UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CAMPUS BLUMENAU
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Aleff Russi

FRAÇÕES CONTÍNUAS: APLICAÇÕES EM ÁLGEBRA E ARITMÉTICA

Blumenau
2023

Aleff Russi

FRAÇÕES CONTÍNUAS: APLICAÇÕES EM ÁLGEBRA E ARITMÉTICA

Dissertação submetida ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do título de mestre em Matemática.
Orientador: Prof. Rafael Aleixo de Carvalho, Dr.

Blumenau
2023

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Russi, Aleff
Frações contínuas : aplicações em Álgebra e Aritmética / Aleff Russi ; orientador, Rafael Aleixo de Carvalho, 2023.
93 p.

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Federal de Santa Catarina, Campus Blumenau, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Blumenau, 2023.

Inclui referências.

1. Matemática. 2. Frações contínuas. 3. Convergentes. 4. Equações de Pell. 5. Teorema de Liouville. I. Carvalho, Rafael Aleixo de . II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT. III. Título.

Aleff Russi

FRAÇÕES CONTÍNUAS: APLICAÇÕES EM ÁLGEBRA E ARITMÉTICA

O presente trabalho em nível de mestrado foi avaliado e aprovado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. Rafael Aleixo de Carvalho, Dr.
UFSC

Prof. Andrés David Báez Sánchez, Dr.
UTFPR

Prof. Felipe Vieira, Dr.
UFSC

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de mestre em Matemática.

ICP-Edu
Documento assinado digitalmente
Felipe Delfini Caetano Fidalgo
Data: 22/09/2023 12:04:53-0300
CPF: ***.425.308-**
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Coordenação do Programa de Pós-Graduação

ICP-Edu
Documento assinado digitalmente
Rafael Aleixo de Carvalho
Data: 18/09/2023 16:56:56-0300
CPF: ***.494.178-**
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Prof. Rafael Aleixo de Carvalho, Dr.
Orientador

Blumenau, 2023.

Dedico este trabalho a Dona Maria, aquela que tem cheiro de vó.

AGRADECIMENTOS

Sou grato a Deus pelo presente da vida e por ter me orientado nesta jornada como professor. Agradeço ao meu esposo pela paciência e pelos inúmeros cafés que ele preparou durante minhas horas de estudo. A minha família merece meu agradecimento por estar sempre presente, especialmente meus sobrinhos, que tiveram que lidar com minha ausência durante esse período.

Expresso minha gratidão aos colegas que compartilharam seu conhecimento e tempo comigo ao longo dos anos, seja durante as aulas, estudos ou pausas para café. Quero fazer uma menção especial à minha companheira inseparável desde a graduação, que sempre esteve ao meu lado.

Não posso deixar de agradecer ao meu orientador, pela paciência e por me guiar no estudo deste trabalho.

Também sou grato às políticas públicas desenvolvidas para aprimorar o ensino, em particular ao programa PROFMAT, que proporciona o aperfeiçoamento em matemática para professores da educação básica.

Quero expressar minha gratidão a todos os professores do PROFMAT da UFSC Blumenau, que se dedicam a oferecer uma educação pública, gratuita e de qualidade. Em especial, gostaria de agradecer ao professor Dr. Márcio de Jesus Soares, por todos os seus ensinamentos e por disponibilizar seu tempo nos preparativos para o exame de qualificação. Sua ajuda foi fundamental.

RESUMO

A representação dos números reais por meio de frações contínuas é composta por uma parte inteira e uma parte decimal, em que a parte decimal é escrita na forma de fração com numerador unitário e denominador expresso por meio de soma de números inteiros e frações também de numerador unitário. Seu estudo teve início por volta do século XVI e tem aplicações em Álgebra e Aritmética, permitindo aproximação de números irracionais por meio de racionais. No estudo dessas aplicações são exploradas equações diofantinas lineares, de Pell, congruências, determinantes, e análise de números algébricos por meio do Teorema de Liouville. A representação em frações contínuas de números racionais é realizada pelo Algoritmo da Divisão, enquanto para os irracionais é infinita e, para os números quadráticos (que são raízes de uma equação do 2 grau), periódica, o que é crucial para resolução das equações de Pell. A possibilidade de implementação do estudo de frações contínuas nas etapas finais do ensino fundamental e no médio é discutida, baseada na Base Nacional Comum Curricular, e o trabalho é finalizado com uma proposta didática para o ensino desses conceitos.

Palavras-chave: Frações contínuas. Convergentes. Equações de Pell. Teorema de Liouville.

ABSTRACT

The representation of the real numbers by means of continued fractions is composed by an integer part and a decimal part, in which the decimal part is written in a fraction form with a unitary numerator and denominator, expressed by the sum of the integers and fractions, also with a unitary numerator. The studies began around the 16th century and are applicated in Algebra and Arithmetic, allowing the approximation of irrational numbers through rational ones. In these studies, linear Diophantine and Pell's equation, congruences, determinants and the analysis of the algebraic numbers through Liouville's Theorem are explored. The representation in continued fractions of rational numbers is carried out by the Division Algorithm, while for irrational numbers is infinite and for quadratic numbers (that are roots of a 2nd degree equation) it is periodic, which is crucial to solve Pell's equation. The possibility of implementing the continued fractions studies in final stages of primary and secondary education is discussed based on the National Common Curricular Base, and this study ends with a didactic proposal of teaching these concepts.

Keywords: Continued fractions. Convergent. Pell's equation. Liouville's theorem.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
ENQ	Exame de Qualificação
MDC	Máximo divisor comum
OBMEP	Olímpiada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas
PROFMAT	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Por volta do século XVI, as frações contínuas emergiram como uma valiosa ferramenta na resolução de problemas algébricos que abrangiam números irracionais, tais como raízes de equações quadráticas e a constante de Euler. Foi justamente usando o conceito de frações contínuas que se provou pela primeira vez a irracionalidade de π.

As frações contínuas têm uma variedade de aplicações em Álgebra e Aritmética. Uma dessas aplicações envolve a aproximação de um número irracional por um número racional, embora com um erro de aproximação. Lembrando que a parte decimal de um número irracional é infinita e não periódica, este método é particularmente importante. Por exemplo, o número de Euler, a base dos logaritmos naturais, com cinco casas decimais é aproximadamente 2,71828. Uma aproximação desse número pode ser obtida pelo número racional 87/32, que equivale a 2,71875 na forma decimal. Uma comparação dos dois números revela um erro de aproximadamente 10^{-4}.

O objetivo deste estudo é explorar a aplicação prática de frações contínuas na resolução de problemas aritméticos e algébricos. Para tanto, serão examinadas as propriedades e conceitos fundamentais das frações contínuas essenciais à sua aplicação. A estrutura deste trabalho é descrita a seguir.

No Capítulo 2, é apresentada uma breve abordagem histórica sobre as frações contínuas, descrevendo as contribuições que alguns matemáticos contribuíram para o seu desenvolvimento.

No Capítulo 3, é apresentado um estudo geral de frações contínuas, iniciando com os conceitos básicos de uma fração contínua: sua definição, como escrever um número racional qualquer na forma de fração contínua aplicando apenas algoritmo de divisões sucessivas de Euclides, e também o processo inverso, de transformar uma fração contínua simples em um número racional. Depois são trabalhadas as propriedades das frações contínuas dentro do universo dos números racionais e irracionais. O capítulo encerra abordando os números irracionais sobre o olhar das frações contínuas infinitas.

O Capítulo 4 enfoca a aplicabilidade das frações contínuas para resolver problemas, muitos dos quais são resolvidos por métodos bem conhecidos, como as equações diofantinas que aplicam o algoritmo das divisões sucessivas de Euclides. E, outros problemas onde a fração contínua é essencial para encontrar a solução, como é o caso das equações de Pell. Serão abordadas também as congruências lineares, os números irracionais quadráticos e sua relação com as frações contínuas periódicas, determinantes e números algébricos. Para cada tópico serão apresentadas as demonstrações e exemplos para aplicar a teoria.

O estudo desse trabalho finaliza com os capítulos 5 e 6, onde no Capítulo 5 será discutida a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), com objetivo de justificar o estudo das frações contínuas na educação básica. E, terminando com a proposta de uma sequência didática sobre frações contínuas no Capítulo 6.

2 ASPECTOS HISTÓRICOS

As frações contínuas ganharam destaque e começaram a despertar interesse dos matemáticos por volta do século XVI, inicialmente no estudo de raízes de equações quadráticas, onde a solução é um número irracional. A raiz positiva de uma equação do segundo grau, mostra-se de uma forma interessante quando escrita na sua representação em frações contínuas, que será explorada ao longo desse trabalho.

Antes das equações algébricas, no século VI o matemático e astrônomo hindu Arybhata (Figura 1) na resolução de equações diofantinas, usou um método parecido com o que chama-se atualmente de fração contínua. A ele, também é atribuída, segundo Sautoy (2019), a aproximação de $\pi \approx 3{,}1416$, onde o mesmo encontrou 39.968 km para a circunferência da Terra, valor muito próximo do aceito atualmente de 40.075 km.

Figura 1 – Aryabhata (476-550).

Fonte: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Aryabhata_I/

Na era moderna, os primeiros registros de frações contínuas são atribuídos a Pietro Antonio Cataldi (1548-1626). Cataldi estudou principalmente os números perfeitos e os Elementos de Euclides. No campo da Álgebra, foi no estudo sobre raízes de equações quadráticas que usou o que chama-se hoje de frações contínuas infinitas (fração contínua para números irracionais).

O processo feito por Cataldi, segundo Boyer e Merzbach (2012), consistia no seguinte: para expressar $\sqrt{2}$ considere a seguinte equação $x+1=\sqrt{2}$. E elevando ambos os membros a segunda potência, obtemos

$$x^2+2x=1.$$

Colocando x em evidência,

$$x\cdot(x+2)=1 \qquad \Rightarrow \qquad x=\frac{1}{x+2}. \tag{1}$$

Substituindo sucessivamente x por $\dfrac{1}{x+2}$ no membro direito da equação (1), obtemos

$$x=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cdots}}}=\sqrt{2}-1.$$

O feito de Cataldi abriu um novo caminho na representação das soluções de equações quadráticas que possuem como soluções números irracionais. Essa solução mostra que "aparentemente" tem-se um processo periódico na representação de um número irracional quando escrito na forma de frações contínuas, um fato que contrasta com a representação na forma decimal que é justamente não periódica.

Já o matemático inglês John Wallis (Figura 2) no estudo de aproximações do número irracional π, chegou na seguinte aproximação:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \ldots}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \ldots}.$$

Figura 2 – John Wallis (1616-1703).

Fonte: http://ecalculo.if.usp.br/historia/wallis.htm

Wallis foi o primeiro a usar o termo fração contínua, iniciando o estudo das propriedades que envolvem uma fração contínua, Lorio (2016).

Já em 1650 o matemático inglês Willian Brouncker (Figura 3) reescreveu uma aproximação para π feita por Wallis:

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cdots}}}.$$

Figura 3 – Willian Brouncker (1620-1684).

Fonte: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Brouncker/

As frações contínuas também foram trabalhadas pelo matemático Leonhard Euler, ele escreveu o número *e* (número de Euler) como uma fração contínua infinita:

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \ddots}}}}}. \tag{2}$$

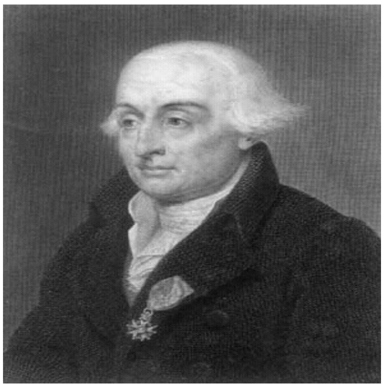
Figura 4 – Leonhard Euler (1797-1783).

Fonte: http://clubes.obmep.org.br/blog/leonhard-euler/

Euler também estudou as propriedades das frações contínuas infinitas, referente a periodicidade das soluções de equações quadráticas na forma de frações contínuas.

Também, no estudo da periodicidade das frações contínuas, o matemático italiano Joseph Louis Lagrange (Figura 5) estudou os números irracionais quadráticos e sua expansão em forma de fração contínua infinita.

Figura 5 – Joseph Louis Lagrange (1736-1813).



Fonte: http://ecalculo.if.usp.br/historia/lagrange.htm

Na representação em frações contínuas dos números irracionais quadráticos (números irracionais que são raízes de equações do 2° grau), destacamos dois teoremas fundamentais, um deles é devido a Euler e outro devido a Lagrange. Esses dois teoremas serão apresentados e demonstrados no capítulo de aplicações.

Um dos maiores feitos dentro das frações contínuas é atribuído ao matemático suíço Johann Heinrich Lambert (Figura 6), que em 1768 usando a expansão em frações contínuas de $tg(x)$, demostrou pela primeira vez a irracionalidade de π. A expressão obtida por Lambert foi:

$$tg(x) = \cfrac{x}{1 - \cfrac{x^2}{3 - \cfrac{x^2}{5 - \cfrac{x^2}{7 - \ddots}}}}.$$

Segundo Eves (2011) Lambert demonstrou que se x for um racional diferente de zero, então $tg(x)$ é irracional, como $tg(\pi/4) = 1$, logo π é irracional.

Figura 6 – Johann Heinrich Lambert (1738-1777).

Fonte: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Lambert/

Essa é considerada a primeira prova formal da irracionalidade de π, um feito surpreendente para a época, possível graças ao desenvolvimento das frações contínuas.

Esses foram alguns dos matemáticos que de alguma forma estudaram e contribuíram para o estudo das frações contínuas. O desenvolvimento dos estudos de frações contínuas é relativamente recente e ainda pode gerar novas descobertas nos mais diferentes campos da matemática.

3 FRAÇÕES CONTÍNUAS

As frações contínuas são expressões matemáticas usadas para representar números reais. Elas são divididas em dois grupos, o das frações contínuas finitas e o das frações contínuas infinitas.

As frações contínuas finitas são usadas na representação de números racionais, por exemplo

$$\frac{15}{9} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}.$$

Já as frações contínuas infinitas representam números irracionais, é o caso do número de Euler apresentado na equação (2), por exemplo.

3.1 FRAÇÕES CONTÍNUAS SIMPLES

As frações contínuas simples serão empregadas na resolução de alguns problemas que serão explorados nesse estudo, por exemplo, as equações diofantinas e as congruências lineares. Para tanto, precisamos definir o conceito de fração contínua.

Definição 1 *Uma fração contínua é toda expressão da forma*

$$a_1 + \cfrac{b_1}{a_2 + \cfrac{b_2}{a_3 + \cfrac{b_3}{a_4 + \cdots}}},$$

em que a_1 é um número inteiro, e demais termos a_2, a_3, ..., são números inteiros positivos. Quando os termos b_1, b_2, ..., forem unitários, a fração contínua é chamada de simples

$$a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \cdots}}}.$$

Uma fração contínua simples pode ser finita, nesse caso, é da forma

$$a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}}. \tag{3}$$

Por exemplo,

$$\frac{151}{115} = 1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{7}}}.$$

Para encontrar a representação em frações contínuas de um número racional, é fundamental o conhecimento do Algoritmo de Divisões Sucessivas de Euclides. Euclides (Figura 7) foi um matemático grego conhecido pela compilação e publicação dos livros conhecidos como Os Elementos.

Figura 7 – Euclides de Alexandria.

Fonte: http://ecalculo.if.usp.br/historia/euclides.htm

O Teorema da Divisão Euclidiana diz que:

Teorema 1 *Sejam a e b números inteiros tal que $b \neq 0$. Então, existem dois únicos números inteiros q e r, tais que $a = b \cdot q + r$, com $0 \leq r < |b|$. Chamamos b de divisor, a de dividendo, q de quociente e r de resto.*

Demonstração: Consideremos dois casos: $b > 0$ e $b < 0$. Para o primeiro caso, considere o conjunto

$$S = \{a - b \cdot x : x \in \mathbb{Z}, a - b \cdot x \geq 0\}.$$

Vamos mostrar que o conjunto S é não vazio. De fato, $a - b(-|a|) \in S$, pois

$$a - b(-|a|) = a + b \cdot |a| \Rightarrow a - b(-|a|) \geq a + |a| \Rightarrow a - b(-|a|) \geq 0.$$

Ademais, o conjunto S é limitado inferiormente pelo 0. Assim, pelo Princípio do Menor Inteiro[1], S possui um menor elemento que chamaremos de r. Portanto, $\exists\ q \in \mathbb{Z}$ tal que $r = a - b \cdot q$, ou seja, $a = b \cdot q + r$.

Vamos mostrar que $r < b$. Com efeito, suponha que $r = b$, logo,

$$a = b \cdot q + b \Rightarrow a = b \cdot (q+1).$$

Assim, $a - b \cdot (q+1) = 0$ e, portanto, $0 \in S$ é o menor elemento de S. Assim, $r = 0 = b$, contradizendo o fato de $b \neq 0$. Por outro lado , se $r > b$ temos que $\exists\ \alpha \in \mathbb{N}$ tal que $r = b + \alpha$, com $0 < \alpha < r$. Logo,

$$b + \alpha = a - b \cdot q \Rightarrow \alpha = a - b \cdot q - b \Rightarrow \alpha = a - b \cdot (q+1) \in S,$$

contradizendo a minimalidade de r em S. Logo, $0 \leq r < b$.

Falta ainda mostrar que q e r são definidos unicamente. Para isso, considere que

$$a = b \cdot q + r = b \cdot q' + r'.$$

[1] Ver: https://cesad.ufs.br/ORBI/public/uploadCatalago/17394716022012Matematica_Para_o_Ensino_Fundamental_Aula_4.pdf

Com q,q',r,r' inteiros, $0 \leq r < b$, $0 \leq r' < b$. Temos então, $-b < -r \leq r' - r \leq r' < b$ e, portanto, $|r' - r| < b$. No entanto, $b \cdot (q - q') = r' - r$, implica em

$$|b||q - q'| = |r' - r| < |b|,$$

ou seja, só é possível se $q = q'$ e, consequentemente, $r = r'$.

No segundo caso ($b < 0$), basta aplicar o caso anterior para a e $|b|$. ■

Exemplo 1 *Efetue a divisão euclidiana de 39 por 5.*

Temos que, o quociente é 7 e o resto 4, podendo escrever

$$39 = 5 \cdot 7 + 4.$$

Exemplo 2 *Efetue a divisão euclidiana de -85 por 3.*

Temos que, o quociente é -29 e o resto 2, podendo escrever

$$-85 = 3 \cdot (-29) + 2.$$

A divisão euclidiana será uma ferramenta empregada para encontrar a fração contínua finita de um número racional.

Vale ressaltar que na representação em frações contínuas de um número racional na forma a/b, onde a,b são inteiros positivos, se $a < b$, então $a_1 = 0$, uma vez que o quociente da divisão euclidiana é zero.

A seguir será demonstrado que todo número racional pode ser escrito na forma de uma fração contínua simples, e que toda fração contínua simples representa um número racional. Mas, antes da demonstração serão apresentados alguns exemplos utilizando o Algoritmo da Divisão.

Exemplo 3 *Encontre a fração contínua do número racional* $\frac{39}{8}$*.*

Ao efetuar a divisão euclidiana de 39 por 8 obtemos como quociente 4 e resto 7, assim podemos escrever

$$\frac{39}{8} = 4 + \frac{7}{8}. \tag{4}$$

Dividindo numerador e denominador da fração $\frac{7}{8}$ na equação (4) por 7, obtemos

$$\frac{39}{8} = 4 + \frac{1}{\frac{8}{7}}. \tag{5}$$

Efetuando agora a divisão euclidiana de 8 por 7, obtemos quociente 1 e resto 1, e substituindo na equação (5)

$$\frac{39}{8} = 4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{7}}. \tag{6}$$

A equação (6) é a representação em fração contínua procurada.

Exemplo 4 *Encontre a representação em fração contínua do número* $\frac{75}{31}$.

Efetuando as divisões euclidianas sucessivas de 75 por 31, obtemos:

$$\begin{aligned} 75 &= 2\cdot 31+13, && (7)\\ 31 &= 2\cdot 13+5, && (8)\\ 13 &= 2\cdot 5+3, && (9)\\ 5 &= 1\cdot 3+2, && (10)\\ 3 &= 1\cdot 2+1, && (11)\\ 2 &= 1\cdot 2+0. && (12) \end{aligned}$$

Das equações (7) - (12), podemos escrever

$$\frac{75}{31}=2+\cfrac{1}{2+\cfrac{2}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}}}. \tag{13}$$

Quando a representação em frações contínuas de um número racional é extensa, pode ser útil a simplificação na notação

$$\frac{75}{31}=2+\cfrac{1}{2+\cfrac{2}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}}}:=[2;2,2,1,1,2]. \tag{14}$$

Exemplo 5 *Encontre a representação em fração contínua do número* $\frac{5}{11}$.

Note que, nesse caso temos que o numerador da fração é menor que o denominador, ao efetuar a divisão euclidiana de 5 por 11 o quociente é zero e o resto é 5. Portanto,

$$\frac{5}{11}=0+\frac{5}{11}=0+\frac{1}{\frac{11}{5}}=0+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{5}}. \tag{15}$$

A equação (15) é um exemplo de fração contínua em que $a_1=0$, pois o numerador é menor que o denominador.

Exemplo 6 *Encontre a representação em fração contínua do número* $-\frac{23}{13}$.

Nesse caso, temos que o número racional é negativo. Sabemos que

$$-\frac{26}{13}<-\frac{23}{13}<-\frac{13}{13}. \tag{16}$$

Da equação (16) obtém-se que -2 é o maior inteiro menor que $-\frac{23}{13}$. Portanto, adicionando -2 a fração $-\frac{23}{13}$, obtemos

$$-\frac{23}{13} = -2 + \frac{3}{13} = -2 + \frac{1}{\frac{13}{3}} = -2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{3}}. \tag{17}$$

Vamos mostrar agora que todo número racional pode sempre ser escrito na forma de uma fração contínua simples.

Teorema 2 *Todo número racional pode ser representado por uma fração contínua simples finita.*

Demonstração: Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$ tal que $b > 0$. Ao efetuar a divisão euclidiana de a por b, obtém-se

$$\frac{a}{b} = a_1 + \frac{r_1}{b} \quad onde \quad 0 < r_1 < b. \tag{18}$$

Da equação (18) dividindo numerador e denominador da fração $\frac{r_1}{b}$ por r_1, temos

$$\frac{a}{b} = a_1 + \frac{1}{\frac{b}{r_1}} \quad onde \quad 0 < r_1 < b. \tag{19}$$

Efetuando a divisão euclidiana de b por r_1, obtemos

$$\frac{b}{r_1} = a_2 + \frac{r_2}{r_1} \quad onde \quad 0 < r_2 < r_1. \tag{20}$$

Substituindo a equação (20) na equação (19), concluímos que

$$\frac{a}{b} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{r_2}{r_1}} \quad onde \quad 0 < r_2 < r_1. \tag{21}$$

Novamente, dividindo a fração $\frac{r_2}{r_1}$ por r_2, e efetuando a divisão euclidiana de r_1 por r_2, obtendo

$$\frac{a}{b} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{r_3}{r_2}}} \quad onde \quad 0 < r_3 < r_2. \tag{22}$$

Pelo Algoritmo da Divisão podemos efetuar as divisões sucessivas até encontrar o resto igual a 0, o que é garantido pelo Princípio da Boa Ordenação[2]. Assim,

$$\frac{a}{b} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \ddots + \frac{1}{a_n}}}. \tag{23}$$

Concluímos, então, que todo número racional pode ser escrito na forma de fração contínua simples. ■

Demonstramos acima que todo número racional possui representação em fração contínua simples e, agora, veremos que a reciproca também é verdade.

