EXPOSIÇÃO DOS ELEMENTOS

D'ARITHMETICA

Para o uso dos Estudantes do Collegio de
S. BARBARA na Cidade de
PELOTAS

PELO DIRECTOR DO MESMO COLLEGIO

A. L. SOARES

Official d'Artilheria Lente d'Accademia Polytechnica de Portugal, Official da Antiga e muito nobre Ordem da Torre e Espada do Valor Lealdade e Merito, Cavalleiro da Ordem de S. Bento d'Aviz etc.

1. Volume

DO CURSO D' INSTRUCÇAÕ PRIMARIA

PELOTAS

TYP. DE L. J. DE CAMPOS

RUA DO COMMERCIO N. 9.

1848.

Ill.mo Snr.

JOSE ANTONIO DE FIGUEIREDO JUNIOR

Debaixo da impressão que recebi na minha patria pelos successos da ultima guerra, acolher-me em vossa amizade foi a primeira direcção.

Vós me recebesteis com aquella estima que dá o valor aos beneficios, e unindo vossa protecção ao interesse que vos tem sempre inspirado a prosperidade do pays em que nos achamos, me proporcionasteis os meios necessarios, e os auxilios da vossa influencia para eu installar o Collegio que me obrigou á composição d'este breve compendio. De fraco valor è elle, ninguem milhor que eu conhece o pouco que vos offereço por esta dedicação; porem não intento pagar agora o muito que vos devo; e peço que aceiteis o meu offerecimento como uma expressão de reconhecimento e amizade de vosso

Primo e att.o Cr.o
Antonio Luiz Soares

TABOA.

DO QUE SE CONTEM N'ESTE PRIMEIRO TOMO.

OBJECTO DO CURSO

Guiar os primeiros passos dos Estudantes nos ensaios da sua intelligencia, e fazer-lhes adquirir o habito das investigações, é o que mais cumpre saber na exposição dos principios scientificos.

Effectivamente é da maior importancia.

1.º Dar conhecimentos exactos dos elementos das sciencias.

2.º Que as idêas se apresentem com rigor e ordem, afim de que ao mesmo tempo que se vão adquirindo sirvão para facilitar o desenvolvimento das faculdades intellectuaes.

3.º Que se trate a materia de modo que seja facil d'applicar ás artes para coadjuvar os progressos da industria.

Temos procurado estes tres pontos de vista mais essenciaes, para compôr o presente compendio d'Arithmetica.

Observando as diversas quantidades, que a natureza e a arte nos offerecem, é que chegamos á difinição da quantidade em geral: e só depois de muitas numerações concretas, tomando as quantidades que se apresentão debaxo da idêa de numero ou compondo quadros de unidades figuradas, é que expomos a numeração abstractivamente. Alem das noções exactas que se adquirem com estes meios de representação, os meninos conservão mais attenção, e sem enfado chegão a escrever e a ennunciar os numeros. (*Secção* 1.)

Juntando a unidade successivamente a si mesmo, se chega á addicção d'alguns numeros, e d'esta se passa á multiplicação: do mesmo modo descendo de qualquer numero para a unidade, se faz a subtracção de pequenos numeros, e depois se passa á divisão.

Attendendo assim á ligação das idêas, se vão formando d'esde o começo as fortes convicções das mathematicas, não só para que os discipulos comprehendão a theoria d'Arithmetica, mas tambem para dar ás suas faculdades tal gráo d'aperfeiçoamento, que facilite muito os outros estudos.

Cada uma d'estas opperações podem resolver muitos problemas necessarios nos usos da sociedade; entrar n'estas applicações é accrescentar á exacção, a importancia e o gosto que se pode tomar da sciencia. . . . . (*Seccaõ* 2ª)

Meditar sobre as idêas ellementares que se adquirirão nas duas secções de que temos feito menção, afim de entrar em outros desenvolvimentos a que a sciencia tem chegado é alargar o campo da instrucção, é abrir a immensa carreira que tem a percorrer o Arithmetico de mais alcance para poder resolver questões mais complicadas que exigem alguns d'estes desenvolvimentos. Aqui o methodo analitico nos hade gui-

ar onde o calculo for necessario sem fazer distincção dos casos, nem attender ao grande numero de regras que se ensinão ordinariamente nas escólas, e em muitos tratados d'Arithmetica Commercial, como: Regras de juros, de cambio, de companhia, de liga & &. Estas regras que se entregão à lembrança esquecem rapidamente, porque não são confiadas com segurança pelo raciocinio: ao contrario afeito o discipulo a tirar dos principios geraes todos os recursos que elles offerecem torna-se, por assim o explicar, o inventor das regras, e pode poupar a sua memoria para outros estudos. . . (*Seccaõ* 3ª)

Muitas applicações de grande uso nas artes exigem outras opperações alem das quatro mencionadas; é mister pois passar-mos a desenvolvê-las, e mostrar novos elementos da sciencia dos numeros. . . . . (*Seccaõ* 4ª)

Não levarei mais longe esta synopsis: a penuria de compendios accommodados ao objecto da instrucção primaria do Collegio, é o motivo que me determinou á composição d'esta pequena obra. Há ja um grande numero d'Arithmeticas; mas umas em lugar de exercitarem o raciocinio do discipulo sobre a ligação dos principios em que fundão as opperações, pelo contrario habitua-o a não raciocinar, tratando só do calculo; e outras destinadas para os estudos especiaes das Mathematicas, suas demonstrações muito sabias e elegantes. não são comprehendidas pela maior parte dos alumnos, que desde a primeira enfancia entrão na sciencia, pela necessidade que d'ella ha para entenderem bem os outros estudos.

É mister com os discipulos de poca idade seguir uma exposição accommodada á fraqueza do seu raciocinio, onde as demonstrações sejão as mais elementares ; porem seguindo sempre a marcha regular da intelligencia, para aprenderem a observar, e sobre tudo a bem raciocinar.

E tanto na Arithmetica como em todas as sciencias naturaes, nas moraes, e em qualquer posição que se ache o homem, o que mais lhe convem é saber observar e raciocinar para regular a sua conducta do milhor modo possivel; pela observacão distinguirá todas as particularidades da situacão, e pelo raciocinio combinará as idêas adquiridas, e calculará as consequencias dos diffentes partidos que pode tomar. Se não observar bem, as idêas que adquirir serão falsas ou incompletas, e o calculo ajunctara os erros das observações: se não souber raciocinar, as idêas, inda que exactas, por mal combinadas podem conduzir a consequencias erroneas, e talvez bem perigozas para a existencia.

É pois o objecto do curso: Exercitar os alumnos nas observações, e raciocinios até alcançar o grão d'aperfeiçoamento possivel para as suas faculdades intellectuaes; e apar do desenvolvimento que estas forem tomando, ir conduzindo-os aos fins a que se destinão os principios das sciencias mathematicas e fisicas na instrucção primaria do Collegio.

EXPOSIÇÃO DOS ELEMENTOS D'ARITHMETICA

SECÇÃO 1.

DA FORMAÇAÕ DOS NUMEROS

§ 1.

Observações

Systema de Composiçaõ

Tirando algumas cousas d'uma collecção dizemos que o todo diminue, e se lhe juntamos mais cousas dizemos que augmenta.

Tambem observando diversas collecções nós dizemos, que é maior a que tem mais cousas, e menor a que tem menos

Podemos pois considerar estas reuniões como modificações para menos, ou para mais d'uma só collecção dos mesmos objectos.

Para avaliar vagamente qual é a maior ou menor de duas collecções, basta que taes ajuntamentos possão ser representados pelos dedos das maõs; porque tantas vezes temos olhado para elles, que sem confusão os representamos junctamente em nossas idêas, bem como as outras collecções que com elles podemos formar.

Desde meninos, ~~que~~ correndo os dedos um a um, articulamos os seguintes nomes.

um, dous, tres, quatro, cinco, seis, sette, oito, nove, dez.

e ao principio dizendo : um dedo e um dedo fazem dous dedos; dous dedos e um dedo fazem tres dedos; e assim por diante; só depois de ter usado muitas vezes d'este modo de fallar, é que se faz abstracção da palavra dedo, e se nomêa uma só vez cada numero.

Mas se as reuniões são maiores é difficil fazer a avaliação á simples vista, e a difficuldade está na multidão de cousas que precisamos representar juntas; repartindo-a em grupos ou collecções pequenas formaremos idêa do todo: por exemplo se não estivessemos habituados a ver reuniões de mais de cinco cousas, e nos apresentassem um monte de dez, e outro de nove teriamos difficuldade em declarar qual era o maior; porem se nos fizessem de cada collecção duas partes, milhor veriamos todas as cousas. Se repartissem o monte de dez em dous grupos de cinco cousas cada um, e o de nove tambem em dous sendo um de cinco, logo ao primeiro golpe de vistas deciririamos. Conseguintemente, como estamos habituados d'esde a infancia a observar o ajuntamento de todos os dedos das nossas mãos, podemos nas collecções maiores destacar uma por uma as cousas que n'ellas se contem, e formar grupos de dez.

Na Est. 1. onde representamos as cousas por pontos, vê-se realmente no alto do quadro as collecções que sabemos exprimir por seus nomes; a de dez representa o primeiro grupo destacado, e por esta circunstancia se colloca em

correspondencia com a primeira denominação; e tambem se pode exprimir pela palavra um, declarando ser uma desena. Em seguida se observão novos pontos, que designão as cousas que vamos tirando de mais, e diremos successivamente:

dez e um	ou . . .	uma desena e um
dez e dous	» . . .	uma desena e dous
dez e tres	» . . .	uma desena e tres
dez e qurtro . . .	» . . .	uma desena e quatro
dez e cinco . . .	» . . .	uma desena e cinco
dez e seis	» . . .	uma desena e seis
dez e sette	» . . .	uma desena e sette
dez e oitto	» . . .	uma desena e oito
dez e nove . . .	» . . .	uma desena e nove
dez e dez	» . . .	duas desenas.

A reunião de mais um ponto dá duas desenas e um ; e da mesma sorte que se fez de uma desena até duas desenas, se faz de duas desenas até tres desenas, tornando á enunicar com duas desenas os mesmos nomes um, dous, tres, quatro, cinco, seis, sette, oito, nove; e assim tambem passando de tres desenas, a quatro desenas, e depois a cinco desenas ; a seis desenas, a sette desenas, a oito desenas, a nove desenas, e finalmente a dez desenas. Reproduzirão-se para os ajuntamentos das desenas, os mesmos nomes de que nos servimos nas primeiras collecções ; porque procedemos com os grudos de desenas do mesmo modo que com as cousas singelamente.

Se o monte de cousas é ainda maior, e continuamos a formar mais grupos, a difficuldade que queremos vencer apparece denovamente; porque teremos quasi os mesmos embaraços para vêr os grupos, como tinhamos ao principio para vêr as cousas; porem se dispósermos os novos grupos em ordens de dez ao lado da primeira, esta disposição nos permitte levar a decomposição até ter dez ordens, e deste modo chegamos a formar a collecção que nos apresenta a Est. 2., onde representamos os grupos de desenas por traços, ou pequenas linhas. E vê-se com effeito no alto do quadro, que dispômos d'estas ordens como das cousas singelamente, e por isso ainda aqui empregaremos os mesmos nomes juntando-lhes uma nova palavra para distincção, diremos:

uma centena, ou um cento
duas centenas, ou dous centos
tres centenas & &

Ora na formação da segunda centena seguimos a mesma marcha, e os mesmos nomes que na primeira, por isso juntando a esta cada uma das cousas que vamos destacando, como se vê ao longo da respectiva columna, diremos:

uma centena e um . . . ou . . . cento e um
uma centena e dous . . » . . . cento e dous
uma centena e tres & & até chegar a duas centenas: depois de duas centenas até tres, como mostra a segunda columna do quadro, e assim por diante.

D'este modo formamos a serie natural de

collecções, e um encadeamento de nomes que chamaremos serie natural dos numeros; porque a cada uma das denominações especiaes se tem chamado numero: quando se observa um bando d'homens, ou um grupo d'arvores, se diz um numero d'homens, e um numero d'arvores.

Mas não é por quadros representando cada um dos objectos, que nós escreveremos os numeros; é por um meio commodo mais simples ainda que o modo usual de escrever os nomes, e que não muda d'uma lingua á outra nas diversas nações, que adoptarão a formação dos numeros sobre a base dez.

Cada uma das palavras que nomeião as primeiras collecções são, como se vê no primeiro quadro, designadas por uma só figura, assim:

um	dous	tres	quatro	cinco	seis	sette	oito	nove
1	2	3	4	5	6	7	8	9

Como estes mesmos nomes são empregados nas collecções das desenas, preciso era uma distincção para as figuras, que nos indicasse esta ordem; assentou-se que se collocasse á direita de cada uma o signal-o-chamado zéro:

uma desena duas desenas tres desenas quatro desenas
10 20 30 40 &

De sorte que a figura representando só um

numero simples, sendo acompanhada do sig-
nal-o-designa o mesmo numero composto tam-
bem com a palavra desena.

Sem usar d'outro signal podemos represen-
tar as centenas, escrevendo a figura represnta-
tiva em terceiro lugar.

uma centena	duas centenas	tres centenas
100	200	300
quatro centenas &c.		
400		

Com effeito se uma centena se compõe de
dez desenas, escrevendo este numero 10 é ne-
cessario que se designe a ordem das desenas
collocando, como se sabe, um zero á sua direita:
assim a notação de que nos lembramos para
as centenas é uma consequencia da renova-
ção numerica de dez em dez.

Adoptados os caracteres ou algarismos para
representar-mos os numeros simples, e indican-
do as ordens pelos lugares em que escrever-mos
estas figuras, temos tudo o que é mister para o
fim a que nos propomos; por quanto os nume-
ros de cada uma das ordens são exprimidos
pelas mesmas denominações dos numeros sim-
ples, e não se pode empregar mais.

Dar assim aos algarismos um valor proprio
que depende da forma, e outro local ou relati-
vo ao lugar que o algarismo occupa, é um acor-
do muito ingenhoso, é a maior abreviação que
podia lembrar: com effeito o numero dez e um
ou uma desena e um, se escreve 11; o zéro que

empregamos na representação d' uma desena
não significa mais que a ausencia d'outro alga-
rismo, marca o primeiro lugar, que destinamos
para os numeros simples.

Da mesma sorte escreveremos :

Uma desena e dous 12
uma desena e tres 13
& & até o numero nove disenas e nove 99

Respectivamente aos numeros maiores, como
sabemos, que as centenas se escrevem em ter-
ceiro lugar, temos a collocar o seu algarismo
á esquerda das desenas, ou do zéro que mar-
que o lugar, quando estas faltem ; como em
uma centena e um, que se escreverá . . 101
uma centena e dous 102
uma centena e tres 103
& & até nove centenas nove desenas e nove 999

§ 2.

Espressão dos numeros mais consideraveis. Numeração decimal abstractivamente.

Continuaremos a serie natural dos numeros
considerando as dez centenas como um só gru-
po, que distinguiremos dizendo um milhar ou
mil ; e se escreverá pela mesma figura signifi-
cativa 1, segnindo-se á sua direita tres zéros,
que marcão os lugares dos numeros simples, de-
senas, e centenas 1000
Este numero augmentado de 1 dá mil e um 1001

depois segue-se mil e dous 1002
mil e tres 1003
e assim successivamente ate dous mil . 2000
empregando n'esta tirada as mesmas denominações da primeira, e a mesma escripta. Compondo novas tiradas, chegaremos finalmente a formar um grupo de dez mil, ou uma desena de mil 10000

Seguindo a mesma marcha arranjeremos novos grupos de desenas de mil até dez, i-é, uma centena de mil 100000

Começa-se outra centena de mil, e assim por diante até dez, que fazendo mil vezes mil diremos, para maior brevidade, um milhão 1000000

Dispondo os grupos de milhões até chegar a dez, ou uma desena de milhões 10000000
se formão outras desenas de milhões, e na mesma conformidade se passa a uma centena de milhões 100000000
e d'estas a mil milhões que denominaremos um billião 1000000000

Depois se formaria outra classe ternaria de desenas de billiões, centenas de billiões, mil billiões ou um trillião ; e do mesmo modo a classe de trilliões, quartilliões, quintilliões &.

Para apertar mais o estylo se faz uso das palavras

Onze . .	em lugar de .	dez e um
doze . .	» . .	dez e dous
treze . .	» . .	dez e tres
quatorze. .	» . .	dez e quatro
quinze . .	» . .	dez e cinco
vinte . .	» . .	duas desenas
trinta . .	» . .	tres desenas
quarenta .	» . .	quatro desenas
cincoenta .	» . .	cinco desenas
sessenta .	» . .	seis desenas
settenta .	» . .	sette desenas
oitenta .	» . .	oito desenas
noventa .	» . .	nove desenas
dosentos .	» . .	dous centos
tresentos .	» . .	tres centos
quinhentos .	» . .	cinco centos

Segundo as convenções adoptadas a escripta dos numeros é tão simples, que pode acompanhar a enunciação; esta começa sempre pela classe mais ellevada, que é tambem a primeira que se escreve, porque a escripta começa da esquerda. Todas as classes são ternarias excepto a mais ellevada, que pode ter dous algarismos ou um só. Á medida que se enuncião estas classes temos a escrever successivamente todos os algarismos, ou zéros quando faltem alguns; para exemplo, – dosentos vinte sette mil, trinta e oito – como este numero não passa de milhares, será escripto só com duas classes:

dosentos vinte sette mil
2 2 7
trinta oito
3 8

e porque não há centenas assentaremos -0- á esquerda de 3, quando escrever-mos os algarismos seguidamente; e ter-se-ha . . . 227038

Eis-aqui outros exemplos para exercicio.
Cento nove mil, e sette . . . 109007
Tres milhões, quinhentos vinte nove mil, dosentos cincoenta e sette . . 3529257
Dosentos e sette billiões, trinta milhões, dosentos sincoenta e sette mil 207030257000

O modo de ler os numeros escriptos por algarismos é igualmente facil: o primeiro algarismo da direita designa objectos, o segundo desenas, o terceiro centenas, o quarto milhares, o quinto desenas, o sexto centenas, o septimo milhões, e assim para diante nas outras classes ternarias. Divida-se pois o numero nestas tiradas principiando da direita para a esquerda, e dê-se a cada uma d'estas divisões o seu valor, assim:

billiões milhões mil
1 5 3 9 4 2 7 4 8 5 6 3 | Pronuncia-se 153 billiões, 942 milhões, 748 mil 563 objectos
centenas desenas centenas desenas centenas desenas centenas desenas

bill milh mil
8 5 2 6 5 0 0 8 3 7 4 | Pronuncia-se 85 billiões, 265 milhões, 8 mil, e 347.
desenas centenas desenas centenas desenas

tril bill milh mil
30 050 000 060 000 | 30 trilliões, 50 billiões, e 60 mil.
desenas desenas desenas

Temos observado o modo mais facil de conceber a formação dos numeros; e assim como escolhemos os pontos e traços para construir os quadros, podiamos tomar um monte de grãos ou tentos para facilitar ainda mais o systema de composição.

Viu-se depois, que um pequeno numero de palavras differentes bastava para nomear todas as collecções; porque com a divisão em classes ternarias, se reduzem aos nove centos noventa e nove numeros do §. 1. todos os outros, accrescentando somente as denominações das classes.

E em 3. lugar vimos, que por meio dos caracteres convencionados, e exprimindo pelas ordens d'estes algarismos, as ordens da composição dos numeros, tinhamos um meio mui simples de os escrever.

Distingue-se pois- numeração propriamente dita - numeração fallada - e numeração escripta: e esta é tão simples como a primeira; mas a numeração fallada é um pouco mais complicada, pela necessidade de adoptar algumas palavras mais. que as dez primeiras denominações, afim de evitar as repetições da palavra dez, que era necesserio empregar, como para exemplo: Dez-dez-dez em lugar de mil.

Ao syxtema ou arte de formar, nomear, e escrever os numeros é que se dá o nome de numeração decimal, n'este cazo em que fazemos servir de base a idêa que temos do numero dez. Em outra supposição qualquer, concebe-se bem a marcha que se teria a seguir para formar os numeros segundo a base que se escolhesse.

Passemos agora a algumas questões que nos podem inteirar do systema perfeitamente: questões a que damos o nome de problemas, porque exigem uma resposta chamada solução do problema, e que depois demonstremos que se fez o que nos foi proposto, apoyando os raciocinios nos conhecimentos adquiridos sobre a materia, que presentemente é a simples numeração.

1. Pergunta-se quantas desenas se comprehendem no numero 83765? . R. . 8376 porque 83765 vem a ser 83760 mais 5

2. Quantos milhares se comprehendem no

mesmo numero? . . . . . . R. . 83 porque 83765 é igual a 83000 mais 765

3 Quantos milhões se comprehendem no numero do ultimo schema? . R. . 30050000

4. Com 3000 objectos, mais 700, depois 30, e finalmente 8, quantas cousas se ajuntão em um todo? . . . . . R. . . 3738 por quanto esta solução se traduz em 3 milhares, 7 centenas 3 desenas, e 8, que são os mesmos numeros que se considerão como partes do todo.

5. Quantas vezes se poderia tirar dez cousas a um monte de 400? . . . R. . . 40 visto que 400 é o numero 40 desenas, e que de cada vez se tira uma desena.

A forma dos caracteres com que representamos os numeros, não foi apresentada pelos inventores do systema de numeração; no T, 1 da Hist. das Math. por Montucla pode-se ver um quadro dos caracteres arithmeticos, que se achão nos manuscriptos dos Arabes, alguns bem dissimelhantes dos que temos oje em uso. Seria preciso para achar a origem d'Arithmetica atravessar os passados seculos, ir até ao berço dá humanidade, empresa impossivel; porque nenhum dos escriptos de tão remota antiguidade tem podido chegar até nós. O que se pode observar é que a Arithmetica dos Hebreus, dos Gregos, e dos Romanos differia muito da Arithmetica moderna, não só na divisão dos numeros em periodos de unidades, desenas, centenas, etc mas tambem nos carecteres para a sua representação.

Naturalmente as nações antigas familiarisadas com a forma dos caracteres do alfabeto, se lembrarão de os adoptar na composição dos numeros. Os Gregos em porticular recorrerão a todas as letras, e os Romanos empregarão algumas; nós vamos expôr aqui o systema que os ultimos seguirão; porque se encontra nas moedas antigas, e em muitos edeficios para designação das epochas; e ainda oje são empregados em muitos escriptos como numeros d'ordem.

I .	j .	um	L . .		cincoenta
II .	ij .	dous	C . .		cem
III .	iij .	tres	CC . .		dosentos
V . .	.	cinco	CCC .		tresentos
X . .	.	dez	D ou IƆ		quinhentos
XX .	.	vinte	M ou CIƆ		mil
XXX .	.	trinta			

Afim de completarem a serie dos numeros até mil, assentarão em escrever os caracteres dos numeros menores á direita dos maiores para augmentar a estes o valor, e á esquerda para lho diminuir.

IV quatro VI seis VII sette VIII oito IX nove XI onze XL quarenta LX sessenta XC noventa CX cento e dez CL cento e cincoenta CD quatro centos DC seis centos MC mil e cem etc.

Mudavão tambem as unidades em milhares pondo-lhes uma risca por cima . $\overline{\text{X}}$. 10000

O systema de numeração presentemente em uso foi introduzido na Europa no principio do Seculo 13 pela invasão dos Arabes; estes povos confessavão que no 10.º seculo tinhão aprendido dos Indios os signaes, e a ingenhosa invenção da escala decimal.

Parece, pelo que se observa inda oje na infancia, que os homens forão condusidos naturalmente a contar pela escala decimal; com tudo só dos Indios é que se sabe com certeza que fizerão uso d'ella, e consta que alguns povos d'antiguidade contavão por classes de 4 e 5, talvez porque não precisassem de numeros muito grandes pela simplicidade em que vivião. Consta tambem que os antigos Chinos contavão pelo systema binario, e o celebre Leibnitz o quiz restabelecer porque via n'elle a imagem da creação; a unidade com o zéro formão n'este systema todos os numeros.

§ 3.º

Observações sobre diversas quantidades.

Avaliação d'estas quantidades

Temos formado idêa dos numeros por um ajuntamento de cousas iguaes entre si, que destacamos uma por uma afim de se poder reconhecer o grão a que elle chega na escala de numeração, e distingui-lo pela denominação respectiva, ou rèpresenta-lo pela escripta. O encadiamento de denominações que temos dado deve pois ficar gravado na memoria, recitando-o sem estar a decompôr collecções; n'este caso em que contamos as cousas sem as ter á vista, se diz contar abstractivamente.

Porem destacar um por um todos os objectos de qualquer collecção que nos apresentem, ha-de parecer, em muitas circunstancias, uma operação interminavel, v. g. n'avaliação d'um grande monte de trigo. Em taes cazos o que se faz é encher um vaso, e destacar porções d'estas: verdade é que não avaliamos com todo o rigor, algumas differenças haverão que se não distingão; mas a perda d'alguns graõs de trigo sem inconveniente se pode soffrer.

Em outras muitas avaliações teremos assim precisão de considerar uma porção do todo. Podemos dizer immediatamente á vista de dous edeficios qual é o mais comprido, e qual o mais largo, ou o mais alto. Olhando para dous campos poderemos dizer logo qual é o maior; igualmente decidiremos entre dous corpos de madeira ou de pedra; etc. etc. mas isto não basta em muitos usos da sociedade: o negociante, para exemplo, não se podia regular nas suas compras e vendas estimando assim vagamente.

Para elle saber se um certo comprimento era igual ao seu palmo, naturalmente applicaria no

principio do comprimento um dos extremos do palmo, e observaria se as duas outras extremidades se ajustavão uma sobre a outra, em tal cazo diria que o comprimento dado era igual ao seu palmo; e quando se não verificasse esta igualdade, e que o comprimento fosse muito grande, dividil-o-hia em porções iguaes ao palmo, e contaria o numero de palmos.

Quando queremos avaliar os corpos por suas faces somente, da mesma sorte que comparamos os campos sem attender á profundidade das terras, ou que sem olharmos á grossura das taboas encaramos o soalho d'uma sala só no sentido do comprimento e da largura; em todas estas circunstancias se diz que avaliamos superficies ou arias. Então com um quadrado, que é figura por todos conhecida, v. g. d'um palmo de lado, verse-hia o numero d'estes quadrados que era necessario para cobrir toda a area.

Se marcassemos no espaço da natureza a porção que um corpo occupa, i-é, o seu volume, em retirando o corpo podia-se observar, como se faria no interior d'uma sála, o numero d'outros corpos iguaes entre si, que fosse possivel arranjar unidos uns aos outros.

Para exemplo se quizessemos conhecer o volume d'um livro, e que tomassemos para comparação um dado de jogo, veria-mos o numero d'estes, que seria possivel arranjar so-

bre a superficie d'uma meza na parte que o
livro cobria, supponhamos 100; esta primei-
ra camada occupa somente até á altura do
dado o volume do livro, se este tiver d'es-
pessura 3 d'aquellas alturas, são precisas tam-
bem 3 camadas ou 3 centenas de dados pa-
ra occupar o volume do livro.

Para os liquidos nos servimos tambem de
vasos como n'avaliação dos grãos e outras
cousas seccas; enche-se successivamente até va-
sar a tina que contem o liquido, contando as
vezes que se encher o vaso.

Dizemos que dous corpos tem o mesmo pe-
zo quando, sustendo cada um d'elles, julga-
mos que exigem o mesmo esforço. A balança,
que todos conhecemos, é uma maquina que dá
mais exactidão. No caso de desigualdade, o me-
io de reconhecer-mos os numeros que hão de
representar os corpos, é tomando um cer-
to pezo para comparação, e contar-mos o nu-
mero d'estes que pode equilibrar o pezo de
cada corpo.

O tempo sabemos que se conta pelo movi-
mento d'agulha d'um relogio; ella passa por um
certo ponto do mostrador, e depois de fazer o
seu giro toca denovamente no mesmo ponto; o
tempo é que nos deixa ver que estes dous effei-
tos não succedem no mesmo instante. Um nu-
mero pois de divisões iguaes feitas sobre o ca-
minho d'agulha servirá para avaliar o tempo;
por quanto correspondem a intervallos iguaes.

Se quizessemos trocar directamente os pro-
ductos de nossa lavra, encontrariamos em mui-
tos casos grandes embaraços; o lavrador, para
exemplo, que tivesse trigo de sobra, e quizesse
comprar pannos, não encontrando um possui-
dor d'estas fazendas com precisão de trigo, te-
ria de passal-o a outros em cambio d'um ge-
nero conveniente. O producto com que elle
pode comprar com facilidade tudo que preci-
sar é o dinheiro.

As moedas são fabricadas de certos metaes
para que se possa satisfazer facilmente a gran-
des e pequenos valores.

O ouro e a prata são de grande valor, por-
que os meios d'extracção são custosos, as moe-
das que se cunhão com estes metaes não são
sujeitas a grandes rebates, condição de gran-
de importancia. Com estas moedas se pode
transportar sem incommodo os grandes valo-
res de que ordinariamente se precisa; e para
não se empregar moedas tão pequenas, que
facilmente escapem das mãos, cunhão-se ou-
tras de cobre ou bronze que servem nos pe-
quenos valores.

Ou se conte um monte de moedas, ou se
considere cada uma separadamente, pelo seu
pezo em ouro prata ou cobre, ou tambem pela
sua decomposição em outras moedas, teremos
o numero que pode represental-a.

N'estas avaliacões comparamos um compri-
mento com outro, uma superficie com outra

superficie, um volume com outro volume, e um pezo com outro pezo; em geral procuramos quantas vezes n'um todo se contem a porção que tomamos debaixo da idêa que nos suscita a palavra um, e que por isso lhe daremos o nome de unidade.

É mister designar a porção que se considera por unidade, afim de se reduzir a concepção do todo á idêa que se forma d'esta porção; maior ou menor se pode ella tomar, mas sempre em vista das relações que os povos tem formado entre si. Com effeito uma pessoa que quizesse medir uma distancia podia usar d'uma unidade qualquer; v. g. o comprimento do seu palmo; mas para que os outros, pelo numero que resultasse da medição, podessem fazer idêa da distancia, preciso era que conhecessem bem a medida.

Por se poder tomar arbitrariamente maior ou menor, é que tem lugar o dizer-se que a unidade é tambem uma quantidade; não acontece assim quando se considera como cousa unica, ou que não é susceptivel de divisões. Estas palavras quantidade, e grandeza se empregão muitas vezes para significarem a mesma cousa; mas a ultima suppoe uma comparação que a outra não exige, é nisto que consiste a differença. Quando medimos um comprimento, e achamos, v g, 10 palmos, este resultado é a grandeza da quantidade, ou do objecto real que medimos; tam-

bem lhe chamamos numero, mas com a denominação de concreto, porque a palavra numero é applicavel com especialidade quando contamos abstractivamente.

Nos tratados d'Arithmetica não se falla d'outras especies de quantidades alem d'aquellas que havemos mencionado; mas não se deve ignorar que este termo comprehende a intensidade das forças, da luz, do calor etc, e tambem a intensidade das sensações, por quanto todas podem ser modificadas prra mais e para menos. Das ultimas não trataremos, porque não são susceptiveis d'uma avaliação rigorosa; as outras mesmo ficão reservadas para o lugar competente, aqui não podem ser tratadas sem perda do rigor com que devemos explical-as.

Para as especies de quantidades que se empregão nas artes, e no Commercio, há uma multidão de medidas tão irregulares na sua nomenclatura, e tão variaveis na grandeza, que difficultão as relações commerciaes, e muitas vezes tem dado lugar á fraude.

Um só systema devemos destinguir isento de tão graves inconvenientes; são os pezos e medidas metricas, assim chamadas, porque dependem do metro base invariavel, e que se pode verificar em todo o tempo, e em toda a parte.

Em poucas palavras se encerra a nomenclatura d'este systema:

O metro — é propriamente a unidade linear, i-é, de comprimento.

Metro quadrado-unidade para as superficies.

Metro cubico-unidade de solidez, e capacidade.

Gramma- unidade de pezo.

Deve-se contar com mais algumas vozes necessarias para designar-mos certos multiplos, e sub-multiplos; pois convem que hajão medidas proporcionaes á grandeza das cousas que se querem avaliar.

As medidas quadradas são substituidas pelas lineares. Na avaliação das superficies o meio que exposemos, por ser o que naturalmente se apresenta ás primeiras investigações, não é seguido na pratica. Se nós observamos, para ex.º, que um soalho tem 10 metros de comprimento, 10 quadrados de metro se podem collocar uns ao lado dos outros, e não occupparão á largura se não um metro; de sorte que se o soalho tivesse 8 metros de largura, e que se pudesse dividir em 8 d'estas tiras, seria preciso contar 8 desenas de unidades quadradas afim de cobrir todo o soalho. Assim para medir as saperficies d'esta forma, que em Geometria se chamão rectangulos, basta ter o seu comprimento e largura: em quanto ás outras de differente forma, a Geometria ensina a reduzil-as a rectangulos.

O metro cubico é um corpo de forma regular como o dado de jogo, com as suas dimensões comprimento, largura, e altura, cada uma da grandeza d'um metro. Porem esta unidade é ideal como a das superficies; os volumes tambem se determinão por medidas lineares, o modo que temos indicado para avaliar-mos o volume d'um livro, ensina como nos podemos servir d'ellas em todos os corpos da mesma figura, conhecida pelo nome de parallepipedo rectangulo; para as outras a Geometria trata tambem das reducções precisas.

Dividindo um metro cubico d'agoa n'um milhão de partes iguaes, o Gramma é o peso que corresponde a uma d'estas porções, usando do liquido com as mais escrupulosas precauções; porque uma certa quantidade d'agoa não occupa sempre o mesmo volume, desde o maior calor até ao principio da congelação diminue á medida que vai resfreando; e alem disso pode estar impregnada de materias estranhas, que tambem fação variar o seu pezo.

Para completar a reforma de pezos e medidas, os Francezes tomarão tambem uma unidade monetaria, que pelo seu pezo tem connexão com o metro, é o franco moeda de prata que peza 5 grammas.

Assim o metro é a unidade fundamental das novas medidas: esta palavra metro vem d'um termo grego que significa medida.

A coherencia que havemos notado não é a unica vantagem do systema metrico, nós vamos entrar em outras observações que acabarão de estabellecer a superioridade d'este systema sobre as medidas antigas.

Se os Francezes se tivessem proposto a regular as medidas só para a extensaõ do reino, podiaõ escolher uma de cada especie ordenando, que no futuro cada uma d'estas medidas fosse a unica no Estado. Por tal determinação fechavão os caminhos á fraude, que as antigas medidas abrirão variando d'uma provincia á outra, d'uma Cidade á sua visinha, e algumas vezes na mesma cidade; mas não tinhão só em vista o obviar a estes inconvenientes, querião tambem a simplificação das opperações commerciaes, e sobre tudo pretendião uma preferencia que chamasse todas as nações a um acordo, e por isso procurarão medidas que tendo o seu fundamento na natureza podessem ser consideradas universaes. Para alcançarem este fim medirão o quarto d'um meridiano terrestre, (o que passa pelo Observatorio de Pariz) e como seu comprimento era muito grande, dividirão-no successivamente de dez em dez, o resultado da setima divisão foi julgado proprio para servir d'unidade linear: os trabalhos e cuidados que empregarão para alcançarem este typo merecem a maior confiança.

Quem não ignora quanto os costumes influem sobre os povos, não se admirará do mau exito que teve esta innovação em França, e os grandes embaraços em que se tem visto dif-

ferentes governos de Portugal para adoptarem a mesma reforma. Ainda em 1845 na Cammara dos Deputados, attendendo aos usos do povo, cederão de parte da reforma combinando-a com a linguagem vulgar; pode-se vêr no Diario do Governo n. 51 d'aquelle anno a redacção do projecto de lei, e o mappa expositivo do systema metrico portuguez.

Todavia ha bem fundadas esperanças de que o systema venha a ser adoptado em todas as nações sem modificação alguma; pois se hà grandes difficuldades para a sua applicação em geral, os artistas já lhe não fazem guerra, recebem e usão das denominações novas, que ouvem aos theoricos que frequentão suas offecinas; espalhando-se assim estas medidas nas artes, depois mais facilmente passão ao commercio de retalho onde se offerecem maiores difficuldades. Muito tambem se pode esperar das escollas fazendo entrar na instrucção primaria o systema; é pela educação que se opperão estas grandes reformas, e não contrariando subitamente antigos usos do povo.

§ 4.º

Multiplos das unidades metricas

Sub-multiplos ou fracções decimaes.

Para maior facilidade nas avaliações tem-se adoptado, nos casos em que as unidades fundamentaes são mui pequenas, uma serie de medidas crescentes de tal modo, que cada uma d'ellas é composta de dez vezes a que lhe é immediatamente inferior. As denominações para as destinguir-mos são formadas do mesmo nome da unidade fundamental precedido das palavras

Déca		dez unidades primitivas
Hecto	significão	cem
Kilo		mil
Myria		dez mil

No quadro geral da nomenclatura das medidas metricas (Est. 3.) se achão estas palavras applicadas a cada especie; bem como as expressões arithmeticas, e abreviaturas de que se usa na escripta.

Nas manufacturas e lojas de panos, e para outras muitas fazendas do commercio, as medições podem ser feitas por metros; mas nas medidas itinerarias se contará por kilometros, (vale mil metros) e myriametros (dez mil metros)

Na medição dos campos e outros terrenos, toma-se para unidade um decametro quadrado, i-é, um qurdrado que tem por lado um decametro, (dez metros) e esta unidade é o que se chama-Are-

Os multiplos d'esta medida agraria são:

Decare ou 10 ares (1000 metros quadrados)

Hectare- 100 ares (10000 metros quadrados; é o hectometro quadrado)
Kilare-1000 ares (100000 metros quadrados)
Myriare-10000 ares (1000000 metros quadados
ou 1 kilometro quadrado

Os multiplos do metro cubico são grandes para as medidas de volume de que temos precisão nas artes, e no commercio; ainda nas estancias de lenhas e materiaes de construcção se usa do metro cubico debaixo do nome de Stere, e tambem se emprega o Decastere (10 steres) : para as outras medições se estabelleceu uma nova unidade chamada litro, sem que por isso ficasse alterada a regularidade das medidas; porque é uma subdivisão decimal da unidade principal como brevemente veremos.

Os multiplos decimaes do litro são:
O decalitro ou . . . 10 litros
hectolitro ou . . . . 100 litros
kilolitro ou . . . . 1000 litros (vale 1 metro cubico) tem a capacidade d'um tonel

Assim o pezo d'um tonel é o pezo d'um metro cubico d'agoa; porem esta unidade é muito superior aos pezos de que ordinariamente se faz uso, por isso se adoptou a subdivisão decimal chamada gramma. Com esta unidade se exprimem os pezos mui pequenos, que exigem a maior exactidão, como em certos medicamentos, e nos diamantes, ouro etc; para os mais consideraveis servem os multiplos seguintes

O decagramma ou . . . . . . 10 Grammas
hectogramma . . . . . . 100 »
kilogramma . . . . . . 1000 »
myriagramma . . . . . 10000 »

Como estes multiplos seguem a composição do systema de numeração, podemos escreve-los com a mesma facilidade que os numeros.

Myr-m	K-m	H-m	D-m	m	
3	5	7	6	4	

pode-se escrever seguidamente . . . . 35764. m

Myr-a	K-a	H-a	D-a	a	a
2	4	5	3	6	. . . . 24536.

Myr-g	K-g		D-g	g	g
5	4		6	3	. . . . 54063.

Da mesma sorte se tem formado outras unidades inferiores ás principaes, dividindo estas em partes de dez em dez vezes menores; as fracções que d'esta divisão resultão, podem ser escriptas como os numeros inteiros continuando para a direita com a mesma lei de numeração.

Descendo d'uma ordem qualquer a dos milhares para ex.º, sabemos que um milhar contem dez unidades da ordem immediatamente inferior chamadas centenas;

a centena dez desenas
a desena dez unidades; e passando d'esta ordem, a que vem depois é de fracções que entrão dez vezes na unidade, i-é,
a unidade dez decimos
o decimo dez centecimos; porque a unidade contem dez desenas d'estas novas fracções.
o centesimo dez millesimos; depois seguem-se
decimos millesimos,
centesimos millesimos,
millionesimos,
decimos millionesimos, & &

já se vê, que os nomes das ordens á direita das unidades são os mesmos que se seguem á esquerda, juntando a terminação-esimos-

Todas estas partes são chamadas fracções decimaes, em razão do modo porque procedem; mas qualquer d'ellas tomada duas vezes, tres vezes e até nove vezes, é ainda uma fracção decimal; v. g., dous decimos, tres decimos, cinco centesimos, nove millesimos &: conseguintemente para designar uma fracção decimal é preciso enunciar o numero das partes que se toma, e o nome d'estas partes; da mesma sorte que praticamos com as desenas, centenas, e todos os multiplos das unidades simples, assim:

5	centenas
6	desenas
3	unidades
7	decimos
2	centesimos
5	millesimos
6	decimos millesimos
1	centesimos millesimos
8	millionesimos
4	decimos millionesimos
1	centesimos millionesimos
5	billionesimos

Por este schema se podem lêr todas as fracções decimaes; porem é mais usado separar os inteiros das fraccões por meio d'uma virgula, e depois de lêr a parte inteira, lêr do mesmo modo a fraccionaria, pronunciando no fim o nome da ultima ordem. Diremos pois 563 unidades, 725 milhões 618 mil e 415 billionesimas.

Aqui é mister tambem empregar os zeros nos lugares das ordens decimaes que faltarem, bem como nas unidades quando não houverem inteiros, assim:

2 decimos e 7 centesimos se escrevem 0.27
2 centesimos e 7 millesimos 0,027
2 decimos e 7 millesimos . . . 0,207
5 millionesimos 0,000005

Por esta forma é muito facil escrever os numeros decimaes, é tanto como se fossem inteiros, procedendo com attenção na colloca-

ção da virgula, para que o ultimo algarismo da direita seja da ordem decimal enunciada. Em 27 centesimos o algarismo 7 que exprime centesimos, deve occupar o segundo lugar á direita da virgula, e por isso escrevemos 0,27 marcando por um zéro o lugar das unidades; em 27 millesimos, o algarismo 7 que exprime millesimos, deve occupar o terceiro lugar, e o algarismo 2 que exprime centesimos o segundo, por isso é necessario supprir por dous zeros as unidades, e os decimos que faltão. No terceiro ex.º é preciso pôr um zéro no lugar das unidades, e outro no das centesimas para que os algarismos 2 e 7 fiquem nos lugares convenientes.

Devemos propôr muitos exemplos para nos exercitar-mos na escripta, e nomenclatura das fracções pelo modo que acabamos de apresentar; ou tambem lendo e escrevendo a fracção juntamente com as unidades, desenas, centenas & como se fosse só um numero inteiro, e designando no fim o nome da ultima ordem.

