



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Marcelo Gabriel Luiz Nogueira Santos

POTENCIAL BÁRION-BÁRION PELA TROCA DE DOIS MÉSONS

Florianópolis

2023

Marcelo Gabriel Luiz Nogueira Santos

POTENCIAL BÁRION-BÁRION PELA TROCA DE DOIS MÉSONS

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Santa Catarina como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Física.

Orientador: Prof. Dr. Celso de Camargo Barros Junior

Florianópolis

2023

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Nogueira Santos, Marcelo Gabriel Luiz
POTENCIAL BÁRION-BÁRION PELA TROCA DE DOIS MÉSONS / Marcelo
Gabriel Luiz Nogueira Santos ; orientador, Celso de
Camargo Barros Junior, 2023.
324 p.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Santa
Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas,
Programa de Pós-Graduação em Física, Florianópolis, 2023.

Inclui referências.

1. Física. 2. Potencial Nuclear. 3. Lagrangianas Quirais.
4. Potencial Nucleon-Híperon. 5. Troca de dois méson. I.
Barros Junior, Celso de Camargo. II. Universidade Federal
de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Física. III.
Título.

Marcelo Gabriel Luiz Nogueira Santos

POTENCIAL BÁRION-BÁRION PELA TROCA DE DOIS MÉSONS

O presente trabalho em nível de Doutorado foi avaliado e aprovado em 11 de agosto de 2023 por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. Dr. Manoel Roberto Robilotta
Universidade de São Paulo

Prof. Dr. Marcus Emmanuel Benghi Pinto
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Dr. Sidney dos Santos Avancini
Universidade Federal de Santa Catarina

Certificamos que esta é a versão original e final do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de Doutor em física.

Prof. Dr. Paulo Henrique Souto Ribeiro
Coordenador do Programa

Prof. Dr. Celso de Camargo Barros Junior
Orientador

Florianópolis, 2023.

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais por serem sempre o suporte pra vida.

Ao orientador prof. Dr. Celso de Camargo Barros Junior pela orientação.

À coordenação e secretaria do PPGFSC/UFSC.

À CAPES pelo apoio financeiro.

Ao meu primo Luiz pela ajuda no processamento de dados.

Sustentar o Fogo, que a vitória é nossa.
O Brasil espera que cada um cumpra o seu dever.

Almirante Barroso
Batalha do Riachuelo, 1865

RESUMO

Estabelecemos o formalismo para cálculo de um potencial generalizado bárion-bárion para bárions de spin-1/2 em espalhamento elástico, trocando dois píons, etas e kaons, utilizando a prescrição de Partovi e Lomon, a qual é a generalização da solução de Blankenbecher e Sugar para a solução da equação relativística de Bethe-Salpeter. Foram considerados diagramas de Feynman de loop do tipo caixa, cruzado, triângulo, nabla e bolha com ressonâncias de spin-1/2 e 3/2. Foram calculados os potenciais NN , $N\Xi$, $\Xi\Xi$, $N\Lambda$, $N\Lambda_c$, $N\Lambda_b$, $\Lambda\Lambda$, $\Lambda_c\Lambda_c$, $\Lambda_b\Lambda_b$, $N\Sigma$, $N\Sigma_c$, $\Sigma\Sigma$ e $\Sigma_c\Sigma_c$, considerando diagramas de loop, trocando dois píons e quando possível dois etas e dois kaons, em função da distância dos centros dos bárions iniciais e finais. Para o cálculo dos diagramas utilizamos a dinâmica das lagrangianas quirais para bárions de spin-1/2 e spin-3/2. Para o cálculo das constantes de acoplamento de cada caso, utilizamos a simetria $SU(6)$ quando abaixo da camada de massa, e o phase shift das ressonâncias consideradas, fitadas em relação à expressão de Breit-Wigner que faz uso do spin e dos dados experimentais dessas ressonâncias. Nos resultados numéricos dos potenciais são mostradas as combinações de ressonâncias em cada canal de spin e isospin. As contribuições das ressonâncias devidas à troca de dois mésons são então comparadas e posteriormente somadas com os potenciais de troca de um méson (píon, eta e kaons) quando existirem.

Palavras-chave: Potencial Nuclear; Nucleon-híperon ; Simetria Quiral; Diagramas de Feynman.

NOGUEIRA SANTOS, Marcelo Gabriel Luiz. *POTENCIAL BÁRION-BÁRION PELA TROCA DE DOIS MÉSONS*. 2023. 323 f. Tese (Doutorado em Física) – Programa de Pós-Graduação em Física, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2023.

ABSTRACT

We establish the formalism for calculating a generalized baryon-baryon potential for spin-1/2 baryons in elastic scattering, exchanging two pions, etas and kaons, using Partovi and Lomon's prescription, which is the generalization of Blankenbecher and Sugar's solution for the solution of the relativistic Bethe-Salpeter equation. Box, crossed, triangle, nabla, and bubble loop Feynman diagrams with spin-1/2 and 3/2 resonances were considered. The potentials NN , $N\Xi$, $\Xi\Xi$, $N\Lambda$, $N\Lambda_c$, $N\Lambda_b$, $\Lambda\Lambda$, $\Lambda_c\Lambda_c$, $\Lambda_b\Lambda_b$, $N\Sigma$, $N\Sigma_c$, $\Sigma\Sigma$ and $\Sigma_c\Sigma_c$ were calculated, considering loop diagrams, exchanging two pions and when possible two etas and two kaons, depending on the distance from the centers of the initial and final baryons. To calculate the diagrams we used the dynamics of chiral lagrangians for spin-1/2 and spin-3/2 baryons. To calculate the coupling constants for each case, we used the SU(6) symmetry when below the mass layer, and the phase shift of the considered resonances, strayed in relation to the Breit-Wigner expression that makes use of the spin and data experiments of these resonances. In the numerical results of the potentials, the combinations of resonances in each spin and isospin channel are shown. The contributions of the resonances due to the exchange of two mesons are then compared and later added with the exchange potentials of a meson (pion, eta and kaons) when they exist.

Keywords: Nuclear Potential; Nucleon-Hyperon ; Chiral Symmetry; Feynman Diagrams.

NOGUEIRA SANTOS, Marcelo Gabriel Luiz. *Baryon-Baryon potential due to the exchange of two mesons*. 2023. 323 f. Tese (Doutorado em Física) – Programa de Pós-Graduação em Física, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2023.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Potencial Central Nuclear pela Troca de Mésons	18
Figura 2 - Espalhamento	24
Figura 3 - Espalhamento com troca de duas partículas internas	25
Figura 4 - Vértices	28
Figura 5 - Propagadores	28
Figura 6 - Diagramas spin 1/2 no canal s	29
Figura 7 - Diagramas spin 1/2 no canal u	31
Figura 8 - Diagramas spin 3/2 no canal s	32
Figura 9 - Diagramas para partículas de spin 3/2 no canal u	33
Figura 10 - Diagramas vértices de contato	35
Figura 11 - Diagramas troca de 1 méson	36
Figura 12 - Espalhamento de ondas	39
Figura 13 - Diagramas do tipo caixa	42
Figura 14 - Tipos de Diagramas	53
Figura 15 - Diagrama caixa com partícula de spin-1/2 no estado intermediário	55
Figura 16 - Determinação da constante de acoplamento $\bar{K}\Xi\Omega(2012)$ pela expressão de Breit-Wigner	78
Figura 17 - Interação $K\Sigma$	79
Figura 18 - Seção de choque total (σ_T) para $K\Sigma$	84
Figura 19 - Phase shifts ($\delta_l\pm$) para $K\Sigma$	85
Figura 20 - Tipos de diagramas considerados nos cálculos	90
Figura 21 - Potencial NN devido a troca de dois píons	99
Figura 22 - Potencial NN devido a troca de dois etas	100
Figura 23 - Potencial NN devido a troca de dois kaons	101
Figura 24 - Potencial NN devido a troca de dois mésons, OPEP, OEEP e o potencial total somadas todas as contribuições no canal de isospin 0	102
Figura 25 - Potencial NN devido a troca de dois mésons, OPEP, OEEP e o potencial total somadas todas as contribuições no canal de isospin 1	103
Figura 26 - Potencial $N\Xi$ devido a troca de dois píons	104
Figura 27 - Potencial $N\Xi$ devido a troca de dois etas	105
Figura 28 - Potencial $N\Xi$ devido a troca de dois kaons	106
Figura 29 - Potencial $N\Xi$ devido a troca de dois mésons, OPEP, OEEP e o potencial total somadas todas as contribuições no canal de isospin 0	107
Figura 30 - Potencial $N\Xi$ devido a troca de dois mésons, OPEP, OEEP e o potencial total somadas todas as contribuições no canal de isospin 1	108
Figura 31 - Potencial $\Xi\Xi$ devido a troca de dois píons	109
Figura 32 - Potencial $\Xi\Xi$ devido a troca de dois etas	110
Figura 33 - Potencial $\Xi\Xi$ devido a troca de dois kaons	111
Figura 34 - Potencial $\Xi\Xi$ devido a troca de dois mésons, OPEP, OEEP e o potencial total somadas todas as contribuições no canal de isospin 0	112
Figura 35 - Potencial $\Xi\Xi$ devido a troca de dois mésons, OPEP, OEEP e o potencial total somadas todas as contribuições no canal de isospin 1	113
Figura 36 - Potencial $N\Lambda$ devido a troca de dois píons	114
Figura 37 - Potencial $N\Lambda$ devido a troca de dois etas	115
Figura 38 - Potencial $N\Lambda$ devido a troca de dois kaons	116

Figura 39 - Potencial $N\Lambda$ devido a troca de dois mésons, OKEP, OEEP e o potencial total somadas todas as contribuições	117
Figura 40 - Potencial $N\Lambda_c$ devido a troca de dois píons	118
Figura 41 - Potencial $N\Lambda_b$ devido a troca de dois píons	119
Figura 42 - Potenciais $N\Lambda_c$ e $N\Lambda_b$ finais	120
Figura 43 - Potencial $\Lambda\Lambda$ devido a troca de dois píons	121
Figura 44 - Potencial $\Lambda\Lambda$ devido a troca de dois etas	122
Figura 45 - Potencial $\Lambda\Lambda$ devido a troca de dois kaons	123
Figura 46 - Potencial $\Lambda_c\Lambda_c$ devido a troca de dois píons	124
Figura 47 - Potencial $\Lambda_b\Lambda_b$ devido a troca de dois píons	125
Figura 48 - Potenciais $\Lambda\Lambda$, $\Lambda_c\Lambda_c$ e $\Lambda_b\Lambda_b$ finais	126
Figura 49 - Potencial $N\Sigma$ devido a troca de dois píons	127
Figura 50 - Potencial $N\Sigma$ devido a troca de dois etas	128
Figura 51 - Potencial $N\Sigma$ devido a troca de dois kaons	129
Figura 52 - Potencial $N\Sigma$ devido a troca de dois mésons total, OPEP, OKEP e OEEP	130
Figura 53 - Potencial $N\Sigma$ total pela somadas todas as contribuições	131
Figura 54 - Potencial $N\Sigma_c$ devido a troca de dois píons	132
Figura 55 - Potencial $N\Sigma_c$ final	133
Figura 56 - Potencial $\Sigma\Sigma$ devido a troca de dois píons	134
Figura 57 - Potencial $\Sigma\Sigma$ devido a troca de dois etas	135
Figura 58 - Potencial $\Sigma\Sigma$ devido a troca de dois kaons	136
Figura 59 - Potencial $\Sigma\Sigma$ devido a troca de dois mésons, OPEP, OEEP e o potencial total somadas todas as contribuições no canal de isospin 0	137
Figura 60 - Potencial $\Sigma\Sigma$ devido a troca de dois mésons, OPEP, OEEP e o potencial total somadas todas as contribuições no canal de isospin 1	138
Figura 61 - Potencial $\Sigma\Sigma$ devido a troca de dois mésons, OPEP, OEEP e o potencial total somadas todas as contribuições no canal de isospin 2	139
Figura 62 - Potencial $\Sigma_c\Sigma_c$ devido a troca de dois píons	140
Figura 63 - Potencial $\Sigma_c\Sigma_c$ devido a troca de dois mésons total nos canais de isospin 0,1 e 2	141
Figura 64 - Formas possíveis do potencial.	160
Figura 65 - Quebra espontânea de simetria em uma tira de plástico.	162
Figura 66 - Cinco acoplamentos	164
Figura 67 - Quebra de simetria	164
Figura 68 - Simetria Quiral	166
Figura 69 - Helicidade	167
Figura 70 - Decaimento do pión	176
Figura 71 - Quebra de simetria quiral para os mésons π e σ	181
Figura 72 - Massas na quebra de simetria quiral	185
Figura 73 - Quebra explícita de simetria quiral	186
Figura 74 - Potencial $\lambda \rightarrow \infty$	188
Figura 75 - Dinâmica restrita ao círculo	188
Figura 76 - Vértices de interação	192
Figura 77 - Diagrama cruzado considerado	195
Figura 78 - Diagrama do tipo nábula	202
Figura 79 - Diagrama do tipo triângulo	205
Figura 80 - Diagrama do tipo bolha	208

Figura 81 - Diagrama ressonância na “linha” 2	209
Figura 82 - Diagrama com ressonância spin-3/2 na linha 1	217
Figura 83 - Diagrama caixa com ressonância em ambas as linhas	225
Figura 84 - Diagrama \times com ressonância de spin-3/2	236
Figura 85 - Diagrama ∇ com ressonância com spin-3/2	237
Figura 86 - Diagrama Δ com ressonância de spin-3/2	239

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Multipleteo de partículas da interação $K\Sigma$	80
Tabela 2 - Partículas consideradas na interação $K\Sigma$	84
Tabela 3 - Mésons considerados	86
Tabela 4 - Interação méson-Bárions e suas Ressonâncias	87
Tabela 5 - Ressonâncias e diagramas considerados no cálculo do potencial NN . .	91
Tabela 6 - Ressonâncias e diagramas considerados no cálculo do potencial $N\Xi$. .	92
Tabela 7 - Ressonâncias e diagramas considerados no cálculo do potencial $\Xi\Xi$. .	93
Tabela 8 - Ressonâncias e diagramas considerados no cálculo do potencial $N\Lambda$. .	94
Tabela 9 - Ressonâncias e diagramas considerados no cálculo do potencial $N\Lambda_c$. .	94
Tabela 10 - Ressonâncias e diagramas considerados no cálculo do potencial $N\Lambda_b$. .	95
Tabela 11 - Ressonâncias e diagramas considerados no cálculo do potencial $\Lambda\Lambda$. .	95
Tabela 12 - Ressonâncias e diagramas considerados no cálculo do potencial $\Lambda_c\Lambda_c$. .	95
Tabela 13 - Ressonâncias e diagramas considerados no cálculo do potencial $\Lambda_b\Lambda_b$. .	96
Tabela 14 - Ressonâncias e diagramas considerados no cálculo do potencial $N\Sigma$. .	97
Tabela 15 - Ressonâncias e diagramas considerados no cálculo do potencial $N\Sigma_c$. .	97
Tabela 16 - Ressonâncias e diagramas considerados no cálculo do potencial $\Sigma\Sigma$. .	98
Tabela 17 - Ressonâncias e diagramas considerados no cálculo do potencial $\Sigma_c\Sigma_c$. .	98
Tabela 18 - Grupos	154

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	14
1.1 CARACTERÍSTICAS DOS POTENCIAIS NUCLEARES	16
1.2 MODELO NUCLEAR PELA TROCA DE MÉSONS	18
1.3 O MODELO E OS OBJETIVOS	20
1.4 ROTEIRO	21
2 A CINEMÁTICA E DINÂMICA DA INTERAÇÃO BÁRION-BÁRION	23
2.1 A CINEMÁTICA DE INTERAÇÃO	23
2.2 LAGRANGIANAS	26
2.3 AMPLITUDES DE ESPALHAMENTO E AS REGRAS DE FEYNMAN	27
2.4 INTERAÇÃO COM ESTADO INTERMEDIÁRIO DE SPIN-1/2	29
2.5 INTERAÇÃO COM RESSONÂNCIA DE SPIN-3/2	31
2.6 VÉRTICE DE CONTATO	34
2.7 A TROCA DE UM MÉSON	35
2.8 O POTENCIAL DA TROCA DE UM MÉSON NO ESPAÇO DE MOMENTOS	36
3 O FORMALISMO PARA O POTENCIAL BÁRION-BÁRION	37
3.1 POTENCIAIS PELA PRIMEIRA APROXIMAÇÃO DE BORN	37
3.1.1 Espalhamento e equação de Schrödinger	38
3.1.2 Primeira aproximação de Born	38
3.1.3 O potencial não relativístico em função da amplitude relativística	39
3.2 POTENCIAIS PELA PRESCRIÇÃO DE PATOVI E LOMON	40
3.2.1 Espalhamento não relativístico	41
3.2.2 Equação de Bethe-Salpeter	42
3.2.3 Potencial Generalizado para Bárions quaisquer	44
3.2.3.1 <i>As energias das ressonâncias A e B</i>	49
3.2.3.2 <i>Ressonância spin-3/2</i>	50
4 O POTENCIAL NO ESPAÇO DE CONFIGURAÇÕES	54
4.1 CALCULO DOS DIAGRAMAS DE TROCA DE DOIS MÉSONS	54
4.1.1 Diagrama caixa (\square) com ressonâncias de spin-1/2	55
4.1.1.1 <i>As componentes dos operadores de spin Ω</i>	60
4.1.1.2 <i>A amplitude de transição final</i>	67
4.1.2 Considerações finais	67
4.2 AMPLITUDE T NO ESPAÇO DE CONFIGURAÇÕES	68
4.2.1 O operadores Ω no espaço de configurações	70
4.3 POTENCIAL DA TROCA DE UM MÉSON NO ESPAÇO DE CONFIGURAÇÕES	73
5 AS INTERAÇÕES MÉSON-BÁRION E SUAS RESSONÂNCIAS	75
5.1 AMPLITUDE DE ESPALHAMENTO PARA UM ESTADO DE ISOSPIN	75
5.2 EXPRESSÃO DE BREIT-WIGNER E AS CONSTANTES DE ACOPLAMENTO	78
5.3 A INTERAÇÃO $K\Sigma$	79
5.3.1 Combinação de estados	79
5.3.2 Amplitude de espalhamento elástico $T_{K\Sigma}$	81
5.3.3 Amplitudes de ondas parciais	82
5.3.4 Resultados para $K\Sigma$	83
5.4 TABELA DAS INTERAÇÕES DE INTERESSE	85
6 RESULTADOS	88

6.1 CONSIDERAÇÕES GERAIS	88
6.1.1 Tipos de diagramas de troca de dois mésons e as ressonâncias consideradas nos cálculos	89
6.2 POTENCIAIS NN , $N\Xi$ E $\Xi\Xi$	89
6.2.1 Potencial NN	90
6.2.2 Potencial $N\Xi$	92
6.2.3 Potencial $\Xi\Xi$	92
6.3 POTENCIAIS $N\Lambda$, $N\Lambda_C$, $N\Lambda_B$, $\Lambda\Lambda$, $\Lambda_C\Lambda_C$ E $\Lambda_B\Lambda_B$	93
6.3.1 Potencial $N\Lambda$	93
6.3.2 Potenciais $N\Lambda_c$ e $N\Lambda_b$	94
6.3.3 Potenciais $\Lambda\Lambda$, $\Lambda_c\Lambda_c$ e $\Lambda_b\Lambda_b$	94
6.4 POTENCIAIS $N\Sigma$ E $N\Sigma_C$	96
6.4.1 Potencial $N\Sigma$	96
6.4.2 Potencial $N\Sigma_c$	96
6.5 POTENCIAIS $\Sigma\Sigma$ E $\Sigma_C\Sigma_C$	97
6.5.1 Potencial $\Sigma\Sigma$	97
6.5.2 Potencial $\Sigma_c\Sigma_c$	98
7 CONCLUSÃO	142
REFERÊNCIAS	145
APÊNDICE A – Formalismo Quiral	149
APÊNDICE B – Cálculo dos Diagramas de troca de dois mésons	195
APÊNDICE C – Integrais de Loop	242
APÊNDICE D – Integrais de Loop no Espaço de Configurações	255
APÊNDICE E – Potencial pela Troca Especial de um Méson (SOMEPE)	263
APÊNDICE F – Relações de Integrais com Redução Espinorial	289
APÊNDICE G – Redução Espinorial	295
APÊNDICE H – Formalismo e observáveis	308
APÊNDICE I – Projetores e Estados de Isospin	310
APÊNDICE J – Constantes de Acoplamento e o $SU(3)$	319
APÊNDICE K – Integrais I_n	323

1 INTRODUÇÃO

A ideia de potencial tem origem no conceito de forças na física clássica. A força à distância ou ação à distância aparecem nas conhecidas interações gravitacionais e eletromagnéticas, estabelecidas e formalizadas a partir das ideias newtonianas. Michael Faraday substituiu a ideia ação à distância pela noção de campo de força, de tal forma que um determinado ente físico com propriedades de criar campos poderia interferir e se fazer interferido por outro ente físico também com mesmas propriedades de campos.

Em toda física o uso de potenciais facilita e formaliza os modelos físicos de forma a permitir uma melhor compreensão dos fenômenos e com o uso de um menor número de variáveis. Assim, o desenvolvimento correto de um potencial físico, quando possível, é de grande importância na formulação teórica dos fenômenos físicos de interações. Na física nuclear desde a descoberta do núcleo atômico por Rutherford, tem-se feito uso dos conceitos de campo de interação para explicar a coesão e estabilidade dos núcleos.

Com o intuito de compreender os núcleos atômicos muitos modelos foram propostos desde a década de 1930, como o modelo nuclear de camadas, o modelo da gota líquida, modelos coletivos de vibração e rotação, e também diversos candidatos a potenciais como os de Heisenberg, Wigner, Majorana e Yukawa. Porém ainda nos tempos presentes não se tem uma formulação unânime que descreva relações matemáticas para a magnitude e orientação espacial da força nuclear. A ausência de uma base teórica sólida da interação entre entes do núcleo atômico definitiva, leva à necessidade do uso de modelos fenomenológicos, isso é, fazer uso dos fenômenos nucleares observados em experimentos.

O primeiro potencial nuclear, cuja origem é dada pela troca de partículas intermediárias, foi introduzido por Yukawa em 1935 (YUKAWA, 1935), o qual propôs a existência de uma partícula bosônica, intermediadora da força nuclear. Posteriormente o pión foi descoberto, com as características de tal partícula intermediadora da força nuclear. Seguindo as ideias de Yukawa que foram capazes de explicar a força nuclear como a troca de um pión a longas distâncias, os modelos que fizeram os maiores avanços em direção a um potencial nuclear definitivo, foram realizados no âmbito das teorias efetivas quirais. Antes ainda da formalização da *QCD* (*Quantum ChromoDynamics*), foi por meio da simetria quiral que foram calculados potenciais nucleon-nucleon em concordância com os dados experimentais. Atualmente a simetria quiral está em acordo com a *QCD*, sendo esta entendida como a simetria entre os quarks *up* (*u*), *down* (*d*) e *strange* (*s*), estes, relativamente, têm pouca massa em relação às energias típicas da interação nuclear (ENTEM D. R.; MACHLEIDT, 2011; HOLT; KAISER; WEISE, 2013).

O potencial nuclear entre dois nucleons é atualmente entendido como dividido em três regiões relativas às distâncias de interação (energia), que pode-se classificar como curtas, médias e longas ($0 < r < 0.7$; $0.7 < r < 1.5$; $1.5 < r < 4$ em *fm*, respectivamente).

As longas distancias são dominadas pela troca de um pión, para as curtas, temos o domínio da QCD , sendo ainda um problema não solucionado devido às dificuldades matemáticas na sua formulação. Já para as médias distancias temos as trocas de dois píons como o principal processo intermediador da força nuclear, e é neste regime de energia que estamos interessados nesse projeto, no entanto considerando também a troca de outros mésons além do pión.

A interação NN (nucleon-nucleon) é atualmente muito bem conhecida e com boa quantidade de dados experimentais, tal fato ocorre porque a matéria comum do dia a dia é formada por átomos cujo núcleo atômico é constituído por nucleons. O nucleon portanto pode ser considerado como o principal bárion e representa a maior parte do conteúdo massivo de matéria bariônica (ordinária) do universo e é também o participante das várias reações nucleares como decaimentos radiativos, fissão e fusão nuclear as quais ocorrem natural e artificialmente.

No entanto curiosamente existem também outros tipos de bárions mais massivos, os mais comuns são os híperons, os quais tem ao menos um quark “estranho” (*strange*) s , mais massivo que os quarks u e d . Fazem parte da família de híperons os bárions Λ , Σ , Ξ e Ω em ordem crescente de massa e número de quarks s (um, um, dois e três). Tais partículas não são encontradas naturalmente nos regimes de energia comuns aos núcleos, são produtos de espalhamento em aceleradores de partículas de altas energias e de reações envolvendo os kaons, mésons constituídos por quarks s , são instáveis e tem tempo de vida muito pequenos.

Quando um N em um núcleo atômico por meio de alguma reação dá lugar à um híperon, como por exemplo um Λ no lugar de um nêutron, que é o caso mais comum, tem-se um novo tipo de núcleo, o qual chamamos de hipernúcleo. Este conceito de hipernúcleo é estendido para alguns modelos de estrelas de nêutrons, as quais são formadas essencialmente por bárions sob extrema força gravitacional. Acredita-se que podem existir híperons no interiores de tais estrelas, trazendo maior estabilidade por produzirem estados de menor energia ao que podemos considerar como um tipo de hipernúcleo em dimensões astronômicas.

Pelo o exposto a respeito dos híperons parece ser um elemento importante e de interesse da física nuclear o estudo das interações mais gerais do tipo Bárion-Bárion ($B_1 B_2$) envolvendo nucleons e híperons em todas as suas possíveis combinações. Existem ainda bárions mais exóticos e massivos que os híperons e análogos a eles, como os bárions charmosos: Λ_c , Σ_c , Ξ_c e Ω_c constituídos por quarks charmosos (c) e os bárions botônicos: Λ_b , Σ_b , Ξ_b e Ω_b constituídos por quarks botônicos (b). Esses bárions exóticos são ainda muito pouco conhecidos, no entanto já existem para alguns casos dados experimentais úteis para o estudo de diversas interações.

1.1 CARACTERÍSTICAS DOS POTENCIAIS NUCLEARES

Os conhecimentos sobre a força nuclear foram construídos desde o descobrimento do núcleo atômico, este por sua vez constituído por nucleons (N), e portanto, suas propriedades são aquelas das interações NN . De modo análogo, hoje essas propriedades, são também estendidas para interações com outros tipos bárions, como por exemplo, os híperons. Essas interações e outras além das interações NN ainda possuem poucos ou nenhum dados experimentais.

Podemos resumir a força nuclear como apresentado em Machleidt (1989), Mizrahi S. ; Galetti (2016), Rocha (1993), Higa (2003), sem relação com as forças eletromagnéticas e gravitacionais, de curto alcance, de grande intensidade, predominantemente atrativa mas com um caroço repulsivo, possui componentes que dependem dos seus spins, momentos angulares, e também tem uma componente tensorial não-central, além de depender do isospin das partículas.

A evidência de que são forças de curto alcance vem da saturação da energia de ligação do núcleo, isso é, a energia de ligação é praticamente linear para qualquer número maior que quatro de nucleons ligados. Essa propriedade também pode ser entendida como sendo a densidade nuclear constante, independente de seu número atômico, característica que está de acordo com as observações experimentais. Caso a força nuclear não fosse de curto alcance, os núcleos teriam um aumento das suas energias de ligação e de suas densidades, linearmente e quadraticamente proporcional ao seu números atômicos.

Como sabemos os prótons (nucleon com isospin $+1/2$) têm carga elétrica, que em distâncias da ordem das dimensões nucleares dão origem à forças muito intensas (repulsivas), dessa forma, é preciso uma força de grande intensidade para opor-se à força coulombiana. Como há coesão nuclear sabemos que essas forças são predominantemente atrativas, no entanto, para grandes energias (pequenas distâncias) deve existir um caroço repulsivo. Essa parte repulsiva é necessária para explicar a densidade praticamente constante do núcleo. As observações das defasagens das ondas S de espalhamento NN , sem influência da barreira centrifuga, são evidencia experimental, já que à baixas energias são positivas (atrativas), mas a altas energias são negativas (repulsivas). Hoje admite-se que tal caroço tenha dimensão não menor que $0,4fm$, que é entendido como sendo o raio do nucleon. Dessa maneira entendemos que a repulsão na verdade é devida aos nucleons em “contato” direito.

A força nuclear depende dos spins (S) e dos isospins (I) das partículas, pois estes têm valores e sinais diferentes para estados singleto e tripleto e dependem se a interação é do tipo próton-nêutron (pn), próton-próton (pp) ou nêutron-nêutron (nn). A evidência disso é a existência do estado ligado com spins alinhados somente para o caso pn , mas não para os demais estados de isospin pp e nn .

Dos dados experimentais do estado ligado pn (dêuteron), observou-se que o mo-

mento de dipolo magnético do dêuteron é ligeiramente diferente da soma dos momentos magnéticos do próton e do nêutron quando separados, e também a existência de um pequeno quadrupolo elétrico que manifesta por um sutil desvio de esfericidade quando comparado com outros núcleos de formato esférico ou elíptico. Essas foram algumas das evidências para se propor a existência de uma componente da força nuclear não central com caráter tensorial. Essa ficou conhecida como componente tensorial ou força tensorial (T).

A dependência da força nuclear como seu momento angular (L), é manifestada pelo acoplamento spin-orbita (LS). Essa dependência é evidenciada da necessidade de uma nova componente, forte o suficiente para se explicar os dados experimentais do tripleto das ondas parciais P da interação NN , uma vez que mesmo considerando as demais componentes da força nuclear, não é suficiente para fitar os dados. A existência da componente spin-orbita também foi necessária para explicar os dados de polarização do espalhamento pp . Para o caso do potencial nuclear entre bárions diferentes, temos também o operador spin-orbita antissimétrico ($LS-$), que para bárions iguais se anula, independente de suas cargas elétricas (DOVER; GAL, 1984). Então temos para o caso geral que $LS = LS_+ + LS_-$.

Do exposto, o potencial no espaço de momentos como função do momento transferido q e do momento z tem a forma geral

$$V(q, z) = V_C \Omega_C + V_{LS_+} \Omega_{LS_+} + V_{LS_-} \Omega_{LS_-} + V_{SS} \Omega_{SS} + V_T \Omega_T, \quad (1)$$

sendo os operadores de spin definidos como

$$\Omega_C = \mathbf{1}_{2 \times 2} \quad (2)$$

$$\Omega_{SS} = (\vec{q})^2 \vec{\sigma}^{(1)} \cdot \vec{\sigma}^{(2)}, \quad (3)$$

$$\Omega_{LS_+} = \frac{i}{4} (\vec{\sigma}^{(1)} + \vec{\sigma}^{(2)}) \cdot (\vec{q} \times \vec{z}), \quad (4)$$

$$\Omega_{LS_-} = \frac{i}{4} (\vec{\sigma}^{(1)} - \vec{\sigma}^{(2)}) \cdot (\vec{q} \times \vec{z}), \quad (5)$$

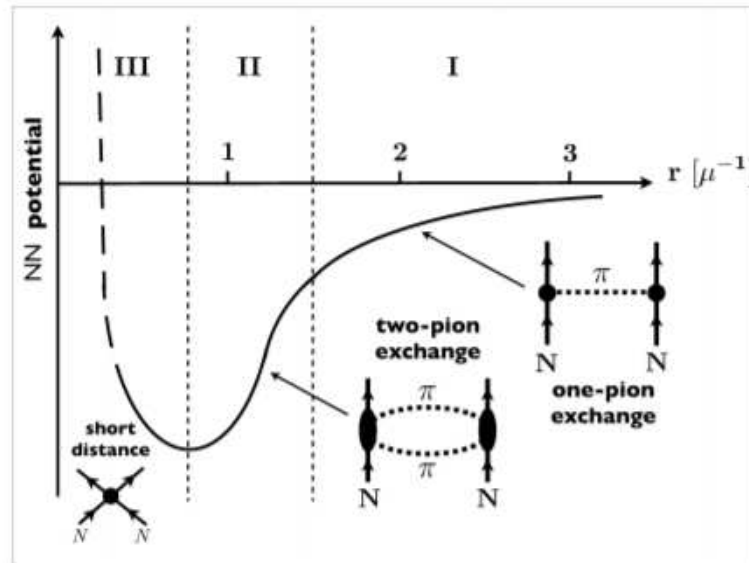
$$\Omega_T = (\vec{q})^2 \vec{\sigma}^{(1)} \cdot \vec{\sigma}^{(2)} - 3(\vec{\sigma}^{(1)} \cdot \vec{q})(\vec{\sigma}^{(2)} \cdot \vec{q}), \quad (6)$$

em que $\vec{\sigma}_i$ são matrizes de Pauli.

Esses operadores são definidos de tal maneira a conservarem as simetrias de paridade, o momento angular total (J^2), sua componente J_z e spin S^2 . Simetrias essas que se conservam na interação nuclear.

Outros operadores poderiam ser considerados como o Ω_Q e Ω_{L^2} , mas por serem proporcionais à $(\vec{z})^2$ geram termos não locais, isso é, termos que dependem da energia, no entanto essa é uma boa aproximação, já que essas componentes são pequenas e podem ser desprezadas. Ao se fazer um cálculo da interação baseada em diagramas de Feynman, todos esses componentes aparecem nos resultados naturalmente.

Figura 1 - Potencial Central Nuclear pela Troca de Mésons



Fonte: arXiv:1304.6350 [nucl-th]

1.2 MODELO NUCLEAR PELA TROCA DE MÉSONS

¹Com o advento do conceito de campo, do sucesso do eletromagnetismo, e particularmente pelo desenvolvimento do formalismo de Dirac, Fermi propôs a interpretação em que considerava que a interação entre partículas eletricamente carregadas ocorriam por intermédio de outra partícula, a saber, o fóton.

Seguindo uma analogia ao eletromagnetismo e ao princípio da incerteza de Heisenberg, Hideki Yukawa em 1935 propôs a existência de uma partícula intermediadora do campo de interação nuclear, que deveria ter uma massa entre 140 e 200 MeV , justificando a interação de curto alcance como necessária para explicar a saturação da energia de ligação e a invariância da densidade nuclear. A estimativa de Yukawa era que a interação mediada por tal partícula teria alcance entre 1 e 1.5 fm .

Em 1939 Homi Bhabha denominou de méson a partícula intermediadora da força nuclear: era a origem das teorias de interações mesônicas. Em 1947 Lattes, Occhialini e Powell (LATTES; OCCHIALINI; POWELL, 1947) por meio do estudo de raios cósmicos encontraram evidências da existência da partícula de Yukawa, o pión (méson π), corroborada pouco tempo depois por experimentos em laboratórios (aceleradores de partículas).

A forma matemática do potencial de Yukawa é emblemática, e segue até hoje sendo

¹ Seção baseada em Mizrahi S. ; Galetti (2016), Machleidt (1989), Rocha (1993).

a forma correta de descrever o potencial nuclear, a saber

$$V_{NN} = -g^2 \frac{e^{-\mu r}}{r}, \quad (7)$$

em que g é a constante de acoplamento, μ a massa do pión e $r = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$ a distância entre os nucleons interagentes. Em 1951 Taketani, Nakamura e Sasaki (TAKETANI; NAKAMURA; SASAKI, 1951), propuseram um potencial de interação efetiva dos nucleons, o *OPEP* (*One-Pion-Exchange-Potential*). Este potencial tem termos do tipo Yukawa (7) (sendo μ a massa do pión), com dependência nos estados de spin, uma componente tensorial e pode ser usado para distâncias $r > 2fm$.

Taketani, Nakamura e Sasaki, propuseram separar o potencial nuclear em três regiões de acordo com a distancia r , sendo a de longo alcance $r > 2fm$ dominada pela troca de um pión, a intermediária $1 < r < 2fm$ dominada pela troca de dois píons (existe também pequena contribuição da troca de mésons pesados) e a de curto alcance $r < 1fm$, região essa a do caroço (repulsão) havendo troca de mésons pesados, múltiplos píons e também interação de pártons. Na figura 1 vemos uma versão dessas regiões de interação para o potencial central. Para efeito de análise consideraremos nesse trabalho distância $r > 0,7fm$, considerando ambas as trocas, de um e dois mésons.

Dessas ideias nasceram os modelos chamados *OBEP One-Boson-Exchange-Potential*, que basicamente consideram as trocas de mésons um a um, de vários tipos, somando-se em um único potencial capaz de explicar os dados experimentais. Considerou-se os mésons pseudo-vetoriais π , η , os vetoriais ρ , ω , e o escalar σ , além de outros. Este modelo teve um bom sucesso quando comparado aos dados experimentais, no entretanto com exceção dos mésons citados, o σ com a massa apropriada, apresentam algumas dificuldades experimentais, deixando o modelo no ponto de vista físico, comprometido.

A troca de um méson σ foi tratada para a região intermediária do potencial, e era considerado como uma ressonância de dois píons, ou seja, uma única partícula que fazia o papel da troca de dois píons. Apesar das dificuldades experimentais para estabelecer as propriedades do σ ficou claro que a região intermediária da interação deveria ter grande contribuição da troca de dois píons, tornando-se assim objeto de estudo ainda que mais complexa se comparada ao *OBEP*.

Dois formalismos principais foram propostos para o estudo da troca de dois píons, as relações de dispersão e a teoria quântica de campos. Ambos têm similaridades, o uso das relações de dispersão evita alguns problemas intrínsecos da teoria de campos como renormalização e convergências, não faz uso de lagrangianas, nem faz uso do conceito de potencial diretamente e quantitativamente faz uso de valores experimentais como inputs. O formalismo da teoria de campos por sua vez tem uma base física consistente, apesar de suas dificuldades, faz uso direto da dinâmica de lagrangianas para a troca de mésons, leva em conta o comportamento dos nucleons fora da camada de massa (ao contrário das

relações de dispersão) e a simetria quiral, a qual, tem bom acordo com a teoria de quarks e glúons. A partir da teoria de campos os processos podem ser calculados usando-se os diagramas de Feynman.

Por sua complexidade, a troca de dois píons no formalismo da teoria quântica de campo foi abandonada, sendo novamente revivida com as ideias de Partovi e Lomon em 1970, que foram capazes de resolver a equação relativística de Bethe-Salpeter, fazendo uso de diagramas de Feynman com ressonância. É esse um dos formalismos que usaremos nesse trabalho.

1.3 O MODELO E OS OBJETIVOS

Neste trabalho temos como objetivo construir um potencial para a interação entre dois bárions para médias e longas distâncias ($r > 0.7 \text{ fm}$). Devemos observar que a descrição por meio de um potencial não relativístico conforme discutido anteriormente é importante em diversas aplicações de física nuclear e até de astrofísica. Um potencial no espaço de configurações pode ser utilizado de forma bem simples, utilizando a equação de Schrödinger, por exemplo.

Por outro lado, atualmente um modo bastante preciso e consistente conceitualmente para o estudo de interações entre partículas é o uso da teoria quântica de campos, ou seja, um tratamento relativístico. Então, nesta tese estudamos as interações bárion-bárion por meio de um modelo baseado em diagramas de Feynman com a utilização de lagrangianas efetivas, o que irá produzir amplitudes de espalhamentos relativísticas (formuladas no capítulo 2 de forma resumida). A partir destas amplitudes um potencial não relativístico será construído e então um potencial no espaço das configurações será calculado (nos capítulos 3 e 4).

Um ingrediente fundamental no cálculo dos diagramas é a formulação das amplitudes méson-bárion bem como as constantes de acoplamento presentes nesses diagramas, pois são subprocessos que aparecem na descrição da interação bárion-bárion. Por esse motivo o capítulo 5 será dedicado ao estudo desse processo, bem como ao procedimento utilizado para obter as constantes de acoplamento necessários para este estudo.

Este presente trabalho tem por base os trabalhos realizados pelo chamado *Brazil group* antigo grupo liderado por Manoel Robilotta (ROCHA, 1993; ROCHA; ROBILOTTA, 1994; ROBILOTTA, 1995; ROBILOTTA; ROCHA, 1997; ROBILOTTA, 2001; HIGA, 2003; HIGA; ROBILOTTA, 2003; HIGA; ROBILOTTA; ROCHA, 2004; ROCHA; HIGA; ROBILOTTA, 2007b), que em sucessivos trabalhos construiu potenciais nucleon-nucleon (NN) relativísticos por meio da troca de dois píons baseados principalmente no trabalho de Partovi e Lomon (PARTOVI; LOMON, 1970). Construiu também versões de potenciais parametrizados (ROCHA; ROBILOTTA, 1995; ROCHA; HIGA; ROBI-

LOTTA, 2007a), os quais, são mais indicados para se comparar com dados experimentais. Os trabalhos do *Brazil group* levaram em conta a troca de dois píons, entre nucleons, e no estado intermediário não foram consideradas ressonâncias, somente nucleons. Sendo as ressonâncias de spin-3/2, como o bárion Δ , de grande importância para as interações πN e nucleon-nucleon, é um passo natural generalizarmos o potencial considerando ressonância bariônicas de spin-3/2.

Assim, este trabalho tem o objetivo de construir a generalização do potencial idealizado pelo *Brazil group*, para além da troca de píons e nucleons, incluindo a ressonância Δ de spin-3/2 e outras ressonâncias bariônicas quaisquer com spin-1/2 e ou spin-3/2 quando permitidas. Para tanto teremos que considerar além da generalização do potencial de Partovi e Lomon também o potencial generalizado deduzido por meio da primeira aproximação de Born, caso este utilizado quando consideramos ressonâncias com massas maiores que a soma da massa do bárion incidente com massa do méson trocado. Consideraremos também quando permitido a troca dos demais mésons pseudo-escalares, sendo eles além do π , o méson- η e o méson estranho K .

Tais generalizações do potencial de interação bárion-bárion nos permitirá ir mais além, estendendo o formalismo também para potenciais entre bárions quaisquer de spin-1/2 $B_1 B_2$. Desta forma calcularemos os seguintes potenciais: NN , NY , YY , NB_c , $B_c B_c$, NB_b e $B_b B_b$. Aqui Y representa os híperons Λ , Σ e Ξ , B_c representa os bárions charmosos Λ_c e Σ_c e B_b representa somente o bárion pesado botônico Λ_b .

1.4 ROTEIRO

Após esta introdução, seguiremos o seguinte roteiro: no capítulo 2 mostraremos as relações de cinemática e a dinâmica de interação por meio da apresentação das regras de Feynman e dos diagramas que usaremos de base para o estudo da troca de dois mésons.

No capítulo 3 deduziremos o potencial generalizado por meio da primeira aproximação de Born e pela prescrição de Partovi e Lomon que foi inicialmente criado para o estudo da interação do tipo NN , então parte do nosso trabalho foi estender este formalismo para interações entre bárions de spin-1/2 quaisquer.

No quarto capítulo calcularemos por meio das regras de Feynman o diagrama para troca de dois mésons, utilizando o diagrama do tipo caixa como exemplo, em seguida mostraremos a mudança do espaço de momentos para o espaço de configurações, usando a transformação de Fourier.

No capítulo 5 mostraremos as seções de choque total entre as interações de Bárions e mésons no nível de árvore, de forma a escolher as ressonâncias mais relevantes na construção do potencial. Mostraremos também a maneira de se obter as constantes de acoplamento dos vértices de interação. Ainda obteremos os projetores de isospin,

necessários para a correto valor das interações.

Os resultados finais serão apresentados no sexto capítulo, em que, separamos de maneira convenientes os valores dos gráficos, de acordo com suas ressonâncias e os espaço de espinores.

O ultimo capítulo, a conclusão, serão discutidos os resultados obtidos e possibilidade de trabalhos futuros.

Neste trabalho temos 11 Apêndices, necessários para o completo entendimento dos cálculos. Levando em consideração a clareza de exposição do modelo proposto por esta tese, diversos cálculos foram deixados para serem apresentados nestes Apêndices.

No Apêndice A faremos uma minuciosa revisão sobre a simetria quiral e por consequência a dedução das Lagrangianas de interação entre bárions e mésons.

No Apêndice B mostraremos explicitamente os cálculos dos demais diagramas para a troca de dois mésons, em complemento ao Capítulo 4.

O Apêndice C serão calculadas a integrais de 1-loop parametrizadas no espaço de momento.

As transformações de Fourier das integrais de 1-loop para o espaço de configurações serão realizadas no Apêndice D.

No Apêndice E será feita a derivação do potencial da troca de um méson especial de um méson (SOMEF), que não é da mesma forma que o potencial para troca de um méson encontrado por diagramas mais simples.

Como apoio ao cálculo das funções perfil dos diagramas com troca de dois mésons temos o Apêndice F, no qual, mostraremos todas as relações de integrais em função das componentes da redução espinorial.

As reduções espinoriais são encontradas no Apêndice G.

Nos Apêndices H, I, J e K apresentaremos os cálculos complementares ao capítulo 5 e 6, a saber, cálculos relacionados aos observáveis apresentados, os projetores de isospin, as constantes de acoplamento utilizando as simetrias do $SU(3)$ e relações integrais usadas no capítulo 5, respectivamente.

2 A CINEMÁTICA E DINÂMICA DA INTERAÇÃO BÁRION-BÁRION

Nesta seção apresentaremos o formalismo da cinemática e dinâmica necessários para a formulação da interação Bárion-Bárion pela troca de dois mésons. Mostraremos primeiramente as relações cinemáticas adaptadas à troca de dois mésons, relações estas que facilitam os cálculos dinâmicos.

Em seguida iremos revisar e introduzir as regras de Feynman para diagramas do tipo árvore considerando bárions de spin-1/2 e 3/2 e mésons pseudo-escalares. De posse dessas regras, calcularemos as amplitudes no nível de árvore entre um bárion e um méson.

Na seção final apresentaremos o potencial da troca de um méson no espaço de momentos, calculado a partir de diagramas de Feynman.

2.1 A CINEMÁTICA DE INTERAÇÃO

Estabeleceremos aqui as relações cinemáticas necessárias no estudo da troca de dois mésons em interações Bárion-Bárion, sendo estas definidas no referencial do centro de massa (*cm*).

Nos espalhamentos elásticos, temos que a conservação do quadrimomento total do sistema é expresso matematicamente por

$$p + k = p' + k', \quad (8)$$

em que, p , k são os quadrimomentos iniciais de duas partículas e p' , k' seus respectivos quadrimomentos finais conforme indicado na Figura 2, vendo-se também o ângulo de espalhamento θ . Neste trabalho ao estudarmos interações méson-bárion consideraremos esta notação, ou seja, para os bárions iniciais e finais os quadrimomentos p e p' , respectivamente e os quadrimomentos k e k' para os mésons iniciais e finais, respectivamente.

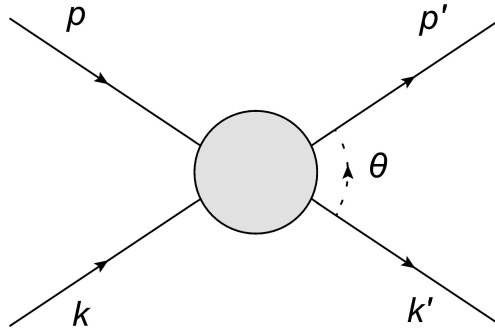
Os quadrimomentos do bárion e do méson podem ser definidos como

$$p = p^\mu = (E, \vec{p}), \quad p = p_\mu = (E, -\vec{p}), \quad (9)$$

$$k = k^\mu = (k_0, \vec{k}), \quad k = k_\mu = (k_0, -\vec{k}). \quad (10)$$

Expressões análogas podem ser escritas para os quadrimomentos finais p' e k' .

Figura 2 - Espalhamento



As energias das partículas no referencial do centro de massa são

$$E = E' = \sqrt{|\vec{k}|^2 + m^2}, \quad (11)$$

$$k_0 = k'_0 = \sqrt{|\vec{k}|^2 + m_k^2}, \quad (12)$$

sendo os vetores \vec{p} e \vec{k} as partes espaciais dos quadrimomentos p e k , e m e m_k as massas do bárion e do méson, respectivamente.

Para que as interações sejam descritas de forma covariante, utilizamos as variáveis relativísticas conhecidas como variáveis de Mandelstam (PESKIN; SCHROEDER, 1995), determinadas em termos dos quadrimomentos já definidos. De acordo com a Figura 2, as variáveis de Mandelstam são

$$s \equiv (p + k)^2 = (p' + k')^2, \quad (13)$$

$$u \equiv (p - k')^2 = (p' - k)^2, \quad (14)$$

$$t \equiv (k - k')^2 = (p - p')^2. \quad (15)$$

A Figura 3 mostra uma situação análoga ao caso anterior, agora com um duplo diagrama da Figura 2 conectado pela troca de duas partículas internas, este tipo de interação é do tipo 1-loop.

Em vista de melhor manipulação desse tipo de diagrama definimos outras variáveis em função dos quadrimomentos p_1, p'_1, p_2, p'_2, k e k' (Fig. 3), tais como

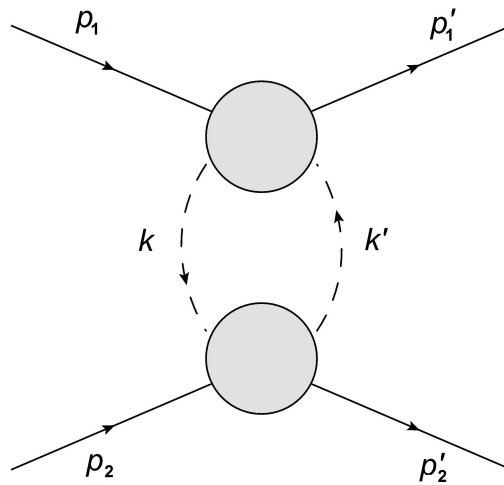
$$W = p_1 + p_2 = p'_1 + p'_2, \quad (16)$$

$$z = \frac{1}{2}[(p_1 + p'_1) - (p_2 + p'_2)], \quad (17)$$

$$q = k' - k = p'_1 - p_1 = p'_2 - p_2, \quad (18)$$

$$Q = \frac{k + k'}{2}, \quad (19)$$

Figura 3 - Espalhamento com troca de duas partículas internas



sendo agora as variáveis de Mandelstam

$$s_i = Q^2 + Q \cdot (W \pm z) + m_i^2 - \frac{q^2}{4} \quad (20)$$

$$u_i = Q^2 - Q \cdot (W \pm z) + m_i^2 - \frac{q^2}{4} \quad (21)$$

$$i = 1, 2 \rightarrow (+, -). \quad (22)$$

Aqui o subíndice i refere-se às partículas que estão na parte superior ou inferior do diagrama de 1-loop, isso é, da qual diagrama tipo árvore pertencem. De acordo com a definição das variáveis de Mandelstam temos ainda que

$$W^2 = s, \quad q^2 = t, \quad z^2 = u. \quad (23)$$

Os sistemas aqui considerados, nos permitem fazermos duas considerações: (i) o referencial da interação será o do centro de massa; (ii) as partículas externas serão tomadas na camada de massa. Implica de (i) a igualdade

$$\vec{p}_1 = -\vec{p}'_1, \quad \vec{p}_2 = -\vec{p}'_2, \quad (24)$$

logo a energia total do sistema será

$$E_1 + E_2 = W = \sqrt{s}. \quad (25)$$

De (ii) encontramos que

$$\begin{aligned} p_1^2 = p_1'^2 = m_1^2, & & p_2^2 = p_2'^2 = m_2^2, & & k^2 = k'^2 = m_k^2, \\ W.q = z.q = 0, & & W.z = E_1 - E_2, \end{aligned} \quad (26)$$

e utilizando a relação (8) encontramos uma relação entre todas as variáveis de Mandelstam, isto é

$$s + u + t = 2(m^2 + m_k^2) = 2(m_1^2 + m_2^2), \quad (27)$$

sendo mais utilmente escrita na forma

$$W^2 + z^2 + q^2 = 2(m_1^2 + m_2^2). \quad (28)$$

2.2 LAGRANGIANAS

O formalismo utilizado para a construção do potencial generalizado será o relativístico, isso é, o formalismo da teoria quântica de campos, que se manifesta por meio das amplitudes calculadas por diagramas de Feynman. Os diagramas de troca de dois mésons são na verdade a junção de dois diagramas (como veremos no capítulo 4) do tipo árvore. Estes diagramas têm sua dinâmica de interação construída por lagrangianas quirais, uma discussão detalhada da simetria quiral e da dedução das lagrangianas, encontra-se no Apêndice A.

A lagrangiana de interação entre dois bárions de spin-1/2 e um méson pseudo-escalar será considerada como

$$\mathcal{L}_{\mathbb{M}\mathcal{B}\mathcal{B}_i} = \frac{g}{2m} (\bar{\mathcal{B}}_i \gamma_\mu \gamma_5 \vec{G} \mathcal{B}) \cdot \partial^\mu \vec{\phi}, \quad (29)$$

sendo \vec{G} a matriz de isospin para a combinação de um méson “M”, sendo seu campo representado por $\vec{\phi}$ e um bárion \mathcal{B} em um bárion \mathcal{B}_i , isto é em termos de isospin, $1 + 1/2 \rightarrow 1/2$. m é a massa do bárion \mathcal{B} , g é a constante de acoplamento entre as três partículas em interação.

A interação entre um bárions de spin-1/2 e spin-3/2 com um méson pseudo-escalar pode ser representada pela lagrangiana

$$\mathcal{L}_{\mathbb{M}\mathcal{B}\mathcal{B}^*} = g_* \left\{ \bar{\mathcal{B}}^{*\mu} \left[g_{\mu\nu} - \left(Z + \frac{1}{2} \right) \gamma_\mu \gamma_\nu \right] \vec{O} \mathcal{B} \right\} \cdot \partial^\nu \vec{\phi}, \quad (30)$$

em que g_* é a constante de acoplamento entre os campos envolvidos, $g_{\mu\nu}$ é o tensor métrico, \vec{O} é a matriz de combinação de isospin, Z é um parâmetro a ser determinado associado à

possibilidade de que o bárion de spin-3/2 \mathcal{B}^* , fora da camada de massa, possuir spin- $\frac{1}{2}$.

A última lagrangiana que iremos considerar é a de interação entre dois píons (não vale para os demais mésons) e dois bárions de spin-1/2,

$$\mathcal{L}_{\pi\pi\mathcal{B}\mathcal{B}_i} = \frac{g_\pi^2}{4m^2} (\bar{\mathcal{B}}_i \gamma_\mu \vec{\tau} \mathcal{B}) \cdot (\vec{\phi} \times \partial_\mu \vec{\phi}), \quad (31)$$

sendo $\vec{\tau}$ a matriz de isospin.

2.3 AMPLITUDES DE ESPALHAMENTO E AS REGRAS DE FEYNMAN

Ao considerarmos as interações devemos impor a conservação da energia-momento, assim os elementos de matriz T_{fi} devem ser multiplicados pelo fator $\delta^4(p_f - p_i)$, em que p_i e p_f são os quadrimomentos totais inicial e final do sistema respectivamente. A matriz T deve ser normalizada, assim relacionamos o elemento de matriz S_{fi} no espaço dos momentos à matriz \mathcal{M}_{fi} , a qual descreve a amplitude de uma dada interação ocorrer, como

$$S_{fi} = \delta_{fi} + i\delta^4(p_f - p_i)T_{fi}, \quad (32)$$

Para o cálculo da amplitude T utilizamos as regras de Feynman que serão apresentadas a seguir (GRIFFITHS, 1987; PESKIN; SCHROEDER, 1995). Os diagramas de interesse são do tipo árvore, que são descritos na forma geral pela expressão:

$$T \equiv [\text{linhas externas (entrando)}] \times [\text{vértice 1}] \times [\text{propagador}] \times [\text{vértice 2}] \times [\text{linhas externas (saída)}] \times \delta^4(\sum p_e - \sum p_s).$$

Explicando cada parte da expressão:

- **Linhas externas:** As linhas externas que usaremos são para partículas de spin-1/2 dadas pelas soluções da equação de Dirac para partículas livres espinoras: $\bar{u}(p')$ no sentido de entrada no vértice e $u(p)$ sentido de saída, e para as partículas de spin-0 são dadas pelas soluções da equação de Klein-Gordon: 1 para ambos os sentidos;
- **Vértices:** São definidos a partir das lagrangianas de interação (29), (30) e (31), onde usamos a regra prática em que os campos das partículas representadas nas lagrangianas são ignorados à exceção de suas derivadas, as quais se transformam no quadrimomento da partícula de acordo com o campo correspondente, temos então

Figura 4 - Vértices

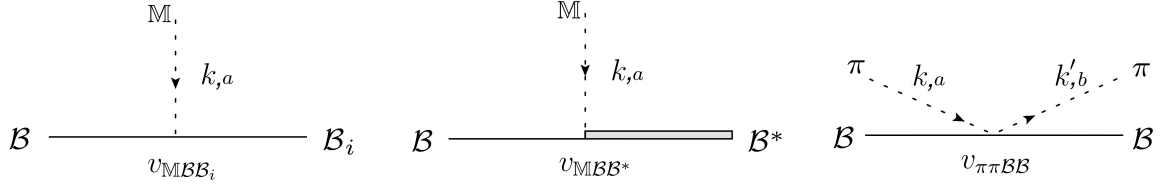
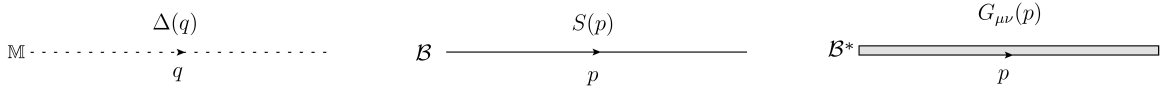


Figura 5 - Propagadores



$$v_{\text{M}B B_i} = \frac{g_i}{2m} \not{k} \gamma_5 G^a, \quad (33)$$

$$v_{\text{M}B B^*} = g_* \left[k^\mu - \left(Z + \frac{1}{2} \right) \gamma^\mu \not{k} \right] O^a, \quad (34)$$

$$v_{\pi\pi B B} = -\frac{1}{4f_\pi^2} (\not{k} + \not{k}') \epsilon_{abc} \tau^c. \quad (35)$$

sendo que $\partial_\mu \phi = k_\mu$ é o momento do méson correspondente ao campo ϕ , $\not{k} = \gamma_\mu k^\mu$, de acordo com a regra prática anteriormente definida, sendo a, b, c os índices de isospin (quando existirem);

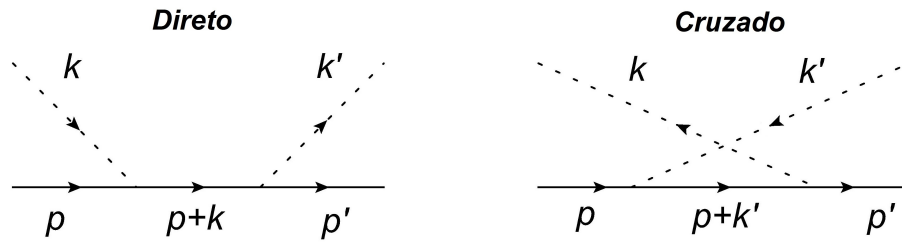
- **Propagador:** Os propagadores são as linhas internas dos diagramas como representadas na Figura 5 para as partículas de spin-0 ($\Delta(q)$), spin-1/2 ($S(p)$) e spin-3/2 ($G_{\mu\nu}(p)$). Por representarem a propagação de partículas livres os propagadores são originados das funções de Green para as equações de onda das partículas de acordo com seus respectivos spins. A forma matemática dos propagadores para partículas de spin-0, spin-1/2 e spin-3/2 são respectivamente dados por

$$\Delta(q) = \frac{i}{q^2 - m_k^2}, \quad (36)$$

$$S(p) = i \frac{\not{p} + \bar{m}}{p^2 - \bar{m}^2}, \quad (37)$$

$$G_{\mu\nu}(p) = -i \frac{\not{p} + \bar{m}_*}{p^2 - \bar{m}_*^2} \left[g_{\mu\nu} - \frac{1}{3} \gamma_\mu \gamma_\nu - \frac{\gamma_\mu p_\nu}{3\bar{m}_*} + \frac{p_\mu \gamma_\nu}{3\bar{m}_*} - \frac{2p_\mu p_\nu}{3\bar{m}_*^2} \right], \quad (38)$$

aqui m_k é a massa do méson, \bar{m} a massa de uma partícula B_i de spin-1/2, \bar{m}_* a massa de uma partícula de spin-3/2 e $\not{p} = \gamma_\mu p^\mu$.

Figura 6 - Diagramas spin 1/2 no canal s 

- **Conservação dos momentos:** Garantindo que as interações representadas pelos diagramas de Feynman tenham conservação dos quadrimomentos, utilizamos a função delta de Dirac, onde p_e representa os quadrimomentos das partículas que entram no vértice e p_s os quadrimomentos das partículas no sentido de saída do vértice.

$$\delta^4\left(\sum p_e - \sum p_s\right). \quad (39)$$

2.4 INTERAÇÃO COM ESTADO INTERMEDIÁRIO DE SPIN-1/2

Nesta seção calcularemos a amplitude T para interação méson-bárion considerando diagramas do tipo árvore com partículas intermediárias de spin 1/2 e esta amplitude pode ser escrita em função de amplitudes A e B , por conta dos espaços de spin. Este cálculo é importante, pois diagramas desse tipo fazem parte como subprocessos dos diagramas de loop a serem considerados no estudos das interações bárion-bárion.

A Figura 6 mostra os diagramas direto e cruzado com estado intermediário (propagador) de spin-1/2, sendo as linhas externas bárions (linhas contínuas) de spin-1/2 com quadrimomento p e mésons (linhas tracejadas) de spin-0 (pseudo-escalares) com quadrimomento k .

Podemos notar que ambos os diagramas na Figura 6 têm seu estado intermediário no canal s , uma vez que no diagrama cruzado temos o sentido dos mésons contrário ao usado no diagrama direto, dessa forma, em ambos os casos, a momento da ressonância é a soma dos momentos do bárion e do méson. Para os diagramas no canal s com partículas de spin-1/2 no estado intermediário, utilizando os resultados mostrados anteriormente, a

amplitude de Feynman é dada por

$$T_{\text{MB}} = \frac{g^2}{4m^2} \bar{u}(p') \left[(-\not{k}') \gamma_5 G_b^\dagger \right] \left[\frac{\not{p} + \not{k} + \bar{m}}{(p+k)^2 - \bar{m}^2} \right] \left[G_a \not{k} \gamma_5 \right] u(p), \quad (40)$$

$$T_{\text{MB}} = \frac{g^2}{4m^2(s - \bar{m}^2)} \bar{u}(p') (G_b^\dagger G_a) \left[(m + \bar{m})(s - m^2) - [2m(m + \bar{m}) + s - m^2] \left(\frac{\not{k}' + \not{k}}{2} \right) \right] u(p), \quad (41)$$

em que m e \bar{m} são as massas do bárion inicial e do bárion no estado intermediário (ressonância) respectivamente, G_n são matrizes no espaço de isospin, necessárias para as projeções dos multipletos de isospin (quando houver), e por fim g representa a constante de acoplamento dos vértices considerados.

Escrevendo na forma compacta e separando as matrizes de isospin de espaço independentes, temos a expressão conveniente para os cálculos dos diagramas de 1-loop (troca de dois mésons)

$$T_{\text{MB}} = (G_b^\dagger G_a)(A + B), \quad (42)$$

em que definimos as amplitudes A e B como

$$A = \frac{g^2(m + \bar{m})}{4m^2} \left[1 + \frac{\bar{m}^2 - m^2}{s - \bar{m}^2} \right] I, \quad (43)$$

$$B = \frac{-g^2}{8m^2} \left[1 + \frac{(\bar{m} + m)^2}{s - \bar{m}^2} \right] \mathcal{Q}, \quad (44)$$

com

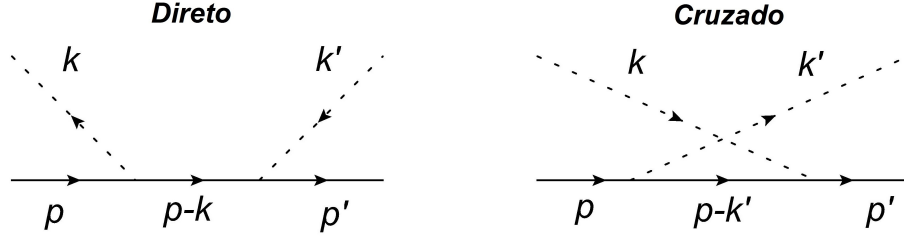
$$I = \bar{u}(p') u(p), \quad (45)$$

$$\mathcal{Q} = \bar{u}(p') Q_\mu \gamma^\mu u(p). \quad (46)$$

Se compararmos a expressão (41) com (42), notamos em primeiro momento que não correspondem às amplitudes A (43) e B (44). Propositalmente retiramos do numerador a dependência da variável s que por sua vez depende do momento total Q , eq. (20), uma vez que, irá simplificar o cálculo das integrais de loop (integração em dQ), quando da troca de dois mésons.

Para os diagramas com estado intermediário de spin-1/2, mostrados na Figura 7, temos a situação análoga à apresentada para o canal s , porém dessa vez temos as amplitudes no canal u .

Para o canal u com ressonância de spin-1/2 temos a amplitude de Feynman dada por

Figura 7 - Diagramas spin 1/2 no canal u 

$$T_{\text{MB}} = \frac{g^2}{4m^2} \bar{u}(p') \left[\not{k}' \gamma_5 G_b^\dagger \right] \left[\frac{\not{p} - \not{k} + \bar{m}}{(p-k)^2 - \bar{m}^2} \right] \left[G_a(-\not{k}) \gamma_5 \right] u(p), \quad (47)$$

$$T_{\text{MB}} = \frac{g^2}{4m^2(u - \bar{m}^2)} \bar{u}(p') (G_b^\dagger G_a) \left[(m + \bar{m})(u - m^2) + [2m(m + \bar{m}) + u - m^2] \left(\frac{\not{k}' + \not{k}}{2} \right) \right] u(p). \quad (48)$$

Escrevendo novamente na forma compacta

$$T_{\text{MB}} = (G_b^\dagger G_a)(A + B), \quad (49)$$

temos as amplitudes A e B nesse caso determinadas por

$$A = \frac{g^2(m + \bar{m})}{4m^2} \left[1 + \frac{\bar{m}^2 - m^2}{u - \bar{m}^2} \right] I, \quad (50)$$

$$B = \frac{g^2}{8m^2} \left[1 + \frac{(\bar{m} + m)^2}{u - \bar{m}^2} \right] \mathcal{Q}. \quad (51)$$

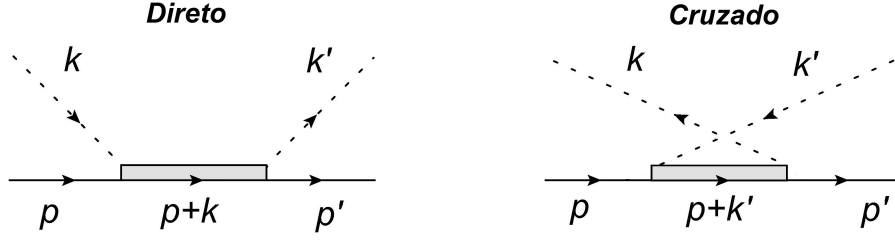
Os cálculos dos diagramas de Feynman para a troca de dois mésons entre dois bárions com ressonâncias de spin-1/2, se resume na prática em encontrar as amplitudes A e B em ambos os canais s e u .

2.5 INTERAÇÃO COM RESSONÂNCIA DE SPIN-3/2

Para a troca de dois mésons produzindo ressonâncias de spin-3/2 encontramos cálculos mais extensos e além disso, o número de diagramas de loop aumenta consideravelmente (combinações de ressonâncias com spins 1/2 e 3/2). Dessa forma vamos então estudar a interação méson-bárion com partículas de spin-3/2 no estado intermediário, calculando suas amplitudes de Feynman.

Para os diagramas com estado intermediário de spin-3/2 mostrados nas figuras 8 e 9 do canal s e canal u , respectivamente, temos que usar os vértices dados por (34), e o propagador (38), com os parâmetros adequados.

A amplitude de Feynman para o canal s é dada genericamente por

Figura 8 - Diagramas spin 3/2 no canal s 

$$T_{\mathbb{M}\mathbb{B}^*} = \bar{u}(p') \left[g_* \left((-k'^\nu) - \left(Z + \frac{1}{2} \right) \gamma^\nu (-\not{k}') \right) O_b^\dagger \right] \left[- \frac{\not{p} + \not{k} + \bar{m}_*}{(p+k)^2 - \bar{m}_*^2} \left(g_{\mu\nu} - \frac{1}{3} \gamma_\mu \gamma_\nu - \frac{\gamma_\mu (p+k)_\nu}{3\bar{m}_*} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{(p+k)_\mu \gamma_\nu}{3\bar{m}_*} - \frac{2(p+k)_\mu (p+k)_\nu}{3\bar{m}_*^2} \right) \right] \left[g_* \left(k^\mu - \left(Z + \frac{1}{2} \right) \gamma^\mu \not{k} \right) O_a \right] u(p), \quad (52)$$

onde o subíndice de T representa o méson "M" e a ressonância no estado intermediário de spin-3/2 "B*". Escrevendo de forma compacta

$$T_{\mathbb{M}\mathbb{B}^*} = (O_b^\dagger O_a) (D + E), \quad (53)$$

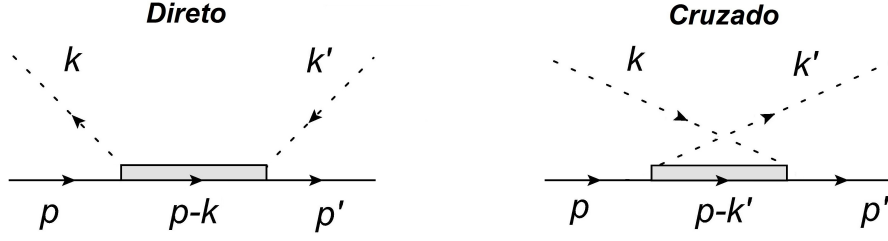
em que O_n são matrizes do espaço de isospin.

As amplitudes D e E são dadas por

$$D = \frac{g_*^2}{6} \left\{ \left[\hat{A} + \frac{3}{2} (m + \bar{m}_*) t \right] \left[\frac{2}{\bar{m}_*^2 - s} \right] - \overbrace{\frac{(m + \bar{m}_*)}{\bar{m}_*^2} (2\bar{m}_*^2 + m\bar{m}_* - m^2 + 2m_k^2)}^{a_0} \right. \\ \left. - \overbrace{\frac{4}{\bar{m}_*^2} [(\bar{m}_* + m)Z + (2\bar{m}_* + m)Z^2]}^{a_s} (s - m^2) \right\} I, \quad (54)$$

$$E = \frac{g_*^2}{6} \left\{ \left[\hat{B} + \frac{3}{2} t \right] \left[\frac{2}{\bar{m}_*^2 - s} \right] - \overbrace{\frac{4Z^2}{\bar{m}_*^2} (s - m^2)}^{b_s} \right. \\ \left. + \overbrace{\frac{-(m + \bar{m}_*)^2}{\bar{m}_*^2} - \frac{8}{\bar{m}_*^2} [(m^2 + m\bar{m}_* - m_k^2)Z + (2m\bar{m}_* + m^2)Z^2]}^{-b_0} \right\} \Phi, \quad (55)$$

em que m é a massa do bárion inicial de spin-1/2, \bar{m}_* a massa do bárion de spin-3/2 no estado intermediário, m_k é a massa do méson, g_* é constante de acoplamento entre os

Figura 9 - Diagramas para partículas de spin 3/2 no canal u 

bárions de spin-1/2 e spin-3/2 e o méson. As demais quantidades são definidas como

$$\hat{A} = 3(m + \bar{m}_*)(\vec{q}_*)^2 + (\bar{m}_* - m)(E_* + m)^2, \quad (56)$$

$$\hat{B} = 3(\vec{q}_*)^2 - (E_* + m)^2, \quad (57)$$

$$(\vec{q}_*)^2 = E_*^2 - m^2 = (E_* + m)(E_* - m), \quad (58)$$

$$(E_* \pm m) = \frac{(\bar{m}_* \pm m)^2 - m_k^2}{2\bar{m}_*}. \quad (59)$$

sendo E_* e \vec{q}_* , a energia e o momento no ponto correspondente ao valor numérico da massa \bar{m}_* da ressonância de spin-3/2 no referencial do centro de massa, respectivamente.

Escrevendo as amplitudes D e E de modo ainda mais compacto, temos

$$D = -\frac{g_*^2}{6} \left[\frac{\hat{D}}{s - \bar{m}_*^2} + a_0 + a_s(s - m^2) \right] I, \quad (60)$$

$$E = -\frac{g_*^2}{6} \left[\frac{\hat{E}}{s - \bar{m}_*^2} + b_0 + b_s(s - m^2) \right] Q, \quad (61)$$

sendo

$$\hat{D} = 2\hat{A} + 3(m + \bar{m}_*)t \quad (62)$$

$$\hat{E} = 2\hat{B} + 3t \quad (63)$$

Os parâmetros a_0 , a_s , b_0 e b_s são os mostrados nas relações (54) e (55).

Para os diagramas no canal u conforme a Figura 9, seguimos o mesmo procedimento adotado no estudo do canal s . Dessa forma o canal u com uma ressonância de spin-3/2, fica

$$T_{\text{MB}^*} = \bar{u}(p') \left[g_* \left((k'^\nu) - \left(Z + \frac{1}{2} \right) \gamma^\nu (\not{k}') \right) O_b^\dagger \right] \left[-\frac{\not{p} - \not{k} + \bar{m}_*}{(p-k)^2 - \bar{m}_*^2} \left(g_{\mu\nu} - \frac{1}{3} \gamma_\mu \gamma_\nu - \frac{\gamma_\mu (p-k)_\nu}{3\bar{m}_*} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{(p-k)_\mu \gamma_\nu}{3\bar{m}_*} - \frac{2(p-k)_\mu (p-k)_\nu}{3\bar{m}_*^2} \right) \right] \left[g_* \left(-k^\mu - \left(Z + \frac{1}{2} \right) \gamma^\mu (-\not{k}) \right) O_a \right] u(p).$$

Escrevendo a expressão compactamente em termos das amplitudes D e E , temos

$$T_{\mathbb{M}\mathbb{B}^*} = (O_b^\dagger O_a)(D + E). \quad (64)$$

As amplitudes, similarmente à (54) e (55), são definidas como

$$\begin{aligned} D &= \frac{g_*^2}{6} \left\{ \left[\hat{A} + \frac{3}{2}(m + \bar{m}_*)t \right] \left[\frac{2}{\bar{m}_*^2 - u} \right] \right. \\ &\quad \underbrace{- \frac{(m + \bar{m}_*)}{\bar{m}_*^2} (2\bar{m}_*^2 + m\bar{m}_* - m^2 + 2m_k^2)}_{a_0} \\ &\quad \left. - \frac{4}{\bar{m}_*^2} \left[(\bar{m}_* + m)Z + (2\bar{m}_* + m)Z^2 \right] (u - m^2) \right\} I, \\ E &= \frac{g_*^2}{6} \left\{ \left[\hat{B} + \frac{3}{2}t \right] \left[-\frac{2}{\bar{m}_*^2 - u} \right] + \frac{4Z^2}{\bar{m}_*^2} (u - m^2) \right. \\ &\quad \underbrace{\left. + \frac{(m + \bar{m}_*)^2}{\bar{m}_*^2} + \frac{8}{\bar{m}_*^2} \left[(m^2 + m\bar{m}_* - m_k^2)Z + (2m\bar{m}_* + m^2)Z^2 \right] \right\} \mathcal{Q}. \end{aligned}$$

Novamente temos a amplitude final dada por uma estrutura compacta

$$\begin{aligned} D &= -\frac{g_*^2}{6} \left[\frac{\hat{D}}{u - \bar{m}_*^2} + a_0 + a_u(u - m^2) \right] I, \\ E &= \frac{g_*^2}{6} \left[\frac{\hat{E}}{u - \bar{m}_*^2} + b_0 + b_u(u - m^2) \right] \mathcal{Q}. \end{aligned}$$

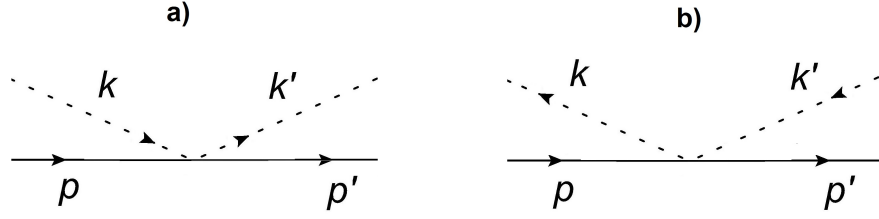
2.6 VÉRTICE DE CONTATO

Os últimos diagramas a serem considerados na interação méson-bárion são os com vértice de contato, como os mostrados na Figura 10, novamente temos dois sentidos possíveis para os mésons **a)** e **b)**. Nestes casos não temos ressonâncias nos estados intermediários, uma vez que, temos somente um vértice em cada diagrama.

Para o primeiro diagrama **a)**, encontramos a seguinte amplitude de Feynman

$$\begin{aligned} iT_{\pi\pi\mathbb{B}\mathbb{B}} &= \bar{u}(p') \frac{g_\pi^2 \gamma^\mu}{4m^2} \left[\epsilon_{abc} k_\mu + \epsilon_{bac} (-k'_\mu) \right] \tau^c u(p) \\ &= \bar{u}(p') (\epsilon_{bac} \tau^c) \left[-\frac{g_\pi^2}{2m^2} \left(\frac{k'_\mu + k_\mu}{2} \right) \right] u(p), \end{aligned} \quad (65)$$

Figura 10 - Diagramas vértices de contato



que podemos escrever de forma compacta como

$$iT_{\pi\mathcal{B}} = (\epsilon_{bac}\tau^c)(C), \quad (66)$$

resultando em

$$C = -\frac{g_\pi^2}{2m^2}\mathcal{Q}, \quad (67)$$

Por fim, para o segundo diagrama **b)** da Figura 10, temos a amplitude

$$\begin{aligned} iT_{\pi\pi\mathcal{B}\mathcal{B}} &= \bar{u}(p') \frac{g_\pi^2 \gamma^\mu}{4m^2} [\epsilon_{abc}(-k_\mu) + \epsilon_{bac}k'_\mu] \tau^c u(p) \\ &= \bar{u}(p') (\epsilon_{bac}\tau^c) \left[\frac{g_\pi^2}{2m^2} \left(\frac{k' + k}{2} \right) \right] u(p), \end{aligned} \quad (68)$$

e compactamente

$$iT_{\pi\mathcal{B}} = (\epsilon_{bac}\tau^c)(C), \quad (69)$$

sendo

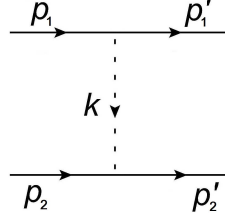
$$C = \frac{g^2}{2m^2}\mathcal{Q}. \quad (70)$$

Os diagramas aqui estudados para a interação méson-báron no nível de árvore, serão usados no capítulo 4 para os cálculos dos diagramas de 1-loop, nos quais consideraremos a troca de dois méson entre dois bárons distintos, com ressonâncias em seus estados intermediários.

2.7 A TROCA DE UM MÉSON

O caso mais simples da interação entre bárons por meio de mésons para aplicação das regras de Feynman é a troca de um méson, como mostrado na figura 11

Figura 11 - Diagramas troca de 1 méson



Aplicando as regras de Feynman, encontramos a amplitude

$$\begin{aligned}
 iT_{\mathbb{M}BB} &= \bar{u}_1(\vec{p}'_1) \left[-\frac{g_1}{2m_1} \not{k} \gamma_5 G_\alpha \right] u_1(\vec{p}_1) \frac{i}{m_k^2 - k^2} \bar{u}_2(\vec{p}'_2) \left[\frac{g_2}{2m_2} \not{k} \gamma_5 G_\alpha \right] u_2(\vec{p}_2) \\
 &= -i \frac{g_1 g_2 4m_1 m_2}{4m_1 m_2} \vec{G}_1 \vec{G}_2 (\vec{\sigma}^{(1)} \cdot \vec{k}) \frac{1}{m_k^2 - k^2} (\vec{\sigma}^{(2)} \cdot \vec{k}), \\
 T_{\mathbb{M}BB} &= -g_1 g_2 \vec{G}_1 \vec{G}_2 \frac{(\vec{\sigma}^{(1)} \cdot \vec{k})(\vec{\sigma}^{(2)} \cdot \vec{k})}{m_k^2 - k^2}, \tag{71}
 \end{aligned}$$

em que $\bar{u}_i(\vec{p}'_i) \not{k} \gamma_5 u_i(\vec{p}_i) = -2m_i (\vec{\sigma}^{(i)} \cdot \vec{k})$, essa relação está demonstrada no Apêndice G.

2.8 O POTENCIAL DA TROCA DE UM MÉSON NO ESPAÇO DE MOMENTOS

Para encontrar o potencial da troca de uma méson no espaço de momentos, consideramos a aproximação não relativística em (71) do tipo $E_i = m_i$ e $E'_i = E_i$, que implicam na energia nula do méson ($k_0 = E_i - E'_i = 0$). Dessa forma encontramos que o potencial no espaço de momentos para a troca de um méson (GROSS, 1999) é

$$V_{\mathbb{M}BB} = \frac{T_{\mathbb{M}BB}}{4m_1 m_2} = -\frac{g_1 g_2}{4m_1 m_2} \vec{G}_1 \vec{G}_2 \frac{(\vec{\sigma}^{(1)} \cdot \vec{k})(\vec{\sigma}^{(2)} \cdot \vec{k})}{\vec{k}^2 + m_k^2}. \tag{72}$$

No capítulo 4 passaremos este potencial para o espaço de configurações, isso é, o potencial em função da distância entre os centros dos bárions interagentes. Usaremos os casos do pión e do méson eta como um parâmetro de comparação com os potenciais pela troca de dois mésons.

3 O FORMALISMO PARA O POTENCIAL BÁRION-BÁRION

Nesta tese iremos fazer a formulação de um potencial nuclear a partir do cálculo de diagramas da teoria quântica de campos de modo que, seja aplicável na equação de Schrödinger devemos observar que esse tipo de cálculo não tem uma formulação exata ou única e assim, com esse objetivo usaremos a primeira aproximação de Born (GRIFFITHS, 2004; GROSS, 1999) para estados intermediários com massas maiores que a soma do bárion e do méson trocado no mesmo vértice e a generalização de Partovi e Lomon (PARTOVI; LOMON, 1970) para estados intermediários com massas menores ou iguais ao bárion e mésons no mesmo vértice, que é o mesmo procedimento adotado nos trabalhos de Rocha, Riga e Robilotta (ROCHA, 1993; HIGA, 2003).

Nesse presente trabalho iremos então apresentar a formulação geral para o potencial, em que a única restrição é a condição necessária de que os Bárions de entrada do diagrama de Feynman sejam os mesmo de saída (espalhamento elástico), do contrário precisaríamos de uma generalização ainda maior. No entanto não teremos prejuízos uma vez que esse tipo de interação $B_1 B_2 \rightarrow B_1 B_2$ é bastante importante ficando o caso mais geral para trabalhos futuros.

Começamos pela dedução do potencial pela primeira aproximação de Born que é a mais simples e não precisa de correções de estados não físicos (energias negativas), uma vez que considera somente ressonâncias no diagrama com massas maiores que a soma do bárion inicial e do méson trocado. Em seguida em outra seção desenvolveremos o caso generalizado da prescrição de Partovi e Lomon que considera diagramas que podem ter estados não físicos, exigindo assim algumas considerações.

3.1 POTENCIAIS PELA PRIMEIRA APROXIMAÇÃO DE BORN

Este é o caso mais simples de potencial, usado para estados intermediários com ressonâncias de massas maiores que a soma do bárion e do méson quem se conectam no mesmo vértice do diagrama de Feynman. Essa condição já nos garante que não existirá estados de energia negativas, isso é estado não físicos de interação.

Queremos relacionar o potencial não relativístico associado a equação de Schrödinger, com as matrizes de transição T relativísticas que serão calculadas pelos diagramas de Feynman. Dessa forma faremos a conexão entre os dois regimes de energia.

Começamos pela forma integral da equação de Schrödinger, passando pela teoria de espalhamentos ate finalmente chegando ao potencial não relativístico por meio da aproximação de Born.

3.1.1 Espalhamento e equação de Schrödinger

A equação de Schrödinger pode ser escrita na forma integral (GRIFFITHS, 2004; GROSS, 1999) como (Fig. 12)

$$\Psi(\vec{r}) = \Psi_0(\vec{r}) - \frac{m}{2\pi\hbar^2} \int \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}_0|}}{|\vec{r}-\vec{r}_0|} V(\vec{r}_0) \Psi(\vec{r}_0) d^3\vec{r}_0, \quad (73)$$

sendo $\Psi(\vec{r})$, $\Psi_0(\vec{r})$ as funções de onda total e livre (sem ação do potencial), m é a massa da partícula ou a massa reduzida do sistema, k é o número de onda associada ao momento da partícula livre, \vec{r}_0 é o raio de atuação do potencial, \vec{r} é o raio da onda espalhada e $V(r_0)$ é o potencial que causa o espalhamento da onda incidente.

Para distâncias grandes em relação à atuação do potencial $V(r_0)$, podemos fazer as aproximações

$$\frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}_0|}}{|\vec{r}-\vec{r}_0|} \approx \frac{e^{ikr}}{r} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}_0}, \quad |\vec{r}| \gg |\vec{r}_0|, \quad (74)$$

aqui consideramos $|\vec{r}-\vec{r}_0| \approx r - \hat{r}\cdot\vec{r}_0 \approx r$, $\vec{k} = k\hat{r}$ e $e^{ik|\vec{r}-\vec{r}_0|} \approx e^{ikr} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}_0}$.

Substituindo na equação (73) e sabendo que $\Psi_0(\vec{r}) = e^{ikz}$ representa a onda incidente na direção do eixo z , encontramos para r suficientemente grande

$$\Psi(\vec{r}) \approx e^{ikz} - \frac{m}{2\pi\hbar^2} \frac{e^{ikr}}{r} \int e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}_0} V(\vec{r}_0) \Psi(\vec{r}_0) d^3\vec{r}_0. \quad (75)$$

Da teoria de espalhamento sabemos que a onda total é dada por

$$\Psi(r, \theta) = e^{ikz} + f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r}, \quad (76)$$

em que a primeira relação do lado direito da igualdade representa a onda incidente e o segundo termo a onda esférica espalhada (Fig. 12), sendo $f(\theta)$ conhecida como a amplitude de espalhamento.

Comparando a relação (75) com (76), concluímos que

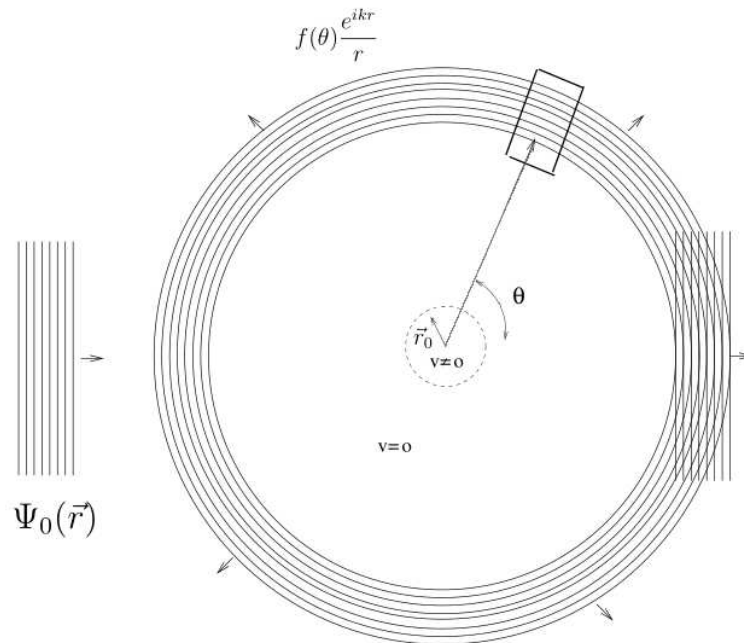
$$f(\theta) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}_0} V(\vec{r}_0) \Psi(\vec{r}_0) d^3\vec{r}_0. \quad (77)$$

3.1.2 Primeira aproximação de Born

A primeira aproximação de Born consiste em considerar que o potencial não afeta substancialmente a onda incidente, de tal forma que podemos fazer a aproximação

$$\Psi(\vec{r}_0) \approx \Psi_0(\vec{r}_0) = e^{ikz_0} = e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}_0}, \quad (78)$$

Figura 12 - Espalhamento de ondas



em que $\vec{k}' = k\hat{z}$.

Substituindo a aproximação de Born em (77), temos que

$$\begin{aligned}
 f(\theta) &\approx -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int e^{i(\vec{k}' - \vec{k}) \cdot \vec{r}_0} V(\vec{r}_0) d^3\vec{r}_0 \\
 &\approx -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}_0} V(\vec{r}_0) d^3\vec{r}_0 \\
 &\approx -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \mathcal{F}[V(\vec{r}_0)] \\
 &\approx -\frac{m}{2\pi\hbar^2} V(\vec{q}),
 \end{aligned} \tag{79}$$

sendo que $\mathcal{F}[V(\vec{r}_0)]$ representa a transformada de Fourier do potencial no espaço de configurações (espaço), transformando o potencial para o espaço de momentos. \vec{q} é o momento transferido.

Desta maneira conseguimos relacionar a amplitude de espalhamento com o potencial não relativístico no espaço de momentos.

3.1.3 O potencial não relativístico em função da amplitude relativística

Podemos relacionar o potencial da equação de Schrödinger com a matriz de transição T relativística que é calculada diretamente dos diagramas de Feynman por meio da

seção de choque diferencial. Sabemos da teoria de espalhamentos que a seção de diferencial no referencial do centro de massa (cm) pode ser escrita em função de $f(\theta)$ da seguinte maneira

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}\Big|_{cm} = |f(\theta)|^2 = \left| \frac{m}{2\pi\hbar^2} V(\vec{q}) \right|^2. \quad (80)$$

De posse da relação da seção de choque diferencial com a matriz relativística T

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}\Big|_{cm} = \left| \frac{T}{8\pi W} \right|^2,$$

encontramos que o potencial no espaço de momentos é em relação a amplitude T relativística

$$V(q) = \frac{T}{2mW} = \frac{T}{4\mu W}, \quad (81)$$

aqui fizemos $m = 2\mu$, em que μ é a massa reduzida dos bárions externos incidentes (m_1 e m_2) e é definida como $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$. No regime relativístico utilizamos unidades naturais, dessa forma fazemos a aproximação $\hbar \rightarrow 1$.

Na equação (81) temos o potencial não relativístico no espaço de momento em função da amplitudes relativísticas T , essas amplitudes serão calculadas por meio dos diagramas de Feynman. O cálculo do tipo caixa será feito no próximo capítulo (os diagramas do tipo cruzado, triângulo, nabla e bolha (Fig.14) serão calculados no Apêndice J de acordo com o tipo de méson e ressonâncias).

3.2 POTENCIAIS PELA PRESCRIÇÃO DE PATOVI E LOMON

No caso de o estado intermediário ter massa menor que a soma do bárion externo e o méson trocado no mesmo vértice, poderá ocorrer estados de energia negativa, que por sua vez é um estado não físico e não pode ser considerado no cálculo do potencial. Para resolver o problema de estados de energia negativa fazemos uso da prescrição de Partovi e Lomon (PARTOVI; LOMON, 1970), que é a extensão para partículas de spin 1/2 da prescrição de Blankenbeler e Sugar (BLANKENBELER; SUGAR, 1966).

Começamos por uma breve introdução de um espalhamento não relativístico a partir da equação de Lippmann-Schwinger, passando para o espalhamento relativístico com o uso da equação de Bethe-Salpeter e por fim, demonstrando a maneira de encontrar o potencial Bárion-Bárion pela troca de dois mésons, considerando ressonâncias bariônicas de spin-1/2 e ou spin-3/2.

3.2.1 Espalhamento não relativístico

Na teoria quântica do espalhamento a interação entre duas partículas é determinada pela matriz de espalhamento chamada de S , a qual depende da matriz de transição \bar{T} que relaciona-se diretamente com o potencial V (nosso objetivo). A matriz S para o espalhamento não relativístico é definida como

$$S_{fi} = \delta_{fi} + i\delta(E_f - E_i)\bar{T}_{fi}, \quad (82)$$

sendo $E_{i,f}$ as energias inicial e final do sistema.

Na mecânica quântica não relativística relacionamos a matriz de espalhamento S com o potencial por meio da equação integral de Lippmann-Schwinger (SCADRON, 2006), a qual conecta diretamente a matriz de transição \bar{T} com o potencial de Schrödinger, V

$$\bar{T}_{fi}(\vec{l}', \vec{l}|W) = V_{fi}(\vec{l}', \vec{l}|W) + \int \frac{d^3\xi}{(2\pi)^3} V_{fi}(\vec{l}', \vec{\xi}|W) \frac{2\mu}{\vec{p}^2 - \vec{\xi}^2 + i\epsilon} \bar{T}_{fi}(\vec{\xi}, \vec{l}|W), \quad (83)$$

em que,² $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ a massa reduzida do sistema de partícula e o fator 2 é incluído para que haja a correta correspondência com a equação de Lippmann-Schwinger para partículas iguais.

Usamos a parte espacial dos quadrimomentos W , l , l' e ξ , sendo respectivamente o quadrimomento total, quadrimomentos relativos dos bárions iniciais e finais, e o quadrimomento do estado intermediário da interação. Definimos os quadrimomentos como

$$l = \frac{p_2 - p_1}{2} = \frac{q - z}{2}, \quad (84)$$

$$l' = \frac{p'_2 - p'_1}{2} = -\frac{q + z}{2}, \quad (85)$$

$$\xi = k + l. \quad (86)$$

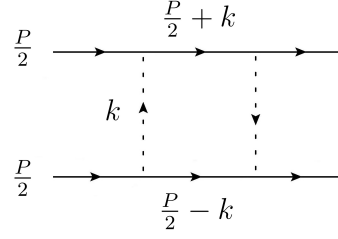
que no referencial do centro de massa (cm) conforme mostrado na seção 2.1 do capítulo

² A expressão

$$G_{Sch} = \frac{m}{\vec{p}^2 - \vec{\xi}^2 + i\epsilon},$$

é o propagador de Schrödinger de uma partícula com massa m .

Figura 13 - Diagramas do tipo caixa



anterior encontramos

$$p_1 = (E, \vec{p}), \quad (87)$$

$$p_2 = (E, -\vec{p}), \quad (88)$$

$$p'_1 = (E, \vec{p}'), \quad (89)$$

$$p'_2 = (E, -\vec{p}'). \quad (90)$$

3.2.2 Equação de Bethe-Salpeter

A equação análoga à equação de Lippmann-Schwinger no regime relativístico é a equação de Bethe-Salpeter (SALPETER; BETHE, 1951), uma equação covariante que descreve o espalhamento de dois bárions. A equação de Bethe-Salpeter foi deduzida a partir de diagramas de Feynman, de modo que a amplitude de espalhamento elástica relativística \mathcal{M} entre dois bárions é dada pela equação integral

$$\mathcal{M}(l', l|W) = \mathcal{K}(l', l|W) + \int \frac{d^4\xi}{(2\pi)^4} \mathcal{K}(l', \xi|W) \mathcal{G}(\xi|W) \mathcal{M}(\xi, l|W), \quad (91)$$

sendo \mathcal{K} definido como o kernel da interação (amplitude relativa à diagramas de dois bárions não redutíveis) e \mathcal{G} é o propagador relativístico de dois bárions de spin-1/2 ou spin-3/2 com massas m_A e m_B . Considerando propagadores de spin-1/2 de um diagrama do tipo caixa (Fig. 13) com ressonâncias A em (1) e B em (2), \mathcal{G} terá a forma

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(k|P) &= i \left[\frac{1}{\frac{P}{2} + k - m_A + i\epsilon} \right]^{(1)} \left[\frac{1}{\frac{P}{2} - k - m_B + i\epsilon} \right]^{(2)} \\ &= i \left[\frac{\frac{P}{2} + \not{k} + m_A}{(\frac{P}{2} + k)^2 - m_A^2 + i\epsilon} \right]^{(1)} \left[\frac{\frac{P}{2} - \not{k} + m_B}{(\frac{P}{2} - k)^2 - m_B^2 + i\epsilon} \right]^{(2)}, \end{aligned} \quad (92)$$

em que $P = p_1 + p_2$ é o quadrimomento total e k o quadrimomento dos mésons trocados. Essa já é a forma generalizada de \mathcal{G} para o caso de bárions de spin-1/2 quaisquer.

A equação de Bethe-Salpeter por ser uma equação integral de quatro dimensões

se torna muito difícil de ser resolvida, dessa maneira usaremos o procedimento adotado por Blankenbecler e Sugar (BLANKENBECLER; SUGAR, 1966) que posteriormente foi generalizado no trabalho de Partovi e Lomon (PARTOVI; LOMON, 1970). O objetivo deste procedimento é reduzir a dimensão da integral de quatro para três, considerando somente as partículas de energia positiva. Para tanto reescrevendo o propagador \mathcal{G} da seguinte maneira

$$\mathcal{G} = g + (\mathcal{G} - g), \quad (93)$$

em que g é o propagador covariante tridimensional de uma partícula não relativística com as mesmas singularidades (parte imaginária) de \mathcal{G} para região física (energias positivas).

Definimos um kernel efetivo \mathcal{U} relativo ao propagador g e reescrevemos a equação de Bethe-Salpeter na notação de operadores como

$$\mathcal{M} = \mathcal{U} + \mathcal{U}g\mathcal{M}. \quad (94)$$

Reescrevendo a Eq. (91) na forma covariante

$$\mathcal{M} = \mathcal{K} + \mathcal{K}\mathcal{G}\mathcal{M}, \quad (95)$$

e aplicando para \mathcal{G} dado na relação (93), encontramos

$$\mathcal{M} = \mathcal{K} + \mathcal{K}(\mathcal{G} - g)\mathcal{M} + \mathcal{K}g\mathcal{M}, \quad (96)$$

agora para o segundo termo à relação (94), temos que

$$\mathcal{M} = \mathcal{K} + \mathcal{K}(\mathcal{G} - g)\mathcal{U} + [\mathcal{K} + \mathcal{K}(\mathcal{G} - g)\mathcal{U}]g\mathcal{M}, \quad (97)$$

comparando com (94), concluímos finalmente que

$$\mathcal{U} = \mathcal{K} + \mathcal{K}(\mathcal{G} - g)\mathcal{U}. \quad (98)$$

No referencial do centro de massa definimos

$$T = \bar{u}^{(1)}(\vec{p}')\bar{u}^{(2)}(-\vec{p}')\mathcal{M}(\vec{l}', \vec{l}|W)u^{(1)}(\vec{p})u^{(2)}(-\vec{p}), \quad (99)$$

$$\mathcal{V} = \bar{u}^{(1)}(\vec{p}')\bar{u}^{(2)}(-\vec{p}')\mathcal{U}(\vec{l}', \vec{l}|W)u^{(1)}(\vec{p})u^{(2)}(-\vec{p}), \quad (100)$$

logo a partir das ultimas relações e de (94), encontramos

$$T(l', l|W) = \mathcal{V}(l', l|W) + \int \frac{d^4\xi}{(2\pi)^4} \mathcal{V}(l', \xi|W)g(\xi|W)T(\xi, l|W). \quad (101)$$

Observando a expressão (98) notamos que \mathcal{U} é dado perturbativamente como

$$\mathcal{U}^{(2)} = \mathcal{K}^{(2)}, \quad (102)$$

$$\mathcal{U}^{(4)} = \mathcal{K}^{(4)} + \mathcal{K}^{(2)}(\mathcal{G} - g)\mathcal{K}^{(2)}, \quad (103)$$

aqui $\mathcal{U}^{(4)}$ e $\mathcal{U}^{(2)}$ são os potenciais efetivos devido a troca de dois e um méson respectivamente, $\mathcal{K}^{(4)}$ representa os diagramas irreduzíveis da troca de dois mésons, $\mathcal{K}^{(2)}\mathcal{G}\mathcal{K}^{(2)}$ é um diagrama do tipo caixa e $\mathcal{K}^{(2)}g\mathcal{K}^{(2)}$ é a troca de um méson não relativístico.

Por fim a equação de Bethe-Salpeter na forma de operadores é perturbativamente, no cm , dada por

$$T^{(2)} = \mathcal{K}^{(2)}, \quad (104)$$

$$T^{(4)} = \mathcal{K}^{(4)} + \mathcal{K}^{(2)}\mathcal{G}\mathcal{K}^{(2)}. \quad (105)$$

Substituindo (104) e (105) em (103) encontramos a relação final no cm

$$\mathcal{V}^{(4)} = T^{(4)} - T^{(2)}gT^{(2)}, \quad (106)$$

essa ultima relação significa que o potencial efetivo da troca de dois mésons $\mathcal{U}^{(4)}$ é igual às amplitudes dos diagramas de troca de dois mésons ($T^{(4)}$) menos as amplitudes que representam a troca de um méson não relativístico ($T^{(2)}gT^{(2)}$). Essa subtração ocorre para evitar dupla contagem.

3.2.3 Potencial Generalizado para Bárions quaisquer

Para estabelecermos a forma final geral do potencial não relativístico (Schrödinger), para partículas intermediárias de massa menor que a soma das massas do bárion inicial e da massa do méson trocado, iremos aplicar o método de Partovi e Lomon, isso implica em resolver a equação (101), para bárions iniciais de spin-1/2 e bárions de spin-1/2 e spin-3/2 nos estados intermediários.

Trabalhando com a parte imaginária (região não física) de \mathcal{G} (que deve ser igual à de g) pela regra de Cutkosky (PARTOVI; LOMON, 1970), temos para ressonância de spin-1/2 (para spin-3/2 será mostrado mais adiante)

$$\begin{aligned} \Im[\mathcal{G}(k|P)] &= -2\pi^2 \left[\frac{\not{P}}{2} + \not{k} + m_A \right]^{(1)} \left[\frac{\not{P}}{2} - \not{k} + m_B \right]^{(2)} \\ &\quad \times \delta^{(+)}[(P/2 + k)^2 - m_A^2] \delta^{(+)}[(P/2 - k)^2 - m_B^2] \\ &= \Im[g(k|P)], \end{aligned} \quad (107)$$

resolvendo as expressões contendo as funções delta de Dirac ($j = A, B$)

$$(P/2 \pm k)^2 - m_j^2 = (P_0/2 \pm k_0)^2 - (\vec{P}/2 \pm \vec{k})^2 - m_j^2 = 0$$

$$(P_0/2 \pm k_0) = \pm \sqrt{\vec{P}/2 \pm \vec{k} + m_j}$$

aplicando agora na parte positiva da energia, a propriedade $\delta[f(x)] = \frac{\delta(x-x_i)}{|f'(x_i)|}$, encontramos que

$$\Im[g(k|P)] = -2\pi^2 \left[\frac{\not{P}}{2} + \not{k} + m_A \right]^{(1)} \left[\frac{\not{P}}{2} - \not{k} + m_B \right]^{(2)} \frac{\delta(P_0/2 + k_0 - E_A) \delta(P_0/2 - k_0 - E_B)}{4E_A E_B}, \quad (108)$$

sendo as energias dos estados intermediários dadas por $E_A = \sqrt{(\vec{P}/2 + \vec{k})^2 + m_A^2}$ e $E_B = \sqrt{(\vec{P}/2 - \vec{k})^2 + m_B^2}$.

Se $P_0/2 + k_0 = E_A$ e $P_0/2 - k_0 = E_B$, podemos reescrever

$$\delta(P_0/2 + k_0 - E_A) = \delta(P_0 - E_A - E_B), \quad (109)$$

$$\delta(P_0/2 - k_0 - E_B) = \delta(k_0 - E_A/2 + E_B/2). \quad (110)$$

Sabendo que a energia total é a soma das energias das ressonâncias $E_T = E_A + E_B$ e que $s = P^2 = P_0^2 - \vec{P}^2$, fazemos para (319)

$$\begin{aligned} \delta(P_0 - (E_A + E_B)) &= \delta(P_0 - E_T) = \delta\left[\frac{(P_0 - E_T)(P_0 + E_T)}{P_0 + E_T}\right] = (P_0 + E_T)\delta(s - E_T^2 + \vec{P}^2) \\ &= 2E\delta(s - E_T^2 + \vec{P}^2). \end{aligned} \quad (111)$$

Desses resultados encontramos

$$\begin{aligned} \Im[g(k|P)] &= -2\pi^2 \frac{2(E_A + E_B)}{4E_A E_B} \left[\frac{\not{P}}{2} + \not{k} + m_A \right]^{(1)} \left[\frac{\not{P}}{2} - \not{k} + m_B \right]^{(2)} \\ &\quad \times \delta[s - (E_A + E_B)^2 + \vec{P}^2] \delta[k_0 - E_A/2 + E_B/2]. \end{aligned} \quad (112)$$

Da relação de dispersão construímos o propagador $g(k|s)$ a partir da sua parte imaginária $\Im[g(k|P)]$,

$$g(k|s) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{ds'}{s' - s - i\epsilon} \Im[g(k|P)], \quad (113)$$

e a integração resulta em

$$\begin{aligned}
g(k|s) &= -\pi \frac{(E_A + E_B)}{E_A E_B} \frac{\left[\frac{\vec{p}}{2} + \vec{k} + m_A\right]^{(1)} \left[\frac{\vec{p}}{2} - \vec{k} + m_B\right]^{(2)}}{(E_A + E_B)^2 - \vec{P}^2 - s - i\epsilon} \delta[k_0 - E_A/2 + E_B/2] \\
&= \pi \frac{(E_A + E_B)}{E_A E_B} \frac{\left[\frac{\vec{p}}{2} + \vec{k} + m_A\right]^{(1)} \left[\frac{\vec{p}}{2} - \vec{k} + m_B\right]^{(2)}}{(E_1 + E_2)^2 - (E_A + E_B)^2 - i\epsilon} \delta[k_0 - E_A/2 + E_B/2], \quad (114)
\end{aligned}$$

aqui usamos $s + \vec{P}^2 = E_T = (E_1 + E_2)^2$, com $E_1 = \sqrt{\vec{p}^2 + m_1^2}$ e $E_2 = \sqrt{\vec{p}^2 + m_2^2}$, as energias dos bárions externos (iniciais) com momentos \vec{p} .

No referencial do centro de massa observando a conservação de energia do sistema $E_A + E_B = E_1 + E_2$, temos

$$g(k|s) = \pi \frac{(E_1 + E_2)_{(\vec{k})}}{E_{A(\vec{k})} E_{B(\vec{k})}} \frac{[\vec{k} + m_A]^{(1)} [-\vec{k} + m_B]^{(2)}}{(E_1 + E_2)_{(\vec{p})}^2 - (E_1 + E_2)_{(\vec{k})}^2 - i\epsilon} \delta[k_0 - E_A/2 + E_B/2], \quad (115)$$

sendo que os subíndices (\vec{p}) e (\vec{k}) representam os momentos das partículas quando externas e quando nos estados intermediários (ressonâncias).

Queremos que a expressão (115) tenha uma forma similar à equação de Lippmann-Schwinger, para isso usaremos um truque válido para quando os bárions externos estão camada de massa. Definimos uma “massa média” (\bar{m}) e energia média E que satisfaça a relação para os bárions externos com momentos no centro de massa \vec{q} ,

$$E_{1m_1} + E_{2m_2} = E_{1\bar{m}} + E_{2\bar{m}} = 2E, \quad (116)$$

$$\sqrt{\vec{q}^2 + m_1^2} + \sqrt{\vec{q}^2 + m_2^2} = \sqrt{\vec{q}^2 + \bar{m}^2} + \sqrt{\vec{q}^2 + \bar{m}^2},$$

$$\sqrt{\vec{q}^2 + m_1^2} + \sqrt{\vec{q}^2 + m_2^2} = 2\sqrt{\vec{q}^2 + \bar{m}^2}. \quad (117)$$

Na camada de massa (quando o momento é nulo), temos que

$$\sqrt{m_1^2} + \sqrt{m_2^2} = 2\sqrt{\bar{m}^2}, \quad (118)$$

portanto

$$\bar{m} = \frac{m_1 + m_2}{2}. \quad (119)$$

Este resultado é válido para construir o potencial, uma vez que os bárions externos devem estar na camada de massa, de acordo com a prescrição seguida. O uso da massa média \bar{m} é uma aproximação que nos permite fazer uso da equação de Lippmann-Schwinger, do contrario não conseguiríamos seguir a prescrição de Partovi e Lomon.

Utilizando as relações (116) e (119) em (115), conseguimos modificar o denominador do propagador na forma necessária para comparar com a equação de Lippmann-

Schwinger

$$g(k|s) = \pi \frac{(E_1 + E_2)_{(\vec{k})} [\not{k} + m_A]^{(1)} [-\not{k} + m_B]^{(2)}}{4E_{A(\vec{k})} E_{B(\vec{k})} \vec{p}^2 - \vec{k}^2 + i\epsilon} \delta[k_0 - E_A/2 + E_B/2]. \quad (120)$$

Precisamos ainda escrever os termos $[\not{k}_\pm + m_{A,B}]^{(i)}$ na forma de espinores dos bárions externos, assim fazemos

$$\begin{aligned} [\not{k}_\pm + m_{A,B}]^{(i)} &= [\not{k}_\pm + m_i + m_{A,B} - m_i]^{(i)} \\ &= \sum_s u_i(\pm\vec{k}, s) \bar{u}_i(\pm\vec{k}, s) + m_{A,B} - m_i \\ &= \sum_s u_i(\pm\vec{k}, s) \bar{u}_i(\pm\vec{k}, s) + \frac{m_{A,B} - m_i}{4m_i} \sum_s u_i(\pm\vec{k}, s) \bar{u}_i(\pm\vec{k}, s) \\ &= \frac{m_{A,B} + 3m_i}{4m_i} \sum_s u_i(\pm\vec{k}, s) \bar{u}_i(\pm\vec{k}, s), \end{aligned} \quad (121)$$

sendo $\not{k} + m_i = \sum_s u_i(\vec{k}, s) \bar{u}_i(\vec{k}, s)$ e $\sum_s u_i(\vec{k}) \bar{u}_i(\vec{k}) = 4m_i$ para $i = 1, 2$.

Considerando g dado por (141), integramos (101) em relação a dk_0 , o qual, atua sobre o termo $\delta[k_0 - E_A/2 + E_B/2]$, então

$$\begin{aligned} T(\vec{l}', \vec{l}|W) &= \mathcal{V}(\vec{l}', \vec{l}|W) \\ &+ \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \mathcal{V}(\vec{l}', \vec{k}|W) \frac{m_A + 3m_1}{4m_1} \frac{m_B + 3m_2}{4m_2} \frac{1}{4\mu} \frac{(E_1 + E_2)_{(\vec{k})}}{4E_{A(\vec{k})} E_{B(\vec{k})}} \frac{2\mu}{\vec{p}^2 - \vec{k}^2 + i\epsilon} T(\vec{k}, \vec{l}|W) \\ &= \mathcal{V}(\vec{l}', \vec{l}|W) \\ &+ \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \mathcal{V}(\vec{l}', \vec{k}|W) \frac{(m_A + 3m_1)(m_B + 3m_2)(E_1 + E_2)_{(\vec{k})}}{256m_1 m_2 \mu E_{A(\vec{k})} E_{B(\vec{k})}} \frac{2\mu}{\vec{p}^2 - \vec{k}^2 + i\epsilon} T(\vec{k}, \vec{l}|W). \end{aligned} \quad (122)$$

Vemos aqui a implicação direta da prescrição de Partovi e Lomon, uma vez que nesse ponto, reduzimos a integral quadridimensional, para uma tridimensional, que é o primeiro passo para a solução da equação de Bethe-Salpeter.

A equação de Lippmann-Schwinger relaciona o potencial associado à equação de Schrödinger com a matriz de transição \bar{T} (não relativística), porém a matriz de transição T aqui definida é relativística, a qual é calculada diretamente da teoria quântica de campos por meio dos diagramas de Feynman. A maneira de resolver esse problema é o uso de algum observável.

Vamos então relacionar a equação de Lippmann-Schwinger (\bar{T}) com a equação de Bethe-Salpeter (T), por meio de um observável, a seção de choque diferencial, uma vez que, observáveis são independentes da teoria e dos modelos usados.

A seção de choque diferencial não relativística se relaciona com a equação de

Lippimann-Schwinger através da relação

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}\Big|_{cm} = \frac{4\mu^2}{16\pi^2} |\langle \vec{l}' | \bar{T} | \vec{l} \rangle|^2 = \frac{\mu^2}{4\pi^2} |\bar{T}|^2. \quad (123)$$

A seção de choque diferencial relativística no referencial do centro de massa deve ser

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}\Big|_{cm} = \left| \alpha \frac{T}{8\pi W} \right|^2. \quad (124)$$

aqui o fator α é necessário para que seja possível fazer a correspondência entre V e \mathcal{V} , como será demonstrado.

A seção de choque diferencial nos dois casos deve ser igual já que se trata de um observável, então temos que

$$\begin{aligned} \frac{\mu^2}{4\pi^2} |\bar{T}|^2 &= \alpha^2 \frac{|T|^2}{64\pi^2 W^2}, \\ \bar{T} &= \alpha \frac{T}{4\mu W}. \end{aligned} \quad (125)$$

Comparando (122) com (83) por meio de (125),

$$\begin{aligned} &V(\vec{l}', \vec{l}|W) + \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} V(\vec{l}', \vec{k}|W) \frac{2\mu}{\vec{p}^2 - \vec{k}^2 + i\epsilon} \bar{T}(\vec{k}, \vec{l}|W) \\ &= \frac{\alpha}{4\mu W} \mathcal{V}(\vec{l}', \vec{l}|W) \\ &+ \frac{\alpha}{4\mu W} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \mathcal{V}(\vec{l}', \vec{k}|W) \frac{(m_A + 3m_1)(m_B + 3m_2)(E_1 + E_2)_{(\vec{k})}}{256m_1m_2\mu E_{A(\vec{k})} E_{B(\vec{k})}} \frac{2\mu}{\vec{p}^2 - \vec{k}^2 + i\epsilon} T(\vec{k}, \vec{l}|W), \end{aligned} \quad (126)$$

observamos que somente podemos encontrar um relação direta entre o potencial não-relativístico V com o “potencial” \mathcal{V} se,

$$\frac{\alpha}{4\mu W} = \frac{(m_A + 3m_1)(m_B + 3m_2)(E_1 + E_2)_{(\vec{k})}}{256m_1m_2\mu E_{A(\vec{k})} E_{B(\vec{k})}}, \quad (127)$$

então encontramos o valor de α

$$\alpha = \frac{(m_A + 3m_1)(m_B + 3m_2)(E_1 + E_2)_{(\vec{k})}^2}{64m_1m_2 E_{A(\vec{k})} E_{B(\vec{k})}}. \quad (128)$$

Chegamos então a relação final entre o potencial não-relativístico e relativístico generalizado de acordo com a prescrição de Partovi e Lomon,

$$V(\vec{l}', \vec{l}|W) = \sqrt{\frac{(m_A + 3m_1)(m_B + 3m_2)(E_1 + E_2)_{(\vec{l}')}}{256m_1m_2\mu E_{A(\vec{l}')} E_{B(\vec{l}')}}} \mathcal{V}(\vec{l}', \vec{l}|W) \sqrt{\frac{(m_A + 3m_1)(m_B + 3m_2)(E_1 + E_2)_{(\vec{l})}}{256m_1m_2\mu E_{A(\vec{l})} E_{B(\vec{l})}}}. \quad (129)$$

Mais adiante iremos encontrar o valor das energias E_A e E_B .

Para o caso particular de somente considerar nucleons na camada de massa e píons, o qual foi originalmente concebido o método (tal como o usado em (HIGA, 2003)), recuperamos o mesmo resultado, isso é

$$E = E_1 = E_2 = E_A = E_B = m, \quad (130)$$

$$\mu = \frac{m^2}{m + m} = \frac{m}{2}, \quad (131)$$

$$\alpha = 1, \quad (132)$$

$$\bar{T} = \frac{T}{4mE}, \quad (133)$$

$$V = \frac{1}{\sqrt{4E(\vec{l})m}} \mathcal{V} \frac{1}{\sqrt{4E(\vec{l})m}}. \quad (134)$$

em que m é a massa do nucleon N e usamos a aproximação (130) que será justificada mais a diante.

3.2.3.1 As energias das ressonâncias A e B

Para que possamos fazer uso de (129), necessitamos encontrar os parâmetros de energia das ressonâncias E_A e E_B . Para isso, usamos o fato de que (129) no espaço de configurações (será definido no capítulo 2) só é válido quando os bárions externos estão na camada de massa, o que implica em $E_1 = m_1$ e $E_2 = m_2$.

Porém, o mesmo não vale para as ressonâncias, ou seja, devemos calcular as energias E_A e E_B de alguma maneira. Fazemos isso por meio da conservação de energia $E_1 + E_2 = E_A + E_B$, em que a energia total do sistema deve ser a mesma enquanto bárions iniciais e enquanto ressonâncias.

No referencial do centro de massa temos que

$$E_A^2 = \vec{k}^2 + m_A^2 \quad \rightarrow \quad \vec{k}^2 = E_A^2 - m_A^2, \quad (135)$$

$$E_B^2 = (-\vec{k})^2 + m_B^2 \quad \rightarrow \quad \vec{k}^2 = E_B^2 - m_B^2, \quad (136)$$

então da igualdade de (135) e (136),

$$\begin{aligned} E_A^2 - m_A^2 &= E_B^2 - m_B^2, \\ (E_A + E_B)(E_A - E_B) &= m_A^2 - m_B^2, \\ (E_A - E_B) &= \frac{m_A^2 - m_B^2}{E_1 + E_2}, \\ E_A &= \frac{m_A^2 - m_B^2}{E_1 + E_2} + E_B. \end{aligned} \quad (137)$$

Ainda, a partir da conservação da energia, podemos fazer

$$\begin{aligned}
(E_1 + E_2)^2 &= (E_A + E_B)^2 \\
&= E_A^2 + E_B^2 + 2E_A E_B \\
&= 2\vec{k}^2 + m_A^2 + m_B^2 + 2E_A E_B \\
&= 2(E_B^2 - m_B^2) + m_A^2 + m_B^2 + 2E_A E_B \\
&= 2E_B^2 + m_A^2 - m_B^2 + 2E_A E_B \\
&= 2E_B^2 + m_A^2 - m_B^2 + 2\frac{m_A^2 - m_B^2}{E_1 + E_2} E_B + 2E_B^2,
\end{aligned} \tag{138}$$

e resolvendo para E_B , encontramos as raízes

$$E_{B\pm} = \frac{1}{4} \left\{ -\frac{m_A^2 - m_B^2}{E_1 + E_2} \pm \sqrt{\left(\frac{m_A^2 - m_B^2}{E_1 + E_2}\right)^2 + 4[(E_1 + E_2)^2 + m_B^2 - m_A^2]} \right\}, \tag{139}$$

e como a raiz deve ser sempre positiva então, E_{B+} deve ter valor positivo.

Com o uso de (137), encontramos as energias das ressonâncias

$$E_A = \frac{1}{4} \left\{ \sqrt{\left(\frac{m_A^2 - m_B^2}{E_1 + E_2}\right)^2 + 4[(E_1 + E_2)^2 + m_B^2 - m_A^2]} + 3\frac{m_A^2 - m_B^2}{E_1 + E_2} \right\}, \tag{140}$$

$$E_B = \frac{1}{4} \left\{ \sqrt{\left(\frac{m_A^2 - m_B^2}{E_1 + E_2}\right)^2 + 4[(E_1 + E_2)^2 + m_B^2 - m_A^2]} - \frac{m_A^2 - m_B^2}{E_1 + E_2} \right\}. \tag{141}$$

Esse resultado parece razoável, e o caso particular em que temos somente nucleons e píons, as energias das ressonâncias serão $E = E_1 = E_2 = E_A = E_B = m$, como deveríamos esperar.

As relações (140) e (141) usadas em (129) resulta no potencial que procuramos para ressonância de spin-1/2. Porém ainda temos interesse no caso em que as ressonâncias "A" e "B", sejam de spin-3/2.

3.2.3.2 Ressonância spin-3/2

É de fundamental interesse desse presente trabalho considerar bárions no estado intermediário com spin-3/2, quando combinado com outro estado intermediário no mesmo diagrama que pode estar em uma região não física (massa menor que a soma das massas do bárion inicial e do méson trocado), que têm grande relevância em interações como por exemplo o caso do Δ na interação NN . Para esse objetivo faremos uso do propagador para partículas de spin-3/2 definido como

$$G_{\mu\nu}(p) = \frac{\not{q} + m_i}{q^2 - m_i^2} \left[g_{\mu\nu} - \frac{1}{3} \gamma_\mu \gamma_\nu - \frac{\gamma_\mu q_\nu}{3m_i} + \frac{q_\mu \gamma_\nu}{3m_i} - \frac{2q_\mu p_\nu}{3m_i^2} \right], \tag{142}$$

em que q descreve o momento da ressonância no vértice e m_i é a massa de um bárion B^* de spin-3/2.

Esse propagador possui muitos parâmetros e é interessante escrevê-lo em uma forma mais próxima possível do caso de spin-1/2 para que possamos aplicar a prescrição de Partovi e Lomon. Fazemos então o truque de multiplicar um fator conveniente, assim, se a ressonância esta no canal “1”,

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{\not{q} + m_A}{q^2 - m_A^2 + i\epsilon} \left(g_{\mu\nu} - \frac{1}{3} \gamma_\mu \gamma_\nu - \frac{\gamma_\mu q_\nu}{3m_A} + \frac{q_\mu \gamma_\nu}{3m_A} - \frac{2q_\mu q_\nu}{3m_A^2} \right) \right]^{(1)} \frac{p_1^\mu p_1^\nu}{\sqrt{p_1^2} \sqrt{p_1^2}} \\
= & \left[\frac{\not{q} + m_A}{q^2 - m_A^2 + i\epsilon} \left(p_1^2 - \frac{1}{3} \not{p}_1 \not{p}_1 - \frac{\not{p}_1 q \cdot p_1}{3m_A} + \frac{q \cdot p_1 \not{p}_1}{3m_A} - \frac{2q \cdot p_1 q \cdot p_1}{3m_A^2} \right) \right]^{(1)} \frac{1}{m_1^2} \\
= & \left[\frac{\frac{P}{2} + \not{k} + m_A}{\left(\frac{P}{2} + k\right)^2 - m_A^2 + i\epsilon} \frac{1}{m_1^2} \left(m_1^2 - \frac{m_1^2}{3} - \frac{2(p_1 + k)p_1(p_1 + k)p_1}{3m_A^2} \right) \right]^{(1)} \\
= & \left[\frac{\frac{P}{2} + \not{k} + m_A}{\left(\frac{P}{2} + k\right)^2 - m_A^2 + i\epsilon} \frac{1}{m_1^2} \left(m_1^2 - \frac{m_1^2}{3} - \frac{2m_1^2 s}{3m_A^2} \right) \right]^{(1)} \\
= & \left[\frac{\frac{P}{2} + \not{k} + m_A}{\left(\frac{P}{2} + k\right)^2 - m_A^2 + i\epsilon} \frac{2}{3} \left(1 - \frac{W^2}{m_A^2} \right) \right]^{(1)}. \tag{143}
\end{aligned}$$

Para o canal “2”, procedemos de forma similar

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{\not{q} + m_B}{q^2 - m_B^2 + i\epsilon} \left(g_{\mu\nu} - \frac{1}{3} \gamma_\mu \gamma_\nu - \frac{\gamma_\mu q_\nu}{3m_B} + \frac{q_\mu \gamma_\nu}{3m_B} - \frac{2q_\mu q_\nu}{3m_B^2} \right) \right]^{(2)} \frac{p_2^\mu p_2^\nu}{\sqrt{p_2^2} \sqrt{p_2^2}} \\
= & \left[\frac{\frac{P}{2} - \not{k} + m_B}{\left(\frac{P}{2} - k\right)^2 - m_B^2 + i\epsilon} \frac{1}{m_2^2} \left(m_2^2 - \frac{m_2^2}{3} - \frac{2(p_2 - k)p_2(p_2 - k)p_2}{3m_B^2} \right) \right]^{(2)} \\
= & \left[\frac{\frac{P}{2} - \not{k} + m_B}{\left(\frac{P}{2} - k\right)^2 - m_B^2 + i\epsilon} \frac{1}{m_2^2} \left(m_2^2 - \frac{m_2^2}{3} - \frac{2m_2^2 u}{3m_B^2} \right) \right]^{(2)} \\
= & \left[\frac{\frac{P}{2} - \not{k} + m_B}{\left(\frac{P}{2} - k\right)^2 - m_B^2 + i\epsilon} \frac{2}{3} \left(1 - \frac{z^2}{m_B^2} \right) \right]^{(2)}. \tag{144}
\end{aligned}$$

Observando (143) e (144), nota-se que o propagadores têm a mesma forma dos propagadores de spin-1/2 multiplicados por um fator que não interfere no espaço de espiniores, atuando somente como constantes de correção. Portanto o procedimentos feito anteriormente para o caso spin-1/2, pode ser feito para spin-3/2.

Por conveniência escrevemos em uma única expressão o potencial considerando ressonâncias de spin 1/2 e 3/2 definindo o parâmetro ζ

$$\zeta = \begin{cases} 1, & spin = \frac{1}{2}, \\ \frac{4}{9} \left(1 - \frac{W^2}{m_A^2} \right) \left(1 - \frac{z^2}{m_B^2} \right), & spin = \frac{3}{2}, \text{ canais 1 e 2,} \\ \frac{2}{3} \left(1 - \frac{W^2}{m_A^2} \right), & spin = \frac{3}{2}, \text{ canal 1,} \\ \frac{2}{3} \left(1 - \frac{z^2}{m_B^2} \right), & spin = \frac{3}{2}, \text{ canal 2.} \end{cases} \tag{145}$$

Na forma geral temos que

$$g(k|s) = \pi\zeta \frac{(E_1 + E_2)_{(\vec{k})}}{E_{A(\vec{k})}E_{B(\vec{k})}} \frac{[k + m_A]^{(1)}[-k + m_B]^{(2)}}{(E_1 + E_2)_{(\vec{p})}^2 - (E_1 + E_2)_{(\vec{k})}^2 - i\epsilon}, \quad (146)$$

então a igualdade (126) é reescrita como

$$\begin{aligned} & V(\vec{l}', \vec{l}|W) + \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} V(\vec{l}', \vec{k}|W) \frac{2\mu}{\vec{p}^2 - \vec{k}^2 + i\epsilon} \bar{T}(\vec{k}, \vec{l}|W) \\ &= \frac{\alpha}{4\mu W} \mathcal{V}(\vec{l}', \vec{l}|W) \\ &+ \frac{\alpha}{4\mu W} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \mathcal{V}(\vec{l}', \vec{k}|W) \frac{(m_A + m_1)(m_B + m_2)(E_1 + E_2)_{(\vec{k})}}{64m_1m_2\mu E_{A(\vec{k})}E_{B(\vec{k})}} \frac{2\zeta\mu}{\vec{p}^2 - \vec{k}^2 + i\epsilon} T(\vec{k}, \vec{l}|W), \end{aligned} \quad (147)$$

o novo valor de α fica

$$\alpha = \frac{\zeta(m_A + m_1)(m_B + m_2)(E_1 + E_2)_{(\vec{k})}^2}{16m_1m_2E_{A(\vec{k})}E_{B(\vec{k})}}. \quad (148)$$

Finalmente o potencial não-relativístico de Partovi e Lomon generalizado para ressonâncias de spin-1/2 e 3/2, é dado por

$$V(\vec{l}', \vec{l}|W) = \sqrt{\frac{\zeta(m_A + 3m_1)(m_B + 3m_2)(E_1 + E_2)_{(\vec{v})}}{256m_1m_2\mu E_{A(\vec{v})}E_{B(\vec{v})}}} \mathcal{V}(\vec{l}', \vec{l}|W) \sqrt{\frac{\zeta(m_A + 3m_1)(m_B + 3m_2)(E_1 + E_2)_{(\vec{l})}}{256m_1m_2\mu E_{A(\vec{l})}E_{B(\vec{l})}}}. \quad (149)$$

Ainda considerando a relação (106), temos que o potencial geral é explicitamente uma função das amplitudes relativísticas T expressa por

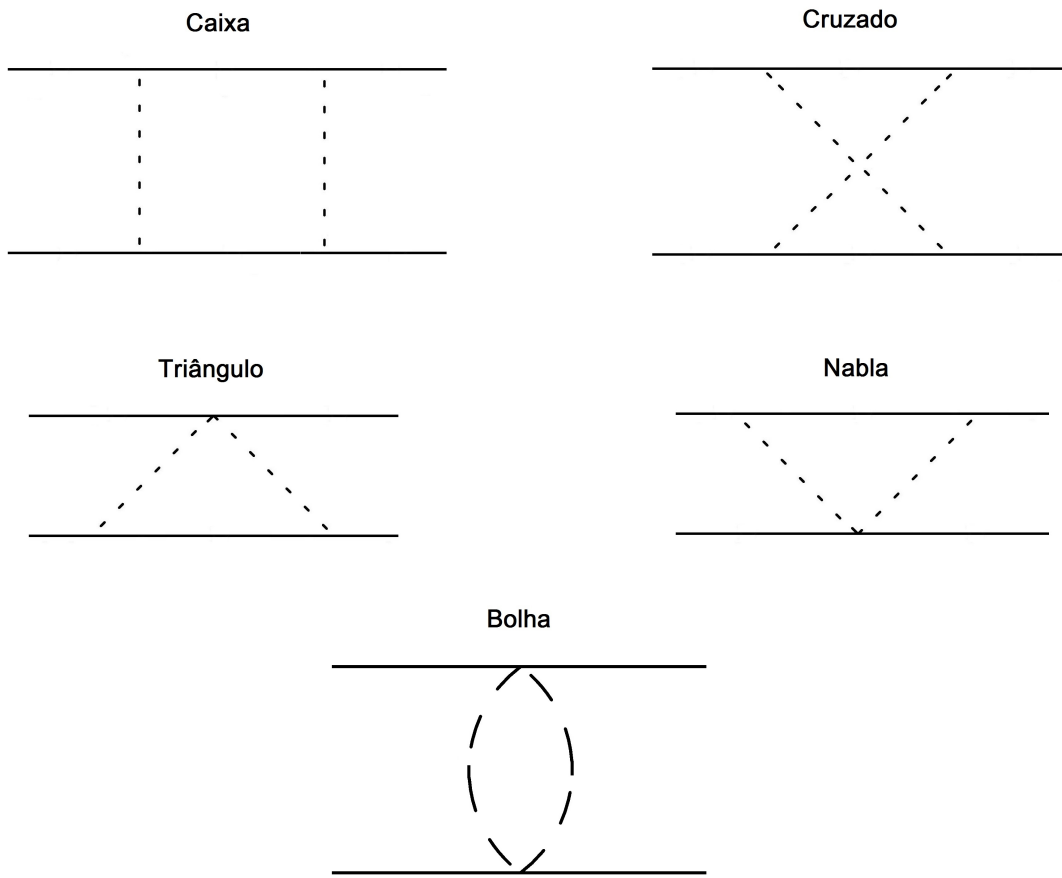
$$V(\vec{l}', \vec{l}|W) = \bar{\Gamma} [T^{(4)} - T^{(2)}gT^{(2)}] \bar{\Gamma}. \quad (150)$$

sendo

$$\bar{\Gamma} = \sqrt{\frac{\zeta(m_A + 3m_1)(m_B + 3m_2)(E_1 + E_2)_{(\vec{v})}}{256m_1m_2\mu E_{A(\vec{v})}E_{B(\vec{v})}}}. \quad (151)$$

A matriz de transição $T^{(4)}$ representa as amplitudes da troca de dois mésons na interação entre dois bárions, que serão calculadas no próximo capítulo para os diagrama tipo caixa (os diagramas do tipo cruzado, triângulo, nabla e bolha (Fig.14) serão calculados no Apêndice J) de acordo com o tipo de méson e ressonâncias. Já $T^{(2)}gT^{(2)}$ representa a troca de um méson em condições especiais, este cálculo esta demonstrado no apêndice E.

Figura 14 - Tipos de Diagramas



4 O POTENCIAL NO ESPAÇO DE CONFIGURAÇÕES

Neste capítulo iremos aplicar as regras de Feynman mostradas no capítulo 2, aquelas relativas aos diagramas de Feynman para troca de dois mésons na interação Bárion-Bárion, sendo essas representadas no capítulo 3 como T ou como $T^{(4)}$.

Começaremos calculando o diagrama para troca de dois mésons do tipo caixa (\square), o qual, servirá como exemplo para o método de cálculo para os demais diagramas de interação Bárion-Bárion por meio de dois mésons, esses cálculos serão explicitamente realizados no Apêndice J.

Em seguida, com uso das componentes spinoriais, calculadas no Apêndice G encontraremos as chamadas funções perfil. De posse das funções perfil no espaço de momento, mostraremos como mudar os operadores espinoriais do espaço de momentos para o espaço de configurações, obteremos os resultados em função da distancia entre os bárions interagentes. As integrais, o último elemento necessário para a transformação do potencial de um espaço em outro serão calculadas no Apêndice D.

Na última seção deste capítulo mostraremos para o potencial da troca de um méson os procedimentos necessários para a transformação dos resultados no espaço de momentos para o espaço de configurações. Os potenciais assim obtidos serão comparados com nosso potencial da troca de dois mésons no capítulo 5.

4.1 CALCULO DOS DIAGRAMAS DE TROCA DE DOIS MÉSONS

Nesta seção como um exemplo vamos calcular o diagrama de 1-loop do tipo "caixa" (\square) considerando somente ressonâncias de spin-1/2 no estado intermediário, uma vez que, os cálculos são bastantes extensos e tomariam muito espaço, considerando ainda que o procedimento de calculo dos outros diagramas é essencialmente o mesmo. Os cálculos dos demais diagramas foram feitos no Apêndice J, onde que consideramos todos os tipos e ressonâncias de spin-1/2 e 3/2.

O cálculo dos diagramas para a troca de dois mésons é feito a partir das amplitudes T_{MB} apresentadas no capítulo 2, da seguinte forma

$$iT_{MMBB} = \frac{1}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m_k^2} \frac{i}{k'^2 - m_k^2} \left(iT_{MB}^{(1)\downarrow} iT_{MB}^{(2)\downarrow} + iT_{MB}^{(1)\uparrow} iT_{MB}^{(2)\uparrow} \right), \quad (152)$$

sendo que os superíndices (1) e (2) se referem aos bárions, para os quais desejamos achar o potencial, sendo definido (1) a "linha" superior dos diagramas na Fig. 15 e (2) a "linha" inferior. \downarrow e \uparrow se referem aos sentidos de entrada e saída dos mésons no primeiro vértice do bárion (1) (Fig. 15) e o fator 1/2 multiplicando a integral é necessário, já que

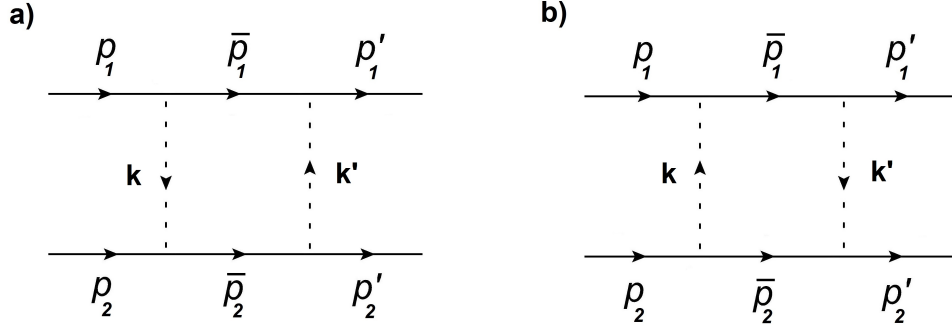


Figura 15 - Diagrama caixa com partícula de spin-1/2 no estado intermediário

estamos considerando ambos os sentidos dos mésons (simetria do diagrama). Consideramos os sentidos dos mésons distintamente porque o caso mais geral deve levar em conta a capacidade do méson estranho K de modificar a estrutura de quarks das ressonâncias de acordo com o sentido em que interage com o vértice.

Consideramos os subíndices 1 e 2 referentes às amplitudes $iT_{\text{MB}}^{(1)\downarrow} iT_{\text{MB}}^{(2)\downarrow}$ e os subíndices 3 e 4 para as amplitudes $iT_{\text{MB}}^{(1)\uparrow} iT_{\text{MB}}^{(2)\uparrow}$ da expressão (152), esses índices se referem às ressonâncias, manifestadas a por meio de suas massas ($\bar{m}_1, \bar{m}_2, \bar{m}_3, \bar{m}_4$) e constantes de acoplamento (g_1, g_2, g_3, g_4). As matrizes de isospin G_n também devem ser consideradas como particulares à cada diagrama de loop.

4.1.1 Diagrama caixa (\square) com ressonâncias de spin-1/2

Para o diagrama caixa (\square) com partículas intermediárias de spin-1/2, temos para o méson saindo do primeiro vértice da interação do bárion (de acordo com a definição de notação) com momento p_1 (\downarrow) (Figura 15a), a conservação dos quadrimomentos

$$\bar{p}_1 = p_1 - k = p_1' - k', \quad (153)$$

$$\bar{p}_2 = p_2 + k = p_2' + k'. \quad (154)$$

As amplitudes são, pelas regras de Feynman apresentadas anteriormente,

$$T_{\text{MB}}^{(1)\downarrow} = \frac{g_1^2}{4m_1^2} \bar{u}(p_1') \left[\not{k}' \gamma_5 G_b^\dagger \right] \left[\frac{\not{p}_1 - \not{k} + \bar{m}_1}{(p_1 - k)^2 - \bar{m}_1^2} \right] \left[(-\not{k}) \gamma_5 G_a \right] u(p_1), \quad (155)$$

$$T_{\text{MB}}^{(2)\downarrow} = \frac{g_2^2}{4m_2^2} \bar{u}(p_2') \left[(-\not{k}') \gamma_5 G_b^\dagger \right] \left[\frac{\not{p}_2 + \not{k} + \bar{m}_2}{(p_2 + k)^2 - \bar{m}_2^2} \right] \left[\not{k} \gamma_5 G_a \right] u(p_2), \quad (156)$$

observando que em (1) temos o canal u e em (2) o canal s .

Escrevendo na forma compacta mais conveniente,

$$T_{\text{MB}}^{(1)\downarrow} = (G_b^\dagger G_a)(A_1^\downarrow + B_1^\downarrow), \quad (157)$$

$$T_{\text{MB}}^{(2)\downarrow} = (G_b^\dagger G_a)(A_2^\downarrow + B_2^\downarrow), \quad (158)$$

sendo as amplitudes A e B conforme (50) e (51),

$$A_1^\downarrow = \frac{g_1^2(m_1 + \bar{m}_1)}{4m_1^2} \left[1 + \frac{\bar{m}_1^2 - m_1^2}{u_1 - \bar{m}_1^2} \right] I^{(1)}, \quad (159)$$

$$B_1^\downarrow = \frac{g_1^2}{8m_1^2} \left[1 + \frac{(\bar{m}_1 + m_1)^2}{u_1 - \bar{m}_1^2} \right] \mathcal{Q}^{(1)}, \quad (160)$$

$$A_2^\downarrow = \frac{g_4^2(m_2 + \bar{m}_2)}{4m_2^2} \left[1 + \frac{\bar{m}_2^2 - m_2^2}{s_2 - \bar{m}_2^2} \right] I^{(2)}, \quad (161)$$

$$B_2^\downarrow = -\frac{g_2^2}{8m_2^2} \left[1 + \frac{(\bar{m}_2 + m_2)^2}{s_2 - \bar{m}_2^2} \right] \mathcal{Q}^{(2)}. \quad (162)$$

Agora para o caso do méson entrando no primeiro vértice (\uparrow) mostrado na Fig. 15b, encontramos

$$\bar{p}_1 = p_1 + k = p'_1 + k', \quad (163)$$

$$\bar{p}_2 = p_2 - k = p'_2 - k'. \quad (164)$$

As amplitudes relativas ao diagrama b) são

$$T_{\text{MB}}^{(1)\uparrow} = \frac{g_3^2}{4m_1^2} \bar{u}(p'_1) \left[(-\not{k}') \gamma_5 G_b^\dagger \right] \left[\frac{\not{p}_1 + \not{k} + \bar{m}_3}{(p_1 + k)^2 - \bar{m}_3^2} \right] \left[\not{k} \gamma_5 G_a \right] u(p_1), \quad (165)$$

$$T_{\text{MB}}^{(2)\uparrow} = \frac{g_4^2}{4m_2^2} \bar{u}(p'_2) \left[\not{k}' \gamma_5 G_b^\dagger \right] \left[\frac{\not{p}_2 - \not{k} + \bar{m}_4}{(p_2 - k)^2 - \bar{m}_4^2} \right] \left[(-\not{k}) \gamma_5 G_a \right] u(p_2). \quad (166)$$

que agora em (1) temos o canal s e em (2) o canal u .

