (a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0)(0, 1) ,$$

faz sentido escrever um número complexo  $z$  na forma

$$z = a + bi \text{ onde } a, b \in \mathbb{R} \text{ e } i^2 = -1 ;$$

daqui para frente, escreveremos os números complexos desta maneira. Reescrevemos as operações soma e produto como segue:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i ;$$

$$z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i .$$

Agora vejamos a interpretação geométrica de um número complexo. Como  $z$  foi associado inicialmente ao par ordenado  $(a, b)$  em  $\mathbb{R}^2$ , desenhamos o número complexo  $z = a + bi$  como o ponto  $(a, b)$ , e passamos a nos referir a  $\mathbb{R}^2$  munido das operações de soma e produto como o conjunto dos números complexos, e o denotamos  $\mathbb{C}$ . Na realidade, como mostramos que cada número complexo não nulo possui inverso multiplicativo, nos referimos a  $\mathbb{C}$  como o *corpo dos números complexos*.

Muitas vezes é útil pensar em um número complexo como um vetor que parte da origem  $(0, 0)$  e termina no ponto  $(a, b)$ ; isto auxilia a visualizar as operações, como veremos no exemplo a seguir.

**Exemplo 1.1.1.** Sejam  $z_1 = -3 + 2i$  e  $z_2 = 5 + 2i$  números complexos. O número complexo  $z_1 + z_2 = 2 + 4i$  corresponde ao ponto que é obtido ao fazer a soma “vetorial” de  $z_1$  e  $z_2$ , como mostra a Figura 1:

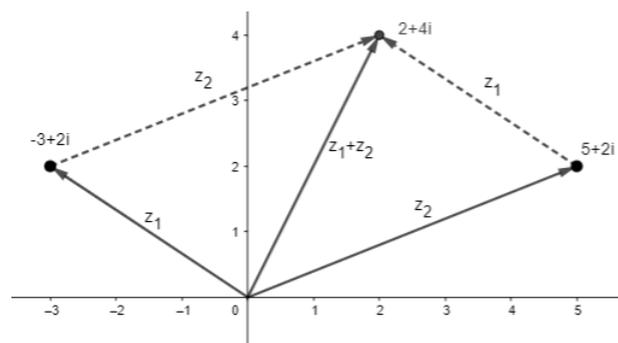


Figura 1: Soma dos números  $z_1$  e  $z_2$

Olhar os números complexos como pontos no plano nos permite definir dois objetos muito importantes relacionados a um número complexo módulo e conjugado. O primeiro é o seguinte: se  $z = a + bi$ , o *módulo* de  $z$  é o número real  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ .

**Exemplo 1.1.2.** Se  $z = -2 + 3i$  então  $|z| = \sqrt{(-2)^2 + (+3)^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$ .

Veja que se  $z$  é um número real, então  $|z|$  é tão somente o seu valor absoluto. Veja também que o módulo de um número complexo corresponde à distância do ponto  $(a, b)$  à origem. Com isso, podemos definir a distância entre dois números complexos: se  $z_1 = a_1 + b_1i$  e  $z_2 = a_2 + b_2i$ , então

$$d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2| = |z_2 - z_1| = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2} .$$

Obtemos também que  $|z_1 - z_2|$  corresponde ao comprimento do “vetor”  $z_1 - z_2$ . Podemos então dizer quando dois números complexos são iguais:  $z_1 = z_2$  se e só se  $d(z_1, z_2) = 0$ ; note que isso implica  $\text{Re}(z_1) = a_1 = a_2 = \text{Re}(z_2)$ ,  $\text{Im}(z_1) = b_1 = b_2 = \text{Im}(z_2)$ .

O segundo objeto importante ligado a um número complexo é o seu *conjugado*: se  $z = a + bi$ , o *conjugado* de  $z$  é o número complexo  $\bar{z} = a - bi$ . É o número relacionado ao ponto  $(a, -b)$ , ou seja,  $\bar{z}$  é a reflexão do  $z$  com relação ao eixo real; veja a Figura 2:

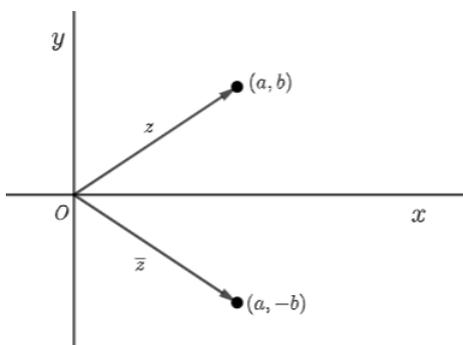


Figura 2: Pontos  $z$  e  $\bar{z}$ .

A importância do conjugado de um número complexo se dá pela seguinte propriedade:

$$10. z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = |z|^2.$$

Isto é, o conjugado nos permite definir o módulo de um número complexo usando apenas variáveis complexas, sem fazer referências a  $a$  e  $b$  (as partes real e imaginária).

Segue imediatamente da definição que  $|\bar{z}| = |z|$  e  $\overline{\bar{z}} = z$ . Além disso,

$$z + \bar{z} = 2a = 2\text{Re}(z) , \quad z - \bar{z} = 2bi = 2\text{Im}(z)i ;$$

com isso, segue que

$$11. \text{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} , \quad \text{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

Além destas importantes propriedades, temos abaixo outras que seguem das definições de conjugado e módulo: se  $z_1, z_2$  são números complexos, então

$$12. \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 ;$$

$$13. \overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2 ;$$

$$14. \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 ;$$

$$15. \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \text{ se } z_2 \neq 0 .$$

As propriedades listadas acima nos permitem reescrever a divisão de números complexos utilizando módulo e conjugado, algo que será muito útil. Sejam  $z_1, z_2$  números complexos,  $z_2 \neq 0$ ; então

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2};$$

note que o denominador é um número real, logo o quociente  $\frac{z_1}{z_2}$  já está na forma  $a + bi$ .

**Exemplo 1.1.3.** Calculemos  $\frac{1 - 2i}{-3 + 4i}$ .

Note que  $z_1 = 1 - 2i$ ,  $z_2 = -3 + 4i$  e  $\bar{z}_2 = -3 - 4i$  então

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2} = \frac{(1 - 2i)(-3 - 4i)}{|-3 + 4i|^2} = \frac{-11 + 2i}{25} = -\frac{11}{25} + \frac{2}{25}i.$$

Passamos agora a descrever uma outra maneira importantíssima de representar um número complexo, chamada *forma polar*. Seja  $z = a + bi$  um número complexo não nulo. Chame  $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$  e seja  $\theta$  o ângulo entre o eixo real e a semi-reta no plano complexo que passa pela origem e  $z$ , medido no sentido antihorário (positivo). Então  $a = r \cos \theta$ ,  $b = r \sin \theta$ , o que nos permite escrever  $z$  em sua *forma polar*:

$$z = a + bi = r(\cos \theta + i \sin \theta).$$

O ângulo  $\theta$  é chamado *argumento* de  $z$ . Note que ele não é único; de fato, qualquer ângulo da forma  $\theta + 2k\pi$ ,  $k$  inteiro, é um argumento de  $z$ . A unicidade de  $\theta$  é determinada pela escolha do intervalo onde ele é medido; em geral, tomamos o intervalo  $(-\pi, \pi)$ , mas isto pode ser alterado dependendo da situação.

Uma identidade muito importante é a *Fórmula de Euler*:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta.$$

Com ela, podemos escrever

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta}.$$

Vejamos como deduzir esta identidade. A série de Taylor da função exponencial real é dada por

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Esta série converge para todo  $x$  real. Se no lugar de  $x$  colocarmos  $ix$ , o que acontece? Vejamos:

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n x^n}{n!} = 1 + ix + \frac{i^2 x^2}{2!} + \frac{i^3 x^3}{3!} + \frac{i^4 x^4}{4!} + \dots$$

Agora veja que  $i^0 = 1$ ,  $i^1 = i$ ,  $i^2 = -1$ ,  $i^3 = -i$ ,  $i^4 = 1$ ,  $i^5 = i$  e assim por diante, isto é, as potências de  $i$  se alternam entre 1,  $i$ ,  $-1$  e  $-i$ , nesta ordem. Obtemos assim

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i \frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - i \frac{x^7}{7!} + \dots$$

As séries de Taylor das funções cosseno e seno reais são dadas por

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

e, assim como a série de Taylor da função exponencial, convergem para todo  $x$  real. Por causa da convergência das séries de Taylor das funções seno e cosseno, podemos rearranjar os termos da série de  $e^{ix}$  separando em parte real e imaginária, obtendo

$$e^{ix} = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots\right) = \cos x + i \sin x .$$

Substituindo  $x$  por  $\theta$ , chegamos à Fórmula de Euler.

A forma polar de um número complexo é útil por várias razões; a primeira delas é que obtemos uma interpretação geométrica para o produto e quociente de números complexos. Primeiramente, observe que se  $z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta}$ , então

$$\bar{z} = r(\cos \theta - i \sin \theta) = r(\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)) = re^{i(-\theta)} = re^{-i\theta} .$$

Agora,

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r(\cos \theta + i \sin \theta)} \cdot \frac{(\cos \theta - i \sin \theta)}{(\cos \theta - i \sin \theta)} = \frac{\cos \theta - i \sin \theta}{r(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)} = \frac{1}{r} e^{-i\theta} .$$

Vejam que as propriedades da exponencial real se mantêm. Sejam  $z_1 = \cos \theta_1 + i \sin \theta_1 = e^{i\theta_1}$ ,  $z_2 = \cos \theta_2 + i \sin \theta_2 = e^{i\theta_2}$ . Então

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \cdot (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \\ &= (\cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \cdot \sin \theta_2) + i(\sin \theta_1 \cdot \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \cdot \sin \theta_2) \\ &= \cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2) , \end{aligned}$$

isto é,  $e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$ . Em particular,

$$\frac{z_1}{z_2} = e^{i\theta_1} e^{-i\theta_2} = e^{i(\theta_1 - \theta_2)} .$$

Veja então que multiplicar dois números complexos de módulo 1 corresponde a fazer a rotação de um deles pelo argumento do outro no sentido positivo (antihorário); de fato,  $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$ . Esta propriedade se mantém se tomamos  $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$  e  $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$  quaisquer:

$$z_1 \cdot z_2 = (r_1 e^{i\theta_1}) \cdot (r_2 e^{i\theta_2}) = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)} .$$

Isto é, multiplicar números complexos não nulos corresponde a fazer uma rotação e uma dilatação ou contração (dependendo dos módulos  $r_1$  e  $r_2$ ); veja a Figura 3. Já dividir por um número complexo não nulo corresponde a fazer uma dilatação/contração e uma rotação no sentido negativo (horário), já que  $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$ .

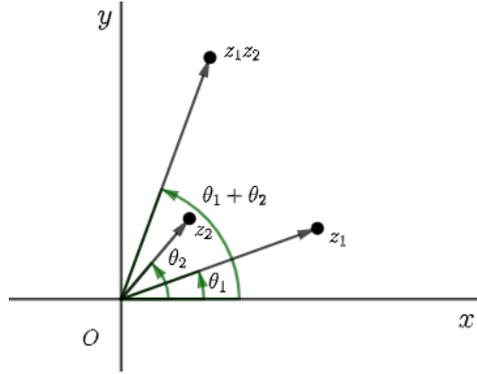


Figura 3: Representação polar do produto de dois números complexos

Muitas outras coisas poderiam ser ditas sobre os números complexos, mas pararemos por aqui pois estas serão as propriedades que necessitaremos no futuro.

## 1.2 Elementos de Geometria Diferencial

Nessa seção, vamos apresentar conceitos básicos de geometria diferencial que serão utilizados posteriormente. Usamos como referência o livro [2].

Uma *superfície regular de classe  $C^k$*  é um subconjunto  $S \subset \mathbb{R}^3$  tal que para todo  $p \in S$  existem um aberto  $U \subset \mathbb{R}^2$ , uma vizinhança  $W$  de  $p$  em  $\mathbb{R}^3$  e uma aplicação diferenciável  $\varphi : U \rightarrow V$  de classe  $C^k$ , onde  $V = W \cap S$ , tal que a diferencial  $d\varphi(u, v) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  é injetiva para todo  $(u, v) \in U$  e  $\varphi$  é um homeomorfismo. A aplicação  $\varphi$  é chamada uma *carta* ou *parametrização local*, a vizinhança  $V$  é chamada de *vizinhança coordenada* e  $(u, v) \in U$  são as *coordenadas locais*. Um conjunto de cartas locais cujas imagens cobrem  $S$  é chamado um *atlas*.

