



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO TECNOLÓGICO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA E ELETRÔNICA
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

Vitor Probst Curtarelli

**MODELAGEM DOS EFEITOS DA RESTRIÇÃO DA TAXA DE COMUNICAÇÃO
SOBRE MÉTODOS DE REDUÇÃO DE RUÍDO EM APARELHOS AUDITIVOS
BIAURICULARES**

Florianópolis
2023

Vitor Probst Curtarelli

**MODELAGEM DOS EFEITOS DA RESTRIÇÃO DA TAXA DE COMUNICAÇÃO
SOBRE MÉTODOS DE REDUÇÃO DE RUÍDO EM APARELHOS AUDITIVOS
BIAURICULARES**

Dissertação de Mestrado submetida ao Curso de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Márcio Holsbach Costa, Dr.

Florianópolis

2023

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Curtarelli, Vitor Probst

Modelagem dos Efeitos da Restrição da Taxa de Comunicação
Sobre Métodos de Redução de Ruído em Aparelhos Auditivos
Biauriculares / Vitor Probst Curtarelli ; orientador,
Márcio Holsbach Costa, 2023.

162 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa
Catarina, Centro Tecnológico, Programa de Pós-Graduação em
Engenharia Elétrica, Florianópolis, 2023.

Inclui referências.

1. Engenharia Elétrica. 2. Aparelhos auditivos. 3.
Redução de ruído. 4. Quantização. 5. Saturação. I. Costa,
Márcio Holsbach. II. Universidade Federal de Santa
Catarina. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica.
III. Título.

Vitor Probst Curtarelli

**MODELAGEM DOS EFEITOS DA RESTRIÇÃO DA TAXA DE COMUNICAÇÃO
SOBRE MÉTODOS DE REDUÇÃO DE RUÍDO EM APARELHOS AUDITIVOS
BIAURICULARES**

Esta Dissertação de Mestrado foi julgada adequada para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Elétrica e aprovada, em sua forma final, pela Banca Examinadora em 20/06/2023, composta por:

Prof. Bruno Catarino Bispo, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Eduardo Batista, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Sérgio José Melo de Almeida, Dr.
Universidade Católica de Pelotas (UCPel)

Certificamos que esta é a versão original e final do trabalho.

Prof. Eduardo Augusto Bezerra, Dr.
Coordenador em exercício do Curso de
Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

Prof. Márcio Holsbach Costa, Dr.
Orientador
Universidade Federal de Santa Catarina

Florianópolis, 11 de Julho de 2023

À minha família, amigos e professores, que me possibilitaram
ir ao infinito e além.

AGRADECIMENTOS

À minha família, por todo o suporte e apoio, que sem eles eu não estaria aqui;

Aos meus professores, em especial ao meu orientador, por terem me ajudado a chegar onde cheguei;

Aos meus colegas de laboratório, pela paciência e ajuda nesse processo;

E aos meus amigos, pela força e companheirismo que me fizeram sobreviver essa jornada.

Também agradeço à FAPESC e à UFSC, por possibilitarem a existência desse trabalho.

If I have seen further, it is by standing on the shoulders of giants.
(Sir Isaac Newton, 1643-1727)

RESUMO

Aparelhos auditivos consistem em um par de aparelhos que captam e reproduzem os sinais sonoros recebidos em seus microfones. Considerando a presença de fontes desejadas e indesejadas no ambiente, integra-se aos aparelhos processos de forma a processar e melhorar os sinais sonoros captados, como algoritmos de redução de ruído, com o objetivo de melhorar a qualidade de vida do usuário. É percebido que a comunicação entre os aparelhos possui um papel importante nessa melhoria, possibilitando a utilização de mais informação nos processos aplicados e com isso alcançando resultados melhores. Portanto, compreender como que essa comunicação (e, com ela, como que a quantização e a saturação) afeta os resultados do processamento é vital. A técnica mais comum para modelar a quantização foi desenvolvida por Widrow, e consiste na utilização de um ruído aditivo, porém esse modelo não é o mais adequado para técnicas de redução de ruído, além de não considerar a existência de saturação. Este trabalho propõe duas técnicas novas para modelar os efeitos da quantização e da saturação sobre técnicas de redução de ruído, focando no filtro de Wiener multicanal: uma delas com uma abordagem inovadora e mais apropriada para o problema em questão; e outra com uma abordagem híbrida entre a técnica de Widrow e a abordagem anterior desse trabalho, com o objetivo de simplificar o modelo. Em todos os cenários acústicos avaliados, houve uma melhora perceptível em razão-sinal-ruído, qualidade e inteligibilidade, na questão de os modelos desenvolvidos serem capazes de aproximar o resultado que seria esperado ao aplicar a quantização e saturação de fato aos sinais captados, em relação a utilizar o modelo de Widrow.

Palavras-chave: Aparelhos auditivos, redução de ruído, quantização, saturação.

ABSTRACT

Hearing aids consist of a pair of devices that pick up and reproduce signals received by their microphones. Considering the presence of desired and undesired sources in the environment, algorithms are integrated into the devices, such as noise reduction algorithms, in order to process and enhance the captured sound signals with the aim of improving the user's quality of life. It is noticed that the communication between the devices plays an important role in this improvement, enabling the use of more information in the applied processes and thus achieving better results. Therefore, understanding how this communication (and, with it, how quantization and saturation) affects processes' results is vital. The most common technique to model quantization was developed by Widrow and consists of using an additive noise, but this model is not the most suitable for noise reduction techniques, in addition to not considering the existence of saturation. This work proposes two new techniques to model the effects of quantization and saturation on noise reduction techniques, focusing on the multichannel Wiener filter: one of them with an innovative and more appropriate approach for the problem in question; and another with a hybrid approach between Widrow's technique and the previous approach of this work, with the objective of simplifying the model. In all evaluated acoustic scenarios, there was a noticeable improvement in signal-to-noise ratio, quality and intelligibility, in terms of the developed models being able to approximate the result that would be expected when actually applying quantization and saturation to the captured signals, in relation to using the Widrow model.

Keywords: Hearing aids, noise reduction, quantization, saturation.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Anatomia do sistema auditivo humano.	32
Figura 2.2 – Relação entre entrada y e saída $Q_{\Delta,\infty}\{y\}$, de um quantizador uniforme de passo Δ e infinitos níveis de quantização.	34
Figura 2.3 – Cenário acústico do problema considerado.	37
Figura 2.4 – Esquemático do sistema biauricular para o problema proposto.	38
Figura 2.5 – Diagrama de blocos do processamento digital para o filtro MWF considerando quantização.	44
Figura 3.1 – Opções de quantização com 8 níveis: (a) sem nível 0 e simétrica; e (b) com nível 0 e assimétrica.	52
Figura 3.2 – Exemplo de quantizador simétrico em torno de 0, com nível 0. $\Delta = \frac{1}{3}$, $N = 3$	54
Figura 3.3 – Exemplo de quantizador não-ideal simétrico em torno de 0 V, com nível 0 V. $\Delta = \frac{1}{3}$, $N = 3$	57
Figura 5.1 – MAE para as diferentes situações da Simulação I, com $V = 20$	78
Figura 5.2 – MAE para as diferentes situações da Simulação I, com $V = 5$	79
Figura 5.3 – MAE para as diferentes situações da Simulação I, com $V = 2$	80
Figura 5.4 – SNQR para as diferentes situações da Simulação I, com $V = 20$	82
Figura 5.5 – SNQR para as diferentes situações da Simulação I, com $V = 5$	83
Figura 5.6 – SNQR para as diferentes situações da Simulação I, com $V = 2$	84
Figura 5.7 – SNQR para as diferentes situações da Simulação II, com $V = 20$	85
Figura 5.8 – SNQR para as diferentes situações da Simulação II, com $V = 5$	86
Figura 5.9 – SNQR para as diferentes situações da Simulação II, com $V = 2$	87
Figura 5.10–PESQ para as diferentes situações da Simulação I, com $V = 20$	89
Figura 5.11–PESQ para as diferentes situações da Simulação I, com $V = 5$	90
Figura 5.12–PESQ para as diferentes situações da Simulação I, com $V = 2$	91
Figura 5.13–PESQ para as diferentes situações da Simulação II, com $V = 20$	92
Figura 5.14–PESQ para as diferentes situações da Simulação II, com $V = 5$	93
Figura 5.15–PESQ para as diferentes situações da Simulação II, com $V = 2$	94
Figura 5.16–PESQ para as diferentes situações da Simulação III, com $V = 20$	95
Figura 5.17–PESQ para as diferentes situações da Simulação III, com $V = 5$	95
Figura 5.18–PESQ para as diferentes situações da Simulação III, com $V = 2$	96
Figura 5.19–STOI para as diferentes situações da Simulação I, com $V = 20$	97
Figura 5.20–STOI para as diferentes situações da Simulação I, com $V = 5$	98
Figura 5.21–STOI para as diferentes situações da Simulação I, com $V = 2$	99
Figura 5.22–STOI para as diferentes situações da Simulação II, com $V = 20$	100
Figura 5.23–STOI para as diferentes situações da Simulação II, com $V = 5$	101

Figura 5.24–STOI para as diferentes situações da Simulação II, com $V = 2$	102
Figura 5.25–STOI para as diferentes situações da Simulação III, com $V = 20$	103
Figura 5.26–STOI para as diferentes situações da Simulação III, com $V = 5$	103
Figura 5.27–STOI para as diferentes situações da Simulação III, com $V = 2$	104

LISTA DE TABELAS

Tabela 1.1 – Classificação do grau da perda auditiva, conforme a OMS.	27
Tabela 2.1 – Correspondência entre pontuação MOS e degradação da fala.	50
Tabela 3.1 – Relação entre níveis de amplitude, número de passos e palavra binária do quantizador da Figura 3.2. $\Delta = \frac{1}{3}$, $N = 3$	54
Tabela 3.2 – Custo computacional para o cálculo da matriz de coerência \mathbf{R}_{xyq} , para os 3 modelos avaliados.	71
Tabela 3.3 – Custo computacional para o cálculo da matriz de coerência \mathbf{R}_{yqyq} , para os 3 modelos avaliados.	71
Tabela 4.1 – Diferentes situações simuladas para a Simulação I.	74
Tabela 4.2 – Diferentes situações simuladas para a Simulação II.	75
Tabela 4.3 – Diferentes situações simuladas para a Simulação III.	76
Tabela 5.1 – Tempo computacional de cada modelo avaliado, com e sem otimização do modelo proposto.	105

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

OMS	Organização Mundial da Saúde
STFT	Transformada de Fourier de Tempo Curto
HRTF	Função de Transferência Relacionada à Cabeça
FC	Centro de Fusão
CD	Aparelho Contralateral
ADC	Conversor Analógico-Digital
ISTFT	Transformada Inversa de Fourier de Tempo Curto
DAC	Conversor Digital-Analógico
CPU	Unidade Central de Processamento
MWF	Filtro de Wiener Multicanal
MAE	Erro Absoluto Médio
SNR	Razão Sinal-Ruído
SNQR	Razão Sinal-Ruído-e-Quantização
PESQ	Avaliação Perceptiva de Qualidade da Fala
MOS	Pontuação de Opinião Média
STOI	Inteligibilidade Objetiva de Tempo Curto
SIR	Razão Interferência-Ruído
MSE	Erro Quadrático Médio
dB	Decibéis

LISTA DE SÍMBOLOS

Nome	Descrição	Pág.
Símbolos gerais		
	Unidade imaginária	34
\mathbb{R}	Número real	34
\mathbb{I}	Número imaginário	34
\mathbb{C}	Número complexo	34
\mathbb{A} e \mathbb{B}	Representação genérica para \mathbb{R} ou \mathbb{I}	59
Quantização e saturação		
N	Número de bits da quantização	34
Δ	Passo de quantização	34
V	Valor de saturação da quantização	53
\mathcal{N}	Número de níveis positivos (ou negativos) da quantização	52
\mathcal{I}	Número total de níveis da quantização	33
$Q_{\Delta, \mathcal{N}}\{\cdot\}$	Operador da quantização	33
$Q_{\Delta, \mathcal{N}}^{\mathbb{C}}\{\cdot\}$	Operador da quantização complexa	34
$S_V\{\cdot\}$	Operador da saturação	69
Cenário acústico e sinais		
M	Número total de microfones de cada aparelho auditivo	36
s	Sinal desejado na fonte	36
a_m	HRTF do sinal desejado visto pelo microfone m	36
u_i	Sinal interferente na fonte i	36
$b_{i,m}$	HRTF do sinal interferente u_i visto pelo microfone m	36
I	Número total de fontes interferentes	36
r_m	Ruído difuso do ambiente acústico no microfone m	36
f_m	Ruído eletrônico do aparelho auditivo no microfone m	36
x_m	Sinal desejado no microfone m	36
\hat{x}_F e \hat{x}_C	Sinal desejado reconstruído para o FC e CD	39
v_m	Ruído global no microfone m	36
y_m	Sinal contaminado no microfone m	36
$y_{q,m}$	Sinal contaminado quantizado no microfone m	39
$y_{sq,m}$	Sinal contaminado quantizado e saturado no microfone m	69
$\eta_{q,m}$	Ruído de quantização no microfone m	44
\mathbf{a}	Vetor de HRTFs do sinal desejado	37
\mathbf{b}_i	Vetor de HRTFs do sinal interferente u_i	37
\mathbf{r}	Vetor de ruídos difusos do ambiente acústico	37
\mathbf{f}	Vetor de ruídos eletrônicos dos aparelhos auditivos	37

Nome	Descrição	Pág.
\mathbf{x}	Vetor de sinais desejados	37
ν	Vetor de ruído global	37
\mathbf{y}	Vetor de sinais contaminados	37
\mathbf{y}_q	Vetor de sinais contaminados quantizados	39
\mathbf{y}_{sq}	Vetor de sinais contaminados quantizados e saturados	69
$\boldsymbol{\eta}_q$	Vetor de ruídos de quantização	45

Transformada de Fourier de Tempo-Curto

L	Número total de janelas da STFT	35
λ	Índice de cada janela da STFT	35
F	Número total de bins da STFT	35
k	Índice de cada bin da STFT	35

Processamento

ρ	Coeficiente de correlação	
ρ	Coeficiente de coerência	63
iSNR	SNR de entrada	74
oSNR	SNR de saída	75
σ_s	Desvio-padrão de s	45
σ_{y_m}	Desvio padrão de y_m	60
$\sigma_{\epsilon_{q,m}}$	Desvio padrão de $\epsilon_{m,q}$	70
\mathbf{w}_F e \mathbf{w}_C	Vetores de coeficientes dos filtros do FC e do CD	39
\mathbf{q}_F e \mathbf{q}_C	Vetores seletores de referência do FC e do CD	41
\mathbf{R}_{xx}	Matriz de coerência do sinal desejado	42
\mathbf{R}_{xy}	Matriz de coerência cruzada do sinal desejado e sinal contaminado	45
\mathbf{R}_{yy}	Matriz de coerência do sinal contaminado	46
\mathbf{R}_{xy_q}	Matriz de coerência cruzada do sinal desejado e sinal contaminado quantizado	42
$\mathbf{R}_{y_q y_q}$	Matriz de coerência do sinal contaminado quantizado	42
\mathcal{K}_1	Matriz de ganhos da matriz \mathbf{R}_{xy_q} em função da quantização	61
\mathcal{K}_2^S e \mathcal{K}_2^D	Matrizes de ganhos da matriz $\mathbf{R}_{y_q y_q}$ em função da saturação	67
\mathcal{K}_1^*	Matriz de ganhos da matriz \mathbf{R}_{xy_q} em função da quantização	70
\mathcal{K}_2^{S*} e \mathcal{K}_2^{D*}	Matrizes de ganhos da matriz $\mathbf{R}_{y_q y_q}$ em função da saturação	70

Funções e operadores

$(\cdot)^R$	Parte real do argumento	34
$(\cdot)^I$	Parte imaginária do argumento	34
$(\cdot)^*$	Conjugado do argumento	43
$(\cdot)^{-1}$	Inversa do argumento	43

Nome	Descrição	Pág.
$(\cdot)^T$	Transposto do argumento	37
$(\cdot)^H$	Transposto-conjugado-complexo do argumento	39
\cdot	Função degrau	53
$\text{sgn}(\cdot)$	Função sinal	56
$\text{erf}\{\cdot\}$	Função erro	55
$E[\cdot]$	Operador valor esperado	40
$\exp\{\cdot\}$	Função exponencial Neperiana	55

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	27
1.1	MOTIVAÇÃO E JUSTIFICATIVA	27
1.2	OBJETIVOS	28
1.3	ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO	29
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	31
2.1	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	31
2.2	QUANTIZAÇÃO	33
2.3	COMUNICAÇÃO	35
2.4	APARELHO AUDITIVO BIAURICULAR	35
2.5	FUNÇÃO-CUSTO	40
2.6	MODELO CLÁSSICO PARA OS EFEITOS DA QUANTIZAÇÃO	44
2.7	MÉTRICAS DE AVALIAÇÃO	47
3	MODELOS PROPOSTOS PARA MATRIZES DE COERÊNCIA DE SINAIS QUANTIZADOS	51
3.1	MODELO DO PROCESSO DE QUANTIZAÇÃO	51
3.2	MODELO PROPOSTO PARA OS EFEITOS DA QUANTIZAÇÃO	57
3.3	MODELO HÍBRIDO PARA OS EFEITOS DA QUANTIZAÇÃO	68
3.4	CUSTO COMPUTACIONAL DOS MODELOS AVALIADOS	70
4	METODOLOGIA E SIMULAÇÕES	73
4.1	BANCOS DE DADOS UTILIZADOS	73
4.2	AMBIENTES ACÚSTICOS	73
4.3	SIMULAÇÕES	73
5	RESULTADOS E DISCUSSÕES	77
5.1	ERRO ABSOLUTO MÉDIO	77
5.2	RAZÃO SINAL-RUÍDO-E-QUANTIZAÇÃO	81
5.3	QUALIDADE	88
5.4	INTELIGIBILIDADE	96
5.5	RESULTADOS DE MODELAGEM	104
5.6	TEMPO COMPUTACIONAL	104
6	CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES	107
6.1	TRABALHOS FUTUROS	107
	REFERÊNCIAS	109
A	– CORRELAÇÕES ENTRE COMBINAÇÕES DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS COMPLEXAS	115

B	–	VALOR ESPERADO DO PRODUTO DE UMA VARIÁVEL ALEATÓRIA, E A FUNÇÃO ERRO DE OUTRA	121
C	–	VALOR ESPERADO DO PRODUTO ENTRE A FUNÇÃO ERRO DE DUAS VARIÁVEIS ALEATÓRIAS	125
D	–	AVALIAÇÃO DOS GANHOS DAS MATRIZES DE COERÊNCIA DE SINAIS SATURADOS	137
E	–	PROCESSO PARA CONSTRUÇÃO DA MATRIZ DE INTERPOLAÇÃO	141
F	–	VALIDAÇÃO DA DEFINIÇÃO DA QUANTIZAÇÃO E SUAS MODELAGENS	145
G	–	VALIDAÇÃO DA COERÊNCIA ENTRE SINAL QUANTIZADO E NÃO-QUANTIZADO	149
H	–	VALIDAÇÃO DA COERÊNCIA ENTRE SINAIS QUANTIZADOS .	153
I	–	TABELA DO GANHO DA MATRIZ DE COERÊNCIA DO SINAL CONTAMINADO QUANTIZADO	157

1 INTRODUÇÃO

A audição é um dos 5 sentidos básicos, tendo sido utilizada ao longo da evolução humana para percepção do ambiente, localização de fontes sonoras, mas principalmente para a comunicação. Portanto, uma redução na capacidade auditiva de uma pessoa implica diretamente na diminuição da capacidade de comunicação e percepção do ambiente (EINHORN, 2017).

Segundo a Organização Mundial da Saúde (OMS) (OMS, 2021), mais de 5% da população mundial sofre atualmente de algum problema de audição, e prevê-se que em 2050 até 10% da população possa apresentar algum tipo de deficiência auditiva. Ainda de acordo com a OMS, as limitações auditivas estão correlacionadas à idade e à baixa qualidade de vida do país em questão.

A Tabela 1.1 apresenta a classificação dos diferentes graus de perda auditiva, seus respectivos níveis de perda^(a) e uma breve descrição das consequências associadas.

Tabela 1.1 – Classificação do grau da perda auditiva, conforme a OMS.

Grau de perda auditiva	Perda auditiva	Compreensão
Audição normal	0 ~ 25 dB	Sem dificuldade.
Perda leve	26 ~ 40 dB	Dificuldade somente na fala fraca.
Perda moderada	41 ~ 55 dB	Frequente dificuldade com fala normal.
Perda marcada	56 ~ 70 dB	Frequente dificuldade com fala intensa.
Perda severa	71 ~ 90 dB	Só entende fala gritada/amplificada.
Perda profunda	91 + dB	Não entende a fala mesmo com amplificação.

Fonte: Adaptado de (SCF, 2020), (DAVIS, 1970).

1.1 MOTIVAÇÃO E JUSTIFICATIVA

Nos E.U.A. cerca de 77% dos indivíduos com alguma deficiência auditiva poderiam ser beneficiados pelo uso de aparelhos auditivos (NIDCD, 2021), o que indica que há uma larga parcela da população que tem potencial de ser beneficiada por avanços no desenvolvimento desses dispositivos.

Considerando ambientes com ruído, pessoas com limitações auditivas que utilizam dispositivos de amplificação sonora apresentam menor inteligibilidade que pessoas com audição

^(a)A perda auditiva é calculada entre a média das perdas em 500, 1 k, 2 k e 4 kHz.

normal (MOORE, B., 2008). Essa constatação substancia a motivação pelo desenvolvimento de métodos de redução de ruído em dispositivos de auxílio à audição.

Mais de 80% de todas as pessoas com limitações auditivas, apresentam ambas as orelhas afetadas (WEIGMANN, 2009). Nessa situação, os aparelhos biauriculares são a melhor opção para a compensação da perda de audição. Além disso, sabe-se que a utilização de aparelhos auditivos em ambas as orelhas possibilita a utilização de métodos mais eficazes na redução de ruído (DAY; BROWNING; GATEHOUSE, 1988; AVAN; GIRAUDET; BÜKI, 2015), por utilizar a informação espacial e o distanciamento entre as fontes sonoras no ambiente acústico.

Os aparelhos biauriculares são compostos por dois dispositivos, um em cada orelha, que se comunicam por um canal sem-fio. Através da troca de informações, possibilitam uma maior redução de ruído e, conseqüentemente, a obtenção de maior inteligibilidade em determinadas situações.

Apesar da grande vantagem do uso das informações sonoras de ambos os aparelhos na implementação de métodos de redução de ruído, a comunicação sem-fio é um dos elementos de grande consumo de energia (LOTTERMAN; KASTEN; MAJERUS, 1967), dessa forma é um importante elemento de diminuição do tempo útil de funcionamento das baterias.

A partir do exposto, uma estratégia que pode ser utilizada para diminuir o consumo de energia em aparelhos auditivos biauriculares é a redução da taxa de comunicação entre os aparelhos (AMINI *et al.*, 2020; ZHANG, J.; LI, 2021). Apesar desse assunto ter sido estudado por alguns trabalhos da literatura, o impacto deste procedimento no desempenho dos métodos de redução de ruído ainda não foi completamente esclarecido.

A partir disso, esse trabalho se propõe a estudar os efeitos de quantização sobre o desempenho de métodos de redução de ruído em aparelhos auditivos biauriculares.

1.2 OBJETIVOS

Nas subseções a seguir são descritos o objetivo geral e os objetivos específicos deste trabalho.

1.2.1 Objetivo Geral

O objetivo geral desse trabalho é expandir o conhecimento científico sobre a diminuição da taxa de transmissão de informação (ou taxa de comunicação) em aparelhos auditivos biauriculares e seu impacto sobre o desempenho de métodos de redução de ruído.

1.2.2 Objetivos Específicos

Neste trabalho, tem-se por objetivos específicos:

- Propor uma nova forma de modelagem dos efeitos da quantização;
- Considerar efeitos de saturação em conjunto da quantização;

- Analisar o desempenho do modelo proposto em simulações próximas das encontradas em problemas reais de compensação da audição;
- Comparar o desempenho dos modelos propostos com outros previamente desenvolvidos na literatura;
- Avaliar a relação entre taxa de transmissão de informação e inteligibilidade e qualidade.

1.3 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Esse trabalho foi organizado em 6 capítulos, mais apêndices. No Capítulo 1 foi apresentada uma introdução do problema estudado, bem como motivações e objetivos a serem alcançados.

No Capítulo 2 é apresentada a fundamentação teórica do problema estudado, revendo a literatura da área, apresentando conceitos básicos necessários, o problema analisado, e a solução comumente utilizada.

No Capítulo 3 são apresentadas as contribuições realizadas, constituídas por duas novas formas de modelagem do problema em questão. O Capítulo 4 apresenta a metodologia utilizada para a realização das simulações. No Capítulo 5 é feita a discussão dos resultados obtidos, enquanto que no Capítulo 6 são feitas as considerações finais do trabalho.

Nos apêndices encontra-se boa parte dos desenvolvimentos algébricos desse trabalho, os quais foram separados de forma a melhorar a clareza do texto, e embora constituam o principal esforço realizado, não são estritamente necessários para o entendimento dos resultados.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Nesse capítulo será feita uma breve revisão dos trabalhos mais relevantes sobre o assunto em questão, assim como serão apresentados a fundamentação teórica necessária para os desenvolvimentos deste trabalho, o problema que será analisado e também a solução conhecida para ele. Também serão apresentados os critérios objetivos que serão utilizados para a avaliação dos resultados.

2.1 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Nesta seção será feita uma breve apresentação dos temas mais relevantes que serão tratados ao longo desse trabalho.

2.1.1 Orelha humana

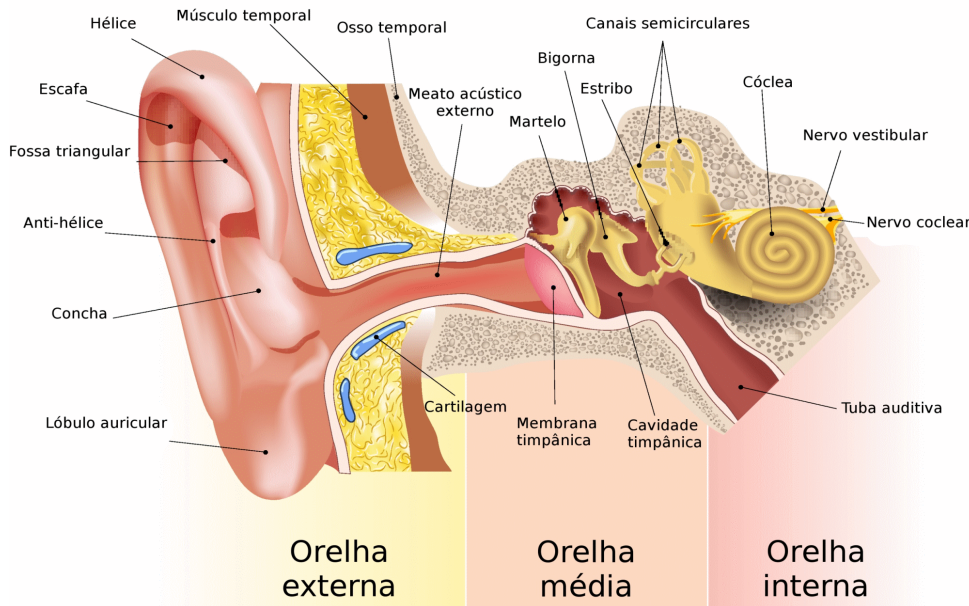
A orelha humana é responsável pela captação, processamento e decodificação da informação sonora que está presente no ambiente. Através desse sistema é possível obter informações em relação a: posições das fontes sonoras; sua intensidade; identificação dos locutores; e recepção da mensagem que está sendo transmitida.

A orelha pode ser discretizada em 3 regiões, conforme a Figura 2.1: a orelha externa, responsável por captar as ondas sonoras no pavilhão auricular e transmiti-las à membrana timpânica através do canal auditivo; a orelha média, na qual as ondas de pressão sonora são convertidas em ondas mecânicas e transmitidas pelos ossículos martelo, bigorna e estribo para a orelha interna; e a orelha interna, onde as ondas mecânicas são transformadas em informação elétrica e enviadas ao cérebro para processamento.

Caso haja algum problema ao longo dessa cadeia de processamento, poderá ocorrer uma perda na capacidade auditiva do indivíduo. Caso essa perda seja leve ou moderada (pela Tabela 1.1), a compensação das limitações pode ser realizada, em grande parte das vezes, pelo uso de um aparelho auditivo.

2.1.2 Aparelhos auditivos

Como já explicado, aparelhos auditivos são dispositivos cuja função é auxiliar um indivíduo que perdeu parte da sua capacidade auditiva, fornecendo amplificação e melhorias no sinal sonoro de interesse de forma a tentar restaurar a percepção auditiva original e a capacidade de comunicação do usuário. Embora existam aparelhos auditivos analógicos, atualmente aparelhos digitais são amplamente predominantes (FDA, 2018), já que possuem maior capacidade de processamento, mesmo tendo um maior consumo de energia. Portanto, uma utilização eficiente e bem-planejada dos métodos de processamento, de forma a aumentar a durabilidade de uma carga da bateria, é de grande interesse.

Figura 2.1 – Anatomia do sistema auditivo humano.

Fonte: Adaptado de (SONORAWEB, 2019).

Um importante elemento de consumo em aparelhos auditivos biauriculares é o processo de transmissão sem-fio das informações de um aparelho para o outro. A diminuição da taxa de comunicação, mantendo uma qualidade/inteligibilidade mínima desejada, pode aumentar o tempo entre recargas das baterias. Dentro deste contexto, portanto, o estudo da quantização das informações transmitidas e seu impacto sobre o desempenho dos métodos de processamento é de grande interesse por projetistas de aparelhos auditivos.

2.1.3 Modelagem da quantização

Em um artigo seminal de 1956, WIDROW (1956) mostrou que sob certas condições, os efeitos da quantização podem ser aproximados por um ruído aditivo. Seu trabalho tinha uma característica muito mais teórica do que prática, buscando entender os efeitos da quantização, já que essa área do conhecimento ainda não havia sido adequadamente explorada à época. Entretanto, a validade do modelo resultante depende de condições muito restritivas que podem não ser características de certas aplicações práticas como, por exemplo, em redução de ruído para aparelhos auditivos.

O modelo desenvolvido por Widrow ainda é amplamente utilizado, por ser simultaneamente robusto e com uma fundamentação matemática muito forte, mas também simples em sua aplicação. Posteriormente foi revisado e expandido em (LIPSHITZ; WANNAMAKER; VANDERKOOY, 1992) e (WANNAMAKER *et al.*, 2000), onde buscou-se trazer alternativas para algumas das limitações encontradas em sua derivação original (em especial em relação às condições necessárias), de forma a aumentar a gama de aplicações. Essas novas considerações levantadas pelos autores citados, embora tenham ampliado a utilidade e aplicabilidade do

modelo, ainda apresentam certas limitações quando aplicados em problemas de redução de ruído e melhoria da fala.

O modelo desenvolvido por Widrow e posteriormente expandido pelos demais autores referenciados, é o principal utilizado sempre que se deseja modelar a quantização, da redução de ruído em aparelhos biauriculares ao estudo da comunicação em canais de transmissão de dados (SINGH; DABEER; MADHOW, 2008), muitas vezes tomando por verdade as considerações feitas nos trabalhos mesmo em casos quando essas não são aplicáveis.

2.1.4 Redução de ruído com quantização

Existem diferentes métodos de redução de ruído para aparelhos auditivos (LAUNER; ZAKIS; MOORE, B. C. J., 2016), cada um com um objetivo diferente. O filtro de Wiener (CHEN *et al.*, 2006; WIENER, 1964) tem como objetivo minimizar o erro quadrático médio entre o sinal de saída de um filtro linear cuja entrada é o sinal contaminado e o sinal de interesse, e até hoje ele é amplamente utilizado, tanto como base de comparação entre diferentes métodos quanto como a solução ótima para o problema que ele busca solucionar.

O modelo de quantização de Widrow previamente discutido pode ser utilizado em conjunto com diferentes métodos de redução de ruído, inclusive com o método de Wiener, para estimar possíveis diminuições de desempenho. Esse enfoque tem sido utilizado também para o caso específico de restrições na taxa de comunicação entre aparelhos auditivos e seu efeito sobre o desempenho de métodos de redução de ruído. Como exemplo, pode-se citar aplicações referentes à determinação da alocação ótima de bits para os diferentes microfones (AMINI *et al.*, 2020); otimização da comunicação entre aparelhos (AMINI *et al.*, 2019); e redução de ruído com preservação das pistas biauriculares (ZHANG, J.; LI, 2021).

2.2 QUANTIZAÇÃO

Define-se como quantização o “ato de dividir uma quantidade em um número discreto de partes menores” (GRAY; NEUHOFF, 1998). Com rigor matemático, o operador de quantização $Q_{S,\mathcal{I}}\{y\}$ é definido por um conjunto de intervalos \mathcal{S} e um conjunto de valores \mathcal{C} , ambos de cardinalidade \mathcal{I} , de forma que

$$\bigcup_{s_i \in \mathcal{S}} s_i = \mathbb{R}, \quad (2.2.1a)$$

$$c_i \in s_i \quad \forall c_i \in \mathcal{C}, \quad (2.2.1b)$$

$$i \in [0, 1, \dots, \mathcal{I}], \quad (2.2.1c)$$

então para um valor y , tem-se

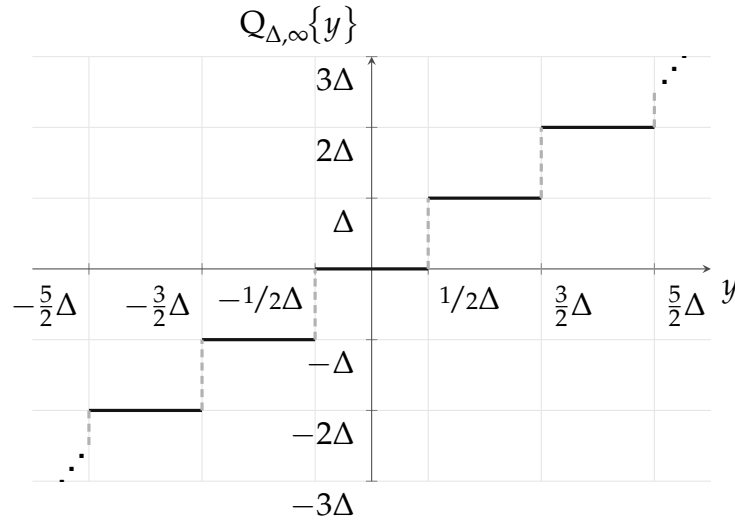
$$Q_{S,\mathcal{I}}\{y\} = c_i \text{ se } y \in s_i. \quad (2.2.2)$$

Denomina-se cada valor de \mathcal{C} como um nível de quantização. Se o comprimento de cada intervalo s_i for fixo^(a), diz-se que o quantizador dado é um quantizador uniforme. Para um quantizador uniforme,

$$c_i = \Delta \cdot n + O, \quad (2.2.3)$$

em que Δ é o comprimento dos intervalos s_i , e O é um *offset* para que o primeiro elemento de c_i seja correto. Δ é o passo de quantização do quantizador uniforme, ou só passo de quantização.

Figura 2.2 – Relação entre entrada y e saída $Q_{\Delta,\infty}\{y\}$, de um quantizador uniforme de passo Δ e infinitos níveis de quantização.



Fonte: Autoria própria.

A Figura 2.2 ilustra o processo de quantização para um quantizador uniforme, assumindo uma quantidade infinita de níveis de quantização. Em um caso prático, há N bits disponíveis para o processo de quantização, de forma que

$$\mathcal{I} = 2^N \quad (2.2.4)$$

é a quantidade de níveis disponíveis; e V_{\min} e V_{\max} (de forma que $\Delta V = V_{\max} - V_{\min}$) são os valores em que ocorre saturação fora desse intervalo. Define-se que o operador $Q_{\Delta,\mathcal{I}}\{y\}$ seja responsável pela operação de quantização, em que Δ e \mathcal{I} são os parâmetros que definem a quantização. Também define-se a quantização complexa $Q_{\Delta,\mathcal{I}}^C\{y\}$, dada por

$$Q_{\Delta,\mathcal{I}}^C\{y\} = Q_{\Delta,\mathcal{I}}\{y^{\mathbb{R}}\} + Q_{\Delta,\mathcal{I}}\{y^{\mathbb{I}}\}, \quad (2.2.5)$$

onde os sobre-escritos $(\cdot)^{\mathbb{R}}$ e $(\cdot)^{\mathbb{I}}$ indicam as partes real e imaginária do argumento, respectivamente, e j é a unidade imaginária. Por questão de nomenclatura, a quantização de um número real será chamada de quantização real, quando necessário diferenciá-la da quantização complexa.

^(a)Exceto por até dois dos intervalos que seriam responsáveis pela saturação.

Neste trabalho é utilizado um mesmo número de bits para ambas as partes real e imaginária da quantização, bem como um mesmo passo de quantização. É possível descrever uma quantização assimétrica em relação às partes real e imaginária, porém essa modelagem não será tratada aqui.

2.3 COMUNICAÇÃO

Define-se a taxa de comunicação R como “a quantidade de informação (bits) transmitida por um canal, por unidade de tempo” (GUPTA, 2006), dada por

$$R = \frac{b}{t}, \quad (2.3.1)$$

em que b é o número de bits transmitidos, e t é a duração no tempo da comunicação. Para uma mensagem em que sejam transmitidos S símbolos, cada um com $N(s)$ bits e duração $T(s)$, a taxa de comunicação será

$$R = \frac{\sum_s N(s)}{\sum_s T(s)}. \quad (2.3.2)$$

Levando em conta que o canal em questão seja a comunicação sem-fio entre os aparelhos auditivos, cada símbolo s é a palavra binária referente à quantização com $N(s)$ bits de uma amostra a_s . Se a taxa de amostragem do processo que gera a_s for fixa (o que usualmente é o caso para processamento digital de sinais de áudio), então uma quantidade fixa de símbolos é transmitida por segundo, e portanto $T(s) \equiv T$ é fixo. Com isso,

$$R = \frac{\sum_s N(s)}{ST}. \quad (2.3.3)$$

Se o número de símbolos por mensagem S e a duração de cada símbolo T forem fixos, uma restrição na taxa de comunicação R implica em uma restrição no número total de bits b , que por sua vez restringe quantos bits $N(s)$ estão disponíveis codificar cada símbolo. Como o número de bits $N(s)$ está intrinsecamente associado ao processo de quantização da amostra a_s (por definição), essa restrição na taxa de comunicação leva a uma alteração dos parâmetros da quantização e, com isso, seu comportamento.

2.4 APARELHO AUDITIVO BIAURICULAR

A seguir será apresentada a modelagem utilizada para o problema que está sendo estudado, tanto para o ambiente acústico, quanto para o processamento realizado no sistema biauricular. O processamento dos sinais será realizado no domínio tempo-frequência, calculado através da Transformada de Fourier de Tempo Curto (STFT)^(b). Dessa forma, todas as variáveis são dependentes de um índice λ referente à janela de observação, com um total de L janelas; e um índice k referente ao bin da frequência, com um total de F bins.

^(b)Do inglês, *Short-Time Fourier Transform*.

2.4.1 Ambiente acústico

A Figura 2.3 apresenta o modelo do ambiente acústico que será utilizado. O quadrado verde indica a fonte desejada; os triângulos em azul indicam as fontes interferentes, havendo um total de I fontes interferentes; o segmento de círculo em tracejado representa o ruído difuso. A cabeça do usuário é apresentada no centro da figura (e também no centro do sistema de coordenadas), com um aparelho auditivo de cada lado. Cada aparelho contém M microfones, ilustrados por símbolos $+$ na figura. Cada canal de aquisição é sujeito a um ruído eletrônico. As posições e distâncias representadas aqui são meramente ilustrativas, com o propósito de indicar uma possível configuração do ambiente acústico.

Por notação, será tomado que os sinais captados por cada microfone já estão no domínio da frequência, quando na realidade há um processo de STFT para transformar o sinal no tempo captado pelo microfone no seu respectivo sinal na frequência.

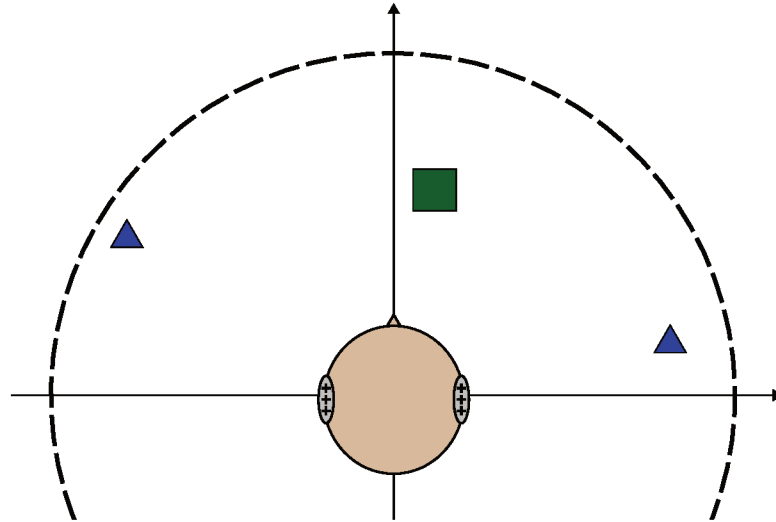
Assumindo que as fontes desejada e interferentes sejam pontuais, é possível associar a cada uma delas uma Função de Transferência Relacionada à Cabeça (HRTF)^(c) (KAYSER *et al.*, 2009), de forma que $a_m(\lambda, k)$ seja a HRTF entre a fonte desejada e o m -ésimo microfone, e $b_{i,m}(\lambda, k)$ a HRTF entre a i -ésima fonte interferente e cada m -ésimo microfone (de qualquer aparelho). A partir dessas definições pode-se modelar o sinal $y_m(\lambda, k)$ capturado em cada microfone m , como sendo

$$y_m(\lambda, k) = \underbrace{a_m(\lambda, k) \cdot s(\lambda, k)}_{x_m(\lambda, k)} + \underbrace{\sum_{i=1}^I b_{i,m}(\lambda, k) \cdot u_i(\lambda, k) + r_m(\lambda, k) + f_m(\lambda, k)}_{v_m(\lambda, k)}, \quad (2.4.1)$$

onde $x_m(\lambda, k)$ é o sinal desejado; $r(\lambda, k)$ é o ruído difuso; $u_i(\lambda, k)$ é a i -ésima fonte interferente; e $f(\lambda, k)$ é o ruído eletrônico; todos captados pelo m -ésimo microfone. $s(\lambda, k)$ é o sinal emitido pela fonte desejada, e $v_m(\lambda, k)$ é o ruído global presente em cada microfone, sendo $v_m(\lambda, k)$ também chamado de sinal contaminante. $y_m(\lambda, k)$ é dito o sinal contaminado do m -ésimo microfone.

^(c)Do inglês, *Head-Related Transfer Function*.

Figura 2.3 – Cenário acústico do problema considerado. O quadrado em verde indica a fonte desejada, os triângulos azuis as fontes interferentes, e o segmento circular tracejado o ruído difuso. A cabeça (no centro do sistema de coordenadas) representa o usuário, com dois aparelhos auditivos.



Fonte: Autoria própria.

Utilizando uma notação vetorial, o problema se torna da Equação (2.4.1)

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(\lambda, k) &= \mathbf{a}(\lambda, k)s(\lambda, k) + \sum_{i=1}^I \mathbf{b}_i u_i(\lambda, k) + \mathbf{r}(\lambda, k) + \mathbf{f}(\lambda, k) \\ &= \mathbf{x}(\lambda, k) + \mathbf{v}(\lambda, k), \end{aligned} \quad (2.4.2a)$$

no qual $\mathbf{x}(\lambda, k)$ é definido como um vetor-coluna de tamanho $2M \times 1$ contendo todos os $2M$ sinais $x_m(\lambda, k)$, tal que

$$\mathbf{x}(\lambda, k) = [x_1(\lambda, k) \ x_2(\lambda, k) \ \dots \ x_{2M}(\lambda, k)]^T, \quad (2.4.2b)$$

em que $(\cdot)^T$ é o operador transposto; e a mesma definição valendo para as outras variáveis. Ao longo desse trabalho, usualmente sinais em fonte normal serão sinais para um único microfone ($x_m(\lambda, k)$), na forma de escalares; e sinais em negrito serão o empilhamento dos $2M$ sinais ($\mathbf{x}(\lambda, k)$), na forma de vetores, conforme a Equação (2.4.2b).

2.4.2 Sistema biauricular

A estrutura do sistema biauricular de redução de ruído estudado é apresentada na Figura 2.4. Linhas contínuas em cinza indicam sinais escalares contínuos no tempo, linhas pontilhadas em preto indicam sinais escalares discretos na frequência, e linhas tracejadas grossas em preto indicam sinais vetoriais discretos na frequência.

falantes (após a ISTFT) são

$$\hat{x}_F(\lambda, k) = \mathbf{w}_F^H(\lambda, k) \mathbf{y}_q(\lambda, k), \quad (2.4.3a)$$

$$\hat{x}_C(\lambda, k) = Q_{\Delta_C, \mathcal{I}_C}^C \left\{ \mathbf{w}_C^H(\lambda, k) \mathbf{y}_q(\lambda, k) \right\}, \quad (2.4.3b)$$

em que os subscritos F ou C indicam em qual aparelho o sinal será reproduzido; $\mathbf{w}_F(\lambda, k) = [w_{F,1}(\lambda, k) \dots w_{F,2M}(\lambda, k)]^T$ é o vetor de coeficientes no aparelho auditivo associado ao FC; $\mathbf{w}_C(\lambda, k) = [w_{C,1}(\lambda, k) \dots w_{C,2M}(\lambda, k)]^T$ é o vetor de coeficientes associado ao CD; e $\mathbf{y}_q(\lambda, k)$ é o vetor de sinais contaminados como observados no FC (M provenientes do FC e outros M provenientes do CD), e é definido como

$$\mathbf{y}_q(\lambda, k) = \left[y_{q,1}(\lambda, k) \dots y_{q,M}(\lambda, k) y_{q,M+1}(\lambda, k) \dots y_{q,2M}(\lambda, k) \right]^T, \quad (2.4.4)$$

no qual os M primeiros microfones são provindos do próprio FC, e portando sem quantização; e os últimos M microfones são passados do CD ao FC por transmissão sem-fio, e portanto quantizados. Com isso, e . Nota-se que ambos os vetores $\mathbf{w}_F(\lambda, k)$ e $\mathbf{w}_C(\lambda, k)$ são calculados na CPU do FC, e que o sinal que será reproduzido no CD também passa por um processo de quantização para transmissão sem-fio entre os aparelhos. O operador $(\cdot)^H$ indica a operação de transposto-conjugado, ou Hermitiano.

Neste trabalho, considera-se que os parâmetros Δ e N dos quantizadores possam ser variáveis em função de (λ, k) , bem como em função do microfone m , de forma que⁽ⁱ⁾

$$\Delta \equiv \Delta_m(\lambda, k), \quad (2.4.5a)$$

$$N \equiv N_m(\lambda, k). \quad (2.4.5b)$$

A dependência em (λ, k) de Δ e N será omitida daqui em diante até o fim do trabalho, por questão de espaço; o subscrito de m será omitido até o momento em que for relevante poder diferenciar a qual microfone cada parâmetro está relacionado.

Após ser reconstruído no tempo contínuo, o sinal filtrado $\hat{x}_F(\lambda, k)$ é enviado ao alto-falante do FC; o mesmo ocorre para $\hat{x}_C(\lambda, k)$, que é transmitido ao CD e posteriormente enviado ao seu alto-falante.

Sabendo que $y_m(\lambda, k)$ é um sinal complexo, tem-se

$$y_{q,m}(\lambda, k) = \begin{cases} y_m(\lambda, k), & m \leq M \\ Q_{\Delta_m, \mathcal{I}_m}^C \{ y_m(\lambda, k) \}, & m > M \end{cases} \quad (2.4.6)$$

⁽ⁱ⁾ $N(s)$ definido na Seção 2.3 é equivalente a $N(\lambda, k)$, já que cada amostra no tempo equivale a um índice (λ, k) e a um símbolo s .

Separando cada $y_{q,m}(\lambda,k)$ em parte real e imaginária,

$$\mathbf{y}_q(\lambda,k) = \begin{bmatrix} y_{q,1}^{\text{R}}(\lambda,k) + y_{q,1}^{\text{I}}(\lambda,k) \\ \vdots \\ y_{q,2M}^{\text{R}}(\lambda,k) + y_{q,2M}^{\text{I}}(\lambda,k) \end{bmatrix} \quad (2.4.7a)$$

$$= \begin{bmatrix} y_{q,1}^{\text{R}}(\lambda,k) \\ \vdots \\ y_{q,2M}^{\text{R}}(\lambda,k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_{q,1}^{\text{I}}(\lambda,k) \\ \vdots \\ y_{q,2M}^{\text{I}}(\lambda,k) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{y}_q(\lambda,k) = \mathbf{y}_q^{\text{R}}(\lambda,k) + \mathbf{y}_q^{\text{I}}(\lambda,k), \quad (2.4.7b)$$

em que $\mathbf{y}_q^{\text{R}}(\lambda,k)$ e $\mathbf{y}_q^{\text{I}}(\lambda,k)$ são definidos da mesma forma que na Equação (2.4.6), porém utilizando a quantização real ao invés da complexa.

2.5 FUNÇÃO-CUSTO

O erro de estimação de cada um dos aparelhos pode ser definido como

$$e_{\text{F}}(\lambda,k) = x_{\text{F}}(\lambda,k) - \hat{x}_{\text{F}}(\lambda,k), \quad (2.5.1a)$$

$$e_{\text{C}}(\lambda,k) = x_{\text{C}}(\lambda,k) - \hat{x}_{\text{C}}(\lambda,k), \quad (2.5.1b)$$

em que $x_{\text{F}}(\lambda,k)$ e $x_{\text{C}}(\lambda,k)$ são os sinais desejados no microfone de referência de cada um dos aparelhos auditivos; e $\hat{x}_{\text{F}}(\lambda,k)$ e $\hat{x}_{\text{C}}(\lambda,k)$ são suas estimativas. Sem perda de generalização, $x_{\text{F}}(\lambda,k) = x_1(\lambda,k)$ e $x_{\text{C}}(\lambda,k) = x_{M+1}(\lambda,k)$.

