



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO TECNOLÓGICO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

Danilo Gartner Aurich

**Contribuição ao Estudo e à Modelagem de Correntes Induzidas em Aços para
Fins Elétricos**

Florianópolis
2023

Danilo Gartner Aurich

**Contribuição ao Estudo e à Modelagem de Correntes Induzidas em Aços para
Fins Elétricos**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação
em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de
Santa Catarina para a obtenção do título de Mestre
em Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Nelson Jhoe Batistela, Dr.

Coorientador: Prof. Nelson Sadowski, Dr.

Florianópolis

2023

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Aurich, Danilo Gartner
Contribuição ao estudo e à modelagem de correntes
induzidas em aços para fins elétricos / Danilo Gartner
Aurich ; orientador, Nelson Jhoe Batistela, coorientador,
Nelson Sadowski, 2023.
119 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa
Catarina, Centro Tecnológico, Programa de Pós-Graduação em
Engenharia Elétrica, Florianópolis, 2023.

Inclui referências.

1. Engenharia Elétrica. 2. Modelagem de correntes
induzidas. 3. Perdas por correntes induzidas. 4.
Caracterização de materiais ferromagnéticos. 5. Aço laminado
espesso. I. Batistela, Nelson Jhoe. II. Sadowski, Nelson.
III. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de
Pós-Graduação em Engenharia Elétrica. IV. Título.

Danilo Gartner Aurich

Contribuição ao Estudo e à Modelagem de Correntes Induzidas em Aços para Fins Elétricos

O presente trabalho em nível de mestrado foi avaliado e aprovado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. João Pedro Assumpção Bastos, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Marcelo Grafulha Vanti, Dr.
Fundação Universidade Regional de Blumenau

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Prof. Telles Brunelli Lazzarin, Dr.
Coordenador do Programa de
Pós-Graduação

Prof. Nelson Jhoe Batistela, Dr.
Orientador

Florianópolis, 2023.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha família que sempre me apoiou e esteve presente. Aos meus amigos que me acompanharam nessa jornada. À minha namorada pela motivação. Aos amigos e colegas de laboratório pelas discussões e distrações nesse período.

Também agradeço aos meus orientadores por dispor de seus conhecimentos e experiências, que foram de grande ajuda na realização deste trabalho.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior — Brasil (CAPES) — Código de Financiamento 001.

*“The beauty of a living thing is not the atoms that go into it,
but the way those atoms are put together.”
(Sagan, 1980)*

RESUMO

O trabalho trata das perdas por correntes induzidas, as quais compõem uma parcela importante daquelas que ocorrem em materiais ferromagnéticos. Um método para cálculo de campos é proposto a fim de se conhecer a distribuição das correntes induzidas em um material condutor. Apresenta-se a implementação deste método, enfatizando a aplicação em materiais ferromagnéticos de seção retangular e espessa. Com o ferromagnético desenvolvido para se conhecer a distribuição das correntes induzidas no material, um modelo de perdas por corrente de Foucault para seções espessas é desenvolvido, relacionando valores de perdas volumétricas por correntes induzidas em função das dimensões da seção retangular da amostra. Para a abordagem da questão, estudos experimentais são desenvolvidos em dois conjuntos de amostras, um composto de lâminas finas e outro de lâminas espessas. Resultados teóricos e experimentais são analisados, corroborando a metodologia aplicada.

Palavras-chave: Modelagem de correntes induzidas. Perdas por correntes induzidas. Caracterização de materiais ferromagnéticos. Aço laminado espesso.

ABSTRACT

This work deals with losses due to induced currents, which are responsible for an important portion of the losses in ferromagnetic materials. A method for calculating fields is proposed in order to obtain the distribution of the induced currents in a conductive material. An implementation of this method is shown, emphasizing on the application in thick sheets of ferromagnetic materials with rectangular section. With the developed tooling for obtaining the distribution of the induced currents in the material, an eddy current loss model for thick steel sheets is developed, relating volumetric losses due to induced currents as a function of the dimensions of the sample's rectangular section. Experimental studies are developed with two sets of samples, one composed of thin steel sheets and another composed of thick sheets. Theoretical and experimental results are analyzed, corroborating the applied methodology.

Keywords: Induced current modeling. Induced current losses. Ferromagnetic material characterization.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Esquema de correntes induzidas em uma lâmina fina.	25
Figura 2.2 – Esquema de correntes induzidas em um cilindro.	27
Figura 3.1 – Esquema de uma região retangular com variação de fluxo magnético.	34
Figura 3.2 – Diagrama da discretização da região de cálculo.	35
Figura 3.3 – Esquema de uma região tridimensional com seis lados.	36
Figura 3.4 – Esquema de um paralelepípedo com dimensões indicadas.	37
Figura 3.5 – Diagrama da discretização da região de cálculo para as equações de conservação de corrente.	38
Figura 3.6 – Diagrama da discretização da região de cálculo.	39
Figura 3.7 – Diagrama da discretização da região de cálculo.	40
Figura 3.8 – Esquema de vista em corte de uma amostra toroidal	47
Figura 3.9 – Esquema de células para coordenadas polares.	47
Figura 4.1 – Distribuição das amplitudes resultantes da simulação para E e J no caso $N = (100, 100)$	52
Figura 4.2 – Distribuição das amplitudes resultantes da simulação para E e J no caso $N = (1000, 1000)$	52
Figura 4.3 – Distribuição das amplitudes resultantes da simulação para E e J de uma lâmina com o dobro das dimensões, com $B_m = 0,2$ T e $N = (1000, 1000)$	54
Figura 4.4 – Distribuição das amplitudes resultantes da simulação para E e J com $B_m = 0,1$ T e $N = (1000, 1000)$	54
Figura 4.5 – Distribuição das amplitudes resultantes da simulação para E e J com $\sigma = 2 \cdot 10^7$ S/m e $N = (1000, 1000)$	55
Figura 4.6 – Distribuição das amplitudes resultantes da simulação para E e J com $f = 5$ Hz e $N = (1000, 1000)$	56
Figura 4.7 – Distribuição das amplitudes resultantes da simulação para E e J para uma amostra com seção circular e $N = (100, 100)$	58
Figura 4.8 – Distribuição das amplitudes resultantes da simulação para E e J para uma amostra com seção circular e $N = (1000, 1000)$	59
Figura 4.9 – Distribuição das amplitudes resultantes da simulação para E e J para uma amostra com seção circular e $N = (1000, 1000)$, apresentando linhas de fluxo.	59
Figura 4.10 – Distribuição das amplitudes resultantes da simulação para E e J para uma amostra com seção quadrada e $N = (100, 100)$	61
Figura 4.11 – Distribuição das amplitudes resultantes da simulação para E e J para uma amostra com seção quadrada e $N = (1000, 1000)$	61

Figura 4.12–Distribuição das amplitudes resultantes da simulação para E e J para uma amostra com seção quadrada e $N = (1000, 1000)$, apresentando linhas de fluxo.	62
Figura 4.13–Distribuição das amplitudes resultantes da simulação para E e J para uma amostra com seção quadrada laminada e $N = (1000, 1000)$..	63
Figura 4.14–Distribuição das amplitudes resultantes da simulação para E e J para uma lâmina e $N = (1000, 1000)$	64
Figura 4.15–Ajuste de curvas para $N = (100, 100)$	66
Figura 4.16–Ajuste de curvas para $N = (1000, 1000)$	67
Figura 4.17–Perdas volumétricas simuladas em função do número de células em cada dimensão para uma lâmina fina.	68
Figura 4.18–Perdas volumétricas simuladas em função do número de células em cada dimensão para uma lâmina de seção quadrada.	68
Figura 5.1 – Circuito equivalente do quadro de Epstein.	71
Figura 5.2 – Bancada e quadro de Epstein utilizados.	74
Figura 5.3 – Equipamentos utilizados para a medição.	75
Figura 5.4 – Circuito representando a medição de resistência pelo método a quatro fios	77
Figura 6.1 – Fotos das amostras utilizadas nos ensaios.	79
Figura 6.2 – Fotos das amostras utilizadas nos ensaios, com uma caneta para referencia de escala.	80
Figura 6.3 – Distribuição do módulo da densidade de corrente por simulação numérica nas amostras.	80
Figura 6.4 – Pontos de medição em função das frequências e das induções de pico nos ensaios para cada conjunto de amostras.	82
Figura 6.5 – Laços B-H experimentais em 0,5 Hz para diversos valores de B_m nas amostras finas.	83
Figura 6.6 – Laços B-H experimentais em 10 Hz para diversos valores de B_m nas amostras finas.	84
Figura 6.7 – Laços B-H experimentais em 50 Hz para diversos valores de B_m nas amostras finas.	84
Figura 6.8 – Laços B-H experimentais em 0,4 T para diversos valores de frequência nas amostras finas.	85
Figura 6.9 – Laços B-H experimentais em 1 T para diversos valores de frequência nas amostras finas.	86
Figura 6.10–Laços B-H experimentais em 1,2 T para diversos valores de frequência nas amostras finas.	86
Figura 6.11–Permeabilidade relativa estimada para as amostras finas a partir dos dados de ensaios.	87

Figura 6.12–Laços B-H experimentais em 0,5 Hz para diversos valores de B_m nas amostras espessas.	88
Figura 6.13–Laços B-H experimentais em 1 Hz para diversos valores de B_m nas amostras espessas.	89
Figura 6.14–Laços B-H experimentais em 10 Hz para diversos valores de B_m nas amostras espessas.	89
Figura 6.15–Laços B-H experimentais em 0,4 T para diversos valores de frequência nas amostras espessas.	90
Figura 6.16–Laços B-H experimentais em 1 T para diversos valores de frequência nas amostras espessas.	90
Figura 6.17–Laços B-H experimentais em 1,2 T para diversos valores de frequência nas amostras espessas.	91
Figura 6.18–Gráfico da permeabilidade magnética relativa obtida para a amostra espessa.	91
Figura 6.19–Gráfico das perdas P_{mag} por B_m para frequências baixas de operação em ensaios na amostra fina.	92
Figura 6.20–Gráfico das perdas W_{mag} por B_m para frequências baixas de operação em ensaios na amostra fina.	93
Figura 6.21–Gráfico das perdas W_{mag} por B_m para todas as frequências de operação em ensaios na amostra fina.	93
Figura 6.22–Gráfico das perdas P_{mag} por B_m para frequências baixas de operação em ensaios na amostra espessa.	94
Figura 6.23–Gráfico das perdas W_{mag} por B_m para frequências baixas de operação em ensaios na amostra espessa.	94
Figura 6.24–Gráfico das perdas W_{mag} por B_m para todas as frequências ensaiadas na amostra espessa.	95
Figura 6.25–Curvas da evolução dos coeficientes de perdas dinâmicas em função da frequência do ensaio para a amostra fina.	96
Figura 6.26–Curvas da evolução dos coeficientes de perdas dinâmicas em função da frequência do ensaio para a amostra fina com faixa reduzida de B_m	97
Figura 6.27–Gráfico dos coeficientes de perdas dinâmicas em função da frequência do ensaio para a amostra espessa.	98
Figura 6.28–Comparação das perdas calculadas com os coeficientes de perdas obtidos em 10 Hz com as perdas totais medidas para a amostra espessa.	99
Figura 6.29–Diferença entre as perdas calculadas com os coeficientes de perdas obtidos em 10 Hz e o valor medido.	100

Figura 6.30–Gráfico da condutividade estimada para os dois modelos de perdas de Foucault na amostra fina.	101
Figura 6.31–Variação de propriedades de ligas de ferro-silício em função da proporção de silício.	102
Figura 6.32–Gráfico da condutividade estimada para os dois modelos de perdas de Foucault na amostra espessa.	103
Figura D.1–Perdas volumétricas simuladas em função do tamanho a e relação entre as dimensões da seção da amostra $n = b/a$	116
Figura E.1–Densidade de corrente simulada na lâmina fina.	118

LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1 – Alterações dos parâmetros de entrada da simulação e consequente variação da perda simulada.	56
Tabela 6.1 – Parâmetros das amostras utilizadas nos ensaios	80
Tabela 6.2 – Frequências e induções de pico na quais foram realizados os ensaios.	82
Tabela 6.3 – Parâmetros das perdas por histerese obtidos.	95

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	16
1.1	OBJETIVOS	17
1.1.1	Objetivos Metodológicos	17
1.2	ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO	18
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	19
2.1	PERDAS EM MATERIAIS FERROMAGNÉTICOS	19
2.1.1	Perdas por histerese	20
2.1.2	Perdas por correntes induzidas	22
2.1.3	Perdas excedentes	23
2.2	CÁLCULO ANALÍTICO DAS PERDAS POR CORRENTES INDUZIDAS	24
2.2.1	Lâmina fina	24
2.2.2	Cilindro	27
2.3	MODELOS DA LITERATURA PARA O CÁLCULO DE PERDAS POR CORRENTES INDUZIDAS	28
2.4	MODELOS DE SIMULAÇÃO DE CAMPOS ELETROMAGNÉTICOS	30
2.5	MODELOS DE NÃO-LINEARIDADES DOS MATERIAIS FERROMAGNÉTICOS	31
2.5.1	Saturação do material ferromagnético	31
2.6	CONSIDERAÇÕES FINAIS DO CAPÍTULO	32
3	MÉTODO DE CÁLCULO DE CAMPOS POR SIMULAÇÃO NUMÉRICA	33
3.1	EQUACIONAMENTO	33
3.1.1	Discretização da Lei de Faraday	33
3.1.2	Discretização da Lei de Ampère	35
3.1.3	Modelo Completo	39
3.1.4	Considerações sobre o Modelo de Simulação	44
3.1.5	Representação Gráfica	45
3.2	MODELO CONSIDERANDO CAMPOS DE REAÇÃO	46
3.3	ABORDAGEM DO CASO TOROIDAL	46
3.4	SIMULAÇÃO DE FORMATOS MAIS COMPLEXOS	48
3.4.1	Simulação com imposição de corrente	48
3.5	CONSIDERAÇÕES FINAIS DO CAPÍTULO	50
4	RESULTADOS DE SIMULAÇÃO NUMÉRICA DO MODELO PROPOSTO	51
4.1	RESULTADOS DE SIMULAÇÃO COM METODOLOGIA PROPOSTA PARA LÂMINAS FINAS	51
4.2	RESULTADOS DE SIMULAÇÃO COM METODOLOGIA PROPOSTA PARA AMOSTRAS DE SEÇÃO CIRCULAR	57

4.3	RESULTADOS DE SIMULAÇÃO COM METODOLOGIA PROPOSTA PARA LÂMINAS RETANGULARES ESPESSAS	60
4.4	MODELO PARA LÂMINAS RETANGULARES	64
4.5	CONSIDERAÇÕES FINAIS DO CAPÍTULO	69
5	ASPECTOS DA METODOLOGIA EXPERIMENTAL APLICADA NO ESTUDO	71
5.1	BANCADA DE PERDAS EM MATERIAIS MAGNÉTICOS	71
5.1.1	Quadro de Epstein	71
5.1.2	Bancada do GRUCAD	73
5.2	MÉTODO DE SEPARAÇÃO DE PERDAS	75
5.3	MEDIÇÃO DE CONDUTIVIDADE COM MEDIÇÃO DE RESISTÊNCIA A QUATRO FIOS	76
5.4	CONSIDERAÇÕES FINAIS DO CAPÍTULO	78
6	ESTUDOS EXPERIMENTAIS	79
6.1	AS AMOSTRAS UTILIZADAS	79
6.2	OS ENSAIOS REALIZADOS	81
6.2.1	Amostras finas	82
6.2.2	Amostras espessas	87
6.3	SEPARAÇÃO DE PERDAS	92
6.3.1	Separação de perdas estáticas	95
6.3.2	Separação de perdas dinâmicas	96
6.3.3	Determinação de valores de condutividade elétrica pela separação de perdas	100
6.4	CONSIDERAÇÕES FINAIS DO CAPÍTULO	103
7	CONSIDERAÇÕES FINAIS	104
	REFERÊNCIAS	106
	APÊNDICE A – ALGUMAS PROVAS MATEMÁTICAS PARA COMPLEMENTAR O TRABALHO	109
A.1	PROVA QUE A MATRIZ DA SIMULAÇÃO É ESPARSA	109
A.2	PROVA QUE O CONJUNTO TOTAL DAS EQUAÇÕES DE CONSERVAÇÃO DE CORRENTE NA REDE É LINEARMENTE DEPENDENTE	109
	APÊNDICE B – PROGRAMA DE SIMULAÇÃO DESENVOLVIDO	111
B.1	INTERFACE E OPÇÕES DO PROGRAMA DE SIMULAÇÃO	111
B.2	TEMPO DE PROCESSAMENTO DAS SIMULAÇÕES	111
	APÊNDICE C – EQUAÇÕES PARA MODELO COM CAMPOS DE REAÇÃO	113
C.1	CÁLCULO DE CAMPOS DE REAÇÃO PARA UMA CORRENTE SINUSOIDAL IMPOSTA	114

	APÊNDICE D – PERDAS POR CORRENTES INDUZIDAS EM FUN- ÇÃO DA MUDANÇA DE ESCALA DA SEÇÃO RE- TANGULAR	115
D.1	PROPRIEDADES MATEMÁTICAS	115
D.2	COMPORTAMENTO OBSERVADO NAS SIMULAÇÕES	116
	APÊNDICE E – CÁLCULO DE CONDUTIVIDADE PELA MEDIÇÃO DE RESISTÊNCIA	117

1 INTRODUÇÃO

Máquinas elétricas, tais como transformadores, geradores e motores, são equipamentos fundamentais na indústria e no uso residencial. Esses dispositivos são também responsáveis por grande parte da geração e da transmissão de energia elétrica e utilizam a conversão de campos magnéticos e elétricos como mecanismo de seu funcionamento. De modo a guiar e permitir uma maior concentração de fluxo magnético em tais dispositivos, em diversas aplicações emprega-se o uso de materiais ferromagnéticos nos núcleos das máquinas elétricas e transformadores. Entretanto, o uso destes materiais acarreta em perdas energéticas que surgem quando estes materiais são submetidos a campos magnéticos variantes.

As principais perdas energéticas que ocorrem em materiais ferromagnéticos são divididas em três parcelas. Uma das parcelas é a perda por histerese, relacionada ao processo de magnetização e desmagnetização do material diante de fluxos alternados. A segunda parcela de perdas é composta pelas perdas por correntes induzidas (ou perdas de Foucault), que são devidas ao surgimento de correntes induzidas no material ferromagnético. A terceira parcela é conhecida como perda excedente ou anômala, e é caracterizada por microcorrentes relacionadas às interações entre domínios magnéticos presentes no material que aparecem quando há deslocamentos das paredes dos domínios (BERTOTTI, 1998).

Geralmente, procura-se utilizar materiais com características que reduzam as suas perdas, como materiais ferromagnéticos moles para diminuir a perda por histerese, ou utilizar técnicas metalúrgicas de confecção de materiais para controlar a proporção de certas impurezas nas ligas de materiais empregados nesses dispositivos, de maneira a diminuir um ou mais dos tipos de perdas (ADLER; PFEIFFER, 1974). Entretanto, uma parcela dessas perdas sempre está presente, e, em alguns casos, o material é escolhido por possuir outras propriedades desejadas, como rigidez mecânica, maior indução de saturação ou até mesmo o seu baixo custo comercial e facilidade de construção, de maneira que o material ferromagnético empregado nos dispositivos eletromagnéticos pode não ter propriedades mais apropriadas sob o ponto de vista eletromagnético.

Assim, o estudo do cálculo e de modelos empregados em simulações do comportamento das perdas magnéticas é uma parte fundamental das ferramentas para projetos e avaliação de desempenho de uma máquina elétrica. Com uma fundamentação teórica sólida é possível tomar providências para a busca da melhor utilização dos materiais disponíveis. Dentre as perdas em materiais ferromagnéticos mencionadas, a perda por correntes induzidas pode ser, em muitos casos, a que possui maior participação das perdas totais no material.

O fenômeno de correntes induzidas pode ser demonstrado pelo famoso experi-

mento de Faraday: uma lâmpada incandescente é acesa quando uma bobina conectada à própria lâmpada é movimentada próxima a um ímã (DAY, 1999). Esse experimento resultou na lei de Faraday, que mais tarde integraria o conjunto de equações de Maxwell para o eletromagnetismo.

As perdas por correntes induzidas nem sempre estão relacionadas a algo indesejado. Tem-se, por exemplo, a aplicação do fenômeno em fogões de indução, que utilizam o calor gerado pelas correntes induzidas em um recipiente para aquecer o alimento que está sendo cozinhado. As correntes induzidas também possuem aplicação em freios magnéticos, em que um ímã sofre uma força contrária ao seu movimento quando próximo a um material condutor, por exemplo. Nesta aplicação, os campos magnéticos do ímã em movimento produzem uma variação de fluxo magnético no material condutor, induzindo correntes elétricas no material, que, por sua vez, interagem com o campo magnético do ímã, aplicando uma força contrária ao seu movimento. Este mesmo princípio é utilizado pelos geradores elétricos, que utilizam correntes induzidas em condutores (os enrolamentos da máquina) para realizar trabalho, disponibilizando energia através de sistemas (redes) elétricos.

Este trabalho foca no estudo das correntes induzidas em materiais ferromagnéticos que, geralmente, são consideradas como algo indesejado, pois diminuem a eficiência e o desempenho de uma máquina elétrica. Para atenuar os efeitos indesejáveis deste fenômeno, aços para fins elétricos são laminados.

