



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO SOCIOECONÔMICO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ECONOMIA

Renan Lessa da Costa

**Extraindo Expectativas de Mercado sobre o Retorno de Ativos em Contratos
Futuros: Prêmio de Risco Variável no Mercado Brasileiro de Juros**

Florianópolis
2023

Renan Lessa da Costa

**Extraindo Expectativas de Mercado sobre o Retorno de Ativos em Contratos
Futuros: Prêmio de Risco Variável no Mercado Brasileiro de Juros**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Economia da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do título de mestre em economia.

Orientador: Prof. Guilherme Valle Moura, Dr.

Florianópolis
2023

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

da Costa, Renan

Extraíndo Expectativas de Mercado sobre o Retorno de Ativos a partir de Contratos Futuros : Prêmio de Risco Variável no Mercado Brasileiro de Juros / Renan da Costa ; orientador, Guilherme Valle Moura, 2023.

61 p.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Sócio-Econômico, Programa de Pós-Graduação em Economia, Florianópolis, 2023.

Inclui referências.

1. Economia. 2. Estrutura a termo da taxa de juros. 3. Hipótese das expectativas. 4. Prêmio de risco. 5. Modelos de fatores dinâmicos. I. Valle Moura, Guilherme. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós Graduação em Economia. III. Título.

Renan Lessa da Costa

Extraindo Expectativas de Mercado sobre o Retorno de Ativos em Contratos

Futuros: Prêmio de Risco Variável no Mercado Brasileiro de Juros

O presente trabalho em nível de mestrado foi avaliado e aprovado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. João Frois Caldeira, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Sidney Martins Caetano, Dr.
Universidade Federal de Juiz de Fora

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de mestre em economia.

Coordenação do Programa de
Pós-Graduação

Prof. Guilherme Valle Moura, Dr.
Orientador

Florianópolis, 2023.

À Barra da Lagoa e aos barrenses.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a meus pais, a meus amigos, a meus professores, a meu terapeuta, a meu orientador e ao povo brasileiro.

*“Uma noite ‘deprê’ às vezes
acorda o sol que ‘cê’ até duvidou,
QUENTE!
(L, 2017)*

RESUMO

O objetivo deste trabalho é avaliar a Hipótese de Expectativas em mercados eficientes para a estrutura a termo das taxas de juros, apresentar modelos que buscam explorar a interferência do prêmio pelo risco na estrutura a termo, e apresentar uma abordagem para selecionar, dentre os modelos apresentados, a estimativa mais confiável da expectativa do mercado. A análise começa pela hipótese de que as taxas de juros de longo prazo refletem as expectativas das taxas de juros de curto prazo futuras. É argumentado que as taxas de juros de longo prazo também são afetadas por prêmios de risco, para cuja estimação serão apresentadas duas abordagens, a partir de regressões de retorno, e também de modelos gaussianos afim para a estrutura a termo. É ponderada a contribuição de cada modelo, em um enquadre comum, na tentativa de medir expectativas no mercado brasileiro de juros. Comparações no poder preditivo sobre retornos de ativos são expostas ao final.

Palavras-chave: Estrutura a termo da taxa de juros. Hipótese das expectativas. Prêmio de risco. Modelos de fatores dinâmicos.

ABSTRACT

The objective of this work is to evaluate the Expectations Hypothesis in efficient markets for the term structure of interest rates, to present models that seek to explore the interference of the risk premium in the term structure, and to present an approach to select, among the presented models, the most reliable estimate of market expectations. The analysis begins with the assumption that long-term interest rates reflect expectations of future short-term interest rates. It is argued that long-term interest rates are also affected by risk premiums, for the estimation of which two approaches will be presented, based on return regressions, and also on Gaussian Affine Term Structure Models. The contribution of each model is weighted, within a common framework, in an attempt to measure expectations in the Brazilian interest rate market. Comparisons in predictive power over asset returns are shown at the end.

Keywords: Term structure of interest rates. Expectations hypothesis. Risk premium. Dynamic factor models.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Curvas de Juros	18
Figura 2 – <i>Yields</i> de títulos em duas dimensões	19
Figura 3 – Estrutura a Termo da Curva de Juros	20
Figura 4 – Log-retorno de um mês	24
Figura 5 – Componentes principais das <i>yields</i>	34
Figura 6 – Pesos dos componentes principais das <i>yields</i>	35
Figura 7 – Erro de previsão no preço 1 mês à frente, $M = 3$, 2014-15	50
Figura 8 – Erro de previsão no preço 1 mês à frente, $M = 12$, 2014-15	51
Figura 9 – Erro de previsão no preço 1 mês à frente, $M = 48$, 2014-15	52
Figura 10 – Erro de previsão no preço 1 mês à frente, $M = 3$, 2021-22	53
Figura 11 – Erro de previsão no preço 1 mês à frente, $M = 12$, 2021-22	54
Figura 12 – Erro de previsão no preço 1 mês à frente, $M = 48$, 2021-22	55

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Estatísticas descritivas para <i>yields</i>	21
Tabela 2 – Estatísticas descritivas para hiato entre <i>yields</i>	21
Tabela 3 – Estatísticas descritivas para log-retorno de um mês	23
Tabela 4 – Testes da Hipótese das expectativas	26
Tabela 5 – Proporção cumulativa da variância explicada pelos componentes principais	33
Tabela 6 – Estatísticas descritivas para componentes principais	33
Tabela 7 – Regressões de Retorno - Componentes Principais	44
Tabela 8 – Razão MSPE: HE vs. Passeio Aleatório	48
Tabela 9 – Razão MSPE: Modelos vs. HE	49

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

DFM	Modelo de Fatores Dinâmicos
DI-futuro	Futuro de Taxa Média de Depósitos Interfinanceiros
ETTJ	Estrutura a Termo da Taxa de Juros
HE	Hipótese das Expectativas
i.i.d.	Independente e identicamente distribuido
MSPE	Erro de previsão em média quadrática
PCA	Análise de Componentes Principais
VAR	Autorregressão vetorial
YTM	<i>Yield to Maturity</i>

LISTA DE SÍMBOLOS

t	Tempo corrente no qual o dado é observado
ZC	Título zero cupom livre de risco de inadimplência
P_t	Preço do título
n	Número de períodos até o vencimento do contrato na celebração
y_t	<i>yields</i>
m	Número de períodos mantendo o título
r^*	Taxa livre de risco composta continuamente
r_{t+m}	Log-retorno
rx_{t+m}	Log-retorno em excesso
\mathbb{E}	Operador de expectativa
H_0	Hipótese nula
α	Coeficiente linear
β	Coeficiente angular
rp_t	Log-prêmio de risco
σ	Desvio padrão
ρ	Correlação
M_{t+1}	Fator de desconto estocástico
Y_t	Vetor de variáveis de séries temporais observadas
N	Quantidade de variáveis de séries temporais observadas (total de maturidades)
x_t	Fatores latentes
η_i	Polinômio de defasagem dos termos idiossincráticos
$g_{i,t}$	Termo de erro
L	Operador de defasagem
φ	Polinômio de defasagem da equação de estado
v	Inovação dos fatores
u_t	Componente idiossincrático de média zero
l	Quantidade de fatores estáticos
C_t	Fatores estáticos
p	Grau da matriz polinomial de defasagem
ψ	Matriz polinomial de defasagem
Φ	Matriz de coeficientes da autorregressão vetorial
Σ	Matriz de variância-covariância
T	Total de períodos
K	Quantidade de variáveis preditivas
a_n	Coeficiente linear
$b_{k,n}$	Coeficiente angular

ε	Vetor de erros
μ	Constante da autorregressão vetorial
$\pi_t(n)$	Log-preço do título
A_n	Pesos dos fatores comuns a termo
B	Pesos dos fatores variáveis a termo
λ	Componente constante no tempo do preço de mercado do risco
Λ	Componente variável no tempo do preço de mercado do risco
e	Termo de erro i.i.d.
ε	Termo de erro

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	15
1.1	OBJETIVOS	17
1.1.1	Objetivo Geral	17
1.1.2	Objetivos Específicos	17
2	CURVA DE JUROS E EXPECTATIVAS DE MERCADO	18
2.1	UMA APRECIÇÃO DO MERCADO BRASILEIRO DE JUROS	19
2.2	O PREÇO DO RISCO NO MERCADO FUTURO DE JUROS	22
2.2.1	Conceitos Básicos de Curva de Juros e Fatos Estilizados	22
2.2.2	A Hipótese das Expectativas	24
2.2.3	Prêmio de Risco Variante no Tempo	28
3	MODELOS DE FATORES DINÂMICOS E COMPONENTES PRINCIPAIS	31
3.1	OS COMPONENTES PRINCIPAIS NO MERCADO BRASILEIRO DE TÍTULOS	32
3.2	ESTRUTURA BÁSICA DE MODELOS DE FATORES DINÂMICOS	34
3.3	NORMALIZAÇÃO DOS FATORES POR COMPONENTES PRINCIPAIS	36
3.4	ESTIMAÇÃO DOS FATORES E PARÂMETROS	37
4	MODELANDO O RETORNO EM EXCESSO	38
4.1	REGRESSÕES DE RETORNO IRRESTRITAS	38
4.2	MODELOS LINEARES GAUSSIANOS DA ESTRUTURA A TERMO	39
4.3	DUAS ILUSTRAÇÕES NO MERCADO BRASILEIRO DE TÍTULOS	43
4.3.1	Componentes Principais como Fatores de Risco	43
4.3.2	Abordagem empírica da restrição à arbitragem	44
4.4	UMA VISÃO INTEGRATIVA	45
4.4.1	Extraindo expectativas dos preços de ativos	47
4.4.2	Comparando diferentes modelos	48
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	56
	REFERÊNCIAS	57

1 INTRODUÇÃO

As expectativas sobre os resultados econômicos futuros desempenham um papel fundamental na tomada de decisões sob incerteza e formam um alicerce para uma ampla gama de modelos preditivos em macroeconomia e finanças, definindo o comportamento das empresas e as decisões de consumo e poupança das famílias. Da mesma forma, as expectativas sobre a evolução dos preços dos títulos públicos, das *commodities* e de outros ativos afetam os planos de produção e investimento, bem como as intervenções de política econômica.

Maneiras comuns de obter medidas das expectativas das pessoas, como relatórios de mercado ou pesquisas com o público se conduzem em frequências relativamente baixas ou de forma *ad hoc*, como ressalta Baumeister (2023), e oferecem uma faixa limitada de horizontes de previsão. Além disso, nem sempre é claro se as crenças declaradas por participantes de pesquisas são de fato levadas em conta nas ações destes participantes quando seus próprios interesses estão em jogo, como é discutido em Costa-Gomes e Weizsäcker (2008) e Rutström e Wilcox (2009). Uma alternativa valiosa é usar os preços de mercado dos ativos negociados nos mercados financeiro e de futuros para inferir as expectativas dos investidores sobre os resultados macroeconômicos futuros, como inflação, política monetária e preços de *commodities*. Os agentes de mercado se compõem basicamente por famílias, empresas, analistas profissionais e investidores institucionais, o que torna as expectativas baseadas no mercado uma medida inclusiva de diferentes grupos de agentes econômicos. Movimentos no preço de ativos são pauta recorrente noticiários econômicos voltados ao público geral, auxiliando-o a formar suas expectativas com uma visão de “o que o mercado pensa”.

Gürkaynak e Wright (2012) expõem a relevância de se compreender as forças que afetam a estrutura a termo das taxas de juros para economistas, formuladores de políticas públicas e investidores. A busca de economistas por uma engenharia reversa das expectativas de mercado sobre taxas de juros futuras, inflação e outras variáveis macroeconômicas, exige que se leve em consideração efeitos de prêmios de risco. Rudebusch, Sack e Swanson (2006) notam que a análise da estrutura a termo traz à tona ambiguidades intrínsecas à política monetária, especificamente quanto à resposta ideal a mudanças nas taxas de juros de longo prazo. Rudebusch, Sack e Swanson (2006) evidenciam que reduções no prêmio a termo podem ser seguidas por um crescimento mais *rápido* da produção, de modo que este declínio pode sinalizar um estímulo adicional à economia. Extrapolar a hipótese das expectativas, permitindo prêmios de risco, pode fornecer caminhos adicionais para medidas anticíclicas. Nesse sentido, Gürkaynak e Wright (2012) sugerem que a compra em larga escala de títulos poderia ser uma medida aplicada pela autoridade monetária em certas situações

de prêmios de risco excessivos. Adicionalmente, ressaltam que governos negociam títulos de diversos tipos em mercado aberto, e compreender sua precificação os ajuda a combinar esses diferentes instrumentos, minimizando custos e incerteza no serviço da dívida. Além das motivações citadas, tentar recuperar o conhecimento difuso no mercado sobre o estado futuro da economia pode auxiliar na formação de políticas públicas mais adequadas e na minimização da assimetria informacional dos mercados brasileiros.

O objetivo deste trabalho é avaliar a Hipótese de Expectativas em Mercados Eficientes para a estrutura a termo das taxas de juros, apresentar modelos que buscam explorar outras forças que moldam a estrutura a termo das taxas de juros, em particular o prêmio pelo risco, e apresentar uma abordagem para selecionar, dentre os modelos apresentados, a estimativa mais confiável da expectativa do mercado. Assim, é ponderada a contribuição de cada modelo na tentativa de medir expectativas de mercado, e seu poder preditivo sobre retornos de ativos. A análise começa pela hipótese de que as taxas de juros de longo prazo refletem as expectativas das taxas de juros de curto prazo futuras. A partir daí, é argumentado que as taxas de juros de longo prazo também são afetadas por prêmios de risco¹, o que poderia impactar o vínculo entre as taxas de juros de longo prazo e as expectativas de taxas de curto prazo futuras. Serão apresentadas duas abordagens, a partir de regressões de retorno, e também de modelos gaussianos afim para a estrutura a termo no mercado brasileiro de juros.

O primeiro capítulo revisa a teoria de precificação de ativos que forma a base para a análise empírica e apresenta algumas evidências sobre a Hipótese de Expectativas para o mercado de futuros de títulos públicos brasileiros. Discute-se o problema de que os instrumentos financeiros não apenas incorporam a expectativa racional dos participantes do mercado, mas também uma compensação pelo risco não diversificável. Recorre-se à estrutura a termo da taxa de juros como um recurso para lidar com esta questão. Descrevem-se os conceitos básicos da curva de juros, apresentando-se alguns fatos empíricos sobre a estrutura a termo.

O segundo capítulo fornece uma visão geral para modelos de fatores dinâmicos, suas estimativas e relação com a estrutura a termo da taxa de juros: por trás do conjunto de alta dimensão de *yields* observadas, há um conjunto de dimensão muito inferior de fatores orientando sua evolução. O capítulo então se aprofunda na abordagem de componentes principais.

O terceiro capítulo apresenta algumas técnicas de modelagem usadas para separar fatores de risco do componente de expectativa, considerando duas classes de modelos para excesso de retorno: Regressões de Retorno e Modelos Gaussianos de Estrutura a Termo. Apresentam-se dois modelos, além do estimador de três passos exposto por Adrian, Crump e Moench (2013) para o segundo modelo. É demonstrado

¹ Ou pelos efeitos da segmentação do mercado

como obter, dos modelos, os rendimentos implícitos a partir dos parâmetros estimados. Discute-se a relação entre as duas abordagens.

O capítulo quatro discute uma metodologia para identificar a estimativa ótima do excesso de retorno que permite construir uma medida única e confiável de expectativas de mercado a partir de ferramentas de previsão padrão. Elas serão aplicadas para identificar, dentre as três estimativas do excesso de retorno, a que melhor prevê, possibilitando estimar o preço de mercado do risco e, portanto, a expectativa de mercado implícita. É apresentada uma abordagem geral que permite discriminar entre diferentes abordagens para estimar o retorno em excesso e alguns resultados empíricos.

São utilizados contratos do mercado de derivativos de Depósitos Interbancários (DI-futuro), cujas taxas seguem as do mercado de títulos do Tesouro Nacional, mas apresentam o benefício de serem negociados com maior liquidez que títulos públicos. As *yields* referentes aos contratos utilizados são obtidas a partir de dados de fechamento da B3 do período de 2006 a 2022. Estas séries são suavizadas por *spline* cúbico, formando-se uma base da qual se extraem componentes principais o suficiente para atingir 100,0% em proporção de variância explicada. Stock e Watson (2016) salientam que estes componentes podem ser trabalhados como variáveis observáveis.

1.1 OBJETIVOS

Nas seções abaixo estão descritos o objetivo geral e os objetivos específicos.

1.1.1 Objetivo Geral

Extrair e comparar medidas de expectativas sobre o Retorno de Ativos no Mercado Brasileiro de Juros Futuros

1.1.2 Objetivos Específicos

Avaliar a Hipótese de Expectativas em mercados eficientes para a estrutura a termo das taxas de juros; apresentar modelos que buscam explorar o prêmio pelo risco na moldagem da estrutura a termo das taxas de juros; apresentar uma abordagem para selecionar a estimativa mais confiável da expectativa do mercado.

