



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Bruna Vallin Simão

**Métodos e Soluções da Equação de Klein-Gordon em Espaços-tempo de
Buraco Negro com Energia Escura**

Florianópolis

2023

Bruna Vallin Simão

**Métodos e Soluções da Equação de Klein-Gordon em Espaços-tempo de
Buraco Negro com Energia Escura**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do título de mestre em Física.
Orientador: Prof. Celso de Camargo Barros Junior, Dr.

Florianópolis

2023

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Simão, Bruna Vallin

Métodos e Soluções da Equação de Klein-Gordon em Espaços
tempo de Buraco Negro com Energia Escura / Bruna Vallin
Simão ; orientador, Celso de Camargo Barros Junior, 2023.
97 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa
Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas,
Programa de Pós-Graduação em Física, Florianópolis, 2023.

Inclui referências.

1. Física. 2. Energia escura. 3. Buracos negros. 4.
Equações de Heun. I. Junior, Celso de Camargo Barros. II.
Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós
Graduação em Física. III. Título.

Bruna Vallin Simão

**Métodos e Soluções da Equação de Klein-Gordon em Espaços-tempo de
Buraco Negro com Energia Escura**

O presente trabalho em nível de mestrado foi avaliado e aprovado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. Tiago José Nunes Da Silva, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Gabriel Neves Ferrari, Dr.
Instituto Federal de Santa Catarina

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de mestre em Física.

Coordenação do Programa de
Pós-Graduação

Prof. Celso de Camargo Barros Junior, Dr.
Orientador

Florianópolis, 2023.

AGRADECIMENTOS

Os agradecimentos deste trabalho são destinados ao Programa de Pós-Graduação em Física da UFSC, que tem agora grande influência sobre a minha formação, à FAPESC, que concedeu durante o desenvolvimento da dissertação uma bolsa de pesquisa, e ao professor Celso Barros, pela orientação e pela paciência durante o meu desenvolvimento, e o desenvolvimento dessa pesquisa.

Não menos importante, agradeço aos meus amigos e colegas do PPGFSC que estiveram presente durante esse período. Em especial, meu grande amigo Rafael Pacheco, e João Pedro.

Agradeço também meus amigos que não estão tão presentes, mas que ainda me acompanharam e compartilharam comigo um pouco de suas histórias. Em especial, meus queridos Umberto, Gustavo e Ana Carla.

RESUMO

Diversas observações independentes apontam para o universo em expansão acelerada. Para explicar tais resultados, o conceito de energia escura surge e possui na literatura diferentes interpretações. Neste trabalho, foi estudada uma métrica de buraco negro envolto por energia escura obtida pelo autor Valery V. Kiselev, em seu artigo “Quintessence and Black Holes”, como solução das equações de campo de Einstein. Dois casos particulares dessa solução foram considerados, e uma análise desses espaços foi feita, a fim de inferir algumas características sobre o resultado matemático obtido pelo autor. Posteriormente, foi escrita a equação de Klein-Gordon em espaços curvos para as estruturas analisadas, e foram encontradas soluções levando em conta diferentes parâmetros de estado para a energia escura associada ao sistema. As soluções obtidas foram definidas com uma classe de funções especiais - mais especificamente, as funções confluentes de Heun. Os resultados foram examinados com o objetivo de avaliar a influência que esse campo gravitacional, com a presença de energia escura, tem sobre a dinâmica de partículas quânticas, e considerações sobre as métricas foram testadas com essas soluções.

Palavras-chave: Energia escura. Buracos negros. Equações de Heun.

ABSTRACT

Several independent observations point to the accelerated expansion of the universe. To explain such results, the concept of dark energy appears and has different interpretations in the literature. In this work, a metric that describes a black hole spacetime surrounded by dark energy, obtained by the author Valery V. Kiselev in his article “Quintessence and Black Holes”, was studied as a solution to Einstein’s field equations. Two special cases of this solution were considered, and an analysis of their spaces was made in order to infer some characteristics about the mathematical result obtained by the author. Subsequently, the Klein-Gordon equation in curved space-times was written for both structures, and solutions were found regarding different state parameters for the dark energy component associated with the metric. The solutions were determined with a class of special functions - more specifically, the confluent Heun functions. The results were analyzed in order to evaluate the influence of this gravitational field, with the presence of dark energy, on the dynamics of quantum particles, and the previous considerations about the metrics were also tested with these solutions.

Keywords: Dark energy. Black holes. Heun’s equations.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Geometrias associadas às curvaturas da métrica FLRW em (2). No item (a), a geometria esférica para $K = +1$. Em (b), a geometria hiperbólica com $K = -1$. No item (c), o espaço euclidiano representado por $K = 0$	18
Figura 2 – Comportamento de $f(r)$ para (20), (21) e (22) no parâmetro $\omega_q = -\frac{2}{3}$ em linhas sólidas, e no parâmetro $\omega_q = -\frac{1}{3}$ em linhas tracejadas, com $M = 1$, $e = 1$ e $\lambda_q = 0.1$	27
Figura 3 – Comportamento de $f(r)$ para (20), (21) e (22) no parâmetro $\omega_q = -\frac{2}{3}$ em linhas sólidas, e no parâmetro $\omega_q = -\frac{1}{3}$ em linhas tracejadas, com $M = 1$, $e = 1$ e $\lambda_q = 0.01$	28
Figura 4 – Métrica de Schwarzschild com quintessência sob a variação de ω_q , com $M = 1$ e $\lambda_q = 0.1$	29
Figura 5 – Gráfico comparativo para métrica de Schwarzschild, em linha tracejada amarela, e Schwarzschild com quintessência, em linhas sólidas, com $M = 1$, $\lambda_q = 0.1$ e $\omega_q = -1, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}$	30
Figura 6 – Métrica de quintessência livre sob a variação de ω_q , com $M = 1$ e $\lambda_q = 0.1$	30
Figura 7 – Gráfico comparativo para métrica de Minkowski, em linha tracejada cinza, e quintessência livre, em linhas sólidas, com $M = 1$, $\lambda_q = 0.1$ e $\omega_q = -1, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}$	31
Figura 8 – Métrica de Reissner-Nordström com quintessência sob a variação de ω_q , com $M = 1$, $e = 1$ e $\lambda_q = 0.1$	32
Figura 9 – Gráfico comparativo para métrica de Reissner-Nordström, em linha tracejada preta, e Reissner-Nordström com quintessência, em linhas sólidas, com $M = 1$, $e = 1$, $\lambda_q = 0.1$ e $\omega_q = -1, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}$	33
Figura 10 – Gráfico comparativo entre os parâmetros de estado $\omega_q = -\frac{2}{3}$ e $\omega_q = -1$ para diferentes valores do parâmetro quintessencial λ_q nas métricas $(S)_{\omega_q}$ em linhas vermelhas e roxas, $(RN)_{\omega_q}$ em linhas verdes, e para $(F)_{\omega_q}$ em linhas azuis.	34
Figura 11 – Comportamento da função radial $R(r)$ em (80) com $\lambda_q = 0.01$ e $\beta < 0$. Em linha roxa, o número quântico de momento angular $\ell = 0$, em linha vermelha $\ell = 1$, em linha verde $\ell = 2$ e em linha amarela $\ell = 3$	54
Figura 12 – Comportamento da função radial $R(r)$ em (80) com $\lambda_q = 0.5$ e $\beta < 0$. Em linha roxa, o número quântico de momento angular $\ell = 0$, em linha vermelha $\ell = 1$, em linha verde $\ell = 2$ e em linha amarela $\ell = 3$	55

Figura 13 – Comportamento da função radial $R(r)$ em (80) com $\lambda_q = 1$ e $\beta < 0$. Em linha roxa, o número quântico de momento angular $\ell = 0$, em linha vermelha $\ell = 1$, em linha verde $\ell = 2$ e em linha amarela $\ell = 3$	55
Figura 14 – Gráfico comparativo da função $R(r)$ em (80) com $\beta < 0$ para os parâmetros de quintessência $\lambda_q \in \{0.01, 0.1, 0.5, 1\}$	56
Figura 15 – Gráfico comparativo de $R(r)$ em (80) com $\beta < 0$ para os parâmetros de quintessência $\lambda_q = 0.01$ e $\lambda_q = 1$ em escala vertical ampliada.	56
Figura 16 – Comportamento de $R(r)$ para (93) com $\lambda_q = 0.01$ e $\beta < 0$. Em linha roxa, o número quântico de momento angular $\ell = 0$, em linha vermelha $\ell = 1$, em linha verde $\ell = 2$ e em linha amarela $\ell = 3$	57
Figura 17 – Comportamento de $R(r)$ para (93) com $\lambda_q = 0.7$ e $\beta < 0$. Em linha roxa, o número quântico de momento angular $\ell = 0$, em linha vermelha $\ell = 1$, em linha verde $\ell = 2$ e em linha amarela $\ell = 3$	57
Figura 18 – Comportamento de $R(r)$ para (93) com $\lambda_q = 0.99$ e $\beta < 0$. Em linha roxa, o número quântico de momento angular $\ell = 0$, em linha vermelha $\ell = 1$, em linha verde $\ell = 2$ e em linha amarela $\ell = 3$	58
Figura 19 – Gráfico comparativo de $R(r)$ em (93) com $\beta < 0$ para os parâmetros quintessenciais $\lambda_q \in \{0.01, 0.1, 0.5, 0.7, 0.85, 0.99\}$	59
Figura 20 – Comportamento da função $f(r)$ nas métricas $(S)_{\omega_q}$, $(S)_{Pure}$ e $(S)_{Point-like}$ considerando $M = 1$ e $\lambda_q = 0.05$. Em linha sólidas, $(S)_{\omega_q}$ com $\omega_q = -\frac{1}{3}$ em laranja, $\omega_q = -\frac{2}{3}$ em vermelho, e $\omega_q = -1$ em roxo. $(S)_{Pure}$ e $(S)_{Point-like}$ respectivamente em linhas tracejadas amarela e rosa.	71

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	15
2	ESPAÇOS-TEMPO DE BURACOS NEGROS COM ENERGIA ESCURA	23
2.1	A MÉTRICA DE KISELEV	23
2.2	ANÁLISES E CASOS PARTICULARES	26
3	MECÂNICA QUÂNTICA EM ESPAÇOS CURVOS	37
3.1	EQUAÇÃO DE KLEIN-GORDON EM ESPAÇO-TEMPO CURVO	37
3.2	EQUAÇÃO DE KLEIN-GORDON PARA MÉTRICAS ESTÁTICAS E ESFERICAMENTE SIMÉTRICAS	39
3.2.1	A equação radial	41
3.2.2	Limite de espaço plano	44
4	SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE KLEIN-GORDON EM ESPAÇOS-TEMPO TIPO KISELEV	47
4.1	KISELEV TIPO I: QUINTESSÊNCIA LIVRE	47
4.1.1	Parâmetro $\omega_q = -\frac{2}{3}$	47
4.1.2	Parâmetro $\omega_q = -\frac{1}{3}$	51
4.1.3	Análises parciais	53
4.2	KISELEV TIPO II: SCHWARZSCHILD COM QUINTESSÊNCIA	60
4.2.1	Parâmetro $\omega_q = -\frac{1}{3}$	60
4.2.2	Parâmetro $\omega_q = -\frac{2}{3}$	63
4.2.3	Métrica de Schwarzschild	64
4.2.4	Análises parciais	66
5	CONCLUSÕES	73
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	79
	APÊNDICE A – EQUAÇÕES DE HEUN	89
A.1	EQUAÇÃO CONFLUENTE DE HEUN (ECH)	89
A.1.1	Soluções	90
A.2	EQUAÇÃO BICONFLUENTE DE HEUN (EBH)	95
A.3	EQUAÇÃO DUPLAMENTE CONFLUENTE DE HEUN (EDCH)	96

1 INTRODUÇÃO

Durante os últimos anos, grande parte da física teórica tem se desenvolvido dentro de um cenário de intensa exploração, e busca por um modelo que comporte e explique a formação do universo. O questionamento que impulsiona essas investigações, é claro, existe há séculos, e sempre esteve presente na história da física. Desde Aristóteles até à Mecânica Newtoniana (ÉVORA, 2005), (EVANGELISTA, 2011), encontrar uma maneira para explicar o movimento dos corpos, e definir o ambiente em que essa dinâmica se expressa, foi uma questão fundamental e nos conduziu, através de uma das grandes quebras de paradigma na história da ciência, à atual teoria mais fundamental de gravitação - a Relatividade Geral.

Em 1905, a comunidade científica foi apresentada ao caso especial de Relatividade, proposto por Einstein em (EINSTEIN, 1905). A teoria, em princípio, poderia ser anunciada como uma teoria de invariância, uma vez que o seu objetivo primário era garantir a preservação das leis da física em qualquer sistema inercial. Contudo, o modelo tem consequências diretas não muito intuitivas, como a contração espacial e a dilatação temporal, modificando dramaticamente os conceitos de espaço e tempo, que não mais são representados isoladamente do ponto de vista geométrico, mas são uma única construção contínua: o espaço-tempo, (PENROSE, 2005).

Posteriormente, com a concepção de que o espaço e o tempo são partes de uma mesma estrutura, a teoria foi reelaborada matematicamente por Hermann Minkowski (MINKOWSKI, 1909), (MINKOWSKI; PETKOV, 2013), e nos encontramos com uma formulação que fornece, por meio de sua geometria, uma interpretação física para as diversas consequências da teoria da relatividade restrita. Essa nova construção, entretanto, não foi suficiente para incorporação de efeitos gravitacionais, motivando uma transformação ainda mais radical dentro da Mecânica.

De acordo com o princípio de relatividade, já postulado na Teoria Especial, as leis da física devem ser as mesmas independente do referencial inercial adotado. Não somente, a velocidade da luz é um limite que garante a estrutura causal dentro desse modelo. Em (EINSTEIN, 1916), Einstein notou que esse princípio deveria comportar uma generalização que diz respeito à gravidade, uma vez que todos os corpos em queda livre sofrem o mesmo efeito gravitacional - definindo, portanto, o princípio de equivalência (WALD, 1984) - onde as leis da física não são apenas válidas para qualquer referencial inercial mas, na verdade, para qualquer sistema em queda livre, sendo este indistinguível de um referencial acelerado.

A influência do campo gravitacional se mostrou, ainda, uma consequência direta da estrutura que define um sistema. Corpos em queda livre, como sabemos, então sendo

atraídos por outros corpos, massivos o suficiente para dinamizar essa interação, que não ocorre diretamente, por uma atuação instantânea de um corpo sobre o outro, mas justamente pelo que há entre eles: o espaço-tempo. Assim, a presença das massas nessa estrutura é capaz de modificá-la, e alterar o movimento dos corpos. Essa relação é explícita nas equações de campo de Einstein, representadas por

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \quad (1)$$

O lado esquerdo da equação, definido com o tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$, escalar de Ricci R , o tensor métrico $g_{\mu\nu}$ e o fator Λ , carrega toda informação sobre a geometria do nosso sistema, e deve ser equivalente à contribuição de matéria desse espaço - contida pelo tensor de energia-momento $T_{\mu\nu}$, e mediada pela constante de gravitação G e a velocidade da luz c . Dessa forma, uma alteração na fonte do sistema deve provocar uma modificação na estrutura do seu espaço-tempo. Contrariamente, uma mudança na estrutura deve afetar a relação de energia da fonte e, como consequência, sua dinâmica.

Um fato notável ainda é que a forma descrita pela equação (1) tem presente o fator Λ , que é denominado como constante cosmológica. Originalmente, a constante Λ foi proposta como uma contribuição repulsiva para o sistema, capaz de equilibrar o campo gravitacional que, como entendemos, é um campo atrativo. Dessa forma, as equações de campo seriam compatíveis com uma descrição de universo estático, (EINSTEIN, 1917). Entretanto, com as observações de recessão das galáxias feitas por Hubble (HUBBLE, 1929), foi possível constatar que o universo não é estático, mas está, na verdade, em expansão. Assim, a hipótese da constante cosmológica como um fator repulsivo, a fim de neutralizar a atração gravitacional para manter o universo estático, foi consequentemente descartada, (LIDDLE, 2015).

Apesar de a constante cosmológica ter sido desconsiderada como uma componente desaceleradora das equações de campo, de acordo como previsto por Einstein em (EINSTEIN, 1917), a verificação de que o universo está se expandindo preservou, em certo sentido, parte da sua essência: justificar a dinâmica do universo. A expansão determinada por Hubble provocou, durante os anos seguintes, intensas investigações teóricas sobre a causa do distanciamento das galáxias, e os questionamentos acerca da existência dessa constante, como uma expressão da expansão, foram mantidos durante décadas de pesquisa. A Relatividade Geral introduziu dessa forma, com o apoio direto da física observacional e experimental, não apenas uma nova teoria de espaço-tempo e gravitação, mas a cosmologia moderna como entendemos hoje, dando origem a uma vasta área de pesquisa (RINDLER, 2001).

Finalmente, nos últimos anos do século passado, com o objetivo de investigar a

expansão do universo, dois grandes projetos observacionais apresentaram, de forma independente, resultados que evidenciaram novamente a expansão, mas dessa vez de forma acelerada (RIESS *et al.*, 1998), (PERLMUTTER *et al.*, 1999). Ambas as colaborações analisaram supernovas do tipo Ia (SNe Ia) que, apesar de raras, funcionam como velas-padrão, e por meio de suas luminosidades aparentes, e seus desvios no infravermelho, permitem inferir suas distâncias de um observador na Terra, (AMENDOLA; TSUJIKAWA, S., 2010). Em (RIESS *et al.*, 1998), os autores concluíram que a distância das SNe Ia avaliadas eram de 10% a 15% maiores do que o esperado para um universo com constante cosmológica $\Lambda = 0$. Simultaneamente, os autores em (PERLMUTTER *et al.*, 1999) indicaram a mesma inconsistência, uma vez que, caso o universo fosse estático ou desacelerado, a distância medida deveria ser consideravelmente menor do que o indicado observacionalmente.

Particularmente, os autores em (PERLMUTTER *et al.*, 1999) concluíram que uma espécie de componente exótica deve possuir contribuição na densidade total de energia do universo. Entretanto, considerando que essa componente seja a constante Λ , dois grandes problemas emergem dentro da cosmologia e na sua interface com a física de partículas. Em primeiro lugar, com relação ao valor da densidade de energia, que é significativamente menor que o previsto pela física de partículas (COPELAND; SAMI; TSUJIKAWA, 2006). Como explicitado em (AMENDOLA; TSUJIKAWA, S., 2010), tal divergência é da ordem de 10^{121} , e essa implicação é também conhecida como o problema de ajuste fino. Em segundo, surge também a dificuldade sobre a relação entre a contribuição da densidade de energia, associada à constante cosmológica, e a densidade de matéria de universo. Na medida que a densidade de matéria decai enquanto o universo expande, a densidade de energia da contribuição Λ permanece constante. Contudo, ambas devem possuir hoje a mesma ordem de magnitude (VELTEN; MARTTENS; ZIMDAHL, 2014), delineando o segundo problema teórico: o problema da coincidência.

Além das análises obtidas acerca das SNe Ia, outros projetos alcançaram resultados compatíveis, dentre eles as observações de anisotropia nas temperaturas da radiação cósmica de fundo (CMB), como em (BERNARDIS *et al.*, 2000), (BALBI *et al.*, 2000) e (SPERGEL *et al.*, 2003), e também as detecções de oscilações acústicas dos bárions, como pontuado pelos autores em (EISENSTEIN *et al.*, 2005) e (AMENDOLA; TSUJIKAWA, S., 2010).

Dessa forma, diversas pesquisas subsequentes se propuseram a investigar teoricamente essa componente de energia. Diferente do caso onde a constante cosmológica, como descrita por Einstein, seria apenas capaz de anular o campo gravitacional atrativo, a motivação acerca dessas análises é de que esse fator deve ser capaz de superá-lo, conduzindo à

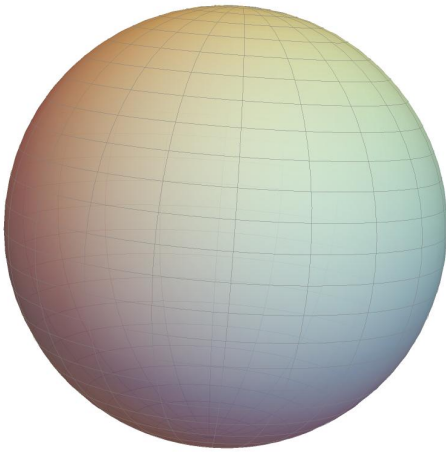
expansão acelerada do universo - esse agente responsável é o que entendemos, hoje, como energia escura.

Assim, de acordo com o modelo padrão de cosmologia, descrito pela métrica de Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker (FLRW), consideramos um universo homogêneo e isotrópico, representado matematicamente pela forma

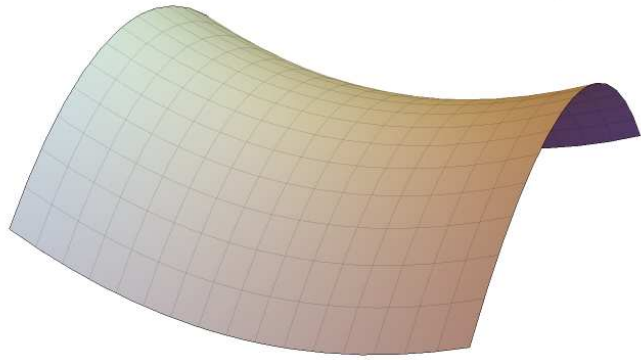
$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right), \quad (2)$$

onde K é a curvatura do espaço, e $a(t)$ é o fator escala associado ao tempo cósmico t .

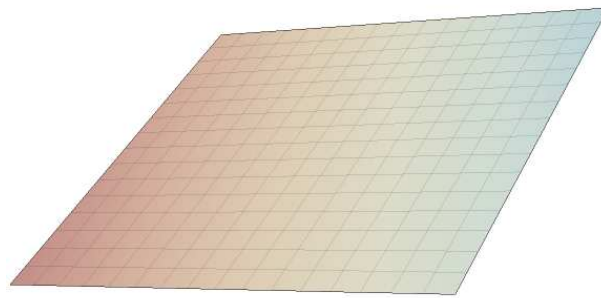
A componente de curvatura em (2) determina a geometria do universo descrito, e pode assumir três valores: $K \in \{-1, 0, +1\}$. Na Figura 1, é possível observar a representação de cada um deles.



(a) $K = +1$ | Geometria esférica (fechado)



(b) $K = -1$ | Geometria hiperbólica (aberto)



(c) $K = 0$ | Geometria euclidiana (plano)

Figura 1 – Geometrias associadas às curvaturas da métrica FLRW em (2). No item (a), a geometria esférica para $K = +1$. Em (b), a geometria hiperbólica com $K = -1$. No item (c), o espaço euclidiano representado por $K = 0$.

De modo equivalente, é possível fazer referência às diferentes geometrias da Figura 1 como universo fechado, aberto ou plano. No primeiro caso (item (a)), a curvatura é $K = +1$ e corresponde a um espaço de geometria esférica - implicando que duas curvas paralelas devem se cruzar em algum ponto da superfície. Tratando-se de um universo em expansão,

isso significa que essa evolução não é infinita e deve se converter em um processo de contração, diferente do que ocorre nas outras geometrias possíveis.

Para o caso do item (b), a curvatura $K = -1$ está associada à geometria hiperbólica onde, indubitavelmente, duas linhas paralelas devem divergir ao longo da superfície. No item (c) correspondente à geometria euclidiana, o formato do espaço é dado com $K = 0$, e linhas paralelas permanecem como tais ao longo do plano. Em ambos os casos, as superfícies não são limitadas e, considerando que o universo está aumentando, a expansão deve continuar até o infinito.

Para a contribuição de uma componente desconhecida de energia relacionada à matéria contida no universo, a estrutura FLRW é descrita pela equação (1) com a excessão do termo original Λ , e com a influência do fator cósmico de expansão determinada a partir das propriedades do tensor de energia-momento. A consequência dinâmica derivada desse modelo é de que, se o universo está em expansão, a aceleração do sistema associada à energia escura deve ser obrigatoriamente positiva (AMENDOLA; TSUJIKAWA, S., 2010), e representada pela equação

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p). \quad (3)$$

Assim, supondo uma componente de energia escura descrita pela equação de estado com a forma $p = \omega\rho$, a equação acima deve produzir o limite para o parâmetro de estado ω que é, portanto,

$$\omega < -\frac{1}{3}. \quad (4)$$

O resultado acima nos mostra, junto com a equação de estado, que essa matéria exótica deve possuir uma pressão negativa. Essa implicação, apesar de contraintuitiva, é justamente a consequência necessária para que essa componente seja capaz de acelerar o universo, operando no sentido contrário à força gravitacional.

Ainda, apesar da restrição superior definida pela equação (4), o modelo teórico não impõe um limite inferior para o valor que o parâmetro de estado de energia escura pode assumir. Na literatura, podemos encontrar modelos com diferentes valores para ω_{DE} e, particularmente, o caso da constante cosmológica é atribuído a $\omega_{DE} = -1$, uma vez que a densidade de energia ρ para este parâmetro seria constante - sendo esse fato consequência direta da métrica FLRW.

Entre essas teorias, o modelo de *quintessência* tem grande destaque, pela sua relação direta com a física de partículas (AMENDOLA; TSUJIKAWA, S., 2010). Essa conjectura descreve a energia escura com um modelo de modificação da matéria, por meio da hipótese um campo escalar associado a um potencial $V(\phi)$, responsável pela aceleração do universo, (TSUJIKAWA, Shinji, 2013). O termo “quintessência” foi atribuído à energia

escura pelo seu caráter desconhecido mas, ainda, fundamental na composição do universo. As primeiras propostas sobre esse modelo foram publicadas também no final do século passado, e são geralmente atribuídas aos autores Paul J. Steinhardt, Robert R. Caldwell e Rahul Dave, como pode ser visto em (CALDWELL; DAVE; STEINHARDT, 1998), (STEINHARDT; WANG, L.; ZLATEV, 1999), (WANG, L. *et al.*, 2000) e (BAHCALL *et al.*, 1999).

Nesta dissertação, iremos avaliar como sistemas quânticos são afetados por uma estrutura que comporta a existência de energia escura, e consideramos a métrica descrita pelo autor Valery V. Kiselev (KISELEV, 2003), como uma solução das equações de campo, para um espaço-tempo de buraco negro com quintessência. Entretanto, devemos pontuar que a terminologia utilizada por Kiselev diverge do que é normalmente encontrado na literatura. Diferente do significado atribuído acima, “quintessência” para Kiselev é uma componente exótica de matéria, com propriedades intrínsecas de energia escura, mas que não está submetida às variações de um potencial escalar. O parâmetro de estado dessa fonte deve ser mantido constante e restrito a um intervalo particular.

Nossa metodologia consiste na análise do espaço-tempo definido pelo autor, levando em consideração suas limitações e consequências, e na avaliação da influência que o campo gravitacional dessa métrica pode ter sobre a equação de Klein-Gordon, ou seja, sobre a dinâmica de partículas *spin* = 0. A nossa pesquisa é majoritariamente exploratória no que diz respeito a sistemas de energia escura, e pretendemos, ao final do desenvolvimento, poder descrever o funcionamento dessa estrutura em particular, avaliando-a de acordo com a formulação da mecânica quântica em espaços-curvos.

Dito isso, consideramos regiões próximas a buracos negros e estudamos, através da equação de Klein-Gordon em espaços curvos, a dinâmica de partículas quânticas neste cenário. Avaliamos os efeitos da variação do parâmetro de estado da métrica, e obtivemos soluções analíticas para as equações descritas. Com o intuito de aplicar futuramente as soluções encontradas, e estudar efeitos quânticos como radiação Hawking, examinamos as soluções nos limites dos sistemas de coordenadas, sendo eles as regiões do horizonte de eventos e do infinito.

Portanto, inicialmente, trataremos no Capítulo 2 da métrica descrita por Kiselev (KISELEV, 2003), como um espaço-tempo de buraco negro com quintessência, levando em consideração a energia escura definida no parâmetro de estado $-1 < \omega_q < -\frac{1}{3}$. Na primeira seção será apresentada essa estrutura e, em seguida, uma análise da métrica será realizada para dois casos particulares, sendo eles a métrica de quintessência livre, e Schwarzschild com quintessência.

No terceiro capítulo, tendo em mente o objetivo de estudar como esse campo gravitacional, produzido pela métrica descrita no Capítulo 2, afeta a dinâmica de partículas $spin = 0$, estudaremos a equação de Klein-Gordon para métricas estáticas e esfericamente simétricas, e verificaremos que esse tipo de equação se relaciona diretamente com uma classe de funções especiais e suas respectivas equações - as equações de Heun. Um caso particular, o da função confluyente de Heun, será avaliado com detalhes, e terá grande utilidade no desenvolvimento do capítulo seguinte. Apresentaremos ainda dois outros casos de confluência - biconfluência e confluência dupla - que se relacionam com as equações que pretendemos resolver.

