



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Rafael Pacheco Cardoso

**Momento magnético anômalo dos quarks**

Florianópolis  
2023



Rafael Pacheco Cardoso

## **Momento magnético anômalo dos quarks**

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Santa Catarina como requisito para a obtenção do título de mestre em física.

Orientador: Sidney dos Santos Avancini

Coorientador: William Rafael Tavares

Florianópolis

2023



Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,  
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Pacheco Cardoso, Rafael

Momento magnético anômalo dos quarks / Rafael Pacheco  
Cardoso ; orientador, Sidney dos Santos Avancini,  
coorientador, William Rafael Tavares, 2023.

93 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa  
Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas,  
Programa de Pós-Graduação em Física, Florianópolis, 2023.

Inclui referências.

1. Física. 2. momento magnético anômalo. 3. modelo de  
Nambu-Jona-Lasinio. 4. lagrangiana efetiva. 5. catálise  
magnética. I. dos Santos Avancini, Sidney. II. Rafael  
Tavares, William. III. Universidade Federal de Santa  
Catarina. Programa de Pós-Graduação em Física. IV. Título.

Rafael Pacheco Cardoso

**Momento magnético anômalo dos quarks**

O presente trabalho em nível de mestrado foi avaliado e aprovado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. Ricardo Luciano Sonogo Farias, Dr.  
Universidade Federal de Santa Maria

Prof. Marcus Emmanuel Benghi Pinto, Dr.  
Universidade Federal de Santa Catarina

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de mestre em física.

---

Coordenação do Programa de Pós-Graduação

---

Sidney dos Santos Avancini  
Orientador

Florianópolis, 2023.

Este trabalho é dedicado à minha vó Nicolina Alexandre.



## AGRADECIMENTOS

Aqui me faltaria espaço para agradecer a todos que precisaria. Primeiro, agradeço a minha namorada Daniele por todo infinito apoio e amor nesses momentos tão difíceis de mestrado; a minha mãe Andréia, por sempre acreditar em mim e me apoiar, minha vó Nicolina, minha dinda Bentinha, meu pai e a toda minha família.

Agradeço à Gabrielli, Helena, Luiza e Olívia, pessoas importantes que passaram pela minha vida e muito me ensinaram. Aos meus queridos amigos do IFSC: Ricardo, Maicon, Breno, Macagnan, Roberto, Adriano, Murillo, Petra, Lenise, Rafaela, Alena, Stefani e Jaqueline que me acolheram nessa cidade de Desterro à mais de 10 anos atrás. E aos professores que lá instigaram em mim a vontade de cursar Física. Como o Professor Jéferson, Antônio e Sérgio. Também agradeço ao Douglas, pelos insights do curso de Física e a Carol.

As pessoas que conheci na UFSC fora dos limites do departamento de Física, Iago, Renata, Thuany, Everton. Agradeço a meus queridos colegas de graduação, onde sem eles nunca conseguiria perseverar: Sara, Tuane, Laura, Pedro, Eduardo e Bárbara. Agradeço também à Bruna, minha querida amiga. Ao Luciano e o Diego, colegas que me acolheram e me motivaram a continuar nessa carreira. Aos recentes colegas de ensino-remoto, laboratório e pós-graduação: Renata, Leonardo, Maíra e Juliana. Também agradeço a todos do laboratório de Física Nuclear e de Hádrons da UFSC. Agradeço à Amanda por, nos últimos anos, me acompanhar, pelas palavras de conforto, de desconforto, e tornar possível que eu me enxergasse até aqui.

Agradeço professores que me guiaram durante a graduação e pós-graduação, Paulo, Kahio, Pawel, Tomazelli, Brunelli, Kneipp, Celso, Felipe, Cid e principalmente à Natalia por me dar oportunidade numa iniciação científica. Ao pessoal do laboratório de Astrofísica, principalmente o Eduardo Lacerda.

Agradeço à Joana, e ao William, meu coorientador por sempre me motivar e ajudar em todos os tipos de cálculo, analíticos e numéricos desse trabalho. E agradeço ao meu orientador Sidney por desde a graduação me orientar e me dar a oportunidade de estudar estes objetos tão curiosos. Agradeço ao Professor Marcus e ao Professor Ricardo por lerem, avaliarem esse trabalho e trazerem contribuições que deixaram ele mais rico. Também aos Professores Tiago e Alexandre pela disponibilidade.

Agradeço a alguns artistas e bandas com os quais nunca teria inspiração necessária: Kurt Cobain, Jeff Buckley, Caetano Veloso, Milton Nascimento e Clube da Esquina, João Bosco, Djavan, Elis Regina, PJ Harvey, Fiona Apple, Carne Doce, Pink Floyd, Lívia Nastrovski, Guinga, Arrigo Barnabé, Luiz Tatit, Alegre Correa e Ana Paula da Silva, Egberto Gismonti, Racionais MC's e Radiohead.

Agradeço ao Antônio, à Andressa e Mariângela por todas ajudas nas questões burocráticas do mestrado. E finalmente, agradeço o Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pela bolsa de fomento (nº de processo: 130168/2021-1).



*O homem está na cidade  
como uma coisa está em outra  
e a cidade está no homem  
que está em outra cidade*  
(Ferreira Gullar, 1975, p. 91)



## RESUMO

Nesse trabalho implementaremos o efeito do momento magnético anômalo dos quarks (qAMM) ao modelo de Nambu–Jona-Lasinio (NJL) a partir do termo de Pauli. Para tal, vamos adotar o formalismo das lagrangianas efetivas de Heisenberg–Euler–Weisskopf da eletrodinâmica quântica. Assim iremos calcular a função de Green associada ao modelo NJL no *gauge* de Schwinger–Fock. Iremos obter uma representação integral para lagrangiana do modelo NJL sob efeito do qAMM que será útil para regularização da mesma no esquema *vacuum magnetic regularization*. Os potenciais termodinâmicos provenientes dessa lagrangiana serão trazidos e as equações de *gap* resolvidas. Será notado que, além do aumento do valor do campo magnético, o aumento do qAMM também ocasionará o efeito da catálise magnética.

**Palavras-chave:** momento magnético anômalo; modelo de Nambu–Jona-Lasinio; lagrangiana efetiva; catálise magnética.



## ABSTRACT

In this work we will employ the effect of the anomalous magnetic moment of the quarks (qAMM) to the Nambu–Jona-Lasinio model through the Pauli term. To do that, we will adopt the Heisenberg–Euler–Weisskopf effective lagrangian formalism of the quantum electrodynamics. Then we will calculate the associated Green function to this model in the Schwinger–Fock gauge. We will obtain an integral representation to this model lagrangian over the qAMM effect that will be useful to apply the vacuum magnetic regularization scheme. The thermodynamical potentials will be shown and the gap equations solved. We will be able to conclude that, besides the increase of the magnetic field, the raise of the qAMM effect also causes a magnetic catalysis.

**Keywords:** anomalous magnetic moment; Nambu–Jona-Lasinio model; effective lagrangian; magnetic catalysis.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Diagrama de fases da QCD. Temperatura <i>versus</i> potencial químico bariônico <i>versus</i> campo magnético. Retirada da Ref. [10]. . . . .	20
Figura 2 – Campo magnético sobre massa do pión ao quadrado ( $e \cdot \text{Field} / m_\pi^2$ ) <i>versus</i> parâmetro de impacto $b$ (fm). Retirada da Ref. [19]. . . . .	21
Figura 3 – Equação de <i>gap</i> no artigo inaugural do modelo NJL [20]. . . . .	21
Figura 4 – Lagrangiana efetiva em função do campo magnético. Retirada de [31]. . . . .	22
Figura 5 – Potencial termodinâmico para os 3 conjuntos de qAMM com $eB = 0,0$ $\text{GeV}^2$ no esquema de <i>cutoff</i> 3D. . . . .	66
Figura 6 – Potencial termodinâmico para os 3 conjuntos de qAMM com $eB = 0,05$ $\text{GeV}^2$ no esquema de <i>cutoff</i> 3D. . . . .	67
Figura 7 – Potencial termodinâmico para os 3 conjuntos de qAMM com $eB = 0,1$ $\text{GeV}^2$ no esquema de <i>cutoff</i> 3D. . . . .	68
Figura 8 – Potencial termodinâmico para os 3 conjuntos de qAMM com $eB = 0,2$ $\text{GeV}^2$ no esquema de <i>cutoff</i> 3D. . . . .	69
Figura 9 – Potencial termodinâmico para os 3 conjuntos de qAMM com $eB = 0,3$ $\text{GeV}^2$ no esquema de <i>cutoff</i> 3D. . . . .	70
Figura 10 – Potencial termodinâmico para os 3 conjuntos de qAMM com $eB = 0,5$ $\text{GeV}^2$ no esquema de <i>cutoff</i> 3D. . . . .	71
Figura 11 – Potencial termodinâmico para os 3 conjuntos de qAMM com $eB = 0,3$ $\text{GeV}^2$ no esquema de regularização de tempo próprio. . . . .	71
Figura 12 – Equação de <i>gap</i> para os 3 conjuntos de qAMM no esquema de <i>cutoff</i> 3D. . . . .	72
Figura 13 – Equação de <i>gap</i> para os 3 conjuntos de qAMM no esquema de regularização de tempo próprio. . . . .	72
Figura 14 – Massa efetiva pela temperatura. Retirada da Ref. [26]. . . . .	74
Figura 15 – Temperatura pseudocrítica pelo campo magnético. Retirada da Ref. [26]. . . . .	75



## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>19</b>
<b>2</b>	<b>MODELO NJL–SU(2) QAMM</b>	<b>25</b>
2.1	SIMETRIAS	26
2.2	APROXIMAÇÃO DE CAMPO MÉDIO (MFA)	27
<b>3</b>	<b>LAGRANGIANA EFETIVA DO MODELO NJL–SU(2) QAMM</b>	<b>31</b>
3.1	ANSATZ DE SCHWINGER–FOCK	32
3.2	EQUAÇÃO DINÂMICA DO PROPAGADOR	33
3.3	FORMA EXPLÍCITA DOS OPERADORES DA EQUAÇÃO DINÂMICA	35
3.4	PROPAGADOR NO ESPAÇO DOS 4-MOMENTOS	39
<b>3.4.1</b>	<b>Determinação da função dos momentos</b>	<b>42</b>
3.5	LAGRANGIANA EFETIVA DO MODELO NJL–SU(2) QAMM	44
<b>4</b>	<b>POTENCIAL EFETIVO E REGULARIZAÇÃO VMR</b>	<b>51</b>
4.1	VACUUM MAGNETIC REGULARIZATION (VMR)	52
4.2	REGULARIZAÇÃO	54
4.3	REGULARIZAÇÃO <i>CUTOFF</i> 3D	55
4.4	REGULARIZAÇÃO DE TEMPO PRÓPRIO	58
<b>5</b>	<b>EQUAÇÃO DE <i>GAP</i></b>	<b>59</b>
5.1	EQUAÇÃO DE <i>GAP</i> USANDO O <i>CUTOFF</i> 3D	59
<b>5.1.1</b>	<b>Equação de <i>gap</i> cutoff 3D para qAMM nulo</b>	<b>61</b>
<b>5.1.2</b>	<b>Equação de <i>gap</i> cutoff 3D para qAMM constante</b>	<b>62</b>
5.2	EQUAÇÃO DE <i>GAP</i> USANDO O TEMPO PRÓPRIO	63
<b>6</b>	<b>RESULTADOS NUMÉRICOS E DISCUSSÃO</b>	<b>65</b>
6.1	POTENCIAIS TERMODINÂMICOS	66
<b>6.1.1</b>	<b>Regularização <i>cutoff</i> 3D</b>	<b>66</b>
<b>6.1.2</b>	<b>Regularização de tempo próprio</b>	<b>68</b>
6.2	EQUAÇÃO DE <i>GAP</i>	69
<b>6.2.1</b>	<b>Regularização <i>cutoff</i> 3D</b>	<b>69</b>
<b>6.2.2</b>	<b>Regularização de tempo próprio</b>	<b>70</b>
<b>7</b>	<b>CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS</b>	<b>73</b>
	REFERÊNCIAS	77
	APÊNDICE A – UNIDADES E NOTAÇÃO	85
	APÊNDICE B – CÁLCULO DA FASE DE SCHWINGER	87
	APÊNDICE C – INTEGRAÇÃO GAUSSIANA	89
	APÊNDICE D – CONTRIBUIÇÕES DE MEIOS DENSOS E QUENTES	91
	APÊNDICE E – TERMO DE VÁCUO <i>GAP</i> <i>CUTOFF</i> 3D	93



## 1 INTRODUÇÃO

*“The quark model began as little more than a quantum-number counting device. After a brief period during which quarks only played a symmetry role, serious interest in quarks dynamics developed. The marriage of the principle of local gauge invariance and quarks has been astonishingly productive. Although many questions still need to be answered, there is little doubt that the strong, weak, and electroweak interactions of matter are described by gauge theories of interactions of the quarks.”* Stephen Gasiorowicz and Jonathan L. Rosner – 1981 [2].

Em 2020, o momento magnético anômalo (AMM, do inglês *anomalous magnetic moment*) do múon  $\mu$  foi medido com extrema precisão (0,46 partes por milhão) [3]. Ainda assim, com  $\sigma = 4,2$  de desvio padrão, necessitamos de novos desenvolvimentos experimentais para seu valor ser totalmente aceito pela comunidade científica (na detecção do bóson de Higgs no *Large Hadron Collider* – LHC, são obtidos valores de  $\sigma > 5$ ). Em 1948 Julien Schwinger, em [4], deu sua contribuição seminal para QED (*Quantum Electrodynamics*) prevendo o efeito AMM do elétron, na esteira de outros que já tratavam a quebra da degenerescência dos níveis de energia de sistemas quânticos, como o desvio Lamb [5]. Esse efeito já era previsto por Kursch e Foley na mesma época [6]. Em relação ao lépton restante, ao tau, teoria e experimentos ainda estão longe de uma aproximação [7]. Para os prótons e nêutrons, seus valores são, de muito, bem conhecidos [2]. Já para os quarks, pouco se pode dizer [8].

A cromodinâmica quântica (QCD – *Quantum Chromodynamics*) é a teoria fundamental que descreve a interação nuclear forte. A QCD prevê que a interação forte se dê entre os quarks. Estes propostos originalmente por Murray Gell-Mann em [9], constituem o que chamamos de hádrons. A partir de bósons de *gauge* da interação forte, os glúons, os quarks interagem e respeitam duas propriedades fundamentais: o confinamento e a liberdade assintótica. Os hádrons obedecem os regimes estatísticos quânticos bem conhecidos: Fermi–Dirac para os férmions (bárions, como o próton e o nêutron) e Bose–Einstein para os bósons (mésons, como o  $\pi^+$  e o  $\eta$ ). A partir dessa matéria hadrônica, e dos quarks e glúons, pode ser construído um diagrama que representa as fases da QCD.

Atualmente, o diagrama de fases da QCD é um tópico em ampla disputa. Uma ilustração de um diagrama de fases é trazida na Figura 1. Nesse, além do potencial químico bariônico e da temperatura, é explicitado ainda o campo magnético. O campo magnético pode nos fornecer uma série de informações relevantes, principalmente da natureza das transições de fase que acontecem nesse diagrama. Não se sabe ao certo que tipo de transições de fase acontecem entre a matéria de hádrons e o plasma de quarks e glúons (QGP, do inglês *Quark-Gluon Plasma*). Acredita-se que até o ponto crítico na linha tracejada da Figura 1 a transição seja do tipo *crossover* suave. As linhas contínuas, acredita-se tratar de uma transição do tipo primeira ordem.

A QCD na rede (LQCD, do inglês *lattice-QCD*) é a abordagem mais conhecida para essa teoria. Essa se baseia na discretização do espaço-tempo [11] e na aplicação do método de Monte-Carlo [12] para explorar o diagrama de fase da QCD e os fenômenos não perturbativos

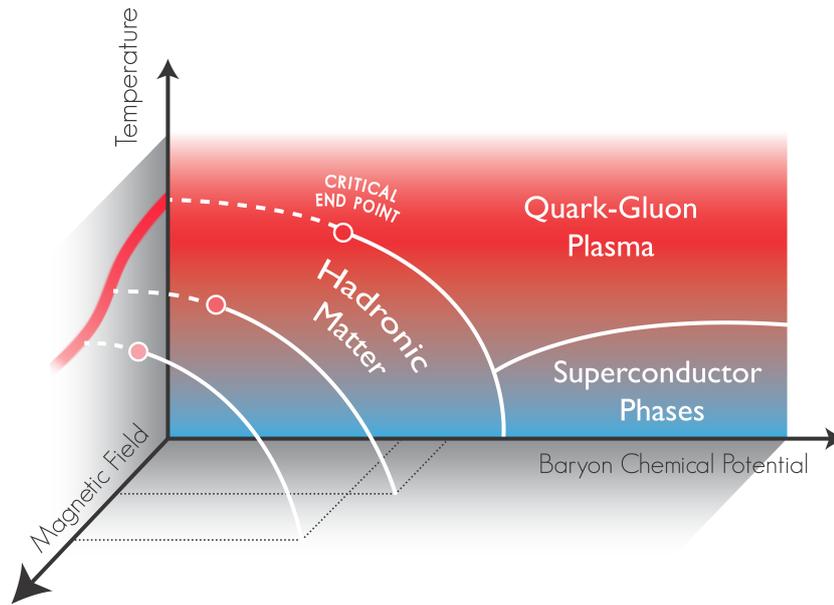


Figura 1 – Diagrama de fases da QCD. Temperatura *versus* potencial químico bariônico *versus* campo magnético. Retirada da Ref. [10].

emergente desse. Essa é bem sucedida para temperaturas finitas e potencial químico nulo.

Sabe-se que campos magnéticos muito intensos são gerados numa classe de estrelas de nêutrons, chamadas de magnetares [13], na ordem de  $10^{15}$  G. Como base de comparação, o campo magnético na superfície da terra é da ordem de 0,5 G, e em exames de ressonância magnética, estes são da ordem de  $10^4$  G. Campos elétricos e magnéticos são gerados nas colisões relativísticas de íons pesados não-centrais (RHIC, do inglês *relativistic heavy ion collisions*). [14, 15, 16]. Na LQCD, campos magnéticos fortes, tanto homogêneos [17], quanto inhomogêneos [18], têm mostrado importância em publicações recentes. Estes são da ordem de  $10^{18}$  G à  $10^{19}$  G para as RHIC não centrais e de  $10^{20}$  G para sistemas que emulam o universo primordial. Na Figura 2 podemos observar as 3 componentes espaciais do campo magnético em função do parâmetro de impacto. O sistema físico em questão são as RHIC. No caso, a colisão de dois núcleos de ouro à uma energia de centro de massa  $\sqrt{s} = 200$  GeV ( $s$  sendo uma das variáveis de Mandelstam). Os valores de campo são para o exato momento da colisão, onde  $eB \sim m_\pi^2 \sim 10^{18}$  G,  $eB$  o campo magnético vezes a carga fundamental  $e$  (por um abuso de linguagem, vamos nos referir a essa quantidade como campo magnético) e  $m_\pi$  a massa do pión. Notamos que há uma rica distribuição de valores para o campo magnético. Isso nos motiva a estudar sistemas físicos com o efeito do campo magnético.

O problema de sinal na LQCD é um fator limitante para o entendimento da região de potenciais químicos finitos do diagrama de fases da matéria de quarks. Dessa maneira, o modelo de Nambu–Jona-Lasinio (NJL) [20, 21] tem tomado um papel importante no campo de modelos efetivos da QCD. A densidade lagrangiana do modelo NJL contém as simetrias da QCD, e para temperaturas finitas este pode emular o efeito do confinamento com o loop de

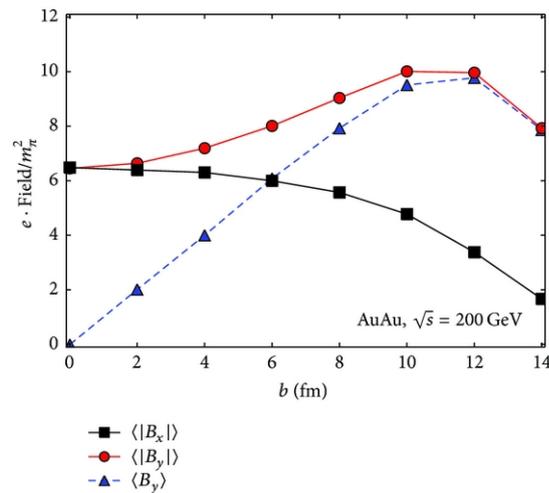


Figura 2 – Campo magnético sobre massa do pión ao quadrado ( $e \cdot \text{Field}/m_\pi^2$ ) versus parâmetro de impacto  $b$  (fm). Retirada da Ref. [19].

Polyakov [22]. O modelo NJL foi criado em analogia a teoria de Bardern–Cooper–Schrieffer (BCS) e de maneira análoga a esta prevê uma equação de *gap*. No modelo BCS, esta dá a massa dos pares de Cooper. No modelo NJL, por sua vez, nos resulta a massa efetiva das partículas. Na Figura 3 a solução original da equação de *gap* no primeiro dos dois artigos de Yogiuro Nambu e Giovanni Jona-Lasinio de 1961 [20, 21]. Nessa figura,  $g_0$  corresponde a constante de acoplamento,  $m$  a massa dinâmica, e  $\Lambda$  a escala de *cut-off*. Portanto, descrevendo a dependência entre o acoplamento e a massa. A equação de *gap* é uma equação auto-consistente, ou equação transcendental.

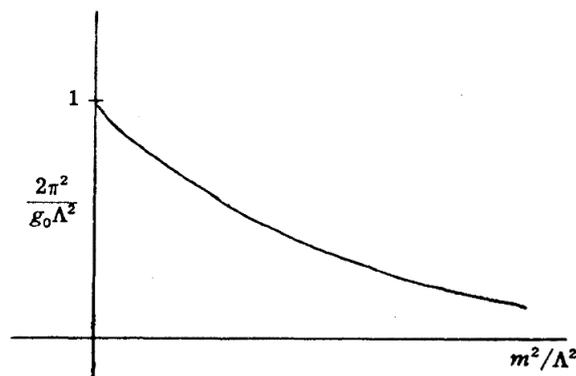


Figura 3 – Equação de *gap* no artigo inaugural do modelo NJL [20].

Quando imaginado, esse modelo previa, na tradição que já se fazia desde a teoria de Yukawa, que os mediadores da interação nuclear forte como os mésons- $\pi$ , na época recém detectados por César Lattes e colaboradores [23]. Com o advento da QCD, esse modelo se mostrou insuficiente para descrever os glúons, e os principais fenômenos da QCD, o confinamento e a liberdade assintótica. O modelo NJL posteriormente foi reinterpretado, e então se tornou um modelo efetivo para QCD no limite não-perturbativo. Ele é uma abordagem muito

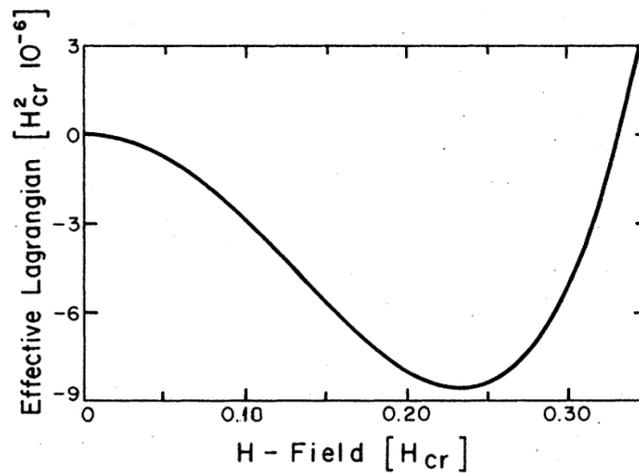


Figura 4 – Lagrangiana efetiva em função do campo magnético. Retirada de [31].

útil para lidar com o diagrama de fases da QCD em potenciais químicos finitos. Espera-se que com o modelo NJL possamos entender características fundamentais desse diagrama.

O efeito do momento magnético anômalo dos quarks (qAMM, do inglês *quark anomalous magnetic moment*) no diagrama de fases da QCD ainda não é bem entendido. A partir de trabalhos recentes [24, 25, 26], podemos observar que várias propriedades do diagrama de fases podem se alterar, mas isso não é uma opinião hegemônica, pois há trabalho que dizem exatamente o contrário [27, 28].

Espera-se que experimentos como o FAIR (*Facility for Antiproton and Ion Research*) e o NICA (*Nuclotron-based Collider Facility*) fiquem prontos e possam detectar, desde os mais diversos resultados encontrados pelas mais diversas teorias efetivas nas últimas década em relação a matéria fortemente interagente, até os efeitos do qAMM no diagrama de fases de matéria regida pela QCD. Atualmente o detector STAR (*Solenoidal Tracker at RHIC*) do experimento RHIC no Brookhaven National Laboratory nos EUA tem gerado uma série de contribuições para nosso campo de pesquisa lidando com efeitos como o magnético quiral e da separação quiral.

Em [8] propõe-se valores para os qAMM's dos quarks a partir dos valores conhecidos para os prótons e nêutrons. [29] é um trabalho super importante e trouxe a discussão do qAMM à voga novamente, utilizando o modelo NJL e os valores de [8]. Apesar disso, devido ao tipo de regularização utilizada no trabalho, alguns resultados estranhos nos saltam os olhos: transições de fase em regiões onde estas não são normalmente observadas, e oscilações de Hass-van Alphen. Assim, há espaço para realizar um trabalho que observe esses efeitos. Tanto em [8], quanto em [29] a massa efetiva entra diretamente no cálculo do qAMM, de maneira similar ao cálculo para os elétrons e os múons. Isso é um procedimento delicado, pois a massa efetiva é dinâmica e depende diretamente das condições impostas ao sistema. Em [30] algumas alternativas são levantadas, mas novamente resultados não-físicos nos trazem desconfortos.

Na Figura 4 retirada de [31] trazemos a lagrangiana efetiva em função do campo

---

magnético. O formalismo das lagrangianas efetivas de Euler–Heisenberg–Weisskopf [32, 33, 34] é alternativo aos diagramas de Feynman na QED. Podemos a partir deste encontrar uma representação interessante para lidar com o modelo NJL em  $SU(2)$  ao adicionar o efeito do qAMM. Como veremos no decorrer desse trabalho, o significado da lagrangiana efetiva é análogo ao do potencial efetivo. Como vemos na Figura 4, há um mínimo na região parabólica, claro perfil de um potencial.

Neste trabalho, vamos mostrar que o modelo NJL com efeito do qAMM induz os efeitos da catálise magnética [35]. Esse se dá com o aumento de alguma quantidade como a massa efetiva, ou a temperatura pseudo-crítica com o aumento do campo magnético. Também compararemos o modelo NJL– $SU(2)$  com o efeito do qAMM com o modelo sem este para verificar que fenômenos são introduzidos. Além disso, um capítulo conterà o desenvolvimento desde a lagrangiana do modelo NJL, passando pelo cálculo da função de Green proveniente desta até a forma integral de lagrangiana efetiva que será regularizada pelo método VMR (do inglês, *vacuum magnetized regularization*).

O trabalho será dividido entre: Capítulo 2, onde traremos o formalismo geral do modelo que utilizaremos, algumas questões de simetrias, e aproximação de campo médio; no Capítulo 4 calcularemos explicitamente a função de Green desse modelo; no Capítulo 4 trabalharemos com a nova forma da densidade lagrangiana e explicitaremos as características do método VMR; no Capítulo 4 faremos as regularizações necessárias, utilizando o esquema de *cutoff* 3D e tempo próprio, nos potenciais termodinâmicos que; no Capítulo 5 serão derivados e as equações de *gap* determinadas para o esquema de regularização em questão; no Capítulo 6 traremos os resultados e discutiremos estes e nas Conclusões 7 fecharemos o texto com uma análise do trabalho realizado e com perspectivas futuras de como podemos continuar. O texto ainda conta com seções de apêndices que complementam o texto principal.



## 2 MODELO NJL–SU(2) QAMM

*"We already remarked before that the model treated here is not realistic enough to be compared with the actual nucleon problem. Our purpose was to show that a new possibility exists for field theory to be richer and more complex than has been hitherto envisaged, even though the mathematics is marred by the unresolved divergence problem." Yochiro Nambu e Giovanni Jona-Lasinio – 1961 [20].*

A densidade lagrangiana do modelo NJL na sua versão SU(2) sob a influência de um campo eletromagnético externo descrito por  $A^\mu$  e sob o efeito do momento magnético anômalo dos quarks (qAMM, do inglês *quark anomalous magnetic moment*) é dado segundo [29] como

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} \left[ \gamma_\mu (i\partial^\mu - e\hat{Q}A^\mu) - \hat{m} + \frac{1}{2}\hat{a}\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \right] \psi + G [(\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5\boldsymbol{\tau}\psi)^2] . \quad (1)$$

$\psi = \begin{pmatrix} \psi_u & \psi_d \end{pmatrix}^T$  correspondente ao espinor dos campos fermiônicos dos quarks up (u) e down (d),  $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$  o espinor adjunto;  $\gamma_\mu$  são as matrizes de Dirac,  $\gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$ ;  $\partial^\mu$  as 4-derivadas dos 4-vetores;  $\hat{Q} = \text{diag}(q_u, q_d) = \text{diag}(2/3, -1/3)$  a matriz das frações cargas elétricas e  $e$  a carga elétrica fundamental;  $\hat{m} = \text{diag}(m_u, m_d)$  a matriz das massas de corrente;  $\hat{a} = \text{diag}(a_u, a_d)$  a matriz dos momentos magnéticos anômalos;

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu] \quad (2)$$

são os geradores do grupo de Lorentz na representação de Dirac;  $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$  é o tensor do campo eletromagnético;  $\boldsymbol{\tau}$  são as matrizes Pauli de isospin, e  $G$  é a constante de acoplamento com dimensão de  $[M]^{-2}$ . Estamos utilizando o sistema de unidades natural, onde  $\hbar = c = 1$ , onde  $\hbar$  é a constante de Planck reduzida,  $c$  é a velocidade da luz. Para mais detalhes consultar o Apêndice A.