1.1 OBJETIVOS

No contexto do fenômeno das perdas por correntes induzidas em materiais ferromagnéticos, o objetivo deste trabalho é propor um modelo que estime as perdas em lâminas espessas, assim como um modelo de simulação numérica para o cálculo da distribuição de correntes elétricas em materiais condutores.

1.1.1 Objetivos Metodológicos

Para atingir o objetivo geral, os objetivos metodológicos são:

- Atualizar o estado da arte sobre modelos para estimação de perdas por correntes induzidas em materiais ferromagnéticos aplicados em máquinas elétricas;
- Desenvolver um procedimento numérico para simular correntes induzidas em materiais condutores atravessados por um fluxo magnético variante;
- Obter um modelo de estimação de perdas por correntes de Foucault aplicável em lâminas espessas através do ajuste de curvas a partir de dados obtidos por simulação numérica;

- Realizar e analisar ensaios experimentais para observar o comportamento das perdas por correntes induzidas em lâminas espessas de materiais ferromagnéticos.

1.2 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

O presente trabalho é organizado em seis capítulos, sendo o capítulo 1 esta introdução ao tema abordado e ao trabalho.

O capítulo 2 apresenta um sumário sobre as perdas em materiais ferromagnéticos, com um enfoque nos modelos existentes na literatura para a determinação das perdas por correntes induzidas em materiais condutores homogêneos de formatos variados.

No capítulo 3 é apresentado o método de cálculo de campos desenvolvido neste trabalho. O método parte de equações fundamentais do eletromagnetismo para desenvolver um conjunto de formulações representando as grandezas eletromagnéticas em uma dada discretização da região de cálculo. Assim, apresenta-se o conjunto de equações obtido para a representação do fenômeno das correntes induzidas, além de adaptações que podem ser realizadas no modelo para simular outros fenômenos.

No capítulo 4, apresentam-se os resultados obtidos pelo modelo para diferentes formatos e tamanhos de seção de lâmina. Utilizando o modelo de simulação numérica desenvolvido, obtém-se um modelo para as perdas volumétricas por correntes induzidas em lâminas espessas. Apresenta-se também uma comparação com modelos presentes na literatura.

O capítulo 5 apresenta os procedimentos experimentais realizados no presente trabalho, assim como as equações utilizadas para obter o valor das grandezas eletromagnéticas a partir de ensaios no quadro de Epstein. Neste capítulo também são apresentados os dispositivos diversos utilizados na medição e preparação de ensaios.

No capítulo 6, apresentam-se os dados obtidos experimentalmente, os quais são analisados e utilizados para realizar o processo de segregação de perdas magnéticas. Comparam-se também os resultados obtidos com o que se espera conforme a literatura e os demais modelos e fenômenos apresentados nos capítulos precedentes.

O capítulo 7 contém as conclusões e considerações finais obtidas a partir das simulações e dados experimentais. Também são apresentadas sugestões para trabalhos futuros que desejem continuar o desenvolvimento de métodos numéricos para obtenção de grandezas eletromagnéticas ou na área de separação de perdas em materiais ferromagnéticos.

Essa dissertação também contém alguns apêndices, que complementam algumas informações apresentadas nos capítulos do trabalho.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capítulo, apresenta-se um resumo sobre a questão das perdas em materiais ferromagnéticos, assim como alguns modelos existentes na literatura.

2.1 PERDAS EM MATERIAIS FERROMAGNÉTICOS

Diversos dispositivos eletromagnéticos têm o seu funcionamento com fluxos magnéticos alternados. Comumente, utilizam-se materiais ferromagnéticos com o objetivo de concentrar e guiar o fluxo magnético produzido de maneira a melhorar a eficiência e a operação do dispositivo. Entretanto, a circulação de um fluxo magnético alternado em materiais ferromagnéticos também resulta em perdas indesejadas. Essas perdas possuem diversas origens, sendo geralmente separadas em três parcelas: as perdas por histerese P_h , as perdas por correntes induzidas P_f e as perdas excedentes P_e . A soma destas três parcelas é conhecida como perda magnética total P_t . Essa separação é apresentada em (2.1).

$$P_t = P_h + P_f + P_e \quad (2.1)$$

No contexto da engenharia elétrica, é comum empregar o conceito de potência elétrica, dada em Watts, que representa a energia consumida ou produzida por unidade de tempo. Os materiais ferromagnéticos são classificados comercialmente, entre outras características, em função de sua perda em potência dada em W/kg. No contexto da caracterização de materiais ferromagnéticos, é comum tratar as perdas em energia, dada em Joules, ou em unidades de densidade de energia, seja em densidade volumétrica (J/m^3), em densidade mássica (J/kg) ou energia total da amostra (J) (caso o objetivo de estudo seja em amostras ou peças específicas).

A conversão entre os dois tipos de perdas é dada por (2.2), relacionando a energia W com a integral da perda instantânea $P(t)$.

$$W = \int_{t_i}^{t_f} P(t)dt \quad (2.2)$$

Para tratar das perdas como energia, deve-se definir um referencial de tempo, definido como o período de um ciclo T do sinal periódico. Portanto, as perdas em energia W se referem a energia dissipada em um período do sinal de fluxo aplicado no material.

Quando se trata de sinais periódicos, resultando em um sinal de potência $P(t)$ periódica com período T , pode-se empregar o conceito de potência média P_m definida por (2.3).

$$P_m \equiv \frac{1}{T} \int_T P(t) dt \quad (2.3)$$

Com o valor da potência média, a relação entre energia e potência é dada pela multiplicação ou divisão, respectivamente, do período T ou da frequência $f = \frac{1}{T}$ da forma de onda periódica, conforme (2.4).

$$P_m = W \cdot f \quad (2.4)$$

As perdas em um material ferromagnético também podem ser separadas em termos de energia, conforme (2.5).

$$W_t = W_h + W_f + W_e \quad (2.5)$$

No decorrer deste trabalho as perdas são tratadas em ambas as representações, conforme o mais adequado à aplicação do modelo em questão. As próximas seções apresentam resumidamente cada uma dessas parcelas de perdas.

2.1.1 Perdas por histerese

As perdas por histerese magnética são oriundas do movimento das paredes dos domínios magnéticos presentes em materiais ferromagnéticos. O movimento das paredes dos domínios acontece quando o material se magnetiza em alguma direção. Para se realizar a magnetização ou desmagnetização do material, impõe-se um campo magnético na direção da magnetização desejada. Se esse campo for suficientemente alto, as paredes dos domínios magnéticos se locomovem de forma a aumentar o número de dipolos magnéticos que apontam na direção de magnetização. Entretanto, o movimento das paredes é um processo que requer energia para ser realizado. Assim, como em regimes alternados há uma magnetização e desmagnetização do material ferromagnético, é necessária uma quantidade de energia no sistema para suprir o gasto no processo de deslocamento de paredes dos domínios. Esta energia necessária para realizar o ciclo de magnetização e de desmagnetização do material é conhecida como a perda por histerese.

Como essas perdas estão relacionadas à energia necessária para mover as paredes dos domínios magnéticos no processo de magnetização e desmagnetização, esta energia para mover as paredes não depende da velocidade em que esse movimento ocorre. Desse modo, a perda em um ciclo de histerese, para uma dada forma de onda e valor de pico, independe da frequência. Devido a isto, essa perda é chamada de “perda estática” (e medida em regimes chamados “quase estáticos”), em contraste

com as “perdas dinâmicas” as quais dependem da frequência, que serão vistas adiante. É importante salientar, que a perda por histerese total *por ciclo* é constante. Assim, é conveniente tratar a perda por histerese em unidades de energia para que seu valor se mantenha constante com a frequência. I.e., no sistema internacional de unidades (S.I.) essa perda energética é tratada em unidades relacionadas à energia ou à densidade de energia, como J, J/m³ ou J/kg.

Matematicamente, a histerese é uma característica de alguns sistemas que possuem “memória”. Esta característica de “memória” pode ser tratada por uma propriedade indicadora que a saída do sistema depende, além do valor de sua entrada atual, de valores anteriores de entrada ou saída. Assim, para saber a saída do sistema para um dado estímulo de entrada, é necessário conhecer a condição prévia do sistema, anterior à aplicação da excitação de entrada.

A histerese magnética, por sua vez, relaciona as amplitudes instantâneas do campo magnético e da indução magnética em um determinado material com base no seu estado de magnetização. A magnetização do material é a causa da propriedade de “memória” desse sistema.

Devido ao seu comportamento de memória, juntamente com demais fenômenos que ocorrem na relação entre campo magnético e indução magnética em materiais ferromagnéticos, como a saturação magnética do material, o comportamento da curva de histerese é complexo, o que dificulta a modelagem matemática destes materiais. Além de modelos experimentais/empíricos como o modelo de Steinmetz (STEINMETZ, 1984), apresentado em (2.7), existem na literatura alguns modelos matemáticos que podem se adequar à curva de histerese experimental para certos materiais e condições de operação. Alguns modelos desse tipo são o modelo de Jiles-Atherton (JILES; ATHERTON, 1986), o modelo de Preisach (PREISACH, 1935) e o modelo G (BASTOS, J. P. A. *et al.*, 2018). Entretanto, esses modelos tendem a adicionar uma complexidade significativa em modelos analíticos e/ou de simulação numérica. Assim, é comum no cálculo do projeto de máquinas elétricas e em suas simulações numéricas, utilizar simplificações do fenômeno da histerese magnética para tornar os cálculos e simulações numéricas aplicáveis na prática. Essas simplificações podem causar desvios entre o que é calculado nas simulações numéricas ou em projetos em relação a testes experimentais de equipamentos. Portanto, são necessários testes em laboratório dos equipamentos para verificar se o seu comportamento está de acordo com o desejado pelo projeto e suas especificações. Nesse contexto, o projetista tem interesse em empregar modelos simples de computação que possam resultar em boas aproximações com a realidade, diminuindo o número de testes e ensaios, ou de reprojeto, necessários para determinar a condição de um dispositivo projetado ou de sua análise.

Assim, a perda energética pelo fenômeno de histerese deve ser fornecida ao material para a realização de um ciclo de magnetização, e é dada pela área do laço

B-H formado. Essa área pode ser calculada por (2.6).

$$W = \int_T H(t) dB(t) \quad (2.6)$$

A energia de um ciclo de histerese W_h pode ser estimada através da equação empírica de Steinmetz, apresentada em (2.7). Essa equação é válida para formas de onda de indução magnética sinusoidais, no qual B_m representa o valor de pico da indução magnética e k_h e α_h são parâmetros do modelo relacionados às características do material ferromagnético.

$$W_h = k_h B_m^{\alpha_h} \quad (2.7)$$

2.1.2 Perdas por correntes induzidas

As perdas por correntes induzidas, também conhecidas por perdas de Foucault (ou perdas *eddy* em outros idiomas) são causadas por efeito Joule pela circulação de correntes induzidas internamente ao material ferromagnético. O surgimento dessas correntes é devido à presença de uma variação temporal de fluxo magnético em um material de condutividade elétrica não nula. Portanto, para um regime de corrente alternada, esta perda sempre estará presente, mesmo que em proporção baixa (podendo ser negligível em alguns casos), já que os materiais empregados para condução de fluxo magnético sempre possuem condutividade elétrica não nula.

Quando um material condutor é atravessado por um fluxo magnético variante no tempo, surgirá uma corrente elétrica neste material. A relação entre essa corrente induzida e a variação de fluxo magnético é descrita pela lei de Faraday. Essa lei relaciona o campo elétrico induzido \vec{E} com a derivada temporal da indução magnética $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$. A lei de Faraday é apresentada em (2.8) na sua forma diferencial, e pertence ao conjunto das equações de Maxwell para o eletromagnetismo. Nesta equação, além dos vetores campo elétrico e indução magnética, tem-se ainda o operador rotacional $\nabla \times$ e a derivada parcial no tempo $\frac{\partial}{\partial t}$.

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.8)$$

A densidade de corrente elétrica \vec{J} pode ser obtida através da relação constitutiva apresentada em (2.9), em que σ representa a condutividade elétrica. Em algumas aplicações, σ é um tensor dado por uma matriz que leva em conta efeitos não isotrópicos do material, i.e. quando o valor da condutividade do material é distinto em diferentes direções. No decorrer deste trabalho será apenas considerado o caso de uma condutividade isotrópica e, portanto, σ é tratado como um escalar.

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (2.9)$$

A corrente elétrica I que passa por uma região S é obtida por (2.10), quando se conhece a distribuição da densidade de corrente \vec{J} na geometria do material.

$$I = \int_S \vec{J} \cdot \vec{ds} \quad (2.10)$$

Conhecidas as distribuições do campo elétrico \vec{E} e da densidade de corrente \vec{J} , a perda por correntes induzidas em um dado volume V de material é calculada com (2.11).

$$P = \int_V \vec{J} \cdot \vec{E} dv \quad (2.11)$$

O estudo da distribuição de correntes induzidas e das perdas ocasionadas por elas é um dos focos deste trabalho. Ainda neste capítulo, serão apresentados alguns modelos clássicos para esse tipo de perda em determinadas configurações, assim como alguns estudos recentes que visam adaptar os modelos desse tipo de perda a algumas situações particulares.

2.1.3 Perdas excedentes

As perdas excedentes, também conhecidas como perdas anômalas, compõem o segundo tipo de perda dinâmica que ocorre em materiais ferromagnéticos. Historicamente, essas perdas eram perdas “extras” que apareciam experimentalmente além das perdas conhecidas de origem histerética e por correntes induzidas. Essa característica lhe herdou o nome de “anômala”.

Visando explicar a origem das perdas anômalas, Bertotti (BERTOTTI, 1998) desenvolveu um modelo baseado em “objetos magnéticos” e na interação entre as paredes dos domínios magnéticos do material. O modelo proposto por (BERTOTTI, 1998) para as perdas excedentes é apresentado em (2.12). Nesse modelo, m_v é a densidade do material, σ é a condutividade do material, e G , V_o e S são outros parâmetros do modelo relacionados a sua microestrutura.

$$P_e = \frac{1}{m_v T} \sqrt{\sigma G V_o S} \int_T \left\| \frac{dB}{dt} \right\|^{1.5} dt \quad (2.12)$$

Como m_v , σ , G , V_o e S apresentados no modelo são constantes (parâmetros) de um dado material, a simplificação de (2.12) para uma dada frequência de operação

f resulta na expressão conhecida experimentalmente (2.13). Conforme (BERTOTTI, 1998), para uma forma de onda de indução magnética B sinusoidal, as perdas excedentes são dadas pela expressão (2.13), em que B_m representa a amplitude de B e f a sua frequência, e k_e é uma constante do material a ser obtida experimentalmente. A equação, (2.12) pode ser aplicada para obter as perdas excedentes para outras formas de onda de indução magnética B .

$$P_e = k_e(B_m f)^{1,5} \quad (2.13)$$

2.2 CÁLCULO ANALÍTICO DAS PERDAS POR CORRENTES INDUZIDAS

Para alguns casos, o cálculo analítico da distribuição das correntes induzidas devido à variação do fluxo magnético em um material condutor é relativamente simples de se realizar. Esses casos geralmente possuem algum tipo de simetria que simplifica as equações de modo que sua solução possa ser encontrada mais facilmente. Nessa seção são apresentadas duas soluções para o cálculo de correntes induzidas: a primeira corresponde ao modelo clássico para uma lâmina fina; a segunda é para um cilindro em que a variação de fluxo se dá no seu eixo axial. A distribuição da variação de fluxo magnético para ambos os casos é considerada uniforme.

2.2.1 Lâmina fina

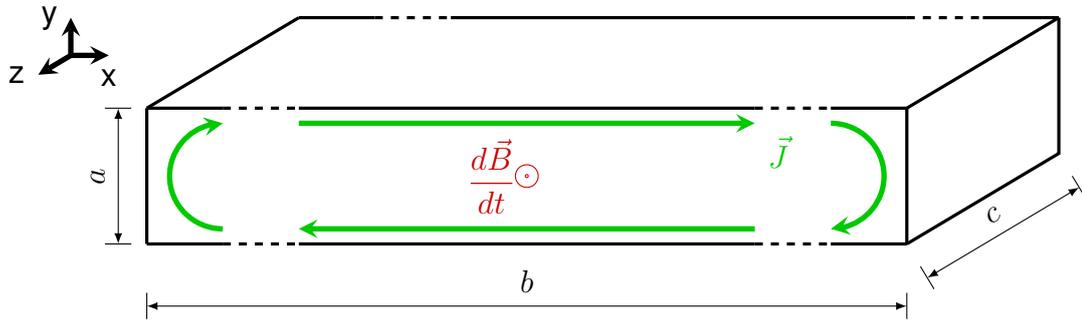
Como já mencionado, para diminuir o efeito de correntes induzidas nos núcleos empregados nas máquinas elétricas, comumente é feita a laminação do material neles empregado, bem como aplicada uma camada isolante entre as lâminas. As lâminas são agrupadas de maneira a resultar em uma seção magnética maior, permitindo maior fluxo magnético na máquina.

A laminação do núcleo geralmente é feita de modo a produzir lâminas com espessura bem fina (< 1 mm). Assim, é comum utilizar uma aproximação em um modelo de cálculo da perda por correntes induzidas em lâminas finas. A seguir apresenta-se o desenvolvimento da expressão deste modelo simplificado.

Considera-se uma lâmina de material ferromagnético, como apresentado na figura 2.1. As dimensões dessa lâmina são b , a , c nas direções x , y e z , respectivamente. Considera-se também que essa lâmina é atravessada por um fluxo magnético variante no tempo (com o vetor da indução magnética perpendicular à seção retangular), distribuído uniformemente através da seção retangular do material.

Pela lei de Faraday, o campo elétrico induzido na lâmina \vec{E} é relacionado com a variação da indução magnética $\frac{d\vec{B}}{dt}$ conforme a equação (2.8), novamente apresentada em (2.14).

Figura 2.1 – Esquema de correntes induzidas em uma lâmina fina.



Fonte: Elaborado pelo autor.

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt} \quad (2.14)$$

Como a direção da variação da indução magnética é ortogonal à seção da lâmina, assim $\frac{d\vec{B}}{dt} = (0, 0, \frac{dB_z}{dt})$. Como é considerado que a lâmina é fina, tem-se que $b \gg a$, de modo que $\vec{E} = (E_x, 0, 0)$. Com essas considerações, a equação (2.14) é simplificada e dada por (2.18).

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{dB_z}{dt} \vec{z} \quad (2.15)$$

$$\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \vec{z} = -\frac{dB_z}{dt} \vec{z} \quad (2.16)$$

$$-\frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{dB_z}{dt} \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{dB_z}{dt} \quad (2.18)$$

A resolução da equação diferencial (2.18) resulta em (2.19), em que a constante cte depende de onde foi definida a origem (coordenada 0) do eixo y . No caso em que o centro do eixo de coordenadas escolhido se alinha com o centro da peça, tem-se que $cte = 0$. Note que $E_x = 0$ quando y é posicionado no centro da peça (i.e., com $E_x(y = 0) = 0$ para a escolha do centro do eixo de coordenadas alinhado com o centro da peça).

$$E_x(y) = \frac{dB_z}{dt} y + cte \quad (2.19)$$

Para calcular a perda total por correntes induzidas, integra-se (2.19) em todo o volume da peça, conforme (2.20), resultando na expressão (2.24).

$$P = \int_V \vec{J} \cdot \vec{E} dv \quad (2.20)$$

$$= \int_{-\frac{c}{2}}^{+\frac{c}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \sigma E^2 dx dy dz \quad (2.21)$$

$$= bc\sigma \left(\frac{dB_z}{dt} \right)^2 \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} y^2 dy \quad (2.22)$$

$$= bc\sigma \left(\frac{dB_z}{dt} \right)^2 \frac{a^3}{12} \quad (2.23)$$

$$P = (abc)\sigma \frac{a^2}{12} \left(\frac{dB_z}{dt} \right)^2 \quad (2.24)$$

A perda volumétrica então pode ser obtida dividindo a perda P pelo volume da peça $V = abc$, obtendo-se (2.25).

$$P_v \equiv \frac{P}{V} = \sigma \frac{a^2}{12} \left(\frac{dB_z}{dt} \right)^2 \quad (2.25)$$

Portanto, tem-se que quando uma lâmina fina (com $b \gg a$) é atravessada por um fluxo magnético variante, a perda por unidade de volume depende apenas da espessura da lâmina a , da condutividade do material σ e da derivada da indução magnética $\frac{dB}{dt}$. Esse resultado reforça que a laminação dos materiais ferromagnéticos empregados em núcleos magnéticos reduz significativamente as perdas por correntes induzidas.

A equação (2.25) é amplamente utilizada no cálculo de perdas induzidas no projeto e análise de materiais ferromagnéticos aplicados em máquinas elétricas. No decorrer deste trabalho, este resultado será referido como “modelo clássico” das perdas por correntes induzidas. Vale ressaltar que esta expressão é válida para qualquer forma de onda de indução magnética aplicada na amostra, e que o valor da perda resultante apenas depende da derivada dessa forma de onda, e não de seus valores instantâneos ou médios. A expressão (2.25) é simplificada para (2.28) no caso de uma indução magnética sinusoidal de amplitude de pico B_m e frequência f , que apresenta a perda energética por ciclo por unidade de massa W_f em uma amostra de densidade m_v .

$$W_f \equiv \frac{1}{m_v} \int_T P_v dt \quad (2.26)$$

$$= \frac{\sigma a^2}{12} \frac{1}{m_v} \int_T \left(\frac{dB_z}{dt} \right)^2 dt \quad (2.27)$$

$$= \frac{\sigma \pi^2 a^2 B_m^2 f}{6m_v} \quad (2.28)$$

Com essa equação, tem-se a característica linear da perda energética por correntes induzidas em relação à frequência.

