



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA PURA E APLICADA

Bruna Arielly Schulz

**Caracterização de álgebras de caminhos de Leavitt fortemente \mathbb{Z} -graduadas
e ϵ -fortemente \mathbb{Z} -graduadas**

Florianópolis
2023

Bruna Arielly Schulz

**Caracterização de álgebras de caminhos de Leavitt fortemente \mathbb{Z} -graduadas
e épsilon-fortemente \mathbb{Z} -graduadas**

Dissertação de mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Danilo Royer

Florianópolis

2023

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Schulz, Bruna Arielly
Caracterização de álgebras de caminhos de Leavitt
fortemente Z-graduadas e épsilon-fortemente Z-graduadas /
Bruna Arielly Schulz ; orientador, Danilo Royer,
coorientador, Daniel Gonçalves, 2023.
53 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa
Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas,
Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada,
Florianópolis, 2023.

Inclui referências.

1. Matemática Pura e Aplicada. 2. Álgebras de caminhos
de Leavitt. 3. Z-Graduação forte. 4. Épsilon Z-graduação
forte. I. Royer, Danilo . II. Gonçalves, Daniel. III.
Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós
Graduação em Matemática Pura e Aplicada. IV. Título.

Bruna Arielly Schulz

**Caracterização de álgebras de caminhos de Leavitt fortemente \mathbb{Z} -graduadas
e ϵ -fortemente \mathbb{Z} -graduadas**

O presente trabalho em nível de mestrado foi avaliado e aprovado por banca
examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. Dr. Alveri Alves Sant'Ana
Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Prof. Dr. Danilo Royer
Universidade Federal de Santa Catarina.

Prof. Dr. Dirceu Bagio
Universidade Federal de Santa Catarina.

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi
julgado adequado para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Prof. Dr. Daniel Gonçalves
Coordenador do Programa

Prof. Dr. Danilo Royer
Orientador

Florianópolis, 2023.

Ao meus pais, Marcia e Adilson.

AGRADECIMENTOS

Agradeço de todo o meu coração meus pais, Marcia Frotscher Schulz e Adilson Schulz, que foram e são exemplos de pessoas honestas, trabalhadoras e comprometidas. Foram eles que me ensinaram o valor de uma boa educação. Em todos esses anos de estudo, eles sempre me incentivaram, acreditaram em mim e me deram suporte. Ser filha de vocês é uma honra.

Agradeço aos meus avós, Heldrauth Schulz e Lindolfo Schulz, por estarem presente em todos os meus passos, mesmo não entendendo todas as minhas escolhas. Estar com vocês sempre aquece o meu coração.

Agradeço ao meu namorado, Matheus Miotto Calione, por todo suporte ao longo do mestrado. Você me acolheu nos momentos mais duros dessa jornada e me incentivou a continuar buscando realizar os meus sonhos. Amor, você é minha melhor escolha diária.

Agradeço ao meu orientador, Danilo Royer, por dirigir meus estudos com excepcionalidade e dedicação. Sempre esteve disponível para sanar minhas dúvidas, foi paciente e compreensível nos meus momentos de maior ansiedade.

Agradeço aos docentes Dr. Alveri Alves Sant'Ana e Dr. Dirceu Bagio por aceitarem o convite de compor a banca da dissertação do mestrado e por terem trazido sugestões que aprimoraram este trabalho.

Por fim, agradeço ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CAPES) pelo apoio financeiro.

RESUMO

Este trabalho contempla resultados acerca das caracterizações das álgebras de caminhos de Leavitt fortemente \mathbb{Z} -graduadas e épsilon-fortemente \mathbb{Z} -graduadas. Isto é, busca-se determinar a estrutura de cada álgebra de caminhos de Leavitt analisando o grafo E que gera a álgebra. De forma mais específica, dados E um grafo dirigido, \mathbb{K} um corpo e considerando a álgebra de caminhos de Leavitt $L_{\mathbb{K}}(E)$ com sua \mathbb{Z} -gradação canônica, tem-se como um dos objetivos mostrar que $L_{\mathbb{K}}(E)$ ser fortemente \mathbb{Z} -graduada é equivalente a E ser linha finita, não possuir poço e satisfazer a Condição (Y), que por sua vez, é equivalente a E ser linha finita, não possuir poço e satisfazer a Condição (Y1). Ainda, mostraremos que $L_{\mathbb{K}}(E)$ é épsilon-fortemente \mathbb{Z} -graduada se, e somente se, E é finito.

Palavras-chave: Álgebras de caminhos de Leavitt, \mathbb{Z} -gradação forte, épsilon \mathbb{Z} -gradação forte.

ABSTRACT

This thesis presents results involving the characterization of Strongly Leavitt path algebras \mathbb{Z} -graded and epsilon-strongly \mathbb{Z} -graded. This means we intend to determine the structure of each Leavitt path algebra by analyzing the graph E that generates each of these algebras. In a more specific way, given E a directed graph, \mathbb{K} a field and considering the Leavitt path algebra $L_{\mathbb{K}}(E)$ with its canonical \mathbb{Z} -graded, one of the goals of this paper is to prove that the fact of $L_{\mathbb{K}}(E)$ being strongly \mathbb{Z} -graded is equivalent to E being row-finite, not having sink and satisfying the Condition (Y), that in turn, is equivalent to E being row-finite, not having sink and satisfying the Condition (Y1) . In addition to that, we will be proving that $L_{\mathbb{K}}(E)$ is epsilon-strongly \mathbb{Z} -graded if, and only if, E is finite.

Keywords: Leavitt path algebras; strongly \mathbb{Z} -gradation; epsilon-strongly \mathbb{Z} -gradation.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	9
2	ÁLGEBRA DE CAMINHOS DE LEAVITT	11
2.1	GRAFOS	11
2.2	ÁLGEBRA DE CAMINHOS DE LEAVITT	13
3	CONDIÇÃO (Y) E \mathbb{Z} -GRADUAÇÃO	19
3.1	CONDIÇÃO (Y)	19
3.2	\mathbb{Z} -GRADUAÇÃO	23
4	ÁLGEBRAS DE CAMINHOS DE LEAVITT FORTEMENTE Z-GRADUADAS	26
5	QUANDO $L_{\mathbb{K}}(E)$ É ÉPSILON-FORTEMENTE \mathbb{Z} -GRADUADA	37
6	CONCLUSÃO	47
	BIBLIOGRAFIA	48
	APÊNDICE A – \mathbb{K} -ÁLGEBRA UNIVERSAL	49

1 INTRODUÇÃO

Em 2005, Gene Abrams e Gonzalo Aranda Pino publicaram o artigo *The Leavitt path algebra of a graph* no *Journal of Algebra* no qual definiram pela primeira vez as álgebras de caminhos de Leavitt. Após uma década, dezenas de artigos foram publicados, diversos matemáticos se debruçaram sobre esse novo conceito e estudaram as propriedades, as estruturas, as generalizações e as relações com outros conceitos matemáticos.

Este trabalho está primordialmente fundamentado nos artigos [1] e [2] dos matemáticos Patrick Lundström e Johan Öinert, no qual discutem as consequências de um anel S ser fortemente \mathbb{Z} -graduado e épsilon-fortemente \mathbb{Z} -graduado. Desta forma, estaremos interessados em demonstrar seguintes resultados

Teorema 1.1. *Seja E um grafo. Considerando a álgebra de caminhos de Leavitt $L_{\mathbb{K}}(E)$ com sua \mathbb{Z} -gradação canônica, as seguintes propriedades são equivalentes:*

- (i) $L_{\mathbb{K}}(E)$ é fortemente \mathbb{Z} -graduada;
- (ii) E é linha finita, não possui poço e satisfaz a Condição (Y);
- (iii) E é linha finita, não possui poço e satisfaz a Condição (Y1).

Teorema 1.2. *Consideremos $L_{\mathbb{K}}(E)$ com sua gradação canônica, então $L_{\mathbb{K}}(E)$ é épsilon-fortemente \mathbb{Z} -graduada se, e somente se, E é finito.*

Com essa finalidade, será requisitado que percorramos as definições de um grafo dirigido E , E ser finito, E ser linha finita e entre outras. Na sequência, são introduzidas as álgebras de caminhos de Leavitt, denotadas por $L_{\mathbb{K}}(E)$, bem como, certas propriedades e exemplos das álgebras de caminhos de Leavitt. Esses detalhamentos compõe o segundo capítulo.

Partindo para a elaboração da demonstração do Teorema 1.1, no Capítulo 3, estaremos interessados em introduzir a Condição (Y) e demonstrar que um grafo E satisfaz a Condição (Y) se, e somente se, satisfaz a Condição (Y1). Isso permitirá concluir que (ii) \Rightarrow (iii) do Teorema 1.1. Em seguida, será demonstrado que toda álgebra de caminho de Leavitt é acompanhada de uma \mathbb{Z} -gradação canônica.

No Capítulo 4, introduziremos a álgebra de caminhos de Leavitt fortemente \mathbb{Z} -graduada e suas propriedades. É nesse capítulo que demonstraremos as implicações (i) \Rightarrow (ii) e (iii) \Rightarrow (i) do Teorema 1.1. Com isso, será possível enunciar e demonstrar o Teorema 1.1.

No quinto e último capítulo, abordaremos a álgebra de caminhos de Leavitt épsilon-fortemente \mathbb{Z} -graduada. Em seguida, serão apresentadas diversas proposições que permitirão demonstrarmos o Teorema 5.11.

No final desse estudo temos um apêndice, em que será abordado o processo de construção de $L_{\mathbb{K}}(E)$.

Cabe destacar que para a elaboração desse trabalho também foram necessárias consultas aos seguintes estudos e livros [3], [4], [5] e [6].

2 ÁLGEBRA DE CAMINHOS DE LEAVITT

Neste capítulo serão estudados os conceitos básicos de grafos, a definição de Álgebra de Caminhos de Leavitt, alguns resultados e diversos exemplos, com o objetivo de introduzirmos conceitos fundamentais para entendermos e desenvolvermos a álgebra de caminhos de Leavitt fortemente \mathbb{Z} -graduada.

2.1 GRAFOS

Nessa seção formalizaremos o que é um grafo, seus elementos, certas notações e outros conceitos na finalidade de definirmos a Álgebra de Caminhos de Leavitt na seção 2.2.

Definição 2.1. *Um grafo dirigido é uma quádrupla (E^0, E^1, r, s) composta de dois conjuntos enumeráveis E^0 e E^1 e também duas funções $r, s : E^1 \rightarrow E^0$. Os elementos de E^0 são chamados de vértices e os de E^1 são chamados de arestas.*

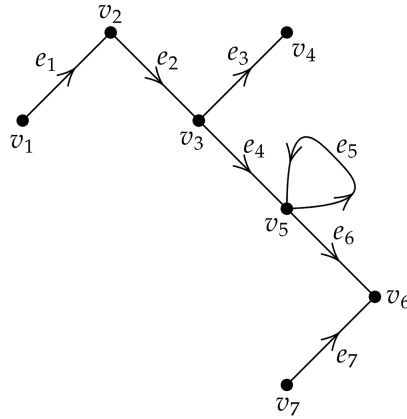
Para cada $e \in E^1$, $s(e)$ é o vértice onde a aresta começa e $r(e)$ é o vértice onde a aresta termina.

Ao longo do trabalho, chamaremos um grafo dirigido somente por grafo e vamos denotá-lo simplesmente por E em lugar de (E^0, E^1, r, s) .

Definição 2.2. *Seja E um grafo. Dizemos que*

1. *Uma aresta que começa e termina no mesmo vértice é chamada de loop.*
2. *Um vértice v que não recebe nenhuma aresta, isto é, $r^{-1}(v) = \emptyset$ é chamada de fonte.*
3. *Um vértice v que não emite nenhuma aresta, isto é, $s^{-1}(v) = \emptyset$ é chamada de poço.*

Exemplo 2.3. Considere $E^0 = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$, $E^1 = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$, $s(e_1) = v_1$, $s(e_2) = v_2 = r(e_1)$, $s(e_3) = s(e_4) = v_3 = r(e_2)$, $r(e_3) = v_4$, $s(e_5) = v_5 = r(e_5)$, $v_6 = r(e_6) = r(e_7)$ e $s(e_7) = v_7$. Podemos representar este grafo E da seguinte forma



Neste exemplo, v_1 e v_7 são fonte, v_4 é um poço e e_5 é um loop que começa e termina no vértice v_5 .

Definição 2.4. *Seja E um grafo. Definamos:*

1. *Um caminho finito μ é uma sequência $\mu = e_1 e_2 \dots e_n$ de arestas de maneira que $r(e_i) = s(e_{i+1})$, para todo $i \in \{1, \dots, n-1\}$.*
2. *Um caminho infinito μ é uma sequência $\mu = e_1 e_2 e_3 \dots$ de arestas de maneira que $r(e_i) = s(e_{i+1})$, para todo $i \in \mathbb{N}$.*
3. *O comprimento de um caminho finito μ é o número de arestas que ele contém e denotamos por $|\mu|$.*

Exemplo 2.5. No Exemplo 2.3, temos que $\mu = e_1 e_2 e_3$ é um caminho finito e $|\mu| = 3$. E $e_2 e_4 e_5 e_5 e_5 \dots$ é um caminho infinito.

Definição 2.6. *Definamos o conjunto W como sendo o conjunto de todos os caminhos finitos de um grafo E , isto, é*

$$W := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \mu = e_1 \dots e_n \mid e_i \in E^1 \text{ e } r(e_i) = s(e_{i+1}), \forall i \in \{1, \dots, n-1\} \right\}.$$

Observação 2.7. Consideremos $\mu = e_1 e_2 \dots e_n \in W$. Definamos que $s(\mu) = s(e_1)$ e $r(\mu) = r(e_n)$. Para todo $v \in E^0$, definamos $s(v) = r(v) = v$.

Observação 2.8. Denotaremos por $(E^1)^*$ o conjunto de símbolos formais $\{e^* : e \in E^1\}$. De acordo com [5], podemos nos referir aos elementos de E^1 como arestas reais e aos elementos de $(E^1)^*$ de arestas fantasmas. Ainda, se $\mu = e_1 e_2 \dots e_n$ é um caminho finito do grafo E , então $\mu^* = e_n^* e_{n-1}^* \dots e_2^* e_1^*$.

Definição 2.9. *Seja E um grafo. Dizemos que $\mu = e_1e_2 \dots e_n$ é um caminho fechado se $r(\mu) = s(\mu)$. E dizemos que $f \in E^1$ é uma saída para μ se $s(f) = s(e_i)$ e $f \neq e_i$ para algum $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.*

Definição 2.10. *Seja E um grafo. Dizemos que E é finito se os conjuntos E^0 e E^1 são finitos.*

Definição 2.11. *Seja E um grafo. Dizemos que E é linha finita se para todo vértice v de E saem, no máximo, finitas arestas.*

Definição 2.12. *Um grafo E satisfaz a Condição (L) se todo caminho fechado tem uma saída.*

2.2 ÁLGEBRA DE CAMINHOS DE LEAVITT

Essa seção será toda dedicada a Álgebra de Caminhos de Leavitt sobre E com coeficientes em \mathbb{K} tal que E é um grafo e \mathbb{K} é um corpo. Perpassaremos pela sua definição, demonstraremos um resultado quanto a organização dos elementos dessa álgebra e, por fim, apresentaremos alguns exemplos da Álgebra de Caminhos de Leavitt no qual mostraremos que são isomorfos a álgebras conhecidas.

Definição 2.13. *Sejam E um grafo e \mathbb{K} um corpo. A Álgebra de Caminhos de Leavitt sobre E com coeficientes em \mathbb{K} , denotada por $L_{\mathbb{K}}(E)$, é a \mathbb{K} -álgebra universal gerada pelo conjunto $\{p_v : v \in E^0\}$, de elementos idempotentes e ortogonais dois a dois, com os conjuntos $\{s_e : e \in E^1\}$ e $\{s_e^* : e \in E^1\}$ satisfazendo as seguintes propriedades:*

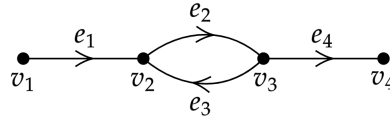
1. $p_{s(e)}s_e = s_ep_{r(e)} = s_e$, para todo $e \in E^1$;
2. $p_{r(e)}s_e^* = s_e^*p_{s(e)} = s_e^*$, para todo $e \in E^1$;
3. Para quaisquer $e, f \in E^1$,

$$s_e^*s_f = \begin{cases} p_{r(e)}, & \text{se } e = f; \\ 0, & \text{se } e \neq f; \end{cases}$$

4. $p_v = \sum_{\substack{e \in E^1 \\ s(e)=v}} s_es_e^*$ para todo $v \in E^0$ tal que $0 < \#s^{-1}(v) < \infty$.

Observação 2.14. Baseado no Teorema 3.3 do artigo [4] e pelo corolário 1.7 do artigo [3], concluímos que $p_v \neq 0$ e $s_e \neq 0$, para todo $v \in E^0$ e $e \in E^1$.