Como pode ser consultado em [36], devido a dimensão negativa da constante de acoplamento, temos no modelo NJL uma teoria não-normalizável. Isso causa uma série de limitações ao modelo como pode ser encontrado em [37]. De pronto, podemos citar a falta do fenômeno do confinamento, propriedade fundamental da QCD. Como discutido em [37], desde que não tratemos de propriedades relacionadas ao confinamento, podemos usar o modelo NJL como um modelo efetivo da QCD. Ainda assim, o modelo NJL pode ser estendido e a propriedade de confinamento ser emulada pelo loop de Polyakov, mas isso não será realizado nesse trabalho.

Grande parte dos trabalhos que podem ser feitos em relação ao modelo NJL recaem em métodos de regularização. Conforme tratado em [38], dentro do contexto de modelos NJL com campo magnético, o procedimento de separação entre termos de vácuo e termos relacionados ao campo magnético é primordial para obter resultados físicos que condizem com resultados da LQCD. De fato, [38] mostra que para além de como regularizar as integrais divergentes, o que seja talvez mais fundamental seja como separar as contribuições do potencial termodinâmico. Por exemplo, um jeito comum de proceder na regularização é reconhecer os

limites de transferência de momentos nos fenômenos estudados e fazer cortes (*cutoff*) nas integrais envolvendo momentos.

Como usualmente podemos identificar, os termos de cinéticos e de interação são dados respectivamente por

$$\mathcal{L}_{\text{cin}} = \bar{\psi} \left[ i\mathcal{D} - \hat{m} + \frac{1}{2} \hat{a} \sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right] \psi , \quad (3)$$

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = G \left[ (\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5\tau\psi)^2 \right] , \quad (4)$$

onde na lagrangiana cinética foi identificada à derivada covariante  $D^\mu = \partial^\mu + ie\hat{Q}A^\mu$  e a contração denominada “*slash*” de Feynman  $\mathcal{D} \equiv \gamma_\mu D^\mu$ . Na Eq. (4), devido a forma com que se transformam [20], o primeiro termo é o escalar e o segundo pseudoescalar.

## 2.1 SIMETRIAS

Simetrias se manifestam quando por meio de algum tipo de transformação, algo permanesse inalterado. Estas estão relacionadas a quantidades conservadas. As simetrias das lagrangianas da QCD e das diferentes versões do modelo NJL já foram largamente discutidas em [37, 39, 40, 41]. Aqui nos resta comentar alguns conceitos importantes.

O grupo de simetria da densidade lagrangiana da NJL de 2 sabores (u e d) é

$$\mathcal{G} = U_V(1) \otimes SU_V(2) \otimes SU_A(2) , \quad (5)$$

onde respectivamente temos as simetrias de número bariônico, isospin e quiral. A simetria  $U_V(1)$  se dá por uma mudança de fase global nos espinores da teoria, de modo que  $\psi \rightarrow e^{-i\alpha}\psi$  onde  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Pode-se mostrar que isso implica numa equação de continuidade  $\partial_\mu j^\mu$  para a corrente de Noether  $j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ . Daí temos a conservação do número bariônico expressa por

$$\int d^3x j^0 = \int d^3x \psi^\dagger \psi . \quad (6)$$

No caso do limite de isospin, temos a simetria em relação ao grupo  $SU_V(2)$  em transformações do tipo  $\psi \rightarrow e^{-i\frac{\tau\cdot\theta}{2}}\psi$  com  $\theta \in \mathbb{R}^3$ . Ou seja, uma rotação no espaço de isospin donde temos a corrente de isospin conservada dada por  $J_\mu^a = \bar{\psi}\gamma_\mu\tau^a\psi$ .

A simetria quiral,  $SU_A(2)$ , é na QCD e no modelo NJL, parcial devido ao mecanismo de Higgs. Esta seria total se a massa de corrente dos quarks fosse nula. Mesmo essa sendo um valor não observável, sabemos via relações de Gell-Man–Oakes–Renner [42] que os quarks mais leves tem uma massa na ordem de  $\sim 5$  MeV. Esta se dá via transformações do tipo  $\psi \rightarrow e^{-i\gamma_5\frac{\tau\cdot\theta}{2}}\psi \Rightarrow J_{5\mu}^a = \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\tau^a\psi$ .

Em [43], cálculos bem explícitos demonstrando a invariância desses termos podem ser encontrados. Em relação à invariância do termo de Pauli frente a transformações de Lorentz, em [44] essa também é mostradas explicitamente.

Como na QCD, para o modelo NJL, várias propriedades só poderiam ser vistas aplicando o limite quiral, ou seja,  $m_u = m_d = 0$ . Mesmo não sendo a simetria exata, estudando

cuidadosamente esse limite, muitas informações físicas relevantes podem ser extraídas, como por exemplo, o que versa sobre a transição de fase da matéria de hádrons. De fato, a existência de uma massa de corrente não-nula quebra explicitamente a simetria quiral. O condensado quiral formado pelos par quark-antiquark também sofre uma quebra espontânea de simetria dando origem aos bósons de Goldstone.

Na teoria de campos, existe o teorema de Goldstone [36], que basicamente diz que para cada gerador de dada transformação, um bóson não-massivo é gerado numa quebra espontânea de simetria. Como não temos uma simetria exata, temos no modelo de NJL a geração de pseudo-bósons, no nosso caso os píons. Também em vistas da simetria quiral, vemos que os 2 termos de interação ao serem transformados, se transformam um no outro, daí notamos a necessidade de que ambos tenham a mesma constante de acoplamento.

## 2.2 APROXIMAÇÃO DE CAMPO MÉDIO (MFA)

Na aproximação de campo médio (MFA, do inglês *mean field approximation*) calculamos desvios de observáveis em relação a suas médias. Ao tomar estes ao quadrado, desprezamos os termos quadráticos dos desvios, isto é  $(\Delta\mathcal{O})^2 \sim 0$ . Sendo  $\mathcal{O}$  um observável, temos que o desvio é dado por

$$\begin{aligned}\Delta\mathcal{O} &= \mathcal{O} - \langle\mathcal{O}\rangle \\ \Rightarrow \mathcal{O}^2 &= (\Delta\mathcal{O} + \langle\mathcal{O}\rangle)^2 \\ &\approx 2\mathcal{O}\langle\mathcal{O}\rangle - \langle\mathcal{O}\rangle^2.\end{aligned}\quad (7)$$

Fazemos MFA no termo da lagrangiana  $\mathcal{L}_{int}$  da Eq. (4), tomamos  $\mathcal{O} = \bar{\psi}\psi$  e então reescrevemos o termo escalar em função dos seus valores esperados do vácuo

$$(\bar{\psi}\psi)^2 = 2\bar{\psi}\psi\langle\bar{\psi}\psi\rangle - \langle\bar{\psi}\psi\rangle^2, \quad (8)$$

e assim desprezamos flutuações em torno do valor esperado do vácuo. Agora fazendo  $\mathcal{O} = \bar{\psi}i\gamma_5\boldsymbol{\tau}\psi$  no termo pseudoescalar

$$(\bar{\psi}i\gamma_5\boldsymbol{\tau}\psi)^2 = 2\bar{\psi}i\gamma_5\boldsymbol{\tau}\psi\langle\bar{\psi}i\gamma_5\boldsymbol{\tau}\psi\rangle - \langle\bar{\psi}i\gamma_5\boldsymbol{\tau}\psi\rangle^2. \quad (9)$$

Assumindo que o vácuo tem paridade definida [45], pela simetria de paridade  $\langle\bar{\psi}i\gamma_5\boldsymbol{\tau}\psi\rangle = 0$ .

Assim, a lagrangiana de interação após a MFA se torna

$$\mathcal{L}_{int}^{MFA} = G[2\bar{\psi}\psi\langle\bar{\psi}\psi\rangle - \langle\bar{\psi}\psi\rangle^2]. \quad (10)$$

Portanto, das Eq.'s (1, 3, 4, 10) temos

$$\mathcal{L}^{MFA} = \bar{\psi} \left[ i\mathcal{D} - \hat{m} + \frac{1}{2}\hat{a}\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \right] \psi + G[2\bar{\psi}\psi\langle\bar{\psi}\psi\rangle - \langle\bar{\psi}\psi\rangle^2]. \quad (11)$$

Tomando a aproximação de isospin, conforme discutido na seção (2.1), tratando as massas dos quarks como iguais  $m_u = m_d \equiv m$  e assim definindo a massa de corrente dos quarks,

$$\hat{m} = \text{diag}(m_u, m_d) = \text{diag}(m, m) = m\mathbb{1} \equiv m . \quad (12)$$

Assim,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{\text{MFA}} &= \bar{\psi} \left[ i\not{D} - m + \frac{1}{2}\hat{a}\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \right] \psi + G[2\bar{\psi}\psi\langle\bar{\psi}\psi\rangle - \langle\bar{\psi}\psi\rangle^2] \\ &= \bar{\psi} \left[ i\not{D} - \underbrace{(m - 2G\langle\bar{\psi}\psi\rangle)}_{\equiv M} + \frac{1}{2}\hat{a}\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \right] \psi - G\langle\bar{\psi}\psi\rangle^2 , \end{aligned} \quad (13)$$

e definimos a massa efetiva  $M$  como

$$M = m - 2G\langle\bar{\psi}\psi\rangle , \quad (14)$$

onde  $\langle\bar{\psi}\psi\rangle$  é o condensado quiral, o parâmetro de ordem da nossa teoria. Este guarda informação sobre as transições de fases que o modelo pode estar sujeito. Manipulando a massa efetiva

$$M \equiv m - 2G\langle\bar{\psi}\psi\rangle \Rightarrow -(M - m) = 2G\langle\bar{\psi}\psi\rangle \Rightarrow \langle\bar{\psi}\psi\rangle = -\frac{(M - m)}{2G} \quad (15)$$

e substituindo na Eq. (13), temos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{\text{MFA}} &= \bar{\psi} \left[ i\not{D} - M + \frac{1}{2}\hat{a}\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \right] \psi - G \left[ -\frac{(M - m)}{2G} \right]^2 \\ &= \bar{\psi} \left[ i\not{D} - M + \frac{1}{2}\hat{a}\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \right] \psi - \frac{(M - m)^2}{4G} . \end{aligned} \quad (16)$$

Desejamos escrever a lagrangiana calculada na Eq. (16) de uma forma ainda mais apropriada para os nossos cálculos. Dessa maneira, seguindo as definições expostas em [29] ao dizer que a matriz dos qAMM's é dada por,

$$\hat{a} = \hat{Q}\hat{\alpha}\mu_B \quad (17)$$

onde  $\hat{\alpha} = \text{diag}(\alpha_u, \alpha_d)$ . Definindo  $a_f = q_f\alpha_f\mu_B$ , então podemos abrir a expressão da lagrangiana em função das matrizes que à compõe. Trabalhando apenas com o primeiro termo da

lagrangiana:

$$\begin{aligned}
& \bar{\psi} \left[ i\not{D} - M + \frac{1}{2} \hat{a} \sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right] \psi = \\
& = \bar{\psi} \left[ \gamma_{\mu} (i\partial^{\mu} - e \hat{Q} A^{\mu}) - M + \frac{1}{2} \hat{a} \sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right] \psi \\
& = \begin{pmatrix} \bar{\psi}_u & \bar{\psi}_d \end{pmatrix} \left[ \gamma_{\mu} \left( i\partial^{\mu} - e \begin{pmatrix} q_u & 0 \\ 0 & q_d \end{pmatrix} A^{\mu} \right) - M + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} q_u & 0 \\ 0 & q_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_u & 0 \\ 0 & \alpha_d \end{pmatrix} \mu_B \sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right] \begin{pmatrix} \psi_u \\ \psi_d \end{pmatrix} \\
& = \begin{pmatrix} \bar{\psi}_u & \bar{\psi}_d \end{pmatrix} \left[ \gamma_{\mu} \left( i\partial^{\mu} - \begin{pmatrix} eq_u & 0 \\ 0 & eq_d \end{pmatrix} A^{\mu} \right) - M + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} q_u \alpha_u \mu_B & 0 \\ 0 & q_d \alpha_d \mu_B \end{pmatrix} \sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right] \begin{pmatrix} \psi_u \\ \psi_d \end{pmatrix} \\
& = \bar{\psi}_u \left[ \gamma_{\mu} (i\partial^{\mu} - eq_u A^{\mu}) - M + \frac{1}{2} q_u \alpha_u \mu_B \sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right] \psi_u \\
& + \bar{\psi}_d \left[ \gamma_{\mu} (i\partial^{\mu} - eq_d A^{\mu}) - M + \frac{1}{2} q_d \alpha_d \mu_B \sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right] \psi_d \\
& = \sum_{f=u,d} \bar{\psi}_f \left[ \gamma_{\mu} \left( i\partial^{\mu} - \underbrace{eq_f}_{\equiv e_f} A^{\mu} \right) - M + \frac{1}{2} \underbrace{q_f \alpha_f \mu_B}_{=a_f} \sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right] \psi_f . \tag{18}
\end{aligned}$$

Portanto, recuperando a Eq. (16) temos

$$\therefore \mathcal{L}^{\text{MFA}} = \sum_{f=u,d} \bar{\psi}_f \left[ \gamma_{\mu} (i\partial^{\mu} - e_f A^{\mu}) - M + \frac{1}{2} a_f \sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right] \psi_f - \frac{(M - m)^2}{4G} . \tag{19}$$

Com a lagrangiana nesse formato, Eq. (19) podemos trabalhar com ela sem pensar mais nas definições matriciais já trazidas até aqui. Na próxima seção faremos o cálculo da função de Green dessa densidade lagrangiana.



### 3 LAGRANGIANA EFETIVA DO MODELO NJL–SU(2) QAMM

*“The effective-action approach has also proved useful when additional energy scales are introduced which can be varied over a wide range compared with the high-energy scale. These additional scales may represent perturbations of the vacuum, probing its response under external influences. The (pragmatic) idea then is to compare the response of the vacuum with the response of a medium under the influence of such a perturbation. The properties of a medium are finally assigned to the vacuum itself in order to complete the comparison.”* Walter Dittrich Holger Gies – 2000 [46].

Desejamos adicionar o efeito do AMM no modelo NJL–SU(2). De maneira natural, podemos imaginar que adotar um formalismo proveniente da eletrodinâmica quântica (QED) seja vantajoso. Nos prenúncios dessa teoria, que hoje tem seu sucesso na previsão extrema de resultados experimentais, Julian Schwinger publicou o que hoje chamamos de AMM no elétron [4].

Em eletrodinâmica quântica abordagens perturbativas são muito comuns. Uma das mais conhecidas, para além dos diagramas de Feynman, é a de Heisenberg–Euler–Weisskopf [32, 33], onde em um loop (1ª ordem em teoria da perturbação), o efeito de campos eletromagnéticos, tanto homogêneos quanto inhomogêneos, pode ser computado [34].

Walter Dittrich e Holger Gies conforme [46], revisam, num trabalho muito rico, como proceder para obtenção das lagrangianas efetivas. Em [28] foi mostrado como esse tipo de formalismo pode ser aplicado para investigar como os efeitos do AMM se manifestam em sistemas de férmions carregados à densidades finitas na presença de campo magnético. Essa é a motivação para aplicar o formalismo de Dittrich no modelo NJL–SU(2).

O procedimento é o padrão de teorias de campo. A partir da densidade lagrangiana encontramos equações dinâmicas para os campos e assim, a forma com que estes se transformam.

As equações de Euler–Lagrange são dadas por

$$\partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0 , \quad (20)$$

na qual, no caso da lagrangiana da Eq. (19), temos o conjunto de campos fermiônicos das componentes do espinor de Dirac e do seu conjugado, para os quarks *up* e *down*

$$\phi = \{ \psi_u, \psi_d, \bar{\psi}_u, \bar{\psi}_d \} = \{ \psi_f, \bar{\psi}_f \} , \quad f = u, d . \quad (21)$$

Aplicando a Eq. (20), por exemplo, para  $\bar{\psi}_f$ , temos

$$\left[ \gamma_\mu (i\partial^\mu - e_f A^\mu) - M + \frac{1}{2} a_f \sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right] \psi_f = 0 , \quad f = u, d . \quad (22)$$

Definimos a notação que suprime os índices somados na convenção de Einstein por o usual “.” do produto escalar euclidiano, como usualmente são tratados em textos relacionados à QED. Assim, os produtos entre 4-vetores são dados como

$$\gamma_\mu A^\mu \equiv \gamma \cdot A , \quad \sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \equiv \sigma \cdot F . \quad (23)$$

Reescrevemos, após trocar o sinal de toda a Eq. (22)

$$\left[ M + \frac{1}{i} \gamma \cdot \partial + e_f \gamma \cdot A - \frac{1}{2} a_f \sigma \cdot F \right] \psi_f = 0. \quad (24)$$

Da equação de Dirac Eq. (24) podemos associar uma função de Green de 2 pontos de modo que o operador a esquerda do espinor aplicado nesta, resulte numa identidade no caso, a distribuição delta de Dirac:

$$\left[ M + \gamma \cdot \left( \frac{1}{i} \partial + e_f A \right) - \frac{1}{2} a_f \sigma \cdot F \right] G(x, x'|A) = \delta(x - x'), \quad (25)$$

onde, por simplicidade, escrevemos apenas  $\delta(x - x') = \delta^4(x - x')$ . Podemos escrever explicitamente a derivada covariante como

$$\Pi_\mu \equiv \frac{1}{i} \partial_\mu + e_f A_\mu \quad (26)$$

e definir

$$M' \equiv M - \frac{1}{2} a_f \sigma \cdot F. \quad (27)$$

E portanto, podemos escrever de maneira simples a Eq. (25) como

$$\therefore \boxed{[M' + \gamma \cdot \Pi] G(x, x'|A) = \delta(x - x')}. \quad (28)$$

Em 1978, em [47] Dittrich publicou um trabalho onde foi computado os termos em  $\alpha_e^2$  (constante de estrutura fina) para o AMM do elétron adicionando o termo de Pauli  $\sigma \cdot F$  numa lagrangiana efetiva da QED. Nesse trabalho, os autores escrevem a conexão entre a função de Green e a densidade lagrangiana em um loop como

$$i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial M} = \text{Tr} G(x, x|A) \equiv \text{Tr} G(A), \quad (29)$$

ou seja, se calcularmos a função de Green, podemos reescrever a lagrangiana. Uma maneira de abordar esse tipo de problema é não procurar a forma mais genérica possível para esse função de Green, mas sim utilizar resultados já obtidos na literatura. Para tal, foi tomado um *ansatz*.

### 3.1 ANSATZ DE SCHWINGER-FOCK

Baseados ainda em [47], supomos uma função de Green de 2 pontos

$$G(x, x'|A) = \phi(x, x') [M' - \gamma \cdot \Pi'] \Delta(x - x'|A') \quad (30)$$

onde a função escalar  $\phi$  é a fase de Schwinger e o *gauge* do 4-potencial vetor são dados respectivamente por

$$\phi(x, x') = \exp \left[ -ie_f \int_{x'}^x d\xi_\mu \left( A^\mu(\xi) + \frac{1}{2} F^{\mu\nu}(\xi - x') \right)_\nu \right], \quad (31)$$

$$A'^\mu \equiv A_{SF}^\mu(x) = -\frac{1}{2} F^{\mu\nu}(x - x')_\nu. \quad (32)$$

Na Eq. (32) temos o *gauge* de Schwinger–Fock<sup>1</sup>. O *ansatz* dado na Eq. (30) é de forma que, comparando com a Eq. (28) da seção anterior, a menos da fase de Schwinger, ao aplicar o operador à esquerda da Eq. (28) no *ansatz* dado, podemos obter uma forma quadrática. Notamos também uma mudança na forma da derivada covariante, identificada por  $\Pi'$ , isso está relacionado com a escolha do *gauge* de Schwinger–Fock. A função  $\Delta(x - x'|A')$  é o propagador de 2 pontos, tomado no *gauge* escolhido, este será utilizado para calcular a função de Green. No Apêndice B mostramos que a fase de Schwinger se resume a

$$\phi(x, x') = \exp \left[ -ie_f \int_{x'}^x d\xi_\mu A^\mu(\xi) \right]. \quad (33)$$

Com o *ansatz* Eq. (30), o *gauge* de Schwinger–Fock Eq. (32) e a fase de Schwinger Eq. (33) podemos reescrever a Eq. (28) para o propagador explicitando algumas quantidades.

### 3.2 EQUAÇÃO DINÂMICA DO PROPAGADOR

Desejamos então encontrar uma equação dinâmica para o propagador  $\Delta$ . Substituindo o *ansatz* da Eq. (30) na Eq. (28), explicitando as derivadas covariantes e omitindo as dependências em  $x$  e  $x'$ , então

$$\left[ M' + \gamma \cdot \left( \frac{1}{i} \partial + e_f A \right) \right] \left\{ \phi \left[ M' - \gamma \cdot \left( \frac{1}{i} \partial + e_f A' \right) \right] \Delta \right\} = \delta. \quad (34)$$

Desejamos mostrar que essa expressão independe da fase de Schwinger. Alguns cálculos intermediários são necessários para isso. Calculando o comutador entre o segundo termo entre os primeiros colchetes da Eq. (34) e a fase, temos

$$\begin{aligned} \left[ \gamma \cdot \left( \frac{1}{i} \partial + e_f A \right), \phi(x, x') \right] &= \gamma \cdot \left( \frac{1}{i} \partial + e_f A \right) \phi(x, x') - \phi(x, x') \gamma \cdot \left( \frac{1}{i} \partial + e_f A \right) \\ &= \frac{1}{i} (\gamma \cdot \partial) \phi + e_f (\gamma \cdot A) \phi - \phi \frac{1}{i} (\gamma \cdot \partial) - \phi e_f (\gamma \cdot A) \\ &= \left[ \frac{1}{i} (\gamma \cdot \partial), \phi \right] + \cancel{e_f \phi (\gamma \cdot A)} - \cancel{e_f \phi (\gamma \cdot A)} \\ &= \frac{1}{i} [\gamma^\mu \partial_\mu, \phi] \\ &= \frac{1}{i} \gamma^\mu \left[ \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \phi(x, x') \right]. \end{aligned} \quad (35)$$

<sup>1</sup> Um trabalho que discute, tanto a autoria/nome desse *gauge*, quanto faz uma bela revisão deste, é [48].

Das definições de  $\phi(x, x')$  e  $A'^\mu$ , Eq.'s (31, 32), respectivamente,

$$\begin{aligned}
\left[ \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \phi(x, x') \right] J(x) &= [\partial_\mu, \phi(x, x')] J(x) = \partial_\mu(\phi(x, x')J(x)) - \phi(x, x')(\partial_\mu J(x)) \\
&= (\partial_\mu \phi(x, x'))J(x) + \cancel{\phi(x, x')(\partial_\mu J(x))} - \cancel{\phi(x, x')(\partial_\mu J(x))} \\
&= \left\{ \partial_\mu \exp \left[ -ie_f \int_{x'}^x d\xi^\mu \left( A_\mu(\xi) + \frac{1}{2} F_{\mu\nu}(\xi - x') \right) \right] \right\} J(x) \\
&= \left\{ \partial_\mu \exp \left[ -ie_f \int_{x'}^x d\xi^\mu (A_\mu(\xi) - A'_\mu(\xi)) \right] \right\} J(x) \\
&= -ie_f (A_\mu(\xi) - A'_\mu(\xi)) \phi(x, x') J(x) , \tag{36}
\end{aligned}$$

onde  $J(x)$  é uma função arbitrária e foi utilizada a regra integral de Leibniz:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \int_{x'}^x d\xi^\mu [A_\mu(\xi) - A'_\mu(\xi)] = A_\mu(x) - A'_\mu(x) . \tag{37}$$

Aplicando Eq. (36) na Eq. (35), temos

$$\begin{aligned}
\left[ \gamma \cdot \left( \frac{1}{i} \partial + e_f A \right), \phi(x, x') \right] &= \frac{1}{i} \gamma^\mu \left[ \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \phi(x, x') \right] \\
&= \frac{1}{i} \gamma^\mu \left\{ -ie_f [A_\mu(\xi) - A'_\mu(\xi)] \phi(x, x') \right\} , \tag{38}
\end{aligned}$$

escrevendo explicitamente o lado esquerdo da equação

$$\gamma \cdot \left( \frac{1}{i} \partial + e_f A \right) \phi(x, x') - \phi(x, x') \gamma \cdot \left( \frac{1}{i} \partial + e_f A \right) = -e_f \gamma^\mu \left\{ [A_\mu(\xi) - A'_\mu(\xi)] \phi(x, x') \right\} . \tag{39}$$

Rearranjando termos

$$\begin{aligned}
\gamma \cdot \left( \frac{1}{i} \partial + e_f A \right) \phi(x, x') &= \phi(x, x') \gamma \cdot \left( \frac{1}{i} \partial + e_f A \right) - e_f \gamma^\mu \left\{ [A_\mu(\xi) - A'_\mu(\xi)] \phi(x, x') \right\} \\
&= \phi(x, x') \gamma \cdot \left( \frac{1}{i} \partial + e_f A \right) - e_f \gamma \cdot (A - A') \phi(x, x') \\
&= \phi(x, x') \gamma \cdot \left( \frac{1}{i} \partial + e_f A \right) - \phi(x, x') \gamma \cdot e_f (A - A') \\
&= \phi(x, x') \gamma \cdot \left( \frac{1}{i} \partial + \cancel{e_f A} - \cancel{e_f A} + e_f A' \right) \\
&= \phi(x, x') \gamma \cdot \left( \frac{1}{i} \partial + e_f A' \right) . \tag{40}
\end{aligned}$$

Na prática isso implicará que a fase de Schwinger  $\phi(x, x')$  pode “ir para esquerda” na Eq. (34), isto é

$$\phi(x, x') \left[ M' + \gamma \cdot \left( \frac{1}{i} \partial + e_f A' \right) \right] \left[ M' - \gamma \cdot \left( \frac{1}{i} \partial + e_f A' \right) \right] \Delta(x - x'|A') = \delta(x - x') . \tag{41}$$

Assumindo que a função  $\phi$  é não-nula, podemos dividir toda equação por essa quantidade

$$\left[ M' + \gamma \cdot \left( \frac{1}{i} \partial + e_f A' \right) \right] \left[ M' - \gamma \cdot \left( \frac{1}{i} \partial + e_f A' \right) \right] \Delta(x - x' | A') = \frac{\delta(x - x')}{\phi(x, x')}, \quad (42)$$

Integrando essa equação e se atentando para o lado direito desta, temos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{\phi(x, x')} \delta(x - x') = \frac{1}{\phi(x, x)}, \quad (43)$$

então, sem perda de generalidade, podemos definir  $\phi(x, x) = 1$  e continuar os cálculos a partir disso. Então

$$\begin{aligned} \left[ M' + \gamma \cdot \left( \frac{1}{i} \partial + e_f A' \right) \right] \left[ M' - \gamma \cdot \left( \frac{1}{i} \partial + e_f A' \right) \right] \Delta(x - x' | A') &= \delta(x - x') \\ [M' + \gamma \cdot \Pi'] [M' - \gamma \cdot \Pi'] \Delta(x - x' | A') &= \delta(x - x') \\ \left\{ M'^2 - (\gamma \cdot \Pi')^2 + [(\gamma \cdot \Pi'), M'] \right\} \Delta(x - x' | A') &= \delta(x - x'). \end{aligned} \quad (44)$$

Na Eq. (44), notamos o termo  $\sim [\gamma \cdot \Pi', M']$  operando sobre a função  $\Delta$  é nulo quando tomado entre os espinores de Dirac como citado em [49]. No entanto, em [28] arbitra que esse termo estaria faltando e que o espectro de energia seria modificado. Mesmo assim, o potencial efetivo obtido por [28] na Eq. (B10) é o mesmo de [50]. Isso é válido no sentido de que estamos usando uma expansão em primeira ordem para nossa lagrangiana efetiva em relação ao campo, conforme [51]. Assim, vamos considerar

$$[\gamma \cdot \Pi', M'] \Delta(x - x' | A') = 0. \quad (45)$$

Portando, temos que resolver a Eq. (44)

$$\therefore \boxed{\left[ M'^2 - (\gamma \cdot \Pi')^2 \right] \Delta(x - x' | A') = \delta(x - x')}. \quad (46)$$

Na próxima seção vamos calcular a forma explícita dos operadores se originam do termo  $(\gamma \cdot \Pi')^2$  aplicado ao propagador.