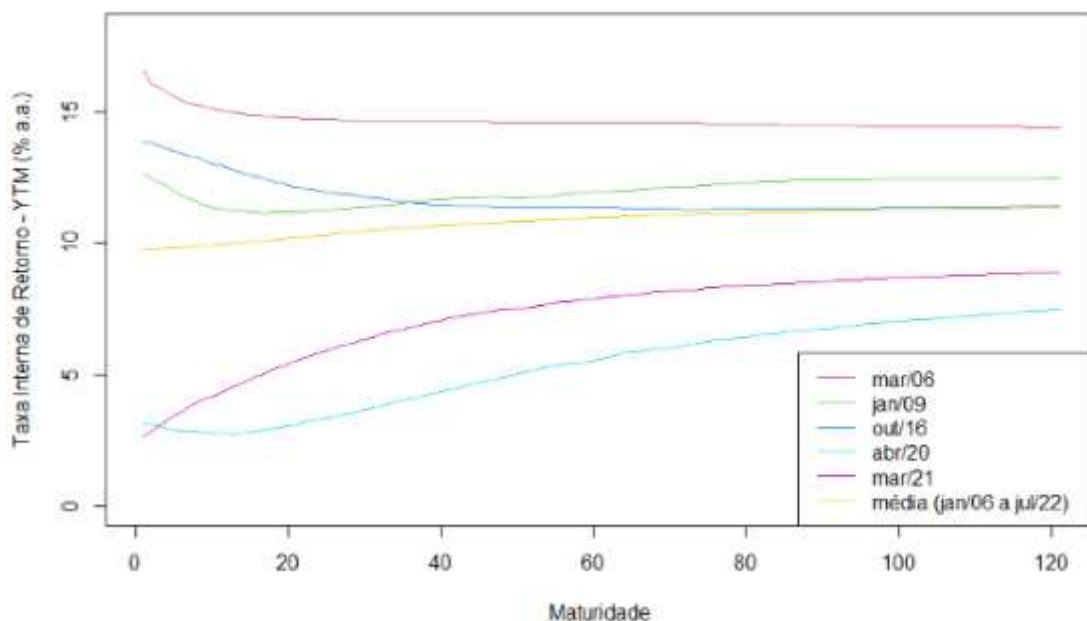
2 CURVA DE JUROS E EXPECTATIVAS DE MERCADO

A qualquer momento, dezenas de *yields*¹ podem ser observadas, correspondendo a diferentes vencimentos de títulos. A relação entre as duas variáveis subjacentes, juros e termo, é descrita graficamente em curvas de juros. Curvas de juros de diferentes datas, como as selecionadas na Figura 1, ilustram como esta relação evolui dinamicamente: há, além de uma dimensão transversal, outra temporal. Modelar a relação entre estes três elementos é objeto de estudos da Estrutura a Termo da Taxa de Juros - ETTJ, na busca por compreender como as taxas de juros tendem a se comportar para diferentes vencimentos e ao longo do tempo. Como dizem Diebold, Rudebusch *et al.* (2012), na prática, trata-se de modelar e prever uma série temporal - série de curvas de juros. As Figuras 2 e 3 demonstram que as curvas de juros se movem de diferentes formas: aumentando em taxas crescentes ou decrescentes, diminuindo em taxas crescentes ou decrescentes, em forma de U e assim por diante.

Baumeister (2023) faz referência à prática comum de bancos centrais, organizações internacionais, setor privado e imprensa financeira de tratar os preços de futuros, contratos a termo e outros instrumentos financeiros como medidas das expectativas do mercado. Bernanke (2008) enfatiza que formuladores de políticas públicas e outros

¹ Também chamadas de Taxas Internas de Retorno, como em Caldeira (2011)

Figura 1 – Curvas de Juros



Fonte: Elaborado pelo Autor. NOTAS: Curva de juros brasileira em diferentes períodos. Dados do último dia útil do mês, exceto para a média, cujo período amostral é de 02/01/2006 a 08/08/2006. Os dados são calculados a partir de derivativos da B3 suavizados com *spline* cúbico.

analistas muitas vezes confiaram em cotações de mercados futuros para obter previsões dos preços. Desta forma, apresenta-se a relevância de compreender a estrutura a termo da taxa de juros de mercados de títulos.

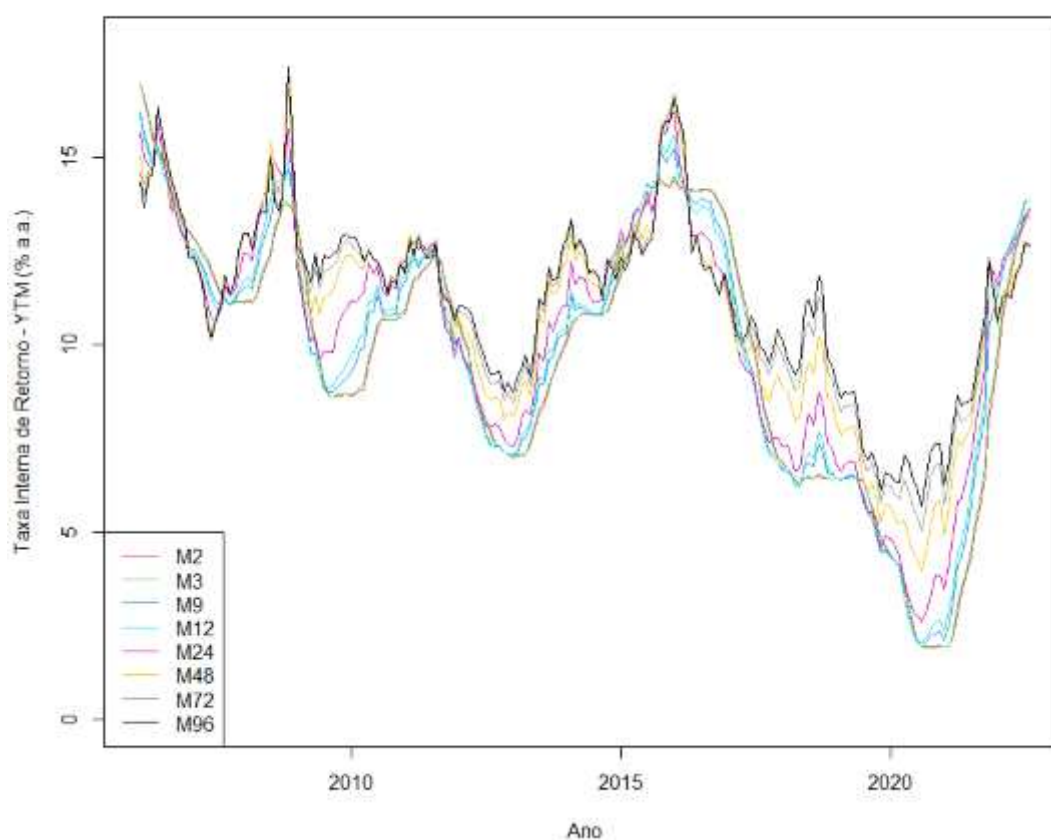
2.1 UMA APRECIÇÃO DO MERCADO BRASILEIRO DE JUROS

Inicia-se com uma avaliação preliminar do mercado brasileiro de juros. São utilizados contratos de futuros de depósito interfinanceiro (DI-futuro), cujas taxas seguem as do mercado de títulos do Tesouro Nacional, porém com maior liquidez.

No presente trabalho são avaliadas as *yields* de contratos de DI-futuro com maturidades de um a 120 meses. Dados de contratos a partir de um dia são extraídos da B3 e suavizados em um ajuste de *spline* cúbico², formando uma base de 4104 ob-

² Dados disponíveis em: <https://www2.bmf.com.br/pages/portal/bmfbovespa/lumis/lum-taxas-referenciais-bmf-ptBR.asp>. Código disponível em: https://github.com/werleycordeiro/Brazil_Yield_Curve/blob/master/DI-Pre.R

Figura 2 – *Yields* de títulos em duas dimensões



NOTAS: Taxa Interna de Retorno (YTM) dos títulos do final do mês com vencimentos de 2, 3, 9, 12, 24, 48, 72 e 96 meses. Os dados são calculados a partir de derivativos da B3 suavizados com *spline* cúbico. O período amostral é de janeiro de 2006 a julho de 2022.

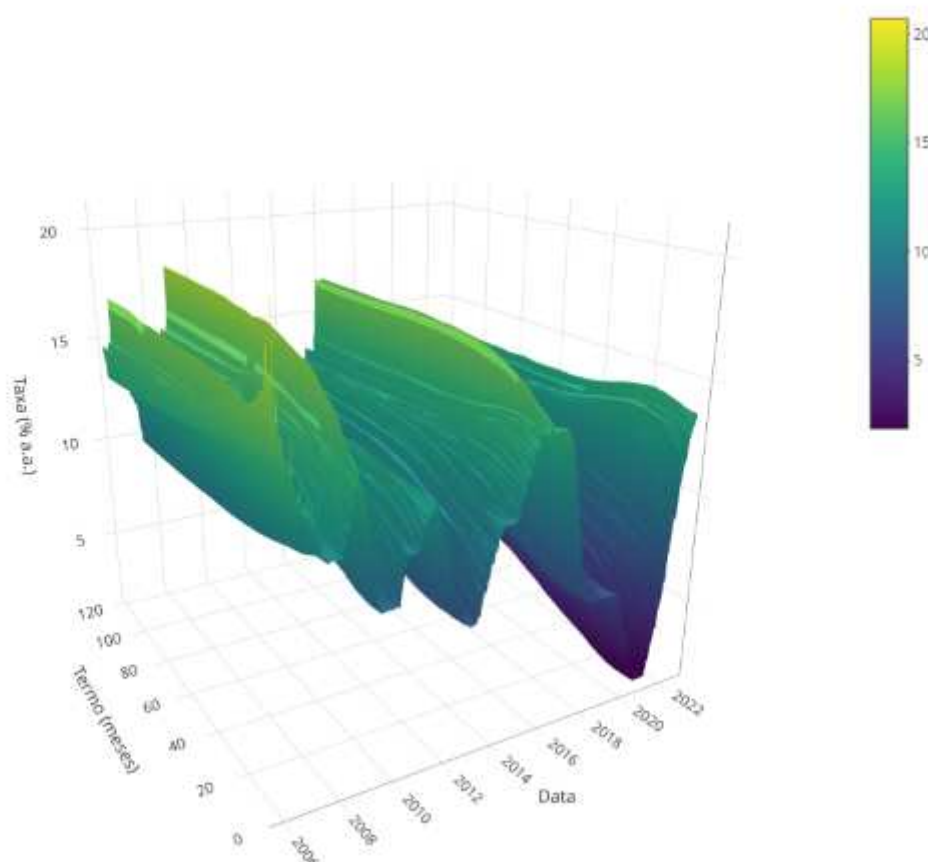
servações, de 02/01/2006 a 08/08/2022, para cada maturidade. Para análises mensais, as *yields* são amostradas no último dia de negociação do mês t . São utilizadas as *yields* de contratos prestes a vencer para medir a taxa livre de risco de curto prazo, r_t^* como em Dusak (1973) e Adrian, Crump e Moench (2013).

A Tabela 1 apresenta estatísticas descritivas para a taxa livre de risco de curto prazo e *yields* em vários vencimentos, onde se notam alguns fatos estilizados sobre a curva de juros. Primeiro, as *yields* médias no tempo - a “curva de juros médios” - aumentam com o vencimento, o que pode indicar prêmios de risco a termo, talvez devido à aversão ao risco³, preferências de liquidez⁴ ou segmentação de mercados. Em segundo lugar, as volatilidades dos rendimentos diminuem com o vencimento, presumivelmente porque as taxas longas envolvem médias das taxas curtas futuras esperadas. Em terceiro lugar, os rendimentos são altamente persistentes, como evidenciado auto-

³ Vale citar outro fato estilizado neste tema, preços de títulos mais longos têm maior sensibilidade a variações nas *yields*

⁴ Títulos mais curtos são mais abundantes no mercado

Figura 3 – Estrutura a Termo da Curva de Juros



Fonte: Elaborado pelo Autor. NOTAS: *yields* de títulos com vencimentos que variam de 1 mês a 10 anos. Os dados são calculados a partir de derivativos da B3 suavizados com *spline* cúbico. O período amostral é de 02/01/2006 a 08/08/2006.

correlações de 1 e 12 meses.

Tabela 1 – Estatísticas descritivas para *yields*

	\bar{y}	$\hat{\sigma}_y$	$\hat{\rho}_y(1)$	$\hat{\rho}_y(12)$
M2	9.77	3.50	0.99	0.49
M3	9.78	3.50	0.99	0.48
M9	9.91	3.44	0.99	0.46
M12	9.98	3.41	0.99	0.46
M24	10.30	3.21	0.98	0.47
M48	10.81	2.77	0.97	0.47
M72	11.10	2.50	0.96	0.45
M96	11.25	2.34	0.95	0.42

Fonte: Elaborado pelo Autor. NOTAS: Estatísticas descritivas para *yields* de fim de mês em vários vencimentos: média amostral, desvio padrão amostral e autocorrelações amostrais de primeira e décima segunda ordem. O período amostral é de janeiro de 2006 a julho de 2022.

A Tabela 2 mostra as mesmas estatísticas descritivas para hiato entre *yields* de títulos de diferentes maturidades em relação aos de 10 anos. Sua dinâmica contrasta fortemente com as *yields*; em particular, os hiatos são menos voláteis e menos persistentes. Tal como acontece com as *yields*, observam-se altas autocorrelações do hiato de 1 mês, que, por outro lado, decaem mais rapidamente, de modo que as autocorrelações do hiato de 12 meses são menores. Como se percebe, o módulo do hiato médio \bar{s} é maior para maturidades menores e vai caindo à medida que elas crescem. Isto pode ser um indício de um prêmio pelo risco a termo, que no caso cresce com o aumento da maturidade dos título.

Tabela 2 – Estatísticas descritivas para hiato entre *yields*

	\bar{s}	$\hat{\sigma}_s$	$\hat{\rho}_s(1)$	$\hat{\rho}_s(12)$
M2	-1.48	1.92	0.93	0.11
M3	-1.47	1.89	0.93	0.11
M9	-1.34	1.69	0.94	0.10
M12	-1.27	1.60	0.94	0.11
M24	-0.95	1.24	0.94	0.17
M48	-0.44	0.60	0.94	0.29
M72	-0.15	0.22	0.93	0.36

Fonte: Elaborado pelo Autor. NOTAS: Estatísticas descritivas para hiato entre *yields* no final do mês (relativo ao título de 10 anos) em vários vencimentos: média amostral, desvio padrão amostral e autocorrelações amostrais de primeira e décima segunda ordem. O período amostral é de janeiro de 2006 a julho de 2022.

2.2 O PREÇO DO RISCO NO MERCADO FUTURO DE JUROS

Esta seção apresentará conceitos básicos do mercado futuro de juros, fará a exposição e avaliação de uma versão da Hipótese das Expectativas (HE) em mercados eficientes para o mercado em análise e discutirá a presença de prêmio de risco neste ambiente.

2.2.1 Conceitos Básicos de Curva de Juros e Fatos Estilizados

O bloco de construção mais básico da análise de renda fixa é um título zero cupom livre de risco de inadimplência - ZC⁵. Seu titular tem o direito a R\$ 1 em termos nominais no vencimento. Seja $P_t(n)$ o preço de um ZC de vencimento em n períodos no tempo t :

$$P_t(n) = \exp(-ny_t(n)) \quad (1)$$

onde $y_t(n)$ são as *yields*, o rendimento continuamente composto anualizado desse título, também conhecido como *Yield To Maturity*. Esse título paga ao detentor R\$1 no tempo $t + n$, de forma livre de risco, gerando o seguinte cálculo para as *yields* de t até $t + n$:

$$y_t(n) = -\frac{1}{n} \ln(P_t(n)) \quad (2)$$

A qualquer momento, títulos de vencimentos diferentes terão *yields* diferentes. Uma curva de juros é uma função que mapeia vencimentos em *yields* em um determinado ponto no tempo. Graficamente, é uma plotagem de $y_t(n)$ contra n . A Figura 3 mostra a ETTJ. Como fica claro na figura, um fato estilizado é que a curva de rendimento se inclina para cima em média. Isso tem repercussões importantes para a engenharia reversa da curva de juros para obter expectativas e prêmios de prazo, como salientam Gürkaynak e Wright (2012).

Uma ferramenta essencial da análise da estrutura a termo é o log-retorno $r_{t+m}(n-m)$ de manter o título por m períodos. Trata-se do log-retorno da compra de um ZC de n períodos no tempo t e depois vendê-lo, como um ZC de $(n-m)$ períodos, no tempo $t + m$. Este retorno é:

$$r_{t+m}(n-m) = \frac{1}{m} [\ln P_{t+m}(n-m) - \ln P_t(n)] \quad (3)$$

⁵ A exemplo de Gürkaynak e Wright (2012), títulos públicos são tomados como, para todos os fins práticos, isentos de risco de inadimplência nominal, o que parece razoável para um país cuja dívida soberana é denominada majoritariamente em moeda doméstica. Vale ressaltar que o valor de qualquer título nominal sofre do risco de ser corroído pela inflação, além do risco cambial.