[2] Ver: https://cesad.ufs.br/ORBI/public/uploadCatalago/15253016022012Fundamentos_de_Matematica_aula_19.pdf

Teorema 3 *Toda fração contínua simples finita pode ser escrita como um número racional.*

A prova do teorema segue do fato de que $\mathbb{Q}$ é um corpo fechado nas operações de adição e multiplicação[3]. Uma vez que dada a representação em fração contínua de um número racional, o processo de chegar ao número na forma $\frac{r}{s}$ se resume às operações de soma frações. ■

A seguir apresentaremos um exemplo.

Exemplo 7 *Escreva a fração contínua a seguir na forma de um número racional*

$$7+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4}}}.$$

Efetuando as adições correspondentes

$$7+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4}}}=7+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{\frac{9}{4}}}=7+\cfrac{1}{3+\frac{4}{9}}=7+\cfrac{1}{\frac{31}{9}}=7+\frac{9}{31}=\frac{226}{31}.$$

Definição 2 *Duas frações contínuas são iguais se, e somente se, seus termos correspondentes são iguais.*

Com base nessa definição podemos enunciar o teorema seguinte que assegura que a representação de números racionais em frações contínuas é única.

Teorema 4 *Todo número racional pode ser representado por apenas uma fração contínua simples.*

Demonstração: Consideremos duas frações contínuas

$$a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\ddots+\cfrac{1}{a_n}}} \quad e \quad b_1+\cfrac{1}{b_2+\cfrac{1}{b_3+\ddots+\cfrac{1}{b_n}}}.$$

Se elas representam o mesmo número racional $\frac{r}{s}$, então

$$\frac{r}{s}=a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\ddots+\cfrac{1}{a_n}}}=b_1+\cfrac{1}{b_2+\cfrac{1}{b_3+\ddots+\cfrac{1}{b_n}}}.$$

Temos que a_1 é o maior inteiro menor que $\frac{r}{s}$, por outro lado b_1 também é o maior inteiro menor que $\frac{r}{s}$, ou seja, $a_1=b_1$. Assim, podemos escrever a seguinte igualdade

[3] Ver: https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=6774id2=171054354

$$\frac{r}{s} - a_1 = \frac{r}{s} - b_1 = \frac{r_1}{s_1}.$$

Note que,

$$\frac{r_1}{s_1} = \frac{r}{s} - a_1 = \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots + \cfrac{1}{a_n}}} < 1. \tag{24}$$

Da mesma forma,

$$\frac{r_1}{s_1} = \frac{r}{s} - b_1 = \cfrac{1}{b_2 + \cfrac{1}{b_3 + \ddots + \cfrac{1}{b_n}}} < 1. \tag{25}$$

Igualando as equações (24) e (25), obtemos

$$\frac{r_1}{s_1} = \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots + \cfrac{1}{a_n}}} = \cfrac{1}{b_2 + \cfrac{1}{b_3 + \ddots + \cfrac{1}{b_n}}}. \tag{26}$$

Podemos escrever a equação (26) da seguinte forma

$$\frac{s_1}{r_1} = a_2 + \cfrac{1}{b_3 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}} = b_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}.$$

Temos que $\frac{s_1}{r_1} > 1$, pois $\frac{r_1}{s_1} < 1$. Assim, temos que a_2 é o maior inteiro menor que $\frac{s_1}{r_1}$, da mesma forma b_2 é também o menor inteiro maior que $\frac{s_1}{r_1}$, ou seja $a_2 = b_2$. Analogamente, obtemos que $a_3 = b_3, a_4 = b_4, \ldots, a_n = b_n$.

Portanto, todo número racional pode ser escrito de uma única maneira na forma de fração contínua simples. ■

3.2 CONVERGENTES

Os convergentes ou reduzidas de uma fração contínua simples são números racionais obtidos a partir da própria fração contínua. Os convergentes fornecem algumas propriedades úteis na resolução de problemas que serão abordados nesse trabalho, como as já citadas equações diofantinas. É por meio do convergente de uma fração contínua infinita que será possível aproximar um número irracional por um racional, admitindo determinado erro.

Definição 3 *Seja $\frac{r}{s} = [a_1; a_2, a_3, \ldots, a_n]$ uma fração contínua simples. O seu convergente c_n é a expansão em fração contínua até o n-ésimo termo correspondente.*

Resumidamente c_n é o truncamento de uma fração contínua dada no n-ésimo termo. Para clarificar o definição acima considere o seguinte exemplo.

Exemplo 8 *Determine os convergentes do número racional* $\frac{157}{30}$*.*

Sua representação em fração contínua é

$$5+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2}}}.$$

Temos que,

$$\begin{aligned}
c_1 &= 5,\\
c_2 &= 5+\frac{1}{4}=\frac{21}{4},\\
c_3 &= =5+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{3}}=\frac{68}{13},\\
c_4 &= 5+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2}}}=\frac{157}{30}.
\end{aligned}$$

Calculando os convergentes a partir da definição de fração contínua, apresentada na equação (3), obtemos que o primeiro convergente é

$$c_1=\frac{r_1}{s_1}=a_1. \tag{27}$$

O segundo convergente é

$$c_2=\frac{r_2}{s_2}=a_1+\frac{1}{a_2}=\frac{a_1\cdot a_2+1}{a_2}. \tag{28}$$

O terceiro convergente é

$$\begin{aligned}
c_3 &= a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3}}=a_1+\cfrac{1}{\cfrac{a_2\cdot a_3+1}{a_3}}\\
&= a_1+\frac{a_3}{a_2\cdot a_3+1}=\frac{a_1(a_2\cdot a_3+1)+a_3}{a_2\cdot a_3+1}\\
&= \frac{a_1\cdot a_2\cdot a_3+a_1+a_3}{a_2\cdot a_3+1}=\frac{a_3(a_1\cdot a_2+1)+a_1}{a_2\cdot a_3+1}\\
&= \frac{a_3\cdot r_2+r_1}{s_2\cdot a_3+s_1}.
\end{aligned} \tag{29}$$

Seguindo o mesmo procedimento, encontra-se o quarto convergente

$$c_4=\frac{r_4}{s_4}=\frac{a_4\cdot r_3+r_2}{a_4\cdot s_3+s_2}. \tag{30}$$

Aparentemente, a fórmula para encontrar o n-ésimo convergente é

$$c_n=\frac{r_n}{s_n}=\frac{a_n\cdot r_{n-1}+r_{n-2}}{a_n\cdot s_{n-1}+s_{n-2}}. \tag{31}$$

Analisando a equação (31) para $n = 3$ obtém-se a equação (29), para $n = 4$ obtém-se a equação (30). Mostrando que a fórmula é válida para $n = 3$ e $n = 4$. Para $n = 1$ e $n = 2$ é necessário fazer algumas escolhas, pois

$$c_1 = \frac{r_1}{s_1} = \frac{a_1 \cdot r_0 + r_{-1}}{a_1 \cdot s_0 + s_{-1}}. \tag{32}$$

$$c_2 = \frac{r_2}{s_2} = \frac{a_2 \cdot r_1 + r_0}{a_2 \cdot s_1 + s_0}. \tag{33}$$

Segundo Moore (1964), para que as equações (32) e (33) sejam válidas é necessário que $r_{-1} = 0$, $s_{-1} = 1$, $r_0 = 1$ e $s_0 = 0$.

Assim a fórmula apresentada na equação (31) é válida para $n = 1,2,3,4$. A prova que ela é válida para todo número natural será feita a seguir.

Proposição 1 *Dada a expansão em frações contínuas simples* $[a_1; a_2, a_3, \ldots, a_n]$*, o seu n-ésimo convergente é dado por*

$$c_n = \frac{r_n}{s_n} = \frac{a_n \cdot r_{n-1} + r_{n-2}}{a_n \cdot s_{n-1} + s_{n-2}}.$$

Demonstração: Será feita aplicando o princípio de indução matemática[4] sobre n.

I) Para $n = 1$ já mostramos que a fórmula é válida.

II) Suponha agora que ela é válida para algum $n \in \mathbb{N}$, vamos mostrar que elá é válida para $n+1$.

Hipótese de indução, neste caso, é

$$c_n = \frac{r_n}{s_n} = \frac{a_n \cdot r_{n-1} + r_{n-2}}{a_n \cdot s_{n-1} + s_{n-2}}.$$

Assim, vamos demonstrar que

$$c_{n+1} = \frac{r_{n+1}}{s_{n+1}} = \frac{a_{n+1}(a_n \cdot r_{n-1} + r_{n-2}) + r_{n-1}}{a_{n+1}(a_n \cdot s_{n-1} + s_{n-2}) + s_{n-1}}.$$

Com efeito, sabemos que

$$c_{n+1} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots + a_n + \cfrac{1}{a_{n+1}}}}}.$$

Considerando $a_n + \dfrac{1}{a_{n+1}}$ como sendo o último termo da fração contínua simples e aplicando a equação (31), obtemos

$$c_{n+1} = \frac{\left(a_n + \dfrac{1}{a_{n+1}}\right) \cdot r_{n-1} + r_{n-2}}{\left(a_n + \dfrac{1}{a_{n+1}}\right) \cdot s_{n-1} + s_{n-2}}.$$

4 Ver: https://www.obmep.org.br/docs/apostila4.pdf

Note que, na equação acima o numerador e o denominador podem ser reescritos como duas frações, ambas com denominador a_{n+1}:

$$c_{n+1} = \frac{\dfrac{(a_n \cdot a_{n+1} + 1) \cdot r_{n-1} + a_{n+1} \cdot r_{n-2}}{a_{n+1}}}{\dfrac{(a_n \cdot a_{n+1} + 1) \cdot s_{n-1} + a_{n+1} \cdot s_{n-2}}{a_{n+1}}}.$$

Efetuando a divisão das frações do numerador pelo denominador,

$$c_{n+1} = \frac{a_n \cdot a_{n+1} \cdot r_{n-1} + r_{n-1} + a_{n+1} \cdot r_{n-2}}{a_n \cdot a_{n+1} \cdot s_{n-1} + s_{n-1} + a_{n+1} \cdot s_{n-2}}.$$

Colocando a_{n+1} em evidência,

$$c_{n+1} = \frac{a_{n+1}(a_n \cdot r_{n-1} + r_{n-2}) + r_{n-1}}{a_{n+1}(a_n \cdot s_{n-1} + s_{n-2}) + s_{n-1}}.$$

Aplicando a hipótese de indução, chegamos em

$$c_{n+1} = \frac{a_{n+1} \cdot r_n + r_{n-1}}{a_{n+1} \cdot s_n + s_{n-1}}.$$

Portanto, pelo princípio da indução matemática a fórmula apresentada na equação (31) é válida para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

3.3 PROPRIEDADE DOS CONVERGENTES

Anteriormente deduzimos uma fórmula para determinar o convergente de uma fração contínua e provamos a validade para qualquer n natural.

Antes de explorar e aplicar as propriedades dos convergentes, será exemplificado o cálculo dos convergentes para a fração 179/79.

$$\frac{179}{79} = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{5}}}}.$$

Para melhor visualização dos convergentes os dados foram organizados na tabela a seguir.

Tabela 1 – Cálculo dos convergentes da fração 179/79.

n	-1	0	1	2	3	4	5
a_n			2	3	1	3	5
r_n	0	1	2	7	9	34	179
s_n	1	0	1	3	4	15	79

Analisando a diferença entre os produtos cruzados $r_n \cdot s_{n-1} - r_{n-1} \cdot s_n$, vemos que

$$
\begin{aligned}
1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 &= +1, \\
2 \cdot 0 - 1 \cdot 0 &= -1, \\
7 \cdot 1 - 2 \cdot 3 &= +1, \\
9 \cdot 3 - 7 \cdot 4 &= -1, \\
34 \cdot 4 - 9 \cdot 15 &= +1, \\
179 \cdot 15 - 34 \cdot 79 &= -1.
\end{aligned}
$$

As diferenças nos produtos cruzados dos convergentes parecem fornecer sempre +1 e –1. Aparentemente, uma possível fórmula para a diferença dos produtos cruzados parece ser

$$r_n \cdot s_{n-1} - r_{n-1} \cdot s_n = (-1)^n. \tag{34}$$

Para analisar a validade da equação (34) para qualquer $n \in \mathbb{N}$, vamos organizar a tabela de convergentes a seguir.

Tabela 2 – Análise da diferença dos produtos cruzados.

n	-1	0	1	2	3	4	$\cdots$
a_n			a_1	a_2	a_3	a_4	$\cdots$
r_n	$r_{-1} = 0$	$r_0 = 1$	r_1	r_2	r_3	r_4	$\cdots$
s_n	$s_{-1} = 1$	$s_0 = 0$	s_1	s_2	s_3	s_4	$\cdots$

A diferença de produtos cruzados dos dados da Tabela 2, fornece os seguintes resultados.
Para $n = 0$

$$r_0 \cdot s_{-1} - r_{-1} \cdot s_0 = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1.$$

Para $n = 1$

$$r_1 \cdot s_0 - r_0 \cdot s_1 = r_1 \cdot 0 = -1 \cdot s_1.$$

Da equação (27), sabemos que $s_1 = 1$, logo

$$r_1 \cdot s_0 - r_0 \cdot s_1 = r_1 \cdot 0 = -1.$$

Para $n = 2$, a diferença de produtos cruzados é

$$r_2 \cdot s_1 - r_1 \cdot s_2. \tag{35}$$

Anteriormente, das equações (28) obtivemos que $r_1 = a_1 \cdot a_2 + 1$, e da equação (27) que $a_1 = r_1$, e da Tabela 2 que $r_0 = 1$. Da mesma forma, temos $s_2 = a_2$, $s_0 = 0$, $s_1 = 1$, substituindo esses dados na equação (35),

$$\begin{aligned} r_2 \cdot s_1 - r_1 \cdot s_2 &= s_1(a_2 \cdot r_1 + r_0) - r_1(a_2 \cdot s_1 + s_0) \\ &= a_2 \cdot r_1 \cdot s_1 + s_1 \cdot r_0 - r_1 \cdot a_2 \cdot s_1 - r_1 \cdot s_0 \\ &= s_1 \cdot r_0 - r_1 \cdot s_0 \\ &= 1 \cdot 1 - r_1 \cdot 0 \\ &= 1. \end{aligned}$$

A fórmula conjecturada tem validade para $n = 0,1,2$, e a sua validade para qualquer $n \in \mathbb{N}$ será provada por indução sobre n.

Proposição 2 *Dada a sequência de convergentes* $\frac{r_1}{s_1}, \frac{r_2}{s_2}, \ldots, \frac{r_n}{s_n}$ *da fração contínua* $[a_1; a_2, a_3, \ldots, a_n]$*, temos*

$$r_n \cdot s_{n-1} - r_{n-1} \cdot s_n = (-1)^n.$$

Demonstração: Será feita aplicando o princípio de indução matemática sobre n.

I) Já provamos a validade da equação (34) para $n = 0$.

II) Suponhamos agora que ela é válida para algum $n \in \mathbb{N}$, vamos mostrar que ela também é válida para $n+1$.

A hipótese de indução, neste caso, é

$$r_n \cdot s_{n-1} - r_{n-1} \cdot s_n = (-1)^n.$$

Assim, vamos demonstrar que

$$r_{n+1} \cdot s_n - r_n \cdot s_{n+1} = (-1)^{n+1}. \tag{36}$$

Sabemos da equação (31) que

$$\begin{aligned} r_n &= a_n \cdot r_{n-1} + r_{n-2}, \\ s_n &= a_n \cdot s_{n-1} + s_{n-2}. \end{aligned}$$

Logo,

$$r_{n+1} = a_{n+1} \cdot r_n + r_{n-1}, \tag{37}$$
$$s_{n+1} = a_{n+1} \cdot s_n + s_{n-1}. \tag{38}$$

Portanto, a partir das equações (37) e (38) obtemos a seguinte cadeia de igualdades.

$$\begin{aligned} r_{n+1} \cdot s_n - r_n \cdot s_{n+1} &= (a_{n+1} \cdot r_n + r_{n+1}) \cdot s_n - r_n(a_{n+1} \cdot s_n + s_{n+1}) \\ &= s_n \cdot a_{n+1} \cdot r_n + s_n \cdot r_{n-1} - r_n \cdot a_{n+1} \cdot s_n - r_n \cdot s_{n-1} \\ &= s_n \cdot r_{n-1} - r_n \cdot s_{n-1} \\ &= (-1) \cdot (r_n \cdot s_n - 1 - s_n \cdot r_{n-1}). \end{aligned}$$

Aplicando a hipótese de indução

$$r_{n+1} \cdot s_n - r_n \cdot s_{n+1} = (-1) \cdot (-1)^n = (-1)^{n+1}.$$

Portanto, pelo princípio de indução matemática a equação (34) é válida para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

Outra propriedade dos convergentes é a relação entre o seu numerador e denominador, enunciada a seguir.

Teorema 5 *Em um convergente, os termos r_n e s_n são primos entre si.*

Demonstração: Sabemos que

$$r_n \cdot s_{n-1} - r_{n-1} \cdot s_n = (-1)^n.$$

Seja b o máximo divisor comum de r_n e s_n, e escrevemos $b = (r_n, s_n)$. Temos que $b|r_n$ e $b|s_n$, logo $b|(r_n \cdot s_{n-1} - r_{n-1} \cdot s_n)$, com isso $b|(-1)^n$ e, consequentemente, $b = 1$. Portanto, r_n e s_n são primos entre si. ■

Vamos analisar agora, a aproximação que existe entre a fração contínua e o seus convergentes.

Retomando os convergentes que foram calculados para a fração $\frac{179}{79}$, podemos reescrever os convergentes na forma mista e fracionária.

Tabela 3 – Aproximação entre uma fração contínua e seus convergentes.

c_1	c_2	c_3	c_4	c_5
2	$\frac{7}{3}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{34}{15}$	$\frac{179}{79}$
2	$2\frac{1}{3}$	$2\frac{1}{4}$	$2\frac{4}{15}$	$2\frac{21}{79}$
2	2,3333	2,25	2,2667	2,2658

Analisando a Tabela 3 percebe-se que alternadamente os convergentes são menores e maiores que o número racional. Ainda, que os convergentes ímpares são menores e os pares maiores que a fração contínua, segue então

$$2 < 2{,}25 < 2{,}2658 < 2{,}2667 < 2{,}3333.$$

Vamos demonstrar agora a validade dessa observação para qualquer fração contínua simples.

Teorema 6 *Em uma fração contínua simples os convergentes ímpares formam uma sequência crescente de números que são todos menores que $\frac{r}{s}$ (exceto o último convergente que é igual* *caso a quantidade de convergentes seja ímpar). Já os convergentes pares formam uma sequência decrescente de números que são todos maiores que $\frac{r}{s}$ (exceto o último convergente que é igual caso a quantidade de convergentes seja par). Formando a sequência*

$$c_1 < c_3 < c_5 < \ldots < \frac{r}{s} < \ldots < c_6 < c_4 < c_2. \tag{39}$$

Demonstração: Analisando a diferença entre dois convergentes consecutivos,

$$c_n - c_{n-1} = \frac{r_n}{s_n} - \frac{r_{n-1}}{s_{n-1}} = \frac{r_n \cdot s_{n-1} - s_n \cdot r_{n-1}}{s_n \cdot s_{n-1}} = \frac{(-1)^n}{s_{n-1} \cdot s_n}. \tag{40}$$

A equação (40) é positiva para todo n par, o que nos leva a concluir

$$\begin{aligned} c_2 - c_1 > 0 \quad &\Rightarrow \quad c_2 > c_1, \\ c_4 - c_3 > 0 \quad &\Rightarrow \quad c_4 > c_3, \\ c_6 - c_5 > 0 \quad &\Rightarrow \quad c_6 > c_5, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Provando que os convergentes ímpares são sempre menores que os convergentes pares consecutivos.

Vamos mostrar agora que os convergentes pares formam uma sequência decrescente e os convergentes ímpares uma sequência crescente. Para isso, vamos analisar a diferença entre os termos pares e ímpares,

$$c_n - c_{n-2} = \frac{r_n}{s_n} - \frac{r_{n-2}}{s_{n-2}} = \frac{r_n \cdot s_{n-2} - s_n \cdot r_{n-2}}{s_n \cdot s_{n-2}}.$$

Da equação (31), obtemos

$$c_n - c_{n-2} = \frac{(a_n \cdot r_{n-1} + r_{n-2}) \cdot s_{n-2} - (a_n \cdot s_{n-1} + s_{n-2}) \cdot r_{n-2}}{s_n \cdot s_{n-2}}.$$

Efetuando as multiplicações no numerador, concluímos que

$$c_n - c_{n-2} = \frac{a_n \cdot r_{n-1} \cdot s_{n-2} + r_{n-2} \cdot s_{n-2} - a_n \cdot s_{n-1} \cdot r_{n-2} - s_{n-2} \cdot r_{n-2}}{s_n \cdot s_{n-2}}.$$

E, colocando a_n em evidência no numerador, obtemos

$$c_n - c_{n-2} = \frac{a_n(r_{n-1} \cdot s_{n-2} - r_{n-2} \cdot s_{n-1})}{s_n \cdot s_{n-2}}.$$

Substituindo agora a equação (34) acima, chegamos em

$$c_n - c_{n-2} = \frac{a_n \cdot (-1)^{n-1}}{s_n \cdot s_{n-2}}. \tag{41}$$

Analisando a equação (41), percebe-se que se n for par, então $c_n - c_{n-2} < 0$, ou seja

$$\begin{aligned} c_4 - c_2 < 0 \quad &\Rightarrow \quad c_4 < c_2, \\ c_6 - c_4 < 0 \quad &\Rightarrow \quad c_6 < c_4, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Por outro lado, seguindo o mesmo raciocínio, se n for ímpar, então $c_n - c_{n-2} > 0$,

$$\begin{aligned} c_3 - c_1 > 0 \quad &\Rightarrow \quad c_1 > c_3, \\ c_5 - c_3 > 0 \quad &\Rightarrow \quad c_3 > c_5, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Anteriormente, provamos que os convergentes ímpares são sempre menores que os convergentes pares. Portanto,

$$c_1 < c_3 < c_5 < \ldots < \frac{r}{s} < \ldots < c_6 < c_4 < c_2,$$

provando o teorema. ■

3.4 FRAÇÕES CONTÍNUAS E NÚMEROS IRRACIONAIS

Vamos introduzir as frações contínuas de números irracionais, abordando um clássico problema de geometria, a proporção áurea. A solução da proporção áurea será mostrada de duas maneiras, a primeira por frações contínuas, e a segunda da maneira algébrica convencional.

