O **GHEMAT-SC** Grupo de Pesquisa de História da Educação Matemática – Santa Catarina, certificado pela Universidade Federal Santa Catarina (UFSC) é associado ao Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica (PPGECT). Possui como líderes o professor Dr. David Antonio da Costa e a professora Dra. Iara Zimmer. Interage diretamente com o **GHEMAT-Brasil** – Grupo Associado de Estudos e Pesquisas sobre História da Educação Matemática (https://ghemat-brasil.com.br).

A cada semestre, o grupo adota um cronograma de estudos e atividades que normalmente destacam um tema de estudo ou uma determinada obra de referência, que perpassa de forma transversal as pesquisas realizadas no **GHEMAT-SC** no âmbito da História da educação matemática. Por meio desta estratégia de estudos e trabalhos técnicos, mantém-se coesão e alinhamento aos projetos temáticos propostos pelos **GHEMAT-Brasil**.

Este livro reúne textos produzidos por membros do **GHEMAT-SC** que abordam variados itens matemáticos e sua caracterização na perspectiva da matemática do ensino. Números negativos, conceito de número, polígonos e multiplicação são subtemas analisados para a elaboração de matemáticas próprias da cultura escolar.

ISBN 978-65-5563-316-0

9 786555 633160

MATEMÁTICA DO ENSINO alguns ensaios

MATEMÁTICA DO ENSINO

alguns ensaios

David Antonio da Costa
Iara Zimmer
Organizadores

MATEMÁTICA DO ENSINO

alguns ensaios

EDITORIAL

David Antonio da Costa
Iara Zimmer
(Organizadores)

MATEMÁTICA DO ENSINO

alguns ensaios

EDITORIAL
2023

1ª Edição

Direção editorial: José Roberto Marinho

Capa: Fabrício Ribeiro
Projeto gráfico e diagramação: Fabrício Ribeiro

Esta obra contou com apoio financeiro da CAPES-PROEX do Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica - PPGECT da Universidade Federal de Santa Catarina

Edição revisada segundo o Novo Acordo Ortográfico da Língua Portuguesa

Dados Internacionais de Catalogação na publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Matemática do ensino: alguns ensaios / organização David Antonio da Costa , Iara Zimmer. –
São Paulo, SP: Livraria da Física, 2023.

Bibliografia.
ISBN 978-65-5563-316-0

1. Matemática 2. Matemática - Ensino - História I. Costa, David Antonio da. II. Zimmer, Iara.

23-148525 CDD-510

Índices para catálogo sistemático:
1. Matemática 510

Tábata Alves da Silva - Bibliotecária - CRB-8/9253

LF
EDITORIAL

Editora Livraria da Física
www.livrariadafisica.com.br

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

O **GHEMAT-SC**[1] – Grupo de Pesquisa de História da Educação Matemática – Santa Catarina está certificado pela Universidade Federal Santa Catarina e associado ao PPGECT – Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica. Possui como líderes o professor Dr. David Antonio da Costa e a professora Dra. Iara Zimmer. Interage diretamente com o GHEMAT-Brasil[2] – Grupo Associado de Estudos e Pesquisas sobre História da Educação Matemática.

Adotamos, a cada semestre, um cronograma de estudos e atividades que normalmente destaca um tema de estudo, uma determinada obra referência, que perpassa de forma transversal as pesquisas realizadas no GHEMAT-SC no âmbito da História da educação matemática. Doutorandos, mestrandos, pesquisadores de forma geral, além de alunos de iniciação científica e graduandos, participam das atividades promovidas. Por meio desta estratégia de estudos e trabalhos técnicos, mantemos coesão e alinhamento aos projetos temáticos propostos pelos GHEMAT-Brasil.

Na reunião inaugural de 2022, seguindo o cronograma do primeiro semestre, tivemos a oportunidade de receber o professor Doutor Jefferson dos Santos Ferreira, que proferiu um seminário intitulado "A graduação como elemento das matemáticas do ensino". De fato, sua exposição tratou do aprofundamento dos aspectos teóricos desenvolvidos em sua tese defendida no início deste ano.

A partir de sua exposição, o grupo decidiu aprofundar estudos relacionados ao constructo teórico denominado matemática do ensino. Estabeleceu-se um cronograma de leituras e discussões tomando duas obras de referência, a saber, *A matemática do ensino de frações: do século XIX à BNCC* (MORAIS; BERTINI; VALENTE, 2021) e *A matemática do ensino: uma história do saber profissional 1870-1960.* (VALENTE; BERTINI, 2022).

A matemática do ensino tem demonstrado ser um conceito potente com desdobramentos que favorecem investigações históricas sobre processos e

1 Para mais detalhes, ver: <**http://dgp.cnpq.br/**dgp/espelhogrupo/2464392240898492>. Acesso em: 15 dez. 2022.

2 Para mais detalhes ver em: <https://ghemat-brasil.com.br/home/>. Acesso em 15 dez. 2022.

dinâmicas de saberes relacionados ao ensino de matemática e à formação de seus agentes responsáveis por este ensino.

Resumidamente, a matemática do ensino se relaciona diretamente com o saber profissional do professor que ensina matemática. Ela é o produto da articulação entre a matemática a ensinar e a matemática para ensinar.

Para além dos estudos e discussões teóricas, o grupo decidiu produzir ensaios com a mobilização deste conceito tomando fontes disponíveis no Repositório de Conteúdo Digital da Universidade Federal de Santa Catarina na comunidade História da Educação Matemática[3]. Para dar conta deste objetivo, os membros do GHEMAT-SC formaram subgrupos que foram ao longo dos semestres apresentando propostas que viabilizassem estes ensaios.

Reunido em cinco ensaios que mobilizam o constructo de matemática do ensino, este livro recebeu apoio financeiro do PPGECT por meio de edital para publicações de seus docentes e discentes.

A obra se encontra dividida em cinco capítulos. Esperamos motivar outros pesquisadores em seus respectivos grupos de pesquisa a publicarem sínteses dos estudos sistematizados e realizados.

Desejamos a todos boa leitura e nos colocamos à disposição para o debate teórico.

Os organizadores
Florianópolis, novembro de 2022.

Referências

MORAIS, R. dos S.; BERTINI, L. de F.; VALENTE, W. R. **A matemática do ensino de frações**: do século XIX à BNCC. 1. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2021.

VALENTE, W. R.; BERTINI, L. F. (org.). **A matemática do ensino**: uma história do saber profissional 1870-1960. São Paulo: Universidade Federal de São Paulo, 2022. (Coleção Educação & Saúde, v. 1). 241 p.

3 Para mais detalhes: <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/1769>. Acesso em: 15 dez. 2022.

PREFÁCIO
NOVOS ESTUDOS SOBRE A MATEMÁTICA DO ENSINO

Dentre os desafios postos a um dado campo de pesquisa, está sempre presente a necessidade de que esse campo crie novas problemáticas de pesquisa que possam fazer avançar a sua produção e reprodução enquanto seara específica no rol das ciências. Por certo, com a História da educação matemática - Hem não se passa algo diferente. Desse modo, como todo campo, a Hem revigora-se com novas problemáticas. E, sobretudo, se essas novas problemáticas afastarem-se da análise do real tomado, em si mesmo, como objeto de pesquisa.

Em tempos atuais, talvez estejamos vivenciando um processo de maturidade desse campo. Como atestado anteriormente, na análise da produção nacional, fruto de sínteses realizadas a partir dos Encontros Nacionais de Pesquisa em História da Educação Matemática – ENAPHEM, haveria necessidade da ultrapassagem da construção de objetos vindos da empiria, de modo fenomenológico, para uma produção de objetos teóricos de pesquisa, próprios da Hem. Ao que parece, as pesquisas nesse novíssimo campo têm avançado nessa direção: a elaboração de objetos teóricos próprios, a partir de problemáticas da área, capaz de distingui-la de outros campos.

Nos últimos anos, o interesse pelo saber profissional do professor cresceu de modo exponencial a partir dos estudos de Lee Shulman. Essa temática de pesquisa – o saber profissional do professor – iluminou a Hem com a interrogação sobre as mudanças ocorridas ao longo do tempo sobre esse saber, em especial sobre o saber profissional do professor que ensina matemática.

Por certo, é possível retroagir até meados do século XIX para buscar resposta à questão, mas em termos de caracterização da profissão docente há que se pensar em época bem mais recente. De todo modo, permanece a questão: no exercício da docência, o que precisa o professor saber? Ou mais especificamente: o que o professor que ensina matemática precisa saber? Ou ainda: A matemática que o professor ensina precisa que ele saiba que tipo de matemática? Esta última forma indica uma relação entre matemáticas. De um lado a matemática que o professor deve ensinar a seus alunos – a matemática a ensinar; de outro, a matemática que o professor deverá saber para ensinar matemática a seus alunos: a matemática para ensinar.

Desde tempos longínquos é possível analisar a relação entre essas duas matemáticas. Aquela do ensino e a da formação de professores. Assim, caracteriza-se a matemática do ensino: como uma relação entre a matemática a ensinar e a matemática para ensinar. Como essa relação sofreu transformações ao longo do tempo? Tal problemática histórico-epistemológica tem potência para constituir-se em uma nova problemática para a Hem. Este livro comprova tal assertiva.

Logo ao início, no capítulo intitulado "Matemática do ensino e a Hem: novos conceitos, novas problemáticas", os autores conduzem, de modo bastante didático, o leitor a apropriar-se da trajetória da Hem que levou à elaboração da matemática do ensino. Por entre conceitos apanhados da sociologia, da história cultural e de outras tantas ciências já constituídas, erige-se uma categoria teórica que se mostra importante para relacionar searas sempre tratadas de modo separado: o ensino e a formação de professores. Em especial, tem-se as discussões sobre a matemática e como ela se revela na cultura escolar.

Por certo, a elaboração teórica ganha sustentação a partir de estudos empíricos iniciais, que, mantendo uma relação com a construção de novos objetos teóricos, adensam a importância da categoria matemática do ensino. Este livro, em seus vários capítulos, atesta isso. Seus autores debruçam-se sobre variados itens matemáticos e sua caracterização na perspectiva da matemática do ensino. Números negativos, conceito de número, polígonos e multiplicação são subtemas analisados. Descortina-se uma nova perspectiva para além daquela já consagrada pelos estudos didáticos que voltavam atenção para os modos de transposição adotados pelos campos disciplinares (matemática) de forma a estarem presentes no ensino. Apresentam-se, com os estudos deste livro, a perspectiva de elaboração de matemáticas próprias da cultura escolar.

Parabéns aos autores.

Wagner Rodrigues Valente
Santos, fevereiro de 2023.

MATEMÁTICA DO ENSINO E A HEM: novos conceitos, novas problemáticas

Yohana Taise Hoffmann[4]
David Antonio da Costa[5]

Este capítulo apresenta uma síntese sobre o desenvolvimento do campo da História da educação matemática (Hem), assim como as transformações por meio da inclusão de novas ferramentas teóricas para responder a novos problemas de pesquisas o qual impulsionam o desenvolvimento deste campo científico. Dessa forma, estruturamos o capítulo em três partes, a primeira aborda os elementos que constituem o campo da Hem, a segunda parte apresentamos as tendências problemáticas que são investigadas pelos agentes da Hem, no terceiro tópico apresentamos mais detalhadamente a temática da matemática do ensino.

Elementos constitutivos do campo da Hem

Ao ativar a ferramenta conceitual de campo, mobilizamos o referencial teórico de Bourdieu (2001a; 2001b). Por campo entende-se um espaço de forças e conflitos para a transformação ou manutenção das relações vigentes, um microcosmo social obedecendo às próprias leis. O campo pode ser político, econômico, social, científico, entre outros. A esse respeito trataremos, em particular, do campo científico da Hem, sendo caracterizado a partir da prática investigativa de agentes e da própria institucionalização desse saber, a longo prazo, pela reprodução de grupos, criação de associações científicas que são reconhecidas socialmente e lhes dão visibilidade na defesa de seus interesses.

4 Doutora em Educação Científica e Tecnológica (PPGECT/UFSC). Socióloga na Prefeitura de Lavras (MG). Email: yohana.thc@gmail.com

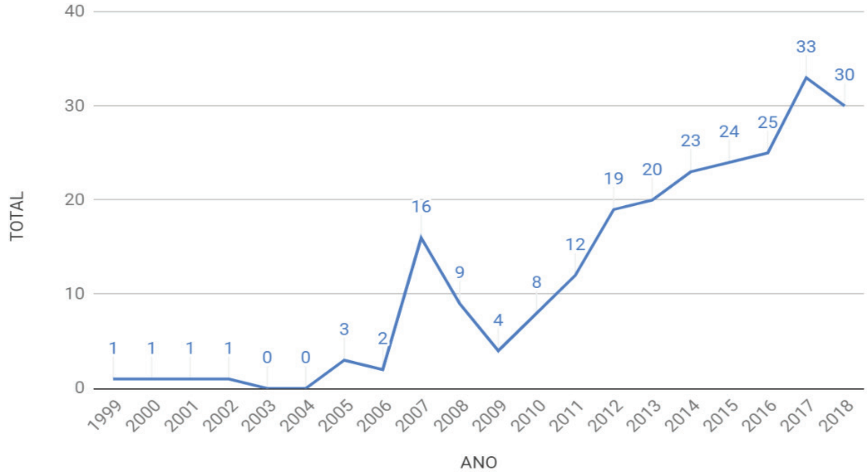
5 Doutor em Educação Matemática (PUC/SP). Docente do Depto. de Metodologia de Ensino e do Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica (PPGECT) da Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC). Email: david.costa@ufsc.br

A dimensão microssociológica e relacional é importante ser mencionada, pois, ao olhar todos os elementos e processos que constituem a Hem como um campo científico, é possível aferir o seu reconhecimento e legitimidade. Entretanto, ao analisar por uma dimensão macrossociológica, a Hem se torna um subcampo de campos mais estáveis e autônomos, como o da Educação Matemática, da Educação e da Matemática, por exemplo.

Os autores Hofstetter e Schneuwly (2017), corroborando o conceito de campo, mencionam que as práticas de pesquisa crescem impulsionadas por demandas sociais, profissionais, culturais e econômicas, bem como apresentam quatro traços que caracterizam a emergência e o desenvolvimento de disciplinas e campos disciplinares, a saber: 1. Base institucional (postos, institutos, laboratórios), uma profissionalização da pesquisa; 2. Constituição de redes de comunicação especializadas (revistas, congressos, associações); 3. Renovação de conhecimentos e métodos; 4. Socialização.

As primeiras pesquisas defendidas que investigam a Hem no Brasil são datadas do final da década de 1980 e meados dos anos 1990, entretanto a partir dos anos 2000 tem-se uma regularidade e uma tendência crescente dos estudos nesta área (BRITO; MIORIM, 2016). O levantamento publicado em Hoffmann (2022), feito a partir do catálogo de Teses e Dissertações da CAPES de 1999 a 2018, é apresentado a seguir. De acordo com a Figura 1, podemos verificar que há um crescimento constante desde o início das investigações no campo da Hem e alguns picos, como no ano de 2017.

Figura 1 – Pesquisas que investigam a Hem (CAPES).



Fonte: HOFFMANN (2022, p. 99).

A atualização deste levantamento foi realizada em 04 de outubro de 2022, para os anos de 2019, 2020 e 2021 apresentou 29, 19 e 22 pesquisas, respectivamente. Tal resultado mostra uma continuidade no quantitativo das produções do campo mantendo-se expressivo patamar numérico.

Outro dado que compõe o campo da Hem são os grupos de pesquisas (GPs) e seus agentes. Hoffmann (2022) investigou os GPs que constituem o campo da Hem em um primeiro levantamento realizado em julho de 2019 no Diretório de Grupos de Pesquisa do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (DGP/CNPq). A autora identificou 18 grupos ao aplicar o termo exato "história da educação matemática" tanto no nome do grupo quanto na linha de pesquisa. Todavia, para mostrar a dinâmica das relações e do próprio campo, Hoffmann (2022) apresentou uma nova consulta a partir do DGP/CNPq, em setembro de 2021, com os mesmos parâmetros e que resultou em 24 GPs, sendo oito novos GPs, três foram excluídos e dois que estavam na consulta do ano de 2019 não foram encontrados, conforme Quadro 1.

Quadro 1 – GPs que investigam a Hem no Brasil, atualizado (2021).

Nome do GP	Instituição	Ano de Criação	Líder	Situação do Grupo
História, Filosofia e Educação Matemática (HIFEM)	UNESP	1996	Arlete de Jesus Brito e Andreia Dalcin	Excluído
Grupo de Pesquisa de História da Educação Matemática (GHEMAT)	UNIFESP	2000	Wagner Rodrigues Valente e Neuza Bertoni Pinto	Excluído
Grupo de Pesquisa de História da Educação Matemática de São Paulo (GHEMAT-SP)	UNIFESP	2000	Wagner Rodrigues Valente	Certificado GP novo na Consulta
História Oral e Educação Matemática (GHOEM)	UNESP	2002	Antonio Vicente Marafioti Garnica e Heloisa da Silva	Certificado
História da Educação Matemática: aspectos históricos, curriculares e culturais (GHisemahcc)	UFOP	2008	Marger da Conceição Ventura Viana e Milton Rosa	Não encontrado no DGP/CNPq
Núcleo de Pesquisas e Estudos em Educação Matemática (NUPEm)	UFU	2009	Cristiane Coppe de Oliveira e Vlademir Marim	Não Atualizado
Grupo de Estudos e Pesquisa em Educação Matemática (GEPEM IFSC)	IFSC	2011	Elenita Eliete de Lima Ramos e Jeremias Stein Rodriguês	Não encontrado no DGP/CNPq
História da Educação Matemática em Pesquisa (HEMEP)	UFMS	2011	Luzia Aparecida de Souza e Thiago Pedro Pinto	Certificado
Educação e História da Matemática (GPEHM)	UECE	2013	Ana Carolina Costa Pereira	Certificado
Grupo Potiguar de Estudos e Pesquisas em História da Educação Matemática (GPEP)	UFRN	2013	Liliane dos Santos Gutierre e Fernando Guedes Cury	Em preenchimento
Grupo Rondoniense de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática (GROEPEM)	UNIR	2015	Emerson da Silva Ribeiro e Kecio Gonçalves Leite	Certificado
Grupo de Pesquisa de História da Educação Matemática - Mato Grosso do Sul (GHEMAT / MS)	UFMS	2016	Késia Caroline Ramires Neves	Certificado GP Novo na Consulta
Estratégias de Ensino para Educação Básica e Profissional (EEEBP)	IFSul	2017	Malcus Cassiano Kuhn	Certificado

Grupo de Pesquisa de História da Educação Matemática (GHEMAT / PR)	UTFPR	2017	Barbara Winiarski Diesel Novaes e Mariliza Simonete Portela	Certificado
Grupo de Pesquisa de História da Educação Matemática (GHEMAT / SC)	UFSC	2017	David Antonio da Costa e Iara Zimmer	Certificado
História da Matemática e Educação Matemática	UFAL	2017	Viviane de Oliveira Santos	Certificado
Grupo de Estudo e Pesquisa em História da Educação Matemática (GEPHEME-RO)	UNIR	2017	Enoque da Silva Reis e Luiz Carlos Pais	Certificado
Grupo de Pesquisa Educação Matemática e Diversidade Cultural (GPEMDiC)	UESC	2018	Jurema Lindote Botelho Peixoto e Larissa Pinca Sarro Gomes	Certificado
Grupo de Pesquisa em História da Educação Matemática	IFMG	2018	Thiago Neves Mendonça e Filipe Santos Fernandes	Não Atualizado
Grupo de Pesquisas e Estudos em Educação Matemática (GPEEM)	IFESP	2018	José Paulino Filho	Excluído
Grupo de Pesquisa em História da Matemática (GPHMAT)	UFTM	2019	Monica de Cassia Siqueira Martines	Certificado GP novo na Consulta
Grupo de Pesquisa em Educação Matemática e Tecnologias Digitais (GEPEMAT)	UNIR	2019	Julio Robson Azevedo Gambarra	Certificado GP novo na Consulta
Grupo de Pesquisa de História da Educação Matemática (GHEMAT/ Rio de Janeiro)	UERJ	2019	Denise Medina de Almeida França	Certificado GP novo na Consulta
Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática nos Anos Iniciais (GEMAIS)	UFJ	2020	Viviane Barros Maciel	Certificado GP novo na Consulta
Grupo de Pesquisa em Educação Matemática	UFPR	2020	Danilene Gullich Donin Berticelli	Certificado GP novo na Consulta
Grupo de Estudo e Pesquisa em História da Educação Matemática na Amazônia (GEPHEMA)	UNIR	2021	Sérgio Candido de Gouveia Neto E Cristiane Talita Gromann de Gouveia	Certificado GP novo na Consulta

Fonte: HOFFMANN (2022, p. 114).

O segundo traço para a constituição de um campo, de acordo com Hofstetter e Schneuwly (2017), é uma rede de comunicação, como, por exemplo, associações, sociedades, eventos e revistas "que permitem a construção de uma comunidade de cientistas trabalhando em torno das mesmas problemáticas" (HOFSTETTER; SCHNEUWLY, 2017, p. 23).

Dessa forma, a partir da pesquisa de Hoffmann (2022), elencamos a seguir, cronologicamente, os eventos e revistas que investigam a Hem a partir do ano de 2004 até 2021. Um dos primeiros eventos é o *International Congress on Mathematical Education* (ICME), em particular, a sua décima edição no ano de 2004, o TSG (*Topic Study Group*) número 29, sobre *History of Teaching and Learning Mathematics*. Entre os anos de 2006 e 2016 teve a veiculação da revista científica *International Journal on the History of Mathematics Education* (IJHME), foi um acontecimento importante na socialização, divulgação e circulação de ideias no campo da Hem. No ano de 2009, na Islândia, foi realizada a primeira *International Conference on the History of Mathematics Education* (ICHME) a partir da necessidade de realizar um evento específico do campo da Hem. Podemos também elencar como um importante acontecimento de reconhecimento e consolidação desse campo o Congresso Ibero-americano de História da Educação Matemática (CIHEM), que ocorreu em 2011.

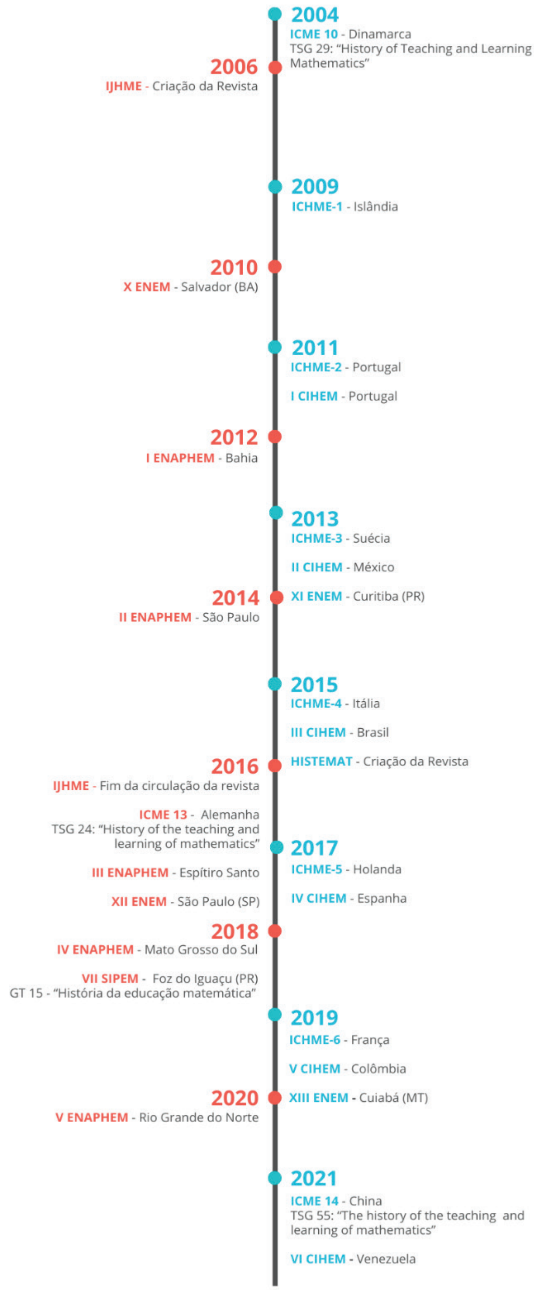
O texto de Coppe *et al.* (2018) menciona que os primeiros trabalhos apresentados no âmbito da Hem no Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (SIPEM) datam do II SIPEM, realizado no ano de 2003, com quatro pesquisas aprovadas e alocadas no GT 5 – História da Matemática e Cultura. Passados 15 anos, no VII SIPEM em 2018 é inaugurado o Grupo de Trabalho 15 (GT15), intitulado História da educação matemática.

Ao olharmos para o Brasil, as publicações com eixos temáticos que investigam a Hem, têm-se eventos como o Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM), em particular o X ENEM, em 2010, com o eixo 6 denominado História da Matemática e da Educação Matemática. Em relação aos eventos nacionais específicos no campo da Hem, há o Encontro Nacional de Pesquisa em História da Educação Matemática (ENAPHEM), cuja primeira edição foi idealizada no ano de 2012. E no ano de 2015 teve o lançamento da *Revista de História da Educação Matemática* (HISTEMAT), que aceita textos inéditos, resultantes de pesquisa sobre a Hem, história e didática da matemática, história da matemática no ensino, e quaisquer produções que promovam o diálogo entre história, educação e matemática.

Conforme Chartier (2002), a produção, a circulação e a apropriação de representações em formas de textos são examinadas a partir da relação entre as formas materiais e as práticas culturais que, para o autor, irá resultar na história das mentalidades, que pode ser considerada como uma história sociocultural. Isto é, "as ideias, apreendidas por meio da circulação das palavras que as designam, situadas nos seus enraizamentos sociais, pensadas na sua carga afectiva e emocional, tanto quanto no seu conteúdo intelectual" (CHARTIER, 2002, p. 43).

Segundo Bourdieu (2001a, p. 296), a rede comunicacional são manifestações de reconhecimento social, "nos livra da insignificância, como ausência de importância e de sentido". Esses episódios constituem espaços de um capital simbólico, como também se nota a história das mentalidades e do coletivo de pesquisadores no campo da Hem por meio da ressonância do internacional para o nacional, conforme apresenta a Figura 2.

Figura 2 – Linha do tempo dos eventos e revistas que investigam a Hem.



Fonte: HOFFMANN (2022, p. 131).

Novos problemas de pesquisas

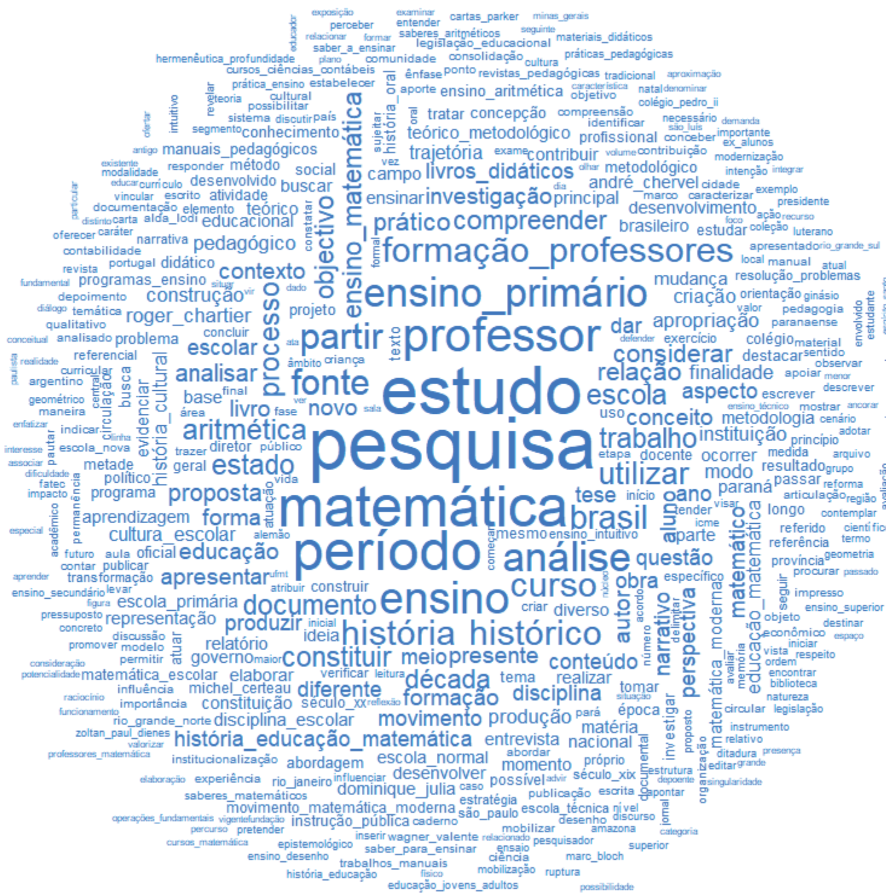
Nesta seção apresentamos as temáticas de investigação do campo da Hem, tendo como referencial teórico de categorização as pesquisas de Brito e Miorim (2016) e Hoffmann (2022). O trabalho de Brito e Miorim (2016) classifica cinco eixos temáticos, a saber:

> História de formação de professores de matemática;
>
> História de mudanças curriculares, métodos e práticas educativas em matemática;
>
> Histórias de conteúdo e de disciplinas escolares em diferentes níveis de ensino;
>
> História de artefatos didáticos relacionados ou dirigidos à educação matemática;
>
> História de grupos culturais ou comunidades de prática envolvidos com educação matemática (BRITO; MIORIM, 2016, p. 81).

Ademais, a pesquisa de Hoffmann (2022), ao categorizar as temáticas investigativas da Hem, apropria-se dos estudos de Brito e Miorim (2016), como, também, analisa 65 teses entre os anos de 2012 e 2018, identificando os seguintes elementos: problema de pesquisa; metodologia da pesquisa – a fim de identificar diferentes modos de investigar a Hem; as proposições que os autores das 65 teses assumem em relação à Hem; e analisar as referências bibliográficas.

Em um primeiro momento, a partir dos resumos das 65 teses, Hoffmann (2022) criou uma nuvem de palavras a partir do *software* IRaMuTeQ, Figura 3. É possível identificar a centralidade de algumas palavras que correspondem às 65 teses, as palavras em destaques e mais centrais são "pesquisa (mencionada 122 vezes), seguindo de estudo (110) e matemática (93), as palavras em maiores destaques são também: professor (76), ensino (69), ensino primário (63), história (53), formação de professores (52)" (HOFFMANN, 2022, p. 233).

Figura 3 – Nuvem de palavras, *corpus* textual dos resumos das 65 teses (2012 a 2018).



Fonte: Hoffmann (2022, p. 233).

A partir dos estudos de Hoffmann (2022), tem-se os seguintes temas que investigam a Hem do ano de 2012 a 2018:

- No ano de 2012, podemos identificar o eixo História de mudanças curriculares, métodos e práticas educativas em matemática.
- Ao analisar as teses de 2013, com base na introdução, nos problemas de pesquisas e no próprio título, podemos observar que uma parte das teses estão preocupadas com a formação/capacitação dos professores que ensinam matemática, o qual pode ser associado ao eixo História de formação de professores de matemática. E um outro grupo de teses pode-se

identificar o eixo História de artefatos didáticos relacionados ou dirigidos à educação matemática.

- No ano de 2014, pode-se identificar dois eixos temáticos, o primeiro são teses que mencionam as práticas escolares do ensino de matemática, isto é, do eixo História de mudanças curriculares, métodos e práticas educativas em matemática. O segundo eixo estuda a formação de professores, corresponde ao eixo História de formação de professores de matemática, e que podemos adaptar para História de formação de professores que ensinam matemática, ampliando o espectro de professores. Entretanto, há uma tese que instaura um novo eixo temático, sendo a compreensão da constituição de um novo campo científico.
- Em relação aos problemas/perguntas e objetivos de pesquisas das teses do ano de 2015, notam-se três eixos, em um momento teses que tratam da temática da formação de professores correspondem ao eixo História de formação de professores que ensinam matemática. As teses que analisam livros didáticos para o ensino de matemática, o qual podemos relacionar ao eixo História de artefatos didáticos relacionados ou dirigidos à educação matemática. E uma única das teses do ano de 2015 que investiga a Resolução de Problemas nos ICMEs, que pode ser associada ao estudo de um conteúdo específico, em particular ao eixo Histórias de conteúdo e de disciplinas escolares em diferentes níveis de ensino.
- O ano de 2016 apresenta temáticas singulares, a saber: uma tese apresentou um estudo comparativo entre Brasil e Argentina, no período de ditadura cívico-militar e a matemática moderna; outra tese estudou os livros didáticos dos Cursos de Ciências Contábeis; um grupo utilizou por meio de narrativas os recursos e metodologias de pesquisas da História Oral; e por último, um grupo de teses pode ser relacionado ao eixo História de formação de professores de matemática, e que podemos adaptar para História de formação de professores que ensinam matemática, ampliando o espectro de professores.
- Em relação às temáticas das teses do ano de 2017, tem-se dois grupos, um utilizou por meio de narrativas os recursos e metodologias de pesquisas da História Oral, e outro grupo de teses investigam os saberes, tanto os saberes elementares quanto os saberes a e para ensinar. Assim, o eixo temático que podemos identificar com essas teses é baseado em Valente (2020a, p. 199) em relação aos problemas próprios do campo da Hem, a saber:

"a investigação do saber profissional do professor que ensina matemática constitui uma problemática própria da História da educação matemática".

- Assim como nos anos de 2016 e 2017, no ano de 2018 há um grupo de teses que utilizou por meio de narrativas, os recursos e metodologias de pesquisas da História Oral. Outro grupo de teses investiga o período da Pedagogia da Escola Nova, caracterizado pelo eixo História de mudanças curriculares, métodos e práticas educativas em matemática. Por fim, teses que investigam a temática dos saberes elementares matemáticos e/ou aritméticos e os saberes a e para ensinar, pode-se relacionar com Histórias de conteúdo e de disciplinas escolares em diferentes níveis de ensino e, História de formação de professores de matemática, em particular, o saber profissional do professor que ensina matemática.

Segundo Hoffmann (2022, p. 341):

> os eixos temáticos das teses, em sua maioria, são da História de formação de professores de matemática, e, nos últimos anos (2017 e 2018), as teses que investigam os saberes se aproximam da proposta de Valente (2020a, p. 199), que é ter problemas próprios ao investigar o "saber profissional do professor que ensina matemática".

As temáticas de investigação no campo da Hem vão se transformando a partir dos novos referenciais teóricos que são mobilizados. Os retornos das pesquisas publicadas nos anos 2019, 2020 e 2021 indicam e apontam esta tendência de trabalhos voltados à formação de professores, dado que colocam os saberes em destaque. A pesquisa de Hoffmann (2022) evidencia que o eixo sobre os saberes e a formação do professor que ensina matemática é de interesse da comunidade. Como desdobramento desse eixo temático, sobretudo em relação aos saberes relacionados à formação do professor em especial diálogo com os saberes os quais devem ser ensinados. A seguir, iremos analisar um constructo teórico denominado de *matemática do ensino*.

A Matemática do ensino

Nas palavras de Valente (2022, p. 13), a matemática do ensino representa "a relação estabelecida entre matemática a ensinar e matemática para ensinar.

Matemática do ensino como um saber que relaciona formação do professor e sua atuação como docente" (VALENTE, 2022, p. 13).

Dito de uma outra forma, a matemática do ensino põe em relação os objetos de ensino do professor, aquilo que deve ser ensinado - matemática a ensinar, e o conjunto de ferramentas que o professor deve ter e mobiliza para dar conta desta tarefa –, matemática para ensinar.

Ora, se tomarmos a matemática do ensino no contexto da história da cultura escolar, cabe melhor compreender os saberes que resultam na sua formulação, sejam esses de natureza de objeto e/ou de ferramenta.

Um importante conceito de *forma escolar*, desenvolvido por Guy Vincent, ajuda a definir o modo de ensino e de formação em ambiência escolar. Esse referencial teórico nos direciona para um entendimento sobre o funcionamento da escrituração dos saberes e suas implicações sobre o processo de ensino e aprendizagem e, igualmente, permite que compreendamos melhor como a socialização disciplinar dos conteúdos é privilegiada. Vincent, Lahire e Thin (2001) recorrem a uma análise sócio-histórica da constituição da escola na França para desenvolver o conceito de *forma escolar* e observam características invariantes que são sintetizadas por Hofstetter e Schneuwly (2017):

> 1) A escola como lugar específico, separado de outras práticas sociais (o exercício da profissão em especial), ligado à existência dos saberes objetivados;
>
> 2) A "pedagogização" das relações sociais de aprendizagem, inseparável de uma escrituração codificação dos saberes e das práticas;
>
> 3) A sistematização do ensino, produzindo efeitos de socialização duradouros (reprodução social);
>
> 4) A escola como um lugar de aprendizagem de forma de exercício de poder, mediante normas supra-pessoais as quais professores e alunos estão sujeitos;
>
> 5) A instauração de uma relação escritural-escolar com a linguagem e com o mundo (HOFSTETTER; SCHNEUWLY, 2017, p. 119).

Com isso, compreendemos que os cinco pontos anteriores, que caracterizam a forma escolar como uma forma social de ensino e aprendizagem, nos convidam a investigar configurações particulares e históricas dos processos educativos em torno da tríade: lugar, tempo e relação pedagógica. Tais pontos nos impulsionam a investigar como se institucionaliza a transmissão de saberes em um dado período, uma vez que a escola se liga à existência de saberes objetivados, escriturados e codificados, presentes em um sistema de ensino.

É a partir dos saberes objetivados que compreendemos a mudança na lógica de transmissão dos saberes. Para Vincent, Lahire e Thin (2001), os saberes objetivados são constituídos de um conjunto de saberes que devem ser transmitidos e conquistaram um *status* social na/pela escrita.

Segundo os autores, a objetivação dos saberes resulta "de um trabalho de classificação, divisão, articulação, estabelecimento de relações, comparações, hierarquização etc." (VINCENT; LAHIRE; THIN, 2001, p. 29).

Os estudos de Chervel (1990) demonstram que a escola não é lugar unicamente para transmissão de saberes elaborados e sistematizados pelos campos disciplinares. Assim, é certo que em cada tempo, para um determinado tema, a escola tem papel fundamental na criação de saberes que ela mesma produz. Tratar desses saberes produzidos na/pela escola autoriza a considerar a existência de uma matemática que se distingue daquela do campo científico. Essa matemática elaborada historicamente pelo meio escolar, respondendo às diferentes finalidades postas para o ensino em que se exercem as práticas pedagógicas, se denomina matemática do ensino.

Seguindo esse raciocínio e fundamentada em Morais, Bertini e Valente (2021), a caracterização da matemática do ensino sob diferentes temas específicos poderá ser realizada apoiada no estudo de livros didáticos e manuais pedagógicos compreendendo a dimensão do ensino e a formação de professores para esse ensino.

Lugar, tempo e relação pedagógica são palavras-chave que buscam dar inteligibilidade aos processos educativos, portanto, são elementos essenciais que dialogam na caracterização da matemática do ensino. A organização do par espaço-temporal estrutura praticamente todas as ações escolares e condiciona a produção de saberes. Desde as prescrições no *Conduite des Ecoles Chretinnees*[6], as práticas escolares se sujeitam de alguma forma a uma organização própria desdobradas em níveis de ensino, graus, lições, ordens de lições, exercícios, ano letivo, bimestres, hora-aula, exames, avaliações, dentre outras.

Esses condicionantes mostram que para a produção de saberes no âmbito escolar e na formação há de serem considerados elementos como: *sequência, significado, graduação, exercícios e problemas,* dentre outros estruturantes. Tais elementos se mostram como integrantes de uma anatomia da matemática do ensino (VALENTE, 2020b, p. 170).

Para um dado tema específico da matemática a ser ensinada, a relação desse tema com relação a outros é determinante: qual sua posição do imbricado quadro de conteúdos a serem trabalhados? Qual a *sequência* estabelecida para dar conta dessa matemática a ser ensinada? O que vem antes? O que vem depois? O que deve ser tratado concomitantemente? Estas respostas determinam elementos relacionados à *sequência* da matemática do ensino em questão.

Uma vez que se trata de temas relacionados ao ensino da matemática, os docentes procuram a eles dar significados. Um número racional, por exemplo, poderá ser qualquer número na forma de a/b, onde a e b são números inteiros e b≠0. No entanto, este mesmo número racional poderá assumir a ideia de uma proporção, a está para b, ou ainda poderá indicar a divisão de a por b. Considera-se *significado* o modo como o professor se refere a um dado tema da matemática do ensino, particularmente no momento de contato inicial do aluno com o novo assunto. Dependendo do ano escolar e do nível de escolaridade, essa caracterização do *significado* é resultado das relações travadas num dado tempo, entre os campos disciplinares e o campo profissional da docência, a reboque de uma certa finalidade posta à escola.

A *graduação* é outro elemento da matemática do ensino, diretamente ligada a uma concepção de ensino e aprendizagem. Para um certo tema da matemática do ensino, qual passo a passo deverá ser seguido pelo professor? Toma-se o exemplo de ensino de áreas de polígonos. O professor poderá tratar o tema como superposição de uma área unitária e preencher o espaço

6 A obra de João Batista La Salle é um marco na História da Educação. Este manual chama a atenção pelo caráter prático e uniformizador que prescreve um modelo de forma escolar. LA SALLE, João Batista de, Santo, 1651-1719. **Guia das escolas cristãs**. Canoas: Editora Unisalle, 2012.

relacionado ao polígono em questão. Poderá ainda, de forma diversa, avaliar que o cálculo de área de qualquer polígono seja pensado na composição de diversas áreas de triângulos. Neste caso, tomará o caso do cálculo da área de triângulo como elementar complexificando para todas as demais figuras planas. Distintas marchas do ensino denotam diferentes graduações da matemática do ensino.

As análises dos *exercícios e problemas* caracterizam outro elemento da matemática do ensino. As escolhas realizadas e articuladas acerca da *sequência*, *significado, graduação* se desdobram nestas atividades – *exercícios e problemas* - que correspondem às expectativas docentes da posterior devolutiva dos alunos desta matemática do ensino. Tais atividades são idealizadas na perspectiva de serem respondidas com informações que atendam as expectativas de retenção dos professores acerca dessa matemática do ensino.

A mobilização destas categorias aponta possibilidades de caracterizar a matemática do ensino, isto é, identificar como ocorre a articulação entre a matemática a ensinar – objeto de ensino – e a matemática para ensinar – a ferramenta para ensinar o objeto.

À guisa da reflexão

Este capítulo cumpre o papel de apresentar uma síntese do desenvolvimento do campo científico da História da educação matemática (Hem) fundamentado nas transformações por meio da inclusão de novas ferramentas teóricas para responder a novos problemas de pesquisas.

O alargamento do quadro teórico desenvolvido para responder problemáticas próprias do campo da Hem é um exemplo concreto. A matemática do ensino, tomada aqui neste capítulo, materializa este movimento e faz avançar o conhecimento científico.

A matemática do ensino se apresenta como um saber resultante de produção histórica da cultura escolar e participa do movimento de profissionalização docente. Descortinar esses saberes, compreender seus elementos constitutivos, potencializa de forma qualitativa a formação inicial de professores que ensinam matemática.

Referências

BOURDIEU, P. **Meditações pascalianas**. Rio de Janeiro: Bertrand Brasil, 2001a.

BOURDIEU, P. **Para uma sociologia da ciência**. Lisboa: Ed. 70, 2001b.