Exemplo 2.15. Se considerarmos o grafo E



temos que, por exemplo, dois elementos de $L_{\mathbb{K}}(E)$ são $s_{e_1}s_{e_2}s_{e_3}s_{e_2}^*s_{e_3}^*$ e $p_{v_1}s_{e_1}s_{e_2}^*s_{e_3}s_{e_2}^*p_{v_4}$. Porém, note que o elemento $p_{v_1}s_{e_1}s_{e_2}^*s_{e_3}s_{e_2}^*p_{v_4}$ é simplesmente o elemento 0 da álgebra, pois $s_{e_2}^*s_{e_3} = 0$.

Comprovaremos no próximo lema que é possível reescrevermos alguns elementos de $L_{\mathbb{K}}(E)$ de forma simplificada.

Lema 2.16. *Se E é um grafo e $L_{\mathbb{K}}(E)$ é a álgebra de caminhos de Leavitt associada a E , então para quaisquer caminhos α, β, γ e $\delta \in W \cup E^0$ de modo que $r(\alpha) = r(\beta)$ e $r(\gamma) = r(\delta)$ temos que*

$$(s_{\alpha}s_{\beta}^*)(s_{\gamma}s_{\delta}^*) = \begin{cases} s_{\alpha}s_{\gamma'}s_{\delta}^*, & \text{se } \gamma = \beta\gamma' \text{ para algum } \gamma' \\ s_{\alpha}s_{\delta}^*, & \text{se } \gamma = \beta \\ s_{\alpha}s_{\beta'}s_{\delta}^*, & \text{se } \beta = \gamma\beta' \text{ para algum } \beta' \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Demonstração. No caso em que algum dos caminhos α, β, γ e $\delta \in E^0$, introduziremos uma mudança de notação. Por exemplo, se $\alpha \in E^0$, então $s_{\alpha} = p_{\alpha}$. Essa mudança de notação não interfere na argumentação da demonstração. Agora, suponhamos que $\gamma = \beta\gamma'$, para algum caminho γ' , então temos que

$$(s_{\alpha}s_{\beta}^*)(s_{\gamma}s_{\delta}^*) = s_{\alpha}s_{\beta}^*s_{\beta}s_{\gamma'}s_{\delta}^* = s_{\alpha}p_{r(\beta)}s_{\gamma'}s_{\delta}^* = s_{\alpha}p_{r(\alpha)}s_{\gamma'}s_{\delta}^* = s_{\alpha}s_{\gamma'}s_{\delta}^*.$$

Se $\gamma = \beta$, então

$$(s_{\alpha}s_{\beta}^*)(s_{\gamma}s_{\delta}^*) = s_{\alpha}s_{\beta}^*s_{\beta}s_{\delta}^* = s_{\alpha}p_{r(\beta)}s_{\delta}^* = s_{\alpha}p_{r(\alpha)}s_{\delta}^* = s_{\alpha}s_{\delta}^*.$$

Agora, se $\beta = \gamma\beta'$, para algum caminho β' , temos que

$$(s_{\alpha}s_{\beta}^*)(s_{\gamma}s_{\delta}^*) = s_{\alpha}(s_{\gamma}s_{\beta'})^*s_{\gamma}s_{\delta}^* = s_{\alpha}s_{\beta'}^*s_{\gamma}^*s_{\gamma}s_{\delta}^* = s_{\alpha}s_{\beta'}^*p_{r(\gamma)}s_{\delta}^* = s_{\alpha}s_{\beta'}^*p_{r(\delta)}s_{\delta}^* = s_{\alpha}s_{\beta'}^*s_{\delta}^*.$$

Por fim, suponhamos que $\beta = f_1f_2 \dots f_m$ e $\gamma = e_1e_2 \dots e_n$ em que $f_i \neq e_i$ para algum índice i . Suponhamos que i_0 seja o menor dos índices em que $f_{i_0} \neq e_{i_0}$. Assim, o início de β e igual ao de γ e denotaremos $f =: f_1f_2 \dots f_{i_0-1} = e_1e_2 \dots e_{i_0-1}$. Logo, $\beta = ff_{i_0} \dots f_m$

e $\gamma = fe_{i_0} \dots e_n$. Desta forma, como $f_{i_0} \neq e_{i_0}$, temos que

$$\begin{aligned} s_\beta^* s_\gamma &= s_{f_m}^* \dots s_{f_{i_0}}^* s_f^* s_f s_{e_{i_0}} \dots s_{e_n} \\ &= s_{f_m}^* \dots s_{f_{i_0}}^* p_r(f) s_{e_{i_0}} \dots s_{e_n} \\ &= s_{f_m}^* \dots s_{f_{i_0}}^* s_{e_{i_0}} \dots s_{e_n} \\ &= s_{f_m}^* \dots s_{f_{i_0+1}}^* 0 s_{e_{i_0+1}} \dots s_{e_n} \\ &= 0. \end{aligned}$$

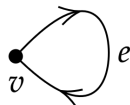
Daí, concluímos que $(s_\alpha s_\beta^*)(s_\gamma s_\delta^*) = 0$. \square

Proposição 2.17. *Se E é um grafo e $L_{\mathbb{K}}(E)$ é a álgebra de caminhos de Leavitt associada a E , então*

$$L_{\mathbb{K}}(E) = \text{span} \left\{ s_\alpha s_\beta^* \mid \alpha, \beta \in W \cup E^0; r(\alpha) = r(\beta) \right\}.$$

Demonstração. Aplicando sucessivamente o Lema 2.16, qualquer produto de elementos $E^0 \cup E^1 \cup (E^1)^*$ pode ser reescrito na forma $s_\alpha s_\beta^*$. \square

Exemplo 2.18. Considere o grafo E com $E^0 = \{v\}$ e $E^1 = \{e\}$ da seguinte maneira



Seja $\mathbb{K}[x, x^{-1}]$ a álgebra dos polinômios de Laurent com coeficientes em \mathbb{K} . Definamos $\phi : E^1 \cup (E^1)^* \cup E^0 \rightarrow \mathbb{K}[x, x^{-1}]$ como sendo $\phi(v) = 1$, $\phi(e) = x$ e $\phi(e^*) = x^{-1}$. Notemos que

$$\phi(s(e))\phi(e) = 1 \cdot x = x = \phi(e) = x \cdot 1 = \phi(e) \cdot \phi(r(e))$$

e que

$$\phi(r(e))\phi(e^*) = 1 \cdot x^{-1} = x^{-1} = \phi(e^*) = x^{-1} \cdot 1 = \phi(e^*)\phi(s(e)).$$

Portanto, as condições 1 e 2 da definição 2.13 são satisfeitas. As condições 3 e 4 são satisfeitas trivialmente.

Logo, pela propriedade universal de $L_{\mathbb{K}}(E)$, ϕ se estende a um \mathbb{K} -homomorfismo

$$\phi : L_{\mathbb{K}}(E) \rightarrow \mathbb{K}[x, x^{-1}].$$

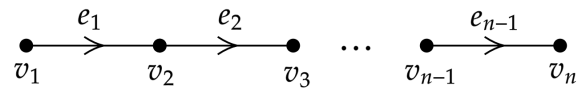
Na verdade, $L_{\mathbb{K}}(E) \cong \mathbb{K}[x, x^{-1}]$. De fato, utilizando a propriedade universal de $\mathbb{K}[x, x^{-1}]$ obtemos $\psi : \mathbb{K}[x, x^{-1}] \rightarrow L_{\mathbb{K}}(E)$ um \mathbb{K} -homomorfismo dado pela extensão linear de $\psi(x) = s_e, \psi(x^{-1}) = s_e^*$ e $\psi(1) = p_v$.

Não é difícil observar que ψ é a inversa de ϕ e portanto obtemos o isomorfismo desejado.

Para os próximos exemplos, precisamos do Teorema de unicidade de Cuntz-Krieger demonstrado no Teorema 6.8 no artigo [7].

Teorema 2.19 (Teorema de unicidade de Cuntz-Krieger). *Sejam E um grafo que satisfaz a Condição (L) e A uma álgebra. Seja $\phi : L_{\mathbb{K}}(E) \rightarrow A$ um homomorfismo tal que $\phi(p_v) \neq 0$, para todo $v \in E^0$, então ϕ é injetora.*

Exemplo 2.20. Seja E o grafo com os conjuntos $E^0 = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $E^1 = \{e_1, \dots, e_{n-1}\}$ dado da seguinte maneira:



Seja $M_n(\mathbb{K})$ a álgebra das matrizes $n \times n$ com entradas em \mathbb{K} . Defina $\phi : E^1 \cup (E^1)^* \cup E^0 \rightarrow M_n(\mathbb{K})$ dada por $\phi(v_i) = E_{i,i}$, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, $\phi(e_i) = E_{i,i+1}$ e $\phi(e_i^*) = E_{i+1,i}$, para todo $i \in \{1, \dots, n-1\}$, em que $E_{i,j}$ é a matriz da forma

$$E_{i,j} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 1 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

ou seja, $E_{i,j}$ é a matriz $n \times n$ em que todos os elementos são nulos, exceto o elemento 1 que se encontra na posição i, j . Relembrando rapidamente que o produto de duas matrizes $E_{i,j}$ e $E_{k,l}$ em $M_n(\mathbb{K})$ é dada por

$$E_{i,j} \cdot E_{k,l} = \begin{cases} E_{i,l}, & \text{se } j = k \\ 0, & \text{se } j \neq k \end{cases}.$$

Para todo i, j , note que

$$E_{i,i} \cdot E_{j,j} = \begin{cases} E_{i,i}, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}.$$

Logo, as matrizes $E_{i,i}$ são idempotentes e ortogonais duas a duas. Agora note que

$$\phi(s(e_i))\phi(e_i) = \phi(v_i)\phi(e_i) = E_{i,i} \cdot E_{i,i+1} = E_{i,i+1} = \phi(e_i).$$

Além disso,

$$\phi(e_i)\phi(r(e_i)) = \phi(e_i)\phi(v_{i+1}) = E_{i,i+1} \cdot E_{i+1,i+1} = E_{i,i+1} = \phi(e_i).$$

Ou seja,

$$\phi(s(e_i))\phi(e_i) = \phi(e_i) = \phi(e_i)\phi(r(e_i)),$$

para todo i . Agora, notemos que da mesma maneira descrita acima temos

$$\phi(r(e_i))\phi(e_i^*) = \phi(v_{i+1})\phi(e_i^*) = E_{i+1,i+1} \cdot E_{i+1,i} = E_{i+1,i} = \phi(e_i^*).$$

e que

$$\phi(e_i^*)\phi(s(e_i)) = \phi(e_i^*)\phi(v_i) = E_{i+1,i} \cdot E_{i,i} = E_{i+1,i} = \phi(e_i^*)$$

Isto é,

$$\phi(r(e_i))\phi(e_i^*) = \phi(e_i^*) = \phi(e_i^*)\phi(s(e_i)),$$

para todo i . Logo, as condições 1 e 2 da definição 2.13 são válidas.

Para a condição 3, notamos que dados $e_i, e_j \in E^1$ temos que

$$\phi(e_i^*) \cdot \phi(e_j) = E_{i+1,i} \cdot E_{j,j+1} = \begin{cases} E_{i+1,i+1}, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}.$$

Mas $E_{i+1,i+1} = \phi(v_{i+1}) = \phi(r(e_i))$ e, portanto,

$$\phi(e_i^*) \cdot \phi(e_j) = \begin{cases} \phi(r(e_i)), & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}.$$

Assim, concluímos que a condição 3 é satisfeita.

Finalmente para a condição 4, observe que para cada $v_i \in E^1$, para $i \in \{1, \dots, n-1\}$, temos que existe somente $e_i \in E^1$ tal que $s(e_i) = v_i$ e desse modo obtemos que

$$\phi(e_i)\phi(e_i^*) = E_{i,i+1} \cdot E_{i+1,i} = E_{i,i} = \phi(v_i).$$

Dessa maneira, pela propriedade universal de $L_{\mathbb{K}}(E)$ temos que ϕ se estende a um \mathbb{K} -homomorfismo $\phi : L_{\mathbb{K}}(E) \rightarrow M_n(\mathbb{K})$.

Notemos que, por vacuidade, E satisfaz a Condição (L). Portanto, pelo Teorema 2.19, temos que ϕ é injetora. Além disso, ϕ é sobrejetora. Para isso basta mostrarmos que conseguimos gerar $E_{i,j}$, para todo i, j , a partir das matrizes definidas acima. De fato, caso $i = j$, então não há nada a fazer, pois $\phi(v_i) = E_{i,i}$, para todo i , por definição.

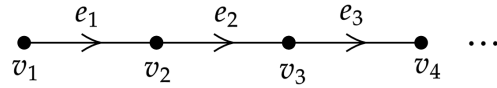
Agora, caso $i > j$, então note que podemos representar $E_{i,j}$ da seguinte maneira

$$\begin{aligned} E_{i,j} &= E_{i,i-1} \cdot E_{i-1,i-2} \cdots E_{j+1,j} = \phi(e_{i-1}^*) \cdot \phi(e_{i-2}^*) \cdots \phi(e_j^*) \\ &= \phi(e_{i-1}^* \cdot e_{i-2}^* \cdots e_j^*). \end{aligned}$$

Por outro lado, caso $i < j$ então note que podemos representar $E_{i,j}$ da seguinte maneira

$$\begin{aligned} E_{i,j} &= E_{i,i+1} \cdot E_{i+1,i+2} \cdots E_{j-1,j} = \phi(e_i) \cdot \phi(e_{i+1}) \cdots \phi(e_{j-1}) \\ &= \phi(e_i \cdot e_{i+1} \cdots e_{j-1}). \end{aligned}$$

Exemplo 2.21. Seja E o grafo com $E^0 = \{v_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ e $E^1 = \{e_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ dado da seguinte maneira:



Considere $M_\infty(\mathbb{K})$ como sendo a \mathbb{K} -álgebra das matrizes infinitas que possuem um número finito de elementos não nulos.

Defina $\phi : E^1 \cup (E^1)^* \cup E^0 \rightarrow M_\infty(\mathbb{K})$ por $\phi(v_i) = E_{i,i}$, $\phi(e_i) = E_{i,i+1}$ e $\phi(e_i^*) = E_{i+1,i}$, para todo $i \in \mathbb{N}$ em que $E_{i,j}$ é matriz infinita em que todos os elementos são nulos, exceto o elemento 1 na posição i, j .

De forma análoga ao Exemplo 2.20, verifica-se que ϕ se estende a um \mathbb{K} -homomorfismo injetor e sobrejetor $\phi : L_{\mathbb{K}}(E) \rightarrow M_\infty(\mathbb{K})$.

3 CONDIÇÃO (Y) E \mathbb{Z} -GRADUAÇÃO

Nesse capítulo, abordaremos propriedades que serão recorrentemente utilizadas no próximo capítulo. No primeiro momento, estudaremos a Condição (Y) que é uma propriedade de um grafo E . Em seguida, queremos estudar uma estrutura de um anel S , dada essa estrutura diremos que S é \mathbb{Z} -graduado.

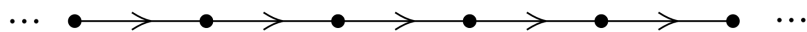
3.1 CONDIÇÃO (Y)

Nessa seção falaremos sobre a Condição (Y) de um grafo E . A demonstração de que um grafo E satisfaça essa propriedade tende a ser trabalhosa. Assim, o objetivo dessa seção é construir uma equivalência com hipóteses reduzidas, facilitando as análises futuras. Ademais, com esse resultado demonstrado conseguimos concluir uma das implicações do resultado principal.

Definição 3.1 (Condição (Y)). *Um grafo E satisfaz a Condição (Y) se para todo $k \in \mathbb{N}$ e para todo caminho infinito p , existem um subcaminho inicial α de p e um caminho finito β tal que $r(\beta) = r(\alpha)$ e $|\beta| - |\alpha| = k$.*

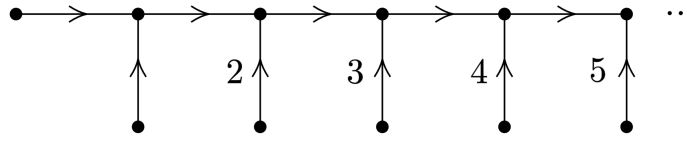
Definição 3.2 (Condição (Y1)). *Um grafo E satisfaz a Condição (Y1) se para todo caminho infinito p , existem um subcaminho inicial α de p e um caminho finito β tal que $r(\beta) = r(\alpha)$ e $|\beta| - |\alpha| = 1$.*

Exemplo 3.3. Consideremos o seguinte grafo



Esse grafo satisfaz a Condição (Y) e a Condição (Y1). De fato, escolhemos p um caminho infinito do grafo E e consideremos um caminho inicial α de p . Neste caso, escolheremos o caminho β como sendo a aresta anterior a α concatenado com o próprio α . Assim, $r(\beta) = r(\alpha)$ e $|\beta| - |\alpha| = 1$. Logo, E satisfaz a Condição (Y1). Para mostrarmos que esse grafo satisfaz a Condição (Y), basta escolhermos p um caminho infinito de E e α um caminho inicial p . Neste caso, escolheremos β como sendo duas arestas anteriores a α concatenado com o próprio α . Assim, $r(\beta) = r(\alpha)$ e $|\beta| - |\alpha| = 2$. De forma indutiva, conseguimos mostrar que E satisfaz a Condição (Y).

