

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CAMPUS FLORIANÓPOLIS

Valeria Martins Silveira de Andrade

Equações Diferenciais Ordinárias – Retratos de Fase

FLORIANÓPOLIS

2022

Valeria Martins Silveira de Andrade

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS – RETRATOS DE
FASE

**Trabalho de Conclusão de Curso submetido
à Universidade Federal de Santa Catarina,
como requisito necessário para obtenção do
grau de Licenciada em Matemática**

Florianópolis, dezembro de 2022

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Andrade, Valeria Martins Silveira de
Equações diferenciais ordinárias-retratos de fase /
Valeria Martins Silveira de Andrade ; orientadora, Camila
Aparecida Benedito Rodrigues de Lima, 2022.
53 p.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) -
Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências
Físicas e Matemáticas, Graduação em Matemática,
Florianópolis, 2022.

Inclui referências.

1. Matemática. 2. Teoria qualitativa das equações
diferenciais ordinárias. I. Lima, Camila Aparecida
Benedito Rodrigues de. II. Universidade Federal de Santa
Catarina. Graduação em Matemática. III. Título.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

VALERIA MARTINS SILVEIRA DE ANDRADE

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi julgado adequado para a obtenção do título de Licenciada em Matemática, sendo aprovado em sua forma final pelo Curso de Matemática.

Florianópolis, 06 de dezembro de 2022.

Prof^a. Silvia Martini de Holanda, Dr.^a

Coordenadora do Curso de Matemática

Banca Examinadora

Prof^a Camila Aparecida Benedito Rodrigues de Lima, Dr.^a

Orientadora

Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC

Prof. Paulinho Demeneghi, Dr.

Avaliador

Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC

Prof. Paulo Mendes de Carvalho Neto, Dr.

Avaliador

Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC

Agradecimentos

Primeiramente, a Deus, que foi abrindo as portas e me direcionando durante todo o percurso da graduação. Ele jamais deixou faltar o teto sobre nossas cabeças e nem o alimento em nossas mesas. Se eu cheguei onde estou foi porque Deus providenciou tudo, inclusive as pessoas que me apoiam e me apoiaram durante todo o percurso.

Aos meus pais, Antonio Carlos e Sandra Martins, às minhas irmãs, Vanessa Andrade e Viviane Andrade, que apesar de todas as dificuldades me fortalecem e são muito importantes para mim.

Agradeço também as risadas que compartilhei e aos socorros prestados prontamente por amigos e amigas como Isabel Hasckel Heinz, Nelso Heinz, Andres Felipe, Bruna Rayssa, Denise Eliete, Eleonora de Abreu, Alzira Lima, Luzia Ebsen, Noemia Pereira, Rosimeire Sala, Jurandir Paschoal, Juraci Paschoal, Admilda Nascimento, Rubens Albuquerque, Vanessa Oliveira, Fabio Junior Huntmam, Luis, Guimarães e Robertinha Andrade. De fato essas pessoas que me ajudaram muito em momentos difíceis durante a faculdade, e me permitiram chegar até aqui.

Aos professores e amigos queridos da matemática como o Pinho, a Carmen, o Paulinho, a Rosilene, e aos que foram meus professores “agregados” e me “socorreram” no que diz respeito a compreensão de muitos conteúdos, como os professores Gustavo Carli e Anibal Tavares de Azevedo (UNICAMP), meu eterno agradecimento. Vocês fizeram de fato a diferença na vida de alguém!

À minha filha amada, Sabrina Andrade, que esteve sempre ao meu lado, me apoiando e fazendo o possível para que eu conseguisse superar obstáculos e superar certos problemas durante as avaliações, permitindo-me focar nos estudos.

A professora Camila A. B. de Lima que aceitou o desafio de me orientar apesar das minhas dificuldades, abrindo todos os resultados que precisei para que eu tivesse uma compreensão significativa. Essa paciência é de admirar!

Quero ainda agradecer especialmente ao meu amigo e anjo protetor, Marcelo Heinz. Muito obrigada por todas as risadas, pelos conselhos úteis, bem como, pelas palavras motivacionais e puxões de orelha quando pensei e disse várias vezes em relação a alguma matéria: “você tem que parar de arrumar essas confusões, meu! Não dá pra ir não!”

Por último, mas não menos importante, agradeço à banca por aceitar o convite para fazer parte deste trabalho.

Obrigada por tudo! Este TCC também é de vocês!

Resumo

Este trabalho tem como objetivo estudar a base da teoria qualitativa das equações diferenciais ordinárias. O matemático Liouville mostrou que dada uma equação diferencial ordinária, sua solução nem sempre pode ser encontrada via funções elementares e a partir deste momento nascia a teoria qualitativa, ramo da matemática que busca entender as soluções de uma equação diferencial como sendo um objeto geométrico e sem considerar sua expressão analítica para obter maiores informações sobre seu comportamento. Para este estudo ser desenvolvido, apresenta-se todas as ferramentas necessárias, desde as definições mais elementares até teoremas fortes da área, como Fluxo Tubular e Hartman-Grobman. Este dois últimos resultados garantem classificações importantes para tipos de sistemas diferenciais. Usando toda a teoria desenvolvida, ao final são feitas duas aplicações de modelagem matemática, ambos casos particulares das equações de Lotka-Volterra. Vale ressaltar que os modelos estudados descrevem situações físicas reais, as quais podem ser resolvidas usando a teoria aqui desenvolvida.

Palavras-chave: teoria qualitativa, modelagem matemática, retratos de fase, Lotka-Volterra, campos polinomiais

Abstract

This work aims to study the basis of the qualitative theory of ordinary differential equations. The mathematician Liouville proved that given an ordinary differential equation, its solution cannot always be found via elementary functions and from this moment onwards qualitative theory was born, a branch of mathematics that seeks to understand the solutions of a differential equation as a geometric object and without consider its analytical expression to obtain more information about its behavior. For this study to be developed, all the necessary tools are presented, from the most elementary definitions to strong theorems in the area, such as Tubular Flow and Hartman-Grobman. These last two results guarantee important classifications for types of differential systems. Using all the theory developed, at the end two applications of mathematical modeling are made, both particular cases of the Lotka-Volterra equations. It is worth mentioning that the studied models describe real physical situations, which can be solved using the theory developed here.

Keywords: qualitative theory, mathematical modeling, phase portrait, Lotka-Volterra, polynomial fields.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Nó atrator.	27
Figura 2 – Nó repulsor.	28
Figura 3 – Sela.	29
Figura 4 – Centro.	30
Figura 5 – Foco.	30
Figura 6 – Nó estrelado	31
Figura 7 – Nó impróprio.	32
Figura 8 – Campo de vetores e curva integral.	36
Figura 9 – Retrato de fase de um campo em \mathbb{R}	39
Figura 10 – Ação da equivalência h . Do ponto de vista topológico, é como se h pudesse “entortar” ou “endireitar” as órbitas. À esquerda, o retrato de fase do campo X e à direita, o retrato de fase do campo Y	41
Figura 11 – Fluxo de Reeb. Localmente, todas as órbitas são equivalentes às órbitas do campo constante. Mas globalmente temos uma mudança de comportamento entre as retas $x = -1$ e $x = 1$	42
Figura 12 – Retrato de fase do campo (5.4). A singularidade p_1 está na cor vermelha (nó repulsor). As singularidades do tipo sela p_2 e p_3 encontram-se na cor verde. A singularidade p_4 está na cor azul (nó atrator).	47
Figura 13 – Retrato de fase do campo (5.7). A singularidade p_1 (sela) está na cor verde. A singularidade p_2 está na cor amarela (centro).	50

Sumário

	INTRODUÇÃO	15
1	CONCEITOS PRELIMINARES	17
1.1	Primeiras definições	17
1.2	Existência e unicidade de soluções	19
2	EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES	21
2.1	Propriedades gerais	21
2.2	Sistemas lineares homogêneos com coeficientes constantes	24
2.3	Sistemas Bidimensionais Simples	26
3	CONJUGAÇÃO DE SISTEMAS LINEARES	33
4	ASPECTOS GERAIS DA TEORIA QUALITATIVA	35
4.1	Campos vetoriais e fluxos	36
4.2	Retrato de fase de um campo vetorial	37
4.3	Equivalência e conjugação de campos vetoriais	39
4.4	Os teoremas do Fluxo Tubular e Hartman-Grobman	41
5	APLICAÇÕES	45
5.1	Espécies competindo pelo mesmo suprimento	45
5.2	Modelo presa-predador	48
6	CONCLUSÃO	51
	REFERÊNCIAS	53

Introdução

As Equações Diferenciais Ordinárias modelam muitos fenômenos naturais em diferentes ramos, como engenharia mecânica e elétrica, ciência, biologia, estatística, física e química. A modelagem matemática tem por objetivo transformar um problema real em um problema matemático onde as soluções encontradas são aplicadas nos problemas reais. Essencialmente consiste de três passos: construção do modelo, análise e, por fim, a comparação e aplicação da solução. No primeiro passo, traduz-se a situação física para expressões matemáticas. Formatado o problema, precisa-se verificar se ele possui solução e se é possível encontrá-la ou obter o máximo de informações qualitativas possíveis. Por fim, interpreta-se as informações obtidas no segundo passo e verifica-se se a solução matemática é fisicamente razoável.

Ao longo do século XIX a Análise Matemática passou a ter demonstrações formais e rigorosas. Nessa época, os estudos permitiram a elaboração dos teoremas da existência e unicidade da solução, tendo uma grande importância para o desenvolvimento da Teoria das Equações Diferenciais Ordinárias (EDO).

Segundo Figueiredo e Neves [Figueiredo 2001], os teoremas elaborados ao longo do século XIX definiram o começo da fase moderna. Com o surgimento das teorias de Poincaré [Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle 1993], as Equações Diferenciais Ordinárias passaram a ser vistas também do ponto de vista qualitativo: as soluções seriam consideradas como objetos geométricos, dando origem ao que conhecemos hoje por Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias. Dentro dessa área são desenvolvidas ferramentas para estudar uma equação diferencial sem precisar resolvê-la explicitamente. Muitos resultados importantes já foram provados. Contudo, ainda há muitos problemas em aberto. Por exemplo, ao se considerar o problema de investigar a sobrevivência (a longo prazo) de duas espécies, x e y , sendo x um predador natural de y , pode-se modelar a situação via equações de Lotka-Volterra. Ao usar ferramentas já existentes pode-se ter uma previsão da relação de coexistência entre as duas espécies.

Neste trabalho são apresentados alguns dos resultados mais importantes da Teoria Qualitativa, e serão feitas algumas aplicações envolvendo sistemas do tipo Lotka-Volterra. Esses tipos de sistema são extremamente importantes e são investigados até hoje, como é o caso dos trabalhos [Schlomiuk e Vulpe 2012] e [Selvam, Jacob e Dhineshbabu 2020].

1 Conceitos Preliminares

Denote por $\mathbb{R}[x, y]$ o anel dos polinômios nas variáveis x e y , com coeficientes reais e considere o seguinte sistema diferencial, definido em \mathbb{R}^2 :

$$\frac{dx}{dt} = x' = P(x, y) \quad \frac{dy}{dt} = y' = Q(x, y), \quad (1)$$

onde $P, Q \in \mathbb{R}[x, y]$. A derivada é tomada com respeito ao tempo t , e o grau do sistema (1) é $m = \max\{\text{grau}(P), \text{grau}(Q)\}$. Quando $m = 2$ dizemos que (1) é um sistema polinomial diferencial quadrático ou simplesmente um sistema quadrático. Os sistemas quadráticos aparecem quando se modelam muitos dos fenômenos naturais descritos em vários ramos das ciências. Além das aplicações, o estudo de sistemas quadráticos se tornou um problema de grande interesse por parte dos matemáticos.