Assim como dizemos 57 unidades por 5 desenas e 7 unidades, diremos tambem 57 decimos em lugar de 5 unidades e 7 decimos; d'este modo consideramos a fracção menor como unidade principal, o que nos é permittido, pois que a grandeza da unidade, como temos dito, é arbitraria: com effeito se em 234, para ex.º, tomando qualquer dos multiplos decimaes como unidade, podemos dizer 234 decimos da desena, ou 234 centesimos da centena, ou 234 millesimos do milhar & tambem diremos 2340 decimos, ou 23400 centesimos, e por consequensia 234,6 se pode enunciar por 2346 decimos; 234,67 por 23467 centesimos ect. ect. D'esta sorte escusamos na escripta a virgula que separa os inteiros da fracção; mas então é mister designar o nome da ultima ordem fraccionaria que se considerar.

Este ultimo modo d'escrever as fracções decimaes é muitas vezes empregado nas medidas metricas; as abreviaturas de que se usa simplifiscão a escripta.

Decimo do metro, se diz decimetro, e se escreve $1^{\text{d-m}}$

centesimo centimetro $1^{\text{c-m}}$

Millesimo millimetro $1^{\text{mil-m}}$

As palavras addictivas – deci-centi – milli– se applicão igualmente ás outras unidades.

Decimo do are, se diz deciare, e se escreve $1^{\text{d-a}}$

centesimo centiare $1^{\text{c-a}}$

O centiare corresponde a um metro quadrado: para conceber, que a medida are é composta de 100 metros quadrados basta recordar o que dissemos no § antecedente sobre a medição das superficies, ou observar a fig. 1.

da Est. 5. onde se representão dez ordens de dez quadrados cada uma que considerando estes quadrados com um metro por lado dão a superficie total de 10 metros de comprimento e outros dez de largura, i-é dão o decametro quadrado que chamamos are. Assim as subdivisões inferiores ao centiare podem ser designadas por decimetros quadrados, centimetros &.

O decimetro quadrado, se escreve $1^{\text{d-}mm}$, é um centesimo do metro quadrado.

centimetro quadrado, se escreve $1^{\text{c-}mm}$, é um decimo millesimo do metro quadrado

Conseguintemente n'uma fracção decimal do metro quadrado, os dous primeiros algarismos á direita da virgula exprimem decimetros quadrados, os dous seguintes centimetros quadrados, os outros dous millimetros quadrados

A fracção $0,42^{mm}$ se enunciará . . $42^{\text{d-}mm}$

$0,0035$ . . . . . . $35^{\text{c-}mm}$

$0,4235$ . . . $42^{\text{d-}mm}$ e $35^{\text{c-}mm}$

ou $4235^{\text{c-}mm}$

Numa fracção decimal do metro cubico,

os tres primeiros algarismos á direita da virgula exprimem decimetros cub., os tres seguintes centimetros cub., e os outros tres millimetros cub. Já vimos como se enche um espaço dispondo horizontalmente as unidades de volume umas ao lado das outras e collocando depois sobre esta camada outras iguaes até completar a altura requerida. Se pois considerar-mos 10 ordens de dez decimetros cub. unidas umas as outras como se vê na citada fig. da Est. 5, este volume contem 100 decimetros cub.; e se em lugar d'um decimetro d'altura quizermos dar-lhe um metro, é preciso assentar mais nove d'estas camadas. Assim o metro cub. contem 10 centenas de decimetros cub., e da mesma sorte o decimetro cub. contem 10 centenas de centimetros cub., i-é

O metro cub. contem 1000

mmm
decimetros cub., e se escreve 1

decimetro cub. . . . 1000

d-mmm
centimetros cub. . 1

Consequentemente n'uma fracção decimal do metro cub. os tres primeiros algarismos á direita da virgula exprimem decimetros cub., os tres seguintes centimetros cub., de sorte que

mmm d-mmm
0, 876 se pode escrever 876

c-mmm
0,000498 498

d-mmm c-mmm
0,376498 . . . . . 376 498

O decimetro cub. é empregado com o nome de litro na medida dos liquidos, e dos grãos, assim como os seus multiplos, e os sub-multiplos

d-l
decimo, que se diz decilitro, e se escreve 1

c-l
centesimo . . centilitro . . . 1

mil-l
millesimo . . millilitro 1

O metro cub. serve para a medição dos corpos macissos, e nos casos em que toma o nome de stere, de que já falamos, se diz tambem um decistere em lugar de decimo de stere.

O decimo, o centesimo, o millesimo do gramma. se tomão tambem por unidades n'avaliação de pequenos pezos, e em lugar de

d-g
decimo, se diz um decigramma, e se escreve 1

c-g
centesimo . . centigramma . . . 1

mil-g
millesimo . . milligramma . . . 1

O franco divide-se em decimos

o decimo, é uma moeda de cobre do peso de 2 decagrammas, divide-se em 10 centimos.

o centimo, é tambem uma moeda de cobre que peza 2 grammas.

Com estes sub-multiplos não se tem seguido a regularidade do systema nas suas denominações, designão-se somente pela sua relação decimal com a unidade principal, e por esta razão se escreve simplesmente

um decimo . . . 1^{d} ; um centimo . . . 1^{c}

A decomposição decimal se applica tambem á divisão do tempo

O dia divide-se em 10 horas e se escreve 10^{h}

a hora . . 100 minutos . . . $100'$

o minuto . 100 segundos . . . $100''$

O grão é a divisão da circunferencia de circulo que se toma por unidade fundamental, e escreve-se . . . . $1.^{o}$

o quadrante contem pelo systema metrico 100 d'estas unidades.

o grão contem 100 minutos, e se escreve $100'$

minuto . . . 100 segundos . . $100''$

As subdivisões das medidas antigas não seguem a ordem decimal nem mesmo um modo constante e uniforme, de sorte que alem dos inconvenientes nas combinações dos nu-

meros, é custoso conserval-as na memoria. Não obstante, ainda por algum tempo regularão as medidas antigas; por isso junctaremos aqui um quadro das que se achão mais em uso com as suas subdivisões, e os valores em medidas metricas (Est. 4 e 4 bis); e para facilitar a introducção d'estas ultimas junctamos tambem as Est. 5. 6. e 7. onde vão figuradas com designação das suas dimensões.

Todas estas medidas são insufficientes em certos casos. Muitas veses acontecerá que o metro possa ser applicado exactamente a um comprimento; mas outras haverá em que o extremo do metro venha a cahir fora da linha a que se applica. No primeiro caso o resultado da medição será um numero de metros, no segundo ficará para medir uma porção menor que o metro, a qual só poderá ser avaliada pelos sub-multiplos d'estas medidas. Se a porção for um decimetro, um centimetro, um millimetro, ou um numero d'estas divisões, teremos uma fracção decimal para junctar ao numero de metros que se tiver achado na medição. Mas ainda pode acontecer que a porção que se quer medir não se ajuste com as divisões do metro, nem mesmo dividindo-o em maior numero de partes; então a quantidade é inexprimivel, e dis-se incommensuravel, i-é, que entre ella e o metro não há medida commum.

Concebemos da mesma sorte, que n'avaliação das superficies, depois de ter applicado o metro quadrado algumas vezes, fique uma porção menor que o metro; então se dividiria esta medida em partes iguaes de tal grandeza, que a porção da superficie que se quer avaliar se ajustasse com um numero d'estas divisões, e em tal caso a superficie será exprimida por um numero de metros quadrados acompanhado d'uma fracção. Porem pode accontecer tambem, que por muitas que sejão as divisões do metro quadrado, nunca a coincidencia se possa observar para exprimir-mos exactamente a superficie.

Vemos igualmente que um volume pode ser representado por um numero, quando é possivel decompo-lo em partes iguaes ao metro cub.; e que havendo alguma porção menor que a medida, mas que se possa ajustar com as divisões em decimetros cub. ou centimetros, e ainda outras menores, esta fracção do metro cub. exprimirá a porção de volume que se queria avaliar. Só no caso de não haver uma medida commum entre o metro cub. e o volume proposto, é que deixaremos d'exprimir esta quantidade por numeros, e dis-se então que é incommensuravel.

Sabemos tambem que um pezo é representado por um numero de grammas, quando com estas unidades se chega a restabellecer o equilibrio da balança; mas como pode acontecer que o ultimo gramma que se juncta seja maior do que se precisa, em tal caso, dividil-o-hemos em certo numero de partes iguaes, e junctaremos uma ou mais destas partes até obter o equilibrio,e a expressão do pezo será a fracção do gramma de que nos servimos acompanhada d'um numero inteiro, se o pezo proposto contiver tambem algumas unidades inteiras. Acontecendo porem que se não possa estabellecer o equilibrio, por maior que seja o numero de divisões do gramma, o pezo será incommensuravel.

Assim o resultado das avaliações é o numero que pode exprimir a quantidade; sendo as unidades d'este numero a medida inteira, o numero se chamará inteiro, e sendo uma das fracções iguaes em que for preciso dividil-a, será chamado numero fraccionario, ou simplesmente uma fracção se este numero não chegar a formar uma unidade principal.

Nos casos em que se não chegue a exprimir com exactidão a quantidade que se quer avaliar, pode-se dividil-a em duas porções; uma que seja numero fraccionario da unidade de medida dividida em muitas partes iguaes, para que a porção que resta avaliar, não chegando a conter uma das divisões exactamente, possa ser despresada, e o numero achado pela primeira venha a ser um valor approximativo sufficiente nas applicações d'Arithmetica.

SECÇÃO 2.ª

THEORIA E APPLICAÇÕES

das primeiras opperações d'Arithmetica.

Começamos a primeira secção pelo systema de numeração em uso, e passamos logo a representar por numeros as quantidades que se observão com distincção de partes, e por isso chamadas numericas; taes como um grupo d'arvores, um ajunctamento de grãos &, e para maior clareza representamos em quadros o systema de composição até o numero mil. Estes quadros são proprios para levar á evidencia as primeiras noções da numeração, e preparar-nos para o uso dos algarismos, que são mais commodos, e com elles podemos expôr os numeros concretos, e opperar como se fossem abstractos. Em todas as opperações d'Arithmetica a natureza dos resultados é conhe-

cida antes pelo enunciado da questão, trata-se só de achar o numero.

Vimos depois, que muitas das quantidades que não são numericas, se podem reduzir á numeros por meio das avaliações; assim é que representamos uma linha por um numero de metros, uma superficie em metros quadrados, um volume em metros cub. &.

Agora que temos idêas exactas sobre estes ellementos dos racioeinios d'Arithmetica, -os numeros inteiros, e as fracções decimaes,-passemos a combinal-os; vamos entrar nas primeiras licões do calculo, i-é. nas primeiras opperações para compôr e decompôr os numeros, a saber: a addicção, a multiplicação, a subtracção, e a divisão. Tomando a numeracão como ponto de partida devemos alcançar a theoria, que é a reunião de todas as verdades que nos fornecem os raciocinos claros e exactos, para depois marchar-mos seguros e esclarecidos ás praticas ou applicações d'Arithmetica.

§ 1.º

Composição dos numeros

Addicção.

Assim como nas Est. 1 e 2 representamos uma collecção de pontos, arranjados segundo as leis da numeração, representariamos tambem duas ou mais collecções n'um só quadro; porque depois de arranjada uma d'ellas, se continuaria com as outras o mesmo systema de composição.

Para ex.º tomemos só dous grupos um de cinco pont.os, e o outro de quatro; ordenando o primeiro em linha vertical, continuaremos depois esta linha com os pontos do outro, e ter-se-ha uma columna com todos os pontos do primeiro e do segundo grupo.

Qualquer que seja a natureza das unidades, seguiremos sempre a mesma disposição; com um comprimento de cinco metros, e outro de quatro, ou com cinco grammas e quatro grammas, diremos geralmente cinco e quatro fazem nove, que é a expressão da columna resultante; pois que a questão é de achar um só numero composto das unidades que entrão nas partes propostas: a este numero que designa a collecção de todas as unidades, se dá o nome de somma.

Assim procurando formar com dous grupos todas as sommas que não passão do numero dez, veremos que só se pode compor o pequeno mappa que se segue.

	2	3	4	5	6	7	8
2	4	5	6	7	8	9	10
3	5	6	7	8	9	10	
4	6	7	8	9	10		
5	7	8	9	10			
6	8	9	10				
7	9	10					
8	10						

Se nenhuma difficuldade há em exprimir promptamente estas sommas, pelo menos a taboa tem a vantagem de demonstrar a exactidão de cada uma d'ellas pela disposição dos numeros.

É por este pequeno numero de sommas que nós vamos executar as mais complicadas addicções: o fim do calculo é sempre reduzir todas as operações laboriosas ás mais simples que se effectuão mentalmente.

Partindo pois das sommas que a taboa precedente leva á maior evidencia, chegamos por deducções mui simples ás sommas de dous numeros d'um só algarismo quando estes excedem o numero dez. Se, por exemplo, quizermos junctar 7 com 5, sabemos que 7 e 3 fazem 10, e que 5 dá 3 e 2; logo em lugar de junctar 5 a 7 pode-se junctar de primeiro 3 o que dá 10, e 2 depois faz 10 e 2 ou 12.

Da mesma sorte 9 e 8 fazem 17 porque sabemos que 9 e 1 fazem 10 e ficão ainda 7 do segundo numero.

N'addicão de muitos numeros simples empregaremos os mesmos raciocinios, para ex.º;

Pede-se a somma dos . . . . . numeros	
Primeiramente 5 e 3 fazem 8,	5
depois sobre este numero junctamos 7;	3
8 com 7 fazem . . . . . 1 desena e 5	7
e levando as unid. para diante	8
diremos 5 e 8 fazem . . . . 1 desena e 3	6
e finalmente 3 e 6 9	
assim . . . . 2 desenas e 9	
é a somma das addicções propostas.	

2.º Ex.º	3
3 e 7 . . . 1 desena	7
6 e 5 . 1 » e 1	6
mais 8 . . 9	5
mais 4	8
fazem 1 » e 3	4
mais 2 . . . 5	2
Somma 3 desenas e 5, ou 35	

Sejão agora 326 e 172 os numeros dados para addicionar.

Se enunciar-mos separadamente

3 centenas 2 desenas . . 6 unidades
1 7 3

fica nos facil junctar os numeros simples 6 e 3 que formão as unidades, os numeros 2 e 7 de desenas, e as centenas 3 e 1; o resultado

4 centenas, 9 desenas 9 unidades

ou 499 é a somma pedida.

Este expediente abre um caminho mui facil á opperacão inda que os numeros dados para addiccionar sejão grandes; pois que reduz tudo a opperacões elementares que se executão de memoria. Aqui aproveitamos os seguintes principios da maior evidencia.

Axiomas.

1.º Ajuncta-se o todo, ajunctando cada uma das suas partes.

2.º Ajuncta-se ao todo, ajunctando a qualquer das suas partes.

O Axioma é uma verdade evidente por si mesmo, o seu enunciado basta para a fazer immediatamente reconhecer. Esta sorte de proposições servem de fundamento as theorias exactas, aos raciocinios rigorosos.

Do mesmo modo para sommar muitos numeros se ajunctarão todas as suas unidades, desenas, centenas &, porque assim ajunctamos os mesmos numeros que ficão sendo partes do todo.

Se estas sommas parciaes se composerem de algumas unidades de ordem superior, como acontece todas as vezes que cheguem a dez, é claro que taes unidades deverão ser contadas nas respectivas columnas. No seguinte ex.º, onde para maior clareza, temos assentado os numeros em columna, unidades debaixo de unidades, desenas debaixo de desenas & depois de passarmor um traço por baixo diremos:

624	4	
945	5 . . 9 e	
342	2 . . 1 desena e 1	
957		mais 7 . . . 8
2868		

Escreveremos 8 debaixo da columna e a desena que obtivemos sera contada na seguinte columna, onde diremos 1 e 2 fazem 3; e depois 3 e 4 são 7 & & É o que milhor se pode observar se designar-mos separadamente as sommas de cada columna, assim:

Da primeira	18
da segunda, que são 15 desenas . . .	150
da terceira . . . 27 centenas	2700
Reunindo astas addicções parciaes	2868

terminamos a opperação, porque n'este segundo calculo a somma de cada columna não chega a 10; mas se ainda n'ellas achassemos unidades d'ordem superior á columna em que opperassemos, effectuariamos novo calculo; e assim por diante até que achassemos sommas parciaes d'um so algarismo.

Podemos marcar por pontos ao lado de cada columna, ou por baixo com pequenos traços, as desenas que forem apparecendo nas addicções parciaes, como se vê no ex.º seguinte; porque esquecem facilmente em quanto se não tem muito uso da opperação: depois marchamos mais depressa evitando estas accentuações, e muitas palavras de que nos havemos servido raciocinando sobre os ex.os; dir-se-ha, correndo os olhos pelos algarismos successivos de cada columna: 9, 17, 19; escrevemos 9 e levamos a desena par a caolumna seguinte: 7, 16, 22, 27; escreveremos 7: 7, 15, 19, 21; escreveremos 1: 10, 12, 15, 18; e finalmente 8, 11, 13, 25 que escreveremos.

7	8.	5	6	4
3	2	8.	9.	5
7	3	4	6.	8.
7.	3	2	5	2
2 5	8	1	7	8

Sem que sejomos obrigados a emprogar os raciocinios com que temos explicado a opperação, podemos executar todos os exemplos por este mecanismo muito simples. Os meios promptos e seguros para a pratica nós os distinguiremos pelo nome de- Regras- e serão sempre dedusidos da theoria.

Assim observando a marcha dos raciocinios feitos sobre a addicção, notaremos:

1.º Que se tem feito a somma das unidades dos numeros propostos. Passando esta somma do numero dez, tem se tirado as desenas, e o resto são as unidades do resultado.

2.º Tem-se feito a somma das desenas, e excedendo estas a dez, tem-se tirado as centenas, e o resto são as desenas do resultado.

3.º Para achar as centenas do numero procurado, faz-se a somma das centenas, e d'estas se tirão os milhares & &.

4.º Finalmente vê-se que o meio mais simples para fazer successivamente a somma das unidades, a somma das desenas etc., é de collocar os numeros dados uns debaixo dos outros, de sorte que as unidades da mesma ordem fiquem em linha vertical.

D'aqui se conclue a regra seguinte:

-*Para achar a somma de muitos numeros inteiros, é preciso escrever uns abaixo dos outros, de sorte que as unidades da mesma denominação fiquem em columna; passa-se depois um traço que separe estes dados do resultado que se vai designar, fasendo a somma das unidades simples, das desenas, das centenas etc, e escrevendo só as unidades de cada somma parcial debaixo da columna respectiva; guardando as desenaspara as junctar como unidades à columna seguinte até se chegar a ultima columna da esquerda debaixo da qual se escreve a somma que lhe corresponde com todos os algarismos necessarios pará a designar*-

Como a lei que fixa os valores de posição não termina nas unidades simples, continua ainda a considerar as fracções decimaes, a

regra que acabamos de deduzir se pode applicar sem differença alguma aos numeros inteiros acompanhados de fracções decimaes, e aos numeros que exprimem simplesmente fracções decimaes; tendo o cuidado de collocar as virgulas de todos os numeros umas abaixo das outras; porque d'outro modo seria necessario procurar os algarismos da mesma denominação para as sommas parciaes, e isso pode induzir-nos a erros.

Para ex.º ajunctemos os numeros 0,37; 0,5723; 0,128; 0, 5793.

Devemos dispôr estes numeros do modo seguinte

$$\begin{array}{r} 0,37 \\ 0,5723 \\ 0,128 \\ 0,5793 \\ \hline 1,6496 \end{array}$$

E achar-se-ha a somma 1,6496

A somma deve ser composta de todas as partes de cada uma d'estas tres fracções, por isso sommaremos a columna dos decimos millesimos, que dá 6; depois a somma dos millesimos é 19 a qual contem 10 millesimos que faz um centesimo: nós lhe tiraremos este centesimo para o ajunctar á columna dos centesimos, e escreveremos 9 abaixo da columna dos millesimos. A somma dos centesimos é 24, escreveremos 4 centesimos e contaremos mais 2 decimos na columna dos decimos a qual nos dá 16 ou 1 unidade e 6 decimos.

A addicção dos numeros fraccionarios compostos d,uma fracção decimal, e d'um numero inteiro se consegue evidentemente pela addicção de todas as fracções, e depois a de todos os numeros inteiros.

Ex.º	35,0728
	0,212
	7,005
	10,57064
Em todos estes casos se op-	397,25
pera absolutamente como na	450,10994

addicção dos numeros inteiros

Tem-se visto que a addicção dos numeros inteiros se reduz á addicção de dous numeros cuja somma não excede 10, e estas ultimas tem sido achadas junctando successivamente a um dos numeros cada uma das unidades do outro. Se ha partes decimaes, como ellas se contão da mesma sorte que os inteiros á medida que se caminha da direita para a esquerda, podemos dizer geralmente que a addicção dos numeros de muitos algarismos se reduz a addicção da unidade, ou d'uma parte da unidade successivamente a si mesmo.

Não temos tido attenção com a disposição ou ordem na collocação dos numeros uns abaixo dos outros, e é porque se vê evidentemente que de qualquer modo que se inverta esta ordem, a somma conterá sempre todas as partes dos numeros dados.

Em quanto á marcha da opperação obser-

va-se que se caminha sempre da direita para a esquerda; é porque geralmente não se podia começar da esquerda sem que fossemos obrigados muitas vezes a desfazer o que se tivesse feito.

Para os numeros	374
é indeferente começar pela	213
direita ou pela esquerda, o	401
resultado será sempre 988	
Mas se os numeros forem	632
fazendo-se a somma de 6, 7,	765
5 e 8 acharemos 26, e escre-	528
ve-se 6 abaixo da columna	852
das centenas, e os 2 milha-	
res á esquerda	

Tomando depois as desenas, a sua somma contem uma centena que é preciso reunir ás centenas ja achadas; assim é preciso apagar o algarismo escripto 6 e pôr 7. Ver-se-ha fazendo a somma das undidades que é preciso tambem mudar o algarismo das desenas.

Com tudo podemos servir-nos d'este meio como prova, ou modo de verificação; porque vamos escrevendo abaixo dos algarismos do resultado os que denovamente se obtiverem, para observar depois de sommar a columna da direita se n'ella se achão as unidades que nos faltarão na da esquerda: no caso que as opperações tenhão sido bem feitas não se ha-de achar a final resto algum.

Temos outro meio de verificação sommando as columnas em sentido contrario, ha grande probabilidade que se não commettão as erros da primeira opperação, se alguns tiverem escapado, por quanto a successão dos algarismos não é a mesma.

Já n'addicção se pode notar a complicação que resulta das medidas antigas relativamente ás do systema metrico.

Para a comparação basta um exemplo d'addicção dos numeros complexos, denominação, que pertencendo a todos os numeros acompanhados de fracções, é reservada sómente para o caso em que estas sejão designadas por numeros inteiros com nomes particulares para distincção das relações com a unidade principal.

	B	P	p	l
Sejão os numeros	30	3	7	5
Escreve-se tambem com a	57	7	3	
attenção, de que as partes	12	8	0	11
da mesma especie fiquem	100	9	3	4

umas abaixo das outras.

Ex.º de dous numeros com braças, palmos, pollegadas e linhas . . . .

B	P	p	l
30	3	7	5
12	8	2	11
43	2	2	4

5 com 11 linhas são 16 linhas; porem como 12 linhas fazem 1 pollegada, reserva-se para a classe seguinte, e n'esta escreve-se 4; 1 com 7 com 2 são 10, i-é, 1 palmo e 2 pollegadas, escreve-se 2; e disse 1 palmo com 3 com 8 são 12, i-e, 1 braça

e 2 palmos: finalmente leva-se a braça para junctar com 30 e 12.

Escreve-se pois cada especie debaixo das suas semilhantes, como se mostra no exemplo: braças com braças; palmos com palmos; cada uma faz numero á parte, e este se escreve por baixo da columna; se a somma de qualquer especie chegar a algumas unidades da seguinte, para ella se reservarão, e escreve-se só o excesso por baixo da columna sommada: pelo que é preciso saber avaliar cada especie pela sua inferior immediata; o que vemos nos mappas 4 e 4 bis.

Eis-aqui mais alguns ex.os para exercicio.

Q.	arrob.	arrat.	onc.	oit.	g.
13	2	17	7	3	15
12	3	22	5	7	50
57	0	19	12	4	12

M.	fang.	alq.	m.
7	13	3	10
21	10	3	9
52	14	1	15

P.	alm.	can.	quart.
12	5	3	2
35	15	7	0
16	8	10	1

Multiplicação

O calculo para a addicção de numeros variados, torna-se mui regular no caso particular em que todos sejão iguaes. Examinemos estas addicções com os numeros simples, junctando-os successivamente a si mesmo.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Junctando cada algarismo da primeira linha a si mesmo se forma a segunda linha; junctando a estas sommas os mesmos numeros da primeira linha se forma a terceira; e junctando-os denovamente a esta, se forma a quarta linha & &. E' claro que os resultados relativos á unidade devem dar a serie dos numeros simples, e a taboa o mostra na primeira columna, que por isso indica tambem as vezes que os outros algarismos forão tomados para produzirem as sommas que se achão em frente; o numero

21, para exo, é o resultado das addicções 3 mais 3; 6 mais 3; 9 mais 3 & até que o numero 3 seja repetido 7 vezes, de sorte que o numero 21 é inteiramente determinado pelos numeros 3 e 7 e em lugar de dizermos que a addicção de 7 vezes o numero 3 dá 21, podemos dizer resumidamente 7 vezes 3 . . 21, ou que 3 multiplicado por 7 dá 21; tomar duas vezes uma quantidade é duplical-a, tres vezes é triplical-a. e em geral repetil-a muitas vezes é multiplical-a.

Esta taboa attribuida a Pythagoras dá, como se acaba de ver, as addicções multiplices dos numeros simples; juncta-se nove vezes successivas o numero 1 para formar a primeira linha horizontal ou vertical; o numero 2 para as segundas &. Cada um d'estes resultados é pois determinado por dous termos: um é a grandeza que se tracta d'ajunctar muitas vezes a si mesmo, o outro exprime quantas vezes esta grandeza deve achar-se repetida; e relativamente á especie fica claro, que deve ser da mesma natureza do numero que serviu á sua formação, o outro é abstracto, não se lhe pode applicar nenhuma especie d'unidades; porque a repetição d'uma mesma opperação não é senão uma condição da questão que deu lugar ao calculo. Nós temos dito 3 vezes 7 dá 21, isto vem a ser a resposta a esta questão: Em certa obra, onde se faz por dia 7 braças, quantas se farão em 3 dias? Se não soubessemos de memoria que 3 vezes 7 fazem 21, achariamos este resultado pelas addicções successivas 7 braças mais 7 mais 7, igual a 14 mais 7, ou 21 braças.

Mas vê-se que fora d'estes casos mui simples, o processo por addicções successivas será muitas vezes excessivamente longo. Com os numeros 4697 e 5782, para ex.o, muito tempo gastariamos a escrever 4697 vezes o numero 5782, e a final nos faltaria o animo para emprehender a addicção: é mister um meio mais commodo e mais rapido.

Assim como reduzimos ás addicções simples, encerradas na pequena taboa de pg. 51, todas as addicções de numeros variados, procuremos tambem trazer á taboa Pythagorica, todas as addicções multiplices mais complicadas.

Raciocinemos sobre um exemplo, mas com a attenção que as observações que fizermos sejão applicaveis a todos os casos sem excepção; os numeros prestão-se a esta generalidade; é na precisão de fixar as nossas ideas que tomamos um numero qualquer, e estabelecemos os raciocinios sem dependencia do seu valor. Supponhamos que se quer junctar 4 vezes o numero 237, se escrevessemos como para achar a somma ter-se-hia 237

Mas devemos resumir a escripta, e vê-se que para ter este resumo seria bastante assentar

237
237
237

237, e indicar por baixo o numero de vezes que era necessario escrever este numero, assim: 237

4

Ora, pela columna das addicções se conhece que a somma será composta de

4 vezes as 7 unidades 28
4 vezes 3 desenas 12
4 vezes 2 centenas 8

E observando que em reunindo estes resultados parciaes, temos a reunir as desenas, que procedem do numero de unidades obtido, com as que resultão da opperação sobre as desenas mesmo, podemos deixar de escrever as primeiras, reservando-as para junctar ás outras assim como fizemos na addicção, levando as desenas apparecidas na columna das unidades para a colmna seguinte: e o mesmo faremos com as centenas obtidas pelo numero de desenas que se achar &: assim 4 vezes 7 unidades são 28 unidades, escreve-se 8 e reserva-se 2 desenas; 4 vezes 3 desenas dá 12 desenas, e 2 reservadas fazem 14 escrevemos 4; 4 vezes 2 centenas são 8 centenas e 1 reservada são 9

237
4
948

A addicção assim simplificada toma o nome de multiplicação, e o resultado é chamado producto; os numeros que determinão este resultado são chamados factores do producto, e particularmente o que deve ser multiplicado se chama multiplicando, e o que multiplica se chama multiplicador.

Se os dous factores do producto forem ambos compostos de muitos algarismos, que, para ex.º, tenhamos para multiplicar 543 por 239: observaremos que 239 é composto de 200, de 30, e de 9 e por isso 239 vezes 543 contem . . . . 9 vezes 543
30 vezes 543
200 vezes 543

Por consequencia se acharmos estes tres numeros e os sommarmos teremos o producto pedido.

O primeiro acha-se com a mesma promptidão com que effectuamos o ex.º antecedente, porque se compõe de 9 vezes as 3 unidades, 9 veses 4 desenas, e 9 vezes as 5 centenas.

O segundo producto parcial 30 vezes 543 é a mesma cousa que 10 vezes 543 tomando este resultado 3 vezes; porque sabemos pela numeração que 30 é o mesmo que 3 déz. E como sabemos tambem, que por cada zéro que se colloque á direita d'um numero, os seus algarismos vão avançando uma ordem mais para a esquerda, e por isso exprimindo unidades dez vezes maiores, ou em outros termos, são multiplicados por 10, é 5430 o valor de 10 vezes 543 que devemos repetir 3 vezes.

Finalmente fazendo 100 vezes maior o nu-

mero 543, e tomando o resultado duas vezes teremos o terceiro producto parcial,

Eis-aqui o quadro da opperação

Multiplicando . . .	543		
Multiplicador . . .	239		
Prod. por 9 unid. .	4887	tomar 5430	
» por 10	5430	tres vezes é	5430
» »	5430	multiplical-o	3
» »	5430	por 3	16290
» por 100 . . .	54300	ou	54300
» »	54300		2
Prod. total . . .	129777		108600

Observa-se tambem q ie o se-ndo producto parcial é sem-e terminado por um 0, o rceiro por dous 0; e em geral ie multiplicando por desen-is, centenas, milhares & o oducto exprime desenas, cen-nas, milhares ou &: pelo que ›demos simplificar mais a es-ipta supprimindo estes zeros ›m tanto que se conserve aos ıtros algarismos a ordem que les tem.

543
239
4887
1629
1086
129777

ttendendo a estas observações fectuamos a opperação como segue.

Escreve-se o multiplicador debaixo do multicando de modo que as unidades da mes-

ma ordem fiquem em columna; e depois de ter passado um traço por baixo, multiplica-se todo o multiplicando pelas unidades simples do multiplicador, depois pelas desenas, as centenas, os milhares &; tendo a attenção d'escrever o primeiro algarismo de cada producto parcial na ordem do algarismo multiplicador. E sommando finalmente todos estes productos parciaes, o resultado será o producto geral.

Appliquemos agora esta regra a outros ex.os com uma particularidade que não tinha sido ponderada, e veremos depois se os raciocinios que se podem fazer sobre este ex.o nos conduzem ao mesmo resultado para nos assegurar-mos da generalidade da regra.

Supponhamos que o multiplicador contenha alguns zeros: seja 376864 a multiplicar por 27020.

Multiplicaremos pois todo o multiplicando successivamente pelos algarismos do outro numero, collocaremos o primeiro algarismo de cada producto parcial debaixo do algarismo multiplicador, e faremos a somma de todos estes productos, assim:

Multiplicando..	376864
Multiplicador...	27020
Prod. por 20....	753728
» 7000 .	2638048
» 20000 .	753728
	1019286528

Vemos que o primeiro producto parcial é duas vezes o multiplicando; mas escrevendo as suas unidades simples na ordem das desenas, todos os algarismos se tornão 10 vezes maiores, e por consequencia este producto é 10 vezes o duplo ou 20 vezes o multiplicando. Passamos a multiplicar por 7; porque o zero intermediario serve somente para indicar a denominação de milhares ao algarismo 7 que se segue, e por isso nós fazemos mil vezes maior o producto que lhe corresponde escrevendo o algarismo das suas unidades simples como se fossem milhares. Finalmente o terceiro producto parcial é o multiplicando tomado só duas vezes; mas as ordens que guardão seus algarismos, fazem este producto 10000 vezes maior.

O zero que deixamos d'escrever á direita do primeiro producto parcial deve agora ser restituido ao total; porque este sendo escripto fora do quadro da multiplicação não pode designar a ordem ou denominação de desenas que lhe pertence sem se collocar o zero á sua direita. Se o multiplicador fosse um numero de centenas, milhares & o producto devia exprimir um numero de 100 vezes, 1000 vezes & o multiplicando por isso se lhe junctaria dous zeros, tres &.

Se o multiplicando é tambem terminado por zeros, e para resumir a opperação multiplicamos como se os não houvesse, o algarismo que por este motivo se toma por unidades simples, na collocação dos productos parciaes continua a ser considerado da especie a que pertence; mas o producto total para exprimir de per si a mesma especie, é preciso ser terminado pelos zeros que temos omittido.

O ex.º que acabamos de executar mostra ainda como a opperacão fica resumida, no caso de haver alguns zeros entre os algarismos significativos do multiplicador: a regra da multiplicacão recommendando que se comece a escripta de cada producto parcial debaixo do algarismo multtiplicador, torna inutil a linha de zeros que teriamos a escrever para marcar o lugar do producto parcial da ordem que nos falta no multiplicador. Eis-aqui mais alguns ex.os onde se podem repetir todos estes raciocinios.

3765324	362800	5243800
487000	53076	63000

No ultimo ex.º se vê os dous factores terminados por zeros. O multiplicando exprimindo centenas, o producto que deve sempre ser da mesma especie do multiplicando, exprimirá tambem centenas; mas o multiplicador é um numero de milhares, deve pois o producto exprimir milhares de unidades da mesma ordem que o multiplicando, i-é, ser

terminado pelo numero de zéros que se achão á direita dos dous factores.

Quanto ao essencial de todas as abreviacões de que temos fallado, observa-se que a opperacão d'addicção ao modo ordinario, no caso dos dous factores terem muitos algarismos, nos obrigava a escrever tantas vezes o multiplicando como de unidades houvesse no multiplicador; mas pela reunião de um zero, dous, tres etc á direita do multiplicando, reduzimos a escripta a tantas parcellas como de unidades há na somma dos algarismos do multiplicador: depois trazendo a opperacão a multiplicacões por um só algarismo, fica o numero de parcellas reduzido ao numero d'algarismos significativos do multiplicador.

Consideremos agora as fraccões decimaes

Se multiplicarmos uma fraccão decimal por um numero inteiro, é claro que a opperacão se hade executar como se ambos os factores fossem numeros inteiros; a differença está só na natureza das unidades do producto, o qual deve exprimir decimos ou centesimos ou millesimos etc conforme o multiplicando for um numero de decimos ou centesimos ou millesimos etc. Para ex.º o producto de 0,576 por 4 é o multiplicando repetido quatro vezes:

e porque 4 vezes 6 millesimos fazem 24 millesimos ou 2 centesimos e 4 millesimos; 4 vezes 7 centesimos são 28, e 2 fazem 30

0,576
0,576
0,576
0,576

ou 3 decimos; 4 vezes 5 decimos são 20 decimos, e 3 fazem 23 ou 2 unidades e 3 decimos; assim multiplicamos 0,576 por 4 do mesmo modo que 576 por 4, e por isso escreveremos debaixo da forma de multiplicação: depois para que o producto fique da mesma especie que o multiplicando, deve-se apartar para a direita o mesmo numero d'algarismos decimaes; achar-se-ha 2,304

576
4
2304

Algumas vezes esta opperação não é executada com o fim de obter a somma do multiplicando repetido algumas vezes, como até aqui a temos considerado, tomando um numero inteiro para multiplicador. Em muitas das applicações em que vamos entrar, nos acharemos com uma fracção decimal ou um numero fraccionario para multiplicador, e então o objecto não pode ser uma addicção multipla; mas visto que as fracções decimaes seguem a mesma lei de formação que os numeros inteiros, façamos sobre este caso particular os mesmos raciocinios que fizemos com os numeros inteiros para deduzirmos a regra de multiplicação.

Quando passavamos a multiplicar pelas desenas do multiplicador, tomavamos uma desena do multiplicando, e a repetiamos o numero de vezes designados pelo algarismo

multiplicador; sabiamos que a desena de 1 é 10, e por isso diziamos que a de 237, para ex.º, é 2370. Agora se queremos multiplicar 237 por 0,4 sabemos tambem que o decimo de 1 é 0,1; e pelo decimo de 237 tomamos 23,7. Repetimos assim 23,7 o numero de vezes designado pelo algarismo multiplicador, i-é, multiplicamos 237 por 4; indicanda depois por meio da virgula, a denominação que compete a este producto.

Se o multiplicador alem dos decimos tiver centesimos, millesimos &; como o centesimo de 1 é 0.01, o de 237 é 2,37, e multiplicar 237 pelo algarismo multiplicador é tomar 2,37 o numero de vezes preciso, com tanto, que ao producto se dê, por meio da virgula, a designação de centesimos que lhe pertence; de sorte, que n'este caso em que o multiplicador tem dous algarismos decimaes, tambem no producto os dous primeiros algarismos que se obtiverem serão decimaes, e assim apartaremos tres, quatro, & se o multiplicador constar de millesimos, decimos millesimos &.

Se o multiplicando em lugar de ser numero inteiro como temos supposto, fôr tambem fraccionario, não pode esta circunstancia causar embaraço; pois que multiplicando as ultimas decimaes do multiplicando pelos decimos do multiplicador, teriamos do mesmo modo decimos d'estas ultimas fracções do multiplicando: e respectivamente os centesimos do multiplicador darião centesimos das ultimas decimaes do multiplicando, e assim dos mais algarismos decimaes que considerarmos. Ex.º 0,234

Multiplicar 0,234 por 0,502 é pois ajunctar 502 vezes o millesimo de 0,234; e o millesimo de 0,234 se obtem fazendo passar a virgula tres ordens mais para a esquerda; com effeito os decimos passão a decimos millesimos, os centesimos a centesimos millesimos etc. Ora os multiplicandos assim preparados, comprehendendo tantos algarismos decimaes quantos se contarem nos dous factores, e a multiplicação depois não fazendo mais que repetir muitas vezes esta parte decimal, é claro que podemos eximir-nos de escrever as virgulas dos productos parciaes, e empregal-a só no producto total. É a unica attenção com que devemos proceder nas fracções decimaes, applicando-lhes a regra da multiplicação dos numeros inteiros.

$$\begin{array}{r} 0{,}234 \\ 0{,}502 \\ \hline 0{,}000468 \\ 0.1170 \\ \hline 0{,}117468 \end{array}$$

Não ha duvida pois em usar da palavra multiplicação, posto que se não tenha repetido o multiplicando um certo numero de vezes, n'este caso em que o multiplicador é uma fracção; mas não se deve confundir a multiplicação com o producto, é preciso dar

a este uma nova accepção. Tomar 0,1 ou 0,01, i-é um decimo, um centesimo etc d'um numero, é multiplical-o por 0,1 ou 0,01 etc: tomar uma fracção decimal qualquer, v g 0,502 é multiplicar por 0,502, a marcha do calculo é a mesma opperação da multiplicação; mas o resultado é menor que o numero que servio á sua formação, sempre que o multiplicador seja uma fracção, como se vê no ex.º que executamos.

Quando tomamos o decimo do multiplicando e depois o repetimos um numero de vezes, designado pelo algarismo que temos no multiplicador, i-é, menos vezes do que 10, o resultado é necessariamente menor que o multiplicando. Da mesma sorte se tomamos o centesimo do multiplicando, e a repetimos o numuro de vezes designado pelos dous algarismos de que se compõe o multiplicador, i-é, menos vezes do que 100, o resultado será tambem menor que o multiplicando; e assim nos mais casos o producto será sempre menor que o numero dado para a sua formação, o que não corresponde á idêa que nos suscita a palavra multiplicação quando opperamos com numeros inteiros. Por isso querendo ligar todos os cazos, podemos dizer mais geralmente:

Multiplicar um numero por outro é formar um terceiro que proceda do primei-

ro, do mesmo modo que o segundo com a unidade.

Porem depois da modificacão feita sobre o multiplicando, quando os factores são fracções, não ha implicação; porque no caso de numeros inteiros, toma-se muitas vezes todo o multiplicando, e no outro é uma fracção que se toma.

Acontecerá algumas vezes n'estas multiplicacões, que o producto tenha menos algarismos que as decimaes que devemos designar por meio da virgula; então é mister collocar á esquerda os zeros sufficientes, para que a fraccão fique da especie que compete ao producto.

Vê-se facilmente, que os raciocinios feitos sobre a multiplicação das fraccões subsistem inteiramente na multiplicação dos numeros fraccionarios, devemos pois applical-os aos ex.os seguintes.

```
    54,756          376,80563
      23,54           427,056
   -------          ---------
    219024
   273780
  164268
 109512
 ----------
 1288,95624
```

Ordinariamente começa-se a multiplicação pelas unidades inferiores do multiplicador,

mas não pode haver duvida em começar pela esquerda; porquanto os productos parciaes são os mesmos em outra ordem; o que se escrevia na primeira linha faz agora a ultima; a segunda passa a ser a penultima &: e todos estes productos vão avançando uma caza para a direita, quando pelo modo ordinario avançavão para a esquerda

```
     6356734
       34532
 -----------
 19070202
  25426936
   31783670
    19070202
     12713468
 -----------
 219510738488
```

Esta marcha tem algumas vantagens. As multiplicações de grandes numeros exigem grande applicação, e por ultimo alguns erros se commettem; então comecando da esquerda para a direita, estes erros vem a cahir nos algarismos de menor valor.

Tambem se não houver necessidade d'um producto rigoroso, a marcha pela esquerda tem a vantagem de começar pelos algarismos de maior valor, e continuar successivamente com os que mais interessão, para que possamos ter sem chegar ao fim da oppe-racão, um valor aproximado. Quando se empregão as fraccões decimaes, muitas vezes não é necessario ter no producto todas as decimaes que lhe pertencem, e até sendo dados os factores por aproximação ou por um pouco mais ou menos, não convem conservar no producto senão fracções decimaes da ordem dos factores, e então não effectuando as multiplicações d'algarismos, que não influem no gráo d'exactidão que julgamos sufficiente, ou que devem ser desprezados, a opperação pode ser resumida, e para isso mais convem a marcha pela esquerda que o processo geral.