**Exemplo 1.2.1.** Vamos mostrar que a esfera unitária é uma superfície regular, que pode ser coberta por seis cartas em coordenadas cartesianas. Seja

$$\mathbb{S}^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\} .$$

Considere a aplicação  $\varphi_1 : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por

$$\varphi_1(x_1, x_2) = \left( x_1, x_2, \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2} \right) ,$$

onde  $(x_1, x_2) \in U = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ . Temos então que  $\varphi_1(U)$  é uma carta local que cobre a parte (aberta) de  $\mathbb{S}^2$  acima do plano  $x_1x_2$  (isto é,  $\mathbb{S}^2 \cap \{x_3 > 0\}$ ). Veja a Figura 4:

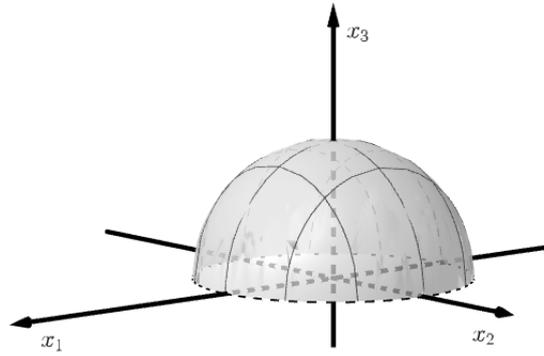


Figura 4: Carta  $\varphi_1$

Seja agora  $\varphi_2 : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por

$$\varphi_2(x_1, x_2) = \left( x_1, x_2, -\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2} \right),$$

onde  $(x_1, x_2) \in U$  (o mesmo aberto acima). Agora, vemos que  $\varphi_2(U)$  é uma carta local que cobre a parte (aberta) de  $\mathbb{S}^2$  abaixo do plano  $x_1x_2$  (isto é,  $\mathbb{S}^2 \cap \{x_3 < 0\}$ ). Veja a Figura 5:

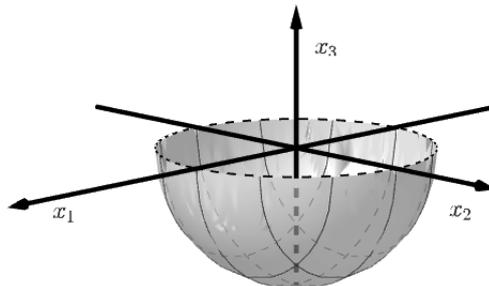


Figura 5: Carta  $\varphi_2$

Note que as cartas  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  cobrem a esfera toda menos o equador  $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 ; x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ , conforme mostra a Figura 6:

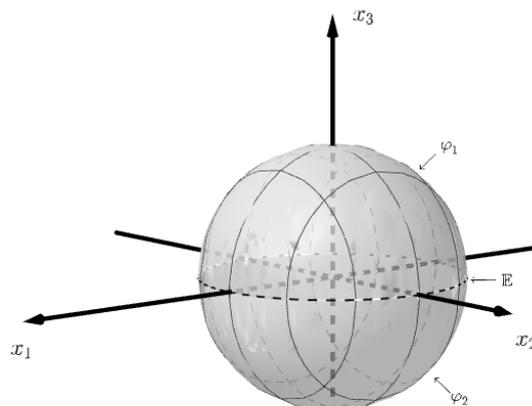


Figura 6: União das imagens de  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$

Agora, considere  $U = \{(x_1, x_3) \in \mathbb{R}^2; x_1^2 + x_3^2 < 1\}$  e seja  $\varphi_3 : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por

$$\varphi_3(x_1, x_3) = \left( x_1, \sqrt{1 - x_1^2 - x_3^2}, x_3 \right).$$

Então  $\varphi_3(U)$  é uma carta local que cobre a parte (aberta) de  $\mathbb{S}^2$  à direita do plano  $x_1x_3$  (isto é  $\mathbb{S}^2 \cap \{x_2 > 0\}$ ), como mostra a Figura 7:

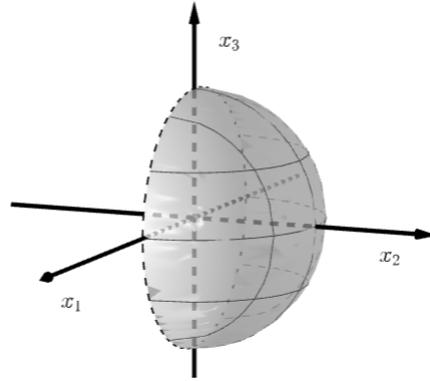


Figura 7: Carta  $\varphi_3$

Continuando o processo, definimos  $\varphi_4 : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  por

$$\varphi_4(x_1, x_3) = \left( x_1, -\sqrt{1 - x_1^2 - x_3^2}, x_3 \right),$$

$(x_1, x_3) \in U$  (o mesmo conjunto da aplicação  $\varphi_3$ ). Então  $\varphi_4(U)$  é uma carta local que cobre a parte (aberta) de  $\mathbb{S}^2$  à esquerda do plano  $x_1x_3$  ( $\mathbb{S}^2 \cap \{x_2 < 0\}$ ); veja a Figura 8:

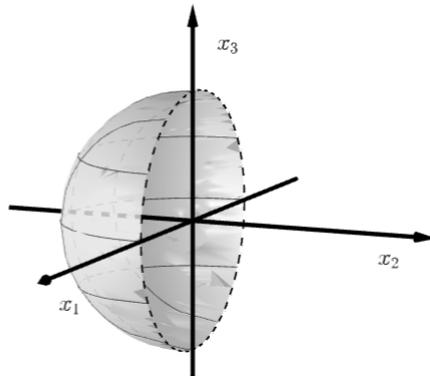


Figura 8: Carta  $\varphi_4$

Veja que as cartas  $\varphi_3$  e  $\varphi_4$  cobrem toda a esfera menos um meridiano, como mostra a Figura 9:

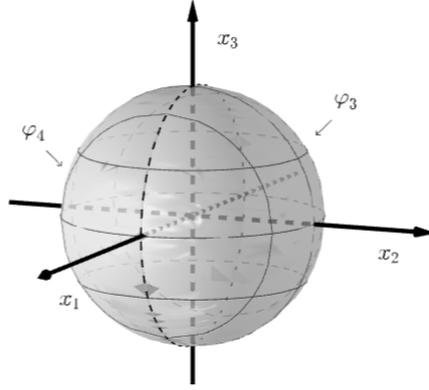


Figura 9: União das imagens de  $\varphi_3$  e  $\varphi_4$

Em conjunto, as cartas  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  e  $\varphi_4$  cobrem toda a esfera menos dois pontos (os pontos  $(1, 0, 0)$  e  $(-1, 0, 0)$ ), veja a Figura 10:

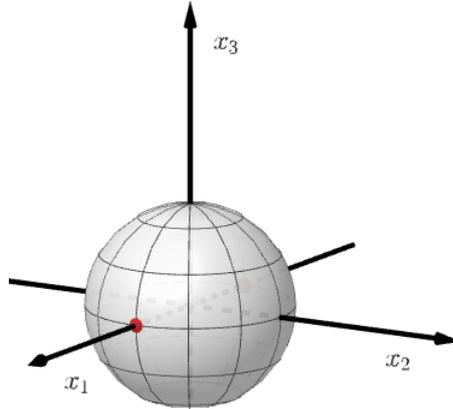


Figura 10: União das imagens de  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  e  $\varphi_4$

Desse modo, necessitamos de mais duas cartas para cobrir esses pontos, a saber,  $\varphi_5, \varphi_6 : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dadas por

$$\varphi_5(x_2, x_3) = \left( \sqrt{1 - x_2^2 - x_3^2}, x_2, x_3 \right),$$

$$\varphi_6(x_2, x_3) = \left( -\sqrt{1 - x_2^2 - x_3^2}, x_2, x_3 \right)$$

onde  $(x_2, x_3) \in U = \{(x_2, x_3) \in \mathbb{R}^2; x_2^2 + x_3^2 < 1\}$ . A carta local  $\varphi_5$  cobre a parte (aberta) de  $\mathbb{S}^2$  à frente do plano  $x_2x_3$  ( $\mathbb{S}^2 \cap \{x_1 > 0\}$ ), e a carta  $\varphi_6$  cobre a parte (aberta) de  $\mathbb{S}^2$  atrás do plano  $x_2x_3$  ( $\mathbb{S}^2 \cap \{x_1 < 0\}$ ), como mostram as Figuras 11 e 12.

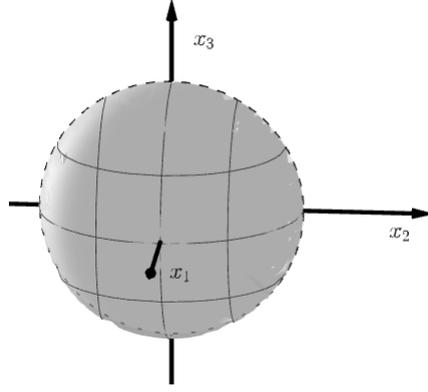


Figura 11: Carta  $\varphi_5$

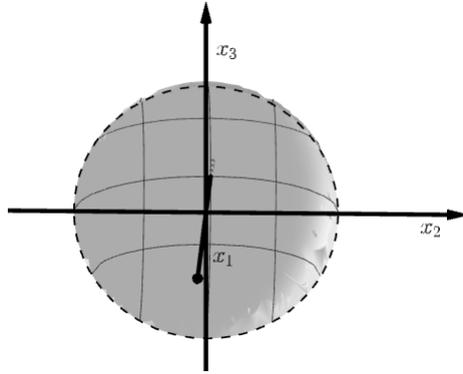


Figura 12: Carta  $\varphi_6$

Assim, juntando todas estas seis cartas obtemos um atlas que cobre inteiramente  $\mathbb{S}^2$ .

Ainda que as funções  $\varphi_i$  sejam diferenciáveis de classe  $C^k$  e satisfaçam à definição, não precisamos de seis cartas para cobrir a esfera, como veremos a seguir. De fato, bastam duas cartas.

**Exemplo 1.2.2.** Sejam  $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; 0 < u < 2\pi, 0 < v < \pi\}$  e  $\psi_1 : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por

$$\psi_1(u, v) = (\cos(u) \sin(v), \sin(u) \sin(v), \cos(v)) .$$

O ângulo  $u$  corresponde ao ângulo de rotação (no sentido antihorário) partindo do semieixo  $x_1 > 0$ , e o ângulo  $v$  corresponde ao ângulo de queda com relação ao semieixo  $x_3 > 0$ .

Fixando  $v = v_0$ , obtemos uma curva:

$$\psi_1(u, v_0) = (\cos(u) \sin(v_0), \sin(u) \sin(v_0), \cos(v_0)) , 0 < u < 2\pi .$$

Veja que  $x_3 = \cos(v_0)$  está fixo e  $x_1^2 + x_2^2 = \sin^2(v_0)$ ; portanto,  $\psi_1(u, v_0)$  é o círculo de raio  $\sin(v_0)$  interseção do plano  $x_3 = \cos(v_0)$  com a esfera. Chamamos esta família de círculos assim obtidos de *paralelos*. Quando  $v_0 = \frac{\pi}{2}$  obtemos um paralelo especial, que é também um grande círculo; chamamos este paralelo de *equador* da esfera:

$$\psi_1\left(u, \frac{\pi}{2}\right) = (\cos(u), \sin(u), 0) , 0 < u < 2\pi .$$

Fixando agora  $u = u_0$  obtemos a curva

$$\psi_1(u_0, v) = (\cos(u_0) \sin(v), \sin(u_0) \sin(v), \cos(v)) , \quad 0 < v < \pi .$$

Chamamos esta curva de *meridiano* (ou semi-meridiano, se quisermos ser mais exatos). É a metade do grande círculo da esfera que obtemos quando fazemos a rotação de ângulo  $u_0$ , e deixamos variar apenas o parâmetro  $v$ .

A carta  $\psi_1(u, v)$  cobre toda a esfera menos o semi-meridiano  $\psi_1(0, v) = (\sin(v), 0, \cos(v))$ ; veja a Figura 13:

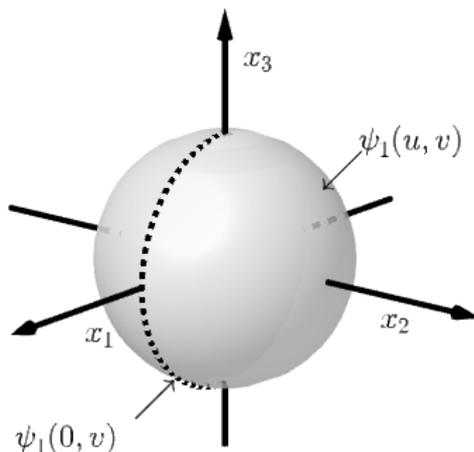


Figura 13: Carta  $\psi_1$

Tomando o mesmo aberto  $U$  e considerando agora  $\psi_2 : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por

$$\psi_2(u, v) = (-\cos(u) \sin(v), \cos(v), \sin(u) \sin(v)) ,$$

obtemos uma segunda carta que cobre a esfera menos a curva  $\psi_2(0, v) = (-\sin(v), \cos(v), 0)$  (a metade esquerda do equador da esfera); veja a Figura 14:

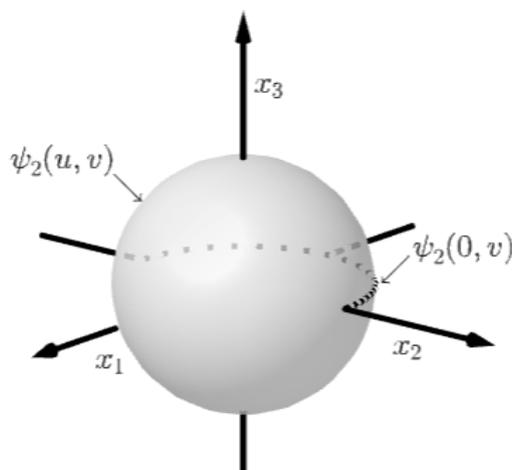


Figura 14: Carta  $\psi_2$

Assim  $\psi_1$  e  $\psi_2$  cobrem toda a esfera, formando um atlas com apenas duas cartas.

Vamos apresentar agora parametrizações para o cilindro, a faixa de Möbius e o toro.

**Exemplo 1.2.3.** O cilindro reto sobre o círculo  $S^1$  dado em  $\mathbb{R}^2$  pela equação  $x_1^2 + x_2^2 = 1$  admite a parametrização  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por

$$\varphi(u, v) = (\cos(u), \sin(u), v)$$

onde  $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; 0 < u < 2\pi, -1 < v < 1\}$ . Como no caso da esfera, esta carta cobre o cilindro menos um segmento vertical; para cobrir todo o cilindro, tomamos uma outra carta que seja uma “rotação” de  $\varphi$  (por exemplo,  $\psi(u, v) = \varphi(u + \frac{\pi}{2}, v)$ ).