No Capítulo 4, escreveremos a equação de Klein-Gordon para casos particulares da métrica de Kiselev, e demonstraremos as soluções dessa equação, que serão obtidas para diferentes valores do parâmetro de estado. Os resultados serão avaliados ao fim de cada seção dentro dos limites do problema elaborado.

Por fim, apresentaremos no último capítulo do trabalho nossas conclusões, bem como nossas considerações gerais relacionadas às análises da métrica, sua influência sobre as soluções obtidas, e as possibilidades de pesquisa que esse projeto desencadeou.

2 ESPAÇOS-TEMPO DE BURACOS NEGROS COM ENERGIA ESCURA

Como foi visto no Capítulo 1, diversas observações independentes apresentaram resultados que apontam para o universo expandindo de maneira acelerada. Uma das questões emergentes neste cenário é, não somente como isso estaria acontecendo mas, também, o que é responsável por tal aceleração. Assim, o conceito de quintessência como uma componente desconhecida, e que afetaria a densidade total de energia de sistemas cosmológicos, aparece como uma das hipóteses para o que entendemos como energia escura.

Dentre as possibilidades teóricas para investigar esse tipo de sistema, espaços-tempo de buracos negros parecem ter bastante relevância e, nesse sentido, consideramos a métrica obtida por Kiselev em (KISELEV, 2003), sendo este o trabalho de base desta dissertação. Assim, nesta seção, nos ateremos em apresentar a solução obtida pelo autor, investigando diferentes possibilidades para o parâmetro de estado, com o objetivo de utilizar essas análises nas seções seguintes para estudar a dinâmica de partículas quânticas sob a influência do campo gravitacional desse espaço.

2.1 A MÉTRICA DE KISELEV

Como mencionamos na introdução desse capítulo, no artigo que utilizamos como base para esse trabalho, é apresentada uma solução estática e esfericamente simétrica para as equações de campo de Einstein, ou seja, uma métrica que satisfaça o intervalo parametrizado por $\nu(r)$ e $\lambda(r)$ e expresso como

$$ds^2 = e^{\nu(r)} dt^2 - e^{\lambda(r)} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2. \quad (5)$$

Iremos nesta seção mostrar os pontos principais da construção da métrica obtida pelo autor, e ressaltamos que, ao longo desse desenvolvimento, usaremos o mesmo sistema de unidades adotado por ele, onde a constante gravitacional é relacionada por $4\pi G = 1$ e a velocidade da luz é $c = 1$.

Assim, tendo em mente o objetivo de encontrar soluções para as equações de campo, devemos primeiro estabelecer como a fonte de energia quintessencial afeta o sistema. Para isso, podemos considerar um tensor de energia-momento apropriado que, neste caso, é descrito pela forma geral

$$T_t^t = \rho_q(r), \quad T_i^j = \rho_q(r) \alpha \left[-(1 + 3B) \frac{r_i r^j}{r_n r^n} + B \delta_i^j \right], \quad (6)$$

onde B é um parâmetro livre relativo à estrutura interna da quintessência, e $\rho_q(r)$ a sua densidade de energia.

Considerando $\langle r_i r^j \rangle = \frac{1}{3} \delta_i^j r_n r^n$, a média isotrópica sobre o tensor de energia-momento definido acima, como pontuado em (KISELEV, 2003), deve produzir a equação de estado para quintessência, uma vez que

$$\langle T_i^j \rangle = -\rho_q(r) \frac{\alpha}{3} \delta_i^j = -p_q(r) \delta_i^j. \quad (7)$$

Dessa forma, a equação de estado resultante é

$$p_q = \omega_q \rho_q, \quad (8)$$

onde o parâmetro ω_q acima foi definido através de α por $\alpha = 3\omega_q$.

Por outro lado, se consideramos o tensor métrico obtido do intervalo definido na equação (5), podemos expressar os coeficientes não nulos da métrica, o tensor de Ricci e o escalar de Ricci. Com isso, podemos escrever as equações de campo de Einstein como

$$\begin{aligned} 2T_t^t &= -e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r} \right) + \frac{1}{r^2}, \\ 2T_r^r &= -e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{\nu'}{r} \right) + \frac{1}{r^2}, \\ 2T_\theta^\theta &= -\frac{1}{2} e^{-\lambda} \left(\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} + \frac{\nu' - \lambda'}{r} - \frac{\nu' \lambda'}{2} \right), \\ 2T_\phi^\phi &= -\frac{1}{2} e^{-\lambda} \left(\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} + \frac{\nu' - \lambda'}{r} - \frac{\nu' \lambda'}{2} \right). \end{aligned} \quad (9)$$

A parte crucial do desenvolvimento feito pelo Kiselev se apresenta agora. De acordo com o autor, podemos estabelecer duas condições sobre essa formulação - e são elas as condições de *linearidade* e *aditividade*. Ambas são derivadas da imposição que ele coloca sobre as componentes o tensor de energia-momento, que é

$$T_t^t = T_r^r. \quad (10)$$

Essa igualdade deve implicar na condição de aditividade, definida a partir da relação acima como

$$\lambda(r) + \nu(r) = 0. \quad (11)$$

Assim, se definirmos uma função $f(r)$ tal que

$$\lambda(r) = -\ln(1 + f(r)), \quad (12)$$

determinamos a segunda condição, de lineariedade, pelo fato de que as equações de campo (9) se tornam equações diferenciais lineares em f , como

$$\begin{aligned} T_t^t = T_r^r &= -\frac{1}{2r^2} (f + r f'), \\ T_\theta^\theta = T_\phi^\phi &= -\frac{1}{4r} (2f' + r f''). \end{aligned} \quad (13)$$

Comparando os resultados acima na expressão do geral do tensor para quintessência, podemos fixar o parâmetro $B = -\frac{3\omega_q+1}{6\omega_q}$, e então escrever

$$\begin{aligned} T_t^t &= T_r^r = \rho_q, \\ T_\theta^\theta &= T_\phi^\phi = -\frac{1}{2}(3\omega_q + 1)\rho_q. \end{aligned} \quad (14)$$

Observando as equações (13) e (14), fica claro que $f(r)$ deve satisfazer

$$r^2 f''(r) + 3(1 + \omega_q)rf'(r) + (3\omega_q + 1)f(r) = 0. \quad (15)$$

Duas soluções possíveis da equação acima são

$$f_q = \frac{\lambda_q}{r^{3\omega_q+1}}, \quad (16)$$

e

$$f_{BH} = -\frac{r_g}{r}, \quad (17)$$

em que a primeira correspondente à contribuição de quintessência ao sistema, a segunda a um buraco negro pontual de Schwarzschild, r_g o raio de Schwarzschild e λ_q um fator de normalização. Entretanto, outras soluções são igualmente válidas, desde que satisfaçam a equação para $f(r)$ dada acima. Também, pontuamos que pelo princípio da superposição para equações diferenciais lineares, poderíamos escrever uma solução como uma combinação linear de soluções particulares.

Com atenção para o caso da quintessência, podemos ver que a função f_q definida acima, quando escrita na expressão do tensor energia-momento dada pela equação (13), produz juntamente com a equação (14) uma relação para densidade de energia quintessencial, como

$$\rho_q = -\frac{\lambda_q}{2} \frac{3\omega_q}{r^{3(\omega_q+1)}}. \quad (18)$$

Aqui, o sinal negativo na densidade vem da comparação entre a equação acima e a equação de estado (8). No caso de uma pressão negativa, como deve ser, a densidade de energia deve ser positiva (pois $\omega_q < 0$). Definimos assim $\lambda_q > 0$ de modo que $\rho_q > 0$ sempre para quintessência.

Generalizando os resultados obtidos, é possível construir uma expressão para a métrica considerando uma série de soluções possíveis de (15), que é dada como

$$f(r) = \left[1 - \frac{r_g}{r} - \sum_n \left(\frac{r_n}{r} \right)^{3\omega_n+1} \right]. \quad (19)$$

onde $r_g = 2M$ (M sendo a massa do buraco negro), r_n constante de normalização dimensional, e ω_n os parâmetros de estado para as n fontes possíveis de contribuição da métrica.

A equação obtida acima representa, portanto, a métrica como uma combinação linear de soluções possíveis para as equações de campo.

Na literatura, encontramos diferentes aplicações e estudos relacionados à métrica descrita nessa seção, como os apresentados em (CHEN, S.; WANG, B.; SU, 2008), (WEI; CHU, 2011), (FERNANDO, 2012), (THOMAS; SALEH; KOFANE, 2012), (ESLAMZADEH; NOZARI, 2020), (SHAO *et al.*, 2022), (MATYJASEK; TELECKA, 2023), (WANG, R.; GAO; CHEN, H., 2023) e (SANTOS *et al.*, 2023). A seguir, apresentaremos a nossa análise e, posteriormente, a pesquisa iniciada a partir da influência dessa métrica sobre sistemas quânticos.

2.2 ANÁLISES E CASOS PARTICULARES

Com a métrica formulada na seção anterior, podemos descrever algumas soluções já conhecidas e bastante estudadas, como a solução de Schwarzschild (WALD, 1984), e a solução de buraco negro com carga de Reissner-Nordström (ADLER; BAZIN; SCHIFFER, 1975), onde não há qualquer densidade de energia de quintessência. Podemos também estender essas soluções para o caso em que essa densidade é diferente de zero, e estudar ambos estes sistemas na presença de energia escura, como proposto por Kiselev. Para o caso de Reissner-Nordström com quintessência $(RN)_{\omega_q}$, considerando o sistema com uma carga e , a equação (19) é levada a

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{e^2}{r^2} - \frac{\lambda_q}{r^{3\omega_q+1}}. \quad (20)$$

Certamente, se não há carga, recuperamos a solução de Schwarzschild com quintessência $(S)_{\omega_q}$, e ainda, se $M = 0$, obtemos uma solução para quintessência livre $(F)_{\omega_q}$. Ambas, é claro, poderiam ser obtidas diretamente da expressão (19), e são representadas respectivamente por

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} - \frac{\lambda_q}{r^{3\omega_q+1}}, \quad (21)$$

$$f(r) = 1 - \frac{\lambda_q}{r^{3\omega_q+1}}. \quad (22)$$

O comportamento das expressões acima pode ser observado a seguir, onde fixamos valores para M e λ_q a fim de descrever graficamente a evolução de f com relação à variável r . Nas Figuras 2 e 3, vemos em linhas tracejadas as curvas correspondentes ao parâmetro $-\frac{1}{3}$, e em linhas sólidas ao parâmetro $-\frac{2}{3}$. Embora saibamos que $-\frac{1}{3}$ não faz parte do intervalo possível, iremos utilizá-lo daqui por diante como caso limite, com a intenção de avaliar a região mais próxima permitida.

Como foi observado no Capítulo 1, o parâmetro de estado é obrigatoriamente $\omega_q < -\frac{1}{3}$, o que implica diretamente em $3\omega_q + 1 < 0$. Assim, o termo quintessencial das

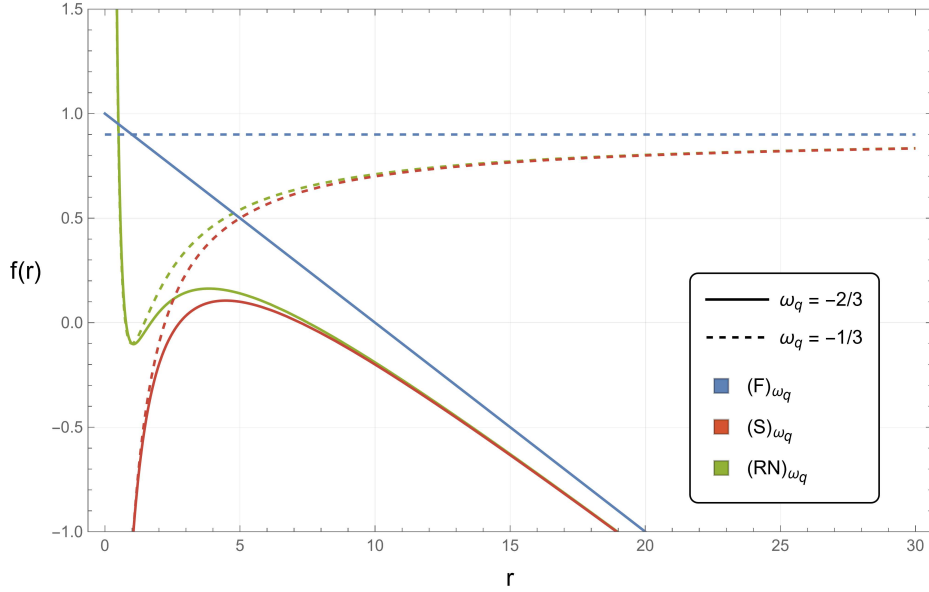


Figura 2 – Comportamento de $f(r)$ para (20), (21) e (22) no parâmetro $\omega_q = -\frac{2}{3}$ em linhas sólidas, e no parâmetro $\omega_q = -\frac{1}{3}$ em linhas tracejadas, com $M = 1$, $e = 1$ e $\lambda_q = 0.1$.

métricas é sempre

$$\frac{\lambda_q}{r^{3\omega_q+1}} = \lambda_q r^\kappa, \quad (23)$$

com $\kappa > 0$.

Essa menção é particularmente importante aqui, porque deixa clara a relação da métrica com a contribuição de quintessência. Quando r é muito grande, as métricas tendem a coincidir para cada parâmetro definido - levando $f(r) \rightarrow -\infty$ no caso do parâmetro $-\frac{2}{3}$, e ao limite definido pela expressão (22) no caso de $\omega_q = -\frac{1}{3}$. Ou seja, quando $r \rightarrow \infty$, tanto a contribuição de massa do buraco quanto de carga tornam-se desprezíveis, de modo que o termo dominante da equação é relativo à quintessência.

Por outro lado, quando r vai a zero, conseguimos ver pela equação (23) que é possível recuperar as métricas padrões - com a exceção de que, no parâmetro $-\frac{1}{3}$, há uma discrepância causada pela falta da relação em r na métrica. Nesse caso, a única forma de recuperar as soluções conhecidas é se λ_q for zero. Essa diferença pode ser observada na Figura 2 com bastante clareza.

O parâmetro λ_q em questão, como visto anteriormente, está relacionado à função quintessencial obtida e é, a princípio, arbitrário. Qualquer que fosse, portanto, o valor de λ_q , a solução das equações de campo se manteriam válidas. Entretanto, como mostraremos a seguir, a depender do valor que λ_q assumir, a métrica apresenta comportamentos bastante diferentes.

Constatamos acima que, exceto pelo limite superior do parâmetro de estado, deve

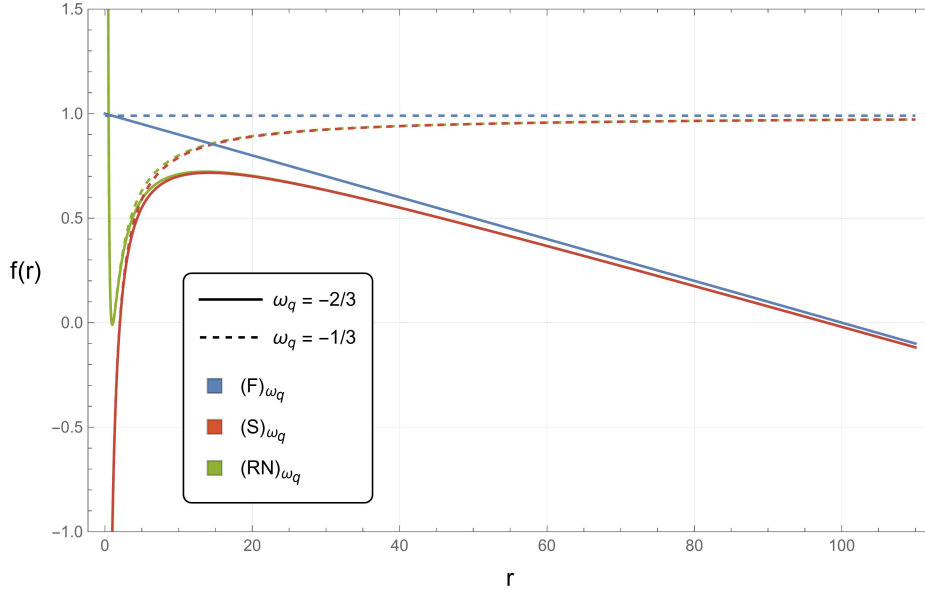


Figura 3 – Comportamento de $f(r)$ para (20), (21) e (22) no parâmetro $\omega_q = -\frac{2}{3}$ em linhas sólidas, e no parâmetro $\omega_q = -\frac{1}{3}$ em linhas tracejadas, com $M = 1$, $e = 1$ e $\lambda_q = 0.01$.

ser possível recuperar soluções onde não há quintessência. De fato, para parâmetros de estado diferentes de $-\frac{1}{3}$, o termo $\lambda_q r^\kappa$ deve estar sempre presente, de modo que podemos imaginar, no limite $r \rightarrow 0$, que o sistema descrito por (21) deve se comportar como um buraco negro de Schwarzschild comum. O mesmo deve acontecer para o caso de $(F)\omega_q$, que se comportaria como um espaço plano, independentemente do valor λ_q . Porém, quando supomos também ω_q num limite muito próximo de $-\frac{1}{3}$, κ deve ir a zero, provocando uma indeterminação no termo r^κ . Podemos assumir, por ora, que nesses limites $r^\kappa \rightarrow 1$, priorizando o limite do expoente, mas é de extrema importância ressaltar esse fato porque, sendo esse o caso, devemos observar perto de $r = 0$ uma alteração no valor da métrica que deve ser causada justamente pelo valor de λ_q .

Outro ponto importante diz respeito aos horizontes. No caso $(S)\omega_q$, há o surgimento de dois horizontes diferentes, e que se alteram de acordo com o valor de λ_q . Ao passo que o parâmetro λ_q diminui, ele provoca uma espécie de levantamento da curva, e eles se apresentam mais distantes entre si, de modo que, para cada parâmetro definido, essa constante é capaz de alterar a formação dos horizontes conforme seu valor se aproxima, ou distancia, de 0. Por um lado, isso se mostra bastante coerente uma vez que, se $\lambda_q \rightarrow 0$, a contribuição de quintessência é mínima, e recuperamos as soluções sem essa fonte. Por outro, isso impõe uma dificuldade na avaliação do sistema já que, para o mesmo parâmetro de estado, a mudança de λ_q altera fundamentalmente a estrutura desse espaço.

Na Figura 4, elaboramos outra representação para ilustrar melhor o caso de Schwarzschild. Desta vez, deixando explícita a variação de ω_q . O parâmetro de estado no

intervalo $-1 < \omega_q < -\frac{1}{3}$ apresenta uma evolução uniforme na função da métrica, de modo que, apesar do *gap* produzido pela inclusão da fronteira nesse intervalo, ela ainda parece um bom limite para $r \gg 0$.

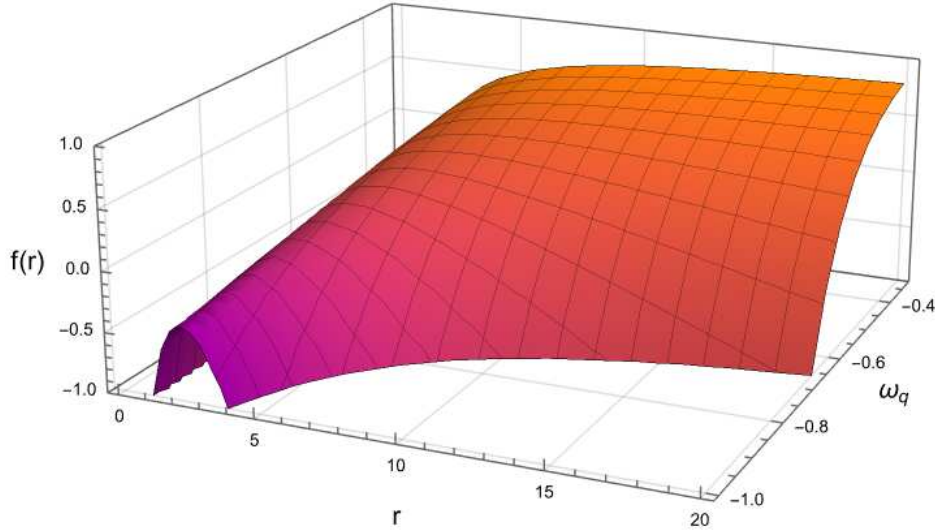


Figura 4 – Métrica de Schwarzschild com quintessência sob a variação de ω_q , com $M = 1$ e $\lambda_q = 0.1$.

Se extrairmos algumas curvas desse gráfico e compararmos com a solução de Schwarzschild, como na Figura 5, é possível ver que a diferença no caso extremo do parâmetro $-\frac{1}{3}$, para $r \rightarrow \infty$, é justamente pelo valor de λ_q . Mas, como o parâmetro de estado não possui de fato esse valor, vemos junto com a equação (23) que nesse limite deve haver ainda, mesmo que pequena, uma contribuição em r (que é muito grande), de modo que a curva continua a evoluir próxima a curva de Schwarzschild, estando essa última representada por linhas tracejadas amarelas.

Ainda, como essa métrica possui uma contribuição de $\frac{1}{r}$, a indeterminação gerada pelo r^k não deve ser um grande problema no limite de $r \rightarrow 0$, porque o termo dominante é relativo à massa do buraco negro, que carrega a função para menos infinito nesse caso.

Na Figura 5, incluímos ainda o caso do parâmetro $\omega_q = -1$, associado à constante cosmológica. Assim como mencionado anteriormente para as outras métricas, a mesma coisa acontece aqui. De outra forma, podemos dizer: o valor grande de λ_q (com relação à massa M) provoca um achatamento das curvas, influenciando a formação de horizontes.

Nesse caso, onde consideramos $\lambda_q = 0.1$, a métrica para constante cosmológica não seria capaz de produzir horizonte algum. Isso fica claro quando notamos que a componente de quintessência evolui muito rápido, e negativamente, com $-\lambda_q r^2$. Seria necessário, portanto, um valor consideravelmente baixo de λ_q para produzir algum horizonte nesse campo.

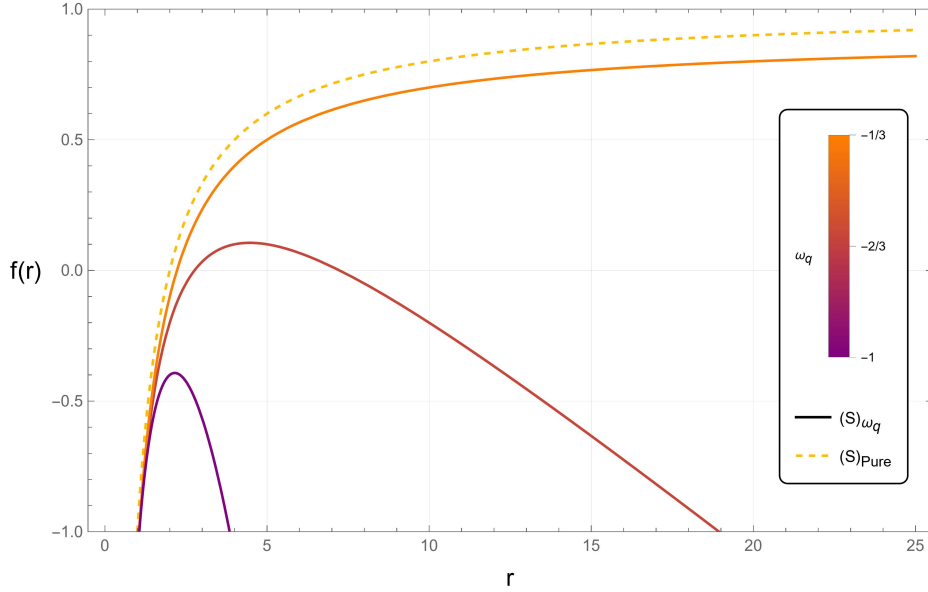


Figura 5 – Gráfico comparativo para métrica de Schwarzschild, em linha tracejada amarela, e Schwarzschild com quintessência, em linhas sólidas, com $M = 1$, $\lambda_q = 0.1$ e $\omega_q = -1, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}$.

Apesar de não haver no trabalho essa representação gráfica, constatamos que $\lambda_q = 0.01$ é suficiente para gerar dois horizontes na métrica com $\omega_q = -1$.

Mudando um pouco nosso ponto de vista, na Figura 6 observamos o funcionamento da métrica para quintessência livre, $(F)_{\omega_q}$, sob a variação de ω_q . Ao passo que o parâmetro de estado se aproxima de -1 , a função decai cada vez mais rápido, deixando a contribuição de energia escura para o sistema cada vez mais evidente. Por outro lado, quando ω_q se aproxima de $-\frac{1}{3}$, a métrica parece se aproximar de uma solução em espaço plano.

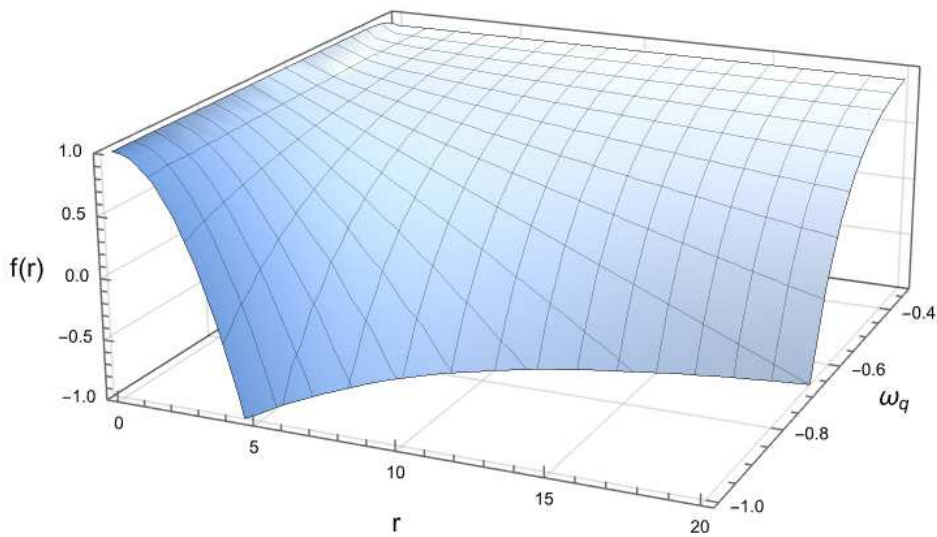


Figura 6 – Métrica de quintessência livre sob a variação de ω_q , com $M = 1$ e $\lambda_q = 0.1$.

Como insistimos anteriormente, a região formada nos limites $r \rightarrow 0$ e $\kappa \rightarrow 0$

apresenta um decaimento que, neste caso, fica bastante nítido. Para um dado valor do parâmetro de estado ω_q próximo a $-\frac{1}{3}$, a métrica deve manter a forma dependente de r , de modo que conseguimos recuperar uma solução de espaço plano. Porém, quanto mais próximo o parâmetro fica do seu limite superior, a função sofre um deslocamento do seu valor em $r = 0$, e vai justamente para $1 - \lambda_q$ quando o parâmetro atinge o limite $-\frac{1}{3}$.

Na Figura 7, vemos as curvas extraídas do gráfico 3D para $(F)_{\omega_q}$, onde é possível notar esse deslocamento. Assim como no gráfico comparativo de Schwarzschild, consideramos aqui 3 parâmetros de estados diferentes - os limites do intervalo, e $-\frac{2}{3}$.

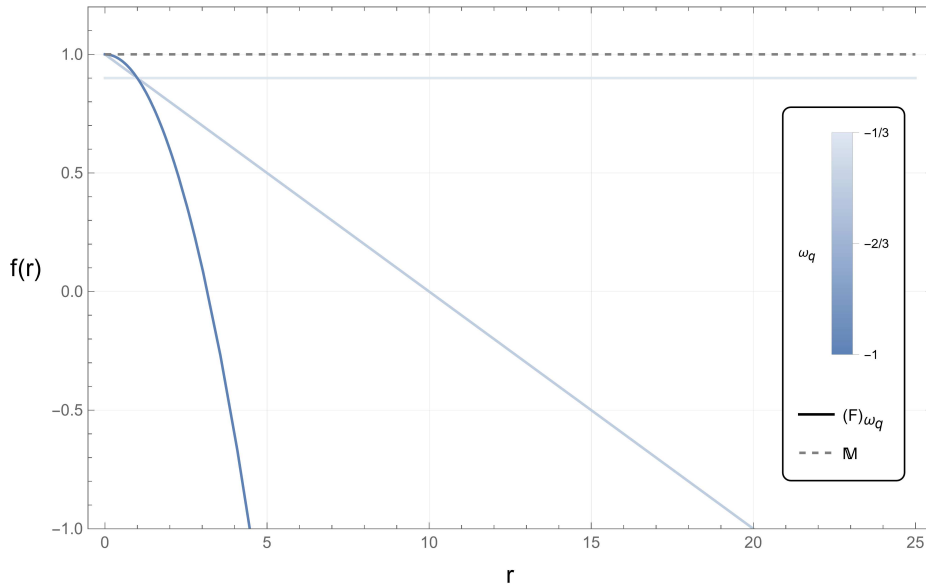


Figura 7 – Gráfico comparativo para métrica de Minkowski, em linha tracejada cinza, e quintessência livre, em linhas sólidas, com $M = 1$, $\lambda_q = 0.1$ e $\omega_q = -1, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}$.