Definição 4 *Dois segmentos x e y são comensuráveis se $\frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$, ou seja, pode ser representado como uma fração contínua simples.*

Com a definição de comensurabilidade, é possível enunciar a proporção áurea, feita na sequência.

Teorema 7 *Se dois segmentos x e y estão na proporção áurea, isto é, $\frac{x+y}{x} = \frac{x}{y}$, então eles são incomensuráveis.*

Vamos mostrar que se x e y estão na proporção áurea, então eles são irracionais. A proporção áurea diz que

$$\frac{x}{y} = \frac{x+y}{x}. \tag{42}$$

Como x e y são segmentos, podemos considerar que $y > 0$, logo

$$\frac{x}{y} = \frac{x+y}{x} > 1,$$

Vamos mostrar por absurdo que $x < 2y$, suponhamos que $x \geq 2y$. Portanto,

$$2 \leq \frac{x}{y} = \frac{x+y}{x} = \frac{2x+2y}{2x} \leq \frac{3x}{2x} = \frac{3}{2}, \tag{43}$$

obtendo um absurdo, pois não existe número racional que satisfaça a equação (43). Logo, necessariamente $x < 2y$.

Com isso, concluímos que o primeiro quociente da Divisão Euclidiana de x por y é 1, onde podemos escrever

$$x = 1 \cdot y + (x - y) \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{y} = 1 + \frac{x-y}{y},$$

dividindo numerador e denominador da fração $\dfrac{x-y}{y}$ por $x-y$, obtemos

$$\frac{x}{y} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{y}{x-y}}.$$

Para encontrar o quociente da divisão de y por $x-y$, vamos usar a subtrações de segmentos. Para isso, considere

$$\frac{x}{y} = \frac{x+y}{x} \qquad \text{e} \qquad \frac{y}{y} = \frac{x}{x},$$

subtraindo as duas equações, obtemos

$$\frac{x}{y} - \frac{y}{y} = \frac{x+y}{x} - \frac{x}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{x-y}{y} = \frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{x-y} = \frac{x}{y}.$$

Ou seja, o quociente procurado é 1. Repetindo sucessivamente o Algoritmo da Divisão, ele será infinito e todos os quocientes são unitários. Podemos então, escrever

$$\varphi = \frac{x}{y} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}}. \tag{44}$$

Ou seja, x e y são incomensuráveis, em outras palavras, a proporção áurea é irracional. ■

Com a linguagem algébrica usual, podemos encontrar o valor da proporção áurea de maneira algébrica. Da equação (42),

$$\frac{x}{y} = \frac{x+y}{x} \Rightarrow x \cdot x = (x+y) \cdot y \Rightarrow x^2 = x \cdot y + y^2 \Rightarrow x^2 - x \cdot y - y^2 = 0.$$

Aplicando a fórmula resolutiva para equações do 2° grau

$$x = \frac{y + \sqrt{(-y)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-y^2)}}{2} \Rightarrow x = \frac{y + y\sqrt{5}}{2}.$$

Dividindo a equação por y, obtemos

$$\frac{x}{y} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Nesse problema representamos uma medida geométrica de duas formas diferentes, na primeira a análise por frações contínuas forneceu uma expressão periódica e infinita, e na segunda encontramos a raiz positiva de uma equação quadrática. Essa relação entre raízes de equações quadráticas e frações contínuas infinitas será explorada no decorrer desse trabalho.

Uma relação importante dos convergentes, como já citado anteriormente, é a aproximação de números irracionais por meio de um racionais. O processo é simples e fornecerá aproximações considerando um erro de aproximação.

Para encontrar as aproximações, precisamos calcular os convergentes, e para determinar os convergentes é necessário ter a representação em frações contínuas. Para isso, será apresentado, na forma de exemplo, um método para encontrar a representação em frações contínuas de números irracionais da forma $\sqrt{D}$, quando D não é um quadrado.

Exemplo 9 *Encontrar a aproximação em fração contínua para o número $\sqrt{11}$.*

Sabemos que $3 < \sqrt{11} < 4$, logo $a_1 = 3$, e assim

$$\sqrt{11} = 3 + \frac{1}{a}. \tag{45}$$

Isolando a, obtemos

$$a = \frac{1}{\sqrt{11}-3} = \frac{\sqrt{11}+3}{2}. \tag{46}$$

Temos que, $3 < a < 4$, logo $a = 3 + \frac{1}{b}$. Agora, isolando b, concluímos que,

$$b = \sqrt{11}+3, \tag{47}$$

onde, $6 < b < 7$, ou seja, $b = 6 + \frac{1}{c}$. Isolando c,

$$c = \frac{\sqrt{11}+3}{2}. \tag{48}$$

Concluímos que $c = a$. Portanto, encontramos a representação em frações contínuas de $\sqrt{11}$, que é periódica. Substituindo repetidamente as equações (46) - (48), na equação (45), obtemos a representação procurada,

$$\sqrt{11} = 3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{6+\dots}}}}}.$$

A partir da representação acima em fração contínua simples podemos calcular alguns convergentes para aproximar o irracional $\sqrt{11}$ por números racionais. A Tabela 4 mostra cinco convergentes de $\sqrt{11}$.

Tabela 4 – Aproximações de $\sqrt{11}$ por convergentes.

n	1	2	3	4	5
Aproximação c_n	3	3,333333	3,315789	3,316667	3,316583
|Erro|	$3{,}17 \cdot 10^{-1}$	$1{,}67 \cdot 10^{-2}$	$8{,}36 \cdot 10^{-4}$	$4{,}22 \cdot 10^{-5}$	$4{,}18 \cdot 10^{-5}$

Com o erro obtido em cada caso na Tabela 4, concluímos que não é necessário muitos convergentes para se obter erros surpreendentemente pequenos.

Veremos agora algumas propriedades das frações contínuas quando aplicada para números irracionais. Mas, antes demonstramos um lema auxiliar.

Lema 1 *Sejam $[a_1; a_2, \dots, a_n]$ uma fração contínua com $a_i > 0$ e (r_i/s_i) sua sequência de convergentes, com $i = 1, \dots, n$. Então, o conjunto de números reais cuja representação por frações* *contínuas começa com $a_1; a_2, a_3, \ldots, a_n$ é o intervalo*

$$\begin{aligned} I(a_1; a_2, a_3, \ldots, a_n) &= \left\{\frac{r_n}{s_n}\right\} \bigcup \left\{[a_1; a_2, \ldots, a_n, \alpha], \alpha > 1\right\} \\ &= \begin{cases} \left[\dfrac{r_n}{s_n}, \dfrac{r_n - r_{n-1}}{s_n + s_{n-1}}\right), & \textit{se } n \textit{ é par.} \\ \\ \left(\dfrac{r_n - r_{n-1}}{s_n + s_{n-1}}, \dfrac{r_n}{s_n}\right], & \textit{se } n \textit{ é ímpar.} \end{cases} \end{aligned}$$

E, a função $G : (0, +\infty) \to I(a_1; a_2, a_3, \ldots, a_n)$, dada por $G(\alpha) = [a_1; a_2, a_3, \ldots, a_n, \alpha]$ é monótona, sendo crescente para n ímpar e decrescente para n par.

Demonstração: O menor valor possível para a_i é 1, assim aplicando a fórmula do n-ésimo convergente nos extremos do intervalo $I(1, +\infty)$, obtemos

$$G(1) = \frac{r_{n-1} + r_{n-2}}{s_{n-1} + s_{n-2}} \qquad \text{e} \qquad \lim_{\alpha \to +\infty} G(\alpha) = \frac{r_n}{s_n}.$$

ou seja, $G(1)$ é o convergente quando a_n é 1, e $G(\alpha)$ tende ao último. Temos dois casos a considerar, quando n for par, ou quando n for impar. Se n é par, do Teorema 6, provamos que os convergentes pares formam uma sequência decrescente de números maiores que $\frac{r_n}{s_n}$. Note que por ser tratar de uma fração contínua infinita a igualdade nunca ocorre. Assim, temos

$$G((1, +\infty)) = \left(\frac{r_n}{s_n}, \frac{r_{n-1} + r_{n-2}}{s_{n-1} + s_{n-2}}\right).$$

E, se n é ímpar, também do Teorema 6, provamos que os convergentes formam uma sequência crescente de números menores que $\frac{r_n}{s_n}$, onde a igualdade também não ocorre. Logo,

$$G((1, +\infty)) = \left(\frac{r_{n-1} + r_{n-2}}{s_{n-1} + s_{n-2}}, \frac{r_n}{s_n}\right).$$

Portanto, ao unir a fração contínua $\frac{r_n}{s_n}$ com $G((1, +\infty))$, concluímos que

$$\begin{aligned} I(a_1; a_2, a_3, \ldots, a_n) &= \left\{\frac{r_n}{s_n}\right\} \bigcup \left\{[a_1; a_2, \ldots, a_n, \alpha], \alpha > 1\right\} \\ &= \left\{\frac{r_n}{s_n}\right\} \bigcup G((1, +\infty)) \\ &= \begin{cases} \left[\dfrac{r_n}{s_n}, \dfrac{r_n - r_{n-1}}{s_n + s_{n-1}}\right), & \text{se n é par.} \\ \\ \left(\dfrac{r_n - r_{n-1}}{s_n + s_{n-1}}, \dfrac{r_n}{s_n}\right], & \text{se n é ímpar.} \end{cases} \end{aligned}$$

■

Teorema 8 *Dados os inteiros $a_1, a_2, a_3, \dots$ com $a_n > 0, \forall n \geq 1$, existe um único número real α (irracional) cuja representação em frações contínuas é $[a_1; a_2, a_3, \dots]$.*

Demonstração: Considerando que

$$c_n = \frac{r_n}{s_n} = \frac{a_n \cdot r_{n-1} + r_{n-2}}{a_n \cdot s_{n-1} + s_{n-2}}.$$

Das propriedades dos convergentes, sabemos

$$\frac{r_{2n}}{s_{2n}} < \frac{r_{2n+2}}{s_{2n+2}} < \frac{r_{2n+3}}{s_{2n+3}} < \frac{r_{2n+1}}{s_{2n+1}}.$$

Agora, considerando o intervalo fechado

$$I_n = \left[\frac{r_{2n}}{s_{2n}}, \frac{r_{2n+1}}{s_{2n+1}}\right].$$

Temos que, $I_{n+1} \subset I_n$, $\forall n \geq 0$, formando uma sequência de intervalos encaixados[5]. Logo,

$$c_{2n+1} - c_{2n} = \frac{r_{2n+1}}{s_{2n+1}} - \frac{r_{2n}}{s_{2n}} = \frac{r_{2n+1} \cdot s_{2n} - s_{2n+1} \cdot r_{2n}}{s_{2n+1} \cdot s_{2n}} = \frac{(-1)^{2n}}{s_{2n+1} \cdot s_{2n}}.$$

A expressão acima tende a zero quando n tende ao infinito. Portanto, existe $\alpha \in \mathbb{R}$, tal que

$$\bigcap_{n \geq 0} I_n = \{\alpha\}.$$

Assim, como para todo $n \geq 0$, temos

$$[a_1; a_2, a_3, \dots, a_{2n}] = \frac{r_{2n}}{s_{2n}} \leq \alpha \leq \frac{r_{2n+1}}{s_{2n+1}} = [a_1; a_2, a_3, \dots, a_{2n+1}].$$

Do lema anterior segue que $[a_1; a_2, a_3, \dots, a_{2n}]$ e $[a_1; a_2, a_3, \dots, a_{2n+1}]$ pertencem ao intervalo $I(a_1; a_2, a_3, \dots, a_{2n})$. Portanto, α também pertence a I, onde a representação de α começa com $[a_1; a_2, a_3, \dots, a_{2n}]$ e é infinita, ou seja, α é irracional, logo podemos representá-lo,

$$\alpha = [a_1; a_2, a_3, \dots,].$$

■

Com base no teorema e no lema anteriores, é possível determinar a diferença entre um número real e um convergente qualquer desse número.

Teorema 9 *Para todo $n \in \mathbb{N}$, temos*

$$\left| x - \frac{r_n}{s_n} \right| \leq \frac{1}{s_n \cdot s_{n+1}} < \frac{1}{s_n^2}.$$

E, ainda,

$$\left| x - \frac{r_n}{s_n} \right| < \frac{1}{2 \cdot s_n^2} \qquad ou \qquad \left| x - \frac{r_{n+1}}{s_{n+1}} \right| < \frac{1}{2 \cdot s_{n+1}^2}.$$

[5] Ver: https://www.lncc.br/ alm/cursos/analise07LNCC/analiseI.pdf

Demonstração: Seja x um número real, logo ele pertence ao intervalo $\left[\frac{r_n}{s_n}, \frac{r_{n+1}}{s_{n+1}}\right]$, e da equação (34), sabemos que

$$r_{n+1} \cdot s_n - r_n \cdot s_{n+1} = (-1)^n,$$

que pode ser rescrita da forma,

$$\frac{r_{n+1}}{s_{n+1}} - \frac{r_n}{s_n} = \frac{(-1)^n}{s_n \cdot s_{n+1}}. \tag{49}$$

Assim, obtemos que o comprimento do intervalo é

$$\left|\frac{r_{n+1}}{s_{n+1}} - \frac{r_n}{s_n}\right| = \left|\frac{(-1)^n}{s_n \cdot s_{n+1}}\right| = \frac{1}{s_n \cdot s_{n+1}}.$$

E portanto,

$$\left|x - \frac{r_n}{s_n}\right| \leq \frac{1}{s_n \cdot s_{n+1}} < \frac{1}{s_n^2}. \tag{50}$$

Suponhamos por absurdo, que são válidas as desigualdades

$$\left|x - \frac{r_n}{s_n}\right| \geq \frac{1}{2 \cdot s_n^2}, \qquad \text{e} \qquad \left|x - \frac{r_{n+1}}{s_{n+1}}\right| \geq \frac{1}{2 \cdot s_{n+1}^2}.$$

Como x pertence ao intervalo $\left[\frac{r_n}{s_n}, \frac{r_{n+1}}{s_{n+1}}\right]$, temos

$$\left|x - \frac{r_n}{s_n}\right| + \left|x - \frac{r_{n+1}}{s_{n+1}}\right| = \left|\frac{r_{n+1}}{s_n + 1} - \frac{r_n}{s_n}\right| = \left|\frac{(-1)^n}{s_n \cdot s_{n+1}}\right| = \frac{1}{s_n \cdot s_{n+1}}.$$

Com isso,

$$\frac{1}{s_n \cdot s_{n+1}} = \left|x - \frac{r_n}{s_n}\right| + \left|x - \frac{r_{n+1}}{s_{n+1}}\right| \geq \frac{1}{2 \cdot s_n^2} + \frac{1}{2 \cdot s_{n+1}^2}.$$

Tomando a igualdade,

$$\frac{1}{s_n \cdot s_{n+1}} = \frac{1}{2 \cdot s_n^2} + \frac{1}{2 \cdot s_{n+1}^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{s_n \cdot s_{n+1}} = \frac{s_{n+1}^2 + s_n^2}{2 \cdot s_n^2 \cdot s_{n+1}^2}.$$

Reduzindo ao mesmo denominador comum, obtemos

$$2 \cdot s_n \cdot s_{n+1} = s_{n+1}^2 + s_n^2,$$

que pode ser reescrita na forma

$$0 = s_{n+1}^2 - 2 \cdot s_n \cdot s_{n+1} + s_n^2 \quad \Rightarrow \quad 0 = (s_{n+1} - s_n)^2.$$

Concluímos que

$$s_{n+1} = s_n,$$

o que é um absurdo, pois da equação (31), temos

$$s_n = a_n \cdot s_{n-1} + s_{n-2} \qquad \Rightarrow \qquad s_{n-1} = \frac{s_n - s_{n-2}}{a_n},$$

note que, a igualdade ocorre apenas no caso específico para $n = 2$ onde por definição $s_0 = 0$, e ainda somente se $a_2 = 1$, ou seja, para frações contínuas de números irracionais temos obrigatoriamente $s_{n+1} \neq s_n$. Portanto, por absurdo concluímos que

$$\left| x - \frac{r_n}{s_n} \right| < \frac{1}{2 \cdot s_n^2} \qquad \text{ou} \qquad \left| x - \frac{r_{n+1}}{s_{n+1}} \right| < \frac{1}{2 \cdot s_{n+1}^2}.$$

■

Nesse capítulo foram estudadas algumas propriedades das frações contínuas relacionadas aos números reais. Essas propriedades serão necessárias para aplicar as frações contínuas em problemas de Álgebra e Aritmética propostas no capítulo seguinte.

Foi escolhido aplicar as frações contínuas nos temas de equações diofantinas lineares, congruências lineares, equações de Pell, determinantes e propriedades dos números algébricos.

4 APLICAÇÕES DE FRAÇÕES CONTÍNUAS

Este capítulo aborda a utilização de frações contínuas na solução de problemas em Álgebra e Aritmética. As frações contínuas são vistas como uma alternativa para a resolução de problemas, embora existam outros métodos resolutivos disponíveis, com exceção das equações de Pell, que serão solucionadas exclusivamente por frações contínuas.

4.1 EQUAÇÕES DIOFANTINAS LINEARES DE DUAS VARIÁVEIS

Em matemática diversos problemas recaem na resolução de equações lineares, desde uma até várias incógnitas, quando essas soluções são inteiras, temos o que é chamado de equações diofantinas.

Essas equações recebem esse nome em homenagem a Diofantino de Alexandria, não se sabe ao certo em que período viveu e sua origem. Diofantino publicou vários trabalhos entre eles 130 problemas envolvendo equações de 1° e 2° grau.

Figura 8 – Diofantino.

Fonte: https://matematicaaserio.com.br/historia-da-matematica/diofanto-de-alexandria/

As equações diofantinas em geral são resolvidas aplicando-se sucessivamente o Algoritmo da Divisão.

Definição 5 *Uma equação diofantina linear de duas variáveis é a equação da forma* $ax + by = c$*, em que a,b e* $c \in \mathbb{Z}$*, onde as soluções são inteiras. Um par ordenado* $(x_0, y_0) \in \mathbb{Z}$*, é solução da equação, se* $a \cdot x_0 + b \cdot y_0 = c$*.*

Nem sempre uma equação diofantina admite solução. A proposição abaixo fornece uma condição necessária e suficiente para a existência de soluções para uma equação diofantina qualquer.

Proposição 3 *A equação* $a \cdot x + b \cdot y = c$ *onde a,b,* $c \in \mathbb{Z}$ *admite solução em* $\mathbb{Z}$ *se, e somente se,* $(a,b)|c$*.*

Demonstração:

($\Rightarrow$) Seja o $(a,b) = d$, ou seja, $d|a$ e $d|b$, logo existem inteiros k e t, tais que $a = k \cdot d$ e $b = t \cdot d$. Substituindo na equação diofantina,

$$(k \cdot d) \cdot x + (t \cdot d) \cdot y = c \quad \Rightarrow \quad d \cdot (k \cdot x + t \cdot y) = c.$$

Logo, $d|c$.

($\Leftarrow$) Sabemos que $(a,b) = d$, e $d|c$. Logo, existe um $k \in \mathbb{Z}$ tal que $k \cdot d = c$, basta resolver a equação

$$a \cdot x + b \cdot y = d,$$

multiplicando a equação por k, obtemos

$$k \cdot (ax + by) = k \cdot d \quad \Rightarrow \quad a \cdot (k \cdot x) + b \cdot (k \cdot y) = c,$$

provando a proposição. ■

Sabe-se ainda que uma equação diofantina admite uma família de soluções inteiras, que podem ser obtidas a partir de uma solução particular x_0 e y_0 qualquer. Faremos a demonstração na sequência.

Proposição 4 *Seja x_0 e y_0 uma solução particular da equação diofantina $a \cdot x + b \cdot y = c$, onde $(a,b) = 1$. Então, as soluções x, y em $\mathbb{Z}$ da equação são*

$$\begin{cases} x = x_0 + b \cdot t \\ y = y_0 - a \cdot t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Demonstração: Seja x e y uma solução da equação $a \cdot x + b \cdot y = c$, logo

$$a \cdot x_0 + b \cdot y_0 = a \cdot x + b \cdot y = c.$$

Podemos escrever

$$a \cdot (x - x_0) = b \cdot (y_0 - y). \tag{51}$$

Como $(a,b) = 1$, segue que $b|(x - x_0)$. Logo,

$$x - x_0 = b \cdot t \quad \Rightarrow \quad x = x_0 + b \cdot t.$$

Substituindo $x - x_0$ na equação (51), obtemos

$$b \cdot (y_0 - y) = a \cdot b \cdot t \quad \Rightarrow \quad y = y_0 - a \cdot t.$$

Note ainda, que $x = x_0 + b \cdot t$ e $y = y_0 - a \cdot t$, são soluções da equação diofantina $a \cdot x + b \cdot y = c$, pois

$$a \cdot x + b \cdot y = a \cdot (x_0 + b \cdot t) + b \cdot (y_0 - a \cdot t) = a \cdot x_0 + b \cdot y_0 = c.$$

Provando a proposição.■

A solução de uma equação diofantina pode ser encontrada por meio de frações contínuas. Partindo da equação (34),

$$r_n \cdot s_{n-1} - r_{n-1} \cdot s_n = (-1)^n.$$

Substituindo r_n e s_n da equação acima por a e b, respectivamente, obtemos

$$a \cdot s_{n-1} - b \cdot r_{n-1} = (-1)^n.$$

Se n for par, então

$$a \cdot (s_{n-1}) + b \cdot (-r_{n-1}) = 1.$$

Multiplicando a equação acima por c

$$a \cdot (c \cdot s_{n-1}) + b \cdot (-c \cdot r_{n-1}) = c,$$

nos mostra que a equação diofantina $a \cdot x + b \cdot y = c$ possui solução $x = c \cdot s_{n-1}$ e $y = -c \cdot r_{n-1}$. No caso de n ser ímpar, basta multiplicar a equação por -1.

No exemplo a seguir a equação diofantina será resolvida inicialmente pelo Algoritmo da Divisão aplicado sucessivamente e, posteriormente, por frações contínuas.

Exemplo 10 *Encontre a solução da equação diofantina* $31 \cdot x + 11 \cdot y = 2$.

A equação diofantina dada possui soluções, pois $(31,11) = 1$ e $1|2$. Aplicando o Algoritmo da Divisão sucessivamente, obtemos

$$\begin{aligned} 31 &= 11 \cdot 2 + 9, \\ 11 &= 9 \cdot 1 + 2, \\ 9 &= 2 \cdot 4 + 1. \end{aligned}$$

Isolando os restos nas divisões euclidianas acima podemos escrever

$$\begin{aligned} 1 &= 9 - 2 \cdot 4 \\ &= 9 - (11 - 9) \cdot 4 \\ &= 9 - 11 \cdot 4 + 9 \cdot 4 \\ &= 9 \cdot (5) - 11 \cdot 4 \\ &= (31 - 11 \cdot 2) \cdot 5 - 11 \cdot 4 \\ &= 31 \cdot 5 - 11 \cdot 10 - 11 \cdot 4 \\ &= 31 \cdot (5) - 11 \cdot (14) \\ &= 31 \cdot (5) + 11 \cdot (-14). \end{aligned}$$

Multiplicando a última equação por 2,

$$2 = 31 \cdot (10) + 11 \cdot (-28),$$

ou seja, as soluções particulares procuradas são $x = 10$ e $y = -28$.