Exemplo 3.4. Consideremos o seguinte grafo E



em que a notação $2, 3, 4, 5, \dots$ indica a quantidade de arestas na vertical. Esse grafo não satisfaz a Condição (Y) nem a Condição (Y1). De fato, escolhemos p sendo todas as arestas horizontais do grafo E . Temos que p é um caminho infinito. Assim, ao considerarmos o caminho inicial α formado pela primeira aresta de p , não existe caminho β tal que $r(\beta) = r(\alpha)$ e $|\beta| - |\alpha| = 1$. Logo, E não satisfaz a Condição (Y1). Além disso, para mostrarmos que o grafo não satisfaz a Condição (Y), basta fazermos as mesmas escolhas de p e α feitas acima.

Afim de identificarmos com mais facilidade os grafos que satisfazem a Condição (Y), veremos a próxima proposição.

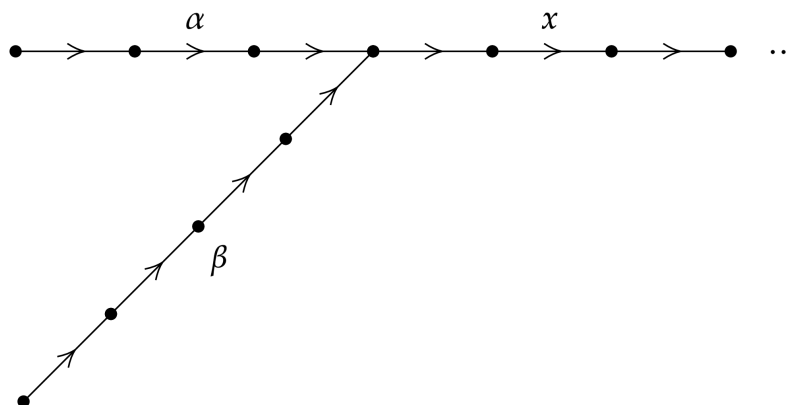
Proposição 3.5. Um grafo E satisfaz a Condição (Y) se, e somente se, satisfaz a Condição (Y1).

Demonstração. Seja E um grafo que satisfaz a Condição (Y). Logo, tomando $k = 1$, temos que o grafo E satisfaz a Condição (Y1).

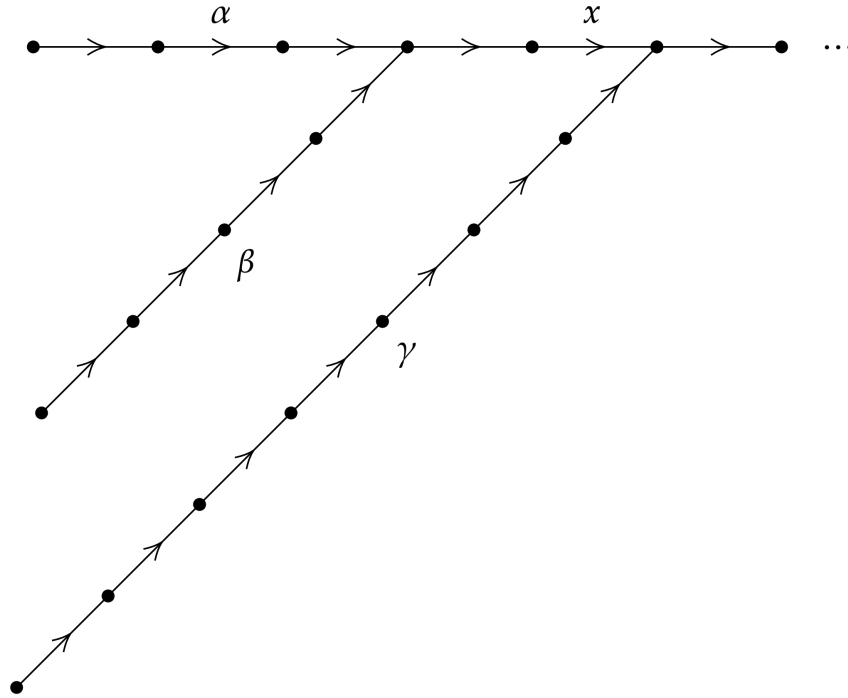
Agora, consideremos E um grafo que satisfaz a Condição (Y1). Seja p um caminho infinito de E . Digamos



Logo, existem um subcaminho α de p tal que $p = \alpha x$ e um caminho finito β com $r(\alpha) = r(\beta)$ e $|\beta| - |\alpha| = 1$. Digamos



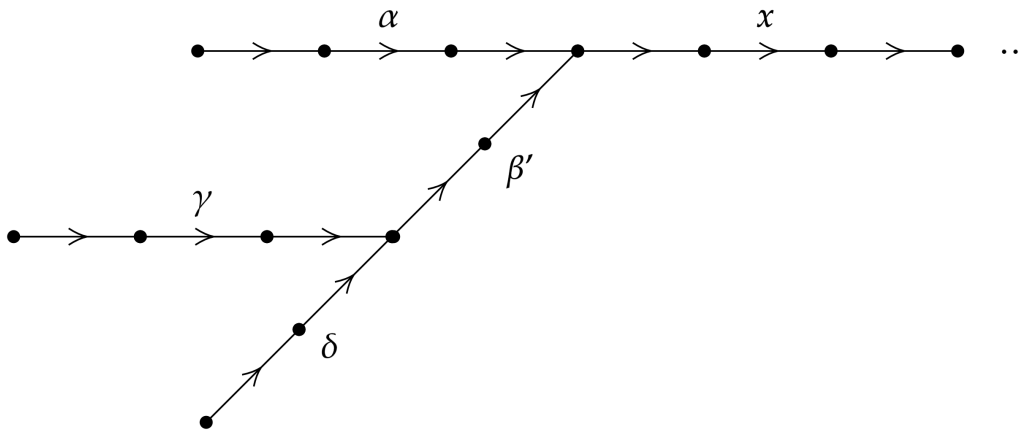
Denotemos $p' := \beta x$. Notemos que p' é infinito. Pela Condição (Y1), existem um subcaminho δ de p' tal que $p' = \delta y$ e um caminho finito γ com $r(\delta) = r(\gamma)$ e $|\gamma| - |\delta| = 1$. Primeiramente, analisemos o seguinte caso



Desta forma, $\delta = \beta\beta'$. E assim,

$$\begin{aligned}
 |\gamma| - |\alpha\beta'| &= |\gamma| - |\beta\beta'| + |\beta\beta'| - |\alpha\beta'| \\
 &= 1 + |\beta| + |\beta'| - |\alpha| - |\beta'| \\
 &= 1 + |\beta| - |\alpha| \\
 &= 1 + 1 \\
 &= 2.
 \end{aligned}$$

Concluimos que existem um subcaminho inicial $\alpha\beta'$ de p e um caminho finito γ tal que $r(\gamma) = r(\alpha\beta')$ e $|\gamma| - |\alpha\beta'| = 2$. Agora, analisemos o outro caso possível

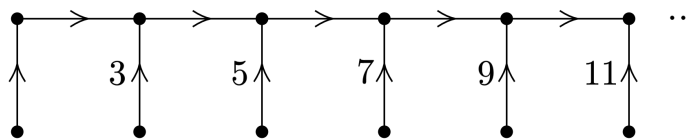


Notemos que $\beta = \delta\beta'$. Neste caso, consideremos $\gamma' = \gamma\beta'$. Daí,

$$\begin{aligned}
 |\gamma'| - |\alpha| &= |\gamma\beta'| - |\alpha| \\
 &= |\gamma| + |\beta'| - |\alpha| \\
 &= |\gamma| - |\delta| + |\beta'| - |\alpha| + |\delta| \\
 &= 1 + |\beta'| - |\alpha| + |\delta| \\
 &= 1 + |\beta| - |\alpha| \\
 &= 1 + 1 \\
 &= 2
 \end{aligned}$$

Assim, concluímos que existem um subcaminho inicial α de p e um caminho finito γ' tal que $r(\gamma') = r(\alpha)$ e $|\gamma'| - |\alpha| = 2$. Seguindo indutivamente, de forma similar as anteriores, concluímos que o grafo E satisfaz a Condição (Y). \square

Exemplo 3.6. Considere o seguinte grafo E



em que a notação 3, 5, 7, 9, 11, \dots indica a quantidade de arestas na vertical. Para verificarmos que esse grafo satisfaz a Condição (Y1), separaremos em 2 casos. Primeiramente, consideremos que o caminho infinito p começa em alguma aresta horizontal. Ainda, consideremos um caminho inicial α de p . Logo, escolheremos o caminho β como sendo um aresta anterior a α concatenado com α . Desta forma, temos que $r(\beta) = r(\alpha)$ e $|\beta| - |\alpha| = 1$. No segundo caso, seja p o caminho infinito começando por uma aresta vertical e . No caso,

em que e for a primeira aresta de algum caminho vertical, consideremos α como sendo o caminho vertical concatenado com uma aresta na horizontal. Logo, escolheremos β como sendo o próximo caminho na vertical. Dessa forma, $r(\beta) = r(\alpha)$ e $|\beta| - |\alpha| = 1$. Agora, se e estiver em alguma outra posição, sem ser a primeira, consideremos o caminho inicial α como sendo a aresta e concatenado com as arestas seguintes até finalizar o caminho na vertical. Assim, escolheremos β como sendo a aresta anterior a e concatenado com α . Dessa forma, temos que $r(\beta) = r(\alpha)$ e $|\beta| - |\alpha| = 1$. Logo, pela Proposição 3.5, E satisfaz a Condição (Y).

Exemplo 3.7. Consideremos o seguinte grafo E



Escolhemos p o caminho infinito do grafo E como o próprio grafo E . Assim, ao considerarmos o caminho inicial α formado pela primeira aresta, não existe caminho β tal que $r(\beta) = r(\alpha)$ e $|\beta| - |\alpha| = 1$. Logo, pela Proposição 3.5, E não satisfaz a Condição (Y).

3.2 \mathbb{Z} -GRADUAÇÃO

Nessa seção iremos introduzir noção de um anel S ser \mathbb{Z} -graduado. Essa caracterização nos garante que podemos representar um anel S como soma direta de outras estruturas 'menores' e que satisfazem uma certa propriedade. Considerando que a álgebra de caminhos de Leavitt de um grafo E é um anel é natural nos perguntarmos se $L_{\mathbb{K}}(E)$ é \mathbb{Z} -graduada. Responderemos esse questionamento nessa seção.

Definição 3.8. *Seja S um anel associativo. Dizemos que S é \mathbb{Z} -graduado se existir uma coleção de subgrupos aditivos $\{S_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ de S tal que*

$$i) S = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} S_n;$$

$$ii) S_m S_n \subseteq S_{m+n}, \text{ para todo } m, n \in \mathbb{Z}.$$

Proposição 3.9. *Sejam E um grafo e \mathbb{K} um corpo. Então, $L_{\mathbb{K}}(E)$ é \mathbb{Z} -graduada com a \mathbb{Z} -graduação*

$$L_{\mathbb{K}}(E)_n := \text{span} \left\{ s_{\alpha} s_{\beta}^* \mid \alpha, \beta \in W \cup E^0, |\alpha| - |\beta| = n \right\},$$

para $n \in \mathbb{Z}$.

Demonstração. Sejam E um grafo, \mathbb{K} um corpo e a coleção de conjuntos a seguir

$$L_{\mathbb{K}}(E)_n = \text{span} \left\{ s_{\alpha} s_{\beta}^* \mid \alpha, \beta \in W \cup E^0, |\alpha| - |\beta| = n \right\},$$

para $n \in \mathbb{Z}$. Notemos que $L_{\mathbb{K}}(E)_n$, como definido anteriormente, é um subgrupo aditivo de $L_{\mathbb{K}}(E)$, para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Afirmção 1. $L_{\mathbb{K}}(E)_m \cdot L_{\mathbb{K}}(E)_n \subseteq L_{\mathbb{K}}(E)_{m+n}$, para quaisquer $m, n \in \mathbb{Z}$.

De fato, sejam $\alpha\beta, \gamma\delta \in W \cup E^0$ tal que $|\alpha| - |\beta| = m$ e $|\gamma| - |\delta| = n$. Analisemos o que ocorre com $(s_{\alpha} s_{\beta}^*)(s_{\gamma} s_{\delta}^*)$. Primeiramente, se $\gamma = \beta\gamma'$, para algum γ' , então $|\gamma'| = |\gamma| - |\beta|$. Pelo Lema 2.16, temos que $(s_{\alpha} s_{\beta}^*)(s_{\gamma} s_{\delta}^*) = s_{\alpha\gamma'} s_{\delta}^*$ e

$$\begin{aligned} |\alpha\gamma'| - |\delta| &= |\alpha| + |\gamma'| - |\delta| \\ &= |\alpha| + |\gamma| - |\beta| - |\delta| \\ &= (|\alpha| - |\beta|) + (|\gamma| - |\delta|) \\ &= m + n. \end{aligned}$$

Analogamente, verifica-se que se $\beta = \gamma\beta'$, para algum β' , então $(s_{\alpha} s_{\beta}^*)(s_{\gamma} s_{\delta}^*) \in L_{\mathbb{K}}(E)_{m+n}$. Agora, se $\gamma = \beta$, pelo Lema 2.16, concluímos $(s_{\alpha} s_{\beta}^*)(s_{\gamma} s_{\delta}^*) = s_{\alpha} s_{\delta}^*$ e

$$|\alpha| - |\delta| = m + |\beta| - |\delta| = m + |\gamma| - |\delta| = m + n.$$

Por fim, suponhamos que $(s_{\alpha} s_{\beta}^*)(s_{\gamma} s_{\delta}^*) = 0$. Como $L_{\mathbb{K}}(E)_{m+n}$ é um espaço vetorial, então $(\alpha\beta^*)(\gamma\delta^*) \in L_{\mathbb{K}}(E)_{m+n}$, concluindo o que queríamos.

Afirmção 2. $L_{\mathbb{K}}(E) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} L_{\mathbb{K}}(E)_n$.

Primeiramente, observemos que para todo $x \in L_{\mathbb{K}}(E)$, temos

$$x = \sum_{k=1}^n \lambda_k s_{\alpha_k} s_{\beta_k}^* = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{|\alpha_k| - |\beta_k| = n} \lambda_k s_{\alpha_k} s_{\beta_k}^*.$$

Ou seja, todo elemento de $L_{\mathbb{K}}(E)$ é uma soma de elementos de $L_{\mathbb{K}}(E)_n$. Para concluirmos que esta soma é direta necessitamos de alguns resultados auxiliares. Consideremos o conjunto

$$S = \left\{ s^{-1}(v) \mid v \in E^0 \text{ e } 0 < s^{-1}(v) < \infty \right\}.$$

Denotemos cada $s^{-1}(v) \in S$ por A_v . Fixemos $e_{A_v} \in A_v$, para todo $A_v \in S$. Assim, aplicando o Teorema 2.7 do Artigo [6] para o caso em que o grafo separado é o grafo E , temos que o conjunto

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= \{s_w \mid w \in W\} \cup \left\{ s_{\alpha} s_{\beta}^* \mid \alpha, \beta \in W, r(\alpha) = r(\beta) \text{ e } (\alpha_{|\alpha|}, \beta_{|\beta|}) \neq (e_{A_v}, e_{A_v}), \forall A_v \in S \right\} \\ &\cup \left\{ p_v \mid v \in E^0 \right\} \end{aligned}$$

é uma base para $L_{\mathbb{K}}(E)$.

Seja $s_{\alpha}s_{\beta}^* \in L_{\mathbb{K}}(E)_n$, então $s_{\alpha}s_{\beta}^* = \sum \lambda_i b_i$ em que $b_i \in \mathcal{B} \cap L_{\mathbb{K}}(E)_n$. De fato, se $(\alpha_{|\alpha|}, \beta_{|\beta|}) \neq (e_{A_v}, e_{A_v})$, para todo $A_v \in S$, então é imediato. Agora, se $(\alpha_{|\alpha|}, \beta_{|\beta|}) = (e_{A_v}, e_{A_v})$, para algum $A_v \in S$, então

$$s_{\alpha}s_{\beta}^* = s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_{|\alpha|-1}} s_{e_{A_v}} s_{e_{A_v}}^* s_{\beta_{|\beta|-1}}^* \cdots s_{\beta_1}^*.$$

Por outro lado, pela propriedade 4 da Definição 2.13, podemos escrever

$$s_{e_{A_v}} s_{e_{A_v}}^* = p_v - \sum_{\substack{e \in A_v \\ e \neq e_{A_v}}} s_e s_e^*.$$

Logo,

$$s_{\alpha}s_{\beta}^* = s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_{|\alpha|-1}} \left(p_v - \sum_{\substack{e \in A_v \\ e \neq e_{A_v}}} s_e s_e^* \right) s_{\beta_{|\beta|-1}}^* \cdots s_{\beta_1}^*.$$

Se necessário, repetimos esse processo. Assim, garantimos que $s_{\alpha}s_{\beta}^*$ é uma combinação linear de elementos de $\mathcal{B} \cap L_{\mathbb{K}}(E)_n$.