A potência média por unidade de massa nesse caso é dada por (2.29).

$$P_f = \frac{\sigma \pi^2 a^2 B_m^2 f^2}{6m_v} \quad (2.29)$$

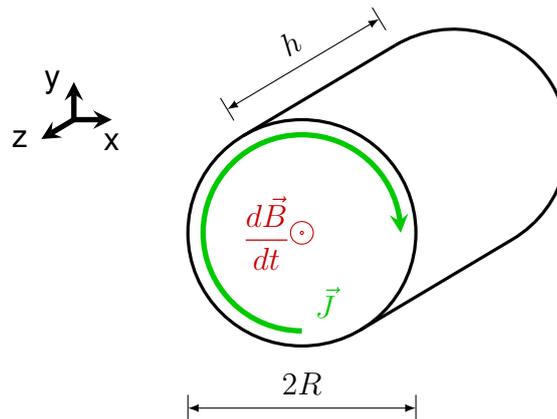
2.2.2 Cilindro

Para lâminas de seção circular, a simetria circular da seção permite encontrar com facilidade o valor do campo elétrico produzido. A relação entre o campo elétrico e a derivada de fluxo magnético é dada pela lei de Faraday em sua forma integral (2.30), em que ϕ é o fluxo magnético envolvido pelo laço fechado L .

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\phi}{dt} \quad (2.30)$$

A figura 2.2 apresenta um esquema de uma amostra cilíndrica com raio R e comprimento h . Considerando que o laço fechado L corresponde à circunferência de raio r concêntrica ao eixo axial da peça, a simetria do problema resulta na equação para a circulação do campo elétrico E no decorrer da circunferência, apresentada em (2.31).

Figura 2.2 – Esquema de correntes induzidas em um cilindro.



Fonte: Elaborado pelo autor.

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = E \cdot 2\pi r \quad (2.31)$$

Considerando a distribuição da indução magnética homogênea na seção circular, o fluxo magnético que atravessa o interior do círculo de raio r é dado por (2.32).

$$\phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = B\pi r^2 \quad (2.32)$$

Substituindo (2.31) e (2.32) em (2.30), obtém-se a expressão (2.33) que relaciona o módulo do campo elétrico E com a derivada da indução magnética $\frac{dB}{dt}$ e o raio r da circunferência que passa por aquele ponto.

$$E = \frac{\pi r^2}{2\pi r} \frac{dB}{dt} = \frac{r}{2} \frac{dB}{dt} \quad (2.33)$$

Com (2.33), a perda total por correntes induzidas pode ser então calculada por (2.36).

$$P = \int_V \sigma E^2 dv = \frac{\sigma}{4} \int_V \left(\frac{dB}{dt} r \right)^2 (r dr d\theta dz) \quad (2.34)$$

$$= \frac{\sigma}{4} \left(\frac{dB}{dt} \right)^2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h dz \int_0^R r^3 dr \quad (2.35)$$

$$= \frac{\sigma}{8} (\pi R^2 h) R^2 \left(\frac{dB}{dt} \right)^2 \quad (2.36)$$

Como o volume do cilindro é dado por $V = \pi R^2 h$, a perda por unidade de volume (ou densidade volumétrica de perda) P_v é dada por (2.37).

$$P_v = \frac{\sigma}{8} R^2 \left(\frac{dB}{dt} \right)^2 \quad (2.37)$$

Nota-se algumas similaridades entre as duas equações obtidas, (2.25) e (2.37). Há dependência linear de P_v com a condutividade elétrica do material σ , a dependência de P_v com o quadrado da derivada da indução magnética $\frac{dB}{dt}$ e também a dependência de P_v com o quadrado do valor de um dos parâmetros de dimensão da peça a ou R , respectivamente para a lâmina fina e peça cilíndrica. Assim, devido ao comportamento físico do fenômeno, espera-se que outras soluções para problemas semelhantes de perdas por correntes induzidas possuam um comportamento similar das grandezas e parâmetros envolvidos.

2.3 MODELOS DA LITERATURA PARA O CÁLCULO DE PERDAS POR CORRENTES INDUZIDAS

O estudo do comportamento de correntes de Foucault e suas decorrentes perdas ainda são alvo de estudo na literatura, com estudos que propõem modelos mais adaptados para certas configurações do material que o modelo clássico aproximado

para lâminas finas. Alguns modelos procuram melhorar as estimativas para condições de operação mais extremas de frequência e fluxo (STEENTJES; LESSMANN; HAMEYER, 2012) ou de temperatura (XUE *et al.*, 2017). Outros modelos focam em melhorar as aproximações nos casos de lâminas mais espessas (DE LA BARRIÈRE; LOBUE; MAZALEYRAT, 2014) e (GÜRBÜZ *et al.*, 2022).

No estudo de (DE LA BARRIÈRE; LOBUE; MAZALEYRAT, 2014), os autores propõem uma solução semi-analítica para o problema das perdas por correntes induzidas em lâminas com formato retangular, caso o efeito pelicular possa ser desconsiderado. A equação do modelo proposto é apresentada por (2.38), em que S é a seção da lâmina e K é um fator que depende apenas do formato da seção, que para uma lâmina retangular $K = K^{(RECT)}$, dado por (2.39). Nessas equações, R é a razão entre a espessura l e a largura L da amostra, dada por (2.40).

$$W = \sigma K S \int_T \left(\frac{dB}{dt} \right)^2 dt \quad (2.38)$$

$$K^{(RECT)} = \frac{8}{\pi^4 R} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(2k-1)^4} - \frac{2}{\pi R} \frac{1}{(2k-1)^5} \frac{[1 - \exp(-(2k-1)\pi R)]^2}{[1 - \exp(-2(2k-1)\pi R)]} \right\} \quad (2.39)$$

$$R = \frac{l}{L} \quad (2.40)$$

Os autores de (DE LA BARRIÈRE; LOBUE; MAZALEYRAT, 2014) ainda propõem uma simplificação para o fator $K^{(RECT)}$, apresentada por $K'^{(RECT)}$ em (2.41). Nessa equação, tem-se que $\frac{K'^{(RECT)}}{R}$ pode ser tratado como um fator de correção multiplicativo para ser aplicado diretamente no modelo clássico (2.25).

$$\frac{K'^{(RECT)}}{R} = \frac{1}{12} - \frac{1}{20} R \quad (2.41)$$

Vale notar que para as duas propostas (modelo analítico e simplificado) do coeficiente $K^{(RECT)}$ convergem para o valor do coeficiente do modelo clássico para lâminas finas (2.42).

$$\lim_{R \rightarrow 0} \frac{K^{(RECT)}}{R} = \frac{K'^{(RECT)}}{R} = \frac{1}{12} \quad (2.42)$$

O estudo de (GÜRBÜZ *et al.*, 2022) apresenta outro modelo para o cálculo das perdas por correntes induzidas em lâminas de formato retangular. Os autores propõem a expressão (2.43) para a perda por correntes de Foucault W .

$$W = \frac{\sigma a^2 b^2}{12(a^2 + b^2)} \int_T \left(\frac{dB}{dt} \right)^2 dt \quad (2.43)$$

Para esse modelo, pode-se também ver o termo $\frac{b^2}{a^2+b^2}$ como um fator de correção multiplicativo, também aplicado ao modelo clássico (2.25).

Nota-se que os modelos propostos (DE LA BARRIÈRE; LOBUE; MAZALEYRAT, 2014) e (GÜRBÜZ *et al.*, 2022) são distintos, assim como os fatores de correção propostos em cada um dos modelos. Apesar de que o valor limite para lâminas finas em ambos os modelos convirja para o modelo clássico (i.e., o fator de correção converge para 1), tem-se que os valores previstos em cada modelo diferem para uma lâmina de seção quadrada. Para $a = b = 1$, os fatores de correção aplicados ao modelo clássico valem, respectivamente, 0,4 e 0,5 para os estudos de (DE LA BARRIÈRE; LOBUE; MAZALEYRAT, 2014) e de (GÜRBÜZ *et al.*, 2022).

O presente trabalho propõe um modelo para o cálculo das perdas por correntes de Foucault para lâminas retangulares. Ele foi desenvolvido com uma metodologia distinta àquelas empregadas pelos trabalhos citados. O resultado obtido corrobora com o resultado de (DE LA BARRIÈRE; LOBUE; MAZALEYRAT, 2014), como será visto nos capítulos seguintes.

2.4 MODELOS DE SIMULAÇÃO DE CAMPOS ELETROMAGNÉTICOS

Em diversas aplicações na área de eletromagnetismo, tem-se configurações e aplicações que produzem equações complexas ou com parâmetros e condições de contorno complexas, que não podem ser facilmente resolvidas analiticamente, ou que não possuem solução analítica fechada. Para esses casos, é comum utilizar métodos de simulação de campos para obter aproximações numéricas da solução desejada. Esses métodos geralmente discretizam uma dada região do espaço, chamada de região de cálculo ou região de domínio, na qual será realizada a simulação/representação do comportamento eletromagnético. A discretização da região de cálculo permite então a obtenção de um conjunto de equações finito, com um número também finito de variáveis, o qual é resolvido para estimar as amplitudes e direções dos campos eletromagnéticos envolvidos no problema (BASTOS, J., 1996).

Um dos métodos de simulação de campos mais utilizados no eletromagnetismo é o método de cálculo por elementos finitos (MEF), sendo empregado em diversos softwares de pesquisa, comerciais ou livres, como o EFCAD (BASTOS, João Pedro A; SADOWSKI, 2003), ANSYS MAXWELL, FREEFEM (HECHT, 2012), e outros. Esse método se baseia na formulação fraca das leis de Maxwell, que permite a integração das equações de Maxwell em cada elemento discretizado. Este método também

permite a utilização de funções polinomiais de interpolação, resultando uma maior precisão na resolução do sistema de equações.

O modelo de simulação que é apresentado neste trabalho difere do MEF na sua formulação. Enquanto o MEF geralmente utiliza grandezas potenciais como variáveis incógnitas (como o potencial elétrico V e o potencial vetor magnético \vec{A}), o modelo apresentado utiliza diretamente o valor dos campos ou induções, sem a necessidade da abstração de potenciais, que, particularmente para o potencial vetor magnético, tem difícil interpretação intuitiva.

2.5 MODELOS DE NÃO-LINEARIDADES DOS MATERIAIS FERROMAGNÉTICOS

Como comentado anteriormente neste capítulo, os materiais ferromagnéticos possuem alguns comportamentos não lineares, que em muitos contextos, são significativos nos seus efeitos. Uma dessas não linearidades é a saturação do material. A saturação do material ferromagnético acontece quando os dipolos magnéticos presentes no material estão todos alinhados com a direção do campo magnético. Assim, com um aumento do campo magnético, não é possível alinhar mais dipolos com o campo imposto, reduzindo a permeabilidade magnética do material nessas condições. Dessa maneira, a saturação do material faz com que a relação entre campo magnético e indução magnética não seja linear, o que geralmente aumenta a complexidade dos sistemas associados e sua interpretação e análise.

2.5.1 Saturação do material ferromagnético

Existem alguns modelos na literatura que visam aproximar o comportamento não linear dos materiais. Um desses modelos é o modelo de Langevin. Esse modelo utiliza a função de Langevin (2.44), aplicada na relação entre o campo magnético H e a indução magnética B , como apresentado em (2.45). Para esse modelo, é necessário conhecer as constantes M_{sat} e a , os quais definem o comportamento da curva (2.45).

$$\mathcal{L}(x) = \coth(x) - \frac{1}{x} \quad (2.44)$$

$$B = \mu_0 \left(M_{sat} \mathcal{L} \left(\frac{H}{a} \right) + H \right) \quad (2.45)$$

Como na prática os materiais possuem um comportamento de histerese magnética, alguns modelos buscam aproximar ambos os fenômenos, como é o caso do modelo de Jiles-Atherton. Entretanto, esses modelos adicionam significativa complexidade, pois não se pode representar os fenômenos não lineares por uma simples função.

Por esse motivo, é comum apenas adicionar esses efeitos quando estes afetam significativamente o problema estudado. Em alguns casos, estes modelos não conseguem representar corretamente algumas características que ocorrem no material. Assim, o seu uso deve ser feito com cautela.

2.6 CONSIDERAÇÕES FINAIS DO CAPÍTULO

Neste capítulo foram apresentadas algumas características típicas dos materiais ferromagnéticos, i.e., os tipos de perdas energéticas que ocorrem nesses materiais aplicados às máquinas elétricas. Apresentou-se também duas soluções analíticas para o cálculo das correntes induzidas para formatos simples de amostras, assim como alguns modelos da literatura que buscam aproximar essas perdas para outros formatos e aplicações.

O próximo capítulo apresenta o modelo de simulação de campos desenvolvido, assim como a sua implementação na obtenção do comportamento das correntes induzidas e da perda resultante, aplicado a lâminas de seção retangular (finas e espessas) e também a uma peça de seção circular.

3 MÉTODO DE CÁLCULO DE CAMPOS POR SIMULAÇÃO NUMÉRICA

Com o objetivo de se obter o comportamento das correntes induzidas e das perdas associadas para formatos mais complexos de amostras, foi desenvolvido um método de simulação numérica para o cálculo dos campos elétricos induzidos pela variação temporal de fluxo magnético. Neste capítulo, apresenta-se o método desenvolvido, contendo as equações base que são utilizadas e o sistema de equações resultante levando em conta considerações que são feitas para a discretização da região de cálculo.

3.1 EQUACIONAMENTO

O método de simulação empregado se baseia nas duas equações rotacionais de Maxwell, a Lei de Faraday e a Lei de Ampère. Utiliza-se da forma integral dessas equações e de algumas hipóteses referentes à região discretizada com o objetivo de obter um sistema linear de equações. O sistema de equações é resolvido por métodos computacionais convencionais.

3.1.1 Discretização da Lei de Faraday

A lei de Faraday em sua forma diferencial relaciona o rotacional do campo elétrico $\nabla \times \vec{E}$ com a derivada temporal da indução magnética $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ em um dado ponto. Essa lei é dada pela equação (3.1).

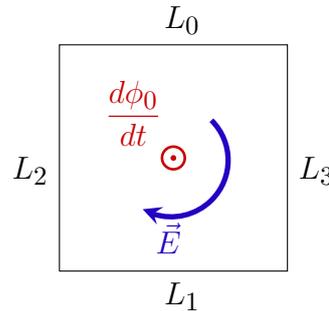
$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (3.1)$$

A forma integral desta equação pode ser obtida integrando os dois lados em uma dada área S delimitada por uma linha fechada L . Utilizando o teorema de Stokes no lado esquerdo, e aplicando a definição do fluxo magnético ϕ no lado direito, obtém-se a forma integral da lei de Faraday em sua forma convencional, apresentada em (3.2). Essa equação relaciona a circulação do campo elétrico na linha L com a variação temporal do fluxo magnético que cruza a seção S .

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\phi}{dt} \quad (3.2)$$

Considera-se uma região retangular, de lados L_0, L_1, L_2, L_3 , atravessada por uma variação de fluxo $\frac{d\phi_0}{dt}$ ortogonal à essa região, conforme esquematizado na figura 3.1. Como há variação de fluxo magnético no interior dessa região, haverá o aparecimento de um campo elétrico ao redor. Conforme (3.2), pode-se relacionar o

Figura 3.1 – Esquema de uma região retangular com variação de fluxo magnético.



Fonte: Elaborado pelo autor.

campo elétrico em cada linha que compõe a borda da região com a variação de fluxo no seu interior, obtendo-se (3.3).

$$\int_{L_0} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{L_1} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{L_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{L_3} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\phi_0}{dt} \quad (3.3)$$

Os campos elétricos médios E_0, E_1, E_2, E_3 nas linhas L_0, L_1, L_2, L_3 , respectivamente, são obtidos conforme (3.4).

$$\int_{L_i} \vec{E} \cdot d\vec{l} = E_i L_i, \quad \forall i \in \{0, 1, 2, 3\} \quad (3.4)$$

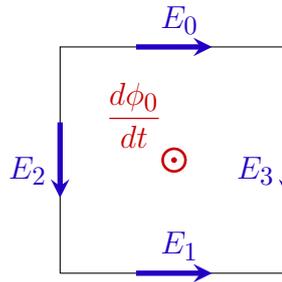
Assim, a equação (3.3) se reduz à relação linear (3.5).

$$E_0 L_0 + E_1 L_1 + E_2 L_2 + E_3 L_3 = -\frac{d\phi_0}{dt} \quad (3.5)$$

Como se está considerando um retângulo, tem-se que os valores de seus lados são dados por $\hat{a} \equiv L_0 = L_2$ e $\hat{b} \equiv L_1 = L_3$. De maneira a simplificar o algoritmo da simulação numérica, considera-se que todos os campos de direção vertical possuem sentido para baixo e que todos os campos de direção horizontal possuem sentido para a direita. Note que isto não muda a configuração do problema, já que, caso o sentido do campo real for contrário ao considerado, o valor encontrado para esta grandeza terá sinal negativo. A equação (3.6) apresenta a equação linear após estas considerações aplicadas na equação (3.5). A figura 3.2 apresenta um esquema com a região retangular e os campos médios considerados com a convenção aplicada.

$$E_0 \hat{a} - E_1 \hat{a} - E_2 \hat{b} + E_3 \hat{b} = -\frac{d\phi_0}{dt} \quad (3.6)$$

Figura 3.2 – Diagrama da discretização da região de cálculo.



Fonte: Elaborado pelo autor.

As considerações que foram feitas aqui são válidas para qualquer retângulo e qualquer configuração de campo elétrico induzido por uma variação de fluxo magnético no seu interior. Mais adiante neste trabalho será mostrado como agrupar vários retângulos desse tipo para compor a região de domínio de cálculo.

3.1.2 Discretização da Lei de Ampère

A lei de Ampère em sua forma diferencial relaciona o rotacional do campo magnético $\nabla \times \vec{H}$ com as correntes elétricas de condução \vec{J} e de deslocamento $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ em um dado ponto. Essa lei é apresentada em (3.7).

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (3.7)$$

A aplicação do operador divergente ($\nabla \cdot$) em ambos os lados resulta na equação da continuidade elétrica em sua forma diferencial (3.8). A integração desta equação em um volume V delimitado por uma seção fechada S (teorema da divergência) resulta na forma integral da equação da continuidade elétrica (3.9).

$$\nabla \cdot \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = 0 \quad (3.8)$$

$$\oint_S \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{s} = 0 \quad (3.9)$$

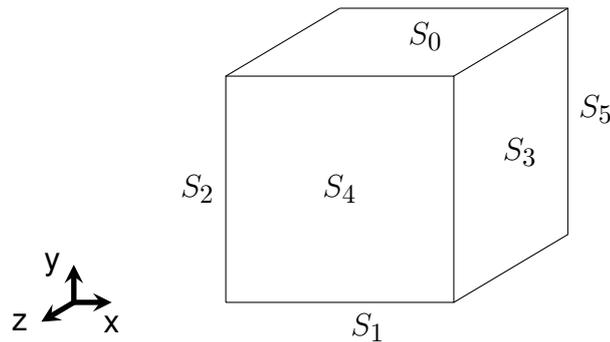
Na ausência de efeitos capacitivos, e portanto da corrente de deslocamento, a equação da conservação de corrente pode ser simplificada para (3.10) em sua forma diferencial, e para (3.11) em sua forma integral.

$$\nabla \cdot \vec{J} = 0 \quad (3.10)$$

$$\oint_S \vec{J} \cdot \vec{ds} = 0 \quad (3.11)$$

Considera-se uma região tridimensional com seis lados, topologicamente semelhante a um cubo ou a um paralelepípedo. Um esquema dessa região é apresentado na figura 3.3.

Figura 3.3 – Esquema de uma região tridimensional com seis lados.



Fonte: Elaborado pelo autor.