Sejão 63,5673 e 3,4532 os factores para uma multiplicação, e que se queira o producto aproximado até as decimas millesimas. Observar-se-ha que o multiplicando tendo quatro algarismos na parte fraccionaria, o producto pelas unidades do multiplicador dá a aproximação que se exige; a multiplicação pelos decimos dará um algarismo de mais, por isso começaremos a multiplicar pelos millesimos do multiplicando; a multiplicação dos centesimos não pede senão os centesimos do multiplicando, e assim por diante iremos supprimindo a cada opperação um algarismo do multiplicando. Pelo que mais facil nos ficará ordenando o multiplicador, de sorte que o algarismo 3 das unidades simples corresponda ás unidades fraccionarias a que queremos limitar o producto, e depois os outros debaixo dos algarismos por onde devem começar as multiplicações parciaes. Porem como a multiplicação do algarismo immediatamente inferior que se despreza no

multiplicando pode influir no producto geral, por quanto basta dez centesimos millesimos para fazer um decimo millesimo, deve-se levar em conta mais um algarismo do multiplicando, e milhor ainda dous, na multiplicação que der muitos productos parciaes, porque basta dez centesimos millesimos reservados da somma dos millionesimos para dar um decimo millesimo que não podemos desprezar. Eis-aqui o typo do calculo.

```
63,567340
    23543
─────────
19070202.
25426936
 3178365
  190701
   12712
─────────
219,5107
```

O resultado concorda com o precedente até á aproximação proposta.

Outros ex.[os] Pede-se o producto, aproximado até as millesimas, de 376,5432 por 32,0503

```
376,543200
    305023
──────────
11296296..
 7530864.
  1882715
    11295
──────────
12068,322
```

Vêr-se-ha que o resultado concorda com o producto da multiplicação ao modo ordinario.

```
  48,3255
   50723
---------
 1449765
   96650
   33824
     240
---------
 158,027
```

N'este ex.º tomamos só um algarismo alem do limite exigido, e observa-se a final que o algarismo dos decimos millesimos que temos a desprezar é 9, e menos erro se commette tomando por elle 1 millesimo; assim teremos um resultado que concorda com o producto obtido pelo modo ordinario. Sempre que o algsrismo que tiver-mos a desprezar for maior que 5 devemos contar mais uma unidade da ordem immediatamente superior.

Os erros que se commettem na opperação da multiplicacão procedem quasi sempre dos productos parciaes, por isso quando os numeros dados para a opperacão sejão grandes, que se vejão muitos algarismos repetidos, convem primeiramente fazer com o multiplicando, junctando-o successivamente a si mesmo, uma columna dos productos por todos os numeros simples Este processo é mais longo, mas tambem é mais isento d'erros formar os productos parciaes por meio das addiccões successivas: e no caso de haver algarismos repetidos no multiplicador, é mais prompto tomar o producto correspondente na columna das addiccões, do que procural-o no calculo da opperação. Eis-aqui um ex.º


```
1. . . . 73456278            73456278
2. . . 146912556             53476473
3. . . 220368834           -----------
4. . . 293825112            220368834
5. . . 367281390           514193946
6. . . 440737668          . . . . . . .
7. . . 514193946
                           -----------
```

Não se deve desprezar nenhuma das reflexões que nos conduzem aos verdadeiros productos, porque das opperacões que podem servir de prova algumas são longas, e muitas exigem novas verificacões.

Para nos tirarmos de duvida podemos dobrar o multiplicando, e vêr se o novo producto é duplo do primeiro; por quanto examinando os raciocinios feitos para deduzir a regra da multiplicação, por si mesmo se apresenta na maior evidencia, o seguinte principio:

Se as partes d'um todo forem repetidas, o mesmo numero de vezes, ou se cada uma for multiplicada por um numero qualquer, o todo apparecerá multiplicado pelo mesmo numero.

Vê-se tambem que se dous productos 357 por 263, e 263 por 357 devem ser iguaes, uma d'estas multiplicações pode servir de prova á outra; porque como a combinação dos algarismos é differente, o erro da primeira, se o houvesse, não se commetteria na segunda: e então se o producto for o mesmo nos dous casos, será mui provavelmente o verdadeiro.

Na taboa de Pythagoras se conhece pela sua vista, que invertendo a ordem dos factores, os deus modos conduzem ao mesmo resultado; e esta observação feita sobre os numeros particulares da taboa, se estende a numeros quaesquer, por quanto ella podia ser amplificada até onde quizessemos: assim estabeleceremos, a respeito da multiplicação, o seguinte principio:

A inversão da ordem dos factores, não muda o valor do producto.

Este principio tem sido apresentado como axioma, mas não é reconhecido immediatamente com o mesmo grão d'evidencia que n'addicção; por isso vamos sujeital-o á marcha dos theoremas, i-é, vamos descobrir se elle se acha encerrado em algum principio por nós já demonstrado, ou em algum axioma, de modo, que fique tão evidente como elles.

Para firmar nossas idêas tomemos dous factores 19 e 7, mas os raciocinios que fizer-mos sobre estes numeros serão geraes.

O maior dos factores decomposto em partes iguaes ao menor, dá um resto 5. Ora pelo principio precedente sabemos, que se multiplicar-mos cada uma das partes pelo outro numero, o total será igual ao produ-

cto dos dous numeros propostos. Sobre a inversão dos factores 7 por 7 não pode haver duvida alguma, se a houver é na multiplicação do resto 5, i-é, se 5 por 7 deve dar o mesmo que 7 por 5; mas decompondo tambem o factor 7, teremos a multiplicar 5 por 5 mais 2: e ultimamente a respeito de 5 por 2, teremos a multiplicar cada uma das partes 2 mais 2 mais 1 por 2. Obtido este resto, 1 vez 2 significa 2 unidades, e 2 vezes 1 significa que a unidade deve ser repetida 2 vezes.

Esta demonstração é geral; porque quaesquer que sejão os numeros propostos, como os restos vão diminuido, necessariamente se hade chegar a 1, se em antes se não tiver feito alguma decomposição sem resto.

Como o calculo das fracções decimaes não é differente de calculo dos numeros inteiros as provas, se forem precisas, se farão segundo os mesmos principios.

Passemos agora á multiplicação dos numeros complexos, não só para mostrar como as medidas antigas complicão esta opperação; mas tambem porque ainda nos é necessario saber calcular com estes numeros.

Façamos primeiramente uma multiplicação de centigrammas, decigrammas e grammas.

	g		g	d-g	c-g
Propomos	24,62	. . . .	24	6	2
por . . .	8		8		
	196,96		196	9	6

A multiplicação d'um numero complexo tirado das medidas antigas, se faz do mesmo modo: a unica differença é que o numero de unidades de especie inferior, que formão a immediata da esquerda, não será sempre 10.

	arrt.	onç.	oit.
Ex.º	24	6	2
16 oitav. fazem 2 onças	8		
50 onç. dão 3 arrateis e 2 onç.	195	2	0

Outros ex.ºs mais laboriosos teremos a executar, mas então decomporemos as fracções que se querem tomar em outras que se possão determinar mentalmente, como ametade, o terço, o quarto etc; para o que a mesma multiplicação nos guia com os productos por 2, 3, 4, etc até 10, que formamos immediatamente. No ex.º precedente depois de haver multiplicado 24 por 8 observamos que 6 onças se decompõe em 4 mais 2, e que 4 onças ou o quarto de 1 arratel sendo multiplicado por 8 deve dar 8 vezes o quarto do arratel, i-é, o quarto de 8 arrateis.

O producto de 2 onças é ametade do producto que acabamos d'achar. E finalmente como 8 oitavas fazem uma onça, 2 oitavas

dão a oitava parte do producto respectivo ás 2 onças que achamos em ultimo lugar; ter-se ha pois

	arrt.	onç,	oit.
	24	6	2
	8		
8 vezes 24 arrateis	192		
8 vezes 4 onc. ou o quarto do arrt .	2		
ametade ou 8 vezes 2 onças.	1		
um oitavo ou 8 vezes 2 oitavas . . .	0	2	
	195	2	

O modo de multiplicar, decompondo as fracções em partes aliquotas, é designado pelo methodo das partes aliquotas.

Este methodo convem quando o multiplicador tem mais d'um algarismo, pelo outro não é facil reconhecer nos productos das fracções, as unidades d'ordem superior que elles comprehenderem sem fazer á parte algumas opperacões.

Consideremos agora um multiplicador complexo, por ex.º que se queira multiplicar 24 arrat por 8 pes e 6 pollcg. 8. 6

O multiplicador toma-se abstrativamente, porque exprime quantas vezes se deve junctar o multiplicando, ou uma parte d'elle: assim se queremos saber o pezo relativo ao comprimento 8. pes 6. p de certa obra, contando 24 arrateis por cada pé, é claro que se deve ter

192
12
204

8 vezes 24 arrateis, e mais a parte respéctiva a 6 pol, i-é, ametade de 24 arrateis, visto que 12 pol. fazem 1 pé.

Se em lugar da fracção 6 pol. tivessemos 11, que se decompõe em 6 mais 3 mais 2, tomariamos

ametate de 24 arrateis 12
amstade de 12 6
e um terço 4

Suponhamos ambos os factores complexos·

	arrat	onç	oit		art	onç	oit
	24	6	2 . . .		24	4 mais 2	2
	P	p	l				
	8	6	5		8	6	4 mais 1
Pezo de 8 pés	8 vezes 24 . .			192			
	quarto ou 8 v. 4 onç.			2			
	amet. ou 8 v. 2 onç.			1			
	oitavo ou 8 v. 2 oit .			0		2	
Pezo de 6 p, amet. de 1 P				12		3	1
4 lin, o terço de 1 pol. .				2		0	4
				0		10	7
1 lin, o quarto de 4 lin .				0		2	6
				208		2	6

N'este ex.º quando passamos ao producto por 4 lin., tomamos primeiramente um sexto do antecedente para exprimir o producto relativo a 1 poll., e depois o seu terço; o calculo é mais simples do que se tomassemos immediatamente de 6 poll. a parte correspondente a 4 lin. É costume cortar estes productos auxiliares por meio de

traços para não contar-mos com elles na somma final.

A combinação das fracções decimaes com os numeros complexos tirados das medidas metricas, deixa-nos ver immediatamente, como os productos parciaes dependem do multiplicando; d'aqui vem a grande facilidade em opperar com estes numeros,

	K-g	H-g	D-g			K-g
Ex.º	24	6	2			24,62
	m	d-m	c-m			8,65
	8	6	5			19696
	196	9	6			14772
	14	7	7	2		1231
	1	2	3	1		212,963
	212	9	6	3		

Para exercicio executemos as seguintes multiplicações.

1.º Ganhando por dia 5 lb 13 sold 11 din. quanto se adquirirá em 17 dias 7 h 40'?

2.º Fazendo por 12 lb 18 sold 8 din uma toeza de certa obra, quanto se terá por 42 toezas 5 pes 4 poll?

3.º Quer-se saber quanto se tem a pagar por 25 toezas 4 pes 5 poll 3 lin, na razão de 15 lb. 10 sold. 6 din. a toeza?

	lb	s	d
1. . .	5	10 mais 2 mais 1	8 mais 6 mais 2
	17	6 mais 1	30 mais 10

. . . .

	lb	s	d			
R.	98	12	11			
	lb	s	d	lb	s	d
	12.9	0	8	15.5	0	6
	42	3 mais 2	4	25	3 e 1	4 e 1 3
R.	554	13	11	399	12	2

Se praticarmos denovamente o ultimo ex.o invertendo os factores, i-é, supponido que a questão pedia um producto em toezas pes &, achariamos 399 toezas 3 pes 7 poll 8 lin. Estes resultados mostâro que para as multiplicações de numeros complexos é necessario distinguir o multiplicando do multiplicador, o que bem se conhece pelo enunciado da questão.

Por esta observação parecerá que o theorema da inversão dos factores, não é applicavel aos numeros complexos; toda-via, a differença dos productos vem das subdivisões das suas unidades, se seguissemos uma mesma decomposição, reconheceriamos a verdade do principio estabelecido: reduzindo as fracções dos dous productos a decimaes, acha-se com effeito o mesmo resultado 399,606.

§ 2.

Decomposição dos numeros

Subtracção

Para saber em que se tornão as quantidades quando nos propômos a fazer-lhes an-

gmentos executamos duas opperações sobre os seus numeros, exprimidos por algarismos, as quaes dão resultados correspondentes ás mudanças das quantidades representadas por si mesmo.

Porem as modificações podem ser d'outra maneira- por diminuições, e é preciso tambem opperações de calculo que nos fação conhecer os resultados, figurando por algarismos as quantidades.

Para tirar huma grandeza linear de 3 metros d'outra de 8, basta sobrepol-as; e fazendo coincidir d'um lado os seus extremos, ver-se-ha em uma só porção o resto da diminuição que é a parte não coberta. Quando a superposição se não pode effectuar immediatamente, toma-se entre as pontas d'um compasso a menor das grandezas, e d'este modo se transporta; ou inda tomando uma abertura igual á unidade linear, pode-se com ella substituir agrandeza primitiva 3 metros, onde nos era necessario applical-a. Por esta ultima forma, é igualmente facil o caminho que temos a seguir para chegar ao resto da subtracção. Tomando uma vez a unidade sobre a linha de 8 metros desde um dos seus extremos, fica uma porção de 7 metros; applicando denovamente a mesma abertura sobre esta porção, fica o resto 6 metros; e finalmente repetindo a opperação, chega-se ao resto 5 metros, resultado da subtracção proposta; por quanto a unidade linear achando-se já repetida 3 vezes, ficamos seguros da identidade da parte que se subtrahiu com a grandeza da linha que tinhamos a transportar. A mesma distribuição se seguiria na subtracção d'outras quantidades, de sorte que fazendo abstracção da natureza das unidades, pode-mos dizer que 8 menos 3 da 5.

As subtracções entre numeros simples, se fazem de memoria pelo uso que temos d'addicção; pois que o resto sendo o que fica do maior numero quando se tira o menor, d'este e do resto se forma pois o maior: assim sabendo que 3 e 5 fazem 8, diremos logo que 5 é o que resta do maior numero quando se lhe subtrahio o menor; ou quanto o maior numero excede o menor; e ainda podemos dizer que é a differença de grandeza entre os dous numeros. Segundo estas diversas considerações, o resultado das subtracções toma os nomes de – resto – excesso – ou differença–

Examinemos se, á maneira das outras opperações, podemos reduzir as subtracções mais complicadas a estes actos de memoira.

Se tivermos para subtrahir de 357 o numero 215 podemos tirar respectivamente de

3 centenas	5 desenas	7 unidades
2	1	5

apoiando-nos sobre os seguintes axiomas.

Tira-se do todo subtrahindo a qualquer das suas partes;

Tira-se o todo subtrahindo cada uma das suas partes.

Diremos pois 5 unidades tiradas de 7 ficão 2; 1 desena tirada de 5 ficão 4; 2 centenas tiradas de 3 fica 1: e resumindo esta linguagem diremos 7 menos 5 . . 2; 5 menos 1 . . 4; 3 menos 2 . . . 1; o resto total é 142

Se em lugar de tirarmos o numero 215 quizessemos tirar 238, não podiamos subtrahir 8 a 7 porem podemos subtrahir a 1 desena que contem 10 unidades, e o resto 2 juncto a 7 unidades dá 9 para o resultado. Diminuindo depois as 3 desenas a 4 que ficarão no numero 357, e finalmente passando á columna das centenas, obtêmos para o resultado total 119. Por estas opperações particulares, a subtracção de dous numeros compostos de muitos algarismos, é reduzida á subtrahir um algarismo do numero 10 ou menor que 10, o que se faz mentalmente.

Pratiquemos mais alguns ex.os. Em . . 2406 diremos 6 menos 5 . . 1; 4 desenas tiradas a zero, não pode ser, mas subtrahidas a 1 centena o resto é 6 desenas; depois diremos 3 centenas que ficarão menos 2 . . 1 e escrevemos tambem os 2 milhares que ficão sem alteração.

$$\begin{array}{r} 2406 \\ 245 \\ \hline 2161 \end{array}$$

2.º 3406
2357
――――
1049

A subtracção das unidades não é possivel, nem há desenas no numero maior; porem considerando uma das centenas decomposta em 10 desenas, tomamos uma d'estas para tirar as 7 unidades: da subtracção ficão 3 unidades que junctas ás 6, que não soffrerão diminuição, são 9 unidades simples que escreveremos. Depois diminuindo 5 desenas ás 9 desenas, que o numero superior contem, ainda temos o resto 4. As 4 centenas ficarão reduzidos a 3 pelas subtracções precedentes, por isso diremos: 3 menos 3, resto 0. Emfim tirando 2 milhares a 3 milhares o resto é 1; e o resultado será pois 1 milhar, 4 desenas 9 unidades ou 1049.

Em 250003
5768
――――
244235

8 unidades tiradas de 3 não é possivel, e não ha desenas, nem centenas, nem milhares; mas como o numero tem desenas de milhar, concebemos uma d'estas decomposta em 10 milhares; um d'estes milhares em 10 centenas; uma d'estas centenas em 10 desenas, e uma d'estas em 10 unidades.

O numero ficará pois de 2 centenas e 4 desenas de milhar, 9 milhares, 9 centenas, 9 desenas, e 13 unidades; depois d'esta decomposição é facil a subtracção.

Observando os raciocinios que temos empregado na execução d'estes ex.os, facilmente se tirará uma regra para a pratica da opperação.

No subtracção das fracções decimaes se executa a mesma regra, e se dá a mesma disposição aos algarismos das fracções dadas porque é sempre mais commodo que os da mesma ordem fiquem um debaixo do outro. Eis-qui alguns exemplos.

500.875	705.0027	2764.5
363.732	300.53	1702.256
137.143	404.4727	1062.244

No 1.º ex.º vamos tirando successivamente da primeira fracção os algarismos de cada uma das ordens da segunda.

No 2.º o numero inferior não contem millesimos nem decimos millesimos. os 27 do numero superior ficão no resultado.

No 3.º o numero superior não contem decimos millesimos nem millesimos nem centesimos, por isso se toma 1 decimo dos 5 decimos que contem este numero, e se decompõe em 10 centesimos; d'estes tira-se 1 que se decompõe em 10 millesimos. e finalmente d'estes millesimos se toma 1 para decompor em 10 decimos millesimos dos quaes se subtrahie então os 6 decimos millesimos do numero inferior. depois os 5 millesimos aos 9 que ficarão no numero superior, e assim para diante.

Como do maior numero se tira o menor, este e o resto procurado são duas partes que formão o numero maior, e por isso uma breve addicção verificará a subtracção. Tambem é claro que se do maior numero tirarmos o resto achado, deve apparecer o menor numero; porquanto são estas as duas partes que sós formão o maior, assim por esta nova subtracção teremos uma prova da primeira.

A subtracção dos numeros complexos se faz tambem como a dos numeros inteiros, attendendo só ao numero d'unid des de especie inferior que formão a unidade proximamente maior. Este numero nas medidas antigas varía segundo a especie de unidades de que se trata; nas medidas metricas é con tante, pelo que a opperação n'este caso é tão facil d'executar como nos numeros inteiros.

	g	d-g	c-g	
Ex.	18	3	5	18.35
	15	2	6	15,26
Resto	3	0	9	3.09

	mm	d-mm	c-mm	
	54	13	5	54.1305
	22	37	64	22.3764
Resto	31	75	41	31,7541

Varas	Pal	p	l
59	0	2	0
32	3	5	8
26	1	4	4

N'este ultimo ex.º tomamos 1 poll. para reduzir a linhas, depois precisamos de tirar 1 palmo para reduzir a pol; porem como não há palmos no numero superior, tomamos 1 vara que se decompõe em 5 palmos; e d'estes tiramos 1 para reduzir a pollegadas.

—DIVISÃO—

Assim como usamos d'addicções multiplas, tambem algumas vezes subtrahimos um numero d'outro successivamente: para ex.o, a questão de medir uma linha por outra corresponde a estas subtracções, e do mesmo modo a de decompôr uma linha em um numero de partes iguaes. No primeiro caso, quer-se saber quantas vezes a menor das linhas propostas se contem na maior; e no segundo quer-se conhecer uma das partes iguaes, que em determinado numero podem compôr uma linha dada.

Em geral se procurar-mos quantas vezes o numero 2 pode fromar o numero 6, sabemos que 2 juncto 3 vezes dá 6; logo se d'este ultimo numero se toma 2 successivamente, não se deve achar resto á terceira subtracção: com effeito | a primeira dá 4 | a segunda dá 2 | a teraeira da 0 | assim 3 é o resultado da opperação, i-é, quantas vezes o maior numero contem o outro.

E se procurarmos a terça parte de 6 observaremos, que se esta fosse 1, as tres partes não farião senão 3, em lugar de 6: mas é claro que quantas vezes 3 se contiver em 6, outras tantas unidades haverá em cada uma das partes pedidas: ter se-ha pois o valor d'uma d'ellas, i-é. o terço de 6, procurando quantas vezes 3 se contem em 6, o que é o primeiro caso.

Segue-se d'aqui, que ou se procure o numero de partes iguaes em que se possa decompôr uma quantidade, dado o valor d'uma das partes; ou se procure o valor das partes, conhecido o seu numero, temos do mesmo modo a praticar as subtracções possiveis do menor dos numeros dados ao maior; porque em todos os casos, considerando os numeros como abstractos, as opperações tendem ao mesmo fim—achar quantas vezes um numero contém outro.—

Podemos pois abandonar distincções superfluas, a differença dos casos diz respeito somente á especie dos resultados sem causar alteração no processo; e o enunciado da questão é bastante para podermos decidir da natureza da solução; a qual como já vimos, pode ser um numero abstracto, ou um numero concreto como a quantidade que se quer decompôr, e ainda em certas occurrencias é d'uma especie que não tem relação alguma com os dados; para ex.º, se quisessemos saber quantas jardas de certa fazenda se compravão por 25 libras, a razão de 2 libras a jarda? O resultado é de differente especie dos numeros dados, corresponde só á condição

da questão.

Mas subtrahir um numero d'outro, e depois subtrahi-lo do primeiro resto, do segundo, do terceiro &, será muitas vezes um calculo impraticavel por sua extensão. É mister pois reduzir estas subtracções successivas, assim como pela multiplicação reduzimos á addicção. Aqui a opperação é designada pelo nome de divizão, porque nos propômos a dividir ou partir um numero em partes iguaes indicadas por outro numero chamado divisor por ser o que divide: ao que é dividido damos o nome de dividendo, e ao resultado o de quociente que significa quantas vezes.

Observando que procurar o numero de vezes que 2 se pode subtrahir de 6, é achar quantas vezes se precisa junctar 2 a si mesmo para ter 6, ou em uotros termos, saber o numero pelo qual é preciso multiplicar 2, immediatamente deduziremos o resultado pelo uso que temos da multiplicação.

Tomemos agora dous numeros mais compostos: 129777 para dividir em partes iguaes a 543. Nós vimos na multiplicação, que para tomar 239 vezes 543 em lugar de 239 parcellas, addiccionamos só as tres seguintes

o producto de 543 por 9 o de 3 por 543 desenas o de 2 por 543 centenas	Para evitar tambem

grande numero de subtracções observemos; que o divisor 543 é contido mais de 100 vezes, e não

chegaa 1000, | 100 vezes 543 dá 54300 | 1000 vezes . . 543000 | tire-
mos pois 543 centenas em quanto fôr possivel

129777
 543
75477 . . primeira subtracção
 543
21177 segunda subtracção

Este resto não sendo sufficiente para que se possa fazer uma subtracção mais, vemos que o dividendo comprehende dusentas vezes o divisor, ou que 2 é o numero de centenas do quociente; mas contendo-se o divisor mais de 10 vezes n'este resto, porque 10 vezes 543 ou 5430 é menor, subtrahiremos 543 desenas em quanto for possivel

21177
 543
15747
 543
10317
 543
4887

Como não podemos subtrahir mais que 3 vezes, concluiremos que o dividendo contem alem das 2 centenas já achadas, mais 3 desenas de vezes o divisor.

 543
4344
 543
3801
etc etc . . . .

Passemos a subtrahir o divisor simplesmente em quanto poder ser

Vêr-se-ha que é possivel tirar 9 vezes o divisor

Consequentemente o quociente é composto de 2 centenas, 3 desenas, e 9 239

Fizemos as primeiras subtracções sem accrescentar os dous zeros a 543 por quanto 1297 centenas contem 2 vezes 543 centenas ou 2 centenas de vezes 543. Da mesma sorte no resto 217 centenas ou 2177 desenas, junctando as 7 que ha no dividendo geral, se contem 543 desenas 3 vezes ou 3 desenas de vezes 543, por isso tambem n'estas segundas subtracções deixamos de junctar o zero a 543.

Se começassemos pelas ultimas subtracções, i-é, a diminuir simplesmente o divisor em quanto nos fosse possivel, se farião evidentemente tantas subtracções como de unidades tem o quociente, quando pelas secções que fizemos na opperação a reduzimos a tantas subtracções como de unidades há na somma dos algarismos do quociente pois que cada um d'elles indica o numero de subtracções em cada secção.

O que acabamos de fazer para a divisão, nós o tinhamos feito tambem para a multiplicação: as addicções successivas do multiplicando a si mesmo tantas vezes quantas são as unidades do multiplicador, forão reduzidas ao numero designado pela somma dos algarismos d'este factor. Procurando assim no que precede as simplificações que podem resumir a opperação de que nos occupamos, vejamos tambem se exste um meio de reduzir ainda mais o numero de subtracções, como observamos na multiplicação onde as addicções ficão reduzidas ao numero de algarismos do multiplicador.

Ora se soubessemos o numero de subtracções que é possivel effectuar na primeira secção da opperação, tomariamos outras tantas vezes o divisor, e pela unica subtracção d'este producto se acharia o mesmo resto que pelas diminuições successivas. Tornemos ao exemplo de que nos temos servido. Se conhecessemos o algarismo 2 das centenas do quociente, se formaria o producto do divisor por este numero, e subtrahindo do dividendo parcial 1297 se teria o mesmo resto 211. Depois observando que em 2117, segundo dividendo parcial, o divisor se contem 3 vezes, basta multiplicar por este numero o divisor e subtrahir o producto que se obterá o mesmo resto que pelas tres subtracções consecutivas. Emfim conhecendo que o divizor se contem no terceiro dividendo parcial 9 vezes, a subtracção do producto d'este numero pelo divisor dará o resto – o –

Ora quando o dividendo é de um ou pelo muito de dous algarismos e o divisor d'um só, achamos de memoria o quociente; para ex.º, para achar quantas vezes 5 é contido em 35 lembramos que 7 vezes 5 fazem 35, e concluimos immediatamente que 5 é contido 7 vezes em 35. Da mesma sorte se se quer determinar quantas vezes 4 é contido em 27 sabemos que 6 vezes 4,

não fazem mais que 24, e que 7 vezes 4 fazem 28 por isso concluimos que 4 se contem inteiro em 27 seis vezes. Assim quando o dividendo e divisor sejão compostos de muitos algarismos, tomarmos somente os primeiros da esquerda, i-é, em lugar de procurar quantas vezes 543 se contem em 1297, o que seria difficil, procuramos somente quantas vezes o primeiro algarismo 5 do divisor é contido nos dous primeiros do dividendo; em 12 há 2 vezes 5, e escreveremos 2 no quociente

Nem sempre por este modo se achão os quocientes verdadeiros, algumas vezes a multiplicação que se effectua depois nos mostra que o quociente estimado é maior do que convinha; porque não se podendo fazer depois a subtracção é signal que o divisor se não pode subtrahir tantas vezes como se havia indicado pelo quociente parcial. Para ex.º, se na divisão de 47096 por 571, se tomando a parte 4709 que contem o divisor 571, nos contentarmos de procurar quantas vezes 5 se contem em 47 acharemos immediatamente 9 pois que 9 vezes 5 são 45; mas a parte 47 do dividendo parcial não só deve conter as 45 centenas da multiplicção das centenas do divisor, como tambem as que ficão reservadas da multiplicação das desenas, e tal differença não se acha entre 45 e 47, pelo que o algarismo 9 não convem. Para attender a esta differença basta, como estamos a ver neste exo, multiplicar tambem o segundo algarismo do divisor, multiplicações que se fazem de memoria e nos deixão ver se o algarismo convem, ou se é preciso diminui-lo d'uma unidade ou mais até que a subtracção se possa effectuar; e se para diminuir o numero de tentativas tomarmos logo um quociente menor de dous ou 3 unidades, é preciso depois da subtracção observar que a differença não seja maior que o divisor, porque então o quociente parcial que se acabou de achar é menor do que convinha. Eis-aqui a disposição que se dá á apperação para facilitar os calculos que prescrevem os raciocinios precedentes.

129777	543	Escreve-se o divisor entre as
1086	239	duas linhas que se vê á margem para o separar do dividendo que se colloca a esquerda,
2117		e dos algarismos do quociente
1629		que se vão escrevendo por
4887		baixo
4887		
0		

Tomamos sobre a esquerda do dividendo 4 algarismos, porque os 3 primeiros não contem o divisor. Dizemos depois em 12 ha 2 vezes 5 e escreveremos 2 no quociente, multiplicamos por este numero todo o divisor, e escrevemos o producto por baixo do dividendo parcial para fazer a subtracção, da qual achar-se-ha o resto 211.

Este resto juncta-se ás desenas do dividendo

que não entrão na operação precedente por não fazerem parte da multiplicação do divisor pelas centenas do quociente, que não pode dar um prodcto d'ordem inferior ás centenas; e ter-se-ha 2117 desenas para a segunda divisão parcial. Em 21 contem-se 5 quatro vezes; mas multiplicando por 4 os dous algarismos da esquerda do divisor vê-se um producto 216 maior que 211, e a subtracção é impossivel pelo; que, diminuindo uma unidade ao quociente experimentaremos o algarismo 3.

Assentando 3 no quociente e fazendo a multiplicação do divisor por este numero, escreveremos o producto 1629 debaixo do dividendo parcial para effectuar a subtracção, a qual nos dá o resto 488 que com o algarismo 7 do dividendo total forma o terceiro dividendo parcial 4887.

5 em 48 é contido 9 vezes; 9 vezes o divisor faz exactamente 4887; logo este ultimo dividendo contem 9 vezes o divisor sem resto, e como tinhamos já 3 desenas e 2 centenas o quociente total é 239.

Com effeito por este modo de opperar decomposemos o dividendo proposto em

1086	centenas ou	200 vezes o divisor
1629	desenas »	30 vezes o divisor
4887	unidades »	9 vezes o divisor
no todo		239 vezes o divisor

Vê-se claramente por esta decomposição, que temos ajunctar ao algarismo das unidades do dividendo, para achar as do quociente, um certo numero de desenas, centenas etc do resto da divisão precedente que deu as desenas do quociente, as quaes tambem forão determinadas tomando para dividendo parcial o algarismo das desenas do dividendo total juncto ao resto da primeira divisão. Isto nos mostra a necessidade de começar a opperação da divisão pela esquerda, d'outro modo seria bem difficil de separar as partes em que o dividendo deve ser decomposto.

Para aviar a opperação podemos deixar d'escrever debaixo do dividendo parcial o producto do divisor pelo quociente respectivo; á medida que se for multiplicando cada um dos algarismos do divisor se vai fazendo a subtracção, assim

```
129777 | 543
 21180 | 239
   480
    00
```

Depois de vermos que o algarismo 2 convem para as centenas do quociente, diremos: 2 vezes 3 . . . 6 para 7 . . . 1 e escreve-se debaixo do algarismo 7; 2 vezes 4 . . . 8 para 9 . . 1; 2 vezes 5 . . 10 para 12 . . 2. Sem chamar o algarismo 7 das desenas do dividendo para a direita do resto obtido continuaremos contando com elle no mesmo lugar em que se acha: 3 vezes 3 . . 9 prra 17 . . 8; 3 vezes 4 . . 12 para 20 . . 8; 3 vezes 5 . . 15 para 19 . . 4.

Tambem, quando para uma d'estas subtracções parciaes nos for necessario tomar uma unidade do algarismo da esquerda, podemos tomar

esta desena pelo pensamento, e depois juntar outra ao producto que se segue: diremos 3 vezes 3 . . 9 para 17 . . 8; 3 vezes 4 . . 12 e 1 . . 13 para 21 . . 8; 3 vezes 5 . . 15 e 2 . . 17 para 21 . . 4.

Este modo de fazer a subtracção por compensações é fundado sobre o seguinte principio.

Se a dous numeros desiguaes se ajuntar ou tirar um mesmo numero, a differença fica sempre a mesma.

Com effeito a differença de dous numeros é a parte não commum, i-é, oque se acha n'um sem se achar no outro, e pela addicção ou subtracção d'um terceiro numero, ajunta-se ou tira-se uma parte commum. Eis aqui agora alguns exemplos mais.

É evidente que 9 centenas se contem nas 873 tantas vezes como 9 unidades em 873 unidades. Podemos pois apagar em cada termo um igual numero de zeros; o quociente é sempre o mesmo qualquer que seja a especie das unidades.

```
87300 | 900

  873 | 9
   60 | 97
    0
```

Esta observação nos conduz a outra, da mesma evidencia, e que igualmente nos pode servir para aviar as opperações. Se tivessemos para dividir 45 por 15 via-mos immediatamente

que | 15 incerra 3 partes iguaes a 5
45 oito d'estas partes | então se considerassemos 45 e 15 da especie-palmos-nenhuma duvida teriamos em dizer que se quer dividir 9 varas por 3, porque são ainda as mesmas quantidades representadas por outras medidas.

Nos designamos aqui estas especies de unidades para maior clareza; mas em geral podemos dizer

mos dizer	15 encerra 3 partes iguaes a 5 45 nove d'estas partes	ou

que 15 tem 3 partes das 9 que comprehende 45; assim

O quociente não muda de valor quando se dividem ou multiplicão os seus dous termos por um mesmo numero.

Este principio pode resumir a opperação da divisão, tendo meios de conhecer se ha alguns numeros que dividão junctamente o dividendo e o divisor; pois que podendo-se fazer mentalmente algumas d'estas divisões, de cada vez nos ficarão numeros mais simples: brevemente indagaremos quaes são os caracteres de divisibilidade,

Facamos ainda a divisão seguinte

$$\begin{array}{r|l} 35728 & 352 \\ \cline{2-2} 00576 & 101 \\ 1 & \end{array}$$

Em 357 vê-se immediatament que ha uma vez 352 e 5 de resto, ao qual junctando as desenas do dividendo resulta o numero 52 que não contem o divisor; isto faz vêr que o quociente não

tem unidades d'esta ordem, é preciso escrever 0 no quociente, e juntar o algarismo das unidades para formar um novo dividendo parcial; é inutil fazer a multiplicação por zero, porque não se teria mais que zeros no producto, e a subtracção dava para resto o mesmo dividendo parcial.

Achamos que o dividendo é composto de 101 vez o divisor e ficou o resto 176, menor que o divisor.

Todas as outras divisões executadas até aqui se fizerão exactamente, porque cada dividendo continha o seu divisor um certo numero de vezes sem resto; n'esta ultima achamos que o dividendo é composto de 101 vez o divisor, e ficou o resto 176: 101 é pois uma parte do quociente, e para o completar se faz preciso calcular a outra parte, vêr de que modo o resto 176 se compõe do divisor, i-é, que parte fraccionaria será deste divisor.

Ora o decimo de 352 é 35,2 logo quantas vezes 176 comprehender 35,2 outros tantos decimos do divisor se contarão no dividendo alem da parte inteira ja achada: Temos pois de dividir 176 por 35,2, e como acabamos de vêr que se pode multiplicar ou dividir por um mesmo numero o dividendo e o divisor que o quociente não altera, por isso dividiremos antes 1760 por 352; d'este modo não temos mais que accrescentar um zero ao resto achado, e continuar a opperação tendo a attenção de separar por meio da virgula este quociente parcial para que se conheça a especie a que corresponde.

Se ainda depois de ter os decimos do quociente ficasse algum resto da opperação, podiamos do mesmo modo ter os decimos dos decimos, e assim para diante até achar uma divisão parcial que não deixe resto ou até obter um certo numero de decimaes para o quociente, que o possamos julgar suffecientemente aproximado segundo as exigencias do caso, i-é, que o mado segundo as exigencias do caso, i-é, que o despreso das decimaes que se seguem sejão sem influencia para a solução da questão de que se trata. Para ex.º sendo 3355 francos o lucro da venda de 325 metros de certa fazenda, e se quizesse saber quanto se ganhou em cada um, veriamos pela divisão que 10 fr e 32 c não é um quociente exacto, mas não continuariamos a opperação porque não são attendiveis as differenças menores d'um centimo.

N'stes casos podemos supprimir o algarismo da direita do divisor, em lugar de accrescentar o zero ao resto; mas convem augmentar d'uma unidade o ultimo algarismo que ficar, se o que se supprime é maior ou igual a 5; os erros a que nos expômos por esta simplificação não influem nas decimaes com que nos contentamos.

Em todas as opperações o calculo das fracções decimaes é o mesmo calculo dos numeros inteiros. A divisão entre fracções ou numeros fraccionarios da mesma ordem decimal não tem differença da marcha seguida até aqui, o fim é sempre designar quantas vezes o dividendo con-

tem o divisor, ou que fracções do divisor, quando elle é maior; em summa procurar como o dividendo se campõe com o divisor; e nós sabemos que estes termos se podem multiplicar por 10, 100 & até que se tornem numeros inteiros. E mesmo quando não haja no dividendo e divisor um igual numero de algarismos decimaes, como se pode completar o que tiver menos com zeros collocados á direita, segue-se que todos os casos se reduzem a opperações entre numeros inteiros.

Ex.	3883,6 | 25,55	ou	388360	2555
			132810	152
			510	
			00	
	0,30225 | 0,2325	ou	30225	23250
			6970	1,3
			000	

Na segunda divisão o quociente é 1, e fica um resto que avaliado em partes do divisor vem a ser exactamente 3 decimos; por isso o quociente completo é 1,3: se a opperação não terminasse com este quociente, podia ser continuada em quanto nos fosse conveniente, accrescentando um zéro a cada resto que fosse apparecendo, ou cortando no divisor, de cada vez, a ultima letra da direita com a attenção recommendada.

Na divisão dos numeros complexos é conveniente distinguir as questões em que o dividendo e o divisor sejão complexos, d'aquellas em que só um d'estes numeros o seja.

Em ambos os casos estes termos podem ser dados na mesma ou de differente especie, e a do quociente virá comprehendida na condição da questão: ex.^{o}:

1.^{o} Sendo 2 pesos o preço da vara de panno de Saragossa, quantas se podem comprar por 415 pesos, e 3 pecetas? É claro que o quociente deve ser de differente especie do dividendo e divisor, achar-se-há um numero de varas, e fracções da vara.

2.^{o} Por 238 soberanos quantas yardas se podem dar de certa fazenda de 2 soberamos e 16 shellings a yarda? E d'outra a 3 soberanos e 4 shellings a yarda, quantas se podem dar por 250 soberanos? Aqui ainda os quocientes são de especie differente do dividendo e divisor; ter-se-ha um numero de yardas e fracções da yarda.

3.^{o} E se nos perguntão o preço de cada yarda, offerecendo-se 125 por 129 soberanos e 14 shellings? O quociente é da mesma especie que o dividendo.

4.^{o} 27 arrobas 3 arrateis e 6 onças de chá custarão 437 moedas de ouro, 5 crusados, e 14 vintens qual será o preço d'arroba? O quociente deve ser tambem da especie do dividendo.

Na 1.^{a} questtão é evidente, que se o dividendo não fosse complexo, i-é, que a quantia dada fosse toda designada por pesos, o calculo se reduziria a tomar a ametade; por isso fazendo com que o dividendo e o divisor não

tenhão mais que uma mesma denominação de unidades, a questão é levada ao grão de simplicidade que desejamos. Ora como o peso tem 5 pecetas é mister pôr 3 n'uma fracção de 5 dividindo, como já sabemos, 30 por 5 para dar decimos do peso, que acharemos 6. Dividindo pois 415,6 por 2 ter-se-há 207,8 varas.

Na 2.^{a} questão em que os divisores são complexos temos a effectuar reducções semilhantes.

O soberano é de 20 shellings; por isso se dividirá 238 por 2,8 ou . . . . 2380 | 28

$$\begin{array}{r|l} 2380 & 28 \\ \hline 440 & 85 \\ 00 & \end{array}$$

E 250 por 3,2 ou . . . . 2500 | 32

$$\begin{array}{r|l} 2500 & 32 \\ \hline 2640 & 78,125 \\ 00080 & \\ 160 & \\ 000 & \end{array}$$

Examinando o 3.^{o} problema vê-se facilmente que o quociente é uma parte do dividendo e por isso o divisor deve ser um numero de vezes; assim fazendo abstracção da palavra yarda dividiremos

	lb.st.	sh	
	129	14	125
			1 0 9
convertendo o resto4 em shellings	4		
	20		
	80		somma-se com os shelings do dividendo
	14		
	94		

94 mas como esta
12 somma se não
188 pode dividir, po-
94 remos 0 no quoci-
1128 ente separando as especies, e reduzem-se os 94 shellings a pences, para praticar depois a divisão.

No ultimo ex.º o divisor é tambem complexo, mas podemos reduzir um e outro termo á forma decimal. Como 14 vintens são 7 decimos d'um cruzado, veremos que 5 cruzados e 7 decimos é, de 1 moeda de 12 cruzados a fracção 0,475. Da mesma sorte 6 onças é do arratel a fracção 0,375; e 3,375 arrateis são 0,105 de 1 arroba; teremos pois a devidir 437,475 por 27,105 e acharemos 16, 14; e se quizermos pela divisão achar immediatamente o quociente em numeros complexos, executaremos a opperação reduzindo os restos a especies infiriores, e achar-se-ha 16. m. 1. c. 13. v.

```
437475 | 27105
166425 |---------
   379 | 16  1  13
    12
  ----
   759
  3795
 -----
 45540
 18435
    20
------
368700
 97655
  1633
```


Quando se queira fazer a prova da divisão, toma-se o divisor um numero de vezes designado pelo quociente, i-é, multiplicão se estes dous numeros, e deve apparecer o dividendo, quando a divisão não tenha resto; e havendo-o, ao producto de que se falla, se deve juntar este resto.

As considerações feitas a pag 106, tambem nos offerecem um meio de vereficar a opperação; mas é preciso observar que os restos não ficão sem alteração como os quocientes; pois que constando o dividendo de duas partes, o producto do quociente pelo divisor mais o resto, se se multiplica ou divide uma somma, todas as partes d'esta somma são multiplicadas ou divididas pelo mesmo numero.

§.º 3.º

Problemas simples ou elementares

Nós temos empregado as quatro primeiras opperações d' Arithmetica para os effeitos seguintes:

1.º Ajunctar muitos numeros por um modo mais breve que accrescentando a um d'elles successivamente cada uma das unidades de que os outros se compõe: é a addicção.

2.º Obtêr a somma de muitos numeros iguaes por uma marcha mais expedicta que a addicção; é a multiplicação.

3.º Achar quanto um numero excede a outro, sem o trabalho de tirar successivamente uma a uma as unidades; é a subtracção.

4.º Conhecer o resultado de muitas subtracções successivas d'um mesmo numero, limitando-nos a poucas subtracções; é a divisão.

