



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA PURA E APLICADA

Rafael Borges de Souza

**Representações de  $C^*$ -álgebras de grafos relativas**

Florianópolis  
2023

Rafael Borges de Souza

**Representações de  $C^*$ -álgebras de grafos relativas**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do título de Mestre em Matemática, com área de concentração em Análise.

Orientador: Prof. Daniel Gonçalves, Dr.

Florianópolis

2023

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,  
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Souza, Rafael Borges de  
Representações de  $C^*$ -álgebras de grafos relativas /  
Rafael Borges de Souza ; orientador, Daniel Gonçalves, 2023.  
64 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa  
Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas,  
Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada,  
Florianópolis, 2023.

Inclui referências.

1. Matemática Pura e Aplicada. 2.  $C^*$ -álgebras de  
grafos. 3. Aplicações de Markov. 4. Representações. 5.  
Sistemas ramificados. I. Gonçalves, Daniel. II.  
Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós  
Graduação em Matemática Pura e Aplicada. III. Título.

Rafael Borges de Souza

**Representações de  $C^*$ -álgebras de grafos relativas**

O presente trabalho em nível de mestrado foi avaliado e aprovado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. Danilo Royer, Dr.  
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Luiz Gustavo Cordeiro, Dr.  
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Paulo Pinto, Dr.  
Instituto Superior Técnico da Universidade de Lisboa

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de Mestre em Matemática, com área de concentração em Análise.

---

Coordenação do Programa de  
Pós-Graduação

---

Prof. Daniel Gonçalves, Dr.  
Orientador

Florianópolis, 2023.

Este trabalho é dedicado aos meus colegas da  
Matemática, que foram a minha família em Florianópolis  
no último ano do mestrado.

## AGRADECIMENTOS

Aproveitarei este espaço para agradecer a pessoas que, direta ou indiretamente, contribuíram não somente para a execução deste trabalho mas também para minha formação enquanto mestrando em Matemática.

Primeiro, agradeço aos meus pais, Eliane e Clênio, que continuam sendo os principais responsáveis por garantir que eu consiga seguir meus estudos, pelo amor e apoio incondicionais que tenho recebido, em especial, nesses anos de mestrado. À Carla, pela amizade e suporte que venho recebendo desde a minha primeira semana na UFSC. Obrigado por tudo! Ao Bruno, por todos esses anos de companhia, presencial ou virtual, que sempre me proporcionaram bons momentos.

Agradeço às amigas que nasceram virtualmente no primeiro ano de mestrado, em especial à Bruna e Wendy, que foram muito importantes para minha permanência no curso, que iniciou tão difícil. À Liana, Cleison, Éver, Javi e todos os colegas da turma de Álgebras de Operadores pela companhia e amizade que nasceu em meio a idas a bares e resolução das listas, principalmente nas primeiras semanas presenciais do curso.

Agradeço ao Luciano, Daniel, Juan Navarro, Juan Carlos e Luiz, que foram as minhas principais companhias nesses meses difíceis de estudo. À Maritza, por todas as experiências compartilhadas e os incríveis momentos que passamos juntos. Levarei-os sempre comigo. Vocês eram (e continuam sendo) as minhas alegrias diárias. Muito obrigado por sua amizade! Agradeço também aos demais habitantes da sala 109, pela companhia neste último ano.

À Rafa, Fran, Taina e todas e todos que participaram do I Encontro de Pós-graduandos em Matemática na UFSC. Foi uma honra organizar e participar deste lindo evento com vocês, apesar de todas as dificuldades que passamos.

Agradeço imensamente aos professores dos quais tive a honra de ser aluno em algum momento do mestrado: María, Ivan, Luiz Gustavo, Daniel, Ruy e Alcides. Obrigado por todo o conhecimento compartilhado e todo o carinho, dedicação e paciência que tiveram comigo nas disciplinas. Vocês são inspiradores e jamais serão esquecidos. Ao professor Matheus e à turma de Análise na Reta 2022.2, que me aceitaram como estagiário de docência, por me proporcionarem essa experiência de troca de conhecimento no estágio, que é tão importante.

Ao professor Daniel, que me orientou no último ano, por acreditar no meu potencial, me incentivar, me dar atenção e compartilhar comigo as ideias das quais este trabalho se originou.

Aos professores Danilo, Luiz Gustavo e Paulo, que aceitaram fazer parte da

banca de avaliação deste trabalho e fizeram suas importantes correções e contribuições.

Aos secretários Érica e Marcelo e aos demais servidores e trabalhadores da Universidade, que tornam possível o estudo, não só meu, mas de milhares de alunos da UFSC.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

*“Et si on célébrait ceux qui ne célèbrent pas?  
Pour une fois, j’aimerais lever mon verre à ceux qui n’en ont pas.  
Pilote d’avion ou infirmière,  
Chauffeur de camion ou hôtesse de l’air,  
Boulangier ou marin-pêcheur,  
Un verre aux champions des pires horaires.  
Aux jeunes parents bercés par les pleurs,  
Aux insomniaques de profession,  
Et tous ceux qui souffrent de peine de cœur,  
Qui n’ont pas le cœur aux célébrations.”  
(Stromae)*

## RESUMO

Estudamos  $C^*$ -álgebras de grafos e descrevemos sua equivalência com as  $C^*$ -álgebras de grafos relativas usando grafos estendidos. Descrevemos a dinâmica de aplicações de Markov com conjuntos de escape não-vazios e estudamos representações de  $C^*$ -álgebras de grafos relativas em espaços de Hilbert que surgem de tais funções. Encontramos condições suficientes para que tais representações sejam fiéis em termos da transições dos intervalos de Markov para os intervalos de escape. Além disso, investigamos como sistemas ramificados e sistemas ramificados relativos em espaços de medida dão origem a representações de  $C^*$ -álgebras de grafos e  $C^*$ -álgebras de grafos relativas no espaço de Hilbert das funções quadrado integráveis. Mostramos como as aplicações de Markov dão origem a sistemas ramificados relativos. Também mostramos uma equivalência entre as representações provenientes das aplicações de Markov e as representações provenientes de sistemas ramificados relativos e como a fidelidade de tais representações pode ser obtida.

**Palavras-chave:**  $C^*$ -álgebras de grafos. Aplicações de Markov. Representações. Sistemas ramificados.

## ABSTRACT

We study graph  $C^*$ -algebras and describe their equivalence with relative graph  $C^*$ -algebras using extended graphs. We describe the dynamics of Markov interval maps with non-empty escape sets and study representations of relative graph  $C^*$ -algebras on Hilbert spaces that arise from such maps. We find sufficient conditions for such representations to be faithful in terms of the transitions from the Markov intervals to the escape intervals. In addition, we investigate how branching systems and relative branching systems on measure spaces give rise to representations of graph  $C^*$ -algebras and relative graph  $C^*$ -algebras on the Hilbert space of the square integrable functions. We show how Markov interval maps produce relative branching systems. We also present an equivalence between the representations which arise from Markov interval maps and the representations which arise from relative branching systems and how faithfulness of such representations can be obtained.

**Keywords:** Graph  $C^*$ -algebras. Markov interval maps. Representations. Branching systems.

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>C*-ÁLGEBRAS DE GRAFOS</b>	<b>4</b>
2.1	GRAFOS DIRIGIDOS E FAMÍLIAS DE CUNTZ-KRIEGER	4
2.2	C*-ÁLGEBRAS UNIVERSAIS E C*-ÁLGEBRAS DE GRAFOS	8
2.3	C*-ÁLGEBRAS DE GRAFOS RELATIVAS	16
<b>3</b>	<b>DINÂMICA DE APLICAÇÕES DE MARKOV COM CONJUNTO DE ESCAPE</b>	<b>21</b>
3.1	APLICAÇÕES DE MARKOV	21
<b>3.1.1</b>	<b>Matrizes de transição</b>	<b>24</b>
3.2	ÓRBITAS NO CONJUNTO DE ESCAPE DE APLICAÇÕES DE MARKOV	26
<b>3.2.1</b>	<b>Conjuntos de escape</b>	<b>26</b>
<b>3.2.2</b>	<b>Órbitas geradas por aplicações de Markov</b>	<b>27</b>
<b>4</b>	<b>REPRESENTAÇÕES DE C*-ÁLGEBRAS DE GRAFOS RELATIVAS GERADAS POR APLICAÇÕES DE MARKOV</b>	<b>31</b>
4.1	OPERADORES NOS ESPAÇOS DE HILBERT DAS ÓRBITAS	31
4.2	EXISTÊNCIA E PROPRIEDADES DAS REPRESENTAÇÕES	36
<b>5</b>	<b>APLICAÇÕES DE MARKOV, SISTEMAS RAMIFICADOS E SUAS REPRESENTAÇÕES</b>	<b>45</b>
5.1	SISTEMAS RAMIFICADOS E REPRESENTAÇÕES DE C*-ÁLGEBRAS DE GRAFOS	45
5.2	SISTEMAS RAMIFICADOS RELATIVOS E REPRESENTAÇÕES DE C*-ÁLGEBRAS DE GRAFOS RELATIVAS	51
5.3	APLICAÇÕES DE MARKOV E SISTEMAS RAMIFICADOS	56
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>63</b>

## 1 INTRODUÇÃO

O estudo das  $C^*$ -álgebras de grafos começou em 1980 com J. Cuntz e W. Krieger, e continua até hoje. Muhly e Tomforde (2004) generalizaram a definição e deram origem às  $C^*$ -álgebras de grafos relativas. Ramos, Martins e Pinto (2017) e Ramos, Martins e Pinto (2019) investigaram a dinâmica do conjunto de escape de aplicações de Markov e construíram representações de  $C^*$ -álgebras de grafos nas órbitas dos pontos no conjunto de escape dessas aplicações. Além disso, Martins, Pinto e Ramos (2019) descreveram representações de  $C^*$ -álgebras de grafos relativas no mesmo espaço de Hilbert e estudaram quando elas são fiéis.

A maior parte deste trabalho é baseada no trabalho de Martins, Pinto e Ramos (2019) e nosso objetivo é detalhar suas construções e resultados, além de descrever propriedades das representações obtidas e ilustrar com exemplos. Conectamos, também, tais resultados com os resultados de Martins *et al.* (2023), onde eles investigam como sistemas ramificados em espaços de medida dão origem a representações de  $C^*$ -álgebras de grafos relativas no espaço de Hilbert das funções quadrado integráveis. Focamos em encontrar condições suficientes para que tais representações sejam fiéis.

No Capítulo 2, definimos e estudamos propriedades de grafos dirigidos e famílias de Cuntz-Krieger, construímos a  $C^*$ -álgebra de um grafo como a  $C^*$ -álgebra universal gerada por uma família de Cuntz-Krieger, descrevemos as  $C^*$ -álgebras de grafos relativas e provaremos como sempre é possível obter um isomorfismo entre uma  $C^*$ -álgebras de grafo relativa e uma  $C^*$ -álgebra de grafo.

No Capítulo 3, estudamos aplicações de Markov que possuem conjunto de escape não-vazio, descrevemos sua matriz de transição associada e as órbitas dos pontos no conjunto de escape.

No Capítulo 4, construímos, a partir das matrizes de transição de aplicações de Markov,  $C^*$ -álgebras de grafos relativas e representações destas  $C^*$ -álgebras no espaço de Hilbert gerado pelas órbitas dos pontos no conjunto de escape das aplicações. Estudamos propriedades como existência, fidelidade e irredutibilidade destas representações.

Por fim, no Capítulo 5, estudaremos sistemas ramificados e sistemas ramificados relativos gerados por um grafo em um espaço de medida. Veremos como tais sistemas dão origem a representações de  $C^*$ -álgebras de grafos e  $C^*$ -álgebras de grafos relativas em um outro espaço de Hilbert. Descrevemos, também, como aplicações de Markov podem produzir sistemas ramificados e como as representações obtidas neste capítulo se conectam com as representações obtidas no capítulo anterior.

## 2 C\*-ÁLGEBRAS DE GRAFOS

Um grafo dirigido consiste de alguns objetos que podem ser vistos geometricamente como vértices e arestas que os conectam. Além disso, tais objetos podem ser associados a operadores sobre um espaço de Hilbert. A C\*-álgebra de um grafo é definida como a C\*-álgebra universal gerada por tais operadores.

Na Seção 2.1, definiremos um grafo e mostraremos como podemos representá-lo por operadores em um espaço de Hilbert através das famílias de Cuntz-Krieger. Na Seção 2.2, construiremos e definiremos uma C\*-álgebra universal gerada por um conjunto de geradores satisfazendo relações. Mostraremos também exemplos de C\*-álgebras de grafos como C\*-álgebras universais. Na Seção 2.3, apresentaremos as C\*-álgebras de grafos relativas e construiremos um isomorfismo entre cada C\*-álgebra de grafo relativa e a C\*-álgebra do seu grafo estendido.

### 2.1 GRAFOS DIRIGIDOS E FAMÍLIAS DE CUNTZ-KRIEGER

Nesta seção, abordaremos alguns aspectos básicos da teoria de grafos, tendo como base o primeiro capítulo de Raeburn (2004), além de definir a C\*-álgebra de um grafo.

**Definição 2.1.** Um *grafo dirigido* é uma quádrupla  $G = (G^0, G^1, s, r)$ , na qual  $G^0$  e  $G^1$  são conjuntos enumeráveis e  $s, r : G^1 \rightarrow G^0$  são funções. Os elementos de  $G^0$  são chamados de *vértices*, enquanto os elementos de  $G^1$  são chamados de *arestas*. Para cada aresta  $e \in G^1$ , chamamos o vértice  $s(e) \in G^0$  de *origem da aresta e* e o vértice  $r(e) \in G^0$  de *imagem da aresta e*.

**Exemplo 2.2.** Se considerarmos  $G^0 = \{v, w\}$  e  $G^1 = \{e, f, g\}$ , além de  $s, r : G^1 \rightarrow G^0$  dadas por

$$\begin{cases} s(e) = v = r(e) \\ s(f) = w \\ r(f) = v \\ s(g) = w = r(g) \end{cases}$$

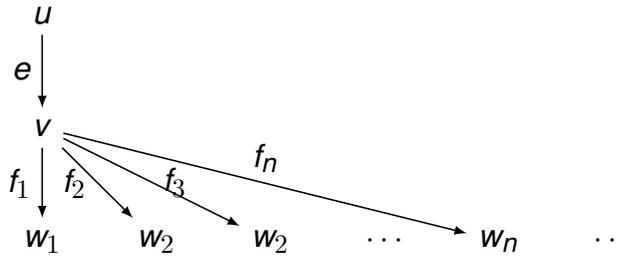
podemos representar  $G$  como

$$e \curvearrowright v \xleftarrow{f} w \curvearrowleft g$$

**Exemplo 2.3.** Se considerarmos  $E^0 = \{u, v\} \cup (w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  e  $E^1 = \{e\} \cup (f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , além de  $s, r : E^1 \rightarrow E^0$  dadas por

$$\begin{cases} s(e) = u \\ r(e) = v \\ s(f_n) = v, \forall n \in \mathbb{N} \\ r(f_n) = w_n, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

podemos representar  $E$  como



Em geral, muitos diagramas (como os feitos acima) podem ser feitos para representar um mesmo grafo dirigido, apenas com a finalidade de ilustração. Todas as afirmações feitas a respeito de um grafo dirigido independem do desenho escolhido.

**Definição 2.4.** Seja  $G = (G^0, G^1, s, r)$  um grafo dirigido. Considere a quádrupla  $F = (F^0, F^1, s_F, r_F)$ . Dizemos que  $F$  é um *subgrafo de  $G$*  caso  $F^0 \subseteq G^0$ ,  $F^1 \subseteq G^1$  as funções  $s_F$  e  $r_F$  sejam dadas restringindo-se os domínios e contradomínios de  $s$  e de  $r$  a  $F^1$  e  $F^0$ , respectivamente.

**Definição 2.5.** Seja  $G = (G^0, G^1, s, r)$  um grafo dirigido. Dizemos que  $v \in G^0$  é um *poço* se  $s^{-1}(v) = \emptyset$ , ou seja, se  $v$  não é origem de nenhuma aresta.

**Exemplo 2.6.** A figura abaixo representa um subgrafo do grafo do Exemplo 2.2. Veja que  $v$  é um poço neste subgrafo.

$$v \xleftarrow{f} w \curvearrowright g$$

**Definição 2.7.** Seja  $G$  um grafo dirigido. Dizemos que  $G$  é um *grafo finito por linhas* quando para todo  $v \in G^0$ , temos

$$\# \{s^{-1}(v)\} < \infty,$$

ou seja, a quantidade de arestas que têm  $v$  como origem é finita.

**Exemplo 2.8.** O grafo do Exemplo 2.2 é um grafo finito por linhas, enquanto o do Exemplo 2.3 não é.

**Observação 2.9.** A partir daqui, e até o fim deste trabalho, chamaremos um grafo dirigido e finito por linhas simplesmente de grafo, já que todos os grafos que serão utilizados são deste tipo.

O próximo exemplo é o mais importante até o momento e será citado várias vezes neste trabalho.

**Exemplo 2.10.** Seja  $n \in \mathbb{N}$ . Para toda matriz  $A \in M_n(\{0, 1\})$ , é possível construir um grafo  $G_A = (G_A^0, G_A^1, r, s)$  dado por:  $G_A^0 = \{1, \dots, n\}$ ,  $G_A^1 = \{e_{ij} : i, j \in G_A^0, A_{ij} = 1\}$  e

$$\begin{cases} s(e_{ij}) = i \\ r(e_{ij}) = j \end{cases}.$$

Dado um grafo  $G$ , é possível “representá-lo” por elementos de  $B(H)$  - o conjunto dos operadores lineares e limitados de algum espaço de Hilbert  $H$  - de forma que esses operadores codificam algumas propriedades de  $G$ . Mais especificamente, os vértices de  $G$  são representados por projeções ortogonais, enquanto suas arestas são representadas por isometrias parciais. Considere

$$R(G) := \{v \in G^0 : s^{-1}(v) \neq \emptyset\}.$$

**Definição 2.11.** Sejam  $H$  um espaço de Hilbert e  $G$  um grafo. Uma  $G$ -família de Cuntz-Krieger  $\{s_e, p_v\}$  em  $B(H)$  consiste de um conjunto  $\{p_v : v \in G^0\}$  de projeções mutuamente ortogonais em  $B(H)$  e um conjunto  $\{s_e : e \in G^1\}$  de isometrias parciais em  $B(H)$  que satisfazem:

$$(CK1) \quad s_e^* s_e = p_{r(e)}, \text{ para todo } e \in G^1 \text{ e}$$

$$(CK2) \quad p_v = \sum_{e \in s^{-1}(v)} s_e s_e^*, \text{ para todo } v \in R(G).$$

As condições (CK1) e (CK2) acima são chamadas de *condições de Cuntz-Krieger*.

Note que a condição (CK2) está bem definida já que  $G$  é um grafo de linhas finitas e, portanto, para cada  $v \in G^0$ ,  $\sum_{e \in s^{-1}(v)} s_e s_e^*$  é uma soma finita. Adaptações da Definição 2.11 para grafos que não são de linhas finitas são feitas por Raeburn (2004), mas não serão abordados neste trabalho.

**Observação 2.12.** Como discutido na introdução de Raeburn (2004), não há uma convenção padrão a respeito da “direção” das isometrias parciais: alguns autores optam por ter as isometrias parciais representando arestas indo na mesma direção que a aresta, outros na direção oposta da aresta. Aqui, usaremos a segunda, que, apesar de não ser a convenção usada por Raeburn (2004), é a convenção usada na maioria dos artigos que serão citados, como Martins, Pinto e Ramos (2019) e Muhly e Tomforde (2004).

**Observação 2.13.** As condições de Cuntz-Krieger implicam (Equação (1.2) de Raeburn (2004)) na relação

$$s_e = p_{s(e)} s_e = s_e p_{r(e)}, \quad (1)$$

que é frequentemente usada em manipulações envolvendo estes operadores.

**Observação 2.14.** Como isometrias parciais e projeções são objetos que também existem em  $C^*$ -álgebras arbitrárias, e não somente em  $B(H)$ , a Definição 2.11 pode ser facilmente estendida para esse caso.

**Exemplo 2.15.** Considere o grafo  $G$  representado por

$$e \curvearrowright v \curvearrowleft f$$

Seja  $H = \ell^2(\mathbb{N})$ . Vamos construir uma  $G$ -família de Cuntz-Krieger em  $B(H)$ . Para isso, devemos encontrar  $p_v, s_e, s_f \in B(H)$  tais que, segundo as condições de Cuntz-Krieger,

$$s_e^* s_e = p_v = s_f^* s_f \quad (2)$$

e

$$p_v = s_e s_e^* + s_f s_f^*. \quad (3)$$

Escolha  $p_v = \text{id}_H$  (que é claramente uma projeção ortogonal) e as isometrias parciais em  $B(H)$  dadas por

$$s_e[(x_n)_{n \in \mathbb{N}}] = (x_1, 0, x_2, 0, x_3, 0, x_4, 0, \dots)$$

e

$$s_f[(x_n)_{n \in \mathbb{N}}] = (0, x_1, 0, x_2, 0, x_3, 0, x_4, \dots).$$

Note que, por causa da Proposição A.4 de Raeburn (2004), uma vez que tenhamos mostrado (2), fica automático que  $s_e$  e  $s_f$  são isometrias parciais de  $B(H)$ . Portanto, vamos mostrar (2) e (3).

Primeiro,  $s_e^*, s_f^* \in B(H)$  são dadas por

$$s_e^*[(x_n)_{n \in \mathbb{N}}] = (x_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$$

e

$$s_f^*[(x_n)_{n \in \mathbb{N}}] = (x_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}.$$

Assim,

$$s_e^* s_e[(x_n)_{n \in \mathbb{N}}] = s_e^*[(x_0, 0, x_1, 0, x_2, 0, x_3, 0, \dots)] = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} = p_v[(x_n)_{n \in \mathbb{N}}]$$

e

$$s_f^* s_f [(x_n)_{n \in \mathbb{N}}] = s_f^* [(0, x_0, 0, x_1, 0, x_2, 0, x_3, \dots)] = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} = p_v [(x_n)_{n \in \mathbb{N}}],$$

donde segue (2). Por fim,

$$\begin{aligned} [s_e s_e^* + s_f s_f^*] (x_n)_{n \in \mathbb{N}} &= [s_e s_e^*] (x_n)_{n \in \mathbb{N}} + [s_f s_f^*] (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \\ &= s_e [(x_0, x_2, x_4, x_6, \dots)] + s_f [(x_1, x_3, x_5, x_7, \dots)] \\ &= (x_0, 0, x_2, 0, x_4, 0, x_6, \dots) + (0, x_1, 0, x_3, 0, x_5, 0, x_7, \dots) = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} = p_v [(x_n)_{n \in \mathbb{N}}], \end{aligned}$$

o que mostra (3) e conclui a prova de que  $\{p_v, s_e, s_f\}$  forma uma  $G$ -família de Cuntz-Krieger em  $B(H)$ .