De maneira semelhante ao que foi feito para a Lei de Faraday, pode-se separar a integral de (3.11) em seis parcelas, cada uma referente a um dos lados da região tridimensional, resultando em (3.12).

$$\int_{S_0} \vec{J} \cdot \vec{ds} + \int_{S_1} \vec{J} \cdot \vec{ds} + \int_{S_2} \vec{J} \cdot \vec{ds} + \int_{S_3} \vec{J} \cdot \vec{ds} + \int_{S_4} \vec{J} \cdot \vec{ds} + \int_{S_5} \vec{J} \cdot \vec{ds} = 0 \quad (3.12)$$

Se for considerado que toda a corrente que entra pelo eixo z também sai por esse eixo, i.e., que a diferença entre a corrente que entra e sai nesse eixo é zero, tem-se (3.13).

$$\int_{S_4} \vec{J} \cdot \vec{ds} + \int_{S_5} \vec{J} \cdot \vec{ds} = 0 \quad (3.13)$$

Aplicando (3.13) em (3.12), tem-se a redução para (3.14).

$$\int_{S_0} \vec{J} \cdot \vec{ds} + \int_{S_1} \vec{J} \cdot \vec{ds} + \int_{S_2} \vec{J} \cdot \vec{ds} + \int_{S_3} \vec{J} \cdot \vec{ds} = 0 \quad (3.14)$$

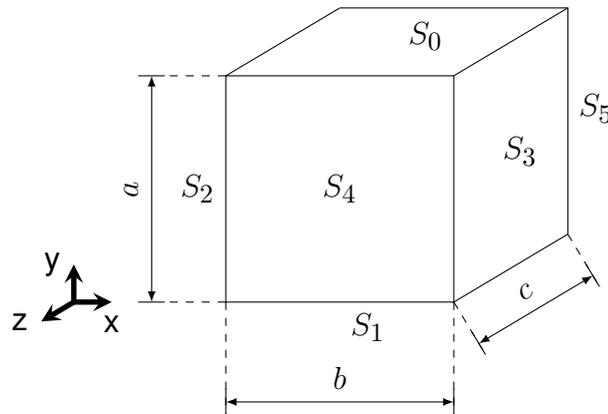
Considerando as densidades de corrente médias J_0, J_1, J_2, J_3 que adentram as seções S_0, S_1, S_2, S_3 , respectivamente, conforme (3.15), a equação (3.14) se reduz a relação linear (3.16).

$$\int_{S_i} \vec{J} \cdot d\vec{s} = J_i S_i, \quad \forall i \in \{0, 1, 2, 3\} \quad (3.15)$$

$$J_0 S_0 + J_1 S_1 + J_2 S_2 + J_3 S_3 = 0 \quad (3.16)$$

Para o caso específico de que a região considerada seja um paralelepípedo, com lados $S_0 = \hat{b}\hat{c}$, $S_1 = \hat{b}\hat{c}$, $S_2 = \hat{a}\hat{c}$, $S_3 = \hat{a}\hat{c}$ (conforme indicado na figura 3.4), essa equação se reduz para (3.17). Como feito anteriormente para a equação de variação de fluxo, convencionou-se que os sinais de (3.17) são devido às considerações de direção da densidade de correntes feitas de modo a simplificar a sua implementação computacional. A figura 3.5 apresenta um diagrama do domínio de cálculo aplicado em uma região bidimensional discretizada em 12 regiões retangulares. Essa figura representa a região de cálculo considerando que não há correntes que entram ou saem da região de cálculo. Esta consideração é válida nos casos em que a região de cálculo engloba toda a peça condutora.

Figura 3.4 – Esquema de um paralelepípedo com dimensões indicadas.

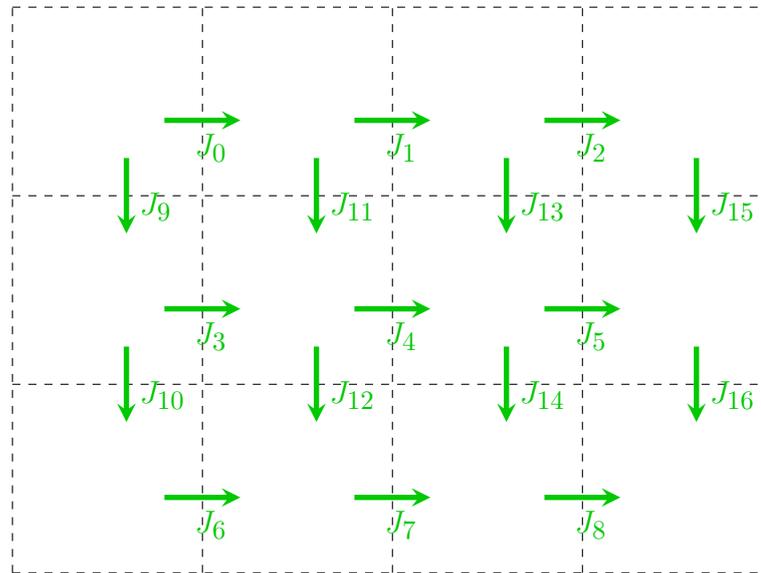


Fonte: Elaborado pelo autor.

$$-J_0 \hat{b} + J_1 \hat{b} - J_2 \hat{a} + J_3 \hat{a} = 0 \quad (3.17)$$

Diferentemente do campo elétrico na discretização apresentada anteriormente, a densidade de corrente média não é paralela à borda da região retangular de discretização, mas sim normal a ela. Para facilitar a aplicação do método proposto completo, as abordagens apresentadas, oriundas das aplicações da lei de Faraday e da lei de Ampère, são referentes à mesma discretização do domínio de cálculo. A rede (*grid*) das células da conservação da corrente elétrica é construída a partir da rede da discretização do domínio na aplicação da lei de Faraday. A rede da conservação da corrente

Figura 3.5 – Diagrama da discretização da região de cálculo para as equações de conservação de corrente.



Fonte: Elaborado pelo autor.

elétrica é construída de modo que as suas intersecções fiquem posicionadas nos centros das células da outra, como exemplificado na figura 3.6b. Tem-se que as redes são duais. Assim, é mais fácil analisar graficamente apenas a rede referente à lei de Faraday (figura 3.6a, resultando no diagrama para o modelo de simulação numérica). Neste acoplamento do domínio de cálculo das duas abordagens apresentadas, oriundas das aplicações da lei de Faraday e da lei de Ampère, também há o acoplamento entre as grandezas campo elétrico e densidade de corrente elétrica. Assim, os vetores campo elétrico e densidade de corrente referem-se à mesma região, contendo a mesma direção e mesmo sentido, e os módulos J e E são relacionados pela relação constitutiva (3.18).

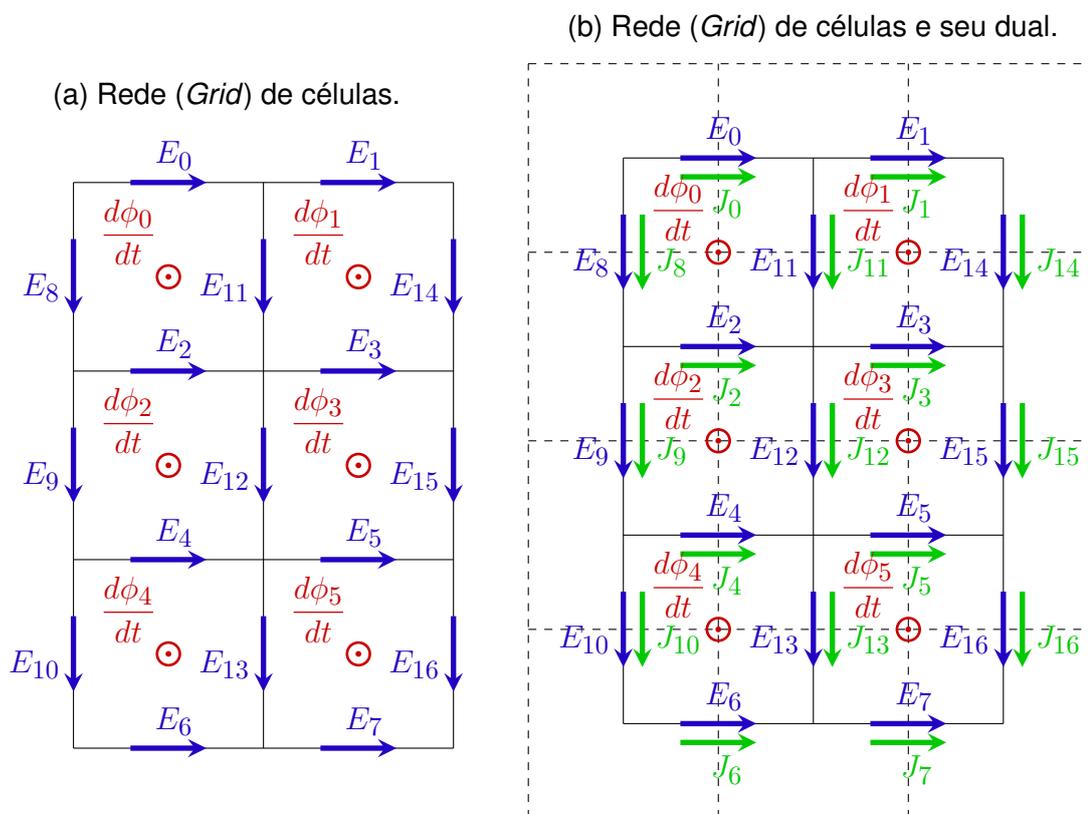
$$J = \sigma E \quad (3.18)$$

Aplicando a relação constitutiva entre J e E , reescreve-se a equação (3.17) em termos do módulo do campo elétrico E e do módulo da condutividade σ , como apresentado em (3.19). Assim, as equações (3.17) e (3.19) são equivalentes.

$$-\sigma_0 E_0 \hat{b} + \sigma_1 E_1 \hat{b} - \sigma_2 E_2 \hat{a} + \sigma_3 E_3 \hat{a} = 0 \quad (3.19)$$

Como apresentado, o acoplamento das redes permite a visualização em apenas uma das redes de discretização. A equação da conservação de corrente elétrica pode ser interpretada na rede da figura 3.6a como a conservação de corrente em cada

Figura 3.6 – Diagrama da discretização da região de cálculo.



Fonte: Elaborado pelo autor.

caminho nos vértices (nós) das intersecções das células do diagrama. Com esta representação, as equações de conservação de corrente podem ser interpretadas como a aplicação da lei de Kirchhoff das correntes.

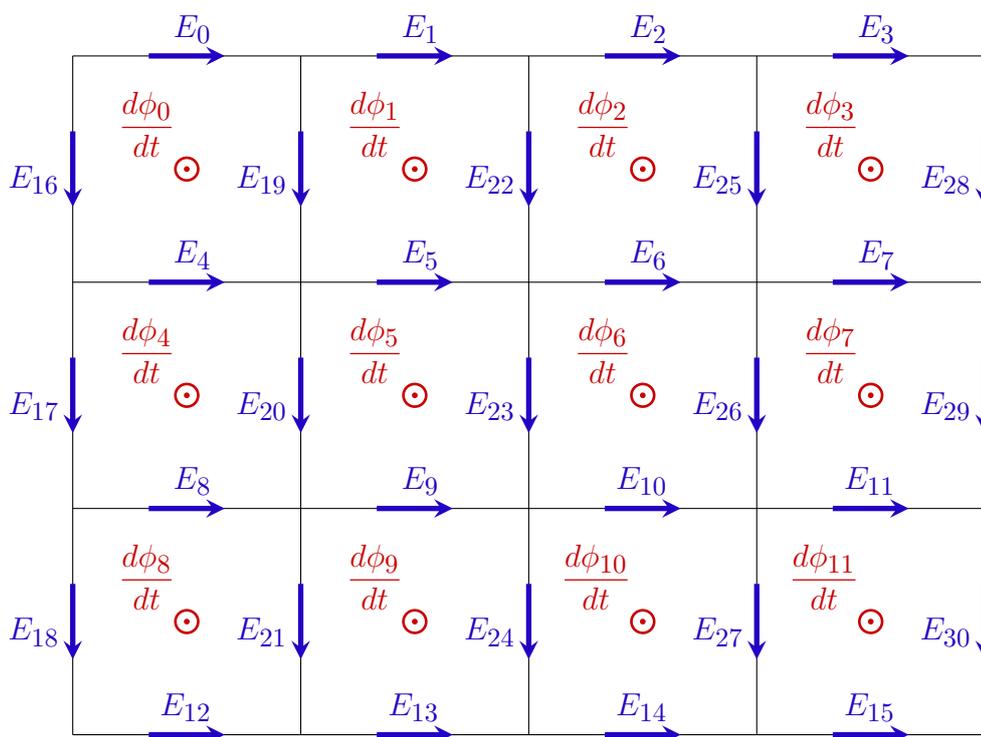
3.1.3 Modelo Completo

Com as equações provindas das leis de Faraday e de Ampère, que relacionam os campos elétricos E_i nas bordas das células com os dados do problema, pode-se montar um sistema de equações lineares de encontro dos valores de E_i para ser resolvido. Nesta subseção, apresenta-se como acoplar os dois conjuntos de equações encontrados para produzir o sistema linear a ser resolvido.

Um exemplo de um diagrama da discretização da região de cálculo é apresentado na figura 3.7. Nessa figura também estão representados os campos elétricos médios E_i de cada borda das células e a derivada temporal do fluxo magnético interno a cada célula $\frac{d\phi_j}{dt}$.

O método será explicado utilizando o diagrama da discretização da região de cálculo apresentado na figura 3.7. Aplica-se as equações (3.6) e (3.19) no conjunto de células do diagrama. O diagrama contém um total de 12 células, $N_x = 4$ na dimensão

Figura 3.7 – Diagrama da discretização da região de cálculo.



Fonte: Elaborado pelo autor.

horizontal e $N_y = 3$ na dimensão vertical. Assim, tem-se um total de $N_x N_y = 12$ equações relativas à variação de fluxo (uma para cada célula), e $(N_x + 1)(N_y + 1) = 20$ equações relativas à conservação de corrente (uma para cada vértice do diagrama), resultando em um total de $N_x N_y + (N_x + 1)(N_y + 1) = 32$ equações lineares com $N_E = 31$ variáveis independentes (incógnitas). As variáveis independentes são os campos elétricos E_i em cada seção de caminho de cortorno das células.

Como existem, neste caso, apenas 31 variáveis independentes (E_0, E_1, \dots, E_{30}), são necessárias apenas 31 equações lineares independentes para poder resolver o sistema linear de equações. Entretanto, obteve-se 32 equações. Para utilizar um método de resolução de sistema linear clássico, deve-se desconsiderar uma das equações obtidas, restando assim 31 equações lineares para a resolução do sistema. A equação a ser desconsiderada deve ser uma das equações de conservação de corrente, já que este conjunto de equações não é linearmente independente no conjunto de todas as equações. Mas, removendo-se uma das equações, o conjunto restante é linearmente independente. O apêndice A.2 aborda a superdeterminação do sistema relacionado às equações de conservação de corrente.

Caso seja utilizado outro método para a resolução do sistema que permita a utilização de um sistema linear superdeterminado, pode-se manter todas as equações obtidas. A utilização de um método deste tipo poderia ser vantajosa para melhorar a

precisão dos resultados obtidos, visto que na resolução computacional de um sistema de equações, existem aproximações intrínsecas ao computador que podem diminuir a precisão do modelo para casos críticos.

As equações obtidas podem ser agrupadas em um sistema matricial como apresentado em (3.20). Nesse sistema matricial, $\overline{\overline{M}}$ representa a matriz das equações, \underline{E} representa o vetor de incógnitas composto pelos campos elétricos em cada seção de caminho, e $\underline{\psi}$ representa o vetor de fontes, que contém a derivada do fluxo elétrico no interior de cada célula, ou zero, no caso de uma equação de conservação de corrente. Essas definições são apresentadas em (3.21), (3.22) e (3.23), respectivamente.

$$\overline{\overline{M}} \cdot \underline{E} = \underline{\psi} \quad (3.20)$$

$$\overline{\overline{M}} = [m_{ij}] \quad (3.21)$$

$$\underline{E} = \begin{bmatrix} E_0 \\ E_1 \\ \vdots \\ E_{N_E-1} \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

$$\underline{\psi} = \begin{bmatrix} -\frac{d\phi_0}{dt} \\ -\frac{d\phi_1}{dt} \\ \vdots \\ -\frac{d\phi_{N_\phi-1}}{dt} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Os elementos m_{ij} da matriz $\overline{\overline{M}}$ são os termos que acompanham os valores de campo elétrico E_i nas equações encontradas pelas discretizações das leis de Faraday e de Ampère. Esses termos são função da geometria da região discretizada e da condutividade da amostra. Utilizando o sistema linear obtido com uma equação de conservação removida, essa matriz é quadrada, com dimensões $N_E \times N_E$.

A complexidade de $\overline{\overline{M}}$ afeta diretamente a velocidade e a eficiência computacional da simulação. Como as equações que dão origem a $\overline{\overline{M}}$ possuem no máximo 4 termos que acompanham os valores de campo elétrico E_i , essa matriz possui a maior parte de seus elementos nulos. Assim, ela é esparsa. Uma prova da esparsidade desta matriz está no apêndice A.1.

A esparsidade da matriz permite o uso de técnicas e ferramentas de álgebra linear que tornam os cálculos mais rápidos e eficientes em comparação com os algoritmos utilizados para matrizes densas (YAN *et al.*, 2017). Essa característica é desejada para modelos de simulação numéricos, pois geralmente há um aumento na precisão da solução quando é utilizado um número maior de elementos (i.e., com o aumento do número de células no domínio de cálculo), resultando em matrizes maiores. Em diversos casos, o limite do número de elementos é devido à limitação computacional, seja dos extensos períodos de tempo necessários para a simulação, ou seja pela grande quantidade de memória que é necessária para armazenar os dados da simulação.

O vetor $\underline{\psi}$ representa as fontes do sistema, sendo relacionado aos elementos de derivada de fluxo em cada célula ou a zero. Este vetor possui $N_\phi = N_x N_y$ elementos de variação de fluxo e $N_E - N_\phi$ elementos nulos. Os elementos nulos nesse vetor provém das equações de conservação de corrente. Note que o modelo poderia ser adaptado para considerar valores não nulos para estes termos, o que representaria um acúmulo de cargas nos vértices do *grid* de células.

Os elementos do vetor de fontes $\underline{\psi}$ relativos à derivada do fluxo magnético $\frac{d\phi}{dt}$ podem ser obtidos integrando a derivada da indução magnética em cada célula, conforme (3.24), para qualquer distribuição de $\frac{dB(x,y)}{dt}$.

$$\frac{d\phi_i}{dt} = \int_{\hat{a}_i} \int_{\hat{b}_i} \frac{dB(x,y)}{dt} dx dy \quad (3.24)$$

Para o caso em que a distribuição da derivada da indução magnética é uniforme, i.e., $\frac{dB(x,y)}{dt} = cte$, esses elementos são calculados por (3.25).

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{dB}{dt} \hat{a} \hat{b} \quad (3.25)$$

Para respeitar a lei de Lenz (relativa ao sinal presente na lei de Faraday), tem-se que os elementos de $\underline{\psi}$ relativos à variação de fluxo possuem sinal negativo (3.26).

$$\psi_i = -\frac{d\phi_i}{dt}, \quad i \in \{0, 1, \dots, (N_\phi - 1)\} \quad (3.26)$$

Desse modo, com o vetor $\underline{\psi}$ e a matriz $\overline{\overline{M}}$ obtidos pela geometria e pelos dados do problema, o vetor de campos elétricos \underline{E} pode ser obtido utilizando algum método de resolução do sistema linear (3.20). Para a implementação das simulações presentes neste trabalho, utilizou-se da função presente na biblioteca *scipy* (VIRTANEN *et al.*, 2020), a qual implementa os algoritmos apresentados em (DAVIS *et al.*, 2004).

Após a obtenção de \underline{E} , obtém-se os valores correspondentes das componentes J_i de \underline{J} por (3.27) utilizando a condutividade elétrica do material σ .

$$J_i = \sigma_i E_i \quad \forall i \in \{0, \dots, N_{E-1}\} \quad (3.27)$$

A densidade de perda por correntes induzidas parte da equação (3.28).

$$P_v = \frac{1}{V} \int_V \vec{J} \cdot \vec{E} \, dv \quad (3.28)$$

Utilizando as considerações feitas na discretização das equações, pode-se simplificar a solução desta equação através das características do método proposto. Como J_i e E_i possuem mesma direção e sentido, o produto interno entre os vetores é dado apenas pela multiplicação das amplitudes de J_i e E_i em cada seção de caminho i . Como existe um número finito de seções de caminhos na simulação dado por N_E , tendo a área de uma célula dada por $\hat{a}\hat{b}$, e que o volume total da amostra simulada é $V = abc$, a integral em (3.28) simplifica-se para o somatório em (3.29). Esta equação também pode ser representada pelo produto interno entre os vetores \underline{J} e \underline{E} , obtendo-se (3.30) e, tendo que $a = N_y \hat{a}$ e $b = N_x \hat{b}$, obtém-se (3.31).

$$P_v = \frac{1}{ab} \sum_{i=0}^{N_E-1} J_i E_i \hat{a}\hat{b} \quad (3.29)$$

$$= \frac{\hat{a}\hat{b}}{ab} \underline{J} \cdot \underline{E} \quad (3.30)$$

$$= \frac{1}{N_x N_y} \underline{J} \cdot \underline{E} \quad (3.31)$$

Assim, conhecidos os vetores \underline{E} e \underline{J} , pode-se calcular a densidade de perda por correntes induzidas P_v relativo à amostra simulada com (3.31).

Conforme o que foi apresentado, é possível realizar a simulação de uma região com os seguintes passos:

- (i) Dividir as duas dimensões da região de cálculo em um número de seções N_x e N_y , resultando na divisão da região de cálculo em $N_x N_y$ células;
- (ii) Para cada célula, montar as equações referentes à variação do fluxo magnético imposto, produzindo a primeira parte de $\overline{\overline{M}}$;
- (iii) Para cada vértice da rede, montar as equações referentes à conservação de corrente elétrica, produzindo a segunda parte de $\overline{\overline{M}}$;
- (iv) Resolve-se o sistema linear para obter o vetor de campos elétricos \underline{E} ;
- (v) A partir da condutividade e de \underline{E} , calcula-se o vetor de valores da densidade de corrente \underline{J} ;
- (vi) Finalmente, com \underline{J} e \underline{E} , calcula-se P_v .

Dessa maneira, chegou-se a um modelo que calcula as perdas por correntes induzidas P_v para uma dada região de cálculo onde existe um fluxo magnético variante no tempo. O modelo é aplicado a uma região de cálculo retangular e discretizada em células retangulares. O domínio de cálculo pode ser adaptado para outros formatos de células, o que será apresentado mais adiante neste capítulo.