**Exemplo 1.2.4.** Descreveremos agora uma maneira de construir a faixa de Möbius. Considere, em  $\mathbb{R}^3$ , o círculo  $C$  dado por  $\{x_1^2 + x_2^2 = 4, x_3 = 0\}$  e o segmento vertical  $AB$  dado por  $\{x_1 = 0, x_2 = 2, -1 < x_3 < 1\}$ . Deslocamos o centro  $c$  de  $AB$  ao longo de  $C$  ao mesmo tempo que giramos o segmento  $AB$ , no plano formado pelo eixo  $x_3$  e  $c$ , em torno de  $c$ , de modo que quando  $c$  descreve um ângulo  $u$ ,  $AB$  tenha girado  $\frac{u}{2}$ . Quando  $c$  completa uma volta ao longo de  $C$ ,  $AB$  retorna à sua posição inicial, com as extremidades invertidas. Veja a Figura 15:

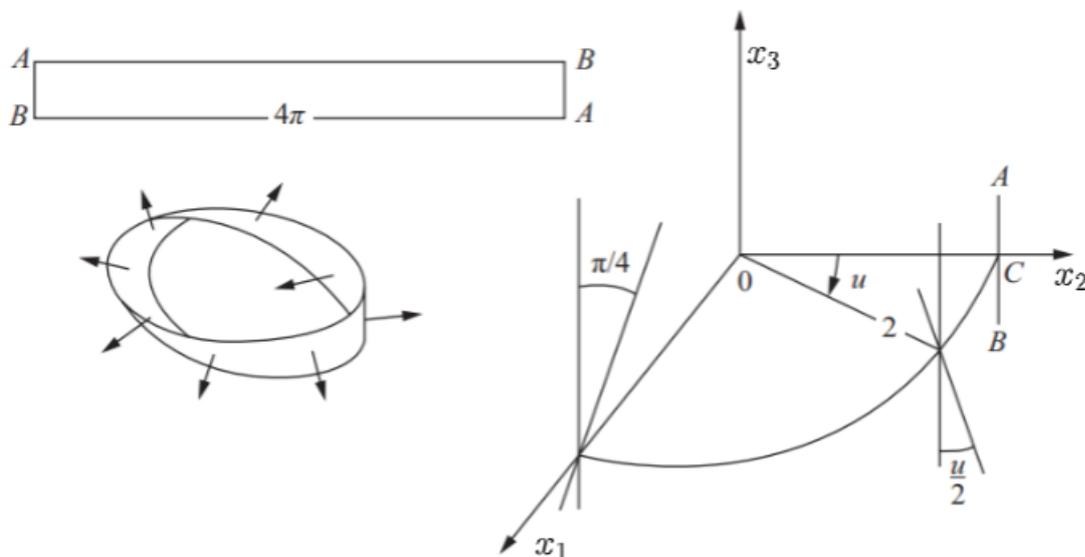


Figura 15: Construção da faixa de Möbius (figura retirada de [2])

A partir desta construção, tomando  $0 < u < 2\pi$  e  $-1 < v < 1$ , obtemos a seguinte carta local para a faixa de Möbius:

$$\varphi(u, v) = \left( \left( 2 - v \sin \frac{u}{2} \right) \sin u, \left( 2 - v \sin \frac{u}{2} \right) \cos u, v \cos \frac{u}{2} \right).$$

Esta carta cobre a faixa de Möbius menos o segmento  $u = 0$  (ou  $u = 2\pi$ ). Já a carta

$$\bar{\varphi}(\bar{u}, \bar{v}) = \left( \left( 2 - \bar{v} \sin \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\bar{u}}{2} \right) \right) \cos \bar{u}, \left( 2 - \bar{v} \sin \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\bar{u}}{2} \right) \right) \sin \bar{u}, \bar{v} \cos \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\bar{u}}{2} \right) \right)$$

com  $0 < \bar{u} < 2\pi$ ,  $-1 < \bar{v} < 1$ , obtida quando fazemos  $u = \bar{u} + \frac{\pi}{2}$ , cobre a faixa de Möbius menos o segmento  $\bar{u} = 0$ , ou seja,  $u = \frac{\pi}{2}$ . Portanto as cartas  $\varphi, \bar{\varphi}$  formam um atlas para a faixa de Möbius.

**Exemplo 1.2.5.** O toro de revolução é a superfície obtida quando fazemos a rotação de um círculo de raio  $r$  em torno de uma reta pertencente ao plano do círculo e a uma distância  $a > r$  do centro do círculo. Seja  $C$  o círculo no plano  $x_2x_3$  de  $\mathbb{R}^3$  centrado no ponto  $(0, a, 0)$  de raio  $0 < r < a$ . Então  $C$  é dado por

$$(x_2 - a)^2 + x_3^2 = r^2 .$$

Os pontos da superfície obtida pela rotação de  $C$  em torno do eixo  $x_3$  satisfazem a equação

$$x_3^2 = r^2 - \left( \sqrt{x_1^2 + x_2^2} - a \right)^2 .$$

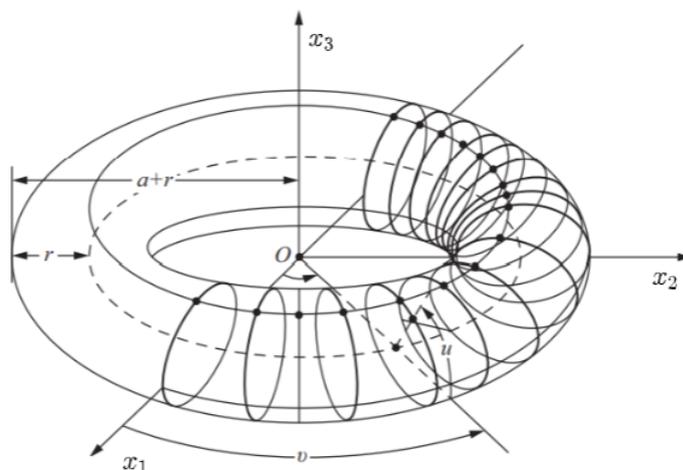


Figura 16: Construção do toro (figura retirada de [2])

Tomando  $0 < u < 2\pi, 0 < v < 2\pi$ , obtemos uma carta local para o toro:

$$\varphi(u, v) = ((r \cos(u) + a) \cos(v), (r \cos(u) + a) \sin(v), r \sin(u)) .$$

Note que esta carta cobre o toro menos os círculos  $u = 0$  (um meridiano do toro) e  $v = 0$  (um paralelo do toro, chamado paralelo máximo). Como nos exemplos anteriores, é possível obter outra carta local para o toro, que cobre as curvas não cobertas por  $\varphi$ , e com isso o toro é coberto por duas cartas locais.

Para finalizar esta seção, daremos a definição de aplicação antípoda. Em  $\mathbb{R}^3$ , esta aplicação consiste simplesmente em associar a um ponto  $p \neq 0$  o ponto  $-p$  (note que  $-p$  é o ponto que está na mesma reta que passa por  $p$  e pela origem, à mesma distância da origem que  $p$ ). Em coordenadas, temos:

$$A(x_1, x_2, x_3) = (-x_1, -x_2, -x_3) .$$

### 1.3 Esferas

Apesar de já termos mencionado a esfera  $\mathbb{S}^2$  na seção anterior (do ponto de vista da geometria diferencial, apresentando atlas que a cobrem), dedicaremos esta seção a apresentar esferas de acordo com sua dimensão. Fazemos isto pois o principal objeto de interesse deste trabalho é a 3–esfera  $\mathbb{S}^3$ , e ao longo de seu estudo, esfera de dimensões mais baixas aparecem com frequência.

Seja qual for a dimensão, as esferas possuem a seguinte característica: são o conjunto de pontos que estão a distância 1 da origem do espaço no qual estão inserida.

#### $\mathbb{S}^0$ : a 0–esfera

A 0–esfera é o conjunto de pontos de  $\mathbb{R}$  que estão a distância 1 da origem (que neste caso é o 0). Ou seja, são as soluções da equação  $x_1^2 = 1$ , a saber:  $x_1 = 1$  ou  $x_1 = -1$ . Por se tratar de um conjunto formado por dois pontos,  $\mathbb{S}^0$  tem dimensão zero, justificando seu nome. É a única esfera que não é conexa.



Figura 17: A 0–esfera

#### $\mathbb{S}^1$ : a 1–esfera

A 1–esfera é o conjunto de pontos de  $\mathbb{R}^2$  que estão a distância 1 da origem  $(0, 0)$ . Consequentemente, são os pontos  $(x_1, x_2)$  que satisfazem a equação  $x_1^2 + x_2^2 = 1$ , cujo traço é um círculo (um objeto de dimensão 1).

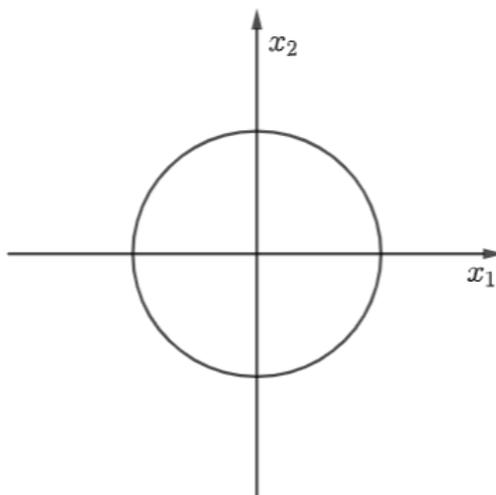


Figura 18: A 1–esfera

Podemos generalizar a posição de uma 1–esfera no plano, e também o seu raio. Por exemplo, a 1–esfera de centro  $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$  e raio  $r > 0$  é o conjunto de pontos  $(x_1, x_2)$  que satisfaz a equação  $(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 = r^2$ .

### $\mathbb{S}^2$ : a 2-esfera

A 2-esfera é o conjunto de pontos de  $\mathbb{R}^3$  que estão a distância 1 da origem  $(0, 0, 0)$ . São portanto os pontos  $(x_1, x_2, x_3)$  que satisfazem a equação  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ . Esta é a esfera que é tradicionalmente chamada por este nome; é a superfície de uma bola ou um globo.

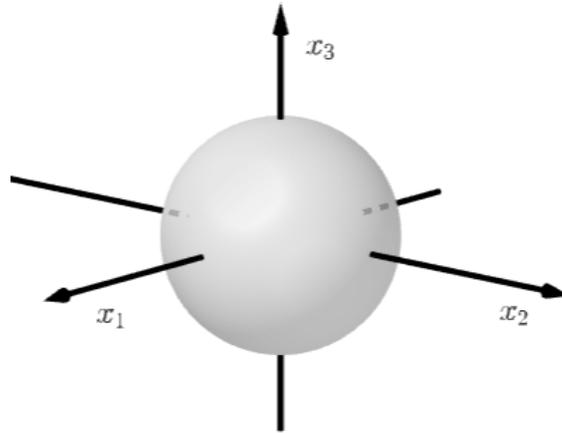


Figura 19: A 2-esfera

Como antes, podemos generalizar a posição de uma 2-esfera em  $\mathbb{R}^3$ , e também seu raio. Por exemplo, a 2-esfera de centro  $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$  e raio  $r > 0$  é o conjunto de pontos  $(x_1, x_2, x_3)$  que satisfaz a equação  $(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + (x_3 - a_3)^2 = r^2$ .

### $\mathbb{S}^3$ : a 3-esfera

Continuando o argumento que definiu as esferas de dimensões 0, 1 e 2, obtemos que a 3-esfera é o conjunto de pontos de  $\mathbb{R}^4$  que estão a distância 1 da origem  $(0, 0, 0, 0)$ ; são portanto os pontos  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  que satisfazem a equação  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$ . Apesar de ser possível caracterizar a 3-esfera por esta equação, não podemos deduzir muito mais sobre este objeto; podemos dizer apenas que é um objeto de dimensão 3, e pouco mais que isso. Contudo, existe uma maneira de visualizar/representar a 3-esfera em  $\mathbb{R}^3$ , e a isto dedicaremos todo o Capítulo 2.

### $\mathbb{S}^n$ : a $n$ -esfera

Generalizando o argumento anterior, podemos definir a  $n$ -esfera como o conjunto de pontos de  $\mathbb{R}^{n+1}$  que estão a distância 1 da origem; são portanto os pontos  $(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1})$  tais que  $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 + x_{n+1}^2 = 1$ .

Para visualizar esferas com dimensão superior a três, utilizamos as chamadas *projeções estereográficas*, que detalharemos na seção seguinte.

## 1.4 Projecção estereográfica

A construção da projecção estereográfica pode ser feita em qualquer dimensão e é especialmente útil para visualizar esferas de dimensão maior ou igual a três, como dissemos anteriormente. Em linhas gerais, consiste em escolher um ponto da esfera como polo de projecção, e projetá-la em um espaço de mesma dimensão.

**Exemplo 1.4.1.** Considere  $\mathbb{S}^1$  com centro em  $(0, 1)$  e raio 1, de modo que o polo norte é o ponto  $N = (0, 2)$ . Seja  $P = (x_1, x_2)$  um ponto em  $\mathbb{S}^1$  distinto de  $N$ , e tome a reta que passa por  $N$  e  $P$ . A projecção estereográfica de  $P$  será o (único) ponto de intersecção desta reta com o eixo  $x_1$ , como mostra a Figura 20:

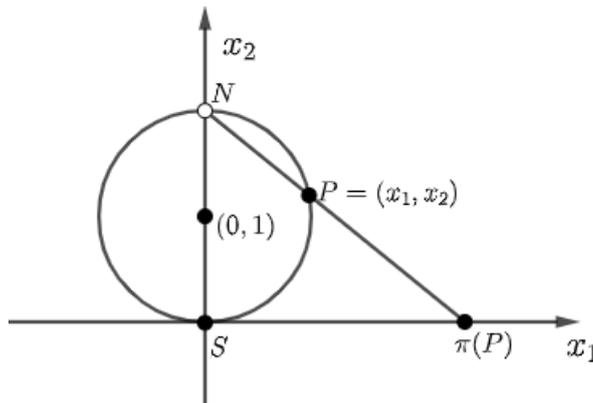


Figura 20: Projecção de  $\mathbb{S}^1$  em  $\mathbb{R}$

Podemos parametrizar a reta que passa por  $P$  e  $N$  como segue:

$$\begin{aligned} L_{N,P}(t) &= N + t(P - N) \\ &= (0, 2) + t[(x_1, x_2) - (0, 2)] \\ &= (0, 2) + t(x_1, x_2 - 2) \\ &= (tx_1, t(x_2 - 2) + 2) \\ &= (f(x_1), g(x_2)) \end{aligned}$$

Portanto, a pergunta é: para qual  $t$  temos que  $g(x_2) = 0$ ? Note que

$$g(x_2) = t(x_2 - 2) + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad t(x_2 - 2) = -2 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{2}{2 - x_2} .$$

Assim, obtemos  $\pi : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\pi(P) = \pi(x_1, x_2) = \frac{2x_1}{2 - x_2} .$$

Veja que  $\pi$  é uma aplicação bijetiva, contínua e diferenciável entre  $\mathbb{S}^1 \setminus N$  e  $\mathbb{R}$ . Em particular,  $\pi(0, 0) = (0, 0)$  (ou seja, o polo sul de  $\mathbb{S}^1$  permanece fixo), o hemisfério direito é projetado no semieixo  $x_1 > 0$ , e o hemisfério esquerdo é projetado no semieixo  $x_1 < 0$ . Intuitivamente, é como se fizessemos um furo em  $\mathbb{S}^1$  e esticássemos o círculo sobre o eixo  $x_1$ , deixando fixo o polo sul.

