



Universidade Federal de Santa Catarina
Centro Tecnológico
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

Marcela Alejandra Juliani

**Efeito das hipóteses de modelagem na otimização de
treliças utilizando metamodelo de Kriging**

Florianópolis

2023

Marcela Alejandra Juliani

Efeito das hipóteses de modelagem na otimização de treliças utilizando metamodelo de Kriging

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Civil. Orientador: Prof. Wellison José de Santana Gomes, Dr.

Florianópolis

2023

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Juliani, Marcela Alejandra

Efeito das hipóteses de modelagem na otimização de treliças utilizando metamodelo de Kriging / Marcela Alejandra Juliiani ; orientador, Wellison José de Santana Gomes, 2023.

118 p.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Florianópolis, 2023.

Inclui referências.

1. Engenharia Civil. 2. Otimização estrutural. 3. Kriging. 4. Modelagem. 5. Flambagem. I. Gomes, Wellison José de Santana. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil. III. Título.

Marcela Alejandra Juliani

Efeito das hipóteses de modelagem na otimização de treliças utilizando metamodelo de Kriging

O presente trabalho em nível de doutorado foi avaliado e aprovado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. Edson Denner Leonel, Dr.
Universidade de São Paulo - Campus São Carlos, USP/SC

Prof. Henrique Machado Kroetz, Dr.
Universidade Federal do Paraná, UFPR

Prof. Rafael Holdorf Lopez, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina, UFSC

Prof. Otávio Augusto Alves da Silveira, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina, UFSC

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de doutor em Engenharia Civil.

Coordenação do Programa de
Pós-Graduação

Prof. Wellison José de Santana Gomes, Dr.
Orientador

Florianópolis, 2023

AGRADECIMENTOS

Ao meu professor e orientador Wellison José de Santana Gomes, pela sua dedicação e apoio, dando todo suporte necessário para a elaboração da pesquisa.

A todos os professores que fizeram parte da minha formação, desde a alfabetização até a pós-graduação.

À minha família, pelo apoio e incentivo aos meus estudos. Em especial aos meus pais Carlos e Elizabeth, que dedicaram a vida a suas filhas.

Ao meu noivo Giancarlo, por todo amor e suporte ao longo de todos esses anos.

Ao meu companheiro Floquinho, pelo carinho e atenção em todos os momentos.

À FAPESC, pela contribuição financeira concedida para a realização de parte deste estudo.

RESUMO

A busca por projetos mais eficazes e com custos menores tem aumentado em virtude do crescimento da competitividade do mercado. Como consequência, a otimização tem sido empregada com o objetivo de projetar estruturas mais econômicas e que atendam critérios de segurança. O processo otimizado de dimensionamento estrutural reduz a interferência do projetista quando comparado com o processo convencional de elaboração de projeto. Entretanto, as definições iniciais relacionadas ao lançamento estrutural e aos critérios de projeto, denominadas aqui de hipóteses de modelagem, permanecem sendo fortemente dependentes de tomadas de decisões do profissional. Sendo assim, torna-se clara a importância de estudos de otimização que analisam o impacto dessas definições no resultado ótimo em termos de custo e de atendimento a critérios de projeto. Nesse contexto, esta tese busca avaliar o efeito das hipóteses de modelagem na otimização de treliças, com o intuito de investigar o impacto dessas definições no dimensionamento estrutural. Para isso, em cada exemplo abordado, é minimizada a massa ou o volume da estrutura sob diferentes cenários de modelagem. A partir dos resultados, são analisadas as semelhanças e diferenças das configurações ótimas obtidas nos casos investigados, bem como seus comportamentos relacionados às restrições de projeto e ao custo. O primeiro e principal estudo consiste na análise dos critérios de verificação de flambagem, que corresponde a uma das principais restrições empregadas em problemas de otimização de estruturas treliçadas. São avaliados três cenários de restrições distintos, que possuem os seguintes limites de segurança: tensão crítica de Euler, que representa a flambagem elástica; tensão crítica da norma [AISC-360 \(2016\)](#), baseada em equações empíricas para representar a flambagem elástica e inelástica; critério único de estabilidade definido por uma carga crítica, capaz de capturar a flambagem inelástica. A principal diferença entre esses cenários é a possibilidade de considerar ou não a resposta do material além do limite elástico-linear. Além disso, os dois primeiros cenários são capazes de capturar apenas a flambagem local, que ocorre em cada barra individualmente, enquanto que o terceiro cenário também consegue capturar a flambagem global, que é identificada em toda a estrutura. Para viabilizar o estudo de otimização envolvendo modelos não-lineares, é necessário empregar um método de otimização que necessite de poucas análises do modelo estrutural, devido ao alto custo computacional de execução da rotina. O presente trabalho propõe um método de otimização que substitui as restrições custosas pelo metamodelo de Kriging, que é muito mais rápido de ser avaliado do que o modelo não-linear. De maneira secundária, também são avaliadas hipóteses de modelagem relacionadas às condições de contorno essenciais, onde os apoios das estruturas são modelados como apoios elásticos representados por molas, e a rigidez das molas está associada à resistência do suporte ao movimento. As molas podem ser interpretadas como todo o meio de suporte da estrutura, englobando a estrutura de fundação e o solo. Nesse caso, os cenários avaliados diferem entre si apenas no valor da rigidez dos apoios. Como

complemento, é analisado o custo global da estrutura, que corresponde à soma do custo do suporte, que é em função da sua rigidez, e o custo da estrutura ótima de cada cenário. Todos os problemas são desenvolvidos em MATLAB e a análise estrutural é executada pelo software MASTAN2. O desempenho do método de otimização proposto foi testado em quatro problemas *benchmark* e três problemas envolvendo análise estrutural não-linear. Como resultado, o esquema proposto apresentou bons resultados em termos de função objetivo em todos os exemplos analisados, com significativa redução do número de avaliação das restrições. Com relação ao tempo computacional, o método mostrou-se vantajoso nos casos em que o problema avaliado envolve estruturas de grande porte e modelos não-lineares. Com relação ao estudo relacionado às hipóteses de modelagem, foram avaliados quatro problemas para os modelos de flambagem e um para os apoios elásticos. A partir dos resultados dos modelos de flambagem, pode-se dizer que o cenário 2, baseado nas restrições da norma, obtém configurações ótimas mais conservadoras do que os demais cenários para estruturas não susceptíveis a flambagem global. No caso de estruturas que tendem a sofrer esse fenômeno, o cenário 3 foi capaz de capturar a flambagem global, resultando na estrutura mais cara. Além disso, destaca-se a necessidade de se limitar os deslocamentos máximos admissíveis no modelo inelástico, dado que a plastificação das barras pode levar a grandes deslocamentos sem colapso generalizado da estrutura, resultando em um projeto inadequado. Já para os diferentes cenários de condições de contorno essenciais, observou-se que apoios mais rígidos tendem a resultar em superestruturas mais baratas do que os apoios mais flexíveis. Entretanto, quando é levado em conta o custo da fundação, o custo global da estrutura pode ser mais barato no caso dos apoios menos rígidos.

Palavras-chaves: Otimização estrutural. Kriging. Modelagem. Flambagem. Condições de contorno. Apoios elásticos.

ABSTRACT

The search for more effective designs with lower costs has increased due to the growth of business competitiveness. Consequently, optimization has been employed in order to design more economical structures that comply with safety criteria. The optimized structural design process reduces designer interference when compared to the conventional design process. However, the initial definitions related to the structural conception and the design criteria, called herein as modeling hypotheses, remain strongly dependent on the decisions of the designer. Therefore, the importance of optimization studies that analyze the impact of these definitions on the optimal result in terms of cost and compliance with design criteria becomes evident. In this context, this thesis seeks to evaluate the effect of modeling hypotheses on truss optimization, with the aim of investigating the impact of these definitions on structural design. For this, in each example discussed, the mass/volume of the structure is minimized under different modeling scenarios. Based on the results, the similarities and differences of the optimal configurations obtained in the investigated cases are analyzed, as well as their behavior related to design constraints and cost. The first and main study consists of the analysis of the buckling criteria, which corresponds to one of the main constraints used in truss optimization problems. Three different constraint scenarios are evaluated, which have the following safety limits: Euler's critical stress, which represents elastic buckling; critical stress of the [AISC-360 \(2016\)](#) code, based on empirical equations to represent elastic and inelastic buckling; single stability criterion defined by a critical load, able to capture inelastic buckling. The main difference between these scenarios is the possibility of considering or not the material response beyond the linear-elastic limit. Furthermore, the first two scenarios can capture only the local buckling, which occurs in each bar individually, while the third scenario is also able to capture the global buckling, which occurs in the entire structure. To enable the optimization study involving nonlinear models, it is necessary to employ an optimization method that requires few analyzes of the structural model, due to the high computational effort required. The present work proposes an optimization method that replaces costly constraints by the Kriging metamodel, which in computationally demanding problems is much faster to be evaluated than the nonlinear model. Secondly, modeling hypotheses related to essential boundary conditions are also evaluated, where the supports of the structures are modeled as elastic supports represented by springs, and the springs stiffness is associated with the support movement resistance. The springs can be interpreted as the entire support means of the structure, including the foundation structure and the soil. In this case, the evaluated scenarios differ from each other only in the stiffness value of the supports. As a complement, the global cost of the structure is analyzed, which corresponds to the sum of the cost of the support, which is a function of its stiffness, and the cost of the optimal structure of each scenario. All problems are implemented

in MATLAB and the structural analysis is performed by the MASTAN2 software. The performance of the proposed optimization method was tested on four benchmark problems and on three problems involving nonlinear structural analysis. As a result, the proposed scheme presented good results in terms of the optimal objective function values found in all analyzed examples, with a significant reduction in the number of constraints evaluations. Regarding computational time, the method proved to be advantageous in cases where the evaluated problem involves large structures and nonlinear models. Regarding the study of modeling hypotheses, four problems were evaluated for the buckling models and one for the elastic supports. From the results of the buckling models, it can be said that scenario 2, based on the constraints of the [AISC-360 \(2016\)](#) code, obtains optimal configurations that are more conservative than the other scenarios for structures not susceptible to global buckling. In the case of structures which are prone to this phenomenon, scenario 3 was able to capture global buckling, resulting in the most expensive structure. In addition, the importance of limiting the maximum admissible displacements in the inelastic model is emphasized, since the plastification of the bars can lead to large displacements without generalized collapse of the structure, resulting in an unfeasible design. As for the different scenarios of essential boundary conditions, it was observed that more rigid supports tend to result in cheaper superstructures than more flexible supports. However, when the cost of the foundation is considered, the global cost of the structure can be cheaper in the case of less rigid supports.

Key-words: Structural optimization. Kriging. Modeling. Buckling. Boundary conditions. Elastic supports.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Comparação entre processo convencional (A) e processo otimizado (B) de dimensionamento estrutural.	17
Figura 2 – Treliça de cobertura com barras flambadas.	18
Figura 3 – Flambagem local e global em treliças.	19
Figura 4 – Representação de apoios elásticos em estruturas.	21
Figura 5 – Treliça de 8 barras e 5 nós.	25
Figura 6 – Representação geométrica de um problema de otimização.	26
Figura 7 – Ótimos globais e locais.	27
Figura 8 – Categorias de otimização estrutural.	29
Figura 9 – Exemplo de predição via metamodelo de Kriging.	31
Figura 10 – Fluxograma do método de otimização proposto.	34
Figura 11 – Plano de amostragem: <i>Toy problem</i>	35
Figura 12 – Diferentes subespaços obtidos pela metodologia: <i>Toy problem</i>	37
Figura 13 – Estratégias de busca do processo de otimização: <i>Toy problem</i>	39
Figura 14 – Problemas <i>benchmark</i>	41
Figura 15 – Problemas com análise estrutural não-linear.	47
Figura 16 – Forças e deslocamentos generalizados em elementos finitos de linha.	54
Figura 17 – Representação dos suportes estruturais com molas.	57
Figura 18 – Presença de apoios elásticos em estruturas	58
Figura 19 – Comportamento linear e não-linear.	59
Figura 20 – Efeito da não-linearidade geométrica.	60
Figura 21 – Ciclo de carga-descarga em um material elastoplástico.	61
Figura 22 – Modelos de materiais elastoplásticos.	62
Figura 23 – Modelo elastoplástico baseado no módulo tangente.	62
Figura 24 – Níveis de análise.	63
Figura 25 – Relações entre propriedades geométricas das seções.	70
Figura 26 – Exemplo de validação do modelo de molas nos apoios de 1º e 2º gênero.	71
Figura 27 – Representação da curva de obtenção da carga crítica inelástica.	75
Figura 28 – Convergência da carga crítica inelástica.	76
Figura 29 – Relação entre a carga crítica e o índice de esbeltez da coluna.	76
Figura 30 – Fluxograma dos cenários de restrições dos modelos de flambagem.	77
Figura 31 – Coluna tubular: Exemplo I.	79
Figura 32 – Deformadas das estruturas ótimas ($E_{sc} = 120$): Exemplo I.	80
Figura 33 – Superfície das restrições para os modelos de flambagem avaliados: Exemplo I.	81
Figura 34 – Treliça de 2 barras: Exemplo II.	82

Figura 35 – Deformadas das estruturas ótimas para $\theta = 0^\circ$ ($E_{sc} = 10$): Exemplo II.	84
Figura 36 – Relação entre o volume ótimo e o ângulo de aplicação da carga: Exemplo II.	85
Figura 37 – Torre tridimensional: Exemplo III.	86
Figura 38 – Torre tridimensional com apoios elásticos: Exemplo III.	88
Figura 39 – Relação entre a massa ótima e a rigidez dos apoios: Exemplo III.	90
Figura 40 – Relação entre o custo e a rigidez dos apoios: Exemplo III - condições de contorno essenciais.	90
Figura 41 – Configurações ótimas e tensões normais nas barras: Exemplo III.	91
Figura 42 – Ponte do Forth: Exemplo IV.	93
Figura 43 – Configurações ótimas e tensões normais nas barras: Exemplo IV.	95
Figura 44 – Curva carga-deslocamento: Exemplo IV.	96
Figura 45 – Modos de flambagem aplicados no cálculo da carga crítica inelástica: Exemplo IV.	96
Figura 46 – Configuração ótima e tensões normais nas barras para o cenário 3 com menor deslocamento: Exemplo IV.	97
Figura 47 – Deformadas das estruturas ótimas: Exemplo IV.	98
Figura 48 – Domo tridimensional de 120 barras: Exemplo V.	99
Figura 49 – Configurações ótimas e tensões normais nas barras: Exemplo V.	101
Figura 50 – Deformadas das estruturas ótimas: Exemplo V.	102
Figura 51 – Curva carga-deslocamento: Exemplo V.	102
Figura 52 – Modos de flambagem aplicados no cálculo da carga crítica inelástica: Exemplo V.	103

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Projeto ótimo e resultados estatísticos: Coluna tubular.	42
Tabela 2 – Projeto ótimo e resultados estatísticos: Viga-I.	43
Tabela 3 – Projeto ótimo e resultados estatísticos: Treliça de 10 barras.	44
Tabela 4 – Projeto ótimo e resultados estatísticos: Treliça de 37 barras.	45
Tabela 5 – Projeto ótimo e resultados estatísticos: Pórtico de 8 andares.	48
Tabela 6 – Projeto ótimo e resultados estatísticos: Ponte Forth.	49
Tabela 7 – Projeto ótimo e resultados estatísticos: Domo de 120 Barras.	51
Tabela 8 – Validação do uso de molas na modelagem de apoios.	71
Tabela 9 – Projeto ótimo e resultados estatísticos: Exemplo I.	79
Tabela 10 – Valor das restrições dos cenários avaliados - $\max(\mathbf{g})$ - para as estruturas ótimas: Exemplo I.	80
Tabela 11 – Projeto ótimo e resultados estatísticos: Exemplo II.	83
Tabela 12 – Valor das restrições dos cenários avaliados - $\max(\mathbf{g})$ - para as estruturas ótimas: Exemplo II.	85
Tabela 13 – Grupos de barras: Exemplo III.	87
Tabela 14 – Casos de carregamento: Exemplo III.	87
Tabela 15 – Projeto ótimo e resultados estatísticos: Exemplo III.	89
Tabela 16 – Valor das restrições dos cenários avaliados - $\max(\mathbf{g})$ - para as estruturas ótimas: Exemplo III.	92
Tabela 17 – Projeto ótimo e resultados estatísticos: Exemplo IV.	94
Tabela 18 – Projeto ótimo para o cenário 3 com menor deslocamento: Exemplo IV.	97
Tabela 19 – Valor das restrições dos cenários avaliados - $\max(\mathbf{g})$ - para as estruturas ótimas: Exemplo IV.	98
Tabela 20 – Projeto ótimo e resultados estatísticos: Exemplo V.	100
Tabela 21 – Valor das restrições dos cenários avaliados - $\max(\mathbf{g})$ - para as estruturas ótimas: Exemplo V.	103

LISTA DE SÍMBOLOS

f	Função objetivo
\mathbf{x}	Vetor de variáveis de projeto
A	Área da seção transversal
L, H	Comprimento do elemento estrutural/estrutura
i, j, k	Contadores
n	Número de variáveis de projeto
x	Variável de projeto
Ω	Espaço de busca
\mathbf{h}	Vetor de restrições de igualdade
h	Restrição de igualdade
m	Número de restrições de igualdade
\mathbf{g}	Vetor de restrições de desigualdade ou vetor de respostas do plano amostral
g	Restrição de desigualdade
q	Número de restrições de desigualdade
σ	Tensão normal
σ_{cr}	Tensão normal crítica
\mathbf{x}^*	Vetor de variáveis de projeto ótimo
Ω_V	Espaço de busca viável
\mathbf{X}	Plano de amostragem
p	Número de pontos de suporte ou pontos amostrais
\hat{y}	Função de predição via metamodelo de Kriging
\hat{g}	Função de predição das restrições via metamodelo de Kriging
$\hat{\mathbf{x}}^*$	Vetor de variáveis de projeto ótimo para o problema substituto

n_s	Número de subespaços de busca
lb	Vetor de limites inferiores das variáveis de projeto
ub	Vetor de limites superiores das variáveis de projeto
it_{stall}	Número máximo de iterações sem melhoras no resultado ótimo - critério de parada
f_{tol}	Tolerância para a função objetivo - critério de parada
it_{min}	Número mínimo de iterações - critério de parada
it_{max}	Número máximo de iterações - critério de parada
P	Carga aplicada
σ_y	Tensão de escoamento
E	Módulo de elasticidade
P_{cr}	Carga crítica
f	Vetor de forças nodais generalizadas global
K	Matriz de rigidez global
d	Vetor de deslocamentos nodais generalizados global
k	Coefficiente de rigidez
ε	Deformação
ε_e	Deformação elástica
ε_p	Deformação plástica
E_t	Módulo de elasticidade tangente
σ_e	Tensão de flambagem de Euler
I	Momento de inércia
r	Raio de giração
d	Diâmetro médio ou deslocamento
t	Espessura
Esc	Escala

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	16
1.1	Motivação	16
1.1.1	Apresentação da proposta	18
1.2	Objetivos	22
1.2.1	Objetivo geral	22
1.2.2	Objetivos específicos	22
1.3	Organização do trabalho	23
2	OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL BASEADA EM METAMODE- LOS	24
2.1	Formulação de um problema de otimização	25
2.1.1	Classificações relacionadas à otimização	27
2.1.1.1	<i>Variáveis contínuas e discretas</i>	27
2.1.1.2	<i>Convexidade</i>	28
2.1.1.3	<i>Métodos de busca global e local</i>	28
2.1.1.4	<i>Tipos de otimização estrutural</i>	29
2.2	Metamodelos	29
2.2.1	Kriging	30
2.3	Contextualização	31
2.4	Método proposto	33
2.4.1	Plano de amostragem	35
2.4.2	Construção do metamodelo de Kriging	35
2.4.3	Estratégias de busca	36
2.4.3.1	<i>Busca local e global</i>	36
2.4.3.2	<i>Refinamento</i>	38
2.4.4	Critério de parada	39
2.4.5	Exemplos numéricos	40
2.4.5.1	<i>Problemas benchmark</i>	40
2.4.5.2	<i>Problemas com análise estrutural não-linear</i>	46
2.4.6	Comentários	51
3	HIPÓTESES DE MODELAGEM ESTRUTURAL	53
3.1	Método dos elementos finitos	53
3.2	Condições de contorno essenciais	57
3.3	Modelos de análise estrutural	58

3.3.1	Comportamento linear e não-linear físico e geométrico	58
3.3.2	Comportamento elástico e inelástico	60
3.3.3	Níveis de análise estrutural	63
3.3.3.1	<i>Abordagem matricial</i>	64
3.4	Estado da arte	66
3.5	Metodologia e formulação dos problemas	68
3.5.1	Apoios elásticos	69
3.5.2	Modelos de flambagem	72
3.5.2.1	<i>Cenário 1: Tensão crítica de Euler</i>	72
3.5.2.2	<i>Cenário 2: Tensão crítica de acordo com AISC</i>	73
3.5.2.3	<i>Cenário 3: Carga crítica inelástica</i>	73
4	EXEMPLOS NUMÉRICOS	78
4.1	Exemplo I: Coluna tubular	78
4.2	Exemplo II: Treliça de 2 barras	82
4.3	Exemplo III: Torre tridimensional	86
4.4	Exemplo IV: Modelo da ponte do Forth	93
4.5	Exemplo V: Domo tridimensional de 120 barras	98
4.6	Comentários	104
5	CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	105
5.1	Conclusões	105
5.2	Sugestões para trabalhos futuros	107
	REFERÊNCIAS	108

1 INTRODUÇÃO

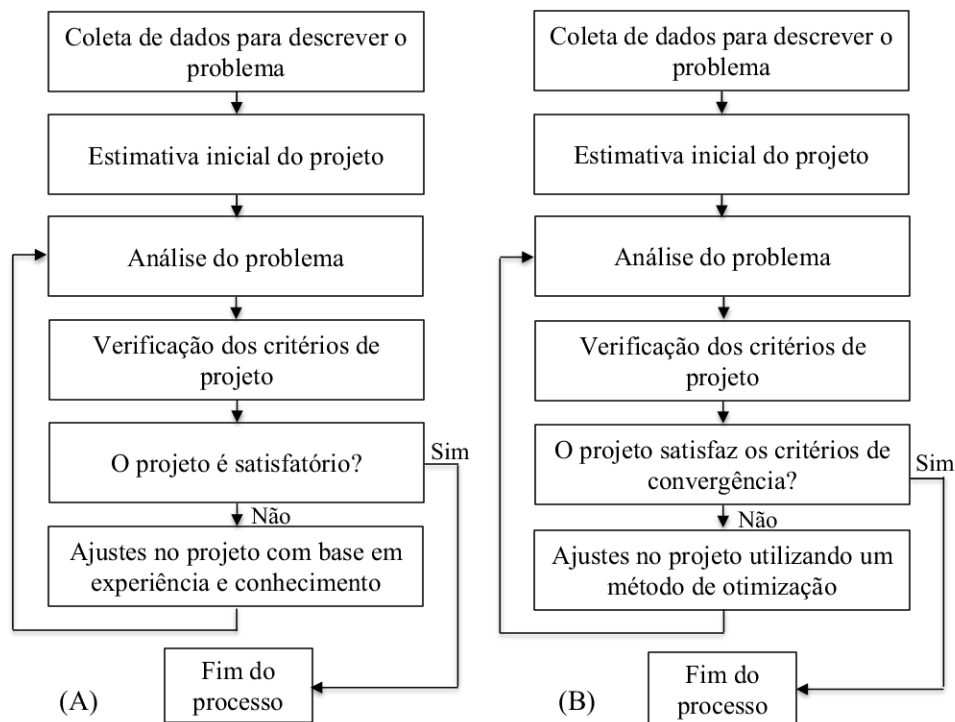
1.1 Motivação

Dentre as áreas de pesquisa relacionadas à engenharia estrutural, existe um amplo campo de estudos relativo à otimização. Em geral, a otimização estrutural busca determinar parâmetros que conduzam a uma descrição estrutural ótima para um determinado objetivo e que atenda a critérios de projeto pré-estabelecidos (Luh & Lin (2011), Stromberg *et al.* (2012), Camp & Huq (2013), Miguel *et al.* (2013), Zegard & Paulino (2016), Farshchin *et al.* (2016), Tapao & Cheerarot (2017), Gomes *et al.* (2018), Tejani *et al.* (2019)). Em um ambiente competitivo, como o atual cenário da engenharia, a otimização tem sido empregada com objetivo de projetar estruturas mais econômicas, que respeitem as restrições de normas técnicas regulamentadoras. Na maioria das vezes, o custo está relacionado com a massa da estrutura e as restrições estão associadas a limites de tensões e de deslocamentos máximos admissíveis.

O processo convencional de elaboração de projeto estrutural aos poucos tem sido substituído pelo processo otimizado (Figura 1). No processo convencional, o projetista lança uma estrutura inicial e verifica se a mesma atende aos critérios de projeto pré-estabelecidos pelo profissional e se é economicamente viável. Caso a estrutura não cumpra os requisitos, o projetista realiza ajustes nas propriedades da estrutura e analisa a nova configuração. Esse processo é repetido até que a estrutura seja satisfatória. No processo otimizado, o projetista lança uma estrutura inicial e define os critérios de projeto. A etapa de ajustes da estrutura é executada pelo otimizador de maneira automática, com base nas restrições e no objetivo que se deseja alcançar, como por exemplo, o menor custo. O processo é executado até que um critério de convergência seja atingido, de modo que essa etapa do dimensionamento não possui mais interferência do profissional. Posteriormente, o projetista verifica o resultado final obtido no que diz respeito às práticas construtivas vigentes, detalhamentos, entre outros. Portanto, quando aplicada corretamente, a otimização pode ser uma maneira mais rápida e eficiente de encontrar uma estrutura segura mais econômica.

Os dois tipos de processo possuem em comum as etapas de lançamento estrutural e de determinação dos critérios de projeto. O lançamento estrutural pode ser compreendido como a tradução da estrutura real e de seu meio em uma representação matemática e/ou numérica. Os critérios de projeto correspondem às restrições normativas ou qualquer outra limitação imposta na resolução do problema. É nesse momento que são determinados os tipos de cargas que atuarão na estrutura, bem como a magnitude, direção e sentido das forças generalizadas, as vinculações entre os elementos estruturais, as propriedades mecânicas dos materiais envolvidos e os modelos de análise estrutural que serão executa-

Figura 1: Comparação entre processo convencional (A) e processo otimizado (B) de dimensionamento estrutural.



Fonte: Adaptado de Arora (2004).

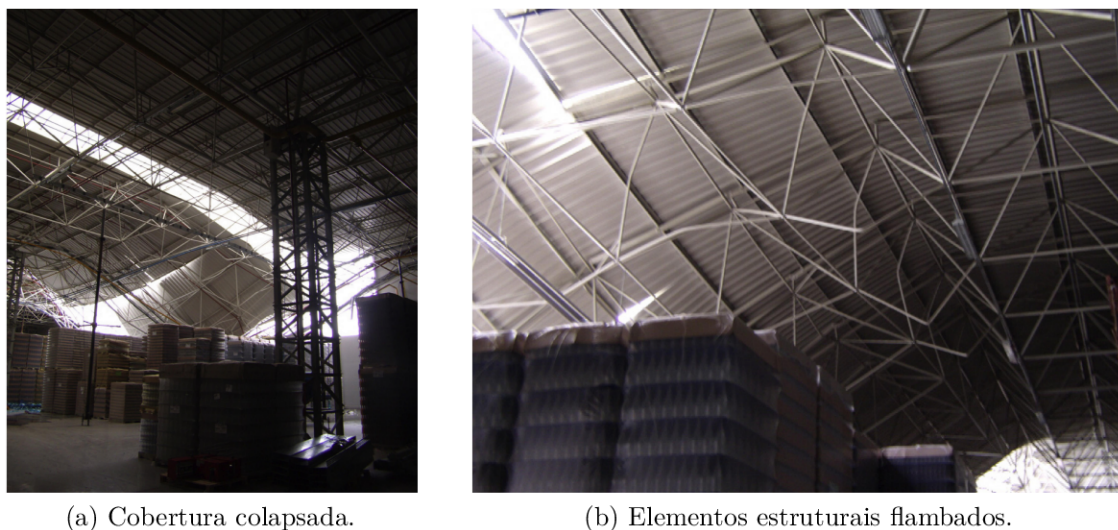
dos. Essas definições iniciais podem ter impacto significativo na estrutura resultante do dimensionamento, e serão tratadas aqui como hipóteses de modelagem.

Desse modo, destaca-se a importância de estudos que avaliam os efeitos das hipóteses de modelagem de projeto na configuração ótima das estruturas e que analisam a sensibilidade da resposta frente a essas definições, com o intuito de verificar em quais casos resultados semelhantes são obtidos para diferentes hipóteses e o quanto diferentes os resultados podem ser. A discussão sobre as hipóteses de modelagem aplicadas em problemas estruturais se torna ainda mais importante no método de dimensionamento otimizado dado que, nesse caso, os resultados dependem mais do processo de otimização e menos do projetista. Desse modo, é possível observar de maneira clara o efeito das escolhas iniciais de projeto no resultado do dimensionamento. Nota-se que a formulação que vem sendo denominada na literatura como otimização robusta é uma maneira de se tentar reduzir a sensibilidade da configuração ótima frente a estas definições. Entretanto, a presente tese se propõe a investigar e discutir aspectos que ainda não foram suficientemente discutidos na literatura, e que se encontram entre a otimização determinística usual, não-robusta, e a otimização robusta. Esta é a lacuna para a qual pretende-se apresentar contribuições.

1.1.1 Apresentação da proposta

Uma das restrições mais empregadas em problemas de otimização é a relacionada à flambagem, como tratado em [Pedersen & Nielsen \(2003\)](#), [Torii *et al.* \(2015\)](#), [Jalili & Hosseinzadeh \(2018\)](#) e [Jawad *et al.* \(2021\)](#). A flambagem é o fenômeno físico que corresponde à deflexão transversal que estruturas, geralmente lineares e esbeltas, sofrem em relação às suas configurações longitudinais iniciais, ao serem submetidas a um determinado esforço de compressão ([YOO; LEE, 2011](#)). Em geral, a flambagem ocorre de maneira abrupta e pode levar à falha parcial ou total da estrutura. [Piroglu & Ozakgul \(2016\)](#) apresentam um estudo de caso sobre o colapso parcial de uma treliça de cobertura devido a sobrecarga, onde algumas barras da estrutura apresentaram flambagem, conforme mostra a Figura 2.

Figura 2: Treliça de cobertura com barras flambadas.



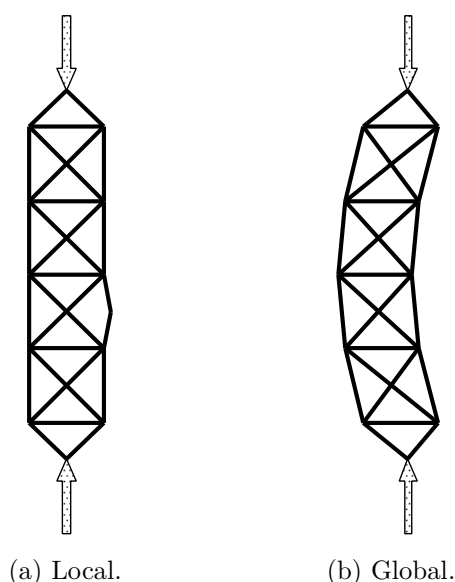
Fonte: [Piroglu & Ozakgul \(2016\)](#).

A flambagem pode ser avaliada por diferentes modelos, cada um com suas finalidades e limitações. Na maioria das vezes, a verificação desse fenômeno é feita confrontando-se a tensão atuante em cada elemento estrutural, obtida por meio de análise elástica de primeira ordem, com uma tensão crítica de flambagem. Essa tensão crítica depende de propriedades físicas e geométricas do elemento analisado, de modo que cada barra de uma estrutura possui uma determinada tensão máxima admissível. Nesses casos, o número de restrições associadas à flambagem é igual ao número de barras da estrutura. Muitos autores que adotam essa abordagem utilizam a formulação de Euler para a determinação da referida tensão crítica, a qual considera que o material tem comportamento elástico, representando então a chamada flambagem elástica ([GHOLIZADEH, 2013](#); [TEJANI *et al.*, 2019](#); [PETROVIĆ *et al.*, 2020](#); [FICARELLA *et al.*, 2021](#)). Por outro lado, há também expressões analíticas que buscam considerar possíveis aspectos não-lineares físicos, como por

exemplo, as formulações empíricas fornecidas pela norma [AISC-360 \(2016\)](#), representando a chamada flambagem inelástica ([GALANTE, 1996](#); [FALLAHIAN *et al.*, 2009](#); [KAVEH; KHAYATAZAD, 2013](#); [LEMONGE *et al.*, 2021](#)).

Embora os cenários apresentados anteriormente sejam os mais abordados na literatura, devido à simplicidade e ao baixo custo computacional associado, outros modelos podem levar a uma melhor representação do comportamento estrutural. Modelar a flambagem em cada elemento, de maneira isolada, pode resultar em uma análise limitada para problemas de otimização de grande porte, não levando em conta o comportamento da estrutura em relação à estabilidade global. A flambagem global é um fenômeno de instabilidade estática da estrutura como um todo, sem qualquer flambagem dos componentes estruturais. A [Figura 3](#) ilustra a diferença entre a flambagem local e global em uma treliça.

Figura 3: Flambagem local e global em treliças.



Fonte: [Hanahara & Tada \(2011\)](#).

Alguns autores consideram a flambagem por meio de uma restrição única global de estabilidade, representada por uma carga crítica. Nessa abordagem, usualmente, cada elemento da estrutura é discretizado em vários elementos de pórtico, com as extremidades rotuladas. A partir desse modelo, [Torii *et al.* \(2015\)](#) e [Mitjana *et al.* \(2018\)](#) determinam a carga crítica elástica por meio de uma análise de autovalor. [Madah & Amir \(2017\)](#) e [Varma *et al.* \(2020\)](#) mostram que a flambagem é levada em conta na carga crítica obtida por meio de análises elásticas de segunda ordem, após a aplicação de imperfeições geométricas na estrutura. Nesses casos, o modelo consegue capturar a flambagem local e global apenas com uma única restrição, independente do número de barras da estrutura.

Conforme exposto, há diversos trabalhos de otimização que utilizam modelos distintos para representar a flambagem. Entretanto, as diferenças obtidas nos resultados ótimos, ao

se adotar diferentes modelos, quase nunca são discutidas. Além disso, apesar de avanços na representação do comportamento estrutural, nota-se uma escassez de trabalhos em otimização que considerem o comportamento inelástico na determinação da carga crítica, não tendo sido encontrado nenhum trabalho relacionado a treliças. Um dos maiores desafios de estudos que envolvem otimização e modelos numéricos não-lineares é o custo computacional requerido para a resolução dos problemas. Conforme abordado anteriormente, os métodos de otimização necessitam executar diversas vezes a análise estrutural para encontrar a solução ótima. No caso de estruturas de grande porte, uma execução da análise estrutural não-linear pode demorar horas, de modo que a resolução da otimização se torna inviável em termos de tempo. Por esse motivo, para possibilitar estudos como esse, é necessário que seja investigado e aplicado um método de otimização capaz de reduzir o número de análises executadas, sem perder a precisão do resultado ótimo.

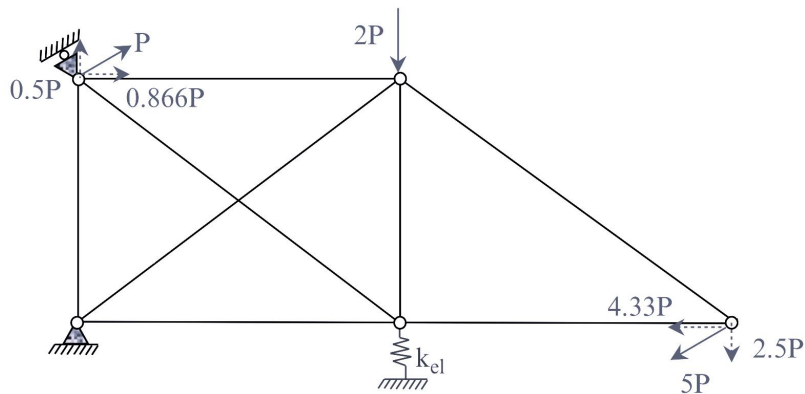
Nesse sentido, pesquisadores têm desenvolvido estudos relacionados à aplicação de metamodelos na resolução de problemas de otimização (FORRESTER *et al.*, 2008). Um metamodelo corresponde ao ajuste de um modelo matemático, com base em um conjunto de pontos, utilizado para representar uma função. Em geral, os metamodelos são empregados para substituir funções onerosas computacionalmente. Na literatura, há diversos artigos que aplicam metamodelos para substituir funções objetivo caras de serem avaliadas. Entretanto, um número menor de pesquisas tem discutido sobre a aplicação de metamodelos em problemas com restrições custosas (DURANTIN *et al.*, 2016; ZHANG *et al.*, 2018; WU *et al.*, 2018; QIAN *et al.*, 2020; DONG *et al.*, 2020; YANG *et al.*, 2020; ZENG *et al.*, 2022). Há ainda mais escassez de estudos que empregam metamodelos nas restrições e que abordam problemas de otimização estrutural (PARR *et al.*, 2012; DONG *et al.*, 2016; LIU *et al.*, 2017; LI *et al.*, 2017; DONG *et al.*, 2018; SHI *et al.*, 2019).

Em vista disso, o principal estudo da presente tese consiste em avaliar o efeito da hipótese de modelagem relacionada a diferentes modelos de flambagem na otimização de treliças. São analisadas a configuração ótima de treliças por meio da minimização da massa ou do volume dos seus elementos estruturais, considerando três cenários distintos: o cenário 1 considera restrição de flambagem elástica, caracterizada pela tensão crítica de Euler; o cenário 2 utiliza a formulação indicada na norma AISC-360 (2016) para o cálculo da tensão crítica; e o cenário 3 considera restrição de flambagem inelástica, representada por um critério único de estabilidade. Para viabilizar o estudo, é proposto um método de otimização que substitui as restrições dos problemas pelo metamodelo de Kriging. A escolha de analisar treliças ocorre por se tratar de uma estrutura amplamente empregada na construção civil.

De maneira secundária, também são avaliadas hipóteses de modelagem relacionadas às condições de contorno essenciais. Na literatura, há poucos estudos de otimização que analisam a influência da modelagem das ligações da estrutura no resultado ótimo. Usualmente, os suportes são modelados como apoios de primeiro, segundo e terceiro

gênero. Entretanto, na maioria das vezes, os apoios executados apresentam atritos em sua ligação, que ocasionam alguma resistência ao movimento. Também, comumente os apoios estão ligados a outros meios, como ao solo ou a outra estrutura, que permitem alguma movimentação do suporte (BARROS *et al.*, 1996). Na prática, raramente são construídos apoios perfeitos, com as possíveis movimentações pequenas o suficientes para serem completamente desprezadas, devido à dificuldade de execução e, conseqüente, ao alto custo financeiro. Nesse contexto, uma maneira mais realista de representar as conexões é por meio do uso de modelos de apoios elásticos ou inelásticos. Esses apoios são modelados através de molas, em que a rigidez da mola está associada à oposição do suporte ao movimento na direção da mola: quando a rigidez é nula, o apoio não oferece qualquer resistência ao movimento, e quanto maior a rigidez, mais dificuldade é imposta ao movimento. A Figura 4 ilustra uma treliça com um apoio elástico no nó central inferior, o qual gera impedimento ao movimento vertical do referido nó a depender da rigidez da mola.

Figura 4: Representação de apoios elásticos em estruturas.



Fonte: Adaptado de Papadrakakis & Sapountzakis (2018).

Dessa maneira, o segundo estudo da presente tese consiste em avaliar o efeito das hipóteses de modelagem relacionadas a diferentes casos de rigidezes dos apoios na otimização. O foco é mantido em apoios perfeitos e elásticos, não sendo abordados apoios inelásticos. Para manter a continuidade da pesquisa, esse estudo também é realizado em estruturas treliçadas e a otimização também é executada com o uso do método de otimização proposto. São analisadas as configurações ótimas de treliças por meio da minimização da massa ou do volume dos seus elementos estruturais considerando dez cenários de rigidez distintos. Além disso, ainda é feita uma análise do impacto do custo dos apoios na determinação da rigidez que leva à estrutura mais econômica. Todas as rotinas da pesquisa são elaboradas com o uso do *software* MATLAB (MATHWORKS, 2016) e a análise estrutural é executada com o uso do *software* MASTAN2 (ZIEMIAN;

MCGUIRE, 2007; MCGUIRE *et al.*, 2014). Todos os exemplos foram executados em um computador com processador AMD Ryzen 7 1700X.

No grupo de pesquisa no qual está inserida esta tese, foram desenvolvidos trabalhos preliminares relacionados ao estudo aqui proposto, em que a comparação é feita em relação à presença ou não de restrições de projeto que representam os estados limites último e de serviço de estruturas de concreto armado. Nesses trabalhos, Juliani & Gomes (2017a, 2017b, 2021) utilizaram algoritmos genéticos (HOLLAND, 1975) para lidar com os problemas de otimização. A análise estrutural incluiu apenas não-linearidade geométrica, enquanto que a não-linearidade física foi considerada de maneira simplificada através da redução da rigidez dos elementos estruturais, conforme sugere a NBR 6118 (2014). A presente tese apresenta discussões mais amplas e aprofundadas, não apenas a respeito deste tipo de restrição abordado em trabalhos anteriores, além de propor um método de otimização capaz de lidar com modelos mecânicos custosos.

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo geral

O objetivo geral do presente trabalho consiste em analisar o efeito das hipóteses de modelagem na configuração ótima de treliças planas e tridimensionais, utilizando o metamodelo de Kriging para substituir as restrições na otimização. As hipóteses de modelagem analisadas são relacionadas a diferentes condições de contorno essenciais e a modelos de análise estrutural.

1.2.2 Objetivos específicos

- (a) Elaborar rotinas computacionais em MATLAB para análise das hipóteses de modelagem relacionadas a diferentes condições de contorno essenciais e validar o modelo de apoio elástico representado por molas;
- (b) Elaborar rotinas computacionais em MATLAB para análise das hipóteses de modelagem relacionadas a diferentes modelos de flambagem. Desenvolver códigos para verificação de flambagem de acordo com os critérios de Euler, da norma AISC-360 (2016) e para o critério único de estabilidade representado pela carga crítica inelástica;
- (c) Desenvolver um método de otimização baseado em metamodelos, que viabilize a resolução de problemas de otimização estrutural de grande porte que possuem restrições computacionalmente custosas;
- (d) Minimizar, com o uso do método de otimização proposto, a massa ou o volume de estruturas para os cenários de modelagem estudados;

- (e) Comparar os resultados por meio da análise das semelhanças e diferenças das configurações ótimas obtidas nos cenários investigados, bem como de seus comportamentos relacionados às restrições de projeto e ao custo, de modo a obter conclusões mais abrangentes sobre o efeito de cada hipótese.