Das idêas que formamos sobre a numeração, partimos para estas opperacões; é o ponto de vista mais elevado para as observar; agora comecemos a consideral-as de mais perto, e examinemos que resultados se podem tirar d'estes differentes modos de combinar os numeros, discutindo as questões simples, ou que dependem somente d'uma das quatro opperacões.

Facilmente se reconhece quando as questões pedem uma addicção ou uma subtracção; o objecto d'estas opperações indica claramente o seu uso, ex.: Que dinheiro deve haver n'um cofre, sabendo-se que por uma vez entrou reis 375554
por outra . . . . » 12000
e por ultimo . . . . » 19200

Aqui pede-se que formemos um só numero de muitos numeros da mesma especie, de sorte que a somma seja um todo de que os numeros propostos são as partes.
Achar-se-ha praticando a addicção 406754

Se se quer saber quanto ficou no cofre que continha 406754 depois de se tirar 31200, a condicão é que o numero pedido mais 31200 seja igual a 406754
vê-se pois que se d'este todo se tira . . . 31200
fica a outra parte 376554

Se nos perguntão a importancia de 12 metros de certa fazenda do preço de 3 francos, vê-se que se pede um producto da especie monetaria, i-é, que se tome 3 francos 12 vezes. E se os numeros que tomamos fossem propostos com o seguinte enunciado: Quantos metros se deve ter por 3 francos ajustando 12 metros por um franco? O sentido d'esta questão exige que o mesmo producto designe metros.

A multiplicação serve, como acabamos de ver para determinar um valor total conhecendo o da unidade.

Outros ex. Um trabalhador que ganha 480 rs. por dia quanto tem a receber no fim de 16 dias de trabalho? . . . . R—7680

2. Quanto se hade dar por 25 moedas de 7500? . . . . R—187500 reis

3. A que distancia nos achamos d'uma bateria de artelheria, se se ouve o tiro 30 segundos depois de ver a explosão, sabendo que o som corre 337 metros por segundo?

4. Perguta-se o numero de horas que corresponde a 11 dias pelo systema antigo, i-é, contando os dias de 24 horas? Na divisão dos numeros complexos já resolvemos alguns d'estes problemas para converter unidades de certa denominação em outras de especie inferior.

5. Quer-se saber a area d'um campo de forma rectangular, com 28 metros de comprimento e 25 de largura? Faz-se a multiplicação d'estes dous numeros; porque já sabemos que as medi-

das de superficie se refferem ás lineares, e que debaixo da figura proposta temos só a medir o seu comprimento e largura, e a multiplicar os numeros resultantes; de sorte que no ex. de que se trata, a solução é 950 metros, i-é, que se podem arranjar uns ao lado dos outros, sobre a extensão do terreno, 950 metros quadrados.

As applicações da divisão são igualmente faceis; pergunta-se, para ex., quantas horas são necessarias para que uma fonte que deita 80 litros d'agoa por hora possa encher um tanque de 960 l.?

É claro que devem ser tantas horas como de vezes se contar 80 em 960, i-é. . . . . . . 96 | 8

2. Se um carro contem 500 rações de pão, quantos carros serão necessarios para transportarem o pão a um exercito de 20000 homens?

3. Andando um homem 5 leguas por dia, em quantos dias caminhará 50 leguas?

4. Se pagamos por certa fazenda 26840 reis na razão de 320 reis cada metro, qual é o numero de metros?

Aqui podem entrar tambem as reducções das unidades de especie inferior a unidades de especie mais ellevada: Quantas horas valem 3600 segundos? . . . . R 60

Quantas arrobas se comprehendem em 117 arrateis?

Outros ex. do uso da divisão, quando o objecto é repartir um numero em partes iguaes para conhecer uma d'estas partes.

1.º Um homem que quizesse andar 210 leguas em 30 dias, quantas leguas deveria contar por dia? Temos a devidir 210 em 30 partes iguaes; se estas fossem de legua, não farião mais que 30 leguas, em vez de 210; mas é claro que quantas vezes se contar 30 em 210, outras tantas leguas deve caminhar por dia; assim é preciso dividir 210 por 30.

2.º Um muro de 245 metros quadrados foi construido por 288000 rs; quanto custou cada metro quadrado?

3.º Qual é a renda diaria d'uma pessoa, que todos os annos recebe 200000 reis, contando o anno por 365 dias somente?

Quando se quer achar uma quantidade media entre muitas outras, é tambem a divisão que resolve o problema. Supponhamos, que em 4 experiencias com uma peça-d'artilheria se acharão os alcances seguintes:

metros	2457	Por alcance medio entendemos o que seria cada um dos alcances se, não alterando a somma, elles fossem todos iguaes; por isso temos a dividir a totalidade 9781 pelo numero dos tiros, e
	2433	
	2441	
	2450	
somma .	9781	

achar-se-ha o alcance medio 2445,25.

Os problemas que se resolvem por uma das opperações unicamente, são sempre apresentados segundo condições tão simples, que não pode haver difficuldade na escolha da opperação que convem realizar; o fim a que nos propômos na resolução, é achar um numero dependente d'outro que nos é conhecido: temos visto, para ex, que dado o preço d'uma cousa, a importancia ou o valor de muitas d'estas cousas depende só do seu numero.

Aqui suppomos que todas as qualidades, que devem acompanhar os objectos são, exactamente as mesmas; e como os effeitos só varião segundo aquillo que produz ou concorre para os produzir, diremos se uma cousa vale tanto, duas valem o duplo, tres o triplo, & pois se observa que varia somente o numero dos objectos. Mas é preciso fazer este exame antes de entrar na resolução d'uma questão; nós cahiriamos em erro se quizessemos resolver do mesmo modo, que o exemplo antecedente, as seguintes questões, e outras mais que se apresentão frequentemente nas artes.

Dada a distancia que uma pedra corre n'um segundo de tempo, cahindo d'uma certa altura, achar a distancia que correria em um numero dado de segundos?

Dado o tempo que um tonel gasta a despejar-se, avaliar o tempo que gastaria se tivesse uma capacidade dupla, ou um certo numero de vezes maior?

Não sendo o tempo que uma pedra gasta na sua queda duplo quando a altura é dobrada, nem aquelle em que se despeja um tonel, quando a capacidade é duplicada, a solução dos problemas d'esta natureza não pode depender

somente da relação entre os numeros dados,

Da mesma sorte poderiamos suppor, que com um contorno duas vezes mais extenso se obteria tambem uma area dupla, por observar-mos que crescendo o circuito d'uma superficie augmenta a superficie; nós sabemos que a area d'um rectangulo se avalia pelo producto do comprimento pela largura, o que faz corresponder a um contorno duplo uma area quadrupla.

É preciso pois, para entrar na resolução das questões, perfeita intelligencia das causas de que procedem os resultados, para vereficar se aquelle que se procura depende somente dos numeros dados, ou se existem outras circunstancias que não possão ser desprezadas.

Afora os problemas particulares a cada uma das opperações que, como temos visto, são mui faceis de resolver, os outros exigem duas ou mais opperações; é mister pois saber as que convem executar, i-é, precisa-se decompor a questão em problemas elementares onde se tracte somente de achar uma somma, um producto, uma differença, ou um quociente. Para este fim lê-se com attenção o ennunciado do problema, e percorrendo successivamente as suas condicções, aparta-se tudo o que é accessorio, deixando em descoberto o que é essencial-as causas e os effeitos-D'este modo facilmente reconheceremos as questões elementares em que pode ser dividida a proposta; e como, ajunctando problema a problema, chegaremos á solução pedida Nós vamos entrar em alguns exemplos proprios para mostrar esta analyse.

1.º Quer-se saber o estado d'um negociante, que tem em caixa 275045 reis; em fazendas o valor de 2447700; em letras, que hade cobrar, 1765000: e deve a diversos 37600, mais 200000, e 1375850.

Para resolver o problema, fazemos o seguinte raciocinio: Se do valor de todas as quantias que lhe pertencem, se tira a somma de todas as que elle deve, o resto designará o que elle possue realmente. Temos pois a fazer duas addicções, e depois uma subtracção.

	2447700
37600	275045
200000	1765000
1375850	4487745
1613450	1613450
	2874295 rs.

Este modo d'analysar a questão, indica os seguintes problemas elementares, que se envolvem no enunciado proposto.

1. Qual é a somma que o negociante possue pelas quantias. . . R. 4487745	275045 2447700 1765000
2. Qual é o total das dividas, tendo passado a diversos as obrigações. . R. 1613450	37600 200000 1375854

3. E se o negociante hade haver. . 4487745
e deve . . . 1613450
qual é differença? . . . . R. 2874295

Ex. 2. Se forão necessarios 25 dias a 4 opperarios para executarem certa obra; quantos dias serão precisos a 10 opperarios, empregando a mesma actividade? Esta questão pode decompor-se em 2 elementares.

1. Se a 4 opperarios são necessarios 25 dias, um só, de quantos dias precisará? É claro que precisaria de 4 vezes mais . . . . R 100

2. Se 1 opperario precisa de 100 dias para fazer certa obra, empregando-se 10 opperarios, quantos dias serião necessarios? É igualmente claro que a 10 vezes mais trabalhadores pertencem 10 vezes menos dias . . . . R 10

Ex. 3. Um fabricante vendeu por uma vez 27 metros de fazenda do preço de 11 francos, depois vendeu mais 210 metros, e recebeu por tudo 3000 francos; quanto ganhou n'esta venda?

1. Observemos que tendo vendido	27
	210
é o total	237
2. Que tendo ficado a 11 francos cada metro	237
	11
	237
	237
o valor é . .	2607
3. E tendo vendido por	3000
o ganho é a differença	393

Ex. 4. Se de 62 metros d'uma certa fazenda tivessemos vendido 16 metros a 550; a que preço poderiamos vender o resto para apurar 31048 reis?

Se tinhamos . . 62	16 metros a . . . 550
e vendemos . . . 16	16
possuimos ainda . 46	33
	55
	fazem reis . . . 8800
Tendo recebido 8800	Emfim se 46 se devem
para 31048	vender por 22448 | 46
resto 22448	o preço d' um é . . 448

Quando assim resolvemos uma questão fazendo observar todos os problemas elementares em que ella pode ser decomposta, este modo, pelo qual a intelligencia marcha do complexo ao simples, se pode chamar methodo analytico; não obstante ajunctarmos depois os problemas um a um para chegarmos á solução pedida. Porem como este methodo substitue com grandes utilidades, as regras particulares apresentadas nos tractados d'Arithmetica commercial com os nomes de conjucta, de companhia, de juros, descontos, cambios, etc etc podemos chamar-lhe methodo geral. Por elle resolveremos todos os problemas numericos com a maior simplicidade possivel, tomando só das arithmeticas destinadas aos negociantes: a explicação dos termos technicos para comprehender bem os de todas as questões que se podem apresentar na pratica;

mas antes de entrarmos na serie d'applicações que vamos dar, convem expôr aqui os signaes abreviativos das opperações que se devem effectuar, e outras convenções mais que podem facilitar a analyse e resolução d'alguns problemas mais complicado.

Quando as questões pedem, até chegarem á sua resolução, um attento exame, é mais commodo e expedicto usar d'estes signais, que resumem a escripta, e manifestão as opperações que se devem realisar; é, por assim nos explicarmos, um quadro onde se vê todos os caminhos que temos a seguir para chegar ao ponto a que se pertende.

O signal da addicção é $+$
da subtracção $-$
da multiplicação $\times$ ou $.$
da divisão : ou um traço horisontal ficando o dividendo por cima e o divisor de baixo

Usa-se tambem o signal $=$ por *é igual a*

Os signaes das opperações collocão-se entre os dous termos dados para as effectuar, assim;
$3 + 2$ quer dizer 3 mais ou augmentado de 2
$8 - 5$ quer dizer 8 menos 5 ou subtrahindo 5
4×3 ou $4 . 3$ exprime 4 multiplicado por 3 ou 3 vezes 4

$12 : 3$ ou $\frac{12}{3}$ indica 12 dividido por 3

E em lugar d'escrever 3 mais 2 igual a 5; escreve-se $3+2=5$
8 menos 5 dá 3 $8-5=3$
4 por 3 dá 12 $4\times3=12$, ou $4 . 3=12$
12 divid por 3 dá 4 $12:3=4$ ou $\frac{12}{3}=4$

Tambem para designarmos uma opperacão sobre o resultado de addicções ou subtracções que nao tenhão sido realizadas, fechão-se entre parenthesis estes resultados indicados, e sobre elles, como se fossem numeros, se designão as opperacões, assim:

8 - (3+2) indica, que se quer subtrahir de 8 o resultado da addicção de 3 e 2.

26 - (20 - 8) indica, que se tem a sommar 25 com a defferenca entre 20 e 8.

O emprego d'estes signaes é tão natural e corrente, como o uso dos algarismos para exprimir os numeros; são como elles mais simples, e por consequencia mais exprssivos que a linguagem ordinaria. Podemos pois considerál-os como pertenca d'Arithmetica, ou a continuação das abreviações da numeração escripta.

SECÇAO 3.ª

APPLICAÇAÕ SOBRE AS OPPERAÇÕES DE COMMERCIO.

Considerações proprias para guiar e simplificar os calculos.

As questões que dependem unicamente das quatro primeiras opperacões d'Arithmetica se resolvem sempre com facilidade, quer sejão relativas as artes e manufacturas, quer á industria agricola ou commercial: a analyse do enunciado das questõs mais complicadas, fará reconhecer os problemas ellementares que é preciso estabelecer; depois o calculista, corrente nas quatro opperacões, achará sucessivamente a soluçao d'estes problemas, até chegar ao ultimo que responde á proposta. Nos vamos começar pelas questões de juros simples, comprehendendo os descontos, taras, commissões, premios de seguros, avarias, &c porque todas estas cousas se avaliaõ como os juros.

§ 1.º

Questões que dependem dos juros simples

O juro é o interesse ou renda, que se tira periodicamente pelo emprestimo de cabedaes; como uma retribuição pelo lucro ou uso que d'elles se pode fazer.

Ordinariamente estipula-se a taxa do juro pelo capital 100, no prazo d'um anno; a expressão vulgar é *a tantos por cento*, e escreve-se *tantos* °|o

Prob. 1. 6000U reis a juro de 5 °|o; quer-se saber o rendimento annual.

Observa-se 1.º Se 100 produzem 5. 1 produz 100 vezes menos $\quad \frac{5}{100} = 0,05$

2. Que 6000000 destas unidades produzem $6000000 \times 0,05 = 300000$

Chegar-se-hia ao mesmo resultado analysando a questão d'outro modo

1. Se 5 é o juro de 100, 1 será a renda d'um capital 5 vezes menor $\quad \frac{100}{5} = 20$

2. E se 20 rende 1, o juro de 6000U se regulará pelo numero de vezes que 20 se contiver n'este capital $\quad \frac{6000000}{20} = 300000$

Por este modo nos referimos á quantia que deve dar 1 de juro; assim se usa em muitos contractos, e então se diz, em logar de tantos por cento, que o capital é posto *ao dinheiro de*; v.g.

20 como no problema que acabamos de resolver, entendendo que cada uma d'estas quantias comprehendidas no capital vence 1 de juro no fim de cada anno.

Com a taxa 5 °|o o calculo, de que se usa ordinariamente, para se saber o juro de qualquer quantia respectiva a 1 anno, é tomar a metade do capital e separar a ultima letra á direita.

Apresentamos aqui esta regra particular só para se observar como ella se deduz immediatamente da ultima formula; mas não daremos muitas outras que nos fornece a Arithmetica pratica, porque recorrendo-se a um grande numero de regras sobrecarrega-se a memoria, e não se exercita a intelligencia nas deducções.

Prob. 2. Qual é o capital correspondente a 300U reis de juros na mesma supposição de 5 °|o ?

1. Se o capital que rende 5 é 100, o capital 20, que é 5 vezes menor renderá 1

2. E se a 1 corresponde o capital 20, 300U dará 300000 vezes 20, i. é. . . . 6000U

Prob. 3. A quantos por cento foi posto o capital de 6000U para render por anno 300U?

1. Se a 300U corresponde o capital 6000U a 1 corresponderá . . . $6000000 : 300000 = 20$

Responderemos pois, que se deve dar o capital ao dinheiro de 20. Não é preciso propor a segunda questão, para saber quanto corresponde a 100

Probl. 4.º 6300U é a somma do capital e juro a 5 %; pede-se o capital?

1. A somma do capital conhecido 100, e juros 5, é 105.

2. Quantas vezes 105 se contiver em 6300U, outras tantas se tomará 100. . . 6300000 : 105 = 60000

A solução da proposta é pois 6000U

Na mesma supposição pode-se perguntar, quanto é o juro? E a differença está só em que se deve tomar 60000 vezes 5, em lugar de 60000 vezes 100.

O capital pode ser collocado a juros por semestre, ou por mez, e os calculos antecedentes não farão differença; mas quando se referem a tempo maior ou menor que o prazo convencionado, é preciso depois de resolvida a questão relativamente á unidade de tempo, levar em conta o de vencimento.

Ex. Qual é o juro de 6000U em 6 annos a 5 %?

Pois que este capital rende por anno 300U em 6 annos renderá 6 vezes mais, i-é, 1800U

Se no prazo do vencimento entra-se um numero de mezes ou de dias, teriamos a reduzil-o a fracções decimaes do anno; assim se no ex. antecedente tivessemos 6 annos e 45 dias, contando os annos por 360 dias, como se usa nas transacções commerciaes, teriamos a multiplicar 300U juro respectivo a 1 anno por 6,12., e o producto 1837500 seria a solução da

questão. A differença que pode resultar de 5 ou 6 dias de menos na supposição do anno commercial, assim como a dos restos que apparecem nas divisões, são julgadas sem importancia.

Aqui tambem podem ter lugar as questões que resolvemos no cazo dos juros simples, i-é, que não dependem do tempo.

Pede-se o Capital. Qual é o capital que a juro de 5 % rende 1800U em 6 an.?

Vê-se immediatamente que o capital incognito rende 300U por anno; e que a segunda questão vem a ser uma das que já resolvemos: Qual é o capital correspondente a 300U de juros na mesma supposição de 5 %.?

Pede-se a taxa. A que interesse foi posto o capital 6000U para render 1800U em 6 annos?

Rendendo 1800U em 6 annos dá 300U por anno; dividindo pois 6000U por 300U temos o capital que pertence a 1: achar-se-ha 20, e diremos que a quantia foi pósta ao dinheiro de 20; consequentemente a taxa é de 5 %.

Pede-se o tempo. Pode-se ainda fazer a questão seguinte: Em que tempo o capital 6000U posto a juros de 5 % rende 1800U?

Sabendo a renda annua na razão dada, depois comparando-a com os juros vencidos 1800U conheceremos o tempo; pois que elle será tanto maior ou menor que a unidade do prazo, quanto o dito juro for maior ou menor que a renda annua.

DESCONTOS.

Quando se ajusta pagar uma certa quantia n'uma epocha ainda a fastada, passa-se uma obrigação d'esta quantia, designando o prazo convencionado. Algumas vezes o devedor offerece o pagamento em dinheiro de contado, fazendo pela antecipação, um desconto sobre o valor da letra; outras vezes é nos bancos commerciaes que se fazem estes descontos, ficando os banqueiros no lugar dos credores.

A questão principal é sobre o capital que com o seu juro, conforme o preço estipulado, pode produzir o valor da letra no termo do seu vencimento.

Ex. Quanto se deve dar por uma letra de 1587810 a um anno de vencimento, ajustando o desconto a 5 °lo?

1. A somma do capital conhecido 100 e juros 5 é 105

2. Quantas vezes 105 se contiver na quantia nominal 1587810, outras tantas se deverá tomar 100 para ter o valor da letra na actualidade 1512200

Nas Praças de commercio usa-se calcular o interesse sobre o valor nominal da letra; assim no mesmo ex. a renda do capital 1587810 na razão de 5 °lo, a cha-se 79390

e subtrahindo . . 1508420

é a quantia que se págа.

O primeiro modo é recto, porque se oppera

sobre a quantia que se põe a juros; no segundo, o banqueiro paga-se do juro de 100 e dá só 95, erro que no problema presente a pouco monta, mas que pode ser muito maior em outros casos.

Este modo que está em uso é impropriamente chamado *desconto por fora*, e o outro *desconto por dentro*.

Não se pode dizer com razão, que se emprega o *desconto por fora* por uma pura convenção entre as duas partes interessadas; porque uma sujeita-se por precisão á outra que allega a facilidade dos calculos, a pratica de muito tempo e de todos as praças; mas depois das explicações que se tem dado do methodo rigoroso, excepellil-o é indicar, pelo menos, que n'uma corporação tão respeitavel como a do commercio, a rotina pode mais que todos os esforços da sciencia.

Vamos resolver outro problema, mas para não carregar a memoria de todos os raciocinios que houvermos de fazer, iremos indicando as opperações á medida que a analyse do enunciado as descobrir.

Um mercador comprou certas fazendas por 320U a credito d'um anno, mas offerece-lhe o vendedor de lhe fazer o desconto na razão de 6°lo se elle remir a letra: no fim de 3 mezes o mercador quer pagar a sua divida, e pergunta qual é o abatimento que se deve fazer?

Pois que 100 rende 6 n'um anno, em 1 mez renderá. . . . . . . $\frac{6}{12}$ ou 0,5

Logo em 9 mezes que faltão para o vencimento, é 9 vezes 0,5 . . . $9 \times 0{,}5$

Assim 100 no fim de 9 mezes . . . $100 + 9 \times 0{,}5$

Por consequencia quantas vezes este valor entrar em 320U outras tantas se deve contar 100

$$100 \times 320000 : (100 + 9 \times 0{,}5)$$

Praticando agora as opperações indicadas achar-se-ha 306220

Querendo o desconto por fora teriamos igualmente a observar, que

100 rende 6 em 1 anno,

e um mez renderá . . . . $\frac{6}{12}$ ou 0,5

Logo em 9 mezes 9 0,5

Assim por 100 do valor nominal se paga na actualidade . . . . $100 - 9 \times 0{,}5$

Por consequencia 320U ou 3200 vezes 100 . . . $3200 (100 - 9 \times 0{,}5)$

e executando as opperações indicadas acha-se 305600.

Assim, procurando directamente a quantia que se tem a pagar, o calculo de *desconto por fora* é da mesma extensão que o outro; porem depois de achar-mos que o desconto de 100 é 4,5 podiamos tomar por cada 100, que se comprehende na quantia dada, a parte 4,5; (é o calculo de juros simples na razão de 4,5 °/o) e o resultado tiral-o do valor nominal da letra.

Por este ultimo modo de resolver o problema proposto, entramos em outra questão *achar o desconto*: tambem se pode procurar a taxa do desconto, o tempo, e o valor nominal da letra;

nós vamos resolver estes novos problemas.

Taxa. A que preço se descontou uma letra de 320U se se recebeu 305600 a desconto por fora, sendo o prazo do vencimento 9 mezes?

O interesse em toda a quantia é a differença dos valores propostos 14400

em cada mez é a nona parte . . . 1600

logo para o capital 1 . . . . . 16 : 3200

e ao Capital 100 . . . . 16 : 32

ou 0,5

Tempo. Se se quizesse saber o tempo suppondo que se tinha feito o desconto por fora a 6 °/o ao anno?

O lucro em todo o anno é 3200×6 . . 19200

e o lucro recebido é 14400

Reconhece-se pois que o tempo do vencimento é dentro do prazo estipulado; será pois uma parte designada por 14400 : 19200 | $\frac{144}{192} = 0{,}75$ ou 9 mezes

Valor da letra. Qual é a quantia que foi rebatida por 305600, nove mezes antes de expirar o prazo do vencimento, a desconto *por fora*, na razão de 6 °/o?

É claro que foi descontada por todo o tempo que tinha a vencer a 4,5

E como o capital 100 se paga por 95,5, quantas vezes na quantia recebida se contiver 95,5 outras tantas vezes 100 se deve tomar para ter | $\frac{305600}{95{,}5}$

o valor nominal da letra 320U

Outro ex. Um fabricante remetteu certa fazenda na importancia de 12930U dinheiro de contado; porem não podendo o mercador pagar logo, quer passar uma letra a 15 mezes: pergunta-se o valor da letra, sendo o desconto a 0,5 °lo por mez?

1 Sendo o desconto a 0,5 por mez, em todo o tempo de vencimento . . . . 15×0,5 ou 7,5

2 Com o desconto por fora o valor 100 se paga somente por . . . . 100-7,5=92,5

3. Logo quantas vezes 92,5 se contiver em 12930000 outras tantas se deve tomar 100 . . . 12930000 : 92,5

R 13978378

Fazendo-se o desconto por dentro sabe-se,

1 Que 100 no fim do tempo se torna em 107,5 ou . . . . 1 em 1,075

2. Logo 12930000 × 1,075 = 13899750

Pelo primeiro modo leva-se de interesse 7,5 pela quantia 92,5, e pelo segundo conta-se este interesse por cada 100 como é justo; pois que se pelo embolso da divida o fabricante tivesse de pôr a juro o principal, ou se o mercador tivesse quem lhe emprestasse o dinheiro para fazer o seu pagamento á vista, não se contaria de principal e juro senão 13899750: a differença 78628 é a quantia em que o mercador é lesado

por se fazer uso do desconto por fora. A facilidade das opperações no desconto por dentro é ainda maior que no outro modo, temos uma questão de juros simples sem differença alguma, que se resolve pela mesma pratica seguida nas opperações de juros; e achado o interesse que renderia o principal, sommão-se estas quantias para ter, no fim do tempo designado, principal e juros.

TARA

A tara, é o abatimento que se faz ao pezo das mercadorias em bruto, i-é, com as caixas, capas, e outros embrulhos, para regular o seu pezo limpo. Esta diminuição se avalia segundo a especie de mercadorias, e conforme os regulamentos das alfandegas e usos das praças do comercio; é, como nos descontos, um tanto °lo por fora ou por dentro, quer dizer, contado no cento ou sobre o cento; são elocuções defeituosas mas o uso as tem perpetuado.

Probl. 1.° Quanto vale certa fazenda que peza 7655 Kilog. em bruto, sabendo-se que 100 Kilog. pezo liquido, custão 12000 reis, e que a tara por fora é 5 °lo?

É precizo primeiramente ter o pezo liquido, para tomar de cada 100 kilogrammas o valor 12000 que se acha estabelecido no enunciado da questão.

100 tem de abatimento 5, o total . . . 7665
terá . . 383,25

pezo limpo . . 7281,75
a . . . 120

145635
728175

R . . . 873810

A mesma questão com a tara *por dentro*
5 sobre 100 dá 105; quantas vezes 105 se comprehender em 7665 outras tantas centenas se contarão de pezo liquido . . . 7665 : 105=73
R 7300 kilog.

Probl. 2.º Um negociante comprou por 50700 reis certas fazendas na razão de 15000 por 100 kilog pezo limpo; pergunta-se qual era o pezo em bruto, contando-se a tara 5º/o por dentro?

1. . . . 50700 : 15000 . . . . 3.38
pezo limpo . . kilog 338

2. . . . 338×5 . . . . tara 16,9
pezo bruto 354,9

Probl. 3.º Comprarão-se por 319500 certas fazendas do pezo de 350 kilog. em bruto; sendo a tara a 8 º/o por fora, que preço se deve fazer por kilog. para ganhar 83U ?

Depois de ter o pezo liquido procura-se o valor do kilog. de sorte que se obtenha o total 402500
R 1250 reis

COMMISSÃO E CORRETAGEM

As commissões de negocio dão um tanto º/o sobre a importancia total da compra, venda, ou cobrança commissionada, cujo premio se carrega na conta ao correspondente.

Há tambem em todas as praças de commercio corretores ou medianeiros que concluem diversas transacções, e por sua agencia tem um tanto º/o, segundo o ramo de negocio, e o estylo da terra.

O calculo para deduzir estes premios dos valores das transacções, não faz differença do calculo dos juros: Ex.

Por ordens recebidas, fizemos uma compra de mercadorias no custo de 300U; de gastos ou despezas miudas 12300; a corretagem a 1 º/o, e de commissão 2. Qual será a importancia da conta que temos a remetter ao nosso correspondente?

Contando 1 º/o de corretagem sobre 300000
temos . . 3000

Ajunctando as despezas 12300

315300

Sobre esta somma se calcula a commissão, que a 2 º/o dá . . . . .3153×2 ou 6306
315300

R . . . 321606

Com a mesma facilidade com que calculamos o interesse d'agencia, procuramos o capital empregado, e a taxa de corretagem ou commissão, conhecidas as outras duas cousas. Com os dados da questão que acabamos de resolver, podemos propôr estes novos problemas, e servirão de prova uns aos outros.

SEGUROS E AVARIAS

É permittido em todas as praças companhias de seguro que, mediante um tanto °/o do valor das cousas, correm os riscos de fogo; os de naufragio, prezas, detenças, mudanças de derrotas &; e outros riscos de ajustes particulares expressos nos contractos.

As questões arithmeticas dependem dos juros simples; a principal é o calculo da quantia que deve receber o segurador, ou a que deve pagar no caso de perda.

Premio. Havendo segurado dos riscos de mar certos effeitos no valor de 6775U a 12 °/o; quanto se deve pagar no caso de serem descarregados a são e salvo?

É claro que recebendo-se 12 de cada 100 por 6776U se hade ter . . 12×67760=813120

Perda. O segurado deve receber o valor dos effeitos, depois de abater a contribuição que pagaria ao seguro se o navio chegasse a salvamento.

Assim de 100 ficão 88
e para 6776U se tomará 67760×88=57428880

Se o segundo quer receber o valor inteiro, é mister que na celebração do contracto figure um capital que diminuido do premio dê a quantia verdadeira.

Como 100, se reduzem a 88
o capital ficticio se comporá de 100 como 6776000
se compõe de 88 . . . . . . 6776000 : 88
R. 772000

Se com estes dados 7700U de capital, e 944U de premio, se quizesse saber a taxa do seguro, observamos que se fosse a 1 °/o o capital seria 100 vezes maior que o premio; logo tomando 100 vezes o premio e dividindo pelo valor do seguro, saberemos a quantos sahe por cento; i-é. a taxa.

Avaria. A perda ou damno dos cabos, vellas amarras etc desde a suspensão do primeiro ferro até 24 horas da sua ancoragem, corre por conta dos seguradores do casco e aparelho do navio; igualmente como a prejuiso que sobrevier nos generos durante a viagem, desde a carga até á descarga, quando a malicia ou negligencia do Capitao e equipagem não seja a causa dos successos. Toda a despeza extraordinaria que se fizer em beneficio ou salvamento dos generos, seja lançando effeitos ao mar para aliviar o navio, picando amarras, abandonando ferros, ou sejão despezas de entrada em qualquer porto no acto d'extrema necessidade, tudo é avaria que se destingue em simples e grossa ou geral, conforme tiver sido particular a uma das duas cousas, navio e carga, ou que ambas tenhão soffrido damno.

O que se pertende do calculo n'estes casos, é saber a quanto pode chegar por cento a importancia d'avaria para a sua estimação, e regular as quantias que devem tocar aos interessados.

Ex. A carga d'um navio avaliado em 62500U soffreu d'avaria 25000U, quanto °lo toca de prejuizo?

O numero de vezes que 25000000 se comprehender em 62500000 mostra o capital correspondente ao prejuizo 1, e por elle regulando o que toca a 100, i-é, procurando quantas vezes se comprehende em 100, teremos n'este resultado a solução da questão.

625 : 250=2,5

e 100 : 2,5=40 . . . . 40 °lo

CAMBIOS

No commercio chama-se cambio, ou preço do cambio o interesse simples que o banqueiro conta na troca de moedas de differente especie, ou pelo trespasso de dinheiro d'uma cidade para outra no mesmo reino, e de diversos reinos. Etas especies de cambios se destinguem pelos nomes de cambio miudo, e cambio de banco interior e exterior.

O cambio miudo se faz em diversas lojas determinando um tanto de premio em cada moe-

da: n'este negocio o calculo é unicamente uma multiplicação premio pelo numero das moedas que se quer trocar, para se ter o premio total.

O cambio de banco se faz por meio de ordens ou bilhetes com certas formalidades, aos quaes se dá o nome de letras de cambio. O fim d'estas opperacões é evitar o transporte das moedas pelo trabalho e risco da conducção. As opperações de cambio interior dependem só do calculo de juros simples; o banqueiro calcula a differença entre o dinheiro do banco e o dinheiro corrente a tanto °lo, a favor ou contra a praca.

A raridade ou abundancia das moedas, estado de seguranca respectivo a cada uma, das pracas, tudo pode fazer alterar o preço do cambio; mas pelos bolletins do commercio ou pelas folhas publicas se pode saber estas alteracões ou, como se costuma dizer, o curso do cambio.

Se, para ex., querendo remetter de Pelotas para o Rio de Janeiro a quantia de 360U, vamos procurar um negociante para mandar entregar a dita quantia; quanto devemos dar pela letra de cambio, a 1.5 °lo a favor do Rio de Janeiro?

1,5 olo vale tanto como 0,015

por 1; logo para 360000 . . . . 360×15 =5400

É preciso pois dar ao banqueiro 365400 reis.

Mas se se quizesse sabér quanto se receberia no Rio de Janeiro, dando em Pelotas 360U ao mesmo cambio? Como 1,015 dinheiro de contado se reduz a 1 dinheiro de banco, procuremos quantas vezes em 360U entra 1,015

360000 : 1,015 R 354680

Com a mesma facilidade conheceremos o curso do cambio dadas as duas quantias – dinheiro de banco e dinheiro de contado– Na supposição do problema antecedente, sabendo-se que 360U em Pelotas se reduzião a 354680 pagos no Rio de Janeiro observariamos que a differença 5320, é o rendimento da quantia que dá o banqueiro; consequentemente se dividirmos este interesse pelo principal, teremos o que pertence a 1, e multiplicando este resultado por 100, ter-se-ha o cambio que se quer conhecer

5320 : 354680=0,015 R 1.5 °lo

Cambio exterior. A correspondencia exacta d'um numero de moedas de certo payz com as de outro, é o que se chama o *par* no preço dos cambios: esta igualdade é avaliada pelo pezo, e valor intrinsico ou toque das moedas.

Para que no cambio tenha lugar o *par*, é preciso que se não dêm certas circunstancias que exigem compensação; como a abundancia ou raridade das letras d'uma nação sobre a outra, o augmento ou diminuição do credito publico, e outras causas de maior ou menor segurança; que levão o cambio acima ou abaxo do par, i-é, a favor ou contra uma das praças.

Para ex°, se comparando as moedas estrangeiras, vemos que 57,5 dinheiros esterlinos ou pences correspondem a 1000 reis em Portugal,

estando o cambio entre Lisboa e Londres por este preço, dis-se que está ao *par*; mas se Lisboa deve a Londres mais do que Londres a Lisboa, 1000reis valerão menos que 57.5 dinh. esterlinos, e dis-se então que o cambio é a favor da praça de Londres, e contra a de Lisboa.

Estas differenças no curso do cambio são designadas pelo numero das moedas d'uma das praças em refferencia ao da outra, que é certo e invariavel; assim no ex.o que acabamos de ver, Lisboa dá o *certo* 1000 reis, e Londres o *incerto* 57,5 dinheiros esterlinos ou mais ou menos, de sorte que disendo-se na tabella dos cambios publicada nos periodicos

Londres e Lisboa . . . . 59 dinh. sterlinos

entende-se que Lisboa dá 1000 reis para receber 59 dinh. sterlinos. Este numero de dinh. sterlinos é que augmenta se o cambio subir, ou diminue se elle descer para o *par* ou abaixo do *par*, i-e, de 57,5, visto que tomamos este numero como o valor exacto de 1000 reis.

É pois evidente que, quando o cambio está acima do par, a praça, que da o incerto perde; porque paga por mais do seu verdadeiro valor as moedas da outra praça, e ganha quando o cambio está abaixo; o contrario acontece á outra praça que dá o certo; e em termos de banco diremos:

Para a praça que remette dando o certo, ou *saca* dando o incerto, o cambio mais alto é o mais vantajozo; pelo contrario, para a praça que *remette* dando o incerto, ou *saca* dando o certo, o cambio mais baixo é o mais vantajozo.

Quem vende uma letra de cambio d'outra praça saca sobre esta praça, porque recebe em dinheiro corrente onde vende,o importe da mesma letra; e quem a compra remette, porque transmitte uma ordem de pagamento do valor correspondente á quantia com que fez a compria.

As questões relativas a esta especie de cambios se resolvem como as de cambio interior; para o mostrar daremos aqui alguns ex.^{os}

Quer-se remetter do Rio de Janeiro 680U para Pariz, sabendo pelo bolletim da praça, que o cambio está a 320 rs., i. é, que no Rio de Janeiro é necessario dar 320 rs. para ter 1 franco em Pariz.

680000 : 320 . , ... R 2125 f.

Se a questão fosse saccar sobre Pariz este numero de francos, supposto tambem o mesmo cambio, é claro que se tiria.

2125 × 320 . . . . R 680000

E para saber com este numero de francos, e seu valor em dinheiro corrente no Rio de Janeiro, se o cambio está ao par, a favor, ou contra esta praça, teremos

680000 : 2125 = 320 valor de 1 franco

Mui raras vezes o curso docambio será tal que exceda as despezas do transporte, e nos decida a correr os riscos; não só em tal cazo, como tambem para promover o interesse dos cre-

dores devemos conssultar o curso do cambio com outras praças, por intermedio das quaes possamos fazer as nossas remessas com mais vantagem do que directamente.

Estas espeeculações, ou arbitrios dão lugar a uma divisão do cambio exterior, em cambio directo, e indirecto; e vê-se claramente os calculos necessarios em cada uma destas divisões para o exame a que nos propomos, para ex^o:

Cambio directo. Quer-se remetter do Porto para Londres 6000U, o cambio a 55,25 pences.

Como no Porto se dá 1000 reis para ter 55,25 pences, temos a multiplicar 55, 25 por 6000 . . . . 331500 pences depois 331500:240 . . . . 1381 libras e 5 sh. pois que12 pences fazem 1 sh., e 20 shellings 1 lb.

Cambio indirecto. Vejamos agora se o devedor fazendo a remessa por intremedio d'outras praças, pode produzir em Londres maior numero de pences, sabendo pelos periodicos, que

Porto e Paris . . . . 480 reis por 3fr.

Paris e Londres 26 fr por 1 lb sterl.

Quantos francos temos a receber em Paris por 6000U dados no Porto?

6000000 : 480 = 12500

12500×3 . . . . 37500 fr.

2. Negociando em Pariz, quantas lb. st. se podem obtêr em Londres pela letra de 37500 fr?

37500 : 26 1442,3 . . . . 1442 lb. 6 sh.

Ter-se-ha pois | 1442 6 | 61 lb. 1 sh. be-
| 1381 5 |

neficio do arbitrio, do qual se tem a deduzir as despezas da commissão, e ainda o jure da quantia na differença do tempo relativamente á remessa directa:

Assim observará o devedor se o arbitrio concorre ao bem do credor, que elle deve promover, e que seria em proveito propio no caso que a remessa fosse d'um numero de libras certo; por quanto com uma menor quantia dada no Porto pagava a divida contractada em Londres.

Vejamos ainda outras negociações que se offerecem

Porto e Mad. . . . 625 reis . . . . 8 reales
Madrid e Lond. 1 pezo de 8 real 39 pences
Porto e Amst. 400 reis 42 d. gros
Amst. e Lond. 11 F. B. de 40 d. gros- 1 lb.

1.a | Porto e Madrid | 6000000 : 625 = 9600
| Mad. e Lond. 9600×39 = 374400 pences
ou 1560 lb.

2.a | Porto e Amst. 6000000 : 400 15000
| 15000×42 = 630000 din. g.
| Amst. e Lond. 630000 : 440 = 1431 lb

Por estes calculos se vê, com facilidade, que é mais util negociar por Madrid a remessa, pois que produz em Londres mais do que directacmente ou per meio das outras praças que entrarão em comparação.

Podemos ainda examinar remettendo por maior numero de praças se tirará se maior beneficio; para ex., se tivessemos, alem das supposições que temos estabelecido, que Paris dá a Madrid 15 f. 50 c. por 1 pistóla de 32 reales, achariamos que

Porto e Mad. . . 6000000 : 625 = 9600 pesos
ou 2400 pistolas
Mad. e Pariz 15,5×2400 = 37200 f.
Pariz e Lond 37200 : 26 = 1430,76 lb.
ou 1430 lb. 15 sh.

Este resultado mostra que esta negociação produz menos interesse que as ultimas que consideramos.

Nos saques accontece de differente modo. Um negociante do Porto tem a receber em Londres um certo numero da lb st. e pode sacar directamente sobre esta cidade ou ordenar ao seu correspondente que lhe remetta uma letra de cambio sobre Madrid ou Paris, Amsterdam & & tomado em Londres aos mesmos cambios. Examinemos o partido mais vantajozo.

1 · Se saca directamente sobre Londres receberá no Porto 1000 reis por 55,25 pences

2. Uma letra sobre Madrid, 39 pences por 1 pezo
55, 25 : 39 = 1,42
Mad. e Porto 1,42 ×325 . . reis 897

3. Sobre Amst. 440 d. graos por 1 lb.
440 : 240 = 1,08 55,25×1,08 100,1075
No Porto 400 reis por por 42 d. gros
100,1 : 42 = 2,4 2,4×400 . . . reis 960

Vê-se pois que per meio d'estas praças não resulta tanto interesse como pelo cambio directo; mas pode ser que outras, com relações mais vantajosas, sejão preferiveis: em todos os casos é mister praticar o calculo, e para formar um juizo seguro, levar depois em conta a commissão do correspondete, e outras despezas incertas, como corretagens, portes de cartas, e juros perdidos pela demora da negociação.

Tambem~~ão~~ emprego o cambio indirecto por mais d'uma praça intermedia; ~~mas~~ as opperações, inda que em maior numero, não augmentão de difficuldades, são operações para deduzir os interesses que podem resultar, já arrecadando ou pagando dividas, já remettendo e sacando ao mesmo tempo por expeculação de cambios. As defficuldades só podem ter lugar pela variação dos cambios durante a negociação; para que os correspondentes segurem os interesses ao arbitrante, terão de fazer algumas mudanças nas ordens recebidas segundo os lucros ou perdas que derem as altas e baixas; é preciso pois observar e reflectir um pouco sobre as questões para decedir a qual das praças se deve dar a preferencia, porem os principios para a resolução são os mesmos.

Em continuação daremos aqui algumas questões relativas á troca de mercadorias.

Os ganhos ou perdas n'estes cambios se calculão sempre sobre os valores das cousas. Para ex:

Comprarão-se 4 hectoliteros de trigo por 24U

e pertende-se trocar 3 a milho de 8 hectol. por 20U reis.

O hect. de trigo custou 24000 : 4 . . . 6000
3 importão em 6000×3 . . 18000
O hect. de milho . . . . 20000 : 8 . . . 2500
Logo o numero de vezes que 2500 entrar em 18000 . . 18000 : 2500 outros tantos hect. de milho devemos ter em troca . . . . R 7,2

2°. Se um negociante tem trigo a 6000 reis, e na troca o quer passar a 7200; como se deve vender o milho que custou a 2500, para não ficarmos lesados na troca?