**Exemplo 2.16.** Considere o grafo  $G$  representado por

$$e \curvearrowright v$$

Seja  $H$  um espaço de Hilbert arbitrário. Para encontrar uma  $G$ -família de Cuntz-Krieger em  $B(H)$ , basta encontrar  $p_v, s_e \in B(H)$  tais que

$$s_e^* s_e = p_v = s_e s_e^*. \quad (4)$$

Escolhendo novamente  $p_v = \text{id}_H$ , veja que qualquer operador unitário em  $B(H)$  satisfaz (4). Assim, por exemplo, pode-se escolher  $H$  como  $\ell^2(\mathbb{Z})$  e  $s_e$  como sendo o operador *shift*, que é unitário em  $\ell^2(\mathbb{Z})$ . Outra escolha possível é algum operador de rotação em  $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{C}$ .

**Teorema 2.17.** *Para todo grafo  $G$  existe uma  $G$ -família de Cuntz-Krieger em  $B(\ell^2(\mathbb{N}))$  com todas as projeções não-nulas.*

A construção da  $G$ -família de Cuntz-Krieger em  $B(\ell^2(\mathbb{N}))$  citada no Teorema 2.17, juntamente com sua demonstração, podem ser encontradas na Seção 1.3 de Biazotto (2012).

## 2.2 C\*-ÁLGEBRAS UNIVERSAIS E C\*-ÁLGEBRAS DE GRAFOS

Uma  $C^*$ -álgebra universal é uma  $C^*$ -álgebra gerada por um conjunto qualquer (geradores) e por uma família de relações, e que possui uma “propriedade universal”. Algumas conhecidas  $C^*$ -álgebras podem ser expressas de forma natural como  $C^*$ -álgebras universais, como veremos em exemplos.

Nesta seção, faremos a construção de uma  $C^*$ -álgebra universal, mostrar algumas propriedades e exemplos, e definir a  $C^*$ -álgebra de um grafo como uma  $C^*$ -álgebra universal.

Seja  $G$  um conjunto não-vazio qualquer, que será o conjunto dos *geradores* da C\*-álgebra universal. Considere

$$G^* := \{g^* : g \in G\},$$

em que  $g^*$  é apenas uma “cópia” de  $g$ , sem nenhum significado matemático a princípio. Considere o conjunto das “palavras” finitas obtidas com elementos de  $G$  e  $G^*$ , ou seja, defina

$$F_G := \{r_1 \dots r_n : r_1, \dots, r_n \in G \cup G^*, n \in \mathbb{N}\}$$

e muna-o com o produto por concatenação, além de uma involução dada por

$$r_1 \dots r_n \mapsto r_n^* \dots r_1^*,$$

em que definimos  $(g^*)^* := g$  para todo  $g \in G$ .

Defina  $B_G$  como o espaço vetorial livre gerado por  $F_G$ . Fazemos de  $B_G$  uma álgebra complexa estendo o produto (por concatenação) de  $F_G$  de modo que

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i t_i \mapsto \sum_{i=1}^m \bar{\alpha}_i t_i^*,$$

em que  $t_i \in F_G$ . Por construção,  $B_G$  é uma \*-álgebra.

**Definição 2.18.** Uma *relação* em  $G$  é um elemento  $(x, \eta) \in B_G \times \mathbb{R}_+$ .

Fixe  $R$  um conjunto de relações em  $G$ .

Na C\*-álgebra universal, uma relação  $(x, \eta)$  deve ser interpretada como que impondo  $\|x\| \leq \eta$ . Dessa forma, se quisermos impor uma relação do tipo  $x = y$ , por exemplo, basta incluir o par  $(x - y, 0) \in R$ , pois

$$(x - y, 0) \in R \iff \|x - y\| \leq 0 \iff \|x - y\| = 0 \iff x = y.$$

Se quisermos construir uma C\*-álgebra universal unital, deve existir um elemento  $e \in B_G$  (não necessariamente um novo elemento) que satisfaça os axiomas de unidade. Logo, o seguinte conjunto de relações deve fazer parte de  $R$ :

$$\{e = 1\} := \{(x - ex, 0) : x \in B_G\} \cup \{(ex - x, 0) : x \in B_G\} \cup \{(e - e^*, 0)\}.$$

**Definição 2.19.** Seja  $A$  uma C\*-álgebra e  $\rho : B_G \rightarrow A$  um \*-homomorfismo. Dizemos que  $\rho$  é uma *representação* de  $G$  que *satisfaz*  $R$  se

$$\|\rho(x)\| \leq \eta, \text{ para todo } (x, \eta) \in R.$$

**Definição 2.20.** Um par  $(G, R)$  é dito ser *admissível* se, para todo  $g \in G$ , existe  $\eta(g) \in \mathbb{R}_+$  tal que

$$\|\rho(g)\| \leq \eta(g)$$

sempre que  $\rho$  for uma representação de  $G$  que satisfaz  $R$ .

**Exemplo 2.21.** Sejam  $G := \{g\}$  um conjunto unitário e  $R := \{(g, 1)\}$ . Como  $1 \in \mathbb{R}_+$ , se  $\rho$  é uma representação de  $G$  que satisfaz  $R$ , então

$$\|\rho(g)\| \leq 1,$$

ou seja,  $(G, R)$  é admissível.

**Exemplo 2.22.** Sejam  $G := \{g\}$ ,  $R := \{(g^* - g, 0)\}$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Considere a C\*-álgebra  $\mathbb{C}$  com as operações usuais e o \*-homomorfismo  $\rho_\lambda : B_G \rightarrow \mathbb{C}$  tal que

$$\rho_\lambda(g) = \lambda.$$

Veja que  $\rho_\lambda$  é uma representação de  $G$  que satisfaz  $R$  pois

$$\|\rho_\lambda(g^* - g)\| = \|\rho_\lambda(g)^* - \rho_\lambda(g)\| = \|\bar{\lambda} - \lambda\| = 0 \leq 0.$$

Suponha, por absurdo, que  $(G, R)$  é admissível. Logo, existe  $\eta(g) \in \mathbb{R}_+$  tal que

$$\|\rho_\lambda(g)\| \leq \eta(g), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

ou seja, existe  $\eta(g) \in \mathbb{R}_+$  tal que

$$|\lambda| \leq \eta(g), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

o que é um absurdo. Logo,  $(G, R)$  não é admissível.

O fato de  $(G, R)$  ser admissível é essencial na construção da C\*-álgebra universal e utilizado na demonstração da Proposição 2.23. Portanto, a partir de agora, fixe um par  $(G, R)$  desta forma.

Defina  $P$  como sendo a coleção das representações de  $G$  que satisfazem  $R$ , e  $N : B_G \rightarrow \mathbb{R}_+$  dada por

$$N(x) = \sup_{\rho \in P} \|\rho(x)\|.$$

**Proposição 2.23.**  $N$  é uma C\*-seminorma em  $B_G$ .

*Demonstração.* Todas as propriedades de C\*-seminorma são facilmente verificáveis em  $B_G$ . Vamos nos preocupar apenas com a boa definição.

Seja  $x \in B_G$  arbitrário e escreva

$$x = \sum_{i=1}^n \lambda_i \prod_{j=1}^{m_i} r_{ij}.$$

Para os  $i, j$  tais que  $r_{ij} \in G$ , existe  $\eta_{ij} \in \mathbb{R}_+$  tal que

$$\|\rho(r_{ij})\| \leq \eta_{ij}$$

sempre que  $\rho$  for uma representação de  $G$  que satisfaz  $R$ .

Para os  $i, j$  tais que  $r_{ij} \in G^*$ , temos  $r_{ij} = s_{ij}^*$  com  $s_{ij} \in G$ . Logo, também existe  $\eta_{ij} \in \mathbb{R}_+$  tal que

$$\|\rho(r_{ij})\| = \|\rho(s_{ij})^*\| = \|\rho(s_{ij})\| \leq \eta_{ij},$$

sempre que  $\rho$  for uma representação de  $G$  que satisfaz  $R$ .

Como temos uma quantidade finita de  $r_{ij}$ , segue que existe  $\eta \in \mathbb{R}_+$  tal que para toda  $\rho$  representação de  $G$  que satisfaz  $R$ ,

$$\|\rho(r_{ij})\| \leq \eta.$$

Assim, se  $\rho$  é uma representação de  $G$  que satisfaz  $R$ , temos

$$\|\rho(x)\| = \left\| \rho \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i \prod_{j=1}^{m_i} r_{ij} \right) \right\| \leq \sum_{i=1}^n |\lambda_i| \prod_{j=1}^{m_i} \|\rho(r_{ij})\| \leq \sum_{i=1}^n |\lambda_i| \prod_{j=1}^{m_i} \eta \in \mathbb{R}_+.$$

Como a constante numérica acima não depende de  $\rho$ , concluímos que

$$N(x) = \sup_{\rho \in P} \|\rho(x)\| \in \mathbb{R}_+.$$

□

Veja que  $N$  não é necessariamente uma norma em  $B_G$ . Para isso, defina

$$I := \{x \in B_G : N(x) = 0\},$$

que é um  $*$ -ideal em  $B_G$ . Assim,  $B_G/I$  é uma  $*$ -álgebra e a aplicação

$$\|\cdot\|: B_G/I \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

dada por

$$\|x + I\| := N(x)$$

é uma C\*-norma em  $B_G/I$ .

**Definição 2.24.** A  $C^*$ -álgebra universal gerada por  $G$  com as relações  $R$ , denotada por  $C^*(G, R)$ , é o completamento de  $B_G/I$  na norma  $\|\cdot\|$ , ou seja,

$$C^*(G, R) := \overline{B_G/I}^{\|\cdot\|}$$

Note que todo elemento de  $B_G$  pode ser identificado em  $C^*(G, R)$  através da projeção canônica

$$\begin{aligned} i : B_G &\longrightarrow C^*(G, R) \\ x &\longmapsto \bar{x} := x + I \end{aligned}$$

Além disso,  $C^*(G, R)$  satisfaz uma propriedade universal que, de certa forma, garante que esta é a "maior"  $C^*$ -álgebra que contém o conjunto de geradores satisfazendo as relações determinadas.

**Teorema 2.25.** *Sejam  $A$  uma  $C^*$ -álgebra e  $\rho : B_G \longrightarrow A$  uma representação de  $G$  que satisfaz  $R$ . Então existe um único  $*$ -homomorfismo  $\varphi : C^*(G, R) \longrightarrow A$  tal que  $\varphi \circ i = \rho$ , ou seja, que faz o diagrama abaixo comutar.*

$$\begin{array}{ccc} B_G & \xrightarrow{\rho} & A \\ & \searrow i & \nearrow \varphi \\ & C^*(G, R) & \end{array}$$

*Demonstração.* Defina  $\tilde{\varphi} : B_G/I \longrightarrow A$  dada por

$$\tilde{\varphi}(\bar{x}) := \rho(x),$$

que está bem definida, já que, caso  $\bar{x} = \bar{y}$ , temos

$$\begin{aligned} N(x - y) = 0 &\implies \sup_{\phi \in P} \|\phi(x - y)\| = 0 \implies \|\rho(x - y)\| = 0 \\ &\implies \rho(x - y) = 0 \implies \rho(x) = \rho(y). \end{aligned}$$

Além disso,  $\tilde{\varphi}$  é um  $*$ -homomorfismo já que  $\rho$  é um  $*$ -homomorfismo e  $i$  é um  $*$ -homomorfismo sobrejetivo.

Temos, ainda, que  $\tilde{\varphi}$  é limitada (logo, contínua) já que

$$\|\tilde{\varphi}(\bar{x})\| = \|\rho(x)\| \leq \sup_{\phi \in P} \|\phi(x)\| = N(x) = \|\bar{x}\|.$$

Com isso,  $\tilde{\varphi}$  pode ser estendido de maneira única ao completamento de  $B_G/I$ , ou seja, existe único  $\varphi : C^*(G, R) \longrightarrow A$  tal que

$$\varphi|_{B_G/I} = \tilde{\varphi}.$$

Veja que o diagrama comuta, já que se  $x \in B_G$ , temos

$$\varphi(i(x)) = \varphi(\bar{x}) = \tilde{\varphi}(\bar{x}) = \rho(x).$$

Por fim, para a unicidade, suponha que existe um outro \*-homomorfismo  $\psi : C^*(G, R) \rightarrow A$  tal que  $\psi \circ i = \rho$ . Para  $x \in B_G$ , temos

$$\psi(i(x)) = \rho(x) = \tilde{\varphi}(\bar{x}) = \varphi(i(x)),$$

ou seja,

$$\psi \circ i = \varphi \circ i,$$

ou seja,

$$\psi|_{B_G/I} = \varphi|_{B_G/I} = \tilde{\varphi}.$$

Assim, da unicidade da extensão de  $\tilde{\varphi}$ , segue que

$$\psi = \varphi.$$

□

**Exemplo 2.26.** Vamos caracterizar a C\*-álgebra universal unital gerada por um elemento auto-adjunto na bola unitária. Para isso, considere  $G = \{e, x\}$  e  $R = \{(x, 1), (x - x^*, 0)\} \cup \{e = 1\}$ .

Primeiro, vamos checar que  $(G, R)$  é admissível. Seja  $\rho : B_G \rightarrow A$  uma representação de  $G$  que satisfaz  $R$ .

Veja que  $\rho(e)$  é uma projeção ortogonal de  $A$ , já que

$$\|\rho(ee - e)\| = 0 \implies \rho(e)^2 = \rho(e)$$

e

$$\|\rho(e^* - e)\| = 0 \implies \rho(e)^* = \rho(e).$$

Logo,

$$\|\rho(e)\| \leq 1.$$

Além disso,

$$\|\rho(x)\| \leq 1,$$

o que conclui a afirmação.

Assim, existe  $C^*(G, R)$  e, por construção,

$$C^*(G, R) = C^*(\{\bar{e}, \bar{x}\}),$$

com  $\bar{e}$  sendo a unidade  $C^*(G, R)$  e  $\bar{x}$  sendo auto-adjunto tal que  $\|\bar{x}\| \leq 1$ .

Pelo Teorema 2.1.13 de Murphy (1989), temos

$$C^*(G, R) \cong C(\sigma(\bar{x})).$$

Portanto, para caracterizar  $C^*(G, R)$  basta calcular  $\sigma(\bar{x})$ , o espectro de  $\bar{x}$ . Vamos mostrar que  $\sigma(\bar{x}) = [-1, 1]$ .

Note por  $r(\bar{x})$  o raio espectral de  $\bar{x}$ . Por um lado, como  $\bar{x}$  é auto-adjunto, segue que  $\sigma(\bar{x}) \subseteq \mathbb{R}$  e que

$$r(\bar{x}) = \|\bar{x}\| \leq 1,$$

ou seja, se  $\lambda \in \sigma(\bar{x})$ , então

$$|\lambda| \leq r(\bar{x}) \leq 1,$$

o que implica

$$\sigma(\bar{x}) \subseteq [-1, 1].$$

Por outro lado, seja  $\lambda \in [-1, 1]$  arbitrário. Defina  $\rho_\lambda : B_G \rightarrow \mathbb{C}$  tal que  $\rho_\lambda(e) = 1$  e  $\rho_\lambda(u) = \lambda$ . Veja que  $\rho_\lambda$  é uma representação de  $G$  que satisfaz  $R$ , pois, por exemplo

$$|\rho_\lambda(x^* - x)| = |\rho_\lambda(x)^* - \rho_\lambda(x)| = |\bar{\lambda} - \lambda| = 0.$$

Assim, da Propriedade Universal (2.25), existe um  $*$ -homomorfismo  $\varphi_\lambda : C^*(G, R) \rightarrow \mathbb{C}$  tal que  $\varphi_\lambda(\bar{e}) = 1$  e  $\varphi_\lambda(\bar{x}) = \lambda$ .

Caso  $\bar{u} - \lambda\bar{e}$  seja inversível, existe  $y \in C^*(G, R)$  tal que

$$y(\bar{x} - \lambda\bar{e}) = \bar{e}.$$

Daí,

$$1 = \rho_\lambda(\bar{e}) = \rho_\lambda(y(\bar{x} - \lambda\bar{e})) = \rho_\lambda(y)[\lambda - \lambda \cdot 1] = 0,$$

o que é um absurdo. Logo,  $\bar{x} - \lambda\bar{e}$  não é inversível, ou seja,

$$\lambda \in \sigma(\bar{x}),$$

o que conclui a caracterização, isto é,

$$C^*(G, R) \cong C[-1, 1].$$

□

Para definirmos a  $C^*$ -álgebra de um grafo como uma  $C^*$ -álgebra universal, precisamos escolher um conjunto de geradores e de relações que formem um par admissível.

Seja  $G$  um grafo e  $\{s, \rho\}$  a  $G$ -família de Cuntz-Krieger dada pela Proposição (2.17). Considere os seguintes conjuntos de geradores e relações:

$$G = \{s_e : e \in G^1\} \cup \{\rho_v : v \in G^0\}$$

$$R = \{\{\rho_v^2 = \rho_v = \rho_v^* : v \in E^0\} \cup \{\rho_v \rho_w = 0 : \forall v \neq w\} \cup \{(CK1)\} \cup \{(CK2)\}\} \quad (5)$$

Note que, quando colocamos a condição (CK1), em particular estamos impondo que os elementos  $s_e$  sejam isometrias parciais.

**Afirmção 2.27.**  $(G, R)$  é admissível.

*Demonstração.* Seja  $\rho : B_G \rightarrow A$  uma representação de  $G$  que satisfaz  $R$ . Como  $\rho$  é \*-homomorfismo e vale  $\{\rho_v^2 = \rho_v = \rho_v^* : v \in G^0\}$ , segue que  $\rho(\rho_v) \in A$  é uma projeção para todo  $v \in G^0$ . Então, de modo análogo ao que vimos no Exemplo 2.26,

$$\|\rho(\rho_v)\| \leq 1, \text{ para todo } v \in G^0.$$

Além disso, como vale (CK1), temos

$$\|\rho(s_e)\|^2 = \|\rho(s_e^* s_e)\| = \|\rho(\rho_{s(e)})\| \leq 1, \forall e \in G^1,$$

o que prova a afirmação. □

**Definição 2.28.** A  $C^*$ -álgebra de um grafo  $G$ , denotada por  $C^*(G)$ , é a  $C^*$ -álgebra universal gerada pelos elementos da  $G$ -família de Cuntz-Krieger como construído acima.

**Exemplo 2.29.** Seja  $G$  o grafo do Exemplo 2.16, que é formado por único vértice e uma única aresta com origem e imagem neste vértice. Como vimos, as condições de Cuntz-Krieger para este grafo se resumem a

$$s_e^* s_e = \rho_v = s_e s_e^*, \quad (6)$$

em que podemos escolher  $\rho_v$  como sendo o operador identidade. Assim, (6) caracteriza  $s_e$  como um elemento unitário na  $C^*$ -álgebra universal. Logo,  $C^*(G)$  é a  $C^*$ -álgebra universal gerada por um elemento unitário e a unidade. Usando um argumento semelhante ao argumento construído no Exemplo 2.26, mostra-se que

$$C^*(G) \cong C(\mathbb{S}^1).$$

### 2.3 C\*-ÁLGEBRAS DE GRAFOS RELATIVAS

Algumas generalizações das Definições 2.11 e 2.32 foram feitas por Muhly e Tomforde (2004) e deram origem às C\*-álgebras de grafos relativas.

**Definição 2.30.** Sejam  $H$  um espaço de Hilbert,  $G$  um grafo e  $V \subseteq R(G) = \{v \in G^0 : s^{-1}(v) \neq \emptyset\}$ . Uma  $(G, V)$ -família de Cuntz-Krieger  $\{s_e, p_v\}$  em  $B(H)$  consiste de um conjunto  $\{p_v : v \in G^0\}$  de projeções mutuamente ortogonais em  $B(H)$  e um conjunto  $\{s_e : e \in G^1\}$  de isometrias parciais em  $B(H)$  que satisfazem:

$$s_e^* s_e = p_{r(e)}, \forall e \in G^1 \text{ e} \quad (7)$$

$$p_v = \sum_{e \in s^{-1}(v)} s_e s_e^*, \forall v \in V. \quad (8)$$

$$s_e s_e^* < p_{s(e)}, \forall e \in G^1 \quad (9)$$

Segundo a definição acima, note que em uma  $(G, V)$ -família de Cuntz-Krieger, a condição (CK2) é verificada apenas para os  $v \in V \subseteq R(G)$ .

**Observação 2.31.** Para todo grafo  $G$  e todo  $V \subseteq R(G)$  existe um espaço de Hilbert  $H$  e  $(G, V)$ -família de Cuntz-Krieger  $\{s_e, p_v\}$  em  $B(H)$  e a demonstração deste fato é análoga à demonstração da Proposição 2.17.

**Definição 2.32.** Se  $G$  é um grafo e  $V \subseteq R(G)$ , a C\*-álgebra de um grafo  $G$  relativa a  $V$ , denotada por  $C^*(G, V)$ , é a C\*-álgebra universal gerada pelos elementos da  $(G, V)$ -família de Cuntz-Krieger dada acima.

**Observação 2.33.** Alguns casos especiais da Definição 2.30 são quando  $V = R(G)$  e quando  $V = \emptyset$ . No primeiro,

$$C^*(G, R(G)) = C^*(G)$$

e a  $C^*(G, \emptyset)$  dá-se o nome de *álgebra de Toeplitz*, apesar de não ser uma nomenclatura uniforme na literatura, como discutem Muhly e Tomforde (2004).

Dado um grafo  $G$  e  $V \subseteq R(G)$ , é possível construir um novo grafo  $G_V$  que, de alguma forma, estende  $G$  a partir dos vértices que não estão em  $V$ , cuja C\*-álgebra é isomorfa a  $C^*(G, V)$ . Logo, uma álgebra de grafos relativa pode ser vista como uma álgebra de grafos da maneira usual. Este é o conteúdo do próximo resultado.