Vale observar que um investidor que compre um título que vencerá em n períodos para mantê-lo por $m = n$ períodos auferirá, sem risco, um retorno igual às *yields* deste título, $y_t(m)$. Note que, para $m = 1$, expressa-se a já mencionada taxa livre de risco de curto prazo r^* :

$$r_t^* = y_t(1) = -\ln P_t(1) \quad (4)$$

A Tabela 3 apresenta estatísticas descritivas para o log-retorno $r_{t+m}(n-m)$ (%a.a.) de se manter o título por um mês, como referido em (3), para vários vencimentos. A Figura 4 ilustra o comportamento deste retorno ao longo do tempo. Há evidência adicional para a hipótese de risco a termo, se observarmos o maior desvio padrão amostral no log-retorno de títulos mais longos. Vale notar que o retorno médio aumenta nesse mesmo sentido, o que pode indicar prêmio para esse risco. Uma diferença significativa entre a média estimada dos log-retornos de títulos curtos e a taxa livre de risco pode indicar que o risco de termo não seria o único em atuação no mercado. Também se percebe forte contraste com as *yields*, em particular no caso de títulos mais longos, onde há maior volatilidade e menor persistência. É possível notar um rápido aumento nos desvios-padrão amostrais e queda nas autocorrelações do log-retorno de um mês.

Tabela 3 – Estatísticas descritivas para log-retorno de um mês

	\bar{r}	$\hat{\sigma}_r$	$\hat{\rho}_r(1)$	$\hat{\rho}_r(12)$
M2	0.82	0.30	0.97	0.49
M3	0.82	0.31	0.96	0.47
M9	0.85	0.44	0.68	0.23
M12	0.87	0.56	0.54	0.13
M24	0.94	1.19	0.28	0.00
M48	1.01	2.62	0.15	-0.01
M72	1.03	4.08	0.10	0.01
M96	1.05	5.54	0.08	0.02

Fonte: Elaborado pelo Autor. NOTAS: Estatísticas descritivas para log-retorno (%a.m.) de manter títulos de diferentes vencimentos por um mês: média amostral, desvio padrão amostral e autocorrelações amostrais de primeira e décima segunda ordem. O período amostral é de janeiro de 2006 a julho de 2022.

São definidas a diferença entre o retorno calculado em (3) e as *yields* de m períodos como o log-retorno em excesso de manter o título pelos m períodos, $rx_{t+m}(n-m)$:

$$rx_{t+m}(n-m) = r_{t+m}(n-m) - y_t(m) \quad (5)$$

Deste modo, o “excesso” referido se trata do retorno obtido além daquele que seria possível sob uma estratégia de investimento “risco-zero”. Refere-se a um cálculo contábil, um prêmio de risco *ex post*, no qual se considera apenas a diferença da

rentabilidade obtida entre dois portfólios. Portanto, as expectativas dos investidores não são levadas em conta nesse cálculo, e serão abordadas a seguir.

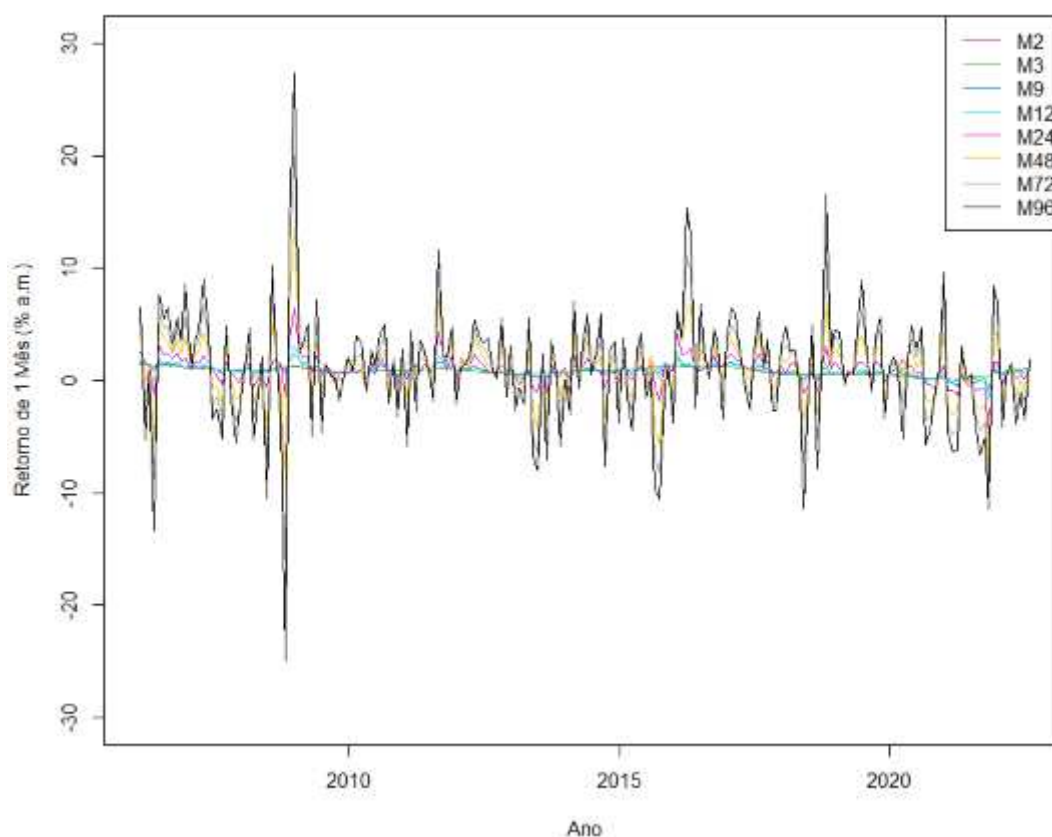
2.2.2 A Hipótese das Expectativas

O uso de contratos futuros como preditores do preço dos ativos no futuro baseia-se na hipótese de expectativas racionais em mercados financeiros eficientes, os quais inviabilizam ganhos com arbitragem. Nestas circunstâncias, presume-se que os agentes negociam de modo que se gerem preços de equilíbrio nos contratos futuros que expressem suas reais expectativas quanto ao preço do ativo no futuro, dado o conjunto de informações disponíveis no presente.

A Hipótese de Expectativas é o modelo de referência da ETTJ (GÜRKAYNAK; WRIGHT, 2012). Em sua forma forte⁶, afirma que os investidores precificam todos os

⁶ Em sua forma fraca, permite um prêmio constante de longo prazo sobre a taxa de juros média esperada de curto prazo, que varia entre maturidades, mas não com o tempo.

Figura 4 – Log-retorno de um mês



NOTA log-retorno (%a.a.) de manter o título por 1 mês em duas dimensões, para títulos com vencimentos de 2, 3, 9, 12, 24, 48, 72 e 96 meses. Os dados são calculados a partir de derivativos da B3 suavizados com *spline* cúbico. O período amostral é de janeiro de 2006 a julho de 2022.

títulos como se fossem neutros em relação ao risco, de modo que as *yields* de longo prazo sejam iguais à média das taxas de juros de curto prazo esperadas até a data de vencimento. Seguindo Della Corte, Sarno e Thornton (2008) e Gürkaynak e Wright (2012), temos, sob a HE:

$$y_t(n) = \frac{m}{n} \sum_{i=0}^{\frac{n}{m}-1} \mathbb{E}_t[y_{t+mi}(m)] = n^{-1} \mathbb{E}_t\left[\sum_{i=0}^{n-1} y_{t+i}(1)\right] \quad (6)$$

onde \mathbb{E} representa o operador de expectativa.

Em outras palavras, sob a Hipótese de Expectativas, os investidores se preocupam apenas com os resultados esperados (médias das distribuições de probabilidade), sendo indiferentes entre dois ativos de mesmo retorno esperado, mas distintos níveis de incerteza. Isso implica que os retornos em excesso esperados são zero:

$$\mathbb{E}_t[rx_{t+m}(n-m)] = \mathbb{E}_t[r_{t+m}(n-m) - y_t(m)] = 0 \quad (7)$$

Assim, sob a Hipótese de Expectativas, o retorno em excesso esperado de se manter um contrato por qualquer período m é zero, pois em mercados financeiros eficientes e racionais, é impossível elaborar uma estratégia de negociação baseada em todas as informações relevantes que leve à obtenção de ganhos com arbitragem.

Além de futuros de títulos públicos, a hipótese de expectativas também pode ser testada para mercados de derivativos de outros ativos. Baumeister (2023) testa esta hipótese para o mercado futuro de uma série de *commodities* a partir do seguinte modelo de regressão, sob H_0 de que o coeficiente linear seja igual a zero, e o angular a um, que denotaria os preços dos futuros como expectativa racional dos preços à vista no futuro:

$$\frac{P_{t+n-1}(1) - P_{t-1}(1)}{P_{t-1}(1)} = \alpha + \beta \frac{P_t(n) - P_{t-1}(1)}{P_{t-1}(1)} + \varepsilon_{t+n} \quad (8)$$

No modelo de Baumeister (2023), a variável dependente é a mudança percentual⁷ no preço à vista entre o período t e $t+n$, regredida sobre a base, $P_t(n) - P_{t-1}(1)$, definida como a diferença entre o preço do ativo em contratos futuros, com data de entrega n períodos a frente de t , e o preço atual do ativo à vista $P_t(0)$ aproximado por $P_{t-1}(1)$. Isto é testado em Baumeister (2023) para uma série de *commodities* minerais e energéticos e, em linha com estudos anteriores⁸, a hipótese conjunta de mercados eficientes, com expectativas não enviesadas, é rejeitada para a maioria dos produtos. No entanto, os coeficientes angulares se apresentaram significativamente diferentes de

⁷ A não opção de Baumeister (2023) pela mais usual log-mudança se dá pelos altos níveis de flutuação nos preços dos mercados estudados, tornando inapropriada a aproximação log-linear

⁸ Hansen e Hodrick (1980), Fama e Bliss (1987), Froot (1989), Sack (2004), Piazzesi e Swanson (2008), Chinn e Coibion (2014), dentre outros.

zero para todos os *commodities* energéticos, demonstrando existir algum componente preditivo em seus contratos futuros.

Como discutido anteriormente, a curva de juros que seria realizada com agentes racionais na ausência de arbitragem sob neutralidade de risco é descrita pela HE, tornando-se o referencial natural para o estudo da ETTJ. Esta hipótese será testada de forma análoga a (8), adaptada para o mercado de derivativos de títulos públicos, onde será avaliado o log-retorno de se manter o título por um período (i.e., $m = 1$) em relação à taxa livre de risco r_t^* :

$$r_{t+1}(n-1) = \alpha + \beta r_t^* + \varepsilon_{t+1}, \quad (9)$$

onde $r_t^* = y_t(1)$.

Os coeficientes α e β estimados a partir da equação (9) por MQO são resumidos na Tabela 4, juntamente com os p -valores associados às várias hipóteses. A tabela também apresenta o R^2 para aferir o poder explicativo da taxa livre de risco do mês para o retorno de deter o título por este mês.

Tabela 4 – Testes da Hipótese das expectativas

Venc. meses	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$ (Erro P.)	$H_0^I : \alpha, \beta = 0$	$H_0^{II} : \beta = 1$	$H_0^{III} : \alpha = 0, \beta = 1$	R^2 Ajustado
2	-0.000	1.023*** (0.011)	0.000	0.043	0.004	0.977
3	-0.000	1.034*** (0.015)	0.000	0.021	0.000	0.961
9	-0.001	1.165*** (0.068)	0.000	0.016	0.007	0.598
12	-0.001	1.246*** (0.105)	0.000	0.020	0.012	0.416
24	-0.003	1.521*** (0.270)	0.000	0.055	0.032	0.135
48	-0.005	1.816*** (0.630)	0.004	0.197	0.144	0.036
72	-0.006	1.978** (0.991)	0.047	0.325	0.289	0.015
96	-0.007	2.188 (1.348)	0.106	0.379	0.380	0.008

Fonte: Elaborado pelo Autor. NOTAS: Estatísticas descritivas do teste da equação (9) para maturidades de 2, 3, 9, 12, 24, 48, 72 e 96 meses. Um, dois e três asteriscos indicam se α e β são significativamente diferentes de zero nos níveis de 10%, 5% e 1%, respectivamente. Todos os testes t e *Wald* foram calculados com base em erros padrão Newey-West robusto à heterocedasticidade e autocorrelação (HAC). Para as três hipóteses nulas, são relatados p -valores assintóticos. Os dados são calculados a partir de derivativos da B3 suavizados com *spline* cúbico. O período amostral é de janeiro de 2006 a julho de 2022.

A hipótese conjunta de não previsibilidade, H_0^i , é rejeitada decisivamente para a maior parte das maturidades, indicando haver informações úteis para a análise da ETTJ nos coeficientes estimados. Analisando cada coeficiente, percebe-se que os coeficientes de inclinação $\hat{\beta}$, são positivos e, em maioria, estatisticamente diferentes de zero, como esperado. A HE, explicitada em H_0^{ii} , pode ser rejeitada ao menos em maturidades menores. Para maturidades maiores, a estimação dos coeficientes se torna menos precisa. O erro padrão das estimativas é substancial para maturidades maiores, com β s em nível superior, porém com menor poder explicativo. Embora os coeficientes de inclinação estimados sejam maiores que um e crescentes com a maturidade, na maioria dos casos a taxa livre de risco aparenta ser um preditor não-enviesado do retorno de um mês. Isto pois o poder explicativo parece se restringir a β , dada a baixa significância dos α estimados, o que pode indicar ausência de um componente sistemático nos erros de previsão Baumeister (2023). Em H_0^{iii} é testado um modelo sem intercepto, sob a hipótese de $\beta = 1$. Esta hipótese é rejeitada a 1% para os títulos com maturidade até de 12 meses, favorecendo a hipótese de que a expectativa racional para os retornos - a taxa livre de risco - não é realizada. Vale notar que para as maturidades de 2 e 3 meses, as estimativas pontuais estão bem próximas de um, sugerindo que os movimentos no retorno de um mês se aproximam dos da taxa livre de risco para títulos de menor prazo.

Há evidência estatística de previsibilidade de futuras mudanças no retorno na maior parte dos casos, e a taxa livre de risco é capaz de explicar quase todo o retorno de um mês para maturidades curtas, capacidade que cai drasticamente para aquelas mais longas, as quais apresentam o R^2 mais baixo. Esta evidência está de acordo com conclusões anteriores em outros contextos onde a hipótese de expectativas imparciais também foi consistentemente rejeitada⁹.

Söderlind e Svensson (1997) fornecem uma boa ilustração do que determina se o coeficiente angular na equação (8) é diferente da unidade (i.e., em que medida o prêmio de risco é variável no tempo). Assumindo que a covariância é constante ao longo do tempo, eles derivam a seguinte expressão para o coeficiente de inclinação na presença de um prêmio de risco $rp_t(n, m) = P_t(n) - \mathbb{E}_t[P_{t+m}(n - m)]$:

$$\beta = 1 - \frac{\sigma_{rl}(\sigma_{rl} + \rho_{rl})}{1 + \sigma_{rl}^2 + 2\sigma_{rl}\rho_{rl}} + \gamma \quad (10)$$

onde

$$\sigma_{rl} = \frac{std(RP_t(n))}{std(\mathbb{E}_t[\frac{P_{t+m}(n-m) - P_t(n)}{P_t(n)}])} \quad (11)$$

⁹ Para evidências sobre taxas de juros a termo, consulte Fama e Bliss (1987), Froot (1989), Chernenko, Schwarz e Wright (2004), Cochrane e Piazzesi (2005) e Gürkaynak e Wright (2012), dentre outros.

$$\rho_{rl} = \text{corr}(RP_t^n, \mathbb{E}_t[\frac{P_{t+m}(n-m) - P_t(n)}{P_t(n)}]) \quad (12)$$

e γ captura alguns erros sistemáticos de expectativas, ou seja, desvios das expectativas do mercado em relação às expectativas racionais que podem surgir de pequenas amostras, aprendizado, ou expectativas verdadeiramente irracionais, mas geralmente são consideradas pequenas (ver também Ferrero e Nobili (2008)). A medida em que β se desvia da unidade depende da razão entre o desvio padrão do prêmio de risco e o desvio padrão da variação esperada do preço à vista (σ_{rl}) e da correlação entre o prêmio de risco e a variação esperada do preço (ρ_{rl}). Assim, um coeficiente de regressão unitário poderia resultar de um prêmio de risco constante ($\rho_{rl} = 0$) ou de uma combinação compensatória entre a correlação e a volatilidade relativa ($\rho_{rl} = -\sigma_{rl}$), tornando o hiato entre os preços de futuros e à vista um preditor imparcial. Um coeficiente de correlação zero ou positivo implica um valor monotonicamente decrescente para o coeficiente angular entre zero e um. Neste caso, o coeficiente estimado será próximo à unidade se a volatilidade do prêmio de risco for pequena em relação à volatilidade da mudança de preço esperada. Estimativas de coeficientes de inclinação negativos ou superiores a um são uma indicação de que a correlação é negativa. Se a correlação for fortemente negativa, pequenas mudanças no σ_{rl} em torno da unidade podem levar a grandes mudanças no β estimado. Para σ_{rl} ligeiramente abaixo de um, é então possível obter estimativas de coeficiente de um. Isso fornece alguma intuição de como o prêmio de risco afeta o coeficiente angular β .

