UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA PURA E APLICADA

Luciano Bento da Silva Junior

A Integral Fracionária de Riemann-Liouville Sobre os Espaços L^p

Florianópolis
2023

Luciano Bento da Silva Junior

A Integral Fracionária de Riemann-Liouville Sobre os Espaços L^p

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do título de mestre em Matemática, com área de concentração em Análise.
Orientador: Prof. Paulo Mendes de Carvalho Neto, Dr.

Florianópolis
2023

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Silva Junior, Luciano Bento da
A Integral Fracionária de Riemann-Liouville Sobre os Espaços Lp / Luciano Bento da Silva Junior ; orientador, Paulo Mendes de Carvalho Neto, 2023.
133 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada, Florianópolis, 2023.

Inclui referências.

1. Matemática Pura e Aplicada. 2. Teoria da Medida. 3. Teoria de Semigrupos. 4. Cálculo Fracionário. 5. Integral Fracionária. I. Carvalho Neto, Paulo Mendes de. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós Graduação em Matemática Pura e Aplicada. III. Título.

Luciano Bento da Silva Junior

A Integral Fracionária de Riemann-Liouville Sobre os Espaços L^p

O presente trabalho em nível de mestrado foi avaliado e aprovado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. Renato Fehlberg Júnior, Dr.
Universidade Federal do Espírito Santo

Prof. Ronaldo César Duarte, Dr.
Universidade Federal do Rio Grande do Norte

Profa. Camila Aparecida Benedito Rodrigues de Lima, Dra.
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Rômulo Maia Vermersch, dr
Universidade Federal de Santa Catarina

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de mestre em Matemática, com área de concentração em Análise.

ICP-Edu
Documento assinado digitalmente
Daniel Goncalves
Data: 25/05/2023 16:32:53-0300
CPF: ***.022.459-**
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Coordenação do Programa de
Pós-Graduação

ICP-Edu
Documento assinado digitalmente
Paulo Mendes de Carvalho Neto
Data: 25/05/2023 16:48:17-0300
CPF: ***.211.858-**
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Prof. Paulo Mendes de Carvalho Neto, Dr.
Orientador

Florianópolis, 2023.

Dedico este trabalho à toda minha família, em especial a minha esposa Fernanda Rafaela.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por sua bondade e misericórdia, e pelo dom do conhecimento.

Ao meu pai Luciano que mesmo sendo um homem humilde, nunca mediu esforços para nos ajudar. Além de pai, também é grande amigo, por isso em momentos difíceis sempre está ao meu lado me ajudando. Não tenho dúvidas que ele é o maior incentivador dos meus sonhos. A minha mãe, dona Sandra, que sempre conseguiu enxergar o quanto era difícil a vida acadêmica. Vendo isso, ela nunca permitiu que ninguém atrapalhasse os mementos de estudos e nem os momentos de descanso, sendo assim, uma grande incentivadora dos meus sonhos. A meu irmão Leonardo, o meu melhor amigo. Este homem é um grande incentivador. Além disso, eu agradeço pela grande influência que ele teve na minha vida. Pois o caráter que tenho hoje recebeu muitas influências do seu. É por isso que digo que você é meu irmão mais velho. E fico grato em saber que posso compartilhar com você minhas dificuldades, meus medos, minhas angústia e meus sonhos.

A minha segunda mãe (Tia Silvânia), o cuidado que essa mulher me deu foi surreal. Ela sempre me tratou como um filho, além de sempre nos encorajar com a seguinte frase: Você se acostuma meu filho. Então eu a guardo em meu coração. A meu avô seu Cassiano, que via as dificuldades da vida acadêmica como minha mãe via. Por várias vezes ele acordava na madrugada e vinha até e mim e dizia: Cara! vá dormir, não se maltrate tanto. Sem mencionar as centenas de outras maneiras pelas quais ele me ajudou.

A Minha amada esposa, Fernanda, que sempre me incentivou a continuar. Alguém que sempre acreditou no meu potencial, mesmo quando eu não estava tão convencido. Só assim, ela conseguiu entrar na minha cabeça o suficiente para perceber que eu era capaz. Também sou grato por todo apoio, cuidado e afeto que ela me proporciona.

Ao professor Paulo, que se tornou uma pessoa muito especial para mim, porque mesmo sabendo das grandes dificuldades que tinha em relação ao conhecimento matemático, decidiu ser meu orientador. Uma tarefa árdua. Mas, mesmo assim, sua paciência e compreensão prevaleceram. Além do mais, considero o professor que mais contribuiu para o meu aprendizado, pois durante todo o mestrado me auxiliou com as diversas dúvidas que tinha. Além disso, foi meu professor de português e me fez aprender Inglês. Por isso eu sou grato pela sua confiança e por todos os seus conselhos. Estou infinitamente agradecido.

Ao professor Ronaldo César Duarte, pois ele é minha grande referência no meio acadêmico.

A todos os professores que contribuíram para meu conhecimento: Antônio Leitão, Daniel Gonçalves, Eliezer Batista, Fábio Botelho, Ivan Pontual e Luiz Gustavo

Aos meus amigos Daniel Alfonso, Daniel Kmita, Juan Carlos, Juan Estuardo, Luiz Guilherme e Ricardo Mota na qual sempre estivemos juntos na sala 109 auto se ajudando. Em especial agradeço ao meu grande amigo Rafael Borges (O Rafa) pelo seu carinho e por sua bondade para comigo.

Ao departamento de matemática pura e aplicada da UFSC pela oportunidade de fazer o mestrado e ao CNPq pelo apoio financeiro durante o mestrado.

Never regard study as a duty but as an enviable opportunity to learn to know the liberating influence of beauty in the realm of the spirit for your own personal joy and to the profit of the community to which your later works belong."Albert Einstein

RESUMO

O estudo do cálculo fracionário cresceu muito nas últimas seis décadas, e cada vez mais está se relacionando com diversas áreas da matemática. Desta forma, ficamos motivados a entender a relação que havia entre o cálculo fracionário e a teoria de semigrupos. É por isso que no primeiro momento introduzimos as funções Gama, função Beta e a função Digama, as quais, juntamente com suas propriedades, serão fundamentais para a obtenção dos principais resultados discutidos neste texto. Logo em seguida fazemos um breve curso de teoria da medida com o intuito de apresentar três grandes teoremas: o Teorema da Convergência Monótona de Lesbegue, o Teorema da Convergência dominada de Lesbegue e o Teorema da Convergência Dominada Generalizada de Lesbegue. Estes teoremas serão essenciais para nossos objetivos. Depois introduzimos o conceito de Espaços L^p, e em seguida mostramos que este espaço é Banach. Além disso, apresentamos uma breve teoria de integração, donde a sua finalidade são os teoremas de Tonelli-Fubinni e a desigualdade integral de Minkowski. Finalmente, apresentamos a teoria dos semigrupos juntamente com a teoria do cálculo fracionário. Para estabelecer a relação entre esses dois temas, mostraremos que a integral fracionária de Riemann-Liouville é um semigrupo fortemente contínuo, e, como resultado, estamos empenhados em exibir qual é o seu gerador infinitesimal.

Palavras-chave: Semigrupos, cálculo fracionário, integral fracionária de Riemann-Liouville, Gerador infinitesimal.

ABSTRACT

The study of fractional calculus has grown greatly over the past six decades, and it is increasingly relating to many different areas of mathematics. Thus, we were motivated to understand the relationship that existed between fractional calculus and semigroup theory. This is why in the first moment we introduce the functions Gamma, Beta and Digamma, which, along with their properties, will be fundamental to obtain the main results discussed in this text. Right after that we take a brief course in measure theory in order to present three major theorems: Lesbegue's Monotone Convergence Theorem, Lesbegue's Dominated Convergence Theorem, and Lesbegue's Generalized Dominated Convergence Theorem. These theorems will be essential for our purposes. Then we introduce the concept of L^p-spaces, and then show that this space is Banach. In addition we present a brief theory of integration, hence the Tonelli-Fubinni theorems and the Minkowski integral inequality. Finally, we present the theory of semigroups together with the theory of fractional calculus. To establish the relationship between these two topics, we will show that the Riemann-Liouville fractional integral is a strongly continuous semigroup. And, as a result, we are engaged in exhibiting which is its infinitesimal generator.

Keywords: Semigroups, fractional calculus, Riemann-Liouville fractional integral, infinitesimal generator.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O Cálculo Fracionário é o ramo da matemática que envolve estender os conceitos de derivadas e integrais para ordens arbitrárias. A curiosidade sobre este tema surgiu simultaneamente com o advento do Cálculo Diferencial e Integral, da qual Leibniz já era conhecido como um dos criadores da teoria. Mas em 1695, L'Hospital escreveu uma carta a Leibniz perguntando: "Se $n = 1/2$, então o que seria o significado de $d^n y/dx^n$". Leibniz respondeu à carta do L'Hospital com uma ideia intuitiva (para mais detalhes veja [8], [18], [23]):

> *"Bernoulli parece ter contado a você que mencionei a ele uma analogia maravilhosa que torna possível dizer, de alguma forma, que as diferenciais sucessivas estão em progressões geométricas. Pode-se perguntar o que seria uma diferencial tendo como expoente uma fração. Vê-se que o resultado pode ser expresso por um série infinita. Embora isto pareça retirado de Geometria, que ainda não conhece tal fracionamento dos expoentes, parece que um dia estes paradoxos irão produzir consequências úteis, uma vez que dificilmente existe um paradoxo sem utilidade. Pensamentos que importavam pouco em si mesmos pode dar ocasião a outros mais bonitos."*

Embora Leibniz tenha ficado surpreso com a pergunta de L'Hospital, sua resposta foi muito inteligente. Além do texto acima, Leibniz escreveu uma aproximação do que seria a derivada de ordem 1/2 da função real $f(x) = x$.

A pesquisa sobre o tema veio ganhando força à medida que grandes matemáticos se dedicaram à área. Tanto que 35 anos depois da conversa de Leibniz com L'Hospital, Euler escreveu uma nota sobre a necessidade de uma teoria de interpolação entre séries que poderiam auxiliar nesta definição fracionária para uma derivada. Já em 1812, Laplace definiu uma derivada fracionária por meio de uma integral, e o primeiro livro discutindo a derivada de ordem fracionária apareceu em 1819, o qual foi escrito por Lacroix. [8], [23])

Lacroix percebeu que usando a função de Gama de Euler (para mais detalhes desta função veja a Seção 1.1), definida como

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt,$$

o questionamento de L'Hospital poderia ser facilmente resolvido. Como a função Gama é uma generalização do fatorial, Lacroix notou que se $n \leqslant m$, então poderia escrever a derivada da função $y = x^m$ da seguinte forma:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} x^{m-n}.$$

Desta forma ele fez a seguinte particularização: considerou $m = 1$ e $n = 1/2$, com isso obteve que

$$\frac{d^{1/2}y}{dx^{1/2}} = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(3/2)}x^{1/2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}x^{1/2}.$$

Vale a pena observar que este é o mesmo resultado sustentado hoje em dia pela definição de derivada fracionária de Riemann-Lioville de ordem α, amplamente aceita na sociedade matemática. Além disso, nas literaturas [14] e [25], percebemos que a derivada fracionária de Riemann-Liouville é definida por meio da integral fracionária de Riemann-Liouville.

Assim, conscientes da sua grande importância, iremos dedicar-nos a um estudo mais detalhado das propriedades da Integral Fracionária de Riemann-Liouville de ordem α e algumas de suas consequências.

A Integral Fracionária de Riemann-Liouville de ordem $\alpha > 0$, que pode ser definida de seguinte forma: para $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função adequada (no decorrer do texto deixaremos claro a qual espaço f pertence) e $\alpha > 0$, consideramos

$$J^{\alpha}_{a,t}f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)ds,$$

o símbolo $J^{\alpha}_{a,t}f(t)$ denota a Integral Fracionária de Riemann-Liouville de ordem α da função $f(t)$ para todo $t \in [a,b]$, tal que a integral do lado direito da expressão acima existe. Lembramos ainda que o símbolo Γ representa a função Gama de Euler.

Nosso objetivo principal é estabelecer uma relação entre a integral fracionária de Riemann-Liouville e a teoria de semigrupos, provando que Provar que a integral fracionária de Riemann-Liouville é um C_0-semigrupo no parâmetro α sobre os espaços L^p, para $1 \le p < \infty$.

Além disso, se a integral fracionária de ordem α for um C_0–semigrupo, então por definição, este semigrupo possuirá um gerador infinitesimal. Neste caso, explicitaremos o gerador infinitesimal.

Para abordar tais questões com detalhes, é necessário que apresentemos uma vasta teoria. Para evitar uma discussão muito longa precisamos de um ponto de partida, por isso, de agora em diante, presumimos que o leitor já tenha uma certa familiaridade com resultados da Análise Funcional e da Análise Complexa. O segundo tópico, em particular, é necessário para facilitar o entendimento das funções Gama, Beta, Digama e suas respectivas propriedades. Dito isto, No Capítulo 1 desta dissertação, buscamos entender as funções Gama, Beta e Digama, além de propriedades relativas às derivadas das funçãos Gama e Digama, que possuem um papel importante no final deste texto.

Já no Capítulo 2 apresentamos a Teoria de Medida e Integração. Embora esta teoria seja clássica, como ela faz parte do cerne da teoria do cálculo fracionário, decidimos apresentá-la de forma detalhada. Parte deste capítulo é dedicado a apresentar a medida de Lebegue e sua relação com o Cálculo Diferencial e Integral clássico.

O Capítulo 3 é dedicado a apresentação dos espaços L^p e suas propriedades. Este capítulo trata do espaço de Banach no qual iremos estudar a integral fracionária de Riemann-Liouville e, portanto, é muito importante que entendamos bem sua construção e algumas de suas características intrínsecas.

Já o Capítulo 4 é dedicado a uma breve apresentação da Teoria de Semigrupos e de alguns de seus principais teoremas.

Por fim, o Capítulo 5 introduz o Cálculo Fracionário e depois apresenta uma série de resultados que tem como objetivo concluir que a integral fracionária de Riemann-Liouville $J^{\alpha}_{t_0,t}$ define um C_0-semigrupo no parâmetro α em $L^p(t_0,t_1)$, para $1 \leq p < \infty$, com gerador infinitesimal que podemos calcular e exibir.

1 ALGUMAS FUNÇÕES ESPECIAIS

Nesta seção exploramos algumas funções especiais que são essenciais ao discutir o tema central desta dissertação. Em particular, relembremos o seguinte resultado:

Teorema 1.1. *Se $f : D \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, com D aberto de $\mathbb{C}$, então as seguintes declarações são equivalentes:*

1. *f é diferenciável.*
2. *f é analítica.*
3. *f é infinitamente diferenciável.*

Neste resultado, a suposição da complexidade da função é fundamental, uma vez que é bastante simples de encontrar funções reais que não satisfazem tais equivalências. Este resultado também é conhecido como Teorema de Cauchy-Goursat. Para mais detalhes, ver [7], [12], [19].

Uma vez conhecido o resultado acima, então o entendimento das funções especiais será mais fácil. Vale salientar que não vamos discutir tais funções com muita profundidade, pois isso iria desvirtuar o objetivo principal deste estudo. No entanto, como nossa ideia é tornar esta dissertação o mais autocontido possível, nos esforçaremos para citar todos os resultados não mostrados aqui.

1.1 A FUNÇÃO GAMA

Em matemática, a função Gama é uma extensão da função fatorial para o conjunto dos números reais e complexos. No decorrer do texto usaremos $\Re(z)$ para denotar a parte real do número complexo z. Para iniciar nosso estudo apresentamos o seguinte resultado:

Teorema 1.2. *Se $z \in \{w \in \mathbb{C} : \Re(w) > 0\}$ temos que*

$$\int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1}\, dt$$

é convergente.

Demonstração. Como para $t > 0$ temos que $|t^{z-1}| = |e^{(z-1)\ln t}| = e^{\Re(z-1)\ln t} = t^{\Re(z)-1}$, basta notar que

$$\left| \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1}\, dt \right| \leq \int_0^{\infty} e^{-t} \left| t^{z-1} \right| dt = \underbrace{\int_0^{1} e^{-t} t^{\Re(z)-1}\, dt}_{I_1} + \underbrace{\int_1^{\infty} e^{-t} t^{\Re(z)-1}\, dt}_{I_2}.$$

Observe que

$$I_1 \leq \int_0^1 t^{\Re(z)-1}\,dt = \frac{1}{\Re(z)} < \infty.$$

Agora, se $\Re(z) \leq 1$, concluímos diretamente que

$$I_2 \leq \int_1^{\infty} e^{-t}\,dt = \frac{1}{e} < \infty.$$

Por outro lado, caso $\Re(z) > 1$, podemos encontrar $m \in \mathbb{N}$ tal que $m < \Re(z) \leq m+1$ e dai através de algumas integrações por partes conseguimos obter que

$$\begin{aligned} I_2 = e^{-1}\Bigg(1 + \Big(\Re(z)-1\Big) + \Big(\Re(z)-1\Big)\Big(\Re(z)-2\Big) + \dots \\ + \Big(\Re(z)-1\Big)\dots\Big(\Re(z)-(m-1)\Big)\Bigg) \\ + \Big(\Re(z)-1\Big)\dots\Big(\Re(z)-m\Big)\int_1^{\infty} e^{-t}t^{\Re(z)-(m+1)}\,dt, \end{aligned}$$

o que nos leva a concluir que a existência de $M_1, M_2 \geq 0$ tais que

$$I_2 \leq M_1 + M_2\int_1^{\infty} e^{-t}\,dt < \infty.$$

Com este último argumento provamos o resultado. □

Note que a função definida no Teorema 1.2 possui muitas características interessantes. Para estudar estas propriedades, introduzimos e apresentamos o seguinte:

Propriedade 1.3. Definindo a função $\Gamma : \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) > 0\} \to \mathbb{C}$ por

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t}t^{z-1}\,dt,$$

Valem as seguintes relações:

1. Se $n \in \mathbb{N}$, então $\Gamma(n+1) = n!$
2. Se $z \in \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) > 0\}$ então $z\Gamma(z) = \Gamma(z+1)$.

Demonstração. 1. Para $n \in \mathbb{N}$ temos que

$$\Gamma(n+1) = \int_0^{\infty} e^{-t}t^n\,dt. \tag{1.1}$$

Considere a função $f : (0,\infty) \to \mathbb{C}$ dada por

$$f(a) := \int_0^{\infty} e^{-at}\,dt. \tag{1.2}$$

Claramente temos que

$$f(a) = -\frac{e^{-at}}{a}\Bigg|_0^{\infty} = \frac{1}{a}.$$

Derivando a equação acima, obtemos

$$\frac{d}{da}f(a)=\int_0^\infty \frac{d}{da}e^{-at}dt=\int_0^\infty -te^{-at}dt=-\frac{1}{a^2}.$$ [1]

Repetindo o processo, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{da^2}f(a)=\frac{d}{da}\int_0^\infty -te^{-at}dt=\int_0^\infty \frac{d}{da}\left[-te^{-at}\right]dt\\ =\int_0^\infty t^2e^{-at}dt=\frac{(-1)(-2)}{a^3}.\end{aligned}$$

Assim, fazendo o mesmo processo n-vezes obtemos:

$$(-1)^n\int_0^\infty t^ne^{-at}dt=(-1)^n\frac{n!}{a^{n+1}}. \tag{1.3}$$

Perceba que se $a=1$ em (1.3), segue que

$$\int_0^\infty t^ne^{-t}dt=n!. \tag{1.4}$$

Portanto de (1.1) e (1.4), segue

$$\Gamma(n+1)=n!,$$

que é exatamente o que queríamos.

2. Se $\Re(z)>0$, por definição, temos que

$$\Gamma(z+1)=\int_0^\infty t^ze^{-t}dt. \tag{1.5}$$

Usaremos o método da integração por partes para resolver a integral acima[2]. Assim, sendo de $u=t^z$, então $du=zt^{z-1}dt$. Por outro lado, se $e^{-t}dt=dv$, então teremos que $v=-e^{-t}$. Desta forma reescrevemos (1.5) como

$$\int_0^\infty \underbrace{t^z}_{u}\underbrace{e^{-t}dt}_{dv}=-\underbrace{t^z}_{u}\underbrace{e^{-t}}_{v}\Big|_0^\infty-\int_0^\infty \underbrace{-e^{-t}}_{v}\underbrace{zt^{z-1}dt}_{du},$$

que mais uma vez, devido ao fato que a função exponencial cresce mais rápido que a função polinomial, obtemos

$$\int_0^\infty t^ze^{-t}dt=z\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt. \tag{1.6}$$

[1] Para chegar nesse resultado usamos a regra de Leibniz.

[2] Enfatizamos aqui que esta mudança de variáveis, posta como está, precisa ser justificada melhor usando integração de funções complexas sobre caminhos e o Teorema de Cauchy. Contudo, como não vamos nos aprofundar nestes tópicos, sugerimos ao leitor que busque em alguma das seguintes referência [7], [12], [19].

De (1.5) e (1.6), temos:

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{\infty} t^z e^{-t} dt = z \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = z\Gamma(z).$$

Assim segue a demonstração deste item. E consequentemente a demonstração de todas as propriedades.

□

Embora as propriedades citadas acima já sejam, por si só, muito interessantes, gostaríamos de observar um outro fato curioso. Se $t > 0$ e $z \in \{w \in \mathbb{C} : \Re(w) > 0\}$ e escolhermos $h \in \mathbb{C}/\{0\}$ suficientemente pequeno, então

$$\frac{\Gamma(z+h) - \Gamma(z)}{h} = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} \left[\frac{t^h - 1}{h}\right] dt.$$

Agora, como sabemos que

$$\frac{d}{dh} t^h = \frac{d}{dh} e^{h \ln(t)} = \ln(t)\, e^{h \ln(t)} = t^h \ln(t),$$

pelo menos formalmente poderíamos supor que ao fazermos $h \longrightarrow 0$, obteríamos que

$$\frac{d}{dz} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} \ln(t)\, dt.$$

Desta forma, se formos capazes de justificar esta passagem do limite e ainda que a integral limite existe, poderíamos começar a discutir a possibilidade de $\Gamma(z)$ ser diferenciável. É pensando nisso que introduzimos o seguinte resultado.

Lema 1.4. *Se $z \in \{w \in \mathbb{C} : \Re(w) > 0\}$ então*

$$\int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} \ln(t)\, dt$$

é convergente.

Demonstração. Note que

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} \ln(t)\, dt \right\| &\leqslant \int_0^{\infty} \| e^{-t} t^{z-1} \ln(t) \| dt \\ &\leqslant \int_0^{1} e^{-t} t^{\Re(z)-1} [-\ln(t)] dt + \int_1^{\infty} e^{-t} t^{\Re(z)-1} \ln(t)\, dt. \end{aligned}$$

Assim temos dois casos a considerar:

1. Se $0 \leq t \leq 1$, então $e^{-t} t^{\Re(z)-1}[-\ln(t)] \leq t^{\Re(z)-1}[-\ln(t)]$. Daí, como

$$\int_0^{1} t^{\Re(z)-1} \ln(t)\, dt = \int_0^{1} \left[\frac{d}{dt} \frac{t^{\Re(z)}}{\Re(z)}\right] \ln(t)\, dt$$

$$= \frac{t^{\Re(z)}}{\Re(z)} \ln(\mathrm{t}) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{t^{\Re(z)-1}}{\Re(z)} dt = -\left(\frac{1}{\Re(z)}\right)^2,$$

obtemos

$$\int_0^1 e^{-t} t^{\Re(z)-1} [-\ln(\mathrm{t})] dt \leqslant \left(\frac{1}{\Re(z)}\right)^2.$$

2. Por outro lado note que $t^{-1/2} \ln(\mathrm{t}) \longrightarrow 0$ quando $t \longrightarrow \infty$, então existe $M > 0$ tal que

$$t^{-1/2} \ln(\mathrm{t}) \leq M, \text{ se } t \geq 1.$$

Daí temos que $ln(t) \leq M t^{1/2}$, se $t \geq 1$, ou seja

$$\begin{aligned}\int_1^\infty e^{-t} t^{\Re(z)-1} \ln(\mathrm{t})\, dt &\leqslant M \int_1^\infty e^{-t} t^{\Re(z)+1/2-1}\, dt \\ &\leqslant M \int_0^\infty e^{-t} t^{\Re(z)+1/2-1}\, dt = M\,\Gamma(\Re(z)+1/2).\end{aligned}$$

Desta forma concluímos que

$$\int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} \ln(\mathrm{t})\, dt \leqslant \left(\frac{1}{\Re(z)}\right)^2 + M\,\Gamma(\Re(z)+1/2) < \infty.$$

Assim, segue a demonstração. □

Tendo em vista este último resultado, podemos finalmente provar que a função Gama é diferenciável. Enfatizamos porém que usaremos aqui um pouco de integral complexa sobre caminhos, o qual é um conhecimento que assumimos conhecido pelo leitor.

Teorema 1.5. *Se $z \in \{w \in \mathbb{C} : \Re(w) > 0\}$, então $\Gamma(z)$ é diferenciável e sua derivada é dada por*

$$\Gamma^{'}(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} \ln(\mathrm{t})\, dt.$$

Demonstração. Assuma que $t > 0$. Observe que se $h \in \mathbb{C}$ é tal que $0 < |h| < 1$ pequeno, então

$$\frac{\Gamma(h+z)-\Gamma(z)}{h} = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} \left[\frac{t^h-1}{h}\right] dt,$$

e portanto

$$\begin{aligned}&\left\|\frac{\Gamma(h+z)-\Gamma(z)}{h} - \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} \ln(\mathrm{t})\, dt\right\| \\ &\qquad = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} \left[\frac{t^h-1}{h}\right] dt - \int_0^\infty e^{-t} t^{z-71} \ln(\mathrm{t})\, dt\right\| \\ &\qquad = \left\|\int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} \left[\frac{t^h-1}{h} - \ln(\mathrm{t})\right] dt\right\|\end{aligned}$$

$$\leqslant \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\Re(z)-1} \left| \left[\frac{t^h - 1}{h} - \ln(t) \right] \right| dt.$$

Considere o caminho complexo $\delta_h : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ dado por $\delta_h(s) = sh$. Então

$$|t^h - 1| = \left| \int_{\delta_h} \frac{d}{dz} t^z dz \right| \leq |\ln(t)| \left| \int_{\delta_h} t^z dz \right|.$$

Como a função $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, dada por $f(z) = t^z$, $t \in (0, \infty)$, é continua sobre $\delta_h([0,1])$, temos que

$$\left| \int_{\delta_h} t^z dz \right| \leq \int_{\delta_h} |t^z||dz| \leq \max\{|t|^z : z \in \delta_h([0,1])\}|h|.$$

Definimos $M = \max\{|t|^z : z \in \delta_h([0,1])\}$. Desta maneira, ficaremos com

$$\frac{|t^h - 1|}{|h|} \leq |\ln(t)| M. \tag{1.7}$$

1. Note que $\left| \dfrac{t^h - 1}{h} - \ln(t) \right| \longrightarrow 0$ pontualmente em $t > 0$, quando fazemos $h \longrightarrow 0$. E ainda temos que

$$e^{-t} t^{\Re(z)-1} \left| \frac{t^h - 1}{h} - \ln(t) \right| \longrightarrow 0, \text{ quando } h \longrightarrow 0,$$

pontualmente em $t > 0$.

2. Também perceba que segue da desigualdade (1.7) que

$$\underbrace{e^{-t} t^{\Re(z)-1} \left| \frac{t^h - 1}{h} - \ln(t) \right|}_{\mathscr{J}} \leq e^{-t} t^{\Re(z)-1} |\ln(t)|(M+1),$$

e pelo Lema 1.4, temos:

$$\int_0^{\infty} e^{-t} t^{\Re(z)-1} |\ln(t)|(M+1) dt < \infty,$$

ou seja, $\mathscr{J}$ é dominada por uma uma função integrável.

Logo ao considerar 1. e 2. o Teorema da Convergência Dominada[3] garante que

$$\left\| \frac{\Gamma(z+h) - \Gamma(z)}{h} - \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} \ln(t)\, dt \right\| \longrightarrow 0,$$

quando $h \longrightarrow 0$. Concluindo o resultado. □

Com o fim de estender o domínio da função Gama, apresentamos o seguinte resultado.

[3]Veja o Teorema 2.67, no Capítulo 2.

Lema 1.6. *Se $z \in \{w \in \mathbb{C} : -1 < \Re(w) \le 0\} \setminus \{0\}$, então definimos*

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(1+z)}{z}.$$

Desta forma, $\Gamma : \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) > -1\} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ é diferenciável.

Demonstração. Primeiro observe que

$$\Gamma(z) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(1+z)}{z}, & \text{for } z \in \{w \in \mathbb{C} : -1 < \Re(w) \le 0\} \setminus \{0\}, \\ \Gamma(z), & \text{for } z \in \{w \in \mathbb{C} : \Re(w) > 0\}. \end{cases}$$

Contudo, graças ao item 2 da Propriedade 1.3, podemos reescrever a igualdade acima na forma

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(1+z)}{z},$$

para todo $z \in \{w \in \mathbb{C} : \Re(w) > -1\} \setminus \{0\}$. Como $\Gamma(z+1)$ e $1/z$ são funções diferenciáveis para $z \in \{w \in \mathbb{C} : \Re(w) > -1\} \setminus \{0\}$, concluímos que a extensão da função Gama também é diferenciável para $z \in \{w \in \mathbb{C} : \Re(w) > -1\} \setminus \{0\}$, como queríamos. □

Observação 1.7.

1. Note que da forma que definimos acima, conseguimos ainda manter válido que $z\Gamma(z) = \Gamma(z+1)$ para todo $z \in \{w \in \mathbb{C} : \Re(w) > -1\} \setminus \{0\}$.

2. É possível mostrar que a função $\Gamma(z)$ não possui raízes em $\{w \in \mathbb{C} : \Re(w) > -1\} \setminus \{0\}$. Isto deve-se ao fato de como a formula integral que a construímos é dada e de como realizamos sua extensão.

Teorema 1.8. *Podemos estender a função Gama para o conjunto $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}$ de forma que fiquem válidas as seguintes propriedades:*

1. *$\Gamma(z)$ é uma função analítica em $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}$.*

2. *Para qualquer $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}$ vale que $z\Gamma(z) = \Gamma(z+1)$.*

3. *Se $z \in \{w \in \mathbb{C} : \Re(w) > 0\}$ temos que*

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} \, dt.$$

4. *Para qualquer $n \in \mathbb{N}$ temos que $\Gamma(n+1) = n!$*

Demonstração. É uma aplicação direta dos resultados apresentados nesta seção e de uma construção recursiva baseada nas ideias introduzidas pelo Lema 1.6. □

1.2 AS FUNÇÕES BETA E DIGAMA

Iniciamos este estudo com a função Beta.

Definição 1.9. Considere a função $\beta : D(\beta) \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$\beta(z_1, z_2) = \int_0^1 s^{z_1-1}(1-s)^{z_2-1}\,ds,$$

de modo que $D(\beta) = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : \Re(z_1) > 0, \Re(z_2) > 0\}$. Chamaremos $\beta(z_1, z_2)$ de função Beta.

A próxima proposição mostrará a ligação entre a função Beta e a função Gama.

Proposição 1.10. *Considere z_1 e $z_2 \in \mathbb{C}$ tais que $\Re(z_1) > 0$, $\Re(z_2) > 0$. Então*

$$\Gamma(z_1)\Gamma(z_2) = \Gamma(z_1 + z_2)\beta(z_1, z_2).$$

Demonstração. Note que da definição da função Gama podemos escrever a seguinte igualdade:

$$\Gamma(z_1)\Gamma(z_2) = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-(t+s)} t^{z_1-1} s^{z_2-1}\,dtds. \tag{1.8}$$

Fazendo agora a seguinte mudança de variável: $t = x^2$ e $s = y^2$. Note que nesta mudança de variável os limites de integração ainda continuam os mesmo, e temos que $dt = 2xdx$ e $ds = 2ydy$. Portanto, reescrevemos (1.8) como

$$4\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} x^{2(z_1-1)} y^{2(z_2-1)} xydxdy. \tag{1.9}$$

Usando coordenadas polares $x = r\cos\theta$ e $y = r\sin\theta$ e devemos integrar sob o intervalo $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$, e então reescrevemos (1.9)

$$\begin{aligned}
4\int_0^{\infty}&\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-(r^2)}(r\cos\theta)^{2z_1-1}(r\sin\theta)^{2z_2-1} rd\theta dr \\
&= 4\int_0^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-(r^2)} r^{2(z_1+z_2)-1}(\cos\theta)^{2z_1-1}(\sin\theta)^{2z_2-1} d\theta dr \\
&= 4\int_0^{\infty} e^{-(r^2)} r^{2(z_1+z_2)-1} dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta)^{2z_1-1}(\sin\theta)^{2z_2-1} d\theta. \qquad (1.10)
\end{aligned}$$

Por fim, faremos a seguinte mudança de variável: $r^2 = w_1$ e $(\cos\theta)^2 = w_2$. Note que os limites de integração da integral referente a r ainda continuam os mesmos. Mas perceba que quando $\theta = 0$, temos que $w_2 = 1$ e quando $\theta = \pi/2$, obtemos $w_2 = 0$. E ainda temos que $dw_1 = 2rdr$ e $dw_2 = -2\cos\theta\sin\theta d\theta$. Disto reescrevemos (1.10) como

$$4\int_0^{\infty} e^{-r^2} r^{2(z_1+z_2)-1} dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta)^{2z_1-1}(\sin\theta)^{2z_2-1} d\theta$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-r^2} r^{2((z_1+z_2)-1)} 2rdr \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta)^{2(z_1-1)} (\sin\theta)^{2(z_2-1)} 2\cos\theta \sin\theta d\theta$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-w_1} w_1^{(z_1+z_2)-1} dw_1 \int_0^1 w_2^{(z_1-1)} (1-w_2)^{(z_2-1)} dw_2$$

$$= \Gamma(z_1+z_2)\beta(z_1,z_2).$$

Com isso concluímos a demonstração. □

A partir de agora definiremos a função Digama e veremos que ela esta intimamente relacionada com a função Gama.

Iniciamos relembrando o item 2 da Observação 1.7 a fim de apontar que as singularidades da função Gama nos auxiliam em definir a função recíproca da função Gama, isto é, a função $1/\Gamma(z)$. Pode-se demonstrar que a função $1/\Gamma(z)$ é analítica em $\mathbb{C}$ e tem todos os seus zeros sobre os inteiros não positivos; para mais detalhes veja [7].

Definição 1.11. A função analítica $\psi : \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) > 0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$\psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} \left(= \frac{d}{dz} \ln(\Gamma(z)) \right),$$

é chamada de função Digama.

Mostraremos agora duas propriedades da função Digama que serão utilizadas em nosso trabalho.

Propriedade 1.12.

1. A função Digama satisfaz a seguinte identidade:

$$\psi(z+1) = \frac{1}{z} + \psi(z),$$

para todo $z \in \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) > 0\}$.

2. A função Digama é infinitamente diferenciável.

Demonstração.

1. Da Propriedade 1.3, item (2), temos que

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z). \tag{1.11}$$

O Teorema 1.8 nos garante que a função Gama é diferenciável, por isso podemos derivar (1.11). Assim ficamos com

$$\Gamma'(z+1) = \Gamma(z) + z\Gamma'(z). \tag{1.12}$$

Agora multiplicando ambos os lados de (1.12) por $\frac{1}{z\Gamma(z)}$, obtemos que

$$\psi(z+1) = \frac{1}{z} + \psi(z).$$

2. Segue diretamente do Teorema 1.8.

□

2 A TEORIA DA MEDIDA E INTEGRAÇÃO

Neste capítulo introduziremos brevemente alguns conceitos fundamentais da teoria da medida e integração, focando particularmente no estudo dos espaços L^p. Em resumo, na Seção 2.1 apresentamos os conceitos de σ–álgebras e funções mensuráveis, enquanto que na Seção 2.2 a teoria de integração com relação a uma medida.

2.1 σ–ÁLGEBRAS E FUNÇÕES MENSURÁVEIS

Definição 2.1. Sejam Ω um conjunto e $\mathscr{P}(\Omega)$ o conjunto das partes de Ω. Diremos que uma família de conjuntos $\mathscr{F} \subset \mathscr{P}(\Omega)$ é uma σ-álgebra (leia-se sigma álgebra) quando:

1. Os conjuntos $\emptyset$ e Ω pertencerem $\mathscr{F}$.
2. Se $A \in \mathscr{F}$ então o complementar $A^c \in \mathscr{F}$.
3. Valer que: se $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{F}$ então $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{F}$.

Observação 2.2. Da Definição 2.1, toda σ-álgebra $\mathscr{F}$ é fechada por intersecções enumeráveis. Isto é, se $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{F}$ então $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{F}$. De fato,

$$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{F} \Longrightarrow \{A_n^c\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{F} \Longrightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c \in \mathscr{F}$$
$$\Longrightarrow \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c\right)^c \in \mathscr{F} \Longrightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} (A_n^c)^c \in \mathscr{F} \Longrightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{F}.$$

Definição 2.3. Sejam Ω um conjunto não-vazio e $\mathscr{F} \subset \mathscr{P}(\Omega)$ uma σ-álgebra. Chamaremos o par $(\Omega, \mathscr{F})$ de espaço mensurável e todo elemento $A \in \mathscr{F}$ de conjunto mensurável.

A seguir daremos alguns exemplos das definições introduzidas acima.

Exemplo 2.4. Se Ω é um conjunto não-vazio, então $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ é um espaço mensurável.

Exemplo 2.5. Sejam $\Omega = \mathbb{N}$ e $\mathscr{F} \subset \mathscr{P}(\mathbb{N})$, com

$$\mathscr{F} = \{\emptyset, \{1,3,5,\ldots\}, \{2,4,6,\ldots\}, \mathbb{N}\}.$$

Deste modo $\mathscr{F}$ é uma σ-álgebra, já que:

1. Os conjuntos $\emptyset$ e $\mathbb{N}$ pertencem $\mathscr{F}$.
2. Se $A \in \mathscr{F}$, o complementar $A^c \in \mathscr{F}$. De fato, suponha que $A = \emptyset$ então $A^c = \mathbb{N} \in \mathscr{F}$. Agora, se $A = \mathbb{N}$ então $A^c = \emptyset \in \mathscr{F}$. E ainda, se $A = \{2,4,6,\ldots\}$ então $A^c = \{1,3,5,\ldots\} \in \mathscr{F}$. Por fim, se $A = \{1,3,5,\ldots\}$ então $A^c = \{2,4,6,\ldots\} \in \mathscr{F}$.