**Definição 2.34.** Sejam  $G$  um grafo e  $V \subseteq R(G)$ . Defina o grafo  $G_V$  como sendo o grafo tal que

$$G_V^0 := G^0 \cup \{v' : v \in R(G) \setminus V\}$$

$$G_V^1 := G^1 \cup \{e' : e \in G^1 \text{ e } r(e) \in R(G) \setminus V\}$$

e  $r$  e  $s$  são estendidas a  $G_V$  de forma que  $s(e') := s(e)$  e  $r(e') := r(e)'$ .

Note que para cada  $v \in R(G) \setminus V$ , adiciona-se um poço  $v'$  e uma cópia de cada aresta que termina em  $v$ , mantendo-se a sua origem original mas com imagem  $v'$ .

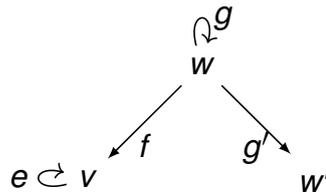
**Exemplo 2.35.** Seja  $G$  o grafo do Exemplo 2.2, representado pelo desenho

$$e \curvearrowright v \xleftarrow{f} w \curvearrowright g$$

e  $V = \{v\}$ . Neste caso, temos  $G_V^0 = \{v, w, w'\}$  e  $G_V^1 = \{e, f, g, g'\}$  tais que

$$\begin{cases} s(g') = w \\ r(g') = w' \end{cases}$$

Assim,  $G_V$  pode ser representado por



**Teorema 2.36.** Sejam  $G$  um grafo e  $V \subseteq R(G)$ . Então,

$$C^*(G_V) \cong C^*(G, V).$$

*Demonstração.* Seja  $\{s, p\}$  uma  $(G, V)$ -família de Cuntz-Krieger.

Para cada  $w \in G_V^0$  e  $f \in G_V^1$  defina

$$q_w := \begin{cases} p_w & \text{se } w \in V \\ \sum_{e \in S^{-1}(w)} s_e s_e^* & \text{se } w \in R(G) \setminus V \\ p_v - \sum_{e \in S^{-1}(v)} s_e s_e^* & \text{se } w = v' \text{ para algum } v \in R(G) \setminus V \end{cases}$$

$$t_f := \begin{cases} s_f q_{r(f)} & \text{se } f \in G^1 \\ s_e q_{r(e)'} & \text{se } f = e' \text{ para algum } e \in G^1 \end{cases}$$

Vamos checar que  $\{q_w, t_f : w \in G_V^0, f \in G_V^1\}$  forma uma  $G_V$ -família de Cuntz-Krieger em  $C^*(G, V)$ .

Primeiro, é fácil ver que  $\{q_w : w \in W \in G_V^0\}$  é um conjunto de projeções mutuamente ortogonais. Por exemplo, veja que, caso  $w = v'$  para  $v \in R(G) \setminus V$ , podemos usar a equação (1) e obter

$$\begin{aligned}
& \left( p_v - \sum_{e \in s^{-1}(v)} s_e s_e^* \right) \left( p_v - \sum_{e \in s^{-1}(v)} s_e s_e^* \right) \\
&= p_v^2 - \sum_{e \in s^{-1}(v)} p_v s_e s_e^* - \sum_{e \in s^{-1}(v)} s_e s_e^* p_v + \left( \sum_{e \in s^{-1}(v)} s_e s_e^* \right)^2 \\
&= p_v - \sum_{e \in s^{-1}(v)} s_e s_e^* - \sum_{e \in s^{-1}(v)} s_e (p_v s_e)^* + \sum_{e \in s^{-1}(v)} s_e s_e^* \\
&= p_v - \sum_{e \in s^{-1}(v)} s_e s_e^* - \sum_{e \in s^{-1}(v)} s_e s_e^* + \sum_{e \in s^{-1}(v)} s_e s_e^* = p_v - \sum_{e \in r^{-1}(v)} s_e s_e^*.
\end{aligned}$$

Além disso, usando novamente a Equação (1), concluímos que  $\{t_f : f \in G_V^1\}$  é um conjunto de isometrias parciais.

Vamos ver agora a condição (CK2). Seja  $w \in G_V^0$ .

- Caso  $w \notin R(G) \setminus V$ , temos

$$\begin{aligned}
q_w = p_w &= \sum_{e \in s^{-1}(w)} s_e s_e^* = \sum_{e \in s^{-1}(w)} s_e p_{r(e)} s_e^* = \sum_{e \in s^{-1}(w)} s_e p_{r(e)} p_{r(e)} s_e^* \\
&= \sum_{e \in s^{-1}(w)} s_e p_{r(e)} (s_e p_{r(e)})^* = \sum_{f \in s^{-1}(w)} t_f t_f^*.
\end{aligned}$$

- Caso  $w \in R(G) \setminus V$ , temos diretamente a igualdade

$$q_w = \sum_{e \in s^{-1}(w)} s_e s_e^*$$

e, analogamente ao caso anterior, obtém-se

$$q_w = \sum_{f \in s^{-1}(w)} t_f t_f^*.$$

- Caso  $w = v'$  para algum  $v \in R(G) \setminus V$ , então  $w$  é um poço, ou seja,  $w \notin R(G_V)$ . Logo, a condição (CK2) não precisa ser verificada neste vértice.

Para a condição (CK1), considere  $f \in G_V^1$ .

- Caso  $f \in G^1$ , temos:

– Caso  $r(f) \notin R(G) \setminus V$ ,

$$t_f^* t_f = q_{r(f)}^* s_f^* s_f q_{r(f)} = p_{r(f)}^* s_f^* s_f p_{r(f)} = p_{r(f)}^* p_{r(f)} p_{r(f)} = p_{r(f)} = q_{r(f)}.$$

– Caso  $r(f) \in R(G) \setminus V$ ,

$$\begin{aligned} t_f^* t_f &= q_{r(f)}^* s_f^* s_f q_{r(f)} = \sum_{e:s(e)=r(f)} s_e s_e^* s_f^* s_f q_{r(f)} = \sum_{e:s(e)=r(f)} s_e s_e^* p_{r(f)} q_{r(f)} \\ &= \sum_{e:s(e)=r(f)} s_e (p_{r(f)} s_e)^* q_{r(f)} = \sum_{e:s(e)=r(f)} s_e (p_{s(e)} s_e)^* q_{r(f)} \\ &= \sum_{e:s(e)=r(f)} s_e s_e^* q_{r(f)} = q_{r(f)} q_{r(f)} = q_{r(f)}. \end{aligned}$$

• Caso  $f = e'$  para algum  $e \in G^1$ , temos

$$\begin{aligned} t_f^* t_f &= t_{e'}^* t_{e'} = q_{r(e)'}^* s_e^* s_e q_{r(e)'} = \left( p_{r(e)} - \sum_{g:s(g)=r(e)} s_g s_g^* \right) s_e^* s_e q_{r(e)'} \\ &= \left( p_{r(e)} - \sum_{g:s(g)=r(e)} s_g s_g^* \right) p_{r(e)} q_{r(e)'} = \left( p_{r(e)} - \sum_{g:s(g)=r(e)} s_g s_g^* p_{r(e)} \right) q_{r(e)'} \\ &= \left( p_{r(e)} - \sum_{g:s(g)=r(e)} s_g (p_{r(e)} s_g)^* \right) q_{r(e)'} = \left( p_{r(e)} - \sum_{g:s(g)=r(e)} s_g (p_{s(g)} s_g)^* \right) q_{r(e)'} \\ &= \left( p_{r(e)} - \sum_{g:s(g)=r(e)} s_g s_g^* \right) q_{r(e)'} = q_{r(e)'} q_{r(e)'} = q_{r(e)'} = q_{r(e')} = q_{r(f)}. \end{aligned}$$

Assim, a aplicação  $\rho : G_V^0 \cup G_V^1 \rightarrow C^*(G, V)$  dada por

$$w \in G_V^0 \mapsto q_w \in C^*(G, V)$$

$$f \in G_V^1 \mapsto t_f \in C^*(G, V)$$

é uma representação de  $G_V^0 \cup G_V^1$  que satisfaz as relações (5). Pela propriedade universal de  $C^*(G_V)$  (Teorema 2.25), segue que existe um  $*$ -homomorfismo  $\psi : C^*(G_V) \rightarrow C^*(G, V)$  que estende  $\rho$ .

Agora, note que, para  $v \notin R(G) \setminus V$ , temos

$$q_v = p_v \tag{10}$$

e para  $v \in R(G) \setminus V$  temos

$$q_v + q_{v'} = \sum_{e \in s^{-1}(v)} s_e s_e^* + p_v - \sum_{e \in s^{-1}(v)} s_e s_e^* = p_v. \quad (11)$$

Além disso, se  $r(e) \in R(G) \setminus V$ , temos

$$\begin{aligned} t_e + t_{e'} &= s_e q_{r(e)} + s_e q_{r(e)'} = s_e \left( \sum_{e \in s^{-1}(r(e))} s_e s_e^* \right) \\ &\quad + s_e \left( p_{r(e)} - \sum_{e \in s^{-1}(r(e))} s_e s_e^* \right) = s_e p_{r(e)} = s_e. \end{aligned} \quad (12)$$

Das Equações (10), (11) e (12), segue que  $\{q_w, t_f : w \in G_V^0, f \in G_V^1\}$  gera  $C^*(G, V)$ , o que prova a sobrejetividade de  $\psi$ .

A injetividade de  $\psi$  segue do Teorema de Unicidade Gauge-invariante, que pode ser encontrado no Teorema 2.1 de Bates *et al.* (2002). Com a notação de Bates *et al.* (2002), podemos tomar  $\pi := \psi$ ,  $\gamma : \mathbb{T} \rightarrow \text{Aut}(C^*(G_V))$  a ação de gauge e  $\beta : \mathbb{T} \rightarrow \text{Aut}(C^*(G, V))$  a ação fortemente contínua dada por

$$\begin{cases} \beta_z(p_v) = p_v \\ \beta_z(s_e) = z s_e \end{cases}$$

e estendida através da propriedade universal de  $C^*(G, V)$ , donde segue que

$$\beta_z \circ \pi = \pi \circ \gamma_z,$$

ou seja,  $\pi = \varphi$  é injetiva. □

**Observação 2.37.** Na demonstração do Teorema 2.36, construímos dois isomorfismos:

1.  $\psi : C^*(G_V) \rightarrow C^*(G, V)$  dado por

$$\begin{aligned} \psi(p_v) &= \begin{cases} p_v & \text{se } v \in V \\ \sum_{e \in s^{-1}(v)} s_e s_e^* & \text{se } v \notin V \end{cases}, \quad \psi(p_{v'}) = p_v - \sum_{e \in s^{-1}(v)} s_e s_e^* \\ \psi(s_e) &= \begin{cases} s_e & \text{se } r(e) \in V \\ s_e \left( \sum_{f: s(f)=r(e)} s_f s_f^* \right) & \text{se } r(e) \notin V \end{cases} \\ \psi(s_{e'}) &= s_e \left( p_{r(e)} - \sum_{f: s(f)=r(e)} s_f s_f^* \right), \end{aligned}$$

2. e seu inverso  $\phi : C^*(G, V) \rightarrow C^*(G_V)$  dado por

$$\phi(p_v) = \begin{cases} p_v & \text{se } v \in V \\ p_v + p_{v'} & \text{se } v \notin V \end{cases}, \quad \phi(s_e) = \begin{cases} s_e & \text{se } r(e) \in V \\ s_e + s_{e'} & \text{se } r(e) \notin V \end{cases}$$

### 3 DINÂMICA DE APLICAÇÕES DE MARKOV COM CONJUNTO DE ESCAPE

Dado  $I \subseteq \mathbb{R}$  um intervalo, podemos estudar aplicações  $f : \text{dom}(f) \rightarrow I$  cujo domínio e imagem podem ser escritos em função de uma partição  $C_f$  de  $I$ . Dada a natureza dessas aplicações, elas podem ser codificadas por matrizes com entradas 0 ou 1, que informam a dinâmica das transições entre os elementos de  $C_f$ . Cada ponto de  $I$  tem uma órbita gerada por  $f$  e representada por um grafo. Tais aplicações são chamadas de aplicações de Markov e foram consideradas por Ramos, Martins e Pinto (2017) e Ramos, Martins e Pinto (2019), artigos que foram usados como base dos conceitos que serão apresentados neste capítulo.

Na Seção 3.1, definiremos uma aplicação de Markov, além dos intervalos de Markov e de escape. Contruiremos também as matrizes de transição que codificam as transições entre esses intervalos. A partir da Seção 3.2, consideraremos aplicações de Markov que possuem conjuntos de escape não-vazios e estudaremos as órbitas dos pontos que estão em seu conjunto de escape para, futuramente, construir representações das  $C^*$ -álgebras relativas dos grafos gerados por essas órbitas.

#### 3.1 APLICAÇÕES DE MARKOV

**Definição 3.1.** Sejam  $I \subseteq \mathbb{R}$  um intervalo e  $f : \text{dom}(f) \rightarrow I$  uma aplicação sobrejetiva, em que o domínio  $\text{dom}(f)$  de  $f$  é um subconjunto de  $\mathbb{R}$ . Dizemos que  $f$  é uma *aplicação de Markov em  $I$*  se existe uma coleção  $\{I_1, \dots, I_n\}$  de intervalos fechados, chamada de *partição de Markov para  $f$* , satisfazendo às seguintes propriedades:

- (M1)  $\#(I_i \cap I_j) \leq 1$  para  $i \neq j$ , e  $\text{dom}(f) = \bigcup_{j=1}^n I_j$ ;
- (M1) para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ , o conjunto  $f(I_i) \cap \left(\bigcup_{j=1}^n I_j\right)$  é não-vazio, e pode ser escrito como uma união de elementos da partição de Markov.
- (M1) para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ , a restrição  $f|_{I_i}$  de  $f$  a  $I_i$  é de classe  $C^1$ , e existe  $b > 1$  tal que  $|f'|_{I_i}(x)| > b$  para todo  $x \in I_i$ .
- (M1) para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ , existe  $m_i \in \mathbb{N}$  tal que  $\text{dom}(f) \subseteq f^{m_i}(I_i)$  (no sentido de composição parcial de funções).

Note que, em particular, pelos itens (M1) e (M4), temos que  $I_i \subseteq I$  para todo  $i$ . A condição dada em (M3) implica que  $f$  é injetiva e monótona em cada intervalo  $I_i$ . A classe das aplicações de Markov em  $I$  é denotada por  $M(I)$ .

A partir daqui, e até o final deste capítulo, fixe  $I \subseteq \mathbb{R}$  um intervalo e  $f \in M(I)$ . Além disso, denote por  $C_f$  a partição minimal de  $\text{dom}(f)$  que satisfaz a Definição 3.1. Os elementos de  $C_f$  são chamados de *intervalos de Markov de  $f$* .

**Observação 3.2.** Para simplificação de contas, vamos considerar, até o fim deste trabalho, apenas aplicações de Markov  $f$  que satisfazem  $\sup \text{dom}(f) = \sup(I)$  e  $\inf \text{dom}(f) = \inf(I)$ , apesar disso não ser necessariamente sempre verdade.

Da Definição 3.1, existe um único conjunto

$$\Gamma_f = \{c_0, c_1^-, c_1^+, \dots, c_{n-1}^-, c_{n-1}^+, c_n\} \subseteq \mathbb{R}$$

de  $2n$  elementos tal que

$$c_0 \leq c_1^- \leq \dots \leq c_{n-1}^+ \leq c_n$$

e os elementos de  $C_f$  são escritos como

$$I_1 = [c_0, c_1^-], \dots, I_j = [c_{j-1}^+, c_j^-], \dots, I_n = [c_{n-1}^+, c_n].$$

Para  $j \in \{1, \dots, n\}$ , note que pode acontecer  $c_j^- = c_j^+$  ou  $c_j^- < c_j^+$ . No segundo caso, definimos

$$E_j := (c_j^-, c_j^+) \neq \emptyset.$$

Aos conjuntos  $E_j$ , como definidos acima, damos o nome de *intervalos de escape*.

**Observação 3.3.** No primeiro caso, ou seja, quando  $c_j^- = c_j^+ =: c_j$ , vamos entender estes pontos como os “limites laterais” (à esquerda e à direita, respectivamente) de  $c_j$ , de forma que vamos permitir que aconteça  $f(c_j^-) \neq f(c_j^+)$ .

**Observação 3.4.** Por causa de (M2), temos  $f(\Gamma_f) \subseteq \Gamma_f$  e, por causa de (M1),  $E_j \not\subseteq \text{dom}(f)$ , para todo  $j \in \{1, \dots, n\}$ .

**Observação 3.5.** Os intervalos  $E_j$  recebem este nome pelo seguinte fato: para  $x \in \text{dom}(f)$ , caso exista  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $f^m(x) \in E_j$ , pela observação interior,  $f^m(x)$  está fora do domínio de  $f$ , de modo que não é possível continuar aplicando  $f$ . Assim,  $f^m(x)$  “escapa” do domínio de  $f$ .

Como aplicação de Markov em  $I$ ,  $f$  define unicamente, além dos intervalos de Markov e dos intervalos de escape, o conjunto

$$\Omega_f := \left\{ x \in I : f^k(x) \in \text{dom}(f), \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \right\},$$

chamado de *conjunto  $f$ -invariante*. Assim, tomando

$$n_f := \#C_f,$$

podemos definir funções que indiquem o “caminho” que um ponto no domínio  $f$  faz ao aplicar  $f$  repetidas vezes sobre este ponto.

**Definição 3.6.** A função endereço  $\text{ad}_f : \bigcup_{j=1}^n \text{int}(I_j) \rightarrow \{1, \dots, n_f\}$  é definida como

$$\text{ad}_f(x) = i, \text{ se } x \in \text{int}(I_i).$$

A função itinerário  $\text{it}_f : \Omega_f \rightarrow \{1, \dots, n_f\}^{\mathbb{N} \cup \{0\}}$  é definida como

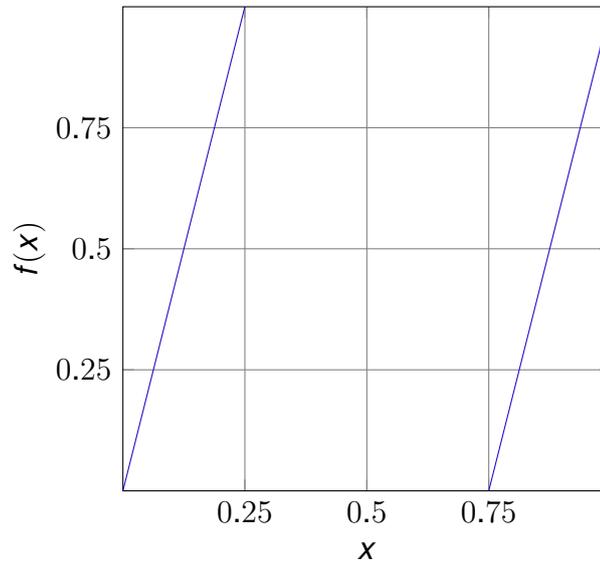
$$\text{it}_f(x) = \text{ad}_f(x)\text{ad}_f(f(x))\text{ad}_f(f^2(x))\dots,$$

ou seja, concatenamos o endereço de cada iteração de  $f$  em  $x$ .

**Exemplo 3.7.** Sejam  $I = [0, 1]$  e  $f : \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right] \rightarrow I$  dada por

$$f(x) := \begin{cases} 4x & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{1}{4} \\ 4x - 3 & \text{se } \frac{3}{4} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

e representada pelo gráfico abaixo.



Veja que  $f \in M(I)$  pois:

- considere  $I_1 = \left[0, \frac{1}{4}\right]$  e  $I_2 = \left[\frac{3}{4}, 1\right]$ , de forma que  $C_f = \{I_1, I_2\}$  satisfaz (M1);
- note que

$$f(I_1) \cap (I_1 \cup I_2) = I_1 \cup I_2 = f(I_2) \cap (I_1 \cup I_2)$$

- para  $i = 1, 2$ ,  $f|_{I_i}$  é uma reta tal que  $f'|_{I_i}(x) = 4$  para todo  $x \in I_i$  e
- para  $i = 1, 2$ ,

$$\text{dom}(f) = \left[0, \frac{1}{4}\right] \cup \left[\frac{3}{4}, 1\right] \subseteq f(I_i).$$

Observemos que  $f$  admite apenas um intervalo de escape,

$$E_1 = \left( \frac{1}{4}, \frac{3}{4} \right).$$

Agora, considere  $x_0 = \frac{1}{5}$ . Neste caso,  $\text{ad}_f(x_0) = 1$  e

$$\text{it}_f(x_0) = 12121 \dots$$

pois

$$\begin{cases} f(x_0) = \frac{4}{5} \\ f^2(x_0) = \frac{1}{5} = x_0 \end{cases}.$$

**Observação 3.8.** Na seção 3.2, estenderemos a função  $\text{it}_f$  para o caso em que  $x \notin \Omega_f$ . Neste caso, o itinerário de  $x$  será uma sequência finita de endereços, já que não é mais válido que  $f^n(x) \in \text{dom}(f)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

### 3.1.1 Matrizes de transição

**Definição 3.9.** Se  $I_i$  e  $I_j$  são dois intervalos de Markov de  $f$ , dizemos que existe uma *transição* entre  $I_i$  e  $I_j$  caso exista  $x \in \text{int}(I_i)$  tal que  $f(x) \in \text{int}(I_j)$ .

Das propriedades (M1) e (M2), tanto o domínio quanto a imagem de  $f$  podem ser escritos em função dos intervalos de Markov, de forma que existe uma (única) matriz  $A_f \in M_n(\mathbb{R})$  “codificando”  $f$ , dada por

$$(A_f)_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{se } \text{int}(I_j) \subseteq f(\text{int}(I_i)) \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (13)$$

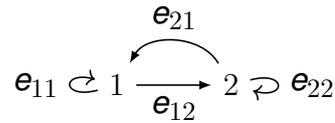
ou seja,  $(A_f)_{ij}$  vale 1 se, e somente se, existe uma transição do intervalo  $I_i$  para o intervalo  $I_j$  através de  $f$ .