Neste trabalho é investigado o comportamento geométrico das soluções de (1) sem conhecer sua expressão analítica, ou seja, usando uma abordagem qualitativa, usando teoremas que foram provados ao longo dos últimos anos. O objetivo é construir o que se chama de retrato de fase para o sistema (1): resumidamente, a ideia é folhear \mathbb{R}^2 com as soluções e suas condições iniciais.

Se o sistema (1) for linear, isto é, grau $m = 1$, os retratos de fase já estão bem definidos e serão vistos neste trabalho. Em seguida, será investigado o que ocorre ao se perturbar este sistema linear, seja por polinômios de ordem maior ou, mais geralmente, por funções de classe C^1 . Para isso, precisa-se de algumas definições e resultados que corroborem com a consistência deste trabalho.

Buscamos então uma investigação do que ocorre se perturbamos este sistema linear por termos de ordem maior ou por funções de classe C^1 . Para isso precisamos de algumas definições e resultados que garantem a consistência deste trabalho. Por questões de tempo e foco da pesquisa, algumas demonstrações foram omitidas, mas elas podem ser encontradas em [Sotomayor 2011] e nas referências listadas nele.

1.1 Primeiras definições

Seja Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n = \{(t, x); t \in \mathbb{R}, x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n\}$. Adotaremos em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ a norma $|(t, x)| = \max\{|t|, \|x\|\}$, onde $\|x\|$ denota uma norma qualquer em \mathbb{R}^n . Seja $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação contínua e seja I um intervalo não degenerado de \mathbb{R} .

Definição 1.1. Uma função diferenciável $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ chama-se solução da equação

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad (1.1)$$

no intervalo I se:

- i) o gráfico de φ , dado pelo conjunto $\{(t, \varphi(t)); t \in I\}$ está contido em Ω e
- ii) $\frac{d\varphi}{dt}(t) = f(t, \varphi(t))$ para todo $t \in I$.¹

A equação (1.1) chama-se Equação Diferencial Ordinária de Primeira Ordem e é denotada abreviadamente por

$$x' = f(t, x).$$

Na literatura, é comum usarmos a abreviação EDO para designar equação diferencial ordinária. Por vezes, usaremos tal abreviação neste trabalho.

Observação 1.2. Escrevendo $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ onde $f_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ são as componentes da função f , obtemos que $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ é solução de (1.1) se, e somente se, cada φ_i é diferenciável em I , $(t, \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) \in \Omega$ para todo $t \in I$ e

$$\begin{cases} \varphi_1' = f_1(t, \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) \\ \varphi_2' = f_2(t, \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) \\ \vdots \\ \varphi_n' = f_n(t, \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) \end{cases}$$

para todo $t \in I$. Por isso dizemos que a equação diferencial vetorial (1.1) é equivalente ao sistema de equações diferenciais escalares

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, \dots, x_n), \dots, i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

Ao buscarmos soluções para a equação diferencial (1.1) podemos fixar um dado inicial (t_0, x_0) , estabelecendo o que chamamos de Problema de Cauchy ou Problema de Valor Inicial (PVI), denotado abreviadamente por

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0 \quad (1.2)$$

Uma função φ é solução do PVI (1.2) se ela é solução da EDO $x' = f(t, x)$ e satisfaz $\varphi(t_0) = x_0$.

¹ Se t é um ponto de fronteira do intervalo I , a derivada denota a derivada lateral (a direita ou à esquerda, como necessário).

1.2 Existência e unicidade de soluções

Estamos interessados em estudar condições para que a EDO (1.1) possua solução e em caso afirmativo, garantir sua unicidade. Por exemplo, se $\frac{\partial f}{\partial x}$ é contínua em Ω então o PVI (1.2) admite uma única solução φ tal que $\varphi(t_0) = x_0$. Mas geralmente, esse resultado continua válido quando f é uma função Lipschitz.

Definição 1.3. Uma aplicação $f : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ chama-se Lipschitziana em Ω relativamente à segunda variável ou, simplesmente, Lipschitziana, se existe uma constante $K > 0$ tal que

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq K|x - y|$$

para todos $(t, x), (t, y) \in \Omega$. Neste caso, a constante K chama-se constante de Lipschitz de f .

O primeiro resultado que vamos enunciar trata da existência e unicidade de soluções. Na literatura ele é conhecido como **Teorema de Picard** ou **Teorema de Existência e Unicidade**.

Teorema 1.4 (Teorema de Picard). *Sejam $t_0, a, b, \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $\Omega = I_a \times B_b$, onde $I_a = \{t \in \mathbb{R}; |t - t_0| \leq a\}$ e $B_b = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x - x_0\| \leq b\}$. Se f é contínua e Lipschitziana com relação à segunda variável e $|f| \leq M$ em Ω , então existe uma única solução de*

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$

em I_α , onde $\alpha = \min\{a, b/M\}$.

Ao retirarmos a condição de f ser Lipschitz, perdemos a unicidade da solução, mas ainda podemos garantir a existência, desde que f seja contínua. É o que nos diz o **Teorema de Peano**.

Teorema 1.5 (Teorema de Peano). *Se f é contínua em $\Omega = I_a \times B_b$, então a equação*

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$

tem pelo menos uma solução em I_α , onde $\alpha = \min\{a, b/M\}$

As demonstrações dos resultados acima podem ser encontradas em [Sotomayor 2011]. A partir deste momento, fica consistente a nossa busca por soluções de uma equação diferencial ordinária, uma vez que sempre trabalharemos nas hipóteses necessárias. Nos próximos capítulos estudaremos com mais detalhes alguns tipos de equações e propriedades sobre as suas soluções.

2 Equações Diferenciais Lineares

Neste capítulo apresentamos a teoria para equações diferenciais lineares, isto é, para equações do tipo $x' = f(t, x)$, onde f é uma função linear em x . Nestes casos é possível conhecer com alto grau de perfeição o comportamento das soluções. Para equações diferenciais com coeficientes constantes, a teoria básica de Álgebra Linear nos permite descrever completamente a geometria das trajetórias de um sistema planar. No caso em que a EDO não é linear, usamos sua parte linear para aproximar a solução ou seu comportamento local. É como em Cálculo I, quando dada $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável, usamos seu polinômio de Taylor de grau 1 para aproximá-la. Assim como na aproximação das funções de uma variável, aqui teremos algumas hipóteses que precisam ser satisfeitas para que possamos aproximar um sistema de EDO's por sua parte linear. No decorrer desta seção veremos como desenvolver essa teoria. Todas as demonstrações omitidas podem ser encontradas em [Sotomayor 2011].

2.1 Propriedades gerais

Seja I um intervalo da reta e $a_{ij}, b_i : I \rightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas em I para $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Considere o sistema

$$\begin{cases} x'_1 = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \dots + a_{1n}(t)x_n + b_1(t), \\ x'_2 = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \dots + a_{2n}(t)x_n + b_2(t), \\ \vdots \\ x'_n = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \dots + a_{nn}(t)x_n + b_n(t), \end{cases} \quad (2.1)$$

que pode ser escrito como

$$x'_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_j + b_i(t), \quad i \in \{1, \dots, n\}$$

Uma família $\varphi_i : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 em $I_0 \subset I$ é solução de (2.1) em I_0 se para qualquer $t \in I_0$

$$\frac{\varphi_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)\varphi_j(t) + b_i(t), \quad i \in \{1, \dots, n\}$$

Podemos reescrever o sistema (2.1) na forma matricial como sendo

$$x' = A(t)x + b(t), \quad (2.2)$$

onde $A(t) = (a_{ij}(t))_{n \times n}$ e $b(t) = (b_1(t) \ b_2(t) \ \dots \ b_n(t))^T$ e T denota a transposta do vetor. Assim a solução passa a ser uma aplicação $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ tal que

$$\varphi'(t) = A(t)\varphi(t) + b(t) \quad \forall t \in I.$$

Definição 2.1. A equação (2.2) é chamada linear. No caso particular em que $b(t) \equiv 0$ ela é dita ser homogênea.

Teorema 2.2. Para todo $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^n$ existe uma única solução $\varphi(t) = \varphi(t, t_0, x_0)$ de (2.2) definida em I tal que $\varphi(t_0) = x_0$.

Observação 2.3. Na reta real \mathbb{R} , podemos considerar a equação $x' = ax$ tal que $x(0) = x_0$. Aqui $A(t) = a \in \mathbb{R}$, $b(t) = 0$ e a solução é $\varphi(t, x_0) = x_0 e^{at}$.

De forma geral, quando trabalhamos em \mathbb{R}^n , não temos solução de maneira tão elementar, mas é fácil ver que a solução φ é dada pela equação integral

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t [A(s)\varphi(s) + b(s)] ds.$$

Corolário 2.4. Sejam φ, ψ soluções da EDO homogênea

$$x' = A(t)x \tag{2.3}$$

i) Se a, b são constantes (reais), então $\gamma = a\varphi + b\psi$ é solução de (2.3);

ii) Se $\varphi(s) = 0$ para algum $s \in I$, então $\varphi(t) = 0$ para todo $t \in I$.

Demonstração. i) Basta notar que

$$\begin{aligned} \frac{\gamma(t)}{dt} &= a \frac{\varphi(t)}{dt} + b \frac{\psi(t)}{dt} \\ &= aA(t)\varphi(t) + bA(t)\psi(t) \\ &= A(t)[a\varphi(t) + b\psi(t)] \\ &= A(t)\gamma(t) \end{aligned}$$

ii) Note que a solução identicamente nula também é solução de (2.3). Portanto este item segue imediatamente do Teorema de Existência e Unicidade. \square

Observação 2.5. Considere o espaço vetorial

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n) = \{\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n; \varphi \text{ é contínua}\}$$

munidos das operações usuais de soma e multiplicação por escalar. Neste espaço, um conjunto de funções $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ é linearmente dependente se existirem constantes

c_1, c_2, \dots, c_n , não todas nulas, tais que $c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \dots + c_n\varphi_n = 0$. Lembrando que estamos em um espaço de funções e portanto a igualdade acima significa que

$$c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) + \dots + c_n\varphi_n(t) = 0, \quad \text{para todo } t \in I.$$

O Corolário 2.4 garante que o conjunto \mathcal{A} de todas as soluções de (2.3) forma um subespaço vetorial de \mathcal{C} . Afirmamos que a dimensão deste subespaço é n . De fato, vamos construir uma transformação linear de \mathcal{A} para \mathbb{R}^n que seja bijetora, isto é, um isomorfismo.

Fixado $s \in I$ defina $\varepsilon_s : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^n$ por $\varepsilon_s(\varphi) = \varphi(s)$. Note que ε_s é linear, pois dadas $\varphi, \psi \in \mathcal{A}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ temos

$$\begin{aligned} \varepsilon_s(\varphi + \psi) &= (\varphi + \psi)(s) = \varphi(s) + \psi(s) = \varepsilon_s(\varphi) + \varepsilon_s(\psi) \\ \varepsilon_s(\lambda\varphi) &= (\lambda\varphi)(s) = \lambda\varphi(s) = \lambda\varepsilon_s(\varphi) \end{aligned}$$

Denote por $\ker(T)$ núcleo de uma transformação linear T e seja $\varphi \in \ker(\varepsilon_s)$. Então $0 = \varepsilon_s(\varphi) = \varphi(s)$. Segue do Corolário 2.4 que $\varphi(t) = 0$ para todo t e portanto $\ker(\varepsilon_s) = \{0\}$, isto é, ε_s é injetora. Além disso, ε_s é sobrejetora pois dado $x_0 \in \mathbb{R}^n$ temos $\varepsilon_s(\varphi(t, s, x_0)) = \varphi(s, s, x_0) = x_0$. Logo, ε_s é um isomorfismo e, em particular, $\dim \mathcal{A} = \dim \mathbb{R}^n$

Definição 2.6. Uma matriz $X(t)$ de ordem $n \times n$ é matriz solução de (2.3) se $X'(t) = A(t)X(t)$ para todo $t \in I$, ou equivalentemente, se cada coluna de $X(t)$ é solução de (2.3) em I .