Novamente podem ser escritos na forma compacta

$$T_{\text{MB}}^{(1)\uparrow} = (G_b^\dagger G_a)(A_1^\uparrow + B_1^\uparrow), \quad (167)$$

$$T_{\text{MB}}^{(2)\uparrow} = (G_b^\dagger G_a)(A_2^\uparrow + B_2^\uparrow), \quad (168)$$

em que

$$A_1^\uparrow = \frac{g_3^2(m_1 + \bar{m}_3)}{4m_1^2} \left[1 + \frac{\bar{m}_3^2 - m_1^2}{s_1 - \bar{m}_3^2} \right] I^{(1)}, \quad (169)$$

$$B_1^\uparrow = -\frac{g_3^2}{4m_1} \left[1 + \frac{(\bar{m}_3 + m_1)^2}{s_1 - \bar{m}_3^2} \right] \mathcal{Q}^{(1)}, \quad (170)$$

$$A_2^\uparrow = \frac{g_4^2(m_2 + \bar{m}_4)}{2m_2} \left[1 + \frac{\bar{m}_4^2 - m_2^2}{u_2 - \bar{m}_4^2} \right] I^{(2)}, \quad (171)$$

$$B_2^\uparrow = \frac{g_4^2}{4m_2} \left[1 + \frac{(\bar{m}_4 + m_2)^2}{u_2 - \bar{m}_4^2} \right] \mathcal{Q}^{(2)}. \quad (172)$$

Da relação (152)

$$iT_{\text{MM}BB} = \frac{1}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m_k^2} \frac{i}{k'^2 - m_k^2} \left(iT_{\text{MB}}^{(1)\downarrow} iT_{\text{MB}}^{(2)\downarrow} + iT_{\text{MB}}^{(1)\uparrow} iT_{\text{MB}}^{(2)\uparrow} \right),$$

reescrevemos explicitamente como

$$\begin{aligned} iT_{\text{MM}BB}^{\square} &= \frac{1}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \vec{G}_1 \vec{G}_2 \left[(A_1^\downarrow + B_1^\downarrow)(A_2^\downarrow + B_2^\downarrow) + (A_1^\uparrow + B_1^\uparrow)(A_2^\uparrow + B_2^\uparrow) \right] \frac{1}{k^2 - m_k^2} \frac{1}{k'^2 - m_k^2}, \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\vec{G}_1 \vec{G}_2}{(k^2 - m_k^2)(k'^2 - m_k^2)} \left[(A_1 A_2 + A_1 B_2 + B_1 A_2 + B_1 B_2)^\downarrow \right. \\ &\quad \left. + (A_1 A_2 + A_1 B_2 + B_1 A_2 + B_1 B_2)^\uparrow \right], \end{aligned} \quad (173)$$

e assim chegamos a

$$\begin{aligned} iT_{\text{MM}BB}^{\square} &= \frac{1}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\vec{G}_1 \vec{G}_2}{(k^2 - m_k^2)(k'^2 - m_k^2)} \left\{ \right. \\ &\quad \left(\frac{g_1^2 g_2^2 (m_1 + \bar{m}_1)}{4m_1^2} \left[1 + \frac{\bar{m}_1^2 - m_1^2}{u_1 - \bar{m}_1^2} \right] \frac{(m_2 + \bar{m}_2)}{4m_2^2} \left[1 + \frac{\bar{m}_2^2 - m_2^2}{s_2 - \bar{m}_2^2} \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{g_3^2 g_4^2 (m_1 + \bar{m}_3)}{4m_1^2} \left[1 + \frac{\bar{m}_3^2 - m_1^2}{s_1 - \bar{m}_3^2} \right] \frac{(m_2 + \bar{m}_4)}{4m_2^2} \left[1 + \frac{\bar{m}_4^2 - m_2^2}{u_2 - \bar{m}_4^2} \right] \right) I^{(1)} I^{(2)} \\ &\quad + \left(- \frac{g_1^2 g_2^2 (m_1 + \bar{m}_1)}{4m_1^2} \left[1 + \frac{\bar{m}_1^2 - m_1^2}{u_1 - \bar{m}_1^2} \right] \frac{1}{8m_2^2} \left[1 + \frac{(\bar{m}_2 + m_2)^2}{s_2 - \bar{m}_2^2} \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{g_3^2 (m_1 + \bar{m}_3)}{4m_1^2} \left[1 + \frac{\bar{m}_3^2 - m_1^2}{s_1 - \bar{m}_3^2} \right] \frac{g_4^2}{8m_2^2} \left[1 + \frac{(\bar{m}_4 + m_2)^2}{u_2 - \bar{m}_4^2} \right] \right) I^{(1)} \mathcal{Q}^{(2)} \\ &\quad + \left(\frac{g_1^2}{8m_1^2} \left[1 + \frac{(\bar{m}_1 + m_1)^2}{u_1 - \bar{m}_1^2} \right] \frac{g_2^2 (m_2 + \bar{m}_2)}{4m_2^2} \left[1 + \frac{\bar{m}_2^2 - m_2^2}{s_2 - \bar{m}_2^2} \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{-g_3^2}{8m_1^2} \left[1 + \frac{(\bar{m}_3 + m_1)^2}{s_1 - \bar{m}_3^2} \right] \frac{g_4^2 (m_2 + \bar{m}_4)}{4m_2^2} \left[1 + \frac{\bar{m}_4^2 - m_2^2}{u_2 - \bar{m}_4^2} \right] \right) \mathcal{Q}^{(1)} I^{(2)} \\ &\quad \left. + \left(\frac{g_1^2}{8m_1^2} \left[1 + \frac{(\bar{m}_1 + m_1)^2}{u_1 - \bar{m}_1^2} \right] \frac{-g_2^2}{8m_2^2} \left[1 + \frac{(\bar{m}_2 + m_2)^2}{s_2 - \bar{m}_2^2} \right] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{-g_3^2}{8m_1^2} \left[1 + \frac{(\bar{m}_3 + m_1)^2}{s_1 - \bar{m}_3^2} \right] \frac{g_4^2}{8m_2^2} \left[1 + \frac{(\bar{m}_4 + m_2)^2}{u_2 - \bar{m}_4^2} \right] \right) \mathcal{Q}^{(1)} \mathcal{Q}^{(2)} \right\}, \end{aligned} \quad (174)$$

com $\vec{G}_1 \vec{G}_2 = (G_b^\dagger G_a)(G_b^\dagger G_a)$.

Escrevendo agora a amplitude $iT_{\text{MM}BB}^{\square}$ em termos de novas amplitudes \aleph , de modo a deixar explícitos os espaços de spin e isospin, teremos

$$iT_{\text{MM}BB}^{\square} = \frac{(\vec{G}_1 \vec{G}_2)}{2(4m_1 m_2)^2} \left\{ \aleph_{AA} \bar{u}_1 u_1 \bar{u}_2 u_2 + \aleph_{AB}^\nu \bar{u}_1 u_1 \bar{u}_2 \gamma_\nu u_2 + \aleph_{BA}^\mu \bar{u}_1 \gamma_\mu u_1 \bar{u}_2 u_2 + \aleph_{BB}^{\mu\nu} \bar{u}_1 \gamma_\mu u_1 \bar{u}_2 \gamma_\nu u_2 \right\}. \quad (175)$$

Usamos a notação $\aleph_{..}$ para separar as amplitudes proporcionais aos estados de spin dos bárions externos, com os subíndices representando as amplitudes A_1, B_1 , etc. Os

estados de spin são descritos pelos produtos de espinores $\bar{u}_i u_i$ e $\bar{u}_i \gamma_\alpha u_i$, i e α representam índices genéricos.

As amplitudes \aleph são, para \aleph_{AA}

$$\begin{aligned} \aleph_{AA} &= \int \frac{d^4 Q}{(2\pi)^4} [\dots] g_1^2 g_2^2 (m_1 + \bar{m}_1) (m_2 + \bar{m}_2) \left[1 + \frac{\bar{m}_1^2 - m_1^2}{u_1 - \bar{m}_1^2} \right] \left[1 + \frac{\bar{m}_2^2 - m_2^2}{s_2 - \bar{m}_2^2} \right] \\ &+ \int \frac{d^4 Q}{(2\pi)^4} [\dots] g_3^2 g_4^2 (m_1 + \bar{m}_3) (m_2 + \bar{m}_4) \left[1 + \frac{\bar{m}_3^2 - m_1^2}{s_1 - \bar{m}_3^2} \right] \left[1 + \frac{\bar{m}_4^2 - m_2^2}{u_2 - \bar{m}_4^2} \right], \end{aligned} \quad (176)$$

$$\begin{aligned} \aleph_{AA} &= g_1^2 g_2^2 (m_1 + \bar{m}_1) (m_2 + \bar{m}_2) \int \frac{d^4 Q}{(2\pi)^4} [\dots] \\ &\times \left[1 + \frac{\bar{m}_1^2 - m_1^2}{u_1 - \bar{m}_1^2} + \frac{\bar{m}_2^2 - m_2^2}{s_2 - \bar{m}_2^2} + \frac{(\bar{m}_1^2 - m_1^2)(\bar{m}_2^2 - m_2^2)}{(u_1 - \bar{m}_1^2)(s_2 - \bar{m}_2^2)} \right] \\ &+ g_3^2 g_4^2 (m_1 + \bar{m}_3) (m_2 + \bar{m}_4) \int \frac{d^4 Q}{(2\pi)^4} [\dots] \\ &\times \left[1 + \frac{\bar{m}_3^2 - m_1^2}{s_1 - \bar{m}_3^2} + \frac{\bar{m}_4^2 - m_2^2}{u_2 - \bar{m}_4^2} + \frac{(\bar{m}_3^2 - m_1^2)(\bar{m}_4^2 - m_2^2)}{(s_1 - \bar{m}_3^2)(u_2 - \bar{m}_4^2)} \right], \end{aligned} \quad (177)$$

para \aleph_{AB}^ν ,

$$\begin{aligned} \aleph_{AB}^\nu &= \int \frac{d^4 Q}{(2\pi)^4} [\dots] \left(-\frac{g_1^2 g_2^2}{2} (m_1 + \bar{m}_1) \left[1 + \frac{\bar{m}_1^2 - m_1^2}{u_1 - \bar{m}_1^2} \right] \left[1 + \frac{(\bar{m}_2 + m_2)^2}{s_2 - \bar{m}_2^2} \right] \right. \\ &\left. + \frac{g_3^2 g_4^2}{2} (m_1 + \bar{m}_3) \left[1 + \frac{\bar{m}_3^2 - m_1^2}{s_1 - \bar{m}_3^2} \right] \left[1 + \frac{(\bar{m}_4 + m_2)^2}{u_2 - \bar{m}_4^2} \right] \right) Q^\nu, \\ \aleph_{AB}^\nu &= -\frac{g_1^2 g_2^2}{2} (m_1 + \bar{m}_1) \int \frac{d^4 Q}{(2\pi)^4} [\dots] \left[1 + \frac{\bar{m}_1^2 - m_1^2}{u_1 - \bar{m}_1^2} + \frac{(\bar{m}_2 + m_2)^2}{s_2 - \bar{m}_2^2} + \frac{(\bar{m}_1^2 - m_1^2)(\bar{m}_2 + m_2)^2}{(u_1 - \bar{m}_1^2)(s_2 - \bar{m}_2^2)} \right] Q^\nu \\ &+ \frac{g_3^2 g_4^2}{2} (m_1 + \bar{m}_3) \int \frac{d^4 Q}{(2\pi)^4} [\dots] \left[1 + \frac{\bar{m}_3^2 - m_1^2}{s_1 - \bar{m}_3^2} + \frac{(\bar{m}_4 + m_2)^2}{u_2 - \bar{m}_4^2} + \frac{(\bar{m}_3^2 - m_1^2)(\bar{m}_4 + m_2)^2}{(s_1 - \bar{m}_3^2)(u_2 - \bar{m}_4^2)} \right] Q^\nu, \end{aligned} \quad (178)$$

para \aleph_{BA}^μ ,

$$\begin{aligned} \aleph_{BA}^\mu &= \int \frac{d^4 Q}{(2\pi)^4} [\dots] \left(\frac{g_1^2 g_2^2}{2} (m_2 + \bar{m}_2) \left[1 + \frac{(\bar{m}_1 + m_1)^2}{u_1 - \bar{m}_1^2} \right] \left[1 + \frac{\bar{m}_2^2 - m_2^2}{s_2 - \bar{m}_2^2} \right] \right. \\ &\left. - \frac{g_3^2 g_4^2}{2} (m_2 + \bar{m}_4) \left[1 + \frac{(\bar{m}_3 + m_1)^2}{s_1 - \bar{m}_3^2} \right] \left[1 + \frac{\bar{m}_4^2 - m_2^2}{u_2 - \bar{m}_4^2} \right] \right) Q^\mu, \\ \aleph_{BA}^\mu &= \frac{g_1^2 g_2^2}{2} (m_2 + \bar{m}_2) \int \frac{d^4 Q}{(2\pi)^4} [\dots] \left[1 + \frac{(\bar{m}_1 + m_1)^2}{u_1 - \bar{m}_1^2} + \frac{\bar{m}_2^2 - m_2^2}{s_2 - \bar{m}_2^2} + \frac{(\bar{m}_1 + m_1)^2(\bar{m}_2^2 - m_2^2)}{(u_1 - \bar{m}_1^2)(s_2 - \bar{m}_2^2)} \right] Q^\mu \\ &- \frac{g_3^2 g_4^2}{2} (m_2 + \bar{m}_4) \int \frac{d^4 Q}{(2\pi)^4} [\dots] \left[1 + \frac{(\bar{m}_3 + m_1)^2}{s_1 - \bar{m}_3^2} + \frac{\bar{m}_4^2 - m_2^2}{u_2 - \bar{m}_4^2} + \frac{(\bar{m}_3 + m_1)^2(\bar{m}_4^2 - m_2^2)}{(s_1 - \bar{m}_3^2)(u_2 - \bar{m}_4^2)} \right] Q^\mu, \end{aligned} \quad (179)$$

e finalmente para $\aleph_{BB}^{\mu\nu}$,

$$\begin{aligned}\aleph_{BB}^{\mu\nu} &= \left(-\frac{g_1^2 g_2^2}{4} \left[1 + \frac{(\bar{m}_1 + m_1)^2}{u_1 - \bar{m}_1^2} \right] \left[1 + \frac{(\bar{m}_2 + m_2)^2}{s_2 - \bar{m}_2^2} \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{g_3^2 g_4^2}{4} \left[1 + \frac{(\bar{m}_3 + m_1)^2}{s_1 - \bar{m}_3^2} \right] \left[1 + \frac{(\bar{m}_4 + m_2)^2}{u_2 - \bar{m}_4^2} \right] \right) Q^\mu Q^\nu, \\ \aleph_{BB}^{\mu\nu} &= -\frac{g_1^2 g_2^2}{4} \int \frac{d^4 Q}{(2\pi)^4} [\dots] \left[1 + \frac{(\bar{m}_1 + m_1)^2}{u_1 - \bar{m}_1^2} + \frac{(\bar{m}_2 + m_2)^2}{s_2 - \bar{m}_2^2} + \frac{(\bar{m}_1 + m_1)^2 (\bar{m}_2 + m_2)^2}{(u_1 - \bar{m}_1^2)(s_2 - \bar{m}_2^2)} \right] Q^\mu Q^\nu \\ &\quad - \frac{g_3^2 g_4^2}{4} \int \frac{d^4 Q}{(2\pi)^4} [\dots] \left[1 + \frac{(\bar{m}_3 + m_1)^2}{s_1 - \bar{m}_3^2} + \frac{(\bar{m}_4 + m_2)^2}{u_2 - \bar{m}_4^2} + \frac{(\bar{m}_3 + m_1)^2 (\bar{m}_4 + m_2)^2}{(s_1 - \bar{m}_3^2)(u_2 - \bar{m}_4^2)} \right] Q^\mu Q^\nu.\end{aligned}\tag{180}$$

sendo

$$[\dots] = \frac{1}{[k^2 - m_k^2][k'^2 - m_k^2]},\tag{181}$$

a notação compacta para troca de dois mésons.

As formas explícitas das amplitudes \aleph em (177)-(180), são melhor escritas em termos das integrais de loop I_{cc}^{\dots} , I_{uc}^{\dots} , I_{sc}^{\dots} , I_{su}^{\dots} e I_{us}^{\dots} que são calculadas no Apêndice C. Portanto as amplitudes \aleph ficam determinadas na forma final

$$\begin{aligned}\aleph_{AA} &= g_1^2 g_2^2 (m_1 + \bar{m}_1)(m_2 + \bar{m}_2) \left[I_{cc} + (\bar{m}_1^2 - m_1^2) I_{u_1 c} \right. \\ &\quad \left. + (\bar{m}_2^2 - m_2^2) I_{s_2 c} + (\bar{m}_1^2 - m_1^2)(\bar{m}_2^2 - m_2^2) I_{u_1 s_2} \right] \\ &\quad + g_3^2 g_4^2 (m_1 + \bar{m}_3)(m_2 + \bar{m}_4) \left[I_{cc} + (\bar{m}_3^2 - m_1^2) I_{s_3 c} \right. \\ &\quad \left. + (\bar{m}_4^2 - m_2^2) I_{u_4 c} + (\bar{m}_3^2 - m_1^2)(\bar{m}_4^2 - m_2^2) I_{s_3 u_4} \right],\end{aligned}\tag{182}$$

$$\begin{aligned}\aleph_{AB}^\nu &= -\frac{g_1^2 g_2^2}{2} (m_1 + \bar{m}_1) \left[I_{cc}^\nu + (\bar{m}_1^2 - m_1^2) I_{u_1 c}^\nu + (m_2 + \bar{m}_2)^2 I_{s_2 c}^\nu + (\bar{m}_1^2 - m_1^2)(m_2 + \bar{m}_2)^2 I_{u_1 s_2}^\nu \right] \\ &\quad + \frac{g_3^2 g_4^2}{2} (m_1 + \bar{m}_3) \left[I_{cc}^\nu + (\bar{m}_3^2 - m_1^2) I_{s_3 c}^\nu + (m_2 + \bar{m}_4)^2 I_{u_4 c}^\nu + (\bar{m}_3^2 - m_1^2)(m_2 + \bar{m}_4)^2 I_{s_3 u_4}^\nu \right],\end{aligned}\tag{183}$$

$$\begin{aligned}\aleph_{BA}^\mu &= \frac{g_1^2 g_2^2}{2} (m_2 + \bar{m}_2) \left[I_{cc}^\mu + (\bar{m}_1 + m_1)^2 I_{u_1 c}^\mu + (\bar{m}_2^2 - m_2^2) I_{s_2 c}^\mu + (m_1 + \bar{m}_1)^2 (\bar{m}_2^2 - m_2^2) I_{u_1 s_2}^\mu \right] \\ &\quad - \frac{g_3^2 g_4^2}{2} (m_2 + \bar{m}_4) \left[I_{cc}^\mu + (\bar{m}_3 + m_1)^2 I_{s_3 c}^\mu + (\bar{m}_4^2 - m_2^2) I_{u_4 c}^\mu + (m_1 + \bar{m}_3)^2 (\bar{m}_4^2 - m_2^2) I_{s_3 u_4}^\mu \right],\end{aligned}\tag{184}$$

$$\begin{aligned}
\aleph_{BB}^{\mu\nu} = & -\frac{g_1^2 g_2^2}{4} \left[I_{cc}^{\mu\nu} + (\bar{m}_1 + m_1)^2 I_{u_1c}^{\mu\nu} + (m_2 + \bar{m}_2)^2 I_{s_2c}^{\mu\nu} + (m_1 + \bar{m}_1)^2 (m_2 + \bar{m}_2)^2 I_{u_1s_2}^{\mu\nu} \right] \\
& -\frac{g_3^2 g_4^2}{4} \left[I_{cc}^{\mu\nu} + (\bar{m}_3 + m_1)^2 I_{s_3c}^{\mu\nu} + (m_2 + \bar{m}_4)^2 I_{u_4c}^{\mu\nu} + (m_1 + \bar{m}_3)^2 (m_2 + \bar{m}_4)^2 I_{s_3u_4}^{\mu\nu} \right].
\end{aligned} \tag{185}$$

Devemos ainda observar que as integrais de loop apresentam divergências. Essas integrais são regularizadas pelo método da regularização dimensional, conforme apresentado no Apêndice C

Encontradas as amplitudes \aleph , precisamos agora calcular essas amplitudes juntamente com os espinores, e então determinar a amplitude T final com seus componentes de spin (operadores no espaço de spin) separados.

4.1.1.1 As componentes dos operadores de spin Ω

Ao efetuarmos os cálculos, encontramos diversas possibilidades de produto de espinores e matrizes. Definimos então as reduções de espinores calculadas no Apêndice D da seguinte maneira

$$|\bar{u}_1 u_1][\bar{u}_2 u_2] = a + b\vec{\Omega}_{LS+} + c\vec{\Omega}_{LS-}, \tag{186}$$

$$|\bar{u}_1 \gamma_\mu u_1][\bar{u}_2 u_2]W^\mu = \bar{w}_1 + w_{1+}\vec{\Omega}_{LS+} + w_{1-}\vec{\Omega}_{LS-}, \tag{187}$$

$$|\bar{u}_1 u_1][\bar{u}_2 \gamma_\nu u_2]W^\nu = \bar{w}_2 + w_{2+}\vec{\Omega}_{LS+} + w_{2-}\vec{\Omega}_{LS-}, \tag{188}$$

$$|\bar{u}_1 \gamma_\mu u_1][\bar{u}_2 u_2]z^\mu = \bar{z}_1 + z_{1+}\vec{\Omega}_{LS+} + z_{1-}\vec{\Omega}_{LS-}, \tag{189}$$

$$|\bar{u}_1 u_1][\bar{u}_2 \gamma_\nu u_2]z^\nu = \bar{z}_2 + z_{2+}\vec{\Omega}_{LS+} + z_{2-}\vec{\Omega}_{LS-}, \tag{190}$$

$$|\bar{u}_1 \gamma_\mu u_1][\bar{u}_2 \gamma_\nu u_2]W^\mu W^\nu = w\bar{w} + ww_+\vec{\Omega}_{LS+} + ww_-\vec{\Omega}_{LS-}, \tag{191}$$

$$|\bar{u}_1 \gamma_\mu u_1][\bar{u}_2 \gamma_\nu u_2]W^\mu z^\nu = \bar{w}z + wz_+\vec{\Omega}_{LS+} + wz_-\vec{\Omega}_{LS-}, \tag{192}$$

$$|\bar{u}_1 \gamma_\mu u_1][\bar{u}_2 \gamma_\nu u_2]z^\mu W^\nu = z\bar{w} + zw_+\vec{\Omega}_{LS+} + zw_-\vec{\Omega}_{LS-}, \tag{193}$$

$$|\bar{u}_1 \gamma_\mu u_1][\bar{u}_2 \gamma_\nu u_2]g^{\mu\nu} = \bar{g} + g_+\vec{\Omega}_{LS+} + g_-\vec{\Omega}_{LS-} - \frac{2}{3}\vec{\Omega}_{SS} - \frac{1}{3}\vec{\Omega}_T, \tag{194}$$

$$|\bar{u}_1 \gamma_\mu u_1][\bar{u}_2 \gamma_\nu u_2]z^\mu z^\nu = \bar{z}z + zz_+\vec{\Omega}_{LS+} + zz_-\vec{\Omega}_{LS-}, \tag{195}$$

$$|\bar{u}_1 \gamma_\mu u_1][\bar{u}_2 \gamma_\nu u_2]q^\mu q^\nu = 0, \tag{196}$$

$$|\bar{u}_1 \gamma_\mu u_1][\bar{u}_2 u_2]q^\mu = 0, \tag{197}$$

$$|\bar{u}_1 u_1][\bar{u}_2 \gamma_\nu u_2]q^\nu = 0. \tag{198}$$

Como podemos observar estas quantidades foram estabelecidas de acordo com as definições estabelecidas nas seções 1.1 e 2.1, e também no Apêndice G. Para os operadores de spin Ω , que é uma notação usual para escrever as componentes das forças nucleares, temos que $\vec{\Omega}_C = \vec{1}$ (matriz unitária no espaço de spin) e por isso não o escrevemos explicitamente

nos primeiros elementos das somas anteriores.

Para o primeiro produto de espinores da relação (175), com as amplitudes da redução de espinorial definidas, temos

$$\begin{aligned}
[\bar{u}_1 u_1 \bar{u}_2 u_2] \aleph_{AA} &= g_1^2 g_2^2 (m_1 + \bar{m}_1)(m_2 + \bar{m}_2) \frac{i}{(4\pi)^2} \left[\Pi_{cc}^{(000)} + (\bar{m}_1^2 - m_1^2) \Pi_{u_1 c}^{(000)} \right. \\
&\quad \left. + (\bar{m}_2^2 - m_2^2) \Pi_{s_2 c}^{(000)} + (\bar{m}_1^2 - m_1^2)(\bar{m}_2^2 - m_2^2) \Pi_{u_1 s_2}^{(000)} \right] \left\{ a + b \vec{\Omega}_{LS+} + c \vec{\Omega}_{LS-} \right\} \\
&\quad + g_3^2 g_4^2 (m_1 + \bar{m}_3)(m_2 + \bar{m}_4) \frac{i}{(4\pi)^2} \left[\Pi_{cc}^{(000)} + (\bar{m}_3^2 - m_1^2) \Pi_{s_3 c}^{(000)} \right. \\
&\quad \left. + (\bar{m}_4^2 - m_2^2) \Pi_{u_4 c}^{(000)} + (\bar{m}_3^2 - m_1^2)(\bar{m}_4^2 - m_2^2) \Pi_{s_3 u_4}^{(000)} \right] \left\{ a + b \vec{\Omega}_{LS+} + c \vec{\Omega}_{LS-} \right\},
\end{aligned} \tag{199}$$

sendo que as integrais Π_{\dots} estão definidas no Apêndice C.

Separando em função dos operadores Ω ,

$$[\bar{u}_1 u_1 \bar{u}_2 u_2] \aleph_{AA} = \mathcal{T}_{AA}^C \vec{\Omega}_C + \mathcal{T}_{AA}^{LS+} \vec{\Omega}_{LS+} + \mathcal{T}_{AA}^{LS-} \vec{\Omega}_{LS-} \tag{200}$$

em que \mathcal{T}_{\dots} são chamadas de função perfil do potencial. Será a partir dessas amplitudes que encontraremos as amplitudes T , que por sua vez, determinarão o potencial V .

Comparando (200) com a expressão (199) determinamos as funções perfil \mathcal{T}_{AA}

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{AA}^C &= \frac{ig_1^2 g_2^2}{(4\pi)^2} (m_1 + \bar{m}_1)(m_2 + \bar{m}_2) a \left[\Pi_{cc}^{(000)} + (\bar{m}_1^2 - m_1^2) \Pi_{u_1 c}^{(000)} \right. \\
&\quad \left. + (\bar{m}_2^2 - m_2^2) \Pi_{s_2 c}^{(000)} + (\bar{m}_1^2 - m_1^2)(\bar{m}_2^2 - m_2^2) \Pi_{u_1 s_2}^{(000)} \right] \\
&\quad + \frac{ig_3^2 g_4^2}{(4\pi)^2} (m_1 + \bar{m}_3)(m_2 + \bar{m}_4) a \left[\Pi_{cc}^{(000)} + (\bar{m}_3^2 - m_1^2) \Pi_{s_3 c}^{(000)} \right. \\
&\quad \left. + (\bar{m}_4^2 - m_2^2) \Pi_{u_4 c}^{(000)} + (\bar{m}_3^2 - m_1^2)(\bar{m}_4^2 - m_2^2) \Pi_{s_3 u_4}^{(000)} \right],
\end{aligned} \tag{201}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{AA}^{LS+} &= -2 \frac{ig_1^2 g_2^2}{(4\pi)^2} (m_1 + \bar{m}_1)(m_2 + \bar{m}_2) b \\
&\quad \times \left[\Pi_{cc}^{(000)} + (\bar{m}_1^2 - m_1^2) \Pi_{u_1 c}^{(000)} + (\bar{m}_2^2 - m_2^2) \Pi_{s_2 c}^{(000)} + (\bar{m}_1^2 - m_1^2)(\bar{m}_2^2 - m_2^2) \Pi_{u_1 s_2}^{(000)} \right] \\
&\quad - 2 \frac{ig_3^2 g_4^2}{(4\pi)^2} (m_1 + \bar{m}_3)(m_2 + \bar{m}_4) b \\
&\quad \times \left[\Pi_{cc}^{(000)} + (\bar{m}_3^2 - m_1^2) \Pi_{s_3 c}^{(000)} + (\bar{m}_4^2 - m_2^2) \Pi_{u_4 c}^{(000)} + (\bar{m}_3^2 - m_1^2)(\bar{m}_4^2 - m_2^2) \Pi_{s_3 u_4}^{(000)} \right],
\end{aligned} \tag{202}$$

e

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{AA}^{LS-} &= 2 \frac{ig_1^2 g_2^2}{(4\pi)^2} (m_1 + \bar{m}_1)(m_2 + \bar{m}_2)c \\
&\times \left[\Pi_{cc}^{(000)} + (\bar{m}_1^2 - m_1^2)\Pi_{u_1c}^{(000)} + (\bar{m}_2^2 - m_2^2)\Pi_{s_2c}^{(000)} + (\bar{m}_1^2 - m_1^2)(\bar{m}_2^2 - m_2^2)\Pi_{u_1s_2}^{(000)} \right] \\
&+ 2 \frac{ig_3^2 g_4^2}{(4\pi)^2} (m_1 + \bar{m}_3)(m_2 + \bar{m}_4)c \\
&\times \left[\Pi_{cc}^{(000)} + (\bar{m}_3^2 - m_1^2)\Pi_{s_3c}^{(000)} + (\bar{m}_4^2 - m_2^2)\Pi_{u_4c}^{(000)} + (\bar{m}_3^2 - m_1^2)(\bar{m}_4^2 - m_2^2)\Pi_{s_3u_4}^{(000)} \right].
\end{aligned} \tag{203}$$

Procedendo da mesma maneira para \aleph_{AB}^ν

$$\begin{aligned}
[\bar{u}_1 u_1 \bar{u}_2 \gamma_\nu u_2] \aleph_{AB}^\nu &= -i \frac{g_1^2 g_2^2}{2(4\pi)^2} (m_1 + \bar{m}_1) \left[0 \right. \\
&+ (\bar{m}_1^2 - m_1^2) [\bar{w}_2 + \bar{z}_2 + (w_{2+} + z_{2+})\vec{\Omega}_{LS+} + (w_{2-} + z_{2-})\vec{\Omega}_{LS-}] (-\Pi_{u_1c}^{(010)}) \\
&+ (m_2 + \bar{m}_2)^2 [\bar{w}_2 - \bar{z}_2 + (w_{2+} - z_{2+})\vec{\Omega}_{LS+} + (w_{2-} - z_{2-})\vec{\Omega}_{LS-}] \Pi_{s_2c}^{(010)} \\
&- (\bar{m}_1^2 - m_1^2)(m_2 + \bar{m}_2)^2 [-\bar{w}_2 \Pi_{u_1s_2}^{(010)} - \bar{z}_2 \Pi_{u_1s_2}^{(001)} \\
&- (z_{2+} \Pi_{u_1s_2}^{(001)} + w_{2+} \Pi_{u_1s_2}^{(010)})\vec{\Omega}_{LS+} - (z_{2-} \Pi_{u_1s_2}^{(001)} + w_{2-} \Pi_{u_1s_2}^{(010)})\vec{\Omega}_{LS-}] \left. \right] \\
&+ i \frac{g_3^2 g_4^2}{2(4\pi)^2} (m_1 + \bar{m}_3) \left[0 \right. \\
&+ (\bar{m}_3^2 - m_1^2) [\bar{w}_2 + \bar{z}_2 + (w_{2+} + z_{2+})\vec{\Omega}_{LS+} + (w_{2-} + z_{2-})\vec{\Omega}_{LS-}] \Pi_{s_3c}^{(010)} \\
&+ (m_2 + \bar{m}_4)^2 [\bar{w}_2 - \bar{z}_2 + (w_{2+} - z_{2+})\vec{\Omega}_{LS+} + (w_{2-} - z_{2-})\vec{\Omega}_{LS-}] (-\Pi_{u_4c}^{(010)}) \\
&+ (\bar{m}_3^2 - m_1^2)(m_2 + \bar{m}_4)^2 [\bar{w}_2 \Pi_{s_3u_4}^{(010)} + \bar{z}_2 \Pi_{s_3u_4}^{(001)} \\
&+ (z_{2+} \Pi_{s_3u_4}^{(001)} + w_{2+} \Pi_{s_3u_4}^{(010)})\vec{\Omega}_{LS+} + (z_{2-} \Pi_{s_3u_4}^{(001)} + w_{2-} \Pi_{s_3u_4}^{(010)})\vec{\Omega}_{LS-}] \left. \right],
\end{aligned} \tag{204}$$

temos as funções \mathcal{T}_{AB}

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{AB}^C &= \frac{ig_1^2 g_2^2}{2(4\pi)^2} (m_1 + \bar{m}_1) \left[(\bar{m}_1^2 - m_1^2)(\bar{w}_2 + \bar{z}_2)\Pi_{u_1c}^{(010)} - (\bar{m}_2 + m_2)^2(\bar{w}_2 - \bar{z}_2)\Pi_{s_1c}^{(010)} \right. \\
&+ (\bar{m}_1^2 - m_1^2)(m_2 + \bar{m}_2)^2(\bar{w}_2 \Pi_{u_1s_2}^{(010)} + \bar{z}_2 \Pi_{u_1s_2}^{(001)}) \left. \right] \\
&+ \frac{ig_3^2 g_4^2}{2(4\pi)^2} (m_1 + \bar{m}_3) \left[(\bar{m}_3^2 - m_1^2)(\bar{w}_2 + \bar{z}_2)\Pi_{s_3c}^{(010)} - (\bar{m}_4 + m_2)^2(\bar{w}_2 - \bar{z}_2)\Pi_{u_4c}^{(010)} \right. \\
&+ (\bar{m}_3^2 - m_1^2)(m_2 + \bar{m}_4)^2(\bar{w}_2 \Pi_{s_3u_4}^{(010)} + \bar{z}_2 \Pi_{s_3u_4}^{(001)}) \left. \right],
\end{aligned} \tag{205}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{AB}^{LS+} &= \frac{ig_1^2 g_2^2}{2(4\pi)^2} (m_1 + \bar{m}_1) \left[(\bar{m}_1^2 - m_1^2) (w_{2+} + z_{2+}) \Pi_{u_1 c}^{(010)} - (\bar{m}_2 + m_2)^2 (w_{2+} - z_{2+}) \Pi_{s_1 c}^{(010)} \right. \\
&\quad \left. + (\bar{m}_1^2 - m_1^2) (m_2 + \bar{m}_2)^2 (w_{2+} \Pi_{u_1 s_2}^{(010)} + z_{2+} \Pi_{u_1 s_2}^{(001)}) \right] \\
&\quad + \frac{ig_3^2 g_4^2}{2(4\pi)^2} (m_1 + \bar{m}_3) \left[(\bar{m}_3^2 - m_1^2) (w_{2+} + z_{2+}) \Pi_{s_3 c}^{(010)} - (\bar{m}_4 + m_2)^2 (w_{2+} - z_{2+}) \Pi_{u_4 c}^{(010)} \right. \\
&\quad \left. + (\bar{m}_3^2 - m_1^2) (m_2 + \bar{m}_4)^2 (w_{2+} \Pi_{s_3 u_4}^{(010)} + z_{2+} \Pi_{s_3 u_4}^{(001)}) \right], \tag{206}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{AB}^{LS-} &= \frac{ig_1^2 g_2^2}{2(4\pi)^2} (m_1 + \bar{m}_1) \left[(\bar{m}_1^2 - m_1^2) (w_{2-} + z_{2-}) \Pi_{u_1 c}^{(010)} - (\bar{m}_2 + m_2)^2 (w_{2-} - z_{2-}) \Pi_{s_1 c}^{(010)} \right. \\
&\quad \left. + (\bar{m}_1^2 - m_1^2) (m_2 + \bar{m}_2)^2 (w_{2-} \Pi_{u_1 s_2}^{(010)} + z_{2-} \Pi_{u_1 s_2}^{(001)}) \right] \\
&\quad + \frac{ig_3^2 g_4^2}{2(4\pi)^2} (m_1 + \bar{m}_3) \left[(\bar{m}_3^2 - m_1^2) (w_{2-} + z_{2-}) \Pi_{s_3 c}^{(010)} - (\bar{m}_4 + m_2)^2 (w_{2-} - z_{2-}) \Pi_{u_4 c}^{(010)} \right. \\
&\quad \left. + (\bar{m}_3^2 - m_1^2) (m_2 + \bar{m}_4)^2 (w_{2-} \Pi_{s_3 u_4}^{(010)} + z_{2-} \Pi_{s_3 u_4}^{(001)}) \right]. \tag{207}
\end{aligned}$$

Para o caso \aleph_{BA}^μ ,

$$\begin{aligned}
[\bar{u}_1 \gamma_\mu u_1 \bar{u}_2 u_2] \aleph_{BA}^\mu &= i \frac{g_1^2 g_2^2}{2(4\pi)^2} (m_2 + \bar{m}_2) \left[0 \right. \\
&\quad + (\bar{m}_1 + m_1)^2 [\bar{w}_1 + \bar{z}_1 + (w_{1+} + z_{1+}) \vec{\Omega}_{LS+} + (w_{1-} + z_{1-}) \vec{\Omega}_{LS-}] (-\Pi_{u_1 c}^{(010)}) \\
&\quad + (\bar{m}_2^2 - m_2^2) [\bar{w}_1 - \bar{z}_1 + (w_{1+} - z_{1+}) \vec{\Omega}_{LS+} + (w_{1-} - z_{1-}) \vec{\Omega}_{LS-}] \Pi_{s_2 c}^{(010)} \\
&\quad - (\bar{m}_2^2 - m_2^2) (m_1 + \bar{m}_1)^2 [-\bar{w}_1 \Pi_{u_1 s_2}^{(010)} - \bar{z}_1 \Pi_{u_1 s_2}^{(001)} \\
&\quad - (z_{1+} \Pi_{u_1 s_2}^{(001)} + w_{1+} \Pi_{u_1 s_2}^{(010)}) \vec{\Omega}_{LS+} - (z_{1-} \Pi_{u_1 s_2}^{(001)} + w_{1-} \Pi_{u_1 s_2}^{(010)}) \vec{\Omega}_{LS-}] \\
&\quad - i \frac{g_3^2 g_4^2}{2(4\pi)^2} (m_2 + \bar{m}_4) \left[0 \right. \\
&\quad + (\bar{m}_3 + m_1)^2 [\bar{w}_1 + \bar{z}_1 + (w_{1+} + z_{1+}) \vec{\Omega}_{LS+} + (w_{1-} + z_{1-}) \vec{\Omega}_{LS-}] \Pi_{s_3 c}^{(010)} \\
&\quad + (\bar{m}_4^2 - m_2^2) [\bar{w}_1 - \bar{z}_1 + (w_{1+} - z_{1+}) \vec{\Omega}_{LS+} + (w_{1-} - z_{1-}) \vec{\Omega}_{LS-}] (-\Pi_{u_4 c}^{(010)}) \\
&\quad + (\bar{m}_4^2 - m_2^2) (m_1 + \bar{m}_3)^2 [\bar{w}_1 \Pi_{s_3 u_4}^{(010)} + \bar{z}_1 \Pi_{s_3 u_4}^{(001)} \\
&\quad + (z_{1+} \Pi_{s_3 u_4}^{(001)} + w_{1+} \Pi_{s_3 u_4}^{(010)}) \vec{\Omega}_{LS+} + (z_{1-} \Pi_{s_3 u_4}^{(001)} + w_{1-} \Pi_{s_3 u_4}^{(010)}) \vec{\Omega}_{LS-}] \left. \right], \tag{208}
\end{aligned}$$

e \mathcal{T}_{BA} são

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{BA}^C &= -\frac{ig_1^2 g_2^2}{2(4\pi)^2} (m_2 + \bar{m}_2) \left[(m_1 + \bar{m}_1)^2 (\bar{w}_1 + \bar{z}_1) \Pi_{u_1 c}^{(010)} - (\bar{m}_2^2 - m_2^2) (\bar{w}_1 + \bar{z}_1) \Pi_{s_2 c}^{(010)} \right. \\
&\quad \left. + (\bar{m}_2^2 - m_2^2) (m_1 + \bar{m}_1)^2 (\bar{w}_1 \Pi_{u_1 s_2}^{(010)} + \bar{z}_1 \Pi_{u_1 s_2}^{(001)}) \right] \\
&\quad - \frac{ig_3^2 g_4^2}{2(4\pi)^2} (m_2 + \bar{m}_4) \left[(m_1 + \bar{m}_3)^2 (\bar{w}_1 + \bar{z}_1) \Pi_{s_3 c}^{(010)} - (\bar{m}_4^2 - m_2^2) (\bar{w}_1 - \bar{z}_1) \Pi_{u_4 c}^{(010)} \right. \\
&\quad \left. + (\bar{m}_4^2 - m_2^2) (m_1 + \bar{m}_3)^2 (\bar{w}_1 \Pi_{s_3 u_4}^{(010)} + \bar{z}_1 \Pi_{s_3 u_4}^{(001)}) \right], \tag{209}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{BA}^{LS+} = & -\frac{ig_1^2g_2^2}{2(4\pi)^2}(m_2 + \bar{m}_2) \left[(m_1 + \bar{m}_1)^2(w_{1+} + z_{1+})\Pi_{u_1c}^{(010)} - (\bar{m}_2^2 - m_2^2)(w_{1+} + z_{1+})\Pi_{s_2c}^{(010)} \right. \\
& \left. + (\bar{m}_2^2 - m_2^2)(m_1 + \bar{m}_1)^2(w_{1+}\Pi_{u_1s_2}^{(010)} + z_{1+}\Pi_{u_1s_2}^{(001)}) \right] \\
& -\frac{ig_3^2g_4^2}{2(4\pi)^2}(m_2 + \bar{m}_4) \left[(m_1 + \bar{m}_3)^2(w_{1+} + z_{1+})\Pi_{s_3c}^{(010)} - (\bar{m}_4^2 - m_2^2)(w_{1+} - z_{1+})\Pi_{u_4c}^{(010)} \right. \\
& \left. + (\bar{m}_4^2 - m_2^2)(m_1 + \bar{m}_3)^2(w_{1+}\Pi_{s_3u_4}^{(010)} + z_{1+}\Pi_{s_3u_4}^{(001)}) \right], \tag{210}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{BA}^{LS-} = & -\frac{ig_1^2g_2^2}{2(4\pi)^2}(m_2 + \bar{m}_2) \left[(m_1 + \bar{m}_1)^2(w_{1-} + z_{1-})\Pi_{u_1c}^{(010)} - (\bar{m}_2^2 - m_2^2)(w_{1-} + z_{1-})\Pi_{s_2c}^{(010)} \right. \\
& \left. + (\bar{m}_2^2 - m_2^2)(m_1 + \bar{m}_1)^2(w_{1-}\Pi_{u_1s_2}^{(010)} + z_{1-}\Pi_{u_1s_2}^{(001)}) \right] \\
& -\frac{ig_3^2g_4^2}{2(4\pi)^2}(m_2 + \bar{m}_4) \left[(m_1 + \bar{m}_3)^2(w_{1-} + z_{1-})\Pi_{s_3c}^{(010)} - (\bar{m}_4^2 - m_2^2)(w_{1-} - z_{1-})\Pi_{u_4c}^{(010)} \right. \\
& \left. + (\bar{m}_4^2 - m_2^2)(m_1 + \bar{m}_3)^2(w_{1-}\Pi_{s_3u_4}^{(010)} + z_{1-}\Pi_{s_3u_4}^{(001)}) \right]. \tag{211}
\end{aligned}$$

Por fim, a última amplitude $\mathbb{N}_{BB}^{\mu\nu}$

$$\begin{aligned}
[\bar{u}_1 \gamma_\mu u_1 \bar{u}_2 \gamma_\nu u_2] \mathbb{N}_{BB}^{\mu\nu} = & -\frac{i g_1^2 g_2^2}{4(4\pi)^2} \left[\frac{1}{2} [\bar{g} + g_+ \vec{\Omega}_{LS+} + g_- \vec{\Omega}_{LS-} - \frac{2}{3} \vec{\Omega}_{SS} - \frac{1}{3} \vec{\Omega}_T] \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} \right. \\
& + (m_1 + \bar{m}_1)^2 \frac{1}{2} \left\{ (\bar{g} + g_+ \vec{\Omega}_{LS+} + g_- \vec{\Omega}_{LS-} - \frac{2}{3} \vec{\Omega}_{SS} - \frac{1}{3} \vec{\Omega}_T) \bar{\Pi}_{u_1 c}^{(000)} \right. \\
& + [w\bar{w} + z\bar{z} + \bar{w}z + z\bar{w} + (ww_+ + zz_+ + wz_+ + zw_+) \vec{\Omega}_{LS+} \\
& \left. + (ww_- + zz_- + wz_- + zw_-) \vec{\Omega}_{LS-}] \Pi_{u_1 c}^{(020)} \right\} \\
& + (m_2 + \bar{m}_2)^2 \frac{1}{2} \left\{ (\bar{g} + g_+ \vec{\Omega}_{LS+} + g_- \vec{\Omega}_{LS-} - \frac{2}{3} \vec{\Omega}_{SS} - \frac{1}{3} \vec{\Omega}_T) \bar{\Pi}_{s_2 c}^{(000)} \right. \\
& + [w\bar{w} + z\bar{z} - \bar{w}z - z\bar{w} + (ww_+ + zz_+ - wz_+ - zw_+) \vec{\Omega}_{LS+} \\
& \left. + (ww_- + zz_- - wz_- - zw_-) \vec{\Omega}_{LS-}] \Pi_{s_2 c}^{(020)} \right\} \\
& + (m_1 + \bar{m}_1)^2 (m_2 + \bar{m}_2)^2 \left\{ (\bar{g} + g_+ \vec{\Omega}_{LS+} + g_- \vec{\Omega}_{LS-} - \frac{2}{3} \vec{\Omega}_{SS} - \frac{1}{3} \vec{\Omega}_T) \bar{\Pi}_{u_1 s_2}^{(000)} \right. \\
& + (w\bar{w} + ww_+ \vec{\Omega}_{LS+} + ww_- \vec{\Omega}_{LS-}) \Pi_{u_1 s_2}^{(020)} + (z\bar{z} + zz_+ \vec{\Omega}_{LS+} + zz_- \vec{\Omega}_{LS-}) \Pi_{u_1 s_2}^{(002)} \\
& \left. + [w\bar{z} + z\bar{w} + (wz_+ + zw_+) \vec{\Omega}_{LS+} + (wz_- + zw_-) \vec{\Omega}_{LS-}] \Pi_{u_1 s_2}^{(011)} \right\} \\
& -\frac{i g_3^2 g_4^2}{4(4\pi)^2} \left[\frac{1}{2} [\bar{g} + g_+ \vec{\Omega}_{LS+} + g_- \vec{\Omega}_{LS-} - \frac{2}{3} \vec{\Omega}_{SS} - \frac{1}{3} \vec{\Omega}_T] \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} \right. \\
& + (m_1 + \bar{m}_3)^2 \frac{1}{2} \left\{ (\bar{g} + g_+ \vec{\Omega}_{LS+} + g_- \vec{\Omega}_{LS-} - \frac{2}{3} \vec{\Omega}_{SS} - \frac{1}{3} \vec{\Omega}_T) \bar{\Pi}_{s_3 c}^{(000)} \right. \\
& + [w\bar{w} + z\bar{z} + \bar{w}z + z\bar{w} + (ww_+ + zz_+ + wz_+ + zw_+) \vec{\Omega}_{LS+} \\
& \left. + (ww_- + zz_- + wz_- + zw_-) \vec{\Omega}_{LS-}] \Pi_{s_3 c}^{(020)} \right\} \\
& + (m_2 + \bar{m}_4)^2 \frac{1}{2} \left\{ (\bar{g} + g_+ \vec{\Omega}_{LS+} + g_- \vec{\Omega}_{LS-} - \frac{2}{3} \vec{\Omega}_{SS} - \frac{1}{3} \vec{\Omega}_T) \bar{\Pi}_{u_4 c}^{(000)} \right. \\
& + [w\bar{w} + z\bar{z} - \bar{w}z - z\bar{w} + (ww_+ + zz_+ - wz_+ - zw_+) \vec{\Omega}_{LS+} \\
& \left. + (ww_- + zz_- - wz_- - zw_-) \vec{\Omega}_{LS-}] \Pi_{u_4 c}^{(020)} \right\} \\
& + (m_1 + \bar{m}_3)^2 (m_2 + \bar{m}_4)^2 \left\{ (\bar{g} + g_+ \vec{\Omega}_{LS+} + g_- \vec{\Omega}_{LS-} - \frac{2}{3} \vec{\Omega}_{SS} - \frac{1}{3} \vec{\Omega}_T) \bar{\Pi}_{s_3 u_4}^{(000)} \right. \\
& + (w\bar{w} + ww_+ \vec{\Omega}_{LS+} + ww_- \vec{\Omega}_{LS-}) \Pi_{s_3 u_4}^{(020)} + (z\bar{z} + zz_+ \vec{\Omega}_{LS+} + zz_- \vec{\Omega}_{LS-}) \Pi_{s_3 u_4}^{(002)} \\
& \left. + [w\bar{z} + z\bar{w} + (wz_+ + zw_+) \vec{\Omega}_{LS+} + (wz_- + zw_-) \vec{\Omega}_{LS-}] \Pi_{s_3 u_4}^{(011)} \right\} \Big].
\end{aligned} \tag{212}$$

Separando as funções perfil

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{BB}^C = & -\frac{ig_1^2 g_2^2}{8(4\pi)^2} \left[\bar{g}\bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + (m_1 + \bar{m}_1)^2 [\bar{g}\bar{\Pi}_{u_1c}^{(000)} + (w\bar{w} + \bar{z}\bar{z} + \bar{w}\bar{z} + \bar{z}\bar{w})\Pi_{u_1c}^{(020)}] \right. \\
& + (m_2 + \bar{m}_2)^2 [\bar{g}\bar{\Pi}_{s_2c}^{(000)} + (w\bar{w} + \bar{z}\bar{z} - \bar{w}\bar{z} - \bar{z}\bar{w})\Pi_{s_2c}^{(020)}] \\
& \left. + 2(m_1 + \bar{m}_1)^2 (m_2 + \bar{m}_2)^2 [\bar{g}\bar{\Pi}_{u_1s_2}^{(000)} + w\bar{w}\Pi_{u_1s_2}^{(020)} + \bar{z}\bar{z}\Pi_{u_1s_2}^{(002)} + (\bar{w}\bar{z} + \bar{z}\bar{w})\Pi_{u_1s_2}^{(011)}] \right] \\
& -\frac{ig_3^2 g_4^2}{8(4\pi)^2} \left[\bar{g}\bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + (m_1 + \bar{m}_3)^2 [\bar{g}\bar{\Pi}_{s_3c}^{(000)} + (w\bar{w} + \bar{z}\bar{z} + \bar{w}\bar{z} + \bar{z}\bar{w})\Pi_{s_3c}^{(020)}] \right. \\
& + (m_2 + \bar{m}_4)^2 [\bar{g}\bar{\Pi}_{u_4c}^{(000)} + (w\bar{w} + \bar{z}\bar{z} - \bar{w}\bar{z} - \bar{z}\bar{w})\Pi_{u_4c}^{(020)}] \\
& \left. + 2(m_1 + \bar{m}_3)^2 (m_2 + \bar{m}_4)^2 [\bar{g}\bar{\Pi}_{s_3u_4}^{(000)} + w\bar{w}\Pi_{s_3u_4}^{(020)} + \bar{z}\bar{z}\Pi_{s_3u_4}^{(002)} + (\bar{w}\bar{z} + \bar{z}\bar{w})\Pi_{s_3u_4}^{(011)}] \right], \tag{213}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{BB}^{LS+} = & -\frac{ig_1^2 g_2^2}{8(4\pi)^2} \left[\bar{g}\bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + (m_1 + \bar{m}_1)^2 [g_+\bar{\Pi}_{u_1c}^{(000)} + (ww_+ + zz_+ + wz_+ + zw_+)\Pi_{u_1c}^{(020)}] \right. \\
& + (m_2 + \bar{m}_2)^2 [g_+\bar{\Pi}_{s_2c}^{(000)} + (ww_+ + zz_+ - wz_+ - zw_+)\Pi_{s_2c}^{(020)}] \\
& \left. + 2(m_1 + \bar{m}_1)^2 (m_2 + \bar{m}_2)^2 [g_+\bar{\Pi}_{u_1s_2}^{(000)} + ww_+\Pi_{u_1s_2}^{(020)} + zz_+\Pi_{u_1s_2}^{(002)} + (wz_+ + zw_+)\Pi_{u_1s_2}^{(011)}] \right] \\
& -\frac{ig_3^2 g_4^2}{8(4\pi)^2} \left[\bar{g}\bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + (m_1 + \bar{m}_3)^2 [g_+\bar{\Pi}_{s_3c}^{(000)} + (ww_+ + zz_+ + wz_+ + zw_+)\Pi_{s_3c}^{(020)}] \right. \\
& + (m_2 + \bar{m}_4)^2 [g_+\bar{\Pi}_{u_4c}^{(000)} + (ww_+ + zz_+ - wz_+ - zw_+)\Pi_{u_4c}^{(020)}] \\
& \left. + 2(m_1 + \bar{m}_3)^2 (m_2 + \bar{m}_4)^2 [g_+\bar{\Pi}_{s_3u_4}^{(000)} + ww_+\Pi_{s_3u_4}^{(020)} + zz_+\Pi_{s_3u_4}^{(002)} + (wz_+ + zw_+)\Pi_{s_3u_4}^{(011)}] \right], \tag{214}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{BB}^{LS-} = & -\frac{ig_1^2 g_2^2}{8(4\pi)^2} \left[\bar{g}\bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + (m_1 + \bar{m}_1)^2 [g_-\bar{\Pi}_{u_1c}^{(000)} + (ww_- + zz_- + wz_- + zw_-)\Pi_{u_1c}^{(020)}] \right. \\
& + (m_2 + \bar{m}_2)^2 [g_-\bar{\Pi}_{s_2c}^{(000)} + (ww_- + zz_- - wz_- - zw_-)\Pi_{s_2c}^{(020)}] \\
& \left. + 2(m_1 + \bar{m}_1)^2 (m_2 + \bar{m}_2)^2 [g_-\bar{\Pi}_{u_1s_2}^{(000)} + ww_-\Pi_{u_1s_2}^{(020)} + zz_-\Pi_{u_1s_2}^{(002)} + (wz_- + zw_-)\Pi_{u_1s_2}^{(011)}] \right] \\
& -\frac{ig_3^2 g_4^2}{8(4\pi)^2} \left[\bar{g}\bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + (m_1 + \bar{m}_3)^2 [g_-\bar{\Pi}_{s_3c}^{(000)} + (ww_- + zz_- + wz_- + zw_-)\Pi_{s_3c}^{(020)}] \right. \\
& + (m_2 + \bar{m}_4)^2 [g_-\bar{\Pi}_{u_4c}^{(000)} + (ww_- + zz_- - wz_- - zw_-)\Pi_{u_4c}^{(020)}] \\
& \left. + 2(m_1 + \bar{m}_3)^2 (m_2 + \bar{m}_4)^2 [g_-\bar{\Pi}_{s_3u_4}^{(000)} + ww_-\Pi_{s_3u_4}^{(020)} + zz_-\Pi_{s_3u_4}^{(002)} + (wz_- + zw_-)\Pi_{s_3u_4}^{(011)}] \right], \tag{215}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{BB}^{SS} = & \frac{ig_1^2 g_2^2}{8(4\pi)^2} \frac{2}{3} \left[\bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + (m_1 + \bar{m}_1)^2 \bar{\Pi}_{u_1c}^{(000)} + (m_2 + \bar{m}_2)^2 \bar{\Pi}_{s_2c}^{(000)} \right. \\
& \left. + 2(m_1 + \bar{m}_1)^2 (m_2 + \bar{m}_2)^2 \bar{\Pi}_{u_1s_2}^{(000)} \right] \\
& + \frac{ig_3^2 g_4^2}{8(4\pi)^2} \frac{2}{3} \left[\bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + (m_1 + \bar{m}_3)^2 \bar{\Pi}_{s_3c}^{(000)} + (m_2 + \bar{m}_4)^2 \bar{\Pi}_{u_4c}^{(000)} \right. \\
& \left. + 2(m_1 + \bar{m}_3)^2 (m_2 + \bar{m}_4)^2 \bar{\Pi}_{s_3u_4}^{(000)} \right], \tag{216}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{BB}^T &= \frac{ig_1^2 g_2^2}{8(4\pi)^2} \frac{1}{3} \left[\bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + (m_1 + \bar{m}_1)^2 \bar{\Pi}_{u_1 c}^{(000)} + (m_2 + \bar{m}_2)^2 \bar{\Pi}_{s_2 c}^{(000)} \right. \\
&\quad \left. + 2(m_1 + \bar{m}_1)^2 (m_2 + \bar{m}_2)^2 \bar{\Pi}_{u_1 s_2}^{(000)} \right] \\
&\quad + \frac{ig_3^2 g_4^2}{8(4\pi)^2} \frac{1}{3} \left[\bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + (m_1 + \bar{m}_3)^2 \bar{\Pi}_{s_3 c}^{(000)} + (m_2 + \bar{m}_4)^2 \bar{\Pi}_{u_4 c}^{(000)} \right. \\
&\quad \left. + 2(m_1 + \bar{m}_3)^2 (m_2 + \bar{m}_4)^2 \bar{\Pi}_{s_3 u_4}^{(000)} \right]. \tag{217}
\end{aligned}$$

4.1.1.2 A amplitude de transição final

De posse das funções perfil de todos \aleph s, sintetizamos e escrevemos a amplitude de transição T para o tipo \square com ressonâncias de spin-1/2, da seguinte maneira

$$iT_{\text{MMBB}}^{\square} = \frac{(\vec{G}_1 \vec{G}_2)}{2(4m_1 m_2)^2} \left\{ \mathcal{T}_C^{\square} \vec{\Omega}_C + \mathcal{T}_{LS+}^{\square} \vec{\Omega}_{LS+} + \mathcal{T}_{LS-}^{\square} \vec{\Omega}_{LS-} + \mathcal{T}_{SS}^{\square} \vec{\Omega}_{SS} + \mathcal{T}_T^{\square} \vec{\Omega}_T \right\}. \tag{218}$$

com as definições

$$\mathcal{T}_C^{\square} = \mathcal{T}_{AA}^C + \mathcal{T}_{AB}^C + \mathcal{T}_{BA}^C + \mathcal{T}_{BB}^C, \tag{219}$$

$$\mathcal{T}_{LS+}^{\square} = \mathcal{T}_{AA}^{LS+} + \mathcal{T}_{AB}^{LS+} + \mathcal{T}_{BA}^{LS+} + \mathcal{T}_{BB}^{LS+}, \tag{220}$$

$$\mathcal{T}_{LS-}^{\square} = \mathcal{T}_{AA}^{LS-} + \mathcal{T}_{AB}^{LS-} + \mathcal{T}_{BA}^{LS-} + \mathcal{T}_{BB}^{LS-}, \tag{221}$$

$$\mathcal{T}_{SS}^{\square} = \mathcal{T}_{BB}^{SS}, \tag{222}$$

$$\mathcal{T}_T^{\square} = \mathcal{T}_{BB}^T. \tag{223}$$

4.1.2 Considerações finais

É importante observar que tanto as amplitudes calculadas neste capítulo como as calculadas no Apêndice J, estão representados no espaço de momentos. O potencial que procuramos é aquele em função da distancia entre os bárions interagentes, ou seja, no espaço de configurações, de forma que precisamos ainda manipular as integrais I_{\dots} , os operadores do espaço de spin Ω , as variáveis q , W e z , e também as energias E_1 e E_2 para obtermos os resultados na forma desejada. Para tanto faremos algumas considerações e aproximações importantes na próxima seção.

4.2 AMPLITUDE T NO ESPAÇO DE CONFIGURAÇÕES

Observamos³ que as amplitudes \mathcal{T} são funções dos momentos p_1, p'_1, p_2, p'_2 , por meio das variáveis q, W e z . Nas condições estabelecidas na seção 2.1, no referencial do centro de massa essas variáveis são $q = (0, \vec{q})$, $W = (E_1 + E_2, 0)$ e $z = (E_1 - E_2, \vec{z})$. A condição dos bárions externos na camada de massa implica que $E_1 = m_1$ e $E_2 = m_2$. Notamos portanto que as funções perfil dependem diretamente das variáveis de momento \vec{q} e \vec{z} , e por consequência o potencial V também dependerá.

O nosso objetivo neste trabalho é estabelecer um potencial geral entre dois bárions de spin-1/2, que dependa somente da distancia radial entre ambos. Essa mudança de variáveis, é na verdade uma mudança de espaços, isso é, passa do espaço de momentos para o chamado espaço de configurações e pode ser realizada essa mudança por meio da transformação de Fourier. Matematicamente definimos o operador potencial \hat{V} e da condição de normalização da mecânica quântica⁴

$$\langle \vec{r}' | \hat{V} | \vec{r} \rangle = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \langle \vec{r}' | \vec{p}' \rangle \langle \vec{p}' | \hat{V} | \vec{p} \rangle \langle \vec{p} | \vec{r} \rangle = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} e^{i(\vec{p}' \cdot \vec{r}' - \vec{p} \cdot \vec{r})} \langle \vec{p}' | \hat{V} | \vec{p} \rangle, \quad (226)$$

em que $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ e $\vec{r}' = \vec{r}'_1 - \vec{r}'_2$ são as posições dos bárions iniciais e finais relativos a um dado referencial, respectivamente e essa extensão pode ser reescrita como

$$\langle \vec{r}' | \hat{V} | \vec{r} \rangle = \frac{1}{8} \int \frac{d^3 z}{(2\pi)^3} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} e^{i\vec{q} \cdot \frac{\vec{r}' + \vec{r}}{2}} e^{i\vec{z} \cdot \frac{\vec{r}' - \vec{r}}{2}} \left\langle \frac{\vec{z} + \vec{q}}{2} \middle| \hat{V} \middle| \frac{\vec{z} - \vec{q}}{2} \right\rangle. \quad (227)$$

Se o operador \hat{V} não depender de \vec{z} , temos da condição de normalização que o potencial no espaço de configurações é dado por

$$\langle \vec{r}' | \hat{V} | \vec{r} \rangle = \delta^3(\vec{r}' - \vec{r}) \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} e^{i\vec{q} \cdot \frac{\vec{r}' + \vec{r}}{2}} \langle \vec{q} | \hat{V} | \vec{q} \rangle = \delta^3(\vec{r}' - \vec{r}) V(\vec{r}), \quad (228)$$

aqui utilizamos a integração

$$\frac{1}{8} \int \frac{d^3 z}{(2\pi)^3} e^{i\vec{z} \cdot \frac{\vec{r}' - \vec{r}}{2}} = \delta^3(\vec{r}' - \vec{r}). \quad (229)$$

³ Essa seção é baseada em (HIGA, 2003)

⁴ São as condições de normalização da mecânica quântica

$$\int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \langle x' | p \rangle \langle p | x \rangle = \delta^3(x' - x), \quad (224)$$

$$\int d^3 x \langle p' | x \rangle \langle x | p \rangle = \delta^3(p' - p). \quad (225)$$

Sendo também $\langle x | p \rangle = e^{ip \cdot x}$ as ondas planas normalizadas.

O potencial no espaço de configurações em (228) é o mais simples e esperado, uma vez que o potencial no espaço de momentos deve depender somente do momento transferido \vec{q} , que pela transformação de Fourier torna-se dependente somente da distancia \vec{r} .

No entanto para nosso modelo, essa dependência somente do momento transferido não ocorre naturalmente, havendo também a dependência de \vec{z} , isso origina aos chamados termos não-locais. Para contornar esse problema fazemos uma aproximação local em torno da variável \vec{z} . Consideraremos a expansão somente até a dependência linear de \vec{z} e $(\vec{z})^2 \rightarrow 0$, sendo essa uma boa aproximação para baixas energias apesar de não haver um formalismo rigoroso. Esta aproximação até \vec{z} na primeira ordem está presente somente nos operadores $\vec{\Omega}_{LS}$.

A partir de (227) considerando a dependência linear \vec{z} , isso é um operador potencial do tipo $\langle \frac{\vec{z}+\vec{q}}{2} | \hat{V} | \frac{\vec{z}-\vec{q}}{2} \rangle = \vec{z} \cdot \vec{F}(\vec{q})$, fazemos

$$\begin{aligned} \langle \vec{r}' | \hat{V} | \vec{r} \rangle &= \frac{1}{8} \int \frac{d^3 z}{(2\pi)^3} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} e^{i\vec{q} \cdot \frac{\vec{r}' + \vec{r}}{2}} e^{i\vec{z} \cdot \frac{\vec{r}' - \vec{r}}{2}} \vec{z} \cdot \vec{F}(\vec{q}) \\ &= \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} e^{i\vec{q} \cdot \frac{\vec{r}' + \vec{r}}{2}} \cdot (2i\vec{\nabla}_r) \frac{1}{8} \int \frac{d^3 z}{(2\pi)^3} e^{i\vec{z} \cdot \frac{\vec{r}' - \vec{r}}{2}} \\ &= f\left(\frac{\vec{r}' + \vec{r}}{2}\right) \cdot (2i\vec{\nabla}_r) \delta^3(\vec{r}' - \vec{r}), \end{aligned} \quad (230)$$

sendo considerada a transformação

$$\vec{f}(\vec{R}) = \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} e^{i\vec{q} \cdot \vec{R}} F(\vec{q}). \quad (231)$$

com $\vec{R} = \frac{\vec{r}' + \vec{r}}{2}$

De posse da relação (225) podemos escrever

$$\langle \vec{r}' | \hat{V} | \xi \rangle = \int d^3 r \langle \vec{r}' | \hat{V} | \vec{r} \rangle \langle \vec{r} | \xi \rangle = V(\vec{r}', \vec{r}) \xi(\vec{r}), \quad (232)$$

assim fazemos

$$\begin{aligned} \langle \vec{r}' | \hat{V} | \xi \rangle &= \int d^3 r \xi(\vec{r}) f\left(\frac{\vec{r}' + \vec{r}}{2}\right) \cdot (2i\vec{\nabla}_r) \delta^3(\vec{r}' - \vec{r}) \\ &= 2i\vec{\nabla}_r \left\{ \int d^3 r [\xi(\vec{r}) \vec{f}(\vec{R}) \delta^3(\vec{r}' - \vec{r})] \right\} - \int d^3 r \delta^3(\vec{r}' - \vec{r}) (2i\vec{\nabla}_r) \cdot [\xi(\vec{r}) \vec{f}(\vec{R})] \\ &= -2i \int d^3 r \delta^3(\vec{r}' - \vec{r}) \left[\vec{f}(\vec{R}) \cdot \vec{\nabla}_r \xi(\vec{r}) + \frac{1}{2} \xi(\vec{R}) \vec{\nabla}_r \cdot \vec{f}(\vec{R}) \right], \end{aligned} \quad (233)$$

na segunda linha e primeira integral é nula quando derivada, uma vez que ocorre a mudança de variável $\vec{r} \rightarrow \vec{r}'$.

Resolvendo a integral

$$\begin{aligned}
\langle \vec{r}' | \hat{V} | \xi \rangle &= -2i \left[\vec{f}(\vec{r}') \vec{\nabla}_{\vec{r}'} \xi(\vec{r}') + \frac{1}{2} \xi(\vec{r}') \vec{\nabla}_{\vec{r}'} \vec{f}(\vec{r}') \right] \\
&= -i \left[2 \vec{f}(\vec{r}') \vec{\nabla}_{\vec{r}'} \xi(\vec{r}') - \vec{f}(\vec{r}') \vec{\nabla}_{\vec{r}'} \xi(\vec{r}') + \vec{\nabla}_{\vec{r}'} [\vec{f}(\vec{r}') \xi(\vec{r}')] + \xi(\vec{r}') \vec{\nabla}_{\vec{r}'} \vec{f}(\vec{r}') \right] \\
&= -i \left[\vec{f}(\vec{r}') \vec{\nabla}_{\vec{r}'} \xi(\vec{r}') + \vec{\nabla}_{\vec{r}'} [\vec{f}(\vec{r}') \xi(\vec{r}')] + \xi(\vec{r}') \vec{\nabla}_{\vec{r}'} \vec{f}(\vec{r}') \right], \tag{234}
\end{aligned}$$

definindo $\vec{P} = -i \vec{\nabla}_{\vec{r}'}$, chegamos a

$$\langle \vec{r}' | \hat{V} | \xi \rangle = \left[\vec{f}(\vec{r}') \cdot \vec{P} + \vec{P} \cdot \vec{f}(\vec{r}') \right] \xi(\vec{r}'). \tag{235}$$

Usaremos essa relação para a parte spin-orbita (LS) do potencial, tal componente do potencial é a única não-local a ser considerada.

4.2.1 O operadores Ω no espaço de configurações

Usaremos as ideias até aqui desenvolvidas para realizar a transformação dos operadores espinoriais Ω do espaço de momentos para o espaço de configurações.

Fazemos a transformada de Fourier para as funções perfil associadas com seus operadores do espaço de spin Ω

$$U(x)_\omega = m_k^3 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \mathcal{T}_\omega(k), \quad \omega = C, LS+, LS-, SS, T, \tag{236}$$

em que $\vec{k} = \vec{q}/m_k$, $x = m_k \vec{r}'$. $U(x)$ é a função perfil no espaço de configurações, a qual, depende de $x = |\vec{x}|$.

A função perfil mais simples é a do tipo $\omega = C$, em que temos a correspondência direta

$$V(r)|_C = U_C(x) \Omega_C = U_C(x) \tag{237}$$

uma vez que $\Omega_C = 1_{2 \times 2}$, isso é, é igual a unidade no espaço de spin (Apêndice G). $V(r)|_\omega = U(x) \Omega_\omega$ é interpretada como a componente do potencial associada ao estado de spin Ω_ω .

O próximo operador com transformação mais direta é do tipo spin-spin (SS) definido como

$$\Omega_{SS} = m_k^2 (\vec{k})^2 \vec{\sigma}^{(1)} \cdot \vec{\sigma}^{(2)}, \tag{238}$$

de (236), temos

$$\begin{aligned}
V(r)|_{SS} &= m_k^3 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \mathcal{T}_{SS}(k) [m_k^2 \vec{k}^2 \vec{\sigma}^{(1)} \cdot \vec{\sigma}^{(2)}] \\
&= m_k^2 \vec{\sigma}^{(1)} \cdot \vec{\sigma}^{(2)} (-\nabla_x^2) m_k^3 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \mathcal{T}_{SS}(k) \\
&= -m_k^2 \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{2}{x} \frac{\partial}{\partial x} \right] U_{SS}(x) \vec{\sigma}^{(1)} \cdot \vec{\sigma}^{(2)}, \tag{239}
\end{aligned}$$

uma vez que estamos trabalhando em coordenadas esféricas, sendo portanto o Laplaciano nessas coordenadas.

A componente tensorial é dada por

$$\Omega_T = (\vec{q})^2 \vec{\sigma}^{(1)} \cdot \vec{\sigma}^{(2)} - 3(\vec{\sigma}^{(1)} \cdot \vec{q})(\vec{\sigma}^{(2)} \cdot \vec{q}), \tag{240}$$

assim

$$\begin{aligned}
V(r)|_T &= m_k^3 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \mathcal{T}_T(k) m_k^2 [\vec{k}^2 \vec{\sigma}^{(1)} \cdot \vec{\sigma}^{(2)} - 3(\vec{\sigma}^{(1)} \cdot \vec{k})(\vec{\sigma}^{(2)} \cdot \vec{k})] \\
&= m_k^2 \left[-\delta_{ij} \vec{\sigma}^{(1)} \cdot \vec{\sigma}^{(2)} + 3\sigma_i^{(1)} \sigma_j^{(2)} \right] \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} U_T(x) \\
&= m_k^2 \left[-\vec{\sigma}^{(1)} \cdot \vec{\sigma}^{(2)} + 3(\vec{\sigma}^{(1)} \cdot \hat{x})(\vec{\sigma}^{(2)} \cdot \hat{x}) \right] \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \right] U_T(x) \\
&= m_k^2 \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \right] U_T(x) [3(\vec{\sigma}^{(1)} \cdot \hat{r})(\vec{\sigma}^{(2)} \cdot \hat{r}) - \vec{\sigma}^{(1)} \cdot \vec{\sigma}^{(2)}], \tag{241}
\end{aligned}$$

aqui usamos as relações

$$\frac{\partial}{\partial x_i} U(x) = \frac{x_i}{x} \frac{\partial}{\partial x} U(x), \tag{242}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} U(x) = \left[\delta_{ij} \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{x_i x_j}{x^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \right) \right] U(x). \tag{243}$$

Para a componente spin-órbita, temos o operador

$$\Omega_{LS\pm} = \frac{i}{2} \vec{s}_{\pm} \cdot (\vec{q} \times \vec{z}) = \frac{i}{2} \vec{z} \cdot (\vec{s}_{\pm} \times \vec{q}) \tag{244}$$

sendo $\vec{s}_{\pm} = (\vec{\sigma}^{(1)} \pm \vec{\sigma}^{(2)})/2$. Observamos que este operador tem uma dependência linear em \vec{z} , logo devemos utilizar a relação (235). Fazemos primeiro

$$\begin{aligned}
\vec{f}_{LS\pm} &= m_k^3 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} \mathcal{T}_{LS\pm}(k) m_k \frac{i}{2} (\vec{s}_{\pm} \times \vec{k}) \\
&= \frac{m_k}{2} (\vec{s}_{\pm} \times \vec{\nabla}_x) U_{LS\pm}(x) \\
&= \frac{m_k^2}{2} (\vec{s}_{\pm} \times \vec{r}) \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} U_{LS\pm}(x) \tag{245}
\end{aligned}$$

usamos a relação (242) na ultima linha. De (235) temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} [(\vec{s}_{\pm} \times \vec{r}) \cdot \vec{P} + \vec{P} \cdot (\vec{s}_{\pm} \times \vec{r})] &= \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} [s_j r_k P_i + P_i s_j r_k] \\
&= \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} [s_i r_j P_k + P_k s_i r_j] \\
&= \frac{1}{2} s_i \epsilon_{ijk} [r_j P_k + P_k r_j] \\
&= \vec{L} \cdot \vec{s}_{\pm}
\end{aligned} \tag{246}$$

encontramos explicitamente o vetor momento angular orbital \vec{L} . O potencial no espaço de configuração resulta em

$$V(r)_{LS\pm} = m_k^2 \left[\frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} U_{LS\pm} \right] \vec{L} \cdot \vec{s}_{\pm}. \tag{247}$$

Como poderíamos esperar os operadores Ω no espaço de configurações são

$$\Omega_C = 1_{2 \times 2}, \tag{248}$$

$$\Omega_{SS} = \vec{\sigma}^{(1)} \cdot \vec{\sigma}^{(2)}, \tag{249}$$

$$\Omega_T = 3(\vec{\sigma}^{(1)} \cdot \hat{r})(\vec{\sigma}^{(2)} \cdot \hat{r}) - \vec{\sigma}^{(1)} \cdot \vec{\sigma}^{(2)}, \tag{250}$$

$$\Omega_{LS\pm} = \vec{L} \cdot \vec{s}_{\pm}, \tag{251}$$

com acordo ao potencial total

$$V(r) = V_C \Omega_C + V_{LS\pm} \Omega_{LS\pm} + V_{SS} \Omega_{SS} + V_T \Omega_T, \tag{252}$$

então resumindo encontramos

$$V_C(r) = U_C(x), \tag{253}$$

$$V_{LS\pm}(r) = m_k^2 \left[\frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \right] U_{LS\pm}(x), \tag{254}$$

$$V_{SS}(r) = -m_k^2 \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{2}{x} \frac{\partial}{\partial x} \right] U_{SS}(x), \tag{255}$$

$$V_T(r) = m_k^2 \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \right] U_T(x). \tag{256}$$

Conseguimos fazer a mudança de variáveis nos operadores de spin Ω , no entanto não calculamos as transformações de Fourier das novas funções perfil $U(x)_\omega$, sendo este o último passo para a construção do potencial no espaço de configuração. Essas transformações dadas as suas extensões foram realizadas no Apêndice D, em que o processo realizado é basicamente aplicar a transformações de Fourier nas integrais Π_{ω} do espaço de momentos para integrais chamadas S_{ω} no espaço de configurações, completando todos os passos para a mudança de espaços.

Para finalizar, das definições sobre a interação, devemos então ressaltar que os

resultados estão sendo consideradas em relação ao centro de massa e que os bárions iniciais e finais estão na camada de massa considerando agora também a aproximação local, temos que as variáveis cinemáticas são $W = (E_1 + E_2, 0) = (m_1 + m_2, 0)$, $z = (E_1 - E_2, 0) = (m_1 - m_2, 0)$ e $q = (0, \vec{q})$, em que considera-se $-(\vec{q})^2 = m_k^2 \nabla_x^2$. Essas derivações em coordenadas esféricas serão demonstradas na última seção do Apêndice D.

4.3 POTENCIAL DA TROCA DE UM MÉSON NO ESPAÇO DE CONFIGURAÇÕES

O potencial da troca de um méson no espaço de configurações é obtido também pela transformada de Fourier, no entretanto para esse caso devemos tomar o cuidado com a igualdade $\vec{k} = \vec{q}$, ou seja, o momento do méson trocado é o mesmo que o momento transferido.

Dessa maneira escrevemos o potencial para troca de um méson

$$V_{\text{MBB}}(q) = -\frac{g_1 g_2}{4m_1 m_2} \vec{G}_1 \vec{G}_2 \frac{(\vec{\sigma}^{(1)} \cdot \vec{q})(\vec{\sigma}^{(2)} \cdot \vec{q})}{\vec{q}^2 + m_k^2}. \quad (257)$$

Temos que a transformada de Fourier resulta em

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{\vec{q}^2 + m_k^2}\right] = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-m_k r}}{r}, \quad (258)$$

e nos termos proporcionais ao momento transferido que sobrem deve ser feita a substituição $\vec{q} = -i\vec{\nabla}_r$, a qual atua sobre a integral.

Para encontrar os componente no espaço de spin, fazemos a manipulação

$$\begin{aligned} (\vec{\sigma}^{(1)} \cdot \vec{q})(\vec{\sigma}^{(2)} \cdot \vec{q}) &= \frac{1}{3}[\vec{q}^2(\vec{\sigma}^{(1)} \cdot \vec{\sigma}^{(2)}) - \Omega_T] \\ &= \frac{1}{3}[\Omega_{SS} - \Omega_T]. \end{aligned} \quad (259)$$

Assim escrevemos

$$V_{\text{MB}}(r) = \vec{G}_1 \cdot \vec{G}_2 [V_{SS}(r)\Omega_{SS} + V_T(r)\Omega_T], \quad (260)$$

sendo $x = m_k r$, então

$$V_{SS} = \frac{g_1 g_2 m_k^3}{48\pi m_1 m_2} \frac{e^{-x}}{x}, \quad V_T = -\frac{g_1 g_2 m_k^3}{48\pi m_1 m_2} (x^2 + 3x + 3) \frac{e^{-x}}{x^3}. \quad (261)$$

dados pela substituição $\vec{q} = -i\vec{\nabla}_r$, e com os operadores no espaço de configuração

$$\Omega_{SS} = \vec{\sigma}^{(1)} \cdot \vec{\sigma}^{(2)}, \quad (262)$$

$$\Omega_T = 3(\vec{\sigma}^{(1)} \cdot \hat{r})(\vec{\sigma}^{(2)} \cdot \hat{r}) - \vec{\sigma}^{(1)} \cdot \vec{\sigma}^{(2)}. \quad (263)$$

Quando consideramos a troca de um pión chamamos esse potencial de *OPEP* (*One Pion Exchange Potential*), quando consideramos a troca de um méson eta de *OEEP* (*One Eta Exchange Potential*) e quando a troca de um méson kaon de *OKEP* (*One Kaon Exchange Potential*) . Usaremos esses potenciais em comparação com os potenciais obtidos a partir da troca de dois mésons, quando permitidos pela conservação de isospin.

5 AS INTERAÇÕES MÉSON-BÁRION E SUAS RESSONÂNCIAS

Para que possamos calcular os potenciais por meio dos diagramas de Feynman, precisamos determinar quais partículas considerar supondo diversos processos possíveis, no estudo das interações bárion-bárion diversos bárions e mésons podem ter contribuições significativas e por consequência devemos encontrar as constantes de acoplamentos à eles associadas.

Neste capítulo apresentaremos de modo resumido um estudo que desenvolvemos extensivamente para as interações méson-híperon. Inicialmente como um exemplo mostraremos esse procedimento utilizando a interação $K\Sigma$, resultados que foram publicados em Santos e Barros (2019), Nogueira-Santos e Barros (2020c). Outras interações foram consideradas em trabalhos posteriores (NOGUEIRA-SANTOS; BARROS, 2020b; NOGUEIRA-SANTOS; BARROS, 2020a; NOGUEIRA-SANTOS; BARROS, 2023b; NOGUEIRA-SANTOS; BARROS, 2023a), baseados inicialmente em Barros e Hama (2001).

As ressonâncias consideradas são aquelas que apresentam maior seção de choque total (276) (SANTOS; BARROS, 2019), isso evidencia sua maior contribuição para a interação.

Determinadas as ressonâncias que serão consideradas, utilizamos dados experimentais na relação de Breit-Wigner (281), a qual, comparada com o phase shift (277) da interação, permite encontrar a constante de acoplamento para o melhor ajuste. Já quando a ressonância esta abaixo da camada de massa, utilizamos as simetrias de SU(3) (Apêndice J) para determinar a constante de acoplamento.

A seguir apresentaremos o formalismo básico para o estudo de uma interação méson-bárion ($\mathbb{M}\mathcal{B}$) para o cálculos dos observáveis: seção de choque diferencial e total e phase shifts. Na ultima seção desse capítulo mostraremos a tabela completa para todas as interações méson-bárion de interesse para esse trabalho, de acordo com suas ressonâncias.

5.1 AMPLITUDE DE ESPALHAMENTO PARA UM ESTADO DE ISOSPIN

De maneira conveniente podemos escrever qualquer interação méson-bárion ($\mathbb{M}\mathcal{B}$) da seguinte forma

$$T_{\mathbb{M}\mathcal{B}} = \sum_I \bar{u}(p') \left[A_I + \frac{1}{2}(\not{k} + \not{k}') B_I \right] u(p) P_I, \quad (264)$$

sendo P_I os projetores dos estados de isospin (I). Definimos

$$T_I = \bar{u}(p') \left[A_I + \frac{1}{2}(\not{k} + \not{k}') B_I \right] u(p), \quad (265)$$

que é a amplitude para um determinado estado de isospin.

Por sua vez podemos decompor a amplitude T_I de acordo os estados de spin, f_I (Spin-non-flip) e g_I (Spin-flip) de tal maneira que temos

$$\frac{T_I}{8\pi W} = f_I 1 + g_I i \vec{\sigma} \cdot \hat{n}. \quad (266)$$

sendo

$$f_I = \frac{1}{8\pi W} \left\{ (E + m) \left[A_I + (W - m) B_I \right] + (E - m) \left[-A_I + (W + m) B_I \right] \cos \theta \right\}, \quad (267)$$

$$g_I = \frac{(E - m)}{8\pi W} \left[-A_I + (W + m) B_I \right] \sin \theta. \quad (268)$$

As amplitudes f_I e g_I são calculadas por meio de onda parciais

$$f_I(k, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left[(l+1) a_{l+}^I(k) + l a_{l-}^I(k) \right] P_l(\theta), \quad (269)$$

$$g_I(k, \theta) = \sum_{l=1}^{\infty} \left[a_{l-}^I(k) - a_{l+}^I(k) \right] P_l^{(1)}(\theta). \quad (270)$$

Usando as relações de ortogonalidade dos polinômios de Legendre, as amplitudes de ondas parciais são dadas por

$$a_{l\pm}^I = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left[P_l(\theta) f_1^I(k, \theta) + P_{l\pm 1}(\theta) f_2^I(k, \theta) \right] d\theta, \quad (271)$$

sendo

$$f_1^I(k, \theta) = \frac{(E + m)}{8\pi\sqrt{s}} \left[A_I + (\sqrt{s} - m) B_I \right], \quad (272)$$

$$f_2^I(k, \theta) = \frac{(E - m)}{8\pi\sqrt{s}} \left[-A_I + (\sqrt{s} + m) B_I \right], \quad (273)$$

em que E é a energia do bárion inicial, e $\sqrt{s} = W$ é a energia total do sistema no referencial do centro de massa. Neste trabalho iremos considerar nessas expansões somente as primeiras ondas parciais S e P , o que é uma boa aproximação para baixas energias. Essas ondas são representadas pelos subíndice l ($l = 0$ e $l = 1$, respectivamente), contudo este formalismo pode ser utilizado em cálculos para qualquer valor de l sem maiores problemas.

Como as amplitudes de ondas parciais são reais em cálculo de diagramas do tipo árvore, temos que unitarizar as amplitudes para que não ocorra a violação de unitariedade da matriz de espalhamento S . Fazemos então

$$a_{l\pm}^U = \frac{a_{\pm}^I}{1 - i|\vec{k}|a_{\pm}^I}. \quad (274)$$

Definimos os observáveis como segue. Para a seção de choque diferencial no centro de massa

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f_I|^2 + |g_I|^2, \quad (275)$$

e integrando em relação ao angulo sólido em todo o espaço, encontramos a seção de choque total

$$\sigma_T = 4\pi \sum_l \left[(l+1)|a_{l+}^U|^2 + l|a_{l-}^U|^2 \right]. \quad (276)$$

Outro observável de nosso interesse é o phase shifts, dado por

$$\delta_{l\pm} = \tan^{-1}(|\vec{k}|a_{\pm}). \quad (277)$$

Usamos a notação espectroscópica para os momentos angulares com a correspondência de notação $l\pm \equiv l_{2J}$ para $l = 0, 1, 2, \dots$, tal qual

$$\begin{aligned} l = 0, 1, 2, \dots &\equiv l+ = S, P_3, D_5, \dots \\ l = 1, 2, \dots &\equiv l- = P_1, D_3, \dots \end{aligned} \quad (278)$$

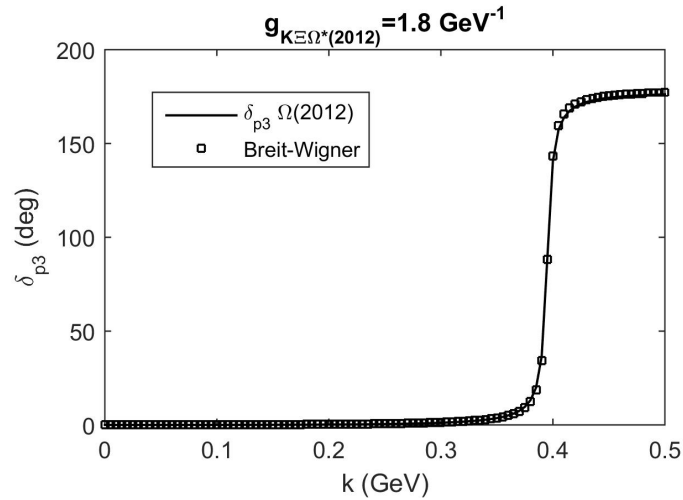
Escrevemos as amplitudes f_I e g_I em termos da notação espectroscópica explicitamente como

$$\begin{aligned} f_I &= \sum_{l=0}^{\infty} \left[(l+1)f_{l+} + lf_{l-} \right] P_l(x) \\ &= f_S + (2f_{P_3} + f_{P_1})P_1 + (3f_{D_5} + 2f_{D_3})P_2 + \dots, \end{aligned} \quad (279)$$

$$\begin{aligned} g_I &= \sum_{l=1}^{\infty} \left[f_{l-}^I - f_{l+}^I \right] P_l^{(1)}(x) \\ &= (f_{P_3} - f_{P_1})P_1^{(1)} + (f_{D_5} - f_{D_3})P_2^{(1)} + \dots, \end{aligned} \quad (280)$$

nos cálculos dos observáveis fazemos a expansão até os de termos $l = 1$ (P).

Figura 16 - Determinação da constante de acoplamento $\bar{K}\Xi\Omega(2012)$ pela expressão de Breit-Wigner



Fonte: Nogueira-Santos e Barros (2020a)

5.2 EXPRESSÃO DE BREIT-WIGNER E AS CONSTANTES DE ACOPLAMENTO

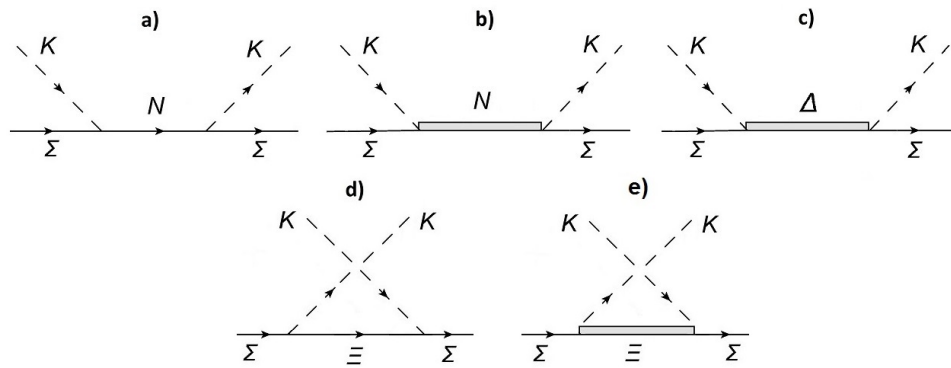
A expressão relativística de Breit-Wigner é determinado em termos de quantidades experimentais, é definida como (RATCLIFF, 2016)

$$\delta_{l\pm} = \tan^{-1} \left[\frac{\Gamma_0 \left(\frac{|\vec{k}|}{|\vec{k}_0|} \right)^{2J+1}}{2(m_r - \sqrt{s})} \right], \quad (281)$$

em que Γ_0 (dado experimentalmente) é a largura média da curva de interação no ponto correspondente ao momento do méson de valor $|\vec{k}_0|$ da ressonância de massa m_r e de momento angular (spin) J . Essa relação quando comparada com o phase shift (277) correspondente ao estado da ressonância é capaz de estimar a constante de acoplamento.

Na Figura 16 temos o exemplo de determinação da constante de acoplamento para a ressonância $\Omega(2012)$ da interação $\bar{K}\Xi$ análogo ao realizado em Barros e Hama (2001).

Para bárions intermediários abaixo da camada de massa, não é possível utilizar a expressão de Breit-Wigner, uma vez que a valor de $|\vec{k}_0|$ não tem valor maior que zero. Para essa situação usamos as relações de simetria do SU(3), que baseadas em algumas constantes de acoplamentos conhecidas experimentalmente pode-se estimar o valor das constantes de acoplamento de para interações do tipo méson-bárion. As relações entre as constantes de acoplamento e parte de seu formalismo serão apresentadas no Apêndice J.

Figura 17 - Interação $K\Sigma$ 

Fonte: Autor

5.3 A INTERAÇÃO $K\Sigma$

Consideraremos nessa seção a interação $K\Sigma$, utilizamos diagramas do tipo árvore direto e cruzado, como mostrado na Figura 17, com ressonâncias de spin-1/2 **a)** e **d)**, de spin-3/2 **b)**, **c)** e **e)**. Mostraremos primeiro a combinação de estados das partículas associadas aos canais de isospin 1/2 e 3/2, em seguida apresentamos o formalismo matemático para os observáveis utilizando como exemplo as ressonâncias de spin e isospin 1/2. Por fim serão exibidos os resultados gráficos e os parâmetros do espalhamento $K\Sigma$.

5.3.1 Combinação de estados

Para determinar quais partículas que combinadas aparecem em certo canal de isospin, fazemos uso dos multipletos de partículas. No caso da interação $K\Sigma$ temos os seguintes multipletos, para o méson kaon e os bárions núcleon, xi, sigma e delta

$$K = \begin{pmatrix} K^+ \\ K^0 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} N^+ \\ N^0 \end{pmatrix}, \quad \Xi = \begin{pmatrix} \Xi^0 \\ \Xi^- \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma^+ \\ \Sigma^0 \\ \Sigma^- \end{pmatrix}, \quad \Delta = \begin{pmatrix} \Delta^{++} \\ \Delta^+ \\ \Delta^0 \\ \Delta^- \end{pmatrix}. \quad (282)$$

Sabendo-se que para 2, 3 e 4 estados, correspondem aos isospin 1/2, 1 e 3/2, respectivamente. As combinações possíveis de acordo com a composição de quarks deste caso são apresentadas na Tabela 1.

Os estados combinados antes e após o espalhamento são determinados pelas regras

Tabela 1 - Multipleteo de partículas
da interação $K\Sigma$

Composição	Ressonâncias	Isospin
$K^+\Sigma^+$	Δ^{++}	3/2
$K^0\Sigma^-$	Δ^-	3/2
$K^0\Sigma^+$	N^+, Δ^+	1/2
$K^+\Sigma^0$	N^+, Δ^+	1/2
$K^0\Sigma^0$	N^0, Δ^0	1/2
$K^+\Sigma^-$	N^0, Δ^0	1/2
$K^-\Sigma^+$	Ξ^0	1/2
$K^-\Sigma^0$	Ξ^-	1/2

Fonte: Autor

de Clebsch-Gordon. Desse modo podemos relacionar os diversos espalhamentos com as amplitudes $T_{\frac{3}{2}}$ e $T_{\frac{1}{2}}$ de acordo com seus isospins.

Os estados de Clebsch-Gordon (GRIFFITHS, 2004; PARTICLE DATA GROUP (PDG); PATRIGNANI et al., 2016) para isospin 3/2 são

$$\left| \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle = |K^+\Sigma^+\rangle, \quad (283)$$

$$\left| \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}|K^0\Sigma^+\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|K^+\Sigma^0\rangle, \quad (284)$$

$$\left| \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}|K^0\Sigma^0\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}|K^+\Sigma^-\rangle, \quad (285)$$

$$\left| \frac{3}{2}, -\frac{3}{2} \right\rangle = |K^0\Sigma^-\rangle, \quad (286)$$

e para isospin 1/2,

$$\left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}|K^0\Sigma^+\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}}|K^+\Sigma^0\rangle, \quad (287)$$

$$\left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}|K^0\Sigma^0\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}|K^+\Sigma^-\rangle. \quad (288)$$

Sendo T a amplitude de espalhamento elástico da interação $K\Sigma$ e z a projeção dos isospins, escrevemos que

$$T_{\frac{3}{2}} = \left\langle \frac{3}{2}, z \left| T \right| \frac{3}{2}, z \right\rangle, \quad (289)$$

$$T_{\frac{1}{2}} = \left\langle \frac{1}{2}, z \left| T \right| \frac{1}{2}, z \right\rangle. \quad (290)$$

Combinando as relações (283-288), temos as reações que respeitam a conservação

de carga e de isospin,

$$C_1 \equiv \langle K^+\Sigma^+|T|K^+\Sigma^+ \rangle = \langle K^0\Sigma^-|T|K^0\Sigma^- \rangle = T_{\frac{3}{2}}, \quad (291)$$

$$C_2 \equiv \langle K^0\Sigma^+|T|K^0\Sigma^+ \rangle = \langle K^+\Sigma^-|T|K^+\Sigma^- \rangle = \frac{1}{3}T_{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}T_{\frac{1}{2}}, \quad (292)$$

$$C_3 \equiv \langle K^0\Sigma^0|T|K^0\Sigma^0 \rangle = \langle K^+\Sigma^0|T|K^+\Sigma^0 \rangle = \frac{2}{3}T_{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3}T_{\frac{1}{2}}, \quad (293)$$

$$C_4 \equiv \langle K^0\Sigma^0|T|K^+\Sigma^- \rangle = \langle K^0\Sigma^+|T|K^+\Sigma^0 \rangle \\ = \langle K^+\Sigma^-|T|K^0\Sigma^0 \rangle = \langle K^+\Sigma^0|T|K^0\Sigma^+ \rangle = \frac{\sqrt{2}}{3} \left(T_{\frac{3}{2}} - T_{\frac{1}{2}} \right). \quad (294)$$

Nos resultados para a interação $K\Sigma$ iremos fazer uso dessas combinações utilizando a notação " C ".

5.3.2 Amplitude de espalhamento elástico $T_{K\Sigma}$

A amplitude de espalhamento elástica da interação $K\Sigma$ é descrita genericamente pela equação (264) juntamente com os projetores de isospin (1191-1192) (Apêndice I). Então $T^{K\Sigma}$ pode ser escrita como

$$T_{K\Sigma}^{ba} = \bar{\Sigma}(p') \left\{ \left[A^+ + \frac{1}{2}(\not{k} + \not{k}')B^+ \right] \delta_{ba} + \left[A^- + \frac{1}{2}(\not{k} + \not{k}')B^- \right] i\epsilon_{bac}\tau_c \right\} \Sigma(p), \quad (295)$$

aqui $\Sigma(p)$ e $\bar{\Sigma}(p')$ representam os espinores dos bárions Σ externos inicial e final, respectivamente.

Como exemplo iremos mostrar o caso de uma partícula intermediária $N(\Xi)$ no canal $s(u)$ de isospin $1/2$, com massa $m_N(m_\Xi)$ e de spin- $1/2$ (Figura 17 **a**, **d**), os demais casos são feitos de forma análoga. Assim temos que as amplitudes A^\pm e B^\pm , são dadas por

$$A_{N(\Xi)}^+ = \frac{g_{\Sigma KN}^2}{4m_\Sigma^2} (m_N + m_\Sigma) \left(\frac{s - m_\Sigma^2}{s - m_N^2} \right) + \frac{g_{\Sigma K\Xi}^2}{4m_\Sigma^2} (m_\Xi + m_\Sigma) \left(\frac{u - m_\Sigma^2}{u - m_\Xi^2} \right), \quad (296)$$

$$B_{N(\Xi)}^+ = \frac{g_{\Sigma K\Xi}^2}{4m_\Sigma^2} \left[\frac{2m_\Sigma(m_\Sigma + m_\Xi) + u - m_\Sigma^2}{u - m_\Xi^2} \right] - \frac{g_{\Sigma KN}^2}{4m_\Sigma^2} \left[\frac{2m_\Sigma(m_\Sigma + m_N) + s - m_\Sigma^2}{s - m_N^2} \right], \quad (297)$$

$$A_{N(\Xi)}^- = \frac{g_{\Sigma KN}^2}{4m_\Sigma^2} (m_N + m_\Sigma) \left(\frac{s - m_\Sigma^2}{s - m_N^2} \right) - \frac{g_{\Sigma K\Xi}^2}{4m_\Sigma^2} (m_\Xi + m_\Sigma) \left(\frac{u - m_\Sigma^2}{u - m_\Xi^2} \right), \quad (298)$$

$$B_{N(\Xi)}^- = -\frac{g_{\Sigma K\Xi}^2}{4m_\Sigma^2} \left[\frac{2m_\Sigma(m_\Sigma + m_\Xi) + u - m_\Sigma^2}{u - m_\Xi^2} \right] - \frac{g_{\Sigma KN}^2}{4m_\Sigma^2} \left[\frac{2m_\Sigma(m_\Sigma + m_N) + s - m_\Sigma^2}{s - m_N^2} \right] \quad (299)$$

No caso da amplitude de espalhamento iremos considerar ambos os diagramas, o direto (N) e o cruzado (Ξ). As constantes de acoplamento $g_{\Sigma KN}^2$ e $g_{\Sigma K\Xi}^2$ são calculadas pela simetria da $SU(3)$ ou por meio da expressão de Breit-Wigner, conforme foi discutido anteriormente.

5.3.3 Amplitudes de ondas parciais

A ressonância $N(\Xi)$ possui isospin 1/2, desse modo devemos utilizar (1200) para este canal de isospin, assim

$$A_{N(\Xi)}^{\frac{1}{2}} = A_{N(\Xi)}^+ + 2A_{N(\Xi)}^-, \quad (300)$$

$$B_{N(\Xi)}^{\frac{1}{2}} = B_{N(\Xi)}^+ + 2B_{N(\Xi)}^-. \quad (301)$$

Substituindo as relações (296-299) nas expressões acima, encontramos as amplitudes A e B no canal 1/2 de isospin

$$A_{N(\Xi)}^{\frac{1}{2}} = 3\frac{g_{\Sigma KN}^2}{4m_{\Sigma}^2}(m_N + m_{\Sigma})\left(\frac{s - m_{\Sigma}^2}{s - m_N^2}\right) - \frac{g_{\Sigma K\Xi}^2}{4m_{\Sigma}^2}(m_{\Xi} + m_{\Sigma})\left(\frac{u - m_{\Sigma}^2}{u - m_{\Xi}^2}\right), \quad (302)$$

$$B_{N(\Xi)}^{\frac{1}{2}} = -\frac{g_{\Sigma K\Xi}^2}{4m_{\Sigma}^2}\left[\frac{2m_{\Sigma}(m_{\Sigma} + m_{\Xi}) + u - m_{\Sigma}^2}{u - m_{\Xi}^2}\right] - 3\frac{g_{\Sigma KN}^2}{4m_{\Sigma}^2}\left[\frac{2m_{\Sigma}(m_{\Sigma} + m_N) + s - m_{\Sigma}^2}{s - m_N^2}\right]. \quad (303)$$

Para calcularmos os observáveis (275-277) o próximo passo é determinarmos os valores de $f_1^{\frac{1}{2}}$ (272) e $f_2^{\frac{1}{2}}$ (273), os quais, serão aplicadas na relação de ortogonalidade (271), encontrando assim valores de $a_{l\pm}^{\frac{1}{2}}$. Mostraremos o procedimento de cálculo somente da amplitude $f_1^{\frac{1}{2}}$, sendo que para $f_2^{\frac{1}{2}}$ o cálculo é feito de modo semelhante.

Em (272), aplicamos (302) e (303), então

$$f_1^{\frac{1}{2}} = \frac{(E + m_{\Sigma})}{32\pi m_{\Sigma}^2 W} \left\{ \frac{3g_{\Sigma KN}^2}{s - m_N^2} \left[(m_N + 2m_{\Sigma} - W)(s - m_{\Sigma}^2) + 2m_{\Sigma}(m_{\Sigma} + m_N)(m_{\Sigma} - W) \right] \right. \\ \left. - \frac{g_{\Sigma K\Xi}^2}{u - m_{\Xi}^2} \left[2m_{\Sigma}(m_{\Sigma} + m_{\Xi})(W - m_{\Sigma}) + (m_{\Xi} + W)(u - m_{\Sigma}^2) \right] \right\}. \quad (304)$$

Separando os termos em função do ângulo de espalhamento $x = \cos\theta$, temos

$$f_1^{\frac{1}{2}} = \frac{(E + m_{\Sigma})}{32\pi m_{\Sigma}^2 W} \left\{ a_1' + \frac{b_1' + c_1' x}{\gamma_{\Xi} + 2\vec{k}^2 x} \right\}, \quad (305)$$

em que

$$a_1' = 3g_{\Sigma KN}^2 \left[\frac{(m_N + 2m_{\Sigma} - W)(s - m_{\Sigma}^2) + 2m_{\Sigma}(m_{\Sigma} + m_N)(m_{\Sigma} - W)}{s - m_N^2} \right], \\ b_1' = g_{\Sigma K\Xi}^2 [2m_{\Sigma}(m_{\Sigma} + m_{\Xi})(W - m_{\Sigma}) + (m_{\Xi} + W)(m_K^2 - 2Ek_0)], \\ c_1' = -2\vec{k}^2 g_{\Sigma K\Xi}^2 (W + m_{\Xi}), \\ \gamma_{\Xi} = m_{\Xi}^2 - m_{\Sigma}^2 - m_K^2 + 2Ek_0, \quad (306)$$

assim aplicando em (271) até a expansão de ondas parciais P_3 , encontramos que

$$a_{S_2}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 [f_1^{\frac{1}{2}} P_0 + f_2^{\frac{1}{2}} P_1] dx, \quad (307)$$

$$a_{P_1}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 [f_1^{\frac{1}{2}} P_1 + f_2^{\frac{1}{2}} P_0] dx, \quad (308)$$

$$a_{P_3}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 [f_1^{\frac{1}{2}} P_1 + f_2^{\frac{1}{2}} P_2] dx, \quad (309)$$

sabendo que os polinômios de Legendre são

$$P_0 = 1, \quad P_1 = x, \quad P_2 = \frac{1}{2}(3x - 1), \quad (310)$$

chegamos às amplitudes

$$a_{S_2}^{\frac{1}{2}(N)} = \frac{1}{64\pi m_{\Sigma}^2 W} \left\{ 2(E + m_{\Sigma})a'_1 + (E + m_{\Sigma})b'_1 I_0 \right. \\ \left. + [(E + m_{\Sigma})c'_1 + (E - m_{\Sigma})b'_2] I_1 + (E - m_{\Sigma})c'_2 I_2 \right\}, \quad (311)$$

$$a_{P_1}^{\frac{1}{2}(N)} = \frac{1}{64\pi m_{\Sigma}^2 W} \left\{ 2(E - m_{\Sigma})a'_2 + (E - m_{\Sigma})b'_2 I_0 \right. \\ \left. + [(E + m_{\Sigma})b'_1 + (E - m_{\Sigma})c'_2] I_1 + (E + m_{\Sigma})c'_1 I_2 \right\}, \quad (312)$$

$$a_{P_3}^{\frac{1}{2}(N)} = \frac{1}{128\pi m_{\Sigma}^2 W} \left\{ (m_{\Sigma} - E)b'_2 I_0 + [2(E + m_{\Sigma})b'_1 + (m_{\Sigma} - E)c'_2] I_1 \right. \\ \left. + [3(E - m_{\Sigma})b'_2 + 2(E + m_{\Sigma})c'_1] I_2 + 3(E - m_{\Sigma})c'_2 I_3 \right\}. \quad (313)$$

As integrais I_0 , I_1 , I_2 e I_3 estão definidas no Apêndice K.

5.3.4 Resultados para $K\Sigma$

Do formalismo exposto temos os resultados mostrados na Figura 18 para a seção de choque total (276) e na Figura 19 para os phase shifts (277). Na Tabela 2 podemos observar todas as ressonâncias consideradas nos cálculos juntamente com suas constantes de acoplamento calculadas.

Pode-se notar por meio da seção de choque total quais ressonâncias são mais relevantes para a interação. Dessa forma de acordo com a massa (energia) da ressonância podemos observar o efeito dessas ressonâncias no gráfico como função de k (mais precisamente pegamos o valor de \sqrt{s} que depende de k). Observando a Figura 18 verificamos que a maior seção de choque corresponde ao bário $N(1710)$.

Os bárions Ξ e $\Xi(1820)$ não tem picos de seção de choque correspondentes uma

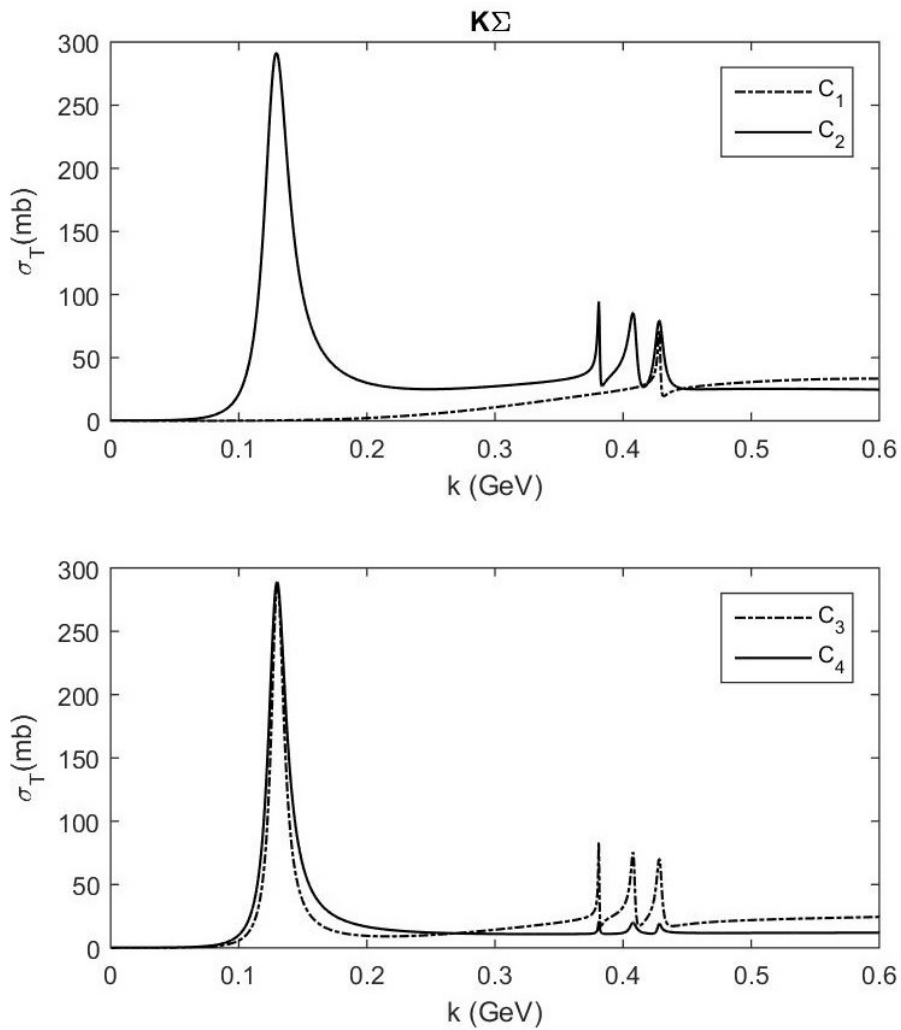
Tabela 2 - Partículas consideradas
na interação $K\Sigma$

	J	I	Massa (MeV)	g_{MB}
N	1/2	1/2	938	6.9
$N(1710)$	1/2	1/2	1710	8.4
$N(1875)$	3/2	1/2	1875	0.7*
$N(1900)$	3/2	1/2	1900	1.3*
$\Delta(1920)$	3/2	3/2	1920	1.7*
Ξ	1/2	1/2	1320	13.4
$\Xi(1820)$	3/2	1/2	1820	1.8*

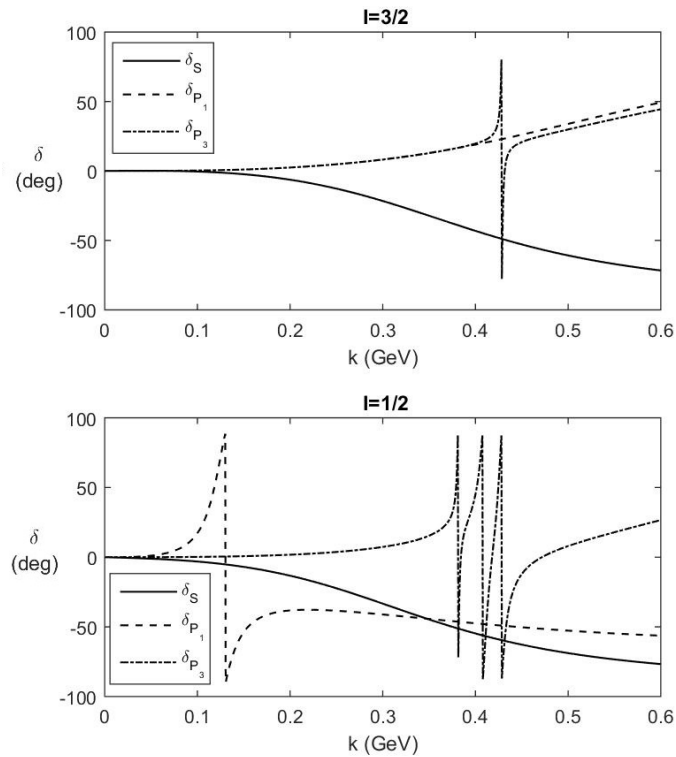
* MeV^{-1}

Fonte: Santos e Barros (2019)

Figura 18 - Seção de choque total (σ_T) para $K\Sigma$



Fonte: Santos e Barros (2019)

Figura 19 - Phase shifts ($\delta_{l\pm}$) para $K\Sigma$ 

Fonte: Santos e Barros (2019)

vez que participam da interação no canal cruzado u . Também o bárion N não apresenta um pico, já que esta abaixo da camada de massa. Na Figura 19, os gráficos para os phase shifts correspondentes às ressonâncias também apresentam efeito.

5.4 TABELA DAS INTERAÇÕES DE INTERESSE

Utilizamos como exemplo para interações do tipo méson-bárion o caso de $K\Sigma$ e seus resultados. Usando estes procedimentos de forma análoga para demais interações chegamos à Tabela 4, em que consideramos todas as interações de nosso interesse e suas ressonâncias, possíveis de serem encontradas, elas são as combinações entre os mésons pseudo-vetoriais π , η , K e \bar{K} (Tabela 3) e quando possível com os bárions N , Λ , Σ , Ξ , Λ_c , Σ_c e Λ_b .

Para esse trabalho definimos para as constantes de acoplamento para as ressonâncias de spin-3/2 a forma

$$g_* = \frac{g_{\mathbb{M}\mathbb{B}\mathbb{B}^*}}{2m_{\mathbb{B}}}, \quad (314)$$

Tabela 3 - Mésons considerados

Méson	Massa (MeV)	Spin	Isospin
π	140	0	1
η	548	0	0
K	496	0	1/2
\bar{K}	496	0	1/2

Fonte: PARTICLE DATA GROUP
(PDG), Patrignani et al.
(2016)

análogo ao caso de ressonâncias de spin-1/2, desta forma são adimensionais.

Na Tabela 4, consideramos também se a ressonância pertence ao canal s , u ou ainda a ambos, consideração importante para a correta descrição dos diagramas. Usaremos os dados da tabela para os cálculos dos potenciais bárion-bárion no próximo capítulo.

Tabela 4 - Interação méson-Bárions e suas Ressonâncias

Interação	Ressonância	$Spin$	I	Massa (MeV)	g_{MBB/B^*}	Canal
πN	N	1/2	1/2	938	13.4	s, u
πN	$\Delta(1232)$	3/2	3/2	1232	33.0	s, u
πN	$N(1440)$	1/2	1/2	1440	4.8	s, u
ηN	N	1/2	1/2	938	0.32	s, u
ηN	$N(1535)$	1/2	1/2	1535	12.8	s, u
ηN	$N(1700)$	3/2	1/2	1700	8.0	s, u
$\bar{K}N/KN$	Λ	1/2	0	1116	11.5	s/u
$\bar{K}N/KN$	Σ	1/2	1	1190	6.9	s/u
$\bar{K}N/KN$	$\Lambda(1520)$	3/2	0	1520	8	s/u
$\bar{K}N/KN$	$\Sigma(1670)$	3/2	1	1670	3.5	s/u
$\pi\Lambda$	Σ	1/2	1	1190	11.7	s, u
$\pi\Lambda$	$\Sigma(1385)$	3/2	1	1385	24.0	s, u
$\eta\Lambda$	Λ	1/2	0	1116	6.45	s, u
$\eta\Lambda$	$\Lambda(1670)$	1/2	0	1670	21.0	s, u
$K\Lambda/\bar{K}\Lambda$	N	1/2	1/2	938	11.5	s/u
$K\Lambda/\bar{K}\Lambda$	$N(1650)$	1/2	1/2	1650	9.9	s/u
$K\Lambda/\bar{K}\Lambda$	Ξ	1/2	1/2	1320	0.24	u/s
$K\Lambda/\bar{K}\Lambda$	$\Xi(1820)$	3/2	1/2	1820	4.3	u/s
$\pi\Sigma$	Λ	1/2	0	1116	11.7	s, u
$\pi\Sigma$	Σ	1/2	1	1190	6.7	s, u
$\pi\Sigma$	$\Lambda(1520)$	3/2	0	1520	3.0	s, u
$\eta\Sigma$	Σ	1/2	1	1190	-6.0	s, u
$\eta\Sigma$	$\Sigma(1750)$	1/2	1	1750	57.0	s, u
$K\Sigma/\bar{K}\Sigma$	N	1/2	1/2	938	6.9	s/u
$K\Sigma/\bar{K}\Sigma$	$N(1710)$	1/2	1/2	1710	6.85	s/u
$K\Sigma/\bar{K}\Sigma$	Ξ	1/2	1/2	1320	13.4	u/s
$K\Sigma/\bar{K}\Sigma$	$\Xi(1820)$	3/2	1/2	1820	7.7	u/s
$\pi\Xi$	Ξ	1/2	1/2	1320	4.0	s, u
$\pi\Xi$	$\Xi(1530)$	3/2	1/2	1530	25.0	s, u
$\eta\Xi$	Ξ	1/2	1/2	1320	3.36	s, u
$K\Xi/\bar{K}\Xi$	Λ	1/2	0	1116	0.2	s/u
$K\Xi/\bar{K}\Xi$	Σ	1/2	1	1190	13.4	s/u
$K\Xi/\bar{K}\Xi$	Ω	3/2	0	1672	4.3	u/s
$\pi\Lambda_c$	Σ_c	1/2	1	2455	21.0	s, u
$\pi\Lambda_c$	$\Sigma_c(2520)$	3/2	1	2520	38.0	s, u
$\pi\Sigma_c$	$\Lambda_c(2595)$	1/2	0	2592	35.0	s, u
$\pi\Sigma_c$	$\Lambda_c(2625)$	3/2	0	2625	5.0	s, u
$\pi\Lambda_b$	Σ_b	1/2	1	5812	40.0	s, u
$\pi\Lambda_b$	$\Sigma_b(5832)$	3/2	1	5832	90.0	s, u

Fonte: Autor, PARTICLE DATA GROUP (PDG), Patrignani et al. (2016), Santos e Barros (2019), Nogueira-Santos e Barros (2020b), Nogueira-Santos e Barros (2020a), Barros e Hama (2001), Nogueira-Santos e Barros (2023b), Nogueira-Santos e Barros (2023a)

6 RESULTADOS

Neste capítulo apresentaremos os resultados dos cálculos para os potenciais da troca de dois píons, etas e kaons. Os resultados dos potenciais são comparados quando possível com o potencial da troca de um pión (*OPEP*), com o potencial da troca de um kaon (*OKEP*) e com o potencial da troca de um eta (*OEEP*) de acordo com suas componentes de spin (C , LS_{\pm} , SS e T) e dos estados de isospin que são diversos $(0, 1/2, 1, 3/2)$.

Neste trabalho calcularemos alguns casos possíveis de interação, sendo eles: NN , $N\Xi$ (NX), $\Xi\Xi$ (XX), $N\Lambda$ (NL), $N\Lambda_c$ (NLc), $N\Lambda_b$ (NLb), $\Lambda\Lambda$ (LL), $\Lambda_c\Lambda_c$ ($LcLc$), $\Lambda_b\Lambda_b$ ($LbLb$), $N\Sigma$ (NS), $N\Sigma_c$ (NSc), $\Sigma\Sigma$ (SS) e $\Sigma_c\Sigma_c$ ($ScSc$). Faremos algumas considerações gerais e em seguida apresentaremos as análises para esses casos agrupados em termos de seus isospins totais.

6.1 CONSIDERAÇÕES GERAIS

Para os potenciais mostrados nas próximas seções iremos apontar algumas considerações gerais.

As ressonâncias utilizadas são as mesmas das identificadas na Tabela 4 do capítulo 5.

De modo geral, em todos os potenciais consideramos os diagramas do tipo \square e \times para todas as trocas de dois mésons idênticos. Para casos envolvendo píons e nucleons foi considerado o vértice de contato ($\pi\pi NN$), o qual permite calcular os diagramas do tipo Δ , ∇ e o $()$ que só pôde ser utilizado no potencial NN . O valor das combinações das matrizes de isospins desses vértices são mostrados nas seções I.2.4, I.2.5 e I.2.6.

Os mésons K e \bar{K} são considerados com a mesma massa, assim resultam nos mesmos valores para os potenciais, por isso foram misturados e somados. Também ressaltamos que embora os diagramas da troca de dois mésons tenham sido calculados e apresentados analiticamente separados de acordo com o sentido do méson no vértice, uma vez que para os kaons resultam em ressonâncias diferentes, não foram necessárias essas separações, porque muitos desses diagramas não produzem ressonâncias e as integrais de loop não fazem distinções entre canais s e u . Dessa maneira teremos por exemplo para o caso cruzado ressonâncias nos canais uu para o K iguais ao diagrama cruzado ss para o \bar{K} , os quais, foram somados e divididos por 2.

Os valores válidos são aqueles acima de $0.7fm$, em que consideramos o raio mínimo para o potencial, a região para valores $< 0.7fm$ é a região de repulsão próxima do raio dos bárions.

Foram considerados para todos o diagramas tipo caixa e todos os tipos de mésons

a subtração do diagrama da troca de um méson *SOME P*, conforme a prescrição para potencial trocando dois mésons. Esse procedimento é obrigatório e foi realizado para todos os potenciais calculados nesse trabalho.

Para o cálculo final do potencial, utilizamos a relação 81 para quando ambas as ressonâncias do diagramas tem cada uma massa maior que a soma das massas do bárion externo e do mésons em suas respectivas "linhas"(superior (1) ou inferior (2)) do diagrama. No caso de haver ao menos uma ressonância com massa inferior às massas do bárions externo e do méson trocado, a relação 150 deverá ser usada.

6.1.1 Tipos de diagramas de troca de dois mésons e as ressonâncias consideradas nos cálculos

Para cada cálculo de potencial utilizamos diferentes tipos de diagramas (caixa, cruzado, triangulo, nabla e bolha), diferentes mésons com dois tipos de sentido em relação ao primeiro vértice (ver capítulo 4). Dessa maneiras teremos diferentes ressonâncias e suas combinações.

Os tipos de diagramas são mostrados na figura 20 com seus respectivos nomes. As linhas finas contínuas representam bárions de spin $1/2$ e as linhas grossas bárions de spin $3/2$ ($tp(2)$, $tp(3)$ e $tp(4)$)⁵. R_1 e R_2 representam as ressonâncias na linha superior e inferior do diagramas respectivamente, assim como B_1 e B_2 os bárions incidentes e emergentes externos.

Para cada interação bárion-bárion os mésons π e η tem para ambos o sentido em relação ao primeiro vértice superior do diagramas de loop \uparrow e \downarrow (conforme explicado no capítulo 4) as mesmas ressonâncias. No entanto para o kaons K e \bar{K} dependerá do tipo de diagramas e dos bárions externos.

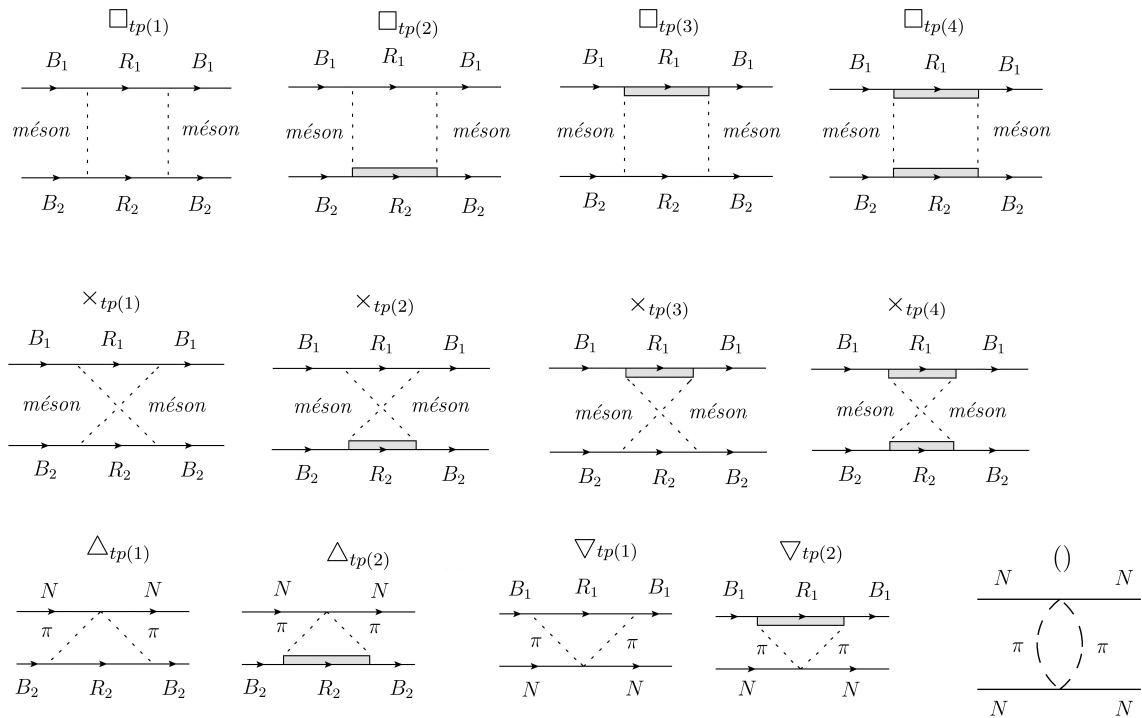
As tabelas dos potenciais considerados neste trabalho que contém as informações dos tipos de diagramas, sentidos dos mésons e as combinações de ressonâncias são as Tabelas de 5 até a 17.

6.2 POTENCIAIS NN , $N\Xi$ E $\Xi\Xi$

Para estes potenciais temos que a soma dos isospins $1/2$ e $1/2$ das partes que interagem resulta nos canais de isospin totais 0 e 1, cujas projeções são dadas pelas expressões (1204) e (1205), resultando nas relações de amplitudes para cada canal (1209)

⁵ tp é uma forma abreviada da palavra *tipo*.

Figura 20 - Tipos de diagramas considerados nos cálculos



Fonte: Autor

e (1210) dadas no Apêndice I. As amplitudes das matrizes de isospin dos vértices são mostradas na seção I.2.1 de acordo com o tipo de méson.

6.2.1 Potencial NN

A troca de dois píons é apresentada na figura 21 em seus canais de isospin 0 e 1, com os seguintes estados intermediários $N1=N$, $D=\Delta(1232)$ e $N2=N(1440)$, até $r = 3fm$ onde suas contribuições se tornam desprezíveis. Os tipos de diagramas e as combinações de ressonâncias para interação NN são apresentados na Tabela 5.

Na figura 22 mostramos a troca de dois etas, com os estados intermediários $N1=N$, $N3=N(1535)$ e $N4=N(1700)$, em ambos os canais de isospin. Observamos que a troca de dois etas não contribuem para o potencial NN , passíveis de serem desconsiderados nesse processo. Isso ocorre devido ao isospin nulo do eta, de tal forma que a contribuição dos diagramas caixa e cruzado cancelam-se para valores acima de $0.7fm$.

A contribuição da troca de dois kaons, apresentadas na figura 23, para os canais de isospin, com as trocas de $L1=\Lambda$, $S1=\Sigma$, $L2=\Lambda(1520)$ e $S2=\Sigma(1670)$. Para esse caso é importante algumas explicações, a considerável quantidade de combinações de ressonâncias

ocorre devido aos diagramas caixa com os canais su ou us e cruzados com canais iguais ss ou uu , que foram combinados de tal maneira a ter ressonâncias.

Observamos que as ressonâncias em todos os casos na região $> 0.7fm$ são de spin $3/2$. Acreditamos que isso se deve à dependência dessas ressonâncias aos termos proporcionais ao momento transferido que resultam em potências maiores para x .

Nas figuras 24 (isospin 0) e 25 (isospin 1) são mostrados nos gráficos superiores a soma de todas as contribuições para a troca de dois mésons e comparadas aos potenciais da troca de um pión ($OPEP$) e um eta ($OEEP$), nos gráficos inferiores realizamos a soma total considerando as trocas de um e dois mésons.

Das figuras 24 e 25 notamos que para raios por volta de $> 1.8fm$ o potencial de um pión domina a interação, ficando a troca de dois mésons como uma correção, o que está de acordo com nosso conhecimento da interação nuclear atual. Tal resultado nos indica que nosso modelo parece razoável. Outra observação interessante para o potencial NN é a dominância da ressonância $\Delta(1232)$, mesmo considerando as ressonâncias da troca de kaons, esse resultado também se encontra de acordo com nosso conhecimento das interações NN .

Como era de se esperar, a troca de dois mésons tem grandes contribuições para raios menores $0.7 < r < 1.8fm$, servindo como correção para distancias maiores.

Tabela 5 - Ressonâncias e diagramas considerados no cálculo do potencial NN

mésons	R_1	R_2	Diagramas	mésons	R_1	R_2	Diagramas
$2\pi \downarrow\uparrow$	N	N	$\square_{tp(1)}, \times_{tp(1)}$	$2K \downarrow$ e $2\bar{K} \uparrow$	Λ	Λ	$\times_{tp(1)}$
$2\pi \downarrow\uparrow$	N	$N(1440)$	$\square_{tp(1)}, \times_{tp(1)}$	$2K \downarrow$ e $2\bar{K} \uparrow$	Λ	$\Lambda(1520)$	$\times_{tp(2)}$
$2\pi \downarrow\uparrow$	$N(1440)$	$N(1440)$	$\square_{tp(1)}, \times_{tp(1)}$	$2K \downarrow$ e $2\bar{K} \uparrow$	$\Lambda(1520)$	$\Lambda(1520)$	$\times_{tp(4)}$
$2\pi \downarrow\uparrow$	N	$\Delta(1232)$	$\square_{tp(2)}, \times_{tp(2)}$	$2K \downarrow$ e $2\bar{K} \uparrow$	Λ	Σ	$\times_{tp(1)}$
$2\pi \downarrow\uparrow$	$\Delta(1232)$	$N(1440)$	$\square_{tp(3)}, \times_{tp(3)}$	$2K \downarrow$ e $2\bar{K} \uparrow$	Λ	$\Sigma(1670)$	$\times_{tp(2)}$
$2\pi \downarrow\uparrow$	$\Delta(1232)$	$\Delta(1232)$	$\square_{tp(4)}, \times_{tp(4)}$	$2K \downarrow$ e $2\bar{K} \uparrow$	$\Lambda(1520)$	Σ	$\times_{tp(3)}$
$2\pi \downarrow\uparrow$	N	—	$\nabla_{tp(1)}$	$2K \downarrow$ e $2\bar{K} \uparrow$	$\Lambda(1520)$	$\Sigma(1670)$	$\times_{tp(4)}$
$2\pi \downarrow\uparrow$	—	N	$\Delta_{tp(1)}$	$2K \downarrow$ e $2\bar{K} \uparrow$	Σ	Σ	$\times_{tp(1)}$
$2\pi \downarrow\uparrow$	$N(1440)$	—	$\nabla_{tp(1)}$	$2K \downarrow$ e $2\bar{K} \uparrow$	Σ	$\Sigma(1670)$	$\times_{tp(2)}$
$2\pi \downarrow\uparrow$	—	$N(1440)$	$\Delta_{tp(1)}$	$2K \downarrow$ e $2\bar{K} \uparrow$	$\Sigma(1670)$	$\Sigma(1670)$	$\times_{tp(4)}$
$2\pi \downarrow\uparrow$	$\Delta(1232)$	—	$\nabla_{tp(2)}$	—	—	—	—
$2\pi \downarrow\uparrow$	—	$\Delta(1232)$	$\Delta_{tp(2)}$	—	—	—	—
$2\pi \downarrow\uparrow$	—	—	()	—	—	—	—
$2\eta \downarrow\uparrow$	N	N	$\square_{tp(1)}, \times_{tp(1)}$	$2\eta \downarrow\uparrow$	N	$N(1700)$	$\square_{tp(2)}, \times_{tp(2)}$
$2\eta \downarrow\uparrow$	N	$N(1535)$	$\square_{tp(1)}, \times_{tp(1)}$	$2\eta \downarrow\uparrow$	$N(1535)$	$N(1700)$	$\square_{tp(2)}, \times_{tp(2)}$
$2\eta \downarrow\uparrow$	$N(1535)$	$N(1535)$	$\square_{tp(1)}, \times_{tp(1)}$	$2\eta \downarrow\uparrow$	$N(1700)$	$N(1700)$	$\square_{tp(4)}, \times_{tp(4)}$

Fonte: Autor

6.2.2 Potencial $N\Xi$

Na troca de dois pions e dois etas foram considerados as seguintes partículas nos estados intermediários (ver Tabela 6): $N1 = N$, $X1 = \Xi$, $D = \Delta(1232)$, $X2 = \Xi(1530)$, $N4 = N(1700)$. Os resultados para a troca de pions são mostrados na figura 26 em que notamos o domínio das ressonâncias Δ e $\Xi(1530)$ combinadas, sendo o único caso com ambas as ressonâncias de spin $3/2$. Para a troca de dois etas (figura 27) não ocorreu combinações relevantes.

Para a troca de dois kaons (figura 28) utilizamos as ressonâncias $L1 = \Lambda$, $L2 = \Lambda(1520)$, $S1 = \Sigma$, $S2 = \Sigma(1670)$, $O1 = \Omega$, em que tivemos duas combinações relevantes mas muito próximas do raio limite a $L2O1 = \Lambda(1530)\Omega$ e a $S2O1 = \Sigma(1670)\Omega$, ambos os casos envolvendo somente spin $3/2$.

Os resultados finais para cada canal de spin da troca de dois mésons são mostrados na figura 29 para isospin 0 e na figura 30 para isospin 1, comparados com os potenciais OPEP de grande relevância e o OEEP menos relevante e também as somas de todas as contribuições para o potencial de cada canal spin-isospin.

Tabela 6 - Ressonâncias e diagramas considerados no cálculo do potencial $N\Xi$

mésons	R_1	R_2	Diagramas	mésons	R_1	R_2	Diagramas
$2\pi \downarrow\uparrow$	N	Ξ	$\square_{tp(1)}, \times_{tp(1)}$	$2K \downarrow$ e $2\bar{K} \uparrow$	$\Lambda(1520)$	Λ	$\square_{tp(3)}$
$2\pi \downarrow\uparrow$	N	$\Xi(1530)$	$\square_{tp(2)}, \times_{tp(2)}$	$2K \downarrow$ e $2\bar{K} \uparrow$	$\Lambda(1520)$	Σ	$\square_{tp(3)}$
$2\pi \downarrow\uparrow$	$\Delta(1232)$	Ξ	$\square_{tp(3)}, \times_{tp(3)}$	$2K \downarrow$ e $2\bar{K} \uparrow$	$\Sigma(1670)$	Λ	$\square_{tp(3)}$
$2\pi \downarrow\uparrow$	$\Delta(1232)$	$\Xi(1530)$	$\square_{tp(4)}, \times_{tp(4)}$	$2K \downarrow$ e $2\bar{K} \uparrow$	$\Sigma(1670)$	Σ	$\square_{tp(3)}$
$2\pi \downarrow\uparrow$	—	Ξ	$\Delta_{tp(1)}$	$2K \downarrow$ e $2\bar{K} \uparrow$	$\Lambda(1520)$	Ω	$\times_{tp(4)}$
$2\pi \downarrow\uparrow$	—	$\Xi(1530)$	$\Delta_{tp(2)}$	$2K \downarrow$ e $2\bar{K} \uparrow$	$\Sigma(1670)$	Ω	$\times_{tp(4)}$
$2\eta \downarrow\uparrow$	N	Ξ	$\square_{tp(1)}, \times_{tp(1)}$	—	—	—	—
$2\eta \downarrow\uparrow$	$N(1700)$	Ξ	$\square_{tp(3)}, \times_{tp(3)}$	—	—	—	—

Fonte: Autor

6.2.3 Potencial $\Xi\Xi$

Para a troca de pions e etas consideramos as partículas $X1 = \Xi$, $X2 = \Xi(1530)$ e para a troca de kaons, $L1 = \Lambda$, $S1 = \Sigma$, $O1 = \Omega$, detalhes sobre os diagramas e combinações são mostradas na Tabela 7. Na troca de dois pions (figura 31) temos a combinação relevante $\Xi(1530)\Xi(1530)$. Para a troca de kaons na figura 33 vemos que $\Omega\Omega$ domina o potencial. A troca de dois etas (figura 32) não teve contribuições para o potencial.

Nas figuras 34 e 35 são mostrados o potencial da troca de dois mésons comparados aos potenciais OPEP e OEEP, e as somas de todas as contribuições para os canais de

isospin 0 e 1, respectivamente. Para este caso a troca de mésons se mostrou mais que uma correção à troca de um pión.

Tabela 7 - Ressonâncias e diagramas considerados no cálculo do potencial $\Xi\Xi$

mésons	R_1	R_2	Diagramas	mésons	R_1	R_2	Diagramas
$2\pi \downarrow\uparrow$	Ξ	Ξ	$\square_{tp(1)}, \times_{tp(1)}$	$2K \uparrow$ e $2\bar{K} \downarrow$	Λ	Ω	$\square_{tp(2)}$
$2\pi \downarrow\uparrow$	Ξ	$\Xi(1530)$	$\square_{tp(2)}, \times_{tp(2)}$	$2K \uparrow$ e $2\bar{K} \downarrow$	Σ	Ω	$\square_{tp(2)}$
$2\pi \downarrow\uparrow$	$\Xi(1530)$	$\Xi(1530)$	$\square_{tp(4)}, \times_{tp(4)}$	$2K \uparrow$ e $2\bar{K} \downarrow$	Λ	Λ	$\times_{tp(1)}$
$2\eta \downarrow\uparrow$	Ξ	Ξ	$\square_{tp(1)}, \times_{tp(1)}$	$2K \uparrow$ e $2\bar{K} \downarrow$	Λ	Σ	$\times_{tp(1)}$
—	—	—	—	$2K \uparrow$ e $2\bar{K} \downarrow$	Σ	Σ	$\times_{tp(1)}$
—	—	—	—	$2K \downarrow$ e $2\bar{K} \uparrow$	Ω	Ω	$\times_{tp(4)}$

Fonte: Autor

6.3 POTENCIAIS $N\Lambda$, $N\Lambda_C$, $N\Lambda_B$, $\Lambda\Lambda$, $\Lambda_C\Lambda_C$ E $\Lambda_B\Lambda_B$

Para os potenciais envolvendo bárions Λ , Λ_c e Λ_b , partículas de isospin 0, teremos sempre um único estado de isospin total. Os casos de potenciais de interação destas partículas com N temos o isospin total 1/2, para os demais casos isospin total 0. O valor da projeção de isospin nos vértices destas interações é igual a 1.

6.3.1 Potencial $N\Lambda$

Consideramos para a troca de dois pions e dois etas nas figuras 36 e 37 as partículas $N1 = N$, $D = \Delta(1232)$, $N4 = N(1700)$, $S1 = \Sigma$, $S2 = \Sigma(1385)$, $L1 = \Lambda$, $L2 = \Lambda(1670)$, não ocorrendo nenhuma contribuição relevante para o potencial. Na troca de dois kaons (figura 38) consideramos as partículas $N1 = N$, $N2 = N(1650)$, $L2 = \Lambda(1520)$, $S2 = \Sigma(1670)$, $X1 = \Xi$, $X2 = \Xi(1820)$, que deram origem a uma contribuição pequena, somente em uma região muito próxima do raio mínimo da combinação $L2X2 = \Lambda(1520)\Xi(1820)$ nos canais de spin $LS+$, SS e T (detalhes na Tabela 8).