3. Sejam $A_1 = \emptyset$, $A_2 = \{1,3,5,\ldots\}$, $A_3 = \{2,4,6,\ldots\}$ e $A_4 = \mathbb{N}$. Note que $A_1 \cup A_i = A_i \in \mathscr{F}$, com $i = 2,3,4$. $A_2 \cup A_3 = A_4 \in \mathscr{F}$, $A_2 \cup A_4 = A_4 \in \mathscr{F}$ $A_3 \cup A_4 = A_4 \in \mathscr{F}$, $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = A_4 \in \mathscr{F}$, $A_1 \cup A_2 \cup A_4 = A_4 \in \mathscr{F}$, $A_2 \cup A_3 \cup A_4 = A_4 \in \mathscr{F}$ e $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 = A_4 \in \mathscr{F}$. Portanto, qualquer união enumerável de elementos de $\mathscr{F}$ está em $\mathscr{F}$.

Desta forma o par $(\Omega, \mathscr{F})$ é um espaço mensurável.

Exemplo 2.6. Se $\{\mathscr{F}_\lambda\}_{\lambda \in L}$ é uma família de σ-álgebras, então $\bigcap_{\lambda \in L} \mathscr{F}_\lambda$ é uma σ-álgebra.

1. Note que $\emptyset$ e $\Omega \in \mathscr{F}_\lambda$, para todo λ. Assim, $\emptyset$ e $\Omega \in \bigcap_{\lambda \in L} \mathscr{F}_\lambda$, pois estes são comuns à todas as σ-álgebras.

2. Se $A \in \bigcap_{\lambda \in L} \mathscr{F}_\lambda$, então $A \in \mathscr{F}_\lambda$ para todo $\lambda \in L$. Assim, $A^c \in \mathscr{F}_\lambda$ para todo λ. Logo
$$A^c \in \bigcap_{\lambda \in L} \mathscr{F}_\lambda.$$

3. Se $\{A_n\}_{n=1}^\infty \subset \bigcap_{\lambda \in L} \mathscr{F}_\lambda$ então $\{A_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathscr{F}_\lambda$, para todo $\lambda \in L$. Assim,
$$\bigcup_{n=1}^\infty A_n \in \mathscr{F}_\lambda,$$
para todo $\lambda \in L$. Portanto,
$$\bigcup_{n=1}^\infty A_n \in \bigcap_{\lambda \in L} \mathscr{F}_\lambda.$$
Deste modo temos que
$$\bigcap_{\lambda \in L} \mathscr{F}_\lambda,$$
é uma σ-álgebra.

O Exemplo 2.6 nos permite fazer a seguinte construção: Seja $\mathscr{C} \subset \mathscr{P}(\Omega)$ uma coleção qualquer de conjuntos. Seja $\mathscr{U}_\mathscr{C}$ a coleção de todas as σ-álgebras que contém $\mathscr{C}$. A coleção $\mathscr{U}_\mathscr{C}$ é não-vazia, pois graças ao Exemplo 2.4 temos que $\mathscr{P}(\Omega) \in \mathscr{U}_\mathscr{C}$. Agora definimos
$$\mathscr{R}(\mathscr{C}) := \bigcap_{V \in \mathscr{U}_\mathscr{C}} V.$$
Do Exemplo 2.6, segue que $\mathscr{R}(\mathscr{C})$ é uma σ-álgebra que contém $\mathscr{C}$. Podemos facilmente concluir de sua definição que ela é a (única) menor σ-álgebra que contém $\mathscr{C}$. Por vezes esta σ-álgebra será chamada de *σ-álgebra gerada.*

Observação 2.7. Se (Ω,τ) é um espaço topologico[1] e $\mathscr{R}$ é a coleção de todas as σ-álgebras que contém os elementos de τ (i.e., os abertos de Ω), então como comentado anteriormente, existe uma σ-álgebra gerada pela intersecção de todos os elementos de $\mathscr{R}$.

Exemplo 2.8. Seja (Ω,τ) um espaço topológico. A σ-álgebra gerada pela família de conjuntos abertos de τ é conhecida como *σ-álgebra de Borel*, denotada por $\mathscr{B}$. Chamamos os elementos de $\mathscr{B}$ de *conjuntos de Borel* ou *borelianos* de Ω. Por fim, note que $(\Omega,\mathscr{B})$ é um espaço mensurável.

Definição 2.9. Seja $(\Omega,\mathscr{F})$ um espaço mensurável. Diremos que a função $f:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ é mensurável relativamente[2] a $\mathscr{F}$, se para todo $a\in\mathbb{R}$ valer que

$$\{x\in\Omega : f(x)>a\} = f^{-1}((a,\infty))\in\mathscr{F}.^{3}$$

Definição 2.10. Sejam Ω um conjunto qualquer e $A\in\mathscr{P}(\Omega)$. A função $\chi_A:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x\in A,\\ 0, & \text{se } x\notin A,\end{cases}$$

é chamada de função característica.

Proposição 2.11. *Sejam $(\Omega,\mathscr{F})$ um espaço mensurável e $A\in\mathscr{F}$. Então $\chi_A:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ é mensurável.*

Demonstração. De fato, se $a\geq 1$, então $\{x\in\Omega : \chi_A(x)>a\} = \emptyset\in\mathscr{F}$. Por outro lado, assuma que $0\leq a<1$, então $\{x\in\Omega:\chi_A(x)>a\} = A\in\mathscr{F}$. E por fim, suponha $a<0$, então $\{x\in\Omega:\chi_A(x)>a\}=\Omega\in\mathscr{F}$. Assim a função característica é mensurável. $\square$

Exemplo 2.12. Seja $(\Omega,\mathscr{F})$ um espaço mensurável. Se $f:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ é a função constante, então f é mensurável. De fato, como $f(x)=c$ para todo $x\in\Omega$. Se $a\geqslant c$, então $\{x\in\Omega : f(x)>a\}=\emptyset\in\mathscr{F}$. Por outro lado, se $a<c$, então $\{x\in\Omega: f(x)>a\}=\Omega\in\mathscr{F}$. Deste modo, a função simples é mensurável.

A seguir será definido a reta real extendida, suas operações e propriedades. Em nosso contexto, este conjunto nos auxiliará a prosseguir com a teoria que está sendo construída, pois começaremos a trabalhar com funções cuja o contradomínio poderá "conter" o $\pm\infty$.

[1] Não vamos nos aprofundar além disto na teoria da Topologia Geral. Caso o leitor tenha interesse, sugerimos que verifique a clássica literatura [20].

[2] Por simplicidade diremos apenas que $f:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ é mensurável.

[3] A definição também pode ser dada com os seguintes conjuntos:
$\{x\in\Omega: f(x)\geq a\}$; $\{x\in\Omega: f(x)<a\}$; $\{x\in\Omega: f(x)\leq a\}$.

Definição 2.13 (Reta real extendida)**.** A reta real extendida, a qual é denotada por $\overline{\mathbb{R}}$, é o conjunto $\mathbb{R}\cup\{-\infty,\infty\}$. Vale apontar que neste contexto $\pm\infty$ são vistos como elementos com os quais podemos operacionalizar parcialmente. A ideia desta construção foi dada por Dedekind–MacNeille em [21].

Sobre $\overline{\mathbb{R}}$ definimos as operações de soma e produto. Também sobre $\overline{\mathbb{R}}$ definiremos uma relação de ordem, bem como uma topologia.

1. Em $\overline{\mathbb{R}}$ considere + uma operação binária parcialmente[4] definida que estende a soma em $\mathbb{R}$; mais precisamente, a função

$$+ : (x,y) \in (\overline{\mathbb{R}}\times\overline{\mathbb{R}})\setminus\{(\infty,-\infty);(-\infty,\infty)\} \longrightarrow x+y \in \overline{\mathbb{R}},$$

dada da seguinte maneira:

   a) Se $a,b\in\mathbb{R}$, $a+b=b+a$ é a soma usual em $\mathbb{R}$.
   b) Se $a\in\mathbb{R}$, pomos $a+\infty=\infty+a=\infty$ e $a+(-\infty)=-\infty$.
   c) Definimos $\infty+\infty=\infty$ e $-\infty-\infty=-\infty$.

2. Sobre $\overline{\mathbb{R}}$ considere $\cdot$, uma operação binária definida, que estende a multiplicação (produto) em $\mathbb{R}$; mais precisamente, a função

$$(x,y) \in (\overline{\mathbb{R}}\times\overline{\mathbb{R}}) \longrightarrow x\cdot y \in \overline{\mathbb{R}},$$

dada da seguinte maneira:

   a) Se $a,b\in\mathbb{R}$, $a\cdot b=b\cdot a$ denota o produto usual em $\mathbb{R}$.
   b) Se $a\in\mathbb{R}$ é um número positivo [resp. negativo] pomos $a\cdot\infty=\infty\cdot a=\infty$ $\left[\text{resp. } a\cdot\infty=\infty\cdot a=-\infty\right]$.
   $a\cdot-\infty=-\infty\cdot a=-\infty$ $\left[\text{resp. } a\cdot-\infty=-\infty\cdot a=\infty\right]$.
   c) $\infty\cdot\infty=(-\infty)\cdot(-\infty)=\infty$; e $\infty\cdot(-\infty)=(-\infty)\cdot\infty=-\infty$.
   d) $0\cdot\infty=\infty\cdot 0=0=0\cdot(-\infty)=(-\infty)\cdot 0$.[5]

3. Sobre $\overline{\mathbb{R}}$ é definido a relação de ordem $<$ (estrita), dada por:

$$-\infty<a<\infty,$$

para qualquer $a\in\mathbb{R}$. Ou seja, o maior elemento de $\overline{\mathbb{R}}$ será o (∞) e o menor elemento será $(-\infty)$.

4. Em $\overline{\mathbb{R}}$ consideramos a topologia τ que é dada da seguinte forma: $A\subset\overline{\mathbb{R}}$ é um elemento de τ se, e somente se, as seguintes condições forem satisfeitas:

[4]Nesse contexto a soma entre ∞ e $-\infty$ não está definida.
[5]Esta convenção não provém da construção de Dedekind–MacNeille, porém ela é muito útil na teoria que estamos desenvolvendo.

a) $A \cap \mathbb{R}$ é um aberto na topologia usual de $\mathbb{R}$.

b) Se $+\infty \in A$[resp. $-\infty \in A$] então existe $a \in \mathbb{R}$ tal que;

$$\{x \in \overline{\mathbb{R}} : a < x\} \subset A \quad [resp\ .\ \{x \in \overline{\mathbb{R}} : x < a\} \subset A].$$

Nas próximas definições usaremos com frequêcia o conjunto $\overline{\mathbb{R}}$. Isto se deve ao fato que vamos ampliar o conceito de funções mensuráveis para funções com contradomínio em $\overline{\mathbb{R}}$.

Definição 2.14. Considere $(\Omega, \mathscr{F})$ um espaço mensurável e $f : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Dizemos que f é mensurável relativamente[6] a σ-álgebra $\mathscr{F}$ se para cada $a \in \mathbb{R}$, tivermos $\{x \in \Omega : f(x) > a\} \in \mathscr{F}$.

Vamos agora introduzir um conceito muito importante que será usado mais a frente neste texto.

Definição 2.15. Seja $f : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ uma função. A parte positiva de f é a função $f^+ : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, definida por $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$. Por outro lado, a parte negativa da função f é a função $f^- : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, definida por $f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}$.

Proposição 2.16. *Seja $f : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ uma função. Então valem as igualdades a seguir:*

$$f = f^+ - f^- \qquad e \qquad |f| = f^+ + f^-.$$

Mais ainda, f é mensurável se, e somente se, f^+ e f^- são mensuráveis.

Demonstração. Consequência imediata da Definição 2.14 e da própria definição das funções f^+ e f^-. □

Proposição 2.17. *Sejam $(\Omega, \mathscr{F})$ um espaço mensurável, $f : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ uma função mensurável e $c \in \mathbb{R}$. Então $c \cdot f$, f^2, $|f|$, f^+ e f^- são funções mensuráveis.*

Demonstração. Para os detalhes veja [2, Lemas 2.6 e 2.8]. □

Uma justificativa do motivo de termos introduzido o conceito de mensurabilidade de funções com contradomínio em $\overline{\mathbb{R}}$ pode ser verificado no seguinte resultado.

Proposição 2.18. *Seja $(\Omega, \mathscr{F})$ um espaço mensurável. Se considerarmos uma sequência de funções mensuráveis $f_n : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ e definimos*

$$f(x) = \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n(x), \quad f^*(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x), \quad F(x) = \liminf_{n \to \infty} f_n(x)$$

$$e \quad F^*(x) = \limsup_{n \to \infty} f_n(x),$$

então estas funções são mensuráveis.

[6]Como anteriormente, por simplicidade, aqui também diremos apenas que $f : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ é mensurável.

Demonstração. Mostraremos que $f(x) = \inf f_n(x)$ é mensurável. Para isso, seja $\alpha > 0$ e defina

$$A = \{x \in \Omega : f(x) \geq \alpha\} \text{ e } B = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in \Omega : f_n(x) \geq \alpha\}.$$

Primeiro note que $A = B$. De fato, se $x \in A$, então $\inf f_n(x) = f(x) \geq \alpha$. Evidentemente teremos $f_n(x) \geq \alpha$ para todo $n \in \mathbb{N}$, logo $x \in B$. Reciprocamente, $x \in B$, então $f_n(x) \geq \alpha$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim $f(x) = \inf f_n(x) \geq \alpha$, logo $x \in A$, portanto, $A = B$. E como $f_n : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ é mensurável, então B é mensurável, isso nos configura que A é mensurável. Ou seja f é uma função mensurável.

A prova que $f^*(x) = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$ é mensurável é análoga a demonstração acima.

Com argumentos semelhantes aos que já utilizamos e notando que

$$F(x) = \sup_{m \in \mathbb{N}} \inf_{n \geq m} f_n(x) \quad e \quad F^*(x) = \inf_{m \in \mathbb{N}} \sup_{n \geq m} f_n(x), \tag{2.1}$$

também conseguimos verificar que $F(x)$ e $F^*(x)$ são funções mensuráveis. □

Observação 2.19. Um resultado imediato da proposição acima é que se tivermos $f_n : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ uma sequência de funções mensuráveis que converge para uma $f : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, então f é mensurável.

Vamos agora apresentar um resultado que diz que: toda função mensurável e não-negativa é limite de uma sequência $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ monótona crescente, com φ_n mensurável para todo $n \in \mathbb{N}$. Para os detalhes da demonstração veja [2, Lema 2.11].

Teorema 2.20. *Se $f : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$*[7] *é uma função mensurável, então existe uma sequência $\varphi_n : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ de funções mensuráveis tal que:*

1. *Cada φ_n tem apenas um número finito de valores reais.*

2. $0 \leq \varphi_n(x) \leq \varphi_{n+1}(x)$, $\forall x \in \Omega$, *e* $n \in \mathbb{N}$.

3. $f(x) = \lim \varphi_n(x)$, *para cada* $x \in \Omega$.

A partir deste ponto introduzimos a noção de medida sobre uma σ–álgebra, que será uma das principais ferramentas para tratar a teoria de integração.

Definição 2.21 (Medida)**.** Seja $(\Omega, \mathscr{F})$ um espaço mensurável. Uma medida é uma função $\mu : \mathscr{F} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ que satisfaz:

1. $\mu(\emptyset) = 0$.

[7] Esse conjunto se defini como $\overline{\mathbb{R}}_+ := \{x \in \overline{\mathbb{R}} : x \geqslant 0\}$.

2. *Se* $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{F}$ *é uma sequência de conjuntos dois a dois disjuntos, então*
$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$
Chamamos esta propriedade de σ–aditividade.

Observação 2.22. É fundamental permitir que o contradomínio de μ seja $\overline{\mathbb{R}}_+$, pois pode acontecer que para algum $A \in \mathscr{F}$, termos $\mu(A) = \infty$; neste caso diremos que o conjunto A tem medida infinita. Quando $\mu(A) < \infty$, diremos que o conjunto Ω tem medida finita.

Exemplo 2.23 (Medida de contagem)**.** Seja Ω um conjunto não vazio. Como observado no Exemplo 2.4, $\mathscr{P}(\Omega)$ sempre é uma σ–álgebra. Desta forma, podemos definir sobre $\mathscr{P}(\Omega)$ a função $\# : \mathscr{P}(\Omega) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ dada por:
$$\#(A) = \begin{cases} k, & \text{se o número de elementos de } A \text{ é igual } k \in \mathbb{Z}_+, \\ \infty, & \text{se } A \text{ possui infinitos elementos.} \end{cases}$$

Veja que pela definição de # temos que # é positiva e $\#(\emptyset) = 0$. Agora considere uma coleção enumerável $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{P}(\Omega)$, dois a dois disjuntos, e defina $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

1. Suponha primeiro que A é infinito. Neste caso há duas possibilidades. A primeira é que exista $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que A_{n_0} é infinito, de forma que
$$\infty = \#(A_{n_0}) \leq \# \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \#(A) = \infty,$$
logo vale a igualdade
$$\#(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \#(A_n). \tag{2.2}$$
A outra possibilidade é que A_n seja finito para todo $n \in \mathbb{N}$. Neste caso, existe $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$ infinito tal que $A_n \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}'$, pois caso contrário teríamos que A é finito, o que é uma contradição. Desta forma, temos que $\#(A_n) \geq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}'$ e portanto
$$\infty = \sum_{n \in \mathbb{N}'} 1 \leq \sum_{n \in \mathbb{N}'} \#(A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \#(A_n) \leq \# \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \#(A) \leq \infty,$$
ou seja, concluímos que vale a (2.2).

2. Por fim, suponha que A é finito. Como os A_n são dois a dois disjuntos, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $A_n = \emptyset$ para todo $n > N$. Ou seja $A = \bigcup_{n=1}^{N} A_n$, e está claro que o número de elementos de A será a soma dos números de elementos dos A_n para $n \in \{1, 2, \ldots, N\}$, ou seja, vale (2.2).

Desta forma $\# : \mathscr{P}(\Omega) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ é um medida no espaço mensurável $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$.

Definição 2.24 (Espaço de medida)**.** Seja $(\Omega, \mathscr{F})$ um espaço mensurável e $\mu : \mathscr{F} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ uma medida. Chamaremos o terno $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ de espaço de medida.

Apresentamos a seguir dois resultados importantes sobre espaços de medida. Iniciamos apresentando o seguinte lema auxiliar. Para detalhes da demonstração veja [2, Lema 3.3].

Lema 2.25. *Seja $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ de espaço de medida. Se $E, F \in \mathscr{F}$, donde $E \subset F$, então $\mu(E) \leq \mu(F)$. Quando ocorrer de $\mu(E) < \infty$, teremos ainda que $\mu(F) - \mu(E) = \mu(F \setminus E)$.*

Teorema 2.26. *Seja $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ um espaço de medida.*

1. *Se $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{F}$ é tal que $A_n \subset A_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então*
$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \lim \mu(A_n). \tag{2.3}$$

2. *Se $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{F}$ é tal que $A_{n+1} \subset A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\mu(A_1) < \infty$, então*
$$\mu\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \lim \mu(A_n).$$

Demonstração. 1. Se $\mu(A_n) = \infty$ para algum $n \in \mathbb{N}$, então pelo Lema 2.25 a igualdade (2.3) é trivialmente satisfeita. Suponha agora que $\mu(A_n) < \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Defina $E_1 = A_1$ e $E_n = A_n \setminus A_{n-1}$ para todo $n \geq 2$. Assim E_n é uma sequência de elementos dois a dois disjuntos em $\mathscr{F}$ tal que

$$A_n = \bigcup_{i=1}^{n} E_i \qquad \text{e} \qquad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n.$$

Como μ é σ–aditiva, então

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = \lim \sum_{n=1}^{m} \mu(E_n). \tag{2.4}$$

Agora pelo Lema 2.25, temos que $\mu(E_n) = \mu(A_n) - \mu(A_{n-1})$, para todo $n \geq 2$. Logo

$$\sum_{n=2}^{m} \mu(E_n) = \sum_{n=2}^{m} \Big[\mu(A_n) - \mu(A_{n-1})\Big] = \mu(A_m). \tag{2.5}$$

Segue de (2.4) e (2.5) que

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \lim \mu(A_m).$$

2. A demonstração deste item segue o mesmo raciocínio do item anterior. □

Por fim apresentamos uma noção muito importante que usamos durante toda a dissertação.

Definição 2.27. Considere $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ um espaço de medida. Neste caso, se $A \in \mathscr{F}$ e $\mu(A) = 0$, dizemos que A é um conjunto de medida nula. Disto, definimos que:

1. Se $f, g : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ são tais que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in A^c$ e A é um conjunto de medida nula, dizemos que $f = g$ em quase toda parte[8].

2. Diremos que a sequência de funções f_n converge a f em quase todo ponto de Ω, quando $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ para todo $x \in A^c$, com A um conjunto de medida nula.

2.1.1 A medida de Lebesgue

Nesta subseção construímos a medida de Lebesgue. Alertamos porém, que para fazermos a construção desta medida, precisamos introduzir uma série de conceitos.

Definição 2.28. Para os intervalos reais $I_1 = (a, b)$, $I_2 = [a, b)$, $I_3 = (a, b]$ e $I_4 = [a, b]$, definimos o comprimento destes intervalos por:

$$\delta(I_1) = \delta(I_2) = \delta(I_3) = \delta(I_4) = b - a.$$

Por outro lado, se considerarmos $I_5 = (-\infty, a)$, $I_6 = (-\infty, a]$, $I_7 = (a, \infty)$, $I_8 = [a, \infty)$ ou $I_9 = (-\infty, \infty)$, então definimos o comprimento destes intervalos por:

$$\delta(I_5) = \delta(I_6) = \delta(I_7) = \delta(I_8) = \delta(I_9) = \infty.$$

Por fim, se dois intervalos I_1 e I_2 são disjuntos e limitados, então assumimos que $\delta(I_1 \cup I_2) = \delta(I_1) + \delta(I_2)$.

Gostaríamos de construir uma medida ℓ sobre alguma σ–álgebra $\mathscr{L}$ que satisfaça as seguintes propriedades:

1. Todo intervalo (limitado ou ilimitado) $I \subset \mathbb{R}$ está em $\mathscr{L}$ e ainda $\ell(I) = \delta(I)$.

2. Se $A \in \mathscr{L}$ e $y \in \mathbb{R}$, então a translação de A por y, isto é, $A + y := \{x + y : x \in A\}$, também está em $\mathscr{L}$ e $\ell(A + y) = \ell(A)$.

Inicialmente vamos construir uma nova noção de medida que nos auxiliará na construção da medida desejada.

[8] Sempre que for possível, abreviaremos este termo apenas por q.t.p..

Definição 2.29 (Medida exterior)**.** Seja $A \subset \mathbb{R}$. Definimos a medida exterior de A, denotada por $\ell^\star(A)$, como

$$\ell^\star(A) = \inf\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \delta(I_n) : \text{ de modo que } \{I_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ é uma coleção} \right.$$
$$\left. \text{de intervalos abertos e limitados que cobrem } A \right\}.$$

Observação 2.30. É importante notar que a definição de medida exterior não é suficiente para garantirmos que $\ell^\star$ seja de fato uma medida, uma vez que nem sequer apresentamos uma σ–álgebra sobre a qual $\ell^\star$ estaria definida.

Da definição de medida exterior conseguimos verificar três propriedades importantes que nos prestam grande auxílio no restante desta subseção.

Proposição 2.31. *A medida exterior satisfaz:*

1. $\ell^\star(\emptyset) = 0$.
2. $\ell^\star$ *é σ–subaditiva, isto é, se* $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$, *então vale que*
$$\ell^\star\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \ell^\star(A_n).$$
3. *Vale a monotonicidade, isto é: se* $A, B \subset \mathbb{R}$ *e* $A \subset B$, *então* $\ell^\star(A) \leq \ell^\star(B)$.

Demonstração. 1. Uma consequência imediata da definição é que $\ell^\star(\emptyset) = 0$, já que $\emptyset \subset I_n := (-1/(2n), 1/(2n))$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e portanto por definição
$$0 \leq \ell^\star(\emptyset) \leq \delta(I_n) = 1/n,$$
para todo $n \in \mathbb{N}$.

2. Suponha que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\ell^\star(A_{n_0}) = \infty$. Assim
$$\ell^\star\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \infty = \ell^\star(A_{n_0}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \ell^\star(A_n).$$
Para provar o caso restante, assuma agora que $\ell^\star(A_n) = \alpha_n < \infty$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e considere $\epsilon > 0$. Logo para cada $n \in \mathbb{N}$, existe uma sequência de intervalos abertos $\{I_{k,\epsilon}^n\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ tais que
$$A_n \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_{k,\epsilon}^n \quad \text{e} \quad \ell^\star(A_n) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \delta(I_{k,\epsilon}^n) < \alpha_n + \frac{\epsilon}{2^n}.$$

Como

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty} I_{k,\epsilon}^n,$$

então

$$\ell^\star\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\delta(I_{k,\epsilon}^n) < \sum_{n=1}^{\infty}\left[\alpha_n + \frac{\epsilon}{2^n}\right] = \left[\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\right] + \epsilon. \tag{2.6}$$

Fazendo $\epsilon \longrightarrow 0^+$, obtemos

$$\ell^\star\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n = \sum_{n=1}^{\infty}\ell^\star(A_n).$$

3. Se $\ell^\star(B) = \infty$, então teríamos $\ell^\star(A) \leq \infty = \ell^\star(B)$. Por outro lado, suponha que $\ell^\star(B) = \alpha < \infty$ e considere $\epsilon > 0$. Assim existe uma coleção de intervalos abertos e limitados $\{I_{n,\epsilon}\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ que satisfaz

$$B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_{n,\epsilon} \quad \text{e} \quad \ell^\star(B) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\delta(I_{n,\epsilon}) < \alpha + \epsilon.$$

Entretanto temos que $A \subset B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_{n,\epsilon}$. Logo

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_{n,\epsilon} \quad \text{e} \quad \ell(A)^\star \leq \sum_{n=1}^{\infty}\delta(I_{n,\epsilon}),$$

o que nos permite concluir que

$$\ell(A)^\star \leq \alpha + \epsilon, \tag{2.7}$$

para qualquer $\epsilon > 0$. Desta forma, fazendo $\epsilon \longrightarrow 0^+$ em (2.7), temos

$$\ell(A)^\star \leq \alpha = \ell^\star(B).$$

Segue a demonstração.

□

Proposição 2.32. *A medida exterior é invariante por translação, ou seja, para quaisquer conjunto $A \subset \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$, temos*

$$\ell^\star(A + y) = \ell^\star(A). \tag{2.8}$$

Demonstração. Observe que se $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ é uma coleção de intervalos abertos e limitados, então $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ cobrem A se, e somente se $\{I_n + y\}_{n=1}^{\infty}$ cobre $A + y$. Além disso, como I_n é intervalo aberto para todo $n \in \mathbb{N}$, então $I_n + y$ também é intervalo aberto com o mesmo comprimento de I_n, para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, ficaremos com

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ell^\star(I_n) = \sum_{n=1}^{\infty}\ell^\star(I_n + y).$$

Com isso, obtemos que

$$\ell^\star(A) = \inf\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \delta(I_n) : \text{ de modo que } \{I_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ é uma coleção} \right.$$
$$\left. \text{de intervalos abertos e limitados que cobrem } A \right\}$$
$$= \inf\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \delta(I_n+y) : \text{ de modo que } \{I_n+y\}_{n=1}^{\infty} \text{ é uma coleção} \right.$$
$$\left. \text{de intervalos abertos e limitados que cobrem } A+y \right\} = \ell^\star(A+y).$$

□

Exemplo 2.33. Considere os intervalos $A = [a,b]$ e $B = (a,b)$ da reta, então $\ell^\star(A) = \ell^\star(B) = b-a$

Demonstração. 1. Segue da definição que $\ell^\star(B) = b-a$.

2. Para provarmos o outro caso, considere $\epsilon > 0$ arbitrário e note que $[a,b]$ está contido em $(a-\epsilon, b+\epsilon)$. Então do item 3. da Proposição 2.31 juntamente com a primeira parte que

$$\ell^\star\left([a,b]\right) \leq \ell^\star\left((a-\epsilon, b+\epsilon)\right) = b-a+2\epsilon, \quad \forall \epsilon > 0. \tag{2.9}$$

Fazendo $\epsilon \longrightarrow 0^+$ em (2.9), ficamos com $\ell^\star(A) \leq b-a$. Por outro lado, temos que $(a,b) \subset [a,b]$. Portanto, mais uma vez do item 3. da Proposição 2.31, juntamente com a primeira parte, obtemos que

$$b-a = \ell^\star\left((a,b)\right) \leq \ell^\star\left([a,b]\right) = \ell^\star(A). \tag{2.10}$$

Logo (2.9) e (2.10) garante que

$$\ell^\star\left([a,b]\right) = b-a.$$

□

Os próximos lemas são importantes para construção de $\mathscr{L}$.

Lema 2.34. *Se $A_1, A_2 \subset \mathbb{R}$ são tais que*

$$\ell^\star(E) = \ell^\star(E \cap A_i) + \ell^\star(E \cap A_i^c), \tag{2.11}$$

para $i = 1,2$ e todo $E \subset \mathbb{R}$, então

$$\ell^\star(E) = \ell^\star\left(E \cap (A_1 \cup A_2)\right) + \ell^\star(E \cap (A_1 \cup A_2)^c),$$

para todo $E \subset \mathbb{R}$.

Demonstração. Considere $E \subset \mathbb{R}$. Como A_2 satisfaz (2.11), então considerando o conjunto $E \cap A_1^c \subset \mathbb{R}$ temos que

$$\ell^\star(E \cap A_1^c) = \ell^\star((E \cap A_1^c) \cap A_2) + \ell^\star((E \cap A_1^c) \cap A_2^c). \tag{2.12}$$

Observe que

$$\begin{aligned} E \cap (A_1 \cup A_2) &= (E \cap A_1) \cup (E \cap A_2) \\ &= (E \cap A_1) \cup (E \cap A_2 \cap A_1^c), \end{aligned}$$

assim, pela Proposição 2.31 temos

$$\ell^\star\big(E \cap (A_1 \cup A_2)\big) \leq \ell^\star((E \cap A_1)) + \ell^\star((E \cap A_2 \cap A_1^c)). \tag{2.13}$$

Agora das equações (2.11), (2.12) e (2.13), ficamos com

$$\begin{aligned} &\ell^\star(E \cap (A_1 \cup A_2)) + \ell^\star(E \cap (A_1^c \cap A_2^c)) \\ &\qquad \leq \ell^\star((E \cap A_1)) + \ell^\star((E \cap A_2 \cap A_1^c)) + \ell^\star(E \cap (A_1^c \cap A_2^c)) \\ &\qquad = \ell^\star((E \cap A_1)) + \ell^\star((E \cap A_1^c) \cap A_2) + \ell^\star((E \cap A_1^c) \cap A_2^c) \\ &\qquad = \ell^\star((E \cap A_1)) + \ell^\star(E \cap A_1^c) = \ell^\star(E). \end{aligned}$$

Em resumo obtemos que

$$\ell^\star(E \cap (A_1 \cup A_2)) + \ell^\star(E \cap (A_1 \cup A_2)^c) \leq \ell^\star(E). \tag{2.14}$$

Por outro lado temos

$$E = \Big(E \cap (A_1 \cup A_2)\Big) \cup \Big(E \cap (A_1 \cup A_2)^c\Big).$$

Logo obtemos que

$$\ell^\star(E) \leq \ell^\star(E \cap (A_1 \cup A_2)) + \ell^\star(E \cap (A_1 \cup A_2)^c). \tag{2.15}$$

Assim por (2.14) e (2.15), temos

$$\ell^\star(E) = \ell^\star(E \cap (A_1 \cup A_2)) + \ell^\star(E \cap (A_1 \cup A_2)^c).$$

□

Observação 2.35. Por indução, conseguimos mostrar que se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ satisfazem (2.11) então $\bigcup_{i=1}^n A_i$ satisfaz (2.11).

Lema 2.36. *Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n \subset \mathbb{R}$ conjuntos dois a dois disjuntos que satisfazem*

$$\ell^\star(E) = \ell^\star(E \cap A_i) + \ell^\star(E \cap A_i^c), \tag{2.16}$$

para $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ e todo $E \subset \mathbb{R}$. Se $F \subset \mathbb{R}$, então

$$\ell^\star\left(F \cap \left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right)\right) = \sum_{i=1}^n \ell^\star(F \cap A_i)$$

Demonstração. A demonstração será feita por indução em n. Se considerarmos $F \subset \mathbb{R}$, defina

$$B = \left\{ k \in \{1,2\ldots,n\} : \ell^{\star}\left(F \cap \left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right)\right) = \sum_{i=1}^{k} \ell^{\star}(F \cap A_i) \right\}.$$

Claramente temos que $1 \in B$. Suponha agora que

$$\ell^{\star}\left(F \cap \left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right)\right) = \sum_{i=1}^{k} \ell^{\star}(F \cap A_i), \tag{2.17}$$

seja válido para todo $k \in \{1,2,\ldots,n-1\}$. Como

$$\left(F \cap \left(\bigcup_{i=1}^{k+1} A_i\right)\right) \cap A_{k+1} = F \cap A_{k+1},$$

e

$$\left(F \cap \left(\bigcup_{i=1}^{k+1} A_i\right)\right) \cap (A_{k+1})^c = \left(F \cap \left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right)\right),$$

do fato que A_{k+1} satisfaz (2.16), pela equação (2.17) obtemos

$$\begin{aligned}\ell^{\star}\left(F \cap \left(\bigcup_{i=1}^{k+1} A_i\right)\right) &= \ell^{\star}\left(F \cap \left(\bigcup_{i=1}^{k+1} A_i\right) \cap A_{k+1}\right) \\ &+ \ell^{\star}\left(F \cap \left(\bigcup_{i=1}^{k+1} A_i\right) \cap (A_{k+1})^c\right) = \ell^{\star}(E \cap A_{k+1}) + \ell^{\star}\left(F \cap \left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right)\right) \\ &= \ell^{\star}(F \cap A_{k+1}) + \sum_{i=1}^{k} \ell^{\star}(F \cap A_i) = \sum_{i=1}^{k+1} \ell^{\star}(F \cap A_i).\end{aligned}$$

Assim $k+1 \in B$. Desta forma, por indução segue a demonstração. □

Com o intuito de construirmos a σ–álgebra desejada no início desta subseção, utilizamos a medida exterior $\ell^{\star}$ para provamos o seguinte resultado.

Definição 2.37. Dizemos que $A \subset \mathbb{R}$ é um elemento de $\mathscr{L} \subset \mathscr{P}(\mathbb{R})$ quando

$$\ell^{\star}(E) = \ell^{\star}(E \cap A) + \ell^{\star}(E \cap A^c),$$

para todo $E \subset \mathbb{R}$.

Teorema 2.38. *O conjunto $\mathscr{L}$ definido acima é uma σ–álgebra em $\mathbb{R}$. Chamamos $\mathscr{L}$ de σ–álgebra de Lebesgue.*

Demonstração. Vamos provar cada uma das etapas que verificam que um conjunto é uma σ–álgebra.

1. Observe que $\emptyset$, $\mathbb{R} \in \mathscr{L}$, já que se $E \subset \mathbb{R}$, pelo item 1. da Proposição 2.31 temos
$$\ell^\star(E\cap\emptyset)+\ell^\star(E\cap\mathbb{R})=\ell^\star(\emptyset)+\ell^\star(E)=\ell^\star(E).$$

2. Também, se $A\in\mathscr{L}$ então para todo $E\subset\mathbb{R}$ temos
$$\ell^\star(E)=\ell^\star(E\cap A)+\ell^\star(E\cap A^c)=\ell^\star(E\cap A^c)+\ell^\star(E\cap(A^c)^c),$$
ou seja, $A^c\in\mathscr{L}$.

3. Considere $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathscr{L}$. Mostraremos que $A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathscr{L}$. Para isso, defina $H_0=\emptyset$ e $H_1=A_1$ e ainda que
$$H_n=A_n\setminus\bigcup_{i=1}^{n-1}A_i,\text{ para } n\geqslant 2.$$
Definimos também
$$F_n=\bigcup_{i=1}^{n}H_i,\text{ para } n\geqslant 2.$$
É fácil ver quer F_n é composto de uma união de elementos dois a dois disjuntos, e que esta união resulta em
$$F_n=\bigcup_{i=1}^{n}H_i=\bigcup_{i=1}^{n}A_i,\text{ para } n\geqslant 2.$$
Dito isto, da Observação 2.35 obtemos $F_n\in\mathscr{L}$, para todo $n\in\mathbb{N}$, já que $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathscr{L}$. Por outro lado, já sabemos que vale a implicação
$$F_n\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=:A \implies F_n^c\supset A^c.$$
Considere $E\subset\mathbb{R}$. Como F_n é uma união disjunta de elementos H_n, na qual cada $F_n\in\mathscr{L}$ para todo $n\in\mathbb{N}$, então devido a o item 3. da Proposição 2.31 e ao Lema 2.36 podemos escrever o seguinte:
$$\begin{aligned}\ell^\star(E)&=\ell^\star(E\cap F_n)+\ell^\star(E\cap F_n^c)\\&\geq\ell^\star(E\cap F_n)+\ell^\star(E\cap A^c)=\ell^\star\left(E\cap\left(\bigcup_{i=1}^{n}H_i\right)\right)+\ell^\star(E\cap A^c)\\&=\sum_{i=1}^{n}\ell^\star(E\cap H_i)+\ell^\star(E\cap A^c)\end{aligned}$$
para todo $n\in\mathbb{N}$. Assim fazendo $n\longrightarrow\infty$ e do item 2. Proposição 2.31, obtemos que

$$\begin{aligned}\ell^\star(E) &\geqslant \sum_{i=1}^{\infty} \ell^\star(E\cap H_i) + \ell^\star(E\cap A^C)\\ &\geqslant \ell^\star\left(E\cap\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} H_i\right)\right) + \ell^\star(E\cap A^C) = \ell^\star\left(E\left(\cap\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)\right) + \ell^\star(E\cap A^C)\\ &= \ell^\star(E\cap A) + \ell^\star(E\cap A^C),\end{aligned}$$

para todo $E\subset\mathbb{R}$. Agora, na intenção de estabelecer a desigualdade contrária considere $E\subset\mathbb{R}$. Daí, devido ao item 2. da Proposição 2.31, podemos obter que

$$\ell^\star(E\cap A) + \ell^\star(E\cap A^C) \geqslant \ell^\star\Big((E\cap A)\cup(E\cap A^C)\Big) = \ell^\star(E).$$

Desta forma concluímos que $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{L}$. Portanto $\mathscr{L}$ é uma σ–álgebra.