Lema 2.7. Se $X(t)$ é matriz solução de (2.3) então ou $\det(X(t)) = 0$ para todo t ou $\det(X(t)) \neq 0$ para todo t , e neste segundo caso, $X(t)$ é inversível.

Demonstração. Seja τ tal que $\det(X(\tau)) = 0$. Então existe um vetor não nulo c tal que $X(\tau)c = 0$. Como $X(t)$ é solução do sistema homogêneo (2.3) segue que $X(t)c$ é solução do PVI

$$x'(t) = A(t)x, \quad x(\tau) = 0.$$

Da unicidade de soluções segue então que $X(t)c = 0$ para todo t e portanto $\det(X(t)) = 0$ para todo t . \square

Definição 2.8. Dizemos que X é matriz fundamental de (2.3) se X for matriz solução do sistema com $\det(X(t)) \neq 0$ para todo $t \in I$. Dado $t_0 \in I$, chamamos de matriz principal em t_0 a matriz fundamental que satisfaz $X(t_0) = Id$, onde Id denota a matriz identidade $n \times n$.

Observação 2.9. Denotamos por $X(t, t_0)$ a matriz principal em t_0 . Ela satisfaz as seguintes propriedades

- $X(t, t_0) = Id$,
- $X(t, \tau) = X(t, s)X(s, \tau)$, para todo $s \in I$,
- $X(s, t) = X(t, s)^{-1}$.

Considere o PVI

$$x'(t) = A(t)x + b(t), \quad x(t_0) = x_0. \quad (2.4)$$

A partir da matriz fundamental podemos construir uma solução para este problema, como mostra o próximo resultado.

Teorema 2.10. *Seja $X(t)$ matriz fundamental do sistema homogêneo $x'(t) = A(t)x$. Então a solução do PVI (2.4) é dada por*

$$\varphi(t) = X(t) \left[X^{-1}(t_0)x_0 + \int_{t_0}^t X^{-1}(s)b(s)ds \right].$$

A equação acima é chamada *Fórmula da Variação das Constantes*.

Dessa forma, a partir da matriz fundamental conseguimos uma solução do sistema linear não homogêneo. Encontrar essa matriz não é fácil em geral, e por isso caminhamos agora no sentido de encontrar a solução de casos mais específicos

2.2 Sistemas lineares homogêneos com coeficientes constantes

O objetivo desta subseção é encontrar uma expressão para a solução do sistema linear homogêneo

$$x' = Ax, \quad (2.5)$$

onde A é uma matriz quadrada $n \times n$ com coeficientes reais e portanto o sistema está definido em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

Seja P a matriz fundamental de (2.5) tal que $P(0) = Id$. Lembremos que $P(t)$ agora esta definida para todo $t \in \mathbb{R}$ pois A é constante. Segue da unicidade de solução do PVI que $P(t+s) = P(t)P(s)$ para todo $t, s \in \mathbb{R}$. Isso sugere que $\phi(t)$ tem um comportamento como a função exponencial. Faz sentido pensarmos dessa forma, pois na Observação 2.3 vimos que para sistemas reais, a solução é dada em termos de uma exponencial. Colocamos então, por definição,

$$P(t) = e^{At}, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Proposição 2.11. *Valem as seguintes propriedades*

- i) $e^{A(t+s)} = e^{At}e^{As}$,
- ii) $(e^{At})^{-1} = e^{-At}$,
- iii) $\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At} = e^{At}A$,
- iv) $e^{At} = I + At + \dots + \frac{A^n}{n!}t^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}t^n$,
- v) A solução geral de (2.5) é dada por $e^{At}c$, onde c é uma matriz de ordem $n \times 1$.
- vi) Se $\phi(t)$ é matriz fundamental de (2.5) então $e^{At} = \phi(t)\phi^{-1}(0)$.

Os próximos resultados caracterizam a exponencial da matriz A em termos de seus autovalores e autovetores.

Lema 2.12. *Seja A uma matriz real. Se λ é um autovalor real de A e v um autovetor associado a λ , então $\psi(t) = e^{\lambda t}v$ é uma solução da equação $x' = Ax$.*

Demonstração. Seja $\psi(t) = e^{\lambda t}v$. Como v é autovetor associado a λ , temos $Av = \lambda v$, logo

$$\psi'(t) = \lambda v e^{\lambda t} = A v e^{\lambda t} = A e^{\lambda t} v = A \psi(t)$$

□

Proposição 2.13. *Se a matriz real A de ordem $n \times n$ tem autovalores reais $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ e autovalores associados v_1, v_2, \dots, v_n com $Av_i = \lambda_i v_i$, então a matriz $V(t)$ cuja a i -ésima coluna é $\psi_i(t) = v_i e^{\lambda_i t}$ é uma matriz fundamental de $x' = Ax$. Em particular $e^{tA} = V(t)V^{-1}(0)$.*

Observação 2.14. Se A é uma matriz real com autovalor complexo $\lambda = \alpha + i\beta$ e autovetor associado $v = v_1 + iv_2$, então $\bar{v} = v_1 - iv_2$ é autovetor correspondente de $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ pois $\overline{\lambda v} = \bar{\lambda} \bar{v} = A \bar{v}$.

Assim, $\varphi(t) = e^{\lambda t}v$ e $\bar{\varphi}(t) = e^{\bar{\lambda} t}\bar{v}$ são funções linearmente independentes e satisfazem a equação $x' = Ax$, se a matriz A é vista sobre \mathbb{C} . A partir disto, construímos duas soluções reais para o sistema, a saber,

$$\varphi_1(t) = \frac{1}{2}[\varphi(t) + \bar{\varphi}(t)] \quad \text{e} \quad \varphi_2(t) = \frac{1}{2i}[\varphi(t) - \bar{\varphi}(t)],$$

, com $\varphi_1(0) = v_1$ e $\varphi_2(0) = v_2$. E são soluções quando consideramos a equação real. Note que v_1 e v_2 são vetores linearmente independentes em \mathbb{R}^n pois caso contrário teríamos que v e \bar{v} seriam linearmente dependentes em \mathbb{C}^n .

Exemplo 2.15. Se A é uma matriz real 2×2 temos que

$$\varphi_1(t) = e^{\alpha t}[v_1 \cos(\beta t) - v_2 \sin(\beta t)] = \text{Re}(\varphi(t)),$$

$$\varphi_2(t) = e^{\alpha t}[v_1 \sin(\beta t) + v_2 \cos(\beta t)] = \text{Im}(\varphi(t)),$$

É uma base de soluções de $x' = Ax$, onde $v = v_1 + iv_2$ é autovetor associado a $\lambda = \alpha + i\beta$

2.3 Sistemas Bidimensionais Simples

Nesta subseção faremos uma análise das soluções dos sistemas lineares homogêneos definidos em \mathbb{R}^2 . A partir de sua expressão iremos investigar qual o comportamento geométrico dos campos vetoriais associados a estes sistemas.

Considere o sistema bidimensional

$$\begin{cases} x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2, \end{cases} \quad (2.6)$$

com $a_{ij} \in \mathbb{R}$ e $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$. Podemos reescrevê-lo na forma matricial como $x' = Ax$ com

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

e $\det A \neq 0$ (assim a origem de \mathbb{R}^2 é o único ponto onde $Ax = 0$).

Seja $p_a(\lambda)$ denota o polinômio característico de A . Contas simples mostram que

$$p_a(\lambda) = \lambda^2 - \lambda(\operatorname{tr}(A)) + \det(A),$$

onde $\operatorname{tr}(A) = a_{11} + a_{22}$ denota o traço da matriz A . Assim, os autovalores de A são dados por

$$\lambda_1 = \frac{\operatorname{tr}A + \sqrt{(\operatorname{tr}(A))^2 - 4 \det A}}{2} \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \frac{\operatorname{tr}A - \sqrt{(\operatorname{tr}(A))^2 - 4 \det A}}{2}.$$

Com relação aos autovalores de A , temos três possibilidades

- dois autovalores reais e distintos $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ com $\lambda_1 \neq \lambda_2$,
- 2 autovalores complexos: $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ e $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ com $\beta \neq 0$,
- apenas um autovalor real, com multiplicidade algébrica igual a 2: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0$

No que segue, iremos analisar cada possibilidade, dividindo o estudo em casos.

a) Autovalores reais e distintos

Sejam v_1 e v_2 autovetores correspondentes de λ_1 e λ_2 , respectivamente. Como os autovalores são distintos então os autovetores são linearmente independentes. Denotemos por E_1 e E_2 as retas geradas por v_1 e v_2 respectivamente. A Proposição 2.13 garante que toda solução de (2.6) pode ser escrita na forma

$$\varphi(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2,$$

com c_1, c_2 números reais.

Caso a_1 : $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ (nó atrator)

Se x_0 é a origem de \mathbb{R}^2 então $\varphi(t) \equiv 0$. Vejamos como se comporta a solução para os outros pontos de \mathbb{R}^2 .

Quando $c_1 = 0$, isto é, x_0 está sobre o eixo E_2 temos que a solução se mantém sobre E_2 e, mais ainda, $\varphi(t) = c_2 e^{\lambda_2 t} v_2 \rightarrow 0$ se $t \rightarrow +\infty$ e $\varphi(t) = c_2 e^{\lambda_2 t} v_2 \rightarrow +\infty$ se $t \rightarrow -\infty$.

Analogamente, se $c_2 = 0$, a solução tende a zero, mas agora sobre o eixo E_1 .

Suponha agora que x_0 pertence ao plano gerado por v_1 e v_2 , mas não está sobre nenhum dos eixos E_1 ou E_2 , de modo que c_1 e c_2 são ambos diferentes de zero. Neste caso $\varphi(t) \rightarrow 0$, se $t \rightarrow +\infty$, pois $\lambda_1, \lambda_2 < 0$. Além disso, se $t \rightarrow -\infty$ então $\varphi(t) \rightarrow +\infty$.

Afirmção: *As trajetórias tendem a zero na direção de v_1 , isto é para $c_1 \neq 0$, a reta tangente à trajetória tende para E_1 quando $t \rightarrow +\infty$.*

De fato, temos:

$$\begin{aligned} \frac{\varphi'(t)}{\|\varphi'(t)\|} &= \frac{\lambda_1 c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + \lambda_2 c_2 e^{\lambda_2 t} v_2}{\|\lambda_1 c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + \lambda_2 c_2 e^{\lambda_2 t} v_2\|} \\ &= \frac{e^{\lambda_1 t} (\lambda_1 c_1 v_1 + \lambda_2 c_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} v_2)}{e^{\lambda_1 t} \|\lambda_1 c_1 v_1 + \lambda_2 c_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} v_2\|} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \frac{\lambda_1 c_1 v_1}{\|\lambda_1 c_1 v_1\|} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Analogamente, se $t \rightarrow -\infty$ então $\frac{\varphi'(t)}{\|\varphi'(t)\|} \rightarrow \frac{\lambda_2 c_2 v_2}{\|\lambda_2 c_2 v_2\|}$.

Neste caso, a origem $(0, 0)$ é chamada de **nó atrator** e o comportamento das trajetórias pode ser visto na Figura 1

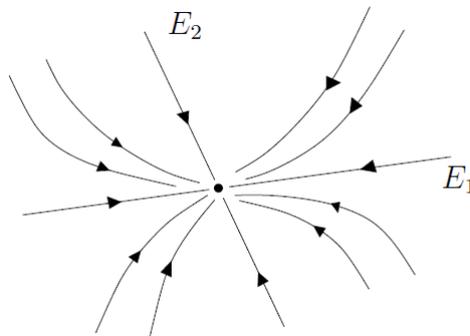


Figura 1 – Nó atrator.