3.1.4 Considerações sobre o Modelo de Simulação

O modelo de simulação que foi apresentado possui algumas considerações: foi utilizada uma região de cálculo bidimensional retangular, discretizada em células retangulares, e a variação do fluxo magnético é imposta. O modelo também considera uma região bidimensional (2D), na qual a corrente líquida que entra e sai em uma célula pela terceira dimensão (eixo z) é nula. Essa consideração é equivalente a assumir uma simetria em relação à este eixo. Assim, qualquer parâmetro é independente desta dimensão, de modo que qualquer função nas três dimensões é função apenas das duas dimensões do plano 2D considerado. Matematicamente, dada uma função f , tem-se que $f(x, y, z) = f(x, y)$. A simetria sob o eixo z implica que a amostra é tratada como tendo um tamanho neste eixo consideravelmente maior que nos demais. No caso de uma lâmina de material ferromagnético, isto implicaria em assumir que o comprimento da lâmina é significativamente maior que sua largura e espessura. Este tipo de consideração é comum na aplicação de simulações numéricas em eletromagnetismo, como, por exemplo, em máquinas elétricas de fluxo radial. Ainda, essa consideração é razoável para amostras do quadro de Epstein, que possuem comprimento de 280 mm e 30 mm de largura, com espessura variável, mas sempre menor que a largura de 30 mm.

Simulações de objetos tridimensionais (3D) são geralmente mais complexas, e exigem um esforço computacional significativamente maior para tentar manter a mesma precisão de simulações 2D. Esse esforço é causado pela existência de um terceiro eixo que deve ser considerado, necessitando o equivalente a múltiplas simulações 2D para realizar apenas uma simulação 3D com precisão comparável. Devido a estes contrapontos, a simulação 3D geralmente só é empregada quando realmente é necessária.

Em algumas aplicações, é possível utilizar outras simetrias para simular objetos tridimensionais com uma simulação 2D (esse tipo de simulação às vezes é conhecido como simulação 2,5D). Uma simetria utilizada neste contexto é a cilíndrica. Mais adiante neste capítulo será apresentado como modificar o modelo de simulação empregado para realizar simulações com simetria cilíndrica.

Outra consideração empregada para produzir o modelo de simulação foi usar uma região de cálculo retangular, discretizada em células retangulares. Esta consideração foi feita para simplificar as equações e, subsequentemente, a implementação

do modelo em computador. Em outros métodos de simulação é comum a utilização de elementos triangulares ou quadrangulares genéricos, cuja versatilidade pode ser usada para melhor adaptar a malha ao problema. Entretanto, a implementação com esse tipo de célula necessitaria de algum algoritmo “malhador” para produzir a discretização (malha) na região de cálculo. Por motivos de simplicidade de implementação, no escopo deste trabalho, optou-se por usar células retangulares.

Outra consideração adicional empregada e, possivelmente, a mais significativa, foi que o valor da variação do fluxo magnético é imposto em cada célula da discretização. Embora o algoritmo de simulação numérica apresentado permita a imposição de valores distintos da derivada do fluxo em cada célula, neste trabalho manteve-se uma distribuição homogênea. Na realidade, por causa da não linearidade da permeabilidade magnética e das correntes induzidas, a distribuição da indução magnética em uma seção nunca será perfeitamente homogênea. Dependendo da frequência, dos parâmetros constitutivos do material e do formato da amostra, em certos casos pode-se considerar uma distribuição da indução na seção praticamente homogênea. Em processos de caracterização de materiais ferromagnéticos, procura-se manter por imposição valores de fluxo total na seção da amostra.

Em outros casos em que se deseje analisar efeitos de distribuição não homogênea da indução na seção, é necessária a implementação das equações dos campos magnéticos de reação, produzidos pelas correntes induzidas. Estes campos magnéticos de reação alteram a distribuição e as amplitudes do fluxo magnético na seção da amostra, interagindo intrínseca e simultaneamente com a distribuição das correntes induzidas. Uma base para a implementação de um modelo considerando campos de reação é apresentado no apêndice C.

O modelo implementado neste trabalho não leva em conta a evolução no tempo. Assim, os valores calculados são resultantes de um só valor de derivada do fluxo imposto. O modelo poderia ser aperfeiçoado aplicando simulações consecutivas em função da variação da fonte (do fluxo) no tempo.

Ainda para as simulações de amostras, utiliza-se as condições de contorno definidas implicitamente, impedindo que haja fluxo de corrente para fora da região de cálculo, implicitamente definindo que $\vec{J} \cdot \vec{S}_{borda} = 0$ na borda da região de cálculo. Essa definição poderia ser alterada caso se deseje modificar as condições de contorno aplicadas na simulação. Entretanto, neste trabalho, o fluxo de corrente para fora da região de cálculo sempre é nulo, como já mencionado.

3.1.5 Representação Gráfica

O processo de simulação com a modelagem proposta obtém os valores de campo elétrico e de densidade de corrente na região de domínio de cálculo (na realidade, nas bordas das células). Assim, pode-se montar um gráfico com os valores

dessas grandezas em relação às suas posições, equivalentes aos centros de cada célula. Considera-se os vetores resultantes correspondentes à cada célula da simulação. As componentes desse vetor são encontradas através de uma média dos campos calculados nas bordas das células. Assim, para o diagrama da figura 3.2, com apenas uma célula, o vetor do campo elétrico correspondente a essa célula \vec{E}_{c0} terá componentes $\frac{1}{2}(E_0 + E_1)$ e $\frac{1}{2}(E_2 + E_3)$, dado por (3.32).

$$\vec{E}_{c0} = \left(\frac{1}{2}(E_0 + E_1), \frac{1}{2}(E_2 + E_3) \right) \quad (3.32)$$

Assim, pode-se obter o módulo do campo elétrico $|\vec{E}_{c0}|$ correspondente à célula C_0 por (3.33). O ângulo em relação ao eixo x (direção e sentido) do vetor $\angle(\vec{E}_{c0})$ correspondente à célula é dado conforme (3.34).

$$|\vec{E}_{c0}| = \frac{1}{2} \sqrt{(E_0 + E_1)^2 + (E_2 + E_3)^2} \quad (3.33)$$

$$\angle(\vec{E}_{c0}) = \arctan \left(\frac{E_2 + E_3}{E_0 + E_1} \right) \quad (3.34)$$

O mesmo pode ser feito para as densidades de corrente J nas bordas de cada célula, obtendo-se o módulo e ângulo de \vec{J}_c .

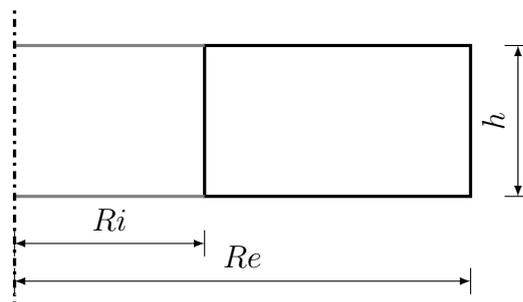
3.2 MODELO CONSIDERANDO CAMPOS DE REAÇÃO

No modelo apresentado, os campos elétricos e as correntes induzidas calculadas no material não modificam a distribuição do fluxo magnético, pois é imposto como dado de entrada nas simulações. Poderia ser interessante calcular os campos de reação produzidos no material, e para isso seria necessário adaptar o modelo. Neste trabalho, a inclusão dos campos de reação e seus efeitos não são objetivos específicos. Entretanto, apresenta-se no apêndice C algumas equações para um desenvolvimento de modelo que leve em consideração os campos de reação.

3.3 ABORDAGEM DO CASO TOROIDAL

Um formato comum de amostras para se realizar ensaios em materiais ferromagnéticos é o toroidal. Esse formato possui a característica de não possuir entreferro magnético, o que pode ser desejável para alguns estudos, além de levar em conta possíveis anisotropias, até mesmo aquelas em materiais de grão não orientado (SCHLEGEL, 2012). A figura 3.8 apresenta um esquema de vista em corte de uma amostra toroidal e suas dimensões, em que R_i é o seu raio interno, R_e o raio externo, e h a sua espessura.

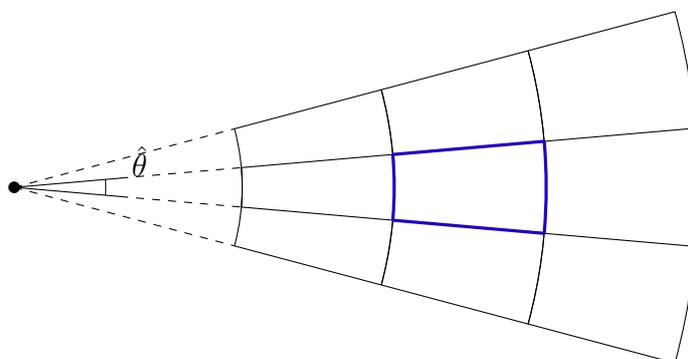
Figura 3.8 – Esquema de vista em corte de uma amostra toroidal



Fonte: Elaborado pelo autor.

Para a simulação em coordenadas cilíndricas, são necessários dois tipos de células. O primeiro deles são células retangulares (semelhante às apresentadas anteriormente), que compõem a seção de corte no plano radio-axial do cilindro (seção perpendicular à indução magnética). Para este tipo de célula, pode-se empregar facilmente coordenadas cartesianas. O segundo são células com formato de seção angular de coroa, no corte do plano radio-tangencial, conforme as células apresentadas na figura 3.9. Para este tipo de célula, é mais fácil empregar coordenadas polares.

Figura 3.9 – Esquema de células para coordenadas polares.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Devido à simetria cilíndrica deste tipo de amostra, bem como dos campos e do fluxo magnético, uma simulação 3D para amostras toroidais pode ser feita em uma simulação 2D. Entretanto, o sistema de equações nas coordenadas polares, difere das apresentadas para o caso de uma região 2D retangular. Na simetria cilíndrica, os comprimentos no eixo tangencial das bordas em cada célula são distintos. Por exemplo, na figura 3.9, o comprimento das bordas no eixo tangencial da célula em azul são distintos. Assim, para se encontrar as equações, o parâmetro \hat{c} (presente nas equações obtidas para as células em coordenadas cartesianas 2D) deve ser substituído por

$r\hat{\theta}$, em que r é a posição radial e $\hat{\theta}$ é a discretização angular considerada para o sistema de coordenadas cilíndrico. Para a simulação em coordenadas cilíndricas, essa alteração deve ser feita tanto no corte radio-axial, quanto no corte radio-tangencial. Neste trabalho, também não se simulou amostras com este formato. Aqui está apenas indicada a alteração a ser feita na metodologia proposta anteriormente para o caso em coordenadas cartesianas.

3.4 SIMULAÇÃO DE FORMATOS MAIS COMPLEXOS

Em alguns problemas, podem ocorrer simulações de amostras contendo mais de um tipo de material, e/ou amostras com formatos complexos, e/ou quando há camadas de ar. Para realizar uma simulação com o modelo apresentado para estes outros tipos de formatos de amostras, pode-se considerar as propriedades eletromagnéticas das células de acordo com o material empregado. Assim, cada célula pode ter condutividade, permeabilidade ou permissividade distintas, dependendo do material utilizado no local. Por exemplo, caso se deseje simular um material com uma camada de ar em uma região (como um entreferro), pode se definir que as células naquelas regiões possuem condutividade nula, com permeabilidade e permissividade do ar μ_0 e ε_0 , respectivamente. Pode-se também simular diferentes distribuições da derivada de fluxo magnético alterando o vetor de fontes de modo a representar essa distribuição.

3.4.1 Simulação com imposição de corrente

O modelo de simulação também pode ser utilizado para simular a distribuição de uma corrente elétrica em um material condutor. Para isso é necessário definir uma região de entrada e outra de saída de corrente. Para isso, as equações de conservação de corrente nestas regiões devem ser modificadas. Partindo de (3.11), obtém-se uma equação (3.35) que relaciona as densidades de corrente nas arestas associadas ao vértice (nó) com a corrente imposta I_{imp} no próprio vértice. Realizando os demais passos necessários para obter a equação linear implementada no modelo, obtém-se (3.36), a qual contém as dimensões das células \hat{a} e \hat{b} .

$$\oint_S \vec{J} \cdot \vec{ds} + I_{imp} = 0 \quad (3.35)$$

$$-J_0\hat{b} + J_1\hat{b} - J_2\hat{a} + J_3\hat{a} = -\frac{I_{imp}}{\hat{c}} \quad (3.36)$$

Note que a única alteração em relação à (3.16) é a inclusão no lado direito da equação do termo relacionado à corrente imposta. Esse lado da equação na implementação do modelo é representado pelo vetor de fontes $\underline{\psi}$. Nesse vetor, agora os

elementos referentes às equações de conservação de corrente representam a imposição de corrente nos vértices das células das regiões de entrada ou saída de corrente imposta. Então, para impor uma corrente I_{imp} em um determinado nó, basta definir o valor correspondente do vetor de fontes $\underline{\psi}$ a esse nó como $-\frac{I_{imp}}{\hat{c}}$.

Esta modificação do modelo pode ser utilizada para calcular a resistência elétrica de uma amostra condutora de condutividade σ conhecida com base em um par de pontos $\{p_a, p_b\}$ de medição. Para isso, no vetor de fontes $\underline{\psi}$, as derivadas dos fluxos magnéticos são nulas. Impõe-se então uma corrente de medição I_{sim} em um desses pontos (digamos, p_a), e seu oposto $-I_{sim}$ no outro (p_b). Com o modelo de simulação apresentado, resolve-se o sistema linear, obtendo os campos elétricos nas bordas das células. A tensão V_{sim} entre os dois pontos pode então ser calculada com (3.37). Em que L_a^b representa um caminho entre os dois pontos e dl_k é o tamanho de cada pedaço de caminho k (i.e., dl_k vale \hat{a} ou \hat{b} , dependendo do comprimento da aresta k). Conhecendo-se os valores de V_{sim} e I_{sim} , obtém-se o valor da resistência do material R_{sim} entre os dois pontos com a lei de Ohm (3.38).

$$V_{sim} = - \int_{p_a}^{p_b} \vec{E} \cdot \vec{dl} = - \sum_{k \in L_a^b} E_k dl_k \quad (3.37)$$

$$R_{sim} = \frac{V_{sim}}{I_{sim}} \quad (3.38)$$

Como o método de simulação apresentado já calcula a perda Joule no material, o valor da resistência simulada também pode ser obtida pela potência total simulada P_{sim} com (3.39).

$$R_{sim} = \frac{P_{sim}}{I_{sim}^2} \quad (3.39)$$

Esse método pode ser utilizado também para estimar a condutividade elétrica de um material, quando utilizado em conjunto com um instrumento de medição de resistência elétrica. Dada uma amostra, mede-se a resistência elétrica entre dois pontos do material com um instrumento de medida adequado, obtendo-se R_{med} . Realiza-se então o procedimento descrito acima para uma condutividade inicial σ_{init} qualquer, obtendo-se um valor de resistência por simulação R_{sim} .

A condutividade de um material é o inverso da resistividade elétrica, que é proporcional à resistência elétrica da amostra. Valores da resistência elétrica para amostras diferentes irão variar de acordo com seu formato. Entretanto a proporcionalidade com a resistividade se mantém. Portanto, dado dois materiais com condutividades σ_a e σ_b , para amostras de mesmo formato e dimensões, a razão entre suas resistências será proporcional à razão de suas resistividades, obtendo-se (3.40).

$$\frac{R_a}{R_b} = \frac{\rho_a}{\rho_b} = \frac{\sigma_b}{\sigma_a} \quad (3.40)$$

Assim, medida a resistência R_{med} da amostra, e simulada a sua resistência R_{sim} com σ_{init} , a condutividade do material da amostra pode então ser estimada com (3.41).

$$\sigma_{med} = \sigma_{init} \frac{R_{sim}}{R_{med}} \quad (3.41)$$

3.5 CONSIDERAÇÕES FINAIS DO CAPÍTULO

Neste capítulo apresentou-se o modelo de cálculo de campos proposto para simular correntes induzidas em materiais atravessados por fluxos magnéticos variantes no tempo. Aplicou-se uma discretização às leis de Faraday e de Ampère, resultando em um conjunto de equações lineares que pode ser resolvido computacionalmente. Apresentou-se também algumas alterações que podem ser aplicadas ao algoritmo de simulação proposto. Essas alterações permitem a simulação de casos mais complexos, com campos de reação, e para a distribuição da corrente em um processo de medição de resistência. O próximo capítulo trata de resultados de simulações numéricas obtidos com o modelo proposto.

4 RESULTADOS DE SIMULAÇÃO NUMÉRICA DO MODELO PROPOSTO

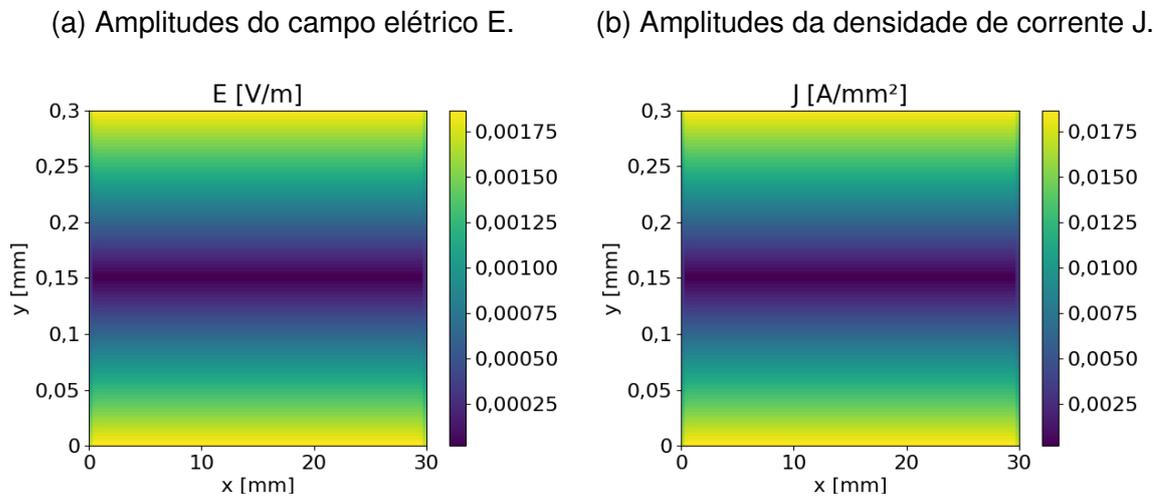
Neste capítulo, apresenta-se resultados de simulações numéricas realizadas com o método proposto. A implementação do modelo foi feita na linguagem de programação *python* (VAN ROSSUM; DRAKE, 2009), utilizando as bibliotecas científicas *numpy* (HARRIS *et al.*, 2020) e *scipy* (VIRTANEN *et al.*, 2020) para realizar as operações matemáticas entre vetores e matrizes. Utilizou-se também a biblioteca *matplotlib* (HUNTER, 2007) para a geração e apresentação dos gráficos resultantes das simulações numéricas. O apêndice B apresenta detalhes sobre a implementação do modelo, informações sobre a sua interface e tempos de processamento.

4.1 RESULTADOS DE SIMULAÇÃO COM METODOLOGIA PROPOSTA PARA LÂMINAS FINAS

Para verificar o comportamento do modelo, simulou-se numericamente as correntes induzidas produzidas por uma variação de fluxo magnético distribuída uniformemente na seção transversal de uma lâmina de espessura fina ($b \gg a$). Conforme os valores de condutividade do aço elétrico (LITTMANN, 1971), utilizou-se um valor de condutividade elétrica no material de $\sigma = 1 \cdot 10^7$ S/m. O valor utilizado para a derivada da indução magnética foi escolhido de maneira a ter o mesmo valor que o máximo atingido pela derivada de uma indução magnética de pico de $B_m = 0,2$ T, com uma de frequência $f = 10$ Hz, de modo que $\frac{dB}{dt} = \omega B_m = 2\pi \cdot 10 \cdot 0,2 \approx 12,566$ T/s. As dimensões da seção da lâmina simulada são $a = 0,3$ mm e $b = 30$ mm. A razão entre elas é de $n = b/a = 100$. Tem-se também que a área dessa seção é $ab = 9$ mm². Assim, o fluxo magnético total que cruza a seção transversal da lâmina é $\phi = 1,8$ μ Wb, e a sua derivada é $\frac{d\phi}{dt} \approx 113,097$ μ Wb/s. A simulação foi realizada com números totais variados de células na discretização, de modo a se observar o desempenho do modelo utilizando diferentes níveis de discretização. Aqui, apresenta-se os resultados para $N = (100, 100)$ e $N = (1000, 1000)$, totalizando, respectivamente, 10 000 e 1 000 000 células em cada simulação.

A figura 4.1 apresenta as distribuições dos módulos do campo elétrico $|\vec{E}|$ e da densidade de corrente $|\vec{J}|$ obtidas via simulação numérica do modelo proposto para cada célula de uma amostra com dimensão $a = 0,3$ mm e $b = 30$ mm. O valor das perdas volumétricas calculado pela simulação foi de $12,178$ W/m³, empregando (3.31). A simulação utilizou um *grid* de 100 células na dimensão x e 100 células na y ($N = 100, 100$), totalizando 10 000.