□

Os próximos resultados são essenciais para demonstrar que os conjuntos abertos de $\mathbb{R}$ (e um pouco mais ainda, os borelianos; para relembrar os detalhes da σ–álgebra de Borel veja o Exemplo 2.8) estão contidos na σ–álgebra de Lebesgue.

Teorema 2.39. *O intervalo* $(a,\infty)\in\mathscr{L}$ *para todo* $a\in\mathbb{R}$.

Demonstração. Seja $E\subset\mathbb{R}$ e considere $E_1 = E\cap(a,\infty)$ e $E_2 = E\cap(-\infty,a] = E\cap(a,\infty)^C$. É fácil perceber que $E = E_1\cup E_2$ e que tal união é disjunta.

1. Primeiro considere que $\ell^\star(E)=\infty$. Assim temos da Proposição 2.31 que

$$\ell^\star(E) = \ell^\star(E_1\cup E_2) \leqslant \ell^\star(E_1) + \ell^\star(E_2) \leqslant \infty = \ell^\star(E),$$

ou seja,

$$\ell^\star(E) = \ell^\star(E_1) + \ell^\star(E_2) = \ell^\star(E\cap(a,\infty)) + \ell^\star(E\cap(a,\infty)^C).$$

2. Agora suponha que $\ell^\star(E)<\infty$ e considere $\epsilon>0$ arbitrário. Assim existe uma sequência $\{I_{n,\epsilon}\}_{n=1}^{\infty}$ de intervalos abertos e limitados com $E\subset\cup_{n=1}^{\infty} I_{n,\epsilon}$, que satisfazem a seguinte desigualdade:

$$\ell^\star(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \delta(I_{n,\epsilon}) < \ell^\star(E)+\epsilon.$$

Defina agora $I_n' = I_{n,\epsilon}\cap(a,\infty)$ e $I_n'' = I_{n,\epsilon}\cap(-\infty,a]$ para todo $n\in\mathbb{N}$. No caso de I_n' e I_n'' serem não-vazios, então I_n' e I_n'' são intervalos. Disto e do Exemplo 2.33, temos que

$$\delta(I_{n,\epsilon}) = \delta(I_n') + \delta(I_n'') = \ell^\star(I_n') + \ell^\star(I_n''). \tag{2.18}$$

Também temos que $E_1 \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n^{'}$ e $E_2 \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n^{''}$, então deste fato, pelo item 2 e 3. da Proposição 2.31, obtemos

$$\ell^{\star}(E_1) \leqslant \ell^{\star}\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n^{'}\Big) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \ell^{\star}(I_n^{'}) = \sum_{n=1}^{\infty} \delta(I_n^{'}),$$

e

$$\ell^{\star}(E_2) \leq \ell^{\star}\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n^{''}\Big) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \ell^{\star}(I_n^{''}) = \sum_{n=1}^{\infty} \delta(I_n^{''}).$$

Com isso temos que

$$\ell^{\star}(E) \leqslant \ell^{\star}(E_1) + \ell^{\star}(E_2) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \ell^{\star}(I_n^{'}) + \sum_{n=1}^{\infty} \ell^{\star}(I_n^{''})$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \delta(I_n^{'}) + \sum_{n=1}^{\infty} \delta(I_n^{''}) = \sum_{n=1}^{\infty} \delta(I_{n,\epsilon}) < \ell^{\star}(E) + \epsilon.$$

Fazendo $\epsilon \longrightarrow 0^{+}$, obtemos que

$$\ell^{\star}(E) = \ell^{\star}(E_1) + \ell^{\star}(E_2) = \ell^{\star}(E \cap (a, \infty)) + \ell^{\star}(E \cap (a, \infty)^{c}),$$

e, portanto, $(a, \infty) \in \mathscr{L}$.

□

Corolário 2.40. *Considere $a, b \in \mathbb{R}$. Então os seguintes intervalos da reta estão em $\mathscr{L}$: $(-\infty, a]$, $(-\infty, a)$, (a, b), $[a, \infty)$, $(a, b]$, $[a, b)$, (a, ∞) e $[a, b]$.*

Demonstração. Mostraremos apenas os 4 primeiros casos, já que os demais seguem um raciocínio análogo.

Do Teorema 2.39, temos que $(a, \infty) \in \mathscr{L}$, portanto o seu complementar também. Ou seja $(-\infty, a] \in \mathscr{L}$. Mas daí, concluímos que $\cup_{n=1}^{\infty}(-\infty, a-\frac{1}{n}] \in \mathscr{L}$, e como $\bigcup_{n=1}^{\infty}(-\infty, a-\frac{1}{n}] = (-\infty, a)$, concluímos que $(-\infty, a) \in \mathscr{L}$.

Agora, sem perda generalidade considere $a < b$. Daí pelo Teorema 2.39, como podemos escrever $(a, b) = (a, \infty) \cap (-\infty, b)$, e como a interseção de elementos de $\mathscr{L}$ continuam nesta σ–álgebra, então $(a, b) \in \mathscr{L}$.

Por fim, note que $[a, \infty) = \cap_{n=1}^{\infty}(a - \frac{1}{n}, \infty)$. Como intersecções enumeráveis de elementos de $\mathscr{L}$ continuam em $\mathscr{L}$, então $[a, \infty) \in \mathscr{L}$. Com isso fica demonstrado o que queríamos. □

Proposição 2.41. *Se $A \subset \mathbb{R}$ é tal que $\ell^{\star}(A) = 0$ então $A \in \mathscr{L}$.*

Demonstração. Considere $E \subset \mathbb{R}$. Como $E \cap A \subset A$, do item 3. da Proposição 2.31 deduzimos que $0 \leq \ell^{\star}(E \cap A) \leq \ell^{\star}(A) = 0$. Assim dos itens 2 e 3 da Proposição 2.31, temos:

$$\ell^{\star}(E) = \ell^{\star}(E \cap (A \cup A^{c})) \leq \ell^{\star}(E \cap A) + \ell^{\star}(E \cap A^{c}) = \ell^{\star}(E \cap A^{c}) \leq \ell^{\star}(E)$$

Portanto, $\ell^{\star}(E) = \ell^{\star}(E \cap A) + \ell^{\star}(E \cap A^{c})$, ou seja, $A \in \mathscr{L}$. □

Proposição 2.42. *A translação de um conjunto mensurável também é mensurável.*

Demonstração. Note que nas condições Proposição 2.32, temos

$$\ell^{\star}(A) = \ell^{\star}(A-y).$$

Seja $E \in \mathscr{L}$, então teremos que

$$\begin{aligned}\ell^{\star}(A) = \ell^{\star}(A-y) = \ell^{\star}\left([A-y] \cap E\right) + \ell^{\star}\left([A-y] \cap E^{C}\right) \\ = \ell^{\star}\left(A \cap [E+y]\right) + \ell^{\star}\left(A \cap [E+y]^{C}\right).\end{aligned}$$

Portanto, $E+y \in \mathscr{L}$. □

No próximo exemplo será apresentado um conjunto que não pertence a σ–álgebra de Lesbegue.

Exemplo 2.43. Existe $A \subset \mathbb{R}$, com $A \neq \emptyset$, tal que $A \not\subset \mathscr{L}$.
Defina em $[0,1]$ a seguinte relação. Dados x e $y \in [0,1]$, então

$$x \sim y \Longleftrightarrow x-y \in \mathbb{Q}.$$

Sem muitas complicações consegue-se mostrar que a relação acima defini uma relação de equivalência. Logo, para todo elemento $x \in [0,1]$ a sua classe de equivalência é denotada por

$$[x] = \{y \in [0,1] : y \sim x\}.$$

1. Note que se $x \in [0,1]$ for um número racional, então

$$[x] = \{y \in [0,1] : y \sim x\} = \mathbb{Q} \cap [0,1].$$

   Portanto, para qualquer $x \in [0,1]$ racional sempre se tem a mesma classe equivalência.

2. Agora se $x \in [0,1]$ for um número irracional, então

$$[x] = \{y \in [0,1] : y \sim x\} = x.$$

Note que

$$[0,1] = \bigcup_{x \in [0,1]} [x].$$

Perceba que $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ aparece na união acima sempre que $x \in [0,1]$ for racional. Desta forma, teremos uma quantidade enumerável deste elemento na união. Ao desconsiderar estas repetições, obtemos uma união de elementos $[x]$ dois a dois disjuntos.

Agora, para cada $[x]$ nesta coleção disjunta, o axioma da escolha nos permite escolher um único elemento em cada classe. O conjunto de todos estes elementos será denotado por $\mathcal{V}$. Perceba que

$$v_1, v_1 \in \mathcal{V} \Longrightarrow v_1 - v_2 \notin \mathbb{Q}.$$

Seja $\mathbb{Q} \cap [-1,1] = \{r_1, r_2, \ldots\}$. Definimos

$$\mathcal{V}_n = r_n + \mathcal{V} = \{r_n + v : v \in \mathcal{V}\}.$$

Note que $\mathcal{V}_n \cap \mathcal{V}_n' = \emptyset$, sempre que $n \neq n'$, com $n, n' \in \mathbb{N}$. De fato, suponha que $\mathcal{V}_n \cap \mathcal{V}_n' \neq \emptyset$. Daí, teríamos

$$\underbrace{r_n + v}_{\in \mathcal{V}_n} = \underbrace{r_{n'} + v_1}_{\in \mathcal{V}_{n'}} \Longleftrightarrow r_n - r_{n'} = \underbrace{v_1 - v}_{\in \mathcal{V}} \notin \mathbb{Q}$$

mas isso é um absurdo, pois $r_n - r_{n'} \in \mathbb{Q}$.

Uma vez construído o conjunto $\mathcal{V}$, vamos supor que $\mathcal{V} \in \mathscr{L}$. Desta forma, a proposição 2.42 garante que $\mathcal{V}_n \in \mathscr{L}$. Também segue da Proposição 2.32 que $\ell^\star(\mathcal{V}) = \ell^\star(\mathcal{V}_n)$.

Agora, relacionando todos argumentos acima, percebemos que

$$[0,1] \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{V}_n \subset [-1,2] \Longrightarrow \ell^\star([0,1]) \leq \ell^\star\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{V}_n\right) \leq \ell^\star([-1,2])$$
$$\Longleftrightarrow 1 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \ell^\star(\mathcal{V}_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \ell^\star(\mathcal{V}) \leq 3.$$

Se $\ell^\star(\mathcal{V}) = 0$, então $1 \leq 0 \leq 3$.
Se $\ell^\star(\mathcal{V}) > 0$, então teremos $1 \leq \infty \leq 3$. Portanto nos dois casos temos um absurdo. Logo $\mathcal{V} \notin \mathscr{L}$.

Munidos da σ–álgebra construída anteriormente, vamos agora finalmente definir a medida desejada.

Teorema 2.44. *Considere $\ell : \mathscr{L} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ definida por*

$$\ell(A) := \ell^\star(A).$$

Neste caso ℓ é uma medida no espaço mensurável $(\mathbb{R}, \mathscr{L})$. Chamamos ℓ de medida de Lebesgue.

Demonstração. Note inicialmente que $\ell(\emptyset) = \ell^\star(\emptyset) = 0$, como queríamos. Por outro lado, seja agora $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{L}$ conjuntos dois a dois disjuntos. Mostaremos que

$$\ell\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \ell(A_n).$$

Note que $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, como tais uniões estão em $\mathscr{L}$, então obtemos que

$$\sum_{i=1}^{n} \ell(A_i) = \ell\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \ell\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right), \tag{2.19}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Fazendo $n \to \infty$ em (2.19), obtemos que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \ell(A_i) \leq \ell\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right). \tag{2.20}$$

Por outro lado, pela sub-aditividade da medida exterior temos que

$$\ell\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \ell(A_i). \tag{2.21}$$

Portanto das equações (2.20) e (2.21), concluímos que

$$\ell\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \ell(A_i).$$

Desta forma fica demonstrado que $\ell : \mathscr{L} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ é uma medida. □

Observação 2.45. A partir deste momento passaremos a chamar os elementos de $\mathscr{L}$ de conjuntos Lebesgue mensuráveis. Observamos ainda que $(\mathbb{R}, \mathscr{L}, \ell)$ é um espaço de medida.

Daremos agora um exemplo clássico de funções mensuráveis em relação à σ–álgebra de Lesbegue.

Exemplo 2.46. Considere $(\mathbb{R}, \mathscr{L})$ um espaço mensurável em relação a σ–álgebra de Lesbegue. Se $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua, então f é mensurável.

Demonstração. Precisamos mostrar que $f^{-1}(-\infty, a) \in \mathscr{L}$ para todo $a \in \mathbb{R}$. Para isso note que $(-\infty, a)$ é uma aberto em $\mathbb{R}$, então pela continuidade da f, temos que $f^{-1}(-\infty, a)$ é uma aberto em $\mathbb{R}$. Mas todo aberto de $\mathbb{R}$ pode ser escrito como uma união enumerável de intervalos abertos dois a dois disjuntos. Então $f^{-1}(-\infty, a)$ também ser escrito daquela maneira. Mas, pelo Corolário 2.40, já sabemos que os intervalos abertos são Lesbegue mensuráveis. Portanto, como a união enumerável de mensuráveis também é Lesbegue mensurável, podemos concluir que $f^{-1}(-\infty, a) \in \mathscr{L}$. □

Por fim apresentamos um resultado que garante que a σ–álgebra de Borel é menor do que a σ–álgebra de Lebesgue.

Teorema 2.47. *A σ–álgebra de Borel está propriamente contida na σ–álgebra de Lebesgue.*

Demonstração. Sejam (Ω,τ) um espaço topológico e $\mathscr{B}$ a σ–álgebra (de Borel) gerada pela coleção τ.

1. Relembre que todo conjunto aberto de $\mathbb{R}$ pode ser escrito como uma união enumerável de intervalos abertos (veja Proposição 4.1.1 de [26]), isto é, se $A\in\tau$, então
$$A=\bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n,b_n).$$
Como graças ao Corolário 2.40 sabemos que $\{(a_n,b_n)\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathscr{L}$ e como $\mathscr{L}$ é uma σ–álgebra (a de Lebesgue), então $A\in\mathscr{L}$, isto é, $\tau\subset\mathscr{L}$. Porém, $\mathscr{B}$ é a menor σ–álgebra que contém τ. Desta forma concluímos que $\mathscr{B}\subset\mathscr{L}$.

2. Para verificar que a inclusão é própria, sugerimos que o leitor veja o Apêndice C do livro de Burk [6].

□

O próximo exemplo nos fornecerá resultados relevantes para os nossos objetivos.

Exemplo 2.48. Considere o espaço de medida $(\mathbb{R},\mathscr{B},\ell)$, com $\mathscr{B}$ sendo a σ–álgebra de Borel já apresentada na Definição 2.8. Se um conjunto $A\in\mathscr{B}$ é enumerável, então $\ell(A)=0$. De fato, pois se E é enumerável, então pode ser escrito da seguinte maneira: $E=\{x_1,x_2,x_3,\ldots.x_n,\ldots\}$. Agora, considere
$$E_n=\left(x_n-\frac{\epsilon}{2^{n+1}},x_n+\frac{\epsilon}{2^{n+1}}\right),$$
e perceba que $E\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$. Logo, dos itens 2. e 3. da Proposição 2.31
$$0\le\ell(A)\le\ell\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)\le\sum_{n=1}^{\infty}\ell(E_n)=\epsilon\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\epsilon.$$
Disto concluímos que $\ell(A)=0$.

Observação 2.49. Segue do resultado acima que a $\ell(\mathbb{Q})=0$, já que este conjunto é enumerável. Dito isto, segue da Proposição 2.41 que $\mathbb{Q}\in\mathscr{L}$.

Observação 2.50. Como $\mathbb{Q}\in\mathscr{L}$, então vale que para qualquer $A\in\mathbb{R}$, temos que
$$\ell(A)=\ell(A\cap\mathbb{Q})+\ell(A\cap\mathbb{Q}^c)=\ell(A\cap\mathbb{I}^c)+\ell(A\cap\mathbb{I})^9.$$
Desta forma, obtemos também que $\mathbb{I}\in\mathscr{L}$.

[9] Usamos $\mathbb{I}$ para denotar conjunto dos números irracionais.

2.2 INTEGRAÇÃO COM RELAÇÃO A UMA MEDIDA

Nesta seção assumimos que $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ denota um espaço de medida.

Definição 2.51. Uma função $\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ é dita ser uma função simples, quando a sua imagem é um conjunto finito. Em outras palavras, $\varphi(\Omega) = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \subset \mathbb{R}$.

Observação 2.52.

1. Se $\varphi : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ for uma função simples, escreva $\varphi(\Omega) = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Daí, se definirmos os conjuntos $A_i = \{x \in \Omega : \varphi(x) = a_i\}$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, então eles são dois a dois disjuntos e $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$. Salientamos que esta função não é necessariamente mensurável.

2. A função simples φ também pode ser escrita como

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}(x), \quad \forall x \in \Omega, \tag{2.22}$$

com χ_{A_i} sendo a função característica em A_i. Chamaremos a equação (2.22) de *representação padrão de* φ.

Iniciamos a discussão sobre integração com relação a uma medida com a seguinte definição.

Definição 2.53. Seja $\varphi : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ uma função simples e mensurável[10], isto é,

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}(x), \quad \forall x \in \Omega.$$

Definimos a integral de φ sobre Ω como

$$\int_\Omega \varphi \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i).$$

As propriedades a seguir são decorrentes da definição anterior. Veja os detalhes em [2, Lema 4.3].

Proposição 2.54. *Sejam $\varphi_1, \varphi_2 : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ funções simples e mensuráveis e $k \in \mathbb{R}$ então;*

1. $\int_\Omega k\varphi_1 \, d\mu = k \int_\Omega \varphi_1 \, d\mu.$

2. $\int_\Omega (\varphi_1 + \varphi_2) \, d\mu = \int_\Omega \varphi_1 \, d\mu + \int_\Omega \varphi_2 \, d\mu.$

[10] Aqui é fundamental termos esta hipótese para que a definição faça sentido.

3. *Seja* $\varphi : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ *simples e mensurável. Defina* $\lambda : \mathscr{F} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ *por*

$$\lambda(A) = \int_\Omega \varphi \chi_A \, d\mu.$$

então λ *é uma medida.*

Agora generalizamos um pouco mais a noção de integração com relação a uma medida.

Definição 2.55. Seja $f : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ uma função mensurável. A integral da f em relação à medida μ, será o número real estendido definido por

$$\int_\Omega f \, d\mu = sup \left\{ \int_\Omega \varphi \, d\mu : \varphi \text{ é simples, mensurável} \right.$$
$$\left. \text{e ainda } 0 \leq \varphi(x) \leq f(x), \, \forall x \in \Omega \right\}.$$

Mais ainda, se $A \in \mathscr{F}$, a integral de f em A será definida como

$$\int_A f \, d\mu = \int_\Omega f \chi_A \, d\mu.$$

Segue diretamente da definição acima as seguintes propriedades das integrais de funções mensuráveis positivas:

Proposição 2.56. *Sejam* $f, g : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}_+$ *funções mensuráveis. Se* $f(x) \leq g(x)$ *para todo* $x \in \Omega$*, então*

$$\int_\Omega f \, d\mu \leq \int_\Omega g \, d\mu.$$

Corolário 2.57. *Seja* $f : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ *uma função mensurável. Se* $A, F \in \mathscr{F}$*, com* $A \subset F$*, então*

$$\int_A f \, d\mu \leq \int_F f \, d\mu.$$

Demonstração. Note que $f\chi_A \leq f\chi_F$, com $f\chi_A$ e $f\chi_F$ mensuráveis. Logo pela Proposição 2.56 temos,

$$\int_\Omega f\chi_A \, d\mu \leq \int_\Omega f\chi_F \, d\mu. \tag{2.23}$$

Mas, observe que a equação (2.23) pode ser reescrita como

$$\int_A f \, d\mu = \int_\Omega f\chi_A \, d\mu \leq \int_\Omega f\chi_F \, d\mu = \int_F f \, d\mu.$$

Assim, segue a demonstração. □

O próximo teorema nos dá condições suficientes para podermos comutar o limite com a integral de uma sequência de funções mensuráveis em relação a medida μ.

Teorema 2.58 (Teorema da convergência monótona I)**.** *Considere a sequência de funções mensuráveis $f_n : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, tais que $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ para todo $x \in \Omega$, com $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ para todo $x \in \Omega$. Então*

$$\lim \int_\Omega f_n \, d\mu = \int_\Omega f \, d\mu$$

Demonstração. Como as $f_n(x)$ são mensuráveis, graças à Proposição 2.18 concluímos que $f(x)$ é mensurável. Como ainda temos que $f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \leq f(x)$, para todo $x \in \Omega$, então pela Proposição 2.56 temos

$$\int_\Omega f_n d\mu \leq \int_\Omega f_{n+1} \, d\mu \leq \int_\Omega f d\mu.$$

Portanto

$$\left\{ \int_\Omega f_n d\mu \right\}_{n=1}^{\infty}$$

é uma sequência de números reais monótona e limitada, logo convergente, e portanto

$$\lim \int_\Omega f_n d\mu \leq \int_\Omega f d\mu. \tag{2.24}$$

Na intenção de estabelecer a desigualdade contrária à (2.24), tome $\alpha \in (0,1)$ e $\varphi : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, uma função simples e mensurável tal que $0 \leq \varphi(x) \leq f(x)$ para todo $x \in \Omega$. Defina o conjunto

$$A_n = \{x \in \Omega : f_n(x) \geq \alpha \varphi(x)\},$$

e observe que $A_n \in \mathscr{F}$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e que a sequência $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{F}$ é tal que $A_n \subset A_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, já que se $x \in A_n$ então $\alpha\varphi(x) \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$, ou seja, $x \in A_{n+1}$.

Note também que $\cup_{n=1}^{\infty} A_n = \Omega$. De fato, suponha por absurdo que existe $x \in \Omega$ tal que $x \notin \cup_{n=1}^{\infty} A_n$. Então fica valendo que $f_n(x) < \alpha\varphi(x) < \varphi(x) \leq f(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Desta forma, $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) < f(x)$, o que é um absurdo!

Agora, como consequência do Teorema 2.26 e da Proposição 2.54 (basta observar que podemos considerar a medida $\lambda : \mathscr{F} \to \overline{\mathbb{R}}$) obtemos que

$$\int_\Omega \varphi d\mu = \lambda(\Omega) = \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \lim \lambda(A_n) = \lim \int_{A_n} \varphi d\mu.$$

Observe ainda que

$$\int_{A_n} \alpha\varphi \, d\mu \leq \int_{A_n} f_n \, d\mu \leq \int_\Omega f_n \, d\mu, \ \ \forall x \in \Omega. \tag{2.25}$$

Fazendo $n \to \infty$ na Desigualdade (2.25), obtemos

$$\alpha \int_\Omega \varphi \, d\mu = \lim \int_{A_n} \alpha\varphi \, d\mu \leq \lim \int_\Omega f_n \, d\mu.$$

Como $\alpha \in (0,1)$ foi uma escolha arbitrária, segue que

$$\int_\Omega \varphi \, d\mu \leq \lim \int_\Omega f_n \, d\mu.$$

Daí, da definição de integração, concluímos que

$$\int_\Omega f \, d\mu = \sup \int_\Omega \varphi \, d\mu \leq \lim \int_\Omega f_n \, d\mu.$$

Com isso encontramos a desigualdade que queríamos. Logo

$$\lim \int_\Omega f_n \, d\mu = \int_\Omega f \, d\mu.$$

□

Apresentamos abaixo uma consequência imediata dos resultados discutidos anteriormente.

Corolário 2.59. *Sejam f_1, $f_2 : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ funções mensuráveis e $k \in \mathbb{R}$. Então $k \cdot f$ e $f_1 + f_2$ são mensuráveis e ainda*

$$\int_\Omega kf \, d\mu = k \int_\Omega f \, d\mu \quad e \quad \int_\Omega (f_1 + f_2) \, d\mu = \int_\Omega f_1 \, d\mu + \int_\Omega f_2 \, d\mu.$$

Proposição 2.60. *Se $f : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ uma função mensurável e $A \in \mathscr{F}$, com $\mu(A) = 0$, então*

$$\int_A f d\mu = 0.$$

Demonstração. Note que da definição 2.55, temos

$$\int_A f d\mu = \int_\Omega f \chi_A \, d\mu = sup \left\{ \int_\Omega \varphi \, d\mu : \varphi \text{ é simples, mensurável} \right.$$
$$\left. \text{e ainda } 0 \leq \varphi(x) \leq f(x)\chi_A(x), \ \forall x \in \Omega \right\}.$$

Agora se considerarmos φ nas condições acima é fácil perceber que $\varphi = 0$ se $x \in A^c$. Com isso ganhamos o seguinte resultado:

$$\int_\Omega \varphi d\mu = \int_\Omega \varphi(\chi_{A^c} + \chi_A) d\mu = \int_\Omega \varphi \chi_{A^c} d\mu + \int_\Omega \varphi \chi_A d\mu$$
$$= \int_\Omega \varphi \chi_A d\mu.$$

Também podemos perceber que

$$\left| \int_\Omega \varphi d\mu \right| \leqslant \int_\Omega |\varphi| \chi_A d\mu \leqslant \mathscr{J} \int_\Omega \chi_A d\mu = \mathscr{J} \mu(A) = 0,$$

com $\mathscr{J} = \max|a_i|$, já que $\varphi(\Omega) = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Com isso concluímos que

$$\int_\Omega \varphi d\mu = 0.$$

Assim como φ foi uma função arbitrária, então podemos concluir que

$$\int_A f d\mu = \int_\Omega f\chi_A d\mu = sup\left\{\int_\Omega \varphi\, d\mu : \varphi \text{ é simples, mensurável} \right.$$
$$\left. \text{e ainda } 0 \leq \varphi(x) \leq f(x)\chi_A(x),\ \forall x \in \Omega\right\} = 0.$$

□

Introduzimos agora um novo resultado que melhora as hipóteses originais do Teorema 2.58.

Teorema 2.61 (Teorema da convergência monótona II)**.** *Considere a sequência de funções mensuráveis $f_n : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, tais que $f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)$, com $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ q.t.p. em Ω. Então*

$$\lim \int_\Omega f_n\, d\mu = \int_\Omega f\, d\mu.$$

Demonstração. Como $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ q.t.p. em Ω, existe $A \in \mathscr{F}$ tal que $\mu(A) = 0$ e que $f_n(x) \longrightarrow f(x)$, para todo $x \in A^c$. Logo, pelo Teorema 2.58, temos

$$\lim \int_{A^c} f_n\, d\mu = \int_{A^c} f\, d\mu. \tag{2.26}$$

Escrevo

$$f = f\chi_A + f\chi_{A^c} \qquad \text{e} \qquad f_n = f_n\chi_A + f_n\chi_{A^c}.$$

Portanto, da Definição 2.55, do Corolário 2.59 e da Proposição 2.60, obtemos que

$$\int_\Omega f\, d\mu = \int_{A^c} f\, d\mu + \underbrace{\int_A f\, d\mu}_{=0} = \int_{A^c} f\, d\mu,$$

e

$$\int_\Omega f_n\, d\mu = \int_{A^c} f_n\, d\mu + \underbrace{\int_A f_n\, d\mu}_{=0} = \int_{A^c} f_n\, d\mu.$$

Disto e da Equação (2.26), segue que

$$\lim \int_\Omega f_n\, d\mu = \int_\Omega f\, d\mu.$$

□

Munidos das ferramentas vista até o momento, podemos definir a integral de uma função $f : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ mensurável.

Definição 2.62. Seja $f:\Omega\longrightarrow\overline{\mathbb{R}}$ uma função mensurável. Sendo f^+ e f^- como na Definição 2.15, dizemos que f é integrável em Ω quando

$$\int_\Omega f^+\,d\mu<\infty \quad \text{e} \quad \int_\Omega f^-\,d\mu<\infty.$$

Neste caso, a integral de f em Ω é dada por

$$\int_\Omega f\,d\mu=\int_\Omega f^+\,d\mu-\int_\Omega f^-\,d\mu.$$

Além disso, se $A\in\mathscr{F}$, então temos que a integral de f em A é dada por

$$\int_A f\,d\mu=\int_A f^+\,d\mu-\int_A f^-\,d\mu,$$

sempre que

$$\int_A f^+\,d\mu<\infty \quad \text{e} \quad \int_A f^-\,d\mu<\infty.$$

Diretamente da definição dada acima, podemos demonstrar diversos resultados interessantes. Contudo, para evitar uma discussão muito longa, focaremos apenas nos resultados que são úteis para a teoria apresentada nos últimos capítulos desta dissertação.

Teorema 2.63. *Seja $f:\Omega\longrightarrow\overline{\mathbb{R}}$ mensurável. Então, f é integrável se, e somente se, $|f|$ também o é. Nesse caso, temos que*

$$\left|\int_\Omega f\,d\mu\right|\le\int_\Omega |f|\,d\mu$$

Demonstração. Se $f:\Omega\longrightarrow\overline{\mathbb{R}}$ for integrável, então

$$\int_\Omega f^+\,d\mu<\infty \quad \text{e} \quad \int_\Omega f^-\,d\mu<\infty.$$

Pode-se observar que $|f|^+=|f|$ e $|f|^-\equiv 0$ em Ω. Assim, da Proposição 2.16,

$$\int_\Omega |f|^+\,d\mu=\int_\Omega |f|\,d\mu=\int_\Omega (f^++f^-)\,d\mu=\underbrace{\int_\Omega f^+\,d\mu}_{<\infty}+\underbrace{\int_\Omega f^-\,d\mu}_{<\infty}$$

Logo,

$$\int_\Omega |f|^+\,d\mu<\infty.$$

E ainda

$$\int_\Omega |f|^-\,d\mu=\int_\Omega 0\,d\mu\equiv 0<\infty.$$

Assim

$$\int_\Omega |f|\,d\mu=\underbrace{\int_\Omega |f|^+\,d\mu}_{<\infty}-\underbrace{\int_\Omega |f|^-\,d\mu}_{0}<\infty.$$

Portanto, $|f|$ é integrável. Como a volta é análoga, a omitimos.

Por fim, note que

$$\left|\int_\Omega f\,d\mu\right| = \left|\int_\Omega f^+\,d\mu - \int_\Omega f^-\,d\mu\right| \leq \left|\int_\Omega f^+\,d\mu\right| + \left|\int_\Omega f^-\,d\mu\right|$$
$$= \int_\Omega f^+\,d\mu + \int_\Omega f^-\,d\mu = \int_\Omega |f|\,d\mu,$$

como queríamos. □

Uma consequência direta do Teorema anterior é o seguinte corolário.

Corolário 2.64. *Considere $f:\Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ uma função mensurável e $g:\Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ uma função integrável. Se $|f(x)| \leq |g(x)|$, então f é integrável e $\int_\Omega |f|\,d\mu \leq \int_\Omega |g|\,d\mu$.*

Como apresentado anteriormente para funções não negativas, agora provaremos a linearidade das integrais com relação a uma medida para funções integráveis quaisquer.

Teorema 2.65. *Sejam $f, g:\Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ funções integráveis e $k \in \mathbb{R}$. Então as funções kf e $f+g$ são integráveis e vale que:*

$$\int_\Omega kf\,d\mu = k\int_\Omega f\,d\mu \quad e \quad \int_\Omega (f+g)\,d\mu = \int_\Omega f\,d\mu + \int_\Omega g\,d\mu.$$

Demonstração. Note que

$$(kf)^+ = \begin{cases} kf^+, & \text{se } k \geq 0, \\ -kf^-, & \text{se } k < 0, \end{cases} \quad \text{e} \quad (kf)^- = \begin{cases} kf^-, & \text{se } k \geq 0, \\ -kf^+, & \text{se } k < 0, \end{cases}$$

e portanto pelo Corolário 2.59 temos que

$$\int_\Omega (kf)^+\,d\mu = \begin{cases} k\displaystyle\int_\Omega f^+\,d\mu, & \text{se } k \geq 0, \\ -k\displaystyle\int_\Omega f^-\,d\mu, & \text{se } k < 0, \end{cases}$$

e também

$$\int_\Omega (kf)^-\,d\mu = \begin{cases} k\displaystyle\int_\Omega f^-\,d\mu, & \text{se } k \geq 0, \\ -k\displaystyle\int_\Omega f^+\,d\mu, & \text{se } k < 0, \end{cases}$$

ou seja, a integrabilidade de (kf) fica totalmente garantida pela igualdade acima e pela integrabilidade de f.

$$\int_\Omega kf\,d\mu = \int_\Omega (kf)^+\,d\mu - \int_\Omega (kf)^-\,d\mu = k\int_\Omega f^+\,d\mu - k\int_\Omega f^-\,d\mu = k\int_\Omega f\,d\mu.$$

Usando justificativas análogas as apresentadas acima, concluímos a segunda parte do resultado. □

Encerramos esta discussão geral apresentando dois resultados muito importantes para a teoria de integração de funções mensuráveis com relação a uma medida.

Lema 2.66 (Lema de Fatou)**.** *Seja $f_n : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ uma sequência de funções mensuráveis. Então*

$$\int_\Omega (\liminf f_n)\, d\mu \leq \liminf \int_\Omega f_n\, d\mu.$$

Demonstração. Relembrando que

$$\liminf f_n(x) = \sup_{m \in \mathbb{N}} \inf_{n \geq m} f_n(x), \quad \forall x \in \Omega,$$

(já utilizamos esta identidade na equação (2.1)), considere as funções

$$f = \liminf f_n \quad \text{e} \quad g_m = \inf_{n \geqslant m} \{f_m, f_{m+1}, \ldots\}.$$

Deste último, temos que g_m é monótona crescente, isto é, $g_m(x) \leq g_{m+1}(x)$, e também que $g_m(x) \leq f_n(x)$, $\forall n \geq m$. Por outro lado, da Proposição 2.18 segue que g_m e f são mensuráveis. Daí

$$\int_\Omega g_m\, d\mu \leq \int_\Omega f_n\, d\mu, \quad \forall n \geq m,$$

e ainda

$$\int_\Omega g_m\, d\mu \leq \inf_{n \geq m} \int_\Omega f_n\, d\mu. \tag{2.27}$$

Mas observe que

$$\lim g_m = \liminf f_n = f.$$

Disto e do fato de g_m ser monótona crescente, obtemos pelo Teorema 2.61 que

$$\lim \int_\Omega g_m\, d\mu = \int_\Omega \lim g_m\, d\mu = \int_\Omega \liminf f_n\, d\mu = \int_\Omega f\, d\mu.$$

Deste modo fazendo $n \to \infty$ na Desigualdade 2.27, teremos

$$\int_\Omega \liminf f_n\, d\mu = \lim \int_\Omega g_m\, d\mu \leq \liminf \int_\Omega f_n\, d\mu.$$

□

Teorema 2.67 (A convergência dominada de Lebesgue)**.** *Considere $f_n : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ uma sequência de funções integráveis, de modo que $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ q.t.p. em Ω e seja $g : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ uma função integrável, com $|f_n(x)| \leq g(x)$ q.t.p. em Ω para todo $n \in \mathbb{N}$. Então f é integrável e ainda*

$$\lim \int_\Omega f_n\, d\mu = \int_\Omega f\, d\mu.$$

Demonstração. Seja $A \in \mathscr{F}$ um conjunto de medida nula tal que

$$f_n(x) \longrightarrow f(x) \quad \text{e} \quad |f_n(x)| \leq g(x),$$

para todo $x \in A^c$. Logo

$$|f(x)| = \lim |f_n(x)| \leq g(x), \ \ \forall x \in A^c.$$

Como a Proposição 2.18 garante que f é mensurável, ao considerarmos o Corolário 2.64 e o fato que $\mu(A) = 0$, deduzimos que $|f|$ é integrável.

Agora como $|f_n(x)| \leq g(x)$, q.t.p. em Ω para todo $n \in \mathbb{N}$, então $f_n(x) + g(x) \geq 0$ q.t.p. em Ω para todo $n \in \mathbb{N}$. Daí, pelo Lema 2.66, temos que

$$\begin{aligned}\int_{A^c} g\, d\mu + \int_{A^c} f\, d\mu = \int_{A^c} (g+f)\, d\mu = \int_{A^c} \lim(g+f_n)\, d\mu \\ = \int_{A^c} \liminf(g+f_n)\, d\mu \leq \liminf \int_{A^c} (g+f_n)\, d\mu \\ = \int_{A^c} g\, d\mu + \liminf \int_{A^c} f_n\, d\mu,\end{aligned}$$

ou em outras palavras,

$$\int_{A^c} f\, d\mu \leq \liminf \int_{A^c} f_n\, d\mu. \tag{2.28}$$

Por outro lado temos que $g(x) - f_n(x) \geq 0, \ \ \forall n \in \mathbb{N}$, então

$$\begin{aligned}\int_{A^c} g\, d\mu - \int_{A^c} f\, d\mu = \int_{A^c} (g-f)\, d\mu = \int_{A^c} \lim(g-f_n)\, d\mu \\ = \int_{A^c} \liminf(g-f_n)\, d\mu \leq \liminf \int_{A^c} (g-f_n)\, d\mu \\ = \int_{A^c} g\, d\mu + \liminf \int_{A^c} -f_n\, d\mu.\end{aligned}$$

Da desigualdade acima deduzimos que

$$\limsup \int_{A^c} f_n\, d\mu \leq \int_{A^c} f\, d\mu. \tag{2.29}$$

Desse modo, pelas equações (2.28) e (2.29), tem-se

$$\limsup \int_{A^c} f_n\, d\mu \leq \int_{A^c} f\, d\mu \leq \liminf \int_{A^c} f_n\, d\mu.$$

Portanto,

$$\lim \int_{A^c} f_n\, d\mu = \int_{A^c} f\, d\mu.$$

Como $\mu(A) = 0$, segue da Proposição 2.60 que

$$\lim \int_{\Omega} f_n\, d\mu = \int_{\Omega} f\, d\mu.$$

□

Corolário 2.68. *Considere $f_n : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ uma sequência de funções mensuráveis, de modo que $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ q.t.p. em Ω e seja $g_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ uma sequência de funções integráveis, que satisfaz:*

1. $|f_n(x)| \leqslant g_n(x)$ q.t.p. em Ω.