1.3 Organização do trabalho

Os capítulos que seguem são organizados da seguinte maneira:

- Capítulo 2: *Otimização estrutural baseada em metamodelos* - Apresenta a formulação de problemas de otimização e conceitos relacionados, bem como propõe um novo método de otimização baseado em Kriging para problemas estruturais com restrições custosas;
- Capítulo 3: *Hipóteses de modelagem estrutural* - Aborda os grupos de hipóteses de modelagem avaliados na pesquisa e expõe o estado da arte relacionado ao tema. Além disso, são apresentadas as formulações das hipóteses avaliadas e a validação dos códigos desenvolvidos em MATLAB;
- Capítulo 4: *Exemplos numéricos* - Aplica a metodologia proposta em cinco exemplos numéricos baseados na literatura, e os resultados obtidos são apresentados e avaliados. Quatro exemplos analisam os diferentes modelos de flambagem e um analisa diferentes condições de contorno essenciais;
- Capítulo 5: *Conclusões e sugestões para trabalhos futuros* - Apresenta as conclusões obtidas e sugestões de estudos complementares.

2 OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL BASEADA EM METAMODELOS

Este capítulo é baseado no artigo:

JULIANI, M. A.; GOMES, W. J. S. An efficient Kriging-based framework for computationally demanding constrained structural optimization problems. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v. 65, n. 4, 2022. <https://doi.org/10.1007/s00158-021-03095-8>.

Os problemas de otimização estrutural consistem em buscar um vetor de variáveis de projeto que minimize uma função objetivo e que está sujeito a restrições. Geralmente, a função objetivo está relacionada ao peso ou ao custo da estrutura e as restrições correspondem a critérios de projeto, como tensões e deslocamentos admissíveis. Portanto, nesses casos, as funções objetivo são simples de serem avaliadas, enquanto a avaliação das restrições muitas vezes depende da execução de modelos numéricos.

Um dos desafios da otimização estrutural corresponde à aplicação de modelos computacionais que representem o comportamento das estruturas de modo preciso, dado que esses modelos geralmente resultam em grandes esforços computacionais. Por exemplo, uma única execução de uma análise estrutural que leva em consideração os efeitos das não-linearidades físicas e geométricas pode demandar várias horas ou até dias de tempo computacional. Portanto, o processo de otimização deve exigir o mínimo possível de avaliações das restrições para evitar custos computacionais proibitivos.

Nesse contexto, a substituição das funções onerosas por metamodelos rápidos de serem avaliados pode ser uma alternativa para viabilizar o estudo de problemas estruturais que envolvam modelos computacionalmente custosos, que é o caso de alguns cenários avaliados no presente trabalho.

A seguir, é apresentada a formulação matemática de problemas de otimização, assim como alguns conceitos e classificações relacionados ao assunto. Na sequência, são abordados os metamodelos, com foco no modelo substituto de Kriging. Posteriormente, é exposto um levantamento de trabalhos relacionados a otimização baseada em metamodelos. Por fim, é apresentado o método de otimização desenvolvido e aplicado nesta pesquisa, bem como é avaliado o desempenho do método na resolução de alguns problemas estruturais.

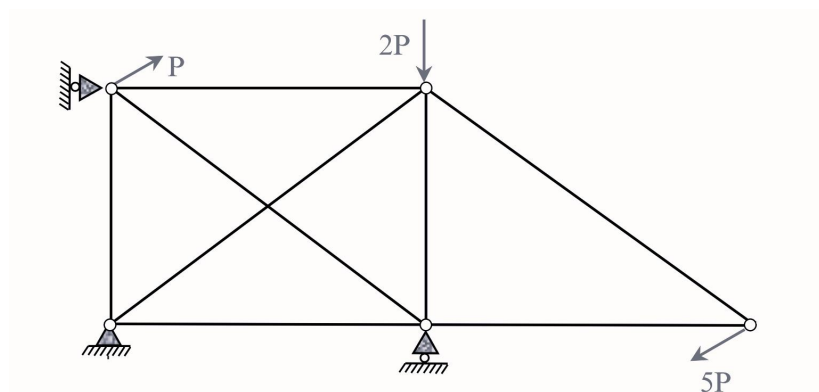
2.1 Formulação de um problema de otimização

De acordo com [Nocedal & Wright \(1999\)](#), os problemas de otimização consistem na maximização ou na minimização de uma função objetivo sujeita a restrições em suas variáveis. Dado que os problemas de otimização estrutural geralmente são definidos como a minimização do valor da função objetivo, as seções que seguem são apresentadas com foco nessa formulação; porém, o caso de maximização é análogo.

Para melhor compreensão desse assunto, é necessário definir os seguintes conceitos:

- **Função objetivo:** É a função que mede o desempenho do problema, ou seja, que quantifica a performance do sistema em estudo. O objetivo pode ser o custo, o tempo, a massa, ou qualquer outro parâmetro expresso por um escalar. Essa função é representada aqui por $f(\mathbf{x})$, onde \mathbf{x} é o vetor de variáveis de projeto. Tomando como exemplo a treliça de oito barras da [Figura 5](#), a função objetivo pode corresponder ao volume da estrutura dado por $f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^8 A_i L_i$, onde A_i e L_i são, respectivamente, a área da seção transversal e o comprimento da i -ésima barra da estrutura.

Figura 5: Treliça de 8 barras e 5 nós.



Fonte: Adaptado de [Papadrakakis & Sapountzakis \(2018\)](#).

- **Variáveis de projeto:** São os parâmetros que se alteram no decorrer do processo de otimização, até que seja encontrado o conjunto de parâmetros que conduza ao melhor desempenho do sistema em estudo, de acordo com a função objetivo. As variáveis podem ser representadas pelo vetor $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]$, composto por n variáveis associadas a um espaço de busca Ω . Retomando o exemplo apresentado acima, as variáveis do problema podem corresponder às áreas das seções transversais das barras da treliça, de modo que o vetor de variáveis de projeto é escrito como $\mathbf{x} = [A_1, \dots, A_8]$.
- **Restrições:** São as limitações impostas ao problema, as quais são expressas em função das variáveis de projeto e delimitam o espaço de busca. As restrições podem ser

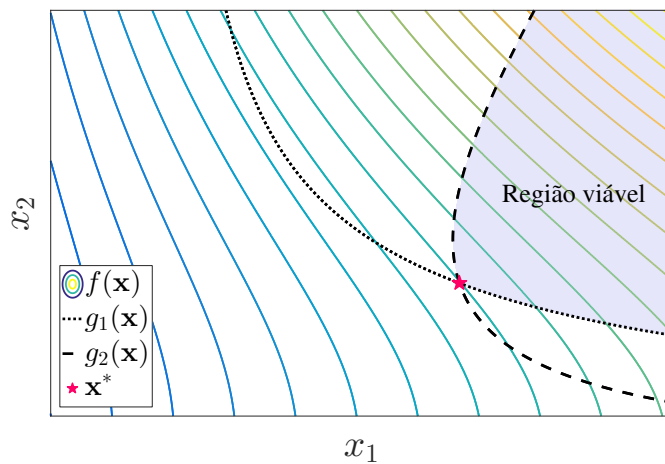
representadas pelos vetores $\mathbf{h} = [h_1(\mathbf{x}), \dots, h_m(\mathbf{x})]$ e $\mathbf{g} = [g_1(\mathbf{x}), \dots, g_q(\mathbf{x})]$, compostos por m restrições de igualdade e q restrições de desigualdade, respectivamente. Sendo assim, no problema estrutural abordado, as restrições podem corresponder a indicações normativas como, por exemplo, a limitação da tensão normal máxima nas barras, expressa por $g_i(\mathbf{x}) = \sigma_i(\mathbf{x}) - \sigma_{cr_i} \leq 0$, onde $\sigma_i(\mathbf{x})$ é a tensão normal no i -ésimo elemento avaliado e σ_{cr_i} é a respectiva tensão máxima admissível indicada pela norma.

Em resumo, um problema de otimização que busque a minimização da função objetivo e que possua restrições de igualdade e de desigualdade pode ser escrito como (SPILLERS; MACBAIN, 2009):

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Encontrar } \mathbf{x} \in \Omega \\ \text{Que minimize } f(\mathbf{x}) \\ \text{Sujeito a: } h_j(\mathbf{x}) = 0 \quad (j = 1, \dots, m) \\ \quad \quad \quad g_k(\mathbf{x}) \leq 0 \quad (k = 1, \dots, q). \end{array} \right. \quad (2.1)$$

A Figura 6 mostra a representação geométrica de um problema de otimização com duas variáveis e duas restrições, onde \mathbf{x}^* é o vetor de variáveis de projeto ótimo. A função objetivo é representada por meio de suas curvas de nível.

Figura 6: Representação geométrica de um problema de otimização.



Fonte: Elaborada pela autora.

O ponto ótimo encontrado via processo de otimização pode ser denominado ótimo global ou ótimo local. Um ótimo global ocorre em um ponto viável \mathbf{x}^* quando o valor da função objetivo é menor (ou no máximo igual) nesse ponto do que em qualquer outro \mathbf{x} do espaço de projeto viável. Quando essa afirmação é válida para qualquer \mathbf{x} em uma

vizinhança de \mathbf{x}^* no espaço de projeto viável, ocorre um ótimo local em \mathbf{x}^* (ARORA, 2004). Matematicamente, \mathbf{x}^* é um ótimo global (mínimo) quando

$$f(\mathbf{x}^*) \leq f(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_V$$

$$\Omega_V = \{\mathbf{x} \mid h_j(\mathbf{x}) = 0, j = 1, \dots, m; g_k(\mathbf{x}) \leq 0, k = 1, \dots, q\}, \quad (2.2)$$

onde Ω_V é o espaço de busca viável. Um ótimo local (mínimo) ocorre em \mathbf{x}^* quando

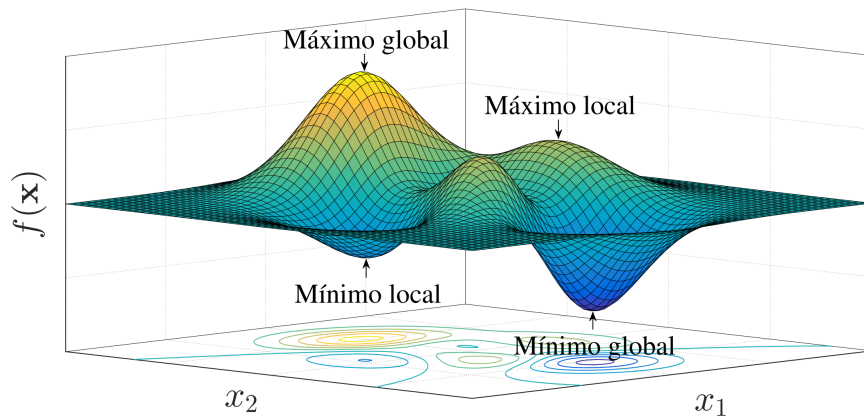
$$f(\mathbf{x}^*) \leq f(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_0$$

$$\Omega_0 = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \Omega_V; \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\| < \delta\}, \quad (2.3)$$

onde Ω_0 é a região de vizinhança de \mathbf{x}^* definida pelo raio δ .

A Figura 7 ilustra ótimos de máximos e mínimos globais e locais de uma função, ao longo de um espaço de projeto viável.

Figura 7: Ótimos globais e locais.



Fonte: Elaborada pela autora.

2.1.1 Classificações relacionadas à otimização

As seções a seguir apresentam algumas classificações relacionadas aos problemas de otimização e aos métodos utilizados para resolvê-los.

2.1.1.1 Variáveis contínuas e discretas

As variáveis podem ser classificadas como contínuas ou discretas. Para as contínuas, a busca por \mathbf{x}^* ocorre em um espaço de soluções infinito, enquanto que para as discretas, o espaço de soluções é finito. Geralmente, problemas de otimização contínua são mais fáceis de resolver, dado que a suavidade das funções possibilita o uso de informações de um ponto específico \mathbf{x} para deduzir informações sobre o comportamento da função em pontos próximos a \mathbf{x} . A mesma afirmação não pode ser feita sobre problemas discretos, em que

pontos próximos no conjunto podem ter valores de função significativamente diferentes (NOCEDAL; WRIGHT, 1999).

2.1.1.2 Convexidade

O conjunto $\Omega \in \mathbb{R}^n$ é dito convexo se qualquer segmento de linha reta que conecta dois pontos em Ω estiver inteiramente dentro do conjunto. Além disso, a função f é dita convexa se seu domínio é um conjunto convexo e se satisfaz a inequação

$$f(\alpha \mathbf{x}^{(2)} + (1 - \alpha) \mathbf{x}^{(1)}) \leq \alpha f(\mathbf{x}^{(2)}) + (1 - \alpha) f(\mathbf{x}^{(1)}), \quad (2.4)$$

para $0 \leq \alpha \leq 1$, onde $\mathbf{x}^{(1)}$ e $\mathbf{x}^{(2)}$ são quaisquer dois pontos do domínio (NOCEDAL; WRIGHT, 1999).

Assim, um problema de otimização convexo é aquele onde a função objetivo e as restrições de desigualdade são convexas e as restrições de igualdade são lineares. Quando o problema apresenta essa característica, qualquer mínimo local da função é também um mínimo global, de modo que pode haver garantia de uma otimização global.

2.1.1.3 Métodos de busca global e local

A busca global se concentra em explorar o espaço de soluções como um todo, tentando cobrir o máximo possível de regiões do domínio, enquanto que a busca local se concentra em explorar regiões apenas ao redor da sua atual localização no espaço de soluções.

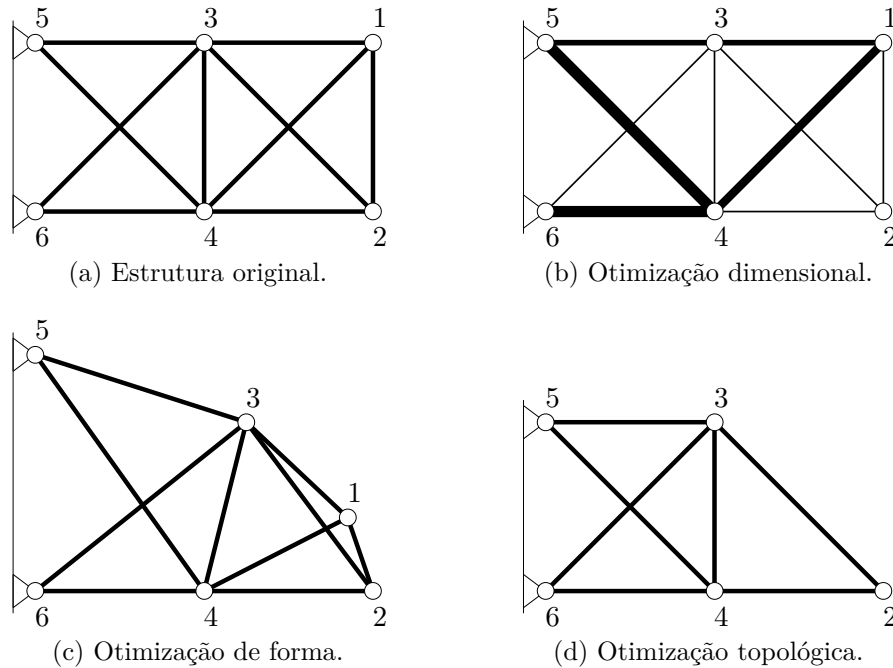
Em geral, os métodos de busca local começam a explorar o espaço de soluções a partir de um determinado ponto e, iterativamente, procuram encontrar uma solução melhor em termos da função objetivo (NELDER; MEAD, 1965; NOCEDAL; WRIGHT, 1999). Assim, o desempenho do método é altamente dependente de seu ponto de partida. Quando o problema de otimização é convexo, é possível encontrar o ótimo global com um método de busca local, conforme discutido na seção anterior.

Por outro lado, quando o problema de otimização não satisfaz determinadas condições, o algoritmo de busca local tende a um ótimo local. Uma maneira de se explorar o espaço de projeto como um todo, com o uso de métodos de busca local, é reiniciar o algoritmo partindo de vários pontos distintos (MARTÍ, 2003). Outra abordagem para resolver esses problemas é o uso de métodos meta-heurísticos, os quais geralmente são estocásticos e se baseiam em comportamentos de diversos fenômenos para realizar a busca do ponto ótimo ao longo de todo o espaço de projeto, de modo a evitar paradas prematuras em ótimos locais (HOLLAND, 1975; KENNEDY; EBERHART, 1995; YANG, 2009; GONÇALVES *et al.*, 2015). Entretanto, tais métodos normalmente requerem muitas avaliações das funções objetivo e das restrições. Nesse contexto, nos casos em que o problema requer simulações complexas e onerosas, uma possibilidade é o uso de metamodelos para substituir tais funções (FORRESTER *et al.*, 2008; CARRARO, 2017). Esse assunto será abordado na seção 2.2.

2.1.1.4 Tipos de otimização estrutural

Os problemas de otimização estrutural podem, em geral, ser divididos em três categorias, sendo que cada uma delas se concentra em diferentes aspectos da estrutura (BENDSØE; SIGMUND, 2004). A Figura 8 ilustra as três categorias quando aplicadas a um problema de treliça (MIGUEL *et al.*, 2013; MORTAZAVI; TOĞAN, 2016; MÜLLER; KLASHORST, 2017). A primeira categoria, denominada de otimização dimensional, busca as dimensões ótimas das seções transversais dos elementos que integram a estrutura (Figura 8b). A otimização de forma, que corresponde à segunda categoria, visa determinar as coordenadas das posições dos nós da treliça (Figura 8c). A terceira categoria, chamada de otimização topológica, permite a retirada de barras e de nós da estrutura (Figura 8d).

Figura 8: Categorias de otimização estrutural.



Fonte: Adaptado de Faramarzi & Afshar (2014).

2.2 Metamodelos

Um modelo substituto, também chamado de metamodelo, é um modelo matemático construído com base em um conjunto limitado de dados de um experimento físico ou computacional. Assim, pode-se utilizar o metamodelo para prever novos resultados assumidos pelo experimento, sem executá-lo (FORRESTER *et al.*, 2008). No contexto da otimização, os modelos substitutos são utilizados para substituir as funções objetivo e/ou as restrições, quando essas funções demandam muito esforço computacional para serem

avaliadas. A principal ideia é obter um metamodelo suficientemente preciso e com tempo de treinamento consideravelmente menor do que o tempo gasto nas avaliações das funções originais.

Considerando um plano de amostragem $\mathbf{X} = [\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(p)}]^T$ formado por p pontos do espaço de projeto n -dimensional de uma função $f(\mathbf{x})$. Cada um desses pontos, denominados de pontos de suporte ou pontos amostrais, pode ser associado a um valor dado por $f(\mathbf{x})$, obtendo-se um vetor de respostas $\mathbf{y} = [y^{(1)}, \dots, y^{(p)}]^T$, onde $y^{(i)} = f(\mathbf{x}^{(i)})$, com $i = 1, \dots, p$. A partir desses dados, é possível ajustar um modelo substituto e obter a predição $\hat{y}(\mathbf{x}) \approx f(\mathbf{x})$ em qualquer ponto \mathbf{x} do espaço de projeto, via metamodelo. Existem diversos modelos substitutos que podem ser utilizados com esse propósito, como por exemplo, o metamodelo de Kriging apresentado a seguir.

2.2.1 Kriging

Os metamodelos de Kriging podem ser vistos como a realização de um processo Gaussiano, entendido como

$$G(\mathbf{x}) = \mu + Z(\mathbf{x}), \quad (2.5)$$

onde μ é a parte determinística que fornece uma aproximação da resposta na média (tendência global) e $Z(\mathbf{x})$ é um processo Gaussiano estacionário com média zero, que representa um desvio local do modelo (tendência local) (ECHARD *et al.*, 2011; CHUNNA *et al.*, 2020). A covariância entre os resultados do processo Gaussiano Z é dada por

$$\text{Cov} [Z(\mathbf{x}^{(i)}), Z(\mathbf{x}^{(j)})] = \sigma^2 R(\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{x}^{(j)}), \quad (2.6)$$

onde σ^2 é a variância do processo e $R(\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{x}^{(j)})$ é a função de correlação (ou função de base) entre os pontos $\mathbf{x}^{(i)}$ e $\mathbf{x}^{(j)}$, com $i, j = 1, \dots, p$ (BICHON, 2008). Uma das funções de correlação mais utilizadas é a Gaussiana, dada pela Equação 2.7, onde $\vec{\theta} = [\theta_1, \dots, \theta_n]^T$ são os hiperparâmetros desconhecidos do modelo, os quais são ajustados para melhor representar a função substituída.

$$R(\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{x}^{(j)}) = \exp \left[- \sum_{l=1}^n \theta_l |x_l^{(i)} - x_l^{(j)}|^2 \right] \quad (2.7)$$

Geralmente, os parâmetros desconhecidos $\vec{\theta}$ são encontrados por meio da maximização da verossimilhança (*Maximum Likelihood Estimate* - MLE). Mais detalhes do procedimento podem ser obtidos em Forrester *et al.* (2008).

Para dados \mathbf{X} , \mathbf{y} e $\vec{\theta}$, os parâmetros $\hat{\mu}$ e $\hat{\sigma}^2$ do modelo substituto podem ser estimados por

$$\hat{\mu} = \frac{\mathbf{1}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{y}}{\mathbf{1}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{1}}, \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{(\mathbf{y} - \mathbf{1} \hat{\mu})^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{1} \hat{\mu})}{p}, \quad (2.8)$$

onde \mathbf{R} é a matriz de correlação de todos os dados da amostra e $\mathbf{1}$ é um vetor coluna $p \times 1$ onde todos os elementos são iguais a 1 (FORRESTER *et al.*, 2008). Portanto, a

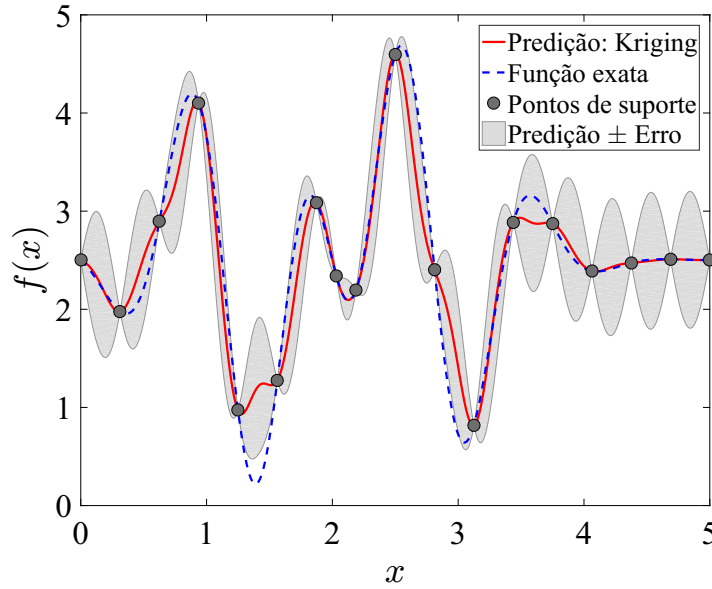
função de predição e o respectivo erro quadrado médio (*Mean squared error* - MSE) podem ser escritos como mostram as Equações 2.9 e 2.10, respectivamente, onde \mathbf{r} é o vetor de correlações entre os dados observados e a nova predição.

$$\hat{y}(\mathbf{x}) = \hat{\mu} + \mathbf{r}^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{1}\hat{\mu}) \quad (2.9)$$

$$s^2(\mathbf{x}) = \hat{\sigma}^2 \left[1 - \mathbf{r}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{r} + \frac{(1 - \mathbf{1}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{r})^2}{\mathbf{1}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{1}} \right] \quad (2.10)$$

A Figura 9 mostra um exemplo de predição de uma função via metamodelo de Kriging, bem como a estimativa do erro da aproximação.

Figura 9: Exemplo de predição via metamodelo de Kriging.



Fonte: Elaborada pela autora.

2.3 Contextualização

Na literatura, diversos trabalhos utilizam metamodelos para lidar com funções onerosas na otimização (CHUNNA *et al.*, 2020; KROETZ *et al.*, 2020; ZHAO *et al.*, 2020). Tais abordagens geralmente diferem no critério de seleção dos pontos de suporte do metamodelo. O processo de seleção da amostra tem grande influência na precisão do modelo substituto e, conseqüentemente, na resposta ótima encontrada.

Muitos autores propõem incluir pontos na amostra de forma adaptativa, de acordo com métricas que procuram identificar quais regiões do espaço de busca são importantes para a otimização e também para que se atinja uma maior precisão do metamodelo. No entanto, o foco principal desses estudos está relacionado a funções objetivo onerosas,

enquanto um número mais limitado aborda problemas com restrições onerosas (DURANTIN *et al.*, 2016; ZHANG *et al.*, 2018; WU *et al.*, 2018; QIAN *et al.*, 2020; DONG *et al.*, 2020; YANG *et al.*, 2020; ZENG *et al.*, 2022). Além disso, estudos que aplicam tais abordagens em problemas estruturais são ainda mais limitados (PARR *et al.*, 2012; DONG *et al.*, 2016; LIU *et al.*, 2017; LI *et al.*, 2017; DONG *et al.*, 2018; SHI *et al.*, 2019). Dentre os modelos substitutos utilizados com essa finalidade, destaca-se o Kriging (KRIGE, 1951; JONES *et al.*, 1998) por sua flexibilidade e capacidade de estimar a incerteza do modelo, o que pode facilitar a identificação de regiões importantes do ponto de vista da otimização.

Lee & Jung (2008) propõem o chamado método de amostragem no contorno da restrição (*Constraint Boundary Sampling method* - CBS) para construir metamodelos que consigam prever precisamente o ponto ótimo que satisfaz as restrições. Para isso, são inseridos na amostra pontos localizados ao longo do contorno da restrição, com base no erro quadrático médio da estimativa do Kriging. Meng *et al.* (2019) propõem outro método de aprendizagem ativa, o qual apresenta bom desempenho quando comparado ao CBS. Entretanto, ambos trabalhos se concentram em problemas de otimização baseados em confiabilidade, nos quais a escolha dos pontos depende também da necessidade de se obter boas estimativas para probabilidades de falha estruturais.

Dong *et al.* (2018) apresentam, como continuidade de um estudo anterior (DONG *et al.*, 2016), uma abordagem de otimização global baseada na redução do espaço de busca. Inicialmente, são definidos dois subespaços do espaço de busca, um na vizinhança da melhor solução encontrada até o momento e o outro em uma região que abrange diversas soluções promissoras. Em seguida, é realizada alternadamente a otimização nos subespaços e no espaço global, para explorar os modelos substitutos e adicionar novos pontos na amostra de acordo com os resultados encontrados. Qian *et al.* (2020) apresentam uma abordagem de atualização do metamodelo de Kriging, quando empregado para representar as restrições. A abordagem é baseada em intervalos de confiança, e tenta avaliar se o *status* de viabilidade do projeto candidato pode ser alterado devido a incertezas da interpolação relacionadas à predição do Kriging. Dong *et al.* (2020) propõem um método de otimização discreta com restrições baseado em Kriging. Primeiramente, é realizada uma otimização de múltiplas inicializações para encontrar soluções promissoras no intervalo contínuo de projeto. Após projetar as soluções para o espaço discreto, é feita uma estratégia de busca na vizinhança em conjunto com o critério de melhora esperada, para encontrar amostras suplementares. Zeng *et al.* (2022) apresentam um método de otimização global para problemas com restrições custosas, baseado em Kriging. No método proposto, a região viável prevista pelos metamodelos das restrições é ajustada de forma adaptativa, verificando a viabilidade do ponto de preenchimento, que é obtido minimizando a função de limite inferior de confiança (LCB - *Lower Confidence Bound*) da previsão da função objetivo sujeita às restrições. O algoritmo mostrou bons resultados em treze problemas matemáticos *benchmark* e em um problema de engenharia.

Embora as abordagens apresentadas se mostrem promissoras, os trabalhos, em geral, focam em problemas *benchmark* e avaliam poucos problemas estruturais. Portanto, identifica-se uma escassez de estudos que empregam modelos substitutos para as restrições e que abordam problemas de otimização estrutural, como por exemplo, relacionados a vigas, a pórticos e a treliças. Sendo assim, um dos objetivos do método proposto aqui é conseguir resolver uma ampla gama de problemas de otimização estrutural, com diferentes funções objetivos, restrições e variáveis de projeto. Destaca-se que, apesar do estudo da presente tese ser direcionado apenas a treliças, a apresentação de um método de otimização baseado em metamodelos para as restrições, que consiga resolver diversos tipos de problemas estruturais, é uma contribuição necessária para o desenvolvimento e a viabilidade de outros tipos de pesquisas.

2.4 Método proposto

O método de otimização proposto é desenvolvido para problemas que apresentam funções objetivo rápidas de serem avaliadas e restrições custosas computacionalmente. Nesse contexto, são construídos modelos substitutos apenas para as restrições, dado que o tempo de treinamento do metamodelo pode ser maior do que o tempo gasto para avaliar as funções objetivo originais.

Uma vez que o modelo substituto é utilizado como uma aproximação das restrições, baseado nas avaliações das restrições em pontos amostrais do espaço de busca, é prudente melhorar a precisão do metamodelo durante o processo de otimização, inserindo novos pontos na amostra. Estes novos pontos, denominados de pontos de preenchimento (IPs *infill points*), geralmente são provenientes de regiões do espaço de projeto que podem conter o resultado ótimo. Em geral, um procedimento de otimização baseado em metamodelos pode ser resumido nas seguintes etapas principais:

- 1) Determinar um plano de amostragem;
- 2) Ajustar um metamodelo considerando os pontos amostrais e as respostas a eles associadas;
- 3) Inserir pontos de preenchimento na amostra e voltar para a etapa 2. O procedimento é executado até atingir um critério de parada.

A seguir, são apresentadas as etapas do método proposto aqui, com algumas ilustrações do procedimento quando aplicado na solução do chamado *Toy problem*. A função objetivo, o espaço de busca e as restrições do problema, o qual é adaptado de [Gramacy et al. \(2015\)](#), são apresentados nas Equações 2.11, 2.12 e 2.13. Para melhor compreensão do método, a Figura 10 mostra o fluxograma do processo de otimização. Todos os códigos são desenvolvidos em MATLAB ([MATHWORKS, 2016](#)), e os códigos referentes ao Kriging

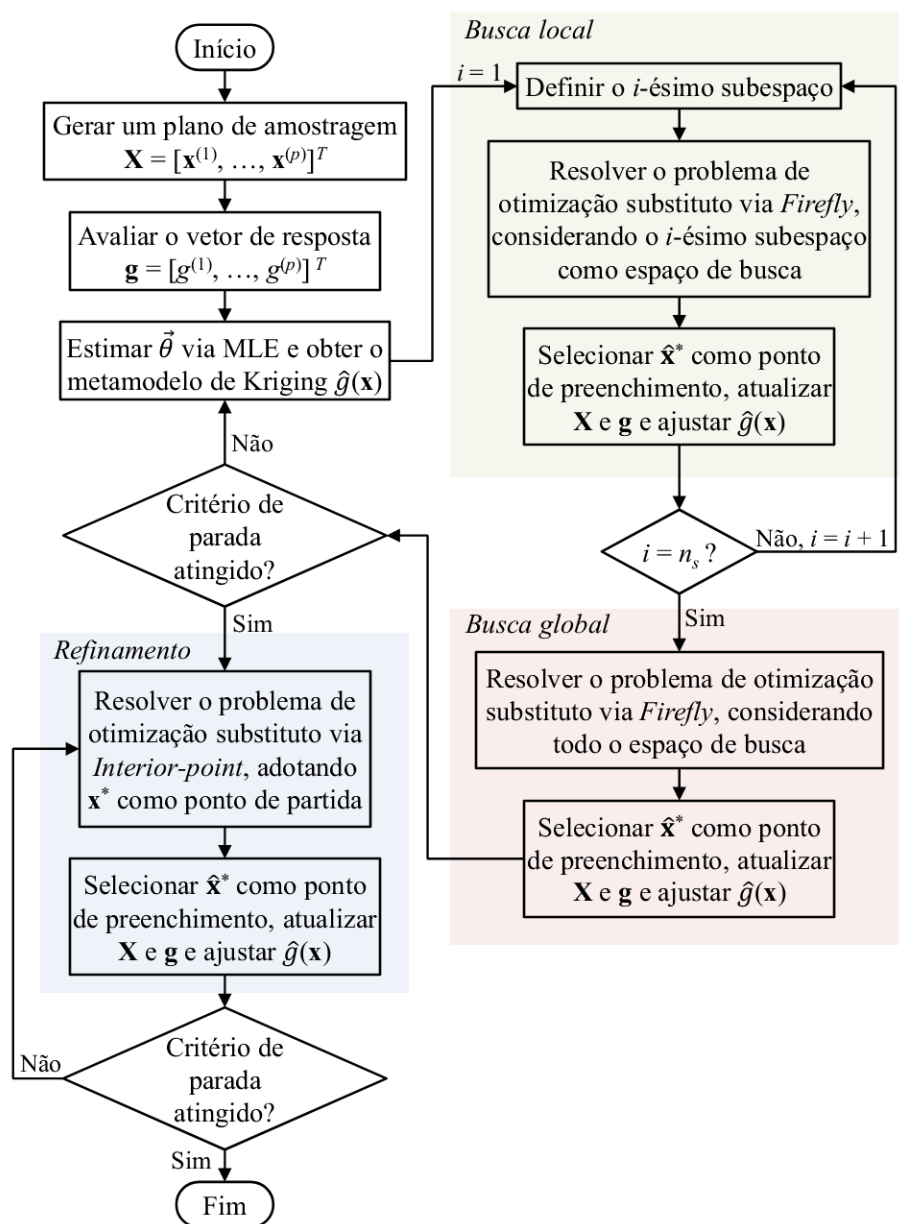
foram obtidos de Forrester *et al.* (2008).

$$f(\mathbf{x}) = x_1 + x_2, \quad \text{com } 0 \leq x_1, x_2 \leq 1 \quad (2.11)$$

$$g_1(\mathbf{x}) = \frac{3}{2} - x_1 - 2x_2 - \frac{1}{2} \sin(4\pi(x_1^2 - 2x_2)) \quad (2.12)$$

$$g_2(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - \frac{3}{2} \quad (2.13)$$

Figura 10: Fluxograma do método de otimização proposto.

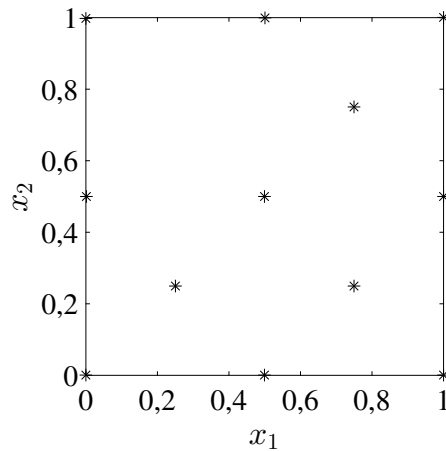


Fonte: Elaborada pela autora.

2.4.1 Plano de amostragem

O plano de amostragem $\mathbf{X} = [\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(p)}]^T$ é gerado de tal maneira que os pontos selecionados para compor a amostra sejam os mais distantes entre si no espaço de projeto, garantindo ampla cobertura do espaço de busca. Para isso, n_{samp} pontos aleatórios são gerados uniformemente dentro dos limites do espaço de projeto. Dentre esses pontos, aquele mais próximo do centro do espaço de busca é selecionado e incluído no plano de amostragem. O próximo ponto selecionado é definido como o ponto mais distante daqueles selecionados anteriormente. A seleção procede pelo critério da máxima distância Euclidiana entre os pontos, até que sejam obtidos os p pontos que definem o plano de amostragem inicial. Destaca-se que o espaço de projeto utilizado durante toda a execução do processo de otimização é normalizado, de modo que os limites inferiores e superiores das variáveis correspondem a 0 e 1, respectivamente. Assim, variáveis com magnitudes diferentes têm a mesma contribuição nas distâncias. A Figura 11 mostra uma amostra gerada para o *Toy problem*, com $p = 12$.

Figura 11: Plano de amostragem: *Toy problem*.



Fonte: Elaborada pela autora.

2.4.2 Construção do metamodelo de Kriging

Para construir o metamodelo de Kriging, é necessário avaliar as restrições em cada ponto do plano de amostragem, obtendo o vetor de respostas $\mathbf{g} = [g^{(1)}, \dots, g^{(p)}]^T$, onde $g^{(i)} = \max([g_1(\mathbf{x}^{(i)}), \dots, g_q(\mathbf{x}^{(i)})])$, com $i = 1, \dots, p$, e \max é o operador que retorna o valor máximo entre os elementos. Assim, o modelo substituto é criado com base no plano de amostragem \mathbf{X} e os respectivos valores de restrições \mathbf{g} . A função de predição obtida pelo metamodelo é denotada por $\hat{g}(\mathbf{x})$. Para ajustar os parâmetros $\vec{\theta}$ da função de base ao conjunto de dados, é feita a maximização da verossimilhança via *Particle Swarm*

Optimization (PSO) (KENNEDY; EBERHART, 1995), o qual se mostrou mais preciso e rápido do que o Algoritmo Genético (GA) utilizado em Forrester *et al.* (2008). Outros métodos de otimização meta-heurísticos também podem ser empregados, mas os resultados obtidos via PSO mostraram-se suficientes para os fins desta pesquisa.

2.4.3 Estratégias de busca

São utilizadas três estratégias de busca para selecionar pontos de preenchimento no decorrer do processo de otimização: busca local, busca global e refinamento. A combinação dessas estratégias, que possuem características complementares, diferencia a abordagem aqui proposta do que se tem disponível na literatura. Todas essas estratégias fazem uso de um problema de otimização substituto, onde as restrições dos problemas originais são substituídas pela função de predição $\hat{g}(\mathbf{x})$ do metamodelo. Os pontos ótimos $\hat{\mathbf{x}}^*$ encontrados nessas otimizações são inseridos como pontos de preenchimento no plano de amostragem, mesmo que sejam classificados como inviáveis pelas restrições verdadeiras. Durante todo o processo de otimização, as restrições originais são avaliadas apenas uma vez em cada ponto do plano de amostragem. O número total de avaliações das restrições é igual ao tamanho da amostra no final do processo de otimização.

2.4.3.1 Busca local e global

A busca local é realizada com o intuito de procurar mínimos locais ao longo do espaço de projeto, de modo que diversas regiões promissoras possam ser exploradas. Para isso, são definidos n_s subespaços de projeto e, em cada um desses subespaços, é feita a otimização do problema substituto por meio de um método meta-heurístico. O melhor projeto $\hat{\mathbf{x}}^*$ encontrado em cada subproblema de otimização é selecionado como ponto de preenchimento. O método meta-heurístico empregado aqui é o *Firefly* (FA), desenvolvido por Yang (2009), o qual é inspirado na característica de bioluminescência dos vaga-lumes. O *Firefly* é escolhido para ser utilizado na abordagem proposta devido ao seu bom desempenho em problemas estruturais, conforme observado em Gandomi *et al.* (2011), Miguel & Miguel (2012), Miguel *et al.* (2015) e Gebremedhen *et al.* (2020).

Os subespaços de busca são gerados com base no conceito de subconjuntos mais distantes. Primeiramente, é selecionado aleatoriamente um ponto do plano de amostragem, definido como \mathbf{x}_s^1 . Posteriormente, os pontos $\mathbf{x}_s^2, \dots, \mathbf{x}_s^{n_s}$ são escolhidos pelo critério da máxima distância, selecionando sequencialmente o ponto do plano de amostragem mais distante dos pontos já selecionados. Com esses dados, os limites inferiores e superiores do i -ésimo subespaço de projeto, definidos como \mathbf{lb}_s^i e \mathbf{ub}_s^i , respectivamente, são dados por

$$\begin{aligned} \mathbf{lb}_s^i &= \max \left(\left[\mathbf{lb}, \left(\mathbf{x}_s^i + \Delta \mathbf{lb}^i - \Delta \mathbf{ub}^i \right) - \frac{\mathbf{d}}{2} \right] \right) \\ \mathbf{ub}_s^i &= \min \left(\left[\mathbf{ub}, \left(\mathbf{x}_s^i + \Delta \mathbf{lb}^i - \Delta \mathbf{ub}^i \right) + \frac{\mathbf{d}}{2} \right] \right), \end{aligned} \quad (2.14)$$

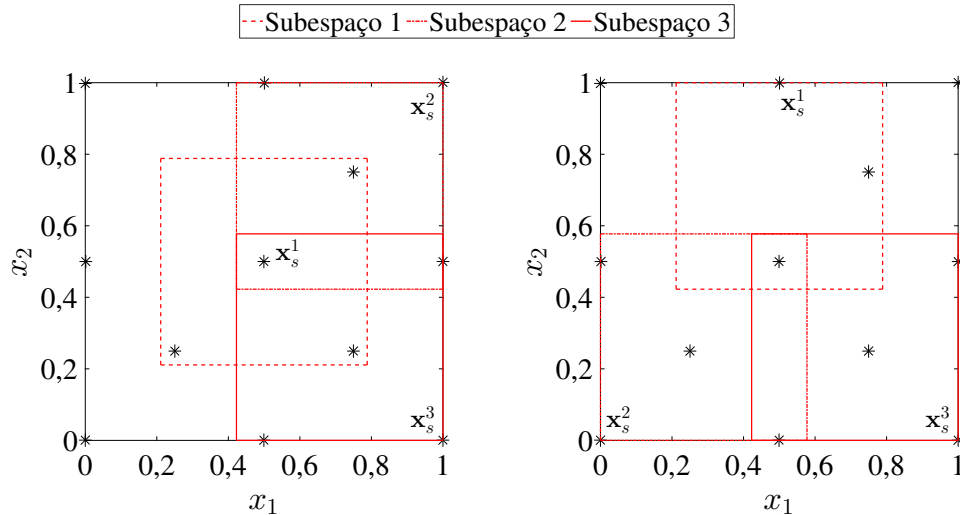
onde todos os vetores tem tamanho $n \times 1$ e cada linha está associada a uma dimensão do espaço de projeto: \mathbf{lb} e \mathbf{ub} são os limites inferiores e superiores do problema, respectivamente, \mathbf{d} representa a largura do subespaço e $\Delta \mathbf{lb}^i$ e $\Delta \mathbf{ub}^i$ são calculados por

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{lb}^i &= \max \left(\left[\mathbf{0}, \mathbf{lb} - \left(\mathbf{x}_s^i - \frac{\mathbf{d}}{2} \right) \right] \right) \\ \Delta \mathbf{ub}^i &= \max \left(\left[\mathbf{0}, \left(\mathbf{x}_s^i + \frac{\mathbf{d}}{2} \right) - \mathbf{ub} \right] \right) \end{aligned} \quad (2.15)$$

Além disso, \max e \min são os operadores que retornam os valores máximo e mínimo de uma linha, respectivamente. Todos os subespaços têm o mesmo tamanho, escolhido como $\mathbf{d} = (\mathbf{ub} - \mathbf{lb}) / (n_s^{1/n})$, o que resulta em algumas sobreposições entre eles se o valor de \mathbf{d} for maior do que a metade do intervalo definido por \mathbf{ub} e \mathbf{lb} , em qualquer dimensão do problema. Os limites dados pelas Equações 2.14 e 2.15 tendem a centralizar os subespaços em seus respectivos \mathbf{x}_s^i . No entanto, quando esses pontos estão próximos dos limites do espaço de projeto, o subespaço não pode ser centralizado neles. Nesse caso, os subespaços são realocados para que os limites superiores e inferiores não sejam violados.