Caso a_2 : $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$ (nó repulsor)

Raciocínio inteiramente análogo, ao caso anterior. Agora invertemos o sentido das setas

no retrato de fase.

Neste caso, a origem $(0,0)$ é chamada de nó repulsor e o comportamento das trajetórias pode ser visto na Figura 2

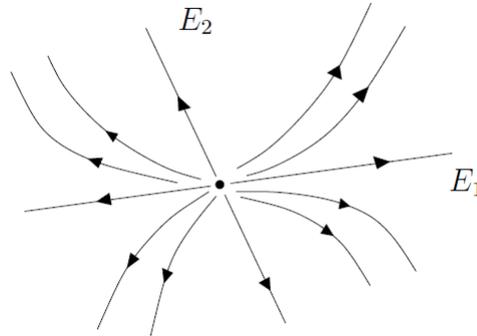


Figura 2 – Nó repulsor.

Caso a_3 : $\lambda_1 < 0$ e $\lambda_2 > 0$ (sela)

Se $c_1 = 0$, as trajetórias que passam por pontos de E_2 são tais que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (c_2 e^{\lambda_2 t} v_2) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} (c_2 e^{\lambda_2 t} v_2) = 0$$

Analogamente, se $c_2 = 0$ as trajetórias que passam pelos pontos de E_1 são tais que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (c_1 e^{\lambda_1 t} v_1) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} (c_1 e^{\lambda_1 t} v_1) = +\infty$$

Suponha agora que c_1 e c_2 são diferentes de zero. Da álgebra linear lembramos que, dado $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, este ponto possui uma decomposição em relação aos autovetores v_1 e v_2 pois $B = \{v_1, v_2\}$ é base de \mathbb{R}^2 . Isto é, existem α_1 e $\alpha_2 \in \mathbb{R}$ tais que $(x_1, x_2) = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$.

Como $\lambda_1 < 0$, a componente segundo E_1 tende a zero quando $t \rightarrow +\infty$ e como $\lambda_2 > 0$ a componente segundo E_2 tende a infinito quando $t \rightarrow +\infty$.

Unindo todas essas informações, obtemos o comportamento geométrico das trajetórias, que pode ser visto na Figura 3.

Neste caso, a origem $(0,0)$ é chamada de ponto de sela.

b) Autovalores complexos

Suponha que a matriz A dada em (2.7) possua autovalores complexos $\lambda = \alpha + i\beta$ e $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ com $\beta \neq 0$ e autovetores associados $v = v_1 + iv_2$ e $\bar{v} = v_1 - iv_2$, respectivamente. Pela Observação 2.14 a solução do sistema (2.6) é dada por

$$\varphi_1(t) = c_1 \varphi_1(t) + c_2 \varphi_2(t),$$

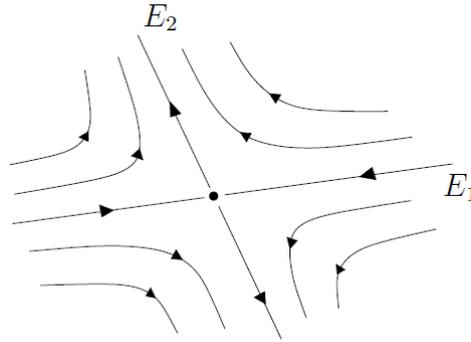


Figura 3 – Sela.

onde $\varphi_1(t) = e^{\alpha t}[\cos(\beta t)v_1 - \sin(\beta t)v_2]$ e $\varphi_2(t) = e^{\alpha t}[\sin(\beta t)v_1 + \cos(\beta t)v_2]$.

Para entender o comportamento geométrico da solução, defina $c_1 = \rho \cos(\omega)$, $c_2 = \rho \sin(\omega)$, sendo ω constante e $\rho > 0$. substituindo c_1 e c_2 a expressão da solução obtemos

$$\varphi(t) = e^{\alpha t} \rho [\cos(\omega - \beta t)v_1 + \sin(\omega - \beta t)v_2].$$

Para os valores de t tais que $\omega - \beta t = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ temos $\sin(\omega - \beta(t)) = 0$ e a solução corta a reta definida pelo vetor v_1 . Se $\omega - \beta t = k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ a solução corta a reta definida pelo vetor v_2 . Logo, a bita gira em torno da origem. A pergunta que fazemos é: ela gira com um ângulo constante ou o ângulo varia de acordo com o tempo, formando uma espécie de espiral? Vamos analisar separadamente cada caso.

Caso b_1 : $\alpha = 0$ (centro)

Neste caso a solução é dada por $\varphi(t) = \rho[\cos(\omega - \beta t)v_1 + \sin(\omega - \beta t)v_2]$, e portanto todas as soluções (exceto a origem) são elipses. Ou seja, neste caso as trajetórias são curvas fechadas e periódicas de período $\frac{2\pi}{\beta}$. Neste caso a origem $(0, 0)$ é chamada de centro. Veja Figura 4.

Caso b_2 : $\alpha \neq 0$ (foco)

Se $\alpha < 0$ toda a solução tende para a origem, formando uma espiral quando $t \rightarrow +\infty$. Se $\alpha > 0$ a solução tende para a origem quando $t \rightarrow -\infty$. De qualquer forma, obtemos o que chamamos de foco atrator no primeiro caso e foco repulsor no segundo. Veja Figura 5.

c) Apenas um autovalor real

Suponha que a matriz A possua apenas um autovalor real λ com multiplicidade algébrica igual a 2. Vamos subdividir em dois casos

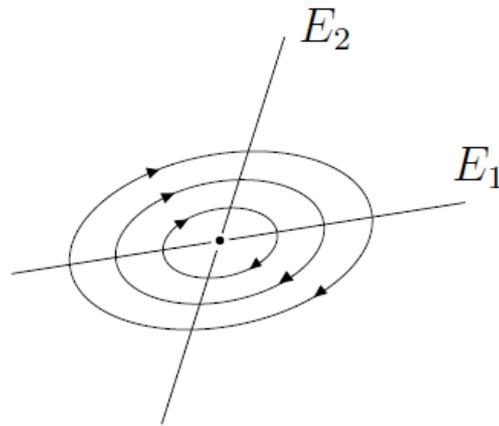


Figura 4 – Centro.

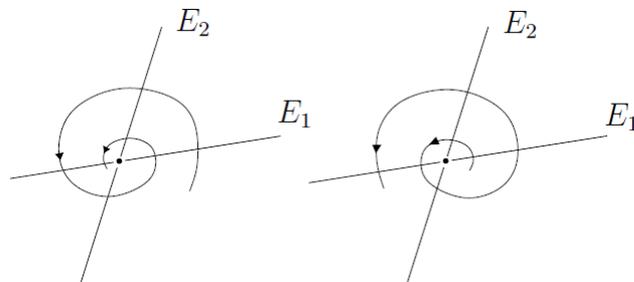


Figura 5 – Foco.

Caso c_1 : A multiplicidade algébrica de λ é igual à sua multiplicidade geométrica.

O auto-espaço associado a λ possui dimensão 2 e portanto existe uma base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ de \mathbb{R}^2 formada por autovetores de A e a solução do sistema (2.6) pode ser escrita da forma

$$\varphi(t) = e^{\lambda t}(c_1 v_1 + c_2 v_2).$$

Exceto pela solução nula, todas as trajetórias são semirretas. Se $\lambda < 0$ as soluções tendem para a origem quando $t \rightarrow +\infty$ e se $\lambda > 0$ basta inverter a orientação das trajetórias. A Figura 6 mostra o comportamento geométrico das soluções.

Caso c_2 : A multiplicidade algébrica de λ maior que sua multiplicidade geométrica.

Neste caso o auto-espaço E_1 gerado por λ tem dimensão 1. Seja v um gerador de E_1 , w um vetor que não seja paralelo a v e considere a base $\mathcal{B} = \{v, w\}$ de \mathbb{R}^2 . Vamos construir a solução do sistema (2.6).

Seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ o operador linear dado por

$$T(x_1, x_2) = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

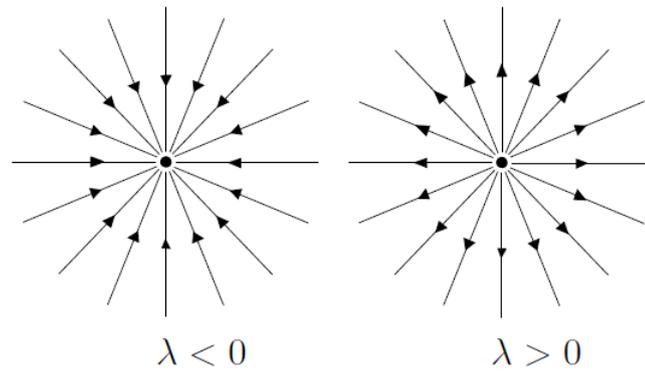


Figura 6 – Nó estrelado

Como v é autovetor de A , associado a λ , segue que $T(v) = Av = \lambda v = \lambda v + 0w$. Além disso, $T(w) = Aw = \alpha v + \mu w$, com $\alpha \neq 0$. Logo, a matriz de T na base B , denotada por $[T]_B$, é dada por

$$[T]_B = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \mu \end{pmatrix},$$

cujos autovalores são λ e μ .

Por outro lado, se \mathcal{C} denota a base canônica de \mathbb{R}^2 , então $[T]_{\mathcal{C}} = A$ e portanto $[T]_B$ e A são matrizes equivalentes. Disto concluímos que $\mu = \lambda$, pois A possui somente um autovalor.

Definindo $v_1 = \alpha v$ e $v_2 = w$ temos $Av_1 = \lambda v_1$ (v_1 é um múltiplo de v) e $Av_2 = \lambda v_2 + v_1$. Observe que

$$\varphi(t) = e^{\lambda t}[(c_1 + tc_2)v_1 + c_2v_2],$$

é solução de $x' = Ax$ com $\varphi(0) = c_1v_1 + c_2v_2$.

De fato,

$$\begin{aligned} A\varphi(t) &= e^{\lambda t}[(c_1 + tc_2)Av_1 + c_2Av_2] \\ &= e^{\lambda t}[(c_1 + tc_2)\lambda v_1 + \lambda c_2v_2 + c_2v_2] \\ &= e^{\lambda t}[\lambda[(c_1 + tc_2)v_1 + c_2v_2] + c_2v_1] \\ &= \varphi'(t). \end{aligned}$$

Assim, exceto pela origem que é um ponto fixo, temos que

- as soluções que passam por E_1 ($c_2 = 0$) são semirretas.
- se $c_2 \neq 0$, temos que as trajetórias tendem a zero na direção de v_1 , pois $\frac{\varphi'(t)}{\|\varphi'(t)\|} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \frac{c_1v_1\lambda}{\|c_1v_1\lambda\|}$. Os cálculos são análogos aos que fizemos em (2.8).
- Se $\lambda < 0$ toda trajetória tende a 0 se $t \rightarrow +\infty$.

- Se $\lambda > 0$ toda trajetória tende a 0 se $t \rightarrow -\infty$.

A Figura 7 resume todas essas informações.

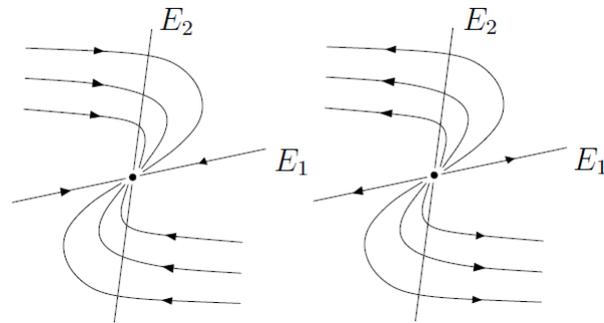


Figura 7 – Nó impróprio.