2.2.3 Prêmio de Risco Variante no Tempo

Partindo da hipótese de expectativas racionais e sob agentes neutros ao risco, a taxa livre de risco, no caso de *ZC*, e a base, $P_t(n) - P_t(0)$, no caso de *commodities*, deveriam ser estimadores não enviesados da mudança no preço à vista dos ativos. Em diversos casos, isso não se reflete nos dados, como apresentado na última sessão. Uma explicação é que os agentes sejam avessos ao risco, cobrando um prêmio por assumi-lo. Chernenko, Schwarz e Wright (2004) trabalha uma gama de possíveis explicações para tais resultados, e conclui que a presença de aversão ao risco em mercados futuros parece ser o motivo mais plausível, em linha com Friedman e Savage (1948). Esse prêmio pode ser variável ao longo do tempo, guardando uma relação com variáveis econômicas reconhecida pelos agentes racionais, que a embutirão na precificação do contrato futuro.

Mesmo sob aversão ao risco, a precificação de diferentes fluxos de caixa contingentes deve ser internamente consistente para evitar oportunidades de arbitragem. Mais precisamente, a ausência de arbitragem implicaria que existe uma variável aleatória estritamente positiva, M_{t+1} , chamado de fator de desconto estocástico ou *kernel* de

precificação, capaz de trazer a valor presente o preço de qualquer ativo, descontado por um prêmio de risco também estocástico, de modo que o preço de qualquer ativo no tempo t obedeça à relação de precificação:

$$P_t = \mathbb{E}_t[M_{t+1}P_{t+1}] \quad (13)$$

onde o preço no tempo $t + 1$ inclui qualquer pagamento de dividendo ou cupom que tenha sido recebido.

Como o principal de um ZC de n períodos é determinístico, igual a R\$ 1 no vencimento, a equação (13) implica que no período $t + n - 1$, quando falta um último período para o vencimento do título, seu preço será:

$$P_{t+n-1}(1) = \mathbb{E}_{t+n-1}[M_{t+n}] \quad (14)$$

Resolvendo (14) recursivamente e usando a lei das expectativas iteradas, o preço do título em t será:

$$P_t(n) = \mathbb{E}_t\left[\prod_{i=1}^n M_{t+i}\right] \quad (15)$$

A equação (15) não assume neutralidade de risco, podendo haver um hiato entre as *yields* de longo prazo e a média esperada das taxas de juros de curto prazo, denominado log-prêmio de risco $rp_t(n,m)$:

$$rp_t(n) = y_t(n) - n^{-1} \mathbb{E}_t\left[\sum_{i=0}^{n-1} y_{t+i}(1)\right] \quad (16)$$

que compensa investidores pelo risco de perda de capital se um título de longo prazo for vendido antes do vencimento e/ou tiver seu valor corroído pela inflação. Vale ressaltar que, embora o pagamento de um título no vencimento seja conhecido com certeza, seu valor de revenda antes do vencimento depende da trajetória incerta das taxas de juros futuras de curto prazo.

A equação (16) é efetivamente uma definição “contábil” do prêmio de risco: por construção, qualquer mudança nos rendimentos de longo prazo que não seja acompanhada por uma mudança correspondente nas expectativas de taxas de juros futuras de curto prazo deve resultar em uma mudança no prêmio de risco. Qualquer diferença entre as *yields* e as expectativas reais é sempre definida como prêmio de risco.

De forma mais geral, considerando a possibilidade de negociar contratos em mercado secundário antes de seu vencimento, e para o caso de derivativos cujo valor

do contrato no vencimento não é necessariamente igual a R\$ 1, como as *commodities* estudadas por Baumeister (2023), a condição de equilíbrio seria¹⁰:

$$\mathbb{E}_t[M_{t+m}(P_{t+m}(n-m) - P_t(n))] = 0 \quad (17)$$

Resolvendo para o preço dos futuros, temos:

$$\begin{aligned} P_t(n) &= \frac{\mathbb{E}_t[M_{t+m}P_{t+m}(n-m)]}{\mathbb{E}_t[M_{t+m}]} \\ &= \frac{\mathbb{E}_t[M_{t+m}]\mathbb{E}_t[P_{t+m}(n-m)] + \text{cov}_t(M_{t+m}, P_{t+m}(n-m))}{\mathbb{E}_t[M_{t+m}]} \\ &= \mathbb{E}_t[P_{t+m}(n-m)] + \frac{\text{cov}_t(M_{t+m}, P_{t+m}(n-m))}{\mathbb{E}_t[M_{t+m}]} \end{aligned} \quad (18)$$

Assim, como visto anteriormente, o preço dos contratos futuros tem dois componentes: a expectativa em si do preço à vista do ativo no futuro, e o prêmio de risco, associado a fatores de risco sistemáticos não-diversificáveis. Este último varia no tempo, refletindo mudanças no nível de risco percebido pelos agentes dadas alterações no cenário macroeconômico, além de alterações no perfil destes agentes, cujo nível de aversão ao risco não é, *a priori*, constante.

A discussão anterior também destaca que testar a eficiência ou imparcialidade do mercado só faz sentido em conjunto com a especificação de um modelo de precificação de ativos que, no caso da equação (3), equivale a postular um modelo econômico para o prêmio de risco. A decomposição na equação (3) deixa claro que, se houvesse uma medida direta do prêmio de risco, ou conhecimento do processo que o gerou, seria possível ajustar o preço futuro e usá-lo para inferir o preço esperado pelo mercado. De fato, Dai e Singleton (2002) mostram que projeções de retornos ajustados ao risco na inclinação da ETTJ produzem um coeficiente β unitário, mas somente se o modelo de precificação de ativos capturar com precisão o comportamento dinâmico dos prêmios de risco. Isso levanta a questão de como melhor modelar os prêmios de risco, e em última instância, a própria ETTJ.

¹⁰ Vale ressaltar que, diferentemente das equações anteriores, neste caso não há log-linearização.

3 MODELOS DE FATORES DINÂMICOS E COMPONENTES PRINCIPAIS

Uma classe de modelos que vem sendo aplicada de forma promissora na modelagem de prêmios de risco e da ETTJ são os modelos de fatores dinâmicos - DFM, na sigla em inglês. Caldeira *et al.* (2016) modelam a ETTJ brasileira a partir de um DFM livre de arbitragem, resultando em performance significativamente superior a modelos de referência¹, em especial para horizontes de previsão mais longos. O mesmo sucesso de DFMs para modelagem da ETTJ dos EUA ocorre em diferentes abordagens, como em Caldeira, Moura e Santos (2016a) e Adrian, Crump e Moench (2013). Neste último é apresentada uma metodologia que será tratada com mais proximidade no presente trabalho.

A premissa dos DFM é que a dinâmica comum de um grande número de variáveis de séries temporais decorre de um número relativamente pequeno de fatores não observáveis (ou latentes), que por sua vez evoluem ao longo do tempo. DFMs podem ser paramétricos (métodos de espaço de estado) ou não paramétricos (componentes principais e métodos de mínimos quadrados relacionados). O segundo caso será explorado ao longo desta seção.

O que faz o DFM se destacar para aplicações macroeconômicas é que os movimentos complexos de um número potencialmente grande de séries observáveis são resumidos por um pequeno número de fatores comuns, que impulsionam as flutuações comuns de todas as séries. Como Stock e Watson (2016) salientam, os DFMs costumam se ajustar bem aos dados, sendo comum obter alta capacidade explicativa com apenas alguns componentes principais. A principal restrição do DFM de um pequeno número de fatores latentes é consistente com as teorias macroeconômicas de equilíbrio dinâmico. Mesmo modelos essencialmente estatísticos² encontram interpretação econômica, na ideia de que um único índice pode descrever os co-movimentos de muitas variáveis macroeconômicas - no caso, *yields* de várias maturidades. Além disso, técnicas recentes e a atual disponibilidade de grandes conjuntos de dados vêm permitindo que os DFMs sejam estimados sem limites práticos ou computacionais no número de variáveis. Previsões baseadas em grandes DFMs têm conjuntos de informações ricos, mas ainda envolvem um número gerenciável de preditores, que são as estimativas dos fatores latentes, e o fazem sem impor restrições como esparsidade nas variáveis originais, usadas por alguns algoritmos de aprendizado de máquina.

¹ Além de outros DFM irrestritos, Caldeira, Moura e Santos (2016b) utilizam o passeio aleatório como *benchmark*, como é feito no presente trabalho

² como é o caso de abordagens do tipo Nelson-Siegel Dinâmicas

3.1 OS COMPONENTES PRINCIPAIS NO MERCADO BRASILEIRO DE TÍTULOS

Modelos multivariados são necessários para conjuntos de *yields* de títulos. Autotregressões vetoriais irrestritas desperdiçam graus de liberdade e sofrem da maldição da dimensionalidade. Moura, Santos e Ruiz (2020) tratam esta questão através de modelos multivariados dos tipos Volatilidade Estocástica (SV) com métodos de encolhimento, obtendo performance consistentemente superior a modelos de referência, como Correlação Condicional Dinâmica (DCC) e SV sem encolhimento. Outra alternativa, a ser trabalhada nesta seção, seria encontrar algum tipo de VAR restrito que comandem a dinâmica de retornos dos diversos ativos financeiros exibindo uma estrutura de fatores, como descrito na seção anterior. De fato, a estrutura fatorial é onipresente nos mercados financeiros, na teoria econômica financeira, nos fundamentos macroeconômicos e na teoria macroeconômica. Campbell, Lo e MacKinlay (2012), por exemplo, discutem aspectos da estrutura fatorial empírica em mercados financeiros e estrutura fatorial teórica em modelos econômicos financeiros³. Da mesma forma, Aruoba e Diebold (2010) discutem a estrutura fatorial empírica em fundamentos macroeconômicos, e Diebold e Rudebusch (1996) discutem a estrutura fatorial teórica em modelos macroeconômicos.

A estrutura de fatores, como previamente apresentado, opera em situações em que se vê um objeto de alta dimensão conduzido por um conjunto subjacente de objetos de dimensão inferior, ou “fatores”. Assim, sob um conjunto de observações aparentemente complicadas de alta dimensão, encontra-se uma realidade muito mais simples. Em particular, a estrutura de fatores fornece uma boa descrição da ETTJ. A maioria dos primeiros estudos envolvendo principalmente taxas longas adotaram implicitamente uma visão de mundo de fator único (por exemplo, Macaulay *et al.* (1938), onde o fator é o nível (por exemplo, uma taxa longa). Da mesma forma, os primeiros modelos livres de arbitragem, como Vasicek (1977), envolveram apenas um único fator. No entanto, como afirmam Stock e Watson (2016), a estrutura de fator único limita severamente o escopo para dinâmicas de estrutura de termos interessantes, que soam vazias em termos de introspecção e observação.

A Figura 5 apresenta um gráfico de série temporal dos fatores dinâmicos de um conjunto de *yields* de títulos, estimados por componentes principais, como será visto na próxima seção. São expostos os cinco componentes principais, calculados com os dados de todos os dias, e não só do último do mês como no resto do trabalho. Tratam-se de 4104 observações, de 02/01/2006 a 08/08/2022, para cada uma das 120 maturidades. É perceptível a tendência a moverem-se juntos, provavelmente sob operação de mais do que apenas um fator de nível comum. É costume na literatura sobre

³ Como será exposto nas próximas seções, a precificação de ativos na estrutura de fatores está intimamente relacionada à precificação na estrutura de fator de desconto estocástico, conforme discutido em Singleton (2006).

ETTJ que se envolvam múltiplos fatores, reconhecimento que remonta a Litterman e Scheinkman (1991), Willner (1996), Bliss (1997) e outros. Joslin, Pribsch e Singleton (2014), por exemplo, observa que as correlações cruzadas das *yields* dos títulos para uma ampla gama de maturidades são bem descritas por um modelo de fator de baixa dimensão.

Assim, poucos componentes principais são suficientes para explicar a variação das *yields*. No conjunto de dados em estudo, os cinco primeiros componentes principais explicam quase toda a variação nas *yields* dos títulos, como ilustra a Tabela 5. A Figura 5 mostra os componentes principais ao longo do tempo, cujas estatísticas descritivas se encontram na Tabela 6. A Figura 6 apresenta os pesos dos fatores em função das maturidades.

Tabela 5 – Proporção cumulativa da variância explicada pelos componentes principais

PC1	PC2	PC3	PC4	PC5	PC6
96,5%	99,4%	99,9%	99,9%	100,0%	100,0%

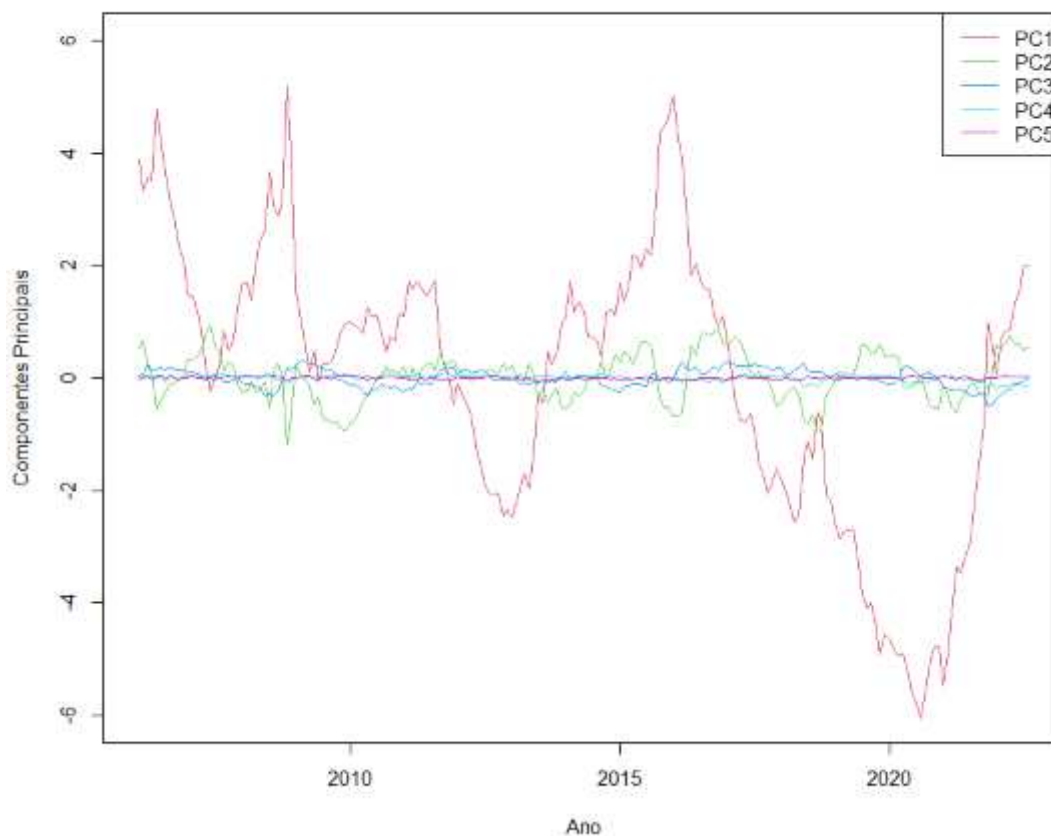
Fonte: Elaborado pelo Autor. NOTAS: Proporção cumulativa da variância explicada pelos primeiros seis componentes principais das *yields* de títulos com vencimentos de um a 120 meses, em termos percentuais. O período amostral é de 02/01/2006 a 08/08/2022.

Tabela 6 – Estatísticas descritivas para componentes principais

	$\hat{\sigma}$	$\hat{\rho}(1)$	$\hat{\rho}(12)$	R^2
PC1	2.49	0.97	0.47	0.96
PC2	0.43	0.85	-0.25	0.72
PC3	0.16	0.91	-0.03	0.82
PC4	0.06	0.84	0.05	0.69
PC5	0.02	0.54	-0.01	0.33

Fonte: Elaborado pelo Autor. NOTAS: Estatísticas descritivas para os cinco primeiros componentes principais das *yields* de títulos no final do mês com vencimentos de 2, 3, 9, 12, 24, 48, 72 e 96 meses. São exibidos o desvio padrão amostral do componente principal, autocorrelações amostrais de primeira e décima segunda ordem e o R^2 preditivo (ver Diebold e Kilian (2001)) de um modelo de aproximação AR(p) com p selecionado usando o critério de Akaike. Os dados são calculados a partir de derivativos da B3 suavizados com *spline* cúbico. O período amostral é de 02/01/2006 a 08/08/2022.

O primeiro fator parece não ser estacionário. Se mantém positivo por grande parte do período até sofrer uma abrupta queda na pandemia e posterior recuperação. O primeiro fator é o mais variável, mas também o mais previsível, devido à sua persistência muito elevada. O segundo fator também é persistente, e pode aparentar um ritmo de ciclo de negócios. O segundo fator é menos variável, menos persistente e menos previsível do que o fator de nível, e os outros fatores parecem seguir essa direção.

Figura 5 – Componentes principais das *yields*

Fonte: Elaborado pelo Autor. NOTAS: Primeiros cinco componentes principais dos *yields* dos títulos. O período amostral é de 02/01/2006 a 08/08/2022.