**Definição 3.10.** A matriz dada pela Equação (13) é chamada de *matriz de transição de  $f$* .

**Exemplo 3.11.** Seja  $f$  a aplicação de Markov do Exemplo 3.7. Como há transição do intervalo  $I_1$  para os intervalos  $I_1$  e  $I_2$  e também de  $I_2$  para  $I_1$  e  $I_2$ , a matriz de transição de  $f$  é

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

**Observação 3.12.** Como consequência do Exemplo 2.10 e da construção de  $A_f$ , toda aplicação de Markov  $f$  induz uma matriz de transição  $A_f$ , que, por sua vez, induz um grafo  $G_{A_f}$ . Assim, para a aplicação de Markov do Exemplo 3.7, podemos construir o seguinte grafo associado à matriz (14):



A matriz de transição de  $f$  pode ser estendida para informar quando há transição de algum dos intervalos de Markov para algum dos intervalos de escape, caso sejam não-vazios. Para isso, defina o seguinte conjunto de símbolos

$$\Sigma_f := \left\{ \widehat{j} : E_j \neq \emptyset, j \in \{1, \dots, n_f - 1\} \right\}.$$

e considere, em  $\Theta_f := \{1, \dots, n_f\} \cup \Sigma_f$ , a seguinte ordem

$$1 < \widehat{1} < 2 < \widehat{2} < \dots < n_f - 1 < \widehat{n_f - 1} < n_f.$$

Defina também

$$m_f := \#\Theta_f.$$

**Definição 3.13.** Seja  $\widehat{A}_f \in M_{m_f}(\mathbb{R})$  a matriz dada por

$$(\widehat{A}_f)_{ij} := \begin{cases} (A_f)_{ij} & \text{se } i, j \in \{1, \dots, n_f\} \\ 1 & \text{se } i \in \{1, \dots, n_f\}, j = \widehat{k} \in \Sigma_f \text{ e } \text{int}(I_j) \cap f^{-1}(E_k) \neq \emptyset \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

$\widehat{A}_f$  é chamada de *matriz de transição estendida de  $f$* .

Note que, se  $k \in \Sigma_f$ , a linha  $k$  de  $\widehat{A}_f$  terá apenas zeros, indicando que os intervalos  $E_j \neq \emptyset$  não fazem parte do domínio de  $f$ , logo não há como ter transição destes intervalos para quaisquer outros intervalos. Além destas linhas nulas, são adicionadas também colunas em  $A_f$  indicando quando há alguma transição de um intervalo  $I_j$  para um intervalo  $E_j$ .

**Exemplo 3.14.** Para a aplicação de Markov do Exemplo 3.7, vimos que existe apenas um intervalo de escape não-vazio:  $E_1$ . Assim,

$$\Sigma_f = \{\widehat{1}\},$$

ou seja,

$$\Theta_f = \{1, \widehat{1}, 2\}$$

com a ordem  $1 < \widehat{1} < 2$ . Desta forma,

$$\widehat{A}_f = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

ou seja, há transição dos intervalos  $I_1$  e  $I_2$  para os intervalos  $I_1, I_2$  e  $E_1$ , e não há transição do intervalo  $E_1$ , já que este não faz parte do domínio de  $f$ .

**Observação 3.15.** É possível reescrever  $\widehat{A}_f$ , a menos de conjugação por matriz de permutação  $P$ , na forma

$$P\widehat{A}_fP^T = \left( \begin{array}{c|c} A_f & B_f \\ \hline 0' & 0'' \end{array} \right),$$

em que  $0'$  e  $0''$  são as matrizes nulas de ordens  $m_f - n_f \times n_f$  e  $(m_f - n_f) \times (m_f - n_f)$ , respectivamente, e  $B_f$  é a matriz que representa as transições dos intervalos de Markov para os intervalos de escape.

**Exemplo 3.16.** Procedendo como na Observação 3.15, podemos reescrever  $\widehat{A}_f$  do Exemplo 3.14 como

$$P\widehat{A}_fP^T = \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

## 3.2 ÓRBITAS NO CONJUNTO DE ESCAPE DE APLICAÇÕES DE MARKOV

Além de seus intervalos de Markov e de escape, da sua matriz de transição, da sua matriz de transição estendida e de seu conjunto  $f$ -invariante,  $f$  define unicamente o conjunto complementar de  $\Omega_f$  em  $I$ , que será de particular interesse para nós a partir desta seção.

### 3.2.1 Conjuntos de escape

**Definição 3.17.** O conjunto de escape da aplicação de Markov  $f$  é definido como

$$E_f := I \setminus \Omega_f.$$

**Observação 3.18.** A partir daqui, e até o final deste trabalho, considere apenas aplicações de Markov que possuem conjuntos de escape não-vazios.

Por definição, se  $x \in E_f$ , então existe  $\tau(x) \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  tal que  $f^{\tau(x)}(x) \notin \text{dom}(f)$ . Em outras palavras,  $x$  será levado a algum dos intervalos de escape através de uma quantidade finita de iterações de  $f$ . Desta forma, temos

$$E_f = \bigcup_{k=0}^{\infty} f^{-k} \left( \bigcup_{j=1}^{n_f-1} E_j \right).$$

Além de  $\tau(x)$ , temos que  $x \in E_f$  define o ponto

$$e(x) := f^{\tau(x)}(x),$$

e  $j(x) \in \{1, \dots, n_f\}$  tal que

$$e(x) \in E_{j(x)}.$$

Defina também

$$\iota(x) := \widehat{j(x)} \in \Sigma_f.$$

**Exemplo 3.19.** Seja  $f$  a aplicação do Exemplo 3.7. Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , considere  $x_n = \frac{4^{-n}}{2}$ . Veja que  $x_n \in E_f$ , já que

$$f(x_1) = 0.5 \in E_1 \not\subseteq \text{dom}(f),$$

e, além disso, para todo  $n \geq 2$ , temos

$$f(x_n) = 4 \cdot \frac{4^{-n}}{2} = \frac{4^{1-n}}{2} = \frac{4^{-(n-1)}}{2} = x_{n-1}.$$

Portanto,

$$f^n(x_n) = f^{n-1}(x_{n-1}) = \dots = f(x_1) \in E_1 \not\subseteq \text{dom}(f).$$

Segue que

$$\begin{cases} \tau(x_n) = n \\ e(x_n) = 0.5 \\ \iota(x_n) = \widehat{1} \end{cases}.$$

**Observação 3.20.** As funções endereço e itinerário de  $f$  podem ser estendidas ao conjunto de escape, usando o conjunto de símbolos  $\Sigma_f$  que criamos. Se  $x \in E_j$ , defina

$$\text{ad}_f(x) := \widehat{j} \in \Sigma_f.$$

Assim, estende-se  $\text{ad}_f$  para todo o intervalo  $I$ . Além disso, para  $x \in E_f$ , se pusermos, em concatenação,

$$\text{it}_f(x) := \text{ad}_f(x)\text{ad}_f(f(x))\text{ad}_f(f^2(x)) \dots \text{ad}_f(f^{\tau(x)-1}(x))\text{ad}_f(e(x)),$$

o itinerário de  $x$  se torna uma sequência finita de números, em concatenação, que termina em algum símbolo  $k \in \Sigma_f$ , já que  $e(x)$  pertence a algum dos intervalos de escape.

### 3.2.2 Órbitas geradas por aplicações de Markov

Em  $I$ , consideramos a seguinte relação de equivalência:

$$O := \{(x, y) \in I \times I : \exists n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}, f^n(x) = f^m(y)\}.$$

**Definição 3.21.** Dado  $x \in I$ , a *órbita de  $x$*  é a classe de equivalência de  $x$  pela relação  $O$ , e denotada por  $O_x$ .

**Observação 3.22.** Cada  $x \in \bigcup_{j=1}^{n_f} E_j$  dá origem a uma órbita distinta, já que os conjuntos de escape não fazem parte do domínio de  $f$ .

Uma órbita  $O_x$  possui, naturalmente, uma estrutura de grafo da seguinte maneira: o conjunto de vértices é a própria órbita  $O_x$  e, para  $y, z \in O_x$ , temos uma aresta do tipo

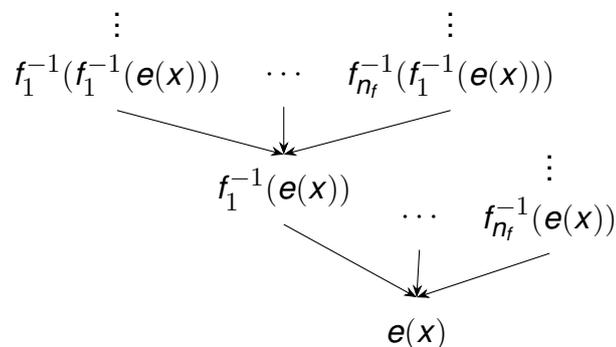
$$y \longrightarrow z$$

se, e somente se,  $z = f(y)$ .

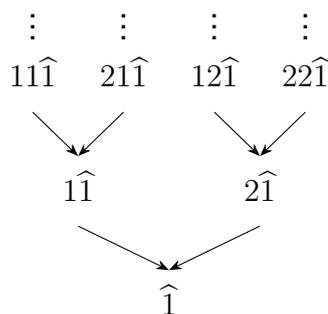
Para  $x \in E_f$ , como  $e(x) \notin \text{dom}(f)$ , note que  $e(x)$  será um poço no grafo associado a  $O_x$  (o mesmo não ocorre caso  $x \in \Omega_f$ , já que é sempre possível aplicar  $f$  nos pontos da órbita de  $x$ ). Assim, podemos visualizar o grafo da seguinte forma: a partir do vértice final  $e(x)$ , tem-se uma aresta com origem em cada ponto de  $f^{-1}(e(x))$  e imagem  $e(x)$ , e o processo se repete em cada ponto de  $f^{-1}(e(x))$ , recursivamente. Como  $f \in M(I)$ ,  $f^{-1}(x)$  é um conjunto no máximo finito, para todo  $x \in I$ . Além disso, denotando

$$f_j^{-1} : f(I_j) \rightarrow \text{dom}(f)$$

como a inversa de  $f|_{I_j}$ , podemos esquematizar a órbita de  $O_x$  como



**Exemplo 3.23.** Seja  $f$ , novamente, a função do Exemplo 3.7. Seja  $x \in E_f$ . Para todo  $z \in O_x$ , note que há dois pontos, um em  $I_1$  e outro em  $I_2$  que são levados a  $z$ . Dessa forma, o grafo  $O_x$  pode ser representado por

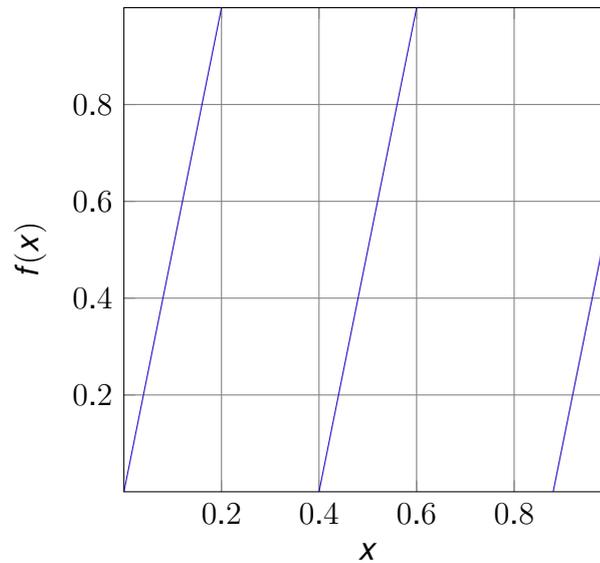


em que  $\hat{1}$  representa qualquer ponto do intervalo de escape  $E_1$ , e os demais vértices são os itinerários dos pontos que podem terminar em  $\hat{1}$ .

**Exemplo 3.24.** Sejam  $I = [0, 1]$  e  $f : \left[0, \frac{1}{5}\right] \cup \left[\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right] \cup \left[\frac{22}{25}, 1\right] \rightarrow I$  a aplicação em  $M(I)$  dada por

$$f(x) := \begin{cases} 5x & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{1}{5} \\ 5x - 2 & \text{se } \frac{2}{5} \leq x \leq \frac{3}{5} \\ 5x - \frac{22}{5} & \text{se } \frac{22}{25} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

e representada pelo gráfico abaixo.



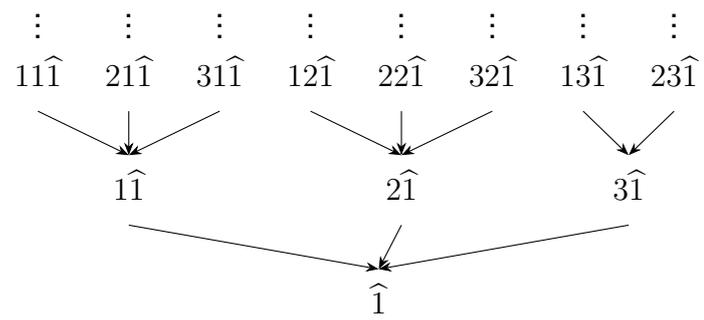
Considere os intervalos de Markov e de escape

$$\begin{cases} I_1 = \left[0, \frac{1}{5}\right] & E_1 = \left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right) \\ I_2 = \left[\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right] & E_2 = \left(\frac{3}{5}, \frac{22}{25}\right) \\ I_3 = \left[\frac{22}{25}, 1\right] \end{cases} .$$

Observando as transições dos intervalos, temos

$$\hat{A}_f = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Sejam  $x \in E_f$ . Se  $e(x) \in E_1$  ou  $e(x) \in E_1$ , temos que a órbita de  $x$  pode ser representada pelo grafo



## 4 REPRESENTAÇÕES DE C\*-ÁLGEBRAS DE GRAFOS RELATIVAS GERADAS POR APLICAÇÕES DE MARKOV

Para este capítulo, fixe  $I \subseteq \mathbb{R}$  um intervalo,  $f \in M(I)$  com conjunto de escape  $E_f$  não-vazio e  $x \in E_f$ . Nosso objetivo é, a partir de  $V \subseteq G_{A_f}^0$  (em que  $G_{A_f}$  é o grafo obtido de  $A_f$ ), construir uma família  $\{H_x\}_{x \in E_f}$  de espaços de Hilbert e uma família  $\{\nu_x\}_{x \in E_f}$  de representações da C\*-álgebra  $C^*(G_{A_f}, V)$  em  $H_x$ . Mais ainda, obteremos condições suficientes para que tais representações, quando existem, sejam fiéis, irredutíveis e/ou unitariamente equivalentes umas às outras. Tal estudo foi feito por Ramos *et al.* (2008) e Ramos, Martins e Pinto (2011), para álgebras de Cuntz-Krieger. Ramos, Martins e Pinto (2017) estudaram as álgebras de Toeplitz (caso  $V = \emptyset$ ). As ideias e resultados obtidos neste último inspiraram o caso geral, desenvolvido por Martins, Pinto e Ramos (2019), artigo usado como base para as construções e resultados detalhados neste capítulo.

Na Seção 4.1, definiremos, para cada  $x \in E_f$ , um espaço de Hilbert  $H_x$  a partir da órbita  $O_x$ , além de uma família de projeções e isometrias parciais  $\{P_i, S_{ij} : i, j = 1, \dots, n_f\}$ , a partir de  $f$ , que farão parte da construção da representação  $\nu_x$ . Na Seção 4.2, descreveremos condições suficientes para a existência, injetividade e irredutibilidade de  $\nu_x$  e estudaremos quando duas destas representações são (ou não) unitariamente equivalentes.

### 4.1 OPERADORES NOS ESPAÇOS DE HILBERT DAS ÓRBITAS

Defina o espaço de Hilbert  $H_x := \ell^2(O_x)$  com o produto interno usual de sequências. Para cada  $y \in O_x$ , defina  $[y] \in H_x$  como sendo a sequência que possui valor 1 na entrada  $y$  e 0 nas demais. Assim, o conjunto

$$\{[y] \in H_x : y \in O_x\}$$

é a base canônica de  $H_x$ .

Para cada  $i \in \{1, \dots, n_f\}$ , defina o operador  $T_i : H_x \rightarrow H_x$  dado por, para cada  $y \in O_x$ ,

$$T_i[y] := \begin{cases} [f_i^{-1}(y)] & \text{se } y \in f(I_i) \\ 0 & \text{se } y \notin f(I_i) \end{cases},$$

lembrando que  $f_i$  denota a bijeção obtida restringindo-se  $f$  a  $I_i$  (e o contradomínio a  $f(I_i)$ ). Com abuso de notação, vamos escrever a definição de  $T_i$  simplesmente como

$$T_i[y] = \chi_{f(I_i)}(y) \cdot [f_i^{-1}(y)],$$

em que  $\chi_{f(I_i)}$  denota a função característica do conjunto  $f(I_i)$ . Alguns abusos de notação semelhantes a este serão usados ao longo do capítulo, sempre que não causarem má interpretação.

**Afirmção 4.1.**  $T_i \in B(H_X)$ .

*Demonstração.* Se  $\lambda \in \mathbb{C}$  e  $a, b \in H_X$ , então

$$a = \sum_{y \in O_x} \alpha_y [y],$$

$$b = \sum_{y \in O_x} \beta_y [y]$$

e

$$\begin{aligned} T_i(a + \lambda b) &= T_i \left( \sum_{y \in O_x} \alpha_y [y] + \lambda \sum_{y \in O_x} \beta_y [y] \right) = \sum_{y \in O_x} (\alpha_y + \lambda \beta_y) T_i[y] \\ &= \sum_{y \in O_x} (\alpha_y T_i[y] + \lambda \beta_y T_i[y]) = \sum_{y \in O_x} \alpha_y T_i[y] + \sum_{y \in O_x} \lambda \beta_y T_i[y] = T_i(a) + \lambda T_i(b). \end{aligned}$$

Para ver que  $T_i$  é limitado, veja que

$$T_i(a) = T_i \left( \sum_{y \in O_x} \alpha_y [y] \right) = \sum_{y \in O_x} \alpha_y T_i[y],$$

portanto,

$$\|T_i(a)\|^2 = \sum_{\substack{y \in O_x \\ T_i[y] \neq 0}} |\alpha_y|^2 \leq \sum_{y \in O_x} |\alpha_y|^2 = \|a\|^2.$$

□

**Afirmção 4.2.** O operador adjunto  $T_i^* \in B(H_X)$  é dado por

$$T_i^*[y] = \chi_{I_i}(y) \cdot [f(y)].$$

*Demonstração.* Tome  $y, z \in O_x$  arbitrários.

- Caso  $z \in I_i$  e  $z = f_i^{-1}(y)$ , segue que  $y \in f(I_i)$  e

$$\langle T_i[y], [z] \rangle = \langle [f_i^{-1}(y)], [z] \rangle = \langle [z], [z] \rangle = 1 = \langle [y], [y] \rangle = \langle [y], [f_i(z)] \rangle = \langle [y], T_i^*[z] \rangle.$$

- Caso  $z \in I_i$ ,  $y \in f(I_i)$  mas  $z \neq f_i^{-1}(y)$ ,

$$\langle T_i[y], [z] \rangle = \langle [f_i^{-1}(y)], [z] \rangle = 0 = \langle [y], [f_i(z)] \rangle = \langle [y], T_i^*[z] \rangle.$$

- Caso  $z \notin I_i$  e  $y \in f(I_i)$ , segue que  $z \neq f_i^{-1}(y)$  e então novamente

$$\langle T_i[y], [z] \rangle = 0 = \langle [y], T_i^*[z] \rangle.$$

- Por fim, o caso  $z \in I_i$  e  $y \notin f(I_i)$  é análogo ao caso anterior. □

**Observação 4.3.** Note que para todo  $i \in \{1, \dots, n_f\}$  tem-se  $T_i^*[e(x)] = 0$ , já que  $e(x) \notin I_i$ . Por outro lado,  $T_i[e(x)] = 0$  se  $e(x) \notin f^{-1}(I_i)$ , ou seja, não há transição do intervalo  $I_i$  para o intervalo de escape  $E_{j(x)}$ . Caso haja tal transição, significa que existe  $y \in I_i$  tal que  $f(y) = e(x)$  e então  $T_i[e(x)] = [y]$ .

**Afirmção 4.4.**  $T_i$  é isometria parcial.

*Demonstração.* Segundo a Proposição A.4 de Raeburn (2004), basta verificar que

$$T_i T_i^* T_i = T_i.$$

Seja  $y \in O_x$  arbitrário.

- Caso  $y \in f(I_i)$ , segue que  $f_i^{-1}(y) \in I_i$  e então

$$T_i T_i^* T_i[y] = T_i T_i^*[f_i^{-1}(y)] = T_i[f_i(f_i^{-1}(y))] = T_i[y].$$

- Caso  $y \notin f(I_i)$ , temos

$$T_i T_i^* T_i[y] = T_i T_i^*(0) = 0 = T_i[y].$$

□

Como vimos na Observação 3.12,  $f$  induz um grafo  $G_{A_f}$  tal que  $G_{A_f}^0 = \{1, \dots, n_f\}$  e  $G_{A_f}^1 = \{e_{ij} : i, j \in G_{A_f}^0, (A_f)_{ij} = 1\}$ , com  $s(e_{ij}) = i$  e  $r(e_{ij}) = j$ . Assim, existe uma aresta  $e_{ij}$  com origem em  $i$  e imagem  $j$  quando há transição entre os intervalos de Markov  $I_i$  e  $I_j$ .

A seguir, para cada  $V \subseteq G_{A_f}^0$ , a partir do conjunto  $\{T_i : i = 1, \dots, n_f\}$ , construiremos uma representação de  $C^*(G_{A_f}, V)$  em  $H_x$ .