3 Conjugação de Sistemas Lineares

Na matemática estamos sempre buscando agrupar objetos que possuam determinadas características para que possam ser comparados ou divididos em classes de equivalência. Ao estudarmos grupos algébricos, por exemplo, dizemos que eles são equivalentes se existe um isomorfismo entre eles; na Topologia dois espaços são equivalentes se existe um homeomorfismo entre eles. Na Teoria Qualitativa não é diferente: gostaríamos de classificar quando dois campos vetoriais são equivalentes em \mathbb{R}^n e para isso relembramos a definição de homeomorfismo entre subespaços topológicos de \mathbb{R}^n

Definição 3.1. Sejam M e N dois subespaços topológicos de \mathbb{R}^n munidos da topologia induzida. Um homeomorfismo entre M e N é uma bijeção contínua $f : M \rightarrow N$ tal que a inversa $f^{-1} : N \rightarrow M$ também é contínua.

Definição 3.2. Sejam $x \rightarrow Ax$ e $x \rightarrow Bx$ campos vetoriais lineares em \mathbb{R}^n . Estes campos, seus fluxos $\varphi(t, x) = e^{At}x$, $\psi(t, x) = e^{Bt}x$ ou seus sistemas de equações lineares associados

$$x' = Ax, \quad \text{e} \quad x' = Bx,$$

são ditos conjugados se existe uma bijeção $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, chamada de conjugação tal que para todo $t \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}^n$ vale a igualdade

$$h(\varphi(t, x)) = \psi(t, h(x)).$$

Em particular, se h é um isomorfismo linear, os campos são ditos linearmente conjugados. Se h é um C^k -difeomorfismo, então os campos são C^k -diferencialmente conjugados.

Observação 3.3. A relação de conjugação é uma relação de equivalência entre dois sistemas lineares. De fato, considere os sistemas lineares $x' = Ax$, $x' = Bx$ e $x' = Cx$, com respectivos fluxos $\varphi(t, x)$, $\psi(t, x)$ e $\zeta(t, x)$, respectivamente em que A, B e C são matrizes quadradas de ordem n . Suponha que $x' = Ax$ é topologicamente conjugado a $x' = Bx$ e $x' = Bx$ é topologicamente conjugado a $x' = Cx$. Então existem homeomorfismos $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tais que $h(\varphi(t, x)) = \psi(t, h(x))$ e $g(\psi(t, x)) = \zeta(t, g(x))$

- i) A relação é reflexiva: $x' = Ax$ é topologicamente conjugado a $x' = Ax$ pelo homeomorfismo identidade
- ii) A relação é simétrica: Se $x' = Ax$ é topologicamente conjugado a $x' = Bx$ via o homeomorfismo $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, basta considerar o homeomorfismo inverso $h^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow$

\mathbb{R}^n , temos

$$\begin{aligned}\varphi(t, h^{-1}(x)) &= h^{-1} \circ h(\varphi(t, h^{-1}(x))) \\ &= h^{-1}(\psi(t, h(h^{-1}(x)))) \\ &= h^{-1}(\psi(t, x))\end{aligned}$$

- i) A relação é transitiva: $x' = Ax$ é topologicamente conjugado a $x' = Cx$ via o homeomorfismo $g \circ h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, pois

$$(g \circ h)\varphi(t, x) = g(h(\varphi(t, x))) = g(\psi(t, h(x))) = \zeta(t, g(h(x))) = \zeta(t, (g \circ h)(x))$$

Exemplo 3.4. Dentre os campos conhecidos, vejamos alguns exemplos

- a) Seja A uma matriz real com dois autovalores reais e distintos λ_1 e λ_2 e autovetores associados v_1 e v_2 , respectivamente. Então o sistema $x' = Ax$ é linearmente conjugado a

$$x' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} x,$$

via o homeomorfismo linear $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por $h(x_1, x_2) = x_1 v_1 + x_2 v_2$. Analogamente, quando A tem autovalores complexos $\lambda = \alpha + i\beta$ e $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ o sistema $x' = Ax$ é linearmente conjugado a

$$x' = \begin{pmatrix} \lambda & \beta \\ -\beta & \lambda \end{pmatrix} x.$$

Quando o sistema possui dois autovalores iguais mas com apenas uma classe de autovetores, então o sistema é linearmente conjugado a

$$x' = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} x.$$

- b) Um centro não pode ser conjugado a uma sela. De fato, se dois sistemas são topologicamente conjugados então o período das órbitas é preservado. Mas se a origem é um ponto de sela, então nenhuma órbita ao redor dela é periódica, enquanto que um centro possui todas as suas órbitas periódicas.

Proposição 3.5. *A transformação linear $h : x \rightarrow Cx$ é uma conjugação linear entre $x' = Ax$ e $x' = Bx$, se e somente se, a matriz C satisfaz $CA = BC$. Em particular os sistemas são conjugados, se e somente se, as matrizes A e B são semelhantes.*

Segundo a proposição anterior, as classes de equivalência estão pré determinadas pelas classes de matrizes semelhantes. Então o problema de se determinar a classe de conjugação linear de um sistema reduz-se ao teorema da forma canônica de Jordan, pois é ele quem descreve uma forma diagonal (ou quase diagonal) para matrizes quadradas. Pode-se então estudar a forma canônica de Jordan das matrizes associadas para verificar se os sistemas são ou não conjugados.

4 Aspectos Gerais da Teoria Qualitativa

Até o momento estudamos sistemas lineares definidos em \mathbb{R}^2 e classificamos seus possíveis retratos de fase e quando eles são conjugados. Nosso próximo objetivo é estender tais resultados para sistemas não lineares em \mathbb{R}^n e verificar quando podemos compará-los.

Considere um sistema de equações diferenciais da forma

$$\begin{cases} x'_1 = X_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ x'_2 = X_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \vdots \\ x'_n = X_n(x_1, x_2, \dots, x_n). \end{cases} \quad (4.1)$$

Quando as funções X_i não dependem de t , o sistema (4.1) é chamado de autônomo. O objetivo agora não é procurar soluções explícitas mas sim entender o seu comportamento geométrico.

Observação 4.1. Vale ressaltar que não restringimos muito ao estudar somente os sistemas diferenciais autônomos. De fato, considere uma EDO do tipo $x' = f(t, x)$, com f definida em um aberto Ω de \mathbb{R}^{n+1} . Ela pode ser considerada como uma equação autônoma fazendo a mudança $z = (s, x)$ e definimos a equação $z' = F(z)$ onde $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $F(z) = (1, f(z))$. Obtemos assim o sistema autônomo

$$\begin{cases} s' = 1, \\ x' = f(s, x). \end{cases}$$

Há uma correspondência biunívoca entre as soluções da equação não autônoma $x' = f(t, x)$ e as equações da solução autônoma associada a $z' = F(z)$. Sendo assim, é suficiente estudarmos as soluções de equações autônomas.

No estudo matemático da dinâmica das populações aparecem equações do tipo (4.1), onde cada x_i denota a densidade da população de uma espécie e as funções X_i exprimem a lei de interação entre as espécies. Nestas funções registram-se fatos como a competição pelo mesmo alimento e espaço ou a ação predatória de uma espécie sobre a outra. Se as soluções $x_i(t)$ tendem para um ponto de equilíbrio (a_1, a_2, \dots, a_n) quando $t \rightarrow \infty$ e $a_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$ interpretamos como que as duas populações evoluem para uma situação de coexistência.

4.1 Campos vetoriais e fluxos

Definição 4.2. Seja Δ um subconjunto aberto de \mathbb{R}^n . Um campo vetorial de classe C^k com $1 \leq k \leq \infty$ em Δ , é uma aplicação $X : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^k .

Ao campo vetorial X associamos a EDO

$$x' = X(x) \quad (4.2)$$

As aplicações diferenciais $\varphi : I \rightarrow \Delta$, (I intervalo da reta), tais que

$$\frac{d\varphi}{dt}(t) = X(\varphi(t)), \quad \forall t \in I \quad (4.3)$$

são as soluções da equação (4.2), chamadas de trajetórias ou curvas integrais de X .

A equação (4.2) (ou a equação (4.3)) admite uma interpretação geométrica, pois φ é uma curva integral de X se, e somente se, o seu vetor velocidade $\varphi'(t)$ em t coincide com o valor do campo X em $\varphi(t)$. Veja Figura (8).

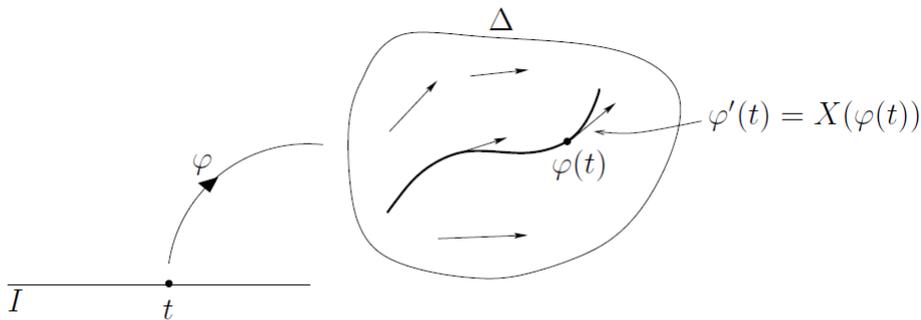


Figura 8 – Campo de vetores e curva integral.

Seja $x_0 \in \Delta$. Se $X(x_0) = 0$ é dito ponto singular de X . Caso contrário, x_0 é dito ponto regular do campo X .

Lema 4.3. Seja $x_0 \in \Delta$ e defina $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\varphi(t) = x_0$. Então x_0 é ponto singular de X se, e somente se, φ é solução de (4.2).

Demonstração. De fato, suponha que x_0 é ponto singular de X . Então

$$X(\varphi(t)) = X(x_0) = 0 = \varphi'(t),$$

isto é, φ satisfaz (4.3). Reciprocamente, se $\varphi(t) = x_0$ $t \in \mathbb{R}$, é solução de (4.3) então

$$0 = \frac{d\varphi}{dt}(t) = X(\varphi(t)) = X(x_0),$$

isto é, $X(x_0) = 0$ e portanto x_0 é singular. □

Pelo lema acima, as soluções passando por pontos singulares são degeneradas, ou seja, formada somente pelo ponto singular. Resta-nos então estudar como se comportam as soluções passando por pontos regulares.

Definição 4.4. Uma curva integral $\varphi : I \rightarrow \Delta$ de X chama-se máxima se para toda curva integral $\psi : J \rightarrow \Delta$ tal que $I \subseteq J$ e $\varphi = \psi|_I$ então $I = J$ e conseqüentemente $\varphi = \psi$. Neste caso I se chama intervalo máximo.

O próximo teorema diz respeito ao comportamento das soluções da EDO (4.2).

Teorema 4.5. a) Para cada $x \in \Delta$ existe um intervalo aberto I_x , onde está definida a única solução máxima φ_x de (4.2) tal que $\varphi_x(0) = x$.

b) Se y é um ponto da trajetória que passa por x , isto é, se $y = \varphi_x(s)$ para algum $s \in I_x$ então $I_y = I_x - s = \{r - s; r \in I_x\}$, $\varphi_y(0) = y$ e $\varphi_y(t) = \varphi_x(t + s)$, para qualquer $t \in I_y$.

c) O conjunto $\mathcal{O} = \{(t, x); x \in \Delta, t \in I_x\}$ é aberto em \mathbb{R}^{n+1} . A aplicação $\varphi : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ dada por $\varphi(t, x) = \varphi_x(t)$ é da classe C^k . Além disso, φ satisfaz a equação

$$D_1 D_2 \varphi(t, x) = DX(\varphi(t, x)) \cdot D_2 \varphi(t, x),$$

e $D_2 \varphi(t, x)|_{t=0} = Id$ onde Id denota a identidade em \mathbb{R}^n . Aqui, D_1 é a derivada com respeito a primeira variável, D_2 a derivada com respeito a segunda variável e DX é a derivada da aplicação X .