BRITO, A. J.; MIORIM, M. A. A institucionalização da História da Educação Matemática. In: Antonio V. M. Garnica. (Org.). **Pesquisa em História da Educação Matemática no Brasil.** São Paulo: Livraria da Física Editora, 2016, v. 1, p. 67-92.

CHARTIER, R. Capítulo 1. História intelectual e história das mentalidades. *In*: CHARTIER, R. **A História Cultural entre práticas e representações**. Trad. Maria Manuela Galhardo. (Col. Memória e sociedade) Rio de Janeiro: Bertrand Brasil, 2002. p. 29-67.

CHERVEL, André. História das disciplinas escolares: reflexões sobre um campo de pesquisa**. Teoria e Educação**, Porto Alegre, n. 2, p. 177-229, 1990.

COPPE, C.; FLORES, C. R.; OREY, D. C.; OLIVEIRA, M. C. A. History of Mathematics and Culture: Moments and Movements in Brazilian Mathematics Education. *In*: RIBEIRO, A. J.; HEALY, L.; BORBA, R. E. S. R.; FERNANDES, S. H. A. A. (Org.). **Mathematics Education in Brazil Panorama of Current Research**. 1ed.Switzerland: Springer, v. 1, 2018. p. 1-278.

HOFFMANN, Y. T. **Entre teses e grupos de pesquisas em história da educação matemática no Brasil: seus *habitus* e estilos de pensamento**. Tese (Doutorado) - Curso de Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2022.

HOFSTETTER, R.; SCHNEUWLY, B. Disciplinarização e disciplinação: as ciências da educação e as didáticas das disciplinas sob análise. In: HOSFSTETTER, R; VALENTE, W. (Orgs.). **Saberes em (trans)formação**: tema central da formação de professores. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2017. p. 21-54.

MORAIS, R. dos S.; BERTINI, L. de F.; VALENTE, W.R. **A matemática do ensino de frações**: do século XIX à BNCC. 1 ed. São Paulo: Livraria da Física, 2021. (Coleção Histórias da matemática em estudos e no ensino. v.4).

VALENTE, W. R. Matemática, Educação e História da Educação Matemática: campos disciplinares e o saber profissional do professor que ensina matemática. *In*: VALENTE, Wagner Rodrigues. (Org.). **Ciências da Educação, Campos Disciplinares e Profissionalização**: saberes em debate para a formação de professores. 1ed.São Paulo: L F Editorial, 2020a, v. 1, p. 187-210.

VALENTE, W. R. História e Cultura em Educação Matemática: a produção da matemática do ensino. **REMATEC** [S. I.], v.15, n.36, p. 164-174, 2020b. DOI: https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2020.n16.p164-174.id307

VALENTE, W. R. História da formação do professor que ensina matemática: etapas de constituição da matemática para ensinar. **Boletim Online de Educação Matemática**, v. 10, p. 10-24, 2022. DOI: https://doi.org/10.5965/2357724X10192022010

VINCENT, G.; LAHIRE, B.; THIN, D. Sobre a história e a teoria da forma escolar. **Educação em Revista**, Belo Horizonte, n. 33, jun, 2001, p. 7- 47. Disponível em: http://educa.fcc.org.br/pdf/edur/n33/n33a02.pdf. Acesso em: 15 dez. 2022.

AS PERSPECTIVAS INICIAIS DE UMA MATEMÁTICA DO ENSINO DE NÚMEROS NEGATIVOS NO INÍCIO DO SÉCULO XX: o caso da escola complementar de Santa Catarina

Jeremias Stein Rodriguês[7]

CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Diversas mudanças na educação são decorrentes da instituição da República no Brasil e, entre elas, podemos observar a configuração de uma formação que se institui entre o primário e o secundário, geralmente se caracterizando como uma continuação do primeiro. Essa nova etapa escolar foi denominada de Escola Complementar e, no âmbito de Santa Catarina, tinha como objetivo diminuir as dificuldades que surgiam em decorrência de uma lacuna existente entre a formação primária e secundária/normal, seja pela idade do estudante, que terminava o Grupo Escolar aos 12 ou 13 anos (RAMOS, 1914), ou mesmo pelos conteúdos, e formar professores para regiões afastadas do estado. O ensino de Álgebra para a formação primária é uma das novidades que se estabelece com a criação da Escola Complementar catarinense. Em meio à abordagem dos conteúdos algébricos, os números negativos ganham destaque, pois denotam que o ensino da Álgebra ultrapassava uma barreira instaurada pela Aritmética, que não concebia solução negativa.

Neste capítulo temos como objetivo discutir elementos constitutivos de uma *matemática do ensino* dos números negativos que surgem com a Álgebra da Escola Complementar catarinense. Para isso, iniciamos apresentando duas perspectivas distintas sobre os números negativos na época e, em seguida, são realizadas análises sobre livros didáticos vinculados ao ensino de Álgebra

7 Doutor em Educação Científica e Tecnológica pela Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC. Professor de Matemática do Instituto Federal de Santa Catarina – IFSC. Email: jeremias.stein@ifsc.edu.br.

na instituição: Álgebra Elementar, de Antonio Bandeira Trajano (1905); Elementos de Álgebra, de Augusto José da Cunha (1914); e Elementos de Álgebra com numerosos exercícios, da editora FIC (s.d.). A análise das obras teve como foco a *matemática a ensinar*, de modo que não é possível caracterizar completamente a *matemática do ensino* de números negativos, visto que neste capítulo não nos debruçamos sobre outras fontes que permitissem a análise mais detalhada da *matemática para ensinar*.

INTRODUÇÃO

O ensino complementar surge em Santa Catarina com o advento dos Grupos Escolares no Brasil. Estas últimas eram instituições que objetivavam inovar o ensino primário no período republicano, sendo São Paulo o estado precursor na implantação do novo sistema de ensino que, posteriormente, se disseminou pelo âmbito brasileiro no início do século XX (TEIVE; DALLABRIDA, 2011). De acordo com Santos (2014), os Grupos Escolares ganharam destaque por terem sido considerados sinônimos de modernidade e por ofertarem o que era considerado ser o que melhor havia de ensino na época[8], de modo que São Paulo veio a se tornar uma referência para os outros estados brasileiros[9].

Vidal Ramos[10] aponta que, entre 1907 e 1910, eram poucos os estudantes que concluíam sua formação, o que evidenciaria um "analphabetismo pungente em que se anniquilavam as gerações de amanhã" (RAMOS, 1914, p. 136). O alto índice de analfabetos também estaria ligado à quantidade de imigrantes no estado catarinense, fazendo com que o número de cidadãos falantes da

8 O fato de que os membros da elite política/administrativa estadual, da época, terem passado por estas instituições reforça essa perspectiva.

9 Em Santa Catarina, é possível observar que o estado contratou, para além do paulista Orestes Guimarães, que iria reformar o ensino catarinense, normalistas formados em São Paulo para que estes atuassem como diretores de alguns dos primeiros grupos escolares do estado, instalados entre 1911 e 1913 (TEIVE, 2014).

10 "Vidal Ramos [...] entrou na política em 1886 [...]. Tendo frequentado o respeitado Colégio Nossa Senhora da Conceição, em São Leopoldo, no Rio Grande do Sul, Vidal era melhor instruído que o irmão mais velho, o que lhe capacitava para ocupar cargos em níveis superiores do poder. De fato, ao longo de sua vida pública, além de deputado provincial [...], exerceu ainda os postos de superintendente municipal de Lages [...], deputado estadual [...], deputado federal [...], senador [...], vicegovernador em exercício de Santa Catarina (1902-1905) e governador do estado (1910- 1914)" (PRATES, 2021, p. 31).

língua portuguesa fosse ainda menor. Isso iria na contramão de um país que buscava estabelecer no povo ideias republicanas, de civilidade e cultura brasileiras. Com isso,

> Durante o Governo Vidal Ramos (1910-1914), realizou-se uma reestruturação significativa na instrução pública do Estado de Santa Catarina, chefiada pelo professor Orestes de Oliveira Guimarães[11]. Ela reformou a Escola Normal Catarinense, e as escolas isoladas, implantou as escolas reunidas, as complementares e os primeiros grupos escolares, além de redesenhar profundamente a Diretoria Geral da Instrução Pública. Devido à atuação incisiva do seu idealizador e executor, essa transformação na instrução pública é chamada [...] de "Reforma Orestes Guimarães" (TEIVE; DALLABRIDA, 2011, p. 15).

A reforma atribuída ao professor Orestes Guimarães teve início pela Escola Normal (TEIVE; DALLABRIDA, 2011), já que esta era a única a formar professores(as) no estado, o que levaria à mudança na instrução primária. Acreditava-se que "a reforma da instrução pública catarinense deveria ter como base o investimento na formação dos/as professores/as primários sob um novo expediente: o método de ensino intuitivo, considerado o símbolo da modernidade pedagógica" (TEIVE, 2008, p. 73). Assim, a reestruturação do ensino deveria partir do movimento de "formar professores modernos e patrióticos", o que acarretaria na melhoria na educação primária do estado (TEIVE; DALLABRIDA, 2011, p. 15).

As reformas pretendidas pelo governo de Vidal Ramos têm início com a lei n.º 846, de 11 de outubro de 1910, que reforma o ensino público no estado. Nela é descrito que o ensino ocorreria nos estabelecimentos: Escolas ambulantes; Escolas isoladas; Grupos escolares; Escola Normal. Como é possível observar, não há referência às escolas Escolas Complementares, o que

11 "Paulista de Taubaté, Orestes Guimarães nasceu em 27 de fevereiro de 1871. Ingressou na Escola Normal de São Paulo em 1887, aos dezesseis anos, concluindo-a no ano de 1889; fez parte, portanto, da primeira geração de normalistas republicanos, a qual, ao longo da Primeira República, alcançou grande prestígio e autoridade intelectual" (TEIVE, 2008, p. 75). Em São Paulo, Orestes Guimarães foi professor e diretor de Grupos Escolares em regiões povoadas por imigrantes italianos. De acordo com Teive e Dallabrida (2011), o professor também recebeu grande reconhecimento por sua atuação em Joinville, cidade catarinense, entre 1906 e 1909. Em seguida foi convidado para atuar na reforma do ensino público catarinense na segunda década do século XX.

pode ter ocorrido por estas terem se estabelecido como instituições anexas aos Grupos Escolares. Em 1911 são criadas as Escolas Complementares em Santa Catarina através do decreto n.º 604, de 11 de julho de 1911. Com base no decreto (SANTA CATARINA, 1911a), bem como em autores como Ramos (1914), Limas (2016) e Limas e Costa (2016), a perspectiva catarinense em adotar o ensino complementar estaria atrelada a alguns fatores: formação de professores para que se cumprisse a reforma na instrução pública decretada pela lei n.º 846, de 11 de outubro de 1910; diminuir as dificuldades na transição do estudante do Grupo Escolar para a Escola Normal, desenvolvendo um ensino intermediário que preencheria uma lacuna no ensino; ofertar uma formação de professores descentralizada, para que estes atuassem no interior do estado[12]. Nesse sentido o decreto n.º 604, de 11 de julho de 1911, que aprova o regulamento do ensino complementar, estabelece em seu primeiro artigo que "As escolas complementares são estabelecimentos destinados a facilitar a habilitação de candidatos ao professorado e, bem assim, a desenvolver o ensino dos alunos que tenham terminado o curso dos grupos escolares" (SANTA CATARINA, 1911a, p. 5).

O Regulamento das Escolas Complementares de Santa Catarina (SANTA CATARINA, 1911a) indica que o ensino destas instituições ocorreria em três anos, sendo que Aritmética estaria presente nos três anos, Álgebra no 2º ano e Geometria Plana no 3º ano. Em complemento a isso, o "Parecer sobre a adoção de obras didáticas" de Orestes Guimarães (1911) aponta que a obra que seria utilizada no ensino complementar de Aritmética e Álgebra seriam "Arithmetica – Trajano (curso superior)" e "Algebra – Trajano", respectivamente.

No que se refere aos programas de ensino que são elaborados a partir da reforma catarinense, o Programa das Escolas Complementares (SANTA CATARINA, 1918) é aprovado em 1912. O programa de Aritmética não evidencia a abordagem de números negativos e no livro de Aritmética, que aparenta ser a "Arithmetica Progressiva – curso superior" de Trajano (1935), podemos observar que o autor define a subtração de números como sendo "Diminuir ou subtrahir é tirar um numero menor de um maior" (TRAJANO,

12 A formação descentralizada também iria a favor de questões econômicas, uma vez que as famílias de regiões afastadas da capital catarinense teriam dificuldade em enviar e manter seus filhos durante o curso normal.

1935, p. 23); não faz menção à comparação envolvendo números negativos na discussão sobre desigualdades (TRAJANO, 1935, p. 45); define números negativos como "numeros que se subtrahem" (TRAJANO, 1935, p. 46) e que no uso desses termos para o cálculo de expressões numéricas todas as soluções são positivas. Isso fica explicitado na fala do autor:

> Em algebra o numerador é ± 1, porque o subtrahendo póde ser menor ou maior do que o minuendo, e neste caso, a differença póde ser positiva ou negativa: em Arithmetica, porém, na differença entre dois numeros considera-se sempre o numero menor como subtrahendo, o por isso o resultado é positivo[13] (TRAJANO, 1935, p. 99).

Esses fatos, como poderia ser esperado das perspectivas da época, nos levam a estabelecer que o ensino dos números negativos, seu uso e compreensão não se daria na Aritmética, mas sim na Álgebra, de modo que nossa análise se limita a esta última.

Assim, o parecer de Orestes Guimarães (1911) indica ainda para a Álgebra outros livros que constituiriam uma biblioteca para os inspetores escolares em Santa Catarina: Álgebra de Clairaut; Álgebra de Trajano; Álgebra de Cunha; Álgebra, de Avila; para exercícios: Ritt ou FIC. Vale ressaltar que essas obras são igualmente apresentadas em São Paulo, em 1904, por uma comissão que buscava revisar as obras utilizadas no ensino complementar daquele estado (BASEI, 2020). Isso, mais uma vez, reforça a relevância do estado paulistano para a reforma catarinense, ou seja, há indícios de uma apropriação das perspectivas de São Paulo por Santa Catarina.

Com base no Programa das Escolas Complementares (SANTA CATARINA, 1918, p. 11), trazemos no quadro a seguir a estrutura do ensino de Álgebra e fazemos um paralelo com o realizado na Escola Normal nesse período, que foi publicado em 1911.

13 É somente no cálculo do logaritmo de frações que a obra apresenta resultados negativos, para os quais o autor indica que "devem ser considerados como menos do que zero" (TRAJANO, 1935, p. 239).

Quadro 1 – A Álgebra do ensino introduzida pelas propostas de Orestes Guimarães.

Álgebra do 2º ano da Escola Complementar – 1912	Álgebra do 2º ano da Escola Normal – 1911
1º Signaes de quantidade, operações e relações. Expressões algebricas. 2º Termos semelhantes e suas reducções. Monomio, binomio e polynomio. Gráos. 3º Polynomios ordenados completos e incompletos. 4º Emprego dos signaes algebricos como meio de simplificação e das letras como meio de generalização. 5º Estudo das quatro operações. 6º Recordação. Equações simultaneas. Methodos de eliminação. Problemas variados.	1 – Signaes de quantidade, operação e relação. Expressões algebricas. 2 – Termos semelhantes e sua reducção. 3 – Monomios, binômios e polynomios. Gráo. Polynomios ordenados completos e incompletos. 4 – Emprego dos signaes algebricos como meio de simplificação e das letras como meio de generalização. 5 – Estudo elementar das quatro operações. 6 – Equações simultâneas. Methodos de eliminação. 7 – Problemas.

Fonte: Elaborado pelo autor a partir de Santa Catarina (1911b; 1918).

É possível observar que os programas se diferenciam apenas por detalhes de escrita, ou na numeração dos itens, sendo os seus conteúdos exatamente iguais. Isso se dava, provavelmente, pelo fato de que o egresso da Escola Complementar podia ingressar no 3º ano da Escola Normal, de modo que era necessário haver uma equivalência na aprendizagem da Álgebra. Ademais, devemos destacar que nesta proposta inicial, a Álgebra da Escola Complementar perpassaria, dentre os conteúdos algébricos, equações e sistemas lineares, sem haver menção aos números negativos como ocorre em São Paulo. De acordo com Basei (2020), o ensino de Álgebra na Escola Complementar paulista em 1896 seguia o programa:

> Noções Gerais. Redução dos termos semelhantes. Adição e subtração algébrica. Multiplicação algébrica e leis essenciais. Divisão algébrica e leis essenciais. Frações. Redução ao mesmo denominador. Máximo divisor comum e operações sobre frações. Equações-Equações do 1.º grau a uma incógnita. Problemas. **Solução negativa. Teoria das quantidades negativas.** Problema dos Correios**.** Problemas indeterminados. Quadrados e raiz quadrada das quantidades algébricas. Equações do 2.º grau a uma incógnita. Equação biquadradas (BASEI, 2020, p. 117, grifos nossos).

Ainda segundo Basei (2020), haveria indícios de que o programa não teria passado por modificações até 1911. Alguns anos depois, a lei n.º 1.579, de dezembro de 1917, após a extinção das Escolas Complementares de São Paulo, constitui cursos complementares que seriam anexos às Escolas Normais. Estes tiveram duração de dois anos e foram voltados para a complementação do curso primário, sendo que, no ano seguinte, o decreto n.º 2.944, de 8 de agosto de 1918, aponta as mesmas perspectivas que a do ensino complementar e que o programa do ensino de Álgebra haveria ainda a abordagem de números negativos[14].

Desse modo, mesmo que os números negativos não estivessem explicitados no programa de Santa Catarina, sua presença nos moldes paulistas, bem como nas obras indicadas para a instituição, reforça que possivelmente estes fizeram parte do ensino ofertado pela Escola Complementar catarinense[15]. Uma forma de realçar tal perspectiva é pela análise dos livros vinculados ao ensino complementar do estado. Nesse sentido, o programa da instituição (SANTA CATARINA, 1918) mantém a prescrição que Guimarães (1911) havia feito, de modo que a obra de Trajano (1905) era apontada para a instituição. Para além disso, podemos supor ainda que as obras indicadas para a constituição de uma biblioteca dos inspetores do ensino também tenham relevância nessa análise, uma vez que os reformadores[16] e os inspetores ministravam aulas-modelo pelo estado e

> [...] a Inspetoria passou a normatizar cada detalhe do cotidiano das escolas públicas catarinenses, por meio de uma série de documentos, regulamentos, pareceres e programas, os quais deveriam ser seguidos à risca. A partir de então, a instituição escolar passou a ser fortemente mediatizada pelas regras e normas propostas pela Inspetoria/Inspetor, as quais deveriam assegurar a interiorização/exteriorização pelos/as professores/as do conteúdo da reforma. O próprio reformador/inspetor gostava de inspecionar as escolas[...], feitas de surpresa (TEIVE, 2008, p. 102).

14 O programa cita, no segundo ponto, o ensino de "termo positivo, termo negativo" (SÃO PAULO, 1918, p. 7).

15 Para além disso, o programa de 1911 da Escola Normal também não explicita a presença de números negativos, mas o programa de 1928 da instituição indica as "quantidades negativas" no ensino de Álgebra. Isso seria outro indício de que a Escola Normal e a Escola Complementar abordavam os números negativos na Álgebra.

16 Aqui nos referimos, principalmente, a Orestes Guimarães e sua mulher Cacilda Guimarães.

Quadro 2 – Livros voltados ao ensino de Álgebra que foram analisados.

Autor	Título	Ano da publicação	Indicação, na obra, do nível de ensino
Alexis Claude Clairaut	Éléments D'Algèbre (Elementos de Álgebra)	1801	Não há indicação
Antonio Bandeira Trajano	Algebra Elementar	1905	Apropriado para o ensino primário
Augusto José da Cunha	Elementos de Algebra	1914	Redigido conforme o programa dos Lyceus
FIC	Elementos de Algebra com numerosos exercicios	s.d.	Para a instrução secundária
Georges Ritt	Problèmes D'Algèbre et exercices calcul algébrique (Problemas de Álgebra e exercícios de cálculo algébrico)	1872	Para a instrução superior

Fonte: Elaborado pelos autores.

Dos livros indicados para o ensino complementar de Santa Catarina, os únicos que não se aprofundam na abordagem de números negativos e das desigualdades são os livros de Alexis Claude Clairaut e de Georges Ritt. Desse modo, apenas os livros de Trajano, Cunha e da editora FIC foram analisados nesse capítulo.

Por mais que hoje possa parecer comum, a abordagem dos números negativos nem sempre foi uma realidade do ensino primário. O ensino de Aritmética e Geometria, que era limitado, em geral, à formação primária no final do século XIX, não perpassava os números negativos. Esses números, inclusive, eram considerados como sinônimos de impossibilidade na resolução de problemas e operações na Aritmética. Com o advento do ensino de Álgebra na Escola Complementar, surge a oportunidade para que o ensino permeasse tais números.

Nesse sentido, Peacock (1842) advoga a favor de que a Álgebra poderia ultrapassar as barreiras impostas pela Aritmética. Desse modo, o autor considera a existência de duas Álgebras, uma "aritmetizada" e outra simbólica. A primeira estaria limitada pelas barreiras da Aritmética, já a segunda as supera, assumindo assim um viés mais generalizado e simbólico[17]. Logo, mesmo que a Álgebra da Escola Complementar catarinense seja um produto do ambiente

17 O autor deixa a entender que essa segunda Álgebra se aproxima mais do campo científico da Matemática.

escolar e, com isso, não se caracterize como uma Álgebra simbólica, o ensino dos números negativos representaria a superação dos limites da Aritmética.

Aspectos teórico-metodológicos das análises

As análises desenvolvidas visaram à compressão de elementos de uma *matemática do ensino* dos números negativos, na Escola Complementar catarinense, a partir da *matemática a ensinar* atrelada à abordagem desses números nos livros didáticos. Acerca disso, é importante destacar que os saberes vinculados à atuação e formação dos professores de Matemática, sob um viés sócio-histórico baseado em Chartier (1990, 1991), são tomados sob a perspectiva de Hofstetter e Schneuwly (2017), que os categorizam como *saberes a ensinar* e *saberes para ensinar*, respectivamente.

O viés teórico de Hofstetter e Schneuwly (2017) dita que os *saberes a ensinar* podem ser entendidos como os objetos da atuação docente em uma dada época e local, enquanto os *saberes para ensinar* como as ferramentas do professor que seriam utilizadas em sua atuação no ensino. Os autores destacam ainda que a análise na busca da compreensão desses saberes perpassa os diferentes meios de comunicação e disseminação, uma vez que tais saberes seriam objetivados, ou seja, seriam despersonalizados, de modo que não carregariam as subjetividades das pessoas ou meios em que foram elaborados.

É a partir disso que Bertini, Morais e Valente (2017) conceituam uma *matemática a ensinar* e uma *matemática para ensinar*, sendo elas voltadas para o ensino e formação do professor, respectivamente. De acordo com Valente (2017, p. 3), a *matemática a ensinar* reúne "uma gama de conteúdos que devem ser aprendidos por aqueles que estão em processo de formação. E, neste caso, a depender do nível de ensino, [...] têm caráter de um saber de cultura geral", enquanto que a *matemática para ensinar* "correspondente a um saber específico, um saber do profissional da docência, uma ferramenta do ofício de ser professor".

Chervel (1990) permite compreender a escola e a cultura escolar como produtores de saberes que circulam em seu meio. Assim, de acordo com Morais, Bertini e Valente (2021, p. 9), "a escola tem papel fundamental na criação de saberes que ela mesma fabrica ao longo do tempo" e disso se tem que "há uma matemática elaborada historicamente pelo meio escolar que serve às diferentes finalidades postas para o ensino nas diversas épocas em que se exercem as práticas pedagógicas". Nesse sentido, Morais, Bertini e Valente (2021) apontam que a articulação da *matemática a ensinar* com a *matemática para ensinar*, que são resultados da cultura escolar de um dado local e período, constituem uma matemática produzida pela escola, denominada *matemática do ensino*, que se interessa

> [...] prioritariamente por questões epistemológicas. Analisa processos e dinâmicas de constituições dos saberes escolares, da matemática presente na escola, da matemática do ensino. Tal análise leve em consideração os aspectos envolvidos na formação de professores e no ensino ministrado numa dada época (MORAIS; BERTINI; VALENTE, 2021, p. 17).

Desse modo, a caracterização de uma *matemática do ensino*, segundo Valente e Bertini (2022) e Valente (2022), perpassa a análise da articulação da *matemática a* e *para ensinar,* de em um dado local e período. Neste capítulo não nos debruçamos sobre a *matemática a ensinar* dos professores que atuaram(iam) na Escola Complementar catarinense, desse modo nos limitamos, a partir das discussões realizadas, à busca por elementos constituintes da *matemática do ensino* dos números negativos nessa instituição.

Com isso, o texto foi estruturado da seguinte forma: discutimos inicialmente as duas concepções existentes, nesse período, sobre os números negativos; em seguida analisamos os livros didáticos vinculados à Álgebra no ensino complementar catarinense, em busca de elementos de uma *matemática do ensino* desses números; por fim, trazemos as considerações finais que podem ser elaboradas a partir das análises.

Os números negativos no final do século XIX e início do século XX

Antes de adentrarmos a discussão sobre a abordagem adotada pelos autores dos livros didáticos para os números negativos, em busca de elementos que constituam uma *matemática do* ensino, é preciso esclarecer que algumas fontes apontam que a forma de entender e utilizar os números negativos, nesse período, não estavam estabelecidas. Para isso, embasamos essa discussão em um livro de Benjamin Constant (MAGALHÃES, 1939) e artigos de jornais publicados entre 1880 e 1931, em diversos estados.

Quadro 3: Artigos encontrados sobre as concepções de quantidade/número negativo[18]

Jornal/Revista	Título do artigo/sessão	Autor	Ano
União Academica (RJ)	Considerações sobre a theoria das quantidades negativas	Augusto Candido Ferreira Leal	1880
Revista Pedagogica (RJ)	Theoria das quantidades imaginarias	Ernesto Luiz D'Oliveira	1896
A Genesis (RJ)	Theoria das quantidades negativas	Raul Guedes	1897
A Reacção (SP)	Uma questão mathematica	José Augusto Cesar	1897
Os Annaes (RJ)	Nova theoria das quantidades negativas[19]	Tertuliano Barreto	1904
A Manhã (RJ)	Como? Por que? Quando?		1926
Revista de Ensino (AL)	Primeiras Lições de Arithmetica (continuação)[20]	Charles Laisant	1927
O Estado (SC)	Considerações em torno dos numeros negativos	Arnaldo Gomes Jardim	1931

Fonte: Elaborados pelos autores.

De modo geral, há duas concepções que atribuem *status* e propriedades distintas aos números negativos. Na primeira concepção, referenciada por diversos autores como a "teoria antiga", os números negativos eram compreendidos a partir de duas perspectivas: os números negativos são menores do que zero; quanto mais distante um número negativo estiver do zero, menor ele será[21]. Outra, sob um viés "modernizador", os números negativos, assim como os outros números, deveriam estar atrelados ao real e, portanto, só poderiam ser considerados como grandezas maiores do que zero, uma vez que não seria possível conceber uma grandeza menor do que nada (zero). Sobre as duas concepções, Barreto (1904, p. 13) diz que "A primeira proposição dá aos numeros

18 Os artigos foram encontrados a partir de pesquisas, utilizando "número negativo" e "quantidade negativa", na Hemeroteca Digital. Disponível em: http://bndigital.bn.gov.br/hemeroteca-digital/. Acesso em: 31 ago. 2022.

19 A teoria do autor diverge de outras duas proeminentes na época e que são foco deste estudo. Como não observamos repercussão das propostas de Tertuliano Barreto, buscamos trazer apenas suas contribuições sobre as outras teorias, de modo que trouxemos argumentos de três dos nove artigos encontrados do autor sobre o tema.

20 De acordo com Costa (2016), esse artigo é a reprodução de um livro de Laisant, que teria sido "editado em Lisboa, Portugal, por Guimarães e Cia Editores, em sua 2ª edição no ano de 1919" e foi publicado "em cinco edições sucessivas da Revista de Ensino do estado de Alagoas".

21 Essa perspectiva é seguida ainda hoje.

negativos um caracter de idealidade, ao passo que a segunda lhes dá uma feição puramente real" e de que estes números, em relação aos positivos, apenas "se oppõe em sentido" (LEAL, 1880a, p. 4).

No período entre o século XIX e início do século XX à teoria antiga sobre os números negativos seria alvo de repúdio, pelos autores "modernizadores", por suas prerrogativas e pelo fato de que elas levavam à possibilidade de subtrair um valor maior de outro menor. A nova concepção, que é reforçada pela disseminação da obra de Benjamin Constant (MAGALHÃES, 1939) no solo brasileiro, enxergava o zero como ausência de valor e, sob esse viés, não seria possível existir nada "abaixo" disso ou lhe "tirar" algo.

Nesse sentido, Laisant (1927, p. 57) diz que "Quando estamos a somar numeros, nada impede que continuemos a operação indefinidamente; nada nos obriga a parar em dada altura", fazendo com que a adição, de quantidades positivas, fosse sempre possível. Contudo, o mesmo não ocorreria na subtração, uma vez que, "por exemplo, um lote de 7 tentos, e quizermos tirar d'elle 10, é, como já notámos, manifestamente impossível" (LAISANT, 1927, p. 57). Este foi outro argumento utilizado para refutar as hipóteses da teoria antiga:

> Concebe-se facilmente que de uma grandeza qualquer é possivel subtrahir ou supprimir successivamente cada uma de suas partes até que a grandeza desappareça ou se aniquile [...]; mas que de uma grandeza se possa subtrahir outra maior, ou que ella continue á decrescer depois de aniquilar-se é realmente inconcebível (MAGALHÃES, 1939, p. 17).

É por assumir não haver uma barreira que impeça essa subtração que a teoria antiga se sustenta. Para os autores, a teoria antiga usaria da subtração $a - b$ para indicar que, quando $b > a$, "O resultado é negativo; ora é um principio evidente que em uma subtracção o resto é tanto menor quanto maior é o subtrahendo, logo toda quantidade negativa é menor do que zero" (CESAR, 1897, p. 3). Entretanto, os apoiadores da nova vertente reforçavam que isso seria uma contradição ao ser aplicado no mundo concreto, que em sua visão é de onde deveria partir a noção de qualquer quantidade. Como destaca Barreto (1904, p. 14), "O numero negativo não pode ser menor que zero porque é o representante abstracto de uma grandeza real, ou melhor representa como o positivo uma relação entre grandezas reaes". Tais perspectivas denotam algo que é também reforçado em outras falas: que o vínculo da nova teoria com o concreto/real fazia com que seus adeptos tomassem como base sua própria concepção para apontar que os pressupostos da teoria antiga seriam absurdos, ou seja, não eram mostradas contradições nas hipóteses e consequências ao assumir os números negativos como menores do que zero, mas pelo fato que de que isso iria contra a necessidade destes números se relacionarem com o real. Isso ganha destaque em Leal (1880b, p. 4), que diz que "A este respeito nós declaramos não aceitar taes desigualdades [$a > 0$ e $a < 0$] como a expressão da verdade, como uma realidade", sem se apresentasse justificativa dessas suposições não serem aceitas.

Ainda a respeito das subtrações $a - b$, para Leal (1880b, p. 4) só seria possível admitir "que de uma quantidade só se póde subtrahir a menor quantidade, no maximo, arithmeticamente fallando, suppondo a idéa de valor, de numero". Isso nos permite constatar que a nova concepção dos números negativos, que nesse período estariam atrelados ao ensino de Álgebra, seria limitada pelos princípios da Aritmética, fazendo com que resultados menores do que zero fossem considerados um absurdo.

Podendo ou não subtrair um termo maior de um menor, as duas concepções concordavam com o fato de que os números negativos eram essenciais para que ficasse estabelecida a possibilidade de contar certas grandezas em duas direções. Segundo Benjamin Constant (MAGALHÃES, 1939, p. 10), isso levaria à necessidade de representar os dois sentidos da contagem, os números negativos e positivos, de maneiras distintas, de modo que junto ao número era preciso utilizar algum outro elemento, como "á direita, á esquerda; antes, depois; acima, abaixo; [...]". Para isso os sinais de + e – seriam utilizados, de modo que

> A verdadeira interpretação que se tem de dar ás quantidades negativas fica perfeitamente esclarecida considerando uma questão concreta qualquer, em que uma quantidade possa ser considerada em sentidos oppostos, evidenciando-se a correlação intima entre a mudança de signal e a mudança de sentido (GUEDES, 1897, p. 2).

Os diversos autores da nova vertente concordavam que os sinais de + e – "indicam tão somente, opposição de sentidos entre as grandezas e nada mais"

(JARDIM, 1931, p. 3) e que “toda discussão das quantidades positivas e negativas que se desviar desta unica e **verdadeira significação** conduzirá por força, como tem acontecido, aos mais monstruosos absurdos” (MAGALHÃES, 1939, p. 15, grifos nossos). A perspectiva de que os números negativos e positivos se diferenciam apenas pelo sinal, que representaria nada mais que a oposição do sentido de contagem, leva ao fato de que “duas quantidades, quaesquer que sejam os respectivos signaes, serão ignaes quando tiverem o mesmo valor” (GUEDES, 1897, p. 3). Isso significa dizer que sob essa concepção os números +3 e –3 seriam iguais ou, como denota D’Oliveira (1896), que para um mesmo valor haveria três casos para a igualdade: +3 = +3 ; -3 = -3 ; +3 = -3. Assim, um número ser maior ou menor do que outro estaria embasado única e exclusivamente no valor absoluto deles, de modo que o sinal não iria interferir no processo. Isso leva a consequências como: +2 > –1, –5 < –12, –5 > +3 e que todos os números, sejam eles positivos ou negativos, seriam maiores que zero.

Como era de se esperar, os autores da teoria antiga também apresentavam argumentos em busca da invalidação dos pressupostos modernizadores. Em uma das frentes de batalha, usavam do fato de que uma simples operação realizada nos dois lados da igualdade mostraria o absurdo de tais concepções. Por exemplo, ao somar +2 aos dois lados de +3 = –3 e –5 > +3 seria obtido como resultado +5 = –1 e –3 > +5. Entretanto, de modo a ser constituída firmemente, D’Oliveira (1896) denota que a nova concepção partia do princípio de que realizar uma operação dos dois lados de uma (des)igualdade levaria em consideração outras propriedades e processos. O autor explicita que para adicionar um valor, nesse caso 3 unidades, nos dois lados da igualdade +5 = –5 deveria ser realizado da forma:

> +5 +3 = –5 –3 ou +8 = –8 resultado que confére com os obtidos precedentemente; porém os antigos punham: +5 +3 = –5 +3 ou +8 = –2 resultado evidentemente absurdo.
>
> Não observavam que ao primeiro membro tinham sommado tres, e ao segundo subtrahido 3, e ainda queriam que os resultados fossem iguaes (D’OLIVEIRA, 1896, p. 27).

Esse viés é também destacado por Benjamin Constant (MAGALHÃES, 1939) e, em conjunto com D’Oliveira (1896), supõe que o resultado absurdo dos "antigos" se dava pela maneira como eles realizavam a operação, sem considerar que suas hipóteses, como a de que +5 = –5, fossem erradas.

A relação da nova concepção com o real leva também a uma forte conexão com a ideia concreta de medição. Isso pode ser observado em diversos momentos, como é o caso da obra de Benjamin Constant (MAGALHÃES, 1939, p. 13, negrito nosso), que afirma: uma vez que seriam consideradas "positivas as **distâncias** contadas em um certo sentido, as distâncias contadas em sentido contrario serão negativas". Posicionamentos como esse, em que contar se confunde com medir uma distância, ressaltam que o número representado na reta era confundido com uma grandeza medida até a origem. Essa noção servia também de argumento para justificar que os números negativos e positivos seriam iguais, já que representariam a mesma distância. A citação a seguir reforça esse posicionamento:

> As quantidades negativas, em valor absoluto são maiores do que zéro. O signal menos indica que esses valores são tomados em sentido contrario. Exemplo: tomando o ponto 0 para origem e contando-se 2 metros para a direita, essa distancia é igual a +2 ms. Tomando essa distancia para o lado esquerdo represental-a-emos por menos 2 ms. Em valor absoluto a distancia é a mesma do ponto 0; diferem no sentido, o que se traduz nos sinais + e – (COMO? ..., 1926, p. 2).

Buscando evidenciar a contradição das proposições que embasam a teoria antiga, Benjamin Constant (MAGALHÃES, 1939, p. 30) afirma que, ao localizar os números positivos e negativos sobre uma reta numérica, ficaria "evidente que quanta mais afastado ou mais proximo da origem 0 estiver o ponto A, tanto maior ou tanto menor será o valor absoluto de x [valor da distância do ponto A até a origem]". O autor continua questionando:

> Como é pois que deste exemplo, [...] se póde tirar argumentos a favor [...] que toda a quantidade negativa é menor que zero e tanto menor quanto maior é o seu valor absoluto?! ... Como é que podemos combinar estas idéas de distancias positivas e negativas com taes propriedades das quantidades negativas?
>
> Pois não é evidente que, quanto mais o ponto A se afastar de 0 para a direita ou para a esquerda, maior é a **distância** que o separa deste ponto

> e maior é portanto o valor numerico de x, que representa essa **distância**? (MAGALHÃES, 1939, p. 30, grifos nossos).

Diferentemente do que se pensava, tal percepção não iria contra as concepções da teoria antiga, uma vez que a distância estaria representando o valor absoluto dos números negativos e, com isso, ela sempre seria maior ou igual a zero e continuaria a crescer na medida em que o número negativo se afastasse de zero. Isso mostra que nesse período, a nova teoria considerava que o número negativo era equivalente à distância existente entre o seu valor até o zero. Aparentemente, a associação de que número, grandeza, distância etc. seriam representantes de uma mesma entidade e a necessidade de atrelar os números ao concreto podem ter levado ao surgimento da necessidade de uma nova teoria. Isso reforça, mais uma vez, que os argumentos postos contra a teoria antiga partem dos pressupostos da nova teoria, o que seria, sob uma lógica demonstrativa matemática, errado.

Em Santa Catarina essa discussão também está presente não só pelo artigo de Jardim (1931), mas também por uma sequência de publicações feitas no jornal "O Estado" no ano de 1931. Elas foram elaboradas pelo professor Arnaldo Gomes Jardim e pelo engenheiro Balthazar de Souza, em uma troca de considerações e refutações elaboradas por eles a favor da teoria dos números negativos maiores do que zero e da teoria antiga, respectivamente.

O ensino de números negativos segundo os livros didáticos

Aqui, analisamos os livros indicados, direta ou indiretamente, para o ensino de Álgebra na Escola Complementar catarinense. Foram tomadas como base para a análise as perspectivas do referencial teórico-metodológico da *matemática do ensino*.

Ferreira (2022, p. 54) aponta que tal *matemática do ensino* seria o "resultado das interações entre as prescrições oficiais e a prática operada nas escolas. Trata-se de uma matemática produzida propriamente para a escola, uma matemática oriunda da cultura escolar" da época. Desse modo, de acordo com Morais, Bertini e Valente (2021), são relevantes para a análise de uma *matemática do ensino* dos números negativos os seguintes aspectos: *sequência, significado, graduação, exercícios* e *problemas*.

A *sequência* de uma *matemática do ensino* dos números negativos representa o espaço que o tema ocupa no ensino, algo que pode ser alterado a partir do viés científico, pedagógico ou social da época. Já o *significado* está atrelado ao sentido/interpretação que se dá aos números negativos na abordagem do conteúdo. A *graduação* deve ser compreendida como a marcha estabelecida para o ensino dos números negativos, ou seja, como era realizada a progressão da abordagem desses números. Por fim, os *exercícios* e *problemas* evidenciam as respostas esperadas a partir da abordagem do conteúdo, de modo que refletem as finalidades e objetivos do ensino.

O livro "Elementos de Álgebra" de Augusto José da Cunha (1914)

O primeiro momento em que é possível observar a presença dos números negativos na obra de Cunha (1914) se dá logo no início, na abordagem que o autor intitula "Noções Preliminares". Em meio à discussão, o autor apresenta o item intitulado "Quantidades negativas", no qual aborda o caso em que um valor do subtraendo fosse maior que o minuendo, para o que estipula que "E' evidente que n'este caso a subtracção não se póde effectuar" uma vez que "Arithmeticamente a operação é impossível". Já na Álgebra, segundo o autor, seria possível convencionar que, no exemplo 36 – 48, o valor 48 pode ser decomposto pela soma de 36 e 12 e, deste modo, na subtração as partes iguais se anulariam enquanto que a subtração de 12 permaneceria, ou seja, $36 - 48 = 36 - (36 + 12) = -12$.

> Estes numeros affectos do signal –, que provém de subtracção em que o numero subtractivo é maior que o aditivo, chamam-se negativos. Em contraposição os numeros que não são affectos de signal, supõem-se precedidos de signal +, e chamam-se positivos. [...]
>
> A convenção que acabamos de fazer é permittida, visto que não destroe nenhum dos principios estabelecidos; amplia, mas não contraria, a definição de subtracção dada na arithmetica (CUNHA, 1914, p. 12).

Com isso podemos observar que Cunha (1914) apresenta indícios de que a Álgebra permitiria superar barreiras que, até então, estavam impostas pela Aritmética, sem, contudo, desconstruir a estrutura da última. Esses aspectos evidenciam também elementos de uma *sequência*, *significado* e *graduação* do ensino dos números negativos. A *sequência* estaria atrelada ao fato de que o ensino dos números negativos deveria ser feito na Álgebra, uma vez que na Aritmética seriam sinônimos para a impossibilidade de um resultado. Isso também possibilita estabelecer que um *significado*, inicial, atribuído aos números negativos não seria mais o da "impossibilidade", mas sim o da "superação" das barreiras da Aritmética. Além disso, aspectos de uma *graduação* estariam ligados ao fato de que os estudantes deveriam compreender, primeiro, as operações com resultados positivos apenas (na Aritmética), somente depois seriam abordados os casos com resultados negativos (na Álgebra). Outro elemento que ganha destaque é a abordagem explícita de números negativos, não se limitando apenas aos resultados negativos envolvendo termos algébricos, por exemplo $5x - 7x = -2x$.

Adentrando a abordagem do conteúdo de Álgebra, podemos notar nas operações algébricas que, mais uma vez, o autor busca deixar clara a relação da Álgebra com a Aritmética. Cunha (1914) indica que no âmbito dos números positivos as operações algébricas são compreendidas da mesma forma que as aritméticas e que isso só deixaria de ocorrer com a presença de quantidades negativas, uma vez que as operações na Aritmética não são definidas para esses casos. Assim, o autor relaciona as operações com o conhecimento Aritmético já adquirido e, no caso da soma e subtração, apresenta que

> Addição algebrica é a operação pela qual se acha a somma algebrica de duas ou mais quantidades.
>
> Somma algebrica de duas quantidades que teem o mesmo signal, é a somma arithmetica dos seus valores absolutos, dando-se ao resultado o signal comum; somma algebrica de duas quantidades que teem signaes contrarios, é a differença arithmetica dos seus valores absolutos, dando-se ao resultado o signal do maior. [...]
>
> Subtração algebrica é a operação pela qual, sendo dadas duas quantidades, se acha uma terceria, que sommada algebricamente com a segunda reproduz a primeira (CUNHA, 1914, p. 18).

