



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
CAMPUS FLORIANÓPOLIS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

Brunno Henrique Brito

**Estratégia Baseada em Particionamento e Simetria para Resolver o Problema da  
Programação da Operação de Usinas Hidrelétricas**

Florianópolis - SC

2023

Brunno Henrique Brito

**Estratégia Baseada em Particionamento e Simetria para Resolver o Problema da  
Programação da Operação de Usinas Hidrelétricas**

Tese submetida ao Programa de Pós-graduação em  
Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Santa  
Catarina para a obtenção do título de Doutor em  
Engenharia Elétrica

Orientador: Prof. Erlon Cristian Finardi, D. Eng.

Coorientador: Prof. Fabrício Yutaka Kuwabata  
Takigawa, D. Eng.

Florianópolis - SC

2023

Brito, Bruno Henrique

Estratégia Baseada em Particionamento e Simetria para Resolver o Problema da Programação da Operação de Usinas Hidrelétricas / Bruno Henrique Brito ; orientador, Erlon Cristian Finardi, coorientador, Fabrício Yutaka Kuwabata Takigawa, 2023.

132 p.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Florianópolis, 2023.

Inclui referências.

1. Engenharia Elétrica. 2. Programação da operação de usinas hidrelétricas. 3. Programação linear inteira mista. 4. Função de produção hidrelétrica. I. Finardi, Erlon Cristian. II. Takigawa, Fabrício Yutaka Kuwabata. III. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica. IV. Título.

Brunno Henrique Brito

**Estratégia Baseada em Particionamento e Simetria para Resolver o Problema da  
Programação da Operação de Usinas Hidrelétricas**

O presente trabalho em nível de Doutorado foi avaliado e aprovado, em 13 de setembro de 2023, pela banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. André Luís Marques Marcato, Dr.  
Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Murilo Reolon Scuzziato, Dr.  
Instituto Federal de Santa Catarina

Asteroide Santana, Dr.(a)  
Mip Wise

Certificamos que esta é a versão original e final do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica.



Prof. Telles Brunelli Lazzarin  
Coordenador do Programa de Pós-Graduação



Prof. Erlon Cristian Finardi, Dr.  
Orientador

Florianópolis, 2023.

## RESUMO

O problema da Programação da Operação de Usinas Hidrelétricas (POUH) visa definir quais Unidades Geradoras (UGs) devem ser usadas no atendimento às metas de geração definidas em intervalos de 30 minutos no dia seguinte. Essas metas são calculadas pelo Operador Nacional do Sistema Elétrico (ONS) para assegurar a otimização dos recursos de geração disponíveis do Sistema Interligado Nacional (SIN). Matematicamente, a POUH é um problema de Programação Não Linear Inteira Mista (PNLIM) de grande porte, sendo que, ultimamente, estratégias baseadas em Programação Linear Inteira Mista (PLIM) têm se destacado na solução deste PNLIM devido aos eficientes softwares comerciais disponíveis. O principal desafio no uso da PLIM para a solução do problema da POUH é encontrar um balanço entre a representação detalhada da Função de Produção Hidrelétrica (FPH), uma função não convexa e dependente de duas variáveis principais (queda líquida e vazão turbinada), e um tempo de solução compatível com o horizonte do problema. Neste ambiente, pode-se citar duas estratégias construtivamente opostas: funções Lineares Por Partes (LPP) não convexas que produzem excelentes aproximações a um custo computacional elevado; em contrapartida, funções LPP côncavas que favorecem o desempenho, mas não conseguem lidar eficientemente com os erros de linearização. Para obter esse balanço, este trabalho inicialmente estima os valores de queda bruta e particiona a FPH univariada resultante, dependente apenas da vazão turbinada, em regiões côncavas e convexas. Na sequência, as regiões côncavas são representadas via *Convex Hull*, enquanto as demais fazem uso do modelo Logarítmico Agregado de Combinação Convexa (LACC). Considerando que a FPH deve ser atualizada iterativamente para melhor considerar o efeito da queda, torna-se necessária uma formulação com poucas restrições e variáveis. Para atingir esse propósito, o presente trabalho se apoia no fato de que usinas possuem majoritariamente UGs idênticas para explorar a simetria, determinando assim o número de (e não quais) UGs que devem operar na região côncava. Isso é possível porque as UGs idênticas que operam na região côncava têm despacho idêntico na solução ótima. Como essa premissa não é válida para as regiões convexas, o modelo LACC é empregado para aproximar a FPH em cada região convexa da UG. Adicionalmente, este trabalho propõe o uso do algoritmo Ramer–Douglas–Peucker (RDP) para selecionar de maneira controlada os pontos que serão utilizados na aproximação LPP das FPHs univariadas em cada iteração. Tendo como base um problema de POUH elaborado para uma cascata com quatro usinas, 53 UGs de 6 tipos e 24 estágios, a estratégia proposta solucionou o problema em um tempo 99,9% inferior à formulação que realiza uma aproximação não convexa de todo o domínio da FPH bivariada via LACC.

**Palavras-chave:** Programação da operação de usinas hidrelétricas. Programação linear inteira mista. Função de produção hidrelétrica. Particionamento da função de produção hidrelétrica. Exploração da simetria.

## ABSTRACT

The Scheduling Operation of Hydro Plants (SOHP) problem aims to define which generating units (GUs) should be used to meet the generation goals defined at intervals of 30 minutes on the day following. These targets are calculated by the National Electric System Operator to ensure the optimization of the generation resources available from the National Interconnected System. Mathematically, in most practical cases, the SOHP is a large-scale Mixed Integer Non-Linear Programming (MINLP) problem, and lately, strategies based on Mixed Integer Linear Programming (MILP) have been highlighted in the solution of this MINLP due to efficient commercial software available. The main challenge in using MILP for the MINLP solution is to find a balance between the detailed representation of the Hydro Production Function (HPF) and a solution time compatible with the needs of the SOHP. In this environment, two constructively opposed strategies can be mentioned: non-convex Linear Per Part (LPP) functions produce excellent approximations at a high computational cost; in contrast, concave LPP functions favor performance but cannot efficiently handle linearization errors. To obtain this balance, this work partitions the HPF, initially represented only as a function of the turbined outflow, into concave and convex regions. Next, the concave regions are represented via Convex Hull, while the others make use of the Logarithmic Aggregated Convex Combination (LACC) model. Considering that the FPH must be updated iteratively to better include the effect of the head, a formulation with few constraints and variables is necessary. To achieve this purpose, the work is based on the fact that plants have mostly identical GUs to explore symmetry, thus determining the number of (and not which) identical GUs that must operate in the concave region. This is possible because identical GUs operating in the concave region have identical dispatch in the optimal solution. As this assumption is not valid for the convex regions, the LACC model is used to approximate the HPF in each convex region and GU individually. Additionally, this work proposes the use of the Ramer–Douglas–Peucker (RDP) algorithm to select in a controlled manner the points that will be used in the LPP approximation of the univariate HPFs in each iteration. Based on a SOHP problem developed for a cascade with four plants, 53 UGs of 6 types and 24 stages, the proposed strategy found results similar to the formulation that performs a non-convex approximation of the entire domain of the bivariate HPF via LACC, but with a reduction of execution time of more than 99,9%.

**Keywords:** Scheduling the operation of hydro plants. Mixed integer linear programming. Hydroelectric production function. Partitioning of the hydroelectric production function. Exploration of symmetry.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Exemplo de uma FPH.....	17
Figura 2 – Componentes básicos de uma UHE. Adaptado de (COELHO, 2006).....	32
Figura 3 – Exemplo de curva colina (FINARDI e DA SILVA, 2005).....	38
Figura 4 – Estratégia proposta. ....	47
Figura 5 – Regiões côncava e convexas de uma FPH. ....	50
Figura 6 – Erros de linearização por partes usando quatro e nove pontos igualmente espaçados em uma FPH unidimensional. ....	53
Figura 7 – Erros de linearização por partes usando quatro pontos com espaçamentos equidistantes e diferentes.....	54
Figura 8 – Exemplo de aplicação do algoritmo RDP. ....	55
Figura 9 – Discretização de uma FPH via algoritmo RDP.....	56
Figura 10 – Linearização de uma FPH univariada a partir de cinco pontos.....	61
Figura 11 – Códigos binários que endereçam os politopos. ....	61
Figura 12 - Sistema simulado. ....	67
Figura 13 – Cenários de metas de geração e quedas brutas.....	70
Figura 14 – Número de UGs despachadas para diferentes discretizações. ....	72
Figura 15 – Funções cotas de montante e jusante nas UHEs 1 e 3.....	73
Figura 16 – Pontos extraídos do RDP e ponto de inflexão nas UHEs 1 e 3.....	75
Figura 17 – Volumes obtidos por <b>PROP</b> (com $\epsilon = 0,005$ ) e <b>LACC</b> no sistema reduzido.....	80
Figura 18 – UGs despachadas e rendimento global. ....	84
Figura 19 – Cenários de metas de geração e quedas brutas para a cascata com quatro UHEs.....	87
Figura 20 – Quantidade de UGs despachadas. ....	89
Figura 21 – Quantidade de UGs despachando na região convexa. ....	90
Figura 22 – Rendimento global nas UHEs. ....	91
Figura 23 – Volumes nos reservatórios das UHEs. ....	92

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Artigos publicados no período.....	29
Tabela 2 – Dimensões das formulações individual e simétrica via CH para a FPH univariada. .....	59
Tabela 3 – Dimensões das formulações individual e simétrica na região côncava para 5, 12 e 26 UGs idênticas.....	59
Tabela 4 - Principais características operacionais das usinas.....	68
Tabela 5 – Coeficientes da função cota de montante. ....	68
Tabela 6 – Coeficientes das funções cota de jusante e perdas hidráulicas.....	68
Tabela 7 – Coeficientes das funções de rendimento hidráulico da turbina. ....	69
Tabela 8 – Vazão afluente e volume inicial em cada usina.....	70
Tabela 9 – Resultados da estratégia <b>LACC</b> para diferentes discretizações da FPH.....	71
Tabela 10 – Resultados da estratégia <b>LACC</b> para diferentes discretizações da função cota de jusante.....	73
Tabela 11 - Principais resultados do cenário base.....	75
Tabela 12 - Resultados do cenário base por iteração.....	76
Tabela 13 - Evolução da queda bruta ao longo das iterações.....	77
Tabela 14 – Principais resultados horários.....	78
Tabela 15 – <b>LACC</b> vs <b>PROP</b> .....	79
Tabela 16 - Potência despachada em cada UG ( <b>LACC</b> vs <b>PROP</b> ) .....	81
Tabela 17 – Resultados de <b>PROP</b> variando os pesos para partidas e paradas.....	82
Tabela 18 – Resultados de <b>PROP</b> em cada iteração em cenários com penalização de partidas e paradas.....	85
Tabela 19 - Potência despachada em cada região nas UGs em <b>PROP</b> ( $PP_j$ igual a 50% de $W^{\max}$ ) .....	86
Tabela 20 – Vazão afluente e volume inicial em cada UHE.....	87
Tabela 21 – Resultados de <b>PROP</b> para a cascata com quatro usinas.....	88
Tabela 22 - Despacho nas UGs da UHE 2.....	92
Tabela 23 – Despacho de potência nas UGs da UHE 2.....	93

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CH – *Convex Hull*

AUH – Alocação de Unidades Hidrelétricas

DIF – Diferença

DOC – Distribuição Ótima de Carga

DP1 – Quantidade de UGs despachadas na UHE 1

DP3 – Quantidade de UGs despachadas na UHE 3

EMG – Erro máximo apresentado pela FPH linear em relação à não linear

*fcm* – Função cota de montante

*fcj* – Função cota de jusante

FPH – Função de Produção Hidrelétrica

IT – Número de iterações

LACC – Logarítmico Agregado de Combinação Convexa

**LACC** – Formulação bivariada não convexa via LACC

LAI – Lagrangiano Aumentado Inexato

LPP – Linear por Partes

NPP – Número de partidas e paradas

NR – Número de restrições

NVC – Número de variáveis contínuas

NVB – Número de variáveis binárias

OBJ – Valor da função objetivo

ONS – Operador Nacional do Sistema Elétrico

PDP – Programa Diário de Produção

RL – Relaxação Lagrangiana

PLIM – Programação Linear Inteira Mista

PNLIM – Programação Não Linear Inteira Mista

POUH – Programação da Operação de Usinas Hidrelétricas

**PROP** – Estratégia proposta

P1 – Potência gerada na UHE 1

P3 – Potência gerada na UHE 3

RDP – Ramer–Douglas–Peucker

SIN – Sistema Interligado Nacional

UG – Unidade Geradora

TS – Tempo de simulação

UHE – Usina Hidrelétrica

V1\_BIV – Volume na UHE 1 resultante da estratégia **LACC**

V1\_PROP – Volume na UHE 1 resultante da estratégia **PROP**

V3\_BIV – Volume na UHE 3 resultante da estratégia **LACC**

V3\_PROP – Volume na UHE 3 resultante da estratégia **PROP**

$\Sigma Q$  – Somatório das vazões turbinadas nas UHEs e estágios

## LISTA DE SÍMBOLOS

### Índices

$a$	índice das usinas à montante da usina $r$ ;
$i$	índice da UG do tipo $j$ ;
$j$	índice do grupo de UGs idênticas;
$l$	posição do código binário com $\mathcal{L}$ bits que endereçam um politopo na aproximação da FPH.
$m$	posição do código binário com $M_{jr}$ bits que indica o número de UGs do tipo $j$ operando na região côncava;
$n$	índice do segmento de reta na aproximação côncava via CH;
$o$	índice da faixa permitida;
$r$	índice do reservatório (da UHE);
$t$	índice do estágio de tempo;
$v$	índice das regiões convexas da FPH;
$u$	índice do vértice referente a um ponto utilizado para aproximar a FPH;

### Parâmetros

$A$	é a constante dada pelo produto entre aceleração da gravidade, $GV$ , e densidade da água, $DS$ ( $s \cdot W/m^4$ );
$AG$	é a área da grade ( $m^2$ );
$ATE$	é a área da seção de entrada da tomada d'água ( $m^2$ );
$ATS$	é a área da seção de saída do tubo de sucção da turbina ( $m^2$ );
$C_{kr}$	é o coeficiente $k$ do polinômio de nível de montante no reservatório da UHE $r$ , onde $k = 0, \dots, 4$ ( $m/hm^k$ );
$CH^n_{kjrt}$	é o coeficiente $k$ do segmento de reta $n$ do conjunto $NH_{jt}$ que cria o casco convexo na região côncava das UGs do tipo $j$ na UHE $r$ no estágio $t$ , onde $k = 0, 1$ ;
$D_{kr}$	é o coeficiente $k$ do polinômio de nível de jusante no reservatório da UHE $r$ , onde $k = 0, \dots, 4$ ( $m/(m^3/s)^k$ );
$DB$	é a espessura ou diâmetro das barras verticais (m);
$DI$	é o diâmetro do conduto (m);

$E_{kjr}$	constante $k$ associada a função do rendimento hidráulico da turbina nas UGs do tipo $j$ na UHE $r$ , onde $k = 0, \dots, 9$ ;
$EB$	é o espaçamento entre as barras verticais (m);
$F_{kjr}$	é a constante $k$ associada a função de perda mecânica da turbina nas UGs do tipo $j$ na UHE $r$ , onde $k = 0, \dots, 2$ ;
$FC$	é o fator de conversão de vazão ( $m^3/s$ ) para volume ( $hm^3$ ) no período;
$G_{kjr}$	é a constante $k$ associada a função de perda elétrica no gerador nas UGs do tipo $j$ na UHE $r$ , onde $k = 0, 1$ ;
$G_{ojrt}^{\min/\max}$	é a geração mínima/máxima na faixa permitida $o$ nas UGs do tipo $j$ na UHE $r$ no estágio $t$ (MW);
$GC_{jrt}^v$	é a geração no vértice $v$ da região côncava das UGs do tipo $j$ na UHE $r$ no estágio $t$ (MW);
$GV_{vjrt}^v$	é a geração no vértice $v$ da região convexa $v$ das UGs do tipo $j$ na UHE $r$ no estágio $t$ (MW);
$GO$	é o grau de obstrução da grade (%);
$HB_{rt}$	é a queda bruta conhecida na UHE $r$ no estágio $t$ (m);
$HP_{rt}$	é a diferença entre a queda bruta e a perda hidráulica por pressão atmosférica na UHE $r$ no estágio $t$ (m);
$HW$	é a constante adimensional de Hanzen-Willians que é obtida por valores tabelados;
$J_r$	é a quantidade de tipos de UGs idênticas na UHE $r$ ;
$K_{0j}$	é a constante associada com a função que representa a perda hidráulica na tomada d'água nas UGs do tipo $j$ ( $s/m^5$ ),
$K_{1j}$	é a constante associada com a função que representa as perdas hidráulicas na grade nas UGs do tipo $j$ ( $s/m^5$ );
$K_{2j}$	é a constante associada com a função que representa a perda hidráulica no conduto forçado nas UGs do tipo $j$ ( $s^2/m^5$ );
$K_{3j}$	é a constante associada com a função que representa a perda hidráulica na saída do tubo de sucção nas UGs do tipo $j$ ( $s^2/m^5$ );
$KB$	é uma constante adimensional que depende da forma das barras;
$KG$	é uma constante adimensional que depende das características construtivas da grade;

$KT_{jr}$	é a constante geral de perdas hidráulicas nas UGs do tipo $j$ na UHE $r$ ;
$KTA$	é um coeficiente adimensional relativo à tomada d'água;
$L$	é o comprimento do conduto (m);
$\mathcal{L}$	é o número de bits necessários para formar o código binário que identifica um polítopo (segmento de reta ou triângulo) do domínio da FPH no modelo LACC;
$M_{jr}$	é o número de variáveis binárias necessárias para representar o número de UGs do tipo $j$ operando na região côncava na UHE $r$ ;
$MG_{rt}$	é a meta de geração para a UHE $r$ no estágio $t$ (MW);
$N_{jrt}$	é a quantidade de UGs do tipo $j$ disponíveis na UHE $r$ no estágio $t$ ;
$NH_{jrt}$	é o número de segmentos de reta que criam um casco convexo sobre os pontos de interrupção utilizados para aproximar a região côncava da FPH na UG do tipo $j$ na UHE $r$ no estágio $t$ ;
$NJ_{rt}$	é o nível de jusante conhecido na UHE $r$ no estágio $t$ (m);
$NM_{rt}$	é o nível de montante conhecido na UHE $r$ no estágio $t$ (m);
$NR_{vijrt}$	é o número de pontos resultantes do algoritmo RDP na região convexa $v$ na UG $i$ do tipo $j$ na UHE $r$ no estágio $t$ ;
$O_{kjr}$	é o coeficiente $k$ da função de vazão turbinada máxima nas UGs do tipo $j$ na UHE $r$ , onde $k = 0, \dots, 2$ ;
$\theta$	é o ângulo de inclinação entre a grade e a linha horizontal na UG;
$\Phi_{jr}$	é o número total de faixas permitidas de operação nas UGs do tipo $j$ na UHE $r$ ;
$P_{kjr}$	é o coeficiente $k$ da função de vazão turbinada mínima nas UGs do tipo $j$ na UHE $r$ , onde $k = 0, \dots, 2$ ;
$PHA_{rt}$	é a perda hidráulica por diferença de pressão atmosférica na UHE $r$ no estágio $t$ (m);
$PP_{ijr}$	é a constante que penaliza as partidas e paradas da UG $i$ do tipo $j$ na UHE $r$ ;
$S_r^{\max}$	é o vertimento máximo na UHE $r$ (m <sup>3</sup> /s);
$T$	é o número de estágios de tempo;
$V_{jr}$	é o número de regiões convexas da FPH da UG do tipo $j$ na UHE $r$ ;
$VL_r^{\min/\max}$	é o volume mínimo/máximo do reservatório da UHE $r$ (hm <sup>3</sup> );
$\mathcal{V}_{vjr}$	é o conjunto de vértices que aproximam a região convexa $v$ da FPH do tipo $j$ na UHE $r$ no estágio $t$ ;

- $WC_{jrt}^v$  é a vazão turbinada no vértice  $v$  da região côncava das UGs do tipo  $j$  na UHE  $r$  no estágio  $t$  ( $m^3/s$ );
- $WC_{jrt}^{\min/\max}$  é o limite mínimo/máximo de vazão turbinada da região côncava das UGs do tipo  $j$  na UHE  $r$  no estágio  $t$  ( $m^3/s$ );
- $WW_{vjrt}^v$  é a vazão turbinada no vértice  $v$  da região convexa  $v$  das UGs do tipo  $j$  na UHE  $r$  no estágio  $t$  ( $m^3/s$ );
- $WW_{vjrt}^{\min/\max}$  é o limite mínimo/máximo de vazão turbinada da região convexa  $v$  das UGs do tipo  $j$  na UHE  $r$  no estágio  $t$  ( $m^3/s$ );

### Variáveis

- $d_{rt}$  é a vazão defluente na UHE  $r$  no estágio  $t$  ( $m^3/s$ );
- $dp_{jrt}$  é a quantidade de UGs do tipo  $j$  despachadas (em operação) na UHE  $r$  no estágio  $t$ ;
- $fx_{oit}$  é a variável binária que indica se a UG  $i$  do tipo  $j$  na UHE  $r$  está ligada ( $fx_{oit} = 1$ ) ou desligada ( $fx_{oit} = 0$ ) na faixa permitida  $m$ , no estágio  $t$ ;
- $g_{ijrt}$  é a potência ativa na UG  $i$  do tipo  $j$  na UHE  $r$  no estágio  $t$  (MW);
- $gc_{ijrt}$  é a geração na região côncava da FPH na UG  $i$  do tipo  $j$  na UHE  $r$  no estágio  $t$  (MW);
- $gs_{jrt}$  a potência gerada na UG do tipo  $j$  na UHE  $r$  operando na região côncava da FPH no estágio  $t$ ;
- $gv_{vjrt}$  é a geração na região convexa  $v$  da FPH na UG  $i$  do tipo  $j$  na UHE  $r$  no estágio  $t$  (MW);
- $h_{ijrt}$  é a queda líquida na UG  $i$  do tipo  $j$  na UHE  $r$  no estágio  $t$  (m);
- $k_{jrt}$  é uma variável inteira que representa o número de UGs do tipo  $j$  na UHE  $r$  operando na região côncava no estágio  $t$ ;
- $os_{jrt}$  é o número de UGs do tipo  $j$  que são ligadas na UHE  $r$  no estágio  $t$ ;
- $peg_{ijt}$  é a potência mecânica entregue ao gerador da UG  $i$  do tipo  $j$  no estágio  $t$  (MW);
- $permt_{ijt}$  é a perda mecânica da turbina da UG  $i$  do tipo  $j$  no estágio  $t$  (MW);
- $ph_{ijt}$  perda hidráulica total na UG  $i$  do tipo  $j$  no estágio  $t$  (m);
- $pha_t$  perda hidráulica devido a diferença de pressão atmosférica entre as cotas de montante e jusante no estágio  $t$  (m);
- $phc_{ijt}$  perda hidráulica no conduto forçado da UG  $i$  do tipo  $j$  no estágio  $t$  (m);
- $phg_{ijt}$  perda hidráulica nas grades da UG  $i$  do tipo  $j$  no estágio  $t$  (m);

$phs_{ijt}$	perda hidráulica na saída no tubo de sucção da UG $i$ do tipo $j$ no estágio $t$ (m);
$pht_{ijt}$	perda hidráulica na tomada d'água da UG $i$ do tipo $j$ no estágio $t$ (m);
$pmt_{ijt}$	é a potência mecânica entregue pela turbina da UG $i$ do tipo $j$ no estágio $t$ (MW);
$pr_{ijrt}$	é a variável binária que indica se a UG $i$ do tipo $j$ na UHE $r$ é desligada no estágio $t$ ;
$pt_{ijrt}$	é a variável binária que indica se a UG $i$ do tipo $j$ na UHE $r$ entra em operação no estágio $t$ ;
$ptg_{ijt}$	é a perda elétrica no gerador da UG $i$ do tipo $j$ no estágio $t$ (MW);
$\rho g_{ijrt}$	é o rendimento do gerador da UG $i$ do tipo $j$ na UHE $r$ no estágio $t$ ;
$\rho m_{ijrt}$	é o rendimento mecânico relativo ao acoplamento turbina-gerador da UG $i$ do tipo $j$ na UHE $r$ no estágio $t$ ;
$\rho t_{ijrt}$	é o rendimento hidráulico da turbina da UG $i$ do tipo $j$ na UHE $r$ no estágio $t$ ;
$q_{rt}$	é a vazão total turbinada na UHE $r$ no estágio $t$ (m <sup>3</sup> /s);
$rg_{mjrt}$	é a variável auxiliar que representa o produto $k_{jrt} \cdot g_{s_{jrt}}$ ;
$rs_{jrt}$	é o número de UGs do tipo $j$ que são desligadas na UHE $r$ no estágio $t$ ;
$rW_{mjrt}$	é a variável auxiliar que representa o produto $k_{jrt} \cdot w_{s_{jrt}}$ ;
$S_{rt}$	é a vazão vertida na usina na UHE $r$ no estágio $t$ (m <sup>3</sup> /s);
$u_{ijrt}$	é a variável binária que indica se a UG $i$ do tipo $j$ na UHE $r$ está ligada ( $u_{ijt} = 1$ ) ou desligada ( $u_{ijt} = 0$ ) no estágio de tempo $t$ ;
$uc_{ijrt}$	é a variável binária que indica se a UG $i$ tipo $j$ está operando na região côncava da FPH na UHE $r$ no estágio $t$ ;
$us_{jrt}$	é a variável binária que indica se alguma UG do tipo $j$ na UHE $r$ é despachada na região côncava no estágio $t$ ;
$uv_{vijrt}$	é a variável binária que indica se a UG $i$ do tipo $j$ está operando na região convexa $v$ da FPH na UHE $r$ no estágio $t$ ;
$vI_{rt}$	é o volume armazenado no reservatório na UHE $r$ no estágio $t$ (hm <sup>3</sup> );
$vm_{rt}$	é o volume médio armazenado no reservatório na UHE $r$ no estágio $t$ (hm <sup>3</sup> );
$w_{ijrt}$	é a vazão turbinada pela UG $i$ do tipo $j$ na UHE $r$ no estágio $t$ (m <sup>3</sup> /s);
$w_{ijrt}^{\min/\max}$	é a vazão turbinada mínima/máxima da UG $i$ do tipo $j$ na UHE $r$ no estágio $t$ (m <sup>3</sup> /s);
$wC_{ijrt}$	é a vazão turbinada na região côncava da FPH na UG $i$ do tipo $j$ na UHE $r$ no estágio $t$ (m <sup>3</sup> /s);

- $wS_{jrt}$  a vazão turbinada da UG do tipo  $j$  na UHE  $r$  operando na região côncava da FPH no estágio  $t$ ;
- $wV_{vijrt}$  é a vazão turbinada na região convexa  $v$  da FPH na UG  $i$  do tipo  $j$  na UHE  $r$  no estágio  $t$  ( $m^3/s$ );
- $x^l_{vijrt}$  é a variável binária  $l$  do código  $B$  que identifica o seguimento da aproximação da região convexa  $v$  da FPH associada com a UG  $i$  do tipo  $j$  na UHE  $r$  no estágio  $t$ ;
- $y_{mjrt}$  é a variável binária associada à posição  $m$  do código binário que representa a variável inteira  $k_{jrt}$ ;
- $z^v_{vijrt}$  é a variável de peso associada com o ponto  $[WV^v_{vjt}, GV^v_{vjt}]$  do vértice  $v$  da região convexa  $v$  da FPH na UG  $i$  do tipo  $j$  na UHE  $r$  no estágio  $t$ ;

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO .....</b>	<b>15</b>
1.1	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....	19
<b>1.1.1</b>	<b>Programação Não Linear Inteira Mista .....</b>	<b>21</b>
<b>1.1.2</b>	<b>Relaxação Lagrangiana.....</b>	<b>22</b>
<b>1.1.3</b>	<b>Programação Linear Inteira Mista .....</b>	<b>23</b>
1.2	MOTIVAÇÃO E PROPOSIÇÃO.....	26
1.3	OBJETIVOS E CONTRIBUIÇÕES .....	28
<b>1.3.1</b>	<b>Objetivo Geral.....</b>	<b>28</b>
<b>1.3.2</b>	<b>Objetivos Específicos e Contribuições .....</b>	<b>28</b>
1.4	ESTRUTURA DO TRABALHO .....	30
<b>2</b>	<b>MODELAGEM E FORMULAÇÃO DO PROBLEMA .....</b>	<b>31</b>
2.1	INTRODUÇÃO.....	31
2.2	MODELAGEM DE UMA USINA HIDRELÉTRICA .....	31
<b>2.2.1</b>	<b>Função de Produção Hidrelétrica .....</b>	<b>32</b>
<i>2.2.1.1</i>	<i>Altura de Queda Líquida .....</i>	<i>33</i>
<i>2.2.1.1.1</i>	<i>Queda Bruta .....</i>	<i>33</i>
<i>2.2.1.1.2</i>	<i>Perdas Hidráulicas .....</i>	<i>34</i>
<i>2.2.1.1.3</i>	<i>Representação da Queda Líquida .....</i>	<i>37</i>
<i>2.2.1.2</i>	<i>Rendimento Hidráulico da Turbina.....</i>	<i>37</i>
<i>2.2.1.3</i>	<i>Rendimentos Mecânico do Acoplamento Turbina-Gerador e Elétrico no Gerador . .....</i>	<i>38</i>
<i>2.2.1.4</i>	<i>Função de Produção.....</i>	<i>39</i>
<b>2.2.2</b>	<b>Restrições Operativas Adicionais.....</b>	<b>40</b>
<i>2.2.2.1</i>	<i>Balanço Hidráulico .....</i>	<i>40</i>
<i>2.2.2.2</i>	<i>Limites de Volume e Vazão Vertida.....</i>	<i>41</i>

2.2.2.3	<i>Limites de Vazão Turbinada e Geração em cada UG</i> .....	41
2.2.2.4	<i>Atendimento às Metas de Geração</i> .....	42
2.2.2.5	<i>Partidas e Paradas nas Unidades Geradoras</i> .....	42
2.2.2.6	<i>Função Objetivo</i> .....	43
2.3	FORMULAÇÃO DO PROBLEMA.....	44
<b>3</b>	<b>ESTRATÉGIA DE SOLUÇÃO</b> .....	<b>46</b>
3.1	INTRODUÇÃO.....	46
3.2	ESTIMAÇÃO DA QUEDA BRUTA E DOS LIMITES DE VAZÃO TURBINADA.....	47
3.3	PARTICIONAMENTO DA FPH UNIVARIADA.....	50
3.4	DISCRETIZAÇÃO DA FPH VIA ALGORITMO RDP.....	52
3.5	FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE PLIM BASEADO EM PARTICIONAMENTO E SIMETRIA.....	56
<b>3.5.1</b>	<b>Aproximação da Região Côncava via CH</b> .....	<b>56</b>
<b>3.5.2</b>	<b>Aplicação de Técnicas de Simetria</b> .....	<b>57</b>
<b>3.5.3</b>	<b>Aproximação da Região Convexa via LACC</b> .....	<b>59</b>
<b>3.5.4</b>	<b>Formulação do Problema de PLIM Baseado no Particionamento da FPH e em Técnicas de Simetria</b> .....	<b>63</b>
<b>4</b>	<b>RESULTADOS</b> .....	<b>67</b>
4.1	DADOS E CONFIGURAÇÕES DE ENTRADA.....	67
4.2	RESULTADOS PARA O SISTEMA REDUZIDO.....	69
<b>4.2.1</b>	<b>Resultados da Formulação Bivariada via LACC</b> .....	<b>70</b>
<b>4.2.2</b>	<b>Resultados da Estratégia Proposta</b> .....	<b>74</b>
4.2.2.1	<i>Cenário Base</i> .....	74
4.2.2.2	<i>Estratégia Proposta vs Formulação bivariada via LACC</i> .....	79
4.2.2.3	<i>Outros Cenários</i> .....	82
4.3	RESULTADOS PARA O SISTEMA COMPLETO.....	87

<b>5</b>	<b>CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....</b>	<b>95</b>
	<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>97</b>
	<b>APÊNDICE A – EXEMPLO DIDÁTICO DA APLICAÇÃO DA FORMULAÇÃO PROPOSTA (PARTICIONAMENTO DA FPH E SIMETRIA).....</b>	<b>104</b>
	<b>APÊNDICE B – VALIDAÇÃO DA FORMULAÇÃO BASEADA EM PARTICIONAMENTO DA FPH E SIMETRIA.....</b>	<b>112</b>
	<b>APÊNDICE C – FORMULAÇÃO NÃO CONVEXA BIVARIADA VIA LACC .....</b>	<b>125</b>
	<b>APÊNDICE D – RESULTADOS VARIANDO OS PARÂMETROS DO ALGORITMO RDP .....</b>	<b>132</b>

## 1 INTRODUÇÃO

As complexidades das características operativas dos diversos componentes do sistema elétrico brasileiro impõem ao problema de planejamento da operação energética a divisão em três etapas temporais (SILVA, 2012): médio prazo, curto prazo e programação diária. No planejamento de médio prazo, um problema de otimização com horizonte de cinco anos é resolvido para estimar a política operativa do sistema. A ferramenta computacional NEWAVE (CEPEL, 2001) resolve o problema considerando Programação Dinâmica Dual Estocástica (PEREIRA e PINTO, 1985) para encontrar as gerações termelétrica e hidrelétrica em base mensal, bem como a função de custo futuro que será considerada no modelo de planejamento de curto prazo.

No planejamento de curto prazo, todas as usinas são consideradas individualmente em um problema de otimização com horizonte de dois meses, com base semanal até o final do primeiro mês e mensal no segundo. A principal ferramenta computacional é o DECOMP (CEPEL, 2004), que apresenta como resultados os níveis de geração por usina, os intercâmbios entre os subsistemas e os custos marginais de operação. Finalmente, a programação diária da operação eletroenergética é responsável por determinar a geração de cada usina do sistema até o final da semana, com base semi-horária para o dia seguinte. Essa etapa de curtíssimo prazo tem o modelo DESSEM (CEPEL, 2019) como principal ferramenta computacional. Esse modelo é executado pelo Operador Nacional do Sistema Elétrico (ONS) diariamente e considera as previsões de afluências, os requisitos de uso múltiplo da água, as restrições ambientais, os cronogramas de manutenção, de geração e transmissão, as restrições operativas do sistema de transmissão, bem como as diretrizes para a operação elétrica no sistema elétrico (ONS, 2020).

Um subproduto da programação diária da operação eletroenergética no Brasil é o Programa Diário de Produção (PDP), que disponibiliza as metas de geração semi-horárias para o dia seguinte para cada usina do sistema elétrico. A partir dessas metas de geração, cada usina tem a tarefa de determinar quais UGs deverão ser acionadas e seus respectivos níveis de geração (ONS, 2020). Nesse contexto, o problema da Programação da Operação de Usinas Hidrelétricas (POUH) tem a tarefa de selecionar, de maneira ótima, as Unidades Geradoras (UGs) que serão despachadas, bem como seus níveis de geração, para cada meia hora do dia seguinte. No entanto, o problema da POUH não é trivial, visto que a Função de Produção Hidrelétrica (FPH)

é determinada por uma relação não linear e não convexa que depende da vazão e da queda líquida na UG.

Ao redor do mundo, os objetivos do agente gerador para o problema da POUH podem variar de acordo com as características do modelo de despacho e de formação de preço em um mercado de energia elétrica (KONG, SKJELBRED e FOSSO, 2020). Em um mercado centralizado, como o do Brasil, onde o despacho é realizado por um operador do sistema (ONS, no caso brasileiro), as metas (semi)horárias de geração são disponibilizadas pelo operador e o agente gerador busca minimizar a vazão defluente, visando aumentar o nível de água do reservatório, e/ou minimizar as partidas e as paradas das UGs, visando reduzir gastos com manutenções (FINARDI e SCUZZIATO, 2013; CORDOVA, FINARDI, *et al.*, 2014; LI, LI, *et al.*, 2014; FINARDI, TAKIGAWA e BRITO, 2016; CHENG, WANG e WU, 2016). Já em um mercado descentralizado, onde não existe metas de demandas a serem perseguidas, o problema da POUH é utilizado como suporte para ofertas de preço e quantidade de energia no mercado do dia seguinte e para fornecer um plano de despacho final após o processo de compensação do mercado (SHAWWASH, SIU e RUSSELL, 2000; CONEJO, ARROYO, *et al.*, 2002; GARCIA-GONZALEZ, PARRILLA e MATEO, 2007; BORGHETTI, D'AMBROSIO, *et al.*, 2008; DE LADURANTAYE, GENDREAU e POTVIN, 2009; PEREZ-DIAZ, WILHELMI e AREVALO, 2010; CATALÃO, POUSINHO e MENDES, 2011; DIAZ, CONTRERAS, *et al.*, 2011; LIMA, MARCOVECCHIO, *et al.*, 2013; TONG, ZHAI e GUAN, 2013).

O núcleo do problema da POUH é como modelar a relação entre vazão de água defluída (entrada) e energia elétrica gerada (saída) (FINARDI e SCUZZIATO, 2013). Essa relação é definida pela FPH, que depende também da altura de queda líquida, do rendimento hidráulico da turbina e da eficiência do grupo turbina-gerador. É uma função complexa, multivariada, não-linear e não-convexa. Na Figura 1 é ilustrada uma FPH.

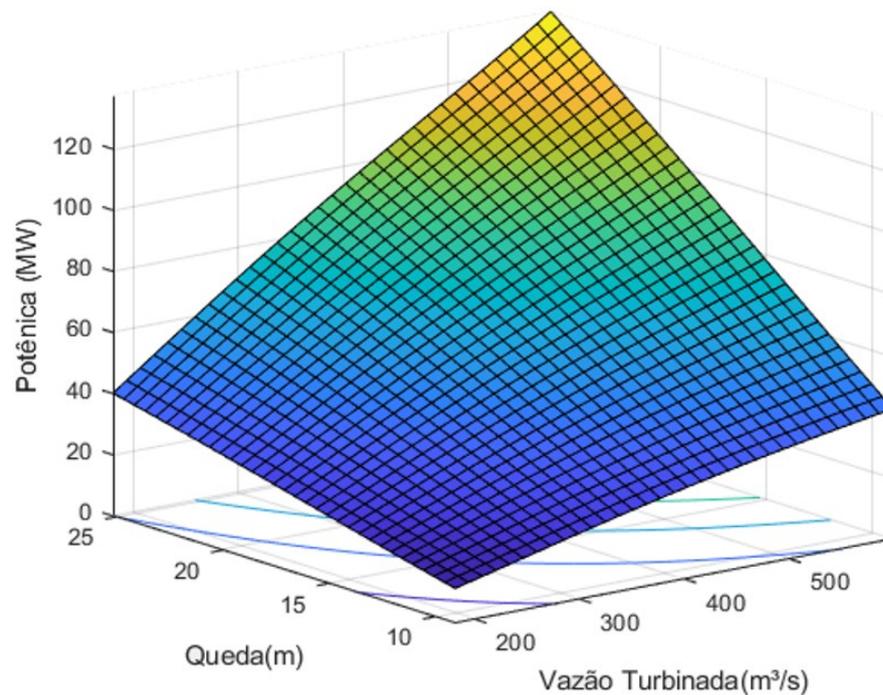


Figura 1 - Exemplo de uma FPH.

Na literatura, a modelagem básica da FPH pode ser obtida considerando uma UG equivalente para toda a Usina Hidrelétrica (UHE) ou representando cada UG individualmente (CHANG, AGANAGIC, *et al.*, 2001). A maioria dos problemas de POUH (DINIZ e MACEIRA, 2008; CATALÃO, MARIANO, *et al.*, 2009; CATALÃO, POUSINHO e MENDES, 2010; CATALÃO, POUSINHO e MENDES, 2011; OSORIO, MATIAS e CATALÃO, 2013; HAMANN, HUG e ROSINSKI, 2017), especialmente no planejamento hidrotérmico (NAZARI-HERIS, MOHAMMADI-IVATLOO e GHAREHPETIAN, 2017) ou hidrotérmico com renováveis não despacháveis (DAS, BHATTACHARYA e CHAKRABORTY, 2018; WANG, CHANG, *et al.*, 2018; LI, WANG e CHEN, 2019), consideram a FPH para a usina como um todo (usina agregada). A vantagem de utilizar o conceito de usina agregada é que reduz significativamente o tamanho do problema. No entanto, os trabalhos observados em ambos os mercados de energia (centralizado ou descentralizado) mostram a necessidade por uma representação mais precisa e detalhada da geração hidrelétrica em cada UG, considerando o impacto da variação na altura de queda, perdas hidráulicas, curvas de eficiência e zonas operacionais restritas (KONG, SKJELBRED e FOSSO, 2020).

Em termos gerais, a POUH está relacionada com dois problemas: 1) A Alocação de Unidades Hidrelétricas (AUH) – *Unit Commitment* – que busca determinar, para cada estágio

de tempo, o *status* (ligado/desligado) de cada UG, isto é, quais UGs devem estar ligadas ou desligadas em cada estágio de tempo; e 2) a Distribuição Ótima de Carga (DOC) entre as UGs – *Unit Load Dispatch* – que determina o respectivo nível de geração ótima das UGs ligadas em cada estágio de tempo.

Do ponto de vista de modelagem, o problema da POUH pode ser modelado como um problema único, por exemplo, para os agentes geradores com apenas UHEs, ou pode ser um subproblema integrado a um problema maior, no qual estão envolvidas unidades termelétricas, e/ou eólicas (LIMA, MARCOVECCHIO, *et al.*, 2013). Além disso, os estudos de caso apresentados na literatura podem variar de uma única UHE com poucas UGs (BORTONI, BASTOS, *et al.*, 2015) até um sistema com várias UHEs em cascata (FINARDI, TAKIGAWA e BRITO, 2016).

Matematicamente, o problema da POUH é não linear e não convexo devido ao produto entre a vazão turbinada pela UG e as funções que representam a altura de queda líquida e os rendimentos no conjunto turbina-gerador na FPH. Ademais, o problema da POUH ainda possui domínio discreto, pois é necessário definir quais UGs devem ser acionadas em cada estágio. Por fim, a presença de várias UGs e estágios de tempo tornam o problema da POUH de grande porte (FINARDI e SILVA, 2006). Neste cenário, o maior desafio na busca de uma estratégia eficiente para resolver o problema da POUH consiste em aliar precisão na representação das características operativas associadas com as FPHs das UGs e tempo computacional reduzido, isto é, compatível com o curto período de planejamento do problema em questão.

A representação precisa da FPH é particularmente importante no caso de UHEs com muitas UGs, pois com a grande variabilidade de metas de geração, a potência gerada e a vazão turbinada apresentam grandes variações em curto prazo, o que requer uma representação precisa das não linearidades e descontinuidades associadas com cada FPH. No Brasil, por exemplo, dezenas de UHEs possuem mais de 15 unidades. Duas dessas UHEs, Jirau e Santo Antônio, estão na bacia amazônica, no Rio Madeira, cada uma com 50 unidades geradoras (incluindo as maiores turbinas Bulbo do mundo, com capacidade de 75 MW).

Neste contexto, no intuito de auxiliar os agentes de geração, este trabalho se concentra no desenvolvimento de uma metodologia de solução capaz de resolver com precisão e rapidez o problema da POUH. A seguir, é apresentada uma revisão bibliográfica das principais estratégias investigadas nos últimos anos para resolver o problema de POUH. Depois disso, é apresentado um resumo da estratégia proposta desse documento.

## 1.1 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A literatura mostra que várias estratégias de modelagem e de solução têm sido alvos de estudos para se conseguir boas soluções para o problema da POUH (TAKTAK e D'AMBRÓSIO, 2017; KONG, SKJELBRED e FOSSO, 2020). Uma das opções exploradas é resolver o problema por métodos heurísticos, mais competitivos em casos simples e predominantemente combinatórios (TAHANAN, VAN ACKOOIJ, *et al.*, 2015). Por outro lado, têm-se as técnicas de programação matemática, dentre as quais destacam-se a Programação Linear Inteira Mista (PLIM), a Programação Não Linear Inteira Mista (PNLIM) e a Relaxação Lagrangiana (RL) (TAKTAK e D'AMBRÓSIO, 2017).

Alguns trabalhos na literatura apresentam revisões acerca das diferentes abordagens para o problema da POUH. Os autores de Farhat e El-Haeary (2009), por exemplo, apresentaram um levantamento bibliográfico e uma classificação para os métodos de programação matemática e algoritmos heurísticos aplicados para resolver problemas de comissionamento de unidades em sistemas hidrotérmicos. Eles também discutiram as vantagens e limitações das metodologias. Em Taktak e D'Ambrósio (2017), as diversas técnicas de programação matemática exploradas para o problema da POUH são resumidas. Uma revisão abrangente da aplicação de métodos heurísticos para determinar a programação ótima de curto prazo em sistemas hidrotérmicos é apresentada por Nazari-Heris, Mohammadi-Ivatloo e Gharehpetian (2017). Os autores Osorio, Matias e Catalão (2013) forneceram uma visão cronológica das diferentes abordagens para o problema da POUH propostas nos 20 anos que antecederam o trabalho, destacando as principais contribuições de cada abordagem para cada configuração particular do sistema hidrelétrico. Em Singh e Singal (2017) é apresentada uma revisão dos aspectos operacionais de UHEs baseadas em reservatórios, bem como de pequenas centrais hidrelétricas a fio d'água. Em um trabalho recente, Kong, Skjelbred e Fosso (2020) apresentam uma revisão dos principais trabalhos que consideram as UGs individualmente em problemas de POUH. O foco nessa última revisão também são os trabalhos que utilizaram técnicas de programação matemática para buscar a solução ótima do problema.

Embora o problema da POUH busque encontrar o despacho ótimo em um período relativamente curto, o mesmo ainda enfrenta incertezas quanto ao preço de mercado (em mercados descentralizados de energia) e/ou a afluência natural para as próximas horas. Aasgard

(2019) delineou formulações baseadas em programação estocástica para o problema da POUH de vários mercados e problemas de oferta.

O nível de detalhamento incluído na modelagem da FPH depende do horizonte de planejamento, da resolução temporal, do tamanho do sistema, dos dados disponíveis, e dos objetivos do modelo (HAMANN, HUG e ROSINSKI, 2017). Isso pode ter um impacto significativo na qualidade dos resultados para o sistema em estudo (LIMA, MARCOVECCHIO, *et al.*, 2013). Para se conseguir uma razoável relação entre o detalhamento da representação da FPH e o esforço computacional do problema, uma abordagem é simplificar, ou desconsiderar, a não-linearidade e interdependência no modelo de otimização. Por exemplo, a eficiência da turbina pode ser um valor fixo (BRETON, HACHEM e HAMMADIA, 2004; DINIZ e MACEIRA, 2008; DINIZ, 2010; LIMA, MARCOVECCHIO, *et al.*, 2013) ou apenas dependente da vazão turbinada (SEGUIN, COTE e AUDET, 2016). Adicionalmente, a eficiência do gerador pode ser considerada constante para uma ampla faixa de operação (FINARDI e SILVA, 2006) ou mesmo não mencionada (LIMA, MARCOVECCHIO, *et al.*, 2013; TONG, ZHAI e GUAN, 2013; GUEDES, MAIA, *et al.*, 2017).

A FPH pode também ser formulada como uma função quadrática da vazão turbinada e do volume do reservatório. Essa formulação é comum quando o problema da POUH considera uma UG equivalente para toda a UHE (CATALÃO, MARIANO, *et al.*, 2009; CATALÃO, POUSINHO e MENDES, 2010; CATALÃO, POUSINHO e MENDES, 2011; NAZARI-HERIS, MOHAMMADI-IVATLOO e GHAREHPETIAN, 2017). No entanto, isso pode levar a discrepâncias significativas em casos em que há várias UGs na usina (DINIZ e MACEIRA, 2008), e, por conta disso, não é recomendado quando o problema da POUH baseado em unidades é considerado.

Outra técnica convencional para incorporar as não linearidades da FPH é usar linearização por partes (CHANG, AGANAGIC, *et al.*, 2001; CONEJO, ARROYO, *et al.*, 2002; GARCIA-GONZALEZ, PARRILLA e MATEO, 2007; BORGHETTI, D'AMBROSIO, *et al.*, 2008; DE LADURANTAYE, GENDREAU e POTVIN, 2009; TONG, ZHAI e GUAN, 2013; LI, LI, *et al.*, 2014; CHENG, WANG e WU, 2016; SKJELBRED, KONG e FOSSO, 2020). Os pontos da função original são especificados para uma altura de queda fixa (FPH univariada com geração dependente apenas da vazão turbinada) (CHANG, AGANAGIC, *et al.*, 2001; DE LADURANTAYE, GENDREAU e POTVIN, 2009; SKJELBRED, KONG e FOSSO, 2020) ou para a altura de queda variante (FPH bivariada com geração dependente da vazão turbinada

e da altura de queda) (CONEJO, ARROYO, *et al.*, 2002; GARCIA-GONZALEZ, PARRILLA e MATEO, 2007; BORGHETTI, D'AMBROSIO, *et al.*, 2008; TONG, ZHAI e GUAN, 2013; LI, LI, *et al.*, 2014; FINARDI, TAKIGAWA e BRITO, 2016).

Segundo Taktak e D'Ambrósio (2017), os métodos baseados em PNLIM, RL e PLIM tendem a ser as abordagens que proporcionam as melhores relações entre qualidade de solução e tempo de simulação para problemas de POUH associados com quantidades maiores de UGs. A seguir é apresentada uma revisão sobre as principais características acerca das estratégias baseadas nessas três abordagens.