### 3.3 FORMA EXPLÍCITA DOS OPERADORES DA EQUAÇÃO DINÂMICA

Diretamente da Eq. (46), notamos que os o termo  $(\gamma \cdot \Pi')^2$  pode ser escrito a partir de quantidades já definidas. Lembrando da definição dos geradores do grupo de Lorentz na

representação de Dirac dado na Eq. (2), então

$$\begin{aligned}
(\gamma \cdot \Pi')^2 &= \gamma^\mu \gamma^\nu \Pi'_\mu \Pi'_\nu = (\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu - \gamma^\nu \gamma^\mu) \Pi'_\mu \Pi'_\nu \\
&= \left( \frac{1}{2} \gamma^\mu \gamma^\nu + \frac{1}{2} \gamma^\mu \gamma^\nu + \frac{1}{2} \gamma^\nu \gamma^\mu + \frac{1}{2} \gamma^\nu \gamma^\mu - \frac{1}{2} \gamma^\nu \gamma^\mu - \frac{1}{2} \gamma^\nu \gamma^\mu \right) \Pi'_\mu \Pi'_\nu \\
&= \frac{1}{2} \underbrace{(\gamma^\nu \gamma^\mu + \gamma^\nu \gamma^\mu)}_{=g^{\mu\nu}} \Pi'_\mu \Pi'_\nu + \frac{1}{2} \underbrace{(\gamma^\nu \gamma^\mu - \gamma^\nu \gamma^\mu)}_{=-i\sigma^{\mu\nu}} \Pi'_\mu \Pi'_\nu \\
&= g^{\mu\nu} \Pi'_\mu \Pi'_\nu - i\sigma^{\mu\nu} \Pi'_\mu \Pi'_\nu \\
&= \Pi'^\nu \Pi'_\nu - \frac{i}{2} \sigma^{\mu\nu} \Pi'_\mu \Pi'_\nu - \frac{i}{2} \sigma^{\mu\nu} \Pi'_\mu \Pi'_\nu \\
&= \Pi'^2 - \frac{i}{2} \sigma^{\mu\nu} \Pi'_\mu \Pi'_\nu - \frac{i}{2} \underbrace{\sigma^{\nu\mu}}_{=-\sigma^{\mu\nu}} \Pi'_\nu \Pi'_\mu \\
&= \Pi'^2 - \frac{i}{2} \sigma^{\mu\nu} (\Pi'_\mu \Pi'_\nu - \Pi'_\nu \Pi'_\mu) \\
&= \Pi'^2 - \frac{i}{2} \sigma^{\mu\nu} [\Pi'_\mu, \Pi'_\nu] . \tag{47}
\end{aligned}$$

Calculando o comutador da Eq. (47), a partir da definição da derivada covariante, Eq. (26), então

$$\begin{aligned}
[\Pi'_\mu, \Pi'_\nu] &= \left( \frac{1}{i} \partial_\mu + e_f A'_\mu \right) \left( \frac{1}{i} \partial_\nu + e_f A'_\nu \right) - \left( \frac{1}{i} \partial_\nu + e_f A'_\nu \right) \left( \frac{1}{i} \partial_\mu + e_f A'_\mu \right) \\
&= \frac{1}{i^2} \partial_\mu \partial_\nu + \frac{1}{i} e_f \partial_\mu A'_\nu + \frac{1}{i} e_f A'_\mu \partial_\nu + e_f^2 A'_\mu A'_\nu + \\
&\quad - \frac{1}{i^2} \partial_\nu \partial_\mu - \frac{1}{i} e_f \partial_\nu A'_\mu - \frac{1}{i} e_f A'_\nu \partial_\mu - e_f^2 A'_\nu A'_\mu \\
&= \frac{1}{i} e_f (\partial_\mu A'_\nu - A'_\nu \partial_\mu) + \frac{1}{i} e_f (A'_\mu \partial_\nu - \partial_\nu A'_\mu) \\
&= -ie_f [\partial_\mu, A'_\nu] - ie_f [A'_\mu, \partial_\nu] . \tag{48}
\end{aligned}$$

Calculando a aplicação do comutador da Eq. (48) numa função arbitrária:

$$\begin{aligned}
[\partial_\mu, A'_\nu] J(x) &= \partial_\mu (A'_\nu J(x)) - A'_\nu (\partial_\mu J(x)) \\
&= (\partial_\mu A'_\nu) J(x) + \underline{A'_\nu (\partial_\mu J(x))} - \underline{A'_\nu (\partial_\mu J(x))} \\
&= (\partial_\mu A'_\nu) J(x) , \tag{49}
\end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned}
[\Pi'_\mu, \Pi'_\nu] &= -ie_f [\partial_\mu, A'_\nu] - ie_f [A'_\mu, \partial_\nu] \\
&= -ie_f (\partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu) \\
&= -ie_f F_{\mu\nu} . \tag{50}
\end{aligned}$$

Portanto, juntando as Eq. (47, 50), temos

$$\begin{aligned}
 (\gamma \cdot \Pi')^2 &= \Pi'^2 - \frac{i}{2} \sigma^{\mu\nu} [\Pi'_\mu, \Pi'_\nu] \\
 &= \Pi'^2 - \frac{i}{2} \sigma^{\mu\nu} (-ie_f F_{\mu\nu}) \\
 &= \Pi'^2 - \frac{1}{2} e_f \sigma \cdot F .
 \end{aligned} \tag{51}$$

Conforme a Eq. (51), vemos que agora precisamos calcular  $\Pi'^2$ . Para tal, vamos aplicar a definição, Eq. (26), assim

$$\begin{aligned}
 \Pi'^2 &= \left( \frac{1}{i} \partial_\mu + e_f A'_\mu \right) \left( \frac{1}{i} \partial^\mu + e_f A'^\mu \right) \\
 &= -\partial_\mu \partial^\mu + \frac{1}{i} \partial_\mu e_f A'^\mu + e_f A'_\mu \frac{1}{i} \partial^\mu + e_f A'_\mu e_f A'^\mu \\
 &= -\square + \frac{e_f}{i} \partial_\mu A'^\mu + \frac{e_f}{i} A'_\mu \partial^\mu + e_f^2 A'_\mu A'^\mu ,
 \end{aligned} \tag{52}$$

onde identificamos o  $\partial_\mu \partial^\mu \equiv \square$  como o operador de d'Alembert. A partir da Eq. (49)

$$\begin{aligned}
 [\partial_\mu, A'^\mu] J(x) &= \partial_\mu (A'^\mu J(x)) - A'^\mu (\partial_\mu J(x)) \\
 &= (\partial_\mu A'^\mu) J(x) \\
 \Rightarrow \partial_\mu (A'^\mu J(x)) &= A'_\mu (\partial^\mu J(x)) + (\partial_\mu A'^\mu) J(x) .
 \end{aligned} \tag{53}$$

Considerando campos eletromagnéticos constantes e usando o calibre de Schwinger–Fock, definido na Eq. (32), então

$$\begin{aligned}
 (\partial_\mu A'^\mu) &= -\partial_\mu \left[ \frac{1}{2} F^{\mu\nu} (x - x')_\nu \right] \\
 &= -\frac{1}{2} F^{\mu\nu} [\partial_\mu (x - x')_\nu] \\
 &= -\frac{1}{2} F^{\mu\nu} \left[ \frac{\partial}{\partial x^\mu} g_{\nu\eta} (x - x')^\eta \right] \\
 &= -\frac{1}{2} F^{\mu\nu} g_{\nu\eta} \left[ \underbrace{\frac{\partial x^\eta}{\partial x^\mu}}_{=\delta_\mu^\eta} - \cancel{\frac{\partial x'^\eta}{\partial x^\mu}} \right] \\
 &= -\frac{1}{2} F^{\mu\nu} g_{\nu\eta} \delta_\mu^\eta \\
 &= -\frac{1}{2} \underbrace{F^{\mu\nu}}_{\text{antissimétrico}} \underbrace{g_{\nu\mu}}_{\text{simétrico}} = 0 .
 \end{aligned} \tag{54}$$

E portanto,

$$\begin{aligned}
 \Pi'^2 &= -\square + \frac{e_f}{i} \partial_\mu A'^\mu + \frac{e_f}{i} A'_\mu \partial^\mu + e_f^2 A'_\mu A'^\mu \\
 &= -\square + 2 \frac{e_f}{i} A'_\mu \partial^\mu + e_f^2 A'_\mu A'^\mu .
 \end{aligned} \tag{55}$$

Precisamos ainda obter uma forma explícita para os dois últimos termos da Eq. (55), estes em função de 4-vetores e do tensor eletromagnético. No termo  $A'_\mu \partial^\mu$  nos valem da antissimetria do tensor  $F_{\mu\nu}$  e usando as propriedades usuais nos índices tensoriais, temos

$$\begin{aligned}
A'_\mu \partial^\mu &= -\frac{1}{2} F_{\mu\nu} (x - x')^\nu \partial^\mu \\
&= -\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} F_{\mu\nu} (x - x')^\nu \partial^\mu + \frac{1}{2} F_{\nu\mu} (x - x')^\mu \partial^\nu \right\} \\
&= -\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} F_{\mu\nu} (x - x')^\nu \partial^\mu + \frac{1}{2} F_{\nu\mu} (x - x')^\mu \partial^\nu \right\} \\
&= -\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} F_{\mu\nu} (x - x')^\nu \partial^\mu - \frac{1}{2} F_{\mu\nu} (x - x')^\mu \partial^\nu \right\} \\
&= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} [(x - x')^\nu \partial^\mu - (x - x')^\mu \partial^\nu]. \tag{56}
\end{aligned}$$

Agora o termo  $A'_\mu A'^\mu$ . Novamente usando propriedades de tensoriais:

$$\begin{aligned}
A'_\mu A'^\mu &= \frac{1}{4} F_{\mu\nu} (x - x')^\nu F^{\mu\gamma} (x - x')_\gamma \\
&= \frac{1}{4} F_{\mu\nu} (x - x')^\nu g^{\beta\gamma} F^\mu{}_\beta g_{\alpha\gamma} (x - x')^\alpha \\
&= \frac{1}{4} F_{\mu\nu} (x - x')^\nu \delta^\beta_\alpha F^\mu{}_\beta (x - x')^\alpha \\
&= \frac{1}{4} F_{\mu\nu} (x - x')^\nu F^\mu{}_\alpha (x - x')^\alpha \\
&= -\frac{1}{4} (x - x')^\nu \underbrace{F_{\nu\mu} F^\mu{}_\alpha}_{\equiv F^2_{\nu\alpha}} (x - x')^\alpha \\
&= -\frac{1}{4} (x - x')^\nu F^2_{\nu\alpha} (x - x')^\alpha \\
&= -\frac{1}{4} (x - x')^\mu F^2_{\mu\nu} (x - x')^\nu. \tag{57}
\end{aligned}$$

Portanto, com os resultados das Eq's (56, 57), reescrevemos a Eq. (55) da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\Pi'^2 &= -\square + 2 \frac{e_f}{i} A'_\mu \partial^\mu + e_f^2 A'_\mu A'^\mu \\
&= -\square + 2 \frac{e_f}{i} \left\{ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} [(x - x')^\nu \partial^\mu - (x - x')^\mu \partial^\nu] \right\} + e_f^2 \left\{ -\frac{1}{4} (x - x')^\mu F^2_{\mu\nu} (x - x')^\nu \right\} \\
&= -\square + i \frac{e_f}{2} \{ F_{\mu\nu} [(x - x')^\nu \partial^\mu - (x - x')^\mu \partial^\nu] \} - \frac{e_f^2}{4} \{ (x - x')^\mu F^2_{\mu\nu} (x - x')^\nu \}. \tag{58}
\end{aligned}$$

Finalmente, a partir das Eq's (46, 27, 28, 47, 58), escrevemos

$$\begin{aligned}
& [M'^2 - (\gamma \cdot \Pi')^2] \Delta(x - x'|A') = \delta(x - x') \\
& \left\{ \left( M - \frac{1}{2} a_f \sigma \cdot F \right)^2 - \Pi'^2 + \frac{1}{2} e_f \sigma \cdot F \right\} \Delta(x - x'|A') = \delta(x - x') \\
& \left\{ \left( M - \frac{1}{2} a_f \sigma \cdot F \right)^2 + \square - i \frac{e_f}{2} F_{\mu\nu} [(x - x')^\nu \partial^\mu - (x - x')^\mu \partial^\nu] + \right. \\
& \left. + \frac{e_f^2}{4} (x - x')^\mu F_{\mu\nu}^2 (x - x')^\nu + \frac{e_f}{2} \sigma \cdot F \right\} \Delta(x - x'|A') = \delta(x - x') \\
\therefore & \left\{ \square + \left( M - \frac{1}{2} a_f \sigma \cdot F \right)^2 + \frac{e_f}{2} \sigma \cdot F + \frac{e_f^2}{4} (x - x')^\mu F_{\mu\nu}^2 (x - x')^\nu + \right. \\
& \left. - i \frac{e_f}{2} F_{\mu\nu} [(x - x')^\nu \partial^\mu - (x - x')^\mu \partial^\nu] \right\} \Delta(x - x'|A') = \delta(x - x') . \quad (59)
\end{aligned}$$

Essa equação parece um tanto difícil de ser resolvida. No entanto, ela fica consideravelmente mais simples quando a calculamos no espaço de momentos. Nas próximas seções faremos esse procedimento. Mas antes podemos simplificar um pouco essa equação observando a simetria de rotação.

Como pode ser encontrado em [52], os geradores do grupo de Lorentz – SO(3,1) – na representação adjunta de 2 índices podem ser escritos como

$$J_{\mu\nu} = i(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu), \quad (60)$$

e este tensor é antissimétrico. Esse gerador pode ser encontrado no último termo do operador diferencial da Eq. (59). Este é o gerador das rotações nesse grupo de simetria. Toda Eq. (59) deve ser invariante por rotações do grupo de Lorentz. Portanto,

$$\left\{ -i \frac{e_f}{2} F_{\mu\nu} [(x - x')^\nu \partial^\mu - (x - x')^\mu \partial^\nu] \right\} \Delta(x - x'|A') = 0 . \quad (61)$$

### 3.4 PROPAGADOR NO ESPAÇO DOS 4-MOMENTOS

Como já feito por Dittrich em [53, 46], vamos calcular a Eq. (59) no espaço dos momentos. Mas antes, fazemos as definições:

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}^2 &= \left( M - \frac{1}{2} a_f \sigma \cdot F \right)^2 + \frac{e_f}{2} \sigma \cdot F , \\
X^\mu &= (x - x')^\mu
\end{aligned} \quad (62)$$

dessa maneira, reescrevemos a Eq. 59 como

$$\left[ \square + \mathcal{K}^2 + \frac{e_f^2}{4} X^\mu F_{\mu\nu}^2 X^\nu \right] \Delta(X|A') = \delta(X) . \quad (63)$$

O propagador  $\Delta(X|A')$  admite representação

$$\Delta(X|A') = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{ip_\mu X^\mu} \Delta(p|A') , \quad (64)$$

que nada mais é do que a transformada de Fourier inversa. Podemos representar a função Delta de Dirac na sua representação integral no espaço dos 4-momentos

$$\delta(X) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{ip_\mu X^\mu} . \quad (65)$$

Substituindo  $\Delta(X|A')$ , Eq. (64) e  $\delta(X)$ , Eq. (65), na Eq. (63), temos

$$\left[ \square + \mathcal{K}^2 + \frac{e_f^2}{4} X^\mu F_{\mu\nu}^2 X^\nu \right] \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{ip_\mu X^\mu} \Delta(p|A') = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{ip_\mu X^\mu} . \quad (66)$$

Recuperando  $X^\mu$  das definições na Eq. (62), podemos primeiramente atuar o operador d'Alembertiano na parte 4-vetorial restante do lado esquerdo da Eq. (66),

$$\begin{aligned} \square e^{ip_\mu X^\mu} &= \partial^\mu \partial_\mu e^{ip_\mu X^\mu} \\ &= \partial^\mu \left[ \frac{\partial}{\partial x^\mu} \exp(ip_\mu x^\mu - ip_\mu x'^\mu) \right] \\ &= \partial^\mu [ip_\mu \exp(ip_\mu X^\mu)] \\ &= \frac{\partial}{\partial x_\mu} [ip_\mu \exp(ip^\mu X_\mu)] \\ &= ip_\mu ip^\mu \exp(ip_\mu X^\mu) \\ &= -p^2 \exp(ip_\mu X^\mu) . \end{aligned} \quad (67)$$

Os 4-vetores da Eq. (66) podem ser relacionados com os momentos de forma que

$$\frac{\partial}{i\partial p_\mu} \exp(ip_\mu X^\mu) = X^\mu \exp(ip_\mu X^\mu) . \quad (68)$$

Assim, reescrevemos a Eq. (66) como

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{ip_\mu X^\mu} \left[ -p^2 + \mathcal{K}^2 - \frac{e_f^2}{4} \frac{\partial}{\partial p_\mu} F_{\mu\nu}^2 \frac{\partial}{\partial p_\nu} \right] \Delta(p|A') = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{ip_\mu X^\mu} . \quad (69)$$

Em particular, quando  $X^\mu = 0$ , temos duas  $\delta(X = 0)$  em ambos os lados da equação anterior. Portanto, podemos afirmar que

$$\left[ -p^2 + \mathcal{K}^2 - \frac{e_f^2}{4} \frac{\partial}{\partial p^\mu} F_{\mu\nu}^2 \frac{\partial}{\partial p^\nu} \right] \Delta(p|A') = 1 . \quad (70)$$

Agora, vamos primeiramente considerar um caso onde não temos campos eletromagnéticos para assim, fazer uma identificação e realizar o caso geral. Nesse caso,  $A' = 0 \Rightarrow F^{\mu\nu} = 0 \forall \mu, \nu$ . Da Eq. (62) também temos que  $F = 0 \Rightarrow \mathcal{K} \rightarrow M$  e então, temos um caso bem mais simples.

$$\begin{aligned} [-p^2 + M^2] \Delta(p) &= 1 \\ \Rightarrow \Delta(p) &= \frac{1}{-p^2 + M^2} , \end{aligned} \quad (71)$$

onde  $\Delta(p|A' = 0) \equiv \Delta(p)$ . Esta é uma forma bem familiar para um propagador. Podemos escrever essa igualdade a partir da função

$$\Delta(p) = \int_0^\infty ds e^{-s(M^2-p^2)}, \quad (72)$$

e isso pode ser visto simplesmente resolvendo a integral: fazendo uma mudança de variável  $u = (M^2 - p^2)s$ , então  $du = (M^2 - p^2)ds$ ,

$$\begin{aligned} \Delta(p) &= \int_0^\infty ds e^{-s(M^2-p^2)} \\ &= \frac{1}{(M^2 - p^2)} \int_0^\infty du e^{-u} \\ &= -\frac{1}{M^2 - p^2} e^{-u} \Big|_0^\infty \\ &= -\frac{1}{M^2 - p^2} (0 - 1) \\ &= \frac{1}{-p^2 + M^2}. \end{aligned} \quad (73)$$

Podemos utilizar a ideia da Eq. (72) para escrever o propagador que desejamos calcular no caso com campo externo não nulo. Assim para resolver a Eq. (70), nos baseamos num *ansatz* de [46, 50, 54]. Então

$$\Delta(p|A') = \int_0^\infty ds e^{\mathcal{M}(s)-s\mathcal{K}^2}. \quad (74)$$

onde definimos o que chamaremos de função dos momentos  $\mathcal{M}(s)$

$$\mathcal{M}(s) = p^\alpha \mathcal{X}_{\alpha\beta}(s) p^\beta + \mathcal{Y}(s), \quad (75)$$

com  $\mathcal{X}$  sendo um tensor simétrico  $\mathcal{X}_{\alpha\beta} = \mathcal{X}_{\beta\alpha}$ . No caso de campo nulo, voltamos para nosso *ansatz* anterior, pois definimos também que,

$$\mathcal{X}_{\alpha\beta} = s g_{\alpha\beta}, \mathcal{Y}(s) = 0. \quad (76)$$

Substituindo a Eq. (74) na Eq. (70), então

$$\left[ -p^2 + \mathcal{K}^2 - \frac{e_f^2}{4} \frac{\partial}{\partial p^\mu} F^2{}^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial p^\nu} \right] \int_0^\infty ds e^{\mathcal{M}(s)} e^{-s\mathcal{K}^2} = 1. \quad (77)$$

Aplicando as derivadas nos 4-momentos do último termo dos colchetes na exponencial de

$\mathcal{M}(s)$ , dada explicitamente na Eq. (75), vemos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial p^\mu} \frac{\partial}{\partial p^\nu} e^{\mathcal{M}(s)} &= \frac{\partial}{\partial p^\mu} \frac{\partial}{\partial p^\nu} \exp(p^\alpha \mathcal{X}_{\alpha\beta}(s) p^\beta + \mathcal{Y}(s)) \\
&= \frac{\partial}{\partial p^\mu} \left\{ \frac{\partial}{\partial p^\nu} [(p^\alpha \mathcal{X}_{\alpha\beta}(s) p^\beta + \mathcal{Y}(s)) \exp(p^\alpha \mathcal{X}_{\alpha\beta}(s) p^\beta + \mathcal{Y}(s))] \right\} \\
&= \frac{\partial}{\partial p^\mu} \left\{ [(\delta_\nu^\alpha \mathcal{X}_{\alpha\beta} p^\beta + p^\alpha X_{\alpha\beta} \delta_\nu^\beta) \exp(p^\alpha \mathcal{X}_{\alpha\beta} p^\beta + \mathcal{Y})] \right\} \\
&= \frac{\partial}{\partial p^\mu} \left\{ [(\mathcal{X}_{\nu\beta} p^\beta + p^\alpha X_{\alpha\nu}) \exp(p^\alpha \mathcal{X}_{\alpha\beta} p^\beta + \mathcal{Y})] \right\} \\
&= \frac{\partial}{\partial p^\mu} \left\{ [2\mathcal{X}_{\nu\beta} p^\beta \exp(p^\alpha \mathcal{X}_{\alpha\beta} p^\beta + \mathcal{Y})] \right\} \\
&= 2\mathcal{X}_{\nu\beta} \delta_\mu^\beta e^{\mathcal{M}(s)} + 2\mathcal{X}_{\nu\beta} p^\beta 2\mathcal{X}_{\alpha\mu} p^\alpha e^{\mathcal{M}(s)} \\
&= (2\mathcal{X}_{\mu\nu} + 4\mathcal{X}_{\mu\alpha} p^\alpha \mathcal{X}_{\nu\beta} p^\beta) e^{\mathcal{M}(s)} .
\end{aligned} \tag{78}$$

Então, como os operadores  $p$  e  $\mathcal{K}$  são lineares nas exponenciais, podemos escrever todos dentro da integral

$$\int_0^\infty ds \left[ -p^2 + \mathcal{K}^2 - \frac{e_f^2}{2} F^2{}^{\mu\nu} (\mathcal{X}_{\mu\nu} + 2\mathcal{X}_{\mu\alpha} p^\alpha \mathcal{X}_{\nu\beta} p^\beta) \right] e^{\mathcal{M}(s)} e^{-s\mathcal{K}^2} = 1 . \tag{79}$$

Podemos reconhecer nossa notação aqui, de modo que

$$\begin{aligned}
F^2{}^{\mu\nu} \mathcal{X}_{\mu\nu} &= \text{Tr}(F^2 \cdot \mathcal{X}) , \\
p^\alpha \mathcal{X}_{\alpha\mu} F^2{}^{\mu\nu} \mathcal{X}_{\nu\beta} p^\beta &= p \cdot \mathcal{X} \cdot F^2 \cdot \mathcal{X} \cdot p ,
\end{aligned} \tag{80}$$

então

$$\int_0^\infty ds \left[ \mathcal{K}^2 - p \cdot (1 + e_f^2 \mathcal{X} \cdot F^2 \cdot \mathcal{X}) \cdot p - \frac{e_f^2}{2} \text{Tr}(F^2 \cdot \mathcal{X}) \right] e^{\mathcal{M}(s)} e^{-s\mathcal{K}^2} = 1 . \tag{81}$$

### 3.4.1 Determinação da função dos momentos

Do *ansatz* da Eq. (74) precisamos determinar totalmente a função dos momentos  $\mathcal{M}(s)$  definida na Eq. (75). Da seção anterior, podemos descrever o procedimento que estávamos fazendo a partir de uma simples equação:

$$\int_0^\infty ds g(s) e^{-f(s)} = 1 , \tag{82}$$

onde

$$\begin{aligned}
g(s) &= \mathcal{K}^2 - p \cdot (1 + e_f^2 \mathcal{X} \cdot F^2 \cdot \mathcal{X}) \cdot p - \frac{e_f^2}{2} \text{Tr}(F^2 \cdot \mathcal{X}) \\
f(s) &= -\mathcal{M}(s) + s\mathcal{K}^2 .
\end{aligned} \tag{83}$$

Identificamos ainda

$$g(s) = \frac{d}{ds} f(s) . \tag{84}$$

Dessa maneira, podemos estabelecer algumas condições para função  $f(s)$  a partir do cálculo da integral da Eq. (82)

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty ds \left[ \frac{d}{ds} f(s) \right] e^{-f(s)} &= \int_0^\infty \cancel{ds} \left[ -\frac{d}{\cancel{ds}} e^{-f(s)} \right] \\
 &= e^{-f(s)} \Big|_0^\infty \\
 &= \lim_{s \rightarrow 0} e^{-f(s)} - \lim_{s \rightarrow \infty} e^{-f(s)} \\
 &= 1 .
 \end{aligned} \tag{85}$$

Portanto, estabelece-se que

$$\begin{aligned}
 f(0) &= 0, \\
 \lim_{s \rightarrow \infty} e^{-f(s)} &= 0 .
 \end{aligned} \tag{86}$$

Da Eq. (83)

$$\begin{aligned}
 g(s) &= \frac{df(s)}{ds} = -\frac{d\mathcal{M}}{ds} + \mathcal{K}^{\mathcal{Z}} \\
 &= \mathcal{K}^{\mathcal{Z}} - p \cdot (1 + e_f^2 \mathcal{X} \cdot F^2 \cdot \mathcal{X}) \cdot p - \frac{e_f^2}{2} \text{Tr}(F^2 \cdot \mathcal{X}) \\
 &\Rightarrow \frac{d\mathcal{M}}{ds} = p \cdot (1 + e_f^2 \mathcal{X} \cdot F^2 \cdot \mathcal{X}) \cdot p + \frac{e_f^2}{2} \text{Tr}(F^2 \cdot \mathcal{X}) .
 \end{aligned} \tag{87}$$

Derivando a forma explícita da função dos momentos  $\mathcal{M}(s)$  da Eq. (75)

$$\begin{aligned}
 \frac{d\mathcal{M}}{ds} &= p^\alpha \frac{d}{ds} \mathcal{X}_{\alpha\beta}(s) p^\beta + \frac{d}{ds} \mathcal{Y}(s) \\
 &= p \cdot \frac{d}{ds} \mathcal{X} \cdot p + \frac{d}{ds} \mathcal{Y} ,
 \end{aligned} \tag{88}$$

comparando a Eq. (88) com a Eq. (87), podemos concluir que

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{ds} \mathcal{X} &= 1 + e_f^2 \mathcal{X} \cdot F^2 \cdot \mathcal{X} , \\
 \frac{d}{ds} \mathcal{Y} &= \frac{e_f^2}{2} \text{Tr}(F^2 \cdot \mathcal{X}) .
 \end{aligned} \tag{89}$$

Estas, Eq. (89), equações diferenciais de primeira ordem, admitem soluções do tipo

$$\begin{aligned}
 \mathcal{X}(s) &= \frac{\tan(e_f F s)}{e_f F} , \\
 \mathcal{Y}(s) &= -\frac{1}{2} \text{Tr} \ln [\cos(e_f F s)] .
 \end{aligned} \tag{90}$$

Essas soluções podem ser testadas por verificação direta:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}\mathcal{X} &= \frac{d}{ds} \left[ \frac{\tan(e_f F s)}{e_f F} \right] \\
&= \frac{1}{e_f F} e_f F \sec^2(e_f F s) \\
&= (1 + \tan^2(e_f F s)) \\
&= [1 + (e_f F \mathcal{X})^2] = (1 + e_f^2 \mathcal{X} \cdot F^2 \cdot \mathcal{X}) , \\
\frac{d}{ds}\mathcal{Y} &= -\frac{1}{2} \text{Tr} \left\{ \frac{d}{ds} \ln [\cos(e_f F s)] \right\} \\
&= -\frac{1}{2} \text{Tr} \left\{ \frac{1}{\cos(e_f F s)} [-\sin(e_f F s)] (e_f F) \right\} \\
&= \frac{1}{2} \text{Tr} [\tan(e_f F s) e_f F] \\
&= \frac{1}{2} \text{Tr} [e_f^2 F^2 \cdot \mathcal{X}] \\
&= \frac{e_f^2}{2} \text{Tr} (F^2 \cdot \mathcal{X}) .
\end{aligned} \tag{91}$$

Assim, a função dos momentos é dada por

$$\boxed{\mathcal{M}(s) = p \cdot \frac{\tan(e_f F s)}{e_f F} \cdot p - \frac{1}{2} \text{Tr} \ln [\cos(e_f F s)]} . \tag{92}$$

Podemos assim calcular os limites impostos pela Eq. (86):

$$\begin{aligned}
f(0) &= \lim_{s \rightarrow 0} f(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ -\cancel{\mathcal{M}(s)} + \cancel{s} \mathcal{K}^2 \right] = 0 \\
\lim_{s \rightarrow \infty} e^{-f(s)} &= \lim_{s \rightarrow \infty} \exp[\mathcal{M}(s) - s\mathcal{K}^2] = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\overbrace{e^{\mathcal{M}(s)}}^{\text{finito}}}{e^{s\mathcal{K}^2}} \stackrel{0}{\infty} = 0 ,
\end{aligned} \tag{93}$$

portanto, os limites que impusemos foram satisfeitos.

