

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CAMPUS BLUMENAU
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Adriana Washington Henarejos

**OBSERVABILIDADE E CONTROLABILIDADE DE
MODELOS BIOLÓGICOS**

Blumenau, SC
2023

Adriana Washington Henarejos

**OBSERVABILIDADE E CONTROLABILIDADE DE
MODELOS BIOLÓGICOS**

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação em Licenciatura em Matemática do Campus Blumenau da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do título de Licenciado(a) em Matemática.
Orientador: Prof. Dr. Francis Félix Córdova Puma

Blumenau, SC
2023

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Henarejos, Adriana Washington
Observabilidade e controlabilidade de modelos biológicos
/ Adriana Washington Henarejos ; orientador, Francis Félix
Córdova Puma, 2023.
139 p.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) -
Universidade Federal de Santa Catarina, Campus Blumenau,
Graduação em Matemática - Licenciatura, Blumenau, 2023.

Inclui referências.

1. Matemática - Licenciatura. 2. Modelagem Matemática.
3. Observabilidade. 4. Controlabilidade. 5. Modelo de
Lotka-Volterra. I. Puma, Francis Félix Córdova. II.
Universidade Federal de Santa Catarina. Graduação em
Matemática - Licenciatura. III. Título.

Adriana Washington Henarejos

**OBSERVABILIDADE E CONTROLABILIDADE DE
MODELOS BIOLÓGICOS**

Este Trabalho Conclusão de Curso foi julgado adequado para obtenção do Título de Licenciado(a) em Matemática e aprovado em sua forma final pelo Curso de Licenciatura em Matemática.

Blumenau, SC, 27 de junho de 2023.

Prof. Francis Félix Córdova Puma, Dr.
Coordenador do Curso

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Francis Félix Córdova Puma
Orientador
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Eleomar Cardoso Júnior, Dr.
Avaliador
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Roger Behling, Dr.
Avaliador
Universidade Federal de Santa Catarina

Dedico este trabalho a todos que amo e aqueles que me
inspiram e motivam.

AGRADECIMENTOS

Eu não poderia iniciar os agradecimentos sem agradecer àqueles que foram os meus maiores apoiadores e incentivadores desde o dia em que nasci: meus pais. Obrigada por sempre me ensinarem a acreditar que tudo o que eu quisesse alcançar eu alcançaria, claro que com certo esforço e dedicação. Obrigada ainda mais por sempre deixarem claro que eu encontraria muitos obstáculos durante minha vida, mas que após a superação, eu seria recompensada. Estendo meus agradecimentos para toda a minha família, em especial minha avó e minha irmã, que também sempre ofereceram seu apoio nessa jornada, estando sempre dispostas e se mostrando interessadas em ouvir o que eu estava desenvolvendo.

Ao meu companheiro Duan, principalmente nessas últimas etapas, por sempre se colocar à disposição para me auxiliar como pudesse, ou simplesmente ouvir meus anseios e me tranquilizar. Obrigada por ser meu refúgio de paz.

Aos amigos que fiz ao longo da graduação, que conseguiram tornar toda essa caminhada mais leve. O sentimento de que estávamos todos no mesmo barco e conseguiríamos passar por tudo foi reconfortante em muitos momentos. Destaco dois agradecimentos especiais: à Nicolý e à Milene. A Nicolý por ser uma veterana com ótimas dicas, com quem desenvolvi grande parte dos projetos de iniciação científica que deram origem a este trabalho. Obrigada pelos momentos de descontração que compensavam nossos momentos de estudo. Agora, agradeço àquela que me acompanhou desde o primeiro dia de aula, com quem sempre compartilhei minhas frustrações e também conquistas acadêmicas. Obrigada, Milene. Já disse isso mais de uma vez, mas sem seu apoio e sem nossos momentos de estudo e conversas, todo esse processo teria sido, no mínimo, mais complicado.

Aos professores que tive a honra de conhecer ao longo de todos esses semestres, que me mostraram como a matemática é incrível e não um bicho de sete cabeças, que os processos avaliativos podem ser leves e que podemos aprender de maneiras inusitadas. Obrigada por me incentivarem, além de tudo, a ser uma pessoa crítica, que não tem medo de pedir ajuda quando necessário. Desse modo, agradeço especialmente aos professores que sempre dedicaram parte do seu tempo atuando não apenas como meros transmissores do saber, mas como amigos que sempre estavam dispostos a fornecer bons conselhos e apoio: Luiz Rafael dos Santos, Felipe Delfini Caetano Fidalgo, André Vanderlinde da Silva, Roger Behling, Rafael Aleixo de Carvalho, Renata Orlandi, Eleomar Cardoso Júnior, Julio Faria Corrêa e Laís Cristina Viel Gereti.

Em especial, gostaria de agradecer aos professores Louise Reips e Felipe Vieira, que além de todas as qualidades citadas acima, também me ofereceram ótimas oportunidades na graduação, como as bolsas para atuar no programa PIC-OBMEP (durante 4 edições) e a oportunidade de viajar para uma cerimônia de premiação da OBMEP. Obrigada aos dois pelos momentos de descontração e por toda motivação.

Ao meu orientador, Francis Félix Córdova Puma, que me acompanhou desde 2019 com 4 projetos de iniciação científica que foram essenciais para definir o caminho que eu ia trilhar no desenvolvimento deste estudo. Obrigada por me auxiliar a desenvolver esse trabalho de maneira tão leve, sempre se preocupando em antecipar problemáticas e conteúdos com os quais eu iria me deparar posteriormente. Obrigada por não se satisfazer com um simples "entendi" e empenhar grandes esforços para me auxiliar no processo de compreensão de determinado conteúdo, correlacionando-o com outros conceitos já vistos, e por me instigar a desenvolver conjecturas, que posteriormente seriam ou não

resolvidas. Resumindo, agradeço por toda a sua paciência. E obrigada, além de tudo, por me motivar a participar de inúmeros eventos e congressos, por me incentivar a continuar meus estudos após a graduação, e por todos os momentos de descontração, desabafos e conselhos. Obrigada por me apresentar esse universo da pesquisa, em especial nesta área na qual pretendo continuar meus estudos na pós-graduação.

À banca, por terem aceito o convite para participar da minha qualificação e defesa do Trabalho de Conclusão de Curso. Sei que os esforços empenhados para avaliar um trabalho são grandes e demandam tempo e dedicação. Agradeço por todas as contribuições feitas para o desenvolvimento e aperfeiçoamento deste trabalho, bem como por todos os aprendizados que foram compartilhados.

Por fim, à Universidade Federal de Santa Catarina, em especial ao campus de Blumenau, por ser uma instituição pública, gratuita e, acima de tudo, de qualidade, que me oportunizou fazer um curso tão bem qualificado. Em especial, agradeço a todos os professores e técnicos, que contribuíram cada um à sua maneira com a minha formação.

*“Se existisse uma função que representasse o trabalho
de um matemático, essa função seria não linear”
(VANDERLINDE, 2023)*

RESUMO

Este Trabalho de Conclusão de Curso tem como objetivo a aplicação das ferramentas da teoria de observabilidade e controlabilidade matemática em modelos biológicos. A abordagem adotada é qualitativa, utilizando um processo metodológico bibliográfico embasado principalmente na referência [1]. Os resultados obtidos englobam a síntese e apresentação dos conteúdos teóricos estudados, com foco especial na controlabilidade e observabilidade de sistemas lineares finitos, no modelo de Lotka-Volterra e na teoria de controlabilidade local. Além disso, foi realizada uma análise para determinar se problemas específicos relacionados a modelos biológicos apresentavam garantia de observabilidade ou controlabilidade. Por meio deste estudo, evidencia-se que a matemática oferece ferramentas adicionais para a análise de fenômenos e interações biológicas, indo além da modelagem matemática. Os conceitos de observabilidade e controlabilidade desempenham um papel fundamental nesse contexto, permitindo a delimitação de resultados esperados para um sistema e a compreensão de sua evolução histórica e temporal. Ao explorar a teoria de observabilidade e controlabilidade, este estudo proporciona uma compreensão mais ampla das condições necessárias para garantir a existência e a utilização das ferramentas apresentadas em problemas específicos, contribuindo para a aplicação prática da teoria em modelos biológicos.

Palavras-chave: Modelagem Matemática. Observabilidade. Controlabilidade. Modelo de Lotka-Volterra.

ABSTRACT

This undergraduate thesis aims to apply the tools of the theory of observability and mathematical controllability in biological models. The adopted approach is qualitative, employing a bibliographic methodological process based mainly on the reference [1]. The results obtained encompass the synthesis and presentation of the theoretical contents studied, with a special focus on the controllability and observability of finite linear systems, the Lotka-Volterra model and the theory of local controllability. In addition, an analysis was performed to determine whether specific problems related to biological models were guaranteed to be observable or controllable. Through this study, it is evident that mathematics offers additional tools for the analysis of biological phenomena and interactions, going beyond mathematical modeling. The concepts of observability and controllability play a fundamental role in this context, allowing the delimitation of expected results for a system and the understanding of its historical and temporal evolution. By exploring the theory of observability and controllability, this study provides a broader understanding of the necessary conditions to ensure the existence and use of the tools presented in specific problems, contributing to the practical application of the theory in biological models.

Keywords: Mathematical Modeling. Observability. Controllability. Lotka-Volterra Model.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Gráfico do modelo Malthusiano.	48
Figura 2 – Gráfico do crescimento logístico.	49
Figura 3 – Movimento cíclico do modelo de Lotka-Volterra. . .	55
Figura 4 – Órbita $(x(t), y(t))$ para $x_0 = y_0 = 10$	56
Figura 5 – Trajetórias $(t, x(t))$ e $(t, y(t))$ para $x_0 = y_0 = 10$. .	56
Figura 6 – Órbita $(x(t), y(t))$ para $x_0 = 20, y_0 = 13$	57
Figura 7 – Trajetórias $(t, x(t))$ e $(t, y(t))$ para $x_0 = 20, y_0 = 13$.	58
Figura 8 – Órbita $(x(t), y(t))$ para $x_0 = y_0 = 15$	59
Figura 9 – Trajetórias $(t, x(t))$ e $(t, y(t))$ para $x_0 = y_0 = 15$. .	59
Figura 10 – Alfred James Lotka (1880–1949).	61
Figura 11 – Vito Volterra (1860-1940).	62
Figura 12 – Plano de fase (ponto de sela).	69
Figura 13 – Gráfico de x_1 em função de t (ponto de sela). . . .	69
Figura 14 – Plano de fase (ponto de centro).	70
Figura 15 – Gráfico de x_1 em função de t (ponto de centro). . .	71
Figura 16 – Registros das peles de linces pela <i>Hudson Bay Com-</i> <i>pany</i> (1735-1820).	76
Figura 17 – Registros de peles de linces do departamento norte da <i>Hudson Bay Company</i> (1820-1935).	77
Figura 18 – Sincronização dos ciclos populacionais das presas (lebres) e dos predadores (linces).	78
Figura 19 – Dinâmica de Σ	81
Figura 20 – Representação do problema de controlabilidade. . .	83
Figura 21 – Representação do problema de observabilidade. . .	86
Figura 22 – Controlabilidade Local.	108
Figura 23 – Inserção de um controle na dinâmica cíclica do mo- delo de Lotka-Volterra.	114

Figura 24 – Fluxograma das etapas seguidas para garantir a existência do controle local para o sistema (46). . . 118

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Estabilidade de Sistemas Lineares.	68
Tabela 2 – Pontos de equilíbrio obtidos para o sistema (46). .	117

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	16
2	PRELIMINARES	21
2.1	ÁLGEBRA LINEAR	21
2.2	ESPAÇOS VETORIAIS NORMADOS E ESPAÇOS DE FUNÇÕES	27
2.3	EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS	37
3	MODELOS BIOLÓGICOS	45
3.1	MODELOS PARA UMA ESPÉCIE BIOLÓGICA	46
3.1.1	Equação de Malthus	47
3.1.2	Crescimento Logístico	49
3.2	MODELOS PARA DUAS ESPÉCIES BIOLÓGICAS	50
3.2.1	Modelo de Lotka-Volterra	51
3.2.1.1	Conhecendo Lotka e Volterra	60
3.2.1.2	Soluções de Equilíbrio e Estabilidade	63
3.2.1.3	Variações do Modelo de Lotka-Volterra	72
3.2.1.4	Lebres e lincos: um exemplo canadense	74
4	CONTROLABILIDADE E OBSERVABILIDADE DE SISTEMAS LINEARES FINITOS	79
4.1	O PROBLEMA DE CONTROLE MATEMÁTICO	82
4.2	O PROBLEMA DE OBSERVABILIDADE MATEMÁTICA	85
4.3	DUALIDADE: Σ E Σ^d	87
4.4	O TEOREMA DE KALMAN	93
4.5	APLICAÇÕES	99
4.5.1	Modelo Farmacológico: Farmacodinâmica	99
4.5.2	Modelo Biológico: Competição de espécies (Controlabilidade)	102

4.5.3	Modelo Biológico: Competição de espécies (Observabilidade)	103
5	CONTROLABILIDADE DE SISTEMAS NÃO LINEARES	106
5.1	APLICAÇÃO: MODELO DE LOTKA-VOLTERRA	113
6	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS	119
	REFERÊNCIAS	123
	APÊNDICE A – EXPONENCIAL DE UMA MATRIZ e^{tA}	128
	APÊNDICE B – CONCEITOS BIOLÓGICOS	133
	APÊNDICE C – LINEARIDADE E LIMITAÇÃO DOS OPERADORES Φ_τ E Ψ_τ	135

1 INTRODUÇÃO

No decorrer dos anos a matemática passou por diversas transformações e contou com a atuação de diversos personagens que contribuíram no processo de moldagem da matemática tal qual a conhecemos. A área da física, como bem mostra [2], contribuiu de maneira significativa no cenário de desenvolvimento de poderosas ferramentas matemáticas, como o Cálculo. Foi justamente do esforço em compreender algumas leis fundamentais que regem os sistemas físicos, que ferramentas relacionadas às equações diferenciais e tantas outras foram desenvolvidas. Historicamente, vê-se a necessidade gerando a demanda por desenvolver métodos, soluções ou ferramentas eficazes para lidar ou resolver os obstáculos encontrados. Do mesmo modo, é direto que a matemática mostra-se como uma ferramenta flexível, por conseguir alcançar diversas áreas, como as engenharias, a química, a física, a computação e tantas outras das quais participa de modo direto ou indireto. Em contrapartida, ao citarmos a área da biologia, pode parecer, à primeira vista, que tal área seja totalmente desconectada da matemática, assim como suas subáreas ou ramificações, como a medicina e a farmacologia. No entanto, a modelagem matemática revela, de modo magnífico, como é possível, e relativamente simples, estabelecer conexões entre as áreas da biologia e da matemática. Tal aproximação permite uma melhor compreensão e estudo de fenômenos biológicos o que, a priori, apenas com as ferramentas usuais da biologia não seria possível desenvolver.

No entanto, um desafio que pode ser evidenciado no estudo da matemática é realizar o caminho inverso do que é visto historicamente, ou seja, encontrar utilidade em resultados já existentes para fins aplicáveis que precisam de alguma solução. Nesse contexto, o presente trabalho mostra como ferramentas matemáticas, como a teoria de

controlabilidade e observabilidade, que surgem inicialmente no contexto da engenharia de controle, podem ser aplicadas em áreas como a biologia, em especial, em modelos biológicos. A aplicação dessas ferramentas na biologia fornece novas perspectivas de intervenção nos modelos, visando resolver problemas já colocados em discussão e eventualmente com outras propostas de solução. As ferramentas da teoria de controle irão tornar possível a manipulação de uma ou mais variáveis de um dado sistema biológico, encaminhando o comportamento das soluções para valores ou resultados almejados. Em contrapartida, as ferramentas de observabilidade irão permitir a estima de informações que, a priori, não são observáveis no sistema, como os dados iniciais em um tempo t das variáveis do sistema. Combinadas ambas as técnicas de controlabilidade e observabilidade, vê-se, conforme será disposto nos próximos capítulos, que é possível não apenas estudar e compreender de maneira mais densa os sistemas biológicos, mas também influir nos processos biológicos que o modelo descreve. Verifica-se que modelos complexos, influenciados ou estudados com as técnicas de controle e observabilidade, podem representar avanços na área da biologia.

Visando uma melhor compreensão do trabalho, chama-se atenção para fato de que é necessário que o(a) leitor(a) tenha conhecimentos relacionados à Álgebra Linear, Análise e Análise Funcional, ou ao menos os conceitos básicos dessas áreas, para que a leitura e compreensão do trabalho seja mais fluída. Apesar do que foi evidenciado, o próximo capítulo (Capítulo 2) irá expor os principais resultados necessários para melhor compreender o que será desenvolvido, no entanto é importante citar que alguns resultados, considerados prévios, ou não extremamente necessários, foram ocultados visando uma melhor disposição do material.

O presente Trabalho de Conclusão de Curso foi desenvolvido

seguindo uma abordagem qualitativa para a revisão, estudo, compreensão e análise de toda a teoria principal do estudo, bem como seus conteúdos pré-requisitos. Desse modo, foi utilizado um processo metodológico bibliográfico para o estudo, no qual [1], [2], [3], [4] e [5] foram os principais referenciais utilizados tanto para o desenvolvimento dos conteúdos principais quanto dos preliminares. Muitas outras referências complementares foram utilizadas e são apresentadas ao longo do trabalho e também estão listadas no capítulo de referências. O estudo bibliográfico de todos os materiais foi realizado com o objetivo de assimilar a teoria foco da pesquisa, as teorias de controlabilidade e observabilidade matemática, para então aplicá-las em modelos biológicos que foram analisados em paralelo. Os principais conteúdos elucidados no trabalho são aqueles relativos à teoria de controlabilidade e observabilidade matemática, à teoria de controle local, ao estudo de modelos biológicos, em especial o modelo de Lotka-Volterra, e às aplicações das teorias estudadas nos modelos evidenciados.

A partir dos apontamentos evidenciados, fez-se a construção do trabalho contendo, no Capítulo 1, a introdução, que abrange a metodologia e os objetivos relativos ao estudo. Já no Capítulo 2, conforme já comentado, são apresentados os conteúdos preliminares, ou seja, todos aqueles assuntos que são necessários para compreender melhor a teoria principal, mas que não necessariamente a compõem. São conteúdos relativos a conceitos básicos, principalmente das áreas da Álgebra Linear e Análise. O Capítulo 3 faz a apresentação de alguns modelos biológicos, partindo dos mais básicos (para uma espécie) para alguns mais robustos (que relacionam duas espécies biológicas). Dentre eles, o modelo de Lotka-Volterra tem suas características e peculiaridades tanto biológicas, quanto matemáticas e históricas apresentadas. Esse capítulo almeja, através de um processo construtivo e de modelagem, determinar as bases para o desenvolvimento de modelos matemáticos

aplicados a problemas biológicos. O enfoque no modelo de Lotka-Volterra se dá justamente pelo fato de que esse modelo é a base para a teoria mais complexa de modelagem biológica, logo diversos aspectos observados nele, bem como procedimentos que são aplicados para sua análise, podem ser replicados em outros modelos. O Capítulo 4 é dedicado à evidenciação da teoria de controlabilidade e observabilidade matemática para sistemas lineares finitos, bem como suas aplicações correlatas. No Capítulo 5, é apresentado um caso especial de controlabilidade para problemas não lineares: a controlabilidade local. Da mesma forma que no capítulo imediatamente anterior, também é apresentada uma aplicação da teoria. Por fim, as conclusões e perspectivas do trabalho são apresentadas no Capítulo 6.

A metodologia utilizada, combinando o estudo bibliográfico com a aplicação da teoria em modelos biológicos e em alguns casos, situações problema, foi essencial para atingir os objetivos do Trabalho de Conclusão de Curso. É importante ressaltar que os objetivos que serão destacados foram norteadores e claros em seu papel de direcionar os estudos do trabalho. O objetivo geral do trabalho é aplicar as ferramentas da teoria de observabilidade e controlabilidade matemática em modelos biológicos. Visando alcançá-lo, faz-se necessário definir os objetivos específicos que foram essenciais no sentido de orientar todas as etapas desenvolvidas no estudo:

1. Revisar conteúdos preliminares básicos de Álgebra Linear, Análise e Análise Funcional;
2. Compreender como se dá a construção de modelos biológicos representados por sistemas de equações diferenciais;
3. Estudar o modelo de Lotka-Volterra, bem como algumas de suas peculiaridades e aspectos históricos;

4. Definir os principais conceitos e resultados da teoria de controlabilidade e observabilidade para sistemas de equações diferenciais lineares em espaços de dimensão finita;
5. Compreender a relação de dualidade entre o problema de observabilidade e o de controlabilidade;
6. Investigar os resultados obtidos na aplicação da teoria estudada;
7. Estender a teoria de controle linear para sistemas não lineares;
8. Reformular o modelo de Lotka-Volterra para adequá-lo ao problema de controle;
9. Avaliar os resultados obtidos com a aplicação da teoria de controle no modelo de Lotka-Volterra;
10. Compreender todas as etapas e ferramentas que foram utilizadas para desenvolver os resultados obtidos nas aplicações.

2 PRELIMINARES

Constarão nas seções a seguir os conteúdos teóricos básicos e essenciais para o desenvolvimento de todo o presente trabalho. Nesse sentido, destacam-se os conteúdos correlatos à Álgebra Linear, espaços vetoriais normados, espaços de funções e sistemas de equações diferenciais.

2.1 ÁLGEBRA LINEAR

Serão apresentadas noções e resultados para estabelecer as bases das próximas discussões. Desse modo, para um estudo mais profundo dos temas expostos a seguir, recomenda-se que sejam visitadas as referências [6], [5], [7] e [8]. Neste capítulo, considera-se o conjunto de escalares \mathbb{K} podendo ser os números reais (\mathbb{R}) ou complexos (\mathbb{C}).

Definição 2.1 (Espaço Vetorial). *Seja V um conjunto com duas operações (ditas adição e multiplicação por escalar) definidas. Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, a soma de \mathbf{u} e \mathbf{v} é dada por $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, e, sendo α um escalar, o múltiplo escalar de \mathbf{v} por α é dado por $\alpha\mathbf{v}$. A partir da verificação da veracidade dos axiomas a seguir, para todo \mathbf{u}, \mathbf{v} e \mathbf{w} em V e para todos os escalares α e β , V será chamado de espaço vetorial e seus elementos serão os vetores.*

1. $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ está em V (fechamento da adição);
2. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ (comutatividade da adição);
3. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ (associatividade da adição);
4. $\exists \mathbf{0} \in V$, dito **vetor nulo**, tal que $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$;
5. $\forall \mathbf{u} \in V, \exists -\mathbf{u} \in V$, de modo que $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$;
6. $\alpha\mathbf{u} \in V$ (fechamento em relação à multiplicação por um escalar);

7. $\alpha(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}$ (distributividade);
8. $(\alpha + \beta)\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{u}$ (distributividade);
9. $\alpha(\beta\mathbf{u}) = (\alpha\beta)\mathbf{u}$;
10. $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$.

Definição 2.2 (Subespaço Vetorial). *Um subconjunto W de um espaço vetorial V será dito **subespaço vetorial** de V se W for também um espaço vetorial, com os mesmos escalares, adição e multiplicação por escalar de V .*

Para este capítulo, denotaremos por letras minúsculas em negrito os vetores, a título de exemplificação: vetor \mathbf{v} . O conceito de vetor é um conceito muito amplo, podendo ser melhor aprofundado nas referências inicialmente citadas. Para o presente estudo, faremos diversas manipulações e cálculos usando vetores e suas propriedades, principalmente pelo fato de que as matrizes linha e coluna podem ser interpretadas como vetores.

Pode-se abordar algumas características interessantes acerca de um conjunto de vetores, como a linearidade e a independência linear. Ambas características possuem aplicações e relações muito importantes no estudo de sistemas lineares. É importante frisar que denota-se como *span* o conjunto de todas as combinações lineares de determinado conjunto de vetores, isto é, o *span* será um espaço determinado por estes vetores. Para denotar o *span* dos vetores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$, utiliza-se de: $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n] = \{c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \dots + c_n\mathbf{v}_n \mid c_i \in \mathbb{K}\}$.

Definição 2.3 (Vetores Linearmente Dependentes). *Seja um conjunto de vetores $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$, este conjunto será dito **linearmente dependente** (L.D.) se existirem escalares c_1, c_2, \dots, c_k , de modo que pelo menos um desses escalares não seja nulo, e:*

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \dots + c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}.$$

Logo, um conjunto de vetores linearmente dependente é aquele no qual é possível escrever um vetor do conjunto como combinação linear dos demais. Desse modo, um conjunto de vetores dito **linearmente independente** (L.I.) será aquele conjunto que não pode ser classificado como linearmente dependente.

Definição 2.4 (Base de um Espaço Vetorial). *Um conjunto $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ de vetores de V será dita uma **base** de V se:*

1. $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ é L.I.;
2. $[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n] = V$.

Esse conjunto finito de vetores, que é a base de um espaço vetorial V , traz a propriedade de que qualquer vetor $\mathbf{v} \in V$ pode ser interpretado como uma combinação linear desses elementos. O número de elementos da base será denominada de **dimensão do espaço vetorial** V e denotada como $\dim(V)$. Um resultado conhecido da Álgebra Linear garante que a $\dim(V)$ está bem definida, uma vez que independe da base escolhida.

Definição 2.5 (Transformação Linear). *Sejam V e W dois espaços vetoriais. Define-se uma **transformação linear** ou **aplicação linear**, como sendo uma função de V em W , isto é, $T : V \rightarrow W$, satisfazendo:*

1. Para quaisquer \mathbf{u} e \mathbf{v} em V :

$$T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}).$$

2. Para quaisquer escalar α e \mathbf{v} em V :

$$T(\alpha\mathbf{v}) = \alpha T(\mathbf{v}).$$

Para o caso em que $V = W$, a transformação linear será chamada de **operador linear** do espaço vetorial V .

Exemplo 2.1. *Dada A uma matriz real de ordem $n \times m$, será definida a transformação linear $T_A : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^n$, de modo que $T_A(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$.*

A partir da definição de Transformação Linear e de aspectos relacionados à dimensão, pode-se tratar de importantes subconjuntos dos espaços vetoriais: a imagem e o núcleo. Para tanto, também faz-se necessário discorrer acerca de um importante conceito correlato: o posto.

Definição 2.6 (Posto). *O **posto** de uma matriz, também denominado de **rank** é o número de linhas não nulas dessa matriz, em qualquer uma de suas formas escalonadas por linhas.*

Iremos denotar o posto de uma matriz qualquer A , de ordem $n \times m$, como $\text{rank}(A)$. É importante observar que essa noção fundamental pode ser interpretada de outro modo. A matriz A pode ser interpretada como um conjunto de n vetores linha que geram um espaço vetorial com dimensão $r = \text{rank}(A)$ (também denominado **posto por linhas**). Analogamente, pode-se definir o **posto por colunas** e um resultado clássico da Álgebra Linear garante a equivalência entre as duas noções e a Definição 2.6. Então, o $\text{rank}(A)$ será o número máximo de vetores (linha ou coluna) linearmente independentes que a matriz possui.