### 1.1.1 Programação Não Linear Inteira Mista

O objetivo principal das abordagens que buscam tratar o modelo como um problema de PNLIM via solucionadores específicos é obter soluções mais realistas para o problema da POUH (FINARDI e DA SILVA, 2005; DIAZ, CONTRERAS, *et al.*, 2011; LIMA, MARCOVECCHIO, *et al.*, 2013; CORDOVA, FINARDI, *et al.*, 2014; FINARDI, TAKIGAWA e BRITO, 2016; SANTO e COSTA, 2016; SEGUIN, COTE e AUDET, 2016).

Os autores Diaz, Contreras et al. (2011) aproximam a FPH para uma função quadrática da queda líquida e da vazão turbinada e resolvem o modelo de PNLIM utilizando o GAMS-CPLEX (CPLEX OPTIMIZER, 2022). Eles mostram que o modelo de PNLIM fornece resultados melhores em comparação com o modelo de PLIM. Em Finardi, Takigawa e Brito (2016), os autores conseguem resolver o problema da POUH em uma cascata com oito usinas e 29 UGs utilizando um solucionador para problemas de PNLIM denominado *AIMMS Outer Approximation* (AOA) (AIMMS, 2022), disponibilizado pelo programa AIMMS. Os autores Seguin, Cote e Audet (2016) desenvolveram um método de otimização em duas etapas. Na primeira etapa, é solucionado um problema de PNLIM relaxado para encontrar o volume, a vazão defluente e o número de UGs despachadas em cada período. Em seguida, é resolvido um modelo de PLIM para encontrar a combinação de UGs que maximiza a geração total, mas também penaliza a partida das unidades. A comparação entre os resultados do método de duas etapas e do modelo de PNLIM mostra que o método proposto resolve os casos testados em um tempo computacional significativamente menor. Lima, Marcovecchio et al. (2013) fornecem uma introdução clara e concisa dos solucionadores de PNLIM disponíveis que podem abordar a otimização global determinística dos problemas de POUH. Em Santos e Costa (2016), os

autores resolvem dois problemas sequenciais de PNLIM utilizando o solucionador GAMS-CPLEX. Inicialmente, os autores consideram as FPHs agregadas para cada grupo de UGs idênticas e resolvem o problema da POUH com quatro UGs equivalentes. Na sequência, é modelado um problema para encontrar a distribuição ótima e o nível de potência de cada unidade ao longo das horas.

As boas soluções apresentadas pelos solucionadores comerciais de PNLIM, como AOA-AIMMS e GAMS-CPLEX, mostram que os pacotes computacionais de PNLIM estão começando a ficar mais atrativos, tendo em vista o tamanho e a complexidade do problema da POUH. Mesmo assim, os solucionadores de PLIM são mais eficientes que os não lineares para problemas de grande porte (TAKTAK e D'AMBRÓSIO, 2017).

### 1.1.2 Relaxação Lagrangiana

Problemas de otimização em larga escala muitas vezes são decompostos em um conjunto de subproblemas menores, mais simples para serem solucionados e mais eficientes em termos computacionais. Entre as várias técnicas de decomposição encontradas na literatura, a RL é um dos métodos mais bem-sucedidos para resolver os problemas de POUH em usinas ou cascatas com muitas UGs, especialmente dentro da estrutura de uma formulação de PNLIM (TAKTAK e D'AMBRÓSIO, 2017; KONG, SKJELBRED e FOSSO, 2020). Como as UGs geralmente são acopladas através das metas de geração (MARCHAND, GENDREAU, *et al.*, 2018) e/ou das equações de balanço hídrico (FINARDI e SCUZZIATO, 2013; FINARDI, TAKIGAWA e BRITO, 2016), essas restrições de acoplamento podem ser relaxadas, incluindo-as na função objetivo e ponderadas por multiplicadores de Lagrange. Depois disso, o problema dual correspondente é decomposto em subproblemas independentes.

A estratégia de decomposição utilizando RL compreende três etapas principais: (1ª etapa) dualização, (2ª etapa) encontrar uma solução para os subproblemas duais e (3ª etapa) encontrar uma solução viável para o problema primal. Na primeira etapa, dois métodos de dualização são amplamente utilizados (FINARDI e SCUZZIATO, 2014). Um consiste em dualizar as restrições que acoplam o problema. Para o problema da POUH, geralmente são dualizadas as restrições de acoplamento espacial e temporal, por exemplo, o balanço hídrico (FINARDI e SILVA, 2006). O outro método consiste em duplicar as variáveis comuns envolvidas em dois (ou mais) subproblemas e depois relaxar as restrições de igualdade. Na

segunda etapa, os subproblemas duais são resolvidos e os multiplicadores de Lagrange são atualizados em cada iteração (FINARDI e SILVA, 2006; OLIVEIRA, SAGASTIZABAL e LEMARECHAL, 2014). Na última etapa, o Lagrangiano Aumentado ou o Lagrangiano Aumentado Inexato (LAI) são geralmente utilizados para encontrar uma solução primal viável (FINARDI e SCUZZIATO, 2013).

Em Finardi, Takigawa e Brito (2016), os autores compararam a qualidade da solução e de desempenho computacional entre o problema sendo resolvido por uma estratégia de RL e LAI e sendo resolvido diretamente pelo solucionador AOA-AIMMS. Nesta comparação, o desempenho da estratégia RL-LAI mostra-se mais eficiente. Em Marchand, Gendreau et al. (2018), os autores apresentaram um método eficaz de solução de três etapas que associa a PLIM e a RL. A PLIM é utilizada para resolver os problemas menores gerados pela RL. Esse método obtém uma boa solução de maneira mais rápida que os solucionadores comerciais e fornece uma medida da qualidade da solução.

O problema da abordagem de RL é que, embora algumas restrições complexas possam ser relaxadas, a FPH não linear e não convexa dificulta a obtenção de uma solução ótima na função dual. Se for esse o caso, a convergência do algoritmo não pode ser garantida (TONG, ZHAI e GUAN, 2013). Além disso, os processos para encontrar uma solução viável primal geralmente são baseados em heurísticas, dependendo da estrutura do problema em particular (FINARDI e SILVA, 2006).

### **1.1.3 Programação Linear Inteira Mista**

Se as não linearidades associadas com a FPH forem aproximadas por funções Lineares Por Partes (LPP), o problema da POUH é formulado como um modelo de PLIM (CHANG, AGANAGIC, *et al.*, 2001; CONEJO, ARROYO, *et al.*, 2002; GARCIA-GONZALEZ, PARRILLA e MATEO, 2007; BORGHETTI, D'AMBROSIO, *et al.*, 2008; DE LADURANTAYE, GENDREAU e POTVIN, 2009; TONG, ZHAI e GUAN, 2013; LI, LI, *et al.*, 2014; CHENG, WANG e WU, 2016; FINARDI, TAKIGAWA e BRITO, 2016; SKJELBRED, KONG e FOSSO, 2020). Nos últimos anos, devido à disponibilidade de solucionadores comerciais cada vez mais eficientes, como o CPLEX (CPLEX OPTIMIZER, 2022) e o GUROBI (GUROBI OPTIMIZATION, 2022), as estratégias baseadas em PLIM têm se destacado na literatura em relação às demais para resolver problemas de POUH (TAKTAK

e D'AMBRÓSIO, 2017; KONG, SKJELBRED e FOSSO, 2020). A PLIM tem bom desempenho em relação à adição de restrições e eficiência da solução, tendo sido amplamente aplicada para resolver problemas de POUH com muitas UGs (CHANG, AGANAGIC, *et al.*, 2001).

No que tange à maneira de como linearizar a FPH, alguns estudos têm usado uma aproximação LPP côncava (CHRISTOFORIDIS, AWOBAMISE, *et al.*, 1996; SANTOS e DINIZ, 2010; HAMANN e HUG, 2014; SKJELBRED, KONG e FOSSO, 2020; GUISÁNDEZ e PÉREZ-DÍAZ, 2021). A principal vantagem é que as únicas variáveis binárias presentes nessa formulação correspondem ao estado ON/OFF das UGs, o que contribui para reduzir o tempo de processamento do modelo de otimização. No entanto, como a FPH possui regiões côncavas e convexas, uma aproximação LPP côncava produz erros concentrados nas regiões convexas.

Por outro lado, com os novos avanços dos solucionadores de PLIM, os modelos não convexas de aproximação LPP, que representam as não linearidades em ambas regiões (côncavas e convexas), têm conseguido linearizar a FPH com maior precisão (CONEJO, ARROYO, *et al.*, 2002; TONG, ZHAI e GUAN, 2013; LI, LI, *et al.*, 2014; FINARDI, TAKIGAWA e BRITO, 2016; LIAO, LIU, *et al.*, 2021). No entanto, essas abordagens introduzem variáveis binárias para identificar cada politopo da FPH (segmentos de reta para funções univariadas ou triângulos para funções bivariadas). Neste caso, quanto maior for a precisão exigida na aproximação da FPH, maior tende a ser o número de variáveis binárias na modelagem, o que contribui negativamente para o desempenho computacional.

Em relação à maneira como os efeitos de queda são incorporados na representação da FPH em estratégias de PLIM no problema da POUH, é possível verificar três abordagens principais. Primeiro, existem as estratégias que incorporam a linearização da queda bruta ou líquida diretamente na formulação (HAMANN e HUG, 2014; LI, LI, *et al.*, 2014; FINARDI, TAKIGAWA e BRITO, 2016; LIAO, LIU, *et al.*, 2021; GUISÁNDEZ e PÉREZ-DÍAZ, 2021). Nesse caso, a FPH é aproximada por uma função bivariada, com potência dependente da vazão turbinada e da queda, que é geralmente aproximada por um segmento de reta para representar o nível de montante e um segmento de reta para representar o nível de jusante. As perdas hidráulicas podem ser aproximadas por uma constante (LI, LI, *et al.*, 2014; FINARDI, TAKIGAWA e BRITO, 2016) ou incorporadas na determinação dos pontos da FPH usados na aproximação LPP (LIAO, LIU, *et al.*, 2021).

A segunda maneira de representar os efeitos de queda é substituindo a FPH bivariada por várias funções univariadas, com geração dependente apenas da vazão turbinada, sendo cada uma associada com uma queda líquida (TONG, ZHAI e GUAN, 2013; CHENG, WANG e WU, 2016). Nesse caso, variáveis binárias são usadas para selecionar a função univariada associada à queda líquida correta. Na terceira maneira de representar os efeitos de queda no problema da POUH, a queda é obtida dinamicamente a partir da solução iterativa de problemas que consideram a FPH univariada (GARCIA-GONZALEZ, PARRILLA e MATEO, 2007; SKJELBRED, KONG e FOSSO, 2020). A solução comercial conhecida como *Short-Term Hydro Optimization Program* (SHOP) é um exemplo de obtenção dinâmica de efeitos de queda (SKJELBRED, KONG e FOSSO, 2020). O programa SHOP é uma ferramenta de POUH usada por várias UHEs em países europeus e no Chile. A ideia básica é calcular a queda líquida em cada iteração a partir das soluções obtidas pelos problemas que consideram uma FPH univariada. No entanto, para resolver o problema em um baixo tempo computacional, o programa SHOP realiza uma aproximação LPP côncava nas FPHs.

A principal desvantagem das abordagens baseadas em PLIM para o problema da POUH é a alta carga computacional, especialmente quando aplicadas em problemas de grande porte. Em Tong, Zhai e Guan (2013), por exemplo, o problema da POUH de uma cascata com oito usinas e 28 UGs é resolvida aproximando cada FPH por apenas três curvas, cada uma associada com uma queda líquida, sendo cada curva representada por apenas três segmentos de retas. Já no trabalho de Li et al (2014), o problema da POUH da maior hidrelétrica do mundo, UHE de Três Gargantas, com 32 UGs, é resolvida usando um modelo não convexo da aproximação LPP, conhecido como Logarítmico Agregado de Combinação Convexa (LACC), para aproximar todo o domínio de cada FPH bivariada por apenas nove pontos e oito triângulos. Os resultados, que consideram gaps de otimalidade entre 0,37% e 4,11%, são obtidos em 10 minutos. O estudo em Finardi, Takigawa e Brito (2016) também utiliza a abordagem de aproximação LPP de cada FPH por oito triângulos via LACC, de maneira semelhante a Li et al (2014), para resolver o problema da POUH em uma cascata com oito usinas e 29 UGs em menos de 12 minutos para um gap de otimalidade de 0,5%. Note que esses três trabalhos citados consideram poucos pontos da FPH original para realizar a aproximação LPP por modelos não convexos. Como o efeito da linearização de funções não lineares resulta em desvios entre os valores calculados do modelo PLIM e os valores reais, utilizar poucos pontos na aproximação

LPP da FPH pode gerar grandes erros de linearização ou até a inviabilidade do problema original (TONG, ZHAI e GUAN, 2013; LIMA, MARCOVECCHIO, *et al.*, 2013).

Embora os solucionadores comerciais possam obter soluções para quaisquer números de pontos extraídos da FPH original, os resultados em representações mais precisas são alcançados ao custo de tempos computacionais mais elevados (MARCHAND, GENDREAU, *et al.*, 2018). Uma alternativa para reduzir o tempo computacional é fornecer uma solução inicial viável para o problema (PARRILLA e GARCIA-GONZALEZ, 2006). Outra possibilidade é dada por uma abordagem na qual os pontos extraídos da FPH original são incluídos dinamicamente à medida que o procedimento de solução evolui (SANTOS e DINIZ, 2010). Essa abordagem diminui drasticamente o tempo da solução. No entanto, este método baseia-se na existência de um modelo LPP completo com uma grade de discretização muito densa (1.000 pontos no eixo de vazão turbinada) (DINIZ e MACEIRA, 2008). Santos e Diniz (2010) mostram que a abordagem dinâmica permite obter os mesmos resultados que a abordagem estática.

## 1.2 MOTIVAÇÃO E PROPOSIÇÃO

Nos últimos anos, as abordagens baseadas em PLIM tornaram-se populares devido à disponibilidade de solucionadores comerciais eficientes, amigáveis e capazes de resolver problemas de grande escala (KONG, SKJELBRED e FOSSO, 2020). Neste contexto, este trabalho de doutorado tem como intuito o desenvolvimento de uma estratégia baseada em PLIM para resolver com rapidez e precisão o problema da POUH.

Conforme exposto na revisão bibliográfica, as metodologias baseadas em aproximações LPP côncavas das FPHs reduzem a necessidade de variáveis binárias, o que contribui para reduzir o tempo de processamento, mas não capturam a não convexidade de cada FPH. Adicionalmente, a aplicação de métodos de linearização não convexos em funções bivariadas é computacionalmente mais custosa que em funções univariadas. Neste contexto, a primeira etapa a ser implementada na estratégia proposta nesse documento é estimar as quedas brutas horárias e particionar cada FPH univariada resultante em regiões côncavas e convexas (D'AMBROSIO, LEE e WÄCHTER, 2012). Os pontos de inflexão que separam as regiões côncavas e convexas da FPH univariada podem ser facilmente obtidos, extraindo as raízes da derivada de segunda ordem da função. Com o particionamento da FPH univariada, as

aproximações LPP côncavas podem ser realizadas com precisão em regiões côncavas. Para capturar os efeitos da altura de queda no problema de POUH, é considerada uma estratégia baseada na atualização iterativa da mesma (SKJELBRED, KONG e FOSSO, 2020). Como o problema da POUH associado com a FPH univariada precisa ser resolvido em algumas iterações até a convergência do algoritmo, é importante modelar uma formulação com o menor número possível de variáveis e restrições. Nesse contexto, duas novas problemáticas aparecem:

- 1ª problemática – Como utilizar um número mínimo de pontos que garanta uma aproximação LPP precisa, isto é, com diferenças pequenas e controladas em relação à FPH não linear original?
- 2ª problemática – Que abordagem utilizar para aproximar cada região côncava e convexa das FPHs do problema, de forma a reduzir o número de variáveis e restrições da formulação resultante?

Para resolver a primeira problemática, este trabalho propõe controlar os erros de linearização aplicando o algoritmo Ramer–Douglas–Peucker (RDP) (DOUGLAS e PEUCKER, 1973) para a escolha dos pontos da FPH univariada que devem ser utilizados na aproximação por partes de ambas as regiões. Dada uma curva composta por muitos pontos, o objetivo do algoritmo RDP é encontrar uma curva semelhante com menos pontos com base em uma diferença máxima admitida entre as duas funções (linear e não linear). Como resultado, a curva simplificada consiste em um subconjunto de pontos que definem a curva original.

O próximo passo é resolver a segunda problemática, isto é, definir maneiras eficientes de linearizar as regiões côncavas e convexas das FPHs. Para linearizar as regiões côncavas, este trabalho propõe associar técnicas de simetria em UGs idênticas à abordagem de aproximação côncava via *Convex Hull* (CH) (DINIZ e MACEIRA, 2008). O conceito de simetria é utilizado para determinar o número de UGs idênticas (decisões inteiras) ao invés de descobrir qual UG específica estará ativa (decisões binárias). As técnicas de simetria são normalmente utilizadas para reduzir as dimensões de problemas de comissionamento de unidades em termelétricas, associadas com funções de produção quadráticas univariadas (ALEMANYA, MAGNAGO, *et al.*, 2014; MEUS, PONCELET e DELARUE, 2018). No entanto, o uso de técnicas de simetria em problemas de POUH, associado com FPHs bivariadas e não lineares de alta ordem, ainda não foi devidamente explorado.

Para linearizar as regiões convexas das FPHs, o CH não é adequado, uma vez que as desigualdades lineares geradas por essa abordagem não representam efetivamente a função no âmbito do problema de POUH. Neste caso, é necessário utilizar um modelo não convexo para a aproximação LPP na região convexa. Por se destacar para esse tipo de aplicação (VIELMA, AHMED e NEMHAUSER, 2010), o modelo LACC é utilizado para aproximar as regiões convexas de cada FPH. Além disso, o despacho na região convexa pode ser diferente mesmo para UGs idênticas em uma solução ótima. Dessa forma, cada região convexa da FPH precisa ser aproximada individualmente.

Portanto, a estratégia proposta nesse documento consiste em resolver iterativamente um problema de PLIM baseado no particionamento da FPH univariada, na seleção controlada dos pontos que serão utilizados na aproximação LPP via algoritmo RDP, na aplicação de técnicas de simetria em regiões côncavas e na aplicação do modelo LACC em regiões convexas.

### 1.3 OBJETIVOS E CONTRIBUIÇÕES

Nas seções a seguir estão descritos o objetivo geral, os objetivos específicos e as contribuições esperadas neste trabalho de doutorado.

#### 1.3.1 Objetivo Geral

O objetivo geral deste doutorado é desenvolver uma estratégia de solução baseada na atualização iterativa da queda bruta, no particionamento da FPH e em técnicas de simetria que consiga resolver com eficiência o problema de POUH via PLIM.

#### 1.3.2 Objetivos Específicos e Contribuições

A seguir, são pontuados os objetivos específicos necessários para atingir o objetivo geral deste trabalho de doutorado:

- Explorar a estrutura não convexa da FPH univariada a partir do particionamento da função em regiões côncavas e convexas;
- Implementar o método de aproximação LPP mais adequado para cada região da FPH univariada;

- Analisar a aplicação de técnicas de simetria em UGs idênticas com o intuito de reduzir o tempo computacional mantendo a qualidade da solução;
- Propor o uso do algoritmo RDP para controlar a seleção dos pontos que serão utilizadas na aproximação LPP da FPH;
- Verificar a viabilidade do uso de uma atualização iterativa da queda bruta para representar os efeitos de queda na UHE.

Este é o primeiro trabalho que explora as diferentes regiões da FPH via particionamento e que introduz técnicas de simetria ao problema de POUH. Aliados, o particionamento da FPH univariada e a exploração da simetria possibilitam a modelagem de um problema de POUH via PLIM capaz de capturar a não linearidade das regiões côncavas e convexas da FPH e ser resolvido rapidamente. Ademais, na estratégia proposta, os efeitos de queda são obtidos iterativamente por meio da solução de problemas de POUH com FPHs univariadas, de maneira similar a Skjelbred, Kong e Fosso (2020).

A estratégia proposta neste documento representa o aperfeiçoamento de alguns estudos realizados ao longo do período doutoral, sempre no intuito de desenvolver uma estratégia de PLIM que alie precisão na representação das não convexidades e bom desempenho computacional. Esses estudos resultaram na publicação dos artigos relacionados na Tabela 1. Note que, dos seis artigos desenvolvidos, dois foram apresentados em duas edições subsequentes do congresso internacional *Power Systems Computation Conference (PSCC)*.

Tabela 1 – Artigos publicados no período.

Título (Referência)	Revista (Qualis 2017-2020)
<i>Mixed-integer nonseparable piecewise linear models for the hydropower production function in the Unit Commitment problem</i> (BRITO, FINARDI e TAKIGAWA, 2020a)	Electric Power Systems Research <b>(A1)</b>
<i>Unit-commitment via logarithmic aggregated convex combination in multiunit hydro plants</i> (BRITO, FINARDI e TAKIGAWA FY , 2020b)	PSCC2020 / Electric Power Systems Research <b>(A1)</b>
<i>Real-Time Optimal Load Dispatch Recommendation System for the Santo Antônio Hydroelectric Power Plant</i> (BRITO, FINARDI, <i>et al.</i> , 2021a)	Journal of Control, Automation and Electrical Systems <b>(A4)</b>

<i>Exploring Symmetry in a Short-Term Hydro Scheduling Problem: The Case of the Santo Antônio Hydro Plant</i> (BRITO, FINARDI, <i>et al.</i> , 2022)	Journal of Water Resources Planning and Management (A1)
<i>Domain Partition of the Hydro Production Function for Solving Efficiently the Short-Term Generation Scheduling Problem</i> (BRITO, FINARDI, <i>et al.</i> , 2021b)	IEEE Access (A3)
<i>Partitioning approach based on convex hull and multiple choice for solving hydro unit-commitment problems</i> (GOMES E SOUZA, BRITO, <i>et al.</i> , 2022)	PSCC2022 / Electric Power Systems Research (A1)

#### 1.4 ESTRUTURA DO TRABALHO

A estrutura dos demais capítulos está organizado da seguinte maneira: no Capítulo 2, é detalhado o problema de PNLIM associado com o problema da POUH; no Capítulo 3, é apresentada a estratégia de solução proposta, baseada no processo iterativo, no particionamento da FPH e em técnicas de simetria; no Capítulo 4 são apresentados os resultados para a POUH de uma cascata com 4 UHEs, e 53 UGs de seis tipos diferentes; e, por fim, no Capítulo 5, são apresentadas as principais conclusões, bem como as sugestões para trabalhos futuros.

## **2 MODELAGEM E FORMULAÇÃO DO PROBLEMA**

### **2.1 INTRODUÇÃO**

O objetivo deste capítulo é apresentar a modelagem e formulação do problema de POUH, concebido como um modelo de PNLIM, em um ambiente de mercado centralizado de energia elétrica. Para isso, inicialmente são modeladas as características operativas de uma UHE, com foco no detalhamento da FPH. Depois disso, são apresentadas as restrições operativas adicionais e a função objetivo do problema para, finalmente, apresentar a formulação completa da POUH.

### **2.2 MODELAGEM DE UMA USINA HIDRELÉTRICA**

Uma UHE pode ser composta por uma ou mais UGs, sendo que cada UG é definida pelo conjunto turbina-gerador. A turbina da UG é responsável pela conversão da energia potencial gravitacional da água acumulada em um reservatório em energia mecânica (SOUZA, SANTOS e BORTONI, 2009). Por sua vez, essa turbina é acoplada ao gerador, que converte a energia mecânica em energia elétrica. Na Figura 2 estão ilustrados os componentes básicos de uma UHE com turbinas do tipo bulbo. Pode-se observar que a água armazenada do reservatório a um dado nível de montante, flui pelo canal de adução, atravessa o conduto forçado, passa pela turbina, e é descarregada pelo tubo de sucção até o canal de restituição, este último localizado em um nível de jusante.

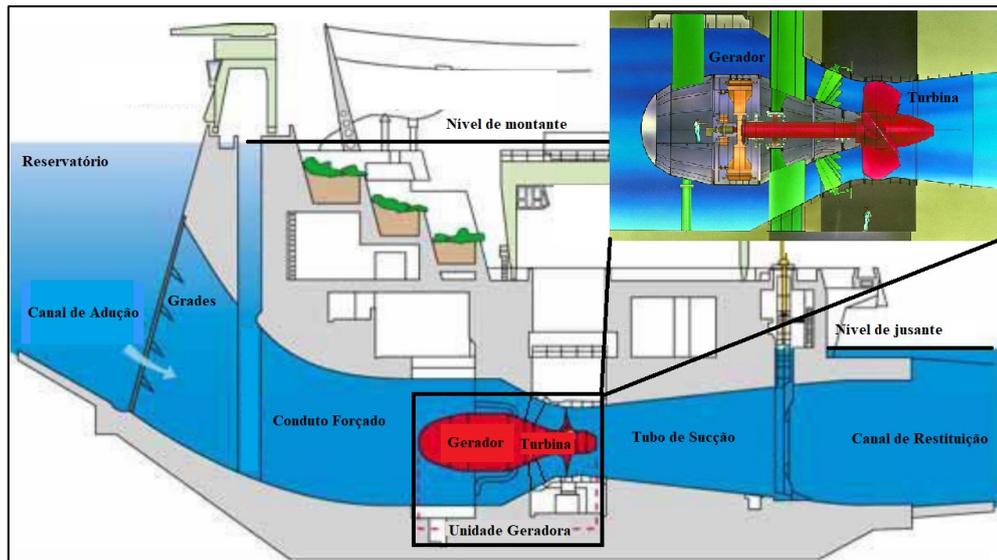


Figura 2 – Componentes básicos de uma UHE. Adaptado de (COELHO, 2006).

A FPH é responsável por representar todo o processo de transformação da energia potencial gravitacional da água em energia elétrica. Para a modelagem da FPH no contexto da POUH, as características físicas da turbina (que converte a energia potencial gravitacional da água em energia mecânica) e do gerador (que converte energia mecânica em elétrica), bem como todas as perdas envolvidas em cada etapa, devem ser consideradas em detalhes (FINARDI e SCUZZIATO, 2013). Na próxima subseção são apresentados os detalhes da representação matemática da FPH.

### 2.2.1 Função de Produção Hidrelétrica

A FPH define a potência ativa gerada por uma UG a partir da vazão turbinada, da queda líquida e do rendimento do conjunto turbina-gerador. Matematicamente, a FPH é uma função não-linear e não-convexa. O modelo da FPH de uma UG  $i$  do grupo de UGs idênticas do tipo  $j$  no estágio  $t$  em uma UHE é apresentado na Equação (1).

$$g_{ijt} = 10^{-6} \cdot A \cdot \rho t_{ijt} \cdot \rho m_{ijt} \cdot \rho g_{ijt} \cdot h_{ijt} \cdot w_{ijt}, \quad (1)$$

em que,

- $t$  é o índice do estágio de tempo;
- $j$  é o índice do grupo de UGs idênticas;
- $i$  é o índice da UG do tipo  $j$ ;

- $g_{ijt}$  é a potência ativa na UG  $i$  do tipo  $j$  no estágio  $t$  (MW);
- $A$  é a constante dada pelo produto entre aceleração da gravidade,  $GV$ , e densidade da água,  $DS$  (s·W/m<sup>4</sup>);
- $\rho t_{ijt}$  é o rendimento hidráulico da turbina da UG  $i$  do tipo  $j$  no estágio  $t$ ;
- $\rho m_{ijt}$  é o rendimento mecânico relativo ao acoplamento turbina-gerador da UG  $i$  do tipo  $j$  no estágio  $t$ ;
- $\rho g_{ijt}$  é o rendimento do gerador da UG  $i$  do tipo  $j$  no estágio  $t$ ;
- $h_{ijt}$  é a queda líquida na UG  $i$  do tipo  $j$  no estágio  $t$  (m);
- $w_{ijt}$  é a vazão turbinada pela UG  $i$  do tipo  $j$  no estágio  $t$  (m<sup>3</sup>/s).

As variáveis de controle na operação de uma UHE são a vazão turbinada em cada UG e a vazão vertida,  $s_t$ , no reservatório. Por outro lado, existem variáveis de estado, i.e., aquelas que são resultados das modificações empregadas nas variáveis de controle. Neste caso, tem-se a vazão total turbinada na usina (soma das vazões individuais das UGs) e o volume final armazenado no estágio  $t$ . Portanto, a FPH deve ser expressa matematicamente como função das variáveis de controle e de estado. Deste modo, as próximas subseções mostram como essa modelagem é realizada em uma UHE.

### 2.2.1.1 Altura de Queda Líquida

A altura de queda líquida em uma UG é dada pela diferença entre a queda bruta (diferença entre os níveis de montante e jusante) e as perdas hidráulicas ocorridas no percurso da água durante o processo de geração. A modelagem da queda bruta e das perdas hidráulicas é detalhada nas subseções a seguir.

#### 2.2.1.1.1 Queda Bruta

A modelagem da queda bruta em um dado estágio  $t$ ,  $hb_t$ , é dada por (2). Note que o nível de montante ( $nm_t$ ) depende do volume médio ( $vm_t$ ) do reservatório no estágio  $t$  e o nível de jusante ( $nj_t$ ) depende da vazão defluente ( $d_t$ ) no estágio  $t$ .

$$\begin{aligned}
 hb_t &= nm_t(vm_t) - nj_t(d_t) \\
 hb_t &= C_0 + C_1 \cdot vm_t + C_2 \cdot vm_t^2 + C_3 \cdot vm_t^3 + C_4 \cdot vm_t^4 - \\
 &\quad D_0 - D_1 \cdot d_t - D_2 \cdot d_t^2 - D_3 \cdot d_t^3 - D_4 \cdot d_t^4,
 \end{aligned} \tag{2}$$

em que,

$C_k$  é o coeficiente  $k$  do polinômio de nível de montante, onde  $k = 0, \dots, 4$ ;

$D_k$  é o coeficiente  $k$  do polinômio de nível de jusante, onde  $k = 0, \dots, 4$ ;

$vm_t$  é o volume médio armazenado no reservatório no estágio  $t$  ( $\text{hm}^3$ );

$d_t$  é a vazão defluente da usina ( $\text{m}^3/\text{s}$ ).

O volume médio,  $vm_t$ , é obtido conforme (3).

$$vm_t = \frac{vl_t + vl_{t+1}}{2}, \quad (3)$$

em que,

$vl_t$  é o volume armazenado no reservatório no estágio  $t$  ( $\text{hm}^3$ ).

A vazão  $d_t$  é obtida conforme (4). Eventualmente, pode-se somar outros tipos de vazões menos significativas à vazão defluente, como vazões no sistema de transposição de peixes, por exemplo.

$$d_t = q_t + s_t, \quad (4)$$

em que,

$q_t$  é a vazão total turbinada no estágio  $t$  ( $\text{m}^3/\text{s}$ );

$s_t$  é a vazão vertida na usina no estágio  $t$  ( $\text{m}^3/\text{s}$ ).

A vazão turbinada na usina,  $q_t$ , é dada pelo somatório das vazões turbinadas pelas  $N_{jt}$  UGs dos  $j$  tipos disponíveis no estágio  $t$ , conforme (5).

$$q_t = \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^{N_{jt}} w_{ijt}, \quad (5)$$

em que:

$J$  é a quantidade de tipos de UGs idênticas na UHE;

$N_{jt}$  é a quantidade de UGs do tipo  $j$  disponíveis no estágio  $t$ .

#### 2.2.1.1.2 Perdas Hidráulicas

Normalmente, as perdas hidráulicas são compostas pelas seguintes parcelas: perda de entrada (tomada d'água, grades e conduto forçado), perda de saída (tubo de sucção) e perda pela diferença na pressão atmosférica entre as cotas de montante e jusante (FERREIRA, 2018). Desta forma, a perda hidráulica total para a UG  $i$  do tipo  $j$  no estágio  $t$  é ilustrada por:

$$ph_{ijt} = pht_{ijt} + phg_{ijt} + phc_{ijt} + phs_{ijt} + pha_t, \quad (6)$$

em que,

$ph_{ijt}$  perda hidráulica total na UG  $i$  do tipo  $j$  no estágio  $t$  (m);

$pht_{ijt}$  perda hidráulica na tomada d'água da UG  $i$  do tipo  $j$  no estágio  $t$  (m);

$phg_{ijt}$  perda hidráulica nas grades da UG  $i$  do tipo  $j$  no estágio  $t$  (m);

$phc_{ijt}$  perda hidráulica no conduto forçado da UG  $i$  do tipo  $j$  no estágio  $t$  (m);

$phs_{ijt}$  perda hidráulica na saída no tubo de sucção da UG  $i$  do tipo  $j$  no estágio  $t$  (m);

$pha_t$  perda hidráulica devido a diferença de pressão atmosférica entre as cotas de montante e jusante no estágio  $t$  (m).

A perda hidráulica na tomada d'água,  $pht_{ijt}$ , representa a perda de aproximação e contração da água do reservatório que entra no conduto forçado. Essa perda é estimada como função da área da seção de entrada da turbina, da aceleração da gravidade e do coeficiente de perda relativo à tomada d'água, conforme (7) (ELETROBRÁS, 2003).

$$pht_{ijt} = \left( \frac{KTA}{2 \cdot GV \cdot ATE^2} \right) \cdot w_{ijt}^2 \rightarrow K_{0j} \cdot w_{ijt}^2, \quad (7)$$

em que,

$KTA$  é um coeficiente adimensional relativo à tomada d'água;

$ATE$  é a área da seção de entrada da tomada d'água (m<sup>2</sup>);

$K_{0j}$  é a constante associada com a função que representa a perda hidráulica na tomada d'água nas UGs do tipo  $j$  (s/m<sup>5</sup>).

Por sua vez, a perda hidráulica nas grades,  $phg_{ijt}$  é estimada como função das características construtivas das grades, conforme (8) (ABNT, 2001).

$$phg_{ijt} = \left( \frac{KG}{2 \cdot GV \cdot AG^2} \right) \cdot w_{ijt}^2 \rightarrow K_{1j} \cdot w_{ijt}^2, \quad (8)$$

em que,

$KG$  é uma constante adimensional que depende das características construtivas da grade;

$AG$  é a área da grade (m<sup>2</sup>);

$K_{1j}$  é a constante associada com a função que representa as perdas hidráulicas na grade nas UGs do tipo  $j$  (s/m<sup>5</sup>).

O coeficiente  $KG$  é dado por:

$$KG = KB \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{DB + GO \cdot EB}{(1 - GO) \cdot EB}\right)^4} \cdot \text{sen}(\theta), \quad (9)$$

em que,

$KB$  é uma constante adimensional que depende da forma das barras;

$DB$  é a espessura ou diâmetro das barras verticais (m);

$EB$  é o espaçamento entre as barras verticais (m);

$\theta$  é o ângulo de inclinação entre a grade e a linha horizontal na UG;

$GO$  é o grau de obstrução da grade (%).

A perda no conduto forçado,  $phc_{ijt}$ , é usualmente aproximada com base na equação universal de Hazen-Willians (SOUZA, 1983), da seguinte maneira:

$$phc_{ijt} = 10,646 \cdot \frac{L}{DI^{4,87}} \cdot \left(\frac{w_{ijt}}{HW}\right)^{1,852} = \frac{10,646 \cdot L}{HW^{1,852} \cdot DI^{4,87}} \cdot w_{ijt}^{1,852} = K_{2j} \cdot w_{ijt}^{1,852}, \quad (10)$$

em que,

$HW$  é a constante adimensional de Hanzen-Willians que é obtida por valores tabelados.

No caso de condutos de concreto, esse valor pode variar entre 120 e 130 (SOUZA, 1983);

$L$  é o comprimento do conduto (m);

$DI$  é o diâmetro do conduto (m);

$K_{2j}$  é a constante associada com a função que representa a perda hidráulica no conduto forçado nas UGs do tipo  $j$  ( $s^2/m^5$ ).

A parcela  $phs_{ijt}$ , relacionada com a perda hidráulica na seção de saída do tubo de sucção da turbina, é função da energia cinética específica em uma seção (área) de referência. Assim, é possível calcular esta perda com base na velocidade média da água perpendicular à seção considerada, sendo obtido da seguinte maneira:

$$phs_{ijt} = \frac{(w_{ijt} / ATS)^2}{2 \cdot GV} = \frac{w_{ijt}^2}{2 \cdot GV \cdot ATS^2} = \left(\frac{1}{2 \cdot GV \cdot ATS^2}\right) \cdot w_{ijt}^2 \rightarrow K_{3j} \cdot w_{ijt}^2, \quad (11)$$

em que,

$ATS$  é a área da seção de saída do tubo de sucção da turbina ( $m^2$ );

$K_{3j}$  é a constante associada com a função que representa a perda hidráulica na saída do tubo de sucção nas UGs do tipo  $j$  ( $s^2/m^5$ ).

Por fim, o último termo de (6) refere-se à perda hidráulica devido a diferença de pressão atmosférica entre as cotas de montante e jusante,  $pha_t$ , e é obtido conforme a equação (12) (CORDOVA, FINARDI, *et al.*, 2014). Note que  $pha_t$  é uma função de alta ordem, já que as funções cotas de montante e jusante, de quarta ordem, são elevadas a 5,255.

$$pha_t = \frac{101.325}{DS \cdot GV} \cdot \left[ (1 - 2,2558 \cdot 10^{-5} \cdot nj_t(d_t))^{5,255} - (1 - 2,2558 \cdot 10^{-5} \cdot nm_t(vm_t))^{5,255} \right]. \quad (12)$$

Dentre as parcelas de perdas hidráulicas, apenas  $phc_{ijt}$  e  $pha_t$  não dependem do quadrado do turbinamento da UG. Além disso, como as perdas no conduto forçado são proporcionalmente menores que as demais perdas hidráulicas (FERREIRA, 2018), pode-se simplificar a representação das perdas hidráulicas para um termo dependente apenas do quadrado da vazão turbinada. Logo, a perda hidráulica pode ser representada de maneira simplificada, conforme equação (13).

$$\begin{aligned} ph_{ijt} &= K_{0j} \cdot w_{ijt}^2 + K_{1j} \cdot w_{ijt}^2 + K_{2j} \cdot w_{ijt}^{1,852} + K_{3j} \cdot w_{ijt}^2 + pha_t(vm_t, d_t) \rightarrow \\ ph_{ijt} &= (K_{0j} + K_{1j} + K_{2j} + K_{3j}) \cdot w_{ijt}^2 + pha_t(vm_t, d_t) \rightarrow \\ ph_{ijt} &= KT_j \cdot w_{ijt}^2 + pha_t(vm_t, d_t), \end{aligned} \quad (13)$$

em que:

$KT_j$  é a constante geral de perdas hidráulicas nas UGs do tipo  $j$ .

### 2.2.1.1.3 Representação da Queda Líquida

A representação matemática da queda líquida da UG  $i$  do tipo  $j$  e estágio  $t$  é dada por (14). Note que se trata de uma equação não linear de ordem elevada (principalmente devido à  $pha_t$ ), com acoplamento temporal e dependente das variáveis de estado e de controle.

$$h_{ijt} = hb_t(vm_t, d_t) - KT_j \cdot w_{ijt}^2 - pha_t(vm_t, d_t) \quad (14)$$

### 2.2.1.2 Rendimento Hidráulico da Turbina

O rendimento hidráulico da turbina em uma UG depende da vazão turbinada e da queda líquida. Essa informação é dada pelo fabricante da turbina por meio da curva colina da UG. Um exemplo de curva colina pode ser observado na Figura 3. A vazão turbinada na UG está representada pelo eixo vertical e a queda líquida está no eixo horizontal.

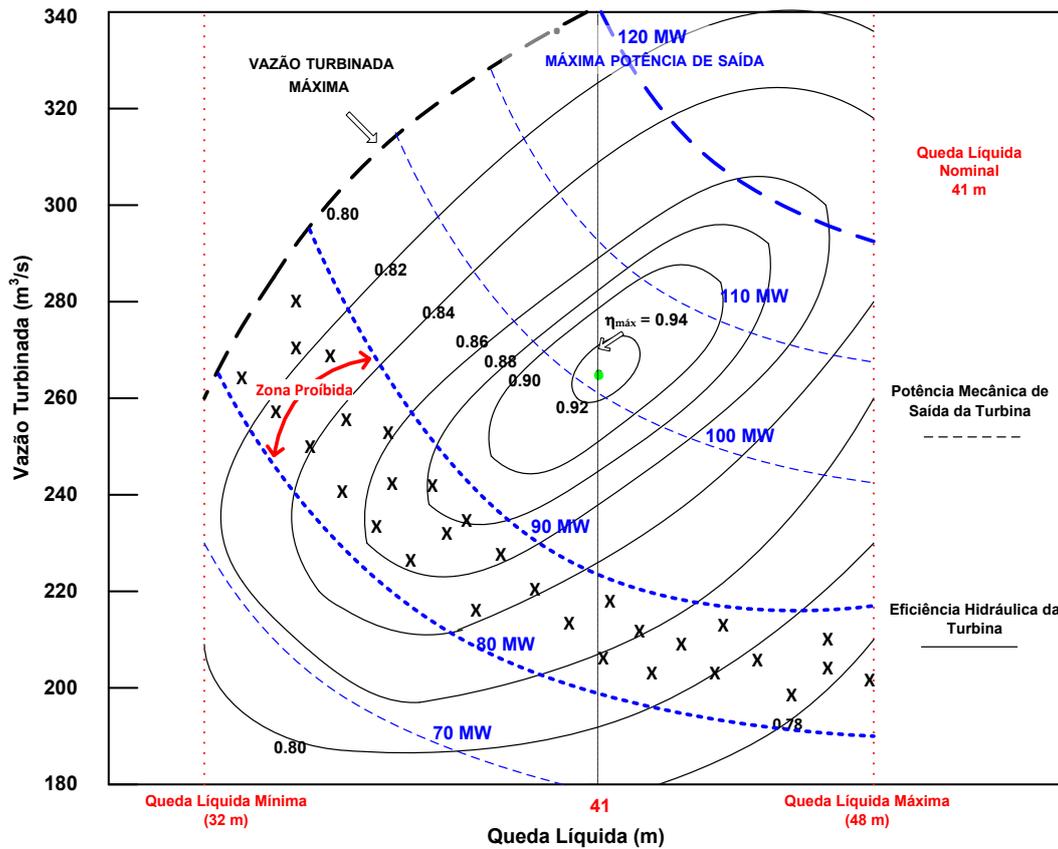


Figura 3 – Exemplo de curva colina (FINARDI e DA SILVA, 2005).

Uma vez que só se dispõe da informação de rendimento hidráulico sob forma gráfica, é necessário extrair um modelo matemático a partir da curva colina por meio de técnicas de interpolação polinomial (FINARDI e DA SILVA, 2005). Neste contexto, a Equação (15) representa o comportamento das curvas colinas das turbinas de uma UHE.

$$\begin{aligned} \rho_{ijt} = & E_{0j} + E_{1j} \cdot w_{ijt} + E_{2j} \cdot h_{ijt}(vm_t, d_t, w_{ijt}) + E_{3j} \cdot w_{ijt} \cdot h_{ijt}(vm_t, d_t, w_{ijt}) + \\ & E_{4j} \cdot w_{ijt}^2 + E_{5j} \cdot h_{ijt}(vm_t, d_t, w_{ijt})^2 + E_{6j} \cdot w_{ijt}^3 + E_{7j} \cdot h_{ijt}(vm_t, d_t, w_{ijt})^3 + \\ & E_{8j} \cdot w_{ijt}^2 \cdot h_{ijt}(vm_t, d_t, w_{ijt}) + E_{9j} \cdot w_{ijt} \cdot h_{ijt}(vm_t, d_t, w_{ijt})^2, \end{aligned} \quad (15)$$

em que,

$E_{kj}$  constante  $k$  associada a função do rendimento hidráulico da turbina nas UGs do tipo  $j$ , onde  $k = 0, \dots, 9$ .

### 2.2.1.3 Rendimentos Mecânico do Acoplamento Turbina-Gerador e Elétrico no Gerador

O rendimento mecânico no acoplamento turbina-gerador,  $\rho m_{it}$ , e elétrico no gerador,  $\rho g_{it}$ , representam as perdas de carga que ocorrem a partir da potência mecânica entregue pela turbina até os terminais do gerador. Por isso, a partir da dedução apresentada em (16), uma representação alternativa para a FPH (1) pode ser dada por (17).

$$g_{ijt} = \overbrace{10^{-6} \cdot A \cdot \rho t_{ijt} \cdot h_{ijt} \cdot w_{ijt} \cdot \rho m_{ijt} \cdot \rho g_{ijt}}^{pmt_{ijt}} = \underbrace{pmt_{ijt} \cdot \rho m_{ijt}}_{peg_{ijt}} \cdot \rho g_{ijt} = peg_{ijt} \cdot \rho g_{ijt} \rightarrow$$

$$\rho m_{ijt} = 1 - \frac{permt_{ijt}}{pmt_{ijt}} \text{ e } \rho g_{ijt} = 1 - \frac{ptg_{ijt}}{peg_{ijt}} \rightarrow \quad (16)$$

$$pmt_{ijt} \cdot \rho m_{ijt} = pmt_{ijt} - \frac{pmt_{ijt} \cdot permt_{ijt}}{pmt_{ijt}} = pmt_{ijt} - permt_{ijt} \rightarrow$$

$$peg_{ijt} \cdot \rho g_{ijt} = peg_{ijt} - \frac{peg_{ijt} \cdot ptg_{ijt}}{peg_{ijt}} = peg_{ijt} - ptg_{ijt} \rightarrow$$

$$g_{ijt} = 10^{-6} \cdot A \cdot \rho t_{ijt} \cdot h_{ijt} \cdot w_{ijt} - (permt_{ijt} + ptg_{ijt}), \quad (17)$$

em que,

$pmt_{ijt}$  é a potência mecânica entregue pela turbina da UG  $i$  do tipo  $j$  no estágio  $t$  (MW);

$peg_{ijt}$  é a potência mecânica entregue ao gerador da UG  $i$  do tipo  $j$  no estágio  $t$  (MW);

$permt_{ijt}$  é a perda mecânica no acoplamento turbina-gerador da UG  $i$  do tipo  $j$  no estágio  $t$  (MW);

$ptg_{ijt}$  é a perda elétrica no gerador da UG  $i$  do tipo  $j$  no estágio  $t$  (MW).

Para Finardi e Scuzziato (2013), a partir de ensaios em campo,  $permt_{ijt}$  e  $ptg_{ijt}$  podem ser representados genericamente por (18) e (19).

$$permt_{ijt} = F_{0j} + F_{1j} \cdot g_{ijt} + F_{2j} \cdot g_{ijt}^2, \quad (18)$$

$$ptg_{ijt} = G_{0j} + e^{G_{1j} \cdot g_{ijt}}, \quad (19)$$

em que,

$F_{kj}$  é a constante  $k$  associada a função de perda mecânica da turbina nas UGs do tipo  $j$ , onde  $k = 0, \dots, 2$ ;

$G_{kj}$  é a constante  $k$  associada a função de perda elétrica no gerador nas UGs do tipo  $j$ , onde  $k = 0, 1$ .

#### 2.2.1.4 Função de Produção

A partir das informações apresentadas nas seções anteriores, a representação da FPH para cada UG  $i$  do tipo  $j$  e estágio  $t$  na POUH é expressa da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
g_{ijt} = & 10^{-6} \cdot A \cdot [E_{0j} + E_{1j} \cdot w_{ijt} + E_{2j} \cdot h_{ijt}(vm_t, d_t, w_{ijt}) + E_{3j} \cdot w_{ijt} \cdot h_{ijt}(vm_t, d_t, w_{ijt}) + \\
& E_{4j} \cdot w_{ijt}^2 + E_{5j} \cdot h_{ijt}(vm_t, d_t, w_{ijt})^2 + E_{6j} \cdot w_{ijt}^3 + E_{7j} \cdot h_{ijt}(vm_t, d_t, w_{ijt})^3 + \\
& E_{8j} \cdot w_{ijt}^2 \cdot h_{ijt}(vm_t, d_t, w_{ijt}) + E_{9j} \cdot w_{ijt} \cdot h_{ijt}(vm_t, d_t, w_{ijt})^2] \cdot w_{ijt} \cdot h_{ijt}(vm_t, d_t, w_{ijt}) \\
& - F_{0j} + F_{1j} \cdot g_{ijt} + F_{2j} \cdot g_{ijt}^2 - G_{0j} + e^{G_{1j} \cdot g_{ijt}}
\end{aligned} \tag{20}$$

Note que a FPH é uma função não linear de elevada ordem.

## 2.2.2 Restrições Operativas Adicionais

Além da FPH, no problema da POUH é necessário modelar outras restrições operativas tais como balanço hidráulico do reservatório, limites operativos das variáveis, atendimento às metas de geração entre outros. A modelagem dessas restrições é apresentada nas subseções a seguir.

### 2.2.2.1 Balanço Hidráulico

O balanço hidráulico de um reservatório  $r$  deve respeitar o princípio da conservação da massa d'água, dado por (21). Note que essa restrição impõe ao problema um acoplamento temporal e espacial, isto é, com variáveis de um estágio/reservatório sendo definidas a partir das condições operativas de outro estágio/reservatório.

$$vl_t - vl_{t-1} + FC \cdot \left[ q_t + s_t - \sum_{a \in \mathfrak{R}} (q_{a,t-\tau_a} + s_{a,t-\tau_a}) \right] = FC \cdot Y_t, \tag{21}$$

em que:

$FC$  é o fator de conversão de vazão ( $m^3/s$ ) para volume ( $hm^3$ ) em um determinado período ( $FC$  é 0,0036 para o período de uma hora);

$a$  é o índice dos reservatórios à montante;

$\mathfrak{R}$  é o conjunto de reservatórios imediatamente a montante;

$\tau_a$  é o tempo de viagem da água desde o reservatório  $a$  (h);

$Y_t$  é a vazão incremental afluyente do reservatório ao longo do estágio  $t$  ( $m^3/s$ ).