### 3.5 LAGRANGIANA EFETIVA DO MODELO NJL-SU(2) QAMM

Das expressões Eq.'s (64, 74, 75), podemos rearranjar as integrais e escrever o propagador como

$$\begin{aligned}
\Delta(x - x'|A') &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{ip_\mu X^\mu} \Delta(p|A') \\
&= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{ip_\mu X^\mu} \int_0^\infty ds e^{-s\mathcal{K}^2 + \mathcal{M}(s)} \\
&= \int_0^\infty ds e^{-s\mathcal{K}^2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{ip \cdot X} e^{\mathcal{M}(s)} \\
&= \int_0^\infty ds e^{-s\mathcal{K}^2 + \mathcal{Y}(s)} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{iX \cdot p + p \cdot \mathcal{X} \cdot p} .
\end{aligned} \tag{94}$$

Desejamos mostrar que a integral nos 4-momentos é uma integral gaussiana. Podemos abrir o expoente desta como

$$iX \cdot p + p \cdot \mathcal{X} \cdot p = iX^t \cdot p + p^t \cdot \mathcal{X} \cdot p, \quad (95)$$

onde  $A^t$  corresponde ao vetor linha associado ao vetor  $A$ ,  $\mathcal{X}_\alpha^\beta$  a uma matriz  $4 \times 4$  associado ao tensor de ordem 2  $\mathcal{X}$ . Considerando uma mudança de variáveis de Jacobiano unitário, de modo que

$$q = p + \frac{i}{2}(\mathcal{X})^{-1} \cdot X \quad (96)$$

então

$$\begin{aligned} q \cdot \mathcal{X}(s) \cdot q &= \left( p + \frac{i}{2}(\mathcal{X})^{-1} \cdot X \right)^t \cdot \mathcal{X} \cdot \left( p + \frac{i}{2}(\mathcal{X})^{-1} \cdot X \right) \\ &= \left( p^t + \frac{i}{2}X^t \cdot (\mathcal{X})^{t-1} \right) \cdot \mathcal{X} \cdot \left( p + \frac{i}{2}(\mathcal{X})^{-1} \cdot X \right) \\ &= p^t \cdot \mathcal{X} \cdot p + p^t \cdot \mathcal{X} \cdot \frac{i}{2}(\mathcal{X})^{-1} \cdot X + \frac{i}{2}X^t \cdot (\mathcal{X})^{t-1} \cdot \mathcal{X} \cdot p + \\ &= p^t \cdot \mathcal{X} \cdot p + \frac{i}{2}p^t \cdot \underbrace{\mathcal{X} \cdot (\mathcal{X})^{-1}}_{=1} \cdot X + \frac{i}{2}X^t \cdot \underbrace{(\mathcal{X})^{-1} \cdot \mathcal{X}}_1 \cdot p + \\ &\quad - \frac{1}{4}X^t \cdot \underbrace{(\mathcal{X})^{-1} \cdot \mathcal{X} \cdot (\mathcal{X})^{-1}}_1 \cdot X \\ &= p \cdot \mathcal{X} \cdot p + iX \cdot p - \frac{1}{4}X^t \cdot (\mathcal{X})^{-1} \cdot X \\ &\Rightarrow iX \cdot p + p \cdot \mathcal{X} \cdot p = q \cdot \mathcal{X}(s) \cdot q + \frac{1}{4}X^t \cdot (\mathcal{X})^{-1} \cdot X. \end{aligned} \quad (97)$$

Dessa maneira podemos voltar na integral dos 4-momentos da Eq. (94) e então

$$\begin{aligned} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{iX \cdot p + p \cdot \mathcal{X} \cdot p} &= \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} e^{q \cdot \mathcal{X}(s) \cdot q + \frac{1}{4}X^t \cdot (\mathcal{X})^{-1} \cdot X} \\ &= e^{\frac{1}{4}X^t \cdot (\mathcal{X})^{-1} \cdot X} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} e^{q \cdot \mathcal{X}(s) \cdot q}, \end{aligned} \quad (98)$$

e finalmente podemos resolver a parte dos 4-momentos a partir de uma integração gaussiana. Esta está feita explicitamente no Apêndice C. Então temos

$$\int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} e^{q \cdot \mathcal{X}(s) \cdot q} = \frac{i}{(4\pi)^2} \frac{1}{\sqrt{\det(\mathcal{X})}}. \quad (99)$$

Do corolário da fórmula de Jacobi, temos que

$$\det [\mathcal{X}(s)] = e^{\text{Tr} \ln \mathcal{X}(s)}, \quad (100)$$

portanto, reescrevemos

$$\int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} e^{q \cdot \mathcal{X}(s) \cdot q} = \frac{i}{(4\pi)^2} e^{-\frac{1}{2} \text{Tr} \ln \mathcal{X}(s)}. \quad (101)$$

Podemos multiplicar e dividir a Eq. (101) por  $s^2$ , dessa maneira

$$\int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} e^{q \cdot \mathcal{X}(s) \cdot q} = \frac{i}{(4\pi)^2} \frac{s^2}{s^2} e^{-\frac{1}{2} \text{Tr} \ln \mathcal{X}(s)}. \quad (102)$$

Por sua vez, devemos nos perguntar, o que representa  $s^2$  na forma matricial, ou melhor um determinante dado por  $s^2$ . Como estamos no espaço-tempo 4-dimensional, somos motivados a pensar em uma matriz cujo determinante seja formado da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} s^2 &= \det(\text{diag}(\sqrt{s}, \sqrt{s}, \sqrt{s}, \sqrt{s})) \\ &= \exp(\text{Tr} \ln \sqrt{s}) \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2} \text{Tr} \ln s^{-1}\right). \end{aligned} \quad (103)$$

Substituindo  $s^2$  na Eq. (102), então

$$\begin{aligned} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} e^{q \cdot \mathcal{X}(s) \cdot q} &= \frac{i}{(4\pi)^2} \frac{s^2}{s^2} e^{-\frac{1}{2} \text{Tr} \ln \mathcal{X}(s)} \\ &= \frac{i}{(4\pi)^2} \frac{1}{s^2} \exp\left(-\frac{1}{2} \text{Tr} \ln s^{-1}\right) \exp\left(-\frac{1}{2} \text{Tr} \ln \mathcal{X}(s)\right) \\ &= \frac{i}{(4\pi)^2} \frac{1}{s^2} \exp\left\{-\frac{1}{2} \text{Tr} [\ln s^{-1} + \ln \mathcal{X}(s)]\right\} \\ &= \frac{i}{(4\pi)^2} \frac{1}{s^2} e^{-\frac{1}{2} \text{Tr} \ln s^{-1} \mathcal{X}(s)}. \end{aligned} \quad (104)$$

Substituindo agora na Eq.(98)

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{iX \cdot p + p \cdot \mathcal{X} \cdot p} = e^{\frac{1}{4} X^t \cdot (\mathcal{X})^{-1} \cdot X} \frac{i}{(4\pi)^2} \frac{1}{s^2} e^{-\frac{1}{2} \text{Tr} \ln (s^{-1} \mathcal{X}(s))}. \quad (105)$$

Com o resultado da integral na Eq.(94), podemos então escrever o propagador como

$$\begin{aligned} \Delta(x - x' | A') &= \int_0^\infty ds e^{-s\mathcal{K}^2 + \mathcal{Y}(s)} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{iX \cdot p + p \cdot \mathcal{X} \cdot p} \\ &= \frac{i}{(4\pi)^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^2} e^{-s\mathcal{K}^2 + \mathcal{Y}(s)} e^{\frac{1}{4} X^t \cdot (\mathcal{X})^{-1} \cdot X} e^{-\frac{1}{2} \text{Tr} \ln (s^{-1} \mathcal{X}(s))} \\ &= \frac{i}{(4\pi)^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^2} e^{-s\mathcal{K}^2 + \frac{1}{4} X^t \cdot (\mathcal{X})^{-1} \cdot X + \mathcal{Y}(s) - \frac{1}{2} \text{Tr} \ln (s^{-1} \mathcal{X}(s))}. \end{aligned} \quad (106)$$

Podemos simplificar os dois últimos termos usando a Eq. (90):

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}(s) - \frac{1}{2} \text{Tr} \ln (s^{-1} \mathcal{X}(s)) &= -\frac{1}{2} \text{Tr} \ln [\cos(e_f F s)] - \frac{1}{2} \text{Tr} \ln \left( s^{-1} \frac{\tan(e_f F s)}{e_f F} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \text{Tr} \ln [\cos(e_f F s)] - \frac{1}{2} \text{Tr} \ln \left( \frac{\sin(e_f F s)}{e_f F s \cos(e_f F s)} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \text{Tr} \ln \left( \frac{\cancel{\cos(e_f F s)} \sin(e_f F s)}{e_f F s \cancel{\cos(e_f F s)}} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \text{Tr} \ln \left( \frac{\sin(e_f F s)}{e_f F s} \right). \end{aligned} \quad (107)$$

E portanto,

$$\Delta(X|A') = \frac{i}{(4\pi)^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^2} \exp \left\{ -s\mathcal{K}^2 + \frac{1}{4} X^t \cdot (\mathcal{X})^{-1} \cdot X - \frac{1}{2} \text{Tr} \ln \left[ \frac{\sin(e_f F s)}{e_f F s} \right] \right\}. \quad (108)$$

Esse resultado foi publicado nós como material complementar na participação de um evento em [55]. Agora podemos analisar cada termo da exponencial separadamente.

No formalismo de tempo próprio [56] das lagrangianas efetivas de Euler-Heisenberg [34], o parâmetro  $s$  justamente significa que após determinado tempo próprio  $s$ , esta volta para onde estava. Como ações efetivas somam sobre loops fechados, fazendo  $x \rightarrow x'$  e daí  $X = 0$ . Fazendo uma mudança de variáveis  $s \rightarrow is$ , então o propagador se resume à

$$\Delta(X = 0|A') \equiv \boxed{\Delta(F) = \frac{1}{(4\pi)^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^2} e^{-is\mathcal{K}^2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \text{Tr} \ln \left[ \frac{\sinh(e_f F s)}{e_f F s} \right] \right\}}. \quad (109)$$

Agora precisamos voltar a Eq. (30), ou seja, nosso *ansatz* inicial. Utilizando o fato de que  $\phi(x, x) = 1$ , ou seja, a fase de Schwinger é unitária, e utilizando o *gauge* de Schwinger-Fock dado na Eq. (32), então

$$\begin{aligned} G(F) &= [M' - \gamma \cdot \Pi'] \Delta(F) = \left[ M' - \gamma^\mu \left( \frac{1}{i} \partial'_\mu + e_f A'_\mu \right) \right] \Delta(F) \\ &= \left[ M' - \gamma^\mu \left( \frac{1}{i} \partial'_\mu - \frac{e_f}{2} F_{\mu\nu} X^\nu \right) \right] \Delta(F) = M' \Delta(F), \end{aligned} \quad (110)$$

pois  $\partial'_\mu$  atuara no propagador  $\Delta(F)$  que pela Eq. (109) pode-se ver, não depende mais dessa variável. Continuando com o cálculo substituindo a Eq. (109) na Eq. (110)

$$G(F) = \frac{M'}{(4\pi)^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^2} e^{-is\mathcal{K}^2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \text{Tr} \ln \left[ \frac{\sinh(e_f F s)}{e_f F s} \right] \right\}, \quad (111)$$

das definições de  $M'$  Eq. (27) e de  $\mathcal{K}^2$  na Eq. (62) ainda podemos reescrever

$$\begin{aligned} G(F) &= \frac{1}{(4\pi)^2} \left( M - \frac{1}{2} a_f \sigma \cdot F \right) \int_0^\infty \frac{ds}{s^2} \exp \left\{ -is \left[ \left( M - \frac{1}{2} a_f \sigma \cdot F \right)^2 + \frac{e_f}{2} \sigma \cdot F \right] \right\} \times \\ &\quad \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \text{Tr} \ln \left[ \frac{\sinh(e_f F s)}{e_f F s} \right] \right\} \\ &= \frac{M}{(4\pi)^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^2} \exp \left\{ -is \left[ \left( M - \frac{1}{2} a_f \sigma \cdot F \right)^2 + \frac{e_f}{2} \sigma \cdot F \right] \right\} \times \\ &\quad \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \text{Tr} \ln \left[ \frac{\sinh(e_f F s)}{e_f F s} \right] \right\} + \\ &\quad - \frac{1}{2} a_f \sigma \cdot F \frac{1}{(4\pi)^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^2} \exp \left\{ -is \left[ \left( M - \frac{1}{2} a_f \sigma \cdot F \right)^2 + \frac{e_f}{2} \sigma \cdot F \right] \right\} \times \\ &\quad \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \text{Tr} \ln \left[ \frac{\sinh(e_f F s)}{e_f F s} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (112)$$

Precisamos calcular o traço da expressão Eq. (112) para relacionar com a sua lagrangiana. O termo proporcional  $\sigma \cdot F$  na quinta linha dessa equação é identicamente nulo, pois o  $\text{Tr}(\sigma \cdot F)^1 = 0$ , como para demais potências ímpares (conforme pode ser visto em na Eq. (A2) de [57]). Assim,

$$\begin{aligned} \text{Tr } G(F) &= \text{Tr} \left\{ \frac{M}{(4\pi)^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^2} \exp \left\{ -is \left[ \left( M - \frac{1}{2} a_f \sigma \cdot F \right)^2 + \frac{e_f}{2} \sigma \cdot F \right] \right\} \right\} \times \\ &\quad \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \text{Tr} \ln \left[ \frac{\sinh(e_f F s)}{e_f F s} \right] \right\} \\ &= \frac{M}{(4\pi)^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^2} \text{Tr} \exp \left\{ -is \left[ \left( M - \frac{1}{2} a_f \sigma \cdot F \right)^2 + \frac{e_f}{2} \sigma \cdot F \right] \right\} \times \\ &\quad \times \text{Tr} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \text{Tr} \ln \left[ \frac{\sinh(e_f F s)}{e_f F s} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (113)$$

Podemos calcular cada um desses traços separadamente. O primeiro traço pode ser reescrito e calculado a partir das expressões presentes no livro [58] no Apêndice A do Capítulo 33:

$$\begin{aligned} \text{Tr} \exp \left\{ -is \left[ \left( M - \frac{1}{2} a_f \sigma \cdot F \right)^2 + \frac{e_f}{2} \sigma \cdot F \right] \right\} &= \\ &= \left( e^{-isM^2} \right) \underbrace{\left[ \text{Tr} e^{is(a_f M - e_f/2)(\sigma \cdot F)} \right]}_{=4 \cos[2(a_f M - e_f/2)sB]} \underbrace{\text{Tr} \exp \left\{ -is \left[ \frac{1}{4} a_f^2 (\sigma \cdot F)^2 \right] \right\}}_{=e^{-isa_f^2 B^2}} \\ &= e^{-is(M^2 + a_f^2 B^2)} 4 \cos \left[ 2 \left( a_f M - \frac{e_f}{2} \right) sB \right] = e^{-is\mathcal{K}_{0f}^2} 4 \cos(2M\eta_f sB), \end{aligned} \quad (114)$$

onde  $\mathcal{K}_{0f}^2 = M^2 + a_f^2 B^2$  e  $\eta_f = -a_f + q_f \frac{e}{2M}$ .

Aqui precisamos consertar um sinal. Dittrich adota que  $e$  é a carga elétrica do elétron. No nosso caso, precisamos adaptar para nossa convenção, onde  $e$  é a carga do próton. Assim dizemos que  $e \rightarrow -e$  e então

$$\eta_f = -a_f - q_f \frac{e}{2M} = -q_f(\alpha_f + 1)\mu_B. \quad (115)$$

Aqui evidenciamos uma escolha: estamos tomando apenas campos magnéticos. Ou seja, apenas campos na direção  $z$ , ou 3, escolhendo um potencial vetor do tipo  $A_\mu = \delta_{\mu 2} x_1 B$ . Ainda precisamos do último traço. Dê [58, 47]

$$\begin{aligned} \text{Tr} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \text{Tr} \ln \left[ \frac{\sinh(e_f F s)}{e_f F s} \right] \right\} &= \det \left[ \frac{e_f F s}{\sinh(e_f F s)} \right]^{-1/2} \\ &= \frac{e_f B s}{\sin(e_f B s)}. \end{aligned} \quad (116)$$

Finalmente,

$$\text{Tr } G(F) = \text{Tr } G(B) = \frac{M}{4\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^2} e^{-i\mathcal{K}_{0f}^2 s} \frac{e_f B s}{\sin(e_f B s)} \cos(2M\eta_f sB). \quad (117)$$

Agora precisamos voltar da formulação de função de Green de 2 pontos para calcular a lagrangiana efetiva. Usando a Eq. (29), e explicitando o índice de sabor  $f$ , podemos escrever

$$i \frac{\partial \mathcal{L}_f}{\partial M} = \text{Tr } G(B) \Rightarrow i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{K}_{0f}^2} \underbrace{\frac{\partial \mathcal{K}_{0f}^2}{\partial M}}_{=2M} = \text{Tr } G(B) \Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2Mi} \int d\mathcal{K}_{0f}^2 \text{Tr } G(B) . \quad (118)$$

Assim,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_f &= \frac{1}{2Mi} \int d\mathcal{K}_{0f}^2 \text{Tr } G(B) = \frac{1}{2Mi} \frac{M}{4\pi^2} \int_0^\infty ds \frac{1}{s^2} \frac{1}{(-is)} e^{-i\mathcal{K}_{0f}^2 s} \frac{e_f B s}{\sin(e_f B s)} \cos(2M\eta_f B s) \\ &= \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty ds \frac{e^{-i\mathcal{K}_{0f}^2 s}}{s^3} \frac{e_f B s}{\sin(e_f B s)} \cos(2M\eta_f B s) . \end{aligned} \quad (119)$$

E conforme se esperava, obtemos uma lagrangiana similar à que Dittrich obteve em [50] (Eq. 2.9 desta referência), mas no nosso caso, indexada pelos sabores dos quarks  $f$ . Esta é dada por

$$\therefore \boxed{\mathcal{L}_f(B) = \frac{1}{32\pi^2} \int_0^\infty ds \frac{e^{-i\mathcal{K}_{0f}^2 s}}{s^3} \frac{e_f B s}{\sin(e_f B s)} 4 \cos(2M\eta_f B s)} , \quad (120)$$

como se esperava dada a natureza fermiônica, tanto dos quarks, quanto originalmente foi calculada, para os elétrons.

Com essa densidade lagrangiana na forma integral podemos fazer o procedimento de regularização e encontrar o potencial termodinâmico e a equação de *gap* no modelo de Nambu–Jona-Lasinio em SU(2) com quarks sob efeito do momento magnético anômalo (qAMM).



#### 4 POTENCIAL EFETIVO E REGULARIZAÇÃO VMR

*“... there are several possible schemes that can be introduced and implemented in several different ways. Which, therefore, is the “right” one? The answer to this question is that all are: a nonrenormalizable model per se is not unique; it depends on the form of regularization chosen. That is, the regularization scheme determines the model, and not vice versa.”*  
Sandra P. Klevansky – 1992 [37].

Conforme feito por Dittrich [47], o estudo do AMM do elétron em potenciais efetivos de um *loop*, vamos procederemos com a inclusão do qAMM na lagrangiana do modelo NJL em SU(2). Na aproximação de um *loop*, vamos tomar emprestadas algumas definições que podem ser encontradas em [29]. Esse foi um trabalho muito importante, pois trouxe a voga novamente o qAMM, depois de longos anos desde a publicação de [8], onde já era utilizado o modelo NJL.

Da última equação do Capítulo 4 referente a função de Green, a Eq. (120), temos a lagrangiana efetiva obtida via o formalismo das lagrangianas efetivas de Heisenberg–Euler–Weisskopf conforme já discutido. Para associar essa a um modelo de quarks precisamos somar cores e sabores. A contribuição nas cores são aditivas, assim temos um fator  $N_c = 3$ , mas deixaremos de modo geral como  $N_c$ . Somando para os quarks *up* e *down*, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(B) &= N_c \sum_{f=u,d} \mathcal{L}_f(B) \\ &= \sum_{f=u,d} \frac{N_c}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^3} e^{-iK_0^2 s} \frac{e_f B s}{\sin(e_f B s)} \cos(2M\eta_f B s) . \end{aligned} \quad (121)$$

O momento magnético anômalo dos quarks (qAMM), é dado por

$$\alpha_f = \frac{\alpha_e q_f^2}{2\pi}, \quad f = u, d , \quad (122)$$

onde  $\alpha_e = (137)^{-1}$  é a constante de estrutura fina e  $q_f$  a razão de carga dos quarks ( $q_u = 2/3$  e  $q_d = -1/3$ ). O magneton de Bohr é definido a partir da massa efetiva, dado por

$$\mu_B \equiv \frac{e}{2M} . \quad (123)$$

Essa definição pode parecer um tanto heterodoxa, pois para o caso do elétron, a massa em questão é a própria massa deste, e no caso dos quarks, escrevemos em função da massa efetiva  $M$  que é uma massa dinâmica, totalmente dependente do valor do condensado quiral. Essa definição foi adotada, tanto por [8], quanto por [29].

Definimos ainda a matriz dos qAMM como

$$\begin{aligned} \hat{a} &= \text{diag}(a_u, a_d) \\ &= \text{diag}(q_u \alpha_u \mu_B, q_d \alpha_d \mu_B) . \end{aligned} \quad (124)$$

e o qAMM efetivo como

$$\begin{aligned} k_f &\equiv \frac{\alpha_f}{2M} , \\ \Rightarrow a_f &\equiv q_f \alpha_f \mu_B \\ &= k_f q_f e B . \end{aligned} \quad (125)$$

Podemos novamente realizar uma rotação de Wick,  $s \rightarrow -is$  na Eq.(121). Assim, recuperando a definição da Eq. (115), então

$$\mathcal{L}(B) = \sum_{f=u,d} \frac{N_c}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^3} e^{-\mathcal{K}_{0f}^2 s} \frac{q_f e B s}{\sinh(q_f e B s)} \cosh[(\alpha_f + 1)q_f e B s] , \quad (126)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{0f}^2 &= M^2 + a_f^2 B^2 \\ &= M^2 + \left( q_f \alpha_f \frac{e}{2M} B \right)^2 \\ &= M^2 + (k_f q_f e B)^2 . \end{aligned} \quad (127)$$

Nota-se da expressão (126) que no caso limite, onde  $\alpha_f = 0$ , temos  $\mathcal{K}_{0f} \rightarrow M$  e a divisão entre cosseno hiperbólico por seno hiperbólico ganha o mesmo argumento se transformando exatamente numa cotangente [59]. Esse caso já foi explorado largamente, pois é o modelo NJL tradicional. Conforme [59], vamos aplicar o esquema *vacuum magnetic regularization* (VMR).

#### 4.1 VACUUM MAGNETIC REGULARIZATION (VMR)

O esquema VMR corresponde a separar os termos do potencial efetivo entre contribuições do vácuo e contribuições magnéticas. Essa se dá devido a contribuições independentes da massa, proporcionais à  $\sim eB^2$  e que dependem da constante de *cutoff*. Isso é realizado fazendo as subtrações apropriadas para remover as divergências de algumas integrais. Assim, poderemos reescrever a Eq. (126) numa maneira finita e identificar as diferentes contribuições para o potencial efetivo.

Na Eq. (126), podemos definir

$$f(s, B) \equiv \frac{q_f e B s}{\sinh(q_f e B s)} \cosh[(\alpha_f + 1)q_f e B s] , \quad (128)$$

assim

$$\mathcal{L}(B) = \sum_{f=u,d} \frac{N_c}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^3} e^{-\mathcal{K}_{0f}^2 s} f(s, B) . \quad (129)$$

Então, sendo  $x = q_f e B s$ , tomando a expansão em série de Taylor para  $x \ll 1$ , dê temos [60]

$$\begin{cases} \cosh[(\alpha_f + 1)x] = 1 + \frac{[(\alpha_f + 1)x]^2}{2!} + \mathcal{O}(x^4) , \\ (\sinh x)^{-1} = \operatorname{csch}(x) = \frac{1}{x} - \frac{x}{6} + \mathcal{O}(x^3) . \end{cases}$$

Fazendo a multiplicação:

$$\begin{aligned}
f(x(s, B)) &= x \cosh[(\alpha_f + 1)x] \operatorname{csch}(x) \\
&= x \left\{ 1 + \frac{[(\alpha_f + 1)x]^2}{2!} + \mathcal{O}(x^4) \right\} \left\{ \frac{1}{x} - \frac{x}{6} + \mathcal{O}(x^3) \right\} \\
&= 1 + \frac{1}{6} [3(\alpha_f + 1)^2 - 1] x^2 + \mathcal{O}(x^4) \\
f(s, B) &= 1 + \frac{1}{6} [3(\alpha_f + 1)^2 - 1] (q_f e B s)^2 + \mathcal{O}(s^4) .
\end{aligned} \tag{130}$$

Portanto, mostramos que

$$\begin{aligned}
f(s, B) &= \frac{B_f s}{\sinh(B_f s)} \cosh[(\alpha_f + 1)B_f s] \\
&= 1 + \frac{1}{6} [3(\alpha_f + 1)^2 - 1] (B_f s)^2 ,
\end{aligned} \tag{131}$$

onde definimos

$$B_f \equiv q_f e B . \tag{132}$$

Agora precisamos manipular essa função somando alguns termos nulos, vamos somar exatamente aquilo que obtemos na Eq. (131),

$$\begin{aligned}
f(s, B) &= \frac{B_f s}{\sinh(B_f s)} \cosh[(\alpha_f + 1)B_f s] + \\
&+ 1 + \frac{1}{6} [3(\alpha_f + 1)^2 - 1] (B_f s)^2 - 1 - \frac{1}{6} [3(\alpha_f + 1)^2 - 1] (B_f s)^2 .
\end{aligned} \tag{133}$$

Substituindo a Eq.(133) na Eq.(129):

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(B) &= \sum_{f=u,d} \frac{N_c}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^3} e^{-\kappa_{0f}^2 s} f(s, B) \\
&= \sum_{f=u,d} \frac{N_c}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^3} e^{-\kappa_{0f}^2 s} \left\{ \frac{B_f s}{\sinh(B_f s)} \cosh[(\alpha_f + 1)B_f s] + \right. \\
&\quad \left. - 1 - \frac{1}{6} [3(\alpha_f + 1)^2 - 1] (B_f s)^2 + 1 + \frac{1}{6} [3(\alpha_f + 1)^2 - 1] (B_f s)^2 \right\} \\
&= \sum_{f=u,d} \frac{N_c}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^3} e^{-\kappa_{0f}^2 s} \left\{ \frac{B_f s}{\sinh(B_f s)} \cosh[(\alpha_f + 1)B_f s] + \right. \\
&\quad \left. - 1 - \frac{1}{6} [3(\alpha_f + 1)^2 - 1] (B_f s)^2 \right\} + \\
&\quad + \sum_{f=u,d} \frac{N_c}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^3} e^{-\kappa_{0f}^2 s} + \sum_{f=u,d} \frac{N_c}{6} \frac{B_f^2}{8\pi^2} [3(\alpha_f + 1)^2 - 1] \int_0^\infty \frac{ds}{s} e^{-\kappa_{0f}^2 s} \\
&= \Omega^{\text{mag}} + \Omega^{\text{vac}} + \Omega^{\text{field}} \\
&= \Omega^{\text{eff}} ,
\end{aligned} \tag{134}$$

onde

$$\Omega^{\text{mag}} = \sum_{f=u,d} \frac{N_c}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^3} e^{-\kappa_{0f}^2 s} \left\{ \frac{B_f s}{\sinh(B_f s)} \cosh[(\alpha_f + 1)B_f s] + \right. \\ \left. -1 - \frac{1}{6} [3(\alpha_f + 1)^2 - 1] (B_f s)^2 \right\}, \quad (135)$$

$$\Omega_{\text{NR}}^{\text{vac}} = \sum_{f=u,d} \frac{N_c}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^3} e^{-\kappa_{0f}^2 s}, \quad (136)$$

$$\Omega_{\text{NR}}^{\text{field}} = \sum_{f=u,d} \frac{N_c}{6} \frac{B_f^2}{8\pi^2} [3(\alpha_f + 1)^2 - 1] \int_0^\infty \frac{ds}{s} e^{-\kappa_{0f}^2 s}. \quad (137)$$

Na Eq. (135),  $\Omega^{\text{mag}}$  representa o termo puramente magnético, ou de interação. Há mistura entre funções relacionadas ao campo magnético. Na Eq. (136),  $\Omega^{\text{vac}}$  é o usual termo de vácuo do modelo NJL. Nota-se que este, em relação ao modelo NJL apenas sob campo magnético e sem o efeito do qAMM [61], poderia até ser obtido por pura identificação  $M \rightarrow \mathcal{K}_{0f}$ , de modo que quando  $k_f = 0$ ,  $\mathcal{K}_{0f} \rightarrow M$ . Assim como seria esperado, o modelo NJL volta ao caso usual sem qAMM quando qAMM é nulo. Já o termo  $\Omega^{\text{field}}$ , Eq. (137), é proporcional ao quadrado no campo magnético. Os subscritos “NR” indicam que os potenciais não foram ainda regularizados. Faremos isso posteriormente nos esquemas de *cutoff* 3D e de tempo próprio.

O procedimento descrito aqui se trata do esquema VMR. Com este nós regularizamos a integral divergente (126), mas ganhamos algumas integrais que devem ser regularizadas. A Eq. (135) está regularizada após as subtrações até segunda ordem. As Eq.'s (136, 137) ainda são divergentes, quando  $s \rightarrow 0$ , o limite inferior de integração, mas podem ser implementadas a partir esquemas de regularização.

## 4.2 REGULARIZAÇÃO

Como já discutido no Capítulo 1, o modelo NJL não é renormalizável devido a dimensão negativa de massa da sua constante de acoplamento  $G$ . Assim, devemos adotar processos de regularização. A regularização nada mais é do que tratar as divergências da teoria. A natureza regularizável do modelo impõe uma condição um tanto paradigmática, de modo que o modelo NJL não é completo até adotarmos um método de regularização, e de fato a regularização que o define [37].

Existem vários métodos possíveis de regularização, entre eles os de *cutoff* que se valem dos limites de momento das partículas envolvidas e cortam os limites infinitos da teoria a partir de uma constante de *cutoff*, isto é,  $\infty \rightarrow \Lambda$ . Existem duas versões, a 3-dimensional não-covariante, e a 4-dimensional covariante. O *cutoff* 3D é tomado quando consideramos o 3-momento  $\mathbf{p}^2 < \Lambda^2$ . Como naturalmente deveria ser, o 4D é quando consideramos o 4-momento  $p_\mu p^\mu < \Lambda^2$ .