Ademais, o valor máximo que o posto de uma matriz terá é sempre o $\min\{n, m\}$ (o mínimo entre n e m) para uma matriz A com n linhas e m colunas. Por fim, destaca-se que a única matriz que tem posto zero é a matriz nula, afinal essa matriz não contém se quer um vetor linearmente independente.

Exemplo 2.2. Para as seguintes matrizes escalonadas por linhas:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Temos que: $\text{rank}(A) = 2$ e $\text{rank}(B) = 3$.

Teorema 2.1. [5] Seja A uma matriz quadrada, então:

$$\text{rank}(A) = n \iff \det(A) \neq 0.$$

Definição 2.7 (Imagem). Dada uma transformação linear $T : V \rightarrow W$, a **imagem** de T é o conjunto definido pelos vetores $\mathbf{w} \in W$, de modo que $\exists \mathbf{v} \in V; T(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$. Isto é:

$$\text{Im}(T) = \text{Im } T = \{\mathbf{w} \in W \mid T(\mathbf{v}) = \mathbf{w}, \mathbf{v} \in V\}.$$

Definição 2.8 (Núcleo). Dada uma transformação linear $T : V \rightarrow W$, o **núcleo** de T , também denotado por $\text{Ker}(T)$, é o conjunto definido pelos vetores $\mathbf{v} \in V$, de modo que $T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$. Isto é:

$$\text{Ker}(T) = \text{Ker } T = \{\mathbf{v} \in V \mid T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\}.$$

Outros conceitos e resultados importantes podem ser trazidos à tona, mas antes é necessário que sejam revisados os conceitos de funções injetoras, sobrejetoras e bijetoras.

Definição 2.9 (Função Injetora). Seja uma função (aplicação) $F : V \rightarrow W$, diz-se que F é **injetora** se, dados $\mathbf{u} \in V, \mathbf{v} \in V$ com $F(\mathbf{u}) = F(\mathbf{v})$ obtivermos $\mathbf{u} = \mathbf{v}$. Do mesmo modo, pode-se afirmar que F é injetora se, dados $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ com $\mathbf{u} \neq \mathbf{v} \implies F(\mathbf{u}) \neq F(\mathbf{v})$.

Definição 2.10 (Função Sobrejetora). Seja uma função (aplicação) $F : V \rightarrow W$, diz-se que F é **sobrejetora** se, dado $\mathbf{w} \in W, \exists \mathbf{v} \in V$ de modo que $F(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$.

Assim, vê-se que a sobrejetividade é garantida quando a imagem de F coincide com W , isto é, $F(V) = W$.

É direta a definição de uma função (aplicação) **bijetora**, uma vez que essa aplicação é caracterizada por ser injetora e sobrejetora, simultaneamente.

Definição 2.11 (Dimensão da imagem e do Núcleo). *Seja $T : V \rightarrow W$ uma transformação linear. Caso a imagem de T possua dimensão finita, então sua dimensão será dada pelo $\text{rank}(T)$. Caso o núcleo de T possua dimensão finita, então ela será dada pela **nulidade** de T , que é a $\dim(\text{Ker}(T))$.*

Em síntese, o posto de T será a $\dim(\text{Im}(T))$ e a nulidade de T será a $\dim(\text{Ker}(T))$.

Teorema 2.2. [8] *Seja $T : V \rightarrow W$ uma aplicação linear, então:*

$$\text{Ker}(T) = \{\mathbf{0}\} \iff T \text{ é injetora.}$$

Teorema 2.3 (Teorema da dimensão para transformações lineares). [7] *Seja $T : V \rightarrow W$ uma aplicação linear, em que o espaço vetorial V possui dimensão n , então:*

$$\text{rank}(T) + \dim(\text{Ker}(T)) = n.$$

Note que, uma vez que $\text{rank}(T) = \dim(\text{Im}(T))$, então,

$$\dim(\text{Ker}(T)) + \dim(\text{Im}(T)) = \dim(V) = n.$$

Como um importante resultado dos espaços vetoriais de dimensão finita, tem-se que toda transformação linear nestes espaços pode ter sua representação feita por uma matriz.

Definição 2.12 (Autovalor e autovetor). *Sejam A uma matriz de dimensão $n \times n$ e λ um escalar. Tem-se que λ será dito **autovalor***

de A se, $\exists \mathbf{v}$, um vetor não nulo, de modo que $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. Nesse caso, \mathbf{v} será dito **autovetor** de A associado a λ .

Note que, os autovalores da matriz quadrada A da definição anterior serão as soluções λ para a equação $\det(A - \lambda I) = 0$, em que I é a matriz identidade de ordem n .

Definição 2.13 (Polinômio Característico). *Sejam A uma matriz de dimensão $n \times n$ e λ um escalar. O polinômio em λ , obtido ao se desenvolver $\det(A - \lambda I)$, é dito **polinômio característico** de A . Ao passo em que, a equação $\det(A - \lambda I) = 0$ é dita **equação característica** de A .*

2.2 ESPAÇOS VETORIAIS NORMADOS E ESPAÇOS DE FUNÇÕES

A presente seção será de suma importância para o desenvolvimento dos capítulos seguintes, uma vez que os espaços com os quais estaremos lidando serão espaços com as particularidades a seguir apresentadas. Dentre as referências utilizadas para o desenvolvimento desta seção, cita-se: [9] e [5]. Para maiores aprofundamentos no conteúdo recomenda-se a leitura destes materiais, bem como de [10], [11] e [1].

Uma vez que os espaços vetoriais normados são um dos enfoques da seção, faz-se necessário definir, a priori, o que seria uma **norma**. Para isso, considere X um \mathbb{K} -espaço vetorial ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}).

Definição 2.14 (Norma). *Diremos que a **norma** em X será uma função $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes propriedades:*

1. $\|\mathbf{x}\| \geq 0$;
2. $\|\mathbf{x}\| = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}$;
3. $\|\alpha\mathbf{x}\| = |\alpha| \|\mathbf{x}\|$;

$$4. \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\| \text{ (Desigualdade Triangular);}$$

$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ e $\alpha \in \mathbb{K}$.

Desse modo, $(X, \|\cdot\|)$ será dito um **Espaço Normado**. A seguir serão ilustrados alguns exemplos de espaços vetoriais normados, incluindo aqueles que serão introduzidos e explorados durante o estudo que segue.

Considere $\mathbf{x} = [x_1 \cdots x_n]^T \in \mathbb{R}^n$ para os próximos exemplos.

Exemplo 2.3 (Norma do Máximo). *A norma do máximo de \mathbf{x} será dada pelo maior número entre os valores absolutos de seus elementos, isto é:*

$$\|\mathbf{x}\|_M = \max \{|x_1|, \dots, |x_n|\}.$$

A norma do máximo é também conhecida como "norma- ∞ " ou "norma uniforme".

Exemplo 2.4 (Norma Euclidiana). *A norma euclidiana de \mathbf{x} ou "norma-2" é a norma usual de \mathbb{R}^n e será dada por:*

$$\|\mathbf{x}\| = (|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.$$

O espaço \mathbb{R}^n com essa norma será dito **Espaço Euclidiano**.

Geralmente, será possível definir uma norma $\|\mathbf{x}\|_p$ em \mathbb{R}^n , $\forall p \geq 1$ real, conforme segue:

$$\|\mathbf{x}\|_p = (|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Dando sequência ao conteúdo teórico base para o desenvolvimento do trabalho, iremos tratar de espaços que são muito importantes para a matemática e para o presente estudo: os **Espaços de Banach**. Para tanto, precisa-se definir alguns conceitos prévios, como de seqüências de Cauchy.

Definição 2.15 (Sequências de Cauchy). *Seja X um espaço normado. Uma sequência (x_k) com elementos em X é dita uma **sequência de Cauchy** se:*

$$\lim \|x_k - x_j\| = 0,$$

ou seja, $\forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon \in \mathbb{N}$, tal que, $\forall k, j \in \mathbb{N}$, com $k, j \geq N_\epsilon$, tem-se que $\|x_k - x_j\| \leq \epsilon$.

Um resultado direto é que toda sequência convergente é uma sequência de Cauchy. Com essa definição, podemos partir para a evidenciação do que seria a completude de um espaço normado.

Definição 2.16 (Espaço Normado Completo). *Seja X um espaço normado, X será dito **completo** se toda sequência de Cauchy em X for convergente. Para além, se X admitir tal característica, será dito também um **Espaço de Banach**.*

O estudo de um espaço de Banach será importante justamente pelo fato de serem espaços vetoriais normados completos. Ademais, como bem observado em [12] e [9], \mathbb{R}^n e \mathbb{C}^n são exemplos de espaços de Banach e são espaços nos quais desenvolvemos grande parte da teoria de análise, da qual obteremos importantes resultados para o nosso estudo.

Definição 2.17. *Seja V um espaço vetorial sobre o corpo de escalares \mathbb{K} , o **produto interno** será uma operação que irá associar a cada par de vetores \mathbf{u} e \mathbf{v} de V um número $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \in \mathbb{K}$, de modo que, para \mathbf{u}, \mathbf{v} e \mathbf{w} em V e $\forall k \in \mathbb{K}$:*

1. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \overline{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle}$;
2. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$;
3. $\langle k\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = k\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$;

$$4. \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \geq 0 \text{ e } \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0 \iff \mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

Exemplo 2.5 (Produto interno usual em \mathbb{R}^n). *Sejam, $\mathbf{u} = [u_1 \cdots u_n]^T$, $\mathbf{v} = [v_1 \cdots v_n]^T$, tais que $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, então:*

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n,$$

é o produto interno usual de \mathbb{R}^n . Este produto interno induz a norma definida no exemplo 2.4 ($\|\mathbf{u}\| = (\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle)^{\frac{1}{2}}$).

Desse modo, um espaço vetorial equipado de um produto interno será chamado de **espaço com produto interno**.

Exemplo 2.6 (Produto Interno Usual em \mathbb{C}). *Sejam, $\mathbf{u} = [u_1 \cdots u_n]$, $\mathbf{v} = [v_1 \cdots v_n]$, tais que $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$, então o **produto interno usual no espaço \mathbb{C}^n** será dado por:*

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1 \bar{v}_1 + u_2 \bar{v}_2 + \dots + u_n \bar{v}_n.$$

Em relação à norma vista anteriormente, pode-se tomar X um espaço com produto interno e assim, a **norma induzida pelo produto interno**, para um $\mathbf{x} \in X$, será dada por $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$. Ao tomarmos $X = \mathbb{R}^n$ com o produto interno usual, a norma induzida pelo produto interno será dada pela norma euclidiana do Exemplo 2.4. Um caso análogo ocorre com o produto interno usual em \mathbb{C} .

Pode-se pensar em outros espaços e seus respectivos produtos internos. Por exemplo, seja o espaço $L^2(J; X)$, em que $J \subset \mathbb{R}$ trata-se de um intervalo e X é um espaço finito-dimensional com produto interno. O espaço $L^2(J; X)$ é constituído por todas as funções mensu-

ráveis¹ $u : J \rightarrow X; t \mapsto u(t)$, para as quais:

$$\int_J \|u(t)\|^2 dt < \infty.$$

No caso do espaço $L^2(J; X)$, quando $\int_J \|u(t) - v(t)\| dt = 0$, sendo u e v duas funções, não é feita distinção entre ambas as funções (são ditas equivalentes). Podemos então, definir o produto interno nesse espaço, que é um espaço que aparecerá nos conteúdos de observabilidade e controlabilidade.

Exemplo 2.7 (Produto interno em $L^2(J; X)$). *O produto interno em $L^2(J; X)$, será dado por:*

$$\langle u, v \rangle_{L^2} = \int_J \langle u(t), v(t) \rangle dt,$$

em que, v e u são funções definidas em $L^2(J; X)$.

Generalizando para um espaço de Banach $L^p([0, T]; X); 1 \leq p \leq \infty$, definido pelas funções reais cuja p-ésima potência do seu valor absoluto é integrável em um intervalo $[0, T]$, isto é, o espaço das funções p-Lebesgue integráveis² em $[0, T]$, obtém-se para esses espaços a seguinte norma:

Exemplo 2.8 (Norma no espaço $L^p([0, T]; X)$). *A norma $\|u\|_{L^p}$, é dada por:*

$$\|u\|_{L^p} = \left(\int_0^T \|u(t)\|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

¹ Uma função com valores em um espaço de Banach X é dita mensurável se para todo conjunto mensurável B em X , sua pré imagem $f^{-1}(B)$ também é mensurável. As funções mensuráveis possuem um comportamento adequado que garantem o desenvolvimento de uma teoria de integração sobre tais funções [13].

² Será o espaço das funções que são integráveis com a integral de Lebesgue, uma generalização da integral de Riemann. Para mais detalhes, consultar [14].

Exemplo 2.9. A função $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$; $x \in [1, 2]$, é uma função definida no espaço $L^2([1, 2]; \mathbb{R})$. Afinal,

$$\int_1^2 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2 dx = \int_1^2 \frac{1}{x} dx = [\ln|x|]_1^2 = \ln(2) < \infty.$$

Ademais, a norma será dada por:

$$\|f\|_{L^2} = \sqrt{\ln(2)} \approx 0,83.$$

A partir de L^p , pode-se elucidar o espaço $L^\infty([0, T]; X)$, que é um espaço de Banach das aplicações $u : [0, T] \rightarrow X$ que são fortemente mensuráveis³ de modo que $t \mapsto \|u(t)\|$ possui o supremo essencial finito⁴ em $[0, T]$, conforme será visto a seguir.

Exemplo 2.10 (Norma no espaço $L^\infty([0, T]; X)$). A norma $\|u\|_{L^\infty}$, é dada por:

$$\|u\|_{L^\infty} = \operatorname{ess\,sup}_{t \in [0, T]} \|u(t)\|.$$

Seja $\mathcal{C}[a, b]$, em que \mathcal{C} é o espaço vetorial de todas as funções contínuas definidas em um intervalo $[a, b]$, pode-se elucidar o produto interno nesse espaço como segue:

Exemplo 2.11 (Produto interno em $\mathcal{C}[a, b]$). Um exemplo de produto interno, definido em $\mathcal{C}[a, b]$, espaço elucidado anteriormente, é dado por:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx, \quad \forall f, g \in \mathcal{C}[a, b].$$

³ Uma função $f : S \rightarrow X$ é fortemente mensurável se existe uma sequência de funções mensuráveis $f_n : S \rightarrow X$, que detém um conjunto finito de valores, de modo que $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$, pontualmente [13].

⁴ O supremo essencial, dado por $\operatorname{ess\,sup}\|h\|$ trata-se do menor limite superior entre todas as funções equivalentes a h . Para funções contínuas o supremo essencial se reduz ao supremo [15].

O último exemplo da seção será dado pelo espaço \mathcal{L} que, assim como o espaço $L^2(J; X)$, também será um espaço com o qual as propriedades de observabilidade e controlabilidade estarão correlacionadas de algum modo.

Definição 2.18 (Aplicação Linear Limitada). *Sejam X e Y espaços vetoriais normados. Uma aplicação linear $T : X \rightarrow Y$ é dita **limitada** se:*

$$\|T\mathbf{u}\|_Y \leq C\|\mathbf{u}\|_X, \quad \forall \mathbf{u} \in X \text{ e } C \text{ constante.}$$

Considerando X e Y espaços vetoriais normados arbitrários, o espaço $\mathcal{L}(X, Y)$ é o espaço de todas as aplicações lineares limitadas de X para Y . Ao definirmos a adição de operador para esse espaço como $(T + S)\mathbf{x} = T\mathbf{x} + S\mathbf{x}$ e a multiplicação de um operador por um escalar λ como $(\lambda T)\mathbf{x} = \lambda(T\mathbf{x})$, teremos que $\mathcal{L}(X, Y)$ será um espaço vetorial. Podemos elucidar o operador norma desse espaço, conforme segue.

Exemplo 2.12 (Norma no espaço $\mathcal{L}(X, Y)$). *A norma $\|\cdot\|$ em $\mathcal{L}(X, Y)$, é definida por:*

$$\|T\| = \sup_{\|\mathbf{x}\| \leq 1} \|T\mathbf{x}\|.$$

A partir do que foi elucidado, pode-se fazer uma generalização do que foi visto como espaço euclidiano. Nesse sentido, apresenta-se o **Espaço de Hilbert** que é um espaço vetorial com produto interno, tal que a norma induzida satisfaz a noção de completude em conformidade com a Definição 2.16. O interessante de se trabalhar com espaços de Hilbert é que esses espaços contêm uma estrutura matemática mais abstrata, o que possibilita análises matemáticas mais complexas. A partir dos espaços de Banach definidos anteriormente, pode-se afirmar que os espaços de Hilbert serão um caso particular

dos espaços de Banach. Ou seja, nem todo espaço de Banach é um espaço de Hilbert, somente será se possuir a norma induzida por um produto interno.

Definição 2.19 (Espaço de Hilbert). *Seja X um espaço com produto interno, que possui uma norma $\|\cdot\|$, induzida pelo produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, que determina um espaço normado completo $(X, \|\cdot\|)$, X será dito **espaço de Hilbert**.*

Um importante resultado em relação ao espaço $\mathcal{L}(X, Y)$ é que se Y for um espaço de Banach, então $\mathcal{L}(X, Y)$ também será. Além disso, $L^2(J; X)$, com o produto interno anteriormente definido, será um espaço de Hilbert.

Retomando o enfoque para o produto interno, pode-se reforçar o fato de que importantes propriedades de vetores serão determinados por essa noção, tais como: distância, comprimento e ortogonalidade.

Definição 2.20 (Ortogonalidade de vetores). *Seja V um espaço com produto interno. Diz-se que \mathbf{u} é ortogonal a \mathbf{v} (e vice-versa) se $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$, o que será denotado por $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$.*

Vê-se que as noções de produto interno possuem relação com distâncias, ao passo que as noções de norma relacionam-se com comprimentos. Para além, há relações dessas estruturas para com o ângulo (θ) formado entre dois vetores:

$$\cos \theta = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|},$$

o que se relaciona diretamente com a definição de ortogonalidade, que assim como seu nome prevê, irá representar a perpendicularidade entre dois vetores.

Definição 2.21 (Fecho num espaço normado). *Seja $W \subset X$, em que X é um espaço normado. O **fecho** de W denotado por \overline{W} é o conjunto*

formado pelos limites l , também ditos pontos de aderência, de todas as seqüências convergentes com termos em W . Ou seja:

$$\overline{W} = \{l \in X \mid l \text{ é ponto de aderência para } W\}.$$

Ademais, um conjunto será dito **fechado** quando $\overline{W} = W$.

Definição 2.22 (Complemento Ortogonal). *Sejam V um espaço com produto interno e $M \subset V$. O **Complemento Ortogonal** de M em V é o conjunto:*

$$M^\perp = \{v \in V \mid \langle v, m \rangle = 0, \forall m \in M\}.$$

Além disso, M^\perp é um subespaço fechado de V .

Logo, pode-se elucidar o seguinte resultado, cuja demonstração consta nas referências base da seção:

Proposição 2.4. *Sejam V um espaço com produto interno e $M \subset V$. Então, afirma-se que:*

$$M^{\perp\perp} = \overline{\text{span } M}.$$

Observe ainda que, se M for um subespaço vetorial de V , então:

$$\text{span } M = M.$$

Definição 2.23 (Soma Direta). *Um espaço vetorial X é dito como **soma direta** de dois subespaços Y e Z de X , se cada $x \in X$ possui uma representação única como $x = y + z$, tal que $y \in Y$ e $z \in Z$. Além disso, a soma direta será denotada como:*

$$X = Y \oplus Z.$$

Teorema 2.5 (Teorema da Projeção de Riesz). *Seja X um espaço de Hilbert e M um subespaço vetorial fechado de X . Então, vale a decomposição em soma direta, isto é:*

$$X = M \oplus M^\perp.$$

Definição 2.24 (Operador Adjunto). *Seja $T : X_1 \rightarrow X_2$ um operador linear limitado, em que X_1 e X_2 são espaços de Hilbert com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$, respectivamente. Então, o **operador adjunto** de T , denotado por T^* , é dado por $T^* : X_2 \rightarrow X_1$, de modo que:*

$$\langle T\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_2 = \langle \mathbf{x}, T^*\mathbf{y} \rangle_1, \quad \text{para todo } \mathbf{x} \in X_1, \mathbf{y} \in X_2.$$

Teorema 2.6 (Existência do Operador Adjunto). [10] *Considerando as hipóteses da Definição 2.24, o operador adjunto T^* de T , existe, é único e é um operador limitado com norma:*

$$\|T^*\|_{\mathcal{L}(X_2, X_1)} = \|T\|_{\mathcal{L}(X_1, X_2)}.$$

Exemplo 2.13 (Adjunto de uma matriz). *Seja A uma matriz complexa, o adjunto de A , A^* será a sua transposta conjugada, isto é:*

$$A^* = \overline{A}^T.$$

No caso em que A é uma matriz real, $A^ = A^T$.*

A seguinte proposição trata-se de uma coletânea de resultados encontrados nas referências utilizadas para essa seção e necessárias para os próximos capítulos.

Proposição 2.7. *Sejam X_1 e X_2 espaços de Hilbert, $T : X_1 \rightarrow X_2$ um operador limitado, os seguintes resultados são obtidos:*

1. $\text{Ker } T = (\text{Im } T^*)^\perp$;
2. $\overline{\text{Im } T} = (\text{Ker } T^*)^\perp$;
3. $(ST)^* = T^*S^*$, assumindo que $X_1 = X_2$;
4. $(S + T)^* = S^* + T^*$;
5. $(T^*)^* = T$;
6. $T^*T = 0 \iff T = 0$.

2.3 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

O estudo das equações diferenciais é de suma importância para o presente trabalho, já que elas são importantes ferramentas de modelagem, ou seja, são essenciais para melhor compreender e estudar diversos fenômenos de áreas como a física, biologia e até mesmo a química. As equações diferenciais caracterizam quantidades que variam em relação a algum referencial, como o tempo, que será muito utilizado nas aplicações que serão vislumbradas posteriormente. Para o desenvolvimento do que será exposto a seguir, utilizou-se dos conteúdos apresentados em [16], [2], [12], [17], [18] e [19]. Para mais informações ou aprofundamento na temática, sugere-se a leitura dos materiais.

Definição 2.25 (Equação Diferencial Ordinária). *Uma equação diferencial ordinária (EDO) trata-se de uma equação que contém derivadas, isto é, irá relacionar uma determinada função a uma ou algumas de suas derivadas. A forma geral será dada por:*

$$F(t, y, y', y'', y''', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (1)$$

em que t será a variável independente, y a função desconhecida (ou função incógnita) e $y^{(n)}$ a n -ésima derivada ⁵ de y em relação a t .

Nesta seção, serão apresentados os conceitos básicos das equações diferenciais ordinárias, assim como suas principais características e resultados. A priori, expõem-se as diferentes classificações que uma equação diferencial pode ter.

Definição 2.26 (Ordem). *A ordem da equação diferencial será igual a ordem da derivada que possuir a maior ordem na equação em questão.*

⁵ Em algumas passagens do texto, será utilizada a notação \dot{x} para representar a derivada de x em relação a t , bem como a notação $\frac{dx}{dt}$ ou x' .

A partir de agora, o termo "equação diferencial" será utilizado para caracterizar uma EDO. Em relação à estrutura de uma equação diferencial, pode-se verificar se uma equação é linear, ou seja, quando a função desconhecida e suas derivadas aparecem em termos lineares na equação, ou não linear quando não atende ao critério anteriormente citado.

Definição 2.27 (Equação Diferencial Linear). *Dada a seguinte equação diferencial:*

$$F(t, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

*ela será dita **linear** se F for uma função linear das variáveis $y, y', \dots, y^{(n)}$. Assim, a equação diferencial ordinária linear geral de ordem n é:*

$$a_n(t)y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_1(t)y' + a_0(t)y = f(t). \quad (2)$$

Ademais, se uma equação diferencial não for da forma descrita em (2), então será dita uma equação diferencial ordinária **não linear**.

Caso o problema em questão a ser resolvido possua apenas uma função desconhecida, então apenas uma equação diferencial poderá ser suficiente para resolver o problema. Por outro lado, se o problema necessitar de mais de uma função desconhecida para ser resolvida, então será necessário um **sistema de equações diferenciais** para poder resolver o problema. Esse sistema pode ser linear ou não linear, a depender da linearidade ou não das equações presentes no sistema.

Outro aspecto importante diz respeito ao fato da possibilidade de reduzir qualquer equação de ordem n a uma equação ordinária de primeira ordem, com simples processos de mudança de variável e substituições. Por exemplo, dada uma equação diferencial de segunda ordem $y'' = g(t, y, y')$, e denotando $x_1 = y, x_2 = y'$, obtemos um sistema de equações diferenciais de primeira ordem:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= g(t, x_1(t), x_2(t)), \end{cases} \quad (3)$$

que pode ser reescrito como:

$$\dot{x} = f(t, x), \quad \text{em que } x = [x_1 \ x_2]^T. \quad (4)$$

Este mesmo procedimento pode ser estendido para qualquer ordem n e teremos a redução para um simples problema de EDO de primeira ordem.

Considera-se agora $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n+1}$ um subconjunto aberto e $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função contínua. Os questionamento mais simples que podem ser feitos a respeito de uma equação diferencial ou de um sistema de equações são aqueles referentes às suas soluções: existem? São únicas? Qual(is) é(são)? Desse modo, é importante caracterizar o que é a solução de uma EDO.

Definição 2.28 (Solução de uma EDO). *A **solução** de uma equação diferencial ordinária $\dot{x} = f(t, x)$ num intervalo $J \subset \mathbb{R}$ é uma função $x : J \rightarrow \mathbb{R}^n$, que satisfaz:*

1. $G(x) = \{(t, x(t)) | t \in J\} \subset D$;
2. x é diferenciável em J ;
3. $\dot{x} = f(t, x(t)) \ \forall t \in J$, em que $x = x(t) = [x_1(t) \ \cdots \ x_n(t)]^T$ e $\dot{x}(t) = [\dot{x}_1(t) \ \cdots \ \dot{x}_n(t)]^T$.

No geral, para os sistemas que serão abordados no decorrer do presente estudo, faz-se referência às condições iniciais que as variáveis do modelo possuem. No caso de um sistema que irá representar, por exemplo, a dinâmica entre duas espécies, as condições iniciais podem ser as quantidades das populações em determinado tempo t . Nesse aspecto, uma equação diferencial, em conjunto com uma ou mais

condições iniciais, irá definir um problema que será dito um problema de valor inicial.