Desse modo, por linearidade, para qualquer $a_n \in L_{\mathbb{K}}(E)_n$, podemos escrever $a_n = \sum_i \lambda_i b_i$ em que $b_i \in \mathcal{B} \cap L_{\mathbb{K}}(E)_n$.

Agora, mostremos que a soma em questão é direta. Seja $x = \sum_{n \in F} a_n$ em que F é um subconjunto finito de \mathbb{Z} , $a_n \in L_{\mathbb{K}}(E)_n$ e suponhamos que $x = 0$. Precisamos mostrar que, para todo $n \in F$, $a_n = 0$. Pelo que mostramos a pouco, podemos escrever cada $a_n \in L_{\mathbb{K}}(E)_n$ como $a_n = \sum_i \lambda_i^{(n)} b_i^{(n)}$ em que $b_i^{(n)} \in \mathcal{B} \cap L_{\mathbb{K}}(E)_n$. Logo,

$$0 = \sum_{n \in F} a_n = \sum_{n \in F} \sum_i \lambda_i^{(n)} b_i^{(n)}.$$

Notemos que $b_i^{(n)} \in \mathcal{B}$ são dois a dois distintos, pois $|b_i^{(n)}| \neq |b_i^{(m)}|$, para $n \neq m$. Isso implica que $\lambda_i^{(n)} = 0$, para todo $n \in F$ e todo i . Portanto, $a_n = 0$, para todo $n \in F$, concluindo o que queríamos. □

Observação 3.10. Seja a graduação de $L_{\mathbb{K}}(E)$

$$L_{\mathbb{K}}(E)_n = \text{span} \left\{ s_{\alpha}s_{\beta}^* \mid \alpha, \beta \in W \cup E^0, |\alpha| - |\beta| = n \right\},$$

com $n \in \mathbb{Z}$. Diremos que $L_{\mathbb{K}}(E)_n$ é a \mathbb{Z} -gradação canônica de $L_{\mathbb{K}}(E)$.

4 ÁLGEBRAS DE CAMINHOS DE LEAVITT FORTEMENTE \mathbb{Z} -GRADUADAS

Nesse capítulo, inciaremos aprimorando a noção de um anel S ser \mathbb{Z} -graduado e passaremos a dizer que S é fortemente \mathbb{Z} -graduado. Deixando a estrutura do anel S , obtida na seção anterior, mais rígida.

Após alguns resultados auxiliares e exemplos, nos redirecionaremos a demonstrar lemas e proposições que culminaram em um dos resultados principais.

Definição 4.1. *Seja S um anel associativo. Dizemos que S é fortemente \mathbb{Z} -graduado se existir uma coleção de subgrupos aditivos $\{S_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ de S tal que*

$$i) S = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} S_n;$$

$$ii) S_m S_n = S_{m+n}, \text{ para todo } m, n \in \mathbb{Z}.$$

Proposição 4.2. *Seja S um anel \mathbb{Z} -graduado. Então, S é fortemente \mathbb{Z} -graduado se, e somente se, $S_0 S_n = S_n = S_n S_0$, para todo $n \in \mathbb{Z}$, e vale a igualdade $S_1 S_{-1} = S_{-1} S_1 = S_0$.*

Demonstração. Suponhamos que S é fortemente \mathbb{Z} -graduado, então pela definição, concluímos que $S_0 S_n = S_n = S_n S_0$, para todo $n \in \mathbb{Z}$, e $S_1 S_{-1} = S_{-1} S_1 = S_0$.

Agora, suponhamos que valem as igualdades $S_0 S_n = S_n = S_n S_0$, para todo $n \in \mathbb{Z}$, e $S_1 S_{-1} = S_{-1} S_1 = S_0$. Sejam inteiros positivos m e n . Primeiramente, mostremos, por indução, que $S_m = (S_1)^m$. Se $m = 1$, então é imediato. Suponhamos que $S_m = (S_1)^m$. Logo,

$$\begin{aligned} S_{m+1} &= S_0 S_{m+1} = S_1 S_{-1} S_{m+1} \subseteq S_1 S_{-1+m+1} = S_1 S_m = S_1 (S_1)^m \\ &= (S_1)^{m+1} \\ &\subseteq S_{m+1}. \end{aligned}$$

De forma similar, mostremos, por indução, que $S_{-n} = (S_{-1})^n$. Se $n = 1$, então é imediato. Agora, suponhamos que $S_{-n} = (S_{-1})^n$. Logo,

$$\begin{aligned} S_{-n-1} &= S_{-n-1} S_0 = S_{-n-1} S_1 S_{-1} \subseteq S_{-n-1+1} S_{-1} = S_{-n} S_{-1} \\ &= (S_{-1})^n S_{-1} \\ &= (S_{-1})^{n+1} \\ &\subseteq S_{-n-1}. \end{aligned}$$

Posto isso, analisemos os seguintes casos:

Caso 1: $S_m S_n = (S_1)^m (S_1)^n = (S_1)^{m+n} = S_{m+n}$.

Caso 2: $S_{-m} S_{-n} = (S_{-1})^m (S_{-1})^n = (S_{-1})^{m+n} = S_{-m-n}$.

Caso 3: Mostremos que $S_m S_{-n} = S_{m-n}$. Temos que $S_m S_{-n} = (S_1)^m (S_{-1})^n$. Aplicando repetidas vezes as igualdades $S_1 S_{-1} = S_0$ e $S_0 S_n = S_n = S_n S_0$, então

$$(S_1)^m (S_{-1})^n = (S_1)^{m-n} = S_{m-n},$$

se $m \geq n$, ou

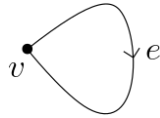
$$(S_1)^m (S_{-1})^n = (S_{-1})^{n-m} = S_{m-n},$$

se $m < n$.

Caso 4: De forma análoga ao Caso 3, pode-se mostrar que $S_{-m} S_n = S_{n-m}$, porém utilizando as igualdades $S_{-1} S_1 = S_0$ e $S_0 S_n = S_n = S_n S_0$.

Portanto, concluímos que S é fortemente \mathbb{Z} -graduado. □

Exemplo 4.3. Consideremos o seguinte grafo E apresentado no Exemplo 2.18



Vamos mostrar que $L_{\mathbb{K}}(E)$ é fortemente \mathbb{Z} -graduado. Seja $s_{\alpha} s_{\beta}^* \in L_{\mathbb{K}}(E)_1$. Assim, teremos que $\alpha = e^m$ e $\beta = e^{m-1}$, para algum $m \in \mathbb{N}$, uma vez que $|\alpha| - |\beta| = 1$. Notemos que

$$s_e^m s_{e^{m-1}}^* = s_e s_e \dots s_e s_e^* \dots s_e^* = s_e.$$

Como $s_e \subseteq \mathbb{K} s_e$, então $s_{\alpha} s_{\beta}^* \in \mathbb{K} s_e$. Portanto, $L_{\mathbb{K}}(E)_1 \subseteq \mathbb{K} s_e$. Por outro lado, claro que $\mathbb{K} s_e \subseteq L_{\mathbb{K}}(E)_1$.

De forma similar, concluímos que $L_{\mathbb{K}}(E)_{-1} = \mathbb{K} s_e^*$, $L_{\mathbb{K}}(E)_0 = \mathbb{K} p_v$ e $L_{\mathbb{K}}(E)_n = \mathbb{K} s_e^n$, para $n \in \mathbb{Z}$. Assim,

$$L_{\mathbb{K}}(E)_1 L_{\mathbb{K}}(E)_{-1} = \mathbb{K} s_e \mathbb{K} s_e^* = \mathbb{K} s_e s_e^* = \mathbb{K} p_v = L_{\mathbb{K}}(E)_0$$

e

$$L_{\mathbb{K}}(E)_{-1} L_{\mathbb{K}}(E)_1 = \mathbb{K} s_e^* \mathbb{K} s_e = \mathbb{K} s_e^* s_e = \mathbb{K} p_v = L_{\mathbb{K}}(E)_0.$$

Além disso, para $n \in \mathbb{Z}$, temos que

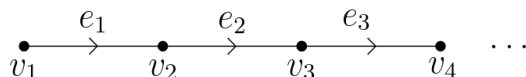
$$L_{\mathbb{K}}(E)_0 L_{\mathbb{K}}(E)_n = \mathbb{K} p_v \mathbb{K} s_e^n = \mathbb{K} p_v s_e^n = \mathbb{K} s_e^n = L_{\mathbb{K}}(E)_n$$

e

$$L_{\mathbb{K}}(E)_n L_{\mathbb{K}}(E)_0 = \mathbb{K} s_e^n \mathbb{K} p_v = \mathbb{K} s_e^n p_v = \mathbb{K} s_e^n = L_{\mathbb{K}}(E)_n.$$

Portanto, pela Proposição 4.2, concluímos que $L_{\mathbb{K}}(E)$ é fortemente \mathbb{Z} -graduada.

Exemplo 4.4. Consideremos o seguinte grafo E apresentado no Exemplo 2.21



Vamos mostrar que $L_{\mathbb{K}}(E)$ não é fortemente \mathbb{Z} -graduada. Primeiramente, notemos que se α, β são caminhos de E com $r(\alpha) = r(\beta)$, então obrigatoriamente α é início de β ou vice-versa. Temos que

$$L_{\mathbb{K}}(E)_{-1} = \text{span} \left\{ s_{\alpha_i} s_{\beta_i}^* \mid |\alpha_i| - |\beta_i| = -1 \right\}.$$

Pela observação anterior, concluímos que $L_{\mathbb{K}}(E)_{-1} = \text{span} \{ e^* \mid e \in E^1 \}$. De forma similar, $L_{\mathbb{K}}(E)_1 = \text{span} \{ e \mid e \in E^1 \}$. Vamos mostrar que $L_{\mathbb{K}}(E)_0 \neq L_{\mathbb{K}}(E)_{-1} L_{\mathbb{K}}(E)_1$. Afirmamos que $p_{v_1} \notin L_{\mathbb{K}}(E)_{-1} L_{\mathbb{K}}(E)_1$. De fato, suponhamos, por contradição, que $p_{v_1} \in L_{\mathbb{K}}(E)_{-1} L_{\mathbb{K}}(E)_1$. Então, $p_{v_1} = \sum_{i=1}^n a_i b_i$, em que $a_i \in L_{\mathbb{K}}(E)_{-1}$ e $b_i \in L_{\mathbb{K}}(E)_1$. Notemos que, como $v_1 \neq r(e)$, para todo $e \in E^1$, então

$$p_{v_1} s_e^* = p_{v_1} p_{r(e)} s_e^* = 0 s_e^* = 0,$$

para $a_i \in L_{\mathbb{K}}(E)_{-1}$. Agora, sabendo que $p_{v_1} = p_{v_1} p_{v_1}$ e pela igualdade (4.4), temos que

$$p_{v_1} p_{v_1} = p_{v_1} \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right) = 0.$$

O que é um absurdo, pois $p_{v_1} \neq 0$ pela Observação 2.14. Então, $p_{v_1} \notin L_{\mathbb{K}}(E)_{-1} L_{\mathbb{K}}(E)_1$ e, portanto, $L_{\mathbb{K}}(E)_{-1} L_{\mathbb{K}}(E)_1 \neq L_{\mathbb{K}}(E)_0$. Pela Proposição 4.2, $L_{\mathbb{K}}(E)$ não é fortemente \mathbb{Z} -graduada.

O próximo lema é um resultado técnico que não tem relação diretamente com grafos, e será usado no resultado principal.

Lema 4.5. Se $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de conjuntos finitos não vazios e, para todo $n \in \mathbb{N}$, $g_n : X_{n+1} \rightarrow X_n$ é uma função, então existe um elemento $(x_1, x_2, x_3, \dots) \in \prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$ tal que $g_n(x_{n+1}) = x_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Afirmamos que existe uma sequência de conjuntos $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, Z_n é um subconjunto não vazio de X_n e que $g_n(Z_{n+1}) = Z_n$. Por um momento, assumamos que isso vale. Definamos um elemento $(x_1, x_2, x_3, \dots) \in \prod_{n \in \mathbb{N}} Z_n$ de forma indutiva como apresentaremos a seguir. Seja x_1 um elemento de Z_1 . Tomemos $m \in \mathbb{N}$. Suponhamos que já tenhamos definido $x_n \in Z_n$, para todo $n \leq m$. Assim, consideraremos x_{m+1} um elemento de $g_m^{-1}(x_m) \cap Z_{m+1}$. Logo, (x_1, x_2, x_3, \dots) é o elemento que estávamos procurando.

Agora, mostremos a afirmação do início da demonstração. Denotemos

$$Y_n^m := (g_n \circ g_{n+1} \circ \dots \circ g_{m+n-1})(X_{m+n}),$$

para todo $m, n \in \mathbb{N}$. Sendo X_{m+n} finito e X_{m+n} não vazio, então o conjunto Y_n^m é um subconjunto finito e não vazio de X_n , para todo $n, m \in \mathbb{N}$ e satisfaz a seguinte propriedade

$$Y_n^{m+1} \subseteq Y_n^m. \quad (4.1)$$

De fato,

$$\begin{aligned} Y_n^{m+1} &= (g_n \circ g_{n+1} \circ \dots \circ g_{m+n}) (X_{m+n+1}) \\ &= (g_n \circ g_{n+1} \circ \dots \circ g_{m+n-1}) (g_{m+n}(X_{m+n+1})) \\ &\subseteq (g_n \circ g_{n+1} \circ \dots \circ g_{m+n-1}) (X_{m+n}) \\ &= Y_n^m. \end{aligned}$$

Afirmção 1. Fixo $n \in \mathbb{N}$, vale que $\bigcap_{m \in \mathbb{N}} Y_n^m = Y_n^{m_n}$, para algum $m_n \in \mathbb{N}$.

De fato, já sabemos que

$$\bigcap_{m \in \mathbb{N}} Y_n^m \subseteq Y_n^{m_n},$$

para todo $m_n \in \mathbb{N}$. Por outro lado, mostremos que

$$Y_n^{m_n} \subseteq \bigcap_{m \in \mathbb{N}} Y_n^m,$$

para algum $m_n \in \mathbb{N}$. Notemos que, por (4.1), temos que

$$Y_n^m \subseteq Y_n^{m-1} \subseteq \dots \subseteq Y_n^2 \subseteq Y_n^1.$$

Logo,

$$\bigcap_{j=1}^m Y_n^j = Y_n^m.$$

Agora, mostremos que existe $m_n \in \mathbb{N}$, tal que $Y_n^{m_n} = Y_n^r$, para todo $r \geq m_n$. De fato, suponhamos, por absurdo, que não existe $m_n \in \mathbb{N}$ tal que $Y_n^{m_n} = Y_n^r$, para todo $r \geq m_n$. Logo, para todo $m_n \in \mathbb{N}$, existe $r \geq m_n$ tal que

$$Y_n^{m_n} \subsetneq Y_n^r.$$

Para $m_n = 1$, tome r_1 de forma que

$$Y_n^{r_1} \subsetneq Y_n^1.$$

Agora, tome $m_n = r_1$, e novamente, existe r_2 tal que

$$Y_n^{r_2} \subsetneq Y_n^{r_1}.$$

Além disso, $r_2 > r_1 \geq m_n$. Prosseguindo assim, temos que

$$Y_n^1 \supsetneq Y_n^{r_1} \supsetneq Y_n^{r_2} \supsetneq \dots$$

Denotemos $M := |Y_n^1|$. Como Y_n^m , para todo $m \in \mathbb{N}$, é um conjunto finito, temos que $|Y_n^{r_1}| \leq M - 1$, $|Y_n^{r_2}| \leq M - 2$ e assim por diante. Prosseguindo dessa forma, temos que $|Y_n^{r_j}| = 0$, para algum $j \in \mathbb{N}$. O que é um absurdo, uma vez que Y_n^m , para todo $m \in \mathbb{N}$, é um conjunto não vazio. Posto isso, podemos concluir que

$$Y_n^{m_n} = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} Y_n^m,$$

para algum $m_n \in \mathbb{N}$.

Afirmção 2. $g_n(Y_{n+1}^m) = Y_n^{m+1}$, para $m, n \in \mathbb{N}$.

De fato,

$$\begin{aligned} g_n(Y_{n+1}^m) &= g_n((g_{n+1} \circ \dots \circ g_{m+n})(X_{m+n+1})) \\ &= (g_n \circ g_{n+1} \circ \dots \circ g_{m+n})(X_{m+n+1}) \\ &= Y_n^{m+1}. \end{aligned}$$

Para todo $n \in \mathbb{N}$, denotemos $Z_n = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} Y_n^m$. Da Afirmção 3, temos que todo Z_n é um subconjunto finito e não vazio de X_n , para todo $n \in \mathbb{N}$. Além disso, temos que

$$Y_n^{m_n} = Y_n^r,$$

para todo $r \geq m_n$.