Calculando-se a norma quadrática dos erros das Equações (2.5.1a) e (2.5.1b), somando-se os dois termos e tomando seu valor esperado, obtém-se a seguinte função-custo:

$$J(\lambda,k) = \text{E} \left[|e_{\text{F}}(\lambda,k)|^2 \right] + \text{E} \left[|e_{\text{C}}(\lambda,k)|^2 \right]. \quad (2.5.2)$$

onde $\text{E}[\cdot]$ é o operador valor esperado. Substituindo-se Equações (2.5.1a), (2.5.1b), (2.4.3a) e (2.4.3b) na Equação (2.5.2) obtém-se

$$J(\lambda,k) = \text{E} \left[\left| x_{\text{F}}(\lambda,k) - \mathbf{w}_{\text{F}}^{\text{H}}(\lambda,k) \mathbf{y}_q(\lambda,k) \right|^2 \right] + \text{E} \left[\left| x_{\text{C}}(\lambda,k) - \mathcal{Q}_{\Delta_{\text{C}}, \mathcal{N}_{\text{C}}}^{\text{C}} \left\{ \mathbf{w}_{\text{C}}^{\text{H}}(\lambda,k) \mathbf{y}_q(\lambda,k) \right\} \right|^2 \right], \quad (2.5.3)$$

no qual Δ_{C} e \mathcal{N}_{C} são os parâmetros do quantizador pelo qual o sinal que o sinal processado pelo FC passa, antes de ser transmitido ao CD.

Como, em geral, é assumido que os microfones de referência são os microfones frontais de ambos os aparelhos auditivos, tem-se que

$$x_{\text{F}}(\lambda,k) = \mathbf{q}_{\text{F}}^{\text{T}} \mathbf{x}(\lambda,k) = x_1(\lambda,k), \quad (2.5.4a)$$

$$x_C(\lambda, k) = \mathbf{q}_C^T \mathbf{x}(\lambda, k) = x_{M+1}(\lambda, k), \quad (2.5.4b)$$

em que, sem perda de generalidade, \mathbf{q}_F e \mathbf{q}_C são vetores de dimensão $2M \times 1$ e definidos como

$$\mathbf{q}_F = [1 \underbrace{0 \dots 0}_{2M-1}]^T, \quad (2.5.5a)$$

$$\mathbf{q}_C = [\underbrace{0 \dots 0}_M \ 1 \ \underbrace{0 \dots 0}_{M-1}]^T. \quad (2.5.5b)$$

Por questão de notação, também diz-se que

$$\mathbf{q}_F^T \mathbf{y}(\lambda, k) = y_1(\lambda, k), \quad (2.5.6a)$$

$$\mathbf{q}_C^T \mathbf{y}(\lambda, k) = y_{M+1}(\lambda, k), \quad (2.5.6b)$$

são os sinais de referência da saída para cada um dos aparelhos. Substituindo as Equações (2.5.4a) e (2.5.4b) na Equação (2.5.3), chega-se a

$$\begin{aligned} J(\lambda, k) = & \mathbb{E} \left[\left| \mathbf{q}_F^T \mathbf{x}(\lambda, k) - \mathbf{w}_F^H(\lambda, k) \mathbf{y}_q(\lambda, k) \right|^2 \right] \\ & + \mathbb{E} \left[\left| \mathbf{q}_C^T \mathbf{x}(\lambda, k) - Q_{\Delta_C, \mathcal{N}_C}^C \left\{ \mathbf{w}_C^H(\lambda, k) \mathbf{y}_q(\lambda, k) \right\} \right|^2 \right]. \end{aligned} \quad (2.5.7)$$

De forma a possibilitar o tratamento matemático do problema, será analisado o caso particular em que a saturação e quantização do sinal enviado pelo FC ao alto-falante do CD são irrelevantes^(k). Portanto,

$$Q_{\Delta_C, \mathcal{N}_C}^C \left\{ \mathbf{w}_C^H(\lambda, k) \mathbf{y}_q(\lambda, k) \right\} \approx \mathbf{w}_C^H(\lambda, k) \mathbf{y}_q(\lambda, k). \quad (2.5.8)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} J(\lambda, k) = & \mathbb{E} \left[\left[\mathbf{q}_F^T \mathbf{x}(\lambda, k) - \mathbf{w}_F^H(\lambda, k) \mathbf{y}_q(\lambda, k) \right] \left[\mathbf{q}_F^T \mathbf{x}(\lambda, k) - \mathbf{w}_F^H(\lambda, k) \mathbf{y}_q(\lambda, k) \right]^H \right] \\ & + \mathbb{E} \left[\left[\mathbf{q}_C^T \mathbf{x}(\lambda, k) - \mathbf{w}_C^H(\lambda, k) \mathbf{y}_q(\lambda, k) \right] \left[\mathbf{q}_C^T \mathbf{x}(\lambda, k) - \mathbf{w}_C^H(\lambda, k) \mathbf{y}_q(\lambda, k) \right]^H \right], \end{aligned} \quad (2.5.9)$$

^(k)Ao longo do texto quando se falar de quantização ou saturação trata-se somente dos processos referentes à limitação da taxa de comunicação entre os aparelhos, e não da quantização inerente do processamento discreto.

$$\begin{aligned}
J(\lambda, k) = & \mathbb{E} \left[\mathbf{q}_F^T \mathbf{x}(\lambda, k) \mathbf{x}^H(\lambda, k) \mathbf{q}_F \right] \\
& - \mathbb{E} \left[\mathbf{q}_F^T \mathbf{x}(\lambda, k) \mathbf{y}_q^H(\lambda, k) \mathbf{w}_F(\lambda, k) \right] \\
& - \mathbb{E} \left[\mathbf{w}_F^H(\lambda, k) \mathbf{y}_q(\lambda, k) \mathbf{x}^H(\lambda, k) \mathbf{q}_F \right] \\
& + \mathbb{E} \left[\mathbf{w}_F^H(\lambda, k) \mathbf{y}_q(\lambda, k) \mathbf{y}_q^H(\lambda, k) \mathbf{w}_F(\lambda, k) \right] \\
& + \mathbb{E} \left[\mathbf{q}_C^T \mathbf{x}(\lambda, k) \mathbf{x}^H(\lambda, k) \mathbf{q}_C \right] \\
& - \mathbb{E} \left[\mathbf{q}_C^T \mathbf{x}(\lambda, k) \mathbf{y}_q^H(\lambda, k) \mathbf{w}_C(\lambda, k) \right] \\
& - \mathbb{E} \left[\mathbf{w}_C^H(\lambda, k) \mathbf{y}_q(\lambda, k) \mathbf{x}^H(\lambda, k) \mathbf{q}_C \right] \\
& + \mathbb{E} \left[\mathbf{w}_C^H(\lambda, k) \mathbf{y}_q(\lambda, k) \mathbf{y}_q^H(\lambda, k) \mathbf{w}_C(\lambda, k) \right].
\end{aligned} \tag{2.5.10}$$

Assumindo que os vetores de coeficientes $\mathbf{w}_F(\lambda, k)$ e $\mathbf{w}_C(\lambda, k)$ sejam determinísticos para cada (λ, k) e não dependam de cada realização de $\mathbf{x}(\lambda, k)$ e $\mathbf{y}(\lambda, k)$, então

$$\begin{aligned}
J(\lambda, k) \approx & \mathbf{q}_F^T \mathbf{R}_{xx}(\lambda, k) \mathbf{q}_F - \mathbf{q}_F^T \mathbf{R}_{xy_q}(\lambda, k) \mathbf{w}_F(\lambda, k) \\
& - \mathbf{w}_F^H(\lambda, k) \mathbf{R}_{y_qx}(\lambda, k) \mathbf{q}_F + \mathbf{w}_F^H(\lambda, k) \mathbf{R}_{y_qy_q}(\lambda, k) \mathbf{w}_F(\lambda, k) \\
& + \mathbf{q}_C^T \mathbf{R}_{xx}(\lambda, k) \mathbf{q}_C - \mathbf{q}_C^T \mathbf{R}_{xy_q}(\lambda, k) \mathbf{w}_C(\lambda, k) \\
& - \mathbf{w}_C^H(\lambda, k) \mathbf{R}_{y_qx}(\lambda, k) \mathbf{q}_C + \mathbf{w}_C^H(\lambda, k) \mathbf{R}_{y_qy_q}(\lambda, k) \mathbf{w}_C(\lambda, k),
\end{aligned} \tag{2.5.11}$$

em que $\mathbf{R}_{xx}(\lambda, k)$, $\mathbf{R}_{xy_q}(\lambda, k)$, $\mathbf{R}_{y_qx}(\lambda, k)$ e $\mathbf{R}_{y_qy_q}(\lambda, k)$ são matrizes de coerência, definidas como

$$\mathbf{R}_{xx}(\lambda, k) = \mathbb{E} \left[\mathbf{x}(\lambda, k) \mathbf{x}^H(\lambda, k) \right], \tag{2.5.12a}$$

$$\mathbf{R}_{xy_q}(\lambda, k) = \mathbb{E} \left[\mathbf{x}(\lambda, k) \mathbf{y}_q^H(\lambda, k) \right] = \mathbb{E} \left[\mathbf{y}_q(\lambda, k) \mathbf{x}^H(\lambda, k) \right]^H = \mathbf{R}_{y_qx}^H(\lambda, k), \tag{2.5.12b}$$

$$\mathbf{R}_{y_qy_q}(\lambda, k) = \mathbb{E} \left[\mathbf{y}_q(\lambda, k) \mathbf{y}_q^H(\lambda, k) \right]. \tag{2.5.12c}$$

2.5.1 Filtro de Wiener multicanal

Como a função-custo depende dos vetores de parâmetros, define-se que $J(\lambda, k) \equiv J(\mathbf{w}_F(\lambda, k), \mathbf{w}_C(\lambda, k))$. Dado que a Equação (2.5.11) é quadrática em termos dos coeficientes (WIENER, 1964), ela é convexa e possui um único mínimo, sendo esse global. Portanto, o vetor que minimiza a função-custo pode ser obtido derivando-se a Equação (2.5.11) em relação aos vetores coeficientes \mathbf{w}_F e \mathbf{w}_C , e igualando a zero.

Segundo (HAYKIN, 2002; BOS, 1994), os pontos de mínimo da função-custo podem ser obtidos através de

$$\left. \frac{\partial J(\mathbf{w}_F(\lambda, k), \mathbf{w}_C(\lambda, k))}{\partial \mathbf{w}_F^*(\lambda, k)} \right|_{\mathbf{w}_F = \mathbf{w}_F^*} = \left(\left. \frac{\partial J(\mathbf{w}_F(\lambda, k), \mathbf{w}_C(\lambda, k))}{\partial \mathbf{w}_F(\lambda, k)} \right)^* \right|_{\mathbf{w}_F = \mathbf{w}_F^*} = \mathbf{0}, \quad (2.5.13a)$$

$$\left. \frac{\partial J(\mathbf{w}_F(\lambda, k), \mathbf{w}_C(\lambda, k))}{\partial \mathbf{w}_C^*(\lambda, k)} \right|_{\mathbf{w}_C = \mathbf{w}_C^*} = \left(\left. \frac{\partial J(\mathbf{w}_F(\lambda, k), \mathbf{w}_C(\lambda, k))}{\partial \mathbf{w}_C(\lambda, k)} \right)^* \right|_{\mathbf{w}_C = \mathbf{w}_C^*} = \mathbf{0}, \quad (2.5.13b)$$

em que $\mathbf{0}$ é um vetor $2M \times 1$ de zeros,

$$\mathbf{0} = \underbrace{[0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0]}_{2M}^T, \quad (2.5.14)$$

e $(\cdot)^*$ é o operador de conjugado.

Tomando as derivadas das Equações (2.5.13a) e (2.5.13b) com base na Equação (2.5.11), tem-se

$$\frac{\partial J(\mathbf{w}_F(\lambda, k), \mathbf{w}_C(\lambda, k))}{\partial \mathbf{w}_F^*(\lambda, k)} = -\mathbf{R}_{xy_q}^H(\lambda, k) \mathbf{q}_F + \mathbf{R}_{y_q y_q}^H(\lambda, k) \mathbf{w}_F(\lambda, k), \quad (2.5.15a)$$

$$\frac{\partial J(\mathbf{w}_F(\lambda, k), \mathbf{w}_C(\lambda, k))}{\partial \mathbf{w}_C^*(\lambda, k)} = -\mathbf{R}_{xy_q}^H(\lambda, k) \mathbf{q}_C + \mathbf{R}_{y_q y_q}^H(\lambda, k) \mathbf{w}_C(\lambda, k). \quad (2.5.15b)$$

Substituindo as Equações (2.5.15a) e (2.5.15b) nas Equações (2.5.13a) e (2.5.13b), chega-se a

$$-\mathbf{R}_{xy_q}^H(\lambda, k) \mathbf{q}_F + \mathbf{R}_{y_q y_q}^H(\lambda, k) \mathbf{w}_F(\lambda, k) = \mathbf{0}, \quad (2.5.16a)$$

$$-\mathbf{R}_{xy_q}^H(\lambda, k) \mathbf{q}_C + \mathbf{R}_{y_q y_q}^H(\lambda, k) \mathbf{w}_C(\lambda, k) = \mathbf{0}. \quad (2.5.16b)$$

Manipulando as Equações (2.5.16a) e (2.5.16b), chega-se em^(l)

$$\mathbf{w}_F^*(\lambda, k) = \mathbf{R}_{y_q y_q}^{-1}(\lambda, k) \mathbf{R}_{xy_q}^H(\lambda, k) \mathbf{q}_F, \quad (2.5.17a)$$

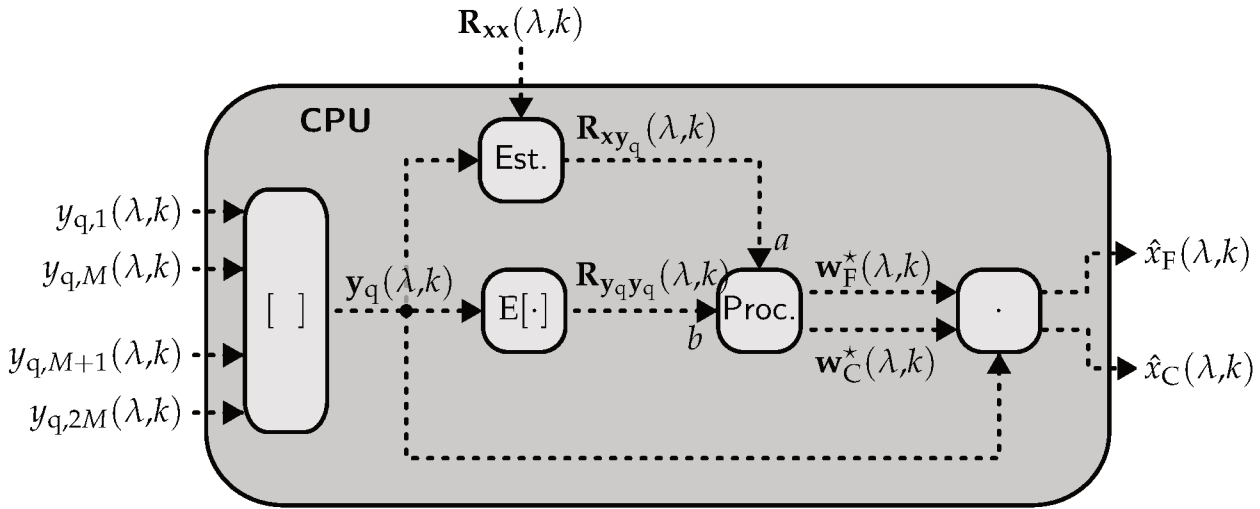
$$\mathbf{w}_C^*(\lambda, k) = \mathbf{R}_{y_q y_q}^{-1}(\lambda, k) \mathbf{R}_{xy_q}^H(\lambda, k) \mathbf{q}_C, \quad (2.5.17b)$$

que é o Filtro de Wiener Multicanal (MWF)^(m) (CHEN *et al.*, 2006), onde $(\cdot)^{-1}$ é o operador de inversa matricial. Um diagrama de blocos do processamento que ocorre dentro da CPU pode ser visto na Figura 2.5, em que tem-se como entrada os $2M$ sinais provenientes do FC e do CD (à esquerda), e a matriz de coerência \mathbf{R}_{xx} (em cima), tendo essa sido estimada previamente; e como saída desse processamento tem-se as estimativas $\hat{x}_F(\lambda, k)$ e $\hat{x}_C(\lambda, k)$ para os sinais de referência de cada aparelho. O bloco “[]” refere-se ao agrupamento dos sinais em vetores, e o bloco “Proc.” refere-se ao cálculo dos vetores de coeficientes, conforme a Equação (2.5.17).

^(l)O sobrescrito $(\cdot)^*$ indica que essa é a solução ótima para o problema.

^(m)Do inglês, *Multichannel Wiener Filter*.

Figura 2.5 – Diagrama de blocos do processamento digital para o filtro MWF considerando quantização. As entradas são os sinais provenientes de cada microfone e a estimativa de \mathbf{R}_{xx} , e a saída a estimativa dos sinais de referência.



Fonte: Autoria própria.

2.6 MODELO CLÁSSICO PARA OS EFEITOS DA QUANTIZAÇÃO

Nessa seção, será feita uma revisão do que será chamado de modelo clássico para os efeitos da quantização, tratando-os como um ruído aditivo branco. Sob condições adequadas de comunicação ou *dithering* (LIPSHITZ; WANNAMAKER; VANDERKOOY, 1992; SRIPAD; SNYDER, 1977), os efeitos da quantização sem saturação (ou seja, $N \rightarrow \infty$) podem ser aproximados por um erro aditivo branco, de forma que

$$Q_{\Delta, \infty}\{y\} \approx y + \eta_q, \quad (2.6.1)$$

em que o erro de quantização pode ser aproximado por um ruído branco η_q com distribuição uniforme dada por

$$E_q \sim \mathcal{U}\left(-\frac{\Delta}{2}, \frac{\Delta}{2}\right), \quad (2.6.2)$$

onde Δ é o passo de quantização. Essa é uma distribuição de média nula, com variância $\frac{\Delta^2}{12}$. Além disso, considera-se que toda realização η_q do processo E_q é independente do sinal que está sendo quantizado (SRIPAD; SNYDER, 1977). Por se estar tratando de um sistema que processa sinais complexos, então

$$\begin{aligned} Q_{\Delta, \infty}^C\{y\} &= Q_{\Delta, \infty}\{y^{\text{R}}\} + Q_{\Delta, \infty}\{y^{\text{I}}\} \\ &\approx y^{\text{R}} + \eta_q^{\text{R}} + y^{\text{I}} + \eta_q^{\text{I}} \\ &= y + \eta_q^{\text{C}}, \end{aligned} \quad (2.6.3)$$

no qual η_q^{C} é definido como

$$\eta_q^{\text{C}} = \eta_q^{\text{R}} + \eta_q^{\text{I}}, \quad (2.6.4)$$

em que η_q^{R} e η_q^{I} são independentes entre si e com distribuição conforme a Equação (2.6.2). Com isso, a variância de η_q^{C} será

$$\begin{aligned} \text{E}\left[\eta_q^{\text{C}}\eta_q^{\text{C}*}\right] &= \text{E}\left[(\eta_q^{\text{R}} + \eta_q^{\text{I}})(\eta_q^{\text{R}} - \eta_q^{\text{I}})\right] \\ &= \text{E}\left[(\eta_q^{\text{R}})^2\right] + \text{E}\left[\eta_q^{\text{R}}\eta_q^{\text{I}}\right] - \text{E}\left[\eta_q^{\text{I}}\eta_q^{\text{R}}\right] + \text{E}\left[(\eta_q^{\text{I}})^2\right] \\ &= \text{E}\left[(\eta_q^{\text{R}})^2\right] + \text{E}\left[(\eta_q^{\text{I}})^2\right] \\ &= \frac{\Delta^2}{6}. \end{aligned} \quad (2.6.5)$$

em que foi usado que η_q^{R} e η_q^{I} possuem média nula. Para o problema em questão,

$$\mathbf{y}_q(\lambda, k) \approx \mathbf{y}(\lambda, k) + \boldsymbol{\eta}_q(\lambda, k), \quad (2.6.6)$$

em que $\boldsymbol{\eta}_q(\lambda, k)$ é o vetor do ruído de quantização para cada um dos microfones,

$$\boldsymbol{\eta}_q(\lambda, k) = \left[0 \ \dots \ 0 \ \eta_{M+1,q} \ \dots \ \eta_{2M,q}(\lambda, k)\right]^{\text{T}}. \quad (2.6.7)$$

O ruído de quantização dos M microfones do FC é nulo por estes não passarem por quantização.

2.6.1 Matriz de coerência do sinal desejado

Calculando a matriz de coerência do sinal desejado, tem-se que

$$\mathbf{R}_{\text{xx}}(\lambda, k) = \text{E}\left[\mathbf{x}(\lambda, k)\mathbf{x}^{\text{H}}(\lambda, k)\right] = \mathbf{a}(k)\mathbf{a}^{\text{H}}(k)\sigma_s^2(\lambda, k), \quad (2.6.8)$$

em que σ_s é o desvio-padrão de $s(\lambda, k)$.

2.6.2 Matriz de coerência cruzada entre sinal desejado e sinal contaminado quantizado

Calculando a coerência entre o sinal desejado e o sinal contaminado quantizado,

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{\text{xy}_q} &= \text{E}\left[\mathbf{x}(\lambda, k)\mathbf{y}_q^{\text{H}}(\lambda, k)\right] \\ &= \text{E}\left[\mathbf{x}(\lambda, k)\left(\mathbf{y}^{\text{H}}(\lambda, k) + \boldsymbol{\eta}_q^{\text{H}}(\lambda, k)\right)\right] \\ &= \text{E}\left[\mathbf{x}(\lambda, k)\mathbf{y}(\lambda, k)^{\text{H}}\right] + \text{E}\left[\mathbf{x}(\lambda, k)\boldsymbol{\eta}_q^{\text{H}}(\lambda, k)\right], \end{aligned} \quad (2.6.9a)$$

e assumindo que $\mathbf{x}(\lambda, k)$ seja independente de $\boldsymbol{\eta}_q(\lambda, k)$ e com média nula, tem-se (usando também a Equação (A.17))

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{\text{xy}_q}(\lambda, k) &= \text{E}\left[\mathbf{x}(\lambda, k)\mathbf{y}^{\text{H}}(\lambda, k)\right] \\ &= \mathbf{R}_{\text{xy}}(\lambda, k) \\ &= \mathbf{R}_{\text{xx}}(\lambda, k), \end{aligned} \quad (2.6.9b)$$

sendo $\mathbf{R}_{\text{xx}}(\lambda, k)$ dado pela Equação (2.6.8).

2.6.3 Matriz de coerência do sinal contaminado quantizado

Calculando a coerência do sinal contaminado quantizado,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}_{\mathbf{y}_q \mathbf{y}_q}(\lambda, k) &= \mathbb{E} \left[\mathbf{y}_q(\lambda, k) \mathbf{y}_q^H(\lambda, k) \right] \\
 &= \mathbb{E} \left[\left(\mathbf{y}(\lambda, k) + \boldsymbol{\eta}_q(\lambda, k) \right) \left(\mathbf{y}(\lambda, k) + \boldsymbol{\eta}_q(\lambda, k) \right)^H \right] \\
 &= \mathbb{E} \left[\mathbf{y}(\lambda, k) \mathbf{y}^H(\lambda, k) \right] + \mathbb{E} \left[\mathbf{y}(\lambda, k) \boldsymbol{\eta}_q^H(\lambda, k) \right] + \mathbb{E} \left[\boldsymbol{\eta}_q(\lambda, k) \mathbf{y}^H(\lambda, k) \right] \\
 &\quad + \mathbb{E} \left[\boldsymbol{\eta}_q(\lambda, k) \boldsymbol{\eta}_q^H(\lambda, k) \right],
 \end{aligned} \tag{2.6.10a}$$

e, usando que $\boldsymbol{\eta}_q(\lambda, k)$ é independente de $\mathbf{y}(\lambda, k)$ (SRIPAD; SNYDER, 1977), e ambos de média nula, pela Equação (A.17) tem-se

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}_{\mathbf{y}_q \mathbf{y}_q}(\lambda, k) &= \mathbb{E} \left[\mathbf{y}(\lambda, k) \mathbf{y}^H(\lambda, k) \right] + \mathbb{E} \left[\boldsymbol{\eta}_q(\lambda, k) \boldsymbol{\eta}_q^H(\lambda, k) \right] \\
 &= \mathbf{R}_{\mathbf{y}\mathbf{y}}(\lambda, k) + \mathbf{R}_{\boldsymbol{\eta}_q \boldsymbol{\eta}_q}(\lambda, k).
 \end{aligned} \tag{2.6.10b}$$

em que $\mathbf{R}_{\mathbf{y}\mathbf{y}}$ é a matriz de coerência de $\mathbf{y}(\lambda, k)$.

Assumindo que os ruídos de quantização são realizações independentes para cada microfone, a matriz de coerência do ruído de quantização é uma matriz diagonal, em que cada elemento da diagonal é a potência do ruído de quantização daquele microfone; ou ainda, conforme a Equação (2.6.5),

$$r_{\eta_q^c \eta_q^c} = \mathbb{E} \left[\eta_{q,l}^c \eta_{q,c}^{c*} \right] = \begin{cases} \frac{\Delta_c^2}{6}, & l = c > M, \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \tag{2.6.11}$$

2.6.4 Limitações do modelo clássico

Para esse modelo funcionar adequadamente, algumas suposições precisam ser respeitadas. Inicialmente, é tomada a existência de infinitos níveis de quantização e, portanto, que não ocorrem efeitos de saturação. As outras suposições são em relação ao ruído de quantização η_q , definido na Equação (2.6.1). A primeira é que, para dois sinais y_1 e y_2 que sofram quantização, os erros η_{q1} e η_{q2} são descorrelacionados estatisticamente. A segunda é que η_q seja independente de y , e também que ele tenha uma distribuição uniforme.

Enquanto a primeira suposição é mais robusta, já que se dois sinais y_1 e y_2 são diferentes, não há razão trivial para que seus erros de quantização sejam correlacionados; por outro lado, a segunda é um pouco mais frágil e requer mais cuidado, já que os valores pós-quantização são deterministicamente influenciados pelos valores pré-quantização e, caso a distribuição de y seja tal que ocorra uma tendência muito forte a um conjunto de valores pré-quantização, essa tendência será passada para o sinal pós-quantização, podendo afetar a distribuição do erro de quantização.

Uma solução conhecida (WANNAMAKER *et al.*, 2000) é a adição de um ruído de *dithering* d no sinal antes da quantização, de forma que não haja mais uma relação determinística entre os valores de y e os valores de y_q , de forma que

$$y_q = Q_{\Delta, \mathcal{N}}\{y + d\}, \quad (2.6.12)$$

e portanto, para que o modelo seja o mais adequado possível, é necessário considerar a presença desse ruído de *dithering* também, além do ruído de quantização, já que

$$\eta_q = y - Q_{\Delta, \mathcal{N}}\{y + d\} = \underbrace{(y + d) - Q_{\Delta, \mathcal{N}}\{y + d\}}_{\eta_1} - d = \eta_1 - d, \quad (2.6.13)$$

em que o termo η_1 se refere ao erro da quantização de $y + d$ e, agora com a presença desse ruído garantindo a decorrelação de η_q em relação a y , então ocorre que η_1 terá uma distribuição uniforme. Contudo, agora η_q depende de d , o que implica num aumento do nível de ruído do sinal pós-quantização.

Em (LIPSHITZ; WANNAMAKER; VANDERKOOY, 1992) é proposta a utilização de um ruído de *dithering* subtrativo, onde

$$y_q = Q_{\Delta, \mathcal{N}}\{y + d\} - d \quad (2.6.14)$$

e, nesse caso,

$$\eta_q = y - \left(Q_{\Delta, \mathcal{N}}\{y + d\} - d \right) = (y + d) - Q_{\Delta, \mathcal{N}}\{y + d\} = \eta_1 \quad (2.6.15)$$

Portanto, como η_1 possui distribuição uniforme e é decorrelacionado em relação a y , tem-se que η_q é uniforme também. Contudo, a utilização dessa modelagem requer que conheça-se não somente as características estatísticas de d no FC, mas também a realização dele que foi adicionada a y para que essa mesma realização possa posteriormente ser subtraída, o que é impraticável para um sistema em que ocorre transmissão sem-fio de informações. Portanto, para aplicações de comunicação sem-fio utiliza-se somente o *dithering* não-subtrativo, descrito na Equação (2.6.12).

Além disso, conforme WANNAMAKER *et al.* (2000) o ruído de *dithering* adicionado deve ser escolhido adequadamente para o problema de forma a garantir decorrelação entre o ruído de quantização e o sinal quantizado y , porém independentemente do ruído escolhido ainda há a adição de mais um ruído, e como se está tratando de um sistema de redução de ruído essa é uma situação indesejada.

2.7 MÉTRICAS DE AVALIAÇÃO

Nesta seção serão apresentados critérios objetivos de erro, razão-sinal-ruído, qualidade e inteligibilidade, com o objetivo de possibilitar avaliar os resultados que serão obtidos posteriormente.

2.7.1 Erro de estimação da matriz de coerência

Seja $\mathbf{x}(\lambda, k)$ um sinal desejado, com $\mathbf{R}_{\mathbf{xx}}(\lambda, k)$ sendo a sua matriz de coerência, e $\hat{\mathbf{x}}(\lambda, k)$ a estimação de $\mathbf{x}(\lambda, k)$, com matriz de coerência $\mathbf{R}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}}(\lambda, k)$. O Erro Absoluto Médio (MAE)⁽ⁿ⁾ é definido como

$$\begin{aligned} \text{MAE}(\mathbf{R}_{\mathbf{xx}}(\lambda, k), \mathbf{R}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}}(\lambda, k)) &= \\ &= \frac{1}{LK} \sum_{\lambda=1}^L \sum_{k=1}^K \left(\frac{1}{M^2} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \left| r_{\mathbf{xx}ij}^{\mathbb{R}}(\lambda, k) - r_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}ij}^{\mathbb{R}}(\lambda, k) \right| + \left| r_{\mathbf{xx}ij}^{\mathbb{I}}(\lambda, k) - r_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}ij}^{\mathbb{I}}(\lambda, k) \right| \right), \end{aligned} \quad (2.7.1)$$

em que $r_{\mathbf{xx}ij}$ é o elemento (i, j) da matriz $\mathbf{R}_{\mathbf{xx}}$, e o mesmo valendo para $r_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}ij}$. Para o seu cálculo, assume-se conhecimento da matriz de coerência $\mathbf{R}_{\mathbf{xx}}$, e também que conhece-se $\mathbf{R}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}}$. O MAE é a média ao longo das janelas e dos bins, da média da diferença absoluta das partes real e imaginária entre a matriz de coerência do sinal original e a sua estimação.

2.7.2 Razão sinal-ruído

A Razão Sinal-Ruído (SNR)^(o) é uma métrica muito comum para a quantificação da contaminação de um sinal de interesse por ruído. Seja um sinal $y[n]$ no tempo constituído por duas parcelas aditivas

$$y[n] = x[n] + v[n], \quad (2.7.2)$$

em que $x[n]$ é o sinal desejado, $v[n]$ é um sinal indesejado (ruído), e $y[n]$ é o sinal contaminado. A SNR de $y[n]$ é

$$\text{SNR}_y = \frac{P_x}{P_v}, \quad (2.7.3)$$

em que P_x e P_v são as potências do sinal desejado e do contaminante, respectivamente, sendo calculados como

$$P_x = \text{E} \left[|x[n]|^2 \right], \quad (2.7.4)$$

o mesmo valendo para $v[n]$. Usualmente a SNR é usada em escala logarítmica,

$$\text{SNR}_{y, \text{dB}} = 10 \log_{10} \left(\text{SNR}_y \right). \quad (2.7.5)$$

2.7.2.1 Requerimento da linearidade

Ao se aplicar $y[n]$ na entrada de um sistema linear com resposta ao impulso $h[n]$, pela linearidade do sistema tem-se

$$z[n] = h[n] * y[n] = h[n] * (x[n] + v[n]) = (h[n] * x[n]) + (h[n] * v[n]), \quad (2.7.6)$$

⁽ⁿ⁾Do inglês, *Mean Absolute Error*.

^(o)Do inglês, *Signal-to-Noise Ratio*.

onde $*$ simboliza a operação de convolução (LATHI, 2007); e disso a SNR de $z[n]$ será

$$\text{SNR}_z = \frac{P_{hx}}{P_{hv}}, \quad (2.7.7)$$

em que P_{hx} e P_{hv} são calculados conforme a Equação (2.7.4) para $h[n] * x[n]$ e $h[n] * v[n]$, respectivamente.

A utilização dessa métrica é válida para sistemas lineares e, como esse não é o caso para o processo de quantização, é necessário definir outras métricas de forma a obter informações semelhantes em relação à proporção entre sinal desejado e indesejado no sinal contaminado.

2.7.2.2 Métrica de ruído SNQR

Conforme mencionado não é possível calcular a SNR de saída por superposição por se estar tratando dos efeitos da quantização. Assumindo-se que um sistema não-linear possa ser modelado por distorções harmônicas (SHMILOVITZ, 2005), de forma que

$$z \approx \alpha(y + \chi), \quad (2.7.8)$$

em que α é o ganho da primeira harmônica (sendo essa referente ao y) e χ é todas as harmônicas de ordens maiores (normalizadas pela primeira). Usando a Equação (2.7.2), então

$$\begin{aligned} z &\approx \alpha \cdot (y + \chi) \\ &= \alpha \cdot (x + v + \chi) \\ &= \alpha x + \alpha q, \end{aligned} \quad (2.7.9a)$$

em que

$$q = v + \chi \quad (2.7.9b)$$

no qual q encapsula todos os sinais indesejados presentes em z (no caso, ruído v e distorção χ). Com isso, é possível calcular a SNR *a posteriori* de z através de (BORGA, 2001)

$$\text{SNR}_z = \frac{\rho^2}{1 + \rho^2} \quad (2.7.10)$$

em que ρ é o coeficiente de correlação entre x e z , dado por

$$\rho = \frac{E[x \cdot z]}{\sqrt{E[x^2]E[z^2]}}, \quad (2.7.11)$$

Essa métrica de cálculo da SNR será denominado Razão Sinal-Ruído-e-Quantização (SNQR)^(p), definida conforme a Equação (2.7.10) como

$$\text{SNQR} = \frac{\rho^2}{1 + \rho^2}. \quad (2.7.12)$$

Essa é uma métrica intrusiva, em que considera-se ter conhecimento de x e z explicitamente no domínio do tempo para poder calcular o coeficiente de correlação e, com isso, a SNQR. A vantagem dessa técnica é ela não depender da linearidade do sistema, considerando as partes não-lineares da resposta do sistema como parcelas indesejadas no seu cálculo.

^(p)Do inglês, *Signal-to-Noise-and-Quantization Ratio*.

2.7.3 Métrica de qualidade PESQ

A Avaliação Perceptiva de Qualidade da Fala (PESQ)^(q) (RIX *et al.*, 2001) é um método que avalia objetivamente a qualidade de um sinal de fala z que tenha sido degradado. Para sua utilização, presume-se o conhecimento do sinal original x .

O resultado da PESQ é reparametrizado para gerar um resultado seguindo a Pontuação de Opinião Média (MOS)^(r) (ITU-T P.800.1, 2006), seguindo uma faixa de valores de 1 até 5 conforme a Tabela 2.1.

Tabela 2.1 – Correspondência entre pontuação MOS e degradação da fala.

Pontuação MOS	Qualidade da fala
5	Degradação inaudível
4	Degradação audível, mas não incômoda
3	Degradação pouco incômoda
2	Degradação incômoda
1	Degradação muito incômoda

Fonte: Adaptado de (ITU-T P.800.1, 2006).

2.7.4 Métrica de inteligibilidade STOI

A Inteligibilidade Objetiva de Tempo Curto (STOI)^(s) (TAAL *et al.*, 2010) é uma métrica objetiva para avaliação da inteligibilidade de um sinal degradado. Da mesma forma que para a PESQ, ela é uma medida intrusiva, ou seja, requer a disponibilização do sinal original (sem degradação) x bem como do sinal degradado z . Ela avalia a inteligibilidade de um sinal de fala através de uma pontuação entre 0 e 1, sendo 0 um sinal ininteligível e 1 caso o sinal sob análise possua a mesma inteligibilidade da fala original.

^(q)Do inglês, *Perceptual Evaluation of Speech Quality*.

^(r)Do inglês, *Mean Opinion Score*.

^(s)Do inglês, *Short-Time Objective Intelligibility*.

3 MODELOS PROPOSTOS PARA MATRIZES DE COERÊNCIA DE SINAIS QUANTIZADOS

Embora o modelo clássico exposto na Seção 2.6, em uma grande variedade de situações, resulte em modelagem acurada para os efeitos da quantização, os pressupostos necessários para sua aplicação são muitas vezes incoerentes com a realidade, como num caso de utilização de um pequeno número de bits no processo de quantização. Ou ainda, na inviabilidade de inclusão de ruído de *dithering*, como é o caso em aparelhos auditivos.

Pela Equação (2.5.17), tem-se que os vetores de coeficientes $\mathbf{w}_F^*(\lambda, k)$ e $\mathbf{w}_C^*(\lambda, k)$ que otimizam a função-custo dependem das matrizes de coerência $\mathbf{R}_{y_q y_q}$ e $\mathbf{R}_{x y_q}$, e portanto é fundamental ter conhecimento de como a quantização e a saturação afetam-nas, para poder obter os vetores de coeficiente ótimos de maneira adequada.

Neste capítulo serão propostos dois modelos novos para a modelagem dos efeitos da quantização e da saturação sobre as matrizes $\mathbf{R}_{y_q y_q}$ e $\mathbf{R}_{y y_q}$. O primeiro, desenvolvido na Seção 3.2, baseia-se na definição da quantização pela Equação (3.1.19c), enquanto o segundo é uma adaptação do modelo clássico para que ele considere também os efeitos da saturação.

3.1 MODELO DO PROCESSO DE QUANTIZAÇÃO

Embora a quantização definida na Seção 2.2 seja válida, ela é de pouca utilidade prática por ser uma definição puramente abstrata. Nesta seção é desenvolvida uma formulação de maior valor prático para a descrição do processo de quantização e saturação.

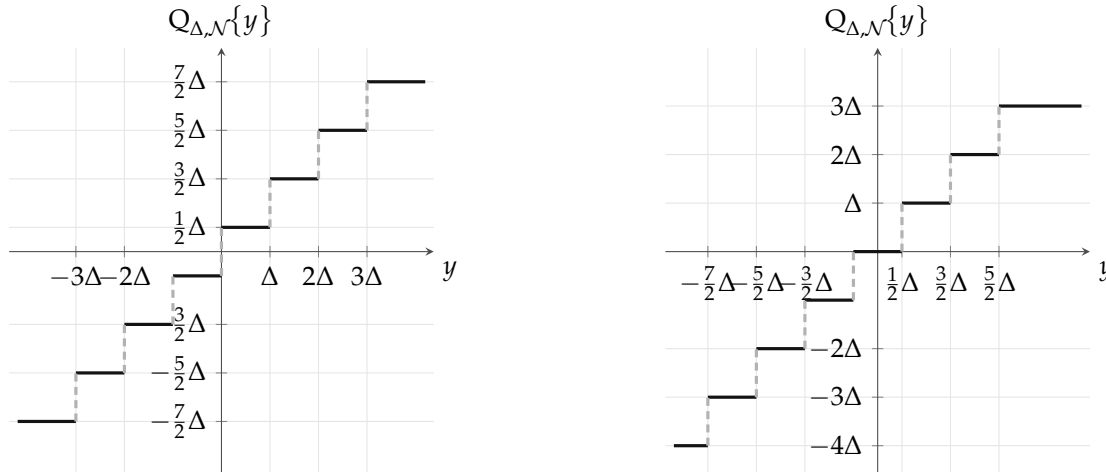
Tomando uma quantização uniforme com passo de quantização Δ com N bits disponíveis, e que serão utilizados todos os 2^N níveis de quantização possíveis, tem-se duas possibilidades (LIPSHITZ; WANNAMAKER; VANDERKOOY, 1992):

- A quantização é simétrica (2^{N-1} níveis positivos, e 2^{N-1} níveis negativos), e o nível $V = 0$ não é um dos níveis possíveis, sendo esse processo chamado de *midriser quantization*.
- A quantização é assimétrica ($2^{N-1} - 1$ níveis positivos e 2^{N-1} níveis negativos [ou o contrário], e 1 nível zero), e o nível $V = 0$ é um dos níveis possíveis, sendo esse processo chamado de *midtread quantization*.

As Figuras 3.1a e 3.1b apresentam os dois casos citados de quantização. Para o caso da quantização *midriser*, apresentado na Figura 3.1a, nota-se que não há um nível 0 de quantização, fazendo com que sempre haja consumo de energia mesmo na ausência de sinal. Isto é, se a entrada do quantizador for um ruído com uma potência desprezível, a saída terá um ganho, amplificando a potência do ruído e também o consumo do aparelho. Para o caso da quantização *midtread*, apresentado na Figura 3.1b, ocorre que sinais simétricos de média nula podem resultar em sinais de média não-nula (caso ocorra saturação).

Dadas as desvantagens intrínsecas dessas duas opções, outra possibilidade é utilizar $2^{N-1} - 1$ níveis dos 2^N disponíveis, com 2^{N-1} níveis para o intervalo $[-V, 0]$ (inclusos), e o mesmo

para o intervalo $[0, +V]$. Isso faz com que a quantização possua nível zero, e a saturação seja simétrica, mas leva à repetição do nível zero e portanto ao desperdício de um dos níveis possíveis. Portanto, serão usados $2^{N-1} - 1$ níveis positivos (idem negativos), e um nível zero.



(a) Quantizador com parâmetros $N = 3$, $\mathcal{I} = 8$, $\Delta = \frac{2}{7}$, $V_{\min} = -1$ e $V_{\max} = 1$.

(b) Quantizador com parâmetros $N = 3$, $\mathcal{I} = 8$, $\Delta = \frac{2}{7}$, $V_{\min} = -\frac{8}{7}$ e $V_{\max} = \frac{6}{7}$.

Figura 3.1 – Opções de quantização com 8 níveis: (a) sem nível 0 e simétrica; e (b) com nível 0 e assimétrica.

Disso, definem-se

$$\mathcal{I} = 2^N - 1, \quad (3.1.1a)$$

e

$$\mathcal{N} = 2^{N-1} - 1, \quad (3.1.1b)$$

em que \mathcal{I} é o número total de níveis de quantização^(a), e \mathcal{N} é o número total de níveis de quantização das partes positiva (ou negativa). Nota-se que

$$\mathcal{N}_{\text{pos.}} + \mathcal{N}_{\text{neg.}} + 1_{\text{zero}} = \mathcal{I}_{\text{total}}. \quad (3.1.1c)$$

Essa opção apresenta uma desvantagem, sendo ela o desperdício de um dos níveis de quantização possíveis. Para situações com poucos bits esse nível a menos poderia ser relevante. Contudo, de forma geral essa modelagem mostra-se mais interessante, em relação ao menor consumo de energia em caso de inexistência de sinal (como acontece no caso de quantização *midriser*), na manutenção da média nula para sinais simétricos em caso de saturação (que acontece no caso da quantização *midtread*).

3.1.1 Redefinição do operador de quantização

O operador de quantização $Q_{\Delta, \mathcal{I}}\{y\}$, como definido na Equação (2.2.2), foi definido como sendo em função do passo Δ e do número total de níveis de quantização \mathcal{I} . Contudo, redefini-lo

^(a)Aqui \mathcal{I} é redefinido de forma diferente da Equação (2.2.4), embora o conceito que ele represente seja o mesmo.

como em função de Δ e do número de níveis de quantização positivos (ou negativos) \mathcal{N} tornará a manipulação matemática mais simples e clara. Portanto, daqui em diante o operador de quantização será descrito por $Q_{\Delta, \mathcal{N}}\{y\}$.

3.1.2 Modelagem pela função degrau

É possível descrever analiticamente o processo de quantização através da função degrau-unitário $u(y)$, definida como (LATHI, 2007)

$$y = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ 1 & y \geq 0 \end{cases}, \quad (3.1.2)$$

de forma que, para $y \geq 0$,

$$\begin{aligned} Q_{\Delta, \mathcal{N}}\{y\} \Big|_{y \geq 0} &= \Delta \cdot \left[y - \frac{1}{2}\Delta + y - \frac{3}{2}\Delta + \cdots + y - [\mathcal{N} - 1/2]\Delta \right] \\ &= \Delta \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} y - [i - 1/2]\Delta. \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

Da mesma maneira, para $y < 0$,

$$\begin{aligned} Q_{\Delta, \mathcal{N}}\{y\} \Big|_{y < 0} &= -\Delta \cdot \left[-y - \frac{1}{2}\Delta + -y - \frac{3}{2}\Delta + \cdots + -y - [\mathcal{N} - 1/2]\Delta \right] \\ &= -\Delta \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} -y - [i - 1/2]\Delta. \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

Juntando-se Equações (3.1.3) e (3.1.4), chega-se a

$$Q_{\Delta, \mathcal{N}}\{y\} = \Delta \left[\sum_{i=1}^{\mathcal{N}} y - [i - 1/2]\Delta - \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} -y - [i - 1/2]\Delta \right]. \quad (3.1.5)$$

3.1.3 Saturação

Avaliando para $y \rightarrow \infty$, tem-se pela Equação (3.1.3)

$$Q_{\Delta, \mathcal{N}}\{y\} \Big|_{y \rightarrow \infty} = \Delta \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} y - [i - 1/2]\Delta \xrightarrow{1} \Delta \mathcal{N}. \quad (3.1.6)$$

Arbitrando-se o valor de saturação como V , tem-se que

$$V = \Delta \mathcal{N}, \quad (3.1.7)$$

e pela Equação (3.1.1b),

$$V = \Delta (2^{\mathcal{N}-1} - 1). \quad (3.1.8)$$

Realizando processo semelhante ao apresentado na Equação (3.1.6), $y \rightarrow -\infty$ leva ao mesmo resultado da Equação (3.1.8). A Equação (3.1.8) estabelece uma relação entre os

três parâmetros que podem caracterizar o quantizador: o valor de saturação V , o passo de quantização Δ e o número de bits N . Ao longo deste trabalho, considera-se que os parâmetros que definem o quantizador são o passo Δ e o níveis $\mathcal{N}^{(b)}$, sendo o valor V uma variável dependente.

Por outro lado, nota-se que, assumindo V constante e finito, $N \rightarrow \infty$ corresponde a um sinal com quantização infinita, e pela Equação (3.1.8) isso implica que $\Delta \rightarrow 0$. Nessa situação, considerando que não há saturação na aquisição de y (isso é, $|y| \leq V$), tem-se

$$\lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \Delta \rightarrow 0}} Q_{\Delta, \mathcal{N}}\{y\} = y. \quad (3.1.9)$$

Um exemplo do funcionamento de um quantizador ideal com 3 bits é apresentado na Figura 3.2, em que $V = 1$. Dadas as condições, pela Equação (3.1.8) tem-se que $\Delta = 1/3$. A relação entre níveis de amplitude, número de passos, e palavra binária é apresentada na Tabela 3.1.

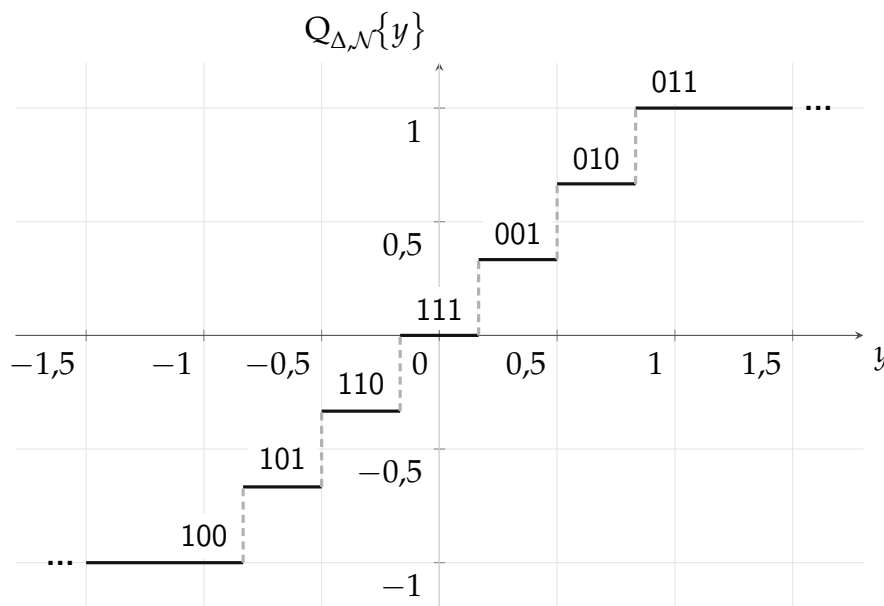


Figura 3.2 – Exemplo de quantizador simétrico em torno de 0, com nível 0. $\Delta = \frac{1}{3}$, $N = 3$.

Tabela 3.1 – Relação entre níveis de amplitude, número de passos e palavra binária do quantizador da Figura 3.2. $\Delta = \frac{1}{3}$, $N = 3$.

Nível de amplitude	-1	-0,66	-0,33	0	0,33	0,66	1
Número de passos	-3	-2	-1	0	1	2	3
Palavra binária	100	101	110	111	001	010	011

O número de passos é o índice que indica a quantidade de níveis entre o nível atual e o da origem. Um número positivo indica que a quantização está mais próxima de $+V$, e um número

^(b)Para o projeto do quantizador, os parâmetros que o definem são o valor de quantização V e o número de bits N .

negativo maior proximidade à $-V$. Nas Equações (3.1.3) e (3.1.4), o número de passos é $\pm i$, com $i \in [1, \dots, \mathcal{N}]$.