2. Existe uma função $g : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ integrável, de modo que

$$\lim |g_n(x) - g(x)| = 0$$

   q.t.p. em Ω.

3. $\lim \int_\Omega g_n d\mu = \int_\Omega g d\mu < \infty$.

Então, $f(x)$ é uma função integrável e temos que

$$\lim \int_\Omega f_n d\mu = \int_\Omega f d\mu$$

Demonstração. Note que podemos reescrever o item (1) da seguinte forma

$$-g_n(x) \leqslant f_n(x) \leqslant g_n(x). \tag{2.30}$$

Como g_n é uma função integrável, então também é uma função mensurável. E ainda como consequência de (2.30) podemos obter:

1. $f_n + g_n \geqslant 0$, e que esta adição é mensurável. Pois f_n é uma função mensurável para todo $n \in \mathbb{N}$.

2. $g_n - f_n \geqslant 0$, e que esta subtração também é mensurável. Isto segue pelo mesmo argumento acima.

Agora aplicando o Lema 2.66 em 1., obtemos que

$$\int_\Omega \liminf (f_n + g_n) d\mu \leqslant \liminf \int_\Omega (f_n + g_n) d\mu.$$

Disto e das hipóteses do teorema, podemos obter que

$$\begin{aligned}\int_\Omega f d\mu + \int_\Omega g d\mu = \int_\Omega (f+g) d\mu = \int_\Omega \liminf (f_n + g_n) d\mu \\ \leqslant \liminf \int_\Omega (f_n + g_n) d\mu = \liminf \int_\Omega f_n d\mu + \liminf \int_\Omega g_n d\mu \\ = \liminf \int_\Omega f_n d\mu + \int_\Omega g d\mu\end{aligned}$$

Em resumo, temos que

$$\int_\Omega f d\mu \leqslant \liminf \int_\Omega f_n d\mu. \tag{2.31}$$

Por outro lado aplicando o Lema 2.66 em 2., obtemos que

$$\int_\Omega \liminf (g_n - f_n) d\mu \leqslant \liminf \int_\Omega (g_n - f_n) d\mu.$$

Ainda podemos reescrever da seguinte maneira

$$\begin{aligned}\int_\Omega g d\mu - \int_\Omega f d\mu = \int_\Omega (g-f) d\mu = \int_\Omega & \liminf (g_n - f_n) d\mu \\ &\leqslant \liminf \int_\Omega (g_n - f_n) d\mu = \liminf \int_\Omega g_n d\mu - \liminf \int_\Omega f_n d\mu \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = \int_\Omega g d\mu - \liminf \int_\Omega f_n d\mu.\end{aligned}$$

Em resumo obtemos que

$$\int_\Omega f d\mu \geqslant \limsup \int_\Omega f_n d\mu. \tag{2.32}$$

Portanto (2.31) e (2.32) nos garante que

$$\limsup \int_\Omega f_n d\mu \leqslant \int_\Omega f d\mu \leqslant \liminf \int_\Omega f_n d\mu. \tag{2.33}$$

Mas também sabemos que

$$\liminf \int_\Omega f_n d\mu \leqslant \limsup \int_\Omega f_n d\mu.$$

Logo podemos concluir que

$$\liminf \int_\Omega f_n d\mu = \limsup \int_\Omega f_n d\mu.$$

Disto e de (2.33) segue que

$$\lim \int_\Omega f_n d\mu = \int_\Omega f d\mu,$$

como queríamos demonstrar. □

2.2.1 A integral de Lebesgue

Seguindo a teoria apresentada nesta seção, agora vamos estudar um caso particular, isto é, consideramos $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathscr{F}$ como sendo a σ–álgebra de Lebesgue e μ como sendo a medida de Lebesgue. Ressaltamos que uma discussão preliminar sobre estes objetos já foi feita na Subseção 2.1.1.

Iniciamos esta discussão relembrando a teoria de integração de Riemann. Para mais detalhes desta teoria veja [17]

Definição 2.69. .

1. Considere $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Chamaremos de partição de $[a,b]$ um subconjunto finito $P \subset [a,b]$ tal que $a, b \in P$. Quando escrevemos $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ convencionaremos sempre que $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$.

2. Os intervalos $[t_{i-1}, t_i]$, para $i = 1, 2, \ldots, n$, serão chamados de intervalos da partição P.

Definição 2.70. Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada e $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ uma partição de $[a, b]$. Para cada $i = 1, 2, \ldots, n$, indicaremos com m_i o ínfimo e com M_i o supremo dos valores de f no intervalo $[t_{i-1}, t_i]$.

Definição 2.71. A soma inferior $s(f;P)$ e a soma superior $S(f;P)$ da função f relativa a partição P é dada, respectivamente, por

$$s(f;P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot (t_i - t_{i-1})$$

$$S(f;P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot (t_i - t_{i-1})$$

Definição 2.72. Seja P e Q partições do intervalo $[a, b]$. Quando $P \subset Q$ dizemos que a partição Q é mais fina que P.

Observação 2.73. Uma maneira simples de refinar uma partição P é acrescentar-lhe um único ponto.

Teorema 2.74. *Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ limitada. Quando se refina uma partição P, a soma inferior não diminui e a soma superior não aumenta.*

Demonstração. Considere a partição $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ do intervalo $[a, b]$. Devido à Observação 2.73, $Q = \{t_0, t_1, \ldots, t_{i-1}, r, t_i, \ldots t_n\}$ é um refinamento da partição P, pois acrescentamos apenas o ponto r a partição P. Denotaremos por m_i, m' e m'' os ínfimos da f nos intervalos $[t_{i-1}, t_i]$, $[t_{i-1}, r]$ e $[r, t_i]$ respectivamente. Claramente temos que $m_i \leq m'$ e $m_i \leq m''$. Como $t_i - t_{i-1} = (t_i - r) + (r - t_{i-1})$, então

$$\begin{aligned} s(f;Q) - s(f;P) &= m''(t_i - r) + m'(r - t_{i-1}) - m_i(t_i - t_{i-1}) \\ &= m''(t_i - r) + m'(r - t_{i-1}) - m_i\Big[(t_i - r) + (r - t_{i-1})\Big] \\ &\qquad (m'' - m_i)(t_i - r) + (m' - m_i)(r - t_{i-1}) \geqslant 0. \end{aligned}$$

Com isso concluímos que $s(f;P) \leqslant s(f;Q)$. Portanto quando acrescentamos apenas um ponto a partição P a soma inferior não diminuiu. Aplicando repetidamente este resultado, concluímos que $P \subset Q$ implica que $s(f;P) \leqslant s(f;Q)$. Analogamente se demonstra que $P \subset Q$ acarreta em $S(f;Q) \leqslant S(f;P)$. Assim segue a demonstração. $\square$

Corolário 2.75. *Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada. Para quaisquer partições P e Q de $[a, b]$, tem-se que*

$$s(f;P) \leqslant S(f;Q).$$

Demonstração. É fácil perceber que $P \cup Q$ refina P e Q. Disto e do Teorema 2.74, temos que

$$s(f;P) \leqslant s\big(f;(P \cup Q)\big) \leqslant S\big(f;(P \cup Q)\big) \leqslant S(f;Q).$$

$\square$

Definição 2.76. Seja $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada. Definimos a integral inferior e superior da f como

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup_P s(f;P), \quad \overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf_P S(f;P),$$

respectivamente.

Definição 2.77 (Funções integráveis a Riemam)**.** Considere $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Dizemos que f é integrável quando

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx.$$

Este valor comum é chamado de integral da f e denotado por $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$.

Ao considerar o espaço de medida $(\mathbb{R}, \mathscr{L}, \ell)$, estudado na Subseção 2.1.1, poderíamos nos perguntar qual a diferença entre a integral segundo a medida de Lebesgue e a integral de Riemann. Para isto, vejamos os seguintes exemplos:

Exemplo 2.78. Considere a função $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{para } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{para } x \in [0,1] \cap \mathbb{I}. \end{cases}$$

Note que $f(x)$ não é Riemann integrável, uma vez que

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup_P s(f;P) = 0 \neq 1 = \inf_P S(f;P) = \overline{\int_a^b} f(x)dx.$$

Por outro lado, $f(x)$ é Lebesgue integrável, afinal podemos escrever

$$f(x) = 1 \cdot \chi_{[0,1] \cap \mathbb{Q}}(x) + 0 \cdot \chi_{[0,1] \cap \mathbb{I}}(x), \quad \text{para todo } x \in [0,1],$$

que é uma função simples. Como das Observações 2.49 e 2.50 temos que, $[0,1] \cap \mathbb{Q} \in \mathscr{L}$ e $[0,1] \cap \mathbb{I} \in \mathscr{L}$, segue então que $f(x)$ é integrável com relação a medida de Lebesgue e

$$\int_{[0,1]} f\, d\mu = 1 \cdot \ell\big([0,1] \cap \mathbb{Q}\big) + 0 \cdot \ell\big([0,1] \cap \mathbb{I}\big) = 0.$$

O exemplo anterior é um excelente indicativo de que a integral segundo a medida de Lebesgue generaliza a noção de integral de Riemann. Porém, nem tudo são flores. Quando consideramos as integrais de Riemann impróprias

$$\int_0^\infty f(x)\,dx := \lim_{r\to\infty}\int_0^r f(x)\,dx,$$

podem ocorrer problemas. Por exemplo, uma função pode ser Riemann integrável em $[0,\infty)$ mas não ser Lebesgue integrável em $[0,\infty)$.

Exemplo 2.79. Considere a função $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ dada por

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x)}{x}, & \text{para } x>0,\\ 1, & \text{para } x=0.\end{cases}$$

Observe que a integral de Riemann dessa função existe[11] e vale

$$\int_0^\infty f(x)\,dx=\frac{\pi}{2}.$$

Por outro lado, verificaremos se f é Lesbegue integrável. Perceba que f é uma função contínua, então o Exemplo 2.46 nos garante que f é mensurável.

$$\int f^+\,d\ell=\infty \quad \text{e} \quad \int f^-\,d\ell=\infty,$$

concluíndo que $f(x)$ não é Lebesgue integrável.

Para encerrar a discussão, apresentamos um resultado que garante quando a integral de Lebesgue generaliza a integral de Riemann.

Teorema 2.80. *Seja $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ uma função limitada. Se f é Riemann integrável, então é Lesbegue mensurável e Lesbegue integrável. Mais ainda, vale a identidade*

$$\int_a^b f(x)dx=\int_{[a,b]} fd\ell.$$

Demonstração. Considere uma partição $P=\{t_0,t_1,\ldots,t_n\}$ do intervalo $[a,b]$ e as seguintes funções simples:

$$g_P(x)=\sum_{i=1}^n m_i\cdot\chi_{(t_{i-1},t_i]}(x),\quad G_P(x)=\sum_{i=1}^n M_i\cdot\chi_{(t_{i-1},t_i]}(x),$$

com $M_i=\sup_{(t_{i-1},t_i]} f(x)$ e $m_i=\inf_{(t_{i-1},t_i]} f(x)$. Considere uma sequência de partições $\{P_k\}_{k=1}^\infty$ a qual refina a partição P, de modo que $P_k\subset P_{k+1}$ para todo $k\in\mathbb{N}$ e o maior comprimento dos subintervalos sempre tende a zero. Agora note que

$$g_{P_k}\leqslant f\leqslant G_{P_k},\ \text{para todo } k\in\mathbb{N},$$

[11] O cálculo desta integral é clássico e uma forma de calcular este valor é utilizando a teoria de integrais complexas sobre caminhos, veja [7]. Como esta teoria está muito distante da que estamos apresentando neste texto, optamos por omitir os detalhes.

ou seja, g_{P_k} e G_{P_k} são, respectivamente, limitadas superiormente e inferiormente pela f para todo $k \in \mathbb{N}$. Perceba que g_{P_k} e G_{P_k} são, respectivamente, sequências crescentes e decrescente, logo convergentes. Ou seja,

$$\lim_{k\to\infty} g_{P_k} = g \leqslant f \leqslant G = \lim_{k\to\infty} G_{P_k},$$

de forma que g e G são mensuráveis. Isto acontece porque nas definições de g_{P_k} e G_{P_k}, temos uma função característica de um intervalo semi-aberto, e este, pelo Corolário 2.40, é um elemento da σ–álgebra de Lebesgue, isto é, é mensurável.

Também temos que f é uma função limitada, então vamos considerar $h = \sup_{[a,b]} f(x)$. A função constante h claramente é Lesbegue integrável e domina g_{P_k} e G_{P_k}. Disto, do Teorema 2.67 e da hipótese que $f(x)$ é Riemann integrável, temos que

$$\int_a^b f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} g_{P_k} d\ell = \int_{[a,b]} g d\ell, \tag{2.34}$$

e

$$\int_a^b f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} G_{P_k} d\ell = \int_{[a,b]} G d\ell. \tag{2.35}$$

Subtraindo (2.34) de (2.35), obtemos que

$$\int_{[a,b]} (G-g) d\ell = 0,$$

e, portanto $G = g$ q.t.p. em $[a,b]$. Dessa forma, $G = f = g$ q.t.p. em $[a,b]$, o que nos permite concluir que f é mensurável. E ainda temos que

$$\int_{[a,b]} f d\ell = \int_{[a,b]} G d\ell = \int_a^b f(x)dx,$$

isto é, $f(x)$ é Lebesgue integrável e vale a igualdade desejada. $\square$

3 OS ESPAÇOS L^p

Toda teoria estudada anteriormente é de extrema relevância para definir os espaços L^p e compreender algumas de suas propriedades. Nosso objetivo nesta seção é demonstrar uma série de resultados que são usados no último capítulo desta dissertação.

3.1 UMA BREVE INTRODUÇÃO

Nesta seção, iremos construir o conjunto das funções que chamamos de p–integráveis e verificar que este conjunto (possivelmente depois de algumas adaptações) pode se tornar um espaço de Banach[1].

Iniciamos nosso estudo assumindo que $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ sempre denota um espaço de medida. Com isto construímos os seguintes conjuntos de funções:

1. Se $p \in [1, \infty)$, definimos o espaço $\mathscr{L}^p(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ por

$$\mathscr{L}^p(\Omega, \mathscr{F}, \mu) \quad := \quad \left\{ f \quad : \quad \Omega \quad \longrightarrow \quad \mathbb{R} \quad : \quad f \text{ é mensurável e } \int_\Omega |f|^p \, d\mu \quad < \quad \infty \right\}.$$

2. Definimos o espaço $\mathscr{L}^\infty(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$[2] por

$$\mathscr{L}^\infty(\Omega, \mathscr{F}, \mu) := \Big\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} : f \text{ é mensurável e } \inf\big\{k > 0 : |f(x)| \le k \text{ q.t.p. em } \Omega\big\} < \infty \Big\}.$$

Considere inicialmente o seguinte resultado.

Proposição 3.1. *Se $p \in [1, \infty]$ e f, g pertencem a $\mathscr{L}^p(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, então λf e $f + g$ também pertencem a $\mathscr{L}^p(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$.*

Demonstração. Se $p = \infty$, como vale que $|f(x) + g(x)| \le |f(x)| + |g(x)|$ q.t.p. em Ω, então claramente da definição do conjunto $\mathscr{L}^\infty(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ segue que $f + g \in \mathscr{L}^\infty(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$.

Caso $1 \le p < \infty$, tome a função $h : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $h(t) = t^p$. Do cálculo diferencial sabe-se que a função h é infinitamente diferenciável. Como $h''(t) \ge 0$, $\forall t \in (0, \infty)$, temos que h é uma função convexa em $(0, \infty)$, ou seja,

$$h(tx + (1-t)y) \le th(x) + (1-t)h(y). \tag{3.1}$$

Daí

[1] Relembramos rapidamente que um espaço de Banach é um espaço vetorial normado e completo.

[2] Chamamos o valor $\inf\{k > 0 : |f(x)| \le k \text{ q.t.p. em } \Omega\}$ de supremo essencial de $|f|$ e o denotamos por $\operatorname{ess\,sup}|f|$.

$$\left|f(x)+g(x)\right|^p \leq \left||f(x)|+|g(x)|\right|^p = 2^p\left|\frac{1}{2}|f(x)|+\frac{1}{2}|g(x)|\right|^p$$
$$\overset{\text{por (3.1)}}{\leqslant} 2^p\left|\frac{1}{2}|f(x)|^p+\frac{1}{2}|g(x)|^p\right| = 2^{p-1}\left(|f(x)|^p+|g(x)|^p\right). \quad (3.2)$$

Assim, integrando (3.2) sobre Ω, ficará

$$\int_\Omega \left|f+g\right|^p d\mu \leq 2^{p-1}\int_\Omega \left(|f|^p+|g|^p\right)d\mu$$
$$= 2^{p-1}\left(\int_\Omega |f|^p d\mu + \int_\Omega |g|^p d\mu\right) < \infty,$$

ou seja, $(f+g) \in \mathscr{L}^p(\Omega,\mathscr{F},\mu)$.

Agora perceba que

$$\int_\Omega |\lambda f|^p d\mu = \int_\Omega |\lambda|^p |f|^p d\mu = |\lambda|^p \int_\Omega |f|^p d\mu < \infty.$$

Portanto $\lambda f \in \mathscr{L}^p(\Omega,\mathscr{F},\mu)$ □

Levando em conta a Proposição 3.1, podemos considerar as seguintes operações: soma de funções em $\mathscr{L}^p(\Omega,\mathscr{F},\mu)$, definida por

$$\begin{array}{rccc}\oplus : & \mathscr{L}^p(\Omega,\mathscr{F},\mu)\times\mathscr{L}^p(\Omega,\mathscr{F},\mu) & \longrightarrow & \mathscr{L}^p(\Omega,\mathscr{F},\mu) \\ & (f(x),g(x)) & \longmapsto & f(x)+g(x)\end{array}$$

e multiplicação de escalar real por função em $\mathscr{L}^p(\Omega,\mathscr{F},\mu)$, definida por

$$\begin{array}{rccc}\odot : & \mathbb{R}\times\mathscr{L}^p(\Omega,\mathscr{F},\mu) & \longrightarrow & \mathscr{L}^p(\Omega,\mathscr{F},\mu) \\ & (\lambda,f(x)) & \longmapsto & \lambda f(x)\end{array}$$

e verificar, sem muitas mais complicações, que $(\mathscr{L}^p(\Omega,\mathscr{F},\mu),\oplus,\odot)$ é um espaço vetorial real.

O nosso objetivo agora seria considerar $\|f\|_p : \mathscr{L}^p(\Omega,\mathscr{F},\mu)\to\mathbb{R}_+$, dada por

$$\|f\|_p = \begin{cases}\left[\int_\Omega |f|^p d\mu\right]^{\frac{1}{p}}, & \text{se } p\in[1,\infty), \\ \operatorname{ess\,sup}|f|, & \text{se } p=\infty,\end{cases} \quad (3.3)$$

e verificar que $\|\cdot\|_p$ define uma norma em $\mathscr{L}^p(\Omega,\mathscr{F},\mu)$. Porém, infelizmente isto não é possível. De fato, como não é necessariamente verdade que

$$\|f\|_p = 0 \Longrightarrow f(x)=0, \quad \forall x\in\Omega,$$

uma vez que duas funções f_1 e f_2 podem ser distintas apenas em um conjunto de medida nula e ainda satisfazerem $\|f_1\|_p = \|f_2\|_p$; veja Proposição 2.60 no caso em que $p\in[1,\infty)$, ou a própria definição de supremo essencial no caso em que $p=\infty$.

Com o intuito de solucionar esse impasse, definimos em $\mathscr{L}^p(\Omega,\mathscr{F},\mu)$ a seguinte relação: se h_1 e h_2 estão em $\mathscr{L}^p(\Omega,\mathscr{F},\mu)$, então

$$h_1 \sim h_2 \Longleftrightarrow (h_1-h_2)(x)=0, \ \textit{q.t.p. em } \Omega. \tag{3.4}$$

Assim (3.4) é uma relação de equivalência, já que podemos verificar de maneira direta as seguintes propriedades:

1. $h_1 \sim h_1, \ \forall h_1 \in \mathscr{L}^p(\Omega,\mathscr{F},\mu)$, *(Reflexiva).*
2. $h_1 \sim h_2 \implies h_2 \sim h_1, \quad \forall h_1, h_2 \in \mathscr{L}^p(\Omega,\mathscr{F},\mu)$, *(Simétrica).*
3. $h_1 \sim h_2$ *e* $h_2 \sim h_3 \implies h_1 \sim h_3, \ \forall h_1,h_2,h_3 \in \mathscr{L}^p(\Omega,\mathscr{F},\mu)$, *(Transitiva).*

Desta relação de equivalência, para cada $f \in \mathscr{L}^p(\Omega,\mathscr{F},\mu)$ podemos construir a sua classe de equivalência

$$[f] := \{g \in \mathscr{L}^p(\Omega,\mathscr{F},\mu) : g \sim f\}.$$

Desta forma, ao juntarmos todas as classes de equivalências distintas, construímos um conjunto de classes de equivalências de elementos de $\mathscr{L}^p(\Omega,\mathscr{F},\mu)$, que é denotado por $L^p(\Omega,\mathscr{F},\mu)$, ou apenas de L^p, quando a falta da indicação do conjunto, da σ–álgebra ou da medida, não causarem nenhuma confusão. Mais precisamente,

$$L^p := \{[f] : f \in \mathscr{L}^p(\Omega,\mathscr{F},\mu)\}.$$

Se considerarmos sobre este conjunto as operações

$$\begin{array}{cccccccccc} + & : & L^p \times L^p & \longrightarrow & L^p & \qquad \cdot & : & \mathbb{R} \times L^p & \longrightarrow & L^p \\ & & ([f],[g]) & \longmapsto & [f+g] & & & (\lambda,[f]) & \longmapsto & [\lambda f] \end{array} \tag{3.5}$$

podemos verificar que $(L^p,+,\cdot)$ define um espaço vetorial

Formalizamos toda a construção feita acima com a seguinte definição.

Definição 3.2 (Espaços L^p)**.** Se $1 \le p \le \infty$, definimos o espaço vetorial real $L^p(\Omega,\mathscr{F},\mu)$ por

$$L^p(\Omega,\mathscr{F},\mu) = \mathscr{L}^p(\Omega,\mathscr{F},\mu)/\sim,$$

ou ainda

$$L^p(\Omega,\mathscr{F},\mu) : \begin{cases} \left\{[f] : \displaystyle\int_\Omega |f|^p \, d\mu < \infty\right\}, & \\ & \text{quando } p \in [1,\infty); \\ \left\{[f] : \operatorname{ess\,sup}|f| < \infty\right\}, & \\ & \text{quando } p = \infty; \end{cases}$$

com as operações dadas em (3.5). Vale ressaltar ainda que

$$[f] := \{g \in \mathscr{L}^p : \text{ mensurável e } g(x) = f(x) \text{ q.t.p. em } \Omega\}.$$

Observação 3.3. 1. É importante entender que mesmo que os elementos de L^p sejam conjuntos, iremos "abusar" desta construção e passaremos a encarar estes conjuntos apenas como se fossem uma função; mais especificamente, como um de seus representantes. Isto facilita em muito a notação e o entendimento da teoria.

2. Segue diretamente da definição do espaço $L^\infty(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ que

$$|f(x)| \leqslant \|f\|_\infty, \quad \text{q.t.p. em } \Omega.$$

Veja agora o que acontece com a função $\|\cdot\|_p$, que foi definida em (3.3), quando a consideramos sobre os espaços L^p.

1. Nos espaços L^p, graças a como construímos estes espaços, vale a equivalência

$$\|f\|_p = 0 \Longleftrightarrow f = 0, \ \textit{q.t.p. em } \Omega.$$

E ainda

$$\|f\|_p > 0, \ \forall f \in L^p, \textit{ tal que } f \neq 0.$$

2. Se $\lambda \in \mathbb{R}$ e $p \in [1, \infty)$, então:

$$\begin{aligned}\|\lambda f\|_p = \left(\int_\Omega |\lambda f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\int_\Omega |\lambda|^p |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(|\lambda|^p \int_\Omega |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \left(\int_\Omega |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \|f\|_p\end{aligned}$$

3. Se $\lambda \in \mathbb{R}$ e $p = \infty$, então:

$$\begin{aligned}\|\lambda f\|_\infty &= \operatorname{ess\,sup} |\lambda f| \\ &= \inf\left\{k > 0 : |\lambda f(x)| \leq k \ \text{ q.t.p. em } \Omega\right\} \\ &= |\lambda| \inf\left\{k > 0 : |f(x)| \leq k \ \text{ q.t.p. em } \Omega\right\} = |\lambda| \|f\|_\infty.\end{aligned}$$

Levando em conta os itens 1., 2. e 3. discutidos acima, para que L^p juntamente com a função $\|\cdot\|_p$ seja um espaço vetorial real normado, fica faltando apenas demonstrarmos a desigualdade triangular para a função $\|\cdot\|_p$. Para isto, introduzimos a seguir três resultados fundamentais da teoria.

Lema 3.4 (Desigualdade de Young)**.** *Considere $p, q \in \mathbb{R}$ tal que $p, q > 1$ e $(1/p) + (1/q) = 1$. Se $x, y \geq 0$, então vale $xy \leq (x^p/p) + (y^q/q)$.*

Demonstração. Se $x=0$ ou $y=0$, é direto que a desigualdade é válida. Assuma então que $x,y>0$. Fixe $y>0$ e defina $h:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, por

$$h(x)=\frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}-xy.$$

Desta forma temos que

$$h'(x)=x^{p-1}-y \quad \text{e} \quad h''(x)=(p-1)x^{p-2}, \quad \forall x>0.$$

Como a segunda derivada da h é sempre positiva, então h é convexa em $(0,\infty)$, e seu ponto de mínimo global x_0 é encontrado quando se calcula $h'(x)=0$, ou seja, $x_0=y^{1/(p-1)}$. Assim, $h(x_0)\leqslant h(x)$, $\forall x\geqslant 0$, com

$$h(x_0)=\frac{x_0^p}{p}+\frac{y^q}{q}-x_0y.$$

Agora substituindo x_0, obtemos

$$h(x_0)=\frac{y^{p/(p-1)}}{p}+\frac{y^q}{q}-y^{1/(p-1)}y=\frac{y^q}{p}+\frac{y^q}{q}-y^q$$
$$=\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)y^q-y^q=0.$$

Como $h(x_0)=0$ é o ponto de mínimo global em $(0,\infty)$, então temos

$$0\leqslant\frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}-xy, \quad \forall x,y>0,$$

portanto,

$$xy\leqslant\frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}, \quad \forall x,y>0.$$

A prova está completa. □

Teorema 3.5 (Desigualdade de Hölder)**.** *Assuma que* $p,q\in(1,\infty)$ *sejam tais que* $(1/p)+(1/q)=1$ *ou* $p=1$ *e* $q=\infty$*. Se* $f\in L^p$ *e* $g\in L^q$*, então* $fg\in L^1$ *e vale que*

$$\|fg\|_1\leq\|f\|_p\|g\|_q.$$

Demonstração. Suponhamos que $\|f\|_p>0$ e $\|g\|_q>0$, já que se algum for igual a 0, o resultado é imediato.

1. Caso $p,q\in(1,\infty)$, pelo Lema (3.4) podemos escrever a seguinte desigualdade:

$$\left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_p}\right)\left(\frac{|g(x)|}{\|g\|_q}\right)\leq\frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p}\frac{1}{p}+\frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q}\frac{1}{q}, \tag{3.6}$$

q.t.p. em Ω. Agora como $f\in L^p$ e $g\in L^q$, concluímos que fg é mensurável. Mais ainda, pela desigualdade (3.6) temos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{\|f\|_p\|g\|_q}\int_\Omega \Big|f(x)g(x)\Big|\,d\mu &\le \int_\Omega\left(\frac{1}{p}\frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p}+\frac{1}{q}\frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q}\right)d\mu\\ &= \frac{1}{p\|f\|_p^p}\int_\Omega |f(x)|^p\,d\mu+\frac{1}{q\|g\|_q^q}\int_\Omega |g(x)|^q\,d\mu=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.\end{aligned}$$

Logo,

$$\|fg\|_1=\int_\Omega \Big|f(x)g(x)\Big|\,d\mu\le \|f\|_p\|g\|_q.$$

2. Suponha agora que $f\in L^1$ e $g\in L^\infty$, então

$$\begin{aligned}\|fg\|_1=\int_\Omega |f(x)g(x)|d\mu=\int_\Omega |f(x)||g(x)|d\mu&\\ \leqslant \int_\Omega |f(x)|\operatorname{ess\,sup}|g|\,d\mu=\|f\|_1\|g\|_\infty&\end{aligned}$$

□

Teorema 3.6 (Desigualdade de Minkowski)**.** *Se* $1\le p\le\infty$ *e* $f,g\in L^p$*, então vale a desigualdade*

$$\|f+g\|_p\le\|f\|_p+\|g\|_p. \tag{3.7}$$

Demonstração. Assuma primeiro que $1\le p<\infty$. Daí

$$\begin{aligned}|f(x)+g(x)|^p&=|f(x)+g(x)|^{p-1}|f(x)+g(x)|\\ &\le|f(x)+g(x)|^{p-1}\Big(|f(x)|+|g(x)|\Big)\\ &=|f(x)+g(x)|^{p-1}|f(x)|+|f(x)+g(x)|^{p-1}|g(x)|.\end{aligned}\tag{3.8}$$

Considerando $1/p+1/q=1$, e integrando (3.8) sobre Ω e usando o Teorema 3.5, obtemos

$$\begin{aligned}\int_\Omega|f+g|^p\,d\mu&\leqslant\int_\Omega|f+g|^{p-1}|f|\,d\mu+\int_\Omega|f+g|^{p-1}|g|\,d\mu\\ &\le\|(f+g)^{p-1}\|_q\|f\|_p+\|(f+g)^{p-1}\|_q\|g\|_p.\end{aligned}\tag{3.9}$$

onde

$$\|(f+g)^{p-1}\|_q=\left(\int_\Omega|f+g|^{(p-1)q}\,d\mu\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{3.10}$$

Com $q=\frac{p}{p-1}$. Reescrevendo a equação (3.10) deduzimos que

$$\|(f+g)^{p-1}\|_q=\left(\int_\Omega|f+g|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{q}}=\|f+g\|_p^{\frac{p}{q}}.$$

Disto podemos reescrever a desigualdade (3.9) da forma

$$\|f+g\|_p^p=\int_\Omega |f+g|^p\,d\mu \leq \|f+g\|_p^{\frac{p}{q}}\|f\|_p+\|f+g\|_p^{\frac{p}{q}}\|g\|_p,$$

ou seja,

$$\|f+g\|_p^p \leq \|f+g\|_p^{\frac{p}{q}}\Big(\|f\|_p+\|g\|_p\Big) \Longrightarrow \|f+g\|_p^{p-(p/q)} \leq \|f\|_p+\|g\|_p.$$

Como $p-(p/q)=1$, então ficamos com

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p+\|g\|_p.$$

Finalmente o caso $p=\infty$ segue do fato que

$$|f(x)+g(x)| \leq |f(x)|+|g(x)| \leq \|f\|_\infty+\|g\|_\infty, \quad \text{q.t.p. em } \Omega.$$

$\square$

Desta forma a desigualdade de Minkowiski é a desigualdade triangular da norma $\|\cdot\|_p$. Com isso concluímos a demonstração.

Diante do resultado acima, apresentaremos um resultado muito importante para esta dissertação.

Teorema 3.7. *($L^p, \|\cdot\|_p$) é um espaço de Banach para todo $p\in[1,\infty)$.*

Demonstração. Em outras palavras, o nosso intuito é mostrar que toda sequência de Cauchy em L^p é convergente. Para isso considere $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ uma sequência de Cauchy em L^p, isto é,

$$\forall \epsilon>0,\ \exists n_0\in\mathbb{N} \textit{ tal que } \forall n,\ m>n_0 \Longrightarrow \|\varphi_n-\varphi_m\|_p \leq \epsilon.$$

Usaremos o seguinte fato para demonstrar $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ converge em L^p: Se uma sequência de Cauchy possui uma subsequência convergente então a sequência original é convergente e converge para o mesmo limite. Então a partir de agora o nosso intuito será mostrar que $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ possui alguma subsequência convergente. Se isso acontecer, usaremos o fato acima para concluir a demonstração.

Para isso, como $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ é uma sequência de Cauchy, então existe uma subsequência $\{\varphi_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ tal que

$$\|\varphi_{n_k}-\varphi_{n_{k+1}}\|_p \leq \frac{1}{2^k},\ \ \forall k\in\mathbb{N}.$$

Para que a notação não fique tão carregada, a partir deste ponto usaremos a notação Ψ_k para representar o elemento φ_{n_k}.

Agora, considere a aplicação $\Psi:\Omega\longrightarrow\overline{\mathbb{R}}$ definida por

$$\Psi(x)=|\Psi_1(x)|+\sum_{k=1}^\infty \big|(\Psi_{k+1}-\Psi_k)(x)\big|. \tag{3.11}$$

Obviamente a aplicação Ψ está bem definida, já que o contradomínio é $\overline{\mathbb{R}}$. Agora mostraremos que $\Psi \in L^p$. Para tal objetivo podemos fazer algumas manipulações algébricas na equação (3.11) de modo a ficar com

$$|\Psi(x)|^p = \lim_{n\to\infty}\left(|\Psi_1(x)| + \sum_{k=1}^{n}|(\Psi_{k+1}-\Psi_k)(x)|\right)^p. \tag{3.12}$$

Agora integrando (3.12), obtemos

$$\int_\Omega |\Psi|^p d\mu = \int_\Omega \lim_{n\to\infty}\left(|\Psi_1| + \sum_{k=1}^{n}|(\Psi_{k+1}-\Psi_k)|\right)^p d\mu,$$

podemos perceber que o lado direito da igualdade (3.11) temos uma sequência monótona e limitada, logo convergente. Portanto, pelo Teorema 2.61, temos que

$$\int_\Omega |\Psi|^p\, d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_\Omega \left(|\Psi_1| + \sum_{k=1}^{n}|(\Psi_{k+1}-\Psi_k)|\right)^p d\mu. \tag{3.13}$$

Agora elevando ambos os lados de (3.13) a $1/p$ e aplicando o Teorema 3.6, obtemos

$$\begin{aligned}
\|\Psi\|_p &= \lim_{n\to\infty}\left[\int_\Omega \left(|\Psi_1| + \sum_{k=1}^{n}|(\Psi_{k+1}-\Psi_k)|\right)^p d\mu\right]^{\frac{1}{p}} \\
&\leqslant \lim_{n\to\infty}\left(\|\Psi_1\|_p + \left\|\sum_{k=1}^{n}|\Psi_{k+1}-\Psi_k|\right\|_p\right) \\
&= \|\Psi_1\|_p + \left\|\sum_{k=1}^{\infty}|\Psi_{k+1}-\Psi_k|\right\|_p \leq \|\Psi_1\|_p + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k} < \infty.
\end{aligned}$$

Logo, $\Psi \in L^p$. De fato, concluir que $\Psi \in L^p$ é mesmo que afirmar que

$$\int_\Omega |\Psi|^p\, d\mu < \infty, \text{ q.t.p. em } \Omega,$$

ou seja, que $\mu(\{x \in \Omega : \Psi(x) = \infty\}) = 0$.

Agora, baseando-se na Ψ definida anteriormente, definiremos uma aplicação φ a qual se provará ser o limite da subsequência Ψ_k.

Assim, considere $\varphi : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ definida por

$$\varphi(x) = \begin{cases} \Psi_1(x) + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(\Psi_{k+1}-\Psi_k)(x), & \text{se } \Psi(x) < \infty, \ (1) \\ 0, & \text{se } \Psi(x) = \infty. \ (2) \end{cases} \tag{3.14}$$

Perceba que a aplicação $\varphi(x)$ está bem definida. Pois se tivermos que $\Psi(x) < \infty$, então a série de (3.11) é absolutamente convergente. Mais toda série absolutamente convergente é convergente. Isso nos permiti concluir que (1) está bem definida.

Agora note que

$$\varphi(x) = \lim_{n\to\infty}\left(\Psi_1(x)+\sum_{k=1}^{n}(\Psi_{k+1}-\Psi_k)(x)\right) = \lim_{n\to\infty}\Psi_{n+1}(x).$$

Portanto $\lim_{n\to\infty}\Psi_{n+1}(x) = \varphi(x)$. Com isso obtemos que Ψ_n converge pontualmente. Mostraremos agora que $\varphi \in L^p$. Para isso observe que como consequência de (3.14), podemos obter que

$$\int_\Omega |\varphi|^p d\mu = \int_\Omega \lim_{n\to\infty}\left|\Psi_1+\sum_{k=1}^{n}(\Psi_{k+1}-\Psi_k)\right|^p d\mu. \tag{3.15}$$

Mas, note que

$$\left|\Psi_1(x)+\sum_{k=1}^{n}(\Psi_{k+1}-\Psi_k)(x)\right| \leqslant |\Psi_1(x)|+\sum_{k=1}^{n}|(\Psi_{k+1}-\Psi_k)(x)| \leqslant \Psi(x),\ \forall n\in\mathbb{N}.$$

Portanto,

$$\left|\Psi_1(x)+\sum_{k=1}^{n}(\Psi_{k+1}-\Psi_k)(x)\right|^p \leqslant |\Psi(x)|^p,\ \forall n\in\mathbb{N}.$$

Como $|\Psi|^p$ é integrável, então pelo Teorema 2.67 podemos reescrever a Equação (3.15) como

$$\int_\Omega |\varphi|^p\, d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_\Omega \left|\Psi_1+\sum_{k=1}^{n}(\Psi_{k+1}-\Psi_k)\right|^p d\mu.$$

Ou ainda

$$\|\varphi\|_p = \lim_{n\to\infty}\left\|\Psi_1+\sum_{k=1}^{n}(\Psi_{k+1}-\Psi_k)\right\|_p.$$

Disto e do Teorema 3.6, concluímos que

$$\begin{aligned}\|\varphi\|_p &= \lim_{n\to\infty}\left\|\Psi_1+\sum_{k=1}^{n}(\Psi_{k+1}-\Psi_k)\right\|_p\\ &\leqslant \lim_{n\to\infty}\left(\|\Psi_1\|_p+\sum_{k=1}^{n}\|(\Psi_{k+1}-\Psi_k)\|_p\right)\\ &\leqslant \lim_{n\to\infty}\left(\|\Psi_1\|_p+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}\right) = \|\Psi_1\|_p+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}<\infty.\end{aligned}$$

Portanto, $\varphi \in L^p$. Por fim mostraremos que $\|\Psi_k-\varphi\|_p \longrightarrow 0$. Mas, como

$$\varphi(x) = \Psi_1(x)+\sum_{k=1}^{\infty}(\Psi_{k+1}-\Psi_k)(x), \tag{3.16}$$

e que ainda (3.16) pode ser reescrita da seguinte forma

$$\varphi(x) = \Psi_1(x) + \sum_{k=1}^{m-1} (\Psi_{k+1} - \Psi_k)(x) + \sum_{k=m}^{\infty} (\Psi_{k+1} - \Psi_k)(x),$$

que no final das contas obtemos,

$$\varphi(x) = \Psi_m(x) + \sum_{k=m}^{\infty} (\Psi_{k+1} - \Psi_k)(x).$$

Logo, pelo Teorema 2.67, temos a desigualdade

$$\|\Psi_m(x) - \varphi(x)\|_p = \left\| \sum_{k=m}^{\infty} (\Psi_{k+1} - \Psi_k)(x) \right\|_p$$

$$\leq \sum_{k=m}^{\infty} \|(\Psi_{k+1} - \Psi_k)(x)\|_p \leq \sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{m-1}} \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Assim, temos que $\Psi_k \longrightarrow \varphi$. Como a sequência original é de Cauchy, então temos que $\varphi_n \longrightarrow \varphi$. Logo concluímos a demonstração para $p \in [1, \infty)$. $\square$

Mostraremos agora que o espaço $(L^\infty, \|f\|_\infty)$ também é um espaço de Banach.