3.2 ESTRUTURA BÁSICA DE MODELOS DE FATORES DINÂMICOS

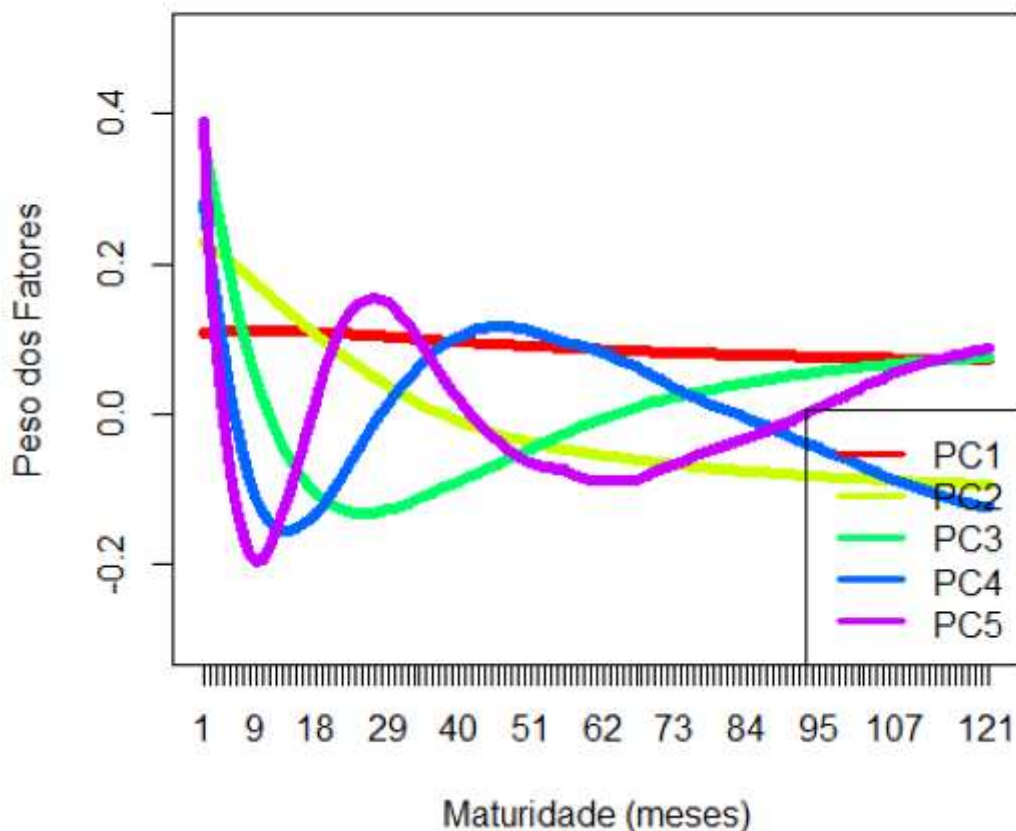
A estrutura básica do DFM parte de um vetor Y_t de N variáveis de séries temporais observadas como dependentes de um número reduzido k de fatores não-observáveis ou latentes, x_t , e um componente idiossincrático de média zero, u_t , onde os fatores latentes correlacionados serialmente. Esta correlação por vezes é também considerada para os termos idiossincráticos, seguindo um processo como (21). O DFM é, em sua forma dinâmica⁴:

$$Y_t = \psi(L)x_t + u_t \quad (19)$$

$$x_{t+1} = \varphi(L)x_t + v_{t+1} \quad (20)$$

⁴ O DFM é um exemplo da classe muito maior de espaço de estados, nos quais as variáveis observáveis são expressas em termos de variáveis não observadas ou latentes, que por sua vez evoluem de acordo com alguma dinâmica defasada com dependência finita.

Figura 6 – Pesos dos componentes principais das *yields*



Fonte: Elaborado pelo Autor. NOTAS: Pesos dos primeiros cinco componentes principais das *yields* dos títulos em função das maturidades. O período amostral é de 02/01/2006 a 08/08/2022.

$$u_{i,t} = \eta_i(L)u_{i,t-1} + g_{i,t} \tag{21}$$

onde temos as matrizes polinomiais de defasagem $g\text{lspsi}(L)^5$ e $\varphi(L)$, $N \times k$ e $k \times k$, respectivamente, e v , o vetor $k \times 1$ de inovações de média zero (serialmente não correlacionadas) aos fatores. As perturbações idiossincráticas são assumidas como não correlacionadas com as inovações dos fatores em todos os avanços e defasagens, isto é $\mathbb{E}_t[u_t v'_{t-k}] = 0$ para todo k .

Para estimações não-paramétricas, como Análise de Componentes Principais (PCA, na sigla em inglês), o DFM é tratado em sua forma estática (STOCK; WATSON, 2016), e a dependência de Y_t em defasagens (e possivelmente avanços) é representada de forma implícita. O DFM estático (ou empilhado) reescreve a forma dinâmica

⁵ $h(L) = \sum_{i=0}^{\infty} h_i L^i$ e $h(L)Y_t = \sum_{i=0}^{\infty} h_i Y_{t-i}$

(19) e (20) para depender de l fatores estáticos C_t ao invés de k fatores dinâmicos x_t , onde $k \leq l$. Essa reescrita torna o modelo tratável por PCA e outros métodos de mínimos quadrados.

Considere p o grau da matriz polinomial de defasagem $\psi(L)$ e $C_t = (x_t', x_{t-1}', \dots, x_{t-p}')$ um vetor $l \times 1$ dos fatores estáticos. Considere também $\Psi = (\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_p)$, onde ψ_h é a matriz $N \times k$ de coeficientes na h -ésima defasagem em $\psi(L)$. De modo semelhante, considere $C(L)$ uma matriz de 1s, 0s e os elementos de $\Phi(L)$, de tal forma que o VAR em (20) seja reescrito em termos de C_t :

$$Y_t = \Psi C_t + u_t \quad (22)$$

$$C_{t+1} = \Phi(L)C_t + Gv_{t+1} \quad (23)$$

onde $G = [I_k \quad 0_{k \times (l-k)}]'$.

Com as suposições adicionais de que o distúrbio idiossincrático segue a autor-regressão (21) e que os distúrbios g_t e v_t são Gaussianos, a previsão um passo à frente da i -ésima variável no modelo de fator estático é,

$$\mathbb{E}[Y_{i,t+1} | Y_t, C_t, Y_t, C_t, \dots] = \omega_i(L)C_t + \eta_i(L)Y_{i,t} \quad (24)$$

onde $\omega_i = \Psi_i C(L) - \eta_i(L)\Psi_i$. Se as perturbações não forem gaussianas, a expressão é o preditor linear do processo gerador dos dados.

3.3 NORMALIZAÇÃO DOS FATORES POR COMPONENTES PRINCIPAIS

Como exposto anteriormente, os fatores são não-observáveis, de modo que sua identificação é possível apenas até normalizações arbitrárias. No DFM estático, o espaço gerado por C_t está identificado, mas C_t em si, não: $\Psi C_t = (\Psi R^{-1})(RC_t)$, onde R é qualquer matriz $l \times l$ inversível. Para muitas aplicações, incluindo as tratadas neste trabalho, é necessário apenas identificar o espaço abrangido pelos fatores, não os próprios fatores, assim que R na expressão anterior é irrelevante. Para tais aplicações, a falta de identificação é resolvida impondo uma normalização matematicamente conveniente. Sob a normalização dos “componentes principais”, as colunas de Ψ são ortogonais e dimensionadas para ter norma de unidade:

$$N^{-1} \Psi' \Psi = I_l \quad (25)$$

e Σ_C ser diagonal (normalização por componentes principais onde $\Sigma_C = \mathbb{E}[C_t C_t']$).

O nome dessa normalização deriva de seu uso na estimativa de componentes principais dos fatores. Adicionalmente, quando os fatores são estimados por componentes principais, os elementos diagonais de Σ_C são fracamente decrescentes.

3.4 ESTIMAÇÃO DOS FATORES E PARÂMETROS

Os parâmetros e fatores do DFM podem ser estimados usando métodos não paramétricos relacionados à PCA ou por métodos paramétricos de espaço de estados. Métodos não paramétricos estimam os fatores estáticos em (22) diretamente sem especificar um modelo para os fatores ou assumir distribuições específicas para os distúrbios. Essas abordagens usam a média transversal para remover a influência dos distúrbios idiossincráticos, deixando apenas a variação associada aos fatores. A intuição da média transversal é mais facilmente vista quando há um único fator. Neste caso, a média transversal de x_t em (22) é $\bar{Y}_t = \bar{\Psi}C_t + \bar{u}_t$, onde $\bar{\Psi} = N^{-1} \sum_{i=1}^N \psi_i$, a média cross-seccional. Se a correlação cross-sectional entre os $u_{i,t}$ é limitada, então, pela lei dos grandes números, $\bar{u}_t = \bar{Y}_t - \bar{\Psi}C_t$ converge para zero em probabilidade. Para o caso de mais fatores, suponha que $N^{-1}\psi'\psi$ tenha um limite não-singular. Neste caso, a média ponderada $N^{-1}\psi'Y_t$ satisfaz $(N^{-1}\psi'Y_t) - (N^{-1}\psi'\Psi C_t) \xrightarrow{P} 0$. A estimação por componentes principais é calculada a partir da versão amostral desta média ponderada.

Os componentes principais resolvem o problema de mínimos quadrados no qual Ψ e C_t em (22) são tratados como parâmetros desconhecidos a serem estimados:

$$\min_{C_1, \dots, C_T, \Psi} S_t(\Psi, C), \quad (26)$$

onde

$$S_t(\Psi, C) = \frac{1}{NT} \sum_{t=1}^T (Y_t - \Psi C_t)' (Y_t - \Psi C_t) \quad (27)$$

sujeito à normalização (25)⁶.

⁶ Note que, por analogia ao método dos Mínimos Quadrados Generalizados, é possível utilizar a inversa da matriz de variância dos erros, Σ_u^{-1} , para aumentar a precisão da estimativa, conferindo-a mais eficiência.

4 MODELANDO O RETORNO EM EXCESSO

Uma variedade de métodos vem sendo construída na literatura com o objetivo de modelar e prever a curva de juros utilizando o arcabouço dos fatores dinâmicos. Como salientam Caldeira, Moura e Santos (2018), existem diversas restrições que podem ser inseridas na carga e na dinâmica fatorial, gerando diferentes modelos de fatores dinâmicos, e não há consenso quanto às restrições a serem aplicadas. Caldeira, Moura e Santos (2016a) apresentam uma gama de modelos alternativos, e testam seu poder preditivo individual e combinado para dados do mercado futuro de títulos públicos brasileiros.

Serão tratados neste trabalho modelagens para o retorno em excesso, o prêmio de risco *ex-post*, buscando compreender seu comportamento por diferentes maturidades. Dado o desafio de “filtrar” os preços de contratos futuros, extraindo deles o que de fato é expectativa dos agentes para os preços à vista no futuro, é necessário construir uma modelagem para o prêmio de risco estocástico a ser isolado, compreendendo o que o determina e como estimá-lo.

Serão tratadas duas classes de abordagens, prevalecentes na tarefa de modelar prêmio de risco. A primeira são regressões de retorno irrestritas, que relacionam o prêmio de risco *ex-post* a um conjunto de *proxies* observáveis de fatores de risco (BAUMEISTER, 2023). A segunda classe são os modelos dinâmicos de estrutura a termo, que garantem a ausência de arbitragem ao impor restrições de equações cruzadas, e permitem obter uma estimativa do prêmio de risco com base em parâmetros estruturais do modelo.

4.1 REGRESSÕES DE RETORNO IRRESTRITAS

Baumeister (2023) fornece uma forma geral para modelagem de regressões com o prêmio de risco estocástico, $P_{t+n-1}(1) - P_t(n)$, onde novamente o preço à vista $P_{t+n}(0)$ é aproximado por $P_{t+n-1}(1)$. Este prêmio se igualaria à seguinte soma, onde $X_{k,t}$ representa um vetor que contém K variáveis preditivas, disponíveis aos agentes no tempo t :

$$\frac{P_{t+n-1}(1) - P_t(n)}{P_t(n)} = a_n + \sum_{k=1}^K b_{k,n} X_{k,t} + \varepsilon_{t+n} \quad (28)$$

onde ε_{t+n} é um termo de erro.

Estas variáveis preditivas representam fatores que influenciam a percepção dos agentes quanto ao nível de risco na economia, como nível de atividade econômica doméstica e internacional, inflação esperada, desempenho das ações das principais empresas, inclinação da curva de juros, dentre outros. Vale ressaltar que a escolha de

tais fatores não deve se basear em sua relação com o preço futuro do ativo em si, mas com o nível de risco do mercado deste ativo.

A equação (29) adapta (28) para reconhecer a existência de uma taxa livre de risco e busca acomodar as especificidades do mercado de títulos públicos¹, onde o ativo em questão é o ZC, de valor unitário no vencimento:

$$rx_{t+1}(n-1) = a_n + \sum_{k=1}^K b_{k,n} X_{k,t} + \varepsilon_{t+1}(n-1) \quad (29)$$

Em teoria, na ausência de atritos de negociação ou fatores de liquidez, deve existir um único fator de desconto estocástico M_{t+h} que caracteriza o prêmio de risco em cada ativo financeiro como em (17). O valor teórico de M_{t+h} é função de um vetor de estado que determina tudo o que poderia acontecer em todos os aspectos da economia. Na prática, para uma determinada classe de ativos, os pesquisadores se concentram em um pequeno subconjunto de variáveis consideradas mais importantes nesse mercado. Vários fatores de risco considerados são comuns em todas as classes de ativos, enquanto outros são específicos de ativos e variam entre mercados e instrumentos financeiros.

Baumeister (2023) fornece uma ilustração do tipo de fatores de risco que foram propostos na literatura. São exemplos desses fatores: os derivados de modelos de precificação de ativos de capital (CAPM, na sigla em inglês) como em Bessembinder e Chan (1992), o nível geral de atividade econômica (CAMPBELL; LO; MACKINLAY, 2012), taxa de crescimento do emprego (PIAZZESI; SWANSON, 2008), indicadores de atividade real, condições econômicas globais (HONG; YOGO, 2012) e medidas de volatilidade no mercado financeiro (CASIRAGHI; MICCOLI, 2019), dentre muitos outros exemplos. Em Baumeister (2023) é lembrado que novos fatores de risco e suas medidas empíricas correspondentes são adicionados o tempo todo. Esses fatores de risco não são todos igualmente bem-sucedidos na previsão de retornos. Resultados de uma aplicação utilizando os componentes principais das *yields* como fatores de risco serão expostos ao fim desta seção.

4.2 MODELOS LINEARES GAUSSIANOS DA ESTRUTURA A TERMO

Modelos Lineares Gaussianos da ETTJ são um exemplo de DFM. Como apresentado anteriormente, a ideia subjacente a esta classe de modelos é que um pequeno conjunto de k fatores latentes ou observados x_t determina conjuntamente todos os preços de ativos na economia de uma forma internamente consistente, cuja dinâmica pode ser descrita como uma autorregressão vetorial (VAR):

¹ Como discutido anteriormente, os retornos no mercado em questão são pequenos o suficiente para que sua variação possa ser aproximada por log-linearização.

$$X_{t+1} = \mu + \Phi X_t + v_{t+1} \quad v_{t+1} | \{X_S\}_{S=0}^t \sim \mathcal{N}(0, \Sigma) \quad (30)$$

onde $\{X_S\}_{S=0}^t$ denota o histórico de X_t .

Baumeister (2023) demonstra que, caso todos os ativos sejam precificados da mesma forma, é possível trabalhar com uma única classe de ativos sem perda de generalidade, de modo a ilustrar os princípios básicos subjacentes a essa estrutura de modelagem. Por exemplo, In dos preços futuros de um ativo, $\pi_t(n) \equiv \ln P_t(n)$ para um contrato celebrado no tempo t que vence n períodos à frente, são consideradas funções afins desses fatores da seguinte forma:

$$\pi_t(n) = A_n + B'_n X_t \quad (31)$$

Adrian, Crump e Moench (2013) seguem o mesmo caminho, já delimitando seu escopo ao mercado futuros de títulos públicos, prepostos no presente trabalho, e inserindo um termo de erro de precificação. Os autores apresentam uma versão similar a (31), no seguinte formato:

$$\ln P_t(n) = A_n + B'_n X_t + u_t(n) \quad (32)$$

Substituindo (32) em (30) recursivamente, temos:

$$\ln P_{t+1}(n-1) = A_{n-1} + B'_{n-1}(\mu + \Phi X_t + v_{t+1}) + u_{t+1}(n-1) \quad (33)$$

Substituindo em (33) o excesso de retorno como calculado em (5), dado (4) e (3), e tratando de um título mantido por $m = 1$ período, temos:

$$\begin{aligned} rx_{t+1}(n-1) &= A_{n-1} + B'_{n-1} X_{t+1} + u_{t+1}(n-1) \\ &\quad - A_n - B'_n X_t - u_t(n) + A_1 + B'_1 X_t + u_t(1) \end{aligned} \quad (34)$$

Substituindo (30) em (34), temos:

$$\begin{aligned} rx_{t+1}(n-1) &= A_{n-1} + B'_{n-1}(\mu + \Phi X_t + v_{t+1}) + u_{t+1}(n-1) \\ &\quad - A_n - B'_n X_t - u_t(n) + A_1 + B'_1 X_t + u_t(1) \end{aligned} \quad (35)$$

Assim como Baumeister (2023), Adrian, Crump e Moench (2013) supõem que o fator de desconto estocástico é exponencialmente afim:

$$M_{t+1} = \exp\left(-r_t^* - \frac{1}{2} \lambda'_t \lambda_t - \lambda'_t \Sigma^{-\frac{1}{2}} v_{t+1}\right) \quad (36)$$

Seguindo os passos de Adrian, Crump e Moench (2013), é suposto que os preços de mercado do risco seguem a forma essencialmente afim como sugerido por Duffee (2002), temos:

$$\lambda_t = \Sigma^{-\frac{1}{2}}(\lambda + \Lambda X_t) \quad (37)$$

onde $\lambda_t = \lambda + \Lambda X_t$ são os preços de mercado do risco que resumem as atitudes do investidor em relação ao risco, e também são funções afim dos fatores fundamentais X_t que os fazem variar ao longo do tempo.