Definição 2.29 (Problema de Valor Inicial). *Seja (t_0, x_0) . Um **problema de valor inicial** (PVI) para a equação $\dot{x} = f(t, x)$ consistirá em encontrar J , um intervalo, contendo t_0 e uma solução $x(t)$ de $\dot{x} = f(t, x)$ em J , de modo que $x(t_0) = x_0$. O PVI será denotado por:*

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(t, x) \\ x(t_0) &= x_0. \end{cases}$$

Outros questionamentos podem ser evidenciados a respeito da existência, unicidade e determinação de soluções. Em relação à **existência** de soluções, há teoremas evidenciados em [2] que elucidam sob quais condições a função f na equação diferencial terá solução. No contexto da **unicidade**, também há condições que devem ser atendidas para que seja garantida a unicidade da solução, afinal, as equações diferenciais podem possuir em suas soluções constantes arbitrárias, que podem gerar uma infinidade de soluções. Além disso, para resolver as equações diferenciais, têm-se vários métodos, que são aplicados a depender das características da equação diferencial. Pode-se citar: separação de variáveis, substituição, resolução por fator integrante, séries de potências, transformada de Laplace, entre outros, como os métodos de caráter numérico.

Pode-se ainda discutir a respeito das soluções gerais e das soluções implícitas. No caso das **soluções gerais**, para uma equação linear de primeira ordem, ao serem encontradas soluções com alguma constante arbitrária, o trabalho de atribuir valores a essas constantes irá gerar as soluções possíveis para essas equações e, nesse caso, teremos **soluções particulares**. Já no caso das equações não lineares, isso pode não ocorrer, pois é possível que existam soluções que não são encontradas ao fazer esse esforço de atribuir valores a essas

constantes. Por fim, em relação aos sistemas de equações diferenciais também existem alguns métodos a serem utilizados para resolvê-los, como o método da eliminação, da substituição, da matriz inversa, diagonalização, entre outros, assim como alguns métodos numéricos.

Um último aspecto a ser destacado nessa seção faz referência a um tipo específico de sistema: os sistemas autônomos, que serão caracterizados por não dependerem das variáveis independentes das equações diferenciais do sistema. Para tanto, será considerado o sistema $\dot{x} = f(t, x)$, de modo que a função $f : D \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$; $D = (a, b) \times \Omega$, seja contínua em um intervalo (a, b) .

Definição 2.30 (Trajetória). *Uma **trajetória** denotada por $\gamma(x)$ é o conjunto dado por:*

$$\gamma(x) = \bigcup_{a < t < b} \{(t, x(t))\} = \{(t, x(t)) : t \in (a, b)\}.$$

Definição 2.31 (Órbita de uma Trajetória). *A **órbita** de uma trajetória é a projeção da trajetória sobre o \mathbb{R}^n , ou seja, o conjunto que determina as órbitas será:*

$$\{x(t) : t \in (a, b)\}.$$

Além disso, o espaço das variáveis dependentes de $\dot{x} = f(t, x)$ será dito **espaço de fase**.

Exemplo 2.14. *No Capítulo 3 alguns exemplos de trajetórias e órbitas são evidenciados nas figuras, de modo que a Figura 13 e a Figura 15 apresentam as componentes de trajetórias e a Figura 12 e a Figura 14 apresentam as órbitas.*

Definição 2.32 (Sistema Autônomo). *O sistema $\dot{x} = f(t, x)$ será dito **autônomo** se f é independente de t , ou seja, se $f(t, x) = f(x)$.*

Definição 2.33 (Ponto e Solução de Equilíbrio). *O ponto E será dito **ponto de equilíbrio**, ou similarmente **ponto crítico** de $\dot{x} = f(x)$ se:*

$$f(E) = 0; \quad x(t) = E \text{ é uma solução de equilíbrio.}$$

*Por outro lado, se $f(E) \neq 0$, o ponto E será dito **ponto regular**.*

Exemplo 2.15 (Sistema Linear Autônomo). *Um sistema $\dot{z} = Az$,⁶ em que $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, é de fato um sistema de EDOs autônomo, uma vez que não depende da variável independente, mas apenas das variáveis dependentes.*

Para o PVI dado por:

$$\dot{z} = Az, \quad z(0) = z_0, \tag{5}$$

a solução será dada por $t \in \mathbb{R} \mapsto e^{tA}z_0 \in \mathbb{R}^n$.⁷

Definição 2.34 (Solução do problema não Homogêneo). *Para um problema de valor inicial não homogêneo dado por:*

$$\dot{z} = Az + f(t), \quad z(0) = z_0, \tag{6}$$

em que $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $f \in L^1([0, T]; \mathbb{R}^n)$.

A solução de (6) será dada por $z \in C([0, T]; \mathbb{R}^n)$ ⁸, que satisfaz a equação integral a seguir:

$$z(t) = z_0 + \int_0^t [Az(s) + f(s)]ds, \quad t \in [0, T]. \tag{7}$$

⁶ Aqui, oculta-se a dependência de t , mas o sistema poderia ser reescrito como $\dot{z}(t) = Az(t)$.

⁷ No Apêndice A, encontram-se mais aspectos relacionados à exponencial de uma matriz.

⁸ O espaço C , também denotado por C^0 , é o espaço das funções contínuas em um determinado intervalo.

Teorema 2.8. *O problema de valor inicial não homogêneo dado em (6) irá determinar uma única solução dada por:*

$$z(t) = e^{(t-0)A} z_0 + \int_0^t e^{(t-s)A} f(s) ds, t \in [0, T]. \quad (8)$$

Demonstração: Segue-se a ideia apresentada em [12], ou seja, basta garantir a existência e unicidade desta solução. Inicialmente, vê-se que, em relação a existência, a função z dada em (8) satisfaz a estrutura determinada em (6).

Afinal, partindo de (6), reescrevendo $\dot{z} = Az + f(t)$ como $\dot{z} - Az = f(t)$ e multiplicando ambos os lados por e^{-tA} , obtém-se:

$$\begin{aligned} e^{-tA}(\dot{z} - Az) &= e^{-tA}f(t) \\ &= (e^{-tA}z(t))'. \end{aligned} \quad (9)$$

Observe que, $e^{-tA}z(t)$ é a primitiva para $e^{-tA}f(t)$. Integrando (9) em relação a s no intervalo $[0, t]$, obtém-se:

$$\begin{aligned} \int_0^t (e^{-sA}z(s))' ds &= \int_0^t e^{-sA}f(s) ds \\ [e^{-sA}z(s)]_0^t &= \int_0^t e^{-sA}f(s) ds \\ (e^{-tA}z(t) - e^{-0A}z(0)) &= \int_0^t e^{-sA}f(s) ds \\ e^{tA}(e^{-tA}z(t) - Iz(0)) &= e^{tA} \left(\int_0^t e^{-sA}f(s) ds \right) \\ Iz(t) - e^{(t-0)A}z(0) &= \int_0^t e^{tA}e^{-sA}f(s) ds \\ z(t) - e^{(t-0)A}z(0) &= \int_0^t e^{(t-s)A}f(s) ds \\ z(t) &= e^{(t-0)A}z(0) + \int_0^t e^{(t-s)A}f(s) ds. \end{aligned}$$

No tocante à unicidade, iremos supor uma outra solução v para (6). Como é solução, então podemos determinar um w , de modo

que $w = z - v$ será solução do problema $\dot{w} = Aw; w(0) = 0$. Já que o último problema possui como solução apenas $w(t) = 0$, então, $(z - v)(t) = 0, \forall t$. Logo, $z = v$ e, portanto, garante-se a unicidade ⁹. ■

É importante citar que, no decorrer dos capítulos, outros conceitos correlatos aos tópicos apresentados nesse Capítulo 2 serão elucidados. Ademais, alguns conceitos e resultados não foram apresentados neste espaço, visto que esse trabalho não se trata de uma revisão bibliográfica de conteúdos e, caso todos esses elementos fossem apresentados, o maior objetivo e empenho do trabalho perderia sua prioridade.

⁹ $\dot{w} = Aw; w(0) = 0$ admite solução única dada por $w(t) = e^{At} \cdot 0 = 0$, conforme pode-se verificar no Apêndice A.

3 MODELOS BIOLÓGICOS

Os modelos matemáticos objetivam abstrair e simplificar determinado fenômeno, o que torna possível realizar previsões acerca do comportamento do sistema. Para além, os modelos podem fornecer descrições qualitativas do fenômeno foco de estudo. Diveros fenômenos físicos ou biológicos podem ser descritos por modelos matemáticos, de modo que seja possível descrever, prever e controlar as variáveis envolvidas no sistema. Tais ações, intermediadas pelo modelo, podem atingir os diversos níveis da biologia, isto é, pode-se descrever conjuntos de nível biomoleculares, de células, tecidos, organismos, e até mesmo conjuntos de populações. Outros aspectos importantes dos modelos biológicos são a sua relação e dependência com as escalas de tempo e espaço, podendo ocorrer variações temporais de segundos, ou até mesmo de décadas, podendo tratar de populações convivendo em uma determinada região, ou de células em um órgão. Vislumbra-se que é necessário desenvolver uma matemática particular para sanar as necessidades das pesquisas biológicas, e é dessa necessidade que ascende a matemática biológica [20].

A matemática biológica detém de um conjunto de métodos de representação de processos da biologia, sendo estes, representados por sistemas, constituídos de equações que expressam os parâmetros e variáveis dessa representação. Uma vez que o movimento natural está em constante mudança, as equações que delimitam tais modelos biológicos possuem uma natureza dinâmica, de modo que é possível observar a evolução desses sistemas e suas variações no decorrer do tempo. Em suma, o maior obstáculo de desenvolvimento dos modelos biológicos trata-se da elaboração das equações que consigam, com a maior eficácia possível, representar a evolução no decorrer do tempo das grandezas, em função de agentes externos, bem como de parâme-

tros inerentes ao sistema [20].

De modo geral, os sistemas dinâmicos são sistemas de equações diferenciais que dependem do tempo. Através do tempo, podemos ver, com a utilização desses sistemas, representações de vários aspectos da natureza. Para este estudo, serão estudados apenas sistemas autônomos, tanto lineares, quanto não lineares.

Por exemplo, partindo de uma situação em que se observa um ecossistema qualquer, pode-se verificar a presença de diversos seres e elementos e pode-se inferir acerca de variáveis que vão compor esse meio e as relações que nele ocorrem, a citar: a relação entre uma presa e seu predador, o nascimento de filhotes, as doenças, os desastres ambientais, as pragas, os movimentos de extinção e as espécies que atuam como controladoras no meio. Em contrapartida, podemos trabalhar com sistemas dinâmicos que evidenciem a velocidade do fluído de um rio (e aqui, remete-se à física), assim como pode-se analisar o comportamento das reações químicas que estão ocorrendo no meio. Ao analisarmos o meio, podemos objetivar a modelagem da densidade populacional de uma ou duas espécies. Em suma, conseguimos pensar em sistemas dinâmicos para diversas áreas: física, química, biologia, economia, entre outras. A seguir, será dado enfoque para os modelos biológicos, começando com a abordagem acerca de modelos para uma única espécie e partindo, em seguida, para modelos que tratam de duas espécies biológicas. Usa-se, neste capítulo, a notação \dot{x} para denotar a derivada de $x(t)$.

3.1 MODELOS PARA UMA ESPÉCIE BIOLÓGICA

Dentre muitos modelos que descrevem o desenvolvimento de uma população, os mais básicos são aqueles que tratam de uma espécie biológica.

3.1.1 Equação de Malthus

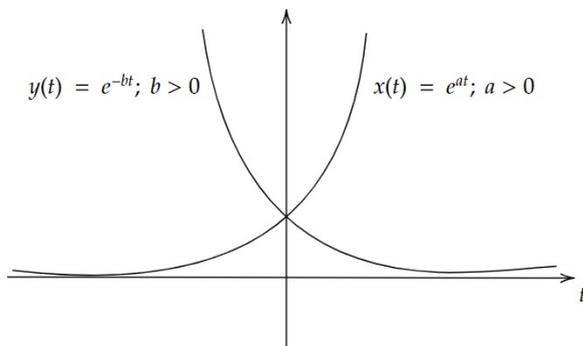
Uma população que cresce e se desenvolve de acordo com o **crescimento malthusiano**, irá crescer monotonamente de forma exponencial e seu tamanho irá ultrapassar qualquer limitação. O modelo malthusiano não se mostra muito realista, uma vez que há à disposição na natureza uma quantidade finita de recursos, ou seja, os alimentos e espaços disponíveis são finitos, logo uma população não consegue se desenvolver sem nenhum limitante [21].

Em [22], apresenta-se o fato de que o modelo descreve que uma população que possui a oportunidade de se reproduzir, sem empecilhos, irá crescer exponencialmente no decorrer do tempo. Logo, essa dinâmica de uma população dita x , sem limitação de recursos, descreve-se segundo a equação dada por:

$$\dot{x} = ax,$$

em que, $a > 0$ representa a taxa de crescimento da população x . De acordo com essa equação, tem-se que o crescimento é dito exponencial, afinal sua solução é do tipo $x(t) = x_0 e^{at}$, em que $x(0) = x_0$ é a população inicial [22]. O gráfico que descreve esse modelo é vislumbrado na Figura 1.

Figura 1 – Gráfico do modelo Malthusiano.



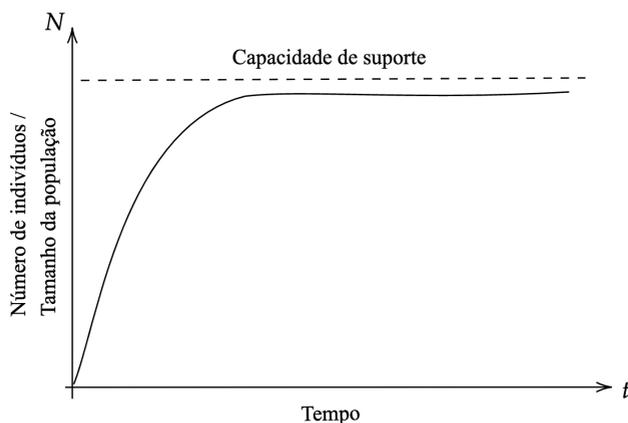
Posteriormente, serão abordados os modelos para duas espécies biológicas, em específico o modelo de Lotka-Volterra. Nesse sentido, pode-se fazer um paralelo ao que será visto. Sabe-se que uma população dita "presa" servirá, no meio em que vive, de alimento para a espécie denominada de "predador". Haverá um crescimento malthusiano da população de presas quando não ocorrer a interação entre ambas espécies (presa e predador) e, nesse caso, ocorrerá o crescimento explosivo, caracterizado pela exponencial. Ademais, a dinâmica dessa população, que denotaremos por x , será descrita pela equação: $\dot{x} = ax$, em que $a > 0$ é a taxa de crescimento da população, com uma solução $x(t) = x_0 e^{at}$ e população inicial $(x_0) = x_0$. Em contrapartida, para o caso dos predadores, ocorrerá o decrescimento malthusiano de sua população denotada por y quando não ocorrer a interação entre as espécies. A dinâmica dessa população será descrita pela equação: $\dot{y} = -by; b > 0$. Assim, vislumbram-se os movimentos malthusianos de extinção (no último caso) e outro que leva a caracterização de um grupo como uma praga (como pode ser visto na Figura 1), uma vez que uma população pode crescer demasiadamente ao ponto de se

tornar uma praga para os seres humanos, por exemplo.

3.1.2 Crescimento Logístico

Seguindo com os modelos para uma espécie biológica, tem-se o crescimento logístico. Esse tipo de crescimento ocorre quando uma população se reproduz rapidamente no início da observação, porém, com o tempo, sua taxa de crescimento diminui à medida que a população se torna cada vez mais numerosa, atingindo sua capacidade máxima de crescimento. Isso resulta em uma estabilização, que pode ser observada na Figura 2 [23].

Figura 2 – Gráfico do crescimento logístico.



A equação logística de crescimento populacional é dada por:

$$\dot{N} = rN \left(1 - \frac{N}{K} \right),$$

em que, \dot{N} é a taxa do aumento da população; N o tamanho da população; r a taxa intrínseca de crescimento populacional e K a capacidade

de suporte. A capacidade de suporte é um conceito biológico que está relacionado com a capacidade máxima que um local (região), um órgão ou um ecossistema tem de sustentar uma determinada população. Essa capacidade se dá através da limitação de recursos disponíveis no ambiente.

3.2 MODELOS PARA DUAS ESPÉCIES BIOLÓGICAS

Assim como vislumbrado, os modelos matemáticos são poderosas ferramentas que auxiliam em áreas como a biologia, no sentido da melhor compreensão da dinâmica das interações entre distintas espécies em um dado ecossistema. Nesse sentido, elucidou-se a priori a temática de modelos de uma única espécie, que são essenciais para construir sistemas mais complexos. A complexidade dos sistemas se dá através das interações entre as espécies e, desse modo, quanto mais espécies envolvidas, mais complexo o modelo se torna, assim como há uma vasta quantidade de variáveis e parâmetros a se considerar quando se trata de relações entre seres e entre seres e o meio.

Os modelos que consideram a interação entre duas determinadas espécies são essenciais para compreender como são as relações entre os seres e de qual modo um afeta o outro. Nesta seção, será dado enfoque a um famoso modelo que irá representar a interação entre duas espécies: o modelo de Lotka-Volterra ou sistema presa-predador. Será visto que as mudanças nas populações de cada espécie individualmente irão afetar de algum modo, de forma benéfica ou não, a outra população. O enfoque dado ao modelo de Lotka-Volterra, tratará de algumas de suas particularidades como a modelagem, representação gráfica, aspectos históricos, análise das soluções de equilíbrio e estabilidade. É a partir do modelo de Lotka-Volterra que diversos outros modelos derivam, com suas particularidades e complexidades. Portanto, a partir do que será evidenciado para este modelo, pode-se fazer análises similares

para outros também relevantes. Ademais, os aspectos apresentados são de suma importância para melhor compreender como se deu o desenvolvimento deste modelo que é a base para tantas modelagens de problemas biológicos.

3.2.1 Modelo de Lotka-Volterra

O modelo enfoque do trabalho, que aparecerá nas aplicações da teoria de controle, é o modelo de Lotka-Volterra, também denominado, a depender da literatura, como sistema presa-predador. O modelo de Lotka-Volterra trata-se de um sistema composto por um par de equações diferenciais de primeira ordem não lineares. As equações do modelo irão descrever a dinâmica de um sistema biológico dado por duas espécies, entre as quais existe uma relação presa-predador num determinado ambiente, ao decorrer do tempo. Essas duas populações irão dividir e interagir num mesmo ambiente, de modo que uma das populações (dita presa) é alimento da outra (dita predador). Faz-se necessário citar que, historicamente, o modelo de Lotka-Volterra tem sido amplamente utilizado para modelar as interações entre espécies e suas dinâmicas populacionais, servindo de base para uma teoria que atualmente é mais complexa. Com a visão de [4], pode-se fazer a construção desse sistema, obedecendo hipóteses já vistas na seção anterior.

Será considerado $x(t)$ como a densidade de uma população de presas e $y(t)$ a densidade de uma população de predadores, ambas variando com o tempo t . Tomaremos $r_i(t)$ como a taxa de crescimento específico de uma espécie, sendo denotado, como $r_1 = r_1(t)$ a taxa de crescimento específico da população de presas e $r_2 = r_2(t)$ a taxa de crescimento específico dos predadores, de modo que:

$$r_1 = \frac{\dot{x}}{x} \text{ e } r_2 = \frac{\dot{y}}{y}. \quad (10)$$

Para modelarmos o comportamento da população de presas, assim como em qualquer processo de modelagem, precisamos estabelecer algumas hipóteses. Pode-se supor que a população de presas tende a crescer exponencialmente quando não houver algum empecilho natural, ou seja, se estiver em um ambiente com alimentos à disposição e sem predadores, por exemplo. Nesse cenário, r_1 será a diferença entre o número de nascidos e o menor número de mortes e em (10), r_1 representará o que está ocorrendo com essa população.

Por outro lado, caso tenhamos predadores nesse cenário, ocorrerá a interferência na quantidade de indivíduos do grupo de presas, com um decréscimo em sua taxa de crescimento. Sendo $a > 0$ a taxa de crescimento da presa (dada naturalmente, com o nascimento de novos indivíduos) e $c > 0$ o parâmetro de interação entre as espécies de presa e predador, quando tivermos a existência de predadores, teremos que:

$$r_1 = a - cy.$$

Já no caso do predador, isto é, analisando r_2 , podemos fazer uma construção análoga, no entanto, deve-se vislumbrar que, em um ambiente sem alimento (presa), a população de predadores tenderá a decair de modo exponencial, ou seja, sendo $b > 0$, a taxa de decaimento será dada por $-b$. Porém, devemos lembrar que a existência de presas, por outro lado, proporciona o crescimento do número de predadores. Logo, para r_2 , sendo $d > 0$ o parâmetro de interação entre as espécies, teremos que a população de predadores será alterada positivamente a depender da população de presas, isto é:

$$r_2 = -b + dx.$$

Assim, o modelo obtido será dado por um sistema não linear autônomo de equações diferenciais ordinárias, do seguinte modo:

$$\begin{cases} \dot{x} &= ax - cyx \\ \dot{y} &= -by + dxy, \end{cases} \quad (11)$$

em que, x é a densidade da população de presas (no instante t); y é a densidade da população de predadores (no instante t); a é o coeficiente de crescimento das presas; b é o coeficiente associado ao decréscimo dos predadores; c é o coeficiente de morte das presas por predador e d é o coeficiente de predadores devido à existência de presas [2].

A partir da construção feita, é possível destacar algumas observações acerca do sistema [24], [4] e [2]:

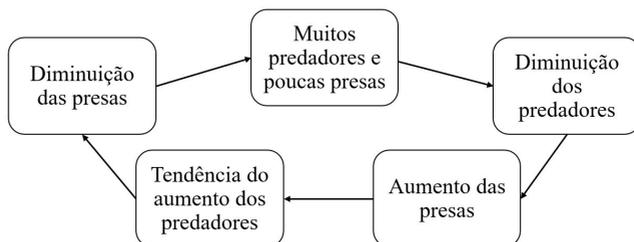
1. A primeira equação de (11) faz referência às presas, enquanto a segunda equação faz referência aos predadores;
2. O grupo das presas tem à sua disposição recursos alimentícios ilimitados, caso contrário, também teria que ser considerado no sistema um coeficiente para calcular como a ausência de recursos afetaria as presas;
3. Com a ausência de predadores, a população de presas crescerá proporcionalmente ao seu tamanho, com $\dot{x} = ax$; $a > 0$, uma equação malthusiana;
4. Com a ausência de presas, a população de predadores decrescerá proporcionalmente ao seu tamanho, com $\dot{y} = -bx$; $b > 0$, uma equação malthusiana;
5. O encontro entre ambas as populações é proporcional ao produto das populações, ou seja, será representado pelo produto xy ;
6. No encontro entre as presas e os predadores haverá um crescimento na população de predadores e uma diminuição na população de presas. Cada um desses movimentos (crescimento e

decrecimento) ocorrerá à uma taxa proporcional (c ou d) aos encontros (xy) entre as espécies, que será dada por $-cxy$ para as presas ($c > 0$) e por dxy para os predadores ($d > 0$);

7. Admite-se que o encontro entre as espécies é dado ao acaso, pois, em contrário, seria necessária a inclusão de novos parâmetros no sistema.

Pode-se fazer um estudo prévio acerca das relações e interações entre ambas as populações e como elas vão afetar as quantidades das populações. Partindo de uma situação hipotética na qual há um número maior de predadores em relação ao número de presas, vê-se que os predadores irão lidar com uma eventual escassez de alimento, o que acarretará na diminuição do grupo de predadores, pois ao não se alimentarem se tornam mais vulneráveis. Como resultado dessa diminuição, as presas têm mais espaço e condições favoráveis para se reproduzirem, o que permite que a população de presas cresça sem ser interrompida por mortes excessivas. Este cenário, por sua vez, leva ao aumento do número de presas disponíveis no ambiente, o que favorece o desenvolvimento da população de predadores. À medida que o número de predadores cresce novamente, a demanda por alimento aumenta e o grupo de presas diminui. Assim, voltamos novamente ao estado inicialmente proposto. Esse movimento cíclico na dinâmica (que pode ser observado na Figura 3) desse modelo possui implicações significativas na sobrevivência e equilíbrio de ambas as populações.

Figura 3 – Movimento cíclico do modelo de Lotka-Volterra.



Pode-se modelar os gráficos¹ que irão representar as dinâmicas descritas pelo modelo. Para tanto, consideraremos, a título de exemplificação, que $a = 2$; $c = 0.07$; $d = 0.03$ e $b = 0.6$. Será suposto, inicialmente, que ambas as densidades populacionais iniciais de presas x_0 e de predadores y_0 serão de 10 e consideraremos um intervalo de tempo de $t \in [0, 20]$. O gráfico que representará as relações entre as densidades populacionais de predadores e presas, isto é, o gráfico cujas soluções somente dependem do par (x, y) será dado pelo plano de fase na Figura 4, ao passo em que o gráfico que irá apresentar a evolução populacional das presas e dos predadores ao decorrer do tempo será representado pela Figura 5.

¹ Os gráficos apresentados a seguir foram gerados utilizando a ferramenta MATLAB.

Figura 4 – Órbita $(x(t), y(t))$ para $x_0 = y_0 = 10$.

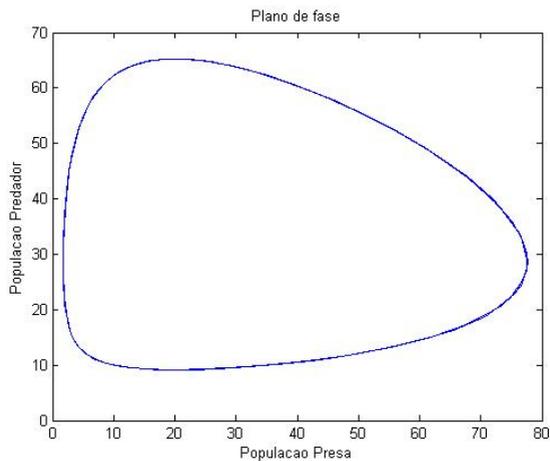
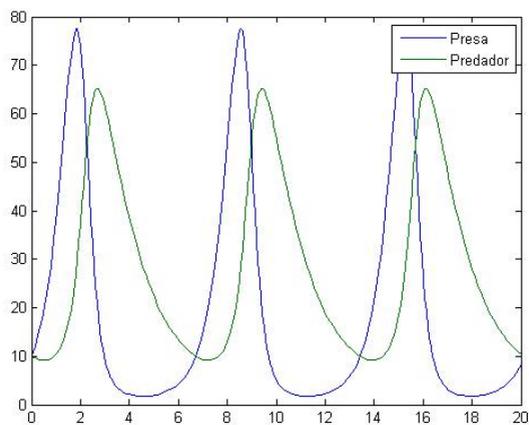


Figura 5 – Trajetórias $(t, x(t))$ e $(t, y(t))$ para $x_0 = y_0 = 10$.