O que acontece com  $\pi$  quando  $P$  se aproxima de  $N$ ? Intuitivamente, podemos ver que se  $P$  está no hemisfério direito de  $\mathbb{S}^1$ , então “ $\pi(N) \rightarrow \infty$ ” quando  $P \rightarrow N$ , e se  $P$  está

no hemisfério esquerdo de  $\mathbb{S}^1$ , então “ $\pi(N) \rightarrow -\infty$ ” quando  $P \rightarrow N$ . De fato, isto pode ser comprovado tomando os limites laterais de  $f(x_1)$  quando  $x_1 \rightarrow 0$ . Como a equação de  $\mathbb{S}^1$  é  $x_1^2 + (x_2 - 1)^2 = 1$ , o hemisfério superior é dado por  $x_2 = 1 + \sqrt{1 - x_1^2}$ ; portanto  $P \rightarrow N$  quando  $x_1 \rightarrow 0$ . Então

$$\lim_{x_1 \rightarrow 0} f(x_1) = \lim_{x_1 \rightarrow 0} \frac{2x_1}{2 - (1 + \sqrt{1 - x_1^2})} = \lim_{x_1 \rightarrow 0} \frac{2x_1}{1 - \sqrt{1 - x_1^2}} = \lim_{x_1 \rightarrow 0} \frac{2(1 + \sqrt{1 - x_1^2})}{x_1} ;$$

Assim,

$$\lim_{x_1 \rightarrow 0^+} f(x_1) = \infty \quad , \quad \lim_{x_1 \rightarrow 0^-} f(x_1) = -\infty .$$

Pensando no infinito como um *ponto* (ou seja, ignorando os sinais), podemos definir  $\pi(N) = \infty$ . Desta maneira, a projeção estereográfica nos fornece uma correspondência um a um entre  $\mathbb{S}^1$  e  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ .

O fato de termos feito a projeção estereográfica da 1-esfera  $x_1^2 + (x_2 - 1)^2 = 1$  e não da 1-esfera  $x_1^2 + x_2^2 = 1$  não altera a natureza da projeção, como veremos no exemplo a seguir.

**Exemplo 1.4.2.** Considere agora  $\mathbb{S}^1 = \{x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ , de modo que o polo norte é o ponto  $N = (0, 1)$ . Procedemos com antes: seja  $P = (x_1, x_2)$  um ponto de  $\mathbb{S}^1$  diferente de  $N$ . Tomamos a reta que passa por  $N$  e por  $P$ , e o ponto de interseção desta reta com o eixo  $x_1$ . Então

$$\begin{aligned} L_{N,P}(t) &= N + t(P - N) \\ &= (0, 1) + t[(x_1, x_2) - (0, 1)] \\ &= (0, 1) + t(x_1, x_2 - 1) \\ &= (tx_1, t(x_2 - 1) + 1) \\ &= (f(x_1), g(x_2)) \end{aligned}$$

Temos  $g(x_2) = 0$  quando  $t = \frac{1}{1 - x_2}$ ; assim obtemos  $\pi : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\pi(P) = \pi(x_1, x_2) = \frac{x_1}{1 - x_2} .$$

Novamente, veja que  $\pi$  é uma bijeção contínua e diferenciável entre  $\mathbb{S}^1 \setminus N$  e  $\mathbb{R}$ . Note também que  $\pi(0, -1) = (0, 0)$ , ou seja, o polo sul é projetado na origem.

Vejamos as imagens dos hemisférios superior e inferior de  $\mathbb{S}^1$ . Primeiramente, note que  $\pi(1, 0) = (1, 0)$  e  $\pi(-1, 0) = (-1, 0)$ , ou seja, os pontos  $(\pm 1, 0)$  ficam fixos. Para o hemisfério superior, temos  $0 < x_2 < 1$ ; isso implica  $1 - x_2 < 1 \Rightarrow \frac{1}{1 - x_2} > 1$ ; assim,

$$\text{se } 0 < x_1 < 1 \Rightarrow \frac{x_1}{1 - x_2} > x_1 \quad ; \quad \text{se } -1 < x_1 < 0 \Rightarrow \frac{x_1}{1 - x_2} < x_1 .$$

Em outras palavras, se  $0 < x_2 < 1$ ,  $|f(x_1)| > |x_1|$ . Concluímos então que o arco direito do hemisfério superior no primeiro quadrante é projetado na semi-reta  $x_1 \geq 1$ ; e o arco esquerdo do hemisfério superior no segundo quadrante é projetado na semi-reta  $x_1 \leq -1$  (incluindo aí os pontos  $(\pm 1, 0)$ ); veja as Figuras 21 e 22:

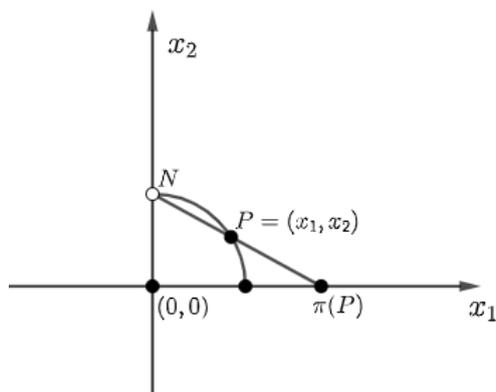


Figura 21: Projeção do arco direito do hemisfério superior

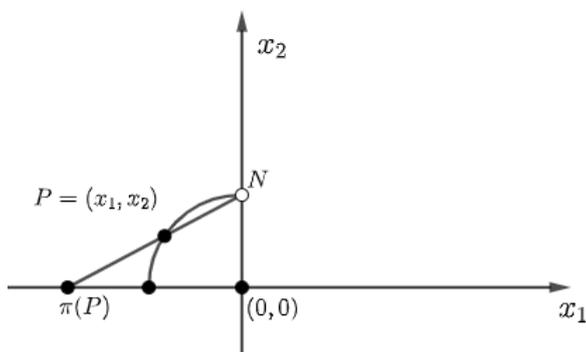


Figura 22: Projeção do arco esquerdo do hemisfério superior

Para o hemisfério inferior, temos  $-1 < x_2 < 0$ ; logo  $1 - x_2 > 1 \Rightarrow \frac{1}{1 - x_2} < 1$ . Então

$$\text{se } 0 < x_1 < 1 \Rightarrow \frac{x_1}{1 - x_2} < x_1 \quad ; \quad \text{se } -1 < x_1 < 0 \Rightarrow \frac{x_1}{1 - x_2} > x_1 .$$

Em outras palavras, se  $-1 < x_2 < 0$ ,  $|f(x_1)| < |x_1|$ . Concluimos então que o hemisfério inferior é projetado no intervalo  $[-1, 1]$  do eixo  $x_1$  (incluindo aí os pontos  $(\pm 1, 0)$ ); veja a Figura 23:

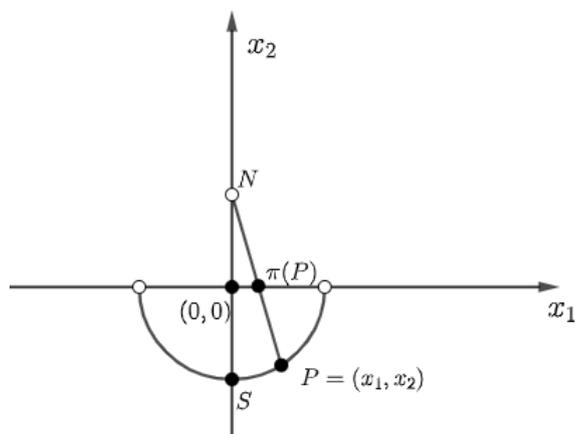


Figura 23: Projeção do hemisfério inferior

Como antes, é possível mostrar que quando  $P \rightarrow N$ ,  $\pi(N)$  “vai para o infinito”. Obtemos novamente uma correspondência um a um entre  $\mathbb{S}^1$  e  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ , porém agora é como se fizéssemos um furo em  $\mathbb{S}^1$  e esticássemos o círculo sobre o eixo  $x_1$ , mantendo fixos os pontos  $(\pm 1, 0)$ .

Não há, portanto, problema em escolher um círculo para ser projetado em detrimento de outro; a diferença aparece unicamente na expressão de  $\pi$  em coordenadas. A situação a ser estudada dirá qual das projeções é mais conveniente.

Agora vejamos a projeção estereográfica  $\pi : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ .

**Exemplo 1.4.3.** Vamos considerar  $\mathbb{S}^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1^2 + x_2^2 + (x_3 - 1)^2 = 1\}$ ; portanto o polo norte, o polo de projeção, é o ponto  $N = (0, 0, 2)$ . Se  $P = (x_1, x_2, x_3)$  é um ponto na 2-esfera distinto de  $N$ , consideramos a reta que passa por  $N$  e  $P$  e tomamos o ponto de interseção desta reta com o plano  $x_1x_2$ . Procedemos como anteriormente: a reta que passa por  $N$  e  $P$  é dada por

$$\begin{aligned} L_{N,P}(t) &= N + t(P - N) \\ &= (0, 0, 2) + t[(x_1, x_2, x_3) - (0, 0, 2)] \\ &= (0, 0, 2) + t(x_1, x_2, x_3 - 2) \\ &= (tx_1, tx_2, t(x_3 - 2) + 2) \\ &= (f(x_1), g(x_2), h(x_3)) \end{aligned}$$

e buscamos o ponto de interseção de  $L_{N,P}$  com o plano  $x_1x_2$ . Portanto, buscamos  $t$  tal que

$$h(x_3) = t(x_3 - 2) + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad t(x_3 - 2) = -2 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{2}{2 - x_3}.$$

Obtemos assim  $\pi : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por

$$\pi(P) = \pi(x_1, x_2, x_3) = \left( \frac{2x_1}{2 - x_3}, \frac{2x_2}{2 - x_3} \right).$$

Veja que, assim como no caso unidimensional,  $\pi$  é uma bijeção contínua e diferenciável entre  $\mathbb{S}^2 \setminus N$  e  $\mathbb{R}^2$ , e é possível mostrar que  $\pi(N) \rightarrow \infty$  quando  $P \rightarrow N$ . Note também que  $\pi(0, 0, 0) = (0, 0, 0)$ , isto é, o polo sul de  $\mathbb{S}^2$  se mantém fixo. Então intuitivamente, ao fazermos a projeção estereográfica da 2-esfera, estamos fazendo um furo no polo norte e esticando a esfera no plano  $x_1x_2$ , mantendo o polo sul fixo.

A projeção estereográfica em dimensão dois tem a importante propriedade geométrica de que a imagem de círculos em  $\mathbb{S}^2$  por  $\pi$  são círculos em  $\mathbb{R}^2$ . Para mostrar isto, veremos que será necessário ampliar o que entendemos por “círculo” em  $\mathbb{R}^2$ .