3.1.4 Modelagem pela função erro

A função erro $\text{erf}\{z\}$ (CHEVILLARD, 2012) é uma função que possui derivada contínua, o que possibilita a avaliação de momentos estatísticos de variáveis aleatórias Gaussianas através do teorema de Price (PAWULA, 1967). A função erro é definida como sendo

$$\text{erf}\{z\} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp\{-t^2\} dt, \quad (3.1.10)$$

em que $\exp\{\cdot\}$ é a função exponencial com base Neperiana $e = 2,71828$. Realizando as substituições

$$t = \frac{v}{\sqrt{2}\sigma}, \quad (3.1.11a)$$

$$dt = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma} dv, \quad (3.1.11b)$$

na Equação (3.1.10), tem-se então

$$\text{erf}\{z\} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{2}\sigma z} \exp\left\{-\frac{v^2}{2\sigma^2}\right\} \frac{1}{\sqrt{2}\sigma} dv, \quad (3.1.12)$$

onde σ^2 é o coeficiente de linearidade. Denota-se $g_\sigma(y)$ como a função erro parametrizada dada por

$$g_\sigma(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^y \exp\left\{-\frac{v^2}{2\sigma^2}\right\} dv, \quad (3.1.13)$$

tal que, pelos limites de integração,

$$\text{erf}\left\{\frac{y}{\sqrt{2}\sigma}\right\} = \frac{1}{\sigma} g_\sigma(y). \quad (3.1.14)$$

A função $g_\sigma(y)$ possui as seguintes propriedades^(c):

$$\lim_{\sigma^2 \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma} g_\sigma(y) = \text{sgn}(y), \quad (3.1.15a)$$

$$\frac{1}{\sigma} \frac{dg_\sigma(y)}{dy} = \frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp\left\{-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad (3.1.15b)$$

^(c)A primeira pode ser deduzida a partir da Equação (3.1.11a), constando-se que $\sigma \rightarrow 0^+$ é equivalente a $t \rightarrow \pm\infty$ (dependendo do sinal de z), e que $\text{erf}\{\pm\infty\} = \pm 1$. A segunda é obtida pelo teorema fundamental do cálculo.

em que $\text{sgn}(y)$ é a função sinal, definida como

$$\text{sgn}(y) = \begin{cases} -1 & y < 0 \\ 0 & y = 0. \\ 1 & y > 0 \end{cases} \quad (3.1.16)$$

É possível modelar a função degrau através da função sinal^(d), tal que

$$y = \frac{1 + \text{sgn}(y)}{2}, \quad (3.1.17)$$

e portanto pela Equação (3.1.15a) obtém-se

$$u(y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \lim_{\sigma^2 \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma} g_{\sigma}(y). \quad (3.1.18)$$

Com isso, obtém-se um modelo para a função degrau que, enquanto $\sigma \neq 0$, é uma função contínua e infinitamente diferenciável. Substituindo a Equação (3.1.18) na Equação (3.1.5), e através de manipulações, obtém-se

$$\begin{aligned} Q_{\Delta, \mathcal{N}}\{y\} &= \Delta \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \lim_{\sigma^2 \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma} g_{\sigma}(y - [i - 1/2]\Delta) \right] \\ &\quad - \Delta \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \lim_{\sigma^2 \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma} g_{\sigma}(-y - [i - 1/2]\Delta) \right], \end{aligned} \quad (3.1.19a)$$

$$\begin{aligned} Q_{\Delta, \mathcal{N}}\{y\} &= \cancel{\Delta \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \left[\frac{1}{2} \right]} + \Delta \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \left[\frac{1}{2} \lim_{\sigma^2 \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma} g_{\sigma}(y - [i - 1/2]\Delta) \right] \\ &\quad - \cancel{\Delta \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \left[\frac{1}{2} \right]} - \Delta \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \left[\frac{1}{2} \lim_{\sigma^2 \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma} g_{\sigma}(-y - [i - 1/2]\Delta) \right], \end{aligned} \quad (3.1.19b)$$

$$\begin{aligned} Q_{\Delta, \mathcal{N}}\{y\} &= \frac{\Delta}{2} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \left[\lim_{\sigma^2 \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma} g_{\sigma}(y - [i - 1/2]\Delta) \right] \\ &\quad - \frac{\Delta}{2} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \left[\lim_{\sigma^2 \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma} g_{\sigma}(-y - [i - 1/2]\Delta) \right]. \end{aligned} \quad (3.1.19c)$$

A Figura 3.3 apresenta o quantizador não-ideal com 3 bits, $V = 1$, $\Delta = \frac{1}{3}$, e modelagem pela Equação (3.1.19c), com $\sigma = 0,05$.

^(d)Exceto pelo valor no ponto de discontinuidade, mas esse não é um problema para a modelagem.

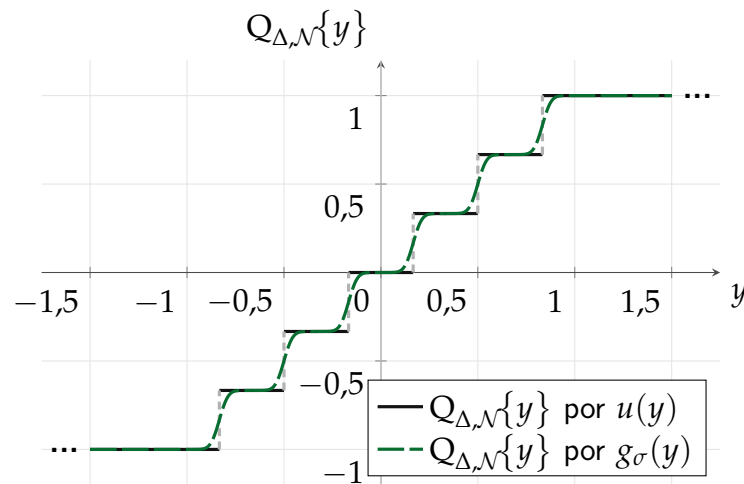


Figura 3.3 – Exemplo de quantizador simétrico em torno de 0 V, com nível 0 V. Quantizador ideal em preto, e aproximado (Equação (3.1.19c)) em verde. Quantização aproximada modelada pela função erro $g_{\sigma}(y)$, e $\sigma = 0.05$. $\Delta = \frac{1}{3}$, $N = 3$.

Uma simulação para verificação de todas as etapas desenvolvidas para determinação da função de quantização encontra-se no Apêndice F. A quantização complexa conforme definida na Equação (2.2.5) pode ser reutilizada aqui, agora com o operador $Q_{\Delta, \mathcal{N}}^c\{y\}$, utilizando qualquer uma das modelagens anteriores para $Q_{\Delta, \mathcal{N}}\{\cdot\}$.

3.1.5 Conjuntos de parâmetros

Ao longo das seções seguintes, serão utilizados os parâmetros Δ e \mathcal{N} para a caracterização do quantizador, sendo esses dois chamados de “parâmetros algébricos” por facilitarem o desenvolvimento matemático do problema. Contudo, sob uma perspectiva de projeto tem-se que um quantizador é melhor caracterizado pelos parâmetros V e N , sendo esses denominados de “parâmetros práticos”. Deve-se notar que, pelas Equações (3.1.1b) e (3.1.7) há uma intercambiabilidade entre esses parâmetros, sendo que cada um dos pares pode ser definido completamente pelo outro par.

Os parâmetros algébricos serão utilizados ao longo do desenvolvimento, e nas simulações e resultados será feita a troca para os parâmetros práticos, de forma a melhor possibilitar a visualização dos resultados obtidos em uma situação que aproxima a real.

3.2 MODELO PROPOSTO PARA OS EFEITOS DA QUANTIZAÇÃO

Nessa seção, será desenvolvido o que será chamado de modelo proposto para os efeitos da quantização, partindo-se da Equação (3.1.19c).

3.2.1 Matriz de coerência do sinal desejado

A matriz de coerência do sinal desejado, $\mathbf{R}_{\mathbf{x}\mathbf{x}}(\lambda, k)$, pode ser calculada assumindo o conhecimento da potência instantânea da fala no seu local de geração, e das HRTFs,

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_{\mathbf{x}\mathbf{x}}(\lambda, k) &= \mathbf{a}(k)\mathbf{a}^H(k)\mathbb{E}\left[|s(\lambda, k)|^2\right] \\ &= \mathbf{a}(k)\mathbf{a}^H(k)\sigma_s^2(\lambda, k),\end{aligned}\quad (3.2.1)$$

3.2.2 Matriz de coerência cruzada entre sinal desejado e sinal contaminado quantizado

Pela definição da quantização e explicitando cada elemento (l, c) de $\mathbf{R}_{\mathbf{x}\mathbf{y}_q}(\lambda, k)$ em $x_l(\lambda, k)$ e $y_{q,c}(\lambda, k)$, tem-se (omitindo (λ, k) , para maior clareza no desenvolvimento)

$$\begin{aligned}r_{x_l y_{q,c}} &= \mathbb{E}\left[x_l \mathcal{Q}_{\Delta_c, \mathcal{N}_c}^C\{y_c^*\}\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\left[x_l^{\mathbb{R}} + x_l^{\mathbb{I}}\right] \left[\mathcal{Q}_{\Delta_c, \mathcal{N}_c}\{y_c^{\mathbb{R}}\} - \mathcal{Q}_{\Delta_c, \mathcal{N}_c}\{y_c^{\mathbb{I}}\}\right]\right],\end{aligned}\quad (3.2.2)$$

onde Δ_m e N_m também podem variar em (λ, k) , conforme a Equação (2.4.5). Distribuindo,

$$\begin{aligned}r_{x_l y_{q,c}} &= \mathbb{E}\left[x_l^{\mathbb{R}} \mathcal{Q}_{\Delta_c, \mathcal{N}_c}\{y_c^{\mathbb{R}}\}\right] \\ &\quad - \mathbb{E}\left[x_l^{\mathbb{R}} \mathcal{Q}_{\Delta_c, \mathcal{N}_c}\{y_c^{\mathbb{I}}\}\right] \\ &\quad + \mathbb{E}\left[x_l^{\mathbb{I}} \mathcal{Q}_{\Delta_c, \mathcal{N}_c}\{y_c^{\mathbb{R}}\}\right] \\ &\quad + \mathbb{E}\left[x_l^{\mathbb{I}} \mathcal{Q}_{\Delta_c, \mathcal{N}_c}\{y_c^{\mathbb{I}}\}\right],\end{aligned}\quad (3.2.3)$$

em que os 4 termos da formulação obtida na Equação (3.2.3) possuem a mesma forma. Assim,

$$\begin{aligned}r_{x_l y_{q,c}} &= \underbrace{\mathbb{E}\left[x_l^{\mathbb{R}} \mathcal{Q}_{\Delta_c, \mathcal{N}_c}\{y_c^{\mathbb{R}}\}\right]}_{T_{\mathbb{R}\mathbb{R}}^1} - \underbrace{\mathbb{E}\left[x_l^{\mathbb{R}} \mathcal{Q}_{\Delta_c, \mathcal{N}_c}\{y_c^{\mathbb{I}}\}\right]}_{T_{\mathbb{R}\mathbb{I}}^1} \\ &\quad + \underbrace{\mathbb{E}\left[x_l^{\mathbb{I}} \mathcal{Q}_{\Delta_c, \mathcal{N}_c}\{y_c^{\mathbb{R}}\}\right]}_{T_{\mathbb{I}\mathbb{R}}^1} + \underbrace{\mathbb{E}\left[x_l^{\mathbb{I}} \mathcal{Q}_{\Delta_c, \mathcal{N}_c}\{y_c^{\mathbb{I}}\}\right]}_{T_{\mathbb{I}\mathbb{I}}^1}.\end{aligned}\quad (3.2.4)$$

Cada termo da Equação (3.2.4) pode ser descrito genericamente como

$$T_{\mathbb{A}\mathbb{B}}^1 = \mathbb{E}\left[x_l^{\mathbb{A}} \mathcal{Q}_{\Delta_c, \mathcal{N}_c}\{y_c^{\mathbb{B}}\}\right],\quad (3.2.5)$$

em que $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in [\mathbb{R}, \mathbb{I}]$ representam genericamente as partes real e/ou imaginária dos sinais estudados; e com isso pode-se avaliar cada termo da Equação (3.2.3) separadamente.

Substituindo a Equação (3.1.19c) na Equação (3.2.5), tem-se

$$\begin{aligned} T_{\text{AB}}^1 &= \frac{\Delta_c}{2} \lim_{\sigma^2 \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_c} \frac{1}{\sigma} \mathbb{E} \left[x_l^{\text{A}} g_{\sigma} \left(y_c^{\text{B}} - [i - 1/2] \Delta_c \right) \right] \\ &\quad - \frac{\Delta_c}{2} \lim_{\sigma^2 \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_c} \frac{1}{\sigma} \mathbb{E} \left[x_l^{\text{A}} g_{\sigma} \left(-y_c^{\text{B}} - [i - 1/2] \Delta_c \right) \right], \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

em que \mathcal{N}_c é conforme a Equação (3.1.1b).

Os valores esperados dentro de cada termo dos somatórios da Equação (3.2.6) são, genericamente, dados por $\mathbb{E}[g_{\sigma}(y_1 - \mu)y_2]$, em que y_1 e y_2 (genéricos) são variáveis aleatórias Gaussianas reais de média zero (LOIZOU, 2013; EPHRAIM; MALAH, 1985), μ (genérico) é uma constante, e $g_{\sigma}(\cdot)$ é a função-erro parametrizada, dada na Equação (3.1.13). A partir dessas considerações, pode ser mostrado (Apêndice B) que esta função pode ser reduzida a

$$\lim_{\sigma^2 \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma} \mathbb{E}[g_{\sigma}(y_1 - \mu)y_2] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\mathbb{E}[y_1 y_2]}{\sigma_{y_1}} \cdot \exp \left\{ -\frac{\mu^2}{2\sigma_{y_1}^2} \right\}, \quad (3.2.7)$$

em que

$$\sigma_{y_1} = \sqrt{\mathbb{E}[|y_1|^2]}. \quad (3.2.8)$$

Substituindo a Equação (3.2.7) na Equação (3.2.6), realizando as substituições de y_1 , y_2 e μ adequadamente, tem-se

$$\begin{aligned} T_{\text{AB}}^1 &= \frac{\Delta_c}{\sqrt{2\pi}} \frac{\mathbb{E}[x_l^{\text{A}} y_c^{\text{B}}]}{\sigma_{y_c^{\text{B}}}} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_c} \exp \left\{ -\frac{([i - 1/2] \Delta)^2}{2\sigma_{y_c^{\text{B}}}^2} \right\} \\ &\quad - \frac{\Delta_c}{\sqrt{2\pi}} \frac{\mathbb{E}[-x_l^{\text{A}} y_c^{\text{B}}]}{\sigma_{y_c^{\text{B}}}} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_c} \exp \left\{ -\frac{([i - 1/2] \Delta)^2}{2\sigma_{y_c^{\text{B}}}^2} \right\}. \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

Através da propriedade da linearidade do valor esperado, pode-se agrupar os termos, obtendo

$$T_{\text{AB}}^1 = \Delta_c \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\mathbb{E}[x_l^{\text{A}} y_c^{\text{B}}]}{\sigma_{y_c^{\text{B}}}} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_c} \exp \left\{ -\frac{([i - 1/2] \Delta)^2}{2\sigma_{y_c^{\text{B}}}^2} \right\}. \quad (3.2.10)$$

No Apêndice A as correlações entre sinais sem efeitos de quantização são calculadas. Pela Equação (A.13),

$$\mathbb{E}[x_l^{\text{A}} y_c^{\text{B}}] = \mathbb{E}[x_l^{\text{A}} x_c^{\text{B}}] \quad (3.2.11)$$

e, pelas Equações (A.16) e (A.22) (usando também a Equação (A.3)), tem-se

$$\left(\sigma_{y_c^{\text{B}}} \right)^2 = \frac{1}{2} \left[|a_c|^2 \mathbb{E}[|s|^2] + \sum_{i=1}^I \left(|b_{i,c}|^2 \mathbb{E}[|u_i|^2] \right) + \left(\mathbb{E}[|f|^2] + \mathbb{E}[|r|^2] \right) \right] \quad (3.2.12a)$$

$$= \frac{1}{2} \mathbb{E}[|y_c|^2]. \quad (3.2.12b)$$

Portanto, da Equação (3.2.10) chega-se a

$$T_{\text{AB}}^1 = \frac{2\Delta_c}{\sqrt{\pi}\sigma_{y_c}} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_c} \exp\left\{-\frac{([i-1/2]\Delta)^2}{(\sigma_{y_c})^2}\right\} E[x_l^{\text{A}} x_c^{\text{B}}]. \quad (3.2.13)$$

em que σ_{y_m} é o desvio-padrão de y_m (ambos variando em (λ, k)). Com isso, voltando à Equação (3.2.4) e aplicando a Equação (3.2.13) aos 4 termos, tem-se

$$T_{\text{RR}}^1 = \frac{2\Delta_c}{\sqrt{\pi}\sigma_{y_c}} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_c} \exp\left\{-\frac{([i-1/2]\Delta)^2}{(\sigma_{y_c})^2}\right\} E[x_l^{\text{R}} x_c^{\text{R}}], \quad (3.2.14a)$$

$$T_{\text{RI}}^1 = \frac{2\Delta_c}{\sqrt{\pi}\sigma_{y_c}} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_c} \exp\left\{-\frac{([i-1/2]\Delta)^2}{(\sigma_{y_c})^2}\right\} E[x_l^{\text{R}} x_c^{\text{I}}], \quad (3.2.14b)$$

$$T_{\text{IR}}^1 = \frac{2\Delta_c}{\sqrt{\pi}\sigma_{y_c}} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_c} \exp\left\{-\frac{([i-1/2]\Delta)^2}{(\sigma_{y_c})^2}\right\} E[x_l^{\text{I}} x_c^{\text{R}}], \quad (3.2.14c)$$

$$T_{\text{II}}^1 = \frac{2\Delta_c}{\sqrt{\pi}\sigma_{y_c}} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_c} \exp\left\{-\frac{([i-1/2]\Delta)^2}{(\sigma_{y_c})^2}\right\} E[x_l^{\text{I}} x_c^{\text{I}}]. \quad (3.2.14d)$$

Agrupando os termos, obtém-se

$$r_{x_l y_{q,c}} = \frac{2\Delta_c}{\sqrt{\pi}\sigma_{y_c}} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_c} \exp\left\{-\frac{([i-1/2]\Delta)^2}{(\sigma_{y_c})^2}\right\} \cdot \left(E[x_l^{\text{R}} x_c^{\text{R}}] - E[x_l^{\text{R}} x_c^{\text{I}}] + E[x_l^{\text{I}} x_c^{\text{R}}] + E[x_l^{\text{I}} x_c^{\text{I}}] \right), \quad (3.2.15)$$

e simplificando o termo entre parênteses, chega-se em

$$r_{x_l y_{q,c}} = \frac{2\Delta_c}{\sqrt{\pi}\sigma_{y_c}} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_c} \exp\left\{-\frac{([i-1/2]\Delta)^2}{(\sigma_{y_c})^2}\right\} \cdot E[x_l x_c^*]. \quad (3.2.16)$$

Denotando

$$\kappa_{1l,c} = \frac{2\Delta_c}{\sqrt{\pi}\sigma_{y_c}} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_c} \exp\left\{-\frac{([i-1/2]\Delta)^2}{(\sigma_{y_c})^2}\right\}, \quad (3.2.17)$$

então

$$r_{x_l y_{q,c}} = \kappa_{1l,c} \cdot E[x_l x_c^*]. \quad (3.2.18)$$

Substituindo de acordo com a Equação (A.16),

$$r_{x_l y_{q,c}} = \kappa_{1l,c} \cdot a_l a_c^* \cdot \mathbb{E} \left[|s|^2 \right]. \quad (3.2.19)$$

Por fim, retornando à notação (λ, k) ,

$$r_{x_l y_{q,c}}(\lambda, k) = \kappa_{1l,c}(\lambda, k) \cdot a_l(\lambda, k) a_c^*(\lambda, k) \cdot \mathbb{E} \left[|s(\lambda, k)|^2 \right]. \quad (3.2.20)$$

No Apêndice G constam os códigos utilizados na comparação do resultado obtido pela Equação (3.2.20) com simulações computacionais utilizando a Equação (3.2.2). Montando uma matriz $\mathcal{K}_1(\lambda, k)$ em que cada elemento (l, c) é dado pela Equação (3.2.17), tem-se então

$$\mathbf{R}_{xy_q}(\lambda, k) = \mathcal{K}_1(\lambda, k) \odot \mathbf{R}_{xx}(\lambda, k), \quad (3.2.21)$$

em que \odot simboliza o produto de Hadamard (HORN, 1990), ou multiplicação ponto-a-ponto. A matriz \mathcal{K}_1 possui linhas idênticas, já que $\kappa_{1l,c}$ independe do índice l . Adicionalmente, como os primeiros M microfones (referentes ao FC) não são quantizados, tem-se que

$$\kappa_{1l,c} = 1, \quad c \leq M \quad (3.2.22)$$

e portanto, de maneira genérica,

$$\mathcal{K}_1 = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 & \kappa_{11,M+1} & \dots & \kappa_{11,2M} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 & \kappa_{12M,M+1} & \dots & \kappa_{12M,2M} \end{bmatrix}. \quad (3.2.23)$$

3.2.3 Matriz de coerência do sinal contaminado quantizado

A matriz de coerência do sinal contaminado quantizado, $\mathbf{R}_{y_q y_q}(\lambda, k)$, é definida na Equação (2.5.12c) como sendo (a cada elemento (l, c))

$$\begin{aligned} r_{y_{q,l} y_{q,c}}(\lambda, k) &= \mathbb{E} \left[\mathbf{Q}_{\Delta_l, \mathcal{N}_l}^C \{ y_l(\lambda, k) \} \mathbf{Q}_{\Delta_c, \mathcal{N}_c}^C \{ y_c^*(\lambda, k) \} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\left(\mathbf{Q}_{\Delta_l, \mathcal{N}_l} \{ y_l^R(\lambda, k) \} + \mathbf{Q}_{\Delta_l, \mathcal{N}_l} \{ y_l^I(\lambda, k) \} \right) \right. \\ &\quad \left. \left(\mathbf{Q}_{\Delta_c, \mathcal{N}_c} \{ y_c^R(\lambda, k) \} - \mathbf{Q}_{\Delta_c, \mathcal{N}_c} \{ y_c^I(\lambda, k) \} \right) \right], \end{aligned} \quad (3.2.24)$$

em que Δ_l e \mathcal{N}_l de cada microfone também são em função de (λ, k) , idem para Δ_c e \mathcal{N}_c . Omitindo (λ, k) nos outros termos, e expandindo-os, tem-se

$$\begin{aligned} r_{y_{q,l} y_{q,c}} &= \underbrace{\mathbb{E} \left[\mathbf{Q}_{\Delta_l, \mathcal{N}_l} \{ y_l^R \} \mathbf{Q}_{\Delta_c, \mathcal{N}_c} \{ y_c^R \} \right]}_{\mathbb{T}_{\mathbb{R}\mathbb{R}}^2} - \underbrace{\mathbb{E} \left[\mathbf{Q}_{\Delta_l, \mathcal{N}_l} \{ y_l^R \} \mathbf{Q}_{\Delta_c, \mathcal{N}_c} \{ y_c^I \} \right]}_{\mathbb{T}_{\mathbb{R}\mathbb{I}}^2} \\ &+ \underbrace{\mathbb{E} \left[\mathbf{Q}_{\Delta_l, \mathcal{N}_l} \{ y_l^I \} \mathbf{Q}_{\Delta_c, \mathcal{N}_c} \{ y_c^R \} \right]}_{\mathbb{T}_{\mathbb{I}\mathbb{R}}^2} + \underbrace{\mathbb{E} \left[\mathbf{Q}_{\Delta_l, \mathcal{N}_l} \{ y_l^I \} \mathbf{Q}_{\Delta_c, \mathcal{N}_c} \{ y_c^I \} \right]}_{\mathbb{T}_{\mathbb{I}\mathbb{I}}^2}, \end{aligned} \quad (3.2.25)$$

onde cada termo T_{AB}^2 é em função de (l, c) , porém omite-se essa notação de forma a economizar espaço. Analisando separadamente cada termo T_{AB}^2 da Equação (3.2.25) como

$$T_{\text{AB}}^2 = \mathbb{E} \left[\mathbf{Q}_{\Delta_l, \mathcal{N}_l} \{ y_l^{\text{A}} \} \mathbf{Q}_{\Delta_c, \mathcal{N}_c} \{ y_c^{\text{B}} \} \right]. \quad (3.2.26)$$

Substituindo a Equação (3.1.19c) na Equação (3.2.26), tem-se

$$T_{\text{AB}}^2 = \left(\begin{aligned} & \left(\frac{\Delta_l}{2} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_l} \left[\lim_{\sigma_a^2 \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma_a} g_{\sigma_a} \left(y_l - [i - 1/2] \Delta_l \right) \right] \right. \\ & \left. - \frac{\Delta_l}{2} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_l} \left[\lim_{\sigma_a^2 \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma_a} g_{\sigma_a} \left(-y_l - [i - 1/2] \Delta_l \right) \right] \right) \\ & \left(\frac{\Delta_c}{2} \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_c} \left[\lim_{\sigma_b^2 \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma_b} g_{\sigma_b} \left(y_c - [j - 1/2] \Delta_c \right) \right] \right. \\ & \left. - \frac{\Delta_c}{2} \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_c} \left[\lim_{\sigma_b^2 \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma_b} g_{\sigma_b} \left(-y_c - [j - 1/2] \Delta_c \right) \right] \right), \end{aligned} \right) \quad (3.2.27a)$$

$$\begin{aligned} T_{\text{AB}}^2 &= \frac{\Delta_l \Delta_c}{4} \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_c} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_l} \lim_{\substack{\sigma_a^2 \rightarrow 0 \\ \sigma_b^2 \rightarrow 0}} \frac{1}{\sigma_a \sigma_b} \mathbb{E} \left[g_{\sigma_a} \left(y_l^{\text{A}} - [i - 1/2] \Delta_l \right) g_{\sigma_b} \left(y_c^{\text{B}} - [j - 1/2] \Delta_c \right) \right] \\ &\quad - \frac{\Delta_l \Delta_c}{4} \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_c} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_l} \lim_{\substack{\sigma_a^2 \rightarrow 0 \\ \sigma_b^2 \rightarrow 0}} \frac{1}{\sigma_a \sigma_b} \mathbb{E} \left[g_{\sigma_a} \left(-y_l^{\text{A}} - [i - 1/2] \Delta_l \right) g_{\sigma_b} \left(y_c^{\text{B}} - [j - 1/2] \Delta_c \right) \right] \\ &\quad - \frac{\Delta_l \Delta_c}{4} \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_c} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_l} \lim_{\substack{\sigma_a^2 \rightarrow 0 \\ \sigma_b^2 \rightarrow 0}} \frac{1}{\sigma_a \sigma_b} \mathbb{E} \left[g_{\sigma_a} \left(y_l^{\text{A}} - [i - 1/2] \Delta_l \right) g_{\sigma_b} \left(-y_c^{\text{B}} - [j - 1/2] \Delta_c \right) \right] \\ &\quad + \frac{\Delta_l \Delta_c}{4} \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_c} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_l} \lim_{\substack{\sigma_a^2 \rightarrow 0 \\ \sigma_b^2 \rightarrow 0}} \frac{1}{\sigma_a \sigma_b} \mathbb{E} \left[g_{\sigma_a} \left(-y_l^{\text{A}} - [i - 1/2] \Delta_l \right) g_{\sigma_b} \left(-y_c^{\text{B}} - [j - 1/2] \Delta_c \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.2.27b)$$

A expectativa em cada uma das linhas da Equação (3.2.27b) possui a forma $\mathbb{E}[g_{\sigma_a}(y_1 - \beta_1)g_{\sigma_b}(y_2 - \beta_2)]$, em que y_1 e y_2 são consideradas variáveis aleatórias, Gaussianas reais com média nula (LOIZOU, 2013; EPHRAIM; MALAH, 1985), β_1 e β_2 são constantes, e $g_{\sigma}(\cdot)$ é a função erro com parâmetro σ . A partir disso, pode ser mostrado (Apêndice C) que esta função pode ser reduzida a

$$\begin{aligned} & \lim_{\substack{\sigma_a^2 \rightarrow 0 \\ \sigma_b^2 \rightarrow 0}} \frac{1}{\sigma_a \sigma_b} \mathbb{E}[g_{\sigma_a}(y_1 - \beta_1)g_{\sigma_b}(y_2 - \beta_2)] = \\ & = \operatorname{erf} \left\{ \frac{\Lambda_1}{\sqrt{2}} \right\} \operatorname{erf} \left\{ \frac{\Lambda_2}{\sqrt{2}} \right\} + \frac{2}{\pi} \rho \int_0^1 \frac{1}{|\mathbf{K}_\alpha|^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \mathbf{\Lambda}^\top \mathbf{K}_\alpha^{-1} \mathbf{\Lambda} \right\} d\alpha, \end{aligned} \quad (3.2.28)$$

em que Λ , \mathbf{K}_α e ρ são

$$\begin{aligned}\Lambda &= \begin{bmatrix} \Lambda_1 & \Lambda_2 \end{bmatrix}^\top \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\beta_1}{\sigma_{y_1}} & \frac{\beta_2}{\sigma_{y_2}} \end{bmatrix}^\top,\end{aligned}\quad (3.2.29a)$$

$$\mathbf{K}_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & \rho\alpha \\ \rho\alpha & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.2.29b)$$

$$\rho = \frac{\mathbb{E}[y_1 y_2]}{\sqrt{\mathbb{E}[y_1^2] \mathbb{E}[y_2^2]}}, \quad (3.2.29c)$$

com α sendo a variável de integração da Equação (3.2.28). Substituindo o resultado da Equação (3.2.28) na Equação (3.2.27b), em que $y_1 = \pm y_l^A$ e $y_2 = \pm y_c^B$, e considerando que o valor esperado é linear de tal forma que $\mathbb{E}[(-a)b] = -\mathbb{E}[ab]$,

$$\begin{aligned}T_{\text{AB}}^2 &= \frac{\Delta_l \Delta_c}{4} \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_c} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_l} \left(\operatorname{erf} \left\{ \frac{\Lambda_i}{\sqrt{2}} \right\} \operatorname{erf} \left\{ \frac{\Lambda_j}{\sqrt{2}} \right\} + \frac{2}{\pi} \rho \int_0^1 \Xi(\Lambda_{ij}, \rho, \alpha) d\alpha \right) \\ &\quad - \frac{\Delta_l \Delta_c}{4} \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_c} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_l} \left(\operatorname{erf} \left\{ \frac{\Lambda_i}{\sqrt{2}} \right\} \operatorname{erf} \left\{ \frac{\Lambda_j}{\sqrt{2}} \right\} + \frac{2}{\pi} (-\rho) \int_0^1 \Xi(\Lambda_{ij}, (-\rho), \alpha) d\alpha \right) \\ &\quad - \frac{\Delta_l \Delta_c}{4} \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_c} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_l} \left(\operatorname{erf} \left\{ \frac{\Lambda_i}{\sqrt{2}} \right\} \operatorname{erf} \left\{ \frac{\Lambda_j}{\sqrt{2}} \right\} + \frac{2}{\pi} (-\rho) \int_0^1 \Xi(\Lambda_{ij}, (-\rho), \alpha) d\alpha \right) \\ &\quad + \frac{\Delta_l \Delta_c}{4} \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_c} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_l} \left(\operatorname{erf} \left\{ \frac{\Lambda_i}{\sqrt{2}} \right\} \operatorname{erf} \left\{ \frac{\Lambda_j}{\sqrt{2}} \right\} + \frac{2}{\pi} \rho \int_0^1 \Xi(\Lambda_{ij}, \rho, \alpha) d\alpha \right),\end{aligned}\quad (3.2.30)$$

em que $\Xi(\Lambda, \rho, \alpha)$ é dado pela Equação (C.58) como

$$\Xi(\Lambda, \rho, \alpha) = \frac{1}{|\mathbf{K}_\alpha|^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \Lambda^\top \mathbf{K}_\alpha^{-1} \Lambda \right\}, \quad (3.2.31)$$

e para o problema, comparando as Equações (3.2.28), (3.2.27b) e (3.2.29a) tem-se que Λ_i e Λ_j são respectivamente

$$\Lambda_i = \frac{[i - 1/2] \Delta_l}{\sigma_{y_l^A}} \quad (3.2.32a)$$

e

$$\Lambda_j = \frac{[j - 1/2] \Delta_c}{\sigma_{y_c^B}}. \quad (3.2.32b)$$

Os termos em função de $\operatorname{erf}\{\cdot\}$ se cancelam, e com isso ao agrupar os termos em função de $\Xi(\Lambda_{ij}, \rho, \alpha)$ tem-se

$$T_{\mathbb{A}\mathbb{B}}^2 = \frac{\Delta_l \Delta_c \rho}{\pi} \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_c} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_l} \left(\int_0^1 \Xi(\Lambda_{ij}, \rho, \alpha) d\alpha + \int_0^1 \Xi(\Lambda_{ij}, -\rho, \alpha) d\alpha \right). \quad (3.2.33)$$

Realizando as substituições

$$-\rho\alpha = \rho\beta \quad (3.2.34a)$$

e

$$d\alpha = -d\beta \quad (3.2.34b)$$

na segunda integral da Equação (3.2.33), tem-se

$$\int_0^1 \Xi(\Lambda, -\rho, \alpha) d\alpha = - \int_0^{-1} \Xi(\Lambda_{ij}, \rho, \beta) d\beta = \int_{-1}^0 \Xi(\Lambda_{ij}, \rho, \beta) d\beta. \quad (3.2.35)$$

Com isso, retornando à Equação (3.2.33) e utilizando o resultado da Equação (3.2.35), obtém-se

$$T_{\mathbb{A}\mathbb{B}}^2 = \frac{\Delta_l \Delta_c \rho}{\pi} \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_c} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_l} \left(\int_{-1}^1 \Xi(\Lambda_{ij}, \rho, \alpha) d\alpha \right). \quad (3.2.36)$$

Utilizando a definição de ρ da Equação (3.2.29c) na Equação (3.2.36), chega-se em

$$T_{\mathbb{A}\mathbb{B}}^2 = \frac{\Delta_l \Delta_c}{\pi \sigma_{y_l^{\mathbb{A}}} \sigma_{y_c^{\mathbb{B}}}} \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_c} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_l} \left(\int_{-1}^1 \Xi(\Lambda_{ij}, \rho, \alpha) d\alpha \right) \mathbb{E} \left[y_l^{\mathbb{A}} y_c^{\mathbb{B}} \right]. \quad (3.2.37)$$

No Apêndice A são calculadas as correlações entre os sinais, sem efeitos da quantização. Pela Equação (A.3), obtém-se

$$\mathbb{E} \left[\left(y_l^{\mathbb{A}} \right)^2 \right] = \frac{1}{2} \mathbb{E} \left[|y_l|^2 \right] = \frac{1}{2} \left(\sigma_{y_l} \right)^2, \quad (3.2.38a)$$

$$\mathbb{E} \left[\left(y_c^{\mathbb{B}} \right)^2 \right] = \frac{1}{2} \mathbb{E} \left[|y_c|^2 \right] = \frac{1}{2} \left(\sigma_{y_c} \right)^2, \quad (3.2.38b)$$

que independem de \mathbb{A} e \mathbb{B} (e, por notação, será usada a parte real em todos os casos). Disso, Λ_{ij} da Equação (3.2.29a) se torna

$$\Lambda_{ij} = \left[\frac{\sqrt{2}[i-1/2]\Delta_l}{\sigma_{y_l}} \quad \frac{\sqrt{2}[j-1/2]\Delta_c}{\sigma_{y_c}} \right]^{\top}. \quad (3.2.39)$$

Para calcular ρ é necessário conhecer-se $E[y_l^A y_c^B]$ e, pelas Equações (A.16) e (A.22) (usando também a Equação (A.3)), tem-se

$$\begin{aligned} E[y_l^A y_c^B] &= \frac{1}{2} \left(a_l^A a_c^B + \overline{a_l^A} \overline{a_c^B} \cdot (-1)^{\nu_{AB}} \right) E[|s|^2] \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^I \left(b_{i,l}^A b_{i,c}^B + \overline{b_{i,l}^A} \overline{b_{i,c}^B} \cdot (-1)^{\nu_{AB}} \right) E[|u_i|^2] \\ &+ \frac{1}{2} \left(E[|f|^2] + E[|r|^2] \right) \nu_{AB} \nu_{l,c}. \end{aligned} \quad (3.2.40)$$

com $\nu_{a,b}$ sendo como definido na Equação (A.5), dado por

$$\nu_{a,b} = \begin{cases} 1, & a = b \\ 0, & a \neq b \end{cases}. \quad (3.2.41)$$

Além disso, o coeficiente de coerência calculado pela Equação (3.2.29c) é o coeficiente entre y_l^A e y_c^B , podendo ser obtidos pela Equação (A.32), a partir de

$$\rho = \frac{E[y_l y_c^*]}{\sigma_{y_l} \sigma_{y_c}} = \rho^{\mathbb{R}} + \rho^{\mathbb{I}}, \quad (3.2.42)$$

de tal forma que

$$\frac{E[y_l^{\mathbb{R}} y_c^{\mathbb{R}}]}{\sigma_{y_l^{\mathbb{R}}} \sigma_{y_c^{\mathbb{R}}}} \equiv \rho_{\mathbb{R}\mathbb{R}} = \rho^{\mathbb{R}}, \quad (3.2.43a)$$

$$\rho_{\mathbb{I}\mathbb{R}} = \rho^{\mathbb{I}}, \quad (3.2.43b)$$

$$\rho_{\mathbb{R}\mathbb{I}} = -\rho^{\mathbb{I}}, \quad (3.2.43c)$$

$$\rho_{\mathbb{I}\mathbb{I}} = \rho^{\mathbb{R}}. \quad (3.2.43d)$$

Voltando à Equação (3.2.25), e aplicando a Equação (3.2.37) aos 4 termos^(e) obtêm-se,

$$T_{\mathbb{R}\mathbb{R}}^2 = \frac{2\Delta_l \Delta_c}{\pi \sigma_{y_l} \sigma_{y_c}} \sum_{j=1}^{N_c} \sum_{i=1}^{N_l} \left(\int_{-1}^1 \Xi(\Lambda_{ij}, \rho^{\mathbb{R}}, \alpha) d\alpha \right) E[y_l^{\mathbb{R}} y_c^{\mathbb{R}}], \quad (3.2.44a)$$

$$T_{\mathbb{R}\mathbb{I}}^2 = \frac{2\Delta_l \Delta_c}{\pi \sigma_{y_l} \sigma_{y_c}} \sum_{j=1}^{N_c} \sum_{i=1}^{N_l} \left(\int_{-1}^1 \Xi(\Lambda_{ij}, \rho^{\mathbb{I}}, \alpha) d\alpha \right) E[y_l^{\mathbb{R}} y_c^{\mathbb{I}}], \quad (3.2.44b)$$

$$T_{\mathbb{I}\mathbb{R}}^2 = \frac{2\Delta_l \Delta_c}{\pi \sigma_{y_l} \sigma_{y_c}} \sum_{j=1}^{N_c} \sum_{i=1}^{N_l} \left(\int_{-1}^1 \Xi(\Lambda_{ij}, \rho^{\mathbb{I}}, \alpha) d\alpha \right) E[y_l^{\mathbb{I}} y_c^{\mathbb{R}}], \quad (3.2.44c)$$

^(e)Para o termo $T_{\mathbb{R}\mathbb{I}}^2$ da Equação (3.2.44b), foi feita uma substituição semelhante à usada nas Equações (3.2.34) e (3.2.35) de forma a mudar de $-\rho^{\mathbb{I}}$ para $\rho^{\mathbb{I}}$.

$$\mathbb{T}_{\mathbb{I}\mathbb{I}}^2 = \frac{2\Delta_l\Delta_c}{\pi\sigma_{y_l}\sigma_{y_c}} \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_c} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_l} \left(\int_{-1}^1 \Xi(\Lambda_{ij}, \rho^{\mathbb{R}}, \alpha) d\alpha \right) \mathbb{E} \left[y_l^{\mathbb{I}} y_c^{\mathbb{I}} \right]. \quad (3.2.44d)$$

Denotando

$$\kappa_{2l,c}^{\mathbb{R}} = \frac{2\Delta_l\Delta_c}{\pi\sigma_{y_l}\sigma_{y_c}} \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_c} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_l} \left(\int_{-1}^1 \Xi(\Lambda_{ij}, \rho^{\mathbb{R}}, \alpha) d\alpha \right), \quad (3.2.45a)$$

$$\kappa_{2l,c}^{\mathbb{I}} = \frac{2\Delta_l\Delta_c}{\pi\sigma_{y_l}\sigma_{y_c}} \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_c} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_l} \left(\int_{-1}^1 \Xi(\Lambda_{ij}, \rho^{\mathbb{I}}, \alpha) d\alpha \right), \quad (3.2.45b)$$

então

$$\mathbb{T}_{\mathbb{R},\mathbb{R}}^2 = \kappa_{2l,c}^{\mathbb{R}} \mathbb{E} \left[y_l^{\mathbb{R}} y_c^{\mathbb{R}} \right], \quad (3.2.46a)$$

$$\mathbb{T}_{\mathbb{R},\mathbb{I}}^2 = \kappa_{2l,c}^{\mathbb{I}} \mathbb{E} \left[y_l^{\mathbb{R}} y_c^{\mathbb{I}} \right], \quad (3.2.46b)$$

$$\mathbb{T}_{\mathbb{I},\mathbb{R}}^2 = \kappa_{2l,c}^{\mathbb{I}} \mathbb{E} \left[y_l^{\mathbb{I}} y_c^{\mathbb{R}} \right], \quad (3.2.46c)$$

$$\mathbb{T}_{\mathbb{I},\mathbb{I}}^2 = \kappa_{2l,c}^{\mathbb{R}} \mathbb{E} \left[y_l^{\mathbb{I}} y_c^{\mathbb{I}} \right]. \quad (3.2.46d)$$

Chamando

$$\kappa_{2l,c}^{\mathbb{S}} = \frac{\kappa_{2l,c}^{\mathbb{R}} + \kappa_{2l,c}^{\mathbb{I}}}{2}, \quad (3.2.47a)$$

$$\kappa_{2l,c}^{\mathbb{D}} = \frac{\kappa_{2l,c}^{\mathbb{R}} - \kappa_{2l,c}^{\mathbb{I}}}{2}, \quad (3.2.47b)$$

então, da Equação (3.2.25) tem-se

$$\begin{aligned} r_{y_{q,l}y_{q,c}} &= \kappa_{2l,c}^{\mathbb{S}} \cdot \mathbb{E} \left[y_l y_c^* \right] + \kappa_{2l,c}^{\mathbb{D}} \cdot \mathbb{E} \left[y_l y_c^* \right]^* \\ &= \kappa_{2l,c}^{\mathbb{S}} \cdot \mathbb{E} \left[y_l y_c^* \right] + \kappa_{2l,c}^{\mathbb{D}} \cdot \mathbb{E} \left[y_l^* y_c \right], \end{aligned} \quad (3.2.48)$$

Para obter-se o resultado da Equação (3.2.48) a partir da Equação (3.2.25) e dos resultados da Equação (3.2.46), em termos da coerência entre $y_l(\lambda, k)$ e $y_c(\lambda, k)$, usou-se a seguinte propriedade:

Sejam $x = a + b$ e $y = Ga + Hb$, então

$$y = S \cdot x + D \cdot x^*. \quad (3.2.49a)$$

em que

$$S = \frac{G+H}{2} \quad (3.2.49b)$$

$$D = \frac{G-H}{2} \quad (3.2.49c)$$

Além disso, $E[y_l y_c^*]$ (e seu conjugado) são dados pela Equação (A.19). Retornando à notação em função de (λ, k) , obtém-se

$$r_{y_q, l y_q, c}(\lambda, k) = \kappa_{2l, c}^S(\lambda, k) \cdot E[y_l(\lambda, k) y_c^*(\lambda, k)] + \kappa_{2l, c}^D(\lambda, k) \cdot E[y_l^*(\lambda, k) y_c(\lambda, k)]. \quad (3.2.50)$$

No Apêndice H constam os códigos para a comparação entre o resultado analítico obtido na Equação (3.2.50) e o esperado através de simulações pela Equação (3.2.24).

Montando duas matrizes \mathcal{K}_2^R e \mathcal{K}_2^I em que seus elementos são determinados pela Equação (3.2.45), então pela Equação (3.2.47) tem-se que

$$\mathcal{K}_2^S = \frac{\mathcal{K}_2^R + \mathcal{K}_2^I}{2}, \quad (3.2.51a)$$

$$\mathcal{K}_2^D = \frac{\mathcal{K}_2^R - \mathcal{K}_2^I}{2}, \quad (3.2.51b)$$

e portanto (retomando a notação (λ, k))

$$\mathbf{R}_{y_q y_q}(\lambda, k) = \mathcal{K}_2^S(\lambda, k) \odot \mathbf{R}_{yy}(\lambda, k) + \mathcal{K}_2^D(\lambda, k) \odot \mathbf{R}_{yy}^*(\lambda, k). \quad (3.2.52)$$

As matrizes \mathcal{K}_2^R e \mathcal{K}_2^I (e, semelhantemente, as matrizes \mathcal{K}_2^S e \mathcal{K}_2^D) podem ser separadas em 4 regiões: $l \leq M$ e $c \leq M$; $l \leq M$ e $c > M$; $l > M$ e $c \leq M$; e $l > M$ e $c > M$.

Na primeira região, nenhum dos sinais passou pelo processo de quantização, e portanto

$$\mathcal{K}_2^R = \mathcal{K}_2^I = 1. \quad (3.2.53)$$

Na segunda região, somente o sinal do índice c é quantizado, e assim

$$\mathcal{K}_2^R = \mathcal{K}_2^I = \kappa_{1l, c'}, \quad (3.2.54)$$

pois a diferença entre ambos seria usar a parte real e imaginária de ρ , respectivamente. Como ρ não aparece no cálculo de $\kappa_{1m, n}$, ambos serão iguais pois todos os outros parâmetros são idênticos.

A terceira região é semelhante, mas agora somente o sinal do microfone l é quantizado,

$$\mathcal{K}_2^R = \mathcal{K}_2^I = \kappa_{1c, l}. \quad (3.2.55)$$

Na última região os sinais de ambos os microfones são quantizados, e portanto

$$\mathcal{K}_2^R = \kappa_{2l, c'}^R \quad (3.2.56a)$$

$$\mathcal{K}_2^I = \kappa_{2l, c'}^I. \quad (3.2.56b)$$

Com isso, de maneira genérica,

$$\mathcal{K}_2^A = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 & \kappa_{11, M+1} & \dots & \kappa_{11, 2M} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 & \kappa_{1M, M+1} & \dots & \kappa_{1M, 2M} \\ \kappa_{11, M+1} & \dots & \kappa_{1M, M+1} & \kappa_{2M+1, M+1}^A & \dots & \kappa_{2M+1, 2M}^A \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \kappa_{11, 2M} & \dots & \kappa_{1M, 2M} & \kappa_{22M, M+1}^A & \dots & \kappa_{22M, 2M}^A \end{bmatrix}, \quad (3.2.57)$$

onde $A \in [\mathbb{R}, \mathbb{I}]$.

3.2.4 Reparametrização das matrizes de coerência

Ao longo do desenvolvimento matemático anterior, foi de maior interesse utilizar os parâmetros Δ_m e \mathcal{N}_m para definir e estudar a quantização. Contudo é útil realizar uma reparametrização do problema agora, seguindo a Equação (3.1.7), de forma a utilizar V e \mathcal{N}_m como os parâmetros independentes. Essa reparametrização tem tanto uma motivação de projeto, já que ao se construir um quantizador define-se a sua tensão de quantização e o seu número de bits; quanto uma motivação matemática, como será apresentada a seguir.

Nas Equações (3.2.17), (3.2.45a) e (3.2.45b), tem-se as definições dos ganhos κ . Nessas 3 equações, tem-se que sempre há a razão entre o passo de quantização e a raiz da potência do sinal. Portanto, observando essa razão e substituindo Δ_m usando a Equação (3.1.7), chega-se a

$$\frac{\Delta_m}{\sigma_{y_m}} = \frac{V}{\mathcal{N}_m} \frac{1}{\sigma_{y_m}} = \frac{V}{\sigma_{y_m}} \frac{1}{\mathcal{N}_m}. \quad (3.2.58)$$

Denotando

$$\psi_m = \frac{V}{\sigma_{y_m}}, \quad (3.2.59)$$

então as Equações (3.2.17), (3.2.45a) e (3.2.45b) tornam-se

$$\kappa_{1l,c} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\psi_c}{\mathcal{N}_c} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_c} \exp \left\{ - \left([i - 1/2] \frac{\psi_c}{\mathcal{N}_c} \right)^2 \right\}, \quad (3.2.60a)$$

$$\kappa_{2l,c}^{\mathbb{R}} = \frac{2}{\pi} \frac{\psi_l}{\mathcal{N}_l} \frac{\psi_c}{\mathcal{N}_c} \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_c} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_l} \left(\int_{-1}^1 \frac{1}{|\mathbf{K}_{\alpha,\mathbb{R}}|^{1/2}} \exp \left\{ - \mathbf{\Psi}_{ij}^T \mathbf{K}_{\alpha,\mathbb{R}}^{-1} \mathbf{\Psi}_{ij} \right\} d\alpha \right), \quad (3.2.60b)$$

$$\kappa_{2l,c}^{\mathbb{I}} = \frac{2}{\pi} \frac{\psi_l}{\mathcal{N}_l} \frac{\psi_c}{\mathcal{N}_c} \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_c} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_l} \left(\int_{-1}^1 \frac{1}{|\mathbf{K}_{\alpha,\mathbb{I}}|^{1/2}} \exp \left\{ - \mathbf{\Psi}_{ij}^T \mathbf{K}_{\alpha,\mathbb{I}}^{-1} \mathbf{\Psi}_{ij} \right\} d\alpha \right), \quad (3.2.60c)$$

em que, para as Equações (3.2.60b) e (3.2.60c),

$$\mathbf{\Psi}_{ij} = \begin{bmatrix} [i - 1/2] \frac{\psi_l}{\mathcal{N}_l} & [j - 1/2] \frac{\psi_c}{\mathcal{N}_c} \end{bmatrix}^T, \quad (3.2.61)$$

e o subscrito \mathbb{R} ou \mathbb{I} de \mathbf{K}_{α} indica a parte real ou imaginária de ρ , respectivamente.

Portanto tem-se que os 3 coeficientes não dependem de V ou σ_{y_m} diretamente, mas sim da sua razão, pela Equação (3.2.59). Como o parâmetro \mathcal{N}_m também aparece no limite superior dos somatórios, optou-se por deixá-lo exposto também no resto das equações.

3.3 MODELO HÍBRIDO PARA OS EFEITOS DA QUANTIZAÇÃO

Como foi visto na Seção 2.6, a solução clássica para modelagem da quantização não leva em conta os efeitos da saturação (LIPSHITZ; WANNAMAKER; VANDERKOOY, 1992). Aqui,

propõe-se um ajuste ao modelo clássico, juntando-o ao modelo proposto desse trabalho, de forma que o modelo clássico também leve em conta os efeitos da saturação. Esse modelo que será desenvolvido nessa seção será chamado de modelo híbrido (por mesclar os modelos clássico e proposto).