Desta forma, para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $m_n \in \mathbb{N}$ tal que $Y_n^r = Y_n^{m_n} = Z_n$, para todo $r \geq m_n$. Definamos $k := \max(m_{n+1}, m_n)$. Assim, da Afirmção 2, concluímos que

$$g_n(Z_{n+1}) = g_n(Y_{n+1}^{m_{n+1}}) = g_n(Y_{n+1}^k) = Y_n^{k+1} = Z_n.$$

□

Proposição 4.6. *Seja E um grafo. Considere a álgebra de caminhos de Leavitt $L_{\mathbb{K}}(E)$ com a \mathbb{Z} -gradação canônica. Se $L_{\mathbb{K}}(E)$ é fortemente \mathbb{Z} -graduada, então*

- (i) E não possui poço;
- (ii) E é linha finita;
- (iii) E satisfaz a Condição (Y).

Demonstração. Suponhamos que $L_{\mathbb{K}}(E)$ é fortemente \mathbb{Z} -graduada. Primeiramente, mostremos que (i) é satisfeito. Suponhamos, por contradição, que exista um poço v em E . Temos que $p_v \in L_{\mathbb{K}}(E)_0 = L_{\mathbb{K}}(E)_1 L_{\mathbb{K}}(E)_{-1}$. Logo, $p_v = p_v^2 \in p_v L_{\mathbb{K}}(E)_1 L_{\mathbb{K}}(E)_{-1}$. Notemos que $p_v L_{\mathbb{K}}(E)_1 = \{0\}$. De fato, sendo v um poço, então $p_v p_s(\beta) = 0$, para todo $s_\beta \in L_{\mathbb{K}}(E)_1$. Implicando que

$$p_v \sum_{i=1}^m \lambda_i s_{\beta_i} s_{\delta_i}^* = \sum_{i=1}^m \lambda_i p_v s_{\beta_i} s_{\delta_i}^* = \sum_{i=1}^m \lambda_i 0 s_{\delta_i}^* = 0,$$

para todo $s_{\beta_i} \in L_{\mathbb{K}}(E)_1$ e $s_{\delta_i}^* \in L_{\mathbb{K}}(E)_{-1}$. Logo, $p_v L_{\mathbb{K}}(E)_1 L_{\mathbb{K}}(E)_{-1} = \{0\}$. O que é uma contradição, uma vez que $p_v \neq 0$.

Mostremos agora que (ii) é satisfeito. Seja $p_v \in L_{\mathbb{K}}(E)_0 = L_{\mathbb{K}}(E)_1 L_{\mathbb{K}}(E)_{-1}$, isto é,

$$p_v = \sum_{i=1}^n \lambda_i s_{\alpha_i} s_{\beta_i}^* s_{\gamma_i} s_{\delta_i}^*$$

em que $s_{\alpha_i} s_{\beta_i}^* \in L_{\mathbb{K}}(E)_1$ e $s_{\gamma_i} s_{\delta_i}^* \in L_{\mathbb{K}}(E)_{-1}$. Observemos que $|\delta_i| > 0$, já que $s_{\gamma_i} s_{\delta_i}^* \in L_{\mathbb{K}}(E)_{-1}$. Suponhamos, por contradição, que v emite infinitas arestas. Tome $f \in E^1$ tal que $s(f) = v$ e f diferente de todos os δ_i^1 , em que δ_i^1 é a primeira aresta de δ_i . Logo, os $s_{\delta_i}^* s f = 0$, e então

$$s f = p_{s(f)} s f = p_v s f = \sum_{i=1}^n \lambda_i s_{\alpha_i} s_{\beta_i}^* s_{\gamma_i} s_{\delta_i}^* s f = 0.$$

Porém, isso não é possível, pois $s f \neq 0$. Desta forma, concluímos que E é linha finita.

Por fim, mostremos que (iii) é satisfeito. Sejam p um caminho infinito e $k > 0$ um número inteiro arbitrário. Seja $v = s(p)$. Como $L_{\mathbb{K}}(E)_0 = L_{\mathbb{K}}(E)_{-1} L_{\mathbb{K}}(E)_1$, podemos escrever

$$p_v = \sum_{i=1}^n \lambda_i s_{\alpha_i} s_{\beta_i}^* s_{\gamma_i} s_{\delta_i}^*$$

em que $s_{\alpha_i} s_{\beta_i}^* \in L_{\mathbb{K}}(E)_{-1}$ e $s_{\gamma_i} s_{\delta_i}^* \in L_{\mathbb{K}}(E)_1$. Consideremos p' um subcaminho inicial finito de p tal que $|p'| > |\delta_i|$, para todo $i = \{1, 2, \dots, n\}$. Temos que $p_v s_{p'} = p_{s(p')} s_{p'} = s_{p'}$.

Então, existe m tal que δ_m é um subcaminho inicial de p' , e também de p . De fato, suponhamos que δ_i não é início de p' para nenhum $i = \{1, 2, \dots, n\}$. Assim, pelo Lema 2.16, temos que $s_{\delta_i}^* s_{p'} = 0$, para todo δ_i^* . Implicando que

$$p_v s_{p'} = \sum_{i=1}^n \lambda_i s_{\alpha_i} s_{\beta_i}^* s_{\gamma_i} s_{\delta_i}^* s_{p'} = 0.$$

O que é uma contradição, uma vez que $s_{p'} \neq 0$. Por fim, consideremos $\alpha := \delta_m$ e $\beta := \gamma_m$ e observemos que $r(\delta_m) = r(\gamma_m)$ e $|\gamma_m| - |\delta_m| = 1$. Assim, concluímos que o grafo E satisfaz a Condição (Y_1) . Pela Proposição 3.5, temos que o grafo E satisfaz a Condição (Y) . \square

Para que possamos mostrar que a recíproca da Proposição 4.6 é verdadeira, enunciemos e demonstremos o seguinte lema.

Lema 4.7. *Seja E um grafo. Consideremos a álgebra de caminhos de Leavitt $L_{\mathbb{K}}(E)$ com a \mathbb{Z} -graduação canônica. Se E é linha finita e não possui poço, então $L_{\mathbb{K}}(E)_1 L_{\mathbb{K}}(E)_{-1} = L_{\mathbb{K}}(E)_0$.*

Demonstração. Por definição de \mathbb{Z} -graduação, concluímos que $L_{\mathbb{K}}(E)_1 L_{\mathbb{K}}(E)_{-1} \subseteq L_{\mathbb{K}}(E)_0$. Além disso, temos que $\{p_v \mid v \in E^0\} \subseteq L_{\mathbb{K}}(E)_1 L_{\mathbb{K}}(E)_{-1}$. De fato, seja $v \in E^0$. Como E é linha finita e não possui poço, temos que

$$p_v = \sum_{\substack{f \in E^1 \\ s(f)=v}} s_f s_f^* \in L_{\mathbb{K}}(E)_1 L_{\mathbb{K}}(E)_{-1}.$$

Agora, mostremos $L_{\mathbb{K}}(E)_0 \subseteq L_{\mathbb{K}}(E)_1 L_{\mathbb{K}}(E)_{-1}$. Seja $x \in L_{\mathbb{K}}(E)_0$, logo

$$x = \sum_{\substack{k=1 \\ |\alpha_k| - |\beta_k| = 0}}^n \lambda_k s_{\alpha_k} s_{\beta_k}^*.$$

Consideremos o conjunto $V = \{s(\alpha_k) \mid k \in \{1, 2, \dots, n\}\}$. Afirmamos que

$$x = \sum_{v \in V} p_v \cdot x.$$

Para mostrarmos essa igualdade, notemos que para um k fixo, temos que

$$\begin{aligned} \sum_{v \in V} p_v s_{\alpha_k} &= \sum_{\substack{v \in V \\ v \neq s(\alpha_k)}} p_v s_{\alpha_k} + p_{s(\alpha_k)} s_{\alpha_k} \\ &= p_{s(\alpha_k)} s_{\alpha_k} \\ &= s_{\alpha_k}. \end{aligned}$$

Desta forma, podemos concluir que

$$\begin{aligned}
 \sum_{v \in V} p_v \cdot x &= \sum_{v \in V} p_v \cdot \sum_{\substack{k=1 \\ |\alpha_k| - |\beta_k| = 0}}^n \lambda_k s_{\alpha_k} s_{\beta_k}^* \\
 &= \sum_{\substack{k=1 \\ |\alpha_k| - |\beta_k| = 0}}^n \sum_{v \in V} \lambda_k p_v s_{\alpha_k} s_{\beta_k}^* \\
 &= \sum_{\substack{k=1 \\ |\alpha_k| - |\beta_k| = 0}}^n \lambda_k \left(\sum_{v \in V} p_v s_{\alpha_k} \right) s_{\beta_k}^* \\
 &= \sum_{\substack{k=1 \\ |\alpha_k| - |\beta_k| = 0}}^n \lambda_k s_{\alpha_k} s_{\beta_k}^* \\
 &= x.
 \end{aligned}$$

Como $\sum_{v \in V} p_v \in L_{\mathbb{K}}(E)_1 L_{\mathbb{K}}(E)_{-1}$, então

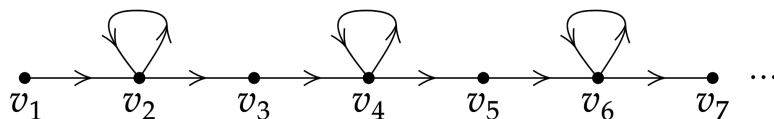
$$x \in L_{\mathbb{K}}(E)_1 L_{\mathbb{K}}(E)_{-1} L_{\mathbb{K}}(E)_0 \subseteq L_{\mathbb{K}}(E)_1 L_{\mathbb{K}}(E)_{-1}.$$

Logo, $L_{\mathbb{K}}(E)_0 \subseteq L_{\mathbb{K}}(E)_1 L_{\mathbb{K}}(E)_{-1}$. Portanto, $L_{\mathbb{K}}(E)_0 = L_{\mathbb{K}}(E)_1 L_{\mathbb{K}}(E)_{-1}$

□

Definição 4.8. Se $\alpha \in E^n$, para algum $n \in \mathbb{N}$, então dizemos $r(\alpha)$ é um vértice de retorno para α se existe $\beta \in E^{n+1}$ com $r(\alpha) = r(\beta)$.

Exemplo 4.9. Consideremos o seguinte grafo E



Neste grafo, todos os vértices, exceto v_1 , são vértices de retorno.

Observação 4.10. Todo grafo E que satisfaz a Condição (Y) possui vértice de retorno.

Proposição 4.11. Seja E um grafo. Consideremos a álgebra de caminhos de Leavitt $L_{\mathbb{K}}(E)$ com a \mathbb{Z} -gradação canônica. Se E é linha finita, não possui poço e satisfaz a Condição (Y), então $L_{\mathbb{K}}(E)$ é fortemente \mathbb{Z} -graduada.

Demonstração. Para mostrarmos que $L_{\mathbb{K}}(E)$ é fortemente \mathbb{Z} -graduada utilizaremos a Proposição 4.2. Primeiramente, mostremos que $L_{\mathbb{K}}(E)_0 L_{\mathbb{K}}(E)_n = L_{\mathbb{K}}(E)_n = L_{\mathbb{K}}(E)_n L_{\mathbb{K}}(E)_0$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Já sabemos que $L_{\mathbb{K}}(E)_0 L_{\mathbb{K}}(E)_n \subseteq L_{\mathbb{K}}(E)_n$. Agora, mostremos que $L_{\mathbb{K}}(E)_n \subseteq L_{\mathbb{K}}(E)_0 L_{\mathbb{K}}(E)_n$. De fato, seja $x \in L_{\mathbb{K}}(E)_n$, então

$$x = \sum_{\substack{i=1 \\ |\alpha_i| - |\beta_i| = n}}^n \lambda_i s_{\alpha_i} s_{\beta_i}^*.$$

Sabemos que $|\alpha_i| \geq 0$. Assim, se $|\alpha_i| = 0$, então $\alpha_i = v_i$, para algum $v_i \in E^0$. Logo, $s_{\alpha_i} = p_{v_i}$ e

$$s_{\alpha_i} s_{\beta_i}^* = p_{v_i} s_{\beta_i}^* = p_{v_i} p_{v_i} s_{\beta_i}^* \in L_{\mathbb{K}}(E)_0 L_{\mathbb{K}}(E)_n.$$

Por outro lado, se $|\alpha_i| > 0$, então

$$s_{\alpha_i} s_{\beta_i}^* = p_{s(\alpha_i)} s_{\alpha_i} s_{\beta_i}^* \in L_{\mathbb{K}}(E)_0 L_{\mathbb{K}}(E)_n.$$

Logo, $s_{\alpha_i} s_{\beta_i}^* \in L_{\mathbb{K}}(E)_0 L_{\mathbb{K}}(E)_n$, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ e, portanto, $x \in L_{\mathbb{K}}(E)_0 L_{\mathbb{K}}(E)_n$. A demonstração que $L_{\mathbb{K}}(E)_n = L_{\mathbb{K}}(E)_n L_{\mathbb{K}}(E)_0$ é análoga a anterior.

Lembremos que, pelo Lema 4.7, $L_{\mathbb{K}}(E)_0 = L_{\mathbb{K}}(E)_1 L_{\mathbb{K}}(E)_{-1}$. Assim, nos resta mostrar que $L_{\mathbb{K}}(E)_0 = L_{\mathbb{K}}(E)_{-1} L_{\mathbb{K}}(E)_1$. Pelo mesmo argumento da demonstração do Lema 4.7, é suficiente mostrar que $\{p_v \mid v \in E^0\} \subseteq L_{\mathbb{K}}(E)_{-1} L_{\mathbb{K}}(E)_1$. Consideremos $v \in E^0$. Se existe e tal que $r(e) = v$, então $s_e^* s_e = p_{r(e)} = p_v$. Logo, $p_v \in L_{\mathbb{K}}(E)_{-1} L_{\mathbb{K}}(E)_1$. Assim, para mostrar que $L_{\mathbb{K}}(E)$ é fortemente \mathbb{Z} -graduada, falta mostrar que $p_v \in L_{\mathbb{K}}(E)_{-1} L_{\mathbb{K}}(E)_1$, para toda fonte $v \in E^0$.

Suponha que v é uma fonte. Usando v definiremos indutivamente uma seqüência $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de conjuntos da seguinte forma. Consideramos

$$X_1 = \{f \in E^1 \mid s(f) = v \text{ e } r(f) \text{ não é um vértice de retorno para } f\}.$$

Por indução, definamos

$$X_{n+1} = \{\alpha f \in E^{n+1} \mid \alpha \in X_n, f \in E^1, s(f) = r(\alpha) \text{ e } r(f) \text{ não é um vértice de retorno para } f\}.$$

Note que X_n é finito, para todo $n \in \mathbb{N}$, pois E é linha-finita. Vamos provar que algum X_n é vazio. Suponhamos, por contradição, que X_n é não vazio para todo $n \in \mathbb{N}$. Para todo $n \in \mathbb{N}$, definamos a função

$$\begin{aligned} g_n : X_{n+1} &\rightarrow X_n \\ \alpha f &\mapsto g_n(\alpha f) = \alpha. \end{aligned}$$

Pelo Lema 4.5, existe um elemento $(x_1, x_2, x_3, \dots) \in \prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale a igualdade $g_n(x_{n+1}) = x_n$. Digamos que $x_1 = e_1$, $x_2 = e_1 e_2$, $x_3 = e_1 e_2 e_3$ e assim por diante. Então, temos que o caminho $p = e_1 e_2 e_3 \dots$ é um caminho infinito em E tal que $s(e_1) = v$ e com a propriedade que para todo $n \in \mathbb{N}$, $r(e_n)$ não é um vértice de retorno para $e_1 e_2 \dots e_n$. Isso contradiz a Condição (Y1), contradizendo a hipótese de que E satisfaz a Condição (Y). Logo, para algum $n \in \mathbb{N}$, o conjunto X_n é vazio. Consideremos $k = \min \{n \in \mathbb{N} | X_n = \emptyset\}$.