A Figura 12 mostra dois possíveis conjuntos de subespaços gerados a partir de diferentes \mathbf{x}_s^1 . Deve-se notar que, dado o aspecto aleatório da seleção do ponto do primeiro subespaço e devido à atualização da amostra ao longo do processo, os subespaços mudam a cada iteração do método, de modo que diferentes regiões do domínio são exploradas durante o processo de otimização.

Figura 12: Diferentes subespaços obtidos pela metodologia: *Toy problem*.



Fonte: Elaborada pela autora.

A busca global é empregada com o intuito de encontrar os mínimos globais. Aqui, o problema de otimização substituído é resolvido considerando todo o espaço do projeto. O ponto ótimo $\hat{\mathbf{x}}^*$ encontrado no processo é selecionado como um IP. A otimização também é realizada pelo algoritmo *Firefly*.

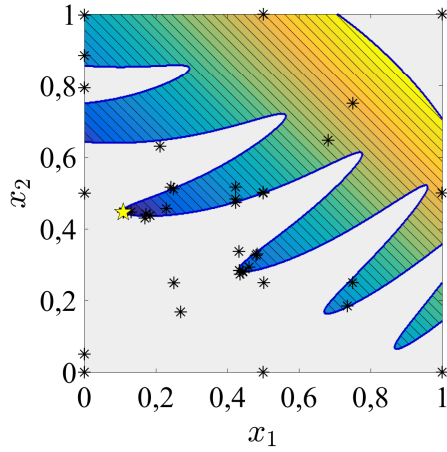
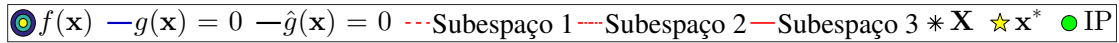
As buscas locais e globais são realizadas até que um critério de parada seja atingido, o qual é definido na seção 2.4.4. Apesar da combinação dessas estratégias se mostrar promissora para localizar a região do espaço de projeto que contém o mínimo global do problema de otimização original, é necessária mais uma estratégia de busca para obter resultados mais precisos nessa região. Para isso, prossegue-se para a etapa de refinamento.

2.4.3.2 Refinamento

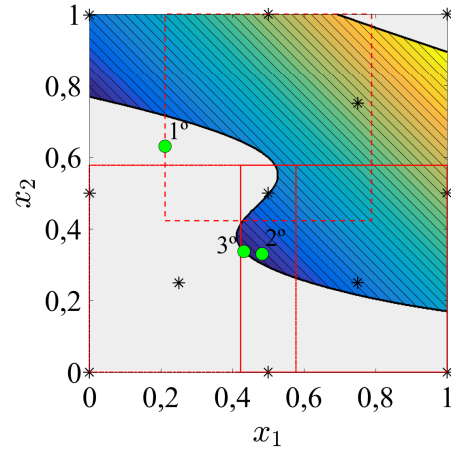
A etapa de refinamento corresponde à solução do problema de otimização substituído por meio de um método baseado em gradiente, tendo como ponto de partida o melhor projeto \mathbf{x}^* encontrado até o momento. Esse ponto é escolhido entre aqueles do plano de amostragem que são viáveis. O ponto ótimo $\hat{\mathbf{x}}^*$ obtido na etapa de refinamento também é selecionado como um IP. Este procedimento é executado várias vezes, até que um critério de parada seja atingido (definido na seção 2.4.4). Estratégias semelhantes, quando aplicadas isoladamente, podem convergir para mínimos locais, como exemplificado em Jones *et al.* (1998), onde um modelo substituído é construído para a função objetivo. Porém, na abordagem proposta aqui, o espaço de projeto é explorado pelas estratégias anteriores, de forma que esta etapa tem apenas o objetivo de refinar o melhor resultado encontrado até o momento. O método baseado em gradiente utilizado é o *Interior-point* (COLEMAN; LI, 1996), o qual é amplamente conhecido e está disponível no MATLAB.

A Figura 13a apresenta o *Toy problem* e mostra os pontos do espaço de busca que foram avaliados por $g(\mathbf{x})$ durante todo o procedimento de otimização. As Figuras 13b, 13c e 13d ilustram o comportamento de $\hat{g}(\mathbf{x})$ em diferentes etapas do processo. É possível observar que, na última iteração da busca global, a maioria dos IPs foram adicionados em duas regiões de mínimos. Já na etapa de refinamento, os IPs foram adicionados apenas na região do mínimo global. Além disso, o método foi capaz de lidar com o fato de que, inicialmente, o ótimo global foi considerado inviável pelo metamodelo.

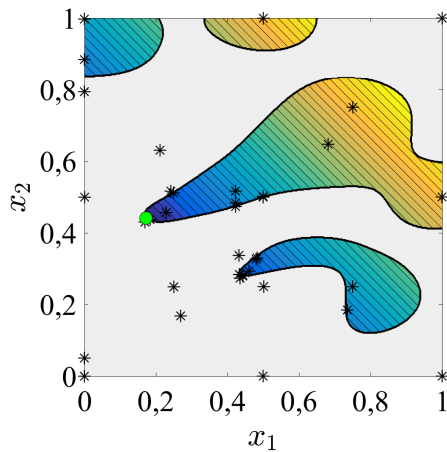
Figura 13: Estratégias de busca do processo de otimização: *Toy problem*.



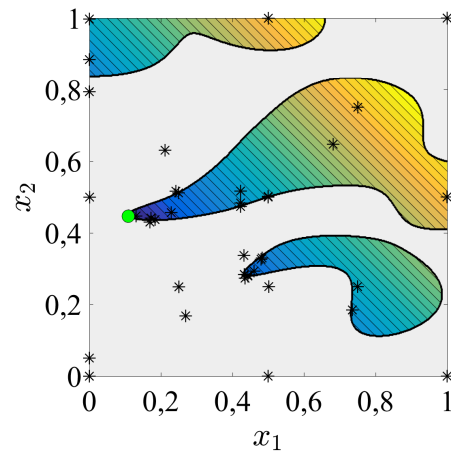
(a) *Toy problem*.



(b) Busca local na primeira iteração.



(c) Busca global na última iteração.



(d) Final da etapa de refinamento.

Fonte: Elaborada pela autora.

2.4.4 Critério de parada

O critério de parada adotado corresponde ao número it_{stall} de iterações em que o valor da função objetivo do resultado ótimo não apresenta melhorias maiores do que uma dada tolerância f_{tol} , atendendo também a um número mínimo e máximo de iterações, representados por it_{min} e it_{max} , respectivamente. O projeto ótimo \mathbf{x}^* corresponde ao ponto viável do plano de amostragem que possui o menor valor da função objetivo.

2.4.5 Exemplos numéricos

A metodologia proposta é aplicada em sete problemas de otimização estrutural. Para avaliar o desempenho do método, cada exemplo é executado diversas vezes e, como resultado, é apresentado o melhor projeto encontrado entre as execuções, bem como a média (Média) e o desvio padrão (Std - *Standard Deviation*) dos valores ótimos da função objetivo e o número médio de avaliações das restrições (FE - *Function Evaluations*).

Os exemplos numéricos são divididos em duas seções: a primeira seção corresponde à solução de exemplos *benchmark*, e os resultados da metodologia são comparados com resultados da literatura; a segunda seção apresenta a solução de exemplos também obtidos da literatura, mas com modificações no modelo estrutural adotado. Nesse caso, como não há referência de resultados para fins de comparação, os exemplos também são resolvidos por outros dois métodos da literatura. O primeiro método utilizado é o algoritmo *Firefly* (FA), discutido na seção anterior. O segundo método é baseado em metamodelagem adaptativa, descrito em Forrester *et al.* (2008) e representado aqui por KG-GA: inicialmente, um metamodelo de Kriging é construído para as restrições, utilizando um plano de amostragem de acordo com o Hipercubo Latino (MCKAY *et al.*, 1979); posteriormente, são selecionados como pontos de preenchimento, os mínimos encontrados em sucessivas soluções do problema de otimização substituído via algoritmos genéticos (GA - *Genetic Algorithms*).

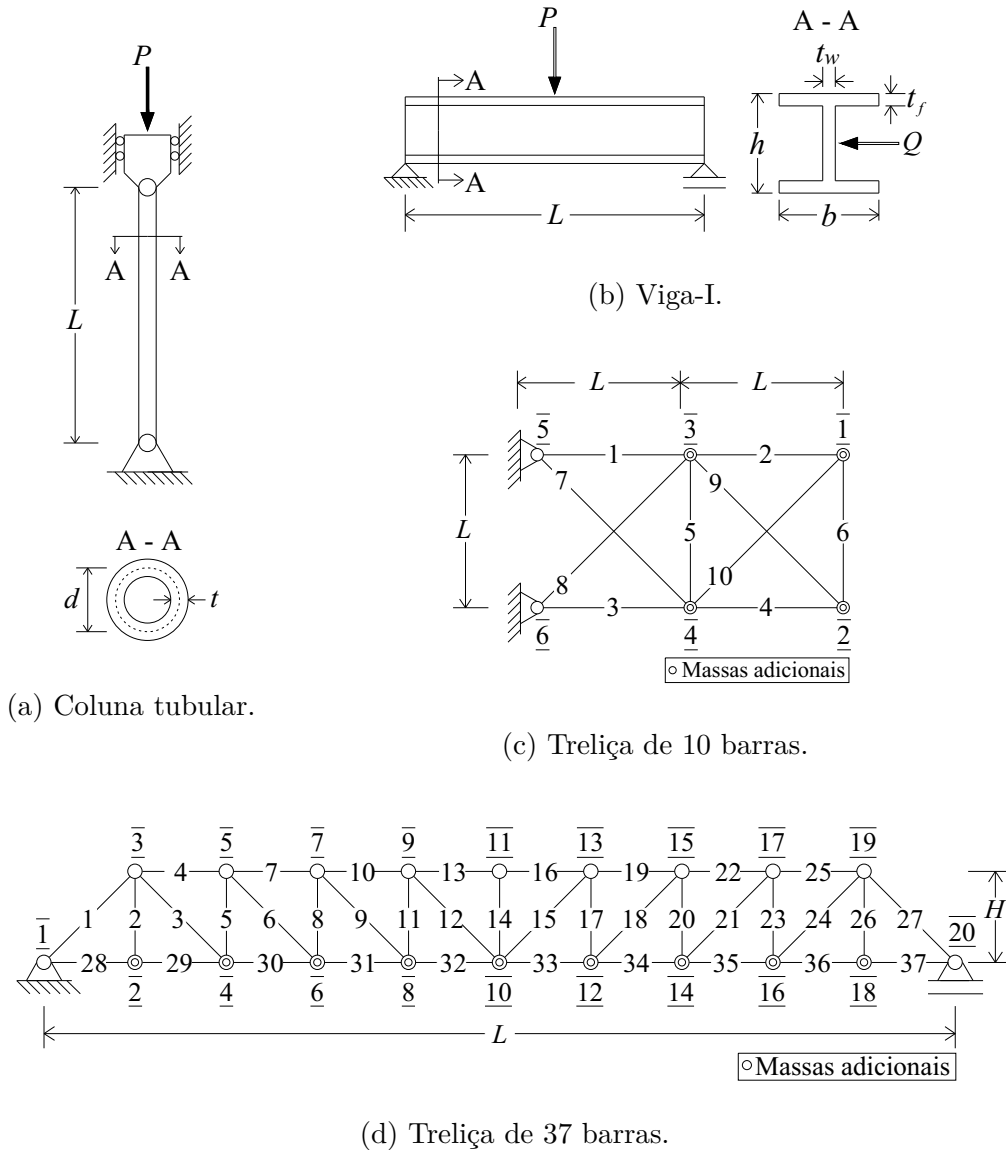
Destaca-se que o objetivo do método proposto não é necessariamente obter o melhor resultado em comparação com os resultados apresentados na literatura, mas sim encontrar soluções viáveis próximas das melhores, com muito menos avaliações das restrições.

Os parâmetros de entrada utilizados em todos os exemplos, exceto quando especificados outros valores, são: $n_{samp} = 10^6$; $p = \min([10n \ 150])$; $n_s = \min([2n \ 20])$; $it_{stall} = 2$, $f_{tol} = 0,1$, $it_{min} = 3$ e $it_{max} = 12$ para o primeiro critério de parada, relacionado à busca local e global; $it_{stall} = \min([2n \ 30])$, $f_{tol} = 0,001$, $it_{min} = \min([10n \ 150])$ e $it_{max} = \min([20n \ 300])$ para o segundo critério de parada, relacionado à etapa de refinamento. Cada exemplo da seção 2.4.5.1 é executado 100 vezes, enquanto que os exemplos da seção 2.4.5.2 são executados apenas 15 vezes devido ao alto esforço computacional de alguns cenários avaliados. Vale ressaltar que os valores da maioria dos parâmetros aqui adotados são proporcionais ao número de variáveis dos problemas. Entretanto, uma análise mais detalhada deve ser realizada em estudos futuros, para verificar a sensibilidade desses parâmetros de entrada.

2.4.5.1 Problemas *benchmark*

Os problemas avaliados nesta seção, ilustrados na Figura 14, são apresentados a seguir:

Figura 14: Problemas *benchmark*.



Fonte: Elaborada pela autora.

- (a) Coluna tubular: O primeiro problema corresponde a uma coluna tubular, abordada por Hsu & Liu (2007), Gandomi *et al.* (2013) e Rao (2020), que possui comprimento $L = 250$ cm e carga $P = 2500$ kgf. O material apresenta tensão de escoamento $\sigma_y = 500$ kgf/cm² e módulo de elasticidade $E = 0,85 \cdot 10^6$ kgf/cm². O objetivo é encontrar as dimensões t e d que minimizam o custo da estrutura (Equação 2.16) e que atendam às restrições de tensões de escoamento (Equação 2.17) e de flambagem (Equação 2.18). Os limites inferiores e superiores das variáveis de projeto são $2 \text{ cm} \leq d \leq 14 \text{ cm}$ e $0,2 \text{ cm} \leq t \leq 0,8 \text{ cm}$. A Tabela 1 mostra os resultados obtidos

pelo método proposto e alguns outros disponíveis na literatura.

$$f(\mathbf{x}) = 9,82dt + 2d \quad (2.16)$$

$$g_1(\mathbf{x}) = \frac{P}{\pi dt\sigma_y} - 1 \leq 0 \quad (2.17)$$

$$g_2(\mathbf{x}) = \frac{8PL^2}{\pi^3 E dt (t^2 + d^2)} - 1 \leq 0 \quad (2.18)$$

Tabela 1: Projeto ótimo e resultados estatísticos: Coluna tubular.

Projeto	CS (GANDOMI <i>et al.</i> , 2013)	Método proposto
d (cm)	5,45139	5,45285
t (cm)	0,29196	0,29194
g_1	-0,0241	$-2,12 \cdot 10^{-4}$
g_2	-0,1095	$-8,30 \cdot 10^{-4}$
f	26,53217	26,53802
Média	26,53504	26,59322
Std	0,00193	0,06226
FE	15000	67

Fonte: Elaborada pela autora.

- (b) Viga-I: O segundo problema corresponde a uma viga simplesmente apoiada de seção transversal I, estudada por Wang (2003), Gandomi *et al.* (2013) e Cheng & Prayogo (2014). O problema consiste em encontrar as dimensões da seção transversal da estrutura, que minimizem o deslocamento vertical e que atendam às restrições de área máxima e de tensão de flexão. A estrutura possui $L = 200$ cm, $P = 600$ kN e $Q = 50$ kN (ambas as cargas aplicadas no meio do vão), $E = 2 \cdot 10^4$ kN/cm², tensão de flexão máxima permitida de 6 kN/cm² e área transversal máxima de 300 cm². O espaço de projeto é, em centímetros, $10 \leq h \leq 80$, $10 \leq b \leq 50$, $0,9 \leq t_w \leq 5$ e $0,9 \leq t_f \leq 5$. A Equação 2.19 corresponde à função objetivo e as Equações 2.20 e 2.21 definem as restrições. Devido à ordem de grandeza de $f(\mathbf{x})$, são adotados $f_{tol} = 0,001$ e $f_{tol} = 0,00001$ para o primeiro e para o segundo critério de parada, respectivamente. Os resultados obtidos são mostrados na Tabela 2.

$$f(\mathbf{x}) = \frac{5000}{\frac{t_w(h-2t_f)^3}{12} + \frac{bt_f^3}{6} + 2t_f b \left(\frac{h-t_f}{2}\right)^2} \quad (2.19)$$

$$g_1(\mathbf{x}) = 2bt_f + t_w(h - 2t_f) - 300 \leq 0 \quad (2.20)$$

$$g_2(\mathbf{x}) = \frac{180000h}{t_w (h - 2t_f)^3 + 2bt_f (4t_f^2 + 3h(h - 2t_f))} + \frac{15000b}{2t_f b^3 + (h - 2t_f) t_w^3} - 6 \leq 0 \quad (2.21)$$

Tabela 2: Projeto ótimo e resultados estatísticos: Viga-I.

Projeto	CS (GANDOMI <i>et al.</i> , 2013)	SOS (CHENG; PRAYOGO, 2014)	Método proposto
h (cm)	80,000000	80,00000	80,0000000
b (cm)	50,000000	50,00000	49,9999999
t_w (cm)	0,900000	0,90000	0,9000000
t_f (cm)	2,3216715	2,32179	2,3217905
g_1 (cm ²)	-	-	-1,71·10 ⁻⁴
g_2 (kN/cm ²)	-	-	-1,57
f (cm)	0,0130747	0,0130741	0,0130741
Média (cm)	0,0132165	0,0130884	0,0132591
Std (cm)	0,0001345	0,00004	0,0003577
FE	5000	5000	122

Fonte: Elaborada pela autora.

- (c) Treliça de 10 barras: O problema da treliça de 10 barras é frequentemente utilizado como um exemplo *benchmark*, conforme visto em [Lingyun *et al.* \(2005\)](#), [Gomes \(2011\)](#), [Kaveh & Zolghadr \(2011\)](#), [Wei *et al.* \(2011\)](#), [Kaveh & Zolghadr \(2012\)](#), [Miguel & Miguel \(2012\)](#), [Zuo *et al.* \(2014\)](#), [Tejani *et al.* \(2016\)](#), [Kaveh & Zolghadr \(2017\)](#), [Tejani *et al.* \(2018\)](#) e [Kumar *et al.* \(2019\)](#). Esse problema consiste em encontrar as áreas das seções transversais que minimizam a massa da treliça, levando em conta restrições baseadas nas frequências naturais da estrutura. Assim, as variáveis de projeto são as áreas das seções transversais das 10 barras, cujo espaço de busca é $0,645 \text{ cm}^2 \leq A_i \leq 50 \text{ cm}^2$, com $i = 1, \dots, 10$. O material possui módulo de elasticidade $E = 69,8 \text{ GPa}$, densidade de 2770 kg/m^3 , e o comprimento L é igual a $9,144 \text{ m}$. São fixadas massas não estruturais de 454 kg em todos os nós livres (nós 1-4). As restrições de frequências naturais são $\omega_1 \geq 7 \text{ Hz}$, $\omega_2 \geq 15 \text{ Hz}$ e $\omega_3 \geq 20 \text{ Hz}$. A Tabela 3 mostra os resultados obtidos pelo método, utilizando $it_{stall} = 4$ e $it_{min} = 6$ para o primeiro critério de parada, devido ao maior número de variáveis.

Tabela 3: Projeto ótimo e resultados estatísticos: Treliça de 10 barras.

Projeto	PSO ¹	NHPGA ²	Enhanced ³ CSS	SOS- ⁴ ABF2	ISOS ⁵	MSOS ⁶	Método proposto
A_1 (cm ²)	37,712	36,630	39,569	35,3013	35,2654	35,2834	34,9471
A_2 (cm ²)	9,959	13,043	16,740	14,8119	14,6803	14,4487	14,2342
A_3 (cm ²)	40,265	34,229	34,361	34,9522	34,4273	34,5268	33,7359
A_4 (cm ²)	16,788	15,289	12,994	14,9436	14,9605	14,6773	16,2597
A_5 (cm ²)	11,576	0,645	0,645	0,6450	0,6450	0,6450	0,6451
A_6 (cm ²)	3,955	4,8472	4,802	4,5828	4,5927	4,5878	4,9807
A_7 (cm ²)	25,308	22,140	26,182	23,5712	23,3417	23,5452	22,6882
A_8 (cm ²)	21,613	27,983	21,260	23,5602	23,8236	24,1081	24,1722
A_9 (cm ²)	11,576	15,034	11,766	11,9314	12,8497	12,7202	13,5150
A_{10} (cm ²)	11,186	10,216	11,392	13,0401	12,5321	12,4136	13,1714
ω_1 (Hz)	7,000	7,0003	7,000	7,0003	7,0001	7,0000	7,0083
ω_2 (Hz)	17,786	16,080	16,238	16,1997	16,1703	16,1666	16,1812
ω_3 (Hz)	20,000	20,002	20,000	20,0022	20,0024	20,0012	20,0482
f (kg)	537,98	535,14	529,25	524,8289	524,7341	524,5747	528,9017
Média (kg)	540,89	542,1816	538,53	528,5501	530,0286	527,7970	537,9182
Std (kg)	6,84	1,722717	5,97	2,9827	3,4763	2,9121	6,7098
FE	2000	–	4000	4000	4000	4000	470

¹(GOMES, 2011); ²(WEI *et al.*, 2011); ³(KAVEH; ZOLGHADR, 2011); ⁴(TEJANI *et al.*, 2016); ⁵(TEJANI *et al.*, 2018); ⁶(KUMAR *et al.*, 2019).

Fonte: Elaborada pela autora.

- (d) Treliça de 37 barras: O quarto problema representa uma ponte simplesmente apoiada, estudada por diversos autores, como [Lingyun *et al.* \(2005\)](#), [Gomes \(2011\)](#), [Wei *et al.* \(2011\)](#), [Kaveh & Zolghadr \(2011\)](#), [Miguel & Miguel \(2012\)](#), [Tejani *et al.* \(2016\)](#), [Kaveh & Zolghadr \(2017\)](#), [Tejani *et al.* \(2018\)](#) e [Kumar *et al.* \(2019\)](#). Assim como no exemplo anterior, o objetivo é minimizar a massa da treliça, que está sujeita a restrições de frequências naturais. Porém, além das variáveis dimensionais (áreas das seções transversais), também são adotadas variáveis de forma (posição vertical dos nós). Os nós inferiores são considerados fixos e os elementos inferiores (barras 28-37) apresentam seções transversais fixas de 40 cm². Como é considerada simetria da estrutura em relação ao seu plano vertical médio, o problema possui 14 variáveis dimensionais, cujo espaço de projeto é $1 \text{ cm}^2 \leq A_i \leq 10 \text{ cm}^2$, com $i = 1, \dots, 14$, e 5 variáveis de forma, cujo espaço de projeto é $0,1 \text{ m} \leq y_j \leq 3 \text{ m}$, com $j = 3, 5, 7, 9, 11$. O material tem módulo de elasticidade igual a 210 GPa e densidade de 7800 kg/m³, e a treliça possui comprimento $L = 10 \text{ m}$ e $H = 1 \text{ m}$. Além disso, são fixadas massas não estruturais iguais a 10 kg em cada um dos nós inferiores. As restrições de frequências naturais são $\omega_1 \geq 20 \text{ Hz}$, $\omega_2 \geq 40 \text{ Hz}$ e $\omega_3 \geq 60 \text{ Hz}$. Como no problema anterior, são utilizados $it_{stall} = 4$ e $it_{min} = 6$ para o primeiro critério de parada, devido ao grande número de variáveis, enquanto que os outros parâmetros são mantidos conforme definido inicialmente. A Tabela 4 mostra os resultados do problema.

Tabela 4: Projeto ótimo e resultados estatísticos: Treliça de 37 barras.

Projeto	PSO ¹	NHPGA ²	Enhanced ³ CSS	FA ⁴	TWO ⁵	SOS- ⁶ ABF2	ISOS ⁷	MSOS ⁸	Método proposto
y_3, y_{19} (m)	0,9637	1,09693	1,0289	0,9392	1,0039	0,9413	0,9257	1,0111	0,9536
y_5, y_{17} (m)	1,3978	1,45558	1,3868	1,3270	1,3531	1,3393	1,3188	1,4030	1,3066
y_7, y_{15} (m)	1,5929	1,59539	1,5893	1,5063	1,5339	1,5434	1,4274	1,6095	1,4661
y_9, y_{13} (m)	1,8812	1,76551	1,6405	1,6086	1,6768	1,6744	1,5806	1,7610	1,5907
y_{11} (m)	2,0856	1,87413	1,6835	1,6679	1,7728	1,7571	1,6548	1,8513	1,6180
A_1, A_{27} (cm ²)	2,6797	2,62463	3,4484	2,9838	2,8892	2,9344	2,6549	2,9619	4,0651
A_2, A_{26} (cm ²)	1,1568	1	1,5045	1,1098	1,0949	1,0256	1,0383	1,0202	1,0000
A_3, A_{24} (cm ²)	2,3476	1,00176	1,0039	1,0091	1,0213	1,0095	1,0000	1,0000	1,0000
A_4, A_{25} (cm ²)	1,7182	2,07586	2,5533	2,5955	2,6776	2,5838	3,0083	2,3282	3,0694
A_5, A_{23} (cm ²)	1,2751	1,22071	1,0868	1,2610	1,1981	1,1569	1,0024	1,1719	1,0000
A_6, A_{21} (cm ²)	1,4819	1,48922	1,3382	1,1975	1,1387	1,2548	1,4499	1,2374	1,0001
A_7, A_{22} (cm ²)	4,6850	2,30847	3,1626	2,4264	2,6537	2,5104	3,1724	2,1430	2,3981
A_8, A_{20} (cm ²)	1,1246	1,43236	2,2664	1,3588	1,4171	1,4626	1,2661	1,5308	1,4774
A_9, A_{18} (cm ²)	2,1214	1,64678	1,2668	1,4771	1,3934	1,5245	1,4659	1,4839	1,4455
A_{10}, A_{19} (cm ²)	3,8600	2,87072	1,7518	2,5648	2,7741	2,4586	2,9013	2,4001	2,9988
A_{11}, A_{17} (cm ²)	2,9817	1,50405	2,7789	1,1295	1,2759	1,1888	1,1537	1,1678	1,0000
A_{12}, A_{15} (cm ²)	1,2021	1,31328	1,4209	1,3199	1,2776	1,3765	1,3465	1,5085	1,2751
A_{13}, A_{16} (cm ²)	1,2563	2,32277	1,0100	2,9217	2,1666	2,2341	2,6850	2,0768	2,5864
A_{14} (cm ²)	3,3276	1,04258	2,2919	1,0004	1,0099	1,0007	1,0000	1,0075	1,0000
ω_1 (Hz)	20,0001	20,0819	20,0028	20,0024	20,0279	20,0052	20,0119	20,0017	20,0659
ω_2 (Hz)	40,0003	40,0961	40,0155	40,0019	40,0146	40,0048	40,0964	40,0018	40,0390
ω_3 (Hz)	60,0001	60,0321	61,2798	60,0043	60,0946	60,0077	60,0066	60,0164	60,0774
f (kg)	377,20	363,032	362,38	360,05	360,27	359,9050	360,7432	360,3018	361,4900
Média (kg)	381,2	369,7024	365,75	360,37	363,75	363,0816	363,3978	362,9610	364,3028
Std (kg)	4,26	2,353248	3,461	0,26	2,48	1,8304	1,5675	1,7265	2,4106
FE	12500	-	4000	5000	-	4000	4000	4000	571

¹(GOMES, 2011); ²(WEI *et al.*, 2011); ³(KAVEH; ZOLGHADR, 2011); ⁴(MIGUEL; MIGUEL, 2012); ⁵(KAVEH; ZOLGHADR, 2017); ⁶(TEJANI *et al.*, 2016); ⁷(TEJANI *et al.*, 2018); ⁸(KUMAR *et al.*, 2019).

Fonte: Elaborada pela autora.

Em todos os exemplos, os projetos ótimos e médios encontrados pelo método proposto foram próximos dos indicados na literatura, com diferenças inferiores a 1,92% em relação à melhor referência encontrada. Por outro lado, o número de avaliações das restrições exigidas pela abordagem foi pelo menos 85,73% menor do que o número de avaliações utilizadas na literatura. Além disso, o método apresentou pouca variação do resultado ótimo ao longo das execuções, conforme indicam os pequenos desvios padrões observados.

2.4.5.2 Problemas com análise estrutural não-linear

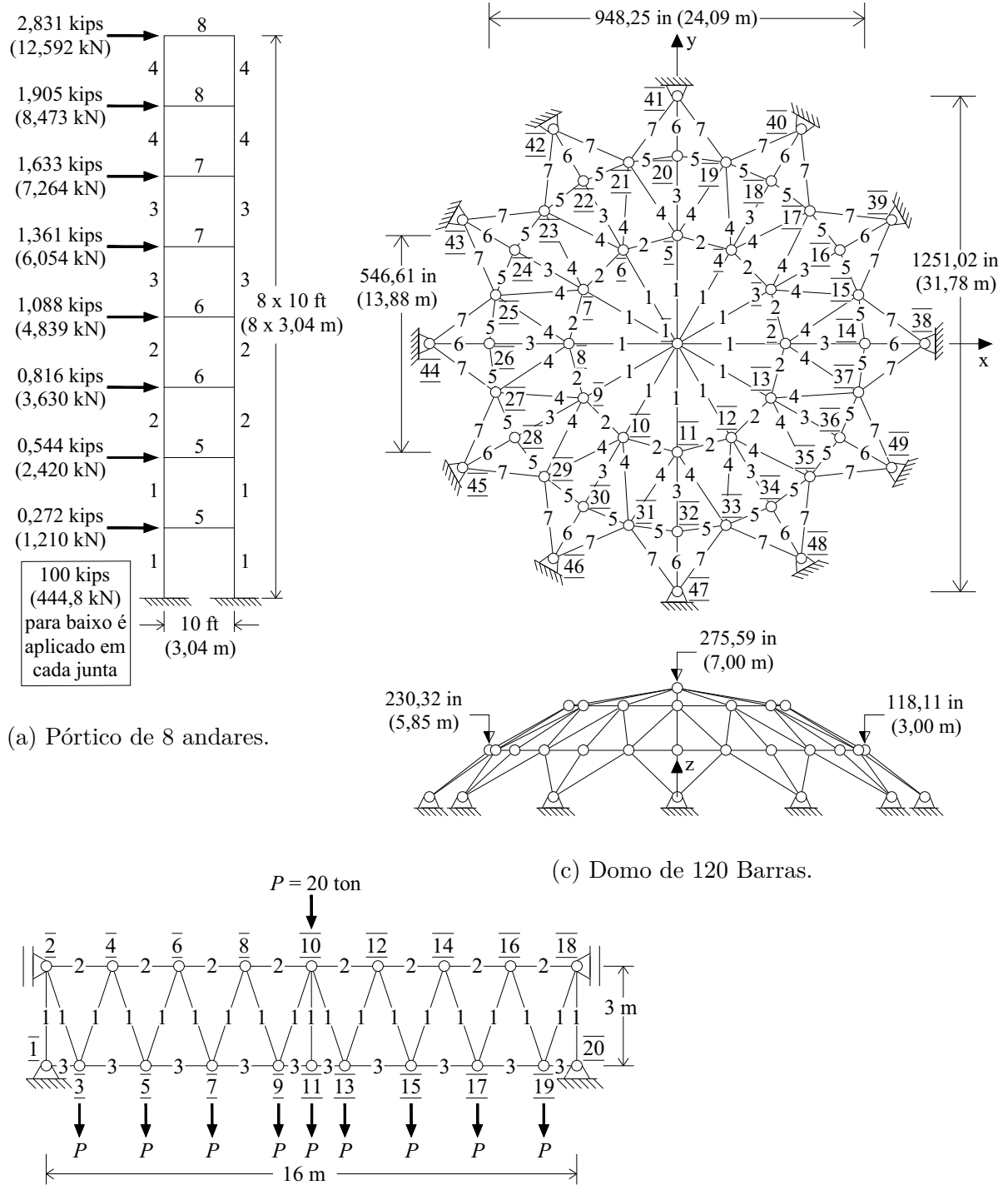
Em cada exemplo desta seção, são considerados dois cenários diferentes de restrições: o cenário 1 corresponde ao disponível na literatura e o cenário 2 avalia um modelo estrutural que leva em conta não-linearidades físicas e/ou geométricas. Em ambos os cenários, é utilizado o *software* MASTAN2 (ZIEMIAN; MCGUIRE, 2007; MCGUIRE *et al.*, 2014) para a análise estrutural. Mais detalhes sobre os modelos não-lineares são apresentados no próximo capítulo da tese, uma vez que o presente capítulo foca na verificação do desempenho do método proposto. O que deve ficar evidente nesta etapa é que tais modelos são mais custosos computacionalmente quando comparados aos modelos lineares, o que pode levar à inviabilidade da solução de problemas de otimização que apresentam muitos elementos estruturais. Portanto, na análise dos resultados, esta seção também avalia o desempenho dos métodos em relação ao tempo computacional médio (denominado Tempo) necessário para a execução dos algoritmos.

Para todos os exemplos, é adotada uma população de 10 indivíduos e 100 iterações para o algoritmo *Firefly* e também para o algoritmo genético do método baseado em metamodelagem adaptativa. Para ambos os métodos, o número de avaliações de restrições é limitado a 1000, devido ao grande esforço computacional de alguns exemplos. Além disso, o número de pontos que definem o plano de amostragem inicial do KG-GA é o mesmo do utilizado na abordagem proposta.

Os problemas desta seção, ilustrados na Figura 15, são:

- (a) Pórtico de 8 andares: O exemplo consiste em encontrar as áreas das seções transversais dos elementos do pórtico, que minimizam seu peso e que atendam a uma restrição de deslocamento. Esse exemplo foi estudado por alguns autores (CAMP *et al.*, 1998; NANAKORN; MEESOMKLIN, 2001; KAVEH; HASSANI, 2009; SCHEVENELS *et al.*, 2014), mas entre esses apenas Kaveh & Hassani (2009) utilizam variáveis contínuas. Os elementos do pórtico são categorizados em 8 grupos e o deslocamento lateral na parte superior da estrutura não deve ser superior a 2 in (5,08 cm). O material tem módulo de elasticidade igual a $29 \cdot 10^3$ ksi (200 GPa) e densidade de $2,83 \cdot 10^{-4}$ kip/in³ (76,8 kN/m³). Kaveh & Hassani (2009) não levam em conta os efeitos das forças axiais internas, apenas dos momentos fletores, mas aqui os efeitos dos esforços axiais também são considerados. O espaço de projeto adotado é 5 in²

Figura 15: Problemas com análise estrutural não-linear.



(b) Ponte Forth.

Fonte: Elaborada pela autora.

$(32,26 \text{ cm}^2) \leq A_i \leq 30 \text{ in}^2 (193,55 \text{ cm}^2)$, com $i = 1, \dots, 8$. Conforme apresentado em Kaveh & Hassani (2009), são utilizadas as seguintes relações empíricas para

relacionar a área da seção transversal A e o momento de inércia I :

$$I = \begin{cases} 4,592A^2 & 0 \leq A \leq 15 \\ 4,638A^2 & 15 \leq A \leq 44 \\ 256,229A - 2300 & 44 \leq A \leq 100 \end{cases} \quad (2.22)$$

Enquanto no primeiro cenário são realizadas análises estruturais lineares, no segundo cenário são consideradas não-linearidades geométricas. Nessa situação, os efeitos das deformações e dos deslocamentos relacionados ao processo de carregamento são incluídos nas formulações das equações de equilíbrio. A Tabela 5 mostra os resultados obtidos em ambos os cenários.

Tabela 5: Projeto ótimo e resultados estatísticos: Pórtico de 8 andares.

Projeto	Cenário 1: Análise linear			Cenário 2: Análise não-linear		
	FA	KG-GA	Método proposto	FA	KG-GA	Método proposto
A_1 (cm ²)	70,6766	75,5689	75,5347	83,4353	87,2656	87,5108
A_2 (cm ²)	59,9734	57,4128	57,4709	74,0315	66,9592	67,1115
A_3 (cm ²)	39,5928	44,7122	44,7941	49,6489	51,4812	51,4044
A_4 (cm ²)	36,4819	33,7664	33,8470	38,3522	37,6773	37,4548
A_5 (cm ²)	68,8199	67,3760	67,0528	67,5734	73,9128	74,7263
A_6 (cm ²)	74,1360	69,2999	68,9192	80,4347	79,7076	79,0115
A_7 (cm ²)	65,8799	62,1599	62,2444	68,0218	70,7863	70,4444
A_8 (cm ²)	46,8470	42,5025	42,7438	56,7270	46,3451	46,3625
d (cm)	5,08	5,08	5,08	5,08	5,08	5,08
f (N)	31335,0410	31106,8473	31106,4025	35763,2440	35474,1097	35473,2200
Média (N)	33533,3513	31113,9644	31108,1817	37482,0362	35483,4509	35476,7786
Std (N)	1923,4103	4,0034	1,3345	1441,2233	5,3379	2,6689
FE	1000	1000	269	1000	1000	280
Tempo (min)	0,75	30,03	3,17	1,90	32,80	3,61

Fonte: Elaborada pela autora.

- (b) Ponte do Forth: Esse exemplo foi previamente avaliado por [Gil & Andreu \(2001\)](#) e [Kaveh & Khayatizad \(2013\)](#), embora aqui tenham sido adotadas algumas modificações em relação ao número de variáveis de projeto, a fim de reduzir o tempo computacional associado à solução do problema. A estrutura é simétrica em relação ao plano vertical médio e as barras são categorizadas em 3 grupos. O objetivo é encontrar a posição vertical y_i dos nós, em relação à configuração inicial, e as áreas das seções transversais A_j que minimizam o peso da estrutura, cujo espaço de busca é $-1,4 \text{ m} \leq y_i \leq 1,4 \text{ m}$ e $25 \text{ cm}^2 \leq A_j \leq 100 \text{ cm}^2$, com $i = 2, \dots, 11$ e $j = 1, \dots, 3$. O módulo de elasticidade do material é $2,1 \times 10^8 \text{ kN/m}^2$ e o peso específico do material é $7,8 \text{ ton/m}^3$.

No primeiro cenário de restrição, a tensão σ nos elementos estruturais não pode exceder a tensão máxima admissível $\sigma_{cr} = 25 \text{ kN/cm}^2$. Portanto, a seguinte restrição deve ser verificada para cada barra:

$$g(\mathbf{x}) = \frac{\sigma(\mathbf{x})}{\sigma_{cr}} - 1 \leq 0. \quad (2.23)$$

No segundo cenário, é considerada uma única restrição, dada por

$$g(\mathbf{x}) = \frac{P}{P_{cr}(\mathbf{x})} - 1 \leq 0, \quad (2.24)$$

onde P é a carga aplicada e $P_{cr}(\mathbf{x})$ é a carga crítica, que corresponde à carga máxima que a estrutura pode suportar antes de atingir a falha. O cálculo da carga crítica considera a possibilidade de flambagem da estrutura e de escoamento dos elementos estruturais, sendo empregada análise estrutural inelástica de segunda ordem. Maiores detalhes sobre o modelo considerado são apresentados no próximo capítulo, o foco aqui é mantido na verificação do método de otimização.

A Tabela 6 mostra os resultados, onde foi utilizado $it_{stall} = 4$ e $it_{min} = 6$ para o primeiro critério de parada do método proposto, dado o grande número de variáveis.

Tabela 6: Projeto ótimo e resultados estatísticos: Ponte Forth.

Projeto	Cenário 1: Análise linear			Cenário 2: Análise não-linear		
	FA	KG-GA	Método proposto	FA	KG-GA	Método proposto
y_2, y_{18} (m)	0,1933	1,1890	0,7495	-0,5901	0,1468	-0,0428
y_3, y_{19} (m)	0,6219	0,3844	0,6346	1,0950	0,9888	1,0732
y_4, y_{16} (m)	0,0083	0,6445	0,1797	-1,0205	-0,7475	-0,4594
y_5, y_{17} (m)	0,9399	1,0822	1,4000	0,2930	1,3999	1,4000
y_6, y_{14} (m)	-0,8461	-0,3977	-1,4000	-0,5256	-1,0159	-0,9085
y_7, y_{15} (m)	0,0423	0,9620	0,0497	-0,1170	1,1200	0,6771
y_8, y_{12} (m)	-0,6268	-1,1110	-1,4000	-0,4673	-1,1889	-1,4000
y_9, y_{13} (m)	0,2558	1,0615	-0,3173	-0,2111	0,6084	0,2867
y_{10} (m)	-0,1674	-0,7230	-0,8924	-0,4277	-1,2772	-0,6163
y_{11} (m)	-0,3654	1,0795	-0,3031	-0,1858	0,3192	0,4591
A_1 (cm ²)	27,0098	25,8654	25,0000	44,7308	44,1858	35,5438
A_2 (cm ²)	43,2129	38,1016	33,8999	59,8616	57,0754	51,9524
A_3 (cm ²)	51,2630	41,1818	31,6320	55,4994	58,2271	50,0472
max(g)	-2×10^{-5}	-0,0199	-0,0053	-0,0909	-0,0109	-0,0004
f (N)	22103,2770	19163,1136	17363,0220	30288,0173	25575,2898	22830,0997
Média (N)	27190,8137	20738,1630	18282,4584	35777,2050	27904,5688	24432,9214
Std (N)	2561,8445	759,1776	591,9464	4911,7407	1644,2231	1552,6187
FE	1000	1000	517	1000	1000	527
Tempo (min)	0,79	36,68	13,87	38,72	62,11	25,87

Fonte: Elaborada pela autora.