Define-se um operador de saturação $S_V\{y\}$ como

$$S_V\{y\} = \begin{cases} -V & , y < -V, \\ y & , |y| < V, \\ V & , y > V \end{cases} \quad (3.3.1)$$

em que

$$S_V\{y\} = \lim_{\substack{\mathcal{N} \rightarrow \infty \\ \Delta \rightarrow 0}} Q_{\Delta, \mathcal{N}}\{y\}, \quad (3.3.2)$$

já que ao se fixar V finito tem-se que o passo de quantização $\Delta \rightarrow 0$, visto que

$$V = \Delta \mathcal{N}. \quad (3.3.3)$$

Define-se também o operador de saturação complexa $S_V^C\{y\}$,

$$S_V^C\{y\} = S_V\{y^R\} + S_V\{y^I\} \quad (3.3.4)$$

A partir da Equação (2.6.1), define-se y_{sq} como (usando que y e η_q^C são números complexos)

$$\begin{aligned} y_{sq} &= S_V^C\{y_q\} \\ &= S_V\{y^R + \eta_q^R\} + S_V\{y^I + \eta_q^I\} \\ &= y_{sq}^R + y_{sq}^I \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

Portanto, para um dado microfone m , considerando que os M microfones do FC não sofrem nem saturação nem quantização,

$$y_{sq,m}(\lambda, k) = \begin{cases} y_m(\lambda, k), & m \leq M \\ S_V^C\{y_{q,m}(\lambda, k)\}, & m > M \end{cases} \quad (3.3.6)$$

$$\mathbf{y}_{sq}(\lambda, k) = \left[y_{sq,1}(\lambda, k) \dots y_{sq,M}(\lambda, k) y_{sq,M+1}(\lambda, k) y_{sq,2M}(\lambda, k) \right]^T \quad (3.3.7)$$

Com isso, é possível calcular as matrizes de coerência $\mathbf{R}_{\mathbf{xy}_{sq}}$ e $\mathbf{R}_{\mathbf{y}_{sq}\mathbf{y}_{sq}}$. Partindo da Equação (3.3.2), o Apêndice D mostra que

$$\kappa_{1l,c}^* = \lim_{\mathcal{N}_c \rightarrow \infty} \kappa_{1l,c} = \text{erf}\{\psi_c\}, \quad (3.3.8a)$$

$$\kappa_{2l,c}^{\mathbb{A}^*} = \lim_{\substack{\mathcal{N}_c \rightarrow \infty \\ \mathcal{N}_l \rightarrow \infty}} \kappa_{2l,c} = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \iint_{\Omega} \frac{1}{|\mathbf{K}_{\alpha, \mathbb{A}}|^{1/2}} \exp\left\{-\boldsymbol{\vartheta}^T \mathbf{K}_{\alpha, \mathbb{A}}^{-1} \boldsymbol{\vartheta}\right\} d\boldsymbol{\vartheta} d\alpha, \quad (3.3.8b)$$

em que Ω é a região de \mathbb{R}^2 dada pela Equação (D.20) como

$$\Omega = [0, \psi_l] \times [0, \psi_c], \quad (3.3.8c)$$

ϑ é dado pela Equação (D.18c) como

$$\vartheta = [x \ y], \quad (3.3.8d)$$

e agora ψ é, diferentemente da Equação (3.2.59),

$$\psi_m = \frac{V}{\sqrt{\sigma_{y_m}^2 + \sigma_{\eta_{m,q}}^2}}, \quad (3.3.8e)$$

já que o sinal que está sendo saturado é $y_m + \eta_{q,m}^C$, e $y_m(\lambda, k)$ e $\eta_{q,m}(\lambda, k)$ são descorrelacionados. Também, $\sigma_{\epsilon_{q,m}}$ é o desvio-padrão de $\eta_{m,q}(\lambda, k)$. Disso,

$$\mathbf{R}_{xy_{sq}} = \mathcal{K}_1^* \odot \mathbf{R}_{xx}, \quad (3.3.9a)$$

$$\mathbf{R}_{y_{sq}y_{sq}} = \left(\mathcal{K}_2^{S*} \odot (\mathbf{R}_{yy} + \mathbf{R}_{\eta_q\eta_q}) + \mathcal{K}_2^{D*} \odot (\mathbf{R}_{yy} + \mathbf{R}_{\eta_q\eta_q})^* \right), \quad (3.3.9b)$$

onde, \mathcal{K}_1^* , \mathcal{K}_2^{S*} e \mathcal{K}_2^{D*} são montados da mesma maneira que nas Equações (3.2.23) e (3.2.57), utilizando agora os valores de κ_1^* e κ_2^{A*} para caso de infinitos bits conforme as Equações (3.3.8a) e (3.3.8b).

3.4 CUSTO COMPUTACIONAL DOS MODELOS AVALIADOS

Tendo os modelos clássico (Seção 2.6), proposto (Seção 3.2) e híbrido (Seção 3.3), é possível examinar o custo computacional de cada um deles, utilizando a notação *Big O* (CHIVERS; SLEIGHTHOLME, 2015). Nela, estima-se o custo computacional de um algoritmo pelo número de entradas (argumentos). Quanto mais entradas houver, mais operações serão realizadas, e com isso maior o tempo de operação. Essa notação determina qual o comportamento limite do algoritmo, isto é, conforme aumenta-se o número de entradas como o tempo computacional vai aumentar.

É importante ressaltar que essa é uma notação qualitativa, não quantitativa; isto é, ela não vai estimar quanto tempo será utilizado pelo algoritmo, mas como que esse tempo aumenta ao aumentar o número de entradas. A mérito de exemplo, $\mathcal{O}(n^2)$ significa que ao dobrar o número de entradas n , o tempo computacional quadruplica. Além disso, constantes também não afetam, de forma que $\mathcal{O}(2n^2) = \mathcal{O}(n^2)$. Um menor custo computacional prático pois, ao se aumentar o tamanho do escopo de uso, tem-se um menor tempo de execução, aumentando a eficiência do algoritmo e possibilitando a sua aplicação com mais frequência.

Aqui, serão considerados: o número de microfones $2M$; o número de bins de frequência F ; o número de janelas temporais L ; e o número de bits N . Os outros valores que estão envolvidos são constantes e não alteram o custo computacional em termos de sua ordem.

A Tabela 3.2 mostra o custo computacional para o cálculo da matriz de coerência \mathbf{R}_{xy_q} , para os 3 modelos avaliados. A Tabela 3.3 mostra o custo computacional para o cálculo da matriz de coerência $\mathbf{R}_{y_qy_q}$.

Tabela 3.2 – Custo computacional para o cálculo da matriz de coerência \mathbf{R}_{xy_q} , para os 3 modelos avaliados.

Modelo	Big O
Clássico	$\mathcal{O}(M^2 \cdot F \cdot L)$
Proposto	$\mathcal{O}(M^2 \cdot F \cdot L \cdot 2^N)$
Híbrido	$\mathcal{O}(M^2 \cdot F \cdot L)$

Tabela 3.3 – Custo computacional para o cálculo da matriz de coerência $\mathbf{R}_{y_qy_q}$, para os 3 modelos avaliados.

Modelo	Big O
Clássico	$\mathcal{O}(M^2 \cdot F \cdot L)$
Proposto	$\mathcal{O}(M^2 \cdot F \cdot L \cdot 4^N)$
Híbrido	$\mathcal{O}(M^2 \cdot F \cdot L)$

Em todos os casos, tem-se um fator comum de M^2FL , já que as matrizes de coerência tem tamanho $2M \times 2M$, e precisam ser calculadas para cada todas as frequências F em cada uma das L janelas. Como somente o modelo proposto depende diretamente do número de bits no cálculo dos seus coeficientes (aumentar o número de bits aumenta a quantidade de itens a serem somados), ele é o único afetado por N , crescendo exponencialmente com o aumento do número de bits.

Embora a integral numérica necessária para o cálculo de $\mathbf{R}_{y_qy_q}$ (nos dois modelos desenvolvidos) possa tomar bastante tempo, esse tempo é invariante em relação ao número de bits (e às outras variáveis consideradas), e portanto constante para essa análise.

3.4.1 Otimização computacional

Buscando reduzir o tempo computacional das simulações (especialmente para os modelos proposto e híbrido), foram utilizadas algumas técnicas para aceleração da execução dos códigos. A primeira delas foi a utilização de processamento em paralelo para cálculo dos coeficientes das matrizes de coerência^(f), sendo essa válida para todos os modelos (já que o cálculo para um índice de frequência é independente do outro, por exemplo).

A segunda técnica técnica empregada foi utilizada somente no modelo proposto. Como o cálculo de κ_2 nesse modelo depende exponencialmente do número de bits (pela Equação (3.2.60)),

^(f)Esse método não reduz o custo computacional, mas reduz o tempo necessário para cada uma das simulações.

buscar maneiras de reduzir essa ordem é interessante sob a perspectiva de economia de tempo. Para tal, foi usado que κ_2 é dependente dos parâmetros^(g) ψ_l , ψ_c , ρ e N ; e com isso foi construída uma matriz K^4 em 4 dimensões, em que cada elemento é referente ao cálculo de κ_2 para um conjunto dos parâmetros.

Para o cálculo de algum κ_2 específico além dos já conhecidos da tabela utiliza-se um processo de busca sobre os índices da tabela de forma a encontrar os mais próximos dos parâmetros de κ_2 , e então um processo de interpolação para estimar o valor de $\bar{\kappa}_2$ utilizando os conhecidos da tabela.

Como o tempo de busca por um elemento de uma matriz depende somente do tamanho da matriz, e a ordem do tempo de acesso a um elemento é $\mathcal{O}(1)$, reduz-se a complexidade computacional do modelo proposto para $\mathcal{O}(M^2 \cdot F \cdot L)$, a mesma dos outros modelos. Isso não significa que eles vão tomar o mesmo tempo, mas que não ocorre um aumento desse tempo ao aumentar-se N .

A principal desvantagem da utilização da matriz é a necessidade da sua construção prévia, e portanto não há necessariamente uma economia de tempo, mas sim uma realocação do momento em que ele é utilizado. Contudo, após a construção da matriz cada nova simulação apresenta um ganho de tempo, justificando a utilização da mesma quando tem-se uma grande quantidade de simulações a serem realizadas.

Os detalhes da construção da matriz K^4 encontram-se no Apêndice E. O código para geração da tabela encontra-se no Apêndice I.1, e o código para verificação dos resultados da tabela encontra-se no Apêndice I.2.

^(g)Aqui pressupõe-se que $N_l = N_c$.

4 METODOLOGIA E SIMULAÇÕES

Neste capítulo, será apresentada a metodologia de avaliação das equações desenvolvidas no capítulo anterior, bem como as simulações computacionais realizadas e seus respectivos resultados.

4.1 BANCOS DE DADOS UTILIZADOS

Foram utilizados sinais de voz feminina (HENTER *et al.*, 2014) de 2.4s de duração. O ruído interferente é um sinal ICRA artificial (DRESCHLER *et al.*, 2001) que possui características espectrais semelhantes às da voz. Os ruídos ambiente difuso e eletrônico também são artificiais, e foram produzidos por um gerador aleatório com distribuição Gaussiana e média zero.

Em todas as simulações, a amplitude do sinal $y[n]$ foi normalizada de forma que o seu valor absoluto máximo no tempo fosse de 0.9. As proporções entre os sinais constituintes de cada $y_m[n]$ são definidas pela razão sinal-ruído em relação a cada um dos seus constituintes. Para a STFT foram utilizadas janelas temporais de 256 amostras e overlap de 50%. Os sinais foram amostrados com frequência de amostragem de 16 kHz.

4.2 AMBIENTES ACÚSTICOS

Os ambientes acústicos simulados são constituídos por uma fonte de interesse (fala), uma fonte interferente pontual e ruído difuso. As transformações decorrentes da propagação dos sinais acústicos no meio ambiente foram emuladas através da operação de convolução entre os sinais utilizados e respostas ao impulso obtidas em bancos de dados públicos. Dois tipos de respostas impulsivas foram utilizadas: ambiente anecoico e ambiente reverberante. As respostas ao impulso foram obtidas no banco de dados descrito em Kayser *et al.* (2009).

4.3 SIMULAÇÕES

Foram realizados três conjuntos de simulações associadas a diferentes ambientes acústicos. Em cada um deles foram utilizadas diferentes posições para a fonte acústica interferente e diferentes razão sinal-ruído.

A localização da cabeça do usuário do aparelho auditivo é a mesma em todas as simulações, encontra-se na posição^(a) (0 cm, 0°). De forma semelhante, a fonte acústica de interesse também está na mesma posição para todas as simulações (exceto reverberante), em (80 cm, 0°).

Foram arbitrados os valores de $V = 2$, $V = 5$ e $V = 20$ para os limites de saturação dos quantizadores utilizados. O valor $V = 20$ refere-se à condição de irrelevância/inexistência dos efeitos de saturação; para $V = 5$, os sinais são sujeitos tanto aos efeitos de quantização

^(a)Em coordenadas esféricas: distância e ângulo azimutal. Em todas as posições o ângulo polar é 0°.

quanto aos de saturação; e para $V = 2$ a principal distorção refere-se à saturação. O número de bits de quantização N utilizado nas simulações varia entre 3 e 9. Não foram testados valores inferiores já que percebeu-se que estes não apresentam relevância prática, e também não foram testados valores superiores devido ao custo computacional, além de que com 9 bits os resultados já haviam alcançado o desempenho pleno do processo de redução de ruído.

Os valores de SNR de entrada (ou iSNR) das tabelas são os observados nos sinais de referência de cada aparelho após a geração dos sinais de entrada, mas antes de qualquer processamento (incluindo a quantização).

4.3.1 Simulação I

A Tabela 4.1 apresenta as diferentes posições da fonte interferente em cada uma das situações da Simulação I, em que: $iSNR_{u,F}$ é a SNR de entrada do ruído interferente^(b) $u(\lambda,k)$ no microfone de referência do FC, $iSNR_{u,C}$ é a iSNR de $u(\lambda,k)$ no microfone de referência do CD, e $iSNR_u$ é a média entre os dois; $iSNR_r$ é a iSNR do ruído difuso $r(\lambda,k)$; e $iSNR_f$ é a iSNR do ruído eletrônico $f(\lambda,k)$. Como o ruído difuso é branco, $iSNR_{r,F} = iSNR_{r,C} = iSNR_r$, e o mesmo vale para o ruído eletrônico.

Tabela 4.1 – Diferentes situações simuladas para a Simulação I.

Situação	Posição de u	$iSNR_{u,F}$	$iSNR_{u,C}$	$iSNR_u$	$iSNR_r$	$iSNR_f$
I.a)	(300 cm, -60°)	-2,54 dB	1,39 dB	-0,58 dB	30,22 dB	29,13 dB
I.b)	(300 cm, 60°)	0,73 dB	-1,88 dB	-0,58 dB	30,22 dB	29,13 dB
I.c)	(300 cm, -30°)	-2,31 dB	0,91 dB	-0,70 dB	30,22 dB	29,13 dB
I.d)	(300 cm, 30°)	0,25 dB	-1,65 dB	-0,70 dB	30,22 dB	29,13 dB
I.e)	(80 cm, -60°)	-2,94 dB	2,29 dB	-0,33 dB	30,22 dB	29,13 dB
I.f)	(80 cm, 60°)	1,63 dB	-2,28 dB	-0,33 dB	30,22 dB	29,13 dB

Cenário: Anecoico

Fonte: Autoria própria.

O objetivo dessa simulação é comparar os modelos desenvolvidos e o modelo clássico e verificar os seus desempenhos em relação à simulação numérica do problema. Os modelos teóricos também serão comparados com o resultado obtido ao quantizar efetivamente os sinais que seriam provenientes do CD, esse sendo denominado de “resultado esperado”. Para as métricas de SNQR, PESQ e STOI serão apresentados também os valores originais dos sinais contaminados, de forma a poder comparar os ganhos de desempenho após a aplicação do processo de redução de ruído.

Nessa simulação serão analisados quatro aspectos:

^(b)Comumente, denota-se a SNR da fonte interferente como Razão Interferência-Ruído (SIR) (do inglês, *Signal-to-Interference Ratio*), porém por notação preferiu-se deixá-la como SNR.

- O erro absoluto médio entre os elementos das matrizes \mathbf{R}_{xy_q} e $\mathbf{R}_{y_qy_q}$, obtidas através dos diferentes modelos teóricos (modelo clássico, modelo proposto e modelo híbrido) e o resultado esperado;
- A SNR de saída (oSNR) dos sinais estimados obtidos ao utilizar cada um dos modelos teóricos, assim como a oSNR do resultado esperado;
- A PESQ dos sinais estimados obtidos ao utilizar cada um dos modelos teóricos, assim como a PESQ do resultado esperado;
- A STOI dos sinais estimados obtidos ao utilizar cada um dos modelos teóricos, assim como a STOI do resultado esperado.

4.3.2 Simulação II

A Tabela 4.2 apresenta: as diferentes posições da fonte interferente em cada uma das situações da Simulação II; a iSNR do ruído interferente para cada aparelho, bem como a média; e as iSNR dos ruídos difuso e eletrônico. Os objetivos da simulação nessas situações são os mesmos que para a Simulação I. Aqui serão apresentados somente os resultados para SNQR, PESQ e STOI.

Tabela 4.2 – Diferentes situações simuladas para a Simulação II.

Situação	Posição de u	$iSNR_{u,F}$	$iSNR_{u,C}$	\overline{iSNR}_u	\overline{iSNR}_r	\overline{iSNR}_f
II.a)	(300 cm, -60°)	2,46 dB	6,39 dB	4,42 dB	30,22 dB	29,13 dB
II.b)	(300 cm, 60°)	5,73 dB	3,12 dB	4,42 dB	30,22 dB	29,13 dB
II.c)	(300 cm, -60°)	-7,54 dB	-3,61 dB	-5,58 dB	30,22 dB	29,13 dB
II.d)	(300 cm, 60°)	-4,27 dB	-6,88 dB	-5,58 dB	30,22 dB	29,13 dB
II.e)	(300 cm, -60°)	-12,54 dB	-8,61 dB	-10,58 dB	30,22 dB	29,13 dB
II.f)	(300 cm, 60°)	-9,27 dB	-11,88 dB	-10,58 dB	30,22 dB	29,13 dB

Cenário: Anecoico

Fonte: Autoria própria.

4.3.3 Simulação III

A Tabela 4.3 apresenta as diferentes posições da fonte interferente em cada uma das simulações, bem como as iSNR dos ruídos interferente (para ambos os aparelhos, e a média), difuso e eletrônico. Para melhor representar um ambiente real, foi utilizado um ambiente reverberante. Em função do banco de dados utilizado, todas as fontes foram posicionadas a 100 cm de distância, inclusive a fonte desejada que aqui se encontra em (100 cm, 0°).

Nessa simulação somente os resultados para PESQ e STOI serão avaliados, já que essas são as métricas de maior interesse prático.

Tabela 4.3 – Diferentes situações simuladas para a Simulação III.

Situação	Posição de u	$iSNR_{u,F}$	$iSNR_{u,C}$	\overline{iSNR}_u	\overline{iSNR}_r	\overline{iSNR}_f
III.a)	(100 cm, -60°)	1,29 dB	6,73 dB	4,01 dB	28,06 dB	29,13 dB
III.b)	(100 cm, 60°)	5,56 dB	3,13 dB	4,35 dB	28,06 dB	29,13 dB

Cenário: Reverberante

Fonte: Autoria própria.

5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Neste capítulo são apresentados, comparados e discutidos os resultados obtidos para os três modelos apresentados (clássico, proposto e híbrido), conforme as simulações estabelecidas na Seção 4.3. Os resultados para os 3 modelos serão comparados com o resultado esperado, obtido ao quantizar efetivamente os sinais referentes ao CD antes do processamento no FC.

Os resultados para cada uma das métricas avaliadas serão apresentados e discutidos por métrica. Serão apresentados os resultados para a orelha associada ao FC, já que notou-se que eles são muito próximos (na saída) dos resultados obtidos para a orelha associada ao CD.

Em todos os gráficos, a linha contínua em verde com marcador \square representa o resultado esperado; a linha pontilhada em laranja com marcador \triangle representa o modelo clássico; a linha tracejada em azul com marcador \times representa o modelo proposto; e a linha com padrão traço-ponto em marrom com marcador \circ o modelo híbrido. Quando apresentada, a linha preta contínua representa a métrica para o sinal (contaminado) não processado. Em cada figura o eixo das abscissas é o número de bits, e o eixo das ordenadas é a métrica que está sendo avaliada; e o índice da subfigura indica a situação dentro da simulação dada.

5.1 ERRO ABSOLUTO MÉDIO

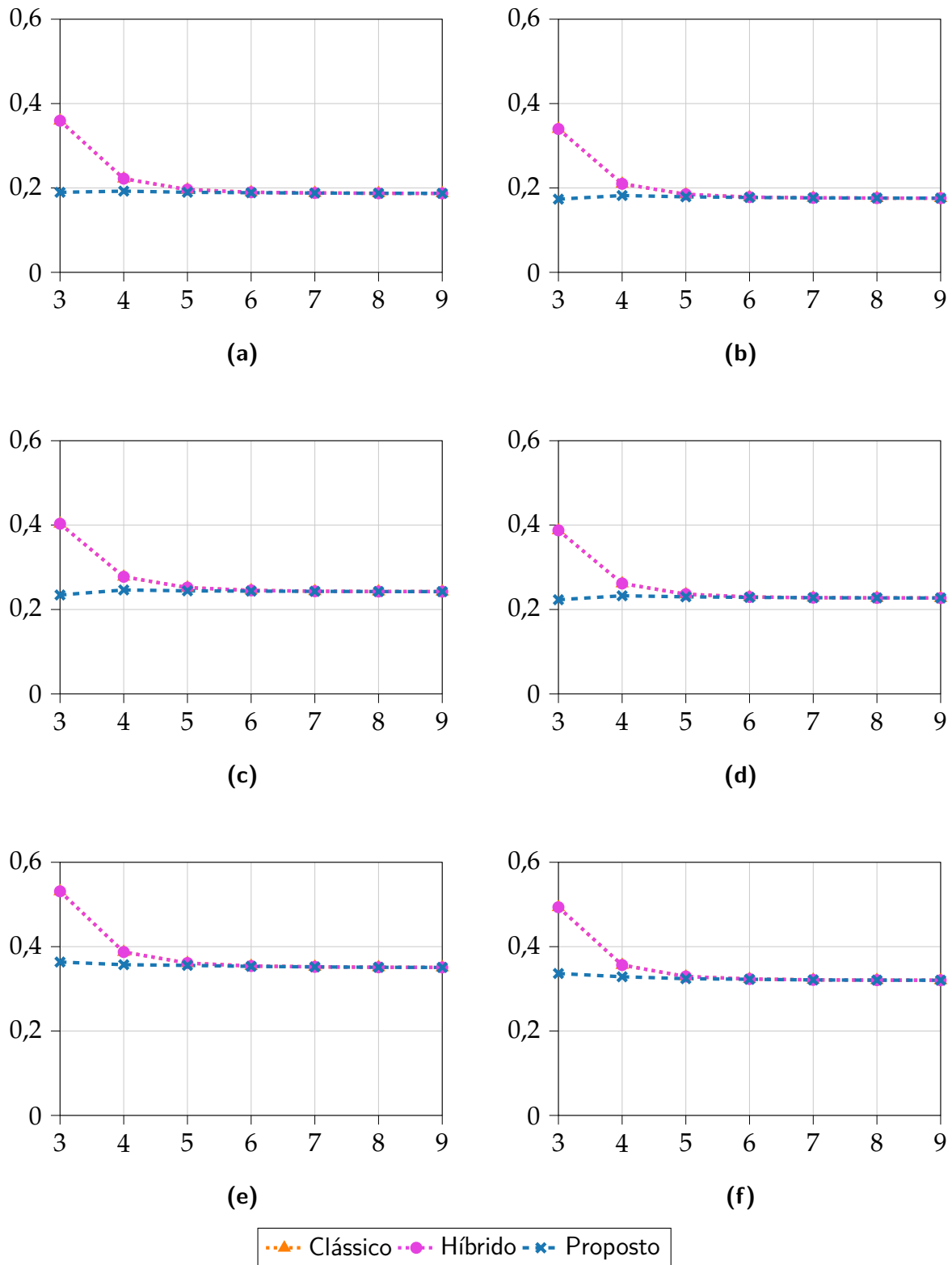
Nesta seção é apresentado o MAE (Seção 2.7.1) a matriz de coerência $\mathbf{R}_{\hat{y}_q \hat{y}_q}^{(a)}$ obtida por simulação, e a calculada através de cada um dos três processos de modelagem abordados por este trabalho. As Figuras 5.1 até 5.3 apresentam os gráficos para o MAE para as diferentes situações, para os diferentes níveis de tensão analisados. Esse resultado foi obtido apenas para a Simulação I (Seção 4.3.1).

Em todas as situações, o erro do modelo proposto é sempre menor ou igual ao erro do modelo clássico e do modelo híbrido. Para $V = 20$ o erro do modelo híbrido acompanha o erro do modelo clássico, aproximando-se do erro do modelo proposto com a diminuição do valor de V . Esse comportamento é explicado pela construção do modelo híbrido, que une a quantização do modelo clássico com a saturação do modelo proposto. Conforme diminui-se V o erro do modelo clássico aumenta em relação ao proposto, decorrendo do fato de o modelo clássico não considerar os efeitos da saturação. Para $V = 20$ e N pequeno, o erro do modelo clássico é muito maior que o do proposto; a razão disso é que, nessa condição, os requisitos para funcionamento do modelo clássico não são respeitados (conforme a Seção 2.6.4).

Tem-se também que o erro obtido pelo modelo proposto é praticamente independente do número de bits. Portanto, é possível atribuir esse erro à aproximação da distribuição do sinal de voz por uma distribuição Gaussiana (LOIZOU, 2013), embora saiba-se que sua distribuição se aproxima mais de uma distribuição Laplaciana (GAZOR; ZHANG, W., 2003).

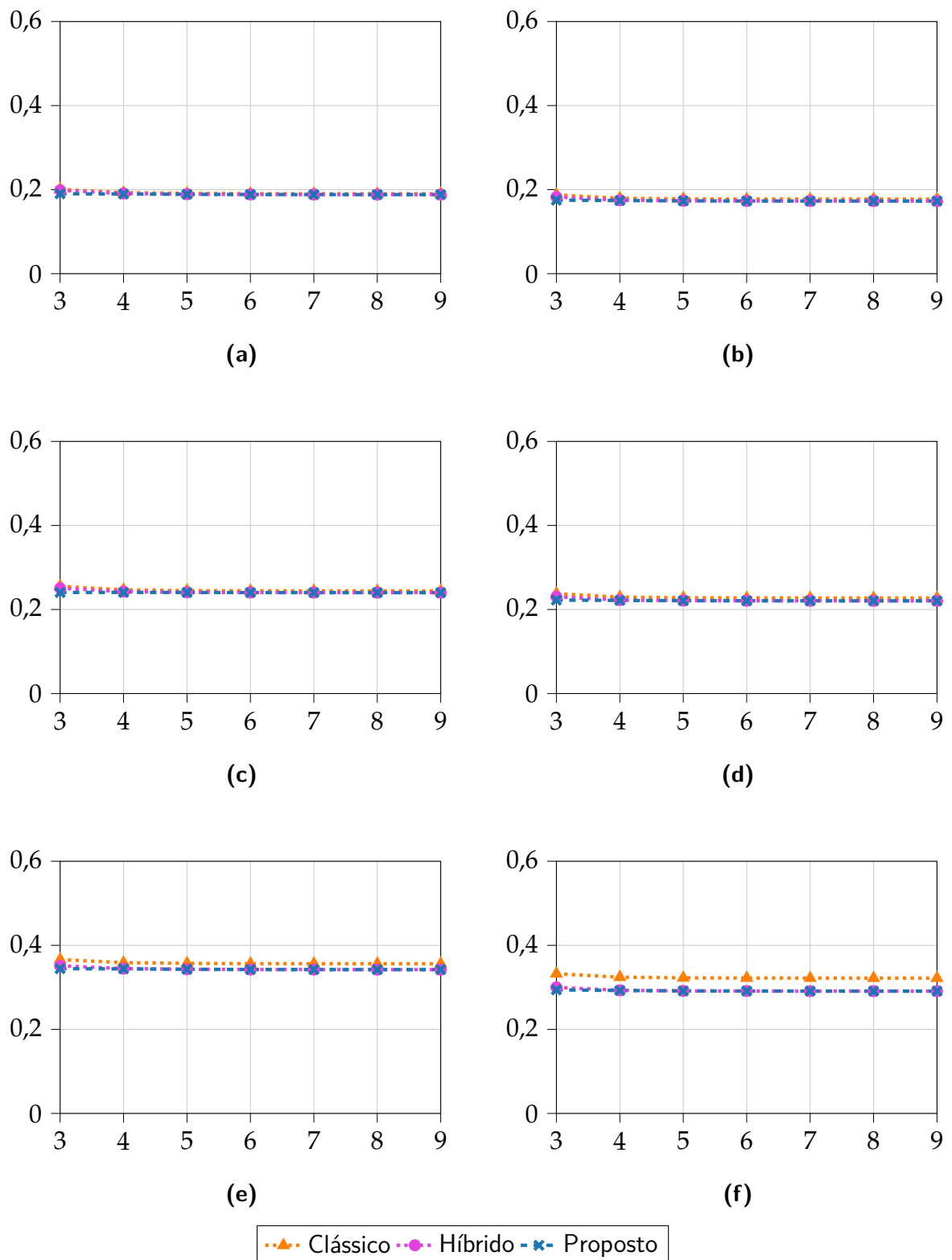
^(a)Não foi apresentado o MAE para as matrizes de coerência $\mathbf{R}_{x\hat{y}_q}$ por o resultado ser muito semelhante ao apresentado aqui.

Figura 5.1 – MAE para as diferentes situações da Simulação I, com $V = 20$. Abscissa: número de bits; Ordenada: MAE. As condições de simulação constam na Tabela 4.1.



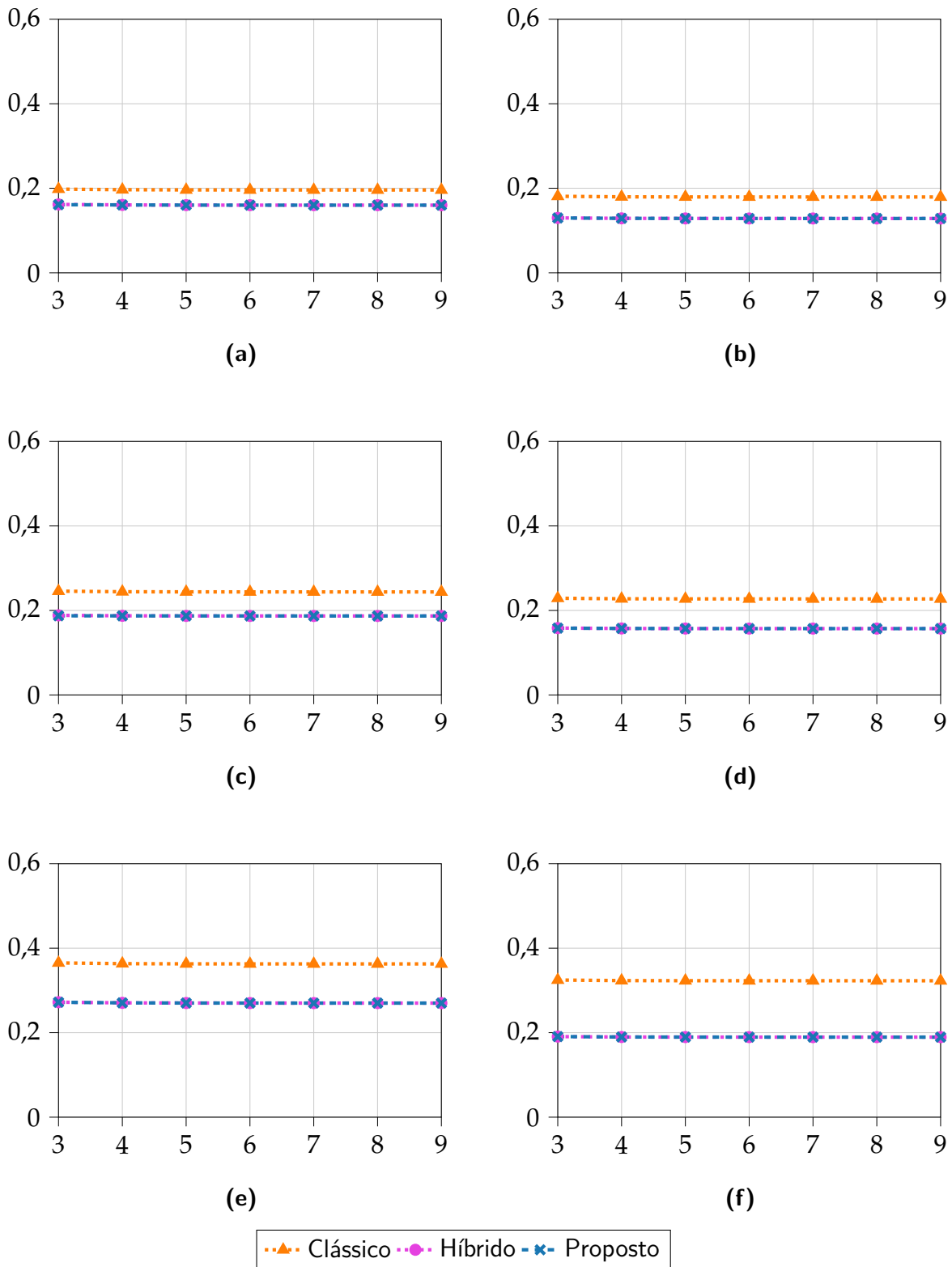
Fonte: Autoria própria.

Figura 5.2 – MAE para as diferentes situações da Simulação I, com $V = 5$. Abscissa: número de bits; Ordenada: MAE. As condições de simulação constam na Tabela 4.1.



Fonte: Autoria própria.

Figura 5.3 – MAE para as diferentes situações da Simulação I, com $V = 2$. Abscissa: número de bits; Ordenada: MAE. As condições de simulação constam na Tabela 4.1.



Fonte: Autoria própria.

5.2 RAZÃO SINAL-RUÍDO-E-QUANTIZAÇÃO

Esta seção tem como objetivo apresentar os resultados da métrica SNQR obtidos a partir da utilização das três formas de modelagem abordadas neste trabalho. As Figuras 5.4 até 5.9 apresentam os gráficos dos resultados para as Simulações I e II, conforme estabelecido na Seção 4.3.

De maneira geral, o modelo proposto apresenta um desempenho igual ou superior ao do modelo clássico em termos de SNQR, para todas as situações observadas; isto é, independentemente da posição ou SNR da fonte interferente, o modelo proposto apresenta um desempenho melhor em relação ao clássico. Da mesma forma observada para o critério MAE, o modelo híbrido acompanha o modelo clássico para o caso de $V = 20$, e aproxima-se do modelo proposto à medida que V diminui.

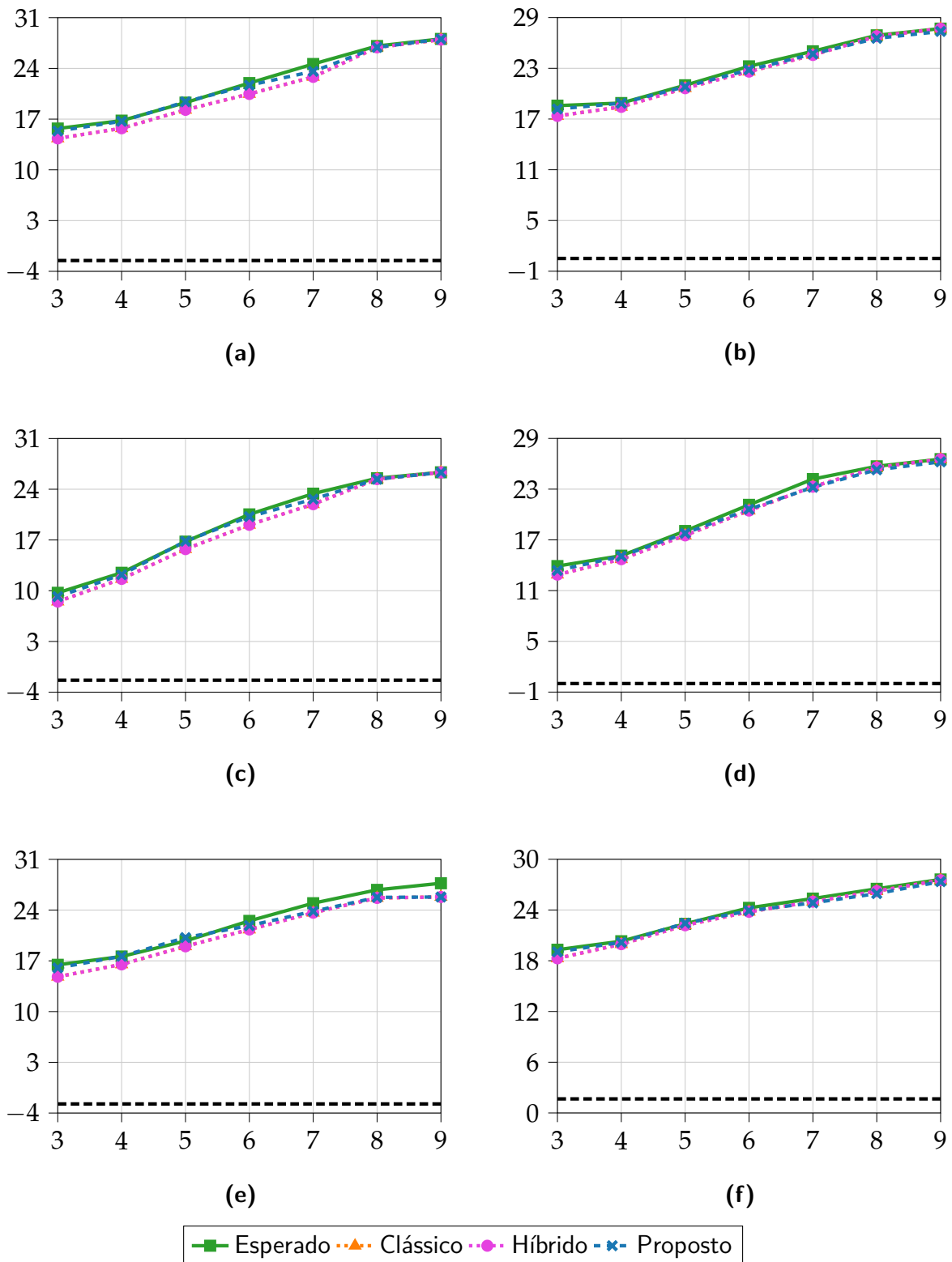
Para os casos de $V = 20$ e $V = 2$, tem-se que o modelo proposto (e junto dele o modelo híbrido) resulta em uma estimativa muito próxima da simulação, apresentando erros de no máximo 1 dB, enquanto que para o caso de $V = 5$ esse erro é maior (chegando em algumas simulações a 4 dB), porém ainda menor que o do modelo clássico. Isso se dá pelo fato de que, de maneira geral, para o caso de $V = 20$ os efeitos da quantização são mais relevantes, de forma que a saturação torna-se praticamente desprezível; para $V = 2$, os efeitos da quantização são muito pequenos em relação aos da saturação; e para $V = 5$, tem-se que ambos são relevantes em proporções parecidas.

Para $V = 20$ ocorre uma grande variação de SNQR ao aumentar o número de bits, enquanto que para $V = 2$ tem-se uma variação mínima, indicando que a redução de ruído para esse caso é pouco dependente da quantização. Para $V = 5$, tem-se um comportamento intermediário entre os dois casos citados.

Analisando o desempenho geral dos modelos, nota-se que a redução da tensão de saturação implica em uma queda no desempenho do processo de redução de ruído, em função da perda de informação associada à parcela de alta amplitude do sinal.

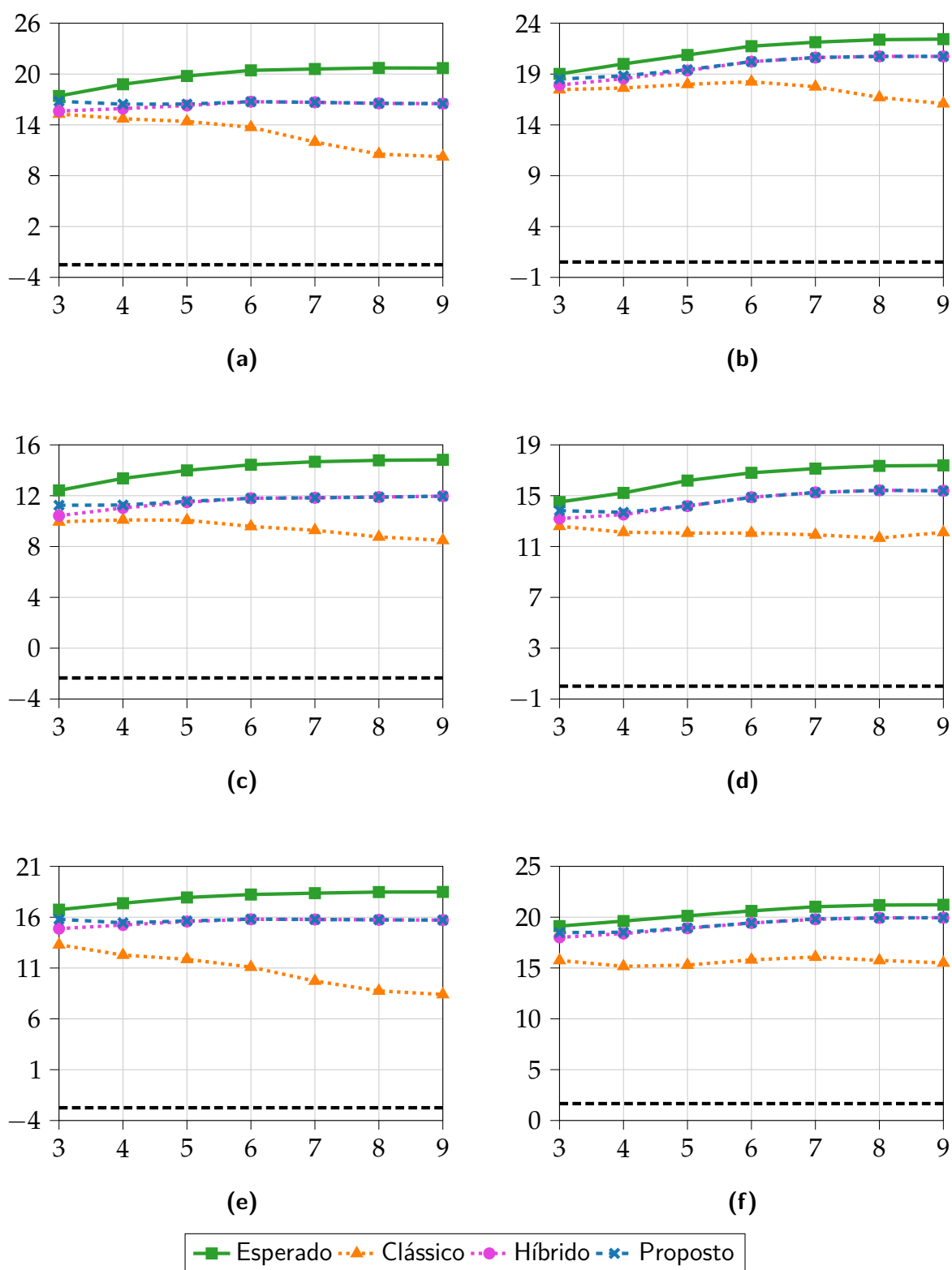
Ao comparar os gráficos obtidos nota-se que quando a fonte interferente está posicionada no lado esquerdo (próximo à orelha associada ao FC) o desempenho do processo de redução de ruído é inferior a quando ela está no lado direito (próximo à orelha associada ao CD). A razão disso é que, quando a interferência está do lado do FC, ambos os aparelhos sofrem alguma distorção (FC pela interferência mais presente, CD pela quantização); quando ela está do lado do CD, os sinais no lado do FC não é distorcido pela quantização, e possui menor distorção do processo de contaminação em relação aos sinais do CD.

Figura 5.4 – SNQR para as diferentes situações da Simulação I, com $V = 20$. Abscissa: número de bits; Ordenada: SNQR. As condições de simulação constam na Tabela 4.1.



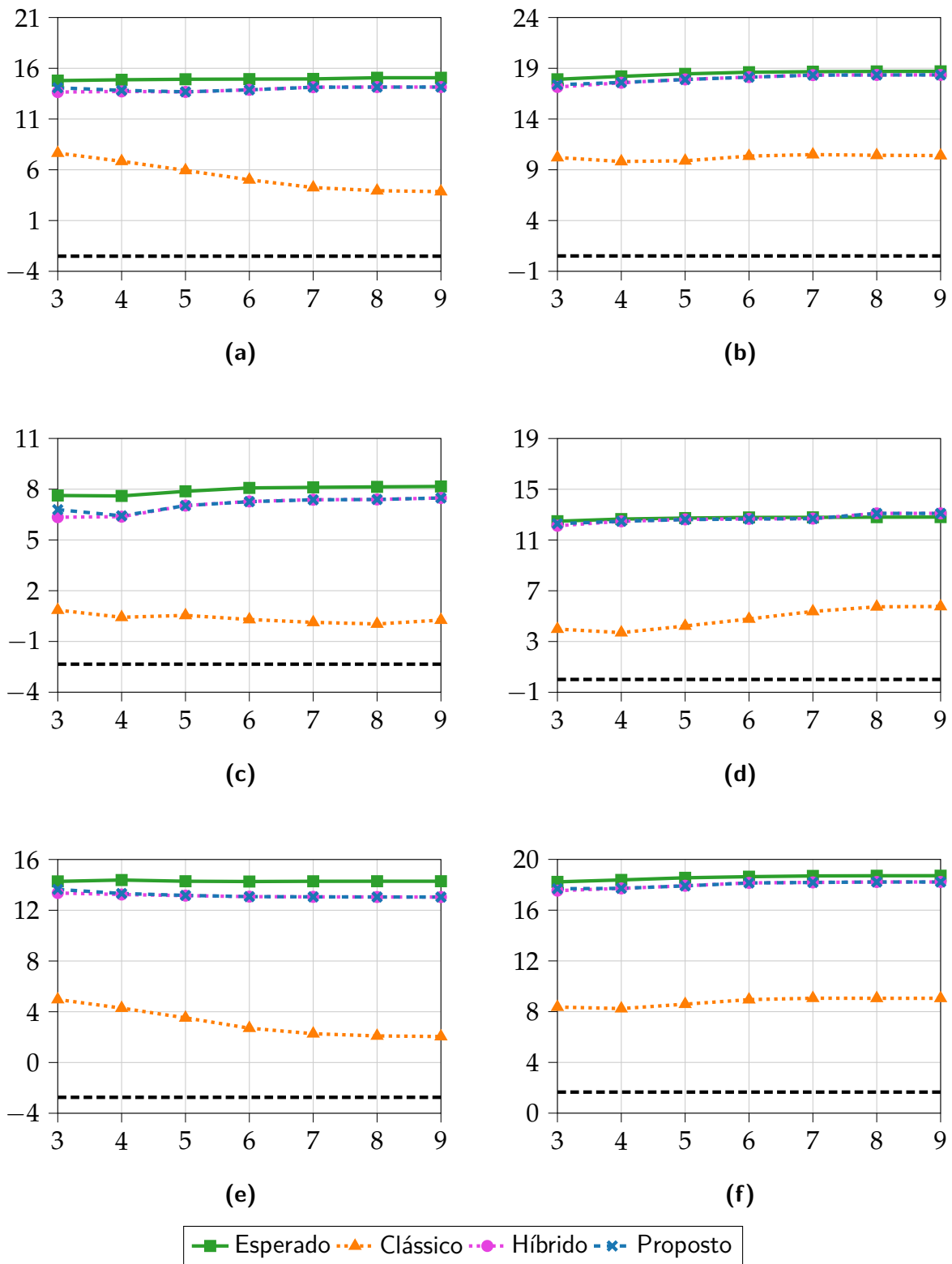
Fonte: Autoria própria.

Figura 5.5 – SNQR para as diferentes situações da Simulação I, com $V = 5$. Abscissa: número de bits; Ordenada: SNQR. As condições de simulação constam na Tabela 4.1.



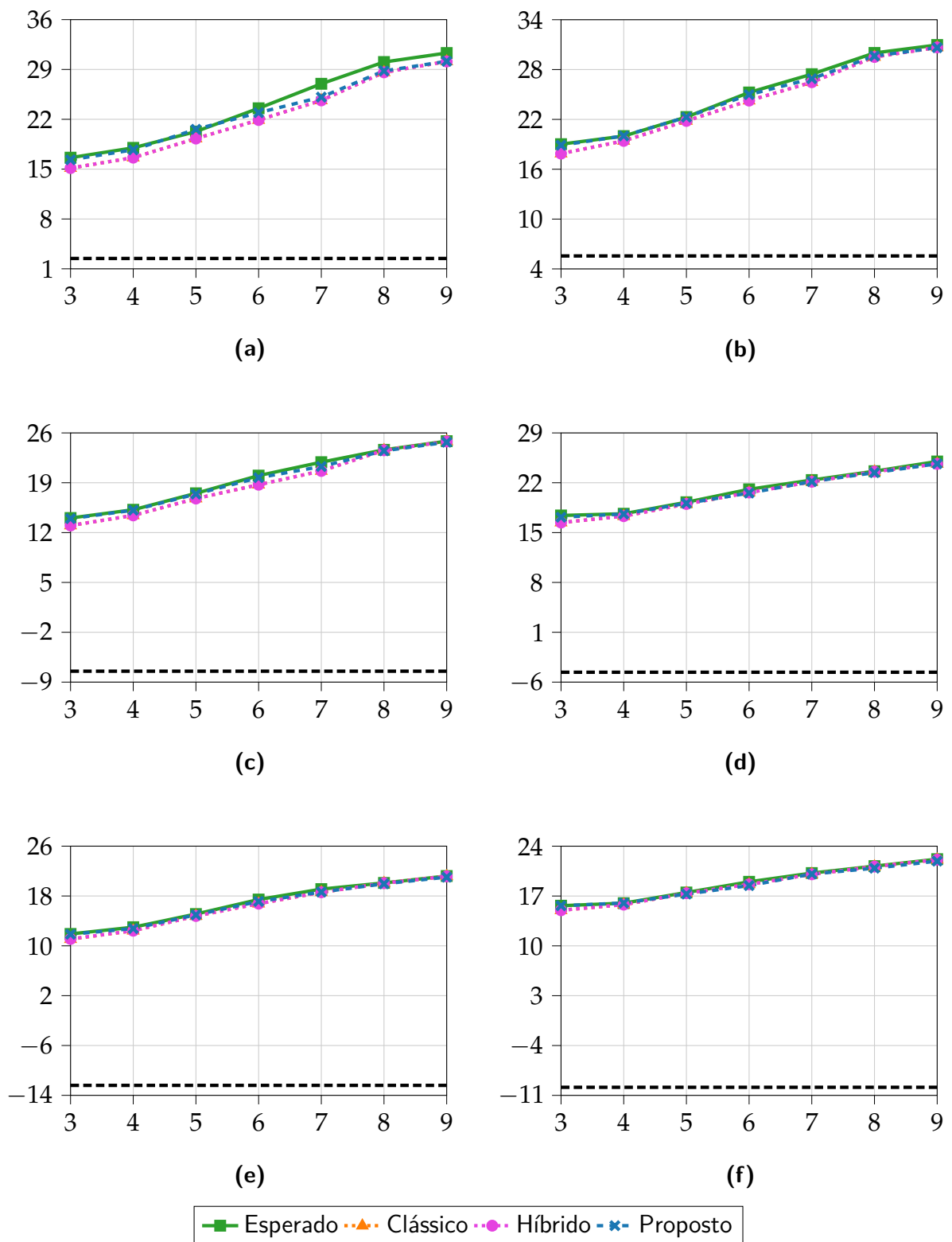
Fonte: Autoria própria.