O método de Pauli–Villars [62] é um método importante pois preserva a invariância de *gauge*. Este consiste em supor uma série para o termo divergente e a partir de critérios de

convergência regularizar esse termo.

O método de tempo próprio introduzido por Schwinger [56] consiste no cálculo do traço da função de Green associada a uma partícula, este contribui diretamente no cálculo do condensado quiral. Esse método também é covariante. Subtraindo contra-termos das integrais divergentes conseguimos regularizá-las. O parâmetro de integração destas é o tempo próprio. O métodos das integrais de Feynman também permite o mesmo tipo de cálculo. Outra forma de fazer isso, e a que iremos usar nesse trabalho, é trocar o limite inferior das integrais  $0 \rightarrow 1/\Lambda^2$ . Detalhes sobre esses métodos podem ser visto no texto de Klevansky [37].

Na seção seguinte vamos regularizar o potencial *mag* (magnético). Vamos utilizar o esquema *cutoff* 3D e o esquema tempo próprio nos potenciais *vac* (vácuo) e *field* (campo).

### 4.3 REGULARIZAÇÃO CUTOFF 3D

Na Eq. (136) definimos

$$\begin{aligned}\Omega^{\text{vac}} &= \sum_{f=u,d} \frac{N_c}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^3} e^{-\mathcal{K}_{0f}^2 s} \\ &\equiv \sum_{f=u,d} N_c I_f^{\text{vac}},\end{aligned}\quad (138)$$

onde definimos a integral  $I_f^{\text{vac}}$ . A função Gamma [63] é definida como

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt, \quad \Re(z) > 0, \quad (139)$$

assim podemos reescrever a integral:

$$\begin{aligned}I_f^{\text{vac}} &= \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^3} e^{-\mathcal{K}_{0f}^2 s} \\ &= \frac{\mathcal{K}_{0f}^4}{8\pi^2} \int_0^\infty dt t^{-2-1} e^{-t} \\ &= \frac{1}{8\pi^2} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\Gamma(s-2)}{(\mathcal{K}_{0f}^2)^{-2+s}}.\end{aligned}\quad (140)$$

Podemos comparar esta, Eq. (140), com a energia do vácuo do modelo na ausência de campo magnético [61] fazendo a identificação  $M \rightarrow \mathcal{K}_{0f}$ , então

$$\begin{aligned}E_0 &= -\frac{2}{(2\pi)^3} \int_0^\infty d^3p \sqrt{p^2 + \mathcal{K}_{0f}^2} \\ &= -\frac{1}{\pi^3} \int_0^\infty dp p^2 \sqrt{p^2 + \mathcal{K}_{0f}^2}\end{aligned}\quad (141)$$

$$\begin{aligned}&= -\frac{\mathcal{K}_{0f}^4}{\pi^2} \int_0^\infty dp p^2 \sqrt{1 + p^2} \\ &= -\frac{1}{\pi^2} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{(\mathcal{K}_{0f})^{-2+s}} \int_0^\infty dp p^{3-1} (1 + p^2)^{1/2-s}.\end{aligned}\quad (142)$$

Da propriedade que relaciona funções Beta com funções Gamma, temos

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \quad (143)$$

e também que

$$\int_0^\infty dt t^{\mu-1}(1+t^2)^{\nu-1} = \frac{1}{2} B\left(\frac{\mu}{2}, 1-\nu-\frac{\mu}{2}\right). \quad (144)$$

Então, aplicando as propriedades da Eq. (143, 144) na Eq. (142), temos

$$\begin{aligned} E_0 &= -\frac{1}{\pi^2} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{(\mathcal{K}_{0f})^{-2+s}} \frac{1}{2} B\left(\frac{3}{2}, -2+s\right) \\ &= \frac{1}{8\pi^2} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{(\mathcal{K}_{0f})^{-2+s}} \Gamma(-2+s). \end{aligned} \quad (145)$$

Comparando as Eq.'s (145) e (140), notamos que estas são iguais. Isso nos permite utilizar a representação da Eq. (141) para computar o termo de vácuo.

Na regularização *cutoff* 3D, fazemos um corte explícito das integrais de momento. Assim, supomos que a partir de um dado  $p = \Lambda$ , sendo esta constante, as contribuições da integral são nulas. Dessa maneira, nas Eq.'s(136, 137), trocamos o limite superior de integração,  $\infty \rightarrow \Lambda$ . Para o termo de vácuo,

$$\begin{aligned} \Omega^{\text{vac}} &= -\sum_{f=u,d} \frac{N_c}{\pi^2} \int_0^\Lambda dp p^2 \sqrt{p^2 + \mathcal{K}_{0f}^2} \\ &= -\sum_{f=u,d} \frac{N_c}{8\pi^2} \left[ \Lambda \sqrt{\Lambda^2 + \mathcal{K}_{0f}^2} (2\Lambda^2 + \mathcal{K}_{0f}^2) - \mathcal{K}_{0f}^4 \ln \left( \frac{\Lambda + \sqrt{\Lambda^2 + \mathcal{K}_{0f}^2}}{\mathcal{K}_{0f}} \right) \right], \end{aligned} \quad (146)$$

ao computar a integração (Eq. (2.272.2) do Gradshteyn [60], calculada nos limites de integração).

Para o termo de campo magnético, temos

$$\Omega^{\text{field}} = \sum_{f=u,d} \frac{N_c}{6} \frac{B_f^2}{8\pi^2} = [3(\alpha_f + 1)^2 - 1] \int_0^\infty \frac{ds}{s} e^{-\mathcal{K}_{0f}^2 s}. \quad (147)$$

Podemos observar o resultado de outra integral

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dp \frac{p}{p^2 + \mathcal{K}_{0f}^2} &= \int_0^\infty dp p \int_0^\infty du e^{-(p^2 + \mathcal{K}_{0f}^2)u} \\ &= \int_0^\infty du e^{-\mathcal{K}_{0f}^2 u} \underbrace{\int_0^\infty dp p e^{-p^2 u}}_{=\frac{1}{2u}} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty du \frac{e^{-\mathcal{K}_{0f}^2 u}}{u}. \end{aligned} \quad (148)$$

Notamos que então que

$$\int_0^\infty \frac{ds}{s} e^{-\mathcal{K}_{0f}^2 s} = 2 \int_0^\infty dp \frac{p}{p^2 + \mathcal{K}_{0f}^2} . \quad (149)$$

Substituindo na Eq. (147) e aplicando o esquema *cutoff* 3D

$$\begin{aligned} \Omega^{\text{field}} &= \sum_{f=u,d} \frac{N_c}{6} \frac{B_f^2}{4\pi^2} [3(\alpha_f + 1)^2 - 1] \int_0^\Lambda dp \frac{p}{p^2 + \mathcal{K}_{0f}^2} \\ &= - \sum_{f=u,d} \frac{N_c}{6} \frac{B_f^2}{8\pi^2} [3(\alpha_f + 1)^2 - 1] \ln \frac{\mathcal{K}_{0f}^2}{\mathcal{K}_{0f}^2 + \Lambda^2} , \end{aligned} \quad (150)$$

onde a integral da Eq. (150) pode ser verificada a partir da Eq. (2.145.2) do Gradshteyn [60], calculando nos limites de integração.

Para estarmos condizentes com o esquema VMR, conforme [59], ainda precisamos identificar a expansão

$$\ln \frac{\mathcal{K}_{0f}^2}{\mathcal{K}_{0f}^2 + \Lambda^2} = \ln \frac{\frac{\mathcal{K}_{0f}^2}{\Lambda^2}}{1 + \frac{\mathcal{K}_{0f}^2}{\Lambda^2}} = \ln \frac{\mathcal{K}_{0f}^2}{\Lambda^2} - \frac{\mathcal{K}_{0f}^2}{\Lambda^2} + \mathcal{O}\left(\frac{\mathcal{K}_{0f}^4}{\Lambda^4}\right) , \quad (151)$$

dessa maneira, para

$$\mathcal{K}_{0f}^2 < \Lambda^2 \Rightarrow M^2 + a_f^2 B^2 < \Lambda^2 , \quad (152)$$

devemos eliminar os termos remanescentes da expansão que dependem da massa, do qAMM e do campo magnético, para assim poder escolher  $\Lambda$  arbitrariamente grande. Então

$$\ln \frac{\mathcal{K}_{0f}^2}{\mathcal{K}_{0f}^2 + \Lambda^2} \approx \ln \frac{\mathcal{K}_{0f}^2}{\Lambda^2} . \quad (153)$$

Assim, o potencial efetivo na regularização de cutoff 3D não-covariante é dado por

$$\begin{aligned} \Omega^{\text{eff}} &= \sum_{f=u,d} \frac{N_c}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^3} e^{-\mathcal{K}_{0f}^2 s} \left\{ \frac{B_f s}{\sinh(B_f s)} \cosh[(\alpha_f + 1)B_f s] + \right. \\ &\quad \left. - 1 - \frac{1}{6} [3(\alpha_f + 1)^2 - 1] (B_f s)^2 \right\} + \\ &\quad - \sum_{f=u,d} \frac{N_c}{8\pi^2} \left[ \Lambda \sqrt{\Lambda^2 + \mathcal{K}_{0f}^2} (2\Lambda^2 + \mathcal{K}_{0f}^2) - \mathcal{K}_{0f}^4 \ln \left( \frac{\Lambda + \sqrt{\Lambda^2 + \mathcal{K}_{0f}^2}}{\mathcal{K}_{0f}} \right) \right] \\ &\quad - \sum_{f=u,d} \frac{N_c}{6} \frac{B_f^2}{8\pi^2} [3(\alpha_f + 1)^2 - 1] \ln \frac{\mathcal{K}_{0f}^2}{\Lambda^2} . \end{aligned} \quad (154)$$

No próximo capítulo iremos, tomando também a contribuição do potencial proveniente da MFA, calcular o mínimo do potencial termodinâmico e assim obter sua equação de *gap*. Ao resolver esta, poderemos obter a massa efetiva dos quarks e assim observar fenômenos associados a catálise magnética.

No caso da regularização de tempo próprio, ao invés de regularizarmos a divergência  $\infty$ , regularizamos o 0 das integrais.

#### 4.4 REGULARIZAÇÃO DE TEMPO PRÓPRIO

Ao invés de “trocar” infinito por uma constante de *cutoff*, regularizamos as divergências das integrais para  $s \rightarrow 0$ . Ou seja, cortamos o limite inferior destas. Para o termo de vácuo,

$$\Omega^{\text{vac}} = \sum_{f=u,d} \frac{N_c}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^3} e^{-\kappa_{0f}^2 s} \rightarrow \sum_{f=u,d} \frac{N_c}{8\pi^2} \int_{\frac{1}{\Lambda^2}}^\infty \frac{ds}{s^3} e^{-\kappa_{0f}^2 s} . \quad (155)$$

Para o termo de campo magnético, temos

$$\begin{aligned} \Omega^{\text{field}} &= \sum_{f=u,d} \frac{N_c}{6} \frac{B_f^2}{8\pi^2} [3(\alpha_f + 1)^2 - 1] \int_0^\infty \frac{ds}{s} e^{-\kappa_{0f}^2 s} \\ &\rightarrow \sum_{f=u,d} \frac{N_c}{6} \frac{B_f^2}{8\pi^2} [3(\alpha_f + 1)^2 - 1] \int_{\frac{1}{\Lambda^2}}^\infty \frac{ds}{s} e^{-\kappa_{0f}^2 s} . \end{aligned} \quad (156)$$

Nesse caso, o potencial efetivo é dado por

$$\begin{aligned} \Omega^{\text{eff}} &= \sum_{f=u,d} \frac{N_c}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^3} e^{-\kappa_{0f}^2 s} \left\{ \frac{B_f s}{\sinh(B_f s)} \cosh[(\alpha_f + 1)B_f s] + \right. \\ &\quad \left. -1 - \frac{1}{6} [3(\alpha_f + 1)^2 - 1] (B_f s)^2 \right\} + \\ &\quad \sum_{f=u,d} \frac{N_c}{8\pi^2} \int_{\frac{1}{\Lambda^2}}^\infty \frac{ds}{s^3} e^{-\kappa_{0f}^2 s} + \sum_{f=u,d} \frac{N_c}{6} \frac{B_f^2}{8\pi^2} [3(\alpha_f + 1)^2 - 1] \int_{\frac{1}{\Lambda^2}}^\infty \frac{ds}{s} e^{-\kappa_{0f}^2 s} . \end{aligned} \quad (157)$$

## 5 EQUAÇÃO DE GAP

O potencial termodinâmico do modelo NJL - SU(2) na presença de um campo magnético externo da direção  $z$  e com a inclusão do momento magnético anômalo é dada por:

$$\Omega = \frac{(M - m)^2}{4G} + \Omega^{\text{vac}} + \Omega^{\text{field}} + \Omega^{\text{mag}} , \quad (158)$$

onde o primeiro termo é fruto direto do procedimento da MFA, conforme a Eq. (19). Os três termos seguintes dos procedimentos de regularização do Capítulo 4, onde mostramos que dentro do esquema VMR que  $\Omega^{\text{eff}} = \Omega^{\text{vac}} + \Omega^{\text{field}} + \Omega^{\text{mag}}$ . Estamos aqui no caso com temperatura e potencial químico nulos  $T = \mu = 0$ . Para mais detalhes sobre como incluir os efeitos de meio denso e quente nesse modelo, consultar o Apêndice D.

A equação de *gap* corresponde ao cálculo do extremo do potencial termodinâmico:

$$\left. \frac{\partial \Omega}{\partial M} \right|_{M=M_{eff} \equiv M} = 0 , \quad (159)$$

dessa maneira, tendo os potenciais regularizados segundo os métodos cutoff 3D e tempo próprio, podemos encontrar as equações de *gap* em cada esquema.

### 5.1 EQUAÇÃO DE GAP USANDO O CUTOFF 3D

Das Eq's.(158,159), podemos encontrar a equação de *gap* no esquema de regularização *cutoff* 3D. Logo,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial M} &= \frac{\partial}{\partial M} \left[ \frac{(M - m)^2}{4G} + \Omega^{\text{vac}} + \Omega^{\text{field}} + \Omega^{\text{mag}} \right] = 0 \\ \Rightarrow \frac{M - m}{2G} + \partial_M \Omega^{\text{vac}} + \partial_M \Omega^{\text{field}} + \partial_M \Omega^{\text{mag}} &= 0 , \end{aligned} \quad (160)$$

onde definiu-se uma notação abreviada para  $\partial/\partial M \equiv \partial_M$ . Então notamos que devemos calcular essas 4 derivadas parciais em relação a massa, e assim posteriormente, essa assume o significado de massa efetiva. Os termos  $\Omega^{\text{vac}}$ ,  $\Omega^{\text{field}}$ ,  $\Omega^{\text{mag}}$  e dependem explicitamente dos sabores  $f = u, d$ . Dessa forma, podemos escrever este como

$$\Omega^{\text{vac}} = \sum_{f=u,d} \Omega_f^{\text{vac}} , \quad (161)$$

e da mesma forma para os outros.

Antes de prosseguir nos cálculos das derivadas dos potenciais, é interessante observar as derivadas de algumas quantidades. Pela Eq. (125),  $a_f$  é definido como  $a_f = q_f \alpha_f e / 2M$ .

Assim, sua derivada em relação à massa efetiva é

$$\begin{aligned}
 \partial_M a_f &= q_f \alpha_f e \frac{(-1)}{2M^2} \\
 &= - \underbrace{q_f \alpha_f \frac{e}{2M}}_{=a_f} \frac{1}{M} \\
 &= - \frac{a_f}{M} .
 \end{aligned} \tag{162}$$

Da Eq. (127),  $\mathcal{K}_{0f}^2 = M^2 + a_f^2 B^2$ , então já usando o resultado da Eq. (162)

$$\begin{aligned}
 \partial_M \mathcal{K}_{0f}^2 &= 2M + 2a_f (\partial_M a_f) B^2 \\
 &= 2 \left( M - \frac{1}{M} a_f^2 B^2 \right) \\
 &= 2M \left( 1 - \frac{a_f^2 B^2}{M^2} \right) .
 \end{aligned} \tag{163}$$

Ainda precisamos calcular a derivada para  $\mathcal{K}_{0f}$ :

$$\begin{aligned}
 \partial_M \mathcal{K}_{0f} &= \partial_M \sqrt{M^2 + a_f^2 B^2} \\
 &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{M^2 + a_f^2 B^2}} \partial_M \mathcal{K}_{0f}^2 \\
 &= \frac{1}{2\mathcal{K}_{0f}} 2M \left( 1 - \frac{a_f^2 B^2}{M^2} \right) \\
 &= \frac{M}{\mathcal{K}_{0f}} \left( 1 - \frac{a_f^2 B^2}{M^2} \right) .
 \end{aligned} \tag{164}$$

Assim, usando a Eq. (146) e as calculadas Eq.'s (162, 163, 164), podemos calcular o termo de vácuo da equação de *gap*:

$$\begin{aligned}
 \partial_M \Omega_f^{\text{vac}} &= - \frac{N_c}{8\pi^2} \partial_M \left[ \Lambda \sqrt{\Lambda^2 + \mathcal{K}_{0f}^2} (2\Lambda^2 + \mathcal{K}_{0f}^2) - \mathcal{K}_{0f}^4 \ln \left( \frac{\Lambda + \sqrt{\Lambda^2 + \mathcal{K}_{0f}^2}}{\mathcal{K}_{0f}} \right) \right] \\
 &= - \frac{N_c}{8\pi^2} \left\{ \left[ \partial_M \Lambda \sqrt{\Lambda^2 + \mathcal{K}_{0f}^2} \right] (2\Lambda^2 + \mathcal{K}_{0f}^2) + \Lambda \sqrt{\Lambda^2 + \mathcal{K}_{0f}^2} \left[ \partial_M (2\Lambda^2 + \mathcal{K}_{0f}^2) \right] \right. \\
 &\quad \left. - (\partial_M \mathcal{K}_{0f}^4) \ln \left( \frac{\Lambda + \sqrt{\Lambda^2 + \mathcal{K}_{0f}^2}}{\mathcal{K}_{0f}} \right) - \mathcal{K}_{0f}^4 \partial_M \ln \left( \frac{\Lambda + \sqrt{\Lambda^2 + \mathcal{K}_{0f}^2}}{\mathcal{K}_{0f}} \right) \right\} , \tag{165}
 \end{aligned}$$

mais detalhes desse extenso cálculo pode ser visto no Apêndice E. Por fim o resultado é dado por

$$\partial_M \Omega_f^{\text{vac}} = -M \left( 1 - \frac{a_f^2 B^2}{M^2} \right) \frac{N_c}{2\pi^2} \left[ \Lambda \sqrt{\Lambda^2 + \mathcal{K}_{0f}^2} - \mathcal{K}_{0f}^2 \ln \left( \frac{\Lambda + \sqrt{\Lambda^2 + \mathcal{K}_{0f}^2}}{\mathcal{K}_{0f}} \right) \right] . \tag{166}$$

Da Eq.(150), podemos calcular a contribuição

$$\begin{aligned}\partial_M \Omega_f^{\text{field}} &= -\frac{N_c}{6} \frac{B_f^2}{8\pi^2} [3(\alpha_f + 1)^2 - 1] \partial_M \ln \left( \frac{\mathcal{K}_{0f}^2}{\Lambda^2} \right) \\ &= -M \left( 1 - \frac{a_f^2 B^2}{M^2} \right) \frac{N_c}{3} \frac{B_f^2}{8\pi^2} \frac{[3(\alpha_f + 1)^2 - 1]}{\mathcal{K}_{0f}^2} .\end{aligned}\quad (167)$$

Da Eq.(135), podemos calcular a contribuição de interação  $\partial_M \Omega^{\text{mag}}$

$$\begin{aligned}\partial_M \Omega_f^{\text{mag}} &= \partial_M \left\{ \frac{N_c}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^3} e^{-\kappa_{0f}^2 s} \left\{ \frac{B_f s}{\sinh(B_f s)} \cosh[(\alpha_f + 1)B_f s] + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. -1 - \frac{1}{6} [3(\alpha_f + 1)^2 - 1] (B_f s)^2 \right\} \right\} \\ &= -M \left( 1 - \frac{a_f^2 B^2}{M^2} \right) \frac{N_c}{4\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^2} e^{-\kappa_{0f}^2 s} \left\{ \frac{B_f s}{\sinh(B_f s)} \cosh[(\alpha_f + 1)B_f s] + \right. \\ &\quad \left. -1 - \frac{1}{6} [3(\alpha_f + 1)^2 - 1] (B_f s)^2 \right\} \\ &= \frac{N_c}{4\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^2} \left( \frac{\partial}{\partial M} e^{-\kappa_{0f}^2 s} \right) \left\{ \frac{B_f s}{\sinh(B_f s)} \cosh[(\alpha_f + 1)B_f s] + \right. \\ &\quad \left. -1 - \frac{1}{6} [3(\alpha_f + 1)^2 - 1] (B_f s)^2 \right\} \\ &= -M \left( 1 - \frac{a_f^2 B^2}{M^2} \right) \frac{N_c}{4\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^2} e^{-\kappa_{0f}^2 s} \left\{ \frac{B_f s}{\sinh(B_f s)} \cosh[(\alpha_f + 1)B_f s] + \right. \\ &\quad \left. -1 - \frac{1}{6} [3(\alpha_f + 1)^2 - 1] (B_f s)^2 \right\} .\end{aligned}\quad (168)$$

Portanto, das equações (160, 161, 166, 167, 168, ), temos a equação de *gap* via regularização cutoff 3D:

$$\begin{aligned}\frac{M - m}{2G} - \sum_{f=u,d} M \left( 1 - \frac{a_f^2 B^2}{M^2} \right) \frac{N_c}{2\pi^2} \left[ \Lambda \sqrt{\Lambda^2 + \mathcal{K}_{0f}^2} - \mathcal{K}_{0f}^2 \ln \left( \frac{\Lambda + \sqrt{\Lambda^2 + \mathcal{K}_{0f}^2}}{\mathcal{K}_{0f}} \right) \right] + \\ - \sum_{f=u,d} M \left( 1 - \frac{a_f^2 B^2}{M^2} \right) \frac{N_c}{3} \frac{B_f^2}{8\pi^2} \frac{[3(\alpha_f + 1)^2 - 1]}{\mathcal{K}_{0f}^2} + \\ - \sum_{f=u,d} M \left( 1 - \frac{a_f^2 B^2}{M^2} \right) \frac{N_c}{4\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^2} e^{-\kappa_{0f}^2 s} \left\{ \frac{B_f s}{\sinh(B_f s)} \cosh[(\alpha_f + 1)B_f s] + \right. \\ \left. -1 - \frac{1}{6} [3(\alpha_f + 1)^2 - 1] (B_f s)^2 \right\} = 0 .\end{aligned}\quad (169)$$

### 5.1.1 Equação de *gap* cutoff 3D para qAMM nulo

Uma caso interessante é tomar  $a_f = 0$  e  $\alpha_f = 0$  na Eq. (169), espera-se retomar o caso onde temos a equação de *gap* para o modelo NJL-SU(2) com momento magnético anômalo

dos quarks nulo. Fazendo isso então

$$\begin{aligned}
& \frac{M-m}{2G} - \sum_{f=u,d} M \left( 1 - \frac{q_f^0 B^2}{M^2} \right) \frac{N_c}{2\pi^2} \left[ \Lambda \sqrt{\Lambda^2 + \mathcal{K}_{0f}^2} - \mathcal{K}_{0f}^2 \ln \left( \frac{\Lambda + \sqrt{\Lambda^2 + \mathcal{K}_{0f}^2}}{\mathcal{K}_{0f}} \right) \right] + \\
& - \sum_{f=u,d} M \left( 1 - \frac{q_f^0 B^2}{M^2} \right) \frac{N_c B_f^2}{3 \cdot 8\pi^2} \frac{[3(\alpha_f^0 + 1)^2 - 1]}{\mathcal{K}_{0f}^2} + \\
& - \sum_{f=u,d} M \left( 1 - \frac{q_f^0 B^2}{M^2} \right) \frac{N_c}{4\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^2} e^{-\mathcal{K}_{0f}^2 s} \left\{ \frac{B_f s}{\sinh(B_f s)} \cosh[(\alpha_f^0 + 1)B_f s] \right. \\
& \left. - 1 - \frac{1}{6} [3(\alpha_f^0 + 1)^2 - 1] (B_f s)^2 \right\} = 0 \\
& \Rightarrow \frac{M-m}{2G} - \sum_{f=u,d} \frac{MN_c}{2\pi^2} \left[ \Lambda \sqrt{\Lambda^2 + M^2} - M^2 \ln \left( \frac{\Lambda + \sqrt{\Lambda^2 + M^2}}{M} \right) \right] + \\
& - \sum_{f=u,d} \frac{N_c B_f^2}{12\pi^2 M} - \sum_{f=u,d} \frac{MN_c}{4\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^2} e^{-M^2 s} \left\{ B_f s \coth(B_f s) - 1 - \frac{1}{3} (B_f s)^2 \right\} = 0 .
\end{aligned} \tag{170}$$

### 5.1.2 Equação de gap cutoff 3D para qAMM constante

No caso do qAMM constante em relação à massa efetiva, teremos uma modificação sutil na Eq. (162), onde claramente  $\partial_M a_f = 0$ . Dessa maneira, algumas derivadas são alteradas, como

$$\begin{aligned}
\partial_M \mathcal{K}_{0f}^2 &= 2M , \\
\partial_M \mathcal{K}_{0f} &= \frac{M}{\mathcal{K}_{0f}} .
\end{aligned} \tag{171}$$

Assim sendo, a Eq. (169) se torna

$$\begin{aligned}
& \frac{M-m}{2G} - \sum_{f=u,d} \frac{MN_c}{2\pi^2} \left[ \Lambda \sqrt{\Lambda^2 + \mathcal{K}_{0f}^2} - \mathcal{K}_{0f}^2 \ln \left( \frac{\Lambda + \sqrt{\Lambda^2 + \mathcal{K}_{0f}^2}}{\mathcal{K}_{0f}} \right) \right] + \\
& - \sum_{f=u,d} \frac{MN_c B_f^2}{3 \cdot 8\pi^2} \frac{[3(\alpha_f + 1)^2 - 1]}{\mathcal{K}_{0f}^2} + \\
& - \sum_{f=u,d} \frac{MN_c}{4\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^2} e^{-\mathcal{K}_{0f}^2 s} \left\{ \frac{B_f s}{\sinh(B_f s)} \cosh[(\alpha_f + 1)B_f s] - 1 - \frac{1}{6} [3(\alpha_f + 1)^2 - 1] (B_f s)^2 \right\} = 0 .
\end{aligned} \tag{172}$$

Podemos fazer os mesmo procedimentos para a regularização de tempo próprio.

## 5.2 EQUAÇÃO DE GAP USANDO O TEMPO PRÓPRIO

Para o cálculo da equação de *gap* no formalismo de tempo próprio, em relação ao caso de cutoff 3D, apenas o termo de vácuo e campo mudam, de forma que partindo das Eq.'s (155, 156)

$$\begin{aligned}
\partial_M \Omega^{\text{vac}} &= \sum_{f=u,d} \frac{N_c}{8\pi^2} \int_{\frac{1}{\Lambda^2}}^{\infty} \frac{ds}{s^3} \partial_M e^{-\kappa_{0f}^2 s} = \sum_{f=u,d} \frac{N_c}{8\pi^2} \int_{\frac{1}{\Lambda^2}}^{\infty} \frac{ds}{s^3} e^{-\kappa_{0f}^2 s} \partial_M (\kappa_{0f}^2 s) \\
&= - \sum_{f=u,d} \frac{N_c}{8\pi^2} \int_{\frac{1}{\Lambda^2}}^{\infty} \frac{ds}{s^2} e^{-\kappa_{0f}^2 s} 2M \left( 1 - \frac{a_f^2 B^2}{M^2} \right) \\
&= - \sum_{f=u,d} M \left( 1 - \frac{a_f^2 B^2}{M^2} \right) \frac{N_c}{4\pi^2} \int_{\frac{1}{\Lambda^2}}^{\infty} \frac{ds}{s^2} e^{-\kappa_{0f}^2 s} .
\end{aligned} \tag{173}$$

E para o termo de campo magnético, temos

$$\begin{aligned}
\partial_M \Omega^{\text{field}} &= \sum_{f=u,d} \frac{N_c B_f^2}{6 \cdot 4\pi^2} [3(\alpha_f + 1)^2 - 1] \int_{\frac{1}{\Lambda^2}}^{\infty} \frac{ds}{s} \partial_M e^{-\kappa_{0f}^2 s} \\
&= - \sum_{f=u,d} M \left( 1 - \frac{a_f^2 B^2}{M^2} \right) \frac{N_c B_f^2}{3 \cdot 8\pi^2} [3(\alpha_f + 1)^2 - 1] \int_{\frac{1}{\Lambda^2}}^{\infty} ds e^{-\kappa_{0f}^2 s} .
\end{aligned} \tag{174}$$

E a equação de *gap* se torna:

$$\begin{aligned}
&\frac{M - m}{2G} - \sum_{f=u,d} M \left( 1 - \frac{a_f^2 B^2}{M^2} \right) \frac{N_c}{4\pi^2} \int_{\frac{1}{\Lambda^2}}^{\infty} \frac{ds}{s^2} e^{-\kappa_{0f}^2 s} + \\
&- \sum_{f=u,d} M \left( 1 - \frac{a_f^2 B^2}{M^2} \right) \frac{N_c B_f^2}{3 \cdot 8\pi^2} [3(\alpha_f + 1)^2 - 1] \int_{\frac{1}{\Lambda^2}}^{\infty} ds e^{-\kappa_{0f}^2 s} + \\
&- \sum_{f=u,d} M \left( 1 - \frac{a_f^2 B^2}{M^2} \right) \frac{N_c}{4\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{ds}{s^2} e^{-\kappa_{0f}^2 s} \left\{ \frac{B_f s}{\sinh(B_f s)} \cosh[(\alpha_f + 1)B_f s] + \right. \\
&\left. - 1 - \frac{1}{6} [3(\alpha_f + 1)^2 - 1] (B_f s)^2 \right\} = 0 .
\end{aligned} \tag{175}$$

No próximo capítulo iremos resolver numericamente a equação de *gap* e também traremos os potenciais termodinâmicos em detalhe.