Mais uma vez o ensino dos números negativos seria posterior à Aritmética e teria início pelas operações, ressaltando, mais uma vez, características da *sequência* e *graduação* desse ensino, respectivamente. No caso da subtração, como podemos notar na citação anterior, as operações passam a ser resolvidas a partir da ideia de operações inversas. Isso pode ser melhor compreendido observando o exemplo: para resolver "(+2) – (+4)" temos de descobrir o valor que somado a +4 determine o resultado +2, de modo que tal valor deve ser –2 uma vez que (+4) + (–2) = +2. Assim, a operação que era uma subtração passa a ser resolvida a partir da ideia de soma que muitas vezes obedece aos limites da Aritmética. Não seria o caso de "(–4) – (+2)", pois o número que somado à +2 que gera –4 deve ser –6 e com isso temos (+2) + (–6) = –4, que não poderia ser realizada na Aritmética.

A partir das operações que definiu como algébricas, Cunha (1914) determina como se deve operar com termos algébricos, o que ocasiona na definição de regras de sinais para a soma, depois para a subtração e, por fim, para multiplicação/divisão.

Quadro 4 – Regras de sinais definidas por Cunha (1914).

Soma	Subtração	Multiplicação/Divisão
$(+a) + (+b) = a + b$	$(+a) - (+b) = a - b$	+ multiplicado/dividido por + dá +
$(+a) + (-b) = a - b$	$(+a) - (-b) = a + b$	– multiplicado/dividido por – dá +
$(-a) + (+b) = -a + b$	$(-a) - (+b) = -a - b$	+ multiplicado/dividido por – dá –
$(-a) + (-b) = -a - b$	$(-a) - (-b) = -a + b$	– multiplicado/dividido por + dá –

Fonte: Elaborado pelos autores a partir de Cunha (1914).

Os números negativos figuram também nas discussões acerca das equações do 1º grau, seja na solução de exemplos ou quando o autor apresenta um capítulo sobre as "soluções de problemas do primeiro grao" (CUNHA, 1914, p. 136). Entre os tópicos abordados, observamos que o autor retoma os números negativos na forma de solução de uma equação. Inicia sua discussão pela apresentação e demonstração de um teorema que permite compreender que se uma equação possui solução negativa, então pode-se criar uma segunda equação, em que as constantes da incógnita têm sinal oposto da equação original, que teria como solução o mesmo valor da equação original (em módulo), mas com o sinal positivo. Algebricamente significa dizer que se $ax = b$ possui solução negativa, então a equação $-ax = b$ tem solução positiva e com valor igual ao módulo da solução inicial. Esse resultado poderia ser aplicado na resolução de problemas que perpassassem equações do 1º grau e que não admitissem solução negativa, de modo que equação e problema seriam reelaborados para se obter uma solução positiva. Cunha (1914) apresenta um exemplo:

> Duas torneiras lançam agua n'um tanque, que tem na parte inferior um tubo de esgoto. A primeira torneira é capaz de encher o tanque em 11 horas, a segunda em 9, e o tubo dá vasão a 19 metros cubicos de liquido por hora. Sabe-se que estando abertas simultaneamente as torneiras e o tubo, o tanque enche-se em 4 horas. Pergunta-se qual é a capacidade do tanque? (CUNHA, 1914, p. 139).

Ao estipular uma equação para o problema e resolvê-la, o autor encontra a solução de –396 metros cúbicos, o que seria impossível, visto que "A natureza do problema exige uma solução em números positivos" (CUNHA, 1914, p. 140). Contudo, o autor discute que a aplicação do teorema para que o problema tivesse solução possível leva a uma mudança na equação e, consequentemente, o próprio problema deveria ser reformulado, de modo que a nova equação refletisse os dados apresentados. Com isso, em vez de um tubo que dá vazão a 19 metros cúbicos, Cunha (1914) indica que o tubo deveria fornecer essa quantidade de água, fazendo com que a solução do problema fosse 396 metros cúbicos. De modo geral, a solução negativa seria então um indicativo de que o problema seria impossível de ser solucionado e que a mudança na equação/enunciado poderia corrigir isso. Tais aspectos evidenciam característica da obra acerca do ensino de números negativos a partir de *exercícios* e *problemas*. Na resolução das equações em *exercícios*, a presença de solução negativa não é questionada. Contudo, em *problemas* essas soluções podem representar um absurdo, de modo que só fosse possível apresentar uma solução "real" se o problema fosse reformulado.

No entanto, o autor destaca que há exceções e, com isso, traz dois exemplos em que as incógnitas assumem a perspectiva de distância física ou período de tempo, no que determina princípios a partir desses problemas. A figura a seguir traz um dos problemas.

Figura 1 – Problema com solução negativa e sua interpretação positiva

166. Problema. *Um pae tem 42 annos em 1850, seu filho 22. Em que epocha a idade do pae é dupla da do filho?*

Representa x o numero de annos decorridos deste 1850 até á epocha pedida.

x annos depois de 1850 a idade do pae é $42 + x$, e a do filho $22 + x$; conforme o enunciado será

$$42 + x = 2\ (22 + x)$$

d'onde se deduz

$$x = -2.$$

Para interpretar esta solução negativa notemos que, quando pozemos o problema em equação, suppozemos que a epocha pedida era posterior a 1850, e nada nos auctorisava a fazer esta hypothese. Portanto o resultado negativo póde provir, ou de ser impossivel o problema, ou de ser falsa a hypothese. Para esclarecer este ponto, recorramos á equação do problema, e mudemos o signal dos termos em que figura a incognita. Temos assim a nova equação

$$42 - x = (22 - x) \qquad (10)$$

cuja raiz será (n.º 160) $\quad x = 2.$

Fonte: Elaborada a partir de Cunha (1914, p. 143).

Com isso a solução para o problema seria 2 anos, mas estes deveriam ser contados a partir de 1950, mas para o passado, de modo que a resposta seria 1948. De forma resumida, o autor aponta que em alguns casos o valor da incógnita pode ser contado em duas direções, como no tempo em que pode ser para futuro ou passado. Cunha (1914) também destaca que há outras variáveis de um problema que podem assumir valores negativos e não caracterizar impossibilidade, como é o caso das temperaturas e latitudes geográficas.

Assim, o autor apresenta, no que se refere às soluções negativas em problemas, que

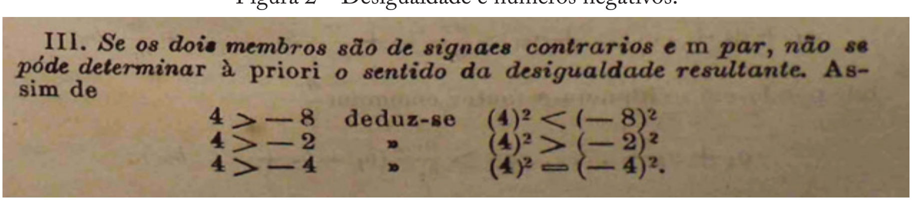
> 1.º quando as incógnitas representam grandezas susceptíveis de serem contadas em sentidos oppostos, os valores positivos correspondem a um sentido, os valores negativos ao sentido contrário; 2.º quando as incógnitas não representam grandezas susceptíveis de serem contadas em sentidos oppostos, a solução negativa indica impossibilidade no problema (CUNHA, 1914, p. 145).

Assim, caso a solução fosse um número negativo, assumir-se-ia como resposta o seu valor positivo e este seria contado no sentido contrário ao suposto no processo de resolução do problema. Aqui, a solução negativa do *problema* não necessariamente representa um erro no problema ou a impossibilidade de sua solução, ela estabelece um novo *significado*: a contagem em dois sentidos.

Cunha (1914) conclui que "pelas considerações expostas [...] se reconhecem bem as vantagens que se tiram de admitir na algebra as quantidades negativas", o que deixa clara a proposta do autor de uma Álgebra em que os números negativos são abordados e que sua presença na solução de problemas não seria, necessariamente, sinônimo de impossibilidade. Além disso, a perspectiva de contar em "sentidos oppostos" nos traz os primeiros indícios de que o autor distribui esses números em uma reta numérica, o que possivelmente estaria atrelado à noção de que os números negativos seriam menores do que zero.

Nesse sentido, Cunha (1914, p. 155) opta por uma discussão de desigualdades, em sua maior parte, algébricas. O autor não se atém a aspectos elementares como dizer se um número negativo é, ou não, menor do que zero. No entanto, em meio às discussões, é possível observar elementos que denotam a posição do autor acerca do tema. Por exemplo, ao abordar casos de desigualdade, o autor diz que "A reciproca é tambem evidente, porque sendo *a* positivo e *b* negativo, é $a > b$" (CUNHA, 1914, p. 155), ou seja, um valor positivo qualquer seria sempre maior que um valor negativo. Em um segundo momento, essa relação entre números positivos e negativos é explicitada quando o autor apresenta uma propriedade acerca do cálculo de potências em desigualdades:

Figura 2 – Desigualdade e números negativos.



III. *Se os dois membros são de signaes contrarios e in par, não se póde determinar* à priori *o sentido da desigualdade resultante.* Assim de

$$4 > -8 \quad \text{deduz-se} \quad (4)^2 < (-8)^2$$
$$4 > -2 \quad \text{»} \quad (4)^2 > (-2)^2$$
$$4 > -4 \quad \text{»} \quad (4)^2 = (-4)^2.$$

Fonte: Elaborada a partir de Cunha (1914, p. 159).

Com isso, uma vez que o autor enuncia também que ao somar ou subtrair, dos dois lados de uma desigualdade, um mesmo valor, ela se mantém, é possível dizer que o autor assume como perspectiva a noção de que os números negativos seriam menores do que zero, pois se $4 > -2$ então subtraindo 4 dos dois lados teríamos $4 - 4 > -2 - 4 \rightarrow 0 > -6$. Logo, para Cunha (1914), os números negativos não teriam de estar necessariamente ligados à realidade, a menos que eles fizessem parte da solução de um problema.

Quadro 5 – Aspectos sobre a *sequência*, *significado*, *graduação*, *exercícios* e *problemas* do ensino de números negativos.

Categorias	O que foi observado no livro de Cunha (1914)
Sequência	O ensino dos números negativos ocorre na Álgebra, após terem sido estudadas às operações com números na Aritmética (limitada a resultados positivos)
Significado	Superar a impossibilidade de resultados negativos, imposta pela Aritmética, para operações. Nos problemas relacionados com a realidade, pode estar atrelada a uma impossibilidade ou a possibilidade de se contar em dois sentidos. Por fim, a abordagem de desigualdades enaltece os números negativos menores do que zero e não necessariamente ligados à realidade
Graduação	Os números negativos são ensinados a partir da necessidade de superar os limites das/generalizar as operações aritméticas. Disso parte-se para a abordagem das operações com incógnita e para a regra de sinais. Posteriormente os números negativos também são abordados como forma de solução de equações e problemas. Somente depois que é abordada a comparação de números envolvendo os negativos
Exercícios e Problemas	A presença de soluções negativas é abordada, em alguns problemas, ainda como sinônimo de impossibilidade de um problema, de modo que para ter solução possível, o problema deveria ser reformulado. Em um segundo momento o autor denota que, para os casos em que a variável pode ser contada em dois sentidos, a solução negativa representaria o sentido oposto ao assumido como o sentido positivo, não mais representando, necessariamente, a impossibilidade de resolver o problema.

Fonte: elaborado pelos autores.

O livro "Elementos de Álgebra com numerosos exercícios" da editora FIC (s.d.)

Diferentemente de Cunha (1914), o livro da editora FIC (s.d.) não apresenta uma abordagem inicial dos números negativos. É apenas durante a abordagem da subtração algébrica, ou seja, subtração envolvendo números com incógnitas, é que podemos observar a presença dos números negativos. Em meio ao tema, é apresentado que a Álgebra teria

> [...] por fim generalisar, [de modo que] não se admitte que hajam operações que se possam effectuar em certos casos e não se possam fazer n'outros; e está-se de accordo em applicar as regras do calculo a todas as quantidades, quaesquer que sejam os valores attribuidos ás letras. [...] Por conseguinte, as operações algebricas tanto se fazem sobre os numeros negativos isolados ou fazendo parte d'um polynomio, como sobre numeros positivos. [...] O valor numérico d'um polynomio é a differença que existe entre a somma dos seus termos positivos e a dos seus termos negativos. Essa differença póde ser positiva, negativa, ou mesmo nulla (FIC, s.d., p. 9).

Com isso, a obra evidencia que o ensino dos números negativos também estaria atrelado à finalidade de generalização que se estabelece com a abordagem da Álgebra, trazendo para nossa análise um novo *significado* para a presença desses números. Assim, fica explícita a abordagem da editora FIC (s.d.), que se constitui em uma Álgebra que não se submete às limitações da Aritmética, visando à generalização dos processos desta última.

Logo em seguida, é apresentado que "Por convenção consideram-se os numeros negativos como sendo menores do que zero; esse numeros são tanto menores quanto o seu valor absoluto é maior" (FIC, s.d., p. 9). Fica evidente que a obra assume o posicionamento da "teoria antiga" dos números negativos, contudo, por não sabermos quando a obra foi publicada, é impossível dizer se isso se dá pela simples manifestação de uma visão geral do período (caso tenha sido publicado antes da teoria dos modernizadores) ou se é um posicionamento contra a teoria de que os números negativos seriam maiores do que zero. De qualquer forma, fica estabelecida também a compreensão de que os números negativos seriam menores do que zero. Como consequência disso, na abordagem do tema das desigualdades é evidenciado que os números positivos são maiores do que os números negativos quando se escreve que $5 > -8$ (FIC, s.d., p. 75).

Por mais que a obra não se debruce amplamente sobre os números negativos, esse não é o único momento em que estes se fazem presentes na discussão. De modo similar ao livro de Cunha (1914), há uma seção intitulada "Interpretação dos valores negativos achados na resolução d'um problema. – Varios casos de impossibilídade e de indeterminação", localizada na página 85 da obra. A discussão é iniciada dizendo que soluções negativas poderiam ser interpretadas a partir do princípio de Descartes: "Quando uma grandeza póde ser contada em dois sentidos oppostos, se concordarmos em considerar como positivas as grandezas contadas n'um sentido, será então preciso considerar como negativas as grandezas contadas no sentido contrario" (FIC, s.d., p. 86). Assim como na obra de Cunha (1914), as soluções negativas são atreladas à compreensão de poder contar em dois sentidos.

A abordagem segue com a aplicação do princípio em exemplos, nos quais a solução poderia ser negativa, e como estes casos deveriam ser interpretados.

Figura 3 – Problema envolvendo solução negativa.

155. Problema I. *Um pai tem 39 annos e seu filho 15 : em que epoca a idade do pai será tripla da do filho?*

Seja x o tempo procurado; depois de x annos a idade do pai será $39+x$, e a do filho, $15+x$.

Portanto :

$$39+x=3(15+x)$$
$$39+x=45+3x$$
$$-6=2x$$
$$x=-3 \text{ annos.}$$

Aqui a resposta negativa -3, indica que a condição pedida já estava realizada ha 3 annos; com effeito, n'essa epoca o pai tinha 36 annos e o filho 12.

O enunciado, modificado como segue, dá uma solução positiva.

Um pai tem 39 annos e o filho 15; ha quanto tempo a idade do primeiro era tripla da do segundo?

Tem-se $$39-x=3(15-x)$$

é a equação primitiva na qual se substituio x por $-x$ (nº 152).
Resolvendo-a, acha-se $x=3$ annos.

Fonte: Elaborada a partir de FIC (s.d., p. 87).

Além disso, também são discutidos problemas em que a solução negativa não poderia ser considerada como possível devido à situação apresentada. Esse é o caso do exemplo "Um tanque tem 3 torneiras; a primeira enche-o em 8 horas, a segunda em 12, mas a terceira despeja-o em 3 horas: abrem-se as 3 torneiras ao mesmo tempo, pergunta-se em quanto tempo estará cheio o tanque", em que a solução $x = -8$ horas "indica que o problema é impossivel"

(FIC, s.d., p. 89). Logo em seguida, o autor realiza o processo de correção do enunciado de modo a se obter a solução possível.

Podemos notar que abordagem adotada é muito semelhante à de Cunha (1914), principalmente quando observamos que mesmo os exemplos são similares, inclusive o utilizado para falar em solução impossível. Mesmo que Cunha (1914) não tenha enunciado o princípio de Descartes, as duas obras assumem que em alguns casos as soluções negativas indicam a impossibilidade de resolver um problema e em outros essa solução apenas precisa ser contada no sentido oposto. De modo semelhante a Cunha (1914), FIC (s.d.) apresenta exemplos em que a incógnita está atrelada à distância física ou intervalo de tempo, de modo que as soluções negativas nestes casos estariam ligadas à contagem em dois sentidos.

Quadro 6 – Aspectos sobre a *sequência*, *significado*, *graduação*, *exercícios* e *problemas* do ensino de números negativos.

Categorias	O que foi observado no livro da editora FIC (s.d.)
Sequência	Não é explicitada na obra. No entanto, pode-se afirmar que faziam parte da Álgebra e que, com isso, ocorreria depois do ensino das operações com soluções positivas na Aritmética
Significado	Os números negativos possibilitam a generalização almejada pela Álgebra, superando os limites impostos pela Aritmética, sendo que tais números são menores do que zero
Graduação	O ensino dos números negativos tem início com a abordagem das operações algébricas, sem evidenciar os casos envolvendo apenas números negativos. As regras de sinais são evidenciadas e somente depois de discutir as soluções negativas em equações que pode-se observar a presença de operações e problemas com soluções negativas
Exercícios e Problemas	A presença de soluções com números negativos, para operações e problemas, só ocorre depois de ser discutido o princípio de Descartes. Quando a variável de um problema puder ser contada em duas direções, a aplicação do princípio indicaria um sentido de contagem. Contudo, as soluções negativas ainda poderiam ser encaradas como sinônimo de impossibilidade de alguns problemas, de modo que para ter solução possível, o problema deveria ser reformulado

Fonte: Elaborado pelos autores.

O livro "Álgebra Elementar" de Antonio Trajano (1905)

Trajano (1905) inicia seu livro apresentando noções preliminares a respeito do Álgebra. Em meio a isso, aponta que quantidades algébricas seriam aquelas em que uma quantidade é representada simbolicamente. Em seguida o autor determina que essas quantidades são separadas em duas classes, determinadas pelos sinais de + e – :

> O signal + chama-se tambem signal positivo, e o signal – chama-se signal negativo. Toda a quantidade algebrica deve ser precedida por um destes signaes; a quantidade que leva o signal +, chama-se quantidade positiva, e a que leva o signal –, chama-se quantidade negativa. Quando o primeiro termo de uma expressão não tiver signal algum, subentende-se o signal +. Assim, $a - b$ quer dizer $+a - b$ (TRAJANO, 1905, p. 6).

Assim como observamos no livro da editora FIC (s.d.), Trajano (1905) não apresenta uma discussão dedicada exclusivamente para os números negativos (quando não há uma incógnita associada ao termo negativo). Com isso, o autor retorna às quantidades algébricas negativas quando aborda as operações envolvendo quantidades algébricas. Ele lembra que na Aritmética as quantidades em uma adição são sempre positivas, bem como o resultado da operação. Contudo, na Álgebra a presença das quantidades algébricas negativas é explicitada por Trajano (1905) já na soma. Isso ocorre no caso da soma com termos de mesmo sinal, em que o autor considera que o resultado seria negativo caso todos os termos fossem negativos, ou ainda, de modo semelhante à FIC (s.d.), o caso em que os sinais fossem distintos seria dado por:

> [...] addicionam-se os coefficientes dos termos positivos; depois addicionam-se os coefficientes dos termos negativos; acha-se a differença das duas sommas, e, se a somma maior for positiva, prefixa-se á differença o signal +, e, se a somma maior for negativa, prefixa-se á differença o signa –, e junta-se-lhe a parte litteral (TRAJANO, 1905, p. 16).

Duas coisas podem ser evidenciadas dessa abordagem: o autor dá indícios de que a sua Álgebra iria além das limitações da Aritmética; os resultados negativos parecem figurar a abordagem adotada pelo autor. Além disso, como ressalta com Basei (2020, p. 149), o autor também estaria dizendo que somar e subtrair, na Álgebra, não teriam necessariamente o sentido de aumentar e diminuir, respectivamente. Trajano (1905) deixa claro a presença de soluções algébricas negativas em sua obra através de exemplos como:

Figura 4 –Problema envolvendo adição algébrica.

Problema. Sommar as seguintes quantidades: $+5a$, $+3a$, $-10a$, $+2a$ e $-6a$.

Solução. A somma das quantidades positivas é $10a$; a somma das quantidades negativas é $16a$, e a differença entre as duas sommas é $6a$. Ora, como a somma maior é negativa, a differença é tambem negativa, e por isso a somma é $-6a$.

$$\begin{array}{r} +\ 5a\\ +\ 3a\\ -10a\\ +\ 2a\\ -\ 6a\\ \hline -\ 6a \end{array} \qquad \begin{array}{r} -10a\\ -\ 6a\\ \hline -16a \end{array} \qquad \begin{array}{r} +\ 5a\\ +\ 3a\\ +\ 2a\\ \hline +10a \end{array} = -6a$$

Fonte: Trajano (1905, p. 17).

Mesmo que o autor deixe para explicar as soluções negativas, de equações, somente na página 112, no início da obra ele já apresenta como as operações com quantidades algébricas, como as apresentadas na figura anterior, poderiam ter resultado negativo:

> [...] figuremos ainda um cofre onde guardamos o nosso dinheiro, e depositamos tambem o dinheiro de uma pessoa, que deposita e retira diversas quantias. As quantias que ella deposita são positivas, e as que retira, são negativas. Ella entrou com $5a + 3a + 2a = 10a$ e retirou $10a + 6a = 16a$; se ella tivesse retirado sómente $10a$, o resultado seria nullo ou zero, porque em nada alteraria os fundos que tinhamos no cofre; mas como ella tirou $16a$, isto é, $6a$ mais do que poz, o resultado será $-6a$, isto é, ficará um desfalque de $6a$ (TRAJANO, 1905, p. 17).

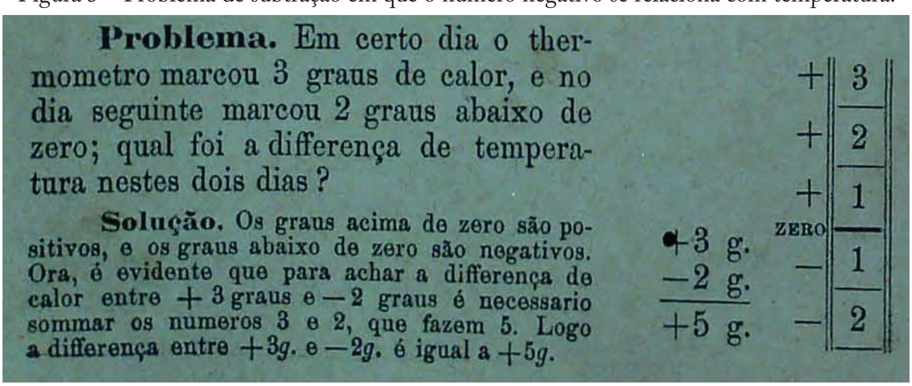
Aqui fica evidenciado o *significado* atribuído por Trajano (1905) de que a quantidade negativa poderia ser relacionada a algo real, ao desfalque. Isso não necessariamente estaria atrelada à ideia de que o termo negativo seria menor do que zero, pois os próprios defensores da teoria dos números negativos maiores do que zero indicavam que se uma dívida fosse menor do que zero, a pessoa nada devia.

Ainda nas operações, é possível observar que em meio à discussão da subtração o autor apresenta casos envolvendo termos algébricos e números. Assim, depois de dizer na subtração, envolvendo termos que possuem o mesmo sinal, "acha-se a differença entre os coefficientes e escreve-se em baixo com a parte litteral e o signal commum" (TRAJANO, 1905, p. 20), dentre os exemplos figura a operação $-9 - (-2) = -7$. Com isso podemos constatar que o autor buscou generalizar que as operações desenvolvidas se aplicam para quantidade algébricas e para números. Trajano (1905, p. 21) explicita ainda, durante a abordagem de outro caso, que "Em Algebra podemos tambem subtrahir uma quantidade numericamente maior, de outra menor, e se os signaes forem iguaes, o resultado será a differença das duas quantidades com o signal contrario".

> Solução. Subtrahindo 6*a* de 6*a*, restam 0 ou nada; subtrahindo-se 7*a* de 6*a*, resta –*a*, e subtrahindo 8*a* de 6*a*, restam –2*a*.
>
> Demonstração. [...], figuremos que um homem, levando só 6$000, foi a uma loja, e alli comprou 8$000 de objectos; ora, se elle tivesse despendido só 6$000, voltaria da loja sem dinheiro algum; mas como gastou 8$000, voltou com 2$000 de menos, isto é, voltou com uma divida de 2$000, [...]. Logo, [...], temos $6a - 8a = -2a$ (TRAJANO, 1905, p. 21).

Aqui, mais uma vez, o autor associa os números negativos à ideia de dívida/desfalque. Contudo, esses não são os únicos exemplos envolvendo estes números: durante a abordagem da subtração de um número negativo o autor enuncia que "Quando de uma quantidade positiva se subtrahe uma quantidade negativa semelhante, o resultado será igual a somma das duas quantidades" (TRAJANO, 1905, p. 22) e, em seguida, apresenta o exemplo:

Figura 5 – Problema de subtração em que o número negativo se relaciona com temperatura.


Problema. Em certo dia o thermometro marcou 3 graus de calor, e no dia seguinte marcou 2 graus abaixo de zero; qual foi a differença de temperatura nestes dois dias?

Solução. Os graus acima de zero são positivos, e os graus abaixo de zero são negativos. Ora, é evidente que para achar a differença de calor entre + 3 graus e — 2 graus é necessario sommar os numeros 3 e 2, que fazem 5. Logo a differença entre $+3g.$ e $-2g.$ é igual a $+5g.$

$$\begin{array}{r} +3 \text{ g.} \\ -2 \text{ g.} \\ \hline +5 \text{ g.} \end{array}$$

Fonte: Trajano (1905, p. 22).

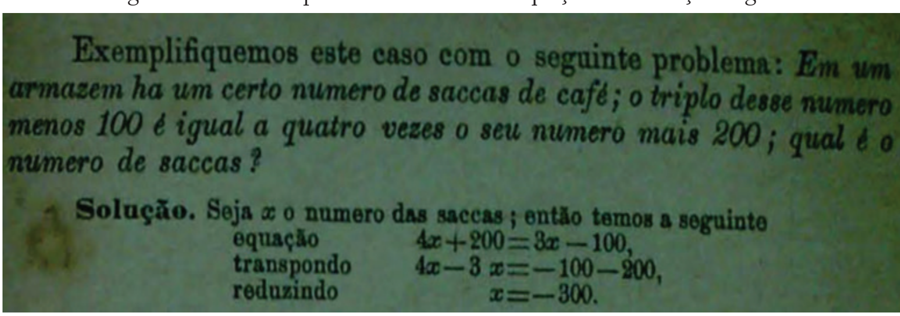
A regra de sinais é abordada durante a multiplicação de termos algébricos. Trajano (1905) separa os elementos da multiplicação e os explica isoladamente:

coeficiente e parte literal; expoente; sinais. No último, o autor define ainda a regra de sinais para a multiplicação.

Os números negativos como solução, para equações, são discutidos somente na seção “Fórmas de solução” (TRAJANO, 1905, p. 112). Dentre os tipos de solução o autor destaca as positivas e as negativas, dizendo ainda que a “Solução positiva é aquella que temos obtido em todos os problemas resolvidos até esta pagina”. Isso confirma que a ausência de soluções negativas até essa parte da obra, a menos da discussão sobre as operações, não se estabelecem como um acaso, mas uma opção metodológica do autor.

Quanto às soluções negativas para equações, o autor indica que a solução negativa é aquela em que a incógnita assume valor com sinal negativo, para o que apresenta o problema:

Figura 6 – Primeiro problema envolvendo equação com solução negativa.



Exemplifiquemos este caso com o seguinte problema: *Em um armazem ha um certo numero de saccas de café; o triplo desse numero menos 100 é igual a quatro vezes o seu numero mais 200; qual é o numero de saccas?*

Solução. Seja x o numero das saccas; então temos a seguinte
equação $4x+200=3x-100$,
transpondo $4x-3x=-100-200$,
reduzindo $x=-300$.

Fonte: Trajano (1905, p. 113).

Trajano (1905, p. 113) indica que o resultado “ainda que satisfaça a questão no sentido algebrico, não a satisfaz no sentido arithmetico, porque em um armazem não póde haver –300 saccas de café” e que, com isso, deve haver um problema no enunciado ou na sua interpretação. Mais uma vez vemos que os *problemas* permitem associar aos números negativos, na forma de solução, o *significado* de impossibilidade. O autor diz então que “o engano está na troca dos signaes, pois em lugar de +200, e –100, deve ser –200, e +100” (TRAJANO, 1905, p. 113), que levaria à solução x = 300. Contudo, não há uma explicação do porquê isso seria um “engano”. Tal abordagem remonta ao que é feito por Cunha (1914) e FIC (s.d.), uma vez que a correção geraria uma mudança no enunciado do problema.

De modo semelhante ao realizado por Cunha (1914) e FIC (s.d.), Trajano (1905) traz um segundo exemplo que perpassa o uso da incógnita associada ao tempo. O enunciado apresentado é: "A idade de um pai é 40 annos, e a de seu filho é 13, em que epocha a idade do pai é o quadruplo da idade do filho?" (p. 113). O autor escreve que a solução seria:

> Solução. Seja x o numero que falta para chegar a epocha requerida. Então a equação será $4(13 + x) = 40 + x$. Resolvida a equação, temos $x = -4$.
>
> Este resultado negativo nos mostra que ha algum engano a corrigir. Pela simples leitura deste problema, fomos levados a julgar erradamente que essa relação de idades se effectuaria em uma epocha posterior aos 40 annos do pai, e não antes.
>
> Se o enunciado dissesse: "Em que epocha a idade do pai foi o quadruplo da idade do filho?" logo comprehenderiamos que era em uma epocha anterior aos 40 annos, e teriamos formulado a [...] equação $[4(13 - x) = 40 - x]$, cujo resultado mostra que a epocha requerida no problema, foi quando o pai tinha $40 - 4 = 36$ annos, e o filho $13 - 4 = 9$ (TRAJANO, 1905, p. 113, adição nossa).

A diferença da abordagem de Cunha (1914) e FIC (s.d.) para Trajano (1905) é que os primeiros não explicitam tão enfaticamente que a solução negativa estaria atrelada a um erro de interpretação. As obras analisadas anteriormente denotam que a solução negativa para alguns problemas, nos quais a incógnita pode ser contada em dois sentidos, indica apenas que a resposta deveria ser contada no sentido contrário ao que foi assumido a princípio. Trajano (1905) enuncia então princípios quase análogos aos de Cunha (1914) e FIC (s.d.):

> 1º Uma solução negativa indica em geral alguma troca de signaes ou outro defeito no enunciado do problema.
>
> 2° Quando se obtem uma solução negativa, o enunciado do problema póde ser corrigido trocando-se os signaes ou modificando-se o sentido que se lhe deu; de sorte que a solução exprima exactamente o valor da incognita no sentido positivo (TRAJANO, 1905, p. 113).

Há uma grande diferença que se atribui aos números negativos na obra de Trajano (1905). Aparentemente o autor considera que uma solução negativa, mesmo na Álgebra, seria um sinônimo de erro/impossibilidade, algo que deveria ser corrigido, seja no enunciado ou no sentido tomado, apenas para que a solução seja positiva. O modo como Trajano (1905) parece contornar as soluções negativas nos problemas envolvendo equações, e não interpretá-las, parece que o autor atribui a sua Álgebra algumas limitações impostas pela Aritmética. Mesmo assim, ao abordar números negativos e não considerar que soluções negativas sejam um ultimato da impossibilidade de se resolver um problema, o autor supera as barreiras da Aritmética, que poderiam ser instauradas sobre sua Álgebra.

Como forma de ressaltar a perspectiva de que Trajano (1905) ainda assim supera os limites da Aritmética, cabe observar que, um pouco antes de discutir as equações do 2º grau, o autor menciona sobre as propriedades de potenciação e radiciação. Aqui o autor destaca que "Se multiplicarmos $+a$ por $+a$, o producto será $+a^2$; se multiplicarmos $-a$ por $-a$, o produto será tambem $+a^2$. Então a raiz quadrada de $+a^2$ pode ser $+a$ ou $-a$" (TRAJANO, 1905, p. 141). Após a resolução de um problema, o autor inclusive explicita que na Aritmética "como se opera sómente com numeros positivos, um quadrado tem só uma raiz", mas que na Álgebra "ha tambem quadrados de numeros negativos" (TRAJANO, 1905, p. 153). Isso reforça a presença de números e soluções negativas, além de que o autor não estipula para a sua Álgebra as amarras da Aritmética.

Bem como Cunha (1914) e FIC (s.d.), Trajano (1905, p. 122) também dedica uma seção para a abordagem das desigualdades. Buscando relacionar os números positivos e negativos com a contagem em dois sentidos, o autor os distribui em linha reta dizendo que essa organização justificaria que os números positivos são maiores do que os negativos; os números negativos são menores do que zero; um número negativo é tão menor quanto maior for seu valor absoluto.

Figura 7 – Números positivos e negativos em escala descendente.

256. Para notarmos com mais clareza a differença entre os valores positivos e negativos expressos em uma desigualdade, observaremos a seguinte escala descendente que mostra a relação de valores dependentes do signal que affecta uma quantidade:

(Numeros positivos) (Numeros negativos)

$+5, +4, +3, +2, +1, 0, -1, -2, -3, -4, -5.$

Visto que esta escala é descendente, notamos nella os tres seguintes factos que servem de base para as operações da desigualdade:

1º Qualquer numero positivo é maior do que zero.
2º Zero é maior do que qualquer numero negativo.
3º Entre dois numeros negativos, o maior é o que tem o valor numerico menor.

Fonte: Trajano (1905, p. 122).

Quadro 7 – Aspectos sobre a *sequência*, *significado*, *graduação*, *exercícios* e *problemas* do ensino de números negativos.

Categorias	O que foi observado no livro de Trajano (1905)
Sequência	Os números negativos parecem figurar apenas na Álgebra, de modo que surgem para superar os limites da Aritmética
Significado	As quantidades negativas na solução de operações representam a superação das barreiras da Aritmética, na mesma medida em que estabelecem que, na Álgebra, a soma e subtração não estão mais atreladas a ideia de aumentar e diminuir, respectivamente. Quantidades algébricas negativas podem ser relacionadas com aspectos da realidade, como a ideia de desfalque, dívida ou temperatura. Como solução de problemas, os números negativos podem significar a impossibilidade de resolução, erro no enunciado ou indicar que o sentido tomado para a contagem foi errado. Os números negativos são menores do que zero.
Graduação	Primeiro são abordadas as operações e nelas surgem as soluções negativas com termos algébricos. Somente depois esses números figuram como solução de problemas envolvendo equações. Em seguida os números negativos são entendidos como menores do que zero.
Exercícios e Problemas	As soluções com números negativos, para operações e problemas já surgem ao início da obra. Quando estão associadas a um problema e equação, esses números podem ser indício da impossibilidade de solução ou necessidade de reformulação do enunciado. Nos casos em que a incógnita está atrelada a valores que poderiam ser contados em duas direções, o autor indica que a solução negativa pode ser corrigida ao se adotar o sentido contrário na contagem

Fonte: elaborado pelos autores.

Considerações Finais

A compreensão de como eram e como se comportavam os números negativos era um tópico controverso entre o final do século XIX e início do século XX. Isso necessariamente viria a refletir no ensino desses números durante esse período.

Com a criação da Escola Complementar de Santa Catarina, se estabelece um ensino intermediário, entre a formação primária ofertada pelos Grupos Escolares e o ensino normal/secundário. Com isso, é também instituída a instrução da Álgebra na formação primária e, com ela, a possível abordagem dos números negativos. O fato de Santa Catarina seguir o modelo de São Paulo, do programa do ensino complementar catarinense, perpassar as equações e das obras indicadas abordarem explicitamente os números negativos, nos leva a crer que esses números também fizeram parte do ensino de Álgebra na Escola Complementar de Santa Catarina.

Desse modo, sobre o ensino dos números negativos, é possível dizer que Cunha (1914) explica como surgem os números negativos na subtração e que isso não contradiz os princípios da Aritmética. As soluções negativas podem indicar algo errado com o enunciado de problemas ou devem ser contadas no sentido contrário ao assumido na resolução dos mesmos. Os números negativos seriam menores do que zero. Já o livro da editora FIC (s.d.) apresenta que esses números surgem a partir da necessidade de generalizar a subtração desenvolvida na Aritmética. As soluções negativas podem indicar impossibilidade no problema ou devem ser contadas no sentido contrário ao assumido na resolução do problema. Por fim, Trajano (1905) aborda quantidades negativas algébricas, inclusive trazendo a ideia de que uma quantidade negativa é um "desfalque" e um exemplo de operação com números que o resultado é negativo. Evita soluções negativas até abordá-las em um tema específico, indicando que tal tipo de solução indica algo a ser corrigido no enunciado ou no sentido de contar a incógnita.

É importante destacar que as análises desenvolvidas não fornecem elementos suficientes para caracterizar uma *matemática do ensino* dos números negativos, uma vez que não nos debruçamos sobre a formação dos professores que atuaram(iam) na Escola Complementar de Santa Catarina. Assim, sem análises sobre uma *matemática para ensinar* não é possível caracterizar uma *matemática do ensino* dos números negativos, que somente será observada pela articulação dos *saberes a ensinar* e dos *saberes para ensinar* (MORAIS; BERTINI; VALENTE, 2021). No entanto, podemos evidenciar elementos constituintes de uma *matemática do ensino* dos números negativos a partir dos aspectos do ensino desses números nas obras analisadas.

Acerca da *sequência*, as obras enaltecem que a Aritmética seria limitada ao lidar com números negativos, compreendendo resultados negativos como sinônimo de absurdo ou impossibilidade. Com isso, o ensino dos números negativos, suas operações e como forma de solução para um problema, deveria ocorrer na Álgebra, que generalizaria as operações estudadas em Aritmética. No ensino catarinense, esse conteúdo se faria presente após a formação no Grupo Escolar, mais precisamente no 2º ano da Escola Complementar.

Sobre o *significado* atribuído aos números negativos, há um consenso de que estes seriam considerados a partir da perspectiva da “teoria antiga”, ou seja, seriam números menores do que zero. Sua presença nas operações, envolvendo números e/ou quantidades algébricas, traz a perspectiva de que a Álgebra ensinada não se limitaria às barreiras impostas pela Aritmética e que as operações de soma e subtração, na Álgebra, deixam de ser sinônimos de aumentar ou diminuir. Com isso, os números negativos não são mais taxados como sinônimo de impossibilidade de um problema ou solução. Assim, quando relacionados com a realidade, os números negativos podem apontar: que a solução é impossível ou que o enunciado precisa ser revisado, como é o caso do armazém com “–300 saccas de café”; caso a incógnita represente uma grandeza que pode ser contada em duas direções, então deveríamos contar no sentido contrário ao assumido na solução.

A respeito da *graduação* do ensino dos números negativos, Cunha (1914) e Trajano (1905) seguem uma estrutura semelhante: operações, equações, soluções negativas e desigualdades. A diferença dos dois autores é que Cunha (1914) aborda as operações com números antes das operações com quantidades algébricas, enquanto que Trajano (1905) faz as duas coisas ao mesmo tempo. A abordagem adotada pela editora FIC (s.d.) é um pouco diferente: operações, noção de que um número negativo é menor do que zero, equações, desigualdades e soluções negativas. Nesse caso, não são explicitadas operações que resultem em números negativos, apenas envolvendo termos algébricos. De modo geral, dentre esses elementos podemos observar que as três obras deixam para o final a interpretação dos números negativos quando atrelados a um problema, usualmente relacionado com a realidade, e o fato de que esses números são menores do que zero. Com isso, se estabelece uma marcha do ensino em que: primeiro se compreende como operar com números e termos algébricos, seja nas operações ou na solução de equações; em seguida se compreende o *significado* dos números negativos que surgem nesse processo.

Quanto aos *exercícios*, Cunha (1914) e FIC (s.d.) não propuseram exercícios, para que os estudantes resolvessem, que perpassassem operações com números negativos ou equações com soluções negativas. No entanto, Cunha (1914) resolve exemplos com esses dois tipos de atividade, o que FIC (s.d.) não realiza. Nesse sentido, Trajano (1905) se diferencia ao resolver exemplos e propor exercícios com operações que resultassem em números negativos. No entanto, Trajano (1905) só apresenta soluções negativas para equações depois de apresentar o tema em uma seção, no que as três obras relacionam as soluções negativas com *problemas*. É a partir dos *problemas* que a relação dos números negativos com a realidade passa a ser analisada/questionada. Nessas situações a presença de um número negativo como solução pode, ou não, representar que um problema é impossível de ser resolvido, o que mostra que a Álgebra, principalmente a de Trajano (1905), ainda não teria se desvencilhado totalmente das amarras da Aritmética. Além disso, o *significado* dos números negativos como termos de uma contagem no sentido oposto, ao dos positivos, se dá pela solução dos *problemas*.

Tais elementos, obtidos a partir das análises das obras de Cunha (1914), FIC (s.d.) e de Trajano (1905), permitem evidenciar elementos de uma *matemática do ensino* de números negativos para a Escola Complementar de Santa Catarina. Essa matemática, que seria um produto do local e época aos quais se vincula, tinha como finalidade a ampliação dos conceitos e conhecimentos obtidos na Aritmética, trazendo os números negativos não mais como sinônimo de impossibilidade e os entendendo como sendo valores abaixo de zero, sendo que em alguns casos eles poderiam ser dispostos em linha reta e contados em duas direções.

Para compreender todas as nuances dessa *matemática do ensino* dos números negativos da Escola Complementar catarinense, ainda serão necessários estudos que se debrucem também sobre a formação do professor que iria atuar nessas instituições, ou seja, sobre o ensino normal da época. Somente pela articulação dessas duas análises que será possível caracterizar e compreender esse objeto histórico em sua totalidade.

Referências

BARRETO, T. Nova theoria das quantidades negativas. **Os Annaes**, Rio de Janeiro, ano 1, n. 1, 8 out. 1904, p. 13-16. Disponível em: http://memoria.bn.br/DocReader/347850/13. Acesso em: 23 mar. 2022.

BASEI, A. M. **Processos e Dinâmicas de Institucionalização da Álgebra na Formação de Professores dos Primeiros Anos Escolares, São Paulo (1880 – 1911)**. 2020. 194f. Tese (Doutorado) – Escola de Filosofia, Letras e Ciências Humanas, Universidade Federal de São Paulo, São Paulo, 2020. Disponível em: https://bityli.com/pCWHFU. Acesso em: 9 abr. 2021.

BERTINI, L. F.; MORAIS, R. S.; VALENTE, W. R. **A Matemática a ensinar e a Matemática para ensinar**: novos estudos sobre a formação de professores. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2017.

CESAR, J. A. Uma questão mathematica. **A Reacção**, São Paulo, ano 20, n. 5, 31 out. 1897, p. 3. Disponível em: http://memoria.bn.br/DocReader/713481/79. Acesso em: 23 mar. 2022.

CHARTIER, R. O mundo como representação. **Estudos avançado**, v. 5, n. 11, p. 173-191, 1991. Disponível em: https://bityli.com/xHFrCE. Acesso em: 20 maio 2020.

CHARTIER, R. **A história cultural entre práticas e representações**. Tradução de: Maria Manuela Galhardo. Rio de Janeiro: Berthand do Brasil, 1990.