- (c) Domo de 120 Barras: A treliça espacial de 120 barras foi estudada por diversos autores, com diferentes variáveis, restrições, dimensões e cargas (SOH; YANG, 1996; FALLAHIAN *et al.*, 2009; KAVEH; TALATAHARI, 2010; KAVEH; KHAYATAZAD, 2013; KUMAR *et al.*, 2019). A configuração estudada aqui é a apresentada por Fallahian *et al.* (2009). No primeiro cenário, a tensão admissível σ_{cr} segue as recomendações da norma AISC-ASD (1989), dadas por

$$\sigma_{cr} = \begin{cases} 0,6F_y & \text{para tração} \\ F_{cr} & \text{para compressão} \end{cases} \quad (2.25)$$

$$F_{cr} = \begin{cases} \left[\left(1 - \frac{\lambda_i^2}{2C_c^2}\right) F_y \right] / \left[\frac{5}{3} + \frac{3\lambda_i}{8C_c} - \frac{\lambda_i^3}{8C_c^3} \right] & \lambda_i < C_c \\ 12\pi^2 E / 23\lambda_i^2 & \lambda_i \geq C_c \end{cases}. \quad (2.26)$$

Nessa equação, $C_c = \sqrt{2\pi^2 E / F_y}$ é a razão de esbeltez que divide as regiões de flambagem elástica e inelástica e $\lambda_i = kL_i / r_i$ é a esbeltez do i -ésimo elemento, onde F_y é a tensão de escoamento do aço, E é o módulo de elasticidade, k é o fator do comprimento efetivo; L_i é o comprimento do elemento e $r_i = 0,4993A_i^{0,6777}$ é o raio de giração. As cargas verticais aplicadas são: -13,49 kips (-60 kN) no nó 1; -6,744 kips (-30 kN) do nó 2 ao nó 13; -2,248 kips (-10 kN) no restante dos nós livres. As variáveis de projeto são as áreas das seções transversais das barras, as quais são categorizadas em 7 grupos. O espaço de busca corresponde ao intervalo $1,2 \text{ in}^2 (7,74 \text{ cm}^2) \leq A_j \leq 10 \text{ in}^2 (64,52 \text{ cm}^2)$, com $j = 1, \dots, 7$. São adotados os parâmetros $F_y = 58 \text{ ksi} (400 \text{ MPa})$, $E = 30450 \text{ ksi} (210 \text{ GPa})$, $k = 1$ e densidade do material igual a $0,288 \text{ lb/in}^3 (7971,81 \text{ kg/m}^3)$. O segundo cenário é semelhante ao exemplo anterior, onde é verificada uma única restrição, baseada em uma carga crítica, como critério de segurança. A Tabela 7 mostra os resultados obtidos em ambos os cenários, onde foi adotado $it_{stall} = 4$ e $it_{min} = 6$ para o primeiro critério de parada, como no exemplo anterior.

Tabela 7: Projeto ótimo e resultados estatísticos: Domo de 120 Barras.

Projeto	Cenário 1: Análise linear			Cenário 2: Análise não-linear		
	FA	KG-GA	Método proposto	FA	KG-GA	Método proposto
A_1 (cm ²)	24,8574	20,8419	20,2522	30,2186	31,7386	30,5116
A_2 (cm ²)	22,8871	15,4929	15,0638	28,0961	24,0658	23,5051
A_3 (cm ²)	19,8167	20,3961	20,0625	34,3148	32,0948	31,7025
A_4 (cm ²)	12,6845	12,7819	12,9329	18,4548	19,0458	19,6103
A_5 (cm ²)	11,3877	9,0509	7,7419	24,3741	7,7529	7,7419
A_6 (cm ²)	27,9980	18,8400	18,2296	27,5258	27,8909	27,8335
A_7 (cm ²)	15,1535	15,6503	15,2109	22,4735	22,5090	22,6703
max(g)	-0,0008	-0,0190	-0,0099	-0,0010	-0,0010	-0,0119
f (kg)	8849,9240	7859,4448	7646,3781	12506,0140	11438,4958	11398,3306
Média (kg)	10379,0716	8525,1939	8014,0666	13708,6872	12947,6762	11766,6041
Std (kg)	923,7732	613,4274	290,4149	618,2429	1853,8914	421,2633
FE	1000	1000	325	1000	1000	328
Tempo (min)	0,79	29,24	5,97	146,83	114,19	35,64

Fonte: Elaborada pela autora.

Em todos os cenários, para os três exemplos, o método proposto obteve os melhores resultados em termos de valores da função objetivo, com médias aproximadamente 19% e 7% menores do que as fornecidas pelo FA e pelo KG-GA, respectivamente. Além disso, a abordagem exigiu no mínimo 47,30% menos avaliações das restrições, atingindo uma redução de 73,10% em um dos casos. Ressalta-se que os resultados médios alcançados pelo KG-GA, caso o mesmo número de avaliações realizadas pelo método proposto seja aplicado, são em média 17,80% maiores do que os da abordagem desenvolvida. Isso indica um bom desempenho do método proposto, mesmo em comparação com outro método baseado em metamodelo adaptativo.

Em relação ao tempo computacional, quando são considerados problemas simples, o tempo de execução do FA é o mais baixo, embora o desvio padrão das respostas seja elevado. No entanto, quando são consideradas análises não-lineares para estruturas com mais elementos, a abordagem aqui desenvolvida supera tanto o FA quanto o KG-GA também em termos de tempo de execução. Destaca-se o desempenho do método proposto no cenário 2 do último exemplo, onde os tempos exigidos pelo FA e pelo KG-GA foram em torno de 2 horas, enquanto que melhores resultados foram alcançados pelo esquema desenvolvido em cerca de meia hora.

2.4.6 Comentários

Com os resultados dos exemplos avaliados neste capítulo, nota-se que, quando comparado com outros métodos da literatura, o método proposto atinge bons resultados com menos chamadas das restrições. Entretanto, a aplicação da abordagem é vantajosa,

principalmente, quando o problema avaliado apresenta restrições custosas o suficiente para que o tempo gasto em suas avaliações seja maior do que o tempo necessário para a geração do metamodelo. Ressalta-se que, como o método encontrou resultados ótimos muito próximos ou menores do que os melhores da literatura, essa abordagem será utilizada em todos os cenários avaliados daqui em diante no presente trabalho, mesmo quando as restrições não demandam alto esforço computacional.

3 HIPÓTESES DE MODELAGEM ESTRUTURAL

De acordo com Santos (2017), um projeto estrutural envolve a escolha dos materiais, a concepção do sistema estrutural, a determinação das cargas que atuarão na estrutura, a análise dos esforços, passando pelo dimensionamento e detalhamento de todos os elementos. A modelagem é uma das etapas da elaboração do projeto, na qual se busca representar o comportamento mecânico do sistema estrutural.

As hipóteses de modelagem correspondem às definições necessárias para a tradução da estrutura que se deseja construir para o que efetivamente será projetado. Essas definições abrangem, por exemplo, o tipo de vinculação entre elementos estruturais, a representação das ações atuantes, as teorias que regem o comportamento do material sob carregamento, entre outros aspectos que compõem a representação estrutural. Essa etapa é crucial para a concepção de um projeto adequado, visto que todas as verificações de estados limites utilizadas no dimensionamento são realizadas com base na resposta do modelo estrutural adotado. Portanto, é necessário que as hipóteses de modelagem descrevam o melhor possível as condições reais da estrutura. Entretanto, se o modelo adotado for muito complexo, sua análise pode demandar grande esforço computacional e, por consequência, tornar inviável sua aplicação.

A modelagem está presente tanto no processo convencional quanto no processo otimizado de projeto. De acordo com Nocedal & Wright (1999), a construção de um modelo apropriado é o primeiro passo, e às vezes o mais importante, do processo de otimização. Como consequência, a configuração ótima da estrutura é altamente dependente das definições dessa etapa.

A fim de discutir as hipóteses de modelagem, esse capítulo inicia fazendo uma breve apresentação do método de elementos finitos. Posteriormente, são apresentados os dois grupos de hipóteses abordados nesta pesquisa, relacionados às condições de contorno essenciais e aos modelos de análise estrutural. Em seguida, é discutido o que a literatura tem abordado a respeito dos efeitos dessas hipóteses na otimização. Por fim, é apresentada a metodologia empregada nos exemplos numéricos desta pesquisa.

3.1 Método dos elementos finitos

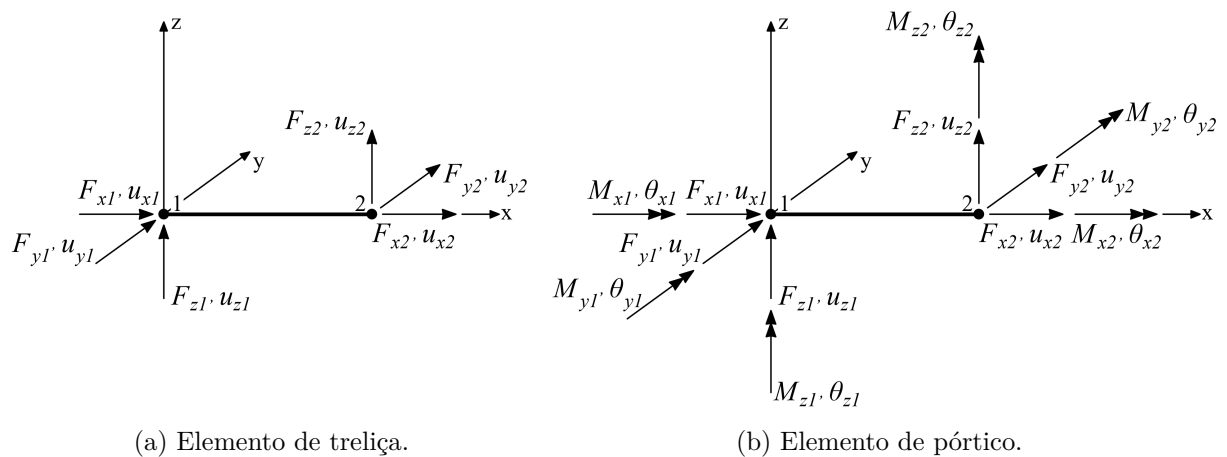
Na análise mecânica de estruturas, o comportamento de um problema pode ser descrito por uma ou mais equações diferenciais. A solução dessas equações, para determinadas condições de contorno, permite a determinação dos campos de tensões e de deformações da estrutura, que geralmente são as incógnitas dos problemas. Sendo assim, a solução encontrada é dita analítica, pois fornece expressões matemáticas capazes de indicar os

valores das incógnitas em qualquer ponto da estrutura. Entretanto, na maioria das vezes em que o problema analisado envolve geometrias, carregamentos e propriedades materiais complexas, não é possível obter tal solução. Nesses casos, a análise estrutural pode ser feita por meio de métodos numéricos, como o método dos elementos finitos (*Finite Element Method* - FEM).

O método dos elementos finitos é um método numérico amplamente utilizado para resolver problemas de engenharia (FISH; BELYTSCHKO, 2009; BATHE, 2014; KAVEH, 2014). Nesse caso, a solução do problema é feita por meio da resolução de um sistema de equações algébricas, onde se obtém, como respostas, valores aproximados de incógnitas em um número discreto de pontos. Para isso, a estrutura é discretizada em um conjunto de elementos finitos interconectados por nós. Tais elementos descrevem, de modo aproximado, o comportamento mecânico em uma região discreta do espaço. As expressões que regem o comportamento destes elementos são determinadas de forma que exista uma certa continuidade entre os mesmos. O conjunto destas expressões resulta em uma série de equações algébricas, as quais geralmente são expressas em notação matricial.

A Figura 16 mostra elementos finitos de linha comumente utilizados para análise de treliças e de pórticos tridimensionais. Nessa imagem, F_{x1} , F_{y1} e F_{z1} e M_{x1} , M_{y1} e M_{z1} são, respectivamente, os componentes de força e de momento fletor e torçor que atuam no nó 1 nas direções x, y e z, enquanto que u_{x1} , u_{y1} , u_{z1} , θ_{x1} , θ_{y1} e θ_{z1} são seus respectivos deslocamentos de translação e de rotação. Analogamente, as forças e os deslocamentos generalizados para o nó 2 seguem a mesma notação, com alteração apenas no índice numérico. Cada componente de deslocamento corresponde a um grau de liberdade. No caso tridimensional, o elemento de treliça possui 3 graus de liberdade por nó, sem os momentos e respectivas rotações, enquanto que o elemento de pórtico possui 6 graus de liberdade por nó.

Figura 16: Forças e deslocamentos generalizados em elementos finitos de linha.



Fonte: Elaborada pela autora.

As forças e os deslocamentos generalizados de um elemento finito podem ser relacionados por

$$\mathbf{f}^e = \mathbf{K}^e \mathbf{d}^e \Leftrightarrow \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_\eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & \cdots & k_{1\eta} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{\eta 1} & \cdots & k_{\eta\eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_\eta \end{bmatrix}, \quad (3.1)$$

onde \mathbf{f}^e é o vetor de forças nodais generalizadas do elemento, \mathbf{K}^e é a matriz de rigidez do elemento, \mathbf{d}^e é o vetor de deslocamentos nodais generalizados do elemento, k_{ij} é o coeficiente de rigidez (com $i, j = 1, \dots, \eta$), η é o número de graus de liberdade do elemento e f_i e d_i são, respectivamente, a força e o deslocamento correspondente ao i -ésimo grau de liberdade.

A matriz de rigidez global, que considera todos os elementos finitos de uma estrutura, é obtida por meio da combinação das matrizes de rigidez locais, que consideram os elementos individualmente. Nesse caso, a equação global pode ser expressa por

$$\mathbf{f} = \mathbf{K} \mathbf{d}, \quad (3.2)$$

onde \mathbf{f} é o vetor de forças nodais generalizadas globais, \mathbf{K} é a matriz de rigidez global e \mathbf{d} é o vetor de deslocamentos nodais generalizados.

Logan (2012) apresenta uma sequência de etapas executadas para construir um modelo em elementos finitos baseados em deslocamentos, quando empregado na solução de problemas estruturais estáticos. O autor ressalta que apenas os aspectos relacionados à modelagem são definidos pelo projetista e que os demais são executados automaticamente pelo programa computacional utilizado. Dentre as definições de modelagem, destacam-se a discretização da estrutura, a seleção dos tipos de elementos finitos empregados e a definição das cargas e dos suportes aplicados. Os passos do processo são os seguintes:

1. Discretizar e selecionar os tipos de elementos: Nesse passo, a estrutura é dividida em diversos elementos. A quantidade de elementos é definida balanceando a relação custo computacional e acurácia, visto que a resposta tende a ser mais precisa quando são utilizados elementos menores, ao mesmo tempo que o custo computacional tende a ser maior. O tipo de elemento selecionado deve buscar representar adequadamente o comportamento real da estrutura.
2. Selecionar uma função de deslocamento (função de forma): Essa função define o comportamento do campo de deslocamento ao longo de um elemento, e é expressa em função de valores nodais do elemento. Polinômios lineares, quadráticos e cúbicos são frequentemente utilizados. No entanto, é possível utilizar outras funções, como séries trigonométricas, por exemplo;
3. Definir as relações deformação/deslocamento e tensão/deformação: Essas relações são necessárias para obter as equações de cada elemento finito. A primeira relação

representa a cinemática, que pode ser linear ou não-linear geométrico. A segunda equação representa o comportamento material que pode ser linear ou não-linear físico;

4. Desenvolver as matrizes dos elementos (local): Diversos métodos podem ser utilizados para obter as equações que descrevem o comportamento de um elemento, tais como o método da rigidez direta, métodos de trabalho ou energéticos, métodos de resíduos ponderados, etc. Dentre eles, o primeiro é um dos mais abordados para elementos de linha, dada a sua simplicidade. Nesse método, as equações dos elementos que relacionam as forças e os deslocamentos nodais, expressas matricialmente como na Equação 3.1, são obtidas a partir das condições de equilíbrio de força, juntamente com relações cinemáticas e constitutivas;
5. Montar as matrizes da estrutura (globais) e impor as condições de contorno: Nessa etapa, as equações de cada elemento, obtidas no passo anterior, são agrupadas em equações globais (Equação 3.2). Destaca-se que \mathbf{K} resulta em uma matriz singular, de modo que seu determinante é zero. Para remover a singularidade da matriz e permitir a sua inversão para resolução do problema, é necessário aplicar as condições de contorno da estrutura (restrições de suporte). Do ponto de vista da engenharia, a aplicação das condições de contorno restringe a ocorrência de movimentos de corpo rígido;
6. Encontrar as variáveis desconhecidas nos graus de liberdade (deslocamentos generalizados): Após impor as condições de contorno na Equação 3.2, os deslocamentos nodais podem ser encontrados por um método de eliminação, como o método de Gauss, ou por um método iterativo, como o método de Gauss-Seidel;
7. Encontrar as tensões e deformações nos elementos: As tensões e as deformações podem ser determinadas através das relações deformação/deslocamento e tensão/deformação, utilizando os deslocamentos encontrados no passo anterior;
8. Interpretar os resultados: Por fim, com os resultados obtidos, o projetista pode avaliar o desempenho da estrutura frente a alguns limites de projeto, tais como de tensões e de deslocamentos máximos permitidos.

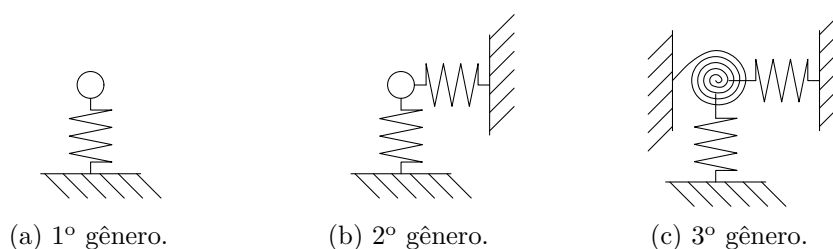
O uso do método dos elementos finitos em problemas estruturais apresenta diversas vantagens. Dentre elas, pode-se destacar a capacidade de modelar estruturas com formas irregulares, de lidar com diferentes tipos de suportes e cargas, de empregar diversos materiais em uma mesma estrutura e de analisar comportamentos não-lineares físicos e geométricos.

3.2 Condições de contorno essenciais

O mecanismo de transferência das cargas de uma estrutura para o meio que a sustenta depende das conexões existentes entre a estrutura e o meio. Cada conexão é projetada de maneira que possa suportar um determinado tipo de carga, permitindo ou não algum movimento na ligação. As definições dessas conexões estão diretamente relacionadas com as condições de contorno essenciais da estrutura. Na mecânica dos sólidos, as condições de contorno essenciais também são chamadas de condições de contorno geométricas, visto que correspondem aos deslocamentos e às rotações prescritos (BATHE, 2014)

Em geral, os apoios de uma estrutura não são construídos de maneira idealizada, visto que apresentam atrito em suas superfícies. Além disso, as estruturas também podem ter alguns de seus pontos ligados a materiais deformáveis que podem ser modelados como elementos elásticos lineares. Esses elementos podem representar, por exemplo, o solo de suporte da estrutura, a estrutura de fundação ou qualquer material cuja deformabilidade é proporcional à força introduzida pela estrutura (BARROS *et al.*, 1996). Nesse contexto, os suportes elásticos podem ser modelados através de molas, em que a rigidez k da mola está associada à oposição ao movimento do suporte na direção da mola. Desse modo, considerando uma escala relacionada à rigidez das conexões dos apoios, as conexões fixas situam-se no extremo superior enquanto que as livres situam-se no extremo inferior, havendo uma faixa intermediária de rigidez entre essas duas situações que podem ser exploradas. Portanto, quando $k = 0$ o apoio não oferece qualquer resistência ao movimento associado à mola, e quando $k \rightarrow \infty$ o movimento é totalmente impedido. A Figura 17 mostra os apoios de primeiro a terceiro gênero representados por molas de rigidez infinita. Destaca-se que, em um plano, qualquer apoio poderia ser representado pelo esquema da Figura 17c, variando apenas a rigidez das molas associadas aos movimentos.

Figura 17: Representação dos suportes estruturais com molas.

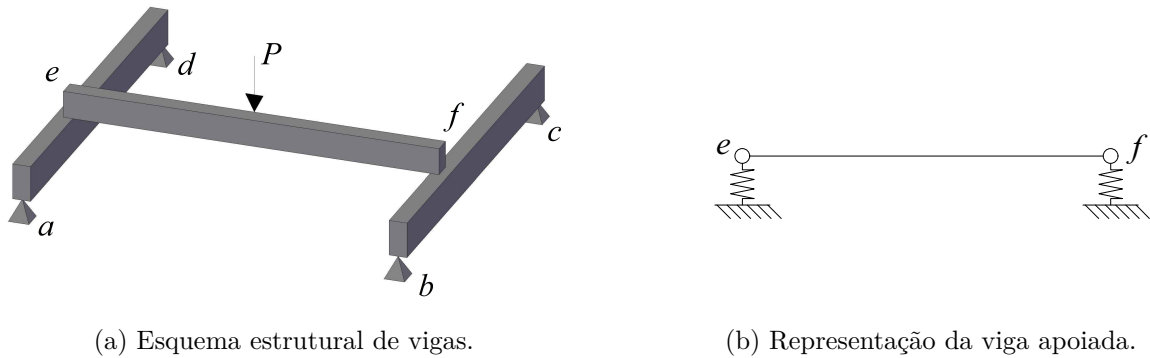


Fonte: Elaborada pela autora.

A Figura 18a ilustra uma situação em que a ligação entre elementos estruturais pode ser modelada por mola de rigidez intermediária: a deformação causada nos pontos e e f das vigas ad e bc , respectivamente, devido a aplicação da força P , faz com que os apoios da viga ef possam ser modelados conforme o esquema da Figura 18b. No regime elástico

linear, a rigidez k das molas é definida pela razão entre a força aplicada na mola e o deslocamento ocasionado.

Figura 18: Presença de apoios elásticos em estruturas



Fonte: Elaborada pela autora.

Além disso, se inserirmos essa estrutura em um meio em que os mecanismos dos apoios em a , b , c e d não podem ser executados de acordo com as premissas comumente empregadas na modelagem de suportes, em virtude do tipo de solo, da estrutura de fundação e de atritos entre superfícies, por exemplo, a modelagem dos apoios por molas pode representar o comportamento real da estrutura de maneira mais precisa. Nesse caso, a rigidez k da mola está relacionada a todos os fatores e elementos que se opõem ao movimento da estrutura na direção da mola em questão.

3.3 Modelos de análise estrutural

A análise estrutural tem como objetivo determinar os efeitos das ações em uma estrutura, tendo como respostas as tensões, deformações e deslocamentos. Portanto, é necessário que o modelo de análise adotado consiga capturar adequadamente a resposta da estrutura, de acordo com o nível de precisão estabelecido pelo projetista. A seguir, são abordados alguns conceitos fundamentais para a compreensão de diferentes modelos de análise estrutural. Além disso, são apresentados os níveis de análise mais discutidos na literatura, bem como uma breve descrição de suas abordagens matriciais.

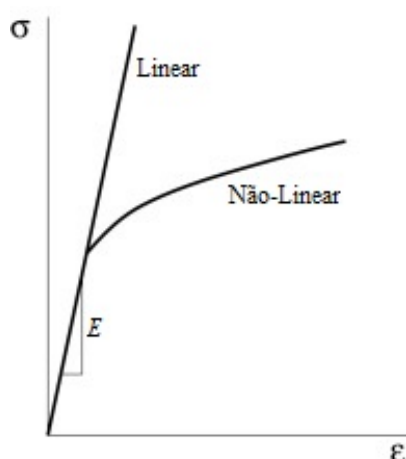
3.3.1 Comportamento linear e não-linear físico e geométrico

O comportamento de uma estrutura, quando submetida a um carregamento, pode ser representado por uma curva de resposta que relaciona a força aplicada na estrutura com o deslocamento correspondente. Similarmente, a representação também pode ser feita a nível de material por uma curva de tensão *versus* deformação específica. Esse comportamento

pode ser classificado como linear ou não-linear. Dentre as não-linearidades, aqui serão abordadas a não-linearidade física e a não-linearidade geométrica.

A Figura 19 mostra a diferença entre o comportamento linear e não-linear. Na linearidade física, as tensões são linearmente proporcionais às deformações, conforme a Lei de Hooke. Nesse caso, para qualquer valor de carga aplicada, a relação tensão normal-deformação específica normal é dada por $\sigma = E\varepsilon$, onde E é o módulo de elasticidade longitudinal do material (ou módulo de Young). Na não-linearidade física, as respostas dos materiais da estrutura se modificam durante o processo de carregamento, de modo que a relação tensão-deformação não é mais linear. Em outras palavras, o módulo de elasticidade não é mais constante durante todo o ciclo de carregamento, sendo agora dependente da intensidade da força aplicada. A depender do tipo de material, fisicamente podem ocorrer processos de microfissuração evolutiva. Essa microfissuração pode gerar instabilidades de resposta material que se manifestam por meio de regimes de deformações localizadas ou do surgimento de fortes descontinuidades (PROENÇA, 2007).

Figura 19: Comportamento linear e não-linear.

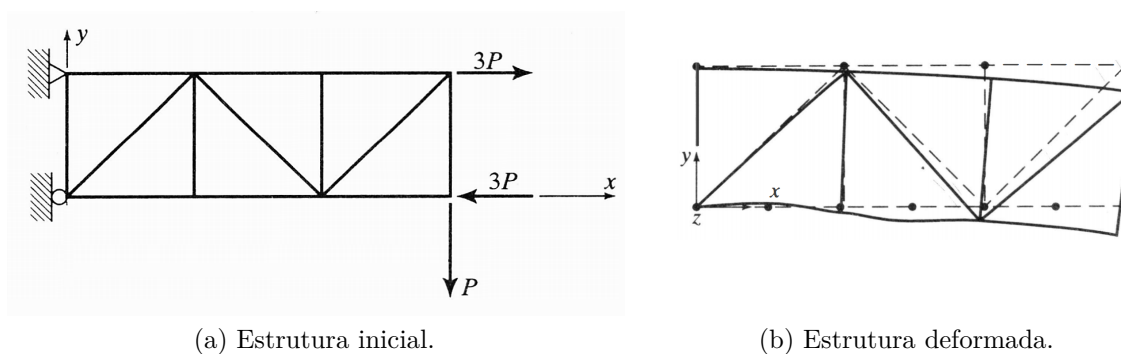


Fonte: Adaptado de Nielsen & Martins (2021).

O comportamento não-linear geométrico resulta das diferenças entre a geometria da estrutura inicial, antes da ação do carregamento, em relação à sua geometria deformada, a longo do processo de carregamento (NIELSEN; MARTINS, 2021). A Figura 20 representa uma situação em que a não-linearidade geométrica é significativa. A variação da geometria da estrutura, provocada pela ação de um carregamento, pode fazer com que surjam esforços internos em direções não previstas pelas equações de equilíbrio baseadas na configuração inicial. Sendo assim, para uma análise mais precisa, deve-se reformular a condição de equilíbrio na configuração deformada, de modo que os efeitos dos deslocamentos e das deformações são levados em conta na análise. Portanto, a não-linearidade geométrica está geralmente associada a grandes deslocamentos ou rotações, comuns em grandes estruturas. Por outro lado, na análise linear geométrica, as equações de equilíbrio são formuladas na

configuração inicial da estrutura. Deslocamentos subsequentes são considerados pequenos, de modo que seus efeitos são insignificantes no equilíbrio e na resposta estrutural.

Figura 20: Efeito da não-linearidade geométrica.



Fonte: McGuire *et al.* (2014).

Na análise estrutural, é possível incluir tanto os efeitos da não-linearidade física quanto da não-linearidade geométrica. Entretanto, destaca-se que nesse caso não é válida a superposição das respostas de cada um dos efeitos considerados separadamente (PROENÇA, 2007). Na análise não-linear, a sequência de carregamento e o estado inicial da estrutura influenciam na resposta do problema (REDDY, 2004). A maioria das estruturas apresenta, em algum aspecto, comportamento não-linear. Dentre as possíveis fontes de não-linearidades, destacam-se: elementos estruturais com grande esbelteza e/ou fora de prumo podem induzir à não-linearidade geométrica; fissuração e plastificação levam a não-linearidade física.

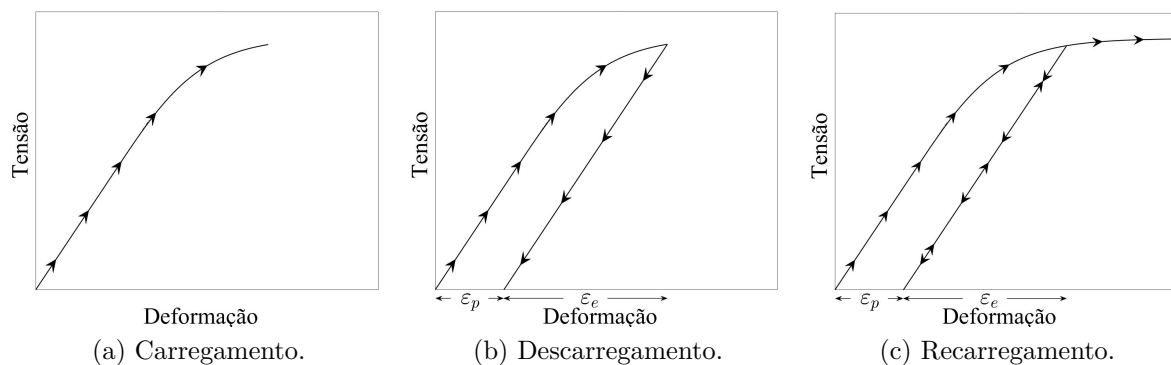
3.3.2 Comportamento elástico e inelástico

O comportamento elástico e inelástico (plástico) de um material está relacionado com os tipos de deformações que surgem na estrutura durante um ciclo de carregamento e descarregamento. De acordo com Pascon (2012), a deformação do material é dita elástica se for reversível e independente do tempo. Desse modo, a deformação desaparece por completo assim que o carregamento deixa de ser aplicado. Por outro lado, a deformação do material é dita plástica se for irreversível ou permanente. Nesse caso, a deformação se mantém mesmo após o descarregamento. Quando o material apresenta duas parcelas de deformação, uma elástica e outra plástica, ele é classificado como elastoplástico.

As curvas da Figura 21 representam o comportamento de um material elastoplástico durante um ciclo de carregamento, descarregamento e recarregamento. No carregamento inicial, a relação tensão-deformação ocorre como na Figura 21a. Inicialmente, o material apresenta comportamento elástico-linear. Após um determinado nível de tensão, começa haver uma reorganização interna do material que ocasiona alterações em suas propriedades

físicas, modificando o módulo de elasticidade. A partir de então, a inclinação da curva tensão-deformação começa a diminuir. Supondo agora que o elemento seja descarregado. Nessa situação, o caminho de descarregamento segue segundo uma reta com inclinação igual à da resposta elástica inicial, conforme ilustra a Figura 21b. Nota-se que, ao fim do processo, uma parcela da deformação é reversível (ε_e - deformação elástica), enquanto uma parcela de deformação residual permanece na estrutura (ε_p - deformação plástica). Caso a estrutura sofra um recarregamento, esse processo segue o caminho inverso do descarregamento, como mostra a Figura 21c, até que a curva original seja atingida. A partir desse ponto, a relação tensão-deformação segue conforme o processo de carregamento original (RODRIGUES, 1997). Portanto, enquanto nos modelos elásticos a relação tensão-deformação é biunívoca, de modo que cada nível de deformação ε está sempre associado a um único nível de tensão σ , nos modelos elastoplásticos é necessário conhecer o histórico prévio de deformações plásticas ε_p para se determinar o nível de tensão correspondente a certo nível de deformação (PROENÇA, 2007).

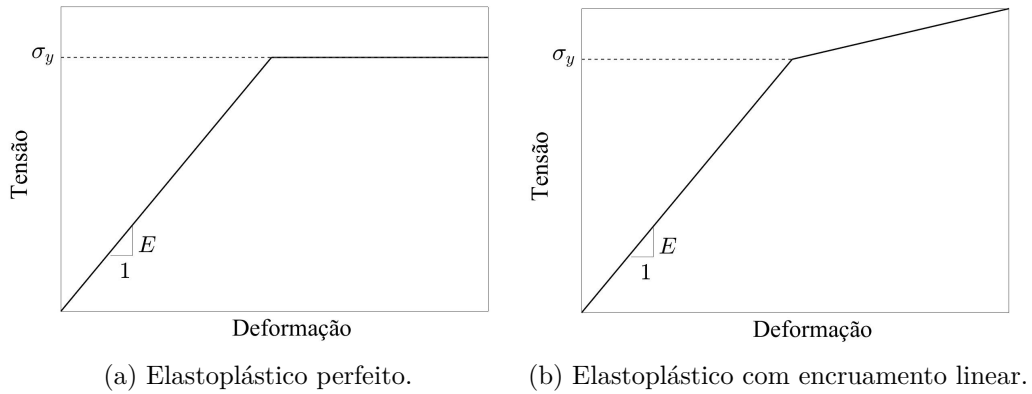
Figura 21: Ciclo de carga-descarga em um material elastoplástico.



Fonte: Elaborada pela autora.

Dentre os vários modelos matemáticos disponíveis para estudos que envolvem materiais elastoplásticos, destacam-se os modelos elastoplástico perfeito e elastoplástico com encruamento linear (RODRIGUES, 1997). No modelo elastoplástico perfeito (Figura 22a), quando a tensão atuante atinge a tensão de escoamento σ_y , o elemento torna-se incapaz de absorver acréscimo de tensão e a deformação fica indefinida. No modelo elastoplástico com encruamento linear (Figura 22b), quando a tensão atuante ultrapassa a tensão de escoamento σ_y , o módulo de elasticidade do material se altera, de modo que o elemento estrutural passa a ser capaz de absorver um acréscimo de tensão às custas de deformações maiores. Ressalta-se que, após atingir a tensão de escoamento, apenas as deformações plásticas evoluem no primeiro modelo, enquanto que no segundo modelo, há evolução de deformações elásticas e plásticas.

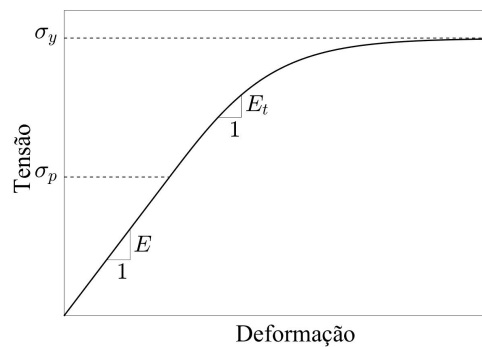
Figura 22: Modelos de materiais elastoplásticos.



Fonte: Elaborada pela autora.

McGuire *et al.* (2014) aplicam um modelo baseado no módulo tangente, cuja curva tensão-deformação é ilustrada na Figura 23. O modelo baseia-se na ideia de que a resistência da estrutura é afetada pelas tensões residuais que resultam do processo de fabricação. Para tensões abaixo da denominada tensão de proporcionalidade σ_p , o material apresenta comportamento elástico. Para tensões maiores do que σ_p , o comportamento do material é inelástico com rigidez gradualmente decrescente, medida pelo módulo tangente E_t . Enquanto E depende apenas do tipo de material empregado, E_t é dependente também do nível de tensão aplicada na estrutura. A Equação 3.3 apresenta uma expressão empírica para colunas de aço, utilizada para obter o módulo tangente. A tensão de proporcionalidade σ_p é definida como metade do valor da tensão de escoamento σ_y .

Figura 23: Modelo elastoplástico baseado no módulo tangente.



Fonte: Elaborada pela autora.

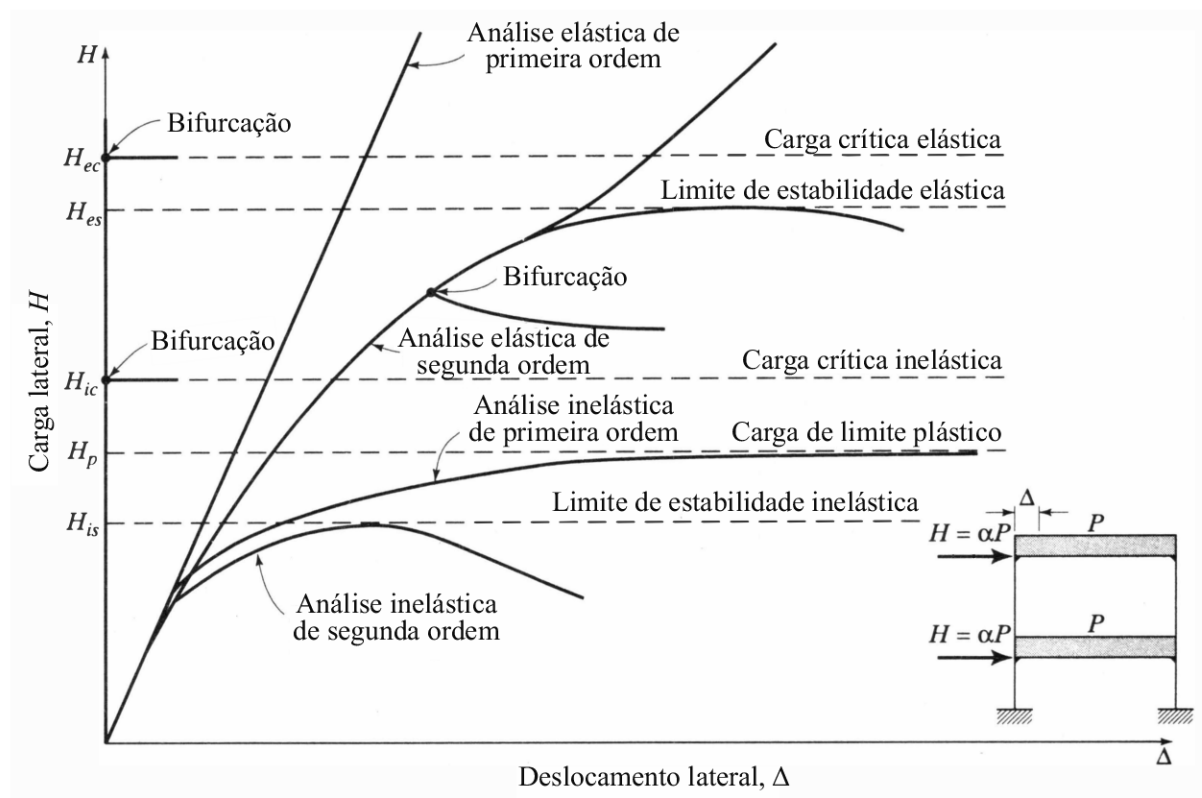
$$E_t = 4E \left[\frac{\sigma}{\sigma_y} \left(1 - \frac{\sigma}{\sigma_y} \right) \right] \quad (3.3)$$

3.3.3 Níveis de análise estrutural

Difícilmente é possível modelar todas as fontes de não-linearidade e retratar o comportamento real de uma estrutura em todos os seus detalhes. Na modelagem, o projetista deve decidir quais fontes de não-linearidade podem ser significativas e como representá-las. Portanto, a escolha do modelo de análise depende do objetivo da análise e da tolerância ao erro da resposta (REDDY, 2004).

A Figura 24 apresenta os níveis de análise mais comuns através de curvas de respostas de um pórtico plano sob carga estática. Esses níveis diferem entre si na capacidade de capturar diferentes comportamentos das estruturas. Entretanto, todos eles podem fornecer informações importantes, a depender do problema avaliado. Os níveis de análise podem ser caracterizados da seguinte maneira:

Figura 24: Níveis de análise.



Fonte: Adaptado de McGuire *et al.* (2014).

- **Análise elástica de primeira ordem:** Não leva em conta as não-linearidades. Geralmente, esse nível de análise representa bem as condições de serviço;
- **Análise elástica de segunda ordem:** Considera a não-linearidade geométrica, porém, não leva em conta a não-linearidade física. Dentre os possíveis modos de comportamento elástico não-linear, destacam-se: bifurcação do caminho de carregamento, de

modo que o sistema segue um caminho alternativo no estado pós-crítico; aumento gradual da não-linearidade, que culmina em instabilidade elástica em um ponto limite; aumento da rigidez após um período de amolecimento gradual;

- **Análise inelástica de primeira ordem:** Considera a não-linearidade física, porém não leva em conta a não-linearidade geométrica. As regiões inelásticas podem se desenvolver gradualmente ou, se o conceito de rótula plástica for adotado, de maneira abrupta;
- **Análise inelástica de segunda ordem:** Considera a não-linearidade geométrica e física. Essa análise permite, em um sentido determinístico, a concepção de modelos analíticos capazes de simular o comportamento real da estrutura e calcular o limite de estabilidade inelástica;
- **Carga crítica elástica:** É a carga na qual o caminho de carregamento original e um alternativo se tornam matematicamente válidos. Entretanto, o caminho percorrido a partir desse ponto é o alternativo. Essa carga pode ser determinada por meio de uma análise de autovalor de um modelo elástico idealizado da estrutura. A análise também fornece o autovetor, ou seja, a forma que o sistema assume no estado pós-crítico, mas não determina sua amplitude;
- **Carga crítica inelástica:** É definida e calculada de maneira semelhante à carga crítica elástica, mas considera na análise a possibilidade de comportamento inelástico antes do limite elástico ser atingido.

De acordo com [Proença \(2007\)](#), uma trajetória de equilíbrio é classificada como estável, quando uma pequena perturbação leva a outra posição de equilíbrio tão mais próxima da inicial quanto menor for a perturbação aplicada. Sendo assim, uma trajetória de equilíbrio pode apresentar trechos estáveis e instáveis, e é na transição entre eles que ocorre o chamado ponto de bifurcação. A partir desse ponto, as configurações equilibradas sob regime estável deixam de constituir uma trajetória única, havendo mais de uma configuração de equilíbrio possível, instável ou estável. Ou seja, em um caminho de carregamento, a carga correspondente ao ponto de bifurcação é denominada de carga crítica de flambagem, que é a máxima carga que a estrutura pode suportar antes que o fenômeno aconteça.

3.3.3.1 Abordagem matricial

Para a análise estrutural, muitas vezes se utiliza o método dos deslocamentos, também conhecido como método da rigidez direta, no qual o equilíbrio é regido por

$$\mathbf{f} = \mathbf{Kd}, \quad (3.4)$$

conforme abordado na seção 3.1. Em resumo, esse método determina inicialmente a resposta da estrutura em termos dos deslocamentos e, a partir desses deslocamentos obtém os esforços solicitantes. A matriz de rigidez global é obtida por meio da combinação das matrizes de rigidez de elementos individuais, que dependem das propriedades geométricas e das leis constitutivas dos materiais envolvidos (GOMES, 2017).

Na análise elástica linear temos $\mathbf{K} = \mathbf{K}_e$, em que \mathbf{K}_e é matriz de rigidez elástica linear. Nessas circunstâncias, há proporcionalidade entre forças e deslocamentos, o que se reflete em uma matriz de rigidez constante ao longo do processo de carregamento, e a resposta estrutural pode ser obtida diretamente a partir da Equação 3.4. Entretanto, para os outros níveis de análise, essa proporcionalidade pode não existir, o que implica em uma relação não mais linear entre \mathbf{f} e \mathbf{d} .

Se assumirmos que, nas análises de níveis superiores, as equações não-lineares de equilíbrio possam ser reduzidas a um conjunto para o qual podemos adaptar as técnicas utilizadas para a resolução de sistemas de equações algébricas lineares, então esse comportamento pode ser traçado de modo incremental, isto é, pode ser adotado um esquema de solução incremental-iterativa. Assim, a análise pode ser feita por meio de uma variante da equação de equilíbrio, dada por

$$d\mathbf{f} = \mathbf{K}_t d\mathbf{d}, \quad (3.5)$$

onde $d\mathbf{f}$ é o vetor de incremento de forças nodais, \mathbf{K}_t é a matriz de rigidez tangente e $d\mathbf{d}$ é o vetor de incremento dos deslocamentos nodais. Normalmente, \mathbf{K}_t possui uma parcela elástica linear e uma ou mais parcelas adicionais que são funções das forças e/ou dos deslocamentos existentes no início do incremento. Desse modo, o problema pode ser tratado como o apresentado inicialmente, porém de maneira gradual, em que a resposta total é determinada por meio da soma de incrementos.