Afirmamos que $p_v = \sum_{i=1}^m s_{\alpha_i} s_{\alpha_i}^*$, para algum $m \in \mathbb{N}$ e $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in W$ tal que para todo $i \in \{1, \dots, m\}$, $r(\alpha_i)$ é um vértice de retorno para α_i . Se nossa afirmação realmente valer, então para todo $i \in \{1, \dots, m\}$, existe um β_i em W tal que $r(\alpha_i) = r(\beta_i)$ e $|\beta_i| - |\alpha_i| = 1$. Então,

$$p_v = \sum_{i=1}^m s_{\alpha_i} s_{\alpha_i}^* = \sum_{i=1}^m s_{\alpha_i} p_{r(\alpha_i)} s_{\alpha_i}^* = \sum_{i=1}^m s_{\alpha_i} s_{\beta_i}^* s_{\beta_i} s_{\alpha_i}^* \in L_{\mathbb{K}}(E)_{-1} L_{\mathbb{K}}(E)_1.$$

Agora, mostremos que a afirmação é verdadeira. Como E é linha finita e v não é poço, podemos escrever

$$p_v = \sum_{\substack{i=1 \\ f_i \in s^{-1}(v)}}^{m'} s_{f_i} s_{f_i}^*. \quad (4.2)$$

Se, para algum i , $r(f_i)$ não é um vértice de retorno para f_i , então podemos substituir

$$s_{f_i} s_{f_i}^* = s_{f_i} p_{r(f_i)} s_{f_i}^* = s_{f_i} \sum_{h \in s^{-1}(r(f_i))} s_h s_h^* s_{f_i}^*$$

na equação (4.2). Repetindo se for necessário, numa quantidade que será finita de passos, nós identificaremos $m \in \mathbb{N}$ e $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in W$ tal que $|\alpha_i| \leq k - 1$ com a propriedade que

$$p_v = \sum_{i=1}^m s_{\alpha_i} s_{\alpha_i}^*, \text{ para algum } i \in \{1, \dots, m\} \text{ e } r(\alpha_i) \text{ é um vértice de retorno para } \alpha_i.$$

□

Após estudarmos diversos resultados de forma independente, podemos enunciar e demonstrar um dos principais resultados desse trabalho.

Teorema 4.12. *Seja E um grafo. Considere a álgebra de caminhos de Leavitt $L_{\mathbb{K}}(E)$ com sua \mathbb{Z} -graduação canônica, as seguintes propriedades são equivalentes:*

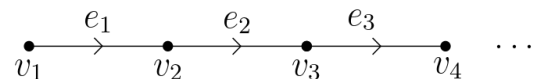
(i) $L_{\mathbb{K}}(E)$ é fortemente \mathbb{Z} -graduada;

(ii) E é linha finita, não possui poço e satisfaz a Condição (Y);

(iii) E é linha finita, não possui poço e satisfaz a Condição (Y1).

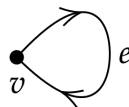
Demonstração. Pelo Lema 4.6, temos que (i) implica em (ii). Agora, pela Proposição 3.5, concluímos que (ii) implica em (iii). Por fim, pela Proposição 4.11, temos que (iii) implica (i). Isso conclui a prova. \square

Observação 4.13. Consideremos o grafo E do Exemplo 4.4



Pelo Exemplo 3.7, temos que E não satisfaz a Condição (Y). Portanto, pelo Teorema 4.12, podemos concluir que $L_{\mathbb{K}}(E)$ não é fortemente \mathbb{Z} -graduada. Notemos que essa é uma forma direta de demonstrar que $L_{\mathbb{K}}(E)$ não é fortemente \mathbb{Z} -graduada, uma vez que não necessitamos mais da argumentação feita no Exemplo 4.4.

Observação 4.14. Considere o grafo E do Exemplo 2.18



Uma vez que v emite uma única aresta, E é linha finita e E não possui poço. Agora, pelo Exemplo 4.3, temos que E satisfaz a Condição (Y). Portanto, pelo Teorema 4.12, podemos concluir que $L_{\mathbb{K}}(E)$ é fortemente \mathbb{Z} -graduada.

5 QUANDO $L_{\mathbb{K}}(E)$ É ÉPSILON-FORTEMENTE \mathbb{Z} -GRADUADA

Neste capítulo, estudaremos a classificação épsilon-fortemente \mathbb{Z} -graduado de um anel associativo. Perpassando por novas propriedades e resultados acerca da álgebra de caminhos de Leavitt, desta forma conseguiremos concluir que $L_{\mathbb{K}}(E)$ é épsilon-fortemente \mathbb{Z} -graduado se, e somente, E é finito.

Definição 5.1. *Seja S um anel associativo. Dizemos que S é épsilon-fortemente \mathbb{Z} -graduado se*

- i) S é um anel \mathbb{Z} -graduado;
- ii) Para todo $n \in \mathbb{Z}$, $S_n S_{-n}$ é um ideal unital de S_0 , com um elemento neutro da multiplicação ϵ_n ;
- iii) Para todo $n \in \mathbb{Z}$, vale $S_n S_{n-1} S_n = S_n$.

Proposição 5.2. *Seja S um anel associativo. Então, S é épsilon-fortemente \mathbb{Z} -graduado se, e somente se, S é um anel \mathbb{Z} -graduado, para todo $n \in \mathbb{Z}$, e existe $\epsilon_n \in S_n S_{-n}$ tal que $\epsilon_n s = s = s \epsilon_{-n}$, para todo $s \in S_n$, e $S_n S_{-n} S_n = S_n$, para todo $n \in \mathbb{Z}$.*

Demonstração. Suponhamos que S é épsilon-fortemente \mathbb{Z} -graduado. Por definição de S ser épsilon-fortemente \mathbb{Z} -graduado, temos que S é um anel \mathbb{Z} -graduado e $S_n S_{-n} S_n = S_n$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Agora, seja $s \in S_n = S_n S_{-n} S_n$. Assim, podemos escrever

$$s = \sum_{i=1}^m a_i b_i c_i,$$

em que $a_i, c_i \in S_n$ e $b_i \in S_{-n}$. Logo,

$$\epsilon_n s = \epsilon_n \sum_{i=1}^m a_i b_i c_i = \left(\sum_{i=1}^m \epsilon_n a_i b_i \right) c_i = \left(\sum_{i=1}^m a_i b_i \right) c_i = \sum_{i=1}^m a_i b_i c_i = s.$$

De forma similar, temos que $s \epsilon_{-n} = s$, concluindo o que queríamos.

Agora, suponhamos que S é um anel \mathbb{Z} -graduado, para todo $n \in \mathbb{Z}$, $\epsilon_n s = s = s \epsilon_{-n}$, para todo $s \in S_n$, e $S_n S_{-n} S_n = S_n$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Falta mostramos que vale o item ii) da Definição 5.1. De fato, seja $r \in S_n S_{-n}$, então podemos escrever

$$r = \sum_{i=1}^m a_i b_i,$$

em que $a_i \in S_n$ e $b_i \in S_{-n}$. Logo,

$$\epsilon_n r = \epsilon_n \sum_{i=1}^m a_i b_i = \left(\sum_{i=1}^m \epsilon_n a_i \right) b_i = \left(\sum_{i=1}^m a_i \right) b_i = \sum_{i=1}^m a_i b_i = r.$$

Por outro lado, pela hipótese, $s\epsilon_{-n} = s$, para todo $n \in \mathbb{Z}$, $s \in S_n$. Desta forma, temos que $s\epsilon_n = s$, para todo $n \in \mathbb{Z}$, $s \in S_{-n}$. Assim, seja $r \in S_n S_{-n}$. Logo,

$$r\epsilon_n = \left(\sum_{i=1}^m a_i b_i \right) \epsilon_n = \sum_{i=1}^m a_i (b_i \epsilon_n) = \left(\sum_{i=1}^m a_i \right) b_i = \sum_{i=1}^m a_i b_i = r,$$

concluindo o que queríamos. \square

Proposição 5.3. *Seja E um grafo. Então, $L_{\mathbb{K}}(E)$ tem unidade se, e somente se, E^0 é finito.*

Demonstração. Suponhamos que $L_{\mathbb{K}}(E)$ possui unidade e que E^0 é infinito. Digamos que z é a unidade de $L_{\mathbb{K}}(E)$. Desta forma, temos que

$$z = \sum_{i=1}^m \lambda_i s_{\alpha_i} s_{\beta_i}^*.$$

Para cada $s_{\alpha} s_{\beta}^* \in L_{\mathbb{K}}(E)_n$, definimos

$$s(\alpha\beta^*) = \begin{cases} s(\alpha), & \text{se } |\alpha| > 0 \\ r(\beta), & \text{se } |\alpha| = 0 \end{cases}. \quad (5.1)$$

Ainda, definimos $G = \{s(\alpha_i\beta_i^*) \mid i \in \{1, 2, \dots, m\}\}$. Seja $v \in E^0 \setminus G$. Logo,

$$p_v z = p_v \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i s_{\alpha_i} s_{\beta_i}^* \right) = \sum_{i=1}^m \lambda_i (p_v s_{\alpha_i} s_{\beta_i}^*) = \sum_{i=1}^m \lambda_i 0 = 0. \quad (5.2)$$

Por outro lado, como z é a unidade de $L_{\mathbb{K}}(E)$, temos que $p_v z = p_v$, o que é uma contradição com a igualdade (5.2). Portanto, E^0 é finito.

Suponhamos que E^0 é finito. Desta forma, consideremos

$$\epsilon = \sum_{v \in E^0} p_v.$$

Queremos provar que ϵ é a unidade de $L_{\mathbb{K}}(E)$. De fato, seja $s \in L_{\mathbb{K}}(E)$. Assim,

$$s = \sum_{i=1}^m \lambda_i s_{\alpha_i} s_{\beta_i}^*.$$

Logo, para cada $s_{\alpha_i} s_{\beta_i}^*$, temos que

$$\begin{aligned}
 \epsilon s_{\alpha_i} s_{\beta_i}^* &= \left(\sum_{v \in E^0} p_v \right) s_{\alpha_i} s_{\beta_i}^* \\
 &= \sum_{\substack{v \in E^0 \\ v \neq s(\alpha_i)}} (p_v s_{\alpha_i}) s_{\beta_i}^* + p_v s_{\alpha_i} s_{\beta_i}^* \\
 &= \sum_{\substack{v \in E^0 \\ v \neq s(\alpha_i)}} (0) s_{\beta_i}^* + s_{\alpha_i} s_{\beta_i}^* \\
 &= s_{\alpha_i} s_{\beta_i}^*.
 \end{aligned}$$

Então, concluímos que $\epsilon s = s$, para todo $s \in L_{\mathbb{K}}(E)$. De forma análoga, mostramos que $s\epsilon = s$, para todo $s \in L_{\mathbb{K}}(E)$. Portanto, $L_{\mathbb{K}}(E)$ tem unidade. \square

Definição 5.4. *Seja S um anel \mathbb{Z} -graduado. Dizemos que S é simetricamente \mathbb{Z} -graduado se $S_n S_{-n} S_n = S_n$, para todo $n \in \mathbb{Z}$.*

Proposição 5.5. *Seja E um grafo. Se considerarmos a álgebra de caminhos de Leavitt $L_{\mathbb{K}}(E)$ com a sua \mathbb{Z} -gradação canônica, então $L_{\mathbb{K}}(E)$ é simetricamente \mathbb{Z} -graduado.*

Demonstração. Seja $(L_{\mathbb{K}}(E)_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ a gradação canônica de $L_{\mathbb{K}}(E)$. Por definição, segue que, dado $n \in \mathbb{N}$,

$$L_{\mathbb{K}}(E)_n L_{\mathbb{K}}(E)_{-n} L_{\mathbb{K}}(E)_n \subseteq L_{\mathbb{K}}(E)_0 L_{\mathbb{K}}(E)_n \subseteq L_{\mathbb{K}}(E)_n.$$

Para demonstrar que vale a inclusão reversa, tome um elemento $0 \neq s_{\alpha} s_{\beta}^* \in L_{\mathbb{K}}(E)_n$. Como $r(\alpha) = r(\beta)$, então

$$s_{\alpha} s_{\beta}^* = s_{\alpha} p_{r(\beta)} p_{r(\alpha)} s_{\beta}^* = s_{\alpha} s_{\beta}^* s_{\beta} s_{\alpha}^* s_{\alpha} s_{\beta}^* \in L_{\mathbb{K}}(E)_n L_{\mathbb{K}}(E)_{-n} L_{\mathbb{K}}(E)_n.$$

Desta forma, para cada $s_{\alpha} s_{\beta}^* \in L_{\mathbb{K}}(E)_n$, vale que

$$s_{\alpha} s_{\beta}^* \in L_{\mathbb{K}}(E)_n L_{\mathbb{K}}(E)_{-n} L_{\mathbb{K}}(E)_n.$$

Consequentemente,

$$L_{\mathbb{K}}(E)_n \subseteq L_{\mathbb{K}}(E)_n L_{\mathbb{K}}(E)_{-n} L_{\mathbb{K}}(E)_n.$$

\square

Proposição 5.6. *Todo anel S épsilon-fortemente \mathbb{Z} -graduado é unital.*

Demonstração. Vamos mostrar que ϵ_0 é uma unidade em S . Sejam $n \in \mathbb{Z}$ e $\alpha \in S_n$. Como S é épsilon-fortemente \mathbb{Z} -graduado, então $S_n S_{n-1} S_n = S_n$, para todo $n \in \mathbb{Z}$, podemos escrever

$$\alpha = \sum_{i=1}^m a_i b_i c_i,$$

em que $a_i, c_i \in S_n$ e $b_i \in S_{-n}$. Como ϵ_0 é o elemento neutro de S_0 e $a_i b_i \in S_0$, então

$$\epsilon_0 \alpha = \epsilon_0 \sum_{i=1}^m a_i b_i c_i = \sum_{i=1}^m (\epsilon_0 a_i b_i) c_i = \sum_{i=1}^m a_i b_i c_i = \alpha.$$

Portanto, $\epsilon_0 \alpha = \alpha$. De forma similar, temos que $\alpha \epsilon_0 = \alpha$. Portanto, S é unital. \square

Observação 5.7. Sejam E um grafo finito e o conjunto

$$P_n = \left\{ \alpha \mid s_\alpha s_\beta^* \in L_{\mathbb{K}}(E)_n, |\alpha| \neq 0, p_{s(\alpha)} \notin L_{\mathbb{K}}(E)_n L_{\mathbb{K}}(E)_{-n} \right\}.$$

Visto que $|\alpha| \neq 0$, temos que P_n não contém nenhum vértice, isto é, $|\alpha| \geq 1$. Como P_n é não-vazio, podemos definir em P_n a ordem parcial \leq tal que $\alpha_i \leq \alpha_j$ se α_i é o caminho inicial de α_j , para $\alpha_i, \alpha_j \in P_n$. Assim, podemos considerar o conjunto

$$M_n = \{ \alpha \mid \alpha \text{ é elemento minimal de } P_n \}.$$

Os conjuntos P_n e M_n apresentados acima, serão utilizados no próximo lema e no próximo teorema.

Lema 5.8. *Sejam E um grafo finito, os conjuntos P_n e M_n , para $n \in \mathbb{Z}$ não nulo, definidos na Observação 5.7. Então, M_n é um conjunto finito.*

Demonstração. Seja $n > 0$. Como E é finito, temos que E^1 é finito. Digamos que E^1 tem m elementos.

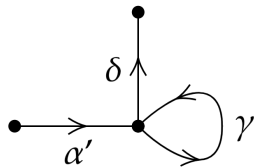
Se $\alpha \in P_n$, então $|\alpha| \geq n$. Suponhamos que $\alpha = \alpha_1 \dots \alpha_n \alpha_{n+1} \dots \alpha_{n+k}$. Então, $s_{\alpha_1 \dots \alpha_n} \in L_{\mathbb{K}}(E)_n$ e $p_{s(\alpha)} = p_{s(\alpha_1 \dots \alpha_n)} \notin L_{\mathbb{K}}(E)_n L_{\mathbb{K}}(E)_{-n}$. Logo, $\alpha_1 \dots \alpha_n \in P_n$. Então, todo elemento minimal é de tamanho menor ou igual a n . Como E^1 tem m elementos, só existem finitas possibilidades de formar caminhos de tamanho n . Portanto, só existem finitos elementos minimais para P_n , com $n > 0$.

Agora, mostremos que só existem finitos elementos minimais para P_{-n} .

Afirmção 1: Se $\alpha \in P_{-n}$ com $|\alpha| \geq m + 2$, então $\alpha_1 \dots \alpha_k \in P_{-n}$ para algum $k \leq m + 1$. Ou seja, algum começo de α também está em P_{-n} , sendo que este começo tem comprimento menor ou igual a $m + 1$.

De fato, seja $\alpha \in P_{-n}$. Digamos que $\alpha = \alpha_1 \dots \alpha_t$ com $t \geq m + 2$ e $\alpha_1, \dots, \alpha_t \in E^1$. Como $t > m$ e E^1 só tem m arestas, então existem duas arestas iguais entre estes $\alpha_1, \dots, \alpha_t$.

Isto significa que em α tem um caminho fechado. Então, podemos escrever $\alpha = \alpha' \gamma \delta$, em que γ é o primeiro caminho fechado que aparece em α .