Figura 5.6 – SNQR para as diferentes situações da Simulação I, com $V = 2$. Abscissa: número de bits; Ordenada: SNQR. As condições de simulação constam na Tabela 4.1.



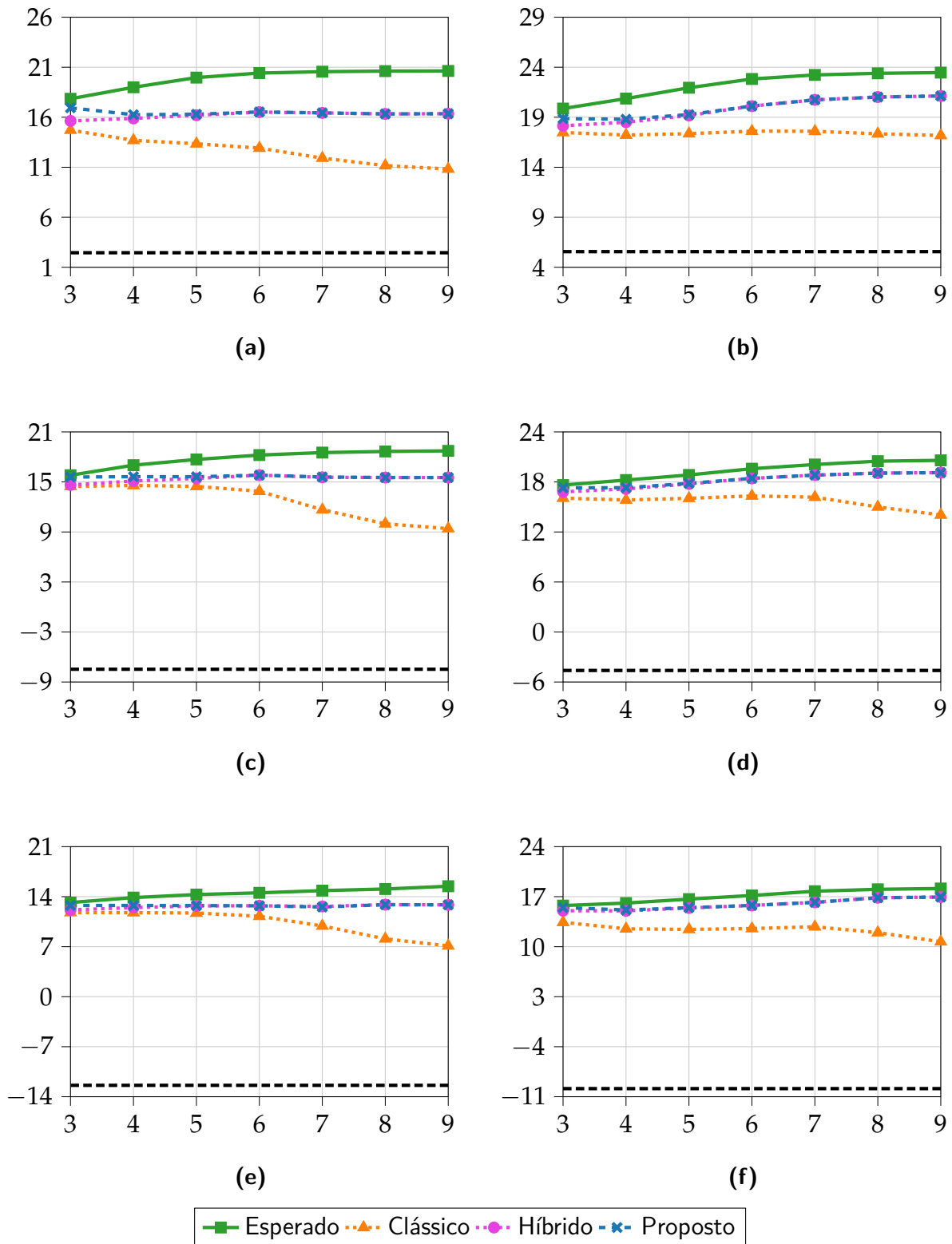
Fonte: Autoria própria.

Figura 5.7 – SNQR para as diferentes situações da Simulação II, com $V = 20$. Abscissa: número de bits; Ordenada: SNQR. As condições de simulação constam na Tabela 4.2.



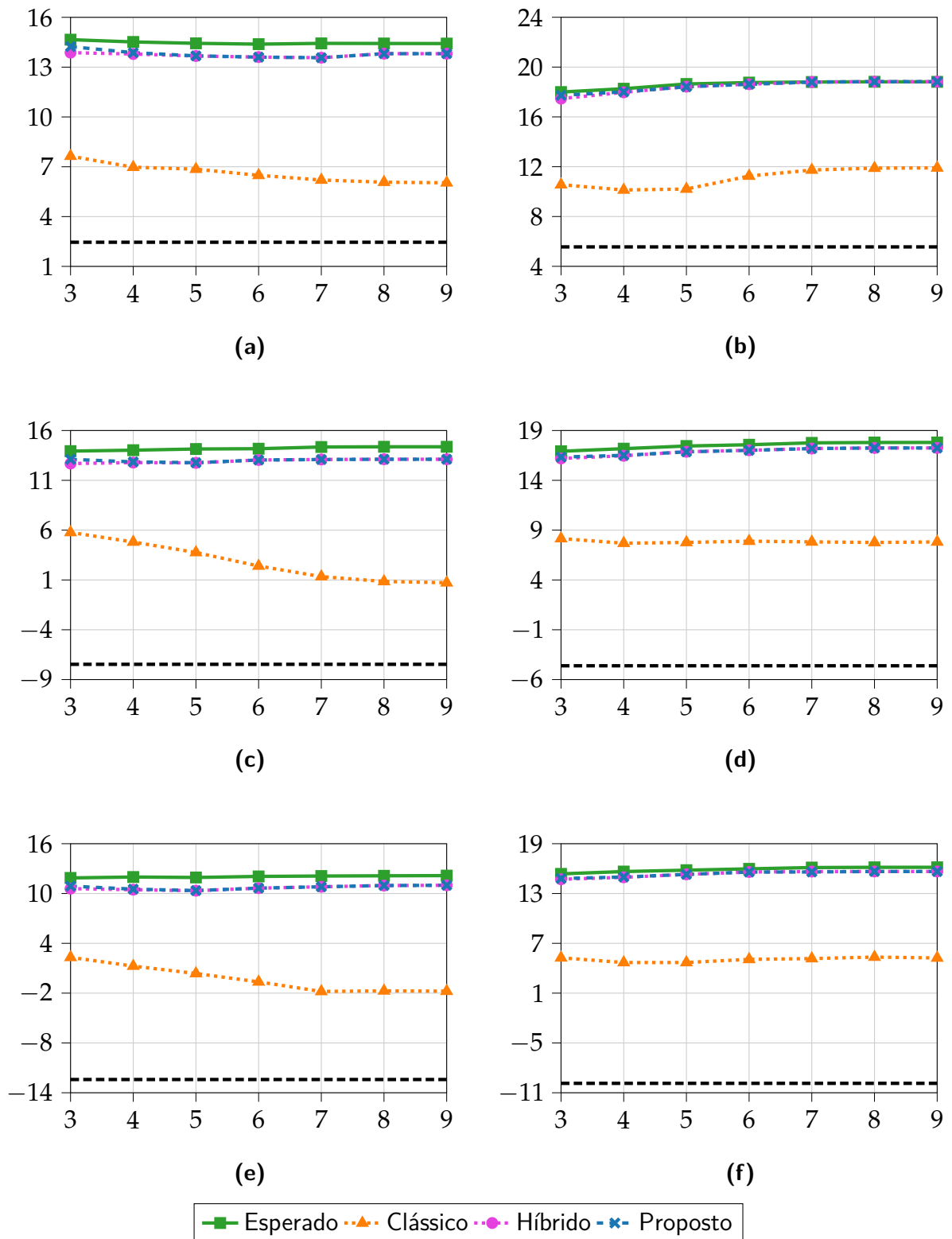
Fonte: Autoria própria.

Figura 5.8 – SNQR para as diferentes situações da Simulação II, com $V = 5$. Abscissa: número de bits; Ordenada: SNQR. As condições de simulação constam na Tabela 4.2.



Fonte: Autoria própria.

Figura 5.9 – SNQR para as diferentes situações da Simulação II, com $V = 2$. Abscissa: número de bits; Ordenada: SNQR. As condições de simulação constam na Tabela 4.2.



Fonte: Autoria própria.

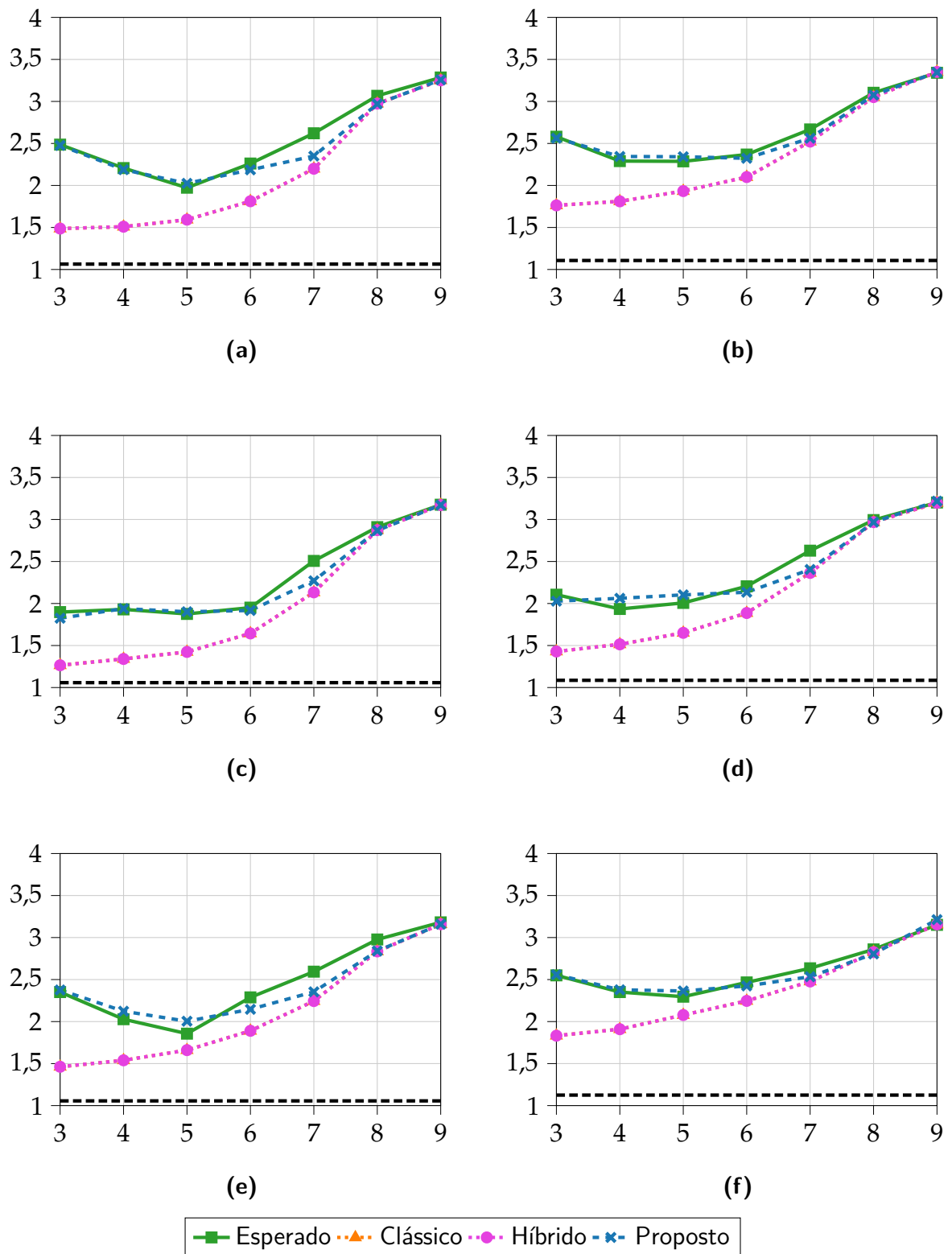
5.3 QUALIDADE

As Figuras 5.10 até 5.18 apresentam os resultados para a qualidade, através da PESQ, para os cenários acústicos das Simulações I, II e III (Seções (4.3.1) até (4.3.3)). De forma semelhante aos resultados da SNQR, os obtidos através do PESQ indicam que o modelo proposto produz estimativas substancialmente mais acuradas que o modelo clássico, especialmente para pequeno número de bits. Isso é válido mesmo para $V = 20$, caso em que o modelo clássico possui maior adequação.

Analisando o desempenho do processo de redução de ruído para as diferentes situações, tem-se um comportamento semelhante ao observado na SNQR, em que uma redução na tensão de saturação implica em uma queda de desempenho (embora aqui pouco afete o desempenho dos modelos desenvolvidos). A variação da posição da fonte interferente afeta pouco a qualidade, enquanto que a SNR de entrada impacta de maneira significativa. Além disso, nota-se uma melhora significativa na qualidade de saída em relação à qualidade na entrada, essa estando sempre abaixo de 1,5.

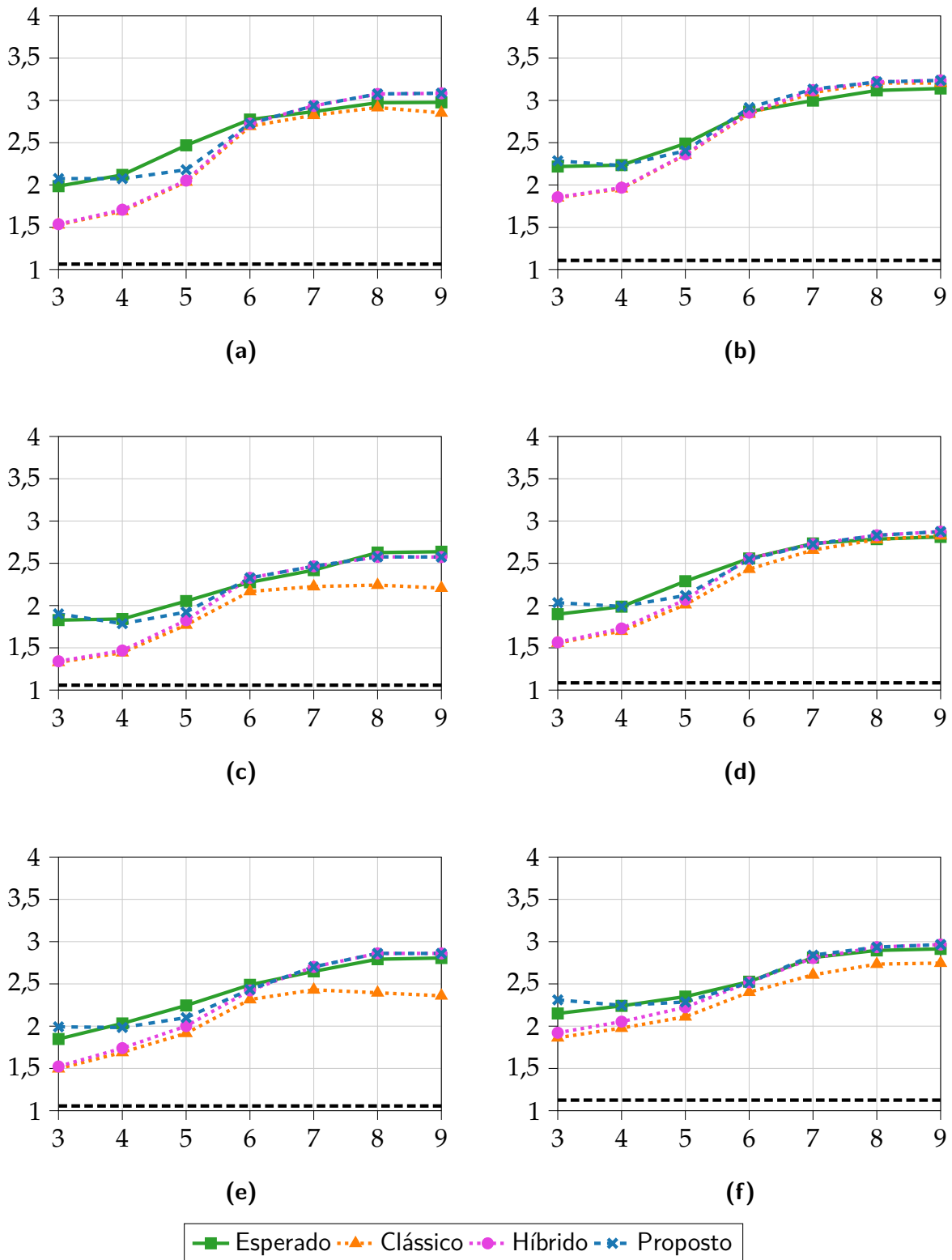
Também verifica-se que um ambiente reverberante (Figuras 5.16 até 5.18) degrada significativamente a qualidade do sinal de saída para todas as situações, em que um aumento do número de bits e/ou da tensão de saturação não implicam em um aumento relevante na qualidade do sinal de saída.

Figura 5.10 – PESQ para as diferentes situações da Simulação I, com $V = 20$. Abscissa: número de bits; Ordenada: PESQ. As condições de simulação constam na Tabela 4.1.



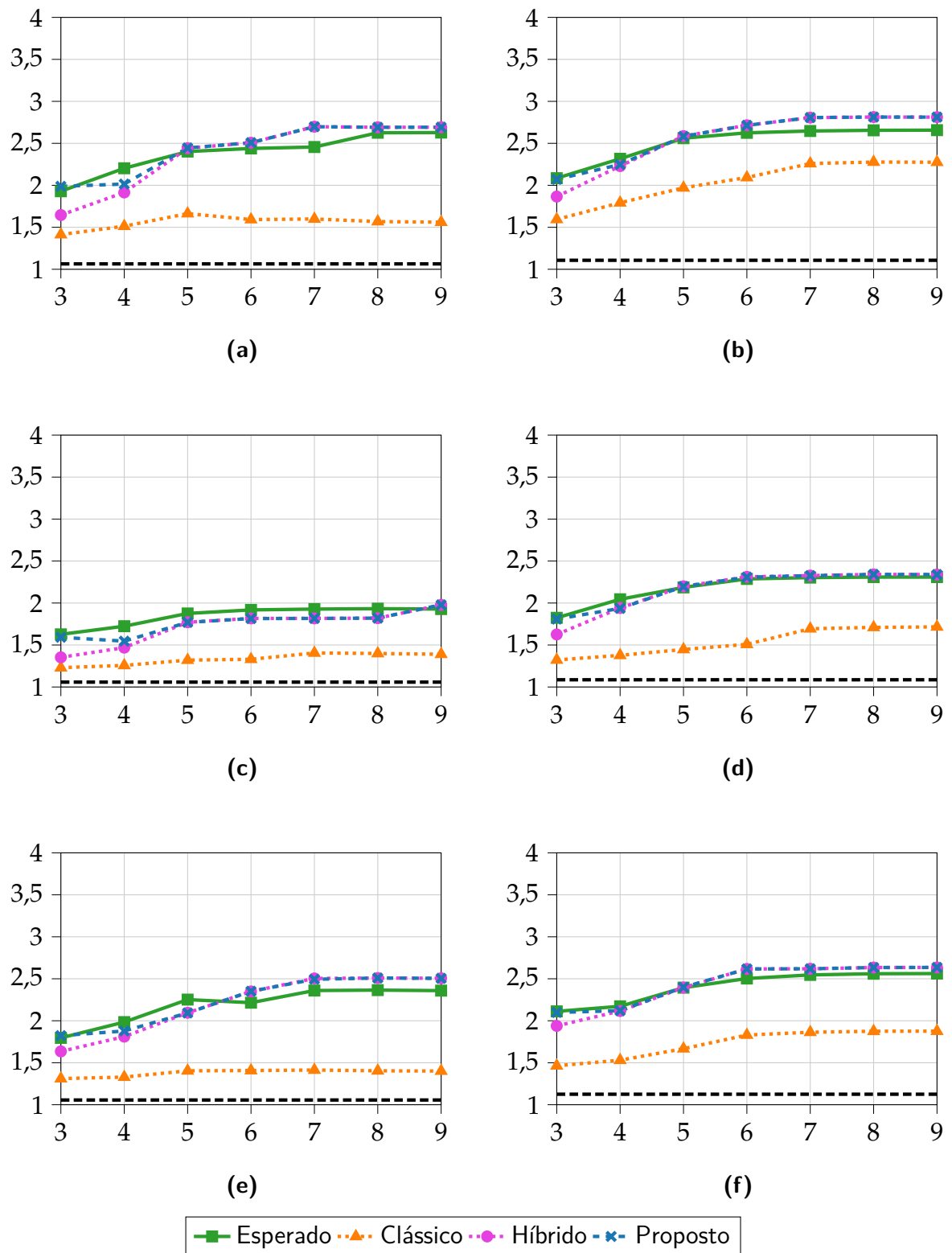
Fonte: Autoria própria.

Figura 5.11 – PESQ para as diferentes situações da Simulação I, com $V = 5$. Abscissa: número de bits; Ordenada: PESQ. As condições de simulação constam na Tabela 4.1.



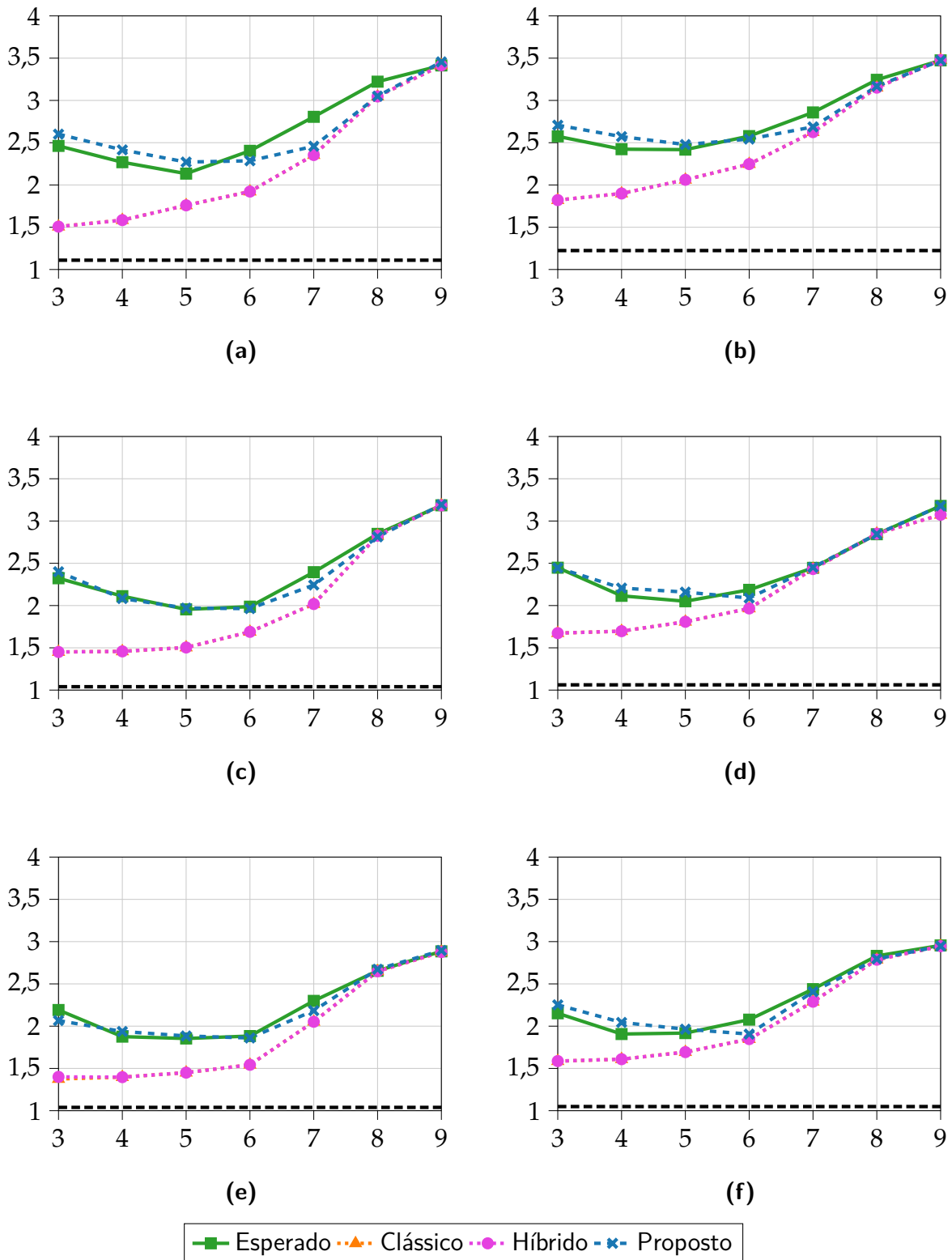
Fonte: Autoria própria.

Figura 5.12 – PESQ para as diferentes situações da Simulação I, com $V = 2$. Abscissa: número de bits; Ordenada: PESQ. As condições de simulação constam na Tabela 4.1.



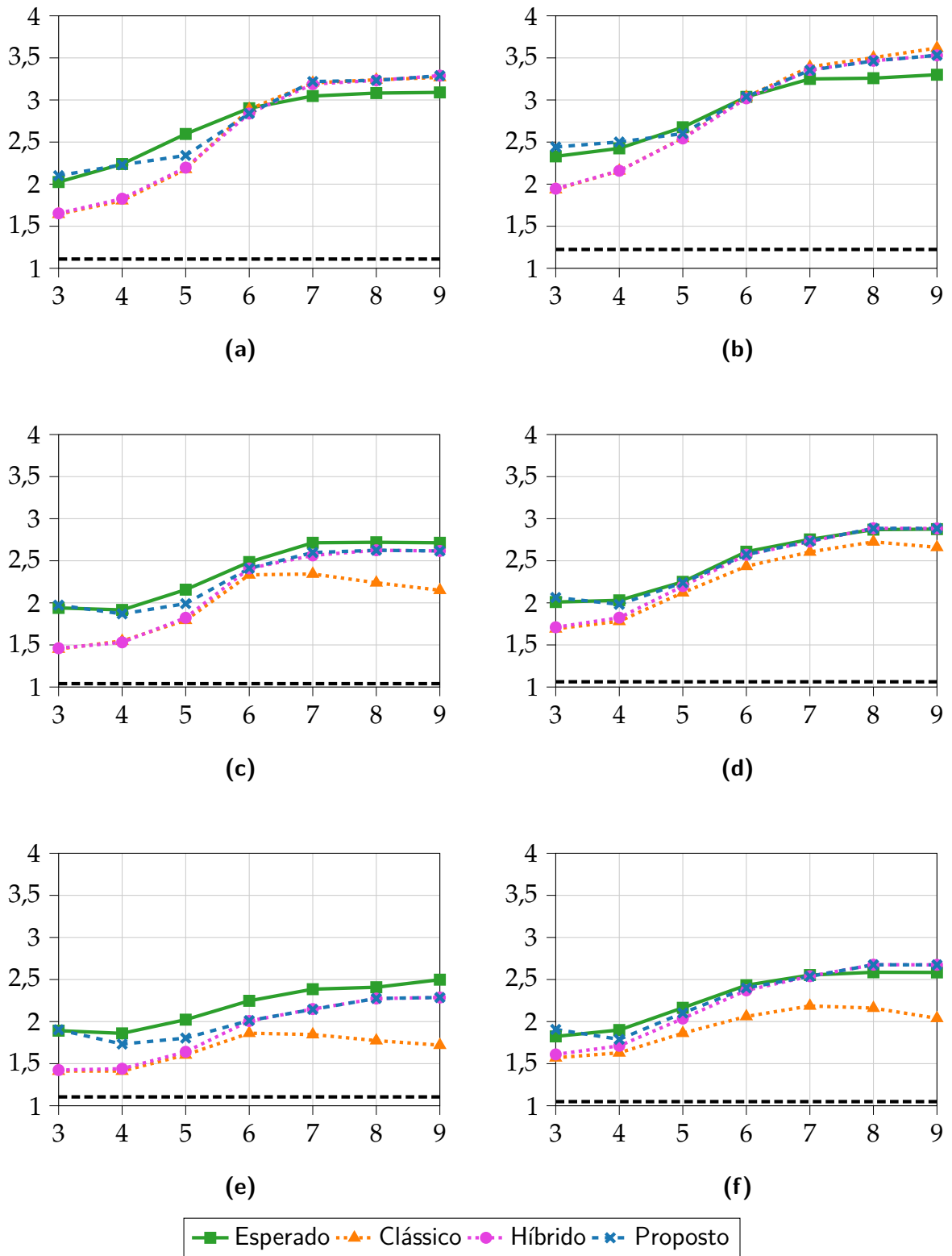
Fonte: Autoria própria.

Figura 5.13 – PESQ para as diferentes situações da Simulação II, com $V = 20$. Abscissa: número de bits; Ordenada: PESQ. As condições de simulação constam na Tabela 4.2.



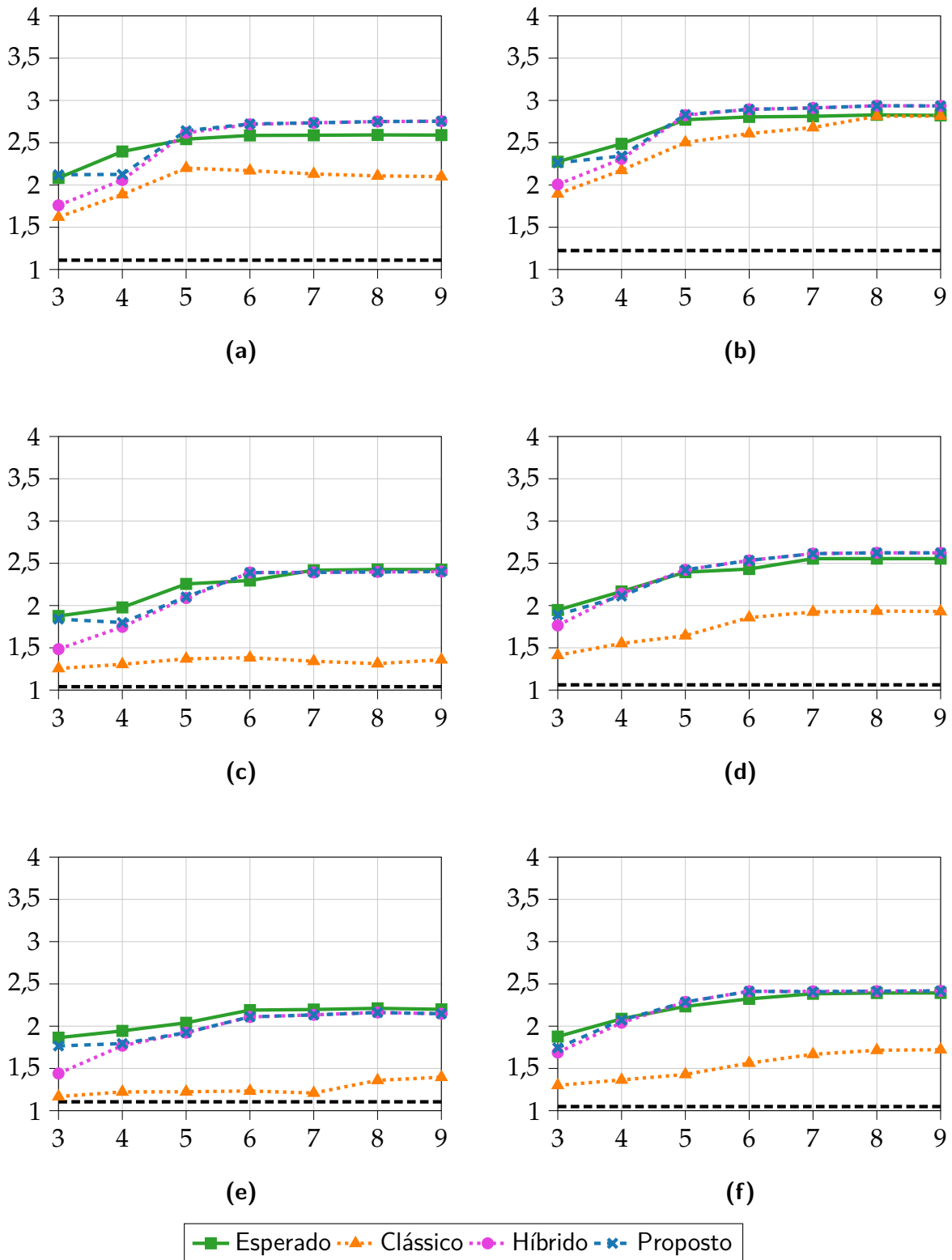
Fonte: Autoria própria.

Figura 5.14 – PESQ para as diferentes situações da Simulação II, com $V = 5$. Abscissa: número de bits; Ordenada: PESQ. As condições de simulação constam na Tabela 4.2.



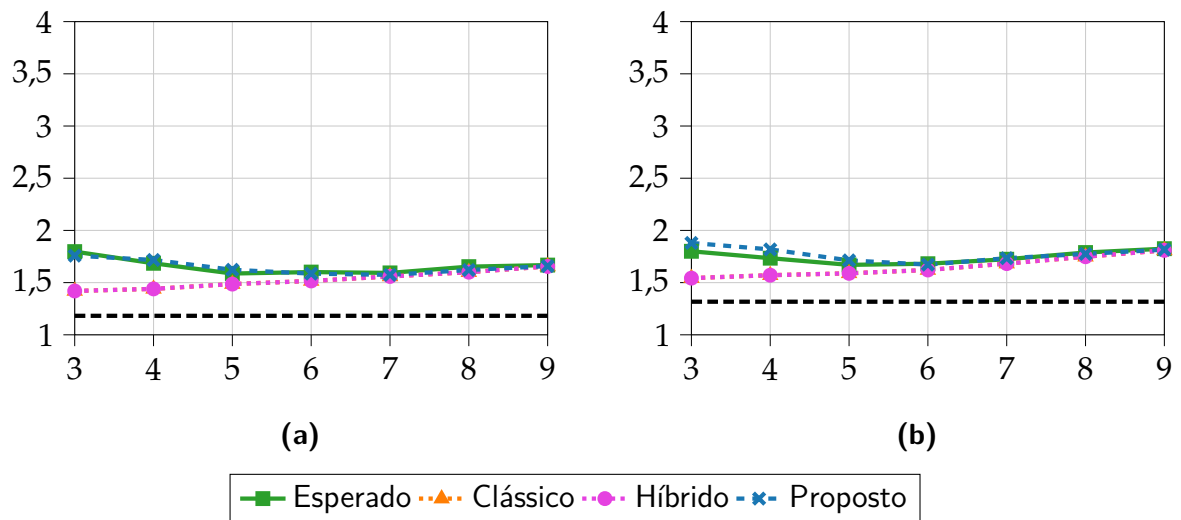
Fonte: Autoria própria.

Figura 5.15 – PESQ para as diferentes situações da Simulação II, com $V = 2$. Abscissa: número de bits; Ordenada: PESQ. As condições de simulação constam na Tabela 4.2.



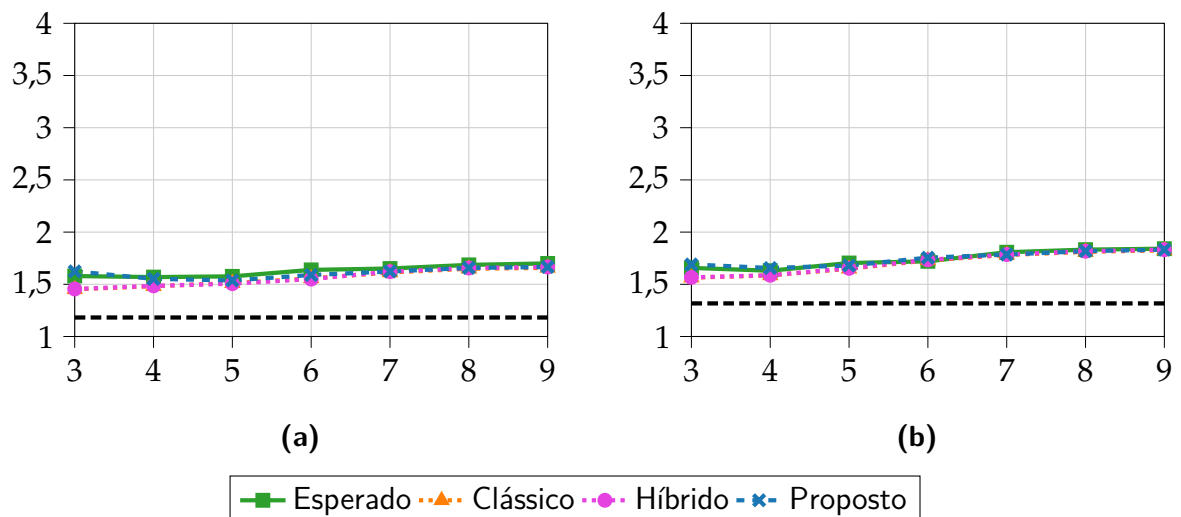
Fonte: Autoria própria.

Figura 5.16 – PESQ para as diferentes situações da Simulação III, com $V = 20$. Abscissa: número de bits; Ordenada: PESQ. As condições de simulação constam na Tabela 4.3.



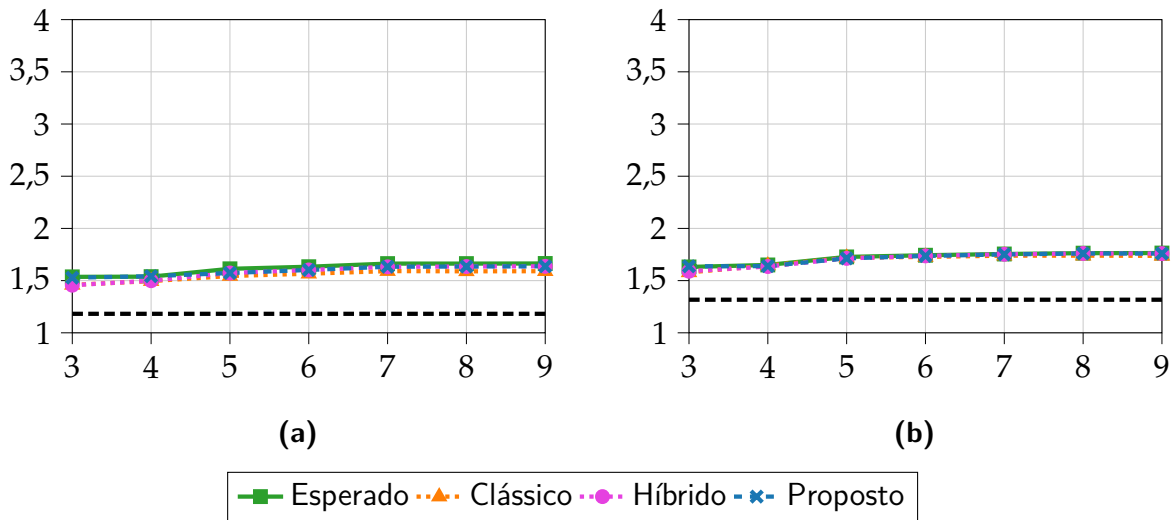
Fonte: Autoria própria.

Figura 5.17 – PESQ para as diferentes situações da Simulação III, com $V = 5$. Abscissa: número de bits; Ordenada: PESQ. As condições de simulação constam na Tabela 4.3.



Fonte: Autoria própria.

Figura 5.18 – PESQ para as diferentes situações da Simulação III, com $V = 2$. Abscissa: número de bits; Ordenada: PESQ. As condições de simulação constam na Tabela 4.3.



Fonte: Autoria própria.

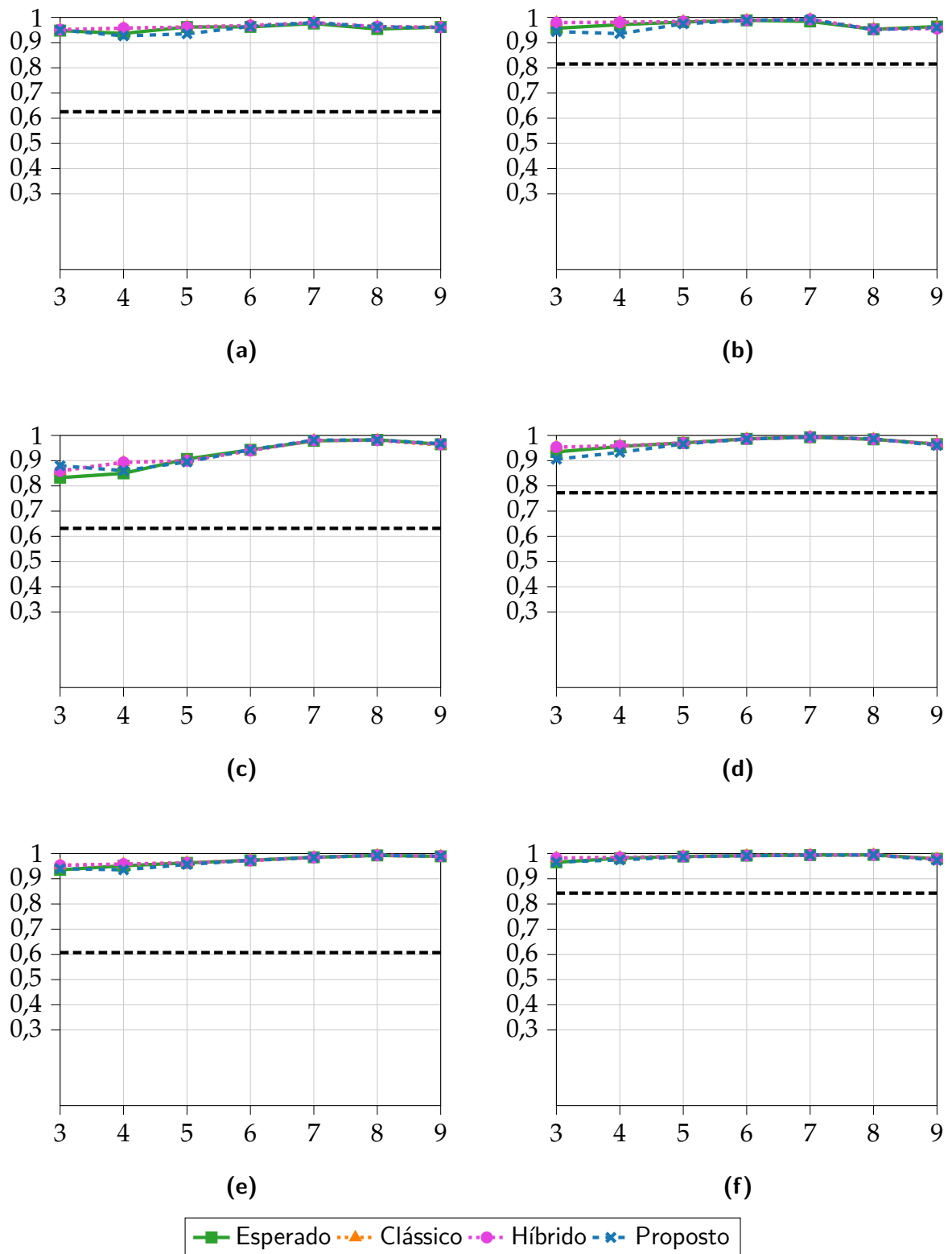
5.4 INTELIGIBILIDADE

As Figuras 5.19 até 5.27 apresentam os resultados para inteligibilidade, através da STOI, para os cenários acústicos das Simulações I, II e III (Seções (4.3.1) até (4.3.2)). Da mesma forma que para a PESQ, o modelo proposto apresentou um desempenho superior quando comparado ao modelo clássico, em relação à previsão do resultado obtido utilizando matrizes de coerência simuladas, independentemente do número de bits, tensão ou situação avaliados. Como a inteligibilidade é menos sensível à adição de ruído, o ganho aparente da utilização do modelo proposto foi menor, apresentando incrementos de no máximo 0,1 STOI.

A análise do STOI indica a existência de discrepâncias entre o resultado por simulação e o modelo proposto que, embora pequenas, não são desprezíveis. Contudo, não foi encontrada uma correlação entre elas e as características das situações simuladas.

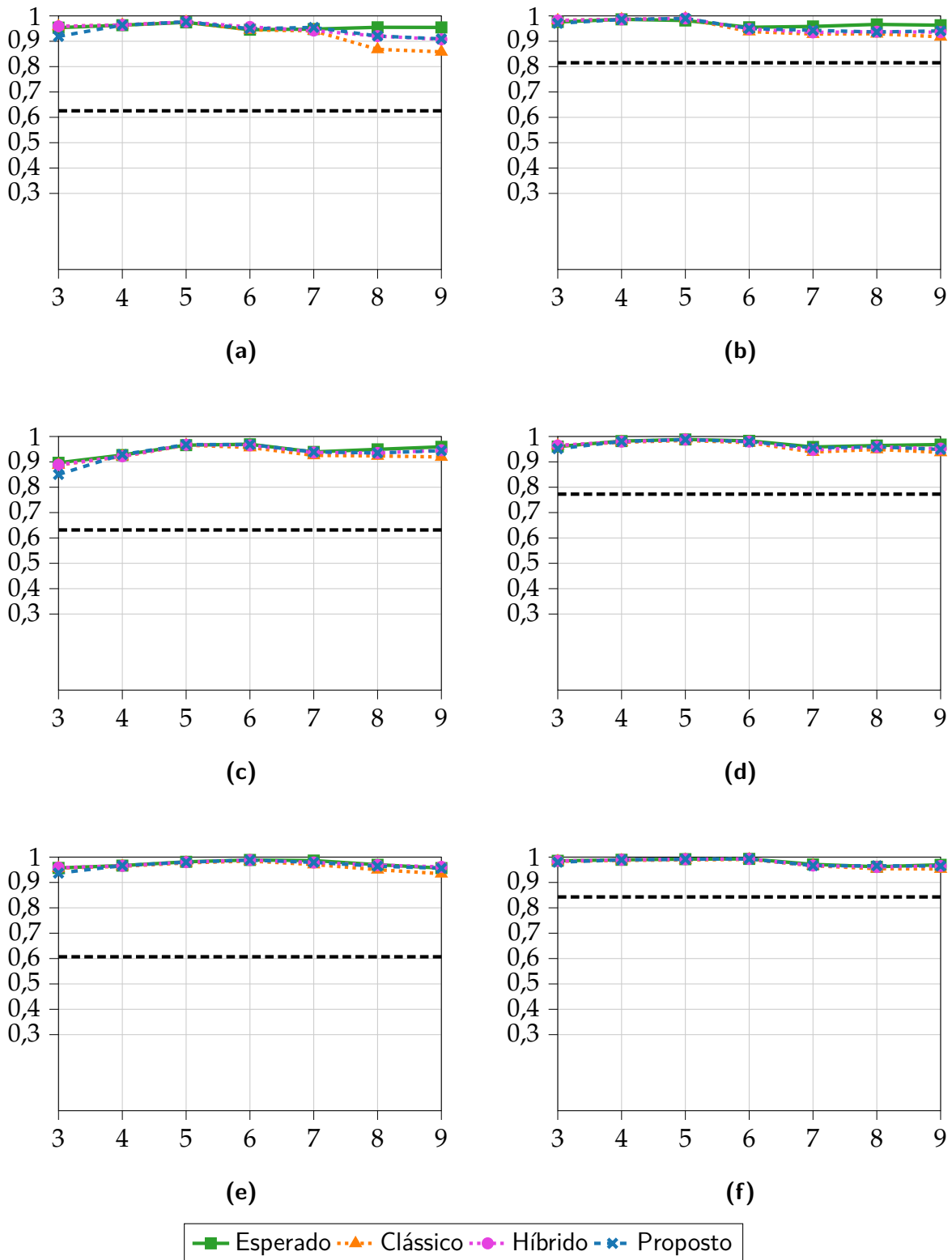
Analisando os resultados obtidos, tem-se que de maneira geral há um ganho significativo na previsão de inteligibilidade ao utilizar o método proposto, especialmente em situações com uma baixa inteligibilidade na entrada. Também nota-se que a inteligibilidade é afetada pela redução da tensão de saturação, embora muito menos que a SNQR e a PESQ. As variações da posição da fonte interferente e da SNR de entrada apresentam ter um impacto relevante sobre a STOI, embora o lado da fonte interferente não seja tão relevante.

Figura 5.19 – STOI para as diferentes situações da Simulação I, com $V = 20$. Abscissa: número de bits; Ordenada: STOI. As condições de simulação constam na Tabela 4.1.