Fica claro, quando fazemos uma relação entre as Figuras 6 e 7, que a linha sólida mais clara nessa última imagem, correspondente ao parâmetro $-\frac{1}{3}$, difere da métrica de Minkowski (em linha cinza tracejada) pelo valor de λ_q , e que para outras linhas relativas a um ω_q menor, é possível recuperar o limite do espaço plano quando $r = 0$. Novamente, o valor da constante λ_q retorna como um problema.

A princípio, λ_q grande não deveria ser problemático no que diz respeito à métrica como solução das equações de campo. Mas, como observamos acima, devido à discrepância produzida pelo parâmetro de estado no limite de $-\frac{1}{3}$, quanto maior λ_q mais difícil é recuperar as soluções correspondentes aos limites de r .

Como pontuamos no início, a função da métrica tem um comportamento de acordo com a equação (23), e por isso nunca atingiríamos o limite superior do parâmetro. Entretanto, para algum r próximo de $r = 0$ a métrica já começa a sofrer a influência desse limite. Além disso, quanto maior o valor de λ_q , a região onde a função começa a se deslocar para

$1 - \lambda_q$ se torna cada vez maior.

Também, supondo que λ_q possa assumir um valor maior com relação ao considerado até o momento, por exemplo perto de 1, as métricas se alteram drasticamente, de modo que, para $(F)_{\omega_q}$, a função da métrica deve ir a zero quando nos aproximamos do limite superior do parâmetro de estado, e a diferença entre os valores da função em $r = 0$ fica cada vez mais acentuada.

Para o caso de Schwarzschild, a estrutura do espaço-tempo seria completamente comprometida, de modo que nenhuma formação de horizonte ocorreria, e todas as métricas seriam definidas negativamente, exceto por aquela no extremo $\omega_q = -\frac{1}{3}$. Nesse último caso, a função deve ir a zero para r grande, e ser exclusivamente definida pelo termo $-\frac{2M}{r}$. Essa forma corresponde ao buraco negro pontual de Schwarzschild, e nos permitiria inferir que, uma vez que $\lambda_q \approx 1$, a contribuição de densidade de energia quintessencial para o espaço aniquila definitivamente os horizontes, fazendo com que esse sistema se comporte como um único ponto extremamente massivo.

Para métrica de Reissner-Nordström com quintessência descrita com (20), também é possível observar que o parâmetro de estado ω_q provoca uma variação homogênea na função $f(r)$, como na Figura 8. Consideramos neste caso a particularidade do buraco extremo em que $2e = r_g$, com $r_g = 2M$ definido na seção anterior.

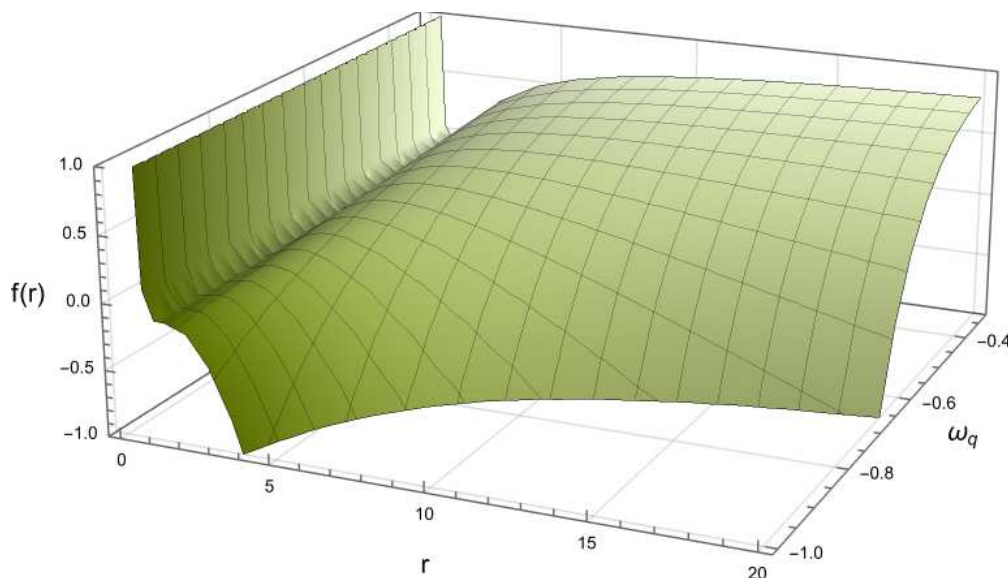


Figura 8 – Métrica de Reissner-Nordström com quintessência sob a variação de ω_q , com $M = 1$, $e = 1$ e $\lambda_q = 0.1$.

A contribuição do termo de carga para a métrica é $\sim \frac{1}{r^2}$ de modo que, quando $r \rightarrow \infty$, a função deve decair de acordo com a equação (23), assim como no caso Schwarzschild. Por outro lado, quando $r \rightarrow 0$, o termo $\sim \frac{1}{r^2}$ é predominante com relação a $\sim \frac{1}{r}$ e $\lambda_q r^k$, de forma que a função é definida na região do infinito positivo, e sem grande afetação dos

parâmetros λ_q e ω_q . Este fato também pode ser observado na Figura 9.

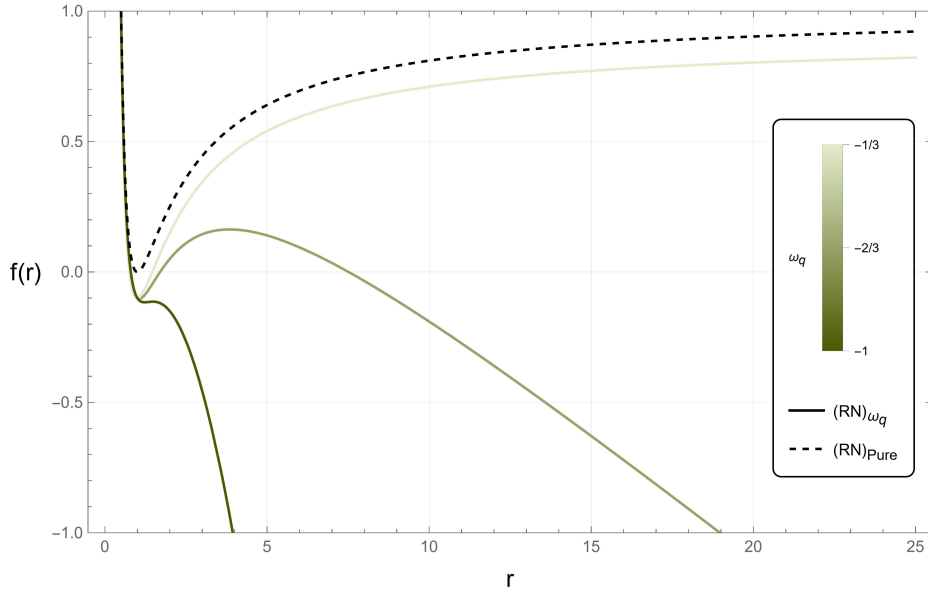


Figura 9 – Gráfico comparativo para métrica de Reissner-Nordström, em linha tracejada preta, e Reissner-Nordström com quintessência, em linhas sólidas, com $M = 1$, $e = 1$, $\lambda_q = 0.1$ e $\omega_q = -1, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}$.

Outro ponto notável é que a forma (20) pode conter até três horizontes diferentes a depender do valor de ω_q . No caso onde $\lambda_q = 0$, que corresponde à solução usual de Reissner-Nordström, observamos com a Figura 9 que apenas um horizonte é formado - o que ocorre pois está em consideração o caso do buraco negro extremo. Entretanto, quando $\lambda_q \neq 0$, a presença do parâmetro de quintessência também afeta diretamente a formação dos horizontes. Esse fato também foi observado nas outras métricas.

Para o caso do parâmetro $\lambda_q = 0.1$, a contribuição quintessencial provoca a formação de dois horizontes diferentes em $\omega_q = -\frac{1}{3}$. Como pode ser observado com as Figuras 8 e 9, conforme o parâmetro de estado decresce, aumenta a possibilidade de formação de outros horizontes. Em $\omega_q = -\frac{2}{3}$, três horizontes são formados. Para o caso do parâmetro de estado $\omega_q = -1$, $\lambda_q = 0.1$ forma apenas um horizonte na métrica.

Entretanto, como indicado na Figura 10 item (d), um parâmetro de quintessência suficientemente pequeno para formar mais de um horizonte em $(RN)_{\omega_q}$, quando $\omega_q = -1$, é $\lambda_q = 0.01$. No item (b), é possível observar também a formação de dois horizontes para o caso da métrica com (21) nestas mesmas condições.

Como mencionado anteriormente, considerando o caso associado à constante cosmológica $\omega_q = -1$, a estrutura de Schwarzschild com quintessência não apresentou formação de horizontes para $\lambda_q = 0.1$, mas para valores menores do parâmetro quintessencial isso foi possível. Na Figura 10, é possível observar as curvas correspondentes aos diferentes parâmetros de quintessência. Comparando os itens (a) e (b), notamos que para o caso

referente à constante cosmológica os parâmetros necessários para formação de horizonte são menores que no caso $\omega_q = -\frac{2}{3}$. Em $(RN)_{\omega_q}$ no item (f), por exemplo, três horizontes se apresentam no parâmetro de quintessência $\lambda_q = 0.01$. Contudo, no item (c) (e com a Figura 9), vemos que para o caso de $\omega_q = -\frac{2}{3}$, $\lambda_q = 0.1$ é suficiente para formação de três horizontes.

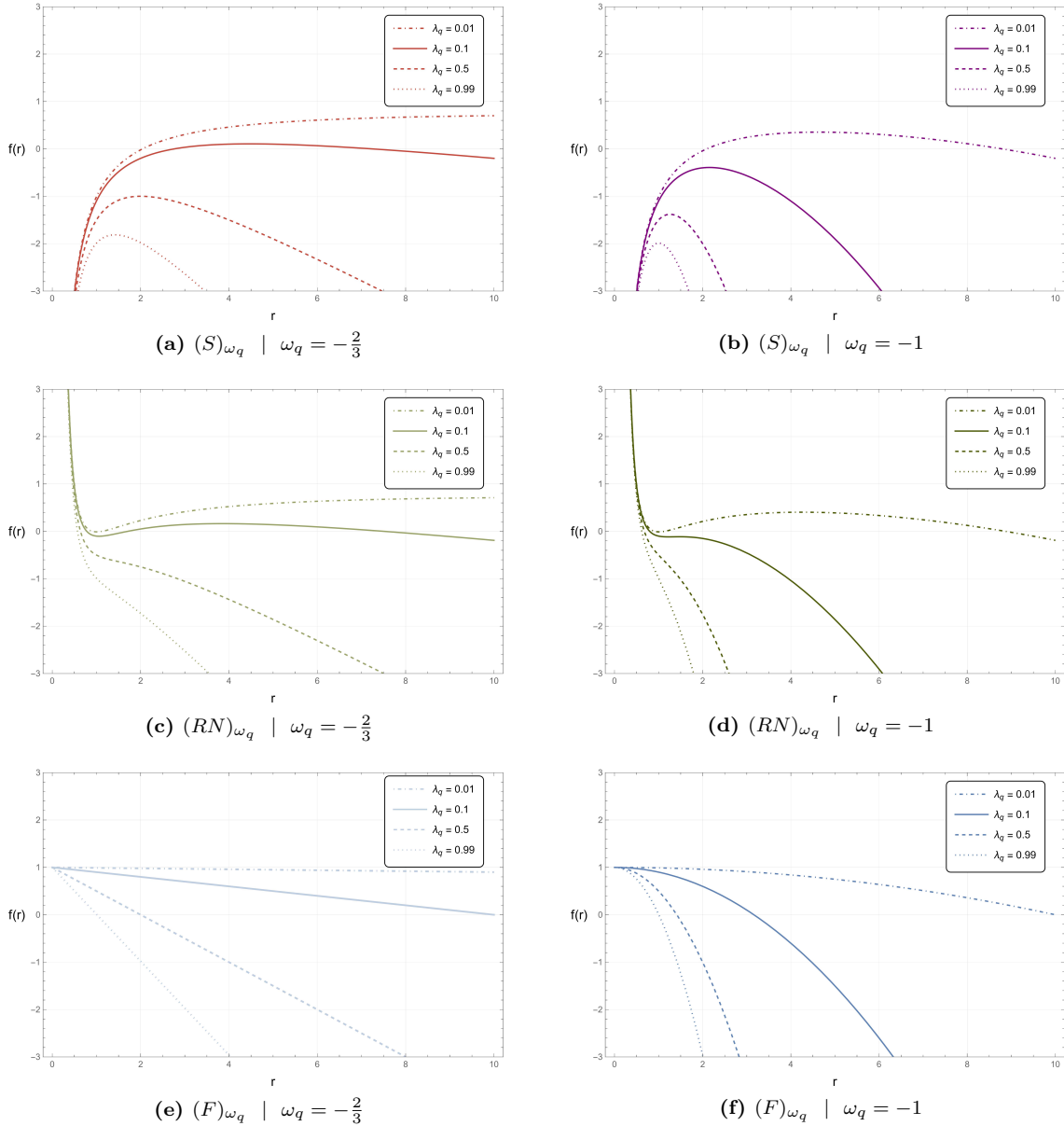


Figura 10 – Gráfico comparativo entre os parâmetros de estado $\omega_q = -\frac{2}{3}$ e $\omega_q = -1$ para diferentes valores do parâmetro quintessencial λ_q nas métricas $(S)_{\omega_q}$ em linhas vermelhas e roxas, $(RN)_{\omega_q}$ em linhas verdes, e para $(F)_{\omega_q}$ em linhas azuis.

O parâmetro λ_q , embora seja a princípio arbitrário, altera drasticamente as métricas que contém sua influência. Como vimos ao longo desta seção, mesmo para um dado valor fixo de ω_q , o parâmetro de quintessência modifica o sistema de modo que, para que

a métrica mantenha limites fisicamente aceitáveis, ele não pode assumir qualquer valor.

Se consideramos que a energia escura existe em todo universo, notamos que esse parâmetro deve, na verdade, possuir um valor pequeno com relação à massa M - em particular, menores que 0.01. Caso contrário, quando pensamos em regiões próximas a sistemas conhecidos como, por exemplo, os componentes do sistema solar, seria como afirmar que, nestas regiões, a presença de energia escura provoca uma alteração fundamental na estrutura do espaço-tempo, mas seus efeitos não são observáveis.

Portanto, seguiremos com a linha de raciocínio de que $\lambda_q \ll M$, e com as análises feitas ao longo dessa seção, para avaliar a influência desse espaço-tempo na dinâmica de partículas quânticas, e testar os efeitos dessa densidade de energia escura com os resultados obtidos no Capítulo 4.

3 MECÂNICA QUÂNTICA EM ESPAÇOS CURVOS

Nessa dissertação, como método para avaliar as propriedades de espaços-tempo com quintessência e sua influência na dinâmica de partículas quânticas, nos propomos a estudar a equação de Klein-Gordon em espaços curvos que, diferente da equação de Schrödinger, comporta efeitos relativísticos de caráter gravitacional.

Portanto, introduziremos neste capítulo a equação de Klein-Gordon em espaços curvos e sua formulação para métricas estáticas e esfericamente simétricas, como as estudadas no Capítulo 2. Ainda, abordaremos um método de normalização para simplificar a resolução das equações, que terão soluções obtidas no Capítulo 4. O caso limite do espaço plano também será apresentado.

3.1 EQUAÇÃO DE KLEIN-GORDON EM ESPAÇO-TEMPO CURVO

Como delineamos durante a introdução do trabalho, o cenário da física teórica e experimental é, atualmente, bastante diferente do início do século passado, e a Relatividade Geral é uma das grandes causas dessa mudança. Em contrapartida, outra teoria igualmente fundamental foi desenvolvida no mesmo período, e carrega parte dessa responsabilidade. A Mecânica Quântica, formalizada concomitantemente à Mecânica Relativística, é uma teoria que trata de sistemas de ordem subatômica, e com consequências igualmente revolucionárias para o entendimento da Física - por exemplo, a quantização da energia com a explicação de fenômenos como a radiação de corpo negro, pelo trabalho de Max Planck, e o efeito fotoelétrico, elaborado por Einstein.

A formulação da Mecânica Quântica com a equação de Schrödinger (SCHWABL, 2007), entretanto, não é invariante sob transformações de Lorentz - condição necessária para Teoria da Relatividade Restrita - impossibilitando a descrição da dinâmica de partículas com velocidades próximas à velocidade da luz. A construção de uma equação de onda para o caso relativístico foi elaborada posteriormente, e para bósons de $spin = 0$ a equação encontrada é chamada de equação de Klein-Gordon. Para partículas de $spin = 1/2$, a equação associada e invariante às transformações de Lorentz é a equação de Dirac, como pode ser visto em (PARKER; TOMS, 2009) e (WEINBERG, 1995).

Como parte da metodologia adotada neste trabalho, estamos interessados em estudar os diversos efeitos que a componente de energia escura, descrita no capítulo anterior, pode ter sobre sistemas quânticos. Portanto, nossa análise será direcionada para o ambiente da Mecânica Quântica, considerando a influência que o campo gravitacional da métrica de Kiselev possui sobre a dinâmica de partículas nesse contexto. Especificamente,

serão consideradas apenas partículas de $spin = 0$, mas a elaboração do problema para partículas de $spin = 1/2$ com a equação de Dirac é igualmente possível, e pode ser avaliada em outros projetos.

Relembraremos de maneira breve nesta seção a formulação da equação de Klein-Gordon em espaços curvos, e iniciamos a discussão com a equação de Schrödinger (WEINBERG, 2013), que faz frente à Mecânica Quântica não-relativística. Sendo assim, a equação de onda para uma partícula livre é expressa como

$$E\Psi(t, \mathbf{x}) = H\Psi(t, \mathbf{x}), \quad (24)$$

onde os operadores Hamiltoniano e de energia são definidos, respectivamente, por

$$\begin{aligned} H &= \frac{\mathbf{p}^2}{2m}, \\ E &= i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \end{aligned} \quad (25)$$

sendo o operador de momento $\mathbf{p} = -i\hbar\nabla$, e m a massa da partícula. De modo equivalente, podemos escrever

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(t, \mathbf{x}) = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi(t, \mathbf{x}). \quad (26)$$

A representação acima, entretanto, não é invariante sob transformações de Lorentz e, para que seja possível descrever sistemas relativísticos por meio de uma equação de onda como (26), é necessário reformulá-la de acordo com a Teoria da Relatividade. Com esse objetivo, reescrevemos o Hamiltoniano por meio da invariância do quadrimomento, (BJORKEN; DRELL, 1964). Assim,

$$p_\mu p^\mu = \frac{E^2}{c^2} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} = m^2 c^2, \quad (27)$$

e deve resultar no operador $H = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$.

Por simplicidade, notamos que os operadores E e H comutam, e então $E\Psi(t, \mathbf{x}) = H\Psi(t, \mathbf{x}) \implies E^2\Psi(t, \mathbf{x}) = H^2\Psi(t, \mathbf{x})$. Deste modo, a equação quântica para uma partícula relativística pode ser expressa como

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Psi(t, \mathbf{x}) = (-\hbar^2 c^2 \nabla^2 + m^2 c^4) \Psi(t, \mathbf{x}), \quad (28)$$

ou, de modo equivalente,

$$\left[\eta^{ab} \partial_a \partial_b + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right] \Psi(t, \mathbf{x}) = 0, \quad (29)$$

onde η^{ab} corresponde ao tensor métrico do espaço-tempo de Minkowski com a assinatura $(+, -, -, -)$.

A forma descrita acima é a equação de Klein-Gordon em espaços planos, e é a equivalente relativística da equação de Schrödinger para partículas com $spin = 0$. Entretanto, a equação (29) não comporta efeitos de curvatura, e corresponde apenas ao caso da Relatividade Especial.

No âmbito da Relatividade Geral, a presença de um campo gravitacional afeta a curvatura do espaço-tempo, e é necessário portanto generalizar a equação (29) de modo que a nova forma seja preservada sob transformações gerais de coordenadas, ou seja, mantenha válido o princípio da covariância. Podemos obter essa nova equação reescrevendo o tensor métrico em uma forma geral, dada pelo tensor $g_{\mu\nu}$, e correspondendo as derivadas usuais ∂_a por derivadas covariantes ∇_μ . Dessa forma,

$$\left[g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right] \Psi(t, \mathbf{x}) = 0. \quad (30)$$

Como função de onda $\Psi(t, \mathbf{x})$ é uma função escalar, o operador ∇_ν é simplesmente a diferenciação parcial comum ∂_ν . O resultado $\partial_\nu \Psi$, por sua vez, é um tensor covariante de ordem 1, sobre o qual o operador ∇_μ atua com intermédio das conexões Γ^k_{ij} (símbolos de Christoffel) (D'INVERNO, 1992). A equação (30) é então

$$\left[g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu - g^{\mu\nu} \Gamma^\epsilon_{\mu\nu} \partial_\epsilon \right] \Psi(t, \mathbf{x}) + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \Psi(t, \mathbf{x}) = 0. \quad (31)$$

O termo entre colchetes é o operador de Laplace-Beltrami em coordenadas generalizadas (FULLING, 1989), dado por

$$g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu \phi = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \partial_\nu \phi), \quad (32)$$

para um campo escalar ϕ qualquer. Portanto, de modo equivalente, é possível ainda reescrever as equações (30) e (31) como

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \partial_\nu \Psi) + m^2 \Psi = 0. \quad (33)$$

A expressão acima é a equação de Klein-Gordon em espaços curvos, e trabalharemos nesta dissertação diretamente com a forma descrita em (33). Por simplicidade, consideramos $\Psi(t, \mathbf{x}) \equiv \Psi$ e o sistema de unidades de Planck será implementado daqui por diante, sendo $c = \hbar = 1$.

3.2 EQUAÇÃO DE KLEIN-GORDON PARA MÉTRICAS ESTÁTICAS E ESFERICAMENTE SIMÉTRICAS

O espaço-tempo tratado nessa dissertação possui uma métrica um tanto particular, como visto no capítulo anterior. A expressão que define essa estrutura, além de estática,

tem simetria esférica e portanto, nessa seção, nos ateremos em formular a equação de Klein-Gordon para esse contexto.

Assim, para o espaço-tempo definido anteriormente, temos

$$ds^2 = f(r)dt^2 - f^{-1}(r)dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2, \quad (34)$$

onde o tensor métrico e o determinante associado podem ser expressos como

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &= \text{diag}(f(r), -f^{-1}(r), -r^2, -r^2 \sin^2 \theta), \\ g^{\mu\nu} &= \text{diag}(f^{-1}(r), -f(r), -r^{-2}, -r^{-2} \sin^{-2} \theta), \end{aligned} \quad (35)$$

e

$$\sqrt{-g} = r^2 \sin \theta. \quad (36)$$

Com a equação (35) acima, podemos expandir a equação de Klein-Gordon (33) nos termos não nulos do tensor métrico, resultando em

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{-g}} \left[\partial_0(g^{00} \sqrt{-g} \partial_0) + \partial_1(g^{11} \sqrt{-g} \partial_1) + \partial_2(g^{22} \sqrt{-g} \partial_2) + \partial_3(g^{33} \sqrt{-g} \partial_3) \right] \Psi \\ + m^2 \Psi = 0. \end{aligned} \quad (37)$$

A partir daqui, usaremos a notação $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, r, \theta, \varphi)$, e escrevemos a equação acima como

$$\begin{aligned} g^{tt} \partial_t^2 \Psi + \frac{1}{\sqrt{-g}} \left[\sqrt{-g} \partial_r \Psi (\partial_r g^{rr}) + \sqrt{-g} g^{rr} (\partial_r^2 \Psi) + g^{rr} \partial_r \Psi (\partial_r \sqrt{-g}) \right] \\ + \frac{1}{\sqrt{-g}} g^{\theta\theta} \left[\sqrt{-g} (\partial_\theta \Psi) + \partial_\theta \Psi (\partial_\theta \sqrt{-g}) \right] + g^{\varphi\varphi} \partial_\varphi^2 \Psi + m^2 \Psi = 0, \end{aligned} \quad (38)$$

ou então, substituindo (35),

$$\begin{aligned} f^{-1}(r) \partial_t^2 \Psi - \left(f'(r) + \frac{2}{r} f(r) \right) \partial_r \Psi - f(r) \partial_r^2 \Psi \\ - \frac{1}{r^2} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \partial_\theta \Psi - \frac{1}{r^2} \partial_\theta^2 \Psi - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \partial_\varphi^2 \Psi + m^2 \Psi = 0. \end{aligned} \quad (39)$$

É possível reescrever a equação (39) acima utilizando o ansatz de separação de variáveis (TESCHL, s.d.), de modo que $\Psi(t, r, \theta, \varphi) = \Upsilon(t)R(r)\Omega(\theta, \varphi)$. Assim,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Upsilon(t)} \frac{d^2}{dt^2} \Upsilon(t) - \left(f'(r) + \frac{2}{r} f(r) \right) \frac{f(r)}{R(r)} \frac{d}{dr} R(r) - \frac{f^2(r)}{R(r)} \frac{d^2}{dr^2} R(r) + m^2 f(r) \\ - \frac{\cos \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{f(r)}{\Omega(\theta, \varphi)} \partial_\theta \Omega(\theta, \varphi) - \frac{f(r)}{r^2 \Omega(\theta, \varphi)} \partial_\theta^2 \Omega(\theta, \varphi) \\ - \frac{f(r)}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{1}{\Omega(\theta, \varphi)} \partial_\varphi^2 \Omega(\theta, \varphi) = 0, \end{aligned} \quad (40)$$

e a equação acima pode ser isolada para cada variável, nos conduzindo a

$$\frac{1}{\Upsilon(t)} \frac{d^2}{dt^2} \Upsilon(t) = -\omega^2, \quad (41)$$

$$\frac{1}{\Phi(\varphi)} \frac{d^2}{d\varphi^2} \Phi(\varphi) = -\mu_B^2, \quad (42)$$

e

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \Theta(\theta) + \cot \theta \frac{d}{d\theta} \Theta(\theta) + \left[\ell(\ell + 1) - \frac{\mu_B^2}{\sin^2 \theta} \right] \Theta(\theta) = 0, \quad (43)$$

onde ω , ℓ e μ_B são os coeficientes de separação que adotamos nessa montagem, e $\Omega(\theta, \varphi) = \Theta(\theta)\Phi(\varphi)$ também é suposta separável em θ e φ .

As equações acima possuem soluções já bastante conhecidas, e podemos escrevê-las respectivamente como

$$\Upsilon(t) = Ae^{-i\omega t} + Be^{i\omega t}, \quad (44)$$

$$\Phi(\varphi) = Ce^{-i\mu_B \varphi} + De^{i\mu_B \varphi}, \quad (45)$$

$$\Theta(\theta) = FP_\ell^{\mu_B}(\cos \theta), \quad (46)$$

sendo $P_\ell^{\mu_B}(\cos \theta)$ polinômios associados de Legendre. Daqui por diante, nos referiremos a ω como a energia associada ao sistema, a ℓ como número quântico de momento angular, e μ_B como número quântico magnético. Sendo ℓ e μ_B definidos inteiros, e ℓ , em particular, um número inteiro positivo.

Ainda, pontuamos que as soluções descritas em (44) e (45) são combinações de dois resultados linearmente independentes para suas equações, mas, é claro, poderíamos escrever as expressões $\Upsilon(t)$ e $\Phi(\varphi)$ com apenas um deles sem grandes perdas.

Por fim, através da separação de variáveis que fizemos da equação de Klein-Gordon, é possível obter mais uma expressão, relativa à variável r , e que definimos como a função radial do sistema e denotamos por $R(r)$. A equação para essa função é

$$f^2(r) \frac{d^2}{dr^2} R(r) + \left(f'(r)f(r) + \frac{2}{r}f^2(r) \right) \frac{d}{dr} R(r) + \left[\omega^2 - m^2 f(r) - \frac{\ell(\ell + 1)}{r^2} f(r) \right] R(r) = 0. \quad (47)$$

Tratando-se de métricas estáticas e com simetria esférica, a equação acima é válida para $f(r)$ qualquer. Contudo, diferente dos outros casos, não é possível resolver imediatamente essa expressão, uma vez que a função $f(r)$ não foi ainda explicitada em (47).

Sendo assim, definidas as soluções (44), (45) e (46), todo o empenho para resolver a equação de Klein-Gordon será destinado à obtenção de uma solução para sua equação radial, tratada com mais detalhes a seguir.