## 6 RESULTADOS NUMÉRICOS E DISCUSSÃO

Os códigos utilizados nessa dissertação foram escritas na linguagem `fortran` [64]. Entre estes, foram utilizados rotinas de integração numérica (quadratura gaussiana), e métodos de resolução de equações auto-consistentes. Os gráficos e a análise de dados provenientes das saídas desses códigos foi feita na linguagem `python`.

Os parâmetros de qAMM são dados por Ref. [29] em dois conjuntos. Estes estão apresentados na Tabela 1:

	$k_u(\text{GeV}^{-1})$	$k_d(\text{GeV}^{-1})$	$\alpha_u$	$\alpha_d$
<i>set 0</i> – $\kappa^{[0]}$	0,00000	0,00000	0,000	0,000
<i>set 1</i> – $\kappa^{[1]}$	0,29016	0,35986	0,242	0,304
<i>set 2</i> – $\kappa^{[2]}$	0,00995	0,07975	0,006	0,056

Tabela 1 – Parâmetros de qAMM. Retirados das Ref.'s [29, 8].

Ou seja, o *set 1* corresponde a um efeito de qAMM mais exacerbado, o *set 2*, um efeito muito pequeno, quase como o caso de qAMM nulo. De maneira análoga, identificaremos o *set* com qAMM nulo pelo sobrescrito “[0]”.

Para obtenção de resultados numéricos precisamos de valores para os parâmetros livres da nossa teoria. Estes são apresentados na Tabela 2:

	$\Lambda$ (MeV)	$m$ (MeV)	$G\Lambda^2$
<i>cutoff 3D</i>	591,60	5,7233	2,404
tempo próprio	886,62	7,3830	4,001

Tabela 2 – Parâmetros utilizados nos esquemas de regularização de *cutoff 3D* e tempo próprio. Retirados da Ref. [38].

Analogamente à Ref. [26], vamos utilizar o mesmo conjunto de valores já escolhidos naquele trabalho para as regularizações do tipo *cutoff 3D*. Estes foram ajustados em [38] para concordar com propriedades do pión no vácuo, sendo sua massa  $m_\pi = 138$  MeV, constante de decaimento  $f_\pi = 92,4$  MeV o condensado quiral  $\langle \bar{u}u \rangle = (-241 \text{ MeV})^3$ . Estes parâmetros foram escolhidos pois estamos interessados na regularização no esquema *cutoff 3D* para a parte *vacuum* e do *field*. Assim, também baseados em [38], onde vários esquemas de regularização são mostrados e discutidos, escolhemos esses parâmetros. De fato, essas são as contribuições que regularizam a parte *mag*, ou seja o potencial divergente advindo da lagrangiana efetiva. E assim se dá na prática o esquema VMR. Para o esquema de regularização de tempo próprio, vamos utilizar dados também da referência [38].

Em seguida vamos discutir os resultados dos potenciais termodinâmicos para diferentes valores de campo magnético.

## 6.1 POTENCIAIS TERMODINÂMICOS

### 6.1.1 Regularização *cutoff* 3D

Na Figura 5 trazemos o potencial termodinâmico  $\Omega$  em função da massa efetiva  $M$ . Este é resultado imediato da Eq. (154) para o campo magnético nulo. Nota-se que nesse caso, todos os potenciais convergem para a mesma curva. Temos o caso do modelo NJL sem campo magnético com mínimo em  $M_0 \sim 390$  MeV, que concorda com o esperado pela Ref. [38].

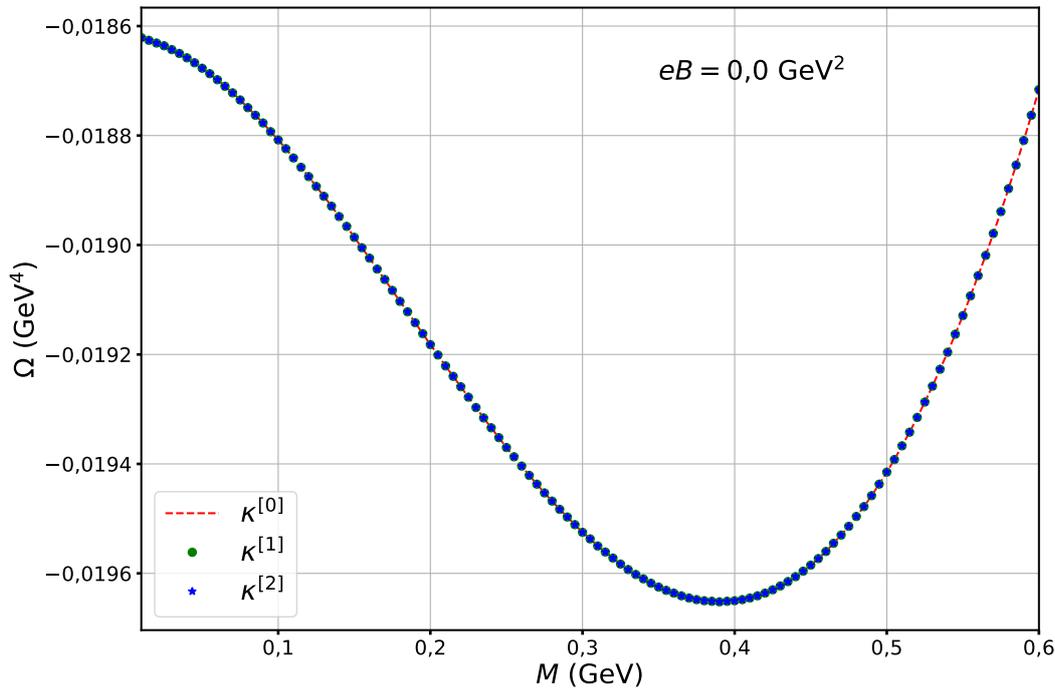


Figura 5 – Potencial termodinâmico para os 3 conjuntos de qAMM com  $eB = 0,0$  GeV<sup>2</sup> no esquema de *cutoff* 3D.

Na Figura 6 temos o caso quase nulo de campo magnético. Nesta, já podemos notar uma mudança no perfil do potencial para o caso qAMM do set 1,  $\kappa^{[1]}$ , ou seja, o valor mais acentuado. Entre o set 2 e o caso qAMM nulo não há diferença considerável.

No caso de campo magnético  $eB = 0,1$  GeV<sup>2</sup> na Figura 7 pode-se notar claramente os potenciais assumindo valores diferentes. Em relação aos mínimos, para qAMM nulo e o set 2, aquele com valores de qAMM bem baixos, os mínimos ainda concordam em torno de  $M_0 \sim 400$  MeV. Para o set 1, temos  $M_0 \sim 405$  MeV. Já notamos aqui que, ao aumentar o campo magnético, temos uma alteração no mínimo da massa efetiva para um valor maior, já que todos os mínimos se deslocaram nesse caso. Esse fenômeno é conhecido como catálise magnética [35]. Além disso, temos também o primeiro indício do que pode ser uma catálise magnética induzida pelo efeito do qAMM, pois justamente o set 1 tem valores de qAMM altos em relação ao set 2 e esse conjunto justamente apresenta mínimo num valor de massa efetiva

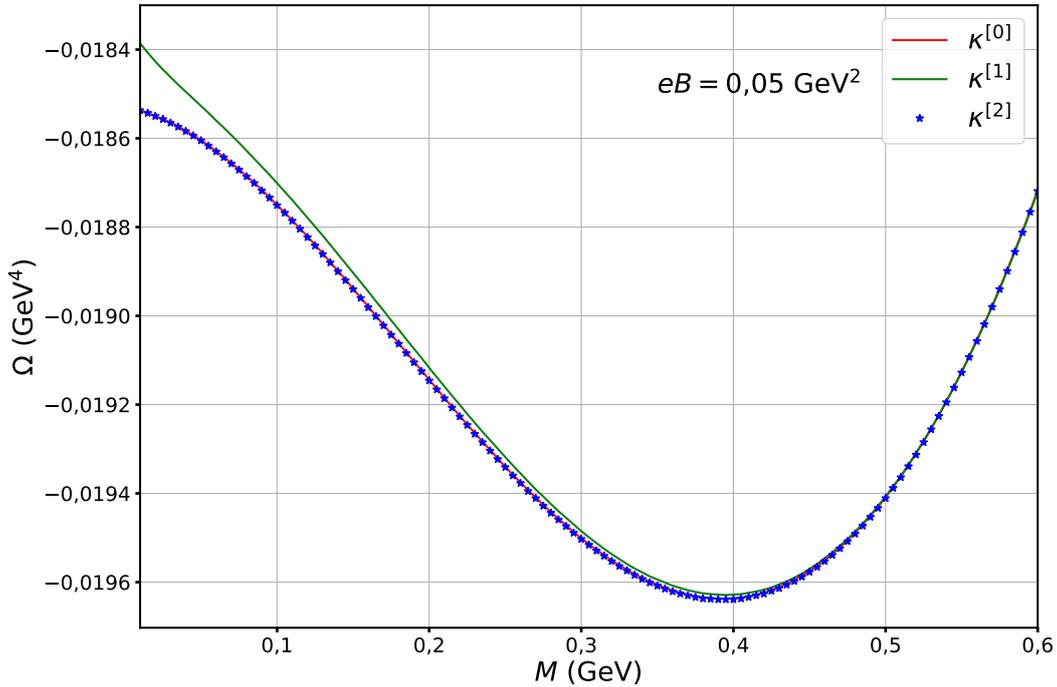


Figura 6 – Potencial termodinâmico para os 3 conjuntos de qAMM com  $eB = 0,05 \text{ GeV}^2$  no esquema de *cutoff* 3D.

maior. Na Figura 8 temos  $eB = 0,2 \text{ GeV}^2$ . Para qAMM nulo e o *set* 2, temos  $M_0 \sim 425 \text{ MeV}$ . Já para o *set* 1, temos  $M_0 \sim 445 \text{ MeV}$ .

Na Figura 9 temos  $eB = 0,3 \text{ GeV}^2$ . Para qAMM nulo  $M_0 \sim 425 \text{ MeV}$ . Para o *set* 2,  $M_0 \sim 455 \text{ MeV}$ , e para o *set* 1  $M_0 \sim 495 \text{ MeV}$ . Aqui, conseguimos estabelecer uma hierarquia para as massas efetivas para os diferentes *sets* de qAMM, da mesma maneira como já descrito em [26], onde  $M_{\kappa^{[0]}} < M_{\kappa^{[2]}} < M_{\kappa^{[1]}}$ , ou seja, o efeito da catálise magnética diretamente ligado ao valor de qAMM.

Para um valor bem alto de campo magnético  $eB = 0,5 \text{ GeV}^2$ , temos  $M_0 \sim 530 \text{ MeV}$  para  $\kappa^{[0]}$ ,  $M_0 \sim 535 \text{ MeV}$  para  $\kappa^{[2]}$ , e  $\sim 592 \text{ MeV}$  para o conjunto  $\kappa^{[1]}$ , onde este último valor já está além limite dos parâmetros escolhidos, o mínimo está num valor além do que é razoável dentro desse esquema de regularização ( $M_0 > \Lambda$ ). Conforme [38], este valor de campo magnético, ou qualquer valor  $\geq 0,3 \text{ GeV}^2$ , já ultrapassa o regime de confiabilidade desse tipo de regularização devido a sua compatibilidade do que temos de dados proveniente da LQCD. O esquema VMR é, conforme [26], um esquema do tipo nMFIR (regularização dependente de campo magnético, do inglês *nonmagnetic field independent regularization*), assim sendo a Figura 10 é trazida apenas por critério ilustrativo.

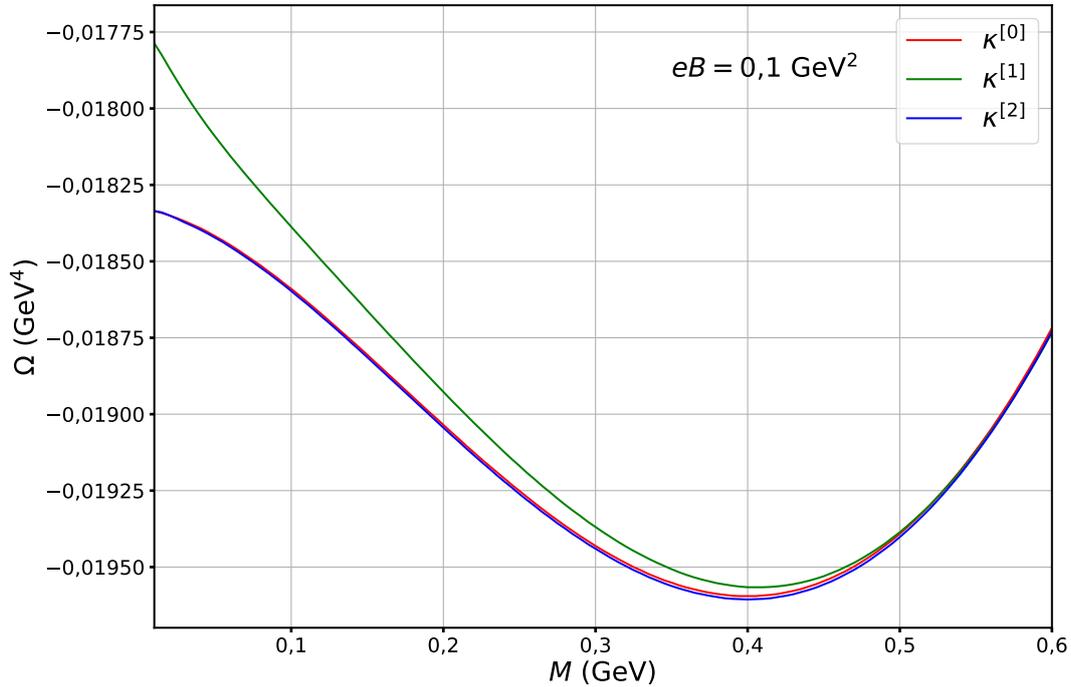


Figura 7 – Potencial termodinâmico para os 3 conjuntos de qAMM com  $eB = 0,1 \text{ GeV}^2$  no esquema de *cutoff* 3D.

### 6.1.2 Regularização de tempo próprio

Na Figura 11 trazemos os potenciais termodinâmicos conforme as Eq.'s (157, 158). Notamos para o qAMM nulo, temos  $M_0 \sim 500 \text{ MeV}$ , para o *set* 2  $\sim 515 \text{ MeV}$  e para o *set* 1  $\sim 535 \text{ MeV}$ . Ou seja, da mesma forma que o esquema de *cutoff* 3D, preserva-se a hierarquia de massas  $M_{\kappa^{[0]}} < M_{\kappa^{[2]}} < M_{\kappa^{[1]}}$ , mais uma vez corroborando com a hipótese de que o efeito do qAMM é um provedor de catálise magnética no sistema.

Uma maneira mais simples e direta de verificar o fenômeno da catálise magnética é resolver a equação de *gap* variando o campo magnético. Faremos isso na próxima seção.

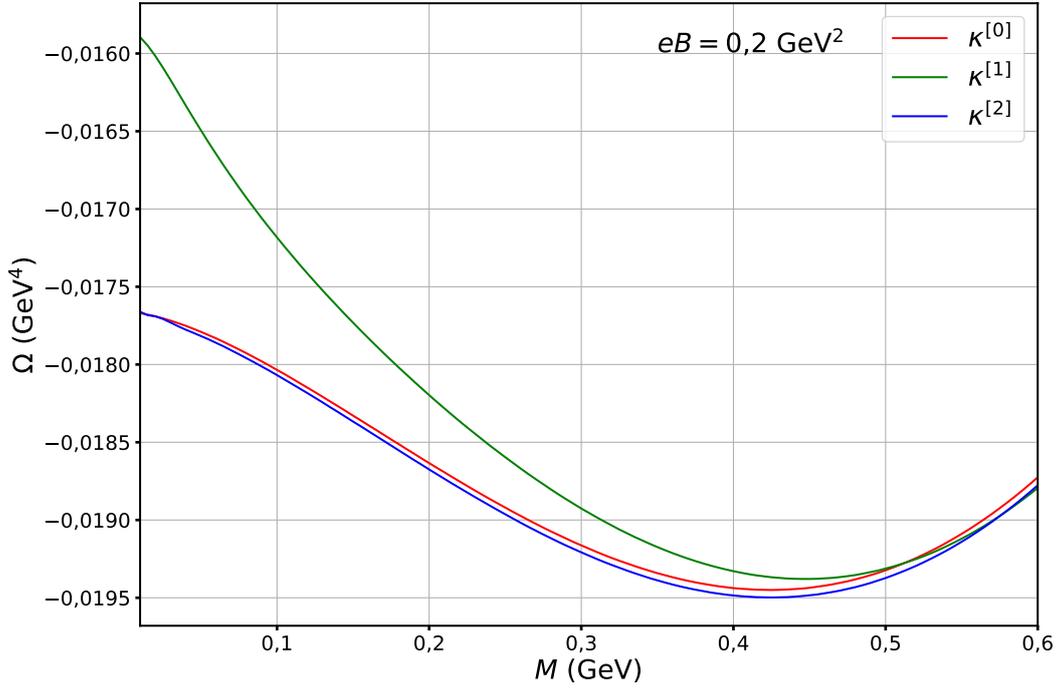


Figura 8 – Potencial termodinâmico para os 3 conjuntos de qAMM com  $eB = 0,2 \text{ GeV}^2$  no esquema de *cutoff* 3D.

## 6.2 EQUAÇÃO DE GAP

### 6.2.1 Regularização *cutoff* 3D

Aqui é necessário observar a Eq. (172). Para resolvê-la, adotamos o seguinte procedimento: definimos a função de *gap* como

$$\begin{aligned}
 f_{\text{gap}}(M, B) = & m - M + \frac{N_c G M}{\pi^2} \sum_{f=u,d} \left\{ \left[ \Lambda \sqrt{\Lambda^2 + \mathcal{K}_{0f}^2} - \mathcal{K}_{0f}^2 \ln \left( \frac{\Lambda + \sqrt{\Lambda^2 + \mathcal{K}_{0f}^2}}{\mathcal{K}_{0f}} \right) \right] + \right. \\
 & + \sum_{f=u,d} \frac{B_f^2}{12} \frac{[3(\alpha_f + 1)^2 - 1]}{\mathcal{K}_{0f}^2} + \\
 & \left. + \sum_{f=u,d} \frac{M N_c}{2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^2} e^{-\mathcal{K}_{0f}^2 s} \left[ \frac{B_f s}{\sinh(B_f s)} \cosh[(\alpha_f + 1) B_f s] - 1 - \frac{1}{6} [3(\alpha_f + 1)^2 - 1] (B_f s)^2 \right] \right\}, \quad (176)
 \end{aligned}$$

e calculamos numericamente suas raízes ao variar o valor do campo magnético. O resultado disso para todos os *sets* está presente na Figura 12.

Podemos notar que para valores até  $eB = 0,1 \text{ GeV}^2$ , o *set* 2 e o caso qAMM nulo praticamente se confundem, mas notamos que o caso  $\kappa^{[2]}$  apresenta uma catalização mais rápida ao percorrer os valores até  $eB = 0,3 \text{ GeV}^2$ . Já o *set* 1, aquele com qAMM mais forte,

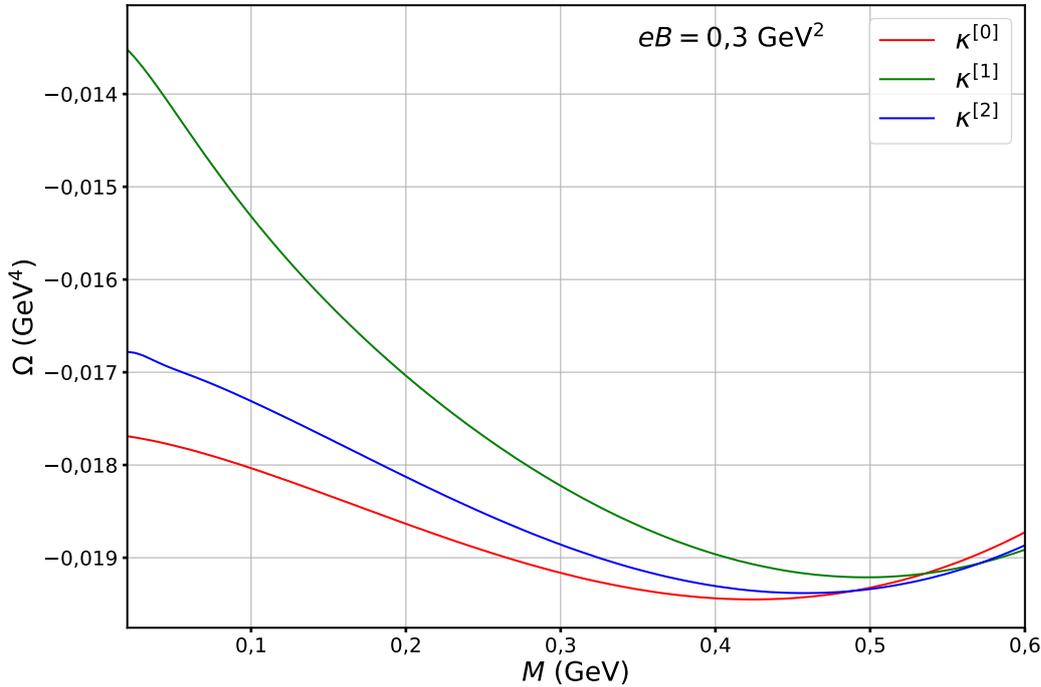


Figura 9 – Potencial termodinâmico para os 3 conjuntos de qAMM com  $eB = 0,3 \text{ GeV}^2$  no esquema de *cutoff* 3D.

apresenta uma catálise magnética (CM) bem mais exacerbada e se diferencia bastante dos conjuntos anteriores. Isso é mais um indício bem forte de que, para além do que sabemos que o campo magnético induz o fenômeno da CM (ao notar que as curvas da Figura 12 são sempre crescentes), o efeito de atribuir momento magnético anômalo aos quarks também proporciona um comportamento de CM, pois existe uma hierarquia do tipo  $M_{\kappa^{[0]}} < M_{\kappa^{[2]}} < M_{\kappa^{[1]}}$ , ou seja, a massa efetiva crescendo a medida que qAMM aumenta.

### 6.2.2 Regularização de tempo próprio

Ao resolver a equação de *gap* Eq. (175), no caso de AMM constante obtemos a Figura 13. Esta segue o mesmo comportamento, dentro dos parâmetros envolvidos, que a Figura 12. Assim concluímos os resultados numéricos desse trabalho.

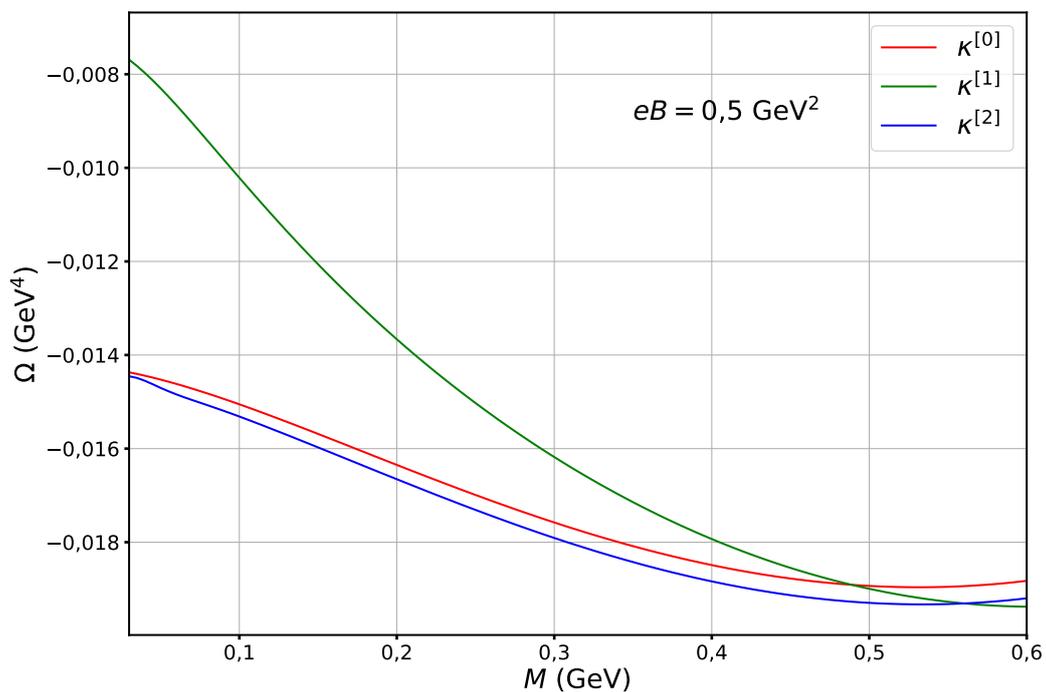


Figura 10 – Potencial termodinâmico para os 3 conjuntos de qAMM com  $eB = 0,5 \text{ GeV}^2$  no esquema de *cutoff* 3D.

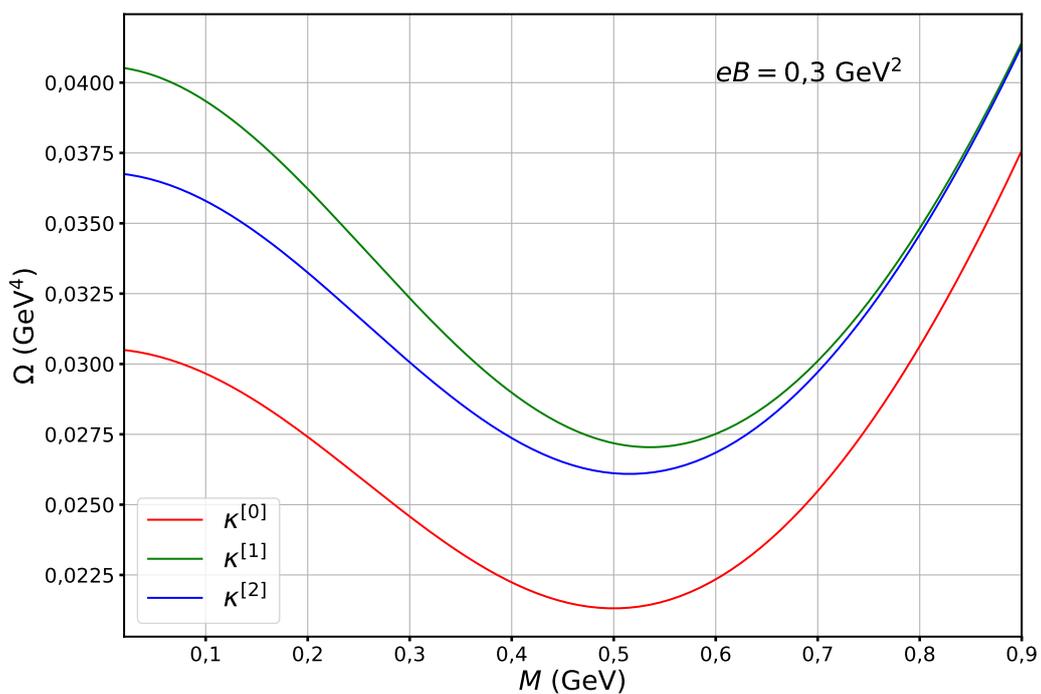


Figura 11 – Potencial termodinâmico para os 3 conjuntos de qAMM com  $eB = 0,3 \text{ GeV}^2$  no esquema de regularização de tempo próprio.

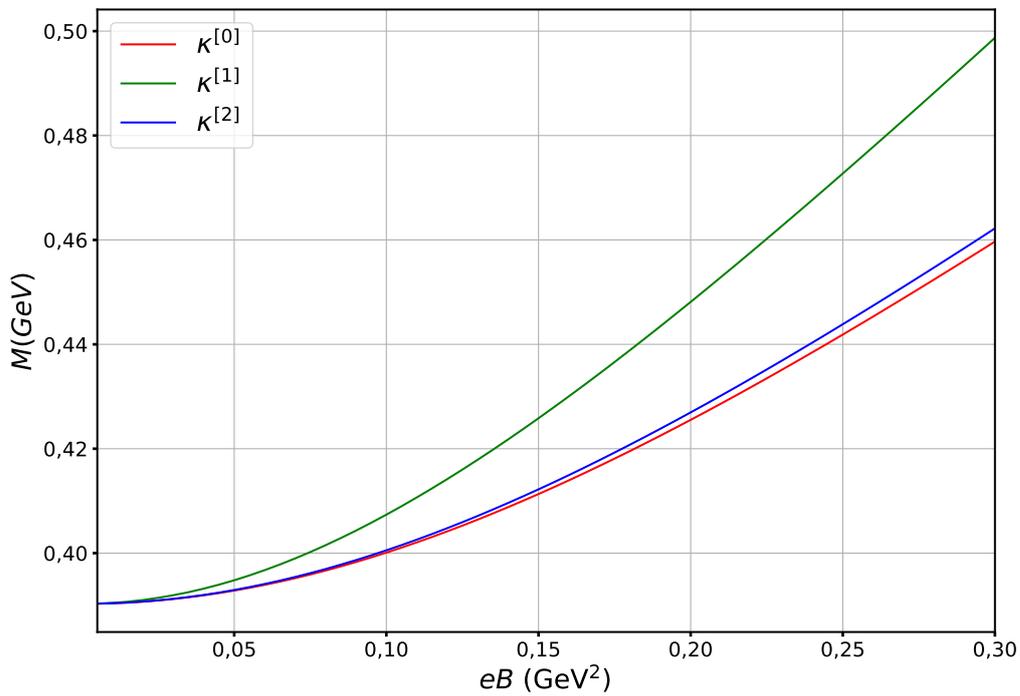


Figura 12 – Equação de *gap* para os 3 conjuntos de qAMM no esquema de *cutoff* 3D.