Os resultados finais são apresentados na figura 39 e comparados aos potenciais OKEP e OEEP. Fica claro que a troca de um kaon é a contribuição mais relevante e as demais trocas somente fornecem correções próximas ao raio limite.

Tabela 8 - Ressonâncias e diagramas considerados no cálculo do potencial $N\Lambda$

mésos	R_1	R_2	Diagramas	mésos	R_1	R_2	Diagramas
$2\pi \downarrow\uparrow$	N	Σ	$\square_{tp(1)}, \times_{tp(1)}$	$2K \downarrow$ e $2\bar{K} \uparrow$	$\Lambda(1520)$	N	$\square_{tp(3)}$
$2\pi \downarrow\uparrow$	$\Delta(1232)$	Σ	$\square_{tp(3)}, \times_{tp(3)}$	$2K \downarrow$ e $2\bar{K} \uparrow$	$\Sigma(1670)$	N	$\square_{tp(3)}$
$2\pi \downarrow\uparrow$	N	$\Sigma(1385)$	$\square_{tp(2)}, \times_{tp(2)}$	$2K \downarrow$ e $2\bar{K} \uparrow$	$\Lambda(1520)$	$N(1650)$	$\square_{tp(3)}$
$2\pi \downarrow\uparrow$	$\Delta(1232)$	$\Sigma(1385)$	$\square_{tp(4)}, \times_{tp(4)}$	$2K \downarrow$ e $2\bar{K} \uparrow$	$\Sigma(1670)$	$N(1650)$	$\square_{tp(3)}$
$2\pi \downarrow\uparrow$	—	Σ	$\triangle_{tp(1)}$	$2K \downarrow$ e $2\bar{K} \uparrow$	$\Lambda(1520)$	Ξ	$\times_{tp(3)}$
$2\pi \downarrow\uparrow$	—	$\Sigma(1385)$	$\triangle_{tp(2)}$	$2K \downarrow$ e $2\bar{K} \uparrow$	$\Lambda(1520)$	$\Xi(1820)$	$\times_{tp(4)}$
—	—	—	—	$2K \downarrow$ e $2\bar{K} \uparrow$	$\Sigma(1670)$	$\Xi(1820)$	$\times_{tp(4)}$
$2\eta \downarrow\uparrow$	N	Λ	$\square_{tp(1)}, \times_{tp(1)}$	$2\eta \downarrow\uparrow$	N	$\Lambda(1670)$	$\square_{tp(1)}, \times_{tp(1)}$
$2\eta \downarrow\uparrow$	$N(1700)$	Λ	$\square_{tp(3)}, \times_{tp(3)}$	$2\eta \downarrow\uparrow$	$N(1700)$	$\Lambda(1670)$	$\square_{tp(3)}, \times_{tp(3)}$

Fonte: Autor

6.3.2 Potenciais $N\Lambda_c$ e $N\Lambda_b$

Os potenciais $N\Lambda_c$ e $N\Lambda_b$ envolvem somente a troca de dois píons (figuras 40 e 41, respectivamente) com as partículas $N1 = N$, $D = \Delta(1232)$, $S1 = \Sigma_c$, $S2 = \Sigma_c(2520)$, $Sb1 = \Sigma_b$, $Sb2 = \Sigma_b(5832)$, diagramas e combinações de ressonâncias mostradas nas Tabelas 9 e 10.

Por envolverem bárions muito massivos, não originaram contribuições muito relevantes, ainda que próximo de $r = 0.7 fm$ sejam não nulas. Para o potencial $N\Lambda_b$ tivemos uma maior contribuição entre 0.7 e 1.5 fm (figura 42 parte inferior). Já para o potencial $N\Lambda_c$ (figura 42 parte superior) tivemos uma contribuição quase nula.

Tabela 9 - Ressonâncias e diagramas considerados no cálculo do potencial $N\Lambda_c$

mésos	R_1	R_2	Diagramas
$2\pi \downarrow\uparrow$	N	Σ_c	$\square_{tp(1)}, \times_{tp(1)}$
$2\pi \downarrow\uparrow$	N	$\Sigma_c(2520)$	$\square_{tp(2)}, \times_{tp(2)}$
$2\pi \downarrow\uparrow$	$\Delta(1232)$	Σ_c	$\square_{tp(3)}, \times_{tp(3)}$
$2\pi \downarrow\uparrow$	$\Delta(1232)$	$\Sigma_c(2520)$	$\square_{tp(4)}, \times_{tp(4)}$
$2\pi \downarrow\uparrow$	—	Σ_c	$\triangle_{tp(1)}$
$2\pi \downarrow\uparrow$	—	$\Sigma_c(2520)$	$\triangle_{tp(2)}$

Fonte: Autor

6.3.3 Potenciais $\Lambda\Lambda$, $\Lambda_c\Lambda_c$ e $\Lambda_b\Lambda_b$

Para o potencial $\Lambda\Lambda$ consideramos as ressonâncias $S1 = \Sigma$ e $S2 = \Sigma(1385)$ para a troca de dois píons (figura 43), $L1 = \Lambda$ e $L2 = \Lambda(1670)$ para troca de dois etas (figura 44) e $N1 = N$, $N2 = N(1650)$, $X1 = \Xi$, $X2 = \Xi(1820)$ para troca de dois kaons (figura

Tabela 10 - Ressonâncias e diagramas considerados no cálculo do potencial $N\Lambda_b$

mésos	R_1	R_2	Diagramas
$2\pi \downarrow\uparrow$	N	Σ_b	$\square_{tp(1)}, \times_{tp(1)}$
$2\pi \downarrow\uparrow$	N	$\Sigma_b(5832)$	$\square_{tp(2)}, \times_{tp(2)}$
$2\pi \downarrow\uparrow$	$\Delta(1232)$	Σ_b	$\square_{tp(3)}, \times_{tp(3)}$
$2\pi \downarrow\uparrow$	$\Delta(1232)$	$\Sigma_b(5832)$	$\square_{tp(4)}, \times_{tp(4)}$
$2\pi \downarrow\uparrow$	—	Σ_b	$\Delta_{tp(1)}$
$2\pi \downarrow\uparrow$	—	$\Sigma_b(5832)$	$\Delta_{tp(2)}$

Fonte: Autor

45), conforme observado na Tabela 11. Não houveram contribuições muito relevantes.

Para os potenciais $\Lambda_c\Lambda_c$ e $\Lambda_b\Lambda_b$ consideramos para troca de dois píons (figuras 46 e 47, respectivamente) as ressonâncias $Sc1 = \Sigma_c$, $Sc2 = \Sigma_c(2520)$, $Sb1 = \Sigma_b$, $Sb2 = \Sigma_b(5832)$ (ver Tabelas 12 e 13), também não houveram contribuições relevantes.

A figura 48 mostram a soma de todas as contribuições. Para esses potenciais não é permitida a troca de mésons pseudo-vetoriais como os píons, etas e kaons.

Tabela 11 - Ressonâncias e diagramas considerados no cálculo do potencial $\Lambda\Lambda$

mésos	R_1	R_2	Diagramas	mésos	R_1	R_2	Diagramas
$2\pi \downarrow\uparrow$	Σ	Σ	$\square_{tp(1)}, \times_{tp(1)}$	$2K \uparrow$ e $2\bar{K} \downarrow$	N	Ξ	$\square_{tp(1)}$
$2\pi \downarrow\uparrow$	N	$\Xi(1820)$	$\square_{tp(2)}, \times_{tp(2)}$	$2K \uparrow$ e $2\bar{K} \downarrow$	N	Ξ	$\square_{tp(1)}$
$2\pi \downarrow\uparrow$	$\Sigma(1385)$	$\Sigma(1385)$	$\square_{tp(4)}, \times_{tp(4)}$	$2K \uparrow$ e $2\bar{K} \downarrow$	$N(1650)$	Ξ	$\square_{tp(1)}$
$2\eta \downarrow\uparrow$	Λ	Λ	$\square_{tp(1)}, \times_{tp(1)}$	$2K \uparrow$ e $2\bar{K} \downarrow$	$N(1650)$	$\Xi(1820)$	$\square_{tp(2)}$
$2\eta \downarrow\uparrow$	Λ	$\Lambda(1670)$	$\square_{tp(2)}, \times_{tp(2)}$	$2K \downarrow$ e $2\bar{K} \uparrow$	Ξ	Ξ	$\times_{tp(1)}$
$2\eta \downarrow\uparrow$	$\Lambda(1670)$	$\Lambda(1670)$	$\square_{tp(4)}, \times_{tp(4)}$	$2K \downarrow$ e $2\bar{K} \uparrow$	Ξ	$\Xi(1820)$	$\times_{tp(2)}$
—	—	—	—	$2K \downarrow$ e $2\bar{K} \uparrow$	$\Xi(1820)$	$\Xi(1820)$	$\times_{tp(4)}$
—	—	—	—	$2K \uparrow$ e $2\bar{K} \downarrow$	N	N	$\times_{tp(1)}$
—	—	—	—	$2K \uparrow$ e $2\bar{K} \downarrow$	N	$N(1650)$	$\times_{tp(1)}$
—	—	—	—	$2K \uparrow$ e $2\bar{K} \downarrow$	$N(1650)$	$N(1650)$	$\times_{tp(1)}$

Fonte: Autor

Tabela 12 - Ressonâncias e diagramas considerados no cálculo do potencial $\Lambda_c\Lambda_c$

mésos	R_1	R_2	Diagramas
$2\pi \downarrow\uparrow$	Σ_c	Σ_c	$\square_{tp(1)}, \times_{tp(1)}$
$2\pi \downarrow\uparrow$	Σ_c	$\Sigma_c(2520)$	$\square_{tp(2)}, \times_{tp(2)}$
$2\pi \downarrow\uparrow$	$\Sigma_c(2520)$	$\Sigma_c(2520)$	$\square_{tp(4)}, \times_{tp(4)}$

Fonte: Autor

Tabela 13 - Ressonâncias e diagramas considerados no cálculo do potencial $\Lambda_b\Lambda_b$

mésons	R_1	R_2	Diagramas
$2\pi \downarrow\uparrow$	Σ_b	Σ_b	$\square_{tp(1)}, \times_{tp(1)}$
$2\pi \downarrow\uparrow$	Σ_b	$\Sigma_b(5832)$	$\square_{tp(2)}, \times_{tp(2)}$
$2\pi \downarrow\uparrow$	$\Sigma_b(5832)$	$\Sigma_b(5832)$	$\square_{tp(4)}, \times_{tp(4)}$

Fonte: Autor

6.4 POTENCIAIS $N\Sigma$ E $N\Sigma_C$

Esses potenciais têm isospins resultantes $3/2$ e $1/2$, uma vez que N tem isospin $1/2$ e Σ (Σ_c) tem isospin 1. Utilizamos os canais de isospin dados pelas relações (1198) e (1199) e as amplitudes dos vértices dos diagramas apresentadas na seção I.2.2 do Apêndice I.

6.4.1 Potencial $N\Sigma$

Para as trocas de dois píons (figura 49) e dois etas (figura 50) consideramos as partículas: $N1 = N$, $S1 = \Sigma$, $L2 = \Lambda(1520)$, $D = \Delta(1232)$, $N4 = N(1700)$, $S2 = \Sigma(1750)$. O caso mais relevante foi a combinação $DL2 = \Delta(1232)\Lambda(1520)$ para a troca de dois píons no canal de isospin $3/2$.

Na troca de dois kaons (figura 51) foram consideradas as partículas $N1 = N$, $N2 = N(1710)$, $L2 = \Lambda(1520)$, $S2 = \Sigma(1670)$, $X1 = \Xi$, $X2 = \Xi(1820)$. As contribuições relevantes foram $L2X2 = \Lambda(1520)\Xi(1820)$ e $S2X2 = \Sigma(1670)\Xi(1820)$. Os diagrama e a combinações de ressonâncias são apresentadas na Tabela 14.

A figura 52 mostra o potencial da troca de dois mésons e comparado aos potenciais OPEP, OEEP e OKEP, em seus canais de spin-isospin. O potencial total da somas de todos os potenciais é mostrado na figura 53.

6.4.2 Potencial $N\Sigma_c$

Para o cálculo deste potencial temos somente a troca de dois píons (figura 54) e foram consideradas as partículas $N1 = N$, $D = \Delta(1232)$, $Lc1 = \Lambda_c(2595)$, $Lc2 = \Lambda_c(2625)$ como na Tabela 15, sendo a contribuição mais relevante a $DLc2 = \Delta(1232)\Lambda_c(2625)$ no canal de isospin $3/2$. O potencial resultante é mostrado na figura 55.

Tabela 14 - Ressonâncias e diagramas considerados no cálculo do potencial $N\Sigma$

mésons	R_1	R_2	Diagramas	mésons	R_1	R_2	Diagramas
$2\pi \downarrow\uparrow$	N	Σ	$\square_{tp(1)}, \times_{tp(1)}$	$2K \downarrow$ e $2\bar{K} \uparrow$	$\Lambda(1520)$	N	$\square_{tp(3)}$
$2\pi \downarrow\uparrow$	$\Delta(1385)$	Σ	$\square_{tp(3)}, \times_{tp(3)}$	$2K \downarrow$ e $2\bar{K} \uparrow$	$\Sigma(1670)$	N	$\square_{tp(3)}$
$2\pi \downarrow\uparrow$	N	$\Lambda(1520)$	$\square_{tp(2)}, \times_{tp(2)}$	$2K \downarrow$ e $2\bar{K} \uparrow$	$\Lambda(1520)$	$N(1710)$	$\square_{tp(3)}$
$2\pi \downarrow\uparrow$	$\Delta(1385)$	$\Lambda(1520)$	$\square_{tp(4)}, \times_{tp(4)}$	$2K \downarrow$ e $2\bar{K} \uparrow$	$\Sigma(1670)$	$N(1710)$	$\square_{tp(3)}$
$2\pi \downarrow\uparrow$	—	Σ	$\triangle_{tp(1)}$	$2K \downarrow$ e $2\bar{K} \uparrow$	$\Lambda(1520)$	Ξ	$\times_{tp(3)}$
$2\pi \downarrow\uparrow$	—	$\Lambda(1520)$	$\triangle_{tp(2)}$	$2K \downarrow$ e $2\bar{K} \uparrow$	$\Sigma(1670)$	Ξ	$\times_{tp(3)}$
$2\eta \downarrow\uparrow$	N	Σ	$\square_{tp(1)}, \times_{tp(1)}$	$2K \downarrow$ e $2\bar{K} \uparrow$	$\Lambda(1520)$	$\Xi(1820)$	$\times_{tp(4)}$
$2\eta \downarrow\uparrow$	$N(1700)$	Σ	$\square_{tp(3)}, \times_{tp(3)}$	$2K \downarrow$ e $2\bar{K} \uparrow$	$\Sigma(1670)$	$\Xi(1820)$	$\times_{tp(4)}$
$2\eta \downarrow\uparrow$	N	$\Sigma(1750)$	$\square_{tp(1)}, \times_{tp(1)}$	—	—	—	—
$2\eta \downarrow\uparrow$	$N(1700)$	$\Sigma(1750)$	$\square_{tp(3)}, \times_{tp(3)}$	—	—	—	—

Fonte: Autor

Tabela 15 - Ressonâncias e diagramas considerados no cálculo do potencial $N\Sigma_c$

mésons	R_1	R_2	Diagramas
$2\pi \downarrow\uparrow$	N	$\Lambda_c(2595)$	$\square_{tp(1)}, \times_{tp(1)}$
$2\pi \downarrow\uparrow$	N	$\Lambda_c(2625)$	$\square_{tp(2)}, \times_{tp(2)}$
$2\pi \downarrow\uparrow$	$\Delta(1232)$	$\Lambda_c(2595)$	$\square_{tp(3)}, \times_{tp(3)}$
$2\pi \downarrow\uparrow$	$\Delta(1232)$	$\Lambda_c(2625)$	$\square_{tp(4)}, \times_{tp(4)}$
$2\pi \downarrow\uparrow$	—	$\Lambda_c(2595)$	$\triangle_{tp(1)}$
$2\pi \downarrow\uparrow$	—	$\Lambda_c(2625)$	$\triangle_{tp(2)}$

Fonte: Autor

6.5 POTENCIAIS $\Sigma\Sigma$ E $\Sigma_c\Sigma_c$

Estes potenciais envolvem bárions com isospin 1, logo temos canais de isospin 0,1 e 2. Fazemos uso dos canais de isospin (1224-1226) e das amplitudes das combinações de matrizes de isospins da seção I.2.3.

6.5.1 Potencial $\Sigma\Sigma$

Consideramos para a troca de dois píons (figura 56) e dois etas (figura 57) as partículas $L1 = \Lambda$, $L2 = \Lambda(1520)$, $S1 = \Sigma$ e $S2 = \Sigma(1750)$ com pequena contribuição da combinação $L2L2 = \Lambda(1520)\Lambda(1520)$ para a troca de píons.

Para a troca de dois kaons (figura 58), foram consideradas as partículas $N1 = N$, $N2 = N(1710)$, $X1 = \Xi$ e $X2 = \Xi(1820)$, sendo a combinação $X2X2 = \Xi(1820)\Xi(1820)$ a mais relevante. Diagramas e combinações estão na Tabela 16.

As figuras 59, 60 e 61 mostram os potenciais das trocas de dois mésons comparados aos OPEP e OEEP e também à soma dos potenciais para os canais de isospin 0, 1 e 2,

respectivamente.

Tabela 16 - Ressonâncias e diagramas considerados no cálculo do potencial $\Sigma\Sigma$

mésons	R_1	R_2	Diagramas	mésons	R_1	R_2	Diagramas
$2\pi \downarrow\uparrow$	Λ	Λ	$\square_{tp(1)}, \times_{tp(1)}$	$2K \downarrow$ e $2\bar{K} \uparrow$	Ξ	Ξ	$\times_{tp(1)}$
$2\pi \downarrow\uparrow$	Λ	Σ	$\square_{tp(1)}, \times_{tp(1)}$	$2K \downarrow$ e $2\bar{K} \uparrow$	Ξ	$\Xi(1820)$	$\times_{tp(2)}$
$2\pi \downarrow\uparrow$	Λ	$\Lambda(1520)$	$\square_{tp(2)}, \times_{tp(2)}$	$2K \downarrow$ e $2\bar{K} \uparrow$	$\Xi(1820)$	$\Xi(1820)$	$\times_{tp(4)}$
$2\pi \downarrow\uparrow$	Σ	Σ	$\square_{tp(1)}, \times_{tp(1)}$	$2K \uparrow$ e $2\bar{K} \downarrow$	N	N	$\times_{tp(1)}$
$2\pi \downarrow\uparrow$	Σ	$\Lambda(1520)$	$\square_{tp(2)}, \times_{tp(2)}$	$2K \uparrow$ e $2\bar{K} \downarrow$	N	$N(1710)$	$\times_{tp(1)}$
$2\pi \downarrow\uparrow$	$\Lambda(1520)$	$\Lambda(1520)$	$\square_{tp(4)}, \times_{tp(4)}$	$2K \uparrow$ e $2\bar{K} \downarrow$	$N(1710)$	$N(1710)$	$\times_{tp(1)}$
$2\eta \downarrow\uparrow$	Σ	Σ	$\square_{tp(1)}, \times_{tp(1)}$	—	—	—	—
$2\eta \downarrow\uparrow$	Σ	$\Sigma(1750)$	$\square_{tp(1)}, \times_{tp(1)}$	—	—	—	—
$2\eta \downarrow\uparrow$	$\Sigma(1750)$	$\Sigma(1750)$	$\square_{tp(1)}, \times_{tp(1)}$	—	—	—	—

Fonte: Autor

6.5.2 Potencial $\Sigma_c\Sigma_c$

Para esta interação temos o único caso descrita pela troca de dois píons mostrado na figura 62 para os canais de isospin 0, 1 e 2, em que consideramos as ressonâncias $Lc1 = \Lambda_c(2595)$, $Lc2 = \Lambda_c(2625)$ de acordo com a Tabela 17. O potencial final é apresentado na figura 63, e como podemos observar não houveram contribuições relevantes.

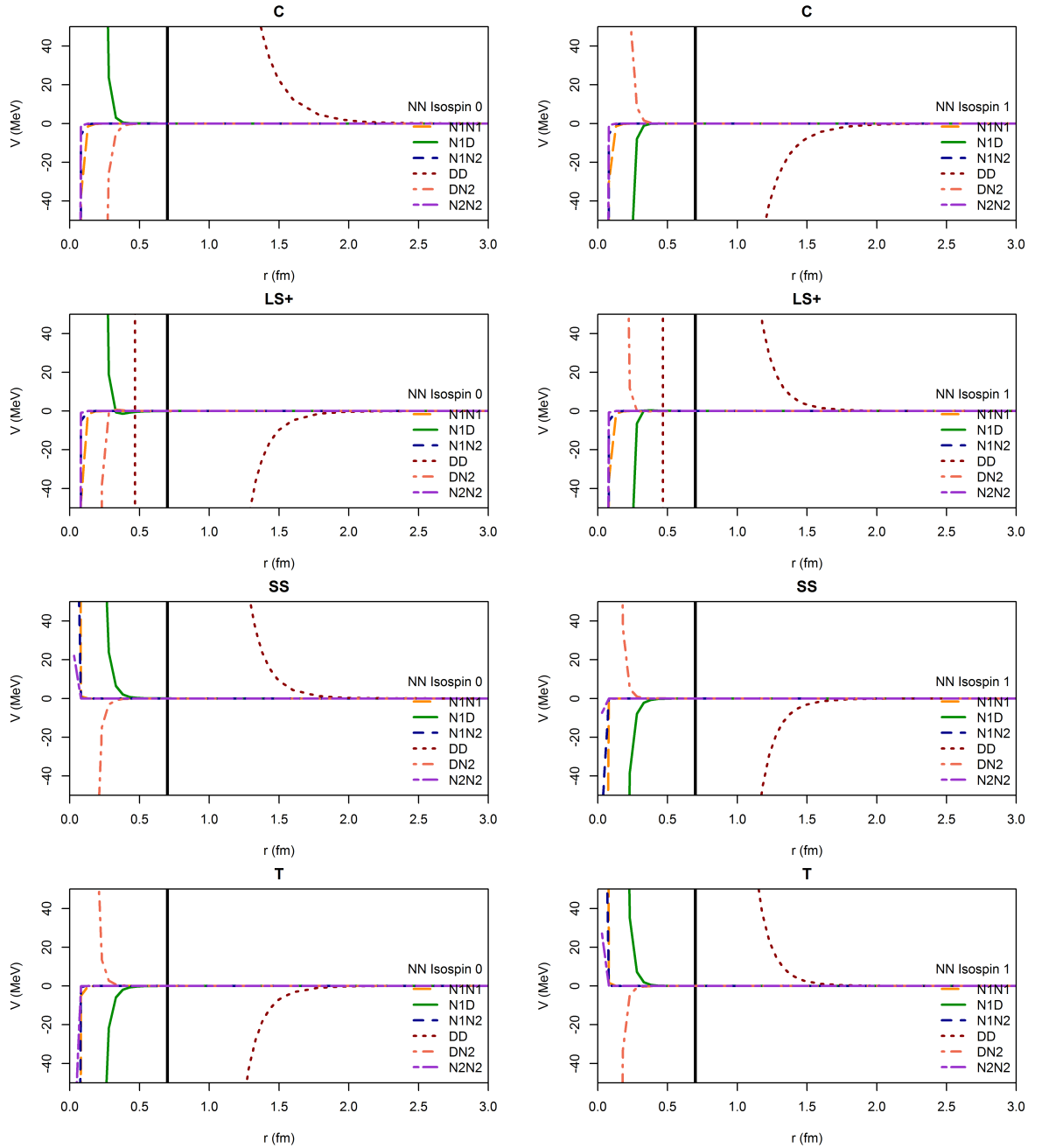
Tabela 17 - Ressonâncias e diagramas considerados no cálculo do potencial $\Sigma_c\Sigma_c$

mésons	R_1	R_2	Diagramas
$2\pi \downarrow\uparrow$	$\Lambda_c(2595)$	$\Lambda_c(2595)$	$\square_{tp(1)}, \times_{tp(1)}$
$2\pi \downarrow\uparrow$	$\Lambda_c(2595)$	$\Lambda_c(2625)$	$\square_{tp(2)}, \times_{tp(2)}$
$2\pi \downarrow\uparrow$	$\Lambda_c(2625)$	$\Lambda_c(2625)$	$\square_{tp(4)}, \times_{tp(4)}$

Fonte: Autor

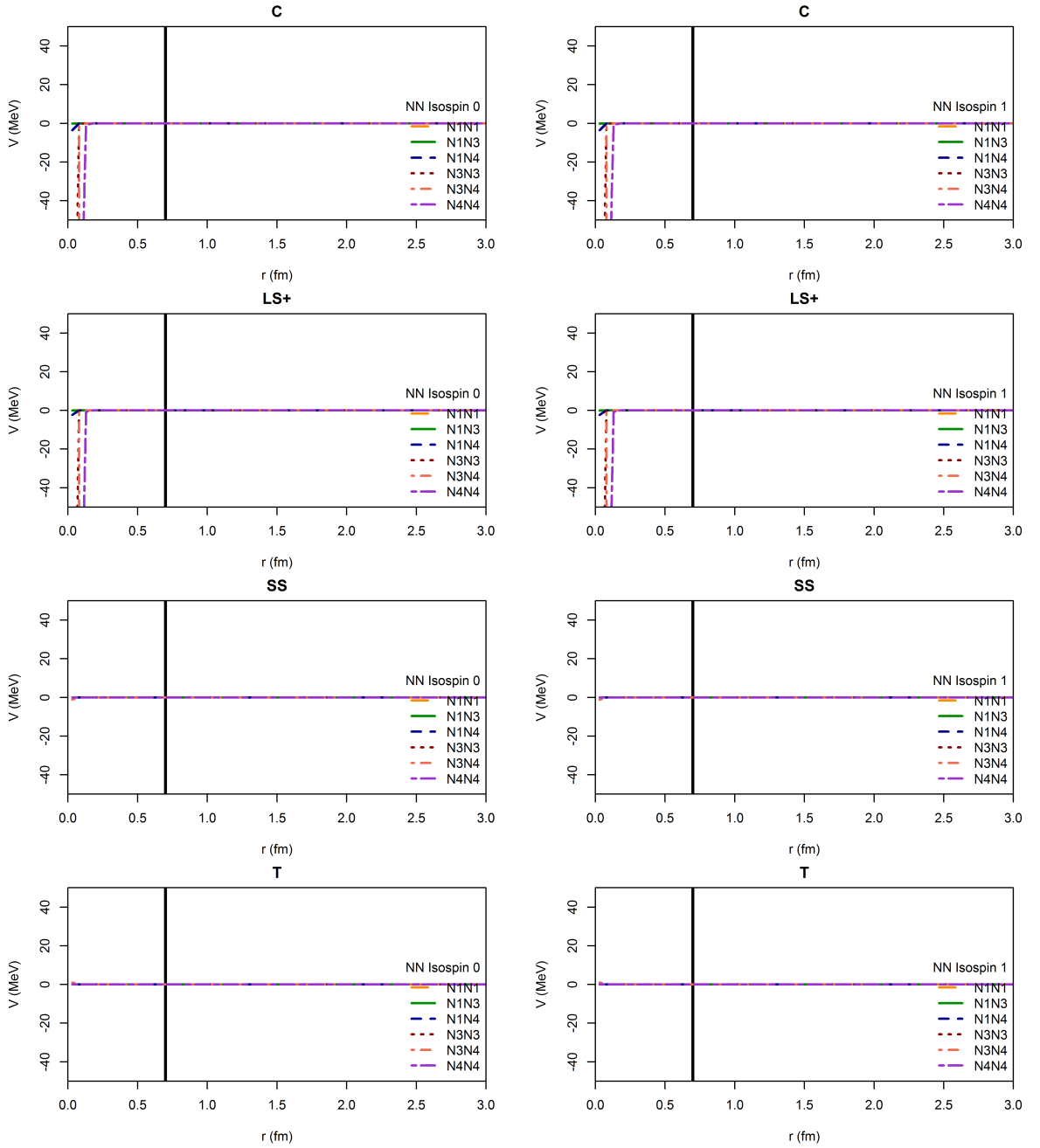
Neste capítulos mostramos então os resultados para os potenciais de diversas interações Bárion-Bárion de interesse. Decidimos não nos estender muito na discussão desses resultados, pois estudamos muitos casos e tentamos evitar que esta exposição se tornasse tediosa.

Figura 21 - Potencial NN devido a troca de dois píons



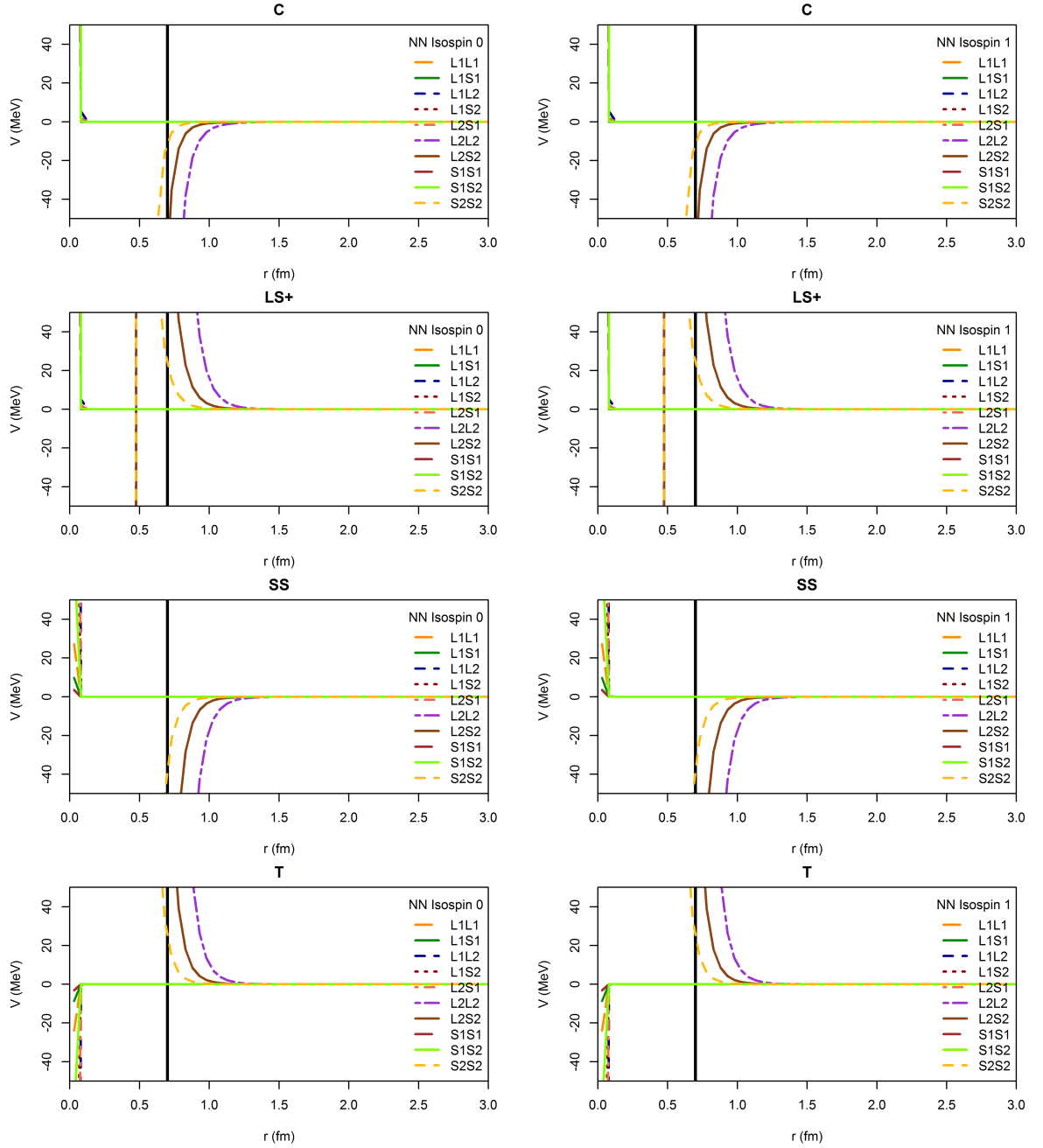
Fonte: Autor

Figura 22 - Potencial NN devido a troca de dois etas



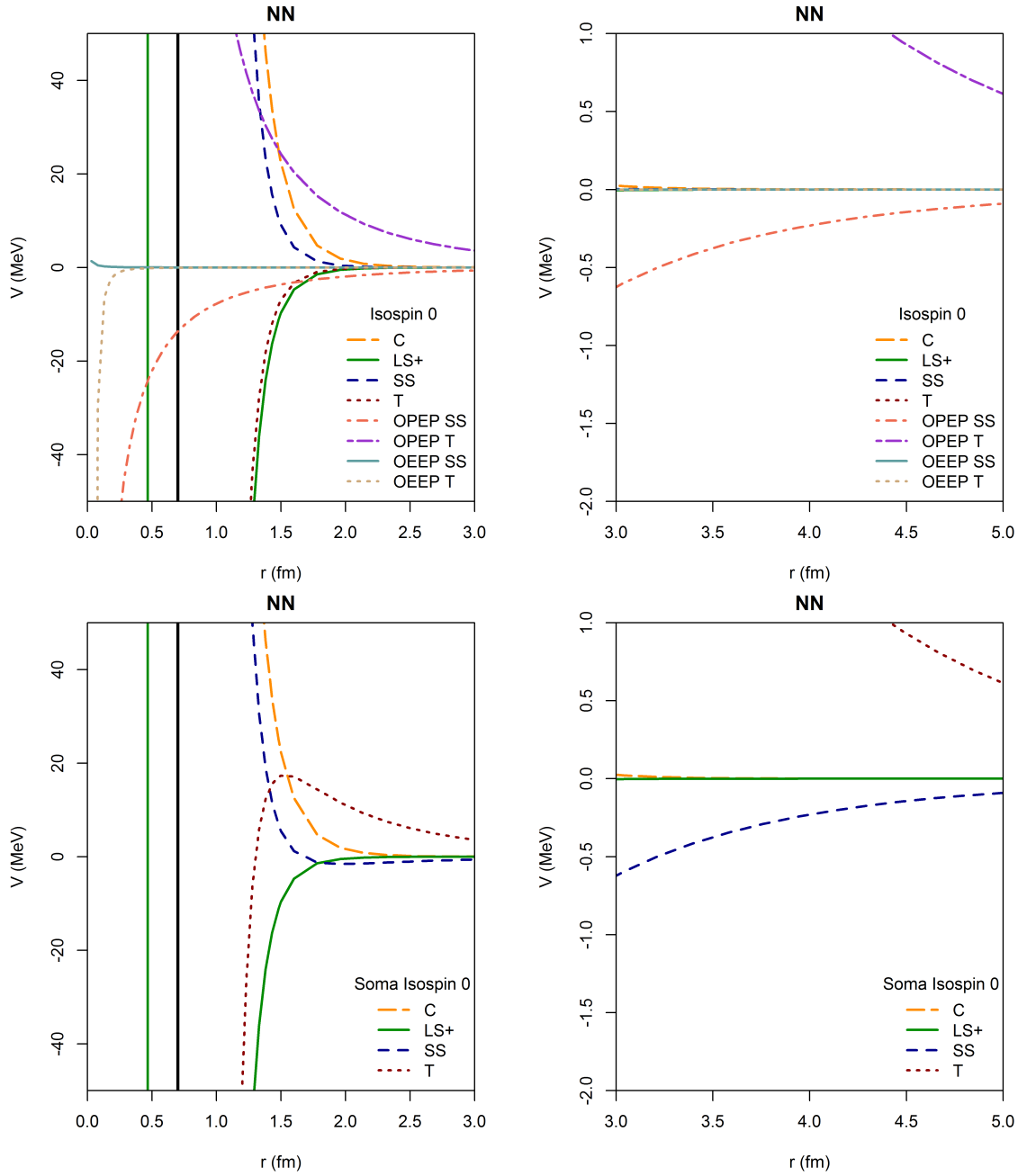
Fonte: Autor

Figura 23 - Potencial NN devido a troca de dois kaons



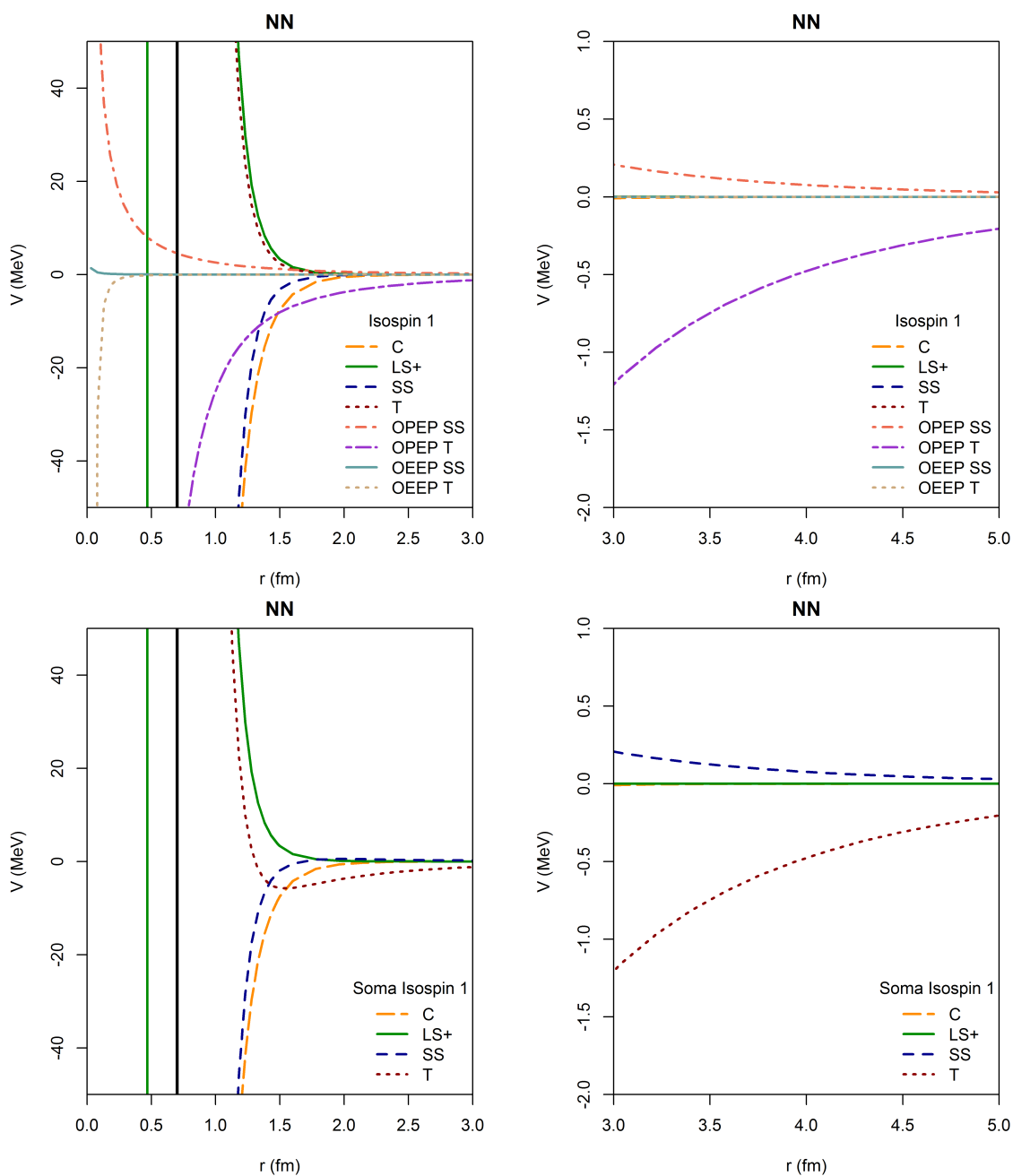
Fonte: Autor

Figura 24 - Potencial NN devido a troca de dois mésons, OPEP, OEEP e o potencial total somadas todas as contribuições no canal de isospin 0



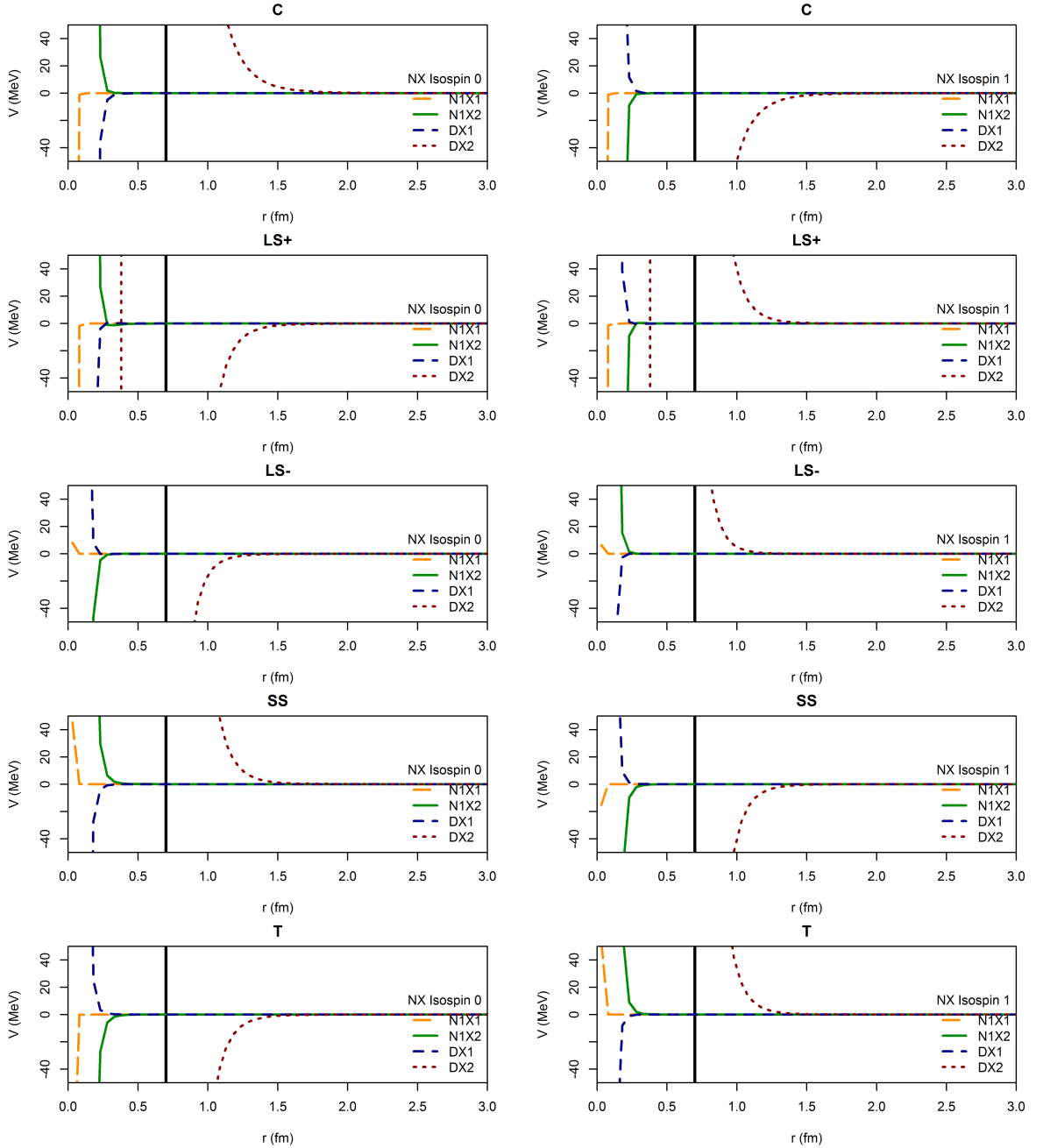
Fonte: Autor

Figura 25 - Potencial NN devido a troca de dois mésons, OPEP, OEEP e o potencial total somadas todas as contribuições no canal de isospin 1



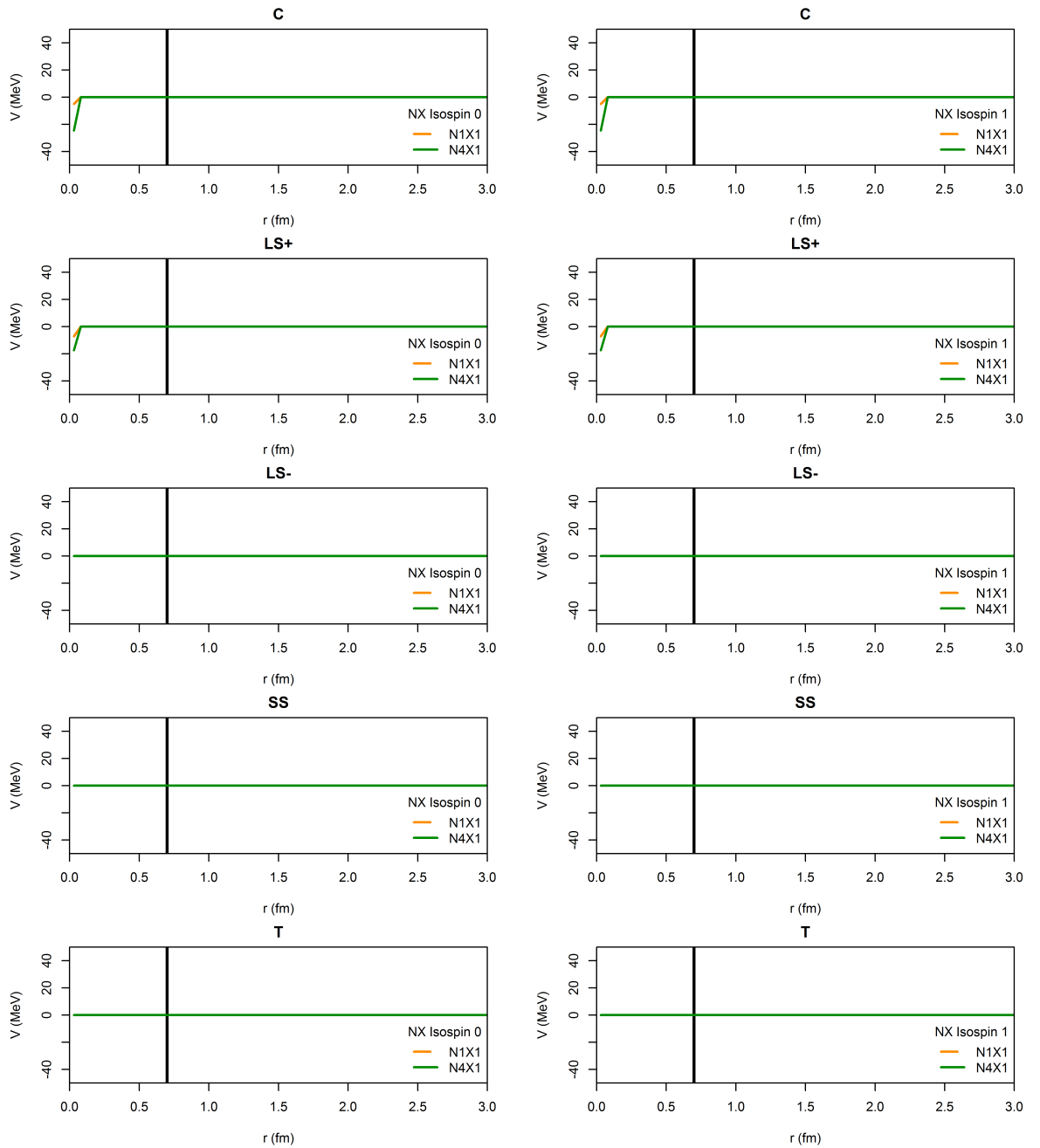
Fonte: Autor

Figura 26 - Potencial $N\bar{E}$ devido a troca de dois pions



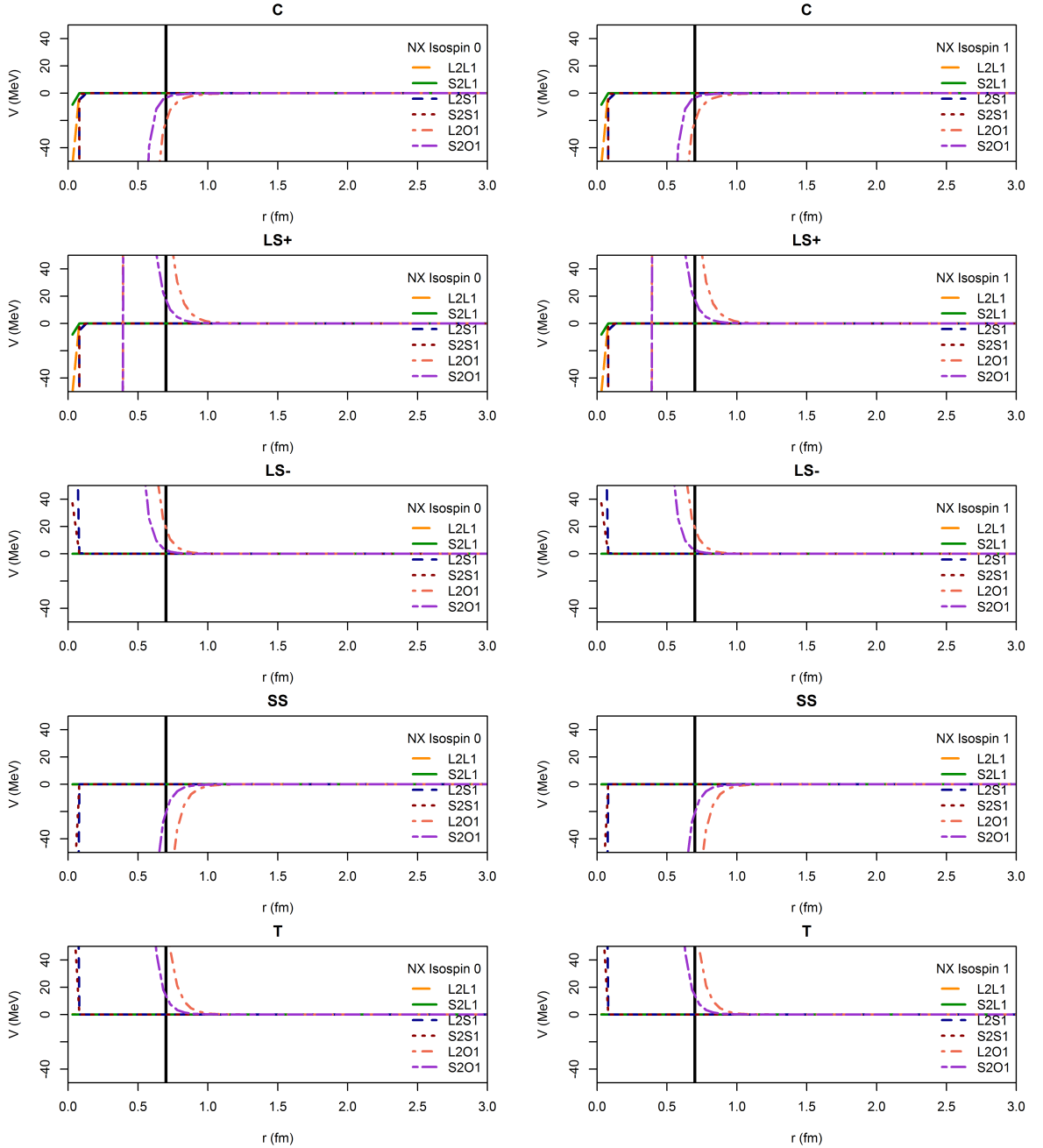
Fonte: Autor

Figura 27 - Potencial $N\Xi$ devido a troca de dois etas



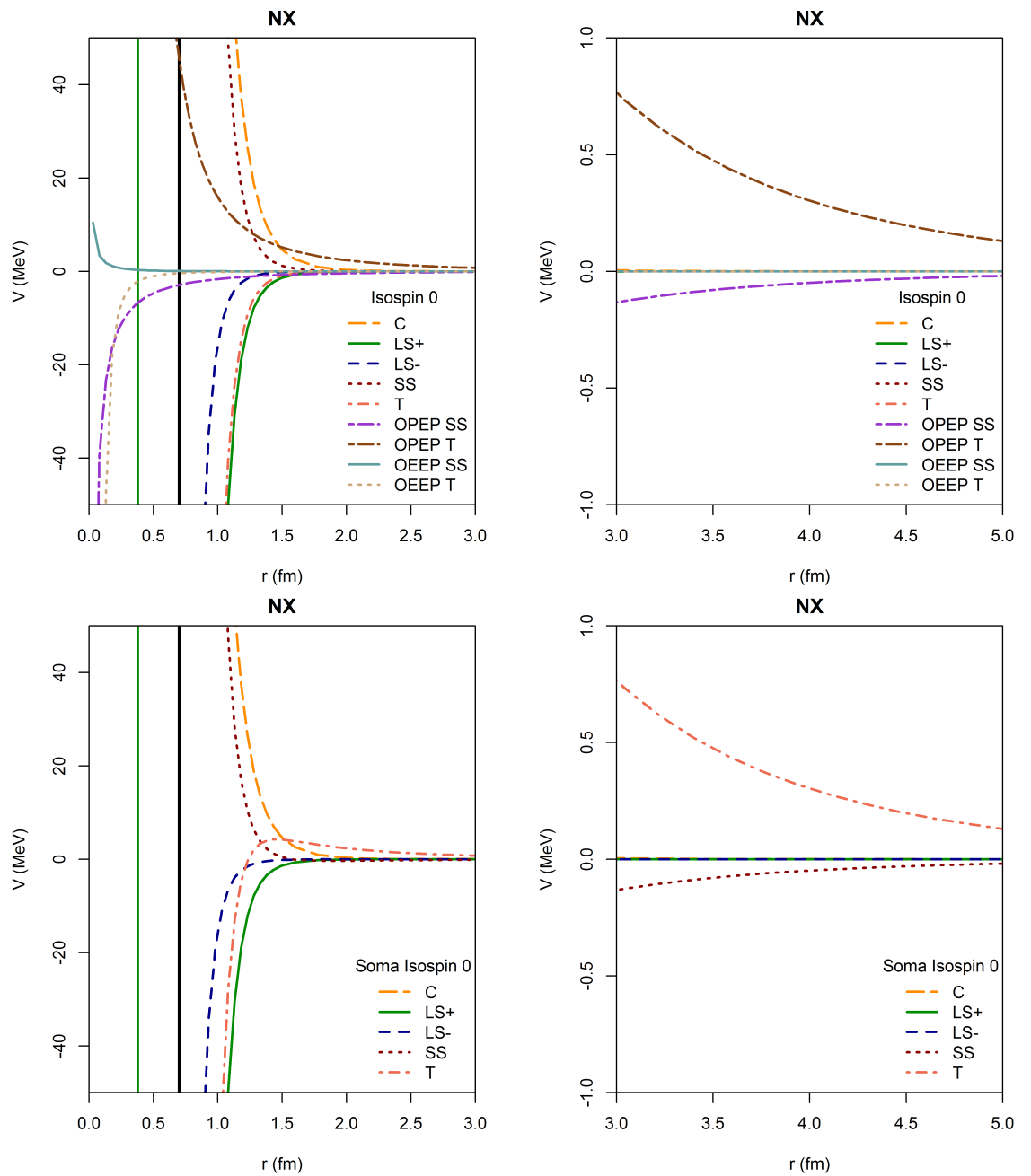
Fonte: Autor

Figura 28 - Potencial $N\bar{E}$ devido a troca de dois kaons



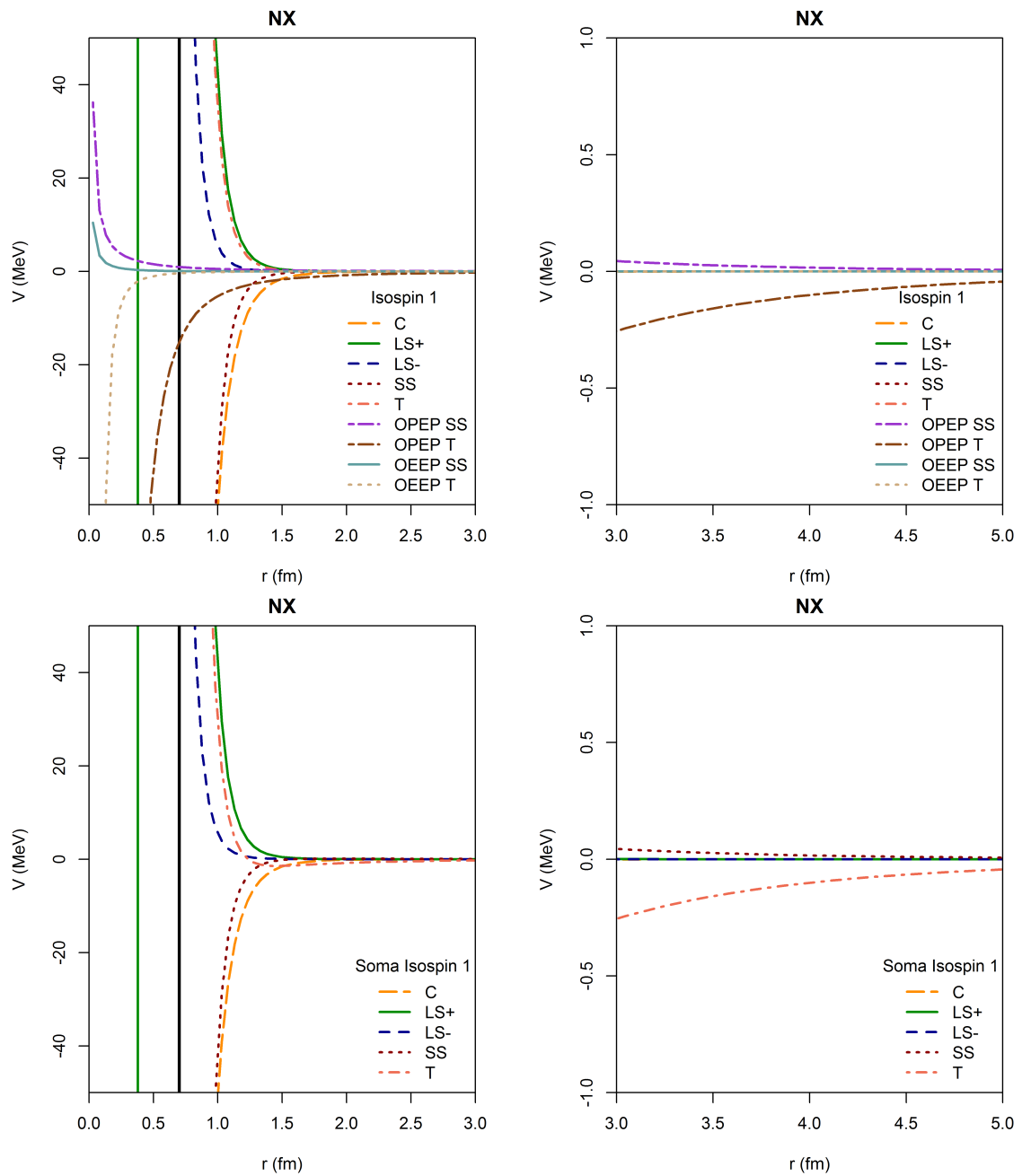
Fonte: Autor

Figura 29 - Potencial $N\Xi$ devido a troca de dois mésons, OPEP, OEEP e o potencial total somadas todas as contribuições no canal de isospin 0



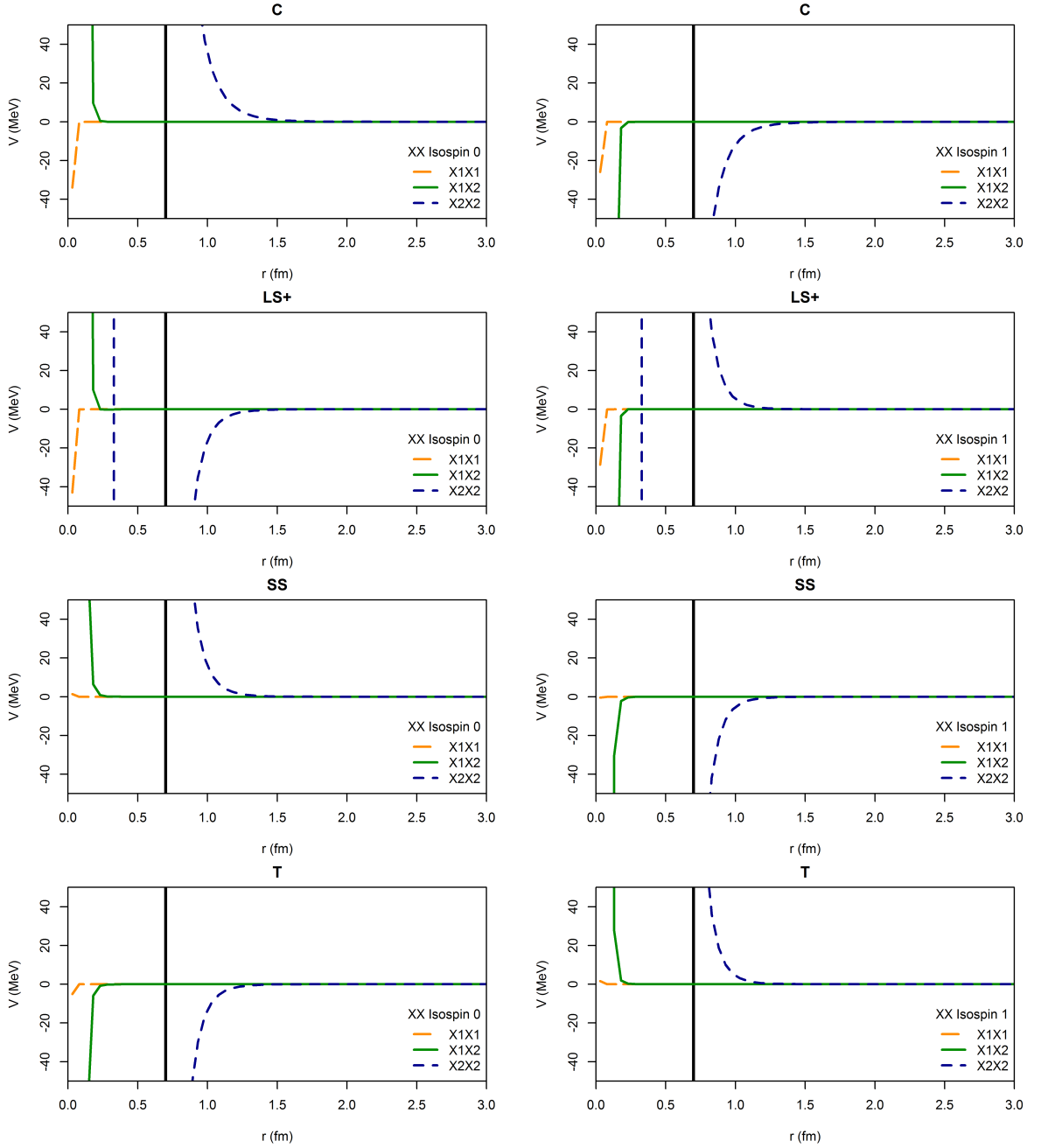
Fonte: Autor

Figura 30 - Potencial $N\Xi$ devido a troca de dois mésons, OPEP, OEEP e o potencial total somadas todas as contribuições no canal de isospin 1



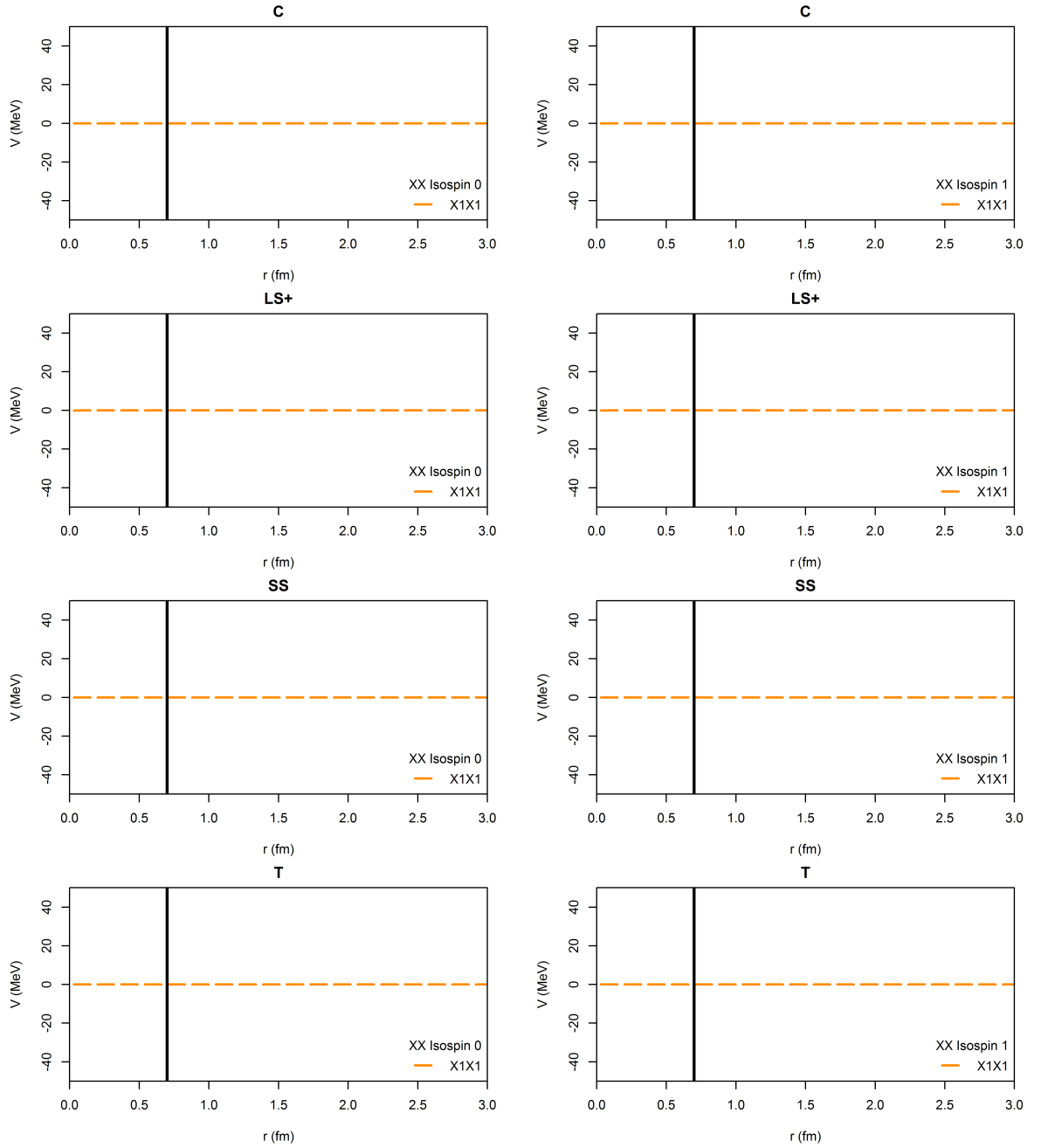
Fonte: Autor

Figura 31 - Potencial $\Xi\Xi$ devido a troca de dois pions



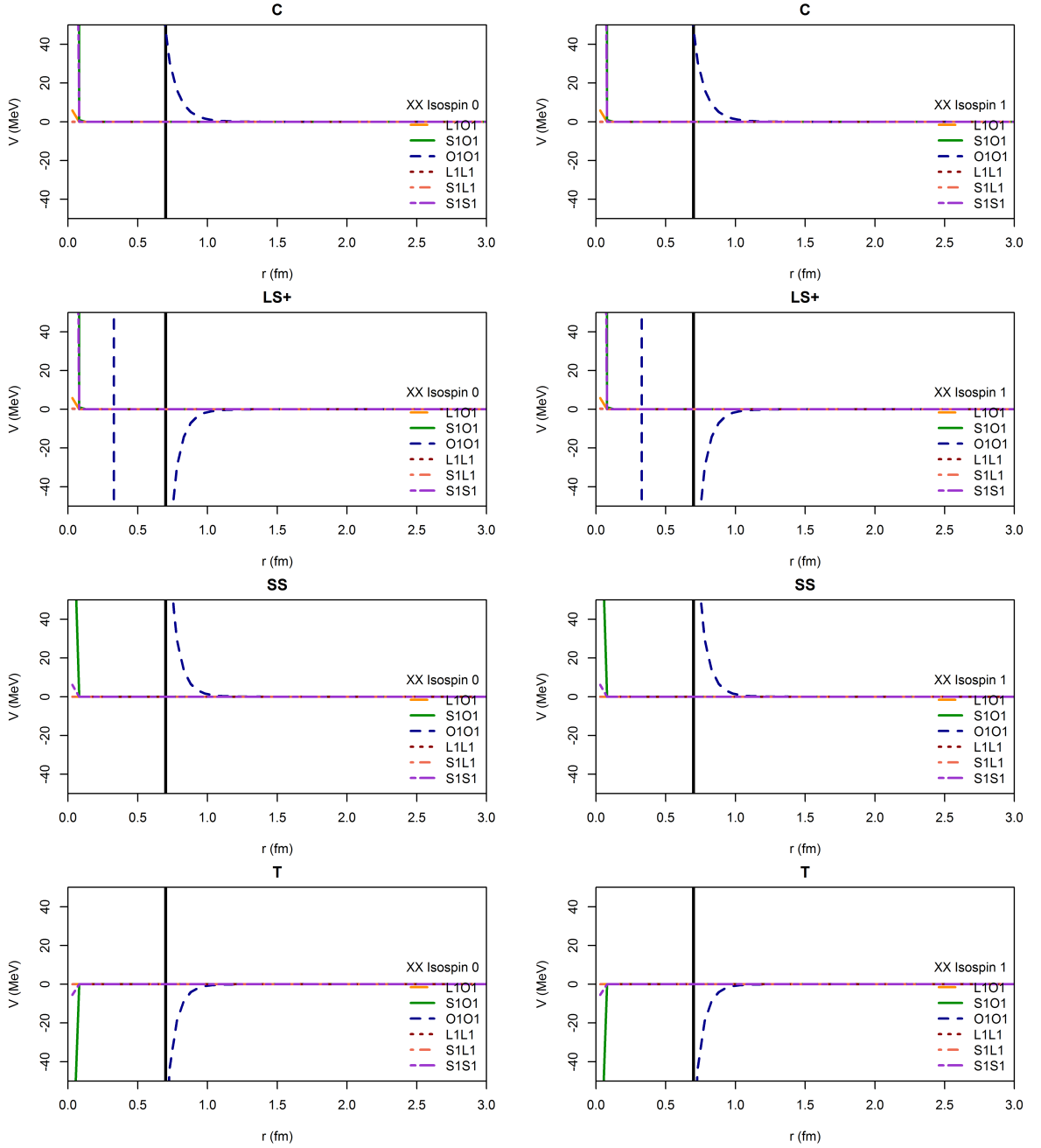
Fonte: Autor

Figura 32 - Potencial $\Xi\Xi$ devido a troca de dois etas



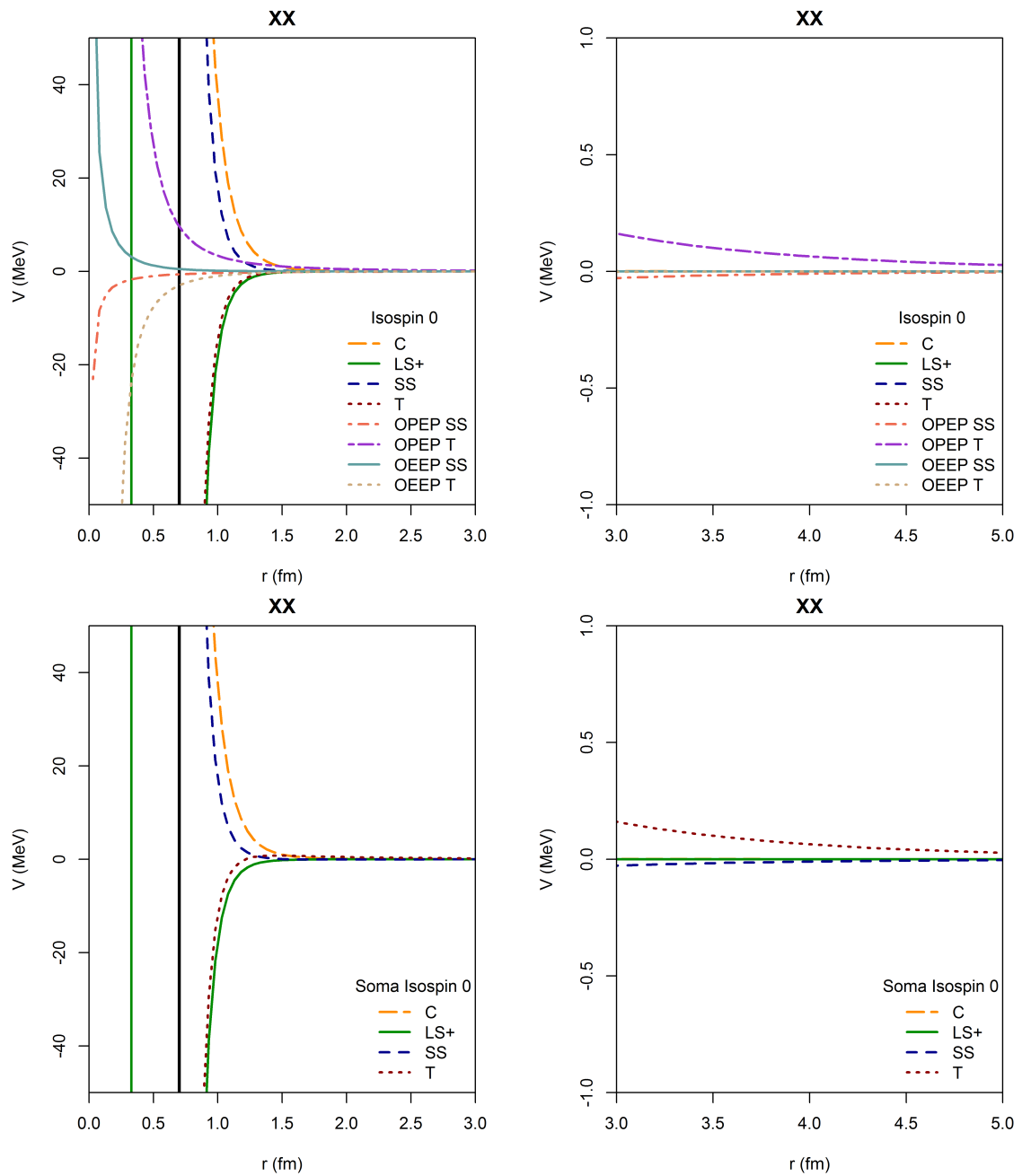
Fonte: Autor

Figura 33 - Potencial $\Xi\Xi$ devido a troca de dois kaons



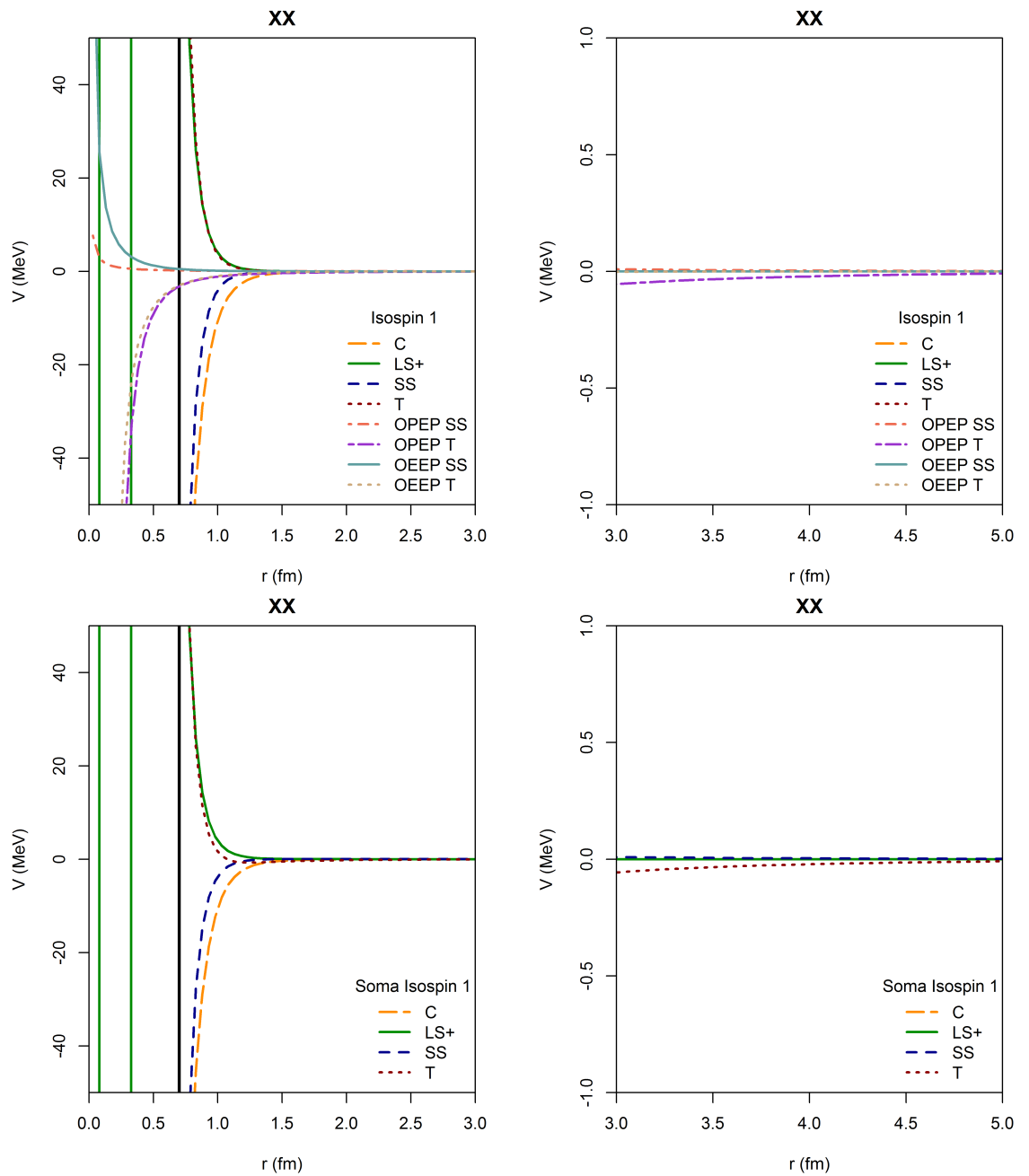
Fonte: Autor

Figura 34 - Potencial $\Xi\Xi$ devido a troca de dois mésons, OPEP, OEEP e o potencial total somadas todas as contribuições no canal de isospin 0



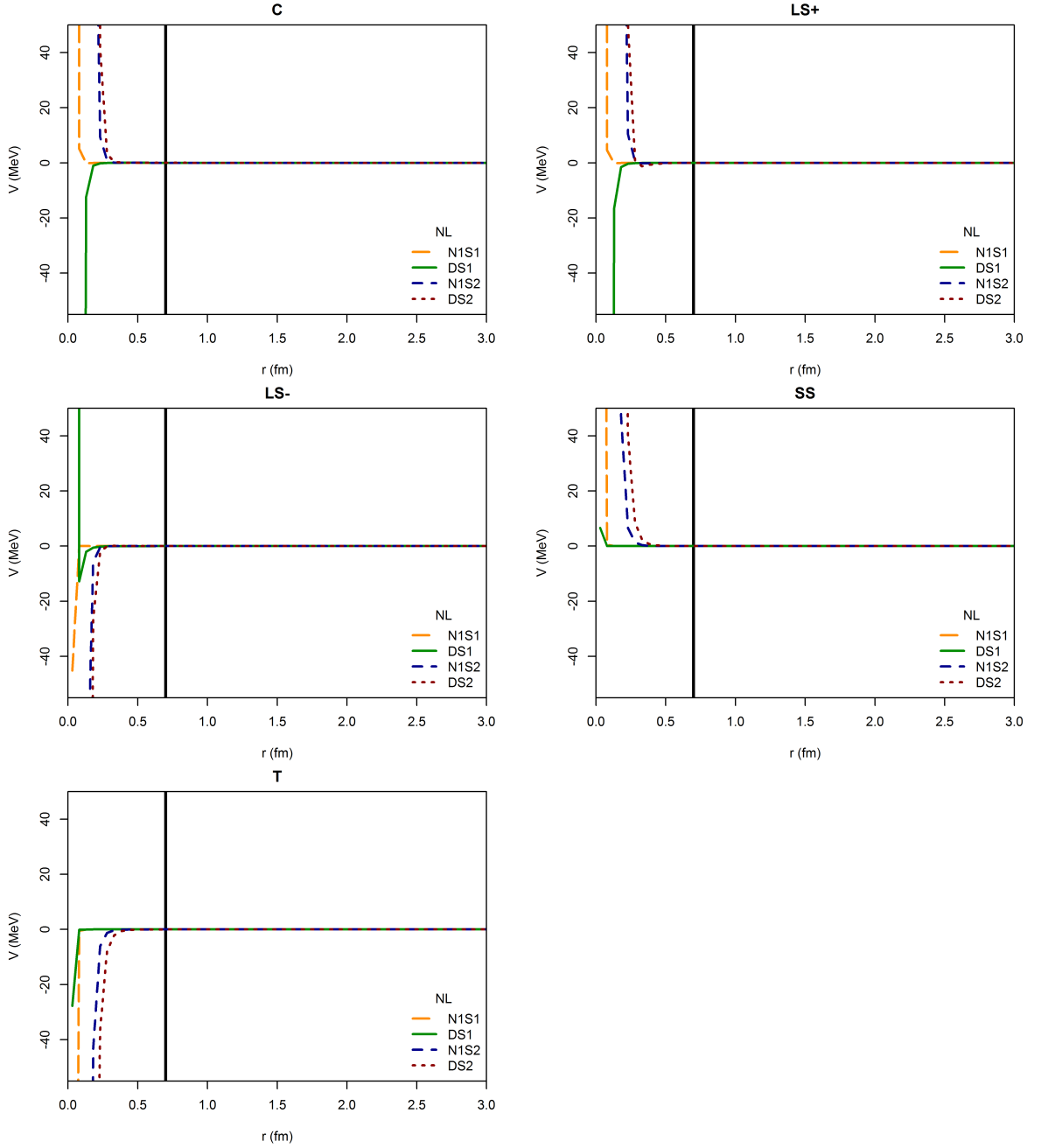
Fonte: Autor

Figura 35 - Potencial $\Xi\Xi$ devido a troca de dois mésons, OPEP, OEEP e o potencial total somadas todas as contribuições no canal de isospin 1

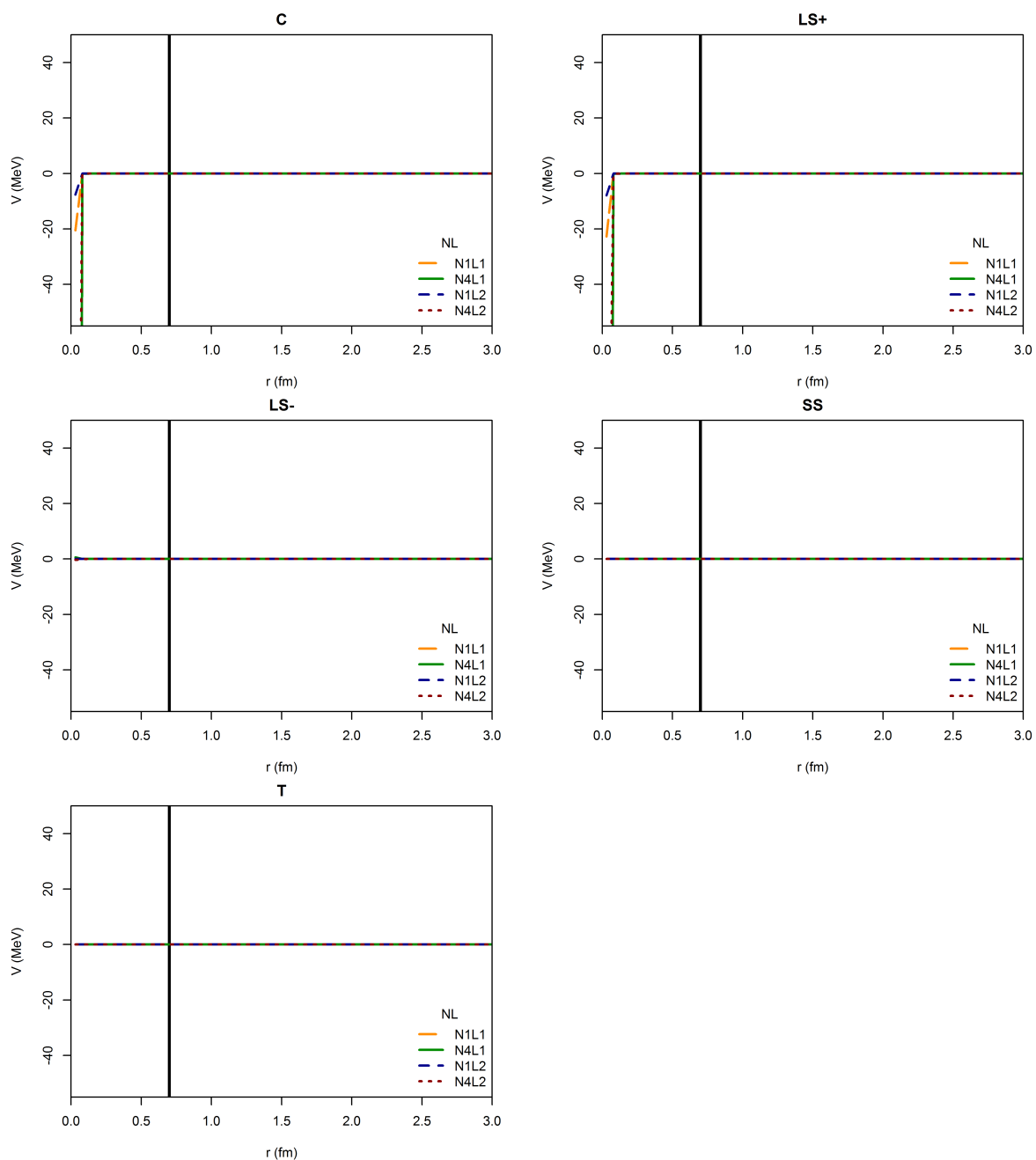


Fonte: Autor

Figura 36 - Potencial NA devido a troca de dois pions

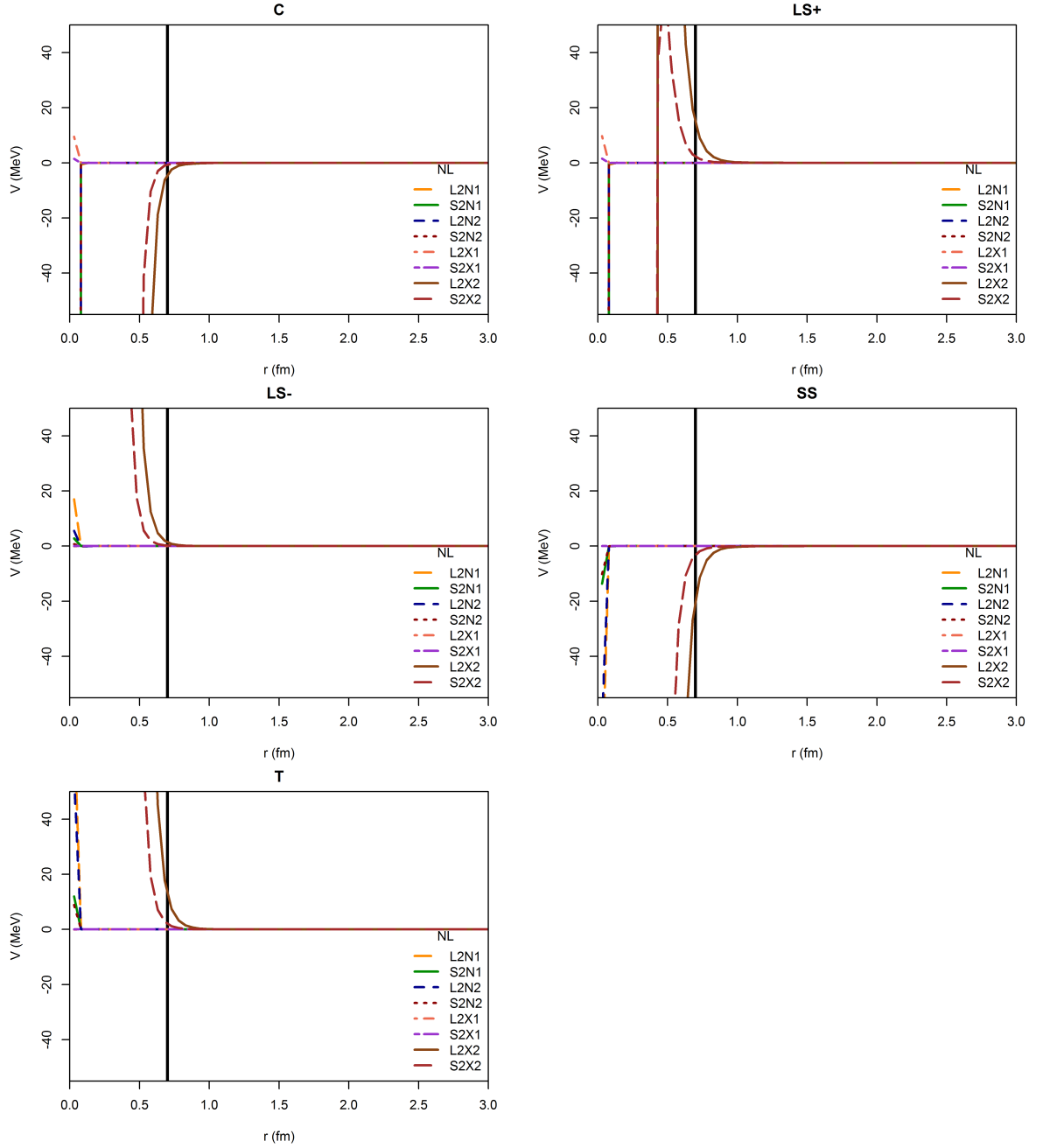


Fonte: Autor

Figura 37 - Potencial $N\Lambda$ devido a troca de dois etas

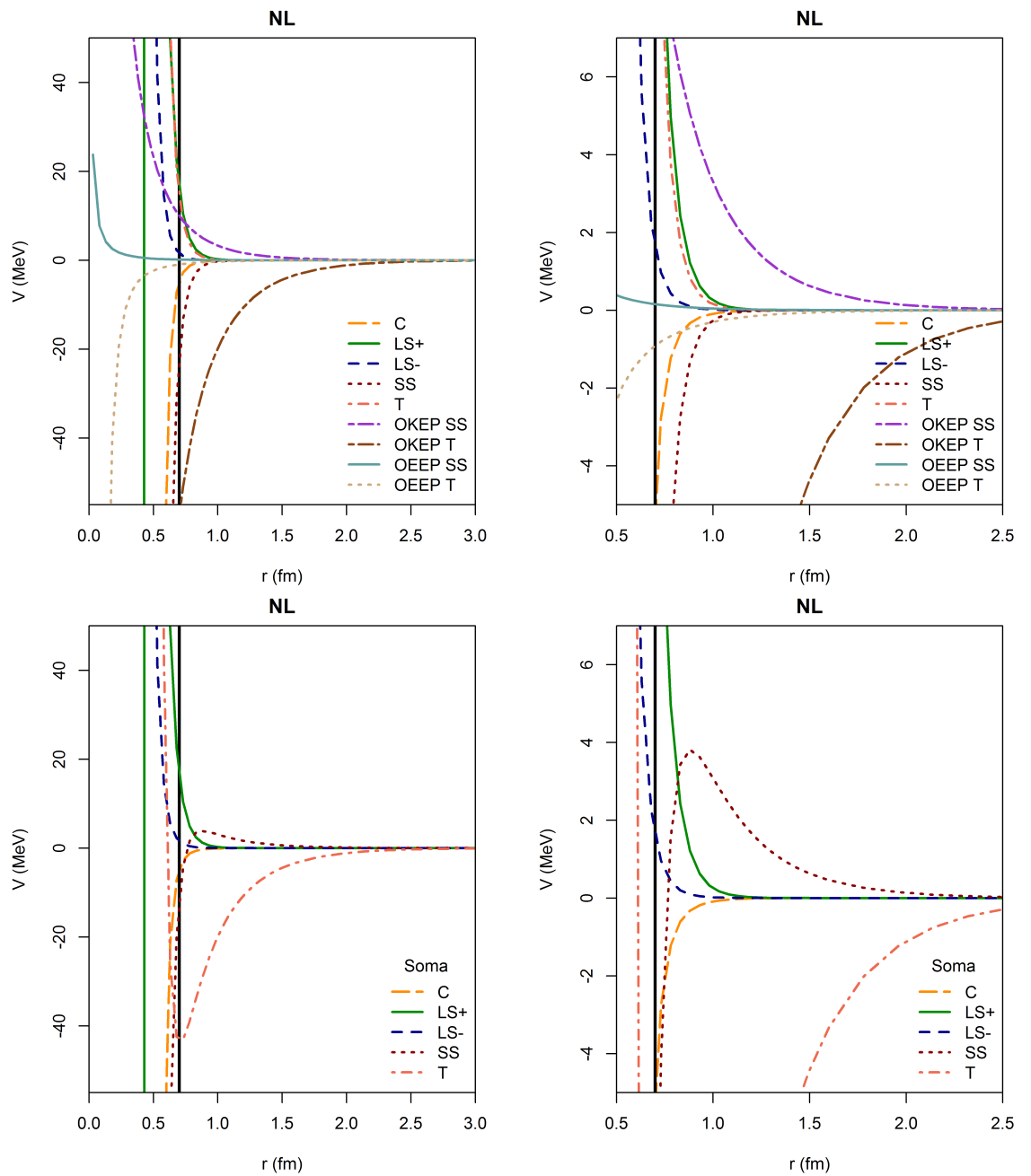
Fonte: Autor

Figura 38 - Potencial $N\Lambda$ devido a troca de dois kaons



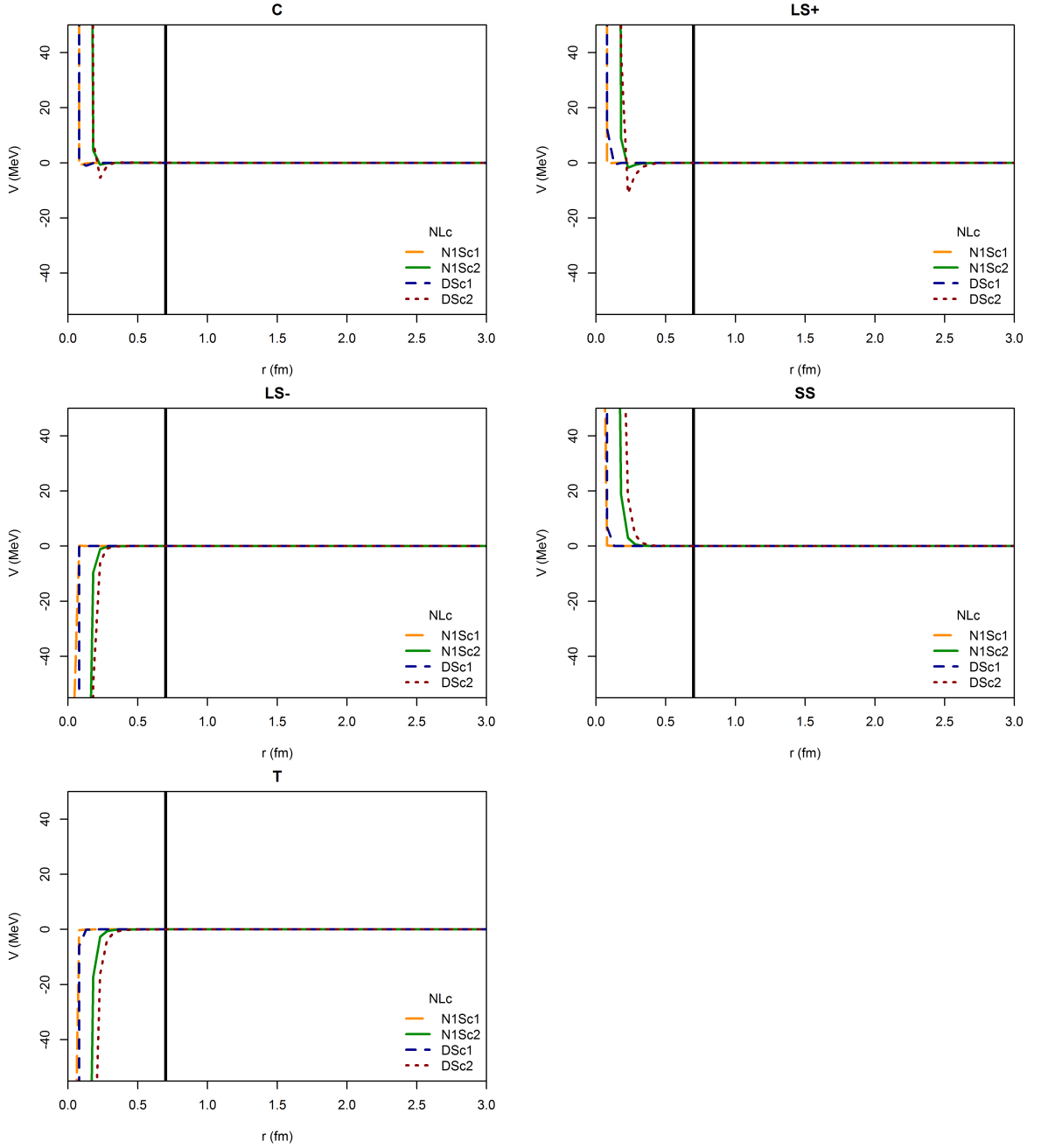
Fonte: Autor

Figura 39 - Potencial NA devido a troca de dois mésons, OKEP, OEEP e o potencial total somadas todas as contribuições



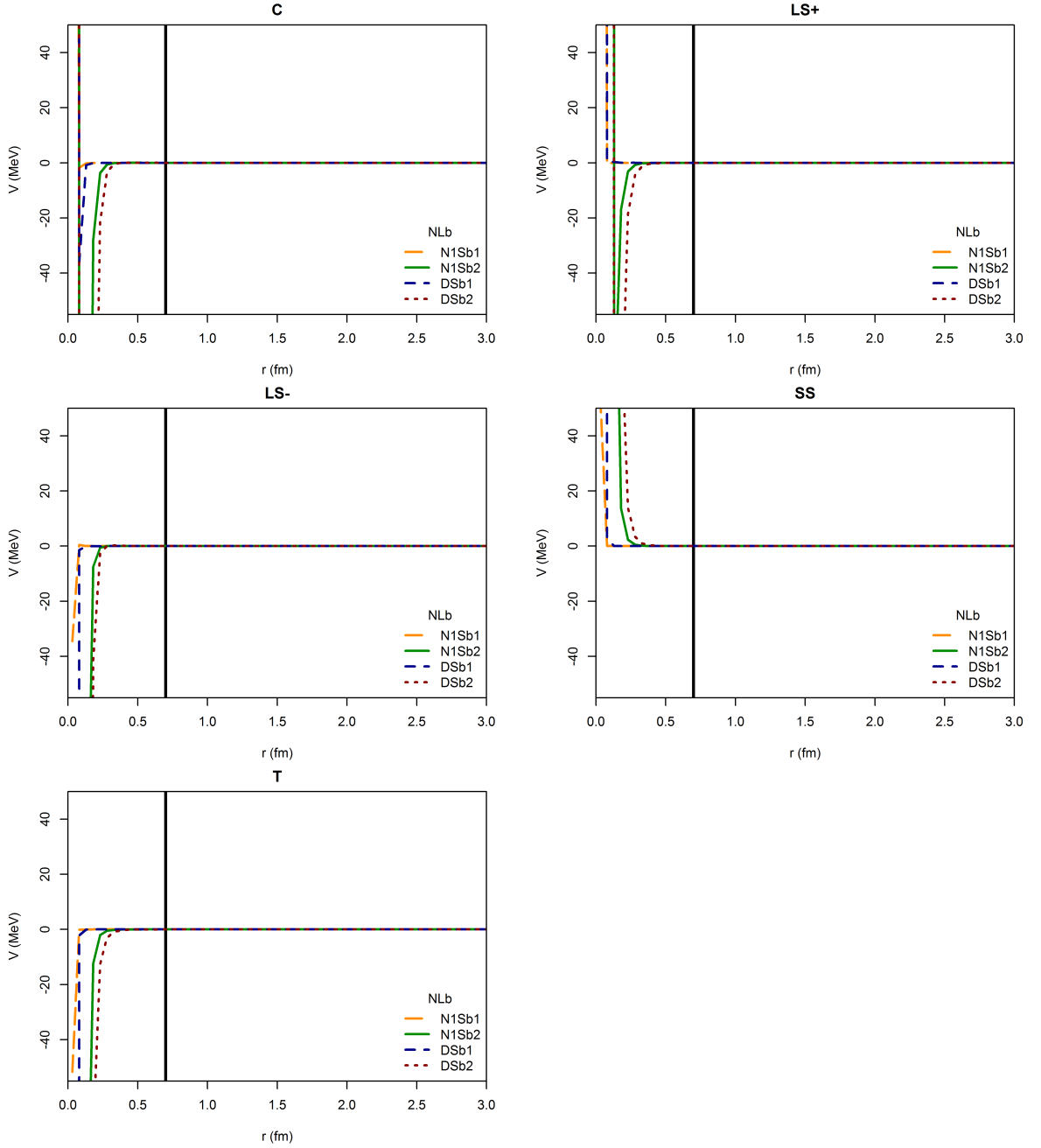
Fonte: Autor

Figura 40 - Potencial $N\Lambda_c$ devido a troca de dois pions



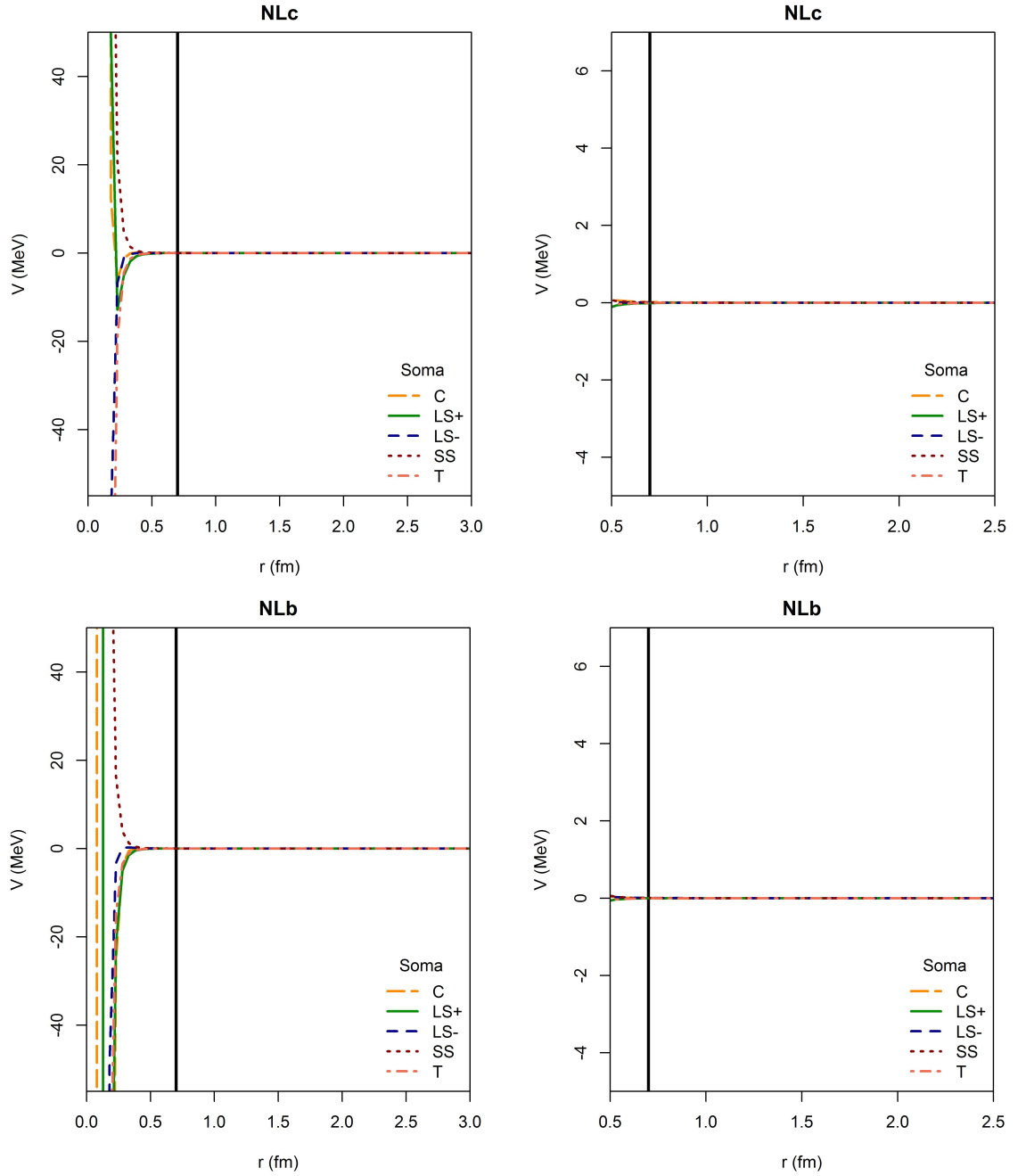
Fonte: Autor

Figura 41 - Potencial $N\Lambda_b$ devido a troca de dois pions

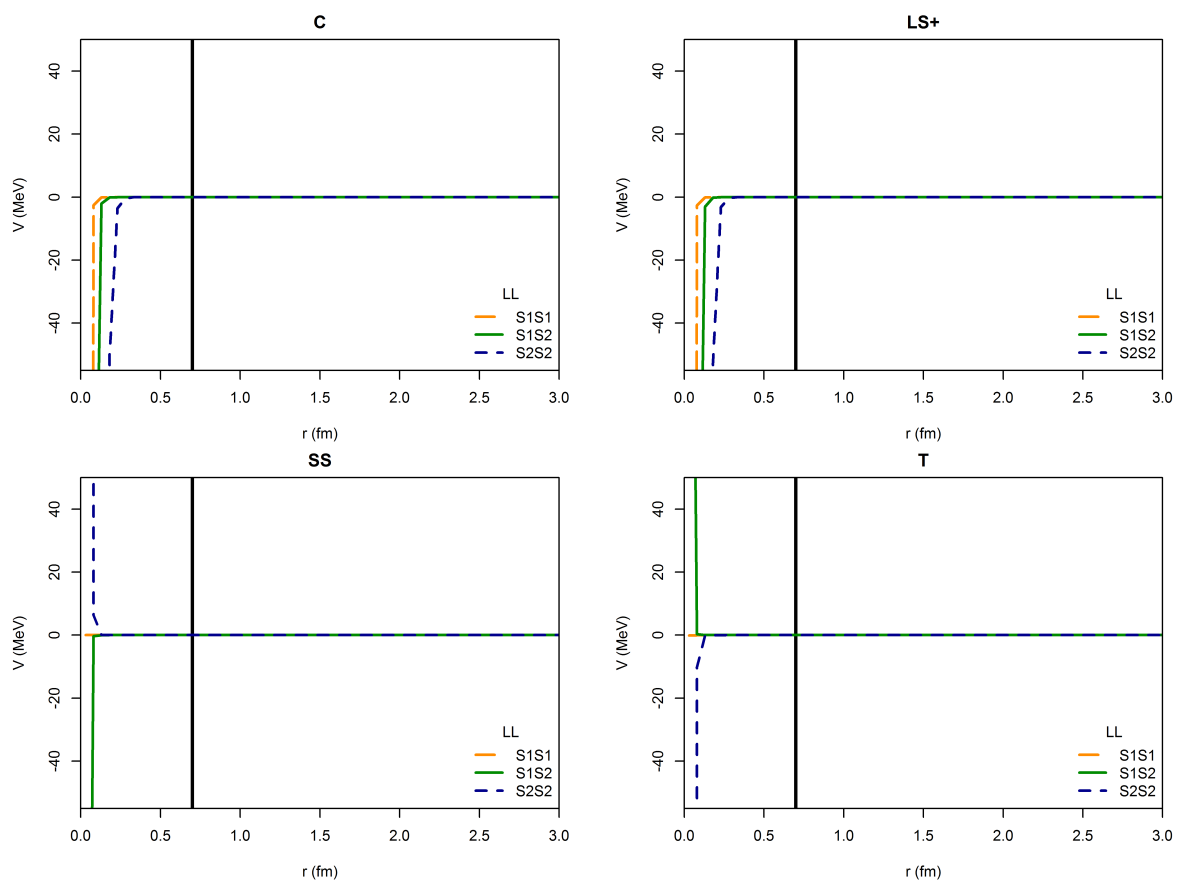


Fonte: Autor

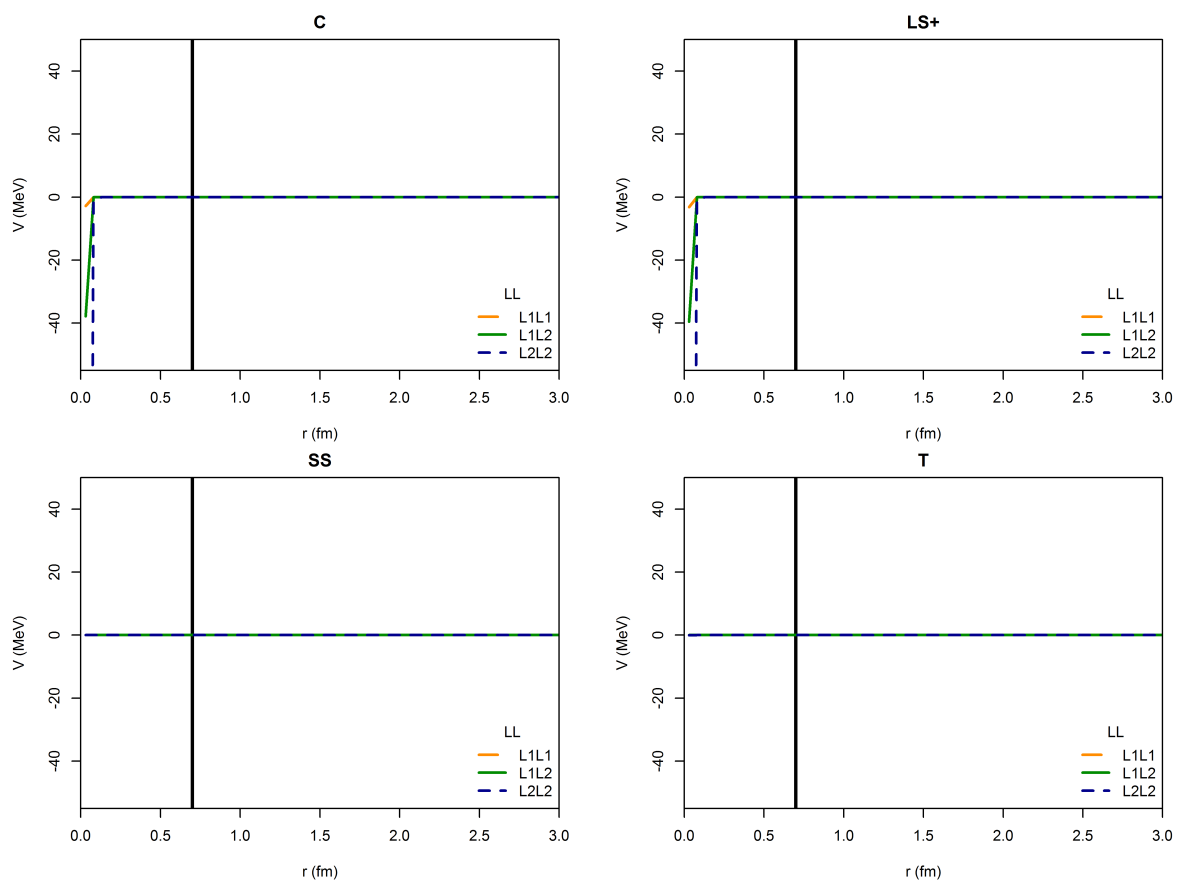
Figura 42 - Potenciais $N\Lambda_c$ e $N\Lambda_b$ finais



Fonte: Autor

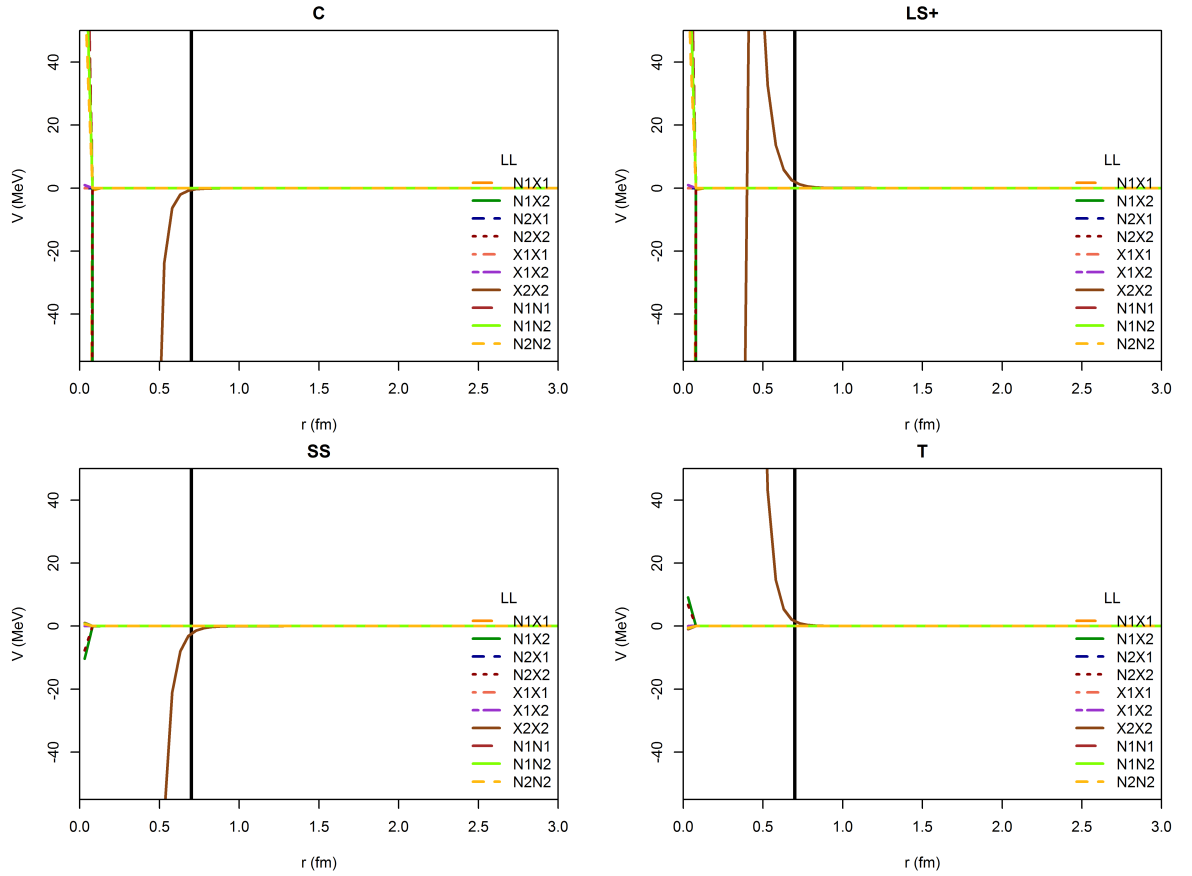
Figura 43 - Potencial $\Lambda\Lambda$ devido a troca de dois pions

Fonte: Autor

Figura 44 - Potencial $\Lambda\Lambda$ devido a troca de dois etas

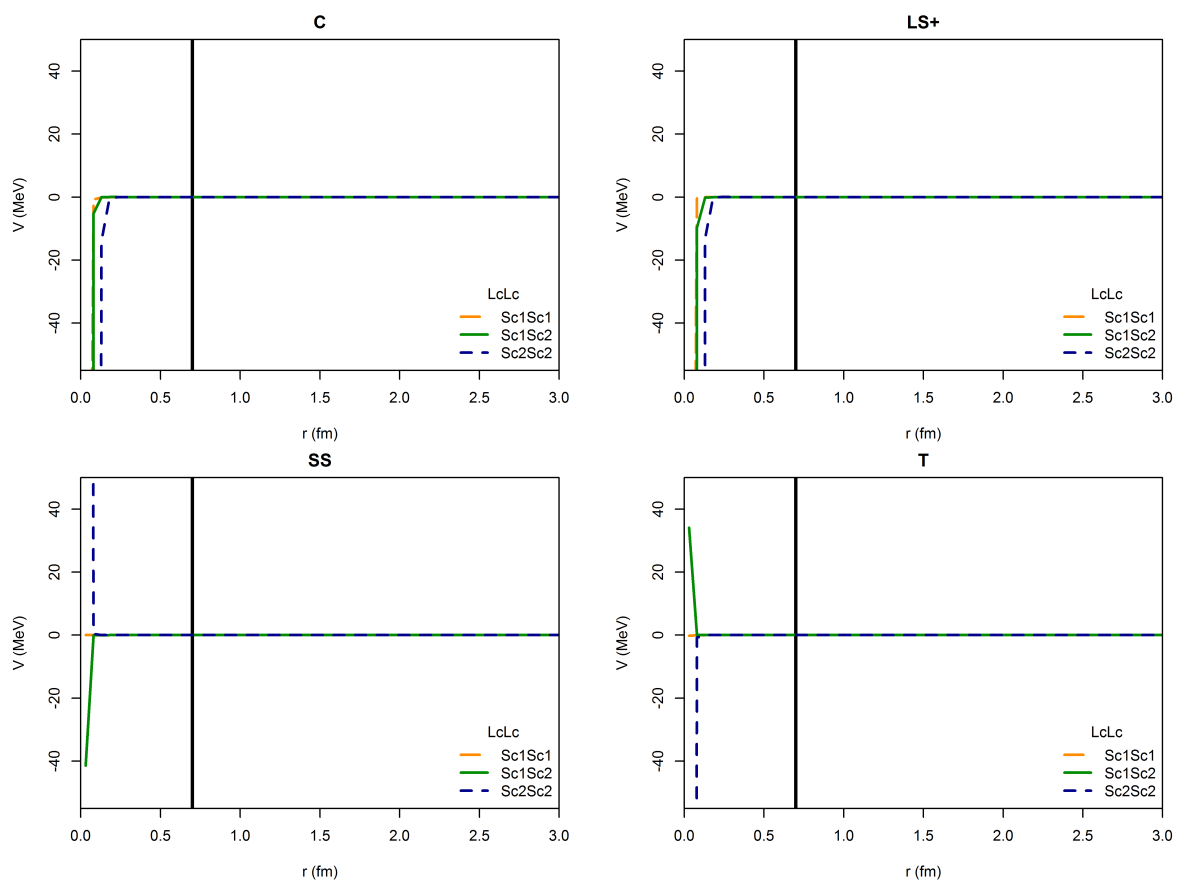
Fonte: Autor

Figura 45 - Potencial $\Lambda\Lambda$ devido a troca de dois kaons

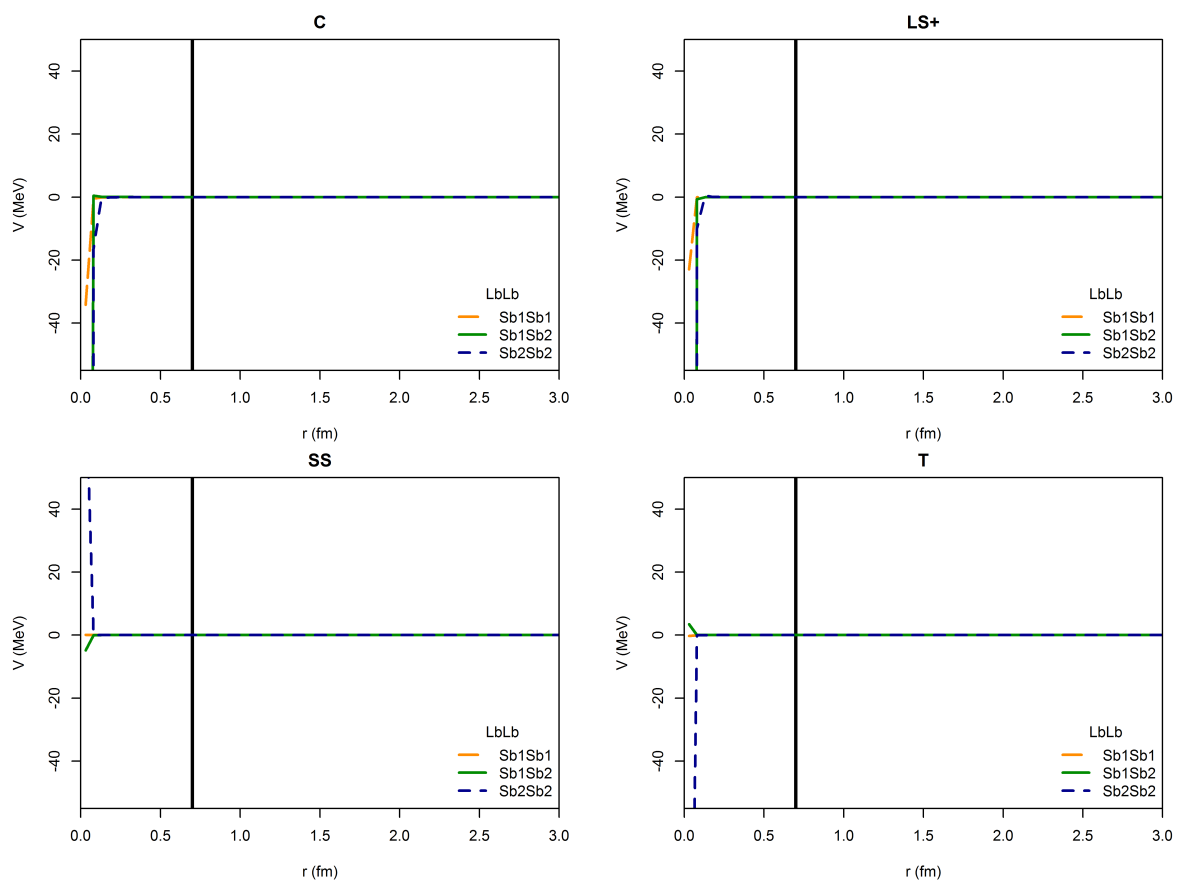


Fonte: Autor

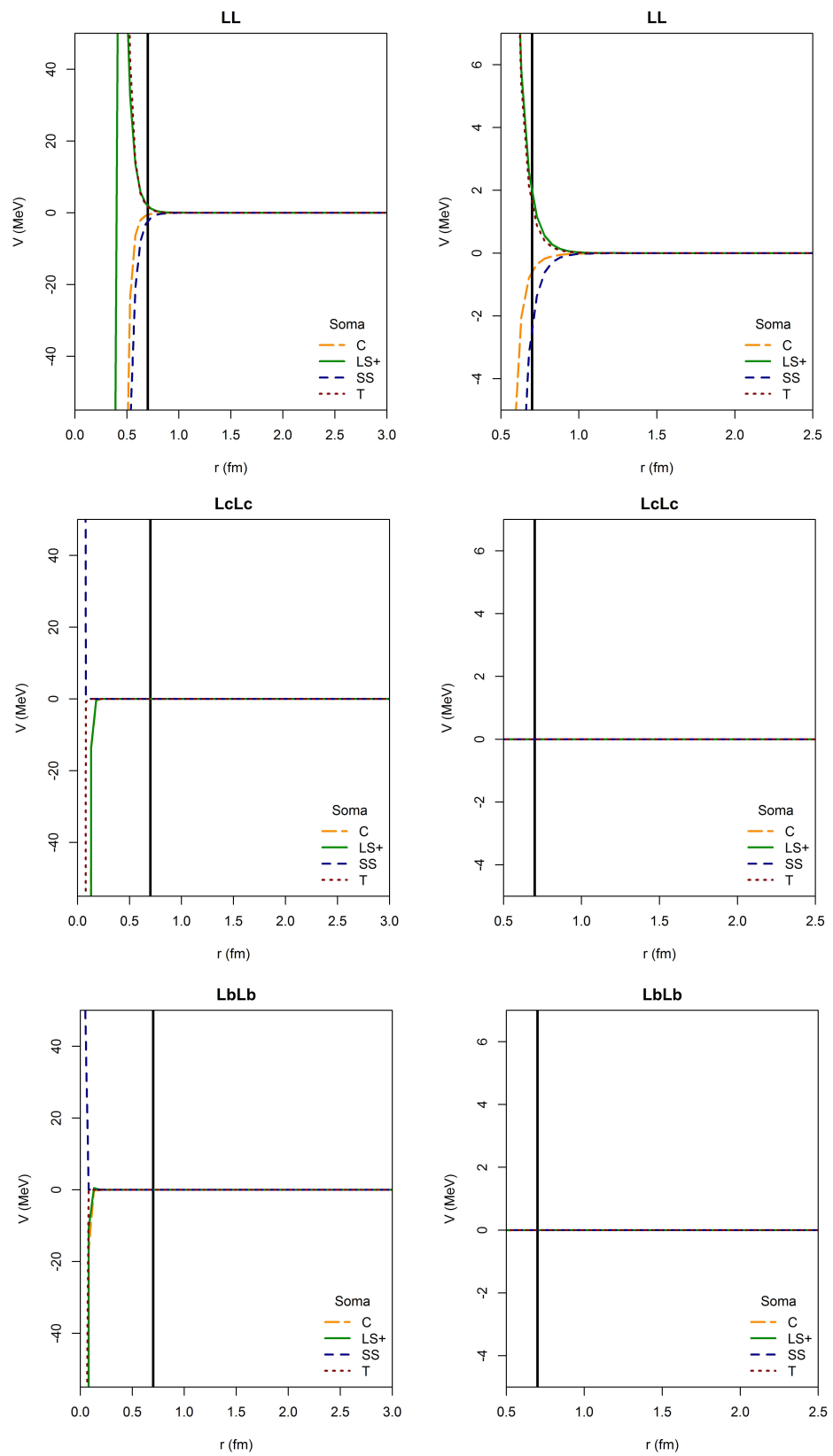
Figura 46 - Potencial $\Lambda_c\Lambda_c$ devido a troca de dois pions



Fonte: Autor

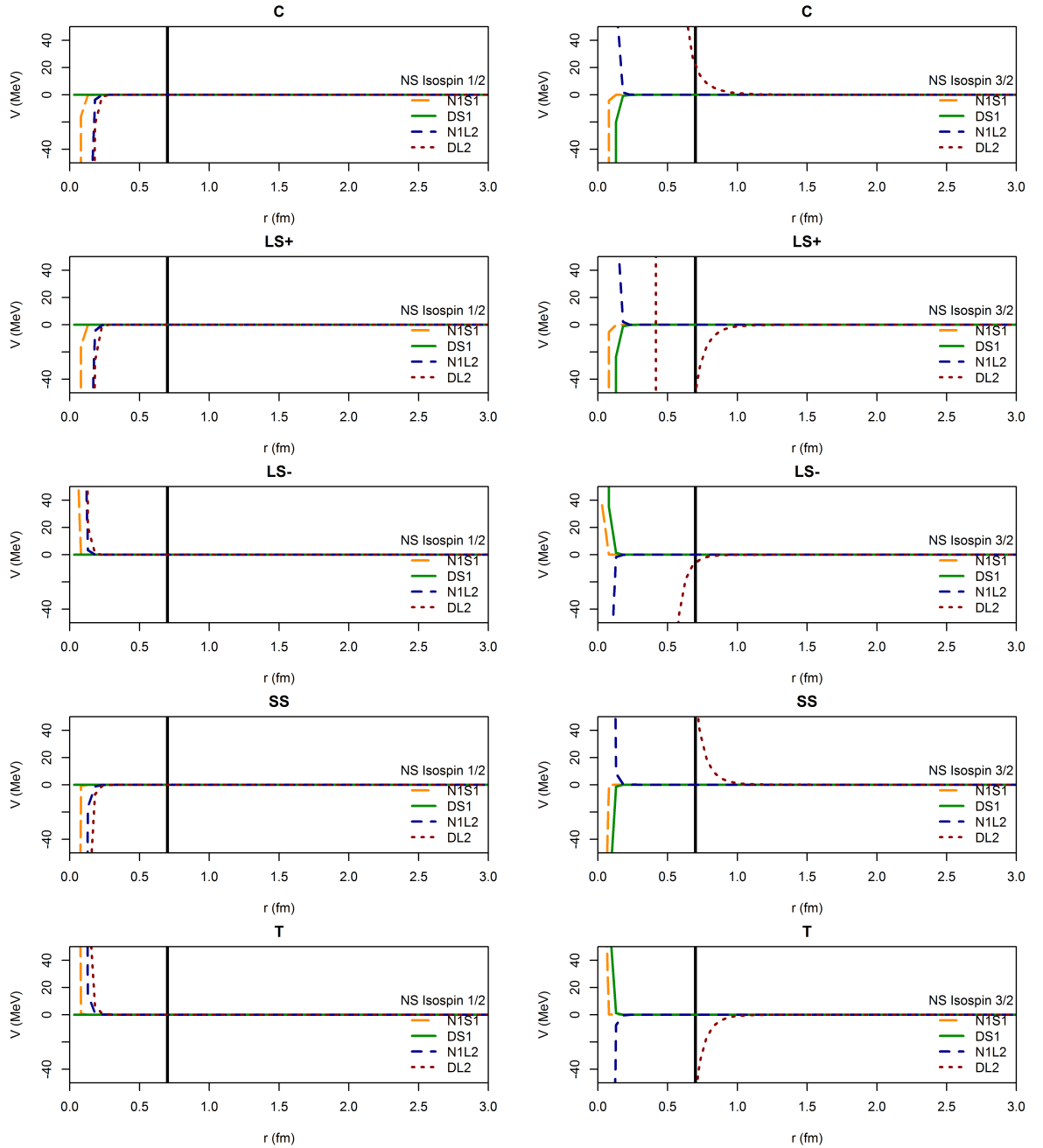
Figura 47 - Potencial $\Lambda_b\Lambda_b$ devido a troca de dois pions

Fonte: Autor

Figura 48 - Potenciais $\Lambda\Lambda$, $\Lambda_c\Lambda_c$ e $\Lambda_b\Lambda_b$ finais

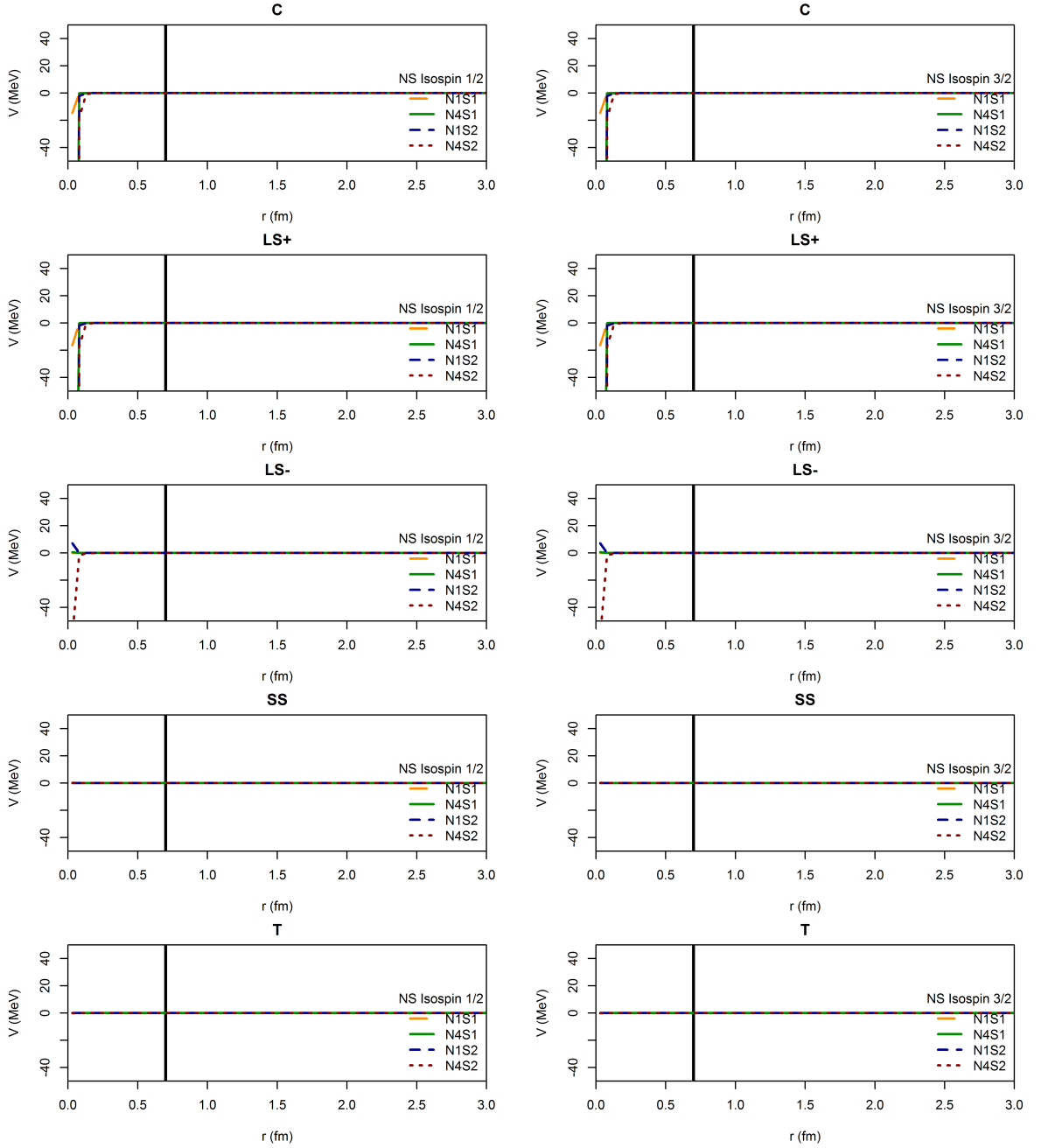
Fonte: Autor

Figura 49 - Potencial $N\Sigma$ devido a troca de dois píons



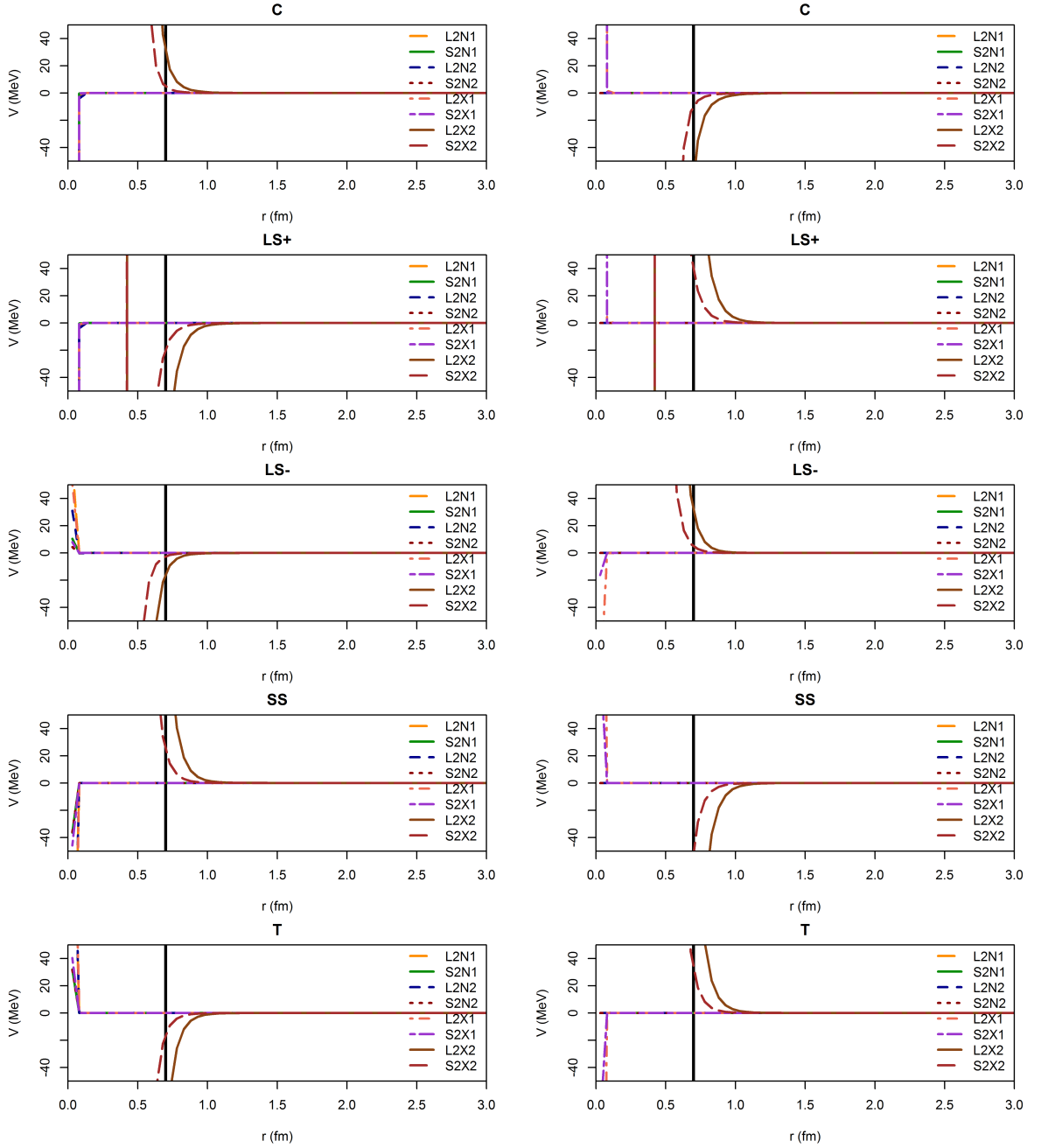
Fonte: Autor

Figura 50 - Potencial $N\Sigma$ devido a troca de dois etas



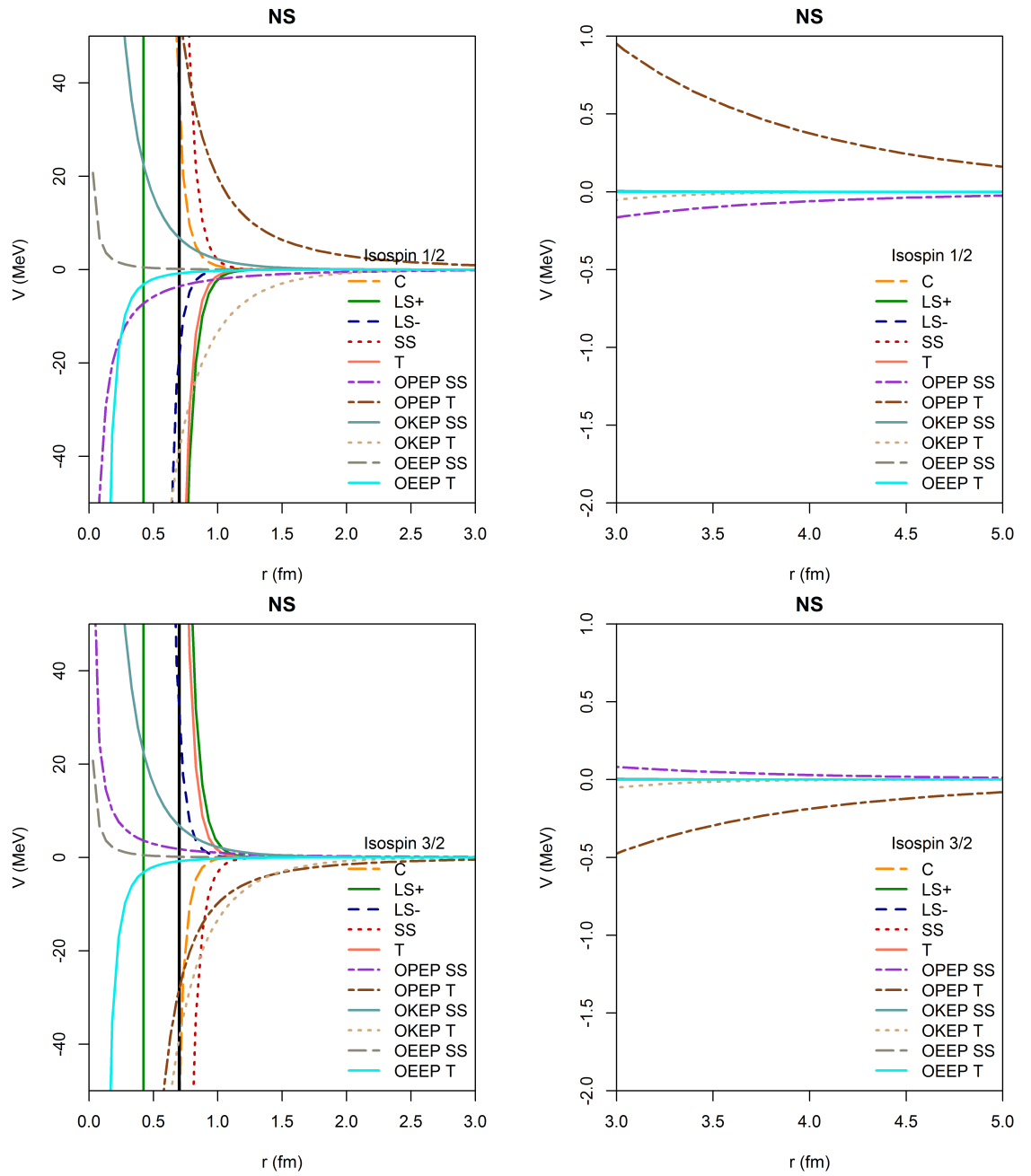
Fonte: Autor

Figura 51 - Potencial $N\Sigma$ devido a troca de dois kaons



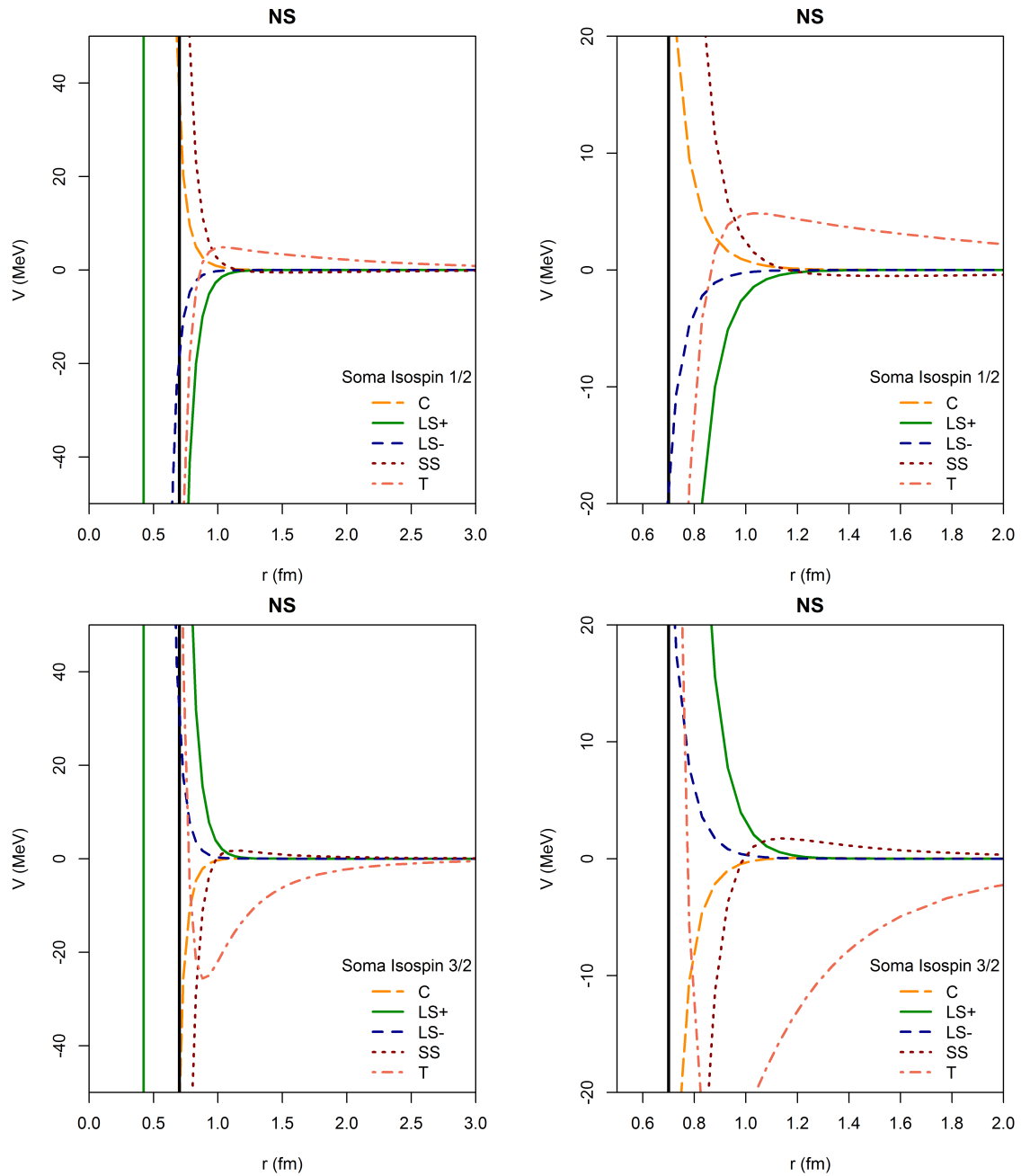
Fonte: Autor

Figura 52 - Potencial $N\Sigma$ devido a troca de dois mésons total, OPEP, OKEP e OEEP