Pode-se, também, alterar os valores iniciais para $x_0 = 20$ e $y_0 = 13$ e verificaremos os comportamentos associados na Figura 6 e na Figura 7.

Figura 6 – Órbita $(x(t), y(t))$ para $x_0 = 20, y_0 = 13$.

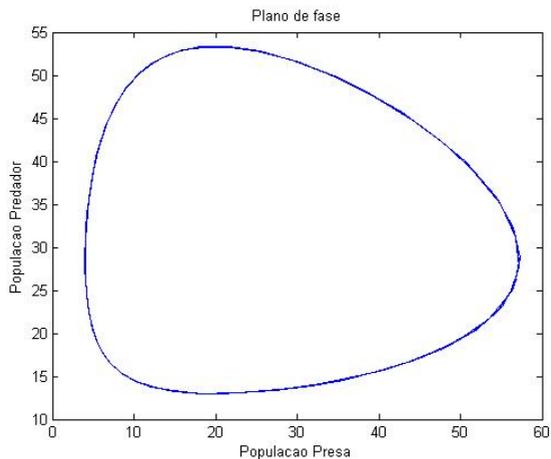
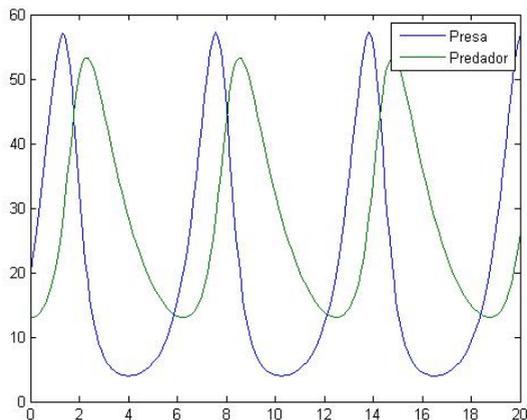


Figura 7 – Trajetórias $(t, x(t))$ e $(t, y(t))$ para $x_0 = 20, y_0 = 13$.

Alterando o valor dos parâmetros a, b, c, d para $a = 1.2; b = 0.89; c = 0.04$ e $d = 0.02$ e sendo as populações iniciais $x_0 = y_0 = 15$, obteremos as relações representadas na Figura 8 e na Figura 9.

Figura 8 – Órbita $(x(t), y(t))$ para $x_0 = y_0 = 15$.

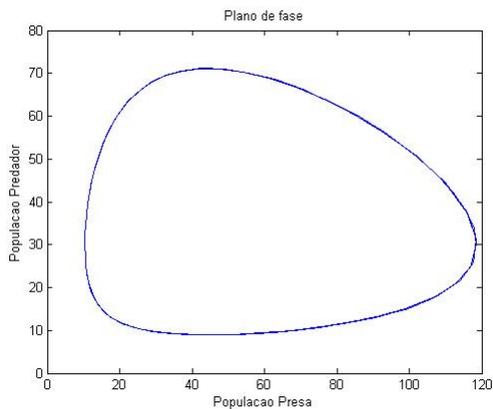
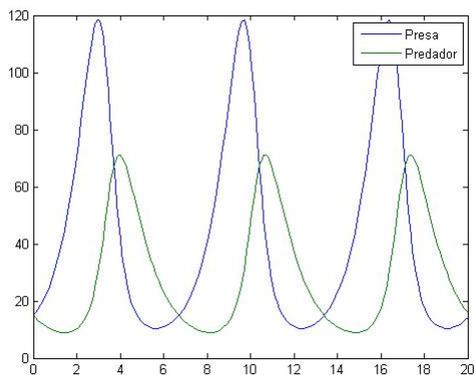


Figura 9 – Trajetórias $(t, x(t))$ e $(t, y(t))$ para $x_0 = y_0 = 15$.



Ao examinar os gráficos que retratam as variações dinâmicas relativas às interações entre as populações presa-predador, podemos

observar um movimento cíclico. Mesmo que as populações iniciais sejam alteradas e os parâmetros a , b , c e d sejam modificados, os movimentos sempre serão similares para esse modelo.

3.2.1.1 Conhecendo Lotka e Volterra

Os personagens que nomeiam o modelo de Lotka-Volterra foram dois importantes matemáticos que, de forma independente, contribuíram de maneira significativa para o desenvolvimento dos aspectos e teorias matemáticas relativas às dinâmicas populacionais. Será elucidado a seguir, a partir de [24] e [25], como se deu o desenvolvimento do sistema vislumbrado em (11).

Alfred James Lotka (1880-1949) retratado na Figura 10, nasceu em Lwów (Áustria-Hungria) e foi um renomado matemático, físico e químico que deixou um legado impressionante em diversas áreas do conhecimento, tendo contribuído especialmente para o estudo de dinâmicas populacionais. Graduado na Universidade de Birmingham, Inglaterra, Lotka realizou o seu mestrado em Física na Cornell University e seu doutorado na Universidade de Birmingham, obtendo pós-graduação em físico-química na Universidade de Leipzig. Lotka apresentou vastas publicações em áreas da química, física, epidemiologia e biologia, sendo cerca da metade delas dedicadas a questões populacionais. É curioso citar que Lotka também publicou um artigo na área de bibliometria, área dedicada ao estudo do número de publicações científicas em áreas específicas.

Figura 10 – Alfred James Lotka (1880–1949).



Fonte: Retirado de [25].

Nascido em Ancona (então parte dos Estados Papais), Vito Volterra (1860-1940) (Figura 11) deu início a sua carreira como professor de mecânica racional na Universidade de Pisa, após se formar nesta mesma instituição. Volterra, ao longo de sua vida, contribuiu para a teoria das equações integrais, tendo sido um dos precursores da Análise Funcional moderna ao desenvolver a teoria dos funcionais, uma generalização do que seria uma função com variáveis independentes. Sua entrada no campo da dinâmica populacional se deu por meio de seu interesse no estudo matemático do ecossistema do Mar Adriático, após o casamento de sua filha com um biólogo que propôs um problema de estudo. Os estudos iniciais de Volterra acerca da aplicação de ferramentas matemáticas à biologia envolveu a interação entre predadores e presas em um ecossistema, tendo posteriormente evoluído para uma teoria matemática mais complexa, que abrangia também a luta pela sobrevivência e existência das espécies.

Figura 11 – Vito Volterra (1860-1940).



Fonte: Retirado de *Caltech Archives*.

De modo geral, Lotka e Volterra desenvolveram simultaneamente o modelo de Lotka-Volterra. Por um lado, Volterra, a partir de uma solicitação do marido de sua filha, desenvolveu o sistema visando descrever a hipótese de que durante a guerra, dada a redução da pesca, ocorreu uma alteração na proporção entre o número de predadores e de presas na região do Mar Adriático. Lotka, por sua vez, desenvolveu o mesmo sistema de equações diferenciais para modelar reações químicas que oscilavam. Posteriormente, em seus estudos, Lotka utilizou o mesmo modelo para estudar sistemas inorgânicos e foi somente nos estudos seguintes que o modelo foi aplicado com a intenção de melhor compreender as interações entre presas e predadores no contexto de uma análise biomatemática. Tanto Lotka quanto Volterra chegaram à conclusão de que a interação entre duas espécies resultaria em oscilações periódicas em suas populações, apesar de terem iniciado os estudos em áreas e com populações distintas. A prioridade do trabalho de Lotka foi reconhecida por Volterra, no entanto, Volterra mencionava as diferenças empregadas por ambos matemáticos no processo

de desenvolvimento do sistema. Além disso, as equações produzidas por Volterra eram mais gerais, pois consideravam também mais do que duas espécies, bem como suas interações no passado. Cabe destacar também que ambos estudiosos trocaram cartas respeitadas entre si. O modelo matemático que conhecemos como modelo de Lotka-Volterra, como agora bem se sabe, possui esse nome pelo fato de que foi o trabalho e desenvolvimento conjunto, mesmo que de forma independente, desses dois matemáticos que resultou no sistema como atualmente conhecemos. O modelo de Lotka-Volterra é um dos modelos mais estudados no contexto da biologia populacional e da ecologia, podendo ser aplicado, como a própria origem do sistema nos mostra, em diversas áreas de pesquisa.

3.2.1.2 Soluções de Equilíbrio e Estabilidade

A partir do que já foi exposto acerca do modelo de Lotka-Volterra (11), pode-se fazer um estudo mais aprofundado do sistema e nesse sentido, será feita uma análise do modelo. A fim de desenvolver um estudo das soluções de equilíbrio do sistema, da linearização do sistema e, em consequência, obter informações acerca da estabilidade do modelo, serão utilizados alguns resultados encontrados em [2], [26] e [16].

Definição 3.1 (Ponto de Equilíbrio Estável). *Seja $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 definindo um campo de vetores no aberto $D \subseteq \mathbb{R}^n$, cujos fluxos², dados pela solução do sistema com tempo t e condição inicial x são: $\mu(t, x) = \mu_t(x)$. Um ponto $x_0 \in D$ será dito **estável** se para qualquer $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$, de modo que:*

$$|\mu_t(x) - x_0| \leq \epsilon, \quad \forall t > 0, x \in D \text{ sempre que } |x - x_0| \leq \delta.$$

² Um fluxo $\mu(t, x) = \mu_t(x)$ é tal que $\dot{\mu} = f(\mu)$; $\mu(0, x) = x$.

Em relação ao sistema, um ponto de equilíbrio estável irá garantir que, ao considerar uma pequena perturbação no sistema em torno de um ponto de equilíbrio escolhido, o sistema irá convergir posteriormente para esse mesmo ponto, nessa dinâmica local. Por outro lado, a divergência, ou instabilidade, relaciona-se ao fato do sistema perturbado não conseguir retornar a esse ponto. Outro termo relacionado à estabilidade é o de soluções **assintoticamente estáveis**, que está relacionado ao fato de que a estabilização ocorrerá ao longo do tempo. Diferente dos pontos estáveis, em que as trajetórias ficam próximas ao ponto em questão, nos pontos assintoticamente estáveis as trajetórias irão convergir para o ponto com o passar do tempo.

A priori, para determinar os pontos de equilíbrio, é necessário encontrar os pontos cujas coordenadas são aquelas que irão representar que as populações, no nosso caso x e y , não variam com o tempo, ou seja, quando as populações são constantes. No contexto matemático, afirmar que a taxa de variação de uma população em relação ao tempo não varia, equivale a considerar que a derivada (que representa a taxa de variação em questão) será nula. Para o modelo de estudo (11), deve-se resolver o sistema de equações a seguir, visando encontrar as coordenadas dos pontos de equilíbrio.

$$\begin{cases} ax - cyx = 0 \\ -by + dxy = 0. \end{cases} \quad (12)$$

Desenvolvendo, obtém-se:

$$\begin{cases} x(a - cy) = 0 \\ y(-b + dx) = 0. \end{cases}$$

Logo, garante-se duas possíveis soluções: $E_1 = (0, 0)$ e $E_2 = (b/d, a/c)$, em que E_1 representa a extinção de ambas as espécies e E_2 representa uma sustentação entre ambas as espécies.

A partir do estudo dos pontos de equilíbrio do modelo pode-se tratar dos aspectos relacionados à linearização e estabilidade. Uma vez que o modelo em questão trata-se de um sistema não linear, linearizar esse sistema coloca-se como uma ferramenta essencial para facilitar o estudo dos pontos de equilíbrio do sistema. O processo de linearização de um sistema irá possibilitar o estudo do sistema a partir de técnicas e ferramentas utilizadas em sistemas lineares, que são, no geral, mais simples. Para o processo de linearização do modelo em questão, a primeira equação do modelo (que descreve as presas) será considerada como $f(x, y) = ax - cxy$, ao passo em que a segunda equação, que representa os predadores, será considerada como $g(x, y) = -by + dxy$. Será utilizada a expansão em séries de Taylor ((13) e (14)), em torno de um ponto de equilíbrio, que denotaremos por (x_e, y_e) . Em relação ao nosso modelo, os pontos de equilíbrio obtidos foram os E_1 e E_2 anteriormente calculados¹.

$$f(x, y) \cong f(x_e, y_e) + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_e (x - x_e) + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_e (y - y_e) \quad (13)$$

$$g(x, y) \cong g(x_e, y_e) + \left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)_e (x - x_e) + \left(\frac{\partial g}{\partial y} \right)_e (y - y_e). \quad (14)$$

Em seguida, será definido um sistema linearizado a partir de (13) e (14). Para tanto, será denominada de \dot{x} a parte direita da expressão de (13) e \dot{y} a parte direita da expressão (14) e usa-se o fato de que $f(x_e, y_e) = g(x_e, y_e) = 0$, isto é:

$$\begin{cases} \dot{x} &= \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_e (x - x_e) + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_e (y - y_e) \\ \dot{y} &= \left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)_e (x - x_e) + \left(\frac{\partial g}{\partial y} \right)_e (y - y_e). \end{cases} \quad (15)$$

¹ A notação do tipo h_e usada, por exemplo em $\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_e$, é tal que, $h_e = h(x_e, y_e)$.

Desse modo, evidencia-se um novo sistema linear. No contexto de sistemas lineares, é possível observar com mais facilidade as propriedades das soluções de tal sistema. De fato, podemos explicitar as soluções com a metodologia que segue e para isso serão consideradas as perturbações que constam em (16), que iremos supor como soluções de (15).

$$x(t) = c_1 e^{\lambda t} + x_e; \quad y(t) = c_2 e^{\lambda t} + y_e. \quad (16)$$

A escolha das perturbações definidas em (16), substituídas em (15), nos leva ao seguinte sistema:

$$\begin{cases} \lambda c_1 &= c_1 \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_e + c_2 \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_e \\ \lambda c_2 &= c_1 \left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)_e + c_2 \left(\frac{\partial g}{\partial y} \right)_e. \end{cases} \quad (17)$$

E reescrevendo (17) de forma matricial, ou seja, considerando um vetor $[c_1 \ c_2]^T$, determina-se a expressão a seguir:

$$\lambda [c_1 \ c_2]^T = J_e [c_1 \ c_2]^T, \quad (18)$$

em que J_e é dita matriz jacobiana do modelo, explicitado para o modelo de Lotka-Volterra a seguir:

$$J_e = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}_e = \begin{pmatrix} a - cy_e & -cx_e \\ dy_e & -b + dx_e \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Assim, obtêm-se propriedades das soluções para o problema (15) (modelo de Lotka-Volterra linearizado), se, e somente se, o sistema (18) também possuir soluções. Vê-se, assim, uma redução do problema linear para um problema matricial, mais precisamente para um problema envolvendo autovalores.

Em consequência do processo de linearização com a aplicação da série de Taylor em (13) e (14), pode-se aproximar do sistema não linear (11). Como a linearização desenvolvida se deu em torno

dos pontos de equilíbrio, é válido destacar que a aproximação entre o sistema original e o linearizado restringe-se para as proximidades do ponto de equilíbrio considerado pela linearização. Por fim, vê-se que a matriz jacobiana destaca-se como uma ferramenta útil para o processo de linearização de sistemas, podendo ser empregada a partir desse ponto de maneira direta, sem que se faça necessária toda a construção anteriormente desenvolvida.

Em seguida, pode-se desenvolver o estudo da estabilidade do sistema, que está relacionado aos pontos críticos do modelo. Através dos pontos de equilíbrio, será possível determinar qual será o comportamento das soluções do sistema. A análise da estabilidade de sistemas não lineares pode ser complexa, envolvendo métodos mais avançados, desse modo, a análise da estabilidade para o sistema linearizado coloca-se como uma alternativa mais simples. Afinal, se o ponto for estável, a dinâmica que ocorre no sistema linearizado irá caracterizar a mesma dinâmica para pequenas perturbações em torno do ponto de equilíbrio no sistema não linear original.

A estabilidade de (11) será verificada a partir do estudo dos autovalores da matriz jacobiana aplicada aos pontos de equilíbrio E_1 e E_2 . De acordo com [2], para sistemas lineares do tipo $\dot{x} = Wx$, em que r é um autovalor associado, obtém-se os seguintes resultados para a estabilidade do sistema:

Tabela 1 – Estabilidade de Sistemas Lineares.

Autovalores	Tipo de ponto	Estabilidade
$r_1 > r_2 > 0$	Nó	Instável
$r_1 < r_2 < 0$	Nó	Assintoticamente estável
$r_2 < 0 < r_1$	Ponto de Sela	Instável
$r_1 = r_2 > 0$	Nó próprio ou impróprio	Instável
$r_1 = r_2 < 0$	Nó próprio ou impróprio	Assintoticamente estável
$r_1, r_2 = \lambda \pm i\mu$	Ponto espiral	
$\lambda > 0$		Instável
$\lambda < 0$		Assintoticamente Estável
$r_1 = i\mu, r_2 = -i\mu$	Centro	Estável

Fonte: B. W. E. e D. R. C. [2].

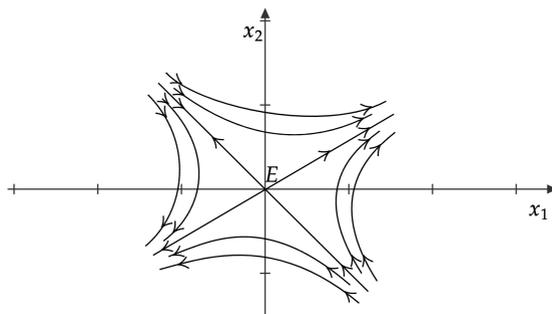
A teoria estabelecida em [2] é para sistemas de dimensão 2, que possuem soluções que podem ser evidenciadas de forma geométrica no plano de fase através de curvas. Caso estivesse sendo estudado um sistema de dimensão n , seria necessária outra teoria, que decorre de uma análise semelhante àquela evidenciada na referência utilizada.

Para a análise dos autovalores da matriz jacobiana aplicada em E_1 , têm-se soluções do tipo:

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} a - cy & -cx \\ dy & -b + dx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix}. \quad (20)$$

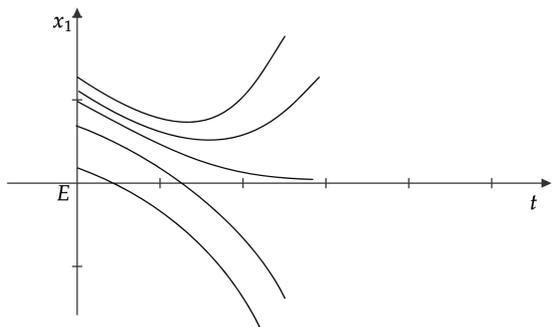
Nesse caso, os autovalores são triviais, sendo os elementos da diagonal principal, isto é, $r_1 = a$ e $r_2 = -b$. Uma vez que $a, b > 0$ então, é evidente que $r_2 < 0 < r_1$, o que caracteriza um ponto de sela, que é instável e possui comportamento ilustrado na Figura 12 e na Figura 13.

Figura 12 – Plano de fase (ponto de sela).



Fonte: Adaptado de B. W. E. e D. R. C. [2].

Figura 13 – Gráfico de x_1 em função de t (ponto de sela).



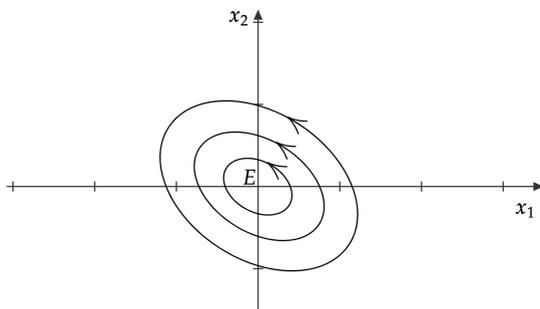
Fonte: Adaptado de B. W. E. e D. R. C. [2].

Por outro lado, para a análise dos autovalores da matriz jacobiana aplicada em E_2 , observa-se a seguinte configuração:

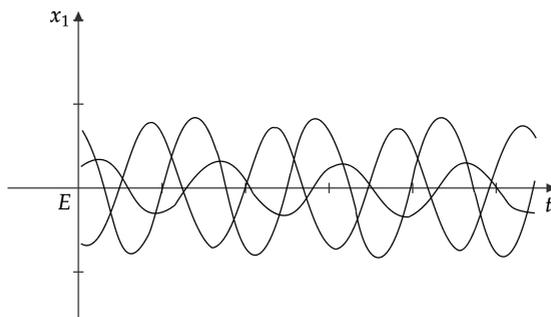
$$J\left(\frac{b}{d}, \frac{a}{c}\right) = \begin{pmatrix} a - c(a/c) & -c(b/d) \\ d(a/c) & -b + d(b/d) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -cb/d \\ da/c & 0 \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Nesse caso, os autovalores são imaginários puros: $r_{1,2} = \pm i\sqrt{ab}$, o que caracteriza um ponto de centro que possui um comportamento estável, ilustrado na Figura 14 e na Figura 15.

Figura 14 – Plano de fase (ponto de centro).



Fonte: Adaptado de B. W. E. e D. R. C. [2].

Figura 15 – Gráfico de x_1 em função de t (ponto de centro).

Fonte: Adaptado de B. W. E. e D. R. C. [2].

Nos gráficos apresentados para ilustrar o comportamento de um ponto de centro, vê-se um comportamento similar àquele do modelo de Lotka-Volterra, explorados na Figura 5, Figura 7 e na Figura 9. Pode-se perceber a similaridade do plano de fase e do movimento cíclico que também ocorre em (11).

É notável que a matriz jacobiana fornece importantes informações acerca da estabilidade dos pontos de equilíbrio. A seguir será evidenciado mais um resultado, que não necessariamente trará informações a respeito do modelo de Lotka-Volterra, mas poderá ser aplicado em outros modelos.

Definição 3.2 (Ponto de Equilíbrio Hiperbólico [26]). *Um ponto (\bar{E}) será dito um **ponto de equilíbrio hiperbólico**, quando todos autovalores da matriz jacobiana do sistema analisado, aplicada neste ponto, tiverem parte real não nula.*

Um resultado clássico da teoria qualitativa local de EDOs, denominado de **Teorema de Hartman-Grobman**, irá evidenciar que,

sendo um ponto de equilíbrio hiperbólico (\bar{E}), para uma vizinhança desse ponto o espaço de configurações do sistema não linear será equivalente (topologicamente) ao do seu sistema linearizado.

É possível afirmar que, em relação ao modelo de Lotka-Volterra, o ponto E_2 não é hiperbólico, afinal os autovalores da matriz jacobiana associada são imaginários puros. No entanto, será visto posteriormente que, apesar desse fato, esse ponto será essencial para a controlabilidade do sistema. Porém, em relação ao ponto E_1 , vê-se que se trata de um ponto hiperbólico. Assim, pode-se estabelecer uma equivalência topológica entre as configurações em uma vizinhança de E_1 no sistema linearizado e no original. Tais ferramentas apresentadas nessa seção podem ser utilizadas para outros modelos que se adequem às hipóteses dos resultados e construções efetuadas.

3.2.1.3 Variações do Modelo de Lotka-Volterra

Efetuando construções similares às aquelas expostas na Seção 3.2.1, podemos encontrar algumas variações do modelo que consta em (11) a partir da mudança de algumas hipóteses.

Se considerarmos que a população y dita predador não vai interferir na população x de presas e vice-versa, então as variáveis serão independentes uma da outra, desse modo $c = d = 0$, ou seja, não haverá encontros entre as populações e as equações poderão ser resolvidas separadamente. Teremos, então, equações lineares mais simples determinadas a seguir [4]:

$$\begin{cases} \dot{x} &= ax \\ \dot{y} &= -by, \end{cases} \quad (22)$$

em que a será um parâmetro de nascimento e b um parâmetro de mortalidade.

Por outro lado, pode-se definir outra variação do modelo de Lotka-Volterra, que será o modelo com competição. Nesse caso, teremos duas populações x e y que competem pelo mesmo recurso, seja este uma fonte de alimento e/ou espaço. A partir dessa competição, teremos taxas $k_1 > 0, k_2 > 0$ que irão descrever a influência da outra população e outras taxas $n_1 > 0, n_2 > 0$ que irão determinar o crescimento intrínseco dessas populações. Assim, obtém-se o sistema de equações diferenciais linear dado por:

$$\begin{cases} \dot{x} &= n_1x - k_1y \\ \dot{y} &= n_2y - k_2x. \end{cases} \quad (23)$$

Para além, podemos definir outro modelo novamente partindo de uma construção similar àquela vista em (11). De acordo [27], uma competição será qualquer ação defensiva de um indivíduo que restrinja a disponibilidade de um recurso para outros indivíduos. A competição pode ocorrer entre indivíduos da mesma espécie (sendo essa a competição intraespecífica) e entre indivíduos de espécies diferentes (sendo essa a competição interespecífica). O sistema que modelará essas relações será dado por:

$$\begin{cases} \dot{x} &= x(a_1 - \theta_1x - \sigma_1y) \\ \dot{y} &= y(a_2 - \theta_2y - \sigma_2x), \end{cases} \quad (24)$$

em que $a_1 > 0$ é a taxa de crescimento da população x e $a_2 > 0$ é a taxa de crescimento da população y ; $\theta_1 > 0$ e $\theta_2 > 0$ representarão os danos ocasionados entre os indivíduos da mesma espécie (competição intraespecífica); $\sigma_1 > 0$ representa os danos causados pela população y na população x dada a competição entre as espécies e $\sigma_2 > 0$ representa os danos causados pela população x na população y dada a competição entre as espécies (competição interespecífica) [28].

Por fim, podemos considerar que a população de presas possui seu crescimento limitado por algum fator ambiental, como por exem-

plo a baixa disponibilidade de recursos no ambiente, logo, podemos considerar (11) e inserir o crescimento logístico na equação da presa.

$$\begin{cases} \dot{x} &= rx\left(1 - \frac{x}{K}\right) - cxy \\ \dot{y} &= -by + dxy. \end{cases} \quad (25)$$

Poderíamos considerar outras hipóteses, como a necessidade de inserção do crescimento logístico na equação do predador, e assim, obteríamos outro modelo que seria uma variação do modelo de Lotka-Volterra. Desse modo, pode-se elucidar como o modelo (11) é um importante alicerce na teoria de modelos biomatemáticos, uma vez que, a partir dele e de sua ideia de construção, pode-se evoluir para a construção e desenvolvimento de outros modelos, que consideram mais ou outras variáveis e parâmetros.