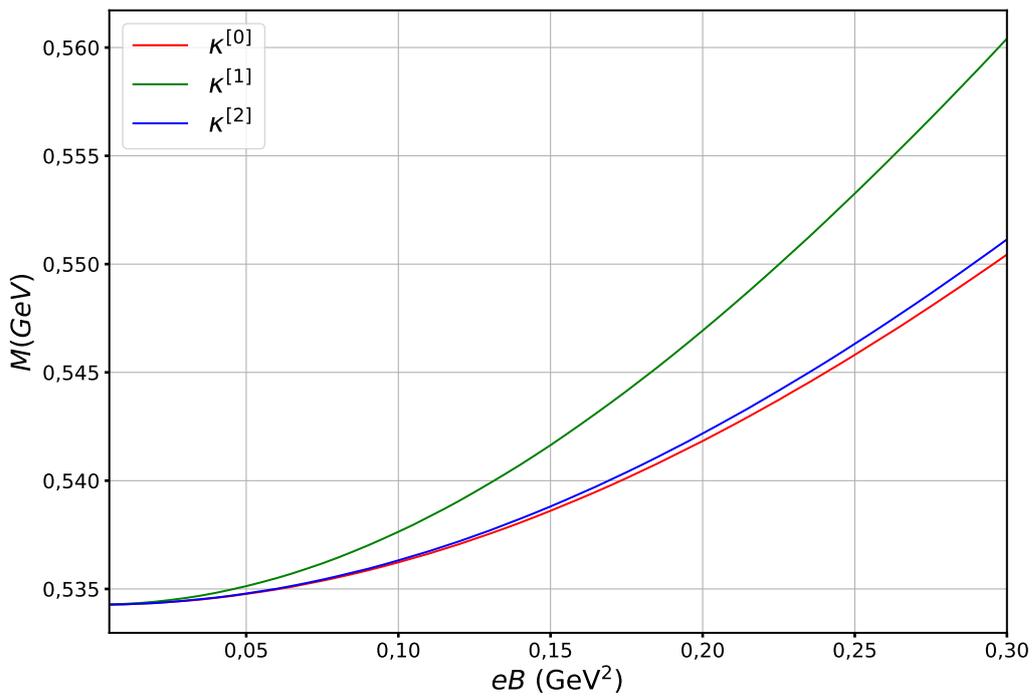


Figura 13 – Equação de *gap* para os 3 conjuntos de qAMM no esquema de regularização de tempo próprio.

## 7 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS

Efeitos relacionados com campos eletromagnéticos têm ganhado destaque na literatura, tanto para LQCD [18], quanto em modelos efetivos da QCD. A busca pela comprovação do efeito magnético quirial [14], efeito de separação quirial [65] e a anomalia quirial atualmente um tópico em ampla disputa. Ainda assim, um tópico que merece uma atenção especial é o efeito do momento magnético anômalo dos quarks.

Neste reside o problema de como implementar esse tipo de fenômeno em uma partícula que, dentro das condições que se espera no diagrama de fases da QCD, possui uma massa dinâmica, a massa efetiva. Uma analogia ao caso já bem descrito do elétron e do múon cabe para, em primeiro momento, obter uma análise qualitativa de como este pode interferir em efeitos já bem estabelecidos, como a catálise magnética e a catálise magnética inversa.

No Capítulo 2 apresentamos o modelo de Nambu–Jona-Lasinio em  $SU(2)$  de maneira tradicional, mas nele acrescentamos o termo de Pauli, aquele que nos dá a contribuição do momento magnético anômalo dos quarks (qAMM). Com a aproximação de campo médio, e com algumas prescrições tomadas a partir da nossa principal referência de comparação, [29], conseguimos escrever uma lagrangiana apropriada para o cálculo da função de Green desse modelo.

No Capítulo 4 conseguimos encontrar uma nova representação para a lagrangiana do modelo NJL em  $SU(2)$ . Para tal, nos apropriamos do formalismo das lagrangianas efetivas de Heisenberg–Euler–Weisskopf, utilizamos o *gauge* de Schwinger–Fock e nos baseamos no importante trabalho de Walter Dittrich [50] para o caso do momento magnético anômalo do elétron. Nesse procedimento, alguns passos mais técnicos estão envolvidos, como a transformada de Fourier para o espaço dos momentos, onde a equação diferencial se torna mais simples de ser resolvida, e ao tomar o traço da função de Green, conseguimos a partir de uma simples integração, obter uma representação integral para lagrangiana do nosso modelo.

No Capítulo 4, utilizamos uma analogia entre os trabalhos da QED para o potencial efetivo do elétron para definir o momento magnético anômalo dos quarks. Regularizamos nosso modelo a partir do esquema VMR expandindo o integrando de nossa lagrangiana efetiva divergente e definimos os termos referentes ao vácuo (*vac*) e proporcional ao campo magnético ao quadrado (*field*). Ao subtrair o termo (*mag*) dos termos (*vac*) e (*field*), obtemos uma contribuição finita. Para regularizar as essas contribuições do vácuo e do termo quadrático usamos o tradicional *cutoff* 3D e o método de tempo próprio.

No Capítulo 5 calculamos a equação de *gap* proveniente do potencial termodinâmico efetivo. Consideramos primeiramente o caso geral, quando o qAMM depende da massa efetiva. Em seguida obtemos a equação de *gap* para o caso de qAMM nulo e com campo magnético, assim obtendo um expressão já conhecida. Com o caso do qAMM constante obtivemos as mesmas expressões de [26].

No Capítulo 6 trazemos resultados numéricos para as expressões dos Capítulos 4 e 5. Conseguimos observar que para além da catálise magnética obtida ao aumentar o campo

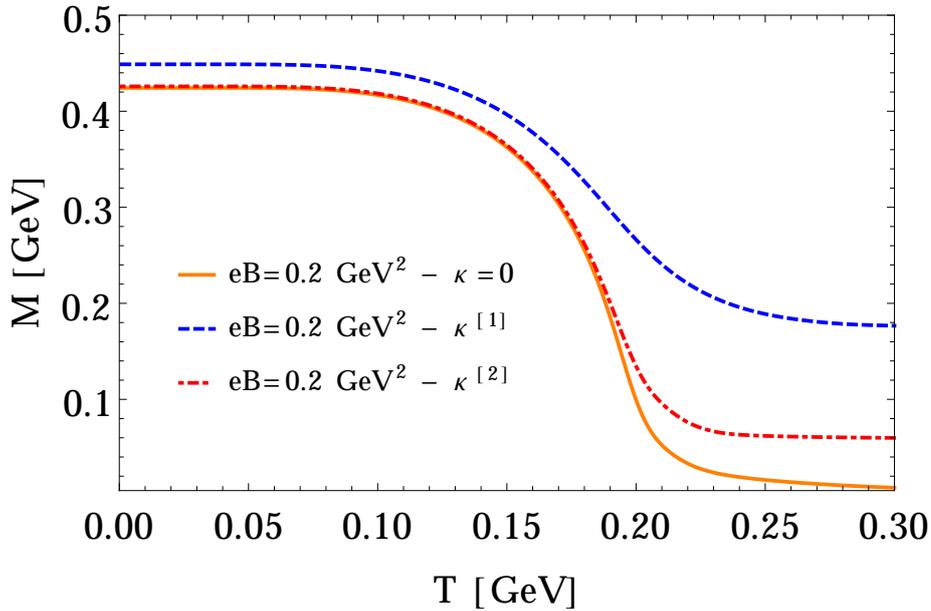


Figura 14 – Massa efetiva pela temperatura. Retirada da Ref. [26].

magnético, o efeito do qAMM também induz o mesmo efeito. Isso foi observado tanto usando o esquema de regularização de *cutoff* 3D, quanto o esquema de tempo próprio.

Assim, concluímos este trabalho. Esse se constituiu numa revisão da literatura hoje existente do tema vinculada ao modelo NJL; no estudo de um método geral proveniente da QED para representar a densidade lagrangiana do modelo numa forma própria para regularização no esquema VMR; no cálculo dos potenciais termodinâmicos regularizando as contribuições divergentes, do cálculo das equações de *gap* e suas resoluções numéricas. É importante dizer que os resultados desse trabalho não são inéditos, e apenas uma confirmação dos resultados presentes em [26]. Ainda assim, os cálculos realizados no Capítulo 4 estão apresentados de maneira bem mais detalhada do que se pode encontrar nas referências que nos orientaram [50, 54]. E assim, nos dão mais segurança para continuar a utilizar esse formalismo.

Um ponto de destaque a ser considerado é que ao adotar o procedimento de regularização no esquema VMR, prevenimos efeitos de oscilação na solução da equação de *gap*. No trabalho de [29] esses efeitos são atribuídas as oscilações de de Haas-van Alphen [66]. Aqui, como em [26], isso não se confirma e deve ser atribuído aos procedimentos de regularização que misturam os efeitos do campo magnético nos termos de vácuo. No nosso trabalho isso também se apresenta, mas como uma correção a massa efetiva. De modo que podemos recuperar as expressões do vácuo utilizando a prescrição  $\mathcal{K}_{0f} \rightarrow M$  para o caso de campo magnético e qAMM nulos. Como trabalhamos no caso de temperatura e potencial químico nulos, nesse trabalho não pudemos concluir, mas conforme [26], isso não impede uma restauração parcial da simetria quiral, conforme a Figura 14, retirada do mesmo.

Então, mesmo com alguns detalhes que ainda podem ser estudados, o esquema VMR apresenta bons resultados para descrever a catálise magnética, como mostrado nesse trabalho.

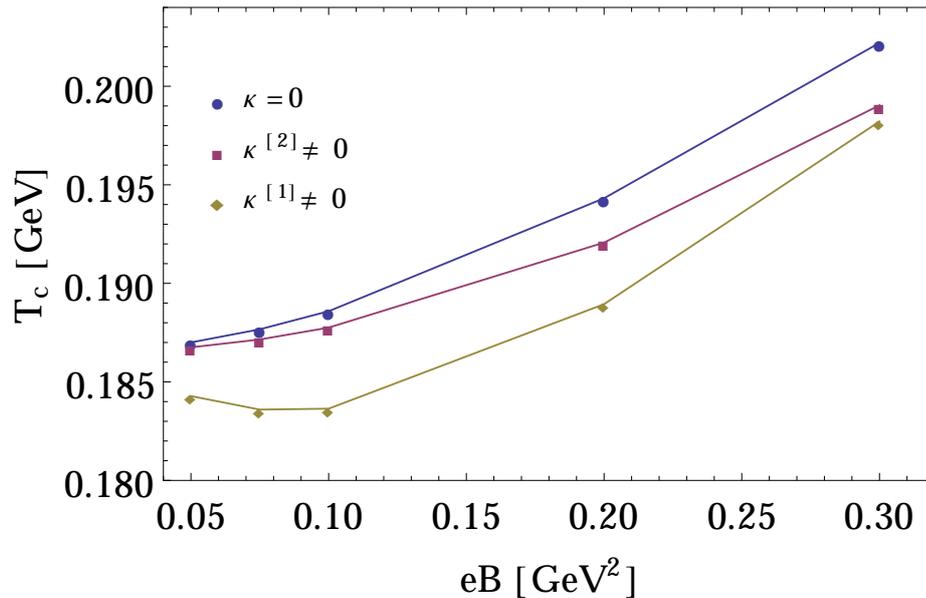


Figura 15 – Temperatura pseudocrítica pelo campo magnético. Retirada da Ref. [26].

Em [26], além disso, foi obtido que a catálise magnética inversa, o decréscimo da temperatura pseudocrítica em função do campo magnético, ocorre  $eB \leq 0,1 \text{ GeV}^2$  conforme Figura 15 e isso acontece para o set 1 de qAMM, ou seja, para um alto valor. No futuro, uma maneira de resolver a mistura de campo magnético nos termos de vácuo é aplicar um esquema de regularização do tipo MFIR (regularização independente de campo magnético), conforme [38]. Outra maneira de lidar com esse problema é buscar maneiras de implementar o efeito do qAMM sem utilizar a abordagem fenomenológica via termo de Pauli. Trabalhos como [67] e [25] podem ser boas referências a seguir nessa direção.

Além do formalismo estudado e discutido nessa dissertação, o estudante trabalhou num projeto onde o efeito do qAMM é estudado no interesse de corroborar a discussão já trazida em [26], onde a transição de fase da matéria de quarks com o efeito do qAMM se dá por um *crossover* suave. Esse trabalho está em preparação [68] e em breve deve ser publicado.

Em [69], o efeito do qAMM é explorado, na mesma metodologia de [26], nesse caso trabalhando com quantidades termodinâmicas como pressão, entropia, densidade de energia, etc. Nesse trabalho, essas quantidades são subestimadas na região de transição de fase. Ainda assim, como este trabalho trata de potenciais químicos nulos, trabalhos nessa direção ainda são necessários para um entendimento mais profundo. Poderemos também tentar observar os efeitos relacionados a potenciais químicos críticos, como em [70], onde o esquema VMR também foi aplicado, mas o qAMM implementado a partir da prescrição de [30], onde este é proporcional ao valor do condensado quiral.

Como já tratado no Capítulo 1, a Figura 2, retirada de [19], nos leva a acreditar que a melhor maneira de atacar o problema de modo mais realista seja utilizar campos eletromagnéticos que variem no espaço. Dessa maneira precisaremos tratar tanto de campos magnéticos, como de campos elétricos. Assim, existe uma perspectiva de comparação com

alguns resultados de simulações das colisões de íons pesados. Nota-se também que publicações recentes utilizando a LQCD para abordar esses problemas [18]. Em [34], num extenso trabalho de revisão sobre as lagrangianas efetivas da QED, uma série de expressões desse tipo são propostas e densidades lagrangianas referentes a estas obtidas, então esta também pode ser uma direção de amplo interesse para a continuidade do nosso trabalho.

## REFERÊNCIAS

- [1] F. Gullar. *Poema sujo*. Círculo do Livro, 1975.
- [2] S. Gasiorowicz e J. L. Rosner. “Hadron spectra and quarks”. en. *American Journal of Physics* 49.10 1981, p. 954–984. ISSN: 0002-9505, 1943-2909. DOI: 10.1119/1.12597. Disponível em: <http://aapt.scitation.org/doi/10.1119/1.12597> (acesso em 09/11/2022).
- [3] B. Abi *et al.* [Muon  $g-2$  Collaboration]. “Measurement of the Positive Muon Anomalous Magnetic Moment to 0.46 ppm”. *Phys. Rev. Lett.* 126 14, 2021, p. 141801. DOI: 10.1103/PhysRevLett.126.141801. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.126.141801>.
- [4] J. Schwinger. “On Quantum-Electrodynamics and the Magnetic Moment of the Electron”. *Physical Review* 73.4 15 de fev. de 1948, p. 416–417. ISSN: 0031-899X. DOI: 10.1103/PhysRev.73.416. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.73.416> (acesso em 14/04/2022).
- [5] J. Sakurai e J. Napolitano. *Modern Quantum Mechanics*. Cambridge University Press, 2020. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=GdX7DwAAQBAJ>.
- [6] P. Kusch e H. M. Foley. “Precision Measurement of the Ratio of the Atomic ‘g Values’ in the  $P_{3/2}$  and  $P_{1/2}$  States of Gallium”. en. *Physical Review* 72.12 1947, p. 1256–1257. ISSN: 0031-899X. DOI: 10.1103/PhysRev.72.1256.2. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.72.1256.2> (acesso em 29/11/2022).
- [7] S. Eidelman e M. Passera. “Theory of the tau lepton anomalous magnetic moment”. *Mod. Phys. Lett. A* 22 2007, p. 159–179. DOI: 10.1142/S0217732307022694. arXiv: hep-ph/0701260.
- [8] P. J. de A. Bicudo, J. E. F. T. Ribeiro e R. Fernandes. “Anomalous Magnetic Moment of Quarks”. *Physical Review C* 59.2 1 de fev. de 1999, p. 1107–1112. ISSN: 0556-2813, 1089-490X. DOI: 10.1103/PhysRevC.59.1107. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.59.1107> (acesso em 02/05/2022).
- [9] M. Gell-Mann. “A schematic model of baryons and mesons”. *Physics Letters* 8.3 1964, p. 214–215. ISSN: 0031-9163. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0031-9163\(64\)92001-3](https://doi.org/10.1016/S0031-9163(64)92001-3). Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0031916364920013>.
- [10] M. R. B. Ferreira. “QCD phase diagram under an external magnetic field”. Publication Title: Ph.D. Thesis ADS Bibcode: 2015PhDT.....141F. Tese de Doutorado. 2015. Disponível em: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2015PhDT.....141F> (acesso em 30/11/2022).

- [11] K. G. Wilson. “Confinement of quarks”. en. *Physical Review D* 10.8 1974, p. 2445–2459. ISSN: 0556-2821. DOI: 10.1103/PhysRevD.10.2445. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.10.2445> (acesso em 20/02/2023).
- [12] M. Creutz. “Monte Carlo study of quantized SU(2) gauge theory”. en. *Physical Review D* 21.8 1980, p. 2308–2315. ISSN: 0556-2821. DOI: 10.1103/PhysRevD.21.2308. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.21.2308> (acesso em 20/02/2023).
- [13] R. C. Duncan e C. Thompson. “Formation of Very Strongly Magnetized Neutron Stars: Implications for Gamma-Ray Bursts”. *apjl* 392 1992, p. L9. DOI: 10.1086/186413.
- [14] K. Fukushima, D. E. Kharzeev e H. J. Warringa. “Chiral magnetic effect”. *Physical Review D* 78.7 2008. DOI: 10.1103/physrevd.78.074033. Disponível em: <https://doi.org/10.1103%2Fphysrevd.78.074033>.
- [15] D. E. Kharzeev e H. J. Warringa. “Chiral magnetic conductivity”. *Physical Review D* 80.3 2009. DOI: 10.1103/physrevd.80.034028. Disponível em: <https://doi.org/10.1103%2Fphysrevd.80.034028>.
- [16] D. E. Kharzeev. “Chern-Simons current and local parity violation in hot QCD matter”. *Nuclear Physics A* 830.1-4 2009, p. 543c–546c. DOI: 10.1016/j.nuclphysa.2009.10.049. Disponível em: <https://doi.org/10.1016%2Fj.nuclphysa.2009.10.049>.
- [17] G. S. Bali, F. Bruckmann, G. Endrődi, Z. Fodor, S. D. Katz, S. Krieg, A. Schäfer e K. K. Szabó. “The QCD phase diagram for external magnetic fields”. en. *Journal of High Energy Physics* 2012.2 2012, p. 44. ISSN: 1029-8479. DOI: 10.1007/JHEP02(2012)044. Disponível em: [http://link.springer.com/10.1007/JHEP02\(2012\)044](http://link.springer.com/10.1007/JHEP02(2012)044) (acesso em 14/03/2023).
- [18] B. B. Brandt, F. Cuteri, G. Endrődi, G. Markó e A. D. M. Valois. *Lattice QCD with an inhomogeneous magnetic field background*. 2021. DOI: 10.48550/ARXIV.2111.13100. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/2111.13100>.
- [19] K. Tuchin. “Particle Production in Strong Electromagnetic Fields in Relativistic Heavy-Ion Collisions”. en. *Advances in High Energy Physics* 2013 2013, p. 1–34. ISSN: 1687-7357, 1687-7365. DOI: 10.1155/2013/490495. Disponível em: <http://www.hindawi.com/journals/ahep/2013/490495/> (acesso em 21/04/2022).
- [20] Y. Nambu e G. Jona-Lasinio. “Dynamical Model of Elementary Particles Based on an Analogy with Superconductivity. I”. *Phys. Rev.* 122 1, 1961. DOI: 10.1103/PhysRev.122.345. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.122.345>.
- [21] Y. Nambu e G. Jona-Lasinio. “Dynamical Model of Elementary Particles Based on an Analogy with Superconductivity. II”. *Phys. Rev.* 124 1, 1961, p. 246–254. DOI: 10.1103/PhysRev.124.246. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.124.246>.

- [22] C. Ratti, M. A. Thaler e W. Weise. “Phases of QCD: Lattice thermodynamics and a field theoretical model”. en. *Physical Review D* 73.1 2006, p. 014019. DOI: 10.1103/PhysRevD.73.014019. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.73.014019> (acesso em 23/01/2023).
- [23] C. M. G. Lattes, H. Muirhead, G. P. S. Occhialini e C. F. Powell. “PROCESSES INVOLVING CHARGED MESONS”. en. *Nature* 159.4047 1947, p. 694–697. ISSN: 0028-0836, 1476-4687. DOI: 10.1038/159694a0. Disponível em: <https://www.nature.com/articles/159694a0> (acesso em 23/01/2023).
- [24] S. Ghosh, N. Chaudhuri, S. Sarkar e P. Roy. “Effects of the anomalous magnetic moment of quarks on the dilepton production from hot and dense magnetized quark matter using the NJL model”. *Physical Review D* 101.9 2020. DOI: 10.1103/physrevd.101.096002. Disponível em: <https://doi.org/10.1103/physrevd.101.096002>.
- [25] R. M. Aguirre. “Regularization of the Nambu–Jona-Lasinio model under a uniform magnetic field and the role of the anomalous magnetic moments”. *Phys. Rev. D* 102 9, 2020, p. 096025. DOI: 10.1103/PhysRevD.102.096025. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.102.096025>.
- [26] R. L. S. Farias, W. R. Tavares, R. M. Nunes e S. S. Avancini. “Effects of the quark anomalous magnetic moment in the chiral symmetry restoration: magnetic catalysis and inverse magnetic catalysis”. *Eur. Phys. J. C* 82.8 2022, p. 674. DOI: 10.1140/epjc/s10052-022-10640-2. arXiv: 2109.11112 [hep-ph]. Disponível em: <https://link.springer.com/article/10.1140/epjc/s10052-022-10640-2>.
- [27] N. Chaudhuri, A. Mukherjee, S. Ghosh, S. Sarkar e P. Roy. “Insignificance of the anomalous magnetic moment of the quarks in presence of chiral imbalance”. *The European Physical Journal A* 58.5 2022. arXiv:2111.12058 [hep-ph, physics:nucl-th], p. 82. ISSN: 1434-601X. DOI: 10.1140/epja/s10050-022-00731-9. Disponível em: <http://arxiv.org/abs/2111.12058> (acesso em 13/06/2022).
- [28] E. J. Ferrer, V. de la Incera, D. M. Paret, A. P. Martínez e A. Sanchez. “Insignificance of the Anomalous Magnetic Moment of Charged Fermions for the Equation of State of a Magnetized and Dense Medium”. *Physical Review D* 91.8 27 de abr. de 2015, p. 085041. ISSN: 1550-7998, 1550-2368. DOI: 10.1103/PhysRevD.91.085041. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.91.085041> (acesso em 16/08/2021).
- [29] S. Fayazbakhsh e N. Sadooghi. “Anomalous magnetic moment of hot quarks, inverse magnetic catalysis, and reentrance of the chiral symmetry broken phase”. *Physical Review D* 90.10 2014. ISSN: 1550-2368. DOI: 10.1103/physrevd.90.105030. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.90.105030>.

- [30] M. Kawaguchi e M. Huang. *Restriction on the form of quark anomalous magnetic moment from lattice QCD results*. arXiv:2205.08169 [hep-lat, physics:hep-ph, physics:nucl-th]. 2022. Disponível em: <http://arxiv.org/abs/2205.08169> (acesso em 29/06/2022).
- [31] W. Dittrich, W.-y. Tsai e K.-H. Zimmermann. "Evaluation of the effective potential in quantum electrodynamics". *Phys. Rev. D* 19 10, 1979, p. 2929–2934. DOI: 10.1103/PhysRevD.19.2929. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.19.2929>.
- [32] W. Heisenberg e H. Euler. *Consequences of Dirac Theory of the Positron*. 2006. arXiv: physics/0605038 [physics.hist-ph].
- [33] V. Weisskopf. "The electrodynamics of the vacuum based on the quantum theory of the electron". *Early Quantum Electrodynamics: A Sourcebook*. Cambridge University Press, 1994, p. 206–226. DOI: 10.1017/CB09780511608223.018.
- [34] G. V. Dunne. "HEISENBERG-EULER Effective Lagrangians: Basics and Extensions". *From Fields to Strings: Circumnavigating Theoretical Physics: Ian Kogan Memorial Collection (in 3 Vols)*. Edited by SHIFMAN MISHA ET AL. Published by World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2005. ISBN #9789812775344, pp. 445-522. 2005, p. 445–522. DOI: 10.1142/9789812775344\_0014.
- [35] V. Gusynin, V. Miransky e I. Shovkovy. "Dimensional reduction and catalysis of dynamical symmetry breaking by a magnetic field". en. *Nuclear Physics B* 462.2-3 1996, p. 249–290. ISSN: 05503213. DOI: 10.1016/0550-3213(96)00021-1. Disponível em: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/0550321396000211> (acesso em 12/11/2022).
- [36] F. Mandl e G. Shaw. *Quantum Field Theory*. A Wiley-Interscience publication. Wiley, 2010. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=Ef4zDW1V2LkC>.
- [37] S. P. Klevansky. "The Nambu—Jona-Lasinio model of quantum chromodynamics". *Rev. Mod. Phys.* 64 3, 1992, p. 649–708. DOI: 10.1103/RevModPhys.64.649. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.64.649>.
- [38] S. S. Avancini, R. L. S. Farias, N. N. Scoccola e W. R. Tavares. "NJL-type models in the presence of intense magnetic fields: The role of the regularization prescription". *Phys. Rev. D* 99 11, 2019, p. 116002. DOI: 10.1103/PhysRevD.99.116002. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.99.116002>.
- [39] M. Buballa. "NJL model analysis of quark matter at large density". *Phys. Rept.* 407 2005, p. 205–376. DOI: 10.1016/j.physrep.2004.11.004. arXiv: hep-ph/0402234 [hep-ph].
- [40] S. Moller. "Pion-Pion Scattering and Shear Viscosity in the Nambu–Jona-Lasinio Model". Dissertação de Mestrado. Darmstadt, Tech. U., 2012. Disponível em: <http://www3>.

- mathematik.tu-darmstadt.de/fileadmin/home/users/340/master\_physik.pdf.
- [41] W. R. Tavares. “Excitações mesônicas sob influência de campos magnéticos fortes”. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Santa Catarina, 2015. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/134680>.
- [42] M. Gell-Mann, R. J. Oakes e B. Renner. “Behavior of Current Divergences under  $SU_3 \times SU_3$ ”. *Phys. Rev.* 175 5, 1968, p. 2195–2199. DOI: 10.1103/PhysRev.175.2195. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.175.2195>.
- [43] T. E. Medina. “Radiatively Induced Vector Repulsion for Light Quarks”. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Santa Catarina, 2014. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/xmlui/handle/123456789/129306>.
- [44] W. Greiner e D. Bromley. *Relativistic Quantum Mechanics. Wave Equations*. Springer, 2000. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=2DAInxwv1HYC>.
- [45] N. D. Ippolito. “Analysis of the QCD phase diagram within the Nambu-Jona Lasinio approach”. eng. Tese de Doutorado. Università degli Studi di Bari, 2009. Disponível em: <http://tesi.depositolegale.it/8670/>.
- [46] W. Dittrich e H. Gies. *Probing the Quantum Vacuum: Perturbative Effective Action Approach in Quantum Electrodynamics and its Application*. Springer Tracts in Modern Physics. Springer Berlin Heidelberg, 2000. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=DyhyFSL7bNUC>.
- [47] W. Dittrich. “One Loop Effective Potential with Anomalous Moment of the electron”. *J. Phys. A* 11 1978, p. 1191. DOI: 10.1088/0305-4470/11/6/019.
- [48] Triyanta. “The Fock-Schwinger gauge”. en. Tese de Doutorado. University of Tasmania, 1991. Disponível em: <https://eprints.utas.edu.au/21913/>.
- [49] W. Dittrich e W. Bauhoff. “Effects of anomalous magnetic moment and temperature on pair production in an external magnetic field”. en. *Lettere Al Nuovo Cimento Series 2* 30.13 1981, p. 399–402. ISSN: 1827-613X. DOI: 10.1007/BF02750402. Disponível em: <http://link.springer.com/10.1007/BF02750402> (acesso em 10/06/2022).
- [50] W. Dittrich. “Source Methods in Quantum Field Theory”. *Fortschritte der Physik* 26.5 1978, p. 289–356. DOI: <https://doi.org/10.1002/prop.19780260502>. eprint: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/prop.19780260502>. Disponível em: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/prop.19780260502>.
- [51] W.-y. Tsai e A. Yildiz. “Motion of an Electron in a Homogeneous Magnetic Field—Modified Propagation Function and Synchrotron Radiation”. en. *Physical Review D* 8.10 1973,

- p. 3446–3460. ISSN: 0556-2821. DOI: 10.1103/PhysRevD.8.3446. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.8.3446> (acesso em 24/06/2022).
- [52] A. Zee. *Group Theory in a Nutshell for Physicists*. In a Nutshell. Princeton University Press, 2016. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=he0oCwAAQBAJ>.
- [53] W. Dittrich. “One-loop effective potentials in quantum electrodynamics”. *Journal of Physics A: Mathematical and General* 9.7 1976, p. 1171–1179. ISSN: 0305-4470, 1361-6447. DOI: 10.1088/0305-4470/9/7/019. Disponível em: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0305-4470/9/7/019> (acesso em 14/04/2022).
- [54] M. R. Brown e M. J. Duff. “Exact results for effective Lagrangians”. *Phys. Rev. D* 11 8, 1975, p. 2124–2135. DOI: 10.1103/PhysRevD.11.2124. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.11.2124>.
- [55] R. P. Cardoso e S. S. Avancini. “The Green function of the NJL–SU(2) model lagrangian with the AMM effect”. *PoS XVHadronPhysics 2022*, p. 050. DOI: 10.22323/1.408.0050. Disponível em: <https://pos.sissa.it/408/050>.
- [56] J. Schwinger. “On Gauge Invariance and Vacuum Polarization”. en. *Physical Review* 82.5 1951, p. 664–679. ISSN: 0031-899X. DOI: 10.1103/PhysRev.82.664. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.82.664> (acesso em 15/06/2022).
- [57] K. Hattori, K. Itakura e S. Ozaki. *Note on all-order Landau-level structures of the Heisenberg-Euler effective actions for QED and QCD*. arXiv:2001.06131 [hep-ph, physics:quant-ph]. 2020. Disponível em: <http://arxiv.org/abs/2001.06131> (acesso em 15/12/2022).
- [58] M. Schwartz. *Quantum Field Theory and the Standard Model*. Quantum Field Theory and the Standard Model. Cambridge University Press, 2014. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=HbdEAgAAQBAJ>.
- [59] S. S. Avancini, R. L. S. Farias, M. B. Pinto, T. E. Restrepo e W. R. Tavares. “Regularizing thermo and magnetic contributions within nonrenormalizable theories”. en. *Physical Review D* 103.5 2021, p. 056009. ISSN: 2470-0010, 2470-0029. DOI: 10.1103/PhysRevD.103.056009. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.103.056009> (acesso em 01/04/2022).
- [60] I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, A. Jeffrey e D. Zwillinger. *Table of Integrals, Series, and Products*. 2007.
- [61] D. P. Menezes, M. B. Pinto, S. S. Avancini, A. P. Martínez e C. Providência. “Quark Matter under Strong Magnetic Fields in the Nambu–Jona-Lasinio Model”. *Physical Review C* 79.3 27 de mar. de 2009, p. 035807. ISSN: 0556-2813, 1089-490X. DOI: 10.1103/PhysRevC.79.035807. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.79.035807> (acesso em 15/06/2022).