A formulação de cada nível de análise difere nos tipos de não-linearidades incluídos em \mathbf{K}_t . Na análise elástica de segunda ordem, a Equação 3.5 pode ser reescrita como

$$d\mathbf{f} = (\mathbf{K}_e + \mathbf{K}_g) d\mathbf{d}, \quad (3.6)$$

em que \mathbf{K}_g é a matriz de rigidez geométrica, que representa a mudança na rigidez resultante dos efeitos de ordem superior. Geralmente, os membros da estrutura devem ser divididos em diversos elementos para obter um resultado satisfatório. Na análise inelástica de primeira ordem, a Equação 3.5 torna-se

$$d\mathbf{f} = (\mathbf{K}_e + \mathbf{K}_m) d\mathbf{d}, \quad (3.7)$$

onde \mathbf{K}_m é a matriz de rigidez material, que representa a mudança na rigidez resultante do comportamento inelástico do material da estrutura. Na análise inelástica de segunda ordem, ambas as não-linearidades são levadas em conta, de modo que a Equação 3.5 resulta na Equação 3.8.

$$d\mathbf{f} = (\mathbf{K}_e + \mathbf{K}_g + \mathbf{K}_m) d\mathbf{d} \quad (3.8)$$

A carga crítica elástica, por sua vez, pode ser calculada por meio de um problema de autovalor, no qual a equação de equilíbrio no estado crítico é dada por

$$\vec{\mathbf{0}} = (\mathbf{K}_e + \lambda \hat{\mathbf{K}}_g) \mathbf{d}, \quad (3.9)$$

em que $\vec{\mathbf{0}}$ é o vetor nulo, $\hat{\mathbf{K}}_g$ é a matriz de rigidez geométrica calculada para uma força de referência \mathbf{f}_{ref} , λ é um autovalor e \mathbf{d} é um autovetor. Os diversos pares de autovalor-autovetor que satisfazem a Equação 3.9 para $\mathbf{d} \neq \vec{\mathbf{0}}$, estão relacionados às possíveis cargas críticas e aos possíveis modos de flambagem da estrutura. Dentre eles, o menor valor de λ corresponde ao primeiro modo de flambagem e produz a carga crítica elástica $\lambda \mathbf{f}_{ref}$; o correspondente \mathbf{d} define a configuração de flambagem. Alterando as constantes dos materiais em \mathbf{K}_e , a Equação 3.9 pode ser utilizada para calcular a carga crítica inelástica. Também é possível obter a carga crítica elástica e inelástica por meio da análise elástica e inelástica de segunda ordem, respectivamente, desde que aplicada uma perturbação ao modelo. Maiores detalhes são apresentados na seção 3.5.

3.4 Estado da arte

Na última década, diversos trabalhos na área de otimização estrutural foram publicados. Na maioria das vezes, essas pesquisas buscam encontrar estruturas ótimas para determinados objetivos e que atendem as restrições impostas. Nota-se que o foco principal dos trabalhos têm sido a eficiência do método de otimização empregado na resolução dos problemas (CHUNNA *et al.*, 2020; DONG *et al.*, 2020; GEBREMEDHEN *et al.*, 2020; JAWAD *et al.*, 2021; FICARELLA *et al.*, 2021). Em geral, os autores propõem um método de otimização e comparam seus resultados obtidos em problemas *benchmark* com os resultados obtidos por outros métodos de otimização já publicados. Normalmente, a comparação do desempenho do método de otimização está relacionada ao valor de função objetivo encontrada e ao número de vezes que a função precisou ser executada durante a resolução do problema.

Entretanto, observa-se que um dos aspectos mais importantes para a engenharia de estruturas tem sido tratado de modo secundário em muitas pesquisas de otimização, que é o efeito das definições de projeto nas configurações ótimas das estruturas. Pouco se discute acerca dos resultados, e não se tenta estabelecer padrões sobre em quais casos é indicado o uso de determinada hipótese ou em qual situação há pouca influência das definições de projeto.

Alguns autores analisam a relação entre a estrutura ótima e o modelo empregado para representar o comportamento da estrutura. Há trabalhos que comparam, além dos modelos, o resultado ótimo para diversos deslocamentos prescritos da estrutura.

Pezeshk *et al.* (2000) comparam as diferenças entre projetos ótimos de pórticos metálicos obtidos por análises lineares e não-lineares geométricas. Os autores concluem

que, em alguns casos, pode-se obter um projeto melhor em termos de capacidade de carga, realizando análise não-linear ao invés de análise linear.

Jung & Gea (2004) comparam quatro diferentes níveis de análises utilizadas na otimização de uma viga: análise linear; análise não-linear física; análise não-linear geométrica; análise não-linear física e geométrica acoplada. Os resultados da análise linear e da análise não-linear física são quase idênticos; entretanto, eles são completamente diferentes daqueles da análise não-linear geométrica e da análise não-linear física e geométrica acoplada.

Kemmler *et al.* (2005) apontam a influência do efeito de grandes deformações na otimização de estruturas, bem como a relevância de se considerar a possibilidade de instabilidade estrutural. A carga crítica foi incluída no projeto como uma restrição de desigualdade.

Suleman & Sedaghati (2005) desenvolvem um algoritmo de otimização para estruturas de treliças e vigas sujeitas a grandes deflexões. Os autores mostram que um projeto obtido considerando flambagem linear (autovalor) subestima a massa ótima ou superestima a carga de flambagem, quando comparado a um projeto baseado em flambagem não-linear geométrica, o que pode resultar em falha catastrófica.

Hanahara & Tada (2011) demonstram que um dimensionamento ótimo baseado apenas na condição de flambagem local ou flambagem global é insuficiente no caso de treliças esbeltas de grande porte. Os autores apontam que a carga crítica de flambagem dos elementos pode ser aumentada com o aumento da rigidez da seção transversal. Entretanto, essa modificação pode não ser suficiente para evitar a flambagem global.

Torii *et al.* (2015) apresentam uma abordagem para a otimização de estruturas treliçadas, capaz de capturar a estabilidade global e local, evitando o uso da fórmula de Euler para essa última. A abordagem se baseia no uso de elementos de pórtico e em uma restrição de estabilidade capaz de verificar ambos os tipos de flambagem simultaneamente. As discussões e os resultados destacam que a estabilidade global é uma questão principal no projeto desse tipo de estrutura e deve ser levada em consideração em aplicações práticas. Mitjana *et al.* (2018) empregam formulação semelhante à de Torii *et al.* (2015), entretanto o foco do trabalho é voltado para a otimização, de modo que não há conclusões relacionadas ao aspecto da modelagem estrutural.

Zhang *et al.* (2017) propõem a otimização topológica não-linear física de treliças usando o método *ground structure* com um esquema de filtragem discreto. São avaliados quatro exemplos numéricos, considerando diversos tipos de materiais. Observa-se a diferença de topologias resultantes de mudanças nos modelos de materiais, o que mostra a importância da consideração do comportamento não-linear dos materiais na otimização de projetos reais de estruturas planas e espaciais.

Petrović *et al.* (2018) investigam o efeito da restrição de flambagem de Euler na otimização de treliças planas e espaciais. Os autores afirmam que as soluções ótimas que não consideram os critérios de flambagem possuem um número considerável de elementos

que não atendem a esses critérios. Também, constatou-se que as massas relacionadas a estas soluções ótimas são consideravelmente menores do que as dos modelos que consideram flambagem.

Varma *et al.* (2020) otimizam estruturas treliçadas sob restrição de flambagem. A abordagem aplicada captura a flambagem através da resposta obtida por meio de análise não-linear geométrica da estrutura. Para isso, cada elemento da treliça é modelado utilizando dois elementos de pórtico com momentos liberados nas extremidades articuladas. Imperfeições locais e globais são introduzidas para induzir a flambagem local e global, respectivamente. A partir dos resultados, os autores observam que ao incorporar a não-linearidade geométrica no modelo, as áreas de seção transversal ótimas podem ser menores do que as da solução baseada em análise linear. Consequentemente, as estruturas resultam mais leves na abordagem não-linear. Entretanto, algumas barras da estrutura apresentaram maior área no modelo não-linear, indicando que as mesmas falhariam caso o modelo adotado fosse o linear.

Lemonge *et al.* (2021) propõe a otimização multiobjetivo de problemas estruturais, com combinação de funções objetivo conflitantes. Em todos os exemplos avaliados, a primeira função objetivo corresponde ao peso ou ao volume total das treliças, e são investigados três cenários para a segunda função objetivo: maximização da primeira frequência natural de vibração; maximização da carga crítica elástica (estabilidade global); minimização do deslocamento nodal máximo da estrutura. Os autores indicam, como contribuição, a consideração das múltiplas funções objetivos, aplicadas em problemas *benchmark* que antes haviam sido avaliados considerando modelos mais simples. Entretanto, o foco principal do trabalho é voltado para o desenvolvimento da ferramenta de otimização.

A partir da leitura e análise crítica das referências apresentadas na área de otimização, é possível constatar a ausência de trabalhos que foquem na análise de diferentes cenários de modelos de flambagem e que considerem a não-linearidade material na obtenção da carga crítica. Com relação às condições de contorno, não foram encontradas pesquisas que otimizam estruturas variando as condições de vinculação e considerando apoios elásticos. Dado que o foco principal dessa pesquisa é sobre os modelos de flambagem, escolhem-se analisar estruturas treliçadas, visto que esse tipo de estrutura sofre bastante impacto desse fenômeno de instabilidade. Além disso, as treliças são aplicadas em diversas estruturas usuais, de modo que a contribuição dessa pesquisa atinge de maneira ampla a área de estruturas.

3.5 Metodologia e formulação dos problemas

Essa seção apresenta a metodologia empregada para avaliar o efeito das hipóteses de modelagem nos resultados ótimos de problemas de otimização estrutural de treliças. Para isso, em cada um dos grupos avaliados, são confrontados diferentes cenários de modelagem

em exemplos numéricos de otimização. Cada cenário está relacionado a uma definição de condição de contorno ou de modelo de análise estrutural distinta.

As funções objetivo avaliadas correspondem à massa ou ao volume das estruturas. Em todos os problemas, as variáveis são adotadas como contínuas e estão associadas às dimensões das seções transversais dos elementos das treliças ou às posições dos nós das estruturas. Desse modo, são estudadas otimizações dimensionais e de forma. As restrições abordadas, na maioria das vezes, estão relacionadas a tensões, cargas e deslocamentos máximos permitidos. As estruturas possuem barras com seção transversal circular vazada.

Alguns exemplos estudados apresentam como variável de projeto a área da seção transversal dos elementos. Nesses casos, para não aumentar o número de variáveis de projeto e, conseqüentemente, o tempo computacional associado à solução dos problemas de otimização, é necessário expressar algumas propriedades geométricas das seções transversais das barras em função de suas áreas. Nesse contexto, Saka (1990) adotou a função de potência para relacionar a área e o raio de giração das seções, expressa por $r = aA^b$, cujos coeficientes foram obtidos por regressões dos valores dessas propriedades para um conjunto de perfis disponíveis em catálogos comerciais. Nesta tese, a regressão foi realizada com o *software* Excel (2010) utilizando os dados dos perfis circulares vazados da tabela 4-F do catálogo disponível em AISC (2017). As Equações 3.10 e 3.11 apresentam as relações obtidas para o momento de inércia e para o módulo plástico da seção, que são as únicas propriedades geométricas utilizadas pelos modelos adotados aqui, que são em função do valor da área das seções transversais (Figura 25). O R-quadrado obtido nas regressões são, respectivamente, 0,95 e 0,98.

$$I = 0,4872A^{2,1858} \quad (3.10)$$

$$Z = 0,6277A^{1,5931} \quad (3.11)$$

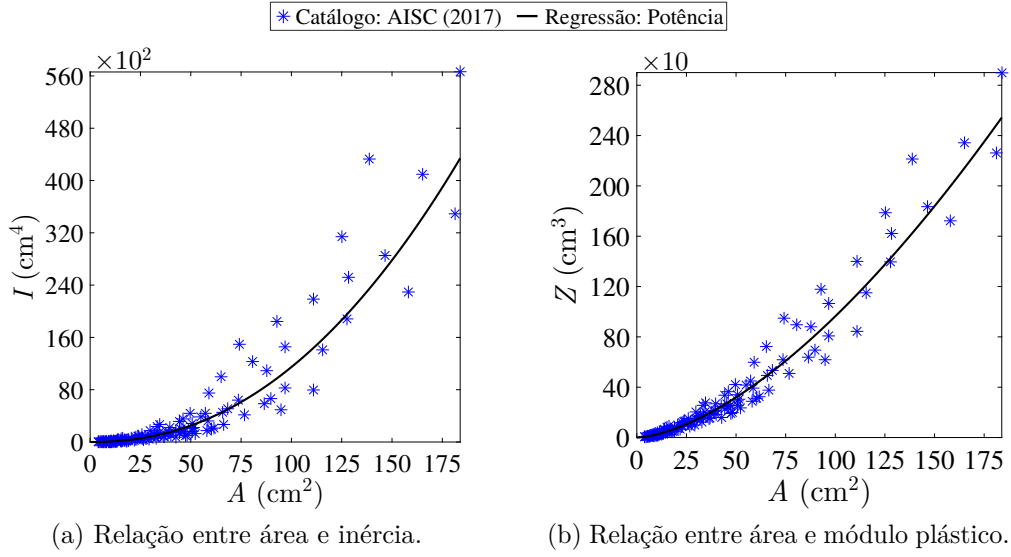
Destaca-se que todos os problemas e algoritmos foram implementados em MATLAB (MATHWORKS, 2016), e as análises estruturais numéricas são feitas utilizando o *software* MASTAN2 (ZIEMIAN; MCGUIRE, 2007; MCGUIRE *et al.*, 2014). O fato do MASTAN2 também ser implementado em MATLAB permite um melhor acoplamento entre a otimização e a análise estrutural, o que ajuda a reduzir os custos computacionais. A otimização é efetuada pelo método baseado em Kriging, proposto e validado no capítulo 2.

A seguir, são apresentadas com mais detalhes as formulações dos cenários em cada uma das abordagens estudadas.

3.5.1 Apoios elásticos

Para a análise dos efeitos das condições de contorno essenciais, todos os cenários avaliados possuem a mesma função objetivo, as mesmas variáveis de projeto e restrições. O que difere entre os cenários é apenas a condição de contorno inserida no modelo estrutural.

Figura 25: Relações entre propriedades geométricas das seções.



Fonte: Elaborada pela autora.

Sendo assim, os diferentes cenários estão associados a diferentes valores da constante de rigidez k dos apoios elásticos.

Os apoios elásticos aqui avaliados correspondem a uma representação da ligação da estrutura com o meio, de modo que a rigidez da conexão engloba toda a fundação da estrutura. Aqui é avaliada apenas a rigidez na direção perpendicular ao plano de contato da estrutura com o meio.

No MASTAN2, as molas são modeladas através de elementos de barra com rigidez $k = EA/L$, onde E é o módulo de elasticidade, A é a área da seção transversal e L é comprimento da barra. Para simplificação da programação, é adotado $A = 1$ e $L = 1$, tornando o valor da rigidez k dependente apenas do módulo E .

A análise do custo associado à rigidez k dos apoios é feita por meio da penalização do valor ótimo da função objetivo $f(\mathbf{x}^*)$ encontrado em cada cenário de rigidez avaliado. A função de penalização empregada é dada por

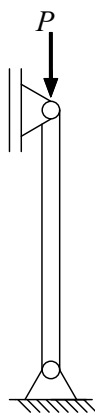
$$f_p(\mathbf{x}^*) = f(\mathbf{x}^*) (1 + \alpha) \quad \rightarrow \quad \alpha = \alpha_{min} + \left(\frac{k - k_{min}}{k_{max} - k_{min}} \right) (\alpha_{max} - \alpha_{min}), \quad (3.12)$$

onde α_{min} e α_{max} são, respectivamente, as penalizações dadas para a menor rigidez k_{min} e maior rigidez k_{max} avaliadas no problema. Desse modo, a função de penalização segue o preceito de que quanto mais rígido é o apoio da estrutura, maior é o seu custo. Segundo referências de mercado, o custo da estrutura varia entre 14% e 22% do custo total de uma obra, enquanto que para a fundação esse percentual varia de 3% a 7% (PEDROZO, 2018; SIENGE, 2022). Portanto, pode-se dizer que o custo da fundação corresponde entre 13,6% e 50% do custo da estrutura. Apesar da literatura não afirmar que este intervalo está relacionado com a variação da rigidez da fundação, esses valores servem de base para uma

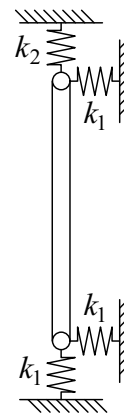
análise de custo mais próxima dos valores empregados na construção civil. Sendo assim, nos exemplos estudados, os valores de α_{min} e α_{max} são baseados nessas faixas de valores apresentadas.

Para validar os apoios de primeiro e de segundo gênero representados por molas, é utilizada aqui a coluna estudada por McGuire *et al.* (2014). A Figura 26a ilustra a estrutura originalmente avaliada pelos autores e a Figura 26b descreve o modelo com molas empregado aqui. Os parâmetros de entrada da coluna são: $A = 9,13 \text{ in}^2$ ($58,9031 \text{ cm}^2$), $I = 37,1 \text{ in}^4$ ($1544,2186 \text{ cm}^4$), $Z = 14,1 \text{ in}^3$ ($231,0576 \text{ cm}^3$), $r = 2,02 \text{ in}$ ($5,1308 \text{ cm}$), $L = 120 \text{ in}$ ($304,8000 \text{ cm}$), $E = 29000 \text{ ksi}$ ($199,9550 \text{ GPa}$), $\sigma_y = 50 \text{ ksi}$ ($344,7500 \text{ MPa}$) e $P = 224,8201 \text{ kips}$ ($1000,0000 \text{ kN}$). É adotado $k_1 = 1 \cdot 10^8 \text{ kips/in}$, para representar os apoios rígidos, e $k_2 = 1 \cdot 10^{-8} \text{ kips/in}$, para representar os apoios livres. A Tabela 8 mostra que o esforço normal N , a tensão σ na barra e o deslocamento vertical d_1 no nó 1 obtidos em ambos os modelos são iguais. A partir dessa validação, o modelo empregado pode ser analisado para diversos valores de k .

Figura 26: Exemplo de validação do modelo de molas nos apoios de 1º e 2º gênero.



(a) Modelo original.



(b) Modelo com molas.

Fonte: Elaborada pela autora.

Tabela 8: Validação do uso de molas na modelagem de apoios.

Projeto	Original	Molas
N (kN)	-1000,0000	-1000,0000
σ (MPa)	-169,7848	-169,7848
d_1 (cm)	-0,2588	-0,2588

Fonte: Elaborada pela autora.

3.5.2 Modelos de flambagem

Para a análise dos efeitos dos modelos de flambagem na otimização de treliças, são avaliados três cenários distintos de verificação de flambagem estrutural: o primeiro cenário considera restrição de flambagem elástica, caracterizada pela aplicação da tensão crítica de Euler; o segundo cenário emprega a formulação da norma [AISC-360 \(2016\)](#) para determinar a tensão crítica; o terceiro cenário considera a restrição de flambagem inelástica, representada por um único critério de estabilidade. A seguir, é descrita a formulação de cada cenário e é apresentada a validação de seus respectivos modelos de flambagem.

3.5.2.1 Cenário 1: Tensão crítica de Euler

Neste cenário, entende-se que a flambagem elástica de uma barra de treliça ocorre quando a tensão normal de compressão atuante na barra ultrapassa a tensão de flambagem de Euler, calculada por

$$\sigma_e = \frac{\pi^2 EI}{AL_e^2}, \quad (3.13)$$

onde E é o módulo de elasticidade do material do elemento analisado, I e A são, respectivamente, o momento de inércia e a área da seção transversal do elemento estrutural e L_e é o seu comprimento efetivo de flambagem, que é igual ao comprimento da barra no caso de treliça. Além disso, como o material é dito elástico linear, a tensão atuante nos elementos, tanto na compressão como na tração, não deve ultrapassar a tensão de escoamento do material.

Para verificar o critério proposto, primeiramente é realizada uma análise elástica de primeira ordem para obter os esforços internos dos elementos. Nessa situação, cada barra é modelada como um elemento finito de treliça. Posteriormente, para cada uma das n_{bar} barras da estrutura, são feitas as seguintes verificações: caso o i -ésimo elemento estrutural esteja sob compressão, o módulo da sua tensão $|\sigma_i(\mathbf{x})|$ não deve ultrapassar o menor valor entre a tensão de escoamento σ_{y_i} e a tensão de flambagem de Euler $\sigma_{e_i}(\mathbf{x})$; caso o i -ésimo elemento estrutural esteja sob tração, sua tensão $\sigma_i(\mathbf{x})$ não deve ultrapassar σ_{y_i} . A Equação 3.14 resume o procedimento de verificação através da restrição empregada no problema de otimização,

$$g_i(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{|\sigma_i(\mathbf{x})|}{\min(\sigma_{y_i}, \sigma_{e_i}(\mathbf{x}))} - 1 \leq 0, & \text{se } \sigma_i(\mathbf{x}) \leq 0; \\ \frac{\sigma_i(\mathbf{x})}{\sigma_{y_i}} - 1 \leq 0, & \text{se } \sigma_i(\mathbf{x}) > 0. \end{cases} \quad (3.14)$$

3.5.2.2 Cenário 2: Tensão crítica de acordo com AISC

Este cenário considera a resposta do material além do limite do regime elástico-linear idealizado através de equações empíricas baseadas em experimentos. De acordo com [AISC-360 \(2016\)](#), existem duas equações que governam a resistência das barras sob compressão, as quais são baseadas no estado limite de flambagem por flexão ([AISC-LRFD, 1994](#)): a primeira representa a flambagem elástica, que consiste em uma parcela da tensão crítica de Euler; a segunda é uma relação empírica para o intervalo inelástico de flambagem. Ambas as equações incluem os efeitos das tensões residuais e da falta de alinhamento inicial do elemento. Sendo assim, a tensão crítica para barras comprimidas de acordo com [AISC-360 \(2016\)](#) é dada por

(a) Se $\frac{L_e}{r} > 4,71\sqrt{\frac{E}{\sigma_y}}$ → Flambagem elástica

$$\sigma_{cr} = 0,877\sigma_e, \quad (3.15)$$

(b) Se $\frac{L_e}{r} \leq 4,71\sqrt{\frac{E}{\sigma_y}}$ → Flambagem inelástica

$$\sigma_{cr} = \left(0,658\frac{\sigma_y}{\sigma_e}\right) \sigma_y, \quad (3.16)$$

onde r é o raio de giração da seção transversal e σ_e é a tensão de flambagem de Euler. Similar ao cenário 1, a tensão em elementos sob tração é limitada a σ_y e a tensão em elementos sob compressão não pode exceder σ_{cr} . Desse modo, as restrições do cenário 2 são dadas por

$$g_i(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{|\sigma_i(\mathbf{x})|}{\sigma_{cr_i}(\mathbf{x})} - 1 \leq 0, & \text{se } \sigma_i(\mathbf{x}) < 0; \\ \frac{\sigma_i(\mathbf{x})}{\sigma_{y_i}} - 1 \leq 0, & \text{se } \sigma_i(\mathbf{x}) > 0. \end{cases} \quad (3.17)$$

3.5.2.3 Cenário 3: Carga crítica inelástica

Este cenário assume que a falha da estrutura ocorre quando a carga atuante na estrutura ultrapassa o valor da carga crítica inelástica. O processo de determinação da carga crítica é feito através da reprodução de um ensaio numérico de resistência da estrutura, em que a treliça é carregada em incrementos de carga até atingir uma carga em que, a partir deste ponto, há uma queda na sua resistência. O valor da carga máxima que a estrutura consegue suportar é definido como carga crítica. Esse modelo leva em conta a possibilidade do material apresentar comportamento inelástico durante o processo de carregamento da estrutura, e é capaz de capturar tanto a flambagem de um elemento estrutural, definida aqui como flambagem local, quanto a flambagem da estrutura como um todo, definida como flambagem global.

Sendo assim, esse cenário emprega uma restrição global para verificar toda a estrutura, a qual é dada por

$$g(\mathbf{x}) = \frac{P}{P_{cr}(\mathbf{x})} - 1 \leq 0, \quad (3.18)$$

onde P é a carga aplicada e $P_{cr}(\mathbf{x})$ é a carga crítica correspondente, que é o máximo valor de carga que a estrutura pode suportar antes de atingir a falha. Como a análise estrutural é realizada em incrementos de carga, o valor da relação P/P_{cr} é igual para todas as cargas atuantes na estrutura.

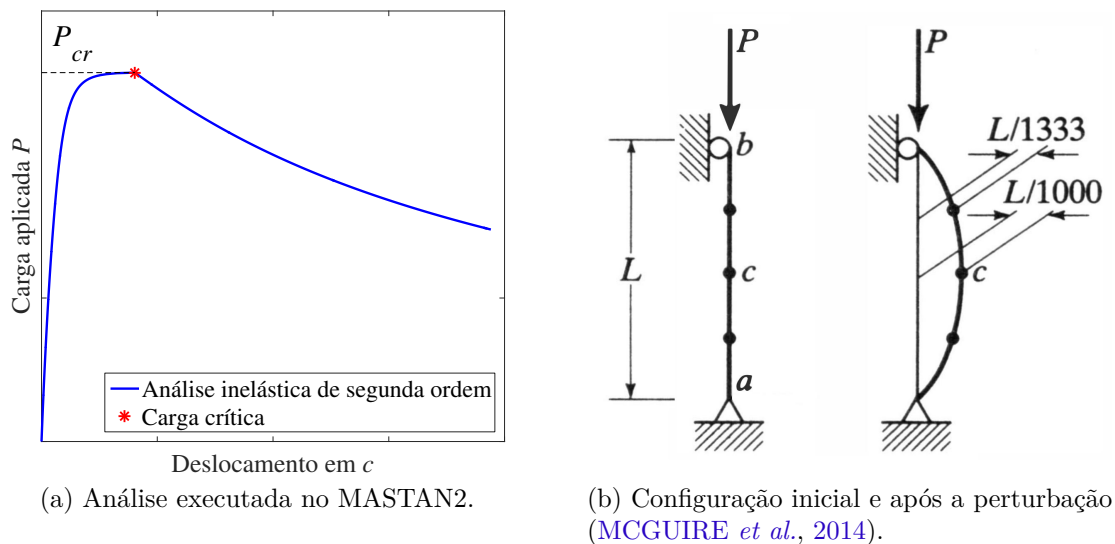
Para incorporar a possibilidade de flambagem e de comportamento inelástico do material no cálculo da carga crítica, é necessário impor imperfeições iniciais nas barras da estrutura e executar a análise estrutural inelástica de segunda ordem. As imperfeições iniciais adotadas neste trabalho são baseadas nos modos de flambagem elástica da estrutura. Optou-se por considerar apenas os três primeiros modos de flambagem como imperfeições, devido ao alto custo computacional associados às análises. Além disso, assume-se que o comportamento elastoplástico do material segue a formulação dada por [McGuire et al. \(2014\)](#), representada pela curva da Figura 23.

Portanto, o seguinte procedimento é executado para verificar a restrição: primeiramente, é feita a análise de autovalor-autovetor da estrutura, conforme Equação 3.9; em seguida, para os três primeiros modos de flambagem considerados, calcula-se a carga crítica por meio da análise inelástica de segunda ordem da treliça (Equação 3.8), levando em conta uma perturbação nas coordenadas nodais dos elementos finitos dada por $\mathbf{c} = \mathbf{c}_0 + \alpha \mathbf{d}$, onde \mathbf{c}_0 e \mathbf{c} são as coordenadas nodais antes e depois da perturbação, respectivamente, \mathbf{d} é o vetor de deslocamentos nodais de acordo com o modo de flambagem considerado na análise de autovalor-autovetor, e α é um fator de redução da perturbação; por fim, verifica-se a Equação 3.18 para cada uma das cargas críticas calculadas. Ressalta-se que, na análise inelástica de segunda ordem, é aplicado um fator de carga máxima de 1,1 sobre a carga do problema em análise e são empregados 110 incrementos de carga. Na modelagem da análise estrutural, cada barra da treliça é dividida em diversos elementos finitos de pórtico. Os elementos conectados às rótulas são modelados como rígidos-rotulados, enquanto que os outros elementos são modelados com ligações rígidas-rígidas. Para evitar singularidades em graus de liberdade de rotação nas rótulas, um único elemento é conectado rigidamente em cada rótula (rígido-rígido), conforme recomendado por [Madah & Amir \(2017\)](#) e [Ziemian & McGuire \(2007\)](#).

A Figura 27a ilustra a carga crítica obtida para a coluna apresentada na seção anterior, previamente estudada por [McGuire et al. \(2014\)](#). A imperfeição aplicada pelos autores corresponde a um deslocamento nas coordenadas dos nós proporcional ao comprimento da coluna (Figura 27b). A mesma estrutura é utilizada aqui para definir o valor do fator de redução de perturbação α . Além disso, como o problema foi avaliado pelos autores para representar os três modelos de flambagem citados, o exemplo também é utilizado aqui

para validar os códigos desenvolvidos de verificação dos três cenários.

Figura 27: Representação da curva de obtenção da carga crítica inelástica.

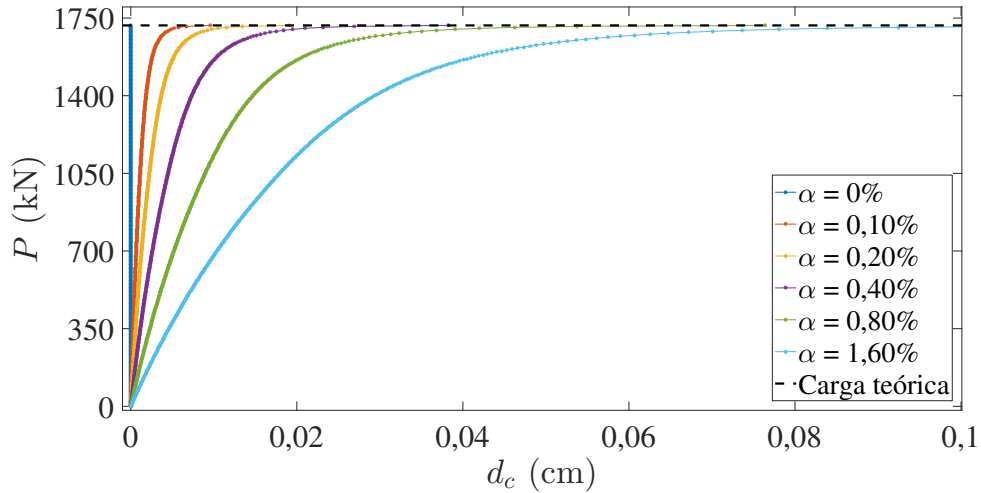


Fonte: Elaborada pela autora.

Primeiramente, para definir o fator de redução, são comparadas as cargas críticas obtidas para valores crescentes de α com a carga teórica apresentada por McGuire *et al.* (2014). Os resultados encontrados nessa análise são ilustrados nas curvas da Figura 28, em que P é a força aplicada e d_c é o deslocamento horizontal no ponto c da coluna. Observa-se que, embora todas as curvas converjam para a carga teórica, os deslocamentos obtidos não são iguais para os diferentes valores de α . Varma *et al.* (2020) constata que, ao empregar um modelo semelhante ao estudado aqui, porém com análise elástica, a curva força-deslocamento se afasta da situação real com o aumento da magnitude da imperfeição, e apresenta grandes deslocamentos repentinos. Esse mesmo comportamento é observado aqui no exemplo da coluna, para a análise inelástica. Entretanto, quando não é aplicada nenhuma imperfeição ($\alpha = 0$) o modelo não consegue capturar a configuração da flambagem, resultando em deslocamento lateral nulo. Portanto, é adotado na presente pesquisa $\alpha = 0,10\%$, visto que esse valor é capaz de identificar a instabilidade sem grandes influências nos deslocamentos das estruturas avaliadas.

Para validar os três cenários, as curvas de resistência apresentadas por McGuire *et al.* (2014), que mostram a relação da carga crítica com o índice de esbeltez da coluna, são reproduzidas com as rotinas desenvolvidas aqui. A Figura 29 mostra as curvas obtidas pelas rotinas, as quais são bastante semelhantes às apresentadas pela referência. Observa-se que a maior diferença entre os modelos avaliados ocorre quando a esbeltez encontra-se entre 25 e 125. Para esbeltez menor do que 25, a resistência é aproximadamente o valor da tensão de escoamento. Para esbeltez maior do que 125, a flambagem é caracterizada

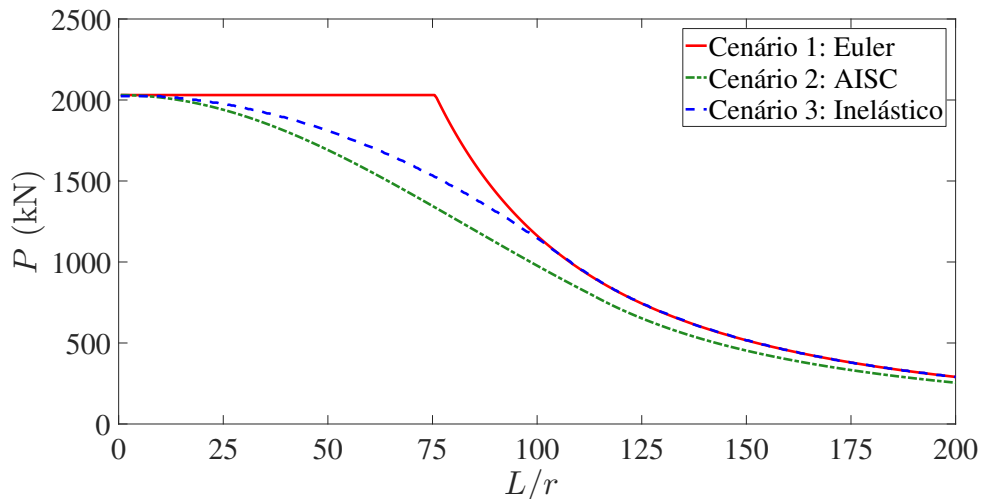
Figura 28: Convergência da carga crítica inelástica.



Fonte: Elaborada pela autora.

como elástica. Além disso, a curva do cenário 3 é bastante similar à do cenário 2 em todo o trecho de esbelteza avaliado, sendo a maior diferença entre as cargas críticas avaliadas igual a 15%. O cenário 1 obteve cargas críticas até 33% e 52% maiores do que as obtidas nos cenários 3 e 2, respectivamente.

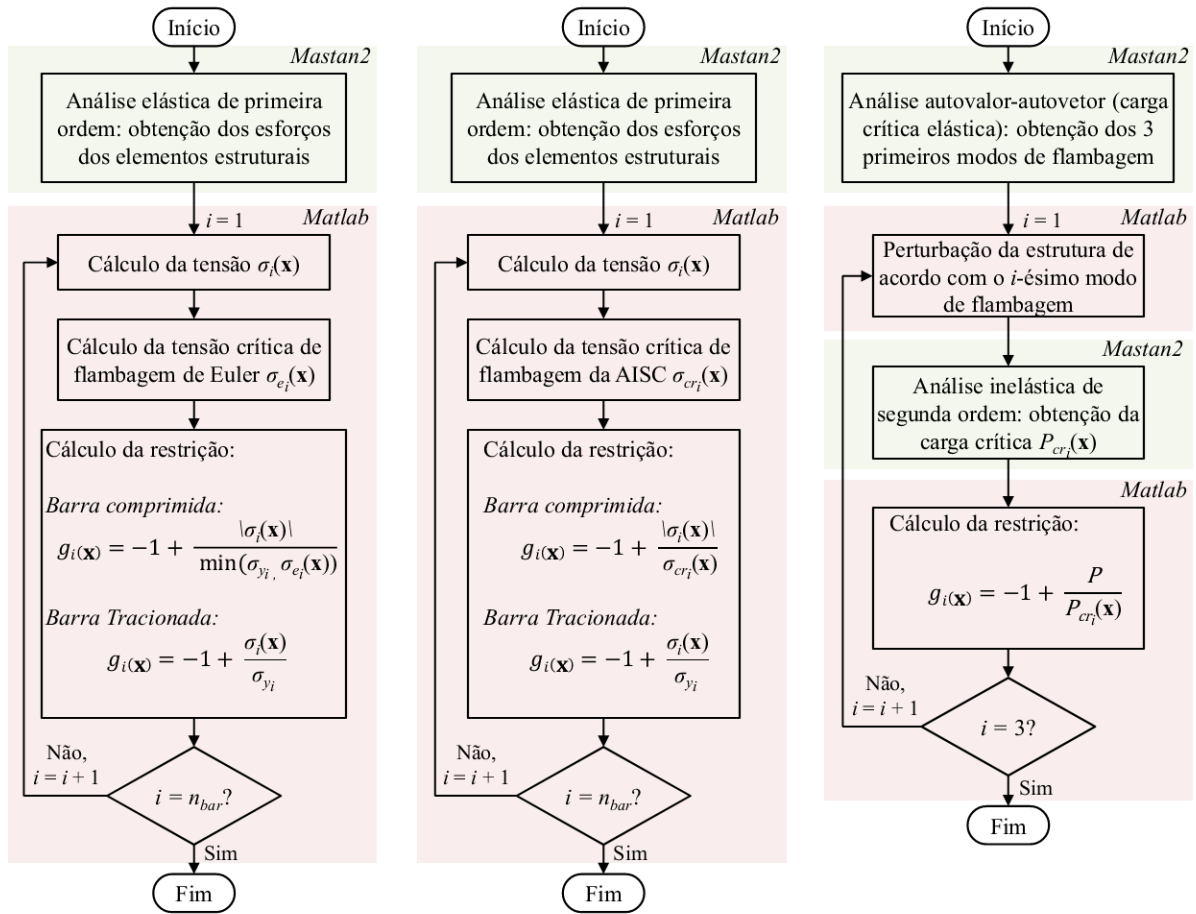
Figura 29: Relação entre a carga crítica e o índice de esbelteza da coluna.



Fonte: Elaborada pela autora.

A Figura 30 apresenta o fluxograma das principais etapas de cálculo das restrições dos três cenários de modelos de flambagem. Apesar de toda a rotina ser executada no *software* MATLAB, o fluxograma indica quais partes do processo de verificação das restrições são executadas pelos códigos do *software* MASTAN2 e quais partes do processo são executadas pelos códigos em MATLAB desenvolvidos para a presente tese.

Figura 30: Fluxograma dos cenários de restrições dos modelos de flambagem.



(a) Cenário 1: Euler.

(b) Cenário 2: AISC.

(c) Cenário 3: Inelástico.

Fonte: Elaborada pela autora.

4 EXEMPLOS NUMÉRICOS

Este capítulo é baseado nos artigos:

JULIANI, M. A.; MILANEZ, M. O.; GOMES, W. J. S. Structural optimization of trusses under elastic and inelastic buckling constraints. *XL Ibero-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering (CILAMCE)*, 2019.

JULIANI, M. A.; GOMES, W. J. S. Structural optimization of trusses considering different buckling models. *XLII Ibero-Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering and III Pan-American Congress on Computational Mechanics (CILAMCE-PANACM)*, 2021.

Neste capítulo, a metodologia proposta é aplicada em cinco exemplos numéricos, com o intuito de investigar as diferenças entre as configurações ótimas das estruturas para cada cenário avaliado. Os exemplos apresentados são baseados em problemas da literatura. Alguns dos problemas avaliados foram apresentados em capítulos anteriores deste trabalho. Entretanto, para melhor compreensão e continuidade do texto, seus dados serão apresentados brevemente neste capítulo.

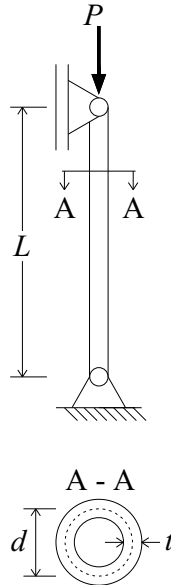
Para o método de otimização, os dados de entrada utilizados em todos os exemplos são: $n_{samp} = 1 \cdot 10^6$; $p = 10n$; $n_s = \min([2n \ 20])$; $it_{stall} = 4$, $f_{tol} = 0,1$, $it_{min} = 6$ e $it_{max} = 12$ para o primeiro critério de parada, relacionado à busca local e global; $it_{stall} = 10n$, $f_{tol} = 0,001$, $it_{min} = 20n$ e $it_{max} = 40n$ para o segundo critério de parada, relacionado à etapa de refinamento. Cada exemplo é executado 10 vezes, considerando cadeias de números pseudoaleatórios distintas, relacionadas a diferentes sementes do gerador de números pseudoaleatórios. O resultado ótimo é definido como sendo o projeto viável encontrado dentre as execuções que apresenta o menor valor de função objetivo. Além do resultado ótimo, também é apresentado o resultado médio (Média) e o desvio padrão (Std) da função objetivo, número médio de avaliações das restrições (FE) e tempo computacional médio de execução do problema em minutos (Tempo).

4.1 Exemplo I: Coluna tubular

O primeiro problema, uma coluna bi-articulada, é um exemplo introdutório estudado para analisar o comportamento dos diferentes modelos de flambagem. A estrutura otimizada corresponde à coluna analisada no capítulo 3, apresentada por [McGuire et al. \(2014\)](#), cujos dados de entrada são: $L = 120$ in (304,8000 cm), $E = 29000$ ksi (199,9550 GPa) e $\sigma_y = 50$

ksi (344,7500 MPa). A função objetivo corresponde à área da seção transversal da coluna, a qual é definida aqui como tubular. As variáveis de projeto são o diâmetro médio d e a espessura t da seção transversal. Os limites inferiores e superiores das variáveis são $2 \text{ in (5,0800 cm)} \leq d \leq 10 \text{ in (25,4000 cm)}$ e $0,2 \text{ in (0,5080 cm)} \leq t \leq 0,6 \text{ in (1,5240 cm)}$. A Figura 31 ilustra a estrutura do problema, que está sob uma carga $P = 100 \text{ kips (444,8000 kN)}$.

Figura 31: Coluna tubular: Exemplo I.