### 2.2.2.2 Limites de Volume e Vazão Vertida

Os limites de volume e vazão vertida em uma usina precisam ser considerados na modelagem do problema da POUH conforme (22) e (23).

$$VL^{\min} \leq vl_t \leq VL^{\max}, \quad (22)$$

$$0 \leq s_t \leq S^{\max}, \quad (23)$$

em que:

$VL^{\min/\max}$  é o volume mínimo/máximo do reservatório da usina ( $\text{hm}^3$ );

$S^{\max}$  é o vertimento máximo da usina ( $\text{m}^3/\text{s}$ ).

### 2.2.2.3 Limites de Vazão Turbinada e Geração em cada UG

A representação dos limites superior e inferior de vazão turbinada em uma UG podem ser genericamente representados por (24)-(26) (FINARDI e SCUZZIATO, 2013).

$$w_{ijt}^{\min} = O_{0j} + O_{1j} \cdot h_{ijt}(vm_t, d_t, w_{ijt}) + O_{2j} \cdot h_{ijt}(vm_t, d_t, w_{ijt})^2, \quad (24)$$

$$w_{ijt}^{\max} = P_{0j} + P_{1j} \cdot h_{ijt}(vm_t, d_t, w_{ijt}) + P_{2j} \cdot h_{ijt}(vm_t, d_t, w_{ijt})^2, \quad (25)$$

$$u_{ijt} \cdot w_{ijt}^{\min}(h_{ijt}) \leq w_{ijt} \leq u_{ijt} \cdot w_{ijt}^{\max}(h_{ijt}), \quad (26)$$

$$u_{ijt} \in \{0, 1\}, \quad (27)$$

em que:

$w_{ijt}^{\min/\max}$  é a vazão turbinada mínima/máxima da UG  $i$  do tipo  $j$  no estágio  $t$  ( $\text{m}^3/\text{s}$ );

$O_{kj}$  é o coeficiente  $k$  da função de vazão turbinada mínima nas UGs do tipo  $j$ ;

$P_{kj}$  é o coeficiente  $k$  da função de vazão turbinada máxima nas UGs do tipo  $j$ ;

$u_{ijt}$  é a variável binária que indica se a UG  $i$  do tipo  $j$  está ligada ( $u_{ijt} = 1$ ) ou desligada ( $u_{ijt} = 0$ ) no estágio de tempo  $t$ .

No tocante às restrições que limitam as gerações nas UGs, pode existir uma região de geração definida como zona proibida. Nessas regiões podem ocorrer fenômenos que prejudicam a vida útil da máquina, como cavitações, vibrações mecânicas e oscilações de pressão no tubo de sucção e oscilações no eixo do rotor. Neste cenário, as restrições (28) e (30) estabelecem os limites de potência para cada faixa permitida. Note, através de (29), que apenas uma faixa permitida pode ser acessada.

$$\sum_{o=1}^{\Phi_j} G_{oit}^{\min} \cdot fx_{oit} \leq g_{ijt} \leq \sum_{o=1}^{\Phi_j} G_{oit}^{\max} \cdot fx_{oit} \quad (28)$$

$$u_{ijt} = \sum_{o=1}^{\Phi_j} fx_{oit} \quad (29)$$

$$fx_{oit} \in \{0,1\}. \quad (30)$$

em que:

$o$  é o índice da faixa permitida;

$\Phi_j$  é o número total de faixas permitidas de operação nas UGs do tipo  $j$ ;

$fx_{oit}$  é a variável binária que indica se a UG  $i$  do tipo  $j$  está ligada ( $fx_{oit} = 1$ ) ou desligada ( $fx_{oit} = 0$ ) na faixa permitida  $o$ , no estágio  $t$ ;

$G_{oit}^{\min/\max}$  é a geração mínima/máxima na faixa permitida  $o$  nas UGs do tipo  $j$  no estágio  $t$  (MW).

#### 2.2.2.4 Atendimento às Metas de Geração

Em um mercado centralizado de energia o operador do sistema determina as metas de geração que precisam ser atendidas pela usina ao longo dos estágios. Portanto, as restrições de atendimento às metas de geração são modeladas conforme (31).

$$\sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^{N_{jt}} g_{ijt} = MG_t \quad (31)$$

em que:

$MG_t$  é a meta de geração para a usina no estágio  $t$  (MW).

#### 2.2.2.5 Partidas e Paradas nas Unidades Geradoras

Para que o desgaste das unidades geradoras seja reduzido, é importante adicionar ao problema da POUH, restrições que definem as partidas e paradas nas UGs. Uma maneira de definir as partidas e paradas nas UGs é por meio das equações (32)-(34). Segundo Morales-España, Latorre e Ramos (2013), a equação (32) reduz significativamente a carga computacional em comparação com outras comumente encontradas na literatura. Note que o

parâmetro  $U_{ij0}$  informa se a UG  $i$  do tipo  $j$  está em operação no estágio de tempo inicial,  $U_{ij0} = 1$ , ou não,  $U_{ij0} = 0$ .

$$pt_{ijt} - pr_{ijt} = u_{ijt} - u_{ij,t-1}, \quad (32)$$

$$u_{ij0} = U_{ij0}, \quad (33)$$

$$pt_{ijt}, pr_{ijt} \in \{0, 1\}, \quad (34)$$

em que:

$pt_{ijt}$  é a variável binária que indica se a UG  $i$  do tipo  $j$  entra em operação no estágio  $t$ ;

$pr_{ijt}$  é a variável binária que indica se a UG  $i$  do tipo  $j$  é desligada no estágio  $t$ .

#### 2.2.2.6 Função Objetivo

Para despachar as UGs em valores próximos do ponto de máxima eficiência atendendo às metas de geração do operador do sistema no problema de POUH, é necessário minimizar a vazão total da usina, que equivale a maximizar o uso da água do reservatório, uma vez que o interesse é extrair o máximo de energia por volume de água. Por outro lado, a variação nas metas de geração ao longo dos estágios pode exigir que, para manter essa eficiência em valores adequados, seja demandado um elevado número de partidas e paradas das UGs. Deste modo, a função objetivo proposta, ilustrada em (35), possibilita a consideração destes dois aspectos.

$$\min \Theta = \sum_{t=1}^T \left( q_t + s_t + \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^{N_{jt}} [PP_{ij} \cdot (pt_{ijt} + pr_{ijt})] \right), \quad (35)$$

em que:

$T$  é o número de estágios de tempo;

$PP_{ij}$  é a constante que penaliza as partidas e paradas da UG  $i$  do tipo  $j$ .

Note que a função objetivo visa minimizar a soma da vazão total da usina ao longo do horizonte de planejamento e as partidas e paradas nas UGs multiplicadas pelo parâmetro  $PP_{ij}$ , que representa o custo, em  $m^3/s$ , de partir ou parar uma UG. Esse custo pode variar bastante de uma usina para outra, pois envolve custos com manutenções (NILSSON e SJELVGREN, 1997). Portanto, os valores adequados para  $PP_{ij}$  precisam ser definidos em conjunto com a equipe de engenheiros responsável pela operação e manutenção das UGs.

### 2.3 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

A formulação completa do problema de PNLIM associado com a POUH em um mercado centralizado de energia é dada por (36)-(58).

$$\min \Theta = \sum_{t=1}^T \sum_{r=1}^R \left( q_{rt} + s_{rt} + \sum_{j=1}^{J_r} \sum_{i=1}^{N_{jrt}} \left[ PP_{ijr} \cdot (pt_{ijrt} + pr_{ijrt}) \right] \right), \quad (36)$$

s.a:

$$vl_{rt} - vl_{r,t-1} + FC \cdot \left[ q_{rt} + s_{rt} - \sum_{a \in \mathcal{R}_r} (q_{a,t-\tau_{ar}} + s_{a,t-\tau_{ar}}) \right] = FC \cdot Y_{rt}, \quad r=1, \dots, R, \quad t=1, \dots, T, \quad (37)$$

$$VL_r^{\min} \leq vl_t \leq VL_r^{\max}, \quad r=1, \dots, R, \quad t=1, \dots, T, \quad (38)$$

$$0 \leq s_{rt} \leq S_r^{\max}, \quad r=1, \dots, R, \quad t=1, \dots, T, \quad (39)$$

$$q_{rt} - \sum_{j=1}^{J_r} \sum_{i=1}^{N_{jrt}} w_{ijrt} = 0, \quad r=1, \dots, R, \quad t=1, \dots, T, \quad (40)$$

$$\sum_{j=1}^{J_r} \sum_{i=1}^{N_{jrt}} g_{ijrt} = MG_{rt}, \quad r=1, \dots, R, \quad t=1, \dots, T, \quad (41)$$

$$g_{ijrt} - 10^{-6} \cdot A_r \cdot \rho t_{ijrt} \cdot w_{ijrt} \cdot h_{ijrt} + permt_{ijrt} + ptg_{ijrt} = 0, \quad t=1, \dots, T, \quad r=1, \dots, R, \quad j=1, \dots, J_r, \quad i=1, \dots, N_{jrt}, \quad (42)$$

$$\begin{aligned} \rho t_{ijrt} - E_{0jr} - E_{1jr} \cdot w_{ijrt} - E_{2jr} \cdot h_{ijrt} - E_{3jr} \cdot w_{ijrt} \cdot h_{ijrt} - E_{4jr} \cdot w_{ijrt}^2 - E_{5jr} \cdot h_{ijrt}^2 - \\ E_{6jr} \cdot w_{ijrt}^3 - E_{7jr} \cdot h_{ijrt}^3 - E_{8jr} \cdot w_{ijrt}^2 \cdot h_{ijrt} - E_{9jr} \cdot w_{ijrt} \cdot h_{ijrt}^2 = 0, \end{aligned} \quad (43)$$

$$t=1, \dots, T, \quad r=1, \dots, R, \quad j=1, \dots, J_r, \quad i=1, \dots, N_{jrt},$$

$$h_{ijrt} - nm_{rt} + nj_{rt} + KP_{jr} \cdot w_{ijrt}^2 + K_{2jr} \cdot w_{ijrt}^{1,852} + pha_{rt} = 0, \quad t=1, \dots, T, \quad r=1, \dots, R, \quad j=1, \dots, J_r, \quad i=1, \dots, N_{jrt}, \quad (44)$$

$$nm_{rt} - C_{1r} \cdot vm_{rt} - C_{2r} \cdot vm_{rt}^2 - C_{3r} \cdot vm_{rt}^3 - C_{4r} \cdot vm_{rt}^4 = C_{0r}, \quad t=1, \dots, T, \quad r=1, \dots, R, \quad (45)$$

$$vm_{rt} - \frac{v_{rt} + v_{r,t+1}}{2} = 0, \quad t=1, \dots, T, \quad r=1, \dots, R, \quad (46)$$

$$nj_{rt} - D_{1r} \cdot d_{rt} - D_{2r} \cdot d_{rt}^2 - D_{3r} \cdot d_{rt}^3 - D_{4r} \cdot d_{rt}^4 = D_{0r}, \quad t=1, \dots, T, \quad r=1, \dots, R, \quad (47)$$

$$d_{rt} - q_{rt} - s_{rt} = 0, \quad t=1, \dots, T, \quad r=1, \dots, R, \quad (48)$$

$$pha_{rt} - \frac{101.325}{DS_r \cdot GV_r} \cdot \left[ (1 - 2,2558 \cdot 10^{-5} \cdot nj_{rt})^{5,255} - (1 - 2,2558 \cdot 10^{-5} \cdot nm_{rt})^{5,255} \right] = 0, \quad t=1, \dots, T, \quad r=1, \dots, R, \quad (49)$$

$$permt_{ijrt} - F_{1jr} \cdot g_{ijrt} - F_{2jr} \cdot g_{ijrt}^2 = F_{0jr}, \quad t = 1, \dots, T, \quad r = 1, \dots, R, \quad j = 1, \dots, J_r, \quad i = 1, \dots, N_{jrt}, \quad (50)$$

$$ptg_{ijrt} - e^{G_{1jr} \cdot g_{ijrt}} = G_{0jr}, \quad t = 1, \dots, T, \quad r = 1, \dots, R, \quad j = 1, \dots, J_r, \quad i = 1, \dots, N_{jrt}, \quad (51)$$

$$u_{ijrt} \cdot (O_{0jr} + O_{1jr} \cdot h_{ijrt} + O_{2jr} \cdot h_{ijrt}^2) \leq w_{ijrt} \leq u_{ijrt} \cdot (P_{0jr} + P_{1jr} \cdot h_{ijrt} + P_{2jr} \cdot h_{ijrt}^2 + P_{3jr} \cdot h_{ijrt}^3), \quad (52)$$

$$t = 1, \dots, T, \quad r = 1, \dots, R, \quad j = 1, \dots, J_r, \quad i = 1, \dots, N_{jrt},$$

$$\sum_{o=1}^{\Phi_{jr}} G_{ojrt}^{\min} \cdot fx_{ojrt} \leq g_{ijrt} \leq \sum_{o=1}^{\Phi_{jr}} G_{ojrt}^{\max} \cdot fx_{ojrt}, \quad (53)$$

$$t = 1, \dots, T, \quad r = 1, \dots, R, \quad j = 1, \dots, J_r, \quad i = 1, \dots, N_{jrt},$$

$$u_{ijrt} - \sum_{o=1}^{\Phi_{jr}} fx_{ojrt} = 0, \quad t = 1, \dots, T, \quad r = 1, \dots, R, \quad j = 1, \dots, J_r, \quad i = 1, \dots, N_{jrt}, \quad (54)$$

$$pt_{ijrt} - pr_{ijrt} - u_{ijrt} + u_{ijr,t-1} = 0, \quad t = 1, \dots, T, \quad r = 1, \dots, R, \quad j = 1, \dots, J_r, \quad i = 1, \dots, N_{jrt}, \quad (55)$$

$$u_{ijr0} = U_{ijr0}, \quad r = 1, \dots, R, \quad j = 1, \dots, J_r, \quad i = 1, \dots, N_{jrt}, \quad (56)$$

$$u_{ijrt} \in \{0, 1\}, \quad t = 1, \dots, T, \quad r = 1, \dots, R, \quad j = 1, \dots, J_r, \quad i = 1, \dots, N_{jrt}, \quad (57)$$

$$fx_{ojrt} \in \{0, 1\}, \quad t = 1, \dots, T, \quad r = 1, \dots, R, \quad j = 1, \dots, J_r, \quad i = 1, \dots, N_{jrt}, \quad o = 1, \dots, \Phi_{jr}. \quad (58)$$

em que:

$r$  é o índice do reservatório;

O problema (36)-(58) apresenta diversas características matemáticas que o tornam complexo, tais como as não linearidades (elevada ordem dos polinômios), descontinuidades e acoplamentos temporais. Por isso, faz-se necessário o uso de técnicas e ferramentas adequadas para a obtenção de boas soluções em um tempo computacional compatível com o problema da POUH. Neste contexto, no próximo capítulo, é apresentada a estratégia de solução proposta nesta tese de doutorado para resolver eficientemente o problema via PLIM.

### 3 ESTRATÉGIA DE SOLUÇÃO

#### 3.1 INTRODUÇÃO

A estratégia proposta para o problema da POUH soluciona problemas iterativos, atualizando a altura de queda bruta. Ao considerar as quedas brutas atualizadas iterativamente, muitas das não linearidades são suprimidas do modelo de otimização (especialmente aquelas relacionadas com a altura de queda). Assim, para uma dada altura de queda, as FPHs univariadas (dependente da vazão turbinada) são particionadas em regiões côncavas e convexas, com aproximações específicas para cada região. Adicionalmente, é proposta uma metodologia de seleção controlada dos pontos que serão utilizados na aproximação LPP das regiões das FPHs univariadas, por meio do algoritmo RDP. Na região côncava é introduzido o conceito de simetria para determinar o número de UGs idênticas (decisão inteira) e nas regiões convexas da FPH é utilizado o modelo LACC. As principais etapas da estratégia proposta são ilustradas no fluxograma da Figura 4.

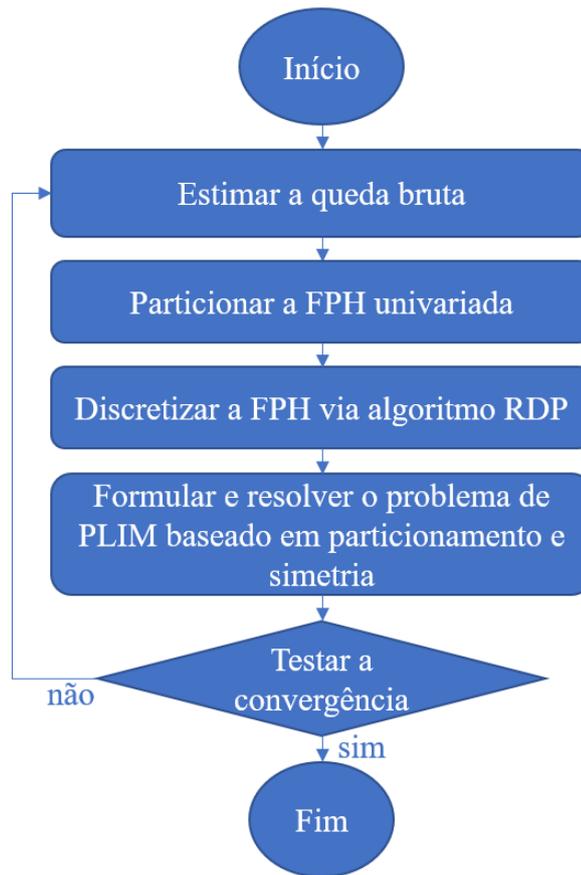


Figura 4 – Estratégia proposta.

O critério de convergência da estratégia proposta está baseado no valor da função objetivo do problema de PLIM resolvido em cada iteração, ou seja, quando a diferença entre os valores da função objetivo nas iterações for menor que uma dada tolerância. Ressalta-se que o *gap* de otimalidade considerado como critério de parada para o problema resolvido em cada iteração deve ser menor que a tolerância considerada no algoritmo.

Nas seções a seguir, são detalhados os procedimentos adotados em cada uma das principais etapas da estratégia proposta, com destaque para a formulação da PLIM, baseada no particionamento e na simetria, resolvida em cada iteração.

### 3.2 ESTIMAÇÃO DA QUEDA BRUTA E DOS LIMITES DE VAZÃO TURBINADA

O primeiro passo para descrever a estratégia proposta consiste em estimar a queda bruta horária e modificar o problema de PNLIM (36)-(58) com base nas FPHs univariadas resultantes. A estimativa da queda bruta,  $HB_{rt}$ , da UHE  $r$  no estágio  $t$  é obtida conforme (59)-

(61). Para a primeira iteração, pode-se estimar valores de  $NM_{rt}$  e  $NJ_{rt}$  próximos das condições operativas mais recentes das UHEs. Nas demais iterações, o problema é resolvido com  $NM_{rt}$ ,  $NJ_{rt}$  e  $HB_{rt}$  calculados a partir dos valores de  $vm_{rt}$  e  $d_{rt}$  resultantes do problema de PLIM resolvido na iteração anterior.

$$HB_{rt} = NM_{rt} - NJ_{rt}, \quad (59)$$

$$NM_{rt} = C_{0r} + C_{1r} \cdot vm_{rt} + C_{2r} \cdot vm_{rt}^2 + C_{3r} \cdot vm_{rt}^3 + C_{4r} \cdot vm_{rt}^4, \quad (60)$$

$$NJ_{rt} = D_{0r} - D_{1r} \cdot d_{rt} - D_{2r} \cdot d_{rt}^2 - D_{3r} \cdot d_{rt}^3 - D_{4r} \cdot d_{rt}^4 \quad (61)$$

em que:

$NM_{rt}$  é o nível de montante conhecido na UHE  $r$  no estágio  $t$  (m);

$NJ_{rt}$  é o nível de jusante conhecido na UHE  $r$  no estágio  $t$  (m);

$HB_{rt}$  é a queda bruta conhecida na UHE  $r$  no estágio  $t$  (m).

Com níveis de montante e jusante conhecidos, é possível calcular as perdas por diferença de pressão atmosférica via (62) e, como consequência, representar a queda líquida conforme (63). Note que a queda líquida depende apenas da vazão turbinada.

$$PHA_{rt} = \frac{101.325}{DS_r \cdot GV_r} \cdot \left[ (1 - 2,2558 \cdot 10^{-5} \cdot NJ_{rt})^{5,255} - (1 - 2,2558 \cdot 10^{-5} \cdot NM_{rt})^{5,255} \right] \quad (62)$$

$$h_{ijrt} = HB_{rt} - PHA_{rt} - KT_{jr} \cdot w_{ijrt}^2 = HP_{rt} - KT_{jr} \cdot w_{ijrt}^2 \quad (63)$$

em que:

$PHA_{rt}$  é a perda hidráulica por diferença de pressão atmosférica na UHE  $r$  no estágio  $t$  (m);

$HP_{rt}$  é a diferença entre a queda bruta e a perda hidráulica por pressão atmosférica na UHE  $r$  no estágio  $t$  (m).

Assim, a FPH univariada em cada UG considerada na estratégia proposta é dada por (64).

$$\begin{aligned} g_{ijrt} = & 10^{-6} \cdot A_r \cdot [E_{0jr} + E_{1jr} \cdot w_{ijrt} + E_{2jr} \cdot (HP_{rt} - KT_{jr} \cdot w_{ijrt}^2) + \\ & E_{3jr} \cdot w_{ijrt} \cdot (HP_{rt} - KT_{jr} \cdot w_{ijrt}^2) + E_{4jr} \cdot w_{ijrt}^2 + E_{5jr} \cdot (HP_{rt} - KT_{jr} \cdot w_{ijrt}^2)^2 + \\ & E_{6jr} \cdot w_{ijrt}^3 + E_{7jr} \cdot (HP_{rt} - KT_{jr} \cdot w_{ijrt}^2)^3 + E_{8jr} \cdot w_{ijrt}^2 \cdot (HP_{rt} - KT_{jr} \cdot w_{ijrt}^2) + \\ & E_{9jr} \cdot w_{ijrt} \cdot (HP_{rt} - KT_{jr} \cdot w_{ijrt}^2)^2] \cdot w_{ijrt} \cdot (HP_{rt} - KT_{jr} \cdot w_{ijrt}^2) - \\ & (F_{0jr} + F_{1jr} \cdot g_{ijrt} + F_{2jr} \cdot g_{ijrt}^2) - (G_{0jr} + e^{G_{1jr} \cdot g_{ijrt}}) \end{aligned} \quad (64)$$

Como a queda líquida agora é uma função de  $w_{ijrt}$ , então é possível encontrar o valor das vazões mínima/máxima de uma UG,  $W_{ijrt}^{\min} / W_{ijrt}^{\max}$ , calculando a raiz da função univariada (65) e (66), respectivamente.

$$g_{ijrt}(w_{ijrt}) - g_{ijrt}[O_{0jr} + O_{1jr} \cdot (HP_{rt} - KT_{jr} \cdot w_{ijrt}^2) + O_{2jr} \cdot (HP_{rt} - KT_{jr} \cdot w_{ijrt}^2)^2] = 0 \quad (65)$$

$$g_{ijrt}(w_{ijrt}) - g_{ijrt}[P_{0jr} + P_{1jr} \cdot (HP_{rt} - KT_{jr} \cdot w_{ijrt}^2) + P_{2jr} \cdot (HP_{rt} - KT_{jr} \cdot w_{ijrt}^2)^2] = 0 \quad (66)$$

Portanto, a formulação de PNLIM do problema de POUH com a FPH univariada de interesse é apresentada em (67)-(78).

$$\min \Theta = \sum_{t=1}^T \sum_{r=1}^R \left( q_{rt} + s_{rt} + \sum_{j=1}^{J_r} \sum_{i=1}^{N_{jrt}} [PP_{ijr} \cdot (pt_{ijrt} + pr'_{ijrt})] \right), \quad (67)$$

s.a:

$$vl_{rt} - vl_{r,t-1} + FC \cdot \left[ q_{rt} + s_{rt} - \sum_{a \in \mathfrak{R}_r} (q_{a,t-\tau_{ar}} + s_{a,t-\tau_{ar}}) \right] = FC \cdot Y_{rt}, \quad t=1, \dots, T, \quad r=1, \dots, R, \quad (68)$$

$$VL_r^{\min} \leq vl_{rt} \leq VL_r^{\max}, \quad t=1, \dots, T, \quad r=1, \dots, R, \quad (69)$$

$$0 \leq s_{rt} \leq S_r^{\max}, \quad t=1, \dots, T, \quad r=1, \dots, R, \quad (70)$$

$$q_{rt} - \sum_{j=1}^{J_r} \sum_{i=1}^{N_{jrt}} w_{ijrt} = 0, \quad t=1, \dots, T, \quad r=1, \dots, R, \quad (71)$$

$$\sum_{j=1}^{J_r} \sum_{i=1}^{N_{jrt}} g_{ijrt} = MG_{rt}, \quad t=1, \dots, T, \quad r=1, \dots, R, \quad (72)$$

$$\begin{aligned} g_{ijrt} = & 10^{-6} \cdot A_r \cdot [E_{0jr} + E_{1jr} \cdot w_{ijrt} + E_{2jr} \cdot (HP_{rt} - KT_{jr} \cdot w_{ijrt}^2) + \\ & E_{3jr} \cdot w_{ijrt} \cdot (HP_{rt} - KT_{jr} \cdot w_{ijrt}^2) + E_{4jr} \cdot w_{ijrt}^2 + E_{5jr} \cdot (HP_{rt} - KT_{jr} \cdot w_{ijrt}^2)^2 + \\ & E_{6jr} \cdot w_{ijrt}^3 + E_{7jr} \cdot (HP_{rt} - KT_{jr} \cdot w_{ijrt}^2)^3 + E_{8jr} \cdot w_{ijrt}^2 \cdot (HP_{rt} - KT_{jr} \cdot w_{ijrt}^2) + \\ & E_{9jr} \cdot w_{ijrt} \cdot (HP_{rt} - KT_{jr} \cdot w_{ijrt}^2)^2] \cdot w_{ijrt} \cdot (HP_{rt} - KT_{jr} \cdot w_{ijrt}^2) - \\ & (F_{0jr} + F_{1jr} \cdot g_{ijrt} + F_{2jr} \cdot g_{ijrt}^2) - (G_{0jr} + e^{G_{1jr} \cdot g_{ijrt}}), \\ & t=1, \dots, T, \quad r=1, \dots, R, \quad j=1, \dots, J_r, \quad i=1, \dots, N_{jrt}, \end{aligned} \quad (73)$$

$$u_{ijrt} \cdot W_{jrt}^{\min} \leq w_{ijrt} \leq u_{ijrt} \cdot W_{jrt}^{\max}, \quad t=1, \dots, T, \quad r=1, \dots, R, \quad j=1, \dots, J_r, \quad i=1, \dots, N_{jrt}, \quad (74)$$

$$u_{ijrt} \cdot G_{jrt}^{\min} \leq g_{ijrt} \leq u_{ijrt} \cdot G_{jrt}^{\max}, \quad t=1, \dots, T, \quad r=1, \dots, R, \quad j=1, \dots, J_r, \quad i=1, \dots, N_{jrt}, \quad (75)$$

$$pt_{ijrt} - pr'_{ijrt} - u_{ijrt} + u_{ijr,t-1} = 0, \quad t=1, \dots, T, \quad r=1, \dots, R, \quad j=1, \dots, J_r, \quad i=1, \dots, N_{jrt}, \quad (76)$$

$$u_{ijr0} = U_{ijr0}, \quad r=1, \dots, R, \quad j=1, \dots, J_r, \quad i=1, \dots, N_{jrt}, \quad (77)$$

$$u_{ijrt} \in \{0, 1\}, \quad t=1, \dots, T, \quad r=1, \dots, R, \quad j=1, \dots, J_r, \quad i=1, \dots, N_{jrt}. \quad (78)$$

### 3.3 PARTICIONAMENTO DA FPH UNIVARIADA

A próxima etapa consiste em particionar as FPHs univariadas (73), obtidas com base em  $HB_{rt}$  calculados na etapa anterior, em regiões côncavas e convexas de acordo com seus pontos de inflexão. Com o particionamento, as aproximações LPP côncavas, que necessitam de menos variáveis binárias, podem ser realizadas com precisão em regiões côncavas. Na Figura 5, é possível observar uma FPH não convexa e os pontos de inflexão onde a função muda a convexidade/concavidade. Esses pontos de inflexão são obtidos calculando as raízes da derivada de segunda ordem da FPH univariada (D'AMBROSIO, LEE e WÄCHTER, 2012), e as regiões são definidas de acordo com a sua concavidade (analisando o sinal da segunda derivada em um ponto anterior e posterior à cada ponto de inflexão). Note que, neste exemplo, a FPH é composta por uma região côncava e duas regiões convexas.

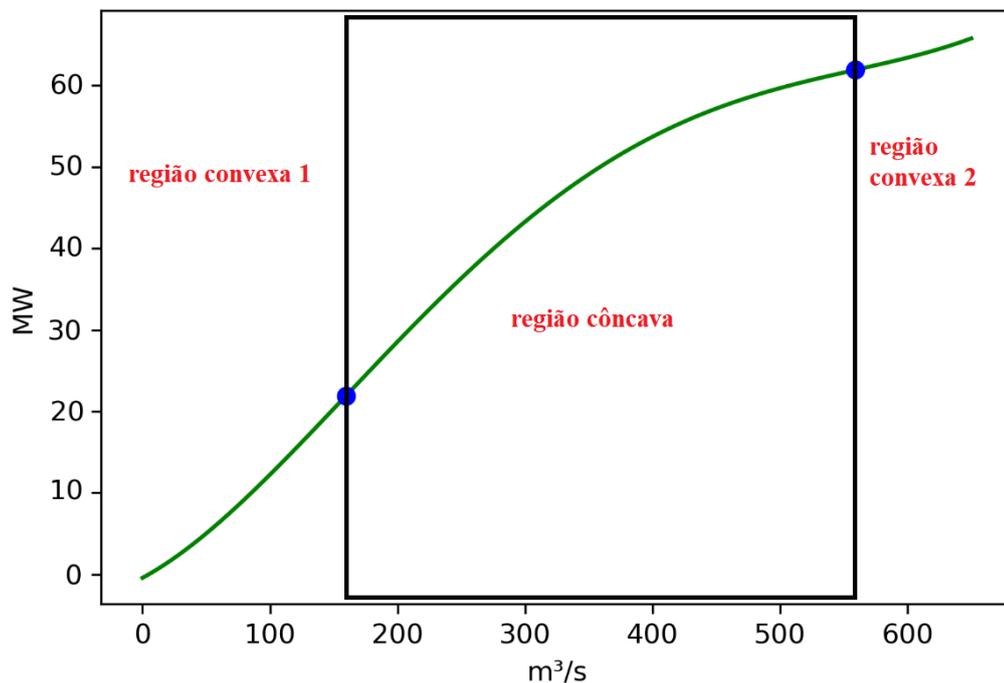


Figura 5 – Regiões côncava e convexas de uma FPH.

Normalmente, uma FPH é quase côncava (HAMANN e HUG, 2014), com uma região convexa associada a baixos valores de vazão turbinada e uma região côncava associada a valores mais altos de vazão turbinada, conforme ilustrado em Skjelbred, Kong e Fosso (2020).

Mesmo não sendo muito comum, a convexidade também pode estar presente em regiões de vazões mais altas de uma FPH, como ilustrado na Figura 5. Neste contexto, o problema de PNLIM resultante da separação das regiões côncava e convexa(s) da FPH é apresentado em (79)-(93). Note que a região côncava da FPH (73) agora é representada por (85)-(86), enquanto a(s) região(ões) convexa(s) é(são) representada(s) por (87)-(88). Perceba também que o particionamento da FPH produz uma maior quantidade de variáveis de geração, vazão turbinada e *status* associadas com as UGs.

$$\min \Theta = \sum_{t=1}^T \sum_{r=1}^R \left( q_{rt} + s_{rt} + \sum_{j=1}^{J_r} \sum_{i=1}^{N_{jrt}} [PP_{ijr} \cdot (pt_{ijrt} + pr_{ijrt})] \right), \quad (79)$$

s.a:

$$vl_{rt} - vl_{r,t-1} + FC \cdot \left[ q_{rt} + s_{rt} - \sum_{a \in \mathcal{R}_r} (q_{a,t-\tau_{ar}} + s_{a,t-\tau_{ar}}) \right] = FC \cdot Y_{rt}, \quad t=1, \dots, T, \quad r=1, \dots, R, \quad (80)$$

$$VL_r^{\min} \leq vl_{rt} \leq VL_r^{\max}, \quad t=1, \dots, T, \quad r=1, \dots, R, \quad (81)$$

$$0 \leq s_{rt} \leq S_r^{\max}, \quad t=1, \dots, T, \quad r=1, \dots, R, \quad (82)$$

$$q_{rt} - \left( \sum_{j=1}^{J_r} \sum_{i=1}^{N_{jrt}} \sum_{v=1}^{V_{jr}} wv_{vijrt} + \sum_{j=1}^{J_r} \sum_{i=1}^{N_{jrt}} wc_{ijrt} \right) = 0, \quad t=1, \dots, T, \quad r=1, \dots, R, \quad (83)$$

$$\sum_{j=1}^{J_r} \sum_{i=1}^{N_{jrt}} \sum_{v=1}^{V_{jr}} gv_{vijrt} + \sum_{j=1}^{J_r} \sum_{i=1}^{N_{jrt}} gc_{ijrt} = MG_{rt}, \quad t=1, \dots, T, \quad r=1, \dots, R, \quad (84)$$

$$\begin{aligned} & gc_{ijrt} - 10^{-6} \cdot A_r \cdot \rho t_{ijrt} (wc_{ijrt}) \cdot wc_{ijrt} \cdot [HP_{rt} - KT_{jr} \cdot wc_{ijrt}^2] + \\ & (F_{0jr} + F_{1jr} \cdot gc_{ijrt} + F_{2jr} \cdot gc_{ijrt}^2) \cdot uc_{ijrt} + (G_{0jr} + e^{G_{1jr} \cdot gc_{ijrt}}) \cdot uc_{ijrt} = 0, \\ & t=1, \dots, T, \quad r=1, \dots, R, \quad j=1, \dots, J_r, \quad i=1, \dots, N_{jrt}, \end{aligned} \quad (85)$$

$$\begin{aligned} & WC_{jrt}^{\min} \cdot uc_{ijrt} \leq wc_{ijrt} \leq WC_{jrt}^{\max} \cdot uc_{ijrt}, \\ & t=1, \dots, T, \quad r=1, \dots, R, \quad j=1, \dots, J_r, \quad i=1, \dots, N_{jrt}, \end{aligned} \quad (86)$$

$$\begin{aligned} & gv_{vijrt} - 10^{-6} \cdot A_r \cdot \rho t_{vijrt} (wv_{vijrt}) \cdot wv_{vijrt} \cdot [HP_{rt} - KT_{jr} \cdot wv_{vijrt}^2] + \\ & (F_{0jr} + F_{1jr} \cdot gv_{vijrt} + F_{2jr} \cdot gv_{vijrt}^2) \cdot uv_{vijrt} + (G_{0jr} + e^{G_{1jr} \cdot gv_{vijrt}}) \cdot uv_{vijrt} = 0, \\ & t=1, \dots, T, \quad r=1, \dots, R, \quad j=1, \dots, J_r, \quad i=1, \dots, N_{jrt}, \quad v=1, \dots, V_{jr}, \end{aligned} \quad (87)$$

$$\begin{aligned} & WV_{vjrt}^{\min} \cdot uv_{vijrt} \leq wv_{vijrt} \leq WV_{vjrt}^{\max} \cdot uv_{vijrt}, \\ & t=1, \dots, T, \quad r=1, \dots, R, \quad j=1, \dots, J_r, \quad i=1, \dots, N_{jrt}, \quad v=1, \dots, V_{jr}, \end{aligned} \quad (88)$$

$$\sum_{v=1}^{V_{jr}} uv_{vijrt} + uc_{ijrt} = u_{ijrt}, \quad t = 1, \dots, T, \quad r = 1, \dots, R, \quad j = 1, \dots, J_r, \quad i = 1, \dots, N_{jrt}, \quad (89)$$

$$pt_{ijrt} - pr_{ijrt} - u_{ijrt} + u_{ijr,t-1} = 0, \quad t = 1, \dots, T, \quad r = 1, \dots, R, \quad j = 1, \dots, J_r, \quad i = 1, \dots, N_{jrt}, \quad (90)$$

$$u_{ijr0} = U_{ijr0}, \quad r = 1, \dots, R, \quad j = 1, \dots, J, \quad i = 1, \dots, N_{jrt}, \quad (91)$$

$$u_{ijrt}, uc_{ijrt} \in \{0, 1\}, \quad t = 1, \dots, T, \quad r = 1, \dots, R, \quad j = 1, \dots, J_r, \quad i = 1, \dots, N_{jrt}, \quad (92)$$

$$uv_{vijrt} \in \{0, 1\}, \quad t = 1, \dots, T, \quad r = 1, \dots, R, \quad j = 1, \dots, J_r, \quad i = 1, \dots, N_{jrt}, \quad v = 1, \dots, V_{jr}. \quad (93)$$

em que,

- $v$  é o índice das regiões convexas da FPH;
- $V_{jr}$  é o número de regiões convexas da FPH do tipo  $j$  na UHE  $r$ ;
- $wv_{vijrt}$  é a vazão turbinada na região convexa  $v$  da FPH na UG  $i$  do tipo  $j$  na UHE  $r$  no estágio  $t$  ( $m^3/s$ );
- $wc_{ijrt}$  é a vazão turbinada na região côncava da FPH na UG  $i$  do tipo  $j$  na UHE  $r$  no estágio  $t$  ( $m^3/s$ );
- $gv_{vijrt}$  é a geração na região convexa  $v$  da FPH na UG  $i$  do tipo  $j$  na UHE  $r$  no estágio  $t$  (MW);
- $gc_{ijrt}$  é a geração na região côncava da FPH na UG  $i$  do tipo  $j$  na UHE  $r$  no estágio  $t$  (MW);
- $uv_{vijrt}$  é a variável binária que indica se a UG  $i$  do tipo  $j$  está operando na região convexa  $v$  da FPH na UHE  $r$  no estágio  $t$ ;
- $uc_{ijrt}$  é a variável binária que indica se a UG  $i$  tipo  $j$  está operando na região côncava da FPH na UHE  $r$  no estágio  $t$ ;
- $WC_{jrt}^{\min/\max}$  é o limite mínimo/máximo de vazão turbinada da região côncava das UGs do tipo  $j$  na UHE  $r$  no estágio  $t$  ( $m^3/s$ );
- $WV_{vijrt}^{\min/\max}$  é o limite mínimo/máximo de vazão turbinada da região convexa  $v$  das UGs do tipo  $j$  na UHE  $r$  no estágio  $t$  ( $m^3/s$ ).

### 3.4 DISCRETIZAÇÃO DA FPH VIA ALGORITMO RDP

A aproximação LPP em uma FPH univariada é realizada por meio de segmentos de retas definidos a partir dos pontos predefinidos  $[W_{jrt}^v, G_{jrt}^v]$ , onde  $W_{jrt}^v$  e  $G_{jrt}^v$  são os valores de vazão turbinada e geração associados com o vértice  $v$  para as UGs do tipo  $j$  na UHE  $r$  no estágio

$t$ . A quantidade e a localização dos pontos  $[W_{jrt}^v, G_{jrt}^v]$  utilizados para aproximar por partes a FPH está diretamente relacionado com a precisão da solução do problema da POUH. Quanto menor for o erro entre as retas que aproximam a FPH e a função não linear original, mais próximo do comportamento não linear a aproximação por partes estará. No entanto, a redução do erro na linearização da FPH tende a estar associado com o aumento do número de pontos utilizados.

Na Figura 6, por exemplo, é possível observar uma FPH sendo aproximada por quatro pontos e por nove pontos igualmente distribuídos no eixo de vazão turbinada. Note como a aproximação associada com mais pontos induz a erros médios quadráticos e máximos relativos menores. Esses erros foram obtidos comparando os valores de geração das funções linear e não linear, obtidos a partir de 10.000 pontos de vazão turbinada (equidistantes).

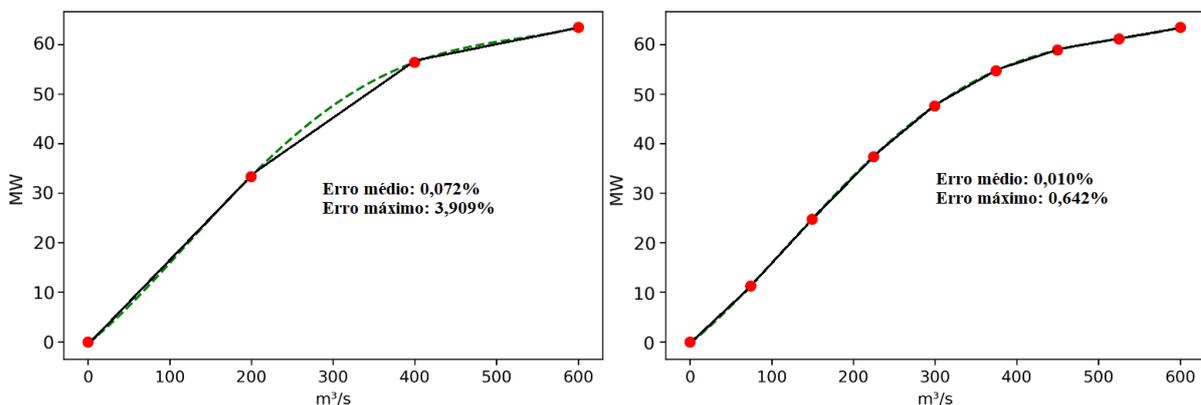


Figura 6 – Erros de linearização por partes usando quatro e nove pontos igualmente espaçados em uma FPH unidimensional.

Na Figura 7, é possível perceber também que uma modificação na localização dos quatro pontos utilizados para aproximar essa FPH poderia produzir erros menores. Portanto, distribuir os pontos igualmente no eixo de vazão turbinada não induz a um erro mínimo para uma quantidade fixa de pontos.

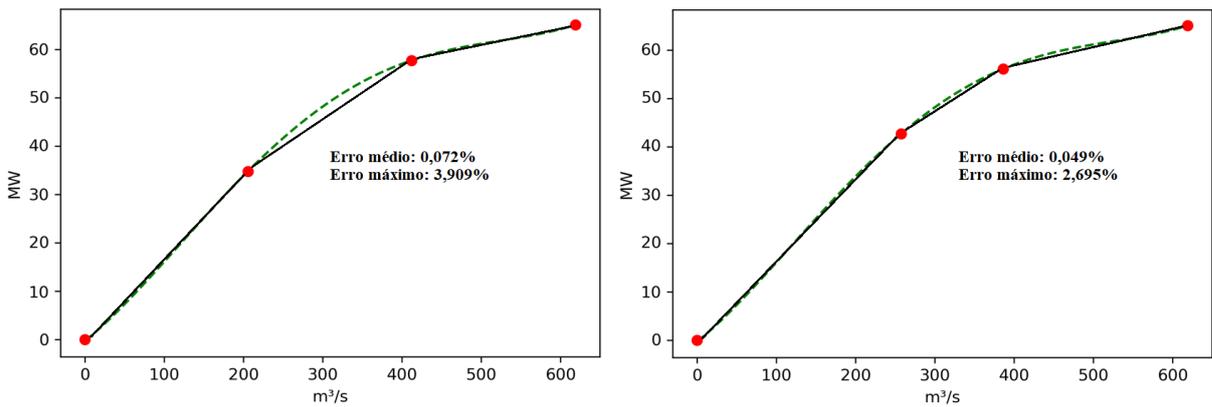


Figura 7 – Erros de linearização por partes usando quatro pontos com espaçamentos equidistantes e diferentes.

Como a natureza do problema de POUH é de grande porte, especialmente em UHEs com muitas UGs, o aumento no número de pontos utilizados na linearização da FPH afeta negativamente o desempenho computacional. Neste cenário, este trabalho propõe o uso do algoritmo RDP (DOUGLAS e PEUCKER, 1973) para otimizar a escolha dos pontos que serão utilizados na linearização da FPH. O RDP representa uma curva formada por uma quantidade,  $X$ , de pontos em uma curva semelhante com menos pontos a partir de uma distância máxima,  $\epsilon$ , admitida entre as duas curvas. Na Figura 8 é ilustrado o procedimento adotado pelo algoritmo RDP para gerar uma curva semelhante à original com uma quantidade menor de pontos. Note que, em cada iteração, o algoritmo se alterna entre identificar o ponto mais distante da reta traçada em relação ao último ponto e verificar se algum ponto pode ser retirado, isto é, se existe algum ponto dentro da faixa limitada pela distância  $\epsilon$  entre os dois últimos pontos definidos pelo algoritmo.

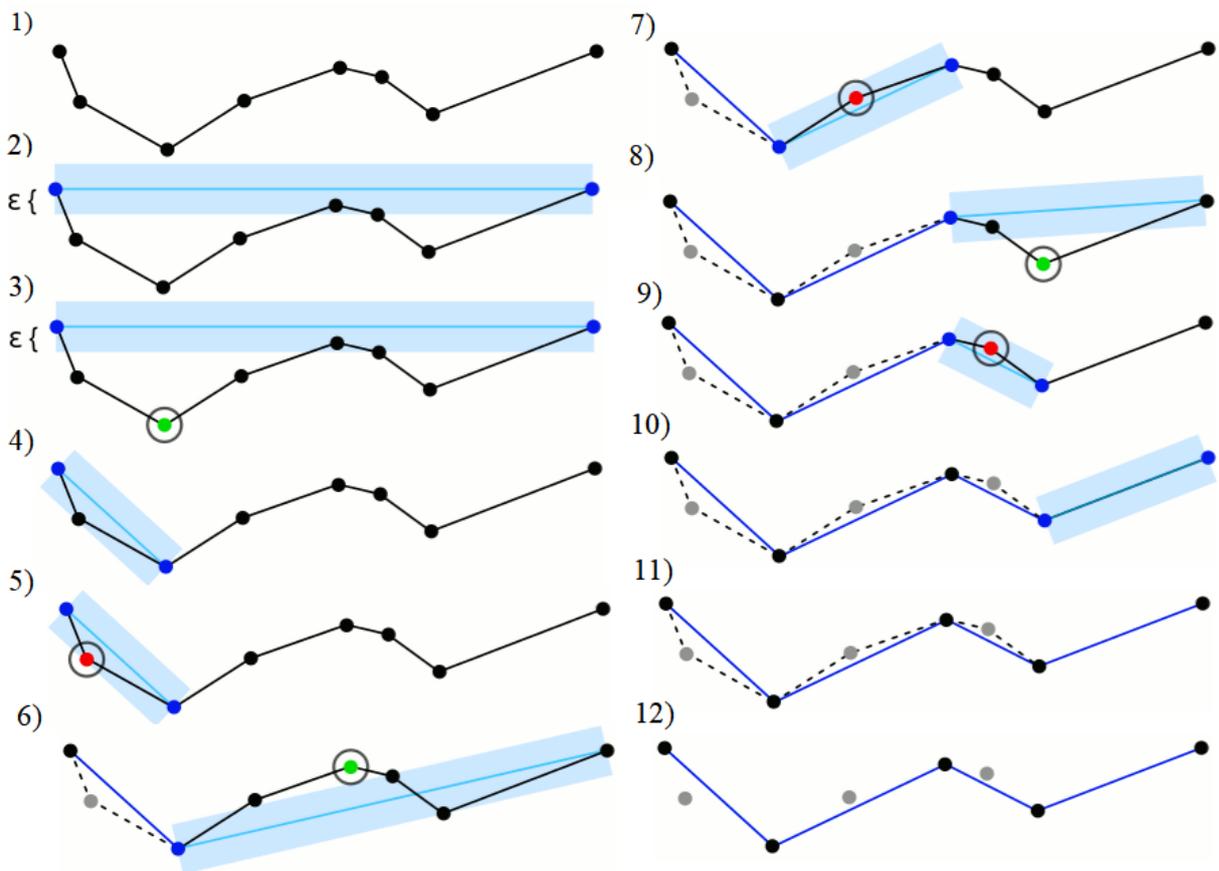


Figura 8 – Exemplo de aplicação do algoritmo RDP.

Ao utilizar a linguagem de programação *python*, o algoritmo RDP pode ser importado e utilizado conforme instruído em Python (2021). Além dos pontos selecionados pelo RDP, são acrescentadas à discretização da FPH os pontos em que ocorre a mudança de convexidade/concavidade. Na Figura 9, é possível observar a discretização proposta da curva mostrada anteriormente (Figura 5) considerando  $X = 500$  pontos, com distribuição equidistante no eixo de vazão turbinada e  $\epsilon$  igual a 0,005.