Vamos analisar agora a representação em frações contínuas de $\frac{31}{11}$,

$$\frac{31}{11} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2}}}.$$

Portanto, os convergentes são

Tabela 5 – Convergentes da fração 31/11.

n	-1	0	1	2	3	4
a_n			2	1	4	2
r_n	0	1	2	3	14	31
s_n	1	0	1	1	5	11

Para $n = 4$, temos

$$r_4 \cdot s_3 - r_3 \cdot s_4 = (-1)^4.$$

Substituindo os valores do quarto e terceiro convergentes

$$31 \cdot 5 - 14 \cdot 11 = 1.$$

Multiplicando a equação acima por 2

$$31 \cdot (10) + 11(-28) = 2.$$

Portanto, a solução geral procurada é $\begin{cases} x = 10 + 11 \cdot t \\ y = -28 - 31 \cdot t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{Z}$

Exemplo 11 *Determine os múltiplos naturais de 11 e 9 cuja soma é igual a 80.*

O problema pode ser reescrito na forma da equação diofantina

$$11 \cdot x + 9 \cdot y = 80,$$

em que $11x$ e $9y$ representam os múltiplos de 11 e 9, respectivamente. A representação em frações contínuas de 11/9 é

$$\frac{11}{9} = 1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2}}.$$

Os seus convergentes são dados na Tabela 6.

Tabela 6 – Convergentes da fração 11/9.

n	-1	0	1	2	3
a_n			1	4	2
r_n	0	1	1	5	11
s_n	1	0	1	4	9

Para $n = 3$, temos

$$r_3 \cdot s_2 - r_2 \cdot s_3 = (-1)^3.$$

Substituindo os valores do terceiro e segundo convergentes, obtemos

$$11 \cdot 4 - 5 \cdot 9 = -1 \quad \Rightarrow \quad 11 \cdot (-4) + 9 \cdot (5) = 1.$$

Multiplicando a equação acima por 80

$$11 \cdot (-320) + 9 \cdot (400) = 80.$$

Portanto, a solução geral é

$$\begin{cases} x = -320 + 9 \cdot t \\ y = 400 - 11 \cdot t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{Z}$$

Para encontrar a solução do problema, temos que $x > 0$ e $y > 0$. Logo, da restrição $x > 0$, temos

$$-320 + 9 \cdot t \geq 0 \quad \Rightarrow \quad 9 \cdot t \geq 320 \quad \Rightarrow \quad t \geq \frac{320}{9} \approx 35{,}55.$$

De $y > 0$, obtemos

$$400 - 11 \cdot t \geq 0 \quad \Rightarrow \quad -11 \cdot t \geq -400 \quad \Rightarrow \quad t \leq \frac{400}{11} \approx 36{,}66.$$

Logo,

$$\frac{400}{11} \geq t \geq \frac{320}{9},$$

Portanto, a única solução inteira é $t = 36$. Assim, os únicos números com essa propriedade são:

$$\begin{cases} x = -320 + 9 \cdot (36) = 4 \\ y = 400 - 11 \cdot (36) = 4 \end{cases}.$$

Logo, os números procurados são $9 \cdot 4 = 36$ e $11 \cdot 4 = 44$, de fato $36 + 44 = 80$.

4.2 CONGRUÊNCIAS

A aritmética dos restos é um tópico de matemática que possui várias aplicações dentro da teoria dos números.

Dado um número natural m e dois inteiros a e b, dizemos que eles são congruentes módulo m, se os restos das suas divisões euclidianas por m são iguais, e escreve-se

$$a \equiv b \; mod \; m. \tag{52}$$

Antes de explorar a resolução de congruências lineares por frações contínuas, vamos mostrar alguns exemplos.

Exemplo 12 *Temos que, 3 e 24 são congruentes módulo 7, pois os restos da Divisão Euclidiana de 3 e 24 por 7 são iguais a 3:*

$$\begin{aligned} 3 &= 7 \cdot 0 + 3. \\ 24 &= 7 \cdot 3 + 3. \end{aligned}$$

E indicamos por

$$3 \equiv 24 \; mod \; 7.$$

Quando os números não são congruentes módulo m, dizemos que eles são incongruentes.

Exemplo 13 *Temos que 12 e 21 não são congruentes módulo 5, pois os restos na divisão euclidiana por 5 são 2 e 1, respectivamente. Logo*

$$\begin{aligned} 12 &= 5 \cdot 2 + 2. \\ 21 &= 5 \cdot 4 + 1. \end{aligned}$$

E indicamos por

$$12 \not\equiv 21 \; mod \; 5.$$

Vamos encontrar a solução da congruência linear $a \cdot x \equiv b \;\; mod \; m$, aplicando frações contínuas. Para isso, considere $\frac{r_n}{s_n} = \frac{a}{m}$. Substituindo na equação (34), temos

$$a \cdot s_{n-1} - r_{n-1} \cdot m = (-1)^n.$$

Isolando $a \cdot s_{n-1}$,

$$a \cdot s_{n-1} = (-1)^n + r_{n-1} \cdot m. \tag{53}$$

Considere a congruência $a \cdot x \equiv (-1)^n \; mod \; m$. Da equação (53), tomando $a \cdot x = a \cdot s_{n-1}$, obtemos

$$a \cdot x = a \cdot s_{n-1} = (-1)^n + r_{n-1} \cdot m = r_{n-1} \cdot m + (-1)^n.$$

Dividindo $r_{n-1} \cdot m + (-1)^n$ e 1 por m, os restos serão $(-1)^n$ e 1, respectivamente. Assim, se n é par, então a solução procurada da congruência é s_{n-1}. No caso de n ser ímpar, basta tomar $-s_{n-1}$, substituindo

$$a \cdot x = a\,(-s_{n-1}) = a \cdot \left(- \frac{(-1)^n + r_{n-1} \cdot m}{a} \right) = -r_{n-1} \cdot m + (-1)^{n+1}.$$

Dividindo $-r_{n-1} \cdot m + (-1)^{n+1}$ por m, o resto é $(-1)^{n+1}$, assim se n é ímpar, então a solução procurada da congruência é $-s_{n-1}$.

Portanto, da solução de $a \cdot x \equiv (-1)^n \ mod \ m$, multiplicando ambos os lados da congruência por b, temos:

Se n é par,

$$a \cdot (s_{n-1}) \equiv 1 \ mod \ m \quad \Rightarrow \quad a \cdot (b \cdot s_{n-1}) \equiv b \ mod \ m.$$

Então, a solução procurada é $b \cdot s_{n-1}$.

Se n é ímpar,

$$a \cdot (-s_{n-1}) \equiv 1 \ mod \ m \quad \Rightarrow \quad a \cdot (-b \cdot s_{n-1}) \equiv b \ mod \ m.$$

Então, a solução procurada é $-b \cdot s_{n-1}$.

Exemplo 14 *(PROFMAT ENQ - 2022.2) Resolva a congruência*

$$17 \cdot x \equiv 82 \ mod \ 165.$$

Escrevendo $\frac{17}{165}$ na forma de fração contínua, temos

$$\frac{17}{165} = 0 + \cfrac{1}{9 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}}}.$$

E os seus convergentes são

Tabela 7 – Convergentes da fração 17/165.

n	-1	0	1	2	3	4	5	6
a_n			0	9	1	2	2	2
r_n	0	1	0	1	1	3	7	17
s_n	1	0	1	9	10	29	68	165

Temos n par, então

$$17 \cdot 68 \equiv 1 \ mod \ 165 \quad \Rightarrow \quad 17 \cdot (82 \cdot 68) \equiv 82 \ mod \ 165.$$

Ou seja,

$$x \equiv 5.576 \mod 165.$$

Reduzindo 5.576 em módulo 165 o resto é 131. Portanto,

$$x \equiv 131 \mod 165.$$

Esse exemplo pode ainda ser resolvido usando a relação entre congruências e equações diofantinas, ou aplicando-se o Teorema Chinês dos Restos[6].

[6] Ver: https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=5711id2=171053338

Exemplo 15 *Resolva a congruência* $7 \cdot x \equiv 1$ *mod* 60.

Note que, resolver a congruência $7 \cdot x \equiv 1$ *mod* 60 é equivalente a resolver a equação diofantina $7 \cdot x - 60 \cdot y = 1$. Aplicando o Algoritmo da Divisão Sucessivamente

$$\begin{aligned} 60 &= 7 \cdot 8 + 4, && (54)\\ 7 &= 4 \cdot 1 + 3, && (55)\\ 4 &= 3 \cdot 1 + 1. && (56) \end{aligned}$$

Da equação (56), obtemos

$$1 = 4 + 3 \cdot (-1),$$

e da equação (55)

$$3 = 7 + 4 \cdot (-1).$$

Ou seja,

$$1 = 4 + 3 \cdot (-1) \Rightarrow 1 = 4 + [7 + 4 \cdot (-1)] \cdot (-1) \Rightarrow 1 = 4 \cdot (2) + 7 \cdot (-1).$$

Agora, da equação (54), obtemos

$$4 = 60 - 7 \cdot 8,$$

substituindo na equação obtida anteriormente, temos

$$1 = 4 \cdot (2) + 7 \cdot (-1) \Rightarrow 1 = [60 - 7 \cdot 8] \cdot 2 + 7 \cdot (-1) \Rightarrow 1 = 7 \cdot (17) + 60 \cdot (2).$$

Que pode ser reescrita na forma de congruência

$$7 \cdot (-17) \equiv 1 \mod 60.$$

Assim, a solução é

$$x \equiv -17 \mod 60.$$

Por outro lado, podemos resolver a congruência dada por frações contínuas. Com efeito, como

$$\frac{7}{60} = 0 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3}}}},$$

seus convergentes são

Tabela 8 – Convergentes da fração 7/60.

n	-1	0	1	2	3	4	5
a_n			0	8	1	1	3
r_n	0	1	0	1	1	2	7
s_n	1	0	1	8	9	17	60

Nesse caso, temos n ímpar, assim a solução procurada é $-b \cdot s_{n-1}$. Logo,

$$(-7) \cdot 17 \equiv 1 \ mod \ 60.$$

E a solução geral, é

$$x \equiv -17 \ mod \ 60.$$

4.3 FRAÇÕES CONTÍNUAS PERIÓDICAS E EQUAÇÕES QUADRÁTICAS

Algumas frações contínuas são periódicas como as abordadas na Seção 3.4. Nessa seção vamos analisar algumas propriedades envolvendo esse tipo de frações contínuas.

Definição 6 *Uma fração contínua periódica é aquela que apresenta período (repetição) a partir de algum termo a_i, $i \in \mathbb{N}$, ou seja, a representação contínua é da forma $[a_1; a_2, \ldots, \overline{a_i, a_{i+1}, \ldots, a_{i+k}}]$. No caso em que o período iniciar a partir do termo a_1, a fração contínua é chamada de puramente periódica.*

São exemplos de frações contínuas periódicas:

Exemplo 16 *Frações contínuas periódicas:*

$$\begin{aligned} \sqrt{13} &= \left[\, 3; \overline{1,1,1,1,6}\, \right]. \\ \sqrt{19} &= \left[\, 5; \overline{2,1,1,2,10}\, \right]. \end{aligned}$$

Exemplo 17 *Frações contínuas puramente periódicas:*

$$\begin{aligned} \sqrt{13}+3 &= \left[\, \overline{6;1,1,1,1}\, \right]. \\ \sqrt{19}+5 &= \left[\, \overline{10;2,1,1,2}\, \right]. \end{aligned}$$

A seguir vamos analisar as propriedades dessas frações contínuas, para posteriormente aplicá-las na resolução de problemas.

Definição 7 *Chama-se irracional quadrático o número irracional que é raiz de uma equação polinomial do segundo grau $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$, onde $b^2 - 4 \cdot a \cdot c > 0$ e diferente de um quadrado perfeito.*

Anteriormente na análise da proporção áurea encontramos um irracional quadrático, chamado de número de ouro

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ddots}}}}.$$

Note que, a fração contínua que representa o número de ouro é puramente periódica. A seguir veremos dois teoremas sobre a periodicidade das frações contínuas.

Teorema 10 *(EULER) Se x é uma fração contínua periódica, então x é irracional quadrático.*

Demonstração: Seja $x = [a_1; a_2, \ldots, a_{n-1}, \overline{x_k}]$, uma fração contínua e periódica, onde $x_k = [a_n; a_{n+1}, \ldots, a_{n+k}]$. Aplicando a equação (31) para a fração contínua x, temos

$$x = \frac{x_n \cdot r_{n-1} + r_{n-2}}{x_n \cdot s_{n-1} + s_{n-2}}, \qquad \text{isolando } x_n \qquad \Rightarrow \qquad x_n = \frac{r_{n-2} - s_{n-2} \cdot x}{s_{n-1} \cdot x - r_{n-1}}.$$

Para algum valor de $n \in \mathbb{N}$, e $k \in \mathbb{N}_{>0}$, temos $x_n = x_{n+k}$, ou seja,

$$\frac{r_{n-2} - s_{n-2} \cdot x}{s_{n-1} \cdot x - r_{n-1}} = \frac{r_{n+k-2} - s_{n+k-2} \cdot x}{s_{n+k-1} \cdot x - r_{n+k-1}}, \tag{57}$$

que pode ser reescrita na forma

$$Ax^2 + Bx + C = 0, \tag{58}$$

onde,

$$\begin{aligned} A &= s_{n-1} \cdot s_{n+k-2} - s_{n-2} \cdot s_{n+k-1}, \\ B &= r_{n-2} \cdot s_{n+k-1} + s_{n-2} \cdot r_{n+k-1} - s_{n-1} \cdot r_{n+k-2} - r_{n-1} \cdot s_{n+k-2}, \\ C &= r_{n-1} \cdot r_{n+k-2} - r_{n-2} \cdot r_{n+k-1}. \end{aligned}$$

Note que, o coeficiente $A \neq 0$ pois, $\frac{s_{n-1}}{s_{n-2}}$ e $\frac{s_{n+k-1}}{s_{n+k-2}}$ são frações irredutíveis pela equação (34), e assim $\frac{s_{n-1}}{s_{n-2}} \neq \frac{s_{n+k-1}}{s_{n+k-2}}$. Note ainda, que x é irracional por hipótese, assim $B^2 - 4 \cdot A \cdot C > 0$ e livre de quadrado perfeito, provando o teorema. ■

Teorema 11 *(LAGRANGE) A fração contínua de um número irracional quadrático x é periódica.*

Demonstração: Vamos mostrar que existem $n \in \mathbb{N}$, e $k \in \mathbb{N}_{>0}$, tais que $x_n = x_{n+k}$. Neste caso, existem a, b,c inteiros tais que $ax^2 + bx + c = 0$, onde $b^2 - 4ac > 0$ e $\sqrt{b^2 - 4ac}$ irracional.

Da equação (31):

$$x = \frac{r_{n-1} \cdot x_n + r_{n-2}}{s_{n-1} \cdot x_n + s_{n-2}}, \tag{59}$$

substituindo a equação (59) em $ax^2 + bx + c = 0$, obtemos

$$a \cdot \left(\frac{r_{n-1} \cdot x_n + r_{n-2}}{s_{n-1} \cdot x_n + s_{n-2}} \right)^2 + b \cdot \left(\frac{r_{n-1} \cdot x_n + r_{n-2}}{s_{n-1} \cdot x_n + s_{n-2}} \right) + c = 0,$$

desenvolvendo o quadrado,

$$a\cdot\left(\frac{r_{n-1}^2\cdot x_n^2+2\cdot r_{n-1}\cdot r_{n-2}\cdot x_n+r_{n-2}^2}{s_{n-1}^2\cdot x_n^2+2\cdot s_{n-1}\cdot s_{n-2}\cdot x_n+s_{n-2}^2}\right)+b\cdot\left(\frac{r_{n-1}\cdot x_n+r_{n-2}}{s_{n-1}\cdot x_n+s_{n-2}}\right)+c=0,$$

reduzindo ao mesmo denominador comum, obtemos

$$a\cdot(r_{n-1}^2\cdot x_n^2+2\cdot r_{n-1}\cdot r_{n-2}\cdot x_n+r_{n-2}^2)+b\cdot(r_{n-1}\cdot x_n+r_{n-2})\cdot(s_{n-1}\cdot x_n+s_{n-2})+c\cdot(s_{n-1}\cdot x_n+s_{n-2})^2=0.$$

Efetuando os produtos,

$$\begin{aligned} &a\cdot(r_{n-1}^2\cdot x_n^2+2\cdot r_{n-1}\cdot r_{n-2}\cdot x_n+r_{n-2}^2)\\ +b\cdot(r_{n-1}\cdot s_{n-1}\cdot x_n^2+s_{n-2}\cdot r_{n-1}\cdot x_n+r_{n-2}\cdot s_n-1\cdot x_n+r_{n-2}\cdot s_{n-2})&\\ +c\cdot(s_{n-1}^2\cdot x_n^2+2\cdot s_n-1\cdot s_{n-2}\cdot x_n+s_{n-2}^2)=0,&\end{aligned}$$

colocando em evidência x_n^2, e x_n, podemos escrever

$$A_n\cdot x_n^2+B_n\cdot x_n+C_n=0, \tag{60}$$

onde

$$\begin{aligned} A_n &= a\cdot r_{n-1}^2+b\cdot r_{n-1}\cdot s_{n-1}+c\cdot s_{n-1}^2.\\ B_n &= 2\cdot a\cdot r_{n-1}\cdot r_{n-2}+b\cdot(r_{n-1}\cdot s_{n-2}+r_{n-2}\cdot s_{n-1})+2\cdot c\cdot s_{n-1}\cdot s_{n-2}.\\ C_n &= a\cdot r_{n-2}^2+b\cdot r_{n-2}\cdot s_{n-2}+c\cdot s_{n-2}^2=A_{n-1}.\end{aligned}$$

Vamos mostrar que existe $M>0$, tal que $0<|A_n|\leq M$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Sabemos que,

$$A_n=a\cdot r_{n-1}^2+b\cdot r_{n-1}\cdot s_{n-1}+c\cdot s_{n-1}^2,$$

podemos reescrever a equação anterior na forma

$$A_n=s_{n-1}^2\left(a\cdot\frac{r_{n-1}^2}{s_{n-1}^2}+b\cdot\frac{r_{n-1}}{s_{n-1}}+c\right),$$

e, de forma fatorada

$$A_n=a\cdot s_{n-1}^2\left(x-\frac{r_{n-1}}{s_{n-1}}\right)\cdot\left(\overline{x}-\frac{r_{n-1}}{s_{n-1}}\right),$$

onde x e $\overline{x}$, são as raízes quando $A_n=0$. Das propriedades de módulo de um número real, podemos escrever

$$|A_n|=a\cdot s_{n-1}^2\cdot\left|x-\frac{r_{n-1}}{s_{n-1}}\right|\cdot\left|\overline{x}-\frac{r_{n-1}}{s_{n-1}}\right|,$$

e, da equação (50), temos

$$\left|x-\frac{r_{n-1}}{s_{n-1}}\right|<\frac{1}{s_{n-1}^2}.$$

Logo,

$$|A_n|\leq a\cdot\left|\overline{x}-\frac{r_{n-1}}{s_{n-1}}\right|,$$

Na desigualdade anterior,

$$|A_n| \leq a \cdot \left| \overline{x} - \frac{r_{n-1}}{s_{n-1}} + (x - x) \right| \Rightarrow |A_n| \leq a \cdot \left| (\overline{x} - x) + \left(x - \frac{r_{n-1}}{s_{n-1}} \right) \right|,$$

da desigualdade triangular, sabemos que o módulo da soma é menor ou igual a soma dos módulos. Assim,

$$|A_n| \leq a \cdot \left(|x - \overline{x}| + \left| x - \frac{r_{n-1}}{s_{n-1}} \right| \right).$$

Novamente, da equação (50), temos

$$|A_n| \leq a \cdot (|x - \overline{x}| + 1) \Rightarrow |A_n| \leq M := a \cdot (|x - \overline{x}| + 1).$$

Ademais, como $C_n = A_{n-1}$, concluímos que $|C_n| < M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Falta ainda mostrar que B_n também é limitado. Para isso, sabemos que o discriminante da equação (60) é

$$B_n^2 - 4 \cdot A_n \cdot C_n,$$

vamos resolver separadamente B_n e $4 \cdot A_n \cdot C_n$. De B_n, obtemos

$$B_n = 2 \cdot a \cdot r_{n-1} \cdot r_{n-2} + b \cdot r_{n-1} \cdot s_{n-2} + b \cdot r_{n-2} \cdot s_{n-1} + 2 \cdot c \cdot s_{n-1} \cdot s_{n-2},$$

elevando a segunda potência

$$\begin{aligned} B_n^2 = 4 \cdot a^2 \cdot r_{n-1}^2 \cdot r_{n-2}^2 + b^2 \cdot r_{n-1}^2 \cdot s_{n-2}^2 + b^2 \cdot r_{n-2}^2 \cdot s_{n-1}^2 + 4 \cdot c^2 \cdot s_{n-1}^2 \cdot s_{n-2}^2 + 4 \cdot a \cdot b \cdot r_{n-1}^2 \cdot r_{n-2} \cdot s_{n-2} \\ +4 \cdot a \cdot b \cdot r_{n-1} \cdot r_{n-2}^2 \cdot s_{n-1} + 8 \cdot a \cdot c \cdot r_{n-1} \cdot r_{n-2} \cdot s_{n-1} \cdot s_{n-2} + 2 \cdot b^2 \cdot r_{n-1} \cdot r_{n-2} \cdot s_{n-1} \cdot s_{n-2} \\ +4 \cdot b \cdot c \cdot r_{n-1} \cdot s_{n-1} \cdot s_{n-2}^2 + 4 \cdot b \cdot c \cdot r_{n-2} \cdot s_{n-1}^2 \cdot s_{n-2}. \end{aligned}$$

E,

$$-4 \cdot A_n \cdot C_n = -4 \cdot (a \cdot r_{n-1}^2 + b \cdot r_{n-1} \cdot s_{n-1} + c \cdot s_{n-1}^2) \cdot a \cdot r_{n-2} + b \cdot r_{n-2}^2 \cdot s_{n-2} + c \cdot s_{n-2}^2,$$

desenvolvendo os produtos, obtemos

$$\begin{aligned} -4 \cdot A_n \cdot C_n = -4 \cdot a^2 \cdot r_{n-1}^2 \cdot r_{n-2}^2 - 4 \cdot a \cdot b \cdot r_{n-1}^2 \cdot r_{n-2} \cdot s_{n-2} - 4 \cdot a \cdot c \cdot r_{n-1}^2 \cdot s_{n-2}^2 \\ -4 \cdot a \cdot b \cdot r_{n-1} \cdot r_{n-2}^2 \cdot s_{n-1} - 4 \cdot b^2 \cdot r_{n-1} \cdot r_{n-2} \cdot s_{n-1} \cdot s_{n-2} - 4 \cdot b \cdot c \cdot r_{n-1} \cdot s_{n-1} \cdot s_{n-2}^2 \\ -4 \cdot a \cdot c \cdot r_{n-2}^2 \cdot s_{n-1}^2 - 4 \cdot b \cdot c \cdot r_{n-2} \cdot s_{n-1}^2 \cdot s_{n-1}^2 - 4 \cdot c^2 \cdot s_{n-1}^2 \cdot s_{n-2}^2. \end{aligned}$$

Agora, efetuando $B_n^2 - 4 \cdot A_n \cdot C_n$, juntando os termos semelhantes, e com algumas manipulações, chegamos em

$$B_n^2 - 4 \cdot A_n \cdot C_n = b^2 \cdot (r_{n-1} \cdot s_{n-2} - r_{n-2} \cdot s_{n-1})^2 - 4 \cdot a \cdot c \cdot (r_{n-1} \cdot s_{n-2} - r_{n-2} \cdot s_{n-1})^2,$$

logo, da equação (34), sabemos que $r_{n-1} \cdot s_{n-2} - r_{n-2} \cdot s_{n-1} = (-1)^n$. Assim,

$$B_n^2 - 4 \cdot A_n \cdot C_n = b^2 - 4 \cdot a \cdot c.$$

Portanto,

$$B_n^2 - 4 \cdot A_n \cdot C_n = b^2 - 4 \cdot a \cdot c \Rightarrow B_n^2 \leq 4 \cdot A_n \cdot C_n + b^2 - 4 \cdot a \cdot c,$$

anteriormente provamos que $|A_n| \leq M$, e que $|C_n| \leq M$, assim

$$B_n^2 \leq 4 \cdot M^2 + b^2 - 4 \cdot a \cdot c \Rightarrow B_n \leq M' := \sqrt{4 \cdot M^2 + b^2 - 4 \cdot a \cdot c}.$$

ou seja, A_n, B_n, C_n são limitados. Assim, existe um número finito de soluções e, portanto, de x_n. Então, obrigatoriamente temos $x_n = x_{n+k}$, para algum valor de $n \in \mathbb{N}$ e $k \in \mathbb{N}^*$. Com isso concluí-se a prova. ■

O Teorema de Lagrange é a recíproca do Teorema de Euler, conforme encontrado em Martinez *et al.* (2018), no entanto, devido a motivos históricos, optamos por apresentá-los separadamente.