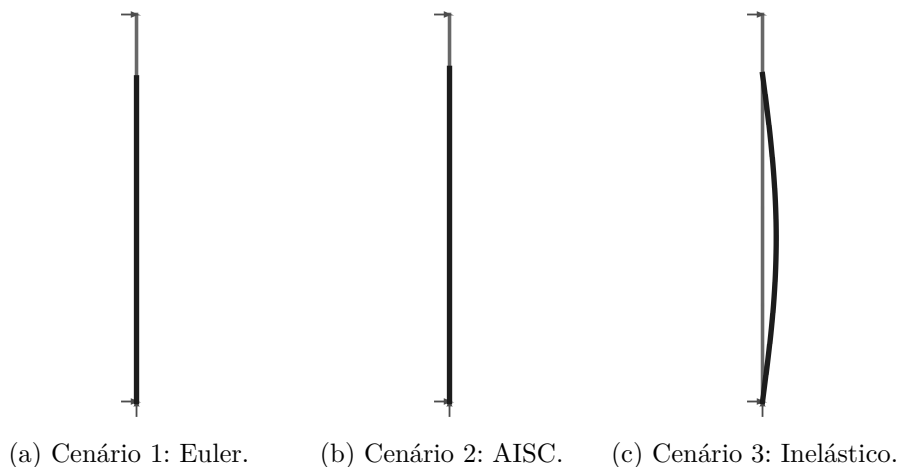
Fonte: Elaborada pela autora.

A Tabela 9 apresenta os resultados encontrados nas otimizações. A Figura 32 ilustra a configuração deformada das estruturas ótimas, em que os deslocamentos estão ampliados em 120 vezes em relação às dimensões das barras ($E_{sc} = 120$). Como complemento para a análise, a Tabela 10 mostra se os projetos ótimos de cada cenário satisfazem ou não as restrições verdadeiras dos demais cenários avaliados nesse exemplo, onde \mathbf{x}_{C_1} , \mathbf{x}_{C_2} e \mathbf{x}_{C_3} representam os projetos ótimos dos cenários 1, 2 e 3, respectivamente.

Tabela 9: Projeto ótimo e resultados estatísticos: Exemplo I.

Projeto	Cenário 1: Euler	Cenário 2: AISC	Cenário 3: Inelástico
d (cm)	10,1546	11,8767	10,9932
t (cm)	0,5080	0,5080	0,5080
f (cm ²)	16,2061	18,9543	17,5443
Média	16,3445	18,9745	17,7072
Std	0,4369	0,0430	0,3366
FE	39	39	57
Tempo (min)	0,98	0,77	1,60

Fonte: Elaborada pela autora.

Figura 32: Deformadas das estruturas ótimas ($E_{sc} = 120$): Exemplo I.

Fonte: Elaborada pela autora.

Tabela 10: Valor das restrições dos cenários avaliados - $\max(\mathbf{g})$ - para as estruturas ótimas: Exemplo I.

Projeto	Cenário 1: Euler	Cenário 2: AISC	Cenário 3: Inelástico
\mathbf{x}_{C_1}	$-2 \cdot 10^{-6}$	0,3469	0,1628
\mathbf{x}_{C_2}	-0,3192	$-2 \cdot 10^{-6}$	-0,0909
\mathbf{x}_{C_3}	-0,2115	0,1520	0

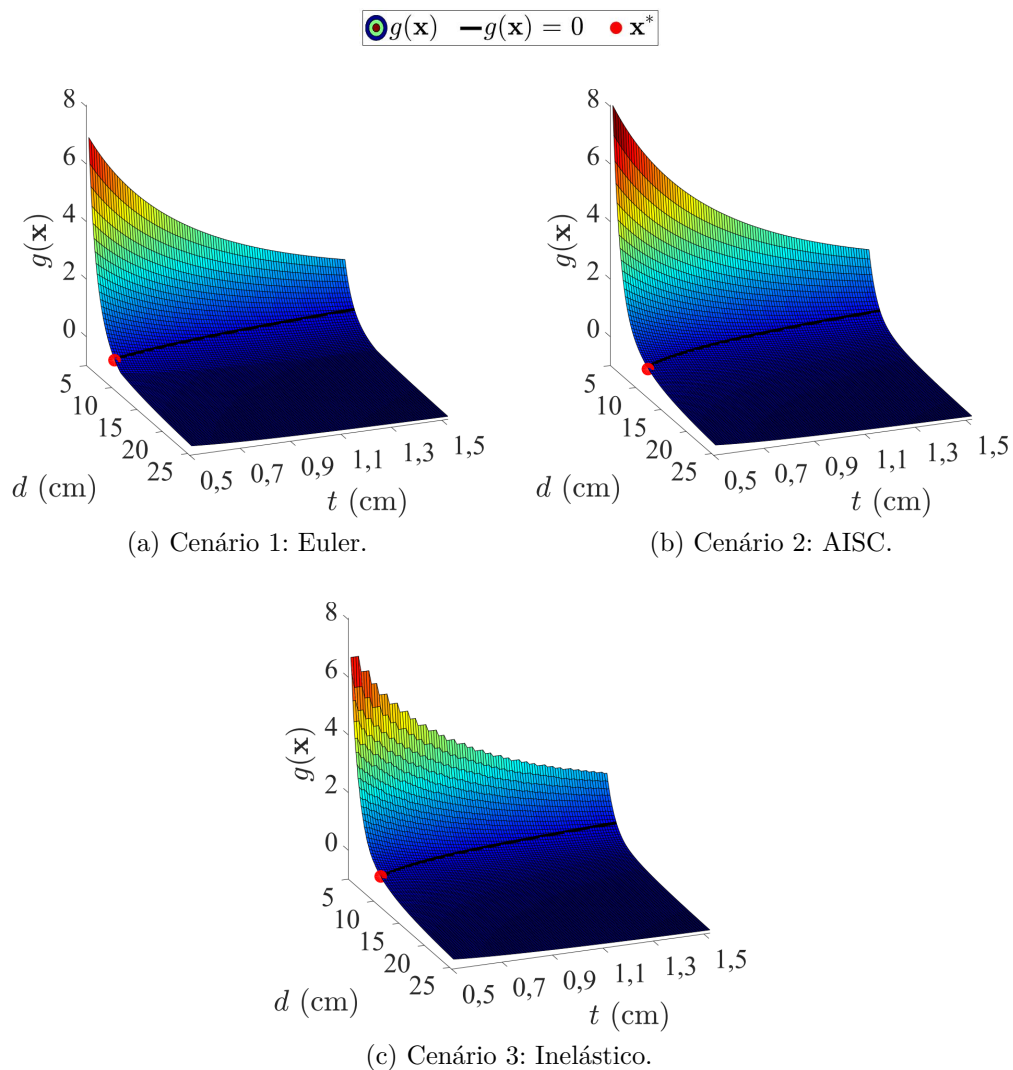
Fonte: Elaborada pela autora.

A estrutura ótima para as restrições de Euler é, respectivamente, 14,50% e 7,63% mais barata do que a estrutura ótima para as restrições dos cenários 2 e 3. Já o resultado para as restrições da norma [AISC-360 \(2016\)](#) é 16,96% e 8,04% mais caro do que os resultados do cenário 1 e 3, respectivamente. Também, os projetos ótimos com valores de função objetivo maiores satisfazem as restrições dos cenários que apresentam projeto ótimo com menores valores de função objetivo, enquanto que o oposto não é válido.

Para as seções ótimas apresentadas, o índice de esbeltez dos projetos dos cenários 1, 2 e 3 são, respectivamente, 85, 73 e 78. Esses valores de esbeltez correspondem à região do gráfico da Figura 29 onde os modelos de flambagem são bastante distintos entre si. Além disso, de acordo com o critério de verificação da [AISC-360 \(2016\)](#), as flambagens das colunas ótimas de todos os cenários são caracterizadas como inelásticas. Portanto, dado que para este exemplo o cenário 1 é o menos conservador, conforme comportamento ilustrado no gráfico citado acima, pode-se dizer que a estrutura projetada para o cenário de carga crítica de Euler está subdimensionada para as ações atuantes.

A Figura 33 mostra a superfície das restrições ao longo do espaço de busca da otimização. Pode-se observar que o cenário 3 apresenta alguns degraus na superfície, os quais estão relacionados com os incrementos de carga da análise estrutural inelástica de segunda ordem: quanto mais incrementos são adicionados na análise, mais suaves são os degraus da superfície; no entanto, o esforço computacional também aumenta. Este fato revela um desafio para a otimização de problemas que envolvem esse tipo de análise estrutural, pois a não suavidade da superfície dificulta a resolução de problemas de otimização. Esse desafio pode ser ainda maior no campo de otimização baseada em metamodelos, dado que os degraus podem dificultar a aproximação do metamodelo em relação a superfície verdadeira, prejudicando a precisão do metamodelo. Portanto, é necessária atenção especial quanto ao número de incrementos de carga requeridos na solução deste tipo de problema.

Figura 33: Superfície das restrições para os modelos de flambagem avaliados: Exemplo I.

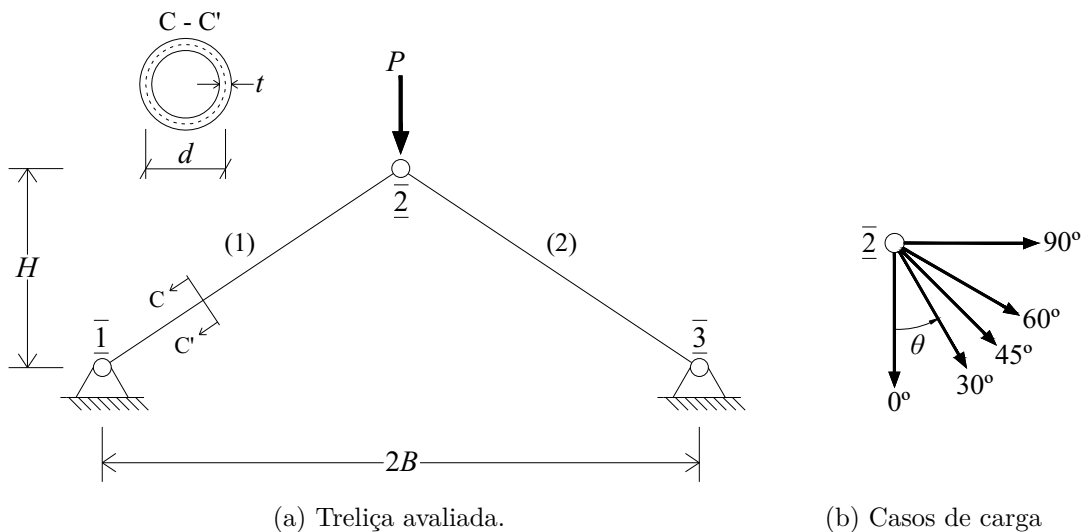


Fonte: Elaborada pela autora.

4.2 Exemplo II: Treliça de 2 barras

O segundo exemplo é uma treliça plana de duas barras (Figura 34a), apresentada em Fox (1973) e estudada por Beck & Gomes (2012) no contexto de otimização considerando incertezas. Nesta tese, o problema é avaliado para investigar o comportamento dos três modelos de flambagem em 5 casos de carregamento distintos, associados a 5 ângulos θ distintos de direção da carga aplicada P , conforme mostra a Figura 34b. A função objetivo corresponde ao volume da treliça e as variáveis de projeto são a altura H , os diâmetros médios d_1 e d_2 e as espessuras t_1 e t_2 da barra 1 e da barra 2, respectivamente, ou seja, $\mathbf{x} = (H, d_1, t_1, d_2, t_2)$. Desse modo, o problema de otimização é classificado como dimensional e de forma. Os dados de entrada da estrutura são: $P = 674$ kN; $B = 3$ m; $E = 30$ GPa; $\sigma_y = 105$ MPa. Além das restrições de cada cenário, também é imposta uma limitação à relação d/t de cada barra: essa relação deve ser maior do que 2, para que a espessura não seja maior do que a metade do diâmetro, e menor do que 10, para tentar evitar instabilidade local das paredes das barras. Os limites inferiores e superiores das variáveis são $150 \text{ cm} \leq H \leq 200 \text{ cm}$, $10 \text{ cm} \leq d_1, d_2 \leq 20 \text{ cm}$ e $1 \text{ cm} \leq t_1, t_2 \leq 2 \text{ cm}$. Devido à ordem de grandeza de $f(\mathbf{x})$, são adotados $f_{tol} = 0,001$ e $f_{tol} = 0,00001$ para o primeiro e para o segundo critério de parada, respectivamente.

Figura 34: Treliça de 2 barras: Exemplo II.



Fonte: Elaborada pela autora.

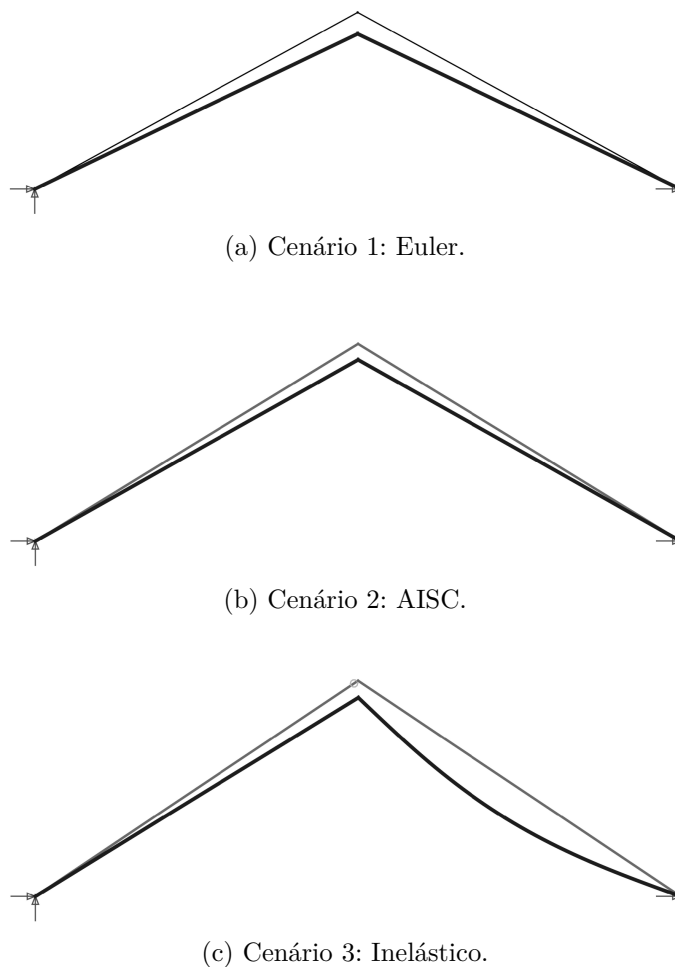
Os resultados encontrados nas otimizações são apresentados na Tabela 11, e a Figura 35 ilustra a deformada dos projetos ótimos para $\theta = 0^\circ$. A Tabela 12 mostra o comportamento dos projetos ótimos de cada cenário, para todos os valores de ângulos θ avaliados, frente às restrições dos demais cenários estudados nesse exemplo.

Tabela 11: Projeto ótimo e resultados estatísticos: Exemplo II.

Cenário 1: Euler					
Projeto	$\theta = 0^\circ$	$\theta = 30^\circ$	$\theta = 45^\circ$	$\theta = 60^\circ$	$\theta = 90^\circ$
H (cm)	164,2269	160,6461	150,0000	150,0000	150,0065
d_1 (cm)	16,2876	14,3290	12,6255	10,0000	10,0009
t_1 (cm)	1,6327	1,4451	1,2703	1,0000	1,1452
d_2 (cm)	16,2791	16,7760	16,6838	16,0823	13,7817
t_2 (cm)	1,6294	1,6923	1,6767	1,6209	1,3829
f (m ³)	0,0571	0,0525	0,0464	0,0380	0,0322
Média	0,0576	0,0532	0,0472	0,0383	0,0324
Std	0,0004	0,0006	0,0009	0,0003	0,0003
FE	235	255	287	271	290
Tempo (min)	3,23	3,30	3,57	2,86	2,52
Cenário 2: AISC					
Projeto	$\theta = 0^\circ$	$\theta = 30^\circ$	$\theta = 45^\circ$	$\theta = 60^\circ$	$\theta = 90^\circ$
H (cm)	183,3634	186,1767	185,8004	150,0368	150,0000
d_1 (cm)	17,5758	14,5957	11,9303	10,0010	10,0000
t_1 (cm)	1,7886	1,4763	1,2372	1,0014	1,1487
d_2 (cm)	17,6325	18,5992	18,4345	17,8886	14,5925
t_2 (cm)	1,7747	1,8739	1,8573	1,8043	1,4613
f (m ³)	0,0693	0,0626	0,0543	0,0446	0,0346
Média	0,0697	0,0631	0,0556	0,0448	0,0350
Std	0,0005	0,0004	0,0013	0,0003	0,0003
FE	273	287	303	296	289
Tempo (min)	3,51	3,63	3,71	3,24	2,62
Cenário 3: Inelástico					
Projeto	$\theta = 0^\circ$	$\theta = 30^\circ$	$\theta = 45^\circ$	$\theta = 60^\circ$	$\theta = 90^\circ$
H (cm)	199,6202	185,8163	194,2449	151,7517	150,0000
d_1 (cm)	16,7005	14,0891	11,4320	10,0000	10,0000
t_1 (cm)	1,6770	1,4103	1,1654	1,0000	1,1505
d_2 (cm)	16,4987	17,7082	17,5616	17,0598	13,8857
t_2 (cm)	1,6907	1,8020	1,7788	1,7201	1,3960
f (m ³)	0,0633	0,0574	0,0500	0,0416	0,0325
Média	0,0640	0,0582	0,0510	0,0422	0,0329
Std	0,0006	0,0007	0,0015	0,0009	0,0004
FE	233	265	307	269	300
Tempo (min)	6,49	6,95	8,38	7,35	8,15

Fonte: Elaborada pela autora.

Assim como no primeiro exemplo numérico, as restrições da norma [AISC-360 \(2016\)](#) levam à estrutura mais cara dentre os cenários avaliados, e as restrições de Euler resultam na estrutura mais barata. Além disso, a estrutura ótima para o caso da norma [AISC-360 \(2016\)](#) também atende às restrições dos demais cenários, enquanto que o projeto ótimo para o modelo inelástico atende as restrições de Euler, mas não é considerado seguro segundo os critérios da [AISC-360 \(2016\)](#). Por outro lado, o projeto ótimo para o cenário

Figura 35: Deformadas das estruturas ótimas para $\theta = 0^\circ$ ($E_{sc} = 10$): Exemplo II.

Fonte: Elaborada pela autora.

de Euler não atende às restrições de nenhum dos outros cenários avaliados.

Na Figura 36 observa-se que, conforme esperado, a diferença entre o volume das estruturas ótimas para cada cenário é maior para $\theta = 0^\circ$, onde as duas barras estão igualmente comprimidas, e diminui para valores crescentes de θ até $\theta = 90^\circ$, onde a barra 1 está sob tração. Em média, a estrutura ótima para as restrições de Euler é, respectivamente, 14,00% e 7,02% mais barata do que a estrutura ótima para as restrições dos cenários 2 e 3. Já o resultado para as restrições da norma [AISC-360 \(2016\)](#) é, respectivamente, 16,49% e 8,16% mais caro do que os resultados dos cenários 1 e 3.

Destaca-se que a relação $d/t \approx 10$ ocorre para todas as barras comprimidas nos três cenários analisados. Isso indica, conforme esperado, que é mais vantajoso para elementos sujeitos a flambagem ter um valor alto para o momento de inércia. Para barras tracionadas, essa relação não é observada na maioria dos casos, pois a inércia não influencia no resultado. Essa diferença na relação d/t para barras comprimidas e tracionadas pode ser claramente

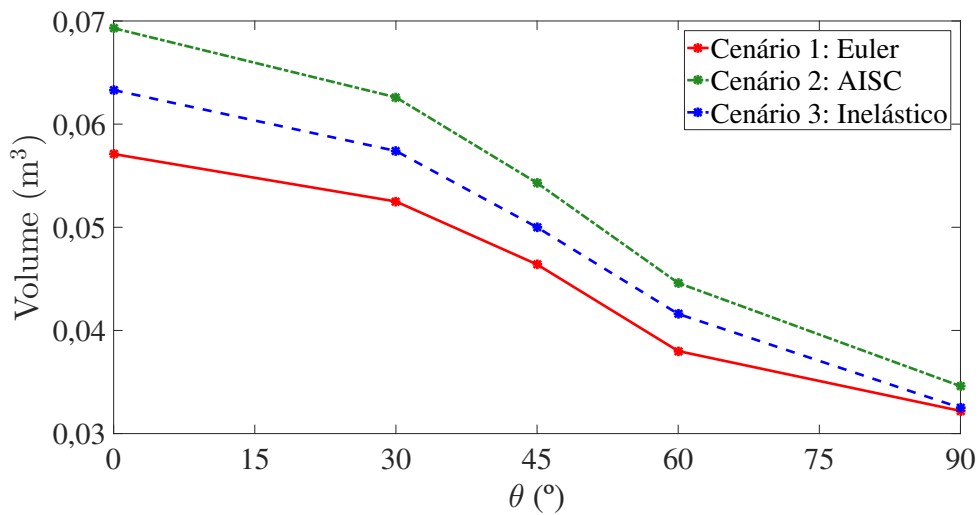
vista em $\theta = 90^\circ$ para todos os cenários, onde $d_1/t_1 \approx 8,7$ e $d_2/t_2 \approx 10,0$.

Tabela 12: Valor das restrições dos cenários avaliados - $\max(\mathbf{g})$ - para as estruturas ótimas: Exemplo II.

Projeto	Cenário 1: Euler	Cenário 2: AISC	Cenário 3: Inelástico	
$\theta = 0^\circ$	\mathbf{x}_{C_1}	-0,0009	0,3477	0,1761
	\mathbf{x}_{C_2}	-0,0065	-0,0010	-0,0065
	\mathbf{x}_{C_3}	-0,0041	0,1580	0,0000
$\theta = 30^\circ$	\mathbf{x}_{C_1}	-0,0012	0,4018	0,2195
	\mathbf{x}_{C_2}	-0,0075	-0,0012	-0,0075
	\mathbf{x}_{C_3}	-0,0010	0,1400	-0,0010
$\theta = 45^\circ$	\mathbf{x}_{C_1}	-0,0018	0,3930	0,2195
	\mathbf{x}_{C_2}	-0,0075	-0,0018	-0,0075
	\mathbf{x}_{C_3}	-0,0127	0,1405	-0,0094
$\theta = 60^\circ$	\mathbf{x}_{C_1}	0,0000	0,3633	0,1765
	\mathbf{x}_{C_2}	-0,0013	-0,0013	-0,0013
	\mathbf{x}_{C_3}	0,0000	0,1422	0,0000
$\theta = 90^\circ$	\mathbf{x}_{C_1}	-0,0027	0,2025	0,0285
	\mathbf{x}_{C_2}	-0,0014	-0,0014	0,0000
	\mathbf{x}_{C_3}	-0,0053	0,1699	0,0000

Fonte: Elaborada pela autora.

Figura 36: Relação entre o volume ótimo e o ângulo de aplicação da carga: Exemplo II.

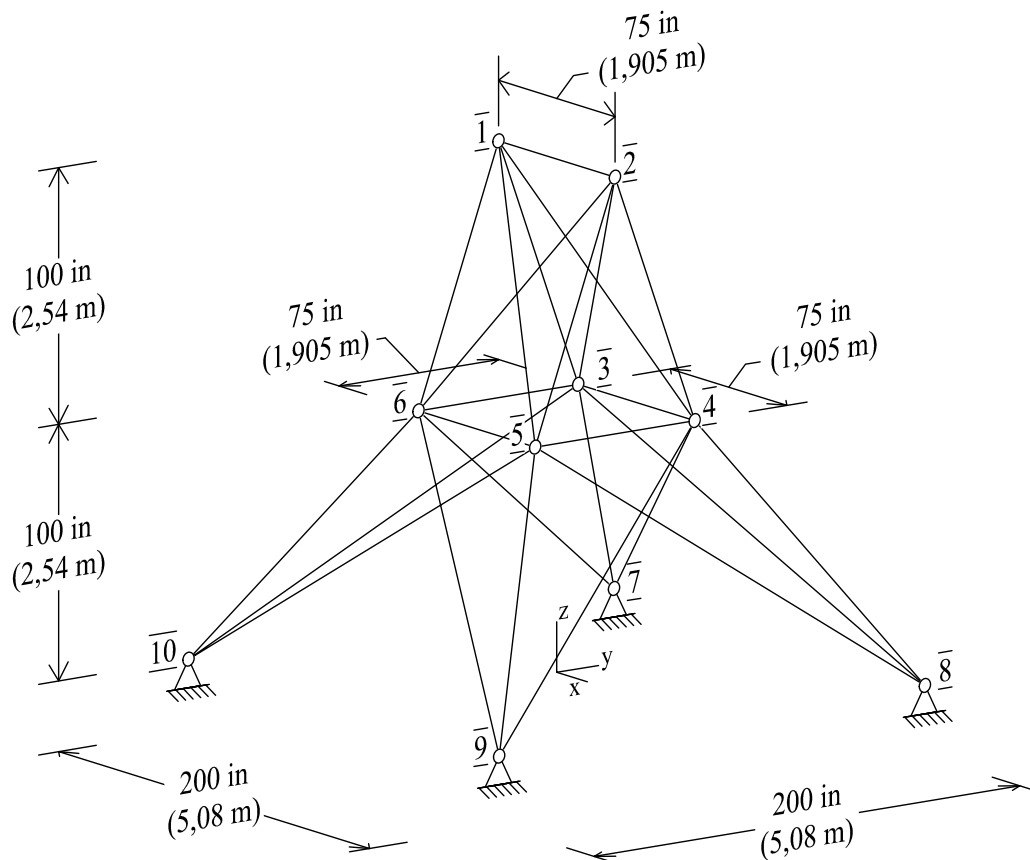


Fonte: Elaborada pela autora.

4.3 Exemplo III: Torre tridimensional

A estrutura do terceiro exemplo corresponde a uma torre tridimensional, ilustrada na Figura 37, avaliada por Rajeev & Krishnamoorthy (1992), Schutte & Groenwold (2003), Lee & Geem (2004), Kaveh & Shojaee (2007), Camp (2007), Kaveh *et al.* (2008), Kaveh & Talatahari (2008) e Kaveh & Talatahari (2009). As barras da estrutura são separadas em 8 grupos, onde cada grupo possui um material com suas respectivas tensões admissíveis. A Tabela 13 mostra a separação dos grupos e seus limites de tensões. Além das restrições de tensões, os deslocamentos de todos os nós e em todas as direções também são limitados a no máximo $\pm 0,35$ in (0,8890 cm). A função objetivo corresponde à massa da estrutura e as variáveis de projeto são as áreas das seções transversais das barras de cada grupo, cujos limites inferior e superior são $0,1 \text{ in}^2$ ($0,6452 \text{ cm}^2$) $\leq A_i \leq 3,4 \text{ in}^2$ ($21,9354 \text{ cm}^2$), com $i = 1, \dots, 8$. Os demais parâmetros dos materiais são $E = 10000 \text{ ksi}$ ($68,9500 \text{ GPa}$) e $\rho = 0,1 \text{ lb/in}^3$ ($2770,4780 \text{ kg/m}^3$). A Tabela 14 apresenta os dois casos de carregamentos avaliados.

Figura 37: Torre tridimensional: Exemplo III.



Fonte: Elaborada pela autora.

Tabela 13: Grupos de barras: Exemplo III.

Grupo	Conectividade dos nós dos elementos	Tensões admissíveis (ksi, MPa)	
		Compressão	Tração
1	1-2	35,0920 (241,9593)	40 (275,8000)
2	1-4, 2-3, 1-5, 2-6	11,5900 (79,9130)	40 (275,8000)
3	2-4, 2-5, 1-3, 1-6	17,3050 (119,3180)	40 (275,8000)
4	3-6, 4-5	35,0920 (241,9593)	40 (275,8000)
5	3-4, 5-6	35,0920 (241,9593)	40 (275,8000)
6	3-10, 6-7, 4-9, 5-8	6,7590 (46,6033)	40 (275,8000)
7	4-7, 3-8, 5-10, 6-9	6,9590 (47,9823)	40 (275,8000)
8	6-10, 3-7, 4-8, 5-9	11,0820 (76,4104)	40 (275,8000)

Fonte: Elaborada pela autora.

Tabela 14: Casos de carregamento: Exemplo III.

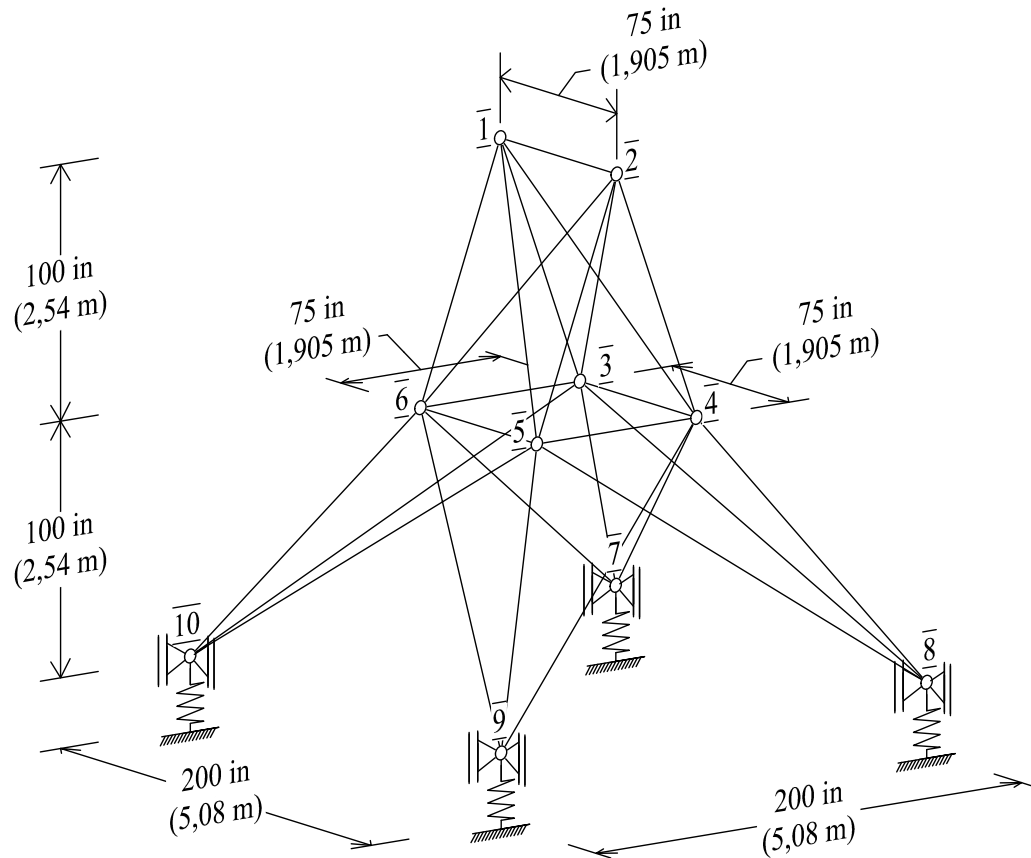
Caso	Nó	Força (kips, kN)		
		P_x	P_y	P_z
1	1	-	20 (88,9600)	-5 (-22,2400)
	2	-	-20 (-88,9600)	-5 (-22,2400)
	3	-	-	-
	6	-	-	-
2	1	1 (4,4480)	10 (44,4800)	-5 (-22,2400)
	2	-	10 (44,4800)	-5 (-22,2400)
	3	0,5 (2,2240)	-	-
	6	0,5 (2,2240)	-	-

Fonte: Elaborada pela autora.

Nesta tese, esse exemplo é estudado para avaliar o efeito das condições de contorno essenciais, onde os apoios da base são modelados como apoios elásticos, conforme ilustra a Figura 38. O problema de otimização é executado de dez maneiras distintas, onde em cada uma delas é considerado um valor de rigidez diferente para as molas.

Os resultados da otimização são apresentados na Tabela 15. Conforme esperado, o aumento da rigidez dos apoios faz com que a massa ótima da estrutura diminua. A curva da Figura 39 mostra que o aumento da rigidez de 30 MN/m para 400 MN/m reduz em 40,76% o custo da estrutura em relação ao projeto ótimo para $k = 30$ MN/m. Para valores de rigidez maiores do que 400 MN/m, o custo ótimo variou no máximo 1,72% em relação ao resultado da otimização para a estrutura com o apoio rígido. Portanto, pode-se dizer que para k maior do que 400 MN/m, o apoio da estrutura comporta-se como rígido. As curvas ilustradas na Figura 40 são obtidas através da função de penalização dada pela Equação 3.12, utilizando $\alpha_{min} = 10\%$ e valores de α_{max} entre 10% e 50%, para representar possíveis diferentes situações de influência da rigidez dos apoios no custo. Nota-se que a rigidez dos apoios que resulta no menor custo estrutural é altamente dependente do

Figura 38: Torre tridimensional com apoios elásticos: Exemplo III.



Fonte: Elaborada pela autora.

custo atribuído à fundação. Sendo assim, a escolha de uma fundação rígida pode levar a superestruturas com custos menores do que os obtidos com o emprego de fundações mais flexíveis. Entretanto, quando avaliado o custo global do projeto, a escolha de uma fundação mais flexível pode levar à uma solução mais econômica. A Figura 41 mostra a configuração ótima da estrutura e as tensões normais atuantes nos elementos, para três cenários avaliados. Percebe-se que o aumento de rigidez do apoio fez com que as tensões atuantes de tração e compressão também aumentassem. Por fim, as estruturas ótimas para os valores de k avaliados também atendem aos demais cenários com valores de rigidez menores, conforme mostra a Tabela 16.

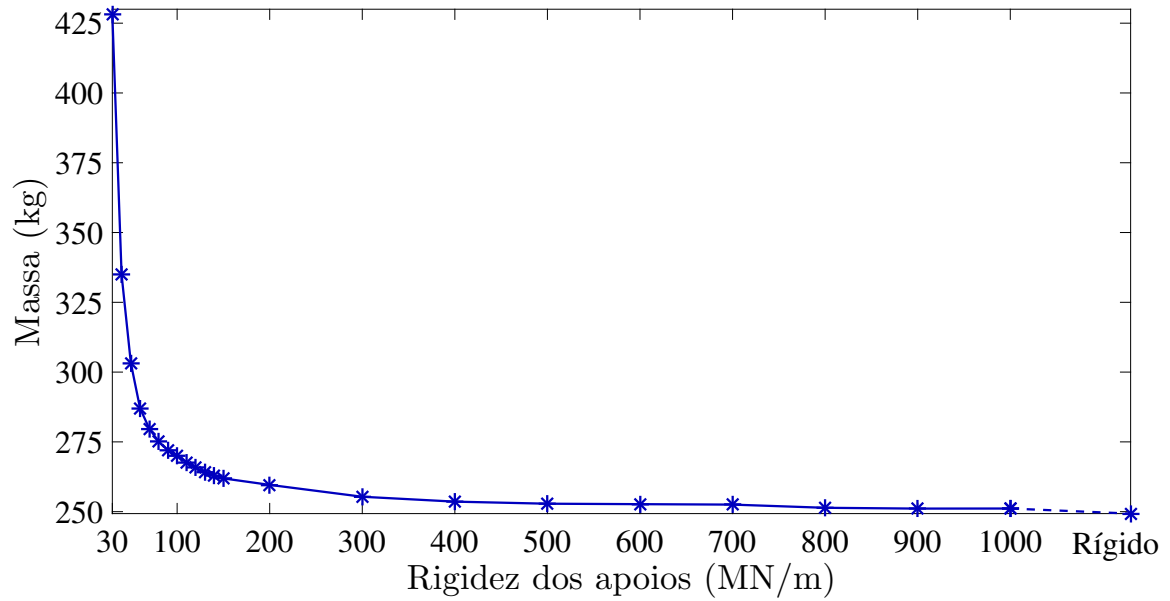
Tabela 15: Projeto ótimo e resultados estatísticos: Exemplo III.

Projeto	Cenário 1: k = 30		Cenário 2: k = 50		Cenário 3: k = 70		Cenário 4: k = 90		Cenário 5: k = 110		Cenário 6: k = 130		Cenário 7: k = 150		Cenário 8: k = 500		Cenário 9: k = 1000		Cenário 10: Rígido		
	A ₁ (cm ²)	0,6452	0,6476	0,6453	0,6456	0,6459	0,6460	0,6452	0,6471	0,6452	0,6452	0,6452	0,6452	0,6452	0,6452	0,6452	0,6452	0,6452	0,6452	0,6452	0,6452
A ₂ (cm ²)	21,9354	11,2681	11,7561	12,7520	14,0117	11,8553	12,4438	13,1168	12,4438	13,1168	13,1168	13,1168	13,1168	13,1168	13,1168	13,1168	13,1168	13,1168	13,1168	13,1168	12,6302
A ₃ (cm ²)	21,9354	21,9350	21,6214	21,1351	19,0748	21,3608	21,0673	18,9790	21,0673	18,9790	18,9790	18,9790	18,9790	18,9790	18,9790	18,9790	18,9790	18,9790	18,9790	18,9790	19,1956
A ₄ (cm ²)	0,6452	0,6462	0,6457	0,6465	0,6506	0,6454	0,6458	0,6491	0,6458	0,6458	0,6452	0,6452	0,6452	0,6452	0,6452	0,6452	0,6452	0,6452	0,6452	0,6452	0,6498
A ₅ (cm ²)	4,6806	0,8695	0,6472	0,6459	0,6688	0,6459	0,6459	0,6459	0,6688	0,6688	0,6459	0,6459	0,6459	0,6459	0,6459	0,6452	0,6500	0,6500	0,6500	0,6500	0,6622
A ₆ (cm ²)	16,0224	8,3965	5,6604	5,1313	4,5998	4,8097	4,8679	4,8406	4,5998	4,8679	4,8097	4,8679	4,8406	4,8679	4,8406	4,3861	4,3861	4,3861	4,3861	4,3861	4,8347
A ₇ (cm ²)	21,9354	13,5362	11,6897	10,8583	10,7043	11,3514	10,8701	10,9306	10,7043	10,8701	10,8701	10,8701	10,9306	10,8701	10,9306	11,0931	11,0931	11,0931	11,0931	11,0931	11,0683
A ₈ (cm ²)	21,9354	21,9352	21,7191	20,9112	21,1125	19,2706	18,9396	17,4914	21,1125	18,9396	19,2706	18,9396	17,4914	18,9396	17,4914	17,7809	17,7809	17,7809	17,7809	17,7809	16,6635
f (kg)	428,0508	303,2433	279,7001	271,9309	267,6581	264,0326	261,9132	252,8482	267,6581	261,9132	264,0326	261,9132	252,8482	261,9132	252,8482	251,1264	251,1264	251,1264	251,1264	251,1264	249,3052
Média	449,0724	315,8185	290,4845	279,4857	276,8060	266,0181	262,7433	269,1121	276,8060	262,7433	266,0181	262,7433	269,1121	262,7433	269,1121	253,9005	253,9005	253,9005	253,9005	253,9005	252,4192
Std	35,5239	15,3658	8,8077	9,1353	10,9020	1,6496	0,7410	29,7142	10,9020	0,7410	1,6496	0,7410	29,7142	0,7410	29,7142	2,4670	2,4670	2,4670	2,4670	2,4670	2,0311
FE	491	501	486	494	496	508	533	503	496	533	508	533	503	533	499	499	499	499	499	499	514
Tempo (min)	6,90	7,17	6,77	7,07	7,28	7,20	8,36	7,48	7,28	8,36	7,20	8,36	7,48	8,36	7,44	7,44	7,44	7,44	7,44	7,44	7,83

Obs: Rigidez dos apoios em MIN/m.

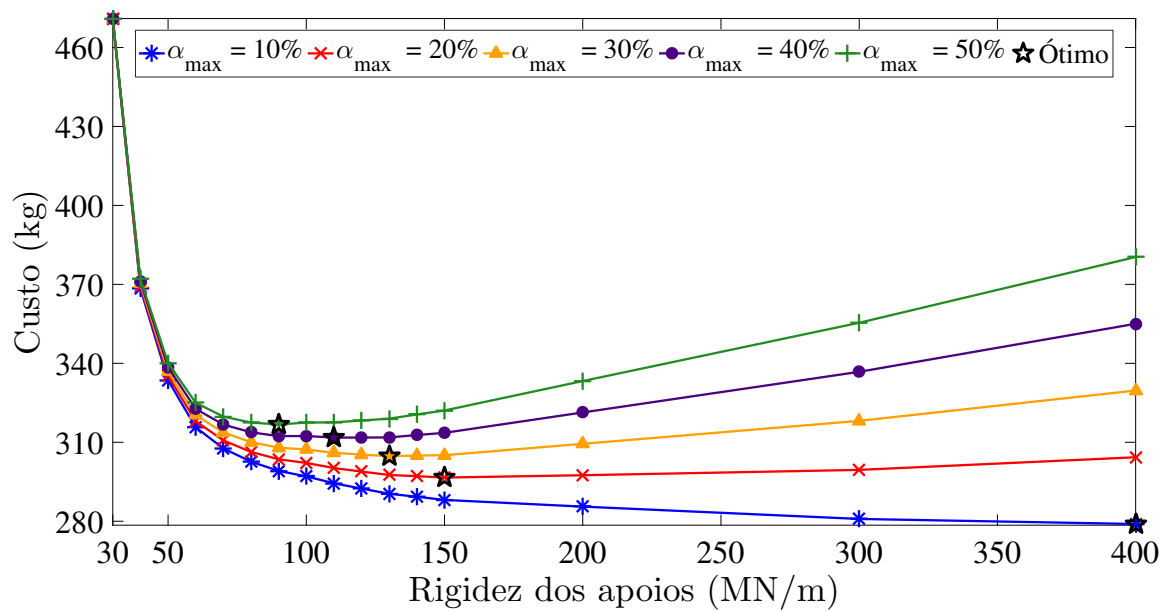
Fonte: Elaborada pela autora.

Figura 39: Relação entre a massa ótima e a rigidez dos apoios: Exemplo III.