CHERVEL, A. História das disciplinas escolares: reflexões sobre um campo de pesquisa. **Teoria & Educação**, n. 2, p. 177-229, 1990. Disponível em: https://moodle.fct.unl.pt/pluginfile.php/122510/mod_resource/content/0/Leituras/Chervel01.pdf. Acesso em: 20 maio 2020.

COMO? Por que? Quando? **A Manhã**, Rio de Janeiro, ano 2, n. 81, 2 abr. 1926, p. 2. Disponível em: http://memoria.bn.br/DocReader/116408/532. Acesso em: 23 mar. 2022.

COSTA, D. A. A aritmética na obra "Iniciação Matemática" de Charles Laisant (1919). *In*: Seminário Nacional de História da Ciência e da Tecnologia, 15., 2016, Florianópolis. **Resumos** [...]. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de História da Ciência, 2016. Disponível em: https://www.15snhct.sbhc.org.br/trabalho/view?ID_TRABALHO=2126. Acesso em: 14 jul. 2022.

CUNHA, A. J. **Elementos de Algebra:** Regidos conforme o programma dos Lyceus. Lisboa: Typographia da Parceria Antonio Maria Pereira, 1914.

D'OLIVEIRA, L. E. Theoria das quantidades imaginarias. **Revista Pedagogica**, Rio de Janeiro, tomo 9, n. 47, p. 15-35, 1896. Disponível em: http://memoria.bn.br/DocReader/341010/2526. Acesso em: 23 mar. 2022.

FERREIRA, J. S. **A graduação como elemento constituinte da *matemática do ensino*:** uma análise da aritmética dos manuais pedagógicos (1933-1951). 2022. 133f. Tese (Doutorado em Ciências). – Universidade Federal de São Paulo, Pós-graduação em Educação e Saúde, Guarulhos, 2022.

FIC. **Elementos de Algebra com numerosos exercícios**. Rio de Janeiro: Livraria Garnier, s.d.

GUEDES, R. Theoria das quantidades negativas. **A Genesis**, Rio de Janeiro, ano 1, n. 1, 15 ago. 1897, p. 2-3. Disponível em: http://memoria.bn.br/DocReader/828521/2. Acesso em: 23 mar. 2022.

GUIMARÃES, O. Parecer sobre a adoção de obras didáticas. **GAB. TYP. D' O DIA**, Florianópolis, 1911. Disponível em https://bityli.com/qyhiut. Acesso em: 13 jun. 2021.

JARDIM, A. G. Considerações em torno dos numeros negativos. **O Estado**, Florianópolis, ano 17, n. 5298, 26 maio 1931, p. 3. Disponível em: http://memoria.bn.br/DocReader/098027_03/1749. Acesso em: 23 mar. 2022.

HOFSTETTER, R.; SCHNEUWLY, B. Saberes: um tema central para as profissões do ensino e da formação. *In*: HOFSTETTER, R.; VALENTE, W. R. (Orgs.). **Saberes em (trans)formação:** tema central da formação de professores. 1ª ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2017, p. 113-172.

LAISANT, C. Primeiras licções de Arithmetica (continuação). **Revista de Ensino**, Alagoas, ano 1, n. 4, p. 55-60, 1927. Disponível em: http://memoria.bn.br/DocReader/761559/295. Acesso em: 23 mar. 2022.

LEAL, A. C. F. Considerações sobre a teoria das quantidades negativas. **União Academica**, Rio de Janeiro, ano 2, n. 6, 1 jun. 1880a, p. 4. Disponível em: http://memoria.bn.br/DocReader/237825/100. Acesso em: 23 mar. 2022.

LEAL, A. C. F. Considerações sobre a teoria das quantidades negativas. **União Academica**, Rio de Janeiro, ano 2, n. 7, 16 jun. 1880b, p. 3-4. Disponível em: http://memoria.bn.br/DocReader/237825/107. Acesso em: 23 mar. 2022.

LIMAS, J. P. **Orientações para o ensino de aritmética no curso complementar Jerônimo Coelho em Laguna - Santa Catarina (1911-1947)**. 2016. 197f. Dissertação (Mestrado em Educação Científica e Tecnológica) – Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2016. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/171547. Acesso em: 09 abril 2021.

LIMAS, J. P.; COSTA, D. A. O ensino de Aritmética na formação do professor primário no Curso Complementar em Santa Catarina. **REMATEC**, v. 11, n. 23, p. 64-85, 2016.

MAGALHÃES, B. C. B. **Teoria das quantidades negativas**. Rio de Janeiro: Jornal do Commercio, 1939.

MORAIS, R. S.; BERTINI, L. F.; VALENTE, W. R. **A matemática do ensino de frações**: do século XIX à BNCC. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2021.

PEACOCK, G. **A TREATISE ON ALGEBRA:** Vol. 1 Arithmetical Algebra. Cambridge: J. & J. J. Deighton; London, G. F. & J. Rivington, 1842. Disponível em: https://archive.org/details/bub_gb_Ap54gR4l-y8C. Acesso em: 20 maio 2020.

PRATES, J. M. **Disputas oligárquicas em Santa Catarina na Primeira República Brasileira (1889-1930):** ascensão e influência da Família Ramos. 72f. Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) – Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Filosofia e Ciências Humanas, Graduação em História, Florianópolis, 2021.

RAMOS, V. J. O. **Synopse do Governo do Estado:** quatriênio de 1910 a 1914. Gab Typ. d'o DIA, 1914. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/126120. Acesso em: 09 abril 2021.

SANTA CATARINA. **Programa das Escolas Complementares**: de conformidade com o artigo 3º do Regulamento baixado com o decreto 604 de 11 de julho de 1911. Florianópolis: Offic. a Elec. Da Empreza "O DIA", 1918. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/101125. Acesso em: 9 abr. 2021.

SANTA CATARINA. **Decreto n. 604 de 11 de julho de 1911:** cria as escolas complementares e baixa o regulamento das Escolas Complementares do Estado de Santa Catarina. Santa Catarina, 1911a. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/1816. Acesso em: 13 jun. 2021.

SANTA CATARINA. **Programma e Horario da Escola Normal do Estado de Santa Catarina:** approvado e mandado observar pelo decreto n. 586 de 22 de abril de 1911. Santa Catarina, 1911b.

SANTOS, P. S**. A escolarização da Matemática no Grupo Escolar Lauro Müller (1950 – 1970)**. 2014. 163 f. Dissertação (Mestrado em Educação Científica e Tecnológica) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2014. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/126566. Acesso em: 27 maio 2021.

SÃO PAULO. **Decreto n. 2.944, de 8 de Agosto de 1918**. Aprova o regulamento para a execução da Lei n. 1.579, de 19 de dezembro de 1917. São Paulo, 1918. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/157180. Acesso em: 09 abril 2021.

TEIVE, G. M. G. "Como no tempo das bandeiras": A primeira expedição do professor Areão em Santa Catarina. *In*: TEIVE, Gladys Mary Ghizoni (Org.). **Professor Areão:** Experiências de um "bandeirante paulista do ensino" em Santa Catarina (1912-1950). Florianópolis: Insular, 2014.

TEIVE, G. M. G. **"Uma vez normalista, sempre normalista":** cultura escolar e produção de um *habitus* pedagógico (Escola Normal Catarinense – 1911/1935). Florianópolis: Insular, 2008.

TEIVE, G. M. G.; DALLABRIDA, N. **A escola da república:** os grupos escolares e a modernização do ensino primário em Santa Catarina (1911-1918). Campinas: Mercado de Letras, 2011.

TRAJANO, A. B. **Arithmetica Progressiva:** curso completo theorico e pratico de Arithmetica Superior. 68ª ed. Rio de Janeiro: Livraria Francisco Alves, 1935. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/134698. Acesso em: 20 maio 2020.

TRAJANO, A. B. **Algebra elementar**. Rio de Janeiro: Livraria Francisco Alves, 1905. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/160598. Acesso em: 20 maio 2020.

VALENTE, W. R. A *Matemática do Ensino* Como um Saber Profissional do Professor que Ensina Matemática: Contribuições da História da educação matemática para a Educação Matemática. *In*: CIRÍACO, Klinger Teodoro; OLIVEIRA, Carloney Alves de, (Orgs.). **Tendências em educação matemática na infância**. Brasília, DF: SBEM Nacional, 2022.

VALENTE, W. R. Cadernos de professores: da matemática para ensinar para a matemática para ensinar ensinada. In: Seminário Temático, 15, 2017, Pelotas. **Anais do XV Seminário Temático**. Pelotas: UFPel, p. 1-12, 2017. Disponível em: https://xvseminariotematico.paginas.ufsc.br/files/2017/03/VALENTE_T3.pdf. Acesso em: 20 maio 2020.

VALENTE, W. R.; BERTINI, L. F. Sobre a matemática do ensino como objeto teórico de pesquisa. *In*: VALENTE, Wagner Rodrigues; BERTINI, Luciane de Fatima (Orgs.). **A matemática do ensino**: uma história do saber profissional 1870-1960. São Paulo: Universidade Federal de São Paulo. 2022, 241p. (Coleção Educação & Saúde, v. 1).

MATEMÁTICA DO ENSINO DE MULTIPLICAÇÃO: algumas considerações em tempo do movimento da matemática moderna

Cristiane Aparecida dos Santos[22]
Jonathan Machado Domingues[23]

CONSIDERAÇÕES INICIAIS

A temática direcionada na perspectiva da *matemática do ensino* por meio de uma análise histórico-cultural motivou a elaboração deste capítulo e restringe-se ao ensino de multiplicação, na vaga pedagógica do Movimento da Matemática Moderna (MMM). Assim, esta tessitura é fruto de estudos e problematizações provindas do Grupo de Pesquisa de História da Educação Matemática de Santa Catarina (GHEMAT-SC), bem como de pesquisas e eventos científicos no âmbito nacional oriundas deste campo.

Desta forma, os investigadores que desenvolveram este capítulo interessaram-se pela *matemática do ensino de multiplicação* tomada a partir da análise do livro do aluno, simultaneamente com as orientações direcionadas para os professores da 1ª série que compõem a coleção "Curso Moderno de Matemática para o Ensino de 1º Grau". Sinaliza-se que a materialidade em questão, ou seja, o livro analisado circulou pelo território nacional a partir da década de 1970, como sinaliza Villela (2009), período em que é possível inferir a circulação do ideário do Movimento da Matemática Moderna, uma vez que se encontrava em voga.

---

22 Mestranda no Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica (PPGECT), da Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC). Licenciada em Matemática – UFSC. E-mail: profa.cristiane.santos.mat@gmail.com

23 Doutorando em Educação e Saúde na Infância e na Adolescência (PPGESIA) pela Universidade Federal de São Paulo (UNIFESP). Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Educação Científica e Tecnológica (PPGECT), da Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC). Licenciado em Pedagogia – UERJ. E-mail: jonathandomingues18@gmail.com

A justificativa da escolha desta coleção tomada para análise é sua expressiva tiragem no período de 1964-1980, de 1.624.948 (um milhão, seiscentos e vinte e quatro mil, novecentos e quarenta e oito) exemplares publicados pela Companhia Editora Nacional[24]. A coleção foi elaborada por membros do GRUEMA[25], que tentavam divulgar os preceitos do Movimento da Matemática Moderna em suas publicações. Essa vaga pedagógica defendia o ensino sob os conceitos de conjuntos e das estruturas da matemática em todos os anos do ensino primário e do ginásio, como pontua Villela (2009).

Deste jeito, pode-se inferir que o MMM tinha o intuito de proporcionar:

> [...] uma proposta mais experimentalista, segundo a qual o aluno deveria permanecer em atividade constante durante a construção do conhecimento, por meio de situações de aprendizagem com materiais concretos. O professor deveria assumir o papel de orientador das descobertas, primeiramente intuitivas, que seriam sistematizadas e formalizadas gradativamente e tratadas sem grandes preocupações com a simbologia (DUARTE *et al.*, 2011, p. 134).

Ademais, pode-se elencar outro fato que justificou a escolha do livro que compõe a coleção. Uma versão digitalizada da obra encontra-se disponível no Repositório de Conteúdo Digital (RCD) da Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), o que facilita o acesso dos investigadores e dos futuros leitores.

---

24 Para maiores informações: (I) TOLEDO, Maria Rita de Almeida. A Companhia Editora Nacional e a política de editar coleções: entre a formação do leitor e o mercado de livros. In: BRAGANÇA, Aníbal; ABREU, Márcia (Orgs.). **Impresso no Brasil**: Dois séculos de livros brasileiros. São Paulo: Editora Unesp, 2010. (II) MORAES, Didier Dias de. **Uma trajetória do design do livro didático no Brasil**: a Companhia Editora Nacional, 1926-1980. Tese (Doutorado em Design e Arquitetura). – Faculdade de Arquitetura e Urbanismo, Universidade de São Paulo, 2016.

25 "GRUEMA – sigla por nós escolhida para Grupo de Ensino de Matemática Atualizada – foi inspirada no fato de que este trabalho não é obra exclusiva dos autores, mas de um grupo. O GRUEMA, antes de ser lançado, foi experimentado, com sucesso, em escolas particulares e oficiais de São Paulo e do Rio de Janeiro, onde professores e orientadores controlaram os resultados. A eles os nossos cumprimentos pela eficiência e colaboração. Foi a dedicação de todos e de cada um dos componentes GRUEMA que permitiu o aperfeiçoamento e a melhoria do trabalho, que acreditamos ser mais um passo no progresso do ensino da Matemática no BRASIL" (GRUEMA, 1974, p. 1).

Delimita-se a análise no livro para a 1ª série do ensino primário da coleção, uma vez que o ensino de multiplicação é conteúdo obrigatório das quatro séries iniciais e toma-se a rubrica de multiplicação de números pertencentes ao conjunto dos números naturais, em virtude de ser um dos primeiros ensinados na escola primária. Dessa maneira, atenta-se à realização de uma investigação com o intuito de se caracterizar uma matemática do ensino de multiplicação da 1ª série do ensino primário no tempo do MMM.

Em relação ao percurso teórico-metodológico deste capítulo, apoia-se nos estudos sócio-históricos, especificamente da *Equipe de Pesquisa em História das Ciências da Educação* (ERHISE) da Universidade de Genebra (Suíça) no que se refere aos saberes profissionais do professor e nos referenciais da História Cultural.

As investigações direcionadas aos saberes profissionais dos professores que ensinam matemática são consideradas neste artigo, em que corrobora com os genebrinos no tocante à compreensão de serem basilares no âmbito das pesquisas coletivas do GHEMAT-Brasil. Neste texto, consideram-se os saberes matemáticos voltados ao ensino de multiplicação, como um saber profissional que se constitui e se altera com o passar do espaço e do tempo, como pode ser visto em Valente (2020).

Como nesta escrita existe um foco na investigação de uma matemática do ensino de multiplicação, deve-se pontuar que a escola é compreendida como um lugar que produz saberes, com uma própria cultura, delineada ao longo do tempo. Do mesmo modo, há uma matemática elaborada historicamente no ambiente escolar que serve para diferentes finalidades, dado o período em que se exerciam tais práticas pedagógicas, como afirma Morais, Bertini e Valente (2021).

Essa ótica encontra-se impetrada a partir de uma cultura, constituidora de elementos que influenciam na elaboração de saberes, e que "[...] cada cultura constrói historicamente a sua matemática" (VALENTE, 2020, p. 165). Dessa forma, busca-se, neste capítulo, caracterizar os elementos de uma matemática do ensino de multiplicação, a partir da análise empreendida no livro do aluno e as orientações para o professor da 1ª série que compõem a coleção do GRUEMA, em tempos do ideário da Matemática Moderna.

Doravante, objetiva-se compreender o ensino de multiplicação no movimento da profissionalização da docência. A partir de Borer (2017), entende-se que os saberes profissionais docentes são os saberes da formação de professores dado pela articulação entre os saberes a ensinar e os saberes para ensinar. Neste sentido, os *saberes a ensinar* seriam os saberes que constituem o objeto do trabalho da docência, em contrapartida, os *saberes para ensinar* referem-se às ferramentas do ofício de ser professor (BORER, 2017).

Interessa-nos, nesta escrita, os saberes para o ensino de multiplicação e ressalta-se que a *matemática a ensinar* e a *matemática para ensinar* especificam os saberes profissionais dos professores que ensinam matemática (BERTINI, *et al.*, 2017). Como a fonte privilegiada desta análise é o livro da 1ª série da coleção "Curso Moderno de Matemática para o Ensino de 1º Grau" busca-se caracterizar uma matemática do ensino de multiplicação no livro da 1ª série da coleção produzida pelo GRUEMA.

Ao investigar historicamente a *matemática do ensino* de multiplicação no ensino primário, diferentes elementos na construção dos saberes no âmbito da cultura escolar são constituídos como categorias de análise: *sequência, significado, graduação, exercícios e problemas*, como recomendam Morais, Bertini e Valente (2021). O tempo escolar condiciona a produção destes saberes, em que a cultura escolar norteia a elaboração de uma organização em relação ao espaço e tempo, em que as práticas pedagógicas se sujeitam em: níveis de ensino, graus, ano letivo, bimestres, hora-aula, avaliações, entre outros elementos da *matemática do ensino* que se fazem presente no cotidiano dos espaços formativos (a escola) apresenta-se, assim, integrantes de uma anatomia da matemática do ensino e corrobora, consequentemente, com Valente (2020).

Para caracterizar uma matemática do ensino, os seguintes elementos podem ser identificados: **a)** a ***sequência*** seria o lugar ocupado pela multiplicação no conjunto dos temas da aritmética e muda conforme a época pedagógica; **b)** o ***significado*** é o modo como o professor insere o conteúdo e como o aluno entende; **c)** a ***graduação*** indica a estruturação de uma dada rubrica escolar, nos seus diferentes temas de ensino, é ordem da progressão do ensino; **d)** as análises de ***exercícios e problemas*** remetem às respostas esperadas pelos professores relativas ao que ensinaram (MORAIS; BERTINI; VALENTE, 2021). Desta forma, esses elementos que possibilitam a caracterizar uma matemática do ensino integram "[...] uma anatomia do saber escolar, em nosso caso, da matemática do ensino" (MORAIS, BERTINI, VALENTE, 2021, p. 18).

Neste sentido, qual a sequência do ensino de multiplicação? Qual a graduação do ensino de multiplicação? Qual o seu significado? Qual a sua graduação no ensino? Quais escolhas o professor fez para obter as respostas de seus alunos aos exercícios e problemas que são propostos após o ensino da multiplicação? Elencando todos os elementos que caracterizam uma matemática do ensino, intenta-se responder a seguinte problemática de pesquisa: **qual *matemática do ensino* de multiplicação para o conjunto dos números naturais foi caracterizada no livro da 1ª série da coleção *Curso Moderno para o Ensino de 1º Grau para o ensino primário*?**

Além de buscar respostas aos questionamentos citados anteriormente, deseja-se mostrar que a matemática do ensino é um saber resultante da produção histórica da cultura escolar em uma época pedagógica e que participa do movimento da profissionalização docente (VALENTE, 2020).

FONTE: A IMPORTÂNCIA PARA A OPERAÇÃO HISTORIOGRÁFICA

As fontes privilegiadas para problematização e a realização da análise, em outras palavras, os livros escolares da coleção *Curso Moderno de Matemática para o Ensino de 1º Grau*, são compostos de dois tipos de livros, um intitulado de *Guia do Professor* e outro, o chamado de *Livro do Aluno*. Como se trata de uma pesquisa no âmbito da História da educação matemática que mobiliza o ferramental teórico de um grupo específico de historiadores culturais, é necessário aproximar-se da compreensão do livro escolar como objeto de pesquisa fruto de uma cultura escolar. Ademais, para este capítulo, restringiu-se às fontes históricas para o livro da 1ª série.

Assim, os livros escolares, a partir da ótica de Choppin (2002), podem ser considerados como fontes privilegiadas para historiadores, seja pela multiplicidade de olhares que se pode lançar em relação às problemáticas, ou ainda, seja pelas articulações entre as prescrições impostas oriundas de programas e os discursos específicos de cada docente em sua sala de aula. As multiplicidades de olhares que lançam aos manuais evidenciam a complexidade de utilizá-los como objeto histórico. Os manuais não podem ser analisados de forma isolada, pois eles contêm funções múltiplas no espaço temporal em que circularam, seja junto dos professores ou dos alunos, ou seja, como os objetivos do seu uso, estudos individuais, preparação de aulas, entre outros (CHOPPIN, 2002).

Neste capítulo, nos interessa não a história de um livro didático, mas sim compreender a matemática do ensino a partir da leitura de um livro que direciona tanto para o ensino quanto para a docência que compõe uma coleção. Logo, este livro é considerado como fonte que possibilita responder a problemática de pesquisa: "Qual *matemática do ensino* de multiplicação para a 1ª série do ensino primário pode ser caracterizada na coleção do GRUEMA – Curso Moderno para o Ensino de 1º Grau para o ensino primário?".

Essa escolha ressalta a afirmação de Choppin (2004) sobre as duas categorias de pesquisas acerca dos livros e edições didáticas: uma concebe o livro como um documento histórico e com o olhar voltado para os conteúdos, outra considera o livro como um objeto físico e coloca o seu olhar para sua materialidade (CHOPPIN, 2004). Assim, o pesquisador deve interrogar os livros didáticos e produzir fatos históricos relativos ao ensino (VALENTE, 2007), especificamente a matemática do ensino de multiplicação no livro que compõe a coleção selecionada.

Como os manuais são produtos de uma época (CHOPPIN, 2002) e a tarefa do historiador da educação matemática é a de produzir fatos históricos relativos ao ensino da matemática a partir de interrogações às fontes em busca de vestígios do passado no presente da pesquisa (VALENTE, 2007), faz-se necessário refletir: *para quem foram indicados estes livros? por que eles foram criados? quem foram os autores e em que lugar social estavam inseridos?*

A coleção "Curso Moderno de Matemática para o Ensino de 1º Grau" foi elaborada pelas educadoras matemáticas Anna Franchi, Anna Averbuch, Franca Cohen Gottilieb, Lucília Bechara e Manhucia Perelberg Liberman, mas a autoria da coleção esteve vinculada ao Grupo de Ensino de Matemática Atualizada (GRUEMA), sob consultoria de Luiz Henrique Jacy Monteiro e publicada pela Companhia Editora Nacional (CEN) (VILELLA, 2009).

A escolha de um livro da coleção para a análise de elementos de uma matemática do ensino de multiplicação se deve pela relevância das autoras na escolarização do Movimento da Matemática Moderna no ensino. E também pelo fato de a coleção ser a mais vendida no período de março de 1972 a agosto de 1980 de acordo com CEN na tese de Vilella (2009), pois foram 1.624.948

(um milhão, seiscentos e vinte e quatro mil, novecentos e quarenta e oito) exemplares publicados no período.

Como o tema de pesquisa deste capítulo é a multiplicação de números no conjunto dos números naturais, identificou-se, nas obras da 1ª, 2ª, 3ª e 4ª séries, orientações que tratam acerca dos números naturais. Doravante, acaba sendo o primeiro contato que os alunos têm nas séries iniciais. Porém, focalizou-se, neste capítulo, a 1ª série em virtude de encontrar os elementos das noções básicas e iniciais para o ensino de multiplicação de números naturais.

Para além das justificativas elencadas anteriormente, deve-se registrar que existem disponíveis no RCD – UFSC tanto o guia do professor quanto o livro do aluno da coleção que foi apresentada conforme quadros a seguir.

Quadro 1 – Guia do Professor.

Coleção	Ano/Volume	Série	Link
Curso Moderno de Matemática para o Ensino de 1º grau	1974, 1º v.	1ª série	https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/208789
Curso Moderno de Matemática para o Ensino de 1º grau	1974, 2º v.	2ª série	https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/208798
Curso Moderno de Matemática para o Ensino de 1º grau	1974, 3º v.	3ª série	https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/208807
Curso Moderno de Matemática para o Ensino de 1º grau	1975, 4º v.	4ª série	https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/208851

Fonte: Elaborado pelos autores.

O guia do professor se difere do livro do aluno apenas nas páginas iniciais das obras. Nestas páginas estão expostas as orientações didático-pedagógicas relativas ao ensino da matemática que os autores propuseram na coleção.

Quadro 2 – Livro do Aluno.

Coleção	Ano/Volume	Série	Link
Curso Moderno de Matemática para o Ensino de 1º grau	1974, 1º v.	1ª série	https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/159255
Curso Moderno de Matemática para o Ensino de 1º grau	1977, 4ª ed. 2º v.	2ª série	https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/178919
Curso Moderno de Matemática para o Ensino de 1º grau	1976, 3ª ed. 3º v.	3ª série	https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/178917
Curso Moderno de Matemática para o Ensino de 1º grau	1979, 6ª ed. 4º v.	4ª série	https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/178918

Fonte: Elaborado pelos autores (2022).

A disponibilidade destas obras no RCD-UFSC facilitou o acesso dos autores às fontes e uma reflexão/problematização acerca de documentos armazenados em repositórios digitais é pertinente.

Através do Quadro 1 e do Quadro 2, é possível inferir que as fontes privilegiadas sofreram transformações em relação ao formato (físico para o digital), assim, podem ser consideradas como arquivos digitais. Domingues e Domingues (2022) afirmam que, no processo de contextualizar e caracterizar uma fonte primária para utilização dessa materialidade digital em uma pesquisa de cunho da História da educação matemática, é possível considerar "[...] um documento arquivístico como relação orgânica, constituído de forma direta pelas práticas pessoais de um sujeito, qualquer materialidade histórica que não seja possível realizar um 'diálogo formativo' para esta conceituação" (DOMINGUES; DOMINGUES, 2022, p. 2). Assim, pode-se afirmar que as fontes elencadas são arquivos digitais.

Neste sentido, a partir do estudo de Domingues e Domingues (2021) e Duranti (1994), infere-se que os documentos armazenados no RCD-UFSC possuem os princípios basilares que compõem os arquivos digitais, a saber: imparcialidade, autenticidade, neutralidade e organicidade.

Nesta direção, a escolha de analisar as orientações didático-pedagógicas para o professor juntamente com o livro do aluno se deve ao fato de que ao ler e discutir Morais, Bertini e Valente (2021) nas reuniões ordinárias do GHEMAT-SC em 2022/01, a maioria dos membros considerou que as análises seriam mais articuladas entre as categorias: **a)** ***graduação***, **b)** ***sequência***, **c)** ***significado***, **d)** ***exercícios e problemas***.

Além da coleção do GRUEMA ter sido bem difundida, as autoras conseguiram adequar e relacionar conceitos matemáticos ao nível escolar proposto em tempos dos preceitos da Matemática Moderna (VILELLA, 2009). Assim, a vaga pedagógica do MMM mediará a análise, sem desconsiderar as exceções que fogem deste movimento.

Adiante, ao apresentar o livro didático selecionado, destacam-se as partes que se referem ao ensino de multiplicação dos números naturais (grifado), no formato de quadros.

Em todos os volumes do guia do professor, nas primeiras páginas, aparecem as orientações preliminares sobre o ensino e, nas seguintes, as atividades sugeridas dos conteúdos que, por sua vez, são iguais às atividades do livro do aluno. A escolha de verificar o livro do aluno juntamente com as orientações de ensino para o professor teve por finalidade buscar indícios de uma matemática do ensino de multiplicação para a 1ª série, caracterizando, assim, a matemática do ensino de multiplicação, pois o que era orientado de forma didático-pedagógica no guia do professor deveria corroborar com aquilo que o aluno teria contato com o seu livro.

No guia do professor direcionado à 1ª série, há, no RCD-UFSC, a edição de 1974, tipo de impressão colorida que contém 120 páginas. No livro do aluno, consta a edição de 1974, impressão colorida e contém 120 páginas.

Quadro 3 – Guia do Professor e Livro do Aluno – 1ª série.

Capa:	Conteúdos abordados:
	• Conceito de número • Relações • Adição • Subtração • Sistema de numeração decimal • Adição e subtração (técnica operatória) • Multiplicação (conceito, fatos fundamentais) • Divisão • Metade, dobro, terça parte, triplo • Cubo, cilindro, esfera

Fonte: Elaborado pelos autores.

No ensino de multiplicação, primeiramente, o aluno deveria ter domínio e assimilação das noções básicas das operações matemáticas de adição e subtração, uma vez que "[...] das páginas 87 a 93 propõe outras situações que conduzem as descobertas dos fatos fundamentais de multiplicação com produto até 20 que devem ser procedidas com atividades concretas" (GRUEMA, 1974, p. 28).

Desta forma, a partir de outras materialidades provindas da cultura escolar, as quais se encontravam imersas no Movimento da Matemática Moderna (graduação), o professor realizava uma apresentação, com materiais palpáveis, para, em seguida, tratar os conceitos semiconcretos[26], para, assim, abordar simplesmente de forma abstrata, como pode ser visto em Bezerra e Quintella (1969), entre outras produções desta vaga em voga, podem ser caracterizados como elementos da marcha do ensino de multiplicação.

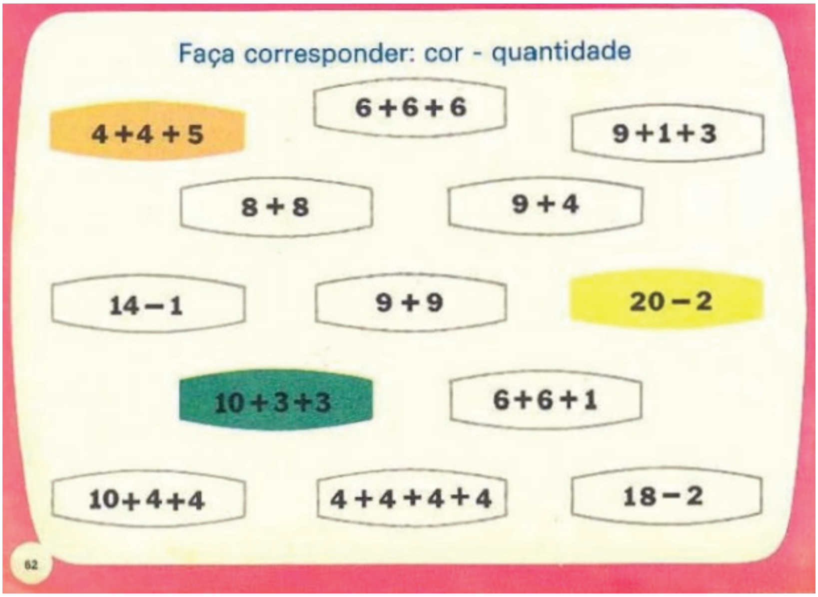
Ademais, pode-se levantar a hipótese de que, para o aluno compreender a multiplicação com a referência dos livros de ensino e docência do GRUEMA, no movimento de entendimento das somas de parcelas, deve ocorrer a apropriação da adição, numa espécie de equivalência[27], por exemplo: "[...] 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 ou 6 *x* 2" (GRUEMA, 1974, p. 28).

Na parte do aluno, ao referir a operação da adição, é possível haver uma indicação futura de equivalência para o uso e operacionalização da multiplicação como demonstra a Figura 1:

26 Semiconcreto é considerado neste capítulo, fundamentado por Bezerra e Quintella (1969), como uma etapa da aprendizagem em que o professor já deveria ter ensinado o concreto a partir de acessórios de ensino, podendo, ser exemplificado através do Blocofração (DOMINGUES, 2022), e depois de haver uma apropriação e assimilação desses saberes, poderia, assim, haver uma abordagem de ensino e aprendizagem numa diretiva ao abstrato. Portanto, a aprendizagem é compreendida em três etapas: (i) concreto; (ii) semiconcreto; e (iii) abstrato.

27 Associar o conceito de multiplicação à adição de parcelas iguais (GRUEMA, 1974, p. 26).

Figura 1 – Equivalência Adição – Multiplicação.



Fonte: GRUEMA, 1974, p. 62.

Atenta-se que o aluno poderia não saber que a soma de parcelas iguais de um número possui uma relação com a multiplicação, mas para a apreensão da multiplicação é necessário saber somar. Por exemplo, 4 + 4 + 5 = 13, pode-se reescrever como a seguinte multiplicação de fatores iguais: 4 *x* 2 + 5 = 8 + 5 = 13.

Dito isso, observou-se, no livro guia do professor os seguintes caminhos para o ensino e aprendizagem de multiplicação: (1) tenha assimilado a operação da adição; (2) trabalhar a equivalência; e, (3) apresentar a noção básica da multiplicação (parcela, produto).

Neste percurso, o livro do GRUEMA também utiliza manipulação e recortes de materiais manipuláveis para a orientação de atividades feitas pelo professor. Por exemplo, as orientações descritas em:

> [...] Novamente será feito um trabalho inicial de com material concreto, especialmente neste capítulo, porque não trataremos aqui de formação dos conceitos mas, sim, do seu uso em situações concretas. O professor solicitará, por exemplo, aos alunos que dividam uma folha ao meio (tomando cuidado para que a folha fique *realmente* dividida ao meio), novamente

> dividam a folha ao meio, e mostrarão então que a folha ficou dividida em quatro partes, dizendo que cada uma das partes se chama *um quarto* (GRUEMA, 1974, p. 30).

Assim, a partir de uma folha A4, é possível identificar elementos fracionários, a saber: unidade, numerador, denominador, com a perspectiva do todo para as partes. Doravante, deve-se ter "cuidado" na escolha de uma figura geométrica em relação à congruência, a fim de que exista uma divisão igualitária, sem desproporcionalidade. "Com a atividade semelhante à descrita [da folha], o professor criará condições para compreensão do dobro e do triplo, mas terá sempre o cuidado de relacionar o dobro com a metade" (GRUEMA, 1974, p. 30).

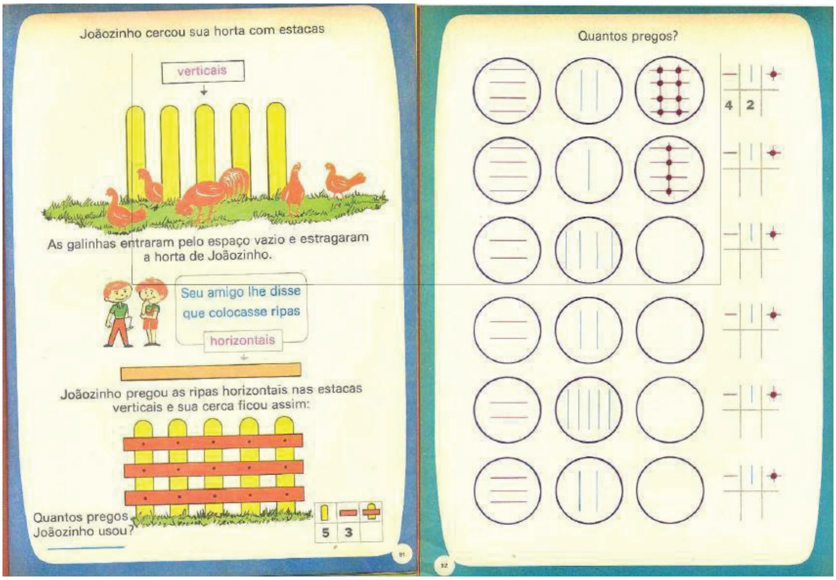
Logo, quando se refere ao dobro, encontra-se ligado à multiplicação com a equivalência da adição. Em contrapartida, quando se refere à metade, apresenta elementos da divisão com equivalência da subtração. Neste texto, a partir do exposto, pode ser visto o significado do ensino da multiplicação. Dessa maneira, infere-se a existência de um emaranhado de aspectos que os autores da produção em análise utilizam para abordagem dos saberes multiplicativos. Assim, levanta-se como hipótese que esse contexto de abordagem apresenta de uma maneira inovadora, uma vez que dialoga com os conceitos fracionários e geométricos para tratar a respeito do ensino de multiplicação.

No livro do aluno, o ensino de multiplicação inicia-se com um movimento intuitivo[28], a partir de elementos provindos do cotidiano do estudante, como é possível encontrar vestígios na Figura 2. Pode-se levantar como um exemplo "concreto", conhecido como um par ordenado, sendo a motivação para o ensino da multiplicação, para depois abordar o abstrato do saber a ensinar em voga.

---

28 Para maiores informações, acessar: OLIVEIRA, Marcus Aldenisson de. **A aritmética escolar e o método intuitivo**: um novo saber para o curso primário (1870-1920). 280 f. 2017. Tese (Doutorado em Ciências) - Programa de Pós-Graduação em Educação e Saúde na Infância e na Adolescência, Universidade Federal de São Paulo/Unifesp, Guarulhos, 2017.

Figura 2 – Ensino de Multiplicação Intuitivo.

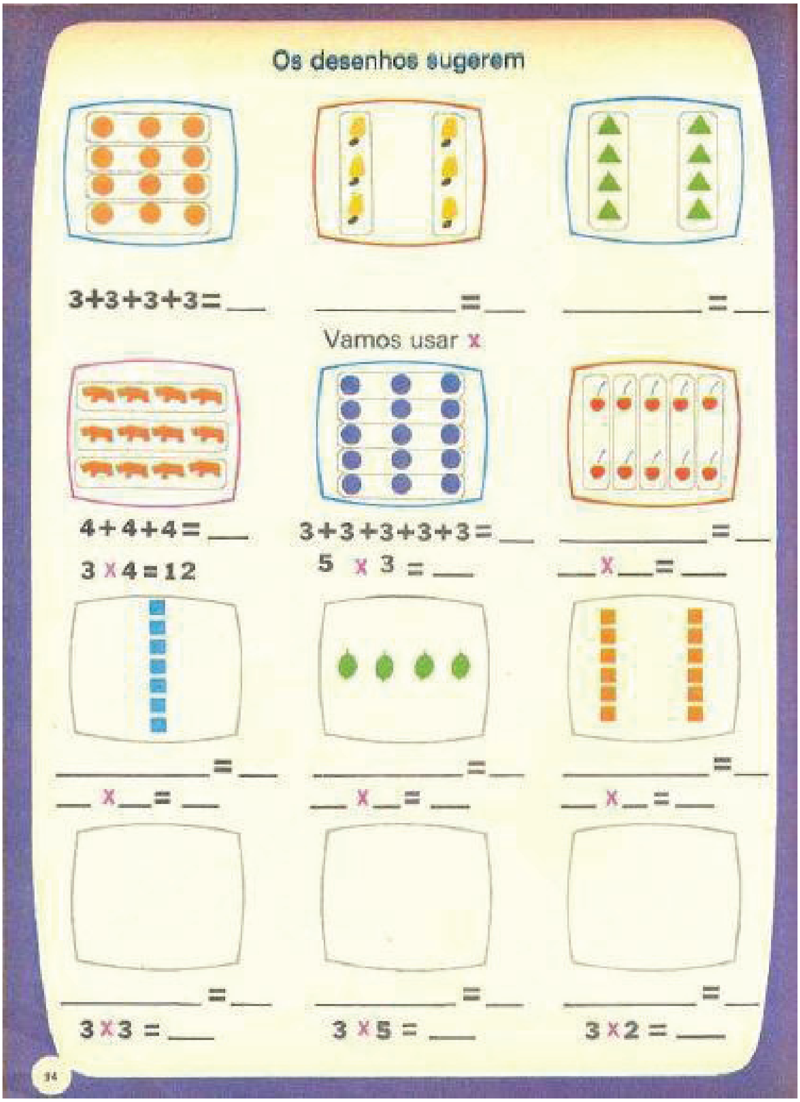


Fonte: GRUEMA, 1974, p. 91-92.

Na Figura 2, a quantidade de ripas horizontais seria a primeira coordenada a ser preenchida, a quantidade de ripas verticais seria a segunda coordenada a ser preenchida e a quantidade de pregos seria a terceira coordenada. Logo, a quantidade de pregos pode ser dada pela multiplicação $5 \ x \ 3 = 15$. Em outras palavras, aos poucos o aluno era levado a desenvolver abstrações a partir do par ordenado em uma situação cotidiana para uma possível noção de multiplicação.

Em seguida, identificam-se expressões numéricas em que é possível recorrer da assimilação da adição para multiplicação. Por isso, levanta-se a hipótese de se trabalhar com duplas – horizontal e vertical, adição e multiplicação. Assim, se considera possível a caracterização de uma sequência do ensino, como demonstra a Figura 3. Logo, o estudante deve ter a compreensão e assimilação da soma entre as parcelas. No exercício a seguir foi inserido pela primeira vez o símbolo de multiplicação.

Figura 3 – Equivalência Adição – Multiplicação.



Fonte: GRUEMA, 1974, p. 94.

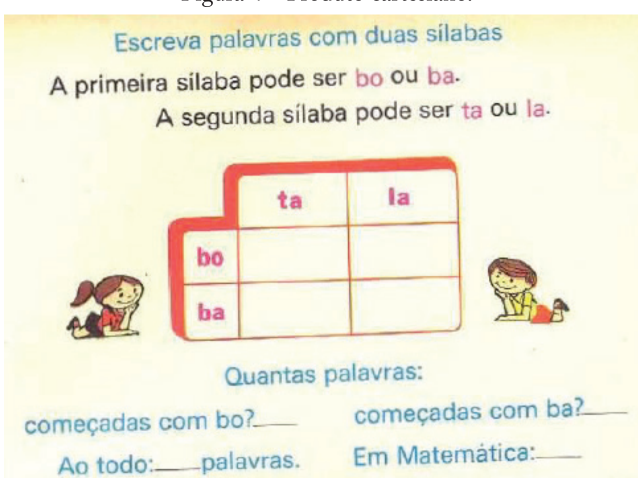
Assim, após a associação dos alunos do conceito de multiplicação à soma de parcelas e ao produto cartesiano, por meio de *exercícios e problemas* do concreto para o abstrato, que a simbologia do conceito de multiplicação seria inserida.

Em relação aos *exercícios*, é possível inferir que existe uma predominância numa perspectiva semiconcreta, tendo em vista que os estudantes deveriam ter realizado o processo de compreensão do saber em questão, ou seja, do ensino de multiplicação, para, assim, posteriormente, ser realizado o processo de verificação de assimilação que seria através de exercícios, os quais eram compostos, por exemplo, de figuras geométricas, para, assim, haver a resolução numa perspectiva do abstrato.

Os *exercícios* para as autoras são aqueles que remetem a comandos: "completar tabelas, sequências e máquinas, descobrir segredos, entre outros" (GRUEMA, 1974, p. 29). Observou-se que uma motivação para o ensino da multiplicação como uma associação de adição de parcelas iguais foi o produto cartesiano[29].

As autoras orientaram que os professores deveriam apresentar situações concretas do conceito de produto cartesiano com objetos do cotidiano da criança: botões, feijões, lápis, talheres, entre outros (GRUEMA, 1974). Os *exercícios e problemas* iniciais começavam com as possibilidades de combinações e finalizam com as árvores de possibilidades.

Figura 4 – Produto cartesiano.



Fonte: GRUEMA, 1974, p. 87.

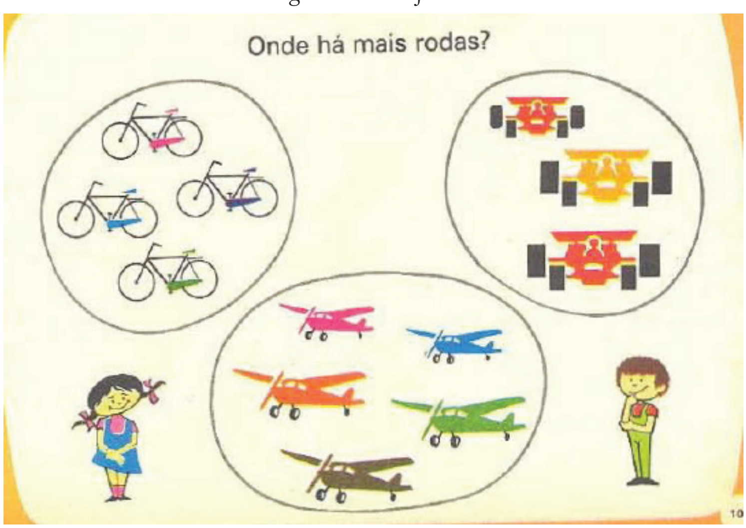
29 Produto cartesiano de dois conjuntos dados – Considere os conjuntos $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{1,2\}$. O produto cartesiano de A por B ($A X B$) é o conjunto de pares ordenados obtidos, tomando um elemento do primeiro conjunto e um do segundo conjunto. Logo, $A X B = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$. O número de pares ordenados é $3 \cdot 2 = 6$ (GRUEMA, 1974).