Como 7200 comprehende 6000, e 0,2 d'esta quantia, o negociante de trigo passa 1 de custo por 1,2; outro tanto se deve fazer a respeito do milho . . . . . 2500×1,2 . . R 3000

3°. Um negociante tem vinho de 12U o hectol. que quer passar a 15U na troca com outro de 10U pôsto no valor de 12U; pergunta-se o ganho ou perda n'este negocio?

Vendendo o vinho de 12U a 15U passa 1 a 1,25, para que no outro resultasse o mesmo lucro, era preciso vender a (10000×1, 25) ou 12500; ha pois 500 reis de differença por hectol.

Mas se o negociante que tinha vinho de 10U contratasse de receber em dinheiro 2U de cada hectol, é claro que tendo então a considerar o seu vinho no valor de 8U, para que a troca fosse igual a ambos, bastava passar este vinho a 10U; pois que 10000 : 8000 1,25

ESPECULAÇÕES

Os calculos respectivos á compra e venda de inscripcões do thesouro, ou acções de banco e companhias, são tambem opperações de juros simples.

Inscripções do thesouro são titulos de emprestimos contrahidos pelo estado, e de atrazos de pagamamentos consolidados em divida perpetua ou temporaria, que rendem juros. Do thesouro não se exige o embolso dos capitaes quando estes sejão precisos aos capitalistas, mas vende-se os titulos na praça segundo o curso da renda, que vem a ser a quantia relativa a 100 incerta, ou com altas e baixas dependentes da maior ou menor prosperidade do payz, segurunça, e fidelidade do governo.

Se os titulos se vendem pelo valor que n'elles se representa, i-é, se custão 100, dis-se que ostão ao par, e se custão mais ou menos dis-se acima ou abaixo do par. Há variedade nos juros; tem-se posto em circulação inscripções de 5, 4, 3 °/o conformemente ás circunstancias mais ou menos favoraveis em que o thesouro tem levantado os capitaes. Attendendo a que o pagamento por semestre elleva a renda annua, pelo interesse no segundo semestre dos juros do primeiro, pode ter lugar a seguinte questão:

Quanto se pode dar pelas inscripções de 5 °/o para ter um juro desta taxa annualmente?

100 no primeiro semeste rende 2,5
no segundo (1o2,5×2,5) rende . . . 2,5625
e no fim do anno se terá 5,0625

Esta differença 0,0625 é a renda d'um capital que se calcula por 0,0625 : 0,05; com effeito se 5 é o juro de 100, o de 1 será 0,05, e do mesmo modoo que 0,0625 se composer de 0,05 o capital que se procura se formará da unidade; assim a divisão dando 1,25 é claro que se pode comprar ao curso de 101,25.

2.º A como se podem comprar os titulos de 4 °/o para que o capital renda 5 °/o ao anno?

No primeiro semestre 100 rende 2
no segundo se terá 1o2×0,02 2,04
e no fiim do anno 4,04
Ora 4,04 é juro de 4,04 : 0,05 . . . 80,8

é pois a este curso que se podem comprar os titulos.

3.º Há na praça titulos de 4 ao curso de 85, e os de 5 ao par, quaes se devem preferir? Vê-se immediatamente que são os de 5, porque a differença 15 dos capitaes não pode render 1.

Acções - Acompra e venda dos titulos pertencentes ás companhias de seguros, banco. e varias emprezas, regulaõ-se pelos dividendos, i-é, pelos lucros que se repartem aos accionistas no fim de cada semestre, e que se podem considerar como juros, mas juros variaveis. As questões não fazem differença do cazo de juros reaes, e por isso appresentaremos aqui um só exemplo.

Qual é o juro annuo d'uma acção comprada por 400U tendo sido o dividendo do primeiro semestre 20U?

Se é provavel que o segundo semestre dê o mesmo dividendo, teremos 400000: 40000 .:. 10 i-é, que 10 tem 1 de juro . . . . . . ou 10 o/o

Opperacões mercantis. Para o commerciante dar a preferencia ou regular o arbitrio em differentes opperações mercantis que se lhe offerecão, é mister deduzir dos ganhos que pode considerar em cada uma das negociações com differentes prazos, quanto o/o vem a render por anno o capital que quer empregar.

O que temos a fazer primeiramente, é apurar a cada negociação quantos o/o lhe toca: estes calculos de *perda ou ganho* são muito faceis, supponhamos o seguinte caso:

Em certa negociação que durou 5 mezes com o capital 12000U apurou-se a quantia 15000U depois de pagar todas as despezas, direitos, transportes, seguros, commissões, corretagem, quebras & &; quanto se ganhou o/o?

Como a differença dos dous capitaes é o interesse do emprego de 12000U, a parte que toca ao capitel 1 deve ser menor 12000000 vezes; multiplicando esta parte por 100 teremos o interesse correspondente ao capital 100.

3 : 12=o,25 . . . . R 25 o/o

Sabendo quantos o/o deu cada uma das negociações e o tempo empregado, pode-se calcular quanto viria a render por anno o capital 100.

Como no exemplo proposto o tempo foi expresso em, mezes saberemos o quanto toca a 1 mez e depois tomaremos esta renda 12 vezes

25 : 5=5 (por mez) 12 5=60 (por anno)

PRAZO MEDIO

Na pratica do commercio, muitas vezes se tem a procurar o tempo em que se pode pagar n'uma só somma muitas dividas com diversos prazos, sem que resulte prejuizo de juros tanto para o credor como para o devedor.

As quantias ou são contratadas ao mesmo juro, ou a juros differentes; no primeiro cazo há só a considerar o tempo e os capitaes, e como o juro na segunda unidade de tempo, v.g. 1 mez, pode ser julgado como procedente d'outro igual capital no primeiro mez, e assim dos outros, se tomarmos cada quantia tantas vezes como de mezes lhe são assignados, teremos uma somma de capitaes fiticios que só n'um mez renderia tanto como as verdadeiras quantias nos seus respetivos tempos, ou como a somma destas n'um prazo medio; assim é claro, que a somma dos capitaes fiticios deve comprehender tantas vezes a verdadeira, como de mezes esta precisa para produzir o mesmo juro, e uma simples divisão acaba de resolver o problema.

Ex. Pergunta-se em que epocha se poderá satisfazer n'uma só somma os pagamentos seguintes

3000U a 6 mezes | sem prejuizo des interesses
1800U a 4 | relativos a estes capitaes to-
600U a 3 | dos ao mesmo juro?
5400U somma que se hade pagar d'uma só vez n'um tempo que é o incognito da questão; mas como o juro é o mesmo ou se tome

3000U em 6 mezes ou 18000U em 1
1800 em 4 . . . . » . . . . . 7200 »
600 em 3 . . . . » . . . . . 1800 »
27000 »

Logo 270 : 54 . . . . R 5 mezes

Ex.º 2.º Um negociante compra certas fazendas na quantia de 3000U a 5 mezes, mas offerecendo em dinheiro de contado 1800U; pergunta em que tempo deve pagar o resto, sem que haja prejuizo de interesses?

3000U a 5 m. rende o mesmo que 15000U em 1, e como a quantia que tem a pagar deve em antes dar o mesmo juro, quantas vezes ella se comprehender em 15000U outros tantos mezes se deve contar

logo 150 : 12 12,5

Ex.º 3.º No exame dos livros d'um fallido vio-se que os credores não tinhão a receber mais que 60 º/o e ainda, para apuramento de creditos, em 3 pagamentos iguaes por 3, 4, e 8 mezes; pergunta-se quanto º/o perde cada credor, contando o juro de 6 º/o?

A somma dos prazos dos tres pagamentos é 15 mezes por consequencia o prazo medio é

5, que a 0.5 dá 2, 5 º/o, e para o capital 60 será uma parte de 2,5 como 60 a respeito de 100 ou 60 : 100=0.6 0,6×2,5=1,5

Logo os credores perdem 40 mais 1,5 ou 41,5 º/o

Ex.º 4.º 1200U e 500U a 6 e 9 mezes com juros differentes 6 e 4,5 º/o ao anno; em que tempo por um só pagamento se pode satisfazer estas dividas?

juro por mez 0,5 por todo o tempo 3
» 0.375 » 3,375

1200000×0,005 =6000
500000×0,00375=1875
7875

1200000×0,003 =36000
500000×0,03375=16875
52875

52875 : 7875=6,714 . . . R. 6 mezes e 12 dias

§ 2.º

QUESTÕES DIVERSAS

Temos visto como se determina um numero per meio de tres outros, dos quaes dous sejão da mesma especie entre si, e o terceiro da especie d'aquelle que se procura.

Quando, conhecida uma causa e seu effeito, nos propomos a determinar o resultado d'outra causa homogenea com a primeira, sabemos com a maior evidencia, que estes effeitos hão de ser tambem homogeneos, como resultados d'uma causa unica, que com ella vem a ser maior ou menor: assim o segundo effeito não pode ser senão composto do primeiro multiplicado por um numero abstracto, o qual será inteiro ou fraccionario, conforme o resultado tiver de ser maior ou menor que a quantidade que servio á sua formacão. Mas este numero abstracto devendo designar-se pelos dados da questão, só pode ser o quociente entre os numeros da mesma especie que representão as causas. Para ex.º, no ennunciado da primeira questão do § antecedente, - 6000U a juro de 5 o/o, quanto rende annualmente? - Observamos que elle reffere tres quantidades conhecidas; o capital 6000U, e o seu homogeneo 100, que vence o juro 5, a terceira quantidade homogenea com a incognita da questão, ficando assim evidente que uma se compõe da outra como 6000U se forma de 100.

A mesma observação fazemos na discussão das questões mais complicadas, d'aquellas onde são dadas mais de tres quantidades para discobrir um numero incognito. É indispensavel em todos os problemas um elemento da quantidade a que queremos chegar, para opperar sobre ella segundo as circunstancias ou condições da questão. Ora por um certo numero compôr outro da mesma especie, é só por mul-

tiplicações ou divisões com numeros abstractos os quaes sendo quocientes deduzidos dos dados do problema, devem estes ser da mesma especie dous a dous; qual d'elles hade occupar o lugar de dividendo, ou de divisor é tudo o que temos a indagar; Nas questões simples este exame é muito facil, nas que encerrão muitas relações se supposermos todas as circunstancias iguaes, excepto dous dados da mesma especie, e depois seguir-mos a mesma marcha para com os outros, chegaremos com a mesma facilidade a designar a serie de dividendos, e divisores.

Ex. 12 homens fizerão 18 metros de certa obra em 5 dias, que numero de metros farão 20homens em 9 d. ?

Não considerando a differença dos dias vê-se, que o numero de metros que se procura, deve ser maior que 18; pois que com mais trabalhadores, mais obra se deve executar: assim a relação é do maior numero dividido pelo menor, ou 20 : 12. Da mesma sorte, considerando só a differença dos dias, pois que ha mais tempo, o numero de metros hade ser maior, i-é, na relação do maior numero dividido pelo menor, ou 9:5

Logo observando junctamente a differença do tempo, e do numero de trabalhadores, é pelos quocientes de 20 : 12, e 9 : 5, que se deve multiplicar o elemento da quantidade que seprocura.

Tratar somente de dous dados da mesma especie, como 20 homens e 12 h, suppondo a igualdade das outras circunstancias do problema, é decompor a questão em outras elementares, como temos feito até aqui; é resolvel-a para um prazo tomado como unidade de tempo, que depois com este resultado, e o tempo a que nos queremos refferir, entramos n'uma segunda questão que dá a solução da proposta.

Para se observar n'um golpe de vista todas as combinações a que temos de submeter os dados da questão, podemos, pelos signaes indicativos das opperações, aproximal-os uns dos outros muito mais do que na exposição do enunciado. O systema da numeração escripta tem, a este respeito, muita vantagem sobre a linguagem ordinaria, representando pelos caracteres numericos as quantidades conhecidas; a incognita é que não pode entrar n'estas abreviações sem outra convenção, tal como a de adoptar uma das letras do alfabeto para a representar; com esta adopção mais, podemos apresentar n'um pequeno quadro todos os numeros da questão, e as transformações por que devem passar os que são conhecidos, para darem o valor que se procura.

Assim, no problema enunciado, escrevendo sobre duas linhas todos os numeros propostos, de maneira que correspondão os da mesma natureza, ter-se-ha o seguinte

18 metros	12 horas	5 dias	$x = 18 \times \frac{\overset{m}{20}}{12} \times \frac{9}{5}$
x	20	9	$= 30 \times \frac{9}{5}$
			$=$ 54 metros

A disposição que aqui damos aos dados do problema é mui propria para descobrir as questões elementares donde se dedusem os quocientes que devem multiplicar o elemento da incognita; por isso sem repetir os raciocinios escreveremos estes quocientes ao lado dos dados, e successivamente executando as opperações indicadas, chegamos á solução do problema.

Deste modo praticaremos em todas as questões que apresentarmos nas relações d'industria e commerciaes que vamos continuar; muitas, á primeira vista, poderão parecer complicadas, mas os calculos das suas soluções são simples, precedendo as preparações do methodo analytico

QUOTAS.

Repartir as perdas ou ganhos que resultarem d'uma associação por todos os interessados; n'uma quebra a divisão dos fundos por cada um dos credores; e ainda nas contribuições directas, a distribuição que o governo deve fazer conforme as rendas territoriaes, ou as rendas presuppostas a cada um dos individuos, são problemas muito usuaes no estado actual da sociedade.

Supponhamos que tres fabricantes tinhão estabelecido o seu negocio com os capitaes 7000 francos, 4000, e 3000, e que no fim achárão de lucro 2800 francos, quer-se saber o valor de cada quota-parte?

O lucro de cada socio depende da sua entrada; o importe 2800 francos tem de ser repartido em um certo numero de partes iguaes, das quaes 7000 pertencem ao primeiro socio, 4000 ao segundo, e 3000 ao terceiro, temos pois.

7000		$x = 2800 : 14000$ . . 20 centimos
4000	2800	1.º . . . 7000 × 0,2 . . . 1400 fr
3000		2.º . . . 4000 × 0,2 . . . 800
14000		3.º . . . 3000 × 0,2 . . . 600

Ex.º 2.º Na quebra d'um negociante quer-se repartir 858U que se acharão em caixa por 4 credores que tinhão entrado com.

2000U	1.º . . 858000 × $\frac{200}{528}$ 325000
1800U	2.º . . 858000 × $\frac{180}{528}$ 292500
920U	3.º . . 858000 × $\frac{92}{528}$ 149500
560U	4.º . . 858000 × $\frac{56}{528}$ 91000
5280U	

Ex.º 3.º As divisões territoriaes d'uma provincia tem contribuido com as quantias seguintes

A 1.ª . . 6000U	Pergunta-se a parte respectiva a cada divisão no augmento de 5000U imposto á provincia?
2.ª . . 2000U	
3.ª . . 4800U	

Nos governos que se regulão por imposições directas, a somma precisa para as despezas da

nação é considerada como os fundos d'uma companhia, e os augmentos d'imposição são repartidos conforme as entradas já feitas: assim no presente ex.º teremos

$$5000000 \times \frac{60}{128} \qquad 5000000 \times \frac{20}{128} \qquad 5000000 \times \frac{48}{120}$$

2343750   781250   1875000

N'estas questões temos supposto um tempo commum; consideremos agora uma associação com entradas e tempos differentes.

13 negociantes entrarão n'uma empreza; dez d'estes a estabelecerão com 300U cada um; o 11.º entrou um mez depois com 100U; o 12.º tres mezes com 400U, e o ultimo com 500U passados mais 48 dias.

Pergunta-se a quota parte de cada um no lucro de 800U achado no fim de 2 annos?

10 . . 300U . . 24 meses	72000U em 1 mez
1 . . 100U . . 23 »	2300U »
1 . . 400U . . 21 »	8400U »
1 . . 500U . . 19 » 12 dias	9700U »

D'este modo o problema fica reduzido á simplicidade dos antecedentes; é considerar estes fundos como capitaes a um certo juro, e no commercio está convencionado geralmente que se não contem juros de juros.

Ex. 2.º Ajustou-se um aterro de 132 metros cub. por 21600 reis; nesta obra se empregárão 3 trabalhadores.	o 1.º 6 dias a 8 h. 2.º 3 » 10 3.º 7 » 6.

Quer-se saber a obra que cada um fez e a quota parte do interesse ?

43 h.	132 : 12o=1,1	216oo : 12=18o
3o	mmm	rs
42 mmm	1.º 52,8	864o
12o 132	2.º 33	54oo
216oors	3.º 46,2	756o

MISTURAS

A mistura de mercadorias de diversos valores dão lugar a estas duas questões.

1.ª Achar o preço medio dada a quantidade, e o preço particular de cada cousa; vg. Um ourives que tem para ligar uma barra d'ouro puro com outra de inferior qualidade; ou um negociante que tem para lotar diversos vinhos e pretende saber o preço do mixto.

2.ª Dado o preço da mistura que se quer, e o das substancias que se combinão determinar a quantidade d'estas componentes: vg. Um negociante que tem vinho de duas sortes um de 15U o hectolitro, e o outro de 12U; quanto deve tomar de cada um para ter uma mistura do preço de 14U ?

As questões da primeira especie não offerecem difficuldades: supponhamos que temos a lotar 10 hectol. de vinho do preço de 20U com 6 de 12U e 5 de 10U, e se pergunta o preço da mistura.

1o a 2oU . . 2ooU	total da mistura 21 hectol.
6 a 12U . . 72U	custando 322U somma dos
5 a 1oU . . 5oU	preços particulares

logo 322ooo : 21 = 15333 reis;
é o preço medio que se quersaber.

Entremos na resolução do ex.º que apresentamos para a segunda especie

Se o vinho superior fosse de 16U, deviamos tomar uma d'estas medidas e outra de 12U, i-é, porções iguaes das duas sortes. Ora por uma medida de 12U o lucro é 2U, devemos, no nosso ex.º, tomar duas vezes a de 15 que dá de prejuizo só 1U; mas nos casos em que esta differença seja um numero qualquer de unidades, como d'esta sorte fazemos outras tantas compensações, quando nos propunhamos a uma só, necessario é tomar um igual numero de medidas da segunda sorte.

Assim do lado do preço inferior assentando a differença do preço medio ao superior, e reciprocamente ao lado d'este a differança do inferior para o medio,

14	15 2
	12 1

Concluiremos que 2 hectol. de 15 com 1 de 12 fazem vinho de 14.

Os numeros 1 e 2 não são os unicos que satisfazem á condição do problema, são as soluções mais simples; mas o dobro, o triplo, e em geral com qualquer multiplo d'estes numeros, se obtem a compensação que se exige.

Sendo designada a quantidade do mixto o numero de soluções já não pode ser infinito, porque é necessario que ellas satisfação tambem a esta nova condição. Para ex. se o problema que acabamos de resolver fixasse 12 hectolitros do mixto decidia a que tomassemos 8 da primeira sorte e 4 da segunda.

Se quizessemos lotar mais qualidaddes de vinho, é claro que repartindo-os em dous grupos taes que o preço medio n'um seja superior ao preço fixo que se dá, e inferior o do outro, a questão se reduz ao caso da mistura de duas cousas.

Ex. Tendo-se comprado cinco qualidades de vinho, o primeiro de 580 reis a medida, o segundo de 460, o terceiro a 400, o quarto 300, e o quinto a 200; quer-se fazer uma mistura de 370 reis a medida.

```
580 |                  | 300
460 | 1440 : 3         |       | 500 : 2
400 |  480 preços m.   | 200     250  preço m.

          370 | 480 . . . . . . 12
              | 250 . . . . . . 11
```

Do grupo de preços superiores tomaremos pois 12, e 11 dos inferiores, mas como destes 250 é a semisomma de seus valores, tomaremos ametade de cada um tanto que dos superiores tomaremos 4.

Se tivessemos em vista uma determinada quantidade do mixto differente da somma achada 23, não tinhamos mais que dividil-a n'este

mesmo numero de partes, e tomar de cada um dos grupos as que lhe estão designadas.

Ex. Quer-se fazer peças de 4 oitavas d'ouro de 22 quilates com ouro de 23, 21, e 20; pergunta-se quanto se deve tomar de cada um?

```
   | 23   23 . . . . 1,5 . . . . 6
22 | 21                   ou
   |      | 20,5 . . . 1 . . . . . 4
   | 20                          ----
                                  10
```

Assim a quantidade da liga sendo 4 oit., é preciso dividil-a por 10 e tomar 6 destas partes na 1.ª qualidade, e 2 de cada uma das outras.

Se se apresentar uma questão d'esta especie, na qual seja fixada a quantidade d'algum dos componentes; para ex., se tivermos só 16 hectolitros de trigo, e quizermos misturar centeio e cevada para fazer pão de 70 reis o kilogr., sabendo que de cada uma das farinhas simplesmente, se podia dar a 90 reis, 60, e 40 reis;

```
   | 90   90 . . . 20
70 | 60
   | 40 | 50 . . . 20
```

Vêmos que em geral se deve tomar 1 parte de centeio, outra de cevada, e 2 de trigo; mas como d'estas ha 16 hect., das outras se deve tomar 8 de cada uma.

JUROS COMPOSTOS

Se accrescentarmos ao capital o juro vencido no fim do prazo convencionado, para que vença tambem o seu juro no prazo seguinte, e assim nos mais ajunctando sempre o juro d'um prazo ao capital do mesmo prazo, teremos d'este modo juros de juros ou juros compostos.

O meio mais breve de resolver as questões de juros compostos, encerra novos elementos que não é tempo ainda de apresentar; o que deixamos indicado na exposição das idêas sobre os juros compostos, não depende senão das noções estabelecidas. 1000 reis, para ex.º, a juros de 5 °|o no primeiro anno rende 50 reis; ao resultado 1050 se accrescenta o juro 52,5 no fim do segundo anno; ao segundo resultado 1102,5 se accrescenta o seu juro durante o terceiro & Ou como 1 no fim de cada anno se torna 1,05, este valor é um multiplicador constante em cada um dos annos; desorte que multiplicando successivamente por elle a quantia 1U, podemos formar uma columna dos capitaes accumulados em qualquer numero d'annos. 1000 reis que no fim do primeiro anno rende 50 reis, é porque 1 se torna n'este tempo em 1,05; o resultado como capital no seguinte anno, dá o juro 52,5, que accrescentando-se a 1050, vem a ser o mesmo que tomar cada uma d'estas unidades por 1,05, i-é, multiplicar o producto de 1000 por 1,05 denovamente por este multiplicador; e assim obtemos o capital accumulado para qualquer anno por tantas multiplicações como de annos contarmos. Da mesma sorte pra-

ticaremos para outras taxas; na taboa seguinte propomos mais algumas,

An	4 °|o	5 °|o	6 °|o	7 °|o
1	1040	1050	1060	1070
2	1081,60	1102,50	1123,60	1144,90
3	1124,86	1157,63	1191,02	1225,04
4	1169,86	1215,51	1262,48	1310,79
5	1216,65	1276,28	1338,23	1402,45
6	1265,32	1340,10	1418,52	1500,72
7	1315,93	1407,10	1503,63	1605,77
8	1368,57	1477,46	1593,85	1718,17
9	1423,31	1551,33	1689,48	1838,44
10	1480,24	1628,89	1790,85	1967,13
11	1539,45	1710,34	1898,30	2104,83
12	1601,03	1795,86	2012,20	2252,17

Capital. Qual será o capital accumulado de 6320U em 7 annos a 5°|o ?

Na columna 5°|o o numero correspondente a 7 annos é 1407,1; logo 6320×1407,1 . . . 8892872

Se quizessemos contar mais alguns mezes, ou alguns dias de vencimento, veriamos que sendo a differença da taboa no anno seguinte 70,36, em 3 mezes para ex.º, seria 17,59 que se deve ajunctar a 1407,1, e depois

6320 × 1424,69 9004040

Qual é o capital primitivo que em 7 annos a juro composto de 5 °|o produz 8892872 ?

Tambem se procuraria primeiramente na columna 5 °lo o capital accumulado de 1U correspondente a 7 an 8892872 : 1407,1 . . . 6320U

E para achar o capital primitivo que em 7 an e 3 m. produziria 9004040 ao mesmo juro; procurariamos na taboa o capital accumulado durante este tempo, e então

9004040 : 1424.69 . . . . 6320U

Tempo. *Em que tempo* 6320U *a juros compostos* pode produzir 8892872 reis? 8892872: 6320 dá o capital accumulado respectivo a 1000 reis, e que na columna 5 °lo corresponde a 7 annos.

Se este quociente se não achasse na columna como o de 9004040 : 6320 1424.69

7 annos . . . 1407.10 } 17,59

8 » . . . 1477,49 | 7039

e observando que uma differença é o juro n'um anno, que a outra é o juro na fracção do anno que pretendemos achar, a divisão nos designará que esta parte é 0,25 e concluiremos que o tempo pedido é 7 annos e 3 mezes.

Taxa. A quanto °lo deve ser posta a quantia 6320U para produzir no fim de 7 annos o capital accumulado 8892872rs? 8892872 : 6320 da 1407,1 correspondente a 1000, e a taboa na linha horizontal respectiva a 7 annos designa esta quantia na col. 5 °lo.

No outro caso, aquelle em que nos seja dado um capital accumulado em um numero d'annos e mais uma fracção, como 9004040 entre 7 e 8 annos, vê-se que 9004040 : 6320 ou,

1424,69 quantia que corresponde a 1000, está comprehendida entre as de 7 e 8 annos na columna 5 °lo; pelo que concluiria-mos immediatamente que n'esta razão é que devia ser posto o capital primitivo 6320U.

ANNUIDADES.

Chama-se annuidade uma renda ou prestação certa, em todos os annos, até salvar qualquer quantia e os juros compostos que se devem accumular.

Em materia d'annuidades, os calculos que estão mais em pratica, exigem tambem novos conhecimentos; porem aqui serão suppridos, com vantagem, pelo simples raciocinio e a tabua já construida para as questões de juros compostos.

Annuidades Que renda em 12 annos pode desencarregar-nos d'uma divida de 6320U contrahida a juro composto de 5 °lo?

A quantia x que se dér no primeiro anno, vence juros no segundo; por consequencia no fim d'este, devemos contar.

$x \times 1,05$ e denovamente x

No terceiro anno estas quantias são accrescentadas do seu juro, e mais da renda x d'este anno.

$x \times 1,05 \times 1,05 + x \times 1,05 + x$

e assim nos seguintes: é sempre um capital x que se colloca a juros compostos em todos os annos até ao ultimo em que se toma simplesmente.

Ora a tabua que formamos nos juros compostos, dá estas accumulações relativamente ao capital 1000 reis, que por uma mudança na virgula ficarão correspondendo á unidade: então não teremos mais que sommar toda a columna até ao ultimo anno, n'este tomamos simplesmente 1, e quantas vezes esta somma entrar no numero da columna relativo ao prazo dado, outras tantas se deve tomar 1 para formar a renda; pois que queremos extinguir o capital 1000 accumulado dos seus juros em 12 annos, i-é, 1795,86, com as quantias que se tem pagado annualmente accumuladas tambem dos juros vencidos. Depois por uma simples multiplicação acharemos o valor de x que satisfaz á condição proposta. Eis-aqui o calculo.

1U a j. compostos em 12 an. . . . 1795,86
somma dos 11 numeros antecedentes . . 14,917
e do ultimo anno . . . 1
1795,86 : 15,917 112,83
logo 6320 X 112,83 . . . ou. . . x = 713085,60

Capital Que divida se poderá contrahir a juro composto de 5 °lo para pagar com a annuidade 713085,6 em 12 annos?

Vemos pela tabua dos juros compostos, que 1795,86 é o capital 1000 reis accumulados dos juros vencidos no prazo da questão, e achamos pelo calculo antecedente a annuidade 112,83

para esta quantia; então
713085,6 : 112,83=6320 mostra o numero de vezes que temos a tomar o capital 1000 reis . . . . R 6320U

Tempo Que annos é preciso contar para pagar com a annuidade 713085,6 uma divida de 6320U contrahida a juros compostos de 5 °lo?

713085,6 : 6320 112,83
é a annuidade para 1000.

Se tivessemos formado uma tabua d'annuidades para o capital 1000, como fizemos para os capitaes accumulados, procurariamos na columna 5 °lo o numero 112,83, e achando-o teriamos ao lado o anno correspondente. Para supprir esta tabua voltaremos á dos juros compostos.

Nos observamos facilmente que o tempo procurado não vai longe de 10 annos; começando d'este prazo, na columna 5 °lo se acha correspondendo a 11 annos o capital accumulado 1710,34, e sommando todos os precedentes achamos, relativamente ao capital 1, o total de todas estas annuidades 13,2068, que juncto a 1 pertencente ao ultimo anno, dá 14,2068; e 1710,34 : 14,2068 . . . . 120 & este resultado ja nos indica, que a annuidade de que se tracta 112,83, precisa de mais tempo. O calculo para o seguinte anno é mais breve, por termos só a junctar 1,71034 á somma ja obtida de todos os outros capitaes accumulados; depois

1795,86 : 15,917 112,83

e teremos resolvido a questão.

Por esta marcha mui facil chegariamos a formar toda a columna desde o principio, e da mesma sorte todas as outras de que quizessemos compôr a tabua.

Taxa do juro. A quantos $^{0}/_{0}$ se pode amortizar a quantia 6320U a juro composto, por annuidades de 713085,6 em 12 annos?

A questão precedente nos mostra, que o producto da annuidade pela somma das accumulações relativas a 1 no prazo dado, produz o capital 1000 accumulado no mesmo tempo: d'este modo teremos 1795,86 para entrar-mos na tabua dos juros compostos, e na linha horizontal correspondente a 12 annos, procurando este capital accumulado, achal-o-hemos na columna 5 $^{0}/_{0}$.

Ha caixas economicas, onde o pobre pode fazer fructificar suas economias; ha associações onde o pai de familia depõe regularmente uma parte de seus lucros, afim de que em tempo conveniente possa tirar um dote para suas filhas, ou ter o alimento para sua familia quando já não tenha forças para o grangear, ou a morte venha por fim a seus trabalhos.

Estas instituições dão lugar a muitas das questões que acabamos de tratar, e a marcha que n'ellas seguimos nos facilita os meios de re-

solver outras, que mais importão n'estas especulações; taes como a determinação da quantia que deve ser collocada no principio de cada prazo, para obtêr no fim de certo tempo uma renda de valor determinado; e saber quanto se terá accumulado, no caso de se ter collocado alem da quantia de cada um anno, outras addicionaes & &.

Despensa-nos de entrar em mais desenvolvimentos a grande analogia d'estas questões com as precedentes, bem como as tabuas que as associações apresentão nos seus programmas, onde vem calculado em refferencia a um certo capital tudo o que n'esta especie se pode offerecer; e para a formação d'estas tabuas se empregão pessoas que tenhão conhecimentos superiores aos d'arithmetica vulgar.

Para exercicio na marcha analytica propomos aqui diversas questões, que devem ser resolvidas indicando primeiramente as opperações successivas; porque algumas são proprias para mostrar a utilidade d'estas indicações, dando d'este modo as soluções mais faceis.

1. 18 metros de certa fazenda valem 54U, e 27 d'outra valem 13500 reis; quantos metros d'esta fazenda se podem trocar por 12 da primeira?

2. D'um fardo de pannos que continha 600 metros, venderão-se 215, e pelo resto pedem 400U; quanto valia o todo?

3. 5 trabalhadores ajustarão a execução d'u-

ma obra por 200U; o primeiro empregou 10 dias, o segundo 12, o terceiro 8, e o quarto 15. Pergunta-se quanto trabalhou o quinto sabendo-se que recebeu 30U?

4. Lotarão-se 100 litros de vinho de 400 reis o litro, com 95 de 350 reis, e mais 140 litros de 150 reis. A quanto se deve vender o litro para ganhar 50U ao todo?

5. Quanto é preciso de vinho de 400 reis, e de 300 reis o litro, para dar 12 litros do preço de 320 reis?

6. Tres negociantes entrarão n'uma empreza, que rendeu 252960, o primeiro entrou com 393200, e o segundo com 450U; com quanto entrou o terceiro se na destribuição recebeu 84320 reis?

7. Um viajante gastou 30 dias para andar 200 milhas, empregando 8 horas por dia; quantas milhas andará em 42 dias a 7 horas por dia?

8. Um destacamento de 50 soldados venceu 24U em 8 dias, outro recebeu 54U por 15 dias; quantos soldados havia no segundo?

9. O que resta do dia é 0, 25 das horas corridas; quantas horas são?

10. Um fabricante ajustou com 2 carreteiros por 50U a condução de 800 kilog de materiaes na distancia 17 kilom, e 760 a 15kilom.; quanto toca a cada um dos carreteiros?

11. Um negociante com vinho de 100U por 5 hectol; quer fazer uma troca de 138 hectol com outro negociante que tem 340 no valor de

7820U; quantos deve receber?

12. Observou-se que aa rodas d'um carrinho gyravão 3 vezes em quanto as de outro gyravão 8; e que no caminho de 800 metros as primeiras fizerão 600 voltas. Pergunta-se quanto custarião as chapas de ferro, sabendo-se que um decimetro custa 200 reis?

13. Para formar a conta corrente entre duas cazas de commercio; consta dos Livros, que a primeira forneceu á segunda em mercadorias o valor de 600U em 12 de Fevereiro, 1400U em 6 de Março, e 800U no 1.º de Junho; em quanto que a segunda forneceu á primeira 400U em 30 de Março, 1600U no 1.º de Maio e 200U a 2 de Agosto. Pergunta-se quanto deve uma á outra, regulando estas quantias a juros simples de 5 ºlo ao anno?

14 D'um chafaris de 3 bicas, sabe-se que uma deita 40 litros d'agoa por hora; e que em quanto correm 2 litros, a segunda deita 3; e no tempo em que d'esta correm 6, a terceira deita 8. Pergunta-se de quantos litros se deve construir um tanque que estas 3 bicas possão encher em 12 horas?

15 Se 16 libras de Paris valem 17 de Madrid, e 10 d'estas 14 de Roma, que pezão cada uma 11,4726 onças em Portugal ou no imperio do Brazil; quanto se pode dar por uma mercadoria de 40 lb de Paris, tendo custado a libra portugueza 400 reis?

§ 3.º

Theoria necessaria para effectuar os calculos com a maior facilidade.

Agora que por uma serie de exemplos sobre differentes quantidades nos temos exercitado nas opperações mais usuaes d'Arithmetica, ao mesmo passo que pela analyse feita sobre as questões temos desenvolvido o nosso raciocinio, e preparado o caminho para novas observações, desenvolvamos os principios theoricos que exposemos quando, variando os dados em qualquer das opperações, davamos razão das alterações que soffrião os resultados. Estes desenvolvimentos completão o estudo das refferidas opperações, e utilizão, alem disso, a muitas outras partes das sciencias mathematicas.

Sabemos que

1. Uma somma augmenta tanto quanto augmentarem os numeros dados; e persistirá a mesma, se a uma das parcellas se ajuncta, e á outra se tira o mesmo numero.

2. Se as partes d'um todo forem repetidas o mesmo numero de vezes, ou se cada uma for multiplicada por um numero qualquer, o todo apparecerá multiplicado pelo mesmo numero.

D'aqui resulta o seguinte

3. *Que multiplicamos por um todo se multiplicarmos por cada uma das partes, e reunirmos os diversos resultados.*

Esta proposição concorda com a precedente por meio da inversão dos factores; a comparação se faz com a maior clareza, usando dos signaes que temos adoptado.

Sabemos que $(7+5)\times3=7\times3+5\times3$
ou $3\times(7+5)=3\times7+3\times5$; é a traducção fiel do theorema que se queria demonstrar.

Estas duas linhas são mui expressivas; mas para nos familiarizarmos com os principios, é util que as acompanhemos do raciocinio, ao diante, muitas vezes nos dispensaremos disso; proposições intremidiarias como as que aqui empregamos, suscitão immediatamente os principios que as legitimão.

Pois que um numero é multiplicado por uma somma, quando se multiplique por cada uma das partes d'esta somma, e se reunão os resultados; 4 multiplicado por 15 ou 5+5+5
$4\times15=4\times5+4\times5+4\times5$
4×5 repetido tres vezes $4\times5\times3$ i-é.

4. *Multiplica-se por um producto multiplicando por um dos factores em que elle se decomposer, e o resultado pelo outro.*

Esta proposição nos servirá em algumas multiplicações reduzindo o calculo a actos de memoria, vg em 16 vezes 15, como se vê immediatamente que 15 se decompõe em 5 por 3, diremos 16 vezes 5 dá 80, e 80 vezes 3 dá 240.

Mas a primeira applicação que faremos d'este principio será devando o theorema da inversão dos dous factores d'uma multiplicação, á consideração d'um numero qualquer de factores.

Primeiramente mostremos, que um producto de tres factores não muda quando se inverte a ordem dos dous ultimos.

$$2 \times 3 \times 4 = 2 \times 4 \times 3$$

Com effeito multiplicando 2 por 3 e o resultado por 4, multiplica-se 2 pelo producto 3×4 como acabamos de demonstrar, e no segundo cazo pelo producto 4×3, e nós sabemos que $3 \times 4 = 4 \times 3$

Este raciocinio é igualmente applicavel a um producto de muitos factores, e em qualquer lugar que estejão os dous invertidos; por quanto, antes de chegar a multiplicar pelo primeiro d'estes dous, o producto será o mesmo como resultado da multiplicação dos mesmos factores, e collocados na mesma ordem; e depois do segundo, os que se seguem são tambem os mesmos nas duas expressões, e guardão a mesma ordem, não podem fazer alterar o producto. Assim, mudando o lugar de dous factores consecutivos, levaremos qualquer d'elles á ordem que quizermos, aquella que occupa na outra expressão que se compara, e chegaremos á identidade das duas expressões.

Ja deduzimos d'um d'estes theoremas o meio de verificar a multiplicação, dobrando um dos factores; e podiamos triplical-o, e em geral multiplical-o por qualquer numero, que o producto será duplo, triplo, & o mesmo multiplo do pri-

meiro. Agora duas d'estas proposições seguidas nos fazem ver immediatamente que.

5. *Quando se multiplica cada factor por um numero, o producto será multiplicado pelo producto d'estes numeros.*

Em $3 \times 7 = 21$ se o multiplicando é tomado 2 vezes, e o multiplicador 4, o resultado 21 será multiplicado pelo producto de 2 por 4, i-e, por 8. Com effeito.

3×4 por 7×2 vem a ser o mesmo que multiplicar 3 por 4 depois por 7 e a final por 2

$3 \times 4 \times 7 \times 2 \ldots$ (4º)

ou $3 \times 7 \times 4 \times 2 \ldots\ldots\ldots$ i-é, $21 \times 4 \times 2$ ou 21×8

Temos supposto um producto de dous factores; mas facilmente se vê que o principio é geral.

Relativamente á divisão dos factores observaremos tambem, que se não alterarmos o multiplicando não se altera o valor das partes de que se compõe o producto; logo se se tomar menos partes, ametade, vg. que é quando o multiplicador se torna o subduplo, o producto o será igualmente. E quando se toma o mesmo numero de partes, o producto virá conforme o valor d'ellas, por que exprime sempre um numero d'estas partes. Em $240 = 20 \times 12$, se dividirmos o multiplicando por 4, dividimos o producto igualmente, e depois tomamos ametade d'este resultado, se dividimos o multiplicador por 2; é pois dividir o producto successivamente por 4 e 2

$$240 : 4 : 2$$

Ora praticando estas divisões successivas acharemos

$240 = 4 \times 1.^{o}$ quoc.	$240 = 4 \times 2 \times 2.^{o}$ quoc.
$1.^{o}$ q $= 2 \times 2.^{o}$ quoc.	$= 8 \times 2.^{o}$ quoc.

consequentemente o segundo quociente se acha tambem dividindo 240 por 8, i.é,

6. *Quando se dividem os factores d'uma multiplicação o producto é dividido pelo producto dos divisores.*

Com esta demonstração pouco nos falta para vermos, que tambem *na divisão se pode inverter a ordem dos divisores.*

Com effeito praticando a divisão conforme a outra ordem se terá

$240 = 2 \times 1.^{o}$ quoc	$240 = 2 \times 4 \times 2.^{o}$ quoc.
$1o.$ q $= 4 \times 2.^{o}$ quoc	

que comparando com $240 = 4 \times 2 \times 2.^{o}$ quociente mostra que o quociente achado por esta ordem, hade ser o mesmo que na outra; pois sabemos que $4 \times 2 = 2 \times 4$

Assim iremos fazendo, relativamente á divisão, algumas observações como fizemos a respeito da multiplicação.

Acabamos de ver, que se chega ao mesmo quociente, quer se divida 240 por 8, producto dos factores 2 e 4, quer se divida successivamente por cada um d'elles, e como o raciocinio se applica a um numero qualquer de factores, diremos geralmente.

7. *Divide-se um numero pelo producto de outros quando se divide successivamente por*

cada um d'elles.

D'estes principios se infere que

Para dividir por um dos seus factores, qualquer producto indicado, basta suprimir-lhe este factor.

$23 \times 7 \times 5 : 7$

ou $23 \times 5 \times 7 : 7 = 23 \times 5$; o que torna o calculo mais simples.

Quando um numero divide as partes d'uma somma didide o todo.

Se v.g, cada uma das partes é divisivel por 5, é porque são compostas de muitas vezes 5

assim	1.a parte	$5 + 5 + 5$ &
	2.a	$5 + 5$ &
	3.a	5 &

Consequentemente a somma se comporá tambem d'um certo numero de vezez 5.

Quando um numero divide a somma de dous numeros e um d'elles, divide o outro.

Com effeito, se tanto a somma como uma das partes são multiplos de 5, podemos representalas por $5 + 5 + 5$ &

$5 + 5$ &: a outra parte vem pois da subtracção de algumas vezes 5 de muitas vezes 5.

Estas proposições resultão evidentemente dos principios estabelecidos, podemos dizer que são corolarios, pois que as demonstrações facilmente se subintendem; n'isto somente é que se destinguem os corolarios dos theoremas.

Agora podemos achar sem calculo o quociente d'uma divisão, quando o divisor se possa decompôr em factores d'um só algarismo; pois sabemos que tomando successivamente as partes das ordens indicadas por estes factores, a ultima será a que se procura. Já vimos na Divisão outras abreviações que se podem obtêr decompondo os numeros em seus factores simples; o que se faz mister é procurar estes factores.

Todo o numero inteiro representa as vezes que temos a tomar a unidade, se o dividir-mos pois por 1 deve apparecer no quociente o mesmo numero, e se o dividir-mos por si mesmo deve dar 1, significando que todo o numero cabe em si uma vez.

Os numeros que não podem ser divididos por nenhum outro, a não ser a unidade ou por si mesmo, são chamados numeros primeiros ou primos. Era conveniente distinguir estes numeros, e nós podiamos dar aqui um modo bem facil de os determinar, desde a unidade até ao gráo em que quizessemos parar, é o methodo denominado crivo d'Erathosthesnes; mas como o nosso fim é saber decompôr os numeros inteiros em seus factores, não nos occpamos senão dos principios de divisibilidade.