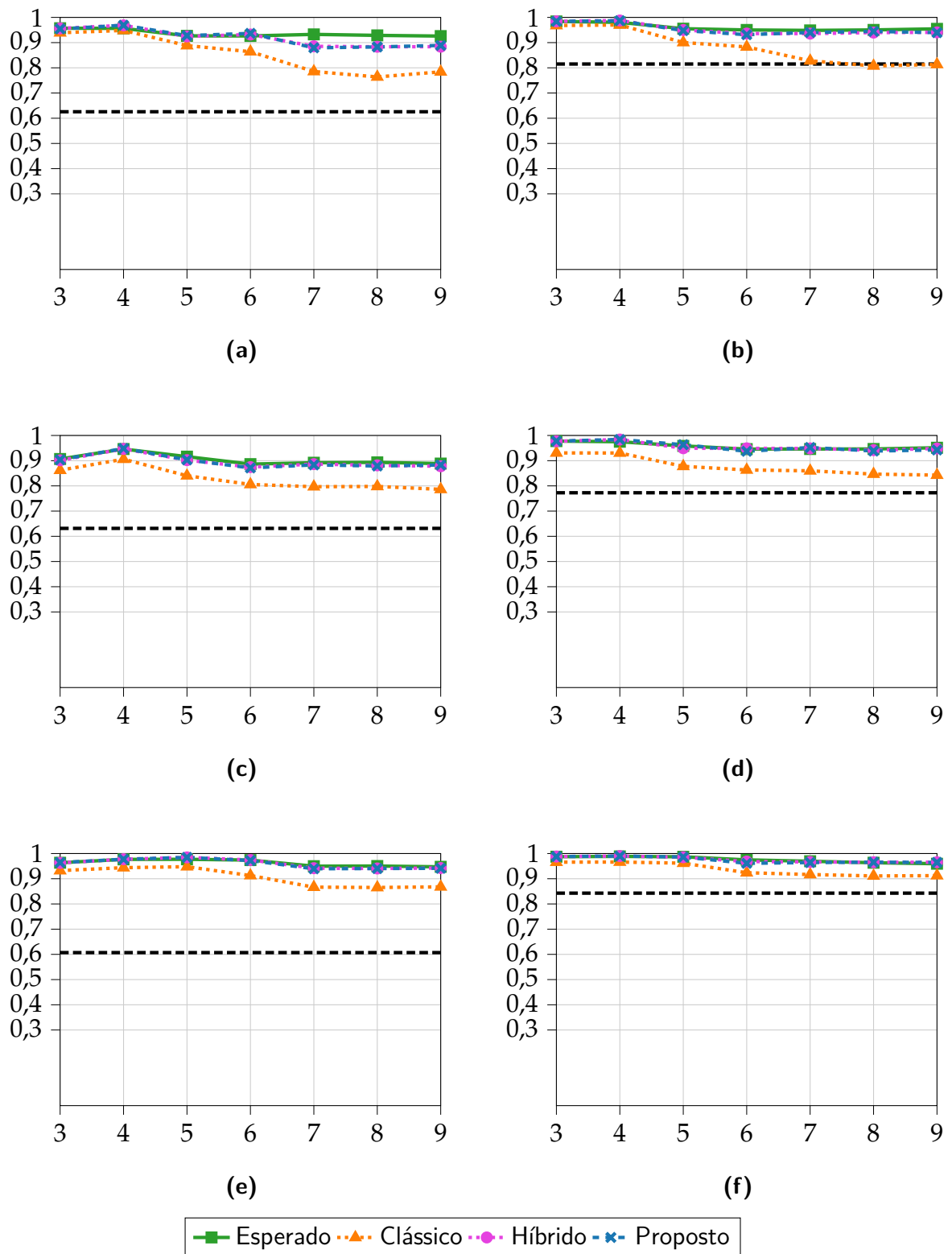
Fonte: Autoria própria.

Figura 5.20 – STOI para as diferentes situações da Simulação I, com $V = 5$. Abscissa: número de bits; Ordenada: STOI. As condições de simulação constam na Tabela 4.1.



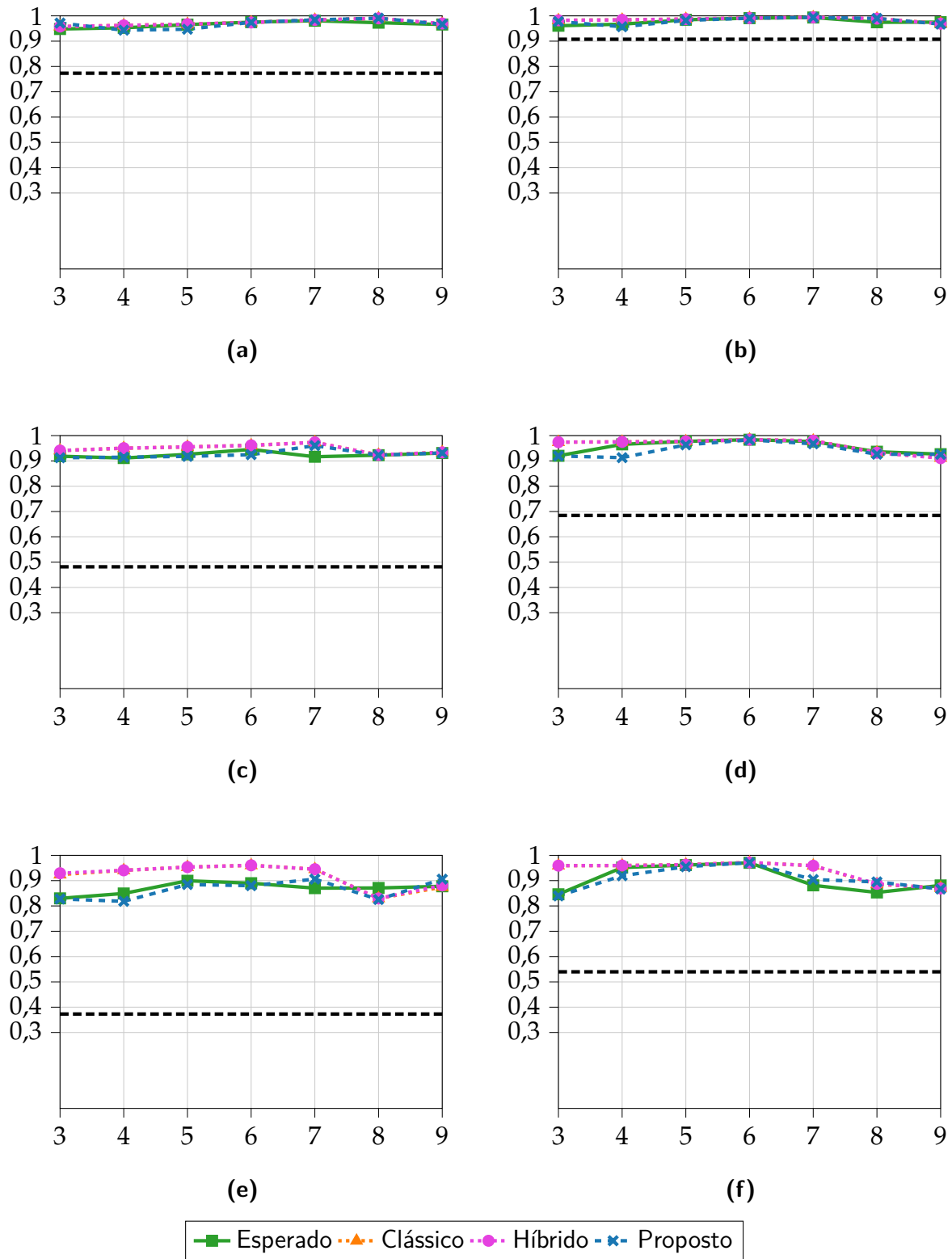
Fonte: Autoria própria.

Figura 5.21 – STOI para as diferentes situações da Simulação I, com $V = 2$. Abscissa: número de bits; Ordenada: STOI. As condições de simulação constam na Tabela 4.1.



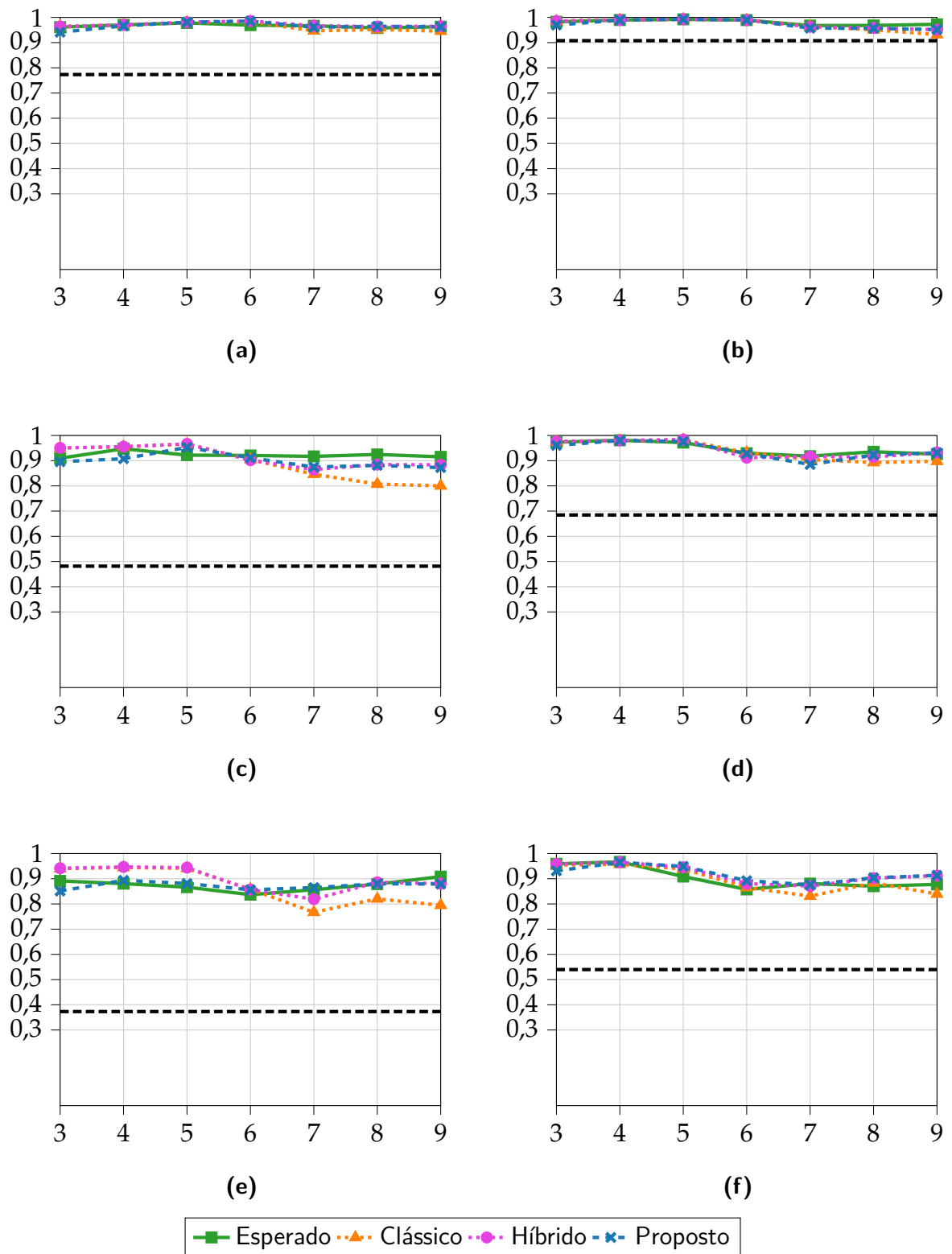
Fonte: Autoria própria.

Figura 5.22 – STOI para as diferentes situações da Simulação II, com $V = 20$. Abscissa: número de bits; Ordenada: STOI. As condições de simulação constam na Tabela 4.2.



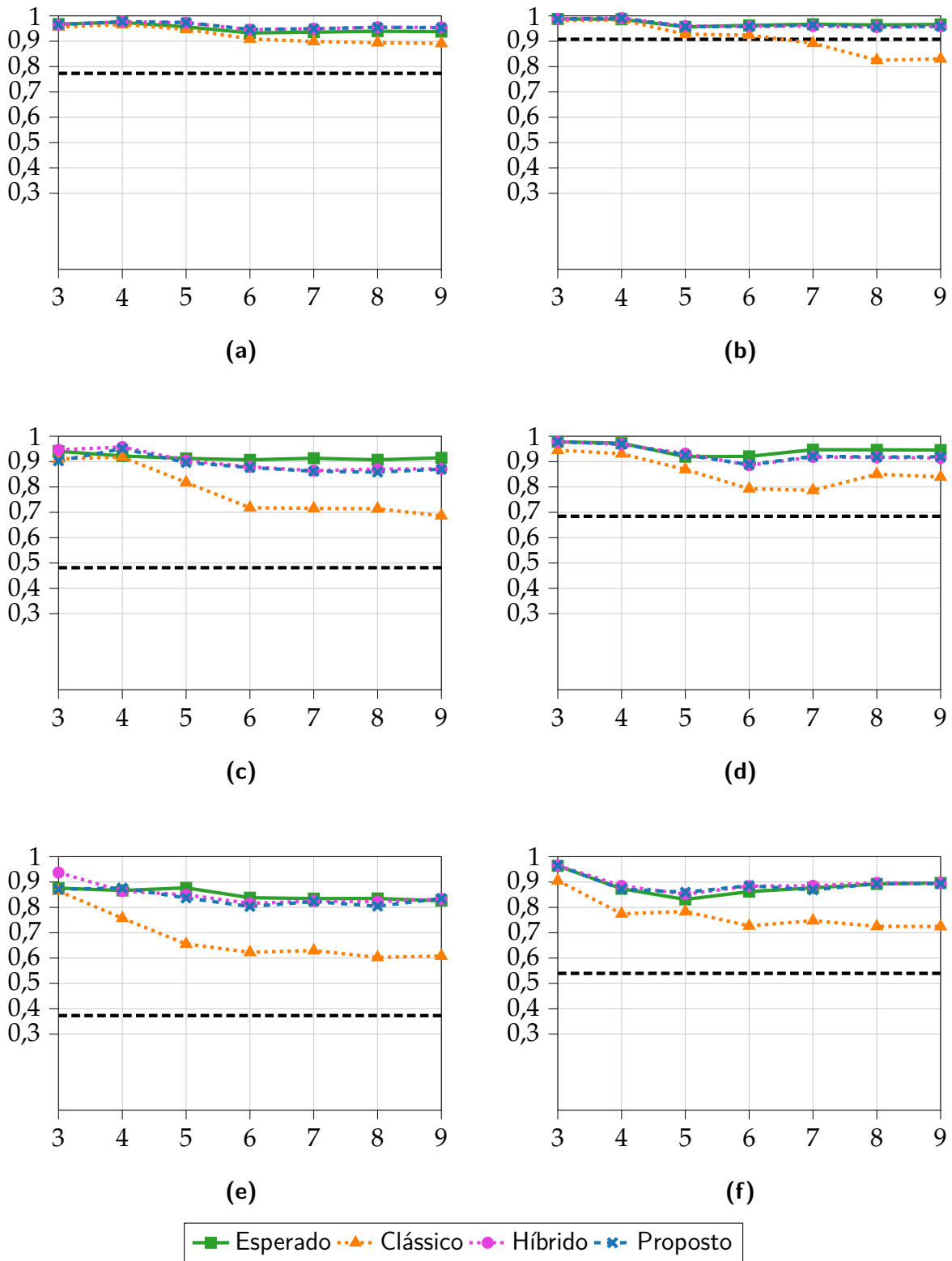
Fonte: Autoria própria.

Figura 5.23 – STOI para as diferentes situações da Simulação II, com $V = 5$. Abscissa: número de bits; Ordenada: STOI. As condições de simulação constam na Tabela 4.2.



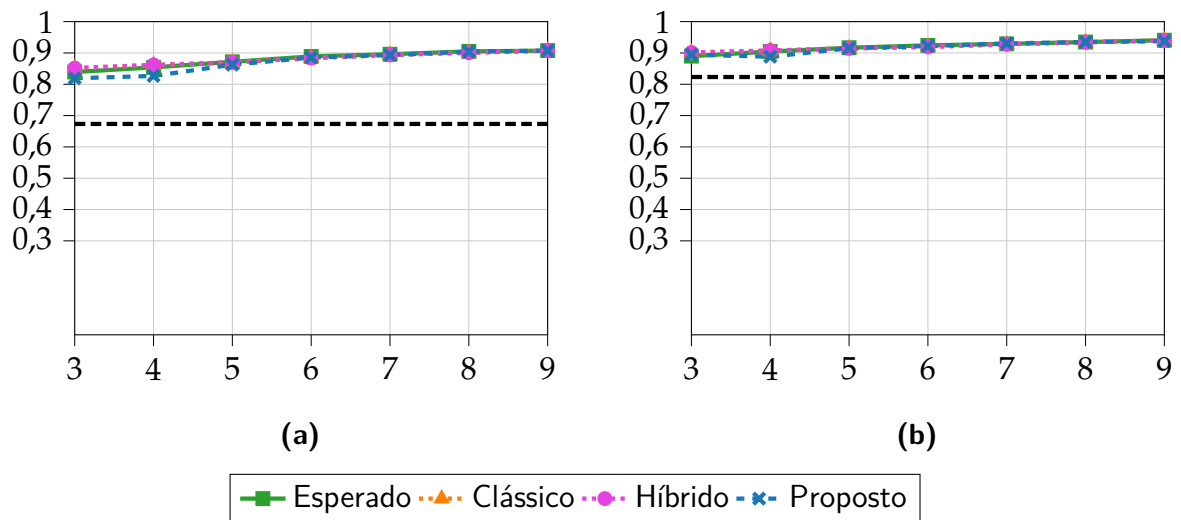
Fonte: Autoria própria.

Figura 5.24 – STOI para as diferentes situações da Simulação II, com $V = 2$. Abscissa: número de bits; Ordenada: STOI. As condições de simulação constam na Tabela 4.2.



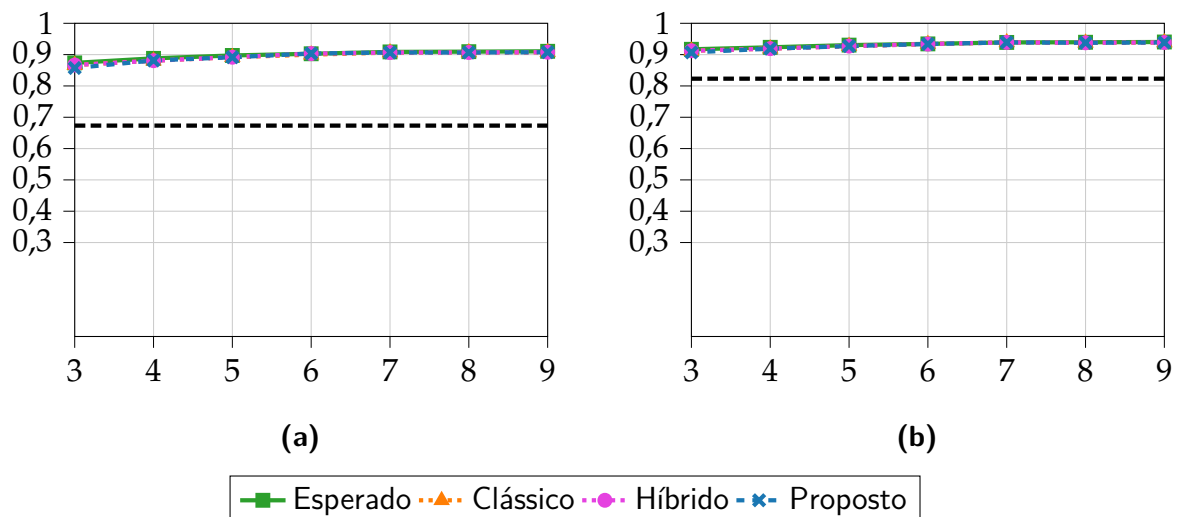
Fonte: Autoria própria.

Figura 5.25 – STOI para as diferentes situações da Simulação III, com $V = 20$. Abscissa: número de bits; Ordenada: STOI. As condições de simulação constam na Tabela 4.3.



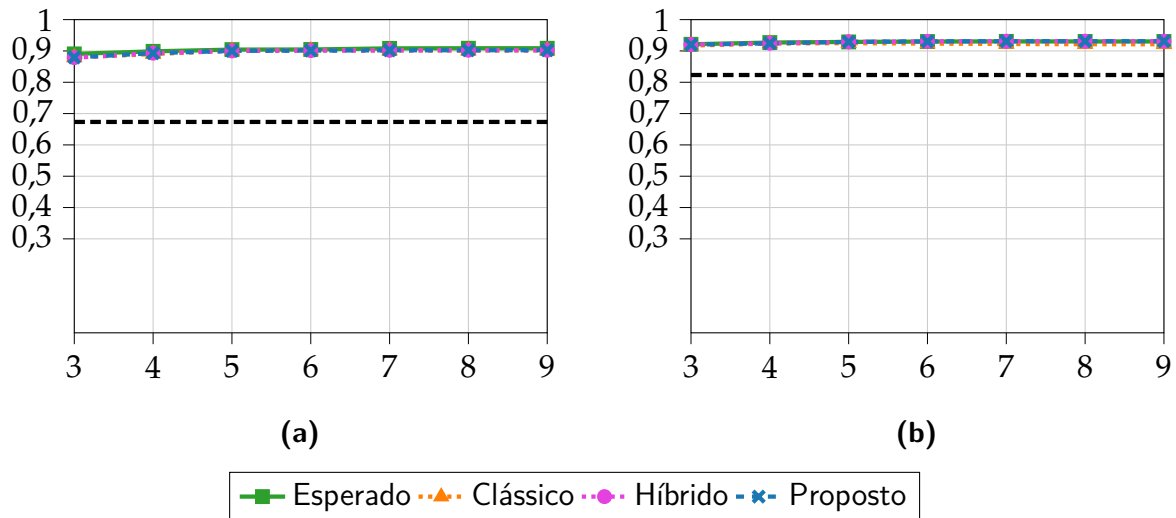
Fonte: Autoria própria.

Figura 5.26 – STOI para as diferentes situações da Simulação III, com $V = 5$. Abscissa: número de bits; Ordenada: STOI. As condições de simulação constam na Tabela 4.3.



Fonte: Autoria própria.

Figura 5.27 – STOI para as diferentes situações da Simulação III, com $V = 2$. Abscissa: número de bits; Ordenada: STOI. As condições de simulação constam na Tabela 4.3.



Fonte: Autoria própria.

5.5 RESULTADOS DE MODELAGEM

A partir dos resultados obtidos para redução de ruído, qualidade e inteligibilidade, tem-se que o modelo proposto sempre apresenta um desempenho superior (ou igual) ao do modelo clássico em ser capaz de modelar os efeitos da quantização, inclusive nas situações nas quais as considerações necessárias para a validade do modelo clássico são plenamente respeitadas.

Verifica-se também que o modelo híbrido acompanha o modelo clássico para situações sem saturação, e acompanha o modelo proposto para situações com saturação, resultado coerente já que ele foi desenvolvido como uma solução para o problema de o modelo clássico não considerar a saturação na sua modelagem.

5.6 TEMPO COMPUTACIONAL

Nesta seção são apresentados os resultados relativos ao tempo computacional requerido por cada um dos modelos avaliados para o cálculo das matrizes de coerência, para cada uma das situações avaliadas. Ao contrário da avaliação de custo computacional através da notação *Big O* (Seção 3.4), aqui deseja-se ter uma estimativa do tempo que cada um dos modelos levou.

Todas as simulações realizadas foram feitas em MATLAB[®] na versão R2019a. Em todos os casos, foi utilizado processamento em paralelo (*multithreading*), calculando os coeficientes dos vetores $\mathbf{w}_F(\lambda, k)$ e $\mathbf{w}_C(\lambda, k)$ para diferentes frequências em *threads* diferentes, já que frequências diferentes são assumidas independentes. O computador utilizado possui um processador Intel[®] Core[™] i7-8700k com 12 *threads*, e 64 GB de memória RAM.

Os resultados são apresentados para $N \in [3, 6, 9]$, já que o objetivo é apenas ter uma noção do tempo de execução de cada um dos algoritmos, para cada N . Será chamado “Proposto” o modelo proposto sem as otimizações da Seção 3.4.1, e “Otimizado” com as otimizações.

Tabela 5.1 – Tempo computacional de cada modelo avaliado, com e sem otimização do modelo proposto.

Modelo	Tempo (s)		
	3 bits	6 bits	9 bits
Clássico	0,19 s	0,54 s	0,64 s
Proposto	5,70 s	68,43 s	4316,33 s
Otimizado	5,31 s	6,30 s	45,86 s
Híbrido	9,35 s	11,63 s	13,06 s

Nota-se que o tempo computacional do modelo proposto não-otimizado cresce de forma como esperado. O tempo de execução do modelo proposto otimizado é limitado pelo uso de tabelas pré-calculadas e do processo de interpolação, e seu aumento é explicado por haver valores de κ_2 que precisaram ser calculados manualmente^(b), e também por κ_1 também apresentar comportamento exponencial. Porém, como a ordem do cálculo de κ_1 é $\mathcal{O}(2^N)$ e a de κ_2 é $\mathcal{O}(4^N)$, além de κ_2 possuir uma integral numérica, não julgou-se necessário aplicar a mesma otimização por busca e interpolação para κ_1 .

O tempo do modelo clássico aumenta com N , porém de maneira quase insignificante, provavelmente devendo-se a não-otimização do uso de memória para cálculo das matrizes $\mathbf{R}_{\eta_q \eta_q}$ (cujos elementos ficam cada vez menores).

O tempo do modelo híbrido também aumenta com N , aqui sendo em razão das condições de parada da integral numérica utilizada, que podem ser dependentes de N . Ainda assim, o modelo híbrido mostra-se mais vantajoso que o modelo proposto otimizado para N grande.

^(b) Isto é, conforme o Apêndice E, caso algum dos parâmetros para cálculo de κ_2 estivesse fora dos limites estabelecidos, ele seria calculado pela sua definição, ao invés de interpolação.

6 CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES

Este trabalho apresentou um estudo sobre a modelagem do desempenho do filtro de Wiener multicanal sujeito a limitações na taxa de comunicação em aparelhos auditivos biauriculares, em específico tratando dos efeitos de processos de quantização e saturação.

Foram desenvolvidos dois novos modelos teóricos para a determinação das matrizes de coerência necessárias para o cálculo do filtro de Wiener multicanal, levando em conta os processos de quantização e saturação.

Ambos os modelos apresentaram maior acurácia de modelagem quando comparados ao denominado “modelo clássico” (previamente desenvolvido na literatura), em relação à predição do resultado esperado por simulação limitar a taxa de comunicação entre os aparelhos auditivos através de modificações na quantização das informações. Essa acurácia foi verificada em termos de erro, razão-sinal-ruído (levando em conta distorções da quantização), qualidade e inteligibilidade.

O modelo denominado como “modelo proposto”, neste trabalho, apresentou a maior acurácia dentre os 3 modelos avaliados, principalmente em relação à qualidade da fala processada.

O modelo denominado como “modelo híbrido”, embora tenha apresentado uma acurácia inferior ao modelo proposto em questão de modelar tanto os efeitos da quantização quanto da saturação (mas com um desempenho superior ao modelo clássico), mostrou-se uma alternativa de menor custo computacional quando comparado ao modelo híbrido.

Diversas simulações utilizando diferentes configurações e cenários acústicos foram utilizadas, de forma a ilustrar os limites de aplicação dos novos modelos desenvolvidos e apresentando uma comparação com o modelo clássico.

Portanto, de maneira sucinta conclui-se que os modelos proposto e híbrido não apenas modelam de forma mais acurada as estatísticas dos sinais submetidos aos processos de quantização e saturação em uma aplicação de redução de ruído em um aparelho auditivo biauricular, como podem permitir um melhor entendimento dos fenômenos envolvidos. Dessa forma, acredita-se que os resultados aqui apresentados podem contribuir para avanços na referida área.

6.1 TRABALHOS FUTUROS

Algumas possibilidades de prosseguimento do trabalho desenvolvido são:

- Redução da complexidade computacional do modelo proposto: Apesar de ser um modelo teórico para estudo de desempenho, e de não haver necessidade de aplicação em tempo real, é interessante que o cálculo das matrizes de coerência seja realizado no menor tempo possível, de forma que diferentes configurações de parâmetros possam ser analisadas pelo projetista. Avanços já foram alcançados conforme a Seção 3.4.1, contudo ainda há espaço para mais melhorias.

- Simplificação do modelo híbrido: Embora possua uma complexidade computacional menor que a do modelo proposto, o modelo híbrido ainda pode ser simplificado para obter maior velocidade no cálculo das correlações. Entretanto, a perda de acurácia decorrente deve ser avaliada.
- Aplicação dos novos modelos a trabalhos anteriores: O modelo clássico é amplamente utilizado para modelagem dos efeitos da quantização em aparelhos biauriculares (AMINI *et al.*, 2020; ZHANG, J.; LI, 2021), e portanto os resultados obtidos nesse trabalho poderiam ser utilizados para atualizar outros trabalhos já desenvolvidos utilizando a modelagem desenvolvida por Widrow.
- Aplicação a outros métodos: Diversos outros métodos de melhoria da fala também baseiam-se no uso das matrizes de coerência, e portanto ter conhecimento de como essas matrizes se comportam quando a quantização é considerada possibilita a utilização dos resultados obtidos nesse trabalho junto a outros modelos.
- Generalização dos resultados: Algumas das considerações tomadas ao longo do trabalho (como quantização uniforme e simétrica, e distribuições estatísticas dos sinais) podem ser removidas, implicando em resultados mais genéricos ao custo de uma maior complexidade; ou alteradas, de forma a adaptar o desenvolvimento aqui exposto a outro problema.

REFERÊNCIAS

- AMINI, J.; HENDRIKS, R. C.; HEUSDENS, R.; GUO, M.; JENSEN, J. Asymmetric Coding for Rate-Constrained Noise Reduction in Binaural Hearing Aids. **IEEE/ACM Transactions on Audio, Speech, and Language Processing**, v. 27, n. 1, p. 154–167, 2019.
- AMINI, J.; HENDRIKS, R. C.; HEUSDENS, R.; GUO, M.; JENSEN, J. Rate-Constrained Noise Reduction in Wireless Acoustic Sensor Networks. **IEEE/ACM Transactions on Audio, Speech, and Language Processing**, v. 28, p. 1–12, 2020.
- AVAN, P.; GIRAUDET, F.; BÜKI, B. Importance of Binaural Hearing. **Audiology & Neuro-otology**, Karger Publishers, v. 20, Suppl. 1, p. 3–6, 2015.
- BORGA, M. Canonical Correlation: a Tutorial, out. 2001.
- BOS, A. van den. Complex gradient and Hessian. **IEEE Proceedings - Vision, Image and Signal Processing**, v. 141, 380–382(2), 6 1994.
- BOURKE, P. Interpolation methods. **Miscellaneous: projection, modelling, rendering**, v. 1, n. 10, 1999.
- CHEN, J.; BENESTY, J.; HUANG, Y.; DOCLO, S. New insights into the noise reduction Wiener filter. **IEEE Transactions on Audio, Speech, and Language Processing**, v. 14, n. 4, p. 1218–1234, 2006.
- CHEVILLARD, S. The functions erf and erfc computed with arbitrary precision and explicit error bounds. **Information and Computation**, v. 216, p. 72–95, 2012. Special Issue: 8th Conference on Real Numbers and Computers.
- CHIVERS, I.; SLEIGHTHOLME, J. **An Introduction to Algorithms and the Big O Notation**. [S.l.]: Springer International Publishing, 2015. P. 359–364.
- COSTA, M. H. **Comportamento do Algoritmo FXLMS em Sistemas com Caminho secundário não-linear: Aplicação ao Controle Ativo de Ruído**. 2001. Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC).
- DAVIS, H. **Hearing Handicap, Standards for Hearing, and Medicolegal Rules**. [S.l.]: Holt, Rinhhart e Winston, 1970. P. 270, 271.
- DAY, G. A.; BROWNING, G. G.; GATEHOUSE, S. Benefit from binaural hearing aids in individuals with a severe hearing impairment. **British Journal of Audiology**, Taylor & Francis, v. 22, p. 273–277, 1988.
- DRESCHLER, W.; HERSCHUURE, H.; LUDVIGSEN, C.; WESTERMANN, S. ICRA Noises: Artificial Noise Signals With Speech-Like Spectral and Temporal Properties for Hearing Aid Assessment. **Audiology**, v. 40, p. 148–157, jan. 2001.

EINHORN, R. Hearing Aid Technology for the 21st Century: A Proposal for Universal Wireless Connectivity and Improved Sound Quality. **IEEE Pulse**, v. 8, n. 2, p. 25–28, 2017.

EPHRAIM, Y.; MALAH, D. D Malah, Speech enhancement using a minimum mean-square error short-time spectral amplitude estimator [J]. *IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process* 32, 1109-1121. **Acoustics, Speech and Signal Processing, IEEE Transactions on**, v. 32, p. 1109–1121, jan. 1985.

FDA. **Types of hearing Aids**. [S.l.: s.n.], 2018.

GAZOR, S.; ZHANG, W. A soft voice activity detector based on a Laplacian-Gaussian model. **IEEE Transactions on Speech and Audio Processing**, v. 11, n. 5, p. 498–505, 2003.

GRAY, R.; NEUHOFF, D. Quantization. **IEEE Transactions on Information Theory**, v. 44, n. 6, p. 2325–2383, 1998.

GUPTA, P. C. **Data Communications and Computer Networks**. [S.l.]: PHI Learning, 2006.

HAYKIN, S. **Adaptive filter theory**. 4th. [S.l.]: Prentice Hall, 2002.

HENTER, G.; MERRITT, T.; SHANNON, M.; MAYO, C.; KING, S. Measuring the perceptual effects of modelling assumptions in speech synthesis using stimuli constructed from repeated natural speech. **Proceedings of the Annual Conference of the International Speech Communication Association**, p. 1504–1508, jan. 2014.

HORN, R. A. **The Hadamard Product**. [S.l.: s.n.], 1990. v. 40, p. 87–169.

ITU-T P.800.1. **Mean Opinion Score (MOS) Terminology**. [S.l.: s.n.], 2006. International Telecommunications Union.

KAYSER, H.; EWERT, S.; ANEMÜLLER, J.; ROHDENBURG, T.; HOHMANN, V.; KOLLMEIER, B. Database of Multichannel In-Ear and Behind-the-Ear Head-Related and Binaural Room Impulse Responses. **EURASIP Journal on Advances in Signal Processing**, v. 2009, p. 6, dez. 2009.

LATHI, B. **Sinais e Sistemas Lineares**. [S.l.]: Bookman, 2007. P. 162.

LAUNER, S.; ZAKIS, J. A.; MOORE, B. C. J. Hearing Aid Signal Processing. *In: HEARING Aids*. Cham: Springer International Publishing, 2016. P. 93–130.

LIPSHITZ, S.; WANNAMAKER, R.; VANDERKOOY, J. Quantization and Dither: A Theoretical Survey. **Journal of the Audio Engineering Society**, v. 40, p. 355–374, mai. 1992.

- LOIZOU, P. C. **Speech Enhancement: Theory and Practice**. 2nd. USA: CRC Press, Inc., 2013.
- LOTTERMAN, S. H.; KASTEN, R. N.; MAJERUS, D. M. Battery life and nonlinear distortion in hearing aids. **Journal of Speech and Hearing Disorders**, ASHA, v. 3, p. 82–118, 1967.
- MILLER, K. S. **Multidimensional Gaussian Distributions**. [S.l.]: John Wiley e Sons, 1964.
- MOORE, B. **Cochlear Hearing Loss: Physiological, Psychological and Technical Issues: Second Edition**. [S.l.]: Wiley, 2008.
- NIDCD. **Quick Statistics About Hearing**. [S.l.: s.n.], 2021.
- OMS. **Deafness and hearing loss**. [S.l.: s.n.], 2021.
- PAWULA, R. A modified version of Price's theorem. **IEEE Transactions on Information Theory**, v. 13, n. 2, p. 285–288, 1967.
- RIX, A.; BEERENDS, J.; HOLLIER, M.; HEKSTRA, A. Perceptual evaluation of speech quality (PESQ)-a new method for speech quality assessment of telephone networks and codecs. v. 2, 749–752 vol.2, 2001.
- SCF. **Guia de Orientação na Avaliação Audiológica**. [S.l.: s.n.], 2020.
- SCHREIER, P. J.; SCHARF, L. L. **Statistical Signal Processing of Complex-Valued Data: The Theory of Improper and Noncircular Signals**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2010.
- SEALEY, V. Definite integrals, Riemann sums, and area under a curve: What is necessary and sufficient. **Psychology of Mathematics Education-NA**, v. 2, n. 1991, p. 46–53, 2006.
- SHMILOVITZ, D. On the definition of total harmonic distortion and its effect on measurement interpretation. **IEEE Transactions on Power Delivery**, v. 20, n. 1, p. 526–528, 2005.
- SINGH, J.; DABEER, O.; MADHOW, U. Capacity of the discrete-time AWGN channel under output quantization. **2008 IEEE International Symposium on Information Theory**, p. 1218–1222, 2008.
- SMITH, S. W. **FFT convolution and the overlap-add method**. [S.l.]: EE Times, 2007.
- SONORAWEB. **Conheça a anatomia do ouvido**. [S.l.: s.n.], 2019.

SRIPAD, A.; SNYDER, D. A necessary and sufficient condition for quantization errors to be uniform and white. **IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing**, v. 25, n. 5, p. 442–448, 1977.

TAAL, C.; HENDRIKS, R.; HEUSDENS, R.; JENSEN, J. A short-time objective intelligibility measure for time-frequency weighted noisy speech. **ICASSP, IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing - Proceedings**, p. 4214–4217, abr. 2010.

WANNAMAKER, R.; LIPSHITZ, S.; VANDERKOOY, J.; WRIGHT, J. A theory of nonsubtractive dither. **Signal Processing, IEEE Transactions on**, v. 48, p. 499–516, mar. 2000.

WEIGMANN, E. Binaural Hearing and Bilateral Hearing Aid Care: The Advantage of Hearing With two Ears (Siemens). **Tech. Rep.**, 2009.

WIDROW, B. A Study of Rough Amplitude Quantization by Means of Nyquist Sampling Theory. **IRE Transactions on Circuit Theory**, v. 3, n. 4, p. 266–276, 1956.

WIENER, N. **Extrapolation, Interpolation, and Smoothing of Stationary Time Series**. [S.l.]: The MIT Press, 1964.

ZHANG, J.; LI, C. Quantization-Aware Binaural MWF Based Noise Reduction Incorporating External Wireless Devices. **IEEE/ACM Transactions on Audio, Speech, and Language Processing**, v. 29, p. 3118–3131, 2021.

Apêndices

A CORRELAÇÕES ENTRE COMBINAÇÕES DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS COMPLEXAS

A.1 DEFINIÇÕES

Sejam

$$y_l = x_l + \nu_l, \quad (\text{A.1a})$$

$$y_c = x_c + \nu_c, \quad (\text{A.1b})$$

tal que

$$x_l = a_l s, \quad (\text{A.2a})$$

$$x_c = a_c s, \quad (\text{A.2b})$$

em que s , ν_l e ν_c são variáveis aleatórias complexas, sendo s independente de ν_l e ν_c (mas ν_l e ν_c podem ser dependentes); e a_l e a_c são constantes complexas. Quando conveniente, o índice m indica genericamente os índices l e c .

Também sejam $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in [\mathbb{R}, \mathbb{I}]$, em que $(\cdot)^{\mathbb{R}}$ e $(\cdot)^{\mathbb{I}}$ representam a parte real e imaginária (respectivamente) do argumento, e $\overline{\mathbb{A}}$ é o dual de \mathbb{A} no conjunto $[\mathbb{R}, \mathbb{I}]$ (idem para $\overline{\mathbb{B}}$).

Nesse trabalho, assume-se que as partes real e imaginária de a , ν_l e ν_c possuem média nula, sejam independentes uma da outra (LOIZOU, 2013; EPHRAIM; MALAH, 1985), e também têm a mesma potência (SCHREIER; SCHARF, 2010), tal que

$$\mathbb{E} \left[\left(a^{\mathbb{R}} \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[\left(a^{\mathbb{I}} \right)^2 \right] = \frac{1}{2} \mathbb{E} \left[|a|^2 \right], \quad (\text{A.3})$$

o mesmo valendo para ν_l e ν_c .

A.2 COERÊNCIA PARCIAL

A.2.a Coerência parcial entre múltiplos do mesmo sinal

Dado x_m (genericamente) da Equação (A.2), tem-se que

$$\begin{aligned} x_m &= a_m s \\ &= \left(a_m^{\mathbb{R}} + a_m^{\mathbb{I}} \right) \left(s^{\mathbb{R}} + s^{\mathbb{I}} \right) \\ &= \underbrace{\left(a_m^{\mathbb{R}} s^{\mathbb{R}} - a_m^{\mathbb{I}} s^{\mathbb{I}} \right)}_{x_m^{\mathbb{R}}} + \underbrace{\left(a_m^{\mathbb{R}} s^{\mathbb{I}} + a_m^{\mathbb{I}} s^{\mathbb{R}} \right)}_{x_m^{\mathbb{I}}}, \end{aligned} \quad (\text{A.4a})$$

$$x_m^{\mathbb{A}} = a_m^{\mathbb{A}} s^{\mathbb{R}} + a_m^{\overline{\mathbb{A}}} s^{\mathbb{I}} \cdot (-1)^{\mathcal{V}_{\mathbb{A}, \mathbb{I}}}, \quad (\text{A.4b})$$

em que

$$\mathcal{V}_{a,b} = \begin{cases} 1, & a = b \\ 0, & a \neq b' \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

que retorna 1 se ambos os valores são iguais; e 0 se forem diferentes.

A partir da Equação (A.4b) tem-se

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[x_l^{\mathbb{A}} x_c^{\mathbb{B}}\right] &= \mathbb{E}\left[\left[a_l^{\mathbb{A}} s^{\mathbb{R}} + a_l^{\overline{\mathbb{A}}} s^{\mathbb{I}} \cdot (-1)^{\nu_{\mathbb{A}, \mathbb{I}}}\right] \left[a_c^{\mathbb{B}} s^{\mathbb{R}} + a_c^{\overline{\mathbb{B}}} s^{\mathbb{I}} \cdot (-1)^{\nu_{\mathbb{A}, \mathbb{I}}}\right]\right] \\ &= \mathbb{E}\left[a_l^{\mathbb{A}} a_c^{\mathbb{B}} \left(s^{\mathbb{R}}\right)^2 + (-1)^{\nu_{\mathbb{B}, \mathbb{I}}} \cdot a_l^{\mathbb{A}} a_c^{\overline{\mathbb{B}}} s^{\mathbb{R}} s^{\mathbb{I}}\right. \\ &\quad \left.+ (-1)^{\nu_{\mathbb{A}, \mathbb{I}}} \cdot a_l^{\overline{\mathbb{A}}} a_c^{\mathbb{B}} s^{\mathbb{R}} s^{\mathbb{I}} - a_l^{\overline{\mathbb{A}}} a_c^{\overline{\mathbb{B}}} \left(s^{\mathbb{I}}\right)^2 \cdot (-1)^{\nu_{\mathbb{A}, \mathbb{B}}}\right]. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Como as partes real e imaginária de s são independentes (LOIZOU, 2013; EPHRAIM; MALAH, 1985), os dois termos centrais são nulos, e portanto

$$\mathbb{E}\left[x_l^{\mathbb{A}} x_c^{\mathbb{B}}\right] = a_l^{\mathbb{A}} a_c^{\mathbb{B}} \mathbb{E}\left[\left(s^{\mathbb{R}}\right)^2\right] - a_l^{\overline{\mathbb{A}}} a_c^{\overline{\mathbb{B}}} \mathbb{E}\left[\left(s^{\mathbb{I}}\right)^2\right] \cdot (-1)^{\nu_{\mathbb{A}, \mathbb{B}}}. \quad (\text{A.7})$$

Utilizando a Equação (A.3),

$$\mathbb{E}\left[x_l^{\mathbb{A}} x_c^{\mathbb{B}}\right] = \frac{1}{2} \left(a_l^{\mathbb{A}} a_c^{\mathbb{B}} - a_l^{\overline{\mathbb{A}}} a_c^{\overline{\mathbb{B}}} \cdot (-1)^{\nu_{\mathbb{A}, \mathbb{B}}} \right) \mathbb{E}\left[|s|^2\right]. \quad (\text{A.8})$$

A.2.b Dualidade da coerência parcial

Na Equação (A.8), substituindo \mathbb{A} por $\overline{\mathbb{A}}$ e \mathbb{B} por $\overline{\mathbb{B}}$,

$$\mathbb{E}\left[x_l^{\overline{\mathbb{A}}} x_c^{\overline{\mathbb{B}}}\right] = \frac{1}{2} \left(a_l^{\overline{\mathbb{A}}} a_c^{\overline{\mathbb{B}}} - a_l^{\mathbb{A}} a_c^{\mathbb{B}} \cdot (-1)^{\nu_{\overline{\mathbb{A}}, \overline{\mathbb{B}}}} \right) \mathbb{E}\left[|s|^2\right]. \quad (\text{A.9a})$$

Manipulando,

$$\mathbb{E}\left[x_l^{\overline{\mathbb{A}}} x_c^{\overline{\mathbb{B}}}\right] = \frac{1}{(-1)^{\nu_{\overline{\mathbb{A}}, \overline{\mathbb{B}}}}} \frac{1}{2} \left((-1)^{\nu_{\overline{\mathbb{A}}, \overline{\mathbb{B}}}} a_l^{\overline{\mathbb{A}}} a_c^{\overline{\mathbb{B}}} - a_l^{\mathbb{A}} a_c^{\mathbb{B}} \right) \mathbb{E}\left[|s|^2\right]. \quad (\text{A.9b})$$

Usando que, se $\overline{\mathbb{A}} = \overline{\mathbb{B}}$, então $\mathbb{A} = \mathbb{B}$, então

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[x_l^{\overline{\mathbb{A}}} x_c^{\overline{\mathbb{B}}}\right] &= -1 \cdot (-1)^{\nu_{\overline{\mathbb{A}}, \overline{\mathbb{B}}}} \frac{1}{2} \left(-(-1)^{\nu_{\mathbb{A}, \mathbb{B}}} a_l^{\overline{\mathbb{A}}} a_c^{\overline{\mathbb{B}}} + a_l^{\mathbb{A}} a_c^{\mathbb{B}} \right) \mathbb{E}\left[|s|^2\right] \\ &= -(-1)^{\nu_{\overline{\mathbb{A}}, \overline{\mathbb{B}}}} \mathbb{E}\left[x_l^{\mathbb{A}} x_c^{\mathbb{B}}\right]. \end{aligned} \quad (\text{A.9c})$$

Tomando o caso particular em que $\mathbb{A} = \mathbb{B} = \mathbb{I}$ e $l = c$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[x_l^{\mathbb{R}} x_l^{\mathbb{R}}\right] &= -(-1)^{\nu_{\mathbb{I}, \mathbb{I}}} \mathbb{E}\left[\text{imag} x_l x_l^{\mathbb{I}}\right] \\ &= \mathbb{E}\left[x_l^{\mathbb{I}} x_l^{\mathbb{I}}\right] \end{aligned} \quad (\text{A.10a})$$

$$\mathbb{E}\left[\left(x_l^{\mathbb{R}}\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\left(x_l^{\mathbb{I}}\right)^2\right] \quad (\text{A.10b})$$

e portanto, a Equação (A.3) é válida para múltiplos (complexos) de algum a que satisfaça a condição dada (partes real e imaginária de a possuem a mesma potência).

A.2.c Coerência parcial entre x_l e x_c

A partir do resultado da Equação (A.8), tem-se

$$\mathbb{E}[x_l^{\text{A}} x_c^{\text{B}}] = \frac{1}{2} \left(a_l^{\text{A}} a_c^{\text{B}} - \overline{a_l^{\text{A}}} \overline{a_c^{\text{B}}} \cdot (-1)^{\nu_{\text{A,B}}} \right) \mathbb{E}[|s|^2]. \quad (\text{A.11})$$

A.2.d Coerência parcial cruzada entre x_l e y_c

A partir da Equação (A.1), e usando que s e ν são independentes,

$$\mathbb{E}[x_l^{\text{A}} y_c^{\text{B}}] = \mathbb{E}[x_l^{\text{A}} x_c^{\text{B}}] \quad (\text{A.12})$$

e, utilizando a Equação (A.8),

$$\mathbb{E}[x_l^{\text{A}} y_c^{\text{B}}] = \frac{1}{2} \left(a_l^{\text{A}} a_c^{\text{B}} - \overline{a_l^{\text{A}}} \overline{a_c^{\text{B}}} \cdot (-1)^{\nu_{\text{A,B}}} \right) \mathbb{E}[|s|^2]. \quad (\text{A.13})$$

A.2.e Coerência parcial entre y_l e y_c

Utilizando a Equação (A.1), e assumindo independência entre s e ν ,

$$\mathbb{E}[y_l^{\text{A}} y_c^{\text{B}}] = \mathbb{E} \left[\left(x_l^{\text{A}} + \nu_l^{\text{A}} \right) \left(x_c^{\text{B}} + \nu_c^{\text{B}} \right) \right] = \mathbb{E}[x_l^{\text{A}} x_c^{\text{B}}] + \mathbb{E}[\nu_l^{\text{A}} \nu_c^{\text{B}}]. \quad (\text{A.14})$$

A.3 COERÊNCIA TOTAL

A.3.a Coerência total entre x_l e x_c

Dado x_l e x_c da Equação (A.2), então

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[x_l x_c^*] &= \mathbb{E}[(a_l s)(a_c s^*)] \\ &= a_l a_c^* \mathbb{E}[s s^*], \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

$$\mathbb{E}[x_l x_c^*] = a_l a_c^* \mathbb{E}[|s|^2]. \quad (\text{A.16})$$

A.3.b Coerência total cruzada entre x_l e y_c

A partir da Equação (A.1), e usando que s e ν são independentes,

$$\mathbb{E}[x_l y_c^*] = \mathbb{E}[x_l x_c^*] \quad (\text{A.17})$$

e, usando a Equação (A.16),

$$\mathbb{E}[x_l y_c^*] = a_l a_c^* \mathbb{E}[|s|^2] \quad (\text{A.18})$$

A.3.c Coerência total entre y_l e y_c

Utilizando a Equação (A.1), e assumindo independência entre s e ν ,

$$\begin{aligned} E[y_l y_c^*] &= E[(x_l + \nu_l)(x_c + \nu_c)^*] \\ &= E[x_l x_c^*] + E[\nu_l \nu_c^*]. \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

A.4 CORRELAÇÕES ENTRE ν_l E ν_c

Sejam, agora, ν_l e ν_c tal que

$$\nu_l = \sum_{i=1}^I b_{i,l} u_i + f_l + r_l, \quad (\text{A.20a})$$

$$\nu_c = \sum_{i=1}^I b_{i,c} u_i + f_c + r_c, \quad (\text{A.20b})$$

$$(\text{A.20c})$$

em que $u_1 \dots u_I$, f_l , r_l , f_c e r_c são todas variáveis aleatórias complexas de média nula e independentes entre si, e todos os coeficientes $b_{i,m}$ são constantes complexas.