Apesar de as autoras citarem que a multiplicação no livro seria sugerida de duas formas – produto cartesiano e adição de parcelas iguais, prevalece nos *exercícios e problemas* a segunda opção.

Os *problemas* são as histórias redigidas ou histórias sob a forma de ilustração. As autoras sugeriram que o professor fizesse dramatizações delas na classe ou que elaborasse perguntas que levassem à compreensão do texto (GRUEMA, 1974). Um exemplo seria a história da Figura 2, em que a cerca para proteger a horta das galinhas foi contada.

Nas Figuras 2 e 3, é possível observar que o ensino de multiplicação nos *exercícios e problemas* se dá por separação de objetos em conjuntos. Assim como na figura a seguir, em que, após vários exercícios de assimilação do conceito de multiplicação por adição de parcelas, o aluno estaria apto a abstrair um pouco mais, utilizando da quantidade de elementos específicos nos objetos que por sua vez estão separados em grupos para resolver problemas.

Figura 5 – Conjuntos.



Fonte: GRUEMA, 1974, p. 101.

Para finalizar o rol de exercícios e problemas para o ensino de multiplicação, o aluno deveria conseguir completar a tábua de multiplicação conforme a figura a seguir.

Figura 6 – Tábua de operações.

Fonte: GRUEMA, 1974, p. 102.

Percebe-se que os preceitos do MMM estiveram presentes nos *exercícios e problemas* para o ensino de multiplicação: adição de parcelas por meio de conjuntos e sua equivalência com o conceito de multiplicação, produto cartesiano, símbolo da multiplicação e sua equivalência com o conceito de multiplicação, as tábuas de operações, assim como operações aritméticas representando o ensino de multiplicação por meio de estruturas.

Em síntese, a partir dos elementos que constituem uma matemática do ensino de multiplicação do livro da 1ª série do ensino primário que compõe a coleção do GRUEMA, recorreu-se tanto às orientações para o professor quanto ao livro do aluno e identificou-se, como *graduação do ensino*, as seguintes estratégias: primeiramente, o discente deveria realizar a assimilação da operação de adição e, em seguida, trabalhar a equivalência das demais operações com a multiplicação para, assim, haver a exposição de elementos basilares do ensino de multiplicação, a saber: parcela e produto cartesiano.

Em relação à *sequência*, identifica-se uma ordem, com a proposta de ensino que ocorria especificamente na aprendizagem da soma e da subtração com o intuito de haver a assimilação dos conceitos, intercala-se com as técnicas operatórias para haver, assim, um direcionamento para o ensino de multiplicação com os seus respectivos conceitos e fatos fundamentais. Porém, observou-se a necessidade da apresentação do ensino da divisão, uma vez que ocorreu a relação de igualdade e equivalência, por exemplo quando se ensina, meio, metade, terça parte e triplo.

Aponta-se, em relação ao *significado*, a evidência de que há a presença da relação de equivalência, a qual encontra-se presente nas operações matemáticas, a saber, adição e subtração. Essa premissa pode ser compreendida a partir dos desenhos dos exercícios, os quais possibilitam a identificação de uma relação de equivalência da operação de multiplicação com o par ordenado, em que o primeiro fator seria a reta horizontal, e o segundo fator, a reta vertical (vide Figura 2).

Nos *exercícios* e *problemas*, evidenciou-se a ligação entre o significado de multiplicação com relação à equivalência, pois o visual e o algébrico sempre são utilizados e, vistos de outra forma, poderiam ser interpretados como a parte algébrica (estruturas) e a visual (conjuntos), como pode ser visto em França (2012), que esses dois aspectos, estruturas e conjuntos, são elementos basilares que caracterizam a seguinte vaga pedagógica: Movimento da Matemática Moderna.

O presente capítulo teve como objetivo caracterizar uma matemática do ensino de multiplicação no livro da 1ª série da coleção de livros didáticos: Curso Moderno de Matemática para o Ensino de 1º grau para o ensino primário. Cabe salientar a relevância da obra analisada: em que as autoras destacaram não se tratar de um material improvisado ou compilado, e sim, dos resultados de um "trabalho de campo" de 10 anos de pesquisa no cotidiano do ensino da Matemática (GRUEMA, 1974). Conforme demonstrado no texto, os elementos de uma matemática do ensino de multiplicação para o conjunto dos números naturais foram teorizados, por meio do livro da 1ª série da coleção. Cabe em pesquisas futuras um olhar para os outros livros dessa coleção com o objetivo de analisar os distanciamentos e aproximações dos elementos de uma matemática do ensino de multiplicação para o ensino primário em tempos de MMM.

Referências

BERTINI, L. F.; MORAIS, R. S.; VALENTE, W. R. **A matemática a e a matemática para ensinar**: novos estudos sobre a formação de professores. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2017.

BEZERRA, M. J.; QUINTELLA, A. **Iniciando a Matemática Moderna - Vol. 2**. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1969.

BORER, V. R. Saberes: uma questão crucial para a institucionalização da formação de professores. *In*: Hoffstetter, Rita; VALENTE, Wagner Rodrigues. (Orgs.). **Saberes**

em (trans) formação: tema central da formação de professores. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2017.

CHOPPIN, A. História dos Livros e das Edições Didáticas: sobre o Estado da Arte. **Educação e Pesquisa**, São Paulo, Faculdade de Educação/USP, v. 30, n. 3, p. 549-566, set./dez. 2004.

CHOPPIN, A. O historiador e o livro escolar. **História da Educação**, Pelotas, v. 6, n. 11, p. 5-24, 2002.

DOMINGUES, J. M. **Os saberes matemáticos sistematizados por Manoel Jairo Bezerra no acessório de ensino Blocofração, 1950-1970**. 117f. 2022. Dissertação (Mestrado em Educação Científica e Tecnológica) – Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2022.

DOMINGUES, D.; DOMINGUES, J. Arquivos digitais: contribuições para o campo da história da educação matemática. **ACERVO - Boletim do Centro de Documentação do GHEMAT-SP**, v. 4, p. 1-15, 2 mar. 2022.

DUARTE, A. R. S. D. et al. A Matemática Moderna para Crianças. In: OLIVEIRA, M. C. A.; SILVA, M. C. L.; VALENTE, W. R (org.). **O Movimento da Matemática Moderna:** história de uma revolução curricular. 1ed. Editora UFJF, 2011, 121-136.

DURANTI, L. Registros documentais contemporâneos. **Estudos históricos**, Rio de Janeiro, v. 7, n. 13, p. 50-64, 1994.

FRANÇA, D. M. A. **Do primário ao primeiro grau**: as transformações da matemática nas orientações das Secretarias de Educação de São Paulo (1961 - 1979). 294 f. 2012. Tese (Doutorado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2012.

GRUEMA, Grupo de Ensino de Matemática Atualizada. **Curso moderno de matemática para o ensino de 1º grau.** São Paulo: Editora Nacional, v. 1, 1974.

MORAIS, R.S.; BERTINI, F.; VALENTE, W. R. **A matemática do ensino de frações: do século XIX à BNCC.** São Paulo: Editora Livraria da Física, 2021.

VALENTE, W. R. História da Educação Matemática: interrogações metodológicas. **Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. V2, p. 28-49, 2007.

VALENTE, W. R. História e Cultura em Educação Matemática: a produção da matemática do ensino. **Rematec**. V. 15, n. 36, 2020

VILLELA, L. M. A. **“GRUEMA”**: uma contribuição para a história da educação matemática no Brasil. 2009. 223 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) — Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo, 2009.

ANEXOS

Para a 2ª série, o Guia do Professor disponível no RCD-UFSC é de 1974, impressão colorida e contém 135 páginas. O Livro do Aluno é de 1977, impressão colorida e contém 135 páginas.

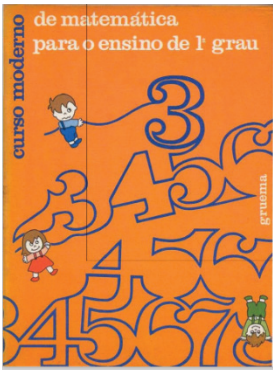
Quadro 4 – Guia do Professor e Livro do Aluno – 2ª série.

Capa:	Conteúdos abordados:
	• Fatos fundamentais da adição, subtração, multiplicação e divisão • Soma de três parcelas • Adição e subtração de números menores que 100 • Sistema de numeração: introdução de centena • Adição e subtração com números menores que 1000 • Geometria: curvas e regiões • Divisão: quociente e resto • Segmento de reta: medida • Frações

Fonte: Elaborado pelos autores.

Na 3ª série, o Guia do Professor disponível no RCD-UFSC é de 1974, impressão colorida e contém 169 páginas. O Livro do Aluno é de 1976, impressão colorida e contém 171 páginas.

Quadro 5 – Guia do Professor e Livro do Aluno – 3ª série.

<table>
<tr>
<td>Capa:

</td>
<td>Conteúdos abordados:
• Representação decimal de números naturais
• Adição e subtração de números naturais
• Multiplicação com números naturais
• Divisão com números naturais
• Geometria
• Relações: ser múltiplo, ser fator, ser divisor, ser igual, ser menor, ser maior, gráfico cartesiano
• Representação dos números racionais sob forma de fração: comparação, adição, subtração
• Representação decimal dos números racionais: comparação, adição, subtração
• Medidas de comprimento, massa e capacidade: escala</td>
</tr>
</table>

Fonte: Elaborado pelos autores.

Por fim, na 4ª série, o Guia do Professor disponível no RCD-UFSC é de 1975, impressão colorida e contém 161 páginas. O Livro do Aluno é de 1979, impressão colorida e contém 161 páginas.

Quadro 6 – Guia do Professor e Livro do Aluno – 4ª série.

<table>
<tr>
<td>Capa:

</td>
<td>Conteúdos abordados:
• Representação decimal dos números naturais
• Operações com números naturais
• Conjuntos: fatores e divisores
• Geometria
• Números racionais: equivalência e ordem, adição e subtração
• Multiplicação e divisão de números racionais
• Porcentagem
• Medida: Sistema legal de unidades de medida (medida de tempo e de superfície)</td>
</tr>
</table>

Fonte: Elaborado pelos autores.

MATEMÁTICA DO ENSINO DE POLÍGONOS: em tempos de Pedagogia Moderna (década de 1930)

Anieli Joana de Godoi [30]
Cintia Schneider[31]
Robert Rene Michel Junior[32]

CONSIDERAÇÕES INICIAIS

O objetivo deste capítulo é caracterizar uma matemática do ensino de geometria, mais especificamente, do ensino de polígonos regulares, em tempos de Pedagogia Moderna. Para isso, tomam-se como fontes históricas três manuais escolares[33] da década de 1930. Inicialmente, o manual espanhol *Psicogeometria* (1934), de autoria de Maria Montessori, que será utilizado com o intuito de compreender possíveis reverberações das categorias da matemática do ensino (a saber: significado, sequência, graduação, exercícios e problemas) e em seguida análises similares serão realizadas em dois manuais brasileiros, *Noções de Geometria Prática* (1937) de Olavo Freire e Manual do

30 Doutoranda no Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica (PPGECT), da Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC). Mestra pelo mesmo programa. Licenciada em Matemática - UFSC. E-mail: anieligodoi@gmail.com.

31 Doutoranda no Programa de Pós-graduação em Educação Científica e Tecnológica (PPGECT), da Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC). Mestra pelo mesmo programa. Licenciada em Matemática – IFC – Campus Concórdia. E-mail: cintia.schneider1995@gmail.com.

32 Doutorando no Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica (PPGECT), da Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC). Mestre em Educação Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora (PPGEM-UFJF). Licenciado em Matemática pela Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro UFRRJ. E-mail: robertrene15@hotmail.com.

33 Silva define os manuais pedagógicos como "[...] são assim denominados por terem sido escritos a fim de desenvolverem os temas previstos para o ensino de disciplinas profissionalizantes dos currículos de instituições de formação docente, no caso, aquelas diretamente relacionadas com questões educacionais, a saber, a pedagogia, a didática, a metodologia e a prática de ensino" (SILVA, 2003, p. 30).

Ensino Primário (1939) de Miguel Milano. No quadro a seguir, seguem informações relativas ao material empírico citado:

Quadro 1 – Material empírico.

Livro/Manual/Autor	Ano/Edição	Série	Link
Psicogeometria, Maria Montessori	1934, 1ª ed.	Manual didático	https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/159258
Noções de Geometria Prática, Olavo Freire	1937, 38ª ed	Manual pedagógico	https://repositorio.ufsc.br/xmlui/handle/123456789/163587
Manual do Ensino Primário, Miguel Milano	1939, 2ª ed.	4º ano	https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/160599

Fonte: Elaborado pelos autores.

Nesta perspectiva, busca-se responder a pergunta: Como se caracteriza uma matemática do ensino de polígonos em manuais pedagógicos que circularam no Brasil na década de 1930?

Considerando o objetivo citado, indica-se que o conceito de matemática do ensino trata de uma matemática elaborada com a finalidade da docência e engloba as noções de *matemática a ensinar* e *matemática para ensinar* (FERREIRA, 2022). Os pesquisadores do GHEMAT–Brasil tem atuado fortemente com este referencial teórico que considera a matemática do ensino resultante de processos advindos da cultura escolar (JULIA, 2001).

Psicogeometria de Maria Montessori

Como dito, este capítulo irá se basear, inicialmente, na primeira edição do manual escolar *Psicogeometria*, datado de 1934, de autoria de Maria Montessori (1870 - 1952). Antes, porém, faz-se necessário expor alguns fatos sobre a autora, visto sua relevância no cenário educacional.

Montessori é uma das representantes com maior destaque do Movimento Internacional da Escola Nova[34]. Esse Movimento buscava a renovação do

34 Para maiores informações sobre Maria Montessori e seu legado, sugere-se a leitura da tese de Rezende (2021), disponível em https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/227665

ensino, até então respaldado exclusivamente em meios estritamente tradicionais. Dentre os preceitos deste movimento, destaca-se:

> A Escola Nova concebe a aprendizagem como um processo de aquisição individual, segundo condições personalíssimas de cada discípulo. Os alunos são levados a aprender observando, pesquisando, perguntando, trabalhando, construindo, pensando e resolvendo situações problemáticas que lhes sejam apresentadas, quer em relação a um ambiente de coisas, de objetos e ações práticas, quer em situações de sentido social e moral, mediante ações simbólicas (LOURENÇO FILHO, 1978, p. 151).

O movimento buscava renovar o ensino, que seria o elemento que permitiria construir uma sociedade democrática. Para isso, as propostas de ensino eram renovadoras no sentido de propor um ensino ativo, em que o aluno fosse o sujeito central e o professor seria um estimulador da aprendizagem (MONARCHA, 2009; SAVIANI, 1995).

Voltando à figura de Maria Montessori, pontua-se que ela foi doutora em medicina, sendo uma das primeiras mulheres italianas a dedicar-se aos estudos desse campo e, em 1896, foi a primeira mulher italiana a obter o grau de Doutora em Medicina pela Universidade de Roma (REZENDE, 2021).

Pereira (2014, p. 13) afirma que "Uma das bases do movimento da Escola Nova, igualmente como os da pedagogia montessoriana, é de que todo conhecimento autêntico vem da experiência, assim como de uma base científica sólida, desde a primeira infância", e, ainda, que "Essa experiência acontece a partir do contato da criança com o ambiente, onde ela possa explorá-lo de forma livre e segura".

De acordo com Cavalheiro e Teive (2013), a pedagogia montessoriana é considerada, no ideário escolanovista, o ponto mais alto de valorização da criança, visto que Montessori teve o cuidado de criar um ambiente que fosse favorável às necessidades – tanto físicas quanto psíquicas das crianças. Pereira (2014) complementa que foi com essa professora que surgiram as preocupações com relação à mobília escolar e sua organização, tais como tamanho de cadeiras, mesas e materiais manipuláveis. Para ela, o ambiente é parte integrante da aprendizagem.

Rezende (2021) situa que logo após se formar em medicina, Montessori se manteve na mesma universidade, mais especificamente em um programa de pesquisa de tratamento para crianças consideradas anormais[35], no qual ela iniciou o desenvolvimento de trabalho voluntário em uma clínica psiquiátrica. Nesse local, Montessori observou que não havia nenhum tipo de estimulação para estas crianças, o que contribuía para as situações de doenças nas quais se encontravam.

Com essa primeira experiência, Montessori baseou-se nos materiais criados por Edouard Séquin[36], que defendia o tratamento de cada criança como um ser individual, e os organizou. Além disso, Montessori passou a participar de cursos de pedagogia e se aprimorar em teorias educacionais, tais como as de Pestalozzi, Froebel e Rousseau. Rezende (2021, p. 24) aponta que, desta forma, se deu:

> [...] início a um deslocamento de áreas de conhecimento do campo médico para o pedagógico no início do século XIX e XX que, posteriormente, caracterizou a área da Educação Especial. Era uma vertente médico-pedagógica que partia do conhecimento da medicina para procurar respostas aos desafios apresentados no campo educacional e que tinha como base procedimentos experimentais, do mesmo modo, pode-se pensar numa vertente que buscava respostas na educação para os problemas patológicos (REZENDE, 2021, p. 24).

Foi em 1899 que Montessori teve sua carreira profissional, de fato, alterada de médica para professora, visto ter sido nesta época que começou a ministrar palestras e assumiu a cadeira de Antropologia da Escola Ortofênica de Roma, na qual também foi nomeada vice-diretora e teve a oportunidade de colocar em prática suas teorias e experienciar seus materiais. Foi com base nessa experiência que oito anos depois ela "[...] fundou, na Itália, a Casa dei

35 Ao contexto da época, anormais eram as crianças internadas em clínicas psiquiátricas com problemas de desenvolvimento cognitivo e, também, com deficiências físicas (amputação de membros, dificuldades de mobilidade etc.) (REZENDE, 2021).

36 Edouard Séquin (1812 – 1880) foi neurologista americano e professor do College of Physicians and Surgeons em Nova York. Para Séguin a educação deveria considerar a pessoa integralmente, em seus aspectos físicos, psicológicos, funções, interesses, sentimentos, experiência e atividade física (TEZZARI, 2010).

Bambini, em que o ensino era baseado na liberdade da criança, considerando-a como um ser ativo da aprendizagem" (REZENDE, 2021, p. 24-25).

> No ano seguinte, 1916, em um curso internacional, realizado em Barcelona, foram apresentados os materiais desenvolvidos durante cinco anos para o ensino de crianças de seis a doze anos, com aprofundamento para as áreas de Gramática, Geometria e Aritmética. Posteriormente, em 1934, Montessori conseguiu apoio, em Barcelona, para publicar três obras em espanhol: Psicoaritmética, Psicogeometria e Psicogramática (REZENDE, 2021, p. 27).

Com o tempo, Montessori ganhou notoriedade e seus livros foram amplamente divulgados, inclusive chegando a marcos imponentes. Em 1934, com auxílio do governo espanhol, Montessori publicou os três livros, citados anteriormente, que compuseram a chamada psicodidática montessoriana, que tratava do uso dos materiais didáticos e aspectos relacionados a meios em que se efetivava a aprendizagem dos alunos (REZENDE, 2021). Os próprios nomes das obras foram um diferencial, visto que na época eram recorrentes denominações como "Introdução à Geometria", "Estudo"/"Noção"/"Compêndio de Geometria"… (SILVA, 2021). Montessori explica que o prefixo Psico referia-se ao estudo (MONTESSORI, 1934) baseado na psicologia infantil.

Estes livros, *Psicoaritmética*, *Psicogeometria* e *Psicogramática* possuem sua relevância reforçada pelo fato de serem divulgados antes mesmo de serem publicados. Essa afirmação é embasada em um artigo na *Revista The New Era*[37], mais especificamente no número especial sobre ensino de matemática de 1934. Foi Ana Maria Maccheroni[38] a responsável por divulgar o método Montessori neste número da revista[39] e além disso ela citou dois livros de Montessori que seriam publicados naquele ano. Rabelo (2019) infere que os livros tratados naquele artigo seriam dois entre os três *Psicogeometria*, *Psicoaritmética* e *Psicogramática*, todos publicados em 1934. Isso reforça a intenção montessoriana

37 A principal revista associada à New Education Fellowship, sociedade criada em 1921 com prerrogativa de divulgar pressupostos do Movimento da Escola Nova pelo mundo.

38 Sobre Anna Maria Maccheroni, a própria TNE (1934, p. 6) indica que ela foi "Uma das primeiras professoras italianas a ser treinada pela Dra. Montessori. Ela foi diretora de várias das famosas escolas Montessori e é ela quem mais colaborou com Dra. Montessori".

39 MACCHERONI, A. M. Mathematics and the Montessori method. *The New Era*, Londres, v. 15, n. 1, p. 8-11, jan. 1934.

e de seus seguidores de divulgar os manuais para além do país de publicação deles e até mesmo antes da sua materialização física.

Neste capítulo, será dada ênfase ao livro *Psicogeometria*, datado de 1934, que possui grande importância no campo educacional, além de ser a única obra de Montessori exclusivamente destinada ao ensino de geometria (SILVA, 2021). A importância desse manual também é justificada por ele ainda ser traduzido na atualidade e em pelo menos seis línguas diferentes, como por exemplo, em 2019 foi traduzido para o russo e em 2012 para alemão e italiano. Silva argumenta que

> Considerando o número de traduções dessa obra e, ainda, o quão recente elas são, levantamos a hipótese de que tais reedições possam ter sido feitas não apenas para servir de fontes a pesquisadores da História da Educação Matemática, mas também porque esse livro didático poderia ser utilizado no ensino da geometria na atualidade (SILVA, 2021, p. 15).

Silva (2021, p. 143), referindo-se à relevância e inovação do manual Psicogeometria na época de sua publicação, cita que

> Atualmente, as recentes pesquisas em neurociência, que estudam o funcionamento do cérebro, confirmam o que Montessori há quase 100 anos atrás defendia com tanto entusiasmo[40]. Isso explica talvez a disposição de pesquisadores em lançar um olhar para o livro Psico Geometria de Montessori e o interesse dos editores nas traduções para outras línguas, desde a década de 2010.

O livro *Psicogeometria* é um material empírico muito profícuo para pesquisas sobre o ensino de geometria em perspectivas históricas, todavia, neste capítulo, será dada ênfase na relação entre a matemática do ensino e os polígonos regulares no período pré-elementar. Apesar de não encontrar evidências sobre seu uso de forma direta no Brasil, destaca-se que os preceitos montessorianos

40 Refere-se à ideia de que mente passiva que não é desafiada se mantém fechada. Além de que, "As intuições de Montessori quanto ao funcionamento do cérebro podem ser confirmadas pelas modernas pesquisas em neurociência. A proposta de uso de material didático adequado e de atividades motivadas pelo interesse ativam a mente e podem promover não só a descoberta de resultados geométricos como também estimular o fortalecimento das funções cerebrais" (SILVA, 2021, p. 144).

foram e ainda são presentes na realidade brasileira. Campos (2017) pontua que a primeira escola montessoriana no Brasil foi a Casa da Infância em 1915 em São Paulo e até hoje há diversas escolas que seguem seus preceitos, como pode ser verificado no mapa disponível no site do Lar Montessori.

Figura 1 – Mapa das escolas montessorianas no Brasil.

Fonte: <https://larmontessori.com/mapa-montessori/>. Acesso em 22 abr. 2022.

Assim, e considerando que Montessori foi figura de discussões sobre a modernização do ensino no Brasil, presume-se a circulação das ideias do manual *Psicogeometria* no território brasileiro.

Psicogeometria é composto por 264 páginas, subdivididas em sete capítulos. No início do manual, a autora (1934) pontua que um dos principais problemas do ensino de geometria era o ensejo do professor de que a criança alcançasse rapidamente uma abstração matemática por meio da memorização, sem considerar a vontade da criança em aprender. Silva (2021) cita que a autora, ao mesmo tempo que critica o ensino tradicional, orienta os professores e pais na condução de um ensino infantil em que a criança, por meio da autoeducação, realizado a partir do desenvolvimento de atividades manipulativas, consiga alcançar saberes geométricos – pela intuição e pela atividade (SILVA, 2021).

Dessa forma, Montessori (1934) enaltece o quão é imprescindível que o professor desperte o desejo e o interesse do aluno pela aprendizagem, visto que, se caso isso não ocorrer, o aluno poderia até compreender o que lhe foi repassado, todavia, com o tempo, os conceitos serão deixados de lado. Nesse sentido, Montessori (1934) evidencia a importância de seus estudos sobre uma nova organização para o ensino de geometria, em que é dada ênfase aos seus materiais denominados "Moldes Geométricos". A autora frisa que toda criança possui algumas experiências com objetos em seu cotidiano e sendo assim deve-se permitir que elas estabeleçam relações com as formas geométricas, sem partir de definições.

Retornando ao objetivo central e à notoriedade montessoriana, trabalhar-se-á com o tópico destinado ao período pré-elementar, também definido como infantil pela autora – corresponde dos 4 aos 6 anos de idade – e o ensino de polígonos. Neste material serão estudadas as quatro categorias da matemática do ensino, a saber: significado, sequência, graduação e exercícios e problemas.

Inicia-se com a categoria *significado*, neste caso dos polígonos na obra *Psicogeometria*. Montessori (1934) os define como figuras formadas por muitos lados. E como pode ser verificado na imagem a seguir, o termo "muitos" refere-se a cinco ou mais lados, sendo assim triângulos e quadriláteros não são considerados polígonos por ela.

Figura 2 – Significado de polígonos.

POLIGONOS

Una figura constituída por muchos lados se llama *Polígono*.
Son polígonos :

el pentágono	—	que tiene	cinco	lados.
el exágono	—	,,	seis	,,
el heptágono	—	,,	siete	,,
el octógono	—	,,	ocho	,,
el eneágono	—	,,	nueve	,,
el decágono	—	,,	diez	,,

El conjunto de líneas que constituyen el contorno de un polígono se llama *perímetro*.

Las varias líneas que lo constituyen se llaman *lados* del polígono ; lados del exágono, del octógono, del decágono, etc. Para el estudio de los polígonos se utilizarán los moldes geométricos.

Fonte: Montessori (1934, p. 57).

O que se percebe é um destaque dado aos triângulos e quadriláteros ao distingui-los dos polígonos e isso pode ser justificado pelo momento histórico vivido no ano de publicação do manual – *Movimento da Escola Nova* – e inclusive pelos próprios preceitos defendidos por Montessori de que o aprendizado ocorre através de processos espontâneos advindos das experiências do ambiente e dos materiais, os triângulos e quadriláteros seriam figuras facilmente visualizadas no cotidiano, e consequentemente, relacionadas às experiências dos alunos.

Mas por que os triângulos e quadriláteros são apresentados antes mesmo de um conceito formal de polígonos regulares? Nossa suposição é de que de acordo com a concepção analítica estudam-se os elementos para depois avançar nos conceitos e considerando que todo polígono pode ser decomposto em triângulos, primeiro explora-se este tema para depois ampliar os estudos no que concerne aos polígonos.

Visto que a construção de polígonos inscritos pode ser feita a partir de pontos da circunferência e um polígono é dito inscrito em uma circunferência quando todos os seus vértices são pontos pertencentes a ela. Assim, tratam-se dos polígonos regulares.

Para além da definição, percebe-se que o *significado* para Montessori privilegia o trabalho manipulativo na construção dos polígonos, a partir de jogos de encaixe, objetivando o desenvolvimento da noção de espaço.

A segunda categoria é a da sequência, que é o lugar ocupado por determinado objeto no conjunto dos temas da geometria (MORAIS; BERTINI; VALENTE, 2021, p. 18). Desta forma, verifica-se que em *Psicogeometria* (1934), a sequência abordada no período elementar inicia com sugestões de materiais de encaixes que instiguem os alunos a compreenderem proximidades e diferenças entre figuras geométricas. Montessori (1934) sugere, a partir de seus estudos e materiais concretos, que inicialmente desenvolvam-se aspectos sensoriais nas crianças, isso com o manuseio de peças de encaixe - com a ideia dos baixos relevos –, bem como exploração dos contornos dos objetos com os olhos vendados, visto que a proposta é "Oferecemos só objetos materiais, figuras geométricas relacionadas entre si, figuras plásticas e manejáveis capazes de demonstrar e revelar, com sua aproximação, com a comparação entre elas, relações evidentes" (MONTESSORI, 1934, p. 64).

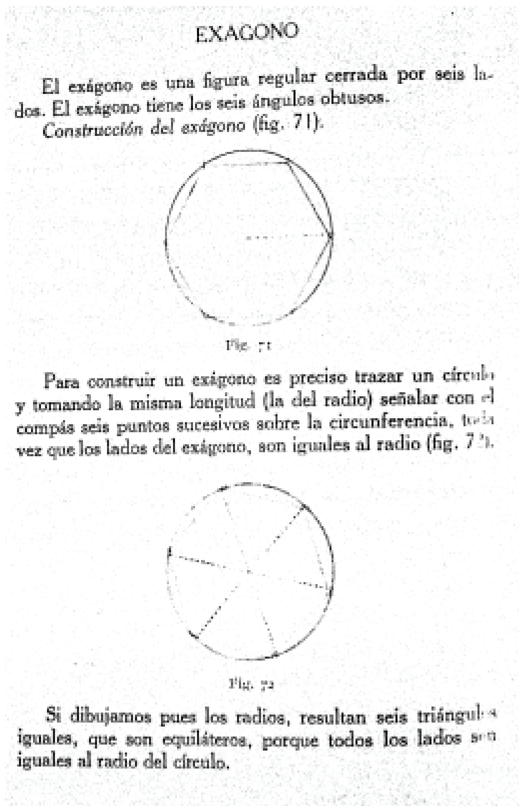
Na manipulação destes materiais, as crianças estabeleceriam relações sobre lados, ângulos e comparações entre as formas, sendo que só após esse processo as nomenclaturas das formas deveriam ser apresentadas aos alunos.

Não obstante, Montessori (1934) cita o trabalho com "Desenhos geométricos decorativos", que trata de um jogo em que os alunos iriam manipular figuras em relevo, além de desenhá-las. A autora (1934) pontua que estas atividades são muito importantes para os alunos, que mesmo sem nomear as figuras e os elementos, familiarizem-se com todo este processo. Nessa perspectiva, as figuras estariam associadas às questões estéticas e de simetria, com isso fazendo relação com os polígonos regulares, além de tornar-se uma preparação para o momento que estas figuras e esses elementos receberão denominações e conceituações próprias.

No último item que antecede o ensino formal dos elementos geométricos, é dada ênfase ao quadrado. Isso com o trabalho com a quadratura do papel, Montessori sugere que sejam desenhados diferentes composições envolvendo quadrados e, assim, de forma indireta, o aluno já estaria se aproximando de conceituações de ângulos, equidistância, diagonais, dentre outros.

Depreende-se que apesar de Montessori definir os polígonos como figuras com cinco ou mais lados, ela tratou dos hexágonos (figura de seis lados) antes mesmo de apresentar esta definição, o que se justifica pelo fato dos hexágonos serem relacionados com os círculos, por serem inscritos nestes.

Figura 4 – Hexágono.



EXAGONO

El exágono es una figura regular cerrada por seis lados. El exágono tiene los seis ángulos obtusos.

Construcción del exágono (fig. 71).

Fig. 71

Para construir un exágono es preciso trazar un círculo y tomando la misma longitud (la del radio) señalar con el compás seis puntos sucesivos sobre la circunferencia, toda vez que los lados del exágono, son iguales al radio (fig. 72).

Fig. 72

Si dibujamos pues los radios, resultan seis triángulos iguales, que son equiláteros, porque todos los lados son iguales al radio del círculo.

Fonte: Montessori (1934, p. 57).

Aproveita-se para citar que essa passagem sobre polígonos no período pré-elementar do manual de Montessori é a única a citar a circunscrição, porém sem denominá-la dessa forma. O objetivo principal foi enaltecer que o hexágono regular é uma figura que pode ser construída a partir do círculo.

Após a compreensão ampla sobre geometria com a experimentação, manipulação dos materiais e produção de desenhos, inicia-se o ensino com as nomenclaturas dos termos. A princípio trabalham-se linhas (paralelas e perpendiculares) e ângulos, triângulos, quadrados, retângulos, paralelogramos, lados paralelos, trapézios, círculo, hexágono e, por fim, são trabalhados os polígonos. Ou seja, de acordo com Montessori, nesta obra, para efetivar a compreensão sobre polígonos, torna-se necessário o conhecimento sobre os temas anteriormente elencados, inclusive de figuras geométricas compostas por 3 e 4 lados.

É nítida a organização montessoriana em trabalhar inicialmente de forma lúdica, envolvendo manipulação de materiais, jogos e desenhos para depois avançar para o ensino mais formalizado. Ao objetivar ensinar aos alunos as nomenclaturas e classificações, Montessori (1934) prioriza iniciar com elementos primários, tais como linhas e ângulos, para depois avançar para o estudo das figuras geométricas, evidenciando um ensino das partes para o todo.

Além disso, o conteúdo de polígonos é o último do período pré-elementar. Aparentemente esta organização foi pensada para servir como uma continuidade ao período elementar, que é definido como "um período mais avançado" (MONTESSORI, 1934, p. 63). Presume-se isso, pois no período elementar não há retomada de definições de polígonos, nem mesmo de quadrados e triângulos. O estudo inicia com aprofundamentos relacionados principalmente aos triângulos.

Da mesma forma, percebe-se que a ênfase dada aos triângulos e quadriláteros foi em razão do espaço que essas figuras receberam no período elementar, visto que possuem tópicos exclusivos para seus estudos. E no caso especial dos triângulos, Montessori baseia-se neles para o trabalho com círculos (frações do círculo), trapézios, pentágonos e hexágonos.

Dando prosseguimento às categorias de análise da matemática do ensino, trata-se da *graduação* que se refere à organização interna do conteúdo de polígonos, ou seja, de que forma os itens relacionados a este conteúdo central são ordenados no manual. E ao realizar esta análise, percebe-se que Montessori (1934), para o período pré-elementar, foi bem sucinta e apresentou a definição de polígonos, seis exemplos com suas respectivas nomenclaturas e indica a definição de perímetro como o contorno dos polígonos. Justifica-se esta rápida exposição da autora, pois nas páginas anteriores, ao tratar das manipulações e desenhos, Montessori já trabalhava com os conceitos de polígonos e esta parte que recebe o título de polígonos seria o fechamento, enfatizando as nomenclaturas e definições.

A última categoria proposta na matemática do ensino de polígonos são os *exercícios e problemas*, todavia, em *Psicogeometria* não há a presença desta categoria de forma direta, sendo a ênfase da autora em explanações teóricas e ilustrações do tema. Isso se justifica pelo fato do exemplar analisado ser um manual para professor e desta forma, infere-se que cabia ao professor buscar ou produzir os exercícios e problemas. Todavia, finalizar a análise desta categoria de tal forma seria uma análise extremamente superficial, por isso pontua-se que a proposição de Montessori (1934) para o ensino de polígonos também dispensa a necessidade de exercícios e problemas que privilegiam a fixação de conteúdos, visto que sua abordagem enaltece o uso de atividades de manipulação e desenhos. Dessa forma, os exercícios e problemas poderiam ser caracterizados como indicação de atividades sensoriais.

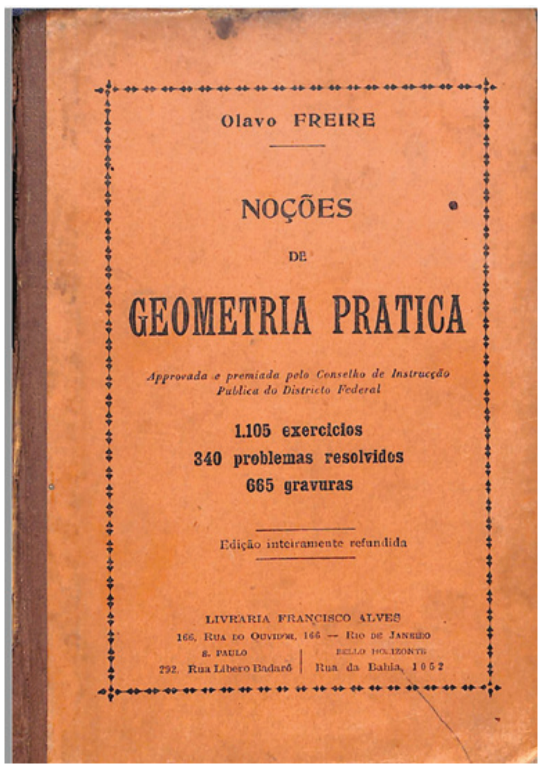
Nesse sentido, Silva (2021, p. 139) cita que "Montessori propunha problemas não triviais, que desafiassem a mente, a partir da atividade com figuras geométricas" e exemplifica com problemas que relacionavam a construção de quadrados por meio de deslocamento de triângulos. Silva (2021, p. 139) afirma que "[...] a autora aspirava uma geometria menos estática, como era praticada no ensino da época, muito apoiado na geometria proposta por Euclides". Assim, conclui-se que os exercícios e problemas para Montessori eram atividades manipulativas com ênfase na visualização e exploração da concretude. E para o caso dos polígonos tem-se exatamente isso, atividades manipulativas, consideradas não triviais, que buscavam atingir a geometria mais prática.

Encerradas as análises de *Psicogeometria* e considerando o contexto mundial e a importância deste no campo educacional, inclusive com diversas reedições para distintas línguas, verifica-se que a obra montessoriana caracteriza uma internacionalização de ideias, a qual Valente (2017, p. 371) cita que é a partir "[...] da circulação internacional de ideias, projetos, materiais didáticos e outros tantos elementos vão sendo construídas as especificidades nacionais". O mesmo autor salienta que a partir do pressuposto da internacionalização, de aspectos relacionados à escola, de países diferentes, é preciso tratar estes estudos como processos de apropriação de modelos que circulam (VALENTE, 2017). Seguindo essa prerrogativa, verifica-se, por meio de um processo de internacionalização de ideias, pensamentos relativos à organização e/ou definições montessorianas do ensino de geometria que podem ter chegado ao Brasil, como é o caso da obra a ser analisada a seguir.

NOÇÕES DE GEOMETRIA PRÁTICA – Olavo Freire

A segunda obra analisada foi encontrada no Repositório de Conteúdo Digital da Universidade Federal de Santa Catarina – RCD-UFSC. Em busca das obras que faziam menção ao ensino de geometria, nos anos de 1937 e 1938, período posterior à publicação da obra *Psicogeometria* de Maria Montessori (1934), identifica-se, nesse recorte, a 38º edição do manual pedagógico *Noções de Geometria Prática* escrito por Olavo Freire. Primeiramente, antes de situar a importância do manual no contexto educacional brasileiro, apresenta-se o lugar do professor autor do manual para compreender o meio histórico-cultural em que a obra foi produzida junto às suas atribuições profissionais.

Figura 5 – Capa do livro *Noções de Geometria Prática* de Olavo Freire.



Fonte: Freire (1937).

Nascido no Rio de Janeiro no ano de 1869, Olavo Freire teve sua trajetória acadêmica amparada pelo Colégio Menezes Vieira por todo ensino elementar, concluindo o curso de humanidades nessa instituição. O Colégio Menezes Vieira, a partir das mudanças políticas ocorridas no final do século XIX, se configura como uma das entidades de destaque para discussão e implementação das mudanças educacionais, dirigidas pelas novas tendências educacionais modernas, para a capital do Brasil. Nessa mesma linha, outras instituições compunham o rol de ações para implementação, formação e divulgação de novas diretrizes de ensino, como o Museu Escolar Nacional, o Colégio Pedro II e a Escola Normal do Rio de Janeiro (D'ESQUIVEL, 2019).

> Olavo Freire da Silva foi um homem do seu tempo. Cumpre nesse sentido ter sua trajetória inserida na grande história da coletividade e dos imperativos sociais, institucionais e culturais que constituem a história do período em que viveu. Nasceu e viveu no Rio de Janeiro entre os anos 1869 e 1941. Epicentro de acontecimentos políticos e educacionais de grande relevância para o país, o Rio de Janeiro sediou congressos e exposições pedagógicas, produziu reformas educacionais e criou instituições de ensino e formação que se estabeleceram como parâmetros para outros estados brasileiros (D'ESQUIVEL, 2019, p. 55).

A expertise vinculada a esse professor é afirmada a partir de sua formação profissional. Suas ações profissionais e posições de poder ocupados contribuem para reforçar seus destaques.

Freire atuou em 1889 como professor da cadeira de Trabalhos Manuais na Escola Normal da capital. A criação do *Pedagogium* foi um ponto relevante para a publicação da obra analisada. O estabelecimento de ensino foi criado em 1890 para divulgação de novos conhecimentos escolares e também voltado à formação de professores para as novas concepções da Pedagogia Moderna. Logo, esta instituição tinha por finalidade impulsionar a estruturação de conhecimentos que deveriam ser ensinados para instrução popular. Em sua composição nos cargos de direção, encontram-se os nomes de Menezes Vieira (diretor) e Felisberto de Carvalho (subdiretor). Para a direção de conservação, o cargo era ocupado pelo professor Olavo Freire. Foi nesse posto que Freire coordenou diversos cursos de formação de professores voltados para o ensino primário e secundário, e como produto dessas experiências, muitas de suas obras foram produzidas nesse delineamento (FRIZZARINI; LEME DA SILVA, 2014).

> A partir dessa experiência no Pedagogium, Olavo Freire publicou suas principais obras: Primeiras Noções de Geometria Prática (1894), Método para o Ensino de Desenho – (Col. 7 cadernos) (1894), Aritmética intuitiva – curso elementar e médio (1908), Aritmética intuitiva – curso elementar (1910), Aritmética intuitiva – curso médio (1910), Aritmética intuitiva – curso complementar (1910), Catálogo de Pedagogia e Methodologia. Produziu ainda diversos mapas para uso na escola primária. Todas essas obras foram publicadas pela Editora Francisco Alves. Podemos afirmar que Olavo Freire, legitimado pela rede de sociabilidade a que pertenceu e pelos cargos institucionais de referência que ocupou, ao sistematizar um conjunto de saberes necessários à atuação profissional do professor para os primeiros anos escolares, atuou como um expert em ensino. Sua expertise foi referenciada pelo Estado com a aprovação de suas obras para uso por professores e alunos de escolas públicas de vários estados do Brasil (D'ESQUIVEL, 2019, p. 63).

Portanto, percebe-se a importância de Freire principalmente para a formação de professores em cursos ministrados no *Pedagogium* como também na elaboração de manuais pedagógicos para o ensino primário. Contudo, algumas dessas obras não se assentam apenas na capital. Estas são veiculadas em diversos outros estados da nação, como Paraná, Santa Catarina e Sergipe a partir de intercâmbios de professores paulistas nestes estados, como consequência de referência das obras de Freire nos programas paulistas, não se limitando apenas ao Rio de Janeiro (D'ESQUIVEL, 2019).