Recuperando as equações referentes ao excesso de retorno (5) e ao fator de desconto estocástico (13) e substituindo-as em (36), temos:

$$1 = \mathbb{E}_t[\exp(rx_{t+1}(n-1) - \frac{1}{2}\lambda'_t\lambda_t - \lambda'_t\Sigma^{-\frac{1}{2}}v_{t+1})] \quad (38)$$

Assumindo que $\{rx_{t+1}^{n-1}, v_{t+1}\}$ são conjuntamente normalmente distribuídos, e aplicando a equação (37) a (38), temos:

$$\mathbb{E}_t[rx_{t+1}(n-1)] = b'_t(n-1)[\lambda + \Lambda X_t] - \frac{1}{2}Var_t[rx_{t+1}(n-1)] \quad (39)$$

onde $b'_t(n-1) = Cov_t[rx_{t+1}(n-1), v'_{t+1}]\Sigma^{-1}$. Dada esta definição de b' , é possível se decompor a parte inesperada do retorno em excesso em dois termos, um correlacionado a v_{t+1} e o outro condicionalmente ortogonal, gerando a seguinte equação:

$$rx_{t+1}(n-1) - \mathbb{E}_t[rx_{t+1}(n-1)] = b'_t(n-1)v_{t+1} + e_{t+1}(n-1) \quad (40)$$

onde se assume $e_{t+1}(n-1)$ condicionalmente independentes e identicamente distribuídos (i.i.d.), com variância σ^2 .

Como discutido no último capítulo, o artifício dos componentes principais permite que sejam utilizados como dados observáveis, visto que são combinações lineares de *yields* observáveis. Os parâmetros do modelo são estimados utilizando log-retornos obtidos das próprias *yields*, o que, como salientam Adrian, Crump e Moench (2013), implica que $b_t(n) = b_n$ seja constante no tempo, por construção. Assim, temos o seguinte processo gerador de retornos para o log-retorno em excesso:

$$rx_{t+1}(n-1) = b'_{n-1}(\lambda + \Lambda X_t) - \frac{1}{2}(b'_{n-1}\Sigma b_{n-1} + \sigma^2) + b'_{n-1}v_{t+1} + e_{t+1}(n-1) \quad (41)$$

Equalizando (35) com (41), temos a seguinte equação, que deve se manter em todos os estados para garantir a não-arbitragem:

$$\begin{aligned}
r_{X_{t+1}}(n-1) &= A_{n-1} + B'_{n-1}(\mu + \Phi X_t + v_{t+1}) + u_{t+1}(n-1) \\
&\quad - A_n - B'_n X_t - u_t(n) + A_1 + B'_1 X_t + u_t(1) \\
&= b'_{n-1}(\lambda + \Lambda X_t + v_{t+1}) - \frac{1}{2}(b'_{n-1} \Sigma b_{n-1} + \sigma^2) + e_{t+1}(n-1)
\end{aligned} \tag{42}$$

Reorganizando a igualdade acima e tomando $A_1 = -\delta$ e $B_1 = -\Delta$, obtemos o seguinte sistema de restrições lineares recursivas para os parâmetros de apreçamento dos títulos:

$$A_n = A_{n-1} + B'_{n-1}(\mu - \lambda) + \frac{1}{2}(B'_{n-1} \Sigma B_{n-1} + \sigma^2) - \delta \tag{43}$$

$$B'_n = B'_{n-1}(\Phi - \Lambda) - \Delta' \tag{44}$$

$$A_0, B'_0 = 0 \tag{45}$$

$$b_n = B'_n \tag{46}$$

onde A_n depende de A_{n-1} para restringir arbitragem. Vale lembrar a partir de (32) que A_n e B'_n são os pesos dos fatores dinâmicos X_t do modelo.

Também obtemos a seguinte expressão para os erros do apreçamento de retornos:

$$u_{t+1}(n-1) - u_t(n) + u_t(1) = e_{t+1}(n-1) \tag{47}$$

Adrian, Crump e Moench (2013) demonstram que é possível conduzir inferência sobre se um determinado fator de precificação é uma variável explicativa significativa para retornos de títulos sem estimar o conjunto completo de parâmetros do modelo. Adrian, Crump e Moench (2013) mostram que a variância assintótica das exposições b ao fator de risco depende apenas da variância dos erros e e inovações v , mas não de b , λ ou Λ .

Adrian, Crump e Moench (2013) ressaltam que este modelo adiciona à formulação padrão para ETTJ com choques homocedásticos o termo $\frac{1}{2}\sigma^2$ em (43). Permite-se um erro de ajuste de retorno específico da maturidade, condicionalmente ortogonal às inovações de variável de estado, incorporando erros de precificação explicitamente nas recursões restritas à arbitragem.

Essas expressões são derivadas da condição de primeira ordem de um investidor que se preocupa com a média e a variância de seu portfólio. As recursões implícitas nas equações (43) e (44) devem ser válidas para cada n e são a base de todos os

modelos de estrutura a termo, uma vez que permitem precificar todos os ativos da economia excluindo possibilidades de arbitragem (ver, por exemplo, Piazzesi (2010)). Especificamente, a restrição de que os pesos dos fatores transversais são funções dos parâmetros que descrevem a dinâmica do estado garante a consistência dinâmica. Como expõe Baumeister (2023), Se os investidores fossem neutros em relação ao risco, as mesmas recursões ainda seriam aplicadas e os ativos ainda seriam precificados de acordo com (32), mas sob uma lei de movimento modificada para os fatores:

$$X_{t+1} = \mu^Q + \Phi^Q X_t + v_{t+1}^Q \quad v_{t+1}^Q \mid \{X_S\}_{S=0}^t \sim \mathcal{N}(0, \Sigma) \quad (48)$$

onde os ajustes $\mu^Q = \mu - \lambda$ e $\Phi^Q = \Phi - \Lambda$ resultam da aversão ao risco. Isso significa que, em um ambiente de risco, os investidores se comportam como se o ativo oferecesse um retorno esperado menor do que efetivamente oferece. O fator de desconto estocástico M_{t+1} apresentado em (13) descreve o mapeamento entre o verdadeiro processo gerador dos dados, também conhecido como medida P , e a distribuição neutra ao risco, também conhecida como medida Q . Intuitivamente, o fator de desconto estocástico repondera as probabilidades objetivas implícitas pela distribuição verdadeira, de modo que alguns resultados tenham uma probabilidade maior do que objetivamente têm, o que implica que os investidores exigem alguma compensação nesse estado da natureza. Os prêmios de risco variantes no tempo são então obtidos como a diferença entre os preços futuros observados e a expectativa racional dos preços futuros. Esta última é implícita no modelo de estrutura a termo estimado, explicitada ao se definir $\lambda = \Lambda = 0$.

4.3 DUAS ILUSTRAÇÕES NO MERCADO BRASILEIRO DE TÍTULOS

As duas próximas subseções trazem aplicações de modelos de fatores dinâmicos para mercado brasileiro de títulos públicos.

4.3.1 Componentes Principais como Fatores de Risco

A equação (42) demonstra que, sob suposições padrão para este tipo de análise, o log-excesso de retorno pode ser função afim dos fatores dinâmicos. Desta forma, a abordagem das regressões de retorno acomoda a inserção dos componentes principais como fatores de risco. Esta subseção avalia a hipótese de que existam poucos fatores latentes ao mercado de títulos, capazes de descrever uma gama maior de séries temporais a partir dos fatores dinâmicos descritos na subseção 3.1. Os fatores são estimados das *yields* por componentes principais, de acordo com a normalização apresentada na equação (25). A partir deles é construído um modelo irrestrito de re-

gressões de retorno, utilizando o log-retorno em excesso de um período a frente, de acordo com (29).

A Tabela 7 expõe dois resultados da estimação da equação (29) por MQO: os p -valores associados à hipótese nula de insignificância dos coeficientes e o R^2 da regressão, para aferir sua capacidade explicativa. Componentes principais defasados das *yields* são utilizados como fatores de risco que sobrepassam a dinâmica de derivativos de títulos de diferentes maturidades. Estes componentes são aplicados como variáveis explicativas sobre o log-excesso de retorno no mercado de títulos, $rx_{t+1}(n-1)$, explicitados em (5). Os cinco componentes principais entram como os fatores de risco $X_{k,t}$ em (29), de forma a tentar auxiliar na previsão do log-retorno em excesso do período seguinte.

Tabela 7 – Regressões de Retorno - Componentes Principais

Termo	$H_0 : a, b = 0$	Adj R^2
M2	0.000	0.282
M3	0.000	0.278
M9	0.000	0.160
M12	0.000	0.138
M24	0.000	0.093
M48	0.002	0.072
M72	0.001	0.073
M96	0.002	0.073

Fonte: Elaborado pelo Autor. NOTAS: Alguns resultados da regressão de retorno utilizando como fatores de risco os cinco primeiros componentes principais das *yields* de títulos no final do mês com vencimentos de 2, 3, 9, 12, 24, 48, 72 e 96 meses. São exibidos os p -valores assintóticos da hipótese nula e o R^2 ajustado. O período amostral é de janeiro de 2006 a julho de 2022.

4.3.2 Abordagem empírica da restrição à arbitragem

Adrian, Crump e Moench (2013) propõem uma abordagem empírica simples para estimar o log-retorno em excesso baseada na equação (41) em versão empilhada:

$$rx = b'(\lambda i_T' + \lambda X_-) - \frac{1}{2}(B^* \text{vec}(\Sigma) + \sigma^2 i_N) i_T' + b'V + E \quad (49)$$

onde rx é uma matrix $N \times T$ dos excessos de retorno, $b = [b_1 b_2 \dots b_n]$ é uma matrix $K \times N$ dos pesos dos fatores, i_T e i_N são vetores $T \times 1$ e $N \times 1$ de uns, $X_- = [X_0 X_1 \dots X_{T-1}]$ é uma matrix $K \times T$ dos fatores de apreçamento defasados, $B^* = [\text{vec}(b_1 b_1') \dots \text{vec}(b_N b_N')]$ é uma matrix $N \times K^2$, V é uma matrix $K \times T$ e E é uma matrix $N \times T$.

A partir de (49), Adrian, Crump e Moench (2013) propõem um estimador de três passos² baseado em regressões para os parâmetros do modelo discutido na seção 4.2.

Primeiro, estima-se a equação (30) por mínimos quadrados ordinários. Isso permite a decomposição de X_{t+1} em um componente previsível e uma estimativa da inovação v_{t+1} . Essas inovações são empilhadas na matriz \hat{V} , e dela construído um estimador da matriz de variância-covariância da variável de estado:

$$\hat{\Sigma} = \frac{1}{T} \hat{V} \hat{V}' \quad (50)$$

Em seguida, é feita uma regressão do excesso de retorno em uma constante, nos fatores dinâmicos defasados e nas inovações contemporâneas dos fatores:

$$rx = a1_T + b' \hat{V} + cX_{-} + E \quad (51)$$

cujos resíduos são coletados na matriz $N \times T$ \hat{E} . Deles, se estima a variância dos erros de precificação:

$$\hat{\sigma} = \frac{1}{NT} \text{tr}(\hat{E} \hat{E}') \quad (52)$$

enquanto B^* é construído de \hat{b} .

Finalmente, estima-se os parâmetros de risco λ e Λ por regressão *cross-sectional*. De (49), temos que $a = b'\lambda - \frac{1}{2}(B^* \text{vec}(\Sigma) + \sigma^2 i_N)$ e $c = b'\Lambda$. Assim, temos:

$$\hat{\lambda} = (\hat{b} \hat{b}')^{-1} \hat{b} (\hat{a} + \frac{1}{2} (B^* \text{vec}(\hat{\Sigma}) + \hat{\sigma}^2 i_N)) \quad (53)$$

e

$$\hat{\Lambda} = (\hat{b} \hat{b}')^{-1} \hat{b} \hat{c} \quad (54)$$

4.4 UMA VISÃO INTEGRATIVA

Baumeister (2023) expõem uma forma de abordar os modelos vistos na última seção de uma forma integrativa, de modo a possibilitar que se compare entre eles o sucesso na previsão. Retomando os termos da equação de previsão de excesso de retorno um passo a frente, (41), e considerando:

$$r_{n-1} = b'_{n-1} \lambda - \frac{1}{2} (b'_{n-1} \Sigma b_{n-1} + \sigma^2) \quad (55)$$

² Uma aplicação deste método para o mercado brasileiro de juros pode ser encontrada em Moraes (2022).

$$K'_{n-1} = b'_{n-1}\Lambda \quad (56)$$

$$\xi_{t+1}(n-1) = b'_{n-1}v_{t+1} + u_{t+1}(n-1) - u_t(n) \quad (57)$$

Temos:

$$r_{X_{t+1}}(n-1) = \kappa_{n-1} + K'_{n-1}X_t + \xi_{t+1}(n-1) \quad (58)$$

Dai e Singleton (2002) traçam um paralelo semelhante para modelos afins da ETTJ em sua equação (21), onde mostram que as formulações de prêmios de risco resultantes de modelos gaussianos dinâmicos de estrutura a termo implicam a mesma estrutura que as regressões de excesso de retorno em Fama e Bliss (1987) (ver também Adrian, Crump e Moench (2013)). Uma diferença fundamental entre essas duas estruturas de modelagem é que os modelos de ETTJ afins impõem restrições cruzadas entre equações que excluem estratégias de arbitragem, o que significa que, em todos os n horizontes, os coeficientes dependem do mesmo conjunto de parâmetros estruturais que descrevem a dinâmica do estado e os prêmios de risco, enquanto os coeficientes nas regressões de retorno são obtidos a partir de regressões de mínimos quadrados irrestritos estimadas separadamente para cada maturidade n . Outra diferença é que as regressões de retorno dependem de *proxies* observados para fatores de risco relevantes, enquanto em modelos de estrutura a termo afim os fatores não observados são comumente inferidos a partir do comportamento dos próprios preços dos ativos.

Embora muitas vezes um pequeno conjunto de fatores seja suficiente para descrever a dinâmica da estrutura a termo, muitas variantes de modelos empíricos de estrutura a termo existem e evoluíram ao longo do tempo para incorporar determinantes observáveis adicionais além das informações contidas na *cross-section* dos preços dos ativos. Por exemplo, Ang e Piazzesi (2003) incluem fatores extraídos de um painel de medidas de inflação e atividade real, além de três fatores latentes da curva de rendimento (normalmente referidos como nível, inclinação e curvatura). Em vez disso, Bernanke (2008) contam apenas com um conjunto de variáveis macroeconômicas observadas dentro de um modelo de estrutura de prazo padrão de taxas de juros. Os modelos de ETTJ afins são flexíveis e podem ser adaptados para levar em conta diferentes características de mercado (por exemplo, liquidez, segmentação) e características institucionais específicas (por exemplo, irregularidades de calendário) sem ter que recorrer a *proxies* observadas. Ao mesmo tempo, a vantagem de usar variáveis observadas para modelar prêmios de risco é que podemos identificar a(s) fonte(s) de risco, ao passo que geralmente é mais difícil dar conteúdo econômico aos fatores latentes em modelos de estrutura a termo (BAUMEISTER, 2023).

A discussão anterior deixa claro que, embora essas estruturas de modelagem permitam separar os prêmios de risco das expectativas de mercado, diferentes modelos produzirão diferentes estimativas de prêmios de risco variantes no tempo, que implicam em diferentes medidas de expectativa. Isso levanta a importante questão de como escolher entre diferentes medidas de expectativas de mercado, que abordarei a seguir.

4.4.1 Extraíndo expectativas dos preços de ativos

Resolvendo a equação (28) para o preço futuro no vencimento, obtemos:

$$P_{t+n-1}(1) = P_t(n)(1 + a_n + b'_n x_t + \varepsilon_{t+n}) \quad (59)$$

onde x_t se refere a um vetor $K \times 1$ de *proxies* observáveis ou fatores de risco latentes.

De forma mais geral, considerando um título mantido por $m \leq n$ e tomando as expectativas de ambos os lados, temos a expectativa atual do preço à vista de m períodos à frente como o preço futuro ajustado ao prêmio de risco:

$$\mathbb{E}_t[P_{t+m}(n-m)] = P_t(n)(1 + a_{n-m} + b'_{n-m} x_t) \quad (60)$$

onde o prêmio de risco de manter um título por m períodos é:

$$RP_{t+m} = P_{t+m} - \mathbb{E}_t[P_{t+m}] \quad (61)$$

Assim, haverá tantas medidas de expectativa de preço implícitas quanto houver estimativas de prêmio de risco, que podem diferir substancialmente entre as especificações do modelo e que não podem ser todas igualmente válidas. O principal desafio é selecionar a estimativa mais confiável da expectativa do mercado para um dado conjunto de candidatos a modelos de prêmio de risco.