- [62] W. Pauli e F. Villars. “On the Invariant Regularization in Relativistic Quantum Theory”. en. *Reviews of Modern Physics* 21.3 1949, p. 434–444. ISSN: 0034-6861. DOI: 10.1103/RevModPhys.21.434. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.21.434> (acesso em 08/11/2022).
- [63] N. N. Lebedev, R. A. Silverman e D. B. Livhtenberg. “Special Functions and Their Applications”. *Physics Today* 18.12 1965, p. 70. DOI: 10.1063/1.3047047.
- [64] W. H. Press, S. a. Teukolsky, W. T. Vetterling e B. P. Flannery. *Numerical Recipes in Fortran 77: the Art of Scientific Computing. Second Edition*. V. 1. 1996.
- [65] M. A. Metlitski e A. R. Zhitnitsky. “Anomalous axion interactions and topological currents in dense matter”. en. *Physical Review D* 72.4 2005, p. 045011. ISSN: 1550-7998, 1550-2368. DOI: 10.1103/PhysRevD.72.045011. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.72.045011> (acesso em 24/02/2023).
- [66] W. De Haas e P. Van Alphen. “The dependence of the susceptibility of diamagnetic metals upon the field”. *Proc. Netherlands Roy. Acad. Sci.* 1106. 1930, p. 170.
- [67] L. Chang, Y.-X. Liu e C. D. Roberts. “Dressed-Quark Anomalous Magnetic Moments”. en. *Physical Review Letters* 106.7 2011, p. 072001. ISSN: 0031-9007, 1079-7114. DOI: 10.1103/PhysRevLett.106.072001. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.106.072001> (acesso em 15/09/2022).
- [68] S. S. Avancini, R. L. S. Farias, W. R. Tavares e R. P. Cardoso. “Artificial first order phase transition in magnetized Nambu–Jona-Lasinio model with quark anomalous magnetic moment (in preparation)”. en.
- [69] R. L. S. Farias, R. M. Nunes, W. R. Tavares e S. S. Avancini. “Effects of the quark anomalous magnetic moment in the thermodynamical properties of the magnetized two flavor Nambu–Jona-Lasinio model”. *Journal of Physics: Conference Series* 2340.1 2022, p. 012023. ISSN: 1742-6588, 1742-6596. DOI: 10.1088/1742-6596/2340/1/012023. Disponível em: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/2340/1/012023> (acesso em 23/02/2023).
- [70] R. He e X.-J. Wen. *Effect of anomalous magnetic moment at zero temperature in a strong magnetic field*. arXiv:2212.02787 [hep-ph]. 2022. Disponível em: <http://arxiv.org/abs/2212.02787> (acesso em 07/12/2022).
- [71] P. Dirac. *General Theory of Relativity*. General Theory of Relativity. Princeton University Press, 1996. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=Jtu-n8AzJhMC>.
- [72] R. L. S. Farias, V. S. Timóteo, S. S. Avancini, M. B. Pinto e G. Krein. “Thermomagnetic effects in quark matter: Nambu–Jona-Lasinio model constrained by lattice QCD”. *European Physical Journal A* 53.5, 101, 2017, p. 101. DOI: 10.1140/epja/i2017-12320-8. arXiv: 1603.03847 [hep-ph].



## APÊNDICE A – UNIDADES E NOTAÇÃO

No sistema de unidades natural  $\hbar = c = 1$ , onde a constante de Planck reduzida  $\hbar$  é dada por  $\hbar = h/2\pi$  e  $h$  é a constante de Planck que vale no sistema internacional de unidades  $6,62607015 \times 10^{-34}$  J·s.

Em unidades naturais, podemos expressar todas as quantidades em unidades de massa ou energia. Isso devido à equação de Einstein para massa de repouso, sendo [...] a notação para unidade de alguma quantidade,

$$\begin{aligned} E &= m c^2 = m , \\ [E] &= [m] \equiv M = \text{GeV} , \end{aligned} \quad (177)$$

onde escrevemos nossas quantidades em GeV, pois nossas escalas estão dentro do contexto de física nuclear de baixas energias, ou seja, próximo de 1 GeV, ou a massa do próton ( $\sim 0,938$  GeV). M representa a unidade de massa.

As quantidades relacionadas com o momento magnético anômalo dos quarks tem diferentes unidades.  $\alpha_f$  definido a partir de da Eq. (17) é uma quantidade adimensional, ou seja  $M^0$ , como evidente na Tabela 1.  $k_f$  definido pela razão de  $\alpha_f$  por 2 vezes a massa efetiva, tem unidades de  $M^{-1}$  ou  $\text{GeV}^{-1}$ .

Da relação de dispersão Eq. (195), podemos observar a unidade de campo magnético,

$$\begin{aligned} [(E_{n,s}^f)^2] &= \left[ p_3^2 + \left( \sqrt{|B_f|(2n+1-s_f s)} + M^2 - s_a B \right)^2 \right] \\ &= [|q_f e B|(2n+1-s_f s) + M^2] \\ &= [eB] , \end{aligned} \quad (178)$$

como a energia ao quadrado é dada em unidades de massa  $M^2$ , logo

$$[eB] = [(E_{n,s}^f)^2] = M^2 = \text{GeV}^2 . \quad (179)$$

Em relação à notação, estamos utilizando a convenção de soma de Einstein, como comum em trabalhos que envolvem teorias de campo. Subíndices em letras gregas  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  assumem valores de 0, 1, 2, 3. Coordenadas espaciais são representadas por 4-vetores  $x^\mu$ , onde  $x^0$  é a coordenada temporal  $\overset{1}{\cancel{t}} = t$  e  $x^i$  onde  $i = 1, 2, 3$  coordenadas espaciais  $(x, y, z)$  comuns ao espaço Euclidiano 3-dimensional. As 4-derivadas covariantes escrevemos como  $\partial_\mu \equiv \partial/\partial x_\mu$ .

A métrica utilizada nesse trabalho é a “+ – – –”, i.e,

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1) . \quad (180)$$



## APÊNDICE B – CÁLCULO DA FASE DE SCHWINGER

Definindo

$$K^\mu = A^\mu(\xi) + \frac{1}{2}F^{\mu\nu}(\xi - x')_\nu , \quad (181)$$

reescrevemos a fase de Schwinger, Eq. (31) como

$$\phi(x, x') = \exp \left[ -ie_f \int_{x'}^x d\xi_\mu K^\mu(\xi) \right] . \quad (182)$$

Assumiremos campos eletromagnéticos constantes. Isso parece um tanto contraditório dada, por exemplo, a Figura 2 na Introdução 1, onde nota-se claramente uma dependência no caso do campo magnético com o parâmetro de impacto, assim podemos imaginar que campos não-homogêneos podem ter papel importante no contexto do estudo da matéria de quarks [18]. Mas é um primeiro passo no entendimento de como esse tipo de sistema se comporta na presença de campos magnéticos. Isso simplifica consideravelmente os cálculos e a análise dos resultados.

Da Eq. (182) desejamos mostrar, conforme a referência original [47] que apenas a parte do 4-potencial vetor irá contribuir de maneira não-trivial à fase de Schwinger da função de Green Eq. (30). Se os campos eletromagnéticos são constantes, as componentes do tensor eletromagnético também o são. Dê [71], o Teorema de Stokes pode ser expresso como

$$\frac{1}{2} \iint_S (\partial^\mu K^\nu - \partial^\nu K^\mu) dS^{\mu\nu} = \oint_C K_\mu d\xi^\mu , \quad (183)$$

$S$  é uma superfície espaço-tempo e  $C$  uma curva fechada com orientação positiva na sua fronteira. Podemos identificar o elemento de superfície 4-dimensional imaginando que  $\zeta^\mu$  e  $\zeta^\nu$  são 4-vetores infinitesimais, assim

$$dS^{\mu\nu} = \zeta^\mu \otimes \zeta^\nu - \zeta^\nu \otimes \zeta^\mu , \quad (184)$$

onde  $\otimes$  é o produto tensorial, e nota-se que esse tensor é antissimétrico. Calculando o rotacional de  $K^\mu$

$$\begin{aligned} \partial^\mu K^\nu - \partial^\nu K^\mu &= \frac{\partial}{\partial \xi_\mu} \left[ A^\nu(\xi) + \frac{1}{2}F^{\nu\eta}(\xi - x')_\eta \right] - \frac{\partial}{\partial \xi_\nu} \left[ A^\mu(\xi) + \frac{1}{2}F^{\mu\eta}(\xi - x')_\eta \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial \xi_\mu} A^\nu - \frac{\partial}{\partial \xi_\nu} A^\mu + \frac{1}{2}\delta_\eta^\mu F^{\nu\eta} - \frac{1}{2}\delta_\eta^\nu F^{\mu\eta} \\ &= \underbrace{\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu}_{=F^{\mu\nu}} + \frac{1}{2}F^{\nu\mu} - \frac{1}{2}F^{\mu\nu} \\ &= F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}F^{\mu\nu} \\ &= F^{\mu\nu} - F^{\mu\nu} \\ &= 0, \end{aligned} \quad (185)$$

já que  $F^{\mu\nu}$  é um tensor antissimétrico. Assim sendo, a integral da Eq. (182) é independente de caminho. Por simplicidade, podemos parametrizar uma reta do tipo  $\xi(\lambda) = x' + \lambda(x - x')$ ,  $\lambda \in (0, 1)$ . Então,

$$\begin{aligned}
 \int_{x'}^x d\xi_\mu K^\mu(\xi) &= \int_0^1 d\lambda (x - x')_\mu K^\mu(\xi(\lambda)) \\
 &= \int_0^1 d\lambda (x - x')_\mu \left[ A^\mu(\xi(\lambda)) + \frac{1}{2} F^{\mu\nu} \lambda (x - x')_\nu \right] \\
 &= \int_{x'}^x d\xi_\mu A^\mu(\xi) + \frac{1}{2} \int_0^1 \lambda d\lambda \left[ \underbrace{F^{\mu\nu}}_{\text{antissimétrico}} \underbrace{(x - x')_\mu (x - x')_\nu}_{\text{simétrico}} \right]. \quad (186)
 \end{aligned}$$

Assim, dada a contração nula dos termos antissimétricos e simétricos na Eq. (186), então a fase de Schwinger é simplesmente

$$\phi(x, x') = \exp \left[ -ie_f \int_{x'}^x d\xi_\mu A^\mu(\xi) \right]. \quad (187)$$

## APÊNDICE C – INTEGRAÇÃO GAUSSIANA

Na Eq. (99) do Capítulo 4, temos

$$I = \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \exp[q \cdot \mathcal{X}(s) \cdot q] = \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \exp[q^\alpha \mathcal{X}_{\alpha\beta}(s) q^\beta] , \quad (188)$$

se os autovalores da matriz simétrica  $\mathcal{X}_{\alpha\beta}$  fossem positivo definidos, a integração seria trivial. Mas já sabemos da definição na Eq. (76) que esta depende da métrica, que no caso de Minkowski não são. Vamos adotar a notação  $\mathcal{X}_\alpha^\beta \equiv (\mathcal{X})_\alpha^\beta$  onde  $\alpha$  e  $\beta$  correspondem a linha e a coluna da matriz  $(\mathcal{X})$ , respectivamente. Considerando uma matriz ortogonal que diagonalize  $\mathcal{X}$ , sabemos que

$$(\mathcal{O})(\mathcal{O})^t = (\mathcal{O})^t(\mathcal{O}) = \mathbb{1} \iff \mathcal{O}_\alpha^\lambda \mathcal{O}^{t\beta}_\lambda = \mathcal{O}^{t\lambda}_\alpha \mathcal{O}_\lambda^\beta = \delta_\alpha^\beta \Rightarrow \mathcal{O}^{t\lambda}_\alpha \mathcal{X}_\lambda^\eta \mathcal{O}_\eta^\beta = x_\alpha \delta_\alpha^\beta, \quad (189)$$

onde  $\delta_\alpha^\beta$  é a delta de Kronecker e  $x_\alpha$  são os autovalores da matriz  $(\mathcal{X})$ . Vale notar que  $\mathcal{O}$  é uma transformação de Lorentz, sendo  $q_\alpha = \mathcal{O}_\alpha^\lambda q'_\lambda$

$$q \cdot q = (q^\alpha)^t q_\alpha = (q'^\lambda)^t (\mathcal{O}_\lambda^\alpha)^t \mathcal{O}_\alpha^\eta q'_\eta = (q'^\lambda)^t \delta_\lambda^\eta q'_\eta = q' \cdot q' , \quad (190)$$

pois preserva o intervalo.

Usando uma mudança de variáveis de Jacobiano unitário de  $q \rightarrow q'$  na integração de  $I$  na Eq.(188), ou seja, aquele que possui determinante igual à 1, então

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \exp[q \cdot \mathcal{X}(s) \cdot q] = \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \exp[q' \cdot \mathcal{X}(s) \cdot q'] \\ &= \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \exp \left[ (q'^\alpha)^t \underbrace{(\mathcal{O}_\alpha^\lambda)^t \mathcal{X}_\lambda^\xi \mathcal{O}_\xi^\eta}_{=x_\alpha \delta_\alpha^\eta} q'_\eta \right] = \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \exp [x_\alpha (q'^\alpha)^t q'_\alpha] \\ &= \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \exp \left\{ x_0 q'^0{}^2 - x_1 q'^1{}^2 - x_2 q'^2{}^2 - x_3 q'^3{}^2 \right\} \end{aligned} \quad (191)$$

Fazendo uma rotação de Wick  $q'_0 \rightarrow i q'_4$  reescrevemos

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \exp\{q \cdot \mathcal{X}(s) \cdot q\} \\ &= \frac{i}{(2\pi)^4} \int dq'^4 dq'^1 dq'^2 dq'^3 \exp \left\{ -(x_4 q'^4{}^2 + x_1 q'^1{}^2 + x_2 q'^2{}^2 + x_3 q'^3{}^2) \right\} \\ &= \frac{i}{(2\pi)^4} \sqrt{\frac{\pi}{x_4}} \sqrt{\frac{\pi}{x_1}} \sqrt{\frac{\pi}{x_2}} \sqrt{\frac{\pi}{x_3}} = \frac{i}{2^4 \pi^4} \frac{(\sqrt{\pi})^4}{\sqrt{x_4 x_1 x_2 x_3}} = \frac{i}{2^4 \pi^4} \frac{\pi^2}{\sqrt{\det(\mathcal{X})}} \\ \therefore I &= \frac{i}{(4\pi)^2} \frac{1}{\sqrt{\det(\mathcal{X})}} , \end{aligned} \quad (192)$$

e assim mostramos que vale a Eq. (99).



## APÊNDICE D – CONTRIBUIÇÕES DE MEIOS DENSOS E QUENTES

Para situações onde temos  $T \neq 0$  e  $\mu \neq 0$ , na Eq. (158), temos a inclusão de um termo de meio (*med*), de modo que

$$\Omega = \frac{(M - m)^2}{4G} + \Omega^{\text{vac}} + \Omega^{\text{field}} + \Omega^{\text{mag}} + \Omega^{\text{med}}, \quad (193)$$

onde essa nova contribuição, conforme [72], é dada para sabor  $f$  como

$$\Omega_f^{\text{med}} = -\frac{N_c |B_f|}{(2\pi)^2 \beta} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=\pm 1} \int_{-\infty}^{\infty} dp_3 \left\{ \ln \left[ 1 + e^{-\beta(E_{n,s}^f - \mu_f)} \right] + \ln \left[ 1 + e^{-\beta(E_{n,s}^f + \mu_f)} \right] \right\}. \quad (194)$$

$\beta = 1/T$  (i.e.,  $k_B = 1$ ) é o inverso da temperatura,  $\mu_f$  o potencial químico do quark de sabor  $f$ , a soma em  $n$  representa a contribuição dos infinitos níveis Landau,  $s$  é o número quântico de spin e o espectro de energia  $E_{n,s}^f$  é dado pela solução da equação de Dirac com efeito qAMM

$$E_{n,s}^f = \sqrt{p_3^2 + \left[ \underbrace{\sqrt{|B_f|(2n+1 - s_f s) + M^2}}_{\equiv M_{n,s}^f} - sa_f B \right]^2} = \sqrt{p_3^2 + (M_{n,s}^f - sa_f B)^2}, \quad (195)$$

onde  $s_f = \text{sgn}(q_f)$ . Essa relação de dispersão pode ser encontrada explicitamente tanto em [29], quanto em [26]. É importante notar que esta contribuição  $\Omega^{\text{med}}$  é finita.

Podemos calcular a contribuição referente a esse termo para a equação de *gap*. Derivando em relação à massa efetiva,

$$\begin{aligned} \partial_M \Omega_f^{\text{med}} &= \partial_M \left\{ -\frac{1}{\beta} \frac{N_c |B_f|}{(2\pi)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=\pm 1} \int_{-\infty}^{\infty} dp_3 \times \right. \\ &\quad \left. \times \left\{ \ln \left[ 1 + e^{-\beta(E_{n,s}^f - \mu_f)} \right] + \ln \left[ 1 + e^{-\beta(E_{n,s}^f + \mu_f)} \right] \right\} \right\}. \end{aligned} \quad (196)$$

Precisamos de algumas derivadas intermediárias. Temos que observar as derivadas de  $M_{n,s}^f$  e da energia  $E_{n,s}^f$ . Da Eq.(195):

$$\begin{aligned} \partial_M M_{n,s}^f &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{|B_f|(2n+1 - s_f s) + M^2}} 2M \\ &= \frac{M}{M_{n,s}^f}, \end{aligned} \quad (197)$$

$$\begin{aligned}
\partial_M E_{n,s}^f &= \partial_M \sqrt{p_3^2 + (M_{n,s}^f - sa_f B)^2} \\
&= \frac{M_{n,s}^f - sa_f B}{E_{n,s}^f} \partial_M (M_{n,s}^f - sa_f B) \\
&= \frac{M_{n,s}^f - sa_f B}{E_{n,s}^f} \left( \frac{M}{M_{n,s}^f} + s \frac{a_f B}{M} \right) \\
&= \frac{M}{E_{n,s}^f} \left[ 1 + \frac{M_{n,s}^f}{M^2} sa_f B - \frac{1}{M_{n,s}^f} sa_f B - \frac{\overbrace{s^2}^{=(\pm 1)^2=1} a_f^2 B^2}{M^2} \right] \\
&= \frac{M}{E_{n,s}^f} \left[ 1 - sa_f B \left( \frac{1}{M_{n,s}^f} - \frac{M_{n,s}^f}{M^2} \right) - \frac{a_f^2 B^2}{M^2} \right]. \tag{198}
\end{aligned}$$

Utilizando esses resultados, podemos calcular a Eq. (196):

$$\partial_M \Omega_f^{\text{med}} = -\frac{1}{\beta} \frac{N_c |B_f|}{(2\pi)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=\pm 1} \int_{-\infty}^{\infty} dp_3 \partial_M \left\{ \ln \left[ 1 + e^{-\beta(E_{n,s}^f - \mu_f)} \right] + \ln \left[ 1 + e^{-\beta(E_{n,s}^f + \mu_f)} \right] \right\}, \tag{199}$$

de forma geral

$$\partial_M \ln \left[ 1 + e^{-\beta(E_{n,s}^f \pm \mu_f)} \right] = \frac{-\beta e^{-\beta(E_{n,s}^f \pm \mu_f)}}{1 + e^{-\beta(E_{n,s}^f \pm \mu_f)}} \partial_M E_{n,s}^f = -\frac{\beta}{1 + e^{+\beta(E_{n,s}^f \pm \mu_f)}} \partial_M E_{n,s}^f, \tag{200}$$

logo

$$\begin{aligned}
\partial_M \Omega_f^{\text{med}} &= \frac{1}{\beta} \frac{N_c |B_f|}{(2\pi)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=\pm 1} \int_{-\infty}^{\infty} dp_3 \beta \left[ \frac{1}{1 + e^{\beta(E_{n,s}^f - \mu_f)}} + \frac{1}{1 + e^{\beta(E_{n,s}^f + \mu_f)}} \right] \partial_M E_{n,s}^f \\
&= \frac{MN_c |B_f|}{(2\pi)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=\pm 1} \int_{-\infty}^{\infty} dp_3 \left[ \frac{1}{1 + e^{\beta(E_{n,s}^f - \mu_f)}} + \frac{1}{1 + e^{\beta(E_{n,s}^f + \mu_f)}} \right] \times \\
&\quad \times \frac{1}{E_{n,s}^f} \left[ 1 - sa_f B \left( \frac{1}{M_{n,s}^f} - \frac{M_{n,s}^f}{M^2} \right) - \frac{a_f^2 B^2}{M^2} \right]. \tag{201}
\end{aligned}$$

Portanto, para qAMM dependendo inversamente da massa efetiva, a contribuição na equação de *gap* será dada por

$$\begin{aligned}
\partial_M \Omega^{\text{med}} &= \frac{MN_c}{(2\pi)^2} \sum_{f=u,d} |B_f| \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=\pm 1} \int_{-\infty}^{\infty} dp_3 \left[ \frac{1}{1 + e^{\beta(E_{n,s}^f - \mu_f)}} + \frac{1}{1 + e^{\beta(E_{n,s}^f + \mu_f)}} \right] \times \\
&\quad \times \frac{1}{E_{n,s}^f} \left[ 1 - sa_f B \left( \frac{1}{M_{n,s}^f} - \frac{M_{n,s}^f}{M^2} \right) - \frac{a_f^2 B^2}{M^2} \right]. \tag{202}
\end{aligned}$$

Conforme já tratado, em [26] esses termos foram tratados para qAMM constante, potencial químico nulo e temperatura finita. Levando esse termo em conta, podemos estudar o efeito da catálise magnética inversa na temperatura pseudocrítica de transição de fase, como foi citado na Conclusão 7.

## APÊNDICE E – TERMO DE VÁCUO GAP CUTOFF 3D

Conforme à Eq. (165) temos

$$\begin{aligned}
 \partial_M \Omega^{\text{vac}} &= - \sum_{f=u,d} \frac{N_c}{8\pi^2} \partial_M \left[ \Lambda \sqrt{\Lambda^2 + \mathcal{K}_{0f}^2} (2\Lambda^2 + \mathcal{K}_{0f}^2) - \mathcal{K}_{0f}^4 \ln \left( \frac{\Lambda + \sqrt{\Lambda^2 + \mathcal{K}_{0f}^2}}{\mathcal{K}_{0f}} \right) \right] \\
 &= - \sum_{f=u,d} \frac{N_c}{8\pi^2} \left\{ \left[ \partial_M \Lambda \sqrt{\Lambda^2 + \mathcal{K}_{0f}^2} \right] (2\Lambda^2 + \mathcal{K}_{0f}^2) + \Lambda \sqrt{\Lambda^2 + \mathcal{K}_{0f}^2} \left[ \partial_M (2\Lambda^2 + \mathcal{K}_{0f}^2) \right] \right. \\
 &\quad \left. - (\partial_M \mathcal{K}_{0f}^4) \ln \left( \frac{\Lambda + \sqrt{\Lambda^2 + \mathcal{K}_{0f}^2}}{\mathcal{K}_{0f}} \right) - \mathcal{K}_{0f}^4 \partial_M \ln \left( \frac{\Lambda + \sqrt{\Lambda^2 + \mathcal{K}_{0f}^2}}{\mathcal{K}_{0f}} \right) \right\}. \quad (203)
 \end{aligned}$$

Calculando apenas o termo entre chaves e se valendo das Eq.'s (162, 163, 164), assim

$$\begin{aligned}
 \{ \dots \} &= \Lambda (2\Lambda^2 + \mathcal{K}_{0f}^2) \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\Lambda^2 + \mathcal{K}_{0f}^2}} 2\mathcal{K}_{0f} (\partial_M \mathcal{K}_{0f}) + \Lambda (\partial_M \mathcal{K}_{0f}^2) \sqrt{\Lambda^2 + \mathcal{K}_{0f}^2} + \\
 &\quad - 4\mathcal{K}_{0f}^3 \partial_M (\mathcal{K}_{0f}) \ln \left( \frac{\Lambda + \sqrt{\Lambda^2 + \mathcal{K}_{0f}^2}}{\mathcal{K}_{0f}} \right) - \mathcal{K}_{0f}^4 \frac{\mathcal{K}_{0f}}{\Lambda + \sqrt{\Lambda^2 + \mathcal{K}_{0f}^2}} \times \\
 &\quad \times \left[ \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\Lambda^2 + \mathcal{K}_{0f}^2}} 2\mathcal{K}_{0f} (\partial_M \mathcal{K}_{0f}) \frac{1}{\mathcal{K}_{0f}} + (\Lambda + \sqrt{\Lambda^2 + \mathcal{K}_{0f}^2}) \left( -\frac{1}{\mathcal{K}_{0f}^2} \right) (\partial_M \mathcal{K}_{0f}) \right] \\
 &= \Lambda 2M \left( 1 - \frac{a_f^2 B^2}{M^2} \right) - 4\mathcal{K}_{0f}^2 \frac{M}{\mathcal{K}_{0f}} \left( 1 - \frac{a_f^2 B^2}{M^2} \right) \ln \left( \frac{\Lambda + \sqrt{\Lambda^2 + \mathcal{K}_{0f}^2}}{\mathcal{K}_{0f}} \right) + \\
 &\quad + \frac{\Lambda (2\Lambda^2 + \mathcal{K}_{0f}^2)}{\sqrt{\Lambda^2 + \mathcal{K}_{0f}^2}} \frac{M}{\mathcal{K}_{0f}} \left( 1 - \frac{a_f^2 B^2}{M^2} \right) - \frac{\mathcal{K}_{0f}^5}{\Lambda + \sqrt{\Lambda^2 + \mathcal{K}_{0f}^2}} \times \\
 &\quad \times \left[ \frac{1}{\sqrt{\Lambda^2 + \mathcal{K}_{0f}^2}} \frac{M}{\mathcal{K}_{0f}} \left( 1 - \frac{a_f^2 B^2}{M^2} \right) - \frac{\Lambda^2 + \sqrt{\Lambda^2 + \mathcal{K}_{0f}^2}}{\mathcal{K}_{0f}^2} \frac{M}{\mathcal{K}_{0f}} \left( 1 - \frac{a_f^2 B^2}{M^2} \right) \right]. \quad (204)
 \end{aligned}$$

Para facilitar muito esse cálculo, devemos somar e subtrair um termo

$$\Lambda 2M \left( 1 - \frac{a_f^2 B^2}{M^2} \right) \sqrt{\Lambda^2 + \mathcal{K}_{0f}^2}, \quad (205)$$

dessa maneira então conseguimos escrever

$$\{ \dots \} = 4M \left( 1 - \frac{a_f^2 B^2}{M^2} \right) \left[ \Lambda \sqrt{\Lambda^2 + \mathcal{K}_{0f}^2} - \mathcal{K}_{0f}^2 \ln \left( \frac{\Lambda + \sqrt{\Lambda^2 + \mathcal{K}_{0f}^2}}{\mathcal{K}_{0f}} \right) \right], \quad (206)$$

e finalmente obter a Eq. (166).