Teorema 3.8. *O espaço L^∞ com a norma $\|f\|_\infty$ é um espaço de Banach.*

Demonstração. Considere agora $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy em L^∞. Isto é, para todo $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que n, $m > n_0$, temos

$$\|f_n - f_m\|_\infty < \frac{1}{\epsilon}.$$

Agora do item 2. da Observação 3.3, obtemos que

$$\left|f_n(x) - f_m(x)\right| \leqslant \|f_n - f_m\|_\infty < \frac{1}{\epsilon}, \text{ q.t.p. em } \Omega, \tag{3.17}$$

para todo n, $m \geqslant n_0$. Podemos perceber que pela desigualdade (3.17) que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy q.t.p. em Ω[3] na reta, portanto convergente q.t.p em Ω. Definimos $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, como sendo

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

Mostraremos agora que $f \in L^\infty$. Pela definição de L^∞, temos que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de funções mensuráveis, portanto como consequência da Observação 2.19 concluímos que f é mensurável. Agora fazendo $m \longrightarrow \infty$ em (3.17), obtemos que

$$\left|f_n(x) - f(x)\right| \leqslant \frac{1}{\epsilon}, \text{ q.t.p. em } \Omega,$$

[3]Isto quer dizer que $\mu(\{x \in \Omega : |f_n(x) - f_m(x)| \geqslant \epsilon\}) = 0$

sempre que $n \geqslant n_0$. Desta forma temos que $[f_n(x)-f(x)] \in L^\infty$. Como o L^∞ é uma espaço vetorial então temos que

$$f(x) = \underbrace{f_n(x)}_{\in L^\infty} - \underbrace{[f_n(x)-f(x)]}_{\in L^\infty} \in L^\infty.$$

Com isso temos que para $n \geqslant n_0$

$$\left|f_n(x)-f(x)\right| \leqslant \|f_n - f\|_\infty < \frac{1}{\epsilon}, \text{ q.t.p. em } \Omega, \tag{3.18}$$

segue que $f_n \longrightarrow f$ na norma $\|\cdot\|_\infty$. Com isso demonstramos que L^∞ é um espaço de Banach.

□

Por fim apresentamos um resultado que relaciona os diferentes espaços L^p.

Teorema 3.9. *Considere $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ um espaço de medida com Ω tendo medida finita, isto é, $\mu(\Omega) < \infty$. Se $1 \leq t < s \leq \infty$ então $L^\infty \subset L^s \subset L^t \subset L^1$.*

Demonstração.

1. Seja $t \in (1, \infty)$. Se $f \in L^t$, por definição que f é mensurável e, consequentemente, que $|f|$ é mensurável. Assim, se $(1/t) + (1/p') = 1$, segue do Teorema 3.5 que

$$\int_\Omega |f|\, d\mu = \int_\Omega |f \cdot 1|\, d\mu \leq \|f\|_t \|1\|_{p'} = \|f\|_t \left[\mu(\Omega)\right]^{1/p'} < \infty,$$

ou seja $L^p \subset L^1$.

2. Seja $t \in (1, \infty)$. Se $f \in L^\infty$, então f é mensurável e consequentemente $|f|$ é mensurável. Assim

$$\begin{aligned}\|f\|_t = \left[\int_\Omega |f|^p\, d\mu\right]^{1/t} \leq \left[\int_\Omega \|f\|_\infty^t\, d\mu\right]^{1/t} &= \|f\|_\infty \left[\int_\Omega 1\, d\mu\right]^{1/t} \\ &= \|f\|_\infty \left[\mu(\Omega)\right]^{1/t} < \infty.\end{aligned}$$

Assim, $L^\infty \subset L^p$.

3. Agora, mostraremos que se $1 < t < s < \infty$ então $L^s \subset L^t$. Considere $f \in L^s$ e note que

$$\frac{1}{\frac{s}{t}} + \frac{1}{\frac{s}{s-t}} = 1.$$

Assim, mas uma vez segue do Teorema segue do Teorema 3.5 que

$$\begin{aligned}\|f\|_t^t = \int_\Omega |f|^t\, d\mu = \int_\Omega |f|^t \cdot 1\, d\mu &\leq \||f|^t\|_{\frac{s}{t}} \|1\|_{\frac{s}{s-t}} \\ &= \left[\int_\Omega (|f|^t)^{\frac{s}{t}}\, d\mu\right]^{\frac{t}{s}} \|1\|_{\frac{s}{s-t}} = \|f\|_s^t \left[\mu(\Omega)\right]^{\frac{t-s}{s}} < \infty.\end{aligned}$$

Logo, $L^s \subset L^t$, como queríamos.

$\square$

Concluiremos esta parte com um breve comentário sobre a derivada de uma função em relação a o espaço de medida $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$.

Definição 3.10. Seja $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ um espaço de medida. Dizemos que $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável q.t.p em Ω quando existe $A \in \mathscr{F}$, com $\mu(A) = 0$ de modo que f é diferenciável em todo $x \in A^c$.

Exemplo 3.11. Considere a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = |x|$.

Esta função é diferenciável em quase todos os pontos de $\mathbb{R}$ exceto no ponto $x = 0$, então concluímos que f não é diferenciável em $\mathbb{R}$. Mas se desconsiderássemos o ponto $\{0\}$, f é claramente diferenciável em $\mathbb{R} - \{0\}$. Mas já sabemos que a medida de Lesbegue do ponto $\{0\}$ tem medida zero. Então podemos concluir que f é diferenciável em quase todos os pontos.

Como não estamos nos aprofundando no conceito de derivação, não iremos demonstrar o próximo resultado, mas para quem quiser ver os detalhes da demonstração, veja [24, Teorema 10, Cap. 5].

Teorema 3.12. *Considere $f \in L^1(t_0, t_1)$. Defina a aplicação $F : [t_0, t_1] \longrightarrow \mathbb{R}$, por*

$$F(t) = \int_{t_0}^{t} f(s)ds.$$

Então $F'(t) = f(t)$, para quase todo ponto $t \in [t_0, t_1]$.

3.2 DENSIDADE EM L^p

A partir de agora, nosso objetivo será apresentar alguns conjuntos densos em L^p. Esses conjuntos serão de grande importância ao longo deste trabalho. Para isso, introduziremos novos conceitos.

Definição 3.13 (Suporte)**.** Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}$ e uma aplicação $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$. Chamaremos de suporte da aplicação f, denotado por $supp(f)$, o conjunto

$$supp(f) = \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}}$$

Por fim, diremos que uma função f tem suporte compacto quando o conjunto $supp(f)$ for um subconjunto compacto de $\mathbb{R}$.

Definição 3.14. Sejam $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funções mensuráveis. Definiremos a convolução de f com g por

$$(f \star g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy, \text{ para todo } x \in \mathbb{R},$$

desde que a aplicação $y \longmapsto f(x-y)g(y)$ seja integrável.

Observação 3.15. Vale ressaltar que a convolução é comutativa. Este fato é obtido através de uma simples mudança de variável.

Teorema 3.16. *Sejam $f \in L^1(\mathbb{R})$ e $g \in L^p(\mathbb{R})$, com $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Então para quase todo $x \in \mathbb{R}$ a aplicação $y \longmapsto f(x-y)g(y)$ é integrável e $(f \star g)(x) \in L^p(\mathbb{R})$. Além disso, $\|f \star g\|_p \leqslant \|f\|_1 \|g\|_p$.*

Demonstração. Para $p = \infty$ a demonstração é trivial.

$$\|f \star g\|_\infty = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy \leqslant \int_{\mathbb{R}} f(x-y)\|g\|_\infty dy$$

$$\|g\|_\infty \int_{\mathbb{R}} f(x-y)dy = \|g\|_\infty \|f\|_1$$

Agora dividiremos a demonstração em duas partes. A primeira é no caso de $p = 1$ e a segunda no caso de $1 < p < \infty$.

1. Caso $p = 1$. Considere $F(x,y) = f(x-y)g(y)$, donde esta função é mensurável. Assim, para quase todo y em $\mathbb{R}$, temos que

$$\int_{\mathbb{R}} |F(x,y)|dx = \int_{\mathbb{R}} |f(x-y)g(y)|dx = |g(y)|\|f\|_1 < +\infty.$$

E ainda temos que

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left[|F(x,y)|dx\right] dy = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left[|f(x-y)g(y)|dx\right] dy$$
$$= \|g\|_1 \|f\|_1 < +\infty. \quad (3.19)$$

Aplicando o Teorema 3.45 em (3.19), obtemos que

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left[|f(x-y)g(y)|dy\right] dx = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left[|f(x-y)g(y)|dx\right] dy$$
$$= \|g\|_1 \|f\|_1 < +\infty.$$

Com isso concluímos que para quase todo $x \in \mathbb{R}$ a integral

$$\int_{\mathbb{R}} \left[|f(x-y)g(y)|dy\right] < +\infty.$$

Também note que

$$\int_{\mathbb{R}} |(f \star g)(x)|dx \leqslant \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left[|f(x-y)g(y)|dy\right] dx$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left[|f(x-y)g(y)|dx\right] dy = \|g\|_1 \|f\|_1 < +\infty,$$

e portanto $(f \star g)(x) \in L^1(\mathbb{R})$. Assim concluímos a prova para $p = 1$.

2. Caso $1 < p < +\infty$. Com a mesma ideia apresentada no caso (1) é fácil perceber que para quase todo $x \in \mathbb{R}$ a aplicação $y \longmapsto |f(x-y)||g(y)|^p$ é integrável. Agora considerando $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, note que

$$|f(x-y)||g(y)| = |f(x-y)|^{\frac{1}{q}}|f(x-y)|^{\frac{1}{p}}|g(y)|. \tag{3.20}$$

Mas, $|f(x-y)|^{\frac{1}{q}} \in L^q$, pois

$$\|f^{\frac{1}{q}}\|_q = \left[\int_{\mathbb{R}} \left|\left(f(x-y)\right)^{\frac{1}{q}}\right|^q dx\right]^{\frac{1}{q}} = \left[\int_{\mathbb{R}} \left|f(x-y)\right| dx\right]^{\frac{1}{q}} < \infty$$

Analogamente se demonstra que $|f(x-y)|^{\frac{1}{p}}|g(y)| \in L^p$.

Agora, se $1/p + 1/q = 1$, então aplicando o Teorema 3.5 em (3.20), obtemos

$$\begin{aligned}
\left|f \star g\right| &\leqslant \int_{\mathbb{R}} |f(x-y)||g(y)| dy \\
&\leqslant \left[\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)| dy\right]^{\frac{1}{q}} \left[\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)||g(y)|^p dy\right]^{\frac{1}{p}} \\
&= \|f\|_1^{\frac{1}{q}} \left[\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)||g(y)|^p dy\right]^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Isso nos permite concluir que

$$|(f \star g)(x)|^p \leqslant \|f\|_1^{\frac{p}{q}} \int_{\mathbb{R}} |f(x-y)||g(y)|^p dy.$$

Disto e do Teorema 3.45, deduzimos que

$$\begin{aligned}
\|(f \star g)(x)\|_p^p &= \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} |f(x-y)||g(y)| dy \right|^p dx \\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}} \left(\|f\|_1^{\frac{p}{q}} \int_{\mathbb{R}} |f(x-y)||g(y)|^p dy \right) dx \\
&= \|f\|_1^{\frac{p}{q}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |f(x-y)||g(y)|^p dy dx \\
&= \|f\|_1^{\frac{p}{q}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |f(x-y)||g(y)|^p dx dy = \|f\|_1^{\frac{p}{q}} \|f\|_1 \int_{\mathbb{R}} |g(y)|^p dy \\
&= \|f\|_1^{\frac{p}{q}+1} \|g\|_p^p = \|f\|_1^p \|g\|_p^p.
\end{aligned}$$

Em resumo, encontramos que

$$\|(f \star g)(x)\|_p^p \leqslant \|f\|_1^p \|g\|_p^p \Longrightarrow \|(f \star g)(x)\|_p \leqslant \|f\|_1 \|g\|_p < \infty.$$

Com isso concluímos a demonstração. □

Proposição 3.17. *Sejam $f \in L^1(\mathbb{R})$ e $g \in L^p(\mathbb{R})$ com $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Então*

$$supp(f \star g) \subset \overline{suppf + suppg}$$

Demonstração. Fixe $x \in \mathbb{R}$. Então do Teorema 3.16, temos que a aplicação $y \longmapsto f(x-y)g(y)$ é integrável, logo a convolução de f com g está bem definida. Agora note que

$$(f \star g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy = \int_{\{x-supp(f)\}\cap supp(g)} f(x-y)g(y)dy.$$

Por outro lado, se $x \notin supp(f)+supp(g)$, então $\{x-supp(f)\}\cap supp(g) = \emptyset$. De fato, pois se $\{x-supp(f)\}\cap supp(g) \neq \emptyset$, então existe $x-a \in \{x-supp(f)\}$ e $b \in supp(g)$, tal que $x-a=b$, ou ainda que $x=a+b$. O que implicaria em $x \in supp(f)+supp(g)$, que é um absurdo. Desta forma

$$(f \star g)(x) = 0, \text{ em } \left\{supp(f)+supp(g)\right\}^c.$$

Portanto

$$supp(f \star g) \subset \overline{supp(f)+supp(g)}.$$

E segue a demonstração. □

Definição 3.18 (Funções testes)**.** Considere uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Dizemos que f é uma função teste quando.

$$f \in C_c^{\infty}(\mathbb{R}) = \{f \in C(\mathbb{R}) : f \text{ é infinitamente diferenciável e possui suporte compacto}\}.$$

Definição 3.19 (Molificadores)**.** Considere $\rho_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma sequência de funções. Chamaremos $\{\rho_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de sequências de molificadores quando forem satisfeito os itens abaixo.

1. $\rho_n \in C_c^{\infty}(\mathbb{R})$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
2. $supp(\rho_n) \subset [-1/n, 1/n]$
3. $\int_{\mathbb{R}} \rho_n = 1$
4. $\rho_n \geqslant 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

A partir de agora usaremos sistematicamente $\{\rho_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ para denotar uma sequência de molificadores.

Proposição 3.20. *Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em $\mathbb{R}$. Então $(\rho_n \star f) \longrightarrow f$ uniformemente em conjuntos compacto de $\mathbb{R}$.*

Demonstração. Considere o conjunto compacto $K \subset \mathbb{R}$. Como f uma função contínua, então f em K é uniformemente contínua. Isto é, Para cada $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que para todo $x \in K$ e todo $y \in (x-\delta, x+\delta) \cap K$ temos que

$$|f(x-y) - f(x)| < \varepsilon.$$

Disto e da Observação 3.15, podemos deduzir que para todo $x \in \mathbb{R}$, temos que

$$\begin{aligned}(\rho_n \star f)(x) - f(x) &= (f \star \rho_n)(x) - f(x)\\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x-y)\rho_n(y)dy - \int_{\mathbb{R}} f(x)\rho_n(y)dy = \int_{\mathbb{R}} \Big[f(x-y)-f(x)\Big]\rho_n(y)dy\\ &= \int_{[-1/n,1/n]} \Big[f(x-y)-f(x)\Big]\rho_n(y)dy.\end{aligned}$$

Assim, quando tivermos $\frac{1}{n} < \delta$ e $x \in K$, concluímos que

$$\begin{aligned}|(\rho_n \star f)(x) - f(x)| &\leqslant \int_{[-1/n,1/n]} \Big|\Big(f(x-y) - f(x)\Big)\Big| \rho_n(y)dy\\ &\leqslant \varepsilon \int_{\mathbb{R}} \rho_n(y)dy = \varepsilon.\end{aligned}$$

Assim segue a demonstração. □

Os lemas a seguir tem como objetivo justificar alguns dos detalhes das demonstrações dos Teoremas 3.24 e 3.25. Contudo, vale salientar que as demonstrações destes lemas fogem demasiadamente do escopo e do objetivo central deste trabalho. Tendo isto em mente, optamos por apenas referênciá-las.

Definição 3.21. Considere $\Omega \subset \mathbb{R}$ um conjunto aberto e $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Dizemos que a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ pertence a $L^p_{loc}(\mathbb{R})$, se $f\chi_K \in L^p(\mathbb{R})$, para todo compacto K em Ω.

Lema 3.22. *Sejam $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $k \in \mathbb{N}$, $f \in C^k_c(\mathbb{R})$[4] e $g \in L^p_{loc}(\mathbb{R})$. Então $f \star g \in C^k(\mathbb{R})$[5]. Em particular, se $f \in C^\infty_c(\mathbb{R})$ e $g \in L^p_{loc}(\mathbb{R})$, então $f \star g \in C^\infty(\mathbb{R})$.*

Demonstração. Veja os detalhes em [5, Proposição 4.20]. □

Lema 3.23. *Sejam $1 \leq p < \infty$ e*

$$C_c(\mathbb{R}) = \{f \in C(\mathbb{R}) : f \textit{ tem suporte compacto}\}.$$

Então $C_c(\mathbb{R})$ é denso em $L^p(\mathbb{R})$.

Demonstração. Veja os detalhes em [5, Teorema 4.12]. □

[4]Usamos este símbolo para representar as funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ que são k–vezes continuamente diferenciáveis e possuem suporte compacto.

[5]Este símbolo é usado para representar as funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ que são k–vezes continuamente diferenciáveis.

Teorema 3.24. *Se $f \in L^p(\mathbb{R})$, para $1 \leqslant p < +\infty$. Então $(\rho_n \star f) \longrightarrow f$ em $L^p(\mathbb{R})$.*

Demonstração. Considere $\varepsilon > 0$. Assim, do Lema 3.23 temos que existe $f_1 \in C_c(\mathbb{R})$ tal que $\|f - f_1\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$. Por outro lado, em decorrência dá Proposição 3.17, obtemos

$$supp(\rho_n \star f_1) \subset [-1/n, 1/n] + supp(f_1) \subset [-1, 1] + supp(f_1),$$

ou seja, o suporte da convolução está contido num compacto. Logo dá Proposição 3.20 pode-se concluir que $(\rho_n \star f_1) \longrightarrow f_1$ uniformemente em compactos de $\mathbb{R}$. Disto e da continuidade da norma, segue que

$$\|(\rho_n \star f_1) - f_1\|_p \longrightarrow 0.$$

Agora note que

$$(\rho_n \star f) - f = \left[\rho_n \star (f - f_1)\right] + \left[(\rho_n \star f_1) - f_1\right] + \left[f_1 - f\right],$$

e que pelos Teoremas 3.6 e 3.16, obtemos

$$\begin{aligned} \|(\rho_n \star f) - f\|_p &\leqslant \|f - f_1\|_p + \|(\rho_n \star f_1) - f_1\|_p + \|f - f_1\|_p \\ &= 2\|f - f_1\|_p + \|(\rho_n \star f_1) - f_1\|_p < \varepsilon + \|(\rho_n \star f_1) - f_1\|_p. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Agora fazendo $n \longrightarrow \infty$ em (3.21), concluímos que

$$\|(\rho_n \star f) - f\|_p < \varepsilon.$$

Assim segue a demonstração. □

O próximo teorema será o último desta seção.

Teorema 3.25. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}$ um conjunto aberto. Então, $C_c^\infty(\Omega)$ é denso nos espaços $L^p(\Omega)$.*

Demonstração. Considere $f \in L^p(\Omega)$ e defina

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \in \Omega, \\ 0, & \text{se } x \not\in \Omega. \end{cases}$$

Claramente a função $\overline{f} \in L^p(\mathbb{R})$. Agora considere $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de conjuntos compactos em $\mathbb{R}$, com $K_n \subset K_{n+1}$, tal que[6]

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = \Omega \quad \text{e} \quad d(K_n, \Omega^c) \geqslant \frac{2}{n}.$$

Observe que para nosso caso podemos escolher K_n como

$$K_n = \left\{x \in \mathbb{R} : |x| \leqslant n \ \text{e} \ d(x, \Omega^c) \geqslant \frac{2}{n}\right\}.$$

Considere $g_n(x) = \chi_{K_n}(x)\overline{f}(x)$ e $f_n = \rho_n \star g_n$. Temos os seguintes fatos válidos:

[6] A demonstração da existência destes conjuntos é meramente topológica. Desta forma optamos por omití-la. Para os detalhes veja em [20].

1. $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \lim_{n\to\infty} \chi_{K_n}(x)\bar{f}(x) = \chi_\Omega(x)\bar{f}(x) = \bar{f}(x)$ q.t.p. em $\mathbb{R}$.

2. Para todo $1 \leqslant p < \infty$ temos que
$$|g_n(x)|^p = |\chi_{K_n}(x)\bar{f}(x)|^p \leqslant |\bar{f}(x)|^p,$$
q.t.p. em $\mathbb{R}$. Daí, do fato que $\bar{f} \in L^p(\mathbb{R})$ decorre que $g_n \in L^p(\mathbb{R})$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

3. Decorre do Lema 3.22 que $f_n \in C^\infty(\mathbb{R})$. Mas então, como da Proposição 3.17 temos que
$$supp(f_n) \subset [-1/n, 1/n] + K_n \subset \Omega,$$
concluímos que $f_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Agora, pelos Teoremas 3.6 e 3.16, temos que
$$\begin{aligned}\|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} = \|f_n - \bar{f}\|_{L^p(\mathbb{R})} &\leqslant \|(\rho_n \star g_n) - (\rho_n \star \bar{f})\|_{L^p(\mathbb{R})} \\ &+ \|(\rho_n \star \bar{f}) - \bar{f}\|_{L^p(\mathbb{R})} \leqslant \|g_n - \bar{f}\|_{L^p(\mathbb{R})} + \|(\rho_n \star \bar{f}) - \bar{f}\|_{L^p(\mathbb{R})}.\end{aligned}$$

Por fim, veja que o Teorema 2.67 e os itens 1 e 2 acima garante que $\|g_n - \bar{f}\|_{L^p(\mathbb{R})} \longrightarrow 0$ quando $n \longrightarrow \infty$. Em contrapartida, o item juntamente com o Teorema 3.24 deduzimos que $\|(\rho_n \star \bar{f}) - \bar{f}\|_{L^p(\mathbb{R})} \longrightarrow 0$. Mas então concluímos que $f_n \longrightarrow f$ em $L^p(\Omega)$, como queríamos. □

3.3 ALGUNS TEOREMAS DE INTEGRAÇÃO

A partir de agora o nosso intuito será apresentar a teoria que trata do produto cartesiano de espaços mensuráveis, a qual culminará nos importantes resultados: Teorema de Tonelli e Teorema de Fubinni.

Definição 3.26. Considere Ω um conjunto qualquer. Dizemos que uma coleção $\mathscr{A}$ de subconjuntos de Ω é uma álgebra quando:

1. Os conjuntos $\emptyset$ e Ω pertencerem a $\mathscr{A}$.

2. Se $A \in \mathscr{A}$ então o complementar $A^c \in \mathscr{A}$.

3. Se $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathscr{A}$ então $\bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathscr{A}$.

Observação 3.27. A definição acima nos permite afirmar que toda álgebra $\mathscr{A}$ também é fechada por interseções finitas. Isto é, se $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathscr{A}$ então $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_n \in \mathscr{F}$. De fato, pois se
$$\begin{aligned}A_i \in \mathscr{A} \Longrightarrow A_i^c \in \mathscr{A} \Longrightarrow \bigcup_{i=1}^{n} A_i^c \in \mathscr{A} \Longrightarrow \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i^c\right)^c \in \mathscr{A} \\ \Longrightarrow \bigcap_{i=1}^{n} (A_i^c)^c \in \mathscr{A} \Longrightarrow \bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathscr{A}.\end{aligned}$$

Definição 3.28. Considere Ω um conjunto qualquer de modo que $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(\Omega)$ é uma álgebra. Dizemos que uma função $\pi_0 : \mathscr{A} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ é uma pré-medida se

1. $\pi_0(\emptyset) = 0$.
2. Se $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ é sequência de conjuntos dois a dois disjuntos em $\mathscr{A}$ de modo que $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{A}$, então
$$\pi_0\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \pi(A_n).$$

O próximo teorema vai nos permitir construir uma medida a partir do conceito de pré-medida. Como para a demonstração deste fato deveríamos expor em nosso texto a teoria de extensão de uma medida, o que nos distanciaria muito do nosso objetivo principal, deixaremos apenas a referência da demonstração deste resultado. Veja [11, Proposição 1.13 e Teorema 1.14]

Teorema 3.29 (Extensão a uma medida)**.** *Considere $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(\Omega)$ uma álgebra, $\pi_0 : \mathscr{A} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ uma pré-medida e $\mathscr{F}(\mathscr{A})$ a σ-álgebra gerada por $\mathscr{A}$. Então existe uma medida $\pi : \mathscr{F}(\mathscr{A}) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ cuja restrição a $\mathscr{A}$ é π_0. Mais ainda, se $\pi_1 : \mathscr{F}(\mathscr{A}) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ é outra medida que estende π_0, então $\pi_1(A) \leqslant \pi(A)$ para todo $A \in \mathscr{F}(\mathscr{A})$ e vale a igualdade se $\pi(A) < \infty$. Por fim, se $\pi_0 : \mathscr{A} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ é σ–finita, então $\pi : \mathscr{F}(\mathscr{A}) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ é a única extensão da medida $\pi_0 : \mathscr{A} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$*

Durante o restante desta seção, assuma que $(X, \mathscr{F}_X, \mu)$ e $(Y, \mathscr{F}_Y, \nu)$ denotam espaços de medida. A partir disto, considere o (importante) conjunto

$$Z_0 := \left\{ \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \times B_i) : A_i \in \mathscr{F}_X \text{ e } B_i \in \mathscr{F}_Y \right\}^{7}. \tag{3.22}$$

Proposição 3.30. *O conjunto $Z_0 \subset \mathscr{P}(X \times Y)$ é uma álgebra.*

Demonstração.

1. Claramente os conjuntos $\emptyset$ e $X \times Y$ pertencem a Z_0.
2. Considere o retângulo $C = A \times B$, com $A \in \mathscr{F}_X$ e $B \in \mathscr{F}_Y$. Daí
$$C^c = (A \times B)^c = (A^c \times B) \cup (A \times B^c) \cup (A^c \times B^c),$$
logo C^c será a união finita de retângulos mensuráveis e portanto $C^c \in Z_0$.
3. Claramente as uniões de elementos de Z_0 são uniões finitas de retângulos as quais estão em Z_0. Com isso, concluímos que Z_0 é uma álgebra.

□

[7] Salientamos aqui que se $A \in \mathscr{F}_X$ e $B \in \mathscr{F}_Y$, chamaremos o conjunto $C = A \times B$ de retângulo mensurável em $Z = X \times Y$.

Observação 3.31. Não é muito complicado verificar que todo elemento de Z_0 pode ser escrito como uma união disjunta de elementos de $\mathscr{F}_X \times \mathscr{F}_Y$, já que $\mathscr{F}_X$ e $\mathscr{F}_Y$ são σ–álgebras de X e Y respectivamente.

Teorema 3.32. *Considere $\pi_0 : Z_0 \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ dada por*

$$\pi_0\left(\bigcup_{i=1}^{n}(A_i \times B_i)\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)\nu(B_i).$$

Nesse caso, $\pi_0 : Z_0 \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ é uma pré-medida. Como já observado anteriormente, aqui reforçamos que $0 \pm \infty = 0$.

Demonstração.

1. Como Z_0 é uma álgebra, então $\emptyset \in Z_0$. Desta forma temos que $\pi_0(\emptyset) = \pi_0(\emptyset \times \emptyset) = \mu(\emptyset)\nu(\emptyset) = 0$.

2. Seja $\{A_i \times B_i\}_{i=1}^{\infty} \subset Z_0$ uma coleção de retângulos mensuráveis dois a dois disjuntos, tal que a união de todos estes retângulos também é um retângulo mensurável, isto é,

$$A \times B := \cup_{i=1}^{\infty}(A_i \times B_i) \in Z_0.$$

Como já observado, os elementos de cada sequência são dois a dois disjuntos, então isso nos diz que $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ e $B_i \cap B_j \neq \emptyset$, para todo $i \neq j$, com $i, j \in \mathbb{N}$. Desta forma, podemos escrever a seguinte equação:

$$\chi_{A\times B}(x, y) = \chi_A(x)\chi_B(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n}(x)\chi_{B_n}(y),$$

para todo $x \in X$ e para todo $y \in Y$. Agora fixando x e integrando em relação a y e aplicando o Teorema 2.61, teremos que[8]

$$\begin{aligned}\chi_A(x)\nu(B) = \int_Y \chi_A(x)\chi_B(y)d\nu(y) \\ = \int_Y \left(\sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n}(x)\chi_{B_n}(y)\right) d\nu(y) \\ = \sum_{n=1}^{\infty} \int_Y \left(\chi_{A_n}(x)\chi_{B_n}(y)\right) d\nu(y) \\ = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n}(x)\nu(B_n).\end{aligned} \quad (3.23)$$

Agora, integrando a Equação (3.23) em x e aplicando o Teorema 2.61 ficaremos com

[8]Abaixo abusamos da notação de integral com relação a uma medida para deixar claro qual variável a função está sendo integrada.

$$\mu(A)\nu(B)=\int_X \chi_A(x)\nu(B)d\mu(x)=\int_X \sum_{n=1}^{\infty}\chi_{A_n}(x)\nu(B_n)d\mu(x)$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\int_X \chi_{A_n}(x)\nu(B_n)d\mu(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)\nu(B_n).$$

Disso e da definição da π_0 obtemos que

$$\pi_0\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n\times B_n)\right)=\pi_0(A\times B)=\mu(A)\nu(B)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)\nu(B_n)$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\pi_0(A_n\times B_n).$$

Assim, de (1) e (2), concluímos que $\pi_0 : Z_0 \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ é uma pré-medida.

□

Definição 3.33. Seja Z_0 o conjunto definido em (3.22). Denotamos por $\mathscr{F}(Z_0)\subset\mathscr{P}(X\times Y)$ a σ-álgebra gerada por Z_0. Chamamos os elementos de $\mathscr{F}(Z_0)$ de conjuntos mensuráveis de $X\times Y$[9].

Observação 3.34. No Teorema 3.32 construímos uma pré-medida π_0 sobre a álgebra Z_0. No entanto, o Teorema 3.29 nos garante que existe uma medida $\pi:\mathscr{F}(Z_0)\longrightarrow\overline{\mathbb{R}}_+$ que é a extensão da pré-medida π_0 à σ-álgebra $\mathscr{F}(Z_0)$.

Definição 3.35.
1. Seja $A\subset X\times Y$. Denotamos a seção-x de A por A_x e a seção-y de A por A^y, as quais são definidas por:

$$A_x=\Big\{y\in Y:(x,y)\in A\Big\}\ \text{ e }\ A^y=\Big\{x\in X:(x,y)\in A\Big\}.$$

2. Seja $f:X\times Y\longrightarrow\overline{\mathbb{R}}$ uma função qualquer. Definimos a seção-x da f, denotada por $f_x:Y\longrightarrow\overline{\mathbb{R}}$, por

$$f_x(y)=f(x,y),\ \text{para todo } y\in Y.$$

Analogamente, definimos a seção-y de f, denotada por $f^y:X\longrightarrow\overline{\mathbb{R}}$, por

$$f^y(x)=f(x,y),\ \text{para todo } x\in X.$$

Apresentamos a seguir um lema técnico, cuja demonstração é omitida, uma vez que ela não traz nenhuma ideia importante para o bom andamento do texto. Veja em [2, Lema 10.6].

Lema 3.36. *Considere a σ–álgebra $\mathscr{F}(Z_0)$ como na Definição 3.33.*

[9]Quando a falta da indicação do conjunto $X\times Y$ não causar confusão, chamaremos os elementos de $\mathscr{F}(Z_0)$ apenas de mensuráveis.

1. *Se $E \in \mathscr{F}(Z_0)$ então E_x é mensurável para todo $x \in X$ e E^y é mensurável para todo $y \in Y$.*

2. *Se $f : X \times Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ é mensurável, então f_x e f^y são mensuráveis para todo $x \in X$ e $y \in Y$.*

Agora introduziremos o conceito de classe monótona, que será uma ferramenta muito útil nos resultados que demonstraremos mais à frente.

Definição 3.37. Seja Ω um conjunto qualquer e $\mathscr{M} \subset \mathscr{P}(\Omega)$: Diremos que $\mathscr{M}$ é uma classe monótona se satisfizer:

1. $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{M}$, sempre que $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{M}$ é uma sequência de conjuntos tal que $A_n \subset A_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

2. $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{M}$, sempre que $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{M}$ é uma sequência de conjuntos tal que $A_n \supset A_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Diretamente da definição temos:

Proposição 3.38. *Seja Ω um conjunto qualquer e considere $\mathscr{C} \subset \mathscr{P}(\Omega)$. Então a intersecção de todas as classes monótonas que contém $\mathscr{C}$ é a menor classe monótona que contém $\mathscr{C}$. Chamamos esta classe monótona de classe monótona gerada por $\mathscr{C}$ e a denotamos por $\mathscr{M}(\mathscr{C})$.*

Observação 3.39. Segue da definição 3.38 que toda σ–álgebra é uma classe monótona. Por isso, se considerarmos $\mathscr{C} \subset \mathscr{P}(\Omega)$, então a σ–álgebra gerada por $\mathscr{C}$ $(\sigma(\mathscr{C}))$ é uma classe monótona que contém $\mathscr{C}$. Agora da Proposição 3.38, $\mathscr{M}(\mathscr{C})$ é menor classe monótona que contém $\mathscr{C}$. Deste modo concluímos que $\mathscr{M}(\mathscr{C}) \subset \sigma(\mathscr{C})$.

Lema 3.40. *Se $\mathscr{A}$ é uma álgebra em Ω, então a σ–álgebra gerada por $\mathscr{A}$ e a classe monótona gerada por $\mathscr{A}$ coincidem.*

Demonstração. Da Observação 3.39 já sabemos que $\mathscr{M}(\mathscr{A}) \subset \sigma(\mathscr{A})$, agora nos resta mostrar que $\sigma(\mathscr{A}) \subset \mathscr{M}(\mathscr{A})$. Neste caso é suficiente mostrar que $\mathscr{M}(\mathscr{A})$ é uma σ–álgebra, uma vez que $\sigma(\mathscr{A})$ é a menor σ–álgebra que contém $\mathscr{A}$.

Para isto, considere $E \in \mathscr{M}(\mathscr{A})$ e defina

$$M_E = \Big\{ F \in \mathscr{M}(A) : E \setminus F, E \cap F, F \setminus E \in \mathscr{M}(A) \Big\}.$$

Claramente M_E não é vazio, pois $\emptyset$ e E pertencem a M_E. A partir de agora o nosso intuito será verificar que M_E é uma classe monótona. Por isso, considere $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M_E$, com $E_n \subset E_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, e defina $F := \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Agora note que

$$E \setminus F = E \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = E \cap \left[\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right]^c = E \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n^c \right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(E \cap E_n^c \right) \in \mathscr{M}(\mathscr{A}).$$

Com isso, concluímos que $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in M_E$. Perceba também que se tivéssemos $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M_E$, com $E_{n+1} \subset E_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, e $F := \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$, então $F := \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \in M_E$. De fato, note que

$$E \setminus F = E \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = E \cap \left[\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \right]^c = E \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^c \right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(E \cap E_n^c \right) \in \mathscr{M}(\mathscr{A}).$$

As demonstração de que $F \cap E \in \mathscr{M}(\mathscr{A})$ e $F \setminus E \in \mathscr{M}(\mathscr{A})$ seguem o mesmo raciocínio. Desta forma concluímos que M_E é uma classe monótona.

Note que se $E \in \mathscr{A}$, então $\mathscr{A} \subset M_E \subset \mathscr{M}(\mathscr{A})$. Mas como $\mathscr{M}(\mathscr{A})$ é a menor classe monótona que contém $\mathscr{A}$, então concluímos que $M_E = \mathscr{M}(\mathscr{A})$ para todo E na álgebra $\mathscr{A}$.

Por outro lado, é fácil perceber que $F \in M_E$ se, e somente se, $E \in M_F$. Assim, se $E \in \mathscr{A}$ e $F \in \mathscr{M}(\mathscr{A})$, então $F \in M_E$, o que implica que $E \in M_F$ para todo $E \in \mathscr{A}$, logo $\mathscr{A} \subset M_F$.