Baumeister e Kilian (2017) propõem uma abordagem sistemática para avaliar a plausibilidade de diferentes estimativas de prêmios de risco variantes no tempo com base em *insights* da literatura de previsão. Uma métrica convencional para avaliar a precisão das expectativas de preços é o erro de previsão quadrático médio (MSPE), definido no presente trabalho como $\mathbb{E}[P_{t+m} - \mathbb{E}_t[P_{t+m}]]^2$. A ideia central é que a expectativa condicional minimiza o MSPE sob perda quadrática, o que é um resultado bem conhecido em estatística (ver, por exemplo, Granger (1969) e Granger e Newbold (2014)). Esse resultado teórico nos permite classificar especificações de modelos alternativos com base em seu MSPE e resolver a incerteza do modelo que surge da multiplicidade de fatores de risco candidatos. A medida mais precisa da expectativa de mercado implícita será aquela que proporcionar a maior redução do MSPE.

4.4.2 Comparando diferentes modelos

Aos moldes de Baumeister (2023), como apresentado na seção 3.3, a plausibilidade da estimativa gerada pelo modelo será avaliada pela razão entre seu MSPE e o da previsão mensal de referência. Essa normalização é padrão na previsão e facilita a implementação de testes estatísticos para melhorias na precisão (ver, por exemplo, Baumeister, Korobilis e Lee (2022)). Uma razão abaixo de 1 indica que o modelo avaliado se sai melhor que o de referência, enquanto um valor acima de 1 indica que ele se sai pior, i.e., a razão inferior à unidade sugere contribuição na capacidade preditiva.

A Tabela 8 apresenta a razão MSPE da previsão obtida via HE em relação a um passeio aleatório, modelo de referência usado por Baumeister (2023). Como ilustra a tabela, em todos os casos, a previsão gerada utilizando-se HE apresentou MSPE inferior à previsão sem mudança (passeio aleatório). A redução no MSPE foi significativa a 5% nas maturidades de 9 meses e superiores, de modo que as previsões realizadas com HE parecem oferecer uma base comparativa mais exigente.

Tabela 8 – Razão MSPE: HE vs. Passeio Aleatório

Termo	Hipótese das Expectativas
M2	0.719
M3	0.829
M9	0.705**
M12	0.684**
M24	0.626***
M48	0.572***
M72	0.549***
M96	0.537***

Fonte: Elaborado pelo Autor. NOTAS: Todos os índices MSPE foram normalizados em relação à previsão mensal sem alteração (passeio aleatório). Um, dois e três asteriscos indicam reduções de MSPE estatisticamente significativas nos níveis de 10%, 5% e 1%, respectivamente, com base nos testes de Diebold e Mariano (1995). O período amostral é de janeiro de 2006 a julho de 2022.

A partir destes resultados, percebe-se que a previsão via HE pode ser um modelo de referência mais exigente que o passeio aleatório. Assim, faz-se relevante avaliar o ganho em capacidade preditiva oferecido pelos dois modelos com prêmio de risco em relação à pela HE. Para este exercício, a amostra é dividida em duas partes, a primeira indo até março de 2014 e a segunda iniciando em abril do mesmo ano. Com a primeira subamostra, são calculados parâmetros do modelo que espera-se serem fixos no tempo, e esses são aplicados no cálculo preditivo dos retornos da segunda subamostra.

A Tabela 9 apresenta a razão entre os MSPEs dos modelos e o MSPE da previsão realizada com base na HE. Como se observa, ambos os modelos apresentaram

MSPE significativamente inferior ao associado à HE, indicando melhora na previsão ao se levar em conta a existência de prêmio risco variante no tempo.

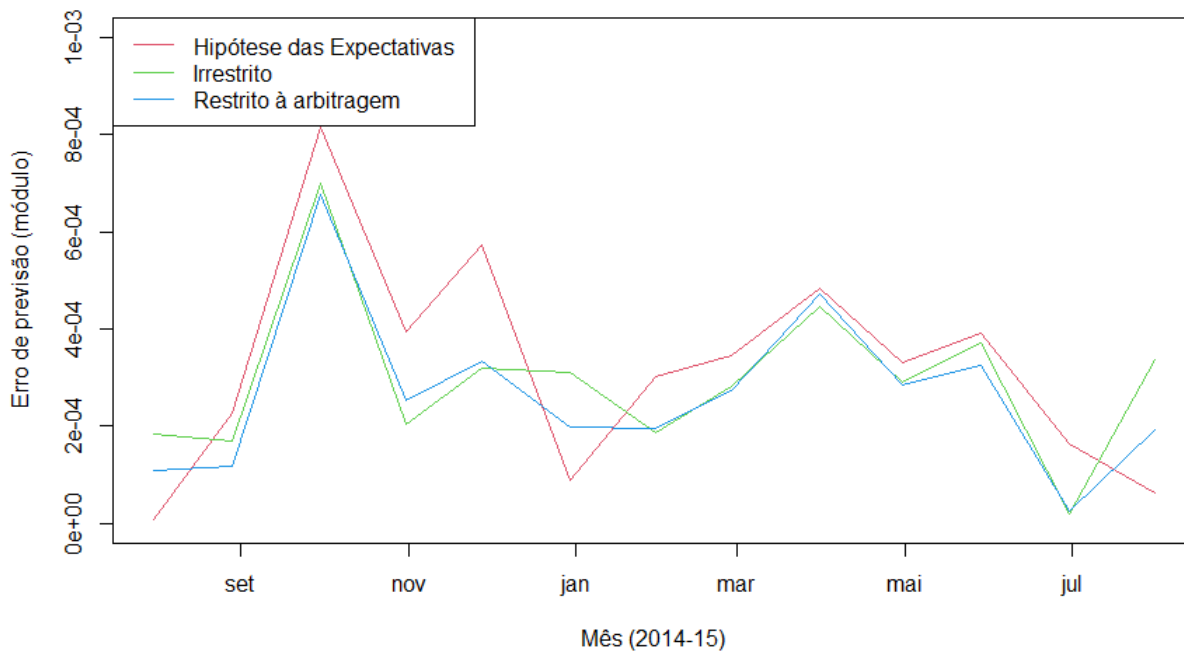
Tabela 9 – Razão MSPE: Modelos vs. HE

Termo	Reg. Retorno Comp. Principais	Restrito à Arbitragem
M2	0.726*	0.737*
M3	0.683**	0.733*
M9	0.605*	0.606*
M12	0.597*	0.596*
M24	0.584**	0.584**
M48	0.581***	0.581***
M72	0.576***	0.576***
M96	0.571***	0.571***

Fonte: Elaborado pelo Autor. NOTAS: Todos os índices MSPE foram normalizados em relação à previsão mensal sem alteração (passeio aleatório). Aplicam-se os pesos dos fatores calculados com a primeira metade da série aos *yields* da segunda metade, a qual é testada. Um, dois e três asteriscos indicam reduções de MSPE estatisticamente significativas nos níveis de 10%, 5% e 1%, respectivamente, com base nos testes de Diebold e Mariano (1995). O período amostral é de janeiro de 2006 a julho de 2022.

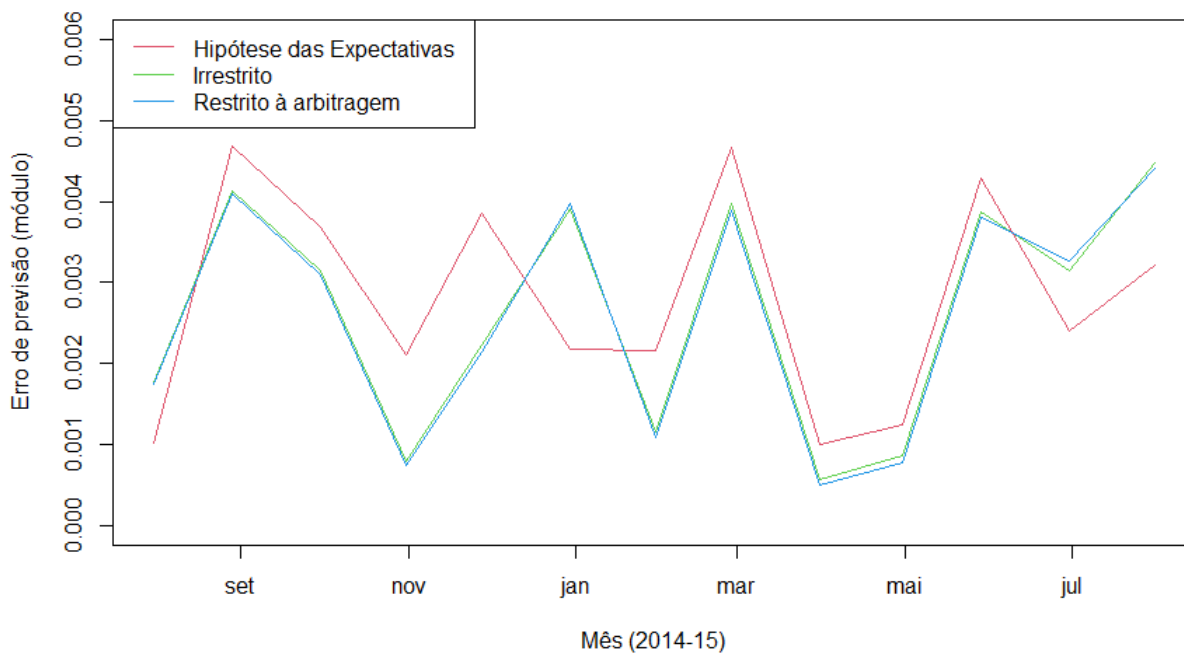
Para melhor ilustrar o ganho em capacidade preditiva, são apresentados graficamente os erros de previsão de cada um dos modelos para períodos e maturidades selecionados. A partir dos 's 7 a 12, é possível perceber que os erros de previsão dos modelos com prêmio de risco são, em geral, superiores aos gerados por HE. No entanto, vale notar que existem momentos específicos nos quais a HE se sai melhor, o que valeria uma investigação mais profunda. Adicionalmente, percebe-se que, para a maturidade superior, ambos os modelos com prêmio de risco apresentam erros de previsão bastante próximos.

Figura 7 – Erro de previsão no preço 1 mês à frente, $M = 3$, 2014-15



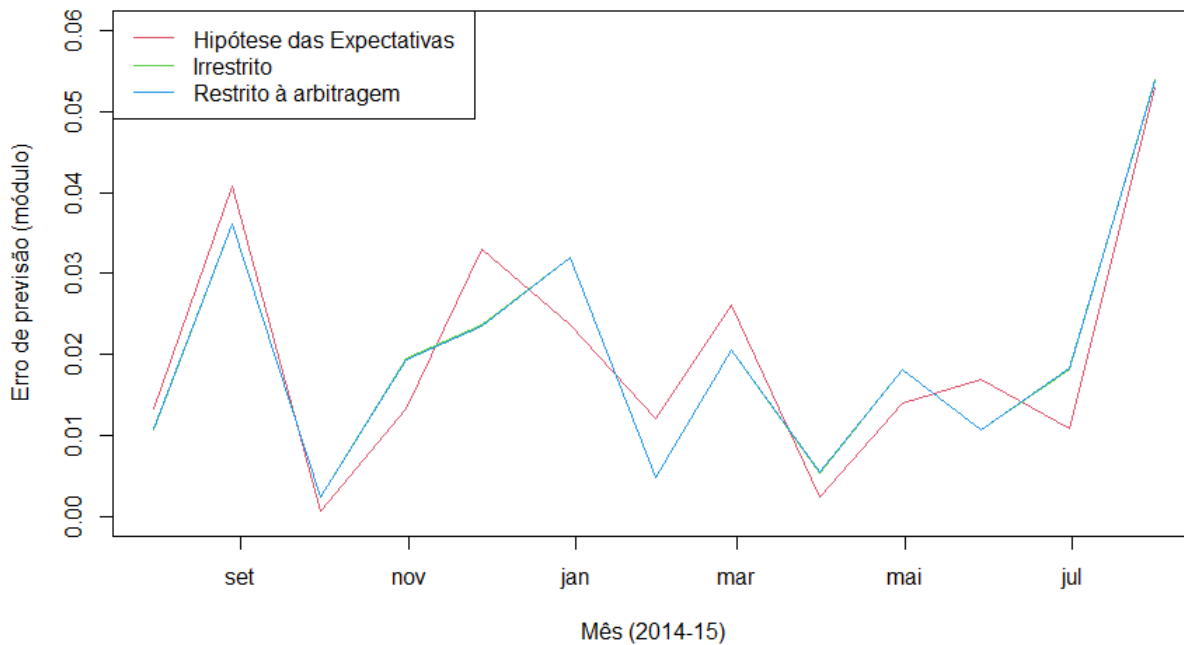
Fonte: Elaborado pelo Autor. NOTAS: Módulo do erro de previsão no preço de títulos com vencimento de 3 meses. O período amostral é de agosto de 2014 a agosto de 2015.

Figura 8 – Erro de previsão no preço 1 mês à frente, M = 12, 2014-15



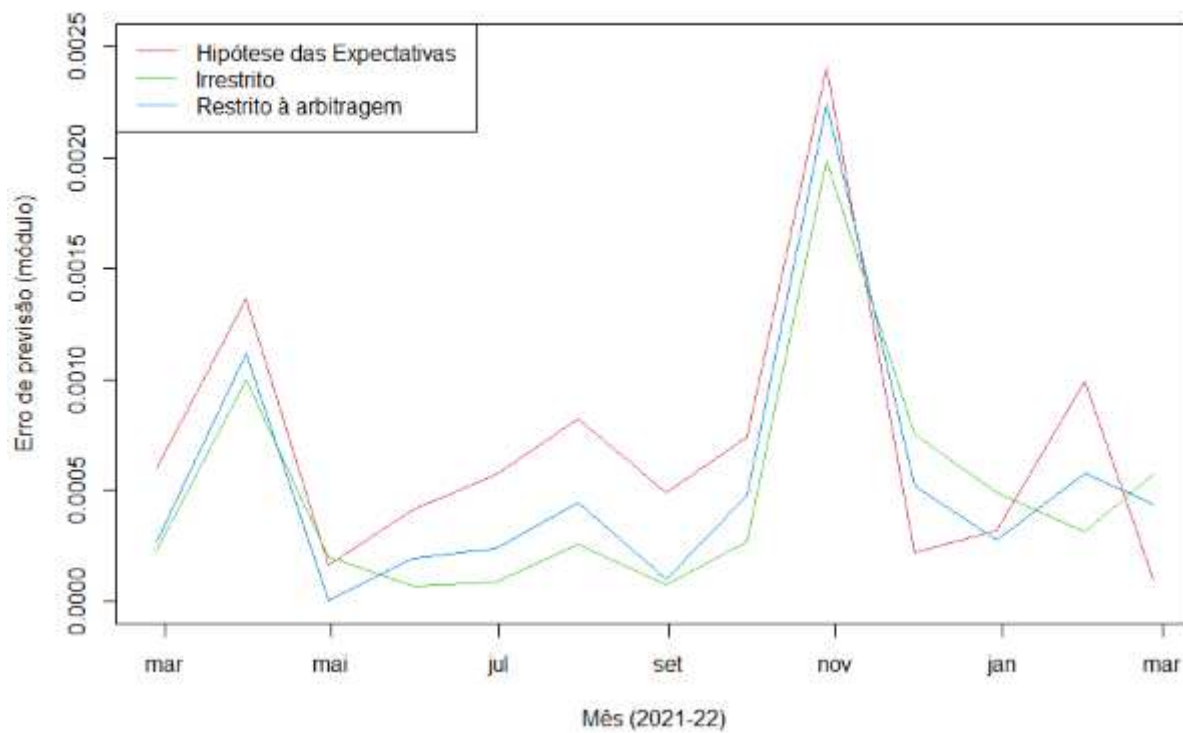
Fonte: Elaborado pelo Autor. NOTAS: Módulo do erro de previsão no preço de títulos com vencimento de 12 meses. O período amostral é de agosto de 2014 a agosto de 2015.