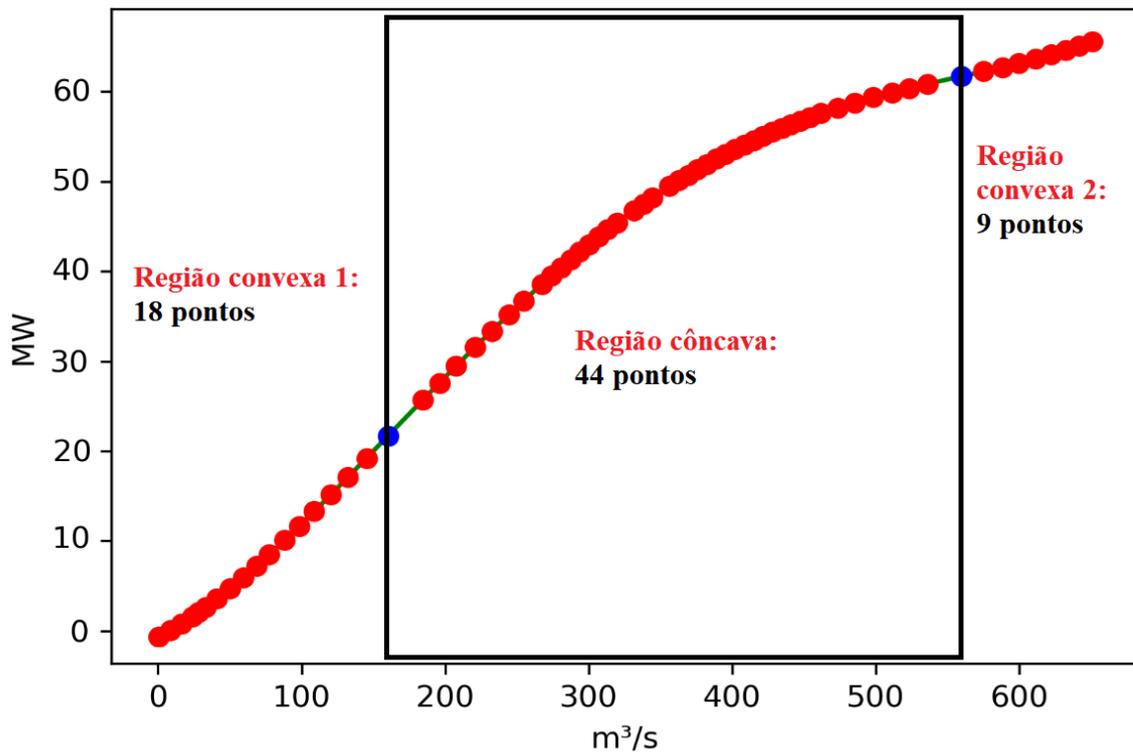


Figura 9 – Discretização de uma FPH via algoritmo RDP.

Neste exemplo, o RDP reduziu a curva com 500 pontos para uma curva com 65 pontos não equidistantes. Inserindo os dois pontos que indicam a mudança convexidade/concavidade, chega-se em uma discretização final composta por 67 pontos. Destes pontos, 18 (17 + 1 ponto de inflexão) são atribuídos à região convexa à esquerda, 44 (42 + 2 pontos de inflexão) são atribuídos à região côncava e 9 (8 + 1 ponto de inflexão) são atribuídos à região convexa à direita. Observe que o número de pontos selecionados pelo algoritmo RDO pode ser ainda menor, caso um valor mais alto de  $\varepsilon$  for solicitado. Os pontos selecionados para aproximar cada região convexa serão definidos por  $[WV_{jrt}^v, GV_{jrt}^v]$  e os pontos selecionados para a região côncava serão definidos por  $[WC_{jrt}^v, GC_{jrt}^v]$ .

### 3.5 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE PLIM BASEADO EM PARTICIONAMENTO E SIMETRIA

#### 3.5.1 Aproximação da Região Côncava via CH

Uma das vantagens de particionar a FPH é usar uma aproximação por partes via CH na região côncava. Esta abordagem é computacionalmente atraente por evitar variáveis binárias para identificar os segmentos de reta que aproximam a função não linear original. Assim, a função univariada (85), que representa a região côncava da FPH, pode ser representada precisamente por meio de um conjunto de desigualdades lineares das funções obtidas pela técnica do CH (SANTOS e DINIZ, 2010). Portanto, (85) pode ser substituído por (94), da seguinte forma:

$$gc_{ijrt} \leq CH_{0jrt}^n \cdot uc_{ijrt} + CH_{1jrt}^n \cdot wc_{ijrt}, \quad n = 1, \dots, NH_{jrt}, \quad (94)$$

em que,

$NH_{jrt}$  é o número de segmentos de reta que criam um casco convexo sobre os pontos de interrupção utilizados para aproximar a região côncava da FPH na UG do tipo  $j$  na UHE  $r$  no estágio  $t$ ;

$CH_{kjrt}^n$  é o coeficiente  $k$  do segmento de reta  $n$  do conjunto  $NH_{jt}$  que cria o casco convexo na região côncava das UGs do tipo  $j$  na UHE  $r$  no estágio  $t$ , onde  $k = 0, 1$ .

Os coeficientes  $CH_{kjrt}^n$  são obtidos a partir dos pontos  $[WC_{jrt}^v, GC_{jrt}^v]$  que representam, respectivamente, a vazão turbinada ( $WC_{jrt}^v$ ) e a geração de energia ( $GC_{jrt}^v$ ) presente nos vértices  $v$  na região côncava da FPH nas UGs do tipo  $j$  na UHE  $r$  no estágio  $t$ . Note que, quanto mais pontos  $[WC_{jrt}^v, GC_{jrt}^v]$  selecionados pelo RDP, maior será o valor de  $NH_{jrt}$  e mais precisa será a aproximação da região côncava da FPH na UG  $i$  do tipo  $j$  na UHE  $r$  e estágio  $t$ . Em contrapartida, quanto maior o valor de  $NH_{jrt}$ , mais restrições são inseridas no modelo para aproximar a região côncava de cada FPH.

### 3.5.2 Aplicação de Técnicas de Simetria

Este estudo explora técnicas de simetria para reduzir o número de variáveis binárias e contínuas do problema de PLIM resultante. O primeiro passo para a representação simétrica da região côncava da FPH consiste em considerar que:

(a)  $k_{jrt}$  é uma variável inteira que representa o número de UGs do tipo  $j$  na UHE  $r$  operando na região côncava no estágio  $t$ ; e,

(b)  $ws_{jrt}$  e  $gs_{jrt}$  são, respectivamente, a vazão turbinada e a geração de energia da UG do tipo  $j$  na UHE  $r$  operando na região côncava da FPH no estágio  $t$ .

Então, (94) pode ser reescrito como (95).

$$k_{jrt} \cdot gs_{jrt} \leq CH_{0jrt}^n \cdot k_{jrt} + CH_{1jrt}^n \cdot k_{jrt} \cdot ws_{jrt}, \quad n = 1, \dots, NH_{jrt}, \quad (95)$$

Em seguida, é necessário linearizar os produtos  $k_{jrt} \cdot ws_{jrt}$  e  $k_{jrt} \cdot gs_{jrt}$ . Para isso,  $k_{jrt}$  é inicialmente substituído pela expansão binária (96)-(98).

$$k_{jrt} = \sum_{m=1}^{M_{jr}} 2^{m-1} \cdot y_{mjrt}, \quad (96)$$

$$\sum_{m=1}^{M_{jr}} 2^{m-1} \cdot y_{mjrt} \leq N_{jr}, \quad (97)$$

$$y_{mjrt} \in \{0,1\}, \quad (98)$$

em que,

- $M_{jr}$  é o número de variáveis binárias necessárias para representar, a partir de um código binário, o número de UGs do tipo  $j$  na UHE  $r$  operando na região côncava;
- $m$  é a posição do código binário com  $M_{jr}$  bits que indica o número de UGs do tipo  $j$  operando na região côncava;
- $y_{mjrt}$  é a variável binária associada à posição  $m$  do código binário que representa a variável inteira  $k_{jrt}$ .

Observe que a eficiência da estratégia baseada em simetria depende do número de UGs idênticas na usina. Por exemplo, para  $N_{jrt} = 3$ , tem-se  $M_{jr} = 2$ , enquanto para  $N_{jrt} = 26$ , tem-se  $M_{jr} = 5$ .

Posteriormente, é necessário linearizar os demais produtos entre variáveis  $y_{mjrt} \cdot ws_{jrt}$ , e  $y_{mjrt} \cdot gs_{jrt}$  por meio das variáveis auxiliares  $rw_{mjrt}$  ( $rw_{mjrt} = y_{mjrt} \cdot ws_{jrt}$ ) e  $rg_{mjrt}$  ( $rg_{mjrt} = y_{mjrt} \cdot gs_{jrt}$ ), conforme mostrado em (99)-(103). Observe que  $rw_{mjrt} = y_{mjrt} \cdot ws_{jrt}$  é 0 se  $y_{mjrt} = 0$  e  $rw_{mjrt} = ws_{jrt}$  se  $y_{mjrt} = 1$ .

$$WC_{jrt}^{\min} \cdot y_{mjrt} \leq rw_{mjrt} \leq WC_{jrt}^{\max} \cdot y_{mjrt}, \quad (99)$$

$$WC_{jrt}^{\min} \cdot (us_{jrt} - y_{mjrt}) \leq ws_{jrt} - rw_{mjrt} \leq WC_{jrt}^{\max} \cdot (us_{jrt} - y_{mjrt}), \quad (100)$$

$$GC_{jrt}^{\min} \cdot y_{mjrt} \leq rg_{mjrt} \leq GC_{jrt}^{\max} \cdot y_{mjrt}, \quad (101)$$

$$GC_{jrt}^{\min} \cdot (us_{jrt} - y_{mjrt}) \leq gs_{jrt} - rg_{mjrt} \leq GC_{jrt}^{\max} \cdot (us_{jrt} - y_{mjrt}), \quad (102)$$

$$us_{jrt} \in \{0,1\}, \quad (103)$$

onde  $us_{jrt}$  é a variável binária que indica se alguma UG do tipo  $j$  na UHE  $r$  é despachada na região côncava no estágio  $t$ .

Portanto, (95) pode ser substituído por (104).

$$\sum_{m=1}^{M_{jr}} (2^{m-1} \cdot r g_{mjrt}) \leq CH_{0jrt}^n \cdot \sum_{m=1}^{M_{jr}} (2^{m-1} \cdot y_{mjrt}) + CH_{1jrt}^n \cdot \sum_{m=1}^{M_{jr}} (2^{m-1} \cdot r w_{mjrt}), \quad (104)$$

Observe que a representação simétrica da FPH na região côncava é dada pelo conjunto de restrições (99)-(104). Na Tabela 2, é possível observar as quantidades de restrições (NR), variáveis contínuas (NVC) e variáveis binárias (NVB) das formulações individual, (86) e (94), e a simétrica, (99)-(104), para diferentes quantidades de UGs idênticas.

Tabela 2 – Dimensões das formulações individual e simétrica via CH para a FPH univariada.

Formulação	Individual	Simétrica
<b>NR</b>	$NH_{jrt} \times N_{jrt} + 2 \times N_{jrt}$	$8 \times M_{jr} + NH_{jrt}$
<b>NVC</b>	$2 \times N_{jrt}$	$2 \times M_{jr} + 2$
<b>NVB</b>	$N_{jrt}$	$M_{jr} + 1$

Na Tabela 3, é possível observar uma comparação entre as formulações individual e a simétrica das regiões côncavas das FPHs para 5, 12 e 26 UGs idênticas sendo aproximadas por cinco retas. Note que quanto maior o número de UGs idênticas, mais vantajoso se torna o uso do modelo simétrico para a região côncava.

Tabela 3 – Dimensões das formulações individual e simétrica na região côncava para 5, 12 e 26 UGs idênticas.

Formulação	Individual			Simétrica		
	5	12	26	5	12	26
<b>NR</b>	35	84	182	29 (-17%)	37 (-56%)	45 (-75%)
<b>NVC</b>	10	24	52	8 (-20%)	10 (-58%)	12 (-77%)
<b>NVB</b>	5	12	26	4 (-20%)	5 (-58%)	6 (-77%)

### 3.5.3 Aproximação da Região Convexa via LACC

Em regiões convexas da FPH, o despacho pode ser diferente até para UGs idênticas em uma solução ótima do problema da POUH. Por exemplo, suponha que duas UGs idênticas tenha uma FPH quadrática ( $g_i = w_i^2$ , sendo  $g_i$  a geração na UG  $i$  e  $w_i$  a vazão turbinada na UG  $i$ )

no intervalo de vazão entre 10 e 20 m<sup>3</sup>/s. Se essas duas UGs precisarem atender uma meta de geração de 500 MW, é mais vantajoso ter uma UG operando em 10 m<sup>3</sup>/s ( $g_1 = 100$  MW) e a outra em 20 m<sup>3</sup>/s ( $g_2 = 400$  MW), totalizando 30 m<sup>3</sup>/s de vazão, do que ter  $g_1 = g_2 = 250$  MW ( $w_1 = w_2 = 15,81$  m<sup>3</sup>/s), totalizando 31,62 m<sup>3</sup>/s de vazão. Portanto, cada região convexa da FPH precisa ser aproximada individualmente. Além disso, como o CH não é adequado para representar essa região da FPH no âmbito do problema da POUH (visto que as desigualdades lineares não representam efetivamente a região convexa da FPH), é necessário utilizar um modelo não convexo para a aproximação LPP na região convexa. Neste contexto, o modelo LACC se destaca devido à necessidade de menos variáveis binárias na formulação (VIELMA, AHMED e NEMHAUSER, 2010).

O modelo LACC é caracterizado por representar um ponto do domínio,  $(x, f(x))$ , como a combinação convexa dos valores presentes nos vértices  $(v, f(v))$  de um dos politopos,  $P \in \mathcal{P}$ , a partir de variáveis de pesos,  $z^v \in [0, 1]$ , associadas a cada vértice,  $v \in \mathcal{V}$ , conforme apresentado em (105)-(107).

$$x = \sum_{v \in \mathcal{V}} z^v \cdot v, \quad (105)$$

$$f(x) = \sum_{v \in \mathcal{V}} z^v \cdot f(v), \quad (106)$$

$$0 \leq z^v \leq 1. \quad (107)$$

Como exemplo, considere inicialmente a Figura 10, onde uma FPH não linear univariada (Figura 10a) é aproximada por cinco pontos  $[W^v, G^v]$ , igualmente espaçados na região operativa de  $w$ , e quatro retas,  $P_1$ - $P_4$  (Figura 10b). Neste exemplo, os valores de vazão turbinada e geração  $[w, g]$  presentes em um ponto qualquer da reta  $P_1$  podem ser obtidos via (105)-(107) a partir da combinação convexa dos valores  $[W^v, G^v]$  presentes nos vértices 1 e 2.

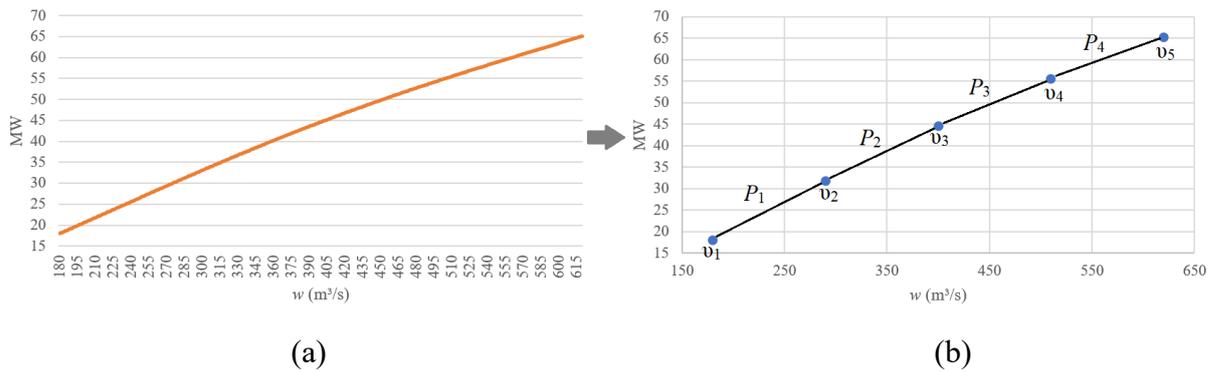


Figura 10 – Linearização de uma FPH univariada a partir de cinco pontos.

Para limitar a combinação convexa em apenas uma reta, o modelo LACC considera um código binário definido por  $x \in \{0,1\}^{\lceil \log_2 |P| \rceil}$  através de uma função injetora  $B : P \rightarrow x \in \{0,1\}^{\lceil \log_2 |P| \rceil}$  (VIELMA e NEMHAUSER, 2011). Em outras palavras, cada reta recebe um código binário. Para isso, inicialmente é necessário considerar  $J^i(B,l)$  como sendo o conjunto de vértices que identificam as retas que possuem valor  $i$  (0 ou 1) na posição  $l \in \mathcal{L}$  do código binário,  $B$ , que endereça o intervalo entre dois vértices seguindo a lógica do código gray. Na Figura 11a é possível observar o código binário,  $B(P)$ , associado a cada reta da Figura 11b. Na Figura 11b, é possível perceber os vértices, relacionados com cada conjunto  $J^i(B,l)$ , que identificam o valor  $i$  de cada posição  $l$  do código binário  $B(P)$  da aproximação LPP exemplificada na Figura 11a.

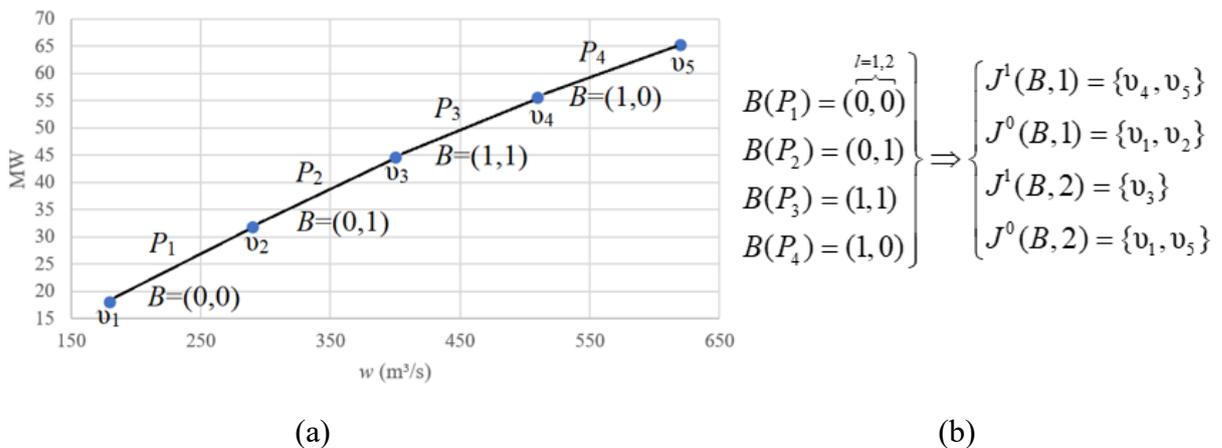


Figura 11 – Códigos binários que endereçam os politopos.

Portanto, o conjunto de restrições utilizado para limitar a combinação convexa a uma reta do domínio no modelo LACC é dado por (108)-(110), onde cada reta do domínio é identificada por um código formado pelas  $l$  variáveis  $x^l$ .

$$\sum_{v \in J^l(B,l)} z^v \leq x^l, \quad l = 1, \dots, \mathcal{L}, \quad (108)$$

$$\sum_{v \in J^0(B,l)} z^v \leq 1 - x^l, \quad l = 1, \dots, \mathcal{L}, \quad (109)$$

$$x^l \in \{0, 1\}, \quad l = 1, \dots, \mathcal{L}. \quad (110)$$

em que,

$\mathcal{L}$  é o número de bits necessários para formar o código binário que identifica um polítopo (segmento de reta) do domínio no modelo LACC.

Logo, é possível aproximar apenas a região convexa da FPH via LACC substituindo (87) pelo conjunto de restrições (111)-(118). As restrições (111)-(113) realizam a combinação convexa dos parâmetros presentes nos vértices  $[WV_{vijrt}^v, GV_{vijrt}^v]$  da reta selecionada pelas restrições (114)-(118). Observe que novas variáveis contínuas,  $z^v$ , e binárias,  $x^l$ , são acrescentadas ao modelo.

$$wv_{vijrt} = \sum_{v \in \mathcal{V}_{jrt}} z_{vijrt}^v \cdot WV_{vijrt}^v, \quad (111)$$

$$t = 1, \dots, T, \quad r = 1, \dots, R, \quad j = 1, \dots, J_r, \quad i = 1, \dots, N_{jrt}, \quad v = 1, \dots, V_{jr},$$

$$gv_{vijrt} = \sum_{v \in \mathcal{V}_{jrt}} z_{vijrt}^v \cdot GV_{vijrt}^v, \quad (112)$$

$$t = 1, \dots, T, \quad r = 1, \dots, R, \quad j = 1, \dots, J_r, \quad i = 1, \dots, N_{jrt}, \quad v = 1, \dots, V_{jr},$$

$$z_{vijrt}^v \geq 0, \quad (113)$$

$$t = 1, \dots, T, \quad r = 1, \dots, R, \quad j = 1, \dots, J_r, \quad i = 1, \dots, N_{jrt}, \quad v = 1, \dots, V_{jr}, \quad v = 1 \in \mathcal{V}_{jrt},$$

$$\sum_{v \in \mathcal{V}_{jrt}} z_{vijrt}^v = uv_{vijrt}, \quad t = 1, \dots, T, \quad r = 1, \dots, R, \quad j = 1, \dots, J_r, \quad i = 1, \dots, N_{jrt}, \quad v = 1, \dots, V_{jr}, \quad (114)$$

$$\sum_{v \in J^l(B,l)} z_{vijrt}^v \leq x_{vijrt}^l, \quad (115)$$

$$t = 1, \dots, T, \quad r = 1, \dots, R, \quad j = 1, \dots, J_r, \quad i = 1, \dots, N_{jrt}, \quad v = 1, \dots, V_{jr}, \quad l = 1, \dots, \mathcal{L},$$

$$\sum_{v \in J^0(B,l)} z_{vijrt}^v \leq 1 - x_{vijrt}^l, \quad (116)$$

$$t = 1, \dots, T, \quad r = 1, \dots, R, \quad j = 1, \dots, J_r, \quad i = 1, \dots, N_{jrt}, \quad v = 1, \dots, V_{jr}, \quad l = 1, \dots, \mathcal{L},$$

$$uv_{vijrt} \in \{0,1\}, t=1,\dots,T, r=1,\dots,R, j=1,\dots,J_r, i=1,\dots,N_{jrt}, v=1,\dots,V_{jr}, \quad (117)$$

$$x_{vijrt}^l \in \{0,1\}, \\ t=1,\dots,T, r=1,\dots,R, j=1,\dots,J_r, i=1,\dots,N_{jrt}, v=1,\dots,V_{jr}, l=1,\dots,\mathcal{L}, \quad (118)$$

em que,

$WV_{vijrt}^v$  é a vazão turbinada no vértice  $v$  da região convexa  $v$  das UGs do tipo  $j$  na UHE  $r$  no estágio  $t$  ( $m^3/s$ );

$GV_{vijrt}^v$  é a geração no vértice  $v$  da região convexa  $v$  das UGs do tipo  $j$  na UHE  $r$  no estágio  $t$  (MW);

$z_{vijrt}^v$  é a variável associada com o ponto  $[WV_{vijrt}^v, GV_{vijrt}^v]$  do vértice  $v$  da região convexa  $v$  da FPH na UG  $i$  na UHE  $r$  do tipo  $j$  no estágio  $t$ ;

$x_{vijrt}^l$  é a variável binária  $l$  do código  $B$  que identifica o seguimento da aproximação da região convexa  $v$  da FPH associada com a UG  $i$  na UHE  $r$  do tipo  $j$  no estágio  $t$ .

$\mathcal{V}_{vjr}$  é o conjunto de vértices que aproximam a região convexa  $v$  da FPH do tipo  $j$  na UHE  $r$  no estágio  $t$ .

A quantidade de pontos  $[WV_{vijrt}^v, GV_{vijrt}^v]$  utilizados no modelo LACC precisa ser igual a  $2^{\mathcal{L}}+1$ . No entanto, a discretização via RDP pode apresentar um número de pontos diferente dessa relação. Neste caso, são inseridos pontos nulos  $[0, 0]$  até completar a quantidade mínima exigida. Por exemplo, se o RDP informar a necessidade de considerar 18 pontos  $[WV_{vijrt}^v, GV_{vijrt}^v]$ , como no exemplo da Figura 9, acrescenta-se 15 pontos nulos ao conjunto. Para garantir que esses pontos não serão escolhidos pelo solucionador de PLIM, é inserido o conjunto de restrições (119), que zera os pesos associados a esses pontos.

$$z_{vijrt}^v = 0, \forall v \in \mathcal{V}_{vjr}, \quad (119)$$

onde  $NR_{vijrt}$  é o número de pontos resultantes do algoritmo RDP na região convexa  $v$  na UG  $i$  do tipo  $j$  na UHE  $r$  no estágio  $t$ .

### 3.5.4 Formulação do Problema de PLIM Baseado no Particionamento da FPH e em Técnicas de Simetria

A formulação proposta para resolver o problema de POUH via PLIM a partir do particionamento da FPH e da aplicação de técnicas de simetria nas regiões côncavas, é ilustrada em (120)-(145). Note que as variáveis binárias que representam as partidas e paradas nas UGs

foram substituídas por variáveis inteiras. Essas modificações, na função objetivo (120) e nas restrições (127)-(129), são necessárias porque as UGs não são representadas individualmente na aproximação das regiões côncavas das FPHs idênticas.

$$\min \Theta = \sum_{t=1}^T \sum_{r=1}^R \left( q_{rt} + s_{rt} + \sum_j^{J_r} [PP_{jr} \cdot (os_{jrt} + rs_{jrt})] \right), \quad (120)$$

s.a:

$$vl_{rt} - vl_{r,t-1} + FC \cdot \left[ q_{rt} + s_{rt} - \sum_{a \in \mathfrak{R}_r} (q_{a,t-\tau_{ar}} + s_{a,t-\tau_{ar}}) \right] = FC \cdot Y_{rt}, \quad t=1, \dots, T, \quad r=1, \dots, R, \quad (121)$$

$$VL_r^{\min} \leq vl_{rt} \leq VL_r^{\max}, \quad t=1, \dots, T, \quad r=1, \dots, R, \quad (122)$$

$$0 \leq s_{rt} \leq S_r^{\max}, \quad t=1, \dots, T, \quad r=1, \dots, R, \quad (123)$$

$$q_{rt} - \left( \sum_{j=1}^{J_r} \sum_{i=1}^{N_{jrt}} \sum_{v=1}^{V_{jrt}} wv_{vijrt} + \sum_{j=1}^{J_r} \sum_{m=1}^{M_{jrt}} (2^{m-1} \cdot rw_{mjrt}) \right) = 0, \quad t=1, \dots, T, \quad r=1, \dots, R, \quad (124)$$

$$\sum_{j=1}^{J_r} \sum_{i=1}^{N_{jrt}} \sum_{v=1}^{V_{jrt}} gv_{vijrt} + \sum_{j=1}^{J_r} \sum_{m=1}^{M_{jrt}} (2^{m-1} \cdot rg_{mjrt}) = MG_{rt}, \quad t=1, \dots, T, \quad r=1, \dots, R, \quad (125)$$

$$\sum_{i=1}^{N_{jrt}} \sum_{v=1}^{V_{jrt}} uv_{vijrt} + \sum_{m=1}^{M_{jrt}} (2^{m-1} \cdot y_{mjrt}) = dp_{jrt}, \quad t=1, \dots, T, \quad r=1, \dots, R, \quad j=1, \dots, J_r, \quad (126)$$

$$os_{jrt} - dp_{jrt} + dp_{jr,t-1} \geq 0, \quad t=1, \dots, T, \quad r=1, \dots, R, \quad j=1, \dots, J_r, \quad (127)$$

$$rs_{jrt} - dp_{jr,t-1} + dp_{jrt} \geq 0, \quad t=1, \dots, T, \quad r=1, \dots, R, \quad j=1, \dots, J_r, \quad (128)$$

$$os_{jrt} \geq 0, \quad rs_{jrt} \geq 0, \quad t=1, \dots, T, \quad r=1, \dots, R, \quad j=1, \dots, J_r, \quad (129)$$

$$\sum_{i=1}^{N_{jrt}} \sum_{v=1}^{V_{jrt}} uv_{vijrt} + \sum_{m=1}^{M_{jrt}} (2^{m-1} \cdot y_{mjrt}) \leq N_{jrt}, \quad t=1, \dots, T, \quad r=1, \dots, R, \quad j=1, \dots, J_r, \quad (130)$$

$$\sum_{m=1}^{M_{jrt}} (2^{m-1} \cdot rg_{mjrt}) \leq CH_{0jrt}^n \cdot \sum_{m=1}^{M_{jrt}} (2^{m-1} \cdot y_{mjrt}) + CH_{1jrt}^n \cdot \sum_{m=1}^{M_{jrt}} (2^{m-1} \cdot rw_{mjrt}), \quad (131)$$

$$t=1, \dots, T, \quad r=1, \dots, R, \quad j=1, \dots, J_r, \quad n=1, \dots, NH_{jrt},$$

$$WC_{jrt}^{\min} \cdot y_{mjrt} \leq rw_{mjrt} \leq WC_{jrt}^{\max} \cdot y_{mjrt}, \quad t=1, \dots, T, \quad r=1, \dots, R, \quad j=1, \dots, J_r, \quad m=1, \dots, M_{jrt}, \quad (132)$$

$$WC_{jrt}^{\min} \cdot (us_{jrt} - y_{mjrt}) \leq ws_{jrt} - rw_{mjrt} \leq WC_{jrt}^{\max} \cdot (us_{jrt} - y_{mjrt}), \quad t=1, \dots, T, \quad r=1, \dots, R, \quad j=1, \dots, J_r, \quad m=1, \dots, M_{jrt}, \quad (133)$$

$$GC_{jrt}^{\min} \cdot y_{mjrt} \leq rg_{mjrt} \leq GC_{jrt}^{\max} \cdot y_{mjrt},$$

$$t = 1, \dots, T, r = 1, \dots, R, j = 1, \dots, J_r, m = 1, \dots, M_{jr}, \quad (134)$$

$$GC_{jrt}^{\min} \cdot (us_{jrt} - y_{mjrt}) \leq gs_{jrt} - rg_{mjrt} \leq GC_{jrt}^{\max} \cdot (us_{jrt} - y_{mjrt}),$$

$$t = 1, \dots, T, r = 1, \dots, R, j = 1, \dots, J_r, m = 1, \dots, M_{jr}, \quad (135)$$

$$wv_{vijrt} = \sum_{\upsilon \in \mathcal{V}_{jr}} z_{vijrt}^{\upsilon} \cdot WV_{vijrt}^{\upsilon},$$

$$t = 1, \dots, T, r = 1, \dots, R, j = 1, \dots, J_r, i = 1, \dots, N_{jrt}, v = 1, \dots, V_{jr}, \quad (136)$$

$$wv_{vijrt} = \sum_{\upsilon \in \mathcal{V}_{jr}} z_{vijrt}^{\upsilon} \cdot WV_{vijrt}^{\upsilon},$$

$$t = 1, \dots, T, r = 1, \dots, R, j = 1, \dots, J_r, i = 1, \dots, N_{jrt}, v = 1, \dots, V_{jr}, \quad (137)$$

$$gv_{vijrt} = \sum_{\upsilon \in \mathcal{V}_{jr}} z_{vijrt}^{\upsilon} \cdot GV_{vijrt}^{\upsilon},$$

$$t = 1, \dots, T, r = 1, \dots, R, j = 1, \dots, J_r, i = 1, \dots, N_{jrt}, v = 1, \dots, V_{jr}, \quad (138)$$

$$z_{vijrt}^{\upsilon} \geq 0,$$

$$t = 1, \dots, T, r = 1, \dots, R, j = 1, \dots, J_r, i = 1, \dots, N_{jrt}, v = 1, \dots, V_{jr}, \upsilon = 1 \in \mathcal{V}_{jr}, \quad (139)$$

$$\sum_{\upsilon \in \mathcal{V}_{jr}} z_{vijrt}^{\upsilon} = uv_{vijrt}, t = 1, \dots, T, r = 1, \dots, R, j = 1, \dots, J_r, i = 1, \dots, N_{jrt}, v = 1, \dots, V_{jr}, \quad (140)$$

$$\sum_{\upsilon \in \mathcal{J}^l(B,l)} z_{vijrt}^{\upsilon} \leq x_{vijrt}^l,$$

$$t = 1, \dots, T, r = 1, \dots, R, j = 1, \dots, J_r, i = 1, \dots, N_{jrt}, v = 1, \dots, V_{jr}, l = 1, \dots, \mathcal{L}, \quad (141)$$

$$\sum_{\upsilon \in \mathcal{J}^0(B,l)} z_{vijrt}^{\upsilon} \leq 1 - x_{vijrt}^l,$$

$$t = 1, \dots, T, r = 1, \dots, R, j = 1, \dots, J_r, i = 1, \dots, N_{jrt}, v = 1, \dots, V_{jr}, l = 1, \dots, \mathcal{L}, \quad (142)$$

$$uv_{vijrt} \in \{0, 1\}, t = 1, \dots, T, r = 1, \dots, R, j = 1, \dots, J_r, i = 1, \dots, N_{jrt}, v = 1, \dots, V_{jr}, \quad (143)$$

$$x_{vijrt}^l \in \{0, 1\},$$

$$t = 1, \dots, T, r = 1, \dots, R, j = 1, \dots, J_r, i = 1, \dots, N_{jrt}, v = 1, \dots, V_{jr}, l = 1, \dots, \mathcal{L}, \quad (144)$$

$$z_{vijrt}^{\upsilon} = 0,$$

$$t = 1, \dots, T, r = 1, \dots, R, j = 1, \dots, J_r, i = 1, \dots, N_{jrt}, v = 1, \dots, V_{jr}, \upsilon > NR_{vijrt}, \quad (145)$$

em que,

$os_{jrt}$  é o número de UGs do tipo  $j$  na UHE  $r$  que são ligadas no estágio  $t$ ;

$rs_{jrt}$  é o número de UGs do tipo  $j$  na UHE  $r$  que são desligadas no estágio  $t$ ;

$dp_{jrt}$  é a quantidade de UGs do tipo  $j$  na UHE  $r$  despachadas (em operação) no estágio  $t$ .

Para fins didáticos, a obtenção da formulação de PLIM proposta nesse documento é ilustrado no Apêndice A para uma usina com 4 UGs idênticas em um problema com 1 estágio de tempo. No Apêndice B é ilustrada a validação do desempenho dessa formulação proposta em uma UHE à fio d'água composta por 50 UGs de dois tipos diferentes.

## 4 RESULTADOS

Neste capítulo são apresentados os principais resultados obtidos da aplicação da estratégia proposta em problemas de POUH. O horizonte de planejamento é dado por um dia, discretizado em etapas de uma hora. Na sequência, inicialmente são apresentadas as características do sistema simulado. Posteriormente, os resultados são apresentados.

### 4.1 DADOS E CONFIGURAÇÕES DE ENTRADA

A configuração hidráulica da cascata com quatro UHEs e 53 UGs considerada nas simulações computacionais pode ser vista na Figura 12. Os dados são baseados em uma cascata real, composta pelas UHEs Três Irmãos, Ilha Solteira, Jupuíá e Porto Primavera, ambas localizadas na região sudeste do Brasil. A análise dos resultados será dividida em duas etapas. Inicialmente serão analisados os resultados detalhados da resolução do problema de POUH em um caso base dado pelo sistema reduzido composto pelas UHEs 1 e 3. Na sequência são analisados os resultados gerais para o sistema completo.

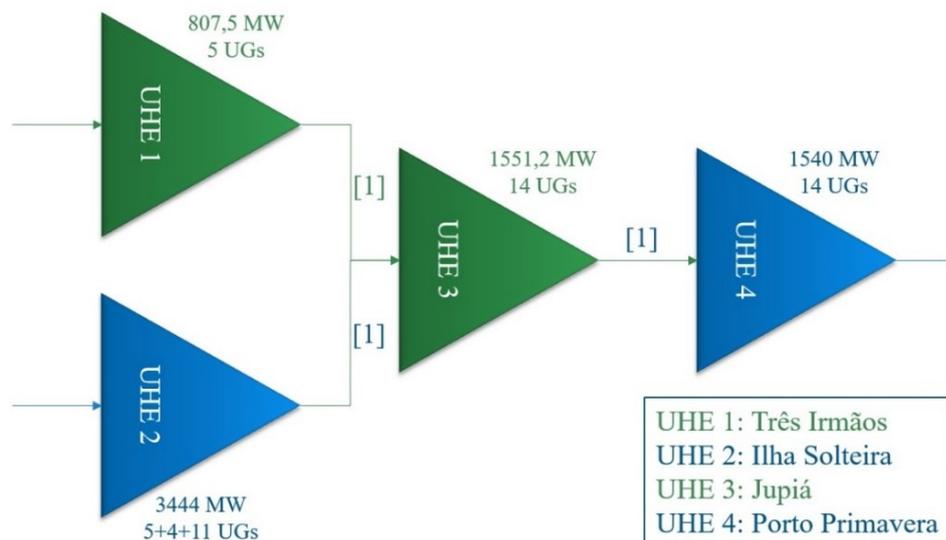


Figura 12 - Sistema simulado.

A Tabela 4 apresenta, para cada UHE, a potência instalada, o número de UGs, os limites de turbinamento e potência por UG e os limites de volumes armazenados. Note que

todas as UGs são idênticas nas UHEs 1, 3 e 4. Por sua vez, a UHE 2 possui três tipos diferentes de UGs. O tempo de viagem d'água entre os reservatórios é de uma hora.

Tabela 4 - Principais características operacionais das usinas.

UHE	Potência (MW)	$N_j$	$W_j^{\text{min/max}}$ (m <sup>3</sup> /s)	$G_j^{\text{min/max}}$ (MW)	$V^{\text{min/max}}$ (hm <sup>3</sup> )
1	807,5	5	40 /436	30,0/161,5	9.923/13.372
2	3.444,0	4	120/480	70,0/176,0	25.467/34.432
		11	130/464	68,0/170,0	
		5	135/475	70,0/174,0	
3	1.551,2	14	50 /596	20,0/110,8	2.450/3.354
4	1.540,0	14	200/636	44,0/110,0	14.400/20.000

Na Tabela 5 estão os coeficientes da função cota de montante em cada UHE.

Tabela 5 – Coeficientes da função cota de montante.

UHE	$C_0$	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$
1	283,000	$5,500 \cdot 10^{-3}$	$-3,930 \cdot 10^{-7}$	$1,730 \cdot 10^{-11}$	$-3,100 \cdot 10^{-16}$
2	294,181	$2,055 \cdot 10^{-3}$	$-5,660 \cdot 10^{-8}$	$9,700 \cdot 10^{-13}$	$-6,700 \cdot 10^{-18}$
3	262,891	$9,075 \cdot 10^{-3}$	$-1,970 \cdot 10^{-6}$	$2,996 \cdot 10^{-10}$	$-1,946 \cdot 10^{-14}$
4	239,170	$2,497 \cdot 10^{-3}$	$-1,260 \cdot 10^{-7}$	$3,050 \cdot 10^{-12}$	$-2,570 \cdot 10^{-17}$

Já na Tabela 6 estão os coeficientes associados com a função cota de jusantes e as perdas hidráulicas.

Tabela 6 – Coeficientes das funções cota de jusante e perdas hidráulicas.

UHE	$D_0$	$D_1$	$D_2$	$D_3$	$D_4$	$KT$
1	280,000	$-2,200 \cdot 10^{-4}$	$7,110 \cdot 10^{-7}$	$-1,710 \cdot 10^{-10}$	$1,300 \cdot 10^{-14}$	$1,226 \cdot 10^{-5}$
2	279,880	$9,570 \cdot 10^{-5}$	$1,210 \cdot 10^{-8}$	$-5,830 \cdot 10^{-13}$	$7,600 \cdot 10^{-18}$	$1,020 \cdot 10^{-5}$
3	253,441	$5,787 \cdot 10^{-4}$	$1,440 \cdot 10^{-8}$	$-1,420 \cdot 10^{-12}$	$2,610 \cdot 10^{-17}$	$3,913 \cdot 10^{-6}$
4	234,498	$7,080 \cdot 10^{-4}$	$-2,520 \cdot 10^{-8}$	$4,650 \cdot 10^{-13}$	$-3,260 \cdot 10^{-18}$	$8,900 \cdot 10^{-7}$

Os coeficientes que compõem o rendimento hidráulico da turbina de cada tipo de UG podem ser observados na Tabela 7. Esses coeficientes são fictícios, devido à impossibilidade (por questões de confidencialidade) de obtê-los junto às UHEs. Todas as UGs possuem uma região concava e outra convexa ao longo da faixa operativa.

Tabela 7 – Coeficientes das funções de rendimento hidráulico da turbina.

UHE	$E_0$	$E_1$	$E_2$	$E_3$	$E_4$	$E_5$
1	$8,487 \cdot 10^{-1}$	$3,882 \cdot 10^{-5}$	$7,366 \cdot 10^{-4}$	$7,779 \cdot 10^{-6}$	$-5,022 \cdot 10^{-7}$	$-1,675 \cdot 10^{-5}$
2	$7,587 \cdot 10^{-1}$	$2,165 \cdot 10^{-4}$	$2,187 \cdot 10^{-3}$	$8,455 \cdot 10^{-5}$	$-4,662 \cdot 10^{-6}$	$-3,995 \cdot 10^{-4}$
	$3,587 \cdot 10^{-1}$	$2,342 \cdot 10^{-3}$	$2,267 \cdot 10^{-3}$	$3,357 \cdot 10^{-5}$	$-4,461 \cdot 10^{-6}$	$-1,715 \cdot 10^{-4}$
	$3,587 \cdot 10^{-1}$	$2,190 \cdot 10^{-3}$	$4,467 \cdot 10^{-4}$	$3,910 \cdot 10^{-5}$	$-4,358 \cdot 10^{-6}$	$-1,715 \cdot 10^{-4}$
3	$3,287 \cdot 10^{-1}$	$2,365 \cdot 10^{-3}$	$2,496 \cdot 10^{-3}$	$1,318 \cdot 10^{-6}$	$-2,415 \cdot 10^{-6}$	$-7,512 \cdot 10^{-5}$
4	$3,587 \cdot 10^{-1}$	$1,582 \cdot 10^{-3}$	$1,542 \cdot 10^{-3}$	$5,328 \cdot 10^{-5}$	$-2,221 \cdot 10^{-6}$	$-6,227 \cdot 10^{-4}$

Por fim, para validar a formulação para diferentes condições operacionais, as simulações são realizadas considerando diferentes penalidades,  $PP_j$ , para as partidas e paradas na função objetivo. Os PLIMs neste trabalho são resolvidos com o solver GUROBI 9.5.1, via PYTHON 3.9. O computador utilizado tem um processador Intel Core I7-1165g7 4.60 GHz e 8 GB de RAM. Como critério de parada do algoritmo, foi considerada uma diferença máxima de 0,01% entre os valores da função objetivo das últimas duas iterações. Nos problemas de PLIM resolvidos em cada iteração foi considerado um gap de otimalidade igual a 0,1% nas duas primeiras iterações e 0,001% a partir da terceira iteração.

#### 4.2 RESULTADOS PARA O SISTEMA REDUZIDO

Nesta seção são apresentados os diversos resultados obtidos pela estratégia proposta, definida ao longo desse capítulo como **PROP**, para o sistema reduzido dado pela cascata composta pelas UHEs 1 e 3. Para validar a estratégia proposta, seus resultados serão comparados com os resultados do problema sendo resolvido através de uma formulação única, que considera a aproximação não convexa da FPH bivariada e das funções univariadas de cota de montante e jusante via modelo LACC. Em outras palavras, a FPH bivariada é aproximada por triângulos, como em Brito, Finardi e Takigawa (2020a), enquanto as funções univariadas de cotas de montante e jusante são aproximadas por segmentos de retas, de maneira semelhante à aproximação da região convexa da FPH univariada em (111)-(118). Os detalhes da formulação bivariada via LACC são apresentados no Apêndice C.

A formulação não convexa bivariada via LACC será definida ao longo desse capítulo como **LACC**. As metas de demandas horárias consideradas para cada usina da cascata reduzida podem ser conferidas na Figura 13.

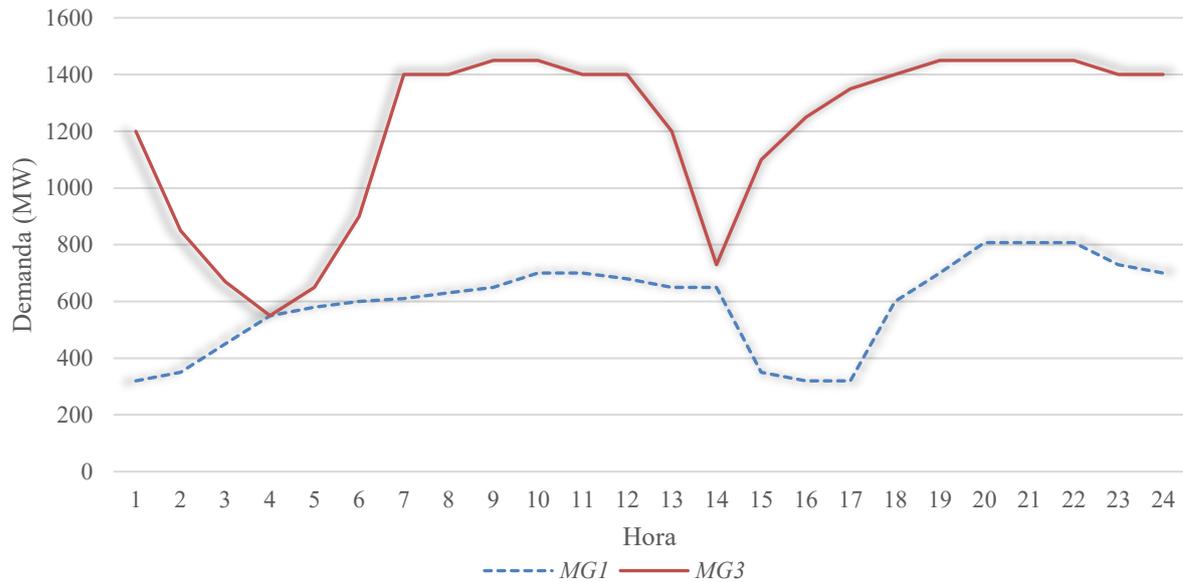


Figura 13 – Cenários de metas de geração e quedas brutas.

Os volumes iniciais dos reservatórios,  $V_{0r}$ , e as vazões incrementais (consideradas constantes ao longo do horizonte de planejamento),  $Y_{rt}$ , são mostrados na Tabela 8.

Tabela 8 – Vazão afluyente e volume inicial em cada usina.

UHE	1	3
$Y_{rt}$ (m <sup>3</sup> /s)	450	6.945
$V_{0r}$ (hm <sup>3</sup> )	11.897	3.100

A seguir, inicialmente são apresentados os resultados provenientes da estratégia comparativa **LACC** para, posteriormente, serem comparados com os resultados de **PROP**.

#### 4.2.1 Resultados da Formulação Bivariada via LACC

Na Tabela 9 são apresentados os principais resultados da estratégia **LACC** para cinco diferentes níveis de discretização da FPH e considerando  $PP_{jr} = 0$ , isto é, desconsiderando os pesos para partidas e paradas. Para cada simulação, são apresentados os valores da função

objetivo (OBJ), do tempo computacional (T), em segundos, do gap de otimalidade resultante (Gap) e do erro máximo apresentado pela FPH linear via resultados do modelo, em relação à não linear, em termos de potência (EMG). A discretização 3H x 5Q, por exemplo, considera três valores distribuídos igualmente no eixo de queda bruta e cinco no eixo de vazão turbinada. Como resultado, tem-se uma aproximação da FPH bivariada composta por 16 triângulos. Nessas primeiras simulações, as funções univariadas de cotas de montante e jusante foram aproximadas por cinco pontos (quatro segmentos de retas) cada, equidistantemente distribuídos nos eixos de volume e vazão defluente, respectivamente. Os tempos de simulações foram limitados à valores que garantiam baixos níveis de Gap.

Tabela 9 – Resultados da estratégia LACC para diferentes discretizações da FPH

<b>Discretização da FPH bivariada</b>	<b>3H x 5Q</b> (16 triângulos)	<b>3H x 9Q</b> (32 triângulos)	<b>3H x 17Q</b> (64 triângulos)	<b>3H x 33Q</b> (128 triângulos)	<b>3H x 65Q</b> (256 triângulos)
<b>OBJ</b>	189.482,8	188.153,2	187.868,3	187.803,4	187.793,9
<b>T (s)</b>	1.000	2.000	3.000	12.000	70.000
<b>Gap</b>	0,15%	0,05%	0,08%	0,07%	0,10%
<b>EMG</b>	0,95%	0,33%	0,10%	0,05%	0,03%

Nos resultados da Tabela 9, é possível notar que o valor de OBJ vai decrescendo e estabilizando à medida que a discretização da FPH aumenta. Além disso, percebe-se que o tempo computacional aumenta exponencialmente com o aumento da quantidade de triângulos que aproximam a FPH. Para a aproximação mais precisa da FPH, por 256 triângulos, foi necessário um tempo computacional de 70.000 segundos (quase 20 horas), algo inviável sob a perspectiva de um planejamento diário da operação. Finalmente, na última linha da tabela, verifica-se um erro máximo de linearização reduzindo exponencialmente com o aumento do número de triângulos que aproximam a FPH não linear. Enquanto a aproximação por 16 triângulos gera uma diferença máxima de 0,95% entre a potência linear e a não linear, a aproximação por 256 triângulos gera uma diferença máxima de apenas 0,03%. Essa diferença no erro de aproximação impacta diretamente na quantidade de UGs despachadas ao longo das horas, como pode ser observado na Figura 14. Note que o número de UGs despachadas na UHE 3 é diferente em algumas horas nas simulações que consideram menos triângulos (discretizações 3H x 5Q e 3H x 9Q) na aproximação da FPH. A partir da discretização 3H x 17Q, por 64 triângulos, o despacho se manteve igual em todos os estágios e usinas.