Agora, escrevamos $\gamma = \gamma_1 \dots \gamma_l$. Se $|\alpha'| > 0$, vamos definir β um caminho de tamanho $|\alpha'| + n$ da seguinte forma

$$\beta = \gamma_j \dots \gamma_l \gamma \gamma \dots \gamma$$

em que $j \in \{1, \dots, l\}$. Então, temos que $s_{\alpha'} s_{\beta}^* \in L_{\mathbb{K}}(E)_{-n}$ e $p_{s(\alpha')} = p_{s(\alpha)} \notin L_{\mathbb{K}}(E)_{-n} L_{\mathbb{K}}(E)_n$, ou seja, $\alpha' \in P_{-n}$. Como γ é o primeiro caminho fechado de α , então não existe caminho fechado em α' , desta forma $|\alpha'| \leq m$. Agora, se $|\alpha'| = 0$, então defina β de tamanho $n + l$ por

$$\beta = \gamma_j \dots \gamma_l \gamma \gamma \dots \gamma.$$

Então $s_{\gamma} s_{\beta}^* \in S_{-n}$ e $p_{s(\gamma)} = p_{s(\alpha)} \notin S_n S_{-n}$. Portanto, $\gamma \in P_{-n}$. Como γ é o primeiro caminho fechado de α , então γ possui no máximo $m + 1$ arestas repetindo apenas a primeira e a última aresta.

Portanto, se $|\alpha| \geq m + 2$, então $\alpha = \delta \mu$, com $\delta \in P_{-n}$ e $|\delta| \leq m + 1$. Isto quer dizer que nenhum elemento $\alpha \in P_{-n}$, com $|\alpha| > m + 1$, é minimal. Portanto, o conjunto de todos os elementos minimais de P_{-n} é composto por elementos α com $|\alpha| \leq m + 1$. Porém, como E^1 é finito, só existem finitos caminhos de tamanho menor ou igual a $m + 1$ no grafo e, portanto, só existe um número finito de tais elementos. Portanto, M_n é um conjunto finito. \square

Teorema 5.9. *Se E é um grafo finito, então $L_{\mathbb{K}}(E)$ é ϵ -fortemente \mathbb{Z} -graduada.*

Demonstração. Primeiramente, pela Proposição 3.9, temos que $L_{\mathbb{K}}(E)$ é \mathbb{Z} -graduada com a sua \mathbb{Z} -gradação canônica. Sendo $L_{\mathbb{K}}(E)$ simetricamente \mathbb{Z} -graduada, pela Proposição 5.2, basta mostrar que, para cada $n \in \mathbb{Z}$, existe $\epsilon_n \in L_{\mathbb{K}}(E)_n$ tal que $\epsilon_n s = s = s \epsilon_{-n}$, para todo $s \in L_{\mathbb{K}}(E)_n$, para concluirmos que $L_{\mathbb{K}}(E)$ é ϵ -fortemente \mathbb{Z} -graduada.

Como definido na Proposição 5.3, temos que para cada $s_{\alpha} s_{\beta}^* \in L_{\mathbb{K}}(E)_n$,

$$s(\alpha \beta^*) = \begin{cases} s(\alpha), & \text{se } |\alpha| > 0 \\ r(\beta), & \text{se } |\alpha| = 0 \end{cases}. \quad (5.3)$$

Consideremos $n \in \mathbb{Z}$ arbitrário e definamos

$$B_n = \{v \in E^0 \mid v = s(\alpha\beta^*) \text{ para } s_\alpha s_\beta^* \in L_{\mathbb{K}}(E)_n\}.$$

Assim, para $s_\alpha s_\beta^* \in L_{\mathbb{K}}(E)_n$ com $r(\alpha) = r(\beta)$, analisemos os seguintes casos:

- i) Se $|\alpha| = 0$, então $p_{s(\alpha\beta^*)} = p_{r(\beta)} = s_\beta^* s_\beta \in L_{\mathbb{K}}(E)_n L_{\mathbb{K}}(E)_{-n}$.
- ii) Se $|\alpha| \neq 0$, pode ocorrer que $p_{s(\alpha\beta^*)} \notin L_{\mathbb{K}}(E)_n L_{\mathbb{K}}(E)_{-n}$.

Nesse caso, consideremos o conjunto P_n definido na Observação 5.7,

$$P_n = \{\alpha \mid s_\alpha s_\beta^* \in L_{\mathbb{K}}(E)_n, |\alpha| \neq 0, p_{s(\alpha)} \notin L_{\mathbb{K}}(E)_n L_{\mathbb{K}}(E)_{-n}\}.$$

Pelo Lema 5.8, temos que

$$M_n = \{\alpha \mid \alpha \text{ é elemento minimal de } P_n\}.$$

é um conjunto finito. Dessa forma, podemos definir ϵ_n , para $n \neq 0$ inteiro, da seguinte forma

$$\epsilon_n := \sum_{p_v \in B_n \cap L_{\mathbb{K}}(E)_n L_{\mathbb{K}}(E)_{-n}} p_v + \sum_{\alpha_j \in M_n} s_{\alpha_j} s_{\alpha_j}^*.$$

Notemos que

$$s_{\alpha_j} s_{\alpha_j}^* = s_{\alpha_j} p_{r(\alpha_j)} s_{\alpha_j}^* = s_{\alpha_j} p_{r(\beta_j)} s_{\alpha_j}^* = s_{\alpha_j} s_{\beta_j^*} s_{\beta_j} s_{\alpha_j}^* \in L_{\mathbb{K}}(E)_n L_{\mathbb{K}}(E)_{-n},$$

para cada $\alpha_j \in M_n$. Logo, pela construção de ϵ_n , temos que $\epsilon_n \in L_{\mathbb{K}}(E)_n L_{\mathbb{K}}(E)_{-n}$. Agora, mostremos que, para todo $n \in \mathbb{Z}$, $\epsilon_n s = s = s \epsilon_{-n}$, para todo $s \in L_{\mathbb{K}}(E)_n$. De fato, seja $s \in L_{\mathbb{K}}(E)_n$. Dessa forma, temos que

$$s = \sum_{i=1}^n \lambda_i s_{\gamma_i} s_{\delta_i}^*,$$

em que $s_{\gamma_i} s_{\delta_i}^* \in L_{\mathbb{K}}(E)_n$. Agora, analisemos os seguintes casos

Caso 1) Suponhamos que $p_{s(\gamma\delta^*)} \in L_{\mathbb{K}}(E)_n L_{\mathbb{K}}(E)_{-n}$. Logo,

$$\begin{aligned}
 \epsilon_n s_\gamma s_\delta^* &= \left(\sum_{p_v \in B_n \cap L_{\mathbb{K}}(E)_n L_{\mathbb{K}}(E)_{-n}} p_v + \sum_{\alpha_j \in M_n} s_{\alpha_j} s_{\alpha_j}^* \right) s_\gamma s_\delta^* \\
 &= \left(\sum_{p_v \in B_n \cap L_{\mathbb{K}}(E)_n L_{\mathbb{K}}(E)_{-n}} p_v \right) s_\gamma s_\delta^* + \left(\sum_{\alpha_j \in M_n} s_{\alpha_j} s_{\alpha_j}^* \right) s_\gamma s_\delta^* \\
 &= \sum_{p_v \in B_n \cap L_{\mathbb{K}}(E)_n L_{\mathbb{K}}(E)_{-n}} p_v p_{s(\gamma\delta^*)} s_\gamma s_\delta^* + \sum_{\alpha_j \in M_n} s_{\alpha_j} s_{\alpha_j}^* s_\gamma s_\delta^* \\
 &= s_\gamma s_\delta^* + \sum_{\alpha_j \in M_n} s_{\alpha_j} s_{\alpha_j}^* p_{s(\alpha_j)} p_{s(\gamma\delta^*)} s_\gamma s_\delta^* \\
 &= s_\gamma s_\delta^* + 0 \\
 &= s_\gamma s_\delta^*.
 \end{aligned}$$

Caso 2) Suponhamos que $p_{s(\gamma\delta^*)} \notin L_{\mathbb{K}}(E)_n L_{\mathbb{K}}(E)_{-n}$. Logo, $\gamma \in P_n$. Assim, existe $\alpha' \in M_n$ tal que $\gamma = \alpha' \gamma'$. Logo

$$\begin{aligned}
 \epsilon_n s_\gamma s_\delta^* &= \left(\sum_{p_v \in B_n \cap L_{\mathbb{K}}(E)_n L_{\mathbb{K}}(E)_{-n}} p_v + \sum_{\alpha_j \in M_n} s_{\alpha_j} s_{\alpha_j}^* \right) s_\gamma s_\delta^* \\
 &= \left(\sum_{p_v \in B_n \cap L_{\mathbb{K}}(E)_n L_{\mathbb{K}}(E)_{-n}} p_v \right) s_\gamma s_\delta^* + \left(s_{\alpha'} s_{\alpha'}^* + \sum_{\alpha_j \in M_n \setminus \{\alpha'\}} s_{\alpha_j} s_{\alpha_j}^* \right) s_\gamma s_\delta^* \\
 &= \sum_{p_v \in B_n \cap L_{\mathbb{K}}(E)_n L_{\mathbb{K}}(E)_{-n}} p_v p_{s(\gamma\delta^*)} s_\gamma s_\delta^* + s_{\alpha'} s_{\alpha'}^* s_\gamma s_\delta^* + \sum_{\alpha_j \in M_n \setminus \{\alpha'\}} s_{\alpha_j} s_{\alpha_j}^* s_\gamma s_\delta^* \\
 &= 0 + s_{\alpha'} s_{\alpha'}^* s_{\alpha'} s_\gamma s_\delta^* + \sum_{\alpha_j \in M_n \setminus \{\alpha'\}} s_{\alpha_j} s_{\alpha_j}^* p_{s(\alpha_j)} p_{s(\gamma\delta^*)} s_\gamma s_\delta^* \\
 &= s_{\alpha'} p_{r(\alpha')} s_\gamma s_\delta^* + 0 \\
 &= s_{\alpha'} s_{\gamma'} s_\delta^* \\
 &= s_\gamma s_\delta^*.
 \end{aligned}$$

Logo, pelo *Caso 1* e pelo *Caso 2*, concluímos que, para $n \in \mathbb{Z}$, temos que $\epsilon_n s = s$, $s \in L_{\mathbb{K}}(E)_n$.

Notemos que para $s_\alpha s_\beta^* \in L_{\mathbb{K}}(E)_n$, temos que

$$r(\alpha\beta^*) = \begin{cases} s(\beta), & \text{se } |\beta| > 0 \\ r(\alpha), & \text{se } |\beta| = 0 \end{cases}.$$

Agora, vamos mostrar que, para todo $n \in \mathbb{Z}$, $s\epsilon_n = s$, para todo $s \in L_{\mathbb{K}}(E)_{-n}$. De fato, seja $s \in L_{\mathbb{K}}(E)_{-n}$. Desta forma, podemos escrever

$$s = \sum_{i=1}^n \lambda_i s_{\gamma_i} s_{\delta_i}^*,$$

em que $s_{\gamma_i} s_{\delta_i}^* \in L_{\mathbb{K}}(E)_{-n}$. Para isso, analisemos os seguintes casos

Caso 3) Suponhamos que $p_{r(\gamma\delta^*)} \in L_{\mathbb{K}}(E)_n L_{\mathbb{K}}(E)_{-n}$. Logo,

$$\begin{aligned} s_{\gamma} s_{\delta}^* \epsilon_n &= s_{\gamma} s_{\delta}^* \left(\sum_{p_v \in B_n \cap L_{\mathbb{K}}(E)_n L_{\mathbb{K}}(E)_{-n}} p_v + \sum_{\alpha_j \in M_n} s_{\alpha_j} s_{\alpha_j}^* \right) \\ &= s_{\gamma} s_{\delta}^* \left(\sum_{p_v \in B_n \cap L_{\mathbb{K}}(E)_n L_{\mathbb{K}}(E)_{-n}} p_v \right) + s_{\gamma} s_{\delta}^* \left(\sum_{\alpha_j \in M_n} s_{\alpha_j} s_{\alpha_j}^* \right) \\ &= \sum_{p_v \in B_n \cap L_{\mathbb{K}}(E)_n L_{\mathbb{K}}(E)_{-n}} s_{\gamma} s_{\delta}^* p_{r(\gamma\delta^*)} p_v + \sum_{\alpha_j \in M_n} s_{\gamma} s_{\delta}^* s_{\alpha_j} s_{\alpha_j}^* \\ &= s_{\gamma} s_{\delta}^* + \sum_{\alpha_j \in M_n} s_{\gamma} s_{\delta}^* p_{r(\gamma\delta^*)} p_{s(\alpha_j)} s_{\alpha_j} s_{\alpha_j}^* \\ &= s_{\gamma} s_{\delta}^* + 0 \\ &= s_{\gamma} s_{\delta}^*. \end{aligned}$$

Caso 4) Suponhamos que $p_{r(\gamma\delta^*)} \notin L_{\mathbb{K}}(E)_n L_{\mathbb{K}}(E)_{-n}$. Neste caso,

$$\begin{aligned} s_{\gamma} s_{\delta}^* \epsilon_n &= s_{\gamma} s_{\delta}^* \left(\sum_{p_v \in B_n \cap L_{\mathbb{K}}(E)_n L_{\mathbb{K}}(E)_{-n}} p_v + \sum_{\alpha_j \in M_n} s_{\alpha_j} s_{\alpha_j}^* \right) \\ &= s_{\gamma} s_{\delta}^* \left(\sum_{p_v \in B_n \cap L_{\mathbb{K}}(E)_n L_{\mathbb{K}}(E)_{-n}} p_v \right) + s_{\gamma} s_{\delta}^* \left(\sum_{\alpha_j \in M_n} s_{\alpha_j} s_{\alpha_j}^* \right) \\ &= \sum_{p_v \in B_n \cap L_{\mathbb{K}}(E)_n L_{\mathbb{K}}(E)_{-n}} s_{\gamma} s_{\delta}^* p_v + \sum_{\alpha_j \in M_n} s_{\gamma} s_{\delta}^* s_{\alpha_j} s_{\alpha_j}^* \\ &= 0 + \sum_{\alpha_j \in M_n} s_{\gamma} s_{\delta}^* s_{\alpha_j} s_{\alpha_j}^*. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Por definição, $r(\gamma\delta^*) = s(\delta\gamma^*)$. Então, por hipótese, $p_{s(\delta\gamma^*)} \notin L_{\mathbb{K}}(E)_n L_{\mathbb{K}}(E)_{-n}$. Então, existe um único $\alpha_i \in M_n$ tal que α_i é começo de δ . Logo, por (5.4), temos que

$$\begin{aligned}
 s_{\gamma} s_{\delta}^* \epsilon_n &= s_{\gamma} s_{\delta}^* s_{\alpha_i} s_{\alpha_i}^* + \sum_{\alpha_j \in M_n \setminus \{\alpha_i\}} s_{\gamma} s_{\delta}^* s_{\alpha_j} s_{\alpha_j}^* \\
 &= s_{\gamma} s_{\delta}^* + 0 \\
 &= s_{\gamma} s_{\delta}^*.
 \end{aligned}$$

Logo, pelo *Caso 3* e pelo *Caso 4*, concluímos que, para $n \in \mathbb{Z}$, temos que $s\epsilon_n = s$, para todo $s \in L_{\mathbb{K}}(E)_{-n}$. Como $n \in \mathbb{Z}$ é arbitrário, podemos trocar n por $-n$. Então, para todo $n \in \mathbb{Z}$, $s\epsilon_{-n} = s$, para todo $s \in L_{\mathbb{K}}(E)_n$, concluindo o que queríamos. \square

Proposição 5.10. *Seja E um grafo. Se $L_{\mathbb{K}}(E)$ é épsilon-fortemente \mathbb{Z} -graduada, então E^1 é finito.*

Demonstração. Suponhamos que $L_{\mathbb{K}}(E)$ é épsilon-fortemente \mathbb{Z} -graduada e que E^1 é infinito. Dessa forma, $\epsilon_1 s = s$, para todo $s \in L_{\mathbb{K}}(E)_1$. Como $\epsilon_1 \in L_{\mathbb{K}}(E)_1 L_{\mathbb{K}}(E)_{-1}$, então

$$\epsilon_1 = \sum_{i=1}^m a_i b_i,$$

em que $a_i \in L_{\mathbb{K}}(E)_1$ e $b_i \in L_{\mathbb{K}}(E)_{-1}$, para todo $i \in \{1, 2, \dots, m\}$. Agora, como $b_i \in L_{\mathbb{K}}(E)_{-1}$, então

$$b_i = \sum_{\substack{j=1 \\ |\alpha_j| - |\beta_j| = -1}}^k \lambda_j s_{\alpha_j} s_{\beta_j}^*.$$

Desta forma, $|\beta_j| \geq 1$, para todo $j \in \{1, 2, \dots, k\}$. Seja A o conjunto de todas as primeiras arestas de cada um dos β_j . Como E^1 é infinito, existe $e \in E^1 \setminus A$. Logo, $s_{\beta_j}^* s_e = 0$, para todo $j \in \{1, 2, \dots, k\}$. Notemos que

$$\begin{aligned}
 b_i s_e &= \sum_{\substack{j=1 \\ |\alpha_j| - |\beta_j| = -1}}^k \lambda_j s_{\alpha_j} s_{\beta_j}^* s_e \\
 &= \sum_{\substack{j=1 \\ |\alpha_j| - |\beta_j| = -1}}^k \lambda_j s_{\alpha_j} 0 \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Desta forma,

$$\epsilon_1 s_e = \left(\sum_{i=1}^m a_i b_i \right) s_e = \sum_{i=1}^m a_i b_i s_e = 0,$$

o que é um absurdo, pois $\epsilon_1 s_e = s_e$ uma vez que $s_e \in L_{\mathbb{K}}(E)_1$. Portanto, E^1 é finito. \square

Este último resultado é um resumo dos resultados desta seção, e caracteriza as álgebras $L_{\mathbb{K}}(E)$ ϵ -fortemente \mathbb{Z} -graduadas.