Figura 9 – Erro de previsão no preço 1 mês à frente, M = 48, 2014-15



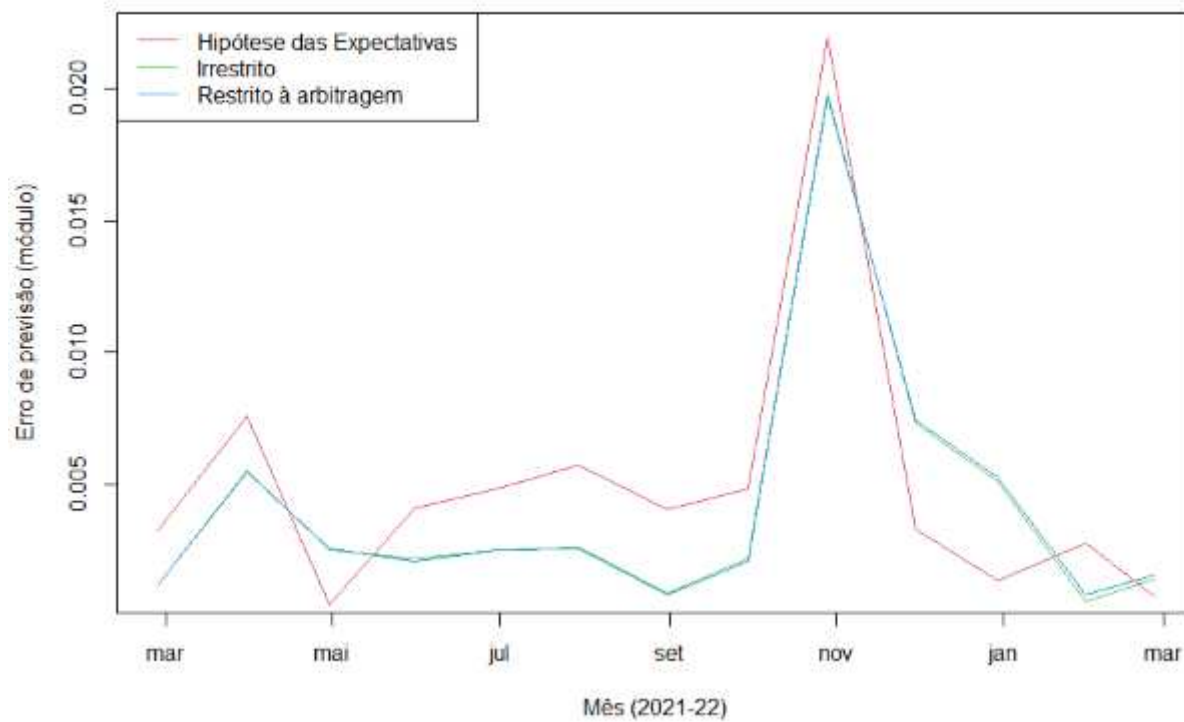
Fonte: Elaborado pelo Autor. NOTAS: Módulo do erro de previsão no preço de títulos com vencimento de 48 meses. O período amostral é de agosto de 2014 a agosto de 2015.

Figura 10 – Erro de previsão no preço 1 mês à frente, M = 3, 2021-22



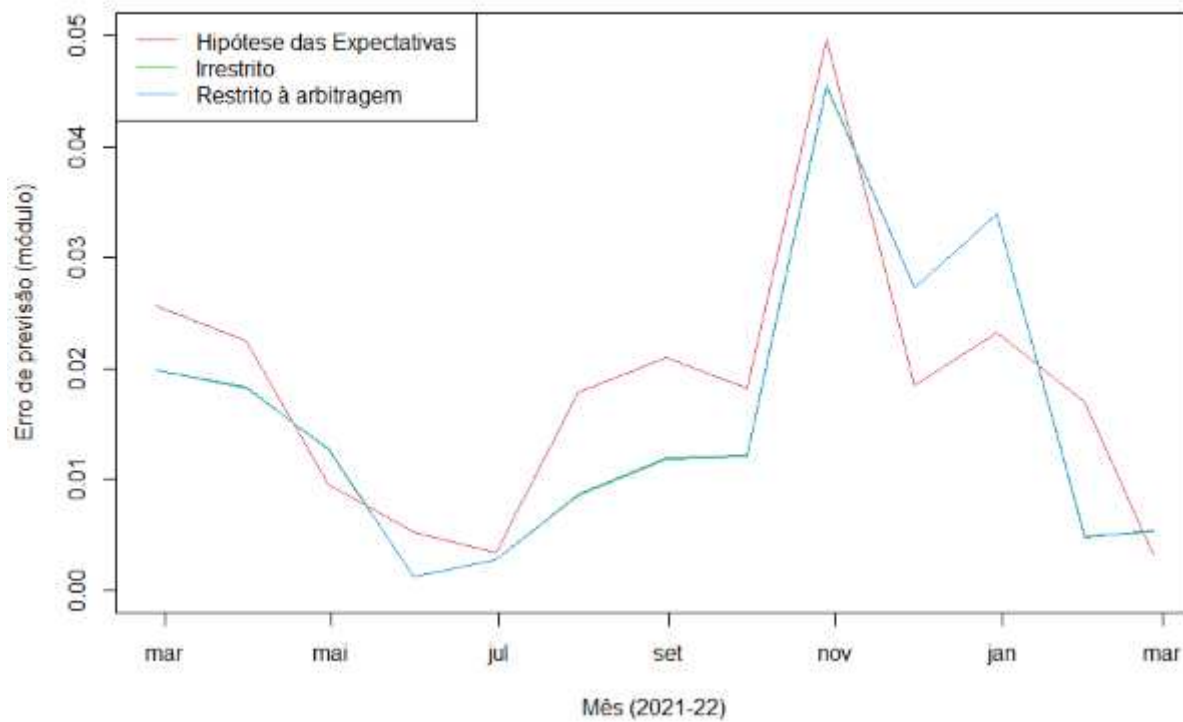
Fonte: Elaborado pelo Autor. NOTAS: Módulo do erro de previsão no preço de títulos com vencimento de 3 meses. O período amostral é de fevereiro de 2021 a janeiro de 2022.

Figura 11 – Erro de previsão no preço 1 mês à frente, $M = 12$, 2021-22



Fonte: Elaborado pelo Autor. NOTAS: Módulo do erro de previsão no preço de títulos com vencimento de 12 meses. O período amostral é de fevereiro de 2021 a janeiro de 2022.

Figura 12 – Erro de previsão no preço 1 mês à frente, M = 48, 2021-22



Fonte: Elaborado pelo Autor. NOTAS: Módulo do erro de previsão no preço de títulos com vencimento de 48 meses. O período amostral é de fevereiro de 2021 a janeiro de 2022.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os preços de ativos em mercados futuros são uma fonte valiosa de informação, pois incorporam as expectativas dos participantes do mercado sobre o futuro. No entanto, eles também contêm um prêmio de risco variável no tempo que não é observável. Assim, para extrair informações sobre as expectativas, precisamos expurgar os prêmios de risco dos preços dos ativos. Neste sentido, é apresentada uma abordagem geral para recuperar as expectativas do mercado a partir dos preços dos ativos.

Foram descritas algumas abordagens empíricas para a estimativa de modelos dinâmicos de estrutura a termo da taxa de juros computacionalmente rápidas e que gera pequenos erros de precificação. A especificação de linha de base usa os cinco primeiros componentes principais como fatores de precificação. O método de estimativa apresentado pode ser facilmente adaptado e estendido, pois depende apenas de regressões lineares.

Foram documentadas variações de tempo substanciais e previsíveis nos retornos em excesso sobre futuros de títulos públicos. A existência de retornos previsíveis em excesso em contratos futuros de fundos federais é relevante para calcular as expectativas de mercado dessas taxas futuras. Ignorar esses prêmios de risco pode aumentar substancialmente os erros de previsão, tanto em média quanto em termos de raiz quadrada média do erro.

REFERÊNCIAS

- ADRIAN, Tobias; CRUMP, Richard K; MOENCH, Emanuel. Pricing the term structure with linear regressions. **Journal of Financial Economics**, Elsevier, v. 110, n. 1, p. 110–138, 2013.
- ANG, Andrew; PIAZZESI, Monika. A no-arbitrage vector autoregression of term structure dynamics with macroeconomic and latent variables. **Journal of Monetary economics**, Elsevier, v. 50, n. 4, p. 745–787, 2003.
- ARUOBA, S Borağan; DIEBOLD, Francis X. Real-time macroeconomic monitoring: Real activity, inflation, and interactions. **American Economic Review**, American Economic Association, v. 100, n. 2, p. 20–24, 2010.
- BAUMEISTER, Christiane. Measuring market expectations. **Handbook of Economic Expectations**, Elsevier, p. 413–441, 2023.
- BAUMEISTER, Christiane; KILIAN, Lutz. A general approach to recovering market expectations from futures prices with an application to crude oil. **CEPR Discussion Paper**, p. 10162, 2017.
- BAUMEISTER, Christiane; KOROBILIS, Dimitris; LEE, Thomas K. Energy markets and global economic conditions. **Review of Economics and Statistics**, MIT Press One Rogers Street, Cambridge, MA 02142-1209, USA journals-info . . . , v. 104, n. 4, p. 828–844, 2022.
- BERNANKE, Ben. Outstanding issues in the analysis of inflation. **Understanding Inflation and the Implications for Monetary Policy**, MIT Press Cambridge, v. 447, 2008.
- BESSEMBINDER, Hendrik; CHAN, Kalok. Time-varying risk premia and forecastable returns in futures markets. **Journal of Financial Economics**, Elsevier, v. 32, n. 2, p. 169–193, 1992.
- BLISS, Robert R. Movements in the term structure of interest rates. **Economic Review-Federal Reserve Bank of Atlanta**, Federal Reserve Bank of Atlanta, v. 82, n. 4, p. 16, 1997.

CALDEIRA, João F. Estimação da estrutura a termo da curva de juros no Brasil através de modelos paramétricos e não paramétricos. **Análise Econômica**, v. 29, n. 55, 2011.

CALDEIRA, João F; MOURA, Guilherme V; SANTOS, André AP. Bond portfolio optimization using dynamic factor models. **Journal of Empirical Finance**, Elsevier, v. 37, p. 128–158, 2016.

CALDEIRA, João F; MOURA, Guilherme V; SANTOS, André AP. Predicting the yield curve using forecast combinations. **Computational Statistics & Data Analysis**, Elsevier, v. 100, p. 79–98, 2016.

CALDEIRA, João F; MOURA, Guilherme V; SANTOS, André AP. Yield curve forecast combinations based on bond portfolio performance. **Journal of Forecasting**, Wiley Online Library, v. 37, n. 1, p. 64–82, 2018.

CALDEIRA, João F; MOURA, Guilherme V; SANTOS, André AP; TOURRUCÔO, Fabricio. Forecasting the yield curve with the arbitrage-free dynamic Nelson–Siegel model: Brazilian evidence. **EconomiA**, Elsevier, v. 17, n. 2, p. 221–237, 2016.

CAMPBELL, John Y; LO, Andrew W; MACKINLAY, A Craig. The econometrics of financial markets. *In*: **ECONOMETRICS of financial markets**. [S.l.]: princeton University press, 2012.

CASIRAGHI, Marco; MICCOLI, Marcello. Inflation risk premia and risk-adjusted expectations of inflation. **Economics Letters**, Elsevier, v. 175, p. 36–39, 2019.

CHERNENKO, Sergey; SCHWARZ, Krista; WRIGHT, Jonathan H. The information content of forward and futures prices: Market expectations and the price of risk. **Available at SSRN 560386**, 2004.

CHINN, Menzie D; COIBION, Olivier. The predictive content of commodity futures. **Journal of Futures Markets**, Wiley Online Library, v. 34, n. 7, p. 607–636, 2014.

COCHRANE, John H; PIAZZESI, Monika. Bond risk premia. **American economic review**, American Economic Association, v. 95, n. 1, p. 138–160, 2005.

- COSTA-GOMES, Miguel A; WEIZSÄCKER, Georg. Stated beliefs and play in normal-form games. **The Review of Economic Studies**, Wiley-Blackwell, v. 75, n. 3, p. 729–762, 2008.
- DAI, Qiang; SINGLETON, Kenneth J. Expectation puzzles, time-varying risk premia, and affine models of the term structure. **Journal of financial Economics**, Elsevier, v. 63, n. 3, p. 415–441, 2002.
- DELLA CORTE, Pasquale; SARNO, Lucio; THORNTON, Daniel L. The expectation hypothesis of the term structure of very short-term rates: Statistical tests and economic value. **Journal of Financial Economics**, Elsevier, v. 89, n. 1, p. 158–174, 2008.
- DIEBOLD, Francis X; KILIAN, Lutz. Measuring predictability: theory and macroeconomic applications. **Journal of Applied Econometrics**, Wiley Online Library, v. 16, n. 6, p. 657–669, 2001.
- DIEBOLD, Francis X; RUDEBUSCH, Glenn D. Measuring Business Cycles: A Modern Perspective. **Review of Economics and Statistics**, v. 78, p. 67–77, 1996.
- DIEBOLD, Francis X; RUDEBUSCH, Glenn D *et al.* Yield curve modeling and forecasting: the dynamic Nelson-Siegel approach. **Economics Books**, Princeton University Press, 2012.
- DUFFEE, Gregory R. Term premia and interest rate forecasts in affine models. **The Journal of Finance**, Wiley Online Library, v. 57, n. 1, p. 405–443, 2002.
- DUSAK, Katherine. Futures trading and investor returns: An investigation of commodity market risk premiums. **Journal of Political economy**, The University of Chicago Press, v. 81, n. 6, p. 1387–1406, 1973.
- FAMA, Eugene F; BLISS, Robert R. The information in long-maturity forward rates. **The American Economic Review**, JSTOR, p. 680–692, 1987.
- FERRERO, Giuseppe; NOBILI, Andrea. Futures contract rates as monetary policy forecasts. ECB Working Paper, 2008.
- FRIEDMAN, Milton; SAVAGE, Leonard J. The utility analysis of choices involving risk. **Journal of political Economy**, The University of Chicago Press, v. 56, n. 4, p. 279–304, 1948.

FROOT, Kenneth A. New hope for the expectations hypothesis of the term structure of interest rates. **The Journal of Finance**, Wiley Online Library, v. 44, n. 2, p. 283–305, 1989.

GRANGER, Clive WJ. Prediction with a generalized cost of error function. **Journal of the Operational Research Society**, Taylor & Francis, v. 20, n. 2, p. 199–207, 1969.

GRANGER, Clive WJ; NEWBOLD, Paul. **Forecasting economic time series**. [S.l.]: Academic press, 2014.

GÜRKAYNAK, Refet S; WRIGHT, Jonathan H. Macroeconomics and the term structure. **Journal of Economic Literature**, American Economic Association, v. 50, n. 2, p. 331–367, 2012.

HANSEN, Lars Peter; HODRICK, Robert J. Forward exchange rates as optimal predictors of future spot rates: An econometric analysis. **Journal of political economy**, The University of Chicago Press, v. 88, n. 5, p. 829–853, 1980.

HONG, Harrison; YOGO, Motohiro. What does futures market interest tell us about the macroeconomy and asset prices? **Journal of financial economics**, Elsevier, v. 105, n. 3, p. 473–490, 2012.

JOSLIN, Scott; PRIEBSCH, Marcel; SINGLETON, Kenneth J. Risk premiums in dynamic term structure models with unspanned macro risks. **The Journal of Finance**, Wiley Online Library, v. 69, n. 3, p. 1197–1233, 2014.

LITTERMAN, Robert; SCHEINKMAN, Jose. Common factors affecting bond returns. **Journal of fixed income**, v. 1, n. 1, p. 54–61, 1991.

MACAULAY, Frederick R *et al.* Some theoretical problems suggested by the movements of interest rates, bond yields and stock prices in the United States since 1856. **NBER Books**, National Bureau of Economic Research, Inc, 1938.

MORAES, Milene Maiser. Decomposição da estrutura a termo da curva de juros brasileira através de modelo dinâmico afim livre de arbitragem. Repositório Institucional da UFSC, 2022.

- MOURA, Guilherme V; SANTOS, André AP; RUIZ, Esther. Comparing high-dimensional conditional covariance matrices: Implications for portfolio selection. **Journal of Banking & Finance**, Elsevier, v. 118, p. 105882, 2020.
- PIAZZESI, Monika. Affine term structure models. *In: HANDBOOK of financial econometrics: Tools and Techniques*. [S.l.]: Elsevier, 2010. P. 691–766.
- PIAZZESI, Monika; SWANSON, Eric T. Futures prices as risk-adjusted forecasts of monetary policy. **Journal of Monetary Economics**, Elsevier, v. 55, n. 4, p. 677–691, 2008.
- RUDEBUSCH, Glenn D; SACK, Brian P; SWANSON, Eric T. Macroeconomic implications of changes in the term premium. **FRB of San Francisco Working Paper**, Federal Reserve Bank of San Francisco, v. 2006, n. 46, p. 1–48, 2006.
- RUTSTRÖM, E Elisabet; WILCOX, Nathaniel T. Stated beliefs versus inferred beliefs: A methodological inquiry and experimental test. **Games and Economic Behavior**, Elsevier, v. 67, n. 2, p. 616–632, 2009.
- SACK, Brian P. Extracting the expected path of monetary policy from futures rates. **Journal of Futures Markets: Futures, Options, and Other Derivative Products**, Wiley Online Library, v. 24, n. 8, p. 733–754, 2004.
- SINGLETON, Kenneth J. Empirical Dynamic Asset Pricing: Model Specification and Econometric. **Assessment, Princeton University Press, Princeton, New Jersey**, 2006.
- SÖDERLIND, Paul; SVENSSON, Lars. New techniques to extract market expectations from financial instruments. **Journal of Monetary Economics**, Elsevier, v. 40, n. 2, p. 383–429, 1997.
- STOCK, James H; WATSON, Mark W. Dynamic factor models, factor-augmented vector autoregressions, and structural vector autoregressions in macroeconomics. *In: HANDBOOK of macroeconomics*. [S.l.]: Elsevier, 2016. v. 2. P. 415–525.
- VASICEK, Oldrich. An equilibrium characterization of the term structure. **Journal of financial economics**, Elsevier, v. 5, n. 2, p. 177–188, 1977.

WILLNER, Ram. A new tool for portfolio managers: Level, slope, and curvature durations. **The Journal of Fixed Income**, Institutional Investor Journals Umbrella, v. 6, n. 1, p. 48–59, 1996.