3.2.1.4 Lebres e lincas: um exemplo canadense

Uma exemplificação comumente utilizada para evidenciar os modelos de Lotka-Volterra e suas particularidades é a relação de presa-predador existente entre o linco e a lebre no Canadá, assim como pode ser observado em [29], [30] e [31]. A razão pela qual esse exemplo aparece em tantos materiais relacionados ao assunto se deve ao fato de que a *Hudson Bay Company*, uma empresa canadense que comercializava peles de animais entre os séculos XVII e XX, reuniu dados significativos sobre as populações desses animais. Tais informações permitiram a compreensão da dinâmica populacional e relações entre estas duas espécies ao decorrer do tempo. O uso dos dados fornecidos por essa empresa é particularmente importante e tão amplamente explorada pelo fato de que os funcionários da empresa mantiveram registros de suas caças, tanto dos lincas quanto das lebres por vários anos (cerca de 1735 até 1935). A empresa caçava os lincas e as lebres para obter e comercializar a pele desses animais. Esses dados coletados

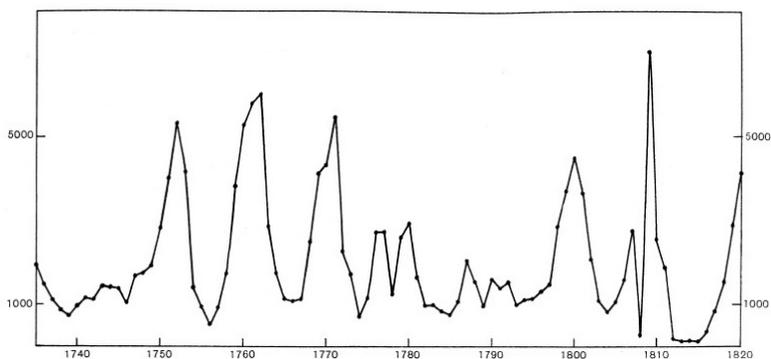
foram amplamente utilizados na comunidade acadêmica, visando uma aproximação do comportamento populacional das duas espécies envolvidas. Após várias análises e estudos correlatos, Elton e Nicholson [31] observaram que o ciclo populacional dos lincos era de cerca de 10 anos, isto é, a cada dez anos via-se uma repetição da dinâmica populacional destes animais.

Diversas literaturas, tanto da área da biologia quanto da matemática, exploraram, com base nos dados armazenados pela *Hudson Bay Company* ao longo dos anos, as relações e ciclos populacionais das duas espécies. Os ciclos das duas espécies, ao serem estudados, apresentavam uma certa sincronia, evidenciada pelo fato de que os picos de abundância da população de lincos seguiam os picos de abundância da população de lebres, sendo que esses picos possuíam aproximadamente um ou dois anos de diferença. A análise dos dados originada das quantidades de peles dos animais elucidou um padrão que parecia, para o olhar dos estudiosos da época, oscilar de forma cíclica. Atualmente, vê-se que esse padrão cíclico é algo comum para esse tipo de interação (presa-predador), no entanto, durante o período de estudo inicial dos dados, o reconhecimento desse padrão tornou-se um marco importante para os estudos da área da biomatemática, sendo um exemplo revisitado até os dias atuais.

Pode-se ver a seguir as figuras extraídas do texto original de [31]. Na Figura 16 consta o gráfico que representa o número de peles de lincos utilizadas pela empresa entre os anos de 1735 e 1820, ao passo em que na Figura 17 constam os dados entre os anos de 1820 até cerca de 1935, referente aos retornos de peles de lincos do departamento norte da empresa. Em ambas as figuras, é possível observar o ciclo populacional, a cada década. Por fim, em [27] cita-se também, como exemplo de dinâmica de populações presas e predadoras, as populações de lebres e lincos canadenses. O autor traz um registro gráfico muito

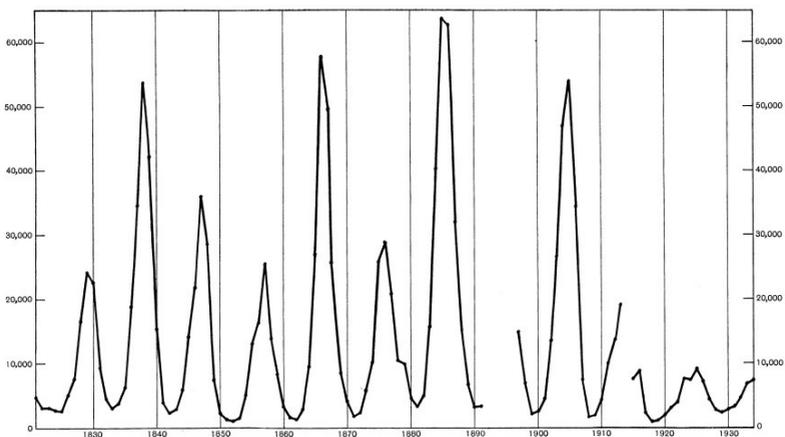
interessante, ilustrado, aqui, pela Figura 18. Na figura em questão, é possível perceber a sincronização dos ciclos populacionais das presas (lebres) e dos predadores (lincas), justamente por conta da proximidade de seus "picos" populacionais.

Figura 16 – Registros das peles de lincas pela *Hudson Bay Company* (1735-1820).



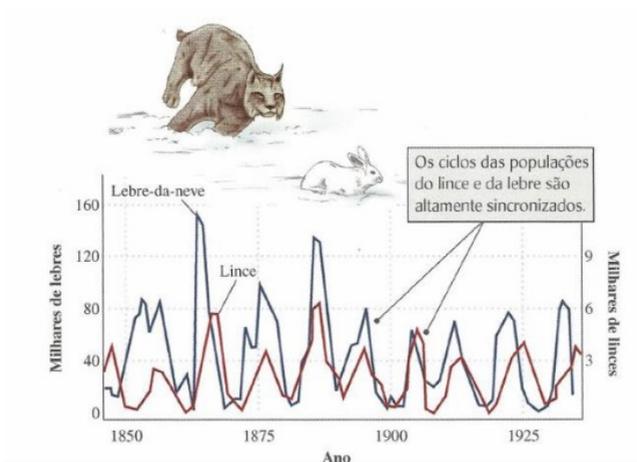
Fonte: Elton e Nicholson (1942).

Figura 17 – Registros de peles de linces do departamento norte da *Hudson Bay Company* (1820-1935).



Fonte: Elton e Nicholson (1942).

Figura 18 – Sincronização dos ciclos populacionais das presas (lebres) e dos predadores (lince).



Fonte: Ricklefs (2010).

4 CONTROLABILIDADE E OBSERVABILIDADE DE SISTEMAS LINEARES FINITOS

A teoria da observabilidade em conjunto com a teoria da controlabilidade tratam-se de conceitos essenciais, com um ferramental muito rico, que podem ser aplicados em sistemas dinâmicos, como aqueles modelos biológicos apresentados anteriormente. Tais conceitos vão permitir compreender de uma maneira mais apurada os sistemas estudados, assim como seus comportamentos e variações. Além disso, será possível trabalhar com os sistemas no sentido de projetar perturbações que garantam um resultado esperado. Tratando primordialmente da controlabilidade, que parece ser uma ferramenta mais intuitiva no âmbito dos sistemas biológicos, faz-se referência ao processo de "guiar" o sistema para um estado desejado, utilizando para isso um controle adequado. A observabilidade, por sua vez, refere-se à capacidade de determinar informações acerca de um estado do sistema, como os dados iniciais, a partir das informações externas (dados de saída do sistema), que estão disponíveis para observação.

As ferramentas de observabilidade e controlabilidade possuem muitas aplicações práticas em áreas da engenharia, por exemplo. No entanto, neste estudo, as aplicações serão dirigidas para os modelos biológicos. A observabilidade, assim como consta em [12] e [32], pode ser utilizada em processos de identificação de parâmetros, como aqueles relacionados à identificabilidade estrutural. Desse modo, a observabilidade coloca-se como uma ferramenta de suma importância na área de identificação de parâmetros de sistemas, podendo ser usada para estimar parâmetros de um determinado modelo a partir dos dados de saída, isto é, dos dados observáveis, que geralmente são dados experimentais. Encontrar parâmetros é essencial, uma vez que, eventualmente, nem todos os valores dos parâmetros para um modelo de estudo estão disponíveis em bancos de dados ou na literatura e pes-

quisas desenvolvidas na área. Um grande exemplo são os parâmetros utilizados em modelos de câncer, que podem variar a depender do tecido de origem da doença. Desse modo, torna-se necessário utilizar ferramentas da observabilidade para obter resultados com a maior precisão possível.

Por outro lado, a controlabilidade atua no sentido de levar o sistema para um estado desejável em um determinado tempo. As aplicações de controle, assim como o próprio nome sugere, trabalham no sentido de controlar os resultados do sistema. Existem diversas teorias e segmentos do conceito de controle na matemática, mas para esse estudo trabalha-se com uma teoria específica que será melhor determinada a seguir. No tocante às aplicações, pode-se novamente fazer referência aos modelos que estudam o câncer para melhor compreender como atua a teoria de controlabilidade. A partir de um modelo que elucida a dinâmica entre células normais e cancerígenas em um determinado órgão, almeja-se controlar a população de células cancerígenas (χ) para que alcance uma determinada população χ_t em um tempo t determinado. O controle será dado por meio da inserção de uma perturbação no modelo e o objetivo será alcançar $\chi(t) = \chi_t$.

Neste capítulo, será desenvolvida a teoria de controlabilidade e observabilidade, seguindo como principal referência TUCSNAK M. e WEISS G (2009) [1], além de [12]. Serão apresentados os principais conceitos relacionados aos conteúdos, bem como resultados e propriedades. Em seguida, será feito um estudo acerca da relação dual entre os problemas de observabilidade e controlabilidade. Por fim, serão elucidadas aplicações em modelos biológicos. É importante citar que o estudo se debruça no sentido de garantir a existência do controle e da observabilidade, isto é, procura responder a pergunta: "esse problema é controlável/observável?". Questões relacionadas a, por exemplo, "como é esse controle?" ou "que função definirá o controle desse problema?",

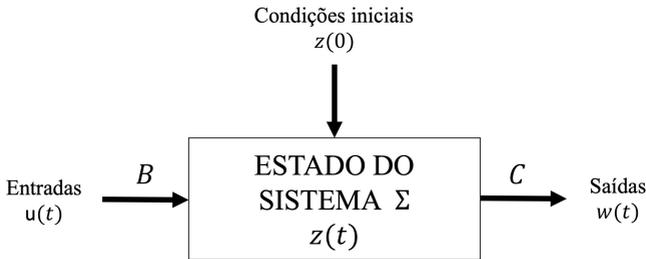
não são respondidas aqui. No entanto, nas conclusões deste trabalho constam algumas ideias relacionadas as respostas para estes questionamentos.

Para esse capítulo, serão considerados sistemas definidos em espaços vetoriais com produto interno que serão ditos de entrada (U), saída (W) e estados (X), todos com dimensão finita e $\dim(X) = n$. Denotaremos com Σ o sistema linear invariante no tempo descrito a seguir:

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{z}(t) = Az(t) + Bu(t) \\ w(t) = Cz(t), \end{cases} \quad (26)$$

em que $u(t) \in U$, u é também dita a função de entrada, $z(t) \in X$ é o estado no tempo t , $w(t) \in W$ e w é dita a função de saída. Ademais, A, B e C são aplicações lineares, tais que $A : X \rightarrow X, B : U \rightarrow X$ e $C : X \rightarrow W$. A dinâmica do que ocorre no sistema Σ e como todas as funções se relacionam são bem descritas na Figura 19.

Figura 19 – Dinâmica de Σ .



A solução para o sistema (26), para todo $u \in L^2([0, \infty); U)$ e $z(0) \in X$, é única e será dada por:

$$z(t) = e^{tA}z(0) + \int_0^t e^{(t-\sigma)A}Bu(\sigma)d\sigma. \quad (27)$$

Para garantir a existência e unicidade dessa solução, deve-se recorrer à teoria de resoluções de sistemas de equações diferenciais e seguir um procedimento similar ao exposto na demonstração do Teorema 2.8. Desse modo, é importante destacar que mesmo que sejam definidas soluções para funções u não contínuas, $z(t)$ será uma função contínua em t .

Definição 4.1 (Causalidade). *A propriedade caracterizada pelo fato de $z(t)$ não depender dos valores $u(\sigma)$, para $\sigma > t$ é dita **causalidade**.*

Definição 4.2 (Estabilidade de Σ). *O sistema Σ (ou o operador A) é estável se $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{tA} = 0$.*

Definição 4.3 (Truncamento). *Para todo $u \in L^2([0, \infty); U)$ e $\tau \geq 0$, denota-se por $\mathbf{P}_\tau u$ o **truncamento** de u para o intervalo $[0, \tau]$. O truncamento irá limitar a função u em um intervalo de tempo $[0, \tau]$, visando restringir o tempo de aplicação da entrada u no sistema. Deste modo, o truncamento define-se pelo sistema:*

$$(\mathbf{P}_\tau u)(t) = \begin{cases} u(t) & , t \in [0, \tau], \\ 0 & , t > \tau. \end{cases} \quad (28)$$

Nas seções seguintes serão apresentadas noções mais específicas da teoria de controlabilidade e observabilidade, correlacionando-as.

4.1 O PROBLEMA DE CONTROLE MATEMÁTICO

A teoria de controle trata-se de uma área da matemática que estuda e analisa sistemas dinâmicos que podem ter seus comportamentos e resultados alterados através da inclusão de perturbações no sistema, que serão justamente os controles. Em relação à palavra "controlar", faz-se referência ao fato de que controlar algum objeto significa influenciar, de alguma forma, o seu comportamento natural.

No contexto estudado, essa influência será dada visando atingir algum objetivo almejado. A controlabilidade matemática consiste em inserir um controle $u(t)$ para garantir que a solução de (29) atinja um valor específico z_1 em um determinado instante ($t = \tau$).

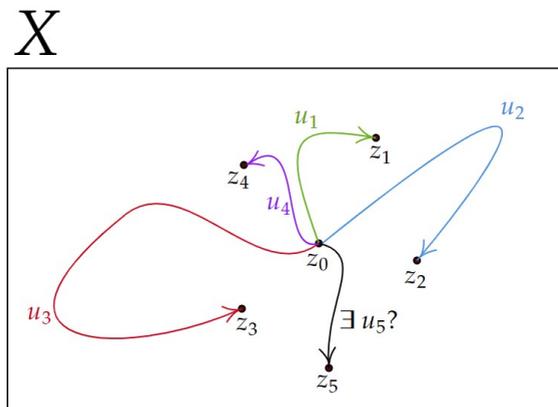
O problema de controle será definido a partir de (26) e é dado por:

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Az(t) + Bu(t) \\ z(0) = z_0. \end{cases} \quad (29)$$

Definição 4.4 (Controlabilidade). *O sistema (29) é **controlável** em $t = \tau$ se $\forall z_0, z_1 \in X$, existe u tal que a solução da equação diferencial (29) satisfaz $z(\tau) = z_1$.*

A partir da definição de controlabilidade e analisando a Figura 20, vê-se que a controlabilidade trata-se de garantir, a partir da aplicação de controles u adequados, os resultados z_i , tal que $i \in \mathbb{N}^*$, almejados.

Figura 20 – Representação do problema de controlabilidade.



A solução para uma função $u \in L^2([0, \infty); U)$ (mensurável quadrado integrável) e estado inicial $z(0)$, é única e dada por:

$$z(t) = e^{tA}z(0) + \int_0^t e^{(t-\sigma)A}Bu(\sigma)d\sigma$$

$$X \ni (z_1 - e^{\tau A}z_0) = \underbrace{\int_0^\tau e^{(\tau-\sigma)A}Bu(\sigma)d\sigma}_{\Phi_\tau u}.$$

A partir da garantia da existência de controles u para todo $z_0, z_1 \in X$, vê-se que a controlabilidade está associada ao fato de que Φ_τ é sobrejetora. Desse modo, faz-se necessário definir uma família de operadores, $\Phi_\tau \in \mathcal{L}(L^2([0, \infty); U), X)$, $\tau > 0$, tal que:

$$\Phi_\tau u = \int_0^\tau e^{(\tau-\sigma)A}Bu(\sigma)d\sigma.$$

Lema 4.1. *Obtém-se que: $\Phi_\tau \mathbf{P}_\tau = \Phi_\tau$, o que conhecemos como causalidade.*

Uma vez que \mathbf{P}_τ é definido como um truncamento em $[0, \tau]$, então ele não irá alterar os resultados da função nesse intervalo, como pode ser visto na Definição 4.3. Ademais, $\mathbf{P}_\tau u(t)$ irá retornar 0 quando $t > \tau$. Logo, para a atuação do operador Φ_τ , \mathbf{P}_τ não fará nenhuma alteração no controle, mantendo os resultados de $(\Phi_\tau)(t)$ e $(\Phi_\tau \mathbf{P}_\tau u)(t)$.

É importante destacar que, analisando Σ , caso $z(0) = 0$, então $z(\tau) = \Phi_\tau u$. Por esse motivo, os operadores Φ_τ são chamados de **aplicações de entrada de Σ** . Além disso, o conjunto de imagens,

$$\text{Im } \Phi_\tau = \{\Phi_\tau u ; u \in L^2([0, \infty); U)\},$$

determinará a propriedade de controlabilidade quando o espaço todo for alcançado, logo, o fato de $\text{Im } \Phi_\tau = X$ implicará na controlabilidade em $t = \tau$.

4.2 O PROBLEMA DE OBSERVABILIDADE MATEMÁTICA

A teoria de observabilidade trata-se de uma área da matemática que estuda e analisa sistemas dinâmicos no sentido da determinação de estados e dados do sistema a partir do conhecimento das saídas do sistema. Ou seja, caso a partir dos resultados que são externados por um sistema dinâmico seja possível inferir acerca de informações de estado em tempos anteriores (em relação às saídas analisadas), então estaremos lidando com um problema dito observável, no qual é possível aplicar a teoria de observabilidade. O termo "observabilidade" relaciona-se com a ação de "observar", uma vez que é a partir da observação, no sentido de coleta dos dados de saída do sistema, que será possível estimar ou não determinados estados do sistema. A observabilidade matemática considera uma função de saída $w(t) \in W$, com dado inicial $z(0)$ a conhecer.

O problema de observabilidade será definido a partir de (26), considerando $u = 0$ e será dado por:

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Az(t) \\ w(t) = Cz(t), \end{cases} \quad (30)$$

cuja solução é dada por $z(t) = e^{tA}z_0$ (assim como visto na Seção 2.3), em que z_0 é desconhecido.

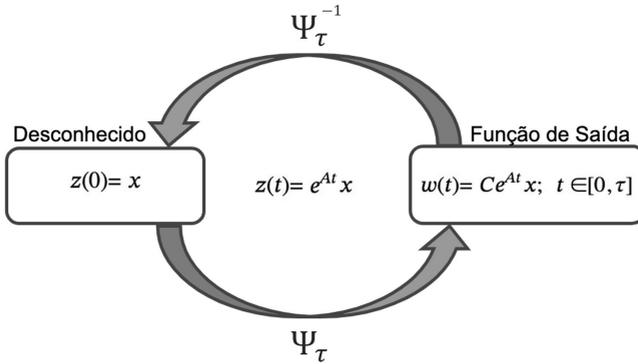
Definição 4.5 (Observabilidade). *O sistema (30) é **observável** no intervalo $[0, \tau]$ se, através da função de saída $w(t)$, $t \in [0, \tau]$, for possível obter a condição inicial z_0 do sistema.*

Introduz-se a família de operadores $\{\Psi_\tau\}_{\tau>0}$ em que $\Psi_\tau \in \mathcal{L}(X, L^2([0, \infty); W))$, $\tau > 0$, dada por:

$$(\Psi_\tau z_0)(t) = \begin{cases} Ce^{At}z_0 & , \text{ para } t \in [0, \tau], \\ 0 & , \text{ para } t > \tau. \end{cases}$$

A partir da definição de observabilidade e analisando a Figura 21, vê-se que a observabilidade trabalha no sentido de, a partir do conhecimento dos dados de saída $w(t) \in W$, inferir acerca do estado inicial $z(0) \in X$ do sistema. O operador Ψ_τ será dito **aplicação de saída de Σ** , pois em relação a Σ , no caso em que $u = 0$ e $z(0) = x$, então $\Psi_\tau x = \mathbf{P}_\tau w$.

Figura 21 – Representação do problema de observabilidade.



Lema 4.2. *Obtém-se que: $\mathbf{P}_\tau \Psi_\tau = \Psi_\tau$.*

O operador Ψ_τ será responsável pelas observações das saídas do sistema, fazendo retornos apenas para o intervalo observável $[0, \tau]$. Uma vez que o truncamento considerará retornos "0" para $t > \tau$, então o operador Ψ_τ somente seria alterado de alguma maneira pelo truncamento se considerasse também os valores obtidos para $t > \tau$, o que não ocorre, então preserva-se o operador.

Torna-se evidente que a observabilidade está relacionada com a injetividade do operador Ψ_τ . O Kernel (ou núcleo) de Ψ_τ será tal que:

$$\text{Ker } \Psi_\tau = \{x \in X ; \Psi_\tau x = 0\}$$

e determinará a existência de $(\Psi_\tau)^{-1}$ quando $\text{Ker } \Psi_\tau = \{0\}$.

4.3 DUALIDADE: Σ E Σ^d

Nesta seção serão feitas algumas correlações muito importantes entre a teoria de observabilidade e controlabilidade. O objetivo final será garantir que as teorias são duais, ou seja, existirá uma simetria entre os conceitos e os resultados de ambas as teorias. A priori, será necessário definir um equivalente dual dos operadores Φ_τ e Ψ_τ , que serão os adjuntos dos operadores, assim, será necessário definir um operador de tempo-reflexão $\mathbf{R}_\tau \in \mathcal{L}(L^2([0, \infty); U))$, definido $\forall \tau > 0$, por

$$(\mathbf{R}_\tau u)(t) = \begin{cases} u(\tau - t) & , t \in [0, \tau], \\ 0 & , t > \tau. \end{cases} \quad (31)$$

Definição 4.6 (Espaço Dual [10]). *Seja V um espaço vetorial. Será denotado por V^* o **espaço dual** de V , caracterizado por ser o espaço de todos os funcionais lineares de V . A norma de V^* será definida por:*

$$\|f\|_{V^*} = \sup_{\substack{\|x\| \leq 1 \\ x \in V}} |f(x)|.$$

Em espaços de Hilbert, a dualidade¹ irá basicamente estabelecer uma correspondência biunívoca entre os elementos do espaço vetorial V com os elementos do seu espaço dual V^* .

Lema 4.3. *Obtém-se que:*

1. $\mathbf{R}_\tau^* = \mathbf{R}_\tau$;
2. $\mathbf{R}_\tau^2 = \mathbf{R}_\tau \mathbf{R}_\tau = \mathbf{P}_\tau$.

¹ Os Teoremas de Riesz-Fischer e de Representação de Riesz são importantes para compreender os aspectos de dualidade de espaços de Hilbert e podem ser encontrados em [1] e [10].

Demonstração. Inicialmente, será garantido que: $\mathbf{R}_\tau^* = \mathbf{R}_\tau$:

$$\begin{aligned}
 \langle \mathbf{R}_\tau u, v \rangle_{L^2} &= \int_0^\infty \mathbf{R}_\tau u(t) \cdot \overline{v(t)} dt \\
 &= \int_0^\tau u(\tau - t) \cdot \overline{v(t)} dt && \text{(definição do operador)} \\
 &= - \int_\tau^0 u(r) \cdot \overline{v(\tau - r)} dr && \text{(mudança de variável } t = \tau - r) \\
 &= \int_0^\tau u(r) \cdot \overline{v(\tau - r)} dr && \text{(troca dos limites de integração)} \\
 &= \int_0^\infty u(r) \cdot \overline{\mathbf{R}_\tau v(r)} dr && \text{(definição do operador)} \\
 &= \langle u, \mathbf{R}_\tau v \rangle_{L^2}.
 \end{aligned}$$

Logo, por definição de operador adjunto (2.24), $\mathbf{R}_\tau^* = \mathbf{R}_\tau$.

Por outro lado, pode-se garantir o segundo item. Supondo uma função $u(t)$ e aplicando \mathbf{R}_τ^2 nessa função, teremos de maneira equivalente a aplicação de \mathbf{R}_τ duas vezes na função, isto é:

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{R}_\tau^2 u)(t) &= \mathbf{R}_\tau(\mathbf{R}_\tau u)(t) \\
 &= \mathbf{R}_\tau(u(\tau - t)) && \text{(definição do operador)} \\
 &= u(\tau - (\tau - t)) \\
 &= u(t) \\
 &= \mathbf{P}_\tau u(t), \text{ para todo } t \in [0, \tau].
 \end{aligned}$$

■

A seguir, define-se, a partir do sistema Σ (26), o sistema Σ^d dual, dado por:

$$\Sigma^d := \begin{cases} \dot{z}^d(t) = A^* z^d(t) + C^* w^d(t) \\ u^d(t) = B^* z^d(t), \end{cases} \quad (32)$$

em que $w^d(t) \in W$ é a função de entrada de Σ^d em t , $z^d(t) \in X$ é o estado no tempo t e $u^d(t) \in U$ é a função de saída em t . Desse modo, Φ_τ^d denotará os mapas de entrada e Ψ_τ^d os mapas de saída de Σ^d .

Definição 4.7 (Observabilidade e Controlabilidade de Σ). *O sistema Σ (ou o par (A, C)) é observável se para algum $\tau > 0$, tivermos $\text{Ker } \Psi_\tau = \{0\}$. O sistema Σ (ou o par (A, B)) é controlável se para algum $\tau > 0$, tivermos $\text{Im } \Phi_\tau = X$.*

Proposição 4.4. *Para todo $\tau > 0$, tem-se que $\Phi_\tau^* = \mathbf{R}_\tau \Psi_\tau^d$.*

Demonstração. Sejam $x \in X$ e $u \in L^2([0, \infty); U)$, então²:

$$\begin{aligned}
 \langle \Phi_\tau u, x \rangle_{X \times X} &= \left\langle \int_0^\tau e^{(\tau-\sigma)A} B u(\sigma) d\sigma, x \right\rangle \\
 &= \int_0^\tau \left\langle e^{(\tau-\sigma)A} B u(\sigma), x \right\rangle d\sigma \\
 &= \int_0^\tau \left\langle u(\sigma), \left[e^{(\tau-\sigma)A} B \right]^* x \right\rangle d\sigma && \text{(Definição 2.24)} \\
 &= \int_0^\tau \left\langle u(\sigma), B^* \left[e^{(\tau-\sigma)A} \right]^* x \right\rangle d\sigma && \text{(Proposição 2.7-3)} \\
 &= \int_0^\tau \left\langle u(\sigma), B^* e^{(\tau-\sigma)A^*} x \right\rangle d\sigma && \text{(Apêndice A)} \\
 &= \int_0^\tau \left\langle u(\sigma), \mathbf{R}_\tau \left[B^* e^{\sigma A^*} x \right] \right\rangle d\sigma && \text{(definição de } \mathbf{R}_\tau \text{)} \\
 &= \int_0^\infty \left\langle u(\sigma), \left[\mathbf{R}_\tau \Psi_\tau^d x \right] (\sigma) \right\rangle d\sigma \\
 &= \left\langle u, \mathbf{R}_\tau \Psi_\tau^d x \right\rangle_{L^2 \times L^2}.
 \end{aligned}$$

Portanto, $\Phi_\tau^* = \mathbf{R}_\tau \Psi_\tau^d$. ■

Lema 4.5. *Os seguintes resultados são válidos:*

² Observe que, a integral pode "sair" do produto interno, uma vez este é contínuo e trata-se de um produto de vetores em que x é constante.