3.2.1 A equação radial

No Capítulo 4, investigaremos as métricas apresentadas no Capítulo 2 por meio da equação (33) e, conseqüentemente, da sua equação radial - que pode se mostrar ex-

tremamente complicada para ser resolvida. Assim, o objetivo desta seção é simplificar a expressão (47) ainda em forma geral.

Equações diferenciais como a descrita em (47) podem ser normalizadas, através de um procedimento onde eliminamos o fator que multiplica a primeira derivada da função, como em (VIEIRA, H. S., 2018) e (PINHO, 2023). Neste sentido, faremos a substituição $R(r) = \chi(r)W(r)$ e, por simplicidade, alteremos os coeficientes da equação, sendo

$$\begin{aligned} A &\equiv A(r) = \frac{f'(r)}{f(r)} + \frac{2}{r}, \\ B &\equiv B(r) = \frac{\omega^2}{f^2(r)} - \frac{m^2}{f(r)} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2 f(r)}. \end{aligned} \quad (48)$$

A equação radial deve ser

$$\chi(r)W''(r) + [2\chi'(r) + \chi(r)A]W'(r) + [\chi''(r) + A\chi'(r) + B\chi(r)]W(r) = 0. \quad (49)$$

Admitindo que o coeficiente de $W'(r)$ na equação acima seja 0, com $W'(r) \neq 0$, restringimos a forma de $\chi(r)$, de modo que este termo deve ser

$$\chi(r) = ke^{-\int \frac{A}{2} dr}, \quad (50)$$

sendo k uma constante arbitrária. Certamente,

$$\begin{aligned} \chi'(r) &= \left(\frac{-A}{2}\right)\chi(r), \\ \chi''(r) &= \left[\left(\frac{-A}{2}\right)' + \left(\frac{-A}{2}\right)^2\right]\chi(r), \end{aligned} \quad (51)$$

e a equação (49) fica

$$W''(r) + \left[\left(\frac{-A}{2}\right)' - \frac{A^2}{4} + B\right]W(r) = 0. \quad (52)$$

Devolvendo as relações para A e B , encontramos

$$\begin{aligned} W''(r) + \left[\frac{1}{f^2(r)} \left(\omega^2 + \frac{f'^2(r)}{4} \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{f(r)} \left(-m^2 - \frac{f''(r)}{2} - \frac{f'(r)}{r} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right) \right] W(r) = 0. \end{aligned} \quad (53)$$

A equação acima é a representação normal da equação radial, que deve ser portanto

$$R(r) = \frac{k}{r\sqrt{f(r)}}W(r), \quad (54)$$

com o termo $\chi(r)$ expresso através da equação (50).

Apesar de não ser possível afirmar ainda se a forma acima é, de fato, mais simples de ser resolvida, observamos que a estrutura da equação fica muito menos complexa, facilitando a associação com outras equações de solução conhecida.

Outro ponto notável é que a equação descrita acima está formatada para $R(r)$, sendo r uma variável independente do sistema. Se desejássemos, como em muitos dos casos que serão descritos nessa dissertação, resolver o sistema em outras coordenadas, certamente essa equação sofreria algumas modificações.

Suponhamos, portanto, que r seja função de outra variável x . Certamente, teríamos que

$$\begin{aligned}\frac{dR}{dr} &= \frac{dR}{dx} \left(\frac{dr}{dx}\right)^{-1}, \\ \frac{d^2R}{dr^2} &= \left[\frac{d^2R}{dx^2} - \frac{dR}{dx} \left(\frac{dr}{dx}\right)^{-1} \frac{d^2r}{dx^2} \right] \left(\frac{dr}{dx}\right)^{-2},\end{aligned}\quad (55)$$

onde r entende-se por $r(x)$ e, por simplicidade, omitiremos brevemente a notação da variável nesta parte do trabalho. A parte radial da equação de Klein-Gordon deve ser

$$\frac{d^2R}{dx^2} + \left[A \left(\frac{dr}{dx}\right) - \left(\frac{dr}{dx}\right)^{-1} \frac{d^2r}{dx^2} \right] \frac{dR}{dx} + B \left(\frac{dr}{dx}\right)^2 R = 0, \quad (56)$$

com A e B definidos pela expressão (48).

A equação descrita acima pode ser normalizada do mesmo modo feito anteriormente, por uma substituição do tipo $R = \chi W$. Com isso, devemos obter uma expressão parecida para a equação normal, que é

$$\frac{d^2W}{dx^2} + \left[\left(\frac{-P}{2}\right)' - \frac{P^2}{4} + Q \right] W = 0. \quad (57)$$

Desta vez, entretanto,

$$\begin{aligned}P &= \left[\frac{1}{f} \left(\frac{dr}{dx}\right)^{-1} \frac{df}{dx} + \frac{2}{r} \right] \left(\frac{dr}{dx}\right) - \left(\frac{dr}{dx}\right)^{-1} \frac{d^2r}{dx^2}, \\ Q &= \left(\frac{dr}{dx}\right)^2 \left[\frac{\omega^2}{f^2} - \frac{m^2}{f} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2 f} \right].\end{aligned}\quad (58)$$

Assim, a função radial pode ser descrita como

$$R(r(x)) = \left[\frac{k}{r(x)\sqrt{f(r(x))}} \left(\frac{dr}{dx}\right)^{\frac{1}{2}} \right] W(r(x)). \quad (59)$$

Obviamente, se a mudança que estamos tratando diz respeito a um r linear em x , a diferenciação de segunda ordem de r por x seria nula, e fica claro pela equação (55) que a única diferença no termo de derivada segunda de R , dentro das equações normais, seria uma constante. Neste caso, esse desenvolvimento não seria tão necessário, porque poderíamos operar diretamente com a forma normal obtida em (53) sem ter grandes problemas. Entretanto, destacamos essa derivação aqui porque, uma vez que r não é linear em x , se tentamos substituir a expressão (55) em (53) para reconstruir a equação normal

com essa outra variável, retornaríamos a uma equação com coeficiente diferente de zero para $\frac{dR}{dx}$, ou seja, uma equação não normalizada em x .

O processo de normalização, como mencionamos no início, nos fornece uma equação, em princípio, mais simples de resolver. Por isso, e apesar de não ser o caso da maioria das soluções obtidas nesse trabalho, destacamos que para o caso de substituições não lineares de variáveis, a equação (57) se mostra muito mais conveniente para elaboração do problema.

Os resultados dessa seção serão utilizados ao longo do trabalho, especificamente no Capítulo 4, e daqui por diante, salvo quando indicado o contrário, trabalharemos com a equação radial de Klein-Gordon apenas na forma descrita pelas equações (53) e (54).

3.2.2 Limite de espaço plano

Como caso particular da equação (53), pontuamos a métrica $g_{\mu\nu} = \eta_{ab}$, correspondendo ao espaço-tempo de Minkowski M. O tensor η_{ab} em coordenadas esféricas é expresso como

$$\eta_{ab} = \text{diag}(1, -1, -r^2, -r^2 \sin^2 \theta). \quad (60)$$

Substituindo diretamente a equação acima em (29)¹, e utilizando o ansatz $\Psi_f(t, r, \theta, \varphi) = \Upsilon(t)_f R(r)_f \Omega(\theta, \varphi)_f$ de separação de variáveis, a equação radial deve ser

$$R_f''(r) + \frac{2}{r} R_f'(r) + \left(\omega^2 - m^2 - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right) R_f(r) = 0. \quad (61)$$

Com o método de normalização da seção anterior, é possível escrever $R(r)_f = \chi_f W_f$ e a representação normal de (61) é

$$W_f''(r) + \left[\omega^2 - m^2 - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right] W_f(r) = 0, \quad (62)$$

com o fator de normalização expresso por

$$\chi_f = \frac{k}{r}. \quad (63)$$

O resultado (62) é idêntico ao obtido caso substituíssemos diretamente as componentes do tensor métrico (60) em (53), uma vez que a função $f(r)$ na equação (53) pode ser lida como $f(r) = 1$.

Também, o fator integrante (63) deve ser o mesmo caso expresso diretamente pela equação (50), e a função radial da equação de Klein-Gordon em espaços planos se torna

$$R_f(r) = \frac{k}{r} W_f(r). \quad (64)$$

¹ Com a consideração de que o operador Laplaciano ∇^2 também deve ser escrito em coordenadas esféricas.

No capítulo seguinte, a equação (53) será resolvida para o caso $(F)_{\omega_q}$ descrito na Seção 2.2. Como foi pontuado nessa parte do trabalho, o limites $\lambda_q \rightarrow 0$ e $r \rightarrow 0$ fazem com que $(F)_{\omega_q} \rightarrow \mathbb{M}$. Por isso, escrevemos aqui a forma normal para equação de Klein-Gordon em espaços planos - notando que, uma vez obtida a solução de (53) para $(F)_{\omega_q}$, a solução da equação (62) é útil para analisar os resultados, e esse desenvolvimento pode ser considerado posteriormente.

4 SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE KLEIN-GORDON EM ESPAÇOS-TEMPO TIPO KISELEV

Levando em consideração espaços-tempo curvos tipo Kiselev, obteremos neste capítulo soluções analíticas para a equação de Klein-Gordon com a métrica estudada no Capítulo 2. Assim, consideramos alguns sistemas físicos que podem ser descritos pela forma (19) e pretendemos, ao longo desse desenvolvimento, obter um conjunto de informações relevantes, que nos oriente na análise da dinâmica de partículas $spin = 0$ sob a influência da quintessência, e suas possíveis interpretações.

Avaliaremos quatro casos da equação de Klein-Gordon, considerando a métrica de Schwarzschild com quintessência e a métrica para quintessência livre, representadas respectivamente pelas equações (21) e (22). Ambas serão avaliadas no parâmetro de estado $-\frac{2}{3}$ e no limite superior $-\frac{1}{3}$ do intervalo possível de ω_q , que é

$$-1 < \omega_q < -\frac{1}{3}. \quad (65)$$

Ao fim de cada seção, apresentaremos nossas análises parciais sobre as soluções obtidas, e no fim do capítulo introduziremos também o caso particular do buraco negro pontual de Schwarzschild.

4.1 KISELEV TIPO I: QUINTESSÊNCIA LIVRE

Inicialmente, consideremos a métrica para o campo de quintessência livre, ou KISELEV tipo I. Tal solução ocorre na ausência de buraco negro no sistema, e possui dependência exclusiva da contribuição de energia escura. Como descrito em (KISELEV, 2003), a forma corresponde à quintessência auto-gravitante, e sua métrica é expressa com a equação (22).

4.1.1 Parâmetro $\omega_q = -\frac{2}{3}$

Como visto na Seção 2.2, a equação (22) representa a métrica para a quintessência livre onde, no parâmetro em questão, a função $f(r)$ tem forma

$$f(r) = 1 - \lambda_q r. \quad (66)$$

Com isso, a parte radial (53) da equação de Klein-Gordon deve ser

$$W''(r) + \left[\frac{1}{(1 - \lambda_q r)^2} \left(\omega^2 + \frac{\lambda_q^2}{4} \right) + \frac{1}{(1 - \lambda_q r)} \left(-m^2 + \frac{\lambda_q}{r} - \frac{\ell(\ell + 1)}{r^2} \right) \right] W(r) = 0, \quad (67)$$

ou

$$W''(r) + \left[\frac{1}{\left(r - \frac{1}{\lambda_q}\right)^2} \left(\frac{\omega^2}{\lambda_q^2} + \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{\left(r - \frac{1}{\lambda_q}\right)} \left(\frac{m^2}{\lambda_q} \right) + \frac{1}{r^2 \left(r - \frac{1}{\lambda_q}\right)} \left(-r + \frac{\ell(\ell+1)}{\lambda_q} \right) \right] W(r) = 0. \quad (68)$$

Notamos que, dentro dos colchetes, o último termo pode ser reescrito em forma de frações parciais. Com o objetivo de simplificar a equação radial, e estabelecer alguma relação entre ela e equações já conhecidas da literatura, faremos uso deste método para escrever, então

$$W''(r) + \left[\frac{(1 - \ell(\ell+1))\lambda_q}{r} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + \frac{1}{\left(r - \frac{1}{\lambda_q}\right)} \left(\frac{m^2}{\lambda_q} - (1 - \ell(\ell+1))\lambda_q \right) + \frac{1}{\left(r - \frac{1}{\lambda_q}\right)^2} \left(\frac{\omega^2}{\lambda_q^2} + \frac{1}{4} \right) \right] W(r) = 0. \quad (69)$$

Embora a equação acima ainda pareça bastante complexa, seria possível resolvê-la diretamente para um raio no intervalo $0 \leq r < \infty$. Entretanto, como é possível deduzir imediatamente da equação (66), observamos que existe a formação de um horizonte, localizado na superfície em $r_H = \frac{1}{\lambda_q}$. Sendo assim, nos ateremos primeiro às soluções do problema que dizem respeito ao sistema de coordenadas do horizonte e, para isso, seguimos com a substituição $x = r - r_H$, ou $x = r - \frac{1}{\lambda_q}$. A equação radial deve ser então levada de $W(r)$ a $W(x)$, sendo

$$W''(x) + \left[\frac{(1 - \ell(\ell+1))\lambda_q}{\left(x + \frac{1}{\lambda_q}\right)} - \frac{\ell(\ell+1)}{\left(x + \frac{1}{\lambda_q}\right)^2} + \frac{1}{x} \left(\frac{m^2}{\lambda_q} - (1 - \ell(\ell+1))\lambda_q \right) + \frac{1}{x^2} \left(\frac{\omega^2}{\lambda_q^2} + \frac{1}{4} \right) \right] W(x) = 0. \quad (70)$$

Como esperado, uma vez que $x \rightarrow \infty$, $r \rightarrow \infty$. Também, se $x \rightarrow 0$, acontece que $r \rightarrow r_H$. Portanto, nossa função definida no intervalo $0 \leq x < \infty$ pode ser completamente associada ao intervalo $r_H \leq r < \infty$. Contudo, a equação (70) ainda não está em uma forma apropriada para resolvermos. Faremos, assim, uma segunda substituição $z = -\lambda_q x$. A equação para $W(z)$ se torna

$$W''(z) + \left[\frac{1}{z} \left(-\frac{m^2}{\lambda_q^2} + 1 - \ell(\ell+1) \right) + \frac{1}{z^2} \left(\frac{\omega^2}{\lambda_q^2} + \frac{1}{4} \right) - \frac{1 - \ell(\ell+1)}{z-1} - \frac{\ell(\ell+1)}{(z-1)^2} \right] W(z) = 0. \quad (71)$$

A equação acima pode ser comparada à forma normal da equação confluyente de Heun descrita na Seção A.1, que é

$$Y''(z) + \left[\frac{A}{z} + \frac{B}{z^2} + \frac{C}{z-1} + \frac{D}{(z-1)^2} + E \right] Y(z) = 0. \quad (72)$$

Dessa forma, estabelecendo coeficientes apropriados, acontece que a nossa equação radial normal é uma ECH definida com

$$\begin{aligned} A &= -\frac{m^2}{\lambda_q^2} + 1 - \ell(\ell + 1), \\ B &= \frac{\omega^2}{\lambda_q^2} + \frac{1}{4}, \\ C &= -(1 - \ell(\ell + 1)), \\ D &= -\ell(\ell + 1), \\ E &= 0, \end{aligned} \quad (73)$$

e solução do tipo

$$W(z) = k e^{\frac{\alpha z}{2}} z^{\frac{\beta+1}{2}} (z-1)^{\frac{\gamma+1}{2}} \text{HeunC}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta; z), \quad (74)$$

onde os parâmetros, determinados conforme a relação A.1.8, são

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{1}{2} + \frac{m^2}{\lambda_q^2} - (1 - \ell(\ell + 1)), \\ \beta &= \pm \left(-\frac{4\omega^2}{\lambda_q^2} \right)^{\frac{1}{2}}, \\ \delta &= -\frac{m^2}{\lambda_q^2}, \\ \gamma &= \pm (1 + 4\ell(\ell + 1))^{\frac{1}{2}}, \\ \alpha &= 0. \end{aligned} \quad (75)$$

Portanto, como demonstrado na Seção A.1, a equação (74) e os coeficientes (75) compõem uma solução analítica da equação radial normal em termos das funções HeunC.

Além disso, em muitas aplicações como, por exemplo, no estudo de radiação Hawking, é interessante considerarmos soluções nos limites em 0 e no infinito. Assim, estudaremos a funções obtidas para estes casos.

- Se $z \rightarrow 0$:

Como desenvolvido na Seção A.1.1 do Apêndice A, escrevemos as duas soluções linearmente independentes para HeunC avaliadas em $z \rightarrow 0$ de acordo com a equação A.1.22, sendo

$$W(r) \sim \begin{cases} (-\lambda_q r + 1)^{\frac{1}{2}(1+\beta)} \\ (-\lambda_q r + 1)^{\frac{1}{2}(1-\beta)} \end{cases}. \quad (76)$$

Com a função radial definida pela expressão (54), e notando que para a métrica em questão $\chi(r) = \frac{k}{r\sqrt{1-\lambda_q r}}$, expressamos $R(r)$ no limite r_H como

$$R(r) \sim \begin{cases} \frac{\lambda_q}{\Delta(r)} [-\lambda_q r + 1]^{\frac{1}{2}(1+\beta)} \\ \frac{\lambda_q}{\Delta(r)} [-\lambda_q r + 1]^{\frac{1}{2}(1-\beta)} \end{cases}, \quad (77)$$

onde $\Delta(r) = \sqrt{1-\lambda_q r}$ e, como é possível observar, no termo r^{-1} em $\chi(r)$ fizemos diretamente a aproximação de $r \rightarrow \frac{1}{\lambda_q}$.

Como observado anteriormente, seria possível obter uma solução para equação (69) sem associar as variáveis às coordenadas do horizonte. Entretanto, a solução corresponderia ao intervalo $0 \leq r < \infty$ que, em muitos dos casos aqui em questão, não corresponde à realidade do nosso sistema físico. Ainda sim, notamos que essa métrica permite uma solução em $r = 0$, ou seja, este ponto não é uma singularidade do nosso sistema. Portanto, como estamos interessados em analisar as propriedades deste espaço, não existem motivos pelos quais não poderíamos também estudar a solução que compreende o intervalo mencionado acima. Partiremos então da equação (69) com a substituição $z = \lambda_q r$, e temos

$$W''(z) + \left[\frac{1 - \ell(\ell + 1)}{z} - \frac{\ell(\ell + 1)}{z^2} + \frac{1}{z - 1} \left(\frac{m^2}{\lambda_q^2} - (1 - \ell(\ell + 1)) \right) + \frac{1}{(z - 1)^2} \left(\frac{\omega^2}{\lambda_q^2} + \frac{1}{4} \right) \right] W(z) = 0. \quad (78)$$

Sendo a equação acima uma ECH com parâmetros

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{1}{2} - (1 - \ell(\ell + 1)), \\ \beta &= \pm (1 + 4\ell(\ell + 1))^{\frac{1}{2}}, \\ \delta &= \frac{m^2}{\lambda_q^2}, \\ \gamma &= \pm \left(-\frac{4\omega^2}{\lambda_q^2} \right)^{\frac{1}{2}}, \\ \alpha &= 0. \end{aligned} \quad (79)$$

- Se $z \rightarrow 0$:

Analogamente ao caso anterior, e fazendo uso das equações (54) e A.1.22, a função radial é definida com a forma

$$R(r) \sim \begin{cases} \frac{1}{r} (\lambda_q r)^{\frac{1}{2}(1+\beta)} \\ \frac{1}{r} (\lambda_q r)^{\frac{1}{2}(1-\beta)} \end{cases}, \quad (80)$$

onde o limite $r \rightarrow 0$ foi tomado para o termo $\sqrt{1-\lambda_q r}$ no denominador que vem que $\chi(r)$.

No limite $|z| \rightarrow \infty$, não foi possível escrever uma solução de acordo com os resultados do Apêndice A, uma vez que, em ambos os intervalos considerados, $\alpha = 0$.

4.1.2 Parâmetro $\omega_q = -\frac{1}{3}$

No caso do parâmetro $-\frac{1}{3}$, a equação (22) descrita na Seção 2.2 nos permite escrever a função $f(r)$ como

$$f(r) = 1 - \lambda_q. \quad (81)$$

Como observamos anteriormente, este parâmetro não faz parte do intervalo possível para uma fonte de energia escura. Mas, podemos condicioná-lo como um caso limite e buscar alguma interpretação para o sistema através dessa consideração. Assim, a equação radial de Klein-Gordon na métrica acima deve ficar

$$W''(r) + \left[\frac{\omega^2}{(1 - \lambda_q)^2} + \frac{1}{(1 - \lambda_q)} \left(-m^2 - \frac{\ell(\ell + 1)}{r^2} \right) \right] W(r) = 0. \quad (82)$$

A equação acima possui duas soluções distintas, dadas em termos de duas funções especiais diferentes. Nesta seção, resolveremos a equação (82) para ambos estes casos: primeiro, por meio das funções de Bessel, já bastante conhecidas na literatura; em segundo, resolveremos o sistema dentro da classe de funções de Heun.

Então, seja a equação de Bessel na forma paramétrica

$$y''(r) + \frac{1}{r}y'(r) + \left(a^2 - \frac{\nu^2}{r^2} \right) y(r) = 0, \quad (83)$$

com ordem ν , parâmetro a e solução do tipo

$$y = c_1 J_\nu(ar) + c_2 Y_\nu(ar), \quad (84)$$

onde $J_\nu(ar)$ e $Y_\nu(ar)$ são funções de Bessel de primeira e segunda espécie, respectivamente.

A equação acima pode também ser normalizada por um fator ξ com a substituição $y(r) = \xi(r)Z(r)$, nos direcionando à equação de Bessel em forma normal, que é

$$Z''(r) + \left[a^2 + \frac{(1 - \nu^2)}{4r^2} \right] Z(r) = 0, \quad (85)$$

com

$$\xi(r) = \frac{k}{\sqrt{r}}. \quad (86)$$

Assim, a equação (85) tem solução composta pelas expressões (84) e (86) acima, sendo

$$Z(r) = k\sqrt{r}\{c_1 J_\nu(ar) + c_2 Y_\nu(ar)\}, \quad (87)$$

onde a constante k foi transportada e alterada de acordo com o arranjo do problema.

Se tomarmos os coeficientes da equação radial como coeficientes da equação de Bessel, devemos ter

$$\begin{aligned} a^2 &= \frac{\omega^2}{(1 - \lambda_q)^2} - \frac{m^2}{1 - \lambda_q}, \\ \nu^2 &= \frac{1}{4} + \frac{\ell(\ell + 1)}{1 - \lambda_q}. \end{aligned} \quad (88)$$

Portanto, por meio da equação (54) desenvolvida na Seção 3.2.1, a função radial $R(r)$ definida por funções de Bessel é dada por

$$R(r) = \frac{k}{\sqrt{r(1 - \lambda_q)}} (c_1 J_\nu(ar) + c_2 Y_\nu(ar)). \quad (89)$$

A expressão acima é uma solução analítica da equação radial de Klein-Gordon para a métrica (81), e é válida para todo o intervalo $0 \leq r < \infty$.

Tratando-se de funções de Bessel de primeira e segunda espécie, é possível avaliar a equação (89) no limite $r \rightarrow 0$ e em $r \rightarrow \infty$ assintoticamente, como indicado em (WATSON, 1995), (DINGLE, 1973) e (BUTKOV, 1978). Este fato, entretanto, deve ser explorado em outros projetos. No presente trabalho, o foco está sobre a solução de (82) definida por meio das funções de Heun, uma vez que o caso da quintessência livre no parâmetro $-\frac{2}{3}$ admitiu apenas soluções deste último tipo.

Desse modo, com a finalidade de realizar uma comparação direta entre o resultado obtido em 4.1.1 e os resultados desta seção, apresentaremos também uma solução da equação (82) definida por funções confluentes de Heun, e avaliaremos este resultado de forma detalhada para os limites $r \rightarrow 0$ e $r \rightarrow \infty$.

Com a ECH normal obtida no Apêndice A.1, identificamos os coeficientes da equação A.1.7 com os coeficientes em (82), de modo que

$$\begin{aligned} A &= 0, \\ B &= -\frac{\ell(\ell + 1)}{1 - \lambda_q}, \\ C &= 0, \\ D &= 0, \\ E &= \frac{\omega^2}{(1 - \lambda_q)^2} - \frac{m^2}{1 - \lambda_q}, \end{aligned} \quad (90)$$

e podemos expressar a solução radial em termo das funções confluentes de Heun. Nesse caso, obtemos uma solução para equação (82) como

$$W(r) = kr^{\frac{\beta+1}{2}} (r - 1)^{\frac{\gamma+1}{2}} e^{\frac{\alpha r}{2}} \text{HeunC}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta; r), \quad (91)$$

onde

$$\begin{aligned}
\eta &= \frac{1}{2}, \\
\beta &= \pm \left(1 + \frac{4\ell(\ell+1)}{1-\lambda_q} \right)^{\frac{1}{2}}, \\
\delta &= 0, \\
\gamma &= \pm 1, \\
\alpha &= \pm \left(\frac{4m^2}{1-\lambda_q} - \frac{4\omega^2}{(1-\lambda_q)^2} \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned} \tag{92}$$

Com função radial definida por (54), e $W(r)$ expresso na equação (91) acima, a função $R(r)$ pode ser avaliada em $r \rightarrow 0$ de acordo com a equação A.1.22, e resulta em

$$R(r) \sim \begin{cases} \frac{1}{r\sqrt{1-\lambda_q}} r^{\frac{1}{2}(1+\beta)} \\ \frac{1}{r\sqrt{1-\lambda_q}} r^{\frac{1}{2}(1-\beta)}. \end{cases} \tag{93}$$

No infinito, utilizamos o resultado obtido em A.1.23 com a consideração de que $\delta = 0$, e a função radial é avaliada como

$$R(r) \sim \begin{cases} \frac{1}{r\sqrt{1-\lambda_q}} e^{\frac{\alpha r}{2}} \\ \frac{1}{r\sqrt{1-\lambda_q}} e^{-\frac{\alpha r}{2}}. \end{cases} \tag{94}$$

4.1.3 Análises parciais

A métrica (22), apesar de ter forma consideravelmente mais simples que os casos que lidaremos na sequência do trabalho, apresentou algumas dificuldades quanto a interpretação e resolução do problema, e que discutiremos a seguir.

Inicialmente, quando tratamos do parâmetro de estado $\omega_q = -\frac{2}{3}$, foi possível encontrar uma solução no limite de $r \rightarrow 0$ e r indo para o raio do horizonte formado. Entretanto, quando notamos os parâmetros necessários para ler a equação radial como uma equação confluyente de Heun, $\alpha = 0$ em ambos os casos, e não foi possível obter uma solução no infinito de acordo com as construções da Seção A.1.

Outra menção importante com relação a $\omega_q = -\frac{2}{3}$ é que, para o caso da solução (77) nas coordenadas do horizonte, quando $r \rightarrow \frac{1}{c}$, a função radial é diretamente influenciada pela energia associada ao sistema, uma vez que β é dado em (75) como $\pm \left(-\frac{4\omega^2}{\lambda_q^2} \right)^{\frac{1}{2}}$. Já no caso da solução obtida para o intervalo todo, quando $r \rightarrow 0$, podemos ver pela equação (80) que a influência vem do número quântico de momento angular ℓ - especificamente $[1 + 4\ell(\ell+1)]^{\frac{1}{2}}$, uma vez que a solução obtida foi aproximada ao primeiro termo. Neste caso, a dependência da energia aparecerá ao considerarmos ordens acima da primeira na série que define a solução.

De qualquer forma, como sabemos da Seção 3.2 que ℓ é sempre inteiro e positivo, podemos analisar a solução (80) com um pouco mais cuidado.

Como utilizamos o método de Frobenius para resolver a ECH em $z \rightarrow 0$, sabemos que a solução deve ser válida no intervalo $|z| < 1$. Nesse caso do parâmetro $-\frac{2}{3}$, a solução que compreende todo intervalo de r foi construída com $z = \lambda_q r$ e, portanto, deve ser válida em $|\lambda_q r| < 1$. Na Figura 11, podemos observar suas diferentes formas a depender de ℓ .