Exemplo 18 *Encontre a equação quadrática associada a fração contínua puramente periódica*

$$x = [\overline{1;2,1}].$$

Escrevendo a fração contínua na forma de um número racional

$$x = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{x}}}.$$

Desfazendo a escrita da fração contínua, obtemos

$$x = \frac{4x+3}{3x+2} \quad \Rightarrow \quad 3x^2 + 2x = 4x + 3 \quad \Rightarrow \quad 3x^2 - 2x - 3 = 0.$$

Cujas raízes são

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{10}}{3}.$$

4.4 IRRACIONAIS QUADRÁTICO REDUZIDOS

Um irracional quadrático reduzido vai permitir entender a forma da representação em frações contínuas para um número da forma $\sqrt{N}$, conforme explorado em Olds (1963).

A equação $ax^2 + bx + c = 0$ com a,b,c inteiros e $a > 0$, tem as raízes da forma

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2a} = \frac{P + \sqrt{D}}{Q} \qquad \text{e} \qquad x' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2a} = \frac{P - \sqrt{D}}{Q},$$

onde

$$P = -b, \qquad D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c \qquad \text{e} \qquad Q = 2 \cdot a > 0.$$

Assumindo que $D > 0$ e não quadrado perfeito, então as raízes são números da forma $A \pm B\sqrt{D}$, sendo $A = \frac{P}{Q}$ e $B = \frac{1}{Q}$, ambos racionais.

Definição 8 *Um número irracional quadrático x é chamado de reduzido se for maior que 1 e o seu conjugado x' estiver entre -1 e 0.*

Supondo que x é quadrático reduzido, temos

$$x = \frac{P+\sqrt{D}}{Q} > 1, \qquad \text{e} \qquad -1 < x' = \frac{P-\sqrt{D}}{Q} < 0.$$

As condições $x > 1$ e $x' > -1$ implicam que $x + x' > 0$, assim

$$\frac{P+\sqrt{D}}{Q} + \frac{P-\sqrt{D}}{Q} = \frac{2P}{Q} > 0 \qquad \Rightarrow \qquad P > 0.$$

Da condição $x' < 0$, temos

$$\frac{P-\sqrt{D}}{Q} < 0 \qquad \Rightarrow \qquad P-\sqrt{D} < 0 \qquad \Rightarrow \qquad 0 < P < \sqrt{D}.$$

Agora, da condição $x > 1$, temos

$$\frac{P+\sqrt{D}}{Q} > 1 \qquad \Rightarrow \qquad P+\sqrt{D} > Q,$$

e, de $x' > -1$, temos

$$\frac{P-\sqrt{D}}{Q} > -1 \qquad \Rightarrow \qquad P-\sqrt{D} > -Q \qquad \Rightarrow \qquad \sqrt{D}-P < Q.$$

Ou seja, se x é irracional quadrático reduzido, então os inteiros P, Q e D satisfazem

$$0 < P < \sqrt{D} \qquad \text{e} \qquad \sqrt{D}-P < Q < \sqrt{D}+P < 2\sqrt{D}. \tag{61}$$

Dessas desigualdades podemos concluir que dado D livre de quadrado, existem apenas um número finito de irracionais quadráticos reduzidos associados a ele que podem ser escritos na forma $\frac{P+\sqrt{D}}{Q}$, uma vez que, $P < \sqrt{D}$ e $Q < 2\sqrt{D}$.

Também, note que

$$P^2 - D = (-b)^2 - (b^2 - 4 \cdot a \cdot c) = 4 \cdot a \cdot c = 2 \cdot c \cdot Q.$$

Vamos agora, analisar se existem irracionais quadráticos reduzidos associados a D. Veremos que esse conjunto de irracionais quadráticos reduzidos associados, não é um conjunto vazio. Considerando $D > 1$, e livre de quadrado perfeito, temos

$$x = \lambda + \sqrt{D},$$

onde λ é o maior inteiro menor que $\sqrt{D}$. Com essa definição, segue imediatamente que x é um irracional quadrático reduzido, pois é maior que 1, e o seu conjugado fica entre -1 e 0.

A equação quadrática cujas raízes são x e x', definidas acima, é

$$\left(x - \left(\lambda + \sqrt{D}\right)\right) \cdot \left(x - \left(\lambda - \sqrt{D}\right)\right) = 0.$$

Desenvolvendo o produto, obtemos

$$x^2 - 2 \cdot \lambda \cdot x + \lambda^2 - D = 0.$$

Queremos mostrar que se x é um número irracional quadrático reduzido, então

$$x = a_1 + \frac{1}{x_1},$$

onde, a_1 é maior inteiro menor que x e, x_1 é um número irracional quadrático reduzido associado a D. Substituindo $x = a_1 + 1/x_1$, em $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$, obtemos

$$a\left(a_1 + \frac{1}{x_1}\right)^2 + b\left(a_1 + \frac{1}{x_1}\right) + c = 0.$$

Desenvolvendo a potência, efetuando os produtos e reduzindo ao mesmo denominador, obtemos

$$(a \cdot a_1^2 + b \cdot a_1 + c) \cdot x_1^2 + (2a \cdot a_1 + b) \cdot x_1 + a = 0.$$

Logo,

$$x_1 = \frac{P_1 + \sqrt{D_1}}{Q_1},$$

onde

$$P_1 = -(2 \cdot a \cdot a_1 + b) \qquad \text{e} \qquad Q_1 = 2(a \cdot a_1^2 + b \cdot a_1 + c).$$

Note, ainda, que

$$D_1 = (2 \cdot a \cdot a_1 + b)^2 - 4 \cdot a \cdot (a \cdot a_1^2 + b \cdot a_1 + c) = b^2 - 4 \cdot a \cdot c,$$

ou seja, $D_1 = D$. Portanto, x_1 é um irracional quadrático associado a D. Falta ainda, mostrar que ele também é reduzido. Sabemos que a_1 é o maior inteiro menor que x, então $x_1 > 1$. Mostraremos agora que o conjugado está entre -1 e 0. Para isso,

$$x = a_1 + \frac{1}{x_1} = \frac{a_1 \cdot x_1 + 1}{x_1} \quad \Rightarrow \quad x_1 \cdot x = a_1 \cdot x_1 + 1 \quad \Rightarrow \quad x_1 \cdot x - a_1 \cdot x_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{1}{x - a_1}.$$

Assim, o conjugado é

$$x_1' = \left(\frac{1}{x - a_1}\right)' = \frac{1}{x' - a_1},$$

logo,

$$x_1' = \frac{1}{x' - a_1} \quad \Rightarrow \quad x_1' \cdot (x' - a_1) = 1 \quad \Rightarrow \quad x' - a_1 = \frac{1}{x_1'} \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{x_1'} = a_1 - x',$$

como $a_1 - x' > 1$, concluímos que:

$$-\frac{1}{x_1'} > 1 \quad \Rightarrow \quad 1 < -x_1',$$

temos $a_1 > 1$ e, por hipótese, $-1 < x' < 0$. Portanto $0 < -x_1' < 1$, ou ainda que $-1 < x_1' < 0$. Ou seja, x_1 é um irracional quadrático reduzido associado a D.

Definição 9 *Seja x uma fração continua puramente periódica,* $x = [\,\overline{a_1; a_2, \ldots, a_n}\,]$*, definimos a fração contínua puramente periódica reversa de x, como* $\beta = [\,\overline{a_n; a_{n-1}, \ldots, a_1}\,]$.

A fração continua periódica reversa definida acima, é também um número irracional quadrático reduzido. Note que, $\beta = -\frac{1}{x'}$, e o seu conjugado $\beta' = -\frac{1}{x}$. Do fato de $x > 1$ e $-1 < x' < 0$, implica diretamente em $\beta > 1$ e $-1 < \beta' < 0$.

Teorema 12 *Se x é um irracional quadrático reduzido tal que* $x > 1$ *é uma raiz de uma equação quadrática com coeficientes inteiros, e a raiz conjugada* x' *está entre -1 e 0, então a fração contínua de x é puramente periódica.*

Demonstração: Sabemos que x é da forma

$$x = \frac{P+\sqrt{D}}{Q} = a_1 + \frac{1}{x_1},$$

em que a_1 é o maior inteiro menor que x (chamaremos de quociente completo), além disso provamos que x_1 é um irracional quadrático reduzido associado a D, da forma

$$x_1 = \frac{P_1+\sqrt{D}}{Q_1} > 1.$$

Repetindo o mesmo processo, obtemos

$$x_1 = a_2 + \frac{1}{x_2},$$

onde a_2 é o maior inteiro menor que x_1, e

$$x_2 = \frac{P_2+\sqrt{D}}{Q_2} > 1,$$

que também, é um irracional quadrático reduzido associado a D. Temos então

$$x = a+1+\frac{a}{x_1} \quad \Rightarrow \quad x_1 = a_2 + \frac{1}{x_2} \quad \Rightarrow x = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{x_2}}.$$

Continuando o processo, vamos gerar a sequência de equações,

$$\begin{aligned} x_0 &= a_1 + \frac{1}{x_1}, \\ x_1 &= a_2 + \frac{1}{x_2}, \\ &\vdots \\ x_{n-1} &= a_n + \frac{1}{x_n}, \\ &\cdots \end{aligned}$$

como, $x_0 = x, x_1, x_2, \ldots$, são todos irracionais quadráticos associados a D, e

$$x = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots + \cfrac{1}{a_n + \ddots}}}$$

é irracional, esse processo é infinito. No entanto, mostramos anteriormente que existe um número finito de irracionais quadráticos associados a D, o que nos leva a concluir que esses irracioanis quadráticos em algum momento se repetem. Vamos supor, que a sequência

$$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_k, \ldots, x_{l-1}, x_l, \ldots$$

tem todos os coeficiente acima completos e distintos até x_{l-1}, e que o primeiro que ocorreu antes é x_l. Temos, então, que $x_l = x_k$, para algum $0 \leq k < l$. Note que $k = 0$, é o caso particular do número de ouro.

Vamos provar que

(I) Uma vez que um quociente completo é repetido, todos os quocientes completos subsequentes são repetidos, ou seja, $x_k = x_l$, implica em $x_{k+1} = x_{l+1}$, $x_{k+2} = x_{l+2}$, ... Basta lembrar, que

$$x_k = a_{k+1} + \frac{1}{x_{k+1}} = x_l = a_{l+1} + \frac{1}{x_{l+1}},$$

pelo fato de a_{k+1} e a_{l+1} serem os maiores inteiros menores que $x_k = x_l$, concluímos que $a_{k+1} = a_{l+1}$. Segue então, que sucessivamente vamos obter, que $x_{k+1} = x_{l+1}$, $x_{k+2} = x_{l+2}$, ...

(II) O primeiro quociente completo, $x = x_0$, é repetido, ou seja, a sequência $x = x_0, x_1, x_2, \ldots$, gera uma fração contínua puramente periódica.

Vamos mostrar que $x_k = x_l$ para $0 < k < l$, implica em $x_{k-1} = x_{l-1}$, $x_{k-2} = x_{l-2}, x_0 = x_{l-k}$. Para isso, vamos utilizar os conjugados dos quocientes completos $x_k = x_l$, ou seja, $x'_k = x'_l$, lembrando ainda, que

$$\beta_k = -\frac{1}{x'_k} = -\frac{1}{x'_l} = \beta_l,$$

e, desde que $k \neq 0$, temos

$$x_{k-1} = a_k + \frac{1}{x_k} \qquad \text{e} \qquad x_{l-1} = a_l + \frac{1}{x_l},$$

e seus conjugados

$$x'_{k-1} = a_k + \frac{1}{x'_k} \qquad \text{e} \qquad x'_{l-1} = a_l + \frac{1}{x'_l}.$$

Lembrando que $\beta = -\dfrac{1}{x'_k}$, temos

$$x'_{k-1} = a_k + \frac{1}{x_k} \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{x'_k} = a_k - x'_{k-1} \quad \Rightarrow \quad \beta_k = a_k + \frac{1}{\beta_{k-1}} \qquad \text{e} \qquad \beta_l = a_l + \frac{1}{\beta_{l-1}}. \tag{62}$$

Lembrando que, x_{k-1} e x_{l-1} são reduzidos, temos, de imediato, que

$$-1 < x'_{k-1} < 0 \qquad \text{e} \qquad -1 < x'_{l-1} < 0,$$

de modo que,

$$0 < -x'_{k-1} = \frac{1}{\beta_{k-1}} < 1 \qquad \text{e} \qquad 0 < -x'_{l-1} = \frac{1}{\beta_{l-1}} < 1,$$

com isso, mostramos que a_k e a_l, da equação (62), são os maiores inteiros menores que β_k e β_l, ou seja, $a_k = a_l$. Portanto,

$$a_k + \frac{1}{x'_k} = a_l + \frac{1}{x'_l} \qquad \Rightarrow \qquad x_{k-1} = x_{l-1}.$$

Acabamos de mostrar que $x_k = x_l$ implica em $x_{k-1} = x_{l-1}$. Note que, se $k-1 \neq 0$, ou seja, se x_k não for o primeiro quociente completo reduzido, então, o argumento pode ser repetido k vezes para provar que $x_{k-2} = x_{l-2}$, $x_{k-3} = x_{l-3}$, ..., até encontrar o primeiro x, e obtermos $x_{k-k} = x_0 = x_{l-k} = x_s$.

Com isso, ao efetuar a expansão em frações contínuas do irracional quadrático reduzido x, obtivemos a sequência

$$\begin{aligned}
x &= a_1 + \frac{1}{x_1},\\
x_1 &= a_2 + \frac{1}{x_2},\\
&\vdots\\
x_{s-2} &= a_{s-1} + \frac{1}{x_{s-1}},\\
x_{s-1} &= a_s + \frac{1}{x_s} = a_s + \frac{1}{x},
\end{aligned}$$

onde $x, x_1, x_2, \ldots, x_{s-1}$ são todos distintos, e $x_s = x$ onde se inicia a repetição. Note ainda, que como para todo $x_k > 1$, existe um maior inteiro menor que x_k, a sequência $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, também se repete. Assim,

$$x_s = a_{s+1} + \frac{1}{x_{s+1}} = x_0 = a_1 + \frac{1}{x_1}.$$

Portanto, a fração contínua de x tem a forma $x = [\,\overline{a_1; a_2, \ldots, a_s}\,]$, que é uma fração contínua puramente periódica, provando o teorema. ■

O principal resultado associado aos irracionais quadráticos reduzidos é a forma da expansão em frações contínuas de $\sqrt{P}$.

Proposição 5 *Seja P um inteiro positivo que não é quadrado perfeito. Então, a representação em frações contínuas de $\sqrt{P}$, é da forma*

$$\sqrt{P} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{2\cdot a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots}}}}} := \left[\, a_1; \overline{a_2, a_3, \ldots, 2\cdot a_1}\,\right]. \tag{63}$$

Demonstração: Note que, $\sqrt{P} + a_1$ é um irracional quadrático reduzido, pois $\sqrt{P} + a_1 > 1$, uma vez que por hipótese P é inteiro e positivo livre de quadrado. E, o seu conjugado $a_1 - \sqrt{P}$ está entre -1 e 0. Assim, conforme demonstrado anteriormente, a sua reapresentação em frações contínuas é puramente periódica.

Considere a expansão em frações contínuas de $\sqrt{P}$,

$$\sqrt{P} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n + \ddots}}}}. \tag{64}$$

Somando a_1 em ambos os lados da equação (64), obtemos

$$\sqrt{P} + a_1 = 2 \cdot a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n + \ddots}}}}. \tag{65}$$

A partir de algum ponto a fração contínua da equação (65) é repetitiva da forma $2 \cdot a_1, a_2, ...$, até algum termo que chamaremos de a_n. Assim, temos

$$\sqrt{P} + a_1 = 2 \cdot a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{2 \cdot a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots}}}}}} := \left[\, \overline{2 \cdot a_1; a_2, \ldots a_n} \,\right]. \tag{66}$$

Então, para obter a expansão em fração contínua de $\sqrt{P}$, basta subtrair a_1 em ambos os membros da equação (66), e obter

$$\sqrt{P} = \left[\, a_1; \overline{a_2, \ldots, a_n, 2 \cdot a_1} \,\right].$$

Provando a proposição. ■

A expansão em frações contínuas de $\sqrt{P}$, será útil para encontrar as soluções da equação de Pell.

4.5 EQUAÇÃO DE PELL

Segundo Eves (2011), Euler equivocou-se ao atribuir a John Pell (Figura 9) a criação do método de solução para esse tipo de equação, pois na verdade, o método foi desenvolvido por Lord Brouncker (Figura 3).

Figura 9 – John Pell (1611 - 1685).

Fonte: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Pell/

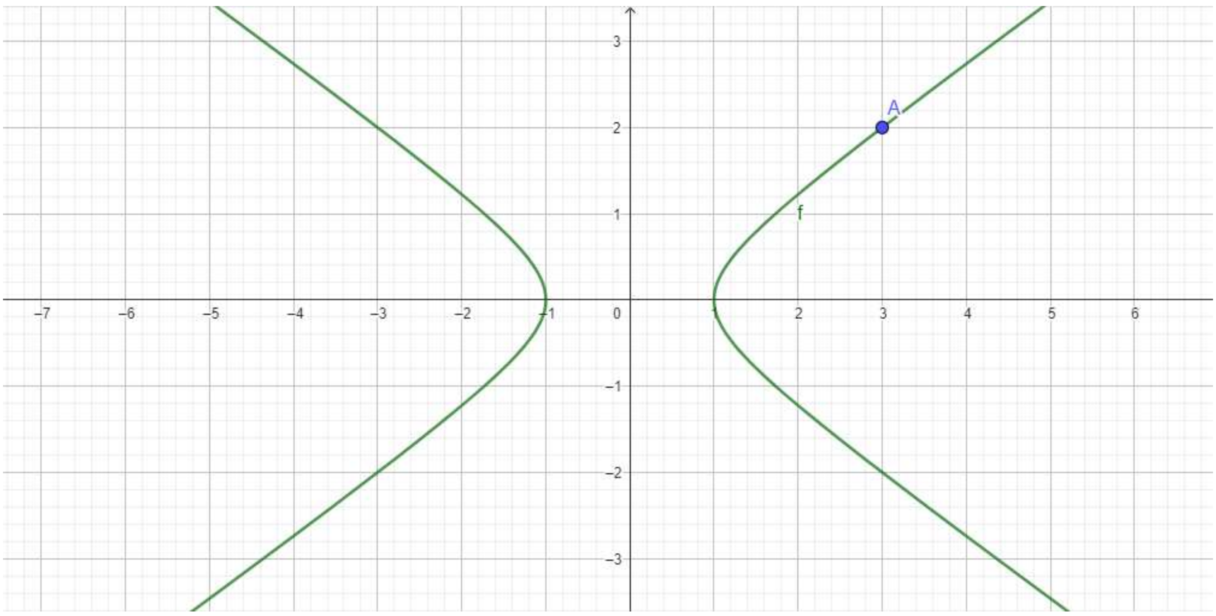
Definição 10 *Uma equação diofantina quadrática é chamada de equação de Pell se for escrita da forma*

$$x^2 - Py^2 = 1, \tag{67}$$

onde P é um inteiro positivo, e x, y inteiros.

Geometricamente a equação de Pell é uma hipérbole, por exemplo, a equação $x^2 - 2y^2 = 1$ tem sua representação gráfica com domínio e imagem nos números reais (Figura 10), por uma hipérbole de vértices sobre o eixo x.

Figura 10 – Solução geométrica da equação de Pell.



Nesse exemplo, pelo gráfico (Figura 10), é fácil verificar que o par ordenado $A = (3,2)$ é solução da equação, pois $3^2 - 2 \cdot 2^2 = 1$.

No entanto, nem sempre é fácil esboçar o gráfico de uma hipérbole para encontrar uma solução visualmente. Ao resolver uma equação de Pell procura-se encontrar apenas as soluções inteiras e positivas.

Por sorte, as frações contínuas podem ser empregadas para encontrar as soluções inteiras da equação de Pell, sem a necessidade do esboço gráfico, ou de tentativas que demandariam muito tempo.