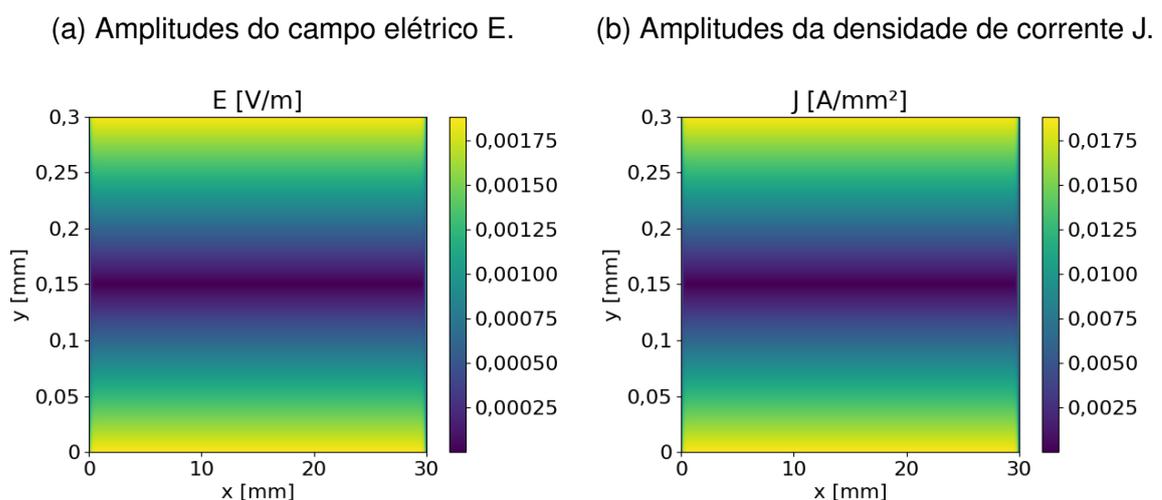
Figura 4.1 – Distribuição das amplitudes resultantes da simulação para E e J no caso $N = (100, 100)$.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A figura 4.2 apresenta o resultado de simulação numérica apenas alterando o número de células de 100 para 1000 células em cada dimensão ($N = 1000, 1000$), totalizando 1 000 000. O valor das perdas volumétricas calculado na simulação foi de $11,815 \text{ W/m}^3$, 3% menor do que a calculada com o caso $N = (100, 100)$. Esta questão será retomada mais adiante.

Figura 4.2 – Distribuição das amplitudes resultantes da simulação para E e J no caso $N = (1000, 1000)$.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Nos resultados apresentados na figura 4.1 e na figura 4.2, observa-se que, para um dado valor de y , as amplitudes visualmente são praticamente constantes variando

o valor de x , conforme esperado pela equação (2.19). Há a simetria espelhada no eixo y em relação ao centro vertical da amostra. Como esperado, as menores amplitudes ocorrem próximo ao centro vertical da amostra, em contraste com as amplitudes mais elevadas nas bordas superior e inferior da lâmina.

Como a amostra pode ser considerada uma lâmina fina por suas dimensões (pois $b = 100a$), pode-se utilizar a equação clássica (2.25) para a estimação dos valores das perdas por correntes induzidas em uma lâmina fina, obtendo-se o valor de $11,843 \text{ W/m}^3$. Tomando como referência o valor obtido pela equação clássica, tem-se uma diferença de $2,83\%$ para o valor obtido via simulação utilizando um *grid* de discretização de $N = (100, 100)$. Para um *grid* com $N = 1000 \times 1000$, a diferença foi de $-0,234\%$. Assim, utilizando-se uma discretização adequada, o resultado via simulação numérica se aproxima do valor também aproximado via modelo analítico para este tamanho e formato de amostra, pois $b/a \rightarrow \infty$, diferente do que foi considerado no desenvolvimento do modelo.

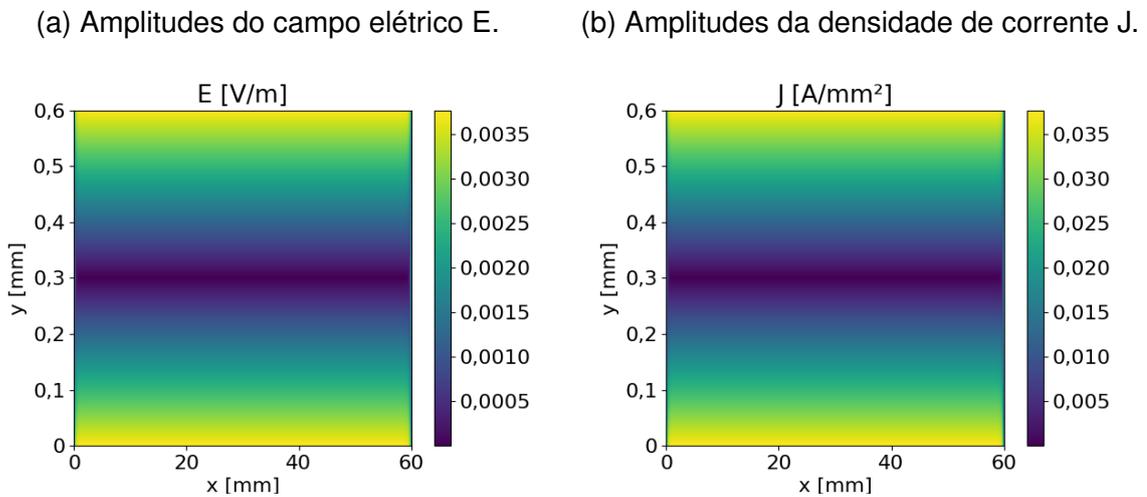
$$P_v = \sigma \frac{a^2}{12} \left(\frac{dB}{dt} \right)^2 \quad (2.25)$$

$$\approx 11,843 \text{ W/m}^3$$

Para averiguar a consistência entre resultados de simulações, realizou-se quatro simulações alterando B_m , ou σ , ou f , ou a e b , mantendo-se o mesmo *grid*. O caso com os resultados apresentados na figura 4.2 é tomado como referência. Os resultados de simulação das distribuições dos módulos do campo elétrico e da densidade de corrente são apresentados apenas para mostrar que o comportamento das grandezas se mantém.

A figura 4.3 apresenta o resultado da simulação com uma amostra de dimensões de 60 mm por $0,6 \text{ mm}$. A seção da lâmina neste caso é $4,0$ vezes maior que da amostra com resultado de simulação apresentado na figura 4.2. A razão entre a e b foi mantida. Na simulação deste caso o valor das perdas volumétricas calculado foi $P_v = 47,260 \text{ W/m}^3$, tendo um aumento de $4,0$ vezes o valor das perdas obtidas no caso de referência. Como esperado, dobrando as dimensões da amostra, a perda volumétrica aumenta em $2^2 = 4$ vezes.

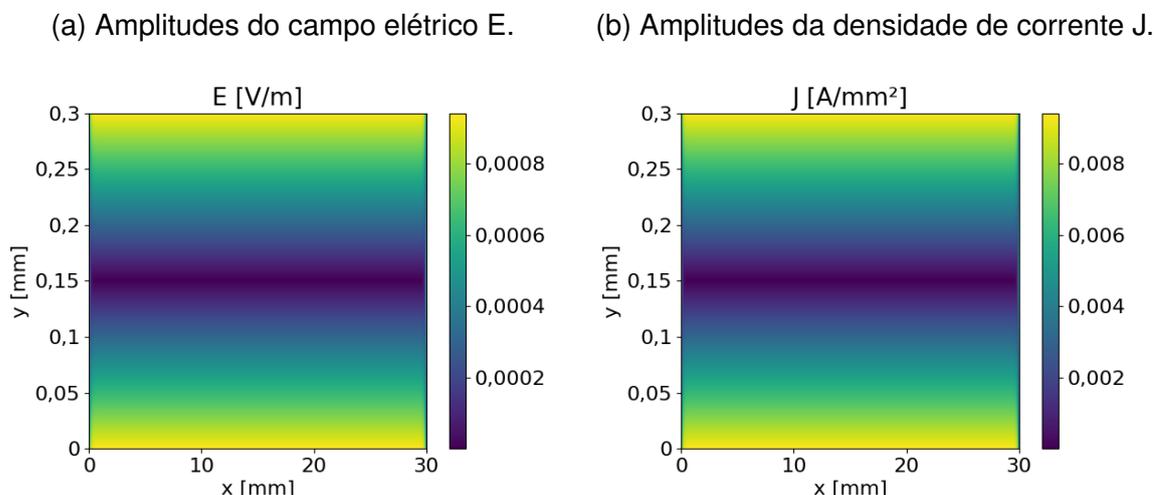
Figura 4.3 – Distribuição das amplitudes resultantes da simulação para E e J de uma lâmina com o dobro das dimensões, com $B_m = 0,2$ T e $N = (1000, 1000)$.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A figura 4.4 apresenta as distribuições do campo elétrico e da densidade de corrente alterando agora o valor de pico da indução para $B_m = 0,1$ T, mantendo as outras entradas do programa de simulação iguais ao caso de referência. Neste novo caso, a indução de pico é metade do valor. Neste novo caso, o resultado calculado para as perdas volumétricas foi de $P_v = 2,954$ W/m³, tendo uma redução em 4,0 vezes do valor das perdas volumétricas do caso de referência. Novamente, de acordo com o esperado, a redução da amplitude da indução magnética em 2 vezes resultou na diminuição das perdas em $2^2 = 4$ vezes.

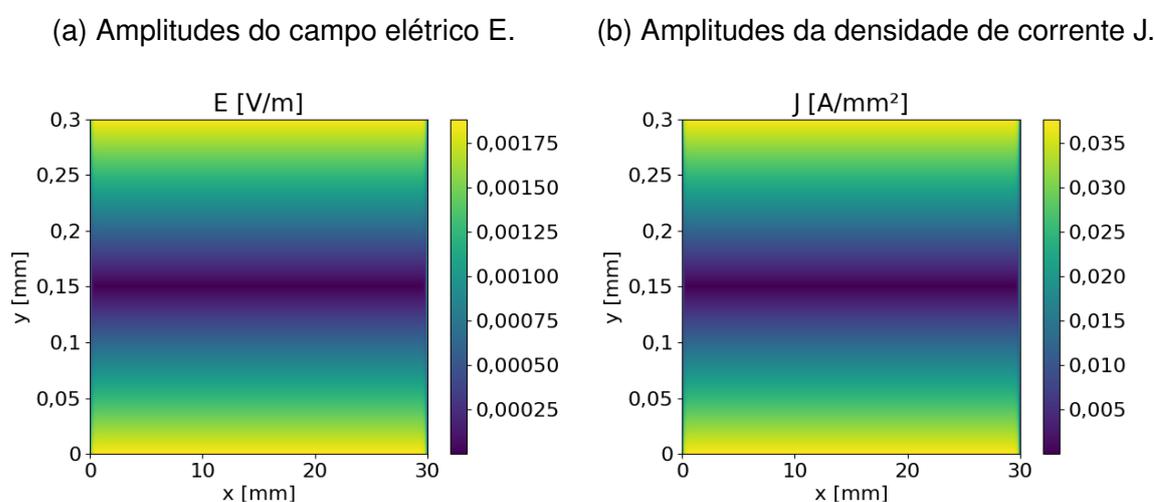
Figura 4.4 – Distribuição das amplitudes resultantes da simulação para E e J com $B_m = 0,1$ T e $N = (1000, 1000)$.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A figura 4.5 apresenta as distribuições do campo elétrico e da densidade de corrente obtidos através de simulação para o aumento do valor da condutividade em 2 vezes em relação ao caso de referência, com as demais entradas mantidas conforme o caso de referência. As perdas volumétricas obtidas nesta simulação são de $P_v = 23,630 \text{ W/m}^3$, tendo um aumento de 2 vezes ao valor das perdas do caso de referência. O valor obtido foi conforme o esperado, pois as perdas por correntes induzidas são proporcionais à condutividade do material.

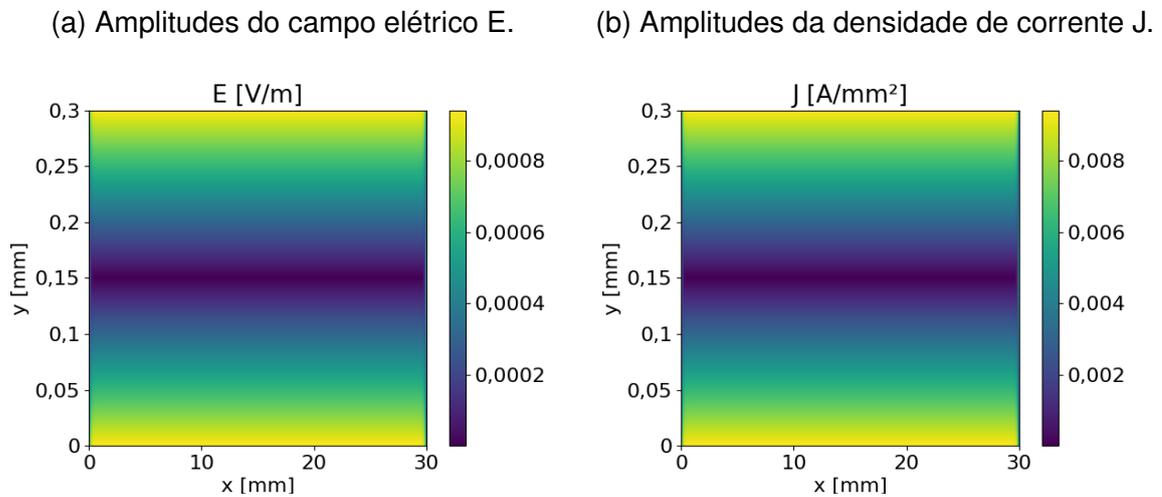
Figura 4.5 – Distribuição das amplitudes resultantes da simulação para E e J com $\sigma = 2 \cdot 10^7 \text{ S/m}$ e $N = (1000, 1000)$.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Por fim, alterou-se a frequência da indução magnética, diminuindo-a para metade do valor do caso de referência. A figura 4.6 apresenta as distribuições do campo elétrico e da densidade de corrente obtidos para esse caso. O valor das perdas volumétricas simulada para este caso é $P_v = 2,954 \text{ W/m}^3$. Novamente, o valor concorda com o esperado, tendo uma redução em 4 ($2^2 = 4$ vezes) vezes ao valor do caso de referência, pois também houve a redução da frequência em 2 vezes.

Figura 4.6 – Distribuição das amplitudes resultantes da simulação para E e J com $f = 5$ Hz e $N = (1000, 1000)$.



A tabela 4.1 apresenta os valores das entradas do programa da simulação e os valores das perdas volumétricas calculados. Os valores das perdas são apresentados com seis casas decimais. Possíveis variações nas últimas casas decimais seriam esperadas devido a erros de truncamento devido a representação digital em ponto flutuante. Optou-se por mostrar apenas as seis primeiras casas decimais, pois aqui diferenças nas demais casas decimais não são significativas. Na tabela 4.1, também se apresenta a razão com seis casas decimais dos valores de perdas por correntes induzidas com relação aos valores da simulação de referência. As variações dos valores de entrada do programa de simulação resultaram em valores alterados esperados, de maneira semelhante ao comportamento dos modelos analíticos de perdas por correntes induzidas para lâminas finas. O comportamento e seu resultado de aumento em quatro vezes das perdas por correntes induzidas perante a duplicação dos tamanhos a e b da amostra será explorado mais adiante como justificativa de uma hipótese para relacionar a alteração das perdas por correntes induzidas à alteração de escala.

Tabela 4.1 – Alterações dos parâmetros de entrada da simulação e consequente variação da perda simulada.

B_m [T]	σ [S/m]	f [Hz]	a [mm]	b [mm]	P_v [W/m ³]	Razão
0,2	$1 \cdot 10^7$	10	0,3	30	11,815 060	(Referência)
0,2	$1 \cdot 10^7$	10	0,6	60	47,260 240	4,000 000
0,1	$1 \cdot 10^7$	10	0,3	30	2,953 765	0,250 000
0,2	$2 \cdot 10^7$	10	0,3	30	23,630 120	2,000 000
0,2	$1 \cdot 10^7$	5	0,3	30	2,953 765	0,250 000

Fonte: Elaborado pelo autor.

4.2 RESULTADOS DE SIMULAÇÃO COM METODOLOGIA PROPOSTA PARA AMOSTRAS DE SEÇÃO CIRCULAR

No intuito de comprovar que a metodologia proposta é válida, optou-se em aplicá-la em uma amostra com seção circular. Este caso possui um modelo analítico que não necessita de aproximações, portanto fornece resultados precisos. O modelo analítico foi apresentado no capítulo 2, seção 2.2.2, onde obteve-se a equação (2.37)

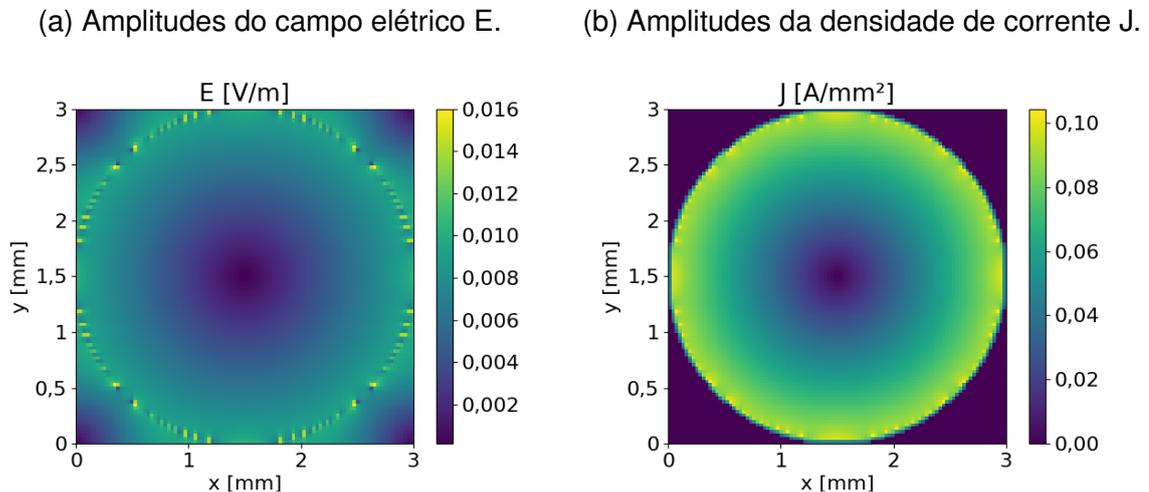
Para o estudo investigativo, considerou-se uma região de domínio de cálculo quadrada, com dimensões $a = b = 2R = 3 \text{ mm}$ que contém a seção circular da amostra, conforme a figura 4.7. O valor da condutividade elétrica do material de $\sigma = 1 \cdot 10^7 \text{ S/m}$ foi o mesmo utilizado anteriormente e aplicado como a condutividade de cada célula dentro da região circular de raio R da amostra. Também se definiu o valor da derivada da indução magnética dentro da seção circular com o valor máximo da derivada máxima de uma forma de onda com $B_m = 0,2 \text{ T}$ e $f = 10 \text{ Hz}$, tal que $\frac{dB}{dt} = \omega B_m = 2\pi \cdot 10 \cdot 0,2 \approx 12,566 \text{ T/s}$.

Para aplicar a metodologia concebida para uma região circular, o algoritmo de formação da matriz $\overline{\overline{M}}$ deveria ser adaptado, não sendo objetivo deste trabalho. Assim, para equacionar o domínio de cálculo com a metodologia de discretização desenvolvida, foi necessário considerar uma região de domínio de cálculo quadrada (aqui com dimensões $a = b = 2R = 3 \text{ mm}$) que contém a seção circular da amostra. Porém, outro problema surge: a região fora da seção circular de material deveria ter um valor de condutividade nula. Se for atribuído um valor nulo para a condutividade nas arestas das células de ar, a matriz do sistema linear $\overline{\overline{M}}$ terá linhas nulas, resultando em uma matriz singular cujo sistema de equações não pode ser resolvido. Este problema poderia ser solucionado de duas maneiras: (i) pode-se retirar as células com condutividade nula da simulação, o que implicaria em utilizar uma região de cálculo circular, recaindo ao problema anterior; ou (ii) pode-se considerar que a condutividade dessa região de ar possui valores relativamente baixos (desprezíveis) em relação à condutividade elétrica da amostra. Assim, o valor considerado para a condutividade do ar foi o valor da condutividade da amostra vezes o fator 10^{-9} .

A figura 4.7 apresenta a distribuição do campo elétrico e da densidade de corrente para a simulação de uma amostra com seção circular realizada com 100 células em cada dimensão ($N = (100, 100)$), totalizando 10 000 células. Nota-se o formato circular assumido nas distribuições do campo elétrico e da densidade de corrente para a amostra de seção circular. Como esperado, a distribuição da densidade de corrente é delimitada pela fronteira da seção circular, indicando que a aproximação aplicada é condizente com a realidade. Porém, como esperado, o campo elétrico estende-se em todo domínio de cálculo, com seus valores máximos ocorrendo na circunferência da seção da amostra (vide equação (2.33)). Nota-se ainda algumas variações do campo elétrico na circunferência, que possivelmente são devidas à discretização utilizada. O

valor das perdas volumétricas obtidas via simulação foi $P_v = 440,730 \text{ W/m}^3$.