Mas como $\mathscr{M}(\mathscr{A})$ é a menor classe monótona que contém $\mathscr{A}$, então concluímos que $M_F = \mathscr{M}(\mathscr{A})$ para todo F na classe monótona $\mathscr{M}(\mathscr{A})$. Portanto se $E, F \in \mathscr{M}(\mathscr{A})$, então $F/E \in M(\mathscr{A})$, $F \cap E \in M(\mathscr{A})$, $E/F \in M(\mathscr{A})$. Portanto $\mathscr{M}(\mathscr{A})$ é fechado por complementação. O que caracteriza que $\mathscr{M}(\mathscr{A})$ é uma σ–álgebra que contém $\mathscr{A}$, logo $\sigma(\mathscr{A}) \subset \mathscr{M}(\mathscr{A})$. Desta forma concluímos que $\sigma(\mathscr{A}) = \mathscr{M}(\mathscr{A})$. Segue a demonstração. $\square$

Antes de prosseguir, introduzimos um novo conceito sobre um espaço de medida.

Definição 3.41. Considere $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ de espaço de medida. Dizemos que μ é σ–finita quando existe uma coleção $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{F}$ de modo que $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, com $\mu(A_n) < +\infty$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Observação 3.42. O espaço de medida $(\mathbb{R}, \mathscr{L}, \ell)$, definido na Subseção 2.1.1, é tal que a medida de Lebesgue ℓ é σ–finita. De fato, basta observar que $\{(-n,n)\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ são tais que

$$\cup_{n=1}^{\infty}(-n,n) = \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \ell(-n,n) = 2n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Baseados no conceito definido acima, somos capazes de demonstrar o seguinte resultado:

Lema 3.43. *Considere $(X, \mathscr{F}_X, \mu)$ e $(Y, \mathscr{F}_Y, \nu)$ espaços de medidas σ–finitas. Se $E \in \mathscr{F}(Z_0)$, então as funções $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $g : Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ definidas respectivamente por*

$$f(x) = \nu(E_x) \quad e \quad g(y) = \mu(E^y),$$

são mensuráveis. E ainda temos que

$$\int_X f d\mu = \pi(E) = \int_Y g d\nu,$$

com π sendo a representação da extensão da pré-medida definida no Teorema 3.32 e na Observação 3.34.

Demonstração. Note que as funções $f(x)$ e $g(y)$ estão bem definidas graças ao Lema 3.36.

Nesse momento inicial, vamos supor que μ e ν são medidas finitas. Assim sendo, defina o conjunto M como

$$M = \left\{ E \in \mathscr{F}(Z_0) : \int_X f d\mu = \pi(E) = \int_Y g d\nu \right\}.$$

Como, para $E = A \times B \in \mathscr{F}_X \times \mathscr{F}_Y$, temos que

$$E_x = \begin{cases} B, & \text{se } x \in A, \\ \emptyset, & \text{se } x \notin A, \end{cases} \quad \text{e} \quad E^y = \begin{cases} A, & \text{se } y \in B, \\ \emptyset, & \text{se } y \notin B, \end{cases}$$

então deduzimos que

$$f(x) = \nu(E_x) = \chi_A(x)\nu(B) \ \text{ e } \ g(y) = \mu(E^y) = \chi_B(y)\mu(A).$$

Agora integrando f sobre X em relação a medida μ, teremos

$$\int_X f d\mu = \int_X \chi_A(x)\nu(B) d\mu(x) = \mu(A)\nu(B) = \pi(E). \tag{3.24}$$

Analogamente integrando g sobre Y em relação a medida ν, obtemos que

$$\int_Y g d\nu = \int_Y \chi_B(y)\mu(B) d\mu(y) = \mu(A)\nu(B) = \pi(E). \tag{3.25}$$

Logo, as Equações (3.24) e (3.25) nos garantem que

$$\int_X f d\mu = \pi(E) = \int_Y g d\nu.$$

Por outro lado, como cada elemento de Z_0 se configura como uniões finitas e disjuntas de retângulo mensuráveis, então podemos concluir pela aditividade da integral que $Z_0 \subset M$.

Mostraremos agora que M é uma classe monótona. Para isso considere $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M$, com $E_n \subset E_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, e defina $E := \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Checaremos que $E \in M$. De fato, se definirmos as funções mensuráveis

$$f_n(x) = \nu\Big((E_n)_x\Big) \ \text{ e } \ g_n(y) = \nu\Big((E_n)^y\Big),$$

como $E_n \in M$ para cada $n \in \mathbb{N}$, então

$$\int_X f_n d\mu = \pi(E_n) = \int_Y g_n d\nu. \tag{3.26}$$

Também é fácil perceber que $E_x = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(E_n\right)_x$, pois isso segue diretamente da definição de seções. Agora perceba que o Teorema 2.26 nos garante que

$$\lim f_n(x) = \lim \nu\Big((E_n)_x\Big) = \nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(E_n)_x\right) = \nu(E_x) = f(x)$$

e

$$\lim g_n(x) = \lim \mu\Big((E_n)^y\Big) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(E_n)^y\right) = \mu(E^y) = f(x).$$

Por outro lado, como $E_n \subset E_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)$ e $g_n(y) \leqslant g_{n+1}(y)$, para todo $x \in X$ e $y \in Y$. Isso também segue diretamente da definição de seção. Logo, obtemos que f_n e g_n convergem pontualmente e, além disso, essas sequências são crescentes. Portanto, pelo Teorema 2.61 e da equação (3.26), obtemos que

$$\int_X f d\mu = \lim \int_X f_n d\mu = \lim \pi(E_n) = \pi(E) = \lim \pi(E_n) = \lim \int_Y g_n d\nu = \int_Y g d\nu.$$

Com isso, temos que $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in M$. Como as medidas são finitas, então a demonstração que $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \in M$, com $E_{n+1} \subset E_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, segue o mesmo raciocínio. Assim, M é uma classe monótona. Como $Z_0 \subset M$, então do Lema 3.40 temos que $\mathscr{F}(Z_0) = \mathscr{M}(\mathscr{Z}_I) \subset M$. Desta forma concluímos que $\mathscr{F}(Z_0) = M$.

Suponha agora que μ e ν são medidas σ–finitas. Então existe uma sequência $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$, de modo que $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$, com $\mu(X_n) < \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$, o mesmo acontece com $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset Y$, de modo que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n \times Y_n = X \times Y$$

Agora considere $E \in \mathscr{F}(Z_0) \subset \mathscr{P}(X \times Y)$, então

$$\int_X f\chi_{X_n} d\mu = \pi\big(E \cap (X_n \times Y_n)\big) = \int_Y g\chi_{Y_n} d\nu,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Fazendo $n \longrightarrow \infty$, então disto e do Teorema 2.61, temos que

$$\begin{aligned}\int_X f d\mu = \lim \int_X f\chi_{X_n} d\mu = \lim \pi(E \cap (X_n \times Y_n)) = \pi(E)& \\ = \lim \int_Y g\chi_{Y_n} d\nu = \int_Y g d\mu,&\end{aligned}$$

para todo $E \in \mathscr{F}(Z_0)$. Assim segue a demonstração.

□

Encerramos este capítulo apresentando os principais resultados sobre integração com relação à medida produto, os quais serão usados recursivamente no Capítulo 5.

Teorema 3.44 (Tonelli)**.** *Sejam $(X,\mathscr{F}_X,\mu)$ e $(Y,\mathscr{F}_Y,\nu)$ espaços de medidas com μ e ν medidas σ-finitas. Considere $F: X\times Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ uma função mensurável. Defina $f: X\longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ e $g: Y\longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ respectivamente por:*

$$f(x)=\int_Y F(x,y)\,d\nu(y) \quad e \quad g(y)=\int_X F(x,y)\,d\mu(x).$$

Então, f e g são mensuráveis e

$$\int_X f(x)\,d\mu(x)=\int_{X\times Y} F\,d\pi=\int_Y g(y)\,d\nu(y).$$

Em outras palavras, vale que

$$\int_X\left(\int_Y F(x,y)\,d\nu\right)d\mu=\int_{X\times Y}F\,d\pi=\int_Y\left(\int_X F(x,y)\,d\mu\right)d\nu.$$

Demonstração. 1. Mostraremos primeiro que o resultado vale para as funções simples não-negativas. Para isso é suficiente mostrar que o resultado vale para a função característica $\chi_E: X\times Y\longrightarrow\mathbb{R}$, com $E\subset\mathscr{F}(Z_0)$, já que como a integral é linear, então o resultado se estende para as funções simples. Para demonstrar esse fato considere $E\in\mathscr{F}(Z_0)$ e $F=\chi_E$, sendo π como na observação 3.39, do Lema 3.43 temos:

$$\begin{aligned}\int_{X\times Y}Fd\pi=\int_{X\times Y}\chi_E d\pi=\pi(E)=\int_X\nu(E_x)d\mu\\
=\int_X\left[\int_Y\chi_{E_x}(y)d\nu\right]d\mu=\int_X\left[\int_Y\chi_E(x,y)d\nu\right]d\mu\\
=\int_X\left[\int_Y F(x,y)d\nu\right]d\mu,\end{aligned}$$

e analogamente

$$\begin{aligned}\int_{X\times Y}Fd\pi=\int_{X\times Y}\chi_E d\pi=\pi(E)=\int_Y\mu(E^y)d\nu\\
=\int_Y\left[\int_X\chi_{E^y}(x)d\mu\right]d\nu=\int_Y\left[\int_X\chi_E(x,y)d\mu\right]d\nu\\
=\int_Y\left[\int_X F(x,y)d\mu\right]d\nu,\end{aligned}$$

o que resumidamente nos dá

$$\int_X\left[\int_Y F(x,y)d\nu\right]d\mu=\int_{X\times Y}Fd\pi=\int_Y\left[\int_X F(x,y)d\mu\right]d\nu.$$

Assim o resultado vale para as funções característica e logo se estende para as funções simples não-negativas.

2. Agora mostraremos para caso geral. Como F é uma função não-negativa, então pelo Teorema 2.20 existe uma sequência $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ monótona crescente, de modo que $\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x,y) = F(x,y)$. Considere agora

$$g_n = \int_Y (\varphi_n)_x d\nu \;\text{ e }\; h_n = \int_X (\varphi_n)^y d\mu.$$

Como φ_n é uma sequência monótona crescente, então $(\varphi_n)_x$ e $(\varphi_n)^y$ são crescentes. Por outro lado, como temos que $\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x,y) = F(x,y)$, então por conta direta temos que $\lim_{n\to\infty}(\varphi_n)_x = F_x$ e $\lim_{n\to\infty}(\varphi_n)^y = F^y$. Disso e do Teorema 2.61, segue que

$$\begin{aligned}\lim g_n(x) = \lim \int_Y (\varphi_n)_x d\nu = \int_Y \lim(\varphi_n)_x d\nu \\ = \int_Y F_x d\nu = \int_Y F(x,y) d\nu =: g(x).\end{aligned}$$

Analogamente, temos que

$$\begin{aligned}\lim h_n(y) = \lim \int_X (\varphi_n)^y d\mu = \int_X \lim(\varphi_n)^y d\mu \\ = \int_X F^y d\mu = \int_X F(x,y) =: h(y).\end{aligned}$$

Mais uma vez aplicando Teorema 2.61 em g_n junto com a primeira parte, obtemos que

$$\begin{aligned}\int_X \left[\int_Y F(x,y)d\nu\right] d\mu = \int_X g d\mu = \int_X \lim g_n d\mu = \lim \int_X g_n d\mu \\ = \lim \int_X \int_Y \varphi_n(x,y) d\nu d\mu = \lim \int_{X\times Y} \varphi_n d\pi = \int_{X\times Y} F d\pi.\end{aligned}$$

Analogamente, temos que

$$\begin{aligned}\int_Y \left[\int_X F(x,y)d\mu\right] d\nu = \int_Y g d\nu = \int_Y \lim g_n d\nu = \lim \int_Y g_n d\nu \\ \lim \int_Y \int_X \varphi_n(x,y) d\mu d\nu = \lim \int_{X\times Y} \varphi_n d\pi = \int_{X\times Y} F d\pi.\end{aligned}$$

Dessa forma, concluímos que

$$\int_X \left[\int_Y F(x,y)d\nu\right] d\mu = \int_{X\times Y} F d\pi = \int_Y \left[\int_X F(x,y)d\mu\right] d\nu.$$

□

Devido a Fubinni, o objetivo do próximo resultado é generalizar o teorema de Tonelli.

Teorema 3.45 (Fubinni)**.** *Sejam* $(X,\mathscr{F}_X,\mu)$ *e* $(Y,\mathscr{F}_Y,\nu)$ *espaços de medidas com* μ *e* ν *medidas* σ*-finitas. Considere* $F: X\times Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ *uma função integrável em relação a medida* π*. Defina* $f: X\longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ *e* $g: Y\longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ *respectivamente por* [10]

$$f(x)=\int_Y F(x,y)\,d\nu(y) \quad e \quad g(y)=\int_X F(x,y)\,d\mu(x).$$

Então, f e g são integráveis e

$$\int_X f(x)\,d\mu(x)=\int_{X\times Y} F\,d\pi=\int_Y g(y)\,d\nu(y).$$

Ou ainda

$$\int_X \left[\int_Y F(x,y)\,d\nu(y)\right] d\mu(x)=\int_{X\times Y} F\,d\pi$$
$$=\int_Y \left[\int_X F(x,y)\,d\nu(x)\right] d\mu(y).$$

Demonstração. Como $F: X\times Y\longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ é integrável, então F^+ e F^- são integráveis em relação a medida π. Como toda função integrável é mensurável então pelo Teorema 3.44 teremos

$$\int_X \left(\int_Y F^+(x,y)\,d\nu(y)\right) d\mu(x)=\int_{X\times Y} F^+\,d\pi$$
$$=\int_Y \left(\int_X F^+(x,y)\,d\nu(x)\right) d\mu(y), \quad (3.27)$$

e ainda

$$\int_X \left(\int_Y F^-(x,y)\,d\nu(y)\right) d\mu(x)=\int_{X\times Y} F^-\,d\pi$$
$$=\int_Y \left(\int_X F^-(x,y)\,d\nu(x)\right) d\mu(y). \quad (3.28)$$

Daí quando fazemos a subtração das integrais (3.27) - (3.28), juntamente com a Definição 2.62, conseguimos obter que

$$\int_{X\times Y} F^+\,d\pi-\int_{X\times Y} F^-\,d\pi=\int_{X\times Y} F\,d\pi.$$

Com isso, o Teorema 3.44 nos garante que

$$\int_X \left[\int_Y F(x,y)d\nu(y)\right] d\mu(x)=\int_{X\times Y} F\,d\pi$$

[10]Como já observado anteriormente, abaixo abusamos da notação de integral com relação a uma medida para deixar claro qual variável a função está sendo integrada.

$$= \int_Y \left[\int_X F(x,y)d\nu(x) \right] d\mu(y)$$

□

O próximo corolário decorre diretamente da Observação 3.42 e do Teorema 3.45.

Corolário 3.46. *Considere o espaço de medida $(\mathbb{R}, \mathscr{L}, \ell)$, definido na Subseção 2.1.1. Desta forma, se $F : [t_0, t_1] \times [t_0', t_1'] \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função integrável segundo a medida produto oriunda do produto catesiano de medidas de Lebesgue, ao definirmos $f : [t_0, t_1] \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : [t_0', t_1'] \longrightarrow \mathbb{R}$, respectivamente por*

$$f(x) = \int_{t_0'}^{t_1'} F(x,y)\, d\ell(y) \quad e \quad g(y) = \int_{t_0}^{t_1} F(x,y)\, d\ell(x),$$

concluímos que f e g são integráveis e ainda que

$$\int_{[t_0,t_1]\times[t_0',t_1']} F\, d\pi = \int_{t_0}^{t_1} \left[\int_{t_0'}^{t_1'} F(x,y)\, d\ell(y) \right] d\ell(x)$$
$$= \int_{t_0'}^{t_1'} \left[\int_{t_0}^{t_1} F(x,y)\, d\ell(x) \right] d\ell(y).$$

Uma última consequência do Teorema 3.45, que é muito relevante para nossos cálculos no Capítulo 5, é a seguinte.

Corolário 3.47. *Assumindo as mesmas hipóteses do Corolário 3.46, se $f : [t_0, t_1] \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g, h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ são funções Lebesgue integráveis, então*

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[\int_{t_0}^{r} g(r-s)h(r)f(s)\, ds \right] dr = \int_{t_0}^{t_1} \left[\int_{s}^{t_1} g(r-s)h(r)\, dr \right] f(s)\, ds.$$

Demonstração. Como consequência do Teorema 3.45, obtemos que

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[\int_{t_0}^{r} g(r-s)h(r)f(s)ds \right] dr$$
$$= \int_{t_0}^{t_1} \left[\int_{t_0}^{t_1} \chi_{[t_0,r]}(s)g(r-s)h(r)f(s)ds \right] dr$$
$$= \int_{t_0}^{t_1} \left[\int_{t_0}^{t_1} \chi_{[t_0,r]}(s)g(r-s)h(r)dr \right] f(s)ds$$
$$= \int_{t_0}^{t_1} \left[\int_{s}^{t_1} g(r-s)h(r)dr \right] f(s)ds.$$

□

Neste momento, apresentamos um clássico teorema de integrabilidade que une as ideias dos Teoremas 3.6 e 3.45. Enfatizamos que não iremos demonstrar este resultado, uma vez que necessitaríamos introduzir algumas noções e resultados que nos distanciaria ainda mais do nosso objetivo final. Para os detalhes veja [11, Teorema 6.19].

Teorema 3.48 (Desigualdade de Minkovisk para integrais)**.** *Sejam* $(X,\mathscr{F}_X,\mu)$ *e* $(Y,\mathscr{F}_Y,\nu)$ *espaços de medidas com* μ *e* ν *medidas* σ*-finitas. Se* $F : X\times Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ *é uma função mensurável, então vale a seguinte desigualdade:*

$$\left[\int_X\left(\int_Y F(x,y)\,d\nu(y)\right)^p d\mu(x)\right]^{\frac{1}{p}} \leq \int_Y\left[\int_X F(x,y)^p\,d\mu(x)\right]^{\frac{1}{p}} d\nu(y).$$

Encerramos o capítulo apresentando uma consequência do Teorema 3.48 que será fundamental para a teoria que será construída no capítulo 5.

Corolário 3.49. *Sejam* $f : [t_0,t_1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *e* $g : \mathbb{R} \longrightarrow [0,\infty)$ *funções Lebesgue integráveis. Se* $1 \leq p < \infty$ *e* $0 \leq h < t_1 - t_0$*, então vale que*

$$\left[\int_0^{t_1-t_0-h}\left(\int_0^r g(s)|f(r+t_0-s)|\,ds\right)^p dr\right]^{\frac{1}{p}} \leqslant \int_0^{t_1-t_0-h} g(s)\left[\int_s^{t_1-t_0-h}|f(r+t_0-s)|^p\,dr\right]^{\frac{1}{p}} ds.$$

Demonstração. Se considerarmos a função característica $\chi_{[0,r]} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, junto com o Teorema 3.48, obtemos

$$\begin{aligned}
&\left[\int_0^{t_1-t_0-h}\left(\int_0^r g(s)|f(r+t_0-s)|\,ds\right)^p dr\right]^{\frac{1}{p}} \\
&\quad= \left[\int_0^{t_1-t_0-h}\left(\int_0^{t_1-t_0-h} g(s)\chi_{[0,r]}(s)|f(r+t_0-s)|\,ds\right)^p dr\right]^{\frac{1}{p}} \\
&\quad\leqslant \int_0^{t_1-t_0-h} g(s)\left[\int_0^{t_1-t_0-h}\left|\chi_{[0,r]}(s)f(r+t_0-s)\right|^p dr\right]^{\frac{1}{p}} ds \\
&\quad= \int_0^{t_1-t_0-h} g(s)\left[\int_s^{t_1-t_0-h}|f(r+t_0-s)|^p\,dr\right]^{\frac{1}{p}} ds.
\end{aligned}$$

$\square$

4 A TEORIA DE SEMIGRUPOS

Neste capítulo, introduziremos uma pequena parte da teoria clássica de semigrupos. A exposição aqui apresentada destina-se a fornecer a base para estudo realizado no Capítulo 5, portanto, não vamos nos aprofundar neste tópico. Desta maneira, assumimos que os conceitos de derivação e integração de uma função $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{V}$, com I sendo um intervalo da reta e $\mathbb{V}$ é um espaço vetorial (sobre $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), são conhecidos, entre outros detalhes ao longo do texto. A teoria pode ser encontrada em [1], [3], [4], [10], [22].

Iniciamos nosso estudo relembrando algumas definições e resultados da Análise Funcional. Para os detalhes dos resultados citados abaixo, sugerimos a clássica bibliografia [5].

Definição 4.1. Sejam $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ espaços normados e considere $A : X \longrightarrow Y$ um operador linear. Diremos que $A : X \longrightarrow Y$ é um operador linear limitado[1] se existir uma constante $C \geq 0$, tal que

$$\|Ax\|_Y \leq C \cdot \|x\|_X, \ \ \forall x \in X,$$

e definimos

$$L(X, Y) := \{A : X \longrightarrow Y \ : \ A \textit{ é um operador linear e limitado}\}.$$

Quando $X = Y$, denotamos $L(X, Y)$ apenas por $L(X)$. Em $L(X, Y)$ podemos considerar a norma

$$\|A\|_{L(X,Y)} := \sup_{\|x\|_X = 1} \|Ax\|_Y = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Ax\|_Y = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X}, \ \ \forall x \in X.$$

Esta norma também é conhecida como *norma do operador.* Assim, $(L(X, Y), \|\cdot\|_{L(X,Y)})$ é uma espaço métrico completo. E por fim, se $A, B \in L(X)$ então

$$\|AB\|_{L(X)} \leq \|A\|_{L(X)} \|B\|_{L(X)}.$$

Teorema 4.2. *Se $A \subset L(X)$ e $\|A\|_{L(X)} < 1$, então $(I - A)^{-1}$ existe e define um operador limitado em X, onde $I : X \longrightarrow X$ denota o operador identidade, isto é, $I(u) = u$, para todo $u \in X$.*

Observe que na Definição 4.1 X e Y são espaços normados, no que segue, X é um espaço de Banach.

A partir de agora o nosso objetivo é dar a definição de semigrupos, e logo em seguida a definição de gerador infinitesimal, a qual vamos introduzir logo mais. Mas antes disso, apresentaremos um exemplo que nos dará condições suficiente para entender bem essas definições.

[1] Quando não causar confusão, diremos apenas que o operador é limitado.

Exemplo 4.3. Considere a equação diferencial ordinária em $\mathbb{R}$, dada por

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{4.1}$$

com $a \in \mathbb{R}$ uma constante fixa. O sistema de equações (4.1) também é conhecido como problema de Cauchy ou problema do valor inicial (P.V.I).

Para tal problema sabe-se que existe uma única solução, ver [13]. dada por $x(t) = x_0 \cdot T(t)$, com $T(t) := e^{at}$, $\forall t \in \mathbb{R}$. A partir de agora a ideia é estudar propriedades de $T(t)$.

1. Não é dificil de notar que $T(0) = e^{a0} = 1$.
2. Também vale a propriedade de concatenação, isto é,

$$T(t+s) = e^{a(t+s)} = e^{at}e^{as} = T(t)T(s).$$

   para todo $t, s \in \mathbb{R}$.
3. E temos que a derivada de $T(t)$, será:

$$\frac{d}{dt}T(t) = ae^{at} = aT(t).$$

   para todo $t \in \mathbb{R}$.

O exemplo acima tem como objetivo esclarecer todos os elementos apresentados na seguinte definição.

Definição 4.4. Um semigrupo é uma família de operadores

$$\{T(t) : t \geq 0\} \subset L(X),$$

que satisfaz:

1. $T(0) = I$, com I sendo o operador identidade de X.
2. $T(t+s) = T(t)T(s)$, $\forall t, s \geq 0$.

Mais ainda, diremos que:

3. O semigrupo é fortemente contínuo, ou um C_0–semigrupo quando para cada $x \in X$,

$$\lim_{t \to 0^+} \| T(t)x - x \|_X = 0.$$

4. O semigrupo é uniformemente contínuo quando

$$\lim_{t \to 0^+} \| T(t) - I_X \|_{L(X)} = 0.$$

Observação 4.5. Quando o semigrupo for uma família definida para todo $t \in \mathbb{R}$ que ainda satisfaz 1 e 2, diremos que $\{T(t) : t \in \mathbb{R}\}$ é um *grupo de operadores lineares em* X. Embora tenhamos apresentado a noção de grupo, este não será objeto de nosso estudo. Daremos ênfase apenas aos semigrupos.

Observação 4.6. Além da função exponencial real, vista no Exemplo 4.3, o estudo dos semigrupos de operadores lineares está associado também ao problema de Cauchy da forma

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{4.2}$$

com $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ sendo um operador linear (em geral ilimitado). Daí, foi demonstrado em [10] que se A é um gerador infinitesimal[2] de semigrupo $\{T(t) : t \in \mathbb{R}\} \subset L(X)$, então para cada $x_0 \in D(A)$, temos que a aplicação $t \longmapsto T(t)x_0$ é solução de (4.2).

O próximo exemplo terá como objetivo levar o leitor a se familiarizar com conceito abstrato que está por detrás da Observação 4.6. Mas primeiro é fundamental entender o seguinte lema:

Lema 4.7 (Princípio da contração de Banach)**.** *Seja X um espaço métrico completo com a métrica $d_X : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ e uma função $F : X \longrightarrow X$ tal que $d_X(F^n(x), F^n(y)) \leq kd_X(x,y)$ para algum $\mathbb{N} \ni n \geq 1$ e para $0 \leq k < 1$. Então, existe um único $\overline{x} \in X$ tal que $F(\overline{x}) = \overline{x}$. O ponto $\overline{x}$ é chamado de ponto fixo de F.*

Demonstração. Veja os detalhes em [16, Proposição 23]. □

Exemplo 4.8. Sejam $A \in L(X)$ e $x_0 \in X$. Considere o seguinte problema de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t), \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{4.3}$$

Vamos mostrar que existe uma única solução de (4.3) e que esta solução define, de alguma forma, um semigrupo de operadores lineares.

1. Considere o conjunto não vazio

   $$K = \left\{ u \in C\big([0,\tau]; X\big) : u(0) = x_0 \right\}.$$

   Note que K com métrica induzida pela norma de $C([0,\tau]; X)$ é um espaço métrico completo. Agora, defina $F : K \longrightarrow K$ dada por

   $$F(u)(t) = x_0 + \int_0^t Au(s)\, ds.$$

   Pelo teorema fundamental do cálculo em espaços de Banach, temos que $x(t; x_0)$ *é solução de* (4.3) *se, e somente se,* $x(t; x_0)$ *é ponto fixo de F em K*. Assim nos resta mostrar que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que F^n é uma contração e aplicar o Lema 4.7.

[2] Essa definição será dada mais a frente.

2. Sejam U, $V \in K$ e $t \in [0,\tau]$, veja que:

$$\begin{aligned}\|F(U)(t) - F(V)(t)\|_X &\leq \int_0^t \|AU(s) - AV(s)\|_X ds \\ &\leqslant t\|A\|_{L(X)} \sup_{s\in[0,\tau]} \|U(s) - V(s)\|_X \\ &\leqslant \tau\|A\|_{L(X)} \sup_{s\in[0,\tau]} \|U(s) - V(s)\|_X\end{aligned}$$

De maneira recursiva se verifica que

$$\|F^n(U)(s) - F^n(V)(s)\|_X \leqslant \frac{\tau^n \|A\|^n_{L(X)}}{n!} \sup_{s\in[0,\tau]} \|U(s) - V(s)\|_X.$$

Perceba que $\frac{\tau^n \|A\|^n_{L(X)}}{n!} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, pois o fatorial cresce mais rápido que a exponencial. Logo, para algum $n_0 \in \mathbb{N}$, F^{n_0} é contração como queríamos.

Em outras palavras, existe uma única função $x(t;x_0)$ em K que satisfaz

$$x(t;x_0) = x_0 + \int_0^t Ax(s;x_0)\, ds,$$

para todo $t \in [0,\tau]$.

Pelo teorema fundamental do cálculo, $x(t;x_0)$ é continuamente diferenciável e satisfaz (4.3) em $[0,\tau]$. Mais ainda, como $\tau > 0$ foi fixado arbitrariamente, podemos concluir que existe uma única solução de (4.3) em $[0,\infty)$, a qual ainda denotaremos por $x(t;x_0)$.

3. Agora defina, para cada $x_0 \in X$, a família de operadores $\{T(t) : t \geq 0\} \subset L(X)$ por

$$T(t)x_0 := x(t;x_0), \tag{4.4}$$

para $t \geq 0$. Como $A \in L(X)$, podemos copiar a teoria de matrizes exponenciais ao problema de Cauchy (4.3), o que nos permite deduzir que $x(t;x_0) = e^{At}x_0$, com

$$e^{At} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(At)^n}{n!}.$$

Desta forma concluímos por (4.4) que $T(t) = e^{At}$.

4. Vamos verificar que $\{T(t) : t \geq 0\}$ satisfaz as propridades de semigrupo.

   a) Primeiramente note que $\{T(t) : t \geq 0\} \subset L(X)$, já que:

$$\|e^{At}\|_{L(X)} \leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\|A\|_{L(X)}t)^n}{n!} = e^{\|A\|_{L(X)}t} < \infty.$$

b) $T(0) = I$, trivialmente.

c) Fixe $s \geq 0$ e note que:

$$U(t) \ := \ T(t+s)x_0 \ = \ e^{A(t+s)}x_0 \quad \text{e} \quad V(t) \ := \ T(t)T(s)x_0 \ = \ e^{At}e^{As}x_0,$$

são soluções da equação diferencial (4.3) e que $U(0) = V(0) = e^{As}x_0$. Assim pela unicidade de soluções, $T(t+s) = T(t)T(s)$ para todo $t \geq 0$. Como $s \geq 0$ foi fixado arbitrariamente, temos que $T(t+s) = T(t)T(s)$ para todo $t, s \geq 0$.

d) Este semigrupo é uniformemente contínuo. De fato, observe inicialmente que

$$e^{At} - I = \int_0^t \frac{d}{ds} e^{As}\, ds = \int_0^t Ae^{As}\, ds = A \int_0^t e^{As}\, ds.$$

Disto temos que

$$\begin{aligned} \|T(t) - I\|_{L(X)} = \|e^{At} - I\|_{L(X)} \leq \|A\|_{L(X)} \int_0^t \|e^{As}\|_{L(X)}\, ds \\ \leq \|A\|_{L(X)} \int_0^t e^{\|A\|_{L(X)} s}\, ds = e^{\|A\|_{L(X)} t} - 1, \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\lim_{t \to 0^+} \|T(t) - I\|_{L(X)} = 0,$$

como queríamos.

Para seguir com as definições inerentes da teoria, apresentamos o seguinte conceito.

Definição 4.9. Se $\{T(t) : t \geq 0\} \subset L(X)$ é um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares, seu *gerador infinitesimal* é o operador linear $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$, com

$$D(A) = \left\{ x \in X : \lim_{t \to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \ \textit{existe} \right\}$$

e

$$Ax := \lim_{t \to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t}, \quad \forall x \in D(A).$$

Observação 4.10. Retornando brevemente ao Exemplo 4.8, note que para qualquer $x \in X$ temos que

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} = Ax,$$

ou seja, o gerador infinitesimal de e^{At} é A e $D(A) = X$.

Agora vamos apresentar um exemplo de um semigrupo com gerador infinitesimal $A \notin L(X)$.

Exemplo 4.11. Para cada $t \geq 0$, considere a função

$$T(t) : BC([0,\infty);\mathbb{R}) \to F([0,\infty);\mathbb{R}),$$

dada por:

$$T(t)f := f_t, \quad \forall t \geq 0,$$

com $BC([0,\infty);\mathbb{R})$ sendo o espaço das funções contínuas e limitadas de $[0,\infty)$ em $\mathbb{R}$, e $F([0,\infty);\mathbb{R})$ o espaço das funções de $[0,\infty)$ em $\mathbb{R}$. salientamos que $BC([0,\infty);\mathbb{R})$ com a norma do supremo, é Banach. Usamos o símbolo f_t para representar a função $f_t : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$f_t(w) = f(t+w), \quad \forall w \geq 0.$$

Não é difícil de verificar que $f_t \in BC([0,\infty);\mathbb{R})$ para qualquer $t \geq 0$. Mais ainda, se considerarmos $f, g \in BC([0,\infty);\mathbb{R})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, então

$$T(t)(f+\lambda g) = (f+\lambda g)_t = f_t + (\lambda g)_t = f_t + \lambda g_t = T(t)f + \lambda T(t)g.$$

Desta forma concluímos que $\{T(t) : t \geq 0\} \in L(BC([0,\infty);\mathbb{R}))$.

1. Daqui podemos continuar a estudar esta família de operadores lineares e verificar que ela define um semigrupo de operadores lineares. De fato, basta observar que:

   a) Vale que $T(0)f = f_0 = f$, para qualquer $f \in BC([0,\infty);\mathbb{R})$. Em outras palavras, $T(0) = I$ em $L(BC([0,\infty);\mathbb{R}))$.

   b) Dados $t, s \geq 0$ temos que

   $$T(t+s)f = f_{t+s} = T(t)f_s = T(t)T(s)f,$$

   para qualquer $f \in BC([0,\infty);\mathbb{R})$. Em outras palavras, fica válido que $T(t+s) = T(t)T(s)$, para todo $t, s \geq 0$.

2. Agora vamos nos aprofundar um pouco mais neste estudo e verificar que $\{T(t) : t \geq 0\}$ é um C_0-semigrupo. De fato, como

   $$\|T(t)f - f\|_{BC([0,\infty);\mathbb{R}))} = \|f_t - f\|_{BC([0,\infty);\mathbb{R}))},$$

   graças à continuidade da norma, temos que

   $$\begin{aligned}\lim_{t\to 0^+} \|T(t)f - f\|_{BC([0,\infty);\mathbb{R})} &= \Big\|\lim_{t\to 0^+} (f_t - f)\Big\|_{BC([0,\infty);\mathbb{R})} \\ &= \sup_{w\in[0,\infty)} \left|\lim_{t\to 0^+} [f(t+w) - f(w)]\right| = 0.\end{aligned}$$

3. Calculemos o gerador infinitesimal de $\{T(t) : t \geq 0\}$. Para isto assumimos que A denota o gerador infinitesimal do semigrupo e que $D(A) \subset BC([0,\infty);\mathbb{R})$ denota seu domínio.

a) Primeiramente, vamos verificar que $BC^1([0,\infty);\mathbb{R}) \subset D(A)$, com $BC^1([0,\infty);\mathbb{R})$ sendo o espaço das funções continuamente diferenciáveis de $[0,\infty)$ em $\mathbb{R}$ tais que f e f' estão em $BC([0,\infty);\mathbb{R})$.

   Basta observar que se $f \in BC^1([0,\infty);\mathbb{R})$, então novamente graças a continuidade da norma

$$\lim_{t\to 0^+} \left\| \frac{T(t)f-f}{t} - f' \right\|_{BC([0,\infty);\mathbb{R})} = \sup_{w\geq 0} \left| \lim_{t\to 0^+} \frac{f(t+w)-f(w)}{t} - f'(w) \right| = 0,$$

   ou seja, $f \in D(A)$, como queríamos. Mais ainda, as contas acima nos garante também que $Af = f'$ para qualquer função $f \in BC^1([0,\infty);\mathbb{R})$.

b) Agora, verificaremos que vale a inclusão $D(A) \subset BC^1([0,\infty);\mathbb{R})$. Seja então $f \in D(A)$. Por definição, existe $g \in BC([0,\infty);\mathbb{R})$ tal que

$$\lim_{t\to 0^+} \left\| \frac{T(t)f-f}{t} - g \right\|_{BC([0,\infty);\mathbb{R})} = 0.$$

   Porém, note que para cada $w \in [0,\infty)$ temos que

$$\lim_{t\to 0^+} \left| \frac{f(t+w)-f(w)}{t} - g(w) \right| \leq \lim_{t\to 0^+} \left\| \frac{T(t)f-f}{t} - g \right\|_{BC([0,\infty);\mathbb{R})} = 0,$$

   ou seja, f é diferenciável em $[0,\infty)$ com $f' = g$. Em outras palavras, $f \in BC^1([0,\infty);\mathbb{R})$, como queríamos.

c) Segue diretamente dos itens anteriores que $A = d/dw$ é o gerador infinitesimal do semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$.

Resumidamente, o gerador infinitesimal do semigrupos, de translações sobre o espaço de Banach $BC([0,\infty);\mathbb{R})$ é a derivada.

4. O operador diferencial $A = d/dw$ de $BC^1([0,\infty);\mathbb{R})$ em $BC([0,\infty);\mathbb{R})$ não é limitado. Para verificar isto, tome a sequência de funções $\phi_i : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ dadas por

$$\phi_n(t) = e^{-nt}$$

Como $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset BC^1([0,\infty);\mathbb{R})$ e $\|\phi_n\|_{BC([0,\infty);\mathbb{R})} = 1$, vemos que

$$\|A\|_{L(BC([0,\infty);\mathbb{R}))} \geq \|A\phi_n\|_{BC([0,\infty);\mathbb{R})} = \|\phi_n'\|_{BC([0,\infty);\mathbb{R})} = n,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja, $\|A\|_{L(BC([0,\infty);\mathbb{R}))} = +\infty$.

A seguir, enunciaremos um teorema importante da Análise Funcional, que usamos para dar continuidade à teoria dos semigrupos. Este teorema é conhecido como *Princípio da Limitação Uniforme.*

Teorema 4.12. *Sejam X um espaço de Banach e Y um espaço normado. Considere $\{T_\alpha\}_{\alpha\in A}$ uma família de operadores lineares limitados $T_\alpha : X \longrightarrow Y$, $\forall \alpha \in A$. Se para cada $x \in X$ existe um $K_x > 0$, tal que,*

$$\| T_\alpha(x)\|_Y \leq K_x, \ \forall \alpha \in A,$$

então a família de valores reais $\{\| T_\alpha\|\}_{\alpha\in A}$ também é limitada, isto é, existe um $K > 0$ de modo que

$$\| T_\alpha\|_{L(X,Y)} \leq K, \ \forall \alpha \in A.$$

Demonstração. Veja [5, Teorema 2.2]. □

Agora apresentamos uma caracterização muito interessante dos C_0-semigrupos.