Para cada aresta  $e_{ij} \in G_{A_f}^1$  defina o operador

$$S_{ij} := T_i T_j T_j^* \in B(H_x), \tag{15}$$

e para cada  $i \in G_{A_f}^0$  defina os operadores

$$P_i := T_i T_i^* \in B(H_x) \tag{16}$$

$$Q_i := T_i^* T_i \in B(H_x).$$

**Observação 4.5.** Usando a definição dos operadores  $T_i$ , podemos descrever explicitamente os operadores acima definidos. Por exemplo,

$$P_i[y] = T_i T_i^*[y] = \chi_{l_i}(y) T_i[f(y)] = \chi_{l_i}(y) \chi_{f(l_i)}(f(y)) [f_i^{-1}(f(y))] = \chi_{l_i}(y)[y]. \quad (17)$$

De forma semelhante, temos também

$$Q_i[y] = \chi_{f(l_i)}(y)[y] \quad (18)$$

e

$$S_{ij}[y] = \chi_{l_j}(y)[f_i^{-1}(y)]. \quad (19)$$

Além disso,

$$S_{ij}^*[y] = \chi_{l_i}(y) \chi_{f(l_j)}(f(y)) [f_i(y)]. \quad (20)$$

**Afirmção 4.6.**  $\{P_i : i = 1, \dots, n_f\}$  é um conjunto de projeções não-nulas e mutuamente ortogonais.

*Demonstração.* O fato de  $P_i = T_i T_i^*$  ser projeção vem do fato de que  $T_i$  é isometria parcial e o fato de  $P_i$  ser não nula segue da Equação (17). Agora, sejam  $i \neq j$  e  $y \in O_x$ . Note que

$$T_i^* T_j[y] = \chi_{f(l_j)}(y) T_i^*[f_j^{-1}(y)] = \chi_{f(l_j)}(y) \chi_{l_i}(f_j^{-1}(y)) [f_i(f_j^{-1}(y))] = 0,$$

pois  $\chi_{l_i}(f_j^{-1}(y)) = 0$ , já que  $f_j^{-1}(y) \in l_j$ . Assim,

$$P_i P_j = T_i T_i^* T_j T_j^* = T_i 0 T_j^* = 0.$$

□

**Afirmção 4.7.**  $S_{ij}$  é isometria parcial não-nula.

*Demonstração.* Segundo a Proposição A.4 de Raeburn (2004), para ver que  $S_{ij}$  é isometria parcial, basta verificar que  $S_{ij}^* S_{ij}$  é projeção. Mas

$$S_{ij}^* S_{ij} = T_j T_j^* T_i^* T_i T_j T_j^*,$$

que é projeção, já que  $T_j T_j^*$ ,  $T_i^* T_i$  e  $T_j T_j^*$  são projeções que comutam (vimos que  $\{P_i : i = 1, \dots, n_f\}$  foram um conjunto de operadores mutuamente ortogonais). Para vermos que  $S_{ij}$  é não-nulo, primeiro, usamos a propriedade (M4) da Definição 3.1 para garantir que existe  $y \in O_x \cap l_j$ . Em seguida, pela propriedade (M2) e pela hipótese de que há transição entre  $l_i$  e  $l_j$ , tem-se que  $l_j \subseteq f(l_i)$ . Assim,  $y = f(z)$  (e em particular  $z \in O_x$ ) para algum  $z \in l_i$ . Portanto,  $S_{ij}[y] = [z]$ .

□

Para todo  $y \in O_x$ , denote por  $P_y$  o operador em  $B(H_x)$  de projeção na entrada  $y$ .

**Lema 4.8.** Para todo  $k \in \{1, \dots, n_f\}$ ,

$$\sum_{j=1}^{n_f} (A_f)_{kj} P_j \leq Q_k \leq \sum_{j=1}^{n_f} (A_f)_{kj} P_j + (\widehat{A}_f)_{k\iota(x)} P_{e(x)}$$

A prova do Lema 4.8 será omitida aqui e pode ser encontrada em Ramos, Martins e Pinto (2017).

**Observação 4.9.** Para entendermos o significado das inequações do Lema 4.8, apresentamos uma ideia intuitiva. Para cada  $k \in \{1, \dots, n_f\}$ , podemos ver, através da Equação (18), que a projeção  $Q_k$  “corresponde” ao conjunto  $O_x \cap f(I_k)$ . Vamos decompor esse conjunto em termos dos intervalos de Markov e de escape:

- Pela propriedade (M2) da Definição 3.1, a parte de  $f(I_k)$  que é alcançada pelos intervalos de Markov é uma união dos mesmos, ou seja,

$$f(I_k) \cap \left( \bigcup_{j=1}^{n_f} I_j \right) = \bigcup_{I_j \subseteq f(I_k)} I_j.$$

Como observamos na Equação (17), o operador  $P_j$  corresponde a  $I_j$  para todo  $j \in \{1, \dots, n_f\}$ . Como  $I_j \subseteq f(I_k)$  se, e somente se,  $(A_f)_{kj} = 1$ , então “a parte de  $Q_k$  que é coberta pelos  $P_j$ ” é

$$\sum_{j=1}^{n_f} (A_f)_{kj} P_j.$$

- Há, entretanto, uma parte de  $f(I_k) \cap O_x$  que não é alcançada pelos intervalos de Markov e, portanto, pertence aos intervalos de escape. Vimos que o único ponto de  $O_x$  que pertence a um intervalo de escape é  $e(x)$ , que pode ou não estar em  $f(I_k)$ .

Assim, seguem as desigualdades. Caso  $e(x) \notin f(I_k)$ , temos

$$Q_k = \sum_{j=1}^{n_f} (A_f)_{kj} P_j.$$

Caso  $e(x) \in f(I_k)$ , temos

$$Q_k = \sum_{j=1}^{n_f} (A_f)_{kj} P_j + (\widehat{A}_f)_{k\iota(x)} P_{e(x)}.$$

## 4.2 EXISTÊNCIA E PROPRIEDADES DAS REPRESENTAÇÕES

Fixe  $\{s_{e_{ij}}, p_i\}$  uma  $G_{A_f}$ -família de Cuntz-Krieger com todos os operadores não-nulos e defina  $\nu_X : \{s_{e_{ij}}, p_i\} \rightarrow B(H_X)$  dado por

$$\begin{cases} \nu_X(s_{e_{ij}}) \mapsto S_{ij} \\ \nu_X(p_i) \mapsto P_i \end{cases}.$$

Fixe, também,  $V \subseteq G_{A_f}^0$ .

**Teorema 4.10.** *Se, para todo  $i \in V$ ,  $(\widehat{A}_f)_{i\iota(x)} = 0$ , ou seja, não há transição do intervalo de Markov  $I_i$  para o intervalo de escape  $E_{j(x)}$ , então  $\nu_X$  define uma representação de  $C^*(G_{A_f}, V)$  em  $H_X$ .*

*Demonstração.* Para mostrar que  $\nu_X$  define um  $*$ -homomorfismo de  $C^*(G_{A_f}, V)$  para  $B(H_X)$ , vamos usar a propriedade universal de  $C^*(G_{A_f}, V)$  (Teorema 2.25). Para isso, basta mostrar que  $\nu_X$  é uma representação de  $\{s_{ij}, p_i\}$  que satisfaz as relações que caracterizam  $C^*(G_{A_f}, V)$  como  $C^*$ -álgebra universal, ou seja, que os operadores  $S_{ij}$  e  $P_i$  satisfazem as equações (7) e (8).

- Sejam  $i, j \in \{1, \dots, n_f\}$  tais que  $(A_f)_{ij} = 1$ . Usando a Observação 4.5, temos

$$S_{ij}^* S_{ij} = T_j T_j^* T_i^* T_i T_j T_j^* = P_j Q_i P_j \quad (21)$$

Mas note que, para  $y \in O_X$ , como  $(A_f)_{ij} = 1$ , existe transição de  $I_j$  para  $I_i$ , então

$$Q_i P_j [y] = \chi_{I_j}(y) Q_i [y] = \chi_{I_j}(y) \chi_{f(I_j)}(y) [y] = \chi_{I_j}(y) [y] = P_j [y],$$

pois  $I_j \subseteq f(I_j)$ .

Assim, mostramos que

$$Q_i P_j = P_j. \quad (22)$$

Usando (22) em (21), temos

$$S_{ij}^* S_{ij} = P_j P_j = P_j = P_{r(e_{ij})},$$

o que mostra que  $\{S_{ij}, P_i\}$  satisfaz (7).

- Para a outra condição, seja  $i \in V$  e veja que, por causa do Lema 4.8 e da hipótese  $(\widehat{A}_f)_{i\iota(x)} = 0$ , temos

$$\sum_{j=1}^{n_f} (A_f)_{ij} P_j = Q_i,$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} \sum_{e_{ij} \in s^{-1}(i)} S_{ij} S_{ij}^* &= \sum_{e_{ij} \in G_{A_f}^1} S_{ij} S_{ij}^* = \sum_{j: (A_f)_{ij}=1} T_i T_j T_j^* T_j T_j^* T_i^* = \sum_{j: (A_f)_{ij}=1} T_i P_j T_i^* \\ &= T_i \left( \sum_{j: (A_f)_{ij}=1} P_j \right) T_i^* = T_i \left( \sum_{j=1}^{n_f} (A_f)_{ij} P_j \right) T_i^* = T_i Q_i T_i^* = T_i T_i^* T_i T_i^* \\ &= P_i P_i = P_i, \end{aligned}$$

o que mostra que  $\{S_{ij}, P_j\}$  satisfaz (8). □

**Teorema 4.11.** *Se, para todo  $i \in V$  e todo  $k \notin V$ ,  $(\widehat{A}_f)_{i\ell(x)} = 0$  e  $(\widehat{A}_f)_{k\ell(x)} = 1$ , ou seja, não há transição entre  $I_i$  e  $E_{j(x)}$ , mas há transição entre  $I_k$  e  $E_{j(x)}$ , então  $\nu_X$  define uma representação fiel de  $C^*(G_{A_f}, V)$  em  $H_X$ .*

*Demonstração.* A existência da representação  $\nu_X : C^*(G_{A_f}, V) \rightarrow B(H_X)$  é garantida pelo Teorema 4.10, bastando verificar a injetividade de  $\nu_X$  para o caso em que  $(\widehat{A}_f)_{k\ell(x)} = 1$  para todo  $k \notin V$ .

Sejam  $G_{A_f}^V$  o grafo estendido que foi definido em 2.34 e  $\psi : C^*(G_{A_f}^V) \rightarrow C^*(G_{A_f}, V)$  o isomorfismo dado pelo Teorema 2.36. Fixe  $\{\tilde{s}_{ij}, \tilde{p}_j\}$  uma  $G_{A_f}^V$ -família de Cuntz-Krieger.

Para verificar que  $\nu_X$  é injetiva, é suficiente verificar que  $\nu_X \circ \psi : C^*(G_{A_f}^V) \rightarrow B(H_X)$  é injetiva. Pelo Teorema de unicidade de Cuntz-Krieger (Corolário 2.5 de Raeburn (2004)), basta checar que  $\nu_X(\psi(\tilde{p}_i)) \neq 0$  para todo  $i \in (G_{A_f}^V)^0$ .

- Caso  $i \in V$ ,  $\nu_X(\psi(\tilde{p}_i)) = \nu_X(p_i) = P_i \neq 0$ .
- Caso  $i = k'$  para algum  $k \notin V$ , então

$$\begin{aligned} \nu_X(\psi(\tilde{p}_i)) &= \nu_X \left( p_k - \sum_{j: s(e_{kj})=k} s_{e_{kj}} s_{e_{kj}}^* \right) = P_k - \sum_{j: s(e_{kj})=k} S_{kj} S_{kj}^* = \\ &= T_k T_k^* - \sum_{j=1}^{n_f} a_{kj} T_k T_j T_j^* T_j T_j^* T_k^* = T_k T_k^* T_k T_k^* - \sum_{j=1}^{n_f} a_{kj} T_k T_j T_j^* T_k^* = \\ &= T_k \left( T_k^* T_k - \sum_{j=1}^{n_f} T_j T_j^* \right) T_k^* = T_k \left( (\widehat{A}_f)_{k\ell(x)} P_{e(x)} \right) T_k^* = T_k P_{e(x)} T_k^* \neq 0, \quad (23) \end{aligned}$$

pois

$$\begin{aligned} T_k P_{e(x)} T_k^* [f_k^{-1}(e(x))] &= \chi_{I_k}(f_k^{-1}(e(x))) T_k P_{e(x)} [e(x)] = \chi_{I_k}(f_k^{-1}(e(x))) T_k P_{e(x)} [e(x)] \\ &= \chi_{I_k}(f_k^{-1}(e(x))) T_k [e(x)] = \chi_{I_k}(f_k^{-1}(e(x))) \chi_{f(I_k)}(e(x)) [f_k^{-1}(e(x))] = [f_k^{-1}(e(x))], \end{aligned}$$

já que existe transição de  $I_k$  para  $E_{j(x)}$ , pois, por hipótese, temos  $(\widehat{A}_f)_{k\iota(x)} = 1$ . (Na verdade, podemos mostrar mais ainda: temos

$$T_k P_{e(x)} T_k^* = P_{f_k^{-1}(e(x))}, \quad (24)$$

que é uma projecção não-nula.)

- Por fim, caso  $i \in (G_{A_f}^V)^0 \setminus V$ , temos

$$\nu_x(\psi(\tilde{p}_i)) = \nu_x \left( \sum_{j:s(e_{ij})=i} s_{e_{ij}} s_{e_{ij}}^* \right) = \sum_{j:s(e_{ij})=i} s_{ij} s_{ij}^*. \quad (25)$$

Mas, quando existe transição de  $I_j$  para  $I_j$ , podemos tomar  $y \in O_x \cap I_j$  de modo que

$$s_{ij} s_{ij}^* [y] = [y],$$

o que mostra que o operador da Equação (25) é não-nulo.  $\square$

**Exemplo 4.12.** Sejam  $f$  a aplicação de Markov do Exemplo 3.7 e  $x \in E_f$  arbitrário. O único intervalo de escape é  $E_1 \ni e(x)$ , logo  $\iota(x) = \widehat{1}$ . Temos também  $G_{A_f}^0 = \{1, 2\}$  e

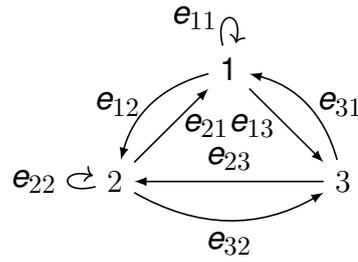
$$\widehat{A}_f = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para  $V \subseteq G_{A_f}^0$ , note que se  $1 \in V$  ou  $2 \in V$ , temos  $(\widehat{A}_f)_{i\iota(x)} \neq 0$  para algum  $i \in V$ . Assim, o Teorema 4.10 não é aplicável e não podemos construir a representação  $\nu_x$  de  $C^*(G_{A_f}, V)$ .

**Exemplo 4.13.** Sejam  $f$  a aplicação de Markov do Exemplo 3.24 e  $x \in E_f$  arbitrário tal que  $e(x) \in E_2$ , ou seja,  $\iota(x) = \widehat{2}$ . Temos

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \widehat{A}_f = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$G_{A_f}^0 = \{1, 2, 3\}$ ,  $G_{A_f}^1 = \{e_{11}, e_{12}, e_{13}, e_{21}, e_{22}, e_{23}, e_{31}, e_{32}\}$  e  $G_{A_f}$  é representado pelo grafo abaixo.



Seja  $x \in E_f$  e considere os operadores

$$P_1, P_2, P_3, S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{21}, S_{22}, S_{23}, S_{31}, S_{32} \in B(H_x) \quad (26)$$

definidos pelas Equações (15) e (16). Seja  $V \subseteq G_{A_f}^0$ .

- Caso  $V = \{3\}$  e  $e(x) \in E_2$ , não temos transição de  $I_i$  para  $E_2$  para todo  $i \in V$ , mas existe tal transição para  $i \notin V$ . Assim, os operadores em (26) definem uma representação fiel de  $C^*(G_{A_f}, V)$ .
- Em todos os demais casos, as condições do Teorema 4.10 não são satisfeitas, já que há transição dos intervalos de Markov para os intervalos de escape.

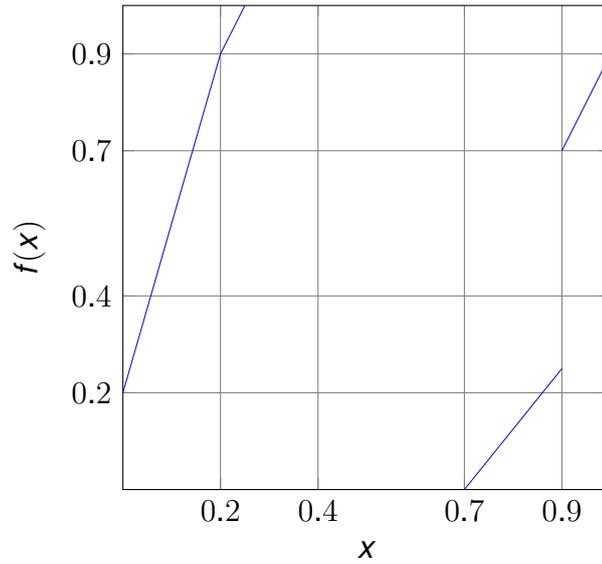
**Exemplo 4.14.** Sejam  $I = [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$  e  $f : [0, \frac{1}{4}] \cup [\frac{7}{10}, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  em  $M(I)$  dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{7}{2}x + \frac{1}{5} & \text{se } x \in I_1 \\ 2x + \frac{1}{2} & \text{se } x \in I_2 \\ \frac{5}{4}x - \frac{7}{8} & \text{se } x \in I_3 \\ 2x - \frac{11}{10} & \text{se } x \in I_4 \end{cases},$$

com

$$\begin{cases} I_1 = [0, \frac{1}{5}] \\ I_2 = [\frac{1}{5}, \frac{1}{4}] \\ I_3 = [\frac{7}{10}, \frac{9}{10}] \\ I_4 = [\frac{9}{10}, 1] \end{cases}, \quad E_2 = (\frac{1}{4}, \frac{7}{10})$$

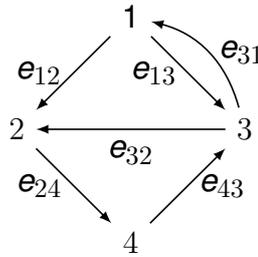
e representada pelo gráfico abaixo.



Assim,

$$A_f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } \widehat{A}_f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Veja, ainda, que  $G_{A_f}^0 = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $G_{A_f}^1 = \{e_{12}, e_{13}, e_{24}, e_{31}, e_{32}, e_{43}\}$  e  $G_{A_f}$  é representado pelo grafo abaixo.



Para  $x \in E_f$ , temos  $x \in E_2$ , ou seja,  $\iota(x) = \widehat{2}$ . Considere os operadores

$$P_1, P_2, P_3, P_4, S_{12}, S_{13}, S_{24}, S_{31}, S_{32}, S_{43} \in B(H_x) \quad (27)$$

definidos pelas Equações (15) e (16). Seja  $V \subseteq G_{A_f}^0$ .

- Veja que, caso  $1 \in V$  ou  $4 \in V$ , então  $(\widehat{A}_f)_{i\iota(x)} \neq 0$  para algum  $i \in V$ , já que há transição dos intervalos  $I_1$  e  $I_4$  para o intervalo de escape  $E_2$ . Assim, os operadores em (27) não definem uma representação de  $C^*(G_{A_f}, V)$ .
- Caso  $V = \{2\}$  ou  $V = \{3\}$ , temos  $(\widehat{A}_f)_{i\iota(x)} = 0$  para todo  $i \in V$  e portanto os operadores em (27) definem a representação  $\nu_x$ , que, neste caso, não é fiel.

- Por outro lado, caso  $V = \{2, 3\}$ , a representação  $\nu_x$  é fiel, já que as condições do Teorema 4.11 são satisfeitas.

Usando o Teorema 4.11, vamos ver como é possível sempre obter  $V \subseteq G_{A_f}^0$  tal que a representação  $\nu_x$  é fiel. Mais ainda, é possível obter uma infinidade de aplicações de Markov com conjunto de escape  $E_f \ni x$  não-vazio, cuja representação  $\nu_x$  é fiel, para algum  $V \subseteq G_{A_f}^0$  que fixarmos.

Sejam  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A \in M_n(\{0, 1\})$  e  $G_A$  seu grafo associado. Para cada  $V \subseteq G_A^0$  define  $u_V \in \{0, 1\}^n$  como o vetor que tem 0 nas entradas  $(u_V)_i$  tais que  $i \in V$  e 1 nas demais. Por outro lado, se  $u = (u_1, \dots, u_n) \in \{0, 1\}^n$ , define  $V_u \subseteq G_A^0$  como

$$V_u := \left\{ i \in G_A^0 : u_i = 0 \right\}.$$

**Observação 4.15.** É claro que se  $V \subseteq G_A^0$ , então  $V = V_{u_V}$ , e se  $u \in \{0, 1\}^n$ , então  $u = u_{V_u}$ . Além disso, a construção acima define uma bijeção entre  $P(G_A^0)$  e  $\{0, 1\}^n$ .

**Corolário 4.16.** *Escrevendo  $\widehat{A}_f$  na forma*

$$\left( \begin{array}{c|c} A_f & B_f \\ \hline 0' & 0'' \end{array} \right)$$

com a notação da Observação 3.15, cada coluna  $u$  da matriz  $B_f$  dá origem a uma representação fiel de  $C^*(G_{A_f}, V_u)$  em  $H_x$ .

*Demonstração.* Seja  $u$  uma coluna de  $B_f$ . Como construído na Observação 3.15,  $u$  representa as transições dos intervalos de Markov de  $f$  para algum intervalo de escape  $E_j$ . Seja  $x \in E_f$  tal que  $e(x) \in E_{j(x)}$ . Para  $i \in V_u$ , temos, por definição de  $V_u$ ,  $u_i = 0$ , ou seja, não há transição de  $I_i$  para  $E_{j(x)}$ . Assim,  $(\widehat{A}_f)_{iu(x)} = 0$ . Analogamente, para  $i \notin V_u$ ,  $(\widehat{A}_f)_{iu(x)} = u_i = 1$ . Portanto, o Teorema 4.11 garante que  $\nu_x$  é uma representação fiel de  $C^*(G_{A_f}, V_u)$  em  $H_x$ .  $\square$

**Corolário 4.17.** *Dado  $u \in \{0, 1\}^n$ , existe  $f \in M(I)$  tal que*

$$P\widehat{A}_fP^T = \left( \begin{array}{c|c} A_f & \begin{array}{c} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{array} \\ \hline 0_{1 \times n} & 0 \end{array} \right),$$

para alguma matriz de permutação  $P$ , e para todo  $x \in E_f$ ,  $\nu_x$  é uma representação fiel de  $C^*(G_{A_f}, V_u)$  em  $H_x$ .

*Demonstração.* A existência de uma aplicação de Markov a partir de uma matriz é garantida pela construção feita na Proposição 3.5 de Ramos, Martins e Pinto (2019), e será omitida aqui. Tomando  $x \in E_f$  arbitrário, temos  $e(x) \in E_{j(x)}$ , com  $E_{j(x)}$  sendo o único intervalo de escape de  $f$ . Assim, para  $i \in V_u$ , temos  $(\widehat{A}_f)_{i, e(x)} = u_i = 0$  e, para  $i \notin V_u$ , temos  $(\widehat{A}_f)_{i, e(x)} = u_i = 1$ , o que garante a injetividade de  $\nu_x$ .  $\square$

**Observação 4.18.** Tomando  $E_i$  e  $E_j$  dois intervalos de escape distintos e suas respectivas colunas  $u_k$  e  $u_j$  em  $B_f$ , podemos tomar  $x, y \in E_f$  tais que  $e(x) \in E_k$  e  $e(y) \in E_j$  e o Teorema 4.10 garante que existem duas representações,  $\nu_x$  e  $\nu_y$ , de  $C^*(G_{A_f}, V_{u_k} \cap V_{u_j})$ , uma em  $H_x$  e outra em  $H_y$ . A injetividade das representações não pode ser garantida nesse caso. Por outro lado, o Corolário 4.16 garante que  $\nu_x$  é uma representação fiel de  $C^*(G_{A_f}, V_{u_k})$  em  $H_x$  e  $\nu_y$  é uma representação fiel de  $C^*(G_{A_f}, V_{u_j})$  em  $H_y$ .