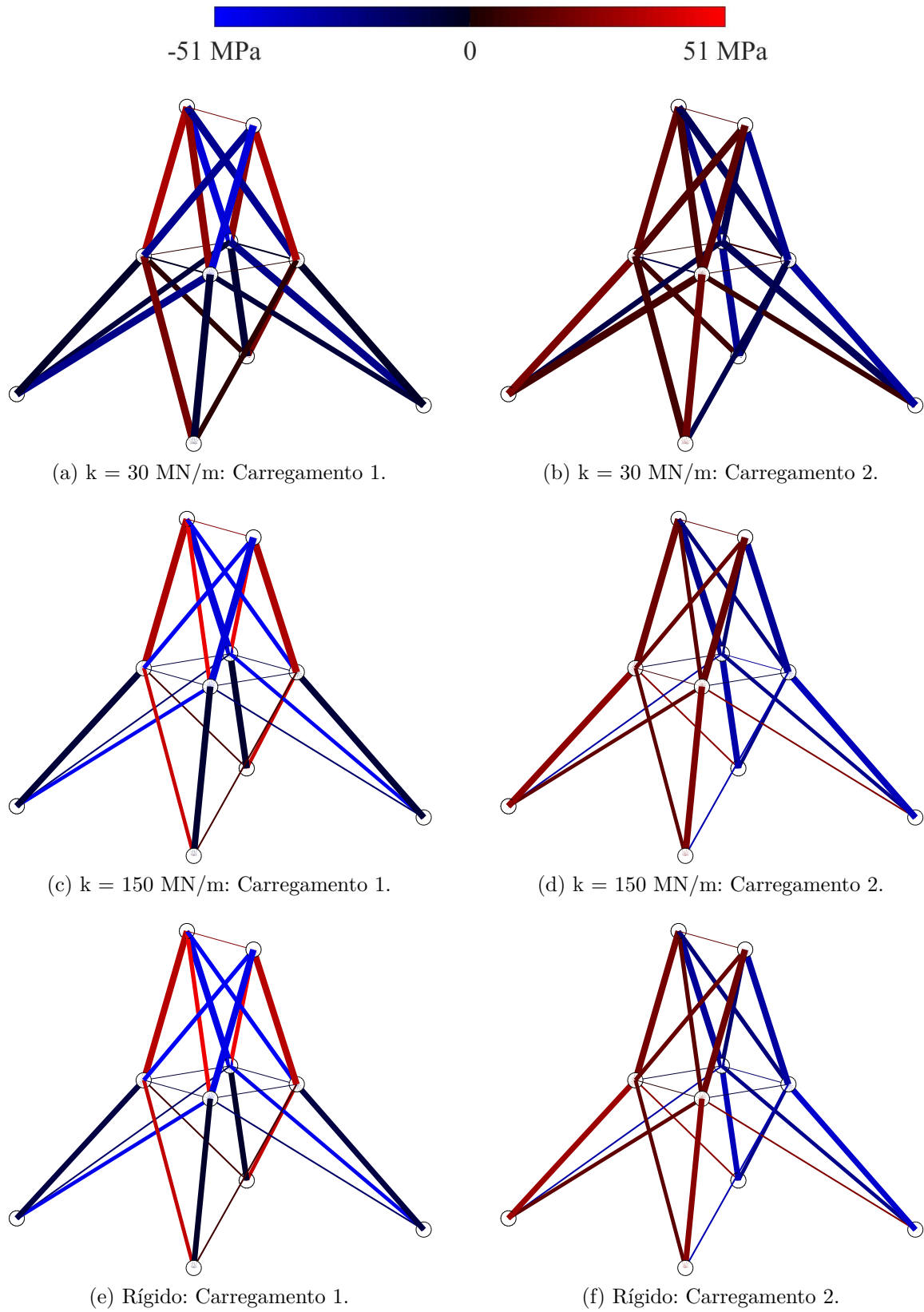
Fonte: Elaborada pela autora.

Figura 40: Relação entre o custo e a rigidez dos apoios: Exemplo III - condições de contorno essenciais.



Fonte: Elaborada pela autora.

Figura 41: Configurações ótimas e tensões normais nas barras: Exemplo III.



Fonte: Elaborada pela autora.

Tabela 16: Valor das restrições dos cenários avaliados - $\max(\mathbf{g})$ - para as estruturas ótimas: Exemplo III.

Projeto	Cenário 1:		Cenário 2:		Cenário 3:		Cenário 4:		Cenário 5:		Cenário 6:		Cenário 7:		Cenário 8:		Cenário 9:		Cenário 10:		
	k = 30	k = 50	k = 70	k = 90	k = 110	k = 130	k = 150	k = 150	k = 500	k = 1000	k = 1000	Rígido									
\mathbf{x}_{C_1}	-0,0000	-0,1334	-0,1906	-0,2224	-0,2426	-0,2566	-0,2669	-0,3136	-0,3236	-0,3336	-0,3336	-0,3336	-0,3336	-0,3336	-0,3336	-0,3336	-0,3336	-0,3336	-0,3336	-0,3336	-0,3336
\mathbf{x}_{C_2}	0,1334	-0,0000	-0,0439	-0,0494	-0,0529	-0,0554	-0,0573	-0,0659	-0,0678	-0,0697	-0,0697	-0,0697	-0,0697	-0,0697	-0,0697	-0,0697	-0,0697	-0,0697	-0,0697	-0,0697	-0,0697
\mathbf{x}_{C_3}	0,1903	0,0569	-0,0003	-0,0070	-0,0112	-0,0141	-0,0162	-0,0262	-0,0284	-0,0306	-0,0306	-0,0306	-0,0306	-0,0306	-0,0306	-0,0306	-0,0306	-0,0306	-0,0306	-0,0306	-0,0306
\mathbf{x}_{C_4}	0,2206	0,0872	0,0300	-0,0008	-0,0055	-0,0084	-0,0096	-0,0152	-0,0165	-0,0177	-0,0177	-0,0177	-0,0177	-0,0177	-0,0177	-0,0177	-0,0177	-0,0177	-0,0177	-0,0177	-0,0177
\mathbf{x}_{C_5}	0,2425	0,1090	0,0518	0,0201	-0,0001	-0,0039	-0,0067	-0,0197	-0,0226	-0,0250	-0,0250	-0,0250	-0,0250	-0,0250	-0,0250	-0,0250	-0,0250	-0,0250	-0,0250	-0,0250	-0,0250
\mathbf{x}_{C_6}	0,2564	0,1230	0,0658	0,0340	0,0138	-0,0002	-0,0033	-0,0138	-0,0161	-0,0184	-0,0184	-0,0184	-0,0184	-0,0184	-0,0184	-0,0184	-0,0184	-0,0184	-0,0184	-0,0184	-0,0184
\mathbf{x}_{C_7}	0,2658	0,1323	0,0752	0,0434	0,0232	0,0092	-0,0011	-0,0125	-0,0137	-0,0148	-0,0148	-0,0148	-0,0148	-0,0148	-0,0148	-0,0148	-0,0148	-0,0148	-0,0148	-0,0148	-0,0148
\mathbf{x}_{C_8}	0,3132	0,1797	0,1226	0,0908	0,0706	0,0566	0,0463	-0,0004	-0,0046	-0,0073	-0,0073	-0,0073	-0,0073	-0,0073	-0,0073	-0,0073	-0,0073	-0,0073	-0,0073	-0,0073	-0,0073
\mathbf{x}_{C_9}	0,3234	0,1900	0,1328	0,1010	0,0808	0,0668	0,0565	0,0098	-0,0002	-0,0049	-0,0049	-0,0049	-0,0049	-0,0049	-0,0049	-0,0049	-0,0049	-0,0049	-0,0049	-0,0049	-0,0049
$\mathbf{x}_{C_{10}}$	0,3331	0,1996	0,1424	0,1107	0,0905	0,0765	0,0662	0,0195	0,0095	-0,0005	-0,0005	-0,0005	-0,0005	-0,0005	-0,0005	-0,0005	-0,0005	-0,0005	-0,0005	-0,0005	-0,0005

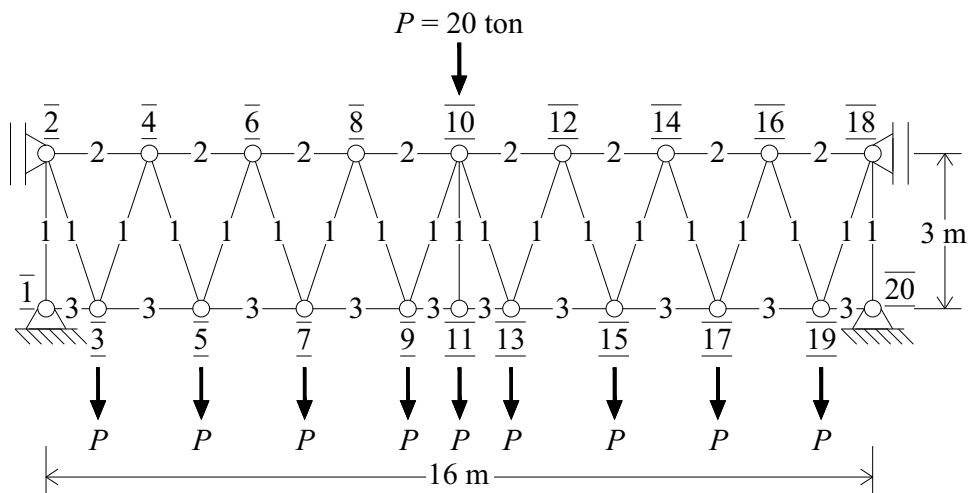
Obs: Rigidez dos apoios em MN/m.

Fonte: Elaborada pela autora.

4.4 Exemplo IV: Modelo da ponte do Forth

A estrutura abordada no quarto exemplo, apresentada previamente na seção 2.4.5, é inspirada em uma ponte britânica, conforme mostra a Figura 42. O problema se trata de uma treliça de 37 barras e 20 nós, simétrica em relação ao plano vertical médio. A função objetivo corresponde à massa da estrutura. As variáveis de projeto são as áreas das seções transversais das barras, categorizadas em 3 grupos, e as posições verticais dos nós em relação à configuração inicial, com respectivos espaços de busca iguais a $25 \text{ cm}^2 \leq A_i \leq 100 \text{ cm}^2$ e $-1,4 \text{ m} \leq y_j \leq 1,4 \text{ m}$, onde $i = 1, \dots, 3$ e $j = 2, \dots, 11$. O módulo de elasticidade e a massa específica do material são, respectivamente, 210 GPa e $7,8 \text{ ton/m}^3$, e o valor da tensão de escoamento é 250 MPa. A estrutura é otimizada considerando os três cenários de restrições de flambagem. Diferente do exemplo avaliado no capítulo 2, as seções das barras aqui são consideradas circulares vazadas ao invés de cheias.

Figura 42: Ponte do Forth: Exemplo IV.



(a) Estrutura analisada.



(b) Ponte do Forth.

Fonte: Elaborada pela autora.

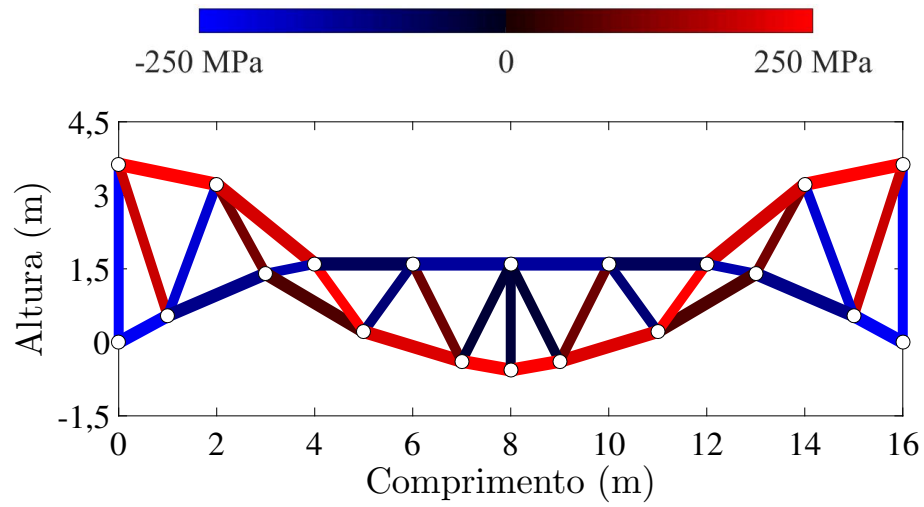
Os resultados da otimização, apresentados na Tabela 17, mostram que o cenário inelástico levou à estrutura mais leve dentre os casos analisados, de modo que a função objetivo é 15,05% e 19,01% menor do que os cenários 1 e 2, respectivamente. Por outro lado, o cenário baseado nas restrições da norma americana resultou na estrutura de maior massa. Através da Figura 43, pode-se observar que a configuração ótima do cenário 3 destoa significativamente dos cenários 1 e 2, que apresentaram configurações semelhantes à de um eixo da ponte utilizada como base para o problema. Analisando o comportamento da curva carga-deslocamento das estruturas ótimas dos três cenários, ilustrada na Figura 44, o cenário 3 apresenta deslocamento vertical no meio do vão aproximadamente 100 vezes maior do que os dos outros cenários, de modo que este resultado torna-se inconsistente com um projeto de uma estrutura real. Entende-se que a plastificação das barras permite uma melhor redistribuição dos esforços, de forma que quando esse fenômeno ocorre e não leva ao colapso da estrutura como um todo, o modelo estrutural é capaz de suportar mais carga. Na estrutura ótima do cenário 3, várias barras atingiram a tensão de escoamento sem ocorrer uma instabilidade que pudesse levar ao colapso da estrutura. No entanto, esta plastificação levou a grandes deslocamentos. Vale ressaltar que as estruturas ótimas para os dois primeiros cenários, quando aplicadas no modelo inelástico, não levam a grandes deslocamentos.

Tabela 17: Projeto ótimo e resultados estatísticos: Exemplo IV.

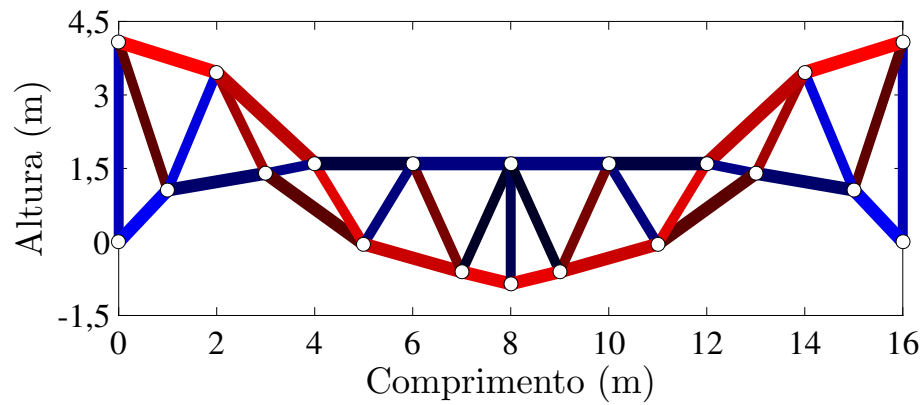
Projeto	Cenário 1: Euler	Cenário 2: AISC	Cenário 3: Inelástico
y_2, y_{18} (m)	0,6337	1,0831	-1,0765
y_3, y_{19} (m)	0,5422	1,0586	1,4000
y_4, y_{16} (m)	0,2235	0,4569	-1,4000
y_5, y_{17} (m)	1,4000	1,4000	0,4400
y_6, y_{14} (m)	-1,4000	-1,4000	-1,4000
y_7, y_{15} (m)	0,2185	-0,0443	0,1061
y_8, y_{12} (m)	-1,4000	-1,4000	-1,4000
y_9, y_{13} (m)	-0,3881	-0,6104	-0,0894
y_{10} (m)	-1,4000	-1,4000	0,8329
y_{11} (m)	-0,5650	-0,8543	-0,4094
A_1 (cm ²)	25,0000	25,0000	25,0000
A_2 (cm ²)	33,3942	33,8713	25,0000
A_3 (cm ²)	32,3990	32,4175	27,7639
Massa (kg)	1740,5315	1825,4670	1478,4984
Média	1838,3535	1902,8457	1756,6890
Std	57,2237	85,6005	108,6218
FE	750	757	754
Tempo (min)	19,18	20,66	77,86

Fonte: Elaborada pela autora.

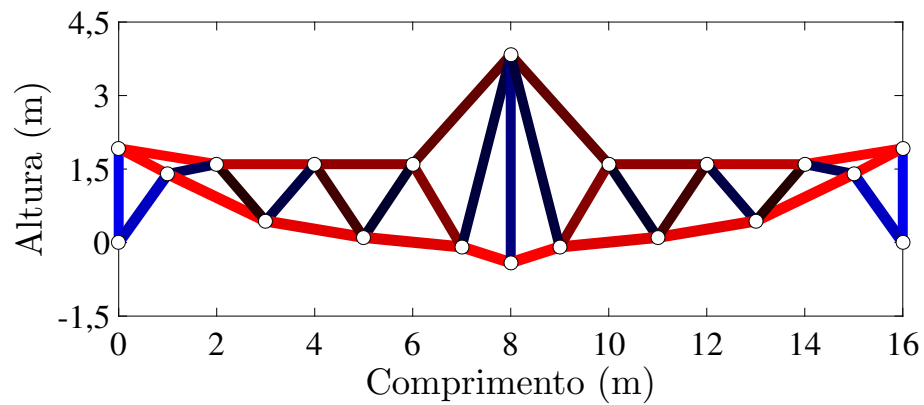
Figura 43: Configurações ótimas e tensões normais nas barras: Exemplo IV.



(a) Cenário 1: Euler.



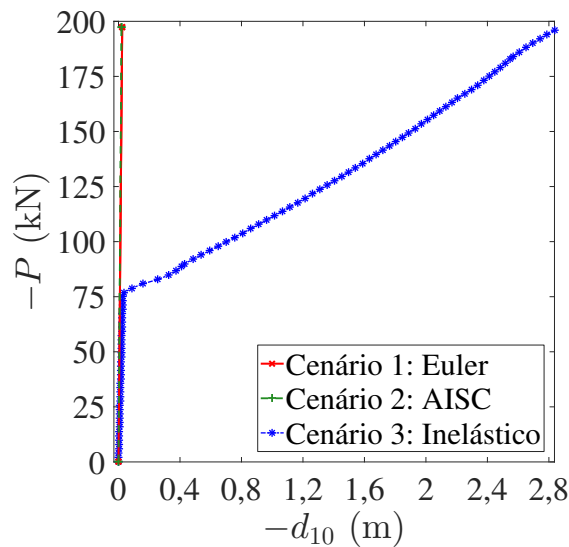
(b) Cenário 2: AISC.



(c) Cenário 3: Inelástico.

Fonte: Elaborada pela autora.

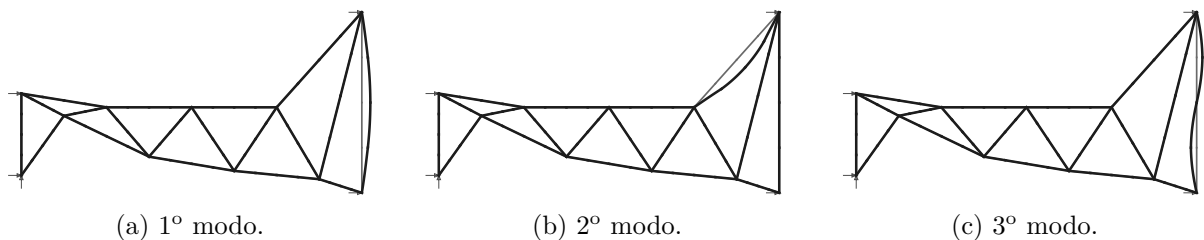
Figura 44: Curva carga-deslocamento: Exemplo IV.



Fonte: Elaborada pela autora.

A Figura 45 mostra os três primeiros modos de flambagem considerados no cálculo da carga crítica da estrutura ótima do cenário 3. Apesar desses modos estarem associados apenas a duas barras da estrutura, verificou-se que a configuração ótima do modelo inelástico atende as restrições do seu cenário mesmo considerando os vinte primeiros modos de flambagem no cálculo da carga crítica. Esses modos abrangem todas as barras comprimidas da estrutura. Portanto, entende-se que o fato da configuração ótima do cenário 3 não ter apresentado instabilidade local não está associado a falhas nas imperfeições adicionadas no modelo.

Figura 45: Modos de flambagem aplicados no cálculo da carga crítica inelástica: Exemplo IV.



Fonte: Elaborada pela autora.

Dentre as respostas ótimas obtidas nas execuções do cenário 3, aquela com o menor deslocamento pode se apresentar como uma solução mais realista. Esse resultado é apresentado na Tabela 18 e ilustrado na Figura 46. Essa configuração tem 1763,2920 kg,

portanto com massa intermediária às ótimas dos cenários 1 e 2, e deslocamento de -3,4702 cm no meio do vão.

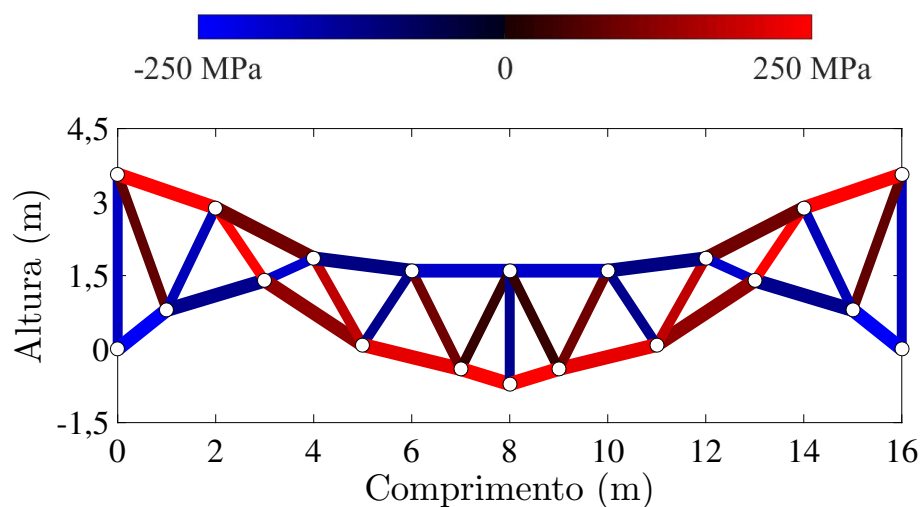
As deformadas das estruturas ótimas são apresentadas na Figura 47, todas com a mesma escala de visualização, exceto o resultado ótimo do cenário 3 que possui uma escala 100 vezes menor do que a escala adotada nos outros casos, para facilitar a visualização. Nota-se que algumas barras dos cenários inelástico estão destacadas, indicando que os respectivos elementos atingiram a tensão de escoamento. Além disso, conforme aponta a Tabela 19, a estrutura ótima do cenário 2 atende às restrições de todos os cenários. No entanto, as outras estruturas atendem apenas às restrições de seus próprios cenários.

Tabela 18: Projeto ótimo para o cenário 3 com menor deslocamento: Exemplo IV.

Projeto	Cenário 3: Inelástico	Projeto	Cenário 3: Inelástico
y_2, y_{18} (m)	0,5659	y_9, y_{13} (m)	-0,4056
y_3, y_{19} (m)	0,7991	y_{10} (m)	-1,4000
y_4, y_{16} (m)	-0,1183	y_{11} (m)	-0,7130
y_5, y_{17} (m)	1,4000	A_1 (cm ²)	25,0000
y_6, y_{14} (m)	-1,1461	A_2 (cm ²)	34,4458
y_7, y_{15} (m)	0,0844	A_3 (cm ²)	35,1779
y_8, y_{12} (m)	-1,4000	Massa (kg)	1763,2920

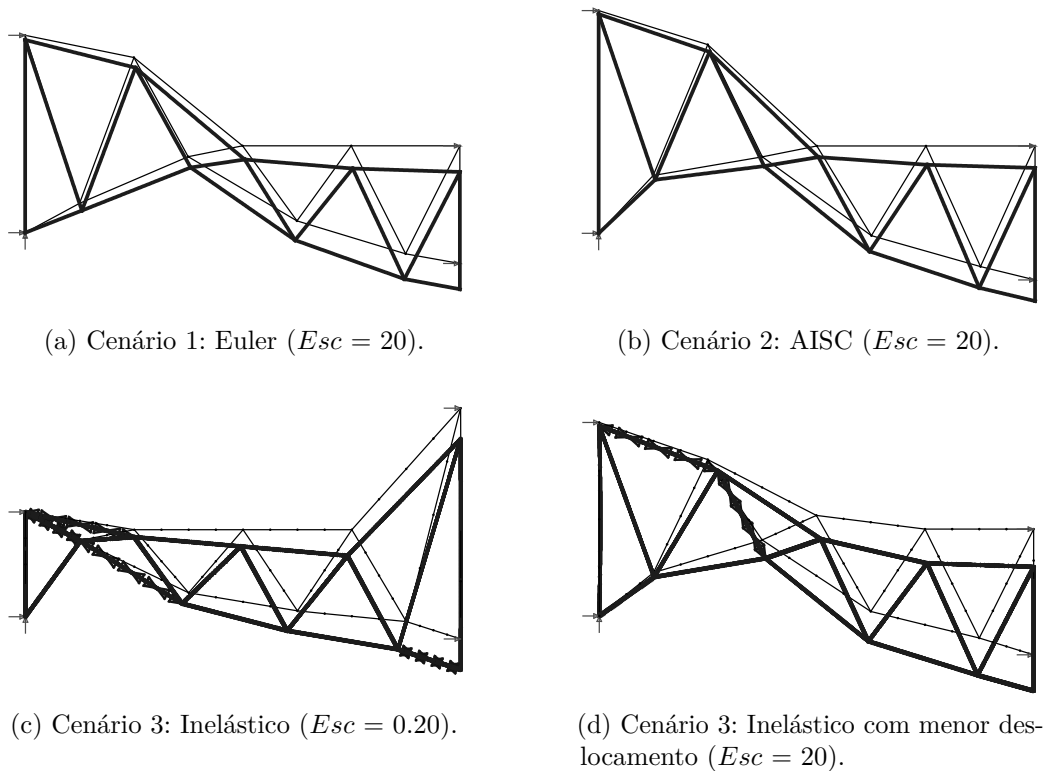
Fonte: Elaborada pela autora.

Figura 46: Configuração ótima e tensões normais nas barras para o cenário 3 com menor deslocamento: Exemplo IV.



Fonte: Elaborada pela autora.

Figura 47: Deformadas das estruturas ótimas: Exemplo IV.



Fonte: Elaborada pela autora.

Tabela 19: Valor das restrições dos cenários avaliados - $\max(\mathbf{g})$ - para as estruturas ótimas: Exemplo IV.

Projeto	Cenário 1: Euler	Cenário 2: AISC	Cenário 3: Inelástico
\mathbf{x}_{C_1}	-0,0008	0,3441	0,2195
\mathbf{x}_{C_2}	-0,0012	-0,0012	-0,0369
\mathbf{x}_{C_3}	1,6538	1,6538	-0,0001
$\mathbf{x}_{C_3}^\dagger$	0,2080	0,2080	-0,0058

\dagger Projeto ótimo do cenário 3 com menor deslocamento.

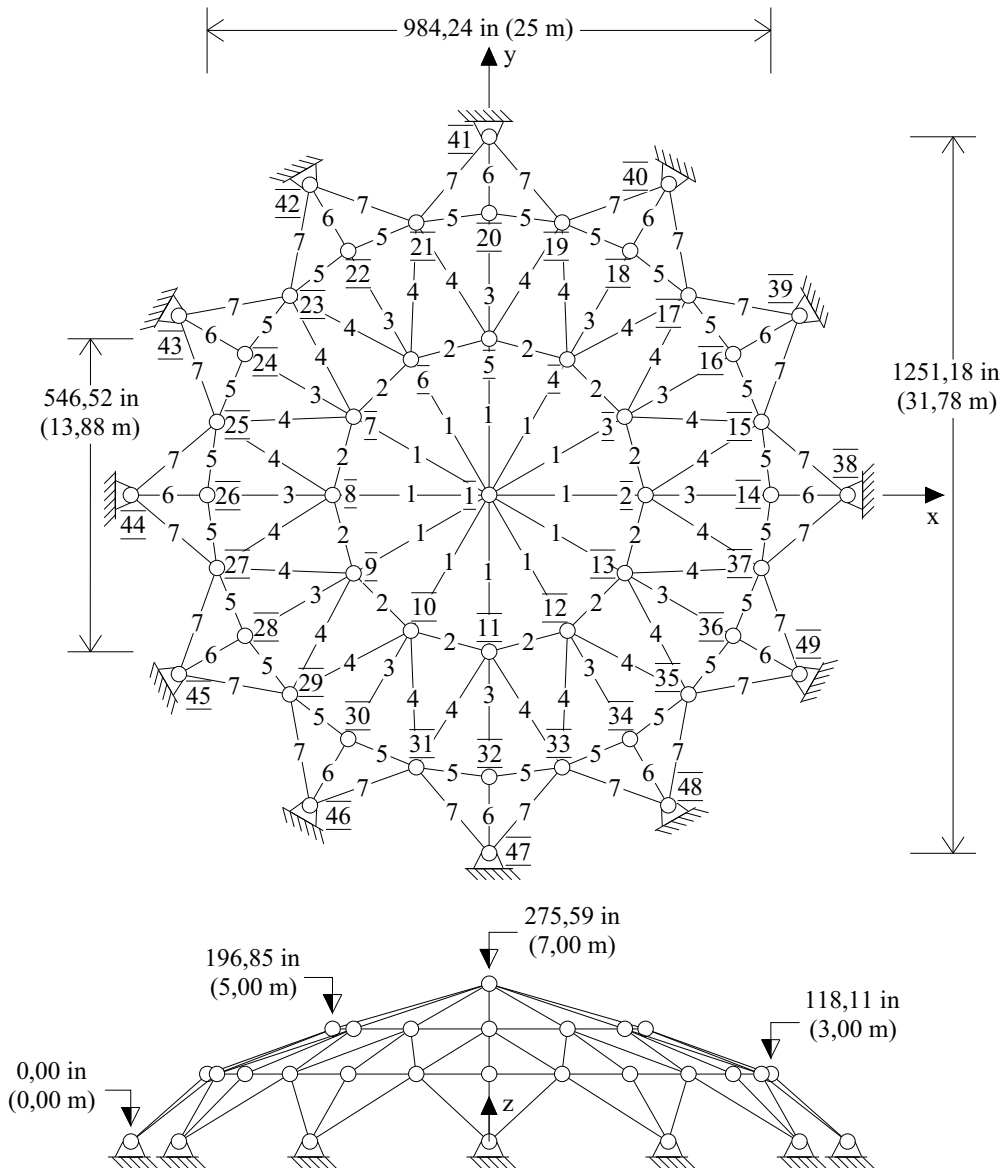
Fonte: Elaborada pela autora.

4.5 Exemplo V: Domo tridimensional de 120 barras

O problema consiste em uma treliça espacial de 120 barras e 49 nós, similar à abordada na seção 2.4.5. Nesse capítulo, a estrutura utilizada para avaliar os três cenários de flambagem é a apresentada por Kaveh & Khayatazad (2013), ilustrada na Figura 48. Diferente do domo estudado anteriormente, esse apresenta cargas assimétricas em relação ao eixo y , de modo que não é possível aplicar dupla simetria. Esse fato, além de representar

um maior desafio em termos de tempo computacional, dificulta a busca pelo ponto ótimo devido ao aumento do número de restrições, ocasionado pelo maior número de elementos analisados. As cargas verticais aplicadas são: -13,49 kips (-60 kN) no nó 1; -6,744 kips (-30 kN) no nó 2 até o 14; -2,248 kips (-10 kN) no restante dos nós livres. A função objetivo representa a massa da estrutura e as variáveis de projeto são as áreas das seções transversais das barras, categorizadas em 7 grupos, conforme enumerado na Figura 48. O espaço de projeto adotado corresponde a $0,775 \text{ in}^2 (5,00 \text{ cm}^2) \leq A_i \leq 6,20 \text{ in}^2 (40,00 \text{ cm}^2)$, com $i = 1, \dots, 7$, e as propriedades do material são $\sigma_y = 58 \text{ ksi} (400 \text{ MPa})$, $E = 30450 \text{ ksi} (210 \text{ GPa})$ e $\rho = 0,288 \text{ lb/in}^3 (7971,81 \text{ kg/m}^3)$. As seções transversais são consideradas circulares vazadas.

Figura 48: Domo tridimensional de 120 barras: Exemplo V.



Fonte: Elaborada pela autora.

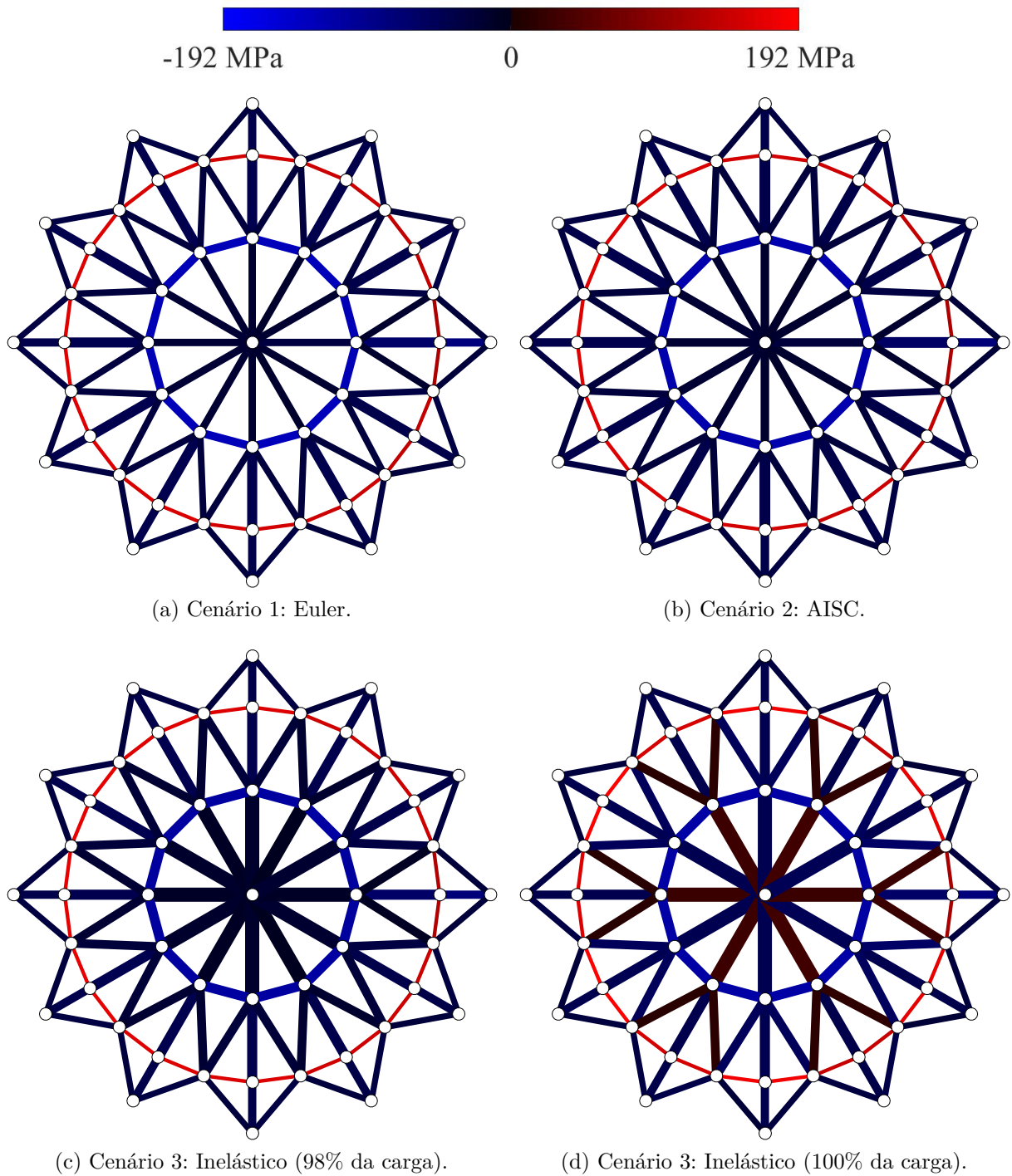
A Tabela 20 mostra que o cenário 3 apresenta um projeto ótimo com custo 23,69% e 16,19% maior do que os cenários 1 e 2, respectivamente. Conforme observado no esquema de tensões da Figura 49, todas as estruturas apresentam tensões semelhantes até atingirem 98% da carga de projeto. Após esse nível de carregamento, algumas barras da estrutura ótima para o cenário 3 que estavam comprimidas passam a apresentar esforço de tração. Dentre as barras que alteram os sinais dos esforços internos ao longo do carregamento, destacam-se as barras do grupo 1 e 4. A deformada da estrutura, ilustrada na Figura 50, mostra que no final do carregamento, o cenário 3 apresenta uma configuração de flambagem global, onde parte da treliça desloca-se no sentido negativo do eixo z e parte no sentido positivo. A Figura 51 descreve o comportamento de dois nós da estrutura para os três cenários avaliados. Nos últimos incrementos de carga, os nós do cenário 3 apresentam grandes deslocamentos em sentidos opostos, evidenciando a flambagem global da estrutura. A Tabela 21 mostra que, apesar da estrutura ótima para o cenário 3 apresentar o maior custo, ela não atende às restrições do cenário 2, e vice versa. Essa situação pode ocorrer pelo fato das restrições da norma avaliadas considerarem apenas a flambagem local e para o modelo inelástico, a flambagem global foi a limitante do modelo.

Tabela 20: Projeto ótimo e resultados estatísticos: Exemplo V.

Projeto	Cenário 1: Euler	Cenário 2: AISC	Cenário 3: Inelástico
A_1 (cm ²)	10,2020	11,7280	19,4791
A_2 (cm ²)	11,2517	12,1394	13,4581
A_3 (cm ²)	13,8634	14,8547	13,9086
A_4 (cm ²)	9,0629	9,5815	12,1022
A_5 (cm ²)	5,0000	5,0000	5,0000
A_6 (cm ²)	11,3527	11,7468	11,3898
A_7 (cm ²)	8,1763	8,4549	8,3627
Massa (kg)	4699,3178	5002,8595	5812,6631
Média	4827,8342	5191,8175	6189,3310
Std	147,8723	142,5945	242,2955
FE	458	454	333
Tempo (min)	7,22	7,25	310,72

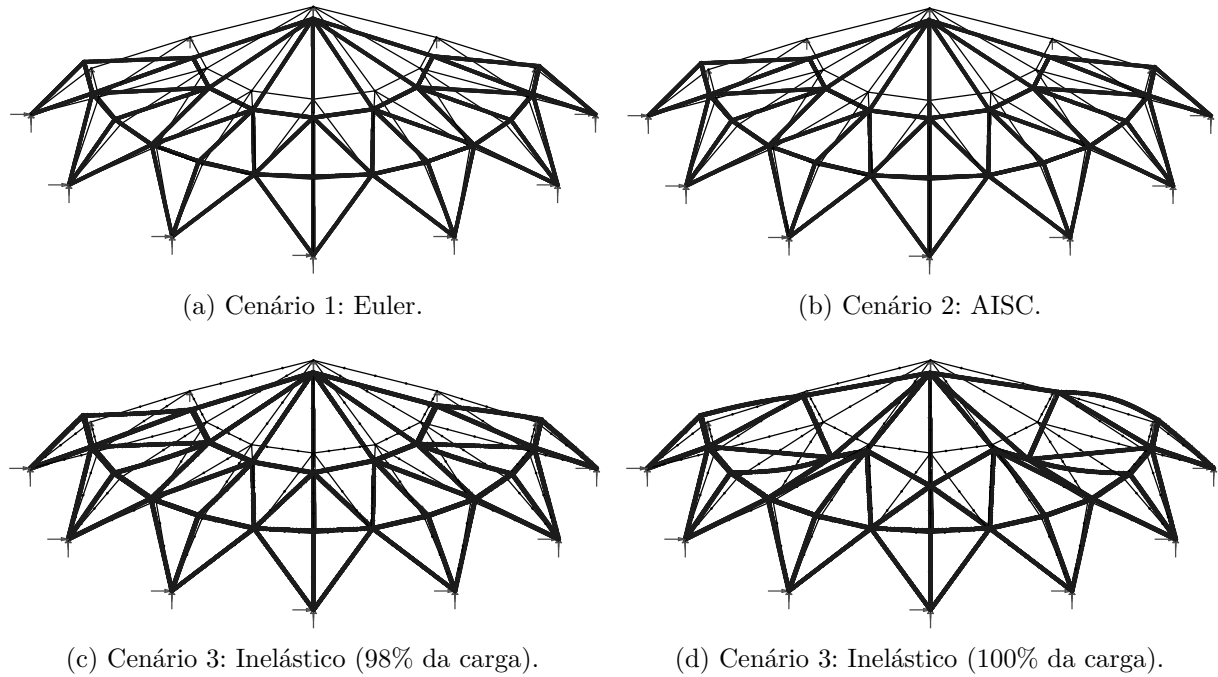
Fonte: Elaborada pela autora.

Figura 49: Configurações ótimas e tensões normais nas barras: Exemplo V.



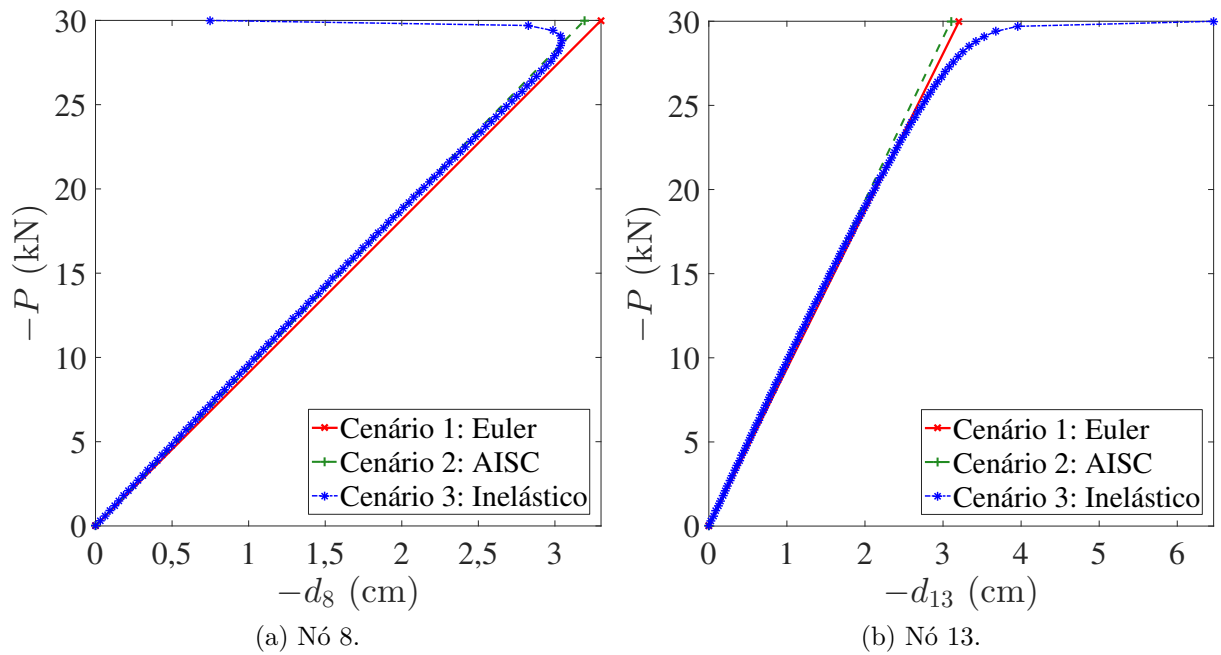
Fonte: Elaborada pela autora.

Figura 50: Deformadas das estruturas ótimas: Exemplo V.



Fonte: Elaborada pela autora.

Figura 51: Curva carga-deslocamento: Exemplo V.



Fonte: Elaborada pela autora.

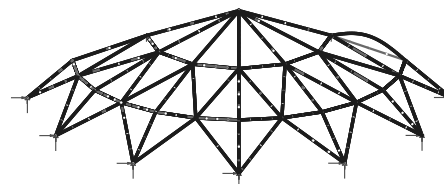
Tabela 21: Valor das restrições dos cenários avaliados - $\max(\mathbf{g})$ - para as estruturas ótimas: Exemplo V.