A aplicação $\varphi : \mathcal{O} \rightarrow \Delta$ chama-se fluxo gerado por X .

Corolário 4.6. Seja X um campo vetorial de classe C^k , $k \geq 1$, em $\Delta \subset \mathbb{R}^n$. Se $x \in \Delta$ e $I_x = (\omega_-(x), \omega_+(x))$ é tal que $\omega_+(x) < +\infty$ (respectivamente $\omega_-(x) > -\infty$), então $\varphi_x(t)$ tende a $\partial\Delta$ (fronteira de Δ) quando $t \rightarrow \omega_+(x)$ (respectivamente $t \rightarrow \omega_-(x)$).

Corolário 4.7. Se $\Delta = \mathbb{R}^n$ e $|X(x)| < c$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ então $I_x = \mathbb{R}$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Corolário 4.8. Se φ_x é uma solução regular de (4.2), isto é, não contém pontos singulares, definida no intervalo máximo I_x e $\varphi_x(t_1) = \varphi_x(t_2)$ para $t_1 \neq t_2$ então $I_x = \mathbb{R}$ e $\varphi_x(t + c) = \varphi_x(t)$, para todo t , onde $c = t_2 - t_1$. Isto é, φ_x é uma solução periódica.

4.2 Retrato de fase de um campo vetorial

Definição 4.9. O conjunto $\gamma_p = \{\varphi(t, p), t \in I_p\}$, isto é, a imagem da curva integral de X pelo ponto p , chama-se órbita de X pelo ponto p .

Observação 4.10.

1. Lembremos que $\varphi : I \times \Delta \rightarrow \Delta$, onde I é um intervalo da reta, de modo que $\gamma_p \subset \Delta \subset \mathbb{R}^n$.
2. Além disso $q \in \gamma_p$ se, e somente se, $\gamma_p = \gamma_q$, pela unicidade de soluções. Logo, duas órbitas de X coincidem ou são disjuntas e Δ fica decomposto em uma união disjunta de curvas diferenciáveis. O próximo teorema garante que as órbitas podem ser somente de três tipos
 - a) Imagem biunívoca de um intervalo de \mathbb{R}
 - b) Um único ponto (chamado ponto singular)
 - c) ou difeomorfa a um círculo (chamada de fechada ou periódica)

Teorema 4.11. *Se φ_x é solução máxima de (4.2) em I_x , verifica-se uma única das seguintes alternativas*

- a) φ_x é injetora.
- b) $I_x = \mathbb{R}$ e φ_x é constante.
- c) $I_x = \mathbb{R}$ e φ_x é periódica, isto é, existe $\tau > 0$ tal que $\varphi_x(t + \tau) = \varphi_x(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e $\varphi_x(t_1) \neq \varphi_x(t_2)$ se $|t_1 - t_2| < \tau$

Definição 4.12. O conjunto aberto Δ , munido da decomposição em órbitas de X , chama-se retrato de fase de X . As órbitas são orientadas no sentido das curvas integrais do campo X ; os pontos singulares são munidos da orientação trivial.

Na Subseção 2.3 já vimos quais os possíveis retratos de fase que um sistema bidimensional simples pode apresentar. Conseguimos agora generalizar um pouco mais nossos exemplos, ainda sem utilizar ferramentas sofisticadas. Mais a frente apresentaremos dois teoremas fortes que nos ajudarão a classificar e desenhar o retrato de fase de um campo vetorial X .

Exemplo 4.13. Considere um campo vetorial $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, X de classe C^k que possua um número finito de pontos singulares $a_1 < a_2 < \dots < a_n$. Vejamos como se comporta seu retrato de fase.

Primeiro, convencie $a_0 = -\infty$ e $a_{n+1} = +\infty$. Agora analisaremos os intervalos do tipo (a_i, a_{i+1}) , com $i \in \{0, 1, \dots, n\}$. Em cada intervalo (a_i, a_{i+1}) , X tem sinal constante: de fato, se $X(p_1) > 0$ e $X(p_2) < 0$ para algum $p_1, p_2 \in (a_i, a_{i+1})$ então pelo teorema do anulamento existiria $b_i \in (a_i, a_{i+1})$ tal que $X(b_i) = 0$ o que implicaria que b_i é ponto singular de X , absurdo pois os únicos pontos singulares são os a_i 's.

Assuma, sem perda de generalidade que X é positivo em um determinado intervalo (a_i, a_{i+1}) . Se φ é o fluxo neste intervalo temos

$$\frac{d}{dt}\varphi(t, x) = X(\varphi(t, x)) > 0,$$

e então a derivada de φ é positiva, logo φ é crescente no seu intervalo máximo $I_x = (\omega_-(x), \omega_+(x))$. Além disso temos que

- i) quando $t \rightarrow \omega_-(x)$, $\varphi(t, x) \rightarrow a_i$. De fato, se $\varphi(t, x) \rightarrow b > a_i$ quando $t \rightarrow \omega_-(x)$ segue que as órbitas γ_x e γ_b se interceptam pois $\varphi(t, b)$ é estritamente crescente. Logo $\gamma_x = \gamma_b$, contradição.
- ii) quando $t \rightarrow \omega_+(x)$, $\varphi(t, x) \rightarrow a_{i+1}$ e a prova é análoga ao item anterior.
- iii) se $i \geq 1$, temos $\omega_-(x) = -\infty$. De fato, para todo $t \in I_x$ temos $\varphi(t, x) \rightarrow a_i > -\infty$ e então pelo Corolário 4.6 segue que $\omega_-(x) = -\infty$.
- iv) se $i < n$ então $\omega_+(x) = \infty$ e a prova é análoga ao item anterior.

Na Figura 9 podemos ver o retrato de fase de X e um esboço do seu gráfico.

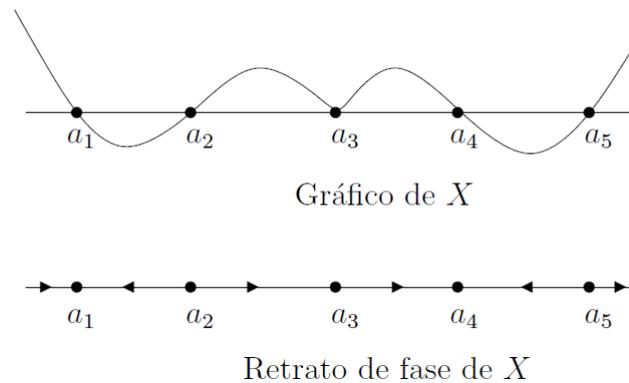


Figura 9 – Retrato de fase de um campo em \mathbb{R} .

4.3 Equivalência e conjugação de campos vetoriais

O objetivo agora é classificar campos vetoriais de acordo com as características das singularidades que eles apresentam. Ao final da subseção estaremos aptos a dizer quando dois campos vetoriais possuem o mesmo retrato de fase (do ponto de vista topológico).

Definição 4.14. Sejam $X_1 : \Delta_1 \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $X_2 : \Delta_2 \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dois campos vetoriais. Dizemos que X_1 é topologicamente equivalente (respectivamente, C^k -equivalente) a X_2 quando existe um homeomorfismo (respectivamente, um difeomorfismo de classe C^k) $h : \Delta_1 \rightarrow \Delta_2$ que leva órbita de X_1 em órbita de X_2 , preservando a orientação. Mais

precisamente se $p \in \Delta$ e $\gamma^1(p)$ é a órbita orientada de X_1 passando por p , então $h(\gamma^1(p))$ é a órbita orientada de X_2 , passando por $h(p)$. A aplicação h é chamada equivalência topológica.

Definição 4.15. Sejam $\varphi_1 : D_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\varphi_2 : D_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ os fluxos gerados pelos campos $X_1 : \Delta_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $X_2 : \Delta_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$, respectivamente. Dizemos que X_1 é topologicamente conjugado (respectivamente, C^r -conjugado) a X_2 quando existe um homeomorfismo (respectivamente, um difeomorfismo de classe C^r) $h : \Delta_1 \rightarrow \Delta_2$ tal que

$$h(\varphi_1(t, x)) = \varphi_2(t, h(x)), \quad \forall (t, x) \in D_1$$

A aplicação h é chamada conjugação topológica.

Observação 4.16. Neste ponto, há algumas observações a serem feitas:

1. Esta definição estende a campos vetoriais quaisquer os conceitos de conjugação topológica e diferenciável definidos anteriormente para campos lineares;

2. A relação de conjugação também é uma relação de equivalência entre campos definidos em abertos de \mathbb{R}^n ;

3. Toda conjugação é uma equivalência;

4. Seja h uma equivalência entre X_1 e X_2 então h leva ponto singular em ponto singular e órbita periódica em órbita periódica. Se h for uma conjugação, o período das órbitas periódicas também é preservado.

Lema 4.17. Sejam $X_1 : \Delta_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $X_2 : \Delta_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ campos vetoriais de classe C^k e $h : \Delta_1 \rightarrow \Delta_2$ um difeomorfismo de classe C^r . Então h é uma conjugação entre X_1 e X_2 se, e somente se,

$$Dh(p)X_1(p) = X_2(h(p)), \quad \forall p \in \Delta_1.$$

Vejamos alguns exemplos de campos vetoriais que são conjugados

Exemplo 4.18. Sejam

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad B = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix},$$

matrizes de \mathbb{R}^2 com $a > 0$ e $b > 0$. Os sistemas $x' = Ax$ e $x' = Bx$ definem centros cujas órbitas periódicas têm período $\frac{2\pi}{a}$ e $\frac{2\pi}{b}$, respectivamente. Se $a \neq b$ estes sistemas não são conjugados, pois toda conjugação preserva o período. Por outro lado, $h = Id$ (identidade de \mathbb{R}^2) é uma C^r -equivalência entre eles.

Exemplo 4.19. Considere os campos vetoriais $X(x, y) = (x, -y)$ e $Y = (x, -y + x^3)$ definidos para todos os pontos de \mathbb{R}^2 . Eles são C^r -conjugados via a aplicação $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

dada por $h(x, y) = \left(x, y + \frac{x^3}{4}\right)$. De fato,

$$Dh(x, y)X(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{3x^2}{4} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \frac{3x^3}{4} - y \end{pmatrix} = Y(h(x, y)).$$

A Figura 10 mostra os retratos de fase para os campos X e Y .

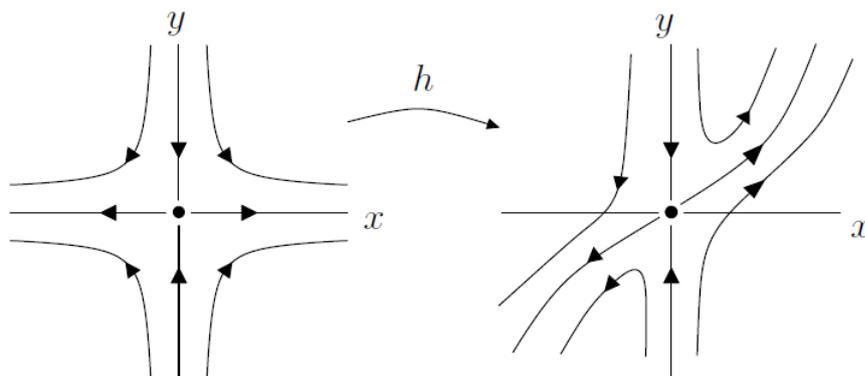


Figura 10 – Ação da equivalência h . Do ponto de vista topológico, é como se h pudesse “entortar” ou “endireitar” as órbitas. À esquerda, o retrato de fase do campo X e à direita, o retrato de fase do campo Y .