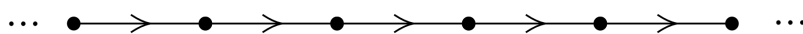
Teorema 5.11. *Seja E um grafo. Considere a álgebra de caminhos de Leavitt com sua \mathbb{Z} -gradação canônica, então $L_{\mathbb{K}}(E)$ é ϵ -fortemente \mathbb{Z} -graduada se, e somente se, E é finito.*

Demonstração. Suponhamos que $L_{\mathbb{K}}(E)$ é ϵ -fortemente \mathbb{Z} -graduada. Pela Proposição 5.6, $L_{\mathbb{K}}(E)$ tem unidade. Agora, pela Proposição 5.3, temos que E^0 é finito. Por outro lado, pela Proposição 5.10, temos que E^1 é finito. Logo, por definição, E é finito.

Suponhamos que E é finito. Pela Proposição 5.9, concluímos que $L_{\mathbb{K}}(E)$ é ϵ -fortemente \mathbb{Z} -graduada. \square

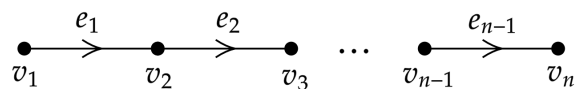
Conforme as hipóteses apresentadas neste trabalho, não existe uma relação direta entre uma álgebra de caminhos de Leavitt ser fortemente \mathbb{Z} -graduada e ser ϵ -fortemente \mathbb{Z} -graduada. Vejamos alguns exemplos para elucidar essa afirmação.

Exemplo 5.12. Consideremos o seguinte grafo E



Esse grafo é linha finita e não possui poço. Ainda, como discutido no Exemplo 3.3, temos que E é satisfaz a Condição (Y). Portanto, pelo Teorema 4.12, temos que $L_{\mathbb{K}}(E)$ é fortemente \mathbb{Z} -graduada. Porém, como E não é finito, pelo Teorema 5.11, concluímos que $L_{\mathbb{K}}(E)$ não é ϵ -fortemente \mathbb{Z} -graduada.

Exemplo 5.13. Consideremos o seguinte grafo E



Notemos que E é finito. Portanto, pelo Teorema 5.11, temos que $L_{\mathbb{K}}(E)$ é ϵ -fortemente \mathbb{Z} -graduada. Agora, como v_n é um poço, pelo Teorema 4.12, temos que $L_{\mathbb{K}}(E)$ não é fortemente \mathbb{Z} -graduada.

6 CONCLUSÃO

Nos primeiros capítulos, estudamos os grafos, as álgebras de caminho de Leavitt, a Condição (Y) e a \mathbb{Z} -gradação. Esses capítulos foram primordiais para que conseguíssemos compreender todos os conceitos que foram abordados nos últimos dois capítulos.

No Capítulo 4, estudamos as álgebras de caminhos de Leavitt fortemente \mathbb{Z} -graduadas. À medida que compreendíamos a estrutura dessas álgebras, percebemos que verificar que uma álgebra de caminhos de Leavitt é fortemente \mathbb{Z} -graduada não é uma tarefa fácil. Desta forma, esse capítulo tem seu ápice ao conseguirmos enunciar e demonstrar um resultado que nos permite identificar se $L_{\mathbb{K}}(E)$ é ou não fortemente \mathbb{Z} -graduada analisando diretamente o grafo E que gera a álgebra. Em particular, dado E um grafo dirigido e considerando a álgebra de caminhos de Leavitt $L_{\mathbb{K}}(E)$ com sua \mathbb{Z} -gradação canônica, tem-se que $L_{\mathbb{K}}(E)$ é fortemente \mathbb{Z} -graduada é equivalente a E ser linha finita, não possuir poço e satisfazer a Condição (Y), que por sua vez, é equivalente a E ser linha finita, não possuir poço e satisfazer a Condição (Y1).

Já no quinto e último capítulo, estudamos as álgebras de caminhos de Leavitt ϵ -fortemente \mathbb{Z} -graduadas. Ao longo desse capítulo, estudamos diversos resultados sobre as álgebras de caminhos de Leavitt ϵ -fortemente \mathbb{Z} -graduadas e, ao final, conseguimos enunciar e demonstrar uma caracterização para essas álgebras. Novamente, conseguimos identificar se $L_{\mathbb{K}}(E)$ é ou não ϵ -fortemente \mathbb{Z} -graduada analisando diretamente o grafo E que gera a álgebra. Mais especificamente, dado E um grafo dirigido e considerando a álgebra de caminhos de Leavitt com sua \mathbb{Z} -gradação canônica, então $L_{\mathbb{K}}(E)$ é ϵ -fortemente \mathbb{Z} -graduada se, e somente se, E é finito.

BIBLIOGRAFIA

- [1] LUNDSTRÖM, Patrik; ÖINERT, Johan. Strongly Graded Leavitt Path Algebras *Journal of Algebra and Its Applications*. v. 21, n. 7, 2022. DOI: 10.1142/S02194988225014192.
- [2] LUNDSTRÖM, Patrik; ÖINERT, Johan. Group gradations on Leavitt path algebras *Journal of Algebra and Its Applications*. v. 19, n. 9, 2020. DOI: 10.1142/S0219498820501650.
- [3] EIDT, Ben; ROYER, Danilo. Representations of C^* -algebras of row-countable graphs and unitary equivalence. *Rocky Mountain Journal of Mathematics*. v. 50, p. 1295-1312, 2020. DOI: 10.1216/rmj.2020.50.1295.
- [4] GONÇALVEZ, Daniel; ROYER, Danilo. Leavitt Path Algebras as Partial Skew Group Rings. *Communications in Algebra*. v. 42, p. 3578-3592, 2014. DOI: 10.1080/00927872.2013.790038.
- [5] ABRAMS, Gene; ARA, Pere; MOLINA, Mercedes Siles. *Leavitt Path Algebras*. Springer, 2010. (Lecture Notes in Mathematics). DOI: 10.1007/978-1-4471-7344-1.
- [6] ARA, P.; GOODEARL, K. R. *Leavitt path algebras of separated graphs*. 2011. DOI: 10.48550/ARXIV.1004.4979.
- [7] TOMFORDE, Mark. *Uniqueness Theorems and Ideal Structure for Leavitt Path Algebras*. 2006. DOI: 10.48550/ARXIV.1004.4979.

APÊNDICE A – \mathbb{K} -ÁLGEBRA UNIVERSAL

Nesta seção, vamos fazer uma possível construção da \mathbb{K} -Álgebra universal. A \mathbb{K} -Álgebra Universal é uma \mathbb{K} -Álgebra gerada por um conjunto qualquer e uma família de relações, e que possui uma propriedade universal. Neste caso, a propriedade universal é a existência, sobre determinadas circunstâncias, de um único homomorfismo entre \mathbb{K} -Álgebras. Essa propriedade é bastante útil, pois permite estender funções entre \mathbb{K} -Álgebra para homomorfismos. Em especial, essa propriedade aparece neste trabalho.

Seja G um conjunto qualquer, chamemos G de grupo de geradores. Primeiramente, vamos definir um produto em G . Para isso, olharemos para os elementos de G como se fossem “letras de um alfabeto”. Desta forma, é possível construir palavras finitas com essas “letras”. Assim, denotaremos W como o conjunto de todas as palavras finitas escritas com essas “letras”, ou seja,

$$W = \{r_1 r_2 \dots r_k : r_k \in G, k \in \mathbb{N}\}.$$

Por exemplo, se $G = \{a, b\}$. Então, algumas palavras que pertencem a W são

$$ab, ba, aaa, aab, bab, baaa, e babaab.$$

Definiremos o produto em W como a concatenação de palavras, isto é,

$$\begin{aligned} \cdot : \quad W \times W &\quad \rightarrow \quad W \\ (r_1 \dots r_n, s_1 \dots s_m) &\mapsto r_1 \dots r_n s_1 \dots s_m \end{aligned}$$

Notemos que o produto em W tem a propriedade associativa, mas não possui a propriedade comutativa. Além disso, observemos que não faz sentido somarmos ou multiplicarmos por um escalar os elementos de W . Como o objetivo é criar uma álgebra, precisamos definir uma soma. Então, a dúvida natural é como podemos definir uma "soma" em W ? Façamos assim.

Sejam \mathbb{K} um corpo e $\mathcal{F}(W, \mathbb{K})$ o conjunto de todas as funções de W em \mathbb{K} . Consideremos as funções $1_r : W \rightarrow \mathbb{K}$ em que

$$1_r(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x = r \\ 0, & \text{se } x \neq r \end{cases},$$

para cada $r \in W$, e o conjunto

$$A = \{1_r : r \in W\}.$$

Notemos que existe uma bijeção entre W e A . Agora, consideremos o conjunto

$$B = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i 1_{r_i} : r_i \in W, \lambda_i \in \mathbb{K}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Observemos que B é um conjunto que possui a operação adição. Para que tenhamos necessariamente uma relação biunívoca entre os elementos de W com os elementos de B , precisamos estender o conjunto W . Assim, consideremos F o conjunto das combinações lineares formais finitas com escalares em \mathbb{K} e elementos de W , ou seja,

$$F = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i r_i : r_i \in W, \lambda_i \in \mathbb{K}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Desta forma, é possível estabelecermos uma bijeção entre F e B . Agora, temos que F é um espaço vetorial uma vez que B é um espaço vetorial. Além disso, se estendermos a definição do produto em W para F , isto é,

$$\begin{aligned} \cdot : \quad F \times F &\quad \rightarrow \quad F \\ \left(\sum_{i=1}^n \lambda r_i, \sum_{j=1}^m \beta s_j \right) &\mapsto \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \lambda_i \beta_j r_i s_j, \end{aligned}$$

concluimos que F é uma \mathbb{K} -álgebra que é chamada de \mathbb{K} -álgebra livre.

Consideremos R um conjunto de elementos de F e I o ideal gerado pelos elementos de R . Ademais, consideremos o quociente

$$\frac{F}{I} = \{ \bar{x} : x \in F \}.$$

Temos que $\frac{F}{I}$ possui uma propriedade universal que será descrita na sequência.

Consideremos uma função $h : G \rightarrow B$ em que B é uma \mathbb{K} -álgebra. É possível estendê-la de modo que ela se torne um homomorfismo. Para isso, primeiramente, definimos

$$\begin{aligned} \bar{h} : W &\rightarrow B \\ r_1 r_2 \dots r_n &\mapsto h(r_1) h(r_2) \dots h(r_n). \end{aligned}$$

E por fim, definimos o homomorfismo

$$\begin{aligned} \bar{\bar{h}} : F &\rightarrow B \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i r_i &\mapsto \sum_{i=1}^n \lambda_i \bar{h}(r_i). \end{aligned}$$

Teorema A.1 (Propriedade Universal de $\frac{F}{I}$). *Sejam G um conjunto de geradores, F a \mathbb{K} -Álgebra livre gerada por G , R um subconjunto de F e B uma álgebra. Seja $h : G \rightarrow B$ uma função tal que $\bar{\bar{h}}|_R = 0$ em que $\bar{\bar{h}} : F \rightarrow B$ é a extensão de $h : G \rightarrow B$ acima definida. Então, existe um único homomorfismo $\psi : \frac{F}{I} \rightarrow B$ tal que $\psi \circ i = \bar{\bar{h}}$, ou seja, tal que o diagrama abaixo comute.*

$$\begin{array}{ccc}
 F & \xrightarrow{\bar{h}} & B \\
 \searrow i & & \nearrow \psi \\
 & F & \\
 & \bar{I} &
 \end{array}$$

Demonstração. Seja I o ideal gerado por R . Temos que $\bar{h}|_I = 0$. De fato, seja $x \in I$. Então, podemos escrever x da seguinte forma

$$x = \sum_{i=1}^n x_i a_i y_i + \sum_{i=1}^m \gamma_i b_i + \sum_{i=1}^r c_i \delta_i,$$

para $a_i, b_i, c_i \in R$ e $x_i, y_i, \gamma_i, \delta_i \in F$. Por hipótese, $\bar{h}|_R = 0$, então

$$\bar{h}(x) = \sum_{i=1}^n \bar{h}(x_i) \bar{h}(a_i) \bar{h}(y_i) + \sum_{i=1}^m \bar{h}(\gamma_i) \bar{h}(b_i) + \sum_{i=1}^r \bar{h}(c_i) \bar{h}(\delta_i) = 0.$$

Definamos

$$\begin{aligned}
 \psi : \frac{F}{I} &\rightarrow B \\
 \bar{x} &\mapsto \psi(\bar{x}) = \bar{h}(x).
 \end{aligned}$$

Temos que ψ está bem definida. De fato, seja $y \in F$ e $x \in F$ de forma que $\bar{x} = \bar{y}$. Notemos que $\bar{x} - \bar{y} = 0$, ou seja, $x - y \in I$. Pelo que acabamos de mostrar,

$$\bar{h}(x) - \bar{h}(y) = \bar{h}(x - y) = 0.$$

Assim, $\bar{h}(x) = \bar{h}(y)$ e, portanto, $\psi(\bar{x}) = \psi(\bar{y})$, como queríamos. Agora, segue do fato de que \bar{h} é um homomorfismo que ψ também é.

Mostremos que o diagrama comuta. De fato, seja $x \in F$. Logo,

$$(\psi \circ i)(x) = \psi(i(x)) = \psi(\bar{x}) = \bar{h}(x).$$

Por fim, temos que ψ é única. De fato, suponhamos que existe $\phi : \frac{F}{I} \rightarrow B$ tal que $\phi \circ i = \bar{h}$. Assim,

$$\psi(\bar{x}) = \bar{h}(x) = (\phi \circ i)(x) = \phi(i(x)) = \phi(\bar{x}).$$

Portanto, $\psi = \phi$, o que conclui a demonstração. \square

Desta forma, temos a construção de uma \mathbb{K} -Álgebra Universal. Agora, façamos a construção de uma \mathbb{K} -Álgebra Universal específica.

Definição A.2. *Um grafo dirigido é uma quádrupla (E^0, E^1, r, s) composta de dois conjuntos enumeráveis E^0 e E^1 e também duas funções $r, s : E^1 \rightarrow E^0$. Os elementos de E^0 são chamados de vértices e os de E^1 são chamados de arestas.*

Para cada $e \in E^1$, $s(e)$ é o vértice onde a aresta começa e $r(e)$ é o vértice onde a aresta termina.

Observação A.3. Denotaremos por $(E^1)^*$ o conjunto de símbolos formais $\{e^* : e \in E^1\}$.

Neste exemplo, consideremos $G = E^1 \cup (E^1)^* \cup E^0$ e o conjunto

$$R = \{ s(e)e - e, er(e) - e, r(e)e^* - e^*, e^*s(e) - e^*, e^*e - r(e), e^*f \text{ para } e \neq f \text{ e } v - \sum_{\substack{e \in E^1 \\ s(e)=v}} s_e s_e^* \text{ para todo } v \in E^0 \text{ tal que } 0 < \#s^{-1}(v) < \infty, \text{ para todo } e, f \in E^1 \}.$$

Vamos denotaremos $\frac{F}{I} = L_{\mathbb{K}}(E)$ e, por exemplo, $\bar{e} := s_e$ e $\bar{v} := p_v$. Assim, obtemos a álgebra de caminhos de Leavitt, que na literatura é definida da seguinte forma:

Definição A.4. *Sejam E um grafo e \mathbb{K} um corpo. A Álgebra de Caminhos de Leavitt sobre E com coeficientes em \mathbb{K} , denotada por $L_{\mathbb{K}}(E)$, é a \mathbb{K} -álgebra universal gerada pelo conjunto $\{p_v : v \in E^0\}$, de elementos idempotentes e ortogonais dois a dois, com os conjuntos $\{s_e : e \in E^1\}$ e $\{s_e^* : e \in E^1\}$ satisfazendo as seguintes propriedades:*

1. $p_{s(e)}s_e = s_e p_{r(e)} = s_e$, para todo $e \in E^1$;
2. $p_{r(e)}s_e^* = s_e^* p_{s(e)} = s_e^*$, para todo $e \in E^1$;
3. Para quaisquer $e, f \in E^1$,

$$s_e^* s_f = \begin{cases} p_{r(e)}, & \text{se } e = f; \\ 0, & \text{se } e \neq f; \end{cases}$$

4. $p_v = \sum_{\substack{e \in E^1 \\ s(e)=v}} s_e s_e^*$ para todo $v \in E^0$ tal que $0 < \#s^{-1}(v) < \infty$.