Começamos considerando o equador da 2-esfera, que neste exemplo é o círculo  $E = \{x_1^2 + x_2^2 = 1; x_3 = 1\} \subset \mathbb{S}^2$ . Então  $\pi(E) = (2x_1, 2x_2) = (u_1, u_2)$  e

$$u_1^2 + u_2^2 = (2x_1)^2 + (2x_2)^2 = 4x_1^2 + 4x_2^2 = 4(x_1^2 + x_2^2) = 4;$$

isto é, a imagem de  $E$  pela projeção estereográfica é o círculo  $x_1^2 + x_2^2 = 4$  no plano  $x_1x_2$ . Mais geralmente, seja  $x_3 = k$  com  $0 < k < 2$ . Então  $x_1^2 + x_2^2 + (x_3 - 1)^2 = 1$  implica  $x_1^2 + x_2^2 = 1 - (k - 1)^2$ ; a imagem deste paralelo será  $\pi(x_1, x_2) = \left( \frac{2x_1}{2 - k}, \frac{2x_2}{2 - k} \right) = (u_1, u_2)$  em que

$$u_1^2 + u_2^2 = \left( \frac{2x_1}{2 - k} \right)^2 + \left( \frac{2x_2}{2 - k} \right)^2 = \frac{4}{(2 - k)^2} (x_1^2 + x_2^2) = \frac{4(1 - (k - 1)^2)}{(2 - k)^2}.$$

Isto é, a imagem dos paralelos pela projeção estereográfica são círculos no plano  $x_1x_2$  centradas na origem. Veja a Figura 24:

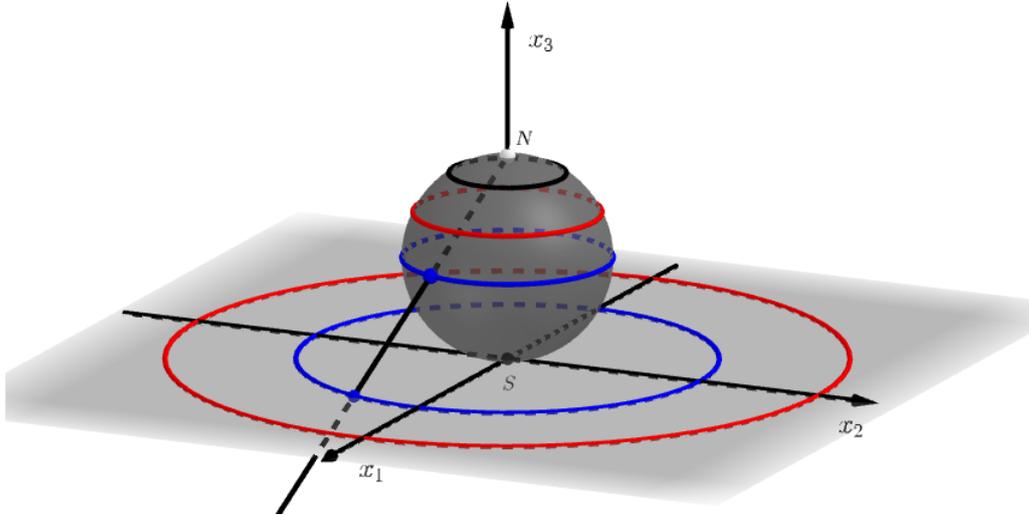


Figura 24: Imagem dos paralelos da esfera pela projeção estereográfica

Vejamos agora a imagem dos meridianos. Intuitivamente, podemos pensar da seguinte forma: um meridiano é um grande círculo da esfera que contém os polos norte e sul; portanto, sua imagem pela projeção estereográfica deve ser uma curva em  $\mathbb{R}^2$  que contenha as imagens dos polos norte e sul, o infinito e a origem, respectivamente. Esta curva será então uma reta que passa pela origem. Estendendo a noção de círculo em  $\mathbb{R}^2$  (anteriormente mencionamos que isto seria necessário), podemos pensar que uma reta é um “círculo que contém o infinito”, ou um “círculo de raio infinito”, e assim a propriedade da projeção estereográfica de preservar círculos estaria mantida.

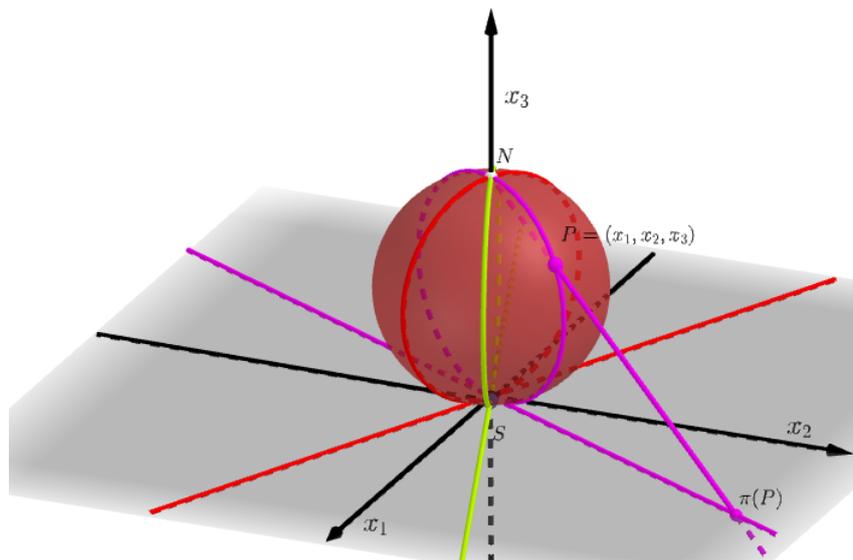


Figura 25: Imagem dos meridianos da esfera pela projeção estereográfica.

Podemos verificar esta afirmação usando coordenadas. Considerando a equação  $x_1^2 + x_2^2 + (x_3 - 1)^2 = 1$ , uma parametrização da esfera é dada por

$$\psi(u, v) = (\cos(u) \sin(v), \sin(u) \sin(v), \cos(v) + 1) ; 0 < u < 2\pi , 0 < v < \pi .$$

Um meridiano é portanto a curva  $M_{u_0}$  obtida fixando  $u = u_0$ :

$$M_{u_0} = \psi(u_0, v) = (\cos(u_0) \sin(v), \sin(u_0) \sin(v), \cos(v) + 1) ; 0 < v < \pi .$$

Então

$$\pi(M_{u_0}) = \left( \frac{2 \sin(v) \cos(u_0)}{1 - \cos(v)}, \frac{2 \sin(v) \sin(u_0)}{1 - \cos(v)} \right) = (u_1, u_2)$$

e podemos ver que  $u_2 = \tan(u_0)u_1$ ; ou seja,  $\pi(M_{u_0})$  é uma reta que passa pela origem, com inclinação  $\tan(u_0)$ .

Para os demais círculos na esfera, podemos argumentar como segue: se  $C$  é um círculo que não contém o polo norte,  $\pi(C)$  será um círculo “de fato” em  $\mathbb{R}^2$ ; e se é um círculo que contém o polo norte,  $\pi(C)$  será uma reta. Podemos ainda incluir mais informações: se  $C$  passa pelo polo sul,  $\pi(C)$  será um círculo ou uma reta que passa pela origem. Caso contrário,  $\pi(C)$  será um círculo ou uma reta que não passa pela origem. E assim cobrimos todas as possibilidades.

Assim como no caso unidimensional, o fato de termos escolhido fazer a projeção da esfera  $x_1^2 + x_2^2 + (x_3 - 1)^2 = 1$  não altera a natureza da projeção, como mostra o exemplo a seguir.

**Exemplo 1.4.4.** Considere agora a 2-esfera de equação  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ , de modo que o polo norte é o ponto  $N = (0, 0, 1)$ . Seguimos o mesmo procedimento de antes: se  $P = (x_1, x_2, x_3)$  é um ponto da esfera distinto de  $N$ , tomamos a reta que passa por  $N$  e  $P$  e buscamos o ponto de interseção desta reta com o plano  $x_1x_2$ :

$$\begin{aligned} L_{N,P}(t) &= N + t(P - N) \\ &= (0, 0, 1) + t[(x_1, x_2, x_3) - (0, 0, 1)] \\ &= (0, 0, 1) + t(x_1, x_2, x_3 - 1) \\ &= (tx_1, tx_2, t(x_3 - 1) + 1) \\ &= (f(x_1), g(x_2), h(x_3)) . \end{aligned}$$

Temos  $h(x_3) = 0$  quando  $t = \frac{1}{1 - x_3}$ ; assim obtemos  $\pi : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por

$$\pi(P) = \pi(x_1, x_2, x_3) = \left( \frac{x_1}{1 - x_3}, \frac{x_2}{1 - x_3} \right) .$$

Novamente,  $\pi$  é uma bijeção diferenciável entre  $\mathbb{S}^2 \setminus N$  e  $\mathbb{R}^2$ , e note agora que o polo sul é projetado na origem:  $\pi(0, 0, -1) = (0, 0)$ . Podemos ver também que  $\pi(N) \rightarrow \infty$  quando  $P \rightarrow N$ , de forma que  $\pi$  é uma correspondência um a um entre  $\mathbb{S}^2$  e  $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ .

Veja que esta projeção deixa o equador da esfera fixo. De fato, um ponto do equador é da forma  $P = (x_1, x_2, 0)$  com  $x_1^2 + x_2^2 = 1$ ; então  $\pi(P) = (x_1, x_2) = P$ . Agora, um ponto do hemisfério superior da esfera é levado em um ponto do lado de fora do círculo  $x_1^2 + x_2^2 = 1$  em  $\mathbb{R}^2$ , e um ponto do hemisfério inferior da esfera é levado em um ponto no interior do

círculo  $x_1^2 + x_2^2 = 1$ . De fato, se  $P$  está no hemisfério superior então  $P = (x_1, x_2, x_3)$  com  $x_3 > 0$ ; logo  $1 - x_3 < 1$ , o que implica

$$\frac{1}{1 - x_3} > 1 \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{x_1}{1 - x_3} \right| > |x_1| \quad ; \quad \left| \frac{x_2}{1 - x_3} \right| > |x_2| .$$

Analogamente, se  $P$  está no hemisfério inferior, então  $x_3 < 0$ , logo  $1 - x_3 > 1$ , o que implica

$$\frac{1}{1 - x_3} < 1 \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{x_1}{1 - x_3} \right| < |x_1| \quad ; \quad \left| \frac{x_2}{1 - x_3} \right| < |x_2| .$$

Assim vemos que esta projeção corresponde a fazer um furo na 2-esfera e esticá-la sobre o plano, mantendo o equador fixo; empurramos o hemisfério inferior para o interior do círculo de raio 1 e esticamos o hemisfério superior na parte de fora deste mesmo círculo.

Queremos agora encontrar a aplicação inversa da projeção estereográfica. Seja  $Q = (x_1, x_2) = (x_1, x_2, 0)$  um ponto em  $\mathbb{R}^2$ , e considere a reta passando por  $Q$  e  $N = (0, 0, 1)$ :

$$\begin{aligned} L_{N,Q}(t) &= N + t(Q - N) \\ &= (0, 0, 1) + t[(x_1, x_2, 0) - (0, 0, 1)] \\ &= (0, 0, 1) + (tx_1, tx_2, -t) \\ &= (tx_1, tx_2, 1 - t) . \end{aligned}$$

Buscamos o ponto  $P$  de interseção entre  $L_{N,Q}$  e  $\mathbb{S}^2$ ; isto é, queremos encontrar  $t$  tal que

$$\begin{aligned} (tx_1)^2 + (tx_2)^2 + (1 - t)^2 &= 1 \quad \Rightarrow \quad t^2x_1^2 + t^2x_2^2 + 1 - 2t + t^2 = 1 \\ \Rightarrow t^2(x_1^2 + x_2^2 + 1) &= 2t \quad \Rightarrow \quad t(x_1^2 + x_2^2 + 1) = 2 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{2}{x_1^2 + x_2^2 + 1} \end{aligned}$$

(na penúltima implicação dividimos por  $t$  pois  $0 < t < 1$ , já que  $L_{N,Q}(0) = N$  e  $L_{N,Q}(1) = Q$ ). Obtemos assim

$$\pi^{-1}(x_1, x_2) = \left( \frac{2x_1}{x_1^2 + x_2^2 + 1}, \frac{2x_2}{x_1^2 + x_2^2 + 1}, \frac{x_1^2 + x_2^2 - 1}{x_1^2 + x_2^2 + 1} \right) \in \mathbb{S}^2 .$$

Note que  $\pi^{-1}$  é contínua e  $\pi^{-1}(Q) \rightarrow N$  quando  $Q \rightarrow \infty$  (isto é, quando  $|x_1|, |x_2| \rightarrow \infty$ ).

Por último, observamos que como podemos fazer a associação  $\mathbb{R}^2 \longleftrightarrow \mathbb{C}$ , obtemos uma associação entre  $\mathbb{S}^2$  e  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ . O conjunto  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$  é chamado *plano complexo estendido* ou *esfera de Riemann* (nome herdado após a identificação fornecida pela projeção estereográfica):

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{S}^2 &\rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\} \\ (x_1, x_2, x_3) &\mapsto \frac{x_1}{1 - x_3} + i \frac{x_2}{1 - x_3} . \end{aligned}$$

Como deve ter ficado claro, a construção acima pode ser estendida para dimensões maiores. Vejamos a projeção estereográfica entre a 3-esfera e  $\mathbb{R}^3$ .

**Exemplo 1.4.5.** Considere

$$\mathbb{S}^3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 ; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^4 .$$

Seguindo o mesmo procedimento de antes (tomando a reta que passa pelo polo norte e um outro ponto da esfera, e buscando o ponto de interseção da reta com  $\{x_4 = 0\}$ ), obtemos  $\pi : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por

$$\pi(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left( \frac{x_1}{1-x_4}, \frac{x_2}{1-x_4}, \frac{x_3}{1-x_4} \right),$$

e sua inversa será dada portanto por

$$\pi^{-1}(x_1, x_2, x_3) = \left( \frac{2x_1}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 1}, \frac{2x_2}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 1}, \frac{2x_3}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 1}, \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 1} \right).$$

Temos assim uma relação entre  $\mathbb{S}^3$  e  $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ ; contudo, para obter mais informações geométricas da 3- esfera, precisamos fazer um estudo mais aprofundado, ao qual dedicamos todo o próximo capítulo.

## 2 O Fibrado de Hopf

### 2.1 Definição de fibrado

Chegamos ao momento mais importante do nosso trabalho. Nem tudo que vimos até agora será diretamente relevante para a compreensão do fibrado de Hopf, mas a familiaridade que foi desenvolvida anteriormente nos permitirá ver esta estrutura mais facilmente.

O fibrado (ou fibração) de Hopf é um mapa da 3-esfera  $\mathbb{S}^3$  para a 2-esfera  $\mathbb{S}^2$  e oferece uma compreensão mais profunda de  $\mathbb{S}^3$ .

Formalmente, um fibrado é uma estrutura  $(E, B, \pi, F)$  onde  $E$ ,  $B$  e  $F$  são espaços topológicos e  $\pi : E \rightarrow B$  é a projeção contínua  $\pi(x, y) = x$ ,  $(x, y) \in E$ .  $B$  é chamado a *base* do fibrado,  $E$  o *espaço total*, e  $F$  a *fibra*, e estes espaços cumprem a propriedade de que *localmente* o fibrado é um produto cartesiano. Isto é, para cada  $x \in B$  podemos encontrar um aberto  $U_x \subset B$  tal que o mapa

$$\varphi_x : \pi^{-1}(U_x) \rightarrow U_x \times F$$

é um homeomorfismo local e o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U_x) \subset E & \xrightarrow{\varphi_x} & U_x \times F \\ \pi \downarrow & \swarrow \text{proj}_1 & \\ U_x \subset B & & \end{array}$$

Costumamos denotar

$$F \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} B.$$

Intuitivamente, o espaço total seria a união (disjunta) de todas as fibras à medida que percorremos os pontos da base. Para cada ponto  $x \in B$ ,  $\pi^{-1}(x)$  é isomorfo a  $F$ , e estamos fazendo a “união” de todas estas fibras.