A.4.a Coerência parcial entre ν_l e ν_c

Dados ν_l e ν_c da Equação (A.20), considerando que eles são independentes e de média nula, e usando do resultado da Equação (A.11) (adaptando-o), chega-se a

$$E[\nu_l^A \nu_c^B] = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^I [b_{l,i}^A b_{c,i}^B - \overline{b_{l,i}^A} \overline{b_{c,i}^B} \cdot (-1)^{\nu_{A,B}}] E[|u_i|^2] + [E[|f_l|^2] + E[|r_l|^2]] \cdot \mathcal{V}_{A,B} \mathcal{V}_{l,c} \right). \quad (\text{A.21})$$

A.4.b Coerência total entre ν_l e ν_c

Dados ν_l e ν_c da Equação (A.20), considerando que eles são independentes e de média nula, e usando do resultado da Equação (A.16) (adaptando-o), chega-se a

$$E[\nu_l \nu_c^*] = \sum_{i=1}^I [b_{i,l} b_{i,c}^*] E[|u_i|^2] + [E[|f_l|^2] + E[|r_l|^2]] \cdot \mathcal{V}_{l,c}. \quad (\text{A.22})$$

A.5 COEFICIENTE DE COERÊNCIA ρ

Por definição,

$$\begin{aligned} E[x_l x_c^*] &= E \left[\left(x_l^{\text{R}} + x_l^{\text{I}} \right) \left(x_c^{\text{R}} - x_c^{\text{I}} \right) \right] \\ &= E[x_l^{\text{R}} x_c^{\text{R}}] - E[x_l^{\text{R}} x_c^{\text{I}}] + E[x_l^{\text{I}} x_c^{\text{R}}] + E[x_l^{\text{I}} x_c^{\text{I}}]. \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

Pela Equação (A.9c), tem-se

$$E[x_l^{\bar{A}} x_c^{\bar{B}}] = -(-1)^{\nu_{A,B}} E[x_l^A x_c^B], \quad (\text{A.24})$$

portanto,

$$E[x_l x_c^*] = 2E[x_l^{\text{R}} x_c^{\text{R}}] + 2E[x_l^{\text{I}} x_c^{\text{R}}]. \quad (\text{A.25})$$

O coeficiente de coerência ρ é dado por

$$\rho = \frac{E[x_l x_c^*]}{\sqrt{E[|x_l|^2] E[|x_c|^2]}}. \quad (\text{A.26})$$

Substituindo a Equação (A.23) na Equação (A.26),

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{E[x_l^{\text{R}} x_c^{\text{R}}] - E[x_l^{\text{R}} x_c^{\text{I}}] + E[x_l^{\text{I}} x_c^{\text{R}}] + E[x_l^{\text{I}} x_c^{\text{I}}]}{\sqrt{E[|x_l|^2] E[|x_c|^2]}} \\ &= \frac{E[x_l^{\text{R}} x_c^{\text{R}}]}{\sqrt{E[|x_l|^2] E[|x_c|^2]}} - \frac{E[x_l^{\text{R}} x_c^{\text{I}}]}{\sqrt{E[|x_l|^2] E[|x_c|^2]}} \\ &\quad + \frac{E[x_l^{\text{I}} x_c^{\text{R}}]}{\sqrt{E[|x_l|^2] E[|x_c|^2]}} + \frac{E[x_l^{\text{I}} x_c^{\text{I}}]}{\sqrt{E[|x_l|^2] E[|x_c|^2]}}. \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

Pela Equação (A.3),

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{E[x_l^{\text{R}} x_c^{\text{R}}]}{2\sqrt{E[(x_l^{\text{R}})^2] E[(x_c^{\text{R}})^2]}} \\ &\quad - \frac{E[x_l^{\text{R}} x_c^{\text{I}}]}{2\sqrt{E[(x_l^{\text{R}})^2] E[(x_c^{\text{I}})^2]}} \\ &\quad + \frac{E[x_l^{\text{I}} x_c^{\text{R}}]}{2\sqrt{E[(x_l^{\text{I}})^2] E[(x_c^{\text{R}})^2]}} \\ &\quad + \frac{E[x_l^{\text{I}} x_c^{\text{I}}]}{2\sqrt{E[(x_l^{\text{I}})^2] E[(x_c^{\text{I}})^2]}}. \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

Por fim, pela Equação (A.24),

$$\rho = \frac{E[x_l^{\text{R}} x_c^{\text{R}}]}{\sqrt{E[(x_l^{\text{R}})^2] E[(x_c^{\text{R}})^2]}} + \frac{E[x_l^{\text{I}} x_c^{\text{R}}]}{\sqrt{E[(x_l^{\text{I}})^2] E[(x_c^{\text{R}})^2]}} \quad (\text{A.29a})$$

$$\rho = \frac{E[x_l^{\text{I}} x_c^{\text{I}}]}{\sqrt{E[(x_l^{\text{I}})^2] E[(x_c^{\text{I}})^2]}} - \frac{E[x_l^{\text{R}} x_c^{\text{I}}]}{\sqrt{E[(x_l^{\text{R}})^2] E[(x_c^{\text{I}})^2]}} \quad (\text{A.29b})$$

Além disso, denotando

$$\rho = \rho^{\text{R}} + \rho^{\text{I}}, \quad (\text{A.30a})$$

$$\rho_{\text{AB}} = \frac{E[x_l^{\text{A}} x_c^{\text{B}}]}{\sqrt{E[(x_l^{\text{A}})^2] E[(x_c^{\text{B}})^2]}} \quad (\text{A.30b})$$

então, pelas Equações (A.29a) e (A.29b), tem-se (genericamente)

$$\rho_{\text{AB}} = \left(\frac{\nu_{\text{A,R}}}{\nu_{\text{B,R}}} \cdot \rho \right)^{\text{R}} \quad (\text{A.31})$$

e, abrindo entre os casos possíveis,

$$\rho_{\text{RR}} = \rho^{\text{R}}, \quad (\text{A.32a})$$

$$\rho_{\text{II}} = \rho^{\text{I}}, \quad (\text{A.32b})$$

$$\rho_{\text{RI}} = -\rho^{\text{I}}, \quad (\text{A.32c})$$

$$\rho_{\text{II}} = \rho^{\text{R}}. \quad (\text{A.32d})$$

B VALOR ESPERADO DO PRODUTO DE UMA VARIÁVEL ALEATÓRIA, E A FUNÇÃO ERRO DE OUTRA

Esse desenvolvimento é semelhante ao desenvolvido por Costa (COSTA, 2001) (Apêndice A), em que foram utilizadas as mesmas técnicas para solucionar um problema levemente diferente^(a).

Seja o valor esperado

$$\mathcal{E} = \lim_{\sigma^2 \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma} \mathbb{E} \left[g_{\sigma}(y_1 - \beta) y_2 \right], \quad (\text{B.1})$$

em que y_1 e y_2 são variáveis Gaussianas reais com média nula, β é uma constante real, e $g_{\sigma}(y)$ é dado por

$$g_{\sigma}(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^y \exp \left\{ -\frac{v^2}{2\sigma^2} \right\} dv. \quad (\text{B.2})$$

É possível utilizar o Teorema de Price Modificado (PAWULA, 1967). Para isso, y_1 e y_2 são transformados em variáveis que possuam variância unitária z_1 e z_2 , tal que

$$y_1 = \sigma_1 z_1, \quad (\text{B.3a})$$

$$y_2 = \sigma_2 z_2, \quad (\text{B.3b})$$

onde σ_1 é o desvio-padrão de y_1 , e σ_2 é o desvio-padrão de y_2 .

B.1 DETERMINAÇÃO DE $\mathcal{H}[G(\mathbf{z})]$

Substituindo as variáveis de Equação (B.3) em Equação (B.1), tem-se

$$\mathbb{E} [g_{\sigma}(y_1 - \beta) y_2] = \mathbb{E} [g_{\sigma}(\sigma_1 z_1 - \beta) \sigma_2 z_2]. \quad (\text{B.4})$$

A partir disso, a função G_{z_1, z_2} é definida como sendo

$$G(z_1, z_2) = g_{\sigma}(\sigma_1 z_1 - \beta) \sigma_2 z_2. \quad (\text{B.5})$$

O termo $\mathcal{H}[G(z_1, z_2)]$ é definido como sendo

$$\mathcal{H}[G(z_1, z_2)] = \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \rho_{i,j} \frac{\partial^2 G(z_1, z_2)}{\partial z_1 \partial z_2}, \quad (\text{B.6})$$

em que a derivada parcial pode ser obtida a partir de Equação (B.5) e da definição da função-erro, como sendo

$$\frac{\partial^2 G(z_1, z_2)}{\partial z_1 \partial z_2} = \sigma_1 \sigma_2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp \left\{ -\frac{(\sigma_1 z_1 - \beta)^2}{2\sigma^2} \right\}, \quad (\text{B.7})$$

e com isso, $\mathcal{H}[G(z_1, z_2)]$ é redefinido como

$$\mathcal{H}[G(z_1, z_2)] = \rho \sigma_1 \sigma_2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp \left\{ -\frac{(\sigma_1 z_1 - \beta)^2}{2\sigma^2} \right\}, \quad (\text{B.8})$$

em que ρ é a covariância entre z_1 e z_2 .

^(a)Em sua dissertação, era considerado que os sinais não possuíam média.

B.2 DETERMINAÇÃO DA EXPECTATIVA PARAMETRIZADA

Calculando o valor esperado de $\mathcal{H}[G(z_1, z_2)]$, onde $E[z_1 z_2] = \alpha\rho$, tem-se

$$\begin{aligned} E_\alpha [\mathcal{H}[G(z_1, z_2)]] &= \\ &= \rho\sigma_1\sigma_2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{(\sigma_1 z_1 - \beta)^2}{2\sigma^2}\right\} f_{Z_1, Z_2}(z_1, z_2) dz_1 dz_2 \\ &= \rho\sigma_1\sigma_2 \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{(\sigma_1 z_1 - \beta)^2}{2\sigma^2}\right\} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_{Z_1, Z_2}(z_1, z_2) dz_2 \right] dz_1, \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

onde $f_{Z_1, Z_2}(z_1, z_2)$ é a função de densidade de probabilidade Gaussiana bivariada, definida como (MILLER, 1964)

$$f_{Z_1, Z_2}(z_1, z_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1 - (\rho\alpha)^2}} \exp\left\{-\frac{z_1^2 - z_1 z_2 \rho\alpha + z_2^2}{2(1 - (\rho\alpha)^2)}\right\}. \quad (\text{B.10})$$

Integrando primeiramente em relação a z_2 , obtém-se a função de densidade de probabilidade marginal em relação a z_1 $f_{Z_1}(z_1)$, dada por

$$f_{Z_1}(z_1) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f_{Z_1, Z_2}(z_1, z_2) dz_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{z_1^2}{2}\right\}. \quad (\text{B.11})$$

Com isso, resta o desenvolvimento da integral em função de z_1 , que se dá a seguir. Substituindo a Equação (B.10) na Equação (B.9), tem-se que

$$E_\alpha [\mathcal{H}[G(z_1, z_2)]] = \rho\sigma_1\sigma_2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{(\sigma_1 z_1 - \beta)^2}{2\sigma^2}\right\} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{z_1^2}{2}\right\} dz_1. \quad (\text{B.12})$$

Observando somente a integral, tem-se

$$\mathbf{I} = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{(\sigma_1 z_1 - \beta)^2}{2\sigma^2} - \frac{z_1^2}{2}\right\} dz_1, \quad (\text{B.13a})$$

e portanto

$$E_\alpha [\mathcal{H}[G(z_1, z_2)]] = \rho\sigma_1\sigma_2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \mathbf{I}. \quad (\text{B.13b})$$

Analisando o argumento da exponencial da Equação (B.13a),

$$\begin{aligned} -\frac{q}{2} &= -\frac{(\sigma_1 z_1 - \beta)^2}{2\sigma^2} - \frac{z_1^2}{2} \\ &= -\frac{1}{2} \left[\left(\left[\frac{\sigma_1}{\sigma} \right]^2 + 1 \right) z_1^2 - \left(\frac{2\sigma_1\beta}{\sigma^2} \right) z_1 + \left(\frac{\beta}{\sigma} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (\text{B.14a})$$

$$q = \left(\left[\frac{\sigma_1}{\sigma} \right]^2 + 1 \right) z_1^2 - \left(\frac{2\sigma_1\beta}{\sigma^2} \right) z_1 + \left(\frac{\beta}{\sigma} \right)^2. \quad (\text{B.14b})$$

Definindo a^2 , ab e c^2 como sendo

$$a^2 = \left(\left[\frac{\sigma_1}{\sigma} \right]^2 + 1 \right) = \frac{\sigma_1^2 + \sigma^2}{\sigma^2}, \quad (\text{B.15a})$$

$$ab = \left(\frac{\sigma_1 \beta}{\sigma^2} \right), \quad (\text{B.15b})$$

$$c^2 = \left(\frac{\beta}{\sigma} \right)^2, \quad (\text{B.15c})$$

chega-se a

$$b^2 = \frac{(ab)^2}{a^2} = \frac{\sigma_1^2 \beta^2}{\sigma^4} \cdot \frac{\sigma^2}{\sigma_1^2 + \sigma^2} = \frac{\sigma_1^2 \beta^2}{(\sigma_1^2 + \sigma^2) \sigma^2}. \quad (\text{B.15d})$$

A partir disso a Equação (B.14b) é reescrita como

$$\begin{aligned} q &= a^2 z_1^2 - 2ab z_1 + (b^2 - b^2) + c^2 \\ &= (a z_1 - b)^2 + c^2 - b^2 \end{aligned} \quad (\text{B.16a})$$

$$\begin{aligned} &= \left(z_1 - \frac{b}{a} \right)^2 \cdot a^2 + c^2 - b^2 \\ q &= \frac{\left(z_1 - \frac{\sigma_1 \beta}{\sigma_1^2 + \sigma^2} \right)^2}{\frac{\sigma^2}{\sigma_1^2 + \sigma^2}} + \frac{\beta^2}{\sigma_1^2 + \sigma^2}. \end{aligned} \quad (\text{B.16b})$$

Definindo a substituição de z_1 por y como

$$y = a \cdot \left(z_1 - \frac{b}{a} \right), \quad (\text{B.17a})$$

$$dz_1 = \frac{1}{a} dy, \quad (\text{B.17b})$$

e aplicando as Equações (B.16b) e (B.17) na Equação (B.13a), tem-se

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{y^2}{2} \right\} \cdot \exp \left\{ -\frac{\beta^2}{2(\sigma_1^2 + \sigma^2)} \right\} \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma^2}} dy \\ &= \sqrt{2\pi} \exp \left\{ -\frac{\beta^2}{2(\sigma_1^2 + \sigma^2)} \right\} \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma^2}}. \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

Substituindo esse resultado na Equação (B.12), desenvolve-se

$$\begin{aligned} E_\alpha [\mathcal{H}[G(z_1, z_2)]] &= \rho \sigma_1 \sigma_2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{2\pi} \exp \left\{ -\frac{\beta^2}{2(\sigma_1^2 + \sigma^2)} \right\} \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma^2}} \\ E_\alpha [\mathcal{H}[G(z_1, z_2)]] &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\rho \sigma \sigma_1 \sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma^2}} \exp \left\{ -\frac{\beta^2}{2(\sigma_1^2 + \sigma^2)} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

B.3 CÁLCULO DA EXPECTATIVA

Segundo (PAWULA, 1967),

$$E[g_\sigma(y_1 - \beta) y_2] = E[g_\sigma(\sigma_1 z_1 - \beta) \sigma_2 z_2], \quad (\text{B.20})$$

e esse valor esperado pode ser calculado a partir de $E_\alpha[\mathcal{H}[G(z_1, z_2)]]$, como

$$E[g_\sigma(y_1 - \beta) y_2] = E_0\{\mathcal{H}[G(z_1, z_2)]\} + \int_0^1 E_\alpha\{\mathcal{H}[G(z_1, z_2)]\} d\alpha. \quad (\text{B.21})$$

Para $\alpha = 0$, z_1 e z_2 são descorrelacionados, e com isso,

$$E_0[\mathcal{H}[G(z_1, z_2)]] = E[g_\sigma(y_1 - \beta)] \cdot E[y_2] = 0. \quad (\text{B.22})$$

Além disso, como a expectativa da Equação (B.19) não é uma função de α , a integral pode ser separada e trivialmente resolvida, de forma que

$$\int_0^1 E_\alpha[\mathcal{H}[G(z_1, z_2)]] d\alpha = E_\alpha[\mathcal{H}[G(z_1, z_2)]] \int_0^1 d\alpha \quad (\text{B.23})$$

Substituindo as Equações (B.22) e (B.23) na Equação (B.21), chega-se a

$$E[g_\sigma(y_1 - \beta) y_2] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\rho \sigma_1 \sigma_2 \sigma}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma^2}} \exp\left\{-\frac{\beta^2}{2(\sigma_1^2 + \sigma^2)}\right\}. \quad (\text{B.24})$$

B.4 APLICAÇÃO DO LIMITE

Retornando à Equação (B.1), e substituindo a Equação (B.24), tem-se

$$\mathcal{E} = \lim_{\sigma^2 \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\rho \sigma_1 \sigma_2 \sigma}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma^2}} \exp\left\{-\frac{\beta^2}{2(\sigma_1^2 + \sigma^2)}\right\}, \quad (\text{B.25a})$$

em que, aplicando o limite (já que agora ele não causa indeterminações),

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\rho \sigma_1 \sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2}} \exp\left\{-\frac{\beta^2}{2\sigma_1^2}\right\} \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \rho \sigma_2 \exp\left\{-\frac{\beta^2}{2\sigma_1^2}\right\}. \end{aligned} \quad (\text{B.25b})$$

Utilizando que

$$\rho = E[z_1 z_2] = \frac{1}{\sigma_1 \sigma_2} E[y_1 y_2], \quad (\text{B.26a})$$

$$\sigma_1^2 = E[y_1^2], \quad (\text{B.26b})$$

chega-se a

$$\lim_{\sigma^2 \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma} E[g_\sigma(y_1 - \beta) y_2] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{E[y_1 y_2]}{\sqrt{E[y_1^2]}} \cdot \exp\left\{-\frac{\beta^2}{2E[y_1^2]}\right\}. \quad (\text{B.27})$$

C VALOR ESPERADO DO PRODUTO ENTRE A FUNÇÃO ERRO DE DUAS VARIÁVEIS ALEATÓRIAS

Esse desenvolvimento é semelhante ao desenvolvido por Costa (COSTA, 2001) (Apêndice B), em que foram utilizadas as mesmas técnicas para solucionar um problema levemente diferente^(a).

Seja o valor esperado

$$\mathcal{E} = \lim_{\substack{\sigma_a^2 \rightarrow 0 \\ \sigma_b^2 \rightarrow 0}} \frac{1}{\sigma_a} \frac{1}{\sigma_b} \mathbb{E}[g_{\sigma_a}(y_1 - \beta_1) g_{\sigma_b}(y_2 - \beta_2)], \quad (\text{C.1})$$

em que y_1 e y_2 são variáveis Gaussianas reais com média nula, β_1 e β_2 são constantes reais, e $g_\sigma(y)$ é dado por

$$g_\sigma(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^y \exp\left\{-\frac{v^2}{2\sigma^2}\right\} dv. \quad (\text{C.2})$$

É possível utilizar o Teorema de Price Modificado (PAWULA, 1967). Para isso, transformase y_1 e y_2 em variáveis que possuam variância unitária, tal que

$$y_1 = \sigma_1 z_1, \quad (\text{C.3a})$$

$$y_2 = \sigma_2 z_2, \quad (\text{C.3b})$$

onde σ_1 é o desvio-padrão de y_1 , e σ_2 é o desvio-padrão de y_2 .

C.1 DETERMINAÇÃO DE $\mathcal{H}[G(z_1, z_2)]$

Define-se $G(z_1, z_2)$ como sendo

$$G(z_1, z_2) = g_{\sigma_a}(\sigma_{y_1} z_1 - \beta_1) g_{\sigma_b}(\sigma_{y_2} z_2 - \beta_2). \quad (\text{C.4})$$

O operador $\mathcal{H}[G(\mathbf{z})]$ é definido como

$$\mathcal{H}[G(\mathbf{z})] = \sum_{i < j} \rho_{i,j} \frac{\partial^2 G(\mathbf{z})}{\partial z_i \partial z_j}, \quad (\text{C.5})$$

em que, para o caso em que $G(\cdot)$ é uma função de somente duas variáveis,

$$\mathcal{H}[G(z_1, z_2)] = \rho \frac{\partial^2 G(z_1, z_2)}{\partial z_1 \partial z_2}. \quad (\text{C.6})$$

A partir da Equação (C.4), chega-se em

$$\mathcal{H}[G(z_1, z_2)] = \rho \sigma_{y_1} \sigma_{y_2} \frac{2}{\pi} \exp\left\{-\frac{(\sigma_{y_1} z_1 - \beta_1)^2}{2\sigma_a^2}\right\} \exp\left\{-\frac{(\sigma_{y_2} z_2 - \beta_2)^2}{2\sigma_b^2}\right\}. \quad (\text{C.7})$$

^(a)Em sua dissertação, era considerado que os sinais não possuíam média.

Utilizando as substituições

$$\frac{\sigma_{y_1}}{\sigma_a} = v_1, \quad (\text{C.8a})$$

$$\frac{\sigma_{y_2}}{\sigma_b} = v_2, \quad (\text{C.8b})$$

$$\frac{\beta_1}{\sigma_a} = \mu_1, \quad (\text{C.8c})$$

$$\frac{\beta_2}{\sigma_b} = \mu_2, \quad (\text{C.8d})$$

$$\bar{\mu}_1 = \frac{\mu_1}{v_1}, \quad (\text{C.8e})$$

$$\bar{\mu}_2 = \frac{\mu_2}{v_2}, \quad (\text{C.8f})$$

reescreve-se a Equação (C.7) como

$$\mathcal{H}[G(z_1, z_2)] = \rho \sigma_{y_1} \sigma_{y_2} \frac{2}{\pi} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(v_1^2 [z_1 - \bar{\mu}_1]^2 + v_2^2 [z_2 - \bar{\mu}_2]^2 \right) \right\}. \quad (\text{C.9})$$

Definindo

$$\bar{\boldsymbol{\mu}} = [\bar{\mu}_1 \ \bar{\mu}_2]^\top, \quad (\text{C.10a})$$

$$\mathbf{z} = [z_1 \ z_2]^\top \quad (\text{C.10b})$$

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} v_1^2 & 0 \\ 0 & v_2^2 \end{bmatrix}, \quad (\text{C.10c})$$

então é reescrever $\mathcal{H}[G(\mathbf{z})]$ usando notação matricial, da forma

$$\mathcal{H}[G(\mathbf{z})] = \rho \sigma_{y_1} \sigma_{y_2} \frac{2}{\pi} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left((\mathbf{z} - \bar{\boldsymbol{\mu}})^\top \mathbf{Y} (\mathbf{z} - \bar{\boldsymbol{\mu}}) \right) \right\}. \quad (\text{C.11})$$

C.2 DETERMINAÇÃO DA EXPECTATIVA PARAMETRIZADA

Calculando-se o valor esperado de $\mathcal{H}[G(z_1, z_2)]$, considerando que $E[z_1 z_2] = \alpha \rho$, tem-se

$$E_\alpha [\mathcal{H}[G(\mathbf{z})]] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H}[G(\mathbf{z})] f_{\mathbf{z}}(\mathbf{z}) d\mathbf{z}, \quad (\text{C.12})$$

em que $f_{\mathbf{z}}(\mathbf{z})$ é a função de densidade de probabilidade conjunta. Para o caso de duas variáveis Gaussianas de média zero, ela é dada por (MILLER, 1964)

$$f_{\mathbf{z}}(\mathbf{z}) = \frac{1}{2\pi |\mathbf{K}_\alpha|^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \mathbf{z}^\top \mathbf{K}_\alpha^{-1} \mathbf{z} \right\}, \quad (\text{C.13})$$

no qual \mathbf{K}_α é a matriz de coerência entre z_1 e z_2 , dada por

$$\mathbf{K}_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & \rho\alpha \\ \rho\alpha & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{C.14})$$

Com isso, a Equação (C.12) é reescrita como sendo

$$\begin{aligned} E_\alpha [\mathcal{H}[G(\mathbf{z})]] &= \frac{2}{\pi} \frac{\rho\sigma_{y_1}\sigma_{y_2}}{2\pi|\mathbf{K}_\alpha|^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left((\mathbf{z} - \bar{\boldsymbol{\mu}})^\top \mathbf{Y} (\mathbf{z} - \bar{\boldsymbol{\mu}}) + \mathbf{z}^\top \mathbf{K}_\alpha^{-1} \mathbf{z} \right) \right\} d\mathbf{z} \\ &= a_0 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{1}{2} q(\mathbf{z}) \right\} d\mathbf{z}, \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

em que

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \frac{\rho\sigma_{y_1}\sigma_{y_2}}{2\pi|\mathbf{K}_\alpha|^{1/2}}, \quad (\text{C.16a})$$

e

$$q(\mathbf{z}) = (\mathbf{z} - \bar{\boldsymbol{\mu}})^\top \mathbf{Y} (\mathbf{z} - \bar{\boldsymbol{\mu}}) + \mathbf{z}^\top \mathbf{K}_\alpha^{-1} \mathbf{z}. \quad (\text{C.16b})$$

Expandindo $q(\mathbf{z})$, tem-se

$$q(\mathbf{z}) = \mathbf{z}^\top \mathbf{Y} \mathbf{z} - \bar{\boldsymbol{\mu}}^\top \mathbf{Y} \mathbf{z} - \mathbf{z}^\top \mathbf{Y} \bar{\boldsymbol{\mu}} + \bar{\boldsymbol{\mu}}^\top \mathbf{Y} \bar{\boldsymbol{\mu}} + \mathbf{z}^\top \mathbf{K}_\alpha^{-1} \mathbf{z}. \quad (\text{C.17a})$$

Completando o quadrado na Equação (C.17a) em relação a \mathbf{z} , chega-se em

$$q(\mathbf{z}) = (\mathbf{z} - \boldsymbol{\delta})^\top \boldsymbol{\Omega} (\mathbf{z} - \boldsymbol{\delta}) - \boldsymbol{\delta}^\top \boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{\delta} + \bar{\boldsymbol{\mu}}^\top \mathbf{Y} \bar{\boldsymbol{\mu}}, \quad (\text{C.17b})$$

onde

$$\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{Y} + \mathbf{K}_\alpha^{-1}, \quad (\text{C.18a})$$

e^(b)

$$\boldsymbol{\delta} = \left[\bar{\boldsymbol{\mu}}^\top \mathbf{Y} \boldsymbol{\Omega}^{-1} \right]^\top. \quad (\text{C.18b})$$

Substituindo a Equação (C.17b) na Equação (C.15), tem-se

$$\begin{aligned} E_\alpha [\mathcal{H}[G(\mathbf{z})]] &= a_0 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left((\mathbf{z} - \boldsymbol{\delta})^\top \boldsymbol{\Omega} (\mathbf{z} - \boldsymbol{\delta}) - \boldsymbol{\delta}^\top \boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{\delta} + \bar{\boldsymbol{\mu}}^\top \mathbf{Y} \bar{\boldsymbol{\mu}} \right) \right\} d\mathbf{z} \\ &= a_0 \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(-\boldsymbol{\delta}^\top \boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{\delta} + \bar{\boldsymbol{\mu}}^\top \mathbf{Y} \bar{\boldsymbol{\mu}} \right) \right\} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left((\mathbf{z} - \boldsymbol{\delta})^\top \boldsymbol{\Omega} (\mathbf{z} - \boldsymbol{\delta}) \right) \right\} d\mathbf{z}. \end{aligned} \quad (\text{C.19})$$

^(b)Rigorosamente, a relação é $\boldsymbol{\delta}^\top \boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{\delta} = \bar{\boldsymbol{\mu}}^\top \mathbf{Y} \mathbf{z}$. Supondo que $\boldsymbol{\delta}$ seja independente de \mathbf{z} , a solução da Equação (C.18b) é obtida.

Realizando a substituição $\mathbf{z} - \boldsymbol{\delta} = \mathbf{u}$ na integral dupla da Equação (C.19), tem-se

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2} \left((\mathbf{z} - \boldsymbol{\delta})^T \boldsymbol{\Omega} (\mathbf{z} - \boldsymbol{\delta}) \right)\right\} d\mathbf{z} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2} \left(\mathbf{u}^T \boldsymbol{\Omega} \mathbf{u} \right)\right\} d\mathbf{u}, \quad (\text{C.20})$$

que, segundo (MILLER, 1964), resulta em

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2} \left(\mathbf{u}^T \boldsymbol{\Omega} \mathbf{u} \right)\right\} d\mathbf{u} = 2\pi \left| \boldsymbol{\Omega}^{-1} \right|^{1/2}. \quad (\text{C.21})$$

Com isso, tem-se que a Equação (C.19) se torna

$$\begin{aligned} E_{\alpha} \left[\mathcal{H}[G(\mathbf{z})] \right] &= \frac{2}{\pi} \frac{\rho \sigma_{y_1} \sigma_{y_2}}{2\pi |\mathbf{K}_{\alpha}|^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \left(\bar{\boldsymbol{\mu}}^T \mathbf{Y} \bar{\boldsymbol{\mu}} - \boldsymbol{\delta}^T \boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{\delta} \right)\right\} 2\pi \left| \boldsymbol{\Omega}^{-1} \right|^{1/2} \\ &= \frac{2}{\pi} \rho \sigma_{y_1} \sigma_{y_2} \frac{|\boldsymbol{\Omega}|^{-1/2}}{|\mathbf{K}_{\alpha}|^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \left(\bar{\boldsymbol{\mu}}^T \mathbf{Y} \bar{\boldsymbol{\mu}} - \boldsymbol{\delta}^T \boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{\delta} \right)\right\}. \end{aligned} \quad (\text{C.22})$$

O determinante de \mathbf{K}_{α} , definido na Equação (C.14), é

$$|\mathbf{K}_{\alpha}| = 1 - (\rho\alpha)^2. \quad (\text{C.23a})$$

Também define-se η como

$$\eta = \frac{1}{|\mathbf{K}_{\alpha}|}. \quad (\text{C.23b})$$

$\boldsymbol{\Omega}$ é definido conforme a Equação (C.18a). A partir da Equação (C.18a), e das Equações (C.10c) e (C.23a), pode-se reescrever $\boldsymbol{\Omega}$ como sendo

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Omega} &= \begin{bmatrix} v_1^2 |\mathbf{K}_{\alpha}| + 1 & -\rho\alpha \\ -\rho\alpha & v_2^2 |\mathbf{K}_{\alpha}| + 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{|\mathbf{K}_{\alpha}|} \\ &= \begin{bmatrix} v_1^2 + \eta & -\eta\rho\alpha \\ -\eta\rho\alpha & v_2^2 + \eta \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{C.24a})$$

e seu determinante é

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{\Omega}| &= \left([v_1 v_2 |\mathbf{K}_{\alpha}|]^2 + [v_1^2 v_2^2] |\mathbf{K}_{\alpha}| + 1 - (\rho\alpha)^2 \right) \cdot \frac{1}{|\mathbf{K}_{\alpha}|^2} \\ &= \left([v_1 v_2]^2 |\mathbf{K}_{\alpha}| + [v_1^2 v_2^2] + 1 \right) \cdot \frac{1}{|\mathbf{K}_{\alpha}|^2}. \end{aligned} \quad (\text{C.24b})$$

Utilizando a propriedade de que $|\mathbf{A}^{-1}| = |\mathbf{A}|^{-1}$, substitui-se a Equação (C.24b) na Equação (C.22), chegando-se a

$$\begin{aligned} E_{\alpha} \left[\mathcal{H}[G(\mathbf{z})] \right] &= \frac{2}{\pi} \rho \sigma_{y_1} \sigma_{y_2} \sqrt{\frac{|\mathbf{K}_{\alpha}|}{\left([v_1 v_2]^2 |\mathbf{K}_{\alpha}| + [v_1^2 v_2^2] + 1 \right)}} \\ &\quad \cdot \frac{1}{|\mathbf{K}_{\alpha}|^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \left(\bar{\boldsymbol{\mu}}^T \mathbf{Y} \bar{\boldsymbol{\mu}} - \boldsymbol{\delta}^T \boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{\delta} \right)\right\}, \end{aligned} \quad (\text{C.25})$$

$$E_\alpha \left[\mathcal{H}[G(\mathbf{z})] \right] = \frac{2}{\pi} \frac{\rho \sigma_{y_1} \sigma_{y_2}}{\rho v_1 v_2} \left(\frac{1}{\frac{v_1^2 v_2^2 + v_1^2 + v_2^2 + 1}{(\rho v_1 v_2)^2} - \alpha^2} \right)^{1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\bar{\boldsymbol{\mu}}^\top \mathbf{Y} \bar{\boldsymbol{\mu}} - \boldsymbol{\delta}^\top \boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{\delta} \right) \right\}. \quad (\text{C.26})$$

Definindo L como sendo

$$L = \frac{v_1^2 v_2^2 + v_1^2 + v_2^2 + 1}{(\rho v_1 v_2)^2}, \quad (\text{C.27})$$

e substituindo v_1 e v_2 conforme a Equação (C.8) a Equação (C.25) pode ser simplificada como sendo

$$E_\alpha \left[\mathcal{H}[G(\mathbf{z})] \right] = \frac{2}{\pi} \sigma_a \sigma_b \left(\frac{1}{L - \alpha^2} \right)^{1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\bar{\boldsymbol{\mu}}^\top \mathbf{Y} \bar{\boldsymbol{\mu}} - \boldsymbol{\delta}^\top \boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{\delta} \right) \right\}. \quad (\text{C.28})$$

Do argumento da exponencial, são definidos ξ e $s(\alpha)$ como

$$s(\alpha) = \boldsymbol{\delta}^\top \boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{\delta}, \quad (\text{C.29a})$$

$$\xi = \bar{\boldsymbol{\mu}}^\top \mathbf{Y} \bar{\boldsymbol{\mu}}. \quad (\text{C.29b})$$

Usando as definições descritas nas Equações (C.10a), (C.10c), (C.18a) e (C.18b), reescreve-se $s(\alpha)$ tal que

$$\begin{aligned} s(\alpha) &= \bar{\boldsymbol{\mu}}^\top \mathbf{Y} \boldsymbol{\Omega}^{-1} \boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{\Omega}^{-1} \mathbf{Y}^\top \bar{\boldsymbol{\mu}} \\ &= \bar{\boldsymbol{\mu}}^\top \mathbf{Y} \boldsymbol{\Omega}^{-1} \mathbf{Y}^\top \bar{\boldsymbol{\mu}}. \end{aligned} \quad (\text{C.30})$$

Define-se uma variável temporária $\boldsymbol{\gamma}$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\gamma} &= \mathbf{Y}^\top \bar{\boldsymbol{\mu}} \\ &= \begin{bmatrix} v_1^2 & 0 \\ 0 & v_2^2 \end{bmatrix}^\top \cdot \begin{bmatrix} \bar{\mu}_1 \\ \bar{\mu}_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{C.31a})$$

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} v_1^2 \bar{\mu}_1 \\ v_1^2 \bar{\mu}_2 \end{bmatrix}, \\ \boldsymbol{\gamma} &= \begin{bmatrix} v_1 \mu_1 \\ v_2 \mu_2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{C.31b})$$

onde foram utilizadas as definições de $\bar{\mu}_1$ e $\bar{\mu}_2$, conforme a Equação (C.8). Dessa maneira, tem-se também que

$$\bar{\boldsymbol{\mu}}^\top \mathbf{Y} = \left(\mathbf{Y}^\top \bar{\boldsymbol{\mu}} \right)^\top = \boldsymbol{\gamma}^\top, \quad (\text{C.32})$$

e portanto da Equação (C.30) tem-se

$$\begin{aligned}
 s(\alpha) &= \boldsymbol{\gamma}^T \boldsymbol{\Omega}^{-T} \boldsymbol{\gamma} \\
 &= \begin{bmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 \end{bmatrix} \cdot \left(\frac{1}{|\boldsymbol{\Omega}|} \begin{bmatrix} \Omega_{2,2} & -\Omega_{1,2} \\ -\Omega_{2,1} & \Omega_{1,1} \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} \\
 s(\alpha) &= \frac{1}{|\boldsymbol{\Omega}|} \cdot [\gamma_1 \Omega_{2,2} \gamma_1 - \gamma_1 \Omega_{1,2} \gamma_2 - \gamma_2 \Omega_{2,1} \gamma_1 + \gamma_2 \Omega_{1,1} \gamma_2].
 \end{aligned} \tag{C.33}$$

Através da Equação (C.24a) e da definição de $\boldsymbol{\gamma}$ da Equação (C.31b),

$$\begin{aligned}
 s(\alpha) &= \frac{v_1^2 \mu_1^2 v_2^2 + v_1^2 \mu_1^2 \eta + v_2^2 \mu_2^2 v_1^2 + v_2^2 \mu_2^2 \eta - 2v_1 v_2 \mu_1 \mu_2 \eta \rho \alpha}{v_1^2 v_2^2 + (v_1^2 + v_2^2) \eta + \eta^2 - (\eta \rho \alpha)^2} \\
 s(\alpha) &= \frac{\eta}{\eta} \cdot \frac{\frac{1}{\eta} v_1^2 v_2^2 (\mu_1^2 + \mu_2^2) + v_1^2 \mu_1^2 + v_2^2 \mu_2^2 - 2v_1 v_2 \mu_1 \mu_2 \rho \alpha}{\frac{1}{\eta} v_1^2 v_2^2 + (v_1^2 + v_2^2) + (1 - [\rho \alpha]^2) \eta}.
 \end{aligned} \tag{C.34a}$$

Substituindo η pela sua definição, conforme a Equação (C.23a),

$$s(\alpha) = \frac{(1 - [\rho \alpha]^2) v_1^2 v_2^2 (\mu_1^2 + \mu_2^2) + v_1^2 \mu_1^2 + v_2^2 \mu_2^2 - 2v_1 v_2 \mu_1 \mu_2 \rho \alpha}{(1 - [\rho \alpha]^2) v_1^2 v_2^2 + (v_1^2 + v_2^2) + \cancel{(1 - [\rho \alpha]^2)} \frac{1}{\cancel{(1 - [\rho \alpha]^2)}}} \tag{C.34b}$$

e com isso

$$s(\alpha) = \frac{(1 - [\rho \alpha]^2) v_1^2 v_2^2 (\mu_1^2 + \mu_2^2) + v_1^2 \mu_1^2 + v_2^2 \mu_2^2 - 2v_1 v_2 \mu_1 \mu_2 \rho \alpha}{(1 - [\rho \alpha]^2) v_1^2 v_2^2 + (v_1^2 + v_2^2 + 1)}. \tag{C.34c}$$

Desenvolvendo $\tilde{\zeta}$ da Equação (C.29b),

$$\begin{aligned}
 \tilde{\zeta} &= \bar{\boldsymbol{\mu}}^T \mathbf{Y} \bar{\boldsymbol{\mu}} \\
 &= \begin{bmatrix} \bar{\mu}_1 \\ \bar{\mu}_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1^2 & 0 \\ 0 & v_2^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{\mu}_1 & \bar{\mu}_2 \end{bmatrix} \\
 &= \bar{\mu}_1^2 v_1^2 + \bar{\mu}_2^2 v_2^2 \\
 &= \mu_1^2 + \mu_2^2.
 \end{aligned} \tag{C.35}$$

Com isso, tem-se

$$\begin{aligned} \delta^\top \Omega \delta - \bar{\mu}^\top \mathbf{Y} \bar{\mu} &= s(\alpha) - \xi = \\ &= \left[\left(1 - [\rho\alpha]^2\right) v_1^2 v_2^2 \left(\mu_1^2 + \mu_2^2\right) + v_1^2 \mu_1^2 + v_2^2 \mu_2^2 - 2v_1 v_2 \mu_1 \mu_2 \rho \alpha \right. \\ &\quad \left. - \left(\mu_1^2 + \mu_2^2\right) \cdot \left(\left(1 - [\rho\alpha]^2\right) v_1^2 v_2^2 + \left(v_1^2 + v_2^2\right) + 1 \right) \right] \\ &\quad \cdot \frac{1}{\left(1 - [\rho\alpha]^2\right) v_1^2 v_2^2 + \left(v_1^2 + v_2^2 + 1\right)} \end{aligned} \quad (\text{C.36a})$$

$$\begin{aligned} &= \left[\left(1 - [\rho\alpha]^2\right) v_1^2 v_2^2 \left(\mu_1^2 + \mu_2^2\right) + v_1^2 \mu_1^2 + v_2^2 \mu_2^2 - 2v_1 v_2 \mu_1 \mu_2 \rho \alpha \right. \\ &\quad \left. - \left[\left(1 - [\rho\alpha]^2\right) v_1^2 v_2^2 \left(\mu_1^2 + \mu_2^2\right) + v_1^2 \mu_1^2 + v_2^2 \mu_2^2 + v_1^2 \mu_2^2 + v_2^2 \mu_1^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \mu_1^2 + \mu_2^2 \right] \right] \cdot \frac{1}{\left(1 - [\rho\alpha]^2\right) v_1^2 v_2^2 + \left(v_1^2 + v_2^2 + 1\right)}, \end{aligned}$$

$$s(\alpha) - \xi = -\frac{\mu_1^2(v_2^2 + 1) + \mu_2^2(v_1^2 + 1) - 2v_1 v_2 \mu_1 \mu_2 \rho \alpha}{\left(1 - [\rho\alpha]^2\right) v_1^2 v_2^2 + \left(v_1^2 + v_2^2 + 1\right)}. \quad (\text{C.36b})$$

Colocando $v_1^2 v_2^2 \rho^2$ em evidência no denominador,

$$s(\alpha) - \xi = -\frac{\mu_1^2(v_2^2 + 1) + \mu_2^2(v_1^2 + 1) - 2v_1 v_2 \mu_1 \mu_2 \rho \alpha}{(v_1 v_2 \rho)^2 \left(\frac{v_1^2 v_2^2 + v_1^2 + v_2^2 + 1}{(\rho v_1 v_2)^2} - \alpha^2 \right)}. \quad (\text{C.36c})$$

Utilizando L da Equação (C.27),

$$s(\alpha) - \xi = -\frac{\mu_1^2(v_2^2 + 1) + \mu_2^2(v_1^2 + 1) - 2v_1 v_2 \mu_1 \mu_2 \rho \alpha}{(v_1 v_2 \rho)^2 (L - \alpha^2)}. \quad (\text{C.36d})$$

Através das definições de v_1 , v_2 , μ_1 e μ_2 (Equação (C.8)),

$$s(\alpha) - \xi = -\frac{\left(\frac{\beta_1}{\sigma_a}\right)^2 \left(\left(\frac{\sigma_{y_2}}{\sigma_b}\right)^2 + 1 \right) + \left(\frac{\beta_2}{\sigma_b}\right)^2 \left(\left(\frac{\sigma_{y_1}}{\sigma_a}\right)^2 + 1 \right) - 2\frac{\sigma_{y_1} \sigma_{y_2} \beta_1 \beta_2}{\sigma_a^2 \sigma_b^2} \rho \alpha}{\left(\frac{\sigma_{y_1} \sigma_{y_2}}{\sigma_a \sigma_b} \rho\right)^2 (L - \alpha^2)}, \quad (\text{C.36e})$$

e por fim, simplificando os termos, chega-se a

$$s(\alpha) - \xi = -\frac{\beta_1^2 (\sigma_{y_2}^2 + \sigma_b^2) + \beta_2^2 (\sigma_{y_1}^2 + \sigma_a^2) - 2\sigma_{y_1} \sigma_{y_2} \beta_1 \beta_2 \rho \alpha}{\left(\sigma_{y_1} \sigma_{y_2} \rho\right)^2 (L - \alpha^2)}. \quad (\text{C.37})$$

C.3 CÁLCULO DA EXPECTATIVA

Da Equação (C.28),

$$E_{\alpha} \left[\mathcal{H} [G(z_1, z_2)] \right] = \frac{1}{2\pi} \sigma_a \sigma_b \rho \left(\frac{1}{L\rho^2 - [\rho\alpha]^2} \right)^{1/2} \exp \left\{ \frac{1}{2} (s(\alpha) - \xi) \right\}. \quad (C.38)$$

Segundo (PAWULA, 1967),

$$E[G(z_1, z_2)] = E_0[G(z_1, z_2)] + \int_{\alpha=0}^1 E_{\alpha} \left[\mathcal{H} [G(z_1, z_2)] \right] d\alpha, \quad (C.39)$$

em que $E_0[\cdot]$ é o caso em que os sinais são descorrelacionados, e portanto

$$E_0[G(z_1, z_2)] = E \left[g_{\sigma_a}(\sigma_{y_1} z_1 - \beta_1) \right] E \left[g_{\sigma_b}(\sigma_{y_2} z_2 - \beta_2) \right]. \quad (C.40)$$

C.4 APLICAÇÃO DOS LIMITES

Substituindo a Equação (C.39) na Equação (C.1), nota-se que há a necessidade de aplicar os limites. Com isso,

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \lim_{\substack{\sigma_a^2 \rightarrow 0 \\ \sigma_b^2 \rightarrow 0}} \frac{1}{\sigma_a} \frac{1}{\sigma_b} E[G(z_1, z_2)] \\ &= \lim_{\substack{\sigma_a^2 \rightarrow 0 \\ \sigma_b^2 \rightarrow 0}} \frac{1}{\sigma_a \sigma_b} \left[E_0[G(z_1, z_2)] + \int_{\alpha=0}^1 E_{\alpha} \left[\mathcal{H} [G(z_1, z_2)] \right] d\alpha \right]. \end{aligned} \quad (C.41)$$

Pela linearidade da soma e da integral, pode-se aplicar o limite a $E_0[\cdot]$ e a $E_{\alpha}[\cdot]$ separadamente. Aplicando primeiramente para $E_0[\cdot]$,

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{\sigma_a^2 \rightarrow 0 \\ \sigma_b^2 \rightarrow 0}} \frac{1}{\sigma_a \sigma_b} E_0[G(z_1, z_2)] &= \lim_{\substack{\sigma_a^2 \rightarrow 0 \\ \sigma_b^2 \rightarrow 0}} \frac{1}{\sigma_a \sigma_b} E \left[g_{\sigma_a}(\sigma_{y_1} z_1 - \beta_1) \right] E \left[g_{\sigma_b}(\sigma_{y_2} z_2 - \beta_2) \right] \\ &= \lim_{\sigma_a^2 \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma_a} E \left[g_{\sigma_a}(\sigma_{y_1} z_1 - \beta_1) \right] \lim_{\sigma_b^2 \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma_b} E \left[g_{\sigma_b}(\sigma_{y_2} z_2 - \beta_2) \right]. \end{aligned} \quad (C.42)$$

Através das Equação (3.1.15a), tem-se

$$\lim_{\sigma_a^2 \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma_a} g_{\sigma_a}(z) = \text{sgn}(z), \quad (C.43)$$

e usando a linearidade do valor esperado,

$$\lim_{\sigma_a^2 \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma_a} E \left[g_{\sigma_a}(\sigma_{y_1} z_1 - \beta_1) \right] = E \left[\text{sgn}(\sigma_{y_1} z_1 - \beta_1) \right]. \quad (C.44)$$

Como z_1 é uma variável aleatória Gaussiana, de média nula e variância unitária, tem-se

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\operatorname{sgn}\left(\sigma_{y_1}z_1 - \beta_1\right)\right] &= \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}\left(\sigma_{y_1}z_1 - \beta_1\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\} dz \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{(\beta_1/\sigma_{y_1})^-} \operatorname{sgn}\left(\sigma_{y_1}z_1 - \beta_1\right) \exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\} dz \right. \\
&\quad + \int_{(\beta_1/\sigma_{y_1})^-}^{(\beta_1/\sigma_{y_1})^+} \operatorname{sgn}\left(\sigma_{y_1}z_1 - \beta_1\right) \exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\} dz \\
&\quad \left. + \int_{(\beta_1/\sigma_{y_1})^+}^{\infty} \operatorname{sgn}\left(\sigma_{y_1}z_1 - \beta_1\right) \exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\} dz \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(- \int_{-\infty}^{\beta_1/\sigma_{y_1}} \exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\} dz + \int_{\beta_1/\sigma_{y_1}}^{\infty} \exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\} dz \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(- \int_{-\infty}^{\beta_1/\sigma_{y_1}} \exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\} dz + \int_{-\infty}^{-\beta_1/\sigma_{y_1}} \exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\} du \right),
\end{aligned}$$

e com isso,

$$\mathbb{E}\left[\operatorname{sgn}\left(\sigma_{y_1}z_1 - \beta_1\right)\right] = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\beta_1/\sigma_{y_1}}^{\beta_1/\sigma_{y_1}} \exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\} dz. \quad (\text{C.45})$$

Pelas propriedades da função-erro,

$$\begin{aligned}
\int_{-\beta_1/\sigma_{y_1}}^{\beta_1/\sigma_{y_1}} \exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\} dz &= \sqrt{2\pi} \cdot \frac{1}{2} \left[\operatorname{erf}\left\{\frac{\beta_1}{\sqrt{2}\sigma_{y_1}}\right\} - \operatorname{erf}\left\{-\frac{\beta_1}{\sqrt{2}\sigma_{y_1}}\right\} \right] \\
&= \sqrt{2\pi} \operatorname{erf}\left\{\frac{\beta_1}{\sqrt{2}\sigma_{y_1}}\right\},
\end{aligned} \quad (\text{C.46})$$

e portanto,

$$\mathbb{E}\left[\operatorname{sgn}\left(\sigma_{y_1}z_1 - \beta_1\right)\right] = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{2\pi} \operatorname{erf}\left\{\frac{\beta_1}{\sqrt{2}\sigma_{y_1}}\right\} = -\operatorname{erf}\left\{\frac{\beta_1}{\sqrt{2}\sigma_{y_1}}\right\}. \quad (\text{C.47})$$

Retornando à Equação (C.44),

$$\lim_{\sigma_a^2 \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma_a} \mathbb{E}\left[g_{\sigma_a}(\sigma_{y_1}z_1 - \beta_1)\right] = -\operatorname{erf}\left\{\frac{\beta_1}{\sqrt{2}\sigma_{y_1}}\right\}. \quad (\text{C.48})$$

Aplicando esse desenvolvimento às duas parcelas da Equação (C.42), conclui-se que

$$\lim_{\substack{\sigma_a^2 \rightarrow 0 \\ \sigma_b^2 \rightarrow 0}} \frac{1}{\sigma_a \sigma_b} E_0[G(z_1, z_2)] = \operatorname{erf}\left\{\frac{\beta_1}{\sqrt{2}\sigma_{y_1}}\right\} \operatorname{erf}\left\{\frac{\beta_2}{\sqrt{2}\sigma_{y_2}}\right\}. \quad (\text{C.49})$$

Tendo desenvolvido $E_0[\cdot]$, resta desenvolver $E_\alpha[\cdot]$. Pela linearidade da integral,

$$\lim_{\substack{\sigma_a^2 \rightarrow 0 \\ \sigma_b^2 \rightarrow 0}} \frac{1}{\sigma_a \sigma_b} \int_{\alpha=0}^1 E_\alpha[\mathcal{H}[G(z_1, z_2)]] d\alpha = \int_{\alpha=0}^1 \lim_{\substack{\sigma_a^2 \rightarrow 0 \\ \sigma_b^2 \rightarrow 0}} \frac{1}{\sigma_a \sigma_b} E_\alpha[\mathcal{H}[G(z_1, z_2)]] d\alpha. \quad (\text{C.50})$$