**Observação 4.19.** Ainda no caso da observação anterior, note que  $\nu_x$  e  $\nu_y$  não são representações unitariamente equivalentes no caso em que  $u_k \neq u_j$ . De fato, podemos tomar, em particular, um  $i \in \{1, \dots, n_f\}$  tal que  $(u_k)_i = 1$  e  $(u_j)_i = 0$ , ou seja, para certos  $x$  e  $y$ ,

$$\begin{cases} (\widehat{A}_f)_{i, e(x)} = 1 \\ (\widehat{A}_f)_{i, e(y)} = 0 \end{cases} . \quad (28)$$

Defina o vetor

$$w_i := p_i - \sum_{j: s(e_{ij})=i} s_{ij} s_{ij}^*$$

e veja que, aplicando o mesmo cálculo feito em (23), as equações (28) implicam

$$\begin{cases} \nu_x(w_i) \neq 0 \\ \nu_y(w_i) = 0 \end{cases} \quad (29)$$

Assim, caso  $\nu_x$  e  $\nu_y$  fossem unitariamente equivalentes, existiria um operador unitário  $U : B(H_y) \rightarrow C^*(G_{A_f}, V_{u_k} \cap V_{u_j})$  tal que  $\nu_x U = U \nu_y$ , ou seja,  $U^* \nu_x U = \nu_y$ , mas isso entra em contradição com (29).

**Corolário 4.20.** *Se  $x, y \in E_f$ ,  $\nu_x$  e  $\nu_y$  são duas representações de  $C^*(G_{A_f}, V)$  e  $O_x$  e  $O_y$  são isomorfos como grafos (com este isomorfismo preservando os endereços dos pontos nas órbitas), então  $\nu_x$  e  $\nu_y$  são unitariamente equivalentes.*

*Demonstração.* Como  $O_x$  e  $O_y$  são isomorfos como grafos, existem isomorfismos  $\alpha : [O_x]^0 \rightarrow [O_y]^0$  e  $\beta : [O_x]^1 \rightarrow [O_y]^1$  satisfazendo ???. Assim, defina o operador  $U : H_x \rightarrow H_y$  pondo  $U[y] = [w]$  se, e somente se,  $\alpha(y) = w$ . Primeiro, note que o fato de  $\alpha$  ser isomorfismo implica que  $U$  é um operador unitário. Então, para verificar que  $\nu_x$  e  $\nu_y$  são unitariamente equivalentes, vamos ver que, para todo  $i \in \{1, \dots, n_f\}$ , vale

$$U \nu_x(p_i) = \nu_y(p_i) U, \quad (30)$$

e, para  $i, j \in \{1, \dots, n_f\}$  tal que  $(A_f)_{ij} = 1$ , vale

$$U\nu_x(s_{ij}) = \nu_y(s_{ij})U. \quad (31)$$

Para isso, tome  $z \in O_x$  arbitrário. Seja  $j := \text{ad}_f(z)$ . Usando a definição de  $\nu_x$  e dos operadores  $P_j$ , temos

$$U\nu_x(p_j)[z] = UP_j[z] = U[z] = [\alpha(z)]$$

e, por outro lado,

$$\nu_y(p_j)U[z] = P_jU[z] = P_j[\alpha(z)] = [\alpha(z)],$$

já que  $\text{ad}_f(\alpha(z)) = j$  (hipótese). Agora, para  $i \neq j$ , temos

$$U\nu_x(p_i)[z] = UP_i[z] = U0 = 0$$

e, por outro lado,

$$\nu_y(p_i)U[z] = P_iU[z] = P_i[\alpha(z)] = 0,$$

pois  $\alpha(z) \notin I_j$ . Portanto, mostramos (30). De forma semelhante, mostra-se (31). Por exemplo, veja para  $i$  tal que  $(A_f)_{ij} = 1$ , temos

$$U\nu_x(s_{ij})[z] = US_{ij}[z] = U[f_i^{-1}(z)] = [\alpha(f_i^{-1}(z))],$$

e, por outro lado,

$$\nu_x(s_{ij})U[z] = S_{ij}[\alpha(z)] = [f_i^{-1}(\alpha(z))].$$

Mas

$$\alpha(f_i^{-1}(z)) = f_i^{-1}(\alpha(z))$$

devido à preservação das arestas entre  $O_x$  e  $O_y$  dada por  $\beta$ .

□

**Corolário 4.21.**  $\nu_x$  é uma representação irredutível.

*Demonstração.* Para ver que  $\nu_x$  é irredutível, basta ver que todo vetor  $\xi \in H_x$  é cíclico para  $\nu_x(C^*(G_{A_f}, V))$ , ou seja,

$$\overline{\nu_x(C^*(G_{A_f}, V))\xi} = H_x, \forall \xi \in H_x. \quad (32)$$

Primeiro, veja que (32) se cumpre para todo  $\xi = [y]$ , com  $y \in O_x$ . De fato, como  $S_{ij}, S_{ij}^* \in \nu_x(C^*(G_{A_f}, V))$  para todos os  $i, j$  tais que  $(A_f)_{ij} = 1$ , podemos observar através de (19) e (20) que, aplicando esses operadores (e suas devidas composições) em  $[y]$ , obtém-se como imagem todo o  $H_x$ , já que  $y$  percorre toda a sua órbita  $O_x$ . Agora, seja  $\xi \in H_x$  não-nulo arbitrário. Vamos aproximar  $\xi$  de algum vetor da base

de  $H_X$  através de uma sequência de operadores  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \nu_X(\mathcal{C}^*(G_{A_f}, V))$ . Escolha  $y \in O_X$  tal que o produto interno  $\langle \xi, [y] \rangle$  seja não-nulo, que é possível já que  $\xi \neq 0$ . Temos

$$\text{it}_f(y) = j_1 j_2 \dots j_k \iota(x),$$

com  $j_1, \dots, j_k \in \{0, \dots, n_f\}$ . Para cada  $r \in \{1, \dots, k\}$ , defina  $j_{(r)} := (j_1, \dots, j_r)$  e, para  $r > k$ ,  $j_{(r)} := (j_1, \dots, j_k)$ . Defina também  $T_{j_{(r)}} := T_{j_1} \dots T_{j_r}$ . Considere a sequência de projeções  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  dada por

$$A_n := T_{j_{(n)}} T_{j_{(n)}}^*.$$

Assim, temos, por exemplo,

$$A_2 = T_{j_{(2)}} T_{j_{(2)}}^* = T_{j_1} T_{j_2} T_{j_2}^* T_{j_1}^*,$$

ou seja,  $A_2[z] = [z]$  caso  $z \in j_1$  e  $f(z) \in j_2$  e  $A_2[z] = 0$  caso contrário. Ou seja,  $A_n$  verifica se  $z$  está no itinerário de  $y$  e, caso esteja, age como o operador identidade. Dessa forma,  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  define uma sequência decrescente de projeções. Se definirmos  $H_n^Y$  como sendo a imagem de  $A_n$ , a sequência  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge fortemente para  $P$  – o operador que projeta em  $\bigcap_{n=1}^{\infty} H_n^Y$ . Como  $f$  é de Markov, (M3) implica que se  $z \in \text{dom}(f)$  é tal que  $\text{it}_f(z) = \text{it}_f(y)$ , então  $z = y$ . Assim,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} H_n^Y = \mathbb{C}[y].$$

Portanto, como

$$A_n \in \nu_X(\mathcal{C}^*(G_{A_f}, V)), \forall n \in \mathbb{N},$$

temos

$$\overline{\nu_X(\mathcal{C}^*(G_{A_f}, V))} \xi \ni P\xi = \langle \xi, [y] \rangle \cdot [y].$$

Dessa forma, se  $h \in H_X$  é arbitrário, vimos que existe  $S \in \nu_X(\mathcal{C}^*(G_{A_f}, V))$  tal que  $S[y] = h$  e, então,  $\langle \xi, [y] \rangle^{-1} S P \xi \in \nu_X(\mathcal{C}^*(G_{A_f}, V))$  é tal que

$$\langle \xi, [y] \rangle^{-1} S P \xi = \langle \xi, [y] \rangle \langle \xi, [y] \rangle^{-1} S[y] = S[y] = h$$

□

## 5 APLICAÇÕES DE MARKOV, SISTEMAS RAMIFICADOS E SUAS REPRESENTAÇÕES

Para este capítulo, fixe  $G$  um grafo,  $H$  um espaço de Hilbert,  $\{s_e, p_v\}$  uma  $G$ -família de Cuntz-Krieger em  $B(H)$  e  $(X, \mathbb{A}, \mu)$  um espaço de medida. Se  $A, B \in \mathbb{A}$ , vamos escrever  $A \stackrel{\mu\text{-qtp}}{\subseteq} B$  quando  $\mu(A \setminus B) = 0$  e  $A \stackrel{\mu\text{-qtp}}{=} B$  quando  $\mu((A \setminus B) \cup (B \setminus A)) = 0$ . Se  $f, g : A \rightarrow X$  são duas funções mensuráveis, vamos escrever  $f \stackrel{\mu\text{-qtp}}{=} g$  quando  $\mu(\{x \in A : f(x) \neq g(x)\}) = 0$ . Além disso, se  $\mu, \nu$  são duas medidas em  $(X, \mathbb{A})$ , vamos escrever  $\nu \ll \mu$  quando  $\nu$  é absolutamente contínua com relação a  $\mu$ , ou seja,  $\mu(A) = 0$  implica  $\nu(A) = 0$ . Por fim, se  $f, g$  são funções quaisquer, denote  $f \cdot g$  por  $M_f(g)$ , ou seja,  $M_f$  é o operador de multiplicação pela função  $f$ .

Nosso objetivo é continuar estudando casos em que é possível obter representações (fiéis) de  $C^*$ -álgebras de grafos e de  $C^*$ -álgebras de grafos relativas. Desta vez, utilizaremos sistemas ramificados em espaços de medida para construí-las. Nos baseamos em Gonçalves, Royer e Li (2016) para  $C^*$ -álgebras de grafos e em Martins *et al.* (2023) para  $C^*$ -álgebras grafos de relativas.

Na Seção 5.1, definimos sistemas ramificados em espaços de medida e construímos representações de  $C^*(G)$  em  $L^2(X, \mu)$ . Na Seção 5.2, definimos sistemas ramificados relativos em espaços de medida e estudamos os casos em que as representações de  $C^*(G, V)$  em  $L^2(X, \mu)$  são fiéis. Por fim, na Seção 5.3, construímos sistemas ramificados a partir de aplicações de Markov e mostramos que as representações obtidas no Capítulo 4 coincidem com as representações obtidas neste capítulo.

### 5.1 SISTEMAS RAMIFICADOS E REPRESENTAÇÕES DE $C^*$ -ÁLGEBRAS DE GRAFOS

**Definição 5.1.** Sejam famílias  $\{R_e\}_{e \in G^1}$  e  $\{D_v\}_{v \in G^0}$  de subconjuntos mensuráveis de  $X$  e famílias  $\{f_e : D_{r(e)} \rightarrow R_e\}_{e \in G^1}$  e  $\{f_e^{-1} : R_e \rightarrow D_{r(e)}\}_{e \in G^1}$  de funções mensuráveis tais que:

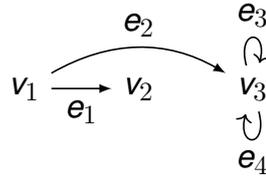
1.  $R_e \cap R_f \stackrel{\mu\text{-qtp}}{=} \emptyset$  para  $e \neq f \in G^1$ ;
2.  $D_u \cap D_v \stackrel{\mu\text{-qtp}}{=} \emptyset$  para  $u \neq v \in G^0$ ;
3.  $R_e \stackrel{\mu\text{-qtp}}{\subseteq} D_{s(e)}$  para  $e \in G^1$ ;
4.  $D_v \stackrel{\mu\text{-qtp}}{=} \bigcup_{e \in s^{-1}(v)} R_e$  se  $v \in R(G)$ ; e
5. para todo  $e \in G^1$ ,  $f_e \circ f_e^{-1} \stackrel{\mu\text{-qtp}}{=} \text{Id}_{R_e}$ ,  $f_e^{-1} \circ f_e \stackrel{\mu\text{-qtp}}{=} \text{Id}_{D_{r(e)}}$ , a medida pushforward  $\mu \circ f_e$  de  $f_e^{-1}$  é absolutamente contínua com respeito a  $\mu$  em  $D_{r(e)}$  e a medida pushforward  $\mu \circ f_e^{-1}$  de  $f_e$  é absolutamente contínua com respeito a  $\mu$  em  $R_e$ .

Sob estas condições, dizemos que  $\{R_e, D_v, f_e\}_{e \in G^1, v \in G^0}$  é um  $G$ -sistema ramificado em  $(X, \mu)$ .

**Observação 5.2.** A definição de um sistema ramificado pode parecer muito técnica, mas não é nada mais do que uma “tradução” das condições de Cuntz-Krieger para o contexto de subconjuntos e funções mensuráveis.

**Observação 5.3.** Assumindo que  $\mu$  é  $\sigma$ -finita quando restrita a  $D_v$ , para cada  $v \in G^0$ , o item 5 da Definição 5.1 implica na existência das derivadas de Radon-Nikodým,  $d(\mu \circ f_e)/d\mu$  (com domínio  $D_{r(e)}$ ) e  $d(\mu \circ f_e^{-1})/d\mu$  (com domínio  $R_e$ ) que serão denotadas, respectivamente, por  $\Phi_{f_e}$  e  $\Phi_{f_e^{-1}}$ . Por questões práticas, estenda  $\Phi_{f_e}$  e  $\Phi_{f_e^{-1}}$  para todo  $X$ , pondo valor 0 nos pontos onde as funções não eram definidas inicialmente.

**Exemplo 5.4.** Seja  $G$  o grafo dado pela figura a seguir.



Considere, em  $\mathbb{R}$ , a medida de Lebesgue, denotada por  $\lambda$ , e defina os seguintes subconjuntos de  $\mathbb{R}$

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{e_i} = [i - 1, i] \text{ para } i = 1, 2, 3, 4 \\ D_{v_1} = [0, 2] \\ D_{v_2} = [-1, 0] \\ D_{v_3} = [2, 4] \end{array} \right. .$$

As condições 1-4 da Definição 5.1 são facilmente verificáveis neste caso. Além disso, para cada  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$  defina  $f_{e_i} : D_{r(e_i)} \rightarrow R_{e_i}$  dadas por

$$\left\{ \begin{array}{l} f_{e_1}(x) = x + 1 \\ f_{e_2}(x) = \frac{x}{2} \\ f_{e_3}(x) = \frac{x}{2} + 1 \\ f_{e_4}(x) = \frac{x}{2} + 2 \end{array} \right. ,$$

que satisfazem a condição 5 da Definição 5.1. Neste caso,  $\{R_{e_i}, D_{v_j}, f_{e_i}\}_{e_i \in G^1, v_j \in G^0}$  é um  $G$ -sistema ramificado em  $(\mathbb{R}, \lambda)$ .

**Teorema 5.5.** Para todo grafo  $G$  existe  $X \subseteq \mathbb{R}$  e  $\{R_{e_i}, D_{v_j}, f_{e_i}\}_{e_i \in G^1, v_j \in G^0}$  um  $G$ -sistema ramificado em  $(X, \lambda)$ , em que  $\lambda$  é a medida de Lebesgue em  $\mathbb{R}$ .

A prova do Teorema 5.5 pode ser encontrada em Gonçalves e Royer (2012).

Para cada  $e \in G^1$ , defina o operador  $\pi_e : L^2(X, \mu) \rightarrow L^2(X, \mu)$  por

$$[\pi_e(\phi)](x) := \begin{cases} \Phi_{f_e^{-1}}^{\frac{1}{2}}(x) \cdot \phi(f_e^{-1}(x)) & \text{se } x \in R_e, \\ 0 & \text{se } x \notin R_e. \end{cases} \quad (33)$$

Usando uma notação análoga à que foi feita no capítulo anterior, vamos escrever (33) simplesmente como

$$\pi_e(\phi) = \chi_{R_e} \cdot \Phi_{f_e^{-1}}^{\frac{1}{2}} \cdot \phi \circ f_e^{-1}.$$

**Afirmção 5.6.**  $\pi_e(\phi) \in L^2(X, \mu)$ , para todo  $\phi \in L^2(X, \mu)$ .

*Demonstração.* Como  $\phi \in L^2(X, \mu)$ , temos

$$\int_X |\phi|^2 d\mu < \infty.$$

Mas veja que

$$\begin{aligned} \int_X \left| \chi_{R_e} \cdot \Phi_{f_e^{-1}}^{\frac{1}{2}} \cdot \phi \circ f_e^{-1} \right|^2 d\mu &= \int_{R_e} \left| \Phi_{f_e^{-1}}^{\frac{1}{2}} \cdot \phi \circ f_e^{-1} \right|^2 d\mu \\ &= \int_{R_e} \left| \phi \circ f_e^{-1} \right|^2 d(\mu \circ f_e^{-1}) = \int_{D_{r(e)}} |\phi|^2 d\mu \leq \int_X |\phi|^2 d\mu < \infty, \end{aligned} \quad (34)$$

em que, na terceira igualdade, foi feita uma mudança de variável (de  $x$  para  $f_e^{-1}(x)$ ), lembrando que

$$\Phi_{f_e^{-1}} = \frac{d(\mu \circ f_e^{-1})}{d\mu}.$$

□

**Observação 5.7.** É trivial que  $\pi_e \in B(L^2(X, \mu))$ . Note que Equação (34) nos mostra que  $\|\pi_e(\phi)\| \leq \|\phi\|$ .

**Observação 5.8.** Por um cálculo análogo ao da Afirmção 5.6, pode-se mostrar que a expressão

$$\pi_e^*(\phi) = \chi_{D_{r(e)}} \cdot \Phi_{f_e}^{\frac{1}{2}} \cdot \phi \circ f_e.$$

determina um operador linear  $\pi_e^*$  contínuo sobre  $L^2(X, \mu)$ .

**Lema 5.9.** Suponha que  $f$  e  $g$  são funções mensuráveis em  $X$  tais que  $f^{-1} \stackrel{\mu-qt}{=} g$  e  $g^{-1} \stackrel{\mu-qt}{=} f$ . Definindo  $\Phi_f = \frac{d(\mu \circ f)}{d\mu}$  (similarmente para  $\Phi_g$ ), temos

$$\Phi_f(x) \Phi_g(f(x)) \stackrel{\mu-qt}{=} 1.$$

A prova do Lema 5.9 é um exercício relativamente elementar de Teoria da Medida e será omitida neste trabalho.

**Afirmção 5.10.** O operador adjunto  $\pi_e^* \in B(L^2(X, \mu))$  é dado por

$$\pi_e^*(\phi) = \chi_{D_{r(e)}} \cdot \Phi_{f_e}^{\frac{1}{2}} \cdot \phi \circ f_e.$$

*Demonstração.* Para  $\phi, \varphi \in L^2(X, \mu)$ , veja que

$$\begin{aligned} \langle \pi_e(\phi), \varphi \rangle &= \int_X \pi_e(\phi) \overline{\varphi} d\mu = \int_{R_e} \overline{\varphi} \cdot \Phi_{f_e}^{\frac{1}{2}} \cdot \phi \circ f_e^{-1} d\mu = \int_{D_{r(e)}} (\overline{\varphi \circ f_e}) \cdot (\Phi_{f_e^{-1} \circ f_e})^{\frac{1}{2}} \cdot \phi d(\mu \circ f_e) \\ &= \int_{D_{r(e)}} (\overline{\varphi \circ f_e}) \cdot \Phi_{f_e} \cdot (\Phi_{f_e^{-1} \circ f_e})^{\frac{1}{2}} \cdot \phi d\mu = \int_{D_{r(e)}} (\overline{\varphi \circ f_e}) \cdot \Phi_{f_e}^{\frac{1}{2}} \cdot \Phi_{f_e}^{\frac{1}{2}} \cdot (\Phi_{f_e^{-1} \circ f_e})^{\frac{1}{2}} \cdot \phi d\mu \\ &= \int_{D_{r(e)}} (\overline{\varphi \circ f_e}) \cdot \Phi_{f_e}^{\frac{1}{2}} \cdot (\Phi_{f_e} \cdot \Phi_{f_e^{-1} \circ f_e})^{\frac{1}{2}} \cdot \phi d\mu = \int_{D_{r(e)}} (\overline{\varphi \circ f_e}) \cdot \Phi_{f_e}^{\frac{1}{2}} \cdot 1_{D_{r(e)}} \cdot \phi d\mu \\ &= \int_{D_{r(e)}} (\overline{\varphi \circ f_e}) \cdot \Phi_{f_e}^{\frac{1}{2}} \cdot \phi d\mu = \int_{D_{r(e)}} \overline{(\varphi \circ f_e)} \cdot \Phi_{f_e}^{\frac{1}{2}} \cdot \phi d\mu = \int_X \overline{\pi_e^*(\varphi)} \phi d\mu = \langle \phi, \pi_e^*(\varphi) \rangle, \end{aligned}$$

em que, na terceira linha, foi usado o Lema 5.9.  $\square$

**Afirmção 5.11.**  $\pi_e \pi_e^* = M_{\chi_{R_e}}$  e  $\pi_e^* \pi_e = M_{\chi_{D_{r(e)}}$ .

*Demonstração.* Para  $\phi \in L^2(X, \mu)$ , vamos ver que

$$\pi_e \pi_e^*(\phi) = \chi_{R_e} \cdot \phi = M_{\chi_{R_e}}(\phi).$$

Para isso, considere  $x \in X$  e veja que

$$\begin{aligned} [\pi_e(\pi_e^*(\phi))](x) &= \chi_{R_e}(x) \cdot \Phi_{f_e^{-1}}^{\frac{1}{2}}(x) \cdot \pi_e^*(\phi)[f_e^{-1}(x)] \\ &= \chi_{R_e}(x) \cdot \chi_{D_{r(e)}}(f_e^{-1}(x)) \cdot \Phi_{f_e}^{\frac{1}{2}}(f_e^{-1}(x)) \cdot \Phi_{f_e^{-1}}^{\frac{1}{2}}(x) \cdot \phi(f_e(f_e^{-1}(x))) \\ &= \chi_{R_e}(x) \cdot \chi_{D_{r(e)}}(f_e^{-1}(x)) \cdot \Phi_{f_e}^{\frac{1}{2}}(f_e^{-1}(x)) \cdot \Phi_{f_e^{-1}}^{\frac{1}{2}}(x) \cdot \phi(x) \\ &= \chi_{R_e}(x) \cdot \Phi_{f_e}^{\frac{1}{2}}(f_e^{-1}(x)) \cdot \Phi_{f_e^{-1}}^{\frac{1}{2}}(x) \cdot \phi(x) = \chi_{R_e}(x) \cdot \phi(x), \quad (35) \end{aligned}$$

em que a penúltima igualdade vem do fato que  $x \in R_e$  se, e somente se,  $f_e^{-1}(x) \in D_{r(e)}$ , e a última igualdade vem do fato que

$$\Phi_{f_e}^{\frac{1}{2}} \circ f_e^{-1} \cdot \Phi_{f_e^{-1}}^{\frac{1}{2}} = (\Phi_{f_e} \circ f_e^{-1} \cdot \Phi_{f_e^{-1}})^{\frac{1}{2}} = \Phi_{f_e \circ f_e^{-1}}^{\frac{1}{2}} = \Phi_{\text{Id}_{R_e}}^{\frac{1}{2}} = 1_{R_e}^{\frac{1}{2}} = 1_{R_e},$$

usando a regra da cadeia para derivadas de Radon-Nikodým. O cálculo para provar que

$$\pi_e^* \pi_e(\phi) = \chi_{D_{r(e)}} \cdot \phi = M_{\chi_{D_{r(e)}}}(\phi)$$

é análogo.  $\square$

Agora, para cada  $v \in G^0$  defina o operador  $\pi_v : L^2(X, \mu) \rightarrow L^2(X, \mu)$  por

$$\pi_v(\phi) = M_{\chi_{D_v}}(\phi).$$

**Observação 5.12.** É imediato que  $\pi_v$  está bem definida, que  $\pi_v \in B(L^2(X, \mu))$  e, ainda, que  $\pi_v^* = \pi_v$ .