Figura 4.7 – Distribuição das amplitudes resultantes da simulação para E e J para uma amostra com seção circular e $N = (100, 100)$.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A figura 4.8 apresenta resultados de simulação para um número de discretização maior, com 1000 células em cada dimensão, totalizando 1 000 000 células. As perdas calculadas pela simulação foram $P_v = 443,770 \text{ W/m}^3$, aumentando em cerca de 0,68%. Para a simulação com maior número de discretização N , a distribuição espacial resultante do campo elétrico e da densidade de corrente manteve-se com um formato circular, como esperado, mas apresentando uma diminuição das variações na circunferência. A figura 4.9 apresenta a distribuição das linhas de fluxo obtidas para o campo elétrico e para a densidade de corrente. Nota-se que as linhas de fluxo dentro da região da amostra percorrem um caminho circular, como previsto também pela solução analítica. Pela equação analítica (2.33), os valores dos módulos do campo elétrico e da densidade de corrente aumentam linearmente com a distância do centro da amostra, como visualmente pode ser observado nas figuras 4.8 e 4.9. Na região fora da amostra, na região simulada com condutividade baixa, os comportamentos do campo elétrico e da densidade de corrente não seguem o formato circular. Isto é devido ao formato da região de domínio ser retangular. Caso se desejasse analisar este campo elétrico fora da amostra em detalhe, poderia se realizar uma simulação considerando uma região de domínio de cálculo mais adequada.

Figura 4.8 – Distribuição das amplitudes resultantes da simulação para E e J para uma amostra com seção circular e $N = (1000, 1000)$.

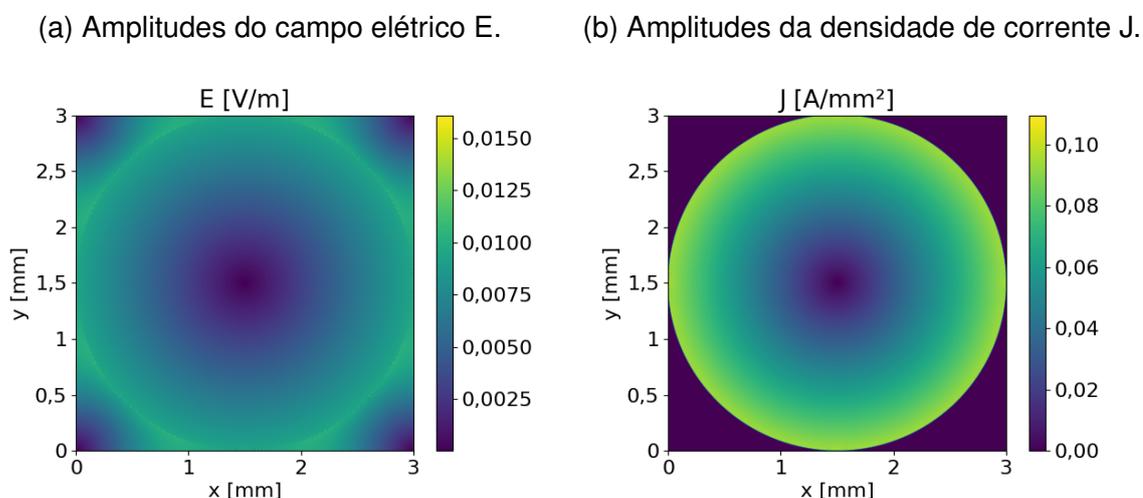
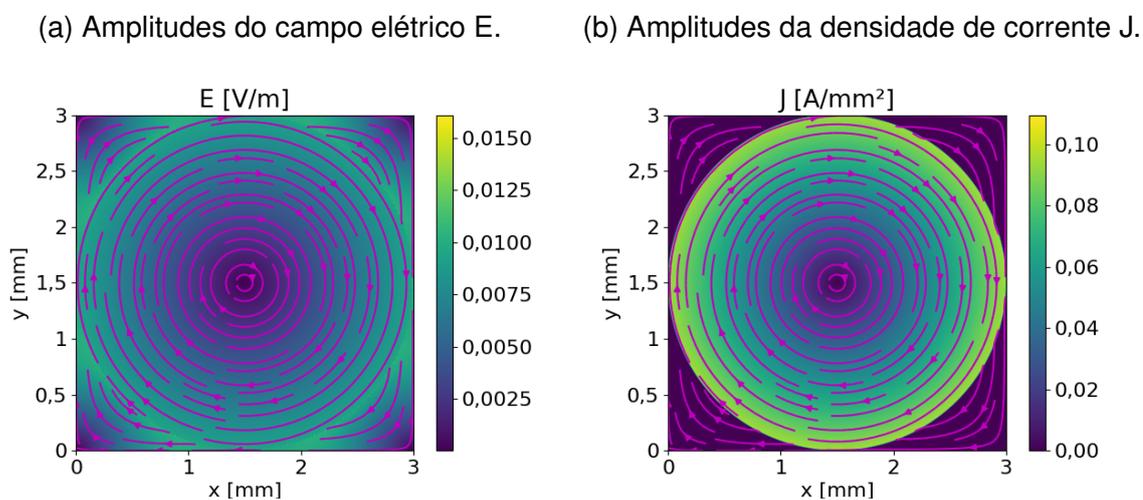


Figura 4.9 – Distribuição das amplitudes resultantes da simulação para E e J para uma amostra com seção circular e $N = (1000, 1000)$, apresentando linhas de fluxo.



Para validar os resultados obtidos por simulação numérica, eles são comparados com o valor das perdas volumétricas obtidas com a equação analítica apresentada no capítulo 2, novamente apresentada em (4.1). O valor do resultado analítico é dado em (4.2).

$$P_v = \sigma \frac{R^2}{8} \left(\frac{dB}{dt} \right)^2 \quad (4.1)$$

$$= 444,132 \text{ W/m}^3 \quad (4.2)$$

Comparando os resultados dos valores das perdas volumétricas calculados analiticamente (referência) com os das simulações, tem-se uma diferença de 0,766 % para a simulação com $N = (100, 100)$ e 0,0816 % para a simulação com $N = (1000, 1000)$. Os valores obtidos via simulação são muito próximos ao calculado pelo modelo analítico. Então, apesar da não perfeita discretização nas bordas do círculo, o modelo de simulação proposto representou corretamente o fenômeno das correntes induzidas.

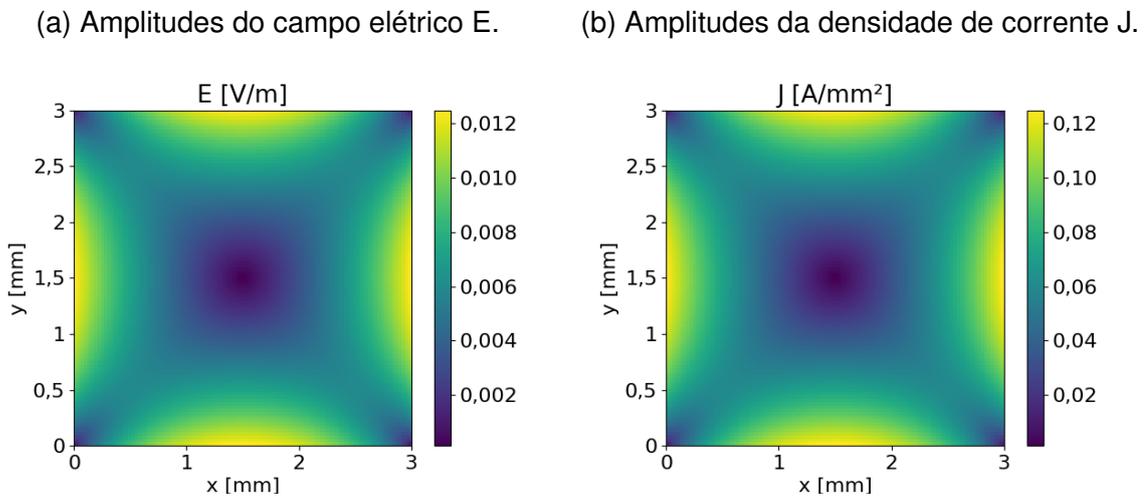
4.3 RESULTADOS DE SIMULAÇÃO COM METODOLOGIA PROPOSTA PARA LÂMINAS RETANGULARES ESPESSAS

Com o exposto até aqui, descreveu-se e se validou a metodologia proposta para representar as distribuições de densidade de correntes em amostras de materiais condutores. Agora, investiga-se a aplicação da metodologia para amostras de materiais laminados espessos.

Diferentemente do caso de lâminas finas e de amostras de seção circular, a questão para a lâmina espessa não possui uma solução analítica simples (DE LA BARRIÈRE; LOBUE; MAZALEYRAT, 2014). Então, a metodologia proposta será aplicada para uma lâmina de seção quadrada, com $a = b = 3 \text{ mm}$, mantendo-se os mesmos valores das outras entradas do programa de simulação. As dimensões a e b foram escolhidas de modo que a área da seção transversal se mantenha igual à da lâmina fina ($ab = 9 \text{ mm}^2$), de modo que os valores de fluxo magnético imposto e sua derivada foram mantidos. A única alteração em relação à simulação da lâmina fina é a razão entre a e b , que agora é $n = b/a = 1$. Semelhantemente como foi feito na simulação da lâmina fina, apresentam-se resultados de simulações para diferentes níveis de discretização a fim de se observar o desempenho do modelo.

Para um *grid* de 100 células em cada dimensão ($N = (100, 100)$), a figura 4.10 apresenta as distribuições dos módulos do campo elétrico E e da densidade de corrente J calculadas através da simulação numérica para cada célula de uma amostra de seção quadrada. O valor das perdas volumétricas calculado pela simulação foi de $519,593 \text{ W/m}^3$.

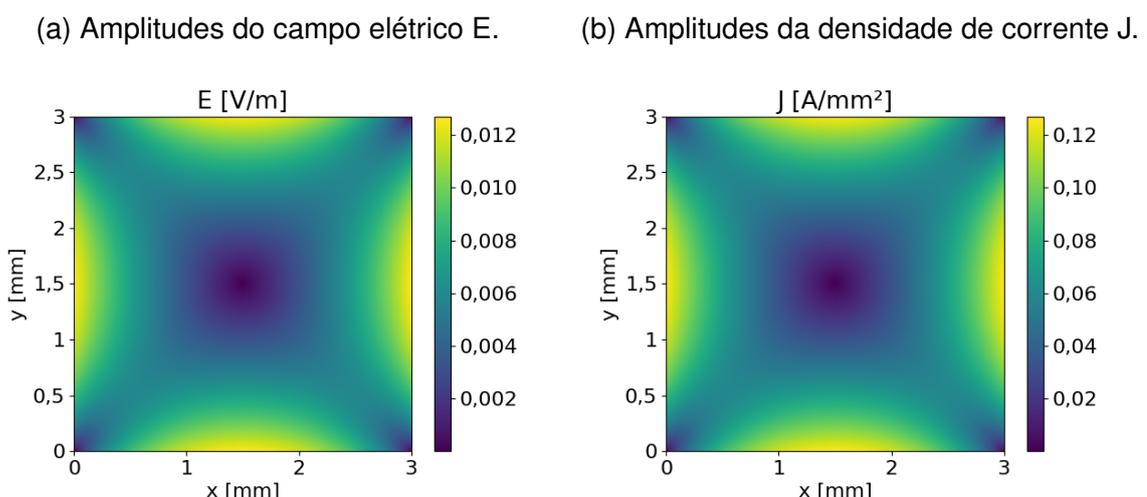
Figura 4.10 – Distribuição das amplitudes resultantes da simulação para E e J para uma amostra com seção quadrada e $N = (100, 100)$.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Para um *grid* de 1000 células em cada dimensão ($N = (1000, 1000)$), a figura 4.11 apresenta as distribuições dos módulos do campo elétrico E e da densidade de corrente J calculadas pela simulação numérica para cada célula de uma amostra de seção quadrada. A perda volumétrica calculada pela simulação foi de $501,478 \text{ W/m}^3$, cerca de 3,5% menor em relação ao caso anterior.

Figura 4.11 – Distribuição das amplitudes resultantes da simulação para E e J para uma amostra com seção quadrada e $N = (1000, 1000)$.

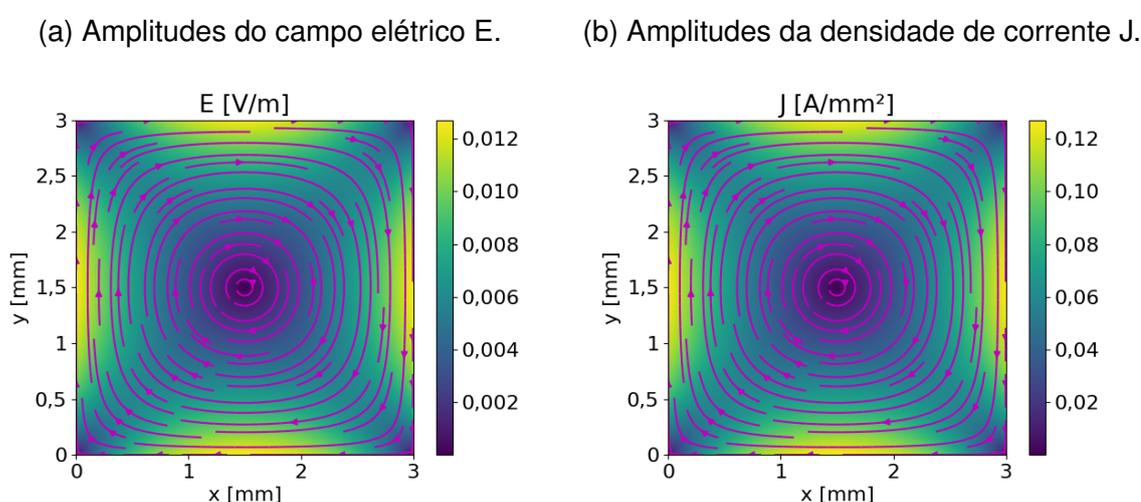


Fonte: Elaborado pelo autor.

No caso da simulação de uma amostra com seção quadrada, observa-se que as distribuições de E e J não possuem o mesmo comportamento de simetria ao longo

do eixo x , como apresentava no caso da lâmina fina. Por outro lado, além das simetrias espelhadas para ambos os eixos, tem-se uma simetria perante a uma rotação de 90° . Nota-se também que a distribuição dos campos no interior da lâmina se aproxima ao comportamento de amostras de seção circular. Nas bordas, o comportamento da distribuição se aproxima à quadrados. Estes fatos podem ser constatados visualmente e mais facilmente na figura 4.12, que apresenta as linhas de fluxo do campo elétrico e densidade de corrente elétrica, apresentadas em magenta.

Figura 4.12 – Distribuição das amplitudes resultantes da simulação para E e J para uma amostra com seção quadrada e $N = (1000, 1000)$, apresentando linhas de fluxo.



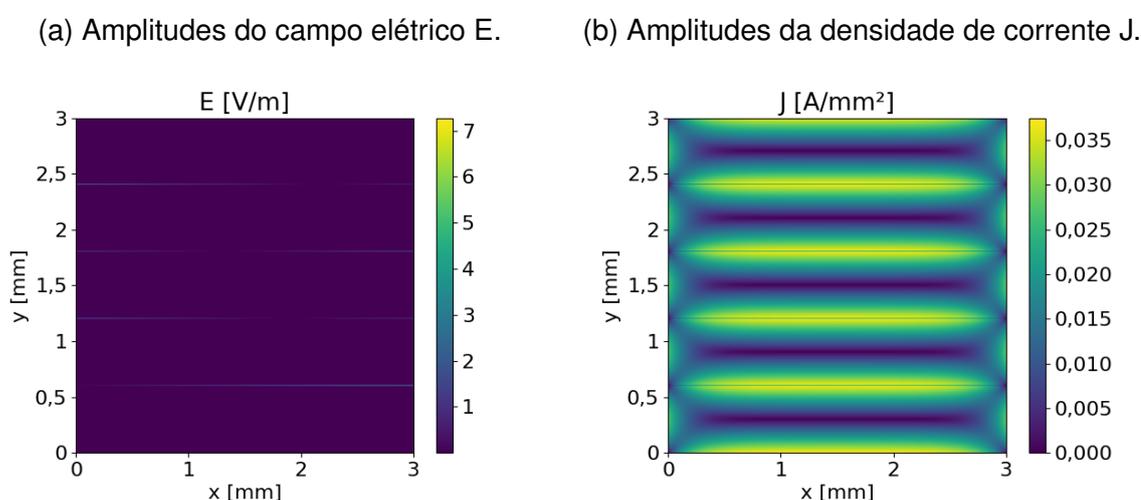
Fonte: Elaborado pelo autor.

Visando observar o comportamento da distribuição das densidades de corrente na aplicação da técnica empregada para reduzir as perdas por correntes induzidas em materiais ferromagnéticos através da laminação, realizou-se simulações numéricas para este estudo. Para isso, manteve-se as mesmas dimensões e características da amostra quadrada, mas empregando 5 lâminas de mesma espessura com o mesmo valor de seção total magnética. Entre as lâminas, há uma região com condutividade nula, representando o isolante entre elas. Esta região de separação é composta por uma linha de células, com espessura $a/N_y = 3 \text{ mm}/1000$, de maneira que seja desprezível em relação a espessura composta por todas as lâminas. Esta espessura é a menor possível com esta discretização. Assim, possibilita-se uma comparação com o caso sem isolantes. A figura 4.13 apresenta a distribuição do campo elétrico e densidade de corrente da simulação com 5 lâminas isoladas. O valor das perdas volumétricas calculado foi de $41,5676 \text{ W/m}^3$, apresentando uma redução de $501,47/41,56 \approx 12,07$ vezes em relação ao caso não laminado. Ressalta-se a considerável redução das perdas por correntes induzidas. Esse resultado mostra a eficácia do uso de materiais

laminados em núcleos de máquinas elétricas e transformadores para reduzir as perdas por correntes induzidas.

Como pode se observar na figura 4.13b, todas as cinco lâminas apresentam a mesma distribuição de corrente, assemelhando-se ao caso da lâmina fina, mas com efeitos nas bordas laterais acentuados por não serem lâminas tão finas. Como o campo elétrico possui intensidades elevadas na região de isolamento em relação aos valores no interior das lâminas (uma relação de cerca de 1 para 2000), a distribuição do campo elétrico no interior das lâminas apresentada na figura 4.13a não pode ser observada.

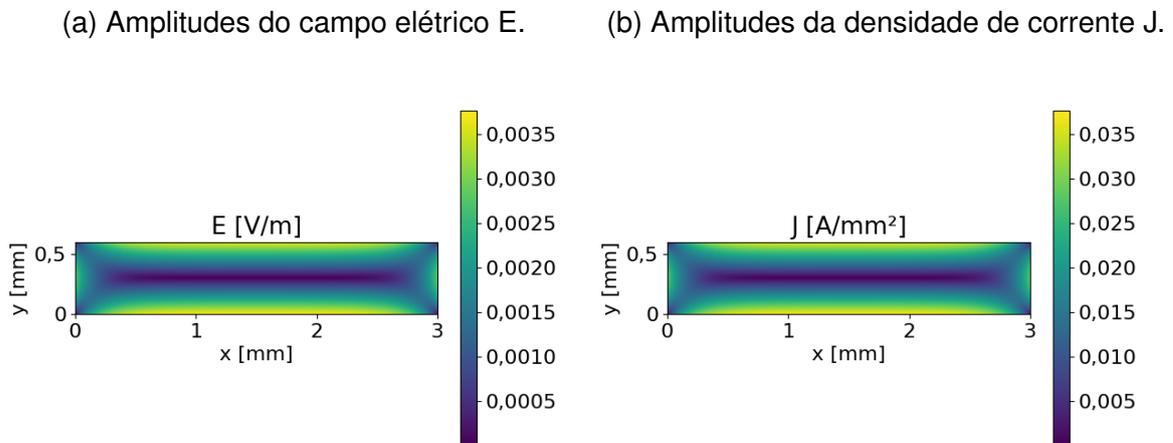
Figura 4.13 – Distribuição das amplitudes resultantes da simulação para E e J para uma amostra com seção quadrada laminada e $N = (1000, 1000)$..



Fonte: Elaborado pelo autor.

Como as cinco lâminas são iguais e apresentam o mesmo comportamento, a análise via simulação numérica pode ser realizada separadamente. Assim, realizou-se a simulação numérica com as mesmas entradas no programa numérico do caso anterior, porém para apenas uma lâmina, mantendo $N = (1000, 1000)$ de maneira que o tamanho das células diminuíssem. As distribuições do campo elétrico e da densidade de corrente são apresentados na figura 4.14. O valor das perdas volumétricas calculado pela simulação foi de $41,5682 \text{ W/m}^3$. Comparando os resultados de perdas para os casos apresentados nas figuras 4.13 e 4.14, tem-se uma diferença nos valores de apenas $0,00157\%$. Neste resultado de simulação é possível observar a distribuição do módulo do campo elétrico no interior da lâmina, que era visualmente inviável na figura 4.13a.

Figura 4.14 – Distribuição das amplitudes resultantes da simulação para E e J para uma lâmina e $N = (1000, 1000)$..



Fonte: Elaborado pelo autor.

4.4 MODELO PARA LÂMINAS RETANGULARES

Após a validação do modelo de cálculo de campos através da concordância com resultados conhecidos, esta seção abordará o desenvolvimento do modelo para estimação das perdas por correntes induzidas em materiais espessos para atender o principal objetivo deste trabalho. Para isso, utilizou-se a metodologia proposta para realizar um conjunto de simulações numéricas a fim de se buscar uma relação entre as dimensões da seção de uma lâmina retangular e as suas perdas por correntes induzidas.