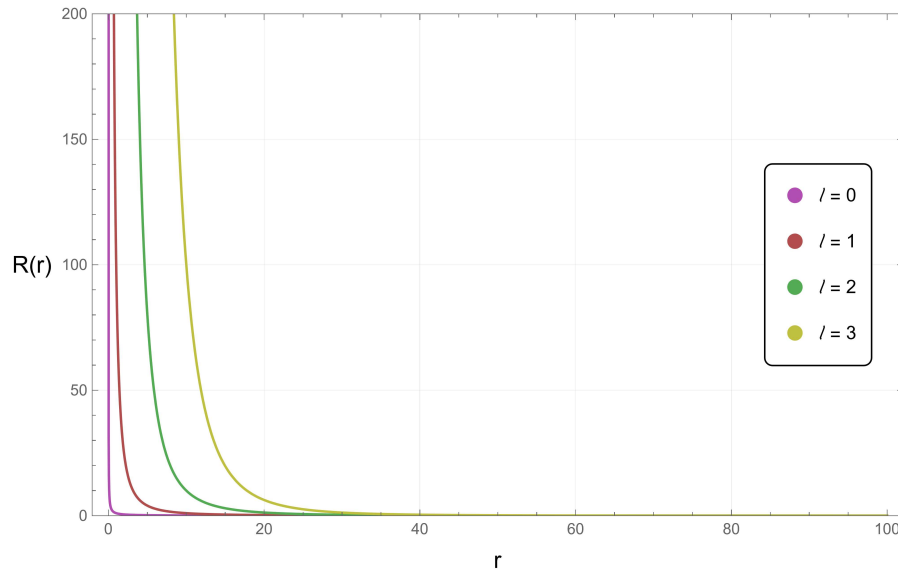


Figura 11 – Comportamento da função radial $R(r)$ em (80) com $\lambda_q = 0.01$ e $\beta < 0$. Em linha roxa, o número quântico de momento angular $\ell = 0$, em linha vermelha $\ell = 1$, em linha verde $\ell = 2$ e em linha amarela $\ell = 3$.

A Figura 11 foi construída para $\lambda_q = 0.01$, de modo que a solução é válida para r consideravelmente longe da origem. Quando avaliamos outros parâmetros, como 0.5 e 1, vemos com as figuras 12 e 13, respectivamente, que quanto menor o valor de λ_q , mais rápido a função deve decair dentro do intervalo onde ela é válida.

De modo mais preciso, é possível comparar a diferença que o parâmetro λ_q provoca na solução (80) por meio das imagens contidas na Figura 14, onde computamos a função radial também para $\lambda_q = 0.1, 0.5, 1$, em todos os casos no intervalo $0 < r < 1$.

Como exemplo observamos que, para $\lambda_q \approx 1$ e próximo ao raio $r = 0.4$, é esperado que a função radial possua um valor baixo (< 40) para os diferentes valores de ℓ considerados. Contudo, quando $r < 0.4$, esse valor aumenta mais rápido quanto maior for ℓ . Para valores pequenos do parâmetro de quintessência como $\lambda_q \approx 0.01$, para $\ell > 0$ a função radial deve atingir uma ordem $\sim 10^2$ em $r = 1$, ao passo que $\ell = 0$ somente atingirá esse valor quando $r < 0.05$.

Em outra escala vertical, vemos na Figura 15 com clareza a diferença entre os

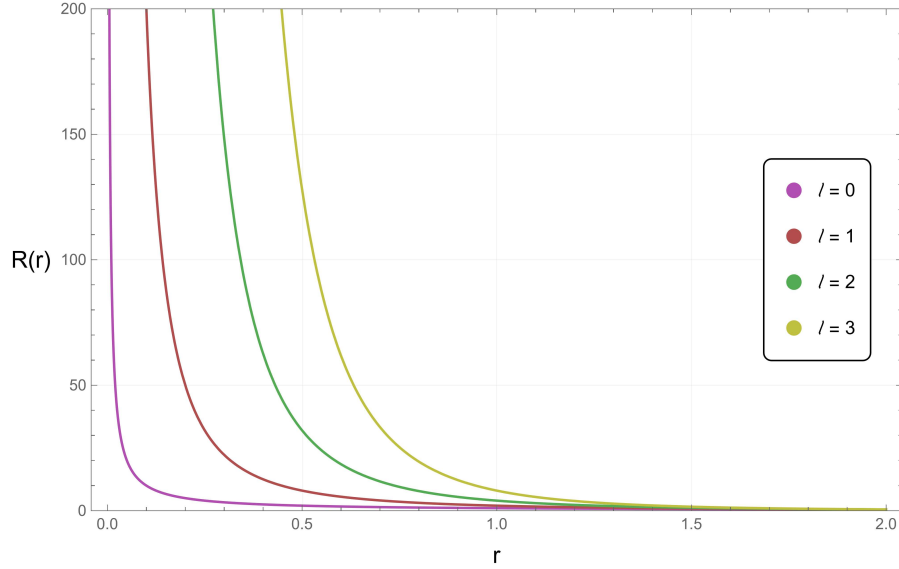


Figura 12 – Comportamento da função radial $R(r)$ em (80) com $\lambda_q = 0.5$ e $\beta < 0$. Em linha roxa, o número quântico de momento angular $\ell = 0$, em linha vermelha $\ell = 1$, em linha verde $\ell = 2$ e em linha amarela $\ell = 3$.

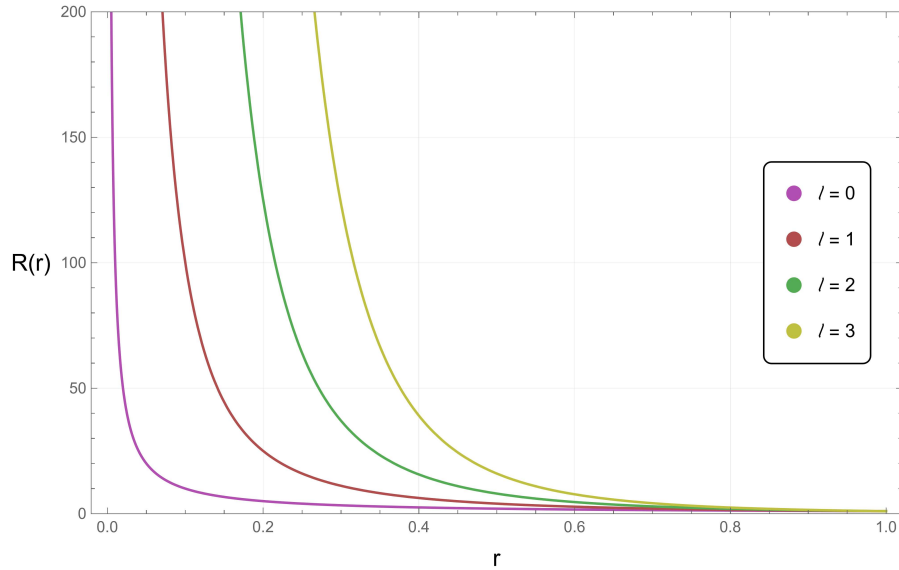


Figura 13 – Comportamento da função radial $R(r)$ em (80) com $\lambda_q = 1$ e $\beta < 0$. Em linha roxa, o número quântico de momento angular $\ell = 0$, em linha vermelha $\ell = 1$, em linha verde $\ell = 2$ e em linha amarela $\ell = 3$.

parâmetros ≈ 0.01 e ≈ 1 .

Para $\ell = 1$, por exemplo, na região $r = 0.1$ a função radial possui ordem $< 10^2$ no parâmetro $\lambda_q = 1$, como pode ser observado em conjunto com a Figura 14. Entretanto, com $\lambda_q = 0.01$, $R(r) \sim 10^4$ neste mesmo raio, mostrando que quanto menor o parâmetro quintessencial, maior será o valor assumido pela função radial - com a exceção da curva descrita pelo número quântico $\ell = 0$, que apresentou pequenas variações para diferentes parâmetros de quintessência.

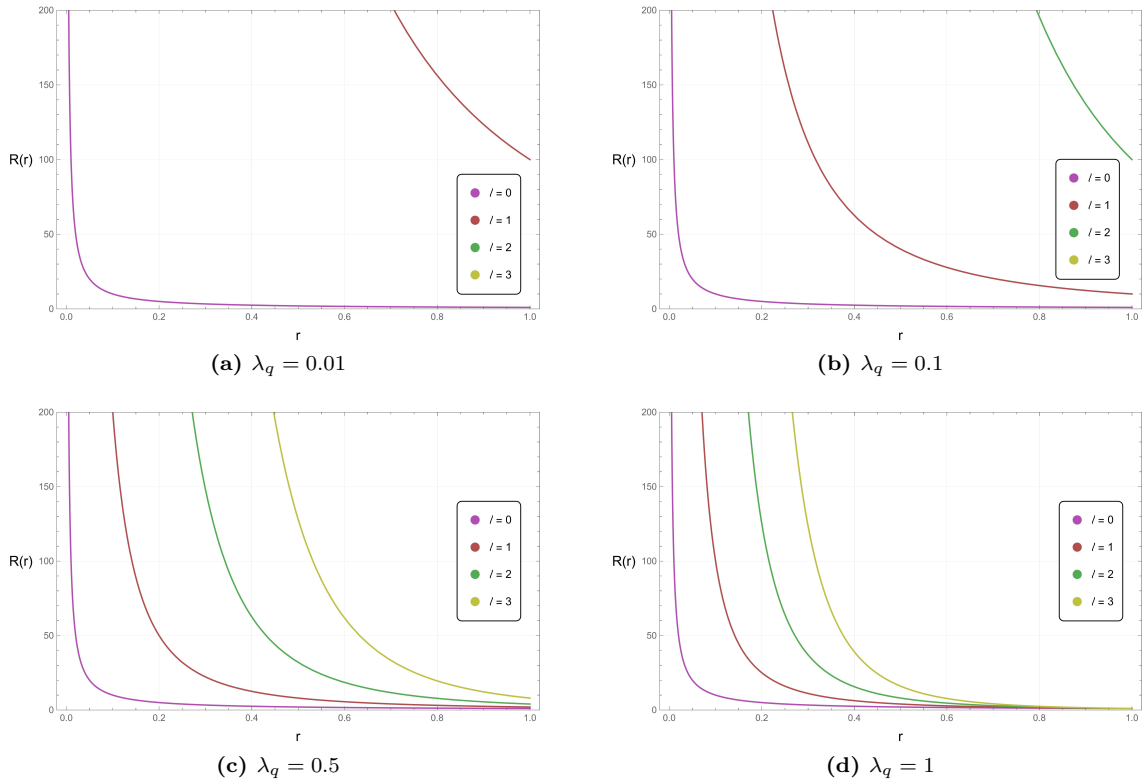


Figura 14 – Gráfico comparativo da função $R(r)$ em (80) com $\beta < 0$ para os parâmetros de quintessência $\lambda_q \in \{0.01, 0.1, 0.5, 1\}$.

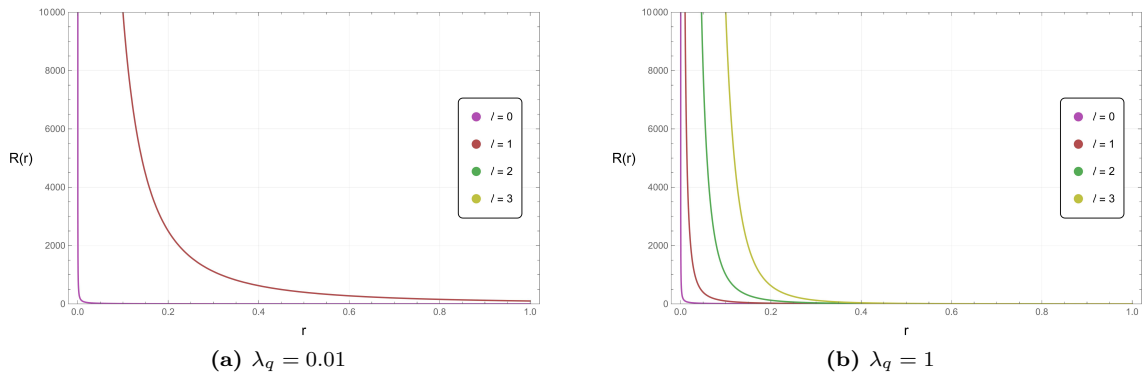


Figura 15 – Gráfico comparativo de $R(r)$ em (80) com $\beta < 0$ para os parâmetros de quintessência $\lambda_q = 0.01$ e $\lambda_q = 1$ em escala vertical ampliada.

Portanto, é possível concluir que a solução (80) possui ordens de grandezas cada vez maiores quanto menor for o parâmetro λ_q . Não somente, quando este for o caso, a função radial também já deve apresentar ordens maiores para raios mais distantes de 0 com valores de $\ell \neq 0$.

Para o caso do parâmetro $\omega_q = -\frac{1}{3}$, também pudemos escrever uma solução avaliada na região $r \approx 0$, que foi expressa pela equação (93). Abaixo vemos sua representação para $\lambda_q = 0.01$ na Figura 16.

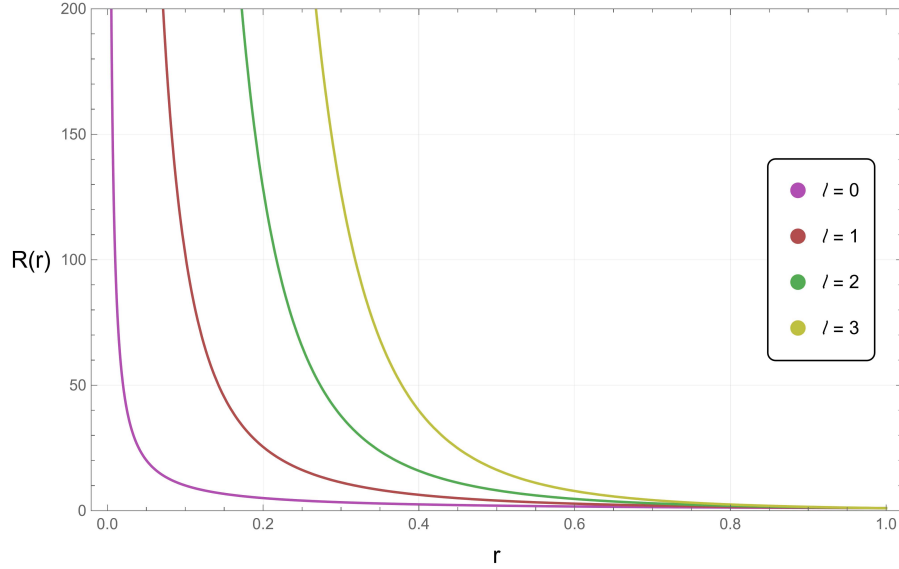


Figura 16 – Comportamento de $R(r)$ para (93) com $\lambda_q = 0.01$ e $\beta < 0$. Em linha roxa, o número quântico de momento angular $\ell = 0$, em linha vermelha $\ell = 1$, em linha verde $\ell = 2$ e em linha amarela $\ell = 3$.

Nesse caso, não foram feitas mudanças no sistema de coordenadas durante a obtenção da solução, então ela é válida no intervalo fixo $|r| < 1$. Contudo, é possível notar pelas Figuras 17 e 18 que λ_q ainda tem uma grande influência na função radial - quanto maior for o seu valor, as soluções decaem do infinito cada vez mais longe de 0. Esse decaimento também deve ficar cada vez mais rápido quanto maior for ℓ , de modo que, próximo a $r = 1$, a função deve vir do infinito até zero em um intervalo extremamente pequeno de r .

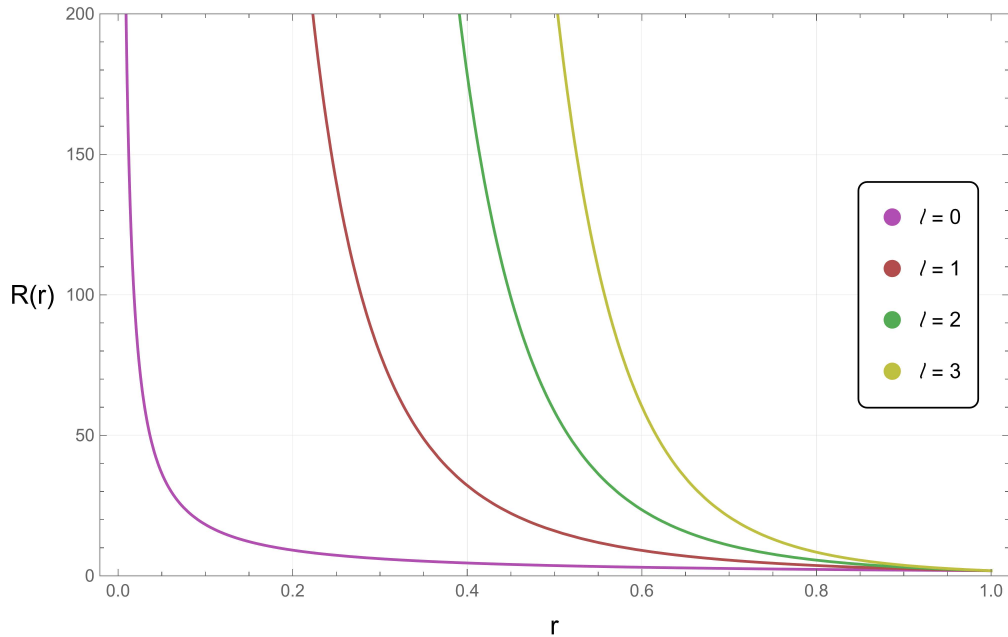


Figura 17 – Comportamento de $R(r)$ para (93) com $\lambda_q = 0.7$ e $\beta < 0$. Em linha roxa, o número quântico de momento angular $\ell = 0$, em linha vermelha $\ell = 1$, em linha verde $\ell = 2$ e em linha amarela $\ell = 3$.

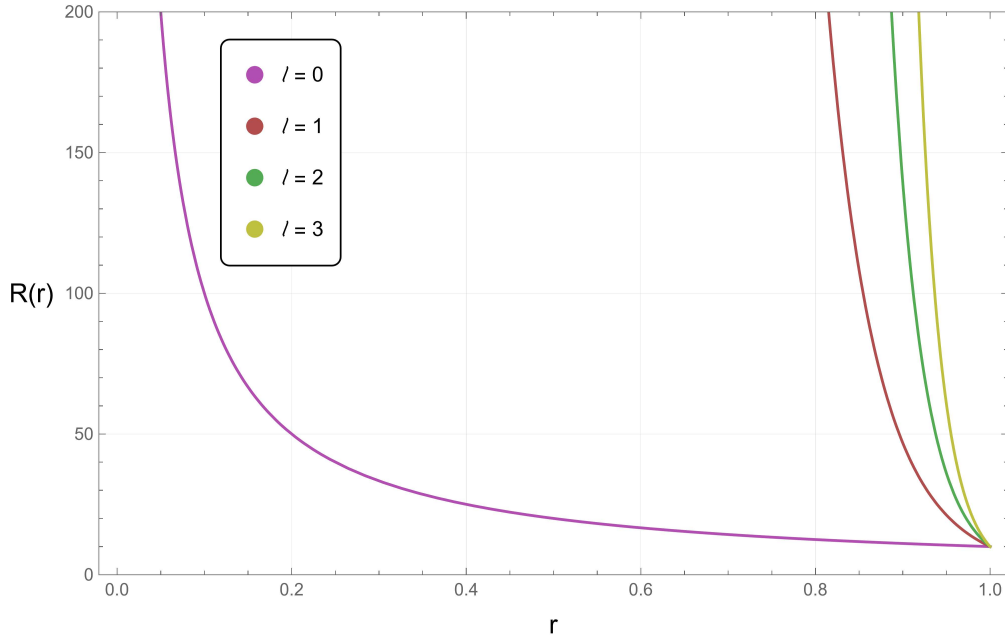


Figura 18 – Comportamento de $R(r)$ para (93) com $\lambda_q = 0.99$ e $\beta < 0$. Em linha roxa, o número quântico de momento angular $\ell = 0$, em linha vermelha $\ell = 1$, em linha verde $\ell = 2$ e em linha amarela $\ell = 3$.

Na Figura 19 é possível observar a solução (93) para diferentes valores do parâmetro λ_q . Como indicado do item (a) ao (f), as curvas descritas com $\ell > 0$ se deslocam gradativamente com o aumento de λ_q , e mais rápido conforme o parâmetro quintessencial se aproxima de 1. A curva $\ell = 0$, assim como no caso anterior da solução (80), apresentou uma variação lenta.

Outro ponto notável é que, no caso da quintessência livre no parâmetro $\omega_q = -\frac{2}{3}$, a solução (80) em $r \rightarrow 0$ produziu o parâmetro β da ECH como

$$\beta_{-\frac{2}{3}} = \pm (1 + 4\ell(\ell + 1))^{\frac{1}{2}}. \quad (95)$$

Já para o caso do parâmetro de estado $\omega_q = -\frac{1}{3}$, a solução (93) é definida com o parâmetro

$$\beta_{-\frac{1}{3}} = \pm \left(1 + \frac{4\ell(\ell + 1)}{1 - \lambda_q}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad (96)$$

deixando claro que, uma vez que λ_q vai a zero, a influência de ℓ pelo parâmetro β deve ser a mesma. Entretanto, as formas das equações (80) e (93) diferem também pela potência de λ_q em outras partes da função.

No caso da métrica descrita por (81), não há dependência em r na função $f(r)$, e por isso não observamos a constante λ_q afetar diretamente o sistema de coordenadas como na primeira, pelo termo $\lambda_q r$. Quando comparamos a Figura 14 com os itens (a), (b), (c) e (f) da Figura 19, é possível notar essa diferença.

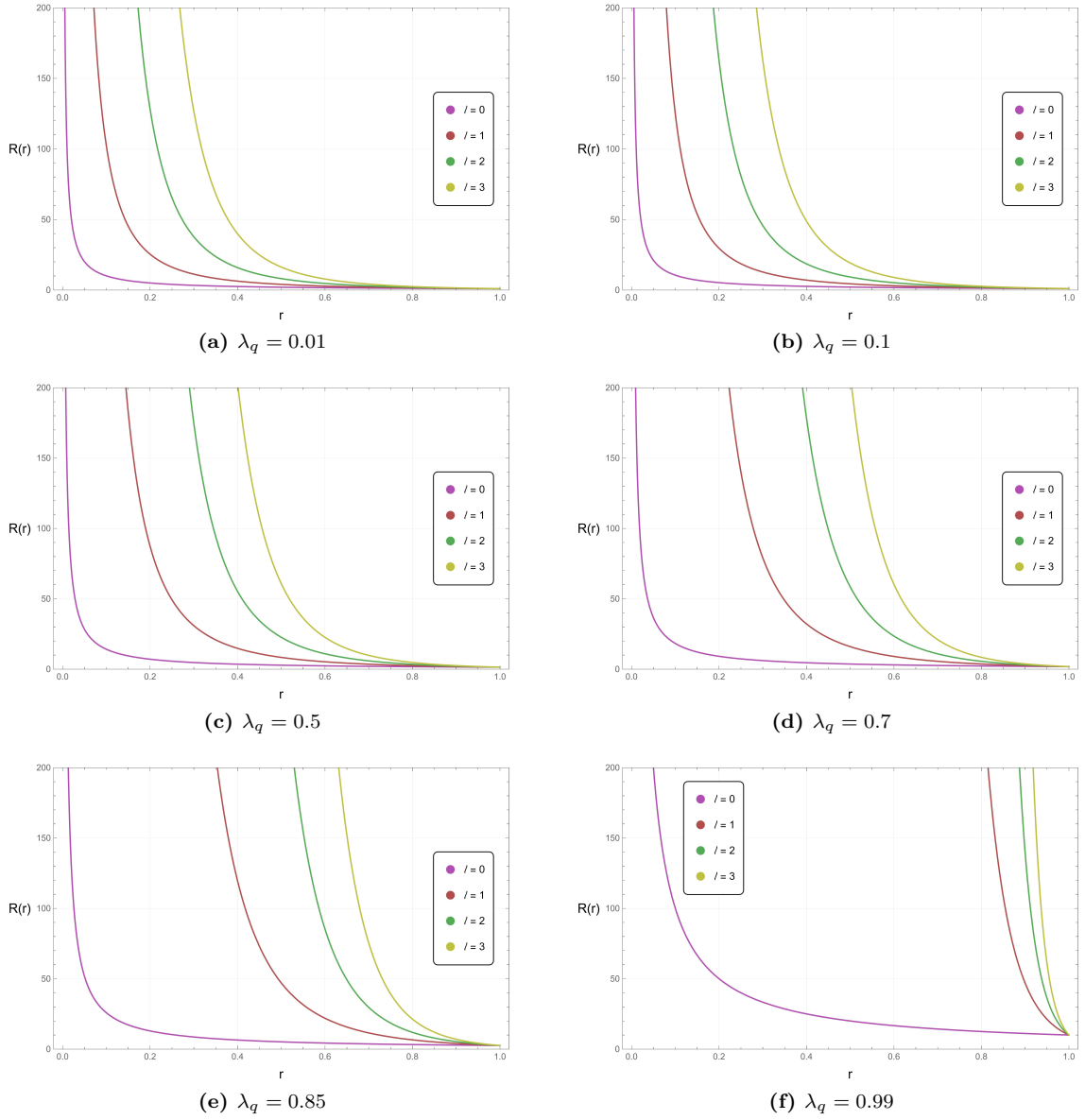


Figura 19 – Gráfico comparativo de $R(r)$ em (93) com $\beta < 0$ para os parâmetros quintessenciais $\lambda_q \in \{0.01, 0.1, 0.5, 0.7, 0.85, 0.99\}$.

Ainda, quando crescemos o valor de λ_q na solução (80), apesar das Figuras 11, 12 e 13, nos dizerem que a forma das soluções devem mantêm similaridade no intervalo que são válidas, no caso do parâmetro $\omega_q = -\frac{1}{3}$ não observamos o mesmo comportamento. Em particular, no caso que $\lambda_q = 1$, notamos pela equação (93) que esse deve ser um ponto de descontinuidade desse sistema, como pode ser visto com $\lambda_q = 0.99$ pelas Figuras 19 e 18.

Também para parâmetro de estado $\omega_q = -\frac{1}{3}$, a equação radial produz uma solução como (94) no infinito com $\alpha \neq 0$, o que, diferente do caso $\omega_q = -\frac{2}{3}$, nos permite avaliar a equação assintoticamente nesse limite. Como vimos em (92), entretanto, o parâmetro α está relacionado à energia e à massa da partícula, e a solução deve ser analisada numericamente em próximas pesquisas. Ainda, como $\alpha \neq 0$, a condição polinomial descrita pela equação

A.1.32 é válida, mas o parâmetro $\delta = 0$, de modo que essa relação não produz um espectro de energia.

Para ambos os casos, considerando o parâmetro $\omega_q = -\frac{1}{3}$ e $\omega_q = -\frac{2}{3}$, é possível ainda apoiar os resultados dessa seção na solução da equação descrita por (62), que deve ser avaliada assintoticamente por funções de Bessel, e também por funções de Heun em outros projetos.

4.2 KISELEV TIPO II: SCHWARZSCHILD COM QUINTESSÊNCIA

Nesta seção, apresentaremos os desenvolvimentos da resolução da equação de Klein-Gordon para o caso da métrica de Schwarzschild com quintessência, ou KISELEV tipo II, desenvolvida no Capítulo 2 e representada pela equação (21).

Assim como foi feito no caso KISELEV tipo I, avaliaremos a equação radial para diferentes parâmetros de estado. Como será visto a seguir, a depender de ω_q , a equação de Klein-Gordon pode apresentar um número maior de singularidades e, neste caso, maiores dificuldades na obtenção das soluções.

4.2.1 Parâmetro $\omega_q = -\frac{1}{3}$

Para o caso do parâmetro $-\frac{1}{3}$, teremos a forma da métrica dada por

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} - \lambda_q. \quad (97)$$

Novamente, vamos resolver a equação de Klein-Gordon para a métrica definida com $f(r)$ acima, e esperamos encontrar alguma relação entre ela e os casos limites onde não há quintessência. Assim, a equação radial fica

$$W''(r) + \left[\frac{1}{(1 - \lambda_q - \frac{2M}{r})^2} \left(\omega^2 + \frac{M^2}{r^4} \right) + \frac{1}{(1 - \lambda_q - \frac{2M}{r})} \left(-m^2 - \frac{\ell(\ell + 1)}{r^2} \right) \right] W(r) = 0, \quad (98)$$

ou

$$W''(r) + \left[\frac{1}{(r - \frac{2M}{1-\lambda_q})^2} \left(\frac{r^2}{(1 - \lambda_q)^2} \right) \left(\omega^2 + \frac{M^2}{r^4} \right) + \frac{1}{(r - \frac{2M}{1-\lambda_q})} \left(\frac{r}{1 - \lambda_q} \right) \left(-m^2 - \frac{\ell(\ell + 1)}{r^2} \right) \right] W(r) = 0. \quad (99)$$

Podemos escrever ainda

$$W''(r) + \left[\frac{a_1 r^2}{(r - b)^2} + \frac{a_2}{r^2 (r - b)^2} + \frac{a_3 r}{(r - b)} + \frac{a_4}{r(r - b)} \right] W(r) = 0, \quad (100)$$

onde os termos

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{\omega^2}{(1 - \lambda_q)^2}, \\
a_2 &= \frac{M^2}{(1 - \lambda_q)^2}, \\
a_3 &= -\frac{m^2}{1 - \lambda_q}, \\
a_4 &= -\frac{\ell(\ell + 1)}{1 - \lambda_q}, \\
b &= \frac{2M}{1 - \lambda_q},
\end{aligned} \tag{101}$$

sendo essa a notação que adotaremos aqui, por simplicidade, durante o desenvolvimento desta parte da seção. A equação acima pode ser reescrita utilizando o método de decomposição em frações parciais e, portanto,

$$\begin{aligned}
W''(r) + \left[\frac{1}{(r - b)} \left(2a_1b - \frac{2a_2}{b^3} + a_3b + \frac{a_4}{b} \right) \right. \\
\left. + \frac{1}{(r - b)^2} \left(a_1b^2 + \frac{a_2}{b^2} \right) + \frac{1}{r} \left(\frac{2a_2}{b^3} - \frac{a_4}{b} \right) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{a_2}{b^2} \right) + a_1 + a_3 \right] W(r) = 0.
\end{aligned} \tag{102}$$

De novo, poderíamos resolver diretamente a equação acima. Neste caso, porém, o intervalo delimitado por ela, $0 \leq r < \infty$, não está de acordo com os limites do nosso sistema físico.