**Teorema 5.13.** Se  $\{R_e, D_v, f_e\}_{e \in G^1, v \in G^0}$  é um  $G$ -sistema ramificado em  $(X, \mu)$ , então existe uma representação  $\pi$  de  $C^*(G)$  em  $L^2(X, \mu)$  tal que

$$[\pi(s_e)](\phi) = \pi_e(\phi) \text{ e } [\pi(p_v)](\phi) = \pi_v(\phi),$$

para cada  $e \in G^1$  e  $v \in G^0$ .

*Demonstração.* Usando a Propriedade Universal (Teorema 2.25) de  $C^*(G)$ , para garantir a existência do  $*$ -homomorfismo  $\pi : C^*(G) \rightarrow B(L^2(X, \mu))$  basta verificar que  $\{\pi_e, \pi_v\}_{e \in G^1, v \in G^0}$  satisfaz as relações de Cuntz-Krieger (Definição 2.11). O fato de  $\pi_e$  ser isometria parcial, segue da Afirmação 5.11, já que os operadores de multiplicação por funções características são projeções. O fato de  $\{\pi_v\}_{v \in G^0}$  ser uma família de projeções mutuamente ortogonais vem da igualdade

$$D_u \cap D_v \stackrel{\mu\text{-qtp}}{=} \emptyset \text{ para } u \neq v \in G^0.$$

Além disso, a Afirmação 5.11 também implica

$$\pi_e^* \pi_e = M_{\chi_{D_{r(e)}}} = \pi_{r(e)}.$$

Por fim, para  $v \in R(G)$ , vamos verificar que

$$\pi_v = \sum_{e \in s^{-1}(v)} \pi_e \pi_e^*.$$

De fato, da igualdade

$$D_v \stackrel{\mu\text{-qtp}}{=} \bigcup_{e \in s^{-1}(v)} R_e$$

temos

$$M_{\chi_{D_v}} = M_{\chi_{\bigcup_{e \in s^{-1}(v)} R_e}}.$$

Como

$$R_e \cap R_f \stackrel{\mu\text{-qtp}}{=} \emptyset \text{ para } e \neq f \in G^1,$$

segue que

$$M_{\chi_{\bigcup_{e \in s^{-1}(v)} R_e}} = \sum_{e \in s^{-1}(v)} M_{\chi_{R_e}}.$$



O Teorema 5.20 segue como consequência do Teorema de Unicidade de Cuntz-Krieger, que pode ser encontrado em Raeburn (2004) (Teorema 2.4). Em Gonçalves, Royer e Li (2016), outra caracterização para a injetividade da representação é feita.

**Teorema 5.21.** *Sejam  $V \subseteq G^0$ ,  $\{R_e, D_v, f_e\}_{e \in G^1, v \in G^0}$  um  $(G, V)$ -sistema ramificado relativo em  $(X, \mu)$  e  $\pi : C^*(G) \rightarrow B(L^2(X, \mu))$  a representação dada pelo Teorema 5.13. Suponha que para todo  $v \in G^0$ , temos  $\mu(D_v) \neq 0$ . Suponha também que para todo  $v \in G^0$  tal que  $v$  é origem de algum ciclo que não possui saída, e para toda família  $\{e_i\}_{i=1}^n$  de ciclos que possui  $v$  como origem, existe um subconjunto mensurável  $F \subseteq D_v$ , tal que  $\mu(F) \neq 0$  e  $f_{e_i}(F) \cap F \stackrel{\mu\text{-qtp}}{=} \emptyset$  para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Então,  $\pi$  é fiel.*

## 5.2 SISTEMAS RAMIFICADOS RELATIVOS E REPRESENTAÇÕES DE C\*-ÁLGEBRAS DE GRAFOS RELATIVAS

Tal como feito na Definição 2.30, pode-se generalizar a definição de um sistema ramificado e dar origem aos sistemas ramificados relativos. Para esta seção, fixe  $V \subseteq R(G)$ .

**Definição 5.22.** Se  $\{R_e, D_v\}_{e \in G^1, v \in G^0}$  é uma família de subconjuntos mensuráveis de  $X$ , tais que valem 1, 2, 3 e 5 da Definição 5.1 e, ainda,

$$D_v \stackrel{\mu\text{-qtp}}{=} \bigcup_{e \in s^{-1}(v)} R_e \text{ se } v \in V,$$

então dizemos que  $\{R_e, D_v, f_e\}_{e \in G^1, v \in G^0}$  é um  $(G, V)$ -sistema ramificado relativo em  $(X, \mu)$ .

A mesma construção feita na seção anterior pode ser aplicada para obter representações de uma C\*-álgebra de grafo relativa em  $L^2(X, \mu)$ , usando sistemas ramificados relativos.

**Teorema 5.23.** *Se  $\{R_e, D_v, f_e\}_{e \in G^1, v \in G^0}$  é um  $(G, V)$ -sistema ramificado relativo em  $(X, \mu)$ , então existe uma representação  $\pi$  de  $C^*(G, V)$  em  $L^2(X, \mu)$  tal que*

$$[\pi(s_e)](\phi) = \pi_e(\phi) \text{ e } [\pi(p_v)](\phi) = \pi_v(\phi),$$

para cada  $e \in G^1$  e  $v \in G^0$ .

A demonstração do Teorema 5.23 é análoga à demonstração do Teorema 5.13.

Utilizando a construção de grafo estendido feita na Seção 2.3, é possível construir, a partir de um  $(G, V)$ -sistema ramificado relativo, um  $G_V$ -sistema ramificado, da maneira descrita a seguir.

Para  $\{R_e, D_V, f_e\}_{e \in G^1, v \in G^0}$  um  $(G, V)$ -sistema ramificado relativo em  $(X, \mu)$ , define  $\{Q_e, B_V, g_e\}_{e \in G_V^1, v \in G_V^0}$  como:

$$\begin{cases} B_V := D_V & \text{se } v \in V \\ B_V := \bigcup_{e \in S^{-1}(v)} R_e & \text{se } v \in G^0 \setminus V \\ B_{V'} := D_V \setminus \bigcup_{e \in S^{-1}(v)} R_e \end{cases}$$

$$\begin{cases} Q_e := R_e & \text{se } e \in G^1 \text{ e } r(e) \in V \\ Q_e := f_e \left( \bigcup_{f: s(f)=r(e)} R_f \right) & \text{se } e \in G^1 \text{ e } r(e) \notin V \\ Q_{e'} := f_e \left( D_V \setminus \bigcup_{f: s(f)=r(e)} R_f \right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} g_e := f_e \\ g_{e'} := f_e \end{cases}$$

**Afirmção 5.24.** A família  $\{Q_e, B_V, g_e\}_{e \in G_V^1, v \in G_V^0}$  definida acima é um  $G_V$ -sistema ramificado em  $(X, \mu)$ .

*Demonstração.* Essa afirmação segue de uma demonstração direta e longa dos cinco itens da Definição 5.1. Vamos detalhar o primeiro deles:

1. Sejam  $e, h \in G_V^1$ , com  $e \neq h$ .

Caso  $r(e), r(h) \in V$ ,

$$Q_e \cap Q_h = R_e \cap R_h = \emptyset.$$

Caso  $r(e) \in V$  e  $r(h) \notin V$ ,

$$Q_e \cap Q_h = R_e \cap f_h \left( \bigcup_{f: s(f)=r(h)} R_f \right) \subseteq R_e \cap R_h = \emptyset.$$

Caso  $r(e) \in V$ ,

$$Q_e \cap Q_{e'} = R_e \cap f_e \left( D_{r(e)} \setminus \bigcup_{f: s(f)=r(e)} R_f \right) = R_e \cap f_e(\emptyset) = R_e \cap \emptyset = \emptyset.$$

Caso  $r(e), r(h) \notin V$ ,

$$Q_e \cap Q_h = f_e \left( \bigcup_{f: s(f)=r(e)} R_f \right) \cap f_h \left( \bigcup_{i: s(i)=r(h)} R_i \right) \subseteq R_e \cap R_h = \emptyset.$$

Caso  $r(e) \notin V$ ,

$$Q_e \cap Q_{e'} = f_e \left( \bigcup_{f: s(f)=r(e)} R_f \right) \cap f_e \left( D_{r(e)} \setminus \bigcup_{f: s(f)=r(e)} R_f \right) = \emptyset,$$

já que

$$\left( \bigcup_{f:s(f)=r(e)} R_f \right) \cap \left( D_{r(e)} \setminus \bigcup_{f:s(f)=r(e)} R_f \right) = \emptyset.$$

Por fim,

$$Q_{e'} \cap Q_{h'} = f_e \left( D_{r(e)} \setminus \bigcup_{f:s(f)=r(e)} R_f \right) \cap f_h \left( D_{r(h)} \setminus \bigcup_{i:s(i)=r(h)} R_i \right) \subseteq R_e \cap R_h = \emptyset.$$

□

**Definição 5.25.** Para  $\{R_e, D_v, f_e\}_{e \in G^1, v \in G^0}$  um  $(G, V)$ -sistema ramificado relativo em  $(X, \mu)$ , chamamos  $\{Q_e, B_v, g_e\}_{e \in G_V^1, v \in G_V^0}$ , como construído acima, de  $G_V$ -sistema ramificado estendido em  $(X, \mu)$ , sem precisar mencionar qual o sistema ramificado relativo de origem (quando ficar claro pelo contexto).

No Teorema 2.36, vimos que  $C^*(G_V) \cong C^*(G, V)$ . Através desse isomorfismo, vamos mostrar agora que representações de  $C^*(G_V)$  e  $C^*(G, V)$  em  $L^2(X, \mu)$ , induzidas por um sistema ramificado relativo e seu sistema ramificado estendido, respectivamente, coincidem. Com isso, é possível obter uma caracterização da injetividade da representação dada pelo Teorema 5.23, que é o objetivo final desta seção.

**Teorema 5.26.** *Sejam  $\{R_e, D_v, f_e\}_{e \in G^1, v \in G^0}$  um  $(G, V)$ -sistema ramificado relativo em  $(X, \mu)$  e  $\{Q_e, B_v, g_e\}_{e \in G_V^1, v \in G_V^0}$  seu  $G_V$ -sistema ramificado estendido. Sejam  $\pi : C^*(G, V) \rightarrow B(L^2(X, \mu))$  e  $\rho : C^*(G_V) \rightarrow B(L^2(X, \mu))$  as representações dadas pelos Teoremas 5.23 e 5.13, respectivamente. Seja  $\psi : C^*(G_V) \rightarrow C^*(G, V)$  o isomorfismo dado pelo Teorema 2.36. Então,*

$$\rho = \psi \circ \pi.$$

*Demonstração.* Basta verificar a igualdade para os geradores de  $C^*(G_V)$ . Assim, para  $v \in G_V^0$ , temos

- caso  $v \in V$ ,

$$\pi(\psi(p_v)) = \pi(p_v) = \pi_v = \rho(p_v)$$

- caso  $v \notin V$ ,

$$\begin{aligned} \pi(\psi(p_v)) &= \pi \left( \sum_{e \in s^{-1}(v)} s_e s_e^* \right) = \sum_{e \in s^{-1}(v)} \pi(s_e) \pi(s_e)^* = \sum_{e \in s^{-1}(v)} \pi_e \pi_e^* \\ &= \sum_{e \in s^{-1}(v)} M_{\chi_{R_e}} = \pi_v = \rho(p_v) \end{aligned}$$

- por fim,

$$\begin{aligned} \pi(\psi(p_{V'})) &= \pi \left( p_V - \sum_{e \in S^{-1}(V)} s_e s_e^* \right) = \pi_V - \sum_{e \in S^{-1}(V)} \pi_e \pi_e^* = M_{\chi_{D_V}} - \sum_{e \in S^{-1}(V)} M_{\chi_{R_e}} \\ &= M_{\chi_{B_{V'}}} = \rho(p_{V'}). \end{aligned}$$

Além disso, para  $e \in G_V^0$ , temos

- caso  $r(e) \in V$ ,

$$\pi(\psi(s_e)) = \pi(s_e) = \pi_e = \rho(s_e)$$

- caso  $r(e) \notin V$ ,

$$\begin{aligned} \pi(\psi(s_e))(\phi) &= \pi \left( s_e - \sum_{f: s(f)=r(e)} s_f s_f^* \right) (\phi) = \pi_e \left( \sum_{f: s(f)=r(e)} [\pi_f \pi_f^*](\phi) \right) \\ &= \pi_e \left( \sum_{f: s(f)=r(e)} M_{\chi_{R_f}}(\phi) \right) = \pi_e \left( \chi_{U_{f: s(f)=r(e)}} R_f \cdot \phi \right) = \chi_{R_e} \cdot \Phi_{f_e^{-1}}^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \chi_{U_{f: s(f)=r(e)}} R_f \cdot \phi \right) \circ f_e^{-1} \\ &= \chi_{R_e} \cdot \chi_{U_{f: s(f)=r(e)}} R_f \circ f_e^{-1} \cdot \Phi_{f_e^{-1}}^{\frac{1}{2}} \cdot \phi \circ f_e^{-1} = \chi_{U_{f: s(f)=r(e)}} R_f \circ f_e^{-1} \cdot \Phi_{f_e^{-1}}^{\frac{1}{2}} \cdot \phi \circ f_e^{-1} \\ &= \chi_{Q_e} \cdot \Phi_{g_e^{-1}}^{\frac{1}{2}} \cdot \phi \circ g_e^{-1} = \rho(s_e)(\phi) \end{aligned}$$

- por fim, para  $\phi \in L^2(X, \mu)$ ,

$$\begin{aligned} \pi(\psi(s_{e'}))(\phi) &= \pi \left( s_e \left( p_{r(e)} - \sum_{f: s(f)=r(e)} s_f s_f^* \right) \right) (\phi) \\ &= \pi_e \left( \pi_{r(e)}(\phi) - \sum_{f: s(f)=r(e)} [\pi_f \pi_f^*](\phi) \right) \\ &= \pi_e \left( \pi_{r(e)}(\phi) - \sum_{f: s(f)=r(e)} M_{\chi_{R_f}}(\phi) \right) = \pi_e \left( \chi_{D_{r(e)}} \cdot \phi - \chi_{U_{f: s(f)=r(e)}} R_f \cdot \phi \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \pi_e \left( \left( \chi_{D_{r(e)}} - \chi_{\bigcup_{f:s(f)=r(e)} R_f} \right) \cdot \phi \right) = \pi_e \left( \chi_{D_{r(e)} \setminus \bigcup_{f:s(f)=r(e)} R_f} \cdot \phi \right) \\
 &= \chi_{R_e} \cdot \Phi_{f_e^{-1}}^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \chi_{D_{r(e)} \setminus \bigcup_{f:s(f)=r(e)} R_f} \cdot \phi \right) \circ f_e^{-1} = \chi_{R_e} \cdot \chi_{D_{r(e)} \setminus \bigcup_{f:s(f)=r(e)} R_f} \circ f_e^{-1} \cdot \Phi_{f_e^{-1}}^{\frac{1}{2}} \cdot \phi \circ f_e^{-1} \\
 &= \chi_{R_e} \cdot \chi_{f_e} \left( D_{r(e)} \setminus \bigcup_{f:s(f)=r(e)} R_f \right) \cdot \Phi_{f_e^{-1}}^{\frac{1}{2}} \cdot \phi \circ f_e^{-1} = \chi_{f_e} \left( D_{r(e)} \setminus \bigcup_{f:s(f)=r(e)} R_f \right) \cdot \Phi_{f_e^{-1}}^{\frac{1}{2}} \cdot \phi \circ f_e^{-1} \\
 &= \chi_{Q_{e'}} \cdot \Phi_{g_{e'}^{-1}}^{\frac{1}{2}} \cdot \phi \circ g_{e'}^{-1} = \rho(s_{e'}) (\phi)
 \end{aligned}$$

□

**Teorema 5.27.** *Sejam  $\{R_e, D_v, f_e\}_{e \in G^1, v \in G^0}$  um  $(G, V)$ -sistema ramificado relativo em  $(X, \mu)$  e  $\pi : C^*(G, V) \rightarrow B(L^2(X, \mu))$  a representação dada pelo Teorema 5.23. Então,  $\pi$  é fiel se valem as três condições a seguir:*

1.  $D_v \neq \emptyset$ , para todo  $v \in G^0$ ;
2.  $D_v \neq \bigcup_{e \in s^{-1}(v)} R_e$ , para todo  $v \in G^0 \setminus V$  e
3. para todo  $v \in V$  que é origem de algum ciclo que não possui saída e para toda família  $\{e_i\}_{i=1}^n$  de ciclos que possui  $v$  como origem, existe um subconjunto mensurável  $F \subseteq D_v$ , tal que  $\mu(F) \neq 0$  e  $f_{e_i}(F) \cap F \stackrel{\mu\text{-qtp}}{=} \emptyset$  para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

*Demonstração.* Considere o grafo estendido  $G_V$ , além de  $\rho : C^*(G_V) \rightarrow B(L^2(X, \mu))$  a representação dada pelo Teorema 5.13 e  $\psi : C^*(G_V) \rightarrow C^*(G, V)$  o isomorfismo dado pelo Teorema 2.36. Mostramos no Teorema 5.26 que  $\rho = \psi \circ \pi$ . Assim, para verificar que  $\pi$  é fiel, basta mostrar que  $\rho$  o é. Para isso, vamos verificar que, nas hipóteses dadas, o  $G_V$ -sistema ramificado estendido satisfaz às hipóteses do Teorema 5.21, e portanto a representação assim construída é fiel.

Seja  $v \in G^0$ . Caso  $v \in V$ , a hipótese (1) implica  $\mu(B_v) = \mu(D_v) \neq 0$ . Caso  $v \notin V$ ,

$$\mu(B_v) = \mu \left( \bigcup_{e \in s^{-1}(v)} R_e \right) \geq \mu(R_e) \neq 0, \forall e \in s^{-1}(v),$$

já que  $D_{r(e)} \neq \emptyset$  e, portanto,  $f_e(D_{r(e)}) \subseteq R_e \neq \emptyset$ , para todo  $e \in s^{-1}(v)$ . Além disso, a hipótese (2) implica

$$\mu(B_v) = \mu \left( D_v \setminus \bigcup_{e \in s^{-1}(v)} R_e \right) \neq 0.$$

A última hipótese do Teorema 5.21 a ser verificada é a mesma hipótese (3) que já temos, faltando verificar apenas para os demais vértices do grafo estendido  $G_V$ . Mas, se  $v \notin V$ ,  $v'$  é um poço e, portanto, não pode ser origem de ciclos que não possuem saída. Assim, a hipótese é trivialmente satisfeita.  $\square$

**Observação 5.28.** É possível mostrar que as hipóteses do Teorema 5.27 são, além de suficientes, necessárias para a injetividade de  $\pi$ , como pode ser visto em Martins *et al.* (2023), Teorema 3.7.

### 5.3 APLICAÇÕES DE MARKOV E SISTEMAS RAMIFICADOS

Em Martins *et al.* (2023), alguns resultados obtidos por Martins, Pinto e Ramos (2019) foram generalizados para ainda obter representações fiéis de  $C^*(G_{A_f}, V)$  usando menos hipóteses impostas a  $f$ . Usando a notação dos Capítulos 3 e 4, para esta seção, fixe  $I \subseteq \mathbb{R}$  um intervalo e  $f : \text{dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  em que valem as condições (M1) e (M2) da Definição 3.1, com conjunto de escape  $E_f$  não-vazio (por conveniência, vamos manter todas as definições feitas no Capítulo 3, incluindo chamar  $f$  de aplicação de Markov, mesmo com hipóteses mais fracas). Fixe também  $x \in E_f$ . Considere  $V \subseteq G_{A_f}$ , lembrando que  $G_{A_f}$  denota o grafo associado à matriz de transição de  $f$ .

Seja  $O_x$  a órbita de  $x$ , ou seja,

$$O_x = \{y \in \text{dom}(f) : \exists n \in \mathbb{N}, f^n(y) = e(x)\}.$$

Considere, em  $O_x$ , a medida de contagem  $\#$ . Vamos mostrar, primeiro, como, a partir de  $f$ , construir um  $(G_{A_f}, V)$ -sistema ramificado relativo em  $(O_x, \#)$ .