> A circulação da obra por vários estados nacionais e a duradoura presença no mercado editorial sugerem que compôs o ideário escolar de como se deveria ensinar geometria na escola elementar. As transformações da proposta didático-pedagógica inicial, embora nos remeta diretamente a problemática da autoria, é indicativo de um saber profissional para o ensino de geometria que vai se especializando e ganhando espaço no ambiente escolar (D'ESQUIVEL, 2019, p. 92).

Em especial, o manual *Primeiras Noções de Geometria Prática*, publicado no ano de 1894 (1ª edição), foi uma destas atribuições realizadas, como já mencionado, a partir das atividades no *Pedagogium.* A obra torna-se referência da época para o ensino de uma geometria elementar. A primazia da existência de exercícios e problemas sobre as construções geométricas com auxílio de régua, compasso e transferidor propiciaram o reforço de indicação da obra em diversos estados do Brasil.

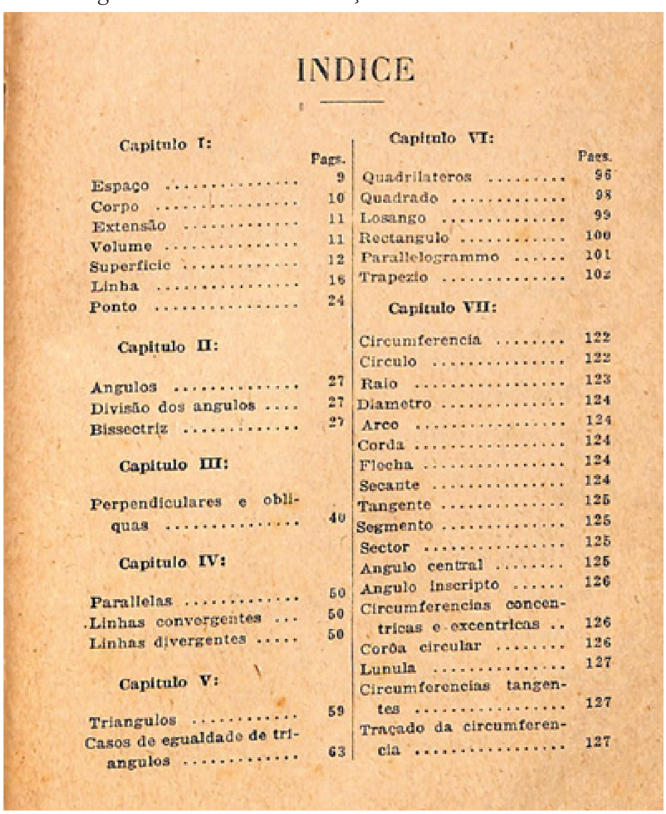
> A significativa circulação da obra de Freire da Silva foi reforçada pela indicação de construções geométricas com régua e compasso em diferentes programas dos grupos escolares de diversos estados brasileiros. O artigo "Régua e Compasso no ensino primário? Circulação e apropriação de práticas normativas para as matérias de Desenho e Geometria" analisou as normativas referentes ao ensino primário dos estados de São Paulo, Minas Gerais, Sergipe, Goiás e Rio Grande do Sul durante o final do século XIX até as primeiras décadas do século XX e constatou que as construções, utilizando régua e compasso integraram as normativas no ensino primário, em matérias de Desenho, Desenho Linear, Geometria, Geometria Prática no estados elegidos (LEME DA SILVA, 2014 *apud* LEME DA SILVA, 2021, p. 47).

Em suma, o manual teve, ao todo, 56 edições durante mais de setenta anos. Ao longo dos anos houve modificação do título em três períodos. Nos primeiros anos, até a 9ª edição, o manual se intitulava *Primeiras Noções de Geometria Prática* (1894-1920). Entre 1920 a 1942 a obra passou a se chamar *Noções de Geometria Prática* (1920-1942), e finalmente a partir da 40ª edição adotou-se o título *Desenho Geométrico e Noções de Geometria* (1944-1966). De acordo com Frizzarini e Leme da Silva (2014, p. 2), "A primeira edição do compêndio Primeiras Noções de Geometria Prática de Olavo Freire, de 1894, contém 318 exercícios, 71 problemas e 233 gravuras, segundo o jornal O Democrata Federal (São Paulo) de 15 de maio de 1895". O artigo de Camara e Santos (2019) analisa a 35ª edição de 1930 desta obra que apresentava ao todo 1105 exercícios, 340 problemas resolvidos e 665 ilustrações. Portanto, entre a primeira edição e a 35ª, é notório um aumento nos números de exercícios, problemas e gravuras.

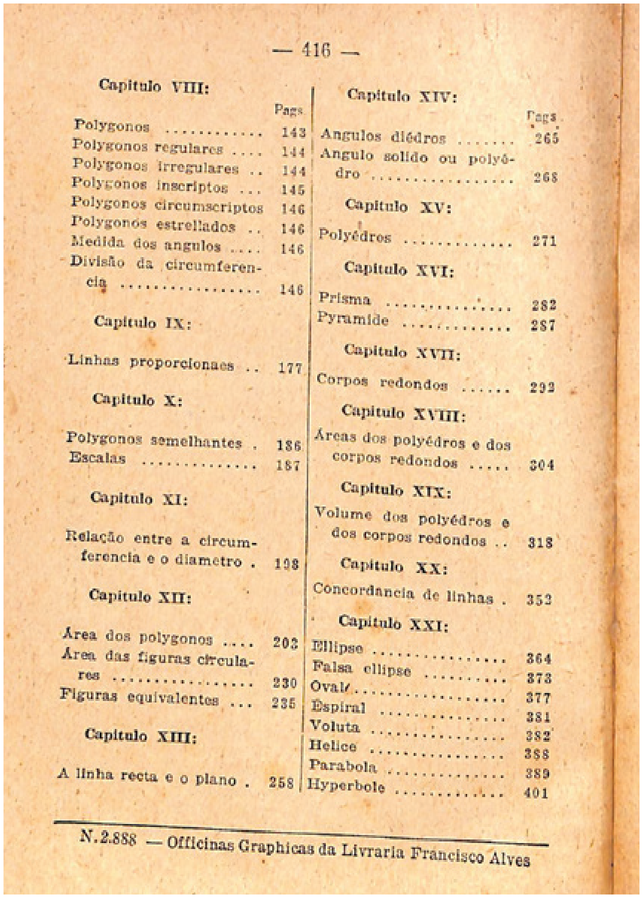
Contudo, a edição aqui analisada, a partir do referencial teórico-metodológico da matemática do ensino, é aquela encontrada e tomada como fonte no RCD da UFSC, especialmente sua 38º edição do ano de 1937, período este com forte influência do movimento escolanovista.

A edição analisada é composta por um curso primário completo de geometria, e semelhante à edição número 35 possui o mesmo quantitativo de exercícios, problemas e gravuras. De acordo com o índice do manual, faz-se presente o estudo de geometria dividido em 21 capítulos, iniciando o estudo com conceitos de espaço, corpo, extensão, volume, superfície, linha e ponto (capítulo I) percorrendo finalmente o estudo das figuras cônicas como elipse e hipérbole (capítulo XXI).

Figura 6 – Índice do livro *Noções de Geometria Prática.*



INDICE



— 416 —

N.2.888 — Officinas Graphicas da Livraria Francisco Alves

Fonte: Freire (1937).

O intuito, nesse segundo momento, não é analisar o manual como um todo, mas sim compreender como se estruturou, a partir desta obra, uma geometria do ensino de polígonos, expressa pelas expertises profissionais de Olavo Freire. Nesse manual, toma-se como referência especialmente o capítulo VIII, que abrange a iniciação aos polígonos, porém, identifica-se ainda o estudo de elementos e relações entre polígonos no Capítulo X relativo aos polígonos semelhantes, e no Capítulo XII discutindo a área de polígonos.

Ao que diz respeito à *sequência* dos conteúdos, o ensino de polígonos é precedido de elementos primários da geometria como os conceitos de ponto, linha, superfície, como, ainda, ângulos e retas perpendiculares ou oblíquas, e também, na obra de Freire (1937), apresenta-se o estudo de figuras planas como triângulos, quadriláteros e a circunferência. Cabe ressaltar, a partir dessa estrutura, que o ensino de polígonos vem após o estudo dos triângulos e quadriláteros, de modo semelhante a obra de Montessori (1934). Destaca-se o ensino dos polígonos mediante a prática por meio de desenho e construções geométricas em conjunto com a inscrição de polígonos à circunferência. Nesse contexto, justifica-se, *a priori*, a apreensão do conceito e elementos relacionados à circunferência anterior ao ensino de tais formas geométricas.

Nessa perspectiva, o ensino de geometria caminha de elementos mais simples aos mais complexos. É possível inferir que o estudo dos triângulos e quadriláteros, anterior à definição de polígonos, se expressa pela necessidade de introdução de figuras planas. Posterior ao Capítulo X, que faz a primeira alusão ao ensino e à definição de polígonos, indica-se o ensino de linhas proporcionais, polígonos semelhantes e escalas, relação de circunferência e diâmetro e área de polígonos e figuras circulares.

Relativo à categoria *significado*, Freire (1937, p. 143-144) afirma a partir da definição proposta como sendo "Uma superfície plana limitada por muitas rectas chama-se polygono [...]. Geralmente a definição de polygono é dada às superfícies planas e limitadas por mais de quatro rectas, entretanto algumas há que têm nome especial...". Logo, pela definição enunciada, exclui-se a priori os triângulos e quadriláteros como categoria de polígonos, muito semelhante aos escritos de Montessori, entretanto, a utilização da palavra "geralmente" nessa identificação possibilita a compreensão dessas figuras como possíveis polígonos. Nesse mesmo capítulo, onde veremos mais adiante, consigna-se algumas classificações dos polígonos também para os triângulos e quadriláteros. Nessa vertente, o *significado* se aproxima da prática do desenho, privilegiando, neste sentido, a prática da construção geométrica e afastando-se da ideia de uma relação com o cotidiano.

Consequentemente, em termos de *graduação* do ensino de polígonos, primeiramente é apresentada a definição de polígonos, como já dito anteriormente. Define-se ainda ideia de perímetro e, em seguida, nomenclatura de alguns polígonos tidos como especiais, sendo eles representados na figura a seguir:

Figura 7 – Nomenclatura dos polígonos regulares na obra de Freire.

um polygono de	5 lados	— *pentagono.*
	6 lados	— *hexagono.*
	7 lados	— *heptagono.*
	8 lados	— *octogono.*
	9 lados	— *ennsagono*
	10 lados	— *decagono.*
	11 lados	— *hendecagono.*
	12 lados	— *dodecagono.*
	15 lados	— *pentadecagono.*
	20 lados	— *icosagono.*

Fonte: Freire (1937, p. 144).

Seguindo a *graduação* do ensino, anuncia-se a classificação de polígonos regulares e irregulares, apótema, polígonos inscritos e circunscritos, e ainda, com auxílio da circunscrição, prossegue-se aos estudos dos ângulos internos de polígonos regulares. Para a classificação de polígonos regulares, mesmo a definição não considerando imediatamente triângulos e quadriláteros como polígonos, o autor associa o triângulo equilátero como regular e o quadrado como quadrilátero regular. Já para o ensino dos ângulos internos, as figuras de três e quatro lados integram a exposição do autor neste manual.

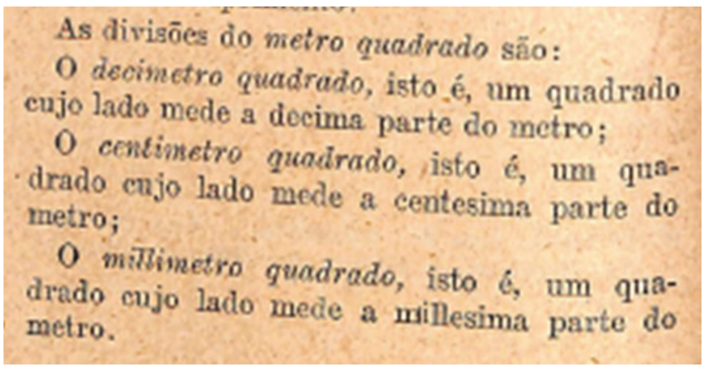
Figura 8 – Medida dos ângulos dos polígonos regulares.

Cada angulo de um polygono regular de	*3 lados mede*	*60°*
	4 —	*90°*
	5 —	*108°*
	6 —	*120°*
	8 —	*135°*
	9 —	*140°*
	10 —	*144°*
	12 —	*150°*
	15 —	*156°*
	16 —	*157°,5*
	18 —	*160°*
	20 —	*162°*

Fonte: Freire (1937, p. 147).

Com isso, entende-se que tais figuras são consideradas polígonos, não obstante, são figuras primárias, que tomam como base para estudo aprofundado os demais polígonos. Ainda no Capítulo X deste manual, aprofunda-se o estudo de polígonos semelhantes como contributo ao ensino de escalas, e no Capítulo XII especializa-se o estudo de áreas. O estudo das áreas toma como base, principalmente, investigações sobre área dos triângulos e quadriláteros. As medidas de áreas são estudadas a partir da área do quadrado, definindo assim o metro quadrado e o centímetro quadrado, por exemplo.

Figura 9 – Utilização do quadrado para ensino de medidas de área.



As divisões do *metro quadrado* são:

O *decimetro quadrado*, isto é, um quadrado cujo lado mede a decima parte do metro;

O *centimetro quadrado*, isto é, um quadrado cujo lado mede a centesima parte do metro;

O *millimetro quadrado*, isto é, um quadrado cujo lado mede a millesima parte do metro.

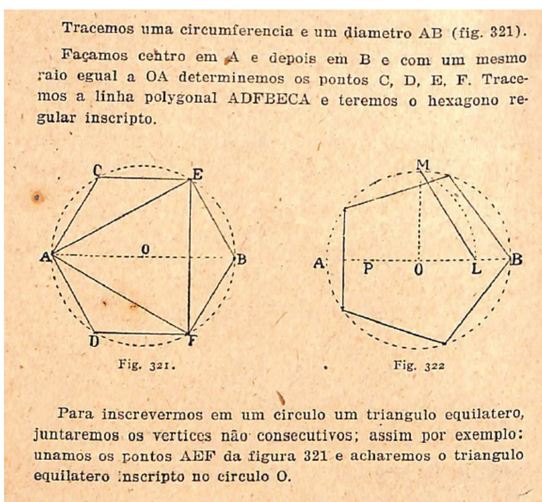
Fonte: Freire (1937, p. 204).

Prontamente, no ensino de área de um polígono qualquer, daqueles com mais de quatro lados, tanto regulares quanto irregulares, propõe-se um ensino por intermédio da decomposição por triângulos. Constata-se, desse modo, uma relação de dependência entre o estudo de triângulos e quadriláteros, especialmente o triângulo referente a esta última explanação, uma vez que tais figuras são utilizadas para o ensino das áreas de polígonos, como nos processos de repartição de demais figuras planas para o cálculo de área, ou mesmo para a compreensão das unidades de medidas adotadas. Portanto, a *graduação* para o ensino de polígonos pode ser vista pela série principalmente: nomenclatura de polígonos, classificação de polígonos, estudos de polígonos semelhantes, e áreas.

Referente aos *problemas e exercícios,* apenas considerando o Capítulo VIII, são expostos 31 problemas geométricos que têm como principal interesse propor as construções geométricas destas figuras através de instrumentos como régua, transferidor e compasso. Tais problemas eram acompanhados de orientações para suas construções, provenientes de um ensino mais prático.

Uma característica sobre o ensino de polígonos regulares ligado aos problemas propostos por Freire, no manual que está sendo analisado, é o tratamento dado às construções de polígonos inscritíveis a uma circunferência. O autor, por meio de orientações, apresenta o passo a passo de construção destas figuras, como um receituário. A primeira figura referida nestes problemas é a construção do quadrado inscrito (Problema 126). A construção se baseia no segmento referente ao diâmetro da circunferência e na construção de uma reta perpendicular que perpassa ao ponto médio desse segmento. À medida que o autor expressa as orientações para construções dos demais polígonos, os desenhos vão se tornando mais complexos. Posterior à construção do quadrado inscrito, se faz presente a construção do hexágono regular. Contudo, apenas depois da construção do hexágono que o autor apresenta a inscrição do triângulo regular, originada a partir da figura de seis lados.

Figura 10 – Construção do hexágono e do triângulo regular inscrito à circunferência.


Tracemos uma circumferencia e um diametro AB (fig. 321).

Façamos centro em A e depois em B e com um mesmo raio egual a OA determinemos os pontos C, D, E, F. Tracemos a linha polygonal ADFBECA e teremos o hexagono regular inscripto.

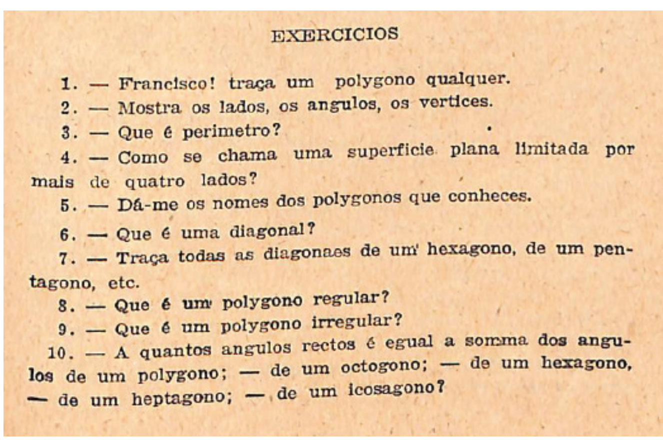
Para inscrevermos em um circulo um triangulo equilatero, juntaremos os vertices não consecutivos; assim por exemplo: unamos os pontos AEF da figura 321 e acharemos o triangulo equilatero inscripto no circulo O.

Fonte: Freire (1937, p. 152).

Inicialmente, os problemas de circunscrição de polígonos regulares não seguem uma ordem de acordo com os números de lados dos polígonos, mas sim uma ordem referente à complexidade da construção geométrica. Somente após a construção do hexágono regular e do triângulo regular que Freire trabalha com o pentágono inscrito. A partir desse ponto, há uma continuidade nas figuras elaboradas, de acordo com a quantidade de lados caminhando da inscrição do heptágono ao dodecágono, e como última construção de polígonos regulares inscritos na circunferência, há a apresentação do pentadecágono. Logo, Olavo Freire elabora tais problemas a partir dos polígonos expressos como especiais no início do Capítulo VIII de seu livro "Polygonos", no entanto não apresentando a construção do icoságono regular.

Neste mesmo capítulo, 80 exercícios são publicados. Os exercícios não possuíam orientações como os problemas, e variavam entre exercícios teóricos e práticos. Tais direcionamentos entre problemas e exercícios são estruturados de forma análoga para os capítulos X e XII. Relacionados à forma de apresentação, para Freire, os problemas se alinham às construções geométricas, e os exercícios se organizam de forma mais direta e objetiva, sem demais orientações de como poderiam ser realizadas.

Figura 11 – Exercícios na obra de Olavo Freire.


EXERCICIOS

1. — Francisco! traça um polygono qualquer.
2. — Mostra os lados, os angulos, os vertices.
3. — Que é perimetro?
4. — Como se chama uma superficie plana limitada por mais de quatro lados?
5. — Dá-me os nomes dos polygonos que conheces.
6. — Que é uma diagonal?
7. — Traça todas as diagonaes de um hexagono, de um pentagono, etc.
8. — Que é um polygono regular?
9. — Que é um polygono irregular?
10. — A quantos angulos rectos é egual a somma dos angulos de um polygono; — de um octogono; — de um hexagono, — de um heptagono; — de um icosagono?

Fonte: Freire (1937, p. 173).

Para o capítulo que se refere aos polígonos semelhantes e escala, constituem-se 5 problemas e 50 exercícios. Para o capítulo específico sobre o ensino de área de polígonos, observa-se a presença de 38 problemas sobre polígonos, exceto aqueles que dizem respeito à circunferência e, quanto aos exercícios, constata-se um total de 115.

MANUAL DO ENSINO PRIMÁRIO – 4º ANO – Miguel Milano

O Terceiro e último manual a ser analisado também foi encontrado no RCD-UFSC e trata-se do *Manual do Ensino Primário - 4º ano*, de autoria de Miguel Milano. Sobre o autor do exemplar, destaca-se que nasceu em São Paulo, no dia 27 de julho de 1885, e foi um matemático, mas também exerceu as profissões de professor primário de todas as matérias, além de ser diretor e inspetor-geral escolar, ator, cineasta, escritor, jornalista e historiador (FERREIRA, 2019; MILANO, 2012). Além disso,

> [...] a real singularidade de Milano (1938, 1939, 1943, 1945, 1948) está em produzir textos para o ensino da História, tendo como interesse específico favorecer o trabalho dos professores em sala de aula e produzir um discurso patriótico que não exaltasse o governo federal em exercício no período de produção de sua obra (FERREIRA, 2019, p. 283).

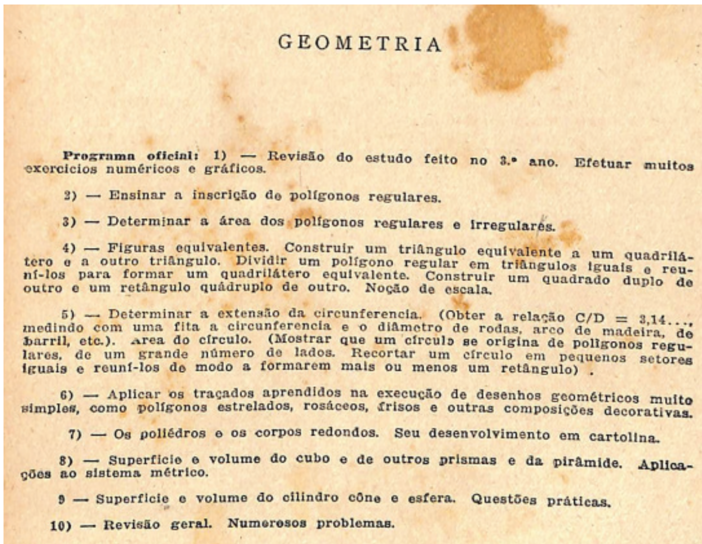
No geral, suas obras eram produções peculiares, elaboradas no período de exercício do Governo Vargas (1930-1945), e se configuravam como totalitaristas e nacionalistas, com o objetivo de manter a ordem vigente (FERREIRA, 2019).

Dentre seus manuais publicados, neste capítulo, será explorada a segunda edição, de fevereiro de 1939, do "Manual do Ensino Primário – 4º ano", que foi escrito "rigorosamente de acôrdo com o programa oficial do Estado de São Paulo" e tinha o intuito de atender ao mesmo, com os conteúdos de: Linguagem oral; Aritmética; Geometria; Geografia; História do Brasil; Instrução Moral e Cívica; Ciências Físicas e Naturais. Segundo Bertini (2016, p. 119), "a quantidade e a variedade de publicações produzidas por Miguel Milano e sua presença na listagem de livros autorizados pelo governo de São Paulo dão indícios de que o autor teve importância no cenário editorial do estado".

Segundo o próprio autor, esta edição analisada foi publicada como uma necessidade do professorado público e privado do estado de São Paulo, levando em conta que a primeira edição foi esgotada rapidamente, alguns "erros" foram corrigidos e foi feita uma escrita mais simplificada.

Até a página 55 dessa edição, o conteúdo de Linguagem oral é abordado. A partir da página 57 os conceitos relacionados à Matemática são apresentados, de modo que, primeiramente, evidenciam-se os conceitos que o Programa de Ensino do Estado de São Paulo sugere para cada grupo de conteúdos. Na página 139, o conteúdo de Geometria é iniciado, como pode ser visto na Figura 12.

Figura 12 – Conteúdo programático de geometria.



GEOMETRIA

Programa oficial: 1) — Revisão do estudo feito no 3.º ano. Efetuar muitos exercicios numéricos e gráficos.

2) — Ensinar a inscrição de polígonos regulares.

3) — Determinar a área dos polígonos regulares e irregulares.

4) — Figuras equivalentes. Construir um triângulo equivalente a um quadrilátero e a outro triângulo. Dividir um polígono regular em triângulos iguais e reuní-los para formar um quadrilátero equivalente. Construir um quadrado duplo de outro e um retângulo quádruplo de outro. Noção de escala.

5) — Determinar a extensão da circunferencia. (Obter a relação C/D = 3,14..., medindo com uma fita a circunferencia e o diâmetro de rodas, arco de madeira, de barril, etc.). Area do círculo. (Mostrar que um círculo se origina de polígonos regulares, de um grande número de lados. Recortar um círculo em pequenos setores iguais e reuní-los de modo a formarem mais ou menos um retângulo).

6) — Aplicar os traçados aprendidos na execução de desenhos geométricos muito simples, como polígonos estrelados, rosáceos, frisos e outras composições decorativas.

7) — Os poliédros e os corpos redondos. Seu desenvolvimento em cartolina.

8) — Superficie e volume do cubo e de outros prismas e da pirâmide. Aplicações ao sistema métrico.

9 — Superficie e volume do cilindro cône e esfera. Questões práticas.

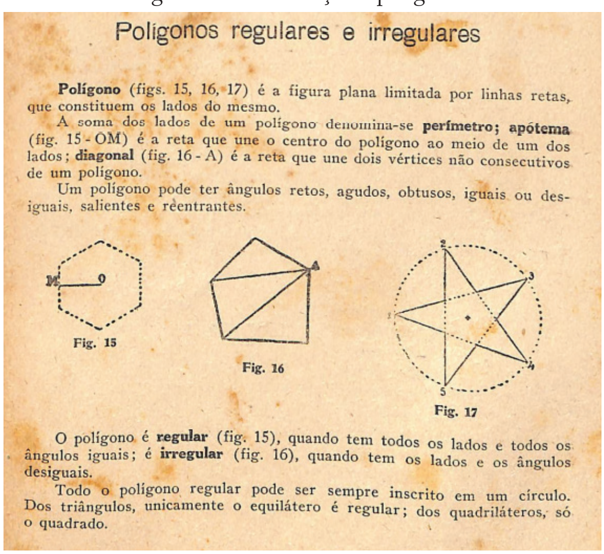
10) — Revisão geral. Numerosos problemas.

Fonte: Milano (1939).

Sobre a *sequência* dada aos conteúdos, vale destacar que o ensino de polígonos é tratado no livro sem a introdução de outros conceitos. Logo após a revisão dos conceitos estudados no terceiro ano, já se inicia a introdução de polígonos com sua respectiva definição, seguido do conteúdo de área de polígonos regulares e irregulares. Com o desenvolver destes conteúdos, consegue-se trabalhar com a ideia de figuras equivalentes, com a circunferência em específico, poliedros, corpos redondos, bem como, de volume. Vale destacar que desde a edição destinada ao primeiro ano do ensino primário são apresentados os primeiros conceitos de geometria, nos quais são abordados os conceitos de corpos redondos e prismas, que são seguidos na versão do segundo ano, com atenção dada para suas faces, bases e planificações, além de linhas retas. No terceiro ano, o conteúdo inicia com linhas e superfícies, circunferência e linhas no círculo, ângulos, retas, triângulos, quadriláteros, áreas e inscrição de polígonos em um círculo.

Logo depois, na página 141, como é determinado, inicia o conteúdo de polígonos regulares e irregulares. Assim, sobre o *significado* do conteúdo, inicialmente, o autor destaca a definição de cada um, argumentando que "O polígono é **regular** [...] quando tem todos os lados e todos os ângulos iguais; é **irregular** [...] quando tem os lados e os ângulos desiguais" (p. 141, grifo do autor), além de apresentar o detalhe para triângulos e quadriláteros, considerando apenas o triângulo equilátero e o quadrado como polígonos regulares. Assim como Freire, o autor aborda o ensino de polígonos por meio de construções geométricas, a partir do conceito de inscrição de polígonos, não havendo relação com a vida cotidiana do aluno, como pode ser observado na Figura 13.

Figura 13 – Introdução a polígonos.



Polígonos regulares e irregulares

Polígono (figs. 15, 16, 17) é a figura plana limitada por linhas retas, que constituem os lados do mesmo.

A soma dos lados de um polígono denomina-se **perímetro**; **apótema** (fig. 15 - OM) é a reta que une o centro do polígono ao meio de um dos lados; **diagonal** (fig. 16 - A) é a reta que une dois vértices não consecutivos de um polígono.

Um polígono pode ter ângulos retos, agudos, obtusos, iguais ou desiguais, salientes e reentrantes.

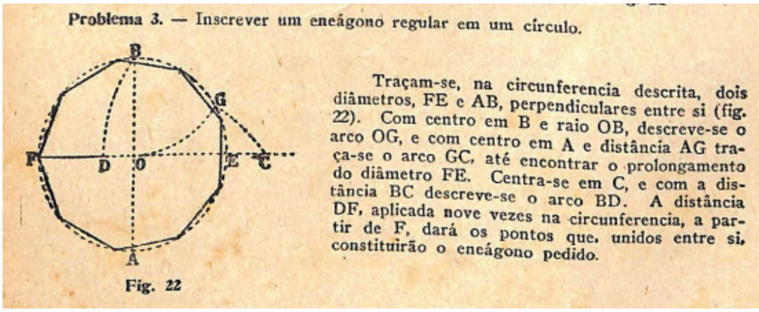
O polígono é **regular** (fig. 15), quando tem todos os lados e todos os ângulos iguais; é **irregular** (fig. 16), quando tem os lados e os ângulos desiguais.

Todo o polígono regular pode ser sempre inscrito em um círculo. Dos triângulos, unicamente o equilátero é regular; dos quadriláteros, só o quadrado.

Fonte: Milano (1939).

Neste trecho, a *graduação* do ensino se dá de modo que o autor utiliza de imagens para mostrar cada caso como exemplo de definição. Além destes, apresenta-se quando um polígono regular é inscrito em um círculo. Para tanto, utiliza-se de construções com régua e compasso, a partir do raio do círculo e um arco que determinará os pontos que ligados formarão o polígono procurado, dando-se exemplos de construções com o pentágono, heptágono, eneágono, decágono, hendecágono e dodecágono. Um exemplo pode ser visto na figura a seguir.

Figura 14 – Eneágono inscrito em um círculo.



Problema 3. — Inscrever um eneágono regular em um círculo.

Traçam-se, na circunferencia descrita, dois diâmetros, FE e AB, perpendiculares entre si (fig. 22). Com centro em B e raio OB, descreve-se o arco OG, e com centro em A e distância AG traça-se o arco GC, até encontrar o prolongamento do diâmetro FE. Centra-se em C, e com a distância BC descreve-se o arco BD. A distância DF, aplicada nove vezes na circunferencia, a partir de F, dará os pontos que, unidos entre si, constituirão o eneágono pedido.

Fonte: Milano (1939).

O autor segue a mesma ideia com os polígonos circunscritos. Apresenta-se um polígono estrelado e como deve ser feita a soma dos ângulos de um polígono, sem apresentar operações ou exemplos. Considera-se um polígono a partir de uma figura com 3 lados iguais.

Em seguida, faz-se relação da nomenclatura de um polígono, com o número de seus lados, por exemplo, o triângulo com 3 lados, o quadrilátero com 4 lados, o pentágono com 5 lados etc. Posteriormente abordam-se dois casos particulares: Inscrição de polígonos regulares em um círculo e área de polígonos regulares e irregulares.

No primeiro, traz exemplos de pentágono, heptágono, eneágono, decágono, hendecágono, dodecágono e pentadecágono, todos regulares, e inscritos em uma circunferência. No segundo, apresenta primeiramente o conceito de área de um polígono regular com um exemplo, fala dos números constantes, de áreas de polígonos regulares inscritos em círculos de raios conhecidos, sobre como encontrar o lado e a apótema destes. Para os polígonos irregulares, argumenta que deve ser observado cada caso, decompondo-os em triângulos retângulos e trapézios retângulos, calculando a área de cada figura separadamente e somando-as ao final.

Além disso, na página 157 trata dos polígonos estrelados a partir de exemplos e problemas, relacionando polígonos regulares, como pentágono, hexágono, heptágono e octógono.

Sobre os *exercícios e problemas*, ao final da parte destinada à geometria, se encontram 67 problemas sobre áreas de polígonos, envolvendo seus lados e medidas, como por exemplo, os da figura a seguir.

Figura 15 – Exercícios e Problemas.

Problemas sôbre áreas

1. — Qual a área de um octógono regular de 1,^{m}80 de lado?
2. — Qual a área de um triângulo equilateral inscrito em um círculo de 1,^{m}05 de raio?
3. — Empregaram-se 50 duzias de ladrilhos quadrados, de 0,^{m}12 de lado, para ladrilhar um páteo. Quantos ladrilhos seriam necessarios, se tivessem 0,^{m}20 de lado?
4. — Achar a área de um hexágono regular, cujo lado é igual a 0,^{m}95 e o apótema a 1,^{m}20.
5. — Um tanque pentagonal regular tem 3,^{m}65 de lado. Que área ocupa?
6. — As quatro paredes de um cômodo quadrado são forradas de azulejos quadrados de 0,^{m}08 de lado, numa extensão de 3,^{m}20 sôbre 1,^{m}25 cada uma. Quantos azulejos têm elas?
7. — Quantos ladrilhos decagonais regulares, de 0,^{m}12 de lado, são necessarios para ladrilhar o piso de um banheiro de 16,^{m2}25?

Fonte: Milano (1939).

Nesse sentido, comparando-se as obras de Milano e Freire, os problemas expostos por Milano se assemelham, em sua forma e estrutura, ao que Freire denomina como exercícios (Figura 11). Problemas estes mais diretos, sem prescrições específicas de como resolvê-los, e não apoiados em construções geométricas.

Considerações Finais

Com o intuito de responder ao questionamento 'Como se caracteriza uma matemática do ensino de polígonos em manuais pedagógicos que circularam no Brasil na década de 1930?' foi possível determinar algumas considerações para cada categoria da matemática do ensino de polígonos.

Evidencia-se que a análise realizada não possui o intuito de compreender a matemática do ensino da geometria em tempos de pedagogia moderna de forma geral, sendo este um objetivo muito amplo e que exigiria uma análise mais extensiva. Nesse delineamento, foi possível caracterizar elementos constituintes da matemática do ensino de polígonos a partir dos três manuais utilizados como fontes históricas, sendo eles de autoria de Maria Montessori, Olavo Freire e Miguel Milano. Seguindo este diapasão também se acentua que as três obras foram editadas em diferentes épocas, em edições inéditas e reedições, destinadas a diferentes públicos. Com base nesta informação, a seguir são enaltecidas algumas diferenças entre elas, bem como certa permanência de abordagem.

Ao caracterizar a categoria *sequência* identifica-se que para o entendimento de Montessori, o ensino de polígonos é precedido dos estudos dos triângulos e quadriláteros. De forma semelhante, na obra de Freire, o estudo de triângulos e quadriláteros antecede o ensino de polígonos do mesmo modo que outros conceitos elementares de geometria como ponto, linha, superfície, ângulos e retas perpendiculares ou oblíquas e circunferências. Já a obra de Milano se diferencia, visto que o ensino de polígonos na edição analisada é introduzido a partir de sua definição, sem considerar definições prévias de ponto, reta, vértices, ângulos, etc. Seu ensino é dado a partir de sua definição para exemplos.

Em síntese, pode-se caracterizar que as três obras tratam o *significado* de polígonos de forma distintas entre si. Partindo da definição vê-se que a primeira – de Montessori – desconsidera triângulos e quadriláteros como polígonos, já a segunda – de Freire – privilegia os polígonos de cinco ou mais lados, porém infere-se a partir de seus escritos a inclusão de triângulos e quadriláteros como pertencentes aos polígonos. Milano, por sua vez, se exime dessa problemática, trazendo como definição figura plana com muitos lados, sem especificar o quantitativo de "muitos", englobando assim os triângulos e quadriláteros. Ao se tratar especificamente do significado dado ao ensino de polígonos, nota-se que Montessori parte do pressuposto da relevância de trabalhos manipulativos com materiais concretos e que estejam atrelados ao cotidiano do aluno, enquanto que Freire e Milano privilegiam o desenho das figuras geométricas e ambos não se atém à relação com a vida cotidiana do aluno.

Já ao caracterizar a *graduação*, vê-se que Montessori (1934) foi sucinta ao tratar dos polígonos, visto que apresentou, de forma breve a definição dos polígonos e as nomenclaturas de 6 polígonos (iniciando pelo pentágono). Já o manual de Freire (1937) deu mais ênfase aos polígonos em si, visto que apresenta a definição, e em seguida define perímetro e nomeia alguns polígonos (no total 10). Após esse movimento inicial, classifica-os em regulares e irregulares e trata de apótema, inscrição e circunscrição, ângulos internos, área de polígonos. Enquanto que Milano (1939), em sua obra, utiliza-se de muitas imagens para explanar sobre definição, inscrição, circunscrição, polígonos estrelados, e também faz a classificação em polígonos regulares e irregulares. Não obstante, trata da soma de ângulos internos, nomenclatura, área e apótema. Sendo assim, se caracteriza que a graduação proposta por Freire e Milano se aproxima em muitos conceitos tratados, inclusive a ênfase prioritariamente às ilustrações para o ensino da geometria de polígonos. Enquanto Montessori se distancia dessas obras, quando a mesma investe em uma vasta introdução, com ênfase na manipulação de materiais, antes de apresentar o tópico polígonos.

Em termos de *problemas e exercícios*, a obra de Maria Montessori não apresenta diretamente exercícios específicos para o ensino de polígonos, porém as indicações de manipulação e experimentação configuram possibilidades de tais problemas e exercícios. Imediatamente, a segunda obra difere categoricamente os problemas dos exercícios. Os problemas se referem às construções geométricas com auxílio de instrumentos diretamente ligados às discussões sobre tais atividades práticas. São priorizadas as construções referentes às inscrições de polígonos regulares a circunferências, características importantes identificadas na obra de Freire. Já os exercícios, neste mesmo manual, tinham como característica enunciados mais curtos e diretos em forma de perguntas, que variaram entre exercícios teóricos (envolvendo teorias, definições e classificações) e práticos (de construção ou mesmo de cálculo). O terceiro manual apresentava a denominação de problemas para o ensino de polígonos, porém os ‘problemas’ de Milano se aproximavam ao que Freire denominava de ‘exercícios’ em sua obra.

Desta forma, percebe-se que apesar das edições dos três manuais analisados possuírem datas próximas de publicação, dentro de uma mesma vaga pedagógica, de um lado, os mesmos possuem diferenças relevantes nas quatro categorias apresentadas, e de outro, algumas arestas em comum. O que leva às considerações de que a matemática do ensino de polígonos em tempos de Pedagogia Moderna segue premissas heterogêneas e caracterizá-la é uma tarefa que deve considerar que a matemática do ensino é produto de um contexto social, político e econômico da época.

Que matemática do ensino se configura nessas obras? Retoma-se que tais obras se constroem historicamente a partir de uma cultura escolar nas quais estão inseridas, ligadas diretamente aos saberes que regem a formação do professor que ensina matemática, saberes estes também constituídos historicamente ao longo dos tempos. De um lado, como saber “a ensinar” observa-se que independente da apropriação de cada autor, de definir ou não inicialmente triângulos e quadriláteros como polígonos, todos os três manuais se alinham na definição de “figuras/ superfícies planas delimitada por muitas retas", tomando como um saber inicial que o professor deve ter para proferir o ensino de polígonos. Em termos de *graduação*, destaca-se dentro do ensino de polígonos, apontado como um objeto para o ensino, elementos como ideia de perímetro, nomenclatura de alguns polígonos, classificação de polígonos regulares e irregulares, apótema, polígonos inscritos e circunscritos.

Constituindo um saber profissional "para ensinar", observa-se que a *sequência* apresentada nas obras vem precedida de elementos primários de geometria como conceituações de ponto, linha, superfície, ângulos, por exemplo, até o efetivo estudo de polígonos. Tal sequência indica um ensino pautado de elementos mais simples aos mais complexos, característica de uma geometria ligada a preceitos de uma pedagogia moderna. Tal formato possibilita orientações de como proceder o ensino de polígonos, sendo visto como uma ferramenta para o ensino. Por fim, para a categoria *problemas e exercícios*, tanto as indicações de material manipulativo e experimentação defendidas por Montessori quanto as demonstrações de construções geométricas de polígonos com auxílio de instrumentos realizadas nas obras de Freire e Milano (definidos como problemas para Freire e exercícios para Milano) configuram orientações específicas para o professor de como proceder o ensino de polígonos, definindo um saber como objeto da ação, para ensinar.

Assim, esses três manuais, de Montessori, Freire e Milano, neste contexto, apresentam saberes específicos para a formação do professor que ensina matemática constituídos historicamente no cerne de uma cultura escolar e, portanto, foi possível identificar elementos próprios de uma matemática do ensino de polígonos.

Referências

BERTINI, L. F. O manual do ensino primário, de Miguel Milano: que problemas? **HISTEMAT – Revista de História da Educação Matemática**. Sociedade Brasileira de História da Matemática, ano 2, n. 1, 2016.

CAMPOS, S. B. **A institucionalização do Método Montessori no campo educacional brasileiro (1914-1952)**. Tese (Doutorado em Educação). Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis: 2017.

CAVALHEIRO, C. B.; TEIVE, G. M. G. Movimento Escolanovista: três olhares. *In*: CONGRESSO NACIONAL DE EDUCAÇÃO, 2., 2013, Curitiba. **Anais do II Congresso Nacional de Educação**. Curitiba: PUC-PR, 2013. p. 21775-21787.

CAMARA, A.; SANTOS Z. As ilustrações no livro Geometria Prática de Olavo Freire e a apropriação do Método Intuitivo. **Com a Palavra o Professor**, v. 4, n. 8, jan./abr., p. 339-356, 2019. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/xmlui/handle/123456789/196658. Acesso em: 31 ago. 2022.

D'ESQUIVEL, M. O. **Primeiras Noções de Geometria Prática (1894 -1966)**: a obra e as mudanças no saber profissional do professor que ensina geometria. 2019. 143 f. Tese (Doutorado em Educação) – Curso de Programa de Pós-Graduação em Educação e Saúde na Infância e na Adolescência, Escola de Filosofia, Letras e Ciências Humanas, Universidade Federal de São Paulo, Guarulhos, 2019.

FERREIRA, G. R. (Org.). **Educação: Políticas, Estrutura e Organização**. Ponta Grossa: Atena Editora, 2019.

FERREIRA, J. S. **A graduação como elemento constituinte da matemática do ensino:** uma análise da aritmética dos manuais pedagógicos (1933-1951). 2022. 134f. Tese (Doutorado em Educação) - Programa de Pós-Graduação em Educação e Saúde na Infância e na Adolescência, Universidade Federal de São Paulo, Guarulhos, 2022. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/233729. Acesso em: 29 ago. 2022.

FREIRE, O. **Noções de Geometria Pratica**. 38ª ed. Rio de Janeiro: Francisco Alves & Cia, 1937. Disponível em https://repositorio.ufsc.br/xmlui/handle/123456789/163587. Acesso em: 22.maio.2022

FRIZZARINI, C. R. B.; LEME DA SILVA, M. C. Primeiras Noções de Geometria Prática de Olavo Freire: um compêndio inovador? *In*: SEMINÁRIO NACIONAL DE HISTÓRIA DA CIÊNCIA E DA TECNOLOGIA, 14., 2014, Belo Horizonte. **Anais eletrônicos** [...]. Belo Horizonte: [*s.n.*], 2014. p. 1 - 8. Disponível em: http://www.14snhct.sbhc.org.br/conteudo/view?ID_CONTEUDO=800. Acesso em: 14 jun. 2022.

JULIA, D. A Cultura Escolar como objeto histórico. Trad. Gizele de Souza. **Revista Brasileira de História da Educação**, n. 1, jan./jun., 2001.