Teorema 13 *Seja c_n o n-ésimo convergente da representação em frações contínuas de $\sqrt{P}$, onde P não é um quadrado, e que n é o número de termos imediatamente anteriores ao termo $2 \cdot a_1$. Se n for par, então a solução da equação de Pell $x^2 - Py^2 = 1$ é $x = r_n$ e $y = s_n$, se n for ímpar então a solução é $x = r_{2n}$ e $y = s_{2n}$, para todo $n \geq 1$.*

Demonstração: Anteriormente, na Proposição 5 demonstramos que a representação em frações contínuas de todo número na forma $\sqrt{P}$ é

$$\sqrt{P} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots\, a_n + \cfrac{1}{2 \cdot a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots}}}}}.$$

Ou seja,

$$\sqrt{P} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots\, a_n + \cfrac{1}{a_1 + a_1 \cfrac{1}{a_2 + \ddots}}}}}.$$

Que pode ser reescrita na forma

$$\sqrt{P} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots\, a_n + \cfrac{1}{a_1 + \sqrt{P}}}}}.$$

Dessa forma, o termo a_{n+1} da fração contínua é $a_1 + \sqrt{P}$. Logo, o $(n+1)$-ésimo convergente pode ser escrito como

$$c_{n+1} = \frac{r_{n+1}}{s_{n+1}} = \sqrt{P} = \frac{a_{n+1} \cdot r_n + r_{n-1}}{a_{n+1} \cdot s_n + s_{n-1}}.$$

Substituindo a_{n+1}, obtemos

$$\sqrt{P} = \frac{\left(a_1 + \sqrt{P}\right) \cdot r_n + r_{n-1}}{\left(a_1 + \sqrt{P}\right) \cdot s_n + s_{n-1}}.$$

Após algumas manipulações algébricas,

$$\sqrt{P} \cdot \left[\left(a_1 + \sqrt{P}\right) \cdot s_n + s_{n-1}\right] = \left(a_1 + \sqrt{P}\right) \cdot r_n + r_{n-1}.$$

Desenvolvendo os produtos em cada membro da equação, obtemos

$$a_1 \cdot s_n \cdot \sqrt{P} + s_n \cdot P + s_{n-1} \cdot \sqrt{P} = a_1 \cdot r_n + r_n \cdot \sqrt{P} + r_{n-1},$$

e, agrupando os termos semelhantes

$$s_n \cdot P + (a_1 \cdot s_n + s_{n-1}) \cdot \sqrt{P} = a_1 \cdot r_n + r_{n-1} + r_n \cdot \sqrt{P}.$$

Por comparação da igualdade acima, obtemos

$$s_n \cdot P = a_1 \cdot r_n + r_{n-1} \quad \Rightarrow \quad r_{n-1} = s_n \cdot P - a_1 \cdot r_n. \tag{68}$$

e,

$$a_1 \cdot s_n + s_{n-1} = r_n \quad \Rightarrow s_{n-1} = r_n - a_1 \cdot s_n. \tag{69}$$

Substituindo as equações (68) e (69) na equação (34), obtemos

$$r_n \cdot (r_n - a_1 \cdot s_n) - s_n \cdot (s_n \cdot P - a_1 \cdot r_n) = (-1)^n,$$

efetuando os produtos

$$r_n^2 - a_1 \cdot r_n \cdot r_n \cdot s_n - s_n^2 \cdot P + a_1 \cdot r_n \cdot s_n = (-1)^n,$$

agora, agrupando os termos semelhantes, chegamos em

$$r_n^2 - P \cdot s_n^2 = (-1)^n.$$

Ou seja, se n é par, então r_n e s_n são soluções da equação de Pell $x^2 - Py^2 = 1$. E, se n for ímpar, então as soluções são r_{2n} e s_{2n}, uma vez que $2n$ é sempre par, provando o teorema. ■

Exemplo 19 *Encontre uma solução da equação* $x^2 - 34y^2 = 1$.

Primeiramente, escrevamos $\sqrt{34}$ na forma de fração contínua, isto é,

$$\sqrt{34} = 5 + \frac{1}{a}. \tag{70}$$

Isolando a

$$a = \frac{\sqrt{34} + 5}{9}. \tag{71}$$

Note que a está compreendido no intervalo $1 < a < 2$, ou seja,

$$a = 1 + \frac{1}{b}.$$

Isolando b

$$b = \frac{\sqrt{34} + 4}{2},$$

onde $4 < b < 5$, logo

$$b = 4 + \frac{1}{c}.$$

Isolando c

$$c = \frac{\sqrt{34}+4}{9},$$

onde $1 < c < 2$. Analogamente

$$c = 1 + \frac{1}{d}.$$

Isolando d

$$d = \sqrt{34}+5,$$

onde $10 < d < 11$. Seguindo

$$d = 10 + \frac{1}{e}.$$

Isolando e

$$e = \frac{\sqrt{34}+5}{9}.$$

Ou seja, $e = a$ e com isso obtém-se a representação periódica procurada

$$\sqrt{34} = 5 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{10 + \ldots}}}}.$$

Como $n = 4$ (quatro termos antes do termo $2 \cdot a_1$), a solução procurada é c_4. Assim,

$$c_4 = 5 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1}}} = \frac{35}{6}.$$

Portanto, a solução procurada é $x = 35$ e $y = 6$, que, de fato, pode ser verificada através de

$$35^2 - 34 \cdot 6^2 = 1225 - 34 \cdot 36 = 1225 - 1224 = 1.$$

Exemplo 20 *Encontre a solução da equação* $x^2 - 41y^2 = 1$.

A representação em frações contínuas de $\sqrt{41}$ (seguindo o mesmo procedimento do exemplo anterior), é

$$\sqrt{41} = 6 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{12 + \ldots}}}.$$

Nesse caso, $n = 3$ (três termos antes do termo $2 \cdot a_1$). Portanto, a solução é o convergente c_6, que é dado por

$$c_6 = 6 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{12 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}}} = \frac{2049}{320}.$$

Portanto, a solução procurada é $x = 2049$ e $y = 320$, que, de fato, pode ser verificada através de

$$2049^2 - 41 \cdot 320^2 = 4.198.401 - 41 \cdot 102.400 = 4.198.401 - 4.198.400 = 1.$$

As equações de Pell admitem uma família de soluções, conforme veremos a seguir.

Teorema 14 *Seja P um número inteiro positivo que não é quadrado perfeito. Seja* (x_1, y_1) *uma solução particular equação* $x^2 - Py^2 = 1$*, então a família de soluções* (x_n, y_n) *dessa equação satisfaz*

$$x_n + y_n \cdot \sqrt{P} = \left(x_1 + y_1 \cdot \sqrt{P}\right)^n. \tag{72}$$

Demonstração: Note que,

$$x_n + y_n \cdot \sqrt{P} = (x_1 + y_1 \cdot \sqrt{P}) \cdot (x_1 + y_1 \cdot \sqrt{P}) \cdots (x_1 + y_1 \cdot \sqrt{P}).$$

Por outro lado, sabemos que o conjugado de um produto é o produto dos conjugados. Logo,

$$x_n - y_n \cdot \sqrt{P} = (x_1 - y_1 \cdot \sqrt{P}) \cdot (x_1 - y_1 \cdot \sqrt{P}) \cdots (x_1 - y_1 \cdot \sqrt{P}).$$

De onde podemos escrever,

$$x_n - y_n \cdot \sqrt{P} = \left(x_1 - y_1 \cdot \sqrt{P}\right)^n. \tag{73}$$

Agora, vamos provar que x_n e y_n são soluções da equação (67). Para isso, fatorando $x_n^2 - Py_n^2$, obtemos

$$x_n^2 - Py_n^2 = \left(x_n + y_n \cdot \sqrt{P}\right) \cdot \left(x_n - y_n \cdot \sqrt{P}\right),$$

substituindo as equações (72) e (73), obtemos

$$\begin{aligned}
x_n^2 - Py_n^2 &= \left(x_1 + y_1 \cdot \sqrt{P}\right)^n \cdot \left(x_1 - y_1 \cdot \sqrt{P}\right)^n \\
&= \left[(x_1 + y_1 \cdot \sqrt{P}) \cdot (x_1 - y_1 \cdot \sqrt{P})\right]^n \\
&= \left[x_1^2 - x_1 \cdot y_1 \cdot \sqrt{P} + x_1 \cdot y_1 \cdot \sqrt{P} - y_1^2 \cdot P\right]^n \\
&= \left[x_1^2 - P \cdot y_1^2\right]^n \\
&= 1^n \\
&= 1,
\end{aligned}$$

provando o teorema. ■

Por exemplo, aplicando para para $n = 2$, temos

$$\begin{aligned}
x_2 + y_2 \cdot \sqrt{P} &= (x_1 + y_1 \cdot \sqrt{P})^2, \\
&= x_1^2 + 2 \cdot x_1 \cdot y_1 \sqrt{P} + y_1^2 \cdot P, \\
&= x_1^2 + y_1^2 \cdot P + 2 \cdot x_1 \cdot y_1 \sqrt{P}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$x_2 = x_1^2 + y_1^2 \cdot P, \qquad \text{e} \qquad y_2 = 2 \cdot x_1 \cdot y_1.$$

Retomando o caso da equação $x^2 - 34y^2 = 1$, onde a solução encontrada foi o par (35,6), outra solução será

$$\begin{cases} x_2 = x_1^2 + y_1^2 \cdot P = 35^2 + 6^2 \cdot 34 = 2.449. \\ y_2 = 2 \cdot x_1 \cdot y_1 = 2 \cdot 35 \cdot 6 = 420. \end{cases}$$

Verificando

$$2.449^2 - 34 \cdot 420^2 = 5.997.601 - 34 \cdot 176.400 = 5.997.601 - 5.997.600 = 1.$$

4.6 DETERMINANTES

Os determinantes serão aplicados para encontrar o n-ésimo convergente de uma fração contínua, sem a necessidade de descobrir os convergentes anteriores, o que pode ser útil.

Partindo da equação (31), o numerador do n-ésimo convergente é

$$a_n \cdot r_{n-1} + r_{n-2} = r_n.$$

Subtraindo r_n em ambos os lados da igualdade, obtemos

$$a_n \cdot r_{n-1} + r_{n-2} - r_n = 0.$$

Para o entendimento do procedimento que pretendemos demonstrar considere uma fração contínua de cinco termos. Assim,

$$\begin{aligned} a_1 \cdot r_0 + r_{-1} - r_1 &= 0, \\ a_2 \cdot r_1 + r_0 - r_2 &= 0, \\ a_3 \cdot r_2 + r_1 - r_3 &= 0, \\ a_4 \cdot r_3 + r_2 - r_4 &= 0, \\ a_5 \cdot r_4 + r_3 - r_5 &= 0. \end{aligned}$$

Por definição, $r_{-1} = 0$ e $r_0 = 1$, logo

$$a_1 \cdot r_0 + r_{-1} - r_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_1 \cdot 1 + 0 - r_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_1 = r_1.$$

Assim, podemos escrever

$$\begin{aligned} -r_1 &= -a_1, \\ a_2 \cdot r_1 - r_2 &= -1, \\ r_1 + a_3 \cdot r_2 - r_3 &= 0, \\ r_2 + a_4 \cdot r_3 - r_4 &= 0, \\ r_3 + a_5 \cdot r_4 - r_5 &= 0, \end{aligned}$$

que é um sistema linear de 5 equações e 5 incógnitas. Aplicando a regra de Cramer para resolver o sistema, mais especificamente para encontrar r_5, que é o numerador do último convergente, obtemos

$$r_5 = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & -a_1 \\ a_2 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & a_3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_5 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a_3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_5 & -1 \end{vmatrix}}.$$

O denominador tem determinante igual a $(-1)^5$, visto que é uma matriz triangular. Para determinar o numerador, é conveniente permutar a última coluna até que ela ocupe a posição da 1°, o que resulta em um total de 4 trocas de sinais pelas propriedades dos determinantes, assim

$$r_5 = \frac{(-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} -a_1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & a_2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a_5 \end{vmatrix}}{(-1)^5}.$$

Agora, trocando o sinal da nova primeira coluna, obtemos

$$r_5 = \frac{(-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a_2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a_5 \end{vmatrix}}{(-1)^5}.$$

Em síntese foram feitas $n-1$ trocas de sinais nas permutações, e uma troca de sinal na 1° coluna, totalizando $n-1+1$. Com isso foram feitas n trocas de sinais, que de modo geral será simplificado pelo denominador. Assim, obtém-se uma fórmula para o cálculo do numerador do quinto convergente

$$\begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a_2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a_5 \end{vmatrix}.$$

De maneira análoga, obtém-se que o denominador do quinto convergente é dado por

$$s_5 = \begin{vmatrix} a_2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & a_3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & a_4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & a_5 \end{vmatrix}.$$

Portanto, temos que para o quinto convergente

$$c_5 = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a_2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a_5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & a_3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & a_4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & a_5 \end{vmatrix}}.$$

Generalizando, podemos obter uma fórmula para o n-ésimo convergente, demonstrada na sequência.

Teorema 15 *Dada uma fração contínua simples* $[a_1; a_2, a_3, \ldots, a_n]$*, o seu n-ésimo convergente é dado por*

$$c_n = \frac{R_n}{S_{n-1}},$$

onde

$$R_n = \begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a_2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a_n \end{vmatrix} \quad e \quad S_{n-1} = \begin{vmatrix} a_2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a_3 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_4 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a_n \end{vmatrix}. \tag{74}$$

Demonstração: Será feita por indução sobre n.

I) Para $n = 2$

$$c_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & -1 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix}}{a_2} = \frac{a_1 \cdot a_2 + 1}{a_2} = a_1 + \frac{1}{a_2}.$$

II) Agora, supondo que a expressão é válida para $n-1$, vamos provar que é válida para n. Seja $c_{n-1} = \dfrac{R_{n-1}}{S_{n-2}}$. O n-ésimo convergente é da forma

$$c_n = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots + a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}.$$

Considerando o último termo igual a $a_{n-1} + \dfrac{1}{a_n}$, e aplicando a equação (74) para $n-1$, obtemos

$$R_{n-1} = \begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a_2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{n-1} + \dfrac{1}{a_n} \end{vmatrix}.$$

E, ainda que

$$S_{n-2} = \begin{vmatrix} a_2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a_3 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_4 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{n-1} + \dfrac{1}{a_n} \end{vmatrix}.$$

Para termos a validade é necessário que

$$c_n = \frac{a_n \cdot R_{n-1}}{a_n \cdot S_{n-2}} = \frac{R_n}{S_{n-1}}.$$

Note ainda que o determinante R_{n-1}, é igual ao determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a_2 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{n-1} + \dfrac{1}{a_n} & -\dfrac{1}{a_n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

pois, escolhendo a última linha do determinante acima, e aplicando o desenvolvimento dos cofatores, obtemos

$$\begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a_2 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{n-1} + \dfrac{1}{a_n} & -\dfrac{1}{a_n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot R_{n-1}.$$

Ainda, pelas propriedades do determinante, ao somar um múltiplo de uma linha/coluna a uma outra, o determinante é preservado. Assim somando a última coluna a penúltima, obtemos

$$R_{n-1} = \begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a_2 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{n-1} & -\dfrac{1}{a_n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Também pelas propriedades dos determinantes, ao multiplicar uma linha ou uma coluna por um número real o determinante será multiplicado por esse número. Assim, multiplicando a última coluna do determinante anterior por a_n, obtemos

$$a_n \cdot R_{n-1} = a_n \cdot \begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a_2 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{n-1} & -\dfrac{1}{a_n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = R_n.$$

Assim pela hipótese de indução $a_n \cdot R_{n-1} = R_n$. Analogamente, prova-se que $a_n \cdot S_{n-2} = S_{n-1}$, concluindo a demonstração. ■

Exemplo 21 *Encontre o quarto convergente da fração contínua simples*

$$\frac{128}{37} = 3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}}.$$

Aplicando a equação (74), temos

$$c_4 = \frac{R_4}{S_2} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{45}{13}.$$

Os determinantes possibilitam encontrar um convergente específico sem a necessidade dos anteriores, diferentemente da maneira usual de construção de todos os convergentes anteriores, feito pelo processo descrito na seção de convergentes.

Não necessariamente é um processo mais fácil, uma vez que os determinantes de ordem superior demandam aplicação de processos mais sofisticados, como o Teorema de Laplace ou o método dos cofatores. O objetivo da seção é puramente relacionar frações contínuas com o cálculo dos determinantes.

4.7 NÚMEROS ALGÉBRICOS

Nessa seção serão estudadas algumas propriedades dos números algébricos usando frações contínuas.

Definição 11 *Um número real x é dito algébrico de grau n se é raiz do polinômio*

$$f(z) = a_0 + a_1 \cdot z + a_2 \cdot z^2 + \cdots + a_n \cdot z^n, \tag{75}$$

onde $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$, e $a_n \neq 0$.

A seguir, apresentamos o Teorema de Liouville, que é um teorema de análise complexa utilizado para verificar se um número é algébrico ou transcedente (que não é algébrico).

Teorema 16 *(Liouville) Considere x um número algébrico de grau n. Então existe uma constante $C = C(x) > 0$ tal que*

$$\left| x - \frac{a}{b} \right| > \frac{C}{b^n} \tag{76}$$

para todos $a, b \in \mathbb{Z}$, com $b > 0$ e $x \neq \frac{a}{b}$.

Demonstração: Como x é algébrico de grau n, ele verifica uma equação do tipo

$$f(z) = c_0 + c_1 \cdot z + c_2 \cdot z^2 + \cdots + c_n \cdot z^n = 0,$$

com $c_i \in \mathbb{Z}$ e $c_n \neq 0$. Dessa forma, podemos fatorar o polinômio na forma

$$f(z) = (z - x) \cdot g(z), \tag{77}$$

onde $g(z)$ é um polinômio de grau $n-1$. Portanto, existe $\delta > 0$, tal que

$$g(z) \neq 0, \forall z \in V_\delta = [x-\delta, x+\delta].$$

Existem duas possibilidades, $\frac{a}{b} \in V_\delta$ ou $\frac{a}{b} \notin V_\delta$.

I) Considere que $\frac{a}{b} \in V_\delta$.

Nesse caso temos $g\left(\frac{a}{b}\right) \neq 0$. Fazendo $z = \frac{a}{b}$ na equação (77), obtemos

$$f\left(\frac{a}{b}\right) = \left(\frac{a}{b} - x\right) \cdot g\left(\frac{a}{b}\right). \tag{78}$$

Que pode ser reescrita na forma

$$\frac{a}{b} - x = \frac{f\left(\frac{a}{b}\right)}{g\left(\frac{a}{b}\right)} = \frac{c_0 + c_1 \cdot \left(\frac{a}{b}\right) + c_2 \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^2 + \cdots + c_n \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^n}{g\left(\frac{a}{b}\right)}.$$

Multiplicando o membro direito da equação anterior pela fração $\frac{b^n}{b^n}$, obtemos

$$\frac{a}{b} - x = \frac{c_0 \cdot b^n + c_1 \cdot a \cdot b^{n-1} + \cdots + c^n \cdot a^n}{b^n \cdot g\left(\frac{a}{b}\right)}.$$

Como $b^n \neq 0$, e $g\left(\frac{a}{b}\right) \neq 0$, temos que $c_0 \cdot b^n + c_1 \cdot a \cdot b^{n-1} + \cdots + c^n \cdot a^n \neq 0$. Se não, teríamos $x = \frac{a}{b}$, o que é um absurdo, pois x é irracional. Logo,

$$\left| c_0 \cdot b^n + c_1 \cdot a \cdot b^{n-1} + \cdots + c^n \cdot a^n \right| \geq 1.$$

Considerando $M > 0$ tal que $|g(z)| \leq M$, para qualquer $z \in V_\delta$. Temos,

$$\left| x - \frac{a}{b} \right| = \left| \frac{c_0 \cdot b^n + c_1 \cdot a \cdot b^{n-1} + \cdots + c^n \cdot a^n}{b^n \cdot g\left(\frac{a}{b}\right)} \right| \geq \frac{1}{M \cdot b^n}.$$

II) Considere agora, que $\frac{a}{b} \notin V_\delta$.

Como $b^n \geq 1$, então

$$\left| x - \frac{a}{b} \right| > \delta > \frac{\delta}{b^n}.$$

Escolhendo

$$C = min\left\{ \frac{1}{(M+1)}, \frac{\delta}{2} \right\},$$

provamos o teorema. ■

Podemos tirar algumas consequências do Teorema de Liouville. A primeira delas é que todo número racional na forma $x = c/d$ verifica a equação

$$dx - c = 0.$$

Consequentemente, todo número racional é algébrico de grau 1.

A segunda observação nos diz respeito aos números transcendentes. Dado $x \in [0,1)$, para toda constante $C > 0$, verifica-se que

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{C}{q^n}.$$

Anteriormente, no Teorema 9 mostramos que para todo número real x

$$\left|x - \frac{r_k}{s_k}\right| \leq \frac{1}{s_k^2}.$$

Agora, tomando $C > 0$ existe um k tal que $C > \dfrac{1}{s_k}$, é suficiente notar que x não é algébrico de ordem k, pois não verifica o Teorema de Lioville, conforme segue

$$\left|x - \frac{r_k}{s_k}\right| < \frac{C}{s_k}.$$

Essa seção teve por objetivo verificar algumas propriedades dos números algébricos tendo como ferramenta as frações contínuas. O Teorema de Liouville, segundo Rezende Jorge (2006), é um limitador da ordem de aproximações dos números algébricos por frações contínuas, sendo de grande importância para a teoria dos números transcendentes.

Pelo Teorema de Liouville concluímos que existe um número limitado de aproximações racionais para os números algébricos que são irracionais quadráticos em função da constante C. Já, o Teorema de Lagrange mostra a relação entre a periodicidade da expansão em frações contínuas desses números.

5 FRAÇÕES CONTÍNUAS E A BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR

O objetivo da seção é discutir possibilidades para introduzir o estudo das frações contínuas na educação básica, tendo como respaldo a Base Nacional Comum Curricular, a BNCC, que é o documento de referência nacional para estados e municípios elaborarem seus currículos.

A BNCC tem caráter normativo na medida em que define um conjunto de habilidades e competências gerais, com o objetivo de abranger todo o território nacional, procurando definir parâmetros mínimos para a formação de todos os estudantes, independente da região do país

> [...] espera-se que a BNCC ajude a superar a fragmentação das políticas educacionais, enseje o fortalecimento do regime de colaboração entre as três esferas de governo e seja balizadora da qualidade da educação. Assim, para além da garantia de acesso e permanência na escola, é necessário que sistemas, redes e escolas garantam um patamar comum de aprendizagens a todos os estudantes, tarefa para a qual a BNCC é instrumento fundamental. (BRASIL, 2018, p. 8).

Alguns estados e municípios elaboram as suas próprias propostas curriculares pautadas na BNCC, por exemplo, no estado de Santa Catarina o documento de referência é chamado de “Documento do Território Catarinense”, já no município de Blumenau é o “Currículo da Educação Básica do Sistema Municipal de Ensino de Blumenau”, por exemplo.

Vale ressaltar que, se buscarmos “frações contínuas” na BNCC, não obtemos nenhum resultado, o que não significa que seja impossível explorar seu ensino na educação básica, uma vez que

> As implicações desta teoria nos diferentes domínios da matemática e afins são inúmeras e não param de nos surpreender, ao mesmo tempo a sua relativa simplicidade permite a sua exploração no âmbito dos diversos conteúdos do 3° ciclo e secundário com vantagens para a compreensão das diferentes conexões que podem estabelecer-se entre diferentes objetos matemáticos que os alunos tendem a compartimentar e a separar. (PAIXÃO, 2012, p. 43).

O componente curricular de matemática trabalha com a ideia de continuidade entre os anos, abordando um mesmo conteúdo nas diferentes séries, criando a ideia de progressão. Basicamente vai se aprimorando o conteúdo, iniciando em uma abordagem mais simples e intuitiva até a formalização do conceito. Assim, ao se pensar no ensino de frações contínuas, também se faz necessário pensar na ideia de progressão.