Em quanto aos numeros simples, immediatamente se reconhece quaes podem ser os seus divisores; os outros se os decomposermos em duas partes, um numero de desenas, e o algarismo das unidades, e achar-mos entre os divisores da primeira parte algum que divida a segunda, será tambem um divisor do numero proposto.

Ora $2 \times 5 = 10$; logo um numero qualquer de desenas será divizivel por 2 e por 5: assim á simples inspecção d'um numero, só pelo ultimo algarismo da direita, se reconhece se elle é divisivel por 2 ou por 5.

Passemos ao numero 9, o maior dos numeros simples da escala decimal.

Uma desena compõe-se de 9 unidades simpls e mais uma . . . . . . $10 = 9 + 1$
duas desenas . . . . . $20 = 9 \times 2 + 2$
tres desenas . . . . . $30 = 9 \times 3 + 3$
etc etc: em geral um numero de desenas é igual a um multiplo de 9 mais tantas unidades simples como ha de desenas,
uma centena ou . . . . $100 = 99 + 1$
duas centenas . . . . . $200 = 99 \times 2 + 2$
etc etc teremos sempre um multiplo de 9 augmentado de tantas unidades simples como ha de centenas. E visto que se procede do mesmo modo para as seguintes ordens, um numero de unidades de qualquer ordem é sempre um multiplo de 9 mais o algarismo que as designa, para ex, o numero 2756 ou . . . $2000 + 700 + 50 + 6$
é um multiplo de 9 mais . . . $2 + 7 + 5 + 6$

Resulta evidentemente d'esta forma que damos aos numeros, que se a somma das unidades das diversas ordens consideradas como simples, for tambem um multiplo de 9, o numero proposto será divisivel por 9.

E como $9 = 3 \times 3$, segue-se que a condição de divisibilidade para o numero 9 serve tambem para o divisor 3, i-é, todo o numero cujos algarismos sommados como unidades simples, dão 3 ou um multiplo de 3 é divisivel por 3.

Por este systema se observa, que o resto da divisão d'um numero por qualquer divisor, será igual á somma dos restos da divisão das parcellas 1, 10, 100, 1000 etc repetidos conforme o algarismo de cada uma d'estas ordens.

Para o divisor 7 acharemos

	100000	10000	1000	100	10	1
restos	5	4	6	2	3	1
ou	-2	-3	-1			

indicando as unidades que é preciso tirar ao producto do divisor pelo quociente dando a este uma unidade de mais, quando se tenhão achado restos maiores que ametade do divisor, vg:

para ter 1000 é preciso junctar 6 a 7×142
ou tirar 1 a 7×143

Multiplicando pois os restos n'esta mesma ordem pelos algarismos do numero proposto, e subtrahindo os productos de signal menos dos outros, adifferença será o resto da divisão do numero proposto.

Ex. . . 438265
231231

	8	5	
27 - 25	9	18	2 é o resto da divisão de
	8	4	439265 por 7

Quando esta differença seja maior que o divisor não é o resto da divisão verdadeiramente, é o mesmo dividendo, subtrahido d'um certo mul-

tiplo do divisor, e fica-nos uma divisão muito simples a effeituar. Em 142765 achar-se-ha por este calculo a differença 21; mas por ella se vê immediatamente que o numero proposto é divisivel por 7

Os restos das diversas unidades, não podendo ser zéro, nem exceder ou igualar o divisor, vêl-os-hemos reproduzirem-se, e será na mesma ordem; de sorte que quando um d'elles torne apparecer podemos escrever todos os algaismos que se tem obtido, partindo d'este ultimo resto; e continuar assim periodicamente; por quanto esta unidade que repetiu um dos restos é 10 vezes menor do que a seguinte, o mesmo que acontece no primeiro periodo de dividenosd, e facil é demonstrar que da multiplicação dos restos de dous factores se obtem o mesmo resto que no producto dos factores; o de 1000, para ex^{o}, se acha tambem no producto dos restos dos factores 100 e 10

Com effeito 100 é um multiplo de 7 + 2
10 um m. de 7 + 3

multiplicando por partes

(um m. de 7 + 2) um numero de vezes m. de 7
(um m. de 7 + 2) tomado 3 vezes

A primeira parte do producto é evidentemente um multiplo de 7, e a segunda é composta tambem d'um multiplo de 7, e do producto dos dous restos.

Esta demonstração é geral, porque se deduz das proposições 2 e 3 sem dependencia das propriedades dos numeros de que nos temos servido com o fim de resumir os raciocinios.

Assim para		83765132
escrevermos immediatamente		31231231
		5 2
		18 9
	40 - 37	14 2
3 é o resto da divisão de 83765132		3
por 7		24

Este modo de achar o resto d'uma divisão é mais em uso para os divisores 9 e 11 por sua simplicidade. Do primeiro d'estes dous divisores sabemos que sommando todos os algarismos d'um numero e excluindo os noves, que se forem obtendo n'esta somma, se deve chegar ao resto da divisão.

Em quanto ao numero 11 observemos que
1o é inferior . . . . resto 1o ou - 1
1oo multiplo de 11 + 1 1
1ooo = 1oo × 1o . . . . (1 × 1o) resto 1o ou - 1
1oooo = 1ooo × 1o . . . (1o × 1o) o de 1oo . . . 1

Descobriu-se logo na unidade da terceira ordem o mesmo resto da primeira; temos pois que os periodos são só de duas ordens e concluimos que cada uma das unidades d'ordem impar vale um multiplo de 11 mais 1, e os das ordens pares um multiplo de 11 menos 1, ou que se dos algarismos das ordens impares tirarmos os das ordens pares, e a differença for zero ou um multiplo de 11, o numero será divisivel por 11.

Examinando o numero 578534 diremos

4 menos 3 . . . 1
mais 5 . . . 6
menos 8
mais 7 . . . 5
menos 5 . . . 0

O numero proposto é pois divisivel por 11.

A facilidade com que n'estes casos chegamos ao conhecimento dos restos, fazendo a divisão por subtracções, tem dado lugar á pratica mui seguida das provas por 9 e por 11 para vereficar as quatro opperações, mui principalmente a multiplicação e a divisão.

Multiplicando os restos assim obtidos nos dous factores d'uma multiplicação, é preciso achar o mesmo resto que no resultado da opperação.

Este principio se applica tambem á divisão, pois que o dividendo é o producto do quociente pelo divisor; e quando a opperação tenha deixado resto, então o dividendo se considera decomposto em duas partes, e o resto da divisão d'um numero deve ser encontrado na somma dos restos da divisão das parcellas.

É esta ultima observação em que se fundamenta a prova da addicção, que serve tambem á subtracção; por quanto o resto d'esta opperação deve fazer com o numero menor duas unicas partes do maior.

Porem, não attendendo ao valor local dos algarismos, pois contamos com elles como se todos estivessem na caza das unidades, podemos ter comettido o erro d'algum multiplo do divisor, tomado de mais ou de menos sem que a prova nos advirta disso, e na pratica é factivel o trocarem-se os lugares de dous algarismos, ou haver em qualquer d'elles um engano de algumas unidades, que se compense com outro em sentido contrario.

Podia-mos continuar no reconhecimento da divisibilidade d'um numero com mais algumas regras particulares que se tem descoberto a respeito d'outros divisores; mas é mais facil dividir ao principio por 2 consecutivamente, que se for possivel effeituar a divisão duas vezes, o quociente será o mesmo que se tivessemos dividido uma vez por 4, ou por 8 se a divisão se faz tres vezes por 2.

Vendo depois que o ultimo quociente é divisivel por 3, effeitua-se a divisão, e continua-se em quanto for possivel; logo se passa á divisão por 5, 7, 11, 13, & e todos os mais numeros primos.

Mas pode accontecer que não encontremos nenhum d'estes numeros que divida exactamente o proposto, e que a final reconheçamos que tambem é numero primo.

É para sentir que na investigação dos factores numericos nos seja necessario uma serie de exames para decidir que não é possivel a decomposição; nenhum meio temos mais directo para reconhecer os n.^{os} primos, o que podemos fazer é diminuir o numero de tentativas não passan-

do d'aquelles divisores que dão um quociente maior do que elles, pois é claro que considerando um numero como o producto de dous factores, se fosse possivel algum divisor que desse um quociente menor do que elle, já se deveria ter achado este quociente como divisor.

Na decomposição d'um numero em seus factores, para milhor os distinguir, se dispõe a opperação do modo seguinte

120	2				
60	2	4			
30	2		8		
15	3	6	12	24	
5	5	10 15	20 30	40 60	120

A direita do numero proposto se traça uma linha vertical, e em frente se hade escrever o menor dos numeros primos que pode ser divisor; aqui 120 termina por 0 é divisivel por 2, faz-se pois a divisão e escreve-se o quociente por baixo do dividendo. Como 60 é divisivel por 2 colloca-se este divisor á sua direita, e vendo que ametade de 6 desenas é 3, assenta-se este numero debaixo das 6 desenas. Ainda cabe uma vez o divisor 2 que se assenta no seu lugar, e faz-se a divisão disendo: ametade de 3 desenas é 1 desena que se escreve por baixo, e do resto 1 que vale 10 unidades escreve-se a sua ametade 5.

Como 15 não é divisivel por 2, e é por 3, colloca-se este numero á sua direita, e faz-se a divisão disendo a terça parte de 15 é 5, que se escreve no lugar dos quocientes, e porque é um numero primo, assenta-se tambem no lugar dos divisores, e temos todos os factores simples do numero proposto.

Para achar os factores compostos, passa-se outro traço vertical á direita, multiplica-se cada um dos factores simples por todos os que ficão abaixo de si, e escrevem-se os productos em frente d'estes: assim de 2 vezes 2 se escreve 4 em frente do segundo divisor 2, depois passa-se logo a multiplicar por 3, deixando o terceiro factor 2 para evitar repetições, e dizendo 2 vezes 3 são 6, escrere-se 6 em frente do 3; depois 2 vezes 5 são 10 que se assenta em frente de 5, e em seguida 15, de 3 vezes 5.

Assim obtemos os factores compostos de dous simples: passando aos de tres, tiraremos outro traço vertical, e multiplica-se o 4, primeiro factor de dous, por todos os simples que não entrão na sua composição, os quaes são 2, 3, e 5 que estão abaixo do seu alinhamento, e em frente d'estes se escrevem os productos 8, 12, 20. Depois passa-se a multiplicar 6 por 5 que é o unico factor simples que fica abaixo de si, e colloca-se em frente o producto 30

Dá-se outro traço vertical, e passa-se aos factores de quatro, multiplicando 8 por 3 e por 5, que são os factores simples que ficão abaixo do seu alinhamento, e depois 12 por 5; tira-se finalmente outro traço vertical, multiplica-se 24 por 5 que é o unico que falta, e ter-se-ha 120,

como devia accontecer porquê já não há mais factores,

Com effeito d'estas divisões se tira

$$120=2\times60 \quad\Big|\quad 120=2\times2\times30 \quad (\text{p. } 4^{a})$$
$$60=2\times30$$
$$30=2\times15 \;.\;.\; 120=2\times2\times2\times15$$
$$15=3\times5 \;.\;.\; 120=2\times2\times2\times3\times5$$

Tendo pois todos os divisores simples d'um numero, formando com elles dous a dous, tres a tres & todos os productos possiveis, se achão os divisores compostos, e o mesmo numero proposto que é o ultimo producto.

Toda-via ainda fica a duvida se o numero poderá ser indicado pelo producto de outros factores primos que não exprimentamos; se para ex^{o}, 120 se poderá compôr tambem d'este modo

$$2\times2\times3\times7$$

differente da outra expressão . . $2\times2\times2\times3\times5$ que considerando cada uma como o resultado da multiplicação de dous numeros- o producto de todos os factores communs pelo producto de todos os restantes,- por estes podemos avaliar as duas expressões. No exemplo proposto apparece $7=2\times5$, i-é, um numero primo decomposto em dous factores; mas em geral igualando dous productos formados com numeros primos differentes, a igualdade que suppômos pode que um dos divisores de qualquer dos productos divida o outro, e este indicado pela multiplicação d'um dos seus factores primos, com o producto de todos os outros, mostra que se o multiplicando, tomado pelo factor simples, não pode ser dividido, o producto que designa sempre um numero d'estas partes, quando appareça dividido, é porque se tomou um submultiplo do multiplicador; temos pois outro producto de factores primos, em menor numero, que deve ser dividido, e continuando assim n'estas considerações chegamos a final a ter de dividir um numero primo por outro differente, o que é impossivel; e por consequencia que a igualdade supposta entre as duas expressões não pode ter lugar, i-é, *que dous productos são desiguaes se não tiverem exactamente os mesmos factores primos: logo*

8 *Um numero indicado pelo producto de certos factores primos não pode ter outros.*

Sobre este principio assentamos as seguintes proposições.

Todo o producto não pode ter por factores primos senão os de seus proprios factores.

O numero que não tiver todos os seus divisores primos entre os factores d'um producto não pode ser divisor do mesmo producto

O producto de numeros primos não pode ter outros divisores senão estes numeros, não contando com a unidade e o mesmo producto.

Guiados pelos principios de divisibilidade, muitas vezes teremos com facilidade os factores primos que podem compôr dous numeros dados. e depois n'um golpe de vista reconheceremos o maior divisor commum que os numeros podem admittir; mas em outros casos, que seja-

mos obrigados a calculos, observe-se que experimentando a divisão do maior dos numeros dados pelo menor, se este não for o divisor que se procura, se ficar algum resto da opperação, como entre 871 e 52 que dá $871=52\times16+39$ então o maior divisor commum a 871 e 52 tambem o será do multiplo d'um d'estes numeros 16×52, e por consequencia da segunda parte da somma $52\times16+39$; assim temos a procurar o maior divisor commum entre numeros mais simples, o menor dos numeros dados e o resto da divisão entre elles. E se pelos mesmos raciocinios nos conduzir-mos a dividir 52 por 39, e continuarmos, dividindo o primeiro resto pelo segundo, & de cada vez nos ficão numeros mais simples, e até chegamos, no presente exemplo, a uma divisão exacta, onde reconhecemos que 13 é o maior divisor commum.

Se n'estas divisões não obtivermos um resto que divida exactamente o precedente, então hade apparecer a final a unidade, e os numeros propostos não tem outro divisor commum, são primos entre si.

Para maior simplicidade dispõe-se a opperação do seguinte modo, onde cada resto é escripto immediatamente á direita do divisor afim de occupar o lugar proprio para a divisão subsequente.

871	52	39	13
	16	1	3

Esta marcha pode ser seguida depois mesmo de ter supprimido todos os factores que podem ser apercebidos sem calculo; quer no principio, quer no progresso da opperação entre dous restos consecutivos;como nos numeros 3484 e 208, que á simples inspecção se conhece que admitem o divisor 2, e ainda outra vez 2, e ficão depois os numeros que tomamos para o typo da opperação; assim o maior divisor commum entre 3484 e 208 é evidentemente $2 \times 2 \times 13$

Applica-se tambem este methodo na determinação do maior divisor de muitos numeros; pois, é claro que o maior divisor de dous destes numeros deve comprehender todos os divisores communs; e por isso substituindo, para a investigação de que tratamos, dous dos numeros dados pelo seu maior divisor commum, teremos depois a procurar entre este e um dos numeros propostos que restão, e assim vamos simplificando a questão até chegarmos a ter só dous numeros para a opperação. Ex.º nos numeros 108, 198, 450 entre os dous primeiros se acha o m. d. c. 18 e teremos só dous numeros 450, e 18, porquanto só 18 ou os seus divisores dividem 108 e 198.

Se se tivess proposto mais outro numero vg. 657, achar-se-hia que 18 não divide este ultimo numero, e então não é 18 o d. c. de todos os quatro numeros; mas como os divisores de 657 só podem dividir os outros tres dividindo 18, deve-se procurar o m. d. c. entre 18 e 657 que acharemos ser 9

SECÇÃO 4.ª

OUTROS ELEMENTOS DO CALCULO,

e opperações novas sobre a composição e decomposição

Se não tivessemos outro meio de composição senão o da numeração, ou o que nos offerece a opperação d'addição e a sua inversa, não teriamos precisão d'outros numeros alem dos inteiros; mas nós temos passado d'addição á multiplicação, e da subtracção á divisão: o numero 6 resulta da multiplicação de 2 por 3, e 2 vem da divisão de 6 por 3. Para que este modo de composição seja geral, somos obrigados a considerar outra especie de numeros; pois que não achando factores que multiplicados dêm o producto que se quer, iriamos até multiplicar 1 por 1; mas a unidade como parte pode pelas addições successivas gerar todos os numeros, como factor não dá senão a unidade.

Todos os numeros primos estão n'este caso, não podemos formal-os pela multiplicação d'outros numeros, e assim tambem dividil-os exactamente: para exº. tomemos 11 para dividendo e 7 para divisor, vê-se logo que o quociente deve ser maior que 1 e menor que 2; mas o valor intermidiario, verdadeiro resultado, não pode ser exprimido exactamente por esta especie de numeros, é preciso pois estabelecer novos elementos do calculo.

E se na formação dos numeros por meio d'addicção distinguimos o caso em que todas as partes que se tem a junctar sejão iguaes, e tomamos um outro modo de representar a opperação, tambem um caso particular da multiplicação, quando queremos formar um numero com factores iguaes, dá lugar a exprimir por uma nova forma os productos, que n'estas circunstancias tomão o nome de potencias.

Muitos numeros podem ser considerados potencias d'outros, como 4 producto de 2 por 2 8=2×2×2, 9=3×3 &; mas para ter todos os da serie natural, não se pode tomar só numeros inteiros para os factores chamados aqui raizes das potencias, e prova-se que os numeros fraccionarios tambem não são admittidos; consequentemente só com novos elementos é que podemos conceber a possibilidade da geração dos numeros por meio das novas opperações- a *formação das potencias, e a extração das raizes*- que é a inversa, como a divisão e a subtracção arespeito da multiplicação e d'addição. Nos vamos entrar nos desenvolvimentos que pertencem á Arithmetica.

§. 1.º

Das fracções em geral.

Já consideramos na escalla da numeração uma serie de unidades inferiores a primittiva,

segundo a mesma lei que presidiu á formação das superiores. A estas unidades demos o nome de fracções decimaes por serem de 10 em 10 vezes menores.

Relativamente aos usos civis ou commerciaes, era suffeciente o calculo d'estas fracções, se o systema metrico que offerece a divisão de todas as medidas em partes decimaes fosse geralmente adoptado; talvez o meio de realizar esta idêa pertença só a sciencia, fazendo-se todos os esforços para mostrar a simplicidade com que as fracções podem ser tratadas n'este systema, e até ligando-as ao calculo dos numeros inteiros como temos feito n'este compendio.

Entretanto é mister tratar das fracções em geral, sua importancia em muitos ramos das mathematicas nos compensará a todo o tempo que o systema metrico seja geralmente adoptado nas applicações d'Arithmetica.

Se para apreciar uma quantidade que não contenha exactamente a que se escolheu para termo de comparação, dividimos esta unidade em partes, com o numero d'estas partes é que formamos a denominação das fracções junctando-lhe a palavra *avos*: dizemos um onze avos, um oito centos e quarenta avos etc, se a unidade principal vale 11 d'estas partes, ou 840 etc; somente exceptuamos as fracções decimaes, e as que se obtêm com os divisores desde 2 até 9 que são chamadas meios, terços, quartos, quintos, sextos, septimos, oitavos, nonos.

Assim a numeração das fracções se reduz á dos numeros inteiros concretos; enuncia-se o numero das partes, e a denominação d'ellas. 7 quintos e 2 quintos são dous numeros inteiros d'unidades fraccionarias chamadas quintos. Em quanto á escripta ha differença; as subdivisões que não são decimaes não se podem escrever como estas se escrevem, e tambem não temos nomes particulares senão para certas subdivisões mais necessarias nos usos sociaes.

Porem debaixo das idêas expostas a unidade é fracção a respeito d'outro numero inteiro, e de dous numeros quaesquer dir-se-ha tambem que um é fracção do outro; assim 2 é um terço de 6, porque 6 é composto de tres partes iguaes a 2; 4 ou 2×2 são 2 terços de 6: deste modo se vê como se obtem o numero 4 por meio d'outro 6, ou o quociente da divisão de 4 por 6. Assim uma fracção indica um quociente que se não pode exprimir em numeros inteiros, por isso se deixarmos estes quocientes debaixo da forma com que indicamos a divisão que se quer effeituar, escrevendo para ex.º $\frac{7}{5}$ temos n'esta expressão um meio de representar a quinta parte de 7 ou 7 quintos da unidade: é pois com dous numeros, um que enumere as unidades fraccionarias, que por isso lhe chamaremos numerador, o outro que indique a denominação d'estas unidades ou que seja o denominador

D'estas considerações se deduz immediatamente

Que uma fracção não muda de valor quando se multiplicão ou dividem os seus dous termos por um mesmo numero.

Com effeito dividir os dous termos de $\frac{6}{9}$ por 3 é tomar 3 vezes menos partes, mas cada uma 3 vezes maior, e diremos da mesma sorte que $\frac{2}{4}$ ou $\frac{3}{6}$ valem $\frac{1}{2}$; pois que dividir 1 em 4 partes para tomar 2, ou em 6 para tomar 3 é sempre tomar ametade da unidade.

Por este principio podemos reduzir uma fracção á forma mais simples que for possivel, ou para milhor se fazer idêa do seu valor ou para facilitar o calculo que tivermos d'effeituar. As regras que temos sobre a divisibilidade dos numeros nos ajudão a conhecer todos os factores primos communs a ambos os termos da fracção, e quando estes não estejão no alcance das regras, pratica-se a opperação do maior divisor commum. A fracção que resultar depois de supprimidos todos os factores communs, é a expressão mais simples que se pode obtêr da proposta; porque os seus termos são então numeros primos entre si, é uma fracção irreductivel.

Quando tivermos a comparar duas fracções differentes, fazendo uzo do principio fundamental das transformações, decidiremos qual é a maior ou a menor; pois que reduzindo-as a um mesmo denominador são consideradas como inteiros da mesma especie. Para ex. se á inspecção das fracções $\frac{10}{27}$ $\frac{22}{55}$

não podemos decidir qual d'ellas é a maior, multiplicando os dous termos da primeira pelo denominador da segunda, e os d'esta pelo denominador da primeira, afim de ter para denominadores um producto dos mesmos factores,

$$\frac{10\times55}{27\times55} \qquad \frac{22\times27}{55\times27}$$

reconheceremos que a segunda é maior pois representa 594 unidades, e a outra 550 da mesma especie.

Se transformassemos as fracções de sorte que os numeradores viessem iguaes, os denominadores serião então 594 e 550, e a fracção d'este segundo denominador seria a maior porque ambas contem o mesmo numero de partes; porem d'umas basta 550 para formar a unidade, quando das outras são precisas 594.

Pelos mesmos raciocinios se vê que a reducção de muitas fracções ao mesmo denominador, se effeitua multiplicando os dous termos de cada uma pelo producto dos denominadores de todas as outras; pois d'este modo as novas fracções apparecerão com um denominador commum producto de todos os denominadores das propostas

$$\frac{2}{3} \qquad \frac{5}{6} \qquad \frac{7}{12} \qquad \frac{11}{24}$$

$$\frac{2\times6.12.24}{3\times6.12.24} \quad \frac{5\times12.24.3}{6\times12.24.3} \quad \frac{7\times24.3.6}{12\times24.3.6} \quad \frac{11\times3.6.12}{24\times3.6.12}$$

Neste ex.º observa-se que o divisor 24 con-

tem exactamente todos os outros, é igual a 3×8. 6×4. 12×2, e que por isso ás fracções se póde dar mais simplesmente o mesmo denominador, multiplicando os termos da primeira por 8, os da segunda por 4, e os da terceira por 2 $\frac{16}{24}$ $\frac{20}{24}$ $\frac{4}{24}$ $\frac{11}{24}$. Se nos dessem $\frac{3}{4}$ $\frac{7}{8}$ $\frac{5}{6}$ $\frac{11}{12}$ para reduzir á mesma denominação, não tinhamos n'este novo ex.º um dos denominadores multiplo dos outros; mas observa-se que elles não são primos entre si, e que 24, 48, 96 & são multiplos de todos; podemos pois transformar a fracção em $\frac{18}{24}$ $\frac{21}{24}$ $\frac{20}{24}$ $\frac{22}{24}$ preferindo o multiplo 24 para que as novas formas sejão as mais reduzidas.

Quando á simples inspecção das fracções se não reconheça o menor multiplo de todos os denominadores, a decomposição o mostrará; é o producto de todos os factores primos differentes tomados o maior numero de vezes que se achar em qualquer dos denominadores. Para ex.º nas fracções

$$\frac{13}{350} \quad \frac{19}{144} \quad \frac{123}{168} \quad \left| \begin{array}{l} 350=2.5.5.7 \\ 144=2.2.2.2.3.3 \\ 168=2.2.2.3.7 \end{array} \right.$$

como um multiplo qualquer dos numeros propostos deve encerrar todos os factores primos d'estes numeros, o menor multiplo será o que contiver somente estes factores primos, é 2. 2. 2. 2. 3. 3. 5. 5. 7

Agora para transformar as fracções é claro que temos a multiplicar os dous termos de cada uma pelo producto dos factores primos do denominador commum que faltarem nos denominadores particulares. Assim para a primeira deve ser o multiplicador 2. 2. 2. 3. 3 para a segunda 5. 5. 7 e para a terceira 2. 3. 5. 5

Nas transformações se comprehende tambem a conversão em decimaes d'uma fracção da forma geral, se, para ex.º, na divisão de 30 por 4, se acha 7 no quociente e fica ainda para dividir 2 por 4, dizemos que o quociente completo é $7\frac{2}{4}$ ou $7\frac{1}{2}$; mas em lugar de 30 unidades considerando 300 decimos, a divisão se faz exactamente, e dá 75 decimos, i-é, 7,5; pelo que a fracção que junctamos ao quociente inteiro é equivalente a 0,5.

Esta reducção é importante para facilidade dos calculos, e até exigida no emprego das medidas metricas. Se para ex.º nos pedissem de certa fazenda deseseis vinte cinco avos do metro, como a medida está subdividida em mellimetros, diriamos que 16 unidades em 25 partes é o mesmo que 16000 millimetros n'estas partes, e tomamos exactamente 640 millimetros.

Em treze deseseis avos a divisão nos mostra que é preciso decompôr as 13 unidades em decimos millesimos.

unid	13	16
deci	130	0,8125
centesi	20	
millesi	40	
d. millesi	80	

Vê-se pois que para converter uma fracção

em unidades decimaes, é preciso dividir o numerador pelo denominador, e continuar a divisão exprimindo os restos successivos em decimos, centesimos &, por um zéro á direita de cada um, até achar o quociente exacto.

Em muitos problemas não nos será possivel avaliar exactamente as fracções em unidades decimaes, porque a divisão nos póde levar alem do lemitado numero d'algarismos que permittem as medidas decimaes, e ainda acharemos algumas fracções que se não possão reduzir por mais que se continue a divisão; porem em muitos usos nos contentamos com os valores aproximados.

Para ex.º querendo tomar d'um litro de certo liquido a fracção que acabamos de reduzir a decimaes, mediriamos 8 dicilitros e 1 centilitro somente, não usando de medidas inferiores ao centilitro. E se quizessemos tomar quinze deseseis avos, mediriamos 9 decilitros e 4 centilitros, contando 1 pelo resto 0,0075; o erro é do mesmo valor que na fracção precedente, um por excesso e outro para menos.

Se se quizesse medir nove onze avos do metro, reduzindo esta fracção a decimaes acharse-hia 0,81, e 9 no resto da divisão. Por ser este resto igual ao dividendo, e continuarmos com o mesmo divisor, é claro que tornaremos a ter os mesmos algarismos no quociente, e cahiremos denovamente no mesmo resto; e assim por diantes e reproduzirão indefinitamente as mesmas decimaes no quociente. É pois impossivel exprimir exactamente em decimaes a fracção proposta mas podemos prolongar os peridos até que o erro comettido no desprezo dos que se lhe seguem, seja sem influencia para o calculo.

Muitos exemplos d'estes, nos apparecerão na avaliação das fracções em unidades decimaes; por isso é util indagar alguma condição pela qual reconheçamos se uma fracção pode ser convertida exactamente em decimaes, ou se não pode ser avaliada senão por aproximação, porque da divisão que praticarmos resulte um quociente sem fim.

Vemos que a numeração das fracções decimaes encerra tambem as duas partes distinctas- o numero das unidades fracionarias e a denominação d'estas unidades.-

$$0,1 = \frac{1}{10} \qquad 0,01 = \frac{1}{100} \qquad 0,001 = \frac{1}{1000}$$

subentendendo pela virgula os denominadores 10, 100, 1000 e assim nas unidades que se seguem, tomando denominadores de 10 em 10 vezes maiores.

E' pois claro que qualquer fracção não apod ser convertida em decimaes sem que mediant as transformações admittidas, se possa obter para denominador a unidade seguida d'um certo numero de zéros; mas como taes denominadores só podem ter factores 2 com igual numero de factores 5, é preciso que a fracção proposta não

se forme d'outros numeros primos. Em $\frac{3}{8}$ ou $\frac{3}{2\times2\times2}$ se se introduz o factor 5 tres vezes achar-se-ha' $\frac{3\times5.5.5}{2.2.2\ 5.5.5}$ ou $\frac{3\times5.5.5}{2\times5.2\times5.2\times5} = \frac{375}{1000}$

Em $\frac{27}{250}$ ou $\frac{27}{2\times5\times5\times5}$ introduzindo duas vezes o factor 2, ter-se-ha $\frac{27\times2.2}{2.5\times2.5\times2.5}$ ou $\frac{108}{1000} = 0,108$

E reflectindo sobre a marcha da reducção vê-se que converter o numerador da fracção em decimos, o resto da divisão em centesimos, e o resto seguinte a millesimos, é multiplicar o numerador da fracção por 10 tantas vezes quantas são as divisões parciaes; pelo que de cada vez se introduz os factores 2×5 e quando se chegue a têl-os em igual numero aos do denominador, a divisão se oppera pela supressão d'estes factores.

Assim, só quando o denominador se compõe de factores 2 e 5 é que pode ter lugar a conversão em decimaes, e vê-se alem disso, que o numero d'estes algarismos será igual ao numero de vezes que se achar no denominador um ou ontro dos dous factores, aquelle que entrar mais; pois que as multiplicações por 10 só introduzem no numerador factores 2 ou 5, com os quaes se pode supprimir os do denominador em igual numero.

E sabemos já, que se pela continuação das divisões não chegarmos a um resto zéro, havemos de recahir em algum dos precedentes, como acconteceu n'um ex°. que já effeituamos, e então necessariamente se hão de seguir os mesmos algarismos para o quociente até se obtêr denovamente o mesmo resto; e assim de periodo em periodo circulão ou são constantemente repetidos certos algarismos nas fracções decimaes que vão ao infinito, e que debaixo de taes considerações se podem chamar periodicas.

Mas nem sempre o periodo se estabellece depois da virgula, muitas vezes começa a manifestar-se depois d'alguns algarismos decimaes; estas fracções se chamão periodicas mixtas.

$\frac{5}{7}$	dão as fracções periodicas simples	0,777 . . . .
$\frac{12}{13}$		0,923076923076
$\frac{7}{35}$	periodicas mixtas	0,12727 . . . .
$\frac{7}{12}$		0,58333 . . . .

Tambem pode ser de utilidade levar uma fracção decimal á forma geral; a fracção 0,625 milhor se comprehende debaixo da forma : para esta transformação basta exprimir por meio dos denominadores a especie da unidade indicada pela virgula, e effeituar sobre esta expressão as simplificações possiveis para a reduzir a seus menores termos.

$$0,625=\frac{625}{1000}=\frac{125}{200}=\frac{25}{40}=\frac{5}{8}$$

Em quanto ás fracções decimaes infinitas, examinemos os numeros compostos somente de noves.

$9=10-1$
$99=100-1$
$999 \quad 1000-1$

Agora multipliquemos uma fracção periodica simples por um numero composto de tantos 9, como d'algarismos encerrar o periodo; em 0,2727 . . ., para ex°, se terá

$$\begin{array}{r} 27,2727\ldots \\ -0,2727\ldots \\ \hline 27 \end{array}$$

$$\frac{27}{99}=0,2727$$

Esta subtracção faz desaparecer a parte periodica, e a differença exprime o producto de 99 pela fracção decimal; por consequencia o valor d'esta, será o resultado da divisão do producto pelo outro factor.

Assim uma fracção periodica simples tem por expressão uma fracção da forma geral com um dos periodos por numerador, e no denominador tantos 9 como de algarismos houver no periodo.

Se a fracção periodica fosse 0,0002727 . . . por uma mudança da virgula teriamos a fracção periodica simples, que acabamos d'exprimir na forma geral, e depois fariamos este valor 1000 vezes menor. $\frac{27}{99}=0,2727\ldots \quad \frac{27}{99000}=0,0002727$

A este caso se reduzem todas as fracções periodicas mixtas decompondo-as em duas

$0{,}532727\,.\,.\,.\;\left|\begin{array}{l}0{,}53\\0{,}002727\end{array}\right.$ ou $\left|\;\frac{53}{100}+\frac{27}{9900}\right.$

Agora se reduzirmos estas duas fracções ao mesmo denominador $\frac{53\times99}{9900}+\frac{27}{9900}$ temos a sommar os dous numeros 53×99 e 27 que são da mesma especie-9900 avos- e

$$\frac{53\times99+27}{9900}$$

é a expressão da qual facilmente se pode tirar a regra para opperar nos outros ex.os em que se queira passar á forma geral as fracções periodicas mixtas.

Com o fim de avaliar uma fracção de dous termos se emprega algumas vezes as seguintes transformações. Tomemos, para ex.o, a fracção.

$$\frac{100000000}{314159265}=\frac{1}{3+\frac{14159265}{100000000}}$$

Dividindo ambos os termos pelo numerador, vê-se que o quociente do denominador é 3 e um resto; por consequencia um terço é o valor aproximado da fracção proposta, porem maior que o verdadeiro.

$$=\frac{1}{3+\frac{1}{7+\frac{885145}{14159265}}}$$

Se quizermos maior aproximação não se despreza a fracção do denominador, pratica-se a seu respeito como na proposta.

$$\text{ou }\frac{1}{3+\frac{1}{7}}=\frac{7}{22}$$

Despresando agora a fracção do denominador, e multiplicando depois o numerador e denominador por 7, simplificamos a expressão representando a simplesmente pela fracção sette vinte dous avos.

Pode-se continuar a mesma marcha para nos chegarmos mais ao valor verdadeiro. A fracção assim desenvolvida pelas divisões successivas, é o que se chama uma *fracção continua.*

Esta transformação, arespeito das avaliações, se usa quando a fracção se compõe de termos consideraveis, e que se não possão reduzir por não terem um divisor comum; pois que nos podemos servir dos quocientes achados pela opperação do maior divisor comum para compor os denominadores inteiros da fracção contin: a, e assim sem outro calculo pômos uma fracção irreductivel debaxo de termos mais simples, e aproximada da fracção proposta.

Para ex.o, procurando o maior divisorcommum entre os termos da fracção.

$$\frac{547}{863}=\left|\begin{array}{c|c|c|cc|}863 & 547 & 316 & 231 & 85\ \& \\ & 1 & 1 & 1 & 2\end{array}\right.=\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{}{2\ \&}}}}}$$

Vemos que a fracção proposta não pode ser reduzida exactamente, porque seus termos não admittem outro divisor commum senão 1; porem dos quocientes achados compomos a fracção continua que pode dar um valor tão aproximado como o exigirem os calculos.

A avaliação das fracções nos conduz tambem aos numeros complexos. Quando se pergunta, quanto valem tres oitavos da braça? observamos que tres oitavos d'uma braça é o mesmo que um oitavo de 3 braças, e podemos reduzir as 3 braças a palmos e dividir 30 palmos por 8, o que dá 3 palmos no quociente, e 6 de resto; reduzindo este a pollegadas dividiremos 48 por 8, e vemos então que a fracção proposta vale 3 palmos e 6 pollegadas.

Se a fracção é decimal, sabemos já que a reducção é ainda mais facil. Para ex.º, se queremos avaliar a fracção 0,375 da braça pelas divisões estabelecidas d'esta unidade, como a braça tem 10 palmos, multiplicamos 0,375 por 10 que da 3,75 palmos; e multiplicando depois 0,75 do palmo por 8 teremos 6 pollegadas, ou finalmente que o valor da fracção proposta é 3 palmos 6 poll.

Reciprocamente a conversão dos numeros complexos á forma geral ou á decimal, para exº, em 3 varas 4 palmos 3 polleg. observamos que 3 v. valem 15P que juntos a 4 fazem 19, e como o palmo se compõe de 8 p, 19 P. encerrão 152 p., que reunidas a 3 dão 155. Exprimindo assim o numero complexo em unidades da sua infima especie, e recordando que é necessario $5 \times 8 = 40$ d'estas para formar a unidade principal, ter-se-ha

$$\overset{V}{3}\ \overset{P}{4}\ \overset{p}{3} = \frac{155}{40} = \frac{31}{8}.$$

Nós já começamos a combinar as fracções da forma geral, e sem mais explicações podiamos já apresentar a regra para a addicção e subtracção d'estas fracções; pois logo que se chega a dar-lhes o mesmo denominador, podemos consideral-as como inteiros de certa especie, e executar as refferidas opperações como entre numeros concretos.

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{4}{6} + \frac{3}{6} = \frac{7}{6}.$$

Com effeito se quizessemos junctar 4 unidades com 3 unidades achariamos 7 unidades; tratando de 4 sextos e 3 sextos, obteremos do mesmo modo 7 sextos. E para differença entre as fracções propostas teriamos, segundo os mesmos raciocinios, 1 sexto.

Sem que as fracções tenhão o mesmo denominador não podemos sommal-as ou diminuil-as, da mesma sorte que não podemos effeituar estas opperações entre um numero de braças e outro de varas, sem as reduzir primeiramente a uma só especie. Porem depois d'esta preparação, toma-se a somma ou a differença, e a estes resultados se dá o denominador commum que pertence ás fracções. Eis-qui mais um exemplo.

$$\frac{3}{7} + \frac{8}{15} = \frac{45}{105} + \frac{56}{105} = \frac{101}{105}; \quad \frac{8}{15} - \frac{3}{7} = \frac{11}{105}$$

A marcha que seguimos com as fracções decimaes se comprehende tambem n'esta regra, pois que a collocação das unidades da mesma especie umas debaixo das outras, tem o lugar da reducção ao mesmo denominador.

Estas opperações entre fracções accompanhadas de numeros inteiros, se executão primeiramente sobre as fracções e depois sobre os inteiros.

$$53\frac{1}{4} \text{ ou } 53\frac{5}{20} \qquad \text{Em } 17\frac{2}{5}$$

$$18\frac{1}{15} \;\text{»}\; 18\frac{4}{20} \quad \text{diff.} \qquad 11\frac{4}{5} \quad \text{diff}$$

$$71\frac{9}{20} \quad 35\frac{1}{20} \qquad 29\frac{1}{5} \quad 5\frac{3}{5}$$

No segundo exo a fracção do numero inferior é maior que a outra, mas subtrahindo-a d'uma das 17 unidades que vale 5 quintos, o resto 1 quinto se juncta a 2 quintos; e depois tiramos 11 unidades ás 16 que ainda contem o numero superior.

Podiamos tambem reduzir cada um dos inteiros á denominação da fracção que os accompanha para os junctar com ellas, e fazer um só numero fraccionario; depois se effeituaria a opperação a que nos propomos.

Se na addicção das fracções da mesma denominação supposermos o caso particular dos numeradores serem tambem iguaes, então junctamos um numerador a si mesmo tantas vezes quantas são as fracções, e a somma vem a ser um producto da fracção pelo numero inteiro que

designe quantas vezes se toma a fracção.

Mas nós sabemos que se se fizer o denominador d'uma fracção, 2, 3, 4 & vezes menor sem alterar o numerador, a fracção virá o mesmo numero de vezes maior. Se para exº. dividimos o denominador da fracção.

$\frac{2}{27}$ por 3, dizemos que $\frac{2}{9}$ é 3 vezes maior pois que o numero das partes é o mesmo nas duas fracções, porem cada uma das partes da segunda é 3 vezes maior que as da primeira. Logo para multiplicar uma fracção por um inteiro multiplica-se o numerador, conservando o denominador sem alteração, ou divide-se o denominador sem alterar o numerador; e prefere-se este segundo modo quando a divisão se pode fazer exactamente, para que o resultado fique mais simples.

Vê-se tambem que conservando o mesmo numerador, se se fizer o denominador 2, 3, 4 & vezes maior, a fracção vem a ser 2, 3, 4 & vezes menor, i-é, se se multiplica o denominador d'uma fracção sem mudar o numerador, a fracção é devidida $\frac{6}{7}$ $\frac{6}{14}$ são do mesmo numero de partes; porem na segunda frracção cada uma ametade do que era na primeira.

E se dividirmos o numerador da fracção por 2, diremos igualmente que a fracção resultante é ametade da primittiva, pois que a grandeza das partes não alterou; logo para dividir uma fracção por um inteiro multiplica-se o denominador da fracção ou divide-se o numerador, se a divisão se puder fazer exactamente, afim de ter o resultado n'uma expressão mais simples.

Generalizando os raciocinios que fizemos na multiplicação das fracções decimaes, concluimos que multiplicar um numero por uma fracção, é tomar d'elle esta fracção. Em

$$\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}$$

não se repete o multiplicando um certo numero de vezes, como acontece quando o multiplicador é inteiro; aqui é um terço do multiplicando que se deve tomar duas vezes para formar o resultado que se procura. Ora para obtêr o terço de 4 quintos temos a dividir esta quantidade em 3 partes, e acabamos de ver que para dividir uma fracção por um nummero, multiplica-se o denominador pelo inteiro, conservando o mesmo numerador; assim

$\frac{4}{5\times3}$ é a parte que nós queremos tomar duas vezes, ou uma fracção que temos a multiplicar pelo inteiro 2

$$\frac{4\times2}{5\times3}$$

Concluiremos pois, que para multiplicar duas fracções, multiplicão-se os numeradores entre si, e da mesma sorte os denominadores.

Generalizando tambem os raciocinios que re-

duzirão a divisão das fracções decimaes á dos numeros inteiros, teremos nas fracções da forma geral $\frac{8}{9}:\frac{2}{9}$ o resultado $\frac{8}{2}$ ou 4

Com effeito 8 nonos se compõe de 2 nonos, como oito unidades se forma de 2 unidades; temos pois a dividir somente o numerador da fracção dada para divididendo, pelo numerador da outra

Em $\frac{3}{4}:\frac{2}{5}$ ou $\frac{3\times5}{4\times5}:\frac{2\times4}{4\times5}$ o quociente é $\frac{3\times5}{2\times4}$

Como os raciocinios feitos sobre este exemplo são geraes, podemos estabelecer a seguinte regra a que nos conduz as formulas obtidas.