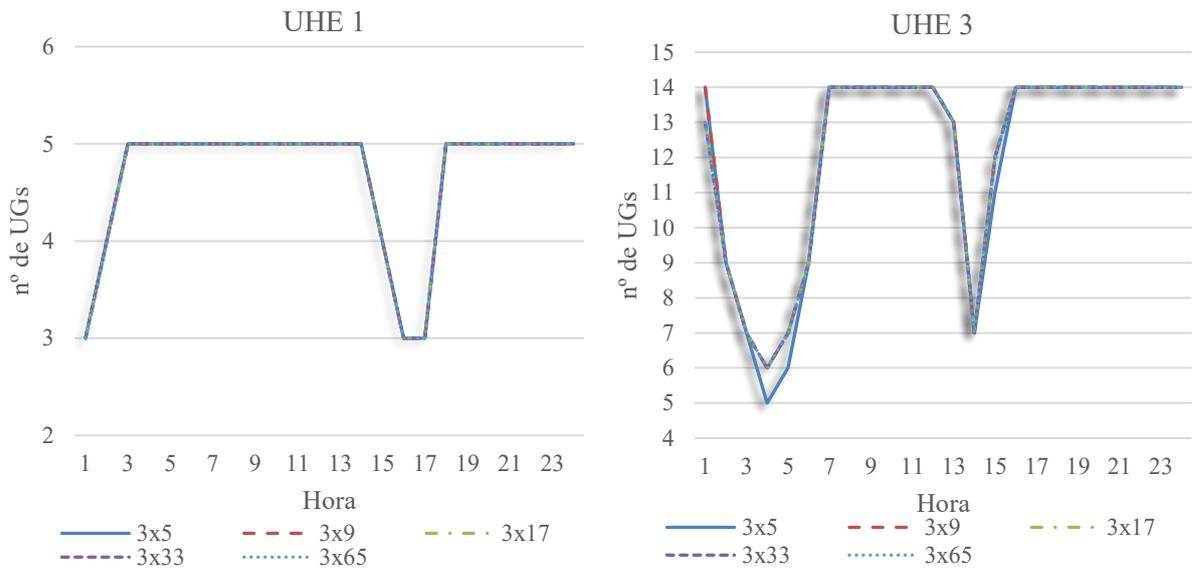


Figura 14 – Número de UGs despachadas para diferentes discretizações.

No intuito de encontrar resultados ainda mais precisos para o problema de POUH do sistema reduzido que considera a aproximação da FPH por 256 triângulos, foram realizadas simulações considerando um número maior de pontos na aproximação das funções cotas de montante e jusante. Inicialmente, percebeu-se que as simulações com diferentes discretizações na função cota de montante ( $f_{cm}$ ) não produziram variações significativas nos valores de OBJ. Em contrapartida, a variação na discretização da função cota de jusante ( $f_{cj}$ ) produziu diferenças mais significativas em OBJ. Isso ocorre porque as funções de cota de montante têm um perfil mais próximo de uma função linear, como pode observado na Figura 15. Note que a função cota de jusante da UHE 1 têm um perfil mais curvo em relação às demais funções. Nesse caso, utilizar poucos pontos para aproximar a função não linear original produz erros de linearização mais significativos.

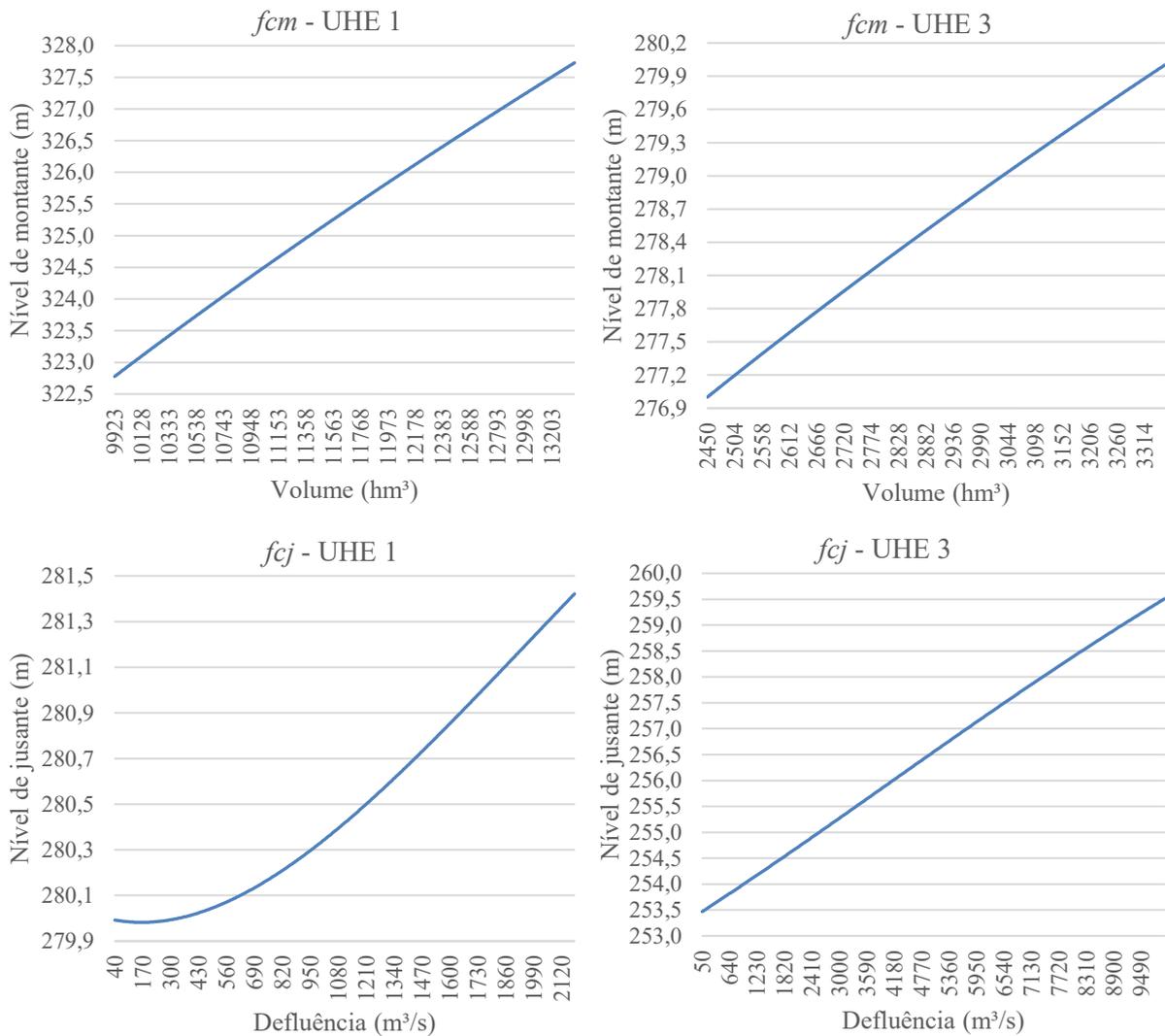


Figura 15 – Funções cotas de montante e jusante nas UHEs 1 e 3.

Na Tabela 10 é possível verificar os valores de OBJ, T e Gap resultantes das simulações para aproximações da *fcj* por 5, 9 e 17 pontos. Na versão mais precisa, com FPH aproximada por 256 triângulos, função cota de montante aproximada por cinco pontos (quatro retas) e função cota de jusante aproximada por 17 pontos (16 retas), foram necessários 90.000 segundos para o solucionador encontrar um valor de OBJ igual a 187.830.

Tabela 10 – Resultados da estratégia LACC para diferentes discretizações da função cota de jusante

Discretização da <i>fcj</i>	5 pontos	9 pontos	17 pontos
<b>OBJ</b>	187.793	187.822	187.830
<b>T (s)</b>	70.000	80.000	90.000
<b>Gap</b>	0,10%	0,08%	0,12%

## 4.2.2 Resultados da Estratégia Proposta

Nessa seção, inicialmente os resultados da estratégia **PROP** são detalhados para um cenário base, que considera  $PP_{jr} = 0$  na função objetivo, e  $X = 100$  pontos e  $\varepsilon = 0,05$  como entradas para o algoritmo RDP. Na sequência, esses resultados são comparados com o resultado da estratégia **LACC**. Finalmente, é analisado o impacto de considerar pesos para partidas e paradas na função objetivo, isto é,  $PP_{jr} > 0$ .

### 4.2.2.1 Cenário Base

O primeiro passo para resolver o algoritmo da estratégia proposta é estimar a queda bruta horária. Para a primeira iteração, foi considerado que a vazão defluente em cada hora é dada pela vazão turbinada estimada a partir da divisão entre a demanda horária e uma produtividade fixa igual a 0,3994 para a UHE 1 e 0,1944 para a UHE 3. Essa produtividade fixa pode ser baseada nas condições de operação recentes da UHE. Conhecidas as vazões defluentes, pode-se calcular o nível de jusante, os volumes horários (via balanço hidráulico) e, conseqüentemente, a queda bruta.

Conhecidas as quedas brutas, pode-se extrair os pontos que aproximam a FPH via RDP e cálculo do ponto de inflexão. Como cada valor de queda bruta produz uma FPH univariada específica, o algoritmo RDP é executado 24 vezes (devido aos 24 estágios de tempo) para cada tipo de UG em cada iteração. Neste sistema reduzido, por exemplo, o algoritmo RDP é executado 48 vezes em cada iteração, já que tanto a UHE 1 quanto a UHE 3 têm apenas um tipo de UG. Na Figura 16 é possível observar os pontos resultantes do RDP, em azul, e o ponto de inflexão, em vermelho, relacionados com o último estágio da primeira iteração para as UHEs 1 e 3. Note que ambas as FPHs são compostas por uma região convexa, à esquerda, e uma côncava, à direita. Nessas figuras, percebe-se que a região convexa da UHE 1 é composta por quatro pontos e a região côncava por 13, incluindo o ponto de inflexão. Já na UHE 3, a região convexa é dada por 13 pontos e a côncava por 15. Perceba que o algoritmo RDP extraiu mais pontos da UHE 3 devido ao perfil de curvatura mais acentuada da FPH univariada.

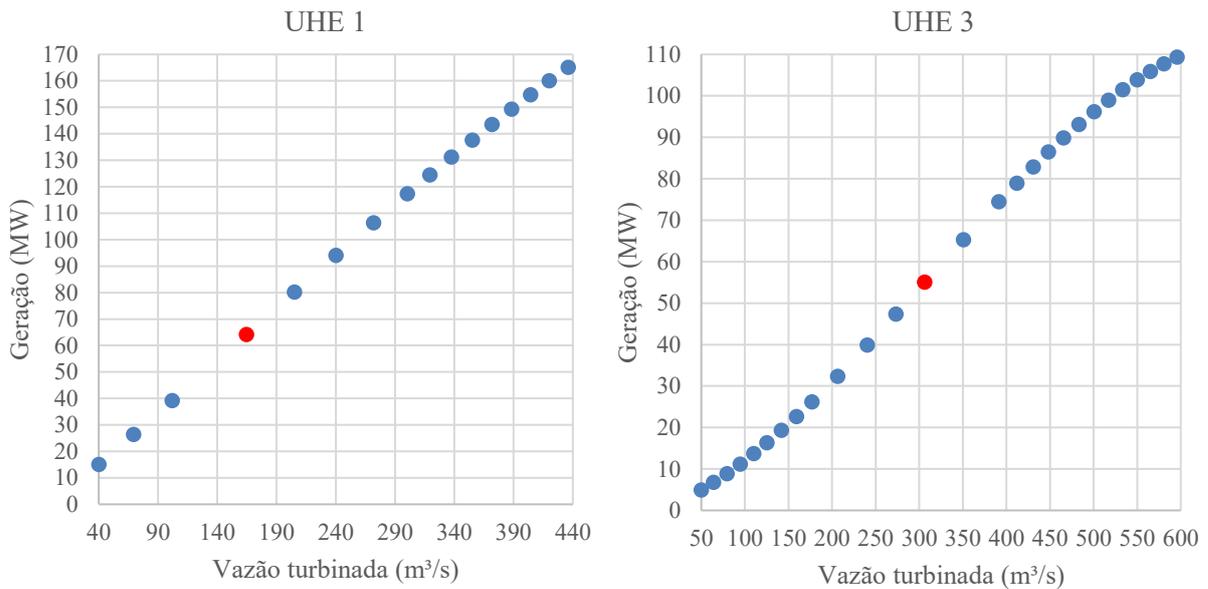


Figura 16 – Pontos extraídos do RDP e ponto de inflexão nas UHEs 1 e 3.

Após extrair os pontos que irão realizar uma aproximação LPP nas respectivas FPHs univariadas, o problema de otimização baseado no particionamento da FPH e em simetria de UGs idênticas é resolvido e as quedas brutas são atualizadas de maneira iterativa, até a estabilização da função objetivo. Na Tabela 11 é possível observar os principais resultados deste cenário base. IT é o número de iterações realizadas até a convergência do algoritmo. Note que o problema é resolvido em apenas oito segundos e precisa de quatro iterações para convergir.

Tabela 11 - Principais resultados do cenário base.

OBJ	T (s)	IT
187.880	8,0	4

Na Tabela 12 é possível observar os valores de OBJ, Gap final, T e o tempo necessário para executar o algoritmo RDP (T\_RDP) em cada iteração. Para OBJ, ainda é apresentada a diferença relativa em relação ao valor da iteração anterior, em parênteses. Perceba que a diferença entre os valores de OBJ cai rapidamente ao longo das iterações. Note também que o tempo de execução do algoritmo RDP equivale a cerca de 30%-40% do tempo total de simulação. Vale ressaltar que, para esse sistema, o algoritmo RDP é executado 48 vezes em cada iteração, isto é, uma execução para cada estágio de tempo e tipo de UG. Portanto,

considerando que esse tempo é gasto para controlar os erros de linearização, pode-se considerar que é um tempo aceitável.

Tabela 12 - Resultados do cenário base por iteração.

<b>IT</b>	<b>OBJ</b>	<b>Gap</b>	<b>T (s)</b>	<b>T_RDP (s)</b>
<b>1</b>	188.448	0,0362%	1,57	0,67
<b>2</b>	187.980 (0,248%)	0,0356%	1,36	0,67
<b>3</b>	187.887 (0,049%)	0,0009%	2,40	0,73
<b>4</b>	187.880 (0,004%)	0,0002%	2,34	0,76

Na Tabela 13 está a evolução das quedas brutas horárias atualizadas ao longo das iterações. DIF representa a diferença percentual entre o valor de queda bruta da iteração corrente em relação à iteração anterior. Note que DIF diminui bastante ao longo das iterações. Na última iteração, a diferença máxima de queda bruta não ultrapassa 0,1% em valores absolutos.

Por fim, na Tabela 14 são apresentados os principais resultados horários. Nesta simulação, todas as UGs são despachadas na região côncava. Por conta disso, o despacho de todas as UGs de cada UHE é idêntico. Por exemplo, para a hora 1 têm-se três UGs da UHE 1 despachadas com 106,7 MW para atender à demanda de 320 MW e 13 UGs da UHE 3 despachadas com 92,3 MW para atender à demanda de 1200 MW.

Tabela 13 - Evolução da queda bruta ao longo das iterações.

Hora	UHE 1							UHE 3						
	IT = 1	IT = 2	DIF	IT = 3	DIF	IT = 4	DIF	IT = 1	IT = 2	DIF	IT = 3	DIF	IT = 4	DIF
1	45,53	45,53	0,00%	45,53	0,00%	45,53	<b>0,00%</b>	21,96	21,95	-0,03%	21,95	0,01%	21,95	<b>0,00%</b>
2	45,48	45,48	0,00%	45,48	0,00%	45,48	<b>0,00%</b>	23,11	23,27	0,67%	23,29	0,08%	23,29	<b>0,01%</b>
3	45,29	45,29	0,00%	45,29	0,00%	45,29	<b>0,00%</b>	23,74	23,93	0,81%	23,95	0,07%	23,95	<b>0,01%</b>
4	45,07	45,06	-0,02%	45,06	0,00%	45,06	<b>0,00%</b>	24,17	24,38	0,83%	24,39	0,05%	24,39	<b>0,00%</b>
5	45,00	44,98	-0,03%	44,98	0,00%	44,98	<b>0,00%</b>	23,89	24,12	0,97%	24,14	0,08%	24,14	<b>0,01%</b>
6	44,95	44,93	-0,04%	44,93	0,00%	44,93	<b>0,00%</b>	23,11	23,27	0,70%	23,35	0,37%	23,36	<b>0,05%</b>
7	44,92	44,90	-0,05%	44,90	0,00%	44,90	<b>0,00%</b>	21,51	21,44	-0,31%	21,42	-0,08%	21,42	<b>-0,02%</b>
8	44,86	44,84	-0,06%	44,84	0,00%	44,84	<b>0,00%</b>	21,50	21,45	-0,25%	21,44	-0,06%	21,43	<b>-0,02%</b>
9	44,81	44,78	-0,07%	44,78	0,00%	44,78	<b>0,00%</b>	21,34	21,19	-0,74%	21,13	-0,27%	21,11	<b>-0,10%</b>
10	44,68	44,63	-0,11%	44,63	-0,01%	44,63	<b>0,00%</b>	21,34	21,19	-0,68%	21,14	-0,26%	21,12	<b>-0,10%</b>
11	44,68	44,63	-0,11%	44,62	-0,01%	44,62	<b>0,00%</b>	21,49	21,48	-0,07%	21,47	-0,02%	21,47	<b>-0,01%</b>
12	44,72	44,68	-0,10%	44,67	0,00%	44,67	<b>0,00%</b>	21,49	21,49	0,01%	21,49	0,00%	21,49	<b>0,00%</b>
13	44,79	44,75	-0,07%	44,75	0,00%	44,75	<b>0,00%</b>	22,12	22,33	0,94%	22,38	0,20%	22,39	<b>0,03%</b>
14	44,78	44,75	-0,08%	44,74	0,00%	44,74	<b>0,00%</b>	23,68	24,06	1,60%	24,10	0,16%	24,10	<b>0,01%</b>
15	45,41	45,41	0,00%	45,41	0,00%	45,41	<b>0,00%</b>	22,50	22,81	1,39%	22,86	0,22%	22,87	<b>0,03%</b>
16	45,46	45,46	0,00%	45,46	0,00%	45,46	<b>0,00%</b>	22,02	22,27	1,13%	22,32	0,22%	22,33	<b>0,04%</b>
17	45,46	45,45	0,00%	45,45	0,00%	45,45	<b>0,00%</b>	21,71	21,88	0,79%	21,92	0,20%	21,93	<b>0,04%</b>
18	44,89	44,87	-0,05%	44,86	0,00%	44,86	<b>0,00%</b>	21,55	21,65	0,48%	21,68	0,15%	21,69	<b>0,04%</b>
19	44,64	44,59	-0,12%	44,59	-0,01%	44,58	<b>0,00%</b>	21,39	21,39	0,01%	21,40	0,02%	21,40	<b>0,01%</b>
20	44,37	44,25	-0,26%	44,24	-0,02%	44,24	<b>0,00%</b>	21,38	21,40	0,07%	21,41	0,05%	21,41	<b>0,02%</b>
21	44,36	44,24	-0,26%	44,24	-0,02%	44,24	<b>0,00%</b>	21,38	21,41	0,15%	21,43	0,07%	21,43	<b>0,03%</b>
22	44,35	44,23	-0,26%	44,23	-0,02%	44,23	<b>0,00%</b>	21,37	21,42	0,23%	21,44	0,10%	21,45	<b>0,04%</b>
23	44,54	44,47	-0,16%	44,46	-0,01%	44,46	<b>0,00%</b>	21,52	21,71	0,85%	21,76	0,25%	21,78	<b>0,07%</b>
24	44,60	44,55	-0,13%	44,54	-0,01%	44,54	<b>0,00%</b>	21,52	21,72	0,93%	21,78	0,28%	21,80	<b>0,08%</b>

Tabela 14 – Principais resultados horários.

Hora	UHE 1							UHE 3						
	<i>MG</i> (MW)	<i>q</i> (m <sup>3</sup> /s)	<i>s</i> (m <sup>3</sup> /s)	<i>vl</i> (hm <sup>3</sup> )	<i>dp</i>	<i>ws</i> (m <sup>3</sup> /s)	<i>gs</i> (MW)	<i>MG</i> (MW)	<i>q</i> (m <sup>3</sup> /s)	<i>s</i> (m <sup>3</sup> /s)	<i>vl</i> (hm <sup>3</sup> )	<i>dp</i>	<i>ws</i> (m <sup>3</sup> /s)	<i>gs</i> (MW)
1	320,0	797,9	0,0	11895,7	3	266,0	106,7	1200,0	6178,5	0,0	3102,8	13	475,3	92,3
2	350,0	874,5	0,0	11894,2	4	218,6	87,5	850,0	4115,7	0,0	3115,8	9	457,3	94,4
3	450,0	1129,1	0,0	11891,8	5	225,8	90,0	670,0	3152,9	0,0	3132,6	7	450,4	95,7
4	550,0	1387,6	0,0	11888,4	5	277,5	110,0	550,0	2551,1	0,0	3152,5	6	425,2	91,7
5	580,0	1467,7	0,0	11884,7	5	293,5	116,0	650,0	3040,3	0,0	3171,6	7	434,3	92,9
6	600,0	1521,7	0,0	11880,9	5	304,3	120,0	900,0	4346,2	0,0	3186,2	9	482,9	100,0
7	610,0	1549,3	0,0	11876,9	5	309,9	122,0	1400,0	7508,4	0,0	3189,6	14	536,3	100,0
8	630,0	1604,5	0,0	11872,8	5	320,9	126,0	1400,0	7500,8	0,0	3193,2	14	535,8	100,0
9	650,0	1660,8	0,0	11868,4	5	332,2	130,0	1450,0	8070,2	0,0	3194,9	14	576,4	103,6
10	700,0	1804,8	0,0	11863,5	5	361,0	140,0	1450,0	8064,1	0,0	3196,9	14	576,0	103,6
11	700,0	1805,2	0,0	11858,6	5	361,0	140,0	1400,0	7483,1	0,0	3201,5	14	534,5	100,0
12	680,0	1747,2	0,0	11854,0	5	349,4	136,0	1400,0	7473,5	0,0	3206,0	14	533,8	100,0
13	650,0	1662,0	0,0	11849,6	5	332,4	130,0	1200,0	6050,8	0,0	3215,6	13	465,4	92,3
14	650,0	1662,3	0,0	11845,3	5	332,5	130,0	730,0	3415,7	0,0	3234,2	7	488,0	104,3
15	350,0	876,0	0,0	11843,7	4	219,0	87,5	1100,0	5428,3	0,0	3245,7	12	452,4	91,7
16	320,0	799,4	0,0	11842,5	3	266,5	106,7	1250,0	6323,0	0,0	3251,1	14	451,6	89,3
17	320,0	799,4	0,0	11841,2	3	266,5	106,7	1350,0	6978,8	0,0	3253,8	14	498,5	96,4
18	600,0	1524,2	0,0	11837,3	5	304,8	120,0	1400,0	7382,2	0,0	3255,1	14	527,3	100,0
19	700,0	1807,1	0,0	11832,5	5	361,4	140,0	1450,0	7889,5	0,0	3257,2	14	563,5	103,6
20	807,5	2143,8	0,0	11826,4	5	428,8	161,5	1450,0	7881,9	0,0	3260,4	14	563,0	103,6
21	807,5	2144,4	0,0	11820,3	5	428,9	161,5	1450,0	7871,2	0,0	3264,7	14	562,2	103,6
22	807,5	2145,0	0,0	11814,2	5	429,0	161,5	1450,0	7860,4	0,0	3269,2	14	561,5	103,6
23	730,0	1898,7	0,0	11808,9	5	379,7	146,0	1400,0	7346,0	0,0	3275,4	14	524,7	100,0
24	700,0	1809,2	0,0	11804,0	5	361,8	140,0	1400,0	7336,5	0,0	3280,9	14	524,0	100,0

#### 4.2.2.2 Estratégia Proposta vs Formulação bivariada via LACC

O intuito agora é comparar os resultados de **PROP** com a estratégia de referência, **LACC**. Na Tabela 15, as dimensões e os principais resultados da versão mais precisa da estratégia **LACC**, que aproxima a FPH bivariada por 256 triângulos e a *fcj* por 16 retas (17 pontos), são comparados com as dimensões (do problema resolvido em cada iteração) e os resultados de **PROP** considerando dois valores de  $\epsilon$  (0,05 e 0,005) no algoritmo RDP. Essas simulações consideram  $X = 100$  pontos iniciais em **PROP**. Esse valor utilizado em  $X$  foi definido após a realização de testes variando os parâmetros do algoritmo RDP. No apêndice D é possível observar que utilizar  $X = 100$  produz resultados semelhantes a utilizar  $X = 500$ , mas a um custo computacional significativamente inferior. Em ambas as simulações, **PROP** levou quatro iterações para a convergência do algoritmo. Os valores entre parênteses ao lado dos resultados representam as diferenças percentuais de **PROP** em relação à estratégia de referência **LACC**.

Tabela 15 – **LACC** vs **PROP**

<b>Estratégia</b>	<b>LACC</b>	<b>PROP (<math>\epsilon = 0,05</math>)</b>	<b>PROP (<math>\epsilon = 0,005</math>)</b>
<b>NR</b>	12.456	9.242 (-25,8%)	20.441 (+64,1%)
<b>NVC</b>	94.176	7.992 (-91,5%)	25.560 (-72,8%)
<b>NVB</b>	5.304	2.252 (-57,5%)	3.168 (-40,2%)
<b>OBJ</b>	<b>187.830</b>	<b>187.880 (+0,026%)</b>	<b>187.838 (+0,004%)</b>
<b>T (s)</b>	<b>90.000</b>	<b>8 (-99,997%)</b>	<b>23 (-99,974%)</b>
<b>Gap</b>	0,12%	-	-

Observando as dimensões dos problemas, é possível perceber que os problemas resolvidos em cada iteração em **PROP** possuem uma quantidade significativamente menor de variáveis contínuas e binárias. No entanto, dependendo do valor de  $\epsilon$  considerado no RDP, o número resultante de restrições pode ficar maior.

Partindo para a comparação dos principais resultados, perceba que os valores resultantes de OBJ em **PROP** ficaram bem próximos do valor obtido na estratégia **LACC**. Admitindo um erro maior no algoritmo RDP ( $\epsilon = 0,05$ ), **PROP** obteve um valor apenas 0,026% maior em OBJ. Se o erro admitido no RDP for menor ( $\epsilon = 0,005$ ), a diferença de OBJ em **PROP**, em relação ao **LACC**, é ainda menor, de apenas 0,004%. Tais resultados comprovam a precisão dos resultados de **PROP** em termos de OBJ.

A maior vantagem de **PROP**, em relação ao **LACC**, está no tempo computacional. Enquanto **LACC** necessitou de (impraticáveis) 25 horas para exprimir seus resultados, **PROP** necessitou de apenas oito segundos para a simulação que considera  $\epsilon = 0,05$  e 23 segundos para a simulação que considera  $\epsilon = 0,005$ . Note que, em ambas as simulações, as reduções no tempo computacional foram superiores a 99,9%.

Na Figura 17 é possível perceber que os volumes horários resultantes de **LACC** (V1\_BIV e V3\_BIV) são idênticos aos volumes resultantes de **PROP** (V1\_PROP e V3\_PROP) nas UHEs 1 e 3.

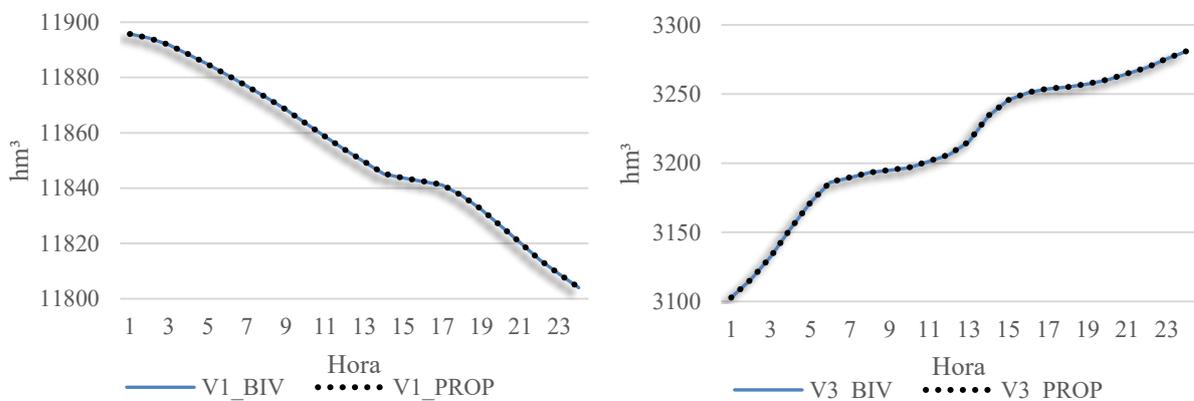


Figura 17 – Volumes obtidos por **PROP** (com  $\epsilon = 0,005$ ) e **LACC** no sistema reduzido

Na Tabela 16 é possível observar o despacho de potência por UG resultante das estratégias **LACC** e **PROP**. Note que o **LACC** apresenta os valores de maneira individualizada entre as UGs (P1.1, por exemplo, é a potência na UHE 1 e UG 1) e **PROP** apresenta o valor de potência despachada para uma quantidade determinada de UGs (por exemplo, na hora 1, tem-se DP1 UGs da UHE 1 gerando a potência P1). Nesta simulação, todas as potências despachadas em todos os estágios em **PROP** ocorreram na região côncava.

Tabela 16 - Potência despachada em cada UG (LACC vs PROP)

<i>t</i>	LACC					PROP		LACC														PROP	
	P1.1	P1.2	P1.3	P1.4	P1.5	P1	DP1	P3.1	P3.2	P3.3	P3.4	P3.5	P3.6	P3.7	P3.8	P3.9	P3.10	P3.11	P3.12	P3.13	P3.14	P3	DP3
1	106,9	106,9	106,3	0,0	0,0	106,7	3	93,5	91,3	93,5	91,3	93,5	91,3	93,5	93,5	90,7	93,5	91,5	91,8	0,0	91,3	92,3	13
2	94,0	72,7	89,8	93,5	0,0	87,5	4	95,4	95,4	92,9	94,0	94,0	94,0	93,6	0,0	0,0	0,0	0,0	95,4	95,4	0,0	94,4	9
3	90,1	89,6	90,1	90,1	90,1	90,0	5	93,6	96,1	96,1	96,1	96,1	0,0	96,1	0,0	0,0	0,0	0,0	96,1	0,0	0,0	95,7	7
4	110,0	113,2	108,5	109,1	109,1	110,0	5	92,8	95,5	91,8	0,0	90,0	0,0	0,0	0,0	90,0	0,0	0,0	0,0	90,0	0,0	91,7	6
5	116,9	117,0	112,9	120,3	112,9	116,0	5	94,3	92,0	94,3	91,6	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	94,3	91,6	91,6	0,0	0,0	92,9	7
6	120,7	120,7	120,7	117,0	120,7	120,0	5	100,5	100,5	100,5	100,5	98,6	99,1	99,1	0,0	100,5	0,0	0,0	100,5	0,0	0,0	100,0	9
7	124,6	122,1	120,6	122,1	120,7	122,0	5	100,3	100,3	100,3	100,3	100,3	99,2	100,3	100,3	100,3	100,3	98,6	100,3	98,6	100,3	100,0	14
8	128,3	124,3	124,3	124,8	128,3	126,0	5	100,4	99,4	100,4	100,4	100,4	98,7	100,4	98,7	100,4	99,2	100,4	100,4	100,4	100,4	100,0	14
9	131,9	129,6	128,0	128,6	131,9	130,0	5	103,7	103,7	103,7	103,7	103,7	103,1	103,7	103,1	103,7	103,1	103,7	103,3	103,7	103,7	103,6	14
10	138,9	139,1	138,9	142,6	140,6	140,0	5	103,2	103,8	103,2	103,8	103,8	103,8	103,8	103,8	103,8	103,2	103,2	103,8	103,8	103,2	103,6	14
11	139,3	140,5	142,6	138,8	138,8	140,0	5	100,6	100,6	98,9	100,6	100,6	99,5	98,9	99,5	98,9	100,6	100,6	100,6	99,5	100,6	100,0	14
12	135,3	135,3	135,3	135,3	139,0	136,0	5	100,7	100,7	99,4	99,0	99,0	100,7	99,0	100,7	100,7	100,7	100,7	99,0	99,0	100,7	100,0	14
13	129,5	131,8	129,4	127,5	131,8	130,0	5	93,4	93,4	91,1	91,1	93,4	91,1	91,1	93,4	93,3	93,4	93,4	0,0	91,1	91,1	92,3	13
14	131,7	129,5	129,5	127,9	131,4	130,0	5	106,6	101,8	104,2	102,4	104,2	0,0	0,0	104,2	0,0	0,0	0,0	0,0	106,6	0,0	104,3	7
15	89,5	89,5	89,5	0,0	81,4	87,5	4	92,2	90,9	90,9	92,2	90,9	92,2	92,2	92,0	90,9	90,9	0,0	92,2	0,0	92,2	91,7	12
16	106,6	106,9	0,0	0,0	106,6	106,7	3	90,8	90,8	88,4	88,8	88,4	88,4	88,4	88,4	90,8	88,4	88,4	88,4	90,8	90,8	89,3	14
17	106,9	106,6	0,0	0,0	106,6	106,7	3	97,5	97,5	97,5	97,5	95,6	95,5	95,5	95,5	97,5	96,0	95,5	95,5	97,5	95,5	96,4	14
18	120,5	118,0	120,5	120,6	120,5	120,0	5	100,1	100,1	100,1	100,1	100,1	100,1	100,1	100,1	100,1	100,1	100,0	98,8	100,1	100,1	100,0	14
19	138,6	140,4	142,4	138,6	140,0	140,0	5	103,6	103,4	104,0	103,4	104,0	103,4	103,4	103,4	103,4	103,4	103,4	104,0	104,0	103,4	103,6	14
20	161,5	161,5	161,5	161,5	161,5	161,5	5	103,5	103,5	103,5	103,5	103,6	103,5	103,5	103,5	104,0	103,5	103,5	103,5	103,5	104,0	103,6	14
21	161,5	161,5	161,5	161,5	161,5	161,5	5	103,6	103,6	103,4	103,6	103,6	103,6	103,6	103,6	103,6	103,4	103,6	103,6	103,6	103,6	103,6	14
22	161,5	161,5	161,5	161,5	161,5	161,5	5	103,7	103,7	103,7	103,7	103,7	103,7	102,7	103,7	102,8	103,7	103,7	103,7	103,7	103,7	103,6	14
23	146,3	145,5	145,5	145,5	147,3	146,0	5	100,6	100,6	100,2	98,7	100,6	98,7	100,6	98,7	100,6	98,7	100,6	100,6	100,6	100,6	100,0	14
24	140,2	140,2	139,0	140,2	140,2	140,0	5	100,7	100,7	100,7	98,8	100,7	100,7	100,5	100,7	98,8	98,8	100,7	98,8	100,7	98,8	100,0	14

Analisando os resultados da Tabela 16, inicialmente é possível perceber que, enquanto **LACC** despacha, em muitos estágios, valores de potência diferentes entre UGs idênticas, **PROP** despachou sempre valores idênticos de potência. Uma maneira de verificar qual dos despachos é mais eficiente é recalculando, a partir da FPH não linear, as vazões turbinadas associadas com cada uma das potências despachadas e somando-as novamente, de forma a obter um OBJ não linear, em  $\text{m}^3/\text{s}$ . Neste caso, o OBJ não linear da estratégia **LACC** resultou em  $187.837 \text{ m}^3/\text{s}$ , contra  $187.832 \text{ m}^3/\text{s}$  resultante de **PROP**. Isso indica que o despacho de **PROP** está levemente mais otimizado, isto é, as potências despachadas em **PROP** produziram uma vazão turbinada levemente inferior ao final de um dia. Vale ressaltar que **PROP** convergiu pelo limite de tempo de 90.000 segundos. Finalmente, é possível perceber também que a quantidade de UGs despachadas pelas duas estratégias são iguais. Em resumo, pode-se concluir que **PROP** consegue extrair resultados tão bons quanto à abordagem **LACC** bem discretizada em um tempo absurdamente menor.

#### 4.2.2.3 Outros Cenários

Na Tabela 17 são apresentados os principais resultados de **PROP** considerando diferentes valores para as constantes que penalizam as partidas e paradas,  $PP_j$ . Nessa tabela, os valores apresentados em  $PP_j$  representam o percentual da máxima capacidade de vazão turbinada das UGs ( $W^{\text{max}}$ ). Por exemplo, 25% significa que o custo de uma partida/parada de uma UG é igual a 25% da capacidade máxima de vazão turbinada desta UG. Ainda nesta Tabela, NPP representa o número de partidas e paradas resultantes da simulação e IT representa o número de iterações necessárias para a convergência do algoritmo proposto. Ademais, DIF representa a diferença dos resultados obtidos considerando  $\epsilon = 0,05$  e  $\epsilon = 0,005$ . Vale ressaltar que, enquanto admitir um  $\epsilon = 0,05$  reduz de 100 (valor atribuído a  $X$  no RDP) para 15 (sendo 3 na região convexa) e 27 pontos (sendo 13 na região convexa) representativos da FPH, respectivamente, para as UHEs 1 e 3, admitir  $\epsilon = 0,005$  promove uma redução de 100 para cerca de 38 (10 na região convexa) e 80 pontos (38 na região convexa). Além de OBJ, esta tabela apresenta a parcela da função objetivo relacionada com o somatório das vazões turbinadas nas UHEs e estágios ( $\sum Q$ ).

Tabela 17 – Resultados de **PROP** variando os pesos para partidas e paradas.

$PP_j$		0%	25%	50%
OBJ	$\varepsilon=0,05$	187.880	190.088	190.360
	$\varepsilon=0,005$	187.838	190.021	190.314
	<b>DIF</b>	<b>-0,022%</b>	<b>-0,035%</b>	<b>-0,024%</b>
$\Sigma Q$ (m <sup>3</sup> /s)	$\varepsilon=0,05$	187.880	189.780	190.360
	$\varepsilon=0,005$	187.838	189.721	190.314
	<b>DIF</b>	<b>-0,022%</b>	<b>-0,031%</b>	<b>-0,024%</b>
NPP	$\varepsilon=0,05$	35	2	0
	$\varepsilon=0,005$	35	2	0
TS (s)	$\varepsilon=0,05$	8,0	64,1	24,6
	$\varepsilon=0,005$	23,1	194,1	126,5
	<b>DIF</b>	<b>+189,2%</b>	<b>+202,8%</b>	<b>+414,2%</b>
IT	$\varepsilon=0,05$	4	4	3
	$\varepsilon=0,005$	5	3	3

Algumas conclusões podem ser destacadas nos resultados apresentados da Tabela 17. Em primeiro lugar, é possível perceber que variar o valor de  $\varepsilon$  implica em uma pequena diferença em OBJ, da ordem de 0,02%-0,03%, e nenhuma diferença no NPP. No entanto, considerar  $\varepsilon = 0,005$  produz tempos computacionais até 414% maiores. Nesse sentido, entende-se que o custo-benefício é maior ao considerar  $\varepsilon = 0,05$ . Note que em pouco mais de um minuto o problema de POUH de uma cascata com duas UHEs e 19 UGs é resolvido nas simulações que consideram essa tolerância de erro.

Na Tabela 17, ainda pode-se perceber que quanto maior o peso atribuído às partidas e paradas de UGs, menor o NPP e maior o valor de OBJ e  $\Sigma Q$ . Com  $PP_j$  igual a 0% de  $W^{\max}$ , todas as UGs despacham na região côncava da FPH. No entanto, quando  $PP_j$  equivale a 50% de  $W^{\max}$ , algumas UGs precisam realizar despachos de potência na região convexa para garantir que nenhuma partida e parada de UG seja solicitada. Na Figura 18 é possível observar que, quanto maior o  $PP_j$ , mais UGs são despachadas na região convexa e menor é o rendimento global da UHE –  $MG_{rt} / (A_r \cdot HB_{rt} \cdot q_{rt})$  – nas horas em que mais UGs precisam ser acionadas para reduzir as partidas e paradas.

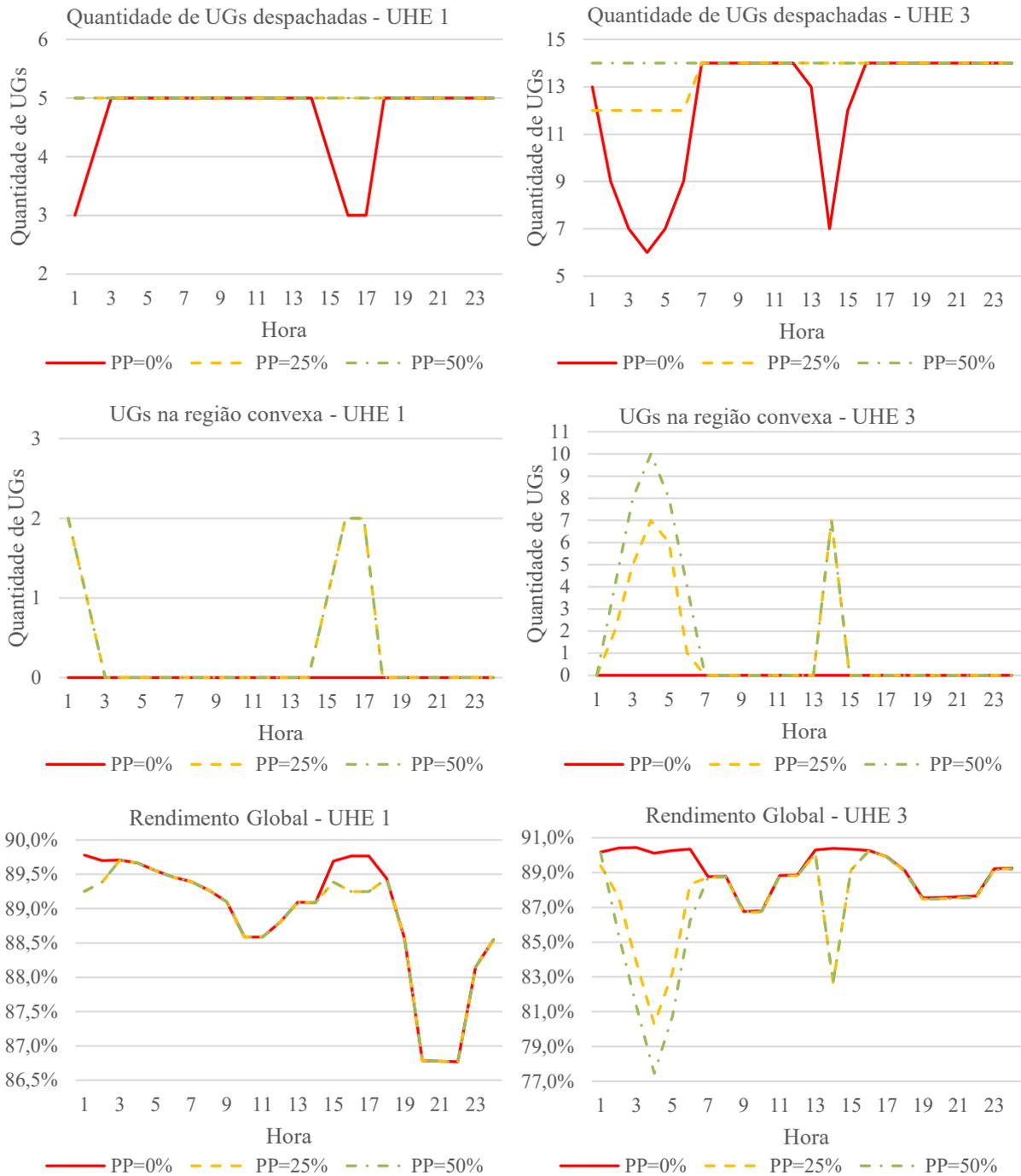


Figura 18 – UGs despachadas e rendimento global.

O despacho de potência em cada UG na região convexa e simétrica na região côncava para a simulação que considera  $PP_j$  igual a 50% de  $W^{\max}$  pode ser conferido na Tabela 19. Perceba que a potência despachada na região convexa foi sempre igual à potência mínima operativa. Integralizando a quantidade de UGs despachando na região convexa com a

quantidade despachando na região côncava, verifica-se que a UHE 1 despachou cinco UGs e a UHE 3 despachou 14 UGs em todos os estágios, o que indica que a penalização das partidas e paradas com  $PP_j$  igual a 50% de  $W^{\max}$  foi suficiente para não ligar o desligar nenhuma UG ao longo do período de planejamento.

Na Tabela 17, ainda é possível perceber que os tempos computacionais ficam maiores quando as partidas e paradas são penalizadas. Esse comportamento também ocorre para problemas resolvidos via estratégia **LACC**. Para a versão mais precisa da estratégia bivariada via LACC, por exemplo, o solver não conseguiu encontrar nenhuma solução dentro dos primeiros 90.000 segundos de execução. Portanto, o fato da estratégia **PROP** encontrar uma solução em menos de quatro minutos para os cenários que penalizam as partidas e paradas é bastante promissor. Por fim, na Tabela 17 pode-se observar os principais resultados apresentados em cada iteração da estratégia proposta nos cenários que penalizam as partidas e paradas. Perceba que os tempos de simulação são substancialmente maiores a partir da 3ª iteração (quando o gap de otimalidade precisa ser inferior a 0,001%), especialmente quando  $\epsilon = 0,005$ .

Tabela 18 – Resultados de **PROP** em cada iteração em cenários com penalização de partidas e paradas.

$PP_j$	IT	$\epsilon=0,05$			$\epsilon=0,005$		
		OBJ	Gap	T (s)	OBJ	Gap	T (s)
25%	1	190.327	0,0989%	5,1	190.217	0,0998%	27,9
	2	190.189	0,0999%	5,3	190.031	0,0920%	27,1
	3	190.102	0,0009%	13,2	190.021	0,0009%	139,1
	4	190.088	0,0000%	40,5	-	-	-
50%	1	190.453	0,0985%	5,4	190.403	0,0953%	28,5
	2	190.371	0,0944%	5,3	190.297	0,0985%	29,9
	3	190.360	0,0007%	13,9	190.314	0,0009%	68,1

Tabela 19 - Potência despachada em cada região nas UGs em **PROP** ( $PP_j$  igual a 50% de  $W^{\max}$ )

<i>t</i>	UHE 1							UHE 3																
	Região Convexa					Região Côncava		Região Convexa														Região Côncava		
	UG 1	UG 2	UG 3	UG 4	UG 5	gs	qtde	UG 1	UG 2	UG 3	UG 4	UG 5	UG 6	UG 7	UG 8	UG 9	UG 10	UG 11	UG 12	UG 13	UG 14	gs	qtde	
1	0,0	0,0	0,0	30,0	30,0	86,7	3	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	85,7	14
2	0,0	0,0	30,0	0,0	0,0	80,0	4	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	20,0	0,0	0,0	0,0	20,0	20,0	20,0	0,0	0,0	77,0	10	
3	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	90,0	5	20,0	20,0	20,0	20,0	0,0	0,0	20,0	0,0	0,0	20,0	20,0	20,0	0,0	0,0	85,0	6	
4	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	110,0	5	20,0	20,0	20,0	20,0	20,0	20,0	0,0	20,0	20,0	20,0	0,0	0,0	0,0	20,0	87,5	4	
5	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	116,0	5	20,0	20,0	20,0	0,0	0,0	20,0	0,0	0,0	20,0	20,0	20,0	20,0	0,0	0,0	81,7	6	
6	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	120,0	5	0,0	0,0	20,0	0,0	0,0	20,0	0,0	20,0	0,0	0,0	0,0	0,0	20,0	0,0	82,0	10	
7	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	122,0	5	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	100,0	14	
8	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	126,0	5	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	100,0	14	
9	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	130,0	5	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	103,6	14	
10	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	140,0	5	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	103,6	14	
11	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	140,0	5	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	100,0	14	
12	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	136,0	5	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	100,0	14	
13	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	130,0	5	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	85,7	14	
14	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	130,0	5	20,0	0,0	0,0	0,0	0,0	20,0	20,0	20,0	0,0	20,0	0,0	20,0	20,0	0,0	84,3	7	
15	0,0	0,0	30,0	0,0	0,0	80,0	4	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	78,6	14	
16	0,0	0,0	30,0	30,0	0,0	86,7	3	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	89,3	14	
17	0,0	0,0	30,0	30,0	0,0	86,7	3	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	96,4	14	
18	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	120,0	5	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	100,0	14	
19	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	140,0	5	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	103,6	14	
20	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	161,5	5	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	103,6	14	
21	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	161,5	5	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	103,6	14	
22	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	161,5	5	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	103,6	14	
23	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	146,0	5	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	100,0	14	
24	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	140,0	5	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	100,0	14	

### 4.3 RESULTADOS PARA O SISTEMA COMPLETO

As metas de demandas horárias consideradas para cada usina da cascata completa, composta pelas UHEs 1, 2, 3 e 4, podem ser conferidas na Figura 19.