Mas, da equação (97), notamos que existe um horizonte formado em $r = \frac{2M}{1 - \lambda_q}$. Então, operaremos a seguir com uma mudança de variáveis, de modo que a equação esteja alinhada às coordenadas do horizonte de eventos. Dessa forma, seja $x = r - r_H$, ou $x = r - \frac{2M}{1 - \lambda_q}$. A equação para r pode ser reescrita em x e deve ser

$$\begin{aligned}
W''(x) + \left[\frac{1}{x} \left(2a_1b - \frac{2a_2}{b^3} + a_3b + \frac{a_4}{b} \right) + \frac{1}{x^2} \left(a_1b^2 + \frac{a_2}{b^2} \right) \right. \\
\left. + \frac{1}{(x + b)} \left(\frac{2a_2}{b^3} - \frac{a_4}{b} \right) + \frac{1}{(x + b)^2} \left(\frac{a_2}{b^2} \right) + a_1 + a_3 \right] W(x) = 0.
\end{aligned} \tag{103}$$

Como desejamos que a equação acima possua uma classe de soluções conhecidas, vamos novamente operar uma substituição nas variáveis. Dessa vez, $bz = -x$ de modo que

$$\begin{aligned}
W''(z) + \left[\frac{1}{z} \left(-2a_1b^2 + \frac{2a_2}{b^2} - a_3b^2 - a_4 \right) + \frac{1}{z^2} \left(a_1b^2 + \frac{a_2}{b^2} \right) \right. \\
\left. + \frac{1}{(z - 1)} \left(-\frac{2a_2}{b^2} + a_4 \right) + \frac{1}{(z - 1)^2} \left(\frac{a_2}{b^2} \right) + (a_1 + a_3)b^2 \right] W(z) = 0.
\end{aligned} \tag{104}$$

A equação acima é uma equação confluyente de Heun. Neste caso, porém, com coeficientes

$$\begin{aligned}
A &= -2a_1b^2 + \frac{2a_2}{b^2} - a_3b^2 - a_4 \\
B &= a_1b^2 + \frac{a_2}{b^2} \\
C &= -\frac{2a_2}{b^2} + a_4 \\
D &= \frac{a_2}{b^2} \\
E &= (a_1 + a_3)b^2.
\end{aligned} \tag{105}$$

Assim, a equação obtida tem solução analítica para $W(z)$ como

$$W(z) = ke^{\frac{\alpha z}{2}} z^{\frac{\beta+1}{2}} (z-1)^{\frac{\gamma+1}{2}} \text{HeunC}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta; z). \tag{106}$$

- Se $z \rightarrow 0$

Como desenvolvido na Seção A.1.1, a solução no limite $z \rightarrow 0$ pode ser avaliada de acordo com a equação A.1.22, resultando em

$$W(r) \sim \begin{cases} \left[\left(\frac{-1}{b} \right) \left(r - \frac{2M}{1-\lambda_q} \right) \right]^{\frac{1}{2}(1+\beta)} \\ \left[\left(\frac{-1}{b} \right) \left(r - \frac{2M}{1-\lambda_q} \right) \right]^{\frac{1}{2}(1-\beta)}. \end{cases} \tag{107}$$

Como $W(r)$ é a solução da equação radial normal de Klein-Gordon, por meio da equação (54) escrevemos a função radial avaliada no horizonte r_H como

$$R(r) \sim \begin{cases} \frac{1-\lambda_q}{2M\Delta(r)} \left[\left(\frac{-1}{b} \right) \left(r - \frac{2M}{1-\lambda_q} \right) \right]^{\frac{1}{2}(1+\beta)} \\ \frac{1-\lambda_q}{2M\Delta(r)} \left[\left(\frac{-1}{b} \right) \left(r - \frac{2M}{1-\lambda_q} \right) \right]^{\frac{1}{2}(1-\beta)}, \end{cases} \tag{108}$$

onde $\Delta(r) = \sqrt{(1-\lambda_q) - \frac{2M}{r}}$, e o termo r^{-1} do denominador já foi aproximado para r_H definido anteriormente.

- Se $|z| \rightarrow \infty$

No infinito, utilizamos a equação A.1.23 para escrever a função $W(r)$, que é avaliada como

$$W(r) \sim \begin{cases} \left[\left(\frac{-1}{b} \right) \left(r - \frac{2M}{1-\lambda_q} \right) \right]^{\frac{-\delta}{\alpha}} e^{\frac{\alpha}{2} \left[\left(\frac{-1}{b} \right) \left(r - \frac{2M}{1-\lambda_q} \right) \right]} \\ \left[\left(\frac{-1}{b} \right) \left(r - \frac{2M}{1-\lambda_q} \right) \right]^{\frac{\delta}{\alpha}} e^{-\frac{\alpha}{2} \left[\left(\frac{-1}{b} \right) \left(r - \frac{2M}{1-\lambda_q} \right) \right]}. \end{cases} \tag{109}$$

E então a função radial de acordo com a equação (54) deve ficar

$$R(r) \sim \begin{cases} \frac{1}{r\Delta(r)} \left[\left(\frac{-1}{b} \right) \left(r - \frac{2M}{1-\lambda_q} \right) \right]^{\frac{-\delta}{\alpha}} e^{\frac{\alpha}{2} \left[\left(\frac{-1}{b} \right) \left(r - \frac{2M}{1-\lambda_q} \right) \right]} \\ \frac{1}{r\Delta(r)} \left[\left(\frac{-1}{b} \right) \left(r - \frac{2M}{1-\lambda_q} \right) \right]^{\frac{\delta}{\alpha}} e^{-\frac{\alpha}{2} \left[\left(\frac{-1}{b} \right) \left(r - \frac{2M}{1-\lambda_q} \right) \right]}, \end{cases} \tag{110}$$

também com $\Delta(r) = \sqrt{(1 - \lambda_q) - \frac{2M}{r}}$. Os parâmetros de Heun (em ambos os casos) são definidos por

$$\begin{aligned}\eta &= \frac{1}{2} - \left(-2a_1b^2 + \frac{2a_2}{b^2} - a_3b^2 - a_4 \right), \\ \beta &= \pm \left(1 - 4 \left(a_1b^2 + \frac{a_2}{b^2} \right) \right)^{\frac{1}{2}}, \\ \delta &= (-2a_1 - a_3)b^2, \\ \gamma &= \pm \left(1 - \frac{4a_2}{b^2} \right)^{\frac{1}{2}}, \\ \alpha &= \pm \left(-4(a_1 + a_3)b^2 \right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}\tag{111}$$

4.2.2 Parâmetro $\omega_q = -\frac{2}{3}$

Considerando o parâmetro $\omega_q = -\frac{2}{3}$, a expressão (21) deve ser

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} - \lambda_q r.\tag{112}$$

E a equação radial de acordo com (53) é

$$\begin{aligned}W''(r) + \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{2M}{r} - \lambda_q r\right)^2} \left(\omega^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{2M}{r^2} - \lambda_q \right)^2 \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{\left(1 - \frac{2M}{r} - \lambda_q r\right)} \left(-m^2 + \frac{\lambda_q}{r} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right) \right] W(r) = 0.\end{aligned}\tag{113}$$

A métrica descrita (112) possui dois horizontes: um horizonte interno e um externo, que denotaremos aqui de r_- e r_+ , respectivamente. Com um pouco de manipulação, e essa notação definida, podemos escrever a equação (113) como

$$\begin{aligned}W''(r) + \left[\frac{1}{((r - r_-)(r - r_+))^2} \left(\frac{\omega^2 r^2}{\lambda_q^2} + \frac{1}{4} \left(\frac{2M}{\lambda_q r} - r \right)^2 \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{(r - r_-)(r - r_+)} \left(\frac{m^2 r}{\lambda_q} + \frac{\ell(\ell+1)}{\lambda_q r} - 1 \right) \right] W(r) = 0.\end{aligned}\tag{114}$$

A equação acima, se decomposta em frações parciais, deve produzir uma relação que varia com os denominadores r , $(r - r_-)$, $(r - r_+)$ e seus quadrados, o que parece facilitar a comparação com as equações definidas no Apêndice A. Entretanto, como podemos observar na forma (114), a métrica evoca não apenas uma singularidade em 0, mas outras duas em r_- e r_+ . Por isso, uma relação entre a equação (114) e a ECH na forma A.1.7 não pode, até o momento, ser encontrada.

Se desejássemos, como nos casos anteriores, estabelecer uma relação entre essas equações, seria necessário fazer uma substituição para avaliar (114) nos horizontes. Mas,

qualquer tentativa de mudar linearmente as coordenadas do sistema para algum deles, provoca uma mudança nos termos que carregam o outro, impossibilitando a recuperação do denominador $(r - 1)$, que é necessário para identificar a equação (114) como uma equação confluyente de Heun na forma normal, representada por A.1.7.

Apesar dessa dificuldade, uma mudança não-linear de variáveis pode ser apropriada neste caso, e ressaltamos aqui a importância do desenvolvimento já feito na Seção 3.2.1 do Capítulo 3 para elaborar esse problema. Outras formas de confluência das equações de Heun, como as descritas nas Seções A.2 e A.3, também devem ser consideradas para o desenvolvimento desse sistema.

4.2.3 Métrica de Schwarzschild

Antes de iniciar algumas discussões sobre os sistemas estudados nas seções anteriores, devemos pontuar um caso particular da equação (21) que é a métrica usual de Schwarzschild - $(S)_{Pure}$. Tanto para o parâmetro $\omega_q = -\frac{1}{3}$ quanto para $\omega_q = -\frac{2}{3}$, quando λ_q vai a zero, é possível recuperar essa solução onde, como é sabido,

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r}. \quad (115)$$

É claro, para parâmetros diferentes de $-\frac{1}{3}$, essa solução também pode ser recuperada no limite $r \rightarrow 0$.

A fim de estabelecer uma comparação entre a solução obtida na Seção 4.2.1 e um sistema livre da fonte de quintessência, construiremos portanto nesta seção uma solução da equação de Klein-Gordon para a métrica definida com (115). A equação radial neste caso é escrita como

$$W''(r) + \left[\frac{1}{(r - 2M)} \left(4Ma_1 - \frac{a_2}{4M^3} + 2Ma_3 + \frac{a_4}{2M} \right) + \frac{1}{(r - 2M)^2} \left(4M^2a_1 + \frac{a_2}{4M^2} \right) + \frac{1}{r} \left(\frac{a_2}{4M^3} - \frac{a_4}{2M} \right) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{a_2}{4M^2} \right) + a_1 + a_3 \right] W(r) = 0, \quad (116)$$

que, como esperado, tem quase mesma forma da equação (102), entretanto,

$$\begin{aligned} a_1 &= \omega^2, \\ a_2 &= M^2, \\ a_3 &= -m^2, \\ a_4 &= -\ell(\ell + 1). \end{aligned} \quad (117)$$

Como no caso descrito na Seção 4.2.1, é preciso obter uma solução no sistema de coordenadas do horizonte de eventos, definido a partir de (115) como $r_H = 2M$. Sendo

assim, a substituição $x = r - r_H$, ou $x = r - 2M$ resulta em

$$W''(x) + \left[\frac{1}{x} \left(4Ma_1 - \frac{a_2}{4M^3} + 2Ma_3 + \frac{a_4}{2M} \right) + \frac{1}{x^2} \left(4M^2a_1 + \frac{a_2}{4M^2} \right) + \frac{1}{x+2M} \left(\frac{a_2}{4M^3} - \frac{a_4}{2M} \right) + \frac{1}{(x+2M)^2} \left(\frac{a_2}{4M^2} \right) + a_1 + a_3 \right] W(x) = 0. \quad (118)$$

Se $2Mz = -x$, equação acima se torna

$$W''(z) + \left[\frac{1}{z} \left(-8a_1M^2 + \frac{a_2}{2M^2} - 4a_3M^2 - a_4 \right) + \frac{1}{z^2} \left(4a_1M^2 + \frac{a_2}{4M^2} \right) + \frac{1}{z-1} \left(-\frac{a_2}{2M^2} + a_4 \right) + \frac{1}{(z-1)^2} \left(\frac{a_2}{4M^2} \right) + 4(a_1 + a_3)M^2 \right] W(z) = 0. \quad (119)$$

Como definido em A.1.7, a equação acima é uma equação confluyente de Heun com coeficientes

$$\begin{aligned} A &= -8a_1M^2 + \frac{a_2}{2M^2} - 4a_3M^2 - a_4, \\ B &= 4a_1M^2 + \frac{a_2}{4M^2}, \\ C &= -\frac{a_2}{2M^2} + a_4, \\ D &= \frac{a_2}{4M^2}, \\ E &= 4(a_1 + a_3)M^2, \end{aligned} \quad (120)$$

e solução analítica definida pela equação A.1.9, com os parâmetros

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{1}{2} - \left(-8a_1M^2 + \frac{a_2}{2M^2} - 4a_3M^2 - a_4 \right), \\ \beta &= \pm \left(1 - 4 \left(4a_1M^2 + \frac{a_2}{4M^2} \right) \right)^{\frac{1}{2}}, \\ \delta &= -8a_1M^2 - 4a_3M^2, \\ \gamma &= \pm \left(1 - \frac{a_2}{M^2} \right)^{\frac{1}{2}}, \\ \alpha &= \pm \left(-16M^2(a_1 + a_3) \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (121)$$

Portanto, de acordo com a definição da função radial pela equação (54), e as soluções representadas por A.1.22 e A.1.23, é possível escrever $R(r)$ avaliada nas regiões $r \rightarrow r_H$ e $r \rightarrow \infty$ como

- Se $r \rightarrow r_H$,

$$R(r) \sim \begin{cases} \frac{1}{2M\Delta(r)} \left[\frac{-1}{2M} (r - 2M) \right]^{\frac{1}{2}(1+\beta)} \\ \frac{1}{2M\Delta(r)} \left[\frac{-1}{2M} (r - 2M) \right]^{\frac{1}{2}(1-\beta)}. \end{cases} \quad (122)$$

- Se $r \rightarrow \infty$,

$$R(r) \sim \begin{cases} \frac{1}{r\Delta(r)} \left[\frac{-1}{2M} (r-2M) \right]^{\frac{-\delta}{\alpha}} e^{\frac{\alpha}{2} [(\frac{-1}{2M})(r-2M)]} \\ \frac{1}{r\Delta(r)} \left[\frac{-1}{2M} (r-2M) \right]^{\frac{\delta}{\alpha}} e^{\frac{-\alpha}{2} [(\frac{-1}{2M})(r-2M)]} \end{cases}, \quad (123)$$

com $\Delta(r) = \sqrt{1 - \frac{2M}{r}}$ em ambos os casos.

4.2.4 Análises parciais

No início da seção, apresentamos a solução de Schwarzschild com quintessência, que é um caso particular da métrica geral obtida pelo Kiselev na equação (19). Como mencionamos durante o trabalho, e pode ser visto neste capítulo, a equação de Klein-Gordon descrita com essa métrica apresenta complicações para parâmetros $\neq -\frac{1}{3}$. Quando $\omega_q \ll -\frac{1}{3}$, um número maior de singularidades surge na equação (53), dificultando sua resolução.

Apesar disso, no caso do parâmetro $-\frac{1}{3}$, conseguimos obter soluções para equação radial de KISELEV tipo II tanto em $r \rightarrow r_H$ quanto em $r \rightarrow \infty$. O mesmo aconteceu com a métrica usual de Schwarzschild.

Antes de associar esses resultados, devemos fazer menção à grande semelhança entre ambas as equações (102) e (116). Esse fato já era esperado do Capítulo 2, quando vimos que a única diferença entre as métricas é pelo parâmetro λ_q . Se compararmos as equações (101) e (117), os coeficientes usados para fazer a separação por frações parciais da métrica de KISELEV tipo II com $\omega_q = -\frac{1}{3}$, em todos os casos, diferem daqueles em Schwarzschild pelo fator $(1 - \lambda_q)$. Consequentemente, os coeficientes que definem as equações como equações confluentes de Heun, como pode ser visto nas equações (105) e (120), também possuem uma diferença justificada pelo mesmo fator. Pontuamos anteriormente que, para que a métrica não tenha consequências não observáveis, é fisicamente bastante provável que $\lambda_q \ll 1$. Assim, consideramos que o impacto da componente de energia escura para a solução possui efeitos que podem ser tratados, em muitas situações, como uma pequena perturbação ao sistema, e deverão ser avaliados em futuros projetos.

De todo modo, para o caso de $r \rightarrow r_H$, as soluções obtidas possuem a mesma discriminação, e ambas são relacionadas a seus respectivos parâmetros β . Em cada caso, β está associado à energia do sistema, e é definido por

$$\beta_S = \pm 4\omega M i \quad (124)$$

para a métrica de Schwarzschild, e

$$\beta_{\omega_q} = \pm \frac{4\omega M i}{(1 - \lambda_q)^2} \quad (125)$$

para a métrica de Schwarzschild com quintessência, deixando evidente que, quanto menor o valor de λ_q , devemos recuperar, a partir de KISELEV tipo II nesse parâmetro, a mesma solução obtida para o caso de Schwarzschild.

Dessa forma, ao passo que $\lambda_q \rightarrow 0$, $\beta_{\omega_q} \rightarrow \beta_S$, de modo que a contribuição da energia, para o sistema com quintessência, deve ser praticamente a mesma do caso Schwarzschild. Por outro lado, se λ_q tende a 1, o valor de β aumenta expressivamente, nos levando a uma descontinuidade em $\lambda_q = 1$. Para o caso de $\lambda_q \gg 1$, a contribuição de energia para essa solução deve ser minimizada quando maior for λ_q .

No caso onde $r \rightarrow \infty$, a relação é similar. Dessa vez, entretanto, ela acontece pela contribuição de ω e m para os parâmetros δ e α . Para KISELEV tipo II,

$$\begin{aligned} \delta &= \left(\frac{2M}{1-\lambda_q} \right)^2 \left(\frac{m^2}{1-\lambda_q} - \frac{2\omega^2}{(1-\lambda_q)^2} \right), \\ \alpha &= \pm \frac{4M}{1-\lambda_q} \left(\frac{m^2}{1-\lambda_q} - \frac{\omega^2}{(1-\lambda_q)^2} \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (126)$$

Em contrapartida, para a métrica de Schwarzschild os parâmetros da ECH são

$$\begin{aligned} \delta &= 4M^2 (m^2 - 2\omega^2), \\ \alpha &= \pm 4M \sqrt{m^2 - \omega^2}. \end{aligned} \quad (127)$$

Como é possível observar, quando λ_q vai a zero, o comportamento das soluções deve ser o mesmo. Além disso, $\lambda_q = 1$ também deve ser um ponto de descontinuidade dessas soluções. Se $\lambda_q \gg 1$, os termos relativos à massa e à energia devem ir a 0. Não somente, δ e α também tenderão a zero, de modo que seríamos conduzidos a uma indeterminação no termo que depende do expoente $\frac{\delta}{\alpha}$ da solução. Mais uma vez, o fator λ_q se mostra inadequado a valores muito maiores que zero, e λ_q pequeno se parece com uma condição para que seja possível recuperar o limite onde não há contribuição de energia escura, ou seja, a métrica de Schwarzschild.

Apesar disso, identificamos a consistência da nossa solução pelas relações que os parâmetros δ e α assumem. Nos dois casos, eles estão relacionados não somente à massa, mas também à componente ω , de modo que para r muito grande, longe do buraco negro, a contribuição na função radial seja predominantemente da energia da partícula. Opostamente, se r é suficientemente pequeno e próximo ao horizonte de eventos, observamos pelas relações de β que a função radial é influenciada pelo valor da massa do buraco negro e a energia associada.

Ainda sobre os parâmetros da ECH, notamos que $\alpha, \delta \neq 0$, o que nos permite descrever a energia do sistema por meio da condição polinomial A.1.32. Assim, para o caso de Schwarzschild com quintessência no parâmetro $-\frac{1}{3}$, a relacionamos por meio da

forma

$$\frac{M}{(1 - \lambda_q)^2} \left[2\omega i + \frac{m^2(1 - \lambda_q) - 2\omega^2}{\sqrt{m^2(1 - \lambda_q) - \omega^2}} \right] + n + 1 = 0. \quad (128)$$

Contudo, não foi possível ainda expressar ω analiticamente, e com o mesmo intuito de avaliar a discrepância desse sistema com relação ao sistema usual de Schwarzschild, essa relação deve ser considerada numericamente em próximas pesquisas.

Para o caso do parâmetro $-\frac{2}{3}$, pontuamos que não foi possível ainda encontrar uma solução da equação de Klein-Gordon. A métrica em questão possui dois horizontes, e $f(r)$ faz parte do denominador da equação (114), portanto, seus raios funcionam como singulares dessa equação. Essas singularidades diferem das descritas pela equação confluyente de Heun, que parecia anteriormente ser uma boa formulação para descrever esse sistema.

Uma simples transformação linear do sistema de coordenadas não seria suficiente para descrever esse sistema por funções HeunC. Entretanto, mantemos aberta a possibilidade de transformações não-lineares para o sistema de coordenadas, e ressaltamos novamente o desenvolvimento feito no Capítulo 3, que certamente simplificará a elaboração do problema sendo este o caso.

Ainda, destacamos que outros caminhos devem ser avaliados. A métrica KISELEV tipo II com o parâmetro $-\frac{2}{3}$ apresenta um caso particular, que ocorre quando os horizontes coincidem em um único limite. Observando a equação (112), vemos que os raios dos horizontes correspondem, na verdade, a

$$r_{\pm} = \frac{1}{2\lambda_q} \left(1 \pm \sqrt{1 - 8M\lambda_q} \right). \quad (129)$$

Mostramos no Capítulo 2 que, definido um parâmetro de estado, o parâmetro λ_q é capaz de alterar a formação de horizontes do sistema. Nesse caso, se pudermos estabelecer o valor de λ_q de modo que $M = \frac{1}{8\lambda_q}$, r_- será igual a r_+ . Assim, a equação de Klein-Gordon desse sistema deve possuir um único horizonte, e formar denominadores somente em $r - \frac{1}{2\lambda_q}$ - com a exceção do termo em r e seu quadrado. Assim, nos aproximamos um pouco mais da equação confluyente de Heun. Porém, essa coincidência apenas não seria suficiente, porque esses denominadores se apresentariam elevados a quarta potência, o que ainda impede nossa comparação. Neste caso, notamos a equação duplamente confluyente de Heun apresentada na Seção A.3, e que permite $\left(r - \frac{1}{2\lambda_q}\right)^4$. Contudo, o mesmo problema retorna, mas dessa vez nos termos $\sim \frac{1}{r}$, que não são admitidos por esse último caso de confluência.

De todo modo, ambas funções HeunC e HeunD não foram completamente descartadas como possíveis soluções, porque, apesar de suas equações não possuírem a forma da equação de Klein-Gordon que estamos tratando até o momento, elas parecem ter ainda

alguma semelhança com o nosso sistema. Um próximo passo consiste em avaliar substituições não-lineares para o sistema de coordenadas, e tentar elaborar o problema de forma a ser representado por alguma delas. Pontuamos aqui ainda que um estudo mais profundo sobre equações de Heun, e sobre singulares de equações diferenciais, também deve ser realizado, preservando o mesmo objetivo: obter soluções para a equação radial de Klein-Gordon na métrica descrita pelo Capítulo 2.

Uma última consideração sobre a métrica de Schwarzschild com quintessência ainda no parâmetro $\omega_q = -\frac{1}{3}$ é que, se λ_q pode ser extrapolado para valor 1, a equação se reduz a uma forma de buraco negro pontual - $(S)_{Point-like}$, como dito anteriormente. A função da métrica seria

$$f(r) = -\frac{2M}{r}, \quad (130)$$

e a equação radial

$$W''(r) + \left[\frac{m^2 r}{2M} + \frac{\omega^2 r^2}{4M^2} + \frac{\ell(\ell+1)}{2Mr} + \frac{1}{4r^2} \right] W(r) = 0. \quad (131)$$

Com o que foi desenvolvido ao longo do trabalho, inferimos que $\lambda_q \ll 1$, e por isso a consideração acima está, em certo sentido, contrária as nossas hipóteses. Entretanto, esse resultado pode ser visto como uma curiosidade, e vir a contribuir para as análises dos nossos sistemas.

A equação (131) acima possui as mesmas singularidades que o caso biconfluyente da equação de Heun, apresentado na Seção A.2, com 4 parâmetros. Entretanto, pela relação entre os coeficientes dessas equações, observamos que essa quantidade de parâmetros não é suficiente para expor o nosso sistema. A EBH definida com 5 parâmetros, por outro lado, satisfaz o problema, e é expressa canonicamente por

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \left(\frac{\gamma}{r} + \delta + \epsilon r \right) \frac{du}{dr} + \frac{\alpha r - q}{r} u = 0, \quad (132)$$

com solução HeunB($\gamma, \delta, \epsilon, \alpha, q; r$).

Analogamente ao que foi feito com as demais equações, obtemos a forma normal da equação como

$$W''(r) + \left[A + \frac{B}{r} + \frac{C}{r^2} + Dr + Er^2 \right] W(r) = 0, \quad (133)$$

onde

$$\begin{aligned}
A &= \alpha - \frac{\delta^2}{4} - \frac{\epsilon(1+\gamma)}{2}, \\
B &= -q - \frac{\gamma\delta}{2}, \\
C &= \frac{\gamma(1-\gamma/2)}{2}, \\
D &= -\frac{\delta\epsilon}{2}, \\
E &= -\frac{\epsilon^2}{4}.
\end{aligned} \tag{134}$$

Por associação direta entre as equações (131), (133) e (134), concluímos que a nossa equação radial é uma EBH com 5 parâmetros definidos por

$$\begin{aligned}
\gamma &= 1, \\
\epsilon &= \pm \left(-\frac{\omega^2}{M^2} \right)^{\frac{1}{2}}, \\
\delta &= \frac{-m^2}{\pm \left(-\frac{\omega^2}{M^2} \right)^{\frac{1}{2}} M}, \\
q &= \frac{-\ell(\ell+1)}{2M} - \frac{1}{2} \left(\frac{-m^2}{\pm \left(-\frac{\omega^2}{M^2} \right)^{\frac{1}{2}} M} \right), \\
\alpha &= \frac{1}{4} \left(\frac{-m^4}{\omega^2} \right) \pm \left(-\frac{\omega^2}{M^2} \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned} \tag{135}$$

Durante a operação de normalização, obtemos que $\xi(r)$ deve ser como

$$\xi(r) = kr^{-\frac{\gamma}{2}} \exp\left[-\frac{r}{2} \left(\delta + \frac{\epsilon r}{2} \right)\right], \tag{136}$$

portanto, encontramos uma solução diretamente para r como

$$R(r) = kr^{\frac{1}{2}(\gamma-1)} e^{\frac{r\delta}{2}} e^{\frac{\epsilon r^2}{4}} \text{HeunB}(\gamma, \delta, \epsilon, \alpha, q; r). \tag{137}$$

A função acima é a solução analítica da equação radial de Klein-Gordon para a métrica definida com (130), representada através da classe de funções HeunB.

O próximo passo, com o objetivo de avaliar o sistema em limites como $r \rightarrow 0$ e $r \rightarrow \infty$, seria construir uma representação para a função HeunB avaliada nas regiões de singularidade. Esse estudo deve ser realizado em projetos futuros, e pontuamos que alguns caminhos já foram delimitados, como mostrado em (ISHKHANYAN, T.A.; ISHKHANYAN, A., 2017) e (ISHKHANYAN, Tigran *et al.*, 2014). Aqui, os autores mostraram diferentes formulações para essa classe de funções especiais, em termos de polinômios de Hermite e funções Gama e Beta incompletas, respectivamente.

De qualquer forma, destacamos esse caso aqui porque uma análise mais profunda desse sistema é bastante pertinente. Como mencionamos no início, esse limite só acontece se o valor de λ_q pode ser extrapolado para 1, o que não se mostrou adequado fisicamente pois efeitos não observáveis estariam associados ao sistema, como visto na Seção 2.2.