Duas fracções debaixo da forma geral se dividem uma pela outra invertendo os termos ao divisor, e praticando a regra da multiplicação. Assim é que:

$$\frac{16}{17}:\frac{4}{5}=\frac{16}{17}\times\frac{5}{4}=\frac{20}{17};\quad \frac{32}{81}:\frac{8}{9}=\frac{4}{9}$$

$$5\frac{1}{2}:3\frac{2}{3}=\frac{11}{2}:\frac{11}{3}=\frac{3}{2}$$

Por estes exemplos se vê, que em muitos casos se poderá praticar algumas simplificações.

§ 2.º

Formação das potencias, e extracção das raizes.

Quando os dous factores n'uma multiplicação saõ iguaes, o producto toma o nome de *quadrado* ou *segunda potencia* do numero multiplicado que se chama então *raiz quadrada.*

Quando a multiplicação é de tres factores iguaes, o producto toma o nome de *cubo* ou *terceira potencia:* 27 é *cubo;* sua *raiz cubica* 3; porque $3 \times 3 \times 3 = 27$ ou que 3 vezes 3 é o quadrado 9; 3 vezes 9 faz 27.

Estas denominações de quadrado e cubo explição-se pelas noções de geometria dadas na 1ª. secção para a medição das superficies e dos volumes: 9 é a medida d'um quadrado tendo 3 de cada lado, i-é, o quadrado que tiver 3 metros em cada lado, contem 9 quadrados de metro por lado. O cubo que tiver 3 metros em cada lado conterá 27 unidades de volume, i-é, cubos de metro por lado.

Mas em geral o producto de muitos factores iguaes se chama potencia, e dis-se segunda, terceira, quarta etc conforme houvermos de tomar duas, tres, quatro, etc vezes o numero dado para base ou raiz da potencia

$3.3 = 9 = 3^2$ $\quad 3.3.3 = 27 = 3^3.$ $\quad 3.3.3.3 = 81 = 3^4$

é a 2ª potenc, a 3ª potenc, a 4ª potenc.

Em lugar de interpôr o signal de multiplicação, adoptou-se um modo mais expedicto, que acima se vê, de indicar estes productos particulares; escreve-se uma só vez o numero dado para base da potencia, collocando por cima e um pouco á sua direita o numero que designe quantas vezes factor, ao qual se dá o nome de exponente.

Pelo uso que temos da multiplicação podemos dizer, sem praticar calculos, os quadrados e cubos dos numeros digitos.

R.	1	2	3	4	5	6	7	8	&
Q.	1	4	9	16	25	36	49	64	&
C.	1	8	27	64	125	216	343	512	&

Em todos os outros casos executaremos a serie de multiplicações necessarias; assim o quadrado de 23 ou

23^2 . . . . $23 \times 23 = 529$

e o cubo . . . . $\times 23 = 1216$

Nas potencias mais elevadas, para ex.º em

$7^8 = 7.7.7.7.7.7.7.7$

ou $7^2 \times 7^2 \times 7^2 \times 7^2$

» $7^3 \times 7^3 \times 7^2$

» $7^4 \times 7^4$

pode-se decompôr a potencia indicada em outras, cuja somma dos exponentes dê o grão da potencia, e multiplicar entre si estas potencias parciaes.

Observa-se tambem que $7^4 \times 7^4$ é um quadrado $(7^4)^2$

e assim $7^2 \times 7^2 \times 7^2 \times 7^2 = (7^2)^4$

Assim decompondo o exponente, pode-se formar a potc. indicada por um dos factores e elevar o resultado á potenc. indicada pelo outro.

Depois d'estas observações, vê-se que é possivel elevar um numero a qualquer potencia sem passar por todas as potencias antecedentes. A oitava potencia de 7 acha-se tomando o quadrado de 7 como factor quatro vezes; ou formando o cubo de 7, multiplicando-o por si mesmo, e o producto pelo quadrado de 7; e ainda formando a 4.ª potencia de 7, e elevando o resultado ao quadrado; ou finalmente levando o quadrado de 7 á 4a potencia.

$$\text{Em } 3^{12} = 3^{4.3} \quad \text{ou } (3^4)^3 \quad \text{e } 3^{17} = \frac{3^{18}}{3} = \frac{3^{2.3.3}}{3}$$

No 1.º d'estes ex. forma-se a 4.ª potc. de 3, e eleva-se o resultado ao cubo; no 2.º eleva-se ao cubo o quadrado de 3, e o resultado eleva-se outra vez ao cubo, e ter-se-ha a potencia 18a: d'esta se passa para a decima setptima, dividindo por 3; pois que a unidade que se junctou ao exponente equivale a multiplicar uma vez mais pela base.

A opperação da formação das potencias consistindo nas multiplicações successivas da base, temos, recorrendo ao modo usual de multiplicar, uma mistura dos porductos parciaes, que não nos deixa descobrir como as unidades, desenas & da base entrão na composição da potencia: passemos a fazer uma d'estas multiplicações com mais individualidade, para vêr se se descobre a marcha para a opperação inversa, i-é, a extracção das raizes.

Tomemos para ex a base 35
35

5 vezes 5	. . . .	25	quadr. das unid.
5	3 . . 15 desen. .	15	duas vezes as desenas pelas unid.
3	5 . . . . . » . . .	15	
3	. . . 3 . . 9 centen. . .	9	quadr. das desen.

Partindo agora em sentido contrario devemos tirar ao numero 1225 o quadrado das desenas da raiz; se nós as não conhecessemos, sabiamos ao menos, que a raiz se devia compôr de dous algarismos; por quanto as bases 10 e 100 dão os quadrados 100 e 10000. E visto que o quadrado d'um numero de desenas não dá unidades inferiores a centenas, devemos separar os dous algarismos da direita em 1225, e o numero 12 que fica á esquerda, será o quadrado das desenas da raiz, ou um numero maior, pelas centenas que resultarem dos outros productos que entrão no numero proposto.

12.25	35
9	65
32.5	5
32.5	

Procuremos pois o maior quadrado que se contem em 12 centenas, e conheceremos immediatamente o algarismo das desenas da raiz, que escreveremos á direita do numero proposto separado por um traço vertical.

Subtrahindo este maior quadrado ás 12 centenas o resto 325, que se vê no typo da opperação, contem ainda o dobro das desenas pelas unidades, e o quadrado das unidades.

Ora o producto do dobro das desenas pelas unidades não é de especie inferior a desenas, por isso podemos separar o algarismo 5 da direita e dividir 32 pelo dobro 6 das desenas achadas, que o quociente será o algarismo das unidades da raiz, ou um numero maior; porque nos algarismos separados para a esquerda se devem achar tambem as desenas que resultarem do quadrado das unidades, mas facil é a averiguação: os dous productos, quadrado das unidades, e o dobro das desenas pelas unidades, se podem obtêr por uma só multiplicação em que o multiplicando seja composto do algarismo das unidades, e do dobro das desenas; e o multiplicador o mesmo algarismo das unidades.

No nosso ex. formando o quadrado das unidades e o producto do dobro das desenas pelas unidades, achamos para somma d'estas duas partes 325; logo 5 são as unidades da raiz. Porem no numero 729 separando os dous algarismos da direita, temos que o maior quadrado contido no numero que fica á esquerda é 4, por consequencia 2 é o algarismo das desenas da raiz. E no resto 329 separando o primeiro algarismo da direita, e dividindo 32 por 4 dobro das desenas da raiz, achamos 8 para as unidades; o producto d'este numero pelo dobro das desenas é 320, e o quadrado de 8 é 64 que juncto a 320 dá uma somma maior que 329. Tiremos pois uma unidade a este quociente, e tornando a fazer a verificação com o numero 7, achamos que 27 é exactamente a raiz procurada.

Dando a esta opperação a disposição que se vê no primeiro exemplo, podem-se dispensar muitas explicações.

```
7.2 9 |2    7
4     |---------
----   48   47
3 2.9   8    7
3 2 9  --   --
-----
  0
```

Eis-aqui outro numero que dá lugar a tres verificações.

```
2.8 9 |1            7
1     |----------------
-----  29   28   27
1 8.9   9    8    7
1 8 9  --   --   --
-----
  0
```

Considerando um numero de muitos algarismos como se fosse composto somente de desenas e unidades, podemos voltar d'um quadrado qualquer á sua raiz, como nos casos de 3 ou 4 algarismos que havemos observado. Separados os dous algarismos da direita, onde sabemos que se não pode achar o quadrado das desenas da raiz, no resto que fica á esquerda é que haverá embaraço por se não poder descobrir á primeira vista a raiz d'um quadrado de 3 ou mais algarismos; mas tomando particularmente este numero, teremos a procurar as desenas e unidades da sua raiz, o que tudo forma as desenas da raiz do numero proposto; e depois se continuará o calculo para ter as unidades como fizemos na determinação das raizes de dous algarsimos. D'este modo somos conduzidas a separar no numero proposto outra classe de dous algarismos para a direita, e ver-se-ha em alguns exemplos a necessidade de separar mais classes, afim de que na ultima se possa conhecer sem calculo o maior quadrado que n'ella se contem, e que por isso iremos até que esta fique de dous algarismos ou de um somente. Será sufficiente darmos aqui dous ex:

```
5.5 2.2 5 | 2 3 5        2 5.7 8.6 0.8 4 | 507
4         | 43           25              | 10
15.2      |  3             07860         | 1007
1 2 9 . . .                 7049         |    7
 2 3 2.5     465           81184             10148
 2 3 2 5 . . .  5          81184                 8
     0                       0
   R 235                   R 5078
```

Para observarmos a lei da formação dos cubos, tornemos a multiplicar por 35 o quadrado d'este numero.

$$3^2 + 2\times3\times5 + 5^2$$
$$35$$
$$3^2\times5 \quad 2\times3\times5^2 \quad 5^3 \qquad \text{multiplicando}$$
$$3^3 \quad 2\times3^2\times5 \quad 3\times5^2 \qquad \text{por partes}$$
$$3^3 + 3\times3^2\times5 + 3\times3\times5^2 + 5^3 \qquad \text{i-é,}$$

1°. . . o cubo das desenas;
2°. . . o triplo do quadr. das desenas pelas unid.;
3°. . . o triplo das desenas pelo quadr das unid.;
4°. . . o cubo das unidades.

Passando agora á opperação da extracção, consideremos os cubos que não podem dar mais de dous algarismos na raiz, afim de caminhar-

mos por uma marcha analoga a que se seguio nas raizes quadradas. Estes cubos devem ter mais de tres algarismos, e menos de seite; ponhamos um ex., 157464, e observemos:

1°. Que o cubo das desenas não comprehende unidades inferiores a milhares, e separemos os 3 algarismos á direita do numero proposto; nos da esquerda, que não passão de tres, se pode conhecer á simples inspecção, ou quando muito por multiplicações de cór a sua raiz.

```
157.464 | 5
125     |                 | menor que 6³
32464           157       |
                          | maior que 5³
```

2o. Que o triplo do quadrado das desenas pelas unidades, não pode comprehender senão centenas; por isso no resto, depois de subtrahido o cubo das desenas, podemos separar os dous ultimos algarismos da direita, e dividir 324 centenas por 75, triplo do quadrado das desenas, que o outro factor se reconhecerá no quociente. Mas como 324 pode ter alguma cousa proveniente das outras partes do cubo, é mister formal-as todas para a verificação.

$3\times5^2\times4$	tirando o	3×5^2 . . . 75
$3\times5\times4^2$	factor commum 4	$3\times5\times4$ . . 60
4^3		4^2. . . . 16
		8116

Acha-se que a somma das tres partes é exactamente o que fica

```
   4
32464
```

do numero proposto depois de subtrahido o cubo das desenas: consequentemente 54 é a raiz que se procurava.

Porem se tomarmos o numero 19683 achar-se-ha o algarismo 2 para as desenas da raiz, e depois de subtrahirmos o cubo d'estas ao numero proposto, a divisão para ter as unidades, nos dá o algarismo 9 que pela verificação se reconhecerá que é maior do que convem; e o mesmo se verá ainda com o algarismo 8; é preciso pois deminuir mais uma unidade: eis-aqui como se dispõe o calculo.

```
19683 | 29
  8   | 2
------|3×2² .. 12      | 28   | 27
116.83| 3×2×9 .. 54    | 12   | 12
11683 |    9² .. 81    | 48   | 42
------|               | 64   | 49
  0   |       1821     | 1744 | 1669
      |          9     |    8 |    7
```

Distinguindo n'este calculo duas opperações, a que se pratica com os algarismos separados para a esquerda, e a que se executa depois de chamar os da direita, vê-se que a primeira é particular aquelle membro, mas que a outra terá de ser repetida no caso em que o numero proposto seja de muitos algarismos, que nos obrigue á sua divisão em mais de duas classes; por quanto as notas que se vão obtendo para a raiz serão consideradas nas desenas d'estas, em quanto se não chegar ao primeiro membro da direita, que

dá tambem o primeiro algarismo da raiz. Esta analogia com a extracção da raiz quadrada nos dispensa de miudas explicações; tomemos um numero de mais de seis algarismos, para ex. 33 386 248.

Separando os 3 primeiros algarismos ficão ainda para a esquerda duas clases, por isso as desenas da raiz não podem ser d'um só algarismo; temos a praticar com estas duas classes do mesmo modo que fizemos no ex.º precedente.

```
33.386.348|322
27
-----          3×3² . . . 27 . . . . . . . . . 27
 63.86         3×3×2 . . 18 . . . . . . . . . 36
                   2² . . . 4 . . . . . . . . 12
                        ------              ------
                         2884                3072
 5768 . . . . . . . . . . . 2
-------
 6182.48                3×32×2 . . . 192
                                       4
                                  ------
                                  309124
 61824 . . . . . . . . . . . . . . . . 2
-------
   0
```

Afim de achar as unidades da raiz, tinhamos de formar para divisor do resto 618248 o triplo do quadrado da raiz achada 32; porem recordando-nos da lei da formação dos quadrados vê-se que temos já o triplo da primeira parte, e ametade da segunda, por isso não há mais que dobrar esta, e formar o triplo do quadrado do primeiro algarismo 2 a somma 3072 será o divisor, e fica já para a verificação do algarismo que se achar no quociente.

Quando na segunda opperação tomamos para divisor o triplo do quadrado das desenas achadas, podemos junctar-lhe o triplo das mesmas desenas tomadas simplesmente:

Para ex.º em

3.241.792	1	Se dividirmos 22 por 3, triplo do quadr. das desenas teremos d'exprimentar o quociente 7.
1	3	
22.41		

Porem se junctarmos a este divisor o triplo das mesmas desenas, de modo que dê na somma mais uma unidade d'ordem inferior, vêr-se-há immediatamente, que o algarismo 7 não convem: é 224 que queremos dividir por 33.

Esta observação suggere á vista da decomposição que fazemos do devidendo, porque o consideramos como o producto de dous factores, sendo um a somma do triplo do quadr. das desen. mais o triplo das desen. pelas unid. e o quadr. das unidades; o outro as unidades simplesmente: e se no primeiro não podemos contar com as unidades, porque as não conhecemos, não ha o mesmo motivo para desprezar o triplo das desenas.

Seguindo a analogia d'esta extracção com a da raiz quadrada, comprehende-se como deveriamos proceder para a extracção d'outras raizes mais elevadas; mas esta marcha deve ser cada vez mais complicada, á medida que augmentar o

gráo da raiz; e para as questões que exigem somente os recursos d'Arithmetica, os dous primeiros gráos são sufficientes.

Observa-se, que elevando successivamente os numeros da serie natural ao quadrado, ao cubo, e ás outras potencias, se reproduzem termos da mesma serie que deixão outros intermediarios; pelo que na decomposição não se obterá para estes a sua raiz em numeros inteiros, é preciso examinarmos se existem na outra especie de numeros que conhecemos.

Ora sabemos que um numero não pode ter outros divisores senão os seus factores primos, e os porductos que é possivel formar com elles; por consequencia uma fracção irreductivel multiplicada por si mesmo qualquer numero de vezes, i-é, o seu quadrado, o cubo, e em geral levantada a qualquer potencia, todos os factores primos que composerem o numerador são como os da fracção primittiva, e o mesmo a respeito do denominador; por isso a fracção resultante é tambem irreductivel como a proposta. E' pois claro que as fracções não podem ser raizes senão d'outras fracções, e que quando um numeros considerado como potencia não tem raiz inteira, não a pode ter fraccionaria.

Assim os numeros da serie natural que não são formados pela elevação dos precedentes, considerando-os como potencias, é mister, para designar as raizes, dar lugar a uma nova especie de numeros.

Estas raizes que não se podem exprimir pelas formas conhecidas, não deixão con tudo, de serem quantidades realmente existentes: Para ex. o tomemos uma certa unidade linear para lado d'um quadrado, demonstra se em Geometria, q. a maior linha tirada d'entro d'elle, a que une as extremidades de dous angulos appostos, representa a raiz quadrada de 2; esta raiz existe pois, porque a sua grandeza é representada em estensão; mas não pode ser assignada exactamente por numeros, tomando o lado do quadrado para unidade; i-é, não há uma med da commum para estes dous comprimentos, são quantidades incommensuraveis, e dis-se tambem irracionaes, ou inexprimiveis.

N'estes casos se submettermos o numero que não é potencia perfeita a um signal que indique a extracção que queriamos fazer, temos um meio de indicar a raiz de taes numeros.

O signal convencionado é chamado radical

$\sqrt{}$ 2 designa a raiz quadrada de 2

$\sqrt[3]{}$ 2 . . . . . a raiz cubica, e assim para as outras, designando-se pela nota posta na abertura do signal o gráo da raiz.

Para assignalar os resultados que se podem tirar pela admissão d'estes symbolos, é preciso entrar nos desenvolvimentos que pertencem a outra parte: nos calculos arithmeticos estabellecemos os nossos raciocinios, sobre os valores aproximados que julgamos sufficientes.

Assim extrahindo a raiz quadrada ao nume-

ro 354 vê-se no fim da opperação um resto, o que nos indica ser a raiz achada menor que a verdadeira; mas a differença não dá 1 unidade, e pode-se exigir que não chegue a 1 decimo, ou a 1 centesimo, e em geral que seja menor do que certa unidade.

Ora a raiz de 354 deve ser a mesma que de 354,0000, e este numero considerado como inteiro daria 1881 e um resto; por consequencia 354,0000 fica comprehendido entre os quadrados de 18,81 e 18,82, e tomando-se qualquer d'estes valores pela raiz de 354, leva-se a aproximação a menos de 1 centesimo; e iria a qualquer numero de decimaes que se quizesse, servindo-nos de outras tantas classes de zeros para continuar a opperação.

Em quanto á raiz cubica, depois de achar a parte inteira do mesmo modo que nos cubos perfeitos, assentaremos tres zeros á direita do resto da opperação, para ter um algarismo decimal na raiz; ao novo resto outros tres, para obter segundo algarismo decimal, e assim successivamente até chegar á aproximação desejada.

```
 3 475 | 1514      675        68403
 . . . |-----       45         1812
 ------              1           16
   100000         -----      -------
    67951 . . .   67951      6858436
    -----                          4
    320490.00                 ------
    274337 44 . . . . . . . .
    --------
     46152 56
```

Este é o resultado da raiz cubica do numerador da fracção.

$\frac{3475000000}{100^3}$ porque consideramos o numero dado debaixo da forma $\frac{3475 \times 100^3}{100^3}$

logo $\frac{1514}{100}$ ou 15,14 é a raiz exacta ate centesi.

Se se não exigisse maior aproximação que até 1 oitavo d'erro, poriamos o numero dado debaxo da forma

$\frac{3475 \times 8^3}{8^3}$

$\frac{3475 \times 512}{8^3}$

```
1779200 | 121
7.79
724
 55200
 43651
 11549
```

R. $\frac{121}{8}$ ou $15\frac{1}{8}$

A aproximação das raizes por decimaes nos faz ver, que se toma a de uma fracção decimal do mesmo modo que nos numeros inteiros, tendo a attenção de fazer que a potencia proposta tenha tantas classes decimaes como de algarismos se quer na raiz, accrescentando á direita os zêros que forem necessarios; pois que o denominador sendo designado pelo ultimo algarismo decimal, é mister que venha a ser uma potencia do mesmo grão, que depois da extracção dê a unidade seguida do numero de zeros preciso pa-

ra assignar a aproximação.

34,75 é a de $\frac{34750}{10^3}$ ou $\frac{34750000}{100^3}$ &, conforme o grão d'aproximação que se exigir

```
∛ 34750 | 326
  27      27 . . . 27
   7750   18 . . .  36
           4 . . .  12
          2884     3072
  5768 . . 2        576
  1982000            36
                 312996
                      6
  1877976 . . . .
   104024
```

```
√ 34,75 | 58
  25      108
   975      8
   264 . . .
  11100   1169
  10521 . . . 9
    579
```

Em quanto ás fracções da forma geral, sabemos que para as elevar a qualquer potencia, é preciso formar a do numerador, e do denominador; logo a raiz d'uma fracção se obtem extrahindo-a a cada um dos seus termos.

A raiz quadr de $\frac{25}{49}$ é $\frac{5}{7}$ a cubica de $\frac{27}{64}$ é $\frac{3}{4}$ &.

Se o denominador é uma potencia perfeita, mas que tenhamos a tomar a raiz do numerador por aproximação, levando esta a menos de 1 unidade de erro, depois vem a ficar da especie da fracção resultante

a raiz quadr. de $\frac{27}{36}$ é $\frac{5}{6}$ aproximada ate $\frac{1}{6}$

Se o denominador da fracção proposta é tambem potencia imperfeita, pode-se substituir a fracção por outra que tenha por denominador uma potencia perfeita, multiplicando os dous termos da fracção por um factor conveniente. $\sqrt{\frac{23}{8}}$ ou de $\frac{23 \times 2}{4^2}$ é $\frac{3}{2}$, erro menor de $\frac{1}{4}$.

Por esta preparação evitamos uma extracção por aproximação, e a do denominador, para se poder julgar do erro do resultado; porque não se faz idéa clara d'uma fracção sem conceber a unidade dividida em um numero exacto de partes. A esta razão se pode junctar, para preferir o denominador, que o resultado se aproxima mais da raiz verdadeira do que fazendo o numerador potencia perfeita; na Algebra o demonstraremos com outras observações relativas ás opperações.

Alem dos radicaes ha alguns symbollos de quantidades, e ainda que não possamos dar já os desenvolvimentos que mostrão toda a sua utilidade, nem por isso devemos deixar de os conhecer e assignar aqui a sua origem; por que são elementos da sciencia de que tractamos.

Interpomos o sig — a dous numeros para indicar a subtracção entre elles, mas não appareceu ainda um resultado affecto d'este signal. Se nos proposessemos, para ex.º, a subtrahir 15 de 12, tomariamos como cousa impossivel tirar um numero d'outro menor; toda-via, se

nos lembrar-mos de decompôr 15 em duas partes 12 e 3, a primeira se pode tirar, e com a segunda indicar a opperação, disignando pela expressão — 3 que ficão ainda para subtrahir 3 unidades.

Os numeros assim acompanhados do signal menos são chamados negativos, e por opposição os que não são tomados com este signal se chamão positivos.

Sobre o calculo dos numeros negativos vêr-se-ha, que as opperações d'Arithmetica se executão pelos mesmos principios que entre os numeros ordinarios; mas em quanto á extracção das raizes, é impossivel achar quantidades que representem as de grão par; comtudo os symbolos. $\sqrt{-1}$ $\sqrt[4]{-6}$ & d'estas raizes imaginarias são admittidos e com muita utilidade na sciencia dos numeros.

Vemos tambem que $7^4 \times 7^4 = 7^8$, por consequencia. 7^4 é a raiz quadrada de 7^8; e em geral diremos que a raiz d'uma potencia indicada, se acha dividindo pelo exponente da raiz o da potencia; pois que o grão d'um producto é a somma dos exponentes dos factores.

Mas por este mesmo principio, deixando indicada uma destas divisões que se não possa effectuar, teremos potencias de grãos fraccionarios.

$$\sqrt[3]{7^8} \text{ é o mesmo que } 7^{\frac{8}{3}}$$

Os grãos fraccionarios são tambem elementes importates da sciencia.

Há muitas occasiões d'applicar estas opperações; eixaqui alguns exemplos.

1°. Supponhamos que um proprietario tem um terreno de 324 m. quadr. encravado n'um predio visinho, e que lhe convem transformal-o n'um quadrado contiguo á sua propriedade; quer saber o lado d'este quadrado equivalente? Vemos pelas noções dadas na 1ª. secção sobre a medida das superficies, que se resolve esta questão extrahindo a raiz quadr. a 324.

2°. Um armazem interiormente de forma cubica, e da capacidade de 64 m.m.m, contem sal até á altura de 25 decimetros; quer-se saber o lado do cubo, e a importancia do sal comprado a 80 rs. o litro? Pela extracção da raiz cubica do numero 64 se acha que o armazem é de 4 metros por lado. Tem 1600 decimetros quadrados por face, por consequencia 40000 litros de sal, que importão 3200U.

3°. N'uma cisterna de forma cubica e da capacidade de 729000 litros, achando-se a agua a 6 decimetros da borda, pergunta-se o numero de litros d'agua? A raiz cubica de 729000 sendo 90, é este o numero de decimetros de cada uma das dimensões do cubo; por consequencia cada face é de 8100 decim. quadr; agora a solucção da questão se acha por uma simples multiplicação.

4°. Tracta-se da capacidade d'um tanque de faces rectangulares, tendo 20 palmos de pro-

fundidade, e de capacidade 9680 palmos cubicos; pede-se as dimensões do fundo, para que a despeza seja a menor possivel, e o orçamento de toda a construcção, entrando um passeio em volta de 10 palmos de largura? Como se conhece a capacidade do tanque, e a sua profundidade, sabemos que dividindo 9680 por 20 teremos a superficie da face inferior de 484 palmos quadrados.

Ainda que o numero de palmos quadrados seja já determinado, o perimetro pode variar, e quer-se o menor. Supponhamos primeiramente iguaes os 4 lados do rectangulo, a superficie é então um quadrado, e temos somente a extrahir a aaiz quadrada de 484 que achamos 22. Agora augmentemos dous lados parallelos diminuindo os outros dous da mesma quantidade, e vejamos se a superficie se torna maior ou menor que a do quadrado: para ex°. dous lados de 22+5 e os outros dous de 22-5, e multipliquemos para saber as unidades de superficie.

22 + 5 22 — 5 ——————— 44 + 5 × 22 44 — 5 × 22 — 5 × 5 ——————— 485 — 25	Este producto é maior do que o resultado que procuramos, por que não se devia fazer a multiplicação por 22, mas somente por 22 diminuido de 5. Ora 5 vezes a 1.a parte do multiplicando pode apagar-se, e fica para subtrahir 5 vezes a segunda.

Assim ainda que podemos tomar os lados do tanque de differentes dimensões, em todos os casos haverá sempre a diminuir alguma cousa ao quadrado de 22. Consequentemente para uma superficie invariavel, o contorno será menor quando os lados do rectangulo forem iguaes.

Sobre a importancia da construcção temos, que a superficie do passeio é a differença entre o quadr. exterior e o interior . . . $(22 \times 20)^2$ — 484
as faces lateraes 4 a 20×22 . . $4 \times 20 \times 22$
a do fundo 484

$(22 + 20)^2 + 4 \times 20 \times 22$

ou $22^2 + 6 \times 20 \times 22 + 20^2$ | 3424
484   2540   400

Suppondo o preço da braça rs. 5000 . . . 50

Importancia total . . . . rs. 171200

Por esta marcha se vê quanto se resumem os calculos com o auxilio dos signaes das opperações, e na questão seguinte temos mais uma prova.

3.º Querendo pôr a juros compostos 800U por 2 an , e 1600U por 1 an. quantos º/o se devê exigir para que a final se receba 2594880 ?

No primeiro anno 1U terá um certo valor que representaremos agora por x, porque está dependendo do interesse que desejamos saber; no fim do anno cada uma das unidades de x tornando-se em x teremos $x \times x$ de cada 1U posto a juros no principio, e então a condição da questão nos diz q' $800x^2 + 1600x = 2594880$.

Observando que 800U divide as duas partes da somma 2594880 tambem deve dividir este numero, mais simplesmente teremos $x^2 + 2x = 3,2436$; d'onde se vê $x^2 + 2x$, as duas primeiras partes do quadrado de $x + 1$ que completando-o deve ser igual a 4,2436, e por consequencia a sua raiz 2,06 é o valor de $x + 1$ ou $x = 1,06$; d'onde se segue que o juro deve ser de 6 º/o.

§ 3.º

Instrucção fundamental para o estudo dos Logarithmos

Razões. Os dous primeiros modos da geração dos numeros são designados pelas formas

$4 + 2 = 6$ $6 - 2 = 4$
$4 \times 3 = 12$ $\frac{12}{3}$ ou $12 : 3 = 4$

Nos calculos, os numeros substituem as quantidades; mas para isso suppõe-se, como já temos dito, comparações com outra grandeza adoptada por *um*. Ora se temos duas quantidades da mesma especie para conhecer a differença com que uma excede ou é excedida da outra, a subtracção entre seus valores numericos designará este resultado, chamado por alguns authores razão arithmetica.

E se a comparação é feita para saber quanto uma quantidade contém ou é contida em outra, a forma da divisão dará o resultado chamado rigorosa razão. Entre duas linhas

a—2 A———3	6 : 2

é um quociente que nos mostra que A é 3 vezes a. Em geral chama-se razão ao resultado da opperação necessaria para saber o que uma quantidade é arespeito de outra.

Proporções. Consideremos simultaneamente duas razões

12 : 3	nota-se que a de 12 para
20 : 5	3 é como a de 20 para 5

Esta mesma locução se toma para enunciar os equi-quocientes chamados geralmente proporções; em lugar de 12 divididos por 3 igual a 20 divididos por 5 se diz. 11 é para 3 como 10 é para 5. afim de recordar a comparação feita entre as quantidades, e escreve-se d'este modo.

11 : 3 : : 10 : 5

Com duas razões da forma primittiva | 6—2 | teremos 6—2 . . 7—3 significando que 6 | 7—3 | exede tanto a 2 como 7 a 3

Estas equidifferenças se chamão tambem *proporções* por *differença*, e se enuncião como as proporções por quociente

6 é para 2 como 7 é para 3

e escreve-se 6.2 : 7.3

O primeiro e o ultimo termo d'uma proporção se chamão extremos; o 2.º e o 3º. meios. O 1º. é chamado tambem 1.º antecedente, ou antecedente da 1ª. razão, e o 2.º é o seu consequente; o 3º. é 2º. antecedente, e o 4º. o 2.º consequente.

Propriedades elementares Se em geral r, representa a razão d'uma grandeza A a a, i-é, o quociente inteiro ou fraccionario entre seus valores numericos, ter-se-ha a igualdade fundamental $A = a \times r$

D'aqui resulta $A \times 3 = a \times r \times 3$ $3\,A = 3\,a \times r$ $3\,A : 3\,a = r$	Uma razão não altera quando se multiplicão e por consequencia quando se dividem os seus termos por um mesmo numero.

Se em $3\,A : 3\,a :: A : a$ multiplicamos os termos de cada uma das razões pelo consequente da outra, não alterão as razões como acabamos de ver $3\,A \times a : 3\,a \times a :: A \times 3\,a : a \times 3\,a$.

Mas, tendo estas razões o mesmo consequente, é necessario que os antecedentes sejão iguaes

$3\,A \times a = A \times 3\,a$ i-é, que n'uma proporção . . .	O producto dos meios é igual ao dos extremos: e que dividindo o producto dos meios por um dos extremos se terá o outro no quociente.

O uso essencial das proporções na Arithmetica, é de determinar um termo qualquer sendo dado os outros tres. Os problemas numericos são de ordinario resolvidos pela doutrina das proporções. Se nós nos temos afastado d'esta carreira, é. porque o methodo analytico é mais claro, e pelo menos tão facil como o das proporções; alem do que applica-se a todas as questões numericas, e com o outro não acontece o mesmo. Agora se entramos na theoria das proporções. é só para chegarmos aos logarithmos, e para fixar o sentido de certas expressões muito usadas nas mathematicas, e notavelmente na Geometria onde por ellas se enuncião muitos principios e propriedades importantes.

Na mesma proporcão $3A : 3a :: A : a$

mudando o lugar dos meios ou dos extremos	e pondo os extremos no lugar dos meios
$3A : A :: 3a : a$	$A : 3A :: a : 3a$
(chama-se isto argumentar *Alternando*)	(o que se chama *Invertendo*)

proporcões de que se reconhece a existencia immediatamente que são apresentadas; pois se observa que os dous termos da 1.ª razão são entre si como os da 2.ª As seguintes são do mesmo grão de evidencia

$4A : 4a :: A : a$	comparando-as com a
$2A : 2a :: A . a$	primitiva e alternada,
$4A : 4a :: 2A : 2a$	resultão oito proprie-
$4A : 2A :: 4a : 2a$	dade de muito uso que se enuncião:

A somma dos dous primeiros termos é para a somma dos ultimos como o 2.º para o 4.º

A somma dos antecedentes é para a somma dos consequentes como qualquer antecedente para o seu consequente.

A differença dos antecedentes &

$12 : 4 :: 6 : 2$	Pode-se multiplicar ou divi-
$24 : 4 :: 12 : 2$	dir os dous antecedentes ou
$6 : 4 :: 3 : 2$	os consequentes pelo mesmo
$12 : 8 :: 6 : 4$	numero.

$36 : 9 :: 16 : 4$	Pode-se multiplar ou dividir
$6 : 3 :: 2 : 1$	duas proporções t.º por t.º,
$216 : 27 :: 32 : 4$	e por consequencia pode-se
$6 ; 3 :: 8 : 4$	elevar uma proporção ao
$36 ; 9 :: 4 : 1$	quadrado, ao cubo e extrair
$6 ; 3 :: 4 : 2$	a raiz quad., cub. &

Se as proporções forem por differenças, podemos tambem fazer algumas transformações, como :

Alternando e invertendo em $6 . 2 : 7 . 3$	$3 . 7 : 2 . 6$ $2 . 6 : 3 . 7$
Augmentando ou diminuindo uma mesma quantidade aos antec. e conseq.	$5 . 7 : 4 . 6$ $8 . 10 : 2 . 9$ $2 . 7 : 1 . 6$
Multiplicar ou dividir todos os termos por um mesmo numero	$9 . 21 : 6 . 18$ $\frac{3}{2} . \frac{7}{2} : 1 . 3$
Sommar ou subtrahir respectivamente os termos de duas ou mais proporções.	$3 . 7 : 2 . 6$ $5 . 8 : 7 . 10$ $8 . 15 : 9 . 16$

E como as proporções por differença se podem representar pela formula,

$a + r . a : b + r . b$ ou $-$ $\quad$ $-$	conforme os antecedentes forem maiores ou menores q' os consequentes;

Segue-se evidentemente que teremos sempre a somma dos meios igual á dos extremos; e que um dos extremos é igual á somma dos meios menos o outro extremo, ou um dos meios igual á somma dos extremos menos o outro meio.

Porem comparando duas rasões, assim arithmeticas, como geometricas, se notarmos que os termos da 2.ª não são um a respeito do outro como os da 1.ª. não se usará do signal : ou :: tem se adoptado outro d'esta forma < voltando a abertura para a maior rasão

7 . 2 ou 6 : 2	7 . 2 > 5 . 3	e se pronuncia
5 . 3 ou 24 : 6	6 . 2 < 24 . 6	

O excesso de 7 a 2 *è maior que* de 5 a 3, a razão de 6 para 2 *é menor que* de 24 para 6.

Se os meios são iguaes a proporção por differença ou por quociente é chamada continua

13.10:10.7	e 8:4::4:2	para se não repetir o
escrevê-se		termo medio empre-
÷13.10.7	∺8:4:2	gão-se os signaes par-
		ticulares ÷ ∺

E' facil de ver que o termo medio nas equidefferenças é igual á semi-somma dos extremos, e nas outras igual á raiz quadrada do producto dos extremos.

Nós já temos dado problemas que se resolvem achando o meio differencial de certos numeros dados, que tambem se chama meio arithmetico: o termo medio das outras proporções é chamado meio proporcional ou geometrico.

Progressões. N'uma serie de proporções como

÷16.13.10	∺32:16:8	a 2.ª razão de qual-
		quer d'estas propor-
÷13.10.7	∺16:8:4	ções, é igual á 1.ª da
		proporção que se se-
÷10.7.4	∺8:4:2	gue por isso escreve-
		remos

÷16.13.10.7.4 & e	∺ 32:16:8:4:2 &
E'uma serie de termos onde cada um excede o precedente, ou é por elle excedido da mesma differença; chama-se *progressão* arithmetica.	cada termo contem ou é contido no que lhe precede o mesmo numero de vezes; chama-se *progressão* geometrica

N'uma progressão por differença, compondo-se cada termo d'aquelle que o precede augmentado ou diminuido da razão, a progressão se representa bem por uma recta dividida em partes iguaes a esta quantidade constante. A linha inteira constitue o maior termo, e partindo de qualquer das extremidades se vão achando todos os outros, subtrahindo successivamente a differença.

Encarando assim uma progessão vê-se facilmente, que se podem escrever os seus termos d'este modo:

maior, maior-razão, maior-2 vezes r . . menor
menor, menor+razão, menor+2 vezes r. . maior

Tomando n'estas series dous termos que se correspondão, teremos sempre a somma do 1.º e ultimo somente; porque o augmento da razão n'um fica destruido pelo outro; logo:

A somma de dous termos equidistantes dos extremos, é igual á d'estes.

E a somma de todos é igual a semi-somma dos extremos, multiplicada pelo numero dos termos da progressão; por quanto sommando termo a termo as duas series, resulta a somma dos extremos repetida conforme o numero de termos da progressão.

E como qualquer termo é igual $\left|\begin{array}{l}\text{ao maior} -\\ \text{ao menor} +\end{array}\right|$ a razão tomada tantes vezes quantos são os termos que o precedem, segue-se que

A differença de qualquer termo ao primeiro é a razão tomada tantas vezes quantos são os termos que se considerão menos um; logo dividindo esta differença pelo numero de termos menos um se terá a razão da progressão, ou dividindo pela razão se terá o outro factor, a consequentemente o numero de termos,

Ver-se-ha tambem que se entre os termos consecutivos, tomados dous a dous se introduzem o mesmo numero de meios formando com os primitivos progressões parciaes, o todo constitue uma só progressão. Com effeito a differença de dous termos consecutivos sendo sempre a mesma, assim como o numero de meios que se considera, o quociente d'esta differença dividido pelo numero de termos menos um, ou a razão de cada progressão é um numero constante; e como o ultimo termo de qualquer d'ellas é ao mesmo tempo primeiro termo da seguinte, forma-se uma progressão de todas as parciaes.

Eisaqui as formulas que se deduzem das propriedades das progressões para resolvermos alguns proplemas importantes.

N'uma progressão por differença representando

a maior t.o $\quad$ n n.o de t.os $\quad$ r valor absoluto da diff.
b menor $\quad$ s. a somma

Sendo dado	Achar	
O 1.º termo, a razão, e o n.º de termos.	um t.º qualqner sem calcular os precedentes.	$a=(n-1)\,r+b$
Os 2 extremos, e o n.º de termos.	a somma de todos os termos, a razão	$s=\dfrac{(a+b)\,n}{2}$ $r=\dfrac{a-b}{n-1}$
Os 2 extremos e a razão.	o n.º de termos	$\dfrac{a-b}{r}=n-1$
Dous termos	Inserir m meios differençiaes	$\dfrac{a-b}{n-1}$ ou $\dfrac{a-b}{m+1}$ dá a razão q' se juncta ao 1.º termo uma vez, duas &c

As progressões geometricas gozão de propriedades e formulas analogas a estas que acabamos de deduzir para as progressões por differença.

Sendo dado	Achar	
o n.º de t.os o 1.º e a razão	Um t.o qualquer	$u=a\times r^{n-1}$
o n.º de termos o 1.º e o ultimo	o producto de todos os termos	$P=\sqrt{(a\times u)^{n}}$
»	a razão	$\sqrt[n-1]{\dfrac{u}{a}}$
A razão, o 1.o e ultimo t.o	a somma de todos os termos	$S=\dfrac{ur-a}{r-1}$

Sendo dado o 1.º e ultimo termo. | inserir um n.º m de meios propoc. | obtida a razão pela formula precedente com $n-1 = m+1$, forma-se a progressão multiplicando o 1.º t.º pelas potencias successivas da razão.

O antecedente d'uma razão considerado consequente da que precede, temos n'uma progressão por quociente, como 3:6:12:24:48. &

$$6 = 3 \times 2$$
$$12 = 6 \times 2$$
$$24 = 12 \times 2$$

E em geral tomando $a : b : c : d : e : \&$ que pode representar uma progressão crescente ou decrescente conforme tomar-mos a razão $>$ ou < 1, teremos

$$b = a \times r \qquad c = a \times r^2 \qquad d = a \times r^3 \quad \Big| \quad u = a \times r^{n-1}$$

Um t.º qualquer é = ao 1.º × razão tantas vezes como de t.os ha antes d'elle

e como tambem é = ao ultimo dividido pela razão tantas vezes como de termos ha depois d'elle,

Segue-se que o producto de dous termos, igualmente distantes dos dous extremos, é igual ao producto d'estes; poisque a potencia da razão n'um dos termos destruindo a do outro, só ficarão por factores o 1.º e ultimo termo.

Se pois escrevermos uma progressão debaixo

da forma $a : a \times r : a \times r^2 : a \times r^3 . . u;$

em ordem inversa, $u : \frac{u}{r} : \frac{u}{r^2} : \frac{a}{r^3} . . a$

e tomando o producto de todos os factores da 1.ª serie pelos da 2.ª, teremos:

quadr. do producto de todos os t.os d'uma progressão | $= a \times u$ tantas vezes factor como de termos houver na progr;

por consequencia $P = \sqrt{(a \times u)^n}$

A 3.ª formula se deduz da 1.ª dividindo por a, e depois exrahindo a raiz do grão n-1

Finalmente como a progressão $a : a \times r : a \times r^2 : \&$ tem termos onde entra r; se na expressão da somma o posermos como factor commum, teremos $a + (a + a \times r + a \times r^2 . . . a \times r^{n-1})\, r$

$$a + (S - u)\, r = S$$

Serie dos numeros naturaes. Quando uma progressão por differença é $\div 1.2.3\ 4.5.\&$

$$r = 1,\ n = u \quad \Big| \quad S = \frac{1}{2} n\ (n+1)$$

Muitas vezes nos será preciso calcular a somma dos primeiros numeros inteiros da serie natural; então mais facil e menos sujeito a erro é multiplicar o ultimo termo n pelo n.º immediatamente superior, e tomar ametade d'este producto.

Supponhamos um viveiro d'arvores em forma de triangulo (*fig. A Est.* 3ª.) dispostas em fileiras a uma certa distancia, e a mesma distancia d'uma a outra arvore em cada linha; teremos $S = \frac{1}{2} 12 \times 13 = 78$ como se ve na citada fig.