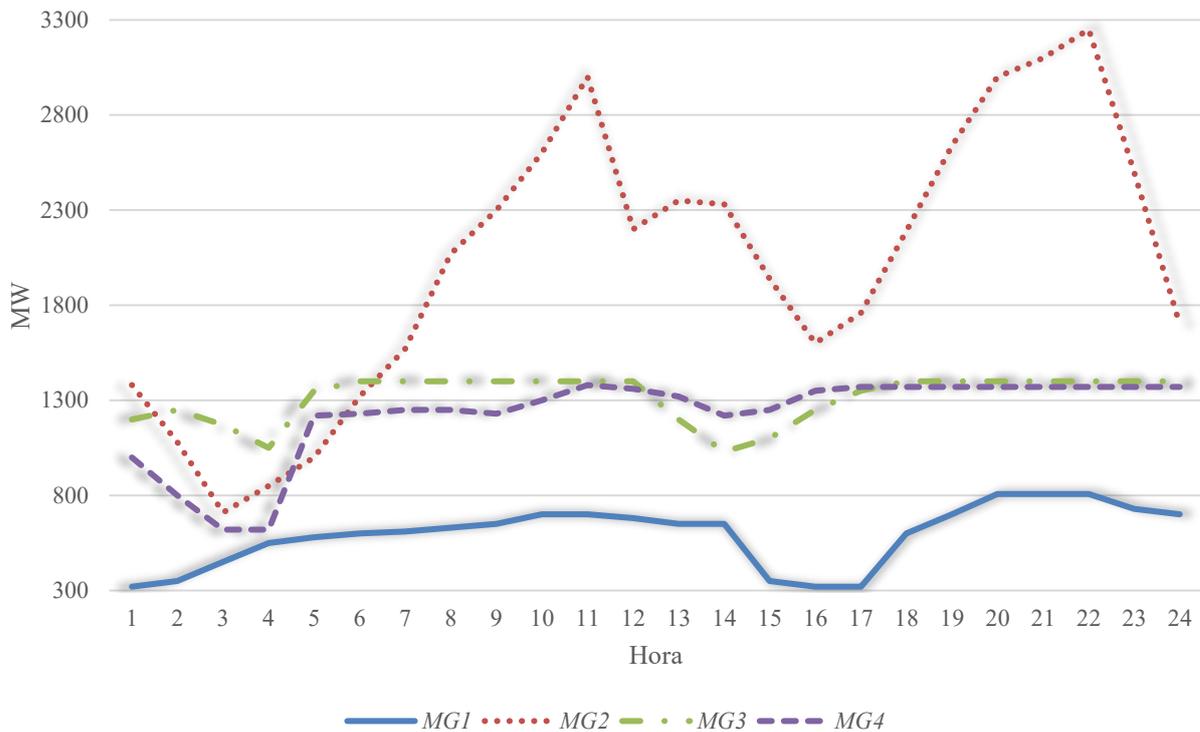


Figura 19 – Cenários de metas de geração e quedas brutas para a cascata com quatro UHEs.

Os volumes iniciais dos reservatórios,  $V_{0r}$ , e as vazões incrementais,  $Y_{rt}$ , estão na Tabela 20.

Tabela 20 – Vazão afluente e volume inicial em cada UHE.

UHE	1	2	3	4
$Y_{rt}$ (m <sup>3</sup> /s)	450	2.110	6.945	3.572
$V_{0r}$ (hm <sup>3</sup> )	11.897	31.249	3.100	14.573

Os principais resultados de **PROP** para a cascata completa podem ser observados na Tabela 21. Essas simulações consideram  $X = 100$ ,  $\epsilon$  assumindo 0,05 e 0,005, e valores percentuais de  $W^{\max}$  considerados em  $PP_j$  variando de 0% a 200%.

Tabela 21 – Resultados de **PROP** para a cascata com quatro usinas.

$PP_j$		0%	25%	50%	100%	200%
OBJ	$\varepsilon=0,05$	506.176	512.357	515.058	517.622	518.567
	$\varepsilon=0,005$	506.087	512.281	514.969	517.548	518.485
	<b>DIF</b>	<b>-0,018%</b>	<b>-0,015%</b>	<b>-0,017%</b>	<b>-0,014%</b>	<b>-0,016%</b>
$\Sigma Q$	$\varepsilon=0,05$	506.176	508.884	510.783	513.807	517.617
	$\varepsilon=0,005$	506.087	508.689	510.694	513.733	517.535
	<b>DIF</b>	<b>-0,018%</b>	<b>-0,038%</b>	<b>-0,017%</b>	<b>-0,014%</b>	<b>-0,016%</b>
NPP	$\varepsilon=0,05$	82	28	17	8	1
	$\varepsilon=0,005$	82	29	17	8	1
	<b>DIF</b>	<b>0</b>	<b>+1</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>
TS	$\varepsilon=0,05$	26,3	101,5	84,8	71,8	91,1
	$\varepsilon=0,005$	56,8	268,0	250,5	208,5	197,3
	<b>DIF</b>	<b>+116 %</b>	<b>+164%</b>	<b>+195%</b>	<b>+190%</b>	<b>+117%</b>
IT	$\varepsilon=0,05$	4	4	4	4	4
	$\varepsilon=0,005$	4	4	4	4	4
	<b>DIF</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>-1</b>

Nos resultados da Tabela 21, é possível observar que o incremento do peso  $PP_j$  reduz o NPP ao custo de um incremento de vazão turbinada ( $\Sigma Q$ ) e, conseqüentemente, OBJ. As diferenças em OBJ com a variação de  $\varepsilon$  foram bem pequenas (inferiores a 0,02%). Os tempos computacionais variaram de pouco menos de meio minuto a cerca de 4,5 minutos em simulações que levaram no máximo quatro iterações para a convergência. Assim como ocorreu nas simulações para o sistema reduzido, tempos computacionais consideravelmente menores são apresentados em simulações que não consideram penalidades para as partidas e paradas. Para um sistema com quatro usinas em cascata e 53 UGs de 6 tipos diferentes, pode-se concluir que esses resultados configuram uma excelente relação custo-benefício entre precisão na representação das não linearidades e no desempenho computacional.

Na Figura 20, é possível observar as quantidades de UGs despachadas em cada UHE e estágio de tempo para os diferentes valores de pesos considerados na função objetivo. Para as UHEs 1 e 3 as partidas e paradas cessaram a partir dos pesos iguais a 25% de  $W^{\max}$ . Por sua vez, as UHEs 2 e 4 precisaram considerar penalidades bem maiores para reduzir consideravelmente as partidas e paradas.

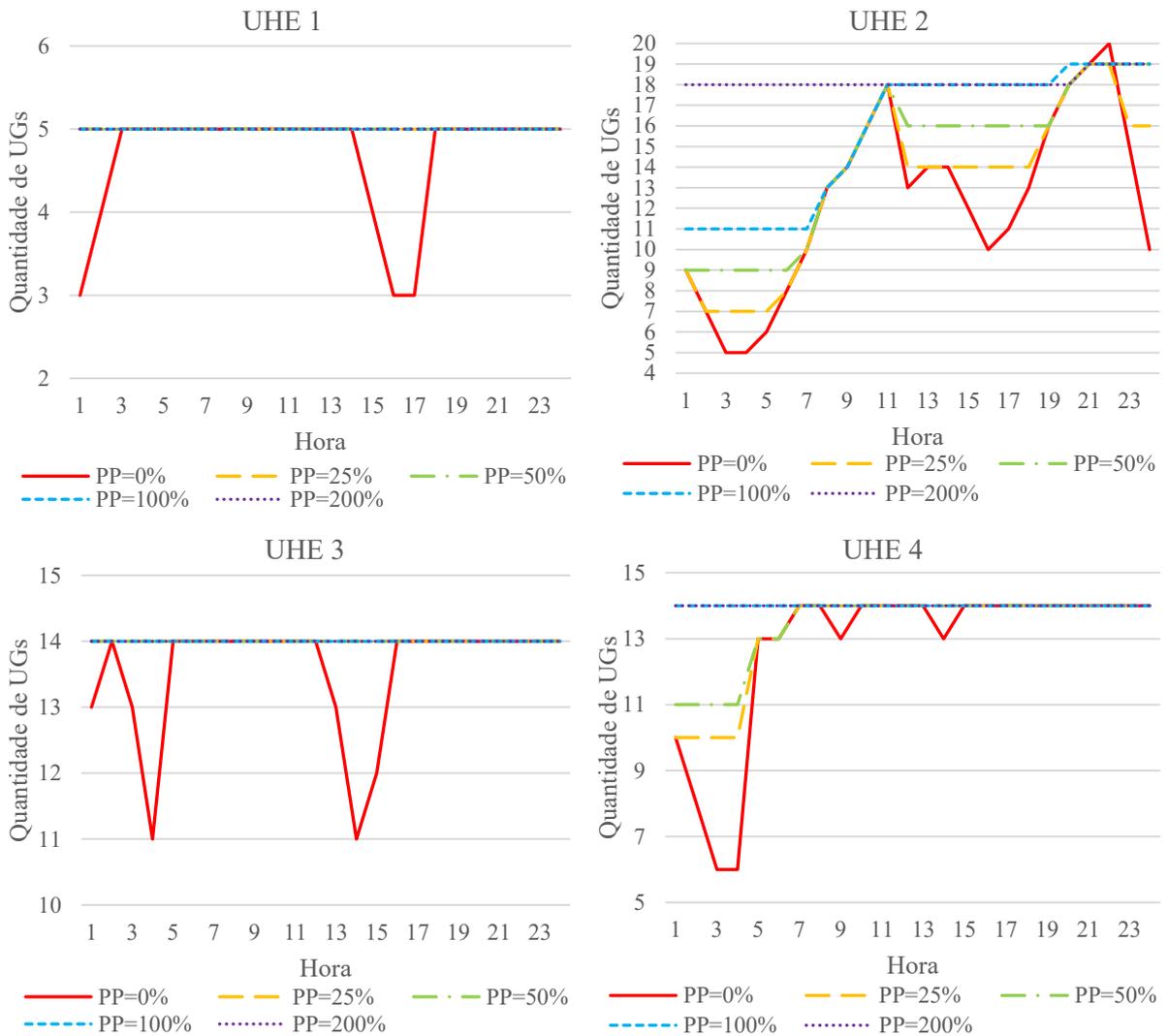


Figura 20 – Quantidade de UGs despachadas.

Na Figura 21 é possível observar que quanto maior o peso adotado para as partidas e paradas, maior a quantidade de UGs despachadas na região convexa da FPH.

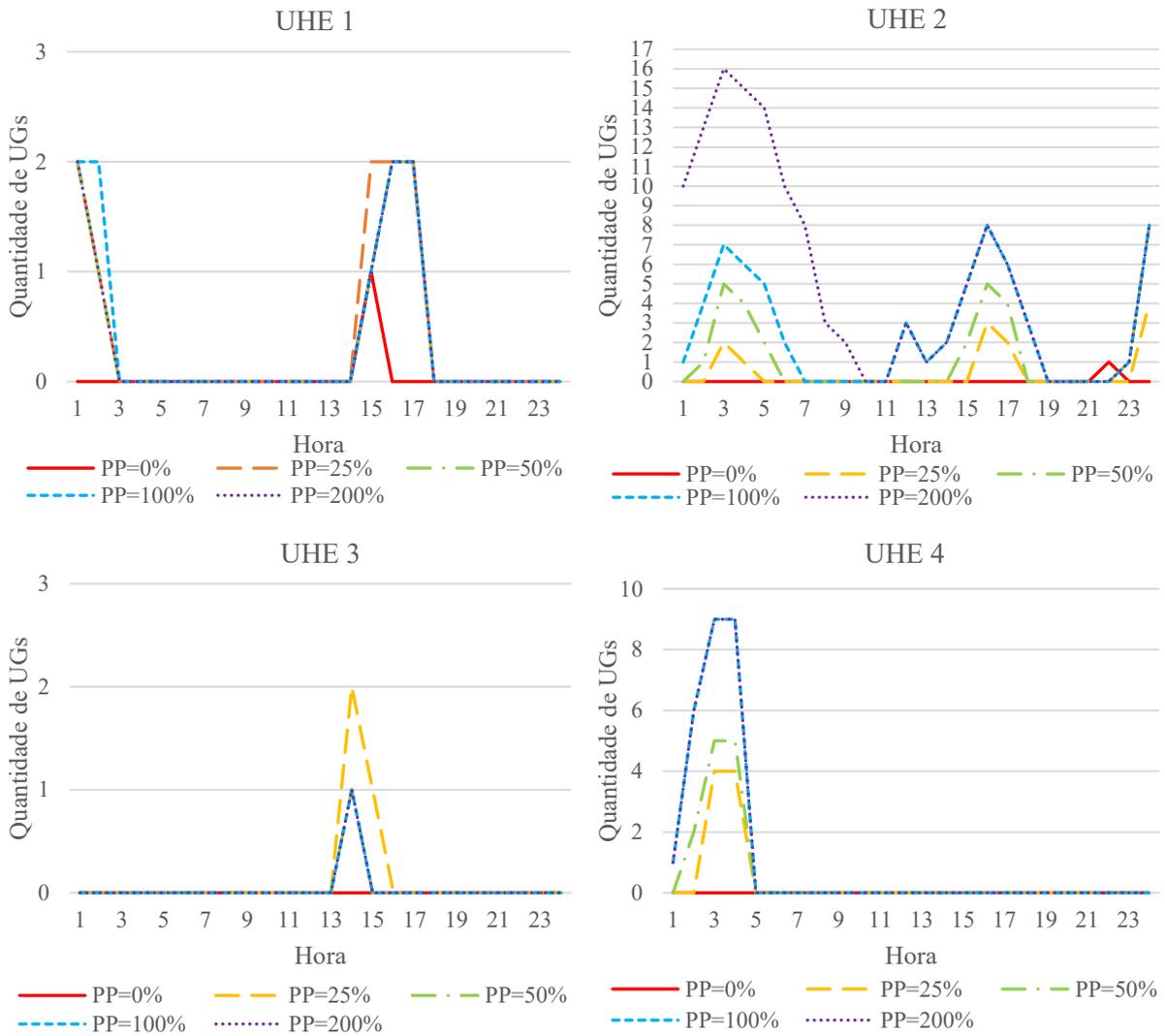


Figura 21 – Quantidade de UGs despachando na região convexa.

Na Figura 22, percebe-se que quanto maior é o peso atribuído para partidas e paradas, menor tende a ser o rendimento global da UHE.

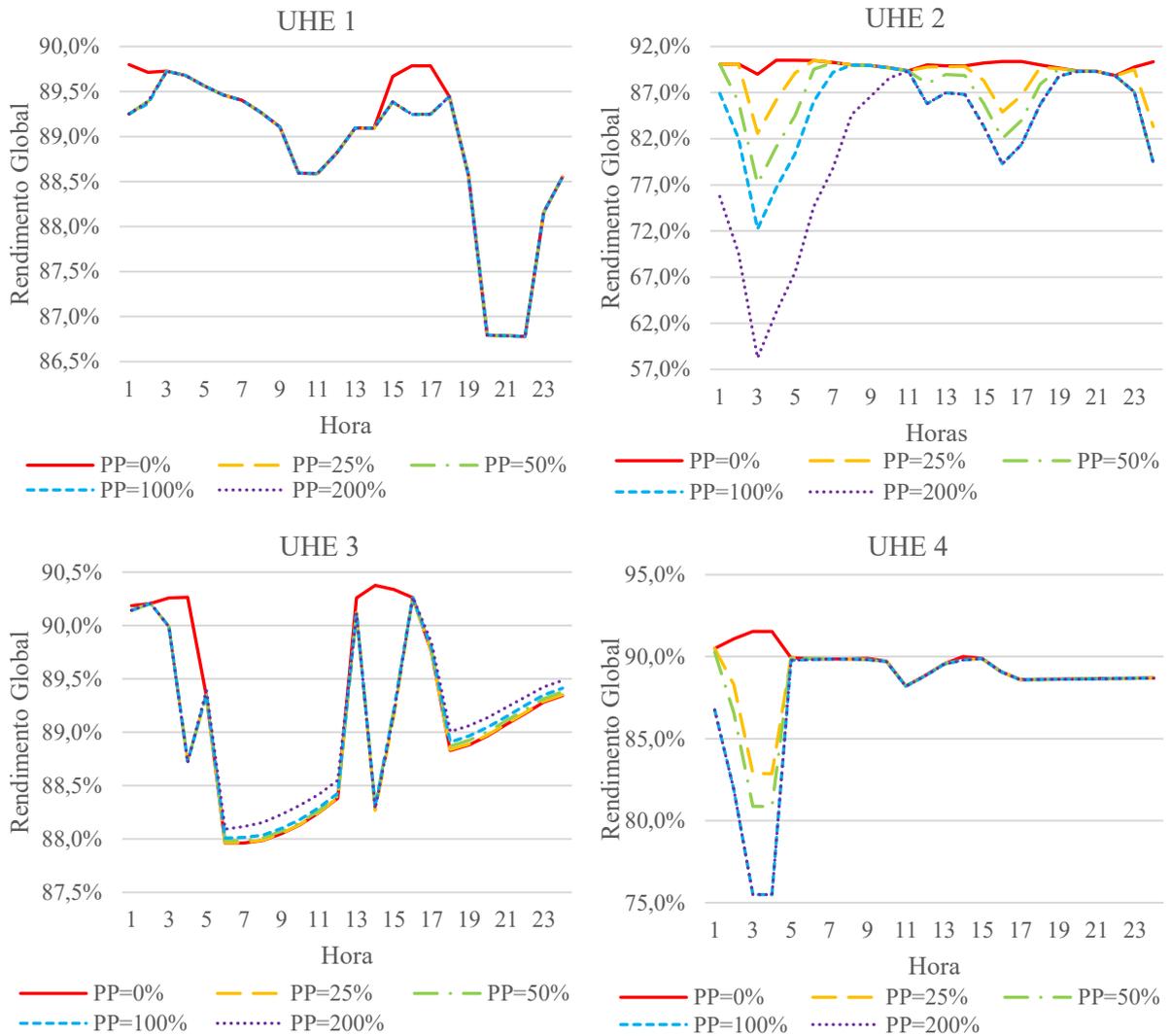


Figura 22 – Rendimento global nas UHEs.

Finalmente, a evolução dos volumes dos quatro reservatórios da cascata ao longo do período de planejamento pode ser observada na Figura 23.

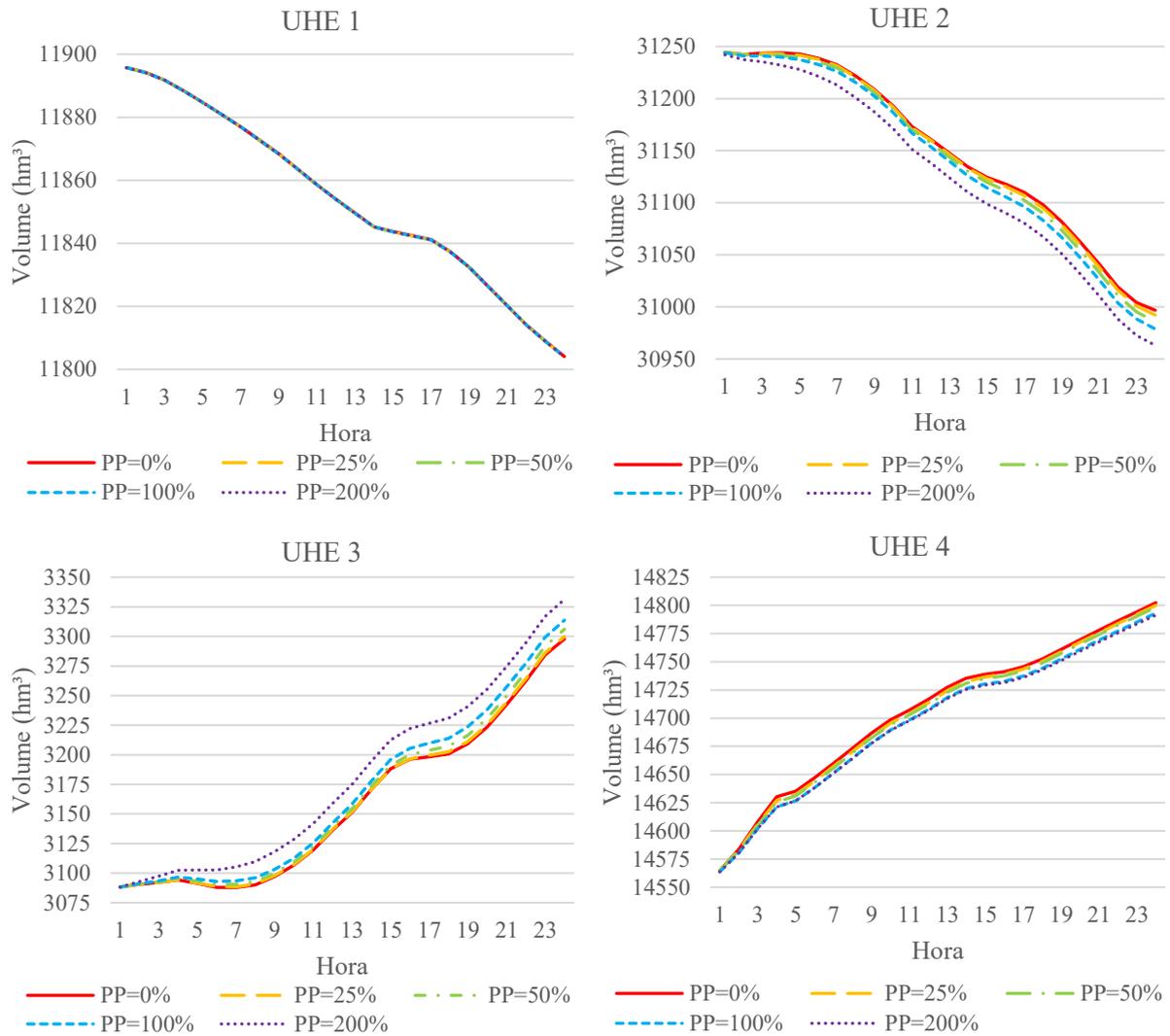


Figura 23 – Volumes nos reservatórios das UHEs.

A UHE 2 é a única da cascata que possui três tipos diferentes de UGs. Na Tabela 22 é possível observar a quantidade de UGs de cada tipo despachada.

Tabela 22 - Despacho nas UGs da UHE 2.

Hora	$PP_j = 0\%$			$PP_j = 25\%$			$PP_j = 50\%$			$PP_j = 100\%$			$PP_j = 200\%$		
	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=1$	$j=2$	$j=3$
<b>1</b>	0	9	0	0	9	0	0	9	0	0	11	0	3	11	4
<b>2</b>	0	7	0	0	7	0	0	9	0	0	11	0	3	11	4
<b>3</b>	0	5	0	0	7	0	0	9	0	0	11	0	3	11	4
<b>4</b>	0	5	0	0	7	0	0	9	0	0	11	0	3	11	4
<b>5</b>	0	6	0	0	7	0	0	9	0	0	11	0	3	11	4
<b>6</b>	0	8	0	0	8	0	0	9	0	0	11	0	3	11	4
<b>7</b>	0	10	0	0	10	0	0	10	0	0	11	0	3	11	4

<b>8</b>	0	11	2	0	11	2	0	11	2	0	11	2	3	11	4
<b>9</b>	0	11	3	0	11	3	0	11	3	0	11	3	3	11	4
<b>10</b>	0	11	5	0	11	5	1	11	4	1	11	4	3	11	4
<b>11</b>	2	11	5	2	11	5	3	11	4	3	11	4	3	11	4
<b>12</b>	0	11	2	2	11	1	3	11	2	3	11	4	3	11	4
<b>13</b>	0	11	3	2	11	1	3	11	2	3	11	4	3	11	4
<b>14</b>	0	11	3	2	11	1	3	11	2	3	11	4	3	11	4
<b>15</b>	0	11	1	2	11	1	3	11	2	3	11	4	3	11	4
<b>16</b>	0	10	0	2	11	1	3	11	2	3	11	4	3	11	4
<b>17</b>	0	11	0	2	11	1	3	11	2	3	11	4	3	11	4
<b>18</b>	0	11	2	2	11	1	3	11	2	3	11	4	3	11	4
<b>19</b>	0	11	5	2	11	3	3	11	2	3	11	4	3	11	4
<b>20</b>	2	11	5	2	11	5	3	11	4	3	11	5	3	11	4
<b>21</b>	3	11	5	3	11	5	3	11	5	3	11	5	3	11	5
<b>22</b>	4	11	5	3	11	5	3	11	5	3	11	5	3	11	5
<b>23</b>	0	11	4	3	11	2	3	11	5	3	11	5	3	11	5
<b>24</b>	0	10	0	3	11	2	3	11	5	3	11	5	3	11	5

Note que a UG do tipo 2 ( $j=2$ ) é priorizada no despacho. Isso ocorre porque essas UGs são mais eficientes, como pode ser observado na Tabela 23, que apresenta as gerações, vazões turbinadas e rendimentos das UGs de cada tipo resultantes da simulação que não penaliza partidas e paradas ( $PP_j = 0$ ). Perceba que enquanto os rendimentos apresentados nas UGs do tipo 2 giram na casa dos 0,93-0,94, os rendimentos nas UGs dos tipos 1 e 3 giram na casa de 0,91-0,92.

Tabela 23 – Despacho de potência nas UGs da UHE 2.

Hora	$g_{jt}$			$w_{jt}$			$\eta_j$		
	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=1$	$j=2$	$j=3$
<b>1</b>	0,0	153,3	0,0	0,0	377,2	0,0	-	0,930	-
<b>2</b>	0,0	154,3	0,0	0,0	378,4	0,0	-	0,930	-
<b>3</b>	0,0	142,0	0,0	0,0	351,7	0,0	-	0,915	-
<b>4</b>	0,0	170,0	0,0	0,0	414,4	0,0	-	0,941	-
<b>5</b>	0,0	166,7	0,0	0,0	406,7	0,0	-	0,939	-
<b>6</b>	0,0	165,0	0,0	0,0	403,8	0,0	-	0,939	-
<b>7</b>	0,0	157,0	0,0	0,0	386,0	0,0	-	0,934	-
<b>8</b>	0,0	159,0	160,6	0,0	392,4	406,3	-	0,936	0,915
<b>9</b>	0,0	163,9	165,8	0,0	405,2	420,1	-	0,939	0,919
<b>10</b>	0,0	162,5	162,5	0,0	403,3	413,4	-	0,938	0,917
<b>11</b>	158,4	167,4	168,3	407,3	418,1	430,4	0,911	0,940	0,920
<b>12</b>	0,0	169,1	169,9	0,0	418,3	430,4	-	0,940	0,921
<b>13</b>	0,0	167,7	168,3	0,0	415,6	426,9	-	0,940	0,920
<b>14</b>	0,0	166,3	166,9	0,0	411,8	423,5	-	0,940	0,919
<b>15</b>	0,0	161,5	163,5	0,0	398,3	413,2	-	0,937	0,917

<b>16</b>	0,0	160,0	0,0	0,0	393,5	0,0	-	0,936	-
<b>17</b>	0,0	160,0	0,0	0,0	394,1	0,0	-	0,936	-
<b>18</b>	0,0	168,4	168,8	0,0	416,8	427,7	-	0,940	0,920
<b>19</b>	0,0	164,9	165,3	0,0	410,0	421,1	-	0,939	0,918
<b>20</b>	158,2	167,6	168,0	407,3	419,2	430,4	0,911	0,940	0,919
<b>21</b>	155,2	164,4	165,1	400,0	411,5	423,5	0,910	0,939	0,918
<b>22</b>	158,3	167,3	168,6	409,3	420,1	433,8	0,910	0,939	0,919
<b>23</b>	0,0	166,3	167,6	0,0	413,4	426,9	-	0,940	0,920
<b>24</b>	0,0	170,0	0,0	0,0	419,2	0,0	-	0,940	-

## 5 CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Nesse documento, foi apresentada a estratégia de solução iterativa baseada na atualização iterativa da queda bruta e em PLIM para o problema da POUH. Em cada iteração, uma formulação de PLIM baseada no particionamento da FPH univariada e em técnicas de simetria é resolvido. Para conseguir um número reduzido de variáveis e restrições, a formulação proposta associa: (i) aproximação côncava via CH na região côncava da FPH; (ii) exploração da simetria de UGs idênticas operando na região côncava; (iii) aproximação via modelo LACC em cada região convexa de cada FPH; e (iv) seleção otimizada, via algoritmo RDP, dos pontos utilizados da aproximação por partes da FPH.

Dentre as conclusões que podem ser tiradas das simulações realizadas, podem-se destacar que:

- A estratégia proposta apresenta resultados semelhantes à formulação bivariada do problema via LACC, referência para esse tipo de aplicação, mas com uma redução superior a 99,9% no tempo computacional;
- Quanto menor o erro admitido de linearização,  $\epsilon$ , no algoritmo RDP, mais precisos são os resultados, mas a um custo computacional consideravelmente maior. Para as simulações realizadas, por exemplo, abaixar o valor de  $\epsilon$  de 0,05 para 0,005 levou aumento de 2 a 5 vezes o tempo computacional;
- As simulações realizadas mostraram que a estratégia proposta consegue associar precisão na representação das não linearidades do problema de POUH e ótimo desempenho computacional. Para uma cascata com quatro UHEs e 53 UGs de seis tipos diferentes, a estratégia proposta precisou de menos de cinco minutos para encontrar a solução, mesmo considerando o menor valor de  $\epsilon$  no algoritmo RDP. Sem penalizar as partidas e paradas na função objetivo, a solução foi obtida em menos de um minuto;
- Finalmente, considerando o tamanho do sistema simulado e a precisão adotada na aproximação LPP da FPH, pode-se concluir que a estratégia proposta apresenta contribuições significativas tanto em termos metodológicos, via aplicação inédita da simetria em UGs idênticas em problemas de POUH, quanto em custo-benefício entre precisão e desempenho computacional. Tais resultados permitem que o operador da UHE realize estudos com horizontes de planejamento mais longos, discretização mais precisa da FPH ou inclusão de mais restrições operacionais ao problema.

A principal limitação da estratégia proposta é a impossibilidade de representar restrições que dependem de decisões individuais 0-1, ou seja, variáveis  $u_{ijrt}$ . Por exemplo, não é possível incluir restrições individuais de tempos mínimos em operação e fora de operação (também conhecidas como restrições de *minimum up/downtime*) e limites no número de decisões de comutação. Portanto, uma primeira sugestão para trabalhos futuros seria buscar, via novas restrições ou etapas, maneiras de representar individualmente as UGs em uma formulação que considere a simetria de UGs idênticas.

Uma segunda sugestão para trabalhos futuros consiste em verificar a viabilidade de implementação da simetria nas regiões convexas das UGs idênticas de forma a tornar o problema ainda menor, em termos de número de variáveis, e mais rápido. Neste caso, deve-se investigar o quão próximo do ótimo global é admitir este tipo de aplicação, seja via comparação com um modelo linearizado e individualizado como o LACC apresentado neste trabalho, ou até via comparação com uma estratégia não linear (se possível).

Outra sugestão pode ser dada pelo estudo de viabilidade do uso dessa estratégia em problemas de horizonte de planejamento maior ou até para um sistema elétrico de maior porte, como considerar todas as UHEs do SIN. Nesse caso, pode ser necessário investigar formas de tornar a resolução dos problemas resolvidos em cada iteração ainda mais rápidos. Uma possibilidade pode ser verificando, em dada iteração, se o despacho em todas as UGs de uma UHE está ocorrendo na região côncava. Se estiver, pode-se pensar em considerar a linearização apenas das regiões côncavas nessas UGs nas demais iterações.

Finalmente, como o algoritmo RDP leva um tempo considerável para processar os pontos otimizados na discretização, é válido também investigar maneiras mais rápidas de seleção otimizada dos pontos utilizados para a aproximação da FPH.

## REFERÊNCIAS

- AASGÅRD, E. K. **Stochastic programming for short-term hydropower scheduling and bidding**. PhD Thesis, Department of Industrial Economics and Technology Management, Norwegian University of Science and Technology, Trondheim, NORWAY. [S.l.]. 2019. (Available: <http://hdl.handle.net/11250/2584984>).
- ABNT. **NBR 11213: Grade de Domada D'Água para Instalação**. São Paulo, SP. 2001.
- AIMMS. <https://www.aimms.com/>, 2022. Acesso em: 14 outubro 2022.
- ALEMANYA, J.; MAGNAGO, F.; MOITRE, D.; PINTO, H. Symmetry issues in mixed integer programming based Unit Commitment. **International Journal of Electrical Power & Energy Systems**, 2014. 54: 86-90.
- BORGHETTI, A.; D'AMBROSIO, C.; LODI, A.; MARTELLO S. An MILP approach for short-term hydro scheduling and unit commitment with head-dependent reservoir. **IEEE Transactions on Power Systems**, 2008. 23: 1115-1124, <https://doi.org/10.1109/tpwrs.2008.926704>.
- BORTONI, E. C.; BASTOS, G. S.; ABREU, T. M.; KAWKABANI, B. Online optimal power distribution between units of a hydro power plant. **Renewable Energy**, 2015. 75: 30-36, <https://doi.org/10.1016/j.renene.2014.09.009>.
- BRETON, M.; HACHEM, S.; HAMMADIA, A. Accounting for losses in the optimization of production of hydroplants. **IEEE Transactions on Energy Conversion**, 2004. 19: 346-351, <https://doi.org/10.1109/tec.2004.827043>.
- BRITO, B. H.; PEREIRA, A. I.; GOSMANN, R. P.; FINARDI, E. C.; ABREU, D. L. S.; TAKIGAWA, F. Y. K.; MENDES, P. T.; WEISS, L. A.; MORAIS, D. T. S. A.; FERNANDES, A. Real-time Optimal Load Dispatch Recommendation System for the Santo Antônio Hydroelectric Power Plant. **Journal of Control, Automation and Electrical Systems**, 2021a. <https://doi.org/10.1007/s40313-021-00834-6>.
- BRITO, B. H.; FINARDI, E. C.; TAKIGAWA, F. Y. K.; NOGUEIRA, P. L. R.; MORAIS, D. T. S. A.; FERNANDES, A. Domain Partition of the Hydro Production Function for Solving Efficiently the Short-Term Generation Scheduling Problem. **IEEE Access**, 2021b. DOI: 10.1109/ACCESS.2021.3125897.
- BRITO, B. H.; FINARDI, E. C.; TAKIGAWA, F. Y. K.; PEREIRA, A. I.; GOSMANN, R. P.; WEISS, L. A.; MORAIS, D. T. S. A.; FERNANDES, A. Exploring Symmetry in a Short-term Hydro Scheduling Problem: The Case of the Santo Antônio Hydro Plant. **Journal of Water Resources Planning and Management**, 2022. DOI: 10.1061/(ASCE)WR.1943-5452.0001495.
- BRITO, B. H.; FINARDI, E. C.; TAKIGAWA, F. Y. K. Mixed-integer nonseparable piecewise linear models for the hydropower production function in the Unit Commitment problem.

**Electric Power Systems Research**, 182: 106234.  
<https://doi.org/10.1016/j.epsr.2020.106234>, 2020a.

BRITO, B.; FINARDI, E.; TAKIGAWA FY. Unit-commitment via logarithmic aggregated convex combination in multiunit hydro plants. **Electric Power Systems Research**, 2020b. 189, 106784. <https://doi.org/10.1016/j.epsr.2020.106784>.

CATALÃO, J. P. S.; MARIANO, S. J. P. S.; MENDES, V. M. F.; FERREIRA, L. A. F. M. Scheduling of Head-Sensitive Cascaded Hydro Systems: A Nonlinear Approach. **IEEE Transactions on Power Systems**, 2009. 24: 337-346, <https://doi.org/10.1109/tpwrs.2008.2005708>.

CATALÃO, J. P. S.; POUSINHO, H. M. I.; MENDES, V. M. F. Mixed-integer nonlinear approach for the optimal scheduling of a head-dependent hydro chain. **Electric Power System Research**, 2010. 80: 935-942, <https://doi.org/10.1016/j.epsr.2009.12.015>.

CATALÃO, J. P. S.; POUSINHO, H. M. I.; MENDES, V. M. F. Hydro energy systems management in Portugal: Profit-based evaluation of a mixed-integer nonlinear approach. **Energy**, 2011. 36: 500-507, <https://doi.org/10.1016/j.energy.2010.10.014>.

CEPEL. **Manual de Referência - Modelo NEWAVE**. Rio de Janeiro, RJ. 2001.

CEPEL. **Manual de Referência - Modelo DECOMP**. Rio de Janeiro, RJ. 2004.

CEPEL. **Modelo DESSEM: Manual do Usuário**. Rio de Janeiro, RJ. 2019.

CHANG, G. W.; AGANAGIC, M.; WAIGHT, J. G.; MEDINA, J.; CHRISTOFORIDIS, M. Experiences with mixed integer linear programming based approaches on short-term hydro scheduling. **IEEE Transactions on Power Systems**, 2001. 16, 743-749, <https://doi.org/10.1109/59.96242>.

CHENG, C. T.; WANG, J. Y.; WU, X. Y. Hydro unit commitment with a head-sensitive reservoir and multiple vibration zones using MILP. **IEEE Transactions on Power Systems**, 2016. 31: 4842-4852, <https://doi.org/10.1109/tpwrs.2016.2522469>.

CHRISTOFORIDIS, M. B.; AWOBAMISE, B.; FROWD, R. J.; RAHIMI, F. A.; TONG, S.; AGANAGIC, M. Shortterm hydro generation and interchange contract scheduling for Swiss Rail. **IEEE Transactions on Power Systems**, 1996. 11(1):274–80. <https://doi.org/10.1109/59.486106>.

COELHO, J. G. Estudo Numérico de Tubos de Sucção de Turbinas Hidráulicas Tipo Bulbo, Dissertação de Mestrado em Ciências Mecânicas, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, 2006.

CONEJO, A.; ARROYO, J. M.; CONTRERAS, J.; VILLAMOR, F. A. Self-scheduling of a hydro producer in a pool-based electricity market. **IEEE Transactions on Power Systems**, 2002. 17: 1265-1272.

- CORDOVA, M. M.; FINARDI, E. C.; RIBAS, F. A. C.; MATOS, V. L.; SCUZZIATO, M. R. Performance evaluation and energy production optimization in the real-time operation of hydropower plants. **Electric Power Systems Research**, 2014. 116: 201-207, <https://doi.org/10.1016/j.epsr.2014.06.012>.
- CPLEX OPTIMIZER, I. **https://www.ibm.com/br-pt/analytics/cplex-optimizer**, 2022. Acesso em: 12 outubro 2022.
- D'AMBROSIO, C.; LEE, J.; WÄCHTER, A. An algorithmic framework for minlp with separable non-convexity. In **Jon Lee and Sven Leyffer, editors, Mixed Integer Nonlinear Programming**, 2012. pages 315–347, New York, NY, 2012. Springer New York.
- DAS, S.; BHATTACHARYA, A.; CHAKRABORTY, A. K. Fixed head short-term hydrothermal scheduling in presence of solar and wind power. **Energy Strategy Reviews**, 2018. 22: 47-60, <https://doi.org/10.1016/j.esr.2018.08.001>.
- DE LADURANTAYE, D.; GENDREAU, M.; POTVIN, J. Y. Optimizing profits from hydroelectricity production. **Computers & Operations Research**, 2009. 36: 499-529, <https://doi.org/10.1016/j.cor.2007.10.012>.
- DIAZ, F. J.; CONTRERAS, J.; MUÑOZ, J. I.; POZO, D. Optimal scheduling of a price-taker cascaded reservoir system in a pool-based electricity Market. **IEEE Transactions on Power Systems**, 2011. 26: 604-615, <https://doi.org/10.1109/tpwrs.2010.2063042>.
- DINIZ, A. L. **Test cases for unit commitment and hydrothermal scheduling problems**. in 2010 IEEE PES General Meeting. Providence, RI, USA: <https://doi.org/10.1109/PES.2010.5589757>. 2010.
- DINIZ, A. L.; MACEIRA, M. E. P. A four-dimensional model of hydro generation for the short-term hydrothermal dispatch problem considering head and spillage effects. **IEEE Transactions on Power Systems**, 2008. 23: 1298-1308, <https://doi.org/10.1109/tpwrs.2008.922253>.
- DOUGLAS, D.; PEUCKER, T. Algorithms for the reduction of the number of points required to represent a digitized line or its caricature. **The Canadian Cartographer**, 1973. 10(2), 112–122 (1973) doi:10.3138/FM57-6770-U75U-7727.
- ELETROBRÁS. **Critérios de Projeto Civil de Usinas Hidrelétricas**. Rio de Janeiro, RJ. 2003.
- FARHAT, I. A.; EL-HAWARY, M. E. Optimization methods applied for solving the shortterm hydrothermal coordination problem. **Electric Power Systems Research**, 2009. 79: 1308-1320, <https://doi.org/10.1016/j.epsr.2009.04.001>.
- FERREIRA, R. F. Programação do Despacho de Geração de Unidades Hidrelétricas via Programação Linear Inteira Mista, Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2018.

- FINARDI, E. C.; DA SILVA, E. L. Unit commitment of single hydroelectric plant. **Electric Power Systems Research**, 2005. 75, 116-123, <https://doi.org/10.1016/j.epsr.2005.01.008>.
- FINARDI, E. C.; SCUZZIATO, M. R. Hydro unit commitment and loading problem for day-ahead operation planning problem. **International Journal of Electrical Power & Energy Systems**, 2013. 44: 7-16, <https://doi.org/10.1016/j.ijepes.2012.07.023>.
- FINARDI, E. C.; SCUZZIATO, M. R. A comparative analysis of different dual problems in the Lagrangian Relaxation context for solving the Hydro Unit Commitment problem. **Electric Power Systems Research**, 2014. 107: 221-229, <https://doi.org/10.1016/j.epsr.2013.10.015>.
- FINARDI, E. C.; SILVA, E. L. Solving the hydro unit commitment problem via dual decomposition and sequential quadratic programming. **IEEE Transactions on Power Systems**, 2006. 21, 835-844, <https://doi.org/10.1109/tpwrs.2006.873121>.
- FINARDI, E. C.; TAKIGAWA, F. Y. K.; BRITO, B. H. Assessing solution quality and computational performance in the hydro unit commitment problem considering different mathematical programming approaches. **Electric Power Systems Research**, 2016. 136: 212-222, <https://doi.org/10.1016/j.epsr.2016.02.018>.
- GARCIA-GONZALEZ, J.; PARRILLA, E.; MATEO, A. Risk-averse profit-based optimal scheduling of a hydro-chain in the day-ahead electricity market. **European Journal of Operational Research**, 2007. 181: 1354-1369, <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2005.11.047>.
- GOMES E SOUZA, H.; BRITO, B. H.; FINARDI, E. C.; TAKIGAWA, F. Y. K. Partitioning approach based on convex hull and multiple choice for solving hydro unit-commitment problems. **ELECTRIC POWER SYSTEMS RESEARCH**, 2022.
- GUEDES, L. S. M. et al. A unit commitment algorithm and a compact MILP model for short-term hydro-power generation scheduling. **IEEE Transactions on Power Systems**, 2017. 32: 3381-3390, <https://doi.org/10.1109/tpwrs.2016.2641390>.
- GUISÁNDEZ, I.; PÉREZ-DÍAZ, J. I. Mixed integer linear programming formulations for the hydro production function in a unit-based short-term scheduling problem. **International Journal of Electrical Power & Energy Systems**, 2021. 106747, <https://doi.org/10.1016/j.ijepes.2020.106747>.
- GUROBI OPTIMIZATION, I. Gurobi Optimizer Reference Manual. [www.gurobi.com](http://www.gurobi.com), 2022.
- HAMANN, A.; HUG, G. Real-time optimization of a hydropower cascade using a linear modeling approach. In: **PSCC**, 2014. Wroclaw, Poland; p. 1–7. doi: 10.1109 / PSCC.2014.7038354.

- HAMANN, A.; HUG, G.; ROSINSKI, S. Real-time optimization of the Mid-Columbia hydropower system. **IEEE Transactions on Power Systems**, 2017. 32: 157-165, <https://doi.org/10.1109/tpwrs.2016.2550490>.
- KONG, J.; SKJELBRED, H.; FOSSO, O. An overview on formulations and optimization methods for the unitbased short-term hydro scheduling problem. **Electric Power Systems Research**, 2020. 178, 106027. <https://doi.org/10.1016/j.epsr.2019.106027>.
- LI, C. S.; WANG, W. X.; CHEN, D. S. Multi-objective complementary scheduling of hydro-thermal-RE power system via a multi-objective hybrid grey wolf optimizer. **Energy**, 2019. 171: 241-255, <https://doi.org/10.1016/j.energy.2018.12.213>.
- LI, X.; LI, T.; WEI, J.; WANG, G.; YEH, W. W.-G. Hydro unit commitment via mixed integer linear programming: a case study of the three gorges Project. **IEEE Transactions on Power Systems**, 2014. 29: 1232-1241.
- LIAO, S.; LIU, Z.; LIU, B. WU, X. Short-term hydro scheduling considering multiple units sharing a common tunnel and crossing vibration zones constraints. **Journal of Water Resources Planning and Management**, [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)WR.1943-5452.0001438](https://doi.org/10.1061/(ASCE)WR.1943-5452.0001438), 2021. 147 (10): 04021063. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)WR.1943-5452.0001438](https://doi.org/10.1061/(ASCE)WR.1943-5452.0001438).
- LIMA, R. M.; MARCOVECCHIO, M. B.; NOVAIS, A. Q.; GROSSMANN, I. E. On the computational studies of deterministic global optimization of head dependent short-term hydro scheduling. **IEEE Transactions on Power Systems**, 2013. 28: 4336-4347, <https://doi.org/10.1109/tpwrs.2013.2274559>.
- MARCHAND, A.; GENDREAU, M.; BLAIS, M.; EMIEL, G. Fast near-optimal heuristic for the short-term hydro-generation planning problem. **IEEE Transactions on Power Systems**, 2018. 33, 227-235, <https://doi.org/10.1109/tpwrs.2017.2696438>.
- MEUS, J.; PONCELET, K.; DELARUE, E. Applicability of a Clustered unit commitment model in power system modeling. **IEEE Transactions on Power Systems**, 2018. 33, 2195-2204.
- MORALES-ESPAÑA, G.; LATORRE, J.; RAMOS, A. Tight and Compact MILP Formulation of Start-Up and Shut-Down Ramping in Unit Commitment. **IEEE Transactions on Power Systems**, 2013. v. 28, n. 2, p. 1288–1296.
- NAZARI-HERIS, M.; MOHAMMADI-IVATLOO, B.; GHAREHPETIAN, G. B. Short-term scheduling of hydro-based power plants considering application of heuristic algorithms: A comprehensive review. **Renewable & Sustainable Energy Reviews**, 2017. 74: 116-129, <https://doi.org/10.1016/j.rser.2017.02.043>.
- NILSSON, O.; SJELVGREN, D. Hydro unit start-up costs and their impact on the short term scheduling strategies of Swedish power producers. **IEEE Transactions on Power Systems**, 1997. 12: 38-44. DOI: 10.1109/59.574921.

- OLIVEIRA, W.; SAGASTIZABAL, C.; LEMARECHAL, C. Convex proximal bundle methods in depth: a unified analysis for inexact oracles. **Mathematical Programming**, 2014. 148: 241-277, <https://doi.org/10.1007/s10107-014-0809-6>.
- ONS. **Procedimentos de Rede - Submódulo 8.1: Programação diária da Operação Eletroenergética**. Rio de Janeiro, RJ. 2020.
- OSORIO, G. J.; MATIAS, J. C. O.; CATALÃO, J. P. S. **A review of short-term hydro scheduling tools**. 48th International Universities Power Engineering Conference (UPEC). Dublin, IRELAND, <https://doi.org/10.1109/UPEC.2013.6714906>.: [s.n.]. 2013.
- PARRILLA, E.; GARCIA-GONZALEZ, J. Improving the B&B search for large-scale hydrothermal weekly scheduling problems. **International Journal of Electrical Power & Energy Systems**, 2006. 28: 339-348, <https://doi.org/10.1016/j.ijepes.2005.12.008>.
- PEREIRA, M. V. F.; PINTO, L. M. V. G. Stochastic optimization of a multireservoir hydroelectric system: A decomposition approach. **Water Resources Research**, 1985. v.21, n.6, p.779-792.
- PEREZ-DIAZ, J. I.; WILHELMI, J. R.; AREVALO, L. A. Optimal short-term operation schedule of a hydropower plant in a competitive electricity market. **Energy Conversion and Management**, 2010. 51: 2955-2966, <https://doi.org/10.1016/j.enconman.2010.06.038>.
- PYTHON. rdp 0.8: pip install rdp, 2021. Disponível em: <<https://pypi.org/project/rdp/>>. Acesso em: 18 Novembro 2021.
- SANTO, T. D.; COSTA, A. S. Hydroelectric unit commitment for power plants composed of distinct groups of generating units. **Electric Power Systems Research**, 2016. 137, 16-25, <https://doi.org/10.1016/j.epsr.2016.03.037>.
- SANTOS, T. N.; DINIZ, A. L. A comparison of static and dynamic models for hydro production in generation scheduling problems. **In: IEEE PES General Meeting, Minnesota**, Minnesota, USA, 2010. p. 1–5. <https://doi.org/10.1109/PES.2010.5589895>.
- SEGUIN, S.; COTE, P.; AUDET, C. Self-scheduling short-term unit commitment and loading problem. **IEEE Transactions on Power Systems**, 2016. 31, 133-142, <https://doi.org/10.1109/tpwrs.2014.2383911>.
- SHAWWASH, Z. K.; SIU, T. K.; RUSSELL, S. O. D. The B.C. Hydro short term hydro scheduling optimization model. **IEEE Transactions on Power Systems**, 2000. 15: 1125-1131, <https://doi.org/10.1109/59.871743>.
- SILVA, E. L. **Formação de preços em mercados de energia elétrica**. 2o ed. ed. Florianópolis, SC: Edição do autor, 2012.