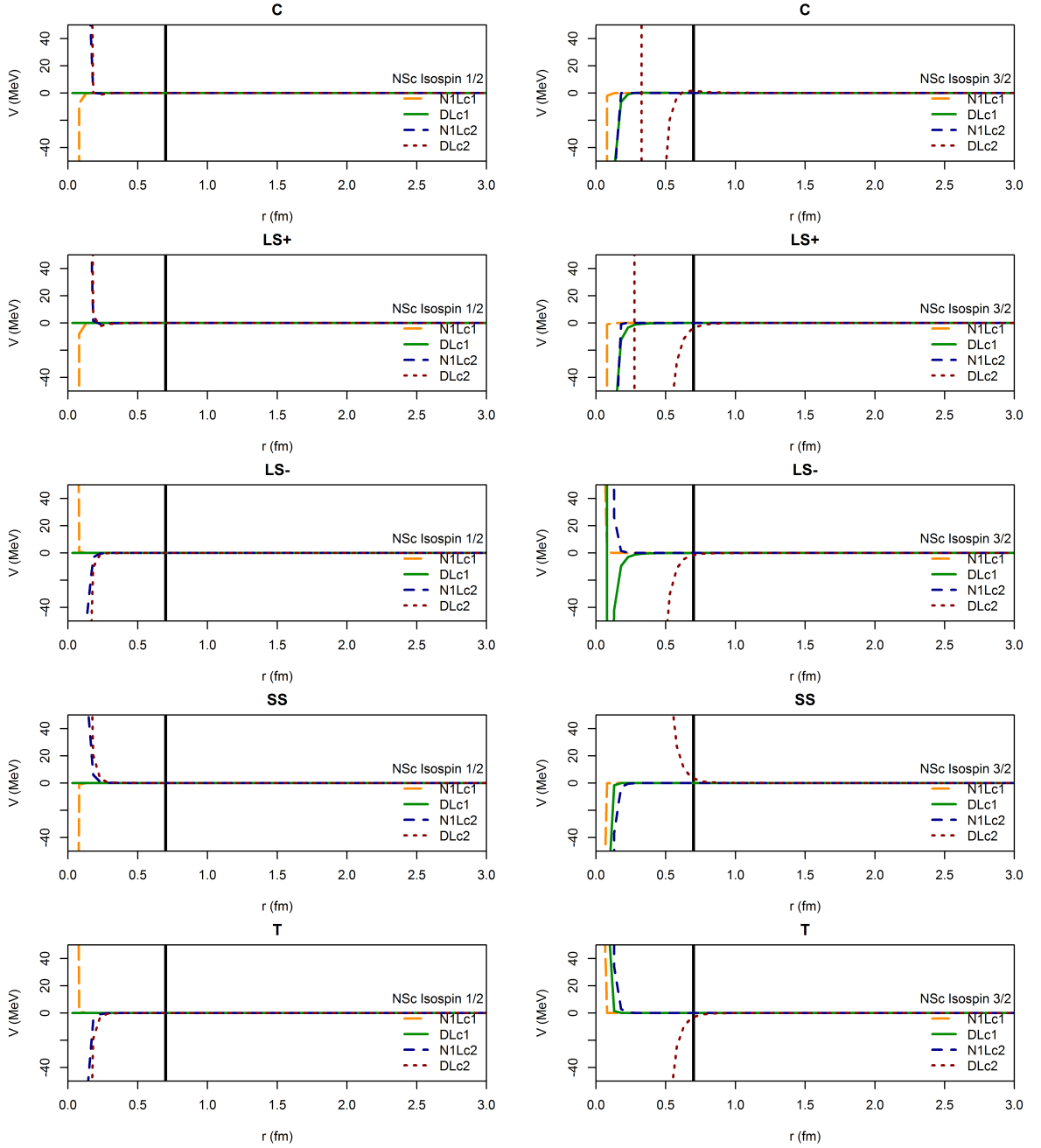
Fonte: Autor

Figura 53 - Potencial $N\Sigma$ total pela somadas todas as contribuições



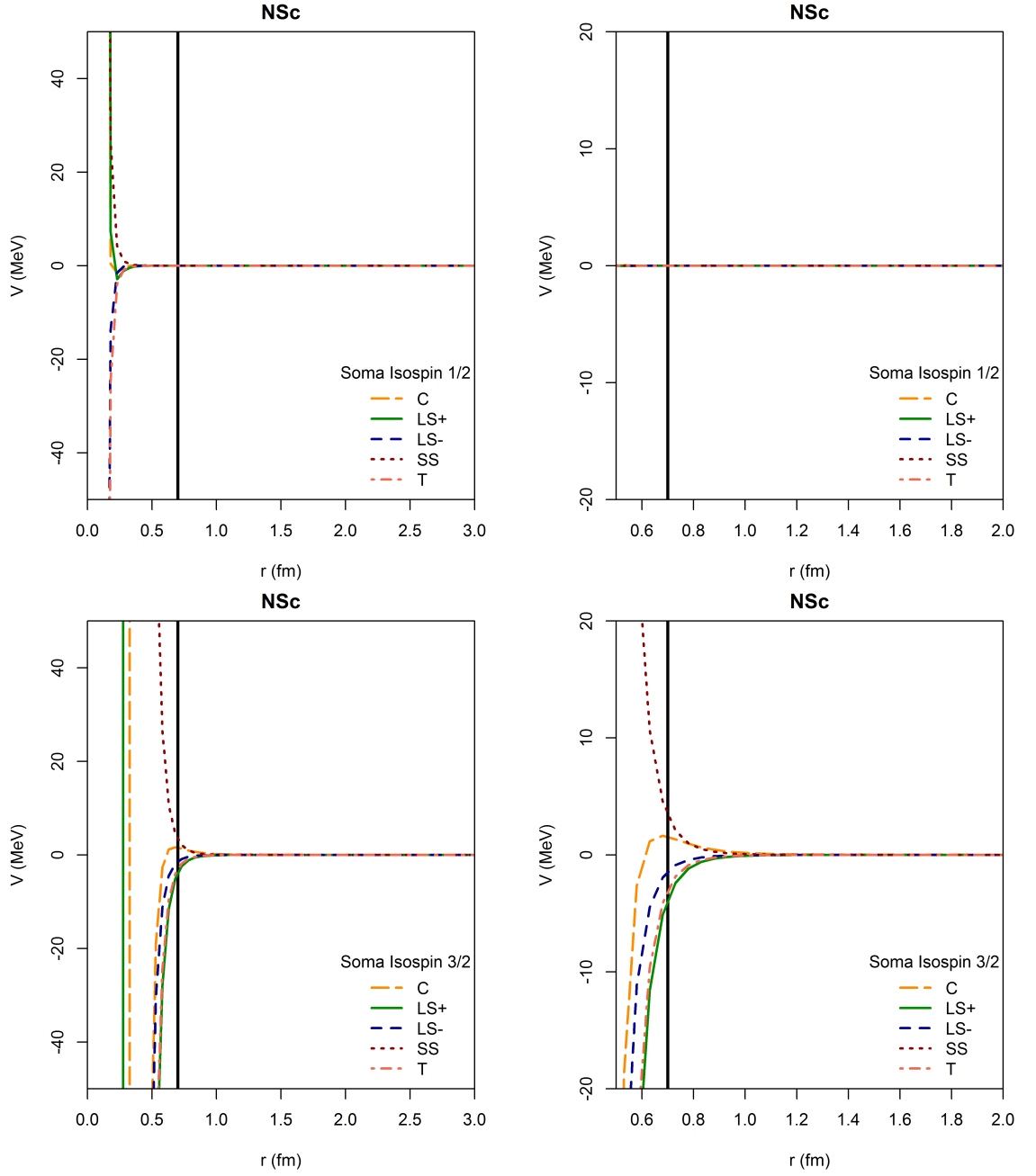
Fonte: Autor

Figura 54 - Potencial $N\Sigma_c$ devido a troca de dois pions



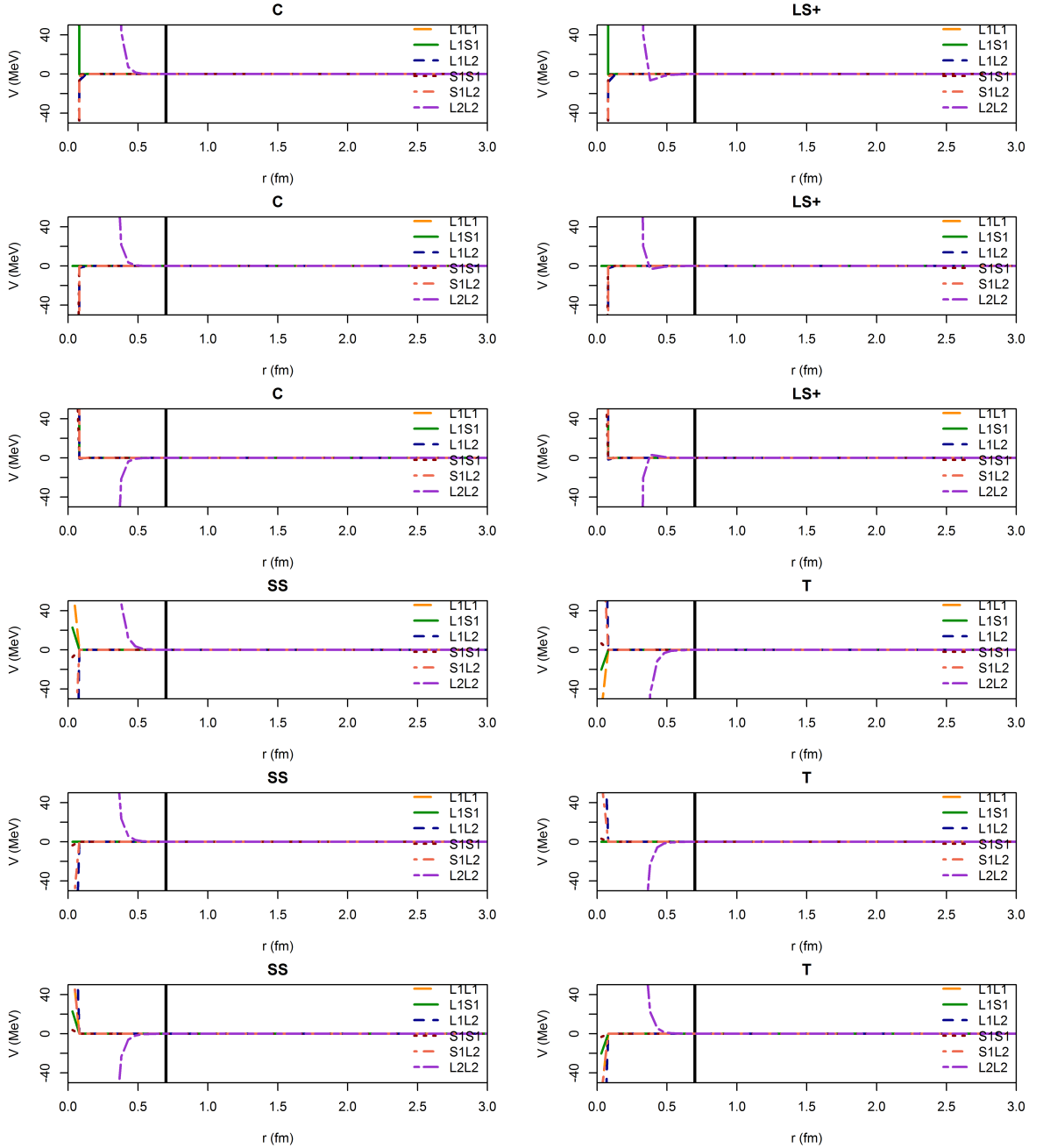
Fonte: Autor

Figura 55 - Potencial $N\Sigma_c$ final



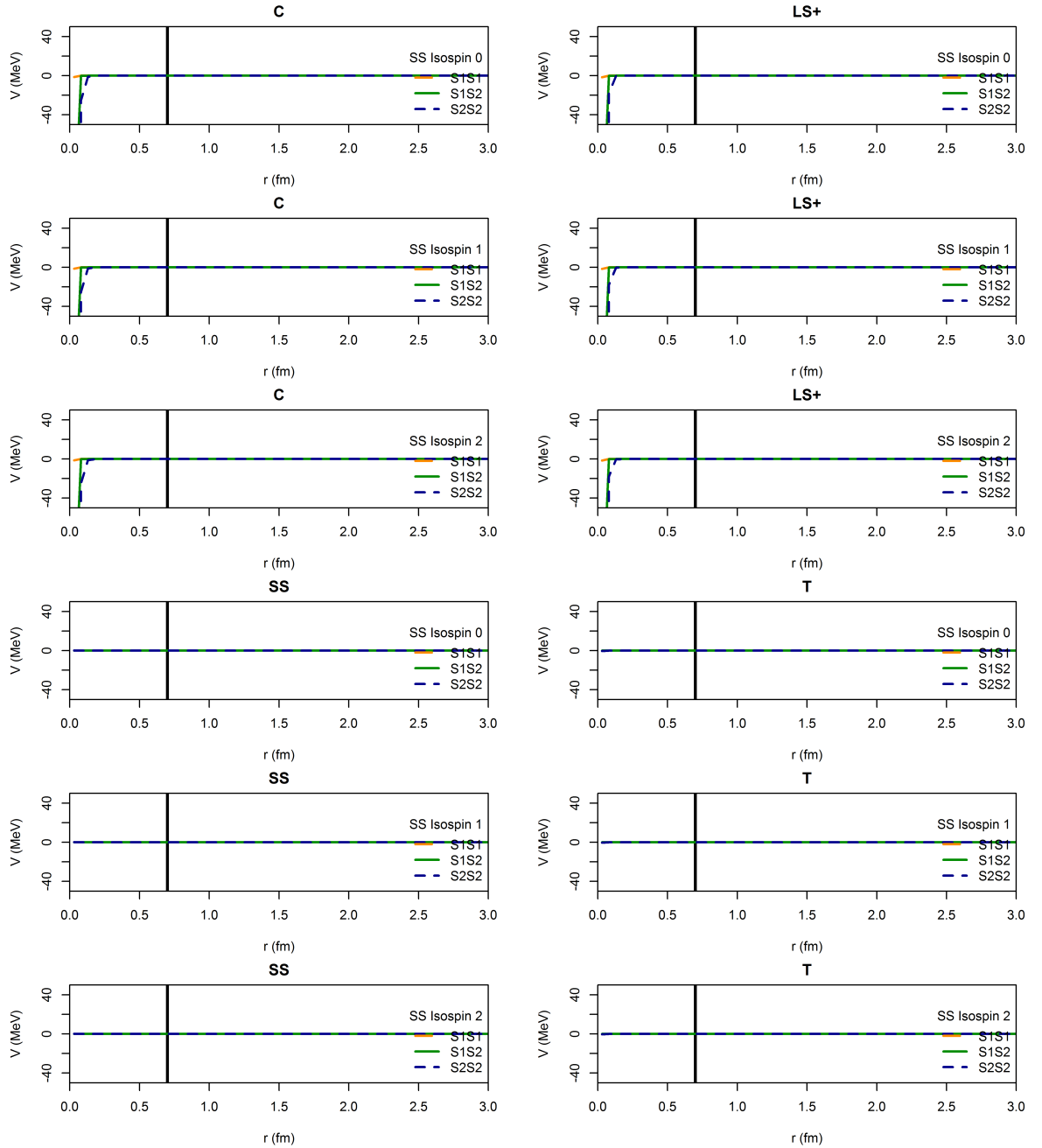
Fonte: Autor

Figura 56 - Potencial $\Sigma\Sigma$ devido a troca de dois pions



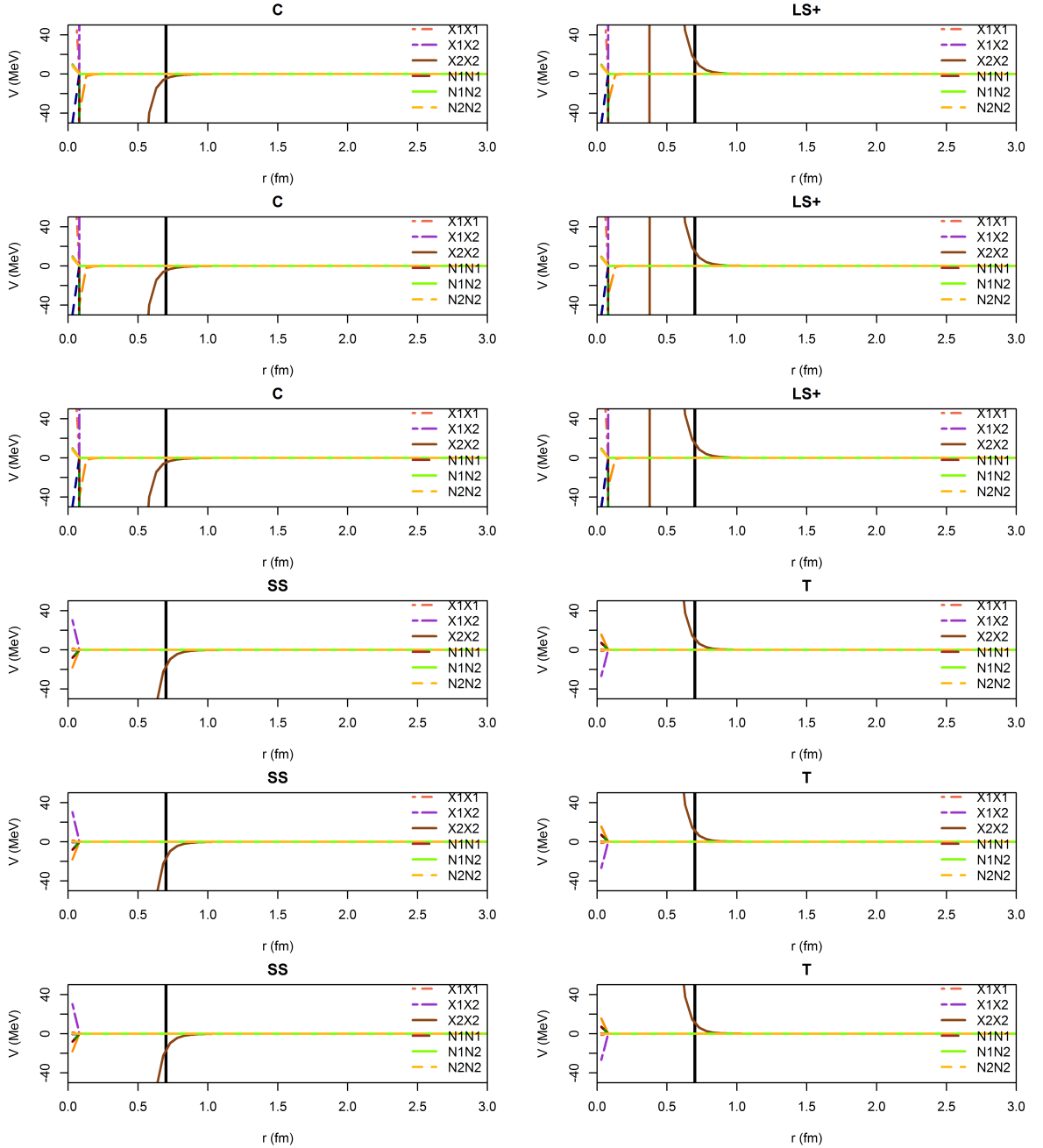
Fonte: Autor

Figura 57 - Potencial $\Sigma\Sigma$ devido a troca de dois etas



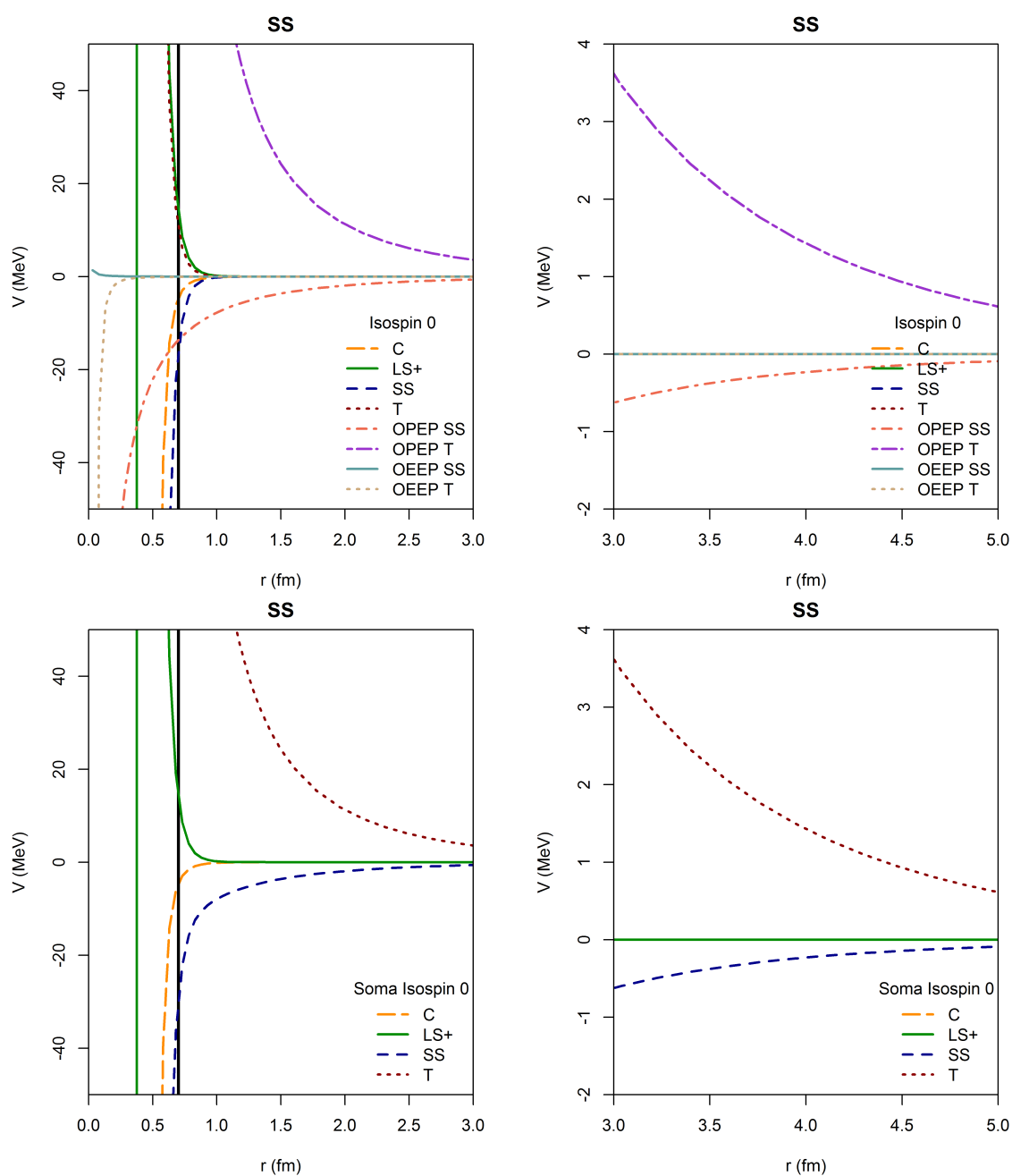
Fonte: Autor

Figura 58 - Potencial $\Sigma\Sigma$ devido a troca de dois kaons



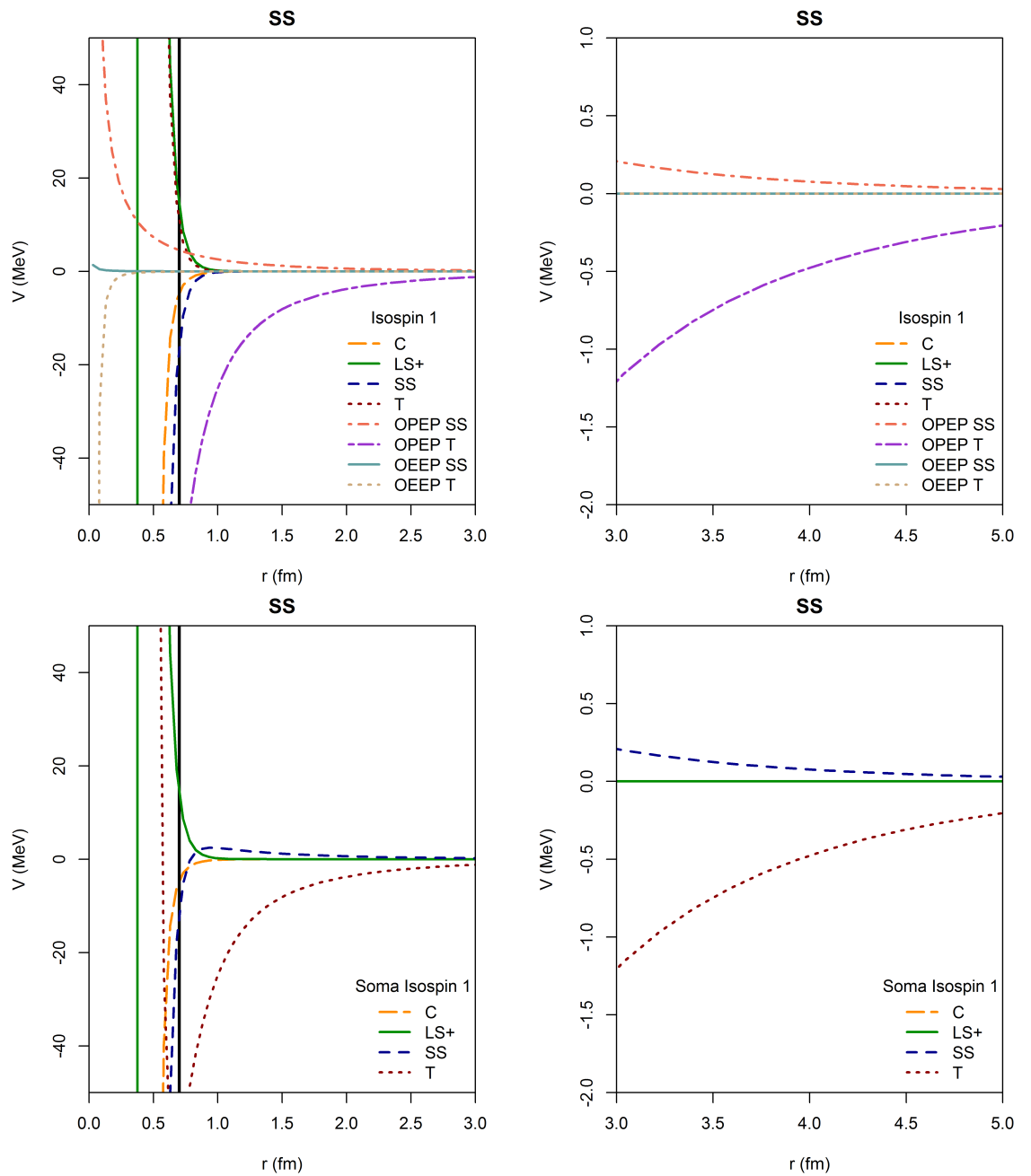
Fonte: Autor

Figura 59 - Potencial $\Sigma\Sigma$ devido a troca de dois mésons, OPEP, OEEP e o potencial total somadas todas as contribuições no canal de isospin 0



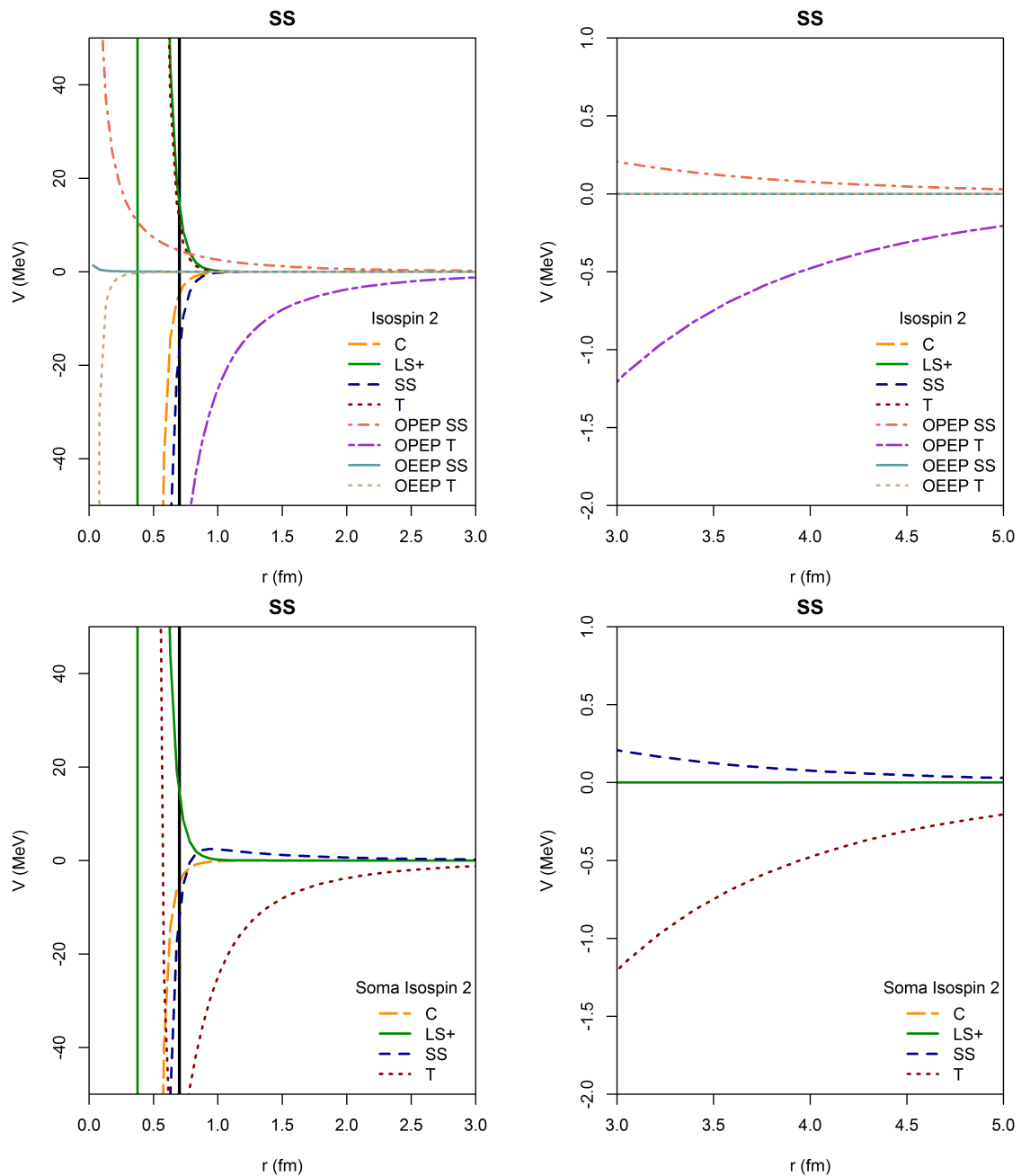
Fonte: Autor

Figura 60 - Potencial $\Sigma\Sigma$ devido a troca de dois mésons, OPEP, OEEP e o potencial total somadas todas as contribuições no canal de isospin 1



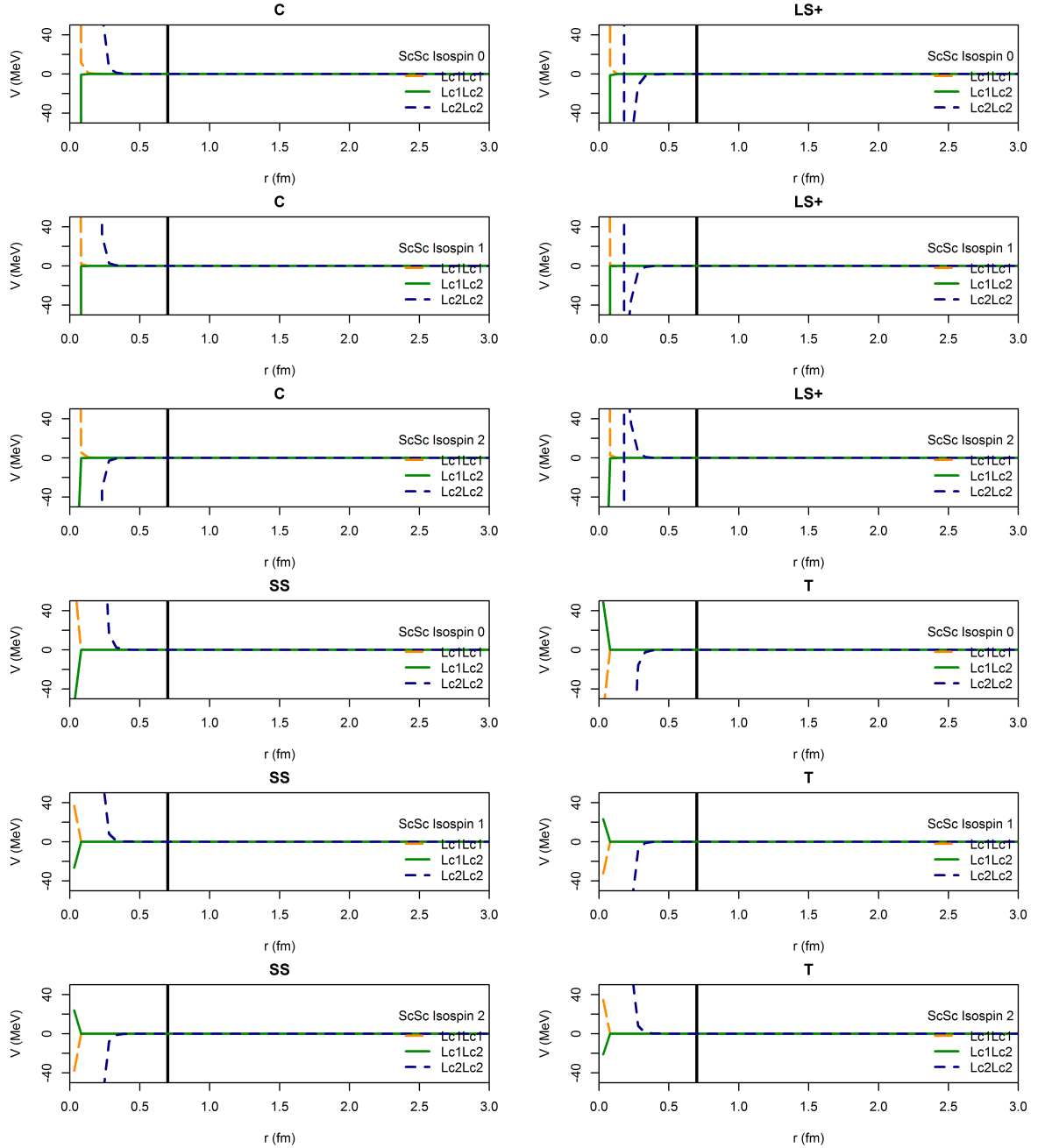
Fonte: Autor

Figura 61 - Potencial $\Sigma\Sigma$ devido a troca de dois mésons, OPEP, OEEP e o potencial total somadas todas as contribuições no canal de isospin 2



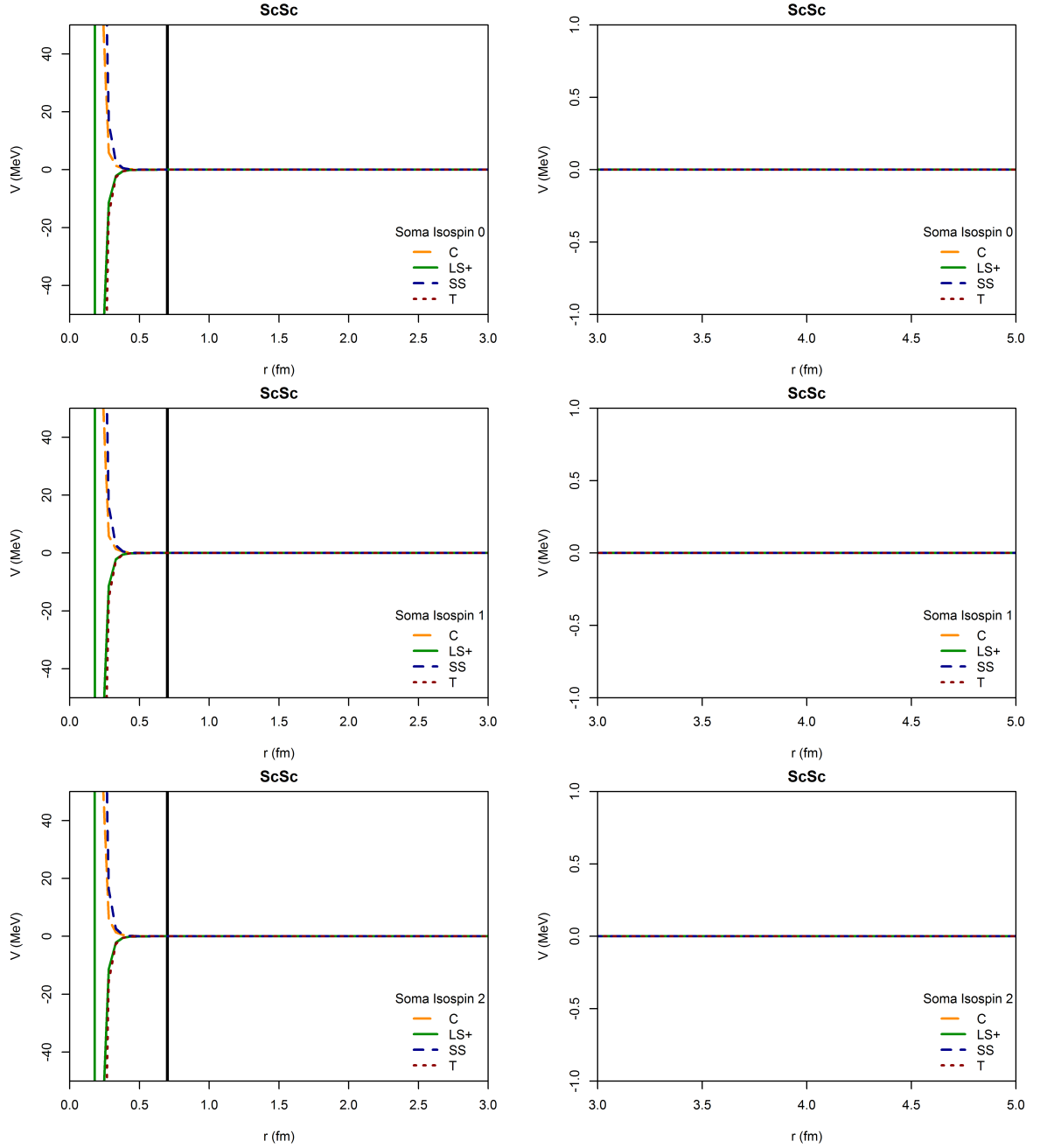
Fonte: Autor

Figura 62 - Potencial $\Sigma_c \Sigma_c$ devido a troca de dois pions



Fonte: Autor

Figura 63 - Potencial $\Sigma_c \Sigma_c$ devido a troca de dois mésons total nos canais de isospin 0,1 e 2



Fonte: Autor

7 CONCLUSÃO

Neste trabalho encontramos a forma geral para um potencial para interação do tipo bárion-bárion de spin-1/2, por meio de diagramas de Feynman trocando até dois mésons pseudovetoriais, e entre essas ressonâncias bariônicas de spin-1/2 e 3/2. Foram utilizado dois formalismo para o potencial de acordo com a massa do estado intermediário quando comparado com as massas do bárion incidente e do méson trocado em um mesmo vértice, a fim de evitar estados não físicos.

Para estados intermediários com massas maiores que a soma das massas do bárion e do méson utilizamos o formalismo da primeira aproximação de Born que faz uso das equação de Schrödinger na forma integral e do formalismo da teoria de espalhamento quântico. No caso de quando a massa do estado intermediário é menor que a soma das massas do bárion e do méson, utilizamos para o potencial o formalismo da prescrição de Partovi e Lomon. Este potencial tem como ponto de partida a equação de Bethe-Salpeter, a versão relativística da equação de Lippmann-Schwinger, cuja solução não é única e é muito complexa de obter. Encontramos solução para a equação de Bethe-Salpeter por meio da solução de Partovi e Lomon, a qual é a generalização da solução de Blankenbecher e Sugar, consistindo na redução das soluções de quatro para três dimensões para energias positivas.

O Potencial utilizado neste trabalho pode ser considerado como uma generalização dos resultados anteriores e é por si só um resultado inédito, uma vez que, considera ressonâncias de spin-1/2 e 3/2 exigindo modificações para se manter consistente com as ideias originais. As ressonâncias de spin-3/2 descritas por lagrangianas e propagadores mais complexos, necessitaram de novas integrais de loop no espaço de momentos e de configurações, fazendo com que a quantidade de cálculos e sua complexidade aumentassem proporcionalmente. Tal demanda também ocorre com ressonâncias de spin-1/2 generalizadas, porém menos complexas. O desafio foi vencido por meio de procedimentos análogos aos feitos nos trabalhos do *Brazil group* (ou *Sao Paulo group*) (ROCHA, 1993; ROCHA; ROBILOTTA, 1994; ROBILOTTA, 1995; ROCHA; ROBILOTTA, 1995; ROBILOTTA; ROCHA, 1997; ROBILOTTA, 2001; HIGA, 2003; HIGA; ROBILOTTA, 2003; HIGA; ROBILOTTA; ROCHA, 2004; ROCHA; HIGA; ROBILOTTA, 2007a; ROCHA; HIGA; ROBILOTTA, 2007b) .

Para que se possa considerar múltiplas ressonâncias e mésons nos diagramas de Feynman e então calcular o potencial para a interação entre os bárions externos de interesse, é preciso conhecermos as constantes de acoplamento dos vértices envolvidos. Para o cálculo das constantes de acoplamento de cada caso, utilizamos a simetria do SU(6) quando abaixo da camada de massa, e o phase shift das ressonâncias consideradas, fitadas em relação à expressão de Breit-Wigner que faz uso do spin e dos dados experimentais

dessas ressonâncias. Muitas dessas constantes de acoplamento calculadas neste trabalho, são resultados inéditos.

Calculamos numericamente os potenciais: NN , $N\Xi$, $\Xi\Xi$, $N\Lambda$, $N\Lambda_c$, $N\Lambda_b$, $\Lambda\Lambda$, $\Lambda_c\Lambda_c$, $\Lambda_b\Lambda_b$, $N\Sigma$, $N\Sigma_c$, $\Sigma\Sigma$ e $\Sigma_c\Sigma_c$. Consideramos a troca de um e dois píons, mésons eta e kaons quando permitidos. É notório dos resultados numéricos obtidos que as ressonâncias de maiores contribuições são aquelas de spin $3/2$, sobretudo quando em ambos os canais de ressonância. Isso ocorre devido à estrutura das lagrangianas que leva a propagadores com muitos termos e consequencialmente maior dependência do momento transferido “ q ” no espaço dos momentos. Esse resultado é bastante interessante e parece ser um padrão em todas as interações envolvendo bárions externos de spin- $1/2$ trocando dois píons ou dois kaons, e está de acordo com a grande amplitude das interações NN , quando da troca de ressonâncias Δ .

Quando comparados com os potenciais devidos à troca de um méson, de modo geral os potenciais da troca de dois mésons são de alcances pequenos e intermediários, dessa forma sendo correções de energias mais altas e de curto alcance do potencial, ficando a troca de um méson em geral como a contribuição mais importante para baixas energias e grandes alcances. Este resultado está de acordo com as observações e é esperado de qualquer bom modelo de potencial nuclear.

Observamos que para a troca de dois etas, não houveram contribuições relevantes para nenhum dos potenciais. Também observamos que potenciais envolvendo os bárions externos Λ , Λ_c e Λ_b não obtiveram contribuições devidas a esse tipo de interação, o motivo desses resultados é que ao considerar a simetria de isospin, todos esses casos têm um único canal de isospin, a soma direta sem fatores dos diagramas caixa e cruzado, os quais para esses casos têm iguais valores ou próximos, porém com sinais contrários, resultam em valores nulos ou muito pequenos.

Obtivemos resultados interessantes para os potenciais envolvendo bárions externos Ξ nos canais de isospin 0 e 1, apesar de ser o híperon de maior massa tivemos consideráveis contribuições de ressonâncias na troca de dois mésons para o potencial total. Para os bárions super pesados Λ_c , Σ_c e Λ_b , obtivemos pequenas contribuições e muito próximas do limite de $0.7fm$, mesmo quando envolvendo ressonâncias de spin- $3/2$ em ambos os canais de ressonância. Este resultado é esperado já que envolvem elevadas massas bariônicas.

Os potenciais desenvolvidos neste trabalho têm considerável complexidade o que dificulta o seu uso em outros trabalhos e aplicações, desta forma perfaz imperativo o desenvolvimento de funções que parametrizem estes potenciais o que é uma continuação imediata desse trabalho. A versão parametrizada em relação à distancia dos centros dos bárions externos envolvidos poderá ser utilizada em modelos que necessitem de um potencial no espaço de configurações de maneira direta e simples. Os potenciais parametrizados seriam expansões de potenciais do tipo de Yukawa em diferentes ordens, e deverão ser feitas para cada um dos canais spin-isospin. Além dos potenciais considerados neste trabalho

nosso formalismo permite quaisquer outras combinações do bárions de spin-1/2 e consequentemente de acordo com cada interesse sua versão parametrizada para aplicações.

O potencial parametrizado também é útil para o cálculo de observáveis como seção de choque total e diferencial, úteis para comparação com dados experimentais. Estes observáveis também poderiam ser calculados diretamente do formalismo das integrais no espaço de momento aqui desenvolvidos, apesar de um processo um pouco mais complexo.

Outra perspectiva futura é a extensão deste potencial para casos ainda mais gerais como as interações, que envolveriam bárions iniciais e finais distintos, e troca de dois mésons diferentes. Também outra possibilidade de extensão é o cálculo de potenciais considerando partículas de spin-3/2 externas, um caso interessante é a do bárion Δ , em que alguns modelos de estrelas de nêutrons consideram contribuir para a estabilidade da sua massa gravitacional.

Durante o desenvolvimento desses projeto cinco artigos foram publicados pelo autor: Santos e Barros (2019), Nogueira-Santos e Barros (2020c), Nogueira-Santos e Barros (2020b), Nogueira-Santos e Barros (2020a), Nogueira-Santos e Barros (2023b) e um em produção Nogueira-Santos e Barros (2023a).

REFERÊNCIAS

- BANDO, M.; KUGO, T.; YAMAWAKI, K. Nonlinear realization and hidden local symmetries. *Physics Reports*, Elsevier, v. 164, n. 4-5, p. 217–314, 1988.
- BARROS, C. C.; HAMA, Y. Low energy pion-hyperon interaction. *Physical Review C*, APS, v. 63, n. 6, p. 065203, 2001.
- BASSALO, J. M. F. *Teoria de Grupos*. [S.l.]: Livraria da Física, 2008. ISBN 9788578610005.
- BERNARD, V.; KAISER, N.; MEISSNER, U.-G. Chiral dynamics in nucleons and nuclei. *International Journal of Modern Physics E*, World Scientific, v. 4, n. 02, p. 193–344, 1995.
- BJORKEN, J. D.; DRELL, S. D. *Relativistic Quantum Fields*. [S.l.]: McGraw-Hill College, 1965. ISBN 0070054940.
- BLANKENBECLER, R.; SUGAR, R. Linear integral equations for relativistic multichannel scattering. *Physical Review*, American Physical Society (APS), v. 142, n. 4, p. 1051–1059, feb 1966.
- CHENG, T.-P.; LI, L.-F. *Gauge Theory of elementary particle physics*. [S.l.]: Oxford University Press, 1988. ISBN 0198519613.
- COLEMAN, S.; WESS, J.; ZUMINO, B. Structure of phenomenological lagrangians. i. *Physical Review*, APS, v. 177, n. 5, p. 2239, 1969.
- DOVER, C.; GAL, A. Hyperon-nucleus potentials. *Progress in Particle and Nuclear Physics*, Elsevier BV, v. 12, p. 171–239, 1984.
- ENTEM D. R.; MACHLEIDT, R. *From Nuclei to Stars: Festschrift in Honor of Gerald E Brown; Chapter 14, Chiral Symmetry and the Nucleon-Nucleon Interaction*. [S.l.]: World Scientific Publishing Company, 2011. ISBN 978-9814329088.
- ERICSON, T.; WEISE, W. *Pions and Nuclei*. [S.l.]: Oxford University Press, 1988. ISBN 0-19-852008-5.
- FINELLI, P. Chiral symmetry. *Nuclear Physics Course*, 2011.
- GELL-MANN, M.; LÉVY, M. The axial vector current in beta decay. *Il Nuovo Cimento (1955-1965)*, Springer, v. 16, n. 4, p. 705–726, 1960.
- GRIFFITHS, D. *Introduction to Elementary Particles*. [S.l.]: John Wiley & Sons Inc, 1987. ISBN 0-471-60386-4.
- GRIFFITHS, D. J. *Introduction to Quantum Mechanics (2nd Edition)*. [S.l.]: Pearson Prentice Hall, 2004. ISBN 0131118927.
- GROSS, F. *Relativistic Quantum Mechanics and Field Theory*. [S.l.]: Wiley-VCH, 1999.
- HABERZETTL, H. Propagation of a massive spin-3/2 particle. *arXiv preprint nucl-th/9812043*, 1998.

- HIGA, R. *O potencial nucleon-nucleon e a troca de dois píons relativista*. Tese (Doutorado) — USP, 2003.
- HIGA, R.; ROBILOTTA, M. R. Two-pion exchange nucleon-nucleon potential: $O(q^4)$ relativistic chiral expansion. *Physical Review C*, American Physical Society (APS), v. 68, n. 2, aug 2003.
- HIGA, R.; ROBILOTTA, M. R.; ROCHA, C. A. da. Relativistic $O(q^4)$ two-pion exchange nucleon-nucleon potential: Configuration space. *Physical Review C*, American Physical Society (APS), v. 69, n. 3, mar 2004.
- HOLT, J. W.; KAISER, N.; WEISE, W. Nuclear chiral dynamics and thermodynamics. *Progress in Particle and Nuclear Physics*, Elsevier BV, v. 73, p. 35–83, nov 2013.
- ILIOPOULOS, J. Introduction to the standard model of the electro-weak interactions. *arXiv preprint arXiv:1305.6779*, 2013.
- JEGERLEHNER, F. Quantum chromodynamics and strong interaction physics. *Lectures given at University of Silesia, Katowicw, Poland*, 2009.
- KAKU, M. *Quantum Field Theory: A Modern Introduction*. [S.l.]: OXFORD UNIV PR, 1993. ISBN 0195076524.
- KOCH, V. Aspects of chiral symmetry. *International Journal of Modern Physics E*, World Scientific, v. 6, n. 02, p. 203–249, 1997.
- LACROIX, D. Introduction-strong interaction in the nuclear medium: new trends. *arXiv preprint arXiv:1001.5001*, 2010.
- LATTES, C. M. G.; OCCHIALINI, G. P. S.; POWELL, C. F. Observations on the tracks of slow mesons in photographic emulsions. *Nature*, v. 160, p. 453–456, 1947.
- LEMOS, N. A. *Mecânica Analítica*. [S.l.]: Livraria da Física, 2007. ISBN 978-8588325241.
- LOVAS, I.; SAILER, K.; GREINER, W. Generalized rarita-schwinger equations. *arXiv preprint hep-th/9810103*, 1998.
- MACHLEIDT, R. The meson theory of nuclear forces and nuclear structure. In: *Advances in nuclear physics*. [S.l.]: Springer, 1989. p. 189–376.
- MCMAHON, D. *Quantum Field Theory Demystified*. [S.l.]: McGraw-Hill Education, 2008. ISBN 978-0071543828.
- MIZRAHI S. ; GALETTI, D. *Física Nuclear e de Partículas - uma Introdução*. [S.l.]: Livraria da Física, 2016.
- NATH, L.; ETEMADI, B.; KIMEL, J. Uniqueness of the interaction involving spin-3/2 particles. *Physical Review D*, APS, v. 3, n. 9, p. 2153, 1971.
- NETO, J. B. *Matemática Para Físicos com Aplicacoes: Vetores, Tensores e Spinors - Vol.1*. [S.l.]: Livraria da Física, 2010. ISBN 9788578610913.
- NOGUEIRA-SANTOS, M. G. L.; BARROS, C. C. Low energy kaon- Ξ interaction in an effective chiral model. *Physical Review C*, American Physical Society (APS), v. 102, n. 055205, nov. 2020.

- NOGUEIRA-SANTOS, M. G. L.; BARROS, C. C. Low energy pion- Λ_b interaction. *The European Physical Journal C*, Springer Science and Business Media LLC, v. 80, n. 6, jun 2020.
- NOGUEIRA-SANTOS, M. G. L.; BARROS, C. C. Polarization in low energy kaon-hyperon interaction. *International Journal of Modern Physics E*, World Scientific Pub Co Pte Lt, v. 29, n. 03, p. 2050013, mar 2020.
- NOGUEIRA-SANTOS, M. G. L.; BARROS, C. C. Charmed baryons-pion interactions in low energy scattering. *in production*, 2023.
- NOGUEIRA-SANTOS, M. G. L.; BARROS, C. C. Low energy eta-baryon interaction. *Nuclear Physics A*, v. 1039, p. 122740, 2023.
- OLSSON, M.; TURNER, L.; OSYPOWSKI, E. Implications for the $\Delta N\pi$ interaction and σ term from low-energy πN scattering. *Physical Review D*, APS, v. 7, n. 11, p. 3444, 1973.
- PARTICLE DATA GROUP (PDG); PATRIGNANI, C. et al. Review of particle physics. *Chinese physics C*, IOP Publishing, v. 40, n. 10, p. 100001, 2016.
- PARTOVI, M. H.; LOMON, E. L. Field-theoretical nucleon-nucleon potential. *Physical Review D*, American Physical Society (APS), v. 2, n. 9, p. 1999–2032, nov 1970.
- PESKIN, M. E.; SCHROEDER, D. V. *An Introduction To Quantum Field Theory (Frontiers in Physics)*. [S.l.]: CRC Press, 1995. ISBN 0-201-50397-2.
- PILKUHNS, H. et al. Compilation of coupling constants and low-energy parameters. *Nuclear Physics B*, Elsevier, v. 65, n. 2, p. 460–517, 1973.
- RATCLIFF, P. G. Introduction to nuclear and subnuclear physics. *Università degli Studi dell'Insubria*, Como via Valleggio, 2016.
- ROBILOTTA, M. Pion-nucleon scattering and the tail of the two-pion exchange nucleon-nucleon potential. *Nuclear Physics A*, Elsevier BV, v. 595, n. 2, p. 171–188, dec 1995.
- ROBILOTTA, M. Chiral scalar form factor and central nucleon-nucleon potential. *Physical Review C*, APS, v. 63, n. 4, p. 044004, 2001.
- ROBILOTTA, M. R.; ROCHA, C. A. da. Two-pion exchange nucleon-nucleon potential model independent features. *Nuclear Physics A*, Elsevier BV, v. 615, n. 3, p. 391–416, mar 1997.
- ROCHA, C. A. da. *Potencial nucleon-nucleon devido à troca de dois pions: o papel da simetria quiral*. Tese (Doutorado) — USP, 1993.
- ROCHA, C. A. da; HIGA, R.; ROBILOTTA, M. R. Brazilian relativistic $O(q^4)$ two-pion exchange nucleon-nucleon potential: parametrized version. *Brazilian Journal of Physics*, FapUNIFESP (SciELO), v. 37, n. 1a, mar 2007.
- ROCHA, C. A. da; HIGA, R.; ROBILOTTA, M. R. Recent results for the brazilian two-pion exchange nucleon-nucleon potential. *International Journal of Modern Physics E*, World Scientific Pub Co Pte Lt, v. 16, n. 09, p. 2810–2813, oct 2007.

- ROCHA, C. A. da; ROBILOTTA, M. R. Two pion exchange nucleon-nucleon potential: The minimal chiral model. *Physical Review C*, American Physical Society (APS), v. 49, n. 4, p. 1818–1826, apr 1994.
- ROCHA, C. A. da; ROBILOTTA, M. R. Chiral background for the two-pion exchange nuclear potential: A parametrized version. *Physical Review C*, American Physical Society (APS), v. 52, n. 2, p. 531–538, aug 1995.
- ROMAN, P. *Introduction to Quantum Field Theory*. [S.l.]: John Wiley & Sons Inc, 1969. ISBN 0471731986.
- RYDER, L. H. *Quantum Field Theory*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1996. ISBN 978-0521478144.
- SALPETER, E. E.; BETHE, H. A. A relativistic equation for bound-state problems. *Physical Review*, American Physical Society (APS), v. 84, n. 6, p. 1232–1242, dec 1951.
- SANTOS, M. G. L. N.; BARROS, C. C. Low energy kaon-hyperon interaction. *Physical Review C*, American Physical Society (APS), v. 99, n. 2, feb 2019.
- SCADRON, M. D. *Advanced Quantum Theory (Third Edition)*. [S.l.]: World Scientific Pub Co Inc, 2006. ISBN 981-270-050-1.
- STOKS, V.; RIJKEN, T. A. Meson-baryon coupling constants from a chiral-invariant SU(3) lagrangian and application to NN scattering. *Nuclear Physics A*, Elsevier, v. 613, n. 4, p. 311–341, 1997.
- SWART, J. D. The octet model and its clebsch-gordan coefficients. *Reviews of Modern Physics*, APS, v. 35, n. 4, p. 916, 1963.
- TAKETANI, M.; NAKAMURA, S.; SASAKI, M. On the method of the theory of nuclear forces. *Progress of Theoretical Physics*, v. 6, n. 4, p. 581–586, 1951.
- WEINBERG, S. Nonlinear realizations of chiral symmetry. *Physical Review*, APS, v. 166, n. 5, p. 1568, 1968.
- WEINBERG, S. Phenomenological lagrangians. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Elsevier, v. 96, n. 1-2, p. 327–340, 1979.
- YUKAWA, H. On the interaction of elementary particles. *Proceedings of the Physico-Mathematical Society of Japan*, v. 17, n. 48, 1935.
- ZEE, A. *Quantum Field Theory in a Nutshell*. [S.l.]: Princeton University Press, 2003. ISBN 0-691-01019-6.

APÊNDICE A – Formalismo Quiral

Neste capítulo introduziremos a base teórica necessária à construção das lagrangianas efetivas quirais. Começando pelos princípios da teoria quântica de campos, passando pelos conceitos básicos de simetria e quebra de simetria, chegando ao modelo sigma não-linear, concluindo-se com a dedução das lagrangianas para a interação $N\pi$, sendo este, nosso modelo de base, que nessa tese são estendido para interação do tipo KY .

A.1 FUNÇÃO LAGRANGIANA

Nos estudos da teoria quântica de campos (BJORKEN; DRELL, 1965; KAKU, 1993; PESKIN; SCHROEDER, 1995; ZEE, 2003; MCMAHON, 2008), utilizamos uma ferramenta matemática muito comum, aplicável em qualquer teoria física fundamental. Esta ferramenta é conhecida como função lagrangiana, sendo frequentemente identificada como a diferença entre as energias cinética e potencial (LEMOS, 2007). No contexto da teoria quântica de campos, temos que usar lagrangianas generalizadas para campos relativísticos, para tanto, temos primeiro que considerar os conceitos básicos da lagrangiana clássica não relativística.

Matematicamente,

$$L = T - V \tag{315}$$

onde L é a função lagrangiana clássica, T e V são as energias cinética e potencial respectivamente.

A.1.1 Ação e as equações de movimento

Integrando a lagrangiana (315) em função do tempo, definimos uma quantidade chamada *ação* (S),

$$S = \int L dt. \tag{316}$$

À S damos o nome de funcional, uma vez que, transforma uma função (neste caso L) em um número. Entre dois pontos (posição no eixo x em dois instantes diferentes) $x(t_1)$ e $x(t_2)$, temos infinitos caminhos possíveis para uma mesma partícula, através princípio de Hamilton, a trajetória real (mantidos os pontos inicial e final fixos) da partícula será

aquela na qual, a ação é mínima. Assim, para encontrarmos o caminho real temos de usar o princípio variacional, isto é, a variação da ação deve ser nula, logo

$$S \rightarrow S + \delta S, \quad (317)$$

$$\delta S = 0. \quad (318)$$

Calculando a variação δS nula, chegaremos à equação do movimento da partícula. Para isso, considera-se o caso geral onde L depende de, N coordenadas generalizadas $q_i(t)$, derivadas primeiras em relação ao tempo $\dot{q}_i(t)$, onde $i = 1, \dots, N$ e do tempo t . Assim, temos a variação da ação

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt = 0 \quad (319)$$

com os pontos inicial e final mantidos fixos, isto é,

$$\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$$

e considerando que

$$\delta(\dot{q}_i) = \frac{d}{dt}(\delta q_i). \quad (320)$$

Como L depende das variáveis q_i e \dot{q}_i , temos

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right] dt$$

aplicando a relação (320),

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt}(\delta q_i) \right] dt$$

a integração por partes fornece

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] \delta q_i dt + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \Big|_{t_1}^{t_2}$$

sendo a segunda soma nula, pois os pontos iniciais e finais são fixos. Fazendo $\delta S = 0$, achamos

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] \delta q_i dt = 0.$$

Como δq_i é arbitrário, a última relação será satisfeita se,

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0, \quad (321)$$

esta é a equação de *Euler-Lagrange* ($i = 1, \dots, N$), da qual, obtemos as equações de movimento da partícula.

A.1.2 Teoria de campos na forma lagrangiana

Agora estamos interessados em um sistema físico cujas coordenadas não dependam mais de finitos graus de liberdade (discretos), os quais, são descritos pelas coordenadas generalizadas $q_i(t)$ e suas derivadas em relação ao tempo, mas sim, de um sistema com infinitos graus de liberdade, cujas coordenadas são contínuas e dependem agora, não só do tempo mas, também do espaço. Esse novo sistema é então descrito pela função $\varphi(x^k, t)$ com $k=1,2,3$ e de suas derivadas temporais e espaciais. Desse modo, temos a descrição de um campo.

Análoga à lagrangiana do sistema discreto, a qual soma todos os graus de liberdade ($i = 1, \dots, N$), a lagrangiana de um sistema contínuo deverá fazer a soma sobre todo o espaço de interesse, ou seja, uma integração espacial sobre uma *densidade lagrangiana* (\mathcal{L}).

Em síntese podemos fazer a transição do discreto para o contínuo (campo) da seguinte forma:

$$q(t) \rightarrow \varphi(x^k, t), \quad (322)$$

$$\dot{q}(t) \rightarrow \partial_\mu \varphi(x^k, t) \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} \varphi(x^k, t), \quad (323)$$

$$L = \sum_i L_i \rightarrow \int d^3x \mathcal{L}(\varphi(x^k, t), \partial_\mu \varphi(x^k, t), t), \quad (324)$$

sendo sua ação,

$$S = \sum_i \int L_i dt \rightarrow \int d^4x \mathcal{L}(\varphi(x^k, t), \partial_\mu \varphi(x^k, t), t). \quad (325)$$

A notação L_i se refere às energias cinéticas e potenciais relativas a cada coordenada generalizada com índice i , isso é, $L_i = T(q_i, \dot{q}_i) - V(q_i, \dot{q}_i)$.

Aqui podemos estabelecer a característica relativística da lagrangiana de campo, impondo que φ , S e \mathcal{L} sejam invariantes sob transformação de Lorentz (escalares de

Lorentz), para tanto temos que definir,

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \nabla \right), \quad (326)$$

$$d^3x = dx dy dz, \quad (327)$$

$$d^4x = c dt dx dy dz, \quad (328)$$

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z, \quad (329)$$

sendo $\partial_\mu \varphi(x^k, t)$ um quadrivetor covariante e c a constante da velocidade da luz no vácuo.

A equação de Euler-Lagrange para a lagrangiana de campo é deduzida de modo análogo ao caso discreto já feito, resultando

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [\partial_\mu \varphi]} \right) = 0. \quad (330)$$

Na situação em que há mais de um campo, tal como é o caso do pión, o qual, tem três tipos diferentes (tripleto), temos a mesma equação anterior, porém agora os campos devem ter índice (l) para identificar os diferentes campos considerados. Assim, temos

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_l} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [\partial_\mu \varphi_l]} \right) = 0. \quad (331)$$

As lagrangianas de campo relativísticas não podem ser derivadas de forma simples como no caso clássico ($L = T - V$), assim \mathcal{L} deve usualmente ser encontrada de forma *axiomática*.

A.1.2.1 Exemplo equação de Klein-Gordon

Para um campo bosônico (spin-0), usamos a lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2, \quad (332)$$

onde m é a massa da partícula e consideramos $c = \hbar = 1$.

Como o campo bosônico ϕ é um campo escalar, então \mathcal{L} é um invariante sob transformação de Lorentz (relativístico). Obtemos a equação de movimento deste campo, através das relações

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [\partial_\mu \phi]} &= \frac{\partial}{\partial [\partial_\mu \phi]} \left(\frac{1}{2} g^{\nu\lambda} \partial_\nu \phi \partial_\lambda \phi \right) = \frac{1}{2} \left[g^{\nu\lambda} \delta_\nu^\mu \partial_\lambda \phi + g^{\nu\lambda} \partial_\nu \phi \delta_\lambda^\mu \right] = \frac{1}{2} \left[g^{\mu\lambda} \partial_\lambda \phi + g^{\nu\mu} \partial_\nu \phi \right] \\ &= \partial^\mu \phi, \end{aligned} \quad (333)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -m^2 \phi, \quad (334)$$

onde em (333) usamos a relação $\frac{\partial}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial_\nu\phi = \frac{\partial}{\partial(\partial x_\nu)}\partial x_\mu \equiv \delta_\nu^\mu$ e a regra da cadeia.

Aplicando (333) e (334) em (330) chegamos então, à equação (de movimento) de *Klein-Gordon*,

$$(\partial_\mu\partial^\mu + m^2)\phi = 0. \quad (335)$$

A.1.2.2 Exemplo: equação de Dirac

Outra lagrangiana relativística muito usada é a de Dirac para férmions (spin-1/2),

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi, \quad (336)$$

onde novamente m é a massa da partícula, γ^μ são as matrizes de Dirac⁶ e novamente $c = \hbar = 1$.

Os ψ e $\bar{\psi}$ são espinores (espinor e espinor adjunto, respectivamente), os quais, consideramos como independentes. Aplicando a equação de Euler-Lagrange em relação à $\bar{\psi}$, temos

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial[\partial_\mu\bar{\psi}]} = 0, \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}} = i\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\psi,$$

logo, a equação do movimento para ψ é,

$$i\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\psi = 0. \quad (337)$$

Aplicando a equação de Euler-Lagrange para ψ , encontramos a outra equação de movimento,

$$i\gamma^\mu\partial_\mu\bar{\psi} - m\bar{\psi} = 0. \quad (338)$$

A equação de movimento (337) se refere à partícula de massa m , spin-1/2 e carga positiva, já (338) e a equação de movimento da anti-partícula de mesma massa e spin, mas com carga negativa. Estas são as equações de Dirac.

⁶ As matrizes de Dirac são definidas mais adiante em (378), não definimos nesse ponto do texto, uma vez que estamos interessados na aplicação da equação de Euler-Lagrange e não nos detalhes da lagrangiana em si.

Tabela 18 - Grupos

Grupo	Dimensão	Propriedade Matriz
$U(n)$	$n \times n$	unitária ($\tilde{U}^*U = 1$)
$SU(n)$	$n \times n$	unitária com $\det U = 1$
$O(n)$	$n \times n$	ortogonal ($\tilde{O}O = 1$)
$SO(n)$	$n \times n$	ortogonal com $\det O = 1$

Fonte: Griffiths (1987)

A.2 SIMETRIA

Simetria existe quando, fazendo uma transformação em relação à um determinado parâmetro, não se altera o sistema (invariância). Em um sistema físico isso pode ser visto com uma mudança nas variáveis da lagrangiana (coordenadas generalizadas (q_i) ou no campo (φ)), sem que se modifiquem, sua lagrangiana ou sua equação do movimento (321, 330). Por exemplo, essas mudanças poderiam ser uma translação no espaço, no tempo, rotações, etc.

As simetrias podem ser classificadas das seguintes formas:

- *externa* \longrightarrow depende de mudanças no espaço-tempo;
- *interna* \longrightarrow não tem dependência do espaço-tempo;
- *discreta* \longrightarrow depende de um ou mais parâmetros descontínuos;
- *contínua* \longrightarrow depende de um ou mais parâmetros contínuos.

A.2.1 Transformação de calibre (*gauge*)

Transformação de calibre é uma extensão do conceito de invariância (simetria), quando fazemos uma mudança no campo, de forma a deixar a lagrangiana invariante, matematicamente

$$\varphi \rightarrow U\varphi, \tag{339}$$

aqui consideramos U como uma transformação (BASSALO, 2008; NETO, 2010).

A Tabela 18 mostra os grupos mais comumente usados na física de partículas onde, os grupos unitários U podem ser complexos e não depende do espaço-tempo (simetria *interna*).

As transformações de calibre podem ser de dois tipos:

- *global* \longrightarrow não depende do espaço-tempo;

- *local* \rightarrow depende do espaço-tempo.

Na teoria de campos, a transformação de calibre local desempenha papel muito importante, pois é através dessas transformações que são construídas as lagrangianas relativísticas com interações (i.e. a soma das lagrangianas de partícula livre e de interação), algo análogo aos termos cinético e potencial da lagrangiana clássica não relativística (315).

Logo, esta transformação permite deduzir de forma formal, as lagrangianas de interação para campos relativísticos. Esta interação aparece de forma natural devido à transformação do campo, campo este que, não é mais constante em relação à derivada (∂_μ), fazendo aparecer um termo extra na lagrangiana, quebrando sua invariância. Para restabelecer novamente a invariância da lagrangiana temos de acrescentar um novo campo capaz de descrever uma interação com a partícula livre.

Um exemplo da transformação de calibre local é a equação de Dirac para o elétron com interação eletromagnética

$$\mathcal{L}_e = \underbrace{i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m_e\bar{\psi}\psi}_{\mathcal{L}_0} - \underbrace{e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu}_{\mathcal{L}_1}$$

em que:

$m_e \rightarrow$ massa do elétron;

$e \rightarrow$ carga elétrica do elétron;

$A_\mu \rightarrow$ é o quadrivetor do potencial eletromagnético;

$\mathcal{L}_0 \rightarrow$ é a lagrangiana da partícula livre;

$\mathcal{L}_1 \rightarrow$ é a lagrangiana de interação.

A equação de movimento fica neste caso

$$(iD_\mu\gamma^\mu - m_e)\psi = 0,$$

sendo

$$D_\mu \equiv \partial_\mu + ieA_\mu.$$

Este exemplo deixa clara a necessidade de somar um termo na derivada, a fim de manter a invariância da lagrangiana. Essa equação do movimento é chamada de equação de Dirac de acoplamento mínimo com o campo eletromagnético. Assim, podemos simplesmente fazer, $\partial \rightarrow D$ diretamente na equação de movimento.

Uma forma geral de representar uma transformação unitária U e sua adjunta U^\dagger é,

$$U = e^{i\theta}, \quad U^\dagger = e^{-i\theta}, \quad (340)$$

devido à essas formas de transformação, para θ termos dois casos:

- θ como uma constante ou matriz, que não dependem do espaço-tempo \rightarrow *transformação global*;
- $\theta(x)$ como uma função ou matriz que dependem do espaço-tempo ($x = x^\mu$ é o quadrivetor no espaço-tempo) \rightarrow *transformação local*.

A.2.2 Correntes: Teorema de Noether

Podemos associar simetrias com conservação de correntes e de leis do sistema, isso é conseguido através do teorema de Noether (PESKIN; SCHROEDER, 1995; LEMOS, 2007). Tal teorema consiste em uma transformação contínua no campo do sistema sem que a lagrangiana mude de forma (invariante). Aplicando uma variação ao campo ϕ ,

$$\phi \rightarrow \phi' = \phi + \delta\phi. \quad (341)$$

Com a variação no campo (341), temos uma variação na lagrangiana do sistema da forma

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' = \mathcal{L} + \delta\mathcal{L}. \quad (342)$$

Mas, nosso interesse é em um sistema que não sofra mudanças, ou seja, a lagrangiana do sistema tenha exatamente a mesma forma após a variação do campo, assim, impomos que

$$\delta\mathcal{L} = 0. \quad (343)$$

Daqui procedemos como fizemos na seção (A.2.3.1) para a variação da lagrangiana assim

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial[\partial_\mu\phi]}\partial_\mu(\delta\phi), \quad (344)$$

com ϕ e $\partial_\mu\phi$ tratadas como variáveis independentes.

Usando a equação de Euler-Lagrange (330)

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial[\partial_\mu\phi]} \right) \quad (345)$$

e substituindo (345) em (344), temos

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial[\partial_\mu\phi]} \right) \delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial[\partial_\mu\phi]} \partial_\mu(\delta\phi) = \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial[\partial_\mu\phi]} \delta\phi \right), \quad (346)$$

em que usamos a regra do produto de derivadas na última igualdade.

Igualando (343) com (346), chegamos à expressão

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial[\partial_\mu\phi]} \delta\phi \right) = 0, \quad (347)$$

identificamos o termo entre parênteses como a corrente do sistema,

$$J^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial[\partial_\mu\phi]} \delta\phi, \quad (348)$$

logo, (347) é a condição de conservação da corrente (equação da continuidade) análoga à usada no eletromagnetismo

$$\partial_\mu J^\mu = 0. \quad (349)$$

Assim definimos o teorema de Noether, que determina que a variação do campo não modifica a lagrangiana, levando à uma corrente conservada do sistema. Tal conservação de corrente implica em leis de conservação associadas ao sistema em consideração.

Quanto à expressão (348) é usual escrever a corrente relativa a um dado parâmetro constante (ϵ^a), da seguinte maneira (KAKU, 1993)

$$J_a^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial[\partial_\mu\phi]} \frac{\delta\phi}{\epsilon^a}. \quad (350)$$

Nota-se a motivação em usar uma transformação do tipo (340), pois, podemos escrever a transformação como uma soma,

$$\phi \rightarrow e^{i\theta^a \Lambda_a} \phi = (1 - i\theta^a \Lambda_a) \phi,$$

onde expandimos a função em relação ao parâmetro constante θ^a para pontos próximos de zero, o parâmetro Λ_a pode ser uma matriz ou uma função. Comparando a última igualdade com (341) concluímos que,

$$\delta\phi = -i\theta^a \Lambda_a \phi.$$

Finalmente, escrevendo a corrente (350) em relação ao parâmetro constante θ^a ,

temos

$$J_a^\mu = -i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [\partial_\mu \phi]} \frac{\theta^a \Lambda_a \phi}{\theta^a} = -i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [\partial_\mu \phi]} \Lambda_a \phi.$$

Não nos preocupamos com a forma da lagrangiana \mathcal{L} , somente consideramos que ela deva ser invariante em relação à transformação do tipo $U = e^{i\theta^a \Lambda_a}$.

A.2.3 Quebra espontânea de simetria

Consideremos a lagrangiana de um campo escalar real

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \frac{\mu^2}{2} \varphi^2, \quad (\mu \in \mathbb{R}), \quad (351)$$

podemos facilmente ver que esta lagrangiana (351) é invariante sob a transformação $\varphi \rightarrow -\varphi$, dado que os campos aparecem aos pares.

Ao adicionar um novo termo a esta lagrangiana (sem nos preocupar com sua realidade física), encontramos

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \frac{\mu^2}{2} \varphi^2 - \frac{\gamma}{3} \varphi^3, \quad (\gamma \in \mathbb{R}), \quad (352)$$

essa nova lagrangiana sob a transformação $\varphi \rightarrow -\varphi$, não é invariante, pois, teremos um sinal trocado no ultimo termo ($+\frac{\gamma}{3}\varphi^3$). A esta não invariância, chamamos de *quebra de simetria* em relação à $\varphi \rightarrow -\varphi$ (CHENG; LI, 1988; PESKIN; SCHROEDER, 1995; ZEE, 2003; JEGERLEHNER, 2009).

Estamos interessado em um tipo específico de quebra de simetria, que está vinculada ao estado fundamental do sistema. Para mostrar isso, vamos usar novamente a lagrangiana (351) e adicionar um novo termo,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \frac{\mu^2}{2} \varphi^2 - \frac{\lambda^2}{4} \varphi^4, \quad (\lambda \in \mathbb{R}). \quad (353)$$

De forma análoga à relação clássica (315), iremos separar a lagrangiana de tal forma, que seja igual à $\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{V}$, assim

$$\mathcal{T}(\varphi) = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi, \quad (354)$$

$$\mathcal{V}(\varphi) = \frac{\mu^2}{2} \varphi^2 + \frac{\lambda^2}{4} \varphi^4, \quad (355)$$

são as energias cinética e potencial respectivamente.

Vamos agora encontrar a forma gráfica do potencial (355) para tanto, temos que

calcular os pontos de mínimo

$$\frac{d\mathcal{V}}{d\varphi} = \mu^2\varphi + \lambda\varphi^3 = 0, \quad (356)$$

resolvendo essa equação achamos:

(i) $\varphi = 0$;

(ii) $\varphi = \pm\sqrt{\frac{-\mu^2}{\lambda^2}}$.

Se considerarmos $\lambda^2 > 0$, a solução (ii) não pode ser uma solução (potencial real) se $\mu^2 > 0$, logo, vamos separar em 2 casos a solução de (356):

a) $\mu^2 > 0$, solução (i);

b) $\mu^2 < 0$, soluções (i) e (ii).

Calculando a derivada segunda de (355), achamos quais são os mínimos ou máximos

$$\frac{d^2\mathcal{V}}{d\varphi^2} = \mu^2 + 3\lambda\varphi^2. \quad (357)$$

Para o caso (a),

$$\left. \frac{d^2\mathcal{V}}{d\varphi^2} \right|_{\varphi=0} = \mu^2 > 0,$$

logo temos um só ponto de mínimo em $\varphi = 0$.

Para o caso (b),

$$\left. \frac{d^2\mathcal{V}}{d\varphi^2} \right|_{\varphi=0} = \mu^2 < 0, \quad \left. \frac{d^2\mathcal{V}}{d\varphi^2} \right|_{\varphi=\pm\sqrt{\frac{-\mu^2}{\lambda^2}}} = -2\frac{\mu^2}{\lambda^2} > 0,$$

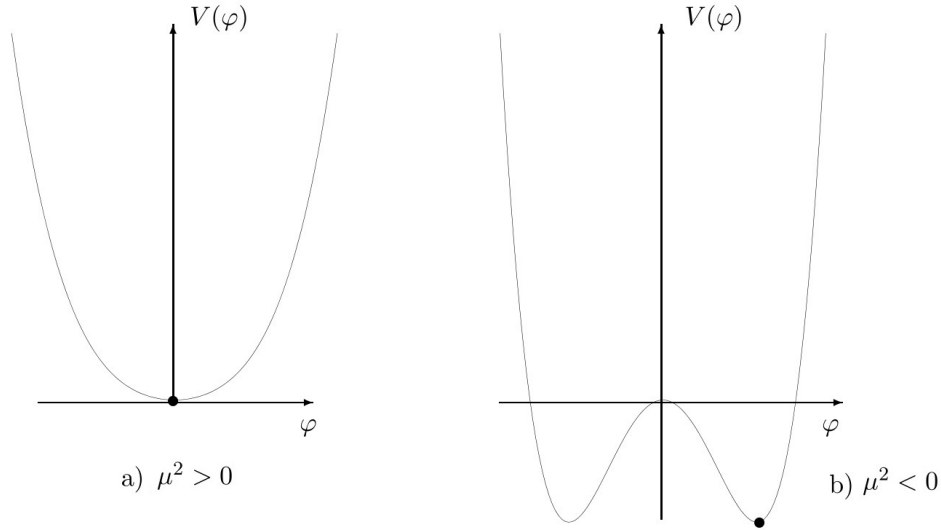
portanto, temos um máximo em $\varphi = 0$ e mínimos em $\varphi = \pm\sqrt{\frac{-\mu^2}{\lambda^2}}$.

Finalmente, na Figura 64 temos a forma dos gráficos possíveis de \mathcal{V} . Como podemos notar o caso (b) tem 2 mínimos, isto é, tem o estado fundamental degenerado.

Mas, afinal o que tudo isso significa? Se compararmos (353) com a equação de Klein-Gordon (332) somada com o termo $-\frac{\lambda^2}{4}\varphi^4$, vemos que para a condição $\mu^2 < 0$ a massa (termo que multiplica φ^2) fica com o sinal negativo. Isso acontece porque estamos inicialmente considerando que o mínimo do potencial é em $\varphi = 0$. A massa negativa reflete uma instabilidade neste ponto.

Para resolver esse problema e achar o verdadeiro valor da massa para a situação

Figura 64 - Formas possíveis do potencial.



Fonte: Jegerlehner (2009)

em que $\mu^2 < 0$, vamos deslocar a função de forma que um novo campo (η) corresponda ao $\mathcal{V}(\eta) = 0$, quando $\eta = 0$. O que vamos fazer afinal, é uma expansão em relação a um dos mínimos do potencial (Figura 64 (b)). Ao escolhermos o mínimo direito, temos

$$\varphi = \varphi_0 + \eta, \quad \varphi_0 = \sqrt{\frac{-\mu^2}{\lambda^2}}, \quad (358)$$

podemos escrever deixando esse novo campo (η) em evidência

$$\eta = \varphi - \varphi_0,$$

ficando claro o deslocamento da função para a esquerda.

Substituindo (358) em (353), temos

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \eta \partial^\mu \eta - \frac{\mu^2}{2} (\varphi_0 + \eta)^2 - \frac{\lambda^2}{4} (\varphi_0 + \eta)^4, \quad (359)$$

fazendo a expansão de Taylor de $\mathcal{V}(\eta)$ em torno do ponto $\eta = 0$ chegamos a

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \eta \partial^\mu \eta + \mu^2 \eta^2 - \sqrt{-\mu^2} \lambda \eta^3 - \frac{\lambda^2}{4} \eta^4, \quad (360)$$

agora podemos ver que a massa é (comparando com (332)) $m^2 = -2\mu^2 > 0$ (lembrando: $\mu^2 < 0$), sendo agora positiva, logo o ponto $\eta = 0$ é estável.

Aqui chegamos ao ponto que nos interessa a respeito da simetria que consideramos no começo dessa seção ($\varphi \rightarrow -\varphi$) imposta à (353), pois, se aplicarmos na lagrangiana (360)

a mesma transformação no novo campo ($\eta \rightarrow -\eta$), teremos não mais uma invariância (observando o termo ímpar η^3), ocorrendo uma quebra de simetria. Essa quebra de simetria leva o nome de *quebra espontânea de simetria*, porque esta relacionada ao vácuo (estado fundamental ou de menor energia) que não mais tem simetria, isto é, tem mais de um valor mínimo do potencial (estados degenerados). Portanto, para uma expansão em torno do estado de mínima energia teríamos de escolher um dos dois mínimos.

Se analisarmos essa situação do ponto de vista da mecânica quântica a quebra espontânea de simetria não ocorre, uma vez que pode-se tunelar [barreira dada por $V(0) - V(\pm\varphi_0)$] de um mínimo para o outro, sendo assim, é desnecessário escolher um ou outro mínimo, pois, têm igual possibilidade de estar à esquerda ou à direita. Portanto, a simetria $\eta \rightarrow -\eta$ continua válida na lagrangiana (360). Porém, na teoria quântica de campos, a barreira a ser tunelada é $[\mathcal{V}(0) - \mathcal{V}(\pm\varphi_0)] \int d^4x$, isso é, tal barreira integra-se em todo o espaço, sendo portanto, uma barreira infinita, assim, a probabilidade de tunelar de um mínimo para outro será zero. Nesse caso, haverá a quebra espontânea de simetria, uma vez que o sistema não possui iguais probabilidades de estar à direita ou à esquerda, teremos então que escolher qual dos mínimo usar, a transformação $\eta \rightarrow -\eta$ não será mais válida.

Matematicamente, a simetria $\eta \rightarrow -\eta$ na mecânica quântica não pode ser aplicada diretamente em (360), já que esta lagrangiana foi calculada para o estado particular de $\varphi_0 = \sqrt{-\mu^2/\lambda^2}$ (mínimo direito). Neste caso teríamos que levar em conta também a segunda solução (mínimo esquerdo) $\varphi_0 = -\sqrt{-\mu^2/\lambda^2}$, assim combinando ambas as soluções para o potencial a parte η^3 desaparecerá, mantendo válida a simetria $\eta \rightarrow -\eta$. Essa escolha particular de um estado fundamental na teoria quântica de campos está de acordo com o formalismo dos diagramas de Feynman (ZEE, 2003).

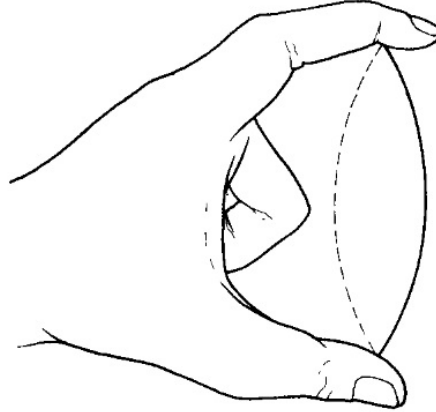
É chamada de quebra "espontânea" de simetria, porque não foi causada por um agente externo (interações). Um exemplo da quebra de simetria seria uma tira rígida de plástico, que ao espremer suas extremidades uma contra à outra, aparece uma curvatura em relação à posição inicial (Figura 65), essa curvatura poderia tanto ser para o lado direito quanto para o esquerdo, assim, dois estados de mínima energia (estáveis). Ambos os estados de energia não existem fisicamente ao mesmo tempo, logo, resulta em uma quebra de simetria, uma vez que teremos que escolher uma das duas configurações (GRIFFITHS, 1987).

A.2.3.1 Quebra de simetria contínua

Até aqui consideramos a quebra de simetria *discreta* (também *interna*), mas a simetria que realmente nos interessa é a simetria *contínua*.

Para isso vamos considerar a mesma lagrangiana (353), agora com dois campos, isto é, $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, vamos trocar o sinal de μ^2 , sendo este o caso em que a quebra de

Figura 65 - Quebra espontânea de simetria em uma tira de plástico.



Fonte: Griffiths (1987)

simetria ocorre ($\mu < 0$). De modo que temos,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi_1 \partial^\mu \varphi_1 + \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi_2 \partial^\mu \varphi_2 + \frac{\mu^2}{2} (\varphi_1^2 + \varphi_2^2) - \frac{\lambda^2}{4} (\varphi_1^2 + \varphi_2^2)^2, \quad (361)$$

considerando a condição de ortogonalidade, $\varphi_1 \varphi_2 = 0$. Por envolver a somas dos quadrados dos campos, essa lagrangiana é invariante sob rotações (SO(2)) no espaço de φ_1, φ_2 . Isso é (BASSALO, 2008; NETO, 2010),

$$\begin{pmatrix} \varphi'_1 \\ \varphi'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}, \quad (362)$$

resultando nas transformações

$$\varphi_1 \rightarrow \varphi'_1 = \varphi_1 \cos \theta + \varphi_2 \sin \theta,$$

$$\varphi_2 \rightarrow \varphi'_2 = -\varphi_1 \sin \theta + \varphi_2 \cos \theta.$$

fazendo diretamente a soma dos quadrados, temos

$$\begin{aligned} \varphi_1'^2 + \varphi_2'^2 &= (\varphi'_1, \varphi'_2) \begin{pmatrix} \varphi'_1 \\ \varphi'_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} (\varphi_1, \varphi_2) \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \varphi_1^2 + \varphi_2^2. \end{aligned}$$

O potencial é o mesmo que (355), mas com as mudanças já mencionadas, assim (Figura 67 a))

$$\mathcal{V}(\varphi) = -\frac{\mu^2}{2}(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) + \frac{\lambda^2}{4}(\varphi_1^2 + \varphi_2^2)^2. \quad (363)$$

Fazendo o mesmo que foi feito para o caso discreto, encontramos o ponto de mínimo do potencial

$$\varphi_{10}^2 + \varphi_{20}^2 = \frac{\mu^2}{\lambda^2}, \quad (364)$$

isso significa que o mínimo está localizado em uma circunferência de raio (com a origem no eixo do potencial) igual à μ/λ , já que a relação é exatamente a equação de uma circunferência.

De acordo com a teoria quântica de campos temos de escolher um mínimo em torno do qual, possamos fazer uma expansão (pertubação). Portanto vamos deslocar a função na direção φ_1 (ou equivalentemente deslocar a origem), para o ponto

$$\varphi_{10} = \frac{\mu}{\lambda}; \quad \varphi_{20} = 0. \quad (365)$$

Introduzimos novos campos deslocados em função dos antigos, tal que

$$\eta = \varphi_1 - \varphi_{10}; \quad \xi = \varphi_2 - \varphi_{20} = 0. \quad (366)$$

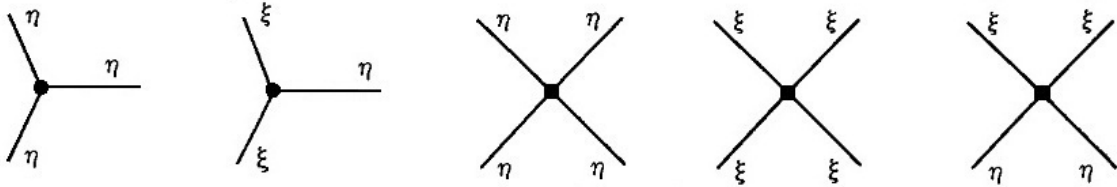
Nestes novos campos, a lagrangiana (361) tem a forma (GRIFFITHS, 1987; PESKIN; SCHROEDER, 1995),

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \left[\frac{1}{2} \partial_\mu \eta \partial^\mu \eta - \mu^2 \eta^2 \right]_{(1)} + \left[\frac{1}{2} \partial_\mu \xi \partial^\mu \xi \right]_{(2)} \\ & + \left[\mu \lambda (\eta^3 + \eta \xi^2) - \frac{\lambda^2}{4} (\eta^4 + \xi^4 + 2\eta^2 \xi^2) \right]_{(3)} \\ & + \left[\frac{\mu^4}{4\lambda^2} \right]_{(4)}, \end{aligned} \quad (367)$$

aqui temos:

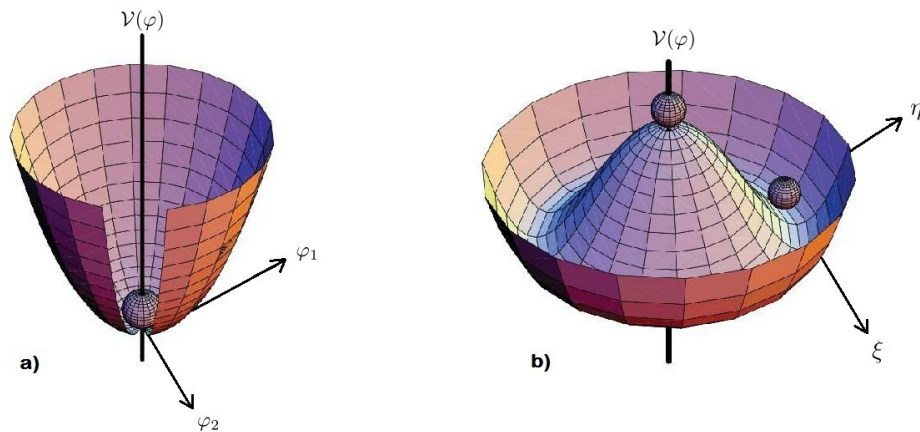
- (1) → Lagrangiana de Klein-Gordon (332) com massa $m_\eta = \sqrt{2}\mu$;
- (2) → Lagrangiana do campo livre ξ sem massa $m_\xi = 0$;
- (3) → Lagrangiana com cinco acoplamentos (Figura 66);
- (4) → Uma constante, podendo ser desprezada.

Figura 66 - Cinco acoplamentos



Fonte: Griffiths (1987)

Figura 67 - Quebra de simetria



Fonte: Adaptado de Iliopoulos (2013)

A lagrangiana (367) não tem invariância sob rotações, como era de se esperar quando escolhemos o ponto de mínimo. As mesmas explicações dadas à lagrangiana (360) para caso discreto valem aqui, porém, agora o campo η representa oscilações na direção radial e o novo campo ξ oscilações na direção tangencial (Figura 67 b)) (ILIOPOULOS, 2013).

A característica importante deste caso é a separação entre o campo sem massa (η) e o campo massivo (ξ) automaticamente na lagrangiana. Esse resultado é previsto pelo teorema de Goldstone, que veremos mais adiante. Este teorema estabelece que toda quebra de simetria contínua é acompanhada por um ou mais campos sem massa que descrevem partículas de spin-0 chamados *bósons de Goldstone*.

Podemos ainda generalizar para N campos (φ^i). Assim a lagrangiana (361) será escrita como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi^i \partial^\mu \varphi^i + \frac{\mu^2}{2} (\varphi^i)^2 - \frac{\lambda^2}{4} [(\varphi^i)^2]^2. \quad (368)$$

Esta lagrangiana é simétrica sob a transformação

$$\varphi^i \longrightarrow R^i_j \varphi^j, \quad (369)$$

onde R^i_j é qualquer matriz ortogonal $N \times N$ (grupo $O(N)$), sendo φ^i ortogonais entre si.

Fazendo os mesmos procedimentos temos que para um dos campos φ^i o potencial será mínimo no ponto, como antes

$$\varphi^i_0 = \frac{\mu}{\lambda}. \quad (370)$$

Estabelecendo que a direção de φ^i_0 é a N -ésima, temos

$$\varphi^i_0 = (0, 0, \dots, 0, \mu/\lambda). \quad (371)$$

Representando φ^i em função de novos campos π^k e σ ,

$$\varphi^i = (\pi^k, \sigma + \mu/\lambda), \quad k = 1, \dots, N - 1 \quad (372)$$

a lagrangiana (369) terá a forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \left[\frac{1}{2} \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma - \mu^2 \sigma^2 \right]_{(1)} + \left[\frac{1}{2} \partial_\mu \pi^k \partial^\mu \pi^k \right]_{(2)} \\ & + \left[\mu \lambda (\sigma^3 + \sigma (\pi^k)^2) - \frac{\lambda^2}{4} (\sigma^4 + (\pi^k)^4 + 2\sigma^2 (\pi^k)^2) \right]_{(3)} + \left[\frac{\mu^4}{4\lambda^2} \right]_{(4)}. \end{aligned} \quad (373)$$

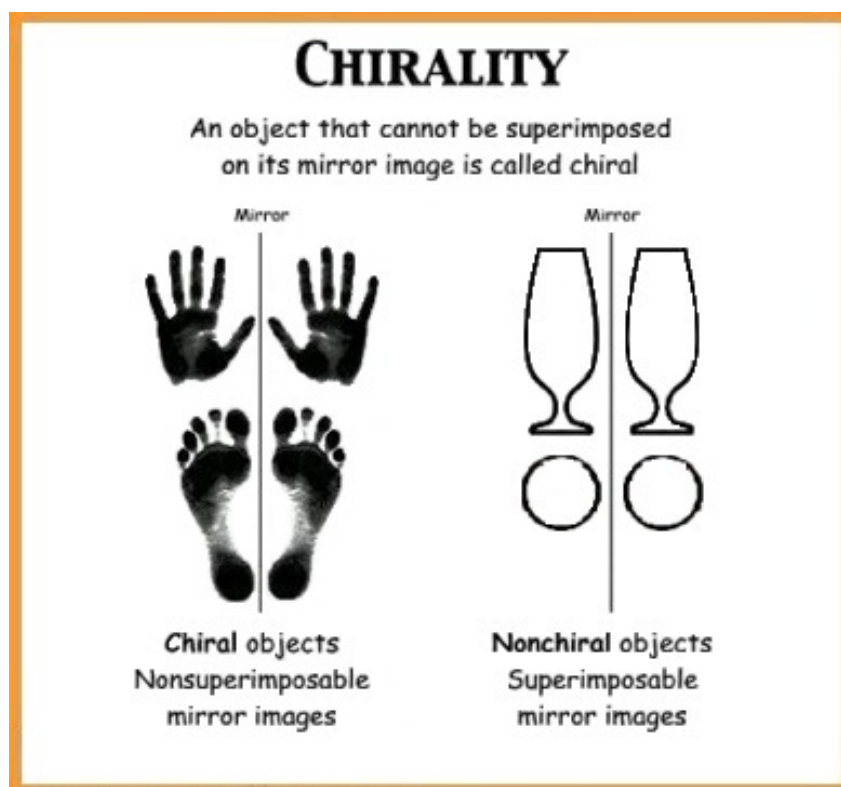
Novamente temos que: (1) é um campo massivo; (2) é associado aos $N - 1$ campos sem massa; (3) o conjunto de interações; (4) uma constante a ser desprezada.

A.2.4 Simetria Quiral

Estamos hábeis enfim, para introduzir a simetria que de fato nos interessa a *Simetria Quiral*. A palavra quiral vem do grego, cujo significado é "mão", nome bastante apropriado, pois, é análoga à simetria de espelho, isso é, o objeto e sua imagens devem ser diferentes, exatamente como as são, as mãos direita e esquerda (Figura 68). Assim todos os objetos que se comportam dessa forma, são invariantes quirais (ERICSON; WEISE, 1988; PESKIN; SCHROEDER, 1995; BERNARD; KAISER; MEISSNER, 1995; KOCH, 1997; FINELLI, 2011).

A relação da simetria quiral com a física de partículas se dá através da helicidade. Helicidade é o alinhamento paralelo ou anti-paralelo do spin (caso dos férmions) com a direção de movimento da partícula. Quando é paralelo (mesmo sentido, helicidade

Figura 68 - Simetria Quiral



Fonte: Finelli (2011)

positiva) dizemos que é de mão-direita e quando anti-paralelo (sentidos opostos, helicidade negativa), mão-esquerda (Figura 69).

A helicidade não é um invariante de Lorentz para o caso de partículas fermiônicas massivas, isto é, existem referenciais inerciais nos quais as partículas podem ter outra helicidade. Para entendermos isso vamos imaginar uma partícula viajando para a direita com seu spin paralelo (mesmo sentido) à velocidade v ($v < c$) e um observador movendo-se também para a direita com velocidade V , então se $v < V$, veríamos no referencial do observador a partícula se mover para a esquerda ($V - v$) sem alterar seu spin, logo seu spin passa agora a ser anti-paralelo, ou seja, sua helicidade mudou (GRIFFITHS, 1987).

Para que a helicidade seja então bem definida, ela deve ter uma velocidade $v = c$, portanto ter massa nula, mas podemos impor que a massa de uma partícula em relação a determinados regimes de energias seja aproximadamente zero.

Os estados de helicidade de uma partícula sem massa são desacoplados, isso quer dizer que ou são de mão-direita ou de mão-esquerda. Então para que a simetria quiral seja satisfeita, temos que o estado da partícula (ψ) deve ser a soma dos dois estados possíveis de helicidade direita (ψ_R) e esquerda (ψ_L),

$$\psi = \psi_R + \psi_L, \quad (374)$$

Figura 69 - Helicidade



Fonte: Griffiths (1987)

sendo na verdade espinores, que escrevemos como

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \psi_R \\ \psi_L \end{pmatrix}}_{\psi} = \underbrace{\begin{pmatrix} \psi_R \\ 0 \end{pmatrix}}_{\psi_R} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \psi_L \end{pmatrix}}_{\psi_L}. \quad (375)$$

Vamos definir projetores que, aplicados à ψ resultem em ψ_R e ψ_L . Como estamos considerando férmions, então o estado ψ deve satisfazer a equação de Dirac (1175) para uma partícula sem massa

$$i\not{\partial}\psi = 0, \quad (376)$$

aqui usamos a forma compacta através da notação *slash*, $\not{\partial} = \gamma^\mu \partial_\mu$.

Definimos convenientemente uma nova matriz γ_5 a partir das matrizes de Dirac, tal que

$$\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 1_{2 \times 2} & 0 \\ 0 & -1_{2 \times 2} \end{pmatrix}, \quad (377)$$

onde são as matrizes de Dirac definidas como

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1_{2 \times 2} \\ 1_{2 \times 2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad (378)$$

sendo σ^i as matrizes de Pauli⁷ e $i = 1, 2, 3$. A partir dessa definição achamos o anti-comutador

$$\{\gamma^\mu, \gamma_5\} = 0 \quad \longrightarrow \quad \gamma^\mu \gamma_5 = -\gamma_5 \gamma^\mu. \quad (380)$$

Desta forma, temos uma outra possível solução para (1175),

$$i\cancel{\partial}\gamma_5\psi = -i\gamma_5\cancel{\partial}\psi = 0. \quad (381)$$

Por fim, concluímos que quaisquer combinações lineares de (376) e (381) são também soluções de (1175). Consideramos as seguintes combinações

$$i\cancel{\partial}\frac{1}{2}(1 \pm \gamma_5)\psi = 0, \quad (382)$$

temos explicitamente na forma matricial que

$$\frac{1}{2}(1 + \gamma_5) = \begin{pmatrix} 1_{2 \times 2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{2}(1 - \gamma_5) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1_{2 \times 2} \end{pmatrix}, \quad (383)$$

quando aplicados à ⁸ ψ ,

$$\frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\psi = \begin{pmatrix} 1_{2 \times 2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_R \\ \psi_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_R \\ 0 \end{pmatrix} = \psi_R, \quad (384)$$

$$\frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\psi = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1_{2 \times 2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_R \\ \psi_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_L \end{pmatrix} = \psi_L. \quad (385)$$

⁷ As matrizes de Pauli de ordem 2×2 , são definidas como (GRIFFITHS, 1987)

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (379)$$

⁸ Podemos considerar que $\psi_{R,L}$ são auto-estados da helicidade dados pelo operador \hat{h} , o qual, é igual neste caso (sem massa) à quiralidade dada pelo operador γ_5

$$\hat{h}\psi_{R,L} = \pm 1\psi_{R,L} \equiv \gamma_5\psi_{R,L} = \pm 1\psi_{R,L}.$$

Achamos então os projetores quirais de mãos direita (P_R) e esquerda (P_L)⁹

$$P_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5), \quad P_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5), \quad (386)$$

de fato respeitam as relações para projetores

$$P_R P_L = P_L P_R = 0, \quad P_L^2 = P_L, \quad P_R^2 = P_R, \quad P_R + P_L = 1. \quad (387)$$

A.2.4.1 Quarks *up* e *down* e a simetria quiral

Neste trabalho estamos interessados em descrever interações entre hádrons a baixas energias, para tanto, vamos utilizar a simetria quiral, que deverá ser invariante nas interações fortes. Porém, como vimos, a simetria não é bem definida para partículas massivas, logo, teríamos de considerar partículas não massivas para intermediar (bósons de Goldstone) a interação entre hádrons. Sabemos experimentalmente que tais bóson não existem mas, poderíamos considerar as partículas bosônicas mais leves conhecidas, os mésons- π (triplete) compostos pelos quarks (férmions) *up* (u) e *down* (d).

Assim, buscamos uma forma de conservar a simetria quiral de forma aproximada (parcial) utilizando do argumento que, as massas dos quarks (m_u, m_d) considerados e por consequência a massa dos píons (m_π) são desprezíveis comparadas às energias típicas das interação fortes $M_H \approx 1\text{GeV}$ (BERNARD; KAISER; MEISSNER, 1995), os valores das massas (PARTICLE DATA GROUP (PDG); PATRIGNANI et al., 2016) são

$$\begin{aligned} m_u &= 2.3_{-0.5}^{+0.7} \text{ MeV}, \\ m_d &= 4.8_{-0.3}^{+0.7} \text{ MeV}, \\ m_\pi &= 139.57 \text{ MeV}. \end{aligned} \quad (388)$$

Para isso, é necessário encontrar através da lagrangiana para o dubleto de quarks (dubleto de isospin), uma transformação de *gauge*, achando assim as correntes referentes à simetria quiral. Usamos então a lagrangiana de Dirac (336)

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\not{\partial}\psi - \hat{m}\bar{\psi}\psi, \quad (389)$$

⁹ Até aqui consideramos o caso de férmions sem massa, porém estes operadores são válidos para o caso massivo, mas, não dão a helicidade exata.

onde os espinores dos dubletos são¹⁰ (os super índices se referem aos quarks *up* (*u*) e *down* (*d*))

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi^u \\ \psi^d \end{pmatrix}, \quad \bar{\psi} = (\psi^{d\dagger}, \psi^{u\dagger}), \quad (390)$$

e as massas são descritas pela matriz

$$\hat{m} = \begin{pmatrix} m_u & 0 \\ 0 & m_d \end{pmatrix} \approx 0, \quad (391)$$

que neste caso vamos desprezar.

Vamos usar neste primeiro momento, espinores que levam em conta o sabor (*u*, *d*) e a quiralidade (mãos direita (*R*) e esquerda (*L*)), para explicitarmos os procedimentos dos cálculos, os quais serão escritos mais adiante de forma compacta, assim

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_R^u \\ \psi_L^u \\ \psi_R^d \\ \psi_L^d \end{pmatrix}. \quad (392)$$

Aplicando (392) e seu adjunto em (389), considerando (391), temos explicitamente

$$\begin{aligned} i\bar{\psi}\not{\partial}\psi &= i(\psi_R^{d\dagger}, \psi_L^{d\dagger}, \psi_R^{u\dagger}, \psi_L^{u\dagger}) \\ &\times \left[\underbrace{\begin{pmatrix} 0_{2\times 2} & 1_{2\times 2} \\ 1_{2\times 2} & 0_{2\times 2} \end{pmatrix}}_{\gamma^0} \partial_0 + \underbrace{\begin{pmatrix} 0_{2\times 2} & -\sigma^i \\ \sigma^i & 0_{2\times 2} \end{pmatrix}}_{\gamma^i} \partial_i \right] \begin{pmatrix} \psi_R^u \\ \psi_L^u \\ \psi_R^d \\ \psi_L^d \end{pmatrix} \\ &= i(\psi_R^{u\dagger}\partial_0\psi_R^u + \psi_L^{u\dagger}\partial_0\psi_L^u + \psi_R^{d\dagger}\partial_0\psi_R^d + \psi_L^{d\dagger}\partial_0\psi_L^d) \\ &\quad + i(\psi_R^{u\dagger}\sigma^i\partial_i\psi_R^u + \psi_L^{u\dagger}\sigma^i\partial_i\psi_L^u - \psi_R^{d\dagger}\sigma^i\partial_i\psi_R^d - \psi_L^{d\dagger}\sigma^i\partial_i\psi_L^d), \end{aligned}$$

multiplicando ambos os parênteses por $1 = (\gamma^0)^2$ e o segundo parênteses por $1 = (\gamma_5)^2$ na

¹⁰ O adjunto do espinor é calculado da seguinte forma

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0 = (\psi^{u\dagger}, \psi^{d\dagger}) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (\psi^{d\dagger}, \psi^{u\dagger}),$$

onde \dagger representa o adjunto do estado.

ordem apropriada,¹¹ para que os espinores à esquerda tomem a forma adjunta

$$\begin{aligned} i\bar{\psi}\not{\partial}\psi &= i(\bar{\psi}_R^u\gamma^0\partial_0\psi_R^u + \bar{\psi}_L^u\gamma^0\partial_0\psi_L^u + \bar{\psi}_R^d\gamma^0\partial_0\psi_R^d + \bar{\psi}_L^d\gamma^0\partial_0\psi_L^d) \\ &\quad + i(\bar{\psi}_R^u\gamma^i\partial_i\psi_R^u + \bar{\psi}_L^u\gamma^i\partial_i\psi_L^u + \bar{\psi}_R^d\gamma^i\partial_i\psi_R^d + \bar{\psi}_L^d\gamma^i\partial_i\psi_L^d), \end{aligned}$$

onde usamos $\gamma^0\sigma^i\gamma_5 = \gamma^i$ e $\gamma_5\psi_{R,L}^d = -\psi_{R,L}^d$.

Logo,

$$i\bar{\psi}\not{\partial}\psi = i\bar{\psi}_R^u\not{\partial}\psi_R^u + i\bar{\psi}_L^u\not{\partial}\psi_L^u + i\bar{\psi}_R^d\not{\partial}\psi_R^d + i\bar{\psi}_L^d\not{\partial}\psi_L^d. \quad (393)$$

Escrevendo (393) de forma compacta, deixando a quiralidade explícita

$$i\bar{\psi}\not{\partial}\psi = i\bar{\psi}_R^j\not{\partial}\psi_R^j + i\bar{\psi}_L^j\not{\partial}\psi_L^j, \quad (394)$$

onde $j = u, d$ (válido também para o quark estranho (s)). Podemos considerar os espinores tendo somente duas componentes $\psi_{R,L}^j$.

Queremos que a lagrangiana (394) seja invariante sob a transformação de *gauge* do tipo (global),

$$U = e^{-iH} \quad (395)$$

onde H é uma matriz 2×2 ¹² *Hermitiana* ($H^\dagger = H$). A forma mais geral de escrever H é,

$$H = \alpha 1_{2 \times 2} + \frac{\vec{\tau}}{2} \cdot \vec{\theta} \quad (396)$$

¹¹ Consideremos como exemplo de cálculos os espinores

$$\psi_R^u = \begin{pmatrix} \psi_R^u \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_R^d = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi_R^d \\ 0 \end{pmatrix},$$

multiplicados pelas matrizes γ^0 e γ_5 de forma conveniente, temos

$$\psi_R^{u\dagger} \overbrace{\gamma^0\gamma^0}^1 \sigma^i \overbrace{\gamma_5\gamma_5}^1 \partial_i \psi_R^u = \bar{\psi}_R^u \gamma^i \partial_i \psi_R^u, \quad - \underbrace{\psi_R^{d\dagger}}_{\bar{\psi}_R^d} \underbrace{\gamma^0\gamma^0}_{\gamma^i} \sigma^i \gamma_5 \partial_i \underbrace{\gamma_5\psi_R^d}_{-\psi_R^d} = \bar{\psi}_R^d \gamma^i \partial_i \psi_R^d,$$

onde

$$\gamma^0\sigma^i\gamma_5 = \begin{pmatrix} 0_{2 \times 2} & -\sigma^i \\ \sigma^i & 0_{2 \times 2} \end{pmatrix} = \gamma^i.$$

¹² Pois temos dois sabores de quarks ($j = u, d$).

sendo $\vec{\tau}$ as matrizes de Pauli (τ_1, τ_2, τ_3) , $\vec{\theta}$ e α são parâmetros reais arbitrários $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ e o produto $\vec{\tau} \cdot \vec{\theta} = \tau_1 \theta_1 + \tau_2 \theta_2 + \tau_3 \theta_3$.¹³

Separamos essa transformação em duas partes: parte de mão-direita (R) e parte de mão-esquerda (L)¹⁴

$$\psi_R^j \rightarrow \psi_R'^j = e^{-\frac{\vec{\tau} \cdot \vec{\theta}_R}{2}} \psi_R^j, \quad (397)$$

$$\psi_L^j \rightarrow \psi_L'^j = e^{-\frac{\vec{\tau} \cdot \vec{\theta}_L}{2}} \psi_L^j. \quad (398)$$

Este é o grupo de simetria $SU(2)_R \times SU(2)_L$ (a lagrangiana deve satisfazer ambas as transformações neste grupo de simetria).

Fazendo uma expansão de (397) e (398) para pequenos valores de $\theta_{R,L}$ e então, aplicando à (394), temos

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_R'^j \not{\partial} \psi_R'^j &= \bar{\psi}_R^j (1 + i \frac{\tau^k}{2} \theta_R^k) \not{\partial} (1 - i \frac{\tau^k}{2} \theta_R^k) \psi_R^j, \\ &= \bar{\psi}_R^j \not{\partial} \psi_R^j + \mathcal{O}(\theta_R^2), \end{aligned} \quad (399)$$

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_L'^j \not{\partial} \psi_L'^j &= \bar{\psi}_L^j (1 + i \frac{\tau^k}{2} \theta_L^k) \not{\partial} (1 - i \frac{\tau^k}{2} \theta_L^k) \psi_L^j, \\ &= \bar{\psi}_L^j \not{\partial} \psi_L^j + \mathcal{O}(\theta_L^2). \end{aligned} \quad (400)$$

Foi usada a relação de comutação $[\vec{\tau}, \gamma^\mu] = 0$, pois, $\vec{\tau}$ tem espaço de atuação diferente de γ^μ e o índice $k = 1, 2, 3$ é relativo ao isospin.

Vemos de (399) e (400) que a lagrangiana (394) é em primeira ordem invariante sob as transformações (397) e (398). Esta é a chamada *Simetria Quiral*.

As correntes associadas à estas transformações podem ser encontradas usando a relação (350)

$$J^{a\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [\partial_\mu \psi]} \frac{\delta \psi}{\epsilon^a},$$

¹³ Aqui são as matrizes de Pauli relacionadas aos isospin e θ são os ângulos de rotação no espaço dos isospin.

¹⁴ A parte da transformação dada por

$$e^{-i\alpha},$$

também pode ser separadas na partes R e L e ser consideradas do grupo $U_R(1) \times U_L(1)$ (para cada sabor u e d separadamente). Mas não temos interesse nesse trabalho nestas transformações ainda que façam parte da simetria quiral, pois, estão associadas à férmions únicos livres.

Estão associados a correntes de conservação do número de férmions e da chamada *anomalia axial*.

resulta em

$$J_{R(L)}^{k\mu} = \bar{\psi}_{R(L)} \gamma^\mu \frac{\tau^k}{2} \psi_{R(L)}, \quad (401)$$

onde usamos $\epsilon^a = i\theta_{R(L)}^k$ e $\delta\psi = i\frac{\tau^k}{2}\theta_{R(L)}^k$.

A simetria é mantida, quando a corrente (401) é conservada

$$\partial_\mu J_{R(L)}^{k\mu} = 0. \quad (402)$$

A.2.4.2 Correntes: Vetor e Vetor-axial

Vamos definir duas novas correntes a partir das corretes calculadas em (401),

Corrente vetor:

$$V^{k\mu} = J_R^{k\mu} + J_L^{k\mu}. \quad (403)$$

Corrente vetor-axial:

$$A^{k\mu} = J_R^{k\mu} - J_L^{k\mu}, \quad (404)$$

sendo ainda $k = 1, 2, 3$.

Para calcularmos essas correntes temos de fazer uso das relações (384), (385) e seus adjuntos

$$\psi_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\psi, \quad \psi_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\psi, \quad (405)$$

$$\bar{\psi}_R = \bar{\psi} \frac{1}{2}(1 - \gamma_5), \quad \bar{\psi}_L = \bar{\psi} \frac{1}{2}(1 + \gamma_5), \quad (406)$$

substituindo essas relações em (401), (403) e (404) chegamos a ¹⁵

$$V^{k\mu} = \bar{\psi} \gamma^\mu \frac{\tau^k}{2} \psi, \quad (407)$$

$$A^{k\mu} = \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \frac{\tau^k}{2} \psi. \quad (408)$$

¹⁵ Uma quantidade matemática pode ser classificada de acordo com sua transformação à paridade P (GRIFFITHS, 1987). As mais comuns e do nosso interesse são:

Escalar :	$P(s) = s$
Pseudoescalar :	$P(p) = -p$
Vetor :	$P(\vec{v}) = -\vec{v}$
Pseudovetor (ou vetor axial):	$P(\vec{a}) = \vec{a}$

A transformações associadas são das seguintes formas (fazendo o caminho inverso)

$$\Lambda_V : \psi \rightarrow \psi' = e^{-i\frac{\vec{\tau}}{2} \cdot \vec{\theta}} \psi, \quad (409)$$

$$\Lambda_V : \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}' = \bar{\psi} e^{+i\frac{\vec{\tau}}{2} \cdot \vec{\theta}}, \quad (410)$$

$$\Lambda_A : \psi \rightarrow \psi' = e^{-i\gamma_5 \frac{\vec{\tau}}{2} \cdot \vec{\theta}} \psi, \quad (411)$$

$$\Lambda_A : \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}' = \bar{\psi} e^{-i\gamma_5 \frac{\vec{\tau}}{2} \cdot \vec{\theta}}. \quad (412)$$

Estas transformações quando aplicadas à lagrangiana (394) se transformam de forma similar ao feito em (399) e (400)¹⁶. Logo esta lagrangiana de férmions livres e não massivos é invariante sob Λ_V e Λ_A , os quais são uma nova forma de representar a simetria quiral.

A.2.4.3 Quebra de simetria: termo da massa

Mas, o que acontece se utilizarmos a lagrangiana para férmions com massa? Como já foi discutido, a massa impede a definição precisa da helicidade da partícula.¹⁷ Portanto, esperamos que o formalismo construído até aqui, nos mostre explicitamente como o termo da massa afeta as transformações Λ_V e Λ_A , e assim, a quebra da simetria quiral.

Usando a lagrangiana (389),

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\not{\partial}\psi - \hat{m}\bar{\psi}\psi,$$

já sabemos que o primeiro termo é invariante sob Λ_V e Λ_A , logo, temos somente que fazer as transformações para o termo da massa.

$$\begin{aligned} \Lambda_V : -\hat{m}\bar{\psi}\psi &= -\bar{\psi}(1 + i\frac{\vec{\tau}}{2}\vec{\theta})\hat{m}(1 - i\frac{\vec{\tau}}{2}\vec{\theta})\psi \\ &= -\hat{m}\bar{\psi}\psi + \mathcal{O}(\theta_R^2) \\ &= -\hat{m}\bar{\psi}\psi, \end{aligned} \quad (413)$$

¹⁶ Levando em conta as relações de comutação

$$[\gamma_0, \gamma_5] = 0, \quad [\gamma_\mu, \gamma_5] = 0.$$

¹⁷ O termo da massa mistura os espinores: $\hat{m}\bar{\psi}\psi = \hat{m}(\bar{\psi}_R\psi_L + \bar{\psi}_L\psi_R)$.

$$\begin{aligned}
\Lambda_A : -\hat{m}\bar{\psi}\psi &= -\bar{\psi}(1 - i\gamma_5\frac{\vec{\tau}\vec{\theta}}{2})\hat{m}(1 - i\gamma_5\frac{\vec{\tau}\vec{\theta}}{2})\psi \\
&= -\hat{m}\bar{\psi}\psi - 2i\hat{m}\bar{\psi}\gamma_5\frac{\vec{\tau}\vec{\theta}}{2}\psi + \mathcal{O}(\theta_R^2) \\
&= -\hat{m}\bar{\psi}\psi - 2i\hat{m}\bar{\psi}\gamma_5\frac{\vec{\tau}\vec{\theta}}{2}\psi.
\end{aligned} \tag{414}$$

Notamos que não alcançamos o mesmo termo em primeira ordem para Λ_A . Assim, a simetria foi quebrada e o vetor-axial não é uma boa simetria para o caso de férmions massivos.

Porém, como a massa dos quarks considerados (u, d) são pequenos relativos a ordem de energia das interações fortes, podemos dizer que a simetria Λ_A é aproximadamente conservada (parcial).

Escrevemos essa quebra de simetria, em termos da divergência da corrente $A^{k\mu}$, a qual, é proporcional ao termo não simétrico (termo extra)

$$\partial_\mu A^{k\mu} = 2i\hat{m}\bar{\psi}\gamma_5\frac{\tau^k}{2}\psi = i\bar{\psi}\left\{\hat{m}, \frac{\tau^k}{2}\right\}\gamma_5\psi. \tag{415}$$

A.2.5 Decaimento do pión e a relação PCAC

O processo de decaimento do pión é do tipo: $\pi^- \rightarrow l + \bar{\nu}_l$, isto é, o pión decai em um lépton e um anti-neutrino à este lépton associado ($l = e, \mu$).

A partir do diagrama de Feynman desse decaimento (Figura 70), podemos deduzir que a amplitude de espalhamento desse processo deve ter a forma geral

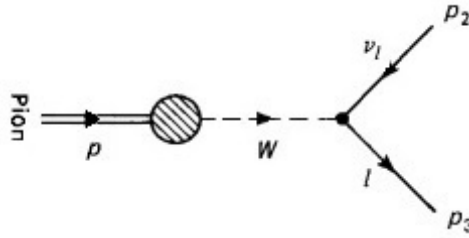
$$\mathcal{M} = \frac{g_W^2}{M_W^2} [\bar{\psi}_l(p_3)\gamma_\mu(1 - \gamma_5)\psi_{\nu_l}(p_2)]F^\mu, \tag{416}$$

onde $\bar{\psi}_l(p_3)$ e $\psi_{\nu_l}(p_2)$ são os espinores dos léptons, o termo $\frac{g_W^2}{M_W^2}\gamma_\mu(1 - \gamma_5)$ é o fator do vértice da interação entre os léptons e o bóson W (interação fraca) e por fim temos o *fator de forma* F^μ . O fator de forma descreve a interação entre o π e o W o qual, deve ser um quadrivetor para que (416) seja um invariante (escalar) de Lorentz (transformações relativísticas). Porém o pión é um pseudo-escalar¹⁸ (spin 0), isso é, seu estado (ϕ) não tem parte vetorial (claro é um pseudoescalar).

O único quadrivetor associado ao pión é o seu quadrimomento (p^μ), relacionado ao estado do pión através de sua derivada ($p^\mu = \partial^\mu\phi$). Então o fator de forma deve ser igual

¹⁸ Ver a nota de rodapé número 15.

Figura 70 - Decaimento do pión



Fonte: Adaptado de Griffiths (1987)

a

$$F^\mu = f_\pi p^\mu, \quad (417)$$

sendo f_π um número chamado *constante de decaimento do pión*. Seu valor definido experimentalmente é $f_\pi = 93 \text{ MeV}$ (GRIFFITHS, 1987; PESKIN; SCHROEDER, 1995).

Da teoria de Fermi para interações fracas (estabelecida antes da teoria de *gauge*), temos um modelo com lagrangiana do tipo *corrente-corrente* chamada de *efetiva four-fermion*¹⁹, a qual, já incluem as interações entre os bósons (intermediadores da interação) W e Z com os léptons e hádrons. A lagrangiana tem a forma geral

$$\mathcal{L}_{eff} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \sum J_\mu^\dagger J^\mu, \quad (418)$$

onde $G_F/\sqrt{2}$ é a constante efetiva de interação que usaremos como $\approx g_W^2/M_W^2$.

A corrente fraca J^μ é a soma entre a parte leptônica e hadrônica:

$$J^\mu = J_{lept}^\mu + J_{had}^\mu. \quad (419)$$

A parte leptônica é dada por

$$J_{lept}^\mu = \bar{\psi}_e \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \psi_{\nu_e} + \bar{\psi}_\mu \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \psi_{\nu_\mu}, \quad (420)$$

¹⁹ Fermi propôs esse modelo nos anos de 1960, quando não se conhecia ainda a terceira geração de léptons, isso é, não era descoberta ainda a partícula tau (τ) e seu neutrino. Por isso nesse primeiro momento só se levou em conta os 4 léptons da primeira e segunda geração do modelo padrão.

Como temos interesse somente na primeira geração, no nosso estudo, não temos a pretensão de aprofundar questões da teoria da interação fraca.

e a parte hadrônica é dado pela combinação linear das corrente vetor e vetor-axial

$$J_{had}^\mu = V^\mu - A^\mu. \quad (421)$$

Podemos separar em três partes da lagrangiana (418), que representam as interações: lépton-lépton, lépton-hádron e hádron-hádron.

$$\mathcal{L}_{eff} = \frac{g_W^2}{M_W^2} \sum (J_{lept} + J_{had})_\mu^\dagger (J_{lept} + J_{had})^\mu. \quad (422)$$

A parte de nosso interesse é a interação entre lépton-hádron, a qual, pode descrever o decaimento do pión (Figura 70). Usando a primeira parte de (420) e a segunda de (421), temos

$$\mathcal{L}_\pi = \frac{g_W^2}{M_W^2} [\bar{\psi}_e \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \psi_{\nu_l}] A^\mu, \quad (423)$$

usamos vetor A^μ , uma vez que o pión é descrito por um campo pseudo-vetorial (axial). Não poderia ser diferente, já que a relação (416) tem exatamente a mesma forma.

Logo, concluímos que

$$A^\mu = F^\mu = f_\pi p^\mu. \quad (424)$$

A.2.5.1 A relação PCAC

Justificada a relação entre o decaimento do pión com o vetor-axial A^μ , vamos proceder de uma outra forma para descrever o decaimento do pión (ERICSON; WEISE, 1988; CHENG; LI, 1988; KOCH, 1997; ZEE, 2003; FINELLI, 2011).

Considerando que $|0\rangle$ (vácuo) e $|\pi\rangle$ (estado do pión) são auto-estados do operador quadrimomento P_μ , com auto-valores, 0 e p_μ respectivamente. Podemos descrever o decaimento do pión através do elemento de matriz $\langle 0|A_\mu(x)|\pi\rangle$, isto é, a transição do estado de pión para o estado de vácuo.

Levando em conta a equação de movimento de Heisenberg na forma relativística

$$[P_\lambda, A_\mu(x)] = -i\partial_\lambda A_\mu(x) \quad (425)$$

fazemos,

$$\begin{aligned} \langle 0|P_\lambda A_\mu(x) - A_\mu(x)P_\lambda|\pi\rangle &= -i\partial_\lambda \langle 0|A_\mu(x)|\pi\rangle \\ -p_\mu \langle 0|A_\mu(x)|\pi\rangle &= -i\partial_\lambda \langle 0|A_\mu(x)|\pi\rangle, \end{aligned} \quad (426)$$

integrando no intervalo $[0, x]$ ²⁰ chegamos a ²¹

$$\langle 0|A_\mu(x)|\pi\rangle = \langle 0|A_\mu(0)|\pi\rangle e^{-ip \cdot x}. \quad (427)$$

Utilizando a mesma justificativa para (417), sendo o momento p_μ vetor²² para o pión, temos

$$\langle 0|A_\mu^a(0)|\pi^b\rangle = -if_\pi p_\mu \delta^{ab}, \quad (428)$$

onde impomos a conservação de isospin através de δ^{ab} , sendo $a, b = 1, 2, 3$ índices dos estados de isospin, $-i$ é convencional.

Desta forma com (427), chegamos ao elemento de matriz para o decaimento do pión

$$\langle 0|A_\mu(x)^a|\pi^b\rangle = -if_\pi p_\mu \delta^{ab} e^{-ip \cdot x}, \quad (429)$$

o divergente desta relação será

$$\langle 0|\partial^\mu A_\mu(x)^a|\pi^b\rangle = -f_\pi p^2 \delta^{ab} e^{-ip \cdot x} = -f_\pi m_\pi^2 \delta^{ab} e^{-ip \cdot x}. \quad (430)$$

Sabendo-se que $\delta^{ab} e^{-ip \cdot x} = \langle 0|\phi^a(x)|\pi^b\rangle$ é a normalização dos estados de isospin do pión, que aplicada à expressão anterior resulta em

$$\partial^\mu A_\mu^a = -f_\pi m_\pi^2 \phi^a(x), \quad (431)$$

esta relação é conhecida como *relação PCAC* ^{23 24}.

De posse da equação de Klein-Gordon sabemos que $-m_\pi^2 \phi(x) = \partial_\mu \partial^\mu \phi(x)$ quando aplicada à (431) conclui-se

$$A_\mu^a = f_\pi \partial_\mu \phi^a(x). \quad (432)$$

²⁰ Lembrando que

$$\partial_\lambda = \partial/\partial x^\lambda.$$

²¹ Essa expressão reflete a invariância por translação.

²² Uma vez que A_μ é um pseudovetor e $|\pi\rangle$ um pseudoescalar, o produto de ambos só pode resultar em um vetor.

²³ As relações (430) e (432) são as vezes também reconhecidas como relação PCAC.

²⁴ PCAC é a sigla para Partially Conserved Axial Current.

Da relação (431) relacionamos a massa do pión com a divergência do vetor-axial, deixando explícita a quebra da simetria quirial pela massa do pión. Poderíamos pensar que deveríamos usar a relação (415), para relacionar a massa do pión com a divergência do vetor-axial, porém a questão é que a corrente A^μ é definida através dos campos de espiniores, (partículas com spin 1/2) dos quarks que compõem o pión. Assim como o pión é uma combinação de quarks, todos os hádrons também o são, logo é de se esperar que, será possível encontrar relações entre as correntes quirais e os hádrons.

Observamos também que a massa do pión é considerada pequena em relação as escalas de energias da interação forte, assim a simetria quirial é aproximadamente (parcial) conservada. Esta é a essência da hipótese PCAC.

A.2.6 Relação de Goldberger-Treiman

Vamos encontrar uma relação para a interação pión-nucleon. Esse método pode ser usado para relacionar diferentes processos de interação (ERICSON; WEISE, 1988; KOCH, 1997; FINELLI, 2011).

Como o A_μ é em função de espiniores, podemos então relacionar com o nucleon ($\psi_N = (proton, neutron)$)

$$A_\mu^N = g_a \bar{\psi}_N \gamma_\mu \gamma_5 \frac{\tau}{2} \psi_N. \quad (433)$$

onde $g_a = 1,25$ é um fator de normalização do nucleon (extraído do decaimento β do nêutron).

Com auxílio da equação de Dirac achamos a divergência de (433),

$$\partial^\mu A_\mu^N = i g_a m_N \bar{\psi}_N \gamma_5 \tau \psi_N, \quad (434)$$

a qual, certamente não é nula.

Pelo fato do nucleon interagir fortemente com o pión, podemos escrever o vetor-axial como a soma das partes do pión (PCAC)(432) e do nucleon (433)

$$A_\mu = g_a \bar{\psi}_N \gamma_\mu \gamma_5 \frac{\tau}{2} \psi_N + f_\pi \partial_\mu \Phi(x). \quad (435)$$

Agora tirando sua divergência e igualando a zero para que o sistema pión-nucleon seja invariante quirial

$$\partial^\mu A_\mu = i g_a m_N \bar{\psi}_N \gamma_5 \tau \psi_N + f_\pi \partial^\mu \partial_\mu \Phi = 0. \quad (436)$$

Deixando o campo escalar (píon) em evidencia

$$\partial^\mu \partial_\mu \Phi = -ig_a \frac{m_N}{f_\pi} \bar{\psi}_N \gamma_5 \tau \psi_N. \quad (437)$$

Chegamos a uma relação entre equação de Klein-Gordon (píon) sem massa, acoplada ao nucleon.

Da condição PCAC e da conservação da corrente-axial ($\partial^\mu A_\mu = 0$), concluímos que o píon deveria ter uma massa nula. Porém, a massa do píon, por ser pequena, pode ser considerada, assim reescrevemos (437) como

$$(\partial^\mu \partial_\mu + m_\pi^2) \Phi = -ig_a \frac{m_N}{f_\pi} \bar{\psi}_N \gamma_5 \tau \psi_N. \quad (438)$$

Então, temos um píon massivo interagindo com um nucleon, a constante de acoplamento píon-nucleon é

$$g_{\pi NN} = g_a \frac{m_N}{f_\pi} \approx 12.5, \quad (439)$$

esta é a relação de *Goldberger-Treiman*.

A relação PCAC obteve grande sucesso, quando da dedução da relação de Goldberger-Treiman, pois o valor experimental para o acoplamento píon-nucleon é

$$g_{\pi NN}^{exp} = 13.4. \quad (440)$$

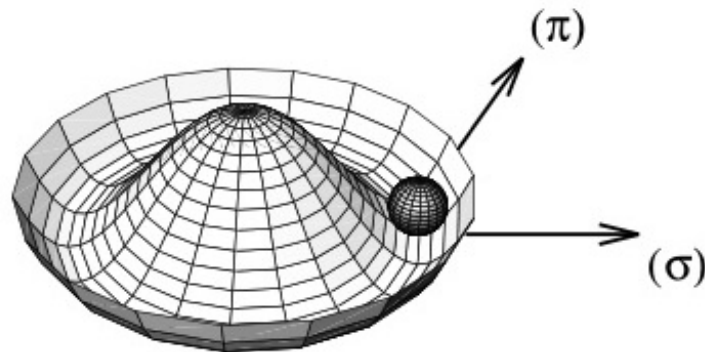
Tal concordância é bastante impressionante, já que a interação forte píon-nucleon contém fatores da interação fraca (g_a e f_π). Isso só foi possível devido à simetria quiral, a qual, através do vetor-axial pode relacionar partes físicas diferentes.

A.3 LAGRANGIANAS QUIRAIS

A.3.1 Modelo sigma-linear

O modelo sigma-linear (GELL-MANN; LÉVY, 1960; KOCH, 1997; FINELLI, 2011), tem por objetivo sistematizar as interações hadrônicas em baixas energias, usando da simetria quiral e sua ligação com as relações até aqui estabelecidas, que está de acordo com o modelo de quarks. Este modelo foi proposto antes da teoria de interações fortes atual, a QCD.

Vamos deduzir a seguir um modelo simples para a interação píon-nucleon, construindo uma lagrangiana que seja um invariante de Lorentz assim como invariante das transformações da simetria quiral: vetor (Λ_V) e vetor-axial (Λ_A).

Figura 71 - Quebra de simetria quiral para os mésons π e σ 

Fonte: Adaptado de Koch (1997)

De acordo com o modelo de quarks, podemos combiná-los de forma a descrever os campos dos mésons: $\vec{\pi}$ e σ . Assim temos um campo triplete pseudo-escalar e um campo singlete escalar, respectivamente

$$\vec{\pi} = i\bar{\psi}\vec{\tau}\gamma_5\psi, \quad \sigma = \bar{\psi}\psi. \quad (441)$$

Logo suas tramações são,
para o pión:

$$\Lambda_V : \pi_i \longrightarrow \pi_i + \epsilon_{ijk}\theta_j\pi_k, \quad \Lambda_A : \pi_i \longrightarrow \pi_i + \theta_i\sigma, \quad (442)$$

para o sigma:

$$\Lambda_V : \sigma \longrightarrow \sigma, \quad \Lambda_A : \sigma \longrightarrow \sigma - \theta_i\pi_i. \quad (443)$$

Vemos que a transformação vetorial (Λ_V) rotaciona o pión no espaço do isospin (triplete) em um ângulo θ . Por σ ser um singlete de isospin, não sofre mudanças. A transformação vetor-axial (Λ_A) rotacionam um campo no outro e vice-versa, o que implica que os mésons devem ter massas iguais. Aqui encontramos um problema, pois, os mésons π e σ possuem massas diferentes, logo, vemos que a transformação (Λ_A) não é uma boa simetria. Então, temos aqui uma quebra espontânea de simetria. Para entender o que isso significa, vamos voltar à seção (A.2.3.1), na qual, tratamos da quebra espontânea de simetria para duas variáveis. Vamos considerar que os campos π_i e σ são os campos da lagrangiana (361) em que ocorre a quebra da simetria radial, mas mantém válida a simetria de rotação (sem considerar um ponto em particular). Lembramos também que

esta lagrangiana tem a si associada o teorema de Goldstone, o qual diz que toda quebra espontânea de simetria tem um campo massivo e os demais (caso com mais de duas variáveis) sem massa (bósons de Goldstone).