Iniciando pela matriz do 6° ano, destacam-se duas habilidades que são necessárias para a compreensão do conceito das frações contínuas:

Tabela 9 – Habilidades 6° Ano.

EF06MA03	Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculos (mentais ou escritos, exatos ou aproximados) com números naturais, por meio de estratégias variadas, com compreensão dos processos neles envolvidos com e sem uso de calculadora.
EF06MA07	Compreender, comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros e resultado de divisão, identificando frações equivalentes.

Fonte: (BRASIL, 2018).

Na habilidade EF06MA03 são trabalhadas as operações básicas chamadas de operações fundamentais da aritmética, que são: adição, subtração, multiplicação e divisão. A Divisão Euclidiana dentro dos números naturais não é uma operação fechada uma vez que a divisão de dois números naturais nem sempre é um número natural. A abordagem do Algoritmo da Divisão consiste em, obter um quociente e um resto.

Falta ainda para introduzir as frações contínuas, conhecer o conceito de um número racional na sua forma fracionária. No entanto, nesse ponto o estudante só tem os conceitos de fração que trouxe das séries iniciais do ensino fundamental (1° ao 5° ano). Mas, com a habilidade EF06MA07, onde as frações passarão a ter significado como número, e não apenas como representação de quantidades relacionadas a um todo.

Juntando as duas habilidades é possível uma pequena introdução das frações contínuas no 6° ano. Por exemplo, ao efetuar a divisão Euclidiana de 30 por 7, o quociente encontrado é 4 e o resto é 2, é esperado que o estudante consiga escrever a representação

$$\frac{30}{7} = 4 + \frac{2}{7}.$$

Agora usando a ideia de equivalência de frações trabalhadas também na habilidade EF06MA07

$$\frac{30}{7} = 4 + \frac{1}{\frac{7}{2}}.$$

Efetuando novamente o Algoritmo da Divisão

$$\frac{30}{7} = 4 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2}}.$$

Para essa abordagem de frações contínuas foram usados os conceitos de Divisão Euclidiana, frações e equivalência de frações, todos objetos de estudo do 6° ano do ensino fundamental.

Esse raciocínio já foi tema de uma questão da OBMEP no ano de 2018:

Na igualdade abaixo a,b,c são inteiros. Determine o valor de c, tal que

$$\frac{10}{7} = a + \frac{1}{b + \frac{1}{c}}.$$

É claramente uma fração contínua onde o único processo a ser feito é a aplicação do Algoritmo da Divisão sucessivamente, para encontrar que $a = 1$, $b = 2$ e $c = 3$. Essa questão foi proposta na prova que é aplicada aos estudantes de 6° e 7° ano do ensino fundamental.

No 7° Ano do ensino fundamental destacam-se as habilidades:

Tabela 10 – Habilidades 7° Ano.

EF07MA11	Compreender e utilizar a multiplicação e a divisão de números racionais, a relação entre elas e suas propriedades operatórias.
EF07MA12	Resolver e elaborar problemas que envolvam as operações com números racionais.

Fonte: (BRASIL, 2018).

Seguindo a mesma linha de raciocínio para o 6° ano, acrescenta-se as operações com números racionais, onde além de escrever uma fração na sua forma contínua, pode ser feito o caminho inverso. Ainda pela construção do conjunto dos números inteiros no 7° ano as frações contínuas podem estar contidas nos números racionais positivos e também nos não positivos.

Agora no 8° ano do ensino fundamental destaca-se a habilidade:

Tabela 11 – Habilidades 8° Ano.

EF08MA05	Reconhecer e utilizar procedimentos para a obtenção de uma fração geratriz para uma dízima periódica.

Fonte: (BRASIL, 2018).

O processo para obter uma fração geratriz de um número racional periódico escrito em sua forma decimal, emprega a ideia de equações do 1° grau, podendo ser abordada também por frações contínuas.

Por exemplo, o número $0,\overline{5} = \frac{5}{9}$. Umas das etapas que são feitas é a de verificação do resultado, ou seja, dividir 5 por 9, assim é obtido a representação decimal com parte inteira nula e parte decimal constante de período 5.

A fração contínua está justamente nessa verificação, usando o Algoritmo da Divisão sucessivamente, o primeiro quociente é 0 e o resto é 5, dividindo 9 por 5, o quociente é 1 e o resto é 4. Repetindo a divisão, agora de 5 por 4, temos quociente 1 e resto 1, e a representação fica

$$0,\overline{5} = \frac{5}{9} = 0 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4}}}.$$

Essa abordagem incrementa o já discutido para o 6° e 7° anos.

É na última etapa do ensino fundamental, no 9° ano, que é introduzida a ideia dos números irracionais. Essa transição dos racionais para os reais nem sempre é tão simples de entender, uma vez que o conjunto dos inteiros é construído com a ideia dos números naturais, e o conjunto dos racionais construído a partir dos números inteiros, e os irracionais não são construídos a partir dos racionais, ou seja, um número natural é inteiro, um número inteiro é racional, mas um racional não é irracional.

Destacam-se no 9° ano as habilidades:

Tabela 12 – Habilidades 9° Ano.

EF09MA01	Reconhecer que, uma vez fixada uma unidade de comprimento, existem segmentos de reta cujo comprimento não é expresso por número racional (como as medidas de diagonais de um polígono e alturas de um triângulo, quando se toma a medida de cada lado como unidade).
EF09MA02	Reconhecer um número irracional como um número real cuja representação decimal é infinita e não periódica, e estimar a localização de alguns deles na reta numérica.
EF09MA09	Compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis, para resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2º grau

Fonte: (BRASIL, 2018).

Por exemplo, para explorar a habilidade EF09MA01, pode-se construir um quadrado de lados iguais a 1, aplicando o Teorema de Pitágoras, a diagonal terá medida igual a $\sqrt{2}$. A pergunta que deve ser provocada aos estudantes é: onde esse número está localizado na reta numérica?

Um dos procedimentos que pode ser realizado é estimando a parte decimal por tentativas, que gera tempo e é um trabalho maçante. Uma alternativa a esse processo é o caminho feito por Cataldi, escrevendo a representação em frações contínuas de $\sqrt{2}$, e estimar seu valor decimal por meio dos convergentes.

Note ainda que na habilidade EF09MA09 deve ser explorada a resolução de equações do 2° Grau por meio de fatoração. Novamente, o processo feito por Cataldi pode ser explorado, pois usa justamente a fatoração para encontrar a representação em frações contínuas de $\sqrt{2}$. O mesmo pode ser feito para encontrar o número de ouro que é irracional, e é a raiz positiva de uma equação do 2° grau.

Esse caminho de resolver uma equação do 2° Grau por uma estratégia diferente da fórmula resolutiva é amparado pela BNCC:

> Além dos diferentes recursos didáticos e materiais, como malhas quadriculadas, ábacos, jogos, calculadoras, planilhas eletrônicas e softwares de geometria dinâmica, é importante incluir a história da Matemática como recurso que pode despertar interesse e representar um contexto significativo para aprender e ensinar Matemática. Entretanto, esses recursos e materiais precisam estar integrados a situações que propiciem a reflexão, contribuindo para a sistematização e a formalização dos conceitos matemáticos. (BRASIL, 2018, p. 298).

Apesar de no currículo do ensino fundamental não aparecer a resolução de equações do 2° grau pela fórmula resolutiva, ela é facilmente encontrada nos livros didáticos e costuma ser ensinada no 9° ano, como uma alternativa à fatoração.

Considerando agora a etapa do ensino médio, as frações contínuas podem ser empregadas na mesma linha de raciocínio que foi explorada no ensino fundamental, tendo a ideia de continuidade do currículo, porém é possível trabalhar com problemas um pouco mais sofisticados e com técnicas um pouco mais elaboradas do que no ensino fundamental.

Analisando a matriz do ensino médio proposta na BNCC no componente de matemática e suas tecnologias destaca-se:

> Em continuidade a essas aprendizagens, no Ensino Médio o foco é a construção de uma visão integrada da Matemática, aplicada à realidade, em diferentes contextos. Consequentemente, quando a realidade é a referência, é preciso levar em conta as vivências cotidianas dos estudantes do Ensino Médio – impactados de diferentes maneiras pelos avanços tecnológicos, pelas exigências do mercado de trabalho, pelos projetos de bem viver dos seus povos, pela potencialidade das mídias sociais, entre outros. Nesse contexto, destaca-se ainda a importância do recurso a tecnologias digitais e aplicativos tanto para a investigação matemática como para dar continuidade ao desenvolvimento do pensamento computacional, iniciado na etapa anterior. (BRASIL, 2018, p. 528).

Fica evidente a necessidade de um ensino integrador, que consiga conciliar os conteúdos aprendidos com a realidade. O uso das tecnologias digitais, sendo elas na forma de sites, ou aplicativos para celulares, tem grande relevância no ensino de matemática e já é foco de muitas pesquisas. Com as frações contínuas, podem ser empregadas ferramentas computacionais, como o software Geogebra.

Podem ser trabalhadas as habilidades:

Tabela 13 – Habilidades Ensino Médio.

(EM13MAT301)	Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT315)	Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema.
(EM13MAT314)	Resolver e elaborar problemas que envolvem grandezas determinadas pela razão ou pelo produto de outras (velocidade, densidade demográfica, energia elétrica etc.).

Fonte: (BRASIL, 2018).

A habilidade EM13MAT301 traz a possibilidade de interdisciplinaridade. É possível efetuar uma correspondência de um circuito elétrico usando as frações contínuas, que também podem ser empregadas para a resolução de problemas em astronomia, por exemplo.

Observando a habilidade EM13MAT315, trabalhados os conceitos de frações contínuas o estudante pode ser capaz de construir um fluxograma para escrever uma fração contínua partindo de sua representação racional, e vice-versa.

Juntando as três habilidades da Tabela 13, e do que já foi estudado no ensino fundamental, pode-se empregar as frações contínuas agora para problemas próximos da realidade. Por exemplo, na resolução de problemas que envolvem a razão de semelhança entre medidas, ou na proporção entre duas grandezas, onde a razão de proporção pode ser racional ou irracional.

As frações contínuas mostram-se como uma possibilidade, uma alternativa para resolução de problemas envolvendo conceitos matemáticos que são estudados na educação básica. Apesar de o currículo não trazer especificamente o conteúdo de frações contínuas, ele está permeando a base comum que é ensinada aos estudantes, podendo ser explorada.

No próximo capítulo será discutida uma sequência didática para o ensino de frações contínuas.

6 SEQUÊNCIA DIDÁTICA

O objetivo dessa seção é propor uma sequência didática para o ensino de frações contínuas, seguindo a seguinte estrutura

1. Objetivo Geral

   Apresentar o conceito de frações contínuas e a sua relevância em aplicações nos problemas de aritmética e álgebra.

2. Objetivos Específicos

   - Revisar os conceitos de números racionais e irracionais e suas representações;
   - Aplicar o Algoritmo de Euclides para escrever a representação em frações contínuas de um número racional;
   - Obter aproximações de números irracionais por meio das frações contínuas.

3. Metodologia

   As aulas ocorrerão de maneira expositiva e dialogada com a participação dos estudantes, na sequência

   - Apresentar uma breve revisão sobre números racionais e irracionais;
   - Apresentar o Algoritmo de divisão de Euclides e sua aplicação para determinar o máximo divisor comum;
   - Apresentar a definição de uma fração contínua e exemplos de como escrever uma fração contínua partindo da representação racional de um fração;
   - Encontrar a representação em fração contínua dos números irracionais $\sqrt{2}$ e do número de ouro φ, de forma algébrica e com uso do software Geogebra;
   - Usar a metodologia das frações contínuas para resolver problema de periodicidade.

4. Materiais

   Canetão, apagador, quadro branco, celular ou computador para acesso ao Geogebra, lápis, caneta e papel.

6.1 AULA 1

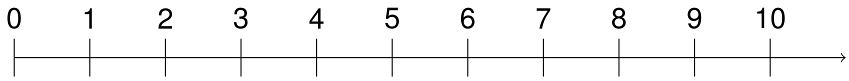
Para o desenvolvimento dessa aula é sugerido o tempo de 40 à 50 minutos.

Você lembra o que é um número racional, irracional, ou real? Nessa aula vamos relembrar os conjuntos numéricos.

Os números naturais representados pelo símbolo $\mathbb{N}$ são formados pelos números

$$\mathbb{N} = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,\ldots\}.$$

O conjunto também pode ser representado utilizando-se uma reta numerada

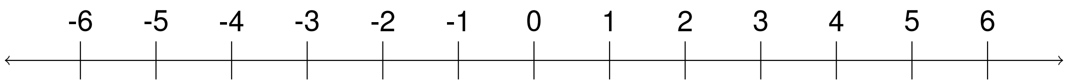


Os números naturais estão relacionados principalmente a problemas de contagem. As operações nesse conjunto são restritas, são bem definidas apenas para a soma e multiplicação de números naturais. Já a operação de subtração $a - b$ não é possível quando a for menor do que b, como é o caso da subtração $8 - 10$, pois -2 não é um número natural.

O conjunto dos números inteiros representado pelo símbolo $\mathbb{Z}$, pode ser construído acrescentando ao conjunto dos números naturais, todas essas subtrações que não são possíveis em $\mathbb{N}$. Onde $0-1$, $1-2$, $2-3$, ..., são representadas por -1, já o número -2 é a representação das diferenças de $0-2$, $1-3$, ..., e assim sucessivamente. Logo, o conjunto do números inteiros tem os seguintes elementos,

$$\mathbb{Z} = \{\ldots,-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,\ldots\}.$$

A representação dos números inteiros em uma reta numerada fica



Note que, a operação de divisão nem sempre é possível em $\mathbb{Z}$, por exemplo, a divisão de 5 por -3 não está definida nos números inteiros, sendo assim existem números que não são inteiros e que serão representados por outros conjuntos.

O conjunto dos números racionais é representado pelo símbolo $\mathbb{Q}$ e é formado por todos os números que podem ser escritos na forma de fração, isto é

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} : a,b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\right\},$$

onde a é chamado de numerador e b de denominador. São exemplos de números que podem ser escritos na forma de fração

1. Todo número Natural

   a) $0 = \frac{0}{1}$;

b) $18 = \frac{18}{1}$.

2. Todo número inteiro

a) $7 = \frac{7}{1}$;

b) $-15 = \frac{-15}{1}$.

3. Os decimais finitos

a) $0{,}25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$;

b) $1{,}1125 = \frac{11.125}{10.000} = \frac{89}{80}$.

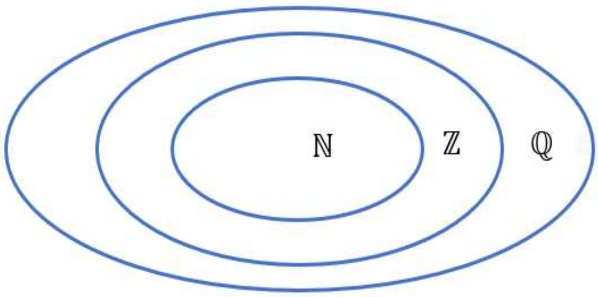
4. As dízimas periódicas

a) $0{,}5555... = 0{,}\overline{5} = \frac{5}{9}$;

b) $6{,}545454... = 6{,}\overline{54} = \frac{72}{11}$.

Todo número natural é inteiro e todo número inteiro é racional. Temos, portanto, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ (Figura 11).

Figura 11 – Números racionais.



No conjunto dos números racionais são bem definidas as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão (quando o divisor não for nulo).

Existe ainda um tipo de número que não abordamos, que são os números que não podem ser escritos na forma de fração, cuja representação decimal são as dízimas não periódicas. Esses números formam o conjunto dos números irracionais, representados pelo símbolo $\mathbb{I}$. São exemplos de números irracionais

a) O número pi, cujo símbolo é π e seu valor aproximado é $3{,}14159265359\ldots$;

b) O número $\sqrt{2}$ que pode ser representado pela diagonal de um quadrado de lado 1;

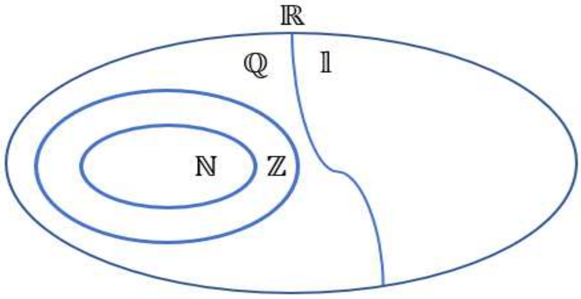
c) O número de ouro, cujo símbolo é φ e seu valor aproximado é $1{,}61803398875\ldots$;

d) O número de Euler, base dos logaritmos naturais, representado por e e de valor aproximado $2{,}71828182846_{\ldots}$.

É com a união dos conjuntos dos números racionais e irracionais, que formamos o conjunto dos números reais, representado pelo símbolo $\mathbb{R}$

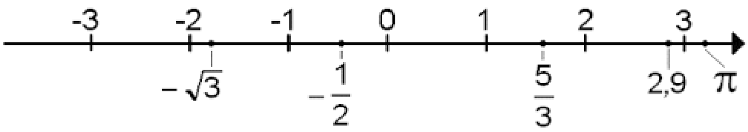
$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}.$$

Figura 12 – Números Reais.



Com os números racionais e irracionais a reta numérica fica totalmente preenchida como podemos ver na representação abaixo.

Figura 13 – Reta dos números reais.



Exercício proposto.

1. Complete com os símbolos de pertence ($\in$) ou de não pertence ($\notin$)

   a) -4 ______ $\mathbb{N}$
   b) $-1{,}233$ ______ $\mathbb{I}$
   c) $-\pi$ ______ $\mathbb{Q}$
   d) $\sqrt{2}$ ______ $\mathbb{R}$
   e) $-\frac{10}{2}$ ______ $\mathbb{Z}$
   f) $1{,}9999999\ldots$ ______ $\mathbb{Q}$
   g) $55{,}25$ ______ $\mathbb{Z}$
   h) $18-55$ ______ $\mathbb{N}$

Gabarito

1. a) -4 $\underline{\ \notin\ }$ $\mathbb{N}$
   b) $-1{,}233$ $\underline{\ \notin\ }$ $\mathbb{I}$
   c) $-\pi$ $\underline{\ \notin\ }$ $\mathbb{Q}$
   d) $\sqrt{2}$ $\underline{\ \in\ }$ $\mathbb{R}$
   e) $-\frac{10}{2}$ $\underline{\ \in\ }$ $\mathbb{Z}$
   f) $1{,}9999999\ldots$ $\underline{\ \in\ }$ $\mathbb{Q}$
   g) $55{,}25$ $\underline{\ \notin\ }$ $\mathbb{Z}$
   h) $18-55$ $\underline{\ \notin\ }$ $\mathbb{N}$

6.2 AULA 2

Para o desenvolvimento dessa aula é sugerido o tempo de 40 à 50 minutos.

O Algoritmo da Divisão, é usado para determinar a divisão de dois números inteiros. Por exemplo, para dividir 19 por 5, obtemos quociente e um resto, que são 3 e 4, respectivamente. Assim podemos escrever que $19 = 5 \cdot 3 + 4$.

O Algoritmo da Divisão pode ainda ser empregado para encontrar o máximo divisor comum entre dois números inteiros, chamado de MDC.

Exemplo 22 *Encontre o máximo divisor comum entre os números 848 e 656.*

Ao efetuar a divisão de 848 e 656, obtemos quociente 1 e resto 192. Agora o processo é dividir o divisor anterior pelo resto obtido.

Assim, dividindo 656 por 192 o quociente é 3 e o resto 80, dividindo 192 por 80 o quociente é 2 e o resto 32, dividindo 80 por 32 o quociente é 2 e o resto é 16, dividindo 32 por 16 o quociente é 2 e o resto é 0:

$$\begin{aligned}
656 &= 192 \cdot 3 + 80. \\
192 &= 80 \cdot 2 + 32. \\
80 &= 32 \cdot 2 + 16. \\
32 &= 16 \cdot 2 + 0.
\end{aligned}$$

O máximo divisor comum de 848 e 616 é 16, e indicamos $mdc(848,656) = 16$.

Exercícios:

1. Encontre o máximo divisor comum entre:

    a) 352 e 416

    b) 360 e 288

    c) 24 e 16

    d) 35 e 49

Gabarito

1.
    a) 32

    b) 72

    c) 1

    d) 1

6.3 AULA 3

Para o desenvolvimento dessa aula é sugerido o tempo de 100 à 120 minutos.

Nessa aula vamos definir uma fração contínua, que é maneira de representação de números reais. Uma fração contínua finita é da forma:

$$\frac{r}{s} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots + \cfrac{1}{a_n}}}$$

em que todos os termos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ são números inteiros, e os termos após a_1 são positivos.

Uma fração contínua finita é chamada de simples caso todos os termos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ forem inteiros.

Para escrever um número racional na forma de fração contínua empregamos o Algoritmo da Divisão sucessivamente, o mesmo empregado para o cálculo do MDC.

Lembrando que, um número na representação fracionária é escrito sempre em sua forma irredutível, o seja, o MDC entre o numerador a e denominador b é $mdc(a,b) = 1$, nesse caso dizemos que a e b são primos entre si.

Exemplo 23 *Escreva a representação em frações contínuas do número*

$$\frac{35}{22}.$$

Efetuando a divisão de 35 por 22, o quociente é 1 e o resto 13, dividindo 22 por 13 o quociente é 1 e o resto 9, dividindo 13 por 9 o quociente é 1 e o resto é 4, dividindo 9 por 4, o quociente é 2 e o resto 1, e dividindo 4 por 1 o quociente é 4 e o resto 0, segue então

$$\begin{aligned} 35 &= 22 \cdot 1 + 13. \\ 22 &= 13 \cdot 1 + 9. \\ 13 &= 9 \cdot 1 + 4. \\ 9 &= 4 \cdot 2 + 1. \\ 4 &= 1 \cdot 4 + 0. \end{aligned}$$

Observe agora que

$$\frac{35}{22} = 1 + \frac{13}{22}.$$

A fração 13/22 pode ser dividida por 13, nesse caso temos

$$\frac{35}{22} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{22}{13}}.$$

Substituindo a divisão de 22 por 13

$$\frac{35}{22} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{9}{13}}.$$

Dividindo a fração 9/13 por 9 e substituindo a divisão de 13 por 9, e sucessivamente repetindo o mesmo procedimento, obtemos

$$\frac{35}{22} = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{9}{13}} = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{13}{9}}} = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{4}{9}}},$$

$$\frac{35}{22} = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4}}}}.$$

Observe os coeficientes da fração contínua obtida e compare com os quocientes obtidos no Algoritmo das Divisões sucessivas (destacados).

Quando a representação em frações contínuas é extensa, pode ser útil a simplificação na notação

$$\frac{35}{22} = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4}}}} = [1;1,1,1,2,4].$$

Exercícios:

1. Usando o algoritmo das divisões sucessivas, encontre a representação em frações contínuas dos números racionais
   a) $\frac{68}{15}$;
   b) $\frac{44}{17}$;
   c) $\frac{5}{7}$.