1. $\text{Ker } \mathbf{R}_\tau \Psi_\tau = \text{Ker } \Psi_\tau;$
2. $\text{Im } \Phi_\tau \mathbf{R}_\tau = \text{Im } \Phi_\tau;$
3. $(\text{Im } \Phi_\tau)^{\perp\perp} = \text{Im } \Phi_\tau.$

Demonstração. Inicialmente, será garantido o primeiro item, isto é: $\text{Ker } \mathbf{R}_\tau \Psi_\tau = \text{Ker } \Psi_\tau$. Observe que:

$$\begin{aligned} x \in \text{Ker } \mathbf{R}_\tau \Psi_\tau &\iff \mathbf{R}_\tau \Psi_\tau x = 0 \\ &\iff \Psi_\tau x = 0 \\ &\iff x \in \text{Ker } \Psi_\tau. \end{aligned}$$

Para o segundo item, ou seja, $\text{Im } \Phi_\tau \mathbf{R}_\tau = \text{Im } \Phi_\tau$, veja que:

$$\begin{aligned} v \in \text{Im } \Phi_\tau &\iff v = \Phi_\tau u; \quad u \in L^2([0, \infty); U) \\ &= \Phi_\tau \mathbf{P}_\tau u && \text{(Lema 4.1)} \\ &= \Phi_\tau \mathbf{R}_\tau^2 u && \text{(Lema 4.3)} \\ &= \Phi_\tau \mathbf{R}_\tau (\mathbf{R}_\tau u) \\ &= \Phi_\tau \mathbf{R}_\tau w; \quad w = (\mathbf{R}_\tau u) \\ &\iff v \in \text{Im } \Phi_\tau \mathbf{R}_\tau. \end{aligned}$$

Para o último resultado $(\text{Im } \Phi_\tau)^{\perp\perp} = \text{Im } \Phi_\tau$, observe que, pela Proposição 2.4:

$$\text{Im } \Phi_\tau^{\perp\perp} = \overline{\text{Im } \Phi_\tau}.$$

Note que $\text{Im } \Phi_\tau$ é um espaço vetorial³ e Φ_τ um operador linear limitado, ou seja, contínuo, então a $\text{Im } \Phi_\tau$ será fechada no sentido de conter todos os limites de todas as seqüências de funções que possui. Logo, $(\text{Im } \Phi_\tau)^{\perp\perp} = \text{Im } \Phi_\tau$. ■

³ O operador linear limitado considerado é também fechado. Para mais informações verificar [9] p. 291.

Corolário 4.6. Para todo $\tau > 0$ tem-se que $\text{Im } \Phi_\tau = (\text{Ker } \Psi_\tau^d)^\perp$.

Demonstração. Usando da Proposição 2.7-1 e fazendo algumas substituições, com base no que foi obtido na Proposição 4.4, obtém-se que:

$$\begin{aligned} (\text{Im } \Phi_\tau^*)^\perp &= \text{Ker } \Phi_\tau && \text{(Proposição 2.7-1)} \\ (\text{Im } \Phi_\tau^{**})^\perp &= \text{Ker } \Phi_\tau^* && \text{(aplicando adjunto)} \\ (\text{Im } \Phi_\tau)^\perp &= \text{Ker } \Phi_\tau^* && \text{(Proposição 2.7-5)} \\ &= \text{Ker } \mathbf{R}_\tau \Psi_\tau^d && \text{(Proposição 4.4)} \\ &= \text{Ker } \Psi_\tau^d && \text{(argumento do Lema 4.5)} \\ (\text{Im } \Phi_\tau)^{\perp\perp} &= (\text{Ker } \Psi_\tau^d)^\perp \\ \text{Im } \Phi_\tau &= (\text{Ker } \Psi_\tau^d)^\perp. && \text{(Lema 4.5-3)} \end{aligned}$$

Garantindo portanto, a igualdade desejada. ■

Corolário 4.7. $\text{Im } \Phi_\tau = X$ se, e somente se, $\text{Ker } \Psi_\tau^d = \{0\}$.

Demonstração. Este resultado é uma consequência direta do corolário anterior, em conjunto com a aplicação das definições e resultados obtidos para controlabilidade e observabilidade relacionados à sobrejetividade e injetividade, respectivamente. Observe que, pelo Teorema 2.5:

$$X = \text{Im } \Phi_\tau \oplus (\text{Im } \Phi_\tau)^\perp.$$

Como vislumbrado em um dos passos da demonstração do Corolário 4.6:

$$(\text{Im } \Phi_\tau)^\perp = \text{Ker } \Psi_\tau^d.$$

Assim, efetuando as devidas substituições:

$$X = \text{Im } \Phi_\tau \oplus \text{Ker } \Psi_\tau^d.$$

É evidente que, $\text{Im } \Phi_\tau = X \iff \text{Ker } \Psi_\tau^d = \{0\}$. ■

Corolário 4.8. *O sistema Σ ou o par (A, B) será controlável se, e somente se, o sistema Σ^d ou o par (A^*, B^*) for observável.*

O corolário anterior é um resultado direto do Corolário 4.7. Estes resultados permitem evidenciar a dualidade entre os sistemas Σ e Σ^d . A dualidade pode ser muito útil em casos em que se torna mais simples analisar o problema dual, afinal, resolver o problema dual implica em resolver o problema equivalente no espaço original. Então pode-se usar a resolução de problemas no dual como uma estratégia que facilitará a obtenção do resultado desejado. Na seção seguinte, serão evidenciadas mais propriedades relativas aos sistemas estudados, visando garantir os Teoremas de Kalman para a controlabilidade e para a observabilidade. Como preparação para o que foi elucidado e aproveitando o contexto, será apresentado a seguir mais um resultado acerca dos operadores duais.

Corolário 4.9. *Temos que $\Psi_\tau^* = \Phi_\tau^d \mathbf{R}_\tau$ e $\text{Ker } \Psi_\tau = (\text{Im } \Phi_\tau^d)^\perp$.*

Demonstração. Inicialmente, será garantido que $\Psi_\tau^* = \Phi_\tau^d \mathbf{R}_\tau$. Para isso usaremos o resultado obtido na Proposição 4.4 e o aplicaremos em Σ^d , isto é:

$$\begin{aligned}
 \Phi_\tau^* &= \mathbf{R}_\tau \Psi_\tau^d \implies (\Phi_\tau^d)^* = \mathbf{R}_\tau \Psi_\tau \\
 \mathbf{R}_\tau (\Phi_\tau^d)^* &= \mathbf{R}_\tau \mathbf{R}_\tau \Psi_\tau && \text{(aplicação de } \mathbf{R}_\tau) \\
 \mathbf{R}_\tau (\Phi_\tau^d)^* &= \mathbf{R}_\tau^2 \Psi_\tau \\
 &= \mathbf{P}_\tau \Psi_\tau && \text{(Lema 4.3-2)} \\
 &= \Psi_\tau && \text{(Lema 4.2)} \\
 (\mathbf{R}_\tau (\Phi_\tau^d)^*)^* &= (\Psi_\tau)^* && \text{(aplicação adjunto)} \\
 ((\Phi_\tau^d)^*)^* (\mathbf{R}_\tau)^* &= (\Psi_\tau)^* && \text{(Proposição 2.7-3)} \\
 \Phi_\tau^d (\mathbf{R}_\tau)^* &= (\Psi_\tau)^* && \text{(Proposição 2.7-5)} \\
 \Phi_\tau^d \mathbf{R}_\tau &= \Psi_\tau^* && \text{(Lema 4.3-1)}
 \end{aligned}$$

Por outro lado, para garantir a segunda igualdade enunciada, será aplicada a imagem em ambos os lados da última igualdade obtida nessa prova, ou seja:

$$\begin{aligned} \text{Im } \Phi_\tau^d \mathbf{R}_\tau &= \text{Im } \Psi_\tau^* \\ \text{Im } \Phi_\tau^d &= \text{Im } \Psi_\tau^* && \text{(Lema 4.5-2)} \\ (\text{Im } \Phi_\tau^d)^\perp &= (\text{Im } \Psi_\tau^*)^\perp && \text{(aplicando o ortogonal)} \\ (\text{Im } \Phi_\tau^d)^\perp &= \text{Ker } \Psi_\tau. && \text{(Proposição 2.7-1)} \end{aligned}$$

Portanto, $\Psi_\tau^* = \Phi_\tau^d \mathbf{R}_\tau$ e $\text{Ker } \Psi_\tau = (\text{Im } \Phi_\tau^d)^\perp$. ■

4.4 O TEOREMA DE KALMAN

As condições de Kalman, tanto para o problema da observabilidade, quanto para o problema da controlabilidade, colocam-se como ferramentas essenciais na teoria de dimensão finita. Isso se dá pelo fato de que as condições de Kalman, dadas pelos teoremas que serão apresentados a seguir, conseguem resolver muitos dos problemas de observabilidade/controlabilidade de sistemas lineares e ainda conseguem auxiliar na resolução de problemas não lineares, como será visto posteriormente. O resultado dado por [33] leva os problemas de controle e observabilidade para um patamar simples, no qual é necessário fazer apenas um estudo acerca do posto de determinadas matrizes. Antes de apresentar os teoremas que elucidam esses resultados, serão apresentados mais resultados prévios que auxiliarão nas demonstrações dos Teoremas de Kalman.

Proposição 4.10. *Tem-se que, $\forall \tau > 0$,*

$$\text{Ker}\Psi_\tau = \text{Ker} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}, \quad (33)$$

em que $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$.

Demonstração. Inicialmente, será denotado

$$\mathcal{A}(A, C) = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix},$$

em que $\mathcal{A}(A, C) \in \mathbb{R}^{(ln) \times n}$.

Note que, para garantir a igualdade dada em (33) deve-se provar que:

- 1.) $\text{Ker}\Psi_\tau \subset \text{Ker}\mathcal{A}(A, C)$;
- 2.) $\text{Ker}\mathcal{A}(A, C) \subset \text{Ker}\Psi_\tau$.

Para $\tau > 0$, em que:

$$(\Psi_\tau x)(t) := \begin{cases} w(t) & , \text{ para } t \in [0, \tau], \\ 0 & , \text{ para } t > \tau, \end{cases} \quad (34)$$

para o qual, $w(t) = Ce^{At}x, t > 0$ e $\Psi_\tau x$ é um truncamento em $[0, \tau]$.
Derivando $w(t)$ em respeito a t , $(m - 1)$ vezes, temos para $t \in [0, \tau]$:

$$\begin{aligned}
 w(t) &= Ce^{At}x \\
 w'(t) &= CAe^{At}x \\
 w''(t) &= CA^2e^{At}x \\
 &\vdots \\
 w^{(m-1)}(t) &= CA^{(m-1)}e^{At}x
 \end{aligned}$$

Logo, usando de um argumento indutivo, pode-se afirmar que:

$$w^{(n)}(t) = CA^n e^{At}x, \forall n \geq 0, t \geq 0. \quad (35)$$

Seja $x \in \text{Ker}\Psi_\tau$, então $\Psi_\tau x = 0$, isto é $w(t) = 0$, para $t \in [0, \tau]$. Sendo assim, $w^{(n)}(0) = 0$. De (35), obtém-se que $CA^n x = 0, n \geq 0$. Desse modo, fazendo o devido agrupamento, obtém-se:

$$\mathcal{A}(A, C) \cdot x = 0.$$

O que significa que x está no espaço nulo de $\mathcal{A}(A, C)$, isto é, $x \in \text{Ker}\mathcal{A}(A, C)$. Isto garante que $\text{Ker}\Psi_\tau \subset \text{Ker}\mathcal{A}(A, C)$.

Agora, seja $x \in \text{Ker}\mathcal{A}(A, C)$, em consequência $CA^k x = 0$, para $0 \leq k \leq n - 1$. Como consequência do Teorema de Cayley-Hamilton⁴, tem-se que as potências de A^k , para $k \geq n$, são combinações lineares das potências inferiores a n , isto é:

$$a_{k,0}I + a_{k,1}A + a_{k,2}A^2 + \dots + a_{k,(n-1)}A^{(n-1)} = A^k.$$

Aplicando C à esquerda e x à direita desse polinômio matricial, obtém-se:

$$\underbrace{a_{k,0}Cx + a_{k,1}CAx + a_{k,2}CA^2x + \dots + a_{k,(n-1)}CA^{(n-1)}x}_{=0 \text{ (pela hipótese)}} = CA^k x.$$

⁴ Seja $p = p(x)$ o polinômio característico de uma matriz P , então $p(P) = 0$.

Desse modo, $CA^k x = 0, \forall k \geq n$. Observe que, a expansão em séries de Taylor da exponencial matricial é dada por:

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}.$$

A partir da expansão dada acima, serão aplicados C e x na expansão, logo, dada a convergência da série, obtém-se:

$$Ce^{At}x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{CA^k t^k x}{k!}.$$

Porém, uma vez que $CA^k x = 0, \forall k \geq 0$, então $Ce^{At}x = 0$. Logo, $x \in \text{Ker } \Psi_{\tau}$, afinal:

$$(\Psi_{\tau}x)(t) := \begin{cases} Ce^{At}x & , \text{ para } t \in [0, \tau], \\ 0 & , \text{ para } t > \tau. \end{cases}$$

Por fim, $\text{Ker } \mathcal{A}(A, C) \subset \text{Ker } \Psi_{\tau}, \forall \tau > 0$. Portanto, $\text{Ker } \mathcal{A}(A, C) = \text{Ker } \Psi_{\tau}$.

■

O próximo resultado apresentado será a condição de Kalman para a observabilidade, que é o resultado mais importante para garantir a observabilidade de um sistema linear finito.

Teorema 4.11 (Condição de Kalman para Observabilidade). *O sistema (30) é observável em $[0, \tau]$ se, e somente se:*

$$\text{rank} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n,$$

em que $A \in \mathbb{R}^{n \times n}, C \in \mathbb{R}^{l \times n}$.

Demonstração. Note que, pelos resultados apresentados no Teorema 2.3, para uma transformação $T : V \rightarrow W$, tem-se que:

$$\dim(\text{Ker}(T)) + \dim(\text{Im}(T)) = \dim(V).$$

Aplicando tal resultado e mantendo a notação da proposição anterior, obtém-se:

$$\begin{aligned} n &= \dim(\text{Ker } \mathcal{A}(A, C)) + \dim(\text{Im } \mathcal{A}(A, C)) \\ &= \dim(\text{Ker}(\Psi_\tau)) + \dim(\text{Im } \mathcal{A}(A, C)) \end{aligned}$$

Portanto, $\text{Ker}(\Psi_\tau) = \{0\}$ se, e somente se, $\dim(\text{Im } \mathcal{A}(A, C))$.

Isto é, a observabilidade do sistema (30), equivale ao fato de $\text{rank } \mathcal{A}(A, C) = n$.

■

Resultado 1. *Decorre de Kalman que, se um sistema linear é observável em um intervalo de tempo $[0, \tau]$, o sistema será observável em todo tempo.*

Na sequência estarão elucidados os resultados envolvendo a condição de Kalman para a controlabilidade. Do mesmo modo que ocorreu para a observabilidade, será necessário apresentar um resultado preliminar, que consta a seguir.

Corolário 4.12. *Temos, para todo $\tau > 0$,*

$$\text{Im } \Phi_\tau = \text{Im} \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}.$$

Demonstração. Inicialmente será aplicada a Proposição 4.10 em Σ^d e, em seguida, será aplicado o ortogonal, obtendo:

$$\begin{aligned} (\text{Ker } \Psi_\tau^d)^\perp &= \left(\text{Ker} \begin{bmatrix} B^* \\ B^* A^* \\ B^* (A^*)^2 \\ \vdots \\ B^* (A^*)^{n-1} \end{bmatrix} \right)^\perp \\ &= \left(\text{Ker} \begin{bmatrix} B & AB & A^2 B & \dots & A^{n-1} B \end{bmatrix}^* \right)^\perp. \end{aligned}$$

Agora, a partir da aplicação da Proposição 2.7-2. no lado direito da igualdade acima apresentada, obtém-se:

$$(\text{Ker } \Psi_\tau^d)^\perp = \text{Im} \begin{bmatrix} B & AB & A^2 B & \dots & A^{n-1} B \end{bmatrix}.$$

Por fim, através do resultado do Corolário 4.6:

$$\text{Im} \begin{bmatrix} B & AB & A^2 B & \dots & A^{n-1} B \end{bmatrix} = \text{Im } \Phi_\tau.$$

■

A partir do corolário acima apresentado, podem-se destacar algumas informações. Por exemplo, o Corolário 4.12 implica que $\text{Im } \Phi_\tau$ não depende de τ , ademais, o espaço obtido com $\text{Im } \Phi_\tau$ será dito **espaço controlável do sistema** Σ (ou do par (A, B)). O próximo resultado será o Teorema de Kalman para a teoria de controlabilidade.

Teorema 4.13 (Condição de Kalman para Controlabilidade). *O sistema (29) é controlável se, e somente se:*

$$\text{rank} \begin{bmatrix} B & AB & A^2 B & \dots & A^{n-1} B \end{bmatrix} = n, \quad (36)$$

em que, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$.

Demonstração. A demonstração para esse resultado é simples, dada toda a construção da teoria e resultados obtidos até então. Observe

que a controlabilidade está associada ao fato de que a imagem do operador deve coincidir com o espaço todo, isto é: $\text{Im } \Phi_\tau = X$, em que:

$$\dim(\text{Im } \Phi_\tau) = \dim \left(\text{Im} \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \right).$$

Note que, dadas as dimensões de A e B , então, a condição de controlabilidade de que a imagem deve coincidir com X equivale ao rank ser n .



Resultado 2. *Se a matriz de (36) possuir n colunas linearmente independentes, deduz-se que o sistema linear associado é controlável em todo tempo $\tau > 0$.*

4.5 APLICAÇÕES

Nesta seção serão destacados, por meio de situações hipotéticas desenvolvidas pela autora, cenários nos quais será possível visualizar a aplicação e uso da teoria de controle e observabilidade linear. Na Seção 4.5.1 será abordada a controlabilidade do modelo farmacodinâmico, que é um modelo da área farmacológica. A modelagem e teoria acerca do modelo encontram-se em [34] e [35]. Por outro lado, na Seção 4.5.2 e na Seção 4.5.3 encontram-se, respectivamente, a aplicação da teoria de controle e de observabilidade em (23), a partir de objetivos específicos que serão destacados a seguir.

4.5.1 Modelo Farmacológico: Farmacodinâmica

Os fármacos são drogas responsáveis pelo tratamento e prevenção de diversas doenças e sintomas, nesse sentido, a farmacodinâmica é responsável por analisar a resposta do organismo a esses fármacos,

que não agem em qualquer local. Os sítios de ação representarão no organismo os locais nos quais os fármacos interagem, visando promover uma resposta física ou farmacológica no indivíduo. Desse modo, a ligação entre determinados sítios irá acarretar na resposta farmacológica do indivíduo. O modelo farmacodinâmico será descrito a seguir.

Sejam $\mathbf{A}(t)$ o número de sítios ativos (livres) e $I(t)$ o número de sítios inativos (ligados). Será considerado que nenhum sítio é criado. Então $\mathbf{A}(t) + I(t) = \mathbf{n}$. A partir de tais considerações, tem-se o seguinte modelo:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{A}} &= \alpha I - \beta \mathbf{A} \mathbf{c} \\ \dot{I} &= \beta \mathbf{A} \mathbf{c} - \alpha I, \end{cases} \quad (37)$$

em que $\mathbf{A}(0) = \mathbf{n}$ e $I(0) = 0$. Ademais, a taxa de ligação é proporcional à quantidade $\mathbf{c}(t)$ de droga, bem como ao número de sítios ativos disponíveis, logo $\beta \mathbf{A} \mathbf{c}$ será a taxa de ligação dos sítios ativos. Além disso, αI representará as taxas nas quais os conjuntos ligados são liberados.

Observe que (37) trata-se de um sistema de equações diferenciais lineares. Será feita a inserção do controle na equação dos sítios ativos, visando controlá-los, obtendo-se (38). Em seguida, será realizada uma análise, fazendo uso da teoria de controle, anteriormente explicitada, para verificar se é possível controlar tal sistema.

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{A}} &= \alpha I - \beta \mathbf{A} \mathbf{c} + u \\ \dot{I} &= \beta \mathbf{A} \mathbf{c} - \alpha I. \end{cases} \quad (38)$$

Para a análise do controle, tome:

$$z = \begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ I \end{pmatrix}.$$

Em seguida, será definido z' tal que:

$$z' = \underbrace{\begin{pmatrix} -\beta\mathbf{c} & \alpha \\ \beta\mathbf{c} & -\alpha \end{pmatrix}}_{=A} \begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ I \end{pmatrix}; \quad \mathbf{c} = \mathbf{c}(t).$$

Para fins de aplicação na teoria de EDOs autônomas, será assumido \mathbf{c} como uma constante. Logo, obtém-se o seguinte sistema:

$$\begin{cases} z' &= Az \\ z(0) &= \begin{pmatrix} \mathbf{n} \\ 0 \end{pmatrix}. \end{cases} \quad (39)$$

Logo,

$$z' = Az + \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix}.$$

E a matriz de controle (B) será dada conforme segue, uma vez que almeja-se controlar apenas os sítios ativos (primeira equação).

$$Bu = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u.$$

Dando início a aplicação da teoria de controle linear, note que, para $[B \ AB]$, tem-se:

$$AB = \begin{pmatrix} -\beta\mathbf{c} & \alpha \\ \beta\mathbf{c} & -\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta\mathbf{c} \\ \beta\mathbf{c} \end{pmatrix}$$

$$\implies [B \ AB] = \begin{pmatrix} 1 & -\beta\mathbf{c} \\ 0 & \beta\mathbf{c} \end{pmatrix}.$$

Portanto, garante-se o controle do sistema, aplicando o Teorema de Kalman (controle) se, e somente se $\beta\mathbf{c} \neq 0$. Afinal, somente neste caso, a matriz $[B \ AB]$ terá posto completo.

4.5.2 Modelo Biológico: Competição de espécies (Controlabilidade)

A partir do uso de (23), será considerado y como uma população de zebras e x a população de gnus. Ambos os animais competem pelo mesmo alimento no ambiente em que vivem. Para essa situação, será objetivado que a população de gnus seja controlada, visando que, em um cenário hipotético, ela não acabe crescendo descontroladamente, diminuindo assim, a quantidade de alimento à disposição das zebras, que seriam afetadas negativamente. Para tanto, será considerado o modelo que consta em (23) com a inserção de um controle u na primeira equação:

$$\begin{cases} \dot{x} &= n_1x - k_1y + u \\ \dot{y} &= n_2y - k_2x. \end{cases} \quad (40)$$

Observe que, $\dot{z} = Az$, em que A será dada por:

$$A = \begin{pmatrix} n_1 & -k_1 \\ -k_2 & n_2 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Desse modo,

$$AB = \begin{pmatrix} n_1 \\ -k_2 \end{pmatrix}.$$

Portanto, se $k_2 \neq 0$,

$$\text{rank} [B \ AB] = \text{rank} \begin{pmatrix} 1 & n_1 \\ 0 & -k_2 \end{pmatrix} = 2.$$

Assim, através da aplicação do Teorema de Kalman (controle), vê-se que o sistema dado em (40) é controlável (afinal, $k_2 > 0$) para o problema proposto.

4.5.3 Modelo Biológico: Competição de espécies (Observabilidade)

Para a aplicação da teoria de observabilidade, assim como no tópico anterior, será considerado o sistema (23), considerando y uma população de vacas e x uma população de ovelhas. É possível afirmar que ambas as espécies competem pelo mesmo alimento no local em que convivem, afetando de maneira indireta o desenvolvimento uma da outra. Serão consideradas duas situações hipotéticas, uma na qual é possível observar ambas as populações e outra em que é possível observar de maneira eficaz apenas a população de ovelhas. Almeja-se descobrir a população inicial y_0 em um tempo T da população de vacas do ambiente observado. Para os casos analisados, a observação de ambas as populações, bem como apenas a observação do número de ovelhas, poderão oferecer informações suficientes acerca do estado inicial do sistema, no caso em que o sistema, com a aplicação da matriz de observabilidade adequada, for verificado como sendo um sistema observável. Ou seja, a partir da informação observável de ambas populações e/ou apenas do número de ovelhas, caso o sistema respectivo para cada situação verifique-se como observável, será possível inferir acerca das populações iniciais em um tempo T específico.

Para a aplicação da teoria de observabilidade será considerado o sistema dado em (23) com as hipóteses anteriormente citadas. Note que, para esse sistema, $\dot{z} = Az$.

Para o primeiro caso, a matriz de observabilidade C terá entradas em ambas suas componentes (representando a observação de ambas as espécies), então:

$$\dot{z} = \underbrace{\begin{pmatrix} n_1 & -k_1 \\ -k_2 & n_2 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ e } C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$CA = \begin{pmatrix} n_1 - k_2 & -k_1 + n_2 \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$\text{rank} \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ n_1 - k_2 & -k_1 + n_2 \end{pmatrix}.$$

A matriz de Kalman para a observabilidade $[C \ CA]^T$, só terá posto total, isto é, $\text{rank} = 2$ se o Teorema 2.1 for satisfeito. Note que:

$$\det([C \ CA]^T) = -k_1 + n_2 - n_1 + k_2.$$

Logo, se $(-k_1 + n_2 - n_1 + k_2) \neq 0$, então o problema será observável.

Para o segundo caso, a matriz de observabilidade C terá entradas apenas em sua primeira componente (relacionada à equação da população de ovelhas), então:

$$\dot{z} = \underbrace{\begin{pmatrix} n_1 & -k_1 \\ -k_2 & n_2 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ e } C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Desse modo,

$$CA = \begin{pmatrix} n_1 & -k_1 \end{pmatrix}.$$

Portanto,

$$\text{rank} \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n_1 & -k_1 \end{pmatrix} = 2.$$

Então o problema será observável, afinal:

$$\det([C \ CA]^T) = -k_1 \neq 0.$$

Assim, usando o Teorema de Kalman (observabilidade), verifica-se que o modelo linear que representa a competição entre espécies é observável para ambos os problemas propostos (segundo as restrições

impostas). Ou seja, tanto a partir da observação de ambas as espécies, quanto apenas da observação da população de ovelhas, será possível inferir sobre a população de vacas no início da dinâmica, isto é, $y(0)$. É importante ressaltar que, para além do que foi objetivado, também será possível evidenciar a população de ovelhas no início da dinâmica, isto é, $x(0)$.