Assim, escolhemos o pión como o campo não massivo, cujo estado excitado equivale a rotações e o sigma como o campo massivo (por ter o número quântico do vácuo diferente de zero $\langle \sigma \rangle = \sigma_0$, mínimo do potencial), o qual adquire massa quando varia na direção radial (estado excitado), causando a quebra a simetria (Figura 71).

Vemos na Figura 71 que a direção do pión é exatamente a direção do vetor rotação (talvez não tão claro na figura), e que na direção do sigma temos o vetor da direção radial, considerando que a esfera é a origem deslocada devida a quebra de simetria. Quando da transformação vetor-axial, o pión (π) é rotacionado para a direção do sigma (σ), adquirindo massa causada pela quebra de simetria, assim os mésons têm massa diferentes, isso esta de acordo com o experimento.

Precisamos encontrar uma relação entre os campos, tal que, consigamos um invariante da simetria, e assim construir um modelo. A transformação Λ_V provoca uma rotação de isospin, logo essa transformação do quadrado do campos deve ser invariante, isto é

$$\Lambda_V : \quad \pi^2 \longrightarrow \pi^2, \quad \sigma^2 \longrightarrow \sigma^2, \quad (444)$$

já no caso de Λ_A temos

$$\Lambda_A : \quad \pi^2 \longrightarrow \pi^2 - 2\sigma\theta_i\pi_i, \quad \sigma^2 \longrightarrow \sigma^2 + 2\sigma\theta_i\pi_i. \quad (445)$$

Notemos que a soma dos campos ao quadrado deve ser invariante em relação a ambas as transformações

$$\Lambda_{V,A} : \quad (\pi^2 + \sigma^2) \longrightarrow (\pi^2 + \sigma^2), \quad (446)$$

sendo também invariante de Lorentz.

A partir de (446) podemos achar os termos de interações entre o nucleon e os mésons considerados. Fazemos isso combinando o espinores do nucleon (ψ_N) de forma a ter os mesmos números quânticos do pión e do sigma, isto é, um pseudo-escalar e um escalar. Dessa forma quando multiplicados por π e σ respectivamente, obtemos os mesmo números quânticos de π^2 e σ^2 .

Para a interação com o pión (pseudo-escalar) temos

$$g_\pi (i\bar{\psi}_N \gamma_5 \vec{\tau} \psi_N) \cdot \vec{\pi} \quad (447)$$

onde $g_\pi = g_{\pi NN}$ é a constante de acoplamento pión-nucleon.

A interação mais simples com o sigma (escalar) é

$$g_\pi(\bar{\psi}_N\psi_N)\sigma \quad (448)$$

Essas interações são invariantes quirais quando somadas (446), fazendo isso temos finalmente a lagrangiana de interação mais simples

$$\mathcal{L}_{int} = -g_\pi[(i\bar{\psi}_N\gamma_5\vec{\tau}\psi_N) \cdot \vec{\pi} + (\bar{\psi}_N\psi_N)\sigma] \quad (449)$$

O próximo elemento intuitivo que o modelo deve conter, são os termos cinéticos do nucleon e dos mésons

$$\mathcal{L}_{cin} = i\bar{\psi}_N\not{\partial}\psi_N + \frac{1}{2}\partial_\mu\vec{\pi} \cdot \partial^\mu\vec{\pi} + \frac{1}{2}\partial_\mu\sigma\partial^\mu\sigma \quad (450)$$

Esse termo é composto por termos invariantes de Lorentz e quirais, logo é também um invariante. O primeiro termo é um férmion sem massa e os demais têm a mesma estrutura da relação invariante quiral (446).

Mas onde estão os termos de massa? Estamos procurando um modelo o mais realista possível, logo, deveríamos esperar que os termos de massa do nucleon e dos mésons apareçam de alguma forma no modelo. E de fato, podemos fazer isto.

Primeiro vamos tratar da massa do nucleon e mais adiante voltaremos às massas dos mésons. A massa do nucleon quebra a explicitamente simetria quiral e é consideravelmente grande para que se possa fazer qualquer aproximação do tipo *PCAC*.

Se repararmos na relação (448) e lembrando a relação de *Goldberger-Treiman* (439) temos

$$g_\pi(\bar{\psi}_N\psi_N)\sigma = g_a\frac{m_N}{f_\pi}(\bar{\psi}_N\psi_N)\sigma \quad (451)$$

se consideramos $g_a \approx 1$ e lembrando que o termo de massa das partículas estão sempre relacionadas ao termo $\bar{\psi}_N\psi_N$ nas lagrangianas, então concluímos

$$\sigma \rightarrow \langle\sigma\rangle = \sigma_0 = f_\pi. \quad (452)$$

Esta relação nos diz que o valor de vácuo²⁵ do campo σ deve ser diferente de zero, o que de fato já sabíamos, esse termo é o ponto de mínimo do potencial, que para conter a massa do nucleon dever ter o valor f_π . Portanto concluímos a massa do nucleon aparece

²⁵ A massa está relacionado ao valor de vácuo do campo, pois, quando não temos energia cinética e estamos no valor mínimo do potencial, tudo o que resta é a partícula em si, ou seja, sua massa de repouso.

no modelo como resultado da interação entre o nucleon com σ e não aparece no modelo explicitamente. Seu valor é

$$M_N = g_\pi \sigma_0 = g_\pi f_\pi. \quad (453)$$

Como sabemos que o mínimo do potencial não nulo, logo temos uma quebra de simetria, portanto temos um potencial invariante (446) descrito por (Figura 71)

$$V = V(\vec{\pi}^2 + \sigma^2) = \frac{\lambda}{4} ((\vec{\pi}^2 + \sigma^2) - f_\pi^2)^2 \quad (454)$$

com o mínimo no ponto $\vec{\pi} = 0, \sigma = f_\pi$.

Tudo até aqui está consistente com nossos objetivos e resumimos escrevendo a lagrangiana do modelo sigma linear

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{LS} = & \left[i\bar{\psi}_N \not{\partial} \psi_N \right]_{(1)} + \left[\frac{1}{2} \partial_\mu \vec{\pi} \cdot \partial^\mu \vec{\pi} \right]_{(2)} + \left[\frac{1}{2} \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma \right]_{(3)} \\ & + \left[-g_\pi (i\bar{\psi}_N \gamma_5 \vec{\tau} \psi_N \cdot \vec{\pi} + \bar{\psi}_N \psi_N \sigma) \right]_{(4)} \\ & - \left[\frac{\lambda}{4} ((\vec{\pi}^2 + \sigma^2) - f_\pi^2)^2 \right]_{(5)} \end{aligned} \quad (455)$$

aqui temos:

(1) → Termo cinético do nucleon;

(2) → Termo cinético do pión;

(3) → Termo cinético do sigma;

(4) → Termos de interação $\pi - \sigma -$ nucleon, com a massa do nucleon implícita;

(5) → Potencial do sistema $\pi - \sigma$.

E então, onde estão os termos de massa dos mésons? A resposta é simples, estão de alguma forma relacionadas ao potencial (5). Vamos então expandir os campos do potencial para valores próximos do mínimo ($\vec{\pi}_0 = 0, \sigma_0$). Temos, portanto, pequenas perturbações dos campos

$$\sigma = \sigma_0 + \delta\sigma, \quad \vec{\pi} = 0 + \delta\vec{\pi}. \quad (456)$$

As perturbações $\delta\sigma$ e $\delta\vec{\pi}$ são de fato os campos relacionados a partículas reais (observáveis). O potencial expandido em relação a ambos os campos fica

$$V(\sigma, \vec{\pi}) \Big|_{\pi_0, \sigma_0} = \lambda f_\pi^2 (\delta\sigma)^2 + \mathcal{O}(\delta)^3. \quad (457)$$

Figura 72 - Massas na quebra de simetria quiral

$$\begin{array}{lcl}
m_\sigma^2 = 0 & \Rightarrow & m_\sigma^2 = 2\lambda f_\pi^2 \\
m_\pi^2 = 0 & \Rightarrow & m_\pi^2 = 0 \text{ Goldstone bosons} \\
m_N = 0 & \Rightarrow & m_N = g_\pi f_\pi
\end{array}$$

Fonte: Adaptado de Finelli (2011)

Como os termos de massa estão sempre relacionados com os termos quadráticos do campos, achamos finalmente, as massas dos mésons comparando com a lagrangiana para bósons

$$m_\pi^2 = 0, \quad (458)$$

$$m_\sigma^2 = 2\lambda f_\pi^2 \neq 0 \quad (459)$$

a massa do pión está de acordo com o teorema de Goldstone, como havíamos assumido.

A.3.1.1 Quebra explícita de simetria

Se ainda neste modelo quisermos considerar o pión como massivo, mesmo que com pequena massa de acordo com a relação *PCAC*, temos que adicionar um termo de quebra explícita de simetria. Essa quebra explícita não é o mesmo que quebra espontânea de simetria.

A quebra espontânea de simetria quebra a simetria radial, mas ainda é invariante por rotações, já a quebra explícita de simetria quebra também a simetria por rotações. Para tanto, adicionamos um termo ao potencial, isso equivale a inclinar ("afundar") o potencial em qualquer direção, escolhamos a direção σ (Figura 73).

Sabemos que o termo de massa dos quarks quebra a simetria, portanto esperamos que o fator de quebra explícita de simetria, seja da forma

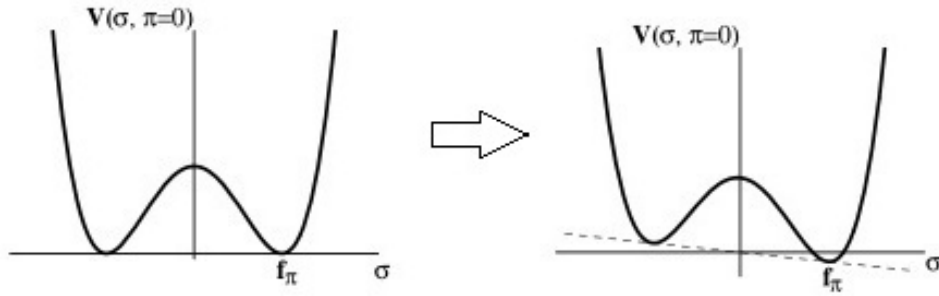
$$\mathcal{L}_{quebra} = -m\bar{\psi}\psi \quad (460)$$

Podemos escrever esse fator em função de σ , assim

$$\mathcal{L}_{quebra} = \epsilon\sigma \quad (461)$$

onde ϵ é o parâmetro de quebra e deve ser de valor pequeno, uma vez que a quebra explícita de simetria é pequena (como deveríamos esperar, de acordo com *PCAC*).

Figura 73 - Quebra explícita de simetria quiral



Fonte: Adaptado de Finelli (2011)

Adicionando ao potencial fica

$$V(\sigma + \vec{\pi}) = \frac{\lambda}{4}((\pi^2 + \sigma^2) - \nu_0^2)^2 - \epsilon\sigma \quad (462)$$

o termo f_π foi trocado pelo fator genérico ν_0 , pois queremos que o mínimo do potencial ainda seja o mesmo (f_π). E deve satisfazer $\nu_0 = f_\pi$ quando $\epsilon \rightarrow 0$.

Calculando o mínimo de forma a manter $\sigma_0 = f_\pi$ e considerando que $\epsilon^2 \rightarrow 0$ ²⁶ por ser muito pequeno, temos para ν_0

$$\nu_0 = f_\pi - \frac{\epsilon}{2\lambda f_\pi^2}. \quad (463)$$

Se observarmos a Figura 73, notamos que (463) está de acordo com essa pequena inclinação do potencial, logo ν_0 é o valor do mínimo no eixo σ , enquanto o mínimo do potencial permanece sendo f_π .

De posse desse novo potencial vamos novamente expandir o potencial em torno dos mesmos mínimos (π_0, σ_0) , como fizemos em (457), assim as novas massas proporcionais às segundas derivadas (que multiplicam os termos $\delta\pi^2$ e $\delta\sigma^2$) são

$$m_\sigma^2 = \left. \frac{\partial^2 V}{\partial \sigma^2} \right|_{\pi_0, \sigma_0} = 2\lambda\nu_0^2 = 2\lambda f_\pi^2 + \frac{\epsilon}{f_\pi}, \quad (464)$$

$$m_\pi^2 = \left. \frac{\partial^2 V}{\partial \vec{\pi}^2} \right|_{\pi_0, \sigma_0} = \frac{\epsilon}{f_\pi} \neq 0. \quad (465)$$

Constatamos que as massas ficaram maiores, a massa do pión como queríamos não é mais

²⁶ O detalhe aqui é que no potencial ν_0 está ao quadrado, logo isolando-o tivemos que completar quadrado, sobrando um termo proporcional à ϵ^2 .

nula, e daqui tiramos o valor do parâmetro de quebra

$$\epsilon = f_\pi m_\pi^2, \quad (466)$$

era de se esperar que este parâmetro fosse proporcional à massa do pión, afinal quando $\epsilon \rightarrow 0$ temos $m_\pi = 0$.

Como o termo $\sigma_0 = f_\pi$ continua o mesmo, a massa do núcleo continua a mesma (453). Porém a quebra explícita de simetria tem parte nessa massa, usando a relação (463) chegamos a

$$M_N = g_\pi \sigma_0 = g_\pi \left(\nu_0 + \frac{\epsilon}{2\lambda f_\pi^2} \right) \quad (467)$$

onde temos o termo *sigma-nucleon-pión*²⁷

$$\Sigma_{\pi N} = g_\pi \frac{\epsilon}{2\lambda f_\pi^2} \approx g_\pi f_\pi \frac{m_\pi^2}{m_\sigma^2}. \quad (468)$$

Esse termo é medido experimentalmente.

A.3.2 Modelo sigma não-linear

Nosso interesse é em um modelo que descreve a interação entre pión e o nucleon. Então queremos que o σ saia de cena, deixando a lagrangiana do modelo somente em termos do pión e do nucleon (WEINBERG, 1968).

Se considerarmos uma escala de energia bem abaixo da massa do σ , poderemos deixar o modelo em função do campo de pions, que têm massa menor.²⁸ Assim, consideramos a condição $m_\sigma \rightarrow \infty$, que significa de acordo com (459) fazer o parâmetro $\lambda \rightarrow \infty$ mantendo o mesmo mínimo do potencial. Mudando o parâmetro λ e também o potencial (454), de forma que ele fique infinito, isso implica que a forma do potencial ficou muito mais "profunda" com "paredes" em volta do mínimo (Figura 74).

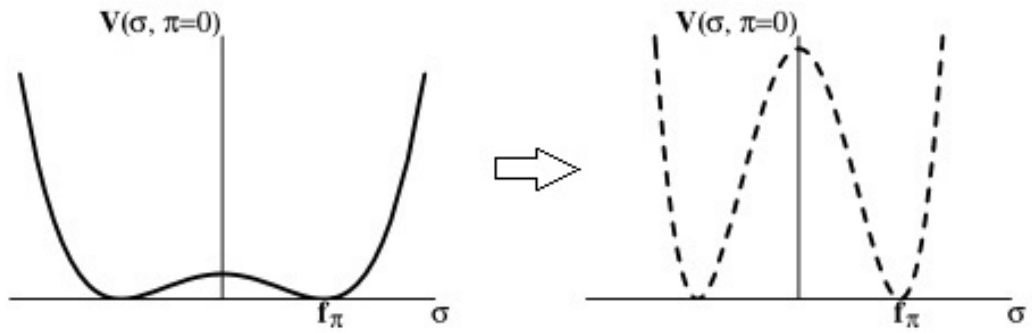
Isso implica que toda a dinâmica do modelo fica restrita aos pontos de mínimo, isto é, ao círculo com centro no eixo do potencial e raio f_π (Figura 75). Assim temos a condição que deve ser repetida nesse novo modelo

$$\sigma^2 + \vec{\pi}^2 = f_\pi^2. \quad (469)$$

²⁷ Tradução livre do nome em inglês *píon-nucleon sigma-term*.

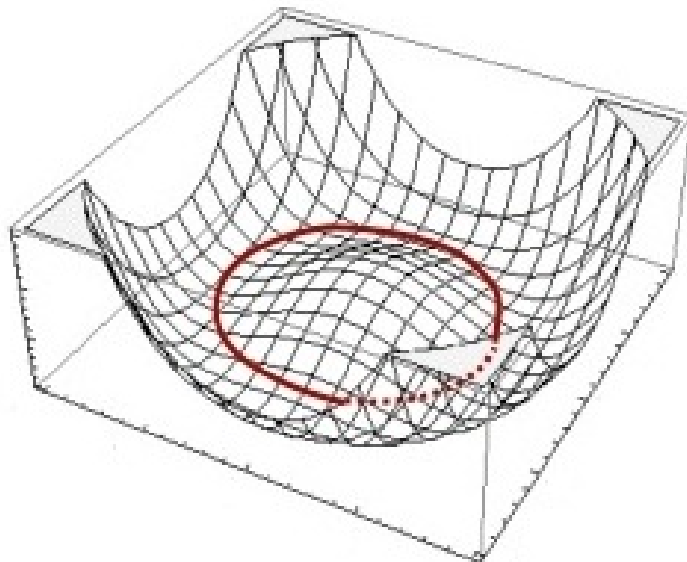
²⁸ Estamos novamente considerando o pión como um bóson Goldstone, isto é, massa zero.

Figura 74 - Potencial $\lambda \rightarrow \infty$



Fonte: Adaptado de Koch (1997)

Figura 75 - Dinâmica restrita ao círculo



Fonte: Finelli (2011)

Essa condição remove um grau de liberdade, agora temos somente a liberdade de rotação do píons (excitações). Podemos definir funções para σ e $\vec{\pi}$ que satisfaçam a relação (469) e dependam somente do angulo de rotação $\vec{\Phi}(x)$

$$\sigma(x) = f_\pi \cos\left(\frac{\Phi(x)}{f_\pi}\right) = f_\pi + \mathcal{O}(\Phi^2), \quad (470)$$

$$\vec{\pi}(x) = f_\pi \hat{\Phi} \sin\left(\frac{\Phi(x)}{f_\pi}\right) = \vec{\Phi}(x) + \mathcal{O}(\Phi^3). \quad (471)$$

onde $\Phi = |\vec{\Phi}| = \sqrt{\vec{\Phi}\vec{\Phi}}$ e $\hat{\Phi} = \vec{\Phi}/\Phi$. Fazendo uma expansão podemos identificar como sendo o campo de píon o ângulo de rotação.

Vamos definir a transformação unitária em termo do angulo $\vec{\Phi}$

$$\begin{aligned} U(x) &= e^{i\vec{\tau}\cdot\vec{\Phi}(x)/f_\pi} = \cos\left(\frac{\Phi(x)}{f_\pi}\right) + i\vec{\tau}\cdot\hat{\Phi} \sin\left(\frac{\Phi(x)}{f_\pi}\right) \\ &= \frac{1}{f_\pi}(\sigma + i\vec{\tau}\cdot\vec{\pi}), \end{aligned} \quad (472)$$

sendo U uma matriz 2×2 .

Tirando o traço²⁹ desta relação, temos

$$\frac{1}{2}Tr(U^\dagger U) = \frac{1}{f_\pi^2}(\sigma^2 + \vec{\pi}^2) = 1, \quad (473)$$

essa transformação é unitária e satisfaz a relação (469).

Vamos construir a partir de (472) os termos cinéticos dos campos píon e sigma. Fazendo suas derivadas temos

$$\partial_\mu U = \frac{1}{f_\pi}(\partial_\mu \sigma + i\vec{\tau}\cdot\partial_\mu \vec{\pi}), \quad (474)$$

$$\partial_\mu U^\dagger = \frac{1}{f_\pi}(\partial_\mu \sigma - i\vec{\tau}\cdot\partial_\mu \vec{\pi}). \quad (475)$$

Multiplicando essas derivadas e tirando o traço, chegamos a

$$\frac{1}{2}\partial_\mu \vec{\pi}\cdot\partial^\mu \vec{\pi} + \frac{1}{2}\partial_\mu \sigma\partial^\mu \sigma = \frac{f_\pi^2}{4}Tr(\partial_\mu U^\dagger\partial^\mu U) \quad (476)$$

²⁹ O traço é a soma da diagonal e é usada aqui para sair da forma matricial para a forma escalar.

Para o termo de interação (449) usamos (470) e (471), assim

$$\begin{aligned}
-g_\pi[(i\bar{\psi}_N\gamma_5\vec{\tau}\psi_N)\cdot\vec{\pi}+(\bar{\psi}_N\psi_N)\sigma] &= -g_\pi\bar{\psi}_N f_\pi \left[\cos\left(\frac{\Phi(x)}{f_\pi}\right) + i\gamma_5\vec{\tau}\cdot\hat{\Phi}\sin\left(\frac{\Phi(x)}{f_\pi}\right) \right] \psi_N \\
&= -g_\pi f_\pi \bar{\psi}_N \left(e^{i\gamma_5\frac{\vec{\tau}\cdot\vec{\Phi}(x)}{f_\pi}} \right) \psi_N \\
&= -g_\pi f_\pi \bar{\psi}_N \Lambda \psi_N,
\end{aligned} \tag{477}$$

sendo aqui definido

$$\Lambda \equiv e^{i\gamma_5\frac{\vec{\tau}\cdot\vec{\Phi}(x)}{2f_\pi}}. \tag{478}$$

Reescrevemos o campo do nucleon como

$$\Psi_N = \Lambda\psi_N, \tag{479}$$

$$\bar{\Psi}_N = \psi_N^\dagger\Lambda^\dagger\gamma^0 = \psi_N^\dagger\gamma^0\Lambda = \bar{\psi}_N\Lambda, \tag{480}$$

onde na última relação usamos $\{\gamma_0, \gamma_5\} = 0$. Então (477) fica em relação a estes campos ($g_a = 1$)

$$-g_\pi f_\pi \bar{\psi}_N \Lambda \psi_N = -g_\pi f_\pi \bar{\Psi}_N \Psi_N = -m_N \bar{\Psi}_N \Psi_N. \tag{481}$$

Desse modo, todo o termo de interação neste novo campo do nucleon se resume à massa do nucleon.

Vamos escrever o termo cinético do nucleon nesse novo campo. Sabendo que $\Lambda^\dagger\Lambda = \Lambda\Lambda^\dagger = 1$, fazemos

$$i\bar{\psi}_N\partial\psi_N = i\bar{\psi}_N\Lambda\Lambda^\dagger\partial\Lambda^\dagger\Lambda\psi_N = i\bar{\Psi}_N\Lambda^\dagger\partial\Lambda^\dagger\Psi_N. \tag{482}$$

Aqui usamos a relação $\{\gamma_\mu, \gamma_5\} = 0$, chegamos à

$$i\Lambda^\dagger\partial\Lambda^\dagger = i\gamma_\mu\Lambda\partial^\mu\Lambda^\dagger. \tag{483}$$

Vamos escrever Λ em função de um campo auxiliar ξ definido por

$$\xi = e^{i\frac{\vec{\tau}\cdot\vec{\Phi}(x)}{2f_\pi}}, \quad U(x) = \xi^2, \tag{484}$$

explicitamente temos

$$\xi = \cos\left(\frac{\Phi(x)}{2f_\pi}\right) + i\vec{\tau}\cdot\hat{\Phi}\sin\left(\frac{\Phi(x)}{2f_\pi}\right), \tag{485}$$

$$\xi^\dagger = \cos\left(\frac{\Phi(x)}{2f_\pi}\right) - i\vec{\tau}\cdot\hat{\Phi}\sin\left(\frac{\Phi(x)}{2f_\pi}\right). \tag{486}$$

Finalmente combinando linearmente o campo, encontramos

$$\Lambda = \frac{1}{2}(\xi + \xi^\dagger) + \frac{1}{2}\gamma_5(\xi - \xi^\dagger), \quad (487)$$

$$\Lambda^\dagger = \frac{1}{2}(\xi + \xi^\dagger) - \frac{1}{2}\gamma_5(\xi - \xi^\dagger). \quad (488)$$

Voltando a (482) passando por (483) e sabendo que $\Lambda(\Phi(x))$, chegamos a

$$i\bar{\Psi}_N\Lambda^\dagger\cancel{\partial}(\Lambda^\dagger\Psi_N) = \bar{\Psi}_N(i\cancel{\partial} + \gamma^\mu V_\mu + \gamma^\mu\gamma_5 A_\mu)\Psi_N, \quad (489)$$

onde temos a corrente vetor

$$V_\mu = \frac{i}{2}\left(\xi^\dagger\partial_\mu\xi + \xi\partial_\mu\xi^\dagger\right), \quad (490)$$

e a corrente axial-vetor

$$A_\mu = \frac{i}{2}\left(\xi^\dagger\partial_\mu\xi - \xi\partial_\mu\xi^\dagger\right). \quad (491)$$

Expandindo essas correntes e a relação (476) para pequena flutuações $\vec{\Phi}/f_\pi \ll 1$, temos ^{30 31}

$$V_\mu \approx -\frac{\vec{\tau} \cdot (\vec{\Phi} \times \partial_\mu \vec{\Phi})}{4f_\pi^2}, \quad (492)$$

$$A_\mu \approx -\frac{\vec{\tau} \cdot \partial_\mu \vec{\Phi}}{2f_\pi}, \quad (493)$$

$$\frac{f_\pi^2}{4}Tr(\partial_\mu U^\dagger \partial^\mu U) \approx \frac{1}{2}(\partial_\mu \vec{\Phi})^2. \quad (494)$$

Não precisamos de um potencial nesse modelo, uma vez que, toda a dinâmica ocorre no círculo da condição (469). Então, já temos todas as partes para escrever a lagrangiana

³⁰ Expandindo os campos:

$$\xi \approx 1 + i\frac{\vec{\tau} \cdot \vec{\Phi}}{2f_\pi},$$

$$\xi^\dagger \approx 1 - i\frac{\vec{\tau} \cdot \vec{\Phi}}{2f_\pi}.$$

³¹ Usamos as relações de comutação e anti-comutação:

$$[(\vec{a} \cdot \vec{\tau}), (\vec{b} \cdot \vec{\tau})] = 2i(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{\tau}; \quad \{(\vec{a} \cdot \vec{\tau}), (\vec{b} \cdot \vec{\tau})\} = 2(\vec{a} \cdot \vec{b}).$$

Figura 76 - Vértices de interação

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{4f_\pi^2}(\bar{\Psi}\gamma_\mu\vec{\tau}\Psi) \cdot (\vec{\Phi} \times (\partial^\mu\vec{\Phi})) & +\frac{1}{2f_\pi}(\bar{\Psi}\gamma_\mu\gamma_5\vec{\tau}\Psi)\partial^\mu\vec{\Phi} \\
\text{a)} & \quad \begin{array}{c} \overset{\pi}{\dashv} \quad \overset{\pi}{\dashv} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{N} \text{---} \text{N} \end{array} & \text{b)} \quad \begin{array}{c} \overset{\pi}{\dashv} \\ \diagdown \\ \text{N} \text{---} \text{N} \end{array}
\end{aligned}$$

Fonte: Finelli (2011)

sigma não-linear

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{SNL} = & \left[\bar{\Psi}_N(i\cancel{\partial} - m_N)\Psi_N \right]_{(1)} + \left[\frac{1}{2}(\partial_\mu\vec{\Phi})^2 \right]_{(2)} \\
& + \left[\frac{1}{2f_\pi}(\bar{\Psi}\gamma_\mu\gamma_5\vec{\tau}\Psi_N) \cdot \partial^\mu\vec{\Phi} \right]_{(3)} \\
& + \left[\frac{1}{4f_\pi^2}(\bar{\Psi}\gamma_\mu\vec{\tau}\Psi_N) \cdot (\vec{\Phi} \times \partial_\mu\vec{\Phi}) \right]_{(4)} \quad (495)
\end{aligned}$$

aqui temos:

- (1) → Termo cinético do nucleon;
- (2) → Termo cinético do pión;
- (3) → Termo de interação entre pión-nucleon, vértice do tipo πNN (Figura 76 (b));
- (4) → Termo de interação entre pión-nucleon, vértice do tipo $\pi N\pi N$ (Figura 76(a)).

Notamos que o campo σ de fato desapareceu, e os termos de interação dependem do momento do pión ($\partial_\mu\vec{\Phi}$) e descrevem dois tipos de vértices. Mais tipos de interação podem aparecer se considerarmos termos de ordens maiores na expansão do campo $\vec{\Phi}$. Ambos o modelos sigma linear e não-linear obtiveram resultados similares. Poderíamos também adicionar a massa do pión neste ultimo modelo, fazendo novamente uma quebra explícita de simetria.

A.3.3 Lagrangianas quirais

A.3.3.1 $\mathcal{L}_{\pi NN}$

Neste trabalho nosso interesse são as lagrangianas de interação, de onde iremos tirar os vértices para os diagrama de Feynman, assim no caso do modelo sigma não-

linear deduzimos a lagrangiana do vértice πNN (COLEMAN; WESS; ZUMINO, 1969; WEINBERG, 1979).

Fazendo as substituições (BANDO; KUGO; YAMAWAKI, 1988): $\Psi_N \rightarrow N$; $\vec{\Phi} \rightarrow \vec{\phi}$; $m_N \rightarrow M$; $g_\pi \rightarrow g$ e $f_\pi \rightarrow M/g$, temos do termo (3) de (495)

$$\mathcal{L}_{\pi NN} = \frac{g}{2M} (\bar{N} \gamma_\mu \gamma_5 \vec{\tau} N) \cdot \partial^\mu \vec{\phi}, \quad (496)$$

sendo aqui $\vec{\tau}$ uma matriz de isospin que combina um π e um N em um N , tal como $1 + 1/2 \rightarrow 1/2$.

A.3.4 $\mathcal{L}_{\pi\pi NN}$

O terceiro termo de (495) descreve a interação de dois nucleons com dois píons, conhecido também como termo de contato, dessa forma podemos escrever a lagrangiana

$$\mathcal{L}_{\pi\pi NN} = \frac{g^2}{4m_N^2} (\bar{N} \gamma_\mu \vec{\tau} N) \cdot (\vec{\phi} \times \partial_\mu \vec{\phi}), \quad (497)$$

aqui fizemos as substituição da mesma forma que no caso anterior.

A.3.4.1 $\mathcal{L}_{\pi N \Delta}$

Para interação com partícula com spin- $\frac{3}{2}$, vamos recorrer às equações de Rarita-Schwinger (LOVAS; SAILER; GREINER, 1998),

$$(\not{\partial} - m_\Delta) \psi^\mu = 0, \quad (498)$$

$$\gamma_\mu \psi^\mu = 0, \quad (499)$$

onde m_Δ é a massa do Δ a qual, representa nossa partícula de spin-3/2 e ψ^μ é o espinor-vetorial, que contem quatro espinores de índice μ .

Sabendo que partículas de spin- $\frac{3}{2}$ tem também projeções de spin- $\frac{1}{2}$ (HABER-ZETTL, 1998) e que lagrangiana de Rarita-Schwinger é invariante sob a transformação

$$\bar{\psi}_\mu \longrightarrow \bar{\psi}^\nu [g_{\mu\nu} + (Z + 1/2) \gamma_\mu \gamma_\nu], \quad (500)$$

onde $g_{\mu\nu}$ é o tensor métrico e Z um parâmetro a ser determinado associado à possibilidade de que Δ , fora da camada de massa, possuir spin- $\frac{1}{2}$, uma vez que esta projeção de spin não respeita as equação (499).

Sendo assim, podemos construir uma interação do tipo $\pi\Delta N$, respeitando a transformação (500) e o parâmetro Z (NATH; ETEMADI; KIMEL, 1971; OLSSON; TURNER; OSYPOWSKI, 1973), da seguinte forma

$$\mathcal{L}_{\pi N\Delta} = g_{\Delta} \left\{ \bar{\Delta}^{\mu} \left[g_{\mu\nu} - \left(Z + \frac{1}{2} \right) \gamma_{\mu} \gamma_{\nu} \right] \vec{M} N \right\} \cdot \partial^{\nu} \vec{\phi}, \quad (501)$$

onde g_{Δ} é a constante de acoplamento, $\bar{\Delta}^{\mu}$ é o campo da partícula de spin- $\frac{3}{2}$ e \vec{M} é a matriz de combinação de isospin do tipo $1 + 1/2 \rightarrow 3/2$, combinando um π e um N em um Δ . A matriz \vec{M} respeita a seguinte propriedade

$$M_b^{\dagger} M_a = \frac{2}{3} \delta_{ba} + \frac{i}{3} \epsilon_{bac} \tau_c. \quad (502)$$

A.3.5 Considerações finais

Convém lembrar que, o objetivo é utilizarmos as lagrangianas quirais para as interações entre káons e híperons, porém até aqui emergem do modelo somente píons, nucleons e méson- ρ através do dubleto de quarks u e d , ou seja do grupo $SU(2)$.

Podemos utilizar do mesmo argumento feito em (A.2.4.1) para as massa do u , d e do π , as quais são aproximadamente desprezadas quando comparadas com a escala de energias típicas das interações fortes ($1GeV$) (BERNARD; KAISER; MEISSNER, 1995), dando origem a uma simetria aproximadamente conservada. Portanto, se considerarmos a massa do quark estranho (s) de aproximadamente $\approx 100MeV$ (PARTICLE DATA GROUP (PDG); PATRIGNANI et al., 2016), podemos incluir em um modelo $SU(3)$ (STOKS; RIJKEN, 1997) os mésons estranhos K e \bar{K} (káons), como também os bárions estranhos e os híperons (LACROIX, 2010).

APÊNDICE B – Cálculo dos Diagramas de troca de dois mésons

Neste apêndice vamos calcular os diagramas de Feynman para a troca de dois mésons, considerando estados intermediários de bárions com spin-1/2 e spin-3/2. Tal consideração aumenta consideravelmente o número de diagramas.

A seguir vamos calcular os diagramas de loop trocando dois mésons do tipo *caixa* (\square), *cruzado* (\times), *triangulo* (Δ), *nabla* (∇) e do tipo *bolha* ($()$), considerando primeiro estados intermediários com spin-1/2 (o caso \square foi realizado como exemplo no capítulo 3) e em seguida com estados intermediários com spin-3/2.

O procedimento é o mesmo do feito para o tipo \square para spin-1/2 feito no capítulo 3. Mostraremos algumas passagens, maiores detalhes aumentariam consideravelmente o número de páginas. Usamos as relações estabelecidas nos Apêndices F, G. As integrais Π são determinadas no Apêndice C.

B.1 DIAGRAMA CRUZADO (\times) COM RESSONÂNCIAS DE SPIN-1/2

Para o diagrama do tipo cruzado (\times) com partículas intermediárias de spin-1/2, temos para o primeiro diagrama da Figura 77 no sentido \downarrow do méson (relativo ao primeiro vértice superior do diagrama **a**)) a conservação de momentos é dada por

$$\bar{p}_1 = p_1 - k = p'_1 - k', \quad (503)$$

$$\bar{p}_2 = p_2 - k' = p'_2 - k. \quad (504)$$

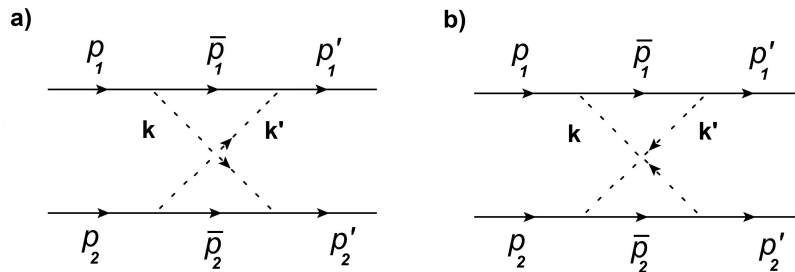


Figura 77 - Diagrama cruzado considerado

Suas amplitudes de transição são

$$T_{\mathbf{MB}}^{(1)} = \frac{g_1^2}{4m_1^2} \bar{u}(p'_1) \left[\not{k}' \gamma_5 G_b^\dagger \right] \left[\frac{\not{p}_1 - \not{k} + \bar{m}_1}{(p_1 - k)^2 - \bar{m}_1^2} \right] \left[G_a(-\not{k}) \gamma_5 \right] u(p_1),$$

$$T_{\mathbf{MB}}^{(2)} = \frac{g_2^2}{4m_2^2} \bar{u}(p'_2) \left[\not{k}' \gamma_5 G_a^\dagger \right] \left[\frac{\not{p}_2 - \not{k}' + \bar{m}_2}{(p_2 - k')^2 - \bar{m}_2^2} \right] \left[(-\not{k}') \gamma_5 G_b \right] u(p_2),$$

de forma mais compacta temos

$$T_{\mathbf{MB}}^{(1)\downarrow} = (\vec{G}_1)(A_1^\downarrow + B_1^\downarrow), \quad (505)$$

$$T_{\mathbf{MB}}^{(2)\downarrow} = (\vec{G}_2)(A_2^\downarrow + B_2^\downarrow), \quad (506)$$

assim para o primeiro diagrama

$$A_1^\downarrow = \frac{g_1^2(m_1 + \bar{m}_1)}{4m_1^2} \left[1 + \frac{\bar{m}_1^2 - m_1^2}{u_1 - \bar{m}_1^2} \right] I^{(1)}, \quad (507)$$

$$B_1^\downarrow = \frac{g_1^2}{8m_1^2} \left[1 + \frac{(\bar{m}_1 + m_1)^2}{u_1 - \bar{m}_1^2} \right] Q^{(1)}, \quad (508)$$

$$A_2^\downarrow = \frac{g_2^2(m_2 + \bar{m}_2)}{4m_2^2} \left[1 + \frac{\bar{m}_2^2 - m_2^2}{u_2 - \bar{m}_2^2} \right] I^{(2)}, \quad (509)$$

$$B_2^\downarrow = \frac{g_2^2}{8m_2^2} \left[1 + \frac{(\bar{m}_2 + m_2)^2}{u_2 - \bar{m}_2^2} \right] Q^{(2)}. \quad (510)$$

Para o segundo diagrama no sentido \uparrow do méson (diagrama **b**) as conservações de momentos são

$$\bar{p}_1 = p_1 + k = p'_1 + k', \quad (511)$$

$$\bar{p}_2 = p_2 + k' = p'_2 + k, \quad (512)$$

suas amplitudes são

$$T_{\mathbf{MB}}^{(1)} = \frac{g_3^2}{4m_1^2} \bar{u}(p'_1) \left[(-\not{k}') \gamma_5 G_b^\dagger \right] \left[\frac{\not{p}_1 + \not{k} + \bar{m}_3}{(p_1 + k)^2 - \bar{m}_3^2} \right] \left[G_a \not{k} \gamma_5 \right] u(p_1),$$

$$T_{\mathbf{MB}}^{(2)} = \frac{g_4^2}{4m_2^2} \bar{u}(p'_2) \left[(-\not{k}) \gamma_5 G_a^\dagger \right] \left[\frac{\not{p}_2 + \not{k}' + \bar{m}_4}{(p_2 + k')^2 - \bar{m}_4^2} \right] \left[\not{k}' \gamma_5 G_b \right] u(p_2),$$

de forma que

$$T_{\mathbf{MB}}^{(1)\uparrow} = (\vec{G}_1)(A_1^\uparrow + B_1^\uparrow), \quad (513)$$

$$T_{\mathbf{MB}}^{(2)\uparrow} = (\vec{G}_2)(A_2^\uparrow + B_2^\uparrow), \quad (514)$$

então

$$A_1^\uparrow = \frac{g_3^2(m_1 + \bar{m}_3)}{4m_1^2} \left[1 + \frac{\bar{m}_3^2 - m_1^2}{s_1 - \bar{m}_3^2} \right] I^{(1)}, \quad (515)$$

$$B_1^\uparrow = -\frac{g_3^2}{8m_1^2} \left[1 + \frac{(\bar{m}_3 + m_1)^2}{s_1 - \bar{m}_3^2} \right] \mathcal{Q}^{(1)}, \quad (516)$$

$$A_2^\uparrow = \frac{g_4^2(m_2 + \bar{m}_4)}{4m_2^2} \left[1 + \frac{\bar{m}_4^2 - m_2^2}{s_2 - \bar{m}_4^2} \right] I^{(2)}, \quad (517)$$

$$B_2^\uparrow = -\frac{g_4^2}{8m_2^2} \left[1 + \frac{(\bar{m}_4 + m_2)^2}{s_2 - \bar{m}_4^2} \right] \mathcal{Q}^{(2)}. \quad (518)$$

A amplitude final para os diagramas da Figura 77, será de forma geral

$$i\mathcal{T}_{MMBB}^\times = \frac{\vec{G}_1 \vec{G}_2}{2(4m_1 m_2)^2} \left\{ \aleph_{AA^\times} \bar{u}_1 u_1 \bar{u}_2 u_2 + \aleph_{AB^\times}^\nu \bar{u}_1 u_1 \bar{u}_2 \gamma_\nu u_2 \right. \\ \left. + \aleph_{BA^\times}^\mu \bar{u}_1 \gamma_\mu u_1 \bar{u}_2 u_2 + \aleph_{BB^\times}^{\mu\nu} \bar{u}_1 \gamma_\mu u_1 \bar{u}_2 \gamma_\nu u_2 \right\}, \quad (519)$$

em que as funções \aleph serão determinadas nas próximas seções.

B.1.1 \aleph_{AA^\times}

$$\aleph_{AA^\times} = g_1^2 g_2^2 (m_1 + \bar{m}_1)(m_2 + \bar{m}_2) \left[I_{cc} + (\bar{m}_1^2 - m_1^2) I_{u_1 c} + (\bar{m}_2^2 - m_2^2) I_{u_2 c} \right. \\ \left. + (\bar{m}_1^2 - m_1^2)(\bar{m}_2^2 - m_2^2) I_{u_1 u_2} \right] \\ + g_3^2 g_4^2 (m_1 + \bar{m}_3)(m_2 + \bar{m}_4) \left[I_{cc} + (\bar{m}_3^2 - m_1^2) I_{s_1 c} + (\bar{m}_4^2 - m_2^2) I_{s_2 c} \right. \\ \left. + (\bar{m}_3^2 - m_1^2)(\bar{m}_4^2 - m_2^2) I_{s_1 s_2} \right]. \quad (520)$$

Encontramos, de acordo com a redução de espinores (componentes C e $LS\pm$) as amplitudes $\mathcal{T}_{AA^\times} = \aleph_{AA^\times} \bar{u}_1 u_1 \bar{u}_2 u_2$,

$$\mathcal{T}_{AA^\times}^C = \frac{ig_1^2 g_2^2}{(4\pi)^2} (m_1 + \bar{m}_1)(m_2 + \bar{m}_2) \left[a \right] \left[\Pi_{cc}^{(000)} + (\bar{m}_1^2 - m_1^2) \Pi_{u_1 c}^{(000)} \right. \\ \left. + (\bar{m}_2^2 - m_2^2) \Pi_{u_2 c}^{(000)} + (\bar{m}_1^2 - m_1^2)(\bar{m}_2^2 - m_2^2) \Pi_{u_1 u_2}^{(000)} \right] \\ + \frac{ig_3^2 g_4^2}{(4\pi)^2} (m_1 + \bar{m}_3)(m_2 + \bar{m}_4) \left[a \right] \left[\Pi_{cc}^{(000)} + (\bar{m}_3^2 - m_1^2) \Pi_{s_1 c}^{(000)} \right. \\ \left. + (\bar{m}_4^2 - m_2^2) \Pi_{s_2 c}^{(000)} + (\bar{m}_3^2 - m_1^2)(\bar{m}_4^2 - m_2^2) \Pi_{s_1 s_2}^{(000)} \right], \quad (521)$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{AA^\times}^{LS+} &= \frac{ig_1^2 g_2^2}{(4\pi)^2} (m_1 + \bar{m}_1)(m_2 + \bar{m}_2) \left[b \right] \left[\Pi_{cc}^{(000)} + (\bar{m}_1^2 - m_1^2) \Pi_{u_1 c}^{(000)} \right. \\
&\quad \left. + (\bar{m}_2^2 - m_2^2) \Pi_{u_2 c}^{(000)} + (\bar{m}_1^2 - m_1^2)(\bar{m}_2^2 - m_2^2) \Pi_{u_1 u_2}^{(000)} \right] \\
&\quad + \frac{ig_3^2 g_4^2}{(4\pi)^2} (m_1 + \bar{m}_3)(m_2 + \bar{m}_4) \left[b \right] \left[\Pi_{cc}^{(000)} + (\bar{m}_3^2 - m_1^2) \Pi_{s_1 c}^{(000)} \right. \\
&\quad \left. + (\bar{m}_4^2 - m_2^2) \Pi_{s_2 c}^{(000)} + (\bar{m}_3^2 - m_1^2)(\bar{m}_4^2 - m_2^2) \Pi_{s_1 s_2}^{(000)} \right], \tag{522}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{AA^\times}^{LS-} &= \frac{ig_1^2 g_2^2}{(4\pi)^2} (m_1 + \bar{m}_1)(m_2 + \bar{m}_2) \left[c \right] \left[\Pi_{cc}^{(000)} + (\bar{m}_1^2 - m_1^2) \Pi_{u_1 c}^{(000)} \right. \\
&\quad \left. + (\bar{m}_2^2 - m_2^2) \Pi_{u_2 c}^{(000)} + (\bar{m}_1^2 - m_1^2)(\bar{m}_2^2 - m_2^2) \Pi_{u_1 u_2}^{(000)} \right] \\
&\quad + \frac{ig_3^2 g_4^2}{(4\pi)^2} (m_1 + \bar{m}_3)(m_2 + \bar{m}_4) \left[c \right] \left[\Pi_{cc}^{(000)} + (\bar{m}_3^2 - m_1^2) \Pi_{s_1 c}^{(000)} \right. \\
&\quad \left. + (\bar{m}_4^2 - m_2^2) \Pi_{s_2 c}^{(000)} + (\bar{m}_3^2 - m_1^2)(\bar{m}_4^2 - m_2^2) \Pi_{s_1 s_2}^{(000)} \right]. \tag{523}
\end{aligned}$$

B.1.2 $\aleph_{AB^\times}^\nu$

$$\begin{aligned}
\aleph_{AB^\times}^\nu &= g_1^2 g_2^2 \frac{(m_1 + \bar{m}_1)}{2} \left[I_{cc}^\nu + (\bar{m}_1^2 - m_1^2) I_{u_1 c}^\nu + (m_2 + \bar{m}_2)^2 I_{u_2 c}^\nu + (\bar{m}_1^2 - m_1^2)(m_2 + \bar{m}_2)^2 I_{u_1 u_2}^\nu \right] \\
&\quad - g_3^2 g_4^2 \frac{(m_1 + \bar{m}_3)}{2} \left[I_{cc}^\nu + (\bar{m}_3^2 - m_1^2) I_{s_1 c}^\nu + (m_2 + \bar{m}_4)^2 I_{s_2 c}^\nu + (\bar{m}_3^2 - m_1^2)(m_2 + \bar{m}_4)^2 I_{s_1 s_2}^\nu \right]. \tag{524}
\end{aligned}$$

Sendo as amplitudes \mathcal{T}_{AB^\times} ,

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{AB^\times}^C &= -\frac{ig_1^2 g_2^2}{2(4\pi)^2} (m_1 + \bar{m}_1) \bar{w}_2 \left[(\bar{m}_1^2 - m_1^2) \Pi_{u_1 c}^{(010)} + (\bar{m}_2^2 + m_2^2) \Pi_{u_2 c}^{(010)} \right. \\
&\quad \left. + (\bar{m}_1^2 - m_1^2)(m_2 + \bar{m}_2)^2 \Pi_{uu}^{(001)} \right] \\
&\quad - \frac{ig_3^2 g_4^2}{2(4\pi)^2} (m_1 + \bar{m}_3) \bar{w}_2 \left[(\bar{m}_3^2 - m_1^2) \Pi_{s_3 c}^{(010)} + (\bar{m}_4^2 + m_2^2) \Pi_{s_4 c}^{(010)} \right. \\
&\quad \left. + (\bar{m}_3^2 - m_1^2)(m_2 + \bar{m}_4)^2 \Pi_{ss}^{(001)} \right], \tag{525}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{AB^\times}^{LS+} &= -\frac{ig_1^2g_2^2}{2(4\pi)^2}(m_1 + \bar{m}_1) \left[(\bar{m}_1^2 - m_1^2)(w_{2+} + z_{2+})\Pi_{u_1c}^{(010)} + (\bar{m}_2^2 + m_2^2)(w_{2+} - z_{2+})\Pi_{u_2c}^{(010)} \right. \\
&\quad \left. + (\bar{m}_1^2 - m_1^2)(m_2 + \bar{m}_2)^2(z_{2+}\Pi_{uu}^{(010)} + w_{2+}\Pi_{uu}^{(001)}) \right] \\
&\quad -\frac{ig_3^2g_4^2}{2(4\pi)^2}(m_1 + \bar{m}_3) \left[(\bar{m}_3^2 - m_1^2)(w_{2+} + z_{2+})\Pi_{s_3c}^{(010)} + (\bar{m}_4^2 + m_2^2)(w_{2+} - z_{2+})\Pi_{s_4c}^{(010)} \right. \\
&\quad \left. + (\bar{m}_3^2 - m_1^2)(m_2 + \bar{m}_4)^2(z_{2+}\Pi_{ss}^{(010)} + w_{2+}\Pi_{ss}^{(001)}) \right], \tag{526}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{AB^\times}^{LS-} &= -\frac{ig_1^2g_2^2}{2(4\pi)^2}(m_1 + \bar{m}_1) \left[(\bar{m}_1^2 - m_1^2)(w_{2-} + z_{2-})\Pi_{u_1c}^{(010)} + (\bar{m}_2^2 + m_2^2)(w_{2-} - z_{2-})\Pi_{u_2c}^{(010)} \right. \\
&\quad \left. + (\bar{m}_1^2 - m_1^2)(m_2 + \bar{m}_2)^2(z_{2-}\Pi_{uu}^{(010)} + w_{2-}\Pi_{uu}^{(001)}) \right] \\
&\quad -\frac{ig_3^2g_4^2}{2(4\pi)^2}(m_1 + \bar{m}_3) \left[(\bar{m}_3^2 - m_1^2)(w_{2-} + z_{2-})\Pi_{s_3c}^{(010)} + (\bar{m}_4^2 + m_2^2)(w_{2-} - z_{2-})\Pi_{s_4c}^{(010)} \right. \\
&\quad \left. + (\bar{m}_3^2 - m_1^2)(m_2 + \bar{m}_4)^2(z_{2-}\Pi_{ss}^{(010)} + w_{2-}\Pi_{ss}^{(001)}) \right]. \tag{527}
\end{aligned}$$

B.1.3 $\aleph_{BA^\times}^\mu$

$$\begin{aligned}
\aleph_{BA^\times}^\mu &= g_1^2g_2^2\frac{(m_2 + \bar{m}_2)}{2} \left[I_{cc}^\mu + (\bar{m}_1 + m_1)^2I_{u_1c}^\mu + (\bar{m}_2^2 - m_2^2)I_{u_2c}^\mu + (m_1 + \bar{m}_1)^2(\bar{m}_2^2 - m_2^2)I_{u_1u_2}^\mu \right] \\
&\quad - g_3^2g_4^2\frac{(m_2 + \bar{m}_4)}{2} \left[I_{cc}^\mu + (\bar{m}_3 + m_1)^2I_{s_3c}^\mu + (\bar{m}_4^2 - m_2^2)I_{s_4c}^\mu + (m_1 + \bar{m}_3)^2(\bar{m}_4^2 - m_2^2)I_{s_3s_4}^\mu \right]. \tag{528}
\end{aligned}$$

As amplitudes \mathcal{T}_{BA^\times}

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{BA^\times}^C &= \frac{-ig_1^2g_2^2}{2(4\pi)^2}(m_2 + \bar{m}_2) \left\{ (m_1 + \bar{m}_1)^2(\bar{w}_1 + \bar{z}_1)\Pi_{u_1c}^{(010)} + (\bar{m}_2^2 - m_2^2)(\bar{w}_1 - \bar{z}_1)\Pi_{u_2c}^{(010)} \right. \\
&\quad \left. + (m_1 + \bar{m}_1)^2(\bar{m}_2^2 - m_2^2)[\bar{w}_1\Pi_{u_1u_2}^{(001)} + \bar{z}_1\Pi_{u_1u_2}^{(010)}] \right\} \\
&\quad + \frac{-ig_3^2g_4^2}{2(4\pi)^2}(m_2 + \bar{m}_4) \left\{ (m_1 + \bar{m}_3)^2(\bar{w}_1 + \bar{z}_1)\Pi_{s_3c}^{(010)} + (\bar{m}_4^2 - m_2^2)(\bar{w}_1 - \bar{z}_1)\Pi_{s_4c}^{(010)} \right. \\
&\quad \left. + (m_1 + \bar{m}_3)^2(\bar{m}_4^2 - m_2^2)[\bar{w}_1\Pi_{s_3s_4}^{(001)} + \bar{z}_1\Pi_{s_3s_4}^{(010)}] \right\}, \tag{529}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{BA^\times}^{LS+} &= \frac{-ig_1^2 g_2^2}{2(4\pi)^2} (m_2 + \bar{m}_2) \left\{ (m_1 + \bar{m}_1)^2 (w_{1+} + z_{1+}) \Pi_{u_1 c}^{(010)} + (\bar{m}_2^2 - m_2^2) (w_{1+} - z_{1+}) \Pi_{u_2 c}^{(010)} \right. \\
&\quad \left. + (m_1 + \bar{m}_1)^2 (\bar{m}_2^2 - m_2^2) [w_{1+} \Pi_{u_1 u_2}^{(001)} + z_{1+} \Pi_{u_1 u_2}^{(010)}] \right\} \\
&\quad + \frac{-ig_3^2 g_4^2}{2(4\pi)^2} (m_2 + \bar{m}_4) \left\{ (m_1 + \bar{m}_3)^2 (w_{1+} + z_{1+}) \Pi_{s_3 c}^{(010)} + (\bar{m}_4^2 - m_2^2) (w_{1+} - z_{1+}) \Pi_{s_4 c}^{(010)} \right. \\
&\quad \left. + (m_1 + \bar{m}_3)^2 (\bar{m}_4^2 - m_2^2) [w_{1+} \Pi_{s_3 s_4}^{(001)} + z_{1+} \Pi_{s_3 s_4}^{(010)}] \right\}, \tag{530}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{BA^\times}^{LS-} &= \frac{-ig_1^2 g_2^2}{2(4\pi)^2} (m_2 + \bar{m}_2) \left\{ (m_1 + \bar{m}_1)^2 (w_{1-} + z_{1-}) \Pi_{u_1 c}^{(010)} + (\bar{m}_2^2 - m_2^2) (w_{1-} - z_{1-}) \Pi_{u_2 c}^{(010)} \right. \\
&\quad \left. + (m_1 + \bar{m}_1)^2 (\bar{m}_2^2 - m_2^2) [w_{1-} \Pi_{u_1 u_2}^{(001)} + z_{1-} \Pi_{u_1 u_2}^{(010)}] \right\} \\
&\quad + \frac{-ig_3^2 g_4^2}{2(4\pi)^2} (m_2 + \bar{m}_4) \left\{ (m_1 + \bar{m}_3)^2 (w_{1-} + z_{1-}) \Pi_{s_3 c}^{(010)} + (\bar{m}_4^2 - m_2^2) (w_{1-} - z_{1-}) \Pi_{s_4 c}^{(010)} \right. \\
&\quad \left. + (m_1 + \bar{m}_3)^2 (\bar{m}_4^2 - m_2^2) [w_{1-} \Pi_{s_3 s_4}^{(001)} + z_{1-} \Pi_{s_3 s_4}^{(010)}] \right\}. \tag{531}
\end{aligned}$$

B.1.4 $\aleph_{BB^\times}^{\mu\nu}$

$$\begin{aligned}
\aleph_{BB^\times}^{\mu\nu} &= \frac{g_1^2 g_2^2}{4} \left[I_{cc}^{\mu\nu} + (\bar{m}_1 + m_1)^2 I_{u_1 c}^{\mu\nu} + (m_2 + \bar{m}_2)^2 I_{u_2 c}^{\mu\nu} + (m_1 + \bar{m}_1)^2 (m_2 + \bar{m}_2)^2 I_{u_1 u_2}^{\mu\nu} \right] \\
&\quad + \frac{g_3^2 g_4^2}{4} \left[I_{cc}^{\mu\nu} + (\bar{m}_3 + m_1)^2 I_{s_1 c}^{\mu\nu} + (m_2 + \bar{m}_4)^2 I_{s_2 c}^{\mu\nu} + (m_1 + \bar{m}_3)^2 (m_2 + \bar{m}_4)^2 I_{s_1 s_2}^{\mu\nu} \right]. \tag{532}
\end{aligned}$$

As amplitudes \mathcal{T}_{BB^\times} de acordo com a redução de espinores (componetes C , $LS\pm$, SS e T), são

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{BB^\times}^C &= \frac{ig_1^2 g_2^2}{8(4\pi)^2} \left\{ \bar{g} \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + (m_1 + \bar{m}_1)^2 [\bar{g} \bar{\Pi}_{u_1 c}^{(000)} + (w\bar{w} + z\bar{z} + \bar{w}z + z\bar{w}) \Pi_{u_1 c}^{(020)}] \right. \\
&\quad \left. + (m_2 + \bar{m}_2)^2 [\bar{g} \bar{\Pi}_{u_2 c}^{(000)} + (w\bar{w} + z\bar{z} - \bar{w}z - z\bar{w}) \Pi_{u_2 c}^{(020)}] \right. \\
&\quad \left. + 2(m_1 + \bar{m}_1)^2 (m_2 + \bar{m}_2)^2 [\bar{g} \bar{\Pi}_{u_1 u_2}^{(000)} + w\bar{w} \Pi_{u_1 u_2}^{(002)} + z\bar{z} \Pi_{u_1 u_2}^{(020)} + (\bar{w}z + z\bar{w}) \Pi_{u_1 u_2}^{(011)}] \right\} \\
&\quad + \frac{ig_3^2 g_4^2}{8(4\pi)^2} 2 \left\{ \bar{g} \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + (m_1 + \bar{m}_3)^2 [\bar{g} \bar{\Pi}_{s_3 c}^{(000)} + (w\bar{w} + z\bar{z} + \bar{w}z + z\bar{w}) \Pi_{s_3 c}^{(020)}] \right. \\
&\quad \left. + (m_2 + \bar{m}_4)^2 [\bar{g} \bar{\Pi}_{s_4 c}^{(000)} + (w\bar{w} + z\bar{z} - \bar{w}z - z\bar{w}) \Pi_{s_4 c}^{(020)}] \right. \\
&\quad \left. + 2(m_1 + \bar{m}_3)^2 (m_2 + \bar{m}_4)^2 [\bar{g} \bar{\Pi}_{s_3 s_4}^{(000)} + w\bar{w} \Pi_{s_3 s_4}^{(002)} + z\bar{z} \Pi_{s_3 s_4}^{(020)} + (\bar{w}z + z\bar{w}) \Pi_{s_3 s_4}^{(011)}] \right\}, \tag{533}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{BB^\times}^{LS+} = & \frac{ig_1^2 g_2^2}{8(4\pi)^2} \left\{ g_+ \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + (m_1 + \bar{m}_1)^2 [g_+ \bar{\Pi}_{u_1 c}^{(000)} + (w w_+ + z z_+ + w z_+ + z w_+) \Pi_{u_1 c}^{(020)}] \right. \\
& + (m_2 + \bar{m}_2)^2 [g_+ \bar{\Pi}_{u_2 c}^{(000)} + (w w_+ + z z_+ - w z_+ - z w_+) \Pi_{u_2 c}^{(020)}] \\
& + 2(m_1 + \bar{m}_1)^2 (m_2 + \bar{m}_2)^2 [g_+ \bar{\Pi}_{u_1 u_2}^{(000)} + w w_+ \Pi_{u_1 u_2}^{(002)} + z z_+ \Pi_{u_1 u_2}^{(020)} + (w z_+ + z w_+) \Pi_{u_1 u_2}^{(011)}] \left. \right\} \\
& + \frac{ig_3^2 g_4^2}{8(4\pi)^2} \left\{ g_+ \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + (m_1 + \bar{m}_3)^2 [g_+ \bar{\Pi}_{s_3 c}^{(000)} + (w w_+ + z z_+ + w z_+ + z w_+) \Pi_{s_3 c}^{(020)}] \right. \\
& + (m_2 + \bar{m}_4)^2 [g_+ \bar{\Pi}_{s_4 c}^{(000)} + (w w_+ + z z_+ - w z_+ - z w_+) \Pi_{s_4 c}^{(020)}] \\
& + 2(m_1 + \bar{m}_3)^2 (m_2 + \bar{m}_4)^2 [g_+ \bar{\Pi}_{s_3 s_4}^{(000)} + w w_+ \Pi_{s_3 s_4}^{(002)} + z z_+ \Pi_{s_3 s_4}^{(020)} + (w z_+ + z w_+) \Pi_{s_3 s_4}^{(011)}] \left. \right\}, \tag{534}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{BB^\times}^{LS-} = & \frac{ig_1^2 g_2^2}{8(4\pi)^2} \left\{ g_- \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + (m_1 + \bar{m}_1)^2 [g_- \bar{\Pi}_{u_1 c}^{(000)} + (w w_- + z z_- + w z_- + z w_-) \Pi_{u_1 c}^{(020)}] \right. \\
& + (m_2 + \bar{m}_2)^2 [g_- \bar{\Pi}_{u_2 c}^{(000)} + (w w_- + z z_- - w z_- - z w_-) \Pi_{u_2 c}^{(020)}] \\
& + 2(m_1 + \bar{m}_1)^2 (m_2 + \bar{m}_2)^2 [g_- \bar{\Pi}_{u_1 u_2}^{(000)} + w w_- \Pi_{u_1 u_2}^{(002)} + z z_- \Pi_{u_1 u_2}^{(020)} + (w z_- + z w_-) \Pi_{u_1 u_2}^{(011)}] \left. \right\} \\
& + \frac{ig_3^2 g_4^2}{8(4\pi)^2} \left\{ g_- \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + (m_1 + \bar{m}_3)^2 [g_- \bar{\Pi}_{s_3 c}^{(000)} + (w w_- + z z_- + w z_- + z w_-) \Pi_{s_3 c}^{(020)}] \right. \\
& + (m_2 + \bar{m}_4)^2 [g_- \bar{\Pi}_{s_4 c}^{(000)} + (w w_- + z z_- - w z_- - z w_-) \Pi_{s_4 c}^{(020)}] \\
& + 2(m_1 + \bar{m}_3)^2 (m_2 + \bar{m}_4)^2 [g_- \bar{\Pi}_{s_3 s_4}^{(000)} + w w_- \Pi_{s_3 s_4}^{(002)} + z z_- \Pi_{s_3 s_4}^{(020)} + (w z_- + z w_-) \Pi_{s_3 s_4}^{(011)}] \left. \right\}, \tag{535}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{BB^\times}^{SS} = & -\frac{ig_1^2 g_2^2}{12(4\pi)^2} \left[\bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + (m_1 + \bar{m}_1)^2 \bar{\Pi}_{u_1 c}^{(000)} + (m_2 + \bar{m}_2)^2 \bar{\Pi}_{u_2 c}^{(000)} \right. \\
& \left. + 2(m_1 + \bar{m}_1)^2 (m_2 + \bar{m}_2)^2 \bar{\Pi}_{u_1 u_2}^{(000)} \right] \\
& -\frac{ig_3^2 g_4^2}{12(4\pi)^2} \left[\bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + (m_1 + \bar{m}_3)^2 \bar{\Pi}_{s_3 c}^{(000)} + (m_2 + \bar{m}_4)^2 \bar{\Pi}_{s_4 c}^{(000)} \right. \\
& \left. + 2(m_1 + \bar{m}_3)^2 (m_2 + \bar{m}_4)^2 \bar{\Pi}_{s_3 s_4}^{(000)} \right], \tag{536}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{BB^\times}^T = & -\frac{ig_1^2 g_2^2}{24(4\pi)^2} \left[\bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + (m_1 + \bar{m}_1)^2 \bar{\Pi}_{u_1 c}^{(000)} + (m_2 + \bar{m}_2)^2 \bar{\Pi}_{u_2 c}^{(000)} \right. \\
& \left. + 2(m_1 + \bar{m}_1)^2 (m_2 + \bar{m}_2)^2 \bar{\Pi}_{u_1 u_2}^{(000)} \right] \\
& -\frac{ig_3^2 g_4^2}{24(4\pi)^2} \left[\bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + (m_1 + \bar{m}_3)^2 \bar{\Pi}_{s_3 c}^{(000)} + (m_2 + \bar{m}_4)^2 \bar{\Pi}_{s_4 c}^{(000)} \right. \\
& \left. + 2(m_1 + \bar{m}_3)^2 (m_2 + \bar{m}_4)^2 \bar{\Pi}_{s_3 s_4}^{(000)} \right]. \tag{537}
\end{aligned}$$

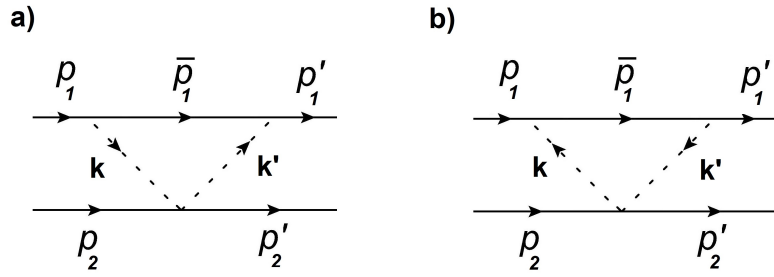


Figura 78 - Diagrama do tipo nabla

B.2 DIAGRAMA NABLA (∇)

Para o caso do diagrama nabla (∇) com partícula intermediária de spin-1/2, vamos considerar que os mésons trocados serão somente píons, isso se deve aos vértices de contato que por sua vez dependem dos três estados de isospin do pión.

Os momentos conservados para os sentidos \downarrow e \uparrow são respectivamente

$$\bar{p}_1 = p_1 - k = p'_1 - k'; \quad (538)$$

$$\bar{p}_1 = p_1 + k = p'_1 + k'. \quad (539)$$

As amplitudes de transição para \downarrow são

$$iT_{\pi B}^{(1)\downarrow} = \frac{g_1^2}{4m_1^2} \bar{u}(p'_1) \left[\not{k}' \gamma_5 G_b^\dagger \right] \left[i \frac{\not{p}_1 - \not{k} + \bar{m}_1}{(p_1 - k)^2 - \bar{m}_1^2} \right] \left[G_a(-\not{k}) \gamma_5 \right] u(p_1),$$

$$iT_{\pi\pi BB}^{(2)\downarrow} = \bar{u}(p'_2) \frac{g_2^2}{4m_2^2} \gamma^\mu \left[\epsilon_{abc} k_\mu + \epsilon_{bac} (-k'_\mu) \right] \tau^c u(p_2).$$

Assim

$$iT_{\pi B}^{(1)\downarrow} = (\vec{G}_1)(A_1 + B_1)^\downarrow, \quad (540)$$

$$iT_{\pi\pi BB}^{(2)\downarrow} = (\vec{G}_2)(C_2)^\downarrow, \quad (541)$$

em que $\vec{G}_2 = \epsilon_{bac} \tau^c$, a , b , e c são os estados isospin dos píons. G_1 depende dos tipos de bárions e ressonâncias referentes à "linha 1" do diagrama.

As amplitudes A , B e C são

$$A_1^\downarrow = \frac{g_1^2(m_1 + \bar{m}_1)}{4m_1^2} \left[1 + \frac{\bar{m}_1^2 - m_1^2}{u_1 - \bar{m}_1^2} \right] I^{(1)}, \quad (542)$$

$$B_1^\downarrow = \frac{g_1^2}{8m_1^2} \left[1 + \frac{(\bar{m}_1 + m_1)^2}{u_1 - \bar{m}_1^2} \right] Q^{(1)}, \quad (543)$$

$$C_2^\downarrow = -\frac{g_2^2}{2m_2^2} Q^{(2)}. \quad (544)$$

No outro sentido do méson \uparrow , temos

$$iT_{\pi B}^{(1)\uparrow} = \frac{g_3^2}{4m_1^2} \bar{u}(p_1) \left[(-k') \gamma_5 G_b^\dagger \right] \left[i \frac{\not{p}_1 + \not{k} + \bar{m}_3}{(p_1 + k)^2 - \bar{m}_3^2} \right] \left[G_a k \gamma_5 \right] u(p_1),$$

$$iT_{\pi\pi BB}^{(2)\uparrow} = \bar{u}(p_2) \frac{g_4^2}{4m_2^2} \gamma^\mu \left[\epsilon_{abc}(-k_\mu) + \epsilon_{bac}k'_\mu \right] \tau^c u(p_2),$$

e

$$iT_{\pi B}^{(1)\uparrow} = (\vec{G}_1)(A_1 + B_1)^\dagger, \quad (545)$$

$$iT_{\pi\pi BB}^{(2)\uparrow} = (\vec{G}_2)(C_2)^\dagger, \quad (546)$$

sendo

$$A_1^\dagger = \frac{g_3^2(m_1 + \bar{m}_3)}{4m_1^2} \left[1 + \frac{\bar{m}_3^2 - m_1^2}{s_1 - \bar{m}_3^2} \right] I^{(1)}, \quad (547)$$

$$B_1^\dagger = -\frac{g_3^2}{8m_1^2} \left[1 + \frac{(\bar{m}_3 + m_1)^2}{s_1 - \bar{m}_3^2} \right] \mathcal{Q}^{(1)}, \quad (548)$$

$$C_2^\dagger = \frac{g_4^2}{2m_2^2} \mathcal{Q}^{(2)}. \quad (549)$$

A amplitude resultante final do diagramas da Figura 78 será

$$iT_{\pi\pi BB}^\nabla = \frac{\vec{G}_1 \vec{G}_2}{2(8)(m_1 m_2)^2} \left\{ \aleph_{AC}^\nu \bar{u}_1 u_1 \bar{u}_2 \gamma_\nu u_2 + \aleph_{BC}^{\mu\nu} \bar{u}_1 \gamma_\mu u_1 \bar{u}_2 \gamma_\nu u_2 \right\}. \quad (550)$$

B.2.1 \aleph_{AC}^ν

$$\aleph_{AC}^\nu = -g_1^2 g_2^2 (m_1 + \bar{m}_1) \left[I_{cc}^\nu + (\bar{m}_1^2 - m_1^2) I_{u_1 c}^\nu \right] + g_3^2 g_4^2 (m_1 + \bar{m}_3) \left[I_{cc}^\nu + (\bar{m}_3^2 - m_1^2) I_{s_3 c}^\nu \right]. \quad (551)$$

As amplitudes \mathcal{T}_{AC}^∇

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{AC}^C &= \frac{ig_1^2 g_2^2}{(4\pi)^2} (m_1 + \bar{m}_1) (\bar{m}_1^2 - m_1^2) (\bar{w}_2 + \bar{z}_2) \Pi_{u_1 c}^{(010)} \\ &\quad + \frac{ig_3^2 g_4^2}{(4\pi)^2} (m_1 + \bar{m}_3) (\bar{m}_3^2 - m_1^2) (\bar{w}_2 + \bar{z}_2) \Pi_{s_3 c}^{(010)}, \end{aligned} \quad (552)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{AC}^{LS+} &= \frac{ig_1^2 g_2^2}{(4\pi)^2} (m_1 + \bar{m}_1) (\bar{m}_1^2 - m_1^2) (w_{2+} + z_{2+}) \Pi_{u_1 c}^{(010)} \\ &\quad + \frac{ig_3^2 g_4^2}{(4\pi)^2} (m_1 + \bar{m}_3) (\bar{m}_3^2 - m_1^2) (w_{2+} + z_{2+}) \Pi_{s_3 c}^{(010)}, \end{aligned} \quad (553)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{AC^\nabla}^{LS-} &= \frac{ig_1^2 g_2^2}{(4\pi)^2} (m_1 + \bar{m}_1)(\bar{m}_1^2 - m_1^2)(w_{2-} + z_{2-})\Pi_{u_1c}^{(010)} \\ &\quad + \frac{ig_3^2 g_4^2}{(4\pi)^2} (m_1 + \bar{m}_3)(\bar{m}_3^2 - m_1^2)(w_{2-} + z_{2-})\Pi_{s_3c}^{(010)} .\end{aligned}\quad (554)$$

B.2.2 $\mathcal{N}_{BC^\nabla}^{\mu\nu}$

$$\mathcal{N}_{BC^\nabla}^{\mu\nu} = \frac{-g_1^2 g_2^2}{2} \left[I_{cc}^{\mu\nu} + (\bar{m}_1 + m_1)^2 I_{u_1c}^{\mu\nu} \right] - \frac{g_3^2 g_4^2}{2} \left[I_{cc}^{\mu\nu} + (\bar{m}_3 + m_1)^2 I_{s_3c}^{\mu\nu} \right]. \quad (555)$$

Então as amplitudes \mathcal{T}_{BC^∇} são,

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{BC^\nabla}^C &= \frac{-ig_1^2 g_2^2}{4(4\pi)^2} \left\{ \bar{g}\bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + (m_1 + \bar{m}_1)^2 [\bar{g}\bar{\Pi}_{u_1c}^{(000)} + (w\bar{w} + z\bar{z} + w\bar{z} + z\bar{w})\Pi_{u_1c}^{(020)}] \right\} \\ &\quad - \frac{ig_3^2 g_4^2}{4(4\pi)^2} \left\{ \bar{g}\bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + (m_1 + \bar{m}_3)^2 [\bar{g}\bar{\Pi}_{s_3c}^{(000)} + (w\bar{w} + z\bar{z} + w\bar{z} + z\bar{w})\Pi_{s_3c}^{(020)}] \right\},\end{aligned}\quad (556)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{BC^\nabla}^{LS+} &= \frac{-ig_1^2 g_2^2}{4(4\pi)^2} \left\{ g_+\bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + (m_1 + \bar{m}_1)^2 [g_+\bar{\Pi}_{u_1c}^{(000)} + (ww_+ + zz_+ + wz_+ + zw_+)\Pi_{u_1c}^{(020)}] \right\} \\ &\quad - \frac{ig_3^2 g_4^2}{4(4\pi)^2} \left\{ g_+\bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + (m_1 + \bar{m}_3)^2 [g_+\bar{\Pi}_{s_3c}^{(000)} + (ww_+ + zz_+ + wz_+ + zw_+)\Pi_{s_3c}^{(020)}] \right\},\end{aligned}\quad (557)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{BC^\nabla}^{LS-} &= \frac{-ig_1^2 g_2^2}{4(4\pi)^2} \left\{ g_-\bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + (m_1 + \bar{m}_1)^2 [g_-\bar{\Pi}_{u_1c}^{(000)} + (ww_- + zz_- + wz_- + zw_-)\Pi_{u_1c}^{(020)}] \right\} \\ &\quad - \frac{ig_3^2 g_4^2}{4(4\pi)^2} \left\{ g_-\bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + (m_1 + \bar{m}_3)^2 [g_-\bar{\Pi}_{s_3c}^{(000)} + (ww_- + zz_- + wz_- + zw_-)\Pi_{s_3c}^{(020)}] \right\},\end{aligned}\quad (558)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{BC^\nabla}^{SS} &= \frac{ig_1^2 g_2^2}{4(4\pi)^2} \frac{2}{3} \left[\bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + (m_1 + \bar{m}_1)^2 \bar{\Pi}_{u_1c}^{(000)} \right] \\ &\quad + \frac{ig_3^2 g_4^2}{4(4\pi)^2} \frac{2}{3} \left[\bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + (m_1 + \bar{m}_3)^2 \bar{\Pi}_{s_3c}^{(000)} \right],\end{aligned}\quad (559)$$

$$\begin{aligned}V_{BC^\nabla}^T &= \frac{ig_1^2 g_2^2}{4(4\pi)^2} \frac{1}{3} \left[\bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + (m_1 + \bar{m}_1)^2 \bar{\Pi}_{u_1c}^{(000)} \right] \\ &\quad + \frac{ig_3^2 g_4^2}{4(4\pi)^2} \frac{1}{3} \left[\bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + (m_1 + \bar{m}_3)^2 \bar{\Pi}_{s_3c}^{(000)} \right].\end{aligned}\quad (560)$$

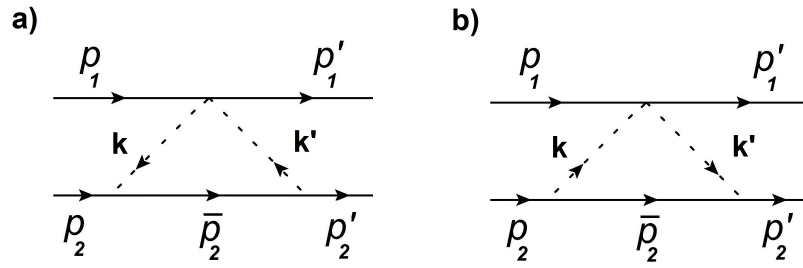


Figura 79 - Diagrama do tipo triângulo

B.2.3 Diagrama triângulo (Δ)

O diagrama do tipo triângulo (Δ) com partícula intermediária de spin-1/2, tem analogamente o mesmo procedimento feito para o diagrama ∇ , com os momentos da Figura 79 dados por

$$\bar{p}_2 = p_2 - k' = p_2' - k, \quad (561)$$

$$\bar{p}_2 = p_2 + k' = p_2' + k. \quad (562)$$

Assim, temos para o diagrama **b)** que

$$iT_{\pi\pi\mathcal{B}\mathcal{B}}^{(1)\uparrow} = (\vec{G}_1)(C_1)^\uparrow, \quad (563)$$

$$iT_{\pi\mathcal{B}}^{(2)\uparrow} = (\vec{G}_2)(A_2 + B_2)^\uparrow, \quad (564)$$

em que $\vec{G}_1 = \epsilon_{abc}\tau^c$ e as amplitudes

$$C_1^\uparrow = \frac{g_1^2}{2m_1^2} \mathcal{Q}^{(1)}, \quad (565)$$

$$A_2^\uparrow = \frac{g_2^2(m_2 + \bar{m}_2)}{4m_2^2} \left[1 + \frac{\bar{m}_2^2 - m_2^2}{u_2 - \bar{m}_2^2} \right] I^{(2)}, \quad (566)$$

$$B_2^\uparrow = \frac{g_2^2}{8m_2^2} \left[1 + \frac{(\bar{m}_2 + m_2)^2}{u_2 - \bar{m}_2^2} \right] \mathcal{Q}^{(2)}. \quad (567)$$

Para o outro caso, o diagrama **a)**, encontramos

$$iT_{\pi\pi\mathcal{B}\mathcal{B}}^{(1)\downarrow} = (\vec{G}_1)(C_1)^\downarrow, \quad (568)$$

$$iT_{\pi\mathcal{B}}^{(2)\downarrow} = (\vec{G}_2)(A_2 + B_2)^\downarrow, \quad (569)$$

com

$$C_1^\downarrow = -\frac{g_3^2}{2m_1^2} \mathcal{Q}^{(1)}, \quad (570)$$

$$A_2^\downarrow = \frac{g_4^2(m_2 + \bar{m}_4)}{4m_2^2} \left[1 + \frac{\bar{m}_4^2 - m_2^2}{s_2 - \bar{m}_4^2} \right] I^{(2)}, \quad (571)$$

$$B_2^\downarrow = \frac{-g_4^2}{8m_2^2} \left[1 + \frac{(\bar{m}_4 + m_2)^2}{s_2 - \bar{m}_4^2} \right] \mathcal{Q}^{(2)}. \quad (572)$$

A amplitude final será

$$iT_{\pi\pi BB}^\Delta = \frac{\vec{G}_1 \vec{G}_2}{2(8)(m_1 m_2)^2} \left\{ \aleph_{CA}^\mu \bar{u}_1 \gamma_\mu u_1 \bar{u}_2 u_2 + \aleph_{CB}^{\mu\nu} \bar{u}_1 \gamma_\mu u_1 \bar{u}_2 \gamma_\nu u_2 \right\}. \quad (573)$$

B.2.3.1 $\aleph_{CA^\Delta}^\mu$

$$\aleph_{CA^\Delta}^\mu = g_1^2 g_2^2 (m_2 + \bar{m}_2) \left[I_{cc}^\mu + (\bar{m}_2^2 - m_2^2) I_{u_2 c}^\mu \right] - g_3^2 g_4^2 (m_2 + \bar{m}_4) \left[I_{cc}^\mu + (\bar{m}_4^2 - m_2^2) I_{s_2 c}^\mu \right]. \quad (574)$$

Encontramos por comparação as amplitudes \mathcal{T}_{AC^∇} de acordo com seus operadores de spin

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{CA^\Delta}^C &= -\frac{ig_1^2 g_2^2}{(4\pi)^2} (m_2 + \bar{m}_2) (\bar{m}_2^2 - m_2^2) (\bar{w}_1 - \bar{z}_1) \Pi_{u_2 c}^{(010)} \\ &\quad - \frac{ig_3^2 g_4^2}{(4\pi)^2} (m_2 + \bar{m}_4) (\bar{m}_4^2 - m_2^2) (\bar{w}_1 - \bar{z}_1) \Pi_{s_4 c}^{(010)}, \end{aligned} \quad (575)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{CA^\Delta}^{LS+} &= -\frac{ig_1^2 g_2^2}{(4\pi)^2} (m_2 + \bar{m}_2) (\bar{m}_2^2 - m_2^2) (w_{1+} - z_{1+}) \Pi_{u_2 c}^{(010)} \\ &\quad - \frac{ig_3^2 g_4^2}{(4\pi)^2} (m_2 + \bar{m}_4) (\bar{m}_4^2 - m_2^2) (w_{1+} - z_{1+}) \Pi_{s_4 c}^{(010)}, \end{aligned} \quad (576)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{CA^\Delta}^{LS-} &= -\frac{ig_1^2 g_2^2}{(4\pi)^2} (m_2 + \bar{m}_2) (\bar{m}_2^2 - m_2^2) (w_{1-} - z_{1-}) \Pi_{u_2 c}^{(010)} \\ &\quad - \frac{ig_3^2 g_4^2}{(4\pi)^2} (m_2 + \bar{m}_4) (\bar{m}_4^2 - m_2^2) (w_{1-} - z_{1-}) \Pi_{s_4 c}^{(010)}. \end{aligned} \quad (577)$$

B.2.3.2 Caso $\aleph_{BC\Delta}^{\mu\nu}$

$$\aleph_{CB\Delta}^{\mu\nu} = \frac{g_1^2 g_2^2}{2} \left[I_{cc}^{\mu\nu} + (\bar{m}_2 + m_2)^2 I_{u_2c}^{\mu\nu} \right] + \frac{g_3^2 g_4^2}{2} \left[I_{cc}^{\mu\nu} + (\bar{m}_4 + m_2)^2 I_{s_4c}^{\mu\nu} \right]. \quad (578)$$

Então as amplitudes $\mathcal{T}_{CB\Delta}$ ficam

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{CB\Delta}^C &= \frac{ig_1^2 g_2^2}{4(4\pi)^2} \left\{ \bar{g} \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + (m_2 + \bar{m}_2)^2 [\bar{g} \bar{\Pi}_{u_2c}^{(000)} + (w\bar{w} + z\bar{z} - \bar{w}z - z\bar{w}) \Pi_{u_2c}^{(020)}] \right\} \\ &+ \frac{ig_3^2 g_4^2}{4(4\pi)^2} \left\{ \bar{g} \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + (m_2 + \bar{m}_4)^2 [\bar{g} \bar{\Pi}_{s_4c}^{(000)} + (w\bar{w} + z\bar{z} - \bar{w}z - z\bar{w}) \Pi_{s_4c}^{(020)}] \right\}, \end{aligned} \quad (579)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{CB\Delta}^{LS+} &= \frac{ig_1^2 g_2^2}{4(4\pi)^2} \left\{ g_+ \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + (m_2 + \bar{m}_2)^2 [g_+ \bar{\Pi}_{u_2c}^{(000)} + (w w_+ + z z_+ - w z_+ - z w_+) \Pi_{u_2c}^{(020)}] \right\} \\ &+ \frac{ig_3^2 g_4^2}{4(4\pi)^2} \left\{ g_+ \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + (m_2 + \bar{m}_4)^2 [g_+ \bar{\Pi}_{s_4c}^{(000)} + (w w_+ + z z_+ - w z_+ - z w_+) \Pi_{s_4c}^{(020)}] \right\}, \end{aligned} \quad (580)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{CB\Delta}^{LS-} &= \frac{ig_1^2 g_2^2}{4(4\pi)^2} \left\{ g_- \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + (m_2 + \bar{m}_2)^2 [g_- \bar{\Pi}_{u_2c}^{(000)} + (w w_- + z z_- - w z_- - z w_-) \Pi_{u_2c}^{(020)}] \right\} \\ &+ \frac{ig_3^2 g_4^2}{4(4\pi)^2} \left\{ g_- \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + (m_2 + \bar{m}_4)^2 [g_- \bar{\Pi}_{s_4c}^{(000)} + (w w_- + z z_- - w z_- - z w_-) \Pi_{s_4c}^{(020)}] \right\}, \end{aligned} \quad (581)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{CB\Delta}^{SS} &= -\frac{ig_1^2 g_2^2}{6(4\pi)^2} \left[\bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + (m_2 + \bar{m}_2)^2 \bar{\Pi}_{u_2c}^{(000)} \right] \\ &- \frac{ig_3^2 g_4^2}{6(4\pi)^2} \left[\bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + (m_2 + \bar{m}_4)^2 \bar{\Pi}_{s_4c}^{(000)} \right], \end{aligned} \quad (582)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{CB\Delta}^T &= -\frac{ig_1^2 g_2^2}{12(4\pi)^2} \left[\bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + (m_2 + \bar{m}_2)^2 \bar{\Pi}_{u_2c}^{(000)} \right] \\ &- \frac{ig_3^2 g_4^2}{12(4\pi)^2} \left[\bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + (m_2 + \bar{m}_4)^2 \bar{\Pi}_{s_4c}^{(000)} \right]. \end{aligned} \quad (583)$$

B.3 DIAGRAMA BOLHA (())

O diagrama do tipo bolha (()) é o mais simples e não conta com estado intermediário. Entretanto por completude consideramos o mesmo procedimento supondo píons nos dois sentidos \downarrow e \uparrow como mostrado na Figura 80.

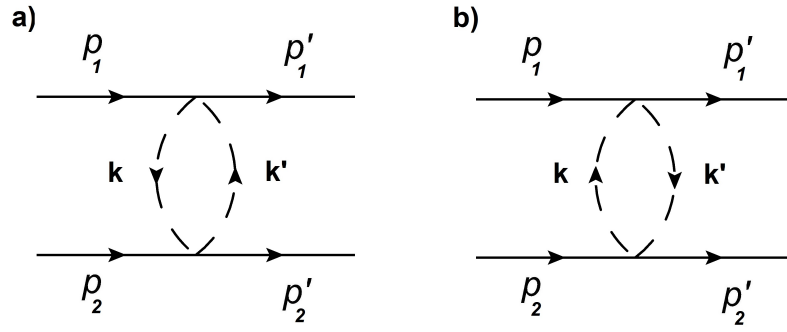


Figura 80 - Diagrama do tipo bolha

Analisando ambos os sentidos do pión, podemos notar uma certa simetria entre sinais e os estados de isospin do pión

$$iT_{\pi\pi\mathcal{B}\mathcal{B}}^{(1)\downarrow} = \bar{u}(p'_1) \frac{g_1^2}{4m_1^2} \gamma^\mu \left[\epsilon_{bac}(-k_\mu) + \epsilon_{abc}k'_\mu \right] \tau^c u(p_1), \quad (584)$$

$$iT_{\pi\pi\mathcal{B}\mathcal{B}}^{(2)\downarrow} = \bar{u}(p'_2) \frac{g_2^2}{4m_2^2} \gamma^\mu \left[\epsilon_{abc}k_\mu + \epsilon_{bac}(-k'_\mu) \right] \tau^c u(p_2), \quad (585)$$

$$iT_{\pi\pi\mathcal{B}\mathcal{B}}^{(1)\uparrow} = \bar{u}(p'_1) \frac{g_1^2}{4m_1^2} \gamma^\mu \left[\epsilon_{bac}k_\mu + \epsilon_{abc}(-k'_\mu) \right] \tau^c u(p_1), \quad (586)$$

$$iT_{\pi\pi\mathcal{B}\mathcal{B}}^{(2)\uparrow} = \bar{u}(p'_2) \frac{g_2^2}{4m_2^2} \gamma^\mu \left[\epsilon_{abc}(-k_\mu) + \epsilon_{bac}k'_\mu \right] \tau^c u(p_2), \quad (587)$$

de tal maneira que podemos escrever de uma só vez as amplitudes na forma compacta como

$$iT_{\pi\pi\mathcal{B}\mathcal{B}}^{(1)\downarrow\uparrow} = (\vec{G}_1)(C_1)^{\downarrow\uparrow}, \quad (588)$$

$$iT_{\pi\pi\mathcal{B}\mathcal{B}}^{(2)\downarrow\uparrow} = (\vec{G}_1)(C_2)^{\downarrow\uparrow}, \quad (589)$$

sendo $\vec{G}_1 = \epsilon_{abc}\tau^c$, e por fim

$$C_1^{\downarrow\uparrow} = \pm \frac{g_1^2}{2m_1^2} \mathcal{Q}^{(1)}, \quad (590)$$

$$C_2^{\downarrow\uparrow} = \pm \frac{g_2^2}{2m_2^2} \mathcal{Q}^{(2)}. \quad (591)$$

Logo a amplitude final resulta em

$$iT_{\pi\pi\mathcal{B}\mathcal{B}}^{(0)} = \frac{g_1^2 g_2^2 \vec{G}_1 \vec{G}_1}{(2m_1 m_2)^2} \left\{ \mathbb{N}_{CC}^{\mu\nu} \bar{u}_1 \gamma_\mu u_1 \bar{u}_2 \gamma_\nu u_2 \right\}, \quad (592)$$

em que

$$\mathbb{N}_{CC}^{\mu\nu} = \int \frac{d^4 Q}{(2\pi)^4} [\dots] Q^\mu Q^\nu = I_{cc}^{\mu\nu}, \quad (593)$$

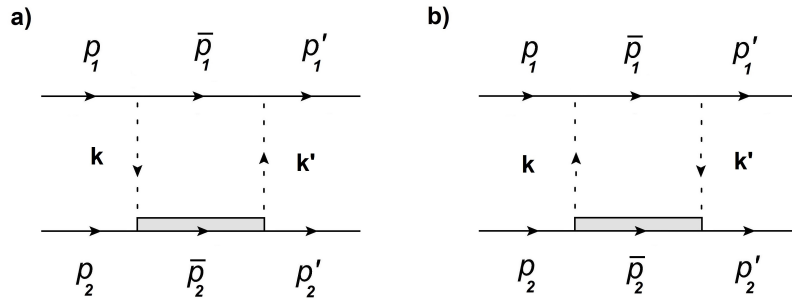


Figura 81 - Diagrama ressonância na “linha” 2

$$[\bar{u}_1 \gamma_\mu u_1 \bar{u}_2 \gamma_\nu u_2] \mathcal{N}_{CC}^{\mu\nu} = \frac{i}{(4\pi)^2} \frac{1}{2} [\bar{g} + g_+ \vec{\Omega}_{LS+} + g_- \vec{\Omega}_{LS-} - \frac{2}{3} \vec{\Omega}_{SS} - \frac{1}{3} \vec{\Omega}_T] \bar{\Pi}_{cc}^{(000)}.$$

Logo encontramos

$$\mathcal{T}_{CC}^C = \frac{i}{2(4\pi)^2} \bar{g} \bar{\Pi}_{cc}^{(000)}, \quad (594)$$

$$\mathcal{T}_{CC}^{LS+} = \frac{i}{2(4\pi)^2} g_+ \bar{\Pi}_{cc}^{(000)}, \quad (595)$$

$$\mathcal{T}_{CC}^{LS-} = \frac{i}{2(4\pi)^2} g_- \bar{\Pi}_{cc}^{(000)}, \quad (596)$$

$$\mathcal{T}_{CC}^{SS} = -\frac{i}{3(4\pi)^2} \bar{\Pi}_{cc}^{(000)}, \quad (597)$$

$$V_{CC}^T = -\frac{i}{6(4\pi)^2} \bar{\Pi}_{cc}^{(000)}. \quad (598)$$

B.4 DIAGRAMA \square COM RESSONÂNCIA DE SPIN-3/2 NA POSIÇÃO 2

Vamos agora calcular os casos de diagramas um pouco mais extensos onde consideramos o diagrama caixa com um bárion de spin-1/2 no estado intermediário na “linha” 1, e um bárion de spin-3/2 no estado intermediário na “linha” 2, como mostrado na Figura 81.

Os momentos intermediários são para o primeiro e segundo diagramas respectivamente

$$\begin{aligned} \bar{p}_1 &= p_1 - k = p_1' - k', & \bar{p}_1 &= p_1 + k = p_1' + k', \\ \bar{p}_2 &= p_2 + k = p_2' + k', & \bar{p}_2 &= p_2 - k = p_2' - k'. \end{aligned}$$

De acordo com a forma compacta das amplitudes de espalhamento

$$T_{\mathbf{MB}}^{(1)} = (\vec{G}_1)(A_1 + B_1), \quad (599)$$

$$T_{\mathbf{MB}^*}^{(2)} = (\vec{G}_2)(D_2 + E_2), \quad (600)$$

temos para este caso as seguintes amplitudes de acordo com o sentido dos mésons (primeiro e segundo diagramas respectivamente)

$$A_1^\downarrow = \frac{g_1^2(m_1 + \bar{m}_1)}{4m_1^2} \left[1 + \frac{\bar{m}_1^2 - m_1^2}{u_1 - \bar{m}_1^2} \right] I^{(1)}, \quad (601)$$

$$B_1^\downarrow = \frac{g_1^2}{8m_1^2} \left[1 + \frac{(\bar{m}_1 + m_1)^2}{u_1 - \bar{m}_1^2} \right] \mathcal{Q}^{(1)}, \quad (602)$$

$$D_2^\downarrow = -\frac{g_{*2}^2}{6} \left[\frac{\hat{D}_2}{s_2 - \bar{m}_{*2}^2} + a_{02} + a_{s2}(s_2 - m_2^2) \right] I^{(2)}, \quad (603)$$

$$E_2^\downarrow = -\frac{g_{*2}^2}{6} \left[\frac{\hat{E}_2}{s_2 - \bar{m}_{*2}^2} + b_{02} + b_{s2}(s_2 - m_2^2) \right] \mathcal{Q}^{(2)}, \quad (604)$$

$$A_1^\uparrow = \frac{g_3^2(m_1 + \bar{m}_3)}{4m_1^2} \left[1 + \frac{\bar{m}_3^2 - m_1^2}{s_1 - \bar{m}_3^2} \right] I^{(1)}, \quad (605)$$

$$B_1^\uparrow = \frac{-g_3^2}{8m_1^2} \left[1 + \frac{(\bar{m}_3 + m_1)^2}{s_1 - \bar{m}_3^2} \right] \mathcal{Q}^{(1)}, \quad (606)$$

$$D_2^\uparrow = -\frac{g_{*4}^2}{6} \left[\frac{\hat{D}_4}{u_2 - \bar{m}_{*4}^2} + a_{04} + a_{u4}(u_2 - m_2^2) \right] I^{(2)}, \quad (607)$$

$$E_2^\uparrow = \frac{g_{*4}^2}{6} \left[\frac{\hat{E}_4}{u_2 - \bar{m}_{*4}^2} + b_{04} + b_{u4}(u_2 - m_2^2) \right] \mathcal{Q}^{(2)}. \quad (608)$$

Desta forma a amplitude de espalhamento final, é dada por

$$i T_{\mathbf{MMB}^*\mathbf{B}}^{\square[2]} = \frac{\vec{G}_1 \vec{G}_2}{2(6)(2m_1)^2} \left\{ \aleph_{AD} \bar{u}_1 u_1 \bar{u}_2 u_2 + \aleph_{AE}^\nu \bar{u}_1 u_1 \bar{u}_2 \gamma_\nu u_2 \right. \\ \left. + \aleph_{BD}^\mu \bar{u}_1 \gamma_\mu u_1 \bar{u}_2 u_2 + \aleph_{BE}^{\mu\nu} \bar{u}_1 \gamma_\mu u_1 \bar{u}_2 \gamma_\nu u_2 \right\}. \quad (609)$$

Para a amplitude \aleph_{AD} , encontramos os resultados em termos das integrais de loop.

B.4.1 Caso $\aleph_{AD}^{\square[2]}$

$$\begin{aligned}
\aleph_{AD}^{\square[2]} = & -g_1^2 g_{*2}^2 (m_1 + \bar{m}_1) \left\{ \hat{D}_2 I_{s_2 c} + (a_{02} - a_{s_2} q^2 / 4) I_{cc} + a_{s_2} (I_{cc}^2 + (W - z)_\rho I_{cc}^\rho) \right. \\
& + (\bar{m}_1^2 - m_1^2) \left[\hat{D}_2 I_{u_1 s_2} + a_{02} I_{u_1 c} + a_{s_2} \left(I_{cc} - (m_1^2 - \bar{m}_1^2) I_{u_1 c} + 2W_\rho I_{u_1 c}^\rho \right) \right] \left. \right\} \\
& - g_3^2 g_{*4}^4 (m_1 + \bar{m}_3) \left\{ \hat{D}_4 I_{u_4 c} + (a_{04} - a_{u_4} q^2 / 4) I_{cc} + a_{u_4} (I_{cc}^2 - (W - z)_\rho I_{cc}^\rho) \right. \\
& + (\bar{m}_3^2 - m_1^2) \left[\hat{D}_4 I_{s_3 u_4} + a_{04} I_{s_3 c} + a_{u_4} \left(I_{cc} - (m_1^2 - \bar{m}_3^2) I_{s_3 c} - 2W_\rho I_{s_3 c}^\rho \right) \right] \left. \right\}. \quad (610)
\end{aligned}$$

Encontramos por comparação as amplitudes $V_{AD^{\square[2]}}$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{AD^{\square[2]}}^C = & \frac{-i g_{*1}^2 g_2^2}{(4\pi)^2} (m_1 + \bar{m}_1) a \left\{ \hat{D}_2 \Pi_{s_2 c}^{(000)} + (a_{02} - a_{s_2} \frac{q^2}{4}) \Pi_{cc}^{(000)} + a_{s_2} (-\bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + \frac{q^2}{2} \Pi_{cc}^{(200)}) \right. \\
& + (\bar{m}_1^2 - m_1^2) \left[\hat{D}_2 \Pi_{u_1 s_2}^{(000)} + a_{02} \Pi_{u_1 c}^{(000)} \right. \\
& + a_{s_2} \left(\Pi_{cc}^{(000)} + (\bar{m}_1^2 - m_1^2) \Pi_{u_1 c}^{(000)} - 2(W^2 + Wz) \Pi_{u_1 c}^{(010)} \right) \left. \right] \left. \right\} \\
& - \frac{i g_{*3}^2 g_4^2}{(4\pi)^2} (m_1 + \bar{m}_3) a \left\{ \hat{D}_4 \Pi_{u_4 c}^{(000)} + (a_{04} - a_{u_4} \frac{q^2}{4}) \Pi_{cc}^{(000)} + a_{u_4} (-\bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + \frac{q^2}{2} \Pi_{cc}^{(200)}) \right. \\
& + (\bar{m}_3^2 - m_1^2) \left[\hat{D}_4 \Pi_{s_3 u_4}^{(000)} + a_{04} \Pi_{s_3 c}^{(000)} \right. \\
& + a_{u_4} \left(\Pi_{cc}^{(000)} + (\bar{m}_3^2 - m_1^2) \Pi_{s_3 c}^{(000)} - 2(W^2 + Wz) \Pi_{s_3 c}^{(010)} \right) \left. \right] \left. \right\}, \quad (611)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{DA^{\square[2]}}^{LS+} = & \frac{-i g_{*1}^2 g_2^2}{(4\pi)^2} (m_1 + \bar{m}_1) b \left\{ \hat{D}_2 \Pi_{s_2 c}^{(000)} + (a_{02} - a_{s_2} \frac{q^2}{4}) \Pi_{cc}^{(000)} + a_{s_2} (-\bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + \frac{q^2}{2} \Pi_{cc}^{(200)}) \right. \\
& + (\bar{m}_1^2 - m_1^2) \left[\hat{D}_2 \Pi_{u_1 s_2}^{(000)} + a_{02} \Pi_{u_1 c}^{(000)} \right. \\
& + a_{s_2} \left(\Pi_{cc}^{(000)} + (\bar{m}_1^2 - m_1^2) \Pi_{u_1 c}^{(000)} - 2(W^2 + Wz) \Pi_{u_1 c}^{(010)} \right) \left. \right] \left. \right\} \\
& - \frac{i g_{*3}^2 g_4^2}{(4\pi)^2} (m_1 + \bar{m}_3) b \left\{ \hat{D}_4 \Pi_{u_4 c}^{(000)} + (a_{04} - a_{u_4} \frac{q^2}{4}) \Pi_{cc}^{(000)} + a_{u_4} (-\bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + \frac{q^2}{2} \Pi_{cc}^{(200)}) \right. \\
& + (\bar{m}_3^2 - m_1^2) \left[\hat{D}_4 \Pi_{s_3 u_4}^{(000)} + a_{04} \Pi_{s_3 c}^{(000)} \right. \\
& + a_{u_4} \left(\Pi_{cc}^{(000)} + (\bar{m}_3^2 - m_1^2) \Pi_{s_3 c}^{(000)} - 2(W^2 + Wz) \Pi_{s_3 c}^{(010)} \right) \left. \right] \left. \right\}, \quad (612)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{AD\Box[2]}^{LS-} &= \frac{-ig_{*1}^2 g_2^2}{(4\pi)^2} (m_1 + \bar{m}_1) c \left\{ \hat{D}_2 \Pi_{s_2 c}^{(000)} + (a_{02} - a_{s_2} \frac{q^2}{4}) \Pi_{cc}^{(000)} + a_{s_2} (-\bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + \frac{q^2}{2} \Pi_{cc}^{(200)}) \right. \\
&\quad + (\bar{m}_1^2 - m_1^2) \left[\hat{D}_2 \Pi_{u_1 s_2}^{(000)} + a_{02} \Pi_{u_1 c}^{(000)} \right. \\
&\quad \left. \left. + a_{s_2} \left(\Pi_{cc}^{(000)} + (\bar{m}_1^2 - m_1^2) \Pi_{u_1 c}^{(000)} - 2(W^2 + Wz) \Pi_{u_1 c}^{(010)} \right) \right] \right\} \\
&\quad - \frac{ig_{*3}^2 g_4^2}{(4\pi)^2} (m_1 + \bar{m}_3) c \left\{ \hat{D}_4 \Pi_{u_4 c}^{(000)} + (a_{04} - a_{u_4} \frac{q^2}{4}) \Pi_{cc}^{(000)} + a_{u_4} (-\bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + \frac{q^2}{2} \Pi_{cc}^{(200)}) \right. \\
&\quad + (\bar{m}_3^2 - m_1^2) \left[\hat{D}_4 \Pi_{s_3 u_4}^{(000)} + a_{04} \Pi_{s_3 c}^{(000)} \right. \\
&\quad \left. \left. + a_{u_4} \left(\Pi_{cc}^{(000)} + (\bar{m}_3^2 - m_1^2) \Pi_{s_3 c}^{(000)} - 2(W^2 + Wz) \Pi_{s_3 c}^{(010)} \right) \right] \right\}. \tag{613}
\end{aligned}$$

B.4.2 Caso $\aleph_{AE}^{\Box[2]\nu}$

$$\begin{aligned}
\aleph_{AE}^{\Box[2]\nu} &= -g_1^2 g_{*2}^2 (m_1 + \bar{m}_1) \left\{ \hat{E}_2 I_{s_2 c}^\nu + (b_{02} - b_{s_2} q^2/4) I_{cc}^\nu + b_{s_2} (I_{cc}^{2\nu} + (W - z)_\rho I_{cc}^{\rho\nu}) \right. \\
&\quad \left. + (\bar{m}_1^2 - m_1^2) \left[\hat{E}_2 I_{u_1 s_2}^\nu + b_{02} I_{u_1 c}^\nu + b_{s_2} \left(I_{cc}^\nu - (m_1^2 - \bar{m}_1^2) I_{u_1 c}^\nu + 2W_\rho I_{u_1 c}^{\rho\nu} \right) \right] \right\} \\
&\quad + g_3^2 g_{*4}^4 (m_1 + \bar{m}_3) \left\{ \hat{E}_4 I_{u_4 c}^\nu + (b_{04} - b_{u_4} q^2/4) I_{cc}^\nu + b_{u_4} (I_{cc}^{2\nu} - (W - z)_\rho I_{cc}^{\rho\nu}) \right. \\
&\quad \left. + (\bar{m}_3^2 - m_1^2) \left[\hat{E}_4 I_{s_3 u_4}^\nu + b_{04} I_{s_3 c}^\nu + b_{u_4} \left(I_{cc}^\nu - (m_1^2 - \bar{m}_3^2) I_{s_3 c}^\nu - 2W_\rho I_{s_3 c}^{\rho\nu} \right) \right] \right\}. \tag{614}
\end{aligned}$$

Encontramos por comparação as amplitudes $V_{AE\Box[2]\nu}$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{AE\Box[2]}^C &= \frac{ig_{*1}^2 g_2^2}{(4\pi)^2} (m_1 + \bar{m}_1) \left\{ \hat{E}_2 (\bar{w}_2 - \bar{z}_2) \Pi_{s_2 c}^{(010)} + b_{s_2} \frac{1}{2} (\bar{w}_2 - \bar{z}_2) \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} \right. \\
&\quad - (\bar{m}_1^2 - m_1^2) \left[\hat{E}_2 (\bar{w}_2 \Pi_{u_1 s_2}^{(010)} + \bar{z}_2 \Pi_{u_1 s_2}^{(001)}) + [b_{02} + b_{s_2} (\bar{m}_1^2 - m_1^2)] (\bar{w}_2 + \bar{z}_2) \Pi_{u_1 c}^{(010)} \right. \\
&\quad \left. \left. - b_{s_2} [\bar{w}_2 \bar{\Pi}_{u_1 c}^{(000)} + (\bar{w}_2 + \bar{z}_2) (W^2 + Wz) \Pi_{u_1 c}^{(020)}] \right] \right\} \\
&\quad - \frac{ig_{*3}^2 g_4^2}{(4\pi)^2} (m_1 + \bar{m}_3) \left\{ \hat{E}_4 (\bar{w}_2 - \bar{z}_2) \Pi_{u_4 c}^{(010)} + b_{u_4} \frac{1}{2} (\bar{w}_2 - \bar{z}_2) \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} \right. \\
&\quad - (\bar{m}_3^2 - m_1^2) \left[\hat{E}_4 (\bar{w}_2 \Pi_{s_3 u_4}^{(010)} + \bar{z}_2 \Pi_{s_3 u_4}^{(001)}) + [b_{04} + b_{u_4} (\bar{m}_3^2 - m_1^2)] (\bar{w}_2 + \bar{z}_2) \Pi_{s_3 c}^{(010)} \right. \\
&\quad \left. \left. - b_{u_4} [\bar{w}_2 \bar{\Pi}_{s_3 c}^{(000)} + (\bar{w}_2 + \bar{z}_2) (W^2 + Wz) \Pi_{s_3 c}^{(020)}] \right] \right\}, \tag{615}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{AE\Box[2]}^{LS+} &= -\frac{ig_{*1}^2g_2^2}{(4\pi)^2}(m_1 + \bar{m}_1) \left\{ \hat{E}_2(w_{2+} - z_{2+})\Pi_{s_2c}^{(010)} + b_{s2}\frac{1}{2}(w_{2+} - z_{2+})\bar{\Pi}_{cc}^{(000)} \right. \\
&\quad - (\bar{m}_1^2 - m_1^2) \left[\hat{E}_2(w_{2+}\Pi_{u_1s_2}^{(010)} + z_{2+}\Pi_{u_1s_2}^{(001)}) + [b_{02} + b_{s2}(\bar{m}_1^2 - m_1^2)](w_{2+} + z_{2+})\Pi_{u_1c}^{(010)} \right. \\
&\quad \left. \left. - b_{s2}[w_{2+}\bar{\Pi}_{u_1c}^{(000)} + (w_{2+} + z_{2+})(W^2 + Wz)\Pi_{u_1c}^{(020)}] \right] \right\} \\
&\quad - \frac{ig_{*3}^2g_4^2}{(4\pi)^2}(m_1 + \bar{m}_3) \left\{ \hat{E}_4(w_{2+} - z_{2+})\Pi_{u_4c}^{(010)} + b_{u4}\frac{1}{2}(w_{2+} - z_{2+})\bar{\Pi}_{cc}^{(000)} \right. \\
&\quad - (\bar{m}_3^2 - m_1^2) \left[\hat{E}_4(w_{2+}\Pi_{s_3u_4}^{(010)} + z_{2+}\Pi_{s_3u_4}^{(001)}) + [b_{04} + b_{u4}(\bar{m}_3^2 - m_1^2)](w_{2+} + z_{2+})\Pi_{s_3c}^{(010)} \right. \\
&\quad \left. \left. - b_{u4}[w_{2+}\bar{\Pi}_{s_3c}^{(000)} + (w_{2+} + z_{2+})(W^2 + Wz)\Pi_{s_3c}^{(020)}] \right] \right\}, \tag{616}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{AE\Box[2]}^{LS-} &= -\frac{ig_{*1}^2g_2^2}{(4\pi)^2}(m_1 + \bar{m}_1) \left\{ \hat{E}_2(w_{2-} - z_{2-})\Pi_{s_2c}^{(010)} + b_{s2}\frac{1}{2}(w_{2-} - z_{2-})\bar{\Pi}_{cc}^{(000)} \right. \\
&\quad - (\bar{m}_1^2 - m_1^2) \left[\hat{E}_2(w_{2-}\Pi_{u_1s_2}^{(010)} + z_{2-}\Pi_{u_1s_2}^{(001)}) + [b_{02} + b_{s2}(\bar{m}_1^2 - m_1^2)](w_{2-} + z_{2-})\Pi_{u_1c}^{(010)} \right. \\
&\quad \left. \left. - b_{s2}[w_{2-}\bar{\Pi}_{u_1c}^{(000)} + (w_{2-} + z_{2-})(W^2 + Wz)\Pi_{u_1c}^{(020)}] \right] \right\} \\
&\quad - \frac{ig_{*3}^2g_4^2}{(4\pi)^2}(m_1 + \bar{m}_3) \left\{ \hat{E}_4(w_{2-} - z_{2-})\Pi_{u_4c}^{(010)} + b_{u4}\frac{1}{2}(w_{2-} - z_{2-})\bar{\Pi}_{cc}^{(000)} \right. \\
&\quad - (\bar{m}_3^2 - m_1^2) \left[\hat{E}_4(w_{2-}\Pi_{s_3u_4}^{(010)} + z_{2-}\Pi_{s_3u_4}^{(001)}) + [b_{04} + b_{u4}(\bar{m}_3^2 - m_1^2)](w_{2-} + z_{2-})\Pi_{s_3c}^{(010)} \right. \\
&\quad \left. \left. - b_{u4}[w_{2-}\bar{\Pi}_{s_3c}^{(000)} + (w_{2-} + z_{2-})(W^2 + Wz)\Pi_{s_3c}^{(020)}] \right] \right\}. \tag{617}
\end{aligned}$$

B.4.3 Caso $\aleph_{BD}^{\Box[2]\mu}$

$$\begin{aligned}
\aleph_{BD}^{\Box[2]\mu} &= -\frac{g_1^2g_2^2}{2} \left\{ \hat{D}_2I_{s_2c}^\mu + (a_{02} - a_{s2}q^2/4)I_{cc}^\mu + a_{s2}(I_{cc}^{2\mu} + (W - z)_\rho I_{cc}^{\rho\mu}) \right. \\
&\quad \left. + (\bar{m}_1 + m_1)^2 \left[\hat{D}_2I_{u_1s_2}^\mu + a_{02}I_{u_1c}^\mu + a_{s2} \left(I_{cc}^\mu - (m_1^2 - \bar{m}_1^2)I_{u_1c}^\mu + 2W_\rho I_{u_1c}^{\rho\mu} \right) \right] \right\} \\
&\quad + \frac{g_3^2g_4^2}{2} \left\{ \hat{D}_4I_{u_4c}^\mu + (a_{04} - a_{u4}q^2/4)I_{cc}^\mu + a_{u4}(I_{cc}^{2\mu} - (W - z)_\rho I_{cc}^{\rho\mu}) \right. \\
&\quad \left. + (\bar{m}_3 + m_1)^2 \left[\hat{D}_4I_{s_3u_4}^\mu + a_{04}I_{s_3c}^\mu + a_{u4} \left(I_{cc}^\mu - (m_1^2 - \bar{m}_3^2)I_{s_3c}^\mu - 2W_\rho I_{s_3c}^{\rho\mu} \right) \right] \right\}. \tag{618}
\end{aligned}$$

As amplitudes $V_{BD\Box[2]\mu}$ são dadas por

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{BD\Box[2]}^C &= -\frac{ig_{*1}^2g_2^2}{2(4\pi)^2} \left\{ \hat{D}_2(\bar{w}_1 - \bar{z}_1)\Pi_{s_2c}^{(010)} + a_{s2}\frac{1}{2}(\bar{w}_1 - \bar{z}_1)\bar{\Pi}_{cc}^{(000)} \right. \\
&\quad - (m_1 + \bar{m}_1)^2 \left[\hat{D}_2(\bar{w}_1\Pi_{u_1s_2}^{(010)} + \bar{z}_1\Pi_{u_1s_2}^{(001)}) + [a_{02} + a_{s2}(\bar{m}_1^2 - m_1^2)](\bar{w}_1 + \bar{z}_1)\Pi_{u_1c}^{(010)} \right. \\
&\quad \left. \left. - a_{s2}[\bar{w}_1\bar{\Pi}_{u_1c}^{(000)} + (\bar{w}_1 + \bar{z}_1)(W^2 + Wz)\Pi_{u_1c}^{(020)}] \right] \right\} \\
&\quad -\frac{ig_{*3}^2g_4^2}{2(4\pi)^2} \left\{ \hat{D}_4(\bar{w}_1 - \bar{z}_1)\Pi_{u_4c}^{(010)} + a_{u4}\frac{1}{2}(\bar{w}_1 - \bar{z}_1)\bar{\Pi}_{cc}^{(000)} \right. \\
&\quad - (m_1 + \bar{m}_3)^2 \left[\hat{D}_4(\bar{w}_1\Pi_{s_3u_4}^{(010)} + \bar{z}_1\Pi_{s_3u_4}^{(001)}) + [a_{04} + a_{u4}(\bar{m}_3^2 - m_1^2)](\bar{w}_1 + \bar{z}_1)\Pi_{s_3c}^{(010)} \right. \\
&\quad \left. \left. - a_{u4}[\bar{w}_1\bar{\Pi}_{s_3c}^{(000)} + (\bar{w}_1 + \bar{z}_1)(W^2 + Wz)\Pi_{s_3c}^{(020)}] \right] \right\}, \tag{619}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{BD\Box[2]}^{LS+} &= -\frac{ig_{*1}^2g_2^2}{2(4\pi)^2} \left\{ \hat{D}_2(w_{1+} - z_{1+})\Pi_{s_2c}^{(010)} + a_{s2}\frac{1}{2}(w_{1+} - z_{1+})\bar{\Pi}_{cc}^{(000)} \right. \\
&\quad - (m_1 + \bar{m}_1)^2 \left[\hat{D}_2(w_{1+}\Pi_{u_1s_2}^{(010)} + z_{1+}\Pi_{u_1s_2}^{(001)}) + [a_{02} + a_{s2}(\bar{m}_1^2 - m_1^2)](w_{1+} + z_{1+})\Pi_{u_1c}^{(010)} \right. \\
&\quad \left. \left. - a_{s2}[w_{1+}\bar{\Pi}_{u_1c}^{(000)} + (w_{1+} + z_{1+})(W^2 + Wz)\Pi_{u_1c}^{(020)}] \right] \right\} \\
&\quad -\frac{ig_{*3}^2g_4^2}{2(4\pi)^2} \left\{ \hat{D}_4(w_{1+} - z_{1+})\Pi_{u_4c}^{(010)} + a_{u4}\frac{1}{2}(w_{1+} - z_{1+})\bar{\Pi}_{cc}^{(000)} \right. \\
&\quad - (m_1 + \bar{m}_3)^2 \left[\hat{D}_4(w_{1+}\Pi_{s_3u_4}^{(010)} + z_{1+}\Pi_{s_3u_4}^{(001)}) + [a_{04} + a_{u4}(\bar{m}_3^2 - m_1^2)](w_{1+} + z_{1+})\Pi_{s_3c}^{(010)} \right. \\
&\quad \left. \left. - a_{u4}[w_{1+}\bar{\Pi}_{s_3c}^{(000)} + (w_{1+} + z_{1+})(W^2 + Wz)\Pi_{s_3c}^{(020)}] \right] \right\}, \tag{620}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{BD\Box[2]}^{LS-} &= -\frac{ig_{*1}^2g_2^2}{2(4\pi)^2} \left\{ \hat{D}_2(w_{1-} - z_{1-})\Pi_{s_2c}^{(010)} + a_{s2}\frac{1}{2}(w_{1-} - z_{1-})\bar{\Pi}_{cc}^{(000)} \right. \\
&\quad - (m_1 + \bar{m}_1)^2 \left[\hat{D}_2(w_{1-}\Pi_{u_1s_2}^{(010)} + z_{1-}\Pi_{u_1s_2}^{(001)}) + [a_{02} + a_{s2}(\bar{m}_1^2 - m_1^2)](w_{1-} + z_{1-})\Pi_{u_1c}^{(010)} \right. \\
&\quad \left. \left. - a_{s2}[w_{1-}\bar{\Pi}_{u_1c}^{(000)} + (w_{1-} + z_{1-})(W^2 + Wz)\Pi_{u_1c}^{(020)}] \right] \right\} \\
&\quad -\frac{ig_{*3}^2g_4^2}{2(4\pi)^2} \left\{ \hat{D}_4(w_{1-} - z_{1-})\Pi_{u_4c}^{(010)} + a_{u4}\frac{1}{2}(w_{1-} - z_{1-})\bar{\Pi}_{cc}^{(000)} \right. \\
&\quad - (m_1 + \bar{m}_3)^2 \left[\hat{D}_4(w_{1-}\Pi_{s_3u_4}^{(010)} + z_{1-}\Pi_{s_3u_4}^{(001)}) + [a_{04} + a_{u4}(\bar{m}_3^2 - m_1^2)](w_{1-} + z_{1-})\Pi_{s_3c}^{(010)} \right. \\
&\quad \left. \left. - a_{u4}[w_{1-}\bar{\Pi}_{s_3c}^{(000)} + (w_{1-} + z_{1-})(W^2 + Wz)\Pi_{s_3c}^{(020)}] \right] \right\}. \tag{621}
\end{aligned}$$

B.4.3.1 Caso $\aleph_{BE}^{\square[2]\mu\nu}$

$$\begin{aligned}
\aleph_{BE}^{\square[2]\mu\nu} &= -\frac{g_1^2 g_{*2}^2}{2} \left\{ \hat{E}_2 I_{s_2 c}^{\mu\nu} + (b_{02} - b_{s_2} q^2/4) I_{cc}^{\mu\nu} + b_{s_2} (I_{cc}^{2\mu\nu} + (W - z)_\rho I_{cc}^{\rho\mu\nu}) \right. \\
&\quad \left. + (\bar{m}_1 + m_1)^2 \left[\hat{E}_2 I_{u_1 s_2}^{\mu\nu} + b_{02} I_{u_1 c}^{\mu\nu} + b_{s_2} \left(I_{cc}^\nu - (m_1^2 - \bar{m}_1^2) I_{u_1 c}^\nu + 2W_\rho I_{u_1 c}^{\rho\mu\nu} \right) \right] \right\} \\
&\quad - \frac{g_3^2 g_{*4}^2}{2} \left\{ \hat{E}_4 I_{u_4 c}^{\mu\nu} + (b_{04} - b_{u_4} q^2/4) I_{cc}^{\mu\nu} + b_{u_4} (I_{cc}^{2\mu\nu} - (W - z)_\rho I_{cc}^{\rho\mu\nu}) \right. \\
&\quad \left. + (\bar{m}_3 + m_1)^2 \left[\hat{E}_4 I_{s_3 u}^{\mu\nu} + b_{04} I_{u_3 c}^{\mu\nu} + b_{u_4} \left(I_{cc}^{\mu\nu} - (m_1^2 - \bar{m}_3^2) I_{s_3 c}^{\mu\nu} - 2W_\rho I_{s_3 c}^{\rho\mu\nu} \right) \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{622}$$

Para as amplitudes $V_{BE^{\square[2]\mu\nu}}$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{BE^{\square[2]}}^C &= -\frac{ig_{*1}^2 g_2^2}{4(4\pi)^2} \left\{ \hat{E}_2 [\bar{g}\bar{\Pi}_{s_2 c}^{(000)} + (w\bar{w} + z\bar{z} - \bar{w}z - z\bar{w})\Pi_{s_2 c}^{(020)}] \right. \\
&\quad + (b_{02} - b_{s_2} \frac{q^2}{4}) \bar{g}\bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + b_{s_2} \bar{g}q^2 \bar{\Pi}_{cc}^{(200)} \\
&\quad + (m_1 + \bar{m}_1)^2 \left[2\hat{E}_2 (\bar{g}\bar{\Pi}_{u_1 s_2}^{(000)} + w\bar{w}\Pi_{u_1 s_2}^{(020)} + z\bar{z}\Pi_{u_1 s_2}^{(002)} + (\bar{w}z + z\bar{w})\Pi_{u_1 s_2}^{(011)}) + b_{s_2} \bar{g}\bar{\Pi}_{cc}^{(000)} \right. \\
&\quad \left. + [b_{02} + b_{s_2}(\bar{m}_1^2 - m_1^2)] [\bar{g}\bar{\Pi}_{u_1 c}^{(000)} + (w\bar{w} + z\bar{z} + \bar{w}z + z\bar{w})\Pi_{u_1 c}^{(020)}] \right. \\
&\quad \left. - 2b_{s_2} [(\bar{g}(W^2 + Wz) + w\bar{w})\bar{\Pi}_{u_1 c}^{(010)} + (w\bar{w} + \bar{w}z + z\bar{w})[\bar{\Pi}_{u_1 c}^{(010)} + 2(W^2 + Wz)\Pi_{u_1 c}^{(030)}] \right. \\
&\quad \left. \left. + 2(W^2 + Wz)z\bar{z}\Pi_{u_1 c}^{(030)}] \right] \right\} \\
&\quad - \frac{ig_{*3}^2 g_4^2}{4(4\pi)^2} \left\{ \hat{E}_4 [\bar{g}\bar{\Pi}_{u_4 c}^{(000)} + (w\bar{w} + z\bar{z} - \bar{w}z - z\bar{w})\Pi_{u_4 c}^{(020)}] \right. \\
&\quad + (b_{04} - b_{u_4} \frac{q^2}{4}) \bar{g}\bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + b_{u_4} \bar{g}q^2 \bar{\Pi}_{cc}^{(200)} \\
&\quad + (m_1 + \bar{m}_3)^2 \left[2\hat{E}_4 (\bar{g}\bar{\Pi}_{s_3 u_4}^{(000)} + w\bar{w}\Pi_{s_3 u_4}^{(020)} + z\bar{z}\Pi_{s_3 u_4}^{(002)} + (\bar{w}z + z\bar{w})\Pi_{s_3 u_4}^{(011)}) + b_{u_4} \bar{g}\bar{\Pi}_{cc}^{(000)} \right. \\
&\quad \left. + [b_{04} + b_{u_4}(\bar{m}_3^2 - m_1^2)] [\bar{g}\bar{\Pi}_{s_3 c}^{(000)} + (w\bar{w} + z\bar{z} + \bar{w}z + z\bar{w})\Pi_{s_3 c}^{(020)}] \right. \\
&\quad \left. - 2b_{u_4} [(\bar{g}(W^2 + Wz) + w\bar{w})\bar{\Pi}_{s_3 c}^{(010)} + (w\bar{w} + \bar{w}z + z\bar{w})[\bar{\Pi}_{s_3 c}^{(010)} + 2(W^2 + Wz)\Pi_{s_3 c}^{(030)}] \right. \\
&\quad \left. \left. + 2(W^2 + Wz)z\bar{z}\Pi_{s_3 c}^{(030)}] \right] \right\},
\end{aligned} \tag{623}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{BE^{\square[2]}}^{LS+} = & -\frac{ig_*^2 g_2^2}{4(4\pi)^2} \left\{ \hat{E}_2 [g_+ \bar{\Pi}_{s_2 c}^{(000)} + (ww_+ + zz_+ - wz_+ - zw_+) \Pi_{s_2 c}^{(020)}] \right. \\
& + (b_{02} - b_{s_2} \frac{q^2}{4}) g_+ \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + b_{s_2} g_+ q^2 \bar{\Pi}_{cc}^{(200)} \\
& + (m_1 + \bar{m}_1)^2 \left[2\hat{E}_2 (g_+ \bar{\Pi}_{u_1 s_2}^{(000)} + ww_+ \Pi_{u_1 s_2}^{(020)} + zz_+ \Pi_{u_1 s_2}^{(002)} + (wz_+ + zw_+) \Pi_{u_1 s_2}^{(011)}) \right. \\
& + b_{s_2} g_+ \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + [b_{02} + b_{s_2} (\bar{m}_1^2 - m_1^2)] [g_+ \bar{\Pi}_{u_1 c}^{(000)} + (ww_+ + zz_+ + wz_+ + zw_+) \Pi_{u_1 c}^{(020)}] \\
& - 2b_{s_2} [(g_+ (W^2 + Wz) + ww_+) \bar{\Pi}_{u_1 c}^{(010)} + (ww_+ + wz_+ + zw_+) [\bar{\Pi}_{u_1 c}^{(010)} + 2(W^2 + Wz) \Pi_{u_1 c}^{(030)}] \\
& \left. \left. + 2(W^2 + Wz) zz_+ \Pi_{u_1 c}^{(030)}] \right] \right\} \\
& -\frac{ig_*^2 g_4^2}{4(4\pi)^2} \left\{ \hat{E}_4 [g_+ \bar{\Pi}_{u_4 c}^{(000)} + (ww_+ + zz_+ - wz_+ - zw_+) \Pi_{u_4 c}^{(020)}] \right. \\
& + (b_{04} - b_{u_4} \frac{q^2}{4}) g_+ \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + b_{u_4} g_+ q^2 \bar{\Pi}_{cc}^{(200)} \\
& + (m_1 + \bar{m}_3)^2 \left[2\hat{E}_4 (g_+ \bar{\Pi}_{s_3 u_4}^{(000)} + ww_+ \Pi_{s_3 u_4}^{(020)} + zz_+ \Pi_{s_3 u_4}^{(002)} + (wz_+ + zw_+) \Pi_{s_3 u_4}^{(011)}) \right. \\
& + b_{u_4} g_+ \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + [b_{04} + b_{u_4} (\bar{m}_3^2 - m_1^2)] [g_+ \bar{\Pi}_{s_3 c}^{(000)} + (ww_+ + zz_+ + wz_+ + zw_+) \Pi_{s_3 c}^{(020)}] \\
& - 2b_{u_4} [(g_+ (W^2 + Wz) + ww_+) \bar{\Pi}_{s_3 c}^{(010)} + (ww_+ + wz_+ + zw_+) [\bar{\Pi}_{s_3 c}^{(010)} + 2(W^2 + Wz) \Pi_{s_3 c}^{(030)}] \\
& \left. \left. + 2(W^2 + Wz) zz_+ \Pi_{s_3 c}^{(030)}] \right] \right\}, \tag{624}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{BE^{\square[2]}}^{LS-} = & -\frac{ig_*^2 g_2^2}{4(4\pi)^2} \left\{ \hat{E}_2 [g_- \bar{\Pi}_{s_2 c}^{(000)} + (ww_- + zz_- - wz_- - zw_-) \Pi_{s_2 c}^{(020)}] \right. \\
& + (b_{02} - b_{s_2} \frac{q^2}{4}) g_- \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + b_{s_2} g_- q^2 \bar{\Pi}_{cc}^{(200)} \\
& + (m_1 + \bar{m}_1)^2 \left[2\hat{E}_2 (g_- \bar{\Pi}_{u_1 s_2}^{(000)} + ww_- \Pi_{u_1 s_2}^{(020)} + zz_- \Pi_{u_1 s_2}^{(002)} + (wz_- + zw_-) \Pi_{u_1 s_2}^{(011)}) \right. \\
& + b_{s_2} g_- \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + [b_{02} + b_{s_2} (\bar{m}_1^2 - m_1^2)] [g_- \bar{\Pi}_{u_1 c}^{(000)} + (ww_- + zz_- + wz_- + zw_-) \Pi_{u_1 c}^{(020)}] \\
& - 2b_{s_2} [(g_- (W^2 + Wz) + ww_-) \bar{\Pi}_{u_1 c}^{(010)} + (ww_- + wz_- + zw_-) [\bar{\Pi}_{u_1 c}^{(010)} + 2(W^2 + Wz) \Pi_{u_1 c}^{(030)}] \\
& \left. \left. + 2(W^2 + Wz) zz_- \Pi_{u_1 c}^{(030)}] \right] \right\} \\
& -\frac{ig_*^2 g_4^2}{4(4\pi)^2} \left\{ \hat{E}_4 [g_- \bar{\Pi}_{u_4 c}^{(000)} + (ww_- + zz_- - wz_- - zw_-) \Pi_{u_4 c}^{(020)}] \right. \\
& + (b_{04} - b_{u_4} \frac{q^2}{4}) g_- \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + b_{u_4} g_- q^2 \bar{\Pi}_{cc}^{(200)} \\
& + (m_1 + \bar{m}_3)^2 \left[2\hat{E}_4 (g_- \bar{\Pi}_{s_3 u_4}^{(000)} + ww_- \Pi_{s_3 u_4}^{(020)} + zz_- \Pi_{s_3 u_4}^{(002)} + (wz_- + zw_-) \Pi_{s_3 u_4}^{(011)}) \right. \\
& + b_{u_4} g_- \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + [b_{04} + b_{u_4} (\bar{m}_3^2 - m_1^2)] [g_- \bar{\Pi}_{s_3 c}^{(000)} + (ww_- + zz_- + wz_- + zw_-) \Pi_{s_3 c}^{(020)}] \\
& - 2b_{u_4} [(g_- (W^2 + Wz) + ww_-) \bar{\Pi}_{s_3 c}^{(010)} + (ww_- + wz_- + zw_-) [\bar{\Pi}_{s_3 c}^{(010)} + 2(W^2 + Wz) \Pi_{s_3 c}^{(030)}] \\
& \left. \left. + 2(W^2 + Wz) zz_- \Pi_{s_3 c}^{(030)}] \right] \right\}, \tag{625}
\end{aligned}$$

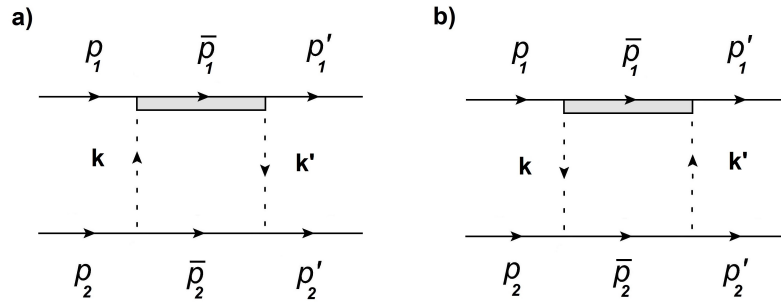


Figura 82 - Diagrama com ressonância spin-3/2 na linha 1

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{BE\Box[2]}^{SS} &= \frac{-ig_{*1}^2 g_2^2}{4(4\pi)^2} \frac{2}{3} \left\{ \hat{E}_2 \bar{\Pi}_{s_2 c}^{(000)} + (b_{02} - b_{s_2} \frac{q^2}{4}) \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + b_{s_2} q^2 \bar{\Pi}_{cc}^{(200)} + (m_1 + \bar{m}_1)^2 \left[2\hat{E}_2 \bar{\Pi}_{u_1 s_2}^{(000)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + b_{s_2} (\bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + 2(W^2 + Wz) \bar{\Pi}_{u_1 c}^{(010)}) + [b_{02} + b_{s_2} (\bar{m}_1^2 - m_1^2)] \bar{\Pi}_{u_1 c}^{(000)} \right] \right\} \\
&\quad - \frac{ig_{*3}^2 g_4^2}{4(4\pi)^2} \frac{2}{3} \left\{ \hat{E}_4 \bar{\Pi}_{u_4 c}^{(000)} + (b_{04} - b_{u_4} \frac{q^2}{4}) \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + b_{u_4} q^2 \bar{\Pi}_{cc}^{(200)} + (m_1 + \bar{m}_3)^2 \left[2\hat{E}_4 \bar{\Pi}_{s_3 u_4}^{(000)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + b_{u_4} (\bar{\Pi}_{cc}^{(000)} - 2(W^2 + Wz) \bar{\Pi}_{s_3 c}^{(010)}) + [b_{04} + b_{u_4} (\bar{m}_3^2 - m_1^2)] \bar{\Pi}_{s_3 c}^{(000)} \right] \right\}, \quad (626)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{BE\Box[2]}^T &= \frac{-ig_{*1}^2 g_2^2}{4(4\pi)^2} \frac{1}{3} \left\{ \hat{E}_2 \bar{\Pi}_{s_2 c}^{(000)} + (b_{02} - b_{s_2} \frac{q^2}{4}) \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + b_{s_2} q^2 \bar{\Pi}_{cc}^{(200)} + (m_1 + \bar{m}_1)^2 \left[2\hat{E}_2 \bar{\Pi}_{u_1 s_2}^{(000)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + b_{s_2} (\bar{\Pi}_{cc}^{(000)} - 2(W^2 + Wz) \bar{\Pi}_{u_1 c}^{(010)}) + [b_{02} + b_{s_2} (\bar{m}_1^2 - m_1^2)] \bar{\Pi}_{u_1 c}^{(000)} \right] \right\} \\
&\quad - \frac{ig_{*3}^2 g_4^2}{4(4\pi)^2} \frac{2}{3} \left\{ \hat{E}_4 \bar{\Pi}_{u_4 c}^{(000)} + (b_{04} - b_{u_4} \frac{q^2}{4}) \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + b_{u_4} q^2 \bar{\Pi}_{cc}^{(200)} + (m_1 + \bar{m}_3)^2 \left[2\hat{E}_4 \bar{\Pi}_{s_3 u_4}^{(000)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + b_{u_4} (\bar{\Pi}_{cc}^{(000)} - 2(W^2 + Wz) \bar{\Pi}_{s_3 c}^{(010)}) + [b_{04} + b_{u_4} (\bar{m}_3^2 - m_1^2)] \bar{\Pi}_{s_3 c}^{(000)} \right] \right\}. \quad (627)
\end{aligned}$$

B.5 DIAGRAMA \Box COM RESSONÂNCIA DE SPIN-3/2 NA POSIÇÃO 1

Para esse caso a ressonância de spin-3/2 é agora considerada na “linha” 1 de acordo com a Figura 82.