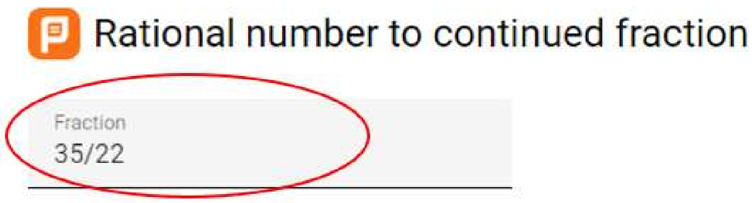
Gabarito

1. a) [4;1,1,7];
   b) [2;1,1,2,3];
   c) [0;1,2,2].

As respostas podem ser conferidas pelo PLANETCALC Calculadoras online[7], um site que converte um número racional para a sua representação em frações contínuas, e vice versa. A interface da calculadora é de fácil manipulação, conforme mostrado na Figura 14.

[7] https://pt.planetcalc.com/8456/

Figura 14 – Entrada PLANETCALC.



Logo abaixo aparecerá a representação em frações contínuas procurada (Figura 15)

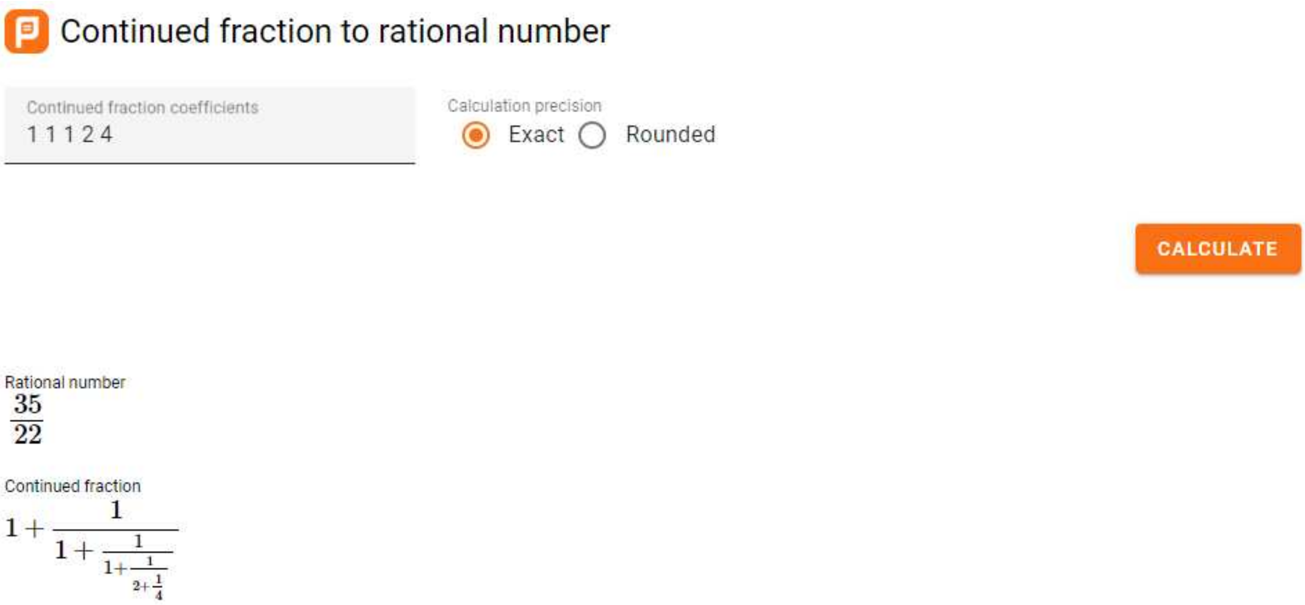
Figura 15 – Resultado PLANETCALC.

Continued fraction

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4}}}}$$

No PLANETCALC ainda é possível entrar com os coeficientes da fração contínua para obter a fração da forma racional

Figura 16 – Resultado PLANETCALC.



6.4 AULA 4

Para o desenvolvimento dessa aula é sugerido o tempo de 100 à 120 minutos.

Nessa aula vamos tratar dos números irracionais, alguns deles tem representações bem curiosas quando escritos na forma de frações contínuas.

O número de ouro representado por φ, possui aplicações em diversos campos, principalmente na geometria. O número de ouro é obtido pela razão ou proporção áurea: Dada uma linha reta dividida em dois segmentos, estes estão em proporção áurea se, e somente se, a linha toda está para o maior segmento e o maior segmento está para o menor. Geometricamente

Figura 17 – Proporção áurea.

Ao efetuar a divisão de x por y obtemos

$$x = 1 \cdot y + (x - y).$$

Continuando as divisões sucessivamente, os quocientes são sempre unitários, ou seja

$$\varphi = \frac{x}{y} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}}.$$

Com a linguagem algébrica usual podemos encontrar o valor da proporção áurea rapidamente:

$$\frac{x}{y} = \frac{x+y}{x} \quad \Rightarrow \quad x \cdot x = (x+y) \cdot y \quad \Rightarrow \quad x^2 = x \cdot y + y^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 - x \cdot y - y^2 = 0,$$

que é uma equação do 2° grau na incógnita x. Aplicando a fórmula resolutiva de equações do 2° grau, obtemos

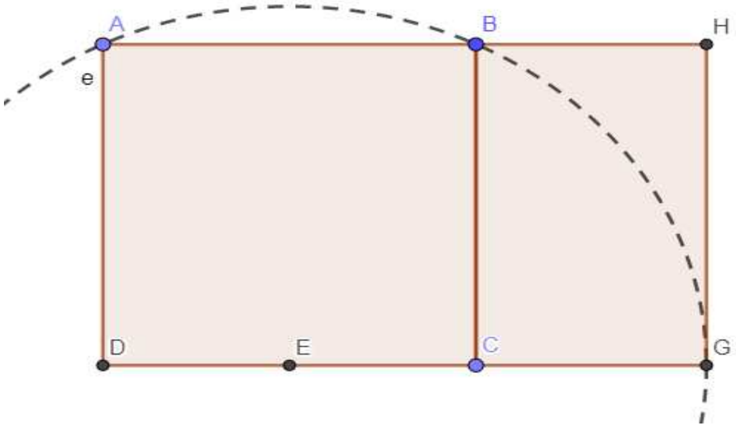
$$x^2 - x \cdot y - y^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{y + \sqrt{(-y)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-y^2)}}{2} = \frac{y + y\sqrt{5}}{2},$$

ou seja, a razão áurea é

$$\frac{x}{y} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

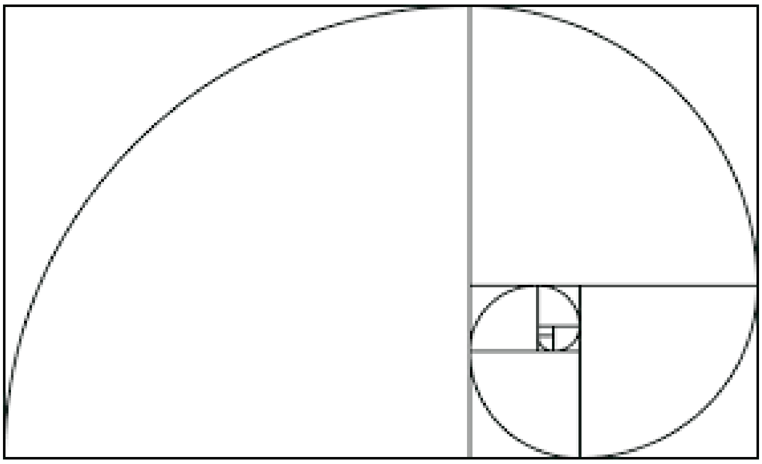
A sua principal aplicação é o retângulo áureo. Para construir o retângulo áureo, comece desenhando um quadrado de lado x, prolongue um dos lados desse quadrado e marque o seu ponto médio, digamos E. Agora com um compasso coloque a ponta seca em M e a ponta do grafite no vértice superior B, trace uma circunferência até o lado prolongado, obtendo a interseção G, essa interseção é o vértice do retângulo procurado. Complete o retângulo e teremos o retângulo áureo

Figura 18 – Construção do retângulo áureo.



Para o retângulo ser áureo ao ser retirado dele um quadrado, o retângulo remanescente é sempre semelhante ao inicial, repetindo esse processo infinitamente as dimensões do quadrado tendem a zero, pois são obtidas pela diferença dos lados maior e menor do retângulo. Assim, obtemos

Figura 19 – Construção do retângulo áureo.



Fonte: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/retangulos.htm

Vejamos agora um exemplo para encontrar a representação em frações contínuas de $\sqrt{2}$.

1. Obtenha a representação em frações contínuas do número $\sqrt{2}$, partindo da equação $x^2 + 2x - 1 = 0$.

Solução

A equação pode ser reescrita na forma

$$x^2 + 2x = 1.$$

Colocando x em evidência

$$x \cdot (x + 2) = 1. \tag{79}$$

Agora note que, podemos escrever a equação $x^2+2x-1=0$ na seguinte forma

$$(x+1)^2=2.$$

E, elevando ambos os membros a potência 1/2, e depois isolando x, obtemos

$$x=\frac{1}{x+2}. \tag{80}$$

Substituindo sucessivamente x por $\dfrac{1}{x+2}$ no membro direito da equação (80), obtemos

$$x=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cdots}}}=\sqrt{2}-1.$$

Ou seja, a representação em fração contínua do número $\sqrt{2}$ é

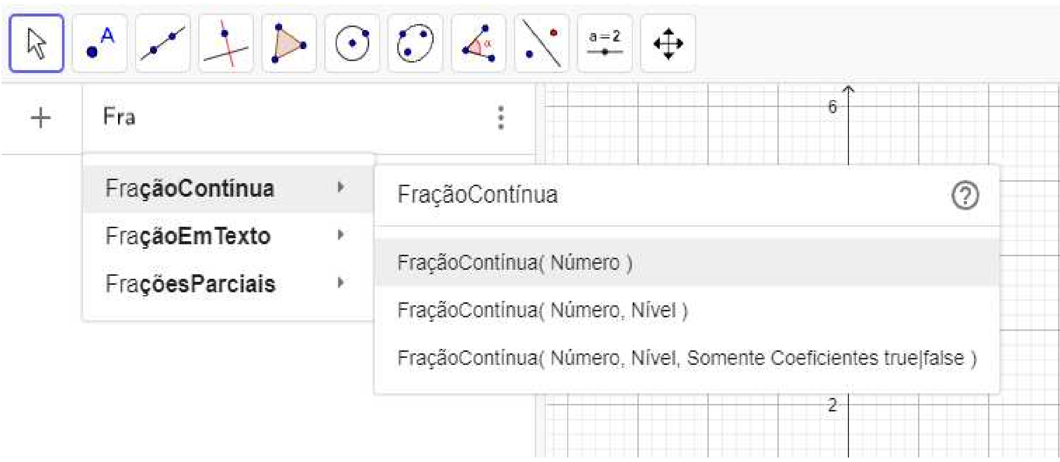
$$\sqrt{2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cdots}}}.$$

Podemos usar o software Geogebra para encontrar a representação em fração contínua de um número irracional.

Para isso, digite no campo de entrada: "Fração...."e selecione o comando "FraçãoContinua". Existem três opções, a primeira fornece imediatamente a fração contínua do número informado com precisão de 10^{-8}, na segunda opção é possível selecionar a quantidade de quocientes, chamado de "Nível", porém não é possível exceder a precisão de 10^{-8} e na terceira opção o software escreve a fração contínua na forma $[a_1;a_2,\ldots]$.

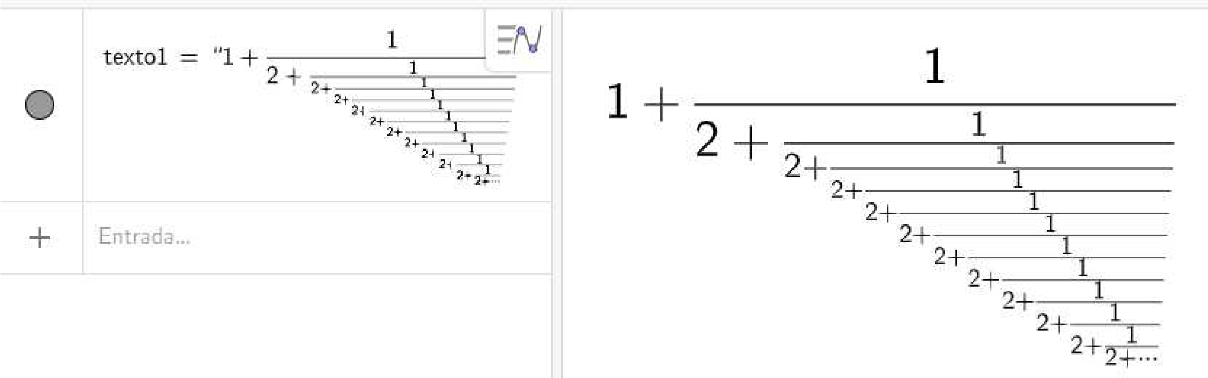
A interface do software mencionada é apresentada na Figura 20. O software é de fácil manipulação, gratuito e pode ser usado também pelo aplicativo no celular, tanto para Andriod ou IOS.

Figura 20 – Fração contínua no Geogebra.



Usando a primeira opção para frações contínuas no Geogebra, vamos encontrar a representação do número $\sqrt{2}$

Figura 21 – Fração contínua no Geogebra.



Exercícios propostos.

1. Encontre no Geogebra a representação em frações contínuas dos números:
   a) $\sqrt{3}$;
   b) O número de Euler e;
   c) O número π.
2. Encontre a solução positiva da equação $x^2-5x-1=0$ na forma de fração contínua.

Observação: No Geogebra os números de Euler e o número π podem ser inseridos como "e" e "pi", respectivamente.

Gabarito

1. a) $[1;1,2,1,2,1,2,1,2,\ldots]$;
   b) $[1,1,2,1,1,4,1,1,6,\ldots]$;
   c) $[3;7,15,292,\ldots]$.
2. Solução esperada

Da equação $x^2-5x-1=0$, podemos dividir ambos os membros por x, umas vez que ele é diferente de zero, e reescrever a equação:

$$\begin{aligned} x^2-5x-1 &= 0, \\ x-5-\frac{1}{x} &= 0, \\ x &= 5+\frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Substituindo x do denominador sucessivamente pela relação encontrada, obtemos

$$x = 5+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{\ddots+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{x}}}}}.$$

Para conferir a resposta no Geogebra é necessário encontrar a raiz positiva da equação do 2° grau pela fórmula resolutiva, e informar a raiz obtida no campo número.

6.5 AULA 5

O objetivo dessa aula é resolver problemas por meio das frações contínuas. Considere o seguinte problema:

1. Um relojoeiro deseja construir duas roldanas dentadas na razão $\sqrt{2}$ por 1, e que as roldanas tenham no mínimo 20 dentes. Determine algumas possibilidades para a construção dessa roldana.

Solução

Chamando de a e b a quantidade de dentes da roldana maior e da menor, respectivamente, temos

$$\frac{a}{b} = \sqrt{2}.$$

Anteriormente já encontramos a representação em frações contínuas do número irracional $\sqrt{2}$, que é

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}}.$$

Vamos calcular agora os convergentes (aproximações) da fração contínua, lembrando que pelo fato da irracionalidade de $\sqrt{2}$ estamos procurando uma aproximação. Com seis casas decimais é temos que $\sqrt{2}$ vale 1,414214:

- 1° Convergente

$$\sqrt{2} = 1.$$

- 2° Convergente

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1{,}5.$$

- 3° Convergente

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{5}{2}} = 1 + \frac{2}{5} = \frac{7}{5} = 1{,}4.$$

- 4° Convergente

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\cfrac{5}{2}}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{2}{5}} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{12}{5}} = 1 + \frac{5}{12} = \frac{17}{12} = 1{,}416667.$$

Vamos analisar os convergentes obtidos e as suas aproximações em relação a $\sqrt{2}$.

No primeiro convergente a fração “1/1” indica que as roldanas teriam um dente cada, note que a aproximação em relação ao valor da raiz quadrada de 2 não é tão boa, temos um erro de aproximadamente 0,414214.

Já no segundo convergente obtemos que a roldana maior terá 3 dentes enquanto a menor terá 2, apesar de não atender as condições iniciais do problema, o erro da aproximação é de aproximadamente 0,086.

No terceiro convergente obtemos que a roldana maior terá 7 dentes e a menor 5 dentes, ainda não atendendo as condições do problema, porém o erro é de aproximadamente 0,0142.

Por fim no quarto convergente atendemos as condições do problema, de as roldanas terem 20 dentes, encontramos que a roldana maior terá 17 dentes e a menor 12 dentes, e nesse caso o erro será de aproximadamente 0,0024. Todos os próximos convergentes também atenderiam as condições propostas. A seguir apresentamos os 8 primeiros convergentes do problema

Tabela 14 – Convergentes de $\sqrt{2}$.

n	1	2	3	4	5	6	7	8
Convergentes	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{17}{12}$	$\frac{41}{29}$	$\frac{99}{70}$	$\frac{239}{169}$	$\frac{577}{408}$

Exercício proposto.

1. Obtenha uma aproximação racional para o número π de modo que o erro encontrado seja menor que um milésimo. Para isso considere que $\pi = 3{,}141592$.

Solução

Podemos escrever que

$$\pi = 3{,}1415 = \frac{31415}{10000}.$$

Aplicando o Algoritmo da Divisão sucessivamente:

$$\begin{aligned}
31.415 &= 3 \cdot 10.000 + 1.415, \\
10.000 &= 7 \cdot 1.415 + 95, \\
1.415 &= 14 \cdot 95 + 85, \\
95 &= 1 \cdot 85 + 10, \\
85 &= 8 \cdot 10 + 5, \\
10 &= 2 \cdot 5 + 0.
\end{aligned}$$

Logo, a fração contínua procurada é

$$3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{14 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{2}}}}}.$$

Calculando os convergentes, temos

- 1° convergente

$$c_1 = 3.$$

- 2° convergente

$$c_2 = 3 + \frac{1}{7} = \frac{22}{7} = 3{,}1429.$$

Os demais convergentes não são necessários, pois para c_2 já obtemos o erro desejado:

$$\left|\pi - \frac{22}{7}\right| = 0{,}0013.$$

Dessa forma as frações contínuas podem ser empregadas para aproximar números irracionais por meio de números racionais.

7 CONCLUSÃO

Nosso objetivo central era mostrar aplicações dentro do campo da álgebra e da aritmética tendo como ferramenta as frações contínuas. Objetivo esse que pode ser justificado com a breve abordagem da história relacionada com as frações contínuas, onde as mesmas mostram a sua relevância em temas que nos dias atuais já estão bem difundidos.

Como mostrado, as frações contínuas iniciam com fundamentos matemáticos de fácil entendimento devido a sua simplicidade, como é o caso do algoritmo de divisões sucessivas de Euclides, indo até conceitos de Álgebra mais complexos, como é o caso dos números algébricos. Particularmente, como foi mostrado no Teorema de Liouville, servindo como base para identificação também dos números transcendentes.

As equações diofantinas no olhar das frações contínuas mostram-se como uma alternativa ao método das divisões sucessivas, é de extrema relevância a propriedade dos produtos cruzados nas tabelas de convergentes, abrindo caminho para generalização de outros tipos de equações derivadas das diofantinas, que não foram abordadas aqui.

Na mesma linha das equações diofantinas, as congruências lineares tem seu destaque como uma ferramenta para a sua resolução. No exemplo apresentado de uma questão do Exame Nacional de Qualificação do PROFMAT, o problema poderia ser resolvido transformando a congruência em uma equação diofantina, ou pelo Teorema Chinês dos Restos, aqui preferimos mostrar a simplicidade de sua resolução usando as frações contínuas.

Já as equações de Pell são sem dúvida a beleza da aplicação das frações contínuas, pela simplicidade do problema e a complexidade de encontrar a sua solução, possível em função das frações contínuas. Para encontrar as soluções inteiras da equação de Pell foi necessário estudar a representação periódica dos números irracionais quadráticos reduzidos, que apresentam a sua expansão em frações contínuas de forma periódica.

As aplicações para o cálculo e determinantes tiveram apenas o olhar da aplicabilidade, mostrando que é possível usar determinantes para encontrar os convergentes de uma fração contínua. É evidente que nem sempre o cálculo do determinante será simples. A seção dos números algébricos teve a sua relevância por aplicar o Teorema de Liouville, que é um teorema de análise complexa, usado na demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra.

Com isso conclui-se que as frações contínuas podem ser aplicadas nos diferentes níveis de ensino, como mostrado no desenvolvimento desse trabalho. Os temas centrais ligados a educação básica discutidos na seção da BNCC e da sequência didática podem ser aprofundados e explorados, de acordo com a necessidade do professor e dos estudantes.

Considerando ainda que o estudo das frações contínuas é relativamente recente e não muito explorado no ensino básico e nos cursos superiores de formação de professores, espera-se que esse trabalho sirva como uma possibilidade para o professor da educação básica em suas pesquisas e estudo no campo das frações contínuas.

REFERÊNCIAS

BOYER, Carl B.; MERZBACH, Uta c. **História da matemática**. 3. ed. São Paulo: Tradução de Helena de Castro, 2012.

BRASIL. **Base Nacional comum Curricular**: Educação é a Base. Brasília, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 10 jan. 2023.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. 5. ed. Campinas: Taduçaõ de Hygino H. Domingues, 2011.

LORIO, Marcelo Nascimento. **Aproximações de números reais por números racionais: Por que as convergentes de frações contínuas fornecem as melhores aproximações?** Rio de Janeiro, 2016. Disponível em: https://www.maxwell.vrac.puc-rio.br/colecao.php?strSecao=resultado&nrSeq=23981@1. Acesso em: 19 jan. 2023.

MARTINEZ, Fabio E. Brochero; A. MOREIRA, Carlos Gustavo T. de; SALDANHA, Nicolau C.; TENGAN, Eduardo. **Teoria dos Números: um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro**. 5 ed. Rio de Janeiro, 2018.

MOORE, Charles G. **An Introduction to Continued Fractions**. 3. ed. Washington: ERIC, 1964.

OLDS, Carl Douglas. **CONTINUED FRACTION**. 9 ed. Washington, 1963.

PAIXÃO, João Carreira. **Sucessões e Frações Contínuas**. 166. ed. Lisboa, 2012. Disponível em: https://gazeta.spm.pt/getArtigo?gid=358. Acesso em: 19 jan. 2023.

REZENDE JORGE, Danielle de. **FRAÇÕES CONTÍNUAS: PROPRIEDADES ERGÓDICAS E DE APROXIMAÇÃO**. Rio de Janeiro, 2006. Disponível em: https://www.maxwell.vrac.puc-rio.br/colecao.php?strSecao=resultado&nrSeq=8731@1. Acesso em: 30 jan. 2023.

SAUTOY, Marcos du. **Como a Índia revolucionou a matemática séculos antes do Ocidente**. [*S.l.*], 2019. Disponível em: https://www.bbc.com/portuguese/geral-47487130. Acesso em: 15 fev. 2023.