Se  $E = B \times F$  dizemos que  $E$  é um fibrado *trivial*. Caso contrário, é não trivial. Vejamos alguns exemplos.

**Exemplo 2.1.1.** O cilindro (finito ou infinito).

Tomamos como base  $B = \mathbb{S}^1$ , e como fibra  $F = [0, 1]$  (gerando o cilindro finito) ou  $F = \mathbb{R}$  (gerando o cilindro infinito). O cilindro será o espaço total:  $E = B \times F = \mathbb{S}^1 \times [0, 1]$  ou  $E = B \times F = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ .

Geometricamente, estamos combinando o círculo e um intervalo/toda a reta para formar o cilindro, que é, portanto, um fibrado trivial; veja a Figura 26:

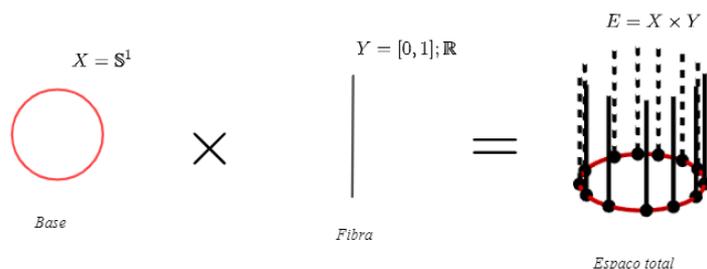


Figura 26: Fibrado trivial: cilindro

Podemos, neste exemplo, inverter  $B$  e  $F$ : tomar como base  $B = [0, 1]$  ou  $\mathbb{R}$ , e como fibra  $F = \mathbb{S}^1$ . O cilindro continua sendo o espaço total,  $E = B \times F = (0, 1) \times \mathbb{S}^1$  ou  $E = \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$ . Veja a Figura 27:

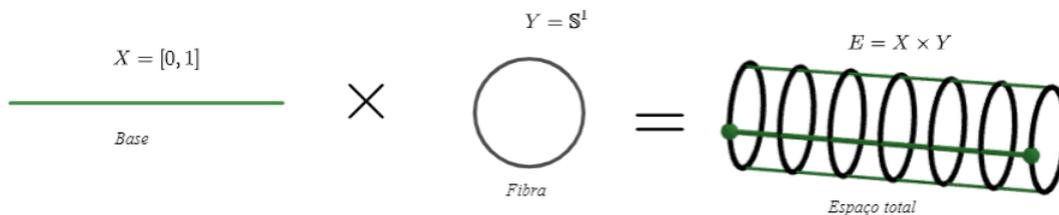


Figura 27: Fibrado trivial: cilindro

**Exemplo 2.1.2.** O toro.

Tomamos como base  $B = \mathbb{S}^1$  e fibra  $F = \mathbb{S}^1$ ; então o toro é o espaço total  $E = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ , um fibrado trivial (Figura 28).

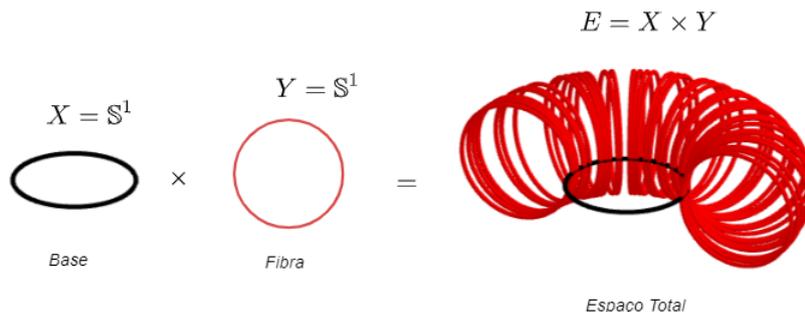


Figura 28: Fibrado trivial: toro

**Exemplo 2.1.3.** A faixa de Möbius é o exemplo mais simples de um fibrado não trivial. Tomamos como base  $B = \mathbb{S}^1$  e como fibra  $F = [0, 1]$  (o mesmo que fizemos para o cilindro). A faixa de Möbius será o espaço total  $E$ . Porém agora, por construção, vemos que  $E \neq B \times F$ , veja a Figura 29:



Figura 29: Fibrado não trivial: faixa de Möbius

## 2.2 Fibrado de Hopf via esfera de Riemann

Primeiramente vamos observar um aspecto geométrico interessante de  $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$ . Lembre que

$$\mathbb{S}^3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 ; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1\}.$$

Agora veja que

$$\mathbb{S}^3 \cap \{x_4 = 0\} = \{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\} = \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3 ;$$

isto é, o equador da 3-esfera é a 2-esfera; chamemos o equador de  $\mathbb{E}$ .

Se fizermos a identificação  $\mathbb{R}^4 \longleftrightarrow \mathbb{C}^2$  através das identidades  $z_1 = x_1 + ix_2$ ,  $z_2 = x_3 + ix_4$ , podemos ver a 3-esfera mergulhada em  $\mathbb{C}^2$  e dada em coordenadas complexas por

$$\mathbb{S}^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 ; |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\} ,$$

e aqui as coisas começam a ficar bem interessantes.

Uma representação muito simplificada de  $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{C}^2$ , mas que nos auxiliará bastante no futuro, é a Figura 30:

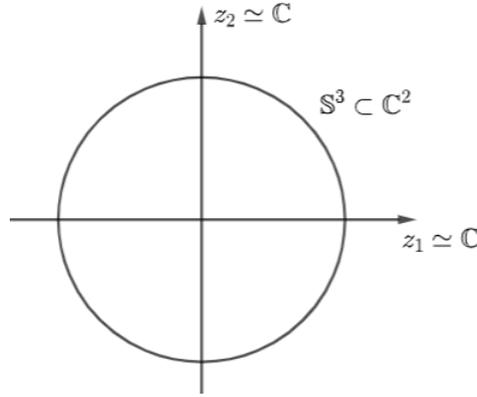


Figura 30: Representação de  $\mathbb{S}^3$  em  $\mathbb{R}^2$

**Exemplo 2.2.1.** Pensando em  $\mathbb{S}^3$  mergulhada em  $\mathbb{C}^2$ , podemos estudar a superfície dada por  $|z_1| = |z_2|$ ; para simplificar as contas, considere

$$X = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 ; |z_1|^2 = |z_2|^2\} .$$

Desta forma, na interseção  $X \cap \mathbb{S}^3$  temos

$$|z_1|^2 + |z_1|^2 = 1 \Rightarrow 2|z_1|^2 = 1 \Rightarrow |z_1|^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = \frac{1}{2}$$

e, analogamente,

$$|z_2|^2 + |z_2|^2 = 1 \Rightarrow 2|z_2|^2 = 1 \Rightarrow |z_2|^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x_3^2 + x_4^2 = \frac{1}{2} .$$

Portanto o conjunto de pontos  $(z_1, z_2)$  em  $\mathbb{C}^2$  que estão em  $X \cap \mathbb{S}^3$  correspondem aos pontos  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  em  $\mathbb{R}^4$  tais que

$$x_1^2 + x_2^2 = \frac{1}{2} \quad ; \quad x_3^2 + x_4^2 = \frac{1}{2} .$$

Ou seja:  $X \cap \mathbb{S}^3 \simeq \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 = \text{toro!}$

A superfície  $X$  não tem nada de especial: podemos encontrar muitos toros dentro de  $\mathbb{S}^3$ . De fato, se  $r$  é um número real positivo e

$$X_r = \left\{ (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 ; \frac{|z_2|}{|z_1|} = r \right\} ,$$

a superfície  $X_r \cap \mathbb{S}^3$  é um toro. Os argumentos para provar este fato são análogos ao caso anterior. Um toro proveniente desta construção é chamado um *toro de Clifford*.

Passamos agora a uma etapa crucial da construção do fibrado de Hopf: visualizar que o espaço total é uma união de círculos. Considere o conjunto

$$L_a = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 ; z_2 = az_1, a \in \mathbb{C} \cup \infty\}.$$

Veja que  $L_a$  é uma reta complexa que passa pela origem; em particular,  $L_0 = \{z_2 = 0\} = \text{eixo } z_1$ , e  $L_\infty = \{z_1 = 0\} = \text{eixo } z_2$ . Ou seja, cada  $L_a$  tem dimensão complexa um, e dimensão real dois. Veja na Figura 31 uma representação (simplificada) desta situação:

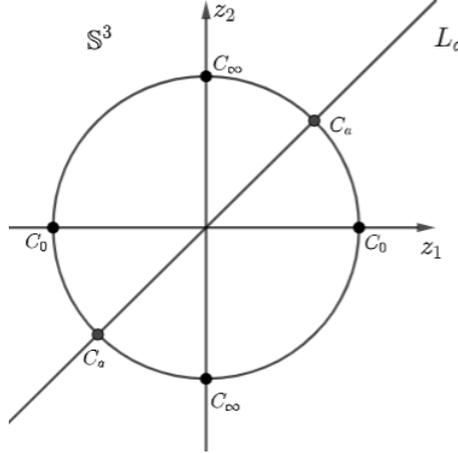


Figura 31: Representação de  $L_a$  e  $\mathbb{S}^3$

Estamos interessados na interseção de cada reta  $L_a$  com  $\mathbb{S}^3$ . Começemos pelos casos particulares  $a = 0$  e  $a = \infty$ . Então

$$L_0 \cap \mathbb{S}^3 \Rightarrow z_2 = 0 ; |z_1|^2 = 1 \Rightarrow |z_1| = 1 ;$$

obtemos assim o conjunto  $\{|z_1| = 1\} \times \{0\}$ , que é um círculo. Mais do que isso: se visualizarmos em  $\mathbb{R}^4$ ,  $\{|z_1| = 1\} \times \{0\} = \{(x_1, x_2, 0, 0)\}$  onde  $x_1^2 + x_2^2 = 1$ , ou seja, é o equador de  $\mathbb{S}^2$ , e portanto um grande círculo (ou círculo máximo). Analogamente,

$$L_\infty \cap \mathbb{S}^3 \Rightarrow z_1 = 0 ; |z_2|^2 = 1 \Rightarrow |z_2| = 1 ;$$

obtemos o conjunto  $\{0\} \times \{|z_2| = 1\} = (0, 0, x_3, x_4)$  com  $x_3^2 + x_4^2 = 1$ , que também é um grande círculo (ou círculo máximo) de  $\mathbb{S}^2$ .

Naturalmente, o mesmo acontece para  $a$  qualquer, embora fique um pouco mais difícil de ver pelas contas. Se  $z_2 = az_1$ , então  $|z_2| = |az_1| = |a||z_1|$  e portanto  $|z_2|^2 = |a|^2|z_1|^2$ ; logo

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1 \Rightarrow |z_1|^2 + |a|^2|z_1|^2 = (1 + |a|^2)|z_1|^2 = 1 \Rightarrow |z_1|^2 = \frac{1}{1 + |a|^2} .$$

Com isso, obtemos  $|z_2|^2 = \frac{|a|^2}{1 + |a|^2}$ . Isto nos dá um grande círculo de  $\mathbb{S}^2$  porque é o

conjunto de pontos  $(z_1, z_2) \in \mathbb{S}^3$  tais que  $|z_1|^2 = \frac{1}{1 + |a|^2}$  (um círculo) e  $z_2 = az_1$ . Podemos também pensar que  $L_a \cap \mathbb{S}^3$  é um grande círculo pela mesma razão que a interseção de um plano em  $\mathbb{R}^3$  que passa pela origem com  $\mathbb{S}^2$  é um grande círculo (ou círculo máximo).

Futuramente, veremos que estes grandes círculos  $C_a = L_a \cap \mathbb{S}^3$  então posicionados de uma maneira muito interessante em  $\mathbb{R}^3$  (entrelaçados). De momento, o que queremos ver é que a união (disjunta) de todos eles nos dá  $\mathbb{S}^3$ . Uma maneira de visualizar isso é pensar em  $\mathbb{S}^2$  e  $\mathbb{S}^0$ . Aqui consideramos  $\mathbb{S}^0 = \{-1, 1\}$ , a união de dois pontos antípodas. Podemos então pensar que  $\mathbb{S}^2$  é a união de todos os pares  $\{-p, p\} \simeq \mathbb{S}^0$  onde  $p$  está no hemisfério superior da 2-esfera. Observe que os pares  $\{-p, p\}$  podem ser vistos como os grandes círculos de  $\mathbb{S}^1$ . “Aumentando a dimensão”, é como se  $\mathbb{S}^3$  fosse a união (disjunta) de todos os  $\mathbb{S}^1$ , que são grandes círculos de  $\mathbb{S}^2$ .