- SINGH, V. K.; SINGAL, S. K. Operation of hydro power plants - a review. **Renewable & Sustainable Energy Reviews**, 2017. 69: 610-619, <https://doi.org/10.1016/j.rser.2016.11.169>.
- SKJELBRED, H.; KONG, ; FOSSO, O. Dynamic incorporation of nonlinearity into MILP formulation for short-term hydro scheduling. **International Journal of Electrical Power & Energy Systems**, March 2020. Volume 116, 105530, <https://doi.org/10.1016/j.ijepes.2019.105530>.
- SOUZA, Z. Centrais Hidro e Termelétricas. São Paulo: Editora Blucher, 1983.
- SOUZA, Z.; SANTOS, A. H. M.; BORTONI, E. C. **Centrais Hidrelétricas: implantação e comissionamento**. 2ª. ed. Rio de Janeiro: Interciência, 2009.
- TAHANAN, M.; ACKOOIJ, W. V.; FRANGIONI, A.; LACALANDRA, F. Large-scale unit commitment under uncertainty. **4OR: A Quarterly Journal of Operations Research**, 2015. 13: 115-171.
- TAKTAK, R.; D'AMBRÓSIO, C. An overview on mathematical programming approaches for the deterministic unit commitment problem in hydro valleys. **Energy Systems**, 2017. 8: 57-79.
- TONG, B.; ZHAI, Q. Z.; GUAN, X. H. An MILP based formulation for short-term hydro generation scheduling with analysis of the linearization effects on solution feasibility. **IEEE Transactions on Power Systems**, 2013. 28: 3588-3599, <https://doi.org/10.1109/tpwrs.2013.2274286>.
- VIELMA, J.; AHMED, S.; NEMHAUSER, G. Mixed-integer models for nonseparable piecewise-linear optimization: unifying framework and extensions. **Operational Research**, 2010. 58: 303-315.
- VIELMA, J.; NEMHAUSER, G. Modeling disjunctive constraints with a logarithmic number of binary variables and constraints. **Mathematical Programming**, 2011. 128: 49-72.
- WANG, X. B.; CHANG, J.; MENG, X.; WANG, Y. Short-term hydro-thermal-indphotovoltaic complementary operation of interconnected power systems. **Applied Energy**, 2018. 229: 945-962, <https://doi.org/10.1016/j.apenergy.2018.08.034>.

## APÊNDICE A – EXEMPLO DIDÁTICO DA APLICAÇÃO DA FORMULAÇÃO PROPOSTA (PARTICIONAMENTO DA FPH E SIMETRIA)

Esse apêndice tem como objetivo ilustrar de maneira didática a estratégia de solução baseada no particionamento da FPH univariada e em técnicas de simetria proposta nesta tese de doutorado. Para isso, será considerado um problema de POUH para uma UHE fictícia com 4 UGs idênticas e com apenas um estágio de tempo.

Inicialmente considere que, para uma dada altura de queda bruta, a FPH univariada com limites mínimo e máximo de vazão turbinada é de, respectivamente, 50 m<sup>3</sup>/s e 640 m<sup>3</sup>/s e é ilustrada na Figura A.1.

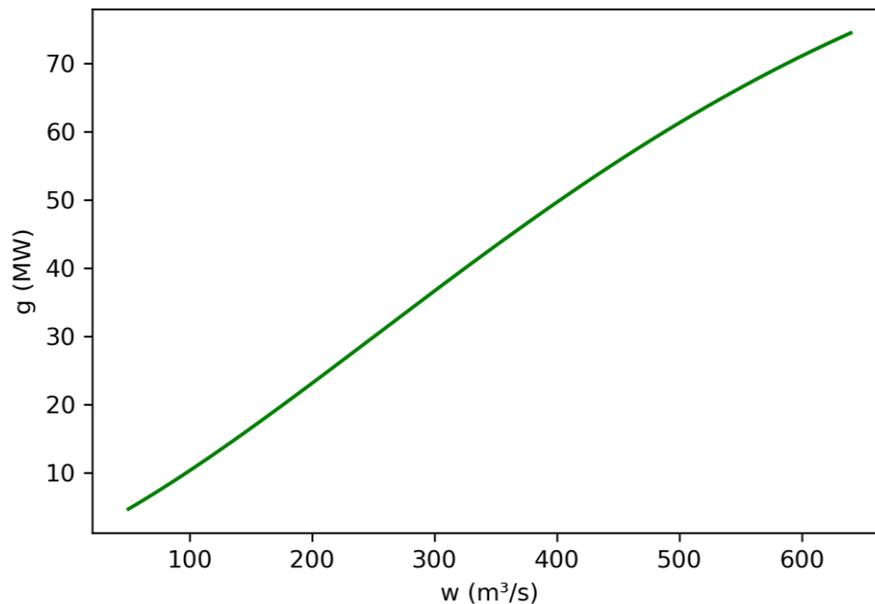


Figura A.1 – FPH ilustrativa do problema didático.

Ao calcular a raiz da segunda derivada dessa FPH, é possível obter o ponto de inflexão que separa a não convexidade da função. Neste exemplo, um ponto de inflexão associado com os valores [251,23 m<sup>3</sup>/s, 30,02 MW] é obtido. Na Figura A.2 é possível observar o ponto de inflexão que separa a região côncava da região convexa nesta FPH ilustrativa.

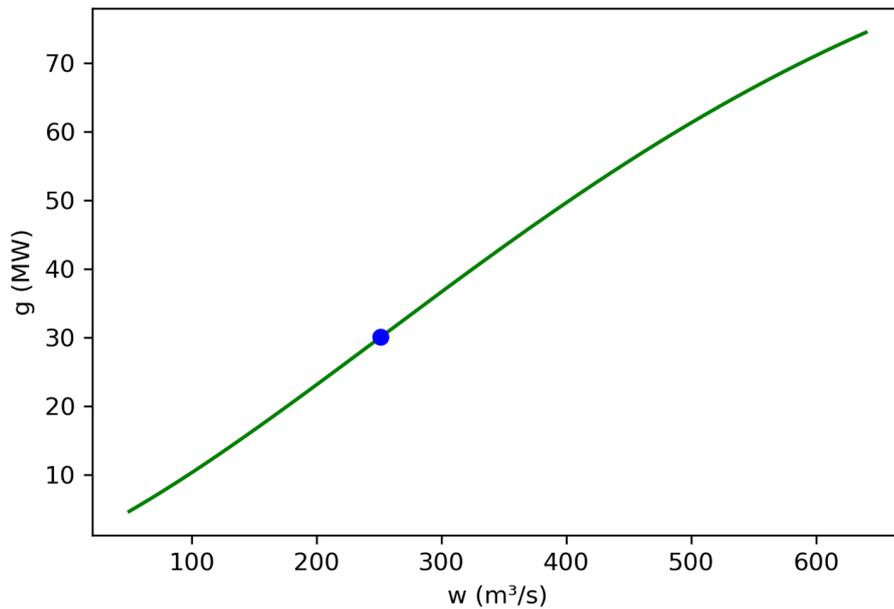


Figura A.2 – Ponto de inflexão da FPH ilustrativa.

O próximo passo é determinar os pontos que serão considerados nas aproximações côncava e convexa da FPH por meio do algoritmo RDP. Para isso, serão fornecidos 500 pontos equidistantes em  $w$  ( $X = 500$  pontos) para o algoritmo escolher os que representem uma diferença máxima de 0,1 ( $\epsilon = 0,1$ ) entre a curva completa, dada pelos 500 pontos, e a reduzida que será obtida<sup>1</sup>. Para o exemplo ilustrativo, o algoritmo RDP retornou os seguintes 11 pontos<sup>2</sup>: [[50.00, 4.64], [93.74, 9.53], [143.40, 15.65], [194.24, 22.32], [344.40, 42.52], [394.06, 48.89], [438.99, 54.37], [491.02, 60.29], [540.68, 65.49], [590.34, 70.21], [640.00, 74.45]].

Na Figura A.3, é apresentada a discretização completa obtida para essa FPH ilustrativa. Note que a discretização é composta por 12 pontos, já que o ponto de inflexão também é considerado. Desses 12 pontos, cinco são atribuídos à discretização da região convexa [[50.00, 4.64], [93.74, 9.53], [143.40, 15.65], [194.24, 22.32], [251.23, 30.02]] e oito pontos são atribuídos à discretização da região côncava [[251.23, 30.02], [344.40, 42.52], [394.06, 48.89], [438.99, 54.37], [491.02, 60.29], [540.68, 65.49], [590.34, 70.21], [640.00, 74.45]].

<sup>1</sup> Após importar o módulo com o algoritmo RDP no *python*, os pontos associados com essa curva reduzida podem ser obtidos com o comando “`pontos_RDP = rdp(500_pontos, epsilon = 0.1)`”, em que “500\_pontos” é uma lista com as 500 listas associadas com os pontos  $[W^n, G^n]$ , “epsilon” refere-se a  $\epsilon$ , e “pontos\_RDP” receberá uma lista com os pontos escolhidos pelo algoritmo RDP.

<sup>2</sup> Obs.: em *python*, as casas decimais são separadas por ponto (.).

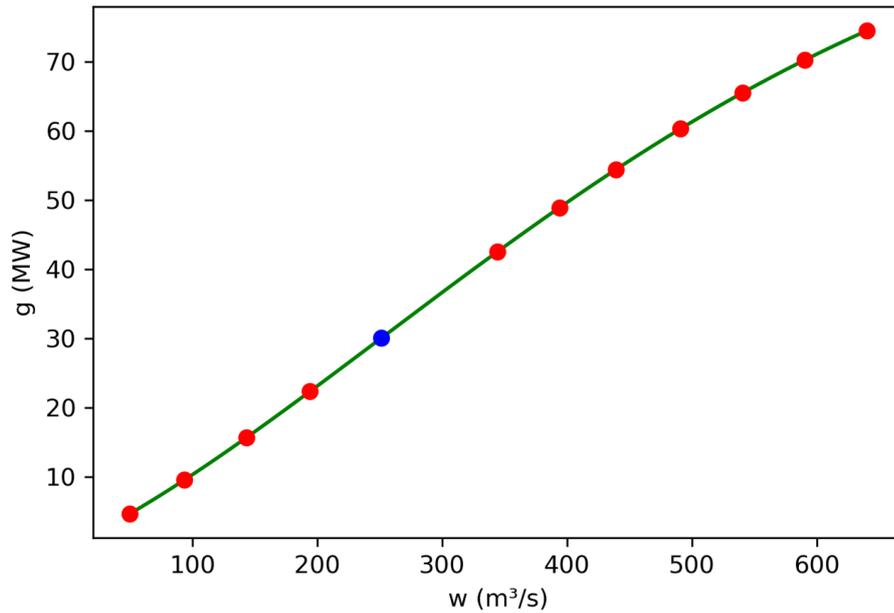


Figura A.3 – Discretização da FPH ilustrativa e os pontos definidos pelo algoritmo RDP.

Conhecidos os pontos que serão utilizados para linearizar cada região, o próximo passo é modelar as restrições que representam a aproximação LPP de cada região. Na região côncava, as restrições genéricas associadas com a aproximação LPP via CH e simetria para 4 UGs idênticas e apenas um estágio de tempo são apresentadas em (146)-(151). Vale ressaltar para representar até 4 UGs operando na região côncava, são necessárias duas variáveis binárias na formulação simétrica, isto é,  $M_j = 2$ . Note que, como se tem apenas um tipo de UG e um estágio de tempo neste exemplo didático, os índices  $j$  e  $t$  foram retirados da formulação.

$$\sum_{m=1}^2 (2^{m-1} \cdot rg_m) \leq CH_0^n \cdot \sum_{m=1}^2 (2^{m-1} \cdot y_m) + CH_1^n \cdot \sum_{m=1}^2 (2^{m-1} \cdot rw_m), \quad n = 1, \dots, 7, \quad (146)$$

$$WC^{\min} \cdot y_m \leq rw_m \leq WC^{\max} \cdot y_m, \quad m = 1, 2, \quad (147)$$

$$WC^{\min} \cdot (us - y_m) \leq ws - rw_m \leq WC^{\max} \cdot (us - y_m), \quad m = 1, 2, \quad (148)$$

$$GC^{\min} \cdot y_m \leq rg_m \leq GC^{\max} \cdot y_m, \quad m = 1, 2, \quad (149)$$

$$GC^{\min} \cdot (us - y_m) \leq gs - rg_m \leq GC^{\max} \cdot (us - y_m), \quad m = 1, 2, \quad (150)$$

$$us \in \{0, 1\}. \quad (151)$$

O primeiro passo para aproximar as regiões côncavas é obter os parâmetros ainda desconhecidos de (146)-(151)<sup>3</sup>. Para os oito pontos considerados na discretização da região côncava na FPH ilustrativa, o CH retornou sete segmentos de reta, ou seja,  $NH_{jt} = 7$ . Os valores  $[CH_0, CH_1]$  associados a cada reta são:  $[[-3.693, 0.134], [19.773, 0.085], [14.099, 0.095], [4.360, 0.114], [8.920, 0.105], [0.880, 0.122], [-1.636, 0.128]]$ . Na Figura A.4 é possível observar os segmentos de reta criando um “casco côncavo” sobre os pontos considerados na discretização da região côncava.

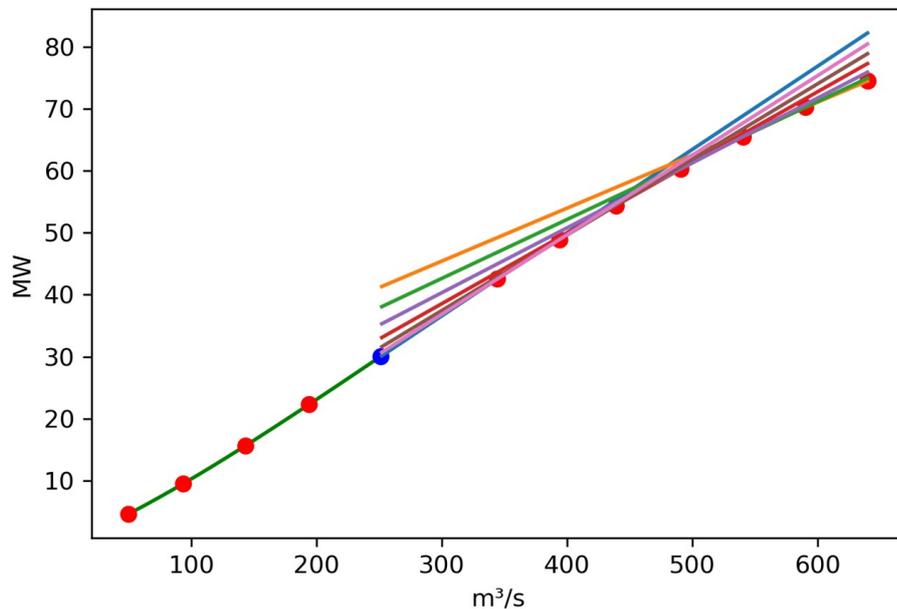


Figura A.4 – Retas criadas pelo CH para aproximar a região concava da FPH ilustrativa.

Os limites de turbinamento e geração na região côncava podem ser obtidos pelos valores dos pontos das extremidades dessa região, ou seja, o ponto de inflexão  $[251.23, 30.02]$  é composto pelos valores mínimos de turbinamento e geração e o ponto associado com a vazão de  $640 \text{ m}^3/\text{s}$   $[640.00, 74.45]$  têm valores máximos. Portanto, a aproximação LPP via CH e simetria para as 4 UGs idênticas no problema de um estágio de tempo ilustrado nesse apêndice é dado por (152)-(167). Note que são necessárias nove variáveis, sendo uma binária, e 16 restrições para representar as regiões côncavas das quatro UGs.

<sup>3</sup> Os coeficientes associados com os segmentos de retas escolhidos pelo CH,  $CH_{kjt}^n$  e  $NH_{jt}$ , são obtidos em *python* via módulo específico importado com o comando “from scipy.spatial import ConvexHull”. Após importar este módulo, os segmentos de reta determinados pelo CH são obtidos através do comando “retas\_CH = ConvexHull(pontos\_região\_côncava)”.

$$2^0 \cdot rg_1 + 2^1 \cdot rg_2 \leq -3,693 \cdot (2^0 \cdot y_1 + 2^1 \cdot y_2) + 0,134 \cdot (2^0 \cdot rw_1 + 2^1 \cdot rw_2), \quad (152)$$

$$2^0 \cdot rg_1 + 2^1 \cdot rg_2 \leq 19,773 \cdot (2^0 \cdot y_1 + 2^1 \cdot y_2) + 0,085 \cdot (2^0 \cdot rw_1 + 2^1 \cdot rw_2), \quad (153)$$

$$2^0 \cdot rg_1 + 2^1 \cdot rg_2 \leq 14,099 \cdot (2^0 \cdot y_1 + 2^1 \cdot y_2) + 0,095 \cdot (2^0 \cdot rw_1 + 2^1 \cdot rw_2), \quad (154)$$

$$2^0 \cdot rg_1 + 2^1 \cdot rg_2 \leq 4,360 \cdot (2^0 \cdot y_1 + 2^1 \cdot y_2) + 0,114 \cdot (2^0 \cdot rw_1 + 2^1 \cdot rw_2), \quad (155)$$

$$2^0 \cdot rg_1 + 2^1 \cdot rg_2 \leq 8,920 \cdot (2^0 \cdot y_1 + 2^1 \cdot y_2) + 0,105 \cdot (2^0 \cdot rw_1 + 2^1 \cdot rw_2), \quad (156)$$

$$2^0 \cdot rg_1 + 2^1 \cdot rg_2 \leq 0,880 \cdot (2^0 \cdot y_1 + 2^1 \cdot y_2) + 0,122 \cdot (2^0 \cdot rw_1 + 2^1 \cdot rw_2), \quad (157)$$

$$2^0 \cdot rg_1 + 2^1 \cdot rg_2 \leq -1,636 \cdot (2^0 \cdot y_1 + 2^1 \cdot y_2) + 0,128 \cdot (2^0 \cdot rw_1 + 2^1 \cdot rw_2), \quad (158)$$

$$251,23 \cdot y_1 \leq rw_1 \leq 640,00 \cdot y_1, \quad (159)$$

$$251,23 \cdot y_2 \leq rw_2 \leq 640,00 \cdot y_2, \quad (160)$$

$$251,23 \cdot (us - y_1) \leq ws - rw_1 \leq 640,00 \cdot (us - y_1), \quad (161)$$

$$251,23 \cdot (us - y_2) \leq ws - rw_2 \leq 640,00 \cdot (us - y_2), \quad (162)$$

$$30,02 \cdot y_1 \leq rg_1 \leq 74,45 \cdot y_1, \quad (163)$$

$$30,02 \cdot y_2 \leq rg_2 \leq 74,45 \cdot y_2, \quad (164)$$

$$30,02 \cdot (us - y_1) \leq gs - rg_1 \leq 74,45 \cdot (us - y_1), \quad (165)$$

$$30,02 \cdot (us - y_2) \leq gs - rg_2 \leq 74,45 \cdot (us - y_2), \quad (166)$$

$$us \in \{0,1\}. \quad (167)$$

Na representação da região convexa, inicialmente considere a formulação genérica para o problema com 4 UGs idênticas apresentada em (168)-(176). Como a FPH exemplificada só tem uma região convexa, o índice  $\mathbf{v}$  não precisa ser apresentado nessa formulação.

$$wv_i = \sum_{\mathbf{v} \in \mathcal{V}_i(\mathcal{P})} z_i^{\mathbf{v}} \cdot \mathcal{WV}^{\mathbf{v}}, \quad i=1,\dots,4, \quad (168)$$

$$gv_i = \sum_{\mathbf{v} \in \mathcal{V}_i(\mathcal{P})} z_i^{\mathbf{v}} \cdot \mathcal{GV}^{\mathbf{v}}, \quad i=1,\dots,4, \quad (169)$$

$$z_i^{\mathbf{v}} \geq 0, \quad i=1,\dots,4, \quad \mathbf{v}=1,\dots,\mathcal{V}(\mathcal{P}), \quad (170)$$

$$\sum_{\mathbf{v} \in \mathcal{V}_i(\mathcal{P})} z_i^{\mathbf{v}} = uv_i, \quad i=1,\dots,4, \quad (171)$$

$$\sum_{\mathbf{v} \in \mathcal{J}^l(B,l)} z_i^{\mathbf{v}} \leq x_i^l, \quad i=1,\dots,4, \quad l=1,\dots,\mathcal{L}, \quad (172)$$

$$\sum_{v \in J^0(B,l)} z_i^v \leq 1 - x_i^l, \quad i = 1, \dots, 4, \quad l = 1, \dots, \mathcal{L}, \quad (173)$$

$$uv_i \in \{0, 1\}, \quad i = 1, \dots, 4, \quad (174)$$

$$x_i^l \in \{0, 1\}, \quad i = 1, \dots, 4, \quad l = 1, \dots, \mathcal{L}, \quad (175)$$

$$z_i^v = 0, \quad i = 1, \dots, 4, \quad v > NR_i, \quad (176)$$

Como a região convexa é representada por cinco pontos [[50.00, 4.64], [93.74, 9.53], [143.40, 15.65], [194.24, 22.32], [251.23, 30.02]], a região viável será representada por quatro segmentos de reta. Portanto, apenas duas variáveis binárias são necessárias para endereçar o segmento de reta na qual estará a solução. Nesse sentido, a formulação via LACC para aproximar as regiões convexas nas 4 UGs é dada por (177)-(204). As restrições (177)-(183) aproximam a FPH da região convexa para a UG 1, as restrições (184)-(190) aproximam para a UG 2, as restrições (191)-(197) aproximam para a UG 3 e as restrições (198)-(204) aproximam para a UG 4. Perceba que são necessárias 46 variáveis, sendo 4 binárias, para representar as regiões convexas das FPHs das quatro UGs exemplificadas.

$$wv_1 = z_1^{v_1} \cdot 50,00 + z_1^{v_2} \cdot 93,74 + z_1^{v_3} \cdot 143,40 + z_1^{v_4} \cdot 194,24 + z_1^{v_5} \cdot 251,23, \quad (177)$$

$$gv_1 = z_1^{v_1} \cdot 4,64 + z_1^{v_2} \cdot 9,53 + z_1^{v_3} \cdot 15,65 + z_1^{v_4} \cdot 22,32 + z_1^{v_5} \cdot 30,02, \quad (178)$$

$$z_1^{v_1} \geq 0, z_1^{v_2} \geq 0, z_1^{v_3} \geq 0, z_1^{v_4} \geq 0, z_1^{v_5} \geq 0, \quad (179)$$

$$z_1^{v_1} + z_1^{v_2} + z_1^{v_3} + z_1^{v_4} + z_1^{v_5} = uv_1, \quad (180)$$

$$z_1^{v_4} + z_1^{v_5} \leq x_1^{v_1}, \quad z_1^{v_3} \leq x_1^{v_2}, \quad (181)$$

$$z_1^{v_1} + z_1^{v_2} \leq 1 - x_1^{v_1}, \quad z_1^{v_1} + z_1^{v_5} \leq 1 - x_1^{v_2}, \quad (182)$$

$$x_1^{v_1} \in \{0, 1\}, \quad x_1^{v_2} \in \{0, 1\}, \quad (183)$$

$$wv_2 = z_2^{v_1} \cdot 50,00 + z_2^{v_2} \cdot 93,74 + z_2^{v_3} \cdot 143,40 + z_2^{v_4} \cdot 194,24 + z_2^{v_5} \cdot 251,23, \quad (184)$$

$$gv_2 = z_2^{v_1} \cdot 4,64 + z_2^{v_2} \cdot 9,53 + z_2^{v_3} \cdot 15,65 + z_2^{v_4} \cdot 22,32 + z_2^{v_5} \cdot 30,02, \quad (185)$$

$$z_2^{v_1} \geq 0, z_2^{v_2} \geq 0, z_2^{v_3} \geq 0, z_2^{v_4} \geq 0, z_2^{v_5} \geq 0, \quad (186)$$

$$z_2^{v_1} + z_2^{v_2} + z_2^{v_3} + z_2^{v_4} + z_2^{v_5} = uv_2, \quad (187)$$

$$z_2^{v_4} + z_2^{v_5} \leq x_2^{v_1}, \quad z_2^{v_3} \leq x_2^{v_2}, \quad (188)$$

$$z_2^{v_1} + z_2^{v_2} \leq 1 - x_2^{v_1}, \quad z_2^{v_1} + z_2^{v_5} \leq 1 - x_2^{v_2}, \quad (189)$$

$$x_2^{v_1} \in \{0,1\}, x_2^{v_2} \in \{0,1\}, \quad (190)$$

$$wv_3 = z_3^{v_1} \cdot 50,00 + z_3^{v_2} \cdot 93,74 + z_3^{v_3} \cdot 143,40 + z_3^{v_4} \cdot 194,24 + z_3^{v_5} \cdot 251,23, \quad (191)$$

$$gv_3 = z_3^{v_1} \cdot 4,64 + z_3^{v_2} \cdot 9,53 + z_3^{v_3} \cdot 15,65 + z_3^{v_4} \cdot 22,32 + z_3^{v_5} \cdot 30,02, \quad (192)$$

$$z_3^{v_1} \geq 0, z_3^{v_2} \geq 0, z_3^{v_3} \geq 0, z_3^{v_4} \geq 0, z_3^{v_5} \geq 0, \quad (193)$$

$$z_3^{v_1} + z_3^{v_2} + z_3^{v_3} + z_3^{v_4} + z_3^{v_5} = uv_3, \quad (194)$$

$$z_3^{v_4} + z_3^{v_5} \leq x_3^{v_1}, z_3^{v_3} \leq x_3^{v_2}, \quad (195)$$

$$z_3^{v_1} + z_3^{v_2} \leq 1 - x_3^{v_1}, z_3^{v_1} + z_3^{v_5} \leq 1 - x_3^{v_2}, \quad (196)$$

$$x_3^{v_1} \in \{0,1\}, x_3^{v_2} \in \{0,1\}, \quad (197)$$

$$wv_4 = z_4^{v_1} \cdot 50,00 + z_4^{v_2} \cdot 93,74 + z_4^{v_3} \cdot 143,40 + z_4^{v_4} \cdot 194,24 + z_4^{v_5} \cdot 251,23, \quad (198)$$

$$gv_4 = z_4^{v_1} \cdot 4,64 + z_4^{v_2} \cdot 9,53 + z_4^{v_3} \cdot 15,65 + z_4^{v_4} \cdot 22,32 + z_4^{v_5} \cdot 30,02, \quad (199)$$

$$z_4^{v_1} \geq 0, z_4^{v_2} \geq 0, z_4^{v_3} \geq 0, z_4^{v_4} \geq 0, z_4^{v_5} \geq 0, \quad (200)$$

$$z_4^{v_1} + z_4^{v_2} + z_4^{v_3} + z_4^{v_4} + z_4^{v_5} = uv_4, \quad (201)$$

$$z_4^{v_4} + z_4^{v_5} \leq x_4^{v_1}, z_4^{v_3} \leq x_4^{v_2}, \quad (202)$$

$$z_4^{v_1} + z_4^{v_2} \leq 1 - x_4^{v_1}, z_4^{v_1} + z_4^{v_5} \leq 1 - x_4^{v_2}, \quad (203)$$

$$x_4^{v_1} \in \{0,1\}, x_4^{v_2} \in \{0,1\}. \quad (204)$$

Conhecidas as restrições que aproximam ambas as regiões das FPHs nas UGs, é possível modelar o problema de PLIM proposto nesse apêndice. Excluindo a representação das FPHs, é preciso modelar a função objetivo (205) e as restrições (206)-(215), apresentadas a seguir.

$$\min \Theta = q + s + PP \cdot (os + rs), \quad (205)$$

$$\text{s.a: } vl_{final} - vl_{inicial} + FC \cdot (q + s) = FC \cdot Y, \quad (206)$$

$$VL^{\min} \leq vl \leq VL^{\max}, \quad (207)$$

$$0 \leq s \leq S^{\max}, \quad (208)$$

$$q - \sum_{i=1}^4 wv_i - \sum_{m=1}^2 (2^{m-1} \cdot rw_m), \quad (209)$$

$$\sum_{i=1}^4 gv_i + \sum_{m=1}^2 (2^{m-1} \cdot rg_m) = DM, \quad (210)$$

$$\sum_{i=1}^4 uv_i + \sum_{m=1}^2 (2^{m-1} \cdot y_m) = dp, \quad (211)$$

$$os - dp + dp_{inicial} \geq 0, \quad (212)$$

$$rs - dp_{inicial} + dp \geq 0, \quad (213)$$

$$os \geq 0, \quad rs \geq 0, \quad (214)$$

$$\sum_{i=1}^4 uv_i + \sum_{m=1}^2 (2^{m-1} \cdot y_m) \leq 4, \quad (215)$$

Logo, considerando como exemplo  $PP_j = 10$ ,  $FC = 0,0036$ ,  $Y_t = 2000 \text{ m}^3/\text{s}$ ,  $V^{\min} = 1940 \text{ hm}^3$ ,  $V^{\max} = 2260 \text{ hm}^3$ ,  $S^{\max} = 50000 \text{ m}^3/\text{s}$ ,  $MG_t = 200 \text{ MW}$  e que as 4 UGs estão ligadas no instante inicial, a modelagem completa para o problema de PLIM baseado no particionamento da FPH e em simetria ilustrativo nesse apêndice é dado por (216)-(228).

$$\min \Theta = q + s + 10 \cdot (os + rs), \quad (216)$$

$$\text{s.a: } vl_{final} - vl_{inicial} + 0,0036 \cdot (q + s) = 0,0036 \cdot 2000, \quad (217)$$

$$1940 \leq v \leq 2260, \quad (218)$$

$$0 \leq s \leq 50000, \quad (219)$$

$$q - (wv_1 + wv_2 + wv_3 + wv_4) - (2^0 \cdot rw_1 + 2^1 \cdot rw_2) = 0, \quad (220)$$

$$(gv_1 + gv_2 + gv_3 + gv_4) + (2^0 \cdot rg_1 + 2^1 \cdot rg_2) = 200, \quad (221)$$

$$(uv_1 + uv_2 + uv_3 + uv_4) + (2^0 \cdot y_1 + 2^1 \cdot y_2) = dp, \quad (222)$$

$$os - dp + 4 \geq 0, \quad (223)$$

$$rs - 4 + dp \geq 0, \quad (224)$$

$$os \geq 0, \quad rs \geq 0, \quad (225)$$

$$(uv_1 + uv_2 + uv_3 + uv_4) + (2^0 \cdot y_1 + 2^1 \cdot y_2) \leq 4, \quad (226)$$

$$\text{Aproximação da região côncava das FPHs (152)-(167),} \quad (227)$$

$$\text{Aproximação da região convexa das FPHs (177)-(204).} \quad (228)$$

Logo, para este exemplo didático, a formulação de PLIM proposta é composta por 50 variáveis contínuas, 5 variáveis binárias e 54 restrições.

## APÊNDICE B – VALIDAÇÃO DA FORMULAÇÃO BASEADA EM PARTICIONAMENTO DA FPH E SIMETRIA

Neste apêndice são apresentados os principais resultados obtidos na aplicação da estratégia proposta para o problema da POUH de uma UHE à fio d'água com 50 UGs. Inicialmente são apresentadas as premissas utilizadas e, na sequência, são apresentados os dados e as configurações de entrada do estudo de caso. Por fim, são analisados os resultados para diferentes cenários de metas de geração e vazões afluentes.

### B.1 PREMISSAS

O intuito das simulações realizadas nesse apêndice é validar a formulação de PLIM (120)-(145), baseada no particionamento da FPH e em técnicas de simetria, proposta para ser resolvida em cada iteração do algoritmo da estratégia proposta. Como essa formulação considera uma FPH univariada, a mesma pode ser usada diretamente em uma UHE à fio d'água que tem boa previsibilidade de vazões afluentes. Neste contexto, são utilizados os dados reais da UHE Santo Antônio, localizada na região Norte do Brasil, com 50 UGs e 3.568 MW de potência instalada. Esta usina possui dois tipos de UGs, sendo: 24 UGs com turbinas de cinco pás e 26 UGs com turbinas de quatro pás. Devido às restrições ambientais, a usina precisa operar com um nível de montante constante ( $NM$ ) em 71,3 metros quando a afluência é inferior a 34.000 m<sup>3</sup>/s e 70,5 metros caso contrário. Por conta disso, a queda bruta pode ser estimada à priori subtraindo o nível de montante constante do nível de jusante calculado a partir da vazão afluente, como em (229).

$$HB_t = NM - D_0 - D_1 \cdot I_t - D_2 \cdot I_t^2 - D_3 \cdot I_t^3 - D_4 \cdot I_t^4. \quad (229)$$

Além disso, como as simulações são consideradas para uma UHE à fio d'água, as restrições de balanço hidráulico podem ser substituídas pela restrição (230).

$$q_t + s_t = Y_t, \quad t = 1, \dots, T. \quad (230)$$

Adicionalmente, em Santo Antônio, ensaios em campo mostram que a perda total do gerador, dado pela soma entre as perdas mecânicas no conjunto turbina-gerador e elétricas no gerador, é dado por uma função linear ilustrada na Equação (231).

$$ptg_{ijt} + permt_{ijt} = H_{0j} + H_{1j} \cdot g_{ijt}. \quad (231)$$

Portanto, a FPH univariada em cada UG da UHE Santo Antônio é dada por (232).

$$g_{ijt} = \frac{10^{-6} \cdot A}{(1 + H_{1j})} \cdot [E_{0j} + E_{1j} \cdot w_{ijt} + E_{2j} \cdot (HP_t - KT_j \cdot w_{ijt}^2) + E_{3j} \cdot w_{ijt} \cdot (HP_t - KT_j \cdot w_{ijt}^2) + E_{4j} \cdot w_{ijt}^2 + E_{5j} \cdot (HP_t - KT_j \cdot w_{ijt}^2)^2 + E_{6j} \cdot w_{ijt}^3 + E_{7j} \cdot (HP_t - KT_j \cdot w_{ijt}^2)^3 + E_{8j} \cdot w_{ijt}^2 \cdot (HP_t - KT_j \cdot w_{ijt}^2) + E_{9j} \cdot w_{ijt} \cdot (HP_t - KT_j \cdot w_{ijt}^2)^2] \cdot w_{ijt} \cdot (HP_t - KT_j \cdot w_{ijt}^2) - \frac{H_{0j}}{(1 + H_{1j})}. \quad (232)$$

No que tange aos limites operativos da FPH, as UGs em Santo Antônio possuem limites mínimos de vazão turbinada,  $W_{jt}^{\min}$ , constantes e limites máximos,  $W_{jt}^{\max}$ , dependentes da queda líquida. Ademais, a vazão turbinada máxima é limitada pela capacidade máxima de geração da UG em quedas líquidas superiores a 13,9 metros. Os diversos coeficientes e parâmetros são ilustrados na sequência.

## B.2 DADOS E CONFIGURAÇÕES DE ENTRADA

A Tabela B.1 apresenta os parâmetros comuns aos dois tipos de UGs da UHE Santo Antônio. Os coeficientes associados à eficiência hidráulica da turbina são confidenciais e não serão mostrados neste documento.

Tabela B.1 – Parâmetros comuns a todas as UGs

$KT$	$D_0$	$D_1$	$D_2$	$D_3$	$D_4$	$H_0$	$H_1$
$6,799 \cdot 10^{-7}$	43,319	$8,941 \cdot 10^{-4}$	$-2,677 \cdot 10^{-8}$	$5,522 \cdot 10^{-13}$	$-4,688 \cdot 10^{-13}$	0,1641	0,0182

Os parâmetros específicos para cada tipo de GU estão na Tabela B.2.

Tabela B.2 – Parâmetros específicos de cada tipo de UGs

Tipo	$W^{\min}$	$G^{\max}$	$h^{\max}$	$h \geq 13,9 \text{ m}$			$h < 13,9 \text{ m}$		
				$O_0$	$O_1$	$O_2$	$O_0$	$O_1$	$O_2$
<b>4 pás</b>	210	73,29	20,69	0,1843	-0,0164	0,0004	0,0712	-0,0013	-0,0001
<b>5 pás</b>	170	69,59	25,15	0,1354	-0,0107	0,0002	0,0733	-0,0078	0,0003

As simulações da estratégia proposta neste apêndice são realizadas para um problema de POUH de 48 estágios de 30 minutos para a UHE Santo Antônio. Os três cenários de metas de geração e quedas brutas simulados, associados aos dias 30/10/2017 (Cenário 1), 01/07/2019 (Cenário 2) e 07/12/2019 (Cenário 3), são apresentados na Figura B.1. Na UHE Santo Antônio,

a queda bruta mínima de todas as UGs é de 9 m, enquanto a máxima varia de acordo com a Tabela B.2. Portanto, os três cenários escolhidos buscam validar o modelo para valores de queda bruta que compreende as várias estações do ano (desde o período chuvoso, com baixas quedas, até o período seco, com altas quedas) dentro da faixa operacional de queda bruta de ambos os tipos de UG. Além disso, os três cenários escolhidos permitem a verificação do desempenho do modelo para os diferentes perfis de metas de geração solicitadas pelo ONS. Observe que o Cenário 1 tem uma oscilação razoável, o Cenário 2 tem pouca oscilação e o Cenário 3 tem muita oscilação no perfil de metas de geração. Os cenários 1 e 2 consideram  $NM = 70,5$  m e o cenário 3 considera  $NM = 71,3$  m.

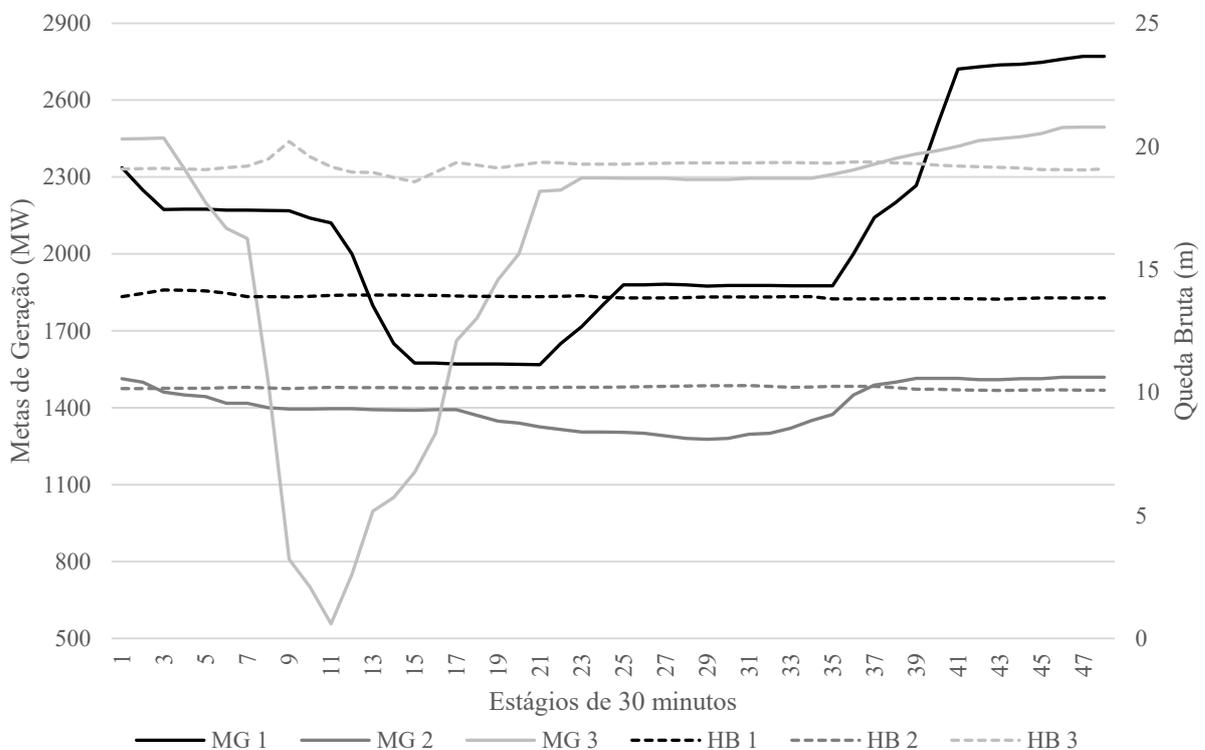


Figura B.1 – Cenários de metas de geração e quedas brutas.

Para todas as simulações, o algoritmo RDP considera  $X = 500$  pontos com  $\varepsilon = 0,005$ . Na Tabela B.3, é possível observar o número médio de pontos obtidos pelo RDP em cada cenário e para cada tipo de UG. Como a queda bruta varia um pouco ao longo dos estágios, esse número pode sofrer pequenas modificações. As abreviações NTP, NPCV e NPCC representam o número total de pontos obtidos, o número de pontos obtidos na região convexa e o número de pontos obtidos na região côncava. Observe que o número de pontos obtidos foi

consideravelmente reduzido em relação aos 500 pontos informados inicialmente ao algoritmo RDP. Além disso, observe que as UGs de 5 pás possuem duas regiões convexas no Cenário 1, sendo uma com seis pontos (associada à região de baixos valores de vazão turbinada) e outra com quatro pontos (associada à região com altos valores de vazão turbinada).

Tabela B.3 – Número de pontos obtidos pelo algoritmo RDP

Cenário	Tipo da UG	NTP	NPCV	NPCC
1	4 Pás	33	3	31
	5 Pás	36	6   4	28
2	4 Pás	32	2	31
	5 Pás	20	5	16
3	4 Pás	16	4	13
	5 Pás	21	4	18

Por fim, para validar a formulação para diferentes condições operacionais, as simulações são realizadas considerando diferentes penalidades,  $PP_j$ , para as partidas e paradas na função objetivo. Os problemas de PLIM são resolvidos nesta seção utilizando o solver GUROBI 9.0.0, via PYTHON 3.7. O computador utilizado tem um processador Intel Core I7-8565U 4.60 GHz e 8 GB de RAM. Como critério de parada, foi considerado um *gap* de otimalidade de 0,001% ou um limite de tempo de 900 segundos, o que ocorrer primeiro.

### B.3 RESULTADOS

Nesta seção são apresentados, para cada cenário, os diversos resultados obtidos pela formulação proposta (120)-(145), definida como **FPROP**, bem como a comparação com a formulação que realiza uma aproximação não convexa em todo o domínio da FPH de cada UG via LACC, definida como **LACC**.

#### B.3.1 Cenário 1

O Cenário 1 apresenta baixa variabilidade de aflúências, o que resulta em baixas variações na queda bruta. Em contrapartida, existe uma grande variabilidade nas metas de geração horária devido à coordenação da geração entre os subsistemas elétricos brasileiros.

Na Tabela B.4, é possível observar os números de restrições (NR), variáveis contínuas (NVC) e variáveis binárias (NVB) das formulações **LACC** e **FPROP** para o Cenário 1. As diferenças relativas entre as formulações são apresentadas em DIF.

Tabela B.4 – Dimensões das formulações **LACC** e **FPROP**.

		NR	NVC	NVB
Cenário 1	<b>LACC</b>	45.268	88.944	14.400
	<b>FPROP</b>	50.739	29.808	11.616
	<b>DIF</b>	+12,1%	-66,5%	-19,3%

Note que a formulação **FPROP** apresenta reduções significativas em NVC e NVB, diferentemente em NR que teve acréscimos. Isso ocorreu por dois motivos: (1) a quantidade de pontos  $[WC_{jt}^v, GC_{jt}^v]$  resultantes do RDP para a região côncava foi proporcionalmente maior neste cenário, o que eleva as restrições associadas com a aproximação côncava; e (2) neste cenário, as FPHs das UGs de cinco pás possuem duas regiões convexas (em todos os estágios), o que incrementa restrições associadas na aproximação LPP dessas regiões pelo **LACC**.

Na Tabela B.5 são apresentados os principais resultados obtidos pelas formulações **LACC** e **FPROP** para o Cenário 1 para os diferentes valores de  $PP_j$ . Neste caso, espera-se menos partidas e paradas nas UGs em simulações com valores maiores de  $PP_j$ . Para cada simulação, são apresentados: o valor resultante da função objetivo (OBJ); o número integralizado de partidas e paradas das UGs (NPP); e o tempo computacional (TS), em segundos, ou o gap de otimalidade resultante (**GAP**), caso o tempo limite seja atingido.

Tabela B.5 – Principais resultados do Cenário 1.

	$PP_j$	0	10	50	100	500
OBJ	<b>LACC</b>	807.768	808.113	809.246	810.354	813.838
	<b>FPROP</b>	807.768	808.115	809.245	810.360	813.838
	<b>DIF</b>	+0,0000%	+0,0002%	-0,0001%	+0,0007%	0,0000%
NPP	<b>LACC</b>	38	31	25	18	3
	<b>FPROP</b>	38	32	25	18	3
	<b>DIF</b>	+0,0%	+3,2%	0,0%	0,0%	0,0%
TS/GAP	<b>LACC</b>	57,99	<b>0,0012%</b>	30,66	28,88	63,28
	<b>FPROP</b>	17,68	23,62	26,04	21,52	18,98
	<b>DIF</b>	-66,6%	-97,4%	-15,1%	-25,5%	-70,0%

Na Tabela B.5, é possível perceber que a formulação **FPROP** converge para soluções idênticas às resultantes da formulação **LACC**. As pequenas diferenças que ocorreram na função objetivo (OBJ) foram sempre menores que o gap de otimalidade considerado no critério de parada, de 0,001%, ou o GAP resultante da formulação **LACC** após o limite de 900 segundos. Os valores resultantes de partidas e paradas (NPP) também foram idênticos na maioria dos cenários. Em apenas uma simulação ( $PP_j = 10$ ) houve uma diferença de uma partida/parada no resultado. No entanto, essa diferença no NSS neste cenário proporcionou uma diferença de apenas 0,0002% no valor de OBJ, isto é, uma diferença no valor de OBJ menor que o gap considerado como critério de parada.

Embora as soluções de **FPROP** e **LACC** sejam numericamente idênticas, **FPROP** oferece um melhor desempenho em termos de tempo computacional. Além disso, os tempos computacionais em **LACC** podem apresentar uma variação muito grande. Note que **LACC** demorou entre 28,88 e 900,00 segundos (cenário em que o tempo limite foi atingido) para ser resolvido. Enquanto isso, **FPROP** convergiu em todas as simulações em tempos inferiores a 30 segundos.

A Tabela B.5 também apresenta a importância de minimizar o NPP das UGs. Por exemplo, definir  $PP_j = 0$  minimiza apenas a vazão turbinada; ou seja, o objetivo é atender às metas de geração da forma mais eficiente possível em termos de uso de água. Nesse caso, a vazão turbinada integralizada para os 48 estágios de 30 minutos é de 807.768 m<sup>3</sup>/s. Porém, é necessário realizar 38 partidas e paradas. Por outro lado, configurando  $PP_j = 500$ , a usina perde eficiência no uso da água – a vazão é de 813.838 m<sup>3</sup>/s para as mesmas metas de geração. No entanto, apenas três partidas ou paradas nas UGs são necessárias. Tal operação fornece menos estresse mecânico nas UGs do que a operação sugerida pelo caso com  $PP_j = 0$ . Com  $PP_j = 500$ , a usina consome 0,75% a mais de água para compensar uma operação mais suave em termos de partidas e paradas nas UGs. Essa análise é fundamental para auxiliar os operadores da usina no dia a dia, pois calcular o custo das partidas e paradas nas UGs não é uma tarefa trivial e pode variar muito com as características e a localização da UHE (NILSSON e SJELVGREN, 1997).

Em todas as simulações, as 24 UGs de 4 pás são despachadas em todos os intervalos de tempo, enquanto as partidas e paradas se concentram nas UGs de 5 pás. Isso indica que as UGs de 4 pás são priorizadas no despacho, isto é, proporcionam um despacho mais eficiente ao longo do período de planejamento para os níveis de queda líquida inerentes a esse cenário (por

volta dos 14 metros). Na Figura B.2 é possível observar o número de UGs de 5 pás despachadas em cada intervalo de tempo é mostrado para diferentes valores de  $PP_j$ . Note que há uma redução gradativa das partidas e paradas das UGs à medida que aumentam os pesos  $PP_j$ .

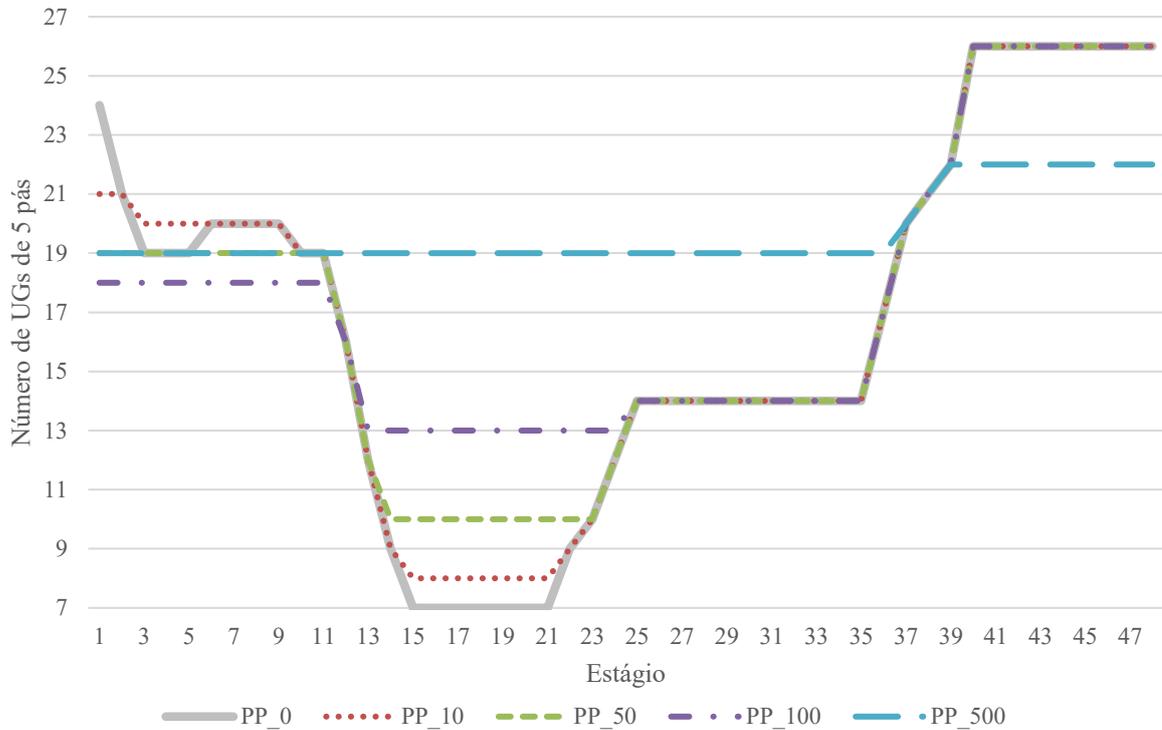


Figura B.2 – Número de UGs de 5 pás despachadas para diferentes pesos  $PP_j$

A Figura B.3 apresenta o rendimento global da usina, dado por  $MG_t / (10^{-6} \cdot A \cdot HB_t \cdot q_t)$ , para cada simulação em cada intervalo de tempo. Como pode ser visto, a eficiência geral diminui à medida que  $PP_j$  aumenta, uma vez que a redução de partidas e paradas implica um novo conjunto de UGs operando em eficiência hidráulica não ideal.