Analisando o argumento da integral, e realizando as substituições conforme as Equações (C.37) e (C.38),

$$\lim_{\substack{\sigma_a^2 \rightarrow 0 \\ \sigma_b^2 \rightarrow 0}} \frac{1}{\sigma_a \sigma_b} E_\alpha[\mathcal{H}[G(z_1, z_2)]] = \frac{2}{\pi} \lim_{\substack{\sigma_a^2 \rightarrow 0 \\ \sigma_b^2 \rightarrow 0}} \frac{1}{\sigma_a \sigma_b} \sigma_a \sigma_b \rho \left(\frac{1}{L\rho^2 - [\rho\alpha]^2} \right)^{1/2} \exp\left\{\frac{1}{2}(s(\alpha) - \xi)\right\}. \quad (\text{C.51})$$

Aplicando os limites a $s(\alpha) - \xi$,

$$s(\alpha) - \xi = \lim_{\substack{\sigma_a^2 \rightarrow 0 \\ \sigma_b^2 \rightarrow 0}} - \frac{\beta_1^2(\sigma_{y_2}^2 + \sigma_b^2) + \beta_2^2(\sigma_{y_1}^2 + \sigma_a^2) - 2\sigma_{y_1}\sigma_{y_2}\beta_1\beta_2\rho\alpha}{(\sigma_{y_1}\sigma_{y_2}\rho)^2(L - \alpha^2)} \quad (\text{C.52a})$$

$$= \lim_{\substack{\sigma_a^2 \rightarrow 0 \\ \sigma_b^2 \rightarrow 0}} - \frac{\beta_1^2(\sigma_{y_2}^2) + \beta_2^2(\sigma_{y_1}^2) - 2\sigma_{y_1}\sigma_{y_2}\beta_1\beta_2\rho\alpha}{(\sigma_{y_1}\sigma_{y_2}\rho)^2(L - \alpha^2)},$$

$$s(\alpha) - \xi = \lim_{\substack{\sigma_a^2 \rightarrow 0 \\ \sigma_b^2 \rightarrow 0}} - \frac{1}{\rho^2(L - \alpha^2)} \left[\left(\frac{\beta_1}{\sigma_{y_1}}\right)^2 - \frac{2\beta_1\beta_2(\rho\alpha)}{\sigma_{y_1}\sigma_{y_2}} + \left(\frac{\beta_2}{\sigma_{y_2}}\right)^2 \right]. \quad (\text{C.52b})$$

Aplicando o limite a L definido na Equação (C.27), e substituindo v_1 e v_2 conforme a Equação (C.8),

$$L = \lim_{\substack{\sigma_a^2 \rightarrow 0 \\ \sigma_b^2 \rightarrow 0}} \frac{\left(\frac{\sigma_{y_1}}{\sigma_a}\right)^2 \left(\frac{\sigma_{y_2}}{\sigma_b}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{y_1}}{\sigma_a}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{y_2}}{\sigma_b}\right)^2 + 1}{\left(\frac{\sigma_{y_1}}{\sigma_a}\right)^2 \left(\frac{\sigma_{y_2}}{\sigma_b}\right)^2 \rho^2}$$

$$= \lim_{\substack{\sigma_a^2 \rightarrow 0 \\ \sigma_b^2 \rightarrow 0}} \frac{\sigma_{y_1}^2 \sigma_{y_2}^2 + \sigma_{y_1}^2 \sigma_b^2 + \sigma_{y_2}^2 \sigma_a^2 + \sigma_a^2 \sigma_b^2}{\sigma_{y_1}^2 \sigma_{y_2}^2 \rho^2} \quad (\text{C.53a})$$

$$= \frac{\sigma_{y_1}^2 \sigma_{y_2}^2}{\sigma_{y_1}^2 \sigma_{y_2}^2 \rho^2},$$

$$L = \frac{1}{\rho^2}. \quad (\text{C.53b})$$

Denotando $\mathbf{\Lambda}$ como

$$\begin{aligned}\mathbf{\Lambda} &= [\Lambda_1 \ \Lambda_2]^\top \\ &= \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \sigma_{y_1} & \sigma_{y_2} \end{bmatrix}^\top,\end{aligned}\quad (\text{C.54})$$

e utilizando \mathbf{K}_α conforme a Equação (C.14), chega-se a

$$\frac{1}{\rho^2 \left(\frac{1}{\rho^2} - \alpha^2 \right)} \left[\left(\frac{\beta_1}{\sigma_{y_1}} \right)^2 + \frac{2\beta_1\beta_2(\rho\alpha)}{\sigma_{y_1}\sigma_{y_2}} + \left(\frac{\beta_2}{\sigma_{y_2}} \right)^2 \right] = \mathbf{\Lambda}^\top \mathbf{K}_\alpha^{-1} \mathbf{\Lambda}. \quad (\text{C.55})$$

Substituindo os resultados das Equações (C.52b), (C.53b) e (C.55) na Equação (C.51), chega-se em

$$\lim_{\substack{\sigma_a^2 \rightarrow 0 \\ \sigma_b^2 \rightarrow 0}} \frac{1}{\sigma_a \sigma_b} \mathbb{E}_\alpha \left[\mathcal{H}[G(z_1, z_2)] \right] = \frac{2}{\pi} \rho \left(\frac{1}{1 - [\rho\alpha]^2} \right)^{1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \mathbf{\Lambda}^\top \mathbf{K}_\alpha^{-1} \mathbf{\Lambda} \right\}. \quad (\text{C.56})$$

Juntando os resultados das Equações (C.49) e (C.56) à Equação (C.41), obtém-se

$$\mathcal{E} = \operatorname{erf} \left\{ \frac{\Lambda_1}{\sqrt{2}} \right\} \operatorname{erf} \left\{ \frac{\Lambda_2}{\sqrt{2}} \right\} + \frac{2}{\pi} \rho \int_0^1 \frac{1}{|\mathbf{K}_\alpha|^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \mathbf{\Lambda}^\top \mathbf{K}_\alpha^{-1} \mathbf{\Lambda} \right\} d\alpha. \quad (\text{C.57})$$

Por fim, denota-se $\Xi(\mathbf{\Lambda}, \rho, \alpha)$ como o integrando da Equação (C.57), tal que

$$\Xi(\mathbf{\Lambda}, \rho, \alpha) = \frac{1}{|\mathbf{K}_\alpha|^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \mathbf{\Lambda}^\top \mathbf{K}_\alpha^{-1} \mathbf{\Lambda} \right\}, \quad (\text{C.58})$$

Além disso, utilizando-se do fato de que ρ pode ser escrito como

$$\rho = \frac{\mathbb{E}[y_1 y_2]}{\sqrt{\mathbb{E}[y_1^2] \mathbb{E}[y_2^2]}}, \quad (\text{C.59})$$

chega-se ao resultado

$$\begin{aligned}& \lim_{\substack{\sigma_a^2 \rightarrow 0 \\ \sigma_b^2 \rightarrow 0}} \frac{1}{\sigma_a} \frac{1}{\sigma_b} \mathbb{E} [g_{\sigma_a}(y_1 - \beta_1) g_{\sigma_b}(y_2 - \beta_2)] \\ &= \operatorname{erf} \left\{ \frac{\Lambda_1}{\sqrt{2}} \right\} \operatorname{erf} \left\{ \frac{\Lambda_2}{\sqrt{2}} \right\} \frac{2}{\pi} + \frac{\mathbb{E}[y_1 y_2]}{\sqrt{\mathbb{E}[y_1^2] \mathbb{E}[y_2^2]}} \int_0^1 \Xi(\mathbf{\Lambda}, \rho, \alpha) d\alpha.\end{aligned}\quad (\text{C.60})$$

D AVALIAÇÃO DOS GANHOS DAS MATRIZES DE COERÊNCIA DE SINAIS SATURADOS

Sejam os coeficientes $\kappa_{1l,c}$, $\kappa_{2l,c}^{\mathbb{R}}$ e $\kappa_{2l,c}^{\mathbb{I}}$, definidos como

$$\kappa_{1l,c} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\psi_c}{\mathcal{N}_c} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_c} \exp \left\{ - \left([i - 1/2] \frac{\psi_c}{\mathcal{N}_c} \right)^2 \right\}, \quad (\text{D.1a})$$

$$\kappa_{2l,c}^{\mathbb{R}} = \frac{2}{\pi} \frac{\psi_l}{\mathcal{N}_l} \frac{\psi_c}{\mathcal{N}_c} \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_c} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_l} \left(\int_{-1}^1 \frac{1}{|\mathbf{K}_{\alpha,\mathbb{R}}|^{1/2}} \exp \left\{ - \boldsymbol{\Psi}_{ij}^{\top} \mathbf{K}_{\alpha,\mathbb{R}}^{-1} \boldsymbol{\Psi}_{ij} \right\} d\alpha \right), \quad (\text{D.1b})$$

$$\kappa_{2l,c}^{\mathbb{I}} = \frac{2}{\pi} \frac{\psi_l}{\mathcal{N}_l} \frac{\psi_c}{\mathcal{N}_c} \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_c} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_l} \left(\int_{-1}^1 \frac{1}{|\mathbf{K}_{\alpha,\mathbb{I}}|^{1/2}} \exp \left\{ - \boldsymbol{\Psi}_{ij}^{\top} \mathbf{K}_{\alpha,\mathbb{I}}^{-1} \boldsymbol{\Psi}_{ij} \right\} d\alpha \right), \quad (\text{D.1c})$$

em que $\rho^{\mathbb{R}}$, $\rho^{\mathbb{I}}$, ψ_l , ψ_c , \mathcal{N}_l e \mathcal{N}_c são constantes; $\mathbb{A} \in [\mathbb{R}, \mathbb{I}]$ representa genericamente os símbolos de real e imaginário; e $\boldsymbol{\Psi}_{ij}$ e $\mathbf{K}_{\alpha,\mathbb{A}}$ são

$$\boldsymbol{\Psi}_{ij} = \left[[i - 1/2] \frac{\psi_l}{\mathcal{N}_l} \quad [j - 1/2] \frac{\psi_c}{\mathcal{N}_c} \right]^{\top}, \quad (\text{D.2a})$$

$$\mathbf{K}_{\alpha,\mathbb{A}} = \begin{bmatrix} 1 & \rho^{\mathbb{A}} \alpha \\ \rho^{\mathbb{A}} \alpha & 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{D.2b})$$

Deseja-se determinar equações simplificadas para o caso de uma quantidade infinita de níveis \mathcal{N} (tanto para \mathcal{N}_l quanto para \mathcal{N}_c). Isso traduz-se para um caso em que não há efeitos de quantização, mas somente de saturação.

Pode-se tratar cada um dos somatórios acima como uma soma de Riemann (SEALEY, 2006). Por definição, a soma de Riemann é dada por

$$S = \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i. \quad (\text{D.3})$$

Sem perda de generalidade, assume-se que os intervalos Δx_i são iguais, tal que

$$\Delta x_i \equiv \Delta x \quad \forall i \in [1, \dots, n]. \quad (\text{D.4})$$

Também, a operação de integral pode ser definida como

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i, \quad (\text{D.5})$$

em que os limites a e b dependem de x_i .

A soma de Riemann bidimensional é dada por

$$S = \sum_{j=1}^{n_y} \sum_{i=1}^{n_x} f(x_i, y_j) \Delta x \Delta y, \quad (\text{D.6})$$

e a integral bidimensional pode ser definida como

$$\int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx dy = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \sum_{j=1}^{n_y} \sum_{i=1}^{n_x} f(x_i, y_j) \Delta x \Delta y. \quad (\text{D.7})$$

D.1 TERMO $\kappa_{1l,c}$ COM SATURAÇÃO

Avaliando primeiramente o termo $\kappa_{1l,c}$, tem-se que

$$x_i = \left[i - \frac{1}{2} \right] \frac{1}{\mathcal{N}_c}, \quad (\text{D.8a})$$

$$f(x_i) = \exp\left\{-[x_i \psi_c]^2\right\}, \quad (\text{D.8b})$$

$$\Delta x = \frac{1}{\mathcal{N}_c}. \quad (\text{D.8c})$$

Para $i = 1$, $x_i \rightarrow 0$ (em função do pressuposto de que $\mathcal{N}_c \rightarrow \infty$); e para $i = \mathcal{N}_c$, $x_i \rightarrow 1$ (pela mesma razão). Com isso,

$$\begin{aligned} \kappa_{1l,c} &= \lim_{\mathcal{N}_c \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\psi_c}{\mathcal{N}_c} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_c} \exp\left\{-\left([i - 1/2] \frac{\psi_c}{\mathcal{N}_c}\right)^2\right\} \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \psi_c \lim_{\frac{1}{\mathcal{N}_c} \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_c} \left[\exp\left\{-[x \psi_c]^2\right\} \right] \frac{1}{\mathcal{N}_c}, \end{aligned} \quad (\text{D.9})$$

que pela Equação (D.5), torna-se

$$\kappa_{1l,c} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \psi_c \int_0^1 \exp\left\{-[x \psi_c]^2\right\} dx. \quad (\text{D.10})$$

Realizando as substituições

$$x \psi_c = t, \quad (\text{D.11a})$$

$$dx = \frac{1}{\psi_c} dt, \quad (\text{D.11b})$$

chega-se a

$$\kappa_{1l,c} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\psi_c} e^{-t^2} dt, \quad (\text{D.12})$$

que por definição é a função erro $\text{erf}\{x\}$. Portanto, com $\mathcal{N}_c \rightarrow \infty$,

$$\kappa_{1l,c} = \text{erf}\{\psi_c\}. \quad (\text{D.13})$$

D.2 TERMOS $\kappa_{2l,c}^{\mathbb{R}}$ E $\kappa_{2l,c}^{\mathbb{I}}$ COM SATURAÇÃO

Avaliando agora o termo $\kappa_{2l,c}^{\mathbb{A}}$ (genericamente válido para $\kappa_{2l,c}^{\mathbb{R}}$ e $\kappa_{2l,c}^{\mathbb{I}}$), tem-se que

$$x_i = \left[i - \frac{1}{2} \right] \frac{1}{\mathcal{N}_l'}, \quad (\text{D.14a})$$

$$y_j = \left[j - \frac{1}{2} \right] \frac{1}{\mathcal{N}_c'}, \quad (\text{D.14b})$$

$$\Delta x = \frac{1}{\mathcal{N}_l'}, \quad (\text{D.14c})$$

$$\Delta y = \frac{1}{\mathcal{N}_c'}, \quad (\text{D.14d})$$

$$f(\omega_{ij}) = \left(\int_{-1}^1 \frac{1}{|\mathbf{K}_{\alpha,\mathbb{A}}|^{1/2}} \exp \left\{ -\omega_{ij}^{\top} \mathbf{K}_{\alpha,\mathbb{A}}^{-1} \omega_{ij} \right\} d\alpha \right), \quad (\text{D.14e})$$

em que

$$\omega_{ij} = \left[x_i \psi_l \ y_j \psi_c \right]^{\top}. \quad (\text{D.14f})$$

Pelas mesmas razões de antes, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $y_1 = 0$, e $y_2 = 1$. Com isso,

$$\begin{aligned} \kappa_{2l,c}^{\mathbb{A}} &= \lim_{\substack{\mathcal{N}_l \rightarrow \infty \\ \mathcal{N}_c \rightarrow \infty}} \frac{2}{\pi} \frac{\psi_l}{\mathcal{N}_l} \frac{\psi_c}{\mathcal{N}_c} \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_c} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_l} \left(\int_{-1}^1 \frac{1}{|\mathbf{K}_{\alpha,\mathbb{A}}|^{1/2}} \exp \left\{ -\Psi_{ij}^{\top} \mathbf{K}_{\alpha,\mathbb{A}}^{-1} \Psi_{ij} \right\} d\alpha \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \psi_l \psi_c \lim_{\substack{\mathcal{N}_l \rightarrow \infty \\ \mathcal{N}_c \rightarrow \infty}} \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_c} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_l} \left[\int_{-1}^1 \frac{1}{|\mathbf{K}_{\alpha,\mathbb{A}}|^{1/2}} \exp \left\{ -\omega_{ij}^{\top} \mathbf{K}_{\alpha,\mathbb{A}}^{-1} \omega_{ij} \right\} d\alpha \right] \frac{1}{\mathcal{N}_c} \frac{1}{\mathcal{N}_l}, \end{aligned} \quad (\text{D.15})$$

que, pela Equação (D.7), torna-se

$$\kappa_{2l,c}^{\mathbb{A}} = \frac{2}{\pi} \psi_l \psi_c \int_0^1 \int_0^1 \int_{-1}^1 \frac{1}{|\mathbf{K}_{\alpha,\mathbb{A}}|^{1/2}} \exp \left\{ -\omega^{\top} \mathbf{K}_{\alpha,\mathbb{A}}^{-1} \omega \right\} d\alpha d\omega, \quad (\text{D.16})$$

em que

$$\omega = \left[x \psi_l \ y \psi_c \right]^{\top}. \quad (\text{D.17})$$

Realizando as substituições

$$x \psi_l = u, \quad (\text{D.18a})$$

$$y \psi_c = v, \quad (\text{D.18b})$$

$$\boldsymbol{\vartheta} = \left[u \ v \right]^{\top}, \quad (\text{D.18c})$$

$$d\omega = \frac{1}{\psi_l \psi_c} d\boldsymbol{\vartheta}, \quad (\text{D.18d})$$

e pela linearidade da integral, tem-se

$$\kappa_{2l,c}^{\mathbb{A}} = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \iint_{\Omega} \frac{1}{|\mathbf{K}_{\alpha,\mathbb{A}}|^{1/2}} \exp\left\{-\boldsymbol{\vartheta}^{\top} \mathbf{K}_{\alpha,\mathbb{A}}^{-1} \boldsymbol{\vartheta}\right\} d\boldsymbol{\vartheta} d\alpha, \quad (\text{D.19})$$

em que Ω é a região de \mathbb{R}^2

$$\Omega = [0, \psi_l] \times [0, \psi_c], \quad (\text{D.20})$$

ou seja,

$$\Omega = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq u \leq \psi_l, 0 \leq v \leq \psi_c\}. \quad (\text{D.21})$$

Escrevendo separadamente para \mathbb{R} e \mathbb{I} , tem-se

$$\kappa_{2l,c}^{\mathbb{R}} = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \iint_{\Omega} \frac{1}{|\mathbf{K}_{\alpha,\mathbb{R}}|^{1/2}} \exp\left\{-\boldsymbol{\vartheta}^{\top} \mathbf{K}_{\alpha,\mathbb{R}}^{-1} \boldsymbol{\vartheta}\right\} d\boldsymbol{\vartheta} d\alpha, \quad (\text{D.22})$$

e

$$\kappa_{2l,c}^{\mathbb{I}} = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \iint_{\Omega} \frac{1}{|\mathbf{K}_{\alpha,\mathbb{I}}|^{1/2}} \exp\left\{-\boldsymbol{\vartheta}^{\top} \mathbf{K}_{\alpha,\mathbb{I}}^{-1} \boldsymbol{\vartheta}\right\} d\boldsymbol{\vartheta} d\alpha. \quad (\text{D.23})$$

Sem utilizar a notação matricial, a Equação (D.19) torna-se

$$\kappa_{2l,c}^{\mathbb{A}} = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \int_0^{\psi_c} \int_0^{\psi_l} \frac{1}{\sqrt{1 - (\rho^{\mathbb{A}}\alpha)^2}} \exp\left\{-\frac{u^2 - 2uv\rho^{\mathbb{A}}\alpha + v^2}{1 - (\rho^{\mathbb{A}}\alpha)^2}\right\} dudvd\alpha. \quad (\text{D.24})$$

E PROCESSO PARA CONSTRUÇÃO DA MATRIZ DE INTERPOLAÇÃO

Aqui será detalhado o processo de construção da matriz^(a) $\mathbf{K}^4 \in \mathbb{S}^4$ utilizada para redução do custo computacional do cálculo de κ_2 , conforme a Seção 3.4.1.

E.1 DEFINIÇÕES

Será assumido que todos os quantizadores do CD (Seção 2.4.2) são iguais, e portanto possuem os mesmos Δ e N . Por notação diz-se-á que

$$\kappa_2 = f(\psi_l, \psi_c, \rho, N), \quad (\text{E.1})$$

em que $f(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$ é a função responsável por calcular κ_2 (conforme a Equação (3.2.60)), com mapeamento (em ordem)

$$f: \left[\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_{[-1,1]} \times \mathbb{N}_{[2,\infty)} \right] \mapsto \mathbb{R}, \quad (\text{E.2})$$

onde foram usadas propriedades dos parâmetros para determinar o domínio de cada argumento de f ; em que \mathbb{R}_+ denota o conjunto dos reais positivos (incluindo 0 por convenção), e

$$\mathbb{S}_s = \{x : x \in \mathbb{S}, x \in s\}, \quad (\text{E.3})$$

onde s é um intervalo (ou conjunto de intervalos), com $s \subset \mathbb{S}$.

E.2 REDUÇÃO POR SIMETRIA

Tomando que todos os quantizadores são iguais, pelas Equações (3.2.60b) e (3.2.60c) o cálculo de κ_2 é simétrico em relação a $y_l(\lambda, k)$ e $y_c(\lambda, k)$; isto é

$$f(\psi_l, \psi_c, \cdot, \cdot) = f(\psi_c, \psi_l, \cdot, \cdot). \quad (\text{E.4})$$

Com isso, define-se os parâmetros $\overline{\psi}_l$ e $\overline{\psi}_c$, tal que

$$\overline{\psi}_l = \max(\psi_l, \psi_c), \quad (\text{E.5a})$$

$$\overline{\psi}_c = \frac{\min(\psi_l, \psi_c)}{\overline{\psi}_l}, \quad (\text{E.5b})$$

em que $\overline{\psi}_l \geq \overline{\psi}_c$ e $\overline{\psi}_c \leq 1$. Também sabe-se que κ_2 é par em relação a ρ ; ou seja,

$$f(\cdot, \cdot, \rho, \cdot) = f(\cdot, \cdot, -\rho, \cdot). \quad (\text{E.6})$$

Tomando essas duas propriedades (simetria em ψ_m e paridade em ρ), é possível reduzir o domínio de f . Define-se $g(\overline{\psi}_l, \overline{\psi}_c, \rho, N)$ tal que

$$g(\overline{\psi}_l, \overline{\psi}_c, \rho, N) = f\left(\overline{\psi}_l, \left[\overline{\psi}_l \cdot \overline{\psi}_c\right], \rho, N\right), \quad (\text{E.7a})$$

^(a)Superscrito indicando a dimensão, e \mathbb{S} sendo qualquer espaço/conjunto de dimensão 1.

e portanto, pelas propriedades,

$$\kappa_2 = g(\overline{\psi}_l, \overline{\psi}_c, \rho, N), \quad (\text{E.7b})$$

em que o mapeamento de $g(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$ é

$$g : [\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_{[1,\infty)} \times \mathbb{R}_{[0,1]} \times \mathbb{N}_{[2,\infty)}] \mapsto \mathbb{R}, \quad (\text{E.7c})$$

ou ainda

$$\mathcal{D}_l \equiv \text{Dom}(\overline{\psi}_l) = \mathbb{R}_+, \quad (\text{E.8a})$$

$$\mathcal{D}_c \equiv \text{Dom}(\overline{\psi}_c) = \mathbb{R}_{[1,\infty)}, \quad (\text{E.8b})$$

$$\mathcal{D}_r \equiv \text{Dom}(\rho) = \mathbb{R}_{[0,1]}, \quad (\text{E.8c})$$

$$\mathcal{D}_n \equiv \text{Dom}(N) = \mathbb{N}_{[2,\infty)}. \quad (\text{E.8d})$$

E.3 SUBESPAÇO DE PARÂMETROS

Seja \mathbf{p}_α (em que α denota genericamente l , c , r ou n) um sub-conjunto ordenado de \mathcal{D}_α , com cardinalidade T_α , tal que

$$p_\alpha \subset \mathcal{D}_\alpha, \quad (\text{E.9})$$

disso obtém-se \mathbf{p}_l , \mathbf{p}_c , \mathbf{p}_r e \mathbf{p}_n . Definindo \mathbb{P} como sendo

$$\mathbb{P} = \mathbf{p}_l \times \mathbf{p}_c \times \mathbf{p}_r \times \mathbf{p}_n, \quad (\text{E.10a})$$

então tem-se a relação

$$\mathbb{P} \subset \text{Dom}(g). \quad (\text{E.10b})$$

Portanto, é possível calcular κ_2 para cada elemento de \mathbb{P} .

E.4 CONSTRUÇÃO DA MATRIZ

Tomando agora que \mathbf{p}_α seja um vetor de tamanho $T_\alpha \times 1$ (válido para \mathbf{p}_l , \mathbf{p}_c , \mathbf{p}_r e \mathbf{p}_n), é possível construir uma matriz \mathbf{K}^4 de tamanho $T_l \times T_c \times T_r \times T_n$, tal que

$$\mathbf{K}_p^4 = g(p) \quad \forall p \in \mathbb{P}, \quad (\text{E.11})$$

em que p é um elemento de \mathbb{P} , dado por

$$p = [p_l, p_c, p_r, p_n]. \quad (\text{E.12})$$

Com isso, cada elemento de \mathbf{K}^4 é um possível valor de κ_2 considerando os possíveis conjuntos de parâmetros $p \in \mathbb{P}$. Para a construção da matriz \mathbf{K}^4 utilizada no trabalho, foram escolhidos vetores \mathbf{p}_l , \mathbf{p}_c , \mathbf{p}_r e \mathbf{p}_n em que os elementos de cada vetor fossem valores considerados frequentes (heurísticamente) para o cálculo dos coeficientes κ_2 encontrados no trabalho.

E.5 OBTENÇÃO DO COEFICIENTE

Seja p' um conjunto de parâmetros, para o qual deseja-se calcular κ_2 utilizando \mathbf{K}^4 ; em que p' é

$$\begin{aligned} p' &= [\overline{\psi_l}, \overline{\psi_c}, \rho, N] \\ &= [p'_l, p'_c, p'_r, p'_n]. \end{aligned} \quad (\text{E.13a})$$

Se $p' \in \mathbb{P}$, então

$$\begin{aligned} \kappa_2 &= g(p') \\ &= \mathbf{K}_{p'}^4, \end{aligned} \quad (\text{E.14})$$

porém a probabilidade de isso acontecer é estatisticamente desprezível.

Assumindo que $p' \notin \mathbb{P}$, é necessário utilizar outros meios para obter κ_2 a partir de \mathbf{K}^4 . Para tal, realiza-se o seguinte processo:

1. Por N ser discreto, acessa-se a submatriz $\mathbf{K}^3 = \mathbf{K}_{[:, :, t, :]}^4$, onde t é tal que N seja o t -ésimo elemento de T_N . Essa sub-matriz é referente aos parâmetros p'_l , p'_c e p'_r , e portanto o parâmetro p'_n é removido de p' .

2. Para cada p'_α elemento de p' , realiza-se uma busca em \mathbf{p}_α por $p_{\alpha;0}$ e $p_{\alpha;1}$, tal que $p_{\alpha;0} < p'_\alpha < p_{\alpha;1}$. Caso $p'_\alpha \in \mathbf{p}_\alpha$, então usa-se $p_{\alpha;0} = p_{\alpha;1} = p'_\alpha$. Denota-se $p_{\alpha;m} = [p_{\alpha;0}, p_{\alpha;1}]$ esse conjunto de valores obtidos.

Essa operação é realizada de forma a obter $p_{l;m}$, $p_{c;m}$ e $p_{r;m}$.

3. Estabelece-se o subconjunto $P = p_{l;m} \times p_{c;m} \times p_{r;m} \subset \mathbb{P}$ e, utilizando a matriz \mathbf{K}^3 , obtém-se os 8 valores correspondentes a cada elemento de P . Esses 8 valores constituem uma “caixa” ao redor do valor real de κ_2 , caso este fosse calculado usando g e p' .

4. Realiza-se um processo de interpolação trilinear (BOURKE, 1999) entre os 8 valores, utilizando $p_{\alpha;m}$ e p'_α para calcular os “pesos” da interpolação, de forma a obter uma estimação de κ_2 para aquele determinado conjunto de parâmetros.

É importante ressaltar que esse método só pode funcionar se

$$\min(\mathbf{p}_\alpha) \leq p'_\alpha \leq \max(\mathbf{p}_\alpha) \quad \forall p'_\alpha \in p', \quad (\text{E.15})$$

já que, caso essa relação não seja respeitada, não é possível obter todos os 8 valores necessários para a interpolação. Se esse for o caso, a matriz \mathbf{K}^4 não pode ser usada, e portanto é necessário calcular κ_2 utilizando a sua definição e os parâmetros que compõem p' .

Também, esse método implicará em uma maior precisão quanto mais elementos houver em \mathbb{P} .

F VALIDAÇÃO DA DEFINIÇÃO DA QUANTIZAÇÃO E SUAS MODELAGENS

Listing F.1 – SimDefQuant.py

```

"""
'SimDefQuant.py'
Simulation routine of the quantization definition and modeling through
    step,
sign and error functions.
13/06/2022
"""

import numpy as np
from scipy.special import erf as sperf
import matplotlib.pyplot as plt

def quantization(x, Nbits, V, sw=0, sigma=1e-2):
    """
    Quantizes a real signal given a quantization voltage and number of bits
    .

    Parameters
    -----
    x : vector or matrix
        Signal to be quantized.
    Nbits : float
        Number of bits to use in quantization.
    V : float
        Max tension of quantization.
    sw : int
        Switches method of quantization.
        0 - Step function u(x) (default).
        1 - Signal function sgn(x).
        2 - Error function g(x). Requires a sigma.
    sigma : float
        Linearity coefficient for error function g(x). Default is 1e-2.

    Returns
    -----
    qx: vector or matrix, same shape of x
        Quantized version of the input signal.

    """

    if sigma is None:
        sigma = 1e-2
    def step(x):

```

```

    x[x >=0] = 1
    x[x < 0] = 0
    return x

def sgn(x):
    x[x > 0] = 1
    x[x < 0] = -1
    x[x== 0] = 0

def erf(x, sigma):
    y = x/(np.sqrt(2)*sigma)
    return 1/np.sqrt(2*np.pi) * sperf(y)

def clip(x, V):
    x[x > V] = V
    x[x < -V] = -V
    return x

def func(sw, x, sigma, Delta, i):
    if sw == 1:
        y = sgn(x - Delta*(i-1/2))
    elif sw == 2:
        y = erf(x - Delta*(i-1/2), sigma)
    else:
        y = step(x - Delta*(i-1/2))

    return y

R = 2**(Nbits-1) - 1
Delta = V/R

Qx = np.zeros_like(x)
for i in range(1, R+1):
    Qx += Delta * func(sw, x, sigma, Delta, i)
    Qx -= Delta * func(sw,-x, sigma, Delta, i)
Qx = clip(Qx, V)

return Qx

def cp_quantization(x, Nbits, V, **kwargs):
    """
    Quantizes a complex signal given a quantization voltage and number of
    bits.

    Parameters
    -----

```

```

x : vector or matrix
    Signal to be quantized.
Nbits : float
    Number of bits to use in quantization.
V : float
    Max voltage of quantization.

Returns
-----
qx: vector or matrix, same shape of x
    Quantized version of the input signal.

"""
if not 'sw' in kwargs.keys():
    kwargs['sw'] = None
if not 'sigma' in kwargs.keys():
    kwargs['sigma'] = None
qxr = quantization(np.real(x), Nbits, V, sw=kwargs['sw'], sigma=kwargs[
    'sigma'])
qxi = quantization(np.imag(x), Nbits, V, sw=kwargs['sw'], sigma=kwargs[
    'sigma'])

qx = qxr + 1j*qxi

return qx

# -----
# Simulation
# -----
def aval(x, Nbits, V, **kwargs):
    """
    Avaliation or formula

    Parameters
    -----
    x : vector or matrix
        Signal to be quantized.
    Nbits : float
        Number of bits to use in quantization.
    V : float
        Max voltage of quantization.

    Returns
    -----
    qx: vector or matrix, same shape of x
        Quantized version of the input signal.

```

```
"""
if not 'sw' in kwargs.keys():
    kwargs['sw'] = None
if not 'sigma' in kwargs.keys():
    kwargs['sigma'] = None

Qx = quantization(x, Nbits, V, sw=kwargs['sw'], sigma=kwargs['sigma'])
plt.plot(x, Qx)
plt.show()

# -----
# main
# -----
if __name__ == '__main__':
    V = 1
    Nbits = 3
    y = np.linspace(-(V+0.5), (V+0.5), 1000)
    aval(y, Nbits, V)
```

G VALIDAÇÃO DA COERÊNCIA ENTRE SINAL QUANTIZADO E NÃO-QUANTIZADO

Listing G.1 – SimSYCorr.py

```

"""
'SimSYCorr.py'
Simulation routine of coherence matrix calculations between clean speech
    and
quantized noisy speech realisations, of different microphones.
23/06/2022
"""
import sys
sys.path.insert(1, r'C:\Users\vitor\Meus_Arquivos\UFSC\PPG\02_Simulacoes')

import numpy as np
from numpy.random import randn

from myfunctions import cp_quantization
import myparams as mp

# -----
# Simulated / Analytic results
# -----
def sim(sigmas, a_m, b_im, M, Nbits, V, F=10000):
    sigma_s2, sigma_ui2, sigma_f2, sigma_r2 = sigmas
    s = (randn(1, F) + 1j*randn(1, F))*np.sqrt(sigma_s2)/np.sqrt(2)
    x_m = a_m @ s

    ui = (randn(1, F) + 1j*randn(1, F))*np.sqrt(sigma_ui2)/np.sqrt(2)
    bu_m = b_im @ ui

    f_m = (randn(4, F) + 1j*randn(4, F))*np.sqrt(sigma_f2)/np.sqrt(2)
    r_m = (randn(4, F) + 1j*randn(4, F))*np.sqrt(sigma_r2)/np.sqrt(2)

    v_m = bu_m + f_m + r_m

    y_m = x_m + v_m

    # for l in range(M):
    #     for c in range(M):
    #         print(np.average(s_m[l, :]*np.conj(y_m[c, :])))

    corr = np.zeros([M, M], dtype=complex)
    for l in range(M):
        for c in range(M):

```

```

        x1 = x_m[l,:]
        yqc = cp_quantization(y_m[c], Nbits[c], V)
        corr[l, c] = np.average(x1 * np.conj(yqc))

    return corr

# -----
# Theoric result
# -----
def teo(sigmas, a_m, b_im, M, Nbits, V):
    def f_gain(D,N,Er):
        Nit = np.arange(0, 2**(N-1))+1
        G = 2*D/np.sqrt(2*np.pi*Er) \
            * np.sum(np.exp(-(2*Nit-1)**2 * (D/2)**2 * 1/(2*Er)))
        return G

    sigma_s2, sigma_ui2, sigma_f2, sigma_r2 = sigmas
    corr = np.zeros([M, M], dtype=complex)

    for l in range(M):
        for c in range(M):
            Eslc = a_m[l]*np.conj(a_m[c])*sigma_s2
            Ey2r = (1/2) * (np.abs(a_m[c])**2 * sigma_s2 + \
                np.sum(np.abs(b_im[c])**2*sigma_ui2) \
                + (sigma_f2 + sigma_r2)*(1 if l==c else 0))
            Delta = V/(2**(Nbits[c]-1)-1)
            gain = f_gain(D=Delta, N=Nbits[c], Er=Ey2r)
            corr[l, c] = gain * Eslc

    return corr

# -----
# Avaliation
# -----
def aval(sigmas, a_m, b_im, M, Nbits, V, F):

    ResSim = sim(sigmas, a_m, b_im, M, Nbits, V, F)
    ResTeo = teo(sigmas, a_m, b_im, M, Nbits, V)

    # print("RS:", ResSim)
    # print()
    # print("RT:", ResTeo)

    err = np.average(np.abs((ResSim-ResTeo)/ResSim))
    print("Erro médio (SY): {:.4%}".format(err))

```

```
# -----  
# Main  
# -----  
def main():  
    ## System parameters  
    M = mp.M  
    F = mp.F  
    Nbits = mp.Nbits  
    V = mp.V  
  
    ## Acoustic sources parameters  
    sigma_s2 = mp.sigma_s2  
    sigma_ui2 = mp.sigma_ui2  
    sigma_f2 = mp.sigma_f2  
    sigma_r2 = mp.sigma_r2  
    sigmas = [sigma_s2,  
              sigma_ui2,  
              sigma_f2,  
              sigma_r2]  
  
    a_m = mp.a_m  
    b_im = mp.b_im  
  
    ## Avaliation of results  
    aval(sigmas, a_m, b_im, M, Nbits, V, F)  
    ## Results exhibition  
  
if __name__ == '__main__':  
    main()
```

H VALIDAÇÃO DA COERÊNCIA ENTRE SINAIS QUANTIZADOS

Listing H.1 – SimYYCorr.py

```

"""
'SimYYCorr.py'
Simulation routine of coherence matrix calculations between quantized
noisy speech realisations, in different microphones.
05/07/2022
"""

import sys
sys.path.insert(1, r'C:\Users\vitor\Meus_Arquivos\UFSC\PPG\02_Simulacoes')

import numpy as np
from numpy.random import randn
from numpy.linalg import det
from scipy.integrate import quad

from myfunctions import cp_quantization
import myparams as mp

# -----
# Simulated / Analytic results
# -----

def sim(sigmas, a_m, b_im, M, Nbits, V, F=10000):
    sigma_s2, sigma_ui2, sigma_f2, sigma_r2 = sigmas
    s = (randn(1, F) + 1j*randn(1, F))*np.sqrt(sigma_s2)/np.sqrt(2)
    x_m = a_m @ s

    ui = (randn(1, F) + 1j*randn(1, F))*np.sqrt(sigma_ui2)/np.sqrt(2)
    bu_m = b_im @ ui

    f_m = (randn(4, F) + 1j*randn(4, F))*np.sqrt(sigma_f2)/np.sqrt(2)
    r_m = (randn(4, F) + 1j*randn(4, F))*np.sqrt(sigma_r2)/np.sqrt(2)

    v_m = bu_m + f_m + r_m

    y_m = x_m + v_m

    corr = np.zeros([M, M], dtype=complex)
    for l in range(M):
        for c in range(M):
            yql = cp_quantization(y_m[l, :], Nbits[l], V)
            yqc = cp_quantization(y_m[c, :], Nbits[c], V)
            corr[l, c] = np.average(yql * np.conj(yqc))

```

```

return corr

# -----
# Theoric result
# -----
def teo(sigmas, a_m, b_im, M, Nbits, V):
    def f_gain(Dl, Dc, Nl, Nc, Eylc, Eyl2, Eyc2):
        def Xi_alpha(x, rho, Lambda):
            Ka = np.array([[1, rho*x],
                           [rho*x, 1]])
            Xi = 1/np.sqrt(det(Ka)) * \
                np.exp(-1/(2*det(Ka)) * Lambda.T @ Ka @ Lambda.T)
            return Xi

        rho = Eylc/np.sqrt(Eyl2*Eyc2)
        mcNl = int(2**(Nl-1)-1)
        mcNc = int(2**(Nc-1)-1)
        pt1 = Dl*Dc/(np.pi*np.sqrt(Eyl2/2 * Eyc2/2))
        pt2R = 0
        pt2I = 0

        for i in range(1, mcNl+1):
            for j in range(1, mcNc+1):
                Lambda = np.array([(2*i-1)*Dl/(2*np.sqrt(Eyl2/2)),
                                   (2*j-1)*Dc/(2*np.sqrt(Eyc2/2))])
                pt2R += quad(Xi_alpha, -1, 1, args=(np.real(rho), Lambda))
                       [0]
                pt2I += quad(Xi_alpha, -1, 1, args=(np.imag(rho), Lambda))
                       [0]

            K2R = pt1 * pt2R
            K2I = pt1 * pt2I
            K2S = (K2R+K2I)/2
            K2D = (K2R-K2I)/2

        return K2S, K2D

    true = lambda a, b : 1 if a==b else 0

    Deltas = V/(2**(Nbits-1)-1)

    sigma_s2, sigma_ui2, sigma_f2, sigma_r2 = sigmas
    corr = np.zeros([M, M], dtype=complex)

    for l in range(M):
        for c in range(M):

```

```

Eylc = a_m[l,0]*np.conj(a_m[c,0]) * sigma_s2 \
      + np.sum(b_im[l,0]*np.conj(b_im[c,0]) * sigma_ui2) \
      + (sigma_f2 + sigma_r2) * true(l,c)
Eyl2 = np.abs(a_m[l,0])**2 * sigma_s2 \
      + np.sum(np.abs(b_im[l,0])**2 * sigma_ui2) \
      + sigma_f2 + sigma_r2
Eyc2 = np.abs(a_m[c,0])**2 * sigma_s2 \
      + np.sum(np.abs(b_im[c,0])**2 * sigma_ui2) \
      + sigma_f2 + sigma_r2

K2S, K2D = f_gain(Deltas[l], Deltas[c], Nbits[l], Nbits[c],
                  Eylc, Eyl2, Eyc2)

corr[l, c] = K2S * Eylc + K2D * np.conj(Eylc)

return corr

# -----
# Avaliation
# -----
def aval(sigmas, a_m, b_im, M, Nbits, V, F):

    ResTeo = teo(sigmas, a_m, b_im, M, Nbits, V)
    ResSim = sim(sigmas, a_m, b_im, M, Nbits, V, F)

    # print("RS:", ResSim)
    # print()
    # print("RT:", ResTeo)
    # print(ResTeo/ResSim)

    err = np.average(np.abs((ResSim-ResTeo)/ResSim))
    print("Erro medio (YY): {:.4%}".format(err))

# -----
# Main
# -----
def main():
    ## System parameters
    M = mp.M
    F = mp.F
    Nbits = mp.Nbits
    V = mp.V

    ## Acoustic sources parameters
    sigma_s2 = mp.sigma_s2

```

```
sigma_ui2 = mp.sigma_ui2
sigma_f2 = mp.sigma_f2
sigma_r2 = mp.sigma_r2
sigmas = [sigma_s2,
          sigma_ui2,
          sigma_f2,
          sigma_r2]

a_m = mp.a_m
b_im = mp.b_im

## Avaliation of results
aval(sigmas, a_m, b_im, M, Nbits, V, F)
## Results exhibition

if __name__ == '__main__':
    main()
```

I TABELA DO GANHO DA MATRIZ DE COERÊNCIA DO SINAL CONTAMINADO QUANTIZADO

I.1 CONSTRUÇÃO DA TABELA

morekeywords=delete, length, clc, clear, numel, num2str, strcat, save, main, struct, isfile, meshgrid, min, size, sum, sqrt,

Listing I.1 – ConstFunXi.m

```

clc;
clear;
delete *.mat;

%% Simulation values
rho = 0:0.05:1;
Eyl = logspace(-3, -1+log10(3), 800);
Eycr = logspace(0, log10(3), 25);
Nb = flip(3:10);
Vs = [1];
for idxV = 1:numel(Vs)
    V = Vs(idxV);
    matname = 'kappa2';
    output = main( rho , Eyl , Eycr , V , Nb , matname );

    save(strcat([matname, '_final.mat']), 'output');
end

%% Function main() that generates the table
function kappa2 = main( rho , Eyl , Eycr , V , Nb , matname )
    nr = 1; % # of quantization voltages to test
    kappa2 = zeros([length(rho) length(Eyl) length(Eycr) length(Nb)]);

    i = 0;
    ti = length(rho) * length(Eyl) * length(Eycr)
    addi = length(Eycr);

    tic
    for rho_ = 1:numel(rho)
        v_rho = rho(rho_);
        for Eyl_ = 1:numel(Eyl)
            v_Eyl = Eyl(Eyl_);
            v_psl = V/v_Eyl;
            parfor Eycr_ = 1:numel(Eycr)
                v_Eycr = Eycr(Eycr_);
                v_Eyc = v_Eyl * v_Eycr;
                v_psc = V/v_Eyc;
                row = zeros([1 length(Nb)]);

```

```

    for Nbl_ = 1:numel(Nb)
        v_Nbl = Nb(Nbl_);
        v_Nbc = v_Nbl;
        v_Nl = 2^(v_Nbl-1)-1;
        v_Nc = 2^(v_Nbc-1)-1;
        integ = integral(@(a) fun_integ3(a,v_rho,v_psl,v_psc,
            v_Nl,v_Nc), -1,1, "ArrayValued",true);
        val = (2/pi) * (v_psl/v_Nl) * (v_psc/v_Nc) * integ;
        row(Nbl_) = val;
    end
    kappa2(rho_,Eyl_,Eycr_,:) = row;
    i = i + 1;
end
data = struct( 'rho',rho, 'Eyl',Eyl, 'Eycr',Eycr, 'Nb',Nb, 'Xi'
    ,kappa2, 'V',V );
dataname = strcat([matname, '_', num2str(i),'_',num2str(ti),'.
    mat']);
save(dataname,'data');

am = 10;
oldfilename = strcat([matname, '_', num2str(i-am*addi),'_',
    num2str(ti),'.mat']);
if isfile(oldfilename)
    delete(oldfilename);
end
a = toc;
seconds = nr * (a/i) * (ti-i);
hours = seconds / 3600;
fprintf("ET:%i s \t|| ETA:%.1i s |%.1f h.\n", round(a), round(
    seconds), hours);
end
end
toc
end

%% Xi function to be integrated, optimized as best as I can
function fInteg = fun_integ3(a, rho, psi_l, psi_c, Nl, Nc)
    walk = 256;
    idx = 1:Nl;
    jdx = 1:Nc;

    [idx_l, jdx_c] = meshgrid(idx,jdx);
    idx_l = idx_l.';
    jdx_c = jdx_c.';

    infl = 1;

```



```

supl = walk;
cells_l = {};
cells_c = {};

while true
    cells_l_n1 = {};
    cells_c_n1 = {};
    infc = 1;
    supc = walk;
    while true
        supl = min([supl, N1]);
        supc = min([supc, Nc]);
        nl_l = idx_l(infl:supl, infc:supc);
        nl_c = jdx_c(infl:supl, infc:supc);
        cells_l_n1{end+1} = nl_l;
        cells_c_n1{end+1} = nl_c;

        infc = infc + walk;
        supc = supc + walk;
        if supc > Nc
            break
        end
    end
    cells_l = [cells_l;cells_l_n1];
    cells_c = [cells_c;cells_c_n1];

    infl = infl + walk;
    supl = supl + walk;
    if supl > N1
        break
    end
end

fInteg = 0;

size_m2c = size(cells_l);
for rx = 1:size_m2c(1)
    for cx = 1:size_m2c(2)
        Xl_rc = cells_l{rx,cx}(:,,:);
        Yc_rc = cells_c{rx,cx}(:,,:);

        Psi_i = psi_l/N1 * (Xl_rc - 1/2);
        Psi_j = psi_c/Nc * (Yc_rc - 1/2);

        fInteg = fInteg + sum(1./sqrt(1-(rho*a).^2) .*...
            exp(-(Psi_i.^2 - Psi_i.*Psi_j * 2*rho*a + Psi_j.^2)./(1-(

```

```

                rho*a).^2)), 'all');
            end
        end
    end
end

```

I.2 VALIDAÇÃO DO RESULTADO DA TABELA

morekeywords=delete, length, clc, clear, numel, num2str, strcat, save, main, struct, isfile, meshgrid, min, size, sum, sqrt,

Listing I.2 – ValidFunXi.m

```

clc;
clear;

%% Import and test interpolation
load("fun_Xi1_final.mat");
rho = data.rho;
Eyl = data.Eyl;
Eycr = data.Eycr;
Nb = data.Nb;
Xi = data.Xi;
V = data.V;

%% Multiple iterations
numits = 1000;
tdiff = 0;
tol = 1e-6;
diffs = zeros(1, numits);
for it = 1:numits
    rho_ = 2*rand(1)-1;
    Eyl_ = 10^(7*rand(1)-6);
    Eycr_ = 10^(rand(1));
    Nb_ = randi(8)+2;
    V_ = 1;

    Eyc_ = Eycr_ * Eyl_;
    XiN = Xi(:, :, :, Nb==Nb_);
    k2_intpl = interp3(Eyl, rho, Eycr, XiN, Eyl_, abs(rho_), Eycr_, 'spline', -2);

    psi_l = V_/Eyl_;
    psi_c = V_/Eyc_;
    Nl_ = 2^(Nb_-1)-1;
    Nc_ = 2^(Nb_-1)-1;

    k2_intgr = (2/pi) * (psi_l/Nl_) * (psi_c/Nc_) * integral(@(a)
        fun_integ3(a, rho_, psi_l, psi_c, Nl_, Nc_), -1, 1, "ArrayValued", true);

```

```

diff = abs(k2_intgr - k2_intpl);
if k2_intgr < tol && diff < tol
    rdifff = 0;
else
    rdifff = abs(diff / k2_intgr);
end
fprintf("%i |%i", it, numits);
tdiff = tdiff + rdifff;
diffs(it) = rdifff;
end
adiff = tdiff / numits;

fprintf("Average difference -%.2f%%\n", adiff*100);

%% Xi function to be integrated, optimized as best as I can
function fInteg = fun_integ3(a, rho, psi_l, psi_c, Nl, Nc)
    walk = 256;
    idx = 1:Nl;
    jdx = 1:Nc;

    [idx_l, jdx_c] = meshgrid(idx, jdx);
    idx_l = idx_l.';
    jdx_c = jdx_c.';

    infl = 1;
    supl = walk;
    cells_l = {};
    cells_c = {};

    while true
        cells_l_n1 = {};
        cells_c_n1 = {};
        infc = 1;
        supc = walk;
        while true
            supl = min([supl, Nl]);
            supc = min([supc, Nc]);
            nl_l = idx_l(infl:supl, infc:supc);
            nl_c = jdx_c(infl:supl, infc:supc);
            cells_l_n1{end+1} = nl_l;
            cells_c_n1{end+1} = nl_c;

            infc = infc + walk;
            supc = supc + walk;
            if supc > Nc
                break
            end
        end
    end
end

```

```

        end
    end

    cells_l = [cells_l;cells_l_nl];
    cells_c = [cells_c;cells_c_nl];

    infl = infl + walk;
    supl = supl + walk;
    if supl > Nl
        break
    end
end

fInteg = 0;

size_m2c = size(cells_l);
for rx = 1:size_m2c(1)
    for cx = 1:size_m2c(2)
        Xl_rc = cells_l{rx,cx}(:, :);
        Yc_rc = cells_c{rx,cx}(:, :);

        Psi_i = psi_l/Nl * (Xl_rc - 1/2);
        Psi_j = psi_c/Nc * (Yc_rc - 1/2);

        fInteg = fInteg + sum(1./sqrt(1-(rho*a).^2) .*...
            exp(-(Psi_i.^2 - Psi_i.*Psi_j * 2*rho*a + Psi_j.^2)./(1-(
                rho*a).^2)), 'all');
    end
end
end
end

```