Serie dos n.os impares ÷ 1.3.5.7.9. . . $(2n-1)$

$2n-1$ é o numero impar da ordem n; a mesma formula do termo geral se reduz a esta expressão, e entrando com ella no lugar de u em S, ter-se-ha $1+3+5+7 \ldots (n-1) = n^2$

Todos os corpos são excitados por uma força que se chama *gravidade*, encaminhando-os ao centro da terra. Quando esta força não é contrariada por obstaculos, observamos que um corpo abandonado a si mesmo de certa altura, lhe obedece com uma velocidade que augmenta com o tempo, i-é, que o movimento recebe accrescentamentos de velocidade, que são os mesmos em tempos iguaes; e os espaços corridos são como a serie dos numeros impares 1,3,5,7,&: de sorte que no 1.º segundo de tempo corre $4,^m 90446$, correrá $3 \times 4,^m 90446$ no 2.º, e $5 \times 4,^m 90446$ no 3.º etc.; e pela formula $S = n^2$ facilmente acharemos o caminho total feito, vg, em 18"; $S = 18^2$ ou 324"

Dispondo-se uma camada de ballas em progressão por differença composta de 30 fileiras, cada uma de 2 ballas mais que a precedente, e sendo a 1.ª de 5 ballas pergunta-se quantas ha na camada?

N'esta questão temos $n = 30$ $a = 5$, para nos servimos da expressão $S = n^2$ precisamos de completar a progressão, tomar $a = 1$ com $n = 32$, e

acharemos 1024 que subtrahindo a somma dos dous 1.os termos, ter-se-ha 1020 para somma das ballas da progressão proposta. Por outro modo teriamos a calcular o ultimo termo que achariamos de 63 ballas, depois entraremos com este valor de a em $S = \frac{1}{2} n (a + b)$.

Daremos mais alguns problemas para apartar as difficuldades que se tem ao encontrar na Arithmetica letras do alfabeto para representar numeros; tudo está nos exemplos para comprehender uma linguagem nova.

E' o unico recurso, as formulas não podem deixar de serem exprimidas por letras, por que não se attende a numeros determinados, para ex: Uma collecção de termos representada pelo n.º 15, nunca pode designar outra que lhe seja superior nem tão pouco inferior; e sendo exprimida pela inicial n, este signal accommoda-se com qualquer numero segundo as questões a que se quizer applicar a formula que comprehende esta letra.

Um postilhão em 6 dias correu certo caminho, andando no segundo dia mais 2 milhas do que no 1.º no 3.º outras 2 de mais, e assim adiantando a jornada nos seguintes, correu no ultimo dia 36 milhas. Quantas legoas andou no 1.º?

Temos nas formulas das progressões arithmeticas.

$a = (n-1) r + b \mid a = 36 \quad r = 2 \quad n = 6$
ou $a - (n-1) r = b \mid b = 36 - 5 \times 2 = 26$ milhas

E para calcular a somma das jornadas ;

$$S=\frac{(u+b)\,n}{2}=\frac{(36+26)}{2}\times 5=155 \text{ milhas}$$

Em quantos dias chegou o postilhão ao lugar determinado, contando que no 1.º dia andou 8 legoas e meia, e 12 ao ultimo, adiantando cada dia 2 milhas?

$$n-1=\frac{(a-b)\,n-1}{r}=\frac{36-26}{2}=5 \ldots\ldots\ldots \text{ R 6 dias.}$$

Para as applicações das formulas relativas ás progressões geometricas é mister a doutrina dos logarithmos; damos, aqui algumas que se podem resolver sem este soccorro.

Tirou-se vinho d'um tonel segundo uma progressão geometrica crescente cuja razão é 2, e da 4.ª vez se contarão 32 litros; quantos se tirarão da 1.ª vez?

Da formula $u=a\times r^{n-1}$ se tira $a=\frac{a}{r^{n-1}}$ | $r=2$, $n=4$, $u=32$ | $a=\frac{32}{23}$ R 4 litros

Um jogador perdeu 6 vezes successivas dobrando sempre a perda antecedente, no premeiro jogo perdeu 8000r; quanto perdeu no ultimo?

$$u=a\times r^{n-1}=8000\times 25=8000\times 32=256000$$

E que dinheiro perdeu elle ?

$$S=\frac{u\,r-a}{r-1}=\frac{256U^6-8U}{5}$$

Uma Provinçia que tem 1728000 habitantes,

chegou no fim de 3 annos a contar 2197000; supondo que o augmento em cada anno teve lugar n'uma razão constante, pergunta-se qual foi esta razão?

$$r=\sqrt[n-1]{\frac{u}{a}}=\sqrt[3]{\frac{2107}{1728}}=\frac{13}{12}$$

Logarithmos. Querendo exprimir todos os numeros pela fórma de potencias, tomemos para raiz ou base um numero b que não seja a unidade, pois sabemos que a qualquer potencia que seja elevada dá sempre 1.

Formemos primeiramente as potencias que tenhão por exponentes os numeros da serie natural: b, b^2, b^3, b^4, &. A unidade pode tambem ser representada por esta forma, por quanto indicando os exponentes as vezes que b entra como factor com a unidade, b^0 é a expressão correspondente.

Esta serie sendo tal, que cada potencia está n'uma razão constante com a que precede, forma uma progressão por quociente; e os exponentes procedem conforme a lei da formação das progressões por differença. Temos assim duas progressões uma por quociente e outra por differença que se correspondem termo por termo.

$\div\div 1 : b^1 : b^2 : b^3 : \& \ldots b^n$ o t.º da ordem n

$\div\, 0 \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, \& \ldots n-1$

Estes exponentes, que declarão a razão de qualquer dos termos da progressão por quotiente arespeito da baze como factor invariavel, se chamão logarithmos;

A primeira idéa que deu lugar aos logarithmos foi a da simplificação que este novo modo de comparação podia causar ao calculo. As duas progressões se correspondem de tal sorte que as modificações opperadas sobre os termos da progressão por differença, fazem reconhecer immediatamente na outra o resultado de modificações mais complicadas, que são como consequencias, a saber: a multiplicação se converte n'uma *addição*; a divisão n'uma subtração; a elevação ás potencias n'uma multiplicação; e a extracção das raizes n'uma divisão.

Com effeito, a progressão por quociente começando por 1, todos os outros termos são as diversas potencias da razão, e por isso o producto de qualquer numero destes termos é evidentemente uma potencia da razão que fará parte da progressão.

Na outra, os termos são os diversos multiplos da razão, porque a progresssão começa por zero; assim a somma de muitos termos d'esta progressão é um multiplo da razão, e por consequencia é tambem um termo da progressão: logo

1.º *O logarithmo do producto de muitos termos da progressão por quociente, é igual a somma dos logarithmos de cada um dos factores.* | Escreveremos resumidamente $\log(u \times v) = \log u + \log v$

Este theorema nos era conhecido por outras

expressões- o grão d'um producto é a somma dos exponentes dos factores.

Faremos pois esta somma dos logarithmos, e procurando-a na progressão por differença, o n.º correspondente na outra, será o producto. u, e v são numeros representados por potencias, como termos da progressão por quociente, cujos exponentes são os logarithmos d'estes n.ºs u e v, e a somma d'estes logarithmos o exponente a que é preciso elevar a base b para que resulte o producto $u \times v$

Pois que um dividendo pode ser considerado com o producto do divisor pelo quociente, segue-se que

2.º *O logarithmo do quociente de dous n.ºs é igual ao excesso do logarithmo do dividendo sobre o do divisor.* | $\log. \frac{u}{v} = \log u - \log v$

Logo para dividir dous numeros que pertenção á progressão por quociente, teremos a subtrahir o log. do divisor do dividendo; e entrando na progressão por differença com o resto, tomaremos na outra o numero correspondente que será o quociente pedido.

3.º Como uma potencia de qualquer n.º, é o producto de muitos factores iguaes a este n.º, achar-se-ha que

O logarithmo d'uma potencia é igual ao logarithmo da baze tomado tantas vezes como de unidades tiver o grão da potencia. | $\log. v^m = n \log v$

Da mesma propriedade se deduz $\log \sqrt[m]{v} = \frac{\log v}{m}$

4.º Para extrahir uma raiz de qualquer grão a um numero que se acha na progressão geometrica, basta tomar na outra o seu logarithmo, e dividil-o pelo grão da raiz; o quociente será o logarithmo da raiz pedida.

Estas propriedades fazem vêr a utilidade d'uma progressão por quociente, na qual todos os numeros inteiros sejão termos. Ora, como o systema de numeração segue a lei constante de 10 em 10, se se escolhe tambem a progressão decupla $\div 10^0 : 10^1 : 10^2 : 10^3$: & que é a serie das unidades superiores 1 : 10 : 100 : 1000: etc e depois a prolongar-mos para um e outro lado das unidades simples, ter-se-ha:

etc 0,001:0,01 : 0,1 : 1 : 10 : 100 :1000: etc

ou $\overline{10}^3 : \overline{10}^2 : \overline{10}^1 . 10^0 : 10^1 : 10^2 : 10^3$: etc

os exponentees diminuindo sempre d'uma unidade, partindo da direita para a esquerda, porque são termos da progressão por differença cuja razão é 1.

Estes termos que representamos por $\overline{10}^1$ $\overline{10}^2$ &

são a expressão das fracções $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}$, ou $\frac{1}{10}, \frac{1}{10^2}$ &

de baixo da forma de inteiros, e ainda podemos da natureza dos exponentes tirar a explicação d'estas novas formas.

Mas se para que o uso dos logarithmos seja geral, é necessario uma progressão por quociente da qual todos os numeros inteiros sejão termos, inserindo um grande numero de meios proporcionaes entre 1 e 10, e o mesmo numero de 10 a 100, & é claro que entre estes termos apparecerão os numeros inteiros da serie natural, ou com tão pequena differença que se possa desprezar. Depois se inserirmos outros tantos meios na progressão por differença, se terá os termos correspondentes, e por consequencia os logarithmos de todos os numeros inteiros.

Ora pela formula respectiva vemos, que é preciso primeiramente procurar a razão da progressão, extrahindo ao quociente dos dous termos uma raiz designada pelo numero de meios mais um, o que seria de mui laborioso trabalho, pois só para 2 meios é preciso extrahir a raiz cubica, opperação complicada, que faz presentir grandes difficuldades para realisar a inserção d'um numero consideravel de meios. Com tudo, por extracções de raizes quadradas podemos chegar ao mesmo fim

Um meio prop. entre os dous termos 1 e 10 é a raiz quadrada de 10 3,162277

e o meio differencial é ametade de 1 . . 0,5

outro meio prop. entre 1 e 3,1622 1,778

» diff » 0 e 0,5 0,25

entre 3,1622 e 10 é a raiz quad. de 3,1622×10

o meio diff é ametade de . . . . 0,5+1.

D'esta sorte inserindo um só meio entre os outros termos consecutivamente, teremos:

∺1:3,162:10: meio : 100 : meio : &
÷ 0.0,5 . 1 . meio . 2 . meio & e depois
∺1:1,778: 3,162 : 5,623 : 10 : etc.
÷1.0,25 . 0,5 . 0,75 . 1 . etc.

E continuando assim a interpolar meios proporcionaes que comprehendão um dos numeros primos, iremos encerrando cada vez mais este numero entre dous termos da progressão por quociente differindo tão pouco um do outro, que os correspondentes da progressão por differença sejão do mesmo valor até uma ordem determinada de decimaes; em tal caso podemos tomar este valor pelo logarithmo do numero. Fazendo o mesmo para todos os numeros primos podemos depois complectar a taboa com todos os numeros da serie natural; pois que o logarithmo d'um producto de muitos factores é igual á somma dos logarithmos de cada um.

Esta taboa não pode comprehender todos os numeros de que teremos precisão; as de Callet que estão mais em uso chegão até 108000; mas pelas explicações sobre a sua disposição, e as regras que n'ellas se achão, podemos tratar de qualquer outro numero. Entraremos n'estas explicações pelas mesmas taboas, aqui só daremos lugar algumas observações.

1.º Que todos os numeros d'um só algarismo entre 1 (ou 10^0) e 10 (ou 10^1) os seus logarithmos são comprehendidos entre 0 e 1, são por consequencia fracções decimaes. E como entre 10 e 100 se conprehendem todos os n.os

de dous algarismos desde 11 a 99, os logarithmos, d'estes n.os hão de ser compostos com a unidade e uma fracção.

Do mesmo modo se infere que os n.os de 3 alg.os desde 101, até 999 inclusive, terão por log. o inteiro 2 e uma fracção, e em geral que quantos algarismos comprehender o numero tantas unidades menos uma conterá a parte inteira do log., chamada caracteristica, á razão de, por ella se saber immediatamente de quantos algarismos deve constar o numero correspondente a um log. dado.

D'um numero que exceda os limites das taboas como 3074562, sabe-se immediatamente que a sua caracteristica é 6, a parte fraccionaria é que precisamos procurar. Ora se se divide o numero proposto por 100, já observamos que a parte fraccionaria do seu logarithmo não altera, e procurando os dous numeros consecutivos, 30745 e 30746 ajunctaremos ao log. do menor a parte correspondente da differença entre os dous logarithmos achados na taboa.

A proporcionalidade que por este meio se suppõe entre as differenças dos logarithmos e a dos numeros, não é exacta; mas o erro quando os n.os são grandes, em nada influe, nem na ultima decimal dos logarithmos.

Por estas observações se reconhece, que o logarithmo d'uma fracção decimal se obtem tomando o logarithmo do numero inteiro que resulta da suppressão da virgula; ha só a diminuir á caracteristica tantas unidades como de algarismos decimaes houver na fracção. Para ex.º o log. da 0,378 é na sua parte fraccionaria o mesmo que de 378, e temos a subtrahir á caracteristica q' compete a 378 tres unidades pois q' 378=0,378×1000, ou log 378=log 0,378+log 1000; e como o log. de 1000 é 3, o de 378 excede de 3 unidades o de 0,378: temos pois a subtrahir 3 unidades á caracteristica, ou antes tirar o log. de 3 unidades, e dar ao resultado o signal —, porque o log. de 378 é menor que 3.

Ainda para evitar os logarithmos negativos, i-é, para converter a opperação da subtracção que elles indicão em addicção, podemos usar dos complementos. Tirando a 2,5774918 o log de 1000 se tera $\overline{1}$.5774918, ou subtrahindo a 3 o log., vem—0,4225082 todo negativo. Usando porem dos complementos, no calculo que tivermos de tirar 0,4225082, junctaremos 9,5774918, supprimindo a final a unidade correspondente ao complemento; aqui é uma desena porque o complemento foi a 10.

Para o log. de 0,0378 teriamos . . 8,5774918 e do mesmo modo seria 7,5774918 se tivessemos a fracção 0,00378; em geral o complemento do logarithmo d'uma fracção tem por caracteristica 9 ou 9 menos tantas unidades como de zeros houver entre a virgula e o primeiro algarismo significativo da fracção.

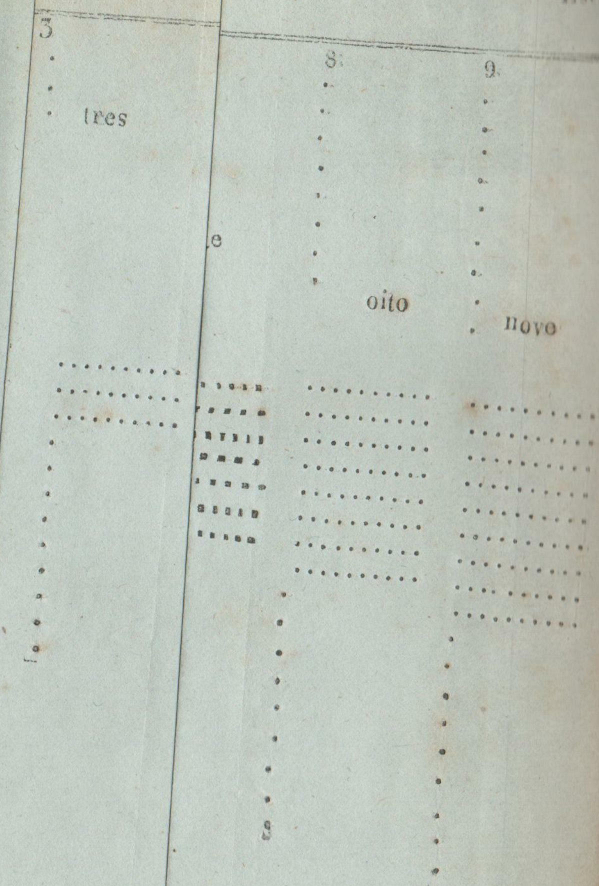
FIM

ERRATAS.

Alem da falta de circumstancias da Typografia para a impressão de taes obras, a d'este volume foi em tempo, que outras muitas occupações mo gastavão todo; d'onde se seguio passarem varios erros: eis-aqui as emendas dos que mais podem embaraçar a intelligencia das doutrinas.

Pag.	*L.*	*Erro*	*Emenda*
36	16	53063	54063
47	15	unidade,	quadradas-unidades quad.
60	17	Tem de mais o ex.º d'addicção dos tres n.ºs complexos.	
67	5	23	239
68	31	1019286528	1018286528
90	17	subtrahio	subtrahe
97	6	addicção	a addicção
101	20	se tomando	tomando
»	9	pelo; que	; pelo que
116	21	os numeros	o numero
117	13	contando : o	contando o
128	1	o capital	do capital
»	31	125 deve ter a esquerda 6, que ficou na linha de cima	
133	20	1200	19200
134	3	1230U	12930U
»	11	15 0,5	15×0,5
138	18	6775U	6776U
»	31	57428880	5962880
141	2	premio	do premio

Pag.	*L.*	*Erro*	*Emenda*
»	15	uma, das praças—	uma das praças,
143	11	10000	1000
146	24	1500	15000
147	2	se tirará	se se tirará
»	27	reis 897	reis 887
»	28	graos	gros
»	29	$=1{,}08$	$55{,}25 \times 1{,}08 = 100{,}1075$
		$=1{,}83$	$55{,}25 \times 1{,}83 = 101{,}1075$
»	31	100,1:42	101,1:42
148	10	se emprega o	no emprego do
»	11	; mas as	,as
»	13	o operações	opperações
151	7	modo o que	modo que
177	20	$4\times5\times4\times5+4\times5$	$4\times5+4\times5+4\times5$
206	24	forma :	forma $\frac{5}{8}$:
231	29	tomar	extrahir
236	8	$(22\times20)^2-484$	$(22,20)^2-484$
»	2	$\frac{a}{r3}$	$\frac{u}{r3}$
247	29	fig *A* Est. 3.a	fig *A* Est. 5ª
248	23	324''	324×4,m 90446
250	17	$u=a\times r^{n1}$	$u=a\times r^{n-1}$
»	18	$a=\frac{a}{r^{n-1}}$	$a=\frac{u}{r^{n-1}}$
»	30	$S=\frac{u-{}^{r}a}{r-1}$	$\frac{\overset{r}{u}-a}{r-1}$
254	24	10^1 10^2 &	$\overline{10}^1$, $\overline{10}^2$ &



Est

1 um

2 dois

3 tres

4 quatro

5 cinco

6 seis

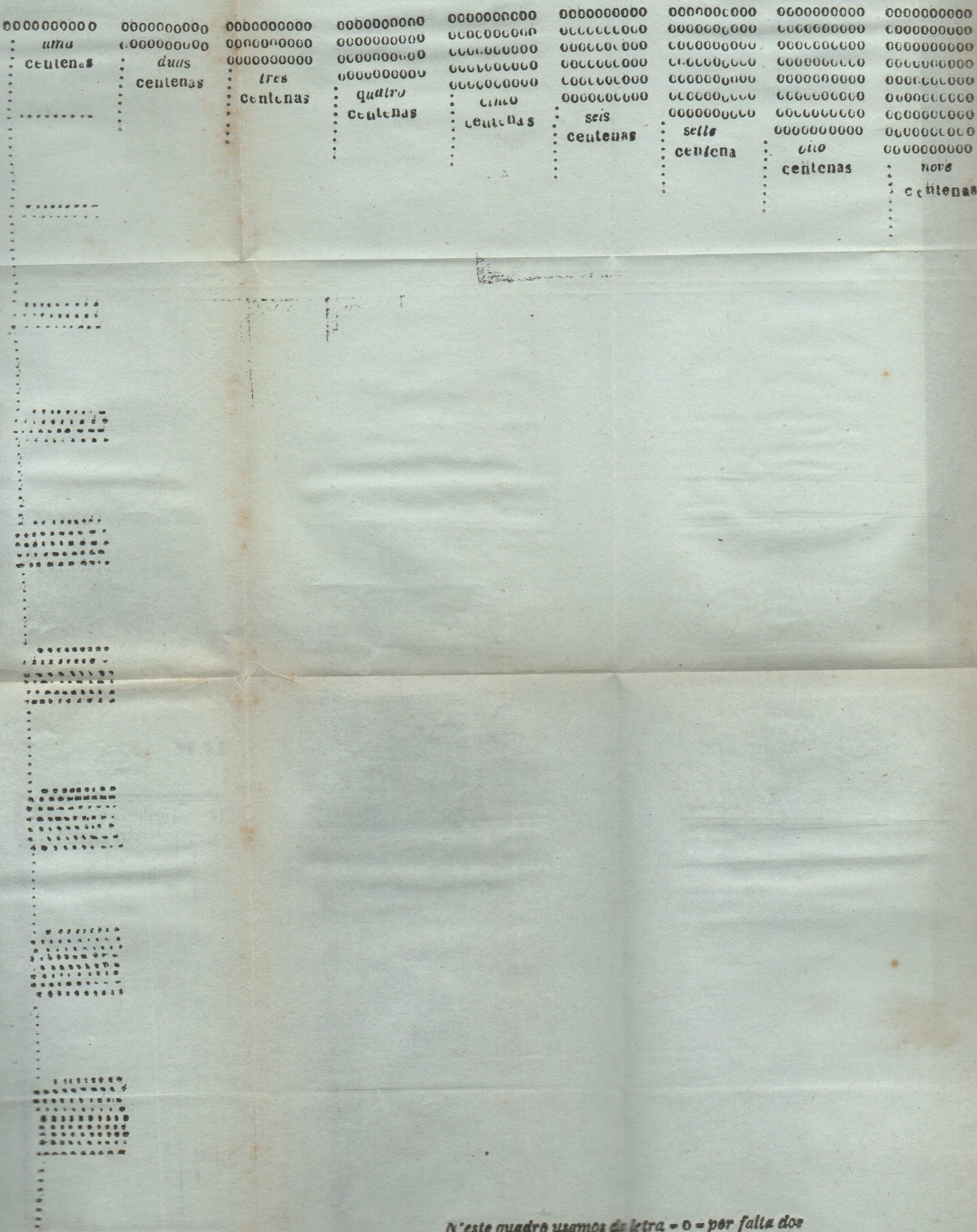
7 sette

8 oito

9 novo

QUADRO DA NUMERAÇÃO DESDE CÊM ATÉ MIL

Os objectos são representados por um ponto, as desenas por -o-



N'este quadro usamos da letra -o- por falta dos traços ou pequenas linhas de que se fala no texto.

MAPPA dos pezos e medidas do systema metrico com as suas expressões arithmeticas, e abreviaturas de que se usa na escripta

Palav. q. precedem os nomes das un.d.		Med. lineares Metro. Abreviat.	Rell. com a unid. fund.	Med. de superficie Are Abreviat.	Rell. com a unid. fund.	Med. de capacid. Litro Abreviat.	Rell. com a unid. fund.	Pezos Gramma. Abreviat.	Rel. com a unid. fund.
Multiplos	Myria	Myr-m 1	m 10000	Myr-a 1	mm 1000000			Myr-g 1	g 10000
	Kilo	K-m 1	1000	K-a 1	100000	K-l 1	mmm 1	K-g 1	1000
	Hecto	H-m 1	100	H-a 1	10000	H-l 1	0,1	H-g 1	100
	Deca	D-m 1	10	D-a 1	1000	D-l 1	0,01	D-g 1	10
		m 1	1	a 1	100	l 1	0,001	g 1	1
sub-mult.	Deci	d-m 1	0,1	d-a 1	10	d-l 1	0.0001	d-g 1	0,1
	Centi	c-m 1	0,01	c-a 1	1	c-l 1	0,00001	c-g 1	0,01
	Mili	mil-m 1	0.001	d-mm 1	0,01	mil-l 1	0.000001	mil-g 1	0.001
				c-mm 1	0,0001				
				mil-mm 1	0,000001				

Itenerarias

Med nov	Med. ant.
K-m 1, . . .	18 Leg mar. 16, 2 de 18 ao grão

De peq. comp.

Metro 1	palmos 4,5454

Agrarias

Med. novas	Med. ant.
a 1.	varas quad. 82.6444

De peq. superf.

m m 1	varas quad. 0,826444

De liquidos

Med. nov.	Med. ant.
H-l 1	almudes 5,899705
l 1	canadas 0.707964

De seccos

H-l 1	alqueire 7.2463768

De solidez

Stere . 1	palm. cub. 93.91435

De uso ordin.

Med nov.	Med. ant.
K-l 1	arrateis 2,1789872

pezos peq.

G. 1	oitava 0,8940

TABOA DOS PESOS E MEDIDAS

DO REINO DE PORTUGAL, E DO IMPERIO DO BRASIL, COM O SEU VALOR EM MEDIDAS FRANCEZAS DO SISTEMA METRICO.

(Arith. de M. E. Bezout Ed. de Pariz 1836)

MEDIDAS DE PESO.

MEDIDAS DE COMPRIMENTOS.

Legoa de 18 ao grão	L. Marinha de 20 ao grão	Milha Geographica	Passo Geometrico	Passo ordinario.	Braça.	Vara.	Pé.	Palmo de Craveira.	Pollegada.	Linha.	Ponto.	Sistema Metrico
1	1,111111	3,333333	3741,075	7482,150	2805,83	5611,66	18705,5333	28058,3	224466,4	2693596,8	32323161,6	kilometros 6,1728395
	1	3	3367,000	6734,000	2525,2525	5050,50	16835,0000	25252,5	202020,0	2424240	29090880	kilometros 5,5555555
		1	1122,333	2244,666	841,7501	1683,50	5611,666	8417,5	67340,00	808080	9696960	kilometros 1.8518518
Sistema metrico.			1	2	0,75	1,5	5	7,5	60	720	8640	Metros 1,65
Centigr. 4,97969618	Grao.			1	0,375	0,75	2,5	3,75	30	360	4320	Metros 0.825
Grammas. 1,195127083	24	Scropulo.			1	2	6,6666	10	80	960	11520	Metros 2,2
Grammas. 3,58538125	72	3	Oitava.			1	3,3333	5	40	480	5760	Metros 1,1
Grammas. 28,68305	576	24	8	Onça.			1	1,5	12	144	1728	Metros 0,33
Grammas. 229,4644	4608	192	64	8	Marco.			1	8	96	1152	Metros 0,22
Grammas. 344,19660	6912	288	96	12	$1\frac{1}{2}$	Libra.			1	12	144	Metros 0,0275
Grammas. 458,9288	9216	384	128	16	2	$1\frac{1}{3}$	Arratel.			1	12	Metros. 0.002291
Kilogrammas 14,6857216	294912	12288	4096	512	64	$42\frac{2}{3}$	32	Arroba.			1	Metros. 0,000190916
Kilogrammas 58.7428864	1179648	49152	16384	2048	256	$170\frac{2}{3}$	128	4	Quintal.			
Kilogrammas 793,02896640	12825248	663552	221184	27648	5456	2304	1728	54	13,5	Tonellada.		

CONTINUAÇÃO DA TABOA DOS PESOS E MEDIDAS.

MEDIDAS D'ARCO PARA LIQUIDOS. — MEDIDAS D'ARCO PARA SECOS.

Moio.	Fanga.	Alq.	Quarto.	Oitavo.	Maquia.	Selamim	Sist. Met.
1	15	60	240	480	960	1920	8,23 H-L
Sist. Met.	1	15	60	120	240	480	55,2 L.
0,353125 L.	Quart.	1	4	8	16	32	13,8 L.
1,412500 L.	4	Canada.	1	2	4	8	3,45 L.
8,475 L.	24	6	Pote.	1	2	4	1,725 L.
16,95 L.	48	12	2	Almude.	1	2	0,8625 L.
4,2375 H-L.	1200	300	50	25	Pipa.	1	0,43125 L
8,4750 H-L.	2400	600	100	50	2	Tonel.	

PESOS DOS BOTICARIOS. — PESOS DOS DIAMANTES.

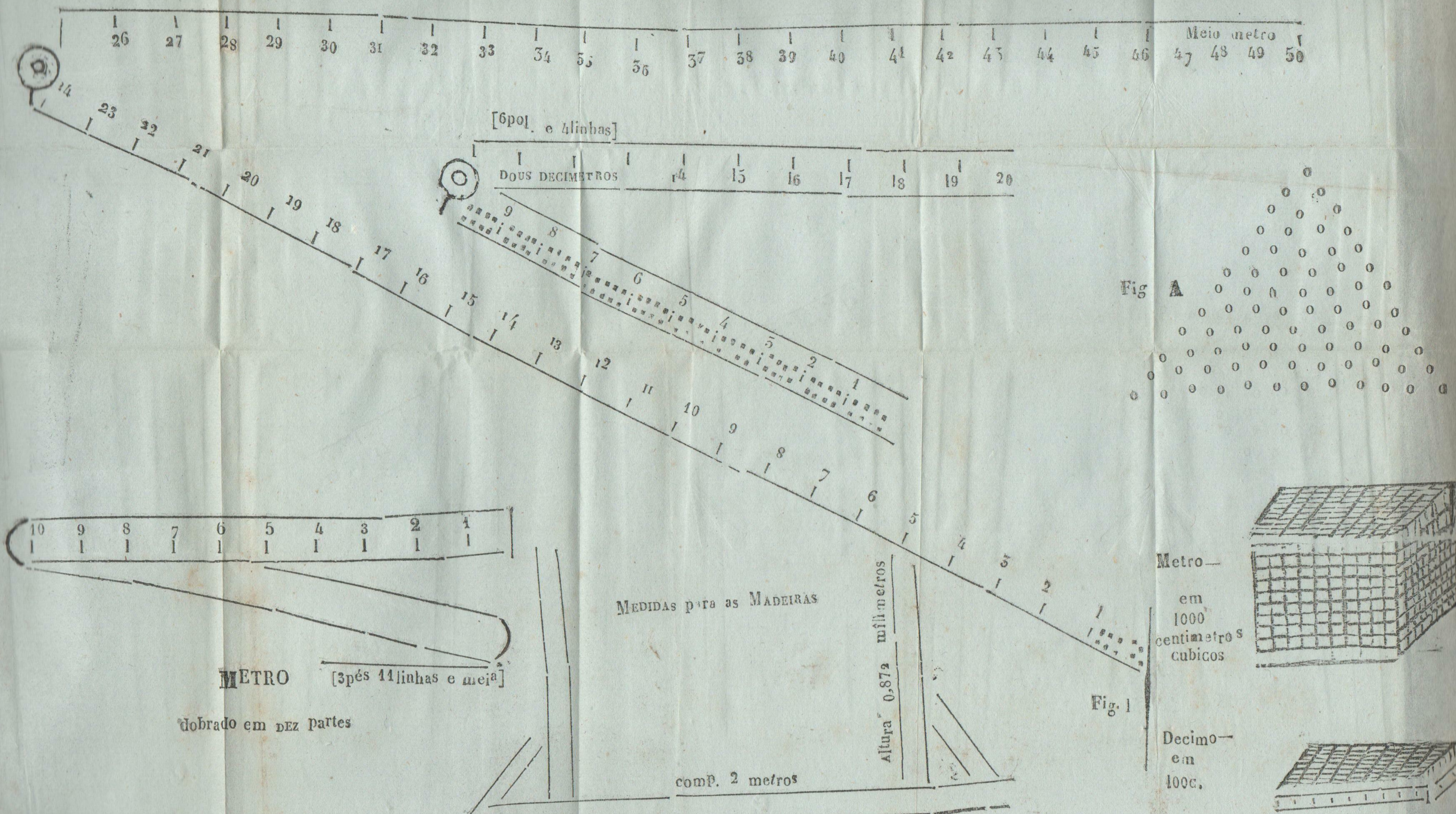
Onça.	Oitava.	Scropulo.	Quilate.	Grão.
1	8	24	144	576
Grão.	1	3	18	72
24	Scropulo.	1	6	24
72	3	Drachma.	1	4
576	24	8	Onça.	0
6912	288	96	12	Libra.

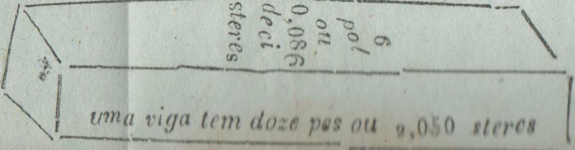
PARA O TOQUE DA PRATA — PARA O TOQUE DO OURO.

Marco.	Quilate.	Grão.	Oitava.
1	24	96	769
Oitava.	1	4	32
4	Grão.	1	8
96	24	Diuh.	
1152	288	12	Marco.

MEDIDAS DE SUPERFICIE.

Braça Quad	Vara Quad	Palmo Quadr	Polleg Quadr	Sistema Metrico.	
				Are	Metr. Cuadr
1	4	100	6400	0,0484	4,84
	1	2	1600	0,0121	1,121
		1	64	0,000484	0,0484
			1	0,0000075	0,00075625





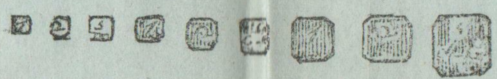
DENº. das MOEDAS em França

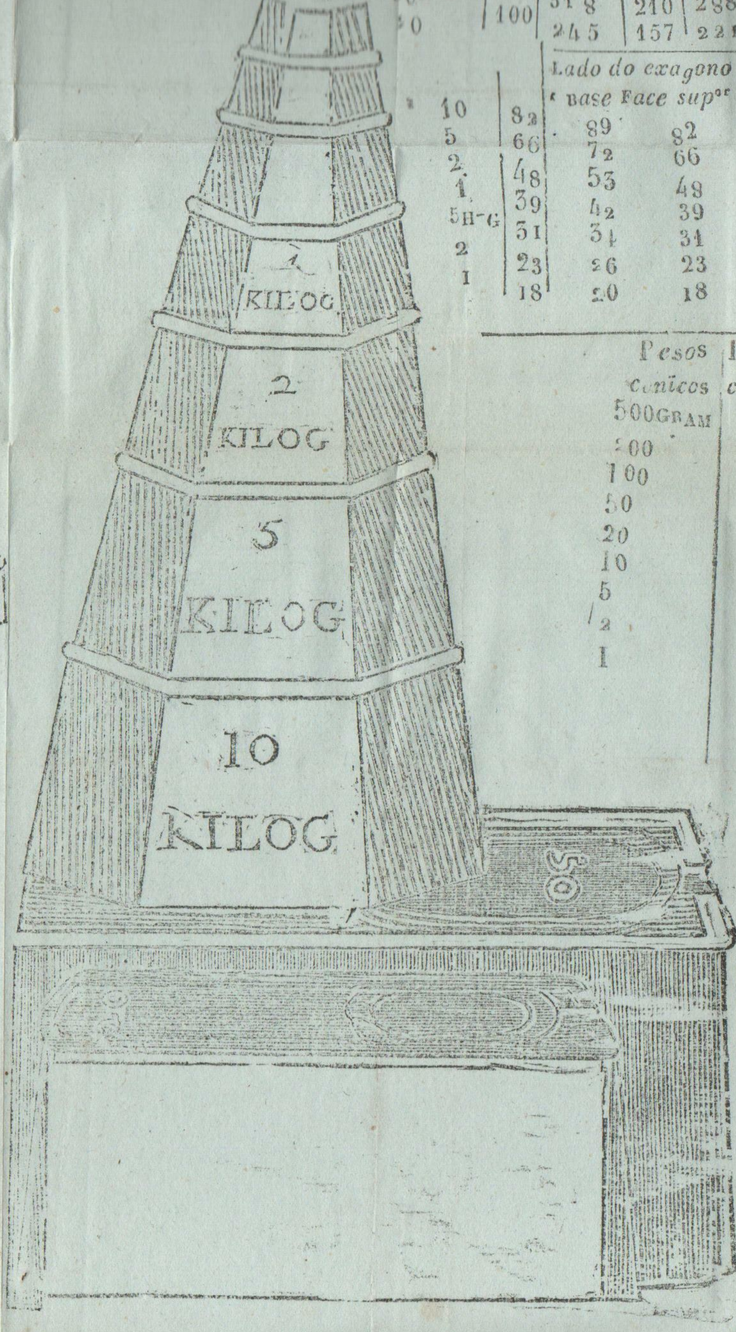
Ouro	40 francos	20 francos		
Prata	5 francos	2	1	$\frac{1}{2}$
Cobre	1 Decimo	5 Centimos		1

Dim.es em mil-m. dos pezos de ferro fund.

Pezos	Alt.	Base Comp	Base Larg	Face sup.r Comp	Face sup.r Lar	Annel. Dm int	Annel. Espr
50K-G.	136	318	210	288	181	86	20
0	100	245	157	221	133	65	11
		Lado do exagono Base	Face supor				
10	82	89	82			63	10
5	66	72	66			55	8
2	48	53	49			39	6
1	39	42	39			31	5
5H-G	31	34	31			24	4
2	23	26	23			18	3
1	18	20	18			15	2,5

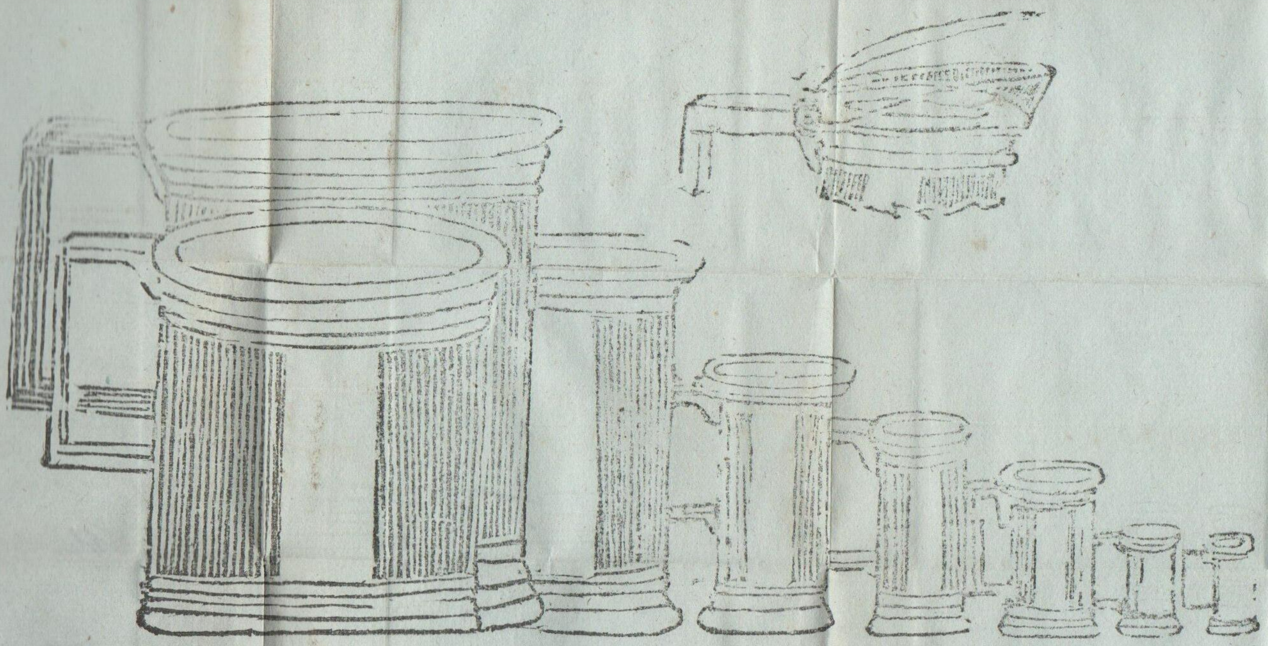
Pesos conicos	Pesos cylindricos com botão
500GRAM	20K-L
200	10
100	5
50	2
20	1
10	500GRAM
5	200
2	100
1	50
	20
	10
	5



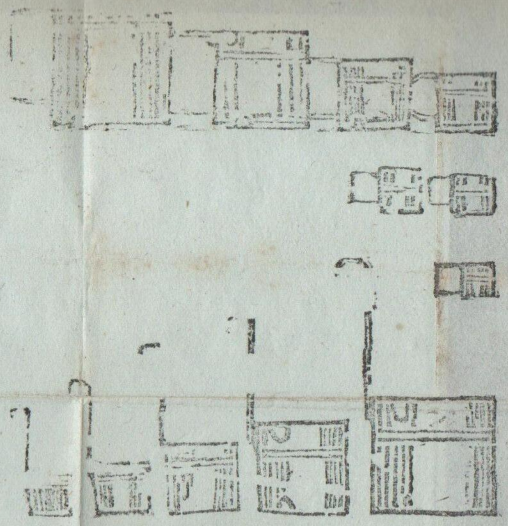


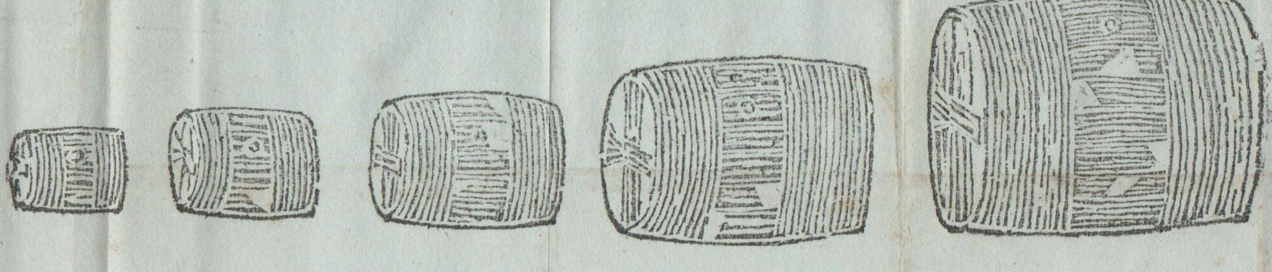
G. em madeira pelo alumno Alexandre Eloy Teixeira.

Medidas d'estanho descobertas e com tampa



Medidas de lata





G. em madeira pelo alumno Catão da Camara Barcellos.

Medidas para os liquidos — Dimensões em milimetros —

De estanho	Alt.	D.mt	De lata com aza — para azeite	com haste para leite	Alt. e D.mt int.	Toneis
2 Litros	216,7	108,4				Kilolitro
Litro	172	86	Litro	2 Litros	136,6	Meio Kilolitro
Meio litro	136,6	68,3	Meio litro	Litro	108,4	2 Hectolitros
2 Decilitros	100,6	50,3	2 Decilitros	Meio litro	86	Hectolitro
Decilitro	79,9	39,9	Decilitro	2 Decilitros	63.4	Meio hectolitro
Meio decilitro	63,4	34,7	Meio decilitro	Becilitro	50,3	
2 Centilitros	46,7	23,4	2 Centilitros			
Centilitro	37,1	18,5	Centilitro			