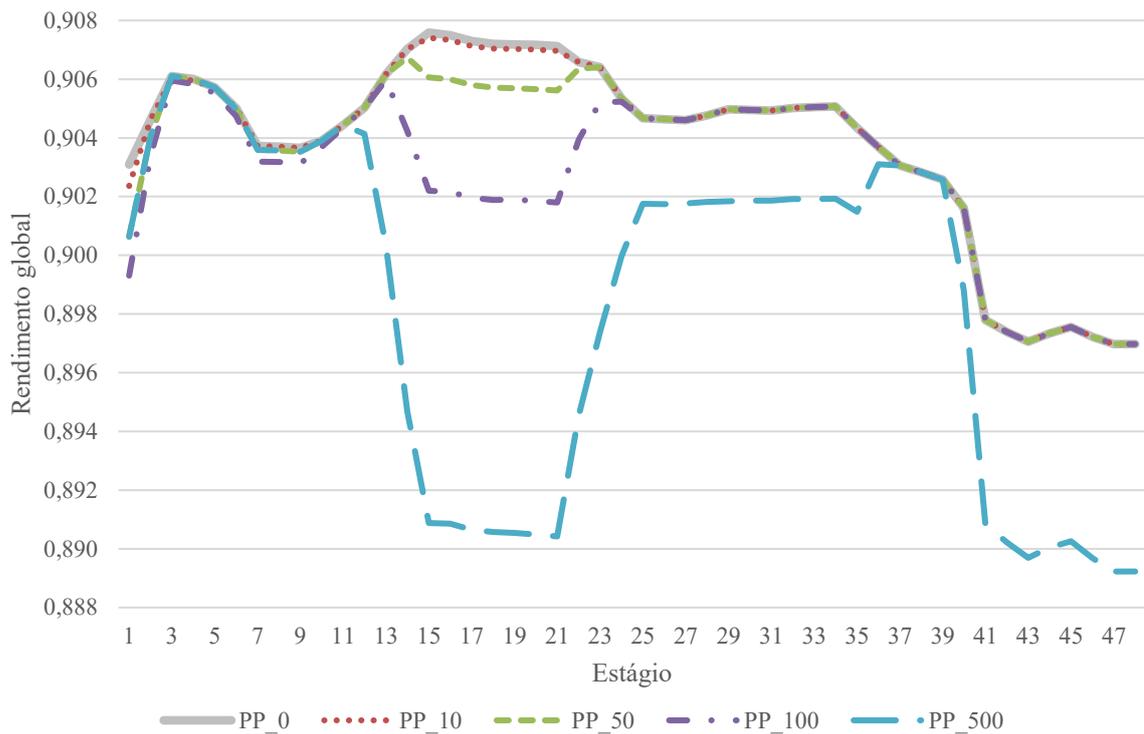


Figura B.3 – Rendimento global da usina para diferentes pesos  $PP_j$ .

Neste Cenário 1, todas as simulações apresentaram despachos apenas nas regiões côncavas, isto é, despachos de potências simétricas para cada tipo de UGs. Na Tabela B.6, é possível observar as potências e quantidades de UGs de cada tipo despachadas em cada hora para as simulações associadas com os pesos  $PP_j = 0$  e  $PP_j = 500$ . Nessas simulações as potências associadas com os pontos de inflexão para as UGs de 4 e 5 pás foram de aproximadamente 29 MW e 26 MW, respectivamente. Note que todas as potências despachadas ficaram acima desses valores, inclusive em momentos em que elas diminuíram para evitar partidas e paradas na simulação com  $PP_j = 500$ .

Tabela B.6 – Despacho horário para as simulações do Cenário 1 com  $PP_j = 0$  e  $PP_j = 500$ .

Estágio	MG (MW)	$PP_j = 0$				$PP_j = 500$			
		Potência (MW)		Quantidade		Potência (MW)		Quantidade	
		5 pás	4 pás	5 pás	4 pás	5 pás	4 pás	5 pás	4 pás
1	2.337	45,93	51,44	24	24	50,85	57,12	19	24
2	2.250	47,52	52,17	21	24	49,17	54,82	19	24
3	2.173	47,81	52,69	19	24	47,81	52,69	19	24
4	2.175	47,79	52,79	19	24	47,79	52,79	19	24
5	2.175	47,75	52,82	19	24	47,75	52,82	19	24
6	2.171	46,31	51,87	20	24	47,63	52,75	19	24
7	2.171	46,51	51,70	20	24	47,24	53,06	19	24

8	2.170	46,47	51,69	20	24	47,20	53,05	19	24
9	2.168	46,40	51,67	20	24	47,18	52,98	19	24
10	2.140	47,19	51,81	19	24	47,19	51,81	19	24
11	2.121	46,07	51,90	19	24	46,07	51,90	19	24
12	2.000	46,88	52,08	16	24	43,37	49,00	19	24
13	1.799	46,09	51,91	12	24	40,14	43,18	19	24
14	1.650	46,08	51,47	9	24	36,26	40,04	19	24
15	1.574	46,31	52,08	7	24	34,83	38,01	19	24
16	1.574	46,36	52,06	7	24	34,81	38,02	19	24
17	1.571	46,04	52,03	7	24	34,78	37,93	19	24
18	1.570	46,01	52,00	7	24	34,76	37,90	19	24
19	1.570	46,90	51,74	7	24	35,96	36,95	19	24
20	1.569	46,79	51,73	7	24	35,92	36,94	19	24
21	1.568	46,73	51,70	7	24	35,89	36,92	19	24
22	1.650	45,98	51,51	9	24	36,65	39,73	19	24
23	1.716	46,67	52,05	10	24	37,72	41,64	19	24
24	1.800	46,78	51,61	12	24	39,55	43,69	19	24
25	1.880	45,99	51,51	14	24	41,77	45,27	19	24
26	1.880	46,01	51,49	14	24	41,78	45,26	19	24
27	1.882	46,17	51,49	14	24	41,90	45,25	19	24
28	1.880	45,91	51,55	14	24	41,72	45,31	19	24
29	1.875	45,94	51,33	14	24	41,36	45,38	19	24
30	1.877	45,93	51,42	14	24	41,47	45,38	19	24
31	1.877	45,92	51,42	14	24	41,48	45,37	19	24
32	1.877	45,98	51,39	14	24	41,43	45,41	19	24
33	1.876	45,90	51,39	14	24	41,36	45,42	19	24
34	1.876	45,91	51,38	14	24	41,35	45,43	19	24
35	1.876	45,97	51,35	14	24	41,73	45,13	19	24
36	2.000	45,53	51,08	17	24	44,14	48,39	19	24
37	2.142	45,53	51,31	20	24	45,53	51,31	20	24
38	2.200	46,07	51,36	21	24	46,07	51,36	21	24
39	2.267	46,75	51,61	22	24	46,75	51,61	22	24
40	2.500	47,49	52,72	26	24	51,64	56,83	22	24
41	2.722	52,23	56,83	26	24	57,38	60,82	22	24
42	2.730	52,59	56,77	26	24	57,55	60,99	22	24
43	2.738	52,79	56,89	26	24	57,49	61,38	22	24
44	2.740	52,85	56,91	26	24	57,57	61,39	22	24
45	2.747	53,04	57,00	26	24	57,78	61,49	22	24
46	2.760	53,04	57,54	26	24	57,78	62,03	22	24
47	2.771	53,06	57,97	26	24	58,03	62,26	22	24
48	2.771	53,06	57,97	26	24	58,03	62,26	22	24

Na Figura B.4, é ilustrado o comportamento das gerações nas UGs de 4 e 5 pás (G4 e G5) e das quantidades de UGs de 5 pás despachadas (D5) ao longo dos estágios para  $PP_j = 0$  e  $PP_j = 500$ . Como todas as 24 UGs de 4 pás são despachadas em ambas as simulações, elas não são apresentadas nessa figura. Para  $PP_j = 0$ , é possível perceber que gerações tendem a ficar mais constantes e as quantidades de UGs despachadas variam ao longo dos estágios. Isso ocorre porque, ao minimizar apenas a vazão turbinada da usina, as gerações tendem a se manter no ponto de eficiência máxima nas UGs. Em contrapartida, ao considerar  $PP_j = 500$ , a quantidade de

UGs despachadas se mantém constante por um longo período, modificando as potências despachadas nas UGs (G4 e G5) para atender às metas de geração.

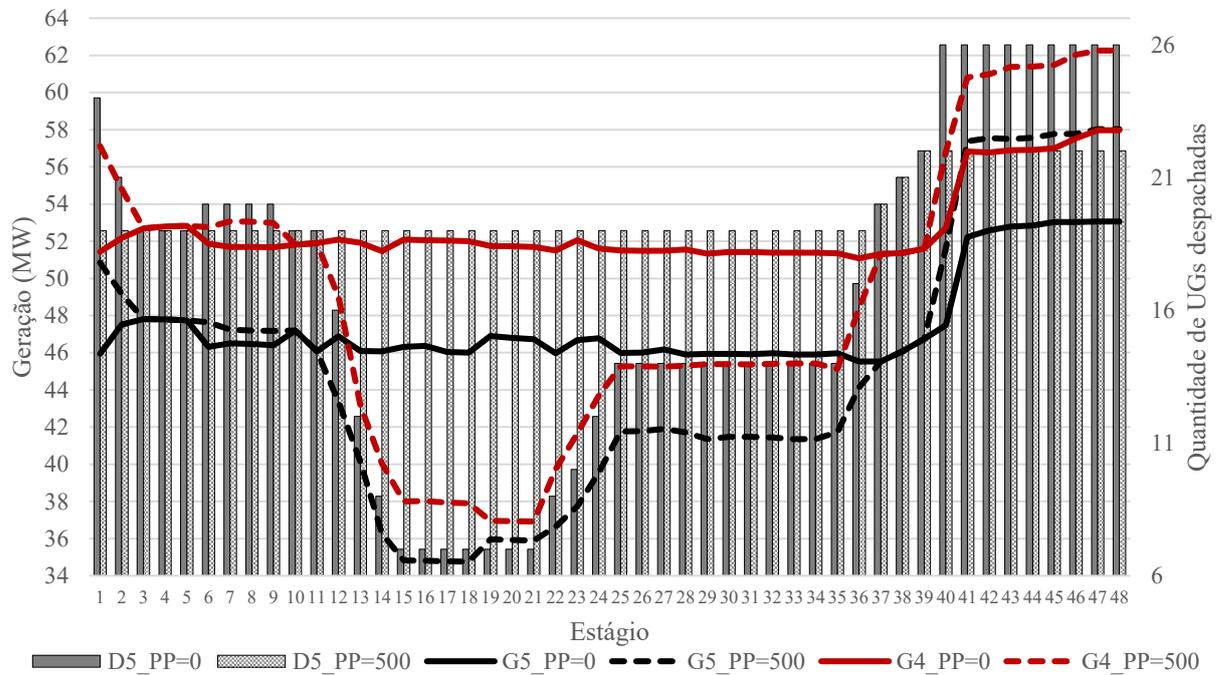


Figura B.4 – Resumo do despacho para as simulações do Cenário 1 com  $PP_j = 0$  e  $PP_j = 500$ .

### B.3.2 Cenários 2 e 3

O Cenário 2 apresenta baixos valores de queda bruta e pouca oscilação no perfil de metas de geração. Já o Cenário 3 apresenta altas quedas brutas e muita oscilação nas metas de geração. As dimensões associadas com os problemas simulados para esses dois cenários podem ser observadas na Tabela B.7. Note que o **FPROP** apresenta reduções consideráveis nos números de restrições, variáveis contínuas e binárias em ambos os cenários.

Tabela B.7 – Dimensões das formulações **FPROP** e **LACC** para os Cenários 2 e 3.

		NR	NVC	NVB
Cenário 2	LACC	60.670	88.944	14.400
	FPROP	24.096	14.928	5.472
	DIF	-60,3%	-83,2%	-62,0%
Cenário 3	LACC	58.888	70.512	13.248
	FPROP	30.770	18.384	7.776
	DIF	-47,7%	-73,9%	-41,3%

Os principais resultados para os Cenários 2 e 3 são apresentados na Tabela B.8 e na Tabela B.9, respectivamente.

Tabela B.8 – Principais resultados do Cenário 2.

	$PP_j$	0	10	50	100	500
OBJ	LACC	786.214	786.214	786.611	786.875	787.107
	FPROP	786.214	786.214	786.612	786.875	787.107
	DIF	0,0000%	0,0000%	+0,0001%	0,0000%	0,0000%
NSS	LACC	13	13	6	3	0
	FPROP	13	13	6	3	0
	DIF	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TS/GAP	LACC	0,0029%	0,0029%	0,0026%	57,95	26,76
	FPROP	17,04	17,04	19,99	14,03	16,01
	DIF	-98,1%	-98,1%	-97,8%	-75,8%	-40,2%

Tabela B.9 – Principais resultados do Cenário 3.

	$PP_j$	0	10	50	100	500
OBJ	LACC	561.812	561.812	563.675	565.345	577.753
	FPROP	561.812	561.812	563.675	565.346	577.746
	DIF	0,0000%	0,0000%	0,0000%	+0,0002%	-0,0012%
NSS	LACC	52	52	39	31	31
	FPROP	52	52	39	31	31
	DIF	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TS/GAP	LACC	0,0057%	0,0057%	0,0055%	0,0041%	0,0451%
	FPROP	19,35	19,35	22,41	22,21	41,67
	DIF	-97,9%	-97,9%	-97,5%	-97,5%	-95,4%

Note que a formulação **FPROP** novamente converge para soluções idênticas às resultantes das formulações **LACC** e que a grande vantagem de **FPROP** está associada ao desempenho computacional. Enquanto o **LACC** atingiu o tempo máximo de 900 segundos em diversas simulações, **FPROP** não levou mais do que 41,67 segundos.

Analisando as gerações resultantes das UGs, foi observado que os resultados convergiram apenas para despachos na região côncava da FPH na maioria das simulações realizadas. No entanto, as três últimas simulações do Cenário 3 ( $PP_j = 50$ ,  $PP_j = 100$  e  $PP_j = 500$ ) apresentam despachos em regiões convexas da FPH em alguns estágios. Na Tabela B.10, é possível observar o despacho detalhado resultante de **FPROP** para os primeiros 24 estágios (período de maior oscilação das metas de geração) resultante da simulação que considera  $PP_j = 500$  no Cenário 3. D5C e D4C referem-se a as quantidades de UGs de cinco e quatro pás,

respectivamente, despachadas na região côncava, e D5V e D4V referem-se às quantidades despachadas na região convexa. Da mesma forma, as gerações (G5C, G4C, G5V e G4V) e as vazões turbinadas (W5C, W4C, W5V e W4V) são representadas por cada UG nas regiões côncava e convexa. Para facilitar a visualização, as células associadas com o despacho na região côncava são levemente escurecidas. Note que, ao acessar as regiões convexas nos estágios 9 a 12, o despacho ocorre com o valor mínimo da vazão turbinada (170 m<sup>3</sup>/s). Valores semelhantes aos apresentados nessa tabela foram observados nos resultados da simulação da formulação LACC. Finalmente, perceba nesta tabela que para esses níveis de queda bruta (de cerca de 18 a 20 metros), as UGs de 5 pás tendem a ser priorizadas no despacho, o que indica que elas são mais eficientes nesse cenário.

Tabela B.10 – Resultados de **FPROP** para os primeiros 24 estágios do Cenário 3 com  $PP_j = 500$

t	MG	HB	D5C	D4C	D5V	D4V	G5C	G4C	G5V	G4V	W5C	W4C	W5V	W4V
1	2.449	19,08	26	9	0	0	68,82	73,29	0	0	397,2	423,5	0	0
2	2.450	19,09	26	9	0	0	68,86	73,29	0	0	397,1	423,2	0	0
3	2.452	19,10	26	9	0	0	68,94	73,29	0	0	397,3	423,0	0	0
4	2.330	19,07	26	9	0	0	64,25	73,29	0	0	370,3	423,6	0	0
5	2.201	19,05	26	8	0	0	62,10	73,29	0	0	358,3	424,1	0	0
6	2.100	19,13	26	6	0	0	63,86	73,29	0	0	366,8	422,3	0	0
7	2.060	19,19	26	6	0	0	62,32	73,29	0	0	356,7	421,0	0	0
8	1.500	19,49	24	0	0	0	62,50	0	0	0	352,1	0	0	0
9	808	20,19	17	0	3	0	42,43	0	28,90	0	236,9	0	170,0	0
10	700	19,57	10	0	10	0	42,12	0	27,88	0	242,6	0	170,0	0
11	557	19,17	1	0	19	0	39,83	0	27,22	0	235,7	0	170,0	0
12	750	18,95	15	0	5	0	41,05	0	26,86	0	244,7	0	170,0	0
13	997	18,94	20	0	0	0	49,85	0	0	0	292,0	0	0	0
14	1.050	18,73	20	0	0	0	52,50	0	0	0	309,8	0	0	0
15	1.149	18,56	20	0	0	0	57,45	0	0	0	341,1	0	0	0
16	1.300	18,95	21	0	0	0	61,90	0	0	0	359,2	0	0	0
17	1.662	19,34	26	0	0	0	63,92	0	0	0	362,9	0	0	0
18	1.750	19,24	26	1	0	0	64,49	73,29	0	0	368,3	420,1	0	0
19	1.899	19,11	26	4	0	0	61,76	73,29	0	0	355,1	422,8	0	0
20	2.000	19,24	26	5	0	0	62,83	73,29	0	0	358,8	420,1	0	0
21	2.244	19,35	26	8	0	0	63,76	73,29	0	0	361,9	417,9	0	0
22	2.250	19,32	26	8	0	0	63,99	73,29	0	0	363,8	418,4	0	0
23	2.297	19,28	26	9	0	0	62,98	73,29	0	0	358,8	419,3	0	0
24	2.297	19,28	26	9	0	0	62,98	73,29	0	0	358,8	419,3	0	0

Os resultados apresentados nesse apêndice mostram que a formulação proposta fornece resultados idênticos à formulação clássica que aproxima cada FPH univariada via LACC, mas com grande vantagem no desempenho computacional. Isso mostra que a

formulação proposta consegue aliar precisão na representação da FPH univariada e rapidez computacional.

## APÊNDICE C – FORMULAÇÃO NÃO CONVEXA BIVARIADA VIA LACC

A estratégia comparativa é dada por uma única formulação de PLIM que lineariza a FPH bivariada e as funções univariadas de cotas de montante e jusante via LACC. A linearização das funções univariadas via LACC são realizadas aproximando a função original por retas, de maneira semelhante à apresentada na seção 3.5.3. Já a linearização da FPH bivariada ocorre substituindo a função não linear original por triângulos, conforme ilustrado na Figura C.1. Note, neste exemplo, que uma FPH não linear e não convexa (Figura C.1a) é representada por um modelo linear por partes a partir de três pontos  $[H^v, W^v, G^v]$  igualmente espaçados em  $h$  e  $w$  (Figura C.1b), utilizando oito triângulos (Figura C.1c),  $P_1$ - $P_8$ .

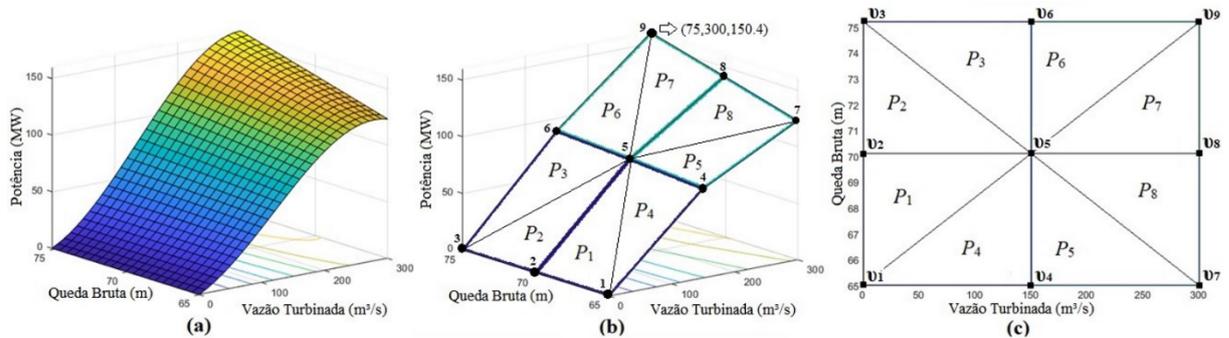


Figura C.1 – Processo de linearização de uma FPH bivariada.

Didaticamente, pode-se dividir a modelagem da linearização da FPH bivariada via LACC em duas partes. A primeira parte, composta pelas equações (233)-(237), é responsável por realizar a combinação convexa nos vértices de um triângulo.

$$hb_t \leq \sum_{v \in \mathcal{V}} z_{ijt}^v \cdot H_j^v + H_j^{\max} \cdot (1 - u_{ijt}) \quad (233)$$

$$hb_t \geq \sum_{v \in \mathcal{V}} z_{ijt}^v \cdot H_j^v \quad (234)$$

$$w_{ijt} = \sum_{v \in \mathcal{V}} z_{ijt}^v \cdot W_j^v \quad (235)$$

$$g_{ijt} = \sum_{v \in \mathcal{V}} z_{ijt}^v \cdot G_j^v \quad (236)$$

$$z_{ijt}^v \geq 0 \quad (237)$$

em que,

$hb_t$  é a altura de queda bruta na UHE no estágio  $t$ ;

$H_j^v$  é a altura de queda bruta no vértice  $v$  da UG do tipo  $j$  (m);

- $H^{\max}$  é a altura de queda bruta máxima da UG do tipo  $j$  (m);  
 $W_j^v$  é a vazão turbinada no vértice  $v$  da UG do tipo  $j$  (m<sup>3</sup>/s);  
 $G_j^v$  é a potência gerada no vértice  $v$  da UG do tipo  $j$  (m<sup>3</sup>/s);

As restrições (233) e (234) realizam a combinação convexa nos parâmetros associados com a queda bruta de forma a evitar que o valor seja zerado. Por sua vez, (235) e (236) realizam a combinação convexa nos parâmetros dos vértices associados com a vazão turbinada e potência, respectivamente. Finalmente, a restrição (237) serve para evitar valores negativos à variável de peso. Por exemplo, para representar um ponto no triângulo/politopo  $P_1$ , é necessário realizar uma combinação convexa dos valores localizados nos vértices  $v_1$ ,  $v_2$  e  $v_5$ .

O procedimento de endereçamento dos vértices que limitam a combinação convexa a apenas um triângulo é introduzido em duas etapas: a primeira cria um vetor binário que seleciona cada hipercubo do domínio; e a segunda insere uma nova variável binária para selecionar cada um dos dois triângulos presentes no hipercubo.

A primeira etapa é realizada considerando  $J^l(e, B, l)$  como sendo o conjunto de pontos do eixo  $e$  ( $x$  ou  $y$ ) que possuem valor  $i$  (0 ou 1) na posição  $l$  do código binário,  $B$ , que identifica o hipercubo. Um exemplo da definição desses conjuntos, considerando a FPH da Figura C.2, é ilustrado nas Figura C.2a e Figura C.2b. Os vértices referentes aos pontos que identificam os conjuntos que possuem valores 1 e 0 na posição  $l$  do código  $B$  estão destacados, respectivamente, em vermelho e preto. Observe que, para este exemplo com quatro hipercubos, são necessárias duas novas variáveis binárias para identificar cada politopo: uma para o eixo  $x$ , que identifica a região superior se igual a 1 e inferior se igual a 0, e outra para o eixo  $y$ , que identifica a região à esquerda se igual a 1 e à direita se igual a 0.

A segunda etapa seleciona um triângulo dentro de cada hipercubo definido na fase anterior utilizando os conjuntos  $L_{r,s} = \{v \in \mathcal{V}: v_r \text{ é ímpar, } v_s \text{ é par}\}$  e  $R_{r,s} = \{v \in \mathcal{V}: v_r \text{ é par, } v_s \text{ é ímpar}\}$ ,  $\forall_{r,s} \in D = \{1, \dots, d\}$  tal que  $r < s$ . Na Figura C.2c, podem ser observados os triângulos pertencentes aos conjuntos  $L_{r,s}$  e  $R_{r,s}$  que identificam as regiões destacadas em cinza e branco. Os vértices referentes aos pontos que identificam os conjuntos  $L_{r,s}$  e  $R_{r,s}$  estão destacados, respectivamente, em vermelho e preto.

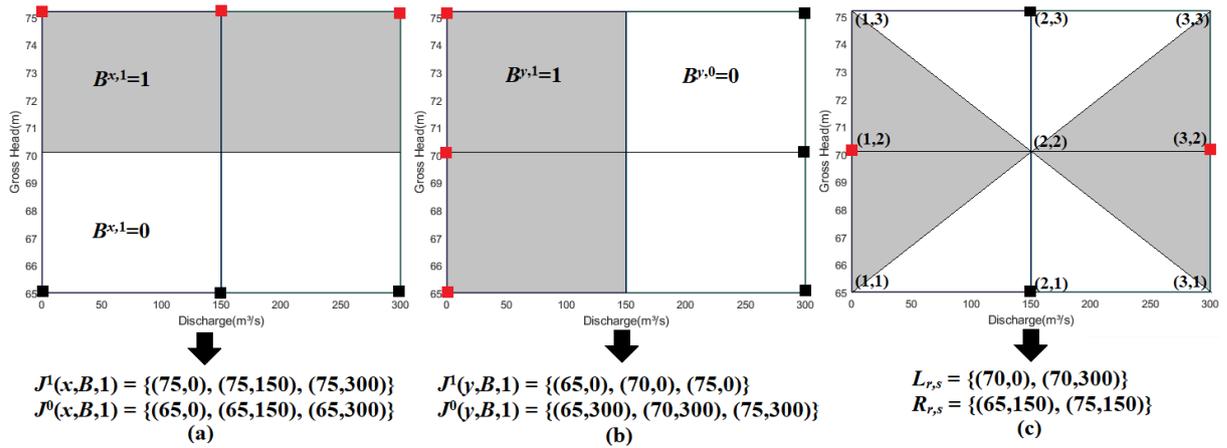


Figura C.2 - Conjuntos utilizados na identificação de oito triângulos no modelo LACC (BRITO, FINARDI e TAKIGAWA, 2020a).

Logo, a seleção do triângulo na aproximação de uma FPH bivariada via LACC é dada pelo conjunto de restrições (238)-(244). A restrição (238) garante que a variável de peso  $z^v_{ijt}$  seja limitada à um. As restrições (239)-(241) selecionam um hipercubo do domínio e as restrições (242)-(244) selecionam um dos triângulos deste hipercubo para realizar a combinação convexa.

$$\sum_{v \in \mathcal{V}_j} z^v_{ijt} = u_{ijt} \quad (238)$$

$$\sum_{v \in J^1(e,B,l)} z^v_{ijt} \leq xh^{e,l}_{ijt} \quad (239)$$

$$\sum_{v \in J^0(e,B,l)} z^v_{ijt} \leq 1 - xh^{e,l}_{ijt} \quad (240)$$

$$xh^{e,l}_{ijt} \in \{0, 1\} \quad (241)$$

$$\sum_{v \in L_{r,s}} z^v_{ijt} \leq xt_{ijt} \quad (242)$$

$$\sum_{v \in R_{r,s}} z^v_{ijt} \leq 1 - xt_{ijt} \quad (243)$$

$$xt_{ijt} \in \{0, 1\} \quad (244)$$

em que,

$xh^{e,l}_{ijt}$  é a variável binária de posição  $l$  que identifica o hipercubo através do eixo  $e$  ( $x$  ou  $y$ ) para a UG  $i$  do tipo  $j$  no estágio  $t$ ;

$xt_{ijt}$  é a variável binária que identificam os triângulos nos hipercubos para a UG  $i$  do tipo  $j$  no estágio  $t$ .

Logo, a formulação completa da estratégia comparativa é dada por (245)-(285). Note que as restrições (251)-(262) representam a linearização da FPH bivariada, enquanto (266)-(273) e (274)-(281) representam as linearizações das funções univariadas associadas com as cotas de montante e jusante, respectivamente.

$$\min \Theta = \sum_{t=1}^T \sum_{r=1}^R \left( q_{rt} + s_{rt} + \sum_{j=1}^{J_r} \sum_{i=1}^{N_{jrt}} \left[ PP_{ijr} \cdot (pt_{ijrt} + pr_{ijrt}) \right] \right), \quad (245)$$

s.a:

$$vl_{rt} - vl_{r,t-1} + FC \cdot \left[ q_{rt} + s_{rt} - \sum_{a \in \mathfrak{R}_r} (q_{a,t-\tau_{ar}} + s_{a,t-\tau_{ar}}) \right] = FC \cdot Y_{rt}, \quad t=1, \dots, T, \quad r=1, \dots, R, \quad (246)$$

$$VL_r^{\min} \leq vl_{rt} \leq VL_r^{\max}, \quad t=1, \dots, T, \quad r=1, \dots, R, \quad (247)$$

$$0 \leq s_{rt} \leq S_r^{\max}, \quad t=1, \dots, T, \quad r=1, \dots, R, \quad (248)$$

$$q_{rt} - \sum_{j=1}^{J_r} \sum_{i=1}^{N_{jrt}} w_{ijrt} = 0, \quad t=1, \dots, T, \quad r=1, \dots, R, \quad (249)$$

$$\sum_{j=1}^{J_r} \sum_{i=1}^{N_{jrt}} g_{ijrt} = MG_{rt}, \quad t=1, \dots, T, \quad r=1, \dots, R, \quad (250)$$

$$hb_{rt} \leq \sum_{v \in \mathcal{V}_{jr}} z_{ijrt}^v \cdot H_{jr}^v + H_{jr}^{\max} \cdot (1 - u_{ijrt}), \quad (251)$$

$$t=1, \dots, T, \quad r=1, \dots, R, \quad j=1, \dots, J_r, \quad i=1, \dots, N_{jrt},$$

$$hb_{rt} \geq \sum_{v \in \mathcal{V}_{jr}} z_{ijrt}^v \cdot H_{jr}^v, \quad t=1, \dots, T, \quad r=1, \dots, R, \quad j=1, \dots, J_r, \quad i=1, \dots, N_{jrt}, \quad (252)$$

$$w_{ijrt} = \sum_{v \in \mathcal{V}_{jr}} z_{ijrt}^v \cdot W_{jr}^v, \quad t=1, \dots, T, \quad r=1, \dots, R, \quad j=1, \dots, J_r, \quad i=1, \dots, N_{jrt}, \quad (253)$$

$$g_{ijrt} = \sum_{v \in \mathcal{V}_{jr}} z_{ijrt}^v \cdot G_{jr}^v, \quad t=1, \dots, T, \quad r=1, \dots, R, \quad j=1, \dots, J_r, \quad i=1, \dots, N_{jrt}, \quad (254)$$

$$z_{ijrt}^v \geq 0, \quad t=1, \dots, T, \quad r=1, \dots, R, \quad j=1, \dots, J_r, \quad i=1, \dots, N_{jrt}, \quad v=1 \in \mathcal{V}_{jr}, \quad (255)$$

$$\sum_{v \in \mathcal{V}_{jr}} z_{ijrt}^v = u_{ijrt}, \quad t=1, \dots, T, \quad r=1, \dots, R, \quad j=1, \dots, J_r, \quad i=1, \dots, N_{jrt}, \quad (256)$$

$$\sum_{v \in J^1(e, B, l)} z_{vijrt}^v \leq xh_{ijrt}^{e, l}, \quad (257)$$

$$t=1, \dots, T, \quad r=1, \dots, R, \quad j=1, \dots, J_r, \quad i=1, \dots, N_{jrt}, \quad e=1, \dots, E, \quad l=1, \dots, \mathcal{L},$$

$$\sum_{v \in J^0(e,B,l)} z_{vijrt}^v \leq 1 - xh_{ijrt}^{e,l}, \quad (258)$$

$$t = 1, \dots, T, r = 1, \dots, R, j = 1, \dots, J_r, i = 1, \dots, N_{jrt}, e = 1, \dots, E, l = 1, \dots, \mathcal{L},$$

$$xh_{ijrt}^{e,l} \in \{0, 1\}, \quad (259)$$

$$t = 1, \dots, T, r = 1, \dots, R, j = 1, \dots, J_r, i = 1, \dots, N_{jrt}, e = 1, \dots, E, l = 1, \dots, \mathcal{L},$$

$$\sum_{v \in L_{r,s}} z_{ijrt}^v \leq xt_{ijrt}, t = 1, \dots, T, r = 1, \dots, R, j = 1, \dots, J_r, i = 1, \dots, N_{jrt}, \quad (260)$$

$$\sum_{v \in R_{r,s}} z_{ijrt}^v \leq 1 - xt_{ijrt}, t = 1, \dots, T, r = 1, \dots, R, j = 1, \dots, J_r, i = 1, \dots, N_{jrt}, \quad (261)$$

$$xt_{ijrt} \in \{0, 1\}, t = 1, \dots, T, r = 1, \dots, R, j = 1, \dots, J_r, i = 1, \dots, N_{jrt}, \quad (262)$$

$$hb_{rt} - nm_{rt} + nj_{rt} = 0, t = 1, \dots, T, r = 1, \dots, R, \quad (263)$$

$$vm_{rt} - \frac{vl_{rt} + vl_{rt+1}}{2} = 0, t = 1, \dots, T, r = 1, \dots, R, \quad (264)$$

$$d_{rt} - q_{rt} - s_{rt} = 0, t = 1, \dots, T, r = 1, \dots, R, \quad (265)$$

$$vm_{rt} = \sum_{v \in \mathcal{V}m_r} zm_{rt}^v \cdot VM_{rt}^v, t = 1, \dots, T, r = 1, \dots, R, \quad (266)$$

$$nm_{rt} = \sum_{v \in \mathcal{V}m_r} zm_{rt}^v \cdot NM_{rt}^v, t = 1, \dots, T, r = 1, \dots, R, \quad (267)$$

$$zm_{rt}^v \geq 0, t = 1, \dots, T, r = 1, \dots, R, \quad (268)$$

$$\sum_{v \in \mathcal{V}m_r} zm_{rt}^v = 1, t = 1, \dots, T, r = 1, \dots, R, \quad (269)$$

$$\sum_{v \in J^1(B,l)} zm_{rt}^v \leq xm_{rt}^l, t = 1, \dots, T, r = 1, \dots, R, l = 1, \dots, \mathcal{L}m, \quad (270)$$

$$\sum_{v \in J^0(B,l)} zm_{rt}^v \leq 1 - xm_{rt}^l, t = 1, \dots, T, r = 1, \dots, R, l = 1, \dots, \mathcal{L}m, \quad (271)$$

$$um_{rt} \in \{0, 1\}, t = 1, \dots, T, r = 1, \dots, R, \quad (272)$$

$$xm_{rt}^l \in \{0, 1\}, t = 1, \dots, T, r = 1, \dots, R, l = 1, \dots, \mathcal{L}m, \quad (273)$$

$$d_{rt} = \sum_{v \in \mathcal{V}j_r} zj_{rt}^v \cdot DF_{rt}^v, t = 1, \dots, T, r = 1, \dots, R, \quad (274)$$

$$nj_{rt} = \sum_{v \in \mathcal{V}j_r} zj_{rt}^v \cdot NJ_{rt}^v, t = 1, \dots, T, r = 1, \dots, R, \quad (275)$$

$$zj_{rt}^v \geq 0, t = 1, \dots, T, r = 1, \dots, R, \quad (276)$$

$$\sum_{v \in \mathcal{V}_r} zj_{rt}^v = 1, \quad t = 1, \dots, T, \quad r = 1, \dots, R, \quad (277)$$

$$\sum_{v \in \mathcal{J}^l(B,l)} zj_{rt}^v \leq xj_{rt}^l, \quad t = 1, \dots, T, \quad r = 1, \dots, R, \quad l = 1, \dots, \mathcal{L}j, \quad (278)$$

$$\sum_{v \in \mathcal{J}^0(B,l)} zj_{rt}^v \leq 1 - xj_{rt}^l, \quad t = 1, \dots, T, \quad r = 1, \dots, R, \quad l = 1, \dots, \mathcal{L}j, \quad (279)$$

$$uj_{rt} \in \{0, 1\}, \quad t = 1, \dots, T, \quad r = 1, \dots, R, \quad (280)$$

$$xj_{rt}^l \in \{0, 1\}, \quad t = 1, \dots, T, \quad r = 1, \dots, R, \quad l = 1, \dots, \mathcal{L}j, \quad (281)$$

$$u_{ijt} \cdot W_{jrt}^{\min} \leq w_{ijt} \leq u_{ijt} \cdot W_{jrt}^{\max}, \quad t = 1, \dots, T, \quad r = 1, \dots, R, \quad j = 1, \dots, J_r, \quad i = 1, \dots, N_{jrt}, \quad (282)$$

$$o_{ijt} - r_{ijt} - u_{ijt} + u_{ij,t-1} = 0, \quad t = 1, \dots, T, \quad r = 1, \dots, R, \quad j = 1, \dots, J_r, \quad i = 1, \dots, N_{jrt}, \quad (283)$$

$$u_{ijr0} = U_{ijr0}, \quad r = 1, \dots, R, \quad j = 1, \dots, J_r, \quad i = 1, \dots, N_{jrt}, \quad (284)$$

$$u_{ijt} \in \{0, 1\}, \quad t = 1, \dots, T, \quad r = 1, \dots, R, \quad j = 1, \dots, J_r, \quad i = 1, \dots, N_{jrt}, \quad (285)$$

em que,

$zm_{rt}^v$  é a variável de peso associada com o ponto  $[VM_{rt}^v, NM_{rt}^v]$  do vértice  $v$  da função cota de montante na UHE  $r$  no estágio  $t$ ;

$VM_{rt}^v$  é o volume médio no vértice  $v$  na função cota de montante da UHE  $r$  no estágio  $t$  ( $\text{hm}^3$ );

$NM_{rt}^v$  é o nível de montante no vértice  $v$  na função cota de montante da UHE  $r$  no estágio  $t$  (m);

$\mathcal{L}m$  é o número de bits necessários para formar o código binário que identifica um segmento de reta do domínio da função cota de montante no modelo LACC;

$xm_{rt}^l$  é a variável binária  $l$  do código  $B$  que identifica o seguimento da aproximação da função cota de montante na UHE  $r$  no estágio  $t$ ;

$zj_{rt}^v$  é a variável de peso associada com o ponto  $[DF_{rt}^v, NJ_{rt}^v]$  do vértice  $v$  da função cota de jusante na UHE  $r$  no estágio  $t$ ;

$DF_{rt}^v$  é a vazão defluente no vértice  $v$  na função cota de jusante da UHE  $r$  no estágio  $t$  ( $\text{m}^3/\text{s}$ );

$NJ_{rt}^v$  é o nível de jusante no vértice  $v$  na função cota de jusante da UHE  $r$  no estágio  $t$  (m);

$\mathcal{L}j$  é o número de bits necessários para formar o código binário que identifica um segmento de reta do domínio da função cota de jusante no modelo LACC;

$x_j^l$  é a variável binária  $l$  do código  $B$  que identifica o seguimento da aproximação da função cota de jusante na UHE  $r$  no estágio  $t$ .

## APÊNDICE D – RESULTADOS VARIANDO OS PARÂMETROS DO ALGORITMO RDP

### RDP

Nesse apêndice, é avaliado o impacto de variar os parâmetros  $X$  e  $\epsilon$  do algoritmo RDP na estratégia proposta. Essas análises são importantes principalmente porque o algoritmo RDP exige um determinado tempo para ser executado em cada iteração. Na Figura D.1 é possível observar um exemplo da diferença entre os pontos obtidos pelo RDP considerando  $X$  igual a 100 e 500 pontos e  $\epsilon = 0,05$  para as UHEs 1 e 3.

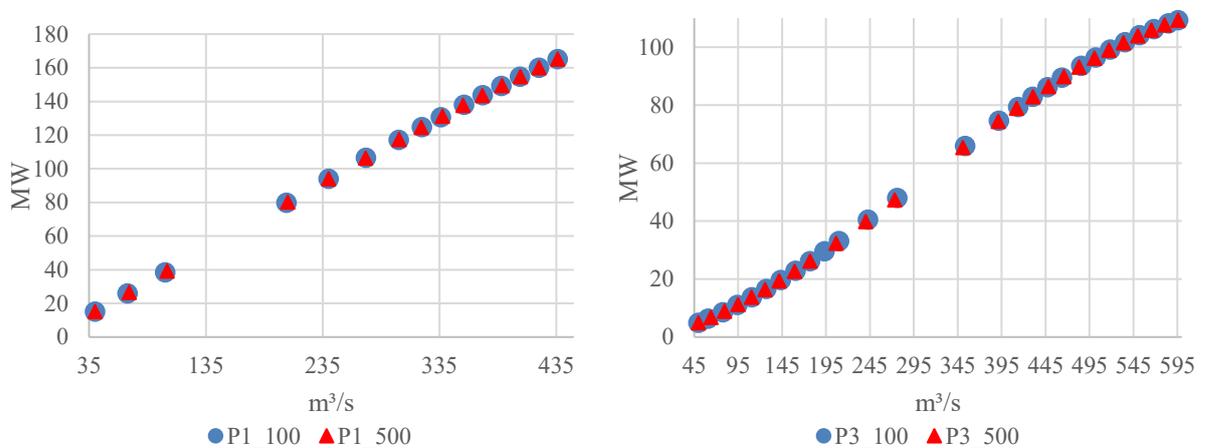


Figura D.1 – Pontos resultantes do algoritmo RDP nas UHEs 1 e 3 para  $\epsilon = 0,05$  e  $X = 100$  e 500 pontos.

Note que, apesar da grande variação na quantidade de pontos informados ao RDP ( $X$ ), os pontos resultantes do algoritmo foram semelhantes. Conclusão semelhante a essa é possível tirar ao observar essa comparação com  $\epsilon = 0,005$  (Figura D.2). Observando a Figura D.1 e a Figura D.2, percebe-se ainda a diferença na quantidade de pontos extraídos pelo RDP ao variar o parâmetro  $\epsilon$ . Por exemplo, para obter um erro máximo ( $\epsilon$ ) de 0,05 são necessários 15 pontos na UHE 1, sendo três na região convexa e 12 na região côncava. Quando o erro máximo admitido cai para 0,005, a quantidade de pontos extraídas do RDP para a UHE 1 vai a 38, sendo 11 na região convexa.

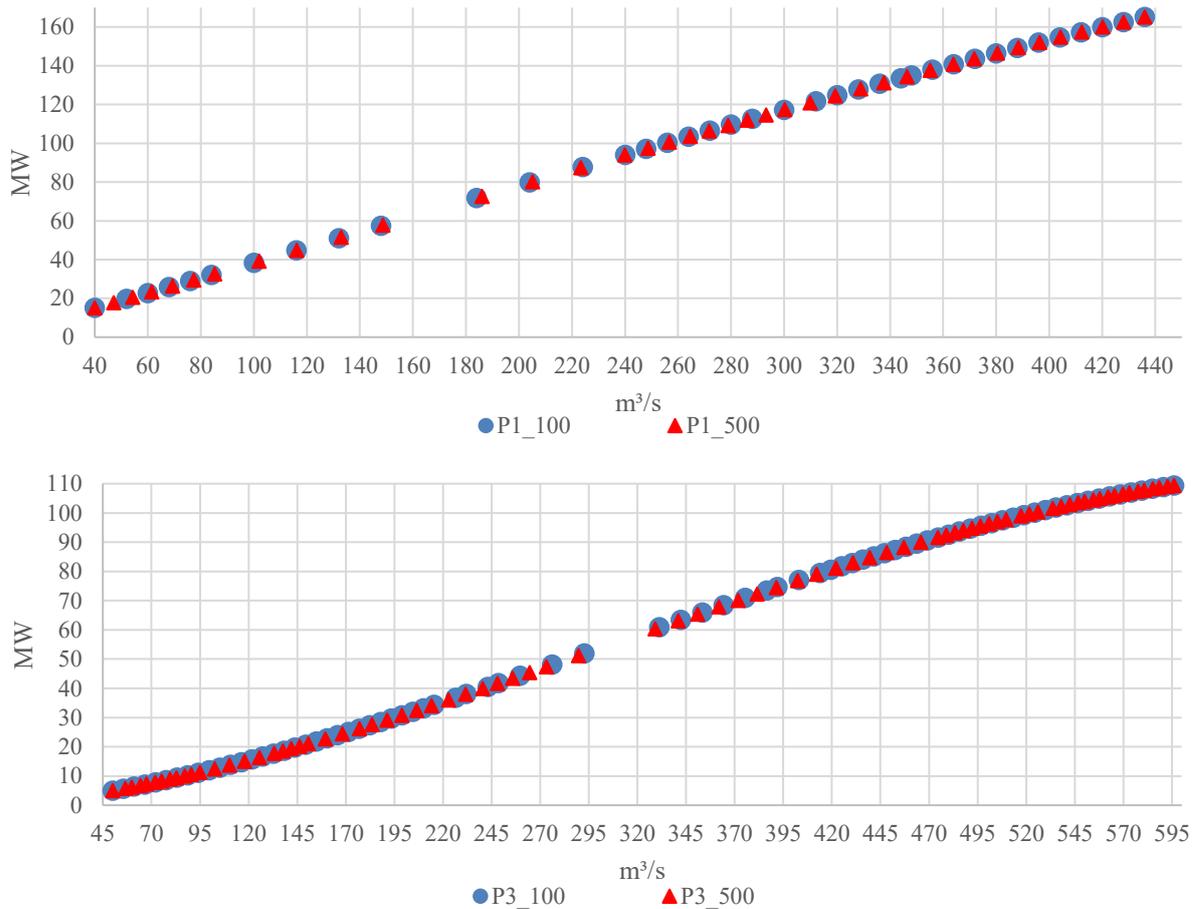


Figura D.2 – Pontos resultantes do algoritmo RDP nas UHEs 1 e 3 para  $\varepsilon = 0,005$  e  $X = 100$  e 500 pontos.

Apesar dos pontos obtidos pelo algoritmo RDP para diferentes valores de  $X$  (100 e 500) serem próximos, o tempo de processamento para a obtenção desses pontos varia bastante. Na Tabela D.1 é possível perceber que o tempo de execução do algoritmo RDP para  $X = 500$  é cerca de quatro vezes maior que o tempo para  $X = 100$ .

Tabela D.1 - Tempo de execução do algoritmo RDP em cada iteração do algoritmo proposto.

	$X = 100$	$X = 500$
$\varepsilon=0,05$	0,73 s	3,66 s
$\varepsilon=0,005$	1,07 s	4,76 s

Na Tabela D.2 é possível observar a diferença entre os principais resultados das simulações realizadas com os diferentes parâmetros de  $X$  (100 e 500) e  $\varepsilon$  (0,05 e 0,005). Os diferentes valores apresentados em  $PP_j$  representam o percentual da máxima capacidade de

vazão turbinada das UGs ( $W^{\max}$ ). Por exemplo, 25% significa que o custo de uma partida/parada de uma UG é igual a 25% da capacidade máxima de vazão turbinada desta UG. Ainda nesta Tabela, NPP representa o número de partidas e paradas resultantes da simulação e IT representa o número de iterações necessárias para a convergência do algoritmo proposto.

Tabela D.2 – Resultados de **PROP** variando os parâmetros do algoritmo RDP.

$PP_j$		$X = 500$			$X = 100$		
		0%	25%	50%	0%	25%	50%
<b>OBJ</b>	$\epsilon=0,05$	187.872	190.071	190.350	187.880	190.088	190.360
	$\epsilon=0,005$	187.836	190.021	190.315	187.838	190.021	190.314
	<b>DIF</b>	-0,019%	-0,027%	-0,019%	-0,022%	-0,036%	-0,024%
<b>NPP</b>	$\epsilon=0,05$	35	2	0	35	2	0
	$\epsilon=0,005$	35	2	0	35	2	0
	<b>DIF</b>	0	0	0	0	0	0
<b>TS</b>	$\epsilon=0,05$	21,0	49,7	28,0	8,0	64,1	24,6
	$\epsilon=0,005$	34,9	125,1	128,7	23,1	194,1	126,5
	<b>DIF</b>	+66,7%	+151,4%	+359,1%	+189,2%	+202,8%	+414,2%
<b>IT</b>	$\epsilon=0,05$	4	4	3	4	4	3
	$\epsilon=0,005$	4	3	3	5	3	3
	<b>DIF</b>	0	-1	0	+1	-1	0

Algumas conclusões podem ser destacadas nos resultados apresentados da Tabela 17. Em primeiro lugar, é possível perceber que variar  $X$  causa uma diferença insignificante em OBJ, nenhuma diferença em NPP e pouca diferença em TS e IT. Por sua vez, ao variar o valor de  $\epsilon$ , verifica-se uma pequena diferença em OBJ, da ordem de 0,02%, e nenhuma diferença em NPP. No entanto, considerar  $\epsilon = 0,005$  produz tempos computacionais até 368% maiores. Nesse contexto, entende-se que o custo-benefício é maior ao considerar  $\epsilon = 0,05$ . Note que em menos de um minuto o problema é resolvido nas simulações que consideram essa tolerância de erro.