4.4 Os teoremas do Fluxo Tubular e Hartman-Grobman

Nesta seção daremos as definições necessárias para estabelecer os dois principais resultados deste trabalho. Tais teoremas classificam localmente a estrutura de campos vetoriais com relação ao seu retrato de fase: o primeiro trata de pontos regulares e o segundo de pontos singulares hiperbólicos.

Definição 4.20. Sejam $X : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo de classe C^k , $k \geq 1$, $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $A \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ um aberto. Uma aplicação diferenciável $f : A \rightarrow \Delta$ de classe C^k chama-se seção transversal local de X se, para todo $a \in A$, $Df(a)(\mathbb{R}^{n-1})$ e $X(f(a))$ geram o espaço \mathbb{R}^n . Seja $\Sigma = f(A)$ munido da topologia induzida. Se $f : A \rightarrow \Sigma$ for um homeomorfismo, dizemos que Σ é uma seção transversal de X .

Observação 4.21. Se $p \in \Delta$ é um ponto não singular, é fácil definirmos uma seção transversal local de X em p . De fato, sejam v_1, v_2, \dots, v_{n-1} vetores de \mathbb{R}^n tais que o conjunto $\{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, X(p)\}$ é uma base para \mathbb{R}^n . Seja $B(0, \delta)$ a bola aberta de centro na origem e raio $\delta > 0$ em \mathbb{R}^{n-1} e defina $f : B(0, \delta) \rightarrow \Delta$ por

$$f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) = p + x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_{n-1} v_{n-1}.$$

Para δ suficientemente pequeno, f é uma seção transversal local de X em p .

Teorema 4.22 (Teorema do Fluxo Tubular). *Seja p um ponto regular de $X : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^k e $f : A \rightarrow \Sigma$ uma seção transversal local de X de classe C^k com $f(0) = p$. Então existe uma vizinhança V de p em Δ e um difeomorfismo $h : V \rightarrow (-\varepsilon, \varepsilon) \times B$ de classe C^k , onde $\varepsilon > 0$ e B é uma bola aberta em \mathbb{R}^{n-1} de centro na origem $0 = f^{-1}(p)$ tal que*

$$a) \ h(\Sigma \cap V) = \{0\} \times B$$

$$b) \ h \text{ é uma } C^k\text{-conjugação entre } X|_V \text{ e o campo constante } Y : (-\varepsilon, \varepsilon) \times B \rightarrow \mathbb{R}^n, \\ Y = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n.$$

Observação 4.23. O Teorema do Fluxo Tubular é de caráter local. Nem todo campo sem singularidade admite um homeomorfismo que trivialize suas órbitas. Um exemplo é o Fluxo de Reeb, dado pelo campo vetorial $X = (e^y(x^2 - 1), -2xe^y)$. Note que $X(x, y) \neq (0, 0)$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e o seu retrato de fase é descrito pela Figura 11.

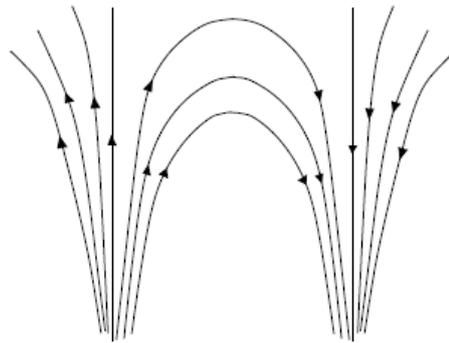


Figura 11 – Fluxo de Reeb. Localmente, todas as órbitas são equivalentes às órbitas do campo constante. Mas globalmente temos uma mudança de comportamento entre as retas $x = -1$ e $x = 1$.

Pelo teorema do fluxo tubular, dois campos X e Z são localmente conjugados em torno dos pontos regulares. Podemos nos perguntar o que ocorre se p é um ponto singular. Neste trabalho nos restringimos a estudar pontos singulares hiperbólicos.

Definição 4.24. Um ponto singular p de um campo vetorial X de classe C^k , $k \geq 1$, chama-se hiperbólico se todos os autovalores de $DX(p)$ tem parte real diferente de zero.

Observação 4.25. Sejam $X : \Delta_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $Y : \Delta_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ campos de classe C^k , $k \geq 2$ e $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma C^2 -conjugação entre X e Y em torno de uma singularidade hiperbólica p_0 de X . Então $q_0 \doteq h(p_0)$ é uma singularidade hiperbólica de Y . De fato, como h é uma conjugação diferenciável, segue que

$$Dh(p)X(p) = Y(h(p)), \quad \forall p \in \Delta_1$$

Fazendo $p = h^{-1}(q)$ obtemos

$$Dh(h^{-1}(q)).X(h^{-1}(q)) = Y(h(h^{-1}(q))),$$

e portanto

$$Y(q) = Dh(h^{-1}(q)).X(h^{-1}(q)),$$

ou ainda,

$$Y = (Dh \circ h^{-1})(X \circ h^{-1}).$$

Derivando, temos

$$\begin{aligned} DY &= D(Dh \circ h^{-1})(X \circ h^{-1}) + (Dh \circ h^{-1}).D(X \circ h^{-1}) \\ &= D^2h(h^{-1}).Dh^{-1}(X \circ h^{-1}) + Dh \circ h^{-1}.DX(h^{-1}).Dh^{-1} \end{aligned}$$

Por fim avaliamos em $q_0 = h(p_0)$

$$\begin{aligned} DY(q_0) &= D^2h(h^{-1}(q_0))Dh^{-1}(q_0)(X(h^{-1}(q_0))) + Dh(h^{-1}(q_0))DX(h^{-1}(q_0))Dh^{-1}(q_0) \\ &= D^2h(p_0)Dh^{-1}(q_0)(X(p_0)) + Dh(p_0)DX(p_0)Dh^{-1}(q_0) \\ &= Dh(p_0)DX(p_0) [Dh(p_0)]^{-1}. \end{aligned}$$

Concluimos que $DY(q_0)$ e $DX(p_0)$ são matrizes semelhantes, logo possuem os mesmos autovalores. Dado que p_0 é uma singularidade hiperbólica de X , segue que $q_0 = h(p_0)$ é uma singularidade hiperbólica de Y .

Finalizamos este capítulo com um dos teoremas mais importantes da teoria qualitativa.

Teorema 4.26 (Teorema de Hartman-Grobman). *Sejam $X : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo vetorial de classe C^1 e p um ponto singular hiperbólico. Existem vizinhanças W de p em Δ e V de 0 em \mathbb{R}^n tais que $X|_W$ é topologicamente conjugado a $DX(p)|_V$.*

Este resultado nos garante que basta analisarmos a parte linear do campo vetorial X em uma vizinhança de um ponto singular hiperbólico. Do ponto de vista prático, podemos iniciar com um campo linear $X(x, y) = (ax + by, cx + dy)$ em \mathbb{R}^2 , por exemplo, e perturbá-lo por qualquer função de classe C^1 que o retrato de fase, em uma vizinhança da origem, mantém o mesmo comportamento. Fazendo $Y(x, y) = (ax + by + f_1(x, y), cx + dy + f_2(x, y))$, com f_1 e f_2 funções de classe C^1 , obtemos que X e Y são topologicamente conjugados em uma vizinhança da origem. É importante ressaltar a força deste resultado, que garante a equivalência topológica, independente de quem sejam f_1 e f_2 , basta que sejam de classe C^1 . No próximo capítulo faremos duas aplicações usando este resultado.

5 Aplicações

Neste capítulo faremos duas aplicações dos teoremas do Fluxo Tubular e Hartman-Grobman. Elas foram retiradas de [Boyce 2010].

5.1 Espécies competindo pelo mesmo suprimento

Suponha que em algum ambiente fechado, existem duas espécies semelhantes competindo por um suprimento limitado de comida. Podemos considerar, por exemplo, duas espécies de peixe em um lago, nenhuma sendo presa da outra. Vamos denotar por x e y as populações das duas espécies, que variam de acordo com o tempo t .

Assumimos que a população de cada espécie, na ausência da outra, seja governada por uma equação logística, de modo que

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x' = x(\varepsilon_1 - \tau_1 x), \\ \frac{dy}{dt} &= y' = y(\varepsilon_2 - \tau_2 y),\end{aligned}\tag{5.1}$$

onde ε_1 e ε_2 são as taxas de crescimento das duas populações e $\frac{\varepsilon_1}{\tau_1}$, $\frac{\varepsilon_2}{\tau_2}$ são seus níveis de saturação (capacidade de sustentação ambiental). Quando ambas as espécies estão presentes, cada uma vai afetar o suprimento de comida disponível para a outra. De fato, elas reduzem as taxas de crescimento e os níveis de saturação uma da outra. A expressão mais simples para reduzir a taxa de crescimento da espécie x devido a presença da espécie y é substituir o fator de crescimento $\varepsilon_1 - \tau_1 x$ na equação (5.1) por $\varepsilon_1 - \tau_1 x - \alpha_1 y$, onde α_1 é uma medida do grau de crescimento de interferência da espécie x . Analogamente substituímos $\varepsilon_2 - \tau_2 y$ por $\varepsilon_2 - \tau_2 y - \alpha_2 x$ obtemos o sistema diferencial

$$\begin{cases} x' = x(\varepsilon_1 - \tau_1 x - \alpha_1 y), \\ y' = y(\varepsilon_2 - \tau_2 y - \alpha_2 x). \end{cases}\tag{5.2}$$

Os valores das constantes positivas ε_i , α_i , τ_i para $i = 1, 2$ variam para cada espécie e são determinadas, em geral, através de observações e experimentos.

Exemplo 5.1. Considere o sistema diferencial

$$\begin{aligned}x' &= x(1 - x - y), \\ y' &= y\left(\frac{3}{4} - y - \frac{1}{2}x\right),\end{aligned}\tag{5.3}$$

que é um caso particular de (5.2), com $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = \frac{3}{4}$, $\tau_1 = \tau_2 = 1$, $\alpha_1 = 1$ e $\alpha_2 = \frac{1}{2}$. À este sistema associamos o campo vetorial

$$X(x, y) = \left(x(1 - x - y), y \left(\frac{3}{4} - y - \frac{1}{2}x \right) \right) \quad (5.4)$$

O sistema (5.3) (ou o campo vetorial (5.4)) possui quatro singularidades, a saber $p_1 = (0, 0)$, $p_2 = (1, 0)$, $p_3 = \left(0, \frac{3}{4}\right)$ e $p_4 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Vamos analisar a parte linear do campo (5.4) quando calculada em cada uma dessas singularidades.

Para isso, note que

$$DX(x, y) = \begin{pmatrix} 1 - y - 2x & -x \\ -\frac{1}{2}y & \frac{3}{4} - 2y - \frac{1}{2}x \end{pmatrix}$$

A singularidade $p_1 = (0, 0)$: Analisando o modelo apresentado, a singularidade p_1 representa o caso em que as duas espécies morrem.

Temos que $DX(p_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$ possui autovalores $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = \frac{3}{4}$ e portanto é uma singularidade hiperbólica. Pelo teorema de Hartman-Grobman, em uma vizinhança de p_1 temos o comportamento de um nó repulsor (lembre-se que no caso linear, autovalores reais e distintos com mesmo sinal positivo correspondem a um nó repulsor).

A singularidade $p_2 = (1, 0)$: A singularidade p_2 representa o caso em que a espécie x sobrevive e a espécie y morre.

Temos que $DX(p_2) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ possui autovalores $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$ portanto é uma singularidade hiperbólica. Pelo teorema de Hartman-Grobman, em uma vizinhança de p_2 temos o comportamento de uma sela.