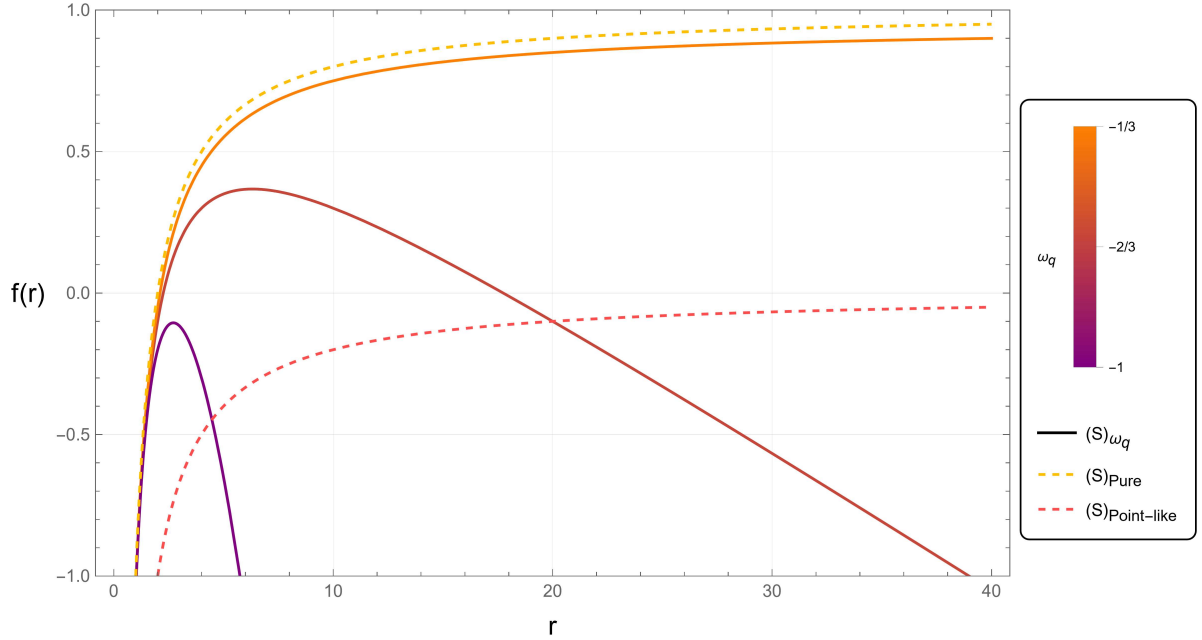


Figura 20 – Comportamento da função $f(r)$ nas métricas $(S)_{\omega_q}$, $(S)_{Pure}$ e $(S)_{Point-like}$ considerando $M = 1$ e $\lambda_q = 0.05$. Em linhas sólidas, $(S)_{\omega_q}$ com $\omega_q = -\frac{1}{3}$ em laranja, $\omega_q = -\frac{2}{3}$ em vermelho, e $\omega_q = -1$ em roxo. $(S)_{Pure}$ e $(S)_{Point-like}$ respectivamente em linhas tracejadas amarela e rosa.

Contudo, apontamos que não somente o limite superior $\omega_q = -\frac{1}{3}$ do parâmetro de estado (com $\lambda_q = 1$) produz essa métrica inusitada, como a métrica definida em (112) pelo parâmetro $-\frac{2}{3}$, a depender do valor de r , pode resultar em alguma parte da curva $\lambda_q r = 1$, o que faria aquele sistema se comportar como um buraco negro pontual de Schwarzschild. A intersecção entre essas curvas pode ser observada na Figura 20.

A curva tracejada rosa, referente ao caso $(S)_{Point-like}$, é deslocada verticalmente com relação à curva usual de Schwarzschild, descrita por linhas tracejadas amarelas. A diferença entre ambas pode ser expressa como $(S)_{Point-like} = (S)_{Pure} - 1$, e inabilita a formação de horizontes para o caso pontual. Assim, para que uma métrica (S) similar ao caso usual de Schwarzschild ($\sim -\frac{2M}{r}$) produzisse algum horizonte, seria necessário definir $(S) = (S)_{Pure} - \lambda_H$ com $\lambda_H < 1$. Em particular, $|\lambda_H| < 1$ define uma região de formação de horizontes de (S) entre $(S)_{Pure}$ e $(S)_{Point-like}$.

O intervalo em que $\lambda_H > 0$ pode ser correspondido a λ_q , que é sempre $\lambda_q > 0$ como visto na Seção 2.1. Deste modo, a métrica de quintessência $(S)_{\omega_q}$ no parâmetro de estado $\omega_q = -\frac{1}{3}$, definida com (97), intermedia a formação de horizontes entre $(S)_{Pure}$ e

$(S)_{Point-like}$ pela variação do parâmetro quintessencial λ_q .

Portanto, como a expressão que obtivemos para a estrutura em (130) foi definida por funções biconfluentes de Heun, nossa hipótese é de que a solução desse problema possa ser escrita e comparada com as soluções já encontradas nas Seções 4.2.1 e 4.2.3. Assim, notamos esse caso como uma curiosidade do sistema, mas que pode apresentar resultados interessantes e contribuir para a análise dos efeitos da componente de energia escura na métrica.

5 CONCLUSÕES

No início dessa dissertação, vimos como as recentes observações astronômicas que indicam o universo em expansão acelerada afetaram o desenvolvimento de grande parte da física contemporânea, (AMENDOLA; TSUJIKAWA, S., 2010). Hoje, entendemos energia escura por uma série de hipóteses, que pretendem explicar esses resultados de maneiras diferentes. De acordo com o modelo cosmológico padrão, observamos que, para um universo de acordo com os resultados observacionais, o parâmetro de estado da componente responsável por esse efeito é obrigatoriamente $\omega_q < -\frac{1}{3}$. Essa constatação ampliou as possibilidades de pesquisa, e diferentes modelos para diferentes parâmetros de estado surgiram na literatura.

Dessa forma, estudamos neste trabalho os efeitos da energia escura por dois sentidos: inicialmente, por meio de uma investigação da métrica descrita por Kiselev para essa componente e, em seguida, com o comportamento de sistemas quânticos através da equação de Klein-Gordon em espaços curvos.

No Capítulo 2, abordamos um sistema que comporta parte dessas interpretações. A métrica descrita, como pontuamos, é uma solução para as equações de campo de Einstein, que representa um espaço-tempo de buraco negro com quintessência, (KISELEV, 2003). A solução é válida para o intervalo do parâmetro de estado $-1 < \omega_q < -\frac{1}{3}$, onde podemos, no limite, recuperar a interpretação associada à constante cosmológica, referente ao extremo inferior $\omega_q = -1$.

Com a análise dos casos particulares da métrica, vimos que ela apresenta algumas dificuldades quando nos aproximamos do limite superior do parâmetro ω_q . No caso KISELEV tipo I, quando r é muito próximo de 0, observamos que a função da métrica decai por um parâmetro λ_q , e quanto maior o valor de λ_q , maior deve ser a discrepância entre o limite $\omega_q \rightarrow -\frac{1}{3}$ e outros valores do parâmetro de estado. Já para o caso KISELEV tipo II, essa diferença não deve ser tão acentuada em $r \approx 0$, uma vez que essa estrutura é dominada pela influência do termo $-\frac{2M}{r}$, relativo à massa do buraco negro. Por outro lado, quando r tende ao infinito, a presença do parâmetro λ_q deve marcar a diferença dessa métrica com relação à métrica de Schwarzschild. Apesar de imaginarmos que $\lambda_q \ll 1$, consideramos que essa constante pudesse assumir qualquer valor, e verificamos seus efeitos nos sistemas de interesse.

Quando tratamos de outros parâmetros de estado, como por exemplo $\omega_q = -\frac{2}{3}$, vimos que o impacto da contribuição de energia escura para métrica fica mais evidente. Para quintessência livre, pudemos observar a formação de um horizonte. Em contrapartida, no caso de Schwarzschild com quintessência, não só um horizonte de eventos é esperado

como, a depender do valor da constante λ_q , pode ocorrer a formação de dois horizontes, ou nenhum.

Além disso, notamos que quando λ_q possui valores muito altos, comparáveis à massa do buraco negro, a métrica deve produzir efeitos estranhos para o sistema, como fazê-lo se comportar como um buraco negro pontual de Schwarzschild, no caso de KISELEV tipo II com o parâmetro no limite $\omega_q \rightarrow -\frac{1}{3}$. Como observamos, seria equivalente a dizer que a contribuição de energia escura impede a formação dos horizontes de eventos. Por outro lado, se λ_q é muito pequeno, deve ser possível ainda nesse parâmetro recuperar as soluções usuais para os limites de r . Como vimos, essa mesma constante está relacionada à densidade de energia quintessencial e , portanto, parece natural que o sistema se altere conforme a densidade de energia dessa fonte. Assim, pontuamos que, apesar da constante λ_q poder assumir qualquer valor do ponto de vista sintático, a estrutura do espaço é fundamentalmente modificada de acordo com o valor assumido e , particularmente, no caso de λ_q grande, as consequências para o significado do sistema parecem fisicamente inadequadas, impossibilitando a recuperação dos limites esperados.

Uma outra forma de estudar a contribuição de energia escura para o sistema é por meio da equação de Klein-Gordon. Especificamente, pela influência do campo gravitacional produzido por essa métrica na dinâmica de partículas com $spin = 0$. O objetivo principal da parte seguinte do trabalho foi, portanto, encontrar soluções para essa equação considerando o espaço-tempo de Kiselev. Para diferentes valores para o parâmetro de estado da energia escura, obtivemos analiticamente as funções radiais, e também expressões para os limites de r que, para o estudo de efeitos quânticos, possuem grande relevância.

Assim, no Capítulo 3, desenvolvemos a equação de Klein-Gordon em espaços curvos e observamos que, para a maioria dos casos que nos propusemos a estudar, a métrica evoca na equação as mesmas singularidades presentes nas equações confluentes de Heun, apresentadas no Apêndice A. Com isso, foi possível avaliar as soluções da ECH nas regiões do ponto 0 e no infinito, e utilizá-las na elaboração dos nossos sistemas. Ainda, durante nossos estudos sobre equações de Heun, nos deparamos com outras formas de confluência que também se relacionam com os casos descritos nessa dissertação, e que nos indicaram caminhos para futuras soluções.

No Capítulo 4, por fim, construímos as equações de Klein-Gordon para as métricas em questão. No caso KISELEV tipo I, foi possível obter soluções tanto para o parâmetro de estado $\omega_q = -\frac{2}{3}$, quanto para $\omega_q = -\frac{1}{3}$. No primeiro, como pode ser observado pela equação (66), existe a formação de um horizonte, mas $r = 0$ não corresponde a uma singularidade física do problema. Assim, construímos soluções no sistema de coordenadas

do horizonte, e também sobre todo o intervalo. A solução associada ao horizonte formado depende, pelo expoente, da relação entre o parâmetro λ_q e ω , como vimos nos parâmetros (75). Então, a energia associada da partícula possui grande influência na sua dinâmica ao redor do horizonte. Esses resultados nos permitirão, do ponto de vista numérico, avaliar o sistema de uma forma mais detalhada no futuro. Por outro lado, para a solução relativa ao intervalo todo, na região $r \rightarrow 0$ o resultado depende do número quântico de momento angular ℓ . Nesse caso, a influência de λ_q aparece também no sistema de coordenadas e, como foi visto, quanto maior o valor de λ_q , mais lento é o decaimento da função radial no intervalo permitido pela solução.

No caso do parâmetro $\omega_q = -\frac{1}{3}$, construímos soluções para equação radial em função confluyente de Heun, e Bessel. De acordo com a primeira, no limite $r \rightarrow 0$, o parâmetro λ_q deve afetar tanto o denominador da solução quanto o expoente de r , de modo que a contribuição perto da origem deve vir de λ_q , e também do número quântico ℓ . Assim, como pudemos ver pelas Figuras 16, 17 e 18, para $\ell \neq 0$, quando λ_q se aproxima de 1 a solução deve ser levada a uma descontinuidade no ponto $r = 1$. Certamente, pela equação (92), $\lambda_q = 1$ não é um valor possível dentro dessa solução.

No limite $r \rightarrow \infty$, não foi possível ainda construir uma solução para a métrica com o parâmetro $\omega_q = -\frac{2}{3}$, mas no caso $\omega_q = -\frac{1}{3}$ encontramos a expressão dada pela equação (94). Podemos inferir com esse resultado que, para r muito longe de origem, tanto a massa da partícula como sua energia devem possuir grande influência na solução, tendo suas contribuições ajustadas pela constante λ_q . Essa solução deve nos conduzir a uma análise mais detalhada, e que será realizada futuramente por meio de uma avaliação numérica, e pelo suporte da solução para o espaço de Minkowski em coordenadas esféricas, que deve ser avaliada pelas formas assintóticas das funções de Bessel, e apoiar nossos resultados nos limites de r .

No caso KISELEV tipo II, foi possível escrever a equação de Klein-Gordon para ambos parâmetros considerados. No caso do parâmetro $\omega_q = -\frac{2}{3}$, a dificuldade no manejo da equação impossibilitou, até o momento, uma solução adequada para o problema. Entretanto, pudemos esquematizar alguns caminhos de acordo com a forma da equação. Como visto, a equação resultado apresenta semelhanças tanto com a equação confluyente de Heun, quanto com a equação duplamente confluyente de Heun. Ainda, no caso particular de $M = \frac{1}{8c}$, os horizontes da métrica coincidem, resultando em um número menor de singularidades da equação de KG, o que parece aproximá-la das equações de Heun.

Para o parâmetro de estado $\omega_q = -\frac{1}{3}$, foi possível delinear soluções tanto para o caso em que r vai para o raio do horizonte, quanto para o caso que r tende ao infinito. Também,

foi possível escrever soluções para a equação de KG com a métrica de Schwarzschild, que nos serviu como referência para estudar os resultados obtidos. Como foi pontuado na análise parcial desse capítulo, a solução desse parâmetro apresenta grande semelhança com a solução de Schwarzschild, o que já era esperado da forma da métrica. Na solução em $r \rightarrow r_H$, observamos que tanto a energia associada da partícula, quanto a massa do buraco negro, desempenham um papel fundamental na solução. Já quando $r \rightarrow \infty$, a contribuição deve ser da energia e da massa da partícula, o que se mostra bastante razoável uma vez que estaremos distante do buraco negro. Ainda, em ambas soluções observamos que, quando o valor do parâmetro λ_q é pequeno, devemos recuperar a nossa solução de referência, e, se $\lambda_q \gg 1$, o sistema apresenta uma indeterminação, impossibilitando nossa avaliação. O caso em que $\lambda_q = 1$ não é permitido pelas nossas soluções, sendo esse um ponto de descontinuidade do resultado.

Além disso, no que diz respeito à métrica, notamos que, hipoteticamente, se $\lambda_q = 1$, o sistema se comportaria como um buraco negro pontual de Schwarzschild. Esse sistema, apesar de não possuir soluções representadas pelas funções confluentes de Heun, deve admitir soluções do tipo biconfluente. A análise desse caso nos pareceu bastante pertinente pois, embora as soluções obtidas mantêm λ_q obrigatoriamente diferente de 1, as métricas possuem um ponto de intersecção, como mostrado na Figura 20. Um melhor entendimento dessa solução pode auxiliar nas análises desse espaço-tempo como um todo.

Tanto para o caso KISELEV tipo I, quanto para KISELEV tipo II, foi possível construir soluções e avaliá-las parcialmente. Entretanto, notamos que essas análises devem ser aprofundadas, e desenhamos alguns caminhos para isso, que serão considerados em projetos futuros. Para ambas as métricas, uma avaliação numérica deve ser considerada, a fim de testarmos os resultados para partículas já conhecidas como, por exemplo, o bóson de Higgs e o pión. Ainda, soluções para o caso extremo de $\lambda_q = 1$ em $\omega_q = -\frac{1}{3}$, e para o caso do parâmetro de estado $\omega_q = -\frac{2}{3}$, devem ser procuradas, a fim de complementar a análise do sistema.

Além disso, pontuamos que, para uma análise mais robusta do sistema como um todo, parece pertinente a resolução da equação de KG para, pelo menos, mais um parâmetro de estado. Como observamos no Capítulo 2, e pode ser visto pela equação (23), a função da métrica deve decair no limite $r, \kappa \rightarrow 0$ - sendo este decaimento justificado pelo valor de λ_q . Dessa forma, uma solução correspondente ao limite $\omega_q \rightarrow -\frac{1}{3}$, na região de $r = 0$, deve sempre apresentar uma discrepância com relação às soluções para outros parâmetros, e que também deve ser atribuída a λ_q . Portanto, se desejamos comparar essas soluções entre si, parece importante, pela finalidade de garantir o produto dessa comparação, que tenhamos

no mínimo mais uma solução para um $\omega_q < -\frac{1}{3}$. Assim, apoiamos nosso resultado da solução em $\omega_q = -\frac{2}{3}$, e garantimos a diferença do limite superior do parâmetro de estado para outros valores de ω_q . Em particular, a próxima solução de interesse deve ser o caso especial da constante cosmológica, referente a $\omega_q = -1$.

Ainda, observamos que uma avaliação da equação de Klein-Gordon com base nas suas singularidades deve ser realizada. De forma sutil, observamos nos Capítulos 3 e 4 como as singularidades do sistema de coordenadas alteram a nossa equação, e também como, por meio delas, podemos comparar nossos sistemas e encontrar formas adequadas de resolvê-los. Assim, um estudo mais aprofundado sobre equações de Heun, e a forma estrutural da equação de Klein-Gordon, deve estar envolvido nas pesquisas desencadeadas por essa dissertação. As consequências dessa análise parecem bastante pertinentes, uma vez que poderíamos, a princípio, restringir os caminhos para resolução da equação de KG a depender de suas singularidades, e outras métricas podem ser testadas durante essa avaliação.

Por fim, destacamos que o estudo de efeitos quânticos, como por exemplo radiação Hawking e efeitos de tunelamento, podem ser realizados de forma consideravelmente simples a partir dos resultados obtidos, e nesse sentido será desenvolvida uma continuação dessa pesquisa. Outras métricas para energia escura também serão consideradas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I.A. **Handbook of Mathematical Functions: With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables**. [S.l.]: Dover Publications, 1965. (Applied mathematics series). ISBN 9780486612720.

ADLER, R.; BAZIN, M.; SCHIFFER, M. **Introduction to General Relativity**. [S.l.]: McGraw-Hill, 1975. (International series in pure and applied physics). ISBN 9780070004238.

AMENDOLA, L.; TSUJIKAWA, S. **Dark Energy: Theory and Observations**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2010. ISBN 9781139488570.

ARRIOLA, E.R.; ZARZO, A.; DEHESA, J.S. Spectral properties of the biconfluent Heun differential equation. **Journal of Computational and Applied Mathematics**, v. 37, n. 1, p. 161–169, 1991. ISSN 0377-0427.

BAHCALL, Neta A.; OSTRICKER, Jeremiah P.; PERLMUTTER, Saul; STEINHARDT, Paul J. The Cosmic Triangle: Revealing the State of the Universe. **Science**, American Association for the Advancement of Science (AAAS), v. 284, n. 5419, p. 1481–1488, mai. 1999.

BALBI, A. *et al.* Constraints on Cosmological Parameters from MAXIMA-1. **The Astrophysical Journal**, v. 545, n. 1, p. l1, nov. 2000.

BERNARDIS, P. de *et al.* A flat Universe from high-resolution maps of the cosmic microwave background radiation. **Nature**, Springer Science e Business Media LLC, v. 404, n. 6781, p. 955–959, abr. 2000.

BEZERRA, V B; VIEIRA, H S; COSTA, André A. The Klein–Gordon equation in the spacetime of a charged and rotating black hole. **Classical and Quantum Gravity**, IOP Publishing, v. 31, n. 4, p. 045003, jan. 2014.

BJORKEN, J.D.; DRELL, S.D. **Relativistic Quantum Mechanics**. [S.l.]: McGraw-Hill, 1964. (International series in pure and applied physics). ISBN 9780070054936.

BUTKOV, E. **Física Matemática**. [S.l.]: LTC, 1978. ISBN 9788521611455.

CALDWELL, R. R.; DAVE, Rahul; STEINHARDT, Paul J. Cosmological Imprint of an Energy Component with General Equation of State. **Physical Review Letters**, American Physical Society (APS), v. 80, n. 8, p. 1582–1585, fev. 1998.

CHEB-TERRAB, E S. Solutions for the general, confluent and biconfluent Heun equations and their connection with Abel equations. **Journal of Physics A: Mathematical and General**, IOP Publishing, v. 37, n. 42, p. 9923–9949, out. 2004.

CHEN, Songbai; WANG, Bin; SU, Rukeng. Hawking radiation in d-dimensional static spherically symmetric black hole surrounded by quintessence. **Physical Review D**, American Physical Society (APS), v. 77, n. 12, jun. 2008. ISSN 1550-2368.

COPELAND, EDMUND J.; SAMI, M.; TSUJIKAWA, SHINJI. DYNAMICS OF DARK ENERGY. **International Journal of Modern Physics D**, World Scientific Pub Co Pte Lt, v. 15, n. 11, p. 1753–1935, nov. 2006.

D'INVERNO, R. **Introducing Einstein's Relativity**. [S.l.]: Clarendon Press, 1992. ISBN 9780198596868.

DINGLE, R.B. **Asymptotic Expansions: Their Derivation and Interpretation**. [S.l.]: Academic Press, 1973. ISBN 9780122165504.

EINSTEIN, Albert. Cosmological Considerations in the General Theory of Relativity. **Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)**, v. 1917, p. 142–152, 1917.

EINSTEIN, Albert. On the electrodynamics of moving bodies. **Annalen Phys.**, v. 17, p. 891–921, 1905.

EINSTEIN, Albert. The foundation of the general theory of relativity. Edição: Jong-Ping Hsu e D. Fine. **Annalen Phys.**, v. 49, n. 7, p. 769–822, 1916.

EISENSTEIN, Daniel J. *et al.* Detection of the Baryon Acoustic Peak in the Large-Scale Correlation Function of SDSS Luminous Red Galaxies. **The Astrophysical Journal**, American Astronomical Society, v. 633, n. 2, p. 560–574, nov. 2005.

ESLAMZADEH, Sareh; NOZARI, Kourosh. Tunneling of massless and massive particles from a quantum deformed Schwarzschild black hole surrounded by quintessence. **Nuclear Physics B**, v. 959, p. 115136, ago. 2020.

EVANGELISTA, L. R. **Perspectiva em Historia da Fisica - dos Babilonios a Sintese Newtonianal**. [S.l.]: Ciencia Moderna, 2011. (V. 1/2). ISBN 8539901692.

ÉVORA, F.R. Natureza e Movimento: um estudo da física e da cosmologia aristotélicas. **Cadernos de História e Filosofia da Ciência, UNICAMP**, 15: Série 3, 2005.

FERNANDO, Sharmanthie. Schwarzschild black hole surrounded by quintessence: null geodesics. **General Relativity and Gravitation**, Springer Science e Business Media LLC, v. 44, n. 7, p. 1857–1879, mai. 2012. ISSN 1572-9532.

FERREIRA, Erasmo; SESMA, Javier. Global solutions of the biconfluent Heun equation. **Numerical Algorithms**, v. 71, p. 1–13, jul. 2015.

FIGUEIREDO, Bartolomeu D. B. Solutions of Heun's general equation and elliptic Darboux equation. **Mathematical Methods in the Applied Sciences**, Wiley, v. 44, n. 8, p. 7165–7206, mar. 2021.

FIZIEV, Plamen P. Novel relations and new properties of confluent Heun's functions and their derivatives of arbitrary order. **Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical**, IOP Publishing, v. 43, n. 3, p. 035203, dez. 2009.

FULLING, S.A. **Aspects of Quantum Field Theory in Curved Spacetime**. [S.l.]: Cambridge University Press, 1989. (EBL-Schweitzer). ISBN 9780521377683.

HAROLD, Exton. A non-trivial special case of the biconfluent Heun equation $[0,1,1_3]$: *orthogonality of fitssolutions*. **Le Matematiche**, v. 51, mai. 1996.

HUBBLE, E. A RELATION BETWEEN DISTANCE AND RADIAL VELOCITY AMONG EXTRA-GALACTIC NEBULAE. **Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America**, v. 15, n. 3, p. 168–173, mar. 1929. ISSN 0027-8424.

ISHKHANYAN, T.A.; ISHKHANYAN, A.M. Solutions of the bi-confluent Heun equation in terms of the Hermite functions. **Annals of Physics**, Elsevier BV, v. 383, p. 79–91, ago. 2017.

ISHKHANYAN, Tigran; PASHAYAN-LEROY, Yevgenya; GEVORGYAN, Mariam; LEROY, Claude; ISHKHANYAN, Artur. Expansions of the solutions of the biconfluent Heun equation in terms of incomplete Beta and Gamma functions. **Journal of Contemporary Physics (Armenian Academy of Sciences)**, v. 51, out. 2014.

EL-JAICK, Lé a Jaccoud; FIGUEIREDO, Bartolomeu D B. Confluent Heun equations: convergence of solutions in series of coulomb wavefunctions. **Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical**, IOP Publishing, v. 46, n. 8, p. 085203, fev. 2013.

EL-JAICK, Lea Jaccoud; FIGUEIREDO, Bartolomeu D. B. **On Certain Solutions for Confluent and Double-Confluent Heun Equations**. [S.l.: s.n.], 2011. arXiv: 0807.2219 [math-ph].

EL-JAICK, Léa Jaccoud; FIGUEIREDO, Bartolomeu D.B. Integral relations for solutions of the confluent Heun equation. **Applied Mathematics and Computation**, Elsevier BV, v. 256, p. 885–904, abr. 2015.

KISELEV, V V. Quintessence and black holes. **Classical and Quantum Gravity**, IOP Publishing, v. 20, n. 6, p. 1187–1197, mar. 2003. ISSN 0264-9381.

KRISTENSSON, Gerhard. Second Order Differential Equations. *In*.

LIDDLE, A. **An Introduction to Modern Cosmology**. [S.l.]: Wiley, 2015. ISBN 9781118690253.

MATYJASEK, Jerzy; TELECKA, Małgorzata. Kiselev and Schwarzschild–de Sitter black holes in higher derivative theories of gravitation. **Physical Review D**, v. 107, n. 6, p. 064058, 2023.

MINKOWSKI, H. Raum und Zeit. **Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung**, v. 18, p. 75–88, jan. 1909.

MINKOWSKI, H.; PETKOV, V. **Space and Time: Minkowski's papers on relativity**. [S.l.]: Minkowski Institute Press, 2013. ISBN 9780987987112.

OLVER, Frank; LOZIER, Daniel; BOISVERT, Ronald; CLARK, Charles. **The NIST Handbook of Mathematical Functions**. [S.l.]: Cambridge University Press, New York, NY, 2010-05-12 00:05:00 2010.

PARKER, L.; TOMS, D. **Quantum Field Theory in Curved Spacetime: Quantized Fields and Gravity**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2009. (Cambridge Monographs on Mathematical Physics). ISBN 9780521877879.

PENROSE, Roger. **The road to reality : a complete guide to the laws of the universe**. London: Vintage, 2005. ISBN 978-0-09-944068-0.

PERLMUTTER, S. *et al.* Measurements of Omega and Lambda from 42 High-Redshift Supernovae. **The Astrophysical Journal**, American Astronomical Society, v. 517, n. 2, p. 565–586, jun. 1999. ISSN 1538-4357.

PINHO, Eduardo Oliveira. **Bósons de spin-0 no espaço-tempo de estrelas em rotação lenta**. [S.l.: s.n.], 2023.

RIESS, Adam G. *et al.* Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant. **The Astronomical Journal**, American Astronomical Society, v. 116, n. 3, p. 1009–1038, set. 1998.

RINDLER, W. **Relativity: Special, General, and Cosmological**. [S.l.]: Oxford University Press, 2001. (Relativity: Special, General, and Cosmological). ISBN 9780198508359.

RONVEAUX, A.; ARSCOTT, F.M. **Heun's Differential Equations**. [S.l.]: Oxford University Press, 1995. (Oxford science publications). ISBN 9780198596950.

SANTOS, L. C. N.; SILVA, F. M. da; MOTA, C. E.; LOBO, I. P.; BEZERRA, V. B. Kiselev black holes in $f(R, T)$ gravity. **General Relativity and Gravitation**, v. 55, n. 8, p. 94, 2023. <https://arxiv.org/pdf/2301.02534>.

SCHWABL, F. **Quantum Mechanics**. [S.l.]: Springer Berlin Heidelberg, 2007. ISBN 9783540719335.

SHAO, Cai-Ying; XIN, Li-Jie; ZHANG, Wei; SHAO, Cheng-Gang. Strong cosmic censorship for a charged black hole surrounded by quintessence. **Physics Letters B**, v. 835, p. 137512, 2022. <http://dx.doi.org/10.1016/j.physletb.2022.137512>.