Temos para o primeiro diagrama da Fig. 82 as amplitudes na forma compacta

$$D_1^\downarrow = -\frac{g_{*1}^2}{6} \left[\frac{\hat{D}_1}{u_1 - \bar{m}_{*1}^2} + a_{01} + a_{u1}(u_1 - m_1^2) \right] I^{(1)}, \quad (628)$$

$$E_1^\downarrow = \frac{g_{*1}^2}{6} \left[\frac{\hat{E}_1}{u_1 - \bar{m}_{*1}^2} + b_{01} + b_{u1}(u_1 - m_1^2) \right] \mathcal{Q}^{(1)}, \quad (629)$$

$$A_2^\downarrow = \frac{g_2^2(m_2 + \bar{m}_2)}{4m_2^2} \left[1 + \frac{\bar{m}_2^2 - m_2^2}{s_2 - \bar{m}_2^2} \right] I^{(2)}, \quad (630)$$

$$B_2^\downarrow = \frac{-g_2^2}{8m_2^2} \left[1 + \frac{(\bar{m}_2 + m_2)^2}{s_2 - \bar{m}_2^2} \right] \mathcal{Q}^{(2)}, \quad (631)$$

e para o segundo diagrama

$$D_1^\uparrow = -\frac{g_{*3}^2}{6} \left[\frac{\hat{D}_3}{s_1 - \bar{m}_{*3}^2} + a_{03} + a_{s3}(s_1 - m_1^2) \right] I^{(1)}, \quad (632)$$

$$E_1^\uparrow = -\frac{g_{*3}^2}{6} \left[\frac{\hat{E}_3}{s_1 - \bar{m}_{*3}^2} + b_{03} + b_{s3}(s_1 - m_1^2) \right] \mathcal{Q}^{(1)}, \quad (633)$$

$$A_2^\uparrow = \frac{g_4^2(m_2 + \bar{m}_4)}{4m_2^2} \left[1 + \frac{\bar{m}_4^2 - m_2^2}{u_2 - \bar{m}_4^2} \right] I^{(2)}, \quad (634)$$

$$B_2^\uparrow = \frac{g_4^2}{8m_2^2} \left[1 + \frac{(\bar{m}_4 + m_2)^2}{u_2 - \bar{m}_4^2} \right] \mathcal{Q}^{(2)}. \quad (635)$$

A amplitude da troca de dois mésons final é dada por

$$i\mathcal{T}_{\text{MM}BB^*B}^{\square[1]} = \frac{\vec{G}_1 \vec{G}_2}{2(6)(2m_2)^2} \left\{ \aleph_{DA} \bar{u}_1 u_1 \bar{u}_2 u_2 + \aleph_{DB}^\nu \bar{u}_1 u_1 \bar{u}_2 \gamma_\nu u_2 \right. \\ \left. + \aleph_{EA}^\mu \bar{u}_1 \gamma_\mu u_1 \bar{u}_2 u_2 + \aleph_{EB}^{\mu\nu} \bar{u}_1 \gamma_\mu u_1 \bar{u}_2 \gamma_\nu u_2 \right\}. \quad (636)$$

B.5.1 Caso $\aleph_{DA}^{\square[1]}$

$$\aleph_{DA}^{\square[1]} = -g_{*1}^2 g_2^2 (m_2 + \bar{m}_2) \left\{ \hat{D}_1 I_{u_1 c} + (a_{01} - a_{u1} q^2/4) I_{cc} + a_{u1} (I_{cc}^2 - (W + z)_\rho I_{cc}^\rho) \right. \\ \left. + (\bar{m}_2^2 - m_2^2) \left[\hat{D}_1 I_{u_1 s_2} + a_{01} I_{s_2 c} + a_{u1} \left(I_{cc} - (m_2^2 - \bar{m}_2^2) I_{s_2 c} - 2W_\rho I_{s_2 c}^\rho \right) \right] \right\} \\ - g_{*3}^2 g_4^2 (m_2 + \bar{m}_4) \left\{ \hat{D}_3 I_{s_3 c} + (a_{03} - a_{s3} q^2/4) I_{cc} + a_{s3} (I_{cc}^2 + (W + z)_\rho I_{cc}^\rho) \right. \\ \left. + (\bar{m}_4^2 - m_2^2) \left[\hat{D}_3 I_{s_3 u_4} + a_{03} I_{[u_4 c]} + a_{s3} \left(I_{cc} - (m_2^2 - \bar{m}_4^2) I_{u_4 c} + 2W_\rho I_{u_4 c}^\rho \right) \right] \right\}. \quad (637)$$

Encontramos por comparação as amplitudes $V_{DA^{\square[1]}}$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{DA^{\square[1]}}^C &= -\frac{ig_{*1}^2g_2^2}{(4\pi)^2}(m_2 + \bar{m}_2)a \left\{ \hat{D}_1\Pi_{u_1c}^{(000)} + (a_{01} - a_{u1}\frac{q^2}{4})\Pi_{cc}^{(000)} + a_{u1}(-\bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + \frac{q^2}{2}\Pi_{cc}^{(200)}) \right. \\
&\quad + (\bar{m}_2^2 - m_2^2) \left[\hat{D}_1\Pi_{u_1s_2}^{(000)} + a_{01}\Pi_{s_2c}^{(000)} \right. \\
&\quad \left. \left. + a_{u1} \left(\Pi_{cc}^{(000)} + (\bar{m}_2^2 - m_2^2)\Pi_{s_2c}^{(000)} - 2(W^2 - Wz)\Pi_{s_2c}^{(010)} \right) \right] \right\} \\
&\quad - \frac{ig_{*3}^2g_4^2}{(4\pi)^2}(m_2 + \bar{m}_4)a \left\{ \hat{D}_3\Pi_{s_3c}^{(000)} + (a_{03} - a_{s3}\frac{q^2}{4})\Pi_{cc}^{(000)} + a_{s3}(-\bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + \frac{q^2}{2}\Pi_{cc}^{(200)}) \right. \\
&\quad + (\bar{m}_4^2 - m_2^2) \left[\hat{D}_3\Pi_{s_3u_4}^{(000)} + a_{03}\Pi_{u_4c}^{(000)} \right. \\
&\quad \left. \left. + a_{s3} \left(\Pi_{cc}^{(000)} + (\bar{m}_4^2 - m_2^2)\Pi_{u_4c}^{(000)} - 2(W^2 - Wz)\Pi_{u_4c}^{(010)} \right) \right] \right\}, \tag{638}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{DA^{\square[1]}}^{LS+} &= -\frac{ig_{*1}^2g_2^2}{(4\pi)^2}(m_2 + \bar{m}_2)b \left\{ \hat{D}_1\Pi_{u_1c}^{(000)} + (a_{01} - a_{u1}\frac{q^2}{4})\Pi_{cc}^{(000)} + a_{u1}(-\bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + \frac{q^2}{2}\Pi_{cc}^{(200)}) \right. \\
&\quad + (\bar{m}_2^2 - m_2^2) \left[\hat{D}_1\Pi_{u_1s_2}^{(000)} + a_{01}\Pi_{s_2c}^{(000)} \right. \\
&\quad \left. \left. + a_{u1} \left(\Pi_{cc}^{(000)} + (\bar{m}_2^2 - m_2^2)\Pi_{s_2c}^{(000)} - 2(W^2 - Wz)\Pi_{s_2c}^{(010)} \right) \right] \right\} \\
&\quad - \frac{ig_{*3}^2g_4^2}{(4\pi)^2}(m_2 + \bar{m}_4)b \left\{ \hat{D}_3\Pi_{s_3c}^{(000)} + (a_{03} - a_{s3}\frac{q^2}{4})\Pi_{cc}^{(000)} + a_{s3}(-\bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + \frac{q^2}{2}\Pi_{cc}^{(200)}) \right. \\
&\quad + (\bar{m}_4^2 - m_2^2) \left[\hat{D}_3\Pi_{s_3u_4}^{(000)} + a_{03}\Pi_{u_4c}^{(000)} \right. \\
&\quad \left. \left. + a_{s3} \left(\Pi_{cc}^{(000)} + (\bar{m}_4^2 - m_2^2)\Pi_{u_4c}^{(000)} - 2(W^2 - Wz)\Pi_{u_4c}^{(010)} \right) \right] \right\}, \tag{639}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{DA^{\square[1]}}^{LS-} &= -\frac{ig_{*1}^2g_2^2}{(4\pi)^2}(m_2 + \bar{m}_2)c \left\{ \hat{D}_1\Pi_{u_1c}^{(000)} + (a_{01} - a_{u1}\frac{q^2}{4})\Pi_{cc}^{(000)} + a_{u1}(-\bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + \frac{q^2}{2}\Pi_{cc}^{(200)}) \right. \\
&\quad + (\bar{m}_2^2 - m_2^2) \left[\hat{D}_1\Pi_{u_1s_2}^{(000)} + a_{01}\Pi_{s_2c}^{(000)} \right. \\
&\quad \left. \left. + a_{u1} \left(\Pi_{cc}^{(000)} + (\bar{m}_2^2 - m_2^2)\Pi_{s_2c}^{(000)} - 2(W^2 - Wz)\Pi_{s_2c}^{(010)} \right) \right] \right\} \\
&\quad - \frac{ig_{*3}^2g_4^2}{(4\pi)^2}(m_2 + \bar{m}_4)c \left\{ \hat{D}_3\Pi_{s_3c}^{(000)} + (a_{03} - a_{s3}\frac{q^2}{4})\Pi_{cc}^{(000)} + a_{s3}(-\bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + \frac{q^2}{2}\Pi_{cc}^{(200)}) \right. \\
&\quad + (\bar{m}_4^2 - m_2^2) \left[\hat{D}_3\Pi_{s_3u_4}^{(000)} + a_{03}\Pi_{u_4c}^{(000)} \right. \\
&\quad \left. \left. + a_{s3} \left(\Pi_{cc}^{(000)} + (\bar{m}_4^2 - m_2^2)\Pi_{u_4c}^{(000)} - 2(W^2 - Wz)\Pi_{u_4c}^{(010)} \right) \right] \right\}. \tag{640}
\end{aligned}$$

B.5.2 Caso $\aleph_{DB}^{\square[1]\nu}$

$$\begin{aligned}
\aleph_{DB}^{\square[1]\nu} &= \frac{g_{*1}^2 g_2^2}{2} \left\{ \hat{D}_1 I_{u_1 c}^\nu + (a_{01} - a_{u1} q^2/4) I_{cc}^\nu + a_{u1} (I_{cc}^{2\nu} - (W+z)_\rho I_{cc}^{\rho\nu}) \right. \\
&\quad \left. + (\bar{m}_2 + m_2)^2 \left[\hat{D}_1 I_{u_1 s_2}^\nu + a_{01} I_{s_2 c}^\nu + a_{u1} \left(I_{cc}^\nu - (m_2^2 - \bar{m}_2^2) I_{s_2 c}^\nu - 2W_\rho I_{s_2 c}^{\rho\nu} \right) \right] \right\} \\
&\quad - \frac{g_{*3}^2 g_4^2}{2} \left\{ \hat{D}_3 I_{s_3 c}^\nu + (a_{03} - a_{s3} q^2/4) I_{cc}^\nu + a_{s3} (I_{cc}^{2\nu} + (W+z)_\rho I_{cc}^{\rho\nu}) \right. \\
&\quad \left. + (\bar{m}_4 + m_2)^2 \left[\hat{D}_3 I_{s_3 u_4}^\nu + a_{03} I_{u_4 c}^\nu + a_{s3} \left(I_{cc}^\nu - (m_2^2 - \bar{m}_4^2) I_{u_4 c}^\nu + 2W_\rho I_{u_4 c}^{\rho\nu} \right) \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{641}$$

Por comparação $V_{DB^{\square[1]\nu}}$ resulta

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{DB^{\square[1]}}^C &= -\frac{ig_{*1}^2 g_2^2}{2(4\pi)^2} \left\{ \hat{D}_1 (\bar{w}_2 + \bar{z}_2) \Pi_{u_1 c}^{(010)} + a_{u1} \frac{1}{2} (\bar{w}_2 + \bar{z}_2) \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} \right. \\
&\quad \left. + (m_2 + \bar{m}_2)^2 \left[\hat{D}_1 (\bar{w}_2 \Pi_{u_1 s_2}^{(010)} + \bar{z}_2 \Pi_{u_1 s_2}^{(001)}) - [a_{01} + a_{u1} (\bar{m}_2^2 - m_2^2)] (\bar{w}_2 - \bar{z}_2) \Pi_{s_2 c}^{(010)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + a_{u1} [\bar{w}_2 \bar{\Pi}_{s_2 c}^{(000)} + (\bar{w}_2 - \bar{z}_2) (W^2 - Wz) \Pi_{s_2 c}^{(020)}] \right] \right\} \\
&\quad - \frac{ig_{*3}^2 g_4^2}{2(4\pi)^2} \left\{ \hat{D}_3 (\bar{w}_2 + \bar{z}_2) \Pi_{s_3 c}^{(010)} + a_{s3} \frac{1}{2} (\bar{w}_2 + \bar{z}_2) \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} \right. \\
&\quad \left. + (m_2 + \bar{m}_4)^2 \left[\hat{D}_3 (\bar{w}_2 \Pi_{s_3 u_4}^{(010)} + \bar{z}_2 \Pi_{s_3 u_4}^{(001)}) - [a_{03} + a_{s3} (\bar{m}_4^2 - m_2^2)] (\bar{w}_2 - \bar{z}_2) \Pi_{u_4 c}^{(010)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + a_{s3} [\bar{w}_2 \bar{\Pi}_{u_4 c}^{(000)} + (\bar{w}_2 - \bar{z}_2) (W^2 - Wz) \Pi_{u_4 c}^{(020)}] \right] \right\},
\end{aligned} \tag{642}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{DB^{\square[1]}}^{LS+} &= -\frac{ig_{*1}^2 g_2^2}{2(4\pi)^2} \left\{ \hat{D}_1 (w_{2+} + z_{2+}) \Pi_{u_1 c}^{(010)} + a_{u1} \frac{1}{2} (w_{2+} + z_{2+}) \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} \right. \\
&\quad \left. + (m_2 + \bar{m}_2)^2 \left[\hat{D}_1 (w_{2+} \Pi_{u_1 s_2}^{(010)} + z_{2+} \Pi_{u_1 s_2}^{(001)}) - [a_{01} + a_{u1} (\bar{m}_2^2 - m_2^2)] (w_{2+} - z_{2+}) \Pi_{s_2 c}^{(010)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + a_{u1} [w_{2+} \bar{\Pi}_{s_2 c}^{(000)} + (w_{2+} - z_{2+}) (W^2 - Wz) \Pi_{s_2 c}^{(020)}] \right] \right\} \\
&\quad - \frac{ig_{*3}^2 g_4^2}{2(4\pi)^2} \left\{ \hat{D}_3 (w_{2+} + z_{2+}) \Pi_{s_3 c}^{(010)} + a_{s3} \frac{1}{2} (w_{2+} + z_{2+}) \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} \right. \\
&\quad \left. + (m_2 + \bar{m}_4)^2 \left[\hat{D}_3 (w_{2+} \Pi_{s_3 u_4}^{(010)} + z_{2+} \Pi_{s_3 u_4}^{(001)}) - [a_{03} + a_{s3} (\bar{m}_4^2 - m_2^2)] (w_{2+} - z_{2+}) \Pi_{u_4 c}^{(010)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + a_{s3} [w_{2+} \bar{\Pi}_{u_4 c}^{(000)} + (w_{2+} - z_{2+}) (W^2 - Wz) \Pi_{u_4 c}^{(020)}] \right] \right\},
\end{aligned} \tag{643}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{DB\Box[1]}^{LS-} &= -\frac{ig_{*1}^2g_2^2}{2(4\pi)^2} \left\{ \hat{D}_1(w_{2-} + z_{2-})\Pi_{u_1c}^{(010)} + a_{u1}\frac{1}{2}(w_{2-} + z_{2-})\bar{\Pi}_{cc}^{(000)} \right. \\
&\quad + (m_2 + \bar{m}_2)^2 \left[\hat{D}_1(w_{2-}\Pi_{u_1s_2}^{(010)} + z_{2-}\Pi_{u_1s_2}^{(001)}) - [a_{01} + a_{u1}(\bar{m}_2^2 - m_2^2)](w_{2-} - z_{2-})\Pi_{s_2c}^{(010)} \right. \\
&\quad \left. \left. + a_{u1}[w_{2-}\bar{\Pi}_{s_2c}^{(000)} + (w_{2-} - z_{2-})(W^2 - Wz)\Pi_{s_2c}^{(020)}] \right] \right\} \\
&\quad - \frac{ig_{*3}^2g_4^2}{2(4\pi)^2} \left\{ \hat{D}_3(w_{2-} + z_{2-})\Pi_{s_3c}^{(010)} + a_{s3}\frac{1}{2}(w_{2-} + z_{2-})\bar{\Pi}_{cc}^{(000)} \right. \\
&\quad + (m_2 + \bar{m}_4)^2 \left[\hat{D}_3(w_{2-}\Pi_{s_3u_4}^{(010)} + z_{2-}\Pi_{s_3u_4}^{(001)}) - [a_{03} + a_{s3}(\bar{m}_4^2 - m_2^2)](w_{2-} - z_{2-})\Pi_{u_4c}^{(010)} \right. \\
&\quad \left. \left. + a_{s3}[w_{2-}\bar{\Pi}_{u_4c}^{(000)} + (w_{2-} - z_{2-})(W^2 - Wz)\Pi_{u_4c}^{(020)}] \right] \right\}. \tag{644}
\end{aligned}$$

B.5.3 Caso $\aleph_{EA}^{\Box[1]\mu}$

$$\begin{aligned}
\aleph_{EA}^{\Box[1]\mu} &= g_{*1}^2g_2^2(m_2 + \bar{m}_2) \left\{ \hat{E}_1 I_{u_1c}^\mu + (b_{01} - b_{u1}q^2/4)I_{cc}^\mu + b_{u1}(I_{cc}^{2\mu} - (W + z)_\rho I_{cc}^{\rho\mu}) \right. \\
&\quad \left. + (\bar{m}_2^2 - m_2^2) \left[\hat{E}_1 I_{u_1s_2}^\mu + b_{01}I_{s_2c}^\mu + b_{u1} \left(I_{cc}^\mu - (m_2^2 - \bar{m}_2^2)I_{s_2c}^\mu - 2W_\rho I_{s_2c}^{\rho\mu} \right) \right] \right\} \\
&\quad - g_{*3}^2g_4^2(m_2 + \bar{m}_4) \left\{ \hat{E}_3 I_{s_3c}^\mu + (b_{03} - b_{s3}q^2/4)I_{cc}^\mu + b_{s3}(I_{cc}^{2\mu} + (W + z)_\rho I_{cc}^{\rho\mu}) \right. \\
&\quad \left. + (\bar{m}_4^2 - m_2^2) \left[\hat{E}_3 I_{s_3u_4}^\mu + b_{03}I_{u_4c}^\mu + b_{s3} \left(I_{cc}^\mu - (m_2^2 - \bar{m}_4^2)I_{u_4c}^\mu + 2W_\rho I_{u_4c}^{\rho\mu} \right) \right] \right\}. \tag{645}
\end{aligned}$$

As amplitudes $V_{EA\Box[1]\mu}$ são

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{EA\Box[1]}^C &= -\frac{ig_{*1}^2g_2^2}{(4\pi)^2} (m_2 + \bar{m}_2) \left\{ \hat{E}_1(\bar{w}_1 + \bar{z}_1)\Pi_{u_1c}^{(010)} + b_{u1}\frac{1}{2}(\bar{w}_1 + \bar{z}_1)\bar{\Pi}_{cc}^{(000)} \right. \\
&\quad + (\bar{m}_2^2 - m_2^2) \left[\hat{E}_1(\bar{w}_1\Pi_{u_1s_2}^{(010)} + \bar{z}_1\Pi_{u_1s_2}^{(001)}) - [b_{01} + b_{u1}(\bar{m}_2^2 - m_2^2)](\bar{w}_1 - \bar{z}_1)\Pi_{s_2c}^{(010)} \right. \\
&\quad \left. \left. + b_{u1}[\bar{w}_1\bar{\Pi}_{s_2c}^{(000)} + (\bar{w}_1 - \bar{z}_1)(W^2 - Wz)\Pi_{s_2c}^{(020)}] \right] \right\} \\
&\quad - \frac{ig_{*3}^2g_4^2}{(4\pi)^2} (m_2 + \bar{m}_4) \left\{ \hat{E}_3(\bar{w}_1 + \bar{z}_1)\Pi_{s_3c}^{(010)} + b_{s3}\frac{1}{2}(\bar{w}_1 + \bar{z}_1)\bar{\Pi}_{cc}^{(000)} \right. \\
&\quad + (\bar{m}_4^2 - m_2^2) \left[\hat{E}_3(\bar{w}_1\Pi_{s_3u_4}^{(010)} + \bar{z}_1\Pi_{s_3u_4}^{(001)}) - [b_{03} + b_{s3}(\bar{m}_4^2 - m_2^2)](\bar{w}_1 - \bar{z}_1)\Pi_{u_4c}^{(010)} \right. \\
&\quad \left. \left. + b_{s3}[\bar{w}_1\bar{\Pi}_{u_4c}^{(000)} + (\bar{w}_1 - \bar{z}_1)(W^2 - Wz)\Pi_{u_4c}^{(020)}] \right] \right\}, \tag{646}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{EA^{\square[1]}^{LS+}} &= \frac{-ig_{*1}^2 g_2^2}{(4\pi)^2} (m_2 + \bar{m}_2) \left\{ \hat{E}_1(w_{1+} + z_{1+}) \Pi_{u_1 c}^{(010)} + b_{u1} \frac{1}{2} (w_{1+} + z_{1+}) \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} \right. \\
&+ (\bar{m}_2^2 - m_2^2) \left[\hat{E}_1(w_{1+} \Pi_{u_1 s_2}^{(010)} + z_{1+} \Pi_{u_1 s_2}^{(001)}) - [b_{01} + b_{u1} (\bar{m}_2^2 - m_2^2)] (w_{1+} - z_{1+}) \Pi_{s_2 c}^{(010)} \right. \\
&+ b_{u1} [w_{1+} \bar{\Pi}_{s_2 c}^{(000)} + (w_{1+} - z_{1+}) (W^2 - Wz) \Pi_{s_2 c}^{(020)}] \left. \right] \left. \right\} \\
&- \frac{ig_{*3}^2 g_4^2}{(4\pi)^2} (m_2 + \bar{m}_4) \left\{ \hat{E}_3(w_{1+} + z_{1+}) \Pi_{s_3 c}^{(010)} + b_{s3} \frac{1}{2} (w_{1+} + z_{1+}) \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} \right. \\
&+ (\bar{m}_4^2 - m_2^2) \left[\hat{E}_3(w_{1+} \Pi_{s_3 u_4}^{(010)} + z_{1+} \Pi_{s_3 u_4}^{(001)}) - [b_{03} + b_{s3} (\bar{m}_4^2 - m_2^2)] (w_{1+} - z_{1+}) \Pi_{u_4 c}^{(010)} \right. \\
&+ b_{s3} [w_{1+} \bar{\Pi}_{u_4 c}^{(000)} + (w_{1+} - z_{1+}) (W^2 - Wz) \Pi_{u_4 c}^{(020)}] \left. \right] \left. \right\}, \tag{647}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{EA^{\square[1]}^{LS-}} &= \frac{-ig_{*1}^2 g_2^2}{(4\pi)^2} (m_2 + \bar{m}_2) \left\{ \hat{E}_1(w_{1-} + z_{1-}) \Pi_{u_1 c}^{(010)} + b_{u1} \frac{1}{2} (w_{1-} + z_{1-}) \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} \right. \\
&+ (\bar{m}_2^2 - m_2^2) \left[\hat{E}_1(w_{1-} \Pi_{u_1 s_2}^{(010)} + z_{1-} \Pi_{u_1 s_2}^{(001)}) - [b_{01} + b_{u1} (\bar{m}_2^2 - m_2^2)] (w_{1-} - z_{1-}) \Pi_{s_2 c}^{(010)} \right. \\
&+ b_{u1} [w_{1-} \bar{\Pi}_{s_2 c}^{(000)} + (w_{1-} - z_{1-}) (W^2 - Wz) \Pi_{s_2 c}^{(020)}] \left. \right] \left. \right\} \\
&- \frac{ig_{*3}^2 g_4^2}{(4\pi)^2} (m_2 + \bar{m}_4) \left\{ \hat{E}_3(w_{1-} + z_{1-}) \Pi_{s_3 c}^{(010)} + b_{s3} \frac{1}{2} (w_{1-} + z_{1-}) \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} \right. \\
&+ (\bar{m}_4^2 - m_2^2) \left[\hat{E}_3(w_{1-} \Pi_{s_3 u_4}^{(010)} + z_{1-} \Pi_{s_3 u_4}^{(001)}) - [b_{03} + b_{s3} (\bar{m}_4^2 - m_2^2)] (w_{1-} - z_{1-}) \Pi_{u_4 c}^{(010)} \right. \\
&+ b_{s3} [w_{1-} \bar{\Pi}_{u_4 c}^{(000)} + (w_{1-} - z_{1-}) (W^2 - Wz) \Pi_{u_4 c}^{(020)}] \left. \right] \left. \right\}. \tag{648}
\end{aligned}$$

B.5.4 Caso $\aleph_{EB}^{\square[1]\mu\nu}$

$$\begin{aligned}
\aleph_{EB}^{\square[1]\mu\nu} &= -\frac{g_{*1}^2 g_2^2}{2} \left\{ \hat{E}_1 I_{u_1 c}^{\mu\nu} + (b_{01} - b_{u1} q^2/4) I_{cc}^{\mu\nu} + b_{u1} (I_{cc}^{2\mu\nu} - (W + z)_\rho I_{cc}^{\rho\mu\nu}) \right. \\
&+ (\bar{m}_2 + m_2)^2 \left[\hat{E}_1 I_{u_1 s_2}^{\mu\nu} + b_{01} I_{s_2 c}^{\mu\nu} + b_{u1} \left(I_{cc}^{\mu\nu} - (m_2^2 - \bar{m}_2^2) I_{s_2 c}^{\mu\nu} - 2W_\rho I_{s_2 c}^{\rho\mu\nu} \right) \right] \left. \right\} \\
&- \frac{g_{*3}^2 g_4^2}{2} \left\{ \hat{E}_3 I_{s_1 c}^{\mu\nu} + (b_{03} - b_{s3} q^2/4) I_{cc}^{\mu\nu} + b_{s3} (I_{cc}^{2\mu\nu} + (W + z)_\rho I_{cc}^{\rho\mu\nu}) \right. \\
&+ (\bar{m}_4 + m_2)^2 \left[\hat{E}_3 I_{s_1 u_2}^{\mu\nu} + b_{03} I_{u_2 c}^{\mu\nu} + b_{s3} \left(I_{cc}^{\mu\nu} - (m_2^2 - \bar{m}_4^2) I_{u_2 c}^{\mu\nu} + 2W_\rho I_{u_2 c}^{\rho\mu\nu} \right) \right] \left. \right\}. \tag{649}
\end{aligned}$$

As amplitudes $V_{EB\Box[1]\mu\nu}$ são

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{EB\Box[1]}^C = & -\frac{ig_*^2 g_2^2}{4(4\pi)^2} \left\{ \hat{E}_1 [\bar{g}\bar{\Pi}_{u_1c}^{(000)} + (w\bar{w} + z\bar{z} + \bar{w}z + z\bar{w})\Pi_{u_1c}^{(020)}] \right. \\
& + (b_{01} - b_{u_1} \frac{q^2}{4}) \bar{g}\bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + b_{u_1} \bar{g}q^2 \bar{\Pi}_{cc}^{(200)} \\
& + (m_2 + \bar{m}_2)^2 \left[2\hat{E}_1 (\bar{g}\bar{\Pi}_{u_1s_2}^{(000)} + w\bar{w}\Pi_{u_1s_2}^{(020)} + z\bar{z}\Pi_{u_1s_2}^{(002)} + (\bar{w}z + z\bar{w})\Pi_{u_1s_2}^{(011)}) + b_{u_1} \bar{g}\bar{\Pi}_{cc}^{(000)} \right. \\
& + [b_{01} + b_{u_1}(\bar{m}_2^2 - m_2^2)] [\bar{g}\bar{\Pi}_{s_2c}^{(000)} + (w\bar{w} + z\bar{z} - \bar{w}z - z\bar{w})\Pi_{s_2c}^{(020)}] \\
& - 2b_{u_1} [(g(W^2 - Wz) + w\bar{w})\bar{\Pi}_{s_2c}^{(010)} + (w\bar{w} - \bar{w}z - z\bar{w})[\bar{\Pi}_{s_2c}^{(010)} + 2(W^2 - Wz)\Pi_{s_2c}^{(030)}] \\
& \left. \left. + 2(W^2 - Wz)z\bar{z}\Pi_{s_2c}^{(030)}] \right] \right\} \\
& -\frac{ig_*^2 g_4^2}{4(4\pi)^2} \left\{ \hat{E}_3 [\bar{g}\bar{\Pi}_{s_3c}^{(000)} + (w\bar{w} + z\bar{z} + \bar{w}z + z\bar{w})\Pi_{s_3c}^{(020)}] \right. \\
& + (b_{03} - b_{s_3} \frac{q^2}{4}) \bar{g}\bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + b_{s_3} \bar{g}q^2 \bar{\Pi}_{cc}^{(200)} \\
& + (m_2 + \bar{m}_4)^2 \left[2\hat{E}_3 (\bar{g}\bar{\Pi}_{s_3u_4}^{(000)} + w\bar{w}\Pi_{s_3u_4}^{(020)} + z\bar{z}\Pi_{s_3u_4}^{(002)} + (\bar{w}z + z\bar{w})\Pi_{s_3u_4}^{(011)}) + b_{s_3} \bar{g}\bar{\Pi}_{cc}^{(000)} \right. \\
& + [b_{03} + b_{s_3}(\bar{m}_4^2 - m_2^2)] [\bar{g}\bar{\Pi}_{u_4c}^{(000)} + (w\bar{w} + z\bar{z} - \bar{w}z - z\bar{w})\Pi_{u_4c}^{(020)}] \\
& - 2b_{s_3} [(g(W^2 - Wz) + w\bar{w})\bar{\Pi}_{u_4c}^{(010)} + (w\bar{w} - \bar{w}z - z\bar{w})[\bar{\Pi}_{u_4c}^{(010)} + 2(W^2 - Wz)\Pi_{u_4c}^{(030)}] \\
& \left. \left. + 2(W^2 - Wz)z\bar{z}\Pi_{u_4c}^{(030)}] \right] \right\}, \tag{650}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{EB\Box[1]}^{LS+} = & -\frac{ig_*^2 g_2^2}{4(4\pi)^2} \left\{ \hat{E}_1 [g_+ \bar{\Pi}_{u_1c}^{(000)} + (ww_+ + zz_+ + wz_+ + zw_+)\Pi_{u_1c}^{(020)}] \right. \\
& + (b_{01} - b_{u_1} \frac{q^2}{4}) g_+ \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + b_{u_1} g_+ q^2 \bar{\Pi}_{cc}^{(200)} \\
& + (m_2 + \bar{m}_2)^2 \left[2\hat{E}_1 (g_+ \bar{\Pi}_{u_1s_2}^{(000)} + ww_+\Pi_{u_1s_2}^{(020)} + zz_+\Pi_{u_1s_2}^{(002)} + (wz_+ + zw_+)\Pi_{u_1s_2}^{(011)}) \right. \\
& + b_{u_1} g_+ \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + [b_{01} + b_{u_1}(\bar{m}_2^2 - m_2^2)] [g_+ \bar{\Pi}_{s_2c}^{(000)} + (ww_+ + zz_+ - wz_+ - zw_+)\Pi_{s_2c}^{(020)}] \\
& - 2b_{u_1} [(g_+(W^2 - Wz) + ww_+)\bar{\Pi}_{s_2c}^{(010)} + (ww_+ - wz_+ - zw_+)\bar{\Pi}_{s_2c}^{(010)} + 2(W^2 - Wz)\Pi_{s_2c}^{(030)}] \\
& \left. \left. + 2(W^2 - Wz)zz_+\Pi_{s_2c}^{(030)}] \right] \right\} \\
& -\frac{ig_*^2 g_4^2}{4(4\pi)^2} \left\{ \hat{E}_3 [g_+ \bar{\Pi}_{s_3c}^{(000)} + (ww_+ + zz_+ + wz_+ + zw_+)\Pi_{s_3c}^{(020)}] \right. \\
& + (b_{03} - b_{s_3} \frac{q^2}{4}) g_+ \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + b_{s_3} g_+ q^2 \bar{\Pi}_{cc}^{(200)} \\
& + (m_2 + \bar{m}_4)^2 \left[2\hat{E}_3 (g_+ \bar{\Pi}_{s_3u_4}^{(000)} + ww_+\Pi_{s_3u_4}^{(020)} + zz_+\Pi_{s_3u_4}^{(002)} + (wz_+ + zw_+)\Pi_{s_3u_4}^{(011)}) \right. \\
& + b_{s_3} g_+ \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + [b_{03} + b_{s_3}(\bar{m}_4^2 - m_2^2)] [g_+ \bar{\Pi}_{u_4c}^{(000)} + (ww_+ + zz_+ - wz_+ - zw_+)\Pi_{u_4c}^{(020)}] \\
& - 2b_{s_3} [(g_+(W^2 - Wz) + ww_+)\bar{\Pi}_{u_4c}^{(010)} + (ww_+ - wz_+ - zw_+)\bar{\Pi}_{u_4c}^{(010)} + 2(W^2 - Wz)\Pi_{u_4c}^{(030)}] \\
& \left. \left. + 2(W^2 - Wz)zz_+\Pi_{u_4c}^{(030)}] \right] \right\}, \tag{651}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{EB\Box[1]}^{LS-} = & -\frac{ig_*^2 g_2^2}{4(4\pi)^2} \left\{ \hat{E}_1 [g_- \bar{\Pi}_{u_1 c}^{(000)} + (ww_- + zz_- + wz_- + zw_-) \Pi_{u_1 c}^{(020)}] \right. \\
& + (b_{01} - b_{u_1} \frac{q^2}{4}) g_- \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + b_{u_1} g_- q^2 \bar{\Pi}_{cc}^{(200)} \\
& + (m_2 + \bar{m}_2)^2 \left[2\hat{E}_1 (g_- \bar{\Pi}_{u_1 s_2}^{(000)} + ww_- \Pi_{u_1 s_2}^{(020)} + zz_- \Pi_{u_1 s_2}^{(002)} + (wz_- + zw_-) \Pi_{u_1 s_2}^{(011)}) + b_{u_1} g_- \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} \right. \\
& + [b_{01} + b_{u_1} (\bar{m}_2^2 - m_2^2)] [g_- \bar{\Pi}_{s_2 c}^{(000)} + (ww_- + zz_- - wz_- - zw_-) \Pi_{s_2 c}^{(020)}] \\
& - 2b_{u_1} [(g_- (W^2 - Wz) + ww_-) \bar{\Pi}_{s_2 c}^{(010)} + (ww_- - wz_- - zw_-) [\bar{\Pi}_{s_2 c}^{(010)} + 2(W^2 - Wz) \Pi_{s_2 c}^{(030)}] \\
& \left. \left. + 2(W^2 - Wz) zz_- \Pi_{s_2 c}^{(030)}] \right] \right\} \\
& - \frac{ig_*^2 g_4^2}{4(4\pi)^2} \left\{ \hat{E}_3 [g_- \bar{\Pi}_{s_3 c}^{(000)} + (ww_- + zz_- + wz_- + zw_-) \Pi_{s_3 c}^{(020)}] \right. \\
& + (b_{03} - b_{s_3} \frac{q^2}{4}) g_- \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + b_{s_3} g_- q^2 \bar{\Pi}_{cc}^{(200)} \\
& + (m_2 + \bar{m}_4)^2 \left[2\hat{E}_3 (g_- \bar{\Pi}_{s_3 u_4}^{(000)} + ww_- \Pi_{s_3 u_4}^{(020)} + zz_- \Pi_{s_3 u_4}^{(002)} + (wz_- + zw_-) \Pi_{s_3 u_4}^{(011)}) + b_{s_3} g_- \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} \right. \\
& + [b_{03} + b_{s_3} (\bar{m}_4^2 - m_2^2)] [g_- \bar{\Pi}_{u_4 c}^{(000)} + (ww_- + zz_- - wz_- - zw_-) \Pi_{u_4 c}^{(020)}] \\
& - 2b_{s_3} [(g_- (W^2 - Wz) + ww_-) \bar{\Pi}_{u_4 c}^{(010)} + (ww_- - wz_- - zw_-) [\bar{\Pi}_{u_4 c}^{(010)} + 2(W^2 - Wz) \Pi_{u_4 c}^{(030)}] \\
& \left. \left. + 2(W^2 - Wz) zz_- \Pi_{u_4 c}^{(030)}] \right] \right\}, \tag{652}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{EB\Box[1]}^{SS} = & \frac{ig_*^2 g_2^2}{4(4\pi)^2} \frac{2}{3} \left\{ \hat{E}_1 \bar{\Pi}_{u_1 c}^{(000)} + (b_{01} - b_{u_1} \frac{q^2}{4}) \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + b_{u_1} q^2 \bar{\Pi}_{cc}^{(200)} + (m_2 + \bar{m}_2)^2 \left[2\hat{E}_1 \bar{\Pi}_{u_1 s_2}^{(000)} \right. \right. \\
& \left. \left. + b_{u_1} (\bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + 2(W^2 - Wz) \bar{\Pi}_{s_2 c}^{(010)}) + [b_{01} + b_{u_1} (\bar{m}_2^2 - m_2^2)] \bar{\Pi}_{s_2 c}^{(000)} \right] \right\} \\
& + \frac{ig_*^2 g_4^2}{4(4\pi)^2} \frac{2}{3} \left\{ \hat{E}_3 \bar{\Pi}_{s_3 c}^{(000)} + (b_{03} - b_{s_3} \frac{q^2}{4}) \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + b_{s_3} q^2 \bar{\Pi}_{cc}^{(200)} + (m_2 + \bar{m}_4)^2 \left[2\hat{E}_3 \bar{\Pi}_{s_3 u_4}^{(000)} \right. \right. \\
& \left. \left. + b_{s_3} (\bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + 2(W^2 - Wz) \bar{\Pi}_{u_4 c}^{(010)}) + [b_{03} + b_{s_3} (\bar{m}_4^2 - m_2^2)] \bar{\Pi}_{u_4 c}^{(000)} \right] \right\}, \tag{653}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{EB\Box[1]}^T = & \frac{ig_*^2 g_2^2}{4(4\pi)^2} \frac{1}{3} \left\{ \hat{E}_1 \bar{\Pi}_{u_1 c}^{(000)} + (b_{01} - b_{u_1} \frac{q^2}{4}) \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + b_{u_1} q^2 \bar{\Pi}_{cc}^{(200)} + (m_2 + \bar{m}_2)^2 \left[2\hat{E}_1 \bar{\Pi}_{u_1 s_2}^{(000)} \right. \right. \\
& \left. \left. + b_{u_1} (\bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + 2(W^2 - Wz) \bar{\Pi}_{s_2 c}^{(010)}) + [b_{01} + b_{u_1} (\bar{m}_2^2 - m_2^2)] \bar{\Pi}_{s_2 c}^{(000)} \right] \right\} \\
& + \frac{ig_*^2 g_4^2}{4(4\pi)^2} \frac{2}{3} \left\{ \hat{E}_3 \bar{\Pi}_{s_3 c}^{(000)} + (b_{03} - b_{s_3} \frac{q^2}{4}) \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + b_{s_3} q^2 \bar{\Pi}_{cc}^{(200)} + (m_2 + \bar{m}_4)^2 \left[2\hat{E}_3 \bar{\Pi}_{s_3 u_4}^{(000)} \right. \right. \\
& \left. \left. + b_{s_3} (\bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + 2(W^2 - Wz) \bar{\Pi}_{u_4 c}^{(010)}) + [b_{03} + b_{s_3} (\bar{m}_4^2 - m_2^2)] \bar{\Pi}_{u_4 c}^{(000)} \right] \right\}. \tag{654}
\end{aligned}$$

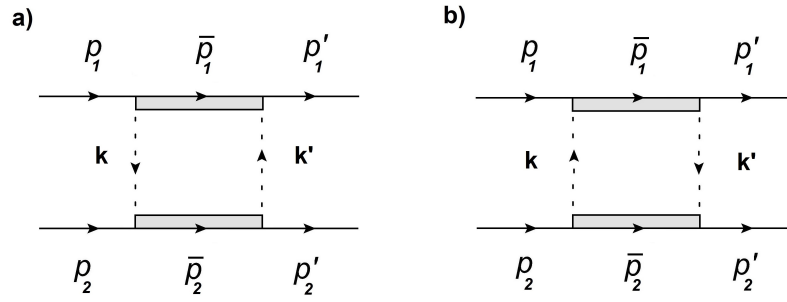


Figura 83 - Diagrama caixa com ressonância em ambas as linhas

B.6 DIAGRAMA \square COM RESSONÂNCIAS DE SPIN-3/2

O último diagrama do tipo caixa é o que considera ressonâncias de spin-3/2 em ambas as linhas dos diagramas (Fig. 83).

As amplitudes compactas são

$$D_1^\downarrow = -\frac{g_{*1}^2}{6} \left[\frac{\hat{D}_1}{u_1 - \bar{m}_{*1}^2} + a_{01} + a_{u1}(u_1 - m_1^2) \right] I^{(1)}, \quad (655)$$

$$E_1^\downarrow = \frac{g_{*1}^2}{6} \left[\frac{\hat{E}_1}{u_1 - \bar{m}_{*1}^2} + b_{01} + b_{u1}(u_1 - m_1^2) \right] \mathcal{Q}^{(1)}, \quad (656)$$

$$D_2^\downarrow = -\frac{g_{*2}^2}{6} \left[\frac{\hat{D}_2}{s_2 - \bar{m}_{*2}^2} + a_{02} + a_{s2}(s_2 - m_2^2) \right] I^{(2)}, \quad (657)$$

$$E_2^\downarrow = -\frac{g_{*2}^2}{6} \left[\frac{\hat{E}_2}{s_2 - \bar{m}_{*2}^2} + b_{02} + b_{s2}(s_2 - m_2^2) \right] \mathcal{Q}^{(2)}, \quad (658)$$

$$D_1^\uparrow = -\frac{g_{*3}^2}{6} \left[\frac{\hat{D}_3}{s_1 - \bar{m}_{*3}^2} + a_{03} + a_{s3}(s_1 - m_1^2) \right] I^{(1)}, \quad (659)$$

$$E_1^\uparrow = -\frac{g_{*3}^2}{6} \left[\frac{\hat{E}_3}{s_1 - \bar{m}_{*3}^2} + b_{03} + b_{s3}(s_1 - m_1^2) \right] \mathcal{Q}^{(1)}, \quad (660)$$

$$D_2^\uparrow = -\frac{g_{*4}^2}{6} \left[\frac{\hat{D}_4}{u_2 - \bar{m}_{*4}^2} + a_{04} + a_{u4}(u_2 - m_2^2) \right] I^{(2)}, \quad (661)$$

$$E_2^\uparrow = \frac{g_{*4}^2}{6} \left[\frac{\hat{E}_4}{u_2 - \bar{m}_{*4}^2} + b_{04} + b_{u4}(u_2 - m_2^2) \right] \mathcal{Q}^{(2)}. \quad (662)$$

Para esse caso temos a amplitude final

$$iT_{\text{MM}BB^*BB^*}^{\square[1][2]} = \frac{\vec{G}_1 \vec{G}_2}{2(36)} \left\{ \aleph_{DD} \bar{u}_1 u_1 \bar{u}_2 u_2 + \aleph_{DE}^\nu \bar{u}_1 u_1 \bar{u}_2 \gamma_\nu u_2 + \aleph_{ED}^\mu \bar{u}_1 \gamma_\mu u_1 \bar{u}_2 u_2 + \aleph_{EE}^{\mu\nu} \bar{u}_1 \gamma_\mu u_1 \bar{u}_2 \gamma_\nu u_2 \right\}. \quad (663)$$

B.6.1 Caso $\aleph_{DD}^{\square[1][2]}$

$$\begin{aligned}
[\bar{u}_1 u_1 \bar{u}_2 u_2] \aleph_{DD}^{\square[1][2]} &= g_{*1}^2 g_{*2}^2 \left\{ \hat{D}_1 \hat{D}_2 I_{u_1 s_2} + \alpha_{cc}^{DD} I_{cc} + \alpha_{u_1 c}^{DD} I_{u_1 c} \right. \\
&\quad + \alpha_{s_2 c}^{DD} I_{s_2 c} + 2a_{s_2} \hat{D}_1 W_\rho I_{u_1 c}^\rho - 2a_{u_1} \hat{D}_2 W_\rho I_{s_2 c}^\rho \\
&\quad \left. + \alpha_{2cc}^{DD} I_{cc}^2 - a_{u_1} a_{s_2} [(W+z)_\rho (W-z)_\theta I_{cc}^{\rho\theta} - I_{cc}^{22}] \right\} [a + b\vec{\Omega}_{LS+} + c\vec{\Omega}_{LS-}] \\
&\quad + g_{*3}^2 g_{*4}^2 \left\{ \hat{D}_3 \hat{D}_4 I_{s_3 u_4} + \beta_{cc}^{DD} I_{cc} + \beta_{s_3 c}^{DD} I_{s_3 c} \right. \\
&\quad + \beta_{u_4 c}^{DD} I_{u_4 c} - 2a_{u_4} \hat{D}_3 W_\rho I_{s_3 c}^\rho + 2a_{s_3} \hat{D}_4 W_\rho I_{u_2 c}^\rho \\
&\quad \left. + \beta_{2cc}^{DD} I_{cc}^2 + a_{s_3} a_{u_4} [-(W+z)_\rho (W-z)_\theta I_{cc}^{\rho\theta} + I_{cc}^{22}] \right\} [a + b\vec{\Omega}_{LS+} + c\vec{\Omega}_{LS-}].
\end{aligned} \tag{664}$$

Para facilitar os cálculos fazemos as definições

$$[a_{s_2} \hat{D}_1 + a_{u_1} \hat{D}_2 + a_{01} a_{02} - (a_{01} a_{s_2} + a_{u_1} a_{02})t/4 + a_{u_1} a_{s_2} (t/4)^2] = \alpha_{cc}^{DD}, \tag{665}$$

$$[a_{02} \hat{D}_1 - a_{s_2} \hat{D}_1 (m_1^2 - \bar{m}_{*1}^2)] = \alpha_{u_1 c}^{DD}, \tag{666}$$

$$[a_{01} \hat{D}_2 - a_{u_1} \hat{D}_2 (m_2^2 - \bar{m}_{*2}^2)] = \alpha_{s_2 c}^{DD}, \tag{667}$$

$$[a_{u_1} a_{02} - a_{u_1} a_{s_2} t/2 + a_{01} a_{s_2}] = \alpha_{2cc}^{DD}, \tag{668}$$

$$[a_{u_4} \hat{D}_3 + a_{s_3} \hat{D}_4 + a_{03} a_{04} - (a_{03} a_{u_4} + a_{s_3} a_{04})t/4 + a_{s_3} a_{u_4} (t/4)^2] = \beta_{cc}^{DD}, \tag{669}$$

$$[a_{04} \hat{D}_3 - a_{u_4} \hat{D}_3 (m_1^2 - \bar{m}_{*3}^2)] = \beta_{s_3 c}^{DD}, \tag{670}$$

$$[a_{03} \hat{D}_4 - a_{s_3} \hat{D}_4 (m_2^2 - \bar{m}_{*4}^2)] = \beta_{u_4 c}^{DD}, \tag{671}$$

$$[a_{s_3} a_{04} - a_{s_3} a_{u_4} t/2 + a_{03} a_{u_4}] = \beta_{2cc}^{DD}. \tag{672}$$

Dessa maneira temos (resolvemos as integrais I_{\dots}).

Separando nas componentes de spin:

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{DD^{\square[1][2]}}^C &= \frac{ig_{*1}^2 g_{*2}^2}{(4\pi)^2} a \left\{ \hat{D}_1 \hat{D}_2 \Pi_{u_1 s_2}^{(000)} + \alpha_{cc}^{DD} \Pi_{cc}^{(000)} + \alpha_{u_1 c}^{DD} \Pi_{u_1 c}^{(000)} + \alpha_{s_2 c}^{DD} \Pi_{s_2 c}^{(000)} \right. \\
&\quad - 2a_{s_2} \hat{D}_1 (W^2 + Wz) \Pi_{u_1 c}^{(010)} - 2a_{u_1} \hat{D}_2 (W^2 - Wz) \Pi_{s_2 c}^{(010)} \\
&\quad \left. + \alpha_{2cc}^{DD} (-\bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + \frac{q^2}{2} \Pi_{cc}^{(200)}) - a_{u_1} a_{s_2} \left[\frac{1}{2} (W^2 - z^2) \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} - q^4 \Pi_{cc}^{(400)} \right] \right\} \\
&\quad + \frac{ig_{*3}^2 g_{*4}^2}{(4\pi)^2} a \left\{ \hat{D}_3 \hat{D}_4 \Pi_{s_3 u_4}^{(000)} + \beta_{cc}^{DD} \Pi_{cc}^{(000)} + \beta_{s_3 c}^{DD} \Pi_{s_3 c}^{(010)} + \beta_{u_4 c}^{DD} \Pi_{u_4 c}^{(000)} \right. \\
&\quad - 2a_{u_4} \hat{D}_3 (W^2 + Wz) \Pi_{s_3 c}^{(010)} - 2a_{s_3} \hat{D}_4 (W^2 - Wz) \Pi_{u_4 c}^{(000)} \\
&\quad \left. + \beta_{2cc}^{DD} (-\bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + \frac{q^2}{2} \Pi_{cc}^{(200)}) - a_{s_3} a_{u_4} \left[\frac{1}{2} (W^2 - z^2) \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} - q^4 \Pi_{cc}^{(400)} \right] \right\}, \tag{673}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{DD^{\square[1][2]}}^{LS+} = & \frac{ig_{*1}^2 g_{*2}^2}{(4\pi)^2} b \left\{ \hat{D}_1 \hat{D}_2 \Pi_{u_1 s_2}^{(000)} + \alpha_{cc}^{DD} \Pi_{cc}^{(000)} + \alpha_{u_1 c}^{DD} \Pi_{u_1 c}^{(000)} + \alpha_{s_2 c}^{DD} \Pi_{s_2 c}^{(000)} \right. \\
& - 2a_{s_2} \hat{D}_1 (W^2 + Wz) \Pi_{u_1 c}^{(010)} - 2a_{u_1} \hat{D}_2 (W^2 - Wz) \Pi_{s_2 c}^{(010)} \\
& \left. + \alpha_{2cc}^{DD} (-\bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + \frac{q^2}{2} \Pi_{cc}^{(200)}) - a_{u_1} a_{s_2} \left[\frac{1}{2} (W^2 - z^2) \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} - q^4 \Pi_{cc}^{(400)} \right] \right\} \\
& + \frac{ig_{*3}^2 g_{*4}^2}{(4\pi)^2} b \left\{ \hat{D}_3 \hat{D}_4 \Pi_{s_3 u_4}^{(000)} + \beta_{cc}^{DD} \Pi_{cc}^{(000)} + \beta_{s_3 c}^{DD} \Pi_{s_3 c}^{(010)} + \beta_{u_4 c}^{DD} \Pi_{u_4 c}^{(000)} \right. \\
& - 2a_{u_4} \hat{D}_3 (W^2 + Wz) \Pi_{s_3 c}^{(010)} - 2a_{s_3} \hat{D}_4 (W^2 - Wz) \Pi_{u_4 c}^{(000)} \\
& \left. + \beta_{2cc}^{DD} (-\bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + \frac{q^2}{2} \Pi_{cc}^{(200)}) - a_{s_3} a_{u_4} \left[\frac{1}{2} (W^2 - z^2) \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} - q^4 \Pi_{cc}^{(400)} \right] \right\}, \quad (674)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{DD^{\square[1][2]}}^{LS-} = & \frac{ig_{*1}^2 g_{*2}^2}{(4\pi)^2} c \left\{ \hat{D}_1 \hat{D}_2 \Pi_{u_1 s_2}^{(000)} + \alpha_{cc}^{DD} \Pi_{cc}^{(000)} + \alpha_{u_1 c}^{DD} \Pi_{u_1 c}^{(000)} + \alpha_{s_2 c}^{DD} \Pi_{s_2 c}^{(000)} \right. \\
& - 2a_{s_2} \hat{D}_1 (W^2 + Wz) \Pi_{u_1 c}^{(010)} - 2a_{u_1} \hat{D}_2 (W^2 - Wz) \Pi_{s_2 c}^{(010)} \\
& \left. + \alpha_{2cc}^{DD} (-\bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + \frac{q^2}{2} \Pi_{cc}^{(200)}) - a_{u_1} a_{s_2} \left[\frac{1}{2} (W^2 - z^2) \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} - q^4 \Pi_{cc}^{(400)} \right] \right\} \\
& + \frac{ig_{*3}^2 g_{*4}^2}{(4\pi)^2} c \left\{ \hat{D}_3 \hat{D}_4 \Pi_{s_3 u_4}^{(000)} + \beta_{cc}^{DD} \Pi_{cc}^{(000)} + \beta_{s_3 c}^{DD} \Pi_{s_3 c}^{(010)} + \beta_{u_4 c}^{DD} \Pi_{u_4 c}^{(000)} \right. \\
& - 2a_{u_4} \hat{D}_3 (W^2 + Wz) \Pi_{s_3 c}^{(010)} - 2a_{s_3} \hat{D}_4 (W^2 - Wz) \Pi_{u_4 c}^{(000)} \\
& \left. + \beta_{2cc}^{DD} (-\bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + \frac{q^2}{2} \Pi_{cc}^{(200)}) - a_{s_3} a_{u_4} \left[\frac{1}{2} (W^2 - z^2) \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} - q^4 \Pi_{cc}^{(400)} \right] \right\}. \quad (675)
\end{aligned}$$

B.6.2 Caso $\aleph_{DE}^{\square[1][2]\nu}$

Para facilitar os cálculos fazemos as definições

$$[b_{02} \hat{D}_1 - b_{s_2} \hat{D}_1 (m_1^2 - \bar{m}_{*1}^2)] = \alpha_{u_1 c}^{DE}, \quad (676)$$

$$[a_{01} \hat{E}_2 - a_{u_1} \hat{E}_2 (m_2^2 - \bar{m}_{*2}^2)] = \alpha_{s_2 c}^{DE}, \quad (677)$$

$$[b_{04} \hat{D}_3 - b_{u_4} \hat{D}_3 (m_1^2 - \bar{m}_{*3}^2)] = \beta_{s_3 c}^{DE}, \quad (678)$$

$$[a_{03} \hat{E}_4 - a_{s_3} \hat{E}_4 (m_2^2 - \bar{m}_{*4}^2)] = \beta_{u_4 c}^{DE}. \quad (679)$$

E assim (resolvemos para I_{cc}^ν e $I_{cc}^{2\nu}$, $I_{cc}^{\rho\theta\nu}$ e $I_{cc}^{22\nu} := 0$)

$$\begin{aligned}
[\bar{u}_1 u_1 \bar{u}_2 \gamma_\nu u_2] \mathfrak{N}_{DE}^{\square[1][2]\nu} &= g_{*1}^2 g_{*2}^2 \left\{ \hat{D}_1 \hat{E}_2 I_{u_1 s_2}^\nu + 0 + \alpha_{u_1 c}^{DE} I_{u_1 c}^\nu + \alpha_{s_2 c}^{DE} I_{s_2 c}^\nu + 2b_{s_2} \hat{D}_1 W_\rho I_{u_1 c}^{\rho\nu} \right. \\
&\quad - 2a_{u_1} \hat{E}_2 W_\rho I_{s_2 c}^{\rho\nu} + a_{u_1} b_{s_2} t / 2z_\rho I_{cc}^{\rho\nu} - a_{u_1} b_{02} (W + z)_\rho I_{cc}^{\rho\nu} \\
&\quad \left. + a_{01} b_{s_2} (W - z)_\rho I_{cc}^{\rho\nu} - a_{u_1} b_{s_2} [2z_\rho I_{cc}^{2\rho\nu}] \right\} [\bar{u}_1 u_1 \bar{u}_2 \gamma_\nu u_2] \\
&\quad - g_{*3}^2 g_{*4}^2 \left\{ \hat{D}_3 \hat{E}_4 I_{s_3 u_4}^\nu + 0 + \beta_{s_3 c}^{DE} I_{s_3 c}^\nu + \beta_{u_4 c}^{DE} I_{u_4 c}^\nu - 2b_{u_4} \hat{D}_3 W_\rho I_{s_3 c}^{\rho\nu} \right. \\
&\quad + 2a_{s_3} \hat{E}_4 W_\rho I_{u_4 c}^{\rho\nu} - a_{s_3} b_{u_4} t / 2z_\rho I_{cc}^{\rho\nu} + a_{s_3} b_{04} (W + z)_\rho I_{cc}^{\rho\nu} \\
&\quad \left. - a_{03} b_{u_4} (W - z)_\rho I_{cc}^{\rho\nu} + a_{s_3} b_{u_4} [2z_\rho I_{cc}^{2\rho\nu}] \right\} [\bar{u}_1 u_1 \bar{u}_2 \gamma_\nu u_2]. \quad (680)
\end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{DE\square[1][2]\nu}^C &= -\frac{ig_{*1}^2 g_{*2}^2}{(4\pi)^2} \left\{ \hat{D}_1 \hat{E}_2 [\bar{w}_2 \Pi_{u_1 s_2}^{(010)} + \bar{z}_2 \Pi_{u_1 s_2}^{(001)}] + \alpha_{u_1 c}^{DE} (\bar{w}_2 + \bar{z}_2) \Pi_{u_1 c}^{(010)} - \alpha_{s_2 c}^{DE} (\bar{w}_2 - \bar{z}_2) \Pi_{s_2 c}^{(010)} \right. \\
&\quad - 2b_{s_2} \hat{D}_1 [\bar{w}_2 \bar{\Pi}_{u_1 c}^{(000)} + (\bar{w}_2 + \bar{z}_2) (W^2 + Wz) \Pi_{u_1 c}^{(020)}] \\
&\quad + 2a_{u_1} \hat{E}_2 [\bar{w}_2 \bar{\Pi}_{s_2 c}^{(000)} + (\bar{w}_2 - \bar{z}_2) (W^2 - Wz) \Pi_{s_2 c}^{(020)}] - a_{u_1} b_{s_2} \frac{q^2}{2} \frac{1}{2} \bar{z}_2 \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} \\
&\quad \left. + a_{u_1} b_{02} \frac{1}{2} (\bar{w}_2 + \bar{z}_2) \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} - a_{01} b_{s_2} \frac{1}{2} (\bar{w}_2 - \bar{z}_2) \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + a_{u_1} b_{s_2} q^2 \bar{z}_2 \bar{\Pi}_{cc}^{(200)} \right\} \\
&\quad - \frac{ig_{*3}^2 g_{*4}^2}{(4\pi)^2} \left\{ \hat{D}_3 \hat{E}_4 [\bar{w}_2 \Pi_{s_3 u_4}^{(010)} + \bar{z}_2 \Pi_{s_3 u_4}^{(001)}] + \beta_{s_3 c}^{DE} (\bar{w}_2 + \bar{z}_2) \Pi_{s_3 c}^{(010)} - \beta_{u_4 c}^{DE} (\bar{w}_2 - \bar{z}_2) \Pi_{u_4 c}^{(010)} \right. \\
&\quad - 2b_{u_4} \hat{D}_3 [\bar{w}_2 \bar{\Pi}_{s_3 c}^{(000)} + (\bar{w}_2 + \bar{z}_2) (W^2 + Wz) \Pi_{s_3 c}^{(020)}] \\
&\quad + 2a_{s_3} \hat{E}_4 [\bar{w}_2 \bar{\Pi}_{u_4 c}^{(000)} + (\bar{w}_2 - \bar{z}_2) (W^2 - Wz) \Pi_{u_4 c}^{(020)}] - a_{s_3} b_{u_4} \frac{q^2}{2} \frac{1}{2} \bar{z}_2 \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} \\
&\quad \left. + a_{s_3} b_{04} \frac{1}{2} (\bar{w}_2 + \bar{z}_2) \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} - a_{03} b_{u_4} \frac{1}{2} (\bar{w}_2 - \bar{z}_2) \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + a_{s_3} b_{u_4} q^2 \bar{z}_2 \bar{\Pi}_{cc}^{(200)} \right\}, \quad (681)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{DE\Box[1][2]\nu}^{LS+} = & -\frac{ig_{*1}^2g_{*2}^2}{(4\pi)^2} \left\{ \hat{D}_1\hat{E}_2[w_{2+}\Pi_{u_1s_2}^{(010)} + z_{2+}\Pi_{u_1s_2}^{(001)}] + \alpha_{u_1c}^{DE}(w_{2+} + z_{2+})\Pi_{u_1c}^{(010)} \right. \\
& -\alpha_{s_2c}^{DE}(w_{2+} - z_{2+})\Pi_{s_2c}^{(010)} - 2b_{s_2}\hat{D}_1[w_{2+}\bar{\Pi}_{u_1c}^{(000)} + (w_{2+} + z_{2+})(W^2 + Wz)\Pi_{u_1c}^{(020)}] \\
& + 2a_{u_1}\hat{E}_2[w_{2+}\bar{\Pi}_{s_2c}^{(000)} + (w_{2+} - z_{2+})(W^2 - Wz)\Pi_{s_2c}^{(020)}] - a_{u_1}b_{s_2}\frac{q^2}{2}\frac{1}{2}z_{2+}\bar{\Pi}_{cc}^{(000)} \\
& + a_{u_1}b_{02}\frac{1}{2}(w_{2+} + z_{2+})\bar{\Pi}_{cc}^{(000)} - a_{01}b_{s_2}\frac{1}{2}(w_{2+} - z_{2+})\bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + a_{u_1}b_{s_2}q^2z_{2+}\bar{\Pi}_{cc}^{(200)} \left. \right\} \\
& -\frac{ig_{*3}^2g_{*4}^2}{(4\pi)^2} \left\{ \hat{D}_3\hat{E}_4[w_{2+}\Pi_{s_3u_4}^{(010)} + z_{2+}\Pi_{s_3u_4}^{(001)}] + \beta_{s_3c}^{DE}(w_{2+} + z_{2+})\Pi_{s_3c}^{(010)} \right. \\
& -\beta_{u_4c}^{DE}(w_{2+} - z_{2+})\Pi_{u_4c}^{(010)} - 2b_{u_4}\hat{D}_3[w_{2+}\bar{\Pi}_{s_3c}^{(000)} + (w_{2+} + z_{2+})(W^2 + Wz)\Pi_{s_3c}^{(020)}] \\
& + 2a_{s_3}\hat{E}_4[w_{2+}\bar{\Pi}_{u_4c}^{(000)} + (w_{2+} - z_{2+})(W^2 - Wz)\Pi_{u_4c}^{(020)}] - a_{s_3}b_{u_4}\frac{q^2}{2}\frac{1}{2}z_{2+}\bar{\Pi}_{cc}^{(000)} \\
& + a_{s_3}b_{04}\frac{1}{2}(w_{2+} + z_{2+})\bar{\Pi}_{cc}^{(000)} - a_{03}b_{u_4}\frac{1}{2}(w_{2+} - z_{2+})\bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + a_{s_3}b_{u_4}q^2z_{2+}\bar{\Pi}_{cc}^{(200)} \left. \right\}, \tag{682}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{DE\Box[1][2]\nu}^{LS-} = & \frac{ig_{*1}^2g_{*2}^2}{(4\pi)^2} \left\{ \hat{D}_1\hat{E}_2[w_{2-}\Pi_{u_1s_2}^{(010)} + z_{2-}\Pi_{u_1s_2}^{(001)}] + \alpha_{u_1c}^{DE}(w_{2-} + z_{2-})\Pi_{u_1c}^{(010)} \right. \\
& -\alpha_{s_2c}^{DE}(w_{2-} - z_{2-})\Pi_{s_2c}^{(010)} - 2b_{s_2}\hat{D}_1[w_{2-}\bar{\Pi}_{u_1c}^{(000)} + (w_{2-} + z_{2-})(W^2 + Wz)\Pi_{u_1c}^{(020)}] \\
& + 2a_{u_1}\hat{E}_2[w_{2-}\bar{\Pi}_{s_2c}^{(000)} + (w_{2-} - z_{2-})(W^2 - Wz)\Pi_{s_2c}^{(020)}] - a_{u_1}b_{s_2}\frac{q^2}{2}\frac{1}{2}z_{2-}\bar{\Pi}_{cc}^{(000)} \\
& + a_{u_1}b_{02}\frac{1}{2}(w_{2-} + z_{2-})\bar{\Pi}_{cc}^{(000)} - a_{01}b_{s_2}\frac{1}{2}(w_{2-} - z_{2-})\bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + a_{u_1}b_{s_2}q^2z_{2-}\bar{\Pi}_{cc}^{(200)} \left. \right\} \\
& -\frac{ig_{*3}^2g_{*4}^2}{(4\pi)^2} \left\{ \hat{D}_3\hat{E}_4[w_{2-}\Pi_{s_3u_4}^{(010)} + z_{2-}\Pi_{s_3u_4}^{(001)}] + \beta_{s_3c}^{DE}(w_{2-} + z_{2-})\Pi_{s_3c}^{(010)} \right. \\
& -\beta_{u_4c}^{DE}(w_{2-} - z_{2-})\Pi_{u_4c}^{(010)} - 2b_{u_4}\hat{D}_3[w_{2-}\bar{\Pi}_{s_3c}^{(000)} + (w_{2-} + z_{2-})(W^2 + Wz)\Pi_{s_3c}^{(020)}] \\
& + 2a_{s_3}\hat{E}_4[w_{2-}\bar{\Pi}_{u_4c}^{(000)} + (w_{2-} - z_{2-})(W^2 - Wz)\Pi_{u_4c}^{(020)}] - a_{s_3}b_{u_4}\frac{q^2}{2}\frac{1}{2}z_{2-}\bar{\Pi}_{cc}^{(000)} \\
& + a_{s_3}b_{04}\frac{1}{2}(w_{2-} + z_{2-})\bar{\Pi}_{cc}^{(000)} - a_{03}b_{u_4}\frac{1}{2}(w_{2-} - z_{2-})\bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + a_{s_3}b_{u_4}q^2z_{2-}\bar{\Pi}_{cc}^{(200)} \left. \right\}. \tag{683}
\end{aligned}$$

B.6.3 Caso $\mathcal{N}_{ED}^{\Box[1][2]\mu}$

Com as definições

$$[a_{02}\hat{E}_1 - a_{s_2}\hat{E}_1(m_1^2 - \bar{m}_{*1}^2)] = \alpha_{u_1c}^{ED}, \tag{684}$$

$$[b_{01}\hat{D}_2 - b_{u_1}\hat{D}_2(m_2^2 - \bar{m}_{*2}^2)] = \alpha_{s_2c}^{ED}, \tag{685}$$

$$[a_{04}\hat{E}_3 - a_{u_4}\hat{E}_3(m_1^2 - \bar{m}_{*3}^2)] = \beta_{s_3c}^{ED}, \tag{686}$$

$$[b_{03}\hat{D}_4 - b_{s_3}\hat{D}_4(m_2^2 - \bar{m}_{*4}^2)] = \beta_{u_4c}^{ED}. \tag{687}$$

Para esse caso temos (resolvemos para I_{cc}^μ e $I_{cc}^{2\mu}$, $I_{cc}^{\rho\theta\mu}$ e $I_{cc}^{22\mu} := 0$)

$$\begin{aligned}
[\bar{u}_1 u_1 \bar{u}_2 \gamma_\nu u_2] \mathfrak{N}_{ED}^{\square[1][2]\mu} &= -g_{*1}^2 g_{*2}^2 \left\{ \hat{E}_1 \hat{D}_2 I_{u_1 s_2}^\mu + \alpha_{u_1 c}^{ED} I_{u_1 c}^\mu + \alpha_{s_2 c}^{ED} I_{s_2 c}^\mu + 2a_{s_2} \hat{E}_1 W_\rho I_{u_1 c}^{\rho\mu} - 2b_{u_1} \hat{D}_2 W_\rho I_{s_2 c}^{\rho\mu} \right. \\
&\quad + b_{u_1} a_{s_2} t / 2 z_\rho I_{cc}^{\rho\mu} - b_{u_1} a_{02} (W + z)_\rho I_{cc}^{\rho\mu} + b_{01} a_{s_2} (W - z)_\rho I_{cc}^{\rho\mu} \\
&\quad \left. - b_{u_1} a_{s_2} [2z_\rho I_{cc}^{2\rho\mu}] \right\} [\bar{u}_1 \gamma_\mu u_1 \bar{u}_2 u_2] \\
&\quad + g_{*3}^2 g_{*4}^2 \left\{ \hat{E}_3 \hat{D}_4 I_{s_3 u_4}^\mu + \beta_{s_3 c}^{ED} I_{s_3 c}^\mu + \beta_{u_4 c}^{ED} I_{u_4 c}^\mu - 2a_{u_4} \hat{E}_3 W_\rho I_{s_3 c}^{\rho\mu} + 2b_{s_3} \hat{D}_4 W_\rho I_{u_4 c}^{\rho\mu} \right. \\
&\quad - b_{s_3} a_{u_4} t / 2 z_\rho I_{cc}^{\rho\mu} + b_{s_3} a_{04} (W + z)_\rho I_{cc}^{\rho\mu} - b_{03} a_{u_4} (W - z)_\rho I_{cc}^{\rho\mu} \\
&\quad \left. + b_{s_3} a_{u_4} [2z_\rho I_{cc}^{2\rho\mu}] \right\} [\bar{u}_1 \gamma_\mu u_1 \bar{u}_2 u_2]. \tag{688}
\end{aligned}$$

Assim:

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{ED\square[1][2]}^C &= \frac{ig_{*1}^2 g_{*2}^2}{(4\pi)^2} \left\{ \hat{E}_1 \hat{D}_2 [\bar{w}_1 \Pi_{u_1 s_2}^{(010)} + \bar{z}_1 \Pi_{u_1 s_2}^{(001)}] + \alpha_{u_1 c}^{ED} (\bar{w}_1 + \bar{z}_1) \Pi_{u_1 c}^{(010)} - \alpha_{s_2 c}^{ED} (\bar{w}_1 - \bar{z}_1) \Pi_{s_2 c}^{(010)} \right. \\
&\quad - 2a_{s_2} \hat{E}_1 [\bar{w}_1 \bar{\Pi}_{u_1 c}^{(000)} + (\bar{w}_1 + \bar{z}_1) (W^2 + Wz) \Pi_{u_1 c}^{(020)}] \\
&\quad + 2b_{u_1} \hat{D}_2 [\bar{w}_1 \bar{\Pi}_{s_2 c}^{(000)} + (\bar{w}_1 - \bar{z}_1) (W^2 - Wz) \Pi_{s_2 c}^{(020)}] \\
&\quad - b_{u_1} a_{s_2} \frac{q^2}{2} \frac{1}{2} \bar{z}_1 \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + b_{u_1} a_{02} \frac{1}{2} (\bar{w}_1 + \bar{z}_1) \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} \\
&\quad \left. - b_{01} a_{s_2} \frac{1}{2} (\bar{w}_1 - \bar{z}_1) \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + b_{u_1} a_{s_2} q^2 \bar{z}_1 \bar{\Pi}_{cc}^{(200)} \right\} \\
&\quad + \frac{ig_{*3}^2 g_{*4}^2}{(4\pi)^2} \left\{ \hat{E}_3 \hat{D}_4 [\bar{w}_1 \Pi_{s_3 u_4}^{(010)} + \bar{z}_1 \Pi_{s_3 u_4}^{(001)}] + \beta_{s_3 c}^{ED} (\bar{w}_1 + \bar{z}_1) \Pi_{s_3 c}^{(010)} - \beta_{u_4 c}^{ED} (\bar{w}_1 - \bar{z}_1) \Pi_{u_4 c}^{(010)} \right. \\
&\quad - 2a_{u_4} \hat{E}_3 [\bar{w}_1 \bar{\Pi}_{s_3 c}^{(000)} + (\bar{w}_1 + \bar{z}_1) (W^2 + Wz) \Pi_{s_3 c}^{(020)}] \\
&\quad + 2b_{s_3} \hat{D}_4 [\bar{w}_1 \bar{\Pi}_{u_4 c}^{(000)} + (\bar{w}_1 - \bar{z}_1) (W^2 - Wz) \Pi_{u_4 c}^{(020)}] \\
&\quad - b_{s_3} a_{u_4} \frac{q^2}{2} \frac{1}{2} \bar{z}_1 \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + b_{s_3} a_{04} \frac{1}{2} (\bar{w}_1 + \bar{z}_1) \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} \\
&\quad \left. - b_{03} a_{u_4} \frac{1}{2} (\bar{w}_1 - \bar{z}_1) \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + b_{s_3} a_{u_4} q^2 \bar{z}_1 \bar{\Pi}_{cc}^{(200)} \right\}, \tag{689}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{ED\Box[1][2]}^{LS+} = & \frac{ig_{*1}^2 g_{*2}^2}{(4\pi)^2} \left\{ \hat{E}_1 \hat{D}_2 [w_{1+} \Pi_{u_1 s_2}^{(010)} + z_{1+} \Pi_{u_1 s_2}^{(001)}] + \alpha_{u_1 c}^{ED} (w_{1+} + z_{1+}) \Pi_{u_1 c}^{(010)} \right. \\
& - \alpha_{s_2 c}^{ED} (w_{1+} - z_{1+}) \Pi_{s_2 c}^{(010)} - 2a_{s_2} \hat{E}_1 [w_{1+} \bar{\Pi}_{u_1 c}^{(000)} + (w_{1+} + z_{1+})(W^2 + Wz) \Pi_{u_1 c}^{(020)}] \\
& + 2b_{u_1} \hat{D}_2 [w_{1+} \bar{\Pi}_{s_2 c}^{(000)} + (w_{1+} - z_{1+})(W^2 - Wz) \Pi_{s_2 c}^{(020)}] \\
& - b_{u_1} a_{s_2} \frac{q^2}{2} \frac{1}{2} z_{1+} \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + b_{u_1} a_{02} \frac{1}{2} (w_{1+} + z_{1+}) \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} \\
& \left. - b_{01} a_{s_2} \frac{1}{2} (w_{1+} - z_{1+}) \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + b_{u_1} a_{s_2} q^2 z_{1+} \bar{\Pi}_{cc}^{(200)} \right\} \\
& + \frac{ig_{*3}^2 g_{*4}^2}{(4\pi)^2} \left\{ \hat{E}_3 \hat{D}_4 [w_{1+} \Pi_{s_3 u_4}^{(010)} + z_{1+} \Pi_{s_3 u_4}^{(001)}] + \beta_{s_3 c}^{ED} (w_{1+} + z_{1+}) \Pi_{s_3 c}^{(010)} \right. \\
& - \beta_{u_4 c}^{ED} (w_{1+} - z_{1+}) \Pi_{u_4 c}^{(010)} - 2a_{u_4} \hat{E}_3 [w_{1+} \bar{\Pi}_{s_3 c}^{(000)} + (w_{1+} + z_{1+})(W^2 + Wz) \Pi_{s_3 c}^{(020)}] \\
& + 2b_{s_3} \hat{D}_4 [w_{1+} \bar{\Pi}_{u_4 c}^{(000)} + (w_{1+} - z_{1+})(W^2 - Wz) \Pi_{u_4 c}^{(020)}] \\
& - b_{s_3} a_{u_4} \frac{q^2}{2} \frac{1}{2} z_{1+} \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + b_{s_3} a_{04} \frac{1}{2} (w_{1+} + z_{1+}) \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} \\
& \left. - b_{03} a_{u_4} \frac{1}{2} (w_{1+} - z_{1+}) \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + b_{s_3} a_{u_4} q^2 z_{1+} \bar{\Pi}_{cc}^{(200)} \right\}, \tag{690}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{ED\Box[1][2]}^{LS-} = & \frac{ig_{*1}^2 g_{*2}^2}{(4\pi)^2} \left\{ \hat{E}_1 \hat{D}_2 [w_{1-} \Pi_{u_1 s_2}^{(010)} + z_{1-} \Pi_{u_1 s_2}^{(001)}] + \alpha_{u_1 c}^{ED} (w_{1-} + z_{1-}) \Pi_{u_1 c}^{(010)} \right. \\
& - \alpha_{s_2 c}^{ED} (w_{1-} - z_{1-}) \Pi_{s_2 c}^{(010)} + 2a_{s_2} \hat{E}_1 [w_{1-} \bar{\Pi}_{u_1 c}^{(000)} + (w_{1-} + z_{1-})(W^2 + Wz) \Pi_{u_1 c}^{(020)}] \\
& + 2b_{u_1} \hat{D}_2 [w_{1-} \bar{\Pi}_{s_2 c}^{(000)} + (w_{1-} - z_{1-})(W^2 - Wz) \Pi_{s_2 c}^{(020)}] - b_{u_1} a_{s_2} \frac{q^2}{2} \frac{1}{2} z_{1-} \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} \\
& \left. + b_{u_1} a_{02} \frac{1}{2} (w_{1-} + z_{1-}) \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} - b_{01} a_{s_2} \frac{1}{2} (w_{1-} - z_{1-}) \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + b_{u_1} a_{s_2} q^2 z_{1-} \bar{\Pi}_{cc}^{(200)} \right\} \\
& + \frac{ig_{*3}^2 g_{*4}^2}{(4\pi)^2} \left\{ \hat{E}_3 \hat{D}_4 [w_{1-} \Pi_{s_3 u_4}^{(010)} + z_{1-} \Pi_{s_3 u_4}^{(001)}] + \beta_{s_3 c}^{ED} (w_{1-} + z_{1-}) \Pi_{s_3 c}^{(010)} \right. \\
& - \beta_{u_4 c}^{ED} (w_{1-} - z_{1-}) \Pi_{u_4 c}^{(010)} - 2a_{u_4} \hat{E}_3 [w_{1-} \bar{\Pi}_{s_3 c}^{(000)} + (w_{1-} + z_{1-})(W^2 + Wz) \Pi_{s_3 c}^{(020)}] \\
& + 2b_{s_3} \hat{D}_4 [w_{1-} \bar{\Pi}_{u_4 c}^{(000)} + (w_{1-} - z_{1-})(W^2 - Wz) \Pi_{u_4 c}^{(020)}] - b_{s_3} a_{u_4} \frac{q^2}{2} \frac{1}{2} z_{1-} \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} \\
& \left. + b_{s_3} a_{04} \frac{1}{2} (w_{1-} + z_{1-}) \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} - b_{03} a_{u_4} \frac{1}{2} (w_{1-} - z_{1-}) \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + b_{s_3} a_{u_4} q^2 z_{1-} \bar{\Pi}_{cc}^{(200)} \right\}. \tag{691}
\end{aligned}$$

B.6.4 Caso $\aleph_{EE}^{\square[1][2]\mu\nu}$

$$\begin{aligned}
\aleph_{EE}^{\square[1][2]\mu\nu} = & -g_{*1}^2 g_{*2}^2 \left\{ \hat{E}_1 \hat{E}_2 I_{u_1 s_2}^{\mu\nu} \right. \\
& + [b_{s_2} \hat{E}_1 + b_{u_1} \hat{E}_2 + b_{01} b_{02} - (b_{01} b_{s_2} + b_{u_1} b_{02})t/4 + b_{u_1} b_{s_2} (t/4)^2] I_{cc}^{\mu\nu} \\
& + [b_{02} \hat{E}_1 - b_{s_2} \hat{E}_1 (m_1^2 - \bar{m}_{*1}^2)] I_{u_1 c}^{\mu\nu} + [b_{01} \hat{E}_2 - b_{u_1} \hat{E}_2 (m_2^2 - \bar{m}_{*2}^2)] I_{s_2 c}^{\mu\nu} \\
& + [2b_{s_2} \hat{E}_1 W_\rho] I_{u_1 c}^{\rho\mu\nu} - [2b_{u_1} \hat{E}_2 W_\rho] I_{s_2 c}^{\rho\mu\nu} \\
& + [b_{u_1} b_{s_2} t/2 z_\rho - b_{u_1} b_{02} (W + z)_\rho + b_{01} b_{s_2} (W - z)_\rho] I_{cc}^{\rho\mu\nu} \\
& + [b_{u_1} b_{02} - b_{u_1} b_{s_2} t/2 + b_{01} b_{s_2}] I_{cc}^{2\mu\nu} \\
& \left. - b_{u_1} b_{s_2} [(W + z)_\rho (W - z)_\theta I_{cc}^{\rho\theta\mu\nu} + 2z_\rho I_{cc}^{2\rho\mu\nu} - I_{cc}^{22\mu\nu}] \right\} \\
& - g_{*3}^2 g_{*4}^2 \left\{ \hat{E}_3 \hat{E}_4 I_{s_1 u_2}^{\mu\nu} \right. \\
& + [b_{u_4} \hat{E}_3 + b_{s_3} \hat{E}_4 + b_{03} b_{04} - (b_{03} b_{u_4} + b_{s_3} b_{04})t/4 + b_{s_3} b_{u_4} (t/4)^2] I_{cc}^{\mu\nu} \\
& + [b_{04} \hat{E}_3 - b_{u_4} \hat{E}_3 (m_1^2 - \bar{m}_{*3}^2)] I_{s_1 c}^{\mu\nu} + [b_{03} \hat{E}_4 - b_{s_3} \hat{E}_4 (m_2^2 - \bar{m}_{*4}^2)] I_{u_2 c}^{\mu\nu} \\
& - [2b_{u_4} \hat{E}_3 W_\rho] I_{s_1 c}^{\rho\mu\nu} + [2b_{s_3} \hat{E}_4 W_\rho] I_{u_2 c}^{\rho\mu\nu} \\
& + [-b_{s_3} b_{u_4} t/2 z_\rho + b_{s_3} b_{04} (W + z)_\rho - b_{03} b_{u_4} (W - z)_\rho] I_{cc}^{\rho\mu\nu} \\
& + [b_{s_3} b_{04} - b_{s_3} b_{u_4} t/2 + b_{03} b_{u_4}] I_{cc}^{2\mu\nu} \\
& \left. + b_{s_3} b_{u_4} [-(W + z)_\rho (W - z)_\theta I_{cc}^{\rho\theta\mu\nu} + 2z_\rho I_{cc}^{2\rho\mu\nu} + I_{cc}^{22\mu\nu}] \right\}. \tag{692}
\end{aligned}$$

Seguindo as definições

$$[b_{s_2} \hat{E}_1 + b_{u_1} \hat{E}_2 + b_{01} b_{02} - (b_{01} b_{s_2} + b_{u_1} b_{02})t/4 + b_{u_1} b_{s_2} (t/4)^2] = \alpha_{cc}^{EE}, \tag{693}$$

$$[b_{02} \hat{E}_1 - b_{s_2} \hat{E}_1 (m_1^2 - \bar{m}_{*1}^2)] = \alpha_{u_1 c}^{EE}, \tag{694}$$

$$[b_{01} \hat{E}_2 - b_{u_1} \hat{E}_2 (m_2^2 - \bar{m}_{*2}^2)] = \alpha_{s_2 c}^{EE}, \tag{695}$$

$$[b_{u_1} b_{02} - b_{u_1} b_{s_2} t/2 + b_{01} b_{s_2}] = \alpha_{2cc}^{EE}, \tag{696}$$

$$[b_{u_4} \hat{E}_3 + b_{s_3} \hat{E}_4 + b_{03} b_{04} - (b_{03} b_{u_4} + b_{s_3} b_{04})t/4 + b_{s_3} b_{u_4} (t/4)^2] = \beta_{cc}^{EE}, \tag{697}$$

$$[b_{04} \hat{E}_3 - b_{u_4} \hat{E}_3 (m_1^2 - \bar{m}_{*3}^2)] = \beta_{s_3 c}^{EE}, \tag{698}$$

$$[b_{03} \hat{E}_4 - b_{s_3} \hat{E}_4 (m_2^2 - \bar{m}_{*4}^2)] = \beta_{u_4 c}^{EE}, \tag{699}$$

$$[b_{s_3} b_{04} - b_{s_3} b_{u_4} t/2 + b_{03} b_{u_4}] = \beta_{2cc}^{EE}, \tag{700}$$

encontramos as componentes de $\aleph_{EE}^{\square[1][2]\mu\nu}$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{EE^{\square[1][2]}}^C = & \frac{-ig_{*1}^2 g_{*2}^2}{(4\pi)^2} \left\{ \hat{E}_1 \hat{E}_2 [\bar{g} \bar{\Pi}_{u_1 s_2}^{(000)} + w \bar{w} \Pi_{u_1 s_2}^{(020)} + z \bar{z} \Pi_{u_1 s_2}^{(002)} + (w \bar{z} + z \bar{w}) \Pi_{u_1 s_2}^{(011)}] + \alpha_{cc}^{EE} \frac{1}{2} \bar{g} \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} \right. \\
& + \alpha_{u_1 c}^{EE} \frac{1}{2} [\bar{g} \bar{\Pi}_{u_1 c}^{(000)} + (w \bar{w} + z \bar{z} + w \bar{z} + z \bar{w}) \Pi_{u_1 c}^{(020)}] \\
& + \alpha_{s_2 c}^{EE} \frac{1}{2} [\bar{g} \bar{\Pi}_{s_2 c}^{(000)} + (w \bar{w} + z \bar{z} - w \bar{z} - z \bar{w}) \Pi_{s_2 c}^{(020)}] \\
& - b_{s_2} \hat{E}_1 [(\bar{g}(W^2 + Wz) + w \bar{w}) \bar{\Pi}_{u_1 c}^{(010)} + (w \bar{w} + w \bar{z} + z \bar{w}) [\bar{\Pi}_{u_1 c}^{(010)} + 2(W^2 + Wz) \Pi_{u_1 c}^{(030)}] \\
& + 2(W^2 + Wz) z \bar{z} \Pi_{u_1 c}^{(030)}] \\
& + b_{u_1} \hat{E}_2 [(\bar{g}(W^2 - Wz) + w \bar{w}) \bar{\Pi}_{s_2 c}^{(010)} + (w \bar{w} - w \bar{z} - z \bar{w}) [\bar{\Pi}_{s_2 c}^{(010)} + 2(W^2 - Wz) \Pi_{s_2 c}^{(030)}] \\
& + 2(W^2 - Wz) z \bar{z} \Pi_{s_2 c}^{(030)}] + \alpha_{2cc}^{EE} \frac{1}{2} \bar{g} q^2 \bar{\Pi}_{cc}^{(200)} \\
& + b_{u_1} b_{s_2} \left[-\frac{1}{4} [(W^2 - z^2) \bar{g} + 2(w \bar{w} + z \bar{z})] \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + \frac{1}{2} \bar{g} (3\dot{\Pi}_{cc}^{(000)} + 2q^2 \bar{\Pi}_{cc}^{(200)} + q^4 \bar{\Pi}_{cc}^{(400)}) \right] \left. \right\} \\
& - \frac{ig_{*3}^2 g_{*4}^2}{(4\pi)^2} \left\{ \hat{E}_3 \hat{E}_4 [\bar{g} \bar{\Pi}_{s_3 u_4}^{(000)} + w \bar{w} \Pi_{s_3 u_4}^{(020)} + z \bar{z} \Pi_{s_3 u_4}^{(002)} + (w \bar{z} + z \bar{w}) \Pi_{s_3 u_4}^{(011)}] + \beta_{cc}^{EE} \frac{1}{2} \bar{g} \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} \right. \\
& + \beta_{s_3 c}^{EE} \frac{1}{2} [\bar{g} \bar{\Pi}_{s_3 c}^{(000)} + (w \bar{w} + z \bar{z} + w \bar{z} + z \bar{w}) \Pi_{s_3 c}^{(020)}] \\
& + \beta_{u_4 c}^{EE} \frac{1}{2} [\bar{g} \bar{\Pi}_{u_4 c}^{(000)} + (w \bar{w} + z \bar{z} - w \bar{z} - z \bar{w}) \Pi_{u_4 c}^{(020)}] \\
& - b_{u_4} \hat{E}_3 [(\bar{g}(W^2 + Wz) + w \bar{w}) \bar{\Pi}_{s_3 c}^{(010)} + (w \bar{w} + w \bar{z} + z \bar{w}) [\bar{\Pi}_{s_3 c}^{(010)} + 2(W^2 + Wz) \Pi_{s_3 c}^{(030)}] \\
& + 2(W^2 + Wz) z \bar{z} \Pi_{s_3 c}^{(030)}] \\
& - b_{s_3} \hat{E}_4 [(\bar{g}(W^2 - Wz) + w \bar{w}) \bar{\Pi}_{u_4 c}^{(010)} + (w \bar{w} - w \bar{z} - z \bar{w}) [\bar{\Pi}_{u_4 c}^{(010)} + 2(W^2 - Wz) \Pi_{u_4 c}^{(030)}] \\
& + 2(W^2 - Wz) z \bar{z} \Pi_{u_4 c}^{(030)}] + \beta_{2cc}^{EE} \frac{1}{2} \bar{g} q^2 \bar{\Pi}_{cc}^{(200)} \\
& + b_{s_3} b_{u_4} \left[-\frac{1}{4} [(W^2 - z^2) \bar{g} + 2(w \bar{w} + z \bar{z})] \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + \frac{1}{2} \bar{g} (3\dot{\Pi}_{cc}^{(000)} + 2q^2 \bar{\Pi}_{cc}^{(200)} + q^4 \bar{\Pi}_{cc}^{(400)}) \right] \left. \right\}, \tag{701}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{EE\Box[1][2]}^{LS+} = & \frac{-ig_{*1}^2 g_{*2}^2}{(4\pi)^2} \left\{ \hat{E}_1 \hat{E}_2 [g_+ \bar{\Pi}_{u_1 s_2}^{(000)} + ww_+ \Pi_{u_1 s_2}^{(020)} + zz_+ \Pi_{u_1 s_2}^{(002)} + (wz_+ + zw_+) \Pi_{u_1 s_2}^{(011)}] + \alpha_{cc}^{EE} \frac{1}{2} g_+ \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} \right. \\
& + \alpha_{u_1 c}^{EE} \frac{1}{2} [g_+ \bar{\Pi}_{u_1 c}^{(000)} + (ww_+ + zz_+ + wz_+ + zw_+) \Pi_{u_1 c}^{(020)}] \\
& + \alpha_{s_2 c}^{EE} \frac{1}{2} [g_+ \bar{\Pi}_{s_2 c}^{(000)} + (ww_+ + zz_+ - wz_+ - zw_+) \Pi_{s_2 c}^{(020)}] \\
& - b_{s_2} \hat{E}_1 [(g_+ (W^2 + Wz) + ww_+) \bar{\Pi}_{u_1 c}^{(010)} + (ww_+ + wz_+ + zw_+) [\bar{\Pi}_{u_1 c}^{(010)} + 2(W^2 + Wz) \Pi_{u_1 c}^{(030)}] \\
& + 2(W^2 + Wz) zz_+ \Pi_{u_1 c}^{(030)}] \\
& + b_{u_1} \hat{E}_2 [(g_+ (W^2 - Wz) + ww_+) \bar{\Pi}_{s_2 c}^{(010)} + (ww_+ - wz_+ - zw_+) [\bar{\Pi}_{s_2 c}^{(010)} + 2(W^2 - Wz) \Pi_{s_2 c}^{(030)}] \\
& + 2(W^2 - Wz) zz_+ \Pi_{s_2 c}^{(030)}] + \alpha_{2cc}^{EE} \frac{1}{2} g_+ q^2 \bar{\Pi}_{cc}^{(200)} \\
& + b_{u_1} b_{s_2} \left[-\frac{1}{4} [(W^2 - z^2) g_+ + 2(ww_+ + zz_+)] \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + \frac{1}{2} g_+ (3\dot{\Pi}_{cc}^{(000)} + 2q^2 \bar{\Pi}_{cc}^{(200)} + q^4 \bar{\Pi}_{cc}^{(400)}) \right] \left. \right\} \\
& - \frac{ig_{*3}^2 g_{*4}^2}{(4\pi)^2} \left\{ \hat{E}_3 \hat{E}_4 [g_+ \bar{\Pi}_{s_3 u_4}^{(000)} + ww_+ \Pi_{s_3 u_4}^{(020)} + zz_+ \Pi_{s_3 u_4}^{(002)} + (wz_+ + zw_+) \Pi_{s_3 u_4}^{(011)}] + \beta_{cc}^{EE} \frac{1}{2} g_+ \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} \right. \\
& + \beta_{s_3 c}^{EE} \frac{1}{2} [g_+ \bar{\Pi}_{s_3 c}^{(000)} + (ww_+ + zz_+ + wz_+ + zw_+) \Pi_{s_3 c}^{(020)}] \\
& + \beta_{u_4 c}^{EE} \frac{1}{2} [g_+ \bar{\Pi}_{u_4 c}^{(000)} + (ww_+ + zz_+ - wz_+ - zw_+) \Pi_{u_4 c}^{(020)}] \\
& - b_{u_4} \hat{E}_3 [(g_+ (W^2 + Wz) + ww_+) \bar{\Pi}_{s_3 c}^{(010)} + (ww_+ + wz_+ + zw_+) [\bar{\Pi}_{s_3 c}^{(010)} + 2(W^2 + Wz) \Pi_{s_3 c}^{(030)}] \\
& + 2(W^2 + Wz) zz_+ \Pi_{s_3 c}^{(030)}] \\
& - b_{s_3} \hat{E}_4 [(g_+ (W^2 - Wz) + ww_+) \bar{\Pi}_{u_4 c}^{(010)} + (ww_+ - wz_+ - zw_+) [\bar{\Pi}_{u_4 c}^{(010)} + 2(W^2 - Wz) \Pi_{u_4 c}^{(030)}] \\
& + 2(W^2 - Wz) zz_+ \Pi_{u_4 c}^{(030)}] + \beta_{2cc}^{EE} \frac{1}{2} g_+ q^2 \bar{\Pi}_{cc}^{(200)} \\
& + b_{s_3} b_{u_4} \left[-\frac{1}{4} [(W^2 - z^2) g_+ + 2(ww_+ + zz_+)] \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + \frac{1}{2} g_+ (3\dot{\Pi}_{cc}^{(000)} + 2q^2 \bar{\Pi}_{cc}^{(200)} + q^4 \bar{\Pi}_{cc}^{(400)}) \right] \left. \right\}, \tag{702}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{EE\Box[1][2]}^{LS-} = & \frac{-ig_{*1}^2 g_{*2}^2}{(4\pi)^2} \left\{ \hat{E}_1 \hat{E}_2 [g_- \bar{\Pi}_{u_1 s_2}^{(000)} + ww_- \Pi_{u_1 s_2}^{(020)} + zz_- \Pi_{u_1 s_2}^{(002)} + (wz_- + zw_-) \Pi_{u_1 s_2}^{(011)}] + \alpha_{cc}^{EE} \frac{1}{2} g_- \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} \right. \\
& + \alpha_{u_1 c}^{EE} \frac{1}{2} [g_- \bar{\Pi}_{u_1 c}^{(000)} + (ww_- + zz_- + wz_- + zw_-) \Pi_{u_1 c}^{(020)}] \\
& + \alpha_{s_2 c}^{EE} \frac{1}{2} [g_- \bar{\Pi}_{s_2 c}^{(000)} + (ww_- + zz_- - wz_- - zw_-) \Pi_{s_2 c}^{(020)}] \\
& - b_{s_2} \hat{E}_1 [(g_- (W^2 + Wz) + ww_-) \bar{\Pi}_{u_1 c}^{(010)} + (ww_- + wz_- + zw_-) [\bar{\Pi}_{u_1 c}^{(010)} + 2(W^2 + Wz) \Pi_{u_1 c}^{(030)}] \\
& + 2(W^2 + Wz) zz_- \Pi_{u_1 c}^{(030)}] \\
& + b_{u_1} \hat{E}_2 [(g_- (W^2 - Wz) + ww_-) \bar{\Pi}_{s_2 c}^{(010)} + (ww_- - wz_- - zw_-) [\bar{\Pi}_{s_2 c}^{(010)} + 2(W^2 - Wz) \Pi_{s_2 c}^{(030)}] \\
& + 2(W^2 - Wz) zz_- \Pi_{s_2 c}^{(030)}] + \alpha_{2cc}^{EE} \frac{1}{2} g_- q^2 \bar{\Pi}_{cc}^{(200)} \\
& + b_{u_1} b_{s_2} \left[-\frac{1}{4} [(W^2 - z^2) g_- + 2(ww_- + zz_-)] \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + \frac{1}{2} g_- (3\dot{\Pi}_{cc}^{(000)} + 2q^2 \bar{\Pi}_{cc}^{(200)} + q^4 \bar{\Pi}_{cc}^{(400)}) \right] \left. \right\} \\
& - \frac{ig_{*3}^2 g_{*4}^2}{(4\pi)^2} \left\{ \hat{E}_3 \hat{E}_4 [g_- \bar{\Pi}_{s_3 u_4}^{(000)} + ww_- \Pi_{s_3 u_4}^{(020)} + zz_- \Pi_{s_3 u_4}^{(002)} + (wz_- + zw_-) \Pi_{s_3 u_4}^{(011)}] + \beta_{cc}^{EE} \frac{1}{2} g_- \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} \right. \\
& + \beta_{s_3 c}^{EE} \frac{1}{2} [g_- \bar{\Pi}_{s_3 c}^{(000)} + (ww_- + zz_- + wz_- + zw_-) \Pi_{s_3 c}^{(020)}] \\
& + \beta_{u_4 c}^{EE} \frac{1}{2} [g_- \bar{\Pi}_{u_4 c}^{(000)} + (ww_- + zz_- - wz_- - zw_-) \Pi_{u_4 c}^{(020)}] \\
& - b_{u_4} \hat{E}_3 [(g_- (W^2 + Wz) + ww_-) \bar{\Pi}_{s_3 c}^{(010)} + (ww_- + wz_- + zw_-) [\bar{\Pi}_{s_3 c}^{(010)} + 2(W^2 + Wz) \Pi_{s_3 c}^{(030)}] \\
& + 2(W^2 + Wz) zz_- \Pi_{s_3 c}^{(030)}] \\
& - b_{s_3} \hat{E}_4 [(g_- (W^2 - Wz) + ww_-) \bar{\Pi}_{u_4 c}^{(010)} + (ww_- - wz_- - zw_-) [\bar{\Pi}_{u_4 c}^{(010)} + 2(W^2 - Wz) \Pi_{u_4 c}^{(030)}] \\
& + 2(W^2 - Wz) zz_- \Pi_{u_4 c}^{(030)}] + \beta_{2cc}^{EE} \frac{1}{2} g_- q^2 \bar{\Pi}_{cc}^{(200)} \\
& + b_{s_3} b_{u_4} \left[-\frac{1}{4} [(W^2 - z^2) g_- + 2(ww_- + zz_-)] \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + \frac{1}{2} g_- (3\dot{\Pi}_{cc}^{(000)} + 2q^2 \bar{\Pi}_{cc}^{(200)} + q^4 \bar{\Pi}_{cc}^{(400)}) \right] \left. \right\}, \tag{703}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{EE\Box[1][2]}^{SS} = & \frac{-ig_{*1}^2 g_{*2}^2}{(4\pi)^2} \frac{2}{3} \left\{ \hat{E}_1 \hat{E}_2 \bar{\Pi}_{u_1 s_2}^{(000)} + \alpha_{cc}^{EE} \frac{1}{2} \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + \alpha_{u_1 c}^{EE} \frac{1}{2} \bar{\Pi}_{u_1 c}^{(000)} + \alpha_{s_2 c}^{EE} \frac{1}{2} \bar{\Pi}_{s_2 c}^{(000)} \right. \\
& - b_{s_2} \hat{E}_1 (W^2 + Wz) \bar{\Pi}_{u_1 c}^{(000)} + b_{u_1} \hat{E}_2 (W^2 - Wz) \bar{\Pi}_{s_2 c}^{(000)} + \alpha_{2cc}^{EE} \frac{1}{2} q^2 \bar{\Pi}_{cc}^{(200)} \\
& + b_{u_1} b_{s_2} \left[-\frac{1}{4} (W^2 - z^2) \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + \frac{1}{2} (3\dot{\Pi}_{cc}^{(000)} + 2q^2 \bar{\Pi}_{cc}^{(200)} + q^4 \bar{\Pi}_{cc}^{(400)}) \right] \left. \right\} \\
& - \frac{ig_{*3}^2 g_{*4}^2}{(4\pi)^2} \left\{ \hat{E}_3 \hat{E}_4 \bar{\Pi}_{s_3 u_4}^{(000)} + \beta_{cc}^{EE} \frac{1}{2} \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + \beta_{s_3 c}^{EE} \frac{1}{2} \bar{\Pi}_{s_3 c}^{(000)} + \beta_{u_4 c}^{EE} \frac{1}{2} \bar{\Pi}_{u_4 c}^{(000)} \right. \\
& - b_{u_4} \hat{E}_3 (W^2 + Wz) \bar{\Pi}_{s_3 c}^{(010)} - b_{s_3} \hat{E}_4 (W^2 - Wz) \bar{\Pi}_{u_4 c}^{(010)} + \beta_{2cc}^{EE} \frac{1}{2} q^2 \bar{\Pi}_{cc}^{(200)} \\
& + b_{s_3} b_{u_4} \left[-\frac{1}{4} (W^2 - z^2) \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + \frac{1}{2} (3\dot{\Pi}_{cc}^{(000)} + 2q^2 \bar{\Pi}_{cc}^{(200)} + q^4 \bar{\Pi}_{cc}^{(400)}) \right] \left. \right\}, \tag{704}
\end{aligned}$$

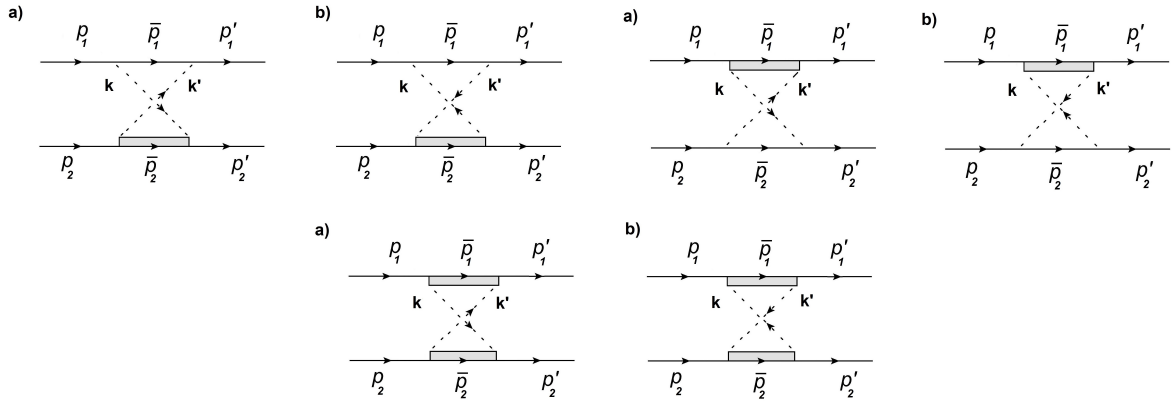


Figura 84 - Diagrama \times com ressonância de spin-3/2

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{EE\Box[1][2]}^T &= \frac{-ig_{*1}^2 g_{*2}^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{3} \left\{ \hat{E}_1 \hat{E}_2 \bar{\Pi}_{u_1 s_2}^{(000)} + \alpha_{cc}^{EE} \frac{1}{2} \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + \alpha_{u_1 c}^{EE} \frac{1}{2} \bar{\Pi}_{u_1 c}^{(000)} + \alpha_{s_2 c}^{EE} \frac{1}{2} \bar{\Pi}_{s_2 c}^{(000)} \right. \\
&\quad - b_{s_2} \hat{E}_1 (W^2 + Wz) \bar{\Pi}_{u_1 c}^{(000)} + b_{u_1} \hat{E}_2 (W^2 - Wz) \bar{\Pi}_{s_2 c}^{(000)} + \alpha_{2cc}^{EE} \frac{1}{2} q^2 \bar{\Pi}_{cc}^{(200)} \\
&\quad \left. + b_{u_1} b_{s_2} \left[-\frac{1}{4} (W^2 - z^2) \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + \frac{1}{2} (3\dot{\Pi}_{cc}^{(000)} + 2q^2 \bar{\Pi}_{cc}^{(200)} + q^4 \bar{\Pi}_{cc}^{(400)}) \right] \right\} \\
&\quad - \frac{ig_{*3}^2 g_{*4}^2}{(4\pi)^2} \left\{ \hat{E}_3 \hat{E}_4 \bar{\Pi}_{s_3 u_4}^{(000)} + \beta_{cc}^{EE} \frac{1}{2} \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + \beta_{s_3 c}^{EE} \frac{1}{2} \bar{\Pi}_{s_3 c}^{(000)} + \beta_{u_4 c}^{EE} \frac{1}{2} \bar{\Pi}_{u_4 c}^{(000)} \right. \\
&\quad - b_{u_4} \hat{E}_3 (W^2 + Wz) \bar{\Pi}_{s_3 c}^{(010)} - b_{s_3} \hat{E}_4 (W^2 - Wz) \bar{\Pi}_{u_4 c}^{(010)} + \beta_{2cc}^{EE} \frac{1}{2} q^2 \bar{\Pi}_{cc}^{(200)} \\
&\quad \left. + b_{s_3} b_{u_4} \left[-\frac{1}{4} (W^2 - z^2) \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + \frac{1}{2} (3\dot{\Pi}_{cc}^{(000)} + 2q^2 \bar{\Pi}_{cc}^{(200)} + q^4 \bar{\Pi}_{cc}^{(400)}) \right] \right\}. \quad (705)
\end{aligned}$$

B.7 DIAGRAMA \times COM RESSONÂNCIAS

Os diagrama do tipo cruzado (\times) com ressonâncias de spin-3/2 são calculados de forma análoga aos casos anteriores para o tipo caixa (\Box) com resultados similares, também para ressonâncias de spin-3/2 em ambos os sentidos de propagação dos mésons por sua considerável grande extensão, não serão mostrados. Os diagramas considerados neste caso são mostrados na Figura 84.

B.8 DIAGRAMA ∇ RESSONÂNCIA DE SPIN-3/2 NA POSIÇÃO 1

O diagrama do tipo ∇ com uma ressonância de spin-3/2 na posição 1 e mostrando na Figura 85.

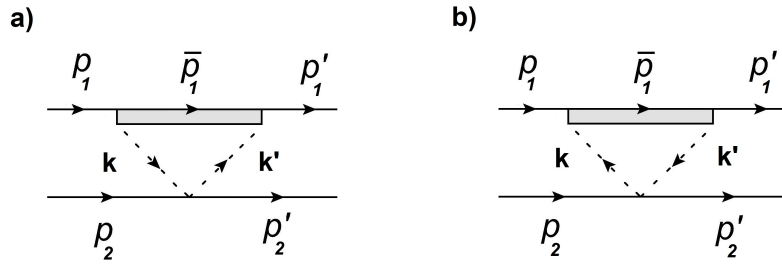


Figura 85 - Diagrama ∇ com ressonância com spin-3/2

A amplitude da troca de dois mésons para esse caso é dado por

$$iT_{\text{MMB}(B^*)B}^{\nabla} = \frac{(\vec{G}_1 \cdot \vec{G}_2)}{2(12)m_2^2} \left\{ \aleph_{DC}^{\nu} \bar{u}_1 u_1 \bar{u}_2 \gamma_{\nu} u_2 + \aleph_{EC}^{\mu\nu} \bar{u}_1 \gamma_{\mu} u_1 \bar{u}_2 \gamma_{\nu} u_2 \right\}. \quad (706)$$

B.8.1 Caso \aleph_{DC}^{∇}

$$\begin{aligned} \aleph_{DC}^{\nabla} &= g_{*1}^2 g_2^2 \left[\hat{D}_1 I_{u_1 c}^{\nu} + (a_{01} - a_{u1} t/4) I_{cc}^{\nu} + a_{u1} I_{cc}^{2\nu} - a_{u1} (W + z)_{\rho} I_{cc}^{\rho\nu} \right] \\ &\quad - g_{*3}^2 g_4^2 \left[\hat{D}_3 I_{s_3 c}^{\nu} + (a_{03} - a_{s3} t/4) I_{cc}^{\nu} + a_{s3} I_{cc}^{2\nu} + a_{s3} (W + z)_{\rho} I_{cc}^{\rho\nu} \right]. \end{aligned} \quad (707)$$

Então as componentes no espaço de spin

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{DC}^C &= -\frac{g_{*1}^2 g_2^2}{(4\pi)^2} \left\{ \hat{D}_1 (\bar{w}_2 + \bar{z}_2) \Pi_{u_1 c}^{(010)} + a_{u1} \frac{1}{2} (\bar{w}_2 + \bar{z}_2) \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} \right\} \\ &\quad - \frac{g_{*3}^2 g_4^2}{(4\pi)^2} \left\{ \hat{D}_3 (\bar{w}_2 + \bar{z}_2) \Pi_{s_3 c}^{(010)} + a_{s3} \frac{1}{2} (\bar{w}_2 + \bar{z}_2) \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} \right\}, \end{aligned} \quad (708)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{DC}^{LS+} &= -\frac{g_{*1}^2 g_2^2}{(4\pi)^2} \left\{ \hat{D}_1 (w_{2+} + z_{2+}) \Pi_{u_1 c}^{(010)} + a_{u1} \frac{1}{2} (w_{2+} + z_{2+}) \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} \right\} \\ &\quad - \frac{g_{*3}^2 g_4^2}{(4\pi)^2} \left\{ \hat{D}_3 (w_{2+} + z_{2+}) \Pi_{s_3 c}^{(010)} + a_{s3} \frac{1}{2} (w_{2+} + z_{2+}) \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} \right\}, \end{aligned} \quad (709)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{DC}^{LS-} &= -\frac{g_{*1}^2 g_2^2}{(4\pi)^2} \left\{ \hat{D}_1 (w_{2-} + z_{2-}) \Pi_{u_1 c}^{(010)} + a_{u1} \frac{1}{2} (w_{2-} + z_{2-}) \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} \right\} \\ &\quad - \frac{g_{*3}^2 g_4^2}{(4\pi)^2} \left\{ \hat{D}_3 (w_{2-} + z_{2-}) \Pi_{s_3 c}^{(010)} + a_{s3} \frac{1}{2} (w_{2-} + z_{2-}) \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} \right\}. \end{aligned} \quad (710)$$

B.8.2 Caso $\aleph_{EC}^{\nabla\mu\nu}$

$$\begin{aligned} \aleph_{EC}^{\nabla\mu\nu} &= -\frac{g_{*1}^2 g_2^2}{(4\pi)^2} \left[\hat{E}_1 I_{u_1 c}^{\mu\nu} + (b_{01} - b_{u1} t/4) I_{cc}^{\mu\nu} + b_{u1} I_{cc}^{2\mu\nu} - b_{u1} (W + z)_\rho I_{cc}^{\rho\mu\nu} \right] \\ &\quad - \frac{g_{*3}^2 g_4^2}{(4\pi)^2} \left[\hat{E}_3 I_{s_3 c}^{\mu\nu} + (b_{03} - b_{s3} t/4) I_{cc}^{\mu\nu} + b_{s3} I_{cc}^{2\mu\nu} + b_{s3} (W + z)_\rho I_{cc}^{\rho\mu\nu} \right]. \end{aligned} \quad (711)$$

Com as componentes

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{EC^\nabla}^C &= -\frac{g_1^2 g_{*2}^2}{(4\pi)^2} \left\{ \hat{E}_1 \frac{1}{2} [\bar{g} \bar{\Pi}_{u_1 c}^{(000)} + (w\bar{w} + \bar{z}z + \bar{w}z + z\bar{w}) \Pi_{u_1 c}^{(020)}] \right. \\ &\quad \left. + (b_{01} - b_{u1} q^2/4) \frac{1}{2} \bar{g} \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + b_{u1} \frac{q^2}{2} \bar{g} \bar{\Pi}_{cc}^{(200)} \right\} \\ &\quad - \frac{g_3^2 g_{*4}^2}{(4\pi)^2} \left\{ \hat{E}_3 \frac{1}{2} [\bar{g} \bar{\Pi}_{s_3 c}^{(000)} + (w\bar{w} + \bar{z}z + \bar{w}z + z\bar{w}) \Pi_{s_3 c}^{(020)}] \right. \\ &\quad \left. + (b_{03} - b_{s3} q^2/4) \frac{1}{2} \bar{g} \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + b_{s3} \frac{q^2}{2} \bar{g} \bar{\Pi}_{cc}^{(200)} \right\}, \end{aligned} \quad (712)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{EC^\nabla}^{LS+} &= -\frac{g_1^2 g_{*2}^2}{(4\pi)^2} \left\{ \hat{E}_1 \frac{1}{2} [g_+ \bar{\Pi}_{u_1 c}^{(000)} + (w w_+ + z z_+ + w z_+ + z w_+) \Pi_{u_1 c}^{(020)}] \right. \\ &\quad \left. + (b_{01} - b_{u1} q^2/4) \frac{1}{2} g_+ \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + b_{u1} \frac{q^2}{2} g_+ \bar{\Pi}_{cc}^{(200)} \right\} \\ &\quad - \frac{g_3^2 g_{*4}^2}{(4\pi)^2} \left\{ \hat{E}_3 \frac{1}{2} [g_+ \bar{\Pi}_{s_3 c}^{(000)} + (w w_+ + z z_+ + w z_+ + z w_+) \Pi_{s_3 c}^{(020)}] \right. \\ &\quad \left. + (b_{03} - b_{s3} q^2/4) \frac{1}{2} g_+ \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + b_{s3} \frac{q^2}{2} g_+ \bar{\Pi}_{cc}^{(200)} \right\}, \end{aligned} \quad (713)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{EC^\nabla}^{LS-} &= -\frac{g_1^2 g_{*2}^2}{(4\pi)^2} \left\{ \hat{E}_1 \frac{1}{2} [g_- \bar{\Pi}_{u_1 c}^{(000)} + (w w_- + z z_- + w z_- + z w_-) \Pi_{u_1 c}^{(020)}] \right. \\ &\quad \left. + (b_{01} - b_{u1} q^2/4) \frac{1}{2} g_- \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + b_{u1} \frac{q^2}{2} g_- \bar{\Pi}_{cc}^{(200)} \right\} \\ &\quad - \frac{g_3^2 g_{*4}^2}{(4\pi)^2} \left\{ \hat{E}_3 \frac{1}{2} [g_- \bar{\Pi}_{s_3 c}^{(000)} + (w w_- + z z_- + w z_- + z w_-) \Pi_{s_3 c}^{(020)}] \right. \\ &\quad \left. + (b_{03} - b_{s3} q^2/4) \frac{1}{2} g_- \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + b_{s3} \frac{q^2}{2} g_- \bar{\Pi}_{cc}^{(200)} \right\}, \end{aligned} \quad (714)$$

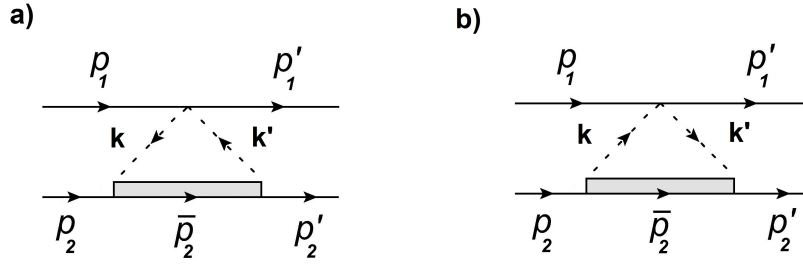


Figura 86 - Diagrama Δ com ressonância de spin-3/2

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{EC\nabla}^{SS} = & \frac{g_1^2 g_{*2}^2}{(4\pi)^2} \frac{2}{3} \left\{ \hat{E}_1 \frac{1}{2} \bar{\Pi}_{u_1 c}^{(000)} + (b_{01} - b_{u1} q^2/4) \frac{1}{2} \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + b_{u1} \frac{q^2}{2} \bar{\Pi}_{cc}^{(200)} \right\} \\ & + \frac{g_3^2 g_{*4}^2}{(4\pi)^2} \frac{2}{3} \left\{ \hat{E}_3 \frac{1}{2} \bar{\Pi}_{s_3 c}^{(000)} + (b_{03} - b_{s3} q^2/4) \frac{1}{2} \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + b_{s3} \frac{q^2}{2} \bar{\Pi}_{cc}^{(200)} \right\}, \end{aligned} \quad (715)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{EC\nabla}^T = & \frac{g_1^2 g_{*2}^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{3} \left\{ \hat{E}_1 \frac{1}{2} \bar{\Pi}_{u_1 c}^{(000)} + (b_{01} - b_{u1} q^2/4) \frac{1}{2} \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + b_{u1} \frac{q^2}{2} \bar{\Pi}_{cc}^{(200)} \right\} \\ & + \frac{g_3^2 g_{*4}^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{3} \left\{ \hat{E}_3 \frac{1}{2} \bar{\Pi}_{s_3 c}^{(000)} + (b_{03} - b_{s3} q^2/4) \frac{1}{2} \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + b_{s3} \frac{q^2}{2} \bar{\Pi}_{cc}^{(200)} \right\}. \end{aligned} \quad (716)$$

B.9 DIAGRAMA Δ COM RESSONÂNCIA DE SPIN-3/2 NA POSIÇÃO 2

Na Figura 86 temos o diagrama do tipo Δ com ressonância de spin-3/2 na posição 2.

Dessa forma a amplitude final é dada por

$$iT_{\text{MMB}(B^*)B}^{\Delta} = \frac{\vec{G}_1 \vec{G}_2}{2(12)m_1^2} \left\{ \aleph_{CD}^{\nu} \bar{u}_1 \gamma_{\mu} u_1 \bar{u}_2 u_2 + \aleph_{CE}^{\mu\nu} \bar{u}_1 \gamma_{\mu} u_1 \bar{u}_2 \gamma_{\nu} u_2 \right\}. \quad (717)$$

B.9.1 Caso $\aleph_{DC}^{\Delta\mu}$

$$\begin{aligned} \aleph_{DC}^{\Delta\mu} = & g_1^2 g_{*2}^2 \left\{ \hat{D}_2 I_{s_2 c}^{\mu} + (a_{02} - a_{s2} t/4) I_{cc}^{\mu} + a_{s2} I_{cc}^{2\mu} + a_{s2} (W - z)_{\rho} I_{cc}^{\rho\mu} \right\} \\ & - g_3^2 g_{*4}^2 \left\{ \hat{D}_4 I_{u_2 c}^{\mu} + (a_{04} - a_{u4} t/4) I_{cc}^{\mu} + a_{u4} I_{cc}^{2\mu} - a_{u4} (W - z)_{\rho} I_{cc}^{\rho\mu} \right\}. \end{aligned} \quad (718)$$

Achando suas componentes

$$\mathcal{T}_{DC\Delta}^C = \frac{g_1^2 g_{*2}^2}{(4\pi)^2} \left\{ \hat{D}_2(\bar{w}_1 - \bar{z}_1) \Pi_{s_2c}^{(010)} + a_{s2} \frac{1}{2} (\bar{w}_1 - \bar{z}_1) \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} \right\} \quad (719)$$

$$+ \frac{g_3^2 g_{*4}^2}{(4\pi)^2} \left\{ \hat{D}_4(\bar{w}_1 - \bar{z}_1) \Pi_{u_4c}^{(010)} + a_{u4} \frac{1}{2} (\bar{w}_2 - \bar{z}_2) \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} \right\}, \quad (720)$$

$$\mathcal{T}_{DC\Delta}^{LS+} = \frac{g_1^2 g_{*2}^2}{(4\pi)^2} \left\{ \hat{D}_2(w_{1+} - z_{1+}) \Pi_{s_2c}^{(010)} + a_{s2} \frac{1}{2} (w_{1+} - z_{1+}) \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} \right\} \quad (721)$$

$$+ \frac{g_3^2 g_{*4}^2}{(4\pi)^2} \left\{ \hat{D}_4(w_{1+} - z_{1+}) \Pi_{u_4c}^{(010)} + a_{u4} \frac{1}{2} (w_{2+} - z_{2+}) \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} \right\}, \quad (722)$$

$$\mathcal{T}_{DC\Delta}^{LS-} = \frac{g_1^2 g_{*2}^2}{(4\pi)^2} \left\{ \hat{D}_2(w_{1-} - z_{1-}) \Pi_{s_2c}^{(010)} + a_{s2} \frac{1}{2} (w_{1-} - z_{1-}) \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} \right\} \quad (723)$$

$$+ \frac{g_3^2 g_{*4}^2}{(4\pi)^2} \left\{ \hat{D}_4(w_{1-} - z_{1-}) \Pi_{u_4c}^{(010)} + a_{u4} \frac{1}{2} (\bar{w}_2 - \bar{z}_2) \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} \right\}. \quad (724)$$

B.9.2 Caso $\aleph_{EC}^{\Delta\mu\nu}$

$$\begin{aligned} \aleph_{EC}^{\Delta\mu\nu} &= g_1^2 g_{*2}^2 \left[\hat{E}_2 I_{s_2c}^{\mu\nu} + (b_{02} - b_{s2}t/4) I_{cc}^{\mu\nu} + b_{s2} I_{cc}^{2\mu\nu} + b_{s2} (W - z)_\rho I_{cc}^{\rho\mu\nu} \right] \\ &+ g_3^2 g_{*4}^2 \left[\hat{E}_4 I_{u_2c}^{\mu\nu} + (b_{04} - b_{u4}t/4) I_{cc}^{\mu\nu} + b_{u4} I_{cc}^{2\mu\nu} - b_{u4} (W - z)_\rho I_{cc}^{\rho\mu\nu} \right]. \end{aligned} \quad (725)$$

E suas componentes

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{EC\Delta}^C &= \frac{g_1^2 g_{*2}^2}{(4\pi)^2} \left\{ \hat{E}_2 \frac{1}{2} [\bar{g} \bar{\Pi}_{s_2c}^{(000)} + (w\bar{w} + z\bar{z} - w\bar{z} - z\bar{w}) \Pi_{s_2c}^{(020)}] \right. \\ &+ (b_{02} - b_{s2}q^2/4) \frac{1}{2} \bar{g} \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + b_{s2} \frac{q^2}{2} \bar{g} \bar{\Pi}_{cc}^{(200)} \left. \right\} \\ &+ \frac{g_3^2 g_{*4}^2}{(4\pi)^2} \left\{ \hat{E}_4 \frac{1}{2} [\bar{g} \bar{\Pi}_{u_4c}^{(000)} + (w\bar{w} + z\bar{z} - w\bar{z} - z\bar{w}) \Pi_{u_4c}^{(020)}] \right. \\ &+ (b_{04} - b_{u4}q^2/4) \frac{1}{2} \bar{g} \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + b_{u4} \frac{q^2}{2} \bar{g} \bar{\Pi}_{cc}^{(200)} \left. \right\}, \end{aligned} \quad (726)$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{EC\Delta}^{LS+} &= \frac{g_1^2 g_{*2}^2}{(4\pi)^2} \left\{ \hat{E}_2 \frac{1}{2} [g_+ \bar{\Pi}_{s_2c}^{(000)} + (ww_+ + zz_+ - wz_+ - zw_+) \Pi_{s_2c}^{(020)}] \right. \\
&\quad \left. + (b_{02} - b_{s_2} q^2/4) \frac{1}{2} g_+ \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + b_{s_2} \frac{q^2}{2} g_+ \bar{\Pi}_{cc}^{(200)} \right\} \\
&\quad + \frac{g_3^2 g_{*4}^2}{(4\pi)^2} \left\{ \hat{E}_4 \frac{1}{2} [g_+ \bar{\Pi}_{u_4c}^{(000)} + (ww_+ + zz_+ - wz_+ - zw_+) \Pi_{u_4c}^{(020)}] \right. \\
&\quad \left. + (b_{04} - b_{u_4} q^2/4) \frac{1}{2} g_+ \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + b_{u_4} \frac{q^2}{2} g_+ \bar{\Pi}_{cc}^{(200)} \right\}, \tag{727}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{EC\Delta}^{LS-} &= \frac{g_1^2 g_{*2}^2}{(4\pi)^2} \left\{ \hat{E}_2 \frac{1}{2} [g_- \bar{\Pi}_{s_2c}^{(000)} + (ww_- + zz_- - wz_- - zw_-) \Pi_{s_2c}^{(020)}] \right. \\
&\quad \left. + (b_{02} - b_{s_2} q^2/4) \frac{1}{2} g_- \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + b_{s_2} \frac{q^2}{2} g_- \bar{\Pi}_{cc}^{(200)} \right\} \\
&\quad + \frac{g_3^2 g_{*4}^2}{(4\pi)^2} \left\{ \hat{E}_4 \frac{1}{2} [g_- \bar{\Pi}_{u_4c}^{(000)} + (ww_- + zz_- - wz_- - zw_-) \Pi_{u_4c}^{(020)}] \right. \\
&\quad \left. + (b_{04} - b_{u_4} q^2/4) \frac{1}{2} g_- \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + b_{u_4} \frac{q^2}{2} g_- \bar{\Pi}_{cc}^{(200)} \right\}, \tag{728}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{EC\Delta}^{SS} &= -\frac{g_1^2 g_{*2}^2}{(4\pi)^2} \frac{2}{3} \left\{ \hat{E}_2 \frac{1}{2} \bar{\Pi}_{s_2c}^{(000)} + (b_{02} - b_{s_2} q^2/4) \frac{1}{2} \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + b_{s_2} \frac{q^2}{2} \bar{\Pi}_{cc}^{(200)} \right\} \\
&\quad + \frac{g_3^2 g_{*4}^2}{(4\pi)^2} \frac{2}{3} \left\{ \hat{E}_4 \frac{1}{2} \bar{\Pi}_{u_4c}^{(000)} + (b_{04} - b_{u_4} q^2/4) \frac{1}{2} \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + b_{u_4} \frac{q^2}{2} \bar{\Pi}_{cc}^{(200)} \right\}, \tag{729}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{EC\Delta}^T &= -\frac{g_1^2 g_{*2}^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{3} \left\{ \hat{E}_2 \frac{1}{2} \bar{\Pi}_{s_2c}^{(000)} + (b_{02} - b_{s_2} q^2/4) \frac{1}{2} \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + b_{s_2} \frac{q^2}{2} \bar{\Pi}_{cc}^{(200)} \right\} \\
&\quad + \frac{g_3^2 g_{*4}^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{3} \left\{ \hat{E}_4 \frac{1}{2} \bar{\Pi}_{u_4c}^{(000)} + (b_{04} - b_{u_4} q^2/4) \frac{1}{2} \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + b_{u_4} \frac{q^2}{2} \bar{\Pi}_{cc}^{(200)} \right\}. \tag{730}
\end{aligned}$$

B.10 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Após mostradas todas as amplitudes escritas em função de integrais de loop (I_{ij}^{\dots}) é importante lembrarmos que cada diagrama foi calculado independentemente dos demais diagramas, portanto a notação usada é genérica e não particular a cada diagrama, desta forma iremos posteriormente, caso necessário, estabelecer uma notação única e particular para não haver redundâncias.

Outro ponto importante a ser considerado refere-se aos tipos de mésons que poderemos utilizar nos diagramas calculados: devem ser análogos aos píons, isto é, que sejam descritos por campos pseudo-escalares, como os káons e o eta. Foi pensando na possível inclusão do káon que separamos os canais s e u nos cálculos dos diagramas que por sua vez produzem ressonâncias diferentes para cada canal.

No próximo Apêndice C as integrais I_{ij}^{\dots} serão calculadas.

APÊNDICE C – Integrais de Loop

Neste capítulo vamos mostrar como calcular as integrais de loop ($I_{ij}^{(\dots)}$) necessárias para calcular as amplitudes dos diagramas da troca de dois mésons. Utilizamos para isso a parametrização de Feynman e a regularização dimensional das integrais para lidar com as divergências do ultravioleta. As expressões resultantes para as integrais de loop foram obtidas em função de integrais parametrizadas no espaço de momentos reapresentadas por $\Pi_{ij}^{(\dots)}$ que cujas soluções podem ser determinadas por métodos numéricos.

C.1 PARAMETRIZAÇÃO DE FEYNMAN

Para o cálculo de integrais com múltiplos fatores no denominador (D_i), podemos utilizar a ideia da parametrização de Feynman, que podemos escrever para quatro fatores como

$$\frac{1}{D_1 D_2} = \Gamma(2) \int_0^1 da \frac{1}{[(1-a)D_1 + aD_2]^2}, \quad (731)$$

$$\frac{1}{D_1 D_2 D_3} = \Gamma(3) \int_0^1 da \int_0^1 db \frac{a}{[(1-a)D_1 + a(1-b)D_2 + abD_3]^3}, \quad (732)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{D_1 D_2 D_3 D_4} &= \Gamma(4) \int_0^1 da \int_0^1 db \int_0^1 dc \frac{a^2 b}{[(1-a)D_1 + a(1-b)D_2 + ab(1-c)D_3 + abcD_4]^4} \\ &= \Gamma(4) \int_0^1 da \int_0^1 db \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dc \\ &\quad \times \frac{a^2 b}{[(1-a)D_1 + a(1-b)D_2 + ab(1+c)D_3/2 + ab(1-c)D_4/2]^4}, \end{aligned} \quad (733)$$

onde Γ é a função gama, a , b e c são as chamadas variáveis auxiliares de Feynman.

Os fatores no denominador D_i para o nosso caso são como visto nos cálculos dos diagramas de loop do tipo cc representando a troca de dois mésons, sc ou uc representando a troca de dois mésons com um estado intermediário no canal s ou u ou ainda combinações de estados intermediários bariônicos nos canais s e u , como ss , uu e su .

Para descrever as integrais de loop na forma das variáveis auxiliares de Feynman vamos escrever convenientemente os denominadores das integrais da seguinte maneira

$$s_i - \bar{m}_i^2 = Q^2 + Q.(W \pm z) - \frac{q^2}{4} + m_i^2 - \bar{m}_i^2, \quad (734)$$

$$u_i - \bar{m}_i^2 = Q^2 - Q.(W \pm z) - \frac{q^2}{4} + m_i^2 - \bar{m}_i^2, \quad (735)$$

onde \bar{m}_i é a massa da ressonância relativo ao índice i . O índice i pode assumir valores 1 ou 2 de acordo com o bárion inicial, sendo o sinal "+" para $i = 1$ e "-" para $i = 2$.

Lembrando da equação (19) podemos escrever pela parametrização de Feynman os denominadores do tipo bolha (cc), nabla (u_1c), triângulo (u_2c), caixa (uu) e cruzado (us), dados por:

Bolha:

$$\begin{aligned} \frac{1}{[k^2 - m_k^2][k'^2 - m_k^2]} &= \frac{1}{[(Q - \frac{q}{2})^2 - m_k^2][(Q + \frac{q}{2})^2 - m_k^2]} \\ &= \Gamma(2) \int_0^1 da \frac{1}{[Q^2 + 2P_{cc} \cdot Q - \Sigma_{cc}^2]^2}, \end{aligned} \quad (736)$$

onde temos os parâmetros

$$P_{cc}^\mu = C_a q^\mu, \quad (737)$$

$$\Sigma_{cc}^2 = -q^2/4 + m_k^2, \quad (738)$$

$$C_a = (2a - 1)/2; \quad (739)$$

Nabla:

$$\frac{1}{[k^2 - m_k^2][k'^2 - m_k^2][u_1 - \bar{m}_1^2]} = \Gamma(3) \int_0^1 da \int_0^1 db \frac{a}{[Q^2 + 2P_{u_1c} \cdot Q - \Sigma_{u_1c}^2]^3}, \quad (740)$$

onde

$$P_{u_1c}^\mu = C_q q^\mu - C_b(W + z)^\mu, \quad (741)$$

$$\Sigma_{u_1c}^2 = (2ab - 1)q^2/4 + (1 - ab)m_k^2 - ab(m_1^2 - \bar{m}_1^2), \quad (742)$$

$$C_q = (2a - 1 - ab)/2 = C_a - C_b, \quad (743)$$

$$C_b = ab/2; \quad (744)$$

Triângulo:

$$\frac{1}{[k^2 - m_k^2][k'^2 - m_k^2][u_2 - \bar{m}_2^2]} = \Gamma(3) \int_0^1 da \int_0^1 db \frac{a}{[Q^2 + 2P_{u_2c} \cdot Q - \Sigma_{u_2c}^2]^3}, \quad (745)$$

com

$$P_{u_2c}^\mu = C_q q^\mu - C_b(W - z)^\mu, \quad (746)$$

$$\Sigma_{u_2c}^2 = (2ab - 1)q^2/4 + (1 - ab)m_k^2 - ab(m_2^2 - \bar{m}_2^2); \quad (747)$$

Cruzado:

$$\frac{1}{[k^2 - m_k^2][k'^2 - m_k^2][u_1 - \bar{m}_1^2][u_2 - \bar{m}_2^2]} = \Gamma(4) \int_0^1 da \int_0^1 db \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dc \frac{a^2 b}{[Q^2 + 2P_{uu} \cdot Q - \Sigma_{uu}^2]^4}, \quad (748)$$

sendo

$$P_{uu}^\mu = C_q q^\mu - C_b W^\mu - C_c z^\mu, \quad (749)$$

$$\begin{aligned} \Sigma_{uu}^2 &= (2ab - 1)q^2/4 + (1 - ab)m_k^2 - ab[m_1^2 + m_2^2 - \bar{m}_1^2 - \bar{m}_2^2]/2 \\ &\quad - abc(m_1^2 - m_2^2 + \bar{m}_2^2 - \bar{m}_1^2)/2, \end{aligned} \quad (750)$$

$$C_c = abc/2; \quad (751)$$

Caixa:

$$\frac{1}{[k^2 - m_k^2][k'^2 - m_k^2][u_1 - \bar{m}_1^2][s_2 - \bar{m}_2^2]} = \Gamma(4) \int_0^1 da \int_0^1 db \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dc \frac{a^2 b}{[Q^2 + 2P_{us} \cdot Q - \Sigma_{us}^2]^4}, \quad (752)$$

sendo

$$P_{us}^\mu = C_q q^\mu - C_b z^\mu - C_c W^\mu, \quad (753)$$

$$\begin{aligned} \Sigma_{us}^2 &= (2ab - 1)q^2/4 + (1 - ab)m_k^2 - ab[m_1^2 + m_2^2 - \bar{m}_1^2 - \bar{m}_2^2]/2 \\ &\quad - abc(m_1^2 - m_2^2 + \bar{m}_2^2 - \bar{m}_1^2)/2 = \Sigma_{uu}^2. \end{aligned} \quad (754)$$

Da mesma forma podemos construir outras combinações de interesse.

C.2 INTEGRAIS REGULARIZADAS

Agora podemos escrever de fato as integrais de loop para a ordem Q^0 resultando nas integrais:

Bolha:

$$\int \frac{d^4 Q}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k^2 - m_k^2][k'^2 - m_k^2]} = \Gamma(2) \int_0^1 da \int \frac{d^4 Q}{(2\pi)^4} \frac{1}{[Q^2 + 2P_{cc} \cdot Q - \Sigma_{cc}^2]^2}; \quad (755)$$

Nabla:

$$\int \frac{d^4 Q}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k^2 - m_k^2][k'^2 - m_k^2][u_1 - \bar{m}_1^2]} = \Gamma(3) \int_0^1 da \int_0^1 db \int \frac{d^4 Q}{(2\pi)^4} \frac{a}{[Q^2 + 2P_{u_1 c} \cdot Q - \Sigma_{u_1 c}^2]^3}; \quad (756)$$

Triângulo:

$$\int \frac{d^4 Q}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k^2 - m_k^2][k'^2 - m_k^2][u_2 - \bar{m}_2^2]} = \Gamma(3) \int_0^1 da \int_0^1 db \int \frac{d^4 Q}{(2\pi)^4} \frac{a}{[Q^2 + 2P_{u_2 c} \cdot Q - \Sigma_{u_2 c}^2]^3}; \quad (757)$$

Cruzado:

$$\begin{aligned} & \int \frac{d^4 Q}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k^2 - m_k^2][k'^2 - m_k^2][u_1 - \bar{m}_1^2][u_2 - \bar{m}_2^2]} \\ &= \Gamma(4) \int_0^1 da \int_0^1 db \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dc \int \frac{d^4 Q}{(2\pi)^4} \frac{a^2 b}{[Q^2 + 2P_{uu} \cdot Q - \Sigma_{uu}^2]^4}; \end{aligned} \quad (758)$$

Caixa:

$$\begin{aligned} & \int \frac{d^4 Q}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k^2 - m_k^2][k'^2 - m_k^2][u_1 - \bar{m}_1^2][s_2 - \bar{m}_2^2]} \\ &= \Gamma(4) \int_0^1 da \int_0^1 db \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dc \int \frac{d^4 Q}{(2\pi)^4} \frac{a^2 b}{[Q^2 + 2P_{us} \cdot Q - \Sigma_{us}^2]^4}. \end{aligned} \quad (759)$$

As integrais de loop integradas na variável Q têm suas divergências resolvidas através da regularização dimensional, definida da seguinte forma

$$\int \frac{d^{2\omega} Q}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{[Q^2 + 2P \cdot Q - \Sigma^2]^A} = \frac{i}{(4\pi)^2} \frac{1}{\Gamma(A)} \frac{(-i)^A \Gamma(A - \omega)}{[P^2 + \Sigma^2]^{A - \omega}} = \frac{i}{(4\pi)^2} \frac{1}{\Gamma(A)} F_A(P^2, \Sigma^2), \quad (760)$$

onde as integrais em 4 dimensões são consideradas em dimensão 2ω . Faze-se uma expansão de 2ω em torno de $\omega = 2$ e depois toma-se o limite $\omega \rightarrow 2$. Nas expressões ω e A são inteiros e por definição

$$F_A(P^2, \Sigma^2) = \frac{(-i)^A \Gamma(A - \omega)}{[P^2 + \Sigma^2]^{A - \omega}}. \quad (761)$$

Considerando o limite $\omega \rightarrow 2$ temos que

$$F_{-1} = (P^2 + \Sigma^2)^3 \left[\rho_3 - \frac{1}{6} \ln \left(\frac{P^2 + \Sigma^2}{\Lambda^2} \right) \right], \quad (762)$$

$$F_0 = (P^2 + \Sigma^2)^2 \left[\rho_2 - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{P^2 + \Sigma^2}{\Lambda^2} \right) \right], \quad (763)$$

$$F_1 = (P^2 + \Sigma^2) \left[\rho_1 - \ln \left(\frac{P^2 + \Sigma^2}{\Lambda^2} \right) \right], \quad (764)$$

$$F_2 = \rho_0 - \ln \left(\frac{P^2 + \Sigma^2}{\Lambda^2} \right), \quad (765)$$

$$F_3 = -\frac{1}{P^2 + \Sigma^2}, \quad (766)$$

$$F_4 = \frac{1}{(P^2 + \Sigma^2)^2}, \quad (767)$$

onde $\rho_{0,1,2,3}$ são as constantes que absorvem as divergências ultravioletas dos momentos externos e Λ é a escala de energia da regularização dimensional.

As soluções das integrais com grau do momento Q^n , com $n > 0$ no numerador, são

obtidas através do uso de derivações

$$\int \frac{d^{2\omega}Q}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{Q^{\rho_1} \dots Q^{\rho_n}}{[Q^2 + 2P \cdot Q - \Sigma^2]^A} = \frac{i}{(4\pi)^2} \frac{1}{\Gamma(A)} \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial P^{\rho_1}} \right) \dots \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial P^{\rho_n}} \right) F_{A-n}(P^2, \Sigma^2), \quad (768)$$

onde utilizamos as seguintes derivações

$$\frac{\partial}{\partial P^{\rho_i}} (P^{\rho_j}) = g^{\rho_i \rho_j}, \quad (769)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \right)^m F_n(\alpha, \Sigma^2) = F_{n+m}, \quad (770)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial P^{\rho_i}} \right)^1 F_n(P^2, \Sigma^2) = 2(g^{\rho_i \rho_j}) P_{\rho_j} F_{n+1} = 2P^{\rho_i} F_{n+1}, \quad (771)$$

em que $g^{\rho_i \rho_j}$ é tensor métrico de Minkowski.