A singularidade $p_3 = (0, 3/4)$: A singularidade p_3 representa o caso em que a espécie x morre e a espécie y sobrevive.

Aqui, $DX(p_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{3}{8} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$ possui autovalores $\lambda_1 = \frac{1}{4}$ e $\lambda_2 = -\frac{3}{4}$ portanto é uma singularidade hiperbólica. Pelo teorema de Hartman-Grobman, em uma vizinhança de p_3 temos o comportamento de uma sela.

A singularidade $p_4 = (1/2, 1/2)$: A singularidade p_4 representa o caso em que ambas as espécies sobrevivem, em uma situação de coexistência.

Para este caso temos $DX(p_4) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, com autovalores $\lambda_1 = -\frac{1}{4}(2 + \sqrt{2})$ e $\lambda_2 = -\frac{1}{4}(2 - \sqrt{2})$, sendo portanto uma singularidade hiperbólica do tipo nó atrator.

Com as informações acima, aliadas aos Teoremas de Hartman-Grobman e Fluxo Tubular, podemos esboçar o retrato de fase do campo vetorial (5.4) no primeiro quadrante de \mathbb{R}^2 . Ele pode ser visto na Figura 12.

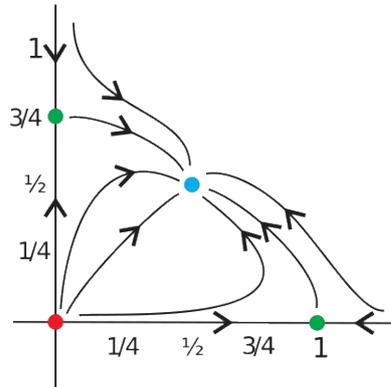


Figura 12 – Retrato de fase do campo (5.4). A singularidade p_1 está na cor vermelha (nó repulsor). As singularidades do tipo sela p_2 e p_3 encontram-se na cor verde. A singularidade p_4 está na cor azul (nó atrator).

5.2 Modelo presa-predador

Na subseção 5.1 discutimos um exemplo de duas espécies que interagem competindo por um mesmo suprimento de comida ou recurso natural. Agora vamos investigar o caso em que uma das espécies (predador) se alimenta da outra (presa), enquanto a presa se alimenta de outro tipo de comida. Podemos considerar, por exemplo, raposas e coelhos que estão em uma determinada floresta fechada, ou então considerar a presa como sendo o pulgão e o predador como sendo a joaninha. É claro que um modelo envolvendo somente duas espécies não pode descrever completamente as relações mais complexas que ocorrem na natureza, mas já nos dá o primeiro passo para a compreensão de outros fenômenos.

Denotemos por x e y as populações investigadas em um determinado instante t , sendo x a população da presa e y a do predador. Para construir um modelo, estabelecemos algumas hipóteses:

1. na ausência do predador, a população de presas aumenta a uma taxa proporcional à atual, de modo que $\frac{dx}{dt} = ax$, $a > 0$, quando $y = 0$.

2. na ausência da presa, o predador é extinto, de modo que $\frac{dy}{dt} = -cy$, $c > 0$, quando $x = 0$.

3. o número de encontros entre predador e presa é proporcional ao produto das duas populações. Cada um desses encontros tende a promover o crescimento da população de predadores e a inibir o crescimento da população de presas. Assim, a taxa de crescimento da população de predadores é aumentada por um termo da forma γxy , enquanto a taxa de crescimento da população de presas é diminuída por um termo da forma $-\alpha xy$, com γ e α constantes positivas.

Concluimos então o sistema diferencial

$$\begin{cases} x' = ax - \alpha xy = x(a - \alpha y), \\ y' = -cy + \gamma xy = y(-c + \gamma x). \end{cases} \quad (5.5)$$

As constantes a , c , α e γ são todas positivas; a e c são as taxas de crescimento da população de presas e de morte da população de predadores, respectivamente, e α e γ são medidas do efeito da interação entre as duas espécies.

As equações (5.5) são chamadas de *equações de Lotka-Volterra*. Embora essas equações sejam bem simples, elas caracterizam uma classe ampla de problemas. Vamos determinar o comportamento qualitativo das soluções de (5.5) com um exemplo particular, fixando os valores das constantes.

Exemplo 5.2. Considere o sistema diferencial

$$\begin{cases} x' = x \left(1 - \frac{1}{2}y\right) \\ y' = y \left(-\frac{3}{4} + \frac{1}{4}x\right) \end{cases} \quad (5.6)$$

Ao sistema (5.6) associamos o campo vetorial

$$X(x, y) = \left(x - \frac{1}{2}xy, -\frac{3}{4}y + \frac{1}{4}xy\right) \quad (5.7)$$

O sistema (5.6) possui duas singularidades, a saber $p_1 = (0, 0)$ e $p_2 = (3, 2)$. Vamos analisar a parte linear do campo (5.7) quando calculado em cada um dessas singularidades. Para isso, note que

$$DX(x, y) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2}y & -\frac{1}{2}x \\ \frac{1}{4}y & -\frac{3}{4} + \frac{1}{4}x \end{pmatrix}$$

A singularidade $p_1 = (0, 0)$: Analisando o modelo apresentado, a singularidade p_1 representa o caso em que há a ausência da presa e do predador.

Temos que

$$DX(p_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

possui autovalores $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -\frac{3}{4}$ e portanto é uma singularidade hiperbólica. Pelo teorema de Hartman-Grobman, em uma vizinhança de p_1 temos o comportamento de uma sela

A singularidade $p_2 = (3, 2)$: A singularidade p_2 representa o caso em que há a existência (situação de coexistência) de ambas as espécies (presa e predador). Para este caso temos

$$DX(p_2) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Com autovalores complexos $\lambda = \frac{\sqrt{3}}{2}i$ e $\bar{\lambda} = -\frac{\sqrt{3}}{2}i$. Aqui é preciso ter muito cuidado pois a singularidade não é hiperbólica, dado que a parte real é zero. Não podemos usar o Teorema de Hartman-Grobman neste caso para ver se p_2 é um foco ou um centro. Para entender o comportamento das soluções do sistema vamos transformar a equação (5.7), obtendo uma segunda equação diferencial. Considere o sistema

$$\begin{cases} u' = -\frac{1}{2}v \\ v' = \frac{1}{2}u, \end{cases} \quad (5.8)$$

que representa a parte linear do sistema (5.7). É claro que p_2 é uma singularidade do tipo centro para o sistema (5.8). Precisamos verificar se essa propriedade se mantém para o sistema original.

Veja que, olhando para as equações do sistema (5.7) obtemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{y(-3/4 + (1/4)x)}{x(1 - (1/2)y)},$$

que pode ser escrita, usando diferencial, na forma

$$\frac{1 - (1/2)y}{y} dy = \frac{-3/4 + (1/4)x}{x} dx,$$

cujas soluções são dadas implicitamente pela relação

$$\frac{3}{4} \ln x + \ln y - \frac{1}{2}y - \frac{1}{4}x = c,$$

onde c é uma constante de integração.

É possível mostrar que as curvas de nível em torno do ponto p_2 definidas implicitamente pela equação acima são fechadas e portanto temos de fato um centro.

Com as informações acima, aliadas aos Teoremas de Hartman-Grobman e Fluxo Tubular, podemos esboçar o retrato de fase do campo vetorial (5.7) no primeiro quadrante de \mathbb{R}^2 . Ele pode ser visto na Figura 13.

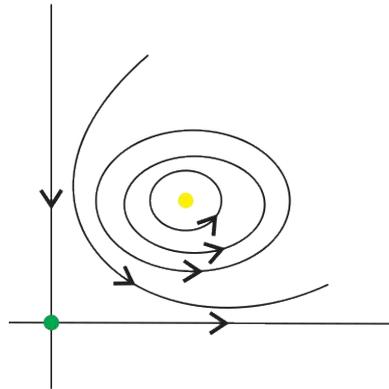


Figura 13 – Retrato de fase do campo (5.7). A singularidade p_1 (sela) está na cor verde. A singularidade p_2 está na cor amarela (centro).

6 Conclusão

O trabalho caracteriza-se por abordar qualitativamente uma equação diferencial ordinária, estudando condições para a existência da solução e investigando-a como um objeto geométrico.

Ao final do desenvolvimento teórico, analisam-se os exemplos 5.1 e 5.2, onde interpretam-se as soluções via o retrato de fase do sistema diferencial. Ambos os exemplos são casos particulares de sistemas do tipo Lotka-Volterra, cujas equações modelam muitos problemas físicos e biológicos.

Antes de modelarmos os problemas apresentados no Capítulo 5, foi necessário definirmos o conceito de equações diferenciais ordinárias, suas propriedades e nos aprofundarmos dentro da teoria qualitativa, estudando teoremas como o do Fluxo Tubular e Hartman- Grobman, bem como definirmos o conceito de retrato de fase.

Para caracterizar as soluções do ponto de vista geométrico, primeiro resolvemos EDO's lineares no Capítulo 2, usando como ferramenta a álgebra linear. Basicamente a teoria consistia em encontrar autovalores e autovetores da matriz associada ao sistema linear e então verificar que estes definiam, respectivamente, o comportamento geométrico e o sistema de coordenadas a ser trabalhado. Por exemplo, uma matriz 2×2 com dois autovalores reais e autovetores correspondentes $v_1 = (1, 0)$ e $v_2 = (0, 1)$ indica que trabalharemos no sistema de coordenadas gerado pela base canônica de \mathbb{R}^2 . Autovetores diferentes deste caso geram sistemas de coordenadas onde os vetores da base não são necessariamente ortogonais.

Após este estudo puderam ser introduzidos os conceitos de equivalência topológica e os teoremas que auxiliam a classificação de sistemas diferenciais (Fluxo Tubular e Hartman-Grobman). Do ponto de vista de sistema de coordenadas, os dois resultados garantem que não importa quem são os autovetores, pois sempre conseguimos um homeomorfismo entre as soluções de dois sistemas diferenciais que possuem os mesmos autovalores. Mais ainda, o segundo afirma que podemos perturbar um sistema linear por funções de classe C^1 e, desde que a singularidade seja hiperbólica, o retrato de fase não se altera em uma vizinhança do ponto. Somente após toda a teoria desenvolvida foi possível realizar as aplicações encontradas no Capítulo 5.

Referências

- BOYCE, R. D. W. *Equações diferenciais elementares e problemas de contorno*. Nona edição. [S.l.]: Rio de Janeiro: Editora LTC, 2010. ISBN 978-5-216-1756-3. Citado na página 45.
- FIGUEIREDO, A. F. N. D. G. de. *Equações Diferenciais Aplicadas*. Segunda edição. [S.l.]: Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2001. Citado na página 15.
- MÉMOIRE sur les courbes définies par une équation différentielle. [S.l.]: Éditions Jacques Gabay, Sceaux, 1993. 540 p. Reprints of the originals from 1856 through 1921. ISBN 2-87647-098-5. Citado na página 15.
- SCHLOMIUK, D.; VULPE, N. Global topological classification of Lotka-Volterra quadratic differential systems. *Electron. J. Differential Equations*, p. No. 64, 69, 2012. Citado na página 15.
- SELVAM, A. G. M.; JACOB, S. B.; DHINESHBABU, R. Bifurcation and chaos control for prey predator model with step size in discrete time. *Journal of Physics: Conference Series*, IOP Publishing, v. 1543, n. 1, p. 012010, may 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/1742-6596/1543/1/012010>>. Citado na página 15.
- SOTOMAYOR, J. *Equações diferenciais ordinárias*. [S.l.]: São Paulo: Editora Livraria da Física, 2011. Citado 3 vezes nas páginas 17, 19 e 21.