O que torna este argumento interessante é que podemos formalizá-lo utilizando fibrados. Descreveremos agora como obter o fibrado

$$\mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{S}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{S}^2$$

onde  $\mathbb{S}^2$  é a *base*,  $\mathbb{S}^1$  é a *fibra*,  $\mathbb{S}^3$  é o *espaço total* e  $f$  é a *projeção*. Vamos deduzir este mapa tanto em coordenadas complexas como em coordenadas reais. Considere

$$\begin{aligned} h : \mathbb{C}^2 &\rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\} \\ (z_1, z_2) &\mapsto \frac{z_2}{z_1} = x_1 + ix_2 \end{aligned}$$

e a inversa da projeção estereográfica

$$\begin{aligned} \pi^{-1} : \mathbb{C} \cup \{\infty\} &\rightarrow \mathbb{S}^2 \\ x_1 + ix_2 &\mapsto \left( \frac{2x_1}{x_1^2 + x_2^2 + 1}, \frac{2x_2}{x_1^2 + x_2^2 + 1}, \frac{x_1^2 + x_2^2 - 1}{x_1^2 + x_2^2 + 1} \right). \end{aligned}$$

Temos assim

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 & \xrightarrow{h} & \mathbb{C} \cup \{\infty\} \xrightarrow{\pi^{-1}} \mathbb{S}^2 \\ & \searrow & \nearrow \\ & & \pi^{-1} \circ h \end{array}$$

Definimos  $f = \pi^{-1} \circ h|_{\mathbb{S}^3}$ ; isto é, dados  $(z_1, z_2) \in \mathbb{S}^3$ ,

$$\begin{aligned} f(z_1, z_2) &= \pi^{-1} \circ h(z_1, z_2) = \pi^{-1} \left( \frac{z_2}{z_1} \right) \\ &= \left( \frac{2 \frac{z_2}{z_1}}{\left| \frac{z_2}{z_1} \right|^2 + 1}, \frac{\left| \frac{z_2}{z_1} \right|^2 - 1}{\left| \frac{z_2}{z_1} \right|^2 + 1} \right) = \left( \frac{2 \frac{z_2 \bar{z}_1}{z_1 \bar{z}_1}}{\frac{|z_2|^2 + |z_1|^2}{|z_1|^2}}, \frac{\frac{|z_2|^2 - |z_1|^2}{|z_1|^2}}{\frac{|z_2|^2 + |z_1|^2}{|z_1|^2}} \right) \\ &= \left( \frac{2z_2 \bar{z}_1}{|z_2|^2 + |z_1|^2}, \frac{|z_2|^2 - |z_1|^2}{|z_2|^2 + |z_1|^2} \right) \\ &= \left( 2z_2 \bar{z}_1, |z_2|^2 - |z_1|^2 \right). \end{aligned}$$

Portanto a projeção do fibrado de Hopf é definida em coordenadas complexas como

$$f : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2 \\ (z_1, z_2) \mapsto \left( 2z_2\bar{z}_1, |z_2|^2 - |z_1|^2 \right)$$

Observe que à direita temos um elemento de  $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$ , que podemos interpretar como um ponto de  $\mathbb{R}^3$ ; resulta que este ponto está em  $\mathbb{S}^2$ . De fato, em coordenadas reais, temos

$$f : \mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{S}^2 \\ (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto \left( 2(x_1x_3 + x_2x_4), 2(x_1x_4 - x_2x_3), (x_3^2 + x_4^2) - (x_1^2 + x_2^2) \right)$$

e, tomando a soma dos quadrados destas coordenadas, obtemos

$$\begin{aligned} & \left( 2(x_1x_3 + x_2x_4) \right)^2 + \left( 2(x_1x_4 - x_2x_3) \right)^2 + \left( (x_3^2 + x_4^2) - (x_1^2 + x_2^2) \right)^2 \\ &= 4 \left( x_1^2x_3^2 + 2x_1x_2x_3x_4 + x_2^2x_4^2 \right) + 4 \left( x_1^2x_4^2 - 2x_1x_2x_3x_4 + x_2^2x_3^2 \right) \\ & \quad + \left( (x_3^2 + x_4^2)^2 - 2(x_3^2 + x_4^2)(x_1^2 + x_2^2) + (x_1^2 + x_2^2)^2 \right) \\ &= 4(x_1^2 + x_2^2)(x_3^2 + x_4^2) + \left( (x_3^2 + x_4^2)^2 - 2(x_3^2 + x_4^2)(x_1^2 + x_2^2) + (x_1^2 + x_2^2)^2 \right) \\ &= \left( (x_3^2 + x_4^2)^2 + 2(x_3^2 + x_4^2)(x_1^2 + x_2^2) + (x_1^2 + x_2^2)^2 \right) \\ &= \left( (x_3^2 + x_4^2) + (x_1^2 + x_2^2) \right)^2 = \left( x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \right)^2 = 1. \end{aligned}$$

Agora que temos a projeção  $f : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2$  explicitamente, queremos analisar as fibras resultantes desta construção. Como veremos, as fibras serão os grandes círculos  $C_a$  vistos anteriormente.

Seja

$$F : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\} \simeq \mathbb{S}^2 \\ (z_1, z_2) \mapsto \frac{z_2}{z_1} = a$$

Note que  $f = F|_{\mathbb{S}^3}$ . Veja também que, para cada  $a \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ,

$$F^{-1}(a) = L_a = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 ; z_2 = az_1\}.$$

Em particular,  $F^{-1}(0) = L_0 = \text{eixo } z_1$ ,  $F^{-1}(\infty) = L_\infty = \text{eixo } z_2$ .

Sabemos que, através da projeção estereográfica, cada ponto  $a \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  se identifica com um ponto de  $\mathbb{S}^2$ . Em particular, o polo sul  $S$  da esfera se identifica com a origem de  $\mathbb{C}$ , e o polo norte  $N$  se identifica com o ponto no infinito. Então  $F^{-1}(S) = L_0$ ,  $F^{-1}(N) = L_\infty$ .

Agora, como  $f = F|_{\mathbb{S}^3}$ , obtemos que

$$f^{-1}(a) = F^{-1}(a) \cap \mathbb{S}^3 = L_a \cap \mathbb{S}^3 = C_a.$$

Em particular,

$$f^{-1}(0) = f^{-1}(S) = C_0 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{S}^3 ; z_2 = 0, |z_1| = 1\},$$

$$f^{-1}(\infty) = f^{-1}(N) = C_\infty = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{S}^3 ; z_1 = 0, |z_2| = 1\}.$$

Veja as Figuras 32 e 33:

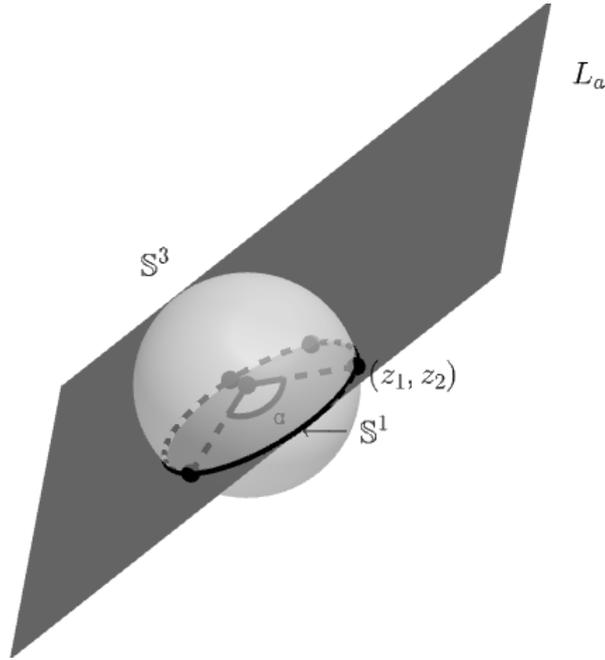


Figura 32: Representação da interseção de  $L_a$  e  $\mathbb{S}^3$

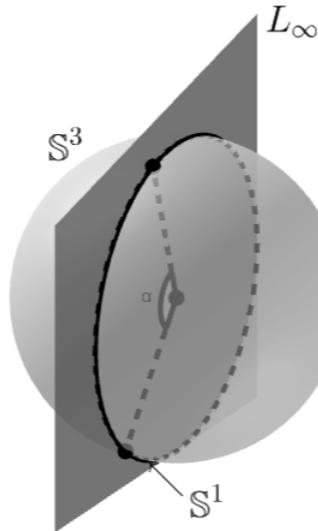


Figura 33: Representação da interseção de  $L_\infty$  e  $\mathbb{S}^3$

Façamos um estudo mais aprofundado destas fibras.

Primeiramente observamos que se  $z, \lambda \in \mathbb{C}$  e  $|\lambda| = 1$ , então o número  $\lambda z$  é uma rotação de  $z$ . De fato, escrevendo  $z$  e  $\lambda$  em coordenadas polares temos  $z = re^{i\theta}$ ,  $\lambda = e^{i\alpha}$ ; logo  $\lambda z = re^{i\theta}e^{i\alpha} = re^{i(\theta+\alpha)}$ . Isto significa, naturalmente, que  $z$  e  $\lambda z$  estão no mesmo círculo em  $\mathbb{C}$  centrado na origem.

Agora considere um ponto  $(v_1, v_2)$  em  $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{C}^2$  e seja  $\lambda \in \mathbb{C}$  tal que  $|\lambda| = 1$ . Então  $(\lambda v_1, \lambda v_2)$  está na mesma fibra que  $(v_1, v_2)$ . De fato,

$$f(\lambda v_1, \lambda v_2) = \frac{\lambda v_2}{\lambda v_1} = \frac{v_2}{v_1} = f(v_1, v_2) .$$

Veremos agora que esta é a única maneira de dois pontos estarem na mesma fibra. Sejam

$(v_1, v_2), (w_1, w_2)$  pontos em  $\mathbb{S}^3$  tais que  $f(w_1, w_2) = f(v_1, v_2)$ . Isto é:

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{w_2}{w_1} = a \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}.$$

Vejamos separadamente os casos  $a = 0$ ,  $a = \infty$ , e  $a \in \mathbb{C}$  qualquer.

Se  $a = 0$ , temos  $f^{-1}(0) = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{S}^3 ; z_2 = 0, |z_1| = 1\}$ ; isto implica  $w_2 = v_2 = 0$  e  $|w_1| = |v_1| = 1$ , e naturalmente podemos encontrar um número complexo  $\lambda$  de módulo 1 tal que  $w_1 = \lambda v_1$ . Para sermos bem completos, basta escrever  $v_1 = e^{i\theta}$ ,  $w_1 = e^{i\phi}$ , e tomar  $\lambda = e^{i(\phi-\theta)}$ . Analogamente, se  $a = \infty$ ,  $f^{-1}(\infty) = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{S}^3 ; z_1 = 0, |z_2| = 1\}$ , o que implica  $w_1 = v_1 = 0$ ,  $|w_2| = |v_2| = 1$ , e procedemos como antes. Veja as Figuras 34 e 35:

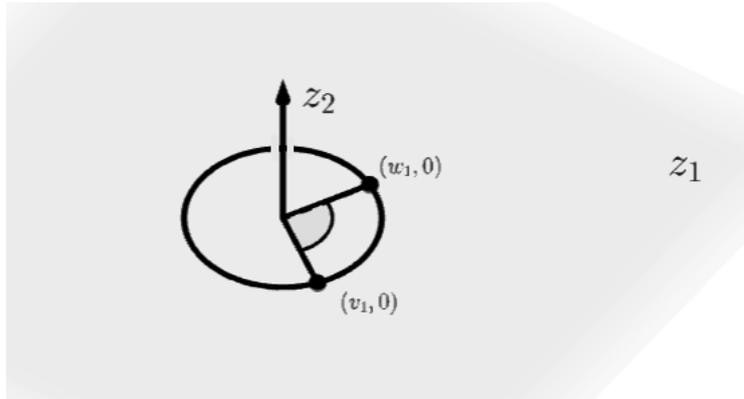


Figura 34: Representação da fibra  $f^{-1}(0)$

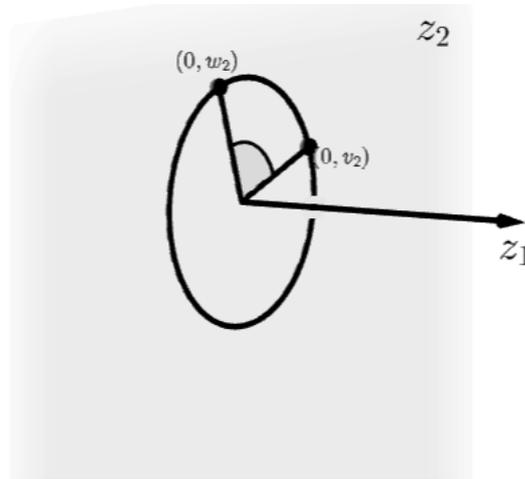


Figura 35: Representação da fibra  $f^{-1}(\infty)$

Suponha agora  $a \in \mathbb{C}^*$  qualquer. Escreva  $v_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ ,  $v_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ ,  $w_1 = s_1 e^{i\phi_1}$  e  $w_2 = s_2 e^{i\phi_2}$  (note que  $r_i, s_i > 0$ ). Por hipótese  $\frac{v_2}{v_1} = a = \frac{w_2}{w_1}$ , isto é,

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{r_2 e^{i\theta_2}}{r_1 e^{i\theta_1}} = \frac{r_2}{r_1} e^{i(\theta_2 - \theta_1)} = a = \frac{w_2}{w_1} = \frac{s_2 e^{i\phi_2}}{s_1 e^{i\phi_1}} = \frac{s_2}{s_1} e^{i(\phi_2 - \phi_1)}.$$

Queremos mostrar que existe  $\lambda \in \mathbb{C}^*$ ,  $|\lambda| = 1$  tal que

$$w_1 = \lambda v_1, \quad w_2 = \lambda v_2.$$

Primeiramente note que  $\frac{s_2}{s_1} = \frac{r_2}{r_1}$  implica  $s_2 = \frac{r_2}{r_1}s_1$ ; como  $(v_1, v_2)$  e  $(w_1, w_2)$  são pontos em  $\mathbb{S}^3$ , temos

$$1 = |w_1|^2 + |w_2|^2 = s_1^2 + s_2^2 = s_1^2 + \left(\frac{r_2}{r_1}s_1\right)^2 = s_1^2 \left(1 + \frac{r_2^2}{r_1^2}\right) = s_1^2 \left(\frac{r_1^2 + r_2^2}{r_1^2}\right) = \frac{s_1^2}{r_1^2}$$

logo  $s_1^2 = r_1^2$ , e como ambos são positivos, obtemos  $s_1 = r_1$ ; analogamente, escrevendo  $s_1 = \frac{r_1}{r_2}s_2$ , concluímos que  $s_2 = r_2$ . Assim podemos escrever  $w_1 = r_1e^{i\phi_1}$ ,  $w_2 = r_2e^{i\phi_2}$ . Agora, veja que

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{w_2}{w_1} \text{ implica } \frac{v_1}{v_1} = e^{i(\phi_1 - \theta_1)} = e^{i(\phi_2 - \theta_2)} = \frac{w_2}{v_2};$$

tome  $\lambda = e^{i(\phi_1 - \theta_1)} = e^{i(\phi_2 - \theta_2)}$ . Então naturalmente  $|\lambda| = 1$  e

$$\lambda v_1 = r_1e^{i\theta_1}e^{i(\phi_1 - \theta_1)} = r_1e^{i\phi_1} = w_1; \quad \lambda v_2 = r_2e^{i\theta_2}e^{i(\phi_2 - \theta_2)} = r_2e^{i\phi_2} = w_2.$$

Note que com este argumento, voltamos a concluir que cada fibra  $f^{-1}(a)$  é um círculo.