Teorema 4.13. *Suponha que $T = \{T(t) : t \geq 0\} \subset L(X)$ seja um C_0-semigrupo. Então, existem $M \geq 1$ e $\beta \in \mathbb{R}$ tais que*

$$\| T(t)\|_{L(X)} \leq Me^{\beta t}, \quad \forall t \geq 0.$$

Demonstração. Observe que existe $\alpha > 0$ tal que

$$K := \sup_{s\in[0,\alpha]} \| T(s)\|_{L(x)} < +\infty,$$

já que caso contrário, existiria $\{s_n\}_{n=1}^{\infty} \subset [0,\alpha]$ tal que $s_n \longrightarrow 0^+$ e $\| T(s_n)\|_{L(x)} > n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Assim, pelo o Teorema 4.12 deveria existir $x \in X$ tal que $T(s_n)x \longrightarrow \infty$, quando $n \longrightarrow \infty$. Mas isso contraria o fato de $T(t)$ ser um semigrupo. Observe agora que

$$\beta := \max\left\{\frac{1}{\alpha}\ln \| T(\alpha)\|_{L(x)}, 1\right\} \Longrightarrow \| T(\alpha)\|_{L(x)} \leq e^{\alpha\beta}.$$

Como, para todo $t \geq 0$, existem $n \in \mathbb{N}$ e $s \in [0,\alpha)$ tal que $t = n\alpha + s$, deduzimos que

$$\begin{aligned}\| T(t)\|_{L(x)} &= \| T(n\alpha + s)\|_{L(x)} = \| T(\alpha)^n T(s)\|_{L(x)} \\ &\leq \| T(\alpha)\|^n_{L(X)} \| T(s)\|_{L(x)} \leq Ke^{n\alpha\beta} = Ke^{-\beta s}e^{\beta(n\alpha+s)} \leq Ke^{\beta t}.\end{aligned}$$

Assim o resultado fica demonstrado. □

Os dois próximos resultados serão de grande relevância para o Capítulo 5, servindo de ferramenta importante na relação que vamos construir entre a teoria de semigrupos e a integral fracionária de Riemann-Liouville.

Iniciamos com o resultado que caracteriza completamente os semigrupos uniformemente contínuos.

Teorema 4.14. *Considere $T = \{T(t) : t \geq 0\} \subset L(X)$ um C_0-semigrupo. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *O semigrupo é uniformemente contínuo;*

2. *O gerador infinitesimal do semigrupo está definido em todo X;*

3. *Para algum $A \in L(X)$, temos que $T(t) = e^{At}$, para todo $t \geq 0$.*

Demonstração. ($1 \Longrightarrow 3$) Como o semigrupo é unifomemente contínuo, então existe $\delta > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$\|T(s) - I_X\|_{L(X)} < \frac{1}{2}, \ \forall s \in [0,\delta].$$

Mostraremos que a aplicação $\mathbb{R}_+ \ni t \mapsto T(t) \in L(X)$ é contínua. Para isso fixe $t > 0$ e seja $h \in [0,+\infty)$ de modo que $0 < t-h < \delta$. Assim, das propriedades de semigrupos juntamente com o Teorema 4.13, obtemos que

$$\begin{aligned}\|T(t+h) - T(t)\|_{L(X)} &= \|T(t)T(h) - T(t)\|_{L(X)} \\ &= \|T(t)\Big(T(h) - I_X\Big)\|_{L(X)} \leq \|T(t)\|_{L(X)}\|T(h) - I_X\|_{L(X)} \\ &\leq M \cdot e^{\beta t}\, \|T(h) - I_X\|_{L(X)} \xrightarrow{h \to 0^+} 0,\end{aligned}$$

para algum $\beta \in \mathbb{R}$, pelo Teorema 4.13.

Por outro lado, se $t-h < \delta$ então teremos que

$$\begin{aligned}\|T(t) - T(t-h)\|_{L(X)} &= \|(T(h) - I_X)T(t-h)\|_{L(X)} \\ &= \|(T(h) - I_X)(T(t-h) - I_X + I_X)\|_{L(X)} \\ &\leq \|(T(h) - I_X)\|_{L(X)}\|T(t-h) - I_X + I_X\|_{L(X)} \\ &\leq \|(T(h) - I_X)\|_{L(X)}\Big(\|T(t-h) - I_X\|_{L(X)} + \|I_X\|_{L(X)}\Big) \\ &\leq \frac{3}{2}\|(T(h) - I_X)\|_{L(X)} \xrightarrow{h \to 0^+} 0.\end{aligned}$$

Com isso, concluímos que para $t > 0$

$$\lim_{h \to 0} \|T(t+h) - T(t)\|_{L(X)} = 0.$$

Desse modo $T(t)$ é contínua $\forall t \geq 0$, logo $T(t)$ é integrável em $[0,\delta]$. Agora, vamos encontrar o candidato a gerador infinitesimal. Note que:

$$\begin{aligned}\left\| I_X - \frac{1}{\delta}\int_0^\delta T(s)\, ds \right\|_{L(X)} &= \left\| \frac{1}{\delta}\int_0^\delta (I_X - T(s))\, ds \right\|_{L(X)} \\ &= \frac{1}{\delta}\left\| \int_0^\delta (I_X - T(s))\, ds \right\|_{L(X)} \leq \frac{1}{\delta}\int_0^\delta \|(I_X - T(s))\|_{L(X)}\, ds \leq \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Como δ é suficientemente pequeno, então ainda vale a seguinte desigualdade:

$$\left\| \int_0^\delta (I_X - T(s))\, ds \right\|_{L(X)} \leq \int_0^\delta \|(I_X - T(s))\|_{L(X)}\, ds \leq \frac{\delta}{2} \leq \frac{1}{2}.$$

Logo, do Teorema 4.2, temos

$$\left(I_X-\left(I_X-\int_0^\delta T(s)\,ds\right)\right)^{-1}=\left(\int_0^\delta T(s)\,ds\right)^{-1},$$

existe e é limitada. Defina o operador linear

$$A=(T(\delta)-I_X)\left(\int_0^\delta T(s)\,ds\right)^{-1}\in L(X).$$

Mostremos que A é o gerador infinitesimal de $\{T(t):t\geq 0\}$. Para isso escolha $0<h<\delta$ e note que

$$(T(h)-I_X)\left(\int_0^\delta T(s)\,ds\right)=\int_0^\delta \Big(T(h+s)-T(s)\Big)\,ds$$

$$=\int_h^{h+\delta}T(s)\,ds-\int_0^\delta T(s)\,ds=\int_\delta^{h+\delta}T(s)\,ds-\int_0^h T(s)\,ds$$

$$=\int_0^h T(s+\delta)\,ds-\int_0^h T(s)\,ds=T(\delta)\int_0^h T(s)\,ds-\int_0^h T(s)\,ds,$$

com isso ficamos com

$$\left(\frac{T(h)-I_X}{h}\right)\int_0^\delta T(s)\,ds=\Big(T(\delta)-I_X\Big)\left[\frac{\int_0^h T(s)\,ds}{h}\right].$$

Por fim, Como $T(s)$ é contínuo então pelo teorema de L'Hospital obtemos que

$$\lim_{h\to 0^+}\left(\frac{T(h)-I_X}{h}\right)\int_0^\delta T(s)\,ds=\Big(T(\delta)-I_X\Big)\lim_{h\to 0^+}\left[\frac{\int_0^h T(s)\,ds}{h}\right]=T(\delta)-I_X.$$

Assim, na norma dos operadores, temos que

$$\lim_{h\to 0^+}\left(\frac{T(h)-I_X}{h}\right)=(T(\delta)-I_X)\left(\int_0^\delta T(s)\,ds\right)^{-1}=A,$$

ou seja, A é o gerador infinitesimal de $\{T(t):t\geq 0\}$. Assim

$$\frac{d}{dt}T(t)=\lim_{h\to 0^+}\frac{T(t+h)-T(t)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{T(t)T(h)-T(t)}{h}$$

$$=T(t)\lim_{h\to 0^+}\frac{T(h)-I_X}{h}=T(t)A.$$

De maneira análoga temos que $\dfrac{d}{dt}T(t)=T(t)\cdot A$. Logo $T(t)=e^{At}$.

(2 $\Longrightarrow$ 1). Como o gerador infinitesimal de $\{T(t):t\geq 0\}$ está definido em todo X, então

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{T(t)x-x}{t},\text{ existe para todo } x\in X.$$

Se isso acontece, então o conjunto

$$\left\{\frac{T(t)x-x}{t}\right\}_{0\leq t\leq\delta}\quad \text{é limitado } \forall x\in X,$$

para algum $\delta > 0$. Logo pelo Teorema 4.12

$$\left\{ \left\| \frac{T(t) - I_X}{t} \right\|_{L(X)} : t \in [0, \delta] \right\} \text{ é limitado.}$$

Assim para $t \in [0, \delta]$, existe $K > 0$ tal que

$$\left\| \frac{T(t) - I_X}{t} \right\|_{L(X)} \leq K \Longleftrightarrow \| T(t) - I_X \|_{L(X)} \leq K \cdot t.$$

Logo pelo Teorema do Confronto temos que

$$\lim_{t \to 0^+} \| T(t) - I_X \|_{L(X)} \leq \lim_{t \to 0^+} K \cdot t \longrightarrow 0,$$

ou seja, $\{T(t) : t \geq 0\}$ é uniformente contínuo.

(3 $\Longrightarrow$ 2). Se $T(t) = e^{At}$, com $A \in L(X)$, então como feito no Exemplo 4.8, já sabemos que $\{T(t) : t \geq 0\}$ é uniformemente contínuo, isto é, que (3 $\Longrightarrow$ 1). Porém, segue da primeira parte desta demostração que neste caso

$$A = (T(\delta) - I_X) \left(\int_0^\delta T(s)\, ds \right)^{-1} \in L(X),$$

é o gerador infinitesimal de $\{T(t) : t \geq 0\}$. Mais claramente A está definido em todo X. Portanto fica demonstrado o que queríamos. □

Terminamos esta seção apresentado certas caracterizações cruciais dos semigrupos fortemente contínuos.

Teorema 4.15. *Seja $\{T(t) : t \geq 0\} \subset L(X)$ um C_0-semigrupo, e considere A o gerador infinitesimal de $T(t)$,*

1. *Para qualquer $x \in X$, a aplicação $t \mapsto T(t)x$ é contínua*

2. *Para cada $x \in X$ e $t \geqslant 0$, temos que*

$$\lim_{h \to 0^+} \left[\frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x ds \right] = T(t)x,$$

   na topologia de X.

3. *Se considerarmos $x \in X$ e $0 < s < t < \infty$, então temos que*

$$\int_s^t T(s)x\, ds \in D(A) \quad e \quad A\left(\int_s^t T(s)x\, ds \right) = T(t)x - T(s)x.$$

4. *Seja A o gerador infinitesimal de T, então para $x \in D(A)$, a aplicação $\mathbb{R}_+ \ni t \mapsto T(t)x \in D(A)$ é continuamente diferenciável e*

$$\frac{d}{dt} T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax, \text{ para todo } t > 0.$$

Demonstração. 1. Sejam $x \in X$ e $0 < h < t$. Agora observe que como consequência do Teorema 4.13, obtemos

$$\begin{aligned}\|T(t+h)x - T(t)x\|_X &= \|T(t)T(h)x - T(t)x\|_X \\ &= \|T(t)(T(h)x - x)\|_X \leqslant \|T(t)\|_{L(X)}\|T(h)x - x)\|_X \\ &\leq M \cdot e^{\beta t}\|(T(t)x - x)\|_X \overset{h \to 0^+}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

Por outro lado, também como consequência do Teorema 4.13, podemos obter

$$\begin{aligned}\|T(t)x - T(t-h)x\|_X &= \|T(t-h)(T(h)x - x)\|_X \\ &\leqslant \|T(t-h)\|_{L(X)}\|(T(h)x - x)\|_X \\ &\leqslant M \cdot e^{\beta(t-h)}\|(T(h)x - x)\|_X \overset{h \to 0^+}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

Portanto, $t \mapsto T(t)x$ é contínua para todo $x \in X$.

2. Veja inicialmente que se $x \in X$, então

$$\frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)x\,ds = \frac{1}{h}\int_0^h T(t+s)x\,ds$$

como $T(t)x = \dfrac{1}{h}\displaystyle\int_0^h T(t)x\,ds$, temos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)x\,ds - T(t)x &= \frac{1}{h}\int_0^h \left[T(t+s)x - T(t)x\right] ds \\ &= \frac{1}{h}\int_0^h T(t)\left[T(s)x - x\right] ds.\end{aligned}$$

Como a função $[0,\infty) \ni s \mapsto T(t)\left[T(s)x - x\right]$ é contínua, então aplicando o Teorema de L'Hospital e lembrando que temos um C_0–semigrupo, obtemos que

$$\begin{aligned}&\lim_{h \to 0^+}\left[\frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)x\,ds - T(t)x\right] \\ &= \lim_{h \to 0^+} T(t)\left[T(h)x - x\right] = T(t)\underbrace{\left[\lim_{h \to 0^+}\left(T(h)x - x\right)\right]}_{=0} = 0,\end{aligned}$$

como queríamos.

3. Se considerarmos $x \in X$ e $0 < s < t < \infty$, agregado com o item (2), obtemos

$$\lim_{h \to 0^+}\frac{1}{h}\left\{\left[T(h) - I\right]\int_s^t T(\tau)x\,d\tau\right\}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\left\{ \int_s^t T(h)T(\tau)x d\tau - \int_s^t T(\tau)x d\tau \right\}$$
$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\left\{ \int_s^t T(h+\tau)x d\tau - \int_s^t T(\tau)x d\tau \right\}$$
$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\left\{ \int_{s+h}^{t+h} T(\tau)x d\tau - \int_s^t T(\tau)x d\tau \right\}$$
$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\left\{ \int_t^{t+h} T(\tau)x d\tau - \int_s^{s+h} T(\tau)x d\tau \right\}$$
$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\left[\int_t^{t+h} T(\tau)x d\tau \right] - \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\left[\int_s^{s+h} T(\tau)x d\tau \right]$$
$$= T(t)x - T(s)x.$$

Em resumo, obtemos que

$$A\int_s^t T(\tau)x d\tau = T(t)x - T(s)x.$$

4. Considere $t>0$ fixado. Então para todo $h>0$ temos que

$$\frac{d^+}{dt}T(t)x = \lim_{h\to 0^+} \frac{T(t+h)x - T(t)x}{h} = \lim_{h\to 0^+} \left[\frac{T(h)-I}{h}\right] T(t)x$$
$$= AT(t)x.$$

Analogamente, verifica-se que $\frac{d^+}{dt} = T(t)Ax$

Por outro lado, para $0<h<t$ temos

$$\frac{d^-}{dt}T(t)x = \lim_{h\to 0^-} \frac{T(t-h)-T(t)}{-h}x$$
$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{T(t-h)-T(t-h+h)}{-h}x$$
$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{T(t-h)-T(t-h)T(h)}{-h}x$$
$$= \lim_{h\to 0^-} \left[T(t-h)\left(\frac{T(h)-I}{h}x\right)\right]$$
$$= \lim_{h\to 0^-} \left[T(t-h)\left(\frac{T(h)-I}{h}x - Ax + Ax\right)\right]$$
$$= \lim_{h\to 0^-} \left[T(t-h)\left(\frac{T(h)-I}{h}x - Ax\right) + T(t-h)Ax\right]$$
$$= \lim_{h\to 0^-} \left[T(t-h)\left(\frac{T(h)-I}{h}x - Ax\right)\right] + \lim_{h\to 0^-} T(t-h)Ax,$$

como $x \in D(A)$ então o primeiro termo desta última igualdade tende a 0 quando $h \longrightarrow 0^{-}$. Além disso, como consequência do item (1), obtemos que $\lim_{h\to 0^{-}} T(t-h)Ax = T(t)Ax$. Desta maneira concluímos que

$$\frac{d^{+}}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax = \frac{d^{-}}{dt}T(t)x.$$

Assim segue a demonstração.

$\square$

5 O GERADOR INFINITESIMAL DA INTEGRAL FRACIONÁRIA

Nas últimas décadas, o estudo de operadores de ordens não inteiras ganhou grande relevância e diversas definições de integrais e derivadas de ordens arbitrárias foram propostas, dentre as quais podemos destacar a definição de Riemann-Liouville de integrais e derivadas fracionárias; veja por exemplo [15], [23].

As integrais e derivadas de ordem não inteira possuem uma gama de aplicações nas mais diversas áreas do conhecimento, como física, química, biomatemática, engenharia, economia, entre outros; veja por exemplo [18], [23].

A integral de ordem arbitrária, em outros aspectos, é fundamental para a formalização da definição de derivada fracionária, que é um dos assuntos mais importantes do Cálculo Fracionário. A partir de agora, começaremos a estudar a integral fracionária de Riemann-Liouville. Inicialmente, damos sua definição e, em seguida, daremos o domínio e o contradomínio dessa integral, que também define um operador linear limitado. Assim, usando tudo o que estudamos até agora, verificaremos que a integral de Riemann-Liouville define um semigrupo fortemente contínuo. Por fim, apresentaremos o objeto central desta dissertação que é o gerador infinitesimal da integral fracionária.

Usaremos frequentemente neste capítulo o símbolo $\cdot$ para representar uma multiplicação. Também ressaltamos que o conceito integral aqui utilizado é o conceito de integração em relação à medida de Lesbegue. Além disso os resultados apresentados neste capítulo foram baseados em [9], esse artigo foi fundamental para obtermos os principais resultados desta dissertação.

Iniciaremos nossos estudos com a seguinte discussão:

Considere $F : L^1(t_0,t_1) \longrightarrow \mathscr{F}\big([t_0,t_1],\mathbb{R}\big)$, definido por

$$\big(F(f)\big)(t) = \int_{t_0}^{t} f(s)ds, \text{ para todo } t \in [t_0,t_1].$$

com $\mathscr{F}([t_0,t_1],\mathbb{R})$[1] denotando o conjunto de todas as funções de $[t_0,t_1]$ em $\mathbb{R}$. Nosso intuito é verificar que F está bem definido e é uma transformação linear com um contradomínio adequado.

1. Como $f(s) \in L^1(t_0,t_1)$, então conseguimos fazer a seguinte majoração:

$$\left|\big(F(f)\big)(t)\right| = \left|\int_{t_0}^{t} f(s)ds\right| \leq \int_{t_0}^{t_1} |f(s)|ds < \infty.$$

   Desta forma $\big(F(f)\big)(t)$ está bem definida para todo $t \in [t_0,t_1]$.

2. Veja que $F(f) \in C\big([t_0,t_1]\big)$. Para isso considere $\{\tau_n\}_{n=1}^{\infty} \subset [t_0,t_1]$ uma sequência e $\tau \in [t_0,t_1]$, de modo que $\tau_n \longrightarrow \tau$.

[1] Aqui estamos uma notação diferente daquela usada no Exemplo 4.11, para que não haja risco de confusão com a função F.

Note que

$$\big(F(f)\big)(\tau_n) = \int_{t_0}^{\tau_n} f(s)\,ds = \int_{t_0}^{t_1} \chi_{[t_0,\tau_n]}(s) f(s)\,ds,$$

e que

$$\left|\chi_{[t_0,\tau_n]}(s) f(s)\right| \leq \left|f(s)\right| \quad e \quad \left|f(s)\right| \in L^1(t_0,t_1),$$

ou seja, a função $\left|\chi_{[t_0,\tau_n]}(s) f(s)\right|$ é dominada por uma função integrável.

Mostraremos agora que $\chi_{[t_0,\tau_n]}(s) \longrightarrow \chi_{[t_0,\tau]}(s)$ q.t.p em $[t_0,t_1]$.

(i) Suponha que $s<\tau$. Como $\tau_n \to \tau$, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $s<\tau_n$, sempre que $n>N_1$. Isto nos leva ao fato

$$\lim_{n\to\infty} \chi_{[t_0,\tau_n]}(s) = 1 = \chi_{[t_0,\tau]}(s).$$

(ii) Agora se $\tau<s$, então existe $N_2 \in \mathbb{N}$ de modo que $\tau_n<s$, sempre que $n>N_2$. O que configura que

$$\lim_{n\to\infty} \chi_{[t_0,\tau_n]}(s) = 0 = \chi_{[t_0,\tau]}(s).$$

Embora isso não acontece para $s=\tau$, não temos um problema pois $\mu(\{\tau\})=0$. Com isso, concluímos que

$$\chi_{[t_0,\tau_n]}(s) \longrightarrow \chi_{[t_0,\tau]}(s) \text{ } q.t.p \text{ } em \text{ } [t_0,t_1],$$

e como consequência disto, temos que

$$\chi_{[t_0,\tau_n]}(s) f(x) \longrightarrow \chi_{[t_0,\tau]}(s) f(x) \text{ } q.t.p \text{ } em \text{ } [t_0,t_1].$$

Assim, pelo Teorema 2.67, obtemos

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \big(F(f)\big)(\tau_n) &= \lim_{n\to+\infty} \int_{t_0}^{\tau_n} f(s)ds \\ &= \lim_{n\to+\infty} \int_{t_0}^{t_1} \chi_{[t_0,\tau_n]}(s) f(x) ds = \int_{t_0}^{t_1} \lim_{n\to+\infty} \chi_{[t_0,\tau_n]}(s) f(x) ds \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \chi_{[t_0,\tau]}(s) f(x)\,ds = \int_{t_0}^{\tau} f(s) ds = \big(F(f)\big)(\tau).\end{aligned}$$

Como τ, τ_n foram escolhidos arbitrariamente, então segue que

$$\lim_{t\to t_0} \big(F(f)\big)(t) = \big(F(f)\big)(t_0),$$

ou seja, $F(f) \in C([t_0,t_1])$

3. Por fim verificaremos que $F: L^1(t_0,t_1) \longrightarrow C([t_0,t_1])$ é uma transformação linear. Mas isso segue da linearidade da integral.

Com base nessas discussões acima, nossa intenção agora é fornecer uma motivação para a integral fracionária de Riemann-Liouville, para isso calculamos a seguinte integral:

$$\big(F^2(f)\big)(t) = \int_{t_0}^{t} \left[\int_{t_0}^{\tau} f(s)\, ds\right] d\tau. \tag{5.1}$$

Mas para calcularmos (5.1) usamos o Corolário 3.47. Ou seja,

$$\begin{aligned}\big(F^2(f)\big)(t) = \big(F\big(F(f)\big)\big)(t) &= \int_{t_0}^{t} \left[\int_{t_0}^{\tau} f(s) ds\right] d\tau \\ &= \int_{t_0}^{t} \left[\int_{s}^{t} f(s) d\tau\right] ds = \int_{t_0}^{t} (t-s) f(s) ds.\end{aligned}$$

O que desejamos agora é calcular $\big(F^n(f)\big)(t)$. Portanto repetiremos o que foi feito acima n vezes. Isto é

$$\begin{aligned}\big(F^3(f)\big)(t) = \big(F\big(F^2(f)\big)\big)(t) &= \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{\tau} (\tau-s) f(s) ds\, d\tau \\ &= \int_{t_0}^{t}\int_{s}^{t} (\tau-s) f(s) d\tau\, ds = \int_{t_0}^{t} \frac{(t-s)^2}{2} f(s) ds,\end{aligned}$$

e ainda

$$\begin{aligned}\big(F^4(f)\big)(t) = \big(F\big(F^3(f)\big)\big)(t) &= \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{\tau} \frac{(\tau-s)^2}{2} f(s) ds\, d\tau \\ &= \int_{t_0}^{t}\int_{s}^{t} \frac{(\tau-s)^2}{2} f(s) d\tau\, ds = \int_{t_0}^{t} \frac{(t-s)^3}{2\cdot 3} f(s) ds.\end{aligned}$$

Perceba que está se construindo um padrão em cada integração feita. Desta forma podemos concluir indutivamente que $\big(F^n(f)\big)(t)$ é dado por

$$\big(F^n(f)\big)(t) = \frac{1}{(n-1)!}\int_{t_0}^{t} (t-s)^{n-1} f(s) ds, \tag{5.2}$$

que com auxílio da função Gama a equação (5.2) pode ser escrita como

$$\big(F^n(f)\big)(t) = \frac{1}{\Gamma(n)}\int_{t_0}^{t} (t-s)^{n-1} f(s) ds.$$

Toda a discussão acima é apenas um prelúdio para introduzirmos a definição da integrais fracionárias de Riemann-Liouville, já que este é um caso particular da integral. Apresentaremos a seguir a definição mais importante desta dissertação.

Definição 5.1. Considere $\alpha > 0$. A integral fracionária de Riemann-Liouville[2] de ordem α da função f será

$$J^{\alpha}_{t_0,t} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_0}^{t} (t-s)^{\alpha-1} f(s)\, ds,$$

para todo $t \in [t_0, t_1]$ e sempre que a integral acima existir.

[2]Quando não houver risco de confusão abreviaremos apenas por integral fracionária de ordem α.

Observação 5.2. Vale ressaltar que essa integral pode ser definida para todo $\alpha \in \mathbb{C}$, desde que $\Re(\alpha) > 0$, ou seja, quando a parte real de α é maior que 0. Mas para nossos propósitos iremos tratar apenas do caso $\alpha > 0$.

Exemplo 5.3. Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(s) = s^\beta$, onde $\beta > -1$. Queremos calcular a integral fracionária de ordem α da função f no intervalo $[0, t]$. Da definição, temos.

$$J^\alpha_{0,t} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} s^\beta \, ds. \tag{5.3}$$

Agora, chamando $s = wt$, então $ds = t\,dw$. Assim, podemos reescrever a equação (5.3), como

$$J^\alpha_{0,t} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (t-wt)^{\alpha-1} (wt)^\beta \, t dw = \frac{t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-w)^{\alpha-1} w^\beta \, dw$$

$$= \frac{t^{\alpha+\beta}\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+\beta+1)} = \frac{t^{\alpha+\beta}\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}.$$

O próximo resultado nos da uma caracterização de quando a integral fracionaria de uma função existe.

Lema 5.4. *Seja $t \in (t_0, t_1)$. Então $J^\alpha_{t_0,t} f(t)$ existe se, e somente se, $J^\alpha_{t_0,t} |f(t)|$ existe.*

Demonstração. Basta relembrar da caracterização dada na Definição 2.62 e notar que se $J^\alpha_{t_0,t} f(t)$ existe se, e somente se, $J^\alpha_{t_0,t} f^+(t)$ e $J^\alpha_{t_0,t} f^-(t)$ são finitas. Porém, $J^\alpha_{t_0,t} |f(t)|$ existe se, e somente se, $J^\alpha_{t_0,t} f^+(t)$ e $J^\alpha_{t_0,t} f^-(t)$ também são finitas. Disto decorre o lema. $\square$

Observe que para existir a integral fracionária, depende principalmente da f em questão, mas como não temos muitas informações sobre f, é difícil saber quando a integral fracionária existirá. No entanto, a partir de agora, nosso objetivo será determinar quando esta integral sempre existirá.

Teorema 5.5. *$J^\alpha_{t_0,t} f(t)$ existe q.t.p em $[t_0, t_1]$ se, e somente se, $f \in L^1(t_0, b)$, para todo $b \in (t_0, t_1)$.*

Demonstração. ($\Longrightarrow$) Seja $b \in (t_0, t_1)$. Como $J^\alpha_{t_0,t} f(t)$ existe q.t.p em $[t_0, t_1]$, então existe $t^* \in (b, t_1)$ tal que a seguinte integral existe

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^{t^*} (t^* - s)^{\alpha-1} f(s) \, ds.$$

Disto segue que a aplicação $s \mapsto (t^* - s)^{\alpha-1} f(s)$ é integrável em $[t_0, t^*]$, ou ainda, que $s \mapsto (t^* - s)^{\alpha-1} f(s) \in L^1(t_0, t^*)$. Agora note que se $s \in [t_0, b]$, temos que

$$|f(s)| = \left[(t^* - s)^{\alpha-1} |f(s)|\right] (t^* - s)^{1-\alpha}$$

$$\leqslant \begin{cases} \left[(t^*-s)^{\alpha-1}|f(s)|\right](t^*-t_0)^{1-\alpha}, & \text{se } 0\leqslant\alpha<1,\\ \left[(t^*-s)^{\alpha-1}|f(s)|\right](t^*-b)^{1-\alpha}, & \text{se } \alpha>1. \end{cases}$$

Como $b<t^*$, pelo Lema 5.4 podemos concluir que

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{b}|f(s)|\,ds &\leqslant \left[(t^*-b)^{\alpha-1}+(t^*-t_0)^{1-\alpha}\right]\int_{t_0}^{b}(t^*-s)^{\alpha-1}|f(s)|\,ds\\ &\leqslant \left[(t^*-b)^{\alpha-1}+(t^*-t_0)^{1-\alpha}\right]\int_{t_0}^{t^*}(t^*-s)^{\alpha-1}|f(s)|\,ds\\ &= \Gamma(\alpha)\left[(t^*-b)^{\alpha-1}+(t^*-t_0)^{1-\alpha}\right]J^{\alpha}_{t_0,t^*}|f(t^*)|<\infty. \end{aligned}$$

Disto concluímos que $f\in L^1(t_0,b)$. Agora pela arbitrariedade de $b\in(t_0,t_1)$, segue que $f\in L^1(t_0,b)$ para todo $b\in(t_0,t_1)$.

($\Longleftarrow$) Considere $b\in(t_0,t_1)$. Como $f\in L^1(t_0,b)$, para cada $t\in(t_0,b)$ defina a aplicação $\Psi_t:[t_0,b]\longrightarrow\mathbb{R}$, por

$$\Psi_t(s)=g_\alpha(t-s)f(s),$$

com $g_\alpha:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por

$$g_\alpha(\tau)=\begin{cases} \dfrac{\tau^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & \text{se } \tau>0,\\ 0, & \text{se } 0\leq\tau. \end{cases}$$

A função $g_\alpha(t-s)$ para cada $t\in(t_0,b)$ é integrável para todo $s\in\mathbb{R}$, em particular em (t_0,b), pois

$$\int_{t_0}^{b}g_\alpha(t-s)\,ds=\int_{t_0}^{t}\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\,ds=-\frac{(t-s)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)\alpha}\bigg|_{t_0}^{t}=\frac{(t-t_0)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}<\infty.$$

Como $|f|$ é integrável, pelo Teorema 2.63 f é integrável em $[t_0,b]$, logo Ψ_t é integrável em $[t_0,b]$, pois

$$\int_{t_0}^{b}g_\alpha(t-s)f(s)ds=\int_{t_0}^{t}\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}f(s)\,ds,\quad \forall t\in(t_0,b).$$

Pela arbitrariedade do $b\in(t_0,t_1)$ podemos concluir que $J^{\alpha}_{t_0,t}f(t)$ existe q.t.p. em $[t_0,t_1]$. □

O próximo resultado nos apresenta um fato importante sobre o operador integral fracionária de ordem α sobre os espaços $L^p(t_0,t_1)$, com $p\in[1,\infty]$.

Teorema 5.6. *Se $\alpha>0$ e $p\in[1,\infty]$, temos que $J^{\alpha}_{t_0,t}:L^p(t_0,t_1)\longrightarrow L^p(t_0,t_1)$ é um operador é linear e limitado. Mais ainda, esta limitação se configura como*

$$\|J^{\alpha}_{t_0,t}f(t)\|_p\leqslant\left[\frac{(t_1-t_0)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right]\|f\|_p.$$

Demonstração. Vamos verificar que a integral fracionária define um operador limitado em $L^p(t_0,t_1)$ quando $p\in[1,\infty)$. De fato,

$$
\begin{aligned}
\Gamma(\alpha)\|J^{\alpha}_{t_0,t}f\|_p = \Gamma(\alpha)&\left[\int_{t_0}^{t_1}\left|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_0}^{t}(t-w)^{\alpha-1}f(w)\,dw\right|^p dt\right]^{\frac{1}{p}}\\
&\leq \left[\int_{t_0}^{t_1}\left(\int_{t_0}^{t}(t-w)^{\alpha-1}|f(w)|\,dw\right)^p dt\right]^{\frac{1}{p}}\\
&\overset{s=t-w}{=} \left[\int_{t_0}^{t_1}\left(\int_{0}^{t-t_0}s^{\alpha-1}|f(t-s)|\,ds\right)^p dt\right]^{\frac{1}{p}}\\
&\overset{t=r+t_0}{=} \left[\int_{0}^{t_1-t_0}\left(\int_{0}^{r}s^{\alpha-1}|f(r+t_0-s)|\,ds\right)^p dr\right]^{\frac{1}{p}}. \qquad (5.4)
\end{aligned}
$$

Agora aplicando Corolário 3.49 em (5.4) segue a desigualdade a seguir

$$
\begin{aligned}
\Gamma(\alpha)\|J^{\alpha}_{t_0,t}f\|_p &\leq \int_0^{t_1-t_0} s^{\alpha-1}\left[\int_s^{t_1-t_0}|f(r+t_0-s)|^p\,dr\right]^{\frac{1}{p}} ds\\
&\overset{r=l+s-t_0}{=} \int_0^{t_1-t_0} s^{\alpha-1}\left[\int_{t_0}^{t_1-s}|f(l)|^p\,dl\right]^{\frac{1}{p}} ds\\
&\leq \int_0^{t_1-t_0} s^{\alpha-1}\left[\int_{t_0}^{t_1}|f(l)|^p\,dl\right]^{\frac{1}{p}} ds\\
&= \left[\int_0^{t_1-t_0} s^{\alpha-1}\,ds\right]\left[\int_{t_0}^{t_1}|f(l)|^p\,dl\right]^{\frac{1}{p}} = \frac{(t_1-t_0)^{\alpha}}{\alpha}\|f\|_p.
\end{aligned}
$$

Em resumo, temos que

$$\|J^{\alpha}_{t_0,t}f\|_p \leq \left[\frac{(t_1-t_0)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right]\|f\|_p.$$

Faremos agora a demonstração para $J^{\alpha}_{t_0,t}: L^{\infty}(t_0,t_1)\longrightarrow L^{\infty}(t_0,t_1)$. De fato,

$$
\begin{aligned}
|J^{\alpha}_{t_0,t}f(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_0}^{t}(t-s)^{\alpha-1}|f(s)|ds\\
&\leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_0}^{t}(t-s)^{\alpha-1}\|f\|_{\infty}\,ds = \left(\frac{\|f\|_{\infty}}{\Gamma(\alpha)}\right)\int_{t_0}^{t}(t-s)^{\alpha-1}\,ds\\
&= \frac{(t-t_0)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\|f\|_{\infty} \leqslant \frac{(t_1-t_0)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\|f\|_{\infty}.
\end{aligned}
$$

Portanto

$$\|J^{\alpha}_{t_0,t}f\|_{\infty} \leq \frac{(t_1-t_0)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\|f\|_{\infty}.$$

Mas perceba que quando mostramos que

$$\|J^{\alpha}_{t_0,t}f(t)\|_p \leqslant \left[\frac{(t_1-t_0)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right]\|f\|_p,$$

também mostramos que $J^{\alpha}_{t_0,t}: L^p(t_0,t_1) \longrightarrow L^p(t_0,t_1)$ está bem definida.

Por fim, verificaremos se esse operador é linear. Mas, isso segue da linearidade da integral.

$\square$

Observação 5.7. Como o teorema acima nos garante a integral fracionária é um operador linear e limitado de $L^p(t_0,t_1)$ em $L^p(t_0,t_1)$, para todo $\alpha > 0$ e todo $1 \leq p < \infty$. Então estamos nas condições de verificar se a integral fracionária define um semigrupo.

A partir de agora nosso objetivo é provar que a integral fracionária é um C^0–semigrupo em L^p, ou seja, satisfaz os itens 1 e 2 da Definição 4.4 quando $T(\alpha) = J^{\alpha}_{t_0,t}$ e $X = L^p(t_0,t_1)$.

Contudo, perceba que em nosso contexto definimos a integral fracionária de ordem α para $\alpha > 0$. Diante disso teríamos um problema no item 1 da definição de semigrupos, já que deveríamos ter $J^{\alpha}_{t_0,t}f = f$, no caso de $\alpha = 0$.

É com o intuito de responder a este questionamento que apresentamos os próximos resultados, a fim de que eles nos dêem justificativas plausíveis para que $J^{0}_{t_0,t}f = f$, ou seja, que $J^{0}_{t_0,t}$ possa ser definido como o operador identidade.

Lema 5.8. *Seja* $1 \leqslant p < \infty$. *Então,*

$$\lim_{\alpha \longrightarrow 0^+} \|J^{\alpha}_{t_0,t}\phi - \phi\|_{L^p(t_0,t_1)} = 0,$$

para cada $\phi \in C^{\infty}_c\big([t_0,t_1]\big)$.

Demonstração. Do Teorema 3.25, temos que $C^{\infty}_c\big([t_0,t_1]\big)$ é denso em $L^p(t_0,t_1)$. Assim, a integral fracionária de ϕ está bem definida. Agora, fazendo uma integração por partes em $J^{\alpha}_{t_0,t}\phi$, segue que

$$J^{\alpha}_{t_0,t}\phi(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\int_{t_0}^{t}(t-s)^{\alpha}\phi'(s)ds,$$

para cada $t \in [t_0,t_1]$.