Denotando, para cada  $i \in \{1, \dots, n_f\}$ ,  $f_i$  como sendo  $f$  restrita ao intervalo de Markov  $I_j$ , para cada  $j \in G_{A_f}^0$  e para cada  $e_{ij} \in G_{A_f}^1$ , defina

$$\begin{cases} D_j := I_j \cap O_x \\ R_{e_{ij}} := f_i^{-1}(I_j \cap O_x) \end{cases}.$$

Defina, também,  $f_{e_{ij}} : D_{r(e_{ij})} = D_j \rightarrow R_{e_{ij}}$  como sendo  $f_i^{-1}|_{I_j}$  e  $f_{e_{ij}}^{-1} : R_{e_{ij}} \rightarrow D_{r(e_{ij})} = D_j$  como sendo  $f_j$ .

**Afirmção 5.29.** *Se, para todo  $i \in V$  temos  $(\widehat{A}_f)_{i, \nu(x)} = 0$ , ou seja, não há transição do intervalo de Markov  $I_j$  para o intervalo de escape  $E_{j(x)}$ , então  $\{R_{e_{ij}}, D_j, f_{e_{ij}}\}$  como definido acima é um  $(G_{A_f}, V)$ -sistema ramificado relativo em  $(O_x, \#)$ .*

*Demonstração.* Basta fazer uma verificação dos cinco itens da Definição 5.22:

1. Sejam  $e_{ij}, e_{kl} \in G_{A_f}^1$  tais que  $e_{ij} \neq e_{kl}$ . Se  $i \neq k$ , então

$$R_{e_{ij}} \cap R_{e_{kl}} = f_i^{-1}(I_j \cap O_x) \cap f_k^{-1}(I_l \cap O_x) \subseteq I_i \cap I_k = \emptyset.$$

Se  $i = k$ , então  $j \neq l$  e

$$R_{e_{ij}} \cap R_{e_{il}} = f_i^{-1}(I_j \cap O_x) \cap f_i^{-1}(I_l \cap O_x) = \{x \in I_i : f_i(x) \in I_j\} \cap \{x \in I_i : f_i(x) \in I_l\} = \emptyset$$

pois  $I_j \neq I_l$ .

2. Sejam  $i, j \in G_{A_f}^0$  tais que  $i \neq j$ . Então,

$$D_i \cap D_j = (I_i \cap O_x) \cap (I_j \cap O_x) \subseteq I_i \cap I_j = \emptyset.$$

3. Seja  $e_{ij} \in G_{A_f}^1$ . Então,

$$R_{e_{ij}} = f_i^{-1}(I_j \cap O_x) \subseteq I_i \cap O_x = D_i = D_{S(e_{ij})}.$$

4. Seja  $i \in V$ . Por hipótese, temos  $f(I_i) \cap E_{j(x)} = \emptyset$ . Assim,

$$\text{Im}(f_i) \subseteq \left( \bigcup_{j=1}^{n_f} I_j \right) \cup \left( \bigcup_{k \neq j(x)} E_k \right).$$

Logo,

$$\begin{aligned} D_i &= I_i \cap O_x = f_i^{-1} \left[ \left( \bigcup_{j=1}^{n_f} I_j \right) \cup \left( \bigcup_{k \neq j(x)} E_k \right) \right] \cap O_x = \\ &= \left( \bigcup_{j=1}^{n_f} f_i^{-1}(I_j) \cap O_x \right) \cup \left( \bigcup_{k \neq j(x)} f_i^{-1}(E_k) \cap O_x \right) = \bigcup_{j: f(I_i) \subseteq I_j} f_i^{-1}(I_j) \cap O_x \\ &= \bigcup_{j: f(I_i) \subseteq I_j} f_i^{-1}(I_j \cap O_x) = \bigcup_{ij: s(ij)=i} R_{ij}, \end{aligned}$$

já que  $f_i^{-1}(E_k) \cap O_x = \emptyset$  para todo  $k \neq j(x)$ , pois se  $f_i(y) \in E_k$  para  $k \neq j(x)$ , então  $y \notin O_x$ .

5. Para  $x \in R_{e_{ij}}$ , temos  $x \in I_i$  e  $f_i(x) \in I_j$ , assim,

$$f_{e_{ij}}(f_{e_{ij}}^{-1}(x)) = f_i^{-1}(f_i(x)) = x = \text{Id}_{R_{e_{ij}}}(x),$$

e para  $y \in D_{r(e_{ij})} = D_j$ , temos  $y \in I_j$  e

$$f_{e_{ij}}^{-1}(f_{e_{ij}}(y)) = f_i(f_i^{-1}(y)) = y = \text{Id}_{D_{r(e_{ij})}}(y).$$

□

**Observação 5.30.** Note que a hipótese pedida na Afirmação 5.29 é a mesma hipótese que usamos no Teorema 4.10 para garantir a existência de uma representação de  $C^*(G_{A_f}, V)$  em  $H_X$ . Assim, se a hipótese for satisfeita, temos, além da representação obtida via Teorema 4.10, um  $(G_{A_f}, V)$ -sistema ramificado relativo em  $(O_X, \#)$ , que dá origem a uma outra representação de  $C^*(G_{A_f}, V)$  como vimos no Teorema 5.23. O próximo resultado mostra a equivalência entre as duas representações.

**Teorema 5.31.** *Suponha que, para todo  $i \in V$ , temos  $(\widehat{A}_f)_{i_i(X)} = 0$ . Considere  $\nu_X : C^*(G_{A_f}, V) \rightarrow B(H_X)$  a representação obtida pelo Teorema 4.10 e  $\pi : C^*(G_{A_f}, V) \rightarrow B(L^2(O_X, \#))$  a representação obtida pelo Teorema 5.23, usando  $\{R_{e_{ij}}, D_j, f_{e_{ij}}\}$  como  $(G_{A_f}, V)$ -sistema ramificado relativo em  $(X, \#)$ . Então,  $H_X = L^2(O_X, \#)$  e  $\nu_X = \pi$ .*

*Demonstração.* Primeiro, veja que, para  $y \in O_X$  arbitrário, podemos identificar a sequência  $[y] \in H_X$  como sendo a função  $\chi_{\{y\}} \in L^2(X, \mu)$ , já que ambas têm valor 1 no caso em que são avaliadas em  $y$ , e 0 nos demais pontos. Da mesma forma que o conjunto  $\{[y] : y \in O_X\}$  forma uma base para  $H_X$ , o conjunto  $\{\chi_{\{y\}} : y \in O_X\}$  forma uma base para  $L^2(O_X, \#)$ . De fato, veja que se  $[y] \in H_X$ , então, para  $z \in O_X$  temos

$$\begin{cases} [y](z) = 1 & \text{se } z = y \\ [y](z) = 0 & \text{se } z \neq y \end{cases}.$$

Assim,

$$\int_{O_X} |[y]|^2 d\# = \int_{O_X} [y] d\# = \sum_{z \in O_X} \#(\{z\}) \cdot [y](y) = 1 < \infty,$$

ou seja,  $[y] \in L^2(O_X, \#)$ . Por outro lado, se  $\chi_{\{y\}} \in L^2(O_X, \#)$ , então

$$\sum_{z \in O_X} |\chi_{\{y\}}(z)|^2 = \sum_{z \in O_X} \chi_{\{y\}}(z) = 1 < \infty,$$

ou seja,  $\chi_{\{y\}} \in H_X$ .

Agora, vamos ver que

$$\Phi_{f_e^{-1}} = 1. \tag{36}$$

Para isso, seja  $A \subseteq R_{e_{ij}}$ . Como  $f_{e_{ij}}^{-1}$  é bijeção, temos

$$\int_A 1 d\# = \#(A) = \#(f_{e_{ij}}(A))$$

Como a igualdade acima vale para  $A \subseteq R_{e_{ij}}$  arbitrário,  $\pi$  satisfaz a propriedade que caracteriza a derivada de Radon-Nikodým, o que é suficiente para obter (36).

Usando a definição de  $\pi$  e a igualdade (36), para todo  $\phi \in L^2(X, \#)$  obtemos

$$\begin{cases} \pi(\mathbf{s}_{e_{ij}})(\phi) = \pi_{e_{ij}}(\phi) = \chi_{R_{e_{ij}}} \cdot \phi \circ f_{e_{ij}}^{-1}, & \forall e_{ij} \in G_{A_f}^1 \\ \pi(\mathbf{p}_j)(\phi) = \pi_j(\phi) = \chi_{D_j} \cdot \phi, & \forall j \in G_{A_f}^0 \end{cases}.$$

Portanto, para  $e_{ij} \in G_{A_f}^1$ ,

$$\begin{aligned} \pi(\mathbf{s}_{e_{ij}})(\chi_{\{y\}}) &= \chi_{R_{e_{ij}}} \cdot \chi_{\{y\}} \circ f_{e_{ij}}^{-1} = \chi_{f_i^{-1}(I_j \cap O_x)} \cdot \chi_{\{y\}} \circ f_i = \chi_{f_i^{-1}(I_j \cap O_x)} \cdot \chi_{f_i^{-1}(y)} \\ &= \chi_{f_i^{-1}(I_j \cap \{y\} \cap O_x)} = \chi_{f_i^{-1}(I_j \cap \{y\})} = \begin{cases} 0 & \text{se } y \notin I_j \\ \chi_{f_i^{-1}(y)} & \text{se } y \in I_j \end{cases} = \chi_{I_j}(y) \cdot \chi_{f_i^{-1}(y)} \\ &= \chi_{I_j}(y) \cdot [f_i^{-1}(y)] = \mathbf{S}_{ij}[y] = \nu_x(\mathbf{s}_{e_{ij}})[y]. \end{aligned}$$

E, para  $j \in G_{A_f}^0$ ,

$$\begin{aligned} \pi(\mathbf{p}_j)(\chi_{\{y\}}) &= \chi_{D_j} \cdot \chi_{\{y\}} = \chi_{I_j \cap O_x} \cdot \chi_{\{y\}} = \chi_{I_j \cap \{y\} \cap O_x} = \chi_{I_j \cap \{y\}} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{se } y \notin I_j \\ \chi_{\{y\}} & \text{se } y \in I_j \end{cases} = \chi_{I_j}(y) \cdot \chi_{\{y\}} = \chi_{I_j}(y) \cdot [y] = \mathbf{P}_j[y] = \nu_x(\mathbf{p}_j)[y]. \end{aligned}$$

Portanto, como  $\pi$  e  $\nu_x$  coincidem nos elementos da base, obtemos  $\pi = \nu_x$ .  $\square$

Seguindo no objetivo de obter representações fiéis de  $C^*(G_{A_f}, V)$ , o Teorema 5.27 pode ser aplicado também para o caso em que usamos sistemas ramificados relativos obtidos por aplicações de Markov, para obter representações fiéis em  $L^2(O_x, \#)$ .

**Corolário 5.32.** *Suponha que, para todo  $i \in V$ , temos  $(\widehat{A}_f)_{i, \iota(x)} = 0$ . Seja  $\pi : C^*(G_{A_f}, V) \rightarrow B(L^2(O_x, \#))$  a representação obtida pelo Teorema 5.23, usando  $\{R_{e_{ij}}, D_j, f_{e_{ij}}\}$  como  $(G_{A_f}, V)$ -sistema ramificado relativo em  $(X, \#)$ . Então,  $\pi$  é fiel se valem as três condições a seguir:*

1. para todo  $j \in G_{A_f}^0$  existe  $y \in I_j \cap O_x$ ;
2.  $V = \{k \in G_{A_f}^0 : (\widehat{A}_f)_{k, \iota(x)} = 0\}$ ;
3. para todo  $j \in V$  tal que  $j$  é origem de algum ciclo  $e = e_1 \dots e_k$  que não possui saída e para todo subconjunto finito  $\{n_1, \dots, n_l\} \subseteq \mathbb{N}$ , existe  $x \in I_j \cap O_x$  tal que  $f_e^{n_i}(x) \neq x$ , para todo  $i = 1 \dots l$ , ou seja,

$$\left( f_{s(e_1)}^{-1} \Big|_{r(e_1)} \circ \dots \circ f_{s(e_k)}^{-1} \Big|_{r(e_k)} \right)^{n_i}(x) \neq x, \forall i = 1, \dots, l.$$

*Demonstração.* Basta verificar que o  $(G_{A_f}, V)$ -sistema ramificado relativo  $\{R_{e_{ij}}, D_j, f_{e_{ij}}\}$  construído através da aplicação de Markov  $f$  satisfaz as três condições do Teorema 5.27.

1. Como existe  $x \in I_j \cap O_x = D_j$ , então  $D_j \neq \emptyset$  para todo  $j \in G_{A_f}^0$ .
2. Para  $k \in G_{A_f}^0 \setminus V$ , por hipótese temos  $(\widehat{A}_f)_{k\iota(x)} = 1$ , ou seja, há transição entre  $I_k$  e  $E_{j(x)}$ . Logo,  $f_k^{-1}(E_{j(x)} \cap O_x) \neq \emptyset$  e, então,

$$\begin{aligned} \bigcup_{e_{ij} \in s^{-1}(k)} R_{e_{ij}} &= \bigcup_{e_{ij}: i=k} R_{e_{ij}} = \bigcup_{j \in G_{A_f}^0} R_{e_{kj}} = \bigcup_{j \in G_{A_f}^0} f_k^{-1}(I_j \cap O_x) \\ &\neq \bigcup_{j \in G_{A_f}^0} f_k^{-1}(I_j \cap O_x) \cup f_k^{-1}(E_{j(x)}) = I_k \cap O_x = D_k, \end{aligned}$$

em que a desigualdade vem do fato de que  $E_{j(x)} \cap O_x$  é disjunto de  $I_j \cap O_x$  para todo  $j \in G_{A_f}^0$ .

3. Supondo que vale o item 3, basta escolher  $F = \{x\} \subseteq D_j$ , que temos  $\#(F) = 1 \neq 0$  e

$$f_{e_i}(F) \cap \{F\} = f_{e_i}(x) \cap \{x\} = \emptyset, \forall i \in G_{A_f}^0.$$

□

**Definição 5.33.** Dizemos que  $f$  é uma aplicação de Markov *irredutível* se, para quaisquer  $i, j \in \{1, \dots, n_f\}$  existe  $q \in \mathbb{N}$  tal que  $I_j \subseteq f^q(I_i)$ .

**Observação 5.34.** Toda aplicação de Markov no sentido usado no Capítulo anterior, ou seja, satisfazendo a Definição 3.1 é irredutível, pois satisfaz (M4).

**Corolário 5.35.** *Suponha que  $f$  é irredutível e, para todo  $i \in V$ , temos  $(\widehat{A}_f)_{i\iota(x)} = 0$  e para todo  $i \notin V$ , temos  $(\widehat{A}_f)_{i\iota(x)} = 1$ . Então, a representação  $\nu_x : C^*(G_{A_f}, V) \rightarrow B(H_x)$ , do Teorema 4.10, é fiel.*

*Demonstração.* Considere  $\pi : C^*(G_{A_f}, V) \rightarrow B(L^2(O_x, \#))$  a representação obtida pelo Teorema 5.23, usando  $\{R_{e_{ij}}, D_j, f_{e_{ij}}\}$  como  $(G_{A_f}, V)$ -sistema ramificado relativo em  $(X, \#)$ . Vamos usar a equivalência entre  $\nu_x$  e  $\pi$  dada pelo Teorema 5.31. Assim, para ver que  $\pi$  é fiel, vamos mostrar que a hipótese de  $f$  ser irredutível implica nas três condições do Corolário 5.32.

1. Seja  $j \in G_{A_f}^0$ . Como  $x \in E_f$ , por definição, existe  $k \in G_{A_f}^0$  tal que  $x \in I_k$  e  $f^{\tau(x)}(x) = e(x)$ . Como  $f$  é irredutível, existe  $q \in \mathbb{N}$  tal que  $I_k \subseteq f^q(I_j)$ . Assim, existe  $y \in I_j$  tal que  $x = f^q(y)$ . Logo,

$$e(x) = f^{\tau(x)}(x) = f^{\tau(x)}(f^q(y)) = f^{\tau(x)+q}(y),$$

o que mostra que  $y \in O_x$ . Portanto,  $y \in I_j \cap O_x$ .

2. Por hipótese, já pedimos que  $V = \{k \in G_{A_f}^0 : (\widehat{A}_f)_{k\iota(x)} = 0\}$ .
3. Suponha que existem  $j \in V$  origem de um ciclo  $e = e_1 \dots e_k$  que não possui saída e  $\{n_1, \dots, n_l\} \subseteq \mathbb{N}$  tais que a terceira condição do Teorema 5.32 não é satisfeita. Assim, para todo  $y \in I_j \cap O_x$ , existe  $n_j \in \{n_1, \dots, n_l\}$  tal que

$$f_e^{n_j}(y) = y. \quad (37)$$

Mas  $y \in O_x$ , ou seja, existe  $p \in \mathbb{N}$  tal que  $f^p(y) = e(x) = f^{\tau(x)}(x)$ . Assim,

$$\text{dom}(f) \not\ni f^{\tau(x)}(x) = e(x) = f^p(y),$$

o que contradiz (37).

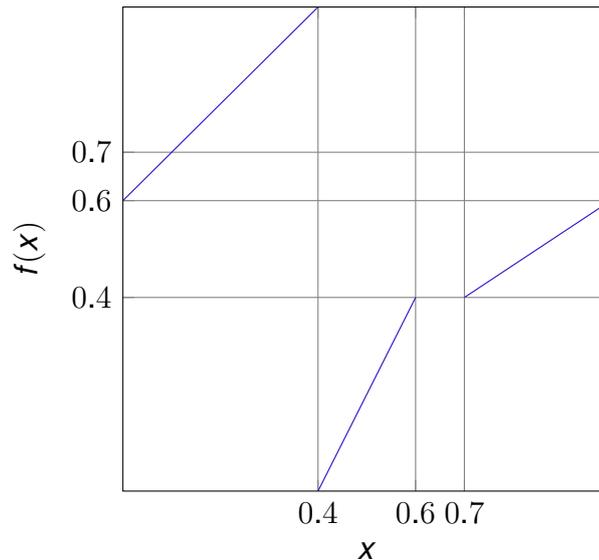
o que contradiz (37).

□

**Exemplo 5.36.** Sejam  $I = [0, 1]$  e  $I_1 = \left[0, \frac{2}{5}\right]$ ,  $I_2 = \left[\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right]$ ,  $I_3 = \left[\frac{7}{10}, 1\right]$  e  $f : I_1 \cup I_2 \cup I_3 \rightarrow I$  dada por

$$f(x) := \begin{cases} x + \frac{3}{5} & \text{se } x \in I_1 \\ 2x - \frac{4}{5} & \text{se } x \in I_2 \\ \frac{2}{3}x - \frac{1}{15} & \text{se } x \in I_3 \end{cases}$$

e representada pelo gráfico abaixo.



Seja  $E_2 = \left[\frac{3}{4}, \frac{7}{10}\right]$ . Veja que  $f$  satisfaz as condições (M1) e (M2) da Definição 3.1, mas não satisfaz

- (M3), pois  $f^i(x) = 1$  para todo  $x \in I_3$ ;
- (M4), pois  $f^n(I_j) \in \{I_1, I_2 \cup E_2, I_3\}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  e  $i \in \{1, 2, 3\}$ .

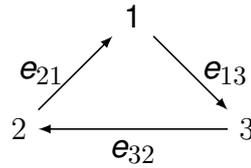
Apesar disso,  $f$  é irreduzível, já que

$$\begin{cases} f(I_1) = I_3 \cup E_2, f^2(I_1) = I_2, f^3(I_1) = I_1 \dots \\ f(I_2) = I_1, f^2(I_2) = I_3 \cup E_2, f^3(I_2) = I_2 \dots \\ f(I_3) = I_2, f^2(I_3) = I_1, f^3(I_3) = I_3 \cup E_2 \dots \end{cases}$$

Temos, também,

$$A_f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } \widehat{A}_f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

e o grafo  $G_{A_f}$  pode ser representado por



Para  $x \in E_f$  qualquer, se considerarmos  $V = \{2, 3\}$ , o Corolário 5.35 garante que  $\nu_x : C^*(G_{A_f}, V) \rightarrow B(H_x)$  existe e é fiel, assim como  $\pi : C^*(G_{A_f}, V) \rightarrow B(L^2(O_x, \#))$ .

## REFERÊNCIAS

BATES, T.; HONG, J. H.; RAEBURN, I.; SZYMANSKI, W. The ideal structure of  $C^*$ -algebras of infinite graphs. **Illinois J. Math.**, v. 46, p. 1159–1176, 2002.

BIAZOTTO, S. C.  **$C^*$ -álgebras de grafos com linhas finitas**. Florianópolis: Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina, 2012.

GONÇALVES, D.; ROYER, D. Graph  $C^*$ -algebras, branching systems and the Perron-Frobenius operator. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, v. 391, n. 2, p. 457–465, 2012.

GONÇALVES, D.; ROYER, D.; LI, H. Faithful representations of graph algebras via branching systems. **Canadian Mathematical Bulletin**, v. 59, n. 1, p. 95–103, 2016.

MARTINS, N.; PINTO, P. R.; RAMOS, C. C. On graph algebras from interval maps. **Annals of Functional Analysis**, v. 10, n. 2, p. 203–217, 2019.

MARTINS, N.; PINTO, P. R.; RAMOS, C. C.; GONÇALVES, D. Unifying interval maps and branching systems with applications to relative graph  $C^*$ -algebras. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, v. 519, n. 1, 2023.

MUHLY, P. S.; TOMFORDE, M. Adding tails to  $C^*$ -correspondences. **Doc. Math.**, EDP Sciences, v. 9, p. 79–106, 2004.

MURPHY, G. J.  **$C^*$ -álgebras and Operator Theory**. New York: John Wiley, 1989.

RAEBURN, I. **Graph Algebras**. Providence: American Mathematical Society, 2004.

RAMOS, C. C.; MARTINS, N.; PINTO, P. R. Escape dynamics for interval maps. **Discrete and Continuous Dynamical Systems**, v. 39, n. 11, p. 6241–6260, 2019.

RAMOS, C. C.; MARTINS, N.; PINTO, P. R. Interval maps from Cuntz–Krieger algebras. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, v. 374, p. 347–354, 2011.

RAMOS, C. C.; MARTINS, N.; PINTO, P. R. Toeplitz algebras arising from escape points of interval maps. **Banach Journal of Mathematical Analysis**, v. 11, n. 3, p. 536–553, 2017.

RAMOS, C. C.; MARTINS, N.; PINTO, P. R.; RAMOS, J. S. Cuntz–Krieger algebras representations from orbits of interval maps. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, v. 341, p. 825–833, 2008.