5 CONTROLABILIDADE DE SISTEMAS NÃO LINEARES

No capítulo anterior foram elucidadas poderosas ferramentas de controlabilidade, que são aplicadas a sistemas lineares, no entanto, a maior parte dos sistemas que representam a realidade com um pouco mais de fidedignidade são sistemas não lineares. Nesse contexto, as ferramentas vistas no Capítulo 4 não se aplicariam, a priori, em um sistema não linear, como é o caso do modelo de Lotka-Volterra. Neste capítulo será feito um esforço no sentido de apresentar um teorema muito útil para resolver o problema anteriormente apresentado: o Teorema do Controle Local. O teorema foco de estudo deste capítulo irá garantir que, após algumas adequações no sistema não linear, por intermédio de processos de linearização, será possível aplicar as ferramentas vistas no Capítulo 4 das ferramentas de controle para sistemas lineares finitos. O teorema, porém, torna os resultados um pouco mais fracos, não garantindo uma controlabilidade do tipo global, isto é, em todo espaço, para todo tempo, assim como ocorre no caso dos sistemas lineares finitos. A teoria desenvolvida nesse capítulo tem embasamento na referência de [3] principalmente, mas também foram utilizados recursos de [1], [17] e [12] para complementar alguns detalhes. Outras referências utilizadas serão destacadas no decorrer do texto.

Ao longo deste capítulo, desenvolveremos os resultados com base no seguinte sistema não linear de controle:

$$\begin{cases} \dot{z} &= f(z, u) \\ z(0) &= z_0, \end{cases} \quad (41)$$

em que $z \in \mathbb{R}^n$ é o estado, $u \in \mathbb{R}^m$ é o controle, com $(z, u) \in \mathcal{O}$, sendo \mathcal{O} um subespaço não vazio de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Será assumido também que $f \in C^\infty(\mathcal{O}; \mathbb{R}^n)$ ¹. Para o principal resultado desse capítulo será

¹ Espaço das funções contínuas, diferenciáveis em qualquer ordem.

necessário reforçar o conceito de equilíbrio de (41). Para tanto, segue a definição.

Definição 5.1. *Um **equilíbrio** do sistema de controle (41) será um par $(z_e, u_e) \in \mathcal{O}$, de modo que:*

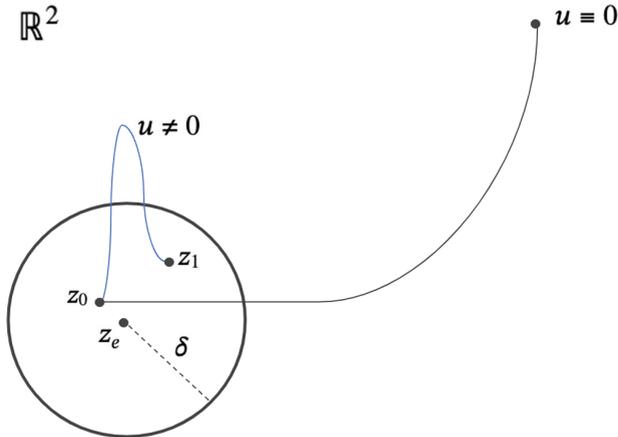
$$f(z_e, u_e) = 0.$$

Definição 5.2 (Controlabilidade Local). *Seja um tempo $T > 0$ e (z_e, u_e) um ponto de equilíbrio de (41). Dizemos que (41) é **localmente controlável** em torno do ponto de equilíbrio (z_e, u_e) , se $\exists \delta > 0; \forall z_0, z_1 \in \mathcal{B}_\delta(z_e)^2$, existe u , um controle, tal que a solução de (41) satisfaz $z(T) = z_1$.*

Uma ideia acerca da controlabilidade local pode ser averiguada através da análise da Figura 22. No caso em que o controle existe, será possível restringir o conjunto de resultados através de $\mathcal{B}_\delta(z_e)$. Ou seja, a partir de z_0 , com a perturbação gerada por um controle u , o nosso sistema alcançará z_1 em um tempo t determinado, de modo que $z_1, z_0 \in \mathcal{B}_\delta(z_e)$. Ou seja, as perturbações do controle são de pequeno porte, ficando próximas ao ponto de equilíbrio.

² A notação de bola aberta dada por $\mathcal{B}_\delta(z_e)$ é equivalente a: $|z_0 - z_e|_{\mathbb{R}^n} < \delta$ e $|z_1 - z_e|_{\mathbb{R}^n} < \delta$.

Figura 22 – Controlabilidade Local.



É importante destacar que a ideia de controlabilidade vislumbrada no Capítulo 4 trata-se de um controle global, no sentido de que conseguimos alcançar estados que não dependem de um determinado conjunto (como $\mathcal{B}_\delta(z_e)$). Por conta desta restrição, o resultado aqui obtido é mais fraco, mas não menos importante e interessante. Afinal, a depender da estabilidade dos pontos de equilíbrio será interessante efetuar perturbações que se mantenham em seu entorno, visando manter a estabilidade nestes resultados.

De acordo com [3], não existe uma condição necessária e suficiente que seja verificável para a controlabilidade local em sistemas de controle gerais. No entanto, há ferramentas poderosas que garantem condições necessárias ou suficientes para a controlabilidade local, como será visto no Teorema 5.2. Outras condições relacionam-se a ferramentas da Álgebra de Lie, podendo-se até obter condições necessárias e suficientes para sistemas de controle específicos.

Definição 5.3. O sistema de controle linearizado em torno da solução de equilíbrio (z_e, u_e) , será o sistema linear dado por:

$$\dot{z} = \underbrace{\frac{\partial F}{\partial z}(z_e, u_e)}_{=A} z + \underbrace{\frac{\partial F}{\partial u}(z_e, u_e)}_{=B} u, \quad t \in [0, T],$$

em que, para o tempo $t \in [0, T]$, o estado é $z(t) \in \mathbb{R}^n$ e o controle é $u(t) \in \mathbb{R}^m$.

Teorema 5.1 (Teorema da Função Inversa). Seja f de classe C^1 , isto é, f possui derivadas parciais contínuas de primeira ordem,

$$f : H \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n,$$

em que H é um conjunto aberto. Se $f'(a)$ for **invertível**, para algum $a \in H$ e $b = f(a)$. Então:

1. existem conjuntos abertos U e V em \mathbb{R}^n tais que $a \in U, b \in V$, f é biunívoca em U e $f(U) = V$;
2. se g for o inverso de f , definido em V por:

$$g(f(x)) = x, \quad x \in U,$$

então $g \in C^1(V)$.

O Teorema da Função Inversa determina condições sob as quais existe uma inversa local (em torno de um ponto), ou seja, permite determinar a invertibilidade de uma função em uma vizinhança em torno de um ponto no qual a função é diferenciável. Para a demonstração do teorema e mais resultados correlatos, recomenda-se a leitura da seção denominada *The Inverse Function Theorem* em [14].

A seguir será evidenciada a temática acerca do Axioma de Escolha, que terá um papel importante no desenvolvimento da demonstração do principal teorema deste capítulo. Existem diversas

equivalências entre diferentes resultados que se caracterizam como o "Axioma de Escolha", e a seguir, serão definidos dois [36].

Definição 5.4 (Axiomas de Escolha ³). *Os axiomas a seguir são equivalentes:*

1. **Função de escolha para subconjuntos:** *Seja X um conjunto não vazio, para cada subconjunto não vazio $S \subseteq X$ é possível escolher algum elemento $s \in S$. Desse modo, existe f que atribui a cada $S \subseteq X$ algum elemento representativo $f(S) \in S$;*
2. **Conjunto de Representantes:** *Seja $\{X_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ um conjunto não vazio de conjuntos não vazios que são dois a dois disjuntos. Então, existe um conjunto C que contém um elemento de cada X_λ .*

Teorema 5.2 (Teorema do Controle Local). ⁴ *Seja a solução de equilíbrio (z_e, u_e) , relacionada ao sistema de controle (41). Assumindo que o sistema de controle linearizado em (z_e, u_e) seja controlável, então, o sistema de controle não linear (41) é localmente controlável em torno de (z_e, u_e) .*

Demonstração. Seja \mathcal{F} a aplicação que relaciona um par dado por um ponto inicial a e um controle u a um par dado pelo ponto inicial e um ponto final, isto é:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : \mathbb{R}^n \times L^\infty((0, T); \mathbb{R}^m) &\rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \\ (a, u) &\mapsto \mathcal{F}(a, u) := (a, z(T)), \end{aligned}$$

³ O Lema de Zorn, um resultado matemático clássico, que afirma que todo conjunto ordenado não vazio que é indutivo tem um elemento maximal, pode ser considerado equivalente aos Axiomas de Escolha [10], [9]

⁴ Tal teorema trata-se de uma adaptação dos teoremas 3.6 e 3.8 de [3].

em que, $z : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é a solução do Problema de Cauchy⁵:

$$\dot{z} = f(z, u(t)), z(T) = a.$$

Como pode ser verificado em [3], \mathcal{F} está bem definido e é de classe C^1 em uma vizinhança de $(z_e, u_e) \in \mathbb{R}^n \times L^\infty((0, T); \mathbb{R}^m)$, com diferencial $\mathcal{F}'(z_e, u_e)$ dado pela seguinte transformação linear:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}' : \mathbb{R}^n \times L^\infty((0, T); \mathbb{R}^m) &\rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \\ (a, u) &\mapsto (a, z(T)), \end{aligned}$$

em que $z : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é a solução do Problema de Cauchy:

$$\dot{z} = \underbrace{\frac{\partial F}{\partial z}(z_e, u_e)}_{=A} z + \underbrace{\frac{\partial F}{\partial u}(z_e, u_e)}_{=B} u, \quad z(0) = a.$$

Segue da hipótese, ou seja, dada a controlabilidade do sistema de controle linearizado em torno do ponto de equilíbrio (z_e, u_e) , que $\mathcal{F}'(z_e, u_e)$ é sobrejetiva. Uma vez que $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ possui dimensão $2n$ (finita), garante-se a existência de um subespaço linear E de dimensão $2n$ tal que:

$$[\mathcal{F}'(z_e, u_e)](E) = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n. \quad (42)$$

A construção do subespaço linear E será feita buscando manter a sobrejetividade e garantindo a injetividade. Seja $\{e_j\}_{j=1}^{2n}$ uma base de \mathbb{R}^{2n} . Então,

$$G_j = \mathcal{F}'(z_e, u_e)^{-1}(\{e_j\}) \neq \emptyset; \quad j = \{1, 2, \dots, 2n\},$$

uma vez que $\mathcal{F}'(z_e, u_e)$ é sobrejetora, fazendo uso de um Axioma de Escolha, será considerado um $g_j \in G_j$. Logo, $\{g_j\}_{j=1}^{2n}$ é linearmente independente. De fato, observe que, supondo $\zeta_j \neq 0$ para algum j e

$$\sum \zeta_j g_j = 0, \text{ aplicando } \mathcal{F}'(z_e, u_e) \implies \mathcal{F}'(z_e, u_e) \left(\sum \zeta_j g_j \right) = 0.$$

⁵ Uma equação diferencial sujeita a uma condição inicial caracterizam um problema de Cauchy.

Em consequência,

$$\sum \zeta_j \mathcal{F}'(z_e, u_e)(g_j) = 0.$$

Mas, $\mathcal{F}'(z_e, u_e)(g_j) = e_j$, $\forall j \in \{1, 2, \dots, 2n\}$. Desse modo,

$$\sum \zeta_j e_j = 0,$$

o que implica que os vetores e_j são linearmente dependentes. No entanto, e_j define uma base de acordo com a nossa construção, então não podem ser linearmente dependentes, o que caracteriza uma contradição. Logo, o conjunto $\{g_j\}_{j=1}^{2n}$ é linearmente independente, como gostaríamos. Definamos $E = [g_1, g_2, \dots, g_{2n}]$, assim, define-se a função restrição bijetora dada em (42).

Agora, será aplicado o Teorema da Função Inversa 5.1 na restrição de \mathcal{F} para E , denotada $\mathcal{F}|_E$. Obtemos a existência de $\delta > 0$ e do mapa $\mathcal{G} = (\mathcal{F}|_E)^{-1}$ de classe C^1 de $\mathcal{B}_\delta(z_e) \times \mathcal{B}_\delta(z_e)$ em E , tal que,

$$\mathcal{G}(z_e, z_e) = (z_e, u_e) \in E \subset \mathbb{R}^n \times L^\infty((0, T); \mathbb{R}^m), \quad (43)$$

$$\mathcal{F} \circ \mathcal{G}(a, b) = (a, b), \forall (a, b) \in \mathcal{B}_\delta(z_e) \times \mathcal{B}_\delta(z_e). \quad (44)$$

Será denotado por:

$$\mathcal{G}(a, b) = (\mathcal{G}_1(a, b), \mathcal{G}_2(a, b)) \in \mathbb{R}^n \times L^\infty((0, T); \mathbb{R}^m),$$

para todo $(a, b) \in \mathcal{B}_\delta(z_e) \times \mathcal{B}_\delta(z_e)$. A partir de (44), obtém-se $\mathcal{G}_1(a, b) = a$ e, se $z : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ for a solução do Problema de Cauchy:

$$\dot{z} = f(z, \mathcal{G}_2(a, b)), z(0) = a$$

então, $z(T) = b$.

Isto é suficiente para verificar a controlabilidade local. Pois, dados $z_0, z_1 \in \mathcal{B}_\delta(z_e)$, existe $\bar{u} := \mathcal{G}_2(z_0, z_1)$, tal que:

$$\begin{cases} \dot{z} &= f(z, \bar{u}) \\ z(0) &= z_0 \\ z(T) &= z_1. \end{cases}$$

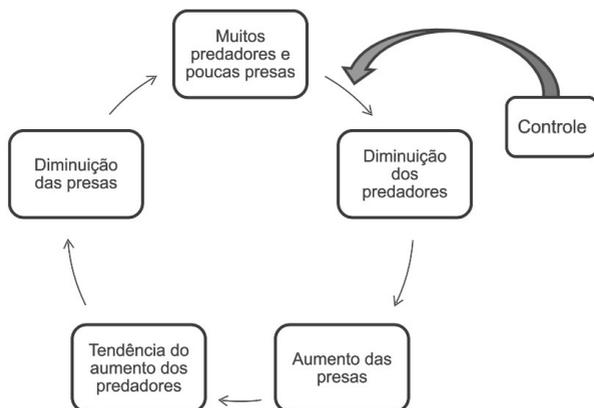
■

O teorema elucidado anteriormente é de extrema importância, uma vez que simplifica o problema do sistema não linear de controle (o qual envolve ferramentas mais complexas para manipulação) para um problema linear de controle, cujas ferramentas são de mais simples manipulação. Pode-se, portanto, reduzir o problema para análise de controlabilidade através dos Teoremas de Kalman, por exemplo.

5.1 APLICAÇÃO: MODELO DE LOTKA-VOLTERRA

Nesta seção, dado o modelo de Lotka-Volterra visto no Capítulo 3, será apresentada uma problemática visando controlar esse sistema. A partir de uma situação hipotética na qual há duas espécies coexistindo e tendo suas populações se desenvolvendo com base no modelo (11), será necessário controlar uma delas visando interromper o ciclo vislumbrado na Figura 3, como bem ilustra a Figura 23.

Figura 23 – Inserção de um controle na dinâmica cíclica do modelo de Lotka-Volterra.



Considerando a população de presas sendo representada por ratos e a população de predadores sendo representada por cobras, é visto, a partir do movimento cíclico do modelo, que em um dado momento da dinâmica a população de presas crescerá muito. Sabe-se que os ratos são transmissores de doenças aos seres humanos. Logo, uma situação que tenta ser evitada é aquela em que há uma população muito grande desses animais, vetores de doenças, próximos dos seres humanos. Supondo que essa dinâmica populacional (presa-predador) ocorra em um ambiente próximo a uma cidade, ou até mesmo em uma cidade, o objetivo será controlar as presas, visando que elas não cresçam exageradamente e se tornem pragas para a espécie humana. Matematicamente, a intenção será atingir um valor específico x_1 , que é a densidade populacional de presas em um instante $t = \tau$, através da inserção da perturbação u_1 na equação da presa, gerando então, um novo sistema. Para tanto, será necessário, assim como será visto

a seguir, o esforço de aplicar e correlacionar todos os conceitos e ferramentas apresentadas até então.

Como resultado do capítulo anterior, considerando o sistema não linear:

$$\begin{cases} \dot{z} &= f(z, u) \\ z(0) &= z_0, \end{cases} \quad (45)$$

em que, $z_0 = (x_0, y_0)$, $z = (x, y)$ e $u = (u_1, u_2)$. Obtém-se a seguinte aplicação de controlabilidade:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : \mathbb{R}^2 \times L^\infty((0, T); \mathbb{R}^2) &\rightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \\ (z_0, u) &\mapsto \mathcal{F}(z_0, u) := (z_0, z(T)). \end{aligned}$$

De modo que, o sistema (45) é controlável se, e somente se, \mathcal{F} é sobrejetora. No entanto, como vimos anteriormente, para um sistema não linear a sobrejetividade de toda a função \mathcal{F} não poderá ser garantida; somente em determinados conjuntos determinados por bolas centradas em pontos de equilíbrio do sistema e raio δ .

Aplicando as hipóteses no modelo de Lotka-Volterra (11), obtém-se o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} &= ax - cyx + u \\ \dot{y} &= -by + dxy. \end{cases} \quad (46)$$

Para a solução de equilíbrio serão considerados x, y e u constantes, isso significa que está sendo inserida uma população de alguma espécie u_e na dinâmica. Ademais, serão considerados a, b, c e d positivos e u_e não negativo, garantindo as hipóteses biológicas.

Será verificada a garantia do controle local em torno da solução de equilíbrio. No entanto, para esse processo, é necessário verificar os pontos de equilíbrio do sistema, que não serão os mesmos obtidos na Seção 3.2.1.2. Porém, a teoria utilizada para encontrar os pontos será a mesma vista anteriormente. Para o ponto de equilíbrio verificado

na Definição 5.3, dado por (z_e, u_e) , será considerado o z_e como uma dupla (x_e, y_e) , logo, estamos em busca de valores de x_e , y_e e u_e que satisfazem (47), e em consequência, definirão os pontos de equilíbrio $E_i = (x_e, y_e, u_e)$.

$$\begin{cases} 0 &= ax - cyx + u_e \\ 0 &= -by + dxy \end{cases} = \begin{cases} 0 &= x(a - cy) + u_e \\ 0 &= y(-b + dx). \end{cases} \quad (47)$$

Analisando $0 = y(-b + dx)$ verifica-se que $y = 0$ (caso 1) ou $x = \frac{b}{d}$ (caso 2). A partir do caso 1, ao substituir $y = 0$ na primeira equação de (47), obtém-se: $0 = xa + u_e$. Para garantir a igualdade do resultado, $x = \frac{-u_e}{a}$. Verifica-se que, tomando $u_e = 0$, implica $P_{E_1} = (0, 0, 0)$. Considerando, agora, $u_e \neq 0$, vê-se que x dependerá dos valores de u_e , logo, obtém-se o ponto $P_{E_2} = (\frac{-u_e}{a}, 0, u_e)$, que poderá variar a depender dos valores dos parâmetros e das variáveis.

Analisando o segundo caso, em que $x = \frac{b}{d}$, efetuando as devidas substituições do valor de x na primeira equação de (47), obtém-se: $y = \frac{a}{c} + \frac{u_e d}{bc}$, visualizando uma dependência de u_e , logo, para $u_e = 0$ resulta em $y = \frac{a}{c}$. Assim, encontra-se $P_{E_3} = (\frac{b}{d}, \frac{a}{c}, 0)$ e $P_{E_4} = (\frac{b}{d}, \frac{a}{c} + \frac{u_e d}{bc}, u_e)$, quando $u_e \neq 0$.

Note que, para $u_e = 0$, temos os casos triviais de pontos de equilíbrio obtidos na Seção 3.2.1.2 para o modelo de Lotka-Volterra original sem controle.

Dando sequência ao processo de linearização, como o controle u_1 é inserido apenas na primeira equação e mais nenhum controle distinto é também incluído no sistema, então a matriz de controle será $B = [1 \ 0]^T$. Para a linearização do sistema será aplicado o jacobiano, obtendo a matriz A :

$$A = \begin{pmatrix} a - cy_e & -cx_e \\ dy_e & -b + dx_e \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aplicando o Teorema de Kalman para Controle (4.13), é obtida a

seguinte matriz:

$$[B \ AB] = \begin{bmatrix} 1 & \begin{bmatrix} a - cy_e & -cx_e \end{bmatrix} \\ 0 & \begin{bmatrix} dy_e & -b + dx_e \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (48)$$

$$[B \ AB] = \begin{bmatrix} 1 & a - cy_e \\ 0 & dy_e \end{bmatrix}. \quad (49)$$

Vê-se que teremos o controle do sistema linearizado se, e somente se, a matriz $[B \ AB]$ obtida for de posto total, no caso $rank = 2$. Pode-se restringir as soluções descartando pontos de equilíbrio que satisfazem $dy_e = 0$, pois caso isso ocorra, teremos $rank = 1$. Logo, o problema de controle restringe-se a uma análise dos pontos de equilíbrio que satisfazem $dy_e \neq 0$. Revisitando os pontos obtidos e reduzindo os casos para dois pontos de equilíbrio genéricos E_1 e E_2 , obtém-se a tabela a seguir:

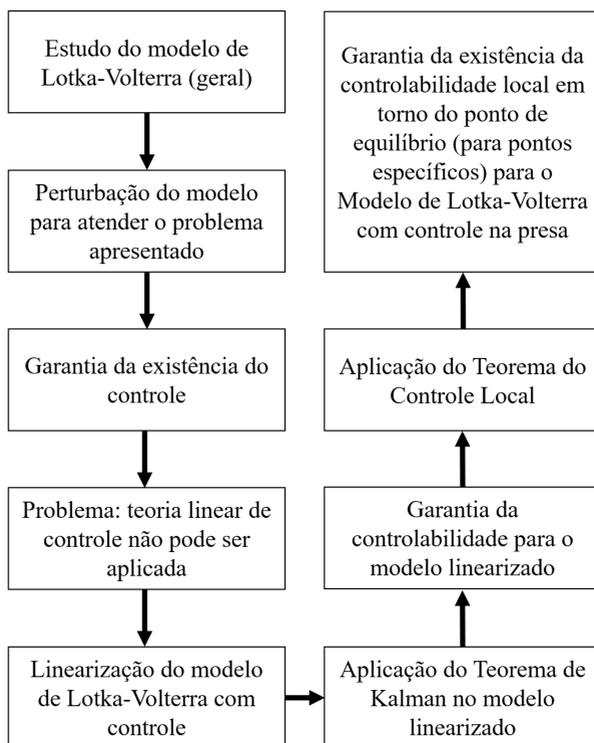
Tabela 2 – Pontos de equilíbrio obtidos para o sistema (46).

Controlabilidade local	$u_e = 0$	$u_e \neq 0$
Não é possível garantir	$E_1 = (0, 0, 0)$	$E_1 = \left(\frac{-u_e}{a}, 0, u_e\right)$
É garantida	$E_2 = \left(\frac{b}{d}, \frac{a}{c}, 0\right)$	$E_2 = \left(\frac{b}{d}, \frac{a}{c} + \frac{u_e d}{bc}, u_e\right)$

Desse modo, visando garantir $dy_e \neq 0 \iff y_e \neq 0$, o ponto de equilíbrio em torno do qual a linearização deve ser feita para garantir a controlabilidade do sistema linearizado e, em consequência a controlabilidade local em torno do ponto é o ponto E_2 , para ambos os casos ($u_e = 0$ ou $u_e \neq 0$). Portanto, para o problema apresentado, é possível verificar sim a existência de um controle local, porém somente em torno dos pontos de equilíbrio que possuem o formato apresentado em E_2 . Para os outros pontos não é possível garantir ou efetuar alguma afirmação com as ferramentas e resultados vistos nesse estudo. Como os procedimentos utilizados neste exemplo de aplicação foram muitos

e envolveram, de certa forma, toda a teoria desenvolvida nos capítulos anteriores, fez-se o esforço de apresentar, através de um fluxograma (Figura 24), todas as etapas utilizadas para encontrar o resultado almejado.

Figura 24 – Fluxograma das etapas seguidas para garantir a existência do controle local para o sistema (46).



6 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Este trabalho de conclusão de curso abordou importantes aspectos e resultados da teoria de controlabilidade e observabilidade matemática juntamente com conteúdos relacionados à modelagem de sistemas biológicos. Foi dada ênfase especial ao modelo de Lotka-Volterra, devido à sua relevância histórica e seu papel fundamental no desenvolvimento de modelos mais complexos. O objetivo geral deste trabalho, como destacado no início, era aplicar as ferramentas da teoria de observabilidade e controlabilidade matemática em modelos biológicos. Para atingir esse objetivo, foi adotada uma metodologia qualitativa, que incluiu revisão e estudo de materiais, como livros e publicações relevantes sobre as principais temáticas abordadas. As principais referências utilizadas incluem [1], [2], [3], [4] e [5]. No entanto, várias outras referências foram consultadas, uma vez que foi necessário apresentar resultados prévios que não estavam disponíveis em um único material ou não eram abordados da melhor maneira numa única referência.

Antes de abordar os conteúdos específicos do estudo, foram apresentados resultados e conceitos relacionados à teoria de Álgebra Linear, espaços vetoriais normados, espaços de funções e equações diferenciais. Essa fundamentação foi essencial para estabelecer as bases necessárias para os conteúdos subsequentes. No Capítulo 2, contendo os resultados preliminares, o foco foi apresentar todos os conteúdos que seriam pré-requisitos para as próximas etapas, no qual foi exigido a revisão e o estudo de alguns termos e resultados novos. Em seguida, no Capítulo 3, foi realizado o estudo dos modelos biológicos, adotando uma abordagem construtiva e enfatizando os processos de modelagem e as hipóteses utilizadas para fundamentar os modelos apresentados. Uma seção destacada neste capítulo tratou das soluções

de equilíbrio e estabilidade, elementos que, em conjunto com a linearização, mostraram-se essenciais para a aplicação das ferramentas de controle apresentadas posteriormente. Em relação ao Capítulo 4, este apresentou os maiores esforços do trabalho, afinal alguns objetos, espaços e conceitos ali apresentados não são elementos de estudo básicos. Foram realizados esforços para expandir os resultados de controlabilidade e observabilidade de sistemas lineares finitos, apresentando-os de maneira mais acessível aos leitores, visando que a teoria se tornasse compreensível somente com os elementos já apresentados no texto.