Finalmente, queremos ver que estas fibras estão “linkadas”. Lembre que o equador  $\mathbb{E}$  de  $\mathbb{S}^3$  é o conjunto  $\mathbb{S}^3 \cap \{x_4 = 0\} = \{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$  (ou seja  $\mathbb{E} \simeq \mathbb{S}^2$ ). Agora, sobre  $\mathbb{E}$  temos a fibra  $f^{-1}(0) = \{x_1^2 + x_2^2 = 1\} = \mathbb{E} \cap \{x_3 = 0\}$ ; isto é,  $f^{-1}(0)$  é o equador de  $\mathbb{E}$ . Primeiro veremos que todas as fibras estão entrelaçadas com  $C_0 = f^{-1}(0)$ .

Seja  $v = (v_1, v_2)$  um ponto qualquer de  $\mathbb{S}^3$ . Então existe um ponto de  $\mathbb{E}$  que está na mesma fibra de  $v$ ; de fato, se  $v_1 = r_1e^{i\theta_1}$ ,  $v_2 = r_2e^{i\theta_2} \neq 0$ , multiplicamos  $v$  por um  $\lambda$  complexo de módulo 1 para levá-lo a um ponto  $q$  de  $\mathbb{E}$ . Agora, note que o ponto antípoda de  $q$  em  $\mathbb{E}$ ,  $-q$ , está na mesma fibra de  $q$  e  $v$  (pois  $-q = \lambda q$  com  $\lambda = -1$ )! Portanto a fibra que contém  $v$ ,  $q$  e  $-q$  está entrelaçada com a fibra  $C_0$  (que, lembre, é o equador de  $\mathbb{E}$ ); veja a Figura 36:

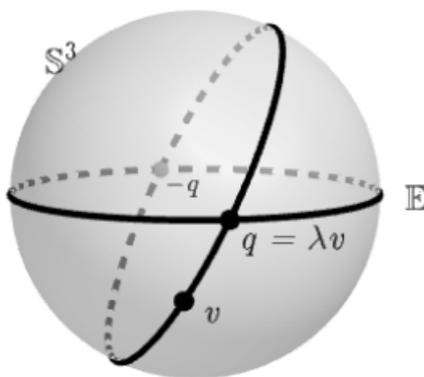


Figura 36: Pontos  $v, q$  e  $-q$  sobre a mesma fibra

Agora, a fibra  $C_0 = f^{-1}(0)$  não é especial nesse sentido; assim como  $\mathbb{S}^2$  pode ser rotacionada de forma que qualquer grande círculo seja levado no equador, e qualquer par de pontos antípodas seja levado nos pólos, podemos rotacionar  $\mathbb{S}^3$  de forma a levar qualquer fibra no equador de  $\mathbb{E}$  e repetir o argumento acima. Com isto concluímos que *todas as fibras estão entrelaçadas duas a duas*; veja a Figura 37:

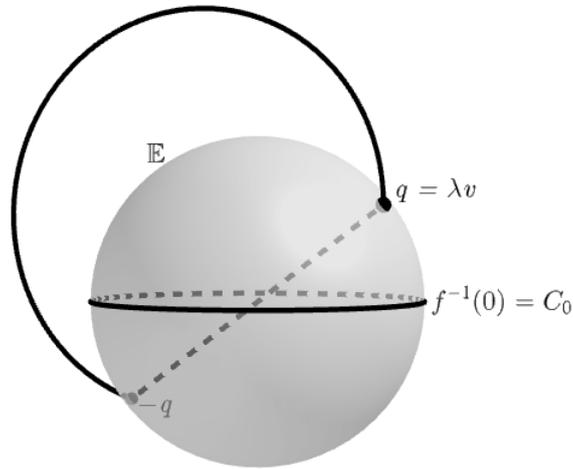


Figura 37: Fibras linkadas

As Figuras 38 a 42 foram retiradas do vídeo <https://nilesjohnson.net/hopf.html> e mostram como as fibras se posicionam.

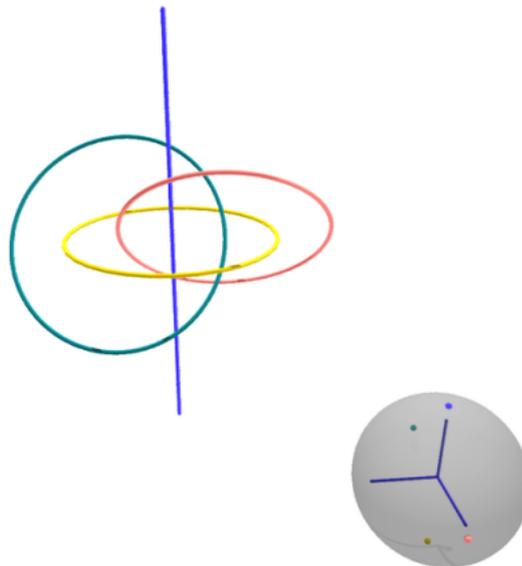


Figura 38: Fibras de quatro pontos de  $\mathbb{S}^2$

Veja como estão todas entrelaçadas duas a duas. Note também que a fibra do polo norte aparece como uma reta (azul), mas lembre que esta reta é a projeção estereográfica do círculo  $f^{-1}(\infty) = L_\infty \cap \mathbb{S}^3$ .

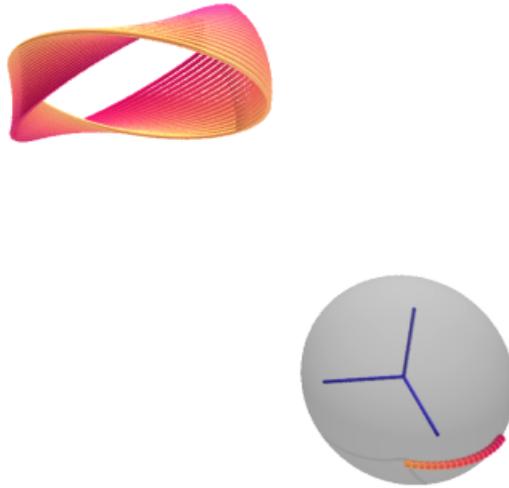


Figura 39: Fibras de pontos sobre um paralelo de  $\mathbb{S}^2$

A figura bidimensional que aparece quando consideramos as fibras de todos os pontos sobre o arco de paralelo da Figura 39 é chamada *faixa de Hopf* (é possível mostrar que a faixa de Hopf é um fibrado não trivial de base  $\mathbb{S}^1$  e fibra  $[0, 1]$ , porém a projeção não é a mesma função  $f$  do fibrado de Hopf).

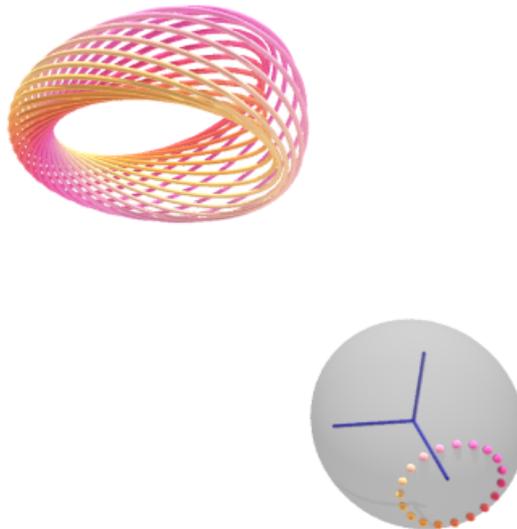


Figura 40: Fibras de pontos sobre um círculo em  $\mathbb{S}^2$

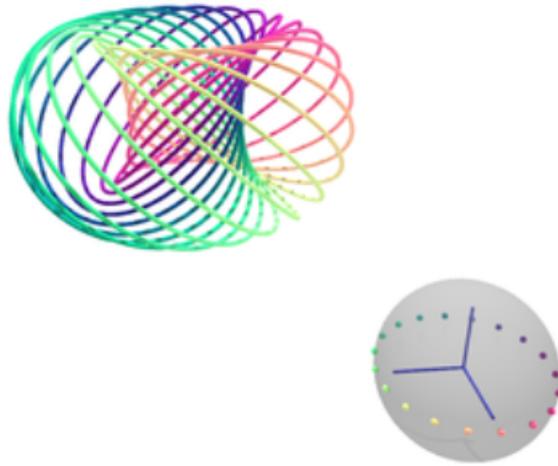


Figura 41: Fibras de pontos sobre o equador de  $\mathbb{S}^2$

As figuras 40 e 41 mostram (visualmente) que a união das fibras de todos os pontos sobre um círculo dá origem a um toro, que por sua vez é a projeção estereográfica de um toro de Clifford  $X_r$  do exemplo 2.2.1.

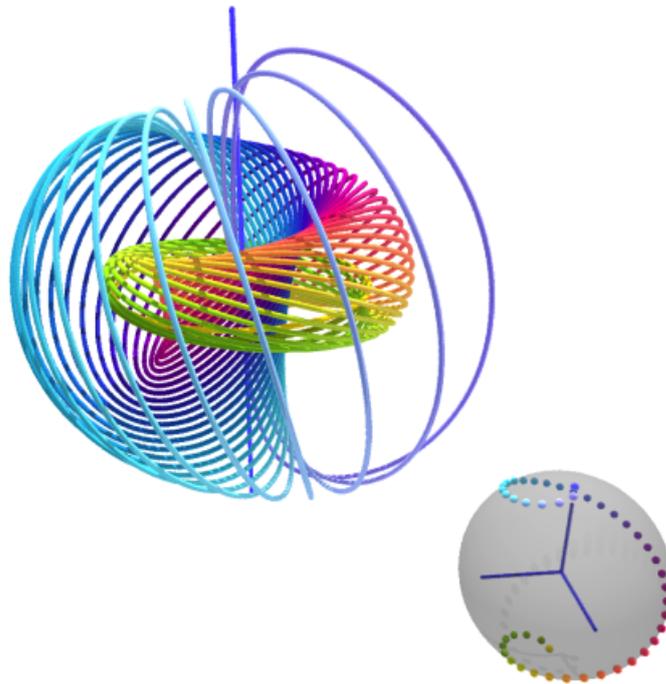


Figura 42: Fibras de pontos sobre uma curva em  $\mathbb{S}^2$

Note como o raio dos círculos vai diminuindo à medida que vamos do polo norte ao polo sul de  $\mathbb{S}^2$ , dando origem a uma figura que “entra dentro de si mesma”, como uma concha.

Outra animação interessante, que mostra como as fibras vão variando em  $\mathbb{S}^3$  à medida que os pontos vão variando na base  $\mathbb{S}^2$ , está no link

<https://www.geogebra.org/m/vjfdn5d>

Com isto concluímos o estudo do fibrado de Hopf. É uma construção de fato muito interessante: a 3-esfera, por definição o conjunto de pontos a uma distância fixa de um centro, ao ser inserida em  $\mathbb{R}^3$  se decompõe numa união de círculos.

Se considerarmos a projeção estereográfica de  $\mathbb{S}^3$  em  $\mathbb{R}^3$ , obtemos o seguinte: a união das fibras dos pontos de  $\mathbb{S}^2 \setminus N$  nos dá um toro sólido (formado por círculos encaixados); a única fibra que falta é a fibra do polo norte  $N$ ,  $f^{-1}(\infty)$ , que como observamos, é uma reta. Ou seja, a 3-esfera em  $\mathbb{R}^3$  é essencialmente um toro sólido  $\cup$  reta, ou ainda, é a união de dois toros sólidos (cada hemisfério de  $\mathbb{S}^3$  é projetado em um toro sólido em  $\mathbb{R}^3$ ).

Já se considerarmos a projeção de  $\mathbb{S}^3$  em  $\mathbb{R}^3$  a partir do polo sul, obteremos novamente um toro sólido e uma reta (neste caso, a projeção da fibra  $f^{-1}(0) = L_0 \cap \mathbb{S}^3$ ). Quer dizer, em cada carta a projeção estereográfica “abre” uma das fibras, retirando um ponto e transformando-a numa reta.

Para finalizar, observamos que o fibrado de Hopf pertence a uma família de quatro fibrados em que o espaço total, a base e a fibra são esferas:

$$\mathbb{S}^0 \hookrightarrow \mathbb{S}^1 \xrightarrow{f} \mathbb{S}^1$$

$$\boxed{\mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{S}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{S}^2}$$

$$\mathbb{S}^3 \hookrightarrow \mathbb{S}^7 \xrightarrow{f} \mathbb{S}^4$$

$$\mathbb{S}^7 \hookrightarrow \mathbb{S}^{15} \xrightarrow{f} \mathbb{S}^8.$$

## Referências

- [1] BROWN, James W.; CHURCHILL, Ruel V. “Variáveis Complexas e Aplicações”, 9a Ed, Porto Alegre: AMGH, 2015.
- [2] CARMO, Manfredo P. “Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies”, 2a Ed, Rio de Janeiro: SBM, 2016.
- [3] SOARES, Márcio G. “Cálculo em uma Variável Complexa”, 5a Ed, Coleção Matemática Universitária, IMPA, 2009.
- [4] TREISMAN, Zachary. “A Young Person’s Guide to the Hopf Fibration”, arXiv: 0908.1205 , 2009