Projeto	Cenário 1: Euler	Cenário 2: AISC	Cenário 3: Inelástico
\mathbf{x}_{C_1}	-0,0138	0,1245	0,4925
\mathbf{x}_{C_2}	-0,1264	-0,0039	0,3699
\mathbf{x}_{C_3}	-0,0215	0,1157	-1×10^{-16}

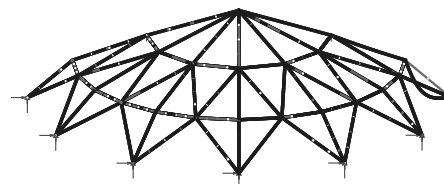
Fonte: Elaborada pela autora.

A Figura 52 mostra os três primeiros modos de flambagem considerados no cálculo da carga crítica da estrutura ótima do cenário 3. Esses modos estão associados a três barras da estrutura. Entretanto, assim como no exemplo anterior, a configuração ótima da estrutura para o modelo inelástico atende as restrições do seu cenário mesmo considerando os vinte primeiros modos de flambagem no cálculo da carga crítica. Esses modos abrangem todas as barras da estrutura, pois há modos em que diversas barras apresentam deslocamentos simultaneamente. Portanto, entende-se que essa análise é suficiente para concluir que a ausência de instabilidade local da estrutura ótima do cenário 3 não está associada a falhas nas imperfeições adicionadas no modelo.

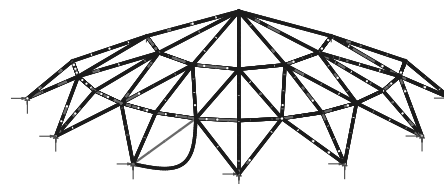
Figura 52: Modos de flambagem aplicados no cálculo da carga crítica inelástica: Exemplo V.



(a) 1º modo.



(b) 2º modo.



(c) 3º modo.

Fonte: Elaborada pela autora.

4.6 Comentários

A partir da análise dos resultados de todos os exemplos estudados para investigar os modelos de flambagem, entende-se que cada um dos cenários abordados pode ser aplicado como critério de dimensionamento estrutural, a depender do problema avaliado. Para elementos estruturais esbeltos, o cenário de Euler pode ser uma maneira prática e rápida de representar adequadamente o comportamento da estrutura. Porém, quando o dimensionamento abrange também a zona de flambagem inelástica, esse cenário resulta em estruturas subdimensionadas, devendo ser aplicado os critérios dos cenários 2 ou 3.

Dos quatro exemplos estudados para investigar os modelos de flambagem, em três deles o cenário baseado nas restrições da norma [AISC-360 \(2016\)](#) apresentou o resultado mais caro, atendendo também a restrição da carga crítica inelástica. Entretanto, esses resultados não necessariamente indicam que um projeto baseado no modelo inelástico é inseguro. Entende-se que as expressões da norma para o intervalo inelástico de flambagem tendem a atuar de maneira conservadora, pois são desenvolvidas para serem aplicadas em um conjunto de estruturas. Já o critério de segurança do cenário 3 é desenvolvido a partir do modelo da estrutura analisada, de modo que representa apenas o comportamento da estrutura em questão. Portanto, dado que o objetivo da otimização estrutural é obter estruturas econômicas, a aplicação do modelo inelástico pode ser uma boa alternativa. Destaca-se que o modelo inelástico deve ser empregado em conjunto com restrições relacionadas a deslocamentos máximos, para evitar dimensionamentos que não correspondam a estruturas exequíveis, conforme visto no exemplo da seção 4.4. Esse exemplo pode evidenciar a importância da análise crítica do projetista com relação aos dimensionamentos resultantes de *softwares*. Além disso, para garantir a verificação da flambagem local das barras, o modelo inelástico deve avaliar mais modos de flambagem como imperfeições na obtenção da carga crítica. Dado que a análise de mais modos de flambagem aumenta o custo computacional, inviabilizando a resolução de alguns problemas, uma maneira de obter uma estrutura segura para os efeitos de instabilidade global e local é aplicar os critérios dos cenários 2 e 3 simultaneamente. Essa análise provavelmente resulta em uma estrutura menos econômica do que as resultantes da aplicação de cada cenário isoladamente, porém pode ser uma boa alternativa para o dimensionamento de estruturas de grande porte.

Com relação aos resultados obtidos nas análises dos apoios elásticos, nota-se que a otimização com o objetivo baseado apenas na minimização da massa dos elementos estruturais pode representar uma situação economicamente desvantajosa para outras áreas do projeto. Portanto, ressalta-se a importância de se considerar aspectos globais na função objetivo dos problemas de otimização, como por exemplo os custos de execução da obra. Aqui, pode-se ver que apesar do aumento da rigidez dos apoios resultar na redução da massa ótima da estrutura, quando levado em conta possíveis custos de execução desses apoios, a escolha de um apoio mais rígido não é economicamente a melhor opção.

5 CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Neste capítulo, são apresentadas as conclusões deste trabalho. Além disso, também são indicadas sugestões para trabalhos futuros relacionadas ao tema proposto.

5.1 Conclusões

Este trabalho propôs avaliar o efeito de hipóteses de modelagem na configuração ótima de treliças. Para viabilizar essa pesquisa, foi necessário desenvolver um método de otimização que necessitasse de poucas avaliações das restrições, devido ao alto custo computacional de execução da rotina de análise estrutural não-linear presente nas restrições de uma das hipóteses de modelagem investigadas. Sendo assim, foi proposto um método de otimização que substitui as restrições pelo metamodelo de Kriging, caracterizado por três estratégias de busca para a seleção dos pontos de suporte do metamodelo: busca local, busca global e refinamento.

O desempenho do método de otimização proposto foi analisado em quatro problemas *benchmark* encontrados na literatura, e os resultados obtidos aqui foram comparados com os obtidos por outros autores com o uso de métodos de otimização que não envolvem metamodelos. Como resultados, o método proposto encontrou valores de função objetivo praticamente iguais aos melhores da literatura, com redução de pelo menos 85% no número de avaliações das restrições. Além dessa análise, o desempenho do método também foi avaliado em relação a outro método de otimização baseado em metamodelos, sugerido por [Forrester et al. \(2008\)](#). Nesse caso, foram testados três problemas que envolvem análise estrutural não-linear. Como resultado, em todos os problemas, o método proposto aqui obteve melhores resultados em termos de função objetivo, exigindo ao menos 47% menos avaliações das restrições. Com relação ao tempo computacional, em problemas simples, o tempo de execução de métodos não envolvendo metamodelos é mais baixo do que o relacionado ao método aqui proposto, devido ao custo computacional para a construção do metamodelo. Entretanto, em problemas que envolvem estruturas grandes e análise não-linear, a abordagem desenvolvida aqui mostra-se mais vantajosa. Em um dos exemplos avaliados, o método proposto atingiu resultados melhores em relação à função objetivo, com $\frac{1}{4}$ do tempo dos outros métodos. Portanto, o método aqui proposto conseguiu atender ao objetivo desta pesquisa, encontrando bons resultados em problemas de otimização estrutural com redução do número de avaliação das restrições. Isso representa uma contribuição para a área de otimização de estruturas, pois permite que sejam realizados estudos envolvendo modelos estruturais complexos, capazes de representar comportamentos que antes não

eram investigados devido à inviabilidade ocasionada pelo alto custo computacional.

Para analisar o efeito das hipóteses de modelagem, em cada exemplo numérico, foi executada a minimização da massa ou do volume da estrutura, considerando diferentes cenários de modelagem, e com variáveis de projeto relacionadas à geometria da estrutura. A principal hipótese investigada corresponde a diferentes modelos de flambagem: o primeiro cenário considera restrição de flambagem elástica, caracterizada pela tensão crítica de Euler; o segundo cenário utiliza a formulação indicada na norma [AISC-360 \(2016\)](#) para o cálculo da tensão crítica; e o terceiro cenário considera restrição de flambagem inelástica, representada por um critério único de estabilidade que é capaz de capturar flambagens locais e globais. De modo secundário, foram avaliadas hipóteses de modelagem relacionadas às condições de contorno essenciais, onde os apoios das estruturas foram modelados como apoios elásticos representados por molas, e os cenários investigados estão associados a diferentes valores de rigidez das molas. Nesse último estudo, também foi feita uma análise relacionada ao custo dos apoios em função da rigidez das molas e investigado o impacto desse custo no custo global ótimo da estrutura.

Os diferentes cenários de modelos de flambagem foram aplicados em quatro exemplos numéricos de otimização dimensional e de forma. A partir dos resultados observou-se que a configuração ótima para o cenário 2 atendeu também as restrições dos demais cenários, exceto no caso em que a estrutura é afetada pelo fenômeno de instabilidade global (exemplo da seção 4.5). Para esse caso, que envolveu uma estrutura tridimensional de grande porte, o cenário 2 não apresentou segurança em relação às restrições do cenário 3, cujo modelo foi capaz de capturar flambagem global da estrutura. Sendo assim, destaca-se a importância das pesquisas na área de otimização, que consideram as restrições de tensão crítica de Euler ou da norma [AISC-360 \(2016\)](#), passarem a considerar também restrições relacionadas a flambagem global.

Em geral, as configurações ótimas para o cenário 3 também atenderam as restrições do cenário 1 e apresentaram valores de função objetivo intermediárias aos cenários 1 e 2, com exceção de um exemplo numérico. No exemplo da seção 4.4, que corresponde a uma treliça de 37 barras inspirada em uma ponte britânica, o cenário 3 resultou na estrutura mais leve dentre os três cenários, porém com grandes deslocamentos. Isso pode ocorrer em razão do modelo permitir a plastificação das barras, levando a uma melhor redistribuição dos esforços. Quando esse fenômeno acontece e não ocasiona o colapso da estrutura como um todo, esse cenário pode indicar maior capacidade de carga. Por outro lado, a plastificação levou a grandes deslocamentos no meio do vão da estrutura, resultando em uma configuração que comprometeria a funcionalidade da estrutura. Desta forma, destaca-se a importância de se considerar restrições de máximos deslocamentos admissíveis ao utilizar modelos inelásticos. Já as configurações ótimas para o cenário 1 atenderam apenas as restrições do seu próprio cenário, até mesmo no problema mais simples avaliado.

Com relação às condições de contorno essenciais, foi avaliado um exemplo numérico

sob 10 cenários distintos de rigidez. Como resultado, o aumento da rigidez dos apoios fez com que diminuísse a massa ótima necessária para atender aos critérios de projeto. Para o caso avaliado, notou-se que a partir de um determinado nível de rigidez do apoio, o mesmo pode ser considerado rígido. A partir desse nível, acréscimos na rigidez dos apoios passam a ter pouco impacto na determinação da estrutura ótima. Em relação à análise de custo, verificou-se que a rigidez dos apoios que resulta no menor custo global é altamente dependente do custo atribuído à fundação. Portanto, apesar da fundação rígida levar a superestruturas mais baratas do que as obtidas com o uso de fundações mais flexíveis, a escolha de apoios menos rígidos pode resultar em uma solução global mais econômica. Ou seja, uma otimização conjunta da superestrutura e das fundações pode levar a soluções melhores, apesar das dificuldades de lidar com elas simultaneamente. No problema aqui avaliado, a redução média no custo total foi de cerca de 8%, em relação ao apoio rígido, ao se efetuar a análise conjunta.

Por fim, destaca-se que a maioria dos resultados aqui apresentados foram publicados no decorrer da pesquisa nos seguintes artigos: [Juliani *et al.* \(2019\)](#); [Juliani & Gomes \(2020\)](#); [Juliani & Gomes \(2021\)](#); [Juliani & Gomes \(2022\)](#).

5.2 Sugestões para trabalhos futuros

Como sugestão para trabalhos futuros, indica-se:

- (a) No método de otimização proposto, aproximar a função objetivo também por um metamodelo de Kriging, de modo que o esquema proposto seja capaz de executar problemas com função objetivo custosas computacionalmente;
- (b) Realizar análises de sensibilidade do método de otimização proposto em relação aos seus parâmetros, com o intuito de obter o conjunto de valores dos parâmetros que potencializam o desempenho do método;
- (c) Obter uma função mais precisa de custo dos apoios elásticos, em função da rigidez, e incorporar mais aspectos do projeto na análise do custo global da estrutura;
- (d) Investigar as hipóteses de modelagem em problemas de otimização topológica;
- (e) Adotar variáveis discretas para as variáveis de projeto relacionadas às dimensões das seções transversais dos elementos, com o intuito de obter perfis mais próximos dos encontrados em catálogos comerciais.

REFERÊNCIAS

American Institute of Steel Construction. *Manual of steel construction: Allowable stress design*. 1989. Citado na página 50.

American Institute of Steel Construction. *Manual of steel construction: Load & resistance factor design*. 1994. Citado na página 73.

American Institute of Steel Construction. *Specification for Structural Steel Buildings: ANSI/AISC 360-16*. 2016. Citado 13 vezes nas páginas 5, 7, 8, 19, 20, 22, 72, 73, 80, 83, 84, 104 e 106.

American Institute of Steel Construction. *Shapes Database v15.0*. 2017. Citado na página 69.

ARORA, J. S. *Introduction to Optimum Design*. 2nd. ed. San Diego, CA, USA: Elsevier Academic Pres, 2004. 728 p. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 27.

Associação Brasileira de Normas Técnicas. *NBR 6118: Projeto de estruturas de concreto - procedimento*. 2014. Citado na página 22.

BARROS, J. A. O.; GOUVEIA, A. V.; AZEVEDO, A. F. M. Modelo de análise linear de estruturas reticuladas. *Engenharia Civil - UMinho*, n. 4, p. 43–65, 1996. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 57.

BATHE, K. J. *Finite Element Procedures*. 2nd. ed. Watertown, MA, USA: Prentice Hall, 2014. 1043 p. Citado 2 vezes nas páginas 54 e 57.

BECK, A. T.; GOMES, W. J. S. A comparison of deterministic, reliability-based and risk-based structural optimization under uncertainty. *Probabilistic Engineering Mechanics*, v. 28, p. 18–29, 2012. Citado na página 82.

BENDSØE, M. P.; SIGMUND, O. *Topology Optimization: Theory, methods and applications*. 2nd. ed. Berlin, Germany: Springer-Verlag, 2004. 370 p. Citado na página 29.

BICHON, B. J. Efficient global reliability analysis for nonlinear implicit performance functions. *AIAA Journal*, v. 46, n. 10, p. 2459–2468, 2008. Citado na página 30.

CAMP, C.; PEZESHK, S.; CAO, G. Optimized design of two-dimensional structures using a genetic algorithm. *Journal of structural engineering*, v. 124, n. 5, 1998. Citado na página 46.

CAMP, C. V. Design of space trusses using big bang–big crunch optimization. *Journal of structural engineering*, v. 133, n. 7, p. 999–1008, 2007. Citado na página 86.

CAMP, C. V.; HUQ, F. CO₂ and cost optimization of reinforced concrete frames using a big bang–big crunch algorithm. *Engineering Structures*, v. 48, p. 363–372, 2013. Citado na página 16.

- CARRARO, F. *A stochastic Kriging approach for the minimization of integrals*. 157 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) — Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2017. Citado na página 28.
- CHENG, M.-Y.; PRAYOGO, D. Symbiotic organisms search: A new metaheuristic optimization algorithm. *Computers and Structures*, v. 139, p. 98–112, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 42 e 43.
- CHUNNA, L.; HAI, F.; CHUNLIN, G. Development of an efficient global optimization method based on adaptive infilling for structure optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v. 62, p. 3383–3412, 2020. Citado 3 vezes nas páginas 30, 31 e 66.
- COLEMAN, T. F.; LI, Y. An interior, trust region approach for nonlinear minimization subject to bounds. *SIAM Journal on Optimization*, v. 6, n. 2, p. 418–445, 1996. Citado na página 38.
- DONG, H.; SONG, B.; DONG, Z.; WANG, P. Multi-start space reduction (MSSR) surrogate-based global optimization method. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v. 54, p. 907–926, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 32.
- DONG, H.; SONG, B.; DONG, Z.; WANG, P. SCGOSR: surrogate-based constrained global optimization using space reduction. *Applied Soft Computing*, v. 65, p. 462–477, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 32.
- DONG, H.; WANG, P.; SONG, B.; ZHANG, Y.; AN, X. Kriging-assisted discrete global optimization (KDGO) for black-box problems with costly objective and constraints. *Applied Soft Computing Journal*, v. 94, 2020. Citado 3 vezes nas páginas 20, 32 e 66.
- DURANTIN, C.; MARZAT, J.; BALESSENT, M. Analysis of multi-objective kriging-based methods for constrained global optimization. *Computational Optimization and Applications*, v. 63, p. 903–926, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 32.
- ECHARD, B.; GAYTON, N.; LEMAIRE, M. AK-MCS: an active learning reliability method combining Kriging and Monte Carlo Simulation. *Structural Safety*, v. 33, p. 145–154, 2011. Citado na página 30.
- EXCEL. *Microsoft Office Excel*. 2010. Citado na página 69.
- FALLAHIAN, S.; HAMIDIAN, D.; SEYEDPOOR, S. M. Optimal design of structures using the simultaneous perturbation stochastic approximation algorithm. *International Journal of Computational Methods*, v. 6, n. 2, p. 1–16, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 50.
- FARAMARZI, A.; AFSHAR, M. H. A novel hybrid cellular automata–linear programming approach for the optimal sizing of planar truss structures. *Civil Engineering and Environmental Systems*, v. 31, n. 3, p. 209–228, 2014. Citado na página 29.
- FARSHCHIN, M.; CAMP, C. V.; MANIAT, M. Optimal design of truss structures for size and shape with frequency constraints using a collaborative optimization strategy. *Expert Systems with Applications*, v. 66, p. 203–218, 2016. Citado na página 16.

- FICARELLA, E.; LAMBERTI, L.; DEGERTEKIN, S. O. Comparison of three novel hybrid metaheuristic algorithms for structural optimization problems. *Computers & Structures*, v. 244, 2021. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 66.
- FISH, J.; BELYTSCHKO, T. *Um Primeiro Curso em Elementos Finitos*. 1st. ed. LTC, 2009. 256 p. Citado na página 54.
- FORRESTER, A. I. J.; SÓBESTER, A.; KEANE, A. J. *Engineering Design via Surrogate Modelling: A practical guide*. Chichester, West Sussex, United Kingdom: John Wiley and Sons, 2008. 238 p. Citado 8 vezes nas páginas 20, 28, 29, 30, 34, 36, 40 e 105.
- FOX, R. *Optimization methods for engineering design*. Addison-Wesley Publishing Co., 1973. Citado na página 82.
- GALANTE, M. Genetic algorithms as an approach to optimize real-world trusses. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 39, p. 361–382, 1996. Citado na página 19.
- GANDOMI, A. H.; YANG, X.-S.; ALAVI, A. H. Mixed variable structural optimization using Firefly algorithm. *Computers and Structures*, v. 89, p. 2325–2336, 2011. Citado na página 36.
- GANDOMI, A. H.; YANG, X.-S.; ALAVI, A. H. Cuckoo search algorithm: a metaheuristic approach to solve structural optimization problems. *Engineering with Computers*, v. 29, p. 17–35, 2013. Citado 3 vezes nas páginas 41, 42 e 43.
- GEBREMEDHEN, H. S.; WOLDEMICHAEL, D. E.; HASHIM, F. M. A firefly algorithm based hybrid method for structural topology optimization. *Advanced Modeling and Simulation in Engineering Sciences*, v. 7, n. 44, 2020. Citado 2 vezes nas páginas 36 e 66.
- GHOLIZADEH, S. Layout optimization of truss structures by hybridizing cellular automata and particle swarm optimization. *Computers & Structures*, v. 125, p. 86–99, 2013. Citado na página 18.
- GIL, L.; ANDREU, A. Shape and cross-section optimisation of a truss structure. *Computers & Structures*, v. 79, p. 681–689, 2001. Citado na página 48.
- GOMES, H. M. Truss optimization with dynamic constraints using a particle swarm algorithm. *Expert Systems with Applications*, v. 38, p. 957–968, 2011. Citado 3 vezes nas páginas 43, 44 e 45.
- GOMES, W. J. S. Reliability analysis of reinforced concrete beams using finite element models. *XXXVIII Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering (CILAMCE)*, 2017. Citado na página 65.
- GOMES, W. J. S.; BECK, A. T.; LOPEZ, R. H.; MIGUEL, L. F. F. A probabilistic metric for comparing metaheuristic optimization algorithms. *Structural Safety*, v. 70, p. 59–70, 2018. Citado na página 16.
- GONÇALVES, M. S.; LOPEZ, R. H.; MIGUEL, L. F. F. Search group algorithm: A new metaheuristic method for the optimization of truss structures. *Computers & Structures*, v. 153, p. 165–184, 2015. Citado na página 28.

- GRAMACY, R. B.; GRAY, G. A.; DIGABEL, S. L.; LEE, H. K. H.; RANJAN, P.; WELLS, G.; WILD, S. M. Modeling an augmented lagrangian for blackbox constrained optimization. *Technometrics*, v. 58, n. 1, p. 1–11, 2015. Citado na página 33.
- HANAHARA, K.; TADA, Y. Global buckling has to be taken into account for optimal design of large-scale truss structure. *9th World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 67.
- HOLLAND, J. H. *Adaptation in Natural and Artificial System*. Michigan: Univ. Michigan Press, 1975. 183 p. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 28.
- HSU, Y.-L.; LIU, T.-C. Developing a fuzzy proportional–derivative controller optimization engine for engineering design optimization problems. *Engineering Optimization*, v. 39, n. 6, p. 679–700, 2007. Citado na página 41.
- JALILI, S.; HOSSEINZADEH, Y. Design optimization of truss structures with continuous and discrete variables by hybrid of biogeography-based optimization and differential evolution methods. *The Structural Design of Tall and Special Buildings*, v. 27, n. 14, 2018. Citado na página 18.
- JAWAD, F. K. J.; OZTURK, C.; DANSHENG, W.; MAHMOOD, M.; AL-AZZAWI, O.; AL-JEMELY, A. Sizing and layout optimization of truss structures with artificial bee colony algorithm. *Structures*, v. 30, p. 546–559, 2021. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 66.
- JONES, D.; SCHONLAU, M.; WELCH, W. J. Efficient global optimization of expensive black-box functions. *Journal of Global Optimization*, v. 13, p. 455–492, 1998. Citado 2 vezes nas páginas 32 e 38.
- JULIANI, M. A.; GOMES, W. J. de S. Optimal configuration of RC frames considering ultimate and serviceability limit state constraints. *IBRACON Structures and Materials Journal*, v. 14, n. 2, 2021. Citado na página 22.
- JULIANI, M. A.; GOMES, W. J. de S. An efficient kriging-based framework for computationally demanding constrained structural optimization problems. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v. 65, n. 4, 2022. Citado na página 107.
- JULIANI, M. A.; GOMES, W. J. S. Influence of limit states on the optimization of reinforced concrete beams. *VI International Symposium on Solid Mechanics (MecSol)*, n. 943-954, 2017. Citado na página 22.
- JULIANI, M. A.; GOMES, W. J. S. Influence of limit states on the optimization of reinforced concrete plane frames. *XXXVIII Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering (CILAMCE)*, 2017. Citado na página 22.
- JULIANI, M. A.; GOMES, W. J. S. Comparison of kriging and radial basis function surrogate models applied to a global optimization framework. *XLI Ibero-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering (CILAMCE)*, 2020. Citado na página 107.
- JULIANI, M. A.; GOMES, W. J. S. Structural optimization of trusses considering different buckling models. *XLII Ibero-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering and III Pan-American Congress on Computational Mechanics (CILAMCE-PANACM)*, 2021. Citado na página 107.

- JULIANI, M. A.; MILANEZ, M. O.; GOMES, W. J. S. Structural optimization of trusses under elastic and inelastic buckling constraints. *XL Ibero-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering (CILAMCE)*, 2019. Citado na página 107.
- JUNG, D.; GEA, H. C. Topology optimization of nonlinear structures. *Finite Elements in Analysis and Design*, v. 40, n. 11, p. 1417–1427, 2004. Citado na página 67.
- KAVEH, A. *Computational Structural Analysis and Finite Element Methods*. 1st. ed. Switzerland: Springer, 2014. 432 p. Citado na página 54.
- KAVEH, A.; AZAR, B. F.; TALATAHARI, S. Ant colony optimization for design of space trusses. *International Journal of Space Structures*, v. 23, n. 3, p. 167–181, 2008. Citado na página 86.
- KAVEH, A.; HASSANI, M. Simultaneous analysis, design and optimization of structures using force method and ant colony algorithms. *Asian Journal of Civil Engineering*, v. 10, n. 4, p. 381–396, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 46 e 47.
- KAVEH, A.; KHAYATAZAD, M. Ray optimization for size and shape optimization of truss structures. *Computers & Structures*, v. 117, p. 82–94, 2013. Citado 4 vezes nas páginas 19, 48, 50 e 98.
- KAVEH, A.; SHOJAEI, S. Optimal design of skeletal structures using ant colony optimization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 70, p. 563–581, 2007. Citado na página 86.
- KAVEH, A.; TALATAHARI, S. A hybrid particle swarm and ant colony optimization for design of truss structures. *Asian Journal of Civil Engineering*, v. 9, n. 4, p. 329–348, 2008. Citado na página 86.
- KAVEH, A.; TALATAHARI, S. Size optimization of space trusses using big bang–big crunch algorithm. *Computers and Structures*, v. 87, p. 1129–1140, 2009. Citado na página 86.
- KAVEH, A.; TALATAHARI, S. Optimal design of skeletal structures via the charged system search algorithm. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v. 41, p. 893–911, 2010. Citado na página 50.
- KAVEH, A.; ZOLGHADR, A. Shape and size optimization of truss structures with frequency constraints using enhanced charged system search algorithm. *Asian Journal of Civil Engineering*, v. 12, n. 4, p. 487–509, 2011. Citado 3 vezes nas páginas 43, 44 e 45.
- KAVEH, A.; ZOLGHADR, A. Truss optimization with natural frequency constraints using a hybridized CSS-BBBC algorithm with trap recognition capability. *Computers and Structures*, v. 102-103, p. 14–27, 2012. Citado na página 43.
- KAVEH, A.; ZOLGHADR, A. Truss shape and size optimization with frequency constraints using tug of war optimization. *Asian Journal of Civil Engineering*, v. 18, n. 2, p. 311–333, 2017. Citado 3 vezes nas páginas 43, 44 e 45.
- KEMMLER, R.; LIPKA, A.; RAMM, E. Large deformations and stability in topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v. 30, n. 6, p. 459–476, 2005. Citado na página 67.

- KENNEDY, J.; EBERHART, R. Particle swarm optimization. In: *Proceedings of the 1995 IEEE - International Conference on Neural Networks*, p. 1942–1948, 1995. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 36.
- KRIGE, D. G. A statistical approach to some basic mine valuation problems on the Witwatersrand. *Journal of the Southern African Institute of Mining and Metallurgy*, v. 52, n. 6, p. 119–139, 1951. Citado na página 32.
- KROETZ, H. M.; MOUSTAPHA, M.; BECK, A. T.; SUDRET, B. A two-level kriging-based approach with active learning for solving time-variant risk optimization problems. *Reliability Engineering and System Safety*, v. 203, 2020. Citado na página 31.
- KUMAR, S.; TEJANI, G. G.; MIRJALILI, S. Modified symbiotic organisms search for structural optimization. *Engineering with Computers*, v. 35, p. 1269–1296, 2019. Citado 4 vezes nas páginas 43, 44, 45 e 50.
- LEE, K. S.; GEEM, Z. W. A new structural optimization method based on the harmony search algorithm. *Computers & Structures*, v. 82, p. 781–798, 2004. Citado na página 86.
- LEE, T. H.; JUNG, J. J. A sampling technique enhancing accuracy and efficiency of metamodel-based RBDO: Constraint boundary sampling. *Computers & Structures*, v. 86, p. 1463–1476, 2008. Citado na página 32.
- LEMONGE, A. C. C.; CARVALHO, J. P. G.; HALLAK, P. H.; VARGAS, D. E. C. Multi-objective truss structural optimization considering natural frequencies of vibration and global stability. *Expert Systems with Applications*, v. 165, 2021. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 68.
- LI, Y.; WU, Y.; ZHAO, J.; CHEN, L. A kriging-based constrained global optimization algorithm for expensive black-box functions with infeasible initial points. *Journal of Global Optimization*, v. 67, p. 343–366, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 32.
- LINGYUN, W.; MEI, Z.; GUANGMING, W.; GUANG, M. Truss optimization on shape and sizing with frequency constraints based on genetic algorithm. *Computational Mechanics*, v. 35, p. 361–368, 2005. Citado 2 vezes nas páginas 43 e 44.
- LIU, H.; XU, S.; CHEN, X.; WANG, X.; MA, Q. Constrained global optimization via a DIRECT-type constraint-handling technique and an adaptive metamodeling strategy. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v. 55, p. 155–177, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 32.
- LOGAN, D. L. *A First Course in the Finite Element Method*. 5th. ed. Stamford, CT, USA: Cengage Learning, 2012. 954 p. Citado na página 55.
- LUH, G.-C.; LIN, C.-Y. Optimal design of truss-structures using particle swarm optimization. *Computers & Structures*, v. 89, n. 23-24, p. 2221–2232, 2011. Citado na página 16.
- MADAH, H.; AMIR, O. Truss optimization with buckling considerations using geometrically nonlinear beam modeling. *Computers & Structures*, v. 192, p. 233–247, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 74.

- MARTÍ, R. *Multi-Start Methods*. In: Glover F., Kochenberger G.A. (eds) *Handbook of Metaheuristics. International Series in Operations Research & Management Science*. Boston, MA, USA: Kluwer, 2003. v. 57. Citado na página 28.
- MATHWORKS. *MATLAB: Primer - R2016a*. Natick, MA, USA: , 2016. 189 p. Citado 3 vezes nas páginas 21, 33 e 69.
- MCGUIRE, W.; GALLAGHER, R. H.; ZIEMIAN, R. D. *Matrix Structural Analysis*. 2014. 460 p. Citado 10 vezes nas páginas 22, 46, 60, 62, 63, 69, 71, 74, 75 e 78.
- MCKAY, M. D.; BECKMAN, R. J.; CONOVER, W. J. A comparison of three methods for selecting values of input variables in the analysis of output from a computer code. *Technometrics*, v. 21, n. 2, p. 239–245, 1979. Citado na página 40.
- MENG, Z.; ZHANG, D.; LI, G.; YU, B. An importance learning method for non-probabilistic reliability analysis and optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v. 59, p. 1255–1271, 2019. Citado na página 32.
- MIGUEL, L. F. F.; LOPEZ, R. H.; MIGUEL, L. F. F. Multimodal size, shape, and topology optimisation of truss structures using the Firefly algorithm. *Advances in Engineering Software*, v. 56, p. 23–37, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 29.
- MIGUEL, L. F. F.; MIGUEL, L. F. F. Shape and size optimization of truss structures considering dynamic constraints through modern metaheuristic algorithms. *Expert Systems with Applications*, v. 39, p. 9458–9467, 2012. Citado 4 vezes nas páginas 36, 43, 44 e 45.
- MIGUEL, L. F. F.; MIGUEL, L. F. F.; LOPEZ, R. H. A firefly algorithm for the design of force and placement of friction dampers for control of man-induced vibrations in footbridges. *Optimization and Engineering*, v. 16, p. 633–661, 2015. Citado na página 36.
- MITJANA, F.; CAFIERI, S.; BUGARIN, F.; GOGU, C.; CASTANIE, F. Optimization of structures under buckling constraints using frame elements. *Engineering Optimization*, v. 51, n. 1, p. 140–159, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 67.
- MORTAZAVI, A.; TOĞAN, V. Simultaneous size, shape, and topology optimization of truss structures using integrated particle swarm optimizer. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v. 54, p. 715–736, 2016. Citado na página 29.
- MÜLLER, T. E.; KLASHORST, E. van der. A quantitative comparison between size, shape, topology and simultaneous optimization for truss structures. *Latin American Journal of Solids and Structures*, v. 14, n. 12, p. 2221–2242, 2017. Citado na página 29.
- NANAKORN, P.; MEESOMKLIN, K. An adaptive penalty function in genetic algorithms for structural design optimization. *Computers and Structures*, v. 79, 2001. Citado na página 46.
- NELDER, J. A.; MEAD, R. A simplex method for function minimization. *The Computer Journal*, v. 7, n. 4, p. 308–313, 1965. Citado na página 28.
- NIELSEN, C. V.; MARTINS, P. A. F. *Metal Forming: Chapter 3 - finite element simulation: A user's perspective*. Academic Press, 2021. 109-180 p. Citado na página 59.

- NOCEDAL, J.; WRIGHT, S. J. *Numerical Optimization*. New York, USA: Springer-Verlag, 1999. 634 p. Citado 3 vezes nas páginas 25, 28 e 53.
- PAPADRAKAKIS, M.; SAPOUNTZAKIS, E. *Matrix Methods for Advanced Structural Analysis*. 2018. 767 p. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 25.
- PARR, J. M.; KEANE, A. J.; FORRESTER, A. I. J.; HOLDEN, C. M. E. Infill sampling criteria for surrogate-based optimization with constraint handling. *Engineering Optimization*, v. 44, n. 10, p. 1147–1166, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 32.
- PASCON, J. P. *Sobre modelos constitutivos não lineares para materiais com gradação funcional exibindo grandes deformações: implementação numérica em formulação não linear geométrica*. 480 p. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) — Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, São Carlos, 2012. Citado na página 60.
- PEDERSEN, N. L.; NIELSEN, A. K. Optimization of practical trusses with constraints on eigenfrequencies, displacements, stresses, and buckling. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v. 25, n. 5-6, p. 436–445, 2003. Citado na página 18.
- PEDROZO, R. Custos das etapas na construção. *Fastenge Fundações*, 2018. Disponível em: <<https://fastenge.com.br/custos-das-etapas-na-construcao/#:~:text=Muitas%20vezes%20se%20economiza%20em,do%20solo%20sem%20economias%20desnecess%C3%A1rias.>> Citado na página 70.
- PETROVIĆ, N.; KOSTIĆ, N.; MARJANOVIĆ, N.; ŽIVKOVIĆ, J.; COFARU, I. I. Effects of structural optimization on practical roof truss construction. *Applied Engineering Letters*, v. 5, n. 2, p. 39–45, 2020. Citado na página 18.
- PETROVIĆ, N.; MARJANOVIĆ, N.; KOSTIĆ, N.; BLAGOJEVIĆ, M.; MATEJIĆ, M.; TROHA, S. Effects of introducing dynamic constraints for buckling to truss sizing optimization problems. *FME Transactions*, v. 46, n. 1, p. 117–123, 2018. Citado na página 67.
- PEZESHK, S.; CAMP, C. V.; CHEN, D. Design of nonlinear framed structures using genetic optimization. *Journal of structural engineering*, v. 126, n. 3, p. 382–388, 2000. Citado na página 66.
- PIROGLU, F.; OZAKGUL, K. Partial collapses experienced for a steel space truss roof structure induced by ice ponds. *Engineering Failure Analysis*, v. 60, p. 155–165, 2016. Citado na página 18.
- PROENÇA, S. P. B. *Análise não-linear de estruturas: Notas de aula*. São Carlos, SP, Brasil: EESC-USP, 2007. Citado 4 vezes nas páginas 59, 60, 61 e 64.
- QIAN, J.; YI, J.; CHENG, Y.; LIU, J.; ZHOU, Q. A sequential constraints updating approach for kriging surrogate model-assisted engineering optimization design problem. *Engineering with Computers*, v. 36, p. 993–1009, 2020. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 32.
- RAJEEV, S.; KRISHNAMOORTHY, C. S. Discrete optimization of structures using genetic algorithms. *Journal of Structural Engineering*, v. 118, n. 5, p. 1233–1250, 1992. Citado na página 86.

- RAO, S. S. *Engineering optimization: theory and practice*. Chichester: John Wiley & Sons, 2020. 798 p. Citado na página 41.
- REDDY, J. N. *An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis*. Texas, USA: Oxford University Press, 2004. Citado 2 vezes nas páginas 60 e 63.
- RODRIGUES, R. de O. *Análise dinâmica bidimensional não-linear física e geométrica de treliças de aço e pórticos de concreto armado*. 297 p. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) — Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, São Carlos, 1997. Citado na página 61.
- SAKA, M. P. Optimum design of pin-jointed steel structures with practical applications. *Journal of Structural Engineering*, v. 116, n. 10, p. 2599–2620, 1990. Citado na página 69.
- SANTOS, J. S. dos. *Desconstruindo o projeto estrutural de edifícios: concreto armado e protendido*. São Paulo: Oficina de Textos, 2017. 121 p. Citado na página 53.
- SCHEVENELS, M.; MCGINN, S.; ROLVINK, A.; COENDERS, J. An optimality criteria based method for discrete design optimization taking into account buildability constraints. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v. 50, p. 755–774, 2014. Citado na página 46.
- SCHUTTE, J. F.; GROENWOLD, A. A. Sizing design of truss structures using particle swarms. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v. 25, p. 261–269, 2003. Citado na página 86.
- SHI, R.; LIU, L.; LONG, T.; WU, Y.; TANG, Y. Filter-based adaptive kriging method for black-box optimization problems with expensive objective and constraints. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 347, p. 782–805, 2019. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 32.
- SIENGE. *Construção Civil passo a passo: do projeto à entrega das chaves*. 2022. Disponível em: <<https://www.sienge.com.br/blog/construcao-civil-passo-a-passo-do-projeto-a-entrega-das-chaves/>>. Citado na página 70.
- SOH, C. K.; YANG, J. Fuzzy controlled genetic algorithm search for shape optimization. *Journal of computing in civil engineering*, v. 10, n. 2, p. 143–150, 1996. Citado na página 50.
- SPILLERS, W. R.; MACBAIN, K. M. *Structural Optimization*. New York, USA: Springer, 2009. 301 p. Citado na página 26.
- STROMBERG, L. L.; BEGHINI, A.; BAKER, W. F.; PAULINO, G. H. Topology optimization for braced frames: Combining continuum and beam/column elements. *Engineering Structures*, v. 37, p. 106–124, 2012. Citado na página 16.
- SULEMAN, A.; SEDAGHATI, R. Benchmark case studies in optimization of geometrically nonlinear structures. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v. 30, n. 4, p. 273–296, 2005. Citado na página 67.

- TAPAO, A.; CHEERAROT, R. Optimal parameters and performance of artificial bee colony algorithm for minimum cost design of reinforced concrete frames. *Engineering Structures*, v. 151, p. 802–820, 2017. Citado na página 16.
- TEJANI, G. G.; SAVSANI, V. J.; BUREERAT, S.; PATEL, V. K.; SAVSANI, P. Topology optimization of truss subjected to static and dynamic constraints by integrating simulated annealing into passing vehicle search algorithms. *Engineering with Computers*, v. 35, p. 499–517, 2019. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 18.
- TEJANI, G. G.; SAVSANI, V. J.; PATEL, V. K. Adaptive symbiotic organisms search (SOS) algorithm for structural design optimization. *Journal of Computational Design and Engineering*, v. 3, p. 226–249, 2016. Citado 3 vezes nas páginas 43, 44 e 45.
- TEJANI, G. G.; SAVSANI, V. J.; PATEL, V. K.; MIRJALILI, S. Truss optimization with natural frequency bounds using improved symbiotic organisms search. *Knowledge-Based Systems*, v. 143, p. 162–178, 2018. Citado 3 vezes nas páginas 43, 44 e 45.
- TORII, A. J.; LOPEZ, R. H.; MIGUEL, L. F. F. Modeling of global and local stability in optimization of truss-like structures using frame elements. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v. 51, n. 6, p. 1187–1198, 2015. Citado 3 vezes nas páginas 18, 19 e 67.
- VARMA, T. V.; SARKAR, S.; MONDAL, G. Buckling restrained sizing and shape optimization of truss structures. *Journal of Structural Engineering*, v. 145, n. 5, 2020. Citado 3 vezes nas páginas 19, 68 e 75.
- WANG, G. G. Adaptive response surface method using inherited latin hypercube design points. *Journal of Mechanical Design*, v. 125, n. 2, p. 210–220, 2003. Citado na página 42.
- WEI, L.; TANG, T.; XIE, X.; SHEN, W. Truss optimization on shape and sizing with frequency constraints based on parallel genetic algorithm. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v. 43, p. 665–682, 2011. Citado 3 vezes nas páginas 43, 44 e 45.
- WU, Y.; YIN, Q.; JIE, H.; WANG, B.; ZHAO, J. A RBF-based constrained global optimization algorithm for problems with computationally expensive objective and constraints. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v. 58, p. 1633–1655, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 32.
- YANG, X.-S. *Firefly Algorithms for Multimodal Optimization*. In: Watanabe O., Zeugmann T. (eds) *Stochastic Algorithms: Foundations and Applications. SAGA 2009. Lecture Notes in Computer Science*. Berlin, Germany: Springer, 2009. v. 5792. 169-178 p. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 36.
- YANG, Z.; QIU, H.; GAO, L.; CAI, X.; JIANG, C.; CHEN, L. Surrogate-assisted classification-collaboration differential evolution for expensive constrained optimization problems. *Information Sciences*, v. 508, p. 50–63, 2020. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 32.
- YOO, C. H.; LEE, S. C. *Stability of Structures: Principles and applications*. Burlington, MA, USA: Elsevier Inc, 2011. 523 p. Citado na página 18.
- ZEGARD, T.; PAULINO, G. H. Bridging topology optimization and additive manufacturing. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v. 53, n. 1, p. 175–192, 2016. Citado na página 16.

- ZENG, Y.; CHENG, J.; LIU, J.; ZHANG, P. An efficient constrained global optimization method through adaptively adjusting predicted feasible region and its application in buckling design of stiffened cylindrical shell with variable ribs. *Oceans*, p. 1–8, 2022. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 32.
- ZHANG, X.; RAMOS Jr., A. S.; PAULINO, G. H. Material nonlinear topology optimization using the ground structure method with a discrete filtering scheme. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v. 55, n. 6, p. 2045–2072, 2017. Citado na página 67.
- ZHANG, Y.; HAN, Z.-H.; ZHANG, K.-S. Variable-fidelity expected improvement method for efficient global optimization of expensive functions. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v. 58, p. 1431–1451, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 32.
- ZHAO, L.; WANG, P.; SONG, B.; WANG, X.; DONG, H. An efficient kriging modeling method for high-dimensional design problems based on maximal information coefficient. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v. 61, p. 39–57, 2020. Citado na página 31.
- ZIEMIAN, R. D.; MCGUIRE, W. *Tutorial for MASTAN2: version 3.0*. John Wiley & Sons, 2007. 68 p. Citado 4 vezes nas páginas 22, 46, 69 e 74.
- ZUO, W.; BAI, J.; LI, B. A hybrid OC–GA approach for fast and global truss optimization with frequency constraints. *Applied Soft Computing*, v. 14, p. 528–535, 2014. Citado na página 43.