C.2.1 Integral proporcional a Q^1

O caso mais simples com $n = 1$, encontramos

$$I_A^{\rho_1} = \int \frac{d^{2\omega}Q}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{Q^{\rho_1}}{[Q^2 + 2P \cdot Q - \Sigma^2]^A} = -\frac{i}{(4\pi)^2} \frac{1}{\Gamma(A)} (P^{\rho_1}) F_A(P^2, \Sigma^2). \quad (772)$$

C.2.2 Integrais proporcionais a Q^2

Para $n = 2$, temos para o caso geral

$$I_A^{\rho_1 \rho_2} = \int \frac{d^{2\omega}Q}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{Q^{\rho_1} Q^{\rho_2}}{[Q^2 + 2P \cdot Q - \Sigma^2]^A} = \frac{i}{(4\pi)^2} \frac{1}{\Gamma(A)} \frac{1}{2} \left[g^{\rho_1 \rho_2} F_{A-1}(P^2, \Sigma^2) + P^{\rho_1} P^{\rho_2} F_A(P^2, \Sigma^2) \right]. \quad (773)$$

No caso particular do produto entre os momentos Q , encontramos

$$\begin{aligned} I_A^2 &= \int \frac{d^{2\omega}Q}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{Q^{\rho_1} Q_{\rho_1}}{[Q^2 + 2P \cdot Q - \Sigma^2]^A} \\ &= \int \frac{d^{2\omega}Q}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{Q^2}{[Q^2 + 2P \cdot Q - \Sigma^2]^A} \\ &= \frac{i}{(4\pi)^2} \frac{1}{\Gamma(A)} \left[-F_{A-1} + \frac{P^2}{2} F_A \right]. \end{aligned} \quad (774)$$

C.2.3 Integrais proporcionais a Q^3

O caso geral com $n = 3$, tem a forma

$$\begin{aligned}
 I_A^{\rho_1 \rho_2 \rho_3} &= \int \frac{d^{2\omega} Q}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{Q^{\rho_1} Q^{\rho_2} Q^{\rho_3}}{[Q^2 + 2P \cdot Q - \Sigma^2]^A} \\
 &= -\frac{i}{(4\pi)^2} \frac{1}{\Gamma(A)} \left\{ \frac{1}{2} \left[g^{\rho_2 \rho_3} P^{\rho_1} + g^{\rho_1 \rho_3} P^{\rho_2} + g^{\rho_1 \rho_2} P^{\rho_3} \right] F_{A-1} \right. \\
 &\quad \left. + P^{\rho_1} P^{\rho_2} P^{\rho_3} F_A \right\}, \tag{775}
 \end{aligned}$$

e contraindo os dois primeiros índices temos o caso

$$\begin{aligned}
 I_A^{2\rho_3} &= \int \frac{d^{2\omega} Q}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{Q^{\rho_1} Q_{\rho_1} Q^{\rho_3}}{[Q^2 + 2P \cdot Q - \Sigma^2]^A} \\
 &= \int \frac{d^{2\omega} Q}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{Q^2 Q^{\rho_3}}{[Q^2 + 2P \cdot Q - \Sigma^2]^A} \\
 &= -\frac{i}{(4\pi)^2} \frac{1}{\Gamma(A)} \left\{ P^2 P^{\rho_3} F_A \right\}. \tag{776}
 \end{aligned}$$

C.2.4 Integrais proporcionais a Q^4

Com $n = 4$ encontramos o caso geral

$$\begin{aligned}
 I_A^{\rho_1 \rho_2 \rho_3 \rho_4} &= \int \frac{d^{2\omega} Q}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{Q^{\rho_1} Q^{\rho_2} Q^{\rho_3} Q^{\rho_4}}{[Q^2 + 2P \cdot Q - \Sigma^2]^A} \\
 &= \frac{i}{(4\pi)^2} \frac{1}{\Gamma(A)} \left\{ \frac{1}{4} \left[g^{\rho_1 \rho_2} g^{\rho_3 \rho_4} + g^{\rho_2 \rho_3} g^{\rho_1 \rho_4} + g^{\rho_1 \rho_3} g^{\rho_2 \rho_4} \right] F_{A-2} \right. \\
 &\quad + \frac{1}{2} \left[g^{\rho_1 \rho_2} P^{\rho_3} P^{\rho_4} + g^{\rho_2 \rho_4} P^{\rho_1} P^{\rho_3} + g^{\rho_3 \rho_4} P^{\rho_1} P^{\rho_2} + g^{\rho_1 \rho_3} P^{\rho_2} P^{\rho_4} \right. \\
 &\quad \left. + g^{\rho_2 \rho_3} P^{\rho_1} P^{\rho_4} + g^{\rho_1 \rho_4} P^{\rho_2} P^{\rho_3} \right] F_{A-1} \\
 &\quad \left. + P^{\rho_1} P^{\rho_2} P^{\rho_3} P^{\rho_4} F_A \right\}. \tag{777}
 \end{aligned}$$

Novamente contraindo os dois primeiros índices dos momentos, para o caso proporcional à $n = 4$ resulta

$$\begin{aligned}
 \int \frac{d^{2\omega} Q}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{Q^{\rho_1} Q_{\rho_1} Q^{\rho_3} Q^{\rho_4}}{[Q^2 + 2P \cdot Q - \Sigma^2]^A} &= \frac{i}{(4\pi)^2} \frac{1}{\Gamma(A)} \left\{ \frac{1}{4} \left[g_{\rho_1}^{\rho_1} g^{\rho_3 \rho_4} + g_{\rho_1}^{\rho_3} g^{\rho_1 \rho_4} + g^{\rho_1 \rho_3} g_{\rho_1}^{\rho_4} \right] F_{A-2} \right. \\
 &\quad + \frac{1}{2} \left[g_{\rho_1}^{\rho_1} P^{\rho_3} P^{\rho_4} + g_{\rho_1}^{\rho_4} P^{\rho_1} P^{\rho_3} + g^{\rho_3 \rho_4} P^{\rho_1} P_{\rho_1} + g^{\rho_1 \rho_3} P_{\rho_1} P^{\rho_4} \right. \\
 &\quad \left. + g_{\rho_1}^{\rho_3} P^{\rho_1} P^{\rho_4} + g^{\rho_1 \rho_4} P_{\rho_1} P^{\rho_3} \right] F_{A-1} + P^{\rho_1} P_{\rho_1} P^{\rho_3} P^{\rho_4} F_A \left. \right\},
 \end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned}
I_A^{2\rho_3\rho_4} &= \int \frac{d^{2\omega}Q}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{Q^2 Q^{\rho_3} Q^{\rho_4}}{[Q^2 + 2P \cdot Q - \Sigma^2]^A} \\
&= \frac{i}{(4\pi)^2} \frac{1}{\Gamma(A)} \left\{ \left[P^{\rho_4} P^{\rho_3} + \frac{P^2}{2} g^{\rho_3\rho_4} \right] F_{A-1} + P^2 P^{\rho_3} P^{\rho_4} F_A \right\}. \tag{778}
\end{aligned}$$

A partir da última integral podemos achar facilmente o caso com os pares de índices contraídos, isso é

$$I_A^{22} = \int \frac{d^{2\omega}Q}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{Q^2 Q^2}{[Q^2 + 2P \cdot Q - \Sigma^2]^A} = \frac{i}{(4\pi)^2} \frac{1}{\Gamma(A)} \left\{ P^2 P^2 F_A \right\}. \tag{779}$$

C.2.5 Integrais proporcionais a Q^5

O penúltimo caso geral, o proporcional a $n = 5$, temos que

$$\begin{aligned}
I_A^{\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4\rho_5} &= \int \frac{d^{2\omega}Q}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{Q^{\rho_1} Q^{\rho_2} Q^{\rho_3} Q^{\rho_4} Q^{\rho_5}}{[Q^2 + 2P \cdot Q - \Sigma^2]^A} \\
&= -\frac{i}{(4\pi)^2} \frac{1}{\Gamma(A)} \\
&\quad \times \left\{ \frac{1}{4} \left[(g^{\rho_1\rho_2} g^{\rho_3\rho_4} + g^{\rho_2\rho_3} g^{\rho_1\rho_4} + g^{\rho_1\rho_3} g^{\rho_2\rho_4}) P^{\rho_5} + (g^{\rho_1\rho_2} g^{\rho_3\rho_5} + g^{\rho_2\rho_3} g^{\rho_1\rho_5} + g^{\rho_1\rho_3} g^{\rho_2\rho_5}) P^{\rho_4} \right. \right. \\
&\quad + (g^{\rho_1\rho_2} g^{\rho_4\rho_5} + g^{\rho_2\rho_4} g^{\rho_1\rho_5} + g^{\rho_1\rho_4} g^{\rho_2\rho_5}) P^{\rho_3} + (g^{\rho_1\rho_4} g^{\rho_3\rho_5} + g^{\rho_3\rho_4} g^{\rho_1\rho_5} + g^{\rho_1\rho_3} g^{\rho_4\rho_5}) P^{\rho_2} \\
&\quad + (g^{\rho_2\rho_4} g^{\rho_3\rho_5} + g^{\rho_3\rho_4} g^{\rho_2\rho_5} + g^{\rho_2\rho_3} g^{\rho_4\rho_5}) P^{\rho_1} \left. \right] F_{A-2} + \frac{1}{2} \left[g^{\rho_1\rho_2} P^{\rho_3} P^{\rho_4} P^{\rho_5} + g^{\rho_2\rho_4} P^{\rho_1} P^{\rho_3} P^{\rho_5} \right. \\
&\quad + g^{\rho_3\rho_4} P^{\rho_1} P^{\rho_2} P^{\rho_5} + g^{\rho_1\rho_3} P^{\rho_2} P^{\rho_4} P^{\rho_5} + g^{\rho_2\rho_3} P^{\rho_1} P^{\rho_4} P^{\rho_5} + g^{\rho_1\rho_4} P^{\rho_2} P^{\rho_3} P^{\rho_5} \\
&\quad + g^{\rho_1\rho_5} P^{\rho_2} P^{\rho_3} P^{\rho_4} + g^{\rho_2\rho_5} P^{\rho_1} P^{\rho_3} P^{\rho_4} + g^{\rho_3\rho_5} P^{\rho_1} P^{\rho_2} P^{\rho_4} + g^{\rho_4\rho_5} P^{\rho_1} P^{\rho_2} P^{\rho_3} \left. \right] F_{A-1} \\
&\quad \left. + P^{\rho_1} P^{\rho_2} P^{\rho_3} P^{\rho_4} P^{\rho_5} F_A \right\}. \tag{780}
\end{aligned}$$

Seguindo o mesmo procedimento feito até aqui, temos as integrais com os momentos contraídos dadas por

$$\begin{aligned}
I_A^{2\rho_3\rho_4\rho_5} &= \int \frac{d^{2\omega}Q}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{Q^2 Q^{\rho_3} Q^{\rho_4} Q^{\rho_5}}{[Q^2 + 2P \cdot Q - \Sigma^2]^A} \\
&= -\frac{i}{(4\pi)^2} \frac{1}{\Gamma(A)} \left\{ \frac{1}{2} \left[g^{\rho_4\rho_5} P^{\rho_3} + g^{\rho_3\rho_5} P^{\rho_4} + g^{\rho_3\rho_4} P^{\rho_5} \right] F_{A-2} \right. \\
&\quad + \left[2P^{\rho_3} P^{\rho_4} P^{\rho_5} + \frac{P^2}{2} (g^{\rho_4\rho_5} P^{\rho_3} + g^{\rho_3\rho_5} P^{\rho_4} + g^{\rho_3\rho_4} P^{\rho_5}) \right] F_{A-1} \\
&\quad \left. + \left[P^2 P^{\rho_3} P^{\rho_4} P^{\rho_5} \right] F_A \right\}, \tag{781}
\end{aligned}$$

e por fim

$$\begin{aligned}
I_A^{22\rho_5} &= \int \frac{d^{2\omega} Q}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{Q^2 Q^2 Q^{\rho_5}}{[Q^2 + 2P \cdot Q - \Sigma^2]^A} \\
&= -\frac{i}{(4\pi)^2} \frac{1}{\Gamma(A)} \left\{ [2P^2 P^{\rho_5}] F_{A-1} + [P^2 P^2 P^{\rho_5}] F_A \right\}. \tag{782}
\end{aligned}$$

C.2.6 Integrais proporcionais a Q^6

Nosso caso geral são as integrais proporcionais ao grau 6, dessa forma

$$\begin{aligned}
I_A^{\rho_1 \rho_2 \rho_3 \rho_4 \rho_5 \rho_6} &= \int \frac{d^{2\omega} Q}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{Q^{\rho_1} Q^{\rho_2} Q^{\rho_3} Q^{\rho_4} Q^{\rho_5} Q^{\rho_6}}{[Q^2 + 2P \cdot Q - \Sigma^2]^A} \\
&= \frac{i}{(4\pi)^2} \frac{1}{\Gamma(A)} \\
&\quad \times \left\{ \frac{1}{8} \left[g^{\rho_1 \rho_2} g^{\rho_3 \rho_4} g^{\rho_5 \rho_6} + g^{\rho_2 \rho_3} g^{\rho_1 \rho_4} g^{\rho_5 \rho_6} + g^{\rho_1 \rho_3} g^{\rho_2 \rho_4} g^{\rho_5 \rho_6} + g^{\rho_1 \rho_2} g^{\rho_3 \rho_5} g^{\rho_4 \rho_6} + g^{\rho_2 \rho_3} g^{\rho_1 \rho_5} g^{\rho_4 \rho_6} \right. \right. \\
&\quad + g^{\rho_1 \rho_3} g^{\rho_2 \rho_5} g^{\rho_4 \rho_6} + g^{\rho_1 \rho_2} g^{\rho_4 \rho_5} g^{\rho_3 \rho_6} + g^{\rho_2 \rho_4} g^{\rho_1 \rho_5} g^{\rho_3 \rho_6} + g^{\rho_1 \rho_4} g^{\rho_2 \rho_5} g^{\rho_3 \rho_6} + g^{\rho_1 \rho_4} g^{\rho_3 \rho_5} g^{\rho_2 \rho_6} \\
&\quad + g^{\rho_3 \rho_4} g^{\rho_1 \rho_5} g^{\rho_2 \rho_6} + g^{\rho_1 \rho_3} g^{\rho_4 \rho_5} g^{\rho_2 \rho_6} + g^{\rho_2 \rho_4} g^{\rho_3 \rho_5} g^{\rho_1 \rho_6} + g^{\rho_3 \rho_4} g^{\rho_2 \rho_5} g^{\rho_1 \rho_6} + g^{\rho_2 \rho_3} g^{\rho_4 \rho_5} g^{\rho_1 \rho_6} \left. \right] F_{A-3} \\
&\quad + \frac{1}{4} \left[(g^{\rho_1 \rho_2} g^{\rho_3 \rho_4} + g^{\rho_2 \rho_3} g^{\rho_1 \rho_4} + g^{\rho_1 \rho_3} g^{\rho_2 \rho_4}) P^{\rho_5} P^{\rho_6} + (g^{\rho_1 \rho_2} g^{\rho_3 \rho_5} + g^{\rho_2 \rho_3} g^{\rho_1 \rho_5} + g^{\rho_1 \rho_3} g^{\rho_2 \rho_5}) P^{\rho_4} P^{\rho_6} \right. \\
&\quad + (g^{\rho_1 \rho_2} g^{\rho_4 \rho_5} + g^{\rho_2 \rho_4} g^{\rho_1 \rho_5} + g^{\rho_1 \rho_4} g^{\rho_2 \rho_5}) P^{\rho_3} P^{\rho_6} + (g^{\rho_1 \rho_4} g^{\rho_3 \rho_5} + g^{\rho_3 \rho_4} g^{\rho_1 \rho_5} + g^{\rho_1 \rho_3} g^{\rho_4 \rho_5}) P^{\rho_2} P^{\rho_6} \\
&\quad + (g^{\rho_2 \rho_4} g^{\rho_3 \rho_5} + g^{\rho_3 \rho_4} g^{\rho_2 \rho_5} + g^{\rho_2 \rho_3} g^{\rho_4 \rho_5}) P^{\rho_1} P^{\rho_6} + (g^{\rho_2 \rho_3} g^{\rho_1 \rho_6} + g^{\rho_1 \rho_3} g^{\rho_2 \rho_6} + g^{\rho_1 \rho_2} g^{\rho_3 \rho_6}) P^{\rho_4} P^{\rho_5} \\
&\quad + (g^{\rho_2 \rho_4} g^{\rho_1 \rho_6} + g^{\rho_1 \rho_4} g^{\rho_2 \rho_6} + g^{\rho_1 \rho_2} g^{\rho_4 \rho_6}) P^{\rho_3} P^{\rho_5} + (g^{\rho_3 \rho_4} g^{\rho_1 \rho_6} + g^{\rho_1 \rho_4} g^{\rho_3 \rho_6} + g^{\rho_1 \rho_3} g^{\rho_4 \rho_6}) P^{\rho_2} P^{\rho_5} \\
&\quad + (g^{\rho_3 \rho_4} g^{\rho_2 \rho_6} + g^{\rho_2 \rho_4} g^{\rho_3 \rho_6} + g^{\rho_2 \rho_3} g^{\rho_4 \rho_6}) P^{\rho_1} P^{\rho_5} + (g^{\rho_2 \rho_5} g^{\rho_1 \rho_6} + g^{\rho_1 \rho_5} g^{\rho_2 \rho_6} + g^{\rho_1 \rho_2} g^{\rho_5 \rho_6}) P^{\rho_3} P^{\rho_4} \\
&\quad + (g^{\rho_3 \rho_5} g^{\rho_1 \rho_6} + g^{\rho_1 \rho_5} g^{\rho_3 \rho_6} + g^{\rho_1 \rho_3} g^{\rho_5 \rho_6}) P^{\rho_2} P^{\rho_4} + (g^{\rho_3 \rho_5} g^{\rho_2 \rho_6} + g^{\rho_2 \rho_5} g^{\rho_3 \rho_6} + g^{\rho_2 \rho_3} g^{\rho_5 \rho_6}) P^{\rho_1} P^{\rho_4} \\
&\quad + (g^{\rho_4 \rho_5} g^{\rho_1 \rho_6} + g^{\rho_1 \rho_5} g^{\rho_4 \rho_6} + g^{\rho_1 \rho_4} g^{\rho_5 \rho_6}) P^{\rho_2} P^{\rho_3} + (g^{\rho_4 \rho_5} g^{\rho_2 \rho_6} + g^{\rho_2 \rho_5} g^{\rho_4 \rho_6} + g^{\rho_2 \rho_4} g^{\rho_5 \rho_6}) P^{\rho_1} P^{\rho_3} \\
&\quad \left. + (g^{\rho_4 \rho_5} g^{\rho_3 \rho_6} + g^{\rho_3 \rho_5} g^{\rho_4 \rho_6} + g^{\rho_3 \rho_4} g^{\rho_5 \rho_6}) P^{\rho_1} P^{\rho_2} \right] F_{A-2} \\
&\quad + \frac{1}{2} \left[g^{\rho_1 \rho_2} P^{\rho_3} P^{\rho_4} P^{\rho_5} P^{\rho_6} + g^{\rho_2 \rho_4} P^{\rho_1} P^{\rho_3} P^{\rho_5} P^{\rho_6} + g^{\rho_3 \rho_4} P^{\rho_1} P^{\rho_2} P^{\rho_5} P^{\rho_6} + g^{\rho_1 \rho_3} P^{\rho_2} P^{\rho_4} P^{\rho_5} P^{\rho_6} \right. \\
&\quad + g^{\rho_2 \rho_3} P^{\rho_1} P^{\rho_4} P^{\rho_5} P^{\rho_6} + g^{\rho_1 \rho_4} P^{\rho_2} P^{\rho_3} P^{\rho_5} P^{\rho_6} + g^{\rho_1 \rho_5} P^{\rho_2} P^{\rho_3} P^{\rho_4} P^{\rho_6} + g^{\rho_2 \rho_5} P^{\rho_1} P^{\rho_3} P^{\rho_4} P^{\rho_6} \\
&\quad + g^{\rho_3 \rho_5} P^{\rho_1} P^{\rho_2} P^{\rho_4} P^{\rho_6} + g^{\rho_4 \rho_5} P^{\rho_1} P^{\rho_2} P^{\rho_3} P^{\rho_6} + g^{\rho_1 \rho_6} P^{\rho_2} P^{\rho_3} P^{\rho_4} P^{\rho_5} + g^{\rho_2 \rho_6} P^{\rho_1} P^{\rho_3} P^{\rho_4} P^{\rho_5} \\
&\quad \left. + g^{\rho_3 \rho_6} P^{\rho_1} P^{\rho_2} P^{\rho_4} P^{\rho_5} + g^{\rho_4 \rho_6} P^{\rho_1} P^{\rho_2} P^{\rho_3} P^{\rho_5} + g^{\rho_5 \rho_6} P^{\rho_1} P^{\rho_2} P^{\rho_3} P^{\rho_4} \right] F_{A-1} \\
&\quad \left. + P^{\rho_1} P^{\rho_2} P^{\rho_3} P^{\rho_4} P^{\rho_5} P^{\rho_6} F_A \right\}. \tag{783}
\end{aligned}$$

A integral que efetivamente nos interessa é a com os quatro primeiros termos con-

traídos, reduzindo consideravelmente o número de termos

$$\begin{aligned}
I_A^{22\mu\nu} &= \int \frac{d^{2\omega}Q}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{Q^2 Q^2 Q^\mu Q^\nu}{[Q^2 + 2P \cdot Q - \Sigma^2]^A} \\
&= \frac{i}{(4\pi)^2} \frac{1}{\Gamma(A)} \left\{ \frac{3}{2} [g^{\mu\nu}] F_{A-3} + [5P^\mu P^\nu + P^2 g^{\mu\nu}] F_{A-2} \right. \\
&\quad \left. + [4P^2 P^\mu P^\nu + \frac{1}{2} P^2 P^2 g^{\mu\nu}] F_{A-1} + [P^2 P^2 P^\mu P^\nu] F_A \right\}. \tag{784}
\end{aligned}$$

Nos casos contraídos que calculamos até agora, utilizamos as identidades dos tensores métricos, tais como

$$g^{ij} g_{ij} = 4, \quad g_i^j g_j^i = 4, \quad g_i^i = -2.$$

A partir das integrais calculadas podemos agora encontrar as integrais I_{ij}^{\dots} , nos permitindo calcular todas as amplitudes dos diagramas de Feynman para a troca de dois mésons.

C.3 INTEGRAIS DE LOOP

Utilizaremos a integral $I_{cc}^{\rho_1}$ para demonstrar o procedimento para o cálculo das integrais de loop em função das variáveis de Feynman, a partir das relações (736), (772) e (765). Fazemos

$$\begin{aligned}
I_{cc}^{\rho_1} &= \Gamma(2) \int_0^1 da \int \frac{d^4Q}{(2\pi)^4} \frac{Q^{\rho_1}}{[Q^2 + 2P_{cc} \cdot Q - \Sigma_{cc}^2]^2} = \Gamma(2) \int_0^1 da \left[-\frac{i}{(4\pi)^2} \frac{1}{\Gamma(2)} (P_{cc}^{\rho_1}) F_2 \right] \\
&= -\frac{i}{(4\pi)^2} \int_0^1 da (P_{cc}^{\rho_1}) \left[\rho_0 - \ln \left(\frac{P_{cc}^2 + \Sigma_{cc}^2}{\Lambda^2} \right) \right] = \frac{i}{(4\pi)^2} \int_0^1 da (-C_a) q^{\rho_1} \left[\rho_0 - \ln \left(\frac{P_{cc}^2 + \Sigma_{cc}^2}{\Lambda^2} \right) \right],
\end{aligned}$$

resultando em

$$I_{cc}^{\rho_1} = \frac{i}{(4\pi)^2} \left[q^{\rho_1} \Pi_{cc}^{(100)} \right], \tag{785}$$

onde utilizamos as expressões

$$\begin{aligned}
P_{cc}^\mu &= C_a q^\mu, \\
\Sigma_{cc}^2 &= -q^2/4 + m_k^2, \\
C_a &= (2a - 1)/2, \\
\Pi_{cc}^{(100)} &= \int_0^1 da (-C_a) \left[\rho_0 - \ln \left(\frac{P_{cc}^2 + \Sigma_{cc}^2}{\Lambda^2} \right) \right].
\end{aligned}$$

C.3.1 Integrais cc

As integrais do tipo bolha (cc), são as mais simples, porém é necessário considerar integrais até a sexta ordem de Q . Assim temos que

$$I_{cc} = \frac{i}{(4\pi)^2} \left\{ \Pi_{cc}^{(000)} \right\}, \quad (786)$$

$$I_{cc}^{\rho_1} = \frac{i}{(4\pi)^2} \left\{ q^{\rho_1} \Pi_{cc}^{(100)} \right\}, \quad (787)$$

$$I_{cc}^{\rho_1 \rho_2} = \frac{i}{2(4\pi)^2} \left\{ g^{\rho_1 \rho_2} \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + q^{\rho_1} q^{\rho_2} \Pi_{cc}^{(200)} \right\}, \quad (788)$$

$$I_{cc}^{\rho_1 \rho_2 \rho_3} = \frac{i}{(4\pi)^2} \left\{ \frac{1}{2} \left[g^{\rho_2 \rho_3} q^{\rho_1} + g^{\rho_1 \rho_3} q^{\rho_2} + g^{\rho_1 \rho_2} q^{\rho_3} \right] \bar{\Pi}_{cc}^{(300)} + q^{\rho_1} q^{\rho_2} q^{\rho_3} \Pi_{cc}^{(300)} \right\}, \quad (789)$$

$$\begin{aligned} I_{cc}^{\rho_1 \rho_2 \rho_3 \rho_4} &= \frac{i}{(4\pi)^2} \left\{ \frac{1}{4} \left[g^{\rho_1 \rho_2} g^{\rho_3 \rho_4} + g^{\rho_2 \rho_3} g^{\rho_1 \rho_4} + g^{\rho_1 \rho_3} g^{\rho_2 \rho_4} \right] \bar{\Pi}_{cc}^{(000)} \right. \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[g^{\rho_1 \rho_2} q^{\rho_3} q^{\rho_4} + g^{\rho_2 \rho_4} q^{\rho_1} q^{\rho_3} + g^{\rho_3 \rho_4} q^{\rho_1} q^{\rho_2} \right. \\ &\quad \left. \left. + g^{\rho_1 \rho_3} q^{\rho_2} q^{\rho_4} + g^{\rho_2 \rho_3} q^{\rho_1} q^{\rho_4} + g^{\rho_1 \rho_4} q^{\rho_2} q^{\rho_3} \right] \bar{\Pi}_{cc}^{(200)} \right. \\ &\quad \left. + q^{\rho_1} q^{\rho_2} q^{\rho_3} q^{\rho_4} \Pi_{cc}^{(400)} \right\}, \end{aligned} \quad (790)$$

$$I_{cc}^2 = \frac{i}{2(4\pi)^2} \left\{ -2\bar{\Pi}_{cc}^{(000)} + q^2 \Pi_{cc}^{(200)} \right\}, \quad (791)$$

$$I_{cc}^{2\rho_3} = \frac{i}{(4\pi)^2} \left\{ \frac{1}{2} \left[3q^{\rho_3} \right] \bar{\Pi}_{cc}^{(300)} + q^2 q^{\rho_3} \Pi_{cc}^{(300)} \right\}, \quad (792)$$

$$I_{cc}^{2\rho_3 \rho_4} = \frac{i}{(4\pi)^2} \left\{ \left[q^{\rho_3} q^{\rho_4} + \frac{q^2}{2} g^{\rho_3 \rho_4} \right] \bar{\Pi}_{cc}^{(200)} + q^2 q^{\rho_3} q^{\rho_4} \Pi_{cc}^{(400)} \right\}, \quad (793)$$

$$I_{cc}^{22} = \frac{i}{(4\pi)^2} \left\{ q^2 q^2 \Pi_{cc}^{(400)} \right\}, \quad (794)$$

$$\begin{aligned} I_{cc}^{2\rho_3 \rho_4 \rho_5} &= \frac{i}{(4\pi)^2} \left\{ \frac{1}{2} \left[g^{\rho_4 \rho_5} q^{\rho_3} + g^{\rho_3 \rho_5} q^{\rho_4} + g^{\rho_3 \rho_4} q^{\rho_5} \right] \Pi_{cc}^{(100)} \right. \\ &\quad + \left[2q^{\rho_3} q^{\rho_4} q^{\rho_5} + \frac{q^2}{2} \left[g^{\rho_4 \rho_5} q^{\rho_3} + g^{\rho_3 \rho_5} q^{\rho_4} + g^{\rho_3 \rho_4} q^{\rho_5} \right] \right] \bar{\Pi}_{cc}^{(300)} \\ &\quad \left. + \left[q^2 q^{\rho_3} q^{\rho_4} q^{\rho_5} \right] \bar{\Pi}_{cc}^{(500)} \right\}, \end{aligned} \quad (795)$$

$$I_{cc}^{22\rho_5} = \frac{i}{(4\pi)^2} \left\{ \left[2q^2 q^{\rho_5} \right] \bar{\Pi}_{cc}^{(300)} + \left[q^2 q^2 q^{\rho_5} \right] \bar{\Pi}_{cc}^{(500)} \right\}, \quad (796)$$

$$\begin{aligned} I_{cc}^{22\mu\nu} &= \frac{i}{(4\pi)^2} \left\{ \frac{3}{2} \left[g^{\mu\nu} \right] \dot{\Pi}_{cc}^{(000)} + \left[5q^\mu q^\nu + q^2 g^{\mu\nu} \right] \bar{\Pi}_{cc}^{(200)} \right. \\ &\quad \left. + \left[4q^2 q^\mu q^\nu + \frac{1}{2} q^2 q^2 g^{\mu\nu} \right] \bar{\Pi}_{cc}^{(400)} + \left[q^2 q^2 q^\mu q^\nu \right] \Pi_{cc}^{(600)} \right\}, \end{aligned} \quad (797)$$

onde definimos as integrais

$$\Pi_{cc}^{(n00)} = \int_0^1 da (-C_a)^n \left[\rho_0 - \ln \left(\frac{P_{cc}^2 + \Sigma_{cc}^2}{\Lambda^2} \right) \right], \quad (798)$$

$$\bar{\Pi}_{cc}^{(n00)} = \int_0^1 da (-C_a)^n (P_{cc}^2 + \Sigma_{cc}^2) \left[\rho_1 - \ln \left(\frac{P_{cc}^2 + \Sigma_{cc}^2}{\Lambda^2} \right) \right], \quad (799)$$

$$\bar{\bar{\Pi}}_{cc}^{(n00)} = \int_0^1 da (-C_a)^n (P_{cc}^2 + \Sigma_{cc}^2)^2 \left[\rho_2 - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{P_{cc}^2 + \Sigma_{cc}^2}{\Lambda^2} \right) \right], \quad (800)$$

$$\dot{\Pi}_{cc}^{(000)} = \int_0^1 da (P_{cc}^2 + \Sigma_{cc}^2)^3 \left[\rho_3 - \frac{1}{6} \ln \left(\frac{P_{cc}^2 + \Sigma_{cc}^2}{\Lambda^2} \right) \right]. \quad (801)$$

C.3.2 Integrais de loop uc

Integrais do tipo uc são um pouco mais complicadas, porém só necessitamos até o terceiro grau de Q , dessa forma temos

$$I_{u_i c} = \frac{i}{(4\pi)^2} \left\{ \Pi_{u_i c}^{(000)} \right\}, \quad (802)$$

$$I_{u_i c}^{\rho_1} = \frac{i}{(4\pi)^2} \left[q^{\rho_1} \Pi_{u_i c}^{(100)} - (W \pm z)^{\rho_1} \Pi_{u_i c}^{(010)} \right], \quad (803)$$

$$\begin{aligned} I_{u_i c}^{\rho_1 \rho_2} &= \frac{i}{2(4\pi)^2} \left\{ g^{\rho_1 \rho_2} \bar{\Pi}_{u_i c}^{(000)} + q^{\rho_1} q^{\rho_2} \Pi_{u_i c}^{(200)} + (W \pm z)^{\rho_1} (W \pm z)^{\rho_2} \Pi_{u_i c}^{(020)} \right. \\ &\quad \left. - [q^{\rho_1} (W \pm z)^{\rho_2} + q^{\rho_2} (W \pm z)^{\rho_1}] \Pi_{u_i c}^{(110)} \right\}, \end{aligned} \quad (804)$$

$$\begin{aligned} I_{u_i c}^{\rho_1 \rho_2 \rho_3} &= \frac{i}{(4\pi)^2} \left\{ \frac{1}{2} \left[g^{\rho_2 \rho_3} q^{\rho_1} + g^{\rho_1 \rho_3} q^{\rho_2} + g^{\rho_1 \rho_2} q^{\rho_3} \right] \bar{\Pi}_{u_i c}^{(100)} \right. \\ &\quad - \frac{1}{2} \left[g^{\rho_2 \rho_3} (W \pm z)^{\rho_1} + g^{\rho_1 \rho_3} (W \pm z)^{\rho_2} + g^{\rho_1 \rho_2} (W \pm z)^{\rho_3} \right] \bar{\Pi}_{u_i c}^{(010)} \\ &\quad + \left[q^{\rho_1} q^{\rho_2} q^{\rho_3} \right] \Pi_{u_i c}^{(300)} - \left[(W \pm z)^{\rho_1} (W \pm z)^{\rho_2} (W \pm z)^{\rho_3} \right] \Pi_{u_i c}^{(030)} \\ &\quad - \left[q^{\rho_1} q^{\rho_2} (W \pm z)^{\rho_3} + q^{\rho_1} (W \pm z)^{\rho_2} q^{\rho_3} + (W \pm z)^{\rho_1} q^{\rho_2} q^{\rho_3} \right] \Pi_{u_i c}^{(210)} \\ &\quad + \left[q^{\rho_1} (W \pm z)^{\rho_2} (W \pm z)^{\rho_3} + (W \pm z)^{\rho_1} q^{\rho_2} (W \pm z)^{\rho_3} \right. \\ &\quad \left. + (W \pm z)^{\rho_1} (W \pm z)^{\rho_2} q^{\rho_3} \right] \Pi_{u_i c}^{(120)} \left. \right\}, \end{aligned} \quad (805)$$

onde definimos

$$\Pi_{u_i c}^{(lmn)} = - \int_0^1 da \int_0^1 db (-C_q)^l (-C_b)^{n+m} \left[\frac{a}{P_{u_i c}^2 + \Sigma_{u_i c}^2} \right], \quad (806)$$

$$\bar{\Pi}_{u_i c}^{(lmn)} = \int_0^1 da \int_0^1 db (-C_q)^l (-C_b)^{n+m} a \left[\rho_0 - \ln \left(\frac{P_{u_i c}^2 + \Sigma_{u_i c}^2}{\Lambda^2} \right) \right]. \quad (807)$$

C.3.3 Integrais de loop uu

Para as integrais do tipo cruzado uu é necessário calcular até o segundo grau de Q , então

$$I_{uu} = \frac{i}{(4\pi)^2} \left[\Pi_{uu}^{(000)} \right], \quad (808)$$

$$I_{uu}^{\rho_1} = \frac{i}{(4\pi)^2} \left\{ q^{\rho_1} \Pi_{uu}^{(100)} - W^{\rho_1} \Pi_{uu}^{(001)} - z^{\rho_1} \Pi_{uu}^{(010)} \right\}, \quad (809)$$

$$\begin{aligned} I_{uu}^{\rho_1 \rho_2} &= \frac{i}{(4\pi)^2} \left[g^{\rho_1 \rho_2} \bar{\Pi}_{uu}^{(000)} + q^{\rho_1} q^{\rho_2} \Pi_{uu}^{(200)} + z^{\rho_1} z^{\rho_2} \Pi_{uu}^{(020)} + W^{\rho_1} W^{\rho_2} \Pi_{uu}^{(002)} \right. \\ &\quad - [q^{\rho_1} W^{\rho_2} + W^{\rho_1} q^{\rho_2}] \Pi_{uu}^{(101)} - [q^{\rho_1} z^{\rho_2} + z^{\rho_1} q^{\rho_2}] \Pi_{uu}^{(110)} \\ &\quad \left. + [W^{\rho_1} z^{\rho_2} + z^{\rho_1} W^{\rho_2}] \Pi_{uu}^{(011)} \right], \end{aligned} \quad (810)$$

que definimos

$$\Pi_{uu}^{(lmn)} = \int_0^1 da \int_0^1 db \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dc (-C_q)^l (-C_c)^m (-C_b)^n \left[\frac{a^2 b}{(P_{uu}^2 + \Sigma_{uu}^2)^2} \right], \quad (811)$$

$$\bar{\Pi}_{uu}^{(lmn)} = - \int_0^1 da \int_0^1 db \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dc (-C_q)^l (-C_c)^m (-C_b)^n \left[\frac{a^2 b}{P_{uu}^2 + \Sigma_{uu}^2} \right]. \quad (812)$$

C.3.4 Integrais de loop us

De forma muito similar ao tipo cruzado são as integrais de loop do tipo caixa, isto é

$$I_{us} = \frac{i}{(4\pi)^2} \left[\Pi_{us}^{(000)} \right], \quad (813)$$

$$I_{us}^{\rho_1} = \frac{i}{(4\pi)^2} \left\{ q^{\rho_1} \Pi_{us}^{(100)} - z^{\rho_1} \Pi_{us}^{(001)} - W^{\rho_1} \Pi_{us}^{(010)} \right\}, \quad (814)$$

$$\begin{aligned} I_{us}^{\rho_1 \rho_2} &= \frac{i}{(4\pi)^2} \left[g^{\rho_1 \rho_2} \bar{\Pi}_{us}^{(000)} + q^{\rho_1} q^{\rho_2} \Pi_{us}^{(200)} + W^{\rho_1} W^{\rho_2} \Pi_{us}^{(020)} + z^{\rho_1} z^{\rho_2} \Pi_{us}^{(002)} \right. \\ &\quad - [q^{\rho_1} z^{\rho_2} + z^{\rho_1} q^{\rho_2}] \Pi_{us}^{(101)} - [q^{\rho_1} W^{\rho_2} + W^{\rho_1} q^{\rho_2}] \Pi_{us}^{(110)} \\ &\quad \left. + [z^{\rho_1} W^{\rho_2} + W^{\rho_1} z^{\rho_2}] \Pi_{us}^{(011)} \right], \end{aligned} \quad (815)$$

onde

$$\Pi_{us}^{(lmn)} = \int_0^1 da \int_0^1 db \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dc (-C_q)^l (-C_c)^m (-C_b)^n \left[\frac{a^2 b}{(P_{us}^2 + \Sigma_{us}^2)^2} \right], \quad (816)$$

$$\bar{\Pi}_{us}^{(lmn)} = - \int_0^1 da \int_0^1 db \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dc (-C_q)^l (-C_c)^m (-C_b)^n \left[\frac{a^2 b}{P_{us}^2 + \Sigma_{us}^2} \right]. \quad (817)$$

As variações das integrais de loop, como por exemplo o caso ss são calculadas da

mesma maneira, e não serão mostradas aqui.

É interessante notar que devido à inclusão de ressonâncias com spin-3/2 nos diagramas de loop, foi necessário calcular as integrais do tipo bolha até a sexta ordem do momento Q tornando as integrais desse tipo muito variadas e extensas. O mesmo poderia ter ocorrido com os demais tipos com mais termos em P^{\dots} tornando as integrais muito mais complicadas e extensas, evitamos isso quando simplificamos as amplitudes de Feynman com ressonâncias de spin-1/2 eliminando a dependência de Q (variáveis de Mandelstam) do numerador.

APÊNDICE D – Integrais de Loop no Espaço de Configurações

A transformação das integrais de 1-loop do espaço de momentos para o espaço de configurações é feita por meio da transformação de Fourier

$$S = \frac{1}{m_k^3} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} \Pi = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \Pi, \quad (818)$$

representando por S as integrais de loop no espaço de configuração, $\vec{x} = m_k \vec{r}$ e $\vec{k} = \vec{q}/m_k$.

Realizamos a integração angular em $k^2 = \vec{k}^2$, resultando

$$S = \frac{2}{(2\pi)^2 x} \int_0^\infty k \sin(kx) dk \Pi. \quad (819)$$

Sabemos que as integrais Π advém das relações F_n , as quais, são apresentadas no Apêndice C. Definimos a função

$$f_A(x, \theta^2, \lambda^2) = \frac{2}{(2\pi)^2 x} \int_0^\infty k \sin(kx) dk F_A(\beta, \theta^2, \lambda^2). \quad (820)$$

em que $\beta = k^2$. As variáveis θ , λ são definidas como segue. Evidenciando o momento q , o qual, deve ser transformado para o espaço de configurações, fazemos

$$\begin{aligned} P^2 + \Sigma^2 &= \lambda^2 \left(-\frac{q^2}{m_k^2} + \theta^2 \right) = \lambda^2 \left(\frac{\vec{q}^2}{m_k^2} + \theta^2 \right) \\ &= \lambda^2 (\vec{k}^2 + \theta^2). \end{aligned} \quad (821)$$

Para cada tipo de diagrama temos θ e λ diferentes, definiremos estas variáveis uma a uma mais adiante.

Calculando para $A = 5$, encontramos

$$\begin{aligned} f_5(x, \theta^2, \lambda^2) &= \frac{1}{i(2\pi)^2 x} \int_0^\infty k (e^{ikx} - e^{-ikx}) dk F_A(k^2, \theta^2, \lambda^2) \\ &= \frac{1}{i(2\pi)^2 x} \int_{-\infty}^\infty dk \frac{-2k e^{ikx}}{[\lambda^2(k^2 + \theta^2)]^3} \\ &= -\frac{e^{-\theta x}}{16\pi \lambda^6 \theta^3} (1 + \theta x), \end{aligned} \quad (822)$$

aqui foi usado o método dos resíduos.

Reescrevemos a integral (820),

$$f_A(x, \theta^2, \lambda^2) = \frac{1}{(2\pi)^2 x} \int_0^\infty k \sin(\sqrt{\beta} x) d\beta F_A(\beta, \theta^2, \lambda^2), \quad (823)$$

e da modificação da relação (770)

$$\left(\frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial}{\partial \beta}\right)^m F_n(\beta, \theta^2, \lambda^2) = F_{n+m}(\beta, \theta^2, \lambda^2), \quad (824)$$

encontramos que

$$f_{A-1}(x, \theta^2, \lambda^2) = \left(\frac{2\lambda^2}{x} \frac{\partial}{\partial x}\right) f_A(x, \theta^2, \lambda^2). \quad (825)$$

Aplicando esta última relação em (822), encontramos as demais amplitudes f , assim

$$f_4(x, \theta^2, \lambda^2) = \frac{e^{-\theta x}}{8\pi\lambda^4\theta}, \quad (826)$$

$$f_3(x, \theta^2, \lambda^2) = -\frac{1}{4\pi\lambda^2} \frac{e^{-\theta x}}{x}, \quad (827)$$

$$f_2(x, \theta^2, \lambda^2) = \frac{\theta}{2\pi\lambda^2} \frac{e^{-\theta x}}{x^2} \left(1 + \frac{1}{\theta x}\right), \quad (828)$$

$$f_1(x, \theta^2, \lambda^2) = -\frac{\theta^2\lambda^2}{\pi} \frac{e^{-\theta x}}{x^3} \left(1 + \frac{3}{\theta x} + \frac{3}{(\theta x)^2}\right), \quad (829)$$

$$f_0(x, \theta^2, \lambda^2) = \frac{2\theta^3\lambda^4}{\pi} \frac{e^{-\theta x}}{x^4} \left(1 + \frac{6}{\theta x} + \frac{15}{(\theta x)^2} + \frac{15}{(\theta x)^3}\right), \quad (830)$$

$$f_{-1}(x, \theta^2, \lambda^2) = -\frac{4\theta^4\lambda^6}{\pi} \frac{e^{-\theta x}}{x^5} \left(1 + \frac{10}{\theta x} + \frac{45}{(\theta x)^2} + \frac{105}{(\theta x)^3} + \frac{105}{(\theta x)^4}\right). \quad (831)$$

De posse dessas relações fazemos a substituição $F_A(P^2, \Sigma^2) \rightarrow f_A(x, \theta^2, \lambda^2)$ nas integrais Π , assim concluímos a passagem do espaço dos momentos para o espaço de configurações.

Nas próximas seções calcularemos os θ e λ para cada tipo de diagrama.

D.1 BOLHA

O caso mais simples, em que temos as integrais de loop

$$\frac{1}{[k^2 - m_k^2][k'^2 - m_k^2]} = \frac{1}{[(Q - \frac{q}{2})^2 - m_k^2][(Q + \frac{q}{2})^2 - m_k^2]} = \Gamma(2) \int_0^1 da \frac{1}{[Q^2 + 2P_{cc} \cdot Q - \Sigma_{cc}^2]^2}$$

$$P_{cc}^\mu = C_a q_k^m,$$

$$\Sigma_{cc}^2 = -q^2/4 + m_k^2,$$

$$C_a = (2a - 1)/2.$$

Nas novas váriaveis

$$P_{cc}^2 + \Sigma_{cc}^2 = -a(1-a)q^2 + m_k^2, \quad (832)$$

$$\lambda_{cc}^2 = a(1-a)m_k^2, \quad (833)$$

As integrais no espaço de configurações para cc , ficam

$$S_{cc}^{(n00)} = \int_0^1 da (-C_a)^n \frac{\theta_{cc}}{2\pi\lambda_{cc}^2} \frac{e^{-\theta_{cc}x}}{x^2} \left(1 + \frac{1}{\theta_{cc}x}\right), \quad (834)$$

$$\bar{S}_{cc}^{(n00)} = - \int_0^1 da (-C_a)^n \left[\frac{\theta_{cc}^2 \lambda_{cc}^2}{\pi} \frac{e^{-\theta_{cc}x}}{x^3} \left(1 + \frac{3}{\theta_{cc}x} + \frac{3}{(\theta_{cc}x)^2}\right) \right], \quad (835)$$

$$\bar{\bar{S}}_{cc}^{(n00)} = \int_0^1 da (-C_a)^n \left[\frac{2\theta_{cc}^3 \lambda_{cc}^4}{\pi} \frac{e^{-\theta_{cc}x}}{x^4} \left(1 + \frac{6}{\theta_{cc}x} + \frac{15}{(\theta_{cc}x)^2} + \frac{15}{(\theta_{cc}x)^3}\right) \right], \quad (836)$$

$$\dot{S}_{cc}^{(000)} = - \int_0^1 da \left[\frac{4\theta_{cc}^4 \lambda_{cc}^6}{\pi} \frac{e^{-\theta_{cc}x}}{x^5} \left(1 + \frac{10}{\theta_{cc}x} + \frac{45}{(\theta_{cc}x)^2} + \frac{105}{(\theta_{cc}x)^3} + \frac{105}{(\theta_{cc}x)^4}\right) \right]. \quad (837)$$

D.2 NABLA

Da integral

$$\frac{1}{[k^2 - m_k^2][k'^2 - m_k^2][u_1 - \bar{m}_1^2]} = \Gamma(3) \int_0^1 da \int_0^1 db \frac{a}{[Q^2 + 2P_{u_1c} \cdot Q - \Sigma_{u_1c}^2]^3}$$

$$P_{u_1c}^\mu = C_q q^\mu - C_b (W + z)^\mu,$$

$$\Sigma_{u_1c}^2 = (2ab - 1)q^2/4 + (1 - ab)\mu^2 - ab(m_1^2 - \bar{m}_1^2),$$

$$C_q = (2a - 1 - ab)/2 = C_a - C_b,$$

$$C_b = ab/2,$$

fazemos

$$\begin{aligned} P_{u_1c}^2 + \Sigma_{u_1c}^2 &= C_q^2 q^2 + C_b^2 (W^2 + z^2 + 2W \cdot z) + \Sigma_{u_1c}^2, \\ &= -a(1-a)(1-b)q^2 + (1-ab)m_k^2 + a^2 b^2 (E_1^2 + E_2^2 + E_1^2 - E_2^2)/2 - ab(m_1^2 - \bar{m}_1^2), \end{aligned}$$

resultando nos parâmetros

$$\lambda_{u_1c}^2 = a(1-a)(1-b)m_k^2, \quad (838)$$

$$\theta_{u_1c}^2 = \frac{(1-ab)m_k^2 + a^2 b^2 (E_1^2) - ab(m_1^2 - \bar{m}_1^2)}{a(1-a)(1-b)m_k^2}. \quad (839)$$

Portanto,

$$S_{u_1c}^{(lmn)} = - \int_0^1 da \int_0^1 db (-C_q)^l (-C_b)^{n+m} \left[\frac{a}{4\pi\lambda_{u_1c}^2} \frac{e^{-\theta_{u_1c}x}}{x} \right], \quad (840)$$

$$\bar{S}_{u_1c}^{(lmn)} = \int_0^1 da \int_0^1 db (-C_q)^l (-C_b)^{n+m} \left[\frac{a\theta_{u_1c}}{2\pi\lambda_{u_1c}^2} \frac{e^{-\theta_{u_1c}x}}{x^2} \left(1 + \frac{1}{\theta_{u_1c}x} \right) \right]. \quad (841)$$

D.3 TRIÂNGULO

Para a integral

$$\frac{1}{[k^2 - m_k^2][k'^2 - m_k^2][u_2 - \bar{m}_2^2]} = \Gamma(3) \int_0^1 da \int_0^1 db \frac{a}{[Q^2 + 2P_{u_2c} \cdot Q - \Sigma_{u_2c}^2]^3}$$

$$P_{u_2c}^\mu = C_q q^\mu - C_b (W - z)^\mu,$$

$$\Sigma_{u_2c}^2 = (2ab - 1)q^2/4 + (1 - ab)m_k^2 - ab(m_2^2 - \bar{m}_2^2),$$

e

$$\begin{aligned} P_{u_2c}^2 + \Sigma_{u_2c}^2 &= C_q^2 q^2 + C_b^2 (W^2 + z^2 - 2W \cdot z) + \Sigma_{u_2c}^2, \\ &= -a(1-a)(1-b)q^2 + (1-ab)m_k^2 + a^2b^2(E_1^2 + E_2^2 - E_1^2 + E_2^2)/2 - ab(m_2^2 - \bar{m}_2^2), \end{aligned}$$

então

$$\lambda_{u_2c}^2 = a(1-a)(1-b)m_k^2, \quad (842)$$

$$\theta_{u_2c}^2 = \frac{(1-ab)m_k^2 + a^2b^2(E_2^2) - ab(m_2^2 - \bar{m}_2^2)}{a(1-a)(1-b)m_k^2}. \quad (843)$$

Resultando nas integrais

$$S_{u_2c}^{(lmn)} = - \int_0^1 da \int_0^1 db (-C_q)^l (-C_b)^{n+m} \left[\frac{a}{4\pi\lambda_{u_2c}^2} \frac{e^{-\theta_{u_2c}x}}{x} \right], \quad (844)$$

$$\bar{S}_{u_2c}^{(lmn)} = \int_0^1 da \int_0^1 db (-C_q)^l (-C_b)^{n+m} \left[\frac{a\theta_{u_2c}}{2\pi\lambda_{u_2c}^2} \frac{e^{-\theta_{u_2c}x}}{x^2} \left(1 + \frac{1}{\theta_{u_2c}x} \right) \right]. \quad (845)$$

D.4 CRUZADO

Este é um dos casos com maior número de parâmetros, temos a integral de loop dada por

$$\frac{1}{[k^2 - m_k^2][k'^2 - m_k^2][u_1 - \bar{m}_1^2][u_2 - \bar{m}_2^2]} = \Gamma(4) \int_0^1 da \int_0^1 db \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dc \frac{a^2 b}{[Q^2 + 2P_{uu} \cdot Q - \Sigma_{uu}^2]^4}$$

$$P_{uu}^\mu = C_q q^\mu - C_b W^\mu - C_c z^\mu,$$

$$\Sigma_{uu}^2 = (2ab - 1)q^2/4 + (1 - ab)m_k^2 - ab[m_1^2 + m_2^2 - \bar{m}_1^2 - \bar{m}_2^2]/2 - abc(m_1^2 - m_2^2 + \bar{m}_2^2 - \bar{m}_1^2)/2,$$

$$C_c = abc/2,$$

em que

$$\begin{aligned} P_{uu}^2 + \Sigma_{uu}^2 &= C_q^2 q^2 + C_b^2 W^2 + C_c^2 z^2 + 2C_b C_c W \cdot z + \Sigma_{uu}^2, \\ &= -a(1 - a)(1 - b)q^2 + (1 - ab)m_k^2 + a^2 b^2 [(m_1^2 + m_2^2)/2 + (E_1^2 - E_2^2)c/2 - (1 - c^2)z^2/4] \\ &\quad - ab[m_1^2 + m_2^2 - \bar{m}_1^2 - \bar{m}_2^2]/2 - abc(m_1^2 - m_2^2 + \bar{m}_2^2 - \bar{m}_1^2)/2, \end{aligned}$$

$$\lambda_{uu}^2 = a(1 - a)(1 - b)m_k^2, \quad (846)$$

$$\begin{aligned} \theta_{uu}^2 &= \frac{1}{a(1 - a)(1 - b)m_k^2} \left[(1 - ab)m_k^2 + a^2 b^2 [(m_1^2 + m_2^2)/2 + (E_1^2 - E_2^2)c/2 - (1 - c^2)z^2/4] \right. \\ &\quad \left. - ab/2[(m_1^2 - \bar{m}_1^2)(1 + c) + (m_2^2 - \bar{m}_2^2)(1 - c)] \right]. \end{aligned} \quad (847)$$

Fizemos a substituição $W^2 = 2(m_1^2 + m_2^2) - q^2 - z^2$, encontrada nas relações cinemáticas.

Temos assim

$$S_{uu}^{(lmn)} = \int_0^1 da \int_0^1 db \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dc (-C_q)^l (-C_c)^m (-C_b)^n \left[\frac{a^2 b}{8\pi \lambda_{uu}^4 \theta_{uu}} e^{-\theta_{uu} x} \right], \quad (848)$$

$$\bar{S}_{uu}^{(lmn)} = - \int_0^1 da \int_0^1 db \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dc (-C_q)^l (-C_c)^m (-C_b)^n \left[\frac{a^2 b}{4\pi \lambda_{uu}^2} \frac{e^{-\theta_{uu} x}}{x} \right]. \quad (849)$$

D.5 CAIXA

Para o diagrama do tipo caixa, o qual é dos mais importantes, fazemos

$$\frac{1}{[k^2 - m_k^2][k'^2 - m_k^2][u_1 - \bar{m}_1^2][s_2 - \bar{m}_2^2]} = \Gamma(4) \int_0^1 da \int_0^1 db \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dc \frac{a^2 b}{[Q^2 + 2P_{us} \cdot Q - \Sigma_{us}^2]^4}$$

$$P_{us}^\mu = C_q q^\mu - C_b z^\mu - C_c W^\mu,$$

$$\Sigma_{us}^2 = (2ab - 1)q^2/4 + (1 - ab)m_k^2 - ab[m_1^2 + m_2^2 - \bar{m}_1^2 - \bar{m}_2^2]/2 - abc(m_1^2 - m_2^2 + \bar{m}_2^2 - \bar{m}_1^2)/2.$$

A soma

$$\begin{aligned}
P_{us}^2 + \Sigma_{us}^2 &= C_q^2 q^2 + C_b^2 z^2 + C_c^2 W^2 + 2C_b C_c W \cdot z + \Sigma_{us}^2 \\
&= -\left[a(1-a)(1-b) \right] q^2 + (1-ab)m_k^2 + a^2 b^2 [c^2(m_1^2 + m_2^2)/2 + (E_1^2 - E_2^2)c/2 + (1-c^2)z^2/4] \\
&\quad - ab[m_1^2 + m_2^2 - \bar{m}_1^2 - \bar{m}_2^2]/2 - abc(m_1^2 - m_2^2 + \bar{m}_2^2 - \bar{m}_1^2)/2,
\end{aligned}$$

assim

$$\lambda_{us}^2 = \left[a(1-a)(1-b) \right] m_k^2, \quad (850)$$

$$\begin{aligned}
\theta_{us}^2 &= \frac{1}{\left[a(1-a)(1-b) \right] m_k^2} \left[(1-ab)m_k^2 + a^2 b^2 [(m_1^2 + m_2^2)/2 + (E_1^2 - E_2^2)c/2 + (c^2 - 1)W^2/4] \right. \\
&\quad \left. - ab/2[(m_1^2 - \bar{m}_1^2)(1+c) + (m_2^2 - \bar{m}_2^2)(1-c)] \right]. \quad (851)
\end{aligned}$$

Fizemos a substituição $z^2 = 2(m_1^2 + m_2^2) - q^2 - W^2$, para evitar a variável c em λ_{us} , termo que pode causar divergências na integração numérica, o mesmo cuidado foi tomado no caso cruzado em λ_{uu} .

As integrais ficam

$$S_{us}^{(lmn)} = \int_0^1 da \int_0^1 db \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dc (-C_q)^l (-C_c)^m (-C_b)^n \left[\frac{a^2 b}{8\pi \lambda_{us}^4 \theta_{us}} e^{-\theta_{us} x} \right], \quad (852)$$

$$\bar{S}_{us}^{(lmn)} = - \int_0^1 da \int_0^1 db \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dc (-C_q)^l (-C_c)^m (-C_b)^n \left[\frac{a^2 b}{4\pi \lambda_{us}^2} \frac{e^{-\theta_{us} x}}{x} \right]. \quad (853)$$

Para os demais casos de diagramas com méson em outro sentido, temos a correspondência de termos,

$$P_{u_i c}^2 = P_{s_i c}^2, \quad i = 1, 2 \quad (854)$$

$$P_{uu}^2 = P_{ss}^2, \quad (855)$$

$$P_{us}^2 = P_{su}^2, \quad (856)$$

$$\Sigma_{u_i c}^2 = \Sigma_{s_i c}^2, \quad i = 1, 2 \quad (857)$$

$$\Sigma_{uu}^2 = \Sigma_{ss}^2 = \Sigma_{us}^2 = \Sigma_{su}^2, \quad (858)$$

uma vez que temos termos quadrático retirando os sinais negativos. Portanto valem as mesmas expressões para θ e λ para as trocas do tipo $u \leftrightarrow s$.

D.6 DERIVADAS ESPACIAIS

Quando da passagem do espaço de momentos para o espaço de configurações, falemos das transformações de Fourier, feitas nos operadores de spin Ω e nas integrais de loop Π ,

utilizamos também o fato de a interação ser no referencial do centro de massa e os bárions externos na camada de massa. Essas considerações, juntamente com a aproximação local já discutida no capítulo 3, temos que $W = (E_1 + E_2, 0)$, $z = (E_1 - E_2, 0)$ e $(0, \vec{q})$, em que fazemos a aproximação local $-\vec{q}^2 = m_k^2 \nabla_x^2$.

Sabemos que $t = q^2$ e que, para os cálculos envolvendo ressonâncias de spin-3/2, encontramos termos proporcionais a até $t^4 \rightarrow q^8$. Sendo assim, precisamos realizar a derivação em coordenadas esféricas até o grau 8.

As derivadas parciais em x são, para as funções do tipo potencial de Yukawa,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{e^{-\theta x}}{x^\alpha} \right) = -\theta \frac{e^{-\theta x}}{x^\alpha} - \alpha \frac{e^{-\theta x}}{x^{\alpha+1}} \quad (859)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{e^{-\theta x}}{x^\alpha} \right) \right] &= -\theta \left(-\theta \frac{e^{-\theta x}}{x^\alpha} - \alpha \frac{e^{-\theta x}}{x^{\alpha+1}} \right) - \alpha \left(-\theta \frac{e^{-\theta x}}{x^{\alpha+1}} - (\alpha + 1) \frac{e^{-\theta x}}{x^{\alpha+2}} \right) \\ &= \theta^2 \frac{e^{-\theta x}}{x^\alpha} + 2\alpha\theta \frac{e^{-\theta x}}{x^{\alpha+1}} + \alpha(\alpha + 1) \frac{e^{-\theta x}}{x^{\alpha+2}}, \end{aligned} \quad (860)$$

Daqui tiramos dois resultados diretos, o termo do operador tensorial

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \right] \frac{e^{-\theta x}}{x^\alpha} &= \theta^2 \frac{e^{-\theta x}}{x^\alpha} + 2\alpha\theta \frac{e^{-\theta x}}{x^{\alpha+1}} + \alpha(\alpha + 1) \frac{e^{-\theta x}}{x^{\alpha+2}} + \theta \frac{e^{-\theta x}}{x^{\alpha+1}} + \alpha \frac{e^{-\theta x}}{x^{\alpha+2}} \\ &= \theta^2 \frac{e^{-\theta x}}{x^\alpha} + \theta(2\alpha + 1) \frac{e^{-\theta x}}{x^{\alpha+1}} + \alpha(\alpha + 2) \frac{e^{-\theta x}}{x^{\alpha+2}}, \end{aligned} \quad (861)$$

e o laplaciano em coordenadas esféricas definindo como

$$\nabla^2 \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{2}{x} \frac{\partial}{\partial x} \right), \quad (862)$$

então

$$\begin{aligned} \nabla^2 \left(\frac{e^{-\theta x}}{x^\alpha} \right) &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{2}{x} \frac{\partial}{\partial x} \right) \left[\frac{e^{-\theta x}}{x^\alpha} \right] \\ &= \theta^2 \frac{e^{-\theta x}}{x^\alpha} + 2\alpha\theta \frac{e^{-\theta x}}{x^{\alpha+1}} + \alpha(\alpha + 1) \frac{e^{-\theta x}}{x^{\alpha+2}} - 2\theta \frac{e^{-\theta x}}{x^{\alpha+1}} - 2\alpha \frac{e^{-\theta x}}{x^{\alpha+2}} \\ \nabla^2 \left(\frac{e^{-\theta x}}{x^\alpha} \right) &= \theta^2 \frac{e^{-\theta x}}{x^\alpha} + 2\theta(\alpha - 1) \frac{e^{-\theta x}}{x^{\alpha+1}} + \alpha(\alpha - 1) \frac{e^{-\theta x}}{x^{\alpha+2}}. \end{aligned} \quad (863)$$

Para ∇^4 fazendo o mesmo procedimento, encontramos

$$\begin{aligned} \nabla^2 \left[\nabla^2 \left(\frac{e^{-\theta x}}{x^\alpha} \right) \right] &= \left[\theta^4 \right] \frac{e^{-\theta x}}{x^\alpha} + \left[4(\alpha - 1)\theta^3 \right] \frac{e^{-\theta x}}{x^{\alpha+1}} + \left[6\alpha(\alpha - 1)\theta^2 \right] \frac{e^{-\theta x}}{x^{\alpha+2}} \\ &\quad + \left[4(\alpha + 1)\alpha(\alpha - 1)\theta \right] \frac{e^{-\theta x}}{x^{\alpha+3}} + \left[(\alpha + 2)(\alpha + 1)\alpha(\alpha - 1) \right] \frac{e^{-\theta x}}{x^{\alpha+4}}. \end{aligned} \quad (864)$$

Para ∇^6

$$\begin{aligned}
 \nabla^2\left(\nabla^2\left[\nabla^2\left(\frac{e^{-\theta x}}{x^\alpha}\right)\right]\right) &= \left[\theta^6\right]\frac{e^{-\theta x}}{x^\alpha} + \left[6(\alpha-1)\theta^5\right]\frac{e^{-\theta x}}{x^{\alpha+1}} + \left[15\alpha(\alpha-1)\theta^4\right]\frac{e^{-\theta x}}{x^{\alpha+2}} \\
 &+ \left[20(\alpha+1)\alpha(\alpha+1)\theta^3\right]\frac{e^{-\theta x}}{x^{\alpha+3}} + \left[15(\alpha+2)(\alpha+1)\alpha(\alpha-1)\theta^2\right]\frac{e^{-\theta x}}{x^{\alpha+4}} \\
 &+ \left[6(\alpha+3)(\alpha+2)(\alpha+1)\alpha(\alpha-1)\theta\right]\frac{e^{-\theta x}}{x^{\alpha+5}} \\
 &+ \left[(\alpha+4)(\alpha+3)(\alpha+2)(\alpha+1)\alpha(\alpha-1)\right]\frac{e^{-\theta x}}{x^{\alpha+6}}. \tag{865}
 \end{aligned}$$

Finalmente temos que ∇^8 é

$$\begin{aligned}
 \nabla^2\left\{\nabla^2\left(\nabla^2\left[\nabla^2\left(\frac{e^{-\theta x}}{x^\alpha}\right)\right]\right)\right\} &= \left[\theta^8\right]\frac{e^{-\theta x}}{x^\alpha} + \left[8(\alpha-1)\theta^7\right]\frac{e^{-\theta x}}{x^{\alpha+1}} + \left[28\alpha(\alpha-1)\theta^6\right]\frac{e^{-\theta x}}{x^{\alpha+2}} \\
 &+ \left[56(\alpha+1)\alpha(\alpha-1)\theta^5\right]\frac{e^{-\theta x}}{x^{\alpha+3}} + \left[70(\alpha+2)(\alpha+1)\alpha(\alpha-1)\theta^4\right]\frac{e^{-\theta x}}{x^{\alpha+4}} \\
 &+ \left[56(\alpha+3)(\alpha+2)(\alpha+1)\alpha(\alpha-1)\theta^3\right]\frac{e^{-\theta x}}{x^{\alpha+5}} \\
 &+ \left[28(\alpha+4)(\alpha+3)(\alpha+2)(\alpha+1)\alpha(\alpha-1)\theta^2\right]\frac{e^{-\theta x}}{x^{\alpha+6}} \\
 &+ \left[8(\alpha+5)(\alpha+4)(\alpha+3)(\alpha+2)(\alpha+1)\alpha(\alpha-1)\theta\right]\frac{e^{-\theta x}}{x^{\alpha+7}} \\
 &+ \left[(\alpha+6)(\alpha+5)(\alpha+4)(\alpha+3)(\alpha+2)(\alpha+1)\alpha(\alpha-1)\right]\frac{e^{-\theta x}}{x^{\alpha+8}}. \tag{866}
 \end{aligned}$$

APÊNDICE E – Potencial pela Troca Especial de um Méson (SOMEPE)

E.1 SOMEPE (SPECIAL ONE MESON EXCHANGE POTENTIAL)

Seguindo o trabalho de Higa (HIGA, 2003), e considerando acoplamentos pseudo-escalar, a troca de um méson é representada por

$$T^{(2)}gT^{(2)} = \vec{G}_1\vec{G}_2T_{it} \quad (867)$$

em que são $\vec{G}_1\vec{G}_2$ matrizes de isospin. Temos a matriz de transição

$$\begin{aligned} T_{it} &= -g_1^2g_2^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\bar{u}^{(1)}\bar{u}^{(2)}\gamma^5\gamma^5g(k|W)\gamma^5\gamma^5u^{(1)}u^{(2)}}{[(k-l)^2 - m_k^2][(k-l')^2 - m_k^2]} \\ &= -g_1^2g_2^2\zeta \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{[\bar{u}(\not{k}_- + m_A)u]^{(1)}[\bar{u}(\not{k}_+ + m_B)u]^{(2)}}{[(k-l)^2 - m_k^2][(k-l')^2 - m_k^2]} \\ &\quad \times \pi \frac{(E_1 + E_2)_{(\vec{k})}}{E_{A(\vec{k})}E_{B(\vec{k})}} \frac{\delta[k_0 - E_A/2 + E_B/2]}{(E_1 + E_2)_{(\vec{p})}^2 - (E_1 + E_2)_{(\vec{k})}^2 + i\epsilon} \\ &= \frac{g_1^2g_2^2}{2}\zeta \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{[\bar{u}(\gamma_0 E_A + \vec{\gamma}\cdot\vec{k} - m_A)u]^{(1)}[\bar{u}(\gamma_0 E_B - \vec{\gamma}\cdot\vec{k} - m_B)u]^{(2)}}{[(\vec{k} - \vec{l})^2 - m_k^2][(\vec{k} - \vec{l}')^2 - m_k^2]} \frac{\bar{E}}{\bar{E}_A\bar{E}_B(\bar{E}^2 - E^2 + i\epsilon)}, \end{aligned} \quad (868)$$

em que $2\bar{E} = E_1(\vec{k}) + E_2(\vec{k}) = \bar{E}_A(\vec{k}) + \bar{E}_B(\vec{k})$ e $2E = E_1(\vec{p}) + E_2(\vec{p})$ (externos). A e B representam as ressonâncias na linha 1 e na linha 2, respectivamente.

Podemos escrever convenientemente

$$\vec{k} - \vec{l} = \vec{Q} - \vec{q}/2, \quad (869)$$

$$\vec{k} - \vec{l}' = \vec{Q} + \vec{q}/2, \quad (870)$$

$$\vec{Q} = \vec{k} + \vec{z}/2, \quad (871)$$

$$\bar{E}_A = \sqrt{(\vec{Q} - \vec{z}/2)^2 + m_A^2}, \quad (872)$$

$$\bar{E}_B = \sqrt{(\vec{Q} - \vec{z}/2)^2 + m_B^2}, \quad (873)$$

$$(\bar{u}\gamma_0u)^{(1)} = \frac{m_1}{E_1} \left[\bar{u}u + \bar{u} \frac{\vec{\gamma}\cdot\vec{z}}{2m_1} u \right]^{(1)}, \quad (874)$$

$$(\bar{u}\gamma_0u)^{(2)} = \frac{m_2}{E_2} \left[\bar{u}u - \bar{u} \frac{\vec{\gamma}\cdot\vec{z}}{2m_2} u \right]^{(2)}, \quad (875)$$

sabendo que, pela equação de Dirac para os bárions externos, temos $\not{p}_i = m_i$ e $\not{p}'_i = m_i$

então $\vec{p}_i = \vec{p}'_i$ e $\vec{p}_i = (\vec{p}'_i + \vec{p}_i)/2 = \pm \vec{z}/2$. Encontramos

$$\begin{aligned} [\bar{u}(\gamma_0 \bar{E}_A + \vec{\gamma} \cdot \vec{k} - m_A)u]^{(1)} &= \left\{ \bar{u} \left[\bar{E}_A \frac{m_1}{E_1} \left(1 + \frac{\vec{\gamma} \cdot \vec{z}}{2m_1} \right) + \vec{\gamma} \cdot \left(\vec{Q} - \frac{\vec{z}}{2} \right) - m_A \right] u \right\}^{(1)} \\ &= m_1 \left\{ \bar{u} \left[\left(\frac{\bar{E}_A}{E_1} - \frac{m_A}{m_1} \right) + \vec{\gamma} \cdot \left(\frac{\vec{Q}}{m_1} + \left(\frac{\bar{E}_A}{E_1} - 1 \right) \frac{\vec{z}}{2m_1} \right) \right] u \right\}^{(1)}, \end{aligned} \quad (876)$$

$$\begin{aligned} [\bar{u}(\gamma_0 \bar{E}_B - \vec{\gamma} \cdot \vec{k} - m_B)u]^{(2)} &= \left\{ \bar{u} \left[\bar{E}_B \frac{m_2}{E_2} \left(1 - \frac{\vec{\gamma} \cdot \vec{z}}{2m_2} \right) - \vec{\gamma} \cdot \left(\vec{Q} - \frac{\vec{z}}{2} \right) - m_B \right] u \right\}^{(2)} \\ &= m_2 \left\{ \bar{u} \left[\left(\frac{\bar{E}_B}{E_2} - \frac{m_B}{m_2} \right) - \vec{\gamma} \cdot \left(\frac{\vec{Q}}{m_2} + \left(\frac{\bar{E}_B}{E_2} - 1 \right) \frac{\vec{z}}{2m_2} \right) \right] u \right\}^{(2)}. \end{aligned} \quad (877)$$

Escrevemos

$$\begin{aligned} T_{it} &= -i \frac{g_1^2 g_2^2}{2} \zeta \int \frac{d^3 Q}{(2\pi)^3} \frac{im_1 m_2}{[(\vec{Q} - \vec{q}/2)^2 - m_k^2][(\vec{Q} + \vec{q}/2)^2 - m_k^2]} \left[\frac{\bar{E}}{\bar{E}_A \bar{E}_B (\bar{E}^2 - E^2 + i\epsilon)} \right] \\ &\times \left\{ \bar{u}_1 u_1 \bar{u}_2 u_2 \left(\frac{\bar{E}_A}{E_1} - \frac{m_A}{m_1} \right) \left(\frac{\bar{E}_B}{E_2} - \frac{m_B}{m_2} \right) - \bar{u}_1 u_1 \bar{u}_2 \gamma_j u_2 \left(\frac{\bar{E}_A}{E_1} - \frac{m_A}{m_1} \right) \left(\frac{Q^j}{m_2} + \left(\frac{\bar{E}_B}{E_2} - 1 \right) \frac{z^j}{2m_2} \right) \right. \\ &+ \bar{u}_1 \gamma_i u_1 \bar{u}_2 u_2 \left(\frac{\bar{E}_B}{E_2} - \frac{m_B}{m_2} \right) \left(\frac{Q^i}{m_1} + \left(\frac{\bar{E}_A}{E_1} - 1 \right) \frac{z^i}{2m_1} \right) \\ &- \bar{u}_1 \gamma_i u_1 \bar{u}_2 \gamma_j u_2 \left[\frac{Q^i Q^j}{m_1 m_2} + \left(\frac{\bar{E}_B}{E_2} - 1 \right) \frac{Q^i z^j}{2m_1 m_2} + \left(\frac{\bar{E}_A}{E_1} - 1 \right) \frac{z^i Q^j}{2m_1 m_2} \right. \\ &\left. \left. + \left(\frac{\bar{E}_A}{E_1} - 1 \right) \left(\frac{\bar{E}_B}{E_2} - 1 \right) \frac{z^i z^j}{4m_1 m_2} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (878)$$

$$\begin{aligned} T_{it} &= -i \frac{g_1^2 g_2^2}{2} \zeta \left\{ \bar{u}_1 u_1 \bar{u}_2 u_2 \left(I_{12} - \frac{m_A}{m_1} I_{A2} - \frac{m_B}{m_2} I_{B1} + \frac{m_A m_B}{m_1 m_2} [I_A + I_B] \right) \right. \\ &- \bar{u}_1 u_1 \bar{u}_2 \gamma_j u_2 \left(\frac{1}{m_2} [I_{B1}^j - \frac{m_A}{m_1} \{I_A^j + I_B^j\}] + [I_{12} - I_{B1} - \frac{m_A}{m_1} \{I_{A2} - I_A - I_B\}] \frac{z^j}{2m_2} \right) \\ &+ \bar{u}_1 \gamma_i u_1 \bar{u}_2 u_2 \left(\frac{1}{m_1} [I_{A2}^i - \frac{m_B}{m_2} \{I_A^i + I_B^i\}] + [I_{12} - I_{A2} - \frac{m_B}{m_2} \{I_{B1} - I_A - I_B\}] \frac{z^i}{2m_1} \right) \\ &- \bar{u}_1 \gamma_i u_1 \bar{u}_2 \gamma_j u_2 \left(\frac{1}{m_1 m_2} [I_A^{ij} + I_B^{ij}] + [I_{A2}^i - I_A^i - I_B^i] \frac{z^j}{2m_1 m_2} + [I_{B1}^j - I_A^j - I_B^j] \frac{z^i}{2m_1 m_2} \right. \\ &\left. + [I_{12} - I_{A2} - I_{B1} + I_A + I_B] \frac{z^i z^j}{4m_1 m_2} \right) \left. \right\}. \end{aligned} \quad (879)$$

Encontramos assim 5 tipos de integrais no caso geral a serem resolvidas

$$\begin{aligned}
 I_{12} &= i \int \frac{d^3Q}{(2\pi)^3} \frac{1}{[(\vec{Q} - \vec{q}/2)^2 - m_k^2][(\vec{Q} + \vec{q}/2)^2 - m_k^2]} \frac{\bar{E}}{E_1 E_2 (\bar{E}^2 - E^2)} \\
 &= i \int \frac{d^3Q}{(2\pi)^3} \frac{1}{[(\vec{Q} - \vec{q}/2)^2 - m_k^2][(\vec{Q} + \vec{q}/2)^2 - m_k^2]} \frac{1}{E_1 E_2} \left[\frac{\bar{E}^2}{\bar{E}(\bar{E}^2 - E^2)} \right], \quad (880)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_{A2} &= i \int \frac{d^3Q}{(2\pi)^3} \frac{1}{[(\vec{Q} - \vec{q}/2)^2 - m_k^2][(\vec{Q} + \vec{q}/2)^2 - m_k^2]} \frac{\bar{E}}{\bar{E}_A E_2 (\bar{E}^2 - E^2)} \\
 &= i \int \frac{d^3Q}{(2\pi)^3} \frac{1}{[(\vec{Q} - \vec{q}/2)^2 - m_k^2][(\vec{Q} + \vec{q}/2)^2 - m_k^2]} \frac{1}{2E_2} \left[\frac{1}{\bar{E}^2 - E^2} + \frac{\bar{E}_B}{\bar{E}_A (\bar{E}^2 - E^2)} \right] \\
 &= i \int \frac{d^3Q}{(2\pi)^3} \frac{1}{[(\vec{Q} - \vec{q}/2)^2 - m_k^2][(\vec{Q} + \vec{q}/2)^2 - m_k^2]} \frac{1}{2E_2} \left[\frac{1}{\bar{E}^2 - E^2} + \frac{\bar{E}_A + \alpha}{\bar{E}_A (\bar{E}^2 - E^2)} \right], \\
 &= \frac{1}{2E_2} [2I_0 + \alpha I_A], \quad (881)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_{B1} &= i \int \frac{d^3Q}{(2\pi)^3} \frac{1}{[(\vec{Q} - \vec{q}/2)^2 - m_k^2][(\vec{Q} + \vec{q}/2)^2 - m_k^2]} \frac{\bar{E}}{\bar{E}_B E_1 (\bar{E}^2 - E^2)} \\
 &= i \int \frac{d^3Q}{(2\pi)^3} \frac{1}{[(\vec{Q} - \vec{q}/2)^2 - m_k^2][(\vec{Q} + \vec{q}/2)^2 - m_k^2]} \frac{1}{2E_1} \left[\frac{1}{\bar{E}^2 - E^2} + \frac{\bar{E}_A}{\bar{E}_B (\bar{E}^2 - E^2)} \right] \\
 &= i \int \frac{d^3Q}{(2\pi)^3} \frac{1}{[(\vec{Q} - \vec{q}/2)^2 - m_k^2][(\vec{Q} + \vec{q}/2)^2 - m_k^2]} \frac{1}{2E_1} \left[\frac{1}{\bar{E}^2 - E^2} + \frac{\bar{E}_B + \beta}{\bar{E}_B (\bar{E}^2 - E^2)} \right], \\
 &= \frac{1}{2E_1} [2I_0 + \beta I_B], \quad (882)
 \end{aligned}$$

$$I_A = i \int \frac{d^3Q}{(2\pi)^3} \frac{1}{[(\vec{Q} - \vec{q}/2)^2 - m_k^2][(\vec{Q} + \vec{q}/2)^2 - m_k^2]} \frac{1}{\bar{E}_A (\bar{E}^2 - E^2)}, \quad (883)$$

$$I_B = i \int \frac{d^3Q}{(2\pi)^3} \frac{1}{[(\vec{Q} - \vec{q}/2)^2 - m_k^2][(\vec{Q} + \vec{q}/2)^2 - m_k^2]} \frac{1}{\bar{E}_B (\bar{E}^2 - E^2)}, \quad (884)$$

sendo

$$\alpha = \frac{m_B^2 - m_A^2}{E_1 + E_2}, \quad (885)$$

$$\beta = \frac{m_A^2 - m_B^2}{E_1 + E_2}, \quad (886)$$

em que usamos a relação $\bar{E}_A = \frac{m_A^2 - m_B^2}{E_1 + E_2} + \bar{E}_B$.

E.1.1 Integral I_0

Para as integrais mais simples do tipo I_0 .

E.1.1.1 I_0

$$\begin{aligned}
I_0 &= i \int \frac{d^3Q}{(2\pi)^3} \frac{1}{[(\vec{Q} - \vec{q}/2)^2 - m_k^2][(\vec{Q} + \vec{q}/2)^2 - m_k^2]} \frac{1}{\bar{E}^2 - E^2} \\
&= i \int \frac{d^3Q}{(2\pi)^3} \frac{1}{[(\vec{Q} - \vec{q}/2)^2 - m_k^2][(\vec{Q} + \vec{q}/2)^2 - m_k^2]} \frac{1}{(\vec{Q} - \vec{z}/2)^2 + \bar{m}^2 - E^2} \\
&= i\Gamma(3) \int_0^1 da \int_0^1 db \int \frac{d^3Q}{(2\pi)^3} \frac{a}{[\vec{Q}^2 + 2\vec{P}\vec{Q} + \Sigma_0^2]^3} \\
&= i\Gamma(3) \int_0^1 da \int_0^1 db \int_0^\infty \frac{dQ}{2\pi^2} \frac{aQ^2}{[Q^2 + \Sigma_0^2 - \vec{P}^2]^3}, \tag{887}
\end{aligned}$$

sendo

$$\vec{P} = C_q \vec{q} - C_b \vec{z}, \tag{888}$$

$$\Sigma_0^2 = (1 - ab)(\vec{q}^2/4 + m_k^2) + ab(\vec{z}^2/4 + \bar{m}^2 - E^2), \tag{889}$$

aqui $C_q = (2a - 1 - ab)/2$, $C_b = ab/2$, Fazemos a integração angular em todo o espaço

$$\begin{aligned}
\int \frac{d^3Q}{(2\pi)^3} \frac{1}{[\vec{Q}^2 + 2\vec{P}\vec{Q} + \Sigma^2]^3} &= \int \frac{d^3Q}{(2\pi)^3} \frac{1}{[\vec{Q}^2 + 2\vec{P}\vec{Q} + \vec{P}^2 + \Sigma^2 - \vec{P}^2]^3} \\
&= \int \frac{d^3Q}{(2\pi)^3} \frac{1}{[Q^2 + \Sigma^2 - \vec{P}^2]^3} \\
&= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^\infty \frac{Q^2 dQ}{(2\pi)^3} \frac{1}{[Q^2 + \Sigma^2 - \vec{P}^2]^3} \\
&= \int_0^\infty \frac{dQ}{2\pi^2} \frac{Q^2}{[Q^2 + \Sigma^2 - \vec{P}^2]^3}.
\end{aligned}$$

Então encontramos na forma compacta

$$I_0 = \frac{i}{(4\pi)^2} \Pi_0^{(000)}, \tag{890}$$

em que

$$\Pi_0^{(000)} = 16 \int_0^1 da \int_0^1 db \int_0^\infty dQ \frac{aQ^2}{[Q^2 + \Sigma_0^2 - \vec{P}^2]^3}. \tag{891}$$

E.1.1.2 I_0^i

Para I_0^i , encontramos

$$\begin{aligned}
I_0^i &= i\Gamma(3) \int_0^1 da \int_0^1 db \int \frac{d^3Q}{(2\pi)^3} \frac{aQ^i}{[\vec{Q}^2 + 2\vec{P}\vec{Q} + \Sigma_0^2]^3} \\
&= -i\Gamma(3) \frac{3-1}{\Gamma(3)} \int_0^1 da \int_0^1 db \int \frac{d^3Q}{(2\pi)^3} (-P^i) \frac{a}{[\vec{Q}^2 + 2\vec{P}\vec{Q} + \Sigma_0^2]^3} \\
&= -i\Gamma(3) \frac{3-1}{\Gamma(3)} \int_0^1 da \int_0^1 db \int_0^\infty \frac{dQ}{2\pi^2} (-P^i) \frac{aQ^2}{[Q^2 + \Sigma_0^2 - \vec{P}^2]^3} \\
&= i \int_0^1 da \int_0^1 db (C_q q^i - C_b z^i) \int_0^\infty \frac{dQ}{\pi^2} \frac{aQ^2}{[Q^2 + \Sigma_0^2 - \vec{P}^2]^3} \\
I_0^i &= \frac{i}{(4\pi)^2} [q^i \Pi_0^{(100)} + z^i \Pi_0^{(010)}], \tag{892}
\end{aligned}$$

com

$$\Pi_0^{(100)} = 16 \int_0^1 da \int_0^1 db \int_0^\infty dQ (C_q) \frac{aQ^2}{[Q^2 + \Sigma_0^2 - \vec{P}^2]^3}, \tag{893}$$

$$\Pi_0^{(010)} = 16 \int_0^1 da \int_0^1 db \int_0^\infty dQ (-C_b) \frac{aQ^2}{[Q^2 + \Sigma_0^2 - \vec{P}^2]^3}. \tag{894}$$

E.1.1.3 $\Pi_0^{(mn0)}$

Temos,

$$\Pi_0^{(mn0)} = 16 \int_0^1 da \int_0^1 db \int_0^\infty dQ (C_q)^m (-C_b)^n \frac{aQ^2}{[Q^2 + \Sigma_0^2 - \vec{P}^2]^3}. \tag{895}$$

Sabendo que

$$\int_0^\infty \frac{Q^2 dQ}{[Q^2 + \Sigma_Y^2 - \vec{P}^2]^n} = \frac{\Gamma(n-1)}{2\Gamma(n)} \int_0^\infty \frac{dQ}{[Q^2 + \Sigma_Y^2 - \vec{P}^2]^{n-1}}, \tag{896}$$

então

$$\Pi_0^{(mn0)} = 4 \int_0^1 da \int_0^1 db \int_0^\infty dQ (C_q)^m (-C_b)^n \frac{a}{[Q^2 + \Sigma_0^2 - \vec{P}^2]^2}, \tag{897}$$

com a substituição $Q = (abE_T/2)c$ e sabendo que $C_c = abc/2$,

$$Q^2 - \vec{P}^2 = C_c^2 E_T^2 - C_q^2 \vec{q}^2 - C_b^2 \vec{z}^2 = C_c^2 W^2 + C_q^2 q^2 + C_b^2 z^2 - C_b^2 (E_1 - E_2)^2 = P_{su}^2 - C_b^2 (E_1 - E_2)^2. \tag{898}$$

Por fim temos a integral na forma geral

$$\Pi_0^{(mn0)} = 4 \int_0^1 da \int_0^1 db \int_0^\infty dc \frac{a^2 b (C_q)^m (-C_b)^n}{[P_{su}^2 + \Sigma_0^2 - C_b^2 (E_1 - E_2)^2]^2}. \quad (899)$$

E.1.1.4 *Integrais $I^i \dots$*

Para lidarmos com os termos Q^i fazemos as derivações

$$\begin{aligned} \int \frac{d^3 Q}{(2\pi)^3} \frac{Q^i}{[\vec{Q}^2 + 2\vec{P}\vec{Q} + \Sigma_A^2]^n} &= \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial P} \right) \frac{1}{\Gamma(n)} \int d^3 Q \frac{1}{[\vec{Q}^2 + 2\vec{P}\vec{Q} + \Sigma_A^2]^{n-1}} \\ &= -\frac{n-1}{\Gamma(n)} \int d^3 Q (-P^i) \frac{1}{[\vec{Q}^2 + 2\vec{P}\vec{Q} + \Sigma_A^2]^n}, \\ I_{(Q)}^i &= -\frac{n-1}{\Gamma(n)} (-P^i) \int_0^\infty dQ \frac{4\pi Q^2}{[Q^2 + \Sigma_A^2 - \vec{P}^2]^n}, \end{aligned} \quad (900)$$

e

$$\begin{aligned} \int \frac{d^3 Q}{(2\pi)^3} \frac{Q^i Q^j}{[\vec{Q}^2 + 2\vec{P}\vec{Q} + \Sigma_A^2]^n} &= \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial P^i} \right) \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial P^j} \right) \frac{1}{\Gamma(n)} \int d^3 Q \frac{1}{[\vec{Q}^2 + 2\vec{P}\vec{Q} + \Sigma_A^2]^{n-2}} \\ &= -\frac{n-2}{\Gamma(n)} \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial P^i} \right) \int d^3 Q (-P^j) \frac{1}{[\vec{Q}^2 + 2\vec{P}\vec{Q} + \Sigma_A^2]^{n-1}} \\ &= -\frac{n-2}{2\Gamma(n)} \int d^3 Q (g^{ij}) \frac{1}{[\vec{Q}^2 + 2\vec{P}\vec{Q} + \Sigma_A^2]^{n-1}} \\ &\quad + \frac{(n-1)(n-2)}{\Gamma(n)} \int d^3 Q (-P^i)(-P^j) \frac{1}{[\vec{Q}^2 + 2\vec{P}\vec{Q} + \Sigma_A^2]^n}, \\ I_{(Q)}^{ij} &= -g^{ij} \frac{n-2}{2\Gamma(n)} \int_0^\infty dQ \frac{4\pi Q^2}{[Q^2 + \Sigma_A^2 - \vec{P}^2]^{n-1}} \\ &\quad + \frac{(n-1)(n-2)}{\Gamma(n)} (-P^i)(-P^j) \int_0^\infty dQ \frac{4\pi Q^2}{[Q^2 + \Sigma_A^2 - \vec{P}^2]^n}, \end{aligned} \quad (901)$$

sendo $\Gamma(n) = (n-1)!$. O fator $(-1/2)$ multiplicando o operador derivada é para compensar o fator 2 e o sinal negativo do expoente no denominador na derivação.

Sabendo que

$$P^i = C_q q^i - C_b z^i, \quad (902)$$

$$P^i P^j = (C_q q^i - C_b z^i)(C_q q^j - C_b z^j) = C_q^2 q^i q^j - C_q C_b q^i z^j - C_b C_q z^i q^j + C_b^2 z^i z^j, \quad (903)$$

e também

$$\Pi^{(lmn)} \propto (-C_q)^l (-C_b)^{m+n}, \quad (904)$$

encontramos de maneira geral as integrais na forma

$$I = \frac{i}{(4\pi)^2} \Pi^{(000)}, \quad (905)$$

$$I^i = \frac{i}{(4\pi)^2} \left[q^i \Pi^{(100)} + z^i \Pi^{(010)} \right], \quad (906)$$

$$I^{ij} = \frac{i}{(4\pi)^2} \left[q^i q^j \Pi^{(200)} + (q^i z^j + z^i q^j) \Pi^{(110)} + z^i z^j \Pi^{(020)} + g^{ij} \bar{\Pi}^{(000)} \right]. \quad (907)$$

E.1.1.5 $S_0^{(mn0)}$

Aqui faremos o procedimento para encontrar as integrais *SOME*P no espaço de configurações, representadas por S .

Fazemos a mudança de variáveis

$$P^2 + \Sigma^2 = \lambda^2 \left(-\frac{q^2}{m_k^2} + \theta^2 \right) = \lambda^2 (\vec{k} + \theta^2), \quad (908)$$

com a transformada de Fourier

$$S = \frac{1}{m_k^3} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} \Pi = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \Pi, \quad (909)$$

sendo $\vec{x} = m_k \vec{r}$ e $\vec{k} = \vec{q}/m_k$. Sabendo que f_A e a transformada de Fourier de F_A , tem-se a relação

$$f_{A-1} = \frac{2\lambda^2}{x} \frac{\partial}{\partial x} f_A, \quad (910)$$

e por resíduos

$$f_5 = -\frac{e^{-\theta x}}{16\pi\lambda^6\theta^3} (1 + \theta x), \quad (911)$$

com $F_5 = -\frac{2}{(P^2 + \Sigma^2)^3}$.

Com o uso de (910) encontramos as demais relações

$$F_4 = \frac{1}{(P^2 + \Sigma^2)^2} \rightarrow f_4 = \frac{e^{-\theta x}}{8\pi\lambda^4\theta}, \quad (912)$$

$$F_3 = -\frac{1}{(P^2 + \Sigma^2)} \rightarrow f_3 = -\frac{e^{-\theta x}}{4\pi\lambda^2\theta x}. \quad (913)$$

Do exposto a proposta é encontrarmos para as integrais *SOME*P o correspondente entre os $P^2 + \Sigma^2$ e os parâmetros λ e θ , mantendo a forma das integrais.

De posse da integral

$$\Pi_0^{(mn0)} = 4 \int_0^1 da \int_0^1 db \int_0^\infty dc \frac{a^2 b (C_q)^m (-C_b)^n}{[P_{su}^2 + \Sigma_0^2 - C_b^2 (E_1 - E_2)^2]^2}. \quad (914)$$

encontramos

$$\begin{aligned} P_{su}^2 + \Sigma_0^2 - C_b^2 (E_1 - E_2)^2 &= C_c^2 W^2 + C_q^2 q^2 + C_b^2 z^2 + (1 - ab)(\bar{q}^2/4 + m_k^2) \\ &\quad + ab(\bar{z}^2/4 + \bar{m}^2 - W^2) - C_b^2 (E_1 - E_2)^2 \\ &= C_b^2 (2(m_1^2 + m_2^2) - q^2 - W^2) + C_q^2 q^2 + C_c^2 W^2 + (1 - ab)(\bar{q}^2/4 + m_k^2) \\ &\quad + ab(\bar{z}^2/4 + \bar{m}^2 - E^2) - C_b^2 (E_1 - E_2)^2 \\ &= C_b^2 (-q^2) + C_q^2 q^2 + C_c^2 W^2 + (1 - 2ab)\bar{q}^2/4 + (1 - ab)m_k^2 \\ &\quad + C_b((E_1 - E_2)^2/2 + 2 * m_1 m_2 - \bar{m}^2), \end{aligned} \quad (915)$$

aqui usamos a relação

$$\bar{z}^2 = (E_1 - E_2)^2 - z^2 = (E_1 - E_2)^2 + 4E^2 - \bar{q}^2 - 4(2\bar{m}^2 - m_1 m_2), \quad (916)$$

a qual vem da identidade

$$q^2 + W^2 + z^2 = q^2 + 4E^2 + z^2 = 4(2\bar{m}^2 - m_1 m_2) = 2(m_1^2 + m_2^2). \quad (917)$$

Dessa maneira temos as novas variáveis correspondentes

$$\lambda_c^2 = a(1 - a)(1 - b)m_k^2, \quad (918)$$

$$\theta_c^2 = \frac{C_c^2 (E_1 + E_2)^2 + (1 - ab)m_k^2 + C_b((E_1 - E_2)^2/2 + 2m_1 m_2 - \bar{m}^2)}{a(1 - a)(1 - b)m_k^2}. \quad (919)$$

Assim a integral final no espaço de configurações correspondente a F_4 fica

$$S_0^{(mn0)} = \int_0^1 da \int_0^1 db \int_0^\infty dc (C_q)^m (-C_b)^n (a^2 b) \frac{e^{-\theta_c x}}{2\pi \lambda_c^4 \theta_c}. \quad (920)$$

E.1.2 Integrais I_Y , $Y = A, B$

Vamos considerar o caso com o fator $1/\bar{E}_Y$ na integral, em que A e B representam as ressonâncias nos estados intermediários.

E.1.2.1 I_Y

$$\begin{aligned}
I_Y &= i \int \frac{d^3Q}{(2\pi)^3} \frac{1}{[(\vec{Q} - \vec{q}/2)^2 - m_k^2][(\vec{Q} + \vec{q}/2)^2 - m_k^2]} \frac{1}{\bar{E}_Y(\bar{E}^2 - E^2)} \\
&= i \int \frac{d^3Q}{(2\pi)^3} \frac{1}{[(\vec{Q} - \vec{q}/2)^2 - m_k^2][(\vec{Q} + \vec{q}/2)^2 - m_k^2]} \frac{1}{(\vec{Q} - \vec{z}/2)^2 + \bar{m}^2 - E^2} \\
&\quad \times \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E d\epsilon}{(\vec{Q} - \vec{z}/2)^2 + m_Y^2 + E^2 \epsilon^2} \\
&= i\Gamma(4) \frac{E}{\pi} \int_0^1 da \int_0^1 db \int_0^1 d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon \int \frac{d^3Q}{(2\pi)^3} \frac{a^2 b}{[\vec{Q}^2 + 2\vec{P}\vec{Q} + \Sigma_Y^2]^4} \\
&= i\Gamma(4) \frac{E}{2\pi^3} \int_0^1 da \int_0^1 db \int_0^1 d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon \int_0^{\infty} dQ \frac{a^2 b Q^2}{[Q^2 + \Sigma_Y^2 - \vec{P}^2]^4}, \tag{921}
\end{aligned}$$

sendo

$$\begin{aligned}
\vec{P} &= C_q \vec{q} - C_b \vec{z}; \tag{922} \\
\Sigma_Y^2 &= (1 - ab)(\vec{q}^2/4 + m_k^2) + ab(\vec{z}^2/4 + \bar{m}^2 - E^2) + ab\lambda E^2(1 + \epsilon^2) + ab\lambda(m_Y^2 - \bar{m}^2). \tag{923}
\end{aligned}$$

Temos na forma compacta que

$$I_Y = \frac{i}{(4\pi)^2} \Pi_Y^{(000)}, \tag{924}$$

sendo a integral

$$\Pi_Y^{(000)} = \frac{48E}{\pi} \int_0^1 da \int_0^1 db \int_0^1 d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon \int_0^{\infty} dQ \frac{a^2 b Q^2}{[Q^2 + \Sigma_Y^2 - \vec{P}^2]^4}. \tag{925}$$

E.1.2.2 I_Y^i

Temos para I_Y^i , usando a derivação mostrada no caso anterior

$$\begin{aligned}
I_Y^i &= -i\Gamma(4) \frac{4-1}{\Gamma(4)} \frac{E}{2\pi^3} \int_0^1 da \int_0^1 db \int_0^1 d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon \int_0^{\infty} dQ (-P^i) \frac{a^2 b Q^2}{[Q^2 + \Sigma_Y^2 - \vec{P}^2]^4} \\
&= i \frac{3E}{2\pi^3} \int_0^1 da \int_0^1 db \int_0^1 d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon \int_0^{\infty} dQ (C_q q^i - C_b z^i) \frac{a^2 b Q^2}{[Q^2 + \Sigma_Y^2 - \vec{P}^2]^4}, \\
I_Y^i &= \frac{i}{2(4\pi)^2} [q^i \Pi_Y^{(100)} + z^i \Pi_Y^{(010)}], \tag{926}
\end{aligned}$$

com

$$\Pi_Y^{(100)} = \frac{48E}{\pi} \int_0^1 da \int_0^1 db \int_0^1 d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon \int_0^{\infty} dQ (C_q) \frac{a^2 b Q^2}{[Q^2 + \Sigma_Y^2 - \vec{P}^2]^4}, \quad (927)$$

$$\Pi_Y^{(010)} = \frac{48E}{\pi} \int_0^1 da \int_0^1 db \int_0^1 d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon \int_0^{\infty} dQ (-C_b) \frac{a^2 b Q^2}{[Q^2 + \Sigma_Y^2 - \vec{P}^2]^4}. \quad (928)$$

E.1.2.3 I_Y^{ij}

Para I_Y^{ij} com a dupla derivação

$$\begin{aligned} I_Y^{ij} &= i\Gamma(4) \frac{E}{2\pi^3} \int_0^1 da \int_0^1 db \int_0^1 d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon \left[-g^{ij} \frac{4-2}{2\Gamma(4)} \int_0^{\infty} dQ \frac{a^2 b Q^2}{[Q^2 + \Sigma_Y^2 - \vec{P}^2]^3} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(4-1)(4-2)}{\Gamma(4)} (P^i)(P^j) \int_0^{\infty} dQ \frac{a^2 b Q^2}{[Q^2 + \Sigma_Y^2 - \vec{P}^2]^4} \right], \\ &= i \frac{E}{2\pi^3} \int_0^1 da \int_0^1 db \int_0^1 d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon \left[-g^{ij} \int_0^{\infty} dQ \frac{a^2 b Q^2}{[Q^2 + \Sigma_Y^2 - \vec{P}^2]^3} \right. \\ &\quad \left. + 6(C_q^2 q^i q^j - C_q C_b q^i z^j - C_b C_q z^i q^j + C_b^2 z^i z^j) \int_0^{\infty} dQ \frac{a^2 b Q^2}{[Q^2 + \Sigma_Y^2 - \vec{P}^2]^4} \right], \\ &= \frac{i}{(4\pi)^2} \left[q^i q^j \Pi_Y^{(200)} + (q^i z^j + z^i q^j) \Pi_Y^{(110)} + z^i z^j \Pi_Y^{(020)} + g^{ij} \bar{\Pi}_Y^{(000)} \right], \end{aligned} \quad (929)$$

sendo portanto

$$\bar{\Pi}_Y^{(000)} = -\frac{8E}{\pi} \int_0^1 da \int_0^1 db \int_0^1 d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon \int_0^{\infty} dQ \frac{a^2 b Q^2}{[Q^2 + \Sigma_Y^2 - \vec{P}^2]^3}, \quad (930)$$

$$\Pi_Y^{(200)} = \frac{48E}{\pi} \int_0^1 da \int_0^1 db \int_0^1 d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon \int_0^{\infty} dQ (C_q^2) \frac{a^2 b Q^2}{[Q^2 + \Sigma_Y^2 - \vec{P}^2]^4}, \quad (931)$$

$$\Pi_Y^{(110)} = \frac{48E}{\pi} \int_0^1 da \int_0^1 db \int_0^1 d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon \int_0^{\infty} dQ (-C_q C_b) \frac{a^2 b Q^2}{[Q^2 + \Sigma_Y^2 - \vec{P}^2]^4}, \quad (932)$$

$$\Pi_Y^{(020)} = \frac{48E}{\pi} \int_0^1 da \int_0^1 db \int_0^1 d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon \int_0^{\infty} dQ (C_b^2) \frac{a^2 b Q^2}{[Q^2 + \Sigma_Y^2 - \vec{P}^2]^4}. \quad (933)$$

E.1.2.4 $\Pi_Y^{(mn0)}$ e $\bar{\Pi}_Y^{(000)}$

As formas gerais das integrais são dadas por

$$\bar{\Pi}_Y^{(000)} = -\frac{8E}{\pi^3} \int_0^1 da \int_0^1 db \int_0^1 d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon \int_0^{\infty} dQ \frac{a^2 b Q^2}{[Q^2 + \Sigma_Y^2 - \vec{P}^2]^3}, \quad (934)$$

$$\Pi_Y^{(mn0)} = \frac{48E}{\pi} \int_0^1 da \int_0^1 db \int_0^1 d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon \int_0^{\infty} dQ (C_q)^m (-C_b)^n \frac{a^2 b Q^2}{[Q^2 + \Sigma_Y^2 - \vec{P}^2]^4}. \quad (935)$$

Usando a relação

$$\int_0^\infty \frac{Q^2 dQ}{[Q^2 + \Sigma_Y^2 - \vec{P}^2]^n} = \frac{\Gamma(n-1)}{2\Gamma(n)} \int_0^\infty \frac{dQ}{[Q^2 + \Sigma_Y^2 - \vec{P}^2]^{n-1}}, \quad (936)$$

temos

$$\bar{\Pi}_Y^{(000)} = -\frac{2E}{\pi} \int_0^1 da \int_0^1 db \int_0^1 d\lambda \int_{-\infty}^\infty d\epsilon \int_0^\infty dQ \frac{a^2 b}{[Q^2 + \Sigma_Y^2 - \vec{P}^2]^2}, \quad (937)$$

$$\Pi_Y^{(mn0)} = \frac{8E}{\pi} \int_0^1 da \int_0^1 db \int_0^1 d\lambda \int_{-\infty}^\infty d\epsilon \int_0^\infty dQ (C_q)^m (-C_b)^n \frac{a^2 b}{[Q^2 + \Sigma_Y^2 - \vec{P}^2]^3}, \quad (938)$$

com

$$\begin{aligned} \Sigma_Y^2 &= (1-ab)(\vec{q}^2/4 + m_k^2) + ab(\vec{z}^2/4 + \bar{m}^2 - E^2) + ab\lambda E^2(1 + \epsilon^2) + ab\lambda(m_Y^2 - \bar{m}^2), \\ &= \Sigma_0^2 + abE^2\lambda((E^2 + m_Y^2 - \bar{m}^2)/E^2 + \epsilon^2), \\ &= \Sigma_0^2 + abE^2\lambda(d^2 + \epsilon^2), \end{aligned} \quad (939)$$

aqui $d^2 = (E^2 + m_Y^2 - \bar{m}^2)/E^2$.

Para o caso geral

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty dQ \int_{-\infty}^\infty d\epsilon \int_0^1 d\lambda \frac{1}{[Q^2 + \Sigma_Y^2 - \vec{P}^2]^n} \\ &= \frac{\Gamma(n-1)}{\Gamma(n)} \int_0^\infty dQ \int_{-\infty}^\infty \frac{d\epsilon}{abE^2(d^2 + \epsilon^2)} \left[\frac{1}{[Q^2 + \Sigma_0^2 - \vec{P}^2]^{n-1}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{[Q^2 + \Sigma_0^2 + abE^2(d^2 + \epsilon^2) - \vec{P}^2]^{n-1}} \right] \\ &= \frac{\Gamma(n-1)}{\Gamma(n)abE^2} \left\{ \left[\int_0^\infty dQ \frac{\pi}{d[Q^2 + \Sigma_0^2 - \vec{P}^2]^{n-1}} \right]_I \right. \\ &\quad \left. - \left[\int_0^\infty dQ \int_{-\infty}^\infty \frac{d\epsilon}{(d^2 + \epsilon^2)} \frac{1}{[Q^2 + \Sigma_0^2 + abE^2(d^2 + \epsilon^2) - \vec{P}^2]^{n-1}} \right]_{II} \right\}. \end{aligned}$$

Usamos a relação na segunda igualdade

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{d\epsilon}{(d^2 + \epsilon^2)} = \frac{1}{d} \arctan\left(\frac{u}{d}\right) \Big|_{-\infty}^\infty = \frac{1}{d} \left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) \right] = \frac{\pi}{d}. \quad (940)$$

Na integração I , fazemos a substituição $Q = (abE/2)c$, (lembrando que $E = E_1 + E_2$),

$$Q^2 - \vec{P}^2 = C_c^2 E^2 - C_q^2 \vec{q}^2 - C_b^2 \vec{z}^2 = C_c^2 W^2 + C_q^2 q^2 + C_b^2 z^2 - C_b^2 (E_1 - E_2)^2 = P_{su}^2 - C_b^2 (E_1 - E_2)^2, \quad (941)$$

$$I = \int_0^\infty dQ \frac{\pi}{d[Q^2 + \Sigma_0^2 - \vec{P}^2]^{n-1}} = \int_0^\infty dc \frac{abE\pi}{2d[P_{su}^2 - C_b^2(E_1 - E_2)^2 + \Sigma_0^2]^{n-1}}. \quad (942)$$

Para a integração de II ,

$$\begin{aligned} II &= \int_0^\infty dQ \int_{-\infty}^\infty \frac{d\epsilon}{(d^2 + \epsilon^2)} \frac{1}{[Q^2 + \Sigma_0^2 + abE^2(d^2 + \epsilon^2) - \vec{P}^2]^{n-1}} \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty dQ \int_{-\infty}^\infty \frac{d\epsilon}{(d^2 + \epsilon^2)} \frac{1}{[Q^2 + \Sigma_0^2 + abE^2(d^2 + \epsilon^2) - \vec{P}^2]^{n-1}}, \end{aligned}$$

realizando a substituição $Q = \sqrt{ab}E\sigma$, encontramos

$$II = \frac{\sqrt{ab}E}{2} \int_{-\infty}^\infty d\sigma \int_{-\infty}^\infty \frac{d\epsilon}{(d^2 + \epsilon^2)} \frac{1}{[Q^2 + \Sigma_0^2 + abE^2(d^2 + \epsilon^2) - \vec{P}^2]^{n-1}},$$

passando para coordenadas polares $\sigma = y \sin \theta$ e $\epsilon = y \cos \theta$, sendo y o raio polar, então

$$II = \frac{\sqrt{ab}E}{2} \int_0^\infty y dy \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(d^2 + y^2 \cos^2 \theta)} \frac{1}{D^{n-1}}, \quad (943)$$

sendo

$$\begin{aligned} D_Y &= abE^2 y^2 \sin^2 \theta + \Sigma_0^2 + abE^2(d^2 + y^2 \cos^2 \theta) - \vec{P}^2, \\ &= \Sigma_0^2 + abE^2(d^2 + y^2) - \vec{P}^2, \\ &= \Sigma_0^2 + abE^2(d^2 + y^2) - C_q^2 \vec{q}^2 - C_b^2 \vec{z}^2, \\ &= \Sigma_0^2 + abE^2(d^2 + y^2) + C_q^2 q^2 + C_b^2 z^2 - C_b^2(E_1 - E_2)^2. \end{aligned} \quad (944)$$

Como D não depende de θ , temos então que resolver a integral por resíduos

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(d^2 + y^2 \cos^2 \theta)} = \oint_{|z|=1} \frac{dz}{iz} \frac{1}{d^2 + y^2(z + z^{-1})^2/4}, \quad (945)$$

em que $z = e^{i\theta}$, $d\theta = dz/(iz)$ e $\cos \theta = (z + z^{-1})/2$, assim

$$\begin{aligned} &\oint_{|z|=1} \frac{dz}{iz} \frac{4z^2}{(4z^2 d^2 + y^2(z^4 + 2z^2 + 1))} = \oint_{|z|=1} \frac{dz}{i} \frac{4z}{y^2 z^4 + 2(2d^2 + y^2)/y^2 z^2 + y^2} \\ &= \oint_{|z|=1} \frac{dz}{i} \frac{4z}{y^2(z^4 + 2\gamma z^2 + 1)} = \frac{2\pi i}{i} \sum Res_{z_\pm} = 4\pi(f(z_\pm)/g'(z_\pm)), \end{aligned} \quad (946)$$

o denominador tem raízes dentro do $|z| = 1$, $z_\pm = \pm \sqrt{\sqrt{\gamma^2 - 1} - \gamma}$

$$\begin{aligned} \frac{f(z_\pm)}{g'(z_\pm)} &= \frac{4z_\pm}{y^2(4z_\pm^3 + 4\gamma z_\pm)} = \frac{1}{y^2(z_\pm^2 + \gamma)} = \frac{1}{y^2(\sqrt{\gamma^2 - 1} - \gamma + \gamma)} = \frac{1}{y^2[(\sqrt{(2d^2 + y^2)^2 - y^4})/y^2]} \\ &= \frac{1}{\sqrt{4d^4 + 4d^2 y^2 + y^4 - y^4}} = \frac{1}{2d\sqrt{d^2 + y^2}}, \end{aligned} \quad (947)$$

portanto

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(d^2 + y^2 \cos^2 \theta)} = \frac{2\pi}{d\sqrt{d^2 + y^2}}, \quad (948)$$

o resultado é razoável, uma vez que, $d = 1$ quando $m_Y = \bar{m}$. Então para II

$$II = \sqrt{ab}E\pi \int_0^\infty \frac{ydy}{d\sqrt{d^2 + y^2}} \frac{1}{D^{n-1}},$$

e

$$\int_0^\infty dQ \int_{-\infty}^\infty d\epsilon \int_0^1 d\lambda \frac{1}{[Q^2 + \Sigma_Y^2 - \vec{P}^2]^n} = \frac{\pi\Gamma(n-1)}{\Gamma(n)E} \left\{ \left[\int_0^\infty dc \frac{1}{2d[P_{su}^2 - C_b^2(E_1 - E_2)^2 + \Sigma_0^2]^{n-1}} \right]_I - \left[\int_0^\infty \frac{ydy}{d\sqrt{ab}\sqrt{d^2 + y^2}} \frac{1}{D^{n-1}} \right]_{II} \right\}. \quad (949)$$

De todos os passos anteriores encontramos o resultado final

$$\bar{\Pi}_Y^{(000)} = -2 \int_0^1 da \int_0^1 db \left[\int_0^\infty dc \frac{a^2b}{2d[P_{su}^2 + \Sigma_0^2 - C_b^2(E_1 - E_2)^2]} - \int_0^\infty dy \frac{ay\sqrt{ab}}{d\sqrt{d^2 + y^2}} \frac{1}{D_Y} \right], \quad (950)$$

$$\Pi_Y^{(mn0)} = 4 \int_0^1 da \int_0^1 db \left[\int_0^\infty dc \frac{(C_q)^m (-C_b)^n a^2b}{2d[P_{su}^2 + \Sigma_0^2 - C_b^2(E_1 - E_2)^2]^2} - \int_0^\infty dy \frac{(C_q)^m (-C_b)^n ay\sqrt{ab}}{d\sqrt{d^2 + y^2}} \frac{1}{D_Y^2} \right]. \quad (951)$$

Escrevendo convenientemente

$$\bar{\Pi}_Y^{(000)} = \bar{\Pi}_{Yc}^{(000)} + \bar{\Pi}_{Yy}^{(000)}, \quad (952)$$

$$\Pi_Y^{(mn0)} = \Pi_{Yc}^{(mn0)} + \Pi_{Yy}^{(mn0)}, \quad (953)$$

em que

$$\bar{\Pi}_{Yc}^{(000)} = - \int_0^1 da \int_0^1 db \int_0^\infty dc \frac{a^2b}{d[P_{su}^2 + \Sigma_0^2 - C_b^2(E_1 - E_2)^2]}, \quad (954)$$

$$\bar{\Pi}_{Yy}^{(000)} = 2 \int_0^1 da \int_0^1 db \int_0^\infty dy \frac{ay\sqrt{ab}}{d\sqrt{d^2 + y^2}} \frac{1}{D_Y}, \quad (955)$$

$$\Pi_{Yc}^{(mn0)} = 2 \int_0^1 da \int_0^1 db \int_0^\infty dc \frac{(C_q)^m (-C_b)^n a^2b}{d[P_{su}^2 + \Sigma_0^2 - C_b^2(E_1 - E_2)^2]^2}, \quad (956)$$

$$\Pi_{Yy}^{(mn0)} = -4 \int_0^1 da \int_0^1 db \int_0^\infty dy \frac{(C_q)^m (-C_b)^n ay\sqrt{ab}}{d\sqrt{d^2 + y^2}} \frac{1}{D_Y^2}. \quad (957)$$

Utilizando a relação (908) (construção do denominador cuja potencia varia entre

as integrais), encontramos

$$\lambda_c^2 = a(1-a)(1-b)m_k^2, \quad (958)$$

$$\theta_c^2 = \frac{C_c^2(E_1 + E_2)^2 + (1-ab)m_k^2 + C_b((E_1 - E_2)^2/2 + 2m_1m_2 - \bar{m}^2)}{a(1-a)(1-b)m_k^2}. \quad (959)$$

como feito para a integral I_0 e,

$$\begin{aligned} D_Y &= \Sigma_0^2 + abE^2(d^2 + y^2) + C_q^2q^2 + C_b^2z^2 - C_b^2(E_1 - E_2)^2 \\ &= C_q^2q^2 + C_b^2z^2 + (1-ab)(\bar{q}^2/4 + m_k^2) + ab(\bar{z}^2/4 + \bar{m}^2 - E^2) \\ &\quad + abE^2(d^2 + y^2) - C_b^2(E_1 - E_2)^2 \\ &= C_b^2(2(m_1^2 + m_2^2) - q^2 - W^2) + C_q^2q^2 + abE^2(d^2 + y^2) + (1-2ab)\bar{q}^2/4 \\ &\quad + (1-ab)m_k^2 - C_b^2(E_1 - E_2)^2 + C_b((E_1 - E_2)^2 + m_1m_2 - \bar{m}^2)/2, \end{aligned}$$

resultando em

$$\lambda_y^2 = a(1-a)(1-b)m_k^2, \quad (960)$$

$$\theta_y^2 = \frac{(1-ab)m_k^2 + C_b((E_1 - E_2)^2/2 + m_1m_2 - \bar{m}^2) + abE^2(d^2 + y^2)}{a(1-a)(1-b)m_k^2}. \quad (961)$$

Então temos as integrais no espaço de configurações

$$\bar{S}_{Yc}^{(000)} = - \int_0^1 da \int_0^1 db \int_0^\infty dc \frac{a^2b}{d} \frac{e^{-\theta_c x}}{4\pi\lambda_c^2\theta_c x}, \quad (962)$$

$$\bar{S}_{Yy}^{(000)} = \int_0^1 da \int_0^1 db \int_0^\infty dy \frac{ay\sqrt{ab}}{d\sqrt{d^2 + y^2}} \frac{e^{-\theta_y x}}{2\pi\lambda_y^2\theta_y x}, \quad (963)$$

$$S_{Yc}^{(lm0)} = \int_0^1 da \int_0^1 db \int_0^\infty dc \frac{(C_q)^l (-C_b)^m a^2b}{d} \frac{e^{-\theta_c x}}{4\pi\lambda_c^4\theta_c}, \quad (964)$$

$$S_{Yy}^{(lm0)} = - \int_0^1 da \int_0^1 db \int_0^\infty dy \frac{(C_q)^l (-C_b)^m ay\sqrt{ab}}{d\sqrt{d^2 + y^2}} \frac{e^{-\theta_y x}}{2\pi\lambda_y^4\theta_y}. \quad (965)$$

E.1.3 Integral I_{12}

Agora para o caso da integral com um termo $1/\bar{E}$ adicional, temos

$$\begin{aligned}
I_D &= i \int \frac{d^3Q}{(2\pi)^3} \frac{1}{[(\vec{Q} - \vec{q}/2)^2 - m_k^2][(\vec{Q} + \vec{q}/2)^2 - m_k^2]} \frac{1}{\bar{E}(\bar{E}^2 - E^2)} \\
&= i \int \frac{d^3Q}{(2\pi)^3} \frac{1}{[(\vec{Q} - \vec{q}/2)^2 - m_k^2][(\vec{Q} + \vec{q}/2)^2 - m_k^2]} \frac{1}{(\vec{Q} - \vec{z}/2)^2 + \bar{m}^2 - E^2} \\
&\quad \times \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E d\epsilon}{(\vec{Q} - \vec{z}/2)^2 + \bar{m}^2 + E^2 \epsilon^2} \\
&= i\Gamma(4) \frac{E}{\pi} \int_0^1 da \int_0^1 db \int_0^1 d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon \int \frac{d^3Q}{(2\pi)^3} \frac{a^2 b}{[\vec{Q}^2 + 2\vec{P}\vec{Q} + \Sigma_D^2]^4} \\
&= i\Gamma(4) \frac{E}{2\pi^3} \int_0^1 da \int_0^1 db \int_0^1 d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon \int_0^{\infty} dQ \frac{a^2 b Q^2}{[Q^2 + \Sigma_D^2 - \vec{P}^2]^4}, \tag{966}
\end{aligned}$$

sendo

$$\vec{P} = C_q \vec{q} - C_b \vec{z}, \tag{967}$$

$$\Sigma_D^2 = (1 - ab)(\vec{q}^2/4 + m_k^2) + ab(\vec{z}^2/4 + \bar{m}^2 - E^2) + ab\lambda E^2(1 + \epsilon^2). \tag{968}$$

Considerando $\bar{E}^2 = (\vec{Q} - \vec{z}/2)^2 + \bar{m}^2$ e que $I_{12} = I_D \cdot \bar{E}^2$

$$\begin{aligned}
I_{12} &= i\Gamma(4) \frac{E}{2\pi^3} \int_0^1 da \int_0^1 db \int_0^1 d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon \left[-g^{ii} \frac{4-2}{2\Gamma(4)} \int_0^{\infty} dQ \frac{a^2 b Q^2}{[Q^2 + \Sigma_D^2 - \vec{P}^2]^3} \right. \\
&\quad + \frac{(4-1)(4-2)}{\Gamma(4)} (P^i)(P_i) \int_0^{\infty} dQ \frac{a^2 b Q^2}{[Q^2 + \Sigma_D^2 - \vec{P}^2]^4} + \int_0^{\infty} dQ \frac{(\vec{z}^2/4 + \bar{m}^2) a^2 b Q^2}{[Q^2 + \Sigma_D^2 - \vec{P}^2]^4} \\
&\quad \left. - \frac{4-1}{\Gamma(4)} (P^i)(z_i) \int_0^{\infty} dQ \frac{a^2 b Q^2}{[Q^2 + \Sigma_D^2 - \vec{P}^2]^4} \right], \tag{969}
\end{aligned}$$

usando as relações

$$g^{ii} = 3, \tag{970}$$

$$\vec{P}^2 = C_q^2 \vec{q}^2 + C_b^2 \vec{z}^2 \rightarrow C_q^2 q^2, \tag{971}$$

$$\vec{P} \cdot \vec{z} = C_b \vec{z}^2 \rightarrow 0, \tag{972}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{Q^2 dQ}{[Q^2 + \Sigma_Y^2 - \vec{P}^2]^n} = \frac{\Gamma(n-1)}{2\Gamma(n)} \int_0^{\infty} \frac{dQ}{[Q^2 + \Sigma_Y^2 - \vec{P}^2]^{n-1}}, \tag{973}$$

temos

$$\begin{aligned}
I_{12} = & i \frac{E}{2\pi^3} \int_0^1 da \int_0^1 db \int_0^1 d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon \left[-\frac{3}{4} \int_0^{\infty} dQ \frac{a^2 b}{[Q^2 + \Sigma_D^2 - \vec{P}^2]^2} \right. \\
& + (C_q^2 \vec{q}^2 + C_b^2 \vec{z}^2) \int_0^{\infty} dQ \frac{a^2 b}{[Q^2 + \Sigma_D^2 - \vec{P}^2]^3} + \frac{1}{6} \int_0^{\infty} dQ \frac{(\vec{z}^2/4 + \bar{m}^2) a^2 b}{[Q^2 + \Sigma_D^2 - \vec{P}^2]^3} \\
& \left. - \frac{C_b \vec{z}^2}{2} \int_0^{\infty} dQ \frac{a^2 b}{[Q^2 + \Sigma_D^2 - \vec{P}^2]^3} \right], \tag{974}
\end{aligned}$$

escrevendo de maneira conveniente

$$I_{12} = \frac{i}{(4\pi)^2} \left[q^2 \Pi_{12}^{(200)} + \vec{z}^2 \left(\Pi_{12}^{(020)} + \frac{1}{2} \Pi_{12}^{(010)} + \frac{1}{24} \Pi_{12}^{(000)} \right) + \frac{\bar{m}^2}{6} \Pi_{12}^{(000)} + \bar{\Pi}_{12}^{(000)} \right], \tag{975}$$

então

$$\bar{\Pi}_{12}^{(000)} = -\frac{6E}{\pi} \int_0^1 da \int_0^1 db \int_0^1 d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon \int_0^{\infty} dQ \frac{a^2 b}{[Q^2 + \Sigma_D^2 - \vec{P}^2]^2}, \tag{976}$$

$$\Pi_{12}^{(mn0)} = \frac{8E}{\pi} \int_0^1 da \int_0^1 db \int_0^1 d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon \int_0^{\infty} dQ (C_q)^m (-C_b)^n \frac{a^2 b}{[Q^2 + \Sigma_D^2 - \vec{P}^2]^3}. \tag{977}$$

As integrais têm a mesma parte dada por

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} dQ \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon \int_0^1 d\lambda \frac{1}{[Q^2 + \Sigma_D^2 - \vec{P}^2]^n} = & \frac{\pi \Gamma(n-1)}{\Gamma(n) E} \left\{ \left[\int_0^{\infty} \frac{dc}{2[P_{su}^2 - C_b^2 (E_1 - E_2)^2 + \Sigma_0^2]^{n-1}} \right]_I \right. \\
& \left. - \left[\int_0^{\infty} \frac{y dy}{\sqrt{ab} \sqrt{1+y^2}} \frac{1}{D^{n-1}} \right]_{II} \right\}, \tag{978}
\end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned}
D_{12} = & abE^2 y^2 \sin^2 \theta + \Sigma_0^2 + abE^2 (1 + y^2 \cos^2 \theta) - \vec{P}^2 \\
= & \Sigma_0^2 + abE^2 (1 + y^2) + C_q^2 q^2 + C_b^2 z^2 - C_b^2 (E_1 - E_2)^2. \tag{979}
\end{aligned}$$

Encontramos então

$$\begin{aligned}
\bar{\Pi}_{12}^{(000)} = & -6 \int_0^1 da \int_0^1 db \left[\int_0^{\infty} dc \frac{a^2 b}{2[P_{su}^2 + \Sigma_0^2 - C_b^2 (E_1 - E_2)^2]} \right. \\
& \left. - \int_0^{\infty} dy \frac{ay \sqrt{ab}}{\sqrt{1+y^2}} \frac{1}{D_{12}} \right], \tag{980}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Pi_{12}^{(mn0)} = & 4 \int_0^1 da \int_0^1 db \left[\int_0^{\infty} dc \frac{(C_q)^m (-C_b)^n a^2 b}{2[P_{su}^2 + \Sigma_0^2 - C_b^2 (E_1 - E_2)^2]^2} \right. \\
& \left. - \int_0^{\infty} dy (C_q)^m (-C_b)^n \frac{ay \sqrt{ab}}{\sqrt{1+y^2}} \frac{1}{D_{12}^2} \right]. \tag{981}
\end{aligned}$$

Definindo

$$\bar{\Pi}_{12}^{(000)} = \bar{\Pi}_{12c}^{(000)} + \bar{\Pi}_{12y}^{(000)}, \quad (982)$$

$$\Pi_{12}^{(mn0)} = \Pi_{12c}^{(mn0)} + \Pi_{12y}^{(mn0)}, \quad (983)$$

em que

$$\bar{\Pi}_{12c}^{(000)} = -3 \int_0^1 da \int_0^1 db \int_0^\infty dc \frac{a^2 b}{P_{su}^2 + \Sigma_0^2 - C_b^2 (E_1 - E_2)^2}, \quad (984)$$

$$\bar{\Pi}_{12y}^{(000)} = 6 \int_0^1 da \int_0^1 db \int_0^\infty dy \frac{ay\sqrt{ab}}{\sqrt{1+y^2}} \frac{1}{D_{12}}, \quad (985)$$

$$\Pi_{12c}^{(mn0)} = 2 \int_0^1 da \int_0^1 db \int_0^\infty dc \frac{(C_q)^m (-C_b)^n a^2 b}{[P_{su}^2 + \Sigma_0^2 - C_b^2 (E_1 - E_2)^2]^2}, \quad (986)$$

$$\Pi_{12y}^{(mn0)} = -4 \int_0^1 da \int_0^1 db \int_0^\infty dy \frac{(C_q)^m (-C_b)^n ay\sqrt{ab}}{\sqrt{1+y^2}} \frac{1}{D_{12}^2}. \quad (987)$$

Podemos determinar todas as amplitudes neste caso.

E.1.3.1 $\bar{S}_{12}^{(000)}$ e $S_{12}^{(mn0)}$

Fazemos o mesmo procedimento do caso Y (seção E.1.2.4), porém com a igualdade $d = 1$, resultando em

$$\lambda_{y'}^2 = a(1-a)(1-b)m_k^2, \quad (988)$$

$$\theta_{y'}^2 = \frac{(1-ab)m_k^2 + C_b((E_1 - E_2)^2/2 + m_1 m_2 - \bar{m}^2) + abE^2(1+y^2)}{a(1-a)(1-b)m_k^2}. \quad (989)$$

Com esse novo θ , temos

$$\bar{S}_{12c}^{(000)} = -3 \int_0^1 da \int_0^1 db \int_0^\infty dc (a^2 b) \frac{e^{-\theta_c x}}{4\pi \lambda_c^2 \theta_c x}, \quad (990)$$

$$\bar{S}_{12y}^{(000)} = 3 \int_0^1 da \int_0^1 db \int_0^\infty dy \frac{ay\sqrt{ab}}{\sqrt{1+y^2}} \frac{e^{-\theta_{y'} x}}{2\pi \lambda_y^2 \theta_{y'} x}, \quad (991)$$

$$S_{12c}^{(lm0)} = \int_0^1 da \int_0^1 db \int_0^\infty dc (C_q)^l (-C_b)^m a^2 b \frac{e^{-\theta_c x}}{4\pi \lambda_c^4 \theta_c}, \quad (992)$$

$$S_{12y}^{(lm0)} = - \int_0^1 da \int_0^1 db \int_0^\infty dy \frac{(C_q)^l (-C_b)^m ay\sqrt{ab}}{\sqrt{1+y^2}} \frac{e^{-\theta_{y'} x}}{2\pi \lambda_y^4 \theta_{y'}}. \quad (993)$$

E.1.4 Reescrevendo T_{it}

De posse de

$$\begin{aligned}
T_{it} = & -i \frac{g_1^2 g_2^2}{2} \zeta \left\{ \bar{u}_1 u_1 \bar{u}_2 u_2 \left(I_{12} - \frac{m_A}{m_1} I_{A2} - \frac{m_B}{m_2} I_{B1} + \frac{m_A m_B}{m_1 m_2} [I_A + I_B] \right) \right. \\
& - \bar{u}_1 u_1 \bar{u}_2 \gamma_j u_2 \left(\frac{1}{m_2} [I_{B1}^j - \frac{m_A}{m_1} \{I_A^j + I_B^j\}] + [I_{12} - I_{B1} - \frac{m_A}{m_1} \{I_{A2} - I_A - I_B\}] \frac{z^j}{2m_2} \right) \\
& + \bar{u}_1 \gamma_i u_1 \bar{u}_2 u_2 \left(\frac{1}{m_1} [I_{A2}^i - \frac{m_B}{m_2} \{I_A^i + I_B^i\}] + [I_{12} - I_{A2} - \frac{m_B}{m_2} \{I_{B1} - I_A - I_B\}] \frac{z^i}{2m_1} \right) \\
& - \bar{u}_1 \gamma_i u_1 \bar{u}_2 \gamma_j u_2 \left(\frac{1}{m_1 m_2} [I_A^{ij} + I_B^{ij}] + [I_{A2}^i - I_A^i - I_B^i] \frac{z^j}{2m_1 m_2} + [I_{B1}^j - I_A^j - I_B^j] \frac{z^i}{2m_1 m_2} \right. \\
& \left. + [I_{12} - I_{A2} - I_{B1} + I_A + I_B] \frac{z^i z^j}{4m_1 m_2} \right) \left. \right\}, \tag{994}
\end{aligned}$$

podemos reescrever a amplitude na forma

$$T_{it} = -i \left\{ \bar{u}_1 u_1 \bar{u}_2 u_2 T - \bar{u}_1 u_1 \bar{u}_2 \gamma_j u_2 T^j + \bar{u}_1 \gamma_i u_1 \bar{u}_2 u_2 T^i - \bar{u}_1 \gamma_i u_1 \bar{u}_2 \gamma_j u_2 T^{ij} \right\}, \tag{995}$$

sendo

$$T = \frac{g_1^2 g_2^2}{2} \zeta \left\{ I_{12} - \frac{m_A}{m_1} I_{A2} - \frac{m_B}{m_2} I_{B1} + \frac{m_A m_B}{m_1 m_2} [I_A + I_B] \right\}, \tag{996}$$

$$T^j = \frac{g_1^2 g_2^2}{2} \zeta \left\{ \frac{1}{m_2} [I_{B1}^j - \frac{m_A}{m_1} \{I_A^j + I_B^j\}] + [I_{12} - I_{B1} - \frac{m_A}{m_1} \{I_{A2} - I_A - I_B\}] \frac{z^j}{2m_2} \right\}, \tag{997}$$

$$T^i = \frac{g_1^2 g_2^2}{2} \zeta \left\{ \frac{1}{m_1} [I_{A2}^i - \frac{m_B}{m_2} \{I_A^i + I_B^i\}] + [I_{12} - I_{A2} - \frac{m_B}{m_2} \{I_{B1} - I_A - I_B\}] \frac{z^i}{2m_1} \right\}, \tag{998}$$

$$\begin{aligned}
T^{ij} = & \frac{g_1^2 g_2^2}{2} \zeta \left\{ \frac{1}{m_1 m_2} [I_A^{ij} + I_B^{ij}] + [I_{A2}^i - I_A^i - I_B^i] \frac{z^j}{2m_1 m_2} + [I_{B1}^j - I_A^j - I_B^j] \frac{z^i}{2m_1 m_2} \right. \\
& \left. + [I_{12} - I_{A2} - I_{B1} + I_A + I_B] \frac{z^i z^j}{4m_1 m_2} \right\}. \tag{999}
\end{aligned}$$

Para encontramos as relações \mathcal{T} , usamos a relações

$$\begin{aligned} I_{A2} &= \frac{1}{2E_2} [2I_0 + \alpha I_A] = \frac{i}{2(4\pi)^2 E_2} [2\Pi_0^{(000)} + \alpha \Pi_A^{(000)}] \\ &= \frac{i}{2(4\pi)^2 E_2} [2\Pi_0^{(000)} + \alpha (\Pi_{Ac}^{(000)} + \Pi_{Ay}^{(000)})], \end{aligned} \quad (1000)$$

$$\begin{aligned} I_{B1} &= \frac{1}{2E_1} [2I_0 + \beta I_B] = \frac{i}{2(4\pi)^2 E_1} [2\Pi_0^{(000)} + \beta \Pi_B^{(000)}] \\ &= \frac{i}{2(4\pi)^2 E_1} [2\Pi_0^{(000)} + \beta (\Pi_{Bc}^{(000)} + \Pi_{By}^{(000)})], \end{aligned} \quad (1001)$$

$$\begin{aligned} I_{A2}^i &= \frac{1}{2E_2} [2I_0^i + \alpha I_A^i] = \frac{i}{2(4\pi)^2 E_2} [q^i (2\Pi_0^{(100)} + \alpha \Pi_A^{(100)}) + z^i (2\Pi_0^{(010)} + \alpha \Pi_A^{(010)})] \\ &= \frac{i}{2(4\pi)^2 E_2} [q^i \{2\Pi_0^{(100)} + \alpha (\Pi_{Ac}^{(100)} + \Pi_{Ay}^{(100)})\} + z^i \{2\Pi_0^{(010)} + \alpha (\Pi_{Ac}^{(010)} + \Pi_{Ay}^{(010)})\}], \end{aligned} \quad (1002)$$

$$\begin{aligned} I_{B1}^j &= \frac{1}{2E_1} [2I_0^j + \beta I_B^j] = \frac{i}{2(4\pi)^2 E_1} [q^j (2\Pi_0^{(100)} + \beta \Pi_B^{(100)}) + z^j (2\Pi_0^{(010)} + \beta \Pi_B^{(010)})] \\ &= \frac{i}{2(4\pi)^2 E_1} [q^j \{2\Pi_0^{(100)} + \beta (\Pi_{Bc}^{(100)} + \Pi_{By}^{(100)})\} + z^j \{2\Pi_0^{(010)} + \beta (\Pi_{Bc}^{(010)} + \Pi_{By}^{(010)})\}], \end{aligned} \quad (1003)$$

e também

$$I_0 = \frac{i}{(4\pi)^2} \Pi_0^{(000)}, \quad (1004)$$

$$I_0^i = \frac{i}{(4\pi)^2} [q^i \Pi_0^{(100)} + z^i \Pi_0^{(010)}], \quad (1005)$$

$$I_Y = \frac{i}{(4\pi)^2} \Pi_Y^{(000)} = \frac{i}{(4\pi)^2} (\Pi_{Yc}^{(000)} + \Pi_{Yy}^{(000)}), \quad (1006)$$

$$I_Y^i = \frac{i}{2(4\pi)^2} [q^i \Pi_Y^{(100)} + z^i \Pi_Y^{(010)}] = \frac{i}{2(4\pi)^2} [q^i (\Pi_{Yc}^{(100)} + \Pi_{Yy}^{(100)}) + z^i (\Pi_{Yc}^{(010)} + \Pi_{Yy}^{(010)})], \quad (1007)$$

$$\begin{aligned} I_Y^{ij} &= \frac{i}{(4\pi)^2} [q^i q^j \Pi_Y^{(200)} + (q^i z^j + z^i q^j) \Pi_Y^{(110)} + z^i z^j \Pi_Y^{(020)} + g^{ij} \bar{\Pi}_Y^{(000)}] \\ &= \frac{i}{(4\pi)^2} [q^i q^j (\Pi_{Yc}^{(200)} + \Pi_{Yy}^{(200)}) + (q^i z^j + z^i q^j) (\Pi_{Yc}^{(110)} + \Pi_{Yy}^{(110)}) \\ &\quad + z^i z^j (\Pi_{Yc}^{(020)} + \Pi_{Yy}^{(020)}) + g^{ij} (\bar{\Pi}_{Yc}^{(000)} + \bar{\Pi}_{Yy}^{(000)})], \end{aligned} \quad (1008)$$

$$\begin{aligned} I_{12} &= \frac{i}{(4\pi)^2} [q^2 \Pi_{12}^{(200)} + \bar{z}^2 (\Pi_{12}^{(020)} + \frac{1}{2} \Pi_{12}^{(010)} + \frac{1}{24} \Pi_{12}^{(000)}) + \frac{\bar{m}^2}{6} \Pi_{12}^{(000)} + \bar{\Pi}_{12}^{(000)}] \\ &= \frac{i}{(4\pi)^2} [q^2 (\Pi_{12c}^{(200)} + \Pi_{12y}^{(200)}) + \frac{\bar{m}^2}{6} (\Pi_{12c}^{(000)} + \Pi_{12y}^{(000)}) + (\bar{\Pi}_{12c}^{(000)} + \bar{\Pi}_{12y}^{(000)}) \\ &\quad + \bar{z}^2 ((\Pi_{12c}^{(020)} + \Pi_{12y}^{(020)}) + \frac{1}{2} (\Pi_{12c}^{(010)} + \Pi_{12y}^{(010)}) + \frac{1}{24} (\Pi_{12c}^{(000)} + \Pi_{12y}^{(000)}))], \end{aligned} \quad (1009)$$

em que

$$\bar{\Pi}_{12}^{(000)} = \bar{\Pi}_{12c}^{(000)} + \bar{\Pi}_{12y}^{(000)}, \quad (1010)$$

$$\Pi_{12}^{(mn0)} = \Pi_{12c}^{(mn0)} + \Pi_{12y}^{(mn0)}, \quad (1011)$$

$$\bar{\Pi}_Y^{(000)} = \bar{\Pi}_{Yc}^{(000)} + \bar{\Pi}_{Yy}^{(000)}, \quad (1012)$$

$$\Pi_Y^{(mn0)} = \Pi_{Yc}^{(mn0)} + \Pi_{Yy}^{(mn0)}. \quad (1013)$$

Encontramos então que

$$\begin{aligned} T &= \frac{g_1^2 g_2^2}{2} \zeta \left\{ I_{12} - \left(\frac{m_A}{m_1 E_2} + \frac{m_B}{E_1 m_2} \right) I_0 + \left(\frac{m_A m_B}{m_1 m_2} + \frac{m_A \alpha}{2 m_1 E_2} \right) I_A + \left(\frac{m_A m_B}{m_1 m_2} + \frac{m_B \beta}{2 E_1 m_2} \right) I_B \right\} \\ &= \frac{g_1^2 g_2^2}{2} \zeta \frac{i}{(4\pi)^2} \left\{ \left[q^2 \Pi_{12}^{(200)} + \bar{z}^2 \left(\Pi_{12}^{(020)} + \frac{1}{2} \Pi_{12}^{(010)} + \frac{1}{24} \Pi_{12}^{(000)} \right) + \frac{\bar{m}^2}{6} \Pi_{12}^{(000)} + \bar{\Pi}_{12}^{(000)} \right] \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{m_A}{m_1 E_2} + \frac{m_B}{E_1 m_2} \right) \Pi_0^{(000)} + \left(\frac{m_A m_B}{m_1 m_2} + \frac{m_A \alpha}{2 m_1 E_2} \right) \Pi_A^{(000)} + \left(\frac{m_A m_B}{m_1 m_2} + \frac{m_B \beta}{2 E_1 m_2} \right) \Pi_B^{(000)} \right\}, \end{aligned} \quad (1014)$$

$$\begin{aligned} T^j &= \frac{g_1^2 g_2^2}{2} \zeta \left\{ \frac{1}{m_2} \left[\frac{1}{E_1} I_0^j - \frac{m_A}{m_1} I_A^j + \left(\frac{\beta}{2 E_1} - \frac{m_A}{m_1} \right) I_B^j \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{z^j}{2 m_2} \left[I_{12} - \left(\frac{1}{E_1} + \frac{m_A}{m_1 E_2} \right) I_0 + \frac{m_A}{m_1} \left(1 - \frac{\alpha}{2 E_2} \right) I_A + \left(\frac{m_A}{m_1} - \frac{\beta}{m_1} \right) I_B \right] \right\} \\ &= \frac{g_1^2 g_2^2}{2} \zeta \frac{i}{(4\pi)^2} \left\{ \frac{q^j}{m_2} \left[\frac{1}{E_1} \Pi_0^{(100)} - \frac{m_A}{2 m_1} \Pi_A^{(100)} + \frac{1}{2} \left(\frac{\beta}{2 E_1} - \frac{m_A}{m_1} \right) \Pi_B^{(100)} \right] \right. \\ &\quad + \frac{z^j}{2 m_2} \left[q^2 \Pi_{12}^{(200)} + \bar{z}^2 \left(\Pi_{12}^{(020)} + \frac{1}{2} \Pi_{12}^{(010)} + \frac{1}{24} \Pi_{12}^{(000)} \right) + \frac{\bar{m}^2}{6} \Pi_{12}^{(000)} + \bar{\Pi}_{12}^{(000)} \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{1}{E_1} + \frac{m_A}{m_1 E_2} \right) \Pi_0^{(000)} + \frac{m_A}{m_1} \left(1 - \frac{\alpha}{2 E_2} \right) \Pi_A^{(000)} + \left(\frac{m_A}{m_1} - \frac{\beta}{m_1} \right) \Pi_B^{(000)} \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{2}{E_1} \Pi_0^{(010)} - \frac{m_A}{m_1} \Pi_A^{(010)} + \left(\frac{\beta}{E_1} - \frac{m_A}{m_1} \right) \Pi_B^{(010)} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (1015)$$

$$\begin{aligned} T^i &= \frac{g_1^2 g_2^2}{2} \zeta \left\{ \frac{1}{m_1} \left[\frac{1}{E_2} I_0^i + \left(\frac{\alpha}{E_2} - \frac{m_B}{m_2} \right) I_A^i - \frac{m_B}{m_2} I_B^i \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{z^i}{2 m_1} \left[I_{12} - \left(\frac{1}{E_2} + \frac{m_B}{E_1 m_2} \right) I_0 + \left(\frac{m_B}{m_2} - \frac{\alpha}{2 E_2} \right) I_A + \frac{m_B}{m_2} \left(1 - \frac{\beta}{2 E_1} \right) I_B \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{g_1^2 g_2^2}{2} \zeta \frac{i}{(4\pi)^2} \left\{ \frac{q^i}{m_1} \left[\frac{1}{E_2} \Pi_0^{(100)} + \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{2E_2} - \frac{m_B}{m_2} \right) \Pi_A^{(100)} - \frac{m_B}{2m_2} \Pi_B^{(100)} \right] \right. \\
&+ \frac{z^i}{2m_1} \left[q^2 \Pi_{12}^{(200)} + \bar{z}^2 \left(\Pi_{12}^{(020)} + \frac{1}{2} \Pi_{12}^{(010)} + \frac{1}{24} \Pi_{12}^{(000)} \right) + \frac{\bar{m}^2}{6} \Pi_{12}^{(000)} + \bar{\Pi}_{12}^{(000)} \right. \\
&- \left. \left(\frac{1}{E_2} + \frac{m_B}{E_1 m_2} \right) \Pi_0^{(000)} + \left(\frac{m_B}{m_2} - \frac{\alpha}{2E_2} \right) \Pi_A^{(000)} + \frac{m_B}{m_2} \left(1 - \frac{\beta}{2E_1} \right) \Pi_B^{(000)} \right. \\
&\left. \left. + \frac{2}{E_2} \Pi_0^{(010)} + \left(\frac{\alpha}{2E_2} - \frac{m_B}{m_2} \right) \Pi_A^{(010)} - \frac{m_B}{m_2} \Pi_B^{(010)} \right] \right\}, \tag{1016}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T^{ij} &= \frac{g_1^2 g_2^2}{2} \zeta \left\{ \frac{1}{m_1 m_2} \left[I_A^{ij} + I_B^{ij} \right] + \frac{z^i}{2m_1 m_2} \left[\frac{1}{E_1} I_0^j - I_A^j + \left(\frac{\beta}{2E_1} - 1 \right) I_B^j \right] \right. \\
&+ \frac{z^j}{2m_1 m_2} \left[\frac{1}{E_2} I_0^i + \left(\frac{\alpha}{2E_2} - 1 \right) I_A^i - I_B^i \right] \\
&+ \frac{z^i z^j}{4m_1 m_2} \left[I_{12} - \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right) I_0 + \left(1 - \frac{\alpha}{2E_2} \right) I_A + \left(1 - \frac{\beta}{2E_1} \right) I_B \right] \\
&= \frac{g_1^2 g_2^2}{2} \zeta \frac{i}{(4\pi)^2 m_1 m_2} \left\{ g^{ij} \left(\bar{\Pi}_A^{(000)} + \bar{\Pi}_B^{(000)} \right) + q^i q^j \left(\Pi_A^{(200)} + \Pi_B^{(200)} \right) \right. \\
&+ q^i z^j \left[\frac{\Pi_0^{(100)}}{2E_2} + \Pi_A^{(110)} + \Pi_B^{(110)} + \frac{1}{4} \left(\frac{\alpha}{2E_2} - 1 \right) \Pi_A^{(100)} - \frac{1}{4} \Pi_B^{(100)} \right] \\
&+ z^i q^j \left[\frac{\Pi_0^{(100)}}{2E_1} + \Pi_A^{(110)} + \Pi_B^{(110)} - \frac{1}{4} \Pi_A^{(100)} + \frac{1}{4} \left(\frac{\beta}{2E_1} - 1 \right) \Pi_B^{(100)} \right] \\
&+ \frac{z^i z^j}{4} \left[q^2 \Pi_{12}^{(200)} + \bar{z}^2 \left(\Pi_{12}^{(020)} + \frac{1}{2} \Pi_{12}^{(010)} + \frac{1}{24} \Pi_{12}^{(000)} \right) + \frac{\bar{m}^2}{6} \Pi_{12}^{(000)} + \bar{\Pi}_{12}^{(000)} + 4\Pi_A^{(020)} + 4\Pi_B^{(020)} \right. \\
&+ 2 \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right) \left(\Pi_0^{(010)} - \frac{1}{2} \Pi_0^{(000)} \right) + \left(\frac{\alpha}{2E_2} - 2 \right) \Pi_A^{(010)} + \left(\frac{\beta}{2E_1} - 2 \right) \Pi_B^{(010)} \\
&\left. \left. + \left(1 - \frac{\alpha}{2E_2} \right) \Pi_A^{(000)} + \left(1 - \frac{\beta}{2E_1} \right) \Pi_B^{(000)} \right] \right\}. \tag{1017}
\end{aligned}$$

Usando as relações abaixo

$$\bar{u}_1 \gamma^i q_i u_1 = \bar{u}_1 \not{q} u_1 = 0, \tag{1018}$$

$$\bar{z}^2 \rightarrow 0, \tag{1019}$$

temos

$$\begin{aligned}
[\bar{u}(p')u(p)]_{(1)} [\bar{u}(p')u(p)]_{(2)} &= \left[2m_1 + \frac{Q^{(1)}}{4m_1} \right] \left[2m_2 + \frac{Q^{(2)}}{4m_2} \right] \\
&= 4m_1 m_2 + \left[\frac{m_2}{2m_1} + \frac{m_1}{2m_2} \right] (\vec{q})^2 + \frac{(\vec{q})^4}{16m_1 m_2} \\
&\quad - 2 \left[\frac{m_2}{2m_1} + \frac{m_1}{2m_2} + \frac{(\vec{q})^2}{8m_1 m_2} \right] \vec{\Omega}_{LS+} + 2 \left[-\frac{m_2}{2m_1} + \frac{m_1}{2m_2} \right] \vec{\Omega}_{LS-} \\
&= a + b \vec{\Omega}_{LS+} + c \vec{\Omega}_{LS-}, \tag{1020}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\bar{u}(p')\vec{\gamma}\vec{z}u(p)]_{(1)}[\bar{u}(p')u(p)]_{(2)} &= [\mathcal{Q}^{(1)}] \left[2m_2 + \frac{\mathcal{Q}^{(2)}}{4m_2} \right] = 2m_2\mathcal{Q}^{(1)} + \frac{\mathcal{Q}^{(1)}\mathcal{Q}^{(2)}}{4m_2} \\
&= 2m_2(\vec{q})^2 + \frac{(\vec{q})^4}{4m_2} - \left[4m_2 + \frac{(\vec{q})^2}{m_2} \right] \vec{\Omega}_{LS+} - 4m_2\vec{\Omega}_{LS-} \\
&= \bar{z}_{1O} + z_{1O+}\vec{\Omega}_{LS+} + z_{1O-}\vec{\Omega}_{LS-},
\end{aligned} \tag{1021}$$

$$\begin{aligned}
[\bar{u}(p')u(p)]_{(1)}[\bar{u}(p')\vec{\gamma}\vec{z}u(p)]_{(2)} &= \left[2m_1 + \frac{\mathcal{Q}^{(1)}}{4m_1} \right] \left[-\mathcal{Q}^{(2)} \right] = -2m_1\mathcal{Q}^{(2)} - \frac{\mathcal{Q}^{(1)}\mathcal{Q}^{(2)}}{4m_1} \\
&= -2m_1(\vec{q})^2 - \frac{(\vec{q})^4}{4m_1} + \left[4m_1 + \frac{(\vec{q})^2}{m_1} \right] \vec{\Omega}_{LS+} - 4m_1\vec{\Omega}_{LS-} \\
&= \bar{z}_{2O} + z_{2O+}\vec{\Omega}_{LS+} + z_{2O-}\vec{\Omega}_{LS-},
\end{aligned} \tag{1022}$$

$$\begin{aligned}
[\bar{u}(p')\vec{\gamma}\vec{z}u(p)]_{(1)}[\bar{u}(p')\vec{\gamma}\vec{z}u(p)]_{(2)} &= [\mathcal{Q}^{(1)}] \left[-\mathcal{Q}^{(2)} \right] = -\mathcal{Q}^{(1)}\mathcal{Q}^{(2)} \\
&= -(\vec{q})^4 + 4(\vec{q})^2\vec{\Omega}_{LS+} \\
&= \bar{z}\bar{z}_O + z z_{O+}\vec{\Omega}_{LS+},
\end{aligned} \tag{1023}$$

$$\begin{aligned}
[\bar{u}\gamma_i u]^{(1)}[\bar{u}\gamma_j u]^{(2)}g^{ij} &= (\vec{z} + i\vec{\sigma}^{(1)} \times \vec{q})(\vec{z} + i\vec{\sigma}^{(2)} \times \vec{q}) \\
&= i\vec{\sigma}^{(1)}(\vec{q} \times \vec{z}) + i\vec{\sigma}^{(2)}(\vec{q} \times \vec{z}) - (\vec{\sigma}^{(1)} \times \vec{q})(\vec{\sigma}^{(2)} \times \vec{q}) \\
&= 4\vec{\Omega}_{LS+} - \frac{2}{3}\vec{\Omega}_{SS} - \frac{1}{3}\vec{\Omega}_T,
\end{aligned} \tag{1024}$$

e comparando com (995) encontramos cada um de seus termos.