Agora considere $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de números reais positivos de modo que $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$. Assumiremos sem perda de generalidade que $r_n \in (0,1/2)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim temos que

$$J^{r_n}_{t_0,t}\phi(t) - \phi(t) \;=\; \int_{t_0}^{t}\frac{(t-s)^{r_n}}{\Gamma(r_n+1)}\phi'(s)ds - \int_{t_0}^{t}\phi'(s)ds \;=\; \int_{t_0}^{t}\left[\frac{(t-s)^{r_n}}{\Gamma(r_n+1)} - 1\right]\phi'(s)ds, \quad (5.5)$$

para todo $t \in [t_0, t_1]$. Agora, para todo $t_0 \leqslant s < t \leqslant t_1$, considere a aplicação continuamente diferenciável $\nu_{t,s} : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$\nu_{t,s}(w) = \frac{(t-s)^w}{\Gamma(w+1)}.$$

Pelo Teorema 1.8 temos que a função Gama é diferenciável e, devido à Definição 1.11, temos que $\Gamma'(w+1)/\Gamma(w+1) = \psi(w+1)$. Com isso, obtemos a seguinte igualdade:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dw}\Big[\nu_{t,s}(w)\Big] &= \frac{(t-s)^w \ln(t-s)\Gamma(w+1) - (t-s)^w \Gamma'(w+1)}{\big[\Gamma(w+1)\big]^2} \\ &= \frac{(t-s)^w \Big[\ln(t-s) - \psi(w+1)\Big]}{\Gamma(w+1)}, \end{aligned} \tag{5.6}$$

para todo $w \in [0,1]$. Também temos que

$$\frac{(t-s)^{r_n}}{\Gamma(r_n+1)} - 1 = \int_0^{r_n} \frac{d}{dw}\Big[\nu_{t,s}(w)\Big]dw = \int_0^{r_n} \frac{(t-s)^w \Big[\ln(t-s) - \psi(w+1)\Big]}{\Gamma(w+1)}dw, \tag{5.7}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Agora observe que

$$\begin{aligned}&\left|\frac{(t-s)^w \Big[\ln(t-s) - \psi(w+1)\Big]}{\Gamma(w+1)}\right| \\ &\qquad = \left|\frac{(t-s)^{w-\frac{1}{2}} \Big[(t-s)^{\frac{1}{2}} \ln(t-s) - (t-s)^{\frac{1}{2}} \psi(w+1)\Big]}{\Gamma(w+1)}\right| \\ &\qquad \leqslant (t-s)^{w-\frac{1}{2}} \underbrace{\frac{\Big[(t-s)^{\frac{1}{2}} |\ln(t-s)| + (t-s)^{\frac{1}{2}} |\psi(w+1)|\Big]}{\Gamma(w+1)}}_{M},\end{aligned}$$

para todo $w \in [0, r_n]$. Note que

$$M \leqslant \left(\frac{1 + |\psi(w+1)|}{\Gamma(w+1)}\right)\Big[(t-s)^{\frac{1}{2}} |\ln(t-s)| + (t-s)^{\frac{1}{2}}\Big],$$

e que pela continuidade das funções Gama, Digama, logarítmica e polinomial, temos que M ainda pode ser majorado por

$$M \leqslant \max_{w \in [0,1]} \left(\frac{1 + |\psi(w+1)|}{\Gamma(w+1)}\right) \max_{r \in [0, t_1 - t_0]} \Big[r^{\frac{1}{2}} |\ln(r)| + (t_1 - t_0)^{\frac{1}{2}}\Big] = M_1.$$

Em resumo obtemos que

$$\left|\frac{(t-s)^w \Big[\ln(t-s) - \psi(w+1)\Big]}{\Gamma(w+1)}\right| \leqslant M_1 (t-s)^{w-\frac{1}{2}}. \tag{5.8}$$

Agora voltando para a equação (5.7) ficamos com

$$\left|\frac{(t-s)^{r_n}}{\Gamma(r_n+1)}-1\right| \leqslant M_1 \int_0^{r_n} (t-s)^{w-\frac{1}{2}} dw. \tag{5.9}$$

Mas também observe que

$$(t-s)^{w-\frac{1}{2}} \leqslant (t-s)^{-\frac{1}{2}} + (t-s)^{r_n-\frac{1}{2}}.$$

para todo $t_0 \leqslant s < t \leqslant t_1$. Daí podemos reescrever a desigualdade (5.9) como

$$\left|\frac{(t-s)^{r_n}}{\Gamma(r_n+1)}-1\right| \leqslant M_1 \int_0^{r_n} (t-s)^{-\frac{1}{2}} + (t-s)^{r_n-\frac{1}{2}} dw \leqslant r_n M_1 \left[(t-s)^{-\frac{1}{2}} + (t-s)^{r_n-\frac{1}{2}}\right],$$

para todo $t_0 \leqslant s < t \leqslant t_1$. Como consequência da desigualdade acima temos

$$\begin{aligned}\left|\left(\frac{(t-s)^{r_n}}{\Gamma(r_n+1)}-1\right)\phi'(s)\right| &\leqslant r_n M_1 \left[(t-s)^{-\frac{1}{2}} + (t-s)^{r_n-\frac{1}{2}}\right] |\phi'(s)| \\ &\leqslant r_n M_1 \left[(t-s)^{-\frac{1}{2}} + (t-s)^{r_n-\frac{1}{2}}\right] \max_{s\in[t_0,t_1]} |\phi'(s)|. \end{aligned} \tag{5.10}$$

Agora o nosso intuito e chegar na Equação (5.5), por isso integrando a Equação (5.10) em relação a variável s, obtemos que

$$\begin{aligned}\left|J^{\alpha}_{t_0,t}\phi(t)-\phi(t)\right| &\leqslant \int_{t_0}^{t} \left|\left(\frac{(t-s)^{r_n}}{\Gamma(r_n+1)}-1\right)\phi'(s)\right| ds \\ &\leqslant \int_{t_0}^{t} r_n M_1 \left[(t-s)^{-\frac{1}{2}} + (t-s)^{r_n-\frac{1}{2}}\right] \max_{s\in[t_0,t_1]} |\phi'(s)| ds \\ &= r_n M_1 \max_{s\in[t_0,t_1]} |\phi'(s)| \underbrace{\int_{t_0}^{t} \left[(t-s)^{-\frac{1}{2}} + (t-s)^{r_n-\frac{1}{2}}\right] ds}_{N}. \end{aligned} \tag{5.11}$$

Resolvendo N e fazendo algumas majorações, obtemos

$$N \leqslant \frac{(t_1-t_0)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + \frac{(t_1-t_0)^{r_n+\frac{1}{2}}}{r_n+\frac{1}{2}},$$

que por sua vez existe $M_2 > 0$ tal que

$$\frac{(t_1-t_0)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + \frac{(t_1-t_0)^{r_n+\frac{1}{2}}}{r_n+\frac{1}{2}} \leqslant M_2,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Agora voltando para a desigualdade (5.11), deduzimos que

$$\left|J^{r_n}_{t_0,t}\phi(t)-\phi(t)\right| \leqslant \int_{t_0}^{t} \left|\left(\frac{(t-s)^{r_n}}{\Gamma(\alpha+1)}-1\right)\phi'(s)\right| ds \leqslant r_n M_1 M_2 \max_{s\in[t_0,t_1]} |\phi'(s)|, \tag{5.12}$$

para todo $t_0 \leqslant s < t \leqslant t_1$. Agora observe que como consequência de (5.12), segue que

$$
\begin{aligned}
\|J_{t_0,t}^{r_n}\phi-\phi\|_{L^p(t_0,t_1)} &= \left[\int_{t_0}^{t_1}\left|J_{t_0,t}^{\alpha}\phi(t)-\phi(t)\right|^p ds\right]^{\frac{1}{p}}\\
&\leqslant \left[\int_{t_0}^{t_1}\left(r_n M_1 M_2 \max_{s\in[t_0,t_1]}|\phi'(s)|\right)^p\right]^{\frac{1}{p}}\\
&= \left[M_1 M_2 (t_1-t_0)^{\frac{1}{p}} \max_{s\in[t_0,t_1]}|\phi'(s)|\right] r_n,
\end{aligned}
$$

para todo $1\leqslant p<\infty$.

Desta maneira obtemos que $\{J_{t_0,t}^{r_n}\phi\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge para ϕ na topologia gerada pela norma $L^p(t_0,t_1)$, para todo $1\leqslant p<\infty$. Como a sequência $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ foi arbitrária então concluímos o resultado. □

Teorema 5.9. *Seja $1\leqslant p<\infty$. Então*

$$\lim_{\alpha\to 0^+}\|J_{t_0,t}^{\alpha}f-f\|_{L^p(t_0,t_1)}=0.$$

para toda $f\in L^p(t_0,t_1)$.

Demonstração. Pelo Teorema 3.25 temos que $C_c^\infty\big([t_0,t_1]\big)$ é denso em $L^p(t_0,t_1)$. Desta forma, para $\varepsilon>0$ existe $\phi\in C_c^\infty\big([t_0,t_1]\big)$, tal que

$$\|f-\phi\|_{L^p(t_0,t_1)}\leqslant \min\left\{\min\left\{\frac{\varepsilon\Gamma(\sigma+1)}{2(t_1-t_0)^\sigma}:\sigma\in[0,1]\right\},\frac{\varepsilon}{2}\right\}. \tag{5.13}$$

Agora observe que para $\alpha\in(0,1]$ e pelos Teoremas 3.6 e 5.6 e por (5.13), obtemos

$$
\begin{aligned}
\|J_{t_0,t}^{\alpha}f-f\|_{L^p(t_0,t_1)} &= \|J_{t_0,t}^{\alpha}f-J_{t_0,t}^{\alpha}\phi+J_{t_0,t}^{\alpha}\phi-\phi+\phi-f\|_{L^p(t_0,t_1)}\\
&\leqslant \|J_{t_0,t}^{\alpha}f-J_{t_0,t}^{\alpha}\phi\|_{L^p(t_0,t_1)}+\|J_{t_0,t}^{\alpha}\phi-\phi\|_{L^p(t_0,t_1)}+\|\phi-f\|_{L^p(t_0,t_1)}\\
&\leqslant \left[\frac{(t_1-t_0)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right]\|f-\phi\|_{L^p(t_0,t_1)}+\|J_{t_0,t}^{\alpha}\phi-\phi\|_{L^p(t_0,t_1)}+\|\phi-f\|_{L^p(t_0,t_1)}\\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}+\|J_{t_0,t}^{\alpha}\phi-\phi\|_{L^p(t_0,t_1)}.
\end{aligned}
$$

Em resumo, concluímos que

$$\|J_{t_0,t}^{\alpha}f-f\|_{L^p(t_0,t_1)}\leqslant \varepsilon+\|J_{t_0,t}^{\alpha}\phi-\phi\|_{L^p(t_0,t_1)}. \tag{5.14}$$

Agora fazendo $\alpha\longrightarrow 0^+$ em (5.14) e aplicando o Lema 5.8, segue que

$$\lim_{\alpha\to 0^+}\|J_{t_0,t}^{\alpha}f-f\|_{L^p(t_0,t_1)}\leqslant\varepsilon.$$

Do fato de $\varepsilon>0$ ser arbitrário, concluímos a prova deste teorema. □

Observação 5.10. O Teorema 5.9 sugere a seguinte definição: $J_{t_0,t}^{0}f=f$, para funções de $L^p(t_0,t_1)$, quando $1\leq p<\infty$.

Baseados na observação acima, finalmente provaremos que a integral fracionária define um semigrupo.

Teorema 5.11. *Seja* $1 \le p < \infty$*. Então a família* $\{J^{\alpha}_{t_0,t} : \alpha \ge 0\} \subset \mathscr{L}(L^p(t_0,t_1))$ *define um* C^0*-semigrupo em* $L^p(t_0,t_1)$*.*

Demonstração. Primeiro mostraremos que a integral fracionária é um semigrupo. Para isso, verificaremos que valem os itens 1 e 2 da Definição 4.4.

Item 1. Segue diretamente da Observação 5.10.

Item 2. Mostraremos agora que vale a concatenação, ou seja, que dados $\alpha_1, \alpha_2 \ge 0$ fica válido que

$$J^{\alpha_1}_{t_0,t} J^{\alpha_2}_{t_0,t} f(t) = J^{\alpha_1+\alpha_2}_{t_0,t} f(t),$$

q.t.p. em $[t_0,t_1]$. Para isto, assuma que $\alpha_1, \alpha_2 > 0$, já que os outros casos são diretos. Daí, com o auxílio do Corolário 3.47, obtemos

$$\begin{aligned} J^{\alpha_1}_{t_0,t}\left[J^{\alpha_2}_{t_0,t} f(t)\right] & \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_{t_0}^{t} \frac{1}{\Gamma(\alpha_2)} (t-s)^{\alpha_1-1}\left[\int_{t_0}^{s} (s-w)^{\alpha_2-1} f(w)\,dw\right] ds \\ &= \underbrace{\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}}_{K} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{\alpha_1-1}\left[\int_{t_0}^{s} (s-w)^{\alpha_2-1} f(w)\,dw\right] ds \\ &= K \int_{t_0}^{t}\left[\int_{t_0}^{s} (t-s)^{\alpha_1-1}(s-w)^{\alpha_2-1} f(w)\,dw\right] ds \\ &= K \int_{t_0}^{t}\left[\int_{w}^{t} (t-s)^{\alpha_1-1}(s-w)^{\alpha_2-1}\,ds\right] f(w)\,dw. \end{aligned}$$

Considerando $s = w + h(t-w)$, então $ds = (t-w)dh$. Note também que $s = w$, então $h = 0$ e se $s = t$, então $h = 1$. Assim fazendo a mudança de variável $s = w + h(t-w)$, teremos (momentaneamente evitaremos escrever K e $\int_{t_0}^{t} dw$ para que as equações não fiquem tão extensas)

$$\begin{aligned} \left[\int_0^1 (t-w-h(t-w))^{\alpha_1-1}(w+h(t-w)-w)^{\alpha_2-1}(t-w)dh\right] f(w) & \\ &= \left[\int_0^1 \left[(t-w)(1-h)\right]^{\alpha_1-1}\left[h(t-w)\right]^{\alpha_2-1}(t-w)dh\right] f(w). \end{aligned}$$

Voltando a escrever K e $\int_{t_0}^{t} dw$ e usando a função Beta como na Definição 1.9, ficaremos com

$$= K\int_{t_0}^{t}(t-w)^{\alpha_1+\alpha_2-1}\left[\underbrace{\int_0^1 (1-h)^{\alpha_1-1}h^{\alpha_2-1}\,dh}_{B(\alpha_1,\alpha_2)}\right]f(w)dw$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}\cdot\frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}\int_{t_0}^{t}(t-w)^{\alpha_1+\alpha_2-1}f(w)dw$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}\int_{t_0}^{t}(t-w)^{\alpha_1+\alpha_2-1}f(w)\,dw = J_{t_0,t}^{\alpha_1+\alpha_2}f(t).$$

Portanto dos itens 1 e 2 temos que $J_{t_0,t}^{\alpha}$ é um semigrupo. A demonstração de que $J_{t_0,t}^{\alpha}$ é um C^0–semigrupo segue diretamente do Teorema 5.9. Com isso concluímos a demonstração. $\square$

Como a integral fracionária é um C^0–semigrupo então pela Definição 4.9 existe o gerador infinitesimal deste operador. Por esse motivo o próximo resultado mostrará quem é o gerador infinitesimal da integral fracionária de Riemann-Liouville vista como como um semigrupo no parâmetro α em $L^p(t_0,t_1)$.

Teorema 5.12. *Sejam* $1 \leqslant p < \infty$ *e considere que* $A : D(A) \subset L^p(t_0,t_1) \longrightarrow L^p(t_0,t_1)$ *o gerador infinitesimal do* $\{J_{t_0,t}^{\alpha} : \alpha \geq 0\} \subset \mathscr{L}(L^p(t_0,t_1))$. *Então,* $f \in D(A)$ *se, e somente se*

$$\int_{t_0}^{t}\ln(t-s)f(s)ds,$$

é absolutamente contínua no intervalo $[t_0,t_1]$ *e a sua derivada pertence a* $L^p(t_0,t_1)$. *Além disso temos que*

$$Af(t) = -\psi(1)f(t) + \frac{d}{dt}\left[\int_{t_0}^{t}\ln(t-s)f(s)ds\right], \tag{5.15}$$

q.t.p em $[t_0,t_1]$.

Demonstração. ($\Rightarrow$) Se $f \in D(A)$ então pelo item (4) do Teorema 4.15 a aplicação $g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow D(A)$, dada por $g(s) = J_{t_0,t}^{s}f(t)$, é continuamente diferenciável e ainda temos que

$$\frac{d}{ds}\left[J_{t_0,t}^{s}f\right] = J_{t_0,t}^{s}Af \tag{5.16}$$

para todo $s > 0$.

Definimos agora a função $k : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ dada por $k(\alpha) = \alpha + 1$. Esta função é claramente continuamente diferenciável. Também é fácil perceber que a composição $g \circ k : \mathbb{R}_+ \longrightarrow D(A)$ está bem definida e é dada por

$$g(k(\alpha)) = g(\alpha+1) = J_{t_0,t}^{\alpha+1}f,$$

além disso $g \circ k$ também é continuamente diferenciável.

Agora pela regra da cadeia temos que $g'(k(\alpha))\cdot k'(\alpha)$. E se usarmos a identidade (5.16) obtemos o seguinte resultado:

$$\frac{d}{d\alpha}\left[J_{t_0,t}^{\alpha+1}f\right] = g'(k(\alpha))\cdot k'(\alpha) = \left\{\frac{d}{ds}\left[J_{t_0,t}^{s}f\right]\Bigg|_{s=\alpha+1}\right\}\cdot[\alpha+1]' = J_{t_0,t}^{\alpha+1}Af,$$

ou ainda

$$\frac{d}{d\alpha}\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\int_{t_0}^{t}(t-s)^{\alpha}f(s)ds\right] = J_{t_0,t}^{\alpha+1}Af, \tag{5.17}$$

que pelo Teorema da Derivação Sobre o Sinal da Integral pode ser reescrito como

$$\int_{t_0}^{t}\underbrace{\frac{d}{d\alpha}\left[\frac{(t-s)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right]}_{\mathscr{S}}f(s)ds = J_{t_0,t}^{\alpha+1}Af.$$

Vale apontar que todas as igualdades acima são q.t.p. em $[t_0,t_1]$.

Mas note que já resolvemos $\mathscr{S}$ em (5.6). Desta forma ficamos com

$$\int_{t_0}^{t}\underbrace{\left\{\frac{(t-s)^{\alpha}\Big[\ln(t-s)-\psi(\alpha+1)\Big]}{\Gamma(\alpha+1)}\right\}}_{\rho_{\alpha,t}(s)}f(s)ds = J_{t_0,t}^{\alpha+1}Af, \tag{5.18}$$

q.t.p em $[t_0,t_1]$ e para todo $\alpha>0$.

Agora como consequência dos Teoremas 5.9 e 5.11 e do fato de $Af(t)\in L^p$, podemos considerar uma sequência $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ positiva com $r_n\longrightarrow 0$ quando $n\longrightarrow\infty$, de modo a termos

$$\lim_{n\to\infty}J_{t_0,t}^{r_n+1}Af(t) = \lim_{n\to\infty}J_{t_0,t}^{r_n}\left[J_{t_0,t}^{1}Af(t)\right] = J_{t_0,t}^{0}\left[J_{t_0,t}^{1}Af(t)\right] = J_{t_0,t}^{1}Af(t), \tag{5.19}$$

e isto vale q.t.p em $[t_0,t_1]$. Note que sem perda de generalidade podemos assumir que $0<r_n<\frac{1}{2}$ para todo $n\in\mathbb{N}$.

1. Assim para quase todo $t\in[t_0,t_1]$ e $0<r_n<\frac{1}{2}$, definimos a sequência de funções $\rho_{r_n,t}:[t_0,t]\longrightarrow\mathbb{R}$ dada por

$$\rho_{r_n,t}(s) = \frac{(t-s)^{r_n}\Big[\ln(t-s)-\psi(r_n+1)\Big]}{\Gamma(r_n+1)}f(s).$$

Para cada $s\in[t_0,t)$ a sequência $\rho_{r_n,t}$ é contínua para todo $n\in\mathbb{N}$. De fato, pois já sabemos que as funções exponenciais e logarítmicas são contínuas. Agora pela definição das funções Gama e Digama temos que estas são sempre contínuas em $\mathbb{R}_+$. Desta forma, temos a garantia que $\rho_{r_n,t}$ é contínua para todo $n\in\mathbb{N}$. Logo o Exemplo 2.46 garante que $\rho_{r_n,t}$ é uma sequência de funções mensuráveis. Segue ainda que

$$\lim_{n\to\infty} \rho_{r_n}(t,s)f(s) = \lim_{n\to\infty} \frac{(t-s)^{r_n}\Big[\ln(t-s)-\psi(r_n+1)\Big]}{\Gamma(r_n+1)} f(s)$$
$$= \Big[\ln(t-s)-\psi(1)\Big] f(s),$$

em quase todo $s \in [t_0, t]$.

2. Considere agora as aplicações

   i. $\gamma_{r_n} : s \in [t_0, t] \mapsto (t-s)^{r_n - 1/2}|f(s)| \in \mathbb{R}$

   ii. $\gamma : s \in [t_0, t] \mapsto (t-s)^{-1/2}|f(s)| \in \mathbb{R}$.

   Obviamente i. e ii. são positivas e mensuráveis. Agora mostraremos que as aplicações (i) e (ii) são Lesbegue integráveis e que satisfazem

   $$\lim_{n\to\infty} \Big|(t-s)^{r_n-1/2}|f(s)| - (t-s)^{-1/2}|f(s)|\Big| = 0.$$

   Para mostrar que são integráveis precisamos checar que γ_{r_n} e γ satisfazem a Definição 2.62. Começaremos agora a demonstração deste fato.

   Como já foi observado γ_{r_n} é positiva para todo $n \in \mathbb{N}$, logo teremos $\gamma_{r_n}^-(s) = \max\{-\gamma_{r_n}(s), 0\} = 0$. E portanto $\int_{t_0}^t \gamma_{r_n}^-(s)ds = 0$.

   Agora note que

   $$\frac{1}{\Gamma(r_n+1)} \int_{t_0}^t \gamma_{r_n}^+(s)ds = \frac{1}{\Gamma(r_n+1)} \int_{t_0}^t (t-s)^{r_n-1/2}|f(s)|ds = J_{t_0,t}^{r_n+\frac{1}{2}}|f|.$$

   Mas por hipótese $|f| \in L^p(t_0, t_1)$, então os Teoremas 3.9 e 5.5 nos garantem que $J_{t_0,t}^{r_n+\frac{1}{2}}|f|$ existe. Portanto

   $$\int_{t_0}^t \gamma_{r_n}^+(s)ds = \int_{t_0}^t (t-s)^{r_n-1/2}|f(s)|ds = \Gamma\Big(r_n+\frac{1}{2}\Big) \cdot J_{t_0,t}^{r_n+1}|f| < \infty.$$

   Assim

   $$\int_{t_0}^t \gamma_{r_n}(s)ds = \int_{t_0}^t \gamma_{r_n}^+(s)ds - \int_{t_0}^t \gamma_{r_n}^-(s)ds < \infty.$$

   Desta forma γ_{r_n} é integrável.

   Por outro lado sabemos que γ é positiva então $\gamma^-(s) = \max\{-\gamma(s), 0\} = 0$. Logo teremos $\int_{t_0}^t \gamma^-(s)ds = 0$.

   Também note que pelos mesmos argumentos do item acima podemos concluímos que

   $$\int_{t_0}^t \gamma_{r_n}^+(s)ds = \int_{t_0}^t (t-s)^{r_n-1/2}|f(s)|ds = \Gamma\Big(r_n+\frac{1}{2}\Big) \cdot J_{t_0,t}^{r_n+1}|f| < \infty.$$

E, portanto,

$$\int_{t_0}^{t}\gamma(s)ds=\int_{t_0}^{t}\gamma^{+}(s)ds-\int_{t_0}^{t}\gamma^{-}(s)ds<\infty.$$

Logo, γ é integrável. Por fim, note que

$$\lim_{n\to\infty}(t-s)^{r_n-1/2}|f(s)|=(t-s)^{-1/2}|f(s)|.$$

3. Note agora que

$$\left|\rho_{r_n,t}(s)f(s)\right|\leqslant M_1(t-s)^{r_n-1/2}|f(s)|,$$

com

$$M_1=\max_{w\in[0,1]}\left(\frac{1+|\psi(w+1)|}{\Gamma(w+1)}\right)\max_{r\in[0,t_1-t_0]}\left[r^{\frac{1}{2}}|\ln(r)|+(t_1-t_0)^{\frac{1}{2}}\right].$$

Este resultado já foi demonstrado em (5.8).

4. Por último note que

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}M_1\int_{t_0}^{t}(t-s)^{r_n-1/2}\cdot|f(s)|ds\\ &=\lim_{n\to\infty}M_1\Gamma(r_n+\frac{1}{2})\cdot J_{t_0,t}^{r_n+\frac{1}{2}}|f|=M_1\Gamma(1/2)\cdot J_{t_0,t}^{1/2}|f|\\ &=M_1\int_{t_0}^{t}(t-s)^{-1/2}|f(s)|ds.\end{aligned}$$

Observe que os itens (1)–(4) satisfazem as hipóteses do Corolário 2.68. Portanto isso nos garante que $\left[\ln(t-s)-\psi(1)\right]f(s)$ é integrável. Além disso temos que

$$\lim_{n\to\infty}\int_{t_0}^{t}\frac{(t-s)^{r_n}\left[\ln(t-s)-\psi(r_n+1)\right]}{\Gamma(r_n+1)}f(s)ds=\int_{t_0}^{t}\left[\ln(t-s)-\psi(1)\right]f(s)ds \tag{5.20}$$

em quase todo $t\in[t_0,t_1]$.

Agora note que por (5.18), (5.19) e (5.20), obtemos que

$$J_{t_0,t}^{1}Af(t)=\int_{t_0}^{t}\left[\ln(t-s)-\psi(1)\right]f(s)ds, \tag{5.21}$$

ou ainda podemos reescrever (5.21) da seguinte forma

$$\int_{t_0}^{t}Af(s)ds=\int_{t_0}^{t}\ln(t-s)f(s)ds-\int_{t_0}^{t}\psi(1)f(s)ds.$$

Assim sendo, segue que

$$\int_{t_0}^{t}\ln(t-s)f(s)ds=\int_{t_0}^{t}Af(s)+\psi(1)f(s)ds. \tag{5.22}$$

Mas perceba que o Teorema 3.9 garante que $Af(s)+\psi(1)f(s) \in L^p(t_0,t_1) \subset L^1(t_0,t_1)$. Desta forma, segue do Teorema 3.12 que o lado direito da equação (5.22) é diferenciável em quase todo $[t_0,t_1]$, logo o lado esquerdo também é, além disso note que o lado direito está em L^p, portanto a lado esquerdo também está. Disto concluímos que

$$\frac{d}{dt}\int_{t_0}^{t} \ln(t-s)f(s)ds = \underbrace{Af(s)+\psi(1)f(s)}_{\in L^p}. \tag{5.23}$$

Com isso mostramos o que queríamos, e segue de (5.23) que

$$Af(s) = -\psi(1)f(s) + \frac{d}{dt}\int_{t_0}^{t} \ln(t-s)f(s)ds.$$

($\Leftarrow$) Suponhamos agora que $f \in L^p(t_0,t_1)$, de modo a termos

$$\Phi(t) := \int_{t_0}^{t} \ln(t-s)f(s)ds \tag{5.24}$$

é absolutamente contínua em $[t_0,t_1]$ e sua derivada pertence a $L^p(t_0,t_1)$. Observe agora que para todo $0<\alpha_1<\alpha_2<\infty$ o item (3) do Teorema 4.15 garante que

$$J^{\alpha_2}_{t_0,s}f(s) - J^{\alpha_1}_{t_0,s}f(s) = A\underbrace{\left(\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} J^{\Upsilon}_{t_0,s}f(s)d\Upsilon\right)}_{\mathscr{W}}, \tag{5.25}$$

para quase todo $s \in [t_0,t_1]$. Mas, como $\mathscr{W} \in D(A)$, então da primeira parte desta demonstração deduzimos que,

$$\begin{aligned} J^{\alpha_2}_{t_0,s}f(s) - J^{\alpha_1}_{t_0,s}f(s) &= A\left(\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} J^{\Upsilon}_{t_0,s}f(s)d\Upsilon\right) \\ &= -\psi(1)\left(\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} J^{\Upsilon}_{t_0,s}f(s)d\Upsilon\right) + \frac{d}{dt}\left[\underbrace{\int_{t_0}^{t} \ln(t-s)\left(\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} J^{\Upsilon}_{t_0,s}f(s)d\Upsilon\right)ds}_{\mathscr{T}}\right], \end{aligned} \tag{5.26}$$

para quase todo $t \in [t_0,t_1]$. Agora observe que pelo Corolário 3.46, podemos escrever $\mathscr{T}$ como

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t} \ln(t-s)\left(\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} J^{\Upsilon}_{t_0,t}f(s)d\Upsilon\right)ds \\ &= \left(\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\int_{t_0}^{t} \ln(t-s)J^{\Upsilon}_{t_0,s}f(s)ds\right)d\Upsilon \\ &= \left\{\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\left[\underbrace{\int_{t_0}^{t} \ln(t-s)\left(\int_{t_0}^{s}\frac{(s-w)^{\Upsilon-1}}{\Gamma(\Upsilon)}f(w)dw\right)ds}_{\mathscr{S}}\right]d\Upsilon\right\} \end{aligned} \tag{5.27}$$

para quase todo $t \in [t_0, t_1]$.

Se fizermos agora a seguinte mudança de variável $w = s + t_0 - h$, então teremos que $dw = -dh$. Além disso, quando $w = t_0$ teremos $h = s$ e quando $w = s$, obtemos que $h = t_0$. Então, pelo Corolário 3.47, podemos reescrever $\mathscr{S}$ como

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t}\left[-\int_{s}^{t_0}\ln(t-s)\left(\frac{(h-t_0)^{\Upsilon-1}}{\Gamma(\Upsilon)}\right)f(s+t_0-h)dh\right]ds&\\ =\int_{t_0}^{t}\left[\int_{t_0}^{s}\ln(t-s)\left(\frac{(h-t_0)^{\Upsilon-1}}{\Gamma(\Upsilon)}\right)f(s+t_0-h)dh\right]ds&\\ =\int_{t_0}^{t}\left(\frac{(h-t_0)^{\Upsilon-1}}{\Gamma(\Upsilon)}\right)\left[\int_{h}^{t}\ln(t-s)f(s+t_0-h)ds\right]dh,&\end{aligned} \tag{5.28}$$

paraquase todo $t \in [t_0, t_1]$.

Agora se considerarmos $s = r + h - t_0$, então $ds = dr$. E além disso temos que se $s = h$, então $r = t_0$, por outro lado se $s = t$, então $r = t_0 + t - h$. Assim conseguimos reescrever (5.28) como

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t}\left(\frac{(h-t_0)^{\Upsilon-1}}{\Gamma(\Upsilon)}\right)\left[\int_{h}^{t}\ln(t-s)f(s+t_0-h)ds\right]dh&\\ =\int_{t_0}^{t}\left(\frac{(h-t_0)^{\Upsilon-1}}{\Gamma(\Upsilon)}\right)\left[\int_{t_0}^{t_0+t-h}\ln(t+t_0-r-h)f(r)dr\right]dh&\end{aligned} \tag{5.29}$$

E ainda se $h = t_0 + t - \tau$, então teremos que $dh = -d\tau$. Mas note que se $h = t_0$, então $\tau = t$. E quando $h = t$, então ficaremos com $\tau = t_0$. Desta forma, reescrevemos (5.29) da seguinte maneira

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t}\left(\frac{(h-t_0)^{\Upsilon-1}}{\Gamma(\Upsilon)}\right)\left[\int_{t_0}^{t_0+t-h}\ln(t+t_0-r-h)f(r)dr\right]dh&\\ =-\int_{t}^{t_0}\left(\frac{(t-\tau)^{\Upsilon-1}}{\Gamma(\Upsilon)}\right)\left[\int_{t_0}^{\tau}\ln(\tau-r)f(r)dr\right]d\tau&\\ =\int_{t_0}^{t}\left(\frac{(t-\tau)^{\Upsilon-1}}{\Gamma(\Upsilon)}\right)\left[\int_{t_0}^{\tau}\ln(\tau-r)f(r)dr\right]d\tau = J^{\Upsilon}_{t_0,t}\Phi(t).&\end{aligned}$$

Deste modo podemos escrever (5.27) como

$$\int_{t_0}^{t}\ln(t-s)\left(\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}J^{\Upsilon}_{t_0,t}f(s)d\Upsilon\right)ds = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2}J^{\Upsilon}_{t_0,t}\Phi(t)d\Upsilon,$$

para quase todo $t \in [t_0, t_1]$. Com isso, voltamos para a equação (5.26) e a escrevemos da seguinte maneira

$$J^{\alpha_2}_{t_0,t}f(s) - J^{\alpha_1}_{t_0,t}f(s) = -\psi(1)\left(\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}J^{\Upsilon}_{t_0,t}f(s)d\Upsilon\right) + \frac{d}{dt}\left[\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}J^{\Upsilon}_{t_0,t}\Phi(t)d\Upsilon\right]$$

para quase todo $t \in [t_0, t_1]$. Novamente pelo Teorema de Diferenciação Sobre o Sinal de Integração, ficamos finalmente com a identidade

$$J_{t_0,t}^{\alpha_2} f(s) - J_{t_0,t}^{\alpha_1} f(s) = -\psi(1) \left(\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} J_{t_0,t}^{\Upsilon} f(s) d\Upsilon \right) + \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{d}{dt} \left[J_{t_0,t}^{\Upsilon} \Phi(t) \right] d\Upsilon.$$

para quase todo $t \in [t_0, t_1]$. Segue então que[3]

$$J_{t_0,t}^{\alpha_2} f(s) - J_{t_0,t}^{\alpha_1} f(s) = -\psi(1) \left(\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} J_{t_0,t}^{\Upsilon} f(s) d\Upsilon \right) + \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \left[J_{t_0,t}^{\Upsilon} \Phi'(t) \right] d\Upsilon,$$

para quase todo $t \in [t_0, t_1]$.

Aplicando agora um limite de quando $\alpha_1 \longrightarrow 0$ em ambos os lados da igualdade acima na topologia de $L^p(t_0, t_1)$ e levando em conta o Teorema 5.11, ficamos com

$$J_{t_0,t}^{\alpha_2} f(s) - f(t) = -\psi(1) \left(\int_{0}^{\alpha_2} J_{t_0,t}^{\Upsilon} f(s) d\Upsilon \right) + \int_{0}^{\alpha_2} \left[J_{t_0,t}^{\Upsilon} \Phi'(t) \right] d\Upsilon,$$

para quase todo $t \in [t_0, t_1]$.

Agora dividindo ambos os lados da igualdade acima por α_2, fazendo o limite de quando $\alpha_2 \longrightarrow 0$ na topologia de $L^p(t_0, t_1)$, obtemos que

$$\lim_{\alpha_2 \to 0} \frac{J_{t_0,t}^{\alpha_2} f(s) - f(t)}{\alpha_2} = \lim_{\alpha_2 \to 0} \frac{\displaystyle\int_0^{\alpha_2} J_{t_0,t}^{\Upsilon} \Big(-\psi(1) f(t) + \Phi'(t) \Big) d\Upsilon.}{\alpha_2},$$

para quase todo $t \in [t_0, t_1]$.

Por fim, o item 2. do Teorema 4.15 nos permite escrever a igualdade acima do seguinte modo

$$\lim_{\alpha_2 \to 0} \frac{J_{t_0,t}^{\alpha_2} f(s) - f(t)}{\alpha_2} = -\psi(1) f(t) + \Phi'(t).$$

Observe que este limite é possível de ser feito, uma vez que o lado direito da igualdade acima existe em $L^p(t_0, t_1)$. Desta forma concluímos que $f \in D(A)$, como queríamos. □

[3]Abaixo usamos um fato que é discutido quando abordamos a teoria da derivada fracionária de Caputo, a qual não temos intenção de abordar diretamente neste texto. Se uma função $f(t)$ é absolutamente contínua e $f(t_0) = 0$, então $(d/dt) J_{t_0,t}^{\alpha} f(t) = J_{t_0,t}^{\alpha} f'(t)$ em quase todo $[t_0, t_1]$ para qualquer que seja o $\alpha \in (0, 1)$. Para mais detalhes veja [25].

BIBLIOGRAFIA

[1] Amann, Herbert and others. **Linear and quasilinear parabolic problems**. Springer, 1995.

[2] Bartle, Robert G. **The elements of integration and Lebesgue measure**. John Wiley & Sons, 2014.

[3] Batty, CJK. **A. Lunardi Analytic semigroups and optimal regularity in parabolic problems**. Cambridge University Press, 1996.

[4] Boustique, H and Mikusinski, Piotr and Richardson, Gary. **Convergence semigroup actions: generalized quotients**. Universitat Politècnica de València, 2009.

[5] BREZIS, H. **Analisis Funcional Teoria y Aplicaciones**. Alianza Editorial, Madrid, 1983

[6] Burk, F. **Lebesgue Measure and Integration: An Introduction**. Wiley, New York, 1998.

[7] Conway, John B. **Functions of one complex variable II**. Springer Science & Business Media, 2012.

[8] David, Sérgio Adriani and Linares, Juan Lopez and Pallone, Eliria Maria De Jesus Agnolon. **Fractional order calculus: historical apologia, basic concepts and some applications**. SciELO Brasil,2011.

[9] Carvalho Neto, Paulo Mendes and Júnior, Renato Fehlberg. **he Riemann-Liouville fractional integral in Bochner-Lebesgue spaces I**. Communications on Pure and Applied Analysis, 2022.

[10] Engel, Klaus-Jochen and Nagel, Rainer. **A short course on operator semigroups**. Springer Science & Business Media,2006.

[11] Folland, Gerald B. **Real analysis: modern techniques and their applications**. John Wiley & Sons, 1999.

[12] Gamelin, Theodore. **Complex analysis**. Springer Science & Business Media,2003.

[13] Hale, J. K.. **Ordinary Differential Equations**. Wiley, New York, 1980.

[14] Kilbas, Anatoliĭ Aleksandrovich and Srivastava, Hari M and Trujillo, Juan J. **Theory and applications of fractional differential equations**. elsevier, 2016.

[15] Lazarević, MIHAILO P and Rapaić, MILAN R and Šekara. **Introduction to fractional calculus with brief historical background**. WSEAS Press, 2014.

[16] Lima, Elon Lages. **Complex analysis for mathematics and engineering**. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1983.

[17] Lima, Elon Lages. **Espaços métricos**. Impa Rio de Janeiro, 2004.

[18] Machado, J Tenreiro and Kiryakova, Virginia and Mainardi, Francesco. **Recent history of fractional calculus**, Communications in nonlinear science and numerical simulation, 2011.

[19] Mathews, John and Howell, Russell . **Complex analysis for mathematics and engineering**. Springer Science & Business Media, 2012.

[20] Munkres, James R. **Elements of algebraic topology**. CRC press, 2018.

[21] MacNeille, H. M. **Partially ordered sets**. Transactions of the American Mathematical Society, 1937.

[22] Pazy, Amnon and Martin Jr, Robert H. **Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations**. 1985.

[23] Ross, Bertram. **A brief history and exposition of the fundamental theory of fractional calculus**. Springer, 2006.

[24] Royden, Halsey Lawrence and Fitzpatrick, Patrick. **Real analysis**. Macmillan New York, 1988.

[25] Samko, Stefan G and Kilbas, Anatoly A and Marichev, Oleg I and others. **Fractional integrals and derivatives**. Gordon and breach science publishers, Yverdon Yverdon-les-Bains, Switzerland, 1993.

[26] Sohrab, H. H. **Basic Real Analysis**. Birkhäuser, 2003.