LEME DA SILVA, M. C. **Histórias do Ensino de Geometria nos anos iniciais e seus parceiros**: Desenho, Trabalhos Manuais e Medidas. 1ª ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2021.

LOURENÇO FILHO, M. B. **Introdução ao estudo da escola nova**: bases, sistemas e diretrizes da pedagogia contemporânea. São Paulo: Melhoramentos, 1978.

MONARCHA, C. **Brasil arcaico, escola nova:** ciência, técnica e utopia nos anos 1920-1930. São Paulo: Ed. UNESP, 2009.

MILANO, M. **Manual do ensino primário** – 4º ano, 2ª ed. São Paulo: Editora Francisco Alves, 1939. Disponível em https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/160599. Acesso em 20 maio, 2022.

MILANO, M. **Os fantasmas da São Paulo antiga**. São Paulo: De Mãos em Mãos, 2012.

MONTESSORI, M. **Psicogeometria.** Barcelona: Araluce, 1934. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/159258. Acesso em: 16 maio 2022.

MORAIS, R. S.; BERTINI, L; VALENTE, W. R. **A matemática do ensino de frações**: do século XIX à BNCC. 1. Ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2021.

PEREIRA, M. S. **Método Montessori e a perspectiva de uma nova educação.** 2014. 45 f. Monografia (Especialização) - Curso de Pedagogia, Centro de Ciências da Educação, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2014.

RABELO, R. S. O Ensino de Matemática em um Número Especial da Revista The New Era, 1934. **Bolema**: *Boletim de Educação Matemática*, Rio Claro, v. 33, n. 65, p. 1109-1132, dez. 2019.

REZENDE, A. M. S. **Maria Montessori e os materiais didáticos:** condensando saberes profissionais da docência em matemática (1900-1930). 2021. 132 f. Tese (Doutorado em Educação) – Curso de Programa de Pós-Graduação em Educação e Saúde na Infância e na Adolescência, Escola de Filosofia, Letras e Ciências Humanas, Universidade Federal de São Paulo, Guarulhos, 2021.

SAVIANI, D. **Escola e Democracia.** Campinas: São Paulo Autores Associados, 1995.

SILVA, S. S. **O Modelo pedagógico de Maria Montessori:** uma releitura de suas práticas para o ensino de matemática. Trabalho de conclusão de curso (Licenciatura em Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 106p, 2014.

SILVA, C. M. S. Maria Montessori, Psico Geometria e Neurociência. **Educação Matemática em Revista.** Ano 22, v. 2, n. 22, p. 135-146, 2021.

SILVA, V. B. Uma história das leituras para professores: análise da produção e circulação de saberes especializados nos manuais pedagógicos (1930 - 1971). **Revista Brasileira de História da Educação**, n.6, jul./dez. 2003

TEZZARI, M. L. Edouard Séguin e a educação especial: história e atualidade de sua obra. **Cadernos de Pesquisa em Educação**, Vitória - ES, v. 16, n. 31, p. 26 - 44, 2010.

THE NEW ERA. Londres, v. 15, n. 1, jan. 1934.

VALENTE, W. R. A Matemática no Curso Primário: quando o nacional é internacional, França e Brasil (1880–1960). **Bolema**, v. 31, n. 57, 2017.

MATEMÁTICA DO ENSINO DO CONCEITO DE NÚMERO: em tempos de Matemática Moderna

Janine Marques da Costa Gregorio[41]
Renata Feuser Silveira[42]
Flavia Caraiba de Castro[43]

CONSIDERAÇÕES INICIAIS

O ensino de matemática nos primeiros anos escolares representa um período relevante na docência, em especial, tratando-se do conceito de número, envolvido na disciplina escolar matemática. É possível investigar historicamente as questões relacionadas ao ensino do número, à docência, bem como seus diferentes conceitos. É com esse olhar que buscaremos explorar neste capítulo elementos de uma matemática do ensino do conceito de número, em tempos de Matemática Moderna, apoiada na História da educação matemática e na História Cultural, evidenciando os saberes vinculados ao ensino e à formação de professores.

Destaca-se neste texto o período intitulado de Movimento da Matemática Moderna[44] (MMM) como uma época que demarca profundas alterações no

---

41 Doutoranda no Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica (PPGECT), da Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC). Mestra pelo mesmo programa. Licenciada em Matemática - UFSC. E-mail: janinemcosta13@gmail.com

42 Doutoranda no Programa de Pós-graduação em Educação Científica e Tecnológica (PPGECT), da Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC). Mestra no Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências, Matemática e Tecnologias pela Universidade do Estado de Santa Catarina (UDESC). Licenciada em Matemática pela Universidade do Sul de Santa Catarina (UNISUL). E-mail: renata.feuser@gmail.com

43 Doutoranda no Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica (PPGECT), da Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC). Mestra pelo mesmo programa. Licenciada em Matemática pela Universidade Federal do Tocantins - (UFT). E-mail: flavia.castro@ifc.edu.br

44 A expressão "Movimento da Matemática Moderna" é uma expressão utilizada no âmbito dos estudos sobre o ensino da Matemática, que caracteriza um período em que se elaboram novas referências para o ensino dessa disciplina (VALENTE, 2008, p. 584).

ensino do conceito de número, evidenciando elementos de uma matemática do ensino que, segundo Morais, Bertini e Valente (2021):

> É considerada como um saber resultante da produção histórica da cultura escolar. Por ensino da matemática, identificamos a expressão como sinônimo do desafio que o campo disciplinar matemático tem para ser transmitido na escola. Desse modo, com a matemática do ensino tem-se uma perspectiva diferente daquela do ensino de matemática. Esta última, reitere-se, preocupa-se em lançar olhar sobre mecanismos didáticos voltados para problemáticas postas pela transmissão de saberes dos campos disciplinares científicos para o interior do meio escolar (MORAIS; BERTINI; VALENTE, 2021, p. 16).

A matemática do ensino está relacionada à formação de professores e sua ação docente, voltada para a prescrição e a prática, apoiadas numa cultura escolar, definida por Julia (2001) como "[...] um conjunto de normas que definem conhecimentos a ensinar e condutas a inculcar, e um conjunto de práticas que permitem a transmissão desses conhecimentos e a incorporação desses comportamentos" (p. 10).

Com finalidade à docência, a matemática do ensino é tratada como hipótese teórica de pesquisa (VALENTE; BERTINI, 2022), caracterizando-se historicamente como o saber próprio da docência e do ambiente escolar. Assim, os elementos da matemática do ensino do conceito de número serão aqui considerados, como o resultado das análises a partir das categorias, elencadas pelos autores Morais, Bertini e Valente (2021) como: *sequência, significado, graduação e exercícios e problemas*.

Segundo os autores supracitados, entende-se por *sequência* o lugar ocupado por determinado tema no conjunto de conteúdos que o professor deverá mobilizar num período de tempo. Essa *sequência* tem caráter histórico, alterando-se em cada época pedagógica, no qual busca-se apontar o momento que será ensinado determinado tema, bem como o que o antecede e o que o sucede. O *significado* é tratado como "o modo como o professor deverá se referir a um dado tema da matemática do ensino, de maneira a introduzi-lo em suas aulas, tendo em vista o inicial contato do aluno com um novo assunto" (p. 18-19). A *graduação* está relacionada "a uma dada concepção de ensino e aprendizagem de um dado assunto pelos alunos" (p. 19) e está ligada à progressão elencada pelo professor, onde começa e por onde perpassa determinado tema. Por fim, os *exercícios e problemas* buscam compreender as respostas elaboradas pelos alunos, o que é esperado pelo docente ao ensinar tal conteúdo e que pode ser entendido como uma finalidade do ensino para o tema tratado (MORAIS; BERTINI; VALENTE, 2021).

Tais categorias serão detalhadas e exemplificadas durante a análise das obras elencadas para a escrita deste capítulo, de autoria de Sangiorgi (s.d.) e Liberman, Sanchez e Franchi (1974) sendo cada obra composta por duas versões: textos escritos para professores (manual do professor) e para alunos. Visa-se evidenciar os elementos da sistematização da matemática do ensino do conceito de número em tempos de Matemática Moderna, sendo possível inferir que essa categorização serve de apoio para os estudos acerca do conceito de número.

Segundo Valente e Bertini (2022), e reiterado no Prefácio desta obra, assim como no capítulo inicial, a matemática do ensino se relaciona aos objetos de trabalho do professor – a matemática a ensinar – e as ferramentas que devem ser utilizadas pela docência – a matemática para ensinar. Com isso, tem-se a possibilidade de caracterização da matemática do ensino como uma relação entre formação e ensino, algo imperativo para o tratamento do saber profissional, representante das relações entre formação do professor e atividade docente.

A respeito da matemática do ensino, estudos históricos mostram-se profícuos para reflexões e aprofundamentos relacionados ao assunto da própria disciplina matemática. Assim, pode-se relacionar os estudos sobre a matemática do ensino com as pesquisas realizadas pelo grupo ERHISE (Équipe de Recherche en Histoire Sociale de L'éducation) representado por Hofstetter e Schneuwly (2017), que tratam a articulação entre os saberes associados à docência. Tem-se que

> Os saberes a ensinar – referem-se aos saberes elaborados originalmente pelas disciplinas universitárias, pelos diferentes campos científicos considerados importantes para a formação dos professores; os saberes para ensinar, têm por especificidade a docência, ligam-se àqueles saberes próprios

> para o exercício da profissão docente, constituídos com referências vindas do campo das ciências da educação (VALENTE, 2018, p. 378).

Os referidos saberes dizem respeito ao ambiente escolar e aos estudos acerca da cultura escolar, explorado por Julia (2001), e tornam-se essenciais para que se conheça a escola, o seu dia a dia, o que nos permite perceber que as finalidades do ensino mudam com o passar do tempo.

Neste capítulo, busca-se evidenciar os elementos da sistematização da matemática do ensino do conceito de número, em tempos de Matemática Moderna, apoiados nas categorias apresentadas por Morais, Bertini e Valente (2021). Pretende-se com isso responder à pergunta: Quais elementos da sistematização da matemática do ensino do conceito de número podem ser identificados a partir de duas coleções de Livros Didáticos, em tempos de Matemática Moderna?

VAGAS PEDAGÓGICAS

Considerando a importância de compreender tempos passados no ensino da matemática na escola, serão apresentados aspectos sobre vagas pedagógicas, indicando um movimento de mudanças e transformações na ambiência escolar.

Inicia-se pela pedagogia tradicional, que se caracterizava pelo exagero da memorização, do verbalismo, do formalismo e da abstração. Essa vaga pedagógica focava em processos mecânicos e memorísticos, sendo o professor o principal agente na transmissão do conhecimento. Tal vaga esteve presente no ensino no longo período que engloba dos anos de 1549 a 1759 (SAVIANI, 2005).

Identifica-se um outro movimento, cuja intenção é de transformação da vaga tradicional, denominado ensino intuitivo, que ficou conhecido na virada do século XIX para XX, tendo como principal característica oferecer dados sensíveis à percepção e à observação dos alunos, "buscando ser um instrumento pedagógico capaz de reverter a ineficiência do ensino escolar" (REMER; STENTZLER, 2009, p. 5). Neste caso, as crianças, por meio dos seus sentidos e através do diálogo com o professor, eram questionadas e colocadas diante de situações, sobretudo reais, que tivessem relação com o que estava sendo estudado, tornando o ensino ativo (VALENTE, 2012). Em tempos da vaga pedagógica do ensino intuitivo, diferentemente da memorização presente na vaga tradicional, o conhecimento do conceito de número vinha da concepção sensorial, ou seja, a partir da observação de coleções de objetos, a criança aprenderia a ideia de unidade e os números seriam abordados pela composição e decomposição de unidades, buscando combater a memorização (PINHEIRO, 2013). Tem-se como primeiros divulgadores o suíço Henrich Pestalozzi, e o alemão Friedrich Fröebel. No Brasil, é notável o papel de Rui Barbosa.

Uma nova vaga pedagógica se faz presente, sucedendo a vaga intuitiva. Trata-se do escolanovismo em suas múltiplas pedagogias. Uma delas refere-se ao período da Pedagogia Científica, de 1920 a 1950, sendo baseada na psicologia experimental de base estatística. Tal vaga pressupunha com seus resultados uma renovação pedagógica no ensino, tendo como principais características: a reorganização das salas de aula; a homogeneização dos alunos em cada sala; a estatística presente nos resultados de avaliações escolares; a estandardização dos conteúdos a serem ensinados e as provas comuns a todos os professores; a avaliação estatística e constante; a experimentação e os testes escolares pedagógicos e psicológicos – um dos elementos mais marcantes do período (VALENTE, 2014).

Os testes psicológicos tinham o objetivo de mensurar o nível de inteligência natural das crianças, e os pedagógicos tinham o intuito de mensurar o rendimento do ensino. A presença dos testes para avaliar os conhecimentos da criança é uma forte característica da Escola Nova em oposição à pedagogia tradicional. Alguns dos representantes desta vaga são Alfred Binet, Théodore Simon e Édouard Claperède e, no Brasil, Lourenço Filho (MONARCHA, 2009). A Escola Nova aborda a concepção de interesse, que passa a ser o ponto de partida para a aprendizagem, associando o programa escolar com centro de interesses das crianças.

Retomando as concepções sobre as vagas pedagógicas, em meados dos anos 50 e 60 do século passado, entra-se no período delimitado como MMM, agora algo mais específico do ensino de matemática, que era tratado como uma renovação curricular (SOARES, 2014, p. 17). Eram apresentadas propostas anunciadas pelo movimento ligadas ao cotidiano, preparadas de forma utilitária, buscando um rigor algébrico na linguagem matemática. Relacionava-se o uso do método da descoberta, tratando a Teoria de Conjuntos como unificador na abordagem de todos os conteúdos matemáticos, sendo utilizado para a introdução de conceitos abstratos, a utilização de materiais manipuláveis (FRANÇA, 2012).

O MMM agregou, além da inclusão de novos conteúdos de ensino, propostas apoiadas em estudos epistemológicos da época, sustentados nas ideias de Jean Piaget e as que aperfeiçoaram os métodos educativos de matemática, como as ideias de Zoltan Paul Dienes (SOARES, 2014).

Delimitou-se para este estudo as décadas do início do MMM, período em que o ensino de matemática brasileiro passou por alterações, modificando os conteúdos a serem estudados e os métodos de ensino utilizados, com a disseminação de ideias atreladas ao movimento internacional de renovação curricular (SOARES; PINTO, 2014, p. 73).

Diferente do que era tratado em vagas anteriores, no período do MMM, havia críticas à memorização de regras e fatos, recomendando-se a "manipulação de objetos materiais", o uso de várias bases, para formar agrupamentos, trazendo o conceito de valor posicional. A utilização de material multibase para o ensino do número, no qual bases diferentes devem ser introduzidas para facilitar a compreensão, principalmente começando das bases "menores", prevaleceu no ensino de matemática em dado período (VALENTE, 2012).

Após abordar brevemente as diferentes vagas pedagógicas, é possível observar que períodos distintos apontam ideias distintas relacionadas ao conceito e a abordagem do ensino de número. Visando apresentar as ideias acerca dos elementos da sistematização da matemática do ensino do conceito de número, foram tomadas como fontes para essa pesquisa duas coleções de livros didáticos, de autoria de Sangiorgi (s.d.) e Liberman, Sanchez e Franchi (1974), tidas como evidências que representam o recorte temporal escolhido, as décadas de 1960 e 1970, que contemplam o período do MMM. A análise específica dessas coleções justifica-se por terem sido elas representativas dessa vaga, caracterizadas, no caso de Osvaldo Sangiorgi, por Valente (2008) e, relativamente às autoras Liberman, Sanchez e Franchi, pelos estudos de Villlela (2009).

O CONCEITO DE NÚMERO

Após uma breve revisão de trabalhos que abordam o ensino do conceito de número, foram selecionadas as pesquisas de Costa (2010), Pinheiro (2013) e Leme da Silva (2019) como representantes de distintas periodizações, de diferentes vagas pedagógicas.

Segundo Costa (2010), há uma problemática de pesquisa "ao designar número como conceito ou saber" (p. 60). O autor trata das transformações ocorridas com o ensino do conceito de número no período de 1890-1946 a partir das influências da Psicologia na Educação, em que sintetiza as caracterizações do conceito de número como: símbolo, intuição sensorial, repetição rítmica e relação de medida. Identificando que se diferem daquelas encontradas em livros do século XIX, que o consideram não como uma propriedade intrínseca dos objetos, mas como uma ideia relacionada entre eles de alguma forma.

Pinheiro (2013), no período de 1880 a 1970, une dois aspectos, ao evidenciar que o número vem da concepção sensorial, a partir da observação de coleções de objetos, aprende-se a ideia de unidade e os números se desenvolvem como composição e decomposição de unidades.

Já Leme da Silva (2019) aponta que entre 1888 e 1965 o número deveria ser tomado como um saber escolar, sendo possível repensar suas representações. Assim, o conceito de número pode ser interpretado como um conhecimento ao ser mobilizado, no qual é tratado como um saber, visto que integra programas e manuais escolares para os primeiros anos de escolarização. Para a autora, o número no ensino primário é um saber inserido, validado e reconhecido nas instituições de ensino, em que está associado ao resultado da contagem, medidas e comparações.

Em tempos de MMM, interesse de estudo neste capítulo, o número era considerado como o resultado de duas noções lógicas: a classificação e a relação assimétrica, construídas simultaneamente, agrupadas em classes, o que se justificava pelo fato de o número não ter uma existência concreta (VALENTE; PINHEIRO, 2013).

Precursor dessas ideias, Dienes (1967) propunha que se ensinassem conjuntos, introdução às potências, diferentes sistemas de numeração e noções acerca do valor posicional, os quais se tornaram comuns no Brasil no final da década de 1960. Para o autor, o número era considerado uma abstração e, por não ter uma existência concreta, seria possível construí-lo a partir das relações obtidas entre dois conjuntos de objetos. Assim, corroborando com as sistematizações apresentadas sobre o ensino do conceito de número (COSTA, 2010;

PINHEIRO, 2013; LEME DA SILVA, 2019), para Dienes (1967), o número era tido como uma propriedade dos conjuntos, conjuntos com a mesma cardinalidade. Assim, recomendava-se que o ensino de matemática nas séries iniciais deveria ser iniciado pela introdução de conjuntos, para, sobre eles, construir o conceito de número, sendo sugerido pelo autor "a introdução de uma determinada sequência de exercícios artificiais capazes de guiar as crianças ao longo do desenvolvimento lógico-matemático dos conceitos aparentados com a noção de número" (p. 13). Por sua vez, de acordo com esse autor, após terem se "familiarizado com os conjuntos, as crianças não encontrarão dificuldades em dizer alguma coisa a respeito de conjuntos e em agrupar" (p. 54).

Dito isso, intenta-se, nas próximas seções evidenciar os elementos da sistematização da matemática do ensino do conceito de número, utilizando-se das categorias propostas por Morais, Bertini e Valente (2021), elencadas como *sequência, significado, graduação e exercícios e problemas*, apoiadas nos materiais selecionados.

APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DAS FONTES PRIVILEGIADAS

A partir da questão "Quais elementos da sistematização da matemática do ensino do conceito de número podem ser identificados a partir de duas coleções de Livros Didáticos, em tempos de Matemática Moderna?" foram analisadas duas coleções didáticas (Quadro 1), possibilitando uma análise epistemológica[45] que visa evidenciar elementos de uma matemática do ensino do conceito de número em tempos da MMM, baseada nas categorias de Morais, Bertini e Valente (2021).

Na escolha das fontes, considerou-se a pesquisa de Villela (2009) referente ao quantitativo dos livros de Matemática de maior tiragem na Cia. Editora Nacional, de janeiro de 1964 a agosto de 1980. De acordo com a pesquisadora, em primeiro lugar do *ranking* dos autores considerados, figuravam as tiragens de obras do professor Osvaldo Sangiorgi, com 6.056.859 exemplares e em segundo lugar as obras das professoras Anna Averbuch, Anna Franchi, Franca

45 Segundo Valente (2020, p. 169) "de maneira distinta da perspectiva dada pelo ensino de matemática, essencialmente tendo em vista questões didáticas, a matemática do ensino interessa-se prioritariamente por questões epistemológicas". Isto quer dizer que o foco das atenções volta-se para a constituição própria dos saberes.

Cohen Gottlieb, Lucília Bechara Sanchez e Manhucia Perelberg Liberman, com 4.213.559 exemplares. O terceiro lugar, segundo Villela (2009), ficou ocupado pelo professor Ary Quintella, tendo um total de 1.285.667 tiragens, posição que mostra a abrangência comercial desta editora para os dois níveis de ensino: primário e secundário.

Quadro 1 – Fontes privilegiadas para pesquisa.

Coleções	Autores	Ano de Publicação
Nova Série - 1º grau	Osvaldo Sangiorgi	s.d
Curso Moderno de Matemática para a Escola de 1º Grau[46]	Lucília Bechara Sanchez Manhúcia Perelberg Liberman Anna Franchi	1974

Fonte: Elaborado pelas autoras.

Assim, admitiu-se estas duas coleções didáticas publicadas pela Cia. Editona Nacional, como fontes de pesquisa, no entendimento que, por ocuparem esse lugar, tiveram representatividade e ampla circulação na época.

Ao examinar a composição das coleções[47], considerando o objetivo proposto neste estudo, identificou-se que o tema de interesse "conceito de número, estava apresentado no primeiro volume de cada coleção, sendo estabelecido como fonte, respectivamente, seus volumes relativos à 1ª série. Para análise das coleções, as fontes foram organizadas em dois grupos: Grupo 1, composto pelos livros da 1ª série da coleção Nova Série - 1º grau, de autoria do professor Osvaldo Sangiorgi, contendo um Manual do Professor, com orientações e sugestões de planejamento para o professor, e o outro exemplar, identificado como Livro-texto, voltado para o aluno, contendo exercícios.

O Grupo 2, constituído por dois livros da 1º série da coleção Curso Moderno de Matemática para a Escola de 1º Grau de Liberman, Sanchez e Franchi (1974), composto por um exemplar denominado Livro do Aluno, contendo exercícios, e o outro apresentado como Guia do Professor. Este último,

46 Inicialmente, os livros que compõem essa coleção foram nomeados de "Curso Moderno para a Escola Elementar". O novo título, "Curso moderno de matemática para o ensino de 1º grau", se refere aos "mesmos" livros, porém revisados a partir dos cursos de formação de professores ministrados pelas autoras e da fase experimental em escolas públicas da cidade de São Paulo, segundo declarações das próprias autoras nas obras publicadas na década de 1970 (BERTINI, MORAIS, 2021).

47 As duas coleções são compostas por oito volumes, fazendo uma relação direta com a organização do ensino de 1º grau, previsto na Lei nº 5.692, de 11 de agosto de 1971.

diferente do Grupo 1, além de contemplar orientações didático-metodológicas e sugestões de atividades, continha, em sua íntegra, a versão do Livro do Aluno.

Nesse contexto, considerando as referências teóricas citadas anteriormente, será admitido por *sequência* o "lugar" que o conceito de número ocupa nas obras. O *significado* dado ao conceito de número fará relação à questão das abordagens que procuram definir o conceito de número, considerando os elementos que deverão ser mobilizados pelos docentes para seu ensino. Já a *graduação* indicará a estruturação apresentada nas obras. E a última categoria corresponderá à análise de *exercícios e problemas*, que remete às respostas esperadas pelos professores ao ensinar o conceito de número. Dessa forma, "sequência, significado e graduação articulam-se nas escolhas que faz o professor para obter respostas de seus alunos aos exercícios e problemas que são propostos após a realização do ensino" (MORAIS, BERTINI, VALENTE, 2021, p. 19).

Apropriando-se dessas concepções, serão admitidos os elementos apresentados como categorias de análise, tomando como referência o conceito de número e, para a caracterização temporal, tem-se como recorte o período que permeia o MMM.

COLEÇÃO NOVA SÉRIE – 1º GRAU

Os livros da coleção Nova Série - 1º grau têm como autor Osvaldo Sangiorgi, um escritor de livros didáticos de Matemática, consagrado pela Cia. Editora Nacional[48], que se destacou no mercado editorial. Segundo Villela (2009), o autor recebeu o prêmio Jabuti[49], em 1964, o que contribuiu para seu reconhecimento e lhe deu destaque no cenário nacional.

Os exemplares do Grupo 1 fazem parte da referida coleção, inicialmente formada por quatro volumes[50], destinados às quatro primeiras séries do pri-

48 Esta companhia editou todos os livros de Osvaldo Sangiorgi, tendo a exclusividade estabelecida em contrato (LAVORENTE, 2008).

49 Osvaldo Sangiorgi ganhou o Prêmio Jabuti na categoria Ciências Exatas - Matemática em 1964, com o livro *Matemática – Curso Moderno*. Para maiores informações sobre esta premiação oferecida pela Câmara Brasileira do Livro desde 1959, acesse: http://www.cbl.org.br/jabuti/telas/historia/ (VILLELA, 2009).

50 Posteriormente foram publicados mais quatro volumes que compuseram a coleção, referente às 5ª, 6ª, 7ª e 8ª séries, correspondendo à legislação vigente, na qual o ensino de 1º Grau tinha duração de oito anos, organizado em série.

meiro grau. Buscando explorar os elementos da matemática do ensino do conceito de número, voltamos nossa atenção para o Livro-texto[51] da 1ª série que possui 55 páginas e se apresenta da seguinte maneira: capa (Figura 1), ilustrada com um Diagrama de Venn e a relação entre os elementos de dois conjuntos, o que deixa evidente a perspectiva da época, tratando o viés do MMM; contracapa; índice e exercícios.

Figura 1 – Capa da coleção Nova Série - 1º grau, 1ª série. Livro-texto.

Fonte: Sangiorgi (s.d.b).

O Manual do Professor possui quinze páginas, sendo contemplado por uma introdução, plano geral da obra, sugestão de planejamento, plano geral do curso, avaliação, glossário e bibliografia. O autor trata dos objetivos específicos

51 Na versão voltada para uso do aluno, vinha destacado na capa um carimbo indicando o nome "LIVRO-TEXTO".

do ensino da Matemática para as crianças, abordando neste exemplar o termo conjuntos, um dos elementos em destaque durante o MMM. Essa versão se apresenta com uma capa distinta ao Livro-texto, tanto na escolha da arte quanto das cores que o compunham (Figura 2).

Figura 2 – Capa da coleção Nova Série - 1º grau, 1ª série. Manual do Professor.

Fonte: Sangiorgi (s.d.a).

A partir dessas observações, foram analisados o Livro-texto e o Manual do Professor, referente à 1ª série desta coleção, em que aborda o conceito de número. Destaca-se ainda que os exemplares que fazem parte dessa coleção não possuem data de publicação, embora haja indícios nos metadados presentes no RCD-UFSC que o livro pertença à década de 1960. No entanto, se considerado que o ensino de primeiro grau foi instituído em 1971, com a promulgação da Lei de Diretrizes e Bases (LDB) nº 5.692/71[52], e implementado somente a partir de 1972, é possível inferir que a edição da coleção aqui analisada pertença à década de 1970[53].

Tratando-se da *sequência* no Livro-texto, é possível observar que o conceito de número não é abordado explicitamente no índice como um tema e sim em três tópicos: Número; Operações e Geometria.

Já no Manual do Professor, logo na Introdução, o autor destaca que

> os estágios de desenvolvimento mental da criança não estão relacionados apenas a sua idade cronológica, mas também com a maturação do seu sistema nervoso e principalmente, com as experiências que a criança adquire a partir da interação com os meios físicos e sociais (SANGIORGI, s.d.a, p. 4).

No livro há a proposição de uma organização para a Matemática a ser ensinada nas séries iniciais em dois níveis: o Nível I, abrangendo a 1ª e a 2ª série; e o Nível II, contemplando a 3ª e a 4ª série. Os conteúdos são expressos no Plano geral da obra e explicitados no Manual do Professor (Figura 3). Tais informações revelam os objetivos idealizados e se desdobram na estruturação da coleção.

52 A LDB de nº 5.692 foi promulgada em 11 de agosto de 1971, modificou a estrutura de ensino do país, na qual o curso primário e o antigo ginásio se tornaram um só curso de Primeiro grau, com oito séries e, o Segundo grau, fazendo correspondência ao antigo colegial, com três séries (BRASIL, 1971).

53 Na edição consultada do Manual do Professor, consta em sua bibliografia o Guia Curricular de Matemática de 1975, emitido pela Secretaria da Educação do Estado de São Paulo. Corroborando com a proposição que a edição desta obra em questão pertença aos anos 1970.

Figura 3 – Manual do Professor – Introdução e Plano geral da obra.

INTRODUÇÃO

Os objetivos específicos do ensino da Matemática para as crianças do primeiro grau são:

1. propiciar o desenvolvimento de raciocínios lógicos;

2. estimular habilidades com os números, através do relacionamento dos mesmos com as grandezas que representam;

3. enriquecer as atividades de expressão (criatividade), preparando-as para viverem numa sociedade em constante evolução.

Os estágios de desenvolvimento mental de uma criança estão relacionados não apenas com a **idade cronológica**, mas também com a **maturação do sistema nervoso** e, fundamentalmente, com a experiência por ela adquirida na interação com os **meios físico** e **social.**

Nestas condições, os assuntos que devem ser ensinados sob o nome **Matemática,** desde o início do curso (1ª série), quando a criança se encontra na faixa etária dos 7 anos, foram situados em dois níveis:

1) **nível I**, que abrange a 1ª e 2ª séries;

2) **nível II**, que abrange a 3ª e 4ª séries.

Para o **nível I**, 1ª série, foram desenvolvidos estudos sobre os seguintes assuntos:

- Noções topológicas (tamanho, posição, forma, . . .)
- Conjuntos
- Números naturais – operações e problemas
- Noções de medidas
- Noções de geometria

O tratamento desses assuntos na 1ª série tem viva conotação com as estruturas **topológica** e de **ordem** do sistema mental da criança. Assim, o conceito de **número** está, subjacentemente, presente quando o aluno relaciona **comprimentos** e **tamanhos** de objetos. Nas atividades que envolvem o atributo **forma,** o destaque do contorno das figuras (fechadas) determina, intuitivamente, o interior e o exterior dessas figuras.

O primeiro contato com a estrutura de ordem é feito pelos **ordinais**, que destacam a **posição** ocupada por um certo objeto numa determinada seqüência.

PLANO GERAL DA OBRA

A presente obra de Matemática compõe-se de quatro volumes, destinados às quatro primeiras séries do 1º grau, e tem como:

Objetivos específicos

Levar o aluno a:

- desenvolver, através do raciocínio lógico, a capacidade de: analisar, abstrair, generalizar e criar;
- adquirir habilidades para: medir, calcular e interpretar.

Estrutura

Os assuntos desenvolvidos nas quatro séries têm a seguinte distribuição:

Nível I (1ª/ 2ª séries)

- Noções topológicas (tamanho, posição, forma, . . .)
- Conjuntos
- Números naturais – Operações e problemas
- Noções de medidas
- Noções de Geometria

Nível II (3ª/ 4ª séries)

- Conjuntos
- Números naturais – Operações e problemas
- Números racionais ou fracionários – Operações e problemas
- Números decimais – Operações e problemas
- Geometria
- Sistemas de medidas

Fonte: Elaborado a partir de Sangiorgi (s.d.a, p. 4 e p. 6).

Para o Nível I, 1ª série, o autor propõe abordar os seguintes conteúdos: Noções topológicas; Conjuntos; Números Naturais - Operações e problemas; Noções de medidas e Noções de geometria, nessa ordem. Também são apresentados no Manual do Professor os objetivos referentes a cada conteúdo (Quadro 2).

Quadro 2 – Objetivos dos conteúdos contemplados no livro do 1º vol. da Coleção.

Conteúdos	**Objetivos**
NOÇÕES TOPOLÓGICAS	Diferenciar tamanhos, determinar fronteiras. Identificar formas semelhantes. Adquirir acuidade visual.
CONJUNTOS	Reunir objetos em função de seus atributos. Propiciar condições para a contagem.
NÚMEROS NATURAIS	Ler e representar os números de 0 a 100. Adquirir a noção de dezena. Adquirir a noção de dúzia. Compreender a existência de uma ordem natural (sequência) dos números.
OPERAÇÕES E PROBLEMAS	Associar as operações adição, subtração, multiplicação e divisão, respectivamente as situações de: juntar, tirar, adicionar parcelas iguais e repartir em partes iguais.
NOÇÕES DE MEDIDAS NOÇÕES DE GEOMETRIA	Reconhecer que o processo de medir exige a escolha de uma unidade de medida da mesma natureza da grandeza a ser medida. Desenhar e distinguir figuras do ponto de vista do espaço topológico.

Fonte: Elaborado pelas autoras a partir de Sangiorgi (s.d.a).

Compreendendo que a *sequência* pode ser identificada na estruturação de uma dada rubrica escolar, como o "lugar" que o conceito de número ocupa na obra, considerando seus diferentes temas para o ensino, tem-se como *sequência*: Noções topológicas; Conjuntos; Números Naturais – Operações e problemas; Noções de medidas e Noções de geometria. Indicando que para a construção do conceito de número primeiro preocupava-se com o desenvolvimento da acuidade visual, para ser possível diferenciar e comparar objetos, que a partir da noção de conjunto era estimulada a noção de contagem pela associação biunívoca entre elementos, apresentando então os símbolos para representação de quantidade. Somente após a compreensão destes, atrelada à ideia de subconjunto, eram incitadas as noções de operações.

Na análise de como as obras da coleção tratam o conceito de número, a *sequência* identificada no Manual do Professor e no Livro-texto é possível verificar uma lógica em que ambas se estruturam, onde associam questões referentes a tamanho, posição e forma dos objetos, sendo que a partir da manipulação destes e das relações com estas noções, o aluno poderia desenvolver a compreensão do conceito de número. Corroborando com essa interpretação, Sangiorgi (s.d.a, p. 4) afirma que "[...] o conceito de número está subjacentemente, presente quando o aluno relaciona comprimentos e tamanhos de objetos".

No que se refere ao *significado* do conceito de número, no Livro-texto, é possível inferir atividades relacionando o símbolo da quantidade (número)[54] com os objetos. Tais elementos estão relacionados à noção de quantidade, tratando objetos e identificando um *significado* para o conceito de número.

Sangiorgi apresenta no Manual do Professor que "O conceito de número é desenvolvido, inicialmente, fazendo-se a criança manipular objetos. Vem depois a operação intuitiva da contagem e a seguir a compreensão dos símbolos como sinais para representar quantidades" (SANGIORGI, s.d.a, p. 5).

O autor também expõe outros aspectos relativos à sua compreensão, em que considera que "A associação do conceito de número à quantidade de elementos de um conjunto é feita, nesta fase, através do reconhecimento do símbolo correspondente" (SANGIORGI, s.d.a, p. 10) (Figura 4).

Figura 4 – Relação de quantidade e *significado* do conceito de número.

Fonte: Sangiorgi (s.d.b, p. 11).

54 Cabe observar que para Barguil (2018) o número é tratado como noção de quantidade e o conceito de numeral está relacionado ao símbolo que representa tal quantidade. Ressalta-se que em tempos atuais, faz-se necessário um aprofundamento de estudos referente às categorias número e numeral.

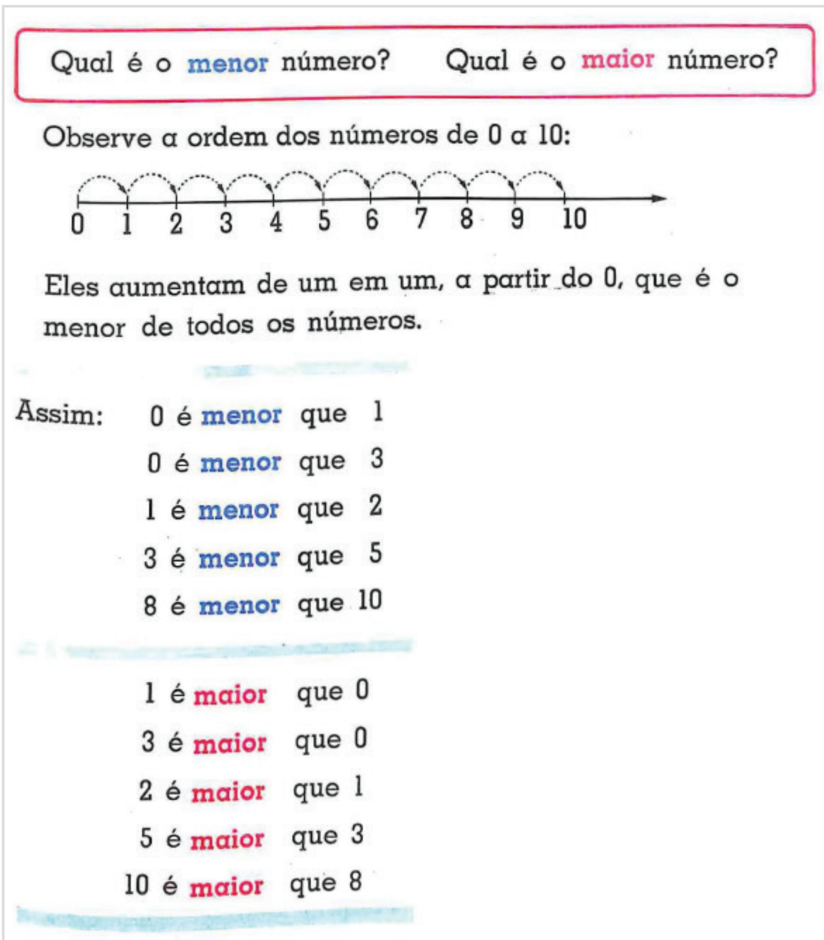
E ainda, é possível observar que as atividades atribuídas ao tópico Número, no Livro-texto, localizadas da página 07 a 16, teriam o objetivo em desenvolver noções relacionadas à Classificação de objetos quanto ao tamanho; Classificação de objetos quanto à forma; Números de 0 a 10; comparação de números e Ordinais. Tidos pelo autor, "como princípios fundamentais para a compreensão do significado do conceito de número" (SANGIORGI, s.d.b, p. 14).

No glossário há também uma definição para número: "um conceito abstrato que dá idéia de quantidade" (p. 14). Dessa forma, o que se observa a partir da análise sobre a categoria *significado* quanto ao conceito de número na obra de Sangiorgi é que o autor atribui vários aspectos a serem considerados, podendo ser entendidos como uma quantidade de elementos que compõem um conjunto, e que, por sua vez, podem ser comparados em termos de serem maiores/menores ou por serem iguais ou diferentes, para só então desenvolver a contagem. Assim, interpreta-se quanto ao *significado* do conceito de número, para o Grupo 1, a partir das noções abordadas, identificadas nos elementos que compõem a *sequência,* a categoria *significado* se apresenta por inúmeras noções que se complementam e formam o conceito atribuído ao número. Por exemplo, parte-se da noção de número como quantidade de elementos de um conjunto, para posteriormente associar quantidade a um símbolo (numeral). Os elementos identificados nesta categoria ainda sugerem, pela abordagem retratada, que o autor iria ao encontro do viés abordado no MMM, uma vez que, para o desenvolvimento das noções que compõem seu significado, parte da noção se vincula aos conjuntos.

Na ordenação apresentada, pode-se inferir a existência de uma *graduação*, indicada na forma que foi estruturada, em que se tem a ideia de tratar primeiramente a comparação via manipulação e, posteriormente, a reunião de objetos em função dos seus atributos, propiciando a ideia de conjuntos e por conseguinte, a contagem. Com a utilização dos blocos lógicos, envolvendo a união dos objetos, para então, serem apresentados à leitura e representação dos números, de 1 a 100, envolvendo a noção de dezena, dúzia e, por fim, a compreensão da existência de uma ordem natural de sequência dos números. Com tal característica, o autor sugere que seja ensinada a estrutura topológica e de ordem para que o conceito de número esteja presente e o aluno possa relacionar, além da quantidade, o comprimento e tamanho dos objetos, bem como a posição ocupada por estes, determinando uma ordenação (SANGIORGI, s.d.a). De modo que a graduação do ensino presumia como ponto de partida as atividades sensoriais (de manipulação e visualização) para então se desenvolver os conceitos.

Para exemplificar a ordenação e comparação, tem-se apresentada a figura a seguir.

Figura 5 – Ordenação e comparação.



Qual é o menor número? Qual é o maior número?

Observe a ordem dos números de 0 a 10:

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Eles aumentam de um em um, a partir do 0, que é o menor de todos os números.

Assim: 0 é menor que 1
0 é menor que 3
1 é menor que 2
3 é menor que 5
8 é menor que 10

1 é maior que 0
3 é maior que 0
2 é maior que 1
5 é maior que 3
10 é maior que 8

Fonte: Sangiorgi (s.d.b, p. 15).

Acerca da categoria de *exercícios e problemas*, foram analisadas nove páginas do Livro-texto que remetem às respostas esperadas pelos professores ao ensinar o conceito de número. Constatam-se 17 propostas de exercícios[55], organizadas em 5 blocos[56], cada bloco correspondendo a um tópico do seu índice.

Notou-se que os exercícios não eram numerados e os enunciados apresentavam indagações curtas, visto que estão bem alinhados ao que se observou no *significado* do conceito de número, de modo que, para além de comparar e entender as quantidades, as atividades parecem visar a compreensão desse conceito.

Para exemplificar as orientações, são apresentados na Figura 6 os três exercícios que dizem respeito à classificação de objetos quanto ao tamanho, onde se tem como enunciado: Qual é o maior? Qual é o menor? Quais são iguais?

Figura 6 – Exercícios (classificação de objetos quanto ao tamanho) - Livro-texto.

Fonte: Sangiorgi (s.d.b, p. 7-9).

Segundo Valente e Pinheiro (2013, p. 67), para Dienes,

55 Foi considerado como um único exercício as atividades que compartilhavam o mesmo enunciado.

56 Sendo: três exercícios para o bloco Classificação de objetos quanto ao tamanho; um exercício para o bloco Classificação de objetos quanto a forma; dez exercícios para o bloco Números de 0 a 10; dois exercícios para o bloco Comparação de números, e um exercício para o bloco Ordinais.

> […] o conhecimento matemático no ensino primário seria subdividido em classificação, seriação e construção numérica. A classificação era entendida como a habilidade de agrupar elementos (objetos) por seus atributos qualitativos ou quantitativos. Já a seriação (ordenação) era uma maneira de desenvolver na criança a habilidade de descobrir o que vem antes e o que vem depois, num determinado grupo de conjuntos de objetos. Por fim, a construção numérica se daria pela noção de cardinalidade, pela ideia de ordem e de sucessor, ligada pela ideia de um a mais. Tais atividades eram baseadas nas propostas de Dienes.

Observa-se que o material de Sangiorgi (s.d.a), vai ao encontro das ideias de Dienes (1967), visto que existe uma ordem dos exercícios, no modo que foram dispostos no Livro-texto, identificando-se uma *graduação* desses exercícios, respeitando as fases de desenvolvimento da criança, fundamentado na Teoria de Piaget[57].

O material de Sangiorgi (s.d.a), apresenta indícios do MMM, a partir da observação das atividades propostas para cada conteúdo abordado, bem como da linguagem adotada pelo autor para tratar da matemática do ensino do conceito de número, dos conjuntos e, em seguida, das operações.

Assim, no Manual do Professor, quando abordado o conteúdo de Números Naturais, é sugerido como proposta de atividade o uso do Material de Cuisenaire[58], novamente uma atividade manipulativa, em que era considerada "A associação do conceito de número à quantidade de elementos de um conjunto é feita, nesta fase, através do conhecimento do símbolo correspondente" (SANGIORGI, s.d.a, p. 10).