E.1.4.1 $\bar{u}_1 u_1 \bar{u}_2 u_2 T$

Neste caso escrevemos

$$\begin{aligned}
\bar{u}_1 u_1 \bar{u}_2 u_2 T &= \frac{i}{(4\pi)^2} (a + b\vec{\Omega}_{LS+} + c\vec{\Omega}_{LS-}) \left\{ \left[q^2 \Pi_{12}^{(200)} + \frac{\bar{m}^2}{6} \Pi_{12}^{(000)} + \bar{\Pi}_{12}^{(000)} \right] \right. \\
&\quad - \left(\frac{m_A}{m_1 E_2} + \frac{m_B}{E_1 m_2} \right) \Pi_0^{(000)} + \left(\frac{m_A m_B}{m_1 m_2} + \frac{m_A \alpha}{2m_1 E_2} \right) \Pi_A^{(000)} \\
&\quad \left. + \left(\frac{m_A m_B}{m_1 m_2} + \frac{m_B \beta}{2E_1 m_2} \right) \Pi_B^{(000)} \right\},
\end{aligned} \tag{1025}$$

sendo

$$\bar{u}_1 u_1 \bar{u}_2 u_2 T = \mathcal{T}_O^C \vec{\Omega}_C + \mathcal{T}_O^{LS+} \vec{\Omega}_{LS+} + \mathcal{T}_O^{LS-} \vec{\Omega}_{LS-}, \tag{1026}$$

então

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_O^C &= \frac{g_1^2 g_2^2}{2} \zeta \frac{ia}{(4\pi)^2} \left\{ \left[q^2 \Pi_{12}^{(200)} + \frac{\bar{m}^2}{6} \Pi_{12}^{(000)} + \bar{\Pi}_{12}^{(000)} \right] - \left(\frac{m_A}{m_1 E_2} + \frac{m_B}{E_1 m_2} \right) \Pi_0^{(000)} \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{m_A m_B}{m_1 m_2} + \frac{m_A \alpha}{2m_1 E_2} \right) \Pi_A^{(000)} + \left(\frac{m_A m_B}{m_1 m_2} + \frac{m_B \beta}{2E_1 m_2} \right) \Pi_B^{(000)} \right\}, \end{aligned} \quad (1027)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_O^{LS+} &= \frac{g_1^2 g_2^2}{2} \zeta \frac{ib}{(4\pi)^2} \left\{ \left[q^2 \Pi_{12}^{(200)} + \frac{\bar{m}^2}{6} \Pi_{12}^{(000)} + \bar{\Pi}_{12}^{(000)} \right] - \left(\frac{m_A}{m_1 E_2} + \frac{m_B}{E_1 m_2} \right) \Pi_0^{(000)} \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{m_A m_B}{m_1 m_2} + \frac{m_A \alpha}{2m_1 E_2} \right) \Pi_A^{(000)} + \left(\frac{m_A m_B}{m_1 m_2} + \frac{m_B \beta}{2E_1 m_2} \right) \Pi_B^{(000)} \right\}, \end{aligned} \quad (1028)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_O^{LS-} &= \frac{g_1^2 g_2^2}{2} \zeta \frac{ic}{(4\pi)^2} \left\{ \left[q^2 \Pi_{12}^{(200)} + \frac{\bar{m}^2}{6} \Pi_{12}^{(000)} + \bar{\Pi}_{12}^{(000)} \right] - \left(\frac{m_A}{m_1 E_2} + \frac{m_B}{E_1 m_2} \right) \Pi_0^{(000)} \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{m_A m_B}{m_1 m_2} + \frac{m_A \alpha}{2m_1 E_2} \right) \Pi_A^{(000)} + \left(\frac{m_A m_B}{m_1 m_2} + \frac{m_B \beta}{2E_1 m_2} \right) \Pi_B^{(000)} \right\}. \end{aligned} \quad (1029)$$

E.1.4.2 $\bar{u}_1 u_1 \bar{u}_2 \gamma_j u_2 T^j$

Para o produto de espinores com a matriz γ , fazemos

$$\begin{aligned} \bar{u}_1 u_1 \bar{u}_2 \gamma_j u_2 T^j &= \frac{g_1^2 g_2^2}{2} \zeta \frac{i}{(4\pi)^2} (\bar{z}_{2O} + z_{2O+} \vec{\Omega}_{LS+} + z_{2O-} \vec{\Omega}_{LS-}) \left\{ \frac{1}{2m_2} \left[q^2 \Pi_{12}^{(200)} + \frac{\bar{m}^2}{6} \Pi_{12}^{(000)} + \bar{\Pi}_{12}^{(000)} \right] \right. \\ &\quad - \left(\frac{1}{E_1} + \frac{m_A}{m_1 E_2} \right) \Pi_0^{(000)} + \frac{m_A}{m_1} \left(1 - \frac{\alpha}{2E_2} \right) \Pi_A^{(000)} + \left(\frac{m_A}{m_1} - \frac{\beta}{m_1} \right) \Pi_B^{(000)} \\ &\quad \left. + \frac{2}{E_1} \Pi_0^{(010)} - \frac{m_A}{m_1} \Pi_A^{(010)} + \left(\frac{\beta}{2E_1} - \frac{m_A}{m_1} \right) \Pi_B^{(010)} \right\}, \end{aligned} \quad (1030)$$

sendo

$$\bar{u}_1 u_1 \bar{u}_2 \gamma_j u_2 T^j = \mathcal{T}_{Oj}^C \vec{\Omega}_C + \mathcal{T}_{Oj}^{LS+} \vec{\Omega}_{LS+} + \mathcal{T}_{Oj}^{LS-} \vec{\Omega}_{LS-}, \quad (1031)$$

temos

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{Oj}^C &= \frac{g_1^2 g_2^2}{2} \zeta \frac{i}{(4\pi)^2} \left\{ \frac{\bar{z}_{2O}}{2m_2} \left[q^2 \Pi_{12}^{(200)} + \frac{\bar{m}^2}{6} \Pi_{12}^{(000)} + \bar{\Pi}_{12}^{(000)} \right] - \left(\frac{1}{E_1} + \frac{m_A}{m_1 E_2} \right) \Pi_0^{(000)} \right. \\ &\quad + \frac{m_A}{m_1} \left(1 - \frac{\alpha}{2E_2} \right) \Pi_A^{(000)} + \left(\frac{m_A}{m_1} - \frac{\beta}{m_1} \right) \Pi_B^{(000)} \\ &\quad \left. + \frac{2}{E_1} \Pi_0^{(010)} - \frac{m_A}{m_1} \Pi_A^{(010)} + \left(\frac{\beta}{2E_1} - \frac{m_A}{m_1} \right) \Pi_B^{(010)} \right\}, \end{aligned} \quad (1032)$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{O_j}^{LS+} = & \frac{g_1^2 g_2^2}{2} \zeta \frac{i}{(4\pi)^2} \left\{ \frac{z_{2O+}}{2m_2} \left[q^2 \Pi_{12}^{(200)} + \frac{\bar{m}^2}{6} \Pi_{12}^{(000)} + \bar{\Pi}_{12}^{(000)} - \left(\frac{1}{E_1} + \frac{m_A}{m_1 E_2} \right) \Pi_0^{(000)} \right. \right. \\
& + \frac{m_A}{m_1} \left(1 - \frac{\alpha}{2E_2} \right) \Pi_A^{(000)} + \left(\frac{m_A}{m_1} - \frac{\beta}{m_1} \right) \Pi_B^{(000)} \\
& \left. \left. + \frac{2}{E_1} \Pi_0^{(010)} - \frac{m_A}{m_1} \Pi_A^{(010)} + \left(\frac{\beta}{2E_1} - \frac{m_A}{m_1} \right) \Pi_B^{(010)} \right] \right\}, \quad (1033)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{O_j}^{LS-} = & \frac{g_1^2 g_2^2}{2} \zeta \frac{i}{(4\pi)^2} \left\{ \frac{z_{2O-}}{2m_2} \left[q^2 \Pi_{12}^{(200)} + \frac{\bar{m}^2}{6} \Pi_{12}^{(000)} + \bar{\Pi}_{12}^{(000)} - \left(\frac{1}{E_1} + \frac{m_A}{m_1 E_2} \right) \Pi_0^{(000)} \right. \right. \\
& + \frac{m_A}{m_1} \left(1 - \frac{\alpha}{2E_2} \right) \Pi_A^{(000)} + \left(\frac{m_A}{m_1} - \frac{\beta}{m_1} \right) \Pi_B^{(000)} \\
& \left. \left. + \frac{2}{E_1} \Pi_0^{(010)} - \frac{m_A}{m_1} \Pi_A^{(010)} + \left(\frac{\beta}{2E_1} - \frac{m_A}{m_1} \right) \Pi_B^{(010)} \right] \right\}. \quad (1034)
\end{aligned}$$

E.1.4.3 $\bar{u}_1 \gamma_i u_1 \bar{u}_2 u_2 T^i$

Similar ao caso anterior porem a matriz γ no produto de espinores relativos à partículas “1”, temos

$$\begin{aligned}
\bar{u}_1 \gamma_i u_1 \bar{u}_2 u_2 T^i = & \frac{g_1^2 g_2^2}{2} \zeta \frac{i}{(4\pi)^2} (\bar{z}_{1O} + z_{1O+} \vec{\Omega}_{LS+} + z_{1O-}) \left\{ \frac{1}{2m_1} \left[q^2 \Pi_{12}^{(200)} + \frac{\bar{m}^2}{6} \Pi_{12}^{(000)} + \bar{\Pi}_{12}^{(000)} \right. \right. \\
& - \left(\frac{1}{E_2} + \frac{m_B}{E_1 m_2} \right) \Pi_0^{(000)} + \left(\frac{m_B}{m_2} - \frac{\alpha}{2E_2} \right) \Pi_A^{(000)} + \frac{m_B}{m_2} \left(1 - \frac{\beta}{2E_1} \right) \Pi_B^{(000)} \\
& \left. \left. + \frac{2}{E_2} \Pi_0^{(010)} + \left(\frac{\alpha}{2E_2} - \frac{m_B}{m_2} \right) \Pi_A^{(010)} - \frac{m_B}{m_2} \Pi_B^{(010)} \right] \right\}, \quad (1035)
\end{aligned}$$

sendo

$$\bar{u}_1 \gamma_i u_1 \bar{u}_2 u_2 T^i = V_{O_i}^C \vec{\Omega}_C + V_{O_i}^{LS+} \vec{\Omega}_{LS+} + V_{O_i}^{LS-} \vec{\Omega}_{LS-}, \quad (1036)$$

encontramos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{O_i}^C = & \frac{g_1^2 g_2^2}{2} \zeta \frac{i}{(4\pi)^2} \left\{ \frac{\bar{z}_{1O}}{2m_1} \left[q^2 \Pi_{12}^{(200)} + \frac{\bar{m}^2}{6} \Pi_{12}^{(000)} + \bar{\Pi}_{12}^{(000)} \right. \right. \\
& - \left(\frac{1}{E_2} + \frac{m_B}{E_1 m_2} \right) \Pi_0^{(000)} + \left(\frac{m_B}{m_2} - \frac{\alpha}{2E_2} \right) \Pi_A^{(000)} + \frac{m_B}{m_2} \left(1 - \frac{\beta}{2E_1} \right) \Pi_B^{(000)} \\
& \left. \left. + \frac{2}{E_2} \Pi_0^{(010)} + \left(\frac{\alpha}{2E_2} - \frac{m_B}{m_2} \right) \Pi_A^{(010)} - \frac{m_B}{m_2} \Pi_B^{(010)} \right] \right\}, \quad (1037)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{O_i}^{LS+} = & \frac{g_1^2 g_2^2}{2} \zeta \frac{i}{(4\pi)^2} \left\{ \frac{z_{1O+}}{2m_1} \left[q^2 \Pi_{12}^{(200)} + \frac{\bar{m}^2}{6} \Pi_{12}^{(000)} + \bar{\Pi}_{12}^{(000)} \right. \right. \\
& - \left(\frac{1}{E_2} + \frac{m_B}{E_1 m_2} \right) \Pi_0^{(000)} + \left(\frac{m_B}{m_2} - \frac{\alpha}{2E_2} \right) \Pi_A^{(000)} + \frac{m_B}{m_2} \left(1 - \frac{\beta}{2E_1} \right) \Pi_B^{(000)} \\
& \left. \left. + \frac{2}{E_2} \Pi_0^{(010)} + \left(\frac{\alpha}{2E_2} - \frac{m_B}{m_2} \right) \Pi_A^{(010)} - \frac{m_B}{m_2} \Pi_B^{(010)} \right] \right\}, \tag{1038}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{O_i}^{LS-} = & \frac{g_1^2 g_2^2}{2} \zeta \frac{i}{(4\pi)^2} \left\{ \frac{z_{1O-}}{2m_1} \left[q^2 \Pi_{12}^{(200)} + \frac{\bar{m}^2}{6} \Pi_{12}^{(000)} + \bar{\Pi}_{12}^{(000)} \right. \right. \\
& - \left(\frac{1}{E_2} + \frac{m_B}{E_1 m_2} \right) \Pi_0^{(000)} + \left(\frac{m_B}{m_2} - \frac{\alpha}{2E_2} \right) \Pi_A^{(000)} + \frac{m_B}{m_2} \left(1 - \frac{\beta}{2E_1} \right) \Pi_B^{(000)} \\
& \left. \left. + \frac{2}{E_2} \Pi_0^{(010)} + \left(\frac{\alpha}{2E_2} - \frac{m_B}{m_2} \right) \Pi_A^{(010)} - \frac{m_B}{m_2} \Pi_B^{(010)} \right] \right\}. \tag{1039}
\end{aligned}$$

E.1.4.4 $\bar{u}_1 \gamma_i u_1 \bar{u}_2 \gamma_j u_2 T^{ij}$

Para o caso com a matriz γ em ambos os produtos de espinores, encontramos

$$\begin{aligned}
\bar{u}_1 \gamma_i u_1 \bar{u}_2 \gamma_j u_2 T^{ij} = & \frac{g_1^2 g_2^2}{2} \zeta \frac{i}{(4\pi)^2 m_1 m_2} \left\{ (4\vec{\Omega}_{LS+} - \frac{2}{3}\vec{\Omega}_{SS} - \frac{1}{3}\vec{\Omega}_T)(\bar{\Pi}_A^{(000)} + \bar{\Pi}_B^{(000)}) \right. \\
& + \frac{(z\bar{z}_O + z z_{O+} \vec{\Omega}_{LS+})}{4} \left[q^2 \Pi_{12}^{(200)} + \frac{\bar{m}^2}{6} \Pi_{12}^{(000)} + \bar{\Pi}_{12}^{(000)} + 4\Pi_A^{(020)} + 4\Pi_B^{(020)} \right. \\
& + 2\left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right) \left(\Pi_0^{(010)} - \frac{1}{2}\Pi_0^{(000)} \right) + \left(\frac{\alpha}{2E_2} - 2 \right) \Pi_A^{(010)} + \left(\frac{\beta}{2E_1} - 2 \right) \Pi_B^{(010)} \\
& \left. \left. + \left(1 - \frac{\alpha}{2E_2} \right) \Pi_A^{(000)} + \left(1 - \frac{\beta}{2E_1} \right) \Pi_B^{(000)} \right] \right\}, \tag{1040}
\end{aligned}$$

sendo

$$\bar{u}_1 \gamma_i u_1 \bar{u}_2 \gamma_j u_2 T^{ij} = \mathcal{T}_{O_{ij}}^C \vec{\Omega}_C + \mathcal{T}_{O_{ij}}^{LS+} \vec{\Omega}_{LS+} + \mathcal{T}_{O_{ij}}^{LS-} \vec{\Omega}_{LS-} + \mathcal{T}_{O_{ij}}^{SS} \vec{\Omega}_{SS} + \mathcal{T}_{O_{ij}}^T \vec{\Omega}_T, \tag{1041}$$

então temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{O_{ij}}^C = & \frac{g_1^2 g_2^2}{2} \zeta \frac{i}{(4\pi)^2 m_1 m_2} \left\{ \frac{z\bar{z}_O}{4} \left[q^2 \Pi_{12}^{(200)} + \frac{\bar{m}^2}{6} \Pi_{12}^{(000)} + \bar{\Pi}_{12}^{(000)} + 4\Pi_A^{(020)} + 4\Pi_B^{(020)} \right. \right. \\
& + 2\left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right) \left(\Pi_0^{(010)} - \frac{1}{2}\Pi_0^{(000)} \right) + \left(\frac{\alpha}{2E_2} - 2 \right) \Pi_A^{(010)} + \left(\frac{\beta}{2E_1} - 2 \right) \Pi_B^{(010)} \\
& \left. \left. + \left(1 - \frac{\alpha}{2E_2} \right) \Pi_A^{(000)} + \left(1 - \frac{\beta}{2E_1} \right) \Pi_B^{(000)} \right] \right\}, \tag{1042}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{Oij}^{LS+} = & \frac{g_1^2 g_2^2}{2} \zeta \frac{i}{(4\pi)^2 m_1 m_2} \left\{ 4(\bar{\Pi}_A^{(000)} + \bar{\Pi}_B^{(000)}) \right. \\
& + \frac{zz_{O+}}{4} \left[q^2 \Pi_{12}^{(200)} + \frac{\bar{m}^2}{6} \Pi_{12}^{(000)} + \bar{\Pi}_{12}^{(000)} + 4\Pi_A^{(020)} + 4\Pi_B^{(020)} \right. \\
& + 2\left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2}\right) \left(\Pi_0^{(010)} - \frac{1}{2}\Pi_0^{(000)}\right) + \left(\frac{\alpha}{2E_2} - 2\right) \Pi_A^{(010)} + \left(\frac{\beta}{2E_1} - 2\right) \Pi_B^{(010)} \\
& \left. \left. + \left(1 - \frac{\alpha}{2E_2}\right) \Pi_A^{(000)} + \left(1 - \frac{\beta}{2E_1}\right) \Pi_B^{(000)} \right] \right\}, \tag{1043}
\end{aligned}$$

$$\mathcal{T}_{Oij}^{LS-} = 0, \tag{1044}$$

$$\mathcal{T}_{Oij}^{SS} = \frac{g_1^2 g_2^2}{2} \zeta \frac{i}{(4\pi)^2 m_1 m_2} \left\{ -\frac{2}{3}(\bar{\Pi}_A^{(000)} + \bar{\Pi}_B^{(000)}) \right\}, \tag{1045}$$

$$\mathcal{T}_{Oij}^T = \frac{g_1^2 g_2^2}{2} \zeta \frac{i}{(4\pi)^2 m_1 m_2} \left\{ -\frac{1}{3}(\bar{\Pi}_A^{(000)} + \bar{\Pi}_B^{(000)}) \right\}. \tag{1046}$$

E desse modo temos todas as amplitudes de interesse.

E.1.5 Considerando duplo sentido do méson (káon)

Considerando os dois possíveis sentidos da troca simultânea de dois mésons, fazemos

$$T_{total}^{\dots} = \frac{T_{AB,12}^{\dots}}{2} + \frac{T_{CD,34}^{\dots}}{2}, \tag{1047}$$

resultando assim em

$$\mathcal{T}_{total}^{\dots} = \frac{\mathcal{T}_{AB,12\dots}^{\dots}}{2} + \frac{\mathcal{T}_{CD,34\dots}^{\dots}}{2}, \tag{1048}$$

em que AB e CD representa os subíndices das massas dos bárions intermediários, 12 e 34 representam os subíndices dos bárions externos, a representação “ \dots ” é relativa aos vários tipos de tensores.

APÊNDICE F – Relações de Integrais com Redução Espinorial

Estabelecemos as definições necessárias para as nossas reduções de espinores (relações entre diversas combinações de espinores que aparecem no cálculo das amplitudes), com a aproximação local ($z^2 = 0$). Escrevemos, em apoio ao Apêndice J a lista de todas as integrais e quando necessárias suas contrações com as variáveis cinemáticas, q , W e z . Usamos as seguinte definições:

$$\begin{aligned}
|\bar{u}_1 u_1][\bar{u}_2 u_2] &= a + b\vec{\Omega}_{LS+} + c\vec{\Omega}_{LS-}, \\
|\bar{u}_1 \gamma_\mu u_1][\bar{u}_2 u_2]W^\mu &= \bar{w}_1 + w_{1+}\vec{\Omega}_{LS+} + w_{1-}\vec{\Omega}_{LS-}, \\
|\bar{u}_1 u_1][\bar{u}_2 \gamma_\nu u_2]W^\nu &= \bar{w}_2 + w_{2+}\vec{\Omega}_{LS+} + w_{2-}\vec{\Omega}_{LS-}, \\
|\bar{u}_1 \gamma_\mu u_1][\bar{u}_2 u_2]z^\mu &= \bar{z}_1 + z_{1+}\vec{\Omega}_{LS+} + z_{1-}\vec{\Omega}_{LS-}, \\
|\bar{u}_1 u_1][\bar{u}_2 \gamma_\nu u_2]z^\nu &= \bar{z}_2 + z_{2+}\vec{\Omega}_{LS+} + z_{2-}\vec{\Omega}_{LS-}, \\
|\bar{u}_1 \gamma_\mu u_1][\bar{u}_2 \gamma_\nu u_2]W^\mu W^\nu &= w\bar{w} + w w_+\vec{\Omega}_{LS+} + w w_-\vec{\Omega}_{LS-}, \\
|\bar{u}_1 \gamma_\mu u_1][\bar{u}_2 \gamma_\nu u_2]W^\mu z^\nu &= w\bar{z} + w z_+\vec{\Omega}_{LS+} + w z_-\vec{\Omega}_{LS-}, \\
|\bar{u}_1 \gamma_\mu u_1][\bar{u}_2 \gamma_\nu u_2]z^\mu W^\nu &= z\bar{w} + z w_+\vec{\Omega}_{LS+} + z w_-\vec{\Omega}_{LS-}, \\
|\bar{u}_1 \gamma_\mu u_1][\bar{u}_2 \gamma_\nu u_2]g^{\mu\nu} &= \bar{g} + g_+\vec{\Omega}_{LS+} + g_-\vec{\Omega}_{LS-} - \frac{2}{3}\vec{\Omega}_{SS} - \frac{1}{3}\vec{\Omega}_T, \\
|\bar{u}_1 \gamma_\mu u_1][\bar{u}_2 \gamma_\nu u_2]z^\mu z^\nu &= \bar{z}\bar{z} + z z_+\vec{\Omega}_{LS+} + z z_-\vec{\Omega}_{LS-}, \\
|\bar{u}_1 \gamma_\mu u_1][\bar{u}_2 \gamma_\nu u_2]q^\mu q^\nu &= 0, \\
|\bar{u}_1 \gamma_\mu u_1][\bar{u}_2 u_2]q^\mu &= 0, \\
|\bar{u}_1 u_1][\bar{u}_2 \gamma_\nu u_2]q^\nu &= 0.
\end{aligned}$$

Considerando A um fator qualquer, todas as integrais I_{\dots} têm um fator $\frac{i}{(4\pi)^2}$, assim temos as relações mais simples

$$AI_{cc} = \frac{iA}{(4\pi)^2}[\Pi_{cc}^{(000)}], \quad (1049)$$

$$AI_{uic} = \frac{iA}{(4\pi)^2}[\Pi_{uic}^{(000)}], \quad (1050)$$

$$AI_{sic} = \frac{iA}{(4\pi)^2}[\Pi_{sic}^{(000)}], \quad (1051)$$

$$AI_{us} = \frac{iA}{(4\pi)^2}[\Pi_{us}^{(000)}], \quad (1052)$$

$$AI_{su} = \frac{iA}{(4\pi)^2}[\Pi_{su}^{(000)}]. \quad (1053)$$

Para termos com índice ν , o mesmo do sanduíche de espinores $[\bar{u}_2 \gamma_\nu u_2]$, temos as relações

$$AI_{s_1 c}^\nu = \frac{iA}{(4\pi)^2} [\bar{w}_2 + \bar{z}_2 + (w_{2+} + z_{2+}) \vec{\Omega}_{LS+} + (w_{2-} + z_{2-}) \vec{\Omega}_{LS-}] \Pi_{s_1 c}^{010}, \quad (1054)$$

$$AI_{s_2 c}^\nu = \frac{iA}{(4\pi)^2} [\bar{w}_2 - \bar{z}_2 + (w_{2+} - z_{2+}) \vec{\Omega}_{LS+} + (w_{2-} - z_{2-}) \vec{\Omega}_{LS-}] \Pi_{s_2 c}^{010}, \quad (1055)$$

$$AI_{u_1 c}^\nu = \frac{iA}{(4\pi)^2} [\bar{w}_2 + \bar{z}_2 + (w_{2+} + z_{2+}) \vec{\Omega}_{LS+} + (w_{2-} + z_{2-}) \vec{\Omega}_{LS-}] (-\Pi_{u_1 c}^{010}), \quad (1056)$$

$$AI_{u_2 c}^\nu = \frac{iA}{(4\pi)^2} [\bar{w}_2 - \bar{z}_2 + (w_{2+} - z_{2+}) \vec{\Omega}_{LS+} + (w_{2-} - z_{2-}) \vec{\Omega}_{LS-}] (-\Pi_{u_2 c}^{010}), \quad (1057)$$

$$AI_{s_1 u_2}^\nu = \frac{iA}{(4\pi)^2} [\bar{w}_2 \Pi_{s_3 u_4}^{(010)} + \bar{z}_2 \Pi_{s_3 u_4}^{(001)} + (z_{2+} \Pi_{s_3 u_4}^{(001)} + w_{2+} \Pi_{s_3 u_4}^{(010)}) \vec{\Omega}_{LS+} + (z_{2-} \Pi_{s_3 u_4}^{(001)} + w_{2-} \Pi_{s_3 u_4}^{(010)}) \vec{\Omega}_{LS-}], \quad (1058)$$

$$AI_{u_1 s_2}^\nu = \frac{-iA}{(4\pi)^2} [\bar{w}_2 \Pi_{u_1 s_2}^{(010)} + \bar{z}_2 \Pi_{u_1 s_2}^{(001)} + (z_{2+} \Pi_{u_1 s_2}^{(001)} + w_{2+} \Pi_{u_1 s_2}^{(010)}) \vec{\Omega}_{LS+} + (z_{2-} \Pi_{u_1 s_2}^{(001)} + w_{2-} \Pi_{u_1 s_2}^{(010)}) \vec{\Omega}_{LS-}], \quad (1059)$$

$$AI_{s_1 s_2}^\nu = \frac{iA}{(4\pi)^2} [\bar{w}_2 \Pi_{ss}^{(001)} + \bar{z}_2 \Pi_{ss}^{(010)} + (z_{2+} \Pi_{ss}^{(010)} + w_{2+} \Pi_{ss}^{(001)}) \vec{\Omega}_{LS+} + (z_{2-} \Pi_{ss}^{(010)} + w_{2-} \Pi_{ss}^{(001)}) \vec{\Omega}_{LS-}], \quad (1060)$$

$$AI_{u_1 u_2}^\nu = \frac{-iA}{(4\pi)^2} [\bar{w}_2 \Pi_{uu}^{(001)} + \bar{z}_2 \Pi_{uu}^{(010)} + (z_{2+} \Pi_{uu}^{(010)} + w_{2+} \Pi_{uu}^{(001)}) \vec{\Omega}_{LS+} + (z_{2-} \Pi_{uu}^{(010)} + w_{2-} \Pi_{uu}^{(001)}) \vec{\Omega}_{LS-}]. \quad (1061)$$

Termos de índice μ , como $[\bar{u}_1 \gamma_\mu u_1]$ podem ser escritos como

$$AI_{s_1 c}^\mu = \frac{iA}{(4\pi)^2} [\bar{w}_1 + \bar{z}_1 + (w_{1+} + z_{1+}) \vec{\Omega}_{LS+} + (w_{1-} + z_{1-}) \vec{\Omega}_{LS-}] \Pi_{s_1 c}^{010}, \quad (1062)$$

$$AI_{s_2 c}^\mu = \frac{iA}{(4\pi)^2} [\bar{w}_1 - \bar{z}_1 + (w_{1+} - z_{1+}) \vec{\Omega}_{LS+} + (w_{1-} - z_{1-}) \vec{\Omega}_{LS-}] \Pi_{s_2 c}^{010}, \quad (1063)$$

$$AI_{u_1 c}^\mu = \frac{iA}{(4\pi)^2} [\bar{w}_1 + \bar{z}_1 + (w_{1+} + z_{1+}) \vec{\Omega}_{LS+} + (w_{1-} + z_{1-}) \vec{\Omega}_{LS-}] (-\Pi_{u_1 c}^{010}), \quad (1064)$$

$$AI_{u_2 c}^\mu = \frac{iA}{(4\pi)^2} [\bar{w}_1 - \bar{z}_1 + (w_{1+} - z_{1+}) \vec{\Omega}_{LS+} + (w_{1-} - z_{1-}) \vec{\Omega}_{LS-}] (-\Pi_{u_2 c}^{010}), \quad (1065)$$

$$AI_{s_1 u_2}^\mu = \frac{iA}{(4\pi)^2} [\bar{w}_1 \Pi_{s_1 u_2}^{(010)} + \bar{z}_1 \Pi_{s_1 u_2}^{(001)} + (z_{1+} \Pi_{s_1 u_2}^{(001)} + w_{1+} \Pi_{s_1 u_2}^{(010)}) \vec{\Omega}_{LS+} + (z_{1-} \Pi_{s_1 u_2}^{(001)} + w_{1-} \Pi_{s_1 u_2}^{(010)}) \vec{\Omega}_{LS-}], \quad (1066)$$

$$AI_{u_1 s_2}^\mu = \frac{-iA}{(4\pi)^2} [\bar{w}_1 \Pi_{u_1 s_2}^{(010)} + \bar{z}_1 \Pi_{u_1 s_2}^{(001)} + (z_{1+} \Pi_{u_1 s_2}^{(001)} + w_{1+} \Pi_{u_1 s_2}^{(010)}) \vec{\Omega}_{LS+} + (z_{1-} \Pi_{u_1 s_2}^{(001)} + w_{1-} \Pi_{u_1 s_2}^{(010)}) \vec{\Omega}_{LS-}], \quad (1067)$$

$$AI_{s_1 s_2}^\mu = \frac{iA}{(4\pi)^2} [\bar{w}_1 \Pi_{s_1 s_2}^{(001)} + \bar{z}_1 \Pi_{s_1 s_2}^{(010)} + (z_{1+} \Pi_{s_1 s_2}^{(010)} + w_{1+} \Pi_{s_1 s_2}^{(001)}) \vec{\Omega}_{LS+} + (z_{1-} \Pi_{s_1 s_2}^{(010)} + w_{1-} \Pi_{s_1 s_2}^{(001)}) \vec{\Omega}_{LS-}], \quad (1068)$$

$$AI_{u_1 u_2}^\mu = \frac{-iA}{(4\pi)^2} [\bar{w}_1 \Pi_{u_1 u_2}^{(001)} + \bar{z}_1 \Pi_{u_1 u_2}^{(010)} + (z_{1+} \Pi_{u_1 u_2}^{(010)} + w_{1+} \Pi_{u_1 u_2}^{(001)}) \vec{\Omega}_{LS+} + (z_{1-} \Pi_{u_1 u_2}^{(010)} + w_{1-} \Pi_{u_1 u_2}^{(001)}) \vec{\Omega}_{LS-}]. \quad (1069)$$

Agora para termos de índices $\mu\nu$, ou seja, $[\bar{u}_1 \gamma_\mu u_1][\bar{u}_2 \gamma_\nu u_2]$,

$$AI_{cc}^{\mu\nu} = \frac{iA}{2(4\pi)^2} [\bar{g} + g_+ \vec{\Omega}_{LS+} + g_- \vec{\Omega}_{LS-} - \frac{2}{3} \vec{\Omega}_{SS} - \frac{1}{3} \vec{\Omega}_T] \bar{\Pi}_{cc}^{(000)}, \quad (1070)$$

$$AI_{p_1 c}^{\mu\nu} = \frac{iA}{2(4\pi)^2} \{ (\bar{g} + g_+ \vec{\Omega}_{LS+} + g_- \vec{\Omega}_{LS-} - \frac{2}{3} \vec{\Omega}_{SS} - \frac{1}{3} \vec{\Omega}_T) \bar{\Pi}_{p_1 c}^{(000)} + [w\bar{w} + z\bar{z} + \bar{w}z + z\bar{w} + (ww_+ + zz_+ + wz_+ + zw_+) \vec{\Omega}_{LS+} + (ww_- + zz_- + wz_- + zw_-) \vec{\Omega}_{LS-}] \Pi_{p_1 c}^{(020)} \}, \quad (1071)$$

$$AI_{p_2 c}^{\mu\nu} = \frac{iA}{2(4\pi)^2} \{ (\bar{g} + g_+ \vec{\Omega}_{LS+} + g_- \vec{\Omega}_{LS-} - \frac{2}{3} \vec{\Omega}_{SS} - \frac{1}{3} \vec{\Omega}_T) \bar{\Pi}_{p_2 c}^{(000)} + [w\bar{w} + z\bar{z} - \bar{w}z - z\bar{w} + (ww_+ + zz_+ - wz_+ - zw_+) \vec{\Omega}_{LS+} + (ww_- + zz_- - wz_- - zw_-) \vec{\Omega}_{LS-}] \Pi_{p_2 c}^{(020)} \}, \quad (1072)$$

$$AI_{s_1 u_2}^{\mu\nu} = \frac{iA}{(4\pi)^2} \{ (\bar{g} + g_+ \vec{\Omega}_{LS+} + g_- \vec{\Omega}_{LS-} - \frac{2}{3} \vec{\Omega}_{SS} - \frac{1}{3} \vec{\Omega}_T) \bar{\Pi}_{s_3 u_4}^{(000)} + (w\bar{w} + ww_+ \vec{\Omega}_{LS+} + ww_- \vec{\Omega}_{LS-}) \Pi_{s_1 u_2}^{(020)} + (z\bar{z} + zz_+ \vec{\Omega}_{LS+} + zz_- \vec{\Omega}_{LS-}) \Pi_{s_1 u_2}^{(002)} + [\bar{w}z + z\bar{w} + (wz_+ + zw_+) \vec{\Omega}_{LS+} + (wz_- + zw_-) \vec{\Omega}_{LS-}] \Pi_{s_3 u_4}^{(011)} \}, \quad (1073)$$

$$AI_{u_1 s_2}^{\mu\nu} = \frac{iA}{(4\pi)^2} \{ (\bar{g} + g_+ \vec{\Omega}_{LS+} + g_- \vec{\Omega}_{LS-} - \frac{2}{3} \vec{\Omega}_{SS} - \frac{1}{3} \vec{\Omega}_T) \bar{\Pi}_{u_1 s_2}^{(000)} + (w\bar{w} + ww_+ \vec{\Omega}_{LS+} + ww_- \vec{\Omega}_{LS-}) \Pi_{u_1 s_2}^{(020)} + (z\bar{z} + zz_+ \vec{\Omega}_{LS+} + zz_- \vec{\Omega}_{LS-}) \Pi_{u_1 s_2}^{(002)} + [\bar{w}z + z\bar{w} + (wz_+ + zw_+) \vec{\Omega}_{LS+} + (wz_- + zw_-) \vec{\Omega}_{LS-}] \Pi_{u_1 s_2}^{(011)} \}, \quad (1074)$$

$$AI_{s_1 s_2}^{\mu\nu} = \frac{iA}{(4\pi)^2} \{ (\bar{g} + g_+ \vec{\Omega}_{LS+} + g_- \vec{\Omega}_{LS-} - \frac{2}{3} \vec{\Omega}_{SS} - \frac{1}{3} \vec{\Omega}_T) \bar{\Pi}_{ss}^{(000)} + (w\bar{w} + ww_+ \vec{\Omega}_{LS+} + ww_- \vec{\Omega}_{LS-}) \Pi_{ss}^{(002)} + (z\bar{z} + zz_+ \vec{\Omega}_{LS+} + zz_- \vec{\Omega}_{LS-}) \Pi_{ss}^{(020)} + [\bar{w}z + z\bar{w} + (wz_+ + zw_+) \vec{\Omega}_{LS+} + (wz_- + zw_-) \vec{\Omega}_{LS-}] \Pi_{ss}^{(011)} \}, \quad (1075)$$

$$AI_{u_1 u_2}^{\mu\nu} = \frac{iA}{(4\pi)^2} \{ (\bar{g} + g_+ \vec{\Omega}_{LS+} + g_- \vec{\Omega}_{LS-} - \frac{2}{3} \vec{\Omega}_{SS} - \frac{1}{3} \vec{\Omega}_T) \bar{\Pi}_{uu}^{(000)} + (w\bar{w} + ww_+ \vec{\Omega}_{LS+} + ww_- \vec{\Omega}_{LS-}) \Pi_{uu}^{(002)} + (z\bar{z} + zz_+ \vec{\Omega}_{LS+} + zz_- \vec{\Omega}_{LS-}) \Pi_{uu}^{(020)} + [\bar{w}z + z\bar{w} + (wz_+ + zw_+) \vec{\Omega}_{LS+} + (wz_- + zw_-) \vec{\Omega}_{LS-}] \Pi_{uu}^{(011)} \}. \quad (1076)$$

Para as integrais encontradas nos diagramas com ressonâncias de spin-3/2, temos as seguintes relações:

$$I_{cc}^{\mu/\nu} = 0 \quad (1077)$$

$$I_{cc}^{2\mu/\nu} = 0, \quad (1078)$$

$$I_{cc}^{\rho\theta\mu/\nu} = 0, \quad (1079)$$

$$I_{cc}^{22\mu/\nu} = 0 \quad (1080)$$

$$W_{\rho} I_{s_{ic}}^{\rho} = \frac{i}{(4\pi)^2} (W^2 \pm Wz) \Pi_{s_{ic}}^{(010)}, \quad (1081)$$

$$W_{\rho} I_{u_{ic}}^{\rho} = -\frac{i}{(4\pi)^2} (W^2 \pm Wz) \Pi_{u_{ic}}^{(010)}, \quad (1082)$$

$$z_{\rho} I_{u_{ic}}^{\rho} = -\frac{i}{(4\pi)^2} (Wz \pm z^2) \Pi_{u_{ic}}^{(010)}, \quad (1083)$$

$$z_{\rho} I_{s_{ic}}^{\rho} = \frac{i}{(4\pi)^2} (Wz \pm z^2) \Pi_{s_{ic}}^{(010)}, \quad (1084)$$

$$(W+z)_{\rho} (W-z)_{\theta} I_{cc}^{\rho\theta} = \frac{i}{2(4\pi)^2} (W^2 - z^2) \bar{\Pi}_{cc}^{(000)}, \quad (1085)$$

$$W_{\rho} I_{cc}^{\rho\mu} = \frac{i}{2(4\pi)^2} (\bar{w}_1 + w_{1+} \vec{\Omega}_{LS+} + w_{1-} \vec{\Omega}_{LS-}) \bar{\Pi}_{cc}^{(000)}, \quad (1086)$$

$$W_{\rho} I_{cc}^{\rho\nu} = \frac{i}{2(4\pi)^2} (\bar{w}_2 + w_{2+} \vec{\Omega}_{LS+} + w_{2-} \vec{\Omega}_{LS-}) \bar{\Pi}_{cc}^{(000)}, \quad (1087)$$

$$2W_{\rho} I_{cc}^{2\rho\mu} = \frac{i}{(4\pi)^2} q^2 (\bar{w}_1 + w_{1+} \vec{\Omega}_{LS+} + w_{1-} \vec{\Omega}_{LS-}) \bar{\Pi}_{cc}^{(200)}, \quad (1088)$$

$$2W_{\rho} I_{cc}^{2\rho\nu} = \frac{i}{(4\pi)^2} q^2 (\bar{w}_2 + w_{2+} \vec{\Omega}_{LS+} + w_{2-} \vec{\Omega}_{LS-}) \bar{\Pi}_{cc}^{(200)}, \quad (1089)$$

$$z_{\rho} I_{cc}^{\rho\mu} = \frac{i}{2(4\pi)^2} (\bar{z}_1 + z_{1+} \vec{\Omega}_{LS+} + z_{1-} \vec{\Omega}_{LS-}) \bar{\Pi}_{cc}^{(000)}, \quad (1090)$$

$$z_{\rho} I_{cc}^{\rho\nu} = \frac{i}{2(4\pi)^2} (\bar{z}_2 + z_{2+} \vec{\Omega}_{LS+} + z_{2-} \vec{\Omega}_{LS-}) \bar{\Pi}_{cc}^{(000)}, \quad (1091)$$

$$2z_{\rho} I_{cc}^{2\rho\mu} = \frac{i}{(4\pi)^2} q^2 (\bar{z}_1 + z_{1+} \vec{\Omega}_{LS+} + z_{1-} \vec{\Omega}_{LS-}) \bar{\Pi}_{cc}^{(200)}, \quad (1092)$$

$$2z_{\rho} I_{cc}^{2\rho\nu} = \frac{i}{(4\pi)^2} q^2 (\bar{z}_2 + z_{2+} \vec{\Omega}_{LS+} + z_{2-} \vec{\Omega}_{LS-}) \bar{\Pi}_{cc}^{(200)}, \quad (1093)$$

$$(W \pm z)_{\rho} I_{cc}^{\rho\mu} = \frac{i}{2(4\pi)^2} [\bar{w}_1 \pm \bar{z}_1 + (w_{1+} \pm z_{1+}) \vec{\Omega}_{LS+} + (w_{1-} \pm z_{1-}) \vec{\Omega}_{LS-}] \bar{\Pi}_{cc}^{(000)}, \quad (1094)$$

$$(W \pm z)_{\rho} I_{cc}^{\rho\nu} = \frac{i}{2(4\pi)^2} [\bar{w}_2 \pm \bar{z}_2 + (w_{2+} \pm z_{2+}) \vec{\Omega}_{LS+} + (w_{2-} \pm z_{2-}) \vec{\Omega}_{LS-}] \bar{\Pi}_{cc}^{(000)}, \quad (1095)$$

$$\begin{aligned}
2W_\rho I_{p_{ic}}^{\rho\mu} &= \frac{i}{(4\pi)^2} \left\{ \bar{w}_1 \bar{\Pi}_{p_{ic}}^{(000)} + (\bar{w}_1 \pm \bar{z}_1)(W^2 \pm Wz) \Pi_{p_{ic}}^{(020)} \right. \\
&\quad + [w_{1+} \bar{\Pi}_{p_{ic}}^{(000)} + (w_{1+} \pm z_{1+})(W^2 \pm Wz) \Pi_{p_{ic}}^{(020)}] \vec{\Omega}_{LS+} \\
&\quad \left. + [w_{1-} \bar{\Pi}_{p_{ic}}^{(000)} + (w_{1-} \pm z_{1-})(W^2 \pm Wz) \Pi_{p_{ic}}^{(020)}] \vec{\Omega}_{LS-} \right\}, \tag{1096}
\end{aligned}$$

$$p = s, u; \quad i = (1, 2) \rightarrow \pm(+, -)$$

$$\begin{aligned}
2W_\rho I_{p_{ic}}^{\rho\nu} &= \frac{i}{(4\pi)^2} \left\{ \bar{w}_2 \bar{\Pi}_{p_{ic}}^{(000)} + (\bar{w}_2 \pm \bar{z}_2)(W^2 \pm Wz) \Pi_{p_{ic}}^{(020)} \right. \\
&\quad + [w_{2+} \bar{\Pi}_{p_{ic}}^{(000)} + (w_{2+} \pm z_{2+})(W^2 \pm Wz) \Pi_{p_{ic}}^{(020)}] \vec{\Omega}_{LS+} \\
&\quad \left. + [w_{2-} \bar{\Pi}_{p_{ic}}^{(000)} + (w_{2-} \pm z_{2-})(W^2 \pm Wz) \Pi_{p_{ic}}^{(020)}] \vec{\Omega}_{LS-} \right\}, \tag{1097}
\end{aligned}$$

$$p = s, u; \quad i = (1, 2) \rightarrow \pm(+, -)$$

$$\begin{aligned}
2z_\rho I_{p_{ic}}^{\rho\mu} &= \frac{i}{(4\pi)^2} \left\{ \bar{z}_1 \bar{\Pi}_{p_{ic}}^{(000)} + (\bar{w}_1 \pm \bar{z}_1)(Wz \pm z^2) \Pi_{p_{ic}}^{(020)} \right. \\
&\quad + [z_{1+} \bar{\Pi}_{p_{ic}}^{(000)} + (w_{1+} \pm z_{1+})(Wz \pm z^2) \Pi_{p_{ic}}^{(020)}] \vec{\Omega}_{LS+} \\
&\quad \left. + [z_{1-} \bar{\Pi}_{p_{ic}}^{(000)} + (w_{1-} \pm z_{1-})(Wz \pm z^2) \Pi_{p_{ic}}^{(020)}] \vec{\Omega}_{LS-} \right\}, \tag{1098}
\end{aligned}$$

$$p = s, u; \quad i = (1, 2) \rightarrow \pm(+, -)$$

$$\begin{aligned}
2z_\rho I_{p_{ic}}^{\rho\nu} &= \frac{i}{(4\pi)^2} \left\{ \bar{z}_2 \bar{\Pi}_{p_{ic}}^{(000)} + (\bar{w}_2 \pm \bar{z}_2)(Wz \pm z^2) \Pi_{p_{ic}}^{(020)} \right. \\
&\quad + [z_{2+} \bar{\Pi}_{p_{ic}}^{(000)} + (w_{2+} \pm z_{2+})(Wz \pm z^2) \Pi_{p_{ic}}^{(020)}] \vec{\Omega}_{LS+} \\
&\quad \left. + [z_{2-} \bar{\Pi}_{p_{ic}}^{(000)} + (w_{2-} \pm z_{2-})(Wz \pm z^2) \Pi_{p_{ic}}^{(020)}] \vec{\Omega}_{LS-} \right\}, \tag{1099}
\end{aligned}$$

$$p = s, u; \quad i = (1, 2) \rightarrow \pm(+, -)$$

$$(W \pm z)_\rho I_{cc}^{\rho\mu\nu} = 0, \tag{1100}$$

$$\begin{aligned}
2W_\rho I_{p_{ic}}^{\rho\mu\nu} &= \frac{oi}{(4\pi)^2} \left\{ (\bar{g}(W^2 \pm Wz) + w\bar{w}) \bar{\Pi}_{p_{ic}}^{(010)} + (w\bar{w} \pm w\bar{z} \pm z\bar{w})(\bar{\Pi}_{p_{ic}}^{(010)} + 2(W^2 \pm Wz) \Pi_{p_{ic}}^{(030)}) \right. \\
&\quad + 2(W^2 \pm Wz) z\bar{z} \Pi_{p_{ic}}^{(030)} \\
&\quad + [(g_+(W^2 \pm Wz) + ww_+) \bar{\Pi}_{p_{ic}}^{(010)} + (ww_+ \pm wz_+ \pm zw_+)(\bar{\Pi}_{p_{ic}}^{(010)} + 2(W^2 \pm Wz) \Pi_{p_{ic}}^{(030)}) \\
&\quad + 2(W^2 \pm Wz) z z_+ \Pi_{p_{ic}}^{(030)}] \vec{\Omega}_{LS+} \\
&\quad + [(g_-(W^2 \pm Wz) + ww_-) \bar{\Pi}_{p_{ic}}^{(010)} + (ww_- \pm wz_- \pm zw_-)(\bar{\Pi}_{p_{ic}}^{(010)} + 2(W^2 \pm Wz) \Pi_{p_{ic}}^{(030)}) \\
&\quad + 2(W^2 \pm Wz) z z_- \Pi_{p_{ic}}^{(030)}] \vec{\Omega}_{LS-} \\
&\quad \left. - \frac{2}{3}(W^2 \pm Wz) \bar{\Pi}_{p_{ic}}^{(010)} \vec{\Omega}_{SS} - \frac{1}{3}(W^2 \pm Wz) \bar{\Pi}_{p_{ic}}^{(010)} \vec{\Omega}_T \right\}, \tag{1101}
\end{aligned}$$

$$p = s, u; \quad o = (+, -) \rightarrow p = (s, u); \quad i = (1, 2) \rightarrow \pm(+, -).$$

$$\begin{aligned}
2z_\rho I_{p_i c}^{\rho\mu\nu} &= \frac{oi}{(4\pi)^2} \{ (\bar{g}(Wz \pm z^2) + z\bar{z}) \bar{\Pi}_{p_i c}^{(010)} + (z\bar{z} \pm \bar{w}z \pm z\bar{w}) (\bar{\Pi}_{p_i c}^{(010)} + 2(Wz \pm z^2) \Pi_{p_i c}^{(030)}) \\
&\quad + 2(Wz \pm z^2) w\bar{w} \Pi_{p_i c}^{(030)} \\
&\quad + [(g_+(Wz \pm z^2) + zz_+) \bar{\Pi}_{p_i c}^{(010)} + (zz_+ \pm wz_+ \pm zw_+) (\bar{\Pi}_{p_i c}^{(010)} + 2(Wz \pm z^2) \Pi_{p_i c}^{(030)}) \\
&\quad + 2(Wz \pm z^2) ww_+ \Pi_{p_i c}^{(030)}] \vec{\Omega}_{LS+} \\
&\quad + [(g_-(Wz \pm z^2) + zz_-) \bar{\Pi}_{p_i c}^{(010)} + (zz_- \pm wz_- \pm zw_-) (\bar{\Pi}_{p_i c}^{(010)} + 2(Wz \pm z^2) \Pi_{p_i c}^{(030)}) \\
&\quad + 2(Wz \pm z^2) ww_- \Pi_{p_i c}^{(030)}] \vec{\Omega}_{LS-} \\
&\quad - \frac{2}{3} (Wz \pm z^2) \bar{\Pi}_{p_i c}^{(010)} \vec{\Omega}_{SS} - \frac{1}{3} (Wz \pm z^2) \bar{\Pi}_{p_i c}^{(010)} \vec{\Omega}_T \}, \tag{1102} \\
&\quad p = s, u; \quad o = (+, -) \rightarrow p = (s, u); \quad i = (1, 2) \rightarrow \pm(+, -).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(W+z)_\rho (W-z)_\theta I_{cc}^{\rho\theta\mu\nu} &= \frac{i}{4(4\pi)^2} \{ (W^2 - z^2) \bar{g} + 2(w\bar{w} + z\bar{z}) \\
&\quad + [(W^2 - z^2) g_+ + 2(ww_+ + zz_+)] \vec{\Omega}_{LS+} \\
&\quad + [(W^2 - z^2) g_- + 2(ww_- + zz_-)] \vec{\Omega}_{LS-} \\
&\quad - \frac{2}{3} (W^2 - z^2) \vec{\Omega}_{SS} - \frac{1}{3} (W^2 - z^2) \vec{\Omega}_T \} \bar{\Pi}_{cc}^{(000)}, \tag{1103}
\end{aligned}$$

$$I_{cc}^{2\mu\nu} = \frac{i}{2(4\pi)^2} q^2 [\bar{g} + g_+ \vec{\Omega}_{LS+} + g_- \vec{\Omega}_{LS-} - \frac{2}{3} \vec{\Omega}_{SS} - \frac{1}{3} \vec{\Omega}_T] \bar{\Pi}_{cc}^{(200)}, \tag{1104}$$

$$I_{cc}^{22\mu\nu} = \frac{i}{2(4\pi)^2} [\bar{g} + g_+ \vec{\Omega}_{LS+} + g_- \vec{\Omega}_{LS-} - \frac{2}{3} \vec{\Omega}_{SS} - \frac{1}{3} \vec{\Omega}_T] [3\dot{\Pi}_{cc}^{(000)} + 2q^2 \bar{\Pi}_{cc}^{(200)} + q^4 \bar{\Pi}_{cc}^{(400)}]. \tag{1105}$$

APÊNDICE G – Redução Espinorial

Neste apêndice faremos as reduções espinoriais, as quais, são fundamentais para a correta separação dos componentes que são usados na formulação dos potenciais, sendo esses o Central, o Spin-Órbita, o Spin-Spin e o Tensorial.

G.1 REDUÇÕES ESPINORIAIS PARA TROCA DE UM MÉSON

Utilizando os espinores para partículas de spin 1/2 na forma

$$u_i(\vec{p}_i) = \sqrt{E_i + m_i} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}_i}{E_i + m_i} \end{pmatrix} \chi, \quad (1106)$$

$$\bar{u}_i(\vec{p}'_i) = \sqrt{E'_i + m'_i} \chi^\dagger \left(1, \frac{-\vec{\sigma} \cdot \vec{p}'_i}{E'_i + m'_i} \right), \quad (1107)$$

com

$$\chi^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} (1, 0) + \frac{1}{\sqrt{2}} (0, 1), \quad (1108)$$

$$\chi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (1109)$$

Sendo

$$\not{k} = k_\mu \gamma^\mu = \begin{pmatrix} k_0 & -\vec{\sigma} \cdot \vec{k} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{k} & -k_0 \end{pmatrix}, \quad (1110)$$

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1111)$$

e que $\vec{\sigma} = \sigma_x \hat{i} + \sigma_y \hat{j} + \sigma_z \hat{k}$ são as matrizes de Pauli no espaço cartesiano. Calculamos o sanduíche de espinores

$$\begin{aligned} \bar{u}_i(\vec{p}'_i) \not{k} \gamma_5 u_i(\vec{p}_i) &= \sqrt{(E'_i + m'_i)(E_i + m_i)} \chi^\dagger \left(1, \frac{-\vec{\sigma} \cdot \vec{p}'_i}{E'_i + m'_i} \right) \begin{pmatrix} k_0 & -\vec{\sigma} \cdot \vec{k} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{k} & -k_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}_i}{E_i + m_i} \end{pmatrix} \chi \\ &= \sqrt{(E'_i + m'_i)(E_i + m_i)} \chi^\dagger \left(1, \frac{-\vec{\sigma} \cdot \vec{p}'_i}{E'_i + m'_i} \right) \begin{pmatrix} -\vec{\sigma} \cdot \vec{k} & k_0 \\ -k_0 & \vec{\sigma} \cdot \vec{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}_i}{E_i + m_i} \end{pmatrix} \chi \\ &= \sqrt{(E'_i + m'_i)(E_i + m_i)} \chi^\dagger \left(1, \frac{-\vec{\sigma} \cdot \vec{p}'_i}{E'_i + m'_i} \right) \begin{pmatrix} -\vec{\sigma} \cdot \vec{k} + k_0 \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}_i}{E_i + m_i} \\ -k_0 + \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{k})(\vec{\sigma} \cdot \vec{p}_i)}{E_i + m_i} \end{pmatrix} \chi, \end{aligned} \quad (1112)$$

$$\begin{aligned} \bar{u}_i(\vec{p}'_i) \not{k} \gamma_5 u_i(\vec{p}_i) &= \sqrt{(E'_i + m'_i)(E_i + m_i)} \chi^\dagger \left[-\vec{\sigma} \cdot \vec{k} + k_0 \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}_i}{E_i + m_i} + k_0 \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}'_i}{E'_i + m'_i} \right. \\ &\quad \left. - \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{k})(\vec{\sigma} \cdot \vec{p}_i)(\vec{\sigma} \cdot \vec{p}'_i)}{(E_i + m_i)(E'_i + m'_i)} \right] \chi. \end{aligned} \quad (1113)$$

Por meio da conservação dos 4-momentos temos que $k = p_i - p'_i$ e portanto $k_0 = E_i - E'_i$. Consideramos a aproximação não relativística, de tal forma que $E'_i = E_i$, logo encontramos que $k_0 = 0$.

Da regra $(\vec{\sigma} \cdot \vec{a})(\vec{\sigma} \cdot \vec{b}) = (\vec{a} \cdot \vec{b})I + i(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{\sigma}$, de $m_i = m'_i$ e portanto $(\vec{p}_i)^2 = (\vec{p}'_i)^2$, fazemos

$$\begin{aligned} (\vec{\sigma} \cdot \vec{k})(\vec{\sigma} \cdot \vec{p}_i)(\vec{\sigma} \cdot \vec{p}'_i) &= \vec{\sigma} \cdot (\vec{p}_i - \vec{p}'_i)(\vec{\sigma} \cdot \vec{p}_i)(\vec{\sigma} \cdot \vec{p}'_i) \\ &= (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}_i)(\vec{\sigma} \cdot \vec{p}_i)(\vec{\sigma} \cdot \vec{p}'_i) - (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}'_i)(\vec{\sigma} \cdot \vec{p}_i)(\vec{\sigma} \cdot \vec{p}'_i) \\ &= (\vec{p}_i)^2 (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}'_i) - (\vec{p}'_i)^2 (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}_i) \\ &= (\vec{p}_i)^2 \vec{\sigma} \cdot (\vec{p}'_i - \vec{p}_i) \\ &= (E_i^2 - m_i^2)(-\vec{\sigma} \cdot \vec{k}) \\ &= (E_i - m_i)(E_i + m_i)(-\vec{\sigma} \cdot \vec{k}). \end{aligned} \quad (1114)$$

Então

$$\begin{aligned} \bar{u}_i(\vec{p}'_i) \not{k} \gamma_5 u_i(\vec{p}_i) &= (E_i + m_i) \chi^\dagger \left[\frac{-(E_i + m_i)(\vec{\sigma} \cdot \vec{k}) + (E_i - m_i)(\vec{\sigma} \cdot \vec{k})}{(E_i + m_i)} \right] \chi \\ &= (E_i + m_i) \chi^\dagger \left[\frac{-2m_i(\vec{\sigma} \cdot \vec{k})}{(E_i + m_i)} \right] \chi \\ &= -2m_i \chi^\dagger (\vec{\sigma} \cdot \vec{k}) \chi \\ &= -2m_i (\vec{\sigma}^{(i)} \cdot \vec{k}), \end{aligned} \quad (1115)$$

sendo $\vec{\sigma}^{(i)} = \chi^\dagger (\vec{\sigma} \cdot \vec{k}) \chi$.

G.2 A REDUÇÃO DOS ESPINORES $\bar{U}(P')U(P)$

Da equação de Dirac para uma partícula com energia E , massa m e momento \vec{p} , temos a sua solução dada por

$$u^\alpha(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{E + m}} \begin{pmatrix} E + m \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \end{pmatrix} \chi^\alpha, \quad (1116)$$

sendo explicitamente escritos como (χ^α são os estados de spin e $\vec{\sigma}$ as matrizes de Pauli e matriz unitária 2×2 implícita para a correta dimensão das matrizes)

$$u(p) = \frac{1}{\sqrt{E+m}} \begin{pmatrix} E+m & 0 \\ 0 & E+m \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \end{pmatrix} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right], \quad (1117)$$

para quando a partícula é incidente e para a partícula espalhada temos

$$\bar{u}(p') = \frac{1}{\sqrt{E+m}} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} (1,0) + \frac{1}{\sqrt{2}} (0,1) \right] \begin{pmatrix} E+m & 0 & -\vec{\sigma} \cdot \vec{p}' & 0 \\ 0 & E+m & 0 & -\vec{\sigma} \cdot \vec{p}' \end{pmatrix}. \quad (1118)$$

Juntando ambas as soluções encontramos a relação de espinores

$$\begin{aligned} \bar{u}(p')u(p) &= \frac{1}{E+m} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} (1,0) + \frac{1}{\sqrt{2}} (0,1) \right] \begin{pmatrix} E+m & 0 & -\vec{\sigma} \cdot \vec{p}' & 0 \\ 0 & E+m & 0 & -\vec{\sigma} \cdot \vec{p}' \end{pmatrix} \\ &\quad \times \begin{pmatrix} E+m & 0 \\ 0 & E+m \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \end{pmatrix} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right], \\ \bar{u}(p')u(p) &= \frac{1}{2(E+m)} \left[(1,0) + (0,1) \right] \begin{pmatrix} (E+m)^2 - (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}')(\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) & 0 \\ 0 & (E+m)^2 - (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}')(\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \end{pmatrix} \\ &\quad \times \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right], \\ \bar{u}(p')u(p) &= \frac{1}{2(E+m)} \left[\left((E+m)^2 - (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}')(\vec{\sigma} \cdot \vec{p}), 0 \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(0, (E+m)^2 - (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}')(\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \right) \right] \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]. \end{aligned} \quad (1119)$$

Assim encontramos

$$[\bar{u}(p')u(p)] = \frac{2}{2(E+m)} \left((E+m)^2 - (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}')(\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \right). \quad (1120)$$

Da relação de energia relativística $E^2 = m^2 + \vec{p}^2$ e da identidade das matrizes de

Pauli, fazemos

$$\begin{aligned}
[\bar{u}(p')u(p)] &= \frac{E^2 + 2Em + m^2 - (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}')(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})}{E + m} \\
&= \frac{\vec{p}'^2 + m^2 + 2Em + m^2 - \vec{p}' \cdot \vec{p} - i\vec{\sigma}^{(a)} \cdot (\vec{p}' \times \vec{p})}{E + m} \\
&= \frac{2m(E + m) - \vec{p}'(\vec{p} - \vec{p}') - i\vec{\sigma}^{(a)} \cdot (\vec{p}' \times \vec{p})}{E + m} \\
&= 2m - \frac{\vec{p}'(\vec{p} - \vec{p}') - i\vec{\sigma}^{(a)} \cdot (\vec{p}' \times \vec{p})}{E + m}.
\end{aligned}$$

Para os espinores relativos à partícula a , temos

$$[\bar{u}(p')u(p)]_a = 2m_a + \frac{\vec{q}^2 - i\vec{\sigma}^{(a)} \cdot (\vec{q} \times \vec{z})}{2E_a + m_a}, \quad (1121)$$

aqui usamos as relações $\vec{p}' \cdot (\vec{p}' - \vec{p}) = -\frac{(\vec{q})^2}{2}$ e $\vec{p}' \times \vec{p} = \frac{\vec{q} \times \vec{z}}{2}$.

G.3 CÁLCULO DE $\bar{U}(P')\not{z}U(P)$

O caso em que usamos ambas as componentes do quadrivetor no nosso trabalho, é o caso do quadrivetor z , por isso usaremos este cálculo como padrão para os demais.

O quadrimomento z^μ *slashed* é dado por

$$\not{z} = z_\mu \gamma^\mu = \begin{pmatrix} z_0 & -\vec{\sigma} \cdot \vec{z} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{z} & -z_0 \end{pmatrix}. \quad (1122)$$

Procedendo da mesma maneira do caso anterior, temos explicitamente

$$[\bar{u}(p')\not{z}u(p)]_a = \frac{1}{(E+m)_a} \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0) + \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1) \right] \begin{pmatrix} (E+m)_a & 0 & -\vec{\sigma}\cdot\vec{p}'_a & 0 \\ 0 & (E+m)_a & 0 & -\vec{\sigma}\cdot\vec{p}'_a \end{pmatrix} \\ \times \begin{pmatrix} z_0 & 0 & -\vec{\sigma}\cdot\vec{z} & 0 \\ 0 & z_0 & 0 & -\vec{\sigma}\cdot\vec{z} \\ \vec{\sigma}\cdot\vec{z} & 0 & -z_0 & 0 \\ 0 & \vec{\sigma}\cdot\vec{z} & 0 & -z_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (E+m)_a & 0 \\ 0 & (E+m)_a \\ \vec{\sigma}\cdot\vec{p}_a & 0 \\ 0 & \vec{\sigma}\cdot\vec{p}_a \end{pmatrix} \\ \times \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right],$$

$$[\bar{u}(p')\not{z}u(p)]_a = \frac{1}{(E+m)_a} \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0) + \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1) \right] \begin{pmatrix} B & 0 & C & 0 \\ 0 & B & 0 & C \end{pmatrix} \\ \times \begin{pmatrix} (E+m)_a & 0 \\ 0 & (E+m)_a \\ \vec{\sigma}\cdot\vec{p}_a & 0 \\ 0 & \vec{\sigma}\cdot\vec{p}_a \end{pmatrix} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right],$$

$$[\bar{u}(p')\not{z}u(p)]_a = \frac{1}{(E+m)_a} \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0) + \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1) \right] \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

sendo

$$A = (E+m)_a^2 z_0 - (E+m)_a (\vec{\sigma}\vec{p}'_a)(\vec{\sigma}\vec{z}) + z_0 (\vec{\sigma}\vec{p}'_a)(\vec{\sigma}\vec{p}_a) - (E+m)_a (\vec{\sigma}\vec{z})(\vec{\sigma}\vec{p}_a), \quad (1123)$$

$$B = (E+m)_a z_0 - (\vec{\sigma}\vec{p}'_a)(\vec{\sigma}\vec{z}), \quad (1124)$$

$$C = z_0 (\vec{\sigma}\vec{p}'_a) - (E+m)_a (\vec{\sigma}\vec{z}). \quad (1125)$$

Desenvolvendo mais as expressões

$$\bar{u}_a(p')\not{z}u(p)_a = \frac{(E+m)_a^2 z_0 - (E+m)_a (\vec{\sigma}\vec{p}'_a)(\vec{\sigma}\vec{z}) + z_0 (\vec{\sigma}\vec{p}'_a)(\vec{\sigma}\vec{p}_a) - (E+m)_a (\vec{\sigma}\vec{z})(\vec{\sigma}\vec{p}_a)}{(E+m)_a} \\ = (E+m)_a z_0 - (\vec{\sigma}\vec{p}'_a)(\vec{\sigma}\vec{z}) + \frac{z_0}{(E+m)_a} (\vec{\sigma}\vec{p}'_a)(\vec{\sigma}\vec{p}_a) - (\vec{\sigma}\vec{z})(\vec{\sigma}\vec{p}_a). \quad (1126)$$

Sabendo que $a = 1, 2$ então:

$$p_1 = (E_1, \vec{p}), \quad p'_1 = (E'_1, \vec{p}'_1), \quad (1127)$$

$$p_2 = (E_2, -\vec{p}), \quad p'_2 = (E_2, -\vec{p}'_1), \quad (1128)$$

$$\vec{p}_1 = \vec{p}, \quad \vec{p}'_1 = \vec{p}'_1, \quad (1129)$$

$$\vec{p}_2 = -\vec{p}, \quad \vec{p}'_2 = -\vec{p}'_1, \quad (1130)$$

para os os termos proporcionais a \vec{z}

$$\begin{aligned}
(\vec{\sigma} \cdot \vec{p}')(\vec{\sigma} \cdot \vec{z}) &= \vec{p}' \cdot \vec{z} + i\vec{\sigma} \cdot (\vec{p}' \times \vec{z}) = \vec{p}' \cdot (\vec{p} + \vec{p}') + i\vec{\sigma} \cdot (\vec{p}' \times \vec{p} + \vec{p}' \times \vec{p}') = \vec{p}'^2 + \vec{p}' \cdot \vec{p} + i\vec{\sigma} \cdot (\vec{p}' \times \vec{p}) \\
&= E'^2 - m'^2 + \vec{p}' \cdot \vec{p} + i\vec{\sigma} \cdot (\vec{p}' \times \vec{p}) \\
&= E'^2 - m'^2 + (\vec{\sigma} \vec{p}')(\vec{\sigma} \vec{p}), \tag{1131}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\vec{\sigma} \cdot \vec{z})(\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) &= \vec{p} \cdot \vec{z} + i\vec{\sigma} \cdot (\vec{z} \times \vec{p}) = \vec{p} \cdot (\vec{p} + \vec{p}') + i\vec{\sigma} \cdot (\vec{p} \times \vec{p} + \vec{p}' \times \vec{p}) = \vec{p}^2 + \vec{p}' \cdot \vec{p} + i\vec{\sigma} \cdot (\vec{p}' \times \vec{p}) \\
&= E^2 - m^2 + \vec{p}' \cdot \vec{p} + i\vec{\sigma} \cdot (\vec{p}' \times \vec{p}) \\
&= E^2 - m^2 + (\vec{\sigma} \vec{p}')(\vec{\sigma} \vec{p}). \tag{1132}
\end{aligned}$$

De (1126), usando as últimas relações

$$\begin{aligned}
\bar{u}(p') \not{z} u(p) &= (E + m)z_0 + \frac{z_0}{E + m} (\vec{\sigma} \vec{p}')(\vec{\sigma} \vec{p}) \pm 2[E^2 - m^2 + (\vec{\sigma} \vec{p}')(\vec{\sigma} \vec{p})] \\
&= \frac{z_0[(E + m)^2 + (\vec{\sigma} \vec{p}')(\vec{\sigma} \vec{p})] \pm 2(E + m)[(E^2 - m^2) + (\vec{\sigma} \vec{p}')(\vec{\sigma} \vec{p})]}{E + m} \\
&= \frac{1}{E + m} \left\{ z_0[2E^2 - (\vec{p}^2 + m^2) + 2Em + m^2 + \vec{p}' \cdot \vec{p} + i\vec{\sigma}(\vec{q} \times \vec{z})/2] \right. \\
&\quad \left. \pm 2(E + m)[2E^2 - \vec{p}^2 - m^2 - m^2 + \vec{p}' \cdot \vec{p} + i\vec{\sigma}(\vec{q} \times \vec{z})/2] \right\} \\
&= \frac{1}{E + m} \left\{ z_0[2E^2 - \vec{p}^2 + 2Em + \vec{p}' \cdot \vec{p} + i\vec{\sigma}(\vec{q} \times \vec{z})/2] \right. \\
&\quad \left. \pm 2(E + m)(2E^2 - 2m^2 - [\vec{q}^2 - i\vec{\sigma}(\vec{q} \times \vec{z})]/2) \right\} \\
&= \frac{1}{E + m} \left\{ z_0[2E(E + m) - [\vec{q}^2 - i\vec{\sigma}(\vec{q} \times \vec{z})]/2] \right. \\
&\quad \left. \pm 2(E + m)(2E^2 - 2m^2 - [\vec{q}^2 - i\vec{\sigma}(\vec{q} \times \vec{z})]/2) \right\} \\
&= 2Ez_0 - \frac{[z_0 \pm 2(E + m)][\vec{q}^2 - i\vec{\sigma}(\vec{q} \times \vec{z})]}{2(E + m)},
\end{aligned}$$

$$[\bar{u}(p') \not{z} u(p)]_a = 2E_a z_0 - \frac{z_0 \pm 2(E_a + m_a)}{2(E_a + m_a)} [\vec{q}^2 - i\vec{\sigma}^{(a)}(\vec{q} \times \vec{z})], \tag{1133}$$

em que usamos o sinal $-$ para $a = 1$ e $+$ para $a = 2$.

G.4 CÁLCULO DO CASO $\bar{U}(P') \not{W} U(P)$

A componente espacial de W pela definição do tipo de interação é nula, dessa maneira, podemos pegar de (1133) os termos proporcionais a z_0 e fazer $z_0 \rightarrow W_0$

$$[\bar{u}(p') \not{W} u(p)]_{(a)} = W_0 \left[2E_a - \frac{\vec{q}^2 - i\vec{\sigma}^{(a)}(\vec{q} \times \vec{z})}{2(E_a + m_a)} \right]. \tag{1134}$$

G.5 RESULTADOS GERAIS

G.5.1 Definições

Escrevemos de maneira mais conveniente a redução espinorial utilizando a definição

$$\mathcal{Q}^{(a)} = (\vec{q})^2 - i\vec{\sigma}^{(a)} \cdot (\vec{q} \times \vec{z}), \quad (1135)$$

as definições dos operadores de spin e momento angular são

$$\vec{\Omega}_C = \hat{1} \quad (1136)$$

$$\vec{\Omega}_{SS} = (\vec{q})^2 \vec{\sigma}^{(1)} \cdot \vec{\sigma}^{(2)}, \quad (1137)$$

$$\vec{\Omega}_{LS_+} = \frac{i}{4} (\vec{\sigma}^{(1)} + \vec{\sigma}^{(2)}) \cdot (\vec{q} \times \vec{z}), \quad (1138)$$

$$\vec{\Omega}_{LS_-} = \frac{i}{4} (\vec{\sigma}^{(1)} - \vec{\sigma}^{(2)}) \cdot (\vec{q} \times \vec{z}), \quad (1139)$$

$$\vec{\Omega}_T = (\vec{q})^2 \vec{\sigma}^{(1)} \cdot \vec{\sigma}^{(2)} - 3(\vec{\sigma}^{(1)} \cdot \vec{q})(\vec{\sigma}^{(2)} \cdot \vec{q}), \quad (1140)$$

$$\vec{\Omega}_Q = \vec{\sigma}^{(1)} \cdot (\vec{q} \times \vec{z}) \vec{\sigma}^{(2)} \cdot (\vec{q} \times \vec{z}), \quad (1141)$$

sabendo que $\hat{1}$ é a matriz unidade no espaço de spin, e que

$$i\vec{\sigma}^{(1)} \cdot (\vec{q} \times \vec{z}) = 2(\vec{\Omega}_{LS_+} + \vec{\Omega}_{LS_-}), \quad (1142)$$

$$i\vec{\sigma}^{(2)} \cdot (\vec{q} \times \vec{z}) = 2(\vec{\Omega}_{LS_+} - \vec{\Omega}_{LS_-}), \quad (1143)$$

reescrevemos (1135) em função de $a = 1, 2$

$$\mathcal{Q}^{(1)} = (\vec{q})^2 - 2(\vec{\Omega}_{LS_+} + \vec{\Omega}_{LS_-}), \quad (1144)$$

$$\mathcal{Q}^{(2)} = (\vec{q})^2 - 2(\vec{\Omega}_{LS_+} - \vec{\Omega}_{LS_-}), \quad (1145)$$

$$\mathcal{Q}^{(1)} \mathcal{Q}^{(2)} = [(\vec{q})^2]^2 - 4(\vec{q})^2 \vec{\Omega}_{LS_+} - \vec{\Omega}_Q. \quad (1146)$$

De modo geral a redução de espinores usa a igualdade

$$\begin{aligned} a + b\mathcal{Q}^{(1)} + c\mathcal{Q}^{(2)} + d\mathcal{Q}^{(1)}\mathcal{Q}^{(2)} &= a + b\left[(\vec{q})^2 - 2(\vec{\Omega}_{LS_+} + \vec{\Omega}_{LS_-})\right] \\ &+ c\left[(\vec{q})^2 - 2(\vec{\Omega}_{LS_+} - \vec{\Omega}_{LS_-})\right] + d\left[[\vec{q}]^2 - 4(\vec{q})^2\vec{\Omega}_{LS_+} - \vec{\Omega}_Q\right] \\ &= a + (b+c)(\vec{q})^2 + d[(\vec{q})^2]^2 + 2[-b-c-2(\vec{q})^2d]\vec{\Omega}_{LS_+} + 2[-b+c]\vec{\Omega}_{LS_-} + [-d]\vec{\Omega}_Q. \end{aligned}$$

No nosso trabalho o operador $\vec{\Omega}_Q$ não é utilizado, uma vez que, é proporcional a \vec{z}^2 . Portanto consideraremos $\vec{\Omega}_Q \rightarrow 0$.

Nas próximas seções calcularemos cada combinação de redução espinorial, em que

usaremos de acordo com a redução local definida nesse trabalho

$$E_1 = m_1, \quad E_2 = m_2, \quad (1147)$$

$$W_0 = E_1 + E_2 = m_1 + m_2, \quad (1148)$$

$$z_0 = E_1 - E_2 = m_1 - m_2, \quad (1149)$$

$$\vec{z}^2 = 0. \quad (1150)$$

G.5.2 $[\bar{u}u]_{(1)}[\bar{u}u]_{(2)}$

Utilizando a relação (1121) e as definições anteriores calculamos diretamente

$$\begin{aligned} [\bar{u}(p')u(p)]_{(1)}[\bar{u}(p')u(p)]_{(2)} &= \left[2m_1 + \frac{\mathcal{Q}^{(1)}}{4m_1}\right] \left[2m_2 + \frac{\mathcal{Q}^{(2)}}{4m_2}\right] \\ &= 4m_1m_2 + \left[\frac{m_2}{2m_1} + \frac{m_1}{2m_2}\right] (\vec{q})^2 + \frac{(\vec{q})^4}{16m_1m_2} \\ &\quad - 2\left[\frac{m_2}{2m_1} + \frac{m_1}{2m_2} + \frac{(\vec{q})^2}{8m_1m_2}\right] \vec{\Omega}_{LS+} + 2\left[-\frac{m_2}{2m_1} + \frac{m_1}{2m_2}\right] \vec{\Omega}_{LS-}. \end{aligned} \quad (1151)$$

G.5.3 $[\bar{u}\mathcal{W}u]_{(1)}[\bar{u}u]_{(2)}$

De (1134), $a = 1$ e (1148), encontramos

$$\begin{aligned} [\bar{u}\mathcal{W}u]_{(1)}[\bar{u}u]_{(2)} &= (m_1 + m_2) \left[2m_1 - \frac{\mathcal{Q}^{(1)}}{4m_1}\right] \left[2m_2 + \frac{\mathcal{Q}^{(2)}}{4m_2}\right] \\ &= (m_1 + m_2) \left\{ 4m_1m_2 + \left[-\frac{m_2}{2m_1} + \frac{m_1}{2m_2}\right] (\vec{q})^2 - \frac{(\vec{q})^4}{16m_1m_2} \right. \\ &\quad \left. + 2\left[\frac{m_2}{2m_1} - \frac{m_1}{2m_2} - \frac{(\vec{q})^2}{8m_1m_2}\right] \vec{\Omega}_{LS+} + 2\left[\frac{m_2}{2m_1} + \frac{m_1}{2m_2}\right] \vec{\Omega}_{LS-} \right\}. \end{aligned} \quad (1152)$$

G.5.4 $[\bar{u}u]_{(1)}[\bar{u}\mathcal{W}u]_{(2)}$

Da mesma maneira que o caso anterior com $a = 1$

$$\begin{aligned} [\bar{u}u]_{(1)}[\bar{u}\mathcal{W}u]_{(2)} &= (m_1 + m_2) \left[2m_1 + \frac{\mathcal{Q}^{(1)}}{4m_1}\right] \left[2m_2 - \frac{\mathcal{Q}^{(2)}}{4m_2}\right] \\ &= (m_1 + m_2) \left\{ 4m_1m_2 + \left[\frac{m_2}{2m_1} - \frac{m_1}{2m_2}\right] (\vec{q})^2 - \frac{(\vec{q})^4}{16m_1m_2} \right. \\ &\quad \left. + 2\left[-\frac{m_2}{2m_1} + \frac{m_1}{2m_2} - \frac{(\vec{q})^2}{8m_1m_2}\right] \vec{\Omega}_{LS+} - 2\left[\frac{m_2}{2m_1} + \frac{m_1}{2m_2}\right] \vec{\Omega}_{LS-} \right\}. \end{aligned} \quad (1153)$$

G.5.5 $[\bar{u}\not{W}u]_{(1)}[\bar{u}\not{W}u]_{(2)}$

Aplicando (1134) para $a = 1$ e $a = 2$

$$\begin{aligned}
[\bar{u}\not{W}u]_{(1)}[\bar{u}\not{W}u]_{(2)} &= (m_1 + m_2)^2 \left[2m_1 - \frac{Q^{(1)}}{4m_1} \right] \left[2m_2 - \frac{Q^{(2)}}{4m_2} \right] \\
&= (m_1 + m_2)^2 \left\{ 4m_1m_2 - \left[\frac{m_2}{2m_1} + \frac{m_1}{2m_2} \right] (\vec{q})^2 + \frac{(\vec{q})^4}{16m_1m_2} \right. \\
&\quad \left. + 2 \left[\frac{m_2}{2m_1} + \frac{m_1}{2m_2} - \frac{(\vec{q})^2}{8m_1m_2} \right] \vec{\Omega}_{LS+} + 2 \left[\frac{m_2}{2m_1} - \frac{m_1}{2m_2} \right] \vec{\Omega}_{LS-} \right\}. \quad (1154)
\end{aligned}$$

G.5.6 $[\bar{u}\not{z}u]_{(1)}[\bar{u}u]_{(2)}$

Para o sanduíche de espinores com o quadrivetor $z^m u$ utilizamos a relação (1133), (1147) e (1149), resultando na relação

$$[\bar{u}(p')\not{z}u(p)]_{(1)} = 2m_1(m_1 - m_2) + \frac{3m_1 + m_2}{4m_1} Q^{(1)}.$$

Então

$$\begin{aligned}
[\bar{u}(p')\not{z}u(p)]_{(1)}[\bar{u}(p')u(p)]_{(2)} &= \left[2m_1(m_1 - m_2) + \frac{3m_1 + m_2}{4m_1} Q^{(1)} \right] \left[2m_2 + \frac{Q^{(2)}}{4m_2} \right] \\
&= 4m_1m_2(m_1 - m_2) \\
&\quad + \left[\frac{m_2(3m_1 + m_2)}{2m_1} + \frac{m_1(m_1 - m_2)}{2m_2} \right] (\vec{q})^2 + \frac{(3m_1 + m_2)}{16m_1m_2} (\vec{q})^4 \\
&\quad - 2 \left[\frac{m_2(3m_1 + m_2)}{2m_1} + \frac{m_1(m_2 - m_1)}{2m_2} + \frac{(3m_1 + m_2)(\vec{q})^2}{8m_1m_2} \right] \vec{\Omega}_{LS+} \\
&\quad + 2 \left[-\frac{m_2(3m_1 + m_2)}{2m_1} + \frac{m_1(m_1 - m_2)}{2m_2} \right] \vec{\Omega}_{LS-}. \quad (1155)
\end{aligned}$$

G.5.7 $[\bar{u}u]_{(1)}[\bar{u}\not{z}u]_{(2)}$

Da mesma forma que do caso anterior encontramos

$$\begin{aligned}
[\bar{u}(p')u(p)]_{(1)}[\bar{u}(p')\not{z}u(p)]_{(2)} &= \left[2m_1 + \frac{\mathcal{Q}^{(1)}}{4m_1}\right] \left[2m_2(m_1 - m_2) - \frac{3m_2 + m_1}{4m_2}\mathcal{Q}^{(2)}\right] \\
&= 4m_1m_2(m_1 - m_2) \\
&\quad + \left[\frac{m_2(m_1 - m_2)}{2m_1} - \frac{m_1(3m_2 + m_1)}{2m_2}\right](\vec{q})^2 - \frac{(3m_2 + m_1)}{16m_1m_2}(\vec{q})^4 \\
&\quad - 2\left[\frac{m_2(m_2 - m_1)}{2m_1} - \frac{m_1(3m_2 + m_1)}{2m_2} - \frac{(3m_2 + m_1)}{8m_1m_2}(\vec{q})^2\right]\vec{\Omega}_{LS+} \\
&\quad - 2\left[\frac{m_2(m_2 - m_1)}{2m_1} + \frac{m_1(3m_2 + m_1)}{2m_2}\right]\vec{\Omega}_{LS-}. \tag{1156}
\end{aligned}$$

G.5.8 $[\bar{u}\gamma_\mu u]^{(1)}[\bar{u}\gamma_\nu u]^{(2)}z^\mu z^\nu$

Para esse caso temos que considerar explicitamente as componentes tensoriais, reescrevendo de forma separada (1133) e manipulando a parte vetorial, encontramos

$$[\bar{u}\gamma_0 u]^{(a)} = 2E_a - \frac{1}{2(E_a + m_a)}\mathcal{Q}^{(a)} \tag{1157}$$

$$[\bar{u}\gamma_j u]^{(a)} = s(a)[\vec{z} + i\vec{\sigma}^{(a)} \times \vec{q}]_j \tag{1158}$$

em que $s(1) = 1$ e $s(2) = -1$, para $a = 1, 2$. Isso se faz necessários pois de outra maneira a aproximação $\vec{z}^2 = 0$ não aparece explicitamente. Assim

$$\begin{aligned}
[\bar{u}\gamma_\mu u]^{(1)}[\bar{u}\gamma_\nu u]^{(2)}z^\mu z^\nu &= \left[z^0\left(2E_1 - \frac{\mathcal{Q}^{(1)}}{2(E_1 + m_1)}\right) - \vec{z}(\vec{z} + i\vec{\sigma}^{(1)} \times \vec{q})\right] \\
&\quad \times \left[z^0\left(2E_2 - \frac{\mathcal{Q}^{(2)}}{2(E_2 + m_2)}\right) + \vec{z}(\vec{z} + i\vec{\sigma}^{(2)} \times \vec{q})\right] \\
&= z^{02}\left(2E_1 - \frac{\mathcal{Q}^{(1)}}{2(E_1 + m_1)}\right)\left(2E_2 - \frac{\mathcal{Q}^{(2)}}{2(E_2 + m_2)}\right) \\
&\quad + z^0\left(2E_1 - \frac{(\vec{q})^2}{2(E_1 + m_1)}\right)i\vec{\sigma}^{(2)} \cdot (\vec{q} \times \vec{z}) \\
&\quad - z^0\left(2E_2 - \frac{(\vec{q})^2}{2(E_2 + m_2)}\right)i\vec{\sigma}^{(1)} \cdot (\vec{q} \times \vec{z}) \tag{1159}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 4E_1E_2z^{02} - z^{02} \left(\frac{E_1}{E_2 + m_2} + \frac{E_2}{E_1 + m_1} \right) (\vec{q})^2 + z^{02} \frac{[(\vec{q})^2]^2}{4(E_1 + m_1)(E_2 + m_2)} \\
&+ 2z^{02} \left[\frac{E_1}{E_2 + m_2} + \frac{E_2}{E_1 + m_1} - \frac{2(\vec{q})^2}{4(E_1 + m_1)(E_2 + m_2)} \right. \\
&+ \left. \frac{1}{z^0} \left(2E_1 - \frac{(\vec{q})^2}{2(E_1 + m_1)} \right) - \frac{1}{z^0} \left(2E_2 - \frac{(\vec{q})^2}{2(E_2 + m_2)} \right) \right] \vec{\Omega}_{LS+} \\
&- 2z^{02} \left[\frac{E_1}{E_2 + m_2} + \frac{E_2}{E_1 + m_1} + \frac{1}{z^0} \left(2E_1 - \frac{(\vec{q})^2}{2(E_1 + m_1)} \right) + \frac{1}{z^0} \left(2E_2 - \frac{(\vec{q})^2}{2(E_2 + m_2)} \right) \right] \vec{\Omega}_{LS-}.
\end{aligned} \tag{1160}$$

Logo

$$\begin{aligned}
[\bar{u}\gamma_\mu u]^{(1)} [\bar{u}\gamma_\nu u]^{(2)} z^\mu z^\nu &= (E_1 - E_2)^2 \left[4E_1E_2 - \left(\frac{E_1}{E_2 + m_2} + \frac{E_2}{E_1 + m_1} \right) (\vec{q})^2 \right. \\
&+ \left. \frac{[(\vec{q})^2]^2}{4(E_1 + m_1)(E_2 + m_2)} \right] \\
&+ 2(E_1 - E_2)^2 \left[\frac{E_1}{E_2 + m_2} + \frac{E_2}{E_1 + m_1} + \frac{2(E_1 - E_2)}{(E_1 - E_2)} \right. \\
&- \left. \left(\frac{2}{4(E_1 + m_1)(E_2 + m_2)} + \frac{1}{2(E_1 - E_2)(E_1 + m_1)} \right) \right. \\
&- \left. \frac{1}{2(E_1 - E_2)(E_2 + m_2)} \right] (\vec{q})^2 \vec{\Omega}_{LS+} \\
&- 2(E_1 - E_2)^2 \left[\frac{E_1}{E_2 + m_2} + \frac{E_2}{E_1 + m_1} + \frac{2(E_1 + E_2)}{(E_1 - E_2)} \right. \\
&- \left. \left(\frac{1}{2(E_1 - E_2)(E_1 + m_1)} + \frac{1}{2(E_1 - E_2)(E_2 + m_2)} \right) \right] (\vec{q})^2 \vec{\Omega}_{LS-}.
\end{aligned} \tag{1161}$$

Podemos também usar as igualdades $E_1 = m_1$ e $E_2 = m_2$.

G.5.9 $[\bar{u}\not{W}u]_{(1)} [\bar{u}\not{z}u]_{(2)}$

Procedendo de mesma maneira que nos caso anteriores

$$\begin{aligned}
[\bar{u}\not{W}u]_{(1)} [\bar{u}\not{z}u]_{(2)} &= (m_1 + m_2) \left[2m_1 - \frac{\mathcal{Q}^{(1)}}{4m_1} \right] \left[2m_2(m_1 - m_2) + \frac{5m_2 - m_1}{4m_2} \mathcal{Q}^{(2)} \right] \\
&= (m_1 + m_2) \left\{ 4m_1m_2(m_1 - m_2) \right. \\
&+ \left[-\frac{m_2(m_1 - m_2)}{2m_1} + \frac{m_1(5m_2 - m_1)}{2m_2} \right] (\vec{q})^2 - \frac{(5m_2 - m_1)}{16m_1m_2} (\vec{q})^4 \\
&+ 2 \left[\frac{m_2(m_1 - m_2)}{2m_1} - \frac{m_1(5m_2 - m_1)}{2m_2} + \frac{(5m_2 - m_1)(\vec{q})^2}{8m_1m_2} \right] \vec{\Omega}_{LS+} \\
&+ \left. 2 \left[\frac{m_2(m_1 - m_2)}{2m_1} + \frac{m_1(5m_2 - m_1)}{2m_2} \right] \vec{\Omega}_{LS-} \right\}.
\end{aligned} \tag{1162}$$

G.5.10 $[\bar{u}\not{z}u]_{(1)}[\bar{u}\not{W}u]_{(2)}$

De mesma forma,

$$\begin{aligned}
[\bar{u}(p')\not{z}u(p)]_{(1)}[\bar{u}(p')\not{W}u(p)]_{(2)} &= \left[2m_1(m_1 - m_2) + \frac{3m_1 + m_2}{4m_1}Q^{(1)}\right](m_1 + m_2)\left[2m_2 - \frac{Q^{(2)}}{4m_2}\right] \\
&= (m_1 + m_2)\left\{4m_1m_2(m_1 - m_2) \right. \\
&\quad + \left[\frac{m_2(3m_1 + m_2)}{2m_1} - \frac{m_1(m_1 - m_2)}{2m_2}\right](\vec{q})^2 - \frac{(3m_1 + m_2)}{16m_1m_2}(\vec{q})^4 \\
&\quad + 2\left[-\frac{m_2(3m_1 + m_2)}{2m_1} + \frac{m_1(m_1 - m_2)}{2m_2} + \frac{(3m_1 + m_2)(\vec{q})^2}{8m_1m_2}\right]\vec{\Omega}_{LS+} \\
&\quad \left. - 2\left[\frac{m_2(3m_1 + m_2)}{2m_1} + \frac{m_1(m_1 - m_2)}{2m_2}\right]\vec{\Omega}_{LS-}\right\}. \tag{1163}
\end{aligned}$$

G.5.11 $[\bar{u}\gamma_\mu u]^{(1)}[\bar{u}\gamma_\nu u]^{(2)}g^{\mu\nu}$

O último caso de redução espinorial, aqui fazemos o mesmo procedimento feito para o caso da seção G.5.8.

Fazemos a multiplicação das componentes temporal e espacial de $\bar{u}\gamma_\mu u$, assim (lembrando do sinal do espaço de Minkowski)

$$\begin{aligned}
[\bar{u}\gamma_\mu u]^{(1)}[\bar{u}\gamma_\nu u]^{(2)}g^{\mu\nu} &= \left[\left(2E_1 - \frac{Q^{(1)}}{2(E_1 + m_1)}\right), (\vec{z} + i\vec{\sigma}^{(1)} \times \vec{q})\right] \\
&\quad \times \left[\left(2E_2 - \frac{Q^{(2)}}{2(E_2 + m_2)}\right), -(\vec{z} + i\vec{\sigma}^{(2)} \times \vec{q})\right] \\
&= \left(2E_1 - \frac{Q^{(1)}}{2(E_1 + m_1)}\right)\left(2E_2 - \frac{Q^{(2)}}{2(E_2 + m_2)}\right) \\
&\quad + (\vec{z} + i\vec{\sigma}^{(1)} \times \vec{q})(\vec{z} + i\vec{\sigma}^{(2)} \times \vec{q}) \\
&= \left(2E_1 - \frac{Q^{(1)}}{2(E_1 + m_1)}\right)\left(2E_2 - \frac{Q^{(2)}}{2(E_2 + m_2)}\right) \\
&\quad + [i\vec{\sigma}^{(1)}(\vec{q} \times \vec{z}) + i\vec{\sigma}^{(2)}(\vec{q} \times \vec{z}) - (\vec{\sigma}^{(1)} \times \vec{q})(\vec{\sigma}^{(2)} \times \vec{q})].
\end{aligned}$$

Usando a identidade: $(\vec{A} \times \vec{B})(\vec{C} \times \vec{D}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})(\vec{B} \cdot \vec{D}) - (\vec{A} \cdot \vec{D})(\vec{B} \cdot \vec{C})$, fazemos

$$\begin{aligned}
(\vec{\sigma}^{(1)} \times \vec{q})(\vec{\sigma}^{(2)} \times \vec{q}) &= (\vec{\sigma}^{(1)} \cdot \vec{\sigma}^{(2)})(\vec{q} \cdot \vec{q}) - (\vec{\sigma}^{(1)} \cdot \vec{q})(\vec{\sigma}^{(2)} \cdot \vec{q}) \\
&= \frac{2}{3}(\vec{q})^2(\vec{\sigma}^{(1)} \cdot \vec{\sigma}^{(2)}) + \frac{1}{3}\left[(\vec{q})^2(\vec{\sigma}^{(1)} \cdot \vec{\sigma}^{(2)}) - 3(\vec{\sigma}^{(1)} \cdot \vec{q})(\vec{\sigma}^{(2)} \cdot \vec{q})\right], \tag{1164}
\end{aligned}$$

$$(\vec{\sigma}^{(1)} \times \vec{q})(\vec{\sigma}^{(2)} \times \vec{q}) = \frac{2}{3}\vec{\Omega}_{SS} + \frac{1}{3}\vec{\Omega}_T. \tag{1165}$$

Então encontramos a redução

$$\begin{aligned}
[\bar{u}\gamma_\mu u]^{(1)}[\bar{u}\gamma_\nu u]^{(2)}g^{\mu\nu} &= 4E_1E_2 - \left(\frac{E_1}{E_2+m_2} + \frac{E_2}{E_1+m_1}\right)(\vec{q})^2 + \frac{[(\vec{q})^2]^2}{4(E_1+m_1)(E_2+m_2)} \\
&+ 2\left[\frac{E_1}{E_2+m_2} + \frac{E_2}{E_1+m_1} - \frac{2(\vec{q})^2}{4(E_1+m_1)(E_2+m_2)} + 2\right]\vec{\Omega}_{LS+} \\
&+ 2\left[\frac{E_2}{E_1+m_1} - \frac{E_1}{E_2+m_2}\right]\vec{\Omega}_{LS-} - \frac{2}{3}\vec{\Omega}_{SS} - \frac{1}{3}\vec{\Omega}_T. \quad (1166)
\end{aligned}$$

APÊNDICE H – Formalismo e observáveis

A matriz de espalhamento para a interação méson-Bárion pode ser escrito na forma

$$M = \frac{T_{\pi\Lambda_b}}{8\pi\sqrt{s}} = f(k, \theta) + g(k, \theta)i\vec{\sigma}\cdot\hat{n}, \quad (1167)$$

em que é decomposta nas amplitudes spin-non-flip e spin-flip $f(k, \theta)$ e $g(k, \theta)$ respectivamente. Essas amplitudes de spin são calculadas pela expansão em ondas parciais

$$\begin{aligned} f(k, \theta) &= \sum_{l=0}^{\infty} \left[(l+1)a_{l+}(k) + la_{l-}(k) \right] P_l(\theta), \\ g(k, \theta) &= \sum_{l=1}^{\infty} \left[a_{l-}(k) - a_{l+}(k) \right] P_l^{(1)}(\theta). \end{aligned} \quad (1168)$$

Usando as relações de ortogonalidade dos polinômios de Legendre, as amplitudes de ondas parciais são

$$a_{l\pm} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left[P_l(\theta)f_1(k, \theta) + P_{l\pm 1}(\theta)f_2(k, \theta) \right] d\theta, \quad (1169)$$

sendo

$$\begin{aligned} f_1(k, \theta) &= \frac{(E+m)}{8\pi\sqrt{s}} [A + (\sqrt{s}-m)B], \\ f_2(k, \theta) &= \frac{(E-m)}{8\pi\sqrt{s}} [-A + (\sqrt{s}+m)B], \end{aligned} \quad (1170)$$

E é a energia do bárion inicial, e $\sqrt{s} = W$ é a energia total do sistema no referencial do centro de massa. Muitas vezes são consideradas nessas expansões somente as primeiras ondas parciais S e P , uma boa aproximação para baixas energias. Essas ondas são representadas pelos subíndice l ($l = 0$ and $l = 1$, respectivamente)

Como as amplitudes de ondas parciais obtidas em diagramas do tipo árvore são reais, temos que unitarizar as amplitudes para que não ocorra a violação de unitariedade da matriz de espalhamento S , fazemos então

$$a_{l\pm}^U = \frac{a_{\pm}}{1 - i|\vec{k}|a_{\pm}}. \quad (1171)$$

Definimos os observáveis como segue. Para a seção de choque diferencial no centro de massa

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f|^2 + |g|^2, \quad (1172)$$

integrando em relação ao ângulo sólido em todo o espaço, encontramos a seção de choque total

$$\sigma_T = 4\pi \sum_l \left[(l+1) |a_{l+}^U|^2 + l |a_{l-}^U|^2 \right]. \quad (1173)$$

Outro observável de nosso interesse é o phase shift, dado por

$$\delta_{l\pm} = \tan^{-1}(|\vec{k}| a_{l\pm}). \quad (1174)$$

H.1 BREIT-WIGNER EXPRESSION

A expressão relativística de Breit-Wigner é determinada em termos de quantidades experimentais, e é definida como

$$\delta_{l\pm} = \tan^{-1} \left[\frac{\Gamma_0 \left(\frac{|\vec{k}|}{|\vec{k}_0|} \right)^{2J+1}}{2(m_r - \sqrt{s})} \right], \quad (1175)$$

em que Γ_0 é a largura média da ressonância no ponto correspondente ao momento do méson de valor $|\vec{k}_0|$ relativo ao pico da curva correspondente à ressonância de massa m_r e com momento angular (spin) J . Essa relação é útil para quando comparada com (1174) conseguirmos estimar, comparados com dados experimentais as constantes de acoplamento de interesse.

APÊNDICE I – Projetores e Estados de Isospin

Neste apêndice mostraremos como encontrar os canais de isospin e as matrizes de isospin associados aos vértices dos vários diagramas considerados.

I.1 PROJETORES DE ISOSPIN

I.1.1 Estados de Isospins $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{2}$

A partir de um operador e de seus autovalores, podemos estabelecer um operador de projeção de forma geral como

$$P_i = \prod_{j \neq i} \frac{O - \omega_j}{\omega_i - \omega_j}, \quad i \neq j, \quad (1176)$$

em que O é um operador com autovalores ω_i . O operador atua como

$$P_i |d\rangle = \delta_{id} |d\rangle, \quad (1177)$$

sendo que $\Omega |d\rangle = \omega_d |d\rangle$.

Para a combinação de isospin 1 e 1/2, fazemos

$$\vec{I} = \frac{1}{2} \vec{\tau} + \vec{t}, \quad (1178)$$

onde $\vec{t} = (t_1, t_2, t_3)$ é o operador de isospin 1, $\vec{\tau}$ são as matrizes de Pauli que descrevem operador de isospin 1/2.

Elevando I ao quadrado temos

$$I^2 = \left(\frac{\tau}{2}\right)^2 + \vec{\tau} \cdot \vec{t} + t^2, \quad (1179)$$

e aplicando na relação

$$I(I+1)\psi = \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1 \right) + \vec{\tau} \cdot \vec{t} + 1(1+1) \right] \psi, \quad (1180)$$

isolando $\vec{\tau} \cdot \vec{t}$ e aplicando em uma auto estado ψ chegamos a

$$(\vec{\tau} \cdot \vec{t})\psi = \left[I(I+1) - \frac{11}{4} \right] \psi = \omega_I \psi. \quad (1181)$$

Desse modo obtemos para os canais de isospin 1/2 e 3/2 respectivamente, os se-

guintes autovalores

$$I = \frac{1}{2} \rightarrow \omega_{\frac{1}{2}} = -2, \quad (1182)$$

$$I = \frac{3}{2} \rightarrow \omega_{\frac{3}{2}} = 1. \quad (1183)$$

Considerando o operador $\Omega = \vec{\tau} \cdot \vec{t}$ e usando a definição (1176) chegamos aos operadores projeção de isospin

$$P_{\frac{1}{2}} = \frac{1 - \vec{\tau} \cdot \vec{t}}{3}, \quad (1184)$$

$$P_{\frac{3}{2}} = \frac{2 + \vec{\tau} \cdot \vec{t}}{3}. \quad (1185)$$

O operador \vec{t} atuando em seus estados (a, b, c) resulta em

$$\langle b | t_c | a \rangle = -i\epsilon_{bac}, \quad (1186)$$

ou

$$\langle b | \vec{t} | a \rangle = -i\epsilon_{bac}\hat{e}_c, \quad (1187)$$

sendo \hat{e}_c versor na direção c . O operador Ω atuando nos estados de isospin 1 resulta em

$$\langle b | \vec{\tau} \cdot \vec{t} | a \rangle = -i\epsilon_{bac}\tau_c, \quad (1188)$$

então

$$\langle b | P_{\frac{1}{2}} | a \rangle = \frac{1}{3} \langle b | 1 - \vec{\tau} \cdot \vec{t} | a \rangle = \frac{1}{3} [\delta_{ba} + i\epsilon_{bac}\tau_c], \quad (1189)$$

$$\langle b | P_{\frac{3}{2}} | a \rangle = \frac{1}{3} \langle b | 2 + \vec{\tau} \cdot \vec{t} | a \rangle = \frac{1}{3} [2\delta_{ba} - i\epsilon_{bac}\tau_c]. \quad (1190)$$

Os operadores de projeção de isospin neste caso podem então ser escritos como

$$(P_{\frac{1}{2}})_{ba} = \frac{1}{3}\delta_{ba} + \frac{i}{3}\epsilon_{bac}\tau_c, \quad (1191)$$

$$(P_{\frac{3}{2}})_{ba} = \frac{2}{3}\delta_{ba} - \frac{i}{3}\epsilon_{bac}\tau_c. \quad (1192)$$

A amplitude de transição T pode ser decomposta em seus canis de isospin

$$T = T_{\frac{1}{2}}P_{\frac{1}{2}} + T_{\frac{3}{2}}P_{\frac{3}{2}}. \quad (1193)$$

Substituindo (1191) e (1192) em (1193),

$$\begin{aligned}\langle b|T|a\rangle &= T_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}[\delta_{ba} + i\epsilon_{bac}\tau_c] + T_{\frac{3}{2}}\frac{1}{3}[2\delta_{ba} - i\epsilon_{bac}\tau_c] \\ &= \frac{1}{3}(T_{\frac{1}{2}} + 2T_{\frac{3}{2}})\delta_{ba} + \frac{1}{3}(T_{\frac{1}{2}} - T_{\frac{3}{2}})i\epsilon_{bac}\tau_c,\end{aligned}\quad (1194)$$

definimos

$$T^{ba} = T^+\delta_{ba} + T^-i\epsilon_{bac}\tau_c = \left[A^+ + \frac{1}{2}(\not{k} + \not{k}')B^+\right]\delta_{ba} + \left[A^- + \frac{1}{2}(\not{k} + \not{k}')B^-\right]i\epsilon_{bac}\tau_c, \quad (1195)$$

logo

$$T^+ = \frac{1}{3}(T_{\frac{1}{2}} + 2T_{\frac{3}{2}}), \quad (1196)$$

$$T^- = \frac{1}{3}(T_{\frac{1}{2}} - T_{\frac{3}{2}}), \quad (1197)$$

dessa maneira encontramos os canais de isospin de T

$$T_{\frac{1}{2}} = T^+ + 2T^-, \quad (1198)$$

$$T_{\frac{3}{2}} = T^+ - T^-. \quad (1199)$$

Por fim por comparação, concluímos que

$$A^{\frac{1}{2}} = A^+ + 2A^-, \quad B^{\frac{1}{2}} = B^+ + 2B^-, \quad (1200)$$

$$A^{\frac{3}{2}} = A^+ - A^-, \quad B^{\frac{3}{2}} = B^+ - B^-. \quad (1201)$$

I.1.2 Estados de Isospin 0 e 1

Para a interação de duas partículas com isospin 1/2, temos

$$\vec{I} = \frac{\vec{\tau}_1}{2} + \frac{\vec{\tau}_2}{2}, \quad (1202)$$

sendo que o subíndice 1 e 2 distinguem as partículas. Fazendo o mesmo procedimento para o caso anterior, temos

$$(\vec{I})^2 = \left(\frac{\vec{\tau}_1}{2}\right)^2 + \frac{\vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2}{2} + \left(\frac{\vec{\tau}_2}{2}\right)^2, \quad (1203)$$

e

$$P_0 = \frac{1 - \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2}{4}, \quad (1204)$$

$$P_1 = \frac{3 + \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2}{4}. \quad (1205)$$

com $\omega_0 = -3$ e $\omega_1 = 1$.

De

$$T = T_0 P_0 + T_1 P_1, \quad (1206)$$

encontramos

$$T = \frac{T_0 + 3T_1}{4} + \frac{T_1 - T_0}{4} \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2. \quad (1207)$$

Definindo

$$T_\delta = \frac{T_0 + 3T_1}{4}, \quad T_\tau = \frac{T_1 - T_0}{4}, \quad (1208)$$

e então

$$T_0 = T_\delta - 3T_\tau, \quad (1209)$$

$$T_1 = T_\delta + T_\tau. \quad (1210)$$

Para as amplitudes A e B são

$$T_\delta = A_\delta + \frac{k + k'}{2} B_\delta \quad (1211)$$

$$T_\tau = A_\tau + \frac{k + k'}{2} B_\tau \quad (1212)$$

logo

$$T_0 = A_\delta - 3A_\tau + \frac{k + k'}{2} (B_\delta - 3B_\tau) \quad (1213)$$

$$T_1 = A_\delta + A_\tau + \frac{k + k'}{2} (B_\delta + B_\tau) \quad (1214)$$

Assim concluímos que as amplitudes para cada canal de isospin são dadas por

$$A_0 = A_\delta - 3A_\tau, \quad B_0 = B_\delta - 3B_\tau, \quad (1215)$$

$$A_1 = A_\delta + A_\tau, \quad B_1 = B_\delta + B_\tau. \quad (1216)$$

I.1.3 Estados de Isospin 0, 1 e 2

A interação entre duas partículas com isospin 1 é dada pela relação

$$\vec{I} = \vec{t}_1 + \vec{t}_2 \quad (1217)$$

logo

$$I^2 = t_1^2 + 2\vec{t}_1 \cdot \vec{t}_2 + t_2^2 \quad (1218)$$

resultando nos projetores

$$P_0 = \frac{\delta_{d\Delta}\delta_{b\beta}}{3}, \quad (1219)$$

$$P_1 = \frac{\delta_{db}\delta_{\Delta\beta} - \delta_{d\beta}\delta_{\Delta b}}{2}, \quad (1220)$$

$$P_2 = \frac{3\delta_{db}\delta_{\Delta\beta} + 3\delta_{d\beta}\delta_{\Delta b} - \delta_{d\Delta}\delta_{b\beta}}{6}. \quad (1221)$$

Considerando o caso da interação entre o méson π e o bárion Σ ambos de isospin 1, então a mistura de todos os estados é dada por

$$T_{\Sigma\Sigma} = \langle \Sigma_b \Sigma_\beta | T | \Sigma_d \Sigma_\Delta \rangle = \bar{u}(\vec{p}') \left\{ A(\delta_{b\beta}\delta_{d\Delta}) + B(\delta_{bd}\delta_{\beta\Delta}) + C(\delta_{\beta d}\delta_{b\Delta}) \right\} u(\vec{p}). \quad (1222)$$

O canal de interação direto é dado pela combinação de estados $\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta}$ e o cruzado por $\delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma}$. Comparando com as amplitudes de acordo com os operadores de projeção de isospin, escrevemos

$$\begin{aligned} T_{\Sigma\Sigma} &= \bar{u}(\vec{p}') \left\{ T_0 P_0 + T_1 P_1 + T_2 P_2 \right\} u(\vec{p}) \\ &= \bar{u}(\vec{p}') \left\{ T_0 \left(\frac{\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta}}{3} \right) + T_1 \left(\frac{\delta_{db}\delta_{\Delta\beta} - \delta_{d\beta}\delta_{\Delta b}}{2} \right) + T_2 \left(\frac{3\delta_{db}\delta_{\Delta\beta} + 3\delta_{d\beta}\delta_{\Delta b} - \delta_{d\Delta}\delta_{b\beta}}{6} \right) \right\} u(\vec{p}) \end{aligned} \quad (1223)$$

dessa forma por correspondência temos que as amplitudes de acordo com o canal de isospin são

$$T_0 = 3A + B + C, \quad (1224)$$

$$T_1 = B - C, \quad (1225)$$

$$T_2 = B + C. \quad (1226)$$

I.2 MATRIZES DE ISOSPIN PARA A TROCA DE DOIS MÉSONS

Nesta seção mostraremos como calcular as matrizes de isospin representadas por $G_1 G_2$ para todos os casos considerados neste trabalho.

I.2.1 Combinação de dois bárions externos com Isospin 1/2

I.2.1.1 Trocando dois píons, casos: $\pi\pi NN$, $\pi\pi\Xi\Xi$ e $\pi\pi N\Xi$

As matrizes de isospin para o diagrama tipo caixa são dadas por

$$\begin{aligned}
 G_1 G_2 &= (\tau_b^\dagger \tau_a)(\tau_b^\dagger \tau_a) \\
 &= \delta_{ab} \delta_{ab} - 2\delta_{\alpha\beta} \tau^\alpha \tau^\beta \\
 &= \delta_{aa} - 2\vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2 \\
 &= 3 - 2\vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2.
 \end{aligned} \tag{1227}$$

Matrizes de isospin para o diagrama tipo cruzado

$$\begin{aligned}
 G_1 G_2 &= (\tau_b^\dagger \tau_a)(\tau_a^\dagger \tau_b) \\
 &= \delta_{ab} \delta_{ab} + 2\delta_{\alpha\beta} \tau^\alpha \tau^\beta \\
 &= \delta_{aa} + 2\vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2 \\
 &= 3 + 2\vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2.
 \end{aligned} \tag{1228}$$

I.2.1.2 Trocando dois kaons, casos: $KKNN$, $KKN\Xi$ e $KK\Xi\Xi$

Matrizes de isospin para os diagramas dos tipos caixa e cruzado

$$\begin{aligned}
 G_1 G_2 &= (\tau_a^\dagger \tau_a)(\tau_b^\dagger \tau_b) \\
 &= \delta_{aa} \delta_{bb} \\
 &= 9.
 \end{aligned} \tag{1229}$$

I.2.2 Combinações de dois bárions externos com isospin 1/2 e isospin 1

I.2.2.1 Trocando dois píons, casos: $\pi\pi N\Sigma$, $\pi\pi N\Sigma_c$, $\pi\pi\Xi\Sigma$, e $\pi\pi\Xi\Sigma_c$

Considerando a interação do tipo $\langle N\pi^\alpha \Sigma_\beta | T | N\pi^\gamma \Sigma_\Delta \rangle$ trocando dois píons π^α e π^γ , temos que os operadores de isospin em relação aos píons, são:

Diagrama do tipo caixa

$$\begin{aligned}
G_1 G_2 &= (\tau_\alpha^\dagger \tau_\gamma)(t_\alpha^\dagger t_\gamma) \\
&= (\delta_{\alpha\gamma} + i\epsilon_{\gamma\alpha k} \tau^k)(-i\epsilon_{c\beta\alpha})(-i\epsilon_{\Delta c\gamma}) \\
&= (\delta_{\alpha\gamma} + i\epsilon_{\gamma\alpha k} \tau^k)(\delta_{\beta\Delta} \delta_{\alpha\gamma} - \delta_{\beta\gamma} \delta_{\alpha\Delta}) \\
&= 3\delta_{\beta\Delta} - \delta_{\beta\Delta} - i\epsilon_{\beta\Delta k} \tau^k \\
&= 2\delta_{\beta\Delta} - i\epsilon_{\beta\Delta k} \tau^k.
\end{aligned} \tag{1230}$$

Diagrama do tipo cruzado

$$\begin{aligned}
G_1 G_2 &= (\tau_\alpha^\dagger \tau_\gamma)(t_\gamma^\dagger t_\alpha) \\
&= (\delta_{\alpha\gamma} + i\epsilon_{\gamma\alpha k} \tau^k)(-i\epsilon_{c\beta\gamma})(-i\epsilon_{\Delta c\alpha}) \\
&= (\delta_{\alpha\gamma} + i\epsilon_{\gamma\alpha k} \tau^k)(\delta_{\beta\alpha} \delta_{\gamma\Delta} - \delta_{\beta\Delta} \delta_{\alpha\gamma}) \\
&= -3\delta_{\beta\Delta} + \delta_{\beta\Delta} + i\epsilon_{\beta\Delta k} \tau^k \\
&= -2\delta_{\beta\Delta} + i\epsilon_{\beta\Delta k} \tau^k.
\end{aligned} \tag{1231}$$

I.2.2.2 *Trocando dois kaons, casos: $KKN\Sigma$, $KK\Xi\Sigma$*

Diagrama do tipo caixa

$$\begin{aligned}
G_1 G_2 &= (\tau_a^\dagger \tau_a)(\tau_b^\dagger \tau_c) \\
&= \delta_{aa}(\delta_{bc} + i\epsilon_{bck} \tau^k) \\
&= 3(\delta_{ab} + i\epsilon_{bac} \tau^c).
\end{aligned} \tag{1232}$$

Diagrama do tipo cruzado

$$\begin{aligned}
G_1 G_2 &= (\tau_a^\dagger \tau_a)(\tau_c^\dagger \tau_b) \\
&= \delta_{aa}(\delta_{bc} - i\epsilon_{bck} \tau^k) \\
&= 3(\delta_{ab} - i\epsilon_{bac} \tau^c).
\end{aligned} \tag{1233}$$

I.2.3 **Combinações de dois bárions externos com isospin 1**

I.2.3.1 *Trocando dois píons, casos: $\pi\pi\Sigma\Sigma$ e $\pi\pi\Sigma_c\Sigma_c$*

Sendo $\langle A|t^B|C\rangle = -i\epsilon_{ACB}$ para a interação do tipo $\langle \Sigma_b \Sigma_\beta | T | \Sigma_d \Sigma_\Delta \rangle$ com píons nos estados π^α nos primeiros vértices e π^γ no segundo, teremos:

Diagrama do tipo caixa

$$\vec{G}_1 = \langle a|t^\alpha|b\rangle \langle d|t^\gamma|a\rangle = (-i\epsilon_{ab\alpha})(-i\epsilon_{da\gamma}), \quad (1234)$$

$$\vec{G}_2 = \langle c|t^\alpha|\beta\rangle \langle \Delta|t^\gamma|c\rangle = (-i\epsilon_{c\beta\alpha})(-i\epsilon_{\Delta c\gamma}). \quad (1235)$$

Sabemos que $\epsilon_{ijk}\epsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}$, então

$$\begin{aligned} (\epsilon_{ab\alpha})(\epsilon_{da\gamma})(\epsilon_{c\beta\alpha})(\epsilon_{c\Delta\gamma}) &= (\delta_{bd}\delta_{a\gamma} - \delta_{b\gamma}\delta_{ad})(\delta_{\beta\Delta}\delta_{a\gamma} - \delta_{\beta\gamma}\delta_{a\Delta}) \\ &= 3\delta_{bd}\delta_{\beta\Delta} - \delta_{bd}\delta_{\beta\Delta} - \delta_{bd}\delta_{\beta\Delta} + \delta_{b\beta}\delta_{d\Delta} \\ G_1 G_2 &= \delta_{bd}\delta_{\beta\Delta} + \delta_{b\beta}\delta_{d\Delta}. \end{aligned} \quad (1236)$$

Temos por definição que a forma geral é: $\langle \Sigma_b \Sigma_\beta | T | \Sigma_d \Sigma_\Delta \rangle = A(\delta_{b\beta}\delta_{d\Delta}) + B(\delta_{bd}\delta_{\beta\Delta}) + C(\delta_{\beta d}\delta_{b\Delta})$. Assim para o tipo caixa temos

$$\langle \Sigma_b \Sigma_\beta | T | \Sigma_d \Sigma_\Delta \rangle = A(\delta_{b\beta}\delta_{d\Delta}) + B(\delta_{bd}\delta_{\beta\Delta}). \quad (1237)$$

Diagrama do tipo cruzado

$$\vec{G}_1 = \langle a|t^\alpha|b\rangle \langle d|t^\gamma|a\rangle = (-i\epsilon_{ab\alpha})(-i\epsilon_{da\gamma}), \quad (1238)$$

$$\vec{G}_2 = \langle c|t^\gamma|\beta\rangle \langle \Delta|t^\alpha|c\rangle = (-i\epsilon_{c\beta\gamma})(-i\epsilon_{\Delta c\alpha}). \quad (1239)$$

Então

$$\begin{aligned} (\epsilon_{ab\alpha})(\epsilon_{da\gamma})(\epsilon_{c\beta\gamma})(\epsilon_{c\Delta\alpha}) &= (\delta_{bd}\delta_{a\gamma} - \delta_{b\gamma}\delta_{ad})(\delta_{\beta\Delta}\delta_{a\gamma} - \delta_{\beta\alpha}\delta_{\gamma\Delta}) \\ &= 3\delta_{bd}\delta_{\beta\Delta} - \delta_{bd}\delta_{\beta\Delta} - \delta_{bd}\delta_{\beta\Delta} + \delta_{d\beta}\delta_{b\Delta} \\ G_1 G_2 &= \delta_{bd}\delta_{\beta\Delta} + \delta_{\beta d}\delta_{b\Delta}. \end{aligned} \quad (1240)$$

Logo para o tipo cruzado

$$\langle \Sigma_b \Sigma_\beta | T | \Sigma_d \Sigma_\Delta \rangle = B(\delta_{bd}\delta_{\beta\Delta}) + C(\delta_{\beta d}\delta_{b\Delta}). \quad (1241)$$

I.2.3.2 Trocando dois kaons, caso: $KK\Sigma\Sigma$

Diagramas do tipo caixa e cruzado

$$\begin{aligned} G_1 G_2 &= (\tau_b^\dagger \tau_d)(\tau_\beta^\dagger \tau_\Delta) \\ &= \delta_{bd}\delta_{\beta\Delta} + (\text{termos} \propto \tau) \dots \end{aligned} \quad (1242)$$

Logo

$$\langle \Sigma_b \Sigma_\beta | T | \Sigma_d \Sigma_\Delta \rangle = B(\delta_{bd}\delta_{\beta\Delta}). \quad (1243)$$

I.2.4 Diagrama nabla (∇)

Para esse tipo de diagrama, não sabemos quais são as lagrangianas para os mésons η e K . Desta maneira consideramos somente píons nos diagrama com vértices de contato com nucleon. Logo

$$\begin{aligned} (i\tau_b^\dagger \tau_a)(\epsilon_{bac}\tau^c) &= \left[\delta_{ab} + i\epsilon_{ba\alpha}\tau^\alpha \right] \left[i\epsilon_{ba\theta}\tau^\theta \right] = \overbrace{\delta_{ab}i\epsilon_{ba\theta}\tau^\theta}^{=0} - \overbrace{\epsilon_{ba\alpha}\epsilon_{ba\theta}}^{2\delta_{\alpha\theta}} \tau^\alpha \tau^\theta \\ (\tau_b^\dagger \tau_a)(i\epsilon_{bac}\tau^c) &= -2\vec{\tau}^{(1)} \cdot \vec{\tau}^{(2)}. \end{aligned} \quad (1244)$$

I.2.5 Diagrama triângulo (Δ)

Para o caso geral do diagrama triângulo (Δ) com píons e nucleons

$$\begin{aligned} (i\tau_a^\dagger \tau_b)(\epsilon_{abc}\tau^c) &= \left[\delta_{ab} + i\epsilon_{ab\alpha}\tau^\alpha \right] \left[i\epsilon_{ab\theta}\tau^\theta \right] = \overbrace{\delta_{ab}i\epsilon_{ab\theta}\tau^\theta}^{=0} - \overbrace{\epsilon_{ab\alpha}\epsilon_{ab\theta}}^{2\delta_{\alpha\theta}} \tau^\alpha \tau^\theta \\ (\tau_a^\dagger \tau_b)(i\epsilon_{abc}\tau^c) &= -2\vec{\tau}^{(1)} \cdot \vec{\tau}^{(2)}. \end{aligned} \quad (1245)$$

I.2.6 Diagrama bolha ($()$)

Dois vértices de contato com píons e nucleons

$$(\epsilon_{ab\alpha}\tau^\alpha)(\epsilon_{ba\theta}\tau^\theta) = -\overbrace{\epsilon_{ab\alpha}\epsilon_{ba\theta}}^{2\delta_{\alpha\theta}} \tau^\alpha \tau^\theta = -2\vec{\tau}^{(1)} \cdot \vec{\tau}^{(2)}. \quad (1246)$$

APÊNDICE J – Constantes de Acoplamento e o $SU(3)$

Neste apêndice iremos generalizar as lagrangianas quirais através do modelo sigma não-linear, apresentado para o caso pión-nucleon ($SU(2)$) no Apêndice A, de forma a encontramos, através do conceito de simetria, relações entre constantes de acoplamento dos diversos tipos de vértices. Nesta generalização iremos incluir todos os bárions de spin-1/2, mésons pseudo-escalares e vetoriais, que contenham os quarks u , d e s (ver A.3.5), estendendo assim o modelo para o caso $SU(3)$ (SWART, 1963; PILKUHN et al., 1973; STOKS; RIJKEN, 1997).

Reescrevemos a relação (452), para um novo estado mínimo de energia generalizado (f_0),

$$\langle \sigma \rangle = f_0, \quad (1247)$$

com isso modificamos a transformação unitária (472), dada por

$$U(x) = \frac{1}{f_\pi}(\sigma + i\vec{\tau} \cdot \vec{\pi}),$$

da seguinte forma

$$U(x) = \frac{1}{f_0}(\sigma + i\lambda_a \pi'_a), \quad (1248)$$

onde $a = 0, \dots, 8$, λ_a são as matrizes de Gell-Mann e π_a representa o octeto de mésons pseudo-escalares ($\vec{\pi}, K, \bar{K}, \eta$).

A transformação do campo do núcleon Ψ_N (479), dá lugar à transformação generalizada para bárions de spin-1/2 (Ψ_B)

$$\Psi_B = \Lambda \psi_B \Lambda^\dagger, \quad (1249)$$

em que agora temos o fator,

$$\Lambda = e^{i\frac{\lambda_a \pi'_a}{2f_0}}. \quad (1250)$$

O octeto de mésons pseudo-escalares é dado pela matriz

$$\frac{\lambda_a \pi'_a}{\sqrt{2}} = \begin{pmatrix} \frac{\pi^0}{\sqrt{2}} + \frac{\eta_8}{\sqrt{6}} & \pi^+ & K^+ \\ \pi^- & -\frac{\pi^0}{\sqrt{2}} + \frac{\eta_8}{\sqrt{6}} & K^0 \\ K^- & \bar{K}^0 & -\frac{2\eta_8}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \quad (1251)$$

o campo octeto η_8 juntamente com o campo singlete η_0 , quando misturados originam os

mésons η e η' . O octeto de bárions de spin-1/2, fica

$$\Psi_B = \begin{pmatrix} \frac{\Sigma^0}{\sqrt{2}} + \frac{\Lambda}{\sqrt{6}} & \Sigma^+ & p \\ \Sigma^- & -\frac{\Sigma^0}{\sqrt{2}} + \frac{\Lambda}{\sqrt{6}} & n \\ \Xi^- & \Xi^0 & -\frac{2\Lambda}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}. \quad (1252)$$

Como estendemos o modelo sigma não-linear para o $SU(3)$, e modificamos tanto o campo dos mésons pseudo-escalares e também dos bárions é natural esperar que o campo dos mésons σ precise ser generalizado da mesma forma. Isso se mostra evidente pois, f_0 por mais que seja generalizado, prediz que as massas do octeto dos bárions Ψ_B , sejam as mesmas. Vamos então, encontrar uma nova expressão para (1248), tal que

$$U(x) = F + \lambda_0 \sigma_0 + \lambda_a \sigma'_a + i \lambda_a \pi'_a, \quad (1253)$$

onde $\lambda_0 = \sqrt{2/3}$, $\lambda_a \sigma_a$ representa o octeto dos mésons escalares e F é o novo valor mínimo da energia (vácuo), dado por

$$F = \begin{pmatrix} f_1 & 0 & 0 \\ 0 & f_1 & 0 \\ 0 & 0 & f_2 \end{pmatrix}, \quad (1254)$$

sendo f_1 e f_2 funções do valor esperado dos campos isoescalares singleto (σ_0) e octeto (σ_8). Portanto,

$$f_1 = \sqrt{\frac{2}{3}} \langle \sigma_0 \rangle + \sqrt{\frac{1}{3}} \langle \sigma_8 \rangle, \quad f_2 = \sqrt{\frac{2}{3}} \langle \sigma_0 \rangle - 2\sqrt{\frac{1}{3}} \langle \sigma_8 \rangle. \quad (1255)$$

Apresentadas todas as matrizes com os campos de bárions e mésons e sabendo que todas as matrizes dos mésons se transformam da mesma forma que a matriz dos bárions, podemos definir para as interações as seguinte combinações invariantes quirais

$$[\bar{\Psi}_B \Psi_B \Phi]_F = Tr(\bar{\Psi}_B \Phi \Psi_B) - Tr(\bar{\Psi}_B \Psi_B \Phi), \quad (1256)$$

$$[\bar{\Psi}_B \Psi_B \Phi]_D = Tr(\bar{\Psi}_B \Phi \Psi_B) + Tr(\bar{\Psi}_B \Psi_B \Phi) - \frac{2}{3} Tr(\bar{\Psi}_B \Psi_B) Tr(\Phi), \quad (1257)$$

$$[\bar{\Psi}_B \Psi_B \Phi]_S = Tr(\bar{\Psi}_B \Psi_B) Tr(\Phi), \quad (1258)$$

em que $\Phi = \lambda_c \phi_c$ representa as matrizes de mésons com $c = 0, \dots, 8$. Os octetos de mésons tem traço nulo, logo podemos escrever $[\bar{\Psi}_B \Psi_B \Phi]_F = Tr(\bar{\Psi}_B [\Phi, \Psi_B])$ e $[\bar{\Psi}_B \Psi_B \Phi]_D = Tr(\bar{\Psi}_B \{\Phi, \Psi_B\})$.

Definindo a constante de acoplamento do tipo bárion-bárion-méson(octeto) como g^{oct} e do tipo bárion-bárion-méson(singleto) como g^{sin} , definimos a forma geral da lagran-

giana de interação como

$$\mathcal{L}_I = -g^{oct} \sqrt{2} \left\{ \alpha [\bar{\Psi}_B \Psi_B \Phi]_F + (1 - \alpha) [\bar{\Psi}_B \Psi_B \Phi]_D \right\} - g^{sin} \sqrt{\frac{1}{3}} [\bar{\Psi}_B \Psi_B \Phi]_S, \quad (1259)$$

sendo $\alpha = F/(F + D)$ onde F e D são proporcionais às constantes de acoplamento dos octetos de bárions simétrico e antissimétricos (PARTICLE DATA GROUP (PDG); PATRIGNANI et al., 2016), as raízes são colocadas por conveniência.

Considerando a interação dos mésons pseudo-escalares, a qual, deve ter um acoplamento pseudo-vetorial (PV) (ERICSON; WEISE, 1988), a lagrangiana de interação será

$$\mathcal{L}_{PV} = \mathcal{L}_{PV}^{\{1\}} + \mathcal{L}_{PV}^{\{8\}}. \quad (1260)$$

Não levando em conta o caráter de Lorentz das interações (ex.: $\gamma_5 \gamma_\mu \partial^\mu$ para mésons pseudo-escalares), a lagrangiana singlete é dada pela amplitude do tipo-S de (1259) e resulta em

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{PV}^{\{1\}} = & -g_{NN\eta_0} (\bar{N}N) \eta_0 - g_{\Xi\Xi\eta_0} (\bar{\Xi}\Xi) \eta_0 \\ & -g_{\Sigma\Sigma\eta_0} (\bar{\Sigma}\vec{\Sigma}) \eta_0 - g_{\Lambda\Lambda\eta_0} (\bar{\Lambda}\Lambda) \eta_0, \end{aligned} \quad (1261)$$

em que as constantes de acoplamentos adimensionais,³² são

$$g_{NN\eta_0} = g_{\Xi\Xi\eta_0} = g_{\Sigma\Sigma\eta_0} = g_{\Lambda\Lambda\eta_0} = g_{PV}^{sin}. \quad (1262)$$

As lagrangianas de interação para o octeto dos mésons são do tipo-F e -D de (1259), assim temos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{PV}^{\{8\}} = & -g_{NN\pi} (\bar{N}N\vec{\tau}) \cdot \vec{\pi} - g_{\Xi\Xi\pi} (\bar{\Xi}\Xi\vec{\tau}) \cdot \vec{\pi} - g_{\Lambda\Sigma\pi} (\bar{\Lambda}\vec{\Sigma}) \cdot \vec{\pi} \\ & + i g_{\Sigma\Sigma\pi} (\bar{\Sigma} \times \vec{\Sigma}) \cdot \vec{\pi} - g_{NN\eta_8} (\bar{N}N) \eta_8 - g_{\Xi\Xi\eta_8} (\bar{\Xi}\Xi) \eta_8 \\ & - g_{\Lambda\Lambda\eta_8} (\bar{\Lambda}\Lambda) \eta_8 - g_{\Sigma\Sigma\eta_8} (\bar{\Sigma}\vec{\Sigma}) \eta_8 - g_{\Lambda NK} (\bar{N}K) \Lambda \\ & - g_{\Xi\Lambda\bar{K}} (\bar{\Lambda}\Xi) \bar{K} - g_{\Sigma NK} (\bar{\Sigma}\vec{\tau}N) K \\ & - g_{\Xi\Sigma\bar{K}} (\bar{\Sigma}\vec{\tau}\Xi) \bar{K}. \end{aligned} \quad (1263)$$

Considerando os multipletos de quarks, encontramos as seguintes relações para as

³² Estamos aqui considerando um caso geral, pode haver a necessidade de multiplicarmos algum fator à lagrangiana, a fim de garantir a adimensionalidade das constantes.

constantes de acoplamento

$$g_{NN\pi} = f, \quad g_{NN\eta_8} = \frac{1}{\sqrt{3}}f(4\alpha - 1), \quad g_{\Lambda NK} = -\frac{1}{\sqrt{3}}f(1 + 2\alpha),$$

$$g_{\Xi\Xi\pi} = -f(1 - 2\alpha), \quad g_{\Xi\Xi\eta_8} = -\frac{1}{\sqrt{3}}f(1 + 2\alpha), \quad g_{\Xi\Lambda\bar{K}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}f(4\alpha - 1),$$

$$g_{\Lambda\Sigma\pi} = \frac{2}{\sqrt{3}}f(1 - \alpha), \quad g_{\Lambda\Lambda\eta_8} = -\frac{2}{\sqrt{3}}f(1 - \alpha), \quad g_{\Sigma NK} = f(1 - 2\alpha),$$

$$g_{\Sigma\Sigma\pi} = 2f\alpha, \quad g_{\Sigma\Sigma\eta_8} = \frac{2}{\sqrt{3}}f(1 - \alpha), \quad g_{\Xi\Sigma\bar{K}} = f,$$

sendo $f \equiv g_{PV}^{oct}$. De posse das constantes de acoplamentos $g_{NN\pi} = 13,4$ e $g_{\Lambda\Sigma\pi} = 11,7$ (PILKUHNS et al., 1973) encontramos o valor $\alpha = 0,244$, o valor das constantes das demais interações de interesse são mostradas nas tabelas do Capítulo 5.

APÊNDICE K – Integrais I_n

No desenvolvimentos dos cálculos das amplitudes de ondas parciais utilizamos integrais da forma geral dada por

$$I_n = \int_{-1}^1 \frac{x^n dx}{\gamma + 2k^2 x}. \quad (1264)$$

Sendo γ definido para cada caso de espalhamento, temos explicitamente

$$I_0 = \int_{-1}^1 \frac{dx}{\gamma + 2k^2 x} = \frac{1}{2k^2} \ln \left(\frac{\gamma + 2k^2}{\gamma - 2k^2} \right), \quad (1265)$$

$$I_1 = \int_{-1}^1 \frac{x dx}{\gamma + 2k^2 x} = \frac{2}{2k^2} - \frac{\gamma}{(2k^2)^2} \ln \left(\frac{\gamma + 2k^2}{\gamma - 2k^2} \right), \quad (1266)$$

$$I_2 = \int_{-1}^1 \frac{x^2 dx}{\gamma + 2k^2 x} = -\frac{2\gamma}{(2k^2)^2} + \frac{\gamma^2}{(2k^2)^3} \ln \left(\frac{\gamma + 2k^2}{\gamma - 2k^2} \right), \quad (1267)$$

$$I_3 = \int_{-1}^1 \frac{x^3 dx}{\gamma + 2k^2 x} = \frac{2(2k^2)^2 + 6\gamma^2}{3(2k^2)^3} - \frac{\gamma^3}{(2k^2)^4} \ln \left(\frac{\gamma + 2k^2}{\gamma - 2k^2} \right). \quad (1268)$$

As variáveis x e k foram definidas de forma a serem as mesmas para todos os casos de espalhamento, são respectivamente o cosseno do ângulo de espalhamento e o momento do méson no centro de massa.