SLAVYANOV, S.I.U.; LAY, W. **Special Functions: A Unified Theory Based on Singularities**. [S.l.]: Oxford University Press, 2000. (Oxford mathematical monographs). ISBN 9780198505730.

SPERGEL, D. N. *et al.* First-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Determination of Cosmological Parameters. **The Astrophysical Journal Supplement Series**, American Astronomical Society, v. 148, n. 1, p. 175–194, set. 2003.

STEINHARDT, Paul J.; WANG, Limin; ZLATEV, Ivaylo. Cosmological tracking solutions. **Physical Review D**, American Physical Society (APS), v. 59, n. 12, mai. 1999. ISSN 1089-4918.

TESCHL, G. **Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems**. [S.l.]: American Mathematical Soc. (Graduate studies in mathematics). ISBN 9780821891056.

THOMAS, Bouetou Bouetou; SALEH, Mahamat; KOFANE, Timoleon Crepin. Thermodynamics and phase transition of the Reissner-Nordström black hole surrounded by quintessence. **General Relativity and Gravitation**, Springer Science e Business Media LLC, v. 44, n. 9, p. 2181–2189, mai. 2012. ISSN 1572-9532.

TSUJIKAWA, Shinji. Quintessence: a review. **Classical and Quantum Gravity**, IOP Publishing, v. 30, n. 21, p. 214003, out. 2013.

VELTEN, H. E. S.; MARTTENS, R. F. vom; ZIMDAHL, W. Aspects of the cosmological coincidence problem. **The European Physical Journal C**, Springer Science e Business Media LLC, v. 74, n. 11, nov. 2014.

VIEIRA, H. S. **Alguns resultados acerca de campos escalares em buracos negros, cosmologia quântica e flutuações quânticas da geometria**. 2018. PhD Thesis – Universidade Federal da Paraíba.

WALD, R.M. **General Relativity**. [S.l.]: University of Chicago Press, 1984. ISBN 9780226870328.

WANG, Limin; CALDWELL, R. R.; OSTRIKER, J. P.; STEINHARDT, Paul J. Cosmic Concordance and Quintessence. **The Astrophysical Journal**, American Astronomical Society, v. 530, n. 1, p. 17–35, fev. 2000. ISSN 1538-4357.

WANG, Ruifang; GAO, Fabao; CHEN, Huixiang. Particle dynamics around a static spherically symmetric black hole in the presence of quintessence. **Physics of the Dark Universe**, v. 40, p. 101189, 2023.

WATSON, G.N. **A Treatise on the Theory of Bessel Functions**. [S.l.]: Cambridge University Press, 1995. (Cambridge Mathematical Library). ISBN 9780521483919.

WEI, Yi-Huan; CHU, Zhong-Hui. Thermodynamic Properties of a Reissner-Nordström Quintessence Black Hole. **Chinese Physics Letters - CHIN PHYS LETT**, v. 28, out. 2011.

WEINBERG, S. **Lectures on Quantum Mechanics**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2013. ISBN 9781107028722.

WEINBERG, S. **The Quantum Theory of Fields**. [S.l.]: Cambridge University Press, 1995. (Quantum Theory of Fields, Vol. 2: Modern Applications, v. 1). ISBN 9780521550017.

Apêndices

APÊNDICE A – EQUAÇÕES DE HEUN

A.1 EQUAÇÃO CONFLUENTE DE HEUN (ECH)

Com o objetivo de descrever os sistemas físicos envolvidos neste trabalho, apresentamos neste apêndice alguns casos de confluência das equações de Heun (EH), como em (OLVER *et al.*, 2010) e (ABRAMOWITZ; STEGUN, 1965), e que possuem a mesma forma das equações de Klein-Gordon estudadas.

Iniciamos a discussão com a equação confluyente de Heun (ECH) (RONVEAUX; ARSCOTT, 1995), que pode ser expressa na forma canônica

$$y''(z) + \left(\alpha + \frac{\beta + 1}{z} + \frac{\gamma + 1}{z - 1} \right) y'(z) + \left(\frac{\epsilon}{z} + \frac{\tau}{z - 1} \right) y(z) = 0, \quad \text{A.1.1}$$

onde

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{1}{2}(\alpha - \beta - \gamma + \alpha\beta - \beta\gamma) - \eta \\ \tau &= \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma + \alpha\gamma + \beta\gamma) + \delta + \eta \end{aligned} \quad \text{A.1.2}$$

e a equação tem soluções relacionadas às funções confluentes de Heun em 5 parâmetros, sendo

$$y(z) = \text{HeunC}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta; z). \quad \text{A.1.3}$$

Estamos interessados em trabalhar também com as formas normais das equações de Heun. Assim, nos valeremos do mesmo método de normalização, utilizado na Seção 3.2.1, para reconstruir a equação acima em forma normal.

Dessa forma, seja a transformação $y(z) = \xi(z)Y(z)$ na equação A.1.1, e então

$$\begin{aligned} \xi(z)Y''(z) + \left[2\xi'(z) + \left(\alpha + \frac{\beta + 1}{z} + \frac{\gamma + 1}{z - 1} \right) \xi(z) \right] Y'(z) \\ + \left[\left(\alpha + \frac{\beta + 1}{z} + \frac{\gamma + 1}{z - 1} \right) \xi'(z) + \left(\frac{\epsilon}{z} + \frac{\tau}{z - 1} \right) \xi(z) + \xi''(z) \right] Y(z) = 0. \end{aligned} \quad \text{A.1.4}$$

Com a imposição de que o coeficiente de $Y'(z)$ seja 0, acontece que

$$\xi(z) = kz^{-\frac{\beta+1}{2}}(z-1)^{-\frac{\gamma+1}{2}}e^{-\frac{\alpha z}{2}}. \quad \text{A.1.5}$$

A equação confluyente de Heun na sua forma normal deve então ser

$$\begin{aligned} Y''(z) + \left[\frac{1}{z} \left(\frac{1}{2} - \eta \right) + \frac{1}{z^2} \left(\frac{1}{4}(1 - \beta^2) \right) + \frac{1}{z - 1} \left(\delta + \eta - \frac{1}{2} \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{(z - 1)^2} \left(\frac{1}{4}(1 - \gamma^2) \right) - \frac{1}{4}\alpha^2 \right] Y(z) = 0, \end{aligned} \quad \text{A.1.6}$$

ou

$$Y''(z) + \left[\frac{A}{z} + \frac{B}{z^2} + \frac{C}{z - 1} + \frac{D}{(z - 1)^2} + E \right] Y(z) = 0, \quad \text{A.1.7}$$

com

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{2} - \eta, \\
 B &= \frac{1}{4}(1 - \beta^2), \\
 C &= \delta + \eta - \frac{1}{2}, \\
 D &= \frac{1}{4}(1 - \gamma^2), \\
 E &= -\frac{\alpha^2}{4}.
 \end{aligned}
 \tag{A.1.8}$$

Assim, lembrando de A.1.5 e A.1.3, temos que uma solução geral para equação acima deve ser $Y(z) = y(z)\xi^{-1}(z)$, ou

$$Y(z) = kz^{\frac{\beta+1}{2}}(z-1)^{\frac{\gamma+1}{2}}e^{\frac{\alpha z}{2}}\text{HeunC}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta; z). \tag{A.1.9}$$

A.1.1 Soluções

A solução para ECH descrita acima está, como visto, relacionada a uma classe de funções confluentes de Heun. Mais precisamente, podemos escrever a solução em uma combinação de funções HeunC linearmente independentes, como

$$\begin{aligned}
 Y(z) = &kz^{\frac{\beta+1}{2}}(z-1)^{\frac{\gamma+1}{2}}e^{\frac{\alpha z}{2}} [C_1\text{HeunC}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta; z) \\
 &+ C_2z^{-\beta}\text{HeunC}(\alpha, -\beta, \gamma, \delta, \eta; z)],
 \end{aligned}
 \tag{A.1.10}$$

sendo β não-inteiro.

A expressão acima é uma solução analítica de equação confluyente de Heun, e é válida para todo $0 \leq z < \infty$. Entretanto, a depender da região do intervalo que estamos avaliando, diversas outras formas para as funções podem ser construídas. Em particular, podemos construir soluções na região do ponto singular 0, e também no infinito, como segue.

- Se $z \rightarrow 0$:

Inicialmente, consideremos uma solução da equação A.1.1 com a condição

$$\text{HeunC}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta; 0) = 1. \tag{A.1.11}$$

A função acima impõe uma condição de contorno para a ECH, e é possível utilizar o método de Frobenius, como em (KRISTENSSON, 2010) e (BUTKOV, 1978), para construir uma série localizada ao redor do ponto 0 - especificamente definida em $|z| < 1$ - com o intuito de encontrar uma solução nesse limite para a equação A.1.10. Sendo assim, supomos uma solução do tipo

$$y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{k+\rho}. \tag{A.1.12}$$

Então,

$$\begin{aligned} y' &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k (k + \rho) z^{k+\rho-1}, \\ y'' &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k (k + \rho - 1) z^{k+\rho-2}. \end{aligned} \tag{A.1.13}$$

Substituindo as relações acima em A.1.1, e multiplicando a equação toda por $z - 1$, podemos escrever

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{\infty} c_k (k + \rho) (-k - \rho - \beta) z^{k+\rho-2} \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty} c_k [(k + \rho)(-\alpha + \beta + \gamma + k + \rho + 1) - \epsilon] z^{k+\rho-1} \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty} c_k [\alpha(k + \rho) + \epsilon + \tau] z^{k+\rho} = 0. \end{aligned} \tag{A.1.14}$$

Se $k = 0$, o termo de menor índice deve ser $z^{\rho-2}$, associado à constante c_0 que definiremos aqui como $c_0 = 1$, e a equação indicial fica

$$\rho(\rho + \beta) = 0. \tag{A.1.15}$$

Ainda, expandindo o primeiro somatório nos dois primeiros termos, e também o segundo somatório no primeiro termo, é possível escrever as demais relações necessárias para satisfazer a equação A.1.14, sendo

$$-c_1(1 + \rho)(1 + \rho + \beta) + c_0 [\rho(-\alpha + \beta + \gamma + \rho + 1) - \epsilon] = 0, \tag{A.1.16}$$

$$\begin{aligned} &c_{k+2}(k + 2 + \rho)(-k - 2 - \rho - \beta) \\ &+ c_{k+1} [(k + 1 + \rho)(-\alpha + \beta + \gamma + k + \rho + 2) - \epsilon] \\ &+ c_k [\alpha(k + \rho) + \epsilon + \tau] = 0, \end{aligned} \tag{A.1.17}$$

onde a equação A.1.17 acima é a relação de recorrência em 3 termos para a série A.1.12.

Assim, com $c_0 = 1$, e c_1 dado pela equação A.1.16, podemos expressar c_2 como

$$\begin{aligned} c_2 &= \frac{[\rho(-\alpha + \beta + \gamma + \rho + 1) - \epsilon][(1 + \rho)(-\alpha + \beta + \gamma + \rho + 2) - \epsilon]}{(1 + \rho)(1 + \rho + \beta)(2 + \rho)(2 + \rho + \beta)} \\ &+ \frac{(\alpha\rho + \epsilon + \tau)}{(2 + \rho)(2 + \rho + \beta)}. \end{aligned} \tag{A.1.18}$$

A equação indicial A.1.15 nos diz que ρ pode assumir 2 valores, 0 e $-\beta$, definindo duas séries linearmente independentes possíveis para essa construção. Cada uma delas, expandidas aqui até o segundo termo com as relações definidas anteriormente, é representada a seguir.

- Se $\rho = 0$:

$$\begin{aligned} \text{HeunC}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta; z) &= 1 + \left[\frac{-\epsilon}{\beta + 1} \right] z \\ &+ \left[\frac{-\epsilon(-\alpha + \beta + \gamma + 2 - \epsilon) + (1 + \beta)(\epsilon + \tau)}{2(1 + \beta)(2 + \beta)} \right] z^2 + \dots \end{aligned} \quad \text{A.1.19}$$

- Se $\rho = -\beta$:

$$\begin{aligned} \text{HeunC}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta; z) &= z^{-\beta} \left(1 + \left[\frac{-\beta(-\alpha + \gamma + 1) - \epsilon}{(1 - \beta)} \right] z \right. \\ &+ \left[\frac{(-\beta(-\alpha + \gamma + 1) - \epsilon)((1 - \beta)(-\alpha + \gamma + 2) - \epsilon) + (1 - \beta)(-\alpha\beta + \epsilon + \tau)}{2(1 - \beta)(2 - \beta)} \right] z^2 \\ &+ \dots \left. \right). \end{aligned} \quad \text{A.1.20}$$

Para ambos os casos, e recordando que a solução foi construída levando em consideração a condição A.1.11, usaremos sempre nessa dissertação uma aproximação ao primeiro termo. Assim, tanto para $\rho = 0$, quanto para $\rho = -\beta$, a solução da equação A.1.7 de Heun na forma normal pode ser reescrita como

$$Y(z) \approx kz^{\frac{\beta+1}{2}}(z-1)^{\frac{\gamma+1}{2}}e^{\frac{\alpha z}{2}}\{C_1 + C_2z^{-\beta}\}, \quad \text{A.1.21}$$

onde C_1 e C_2 são constantes arbitrárias.

Ainda, notamos que ao passo que $z \rightarrow 0$, acontece que $e^{\frac{\alpha z}{2}} \rightarrow 1$ e $(z-1)^{\frac{\gamma+1}{2}} \rightarrow (-1)^{\frac{\gamma+1}{2}}$, podendo este último termo ser incorporado dentro das constantes. Assim, observamos que a função deve ter forma em z de

$$Y(z) \sim \begin{cases} z^{\frac{\beta+1}{2}} \\ z^{\frac{-\beta+1}{2}} \end{cases}. \quad \text{A.1.22}$$

- Se $|z| \rightarrow \infty$:

Para a solução avaliada no infinito, nos inspiramos no resultado descrito pelos autores em (BEZERRA; VIEIRA, H S; COSTA, 2014) para avaliar as funções de Heun nesta mesma região. Assim, a forma assintótica para $z \rightarrow \infty$ é dada por

$$\text{HeunC}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta; z) \sim \begin{cases} z^{-\left(\frac{\beta+\gamma+2}{2} + \frac{\delta}{\alpha}\right)} \\ z^{-\left(\frac{\beta+\gamma+2}{2} - \frac{\delta}{\alpha}\right)} e^{-\alpha z} \end{cases}. \quad \text{A.1.23}$$

Uma maneira de visualizar esse resultado obtido pelos autores é notando que a equação confluenta, na forma apresentada no início desta seção, e descrita pela equação canônica A.1.1, é derivada de formas mais gerais da equação de Heun, como pode ser visto em (RONVEAUX; ARSCOTT, 1995). Uma dessas formas é a *forma geral natural*

da ECH, que pode ser escrita como

$$y''(z) + \left(\sum_{i=1}^2 \frac{A_i}{z - z_i} + E_0 \right) y'(z) + \left(\sum_{i=1}^2 \frac{C_i}{z - z_i} + \sum_{i=1}^2 \frac{B_i}{(z - z_i)^2} + D_0 \right) y(z) = 0, \quad \text{A.1.24}$$

onde os z_i correspondem às duas singularidades regulares da equação. A forma acima deve possuir, assim como a nossa forma canônica, uma singularidade irregular no infinito, e a solução avaliada no limite $|z| \rightarrow \infty$ deve ser

$$y_m(z) \sim e^{\kappa_m z} z^{-\Delta_m} \sum_{k=0}^{\infty} c_{mk} z^{-k}, \quad \text{A.1.25}$$

onde $m = 1, 2$ corresponde às duas soluções linearmente independentes, e os coeficientes κ_m e Δ_m são dados por

$$\begin{aligned} \kappa_m &= -\frac{E_0}{2} + \frac{(-1)^{m+1}}{2} (E_0^2 - 4D_0)^{\frac{1}{2}}, \\ \Delta_m &= \sum_{i=1}^2 \frac{A_i}{2} + (-1)^{m+1} \left(\sum_{i=1}^2 C_i - \frac{E_0}{2} \sum_{i=1}^2 A_i \right) (E_0^2 - 4D_0)^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad \text{A.1.26}$$

Notando que a forma canônica possui singularidades $z_1 = 0$ e $z_2 = 1$, podemos escrever a equação A.1.1 através da forma geral A.1.24, estabelecendo os coeficientes dos termos singulares como

$$\begin{aligned} A_1 &= \beta + 1, \\ A_2 &= \gamma + 1, \\ C_1 &= \epsilon, \\ C_2 &= \tau, \\ E_0 &= \alpha, \\ B_i &= D_0 = 0. \end{aligned} \quad \text{A.1.27}$$

Substituindo os coeficientes acima nas relações para Δ_m e κ_m , conseguimos escrever duas representações para função $\text{HeunC}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta; z)$ como duas soluções para a equação canônica, avaliadas assintoticamente no infinito, e expressadas como

$$\text{HeunC}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta; z) \sim \begin{cases} z^{-\left(\frac{\beta+\gamma+2}{2} + \frac{\delta}{\alpha}\right)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k(\alpha)}{z^k} \\ z^{-\left(\frac{\beta+\gamma+2}{2} - \frac{\delta}{\alpha}\right)} e^{-\alpha z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e_k(\alpha)}{z^k} \end{cases}, \quad \text{A.1.28}$$

onde utilizamos a notação definida pelos autores, com $c_{1k} = a_k(\alpha)$ e $c_{2k} = e_k(\alpha)$.

As soluções acima são precisamente as obtidas em (BEZERRA; VIEIRA, H S; COSTA, 2014), e foram aproximadas ao primeiro termo a fim de obter as expressões descritas pela equação A.1.23. Como destacam os autores, a forma A.1.28 é válida para

o intervalo $-\pi - \arg(\alpha + \eta) \leq \arg(z) \leq \pi - \arg(\alpha - \eta)$, com a relação de recorrência definida por

$$\begin{aligned} & -\alpha(k+2)a_{k+2} \\ & + \left[m(\alpha) + (k+1) \left(k+2 + \alpha + \frac{2\delta}{\alpha} \right) \right] a_{k+1} \\ & + \left[\frac{\beta^2}{4} - \left(\frac{\gamma+2}{2} + \frac{\delta}{\alpha} \right)^2 + k(k+1) - k \left(\frac{2\delta}{\alpha} + \gamma + 1 \right) \right] a_k = 0, \end{aligned} \quad \text{A.1.29}$$

sendo

$$\begin{aligned} a_0 &= 1, \\ -\alpha a_1 + m(\alpha)a_0 &= 0, \\ m(\alpha) &= \eta - \frac{\gamma^2}{4} - \frac{\beta^2}{4} + \frac{\alpha}{2}(\gamma+1) + \frac{\delta}{\alpha} \left(\frac{\delta}{\alpha} + 1 + \alpha \right), \end{aligned} \quad \text{A.1.30}$$

e $e_k(\alpha) = a_k(-\alpha)$.

Levamos em consideração o resultado obtido por essa referência, e as soluções no infinito serão avaliadas de acordo com a equação A.1.23. Portanto, substituindo a equação A.1.23 na expressão A.1.10, a solução assintótica no infinito deve ficar

$$Y(z) \sim \begin{cases} z^{-\frac{\delta}{\alpha}} e^{\frac{\alpha z}{2}} \\ z^{\frac{\delta}{\alpha}} e^{-\frac{\alpha z}{2}} \end{cases}, \quad \text{A.1.31}$$

onde notamos que, como $|z|$ e $|z-1|$ também se aproximam do infinito, os termos que vieram do procedimento de normalização foram incorporados na forma assintótica.

Uma consideração importante para a solução no infinito é que, apesar de satisfazer a equação canônica inicial como desejamos, ela não comporta o valor $\alpha = 0$. Quando este for o caso, outras soluções devem ser procuradas.

Ainda, como ressaltaram os autores em (VIEIRA, H. S., 2018) e (SLAVYANOV; LAY, 2000), a equação confluyente de Heun pode ter outros tipos de soluções a depender do arranjo entre os parâmetros. Em particular, se for possível escrevê-la como um polinômio de grau n , por exemplo, devemos obter uma relação do tipo

$$\frac{\delta}{\alpha} + \frac{\beta + \gamma}{2} + n + 1 = 0. \quad \text{A.1.32}$$

A condição polinomial acima é válida para $z \rightarrow 0$, e é de bastante interesse para nós. Uma vez que ela restringe os valores para os parâmetros, conseguimos impor condições para o nosso sistema físico, e possivelmente avaliá-los dentro desse escopo. Entretanto, da mesma forma como na solução no infinito, a relação acima não permite $\alpha = 0$ e, sendo esse o caso, não será possível utilizá-la.

A.2 EQUAÇÃO BICONFLUENTE DE HEUN (EBH)

Outro caso dessa classe especial de funções é a equação biconfluente de Heun. Podemos escrever essa equação com a forma canônica

$$y''(z) + \left(\frac{1+\alpha}{z} - \beta - 2z \right) y'(z) + \left((\gamma - \alpha - 2) - \frac{1}{2}(\delta + (1+\alpha)\beta) \frac{1}{z} \right) y(z) = 0, \quad \text{A.2.1}$$

que tem solução do tipo

$$y(z) = \text{HeunB}(\alpha, \beta, \gamma, \delta; z), \quad \text{A.2.2}$$

onde HeunB determina uma classe de funções biconfluentes de Heun em 4 parâmetros, avaliadas em z .

Assim como para o caso da ECH, pretendemos escrever a equação acima na sua forma normal. Portanto, operando a substituição $y(z) = \xi(z)Y(z)$, a equação fica

$$\begin{aligned} & \xi(z)Y''(z) + \left[2\xi'(z) + \left(\frac{1+\alpha}{z} - \beta - 2z \right) \xi(z) \right] Y'(z) \\ & + \left[\left(\frac{1+\alpha}{z} - \beta - 2z \right) \xi'(z) + \left((\gamma - \alpha - 2) - \frac{1}{2}(\delta + (1+\alpha)\beta) \right) \xi(z) + \xi''(z) \right] Y(z) = 0. \end{aligned} \quad \text{A.2.3}$$

Com a finalidade de normalização,

$$2\xi'(z) + \left(\frac{1+\alpha}{z} - \beta - 2z \right) \xi(z) = 0 \quad \text{A.2.4}$$

e, assim,

$$\xi(z) = kz^{-\frac{1}{2}(1+\alpha)} e^{\frac{1}{2}(\beta z + z^2)}. \quad \text{A.2.5}$$

Obtendo a partir da equação acima $\xi'(z)$ e $\xi''(z)$, podemos reescrever a equação A.2.3 como

$$Y''(z) + \left[-\beta z - z^2 - \frac{\delta}{2z} + \frac{(1-\alpha^2)}{4z^2} + \left(\gamma - \frac{\beta^2}{4} \right) \right] Y(z) = 0, \quad \text{A.2.6}$$

ou então

$$Y''(z) + \left[Az + Bz^2 + \frac{C}{z} + \frac{D}{z^2} + E \right] Y(z) = 0, \quad \text{A.2.7}$$

com A, B, C, D e E definidos por meio da associação direta entre A.2.7 e A.2.6. Certamente, pela substituição que fizemos, a equação para $Y(z)$ tem forma tal que

$$Y(z) = \frac{y(z)}{\xi(z)}.$$

Com $\xi(z)$ expressado acima, temos portanto que a solução de A.2.7 é representada por

$$Y(z) = kz^{\frac{1}{2}(1+\alpha)} e^{-\frac{1}{2}(\beta z + z^2)} \text{HeunB}(\alpha, \beta, \gamma, \delta; z). \quad \text{A.2.8}$$

A.3 EQUAÇÃO DUPLAMENTE CONFLUENTE DE HEUN (EDCH)

Outra forma de confluência da EH é equação duplamente confluyente, que pode ser expressa com a equação canônica

$$y''(z) + \left(\frac{2z^5 - \alpha z^4 - 4z^3 + 2z + \alpha}{(z-1)^3(z+1)^3} \right) y'(z) + \left(\frac{\beta z^2 - (\gamma - 2\alpha)z + \delta}{(z-1)^3(z+1)^3} \right) y(z) = 0. \quad \text{A.3.1}$$

Assim como nos casos anteriores, podemos normalizar a equação acima e reescrevê-la como

$$Y''(z) + \left[\frac{A_1}{(z-1)} + \frac{A_2}{(z+1)} + \frac{B_1}{(z-1)^2} + \frac{B_2}{(z+1)^2} + \frac{C_1}{(z-1)^3} + \frac{C_2}{(z+1)^3} + \frac{D_1}{(z-1)^4} + \frac{D_2}{(z+1)^4} \right] Y(z) = 0, \quad \text{A.3.2}$$

em que a equação A.3.1 foi reescrita para $Y(z) = \xi^{-1}(z)y(z)$ considerando o fator de normalização $\xi(z)$, que é expresso como

$$\xi(z) = e^{-\frac{1}{2} \int \frac{2z^5 - \alpha z^4 - 4z^3 + 2z + \alpha}{(z-1)^3(z+1)^3} dz}. \quad \text{A.3.3}$$

Os coeficientes A_i, B_i, C_i e D_i , com $i = 1, 2$, são expressos por

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{32}(-8 + \alpha^2 - 2\beta + 6\delta), \\ B_1 &= \frac{1}{32}(8 - \alpha^2 + 2\beta - 2\gamma - 6\delta), \\ C_1 &= \frac{1}{8}(\beta + \gamma + \delta), \\ D_1 &= \frac{\alpha^2}{16}, \end{aligned} \quad \text{A.3.4}$$

e

$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{1}{32}(8 - \alpha^2 + 2\beta - 6\delta), \\ B_2 &= \frac{1}{32}(8 - \alpha^2 + 2\beta + 2\gamma - 6\delta), \\ C_2 &= \frac{1}{8}(-\beta + \gamma - \delta), \\ D_2 &= \frac{\alpha^2}{16}. \end{aligned} \quad \text{A.3.5}$$

A equação A.3.1, como ressaltam os autores em (VIEIRA, H. S., 2018), possui dois pontos singulares irregulares em $-1, 1$, e deve produzir soluções do tipo

$$Y(z) = e^{\frac{1}{2} \int \frac{2z^5 - \alpha z^4 - 4z^3 + 2z + \alpha}{(z-1)^3(z+1)^3} dz} \text{HeunD}(\alpha, \beta, \gamma, \delta; z), \quad \text{A.3.6}$$

onde HeunD são as funções duplamente confluentes de Heun com 4 parâmetros avaliadas em z . Em particular, no disco unitário $|z| < 1$, a solução deve ser analítica e representada por

$$\begin{aligned} Y(z) &= e^{\frac{1}{2} \frac{\alpha z}{(z-1)(z+1)}} \sqrt{(z-1)(z+1)} \left\{ C_1 \text{HeunD}(-\alpha, -\delta, -\gamma, -\beta; \frac{1}{z}) \right. \\ &\quad \left. + C_2 e^{-\frac{\alpha z}{(z-1)(z+1)}} \text{HeunD}(\alpha, -\delta, -\gamma, -\beta; \frac{1}{z}) \right\}. \end{aligned} \quad \text{A.3.7}$$

Tanto para o caso biconfluyente, quanto para o caso duplamente confluyente, as funções HeunB e HeunD podem ser construídas utilizando diferentes métodos, para diferentes intervalos do domínio. Nessa dissertação, nos restringiremos em avaliar, quando necessário, apenas a forma dessas equações, deixando de lado temporariamente a construção das respectivas funções.

Para o caso de biconfluência, soluções já foram escritas e a EBH tem sido amplamente estudada, como em (CHEB-TERRAB, 2004), (ARRIOLA; ZARZO; DEHESA, 1991), (FERREIRA; SESMA, 2015) e (HAROLD, 1996). Em (FIZIEV, 2009) também são apresentadas relações e propriedades sobre as funções confluyentes de Heun. A equação duplamente confluyente, bem como a confluyente e a equação geral de Heun, tem sido estudada pelos os autores Bartolomeu D. B. Figueiredo e Lea Jaccoud El-Jaick, que obtiveram soluções e resultados acerca de suas propriedades, como em (EL-JAICK, Lea Jaccoud; FIGUEIREDO, Bartolomeu D. B., 2011), (FIGUEIREDO, Bartolomeu D. B., 2021), (EL-JAICK, Léa Jaccoud; FIGUEIREDO, Bartolomeu D B, 2013) e (EL-JAICK, Léa Jaccoud; FIGUEIREDO, B. D., 2015).

Um ponto importante a ser destacado por fim é que, no início dessa seção, escrevemos a equação biconfluyente de Heun com 4 parâmetros. Outras formas canônicas, envolvendo uma combinação entre os parâmetros, também são possíveis, e resultam em formas diferentes para elaborar o problema. A melhor forma a ser adotada, é claro, deve ser escolhida de acordo com as exigências do sistema físico em questão. O mesmo vale para as equações confluyente, duplamente confluyente, e também para o caso de triconfluência, que não será tratado nesse trabalho.