Ainda no Capítulo 4, também foram apresentados resultados aplicáveis do estudo, aplicando os conceitos de controlabilidade e observabilidade em modelos biológicos com premissas e objetivos hipotéticos. Destaca-se a dualidade entre os sistemas Σ e Σ^d como um resultado significativo e rico dessa teoria. Por fim, uma vez que os modelos que melhor representam a realidade são os modelos não lineares, tornou-se objeto de estudo tentar compreender como a teoria de controle lida com esses sistemas, o que consta no Capítulo 5. No entanto, foi identificada uma dificuldade ao lidar com esses sistemas, pois muitos dos resultados de controlabilidade encontrados fornecem apenas condições necessárias ou suficientes, e a teoria mais avançada não pôde ser totalmente explorada devido a restrições de tempo e falta de conhecimento teórico. No entanto, o Teorema de Controle Local mostrou-se útil para a resolução de problemas com o formato apresentado. Além disso, outros conteúdos e conceitos foram estudados e podem ser encontrados nos apêndices do trabalho. A partir dos elementos apresentados nos capítulos anteriores, foi possível alcançar o objetivo do trabalho. No entanto, algumas dificuldades foram encontradas durante o processo, como a demonstração do Teorema de Controle Local, as diferenças na notação e redação matemática entre os materiais consultados e a abstração dos conteúdos teóricos para

compreender sua aplicabilidade no mundo real, como evidenciado nas aplicações aos modelos biológicos.

A área da modelagem matemática desempenha um papel importante no estudo, compreensão e previsão de fenômenos e comportamentos em diversas áreas, especialmente na biologia, abrangendo áreas como a ecologia, medicina e farmacologia, o que mostra a vastidão de atuação que diversos modelos podem possuir. A partir da teoria de controlabilidade e observabilidade, emergem ferramentas essenciais para acompanhar e lidar com modelos matemáticos. Por meio dos resultados apresentados, fica claro como essas teorias podem ser cruciais em determinados momentos, dependendo das necessidades específicas. Em um mundo em que informações são cruciais, a observabilidade pode fornecer estratégias para melhor compreender os parâmetros de um sistema. Além disso, existem situações que exigem algum limitador ou incentivador que vai alterar determinada dinâmica e, em consequência, o resultado do sistema, o que pode ser necessário em situações como as expostas nas aplicações. É importante ressaltar que tanto a teoria de controlabilidade e observabilidade, quanto a modelagem matemática são áreas abrangentes, e este trabalho aborda apenas um pequeno recorte dessas áreas, demonstrando como elas podem se relacionar e auxiliar mutuamente.

Existem perspectivas para futuras pesquisas relacionadas a esse trabalho, que serão discutidas a seguir. Planeja-se continuar esse estudo em momentos posteriores, como na pós-graduação, pois ficou evidente que o acervo de conhecimento relacionado a essas teorias é extenso. Uma perspectiva é aplicar as teorias de controlabilidade e observabilidade em modelos mais complexos, especialmente aqueles que representam a dinâmica de doenças, como o câncer. Tal tipo de aplicação evidenciaria de maneira mais clara a importância deste estudo. Outro aspecto interessante é avançar para além da existência do

controle e investigar como seria esse controle. Nesse sentido, muitos modelos já possuem uma equação para identificar seu controlador. Por exemplo, há modelos que representam a interação entre células normais e células cancerígenas e apresentam uma equação para representar a ação do quimioterápico ou do tratamento utilizado. Além disso, teorias como a de otimização já utilizam uma abordagem semelhante ao restringir variáveis a valores desejados. Uma ferramenta promissora nesse sentido são os gramianos, mencionados em [1], que auxiliam na análise e projeção de sistemas de controle e observabilidade, fornecendo informações sobre quais estados em que um sistema pode ser observável/controlável e de que maneira isso pode ocorrer.

Do mesmo modo, outro objeto de estudo futuro seriam outras teorias relacionadas à controlabilidade de sistemas não lineares, que mostraram-se escassas nos estudos feitos. Um exemplo são os colchetes de Lie, como destacado em [3], por meio dos quais é possível garantir condições necessárias e suficientes (com relação à controlabilidade de um sistema linearizado e seu impacto na controlabilidade do sistema original) para determinados sistemas. Além disso, seria interessante explorar outras ferramentas relacionadas, como a teoria de Hautus, que oferece alternativas aos resultados de Kalman. Por fim, dado o ponto de equilíbrio hiperbólico E_1 instável, obtido na Seção 3.2.1.2, a conjectura desenvolvida no decorrer dos estudos é a de que, uma vez que o sistema linearizado em torno de E_1 não é controlável, o sistema original em torno daquele ponto também não será controlável. No entanto, tal relação não foi estudada e nem encontrada de maneira explícita nos materiais utilizados. Acredita-se que o Teorema de Hartman-Grobman possa auxiliar em estudos futuros destes resultados. Em resumo, os resultados encontrados neste trabalho representam apenas uma parcela desse vasto campo de estudo, que apresenta grande potencial de expansão e aplicação.

REFERÊNCIAS

- [1] TUCSNAK M. e WEISS G. *Observation and Control for Operator Semigroups*. Birkhäuser Verlag AG, Birkhäuser Advanced Texts Basler Lehrbücher. Switzerland, 2009.
- [2] BOYCE W. E. e DIPRIMA R. C. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*. 10a. ed. Rio de Janeiro: LTC. ISBN: 9788521627357. 2015.
- [3] CORON J.M. *Control and nonlinearity*. 136. American Mathematical Soc. 2007.
- [4] ARENALES S.H.V. e SALVADOR J.A. *Modelagem Matemática de Problemas Ambientais*. Coleção UAB-UFSCar. 2012.
- [5] POOLE D. *Álgebra Linear. uma introdução moderna*. Cengage Learning. 2017.
- [6] LAY D. C. *Álgebra Linear e Suas Aplicações*. LTC, 2a ed. São Paulo, 1999.
- [7] ANTON H. e RORRES C. *Álgebra linear com aplicações*. Bookman, 10a ed. Porto Alegre, 2012.
- [8] BOLDRINI J. L. et al. *Álgebra Linear*. Harper Row do Brasil, 3a ed. São Paulo, 1980.
- [9] KREYSZIG E. *Introductory Functional Analysis with Applications*. John Wiley Sons, Wiley Classics Library. Toronto, 1989.

-
- [10] BREZIS H. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. New York: Springer. 2011.
- [11] CAVALCANTI M.M. et al. *Introdução à Análise Funcional*. Eduem, Maringá. 2011.
- [12] BAUMEISTER J. e LEITÃO A. *Introdução à teoria de controle e programação dinâmica*. IMPA. 2008.
- [13] HYTÖNEN T. et al. *Analysis in Banach spaces*. Berlin: Springer. 2016.
- [14] RUDIN W. *Principles of mathematical analysis*. New York: McGraw-hill. 1976.
- [15] BORTHWICK D. *Introduction to partial differential equations*. Springer. 2017.
- [16] DOERING C.I. e LOPES A.O. *Equações diferenciais ordinárias*. IMPA: Coleção matemática universitária. 2016.
- [17] BERNSTEIN D.S. *Matrix Mathematics. Theory, facts and formulas*. Princeton University Press. Princeton, USA, 2009.
- [18] YARTEY J.N.A. e RIBEIRO S.S. *Equações diferenciais*. UFBA, Instituto de Matemática e Estatística; Superintendência de Educação a Distância. 2017.
- [19] RODRIGUES H.M. *Equações Diferenciais Ordinárias. Notas de Aula*. ICMC-USP. 2009.

-
- [20] PIQUEIRA J. R. C. e NAHAS T. R. *O Sonho de Bernoulli*. Estudos avançados, v. 25, n. 72. Ago. de 2011.
- [21] BÜRGER R. *Introducción al modelamiento en biomatemática*. Universidad de Concepción. Concepción, Chile, jan. de 2012.
- [22] VÉRRRI J. A. *Estabilidade global e bifurcação de Hopf em um modelo de HIV baseado em sistemas do tipo Lotka-Volterra*. Universidade Estadual Paulista. Presidente Prudente, jun. de 2013.
- [23] SOUZA L. A. *Modelos populacionais de ecossistemas*. Revista Agrogeoambiental, v. 6, n. 3. 2014.
- [24] ANISIU M.C. *Lotka, Volterra and their model*. Didáctica matemática, v. 32, p. 9-17. 2014.
- [25] KINGSLAND S. *Alfred J. Lotka and the origins of theoretical population ecology*. Proceedings of the National Academy of Sciences, v. 112, n. 31, p. 9493-9495. 2015.
- [26] SILVA D.M. *Modelagem Matemática Aplicada ao Controle e Manejo Integrado de Pragas em Lavouras do Milho*. Volta Redonda, 2019.
- [27] RICKLEFS R.E. *A economia da natureza*. Guanabara Koogan, 6a ed. 2010.
- [28] FASSONI A.C. et.al. *Basins of attraction of the classic model of competition between two populations*. Ecological Resilience. 2014.

-
- [29] FAVRETTO E. et al. *Noções e conceitos sobre sistemas complexos no ensino de ecologia*. 2013.
- [30] CASTRO J.D.R. e ESTREPO I.A. *El modelo depredador-presa de Lotka-Volterra en las especies de linco canadiense y liebres raqueta de nieve*. Cuadernos de Ingeniería Matemática, v. 1, n. 01, p. 1-11. 2021.
- [31] ELTON C. e NICHOLSON M. *The ten-year cycle in numbers of the lynx in Canada*. The Journal of Animal Ecology, p. 215-244. 1942.
- [32] VILLAVERDE A.F. et al. *Observability and structural identifiability of nonlinear biological systems*. Complexity, v. 2019.
- [33] KALMAN R. E. *On the general theory of control systems*. Proceedings First International Conference on Automatic Control, pp. 481-492. 1960.
- [34] RODRIGUES D.S. et al. *Modelagem matemática em câncer e quimioterapia. uma introdução*. Notas em Matemática Aplicada, e-ISSN, p. 2236-5915. Porto Alegre, 2011.
- [35] HOPPENSTEADT F.C. e MURRAY J.D. *Threshold analysis of a drug use epidemic model*. Mathematical Biosciences, v. 53, n. 1-2, p. 79-87. 1981.
- [36] SCHECHTER E. *Handbook of Analysis and its Foundations*. Academic Press. 1996.

-
- [37] HEGENBERG L.H.B. *Sequências e séries de matrizes*. Gazeta de Matemática, nº 65. 1956.

APÊNDICE A – EXPONENCIAL DE UMA MATRIZ e^{tA}

A partir do que foi visto e utilizando-se dos conteúdos descritos em [1], [17] e [37], será definida a exponencial de uma matriz, bem como todos os conceitos correlacionados. É importante destacar que na área de Análise para variáveis reais, faz-se o estudo de algumas propriedades, como a derivada e a integral de funções que estão no espaço real. Anteriormente, destacou-se elementos relacionados à Álgebra Linear, como as matrizes e os vetores que, a priori, podem parecer pertencer a uma realidade muito distinta daquela estudada na Análise, mas isso não é uma afirmação verídica. Como visto em [37], o instrumental que é estudado na Análise para funções com variáveis reais pode ser estendido para o cenário das matrizes, por exemplo. Nesse contexto, os elementos de uma matriz podem ser entendidos um a um como funções com variáveis reais, assim como aquelas estudadas na teoria básica de análise. Ou seja, conteúdos relacionados a seqüências, séries, convergência, limites e outras propriedades podem ser transpostos para o contexto de matrizes sem perdas, assim como visualizado em [37], e será com essa ideia básica que serão desenvolvidos os principais resultados dessa seção.

O problema de valor inicial escalar, dado por:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= ax(t) \\ x(0) &= x_0, \end{cases} \quad (50)$$

em que $t \in [0, \infty)$ e $a, x(t) \in \mathbb{R}$, tem solução dada por:

$$x(t) = e^{at}x_0; t \in [0, \infty).$$

No contexto estudado nesta seção, isto é, para o estudo da exponencial de uma matriz, serão de interesse os sistemas de equações diferenciais

lineares da seguinte forma:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) \\ x(0) &= x_0, \end{cases} \quad (51)$$

onde $t \in [0, \infty)$, $x(t), x_0 \in \mathbb{R}^n$, e $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. A solução de (51) é dada por:

$$x(t) = e^{tA}x_0,$$

onde $t \in [0, \infty)$ e e^{tA} é a matriz exponencial.

Nesta seção serão destacados os principais aspectos de e^{tA} , em que $t \in \mathbb{R}$ e $A \in \mathcal{L}(X)$, sendo X um espaço com produto interno complexo e com dimensão finita. O operador matricial exponencial e^{tA} é definido usando a série de Taylor como consta a seguir:

$$e^{tA} = I + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \frac{t^3}{3!}A^3 + \dots \quad (52)$$

Tal série é convergente, para cada $t \in \mathbb{R}$. Ademais, a partir do fato de que o k -ésimo termo em (52) é dominado pelo k -ésimo termo da série de Taylor escalar para $e^{|t| \cdot \|A\|}$, isto é:

$$\left\| \frac{t^k}{k!} A^k \right\| \leq \frac{|t|^k}{k!} \|A\|^k,$$

garante-se a convergência absoluta da série em (52). Logo, a partir disso, pode-se afirmar que $\|e^{tA}\| \leq e^{|t| \cdot \|A\|}$, para todo $t \in \mathbb{R}$. O que pode ser facilmente garantido através de uma simples aplicação da desigualdade triangular. Ademais, em consequência da definição e usando de alguns argumentos, evidencia-se algumas propriedades a respeito da exponencial de uma matriz, de acordo com [17], [1] e [12]:

1. $e^0 A = I$;
2. $e^{(A+B)} = e^A e^B$, quando $AB = BA$;
3. $e^{-A} = (e^A)^{-1}$;

4. $e^{(t+\tau)A} = e^{tA}e^{\tau A}$;
5. $e^{tA} - I = \int_0^t Ae^{\tau A}d\tau$;
6. $\frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA} = e^{tA}A$;
7. $(e^{(t-s)A})^* = e^{(t-s)A^*}$.

Será apresentada a demonstração dos casos 6 e 7. Para a sexta propriedade, usa-se da questão da convergência da série para garantir o afirmado, conforme consta a seguir:

Demonstração (Derivada da exponencial de uma matriz). Considera-se a derivação termo a termo, considerando a expansão (52):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}e^{tA} &= \frac{d}{dt}(I) + \frac{d}{dt}(tA) + \frac{d}{dt}\left(\frac{t^2}{2!}A^2\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{t^3}{3!}A^3\right) + \dots \\ &= 0 + A + A^2t + \frac{A^3t^2}{2!} + \frac{A^4t^3}{3!} + \dots \\ &= A\left(I + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \frac{A^3t^3}{3!} + \dots\right) \\ &= A(e^{tA}) = Ae^{tA} = e^{tA}A. \end{aligned}$$

■

Demonstração (Adjunta da exponencial de uma matriz). Observe que: $e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots$. Então, fazendo a aplicação termo a termo:

$$\begin{aligned} (e^{(t-s)A})^* &= \left(I + (t-s)A + \frac{(t-s)^2A^2}{2!} + \frac{(t-s)^3A^3}{3!} + \dots\right)^* \\ I^* + ((t-s)A)^* &+ \left(\frac{(t-s)^2A^2}{2!}\right)^* + \left(\frac{(t-s)^3A^3}{3!}\right)^* + \dots \end{aligned}$$

Analisando termo a termo, teremos:

$$\begin{aligned} \left(\frac{(t-s)^2A^2}{2!}\right)^* &= \frac{(t-s)^2}{2!} (A^2)^* = \frac{(t-s)^2}{2!} A^*A^* \\ &\vdots \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} & \left(e^{(t-s)A} \right)^t \\ &= I^* + ((t-s)A)^* + \frac{(t-s)^2}{2!} A^* A^* + \frac{(t-s)^3}{3!} A^* A^* A^* + \dots \\ &= e^{(t-s)A^*}. \end{aligned}$$

■

Observação 1. Para $x \in X$ um autovetor de A , que corresponde ao autovalor λ , tem-se que:

$$e^{tA}x = e^{t\lambda}x.$$

Teorema A.1. Se $A \in \mathcal{L}(X)$, então existe uma base algébrica (b_1, \dots, b_n) em X de modo que \tilde{A} , a matriz de A nesta base, é dada por:

$$\tilde{A} = \text{diag}(J_1, J_2, \dots, J_l), \quad J_k \in \mathbb{C}^{d_k \times d_k}, \quad J_k = \lambda_k I + N,$$

onde $k = 1, 2, \dots, l$; N é uma matriz quadrada (de qualquer dimensão) com 1 diretamente abaixo da diagonal e 0 nos outros lugares; ademais as matrizes J_k são denominadas de blocos de Jordan.

Denotando $Q = [b_1 \dots b_n]$, tem-se:

$$Q \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n, X), \quad A = Q\tilde{A}Q^{-1}.$$

Da definição de e^{tA} , obtém-se:

$$e^{tA} = Qe^{t\tilde{A}}Q^{-1}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

No caso em que A é auto-adjunta, então

$$e^{tA} = Qe^{t\Lambda}Q^*, \quad \text{onde} \quad e^{t\Lambda} = \text{diag}(e^{t\lambda_1}, e^{t\lambda_2}, \dots, e^{t\lambda_n}).$$

Definição A.1 (Limite Espectral). *O **limite espectral** de uma matriz A , denotado por $s_0(A)$, será tal que:*

$$s_0(A) = \sup\{\operatorname{Re}\lambda \mid \lambda \in \sigma(A)\}.$$

*Em que $\sigma(A)$ determina o **espectro** de A , isto é, o conjunto de todos os autovalores de A .*

Proposição A.2. *Para cada $\omega > s_0(A)$ existe $M_\omega \geq 1$ tal que*

$$\|e^{tA}\| \leq M_\omega e^{\omega t} \quad \forall t \in [0, \infty).$$

Observação 2. *Para qualquer subespaço $V \subset X$, que será dito **A-invariante**, tem-se a equivalência das seguintes propriedades:*

1. $AV \subset V$;
2. $A^*V^\perp \subset V^\perp$;
3. $e^{tA}V \subset V$, $\forall t$ em um intervalo.

As propriedades, definições e resultados aqui apresentados se referem apenas a um recorte de toda teoria relacionada a exponencial de uma matriz. Foram selecionados para serem evidenciados os aspectos básicos e essenciais para compreender como se define e se caracteriza a exponencial de uma matriz. Nesse sentido, para um maior aprofundamento no conteúdo, bem como as garantias dos resultados que aqui não foram evidenciados, recomenda-se a leitura de [1], [17] e [37].

APÊNDICE B – CONCEITOS BIOLÓGICOS

Serão aqui descritos, de maneira breve e a partir de [27], a conceituação de alguns termos biológicos que auxiliam na melhor compreensão do presente estudo.

A priori, podemos definir o **meio ambiente**, de forma simples e objetiva, como o conjunto de elementos, seres vivos e não-vivos que existem em nosso planeta e, em consequência, em determinados locais dele, que afetam de diferentes maneiras os ecossistemas e seres vivos. Um **ecossistema**, por sua vez, caracterizará a interação entre os organismos vivos e o ambiente físico e químico em seu entorno, isto é, a unidade gerada das relações entre os seres vivos e seu entorno, incluindo os elementos que não são vivos. Outra definição muito importante e que surge de modo indireto nas discussões apontadas no decorrer do estudo é a **sobrevivência**. A sobrevivência define-se como a probabilidade de um ser, que está em uma determinada idade ou período, de sobreviver até a próxima fase de sua vida ou período, seja ela qual for. Como estamos lidando com seres que vivem em constante interação entre si e com o meio, as expectativas de sobrevivência estarão relacionadas com outros aspectos da natureza. Visto que a natureza tem esse caráter dinâmico e competitivo, os organismos, de modo individual, irão tentar garantir sua sobrevivência e reprodução.

Uma vez que as relações de sobrevivência e reprodução na natureza relacionam-se intimamente com aspectos de alimentação, deve-se citar o conceito de **cadeia alimentar**. A cadeia alimentar, trata-se da sequência de relações que dizem respeito às formas como os organismos, num ecossistema, se alimentam uns dos outros, ou seja, as relações de alimentação num dado ecossistema.

Por fim, muito tratou-se no presente estudo acerca de "pontos de equilíbrio", nesse sentido, é importante citar o que o termo **equi-**

líbrio significa no contexto biológico. Pode-se citar dois importantes aspectos no tocante ao equilíbrio na natureza. Um aspecto diz respeito ao fato de que, com a ausência da interferência humana, ao passar por processos nos quais sofre alterações, como eventos climáticos adversos ou até mesmo ações antrópicas, a natureza tende a um equilíbrio dito "auto-restaurador". Por exemplo, ao sofrer com uma queimada, se todas as condições forem favoráveis, pode-se observar que a área devastada, com o passar do tempo, tornará a se desenvolver até retornar ao seu estado anterior a queimada ou similar. O segundo aspecto diz respeito ao fato de que a ideia de que a natureza existe em um estado prístino, original e inalterado não pode mais ser afirmado, uma vez que grande parte das áreas naturais já sofreu alguma alteração ou foi afetada de algum modo e em determinado grau pelos movimentos antrópicos. Desse modo, as relações biológicas são indispensáveis para manter, a partir das interações indivíduos-ambiente, o equilíbrio na natureza.

APÊNDICE C – LINEARIDADE E LIMITAÇÃO DOS OPERADORES Φ_τ E Ψ_τ

Ao longo do Capítulo 4 foram apresentadas duas famílias de operadores, $\Phi_\tau \in \mathcal{L}(L^2([0, \infty); U), X)$, $\tau > 0$ para a controlabilidade e $\Psi_\tau \in \mathcal{L}(X, L^2([0, \infty); W))$, $\tau > 0$ para a observabilidade. Note que, ambos os operadores estão definidos em espaços do tipo $\mathcal{L}(N, M)$, que contêm todos os operadores lineares limitados de N para M . Para garantir de fato que os operadores de controlabilidade e observabilidade pertencem ao espaço \mathcal{L} , deve-se garantir a linearidade e limitação dos operadores. No caso de Φ_τ , é necessário evidenciar que:

1. $\Phi_\tau(\alpha u_1 + u_2) = \alpha \Phi_\tau u_1 + \Phi_\tau u_2$, α é um escalar;
2. $\|\Phi_\tau u\|_X \leq K_1 \|u\|_{L^2([0, \infty); U)}$ de acordo com a Definição 2.18.

Para o primeiro item, note que:

$$\Phi_\tau u = \int_0^\tau e^{(\tau-\sigma)A} B u(\sigma) d\sigma.$$

Dada a continuidade da exponencial e o fato de B ser uma matriz, e assim um operador linear limitado, então:

$$e^{(\tau-\sigma)A} B = M, \text{ em que } M \text{ é limitada, pois } \sigma \in [0, \tau].$$

Desse modo,

$$\Phi_\tau u = \int_0^\tau M u(\sigma) d\sigma.$$

Logo, para checar a linearidade:

$$\begin{aligned} \Phi_\tau(\alpha u_1 + u_2) &= \int_0^\tau M(\alpha u_1 + u_2)(\sigma) d\sigma \\ &= \int_0^\tau (M\alpha u_1 + Mu_2)(\sigma) d\sigma \\ &= \alpha \int_0^\tau Mu_1(\sigma) d\sigma + \int_0^\tau Mu_2(\sigma) d\sigma \\ &= \alpha \Phi_\tau u_1 + \Phi_\tau u_2. \end{aligned}$$

Em relação à limitação do operador de controlabilidade, é necessário garantir o segundo item. Para isso será utilizada a integral de Bochner¹, a Desigualdade de Hölder² e Proposição A.2. Observe que:

¹ Uma função fortemente μ -mensurável $f : S \rightarrow X$ é **Bochner integrável** em relação a μ se, e somente se,

$$\int_S \|f\| d\mu < \infty,$$

e nesse caso vale a propriedade:

$$\left\| \int_S f d\mu \right\| \leq \int_S \|f\| d\mu.$$

Mais informações podem ser encontradas em [13] p. 13

² Sendo $f \in L^2$ e $g \in L^2$. Então $fg \in L^1$ e

$$\int |fg| \leq \|f\|_{L^2} \|g\|_{L^2}.$$

Mais informações podem ser encontradas em [10] p. 92

$$\begin{aligned}
 \|\Phi_\tau u\|_X &= \left\| \int_0^\tau e^{(\tau-\sigma)A} B u(\sigma) d\sigma \right\|_X \\
 &\leq \int_0^\tau \|e^{(\tau-\sigma)A} B u(\sigma)\| d\sigma \\
 &\leq \int_0^\tau \underbrace{M_\omega e^{w\tau} \|B\|}_{:=K} \|u(\sigma)\|_U d\sigma \\
 &\leq \int_0^\tau K \|u(\sigma)\|_U d\sigma \\
 &= K\sqrt{\tau} \|u\|_{L^2([0,\infty);U)}. \quad (f = K, g = \|u(\sigma)\|)
 \end{aligned}$$

Já no tocante ao operador Ψ_τ , definido como:

$$(\Psi_\tau z_0)(t) = \begin{cases} C e^{At} z_0 & , \text{ para } t \in [0, \tau], \\ 0 & , \text{ para } t > \tau, \end{cases}$$

é necessário evidenciar que:

1. $\Psi_\tau(\alpha x_1 + x_2)(t) = \alpha(\Psi_\tau x_1)(t) + (\Psi_\tau x_2)(t)$, α é um escalar;
2. $\|\Psi_\tau z_0\|_{L^2([0,\infty);W)}^2 \leq K_2 \|z_0\|_X^2$ de acordo com a Definição 2.18.

Será verificada a linearidade para $t \in [0, \tau]$, uma vez que para $t > \tau$ o resultado é constante igual a zero e a limitação é direta. Desse modo:

$$\begin{aligned}
 \Psi_\tau(\alpha x_1 + x_2)(t) &= C e^{At}(\alpha x_1 + x_2) \\
 &= \alpha C e^{At}(x_1) + C e^{At}(x_2) \\
 &= \alpha(\Psi_\tau x_1)(t) + (\Psi_\tau x_2)(t).
 \end{aligned}$$

A limitação de Ψ_τ utiliza de procedimentos análogos e similares àqueles utilizados para garantir a limitação do operador Φ_τ . Pode ser verificado que:

$$\begin{aligned}
 \|\Psi_\tau x_0\|_{L^2([0,\infty);W)}^2 &= \int_0^\infty \|(\Psi_\tau z_0)(t)\|_W^2 dt \\
 &\leq \underbrace{\left(\int_0^\tau \underbrace{M_\omega^2 e^{2\omega\tau} \|C\|^2}_{:=K} dt \right)}_{K_2} \|x\|_X^2 \\
 &= K_2 \|x\|_X^2.
 \end{aligned}$$