A seguir, discutimos e analisamos a abordagem do conceito de número nos livros da coleção Curso Moderno de Matemática para a Escola de 1º Grau, (LIBERMAN; SANCHEZ; FRANCHI, 1974), trazendo para o encerramento do capítulo uma comparação entre as duas coleções consideradas,

57 Jean Piaget, em sua teoria do desenvolvimento, explica como o indivíduo, desde o seu nascimento, constrói o conhecimento. Seus estudos sobre Pedagogia tiveram uma grande influência no embate e derrubada de várias visões e teorias tradicionais relacionadas à aprendizagem (FRANÇA, 2012).

58 Trata-se de um material "[...] construído de barrinhas na forma de prisma retangulares de 1cm^2 de secção com o comprimento variando de 1 a 10 cm. A cada comprimento está associada uma cor, [...]" (SANGIORGI, s.d.a, p. 10).

sendo concluído com o fechamento de todo o exposto, segundo as categorias analisadas.

COLEÇÃO CURSO MODERNO DE MATEMÁTICA PARA A ESCOLA DE 1º GRAU

A coleção "Curso Moderno de Matemática para a Escola de 1º Grau", à qual pertencem os exemplares do Grupo 2, é composta por oito volumes[59]. Essa obra atende ao novo modelo de ensino previsto pela LDB de 1971 e foi publicada pela Cia. Editora Nacional, entre os anos de 1972 a 1980, contendo para cada série um "guia do professor" e um "livro do aluno". No seu início, o guia do professor foi organizado por algumas páginas com orientações didático-metodológicas, sugestões de atividades e seguido pela versão do livro do aluno. Assim, analisou-se o volume 1 - guia do professor, publicado no ano de 1974 (LIBERMAN; SANCHEZ; FRANCHI, 1974a).

Para além das justificativas elencadas anteriormente, deve-se registrar que existem disponíveis no RCD – UFSC tanto o guia do professor quanto o livro do aluno da coleção que foi apresentada conforme quadros a seguir.

Quadro 3 – Guia do Professor.

Coleção	Ano/Volume	Série	Link
Curso Moderno de Matemática para o Ensino de 1º grau	1974, 1º v.	1ª série	https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/208789
Curso Moderno de Matemática para o Ensino de 1º grau	1974, 2º v.	2ª série	https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/208798
Curso Moderno de Matemática para o Ensino de 1º grau	1974, 3º v.	3ª série	https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/208807
Curso Moderno de Matemática para o Ensino de 1º grau	1975, 4º v.	4ª série	https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/208851

Fonte: Elaborado pelas autoras.

59 Outros livros que compõem a coleção Curso Moderno de Matemática para a Escola de 1º Grau podem ser encontrados no RCD-UFC.

O guia do professor se difere do livro do aluno apenas nas páginas iniciais das obras. Nessas páginas estão expostas as orientações didático-pedagógicas relativas ao ensino da matemática que os autores propuseram na coleção.

Quadro 4 – Livro do Aluno.

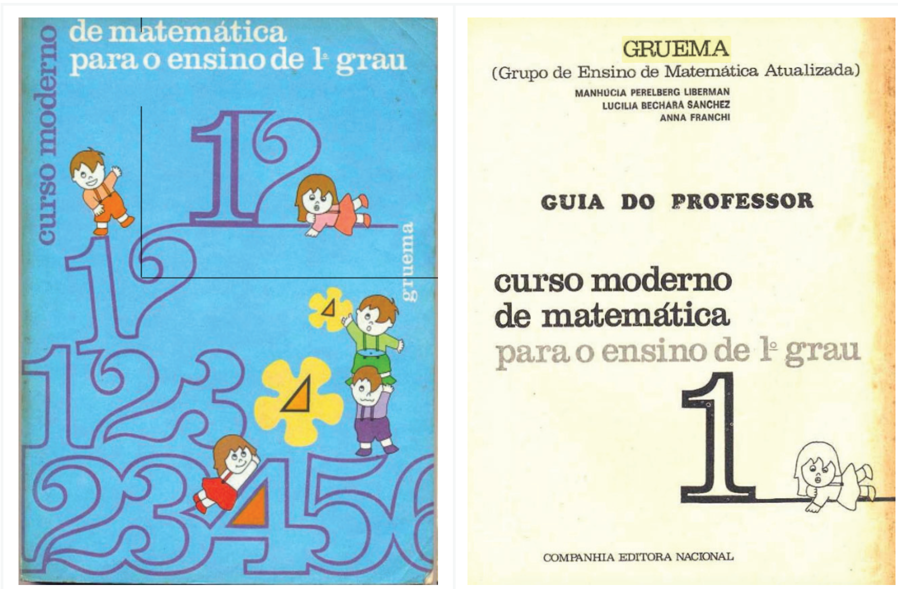
Coleção	**Ano/Volume**	**Série**	**Link**
Curso Moderno de Matemática para o Ensino de 1º grau	1974, 1º v.	1ª série	https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/159255
Curso Moderno de Matemática para o Ensino de 1º grau	1977, 4ª ed. 2º v.	2ª série	https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/178919
Curso Moderno de Matemática para o Ensino de 1º grau	1976, 3ª ed. 3º v.	3ª série	https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/178917
Curso Moderno de Matemática para o Ensino de 1º grau	1979, 6ª ed. 4º v.	4ª série	https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/178918

Fonte: Elaborado pelas autoras.

A disponibilidade dessas obras no RCD-UFSC facilitou o acesso dos autores às fontes e uma reflexão/problematização acerca de documentos armazenados em repositórios digitais é pertinente.

Na capa do referido manual (Figura 7), observa-se a apresentação de números e triângulos com crianças interagindo com esses objetos. É possível inferir os primeiros indícios de uma perspectiva baseada no trabalho das crianças com materiais manipuláveis para o ensino de matemática, o que se alinha às ideias do período da vaga pedagógica MMM.

Figura 7 – Capa e contracapa do guia do professor - Volume 1.



Fonte: Elaborado a partir de Liberman, Sanchez e Franchi (1974a).

De acordo com Vilella (2009), a referida coleção, como dito anteriormente, ocupou o segundo lugar em tiragem e venda entre as coleções publicadas pela Cia. Editora Nacional, entre 1964 e 1980, evidenciando a preferência e adoção da obra pelos professores da época. Outras pesquisas[60] apontam a representatividade das autoras, tanto no MMM, quanto na história do livro didático de Matemática no Brasil, ocupando um lugar de destaque em um universo predominantemente masculino.

Dentre as obras selecionadas para comporem o Grupo 2, o exemplar analisado contém 151 páginas, sendo 31 páginas apresentadas como guia do professor e 120 páginas como livro do aluno. Encontra-se dividida em 13 seções: 1. Atividades preliminares; 2. Conceito de número; 3. Relações; 4. Preparo para a adição; 5. Adição; 6. Subtração; 7. Sistemas de numeração decimal: Processo de agrupamento. Números até 20; 8. Sistema de numeração decimal para representar números naturais de 20 a 99. Adição com 3 parcelas; 9. Adição e subtração – Técnica operatória; 10. Multiplicação: conceito, fatos

60 Alguns exemplos: Bertini e Morais (2021), Pardim Gouveia (2021), Soares (2014), Valente e Pinheiro (2013).

fundamentais; 11. Divisão; 12. Metade, dobro, terça parte, triplo; 13. Cubo, cilindro, esfera.

Na referida obra, visando à caracterização dos elementos da sistematização da matemática do ensino do conceito de número, é possível observar, de acordo com a Figura 8, uma *sequência*, posta no guia do professor, em que o ensino do conceito de número aparece logo após algumas atividades preliminares.

Percebe-se que esta *sequência,* como mencionado anteriormente sobre a capa, se relaciona com as concepções do MMM em que se utilizavam materiais manipuláveis para introdução de conceitos abstratos, que posteriormente iriam corroborar para a abordagem do conceito de número.

Figura 8 – Sumário volume 1 - guia do professor.

SUMÁRIO

	Pág. do Guia	*Pág. do Livro*
Atividades preliminares	7	1–4
Conceito de número	8	4–18
Relações	10	9–10
Preparo para a adição	13	19–23
Adição	14	24–38
Subtração	17	39–44
Sistemas de numeração decimal: Processo de agrupamento. Números até 20	19	45–57
Sistema de numeração decimal para representar números naturais de 20 a 99. Adição com 3 parcelas	21	58–70
Adição e subtração – Técnica operatória	24	71–83
Multiplicação: conceito, fatos fundamentais	26	84–106
Divisão	29	107–113
Metade, dobro, terça parte, triplo	30	114–117
Cubo, cilindro, esfera	30	118–120

Fonte: Liberman, Sanchez e Franchi (1974, p. 5).

No que se refere ao *significado* do conceito de número, observa-se que no guia do professor é exposto um conjunto de objetivos para o desenvolvimento de cada seção, como pode ser visto no Quadro 5.

Quadro 5 – Objetivos das sessões contempladas no livro do 1º vol. da Coleção Curso Moderno de Matemática para a Escola de 1º Grau.

Sessão	**Objetivo**
ATIVIDADES PRELIMINARES	1) Classificar objetos de acordo com propriedades como cor, forma, tamanho, espessura, textura, etc. 2) Representar conjuntos que possuem alguma propriedade em comum por meio de um símbolo que identifique essa propriedade.
CONCEITO DE NÚMERO	1) Comparar o número de elementos de dois conjuntos por meio de uma correspondência um a um, utilizando as expressões: há mais que, há menos que, há tantos quantos. 2) Estabelecer as relações: "ser maior que", "estar mais longe que", "ser mais alto que", "ter a mesma forma que", etc. 3) Classificar conjuntos através da relação: "ter a mesma quantidade de elementos". 4) Ordenar quantidades. 5) Reconhecer e nomear números de 0 a 10.
RELAÇÕES	Não há objetivos explícitos.
PREPARO PARA ADIÇÃO	Ainda o reconhecimento de números. Associar números ao total de uma situação de reunir conjuntos disjuntos.
ADIÇÃO	1) Associar o conceito de adição a sua simbologia. 2) Usar e compreender o sinal da operação de adição + (mais). 3) Formar a ideia de que um número tem muitos nomes (numerais). 4) Usar e compreender o sinal de igualdade: = (mesmo que). 5) Usar e compreender o sinal: ≠ (diferente de). 6) Fixar os fatos fundamentais da adição, com total menor ou igual a 10. 7) Uso da tábua operatória. 8) Associar a adição ao operador acrescentar".
SUBTRAÇÃO	1) Associar a subtração a situações de "quanto resta" e "quanto falta". 2) Utilizar na subtração a simbologia matemática. 3) Descobrir os fatos fundamentais da subtração a partir dos fatos fundamentais da adição. 4) Fixar os fatos fundamentais da subtração. 5) Relacionar a subtração com a adição.
SISTEMA DE NUMERAÇÃO DECIMAL: PROCESSO DE AGRUPAMENTO. NÚMEROS ATÉ 20.	1) Perceber o processo de agrupamento e o princípio da posição do sistema de numeração. 2) Reconhecer e nomear números de 11 a 20.
SISTEMA DE NUMERAÇÃO DECIMAL PARA REPRESENTAR OS NÚMEROS NATURAIS DE 20 A 99. ADIÇÃO COM 3 PARCELAS.	1) Determinar somas de três parcelas. 2) Descobrir os fatos fundamentais com soma maior que 10 e uma das parcelas menor que 10. 3) Escrever e ler os números de 20 a 99, associando-os aos números (quantidades) correspondentes.

ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO -TÉCNICA OPERATÓRIA	1) Introduzir os vocabulários unidade e dezena. 2) Determinar a soma de dois números menores que 99, quando a soma dos valores dos algarismos da mesma posição não ultrapassa 9. 3) Determinar a diferença de dois números menores que 99, quando o valor de cada algarismo do 1º termo é maior ou igual ao do algarismo correspondente do 2º termo.
MULTIPLICAÇÃO: CONCEITO, FATOS FUNDAMENTAIS	1) Associar o conceito de multiplicação à adição de parcelas iguais e ao produto cartesiano de dois conjuntos dados. 2) Usar e compreender o símbolo da multiplicação (X). 3) Descobrir os fatos fundamentais de produto menor ou igual a 20. 4) Associar a multiplicação à adição de parcelas iguais.
DIVISÃO	1) Formar grupos com um mesmo número de objetos. 2) Descobrir o fator desconhecido em uma multiplicação. 3) Usar e compreender o símbolo da divisão (÷).
METADE, DOBRO, TERÇA PARTE, TRIPLO	Reconhecer metade, terça parte, dobro, triplo de um todo ou de quantidades.

Fonte: Elaborado pelas autoras a partir de Liberman, Sanchez e Franchi (1974a).

Assim, quanto ao *significado* do conceito de número, é possível, a partir desse conjunto de objetivos, inferir que as autoras, apesar de apresentarem uma seção denominada "conceito de números", se utilizam das atividades preliminares, apresentadas anteriormente a essa seção, como noções necessárias para então inserir o conceito de número, atrelando à ideia de quantidade de elementos aos conjuntos. Essa relação, também, pode ser observada nos exercícios trazidos no livro do aluno, no entanto, somente a partir da página 13 são abordados exercícios com o intuito de associar algarismos com as suas respectivas quantidades, como por exemplo na página 13, na qual esperava-se que o estudante associe a simbologia (algarismo) para representar as quantidades.

Na seção denominada "Relação", observa-se que nos exercícios apresentados no livro do aluno, além da associação entre elementos com seu representante numérico, é acrescentada a noção de subconjuntos, ou seja, dentro de um conjunto é possível perceber a existência de elementos distintos, que podem ser agrupados por suas características, obtendo-se novos conjuntos dentro de um já existente. Assim, pode-se inferir que dentro de um conjunto, como no exercício da Figura 9, em que 4 copos e 1 garrafa, formam um conjunto com 5 elementos. Desse modo, acredita-se que tais relações introduzem a ideia das operações com os números naturais que são tratadas nas seções seguintes.

Figura 9 – Atividade sobre Conjuntos.

Fonte: Liberman, Sanchez e Franchi (1974b, p. 19).

A partir do exposto sobre o *significado* do conceito de número, entende-se que as autoras fazem uso inicialmente da noção de conjuntos, articulando com suas características até o desenvolvimento da noção de quantidade, quando apresentam o símbolo (numeral) para representá-la.

Para além dos objetivos abordados no guia do professor, tem-se também, como sugestões de atividades práticas, para tratar o conceito de número, a seguinte dinâmica: a organização do conjunto de carteiras e um conjunto de crianças em sala de aula, no qual o professor fará cada criança sentar-se em uma carteira (isto é, fará corresponder a cada criança uma carteira) e perguntar: Há mais crianças? Há menos crianças? Há tantas crianças quantas carteiras? (LIBERMAN; SANCHEZ; FRANCHI, 1974a, p. 9). Busca-se a ideia da relação biúnivoca para tomar a noção da cardinalidade do número.

Nas sugestões de atividades práticas, menciona-se ainda uma orientação quanto ao rigor algébrico utilizado na linguagem "o professor não dirá conjuntos iguais, mas conjunto com o mesmo número de elementos, porque em matemática dizemos que dois conjuntos são iguais somente quando possuem os mesmos elementos" (LIBERMAN; SANCHEZ; FRANCHI, 1974a, p.

9), novamente há evidências das concepções pedagógicas do MMM na qual tinha-se a Teoria de conjuntos como unificador na abordagem de todos os conteúdos matemáticos.

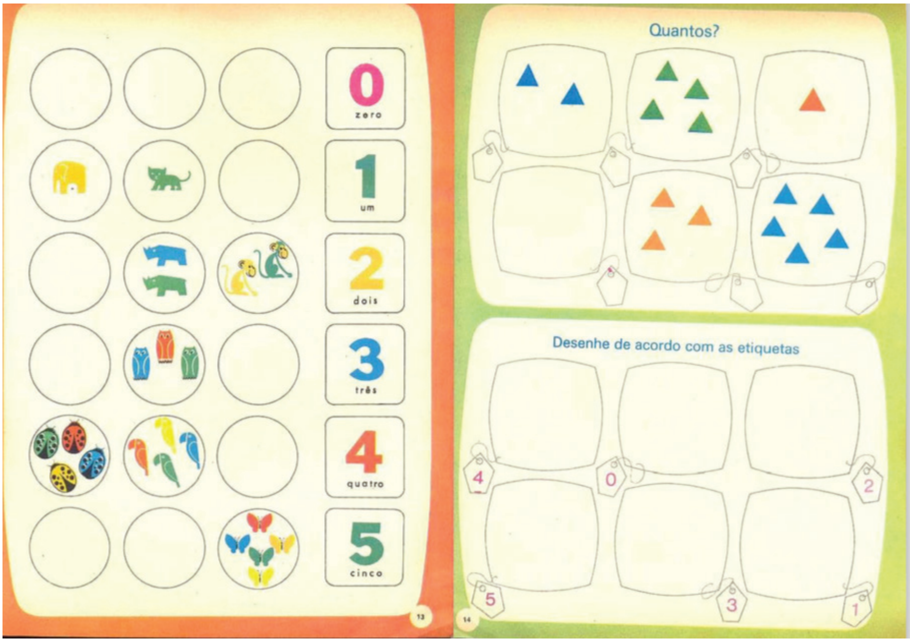
Em relação à *graduação* do ensino, o conceito de número é abordado inicialmente com o uso de material concreto e atividades diferenciadas (conforme mencionado na categoria anterior) e somente depois é sugerido ao professor realizar os exercícios do livro para verificação da aprendizagem. Ou seja, para se fazer o uso do livro, inicialmente o aluno era instigado pelo professor a fazer descobertas para então serem orientados a realizarem as atividades propostas no livro. Assim, percebe-se que existia um padrão: uso de material concreto seguido de exercícios, pois para o professor chegar nesta questão do uso do material concreto desta seção, ele precisava perpassar os objetivos das atividades preliminares (LIBERMAN; SANCHEZ; FRANCHI, 1974).

As atividades propostas no material têm por finalidade a classificação de objetos de acordo com propriedades como cor, forma, tamanho, espessura e representar conjuntos que possuam alguma propriedade em comum por meio de um símbolo que identifique essa propriedade, e antecede o ensino de relações (grande-pequeno, perto-longe, alto-baixo, curto-comprido).

Assim, no texto dos livros do Grupo 2, a *graduação* do ensino do conceito de número se dá pelas atividades práticas/lúdicas e pela manipulação, aspecto retratado na capa da obra, para então o desenvolvimento de atividades que visam associar elementos de conjuntos com a ideia de quantidade, de comparação, organização, contagem e associação quantidade-numeral.

Foram analisadas 14 páginas do livro do aluno, que também é parte integrante do Guia do Professor, sobre os *exercícios e problemas*. Constatou-se 26 propostas de exercícios, organizadas em 5 blocos, cada bloco correspondendo a um objetivo do guia do professor. Notou-se a existência de alguns exercícios sem enumeração ou que não apresentam enunciados. Além disso, se identificou que o Livro-texto não explicita conteúdo escrito, apenas exercícios acompanhados de curtos enunciados para o direcionamento das atividades (Figura 10).

Figura 10 – Sugestões de exercício sem enunciado.



Fonte: Liberman, Sanchez e Franchi (1974b, p. 13-14).

A proposta do primeiro bloco de exercícios é “comparar o número de elementos de dois conjuntos por meio de uma correspondência um a um, utilizando as expressões: ‘há mais que’, ‘há menos que’, ‘há tantos quantos’”. No segundo bloco de exercícios o objetivo é estabelecer relações: “ser maior que”, “estar mais longe que”, “ser mais alto que”, “ter a mesma forma que” etc. O terceiro bloco de exercícios propõe classificar os conjuntos através da relação: “ter a mesma quantidade de elementos”. O quarto bloco tem como objetivo ordenar quantidades. E a finalidade do quinto bloco é reconhecer e nomear os números de 0 a 10. Com isso, foi possível verificar o que era abordado antes ou depois de determinados conteúdos, envolvendo atividades com materiais manipuláveis, apresentando elementos para a sistematização do conceito de número, visto que era viável organizar as respostas esperadas pelos professores.

CARACTERIZAÇÃO DE UMA MATEMÁTICA DO ENSINO DO CONCEITO DE NÚMERO E CONSIDERAÇÕES FINAIS

Pondera-se que não foram esgotadas todas as possibilidades de análise dos materiais elencados, isso se dá pelo fato das análises não terem se voltado para fontes ligadas à formação de professores, de modo que seria impossível caracterizar todos os aspectos de uma matemática do ensino sem a articulação dessas. Dessa forma, infere-se que ambas coleções apresentam elementos da sistematização da matemática do ensino do conceito de número, o que se buscou constatar apoiado nas categorias elencadas pelos autores Morais, Bertini e Valente (2021).

Assim, o estudo realizado a partir de duas coleções de livros didáticos, Sangiorgi (s.d) e Liberman, Sanchez, Franchi (1974), apontou indícios de uma matemática do ensino do conceito de número, apresentado nas categorias: *sequência, significado, graduação e exercícios e problemas.*

Com base no exposto e nas análises efetuadas, foi possível perceber que na categoria *sequência*: Para Sangiorgi (s.d.a,b) o conceito de número seria desenvolvido pela manipulação de objetos, a partir da noção de conjuntos, seguido pela contagem intuitiva e, posteriormente, a compreensão dos símbolos usados para a representação de quantidades. Enquanto que para Liberman, Sanchez e Franchi (1974a; 1974b), o ensino do conceito de número aparece tendo primeiro uma preocupação em apresentar ao aluno atividades preliminares para o desenvolvimento de noções topológicas, o que indica que ambos os grupos apresentam uma *sequência* semelhante. Somente após desenvolvidas essas relações, e serem propostas atividades para desenvolvimento da representação de conjuntos, é que se parte para a construção do conceito de número, nitidamente respaldadas nas ideias construtivistas.

Partindo para a segunda categoria, elencada por Morais, Bertini e Valente (2021), tem-se o *significado*, que está relacionado a como era definido o conceito de número nos livros selecionados. Sangiorgi (s.d.a) define o *significado* de número como um conceito abstrato que dá ideia de quantidade e apresenta os princípios fundamentais para a compreensão do conceito pelos estudantes, relacionada à quantidade de elementos de um conjunto. Já Liberman, Sanchez e Franchi (1974a) apresentam o *significado,* inicialmente, com a proposta de atividades dinâmicas e uso de material concreto, indicando que o aluno construa o *significado*, o que está atrelado à realização das atividades. As autoras fazem uso da noção de conjuntos, articulando com suas características até o desenvolvimento da noção de quantidade, quando apresentam o símbolo numérico para representá-la.

Embora seja possível verificar pequenas diferenças na abordagem dos autores, a do *significado* estabelecido acaba sendo o mesmo. A obra de Sangiorgi (s.d.a) não evidencia atividades lúdicas em seu material.

A *graduação*, ligada às concepções de ensino de um dado assunto e/ou época, relacionada à estruturação apresentada nos livros escolhidos para as análises, é abordada no material de Sangiorgi (s.d) de forma estruturada, dos conjuntos, reunião de objetos e contagem. Também, na organização e estruturação dos exercícios e problemas propostos, utilizando-se da comparação via manipulação e, posteriormente, a reunião de objetos em função da ordenação. No material de Liberman, Sanchez, Franchi (1974a), percebe-se que existe uma *graduação*, das atividades preliminares, com a proposição de atividades lúdicas e o uso de materiais concretos com atividades manipulativas, seguido pelo desenvolvimento de atividades como a associação, comparação, organização, contagem e associação de quantidade com seu respectivo numeral, realizando exercícios.

Em ambas coleções, entende-se que a *graduação* se desenvolve com a proposição de atividades com material concreto, visando uma aprendizagem sensorial, relacionando noções de conjuntos, a percepção de características que propiciam a comparação e por conseguinte o agrupamento. Então, se desenvolve a ideia de quantidade para depois as operações.

Nota-se que nos dois grupos o material direcionado para o uso do aluno está organizado somente com *exercícios e problemas*, e que, com suas análises, foi encontrado indícios sobre a sistematização dos elementos de uma matemática do ensino com a apresentação de *exercícios e problemas*, visto que são desenvolvidas diversas atividades, contemplando o que era trabalhado, bem como seguindo o que era sugerido no manual/guia do professor.

A partir do exposto, é possível evidenciar que a matemática do ensino do conceito de número, nos livros selecionados, era coerente com os pressupostos do MMM, uma vez que fazia amplo uso da noção de conjuntos e visava à utilização/manipulação de materiais concretos na construção do conhecimento.

Foi possível constatar que a matemática do ensino do conceito de número, nesse período, estava intimamente ligada à ideia de quantidade de elementos de um conjunto, que poderiam ser contados e comparados a partir de características diversas.

Como citado anteriormente, o assunto é amplo, pode ser trabalhado de diferentes maneiras e analisados em diferentes livros, cabendo ainda possíveis discussões acerca do MMM e estudos sobre o conceito de numeral das concepções vigentes à época. O RCD-UFSC nos proporciona a proximidade com exemplares de diversos autores, possibilitando novos trabalhos acerca do assunto, e também o aprofundamento das análises em novas pesquisas e produções científicas.

Referências

BARGUIL, P. M. Algarismo, número, numeral e dígito: esclarecendo o significado desses termos. In: SOUSA, Ana Cláudia Gouveia de; SANTANA, Larissa Elfísia de Lima; BARRETO, Marcilia Chagas. (Orgs.). **As Múltiplas linguagens da Educação Matemática na formação e nas práticas docentes**. Fortaleza: EDUECE, 2018, v. 1, p. 311-332.

BRASIL. Lei n.º 5.692, de 11 de agosto de 1971. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação**. Fixa as diretrizes e bases para o ensino de 1º e 2º graus e dá outras providências. Brasília, DF: Presidência da República, [1971]. Disponível em: https://www2.camara.leg.br/legin/fed/lei/1970-1979/lei-5692-11-agosto-1971-357752-publicacaooriginal-1-pl.html. Acesso em: 18 de maio de 2022.

BERTINI, L. F.; MORAIS, R. S. A Matemática Moderna do Ensino de Frações na Escola de oito anos (décadas de 1960 e 1970). **HISTEMAT**, SBHMat, v. 7, p. 1-19, 2021. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/234388 Acesso em: 20 maio 2022.

COSTA, D. A. **A aritmética escolar no ensino primário brasileiro: 1890-1946**. 2010. 282 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2010. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/1792 Acesso em: 14 maio 2022.

DIENES, Z. P. **A Matemática Moderna do ensino primário**. Rio de Janeiro: Livros Horizonte, 1967.

FRANÇA, D. M. A. **Do primário ao primeiro grau: as transformações da matemática nas orientações das Secretarias de Educação de São Paulo (1961-1979)**. 2012. 296 f.

Tese (Doutorado) – Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2012. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/135357 Acesso em 12 maio 2022.

HOFSTETTER, R.; SCHNEUWLY, B. Saberes: um tema central para as profissões do ensino e da formação. *In*: HOFSTETTER, Rita; VALENTE, Wagner Rodrigues (org.). **Saberes em (trans) formação: tema central a formação de professores**. 1. ed. São Paulo: Editora da Física, 2017. p. 113-172.

JULIA, D. A cultura escolar como objeto histórico. **Revista Brasileira de História da Educação,** Campinas, v. 1, n. 1, p. 9-43, 2001. Disponível em: https://repositorio.unifesp.br/handle/11600/39195 Acesso em: 10 mar. 2022.

LAVORENTE, C. R. **A matemática moderna nos livros de Osvaldo Sangiorgi.** 2008. 254 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008. Disponível em: https://repositorio.pucsp.br/jspui/handle/handle/11351. Acesso em: 15 mar. 2022.

LEME DA SILVA, M. C. O ensino de número na escola primária: transformações lidas em manuais didáticos (1888-1965). **Revista Exitus**, v. 9, p. 51-75, 2019. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/204890 Acesso em: 10 maio 2022.

LIBERMAN, M. P.; SANCHEZ, L. B.; FRANCHI, A. (GRUEMA). **Curso moderno de matemática para o ensino de 1.º grau. Guia do professor, 1.ª série**. Ilustrações de Luiz Noviani e Gilberto Marchi Ferreira; Capa de Maria Teresa Ayoub Jorge e Regina B. Tracanella. Exemplar do professor. São Paulo. Companhia Editora Nacional, 1974a. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/208789. Acesso em: 10 maio 2022.

LIBERMAN, M. P.; SANCHEZ, L. B.; FRANCHI, A. **Curso moderno de matemática para o ensino de 1.º grau. 1.ª série**. Ilustrações de Luiz Noviani e Gilberto Marchi Ferreira; Capa de Maria Teresa Ayoub Jorge e Regina B. Tracanella. Exemplar do aluno. São Paulo. Companhia Editora Nacional, 1974b. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/xmlui/handle/123456789/159255. Acesso em: 10 maio 2022.

MONARCHA, C. **Brasil Arcaico, Escola nova**: Ciências, técnica e utopia dos anos 1920- 1930. São Paulo: Ed. UNESP, 2009. Disponível em: https://periodicos.uem.br/ojs/index.php/rbhe/article/download/38795/20324/. Acesso em: 10 maio 2022.

MORAIS, R. S.; BERTINI, L. F.; VALENTE, W. R. **A matemática do ensino de frações: do século XIX à BNCC** – São Paulo: Editora Livraria da Física, 2021.

PARDIM GOUVEIA, R. Interpretação do Ensino de Frações em Livros do GRUEMA. **Perspectivas da Educação Matemática**, v. 14, n. 35, p. 1-17, 3 ago. 2021.

PINHEIRO, N. V. L. **Escolas de práticas pedagógicas inovadoras**: Intuição, Escolanovismo e Matemática Moderna nos primeiros anos escolares. 156f. Dissertação (Mestrado em Educação e Saúde) – Universidade Federal de São Paulo, Guarulhos, 2013. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/104911 Acesso em: 5 maio 2022.

SANGIORGI, O. **Matemática. Manual do Professor. 1ª Série.** São Paulo: Companhia Editora Nacional, [s.d.]a. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/160282 Acesso em: 20 jun. 2022.

SANGIORGI, O. **Matemática. Nova Série 1º grau. 1ª série.** São Paulo: Companhia Editora Nacional, [s.d.]b. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/160295 Acesso em: 20 jun. 2022.

SAVIANI, D. **As concepções pedagógicas na história da educação brasileira.** Texto elaborado no âmbito do projeto de pesquisa "O espaço acadêmico da pedagogia no Brasil", financiado pelo CNPq, para o "projeto 20 anos do Histedbr". Campinas, v. 20, p. 21-27, 2005. Disponível em: https://histedbrantigo.fe.unicamp.br/navegando/artigos_pdf/Dermeval_Saviani_artigo.pdf Acesso em: 19 set. 2022

SOARES, E. T. P.; PINTO, N. B. Zoltan Dienes e o Sistema de Numeração Decimal (1960-1980). **Caminhos da Educação Matemática em Revista**, v. 1, p. 71-87, 2014. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/160496. Acesso em: 15 jun. 2022.

SOARES, E. T. **Zoltan Paul Dienes e o Sistema de Numeração Decimal na cultura escolar paranaense (1960-1989)**. 2014. 288f. Tese (doutorado) - Pontifícia Universidade Católica do Paraná. Curitiba, 2014. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/117008**.** Acesso em: 15 jun. 2022.

REMER, M. M. Z.; STENTZLER, M. M. Método intuitivo: Rui Barbosa e a preparação para a vida completa por meio da educação integral. *In*: **Congresso Nacional de Educação**, 9. Encontro Sul Brasileiro de Psicopedagogia, 3., 2009, Curitiba. Anais. Curitiba: Educere; ESBP- ABPp, 2009.

VALENTE, W. R. Osvaldo Sangiorgi e o movimento da matemática moderna no Brasil. Curitiba: **Revista Diálogo Educacional**, v. 8, n. 25, p. 583-613, 2008. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/xmlui/handle/123456789/160507. Acesso em: 15 jun. 2022.

VALENTE, W. R. O que é número? Intuição versus Tradição na História da educação matemática. **Revista Brasileira de História da Matemática**, v. 12, p. 21-36, 2012. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/160383. Acesso em: 10 maio 2022.

VALENTE, W. R. A Pedagogia Científica e os Programas de Ensino para o Curso Primário: uma análise dos documentos do repositório de conteúdo digital, 1930-1950. In: XI Seminário Temático GHEMAT, 2014, Florianópolis, SC. **Anais do XI Seminário Temático**. SC: UFSC, 2014. v. 1, p. 1-23. Disponível em: https://seminariotematico.ufsc.br/files/2014/03/ATB4_VALENTE_art_DAC.pdf Acesso em: 02 jun. 2022.

VALENTE, W. R. Processos de investigação histórica da constituição do saber profissional do professor que ensina matemática. **Acta Scientiae**, Canoas, v. 20, n. 3, p. 377-385, 2018. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/189543. Acesso em: 20 maio 2022.

VALENTE, W. R. História e Cultura em Educação Matemática: a produção da matemática do ensino. **REMATEC**, v. 15, n. 36, p. 164–174, 22 dez. 2020. Disponível em: http://www.rematec.net.br/index.php/rematec/article/view/307. Acesso em: 15 maio 2022.

VALENTE, W. R.; BERTINI, L. F. **A Matemática do ensino**: por uma história do saber profissional, 1870-1960. São Paulo: Universidade Federal de São Paulo (Coleção educação e saúde, v. 1). 2022. Disponível em: https://repositorio.unifesp.br/handle/11600/63803. Acesso em: 12 maio 2022.

VALENTE, W. R.; PINHEIRO, N. V. Práticas pedagógicas para a construção do conceito de número: o que dizem os documentos do Arquivo Lucília Bechara Sanchez?. **Zetetiké** (on line), v. 21, p. 19-34, 2013. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/160839 Acesso em: 10 maio 2022.

VILLELA, L. M. A. **GRUEMA - uma contribuição para a história da educação matemática no Brasil**. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo, 2009. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/161992 Acesso em: 20 maio 2022.

AUTORES E ORGANIZADORES DA OBRA

Anieli Joana de Godoi – Doutoranda pelo Programa de Pós graduação em Educação Científica e Tecnológica (PPGECT) da Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC). Mestra em Educação Científica e Tecnológica (PPGECT) pela UFSC (2020), e Professora Efetiva de Matemática na Rede Estadual de Ensino de Santa Catarina. Possui graduação em Matemática-Licenciatura pela UFSC – Campus Florianópolis (2011-2016). Membro do grupo de pesquisa GHEMAT/SC – Grupo de Pesquisa de História da Educação Matemática – Santa Catarina.

E-mail: anieligodoi@gmail.com

Lattes: http://lattes.cnpq.br/3857570563053900

Orcid: https://orcid.org/0000-0001-8396-2958

Cintia Schneider – Doutoranda em Educação Científica e Tecnológica – UFSC – Bolsista CAPES – PROEX. Mestra em Educação Científica e Tecnológica (PPGECT) pela Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC. Integrante do Grupo de Pesquisa de História de Educação Matemática de Santa Catarina – GHEMAT-SC. Formada em Matemática – Licenciatura (2012-2015) pelo Instituto Federal Catarinense – Campus Concórdia. Especialista (2021) em Docência no Ensino de Matemática e em Ensino de Matemática e Ciências Naturais (UniBF).

E-mail: cintia.schneider1995@gmail.com

Lattes: http://lattes.cnpq.br/3342873424763349

Orcid: https://orcid.org/0000-0001-9864-8347

Cristiane Aparecida dos Santos – Mestranda no curso de Educação Científica e Tecnológica pela Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), na linha de pesquisa Epistemologia e História da Ciência e da Matemática. É licenciada em Matemática pela UFSC – Campus Blumenau. É especialista em Educação a Distância (EaD): Gestão e Tutoria pela Uniasselvi. Tem interesse de pesquisa nas áreas: História da Educação Matemática com foco na formação de professores; Educação Matemática com foco na resolução de problemas

(ênfase nas teorias de George Pólya e Imre Lakatos). Atualmente é professora de matemática. Participa dos seguintes grupos de pesquisa: Grupo de Pesquisa de História da Educação Matemática Santa Catarina (GHEMAT-SC) – UFSC/CNPq e Grupo de Pesquisa Humanitas: Núcleo de Pesquisa em Epistemologias, Práticas e Saberes Interdisciplinares – UFSC/CNPq.

E-mail: cris_san_17@hotmail.com
Lattes: http://lattes.cnpq.br/7890124491208906
Orcid: https://orcid.org/0000-0002-4559-3327

David Antonio da Costa – Doutor em Educação Matemática pela PUC/SP, com estágio realizado na modalidade sanduíche (junho 2008 - maio 2009) no INRP/SHE – Institut National de Recherche Pédagogique/Service d'Histoire de l'Éducation, Paris-França (bolsista CNPq). Possui graduação em Licenciatura Matemática pela Faculdade Filosofia Ciências e Letras MOEMA (1984), graduação em Pedagogia pela Faculdade de Educação Ciências e Letras Don Domênico (2001), mestrado em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (2005) e pós-doutorado pela Universidade Federal de São Paulo (UNIFESP). Atualmente é professor associado do Departamento de Metodologia de Ensino e professor credenciado no Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica da Universidade Federal de Santa Catarina. É pesquisador líder do Grupo de Pesquisa de História da Educação Matemática - GHEMAT-SC. Membro fundador da GHEMAT-BRASIL: Grupo Associado de Estudos e Pesquisas sobre História da Educação Matemática: 1.º secretário (Mandato 2018-2022). Atualmente é Tesoureiro (Mandato 2022-2026). Na pesquisa investiga principalmente os seguintes temas: livro didático de matemática, didática da matemática, história da educação matemática e história da matemática.

E-mail: david.costa@ufsc.br
Lattes: http://lattes.cnpq.br/6716603062813715
Orcid: http://orcid.org/0000-0003-4493-9207

Flavia Caraiba de Castro – Licenciada em Matemática pela Universidade Federal do Tocantins (2012). Mestre em Educação Científica e Tecnológica pela Universidade Federal de Santa Catarina (2014). Doutoranda no programa de pós-graduação em Educação Científica e Tecnológica, pela Universidade Federal de Santa Catarina. Professora do Instituto Federal Catarinense, campus Videira. Membro do Grupo de Pesquisa de História da Educação Matemática de Santa Catarina (GHEMAT/SC).
E-mail: flavia.castro@ifc.edu.br
Lattes: http://lattes.cnpq.br/9937264400127424
Orcid: http://orcid.org/0000-0002-6744-9158

Iara Zimmer – Licenciada em Matemática pela Universidade Federal de Santa Catarina (2001), Mestrado em Engenharia de Produção pela Universidade Federal de Santa Catarina (2004), Doutorado em Educação Matemática, PUC-SP (2017). Professora titular do Ensino Fundamental e Médio, CA/CED/UFSC, desde 2006. Vice-lider do Grupo de Pesquisa de História da Educação Matemática – GHEMAT-SC.
E-mail: profiaraz@gmail.com
Lattes: http://lattes.cnpq.br/0550573483331195

Janine Marques da Costa Gregorio – Doutoranda no Programa de Pós Graduação em Educação Científica e Tecnológica (PPGECT) da Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), Mestra também pelo PPGECT da UFSC, possui graduação em Matemática-Licenciatura pela UFSC (2016) e é integrante do Grupo de Pesquisa de História de Educação Matemática de Santa Catarina – GHEMAT-SC.
E-mail: janinemcosta13@gmail.com
Lattes: http://lattes.cnpq.br/9794314496664345
Orcid: https://orcid.org/0000-0001-8704-087

Jeremias Stein Rodriguês – Graduado em Licenciatura em Matemática (2012), mestre em Matemática – PROFMAT (2016) e doutor em Educação Científica e Tecnológica (2022) todos pela Universidade Federal de Santa Catarina. Professor de Matemática no Instituto Federal de Santa Catarina – IFSC – campus Florianópolis. Membro do grupo de pesquisa GHEMAT/SC – Grupo de Pesquisa História da Educação Matemática.

Email: jeremias.stein@ifsc.edu.br

Lattes: http://lattes.cnpq.br/4365596968791194

Orcid: http://orcid.org/0000-0002-7869-5856

Jonathan Machado Domingues – Doutorando em Educação e Saúde na Infância e na Adolescência pela Universidade Federal de São Paulo (PPGESIA – UNIFESP). Mestre em Educação Científica e Tecnológica pela Universidade Federal de Santa Catarina (PPGECT-UFSC). Graduado em Licenciatura de Pedagogia pela Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ- Maracanã). Tem experiência na área de educação, com ênfase na educação matemática e formação de professores. Na pesquisa investiga principalmente os seguintes temas: história da educação, história digital, história da educação matemática e formação de professores. Em tempos do Mestrado foi bolsista CAPES PROEX.

Email: jonathandomingues18@gmail.com

Lattes: http://lattes.cnpq.br/0115673090876414

Orcid: https://orcid.org/0000-0002-1065-5655

Renata Feuser Silveira – Doutoranda no Programa de Pós-graduação em Educação Científica e Tecnológica da Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC. Mestra no Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências, Matemática e Tecnologias pela Universidade do Estado de Santa Catarina – UDESC (2017). Especialista em Metodologia e Prática Interdisciplinar do Ensino pela Faculdade Capivari – FUCAP (2008). Graduada em Licenciatura em Matemática pela Universidade do Sul de Santa Catarina - UNISUL (2006). Tem experiências profissionais na área da educação, com ênfase na docência, atuando principalmente nas seguintes unidades curriculares: matemática, cálculo diferencial, geometria analítica, álgebra linear, matemática financeira, análise e interpretação de dados. Membro do Grupo de Pesquisa de História da Educação Matemática - GHEMAT-SC. Com interesse em educação matemática: tecnologias educacionais, história da educação matemática e história da matemática.

Email: renata.feuser@gmail.com

Lattes: http://lattes.cnpq.br/6700758275062951

Orcid: https://orcid.org/0000-0001-5519-6010

Robert Rene Michel Junior – Doutorando no Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica pela Universidade Federal de Santa Catarina (PPGECT-UFSC), mestre em Educação Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora (PPGEM-UFJF) (2020), licenciado em Matemática pela Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro UFRRJ (2017). Atua nas áreas da Educação Matemática, História da Educação Matemática e na Formação de Professores. Atualmente é professor de Matemática da Rede Municipal de Volta Redonda-RJ. Participa do Grupo de Pesquisa de História da Educação Matemática Santa Catarina (GHEMAT-SC).

Email: robertrene15@hotmail.com

Lattes: http://lattes.cnpq.br/3298002184609011

Orcid: https://orcid.org/0000-0003-1313-6145

Yohana Taise Hoffmann – Doutora em Educação Científica e Tecnológica pela Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), com temáticas de estudos na Epistemologia, Sociologia do conhecimento, História Sociológica e Humanidades Digitais. Mestra em Educação Científica e Tecnológica pela UFSC, estudos na área da História da Educação Matemática, Currículo e Reformas Educacionais. Bacharel e Licenciada em Ciências Sociais pela UFSC, na área da Sociologia da Educação. É integrante do Laboratório de Pesquisas Sociológicas Pierre Bourdieu (LAPSB), do Grupo de Pesquisa Ensino e Formação de Educadores em Santa Catarina (GPEFESC), do Grupo de Pesquisa de História da Educação Matemática – Santa Catarina (GHEMAT-SC) e do Grupo Associado de Estudos e Pesquisas sobre História da Educação Matemática (GHEMAT – Brasil).

Email: yohana.thc@gmail.com

Lattes: http://lattes.cnpq.br/6232852581397708

Orcid: https://orcid.org/0000-0002-3590-315X