Considera-se como base a hipótese de que o comportamento das perdas por correntes induzidas são função direta da condutividade elétrica σ e do quadrado da derivada temporal da indução magnética $\frac{dB}{dt}$, conforme (4.3). As perdas por correntes induzidas também são função das dimensões (espessura a e largura b) da amostra. Para levar isto em conta, emprega-se um fator $k(a, b)$. Este fator, para uma dada amostra, é função das dimensões a e b .

$$P_v = k(a, b)\sigma \left(\frac{dB}{dt} \right)^2 \quad (4.3)$$

Em (4.3), persiste ainda como encontrar o valor do fator $k(a, b)$ para um certo formato da seção. Voltando aos resultados apresentados na tabela 4.1 para uma lâmina fina, quando se duplicou as dimensões da amostra, as perdas quadruplicaram. Observou-se que para uma mudança de escala das dimensões a e b , tem-se que $k(a, b)$ se altera pelo quadrado desta mudança. Uma validação desta observação via simula-

ção para outros formatos está apresentada no apêndice D. Assim, matematicamente, tem-se que, dado um fator de mudança de escala ζ , tem-se (4.4).

$$k(\zeta a, \zeta b) = \zeta^2 k(a, b) \quad (4.4)$$

Com a intenção de simplificar a abordagem, considera-se um novo fato, dependente da relação entre a e b , denominado $k'(n)$, com $n = b/a$. Levando em conta este novo fator, e para satisfazer (4.4), o fator $k(a, b)$ pode ser definido por (4.5). No apêndice D há uma prova que esta definição satisfaz a propriedade (4.4).

$$k(a, b) = a^2 k'(n) \quad (4.5)$$

Aplicando (4.5) em (4.3), obtém-se as perdas volumétricas por correntes induzidas conforme (4.6).

$$P_v = a^2 k'(n) \sigma \left(\frac{dB}{dt} \right)^2 \quad (4.6)$$

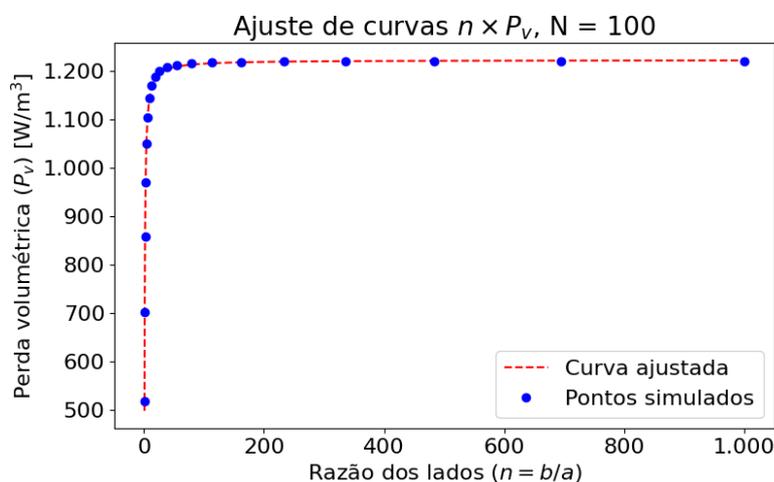
Note que $k'(n)$ é adimensional. Então, pode-se obter via simulação numérica valores de perdas por correntes induzidas variando a razão entre as dimensões da seção n , mantendo-se invariáveis (sempre com o mesmo valor) a condutividade, a espessura, e a derivada da indução magnética. Desta maneira, encontra-se para cada valor de n um valor de $k'(n)$, como mostrado nos pontos da curva da figura 4.15. Necessita-se agora encontrar uma função que represente o comportamento de $k'(n)$ e realizar o ajuste de curvas para determinar os seus parâmetros. A função escolhida é apresentada por (4.7), em que α e β são parâmetros da função $g(n)$. Vale ressaltar que, para a validade desta função, considera-se que $b \geq a$, de maneira que $n \geq 1$. Isto é necessário pois $g(b/a) \neq g(a/b)$ para $a \neq b$. Entretanto não há a perda de generalidade, basta escolher que b seja a maior dimensão da seção da peça. Assim, mantém sempre a condição que $b \geq a$.

Para obter o comportamento de $k'(n)$ via simulação com o modelo numérico proposto, considerou-se $a = 3$ mm, $\sigma = 1 \cdot 10^7$ S/m, $\frac{dB}{dt} \approx 12,566$ T/s e uma discretização de 100 elementos por dimensão. Realizou-se simulações numéricas variando a razão n de 1 até 1000, espaçados geometricamente. O comportamento de $k'(n)$ e a curva ajustada são apresentados na figura 4.15. Note que para $n = 1000$, $b = 3$ m, o que é algo não tão prático, mas serve para se obter o comportamento de $k'(n)$ com melhor precisão. Os parâmetros da função (4.7) obtidos são $\alpha = 0,0861 = 1/11,62$ e $\beta = -0,0510 = -1/19,62$.

$$g(n) = \alpha + \frac{\beta}{n} \quad (4.7)$$

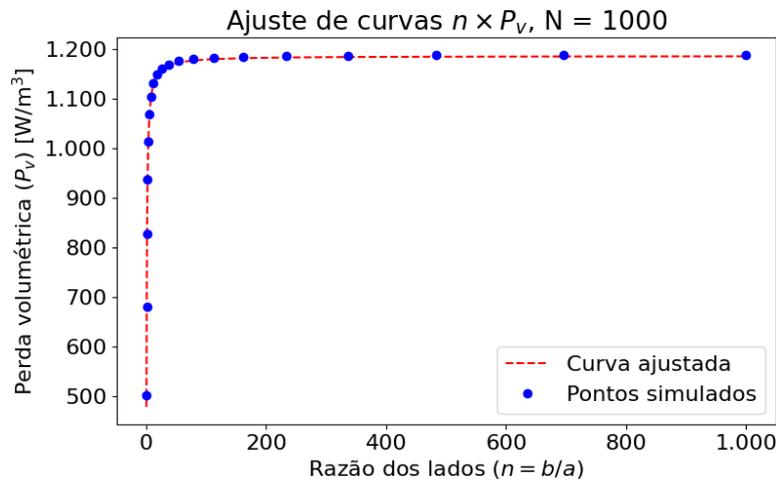
A figura 4.15 apresenta um gráfico comparando os resultados das simulações e a curva obtida.

Figura 4.15 – Ajuste de curvas para $N = (100, 100)$.



Fonte: Elaborado pelo autor.

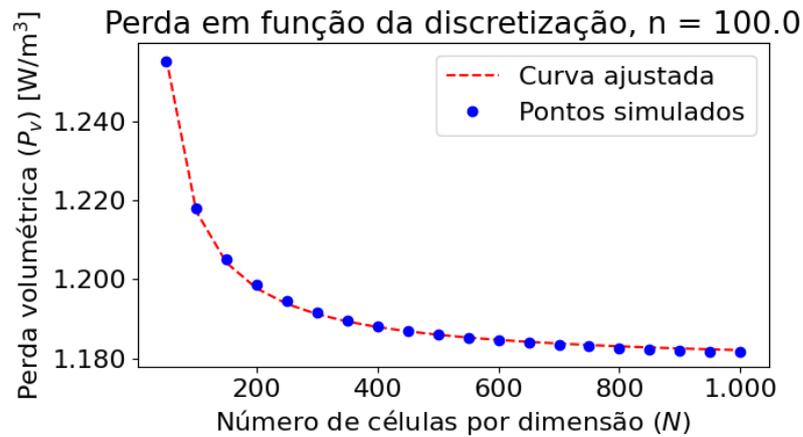
Nota-se que $\alpha \approx 1/12$ e $\beta \approx -1/20$, divergindo apenas em 3,27% e -1,91%, respectivamente. De modo a observar se esses valores se aproximam dessas frações, realizou-se simulações e ajustes de curvas para uma maior discretização de 1000 elementos por dimensão. A figura 4.16 apresenta os pontos simulados numericamente e a curva ajustada para esta discretização. Para este caso, obteve-se $\alpha = 0,0834 = 1/11,99$ e $\beta = -0,0498 = -1/20,08$. A divergência dos valores de α e β em relação à $1/12$ e $-1/20$ é de 0,124% e 0,415%, respectivamente.

Figura 4.16 – Ajuste de curvas para $N = (1000, 1000)$.

Fonte: Elaborado pelo autor.

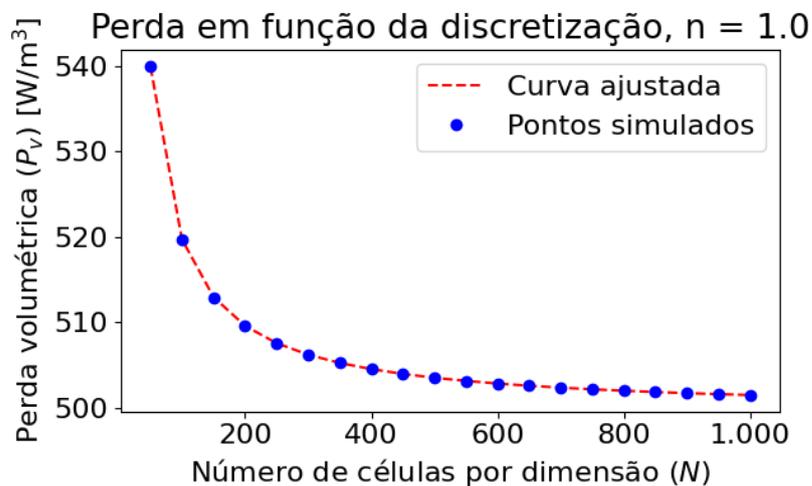
Investigando uma possível justificativa para o arredondamento dos valores dos parâmetros α e β , verificou-se a convergência dos valores das perdas por correntes induzidas calculadas via simulação alterando o número de células N em cada dimensão. As figuras 4.17 e 4.18 apresentam resultados para uma lâmina fina (com $a = 3$ mm e $n = 100$) e para uma lâmina de seção quadrada ($a = b = 3$ mm), como também o valor das perdas calculadas pelo modelo clássico. Nota-se, em ambas as curvas dos valores das perdas calculadas via simulação, que elas convergem para um dado valor conforme N aumenta. Ainda, tem-se que a sequência de pontos simulados é uma sequência monótona, i.e., a diferença entre dois pontos adjacentes sempre possui o mesmo sinal. Um número de células menor utilizadas na simulação resulta em um valor de perdas calculado maior. Nos dois casos de espessura de lâminas, a diferença das perdas calculadas para $N = (50, 50)$ é cerca de 7% maior que o valor com $N = (1000, 1000)$. Para $N = (200, 200)$ essa diferença é menor do que 2%. Note que para ambos os casos, o valor calculado pela equação clássica é de $1184,35 W/m^3$. Esse valor é próximo do valor obtido para um maior número de células para a lâmina fina ($n = 100$), mas é mais que o dobro do valor obtido para a lâmina de seção quadrada ($n = 1$).

Figura 4.17 – Perdas volumétricas simuladas em função do número de células em cada dimensão para uma lâmina fina.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 4.18 – Perdas volumétricas simuladas em função do número de células em cada dimensão para uma lâmina de seção quadrada.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Por simplicidade do modelo, considerou-se então que $\alpha = 1/12$ e $\beta = -1/20$, de modo que a função $k'(n)$ é dada por (4.8). Assim, a densidade de perdas por correntes induzidas em lâminas retangulares pode ser descrita por (4.9). Essa equação pode então ser ajustada para (4.10), em que γ é um fator dado por (4.11), com $n = \frac{b}{a}$ a razão entre os lados da seção retangular.

$$k'(n) = \frac{1}{12} - \frac{1}{20n} = \frac{1}{12} - \frac{a}{20b} \tag{4.8}$$

$$P_v = \sigma a^2 \left(\frac{1}{12} - \frac{a}{20b} \right) \left(\frac{dB}{dt} \right)^2 \quad (4.9)$$

$$P_v = \gamma \sigma \frac{a^2}{12} \left(\frac{dB}{dt} \right)^2 \quad (4.10)$$

$$\gamma = 1 - \frac{0,6}{n} \quad (4.11)$$

Aplicando o limite de uma lâmina fina em (4.11), tem-se (4.12).

$$\lim_{b \gg a} \gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{0,6}{n} \right) = 1 \quad (4.12)$$

Com $\gamma = 1$, o modelo proposto resulta no equacionamento clássico das perdas por correntes induzidas.

O modelo proposto desenvolvido neste trabalho é idêntico ao modelo apresentado no artigo (DE LA BARRIÈRE; LOBUE; MAZALEYRAT, 2014), fazendo $R = 1/n$ de maneira que a equação (2.41) é igual à (4.8). Neste artigo o desenvolvimento é complexo, resultando na equação (2.39), que é simplificada por (2.41) e aplicada em (2.38). Os dois modelos foram obtidos por metodologias e caminhos distintos. Assim, eles corroboram entre si. Apesar do estudo ser mais recente que o de (DE LA BARRIÈRE; LOBUE; MAZALEYRAT, 2014), o modelo apresentado por (GÜRBÜZ *et al.*, 2022) resulta em valores de perdas por correntes induzidas diferentes. Como apresentado no capítulo 2 para um formato de amostra de seção quadrada, a diferença é de 25 % maior calculada pelo modelo de (GÜRBÜZ *et al.*, 2022).

4.5 CONSIDERAÇÕES FINAIS DO CAPÍTULO

Neste capítulo, mostrou-se que os resultados obtidos para as perdas por correntes induzidas obtidas via simulações numéricas com a modelagem proposta concordam com resultados analíticos conhecidos. Aumentando o número de células no domínio de cálculo, os resultados convergem. Atendendo o objetivo principal do trabalho, a metodologia resultou em um modelo para as perdas por correntes induzidas regido por um fator que relaciona as dimensões da seção da amostra. Este modelo é válido para qualquer dimensão de lâminas de seção retangular. O modelo clássico é uma aproximação para lâminas finas e, mantendo a largura da lâmina, na medida que a espessura da seção diminui, o resultado previsto classicamente tende ao do modelo proposto.

O modelo proposto para calcular as perdas por correntes de Foucault em lâminas espessas, embora tenha sido obtido por caminho distinto, chegou ao mesmo resultado de um modelo proposto na literatura.

No próximo capítulo apresentam-se os procedimentos experimentais utilizados para verificar o comportamento da perda por correntes induzidas em lâminas espessas de materiais ferromagnéticos. Também são apresentados os equipamentos utilizados para realizar os ensaios.

5 ASPECTOS DA METODOLOGIA EXPERIMENTAL APLICADA NO ESTUDO

Neste capítulo, apresenta-se a metodologia utilizada para obter dados experimentais de ensaios realizados, tais como valores de perdas magnéticas em amostras de material ferromagnético. Também é apresentado brevemente o processo de separação dos tipos de perdas magnéticas que é realizado para obter os coeficientes de seus modelos a partir dos dados de ensaios.

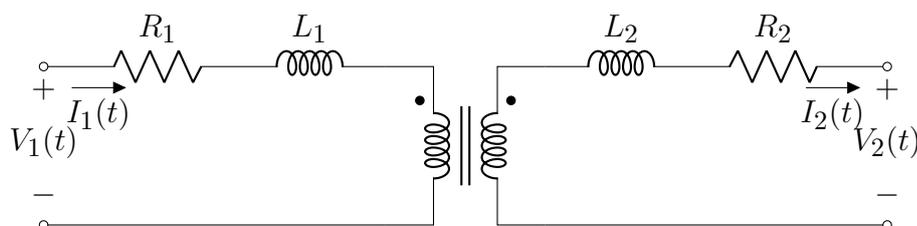
5.1 BANCADA DE PERDAS EM MATERIAIS MAGNÉTICOS

Nesta seção, apresenta-se brevemente a bancada utilizada para se obter valores das perdas em materiais magnéticos. Também, apresenta-se o dispositivo padrão utilizado para a caracterização de aços para fins elétricos laminados, o quadro de Epstein, assim como as equações utilizadas para a obtenção das grandezas magnéticas a partir das grandezas elétricas medidas.

5.1.1 Quadro de Epstein

O quadro de Epstein é o dispositivo padrão segundo a norma brasileira (ABNT, 1977). Esse dispositivo é utilizado para obter resultados quantitativos sobre o comportamento (perdas e permeabilidade) de aços para fins elétricos laminados. O dispositivo é composto por quatro braços, cada um com duas bobinas com 175 voltas cada. Essas bobinas são conectadas em série com as bobinas dos demais braços, formando-se dois enrolamentos, o enrolamento primário e o secundário, ambos com um total de 700 voltas. Em cada um dos braços do dispositivo, inserem-se as amostras que se deseja ensaiar. Essas amostras devem ter formato de lâminas e possuir comprimento superior a 28 cm e largura de 3 cm. A espessura das lâminas pode variar, podendo-se avaliar o resultado de perdas entre lâminas de espessuras diferentes. O circuito equivalente do quadro de Epstein é apresentado na figura 5.1.

Figura 5.1 – Circuito equivalente do quadro de Epstein.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A utilização do quadro de Epstein é feita alimentando-se o circuito com uma fonte controlada na entrada, de maneira a se impor a forma de onda no secundário,

e mantendo-se o secundário em aberto. O campo magnético na amostra pode ser obtido a partir da medição da corrente no primário $I_1(t)$. A corrente $I_1(t)$ percorre o enrolamento primário que envolve o núcleo, e é relacionada ao campo magnético $H(t)$ na amostra pela relação apresentada em (5.1). Nesta equação, L_m representa o caminho médio magnético e N_1 é o número de espiras no primário.

$$H(t) = \frac{N_1}{L_m} I_1(t) \quad (5.1)$$

Para obtenção da indução magnética na amostra, mede-se a tensão no secundário e, como o enrolamento secundário está em aberto, a corrente $I_2(t)$ é nula. Como $I_2 = 0$, a tensão $V_2(t)$ é igual à tensão induzida no secundário pela variação do fluxo magnético no núcleo. Assim, tem-se a relação entre a indução magnética na amostra $B(t)$ e a tensão no secundário $V_2(t)$, dada por (5.2).

$$B(t) = \frac{1}{SN_2} \int_{t_0}^t V_2(t) dt \quad (5.2)$$

A densidade de energia total fornecida ao material (energia total por ciclo) para suprir suas perdas magnéticas, em um período de tempo T , é obtida por (5.3) a partir das formas de onda do campo magnético e da indução magnética. Esse cálculo pode ser interpretado como a área interna do laço B-H.

$$W_{t-mag} = \int_T H(t) dB(t) \quad (5.3)$$

Especificamente para o quadro de Epstein, algumas considerações são feitas. O caminho médio magnético é considerado como $L_m = 0,94 m$ e são utilizadas 700 voltas no primário e no secundário, como já mencionado.

A potência consumida pela amostra é obtida por meio da potência elétrica entregue ao dispositivo. Com a relação de transformação, obtém-se a força contraeletromotriz (tensão induzida na indutância de magnetização) no primário do dispositivo com (5.4).

$$e_1(t) = \frac{N_1}{N_2} V_2(t) \quad (5.4)$$

A potência elétrica instantânea $P_{el}(t)$ que é fornecida ao dispositivo pode então ser calculada por (5.5).

$$P_{el}(t) = e_1(t) I_1(t) \quad (5.5)$$

Como no quadro de Epstein, $N_1 = N_2$, tem-se então que $e_1(t) = V_2(t)$. Assim, $P_{el}(t)$ pode ser calculada apenas com os valores medidos diretamente de $I_1(t)$ e $V_2(t)$, conforme (5.6).

$$P_{el}(t) = V_2(t)I_1(t) \quad (5.6)$$

A potência média total P_{t-el} entregue ao dispositivo pode então ser calculada por (5.7), em que T é o período das formas de onda $I_1(t)$ e $V_2(t)$.

$$P_{t-el} = \frac{1}{T} \int_T P_{el}(t) dt = \frac{1}{T} \int_T V_2(t)I_1(t) dt \quad (5.7)$$

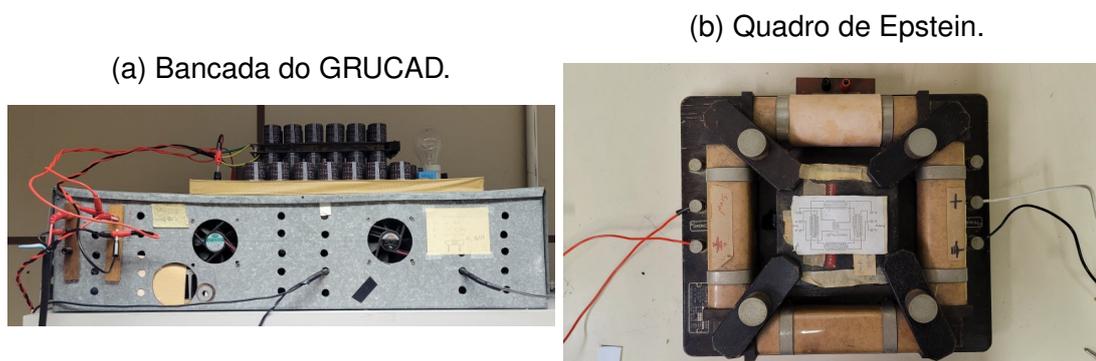
5.1.2 Bancada do GRUCAD

Segundo a norma (IEC, 2008) os ensaios para obtenção das perdas em materiais magnéticos devem ser feitos no quadro de Epstein padrão, com um sistema que garanta que o sinal da tensão no secundário seja sinusoidal, garantindo que o fluxo magnético nas amostras tenha forma de onda também sinusoidal.

Existem bancadas comerciais para realizar estas medições, tais como a da marca Brockhaus. Entretanto, geralmente é difícil realizar ensaios com frequências abaixo de 2 Hz em bancadas comerciais atualmente. No contexto deste trabalho, estas frequências são de grande interesse, já que serão analisadas amostras de espessura relativamente grande, que possuem perdas pelas correntes induzidas de valores elevados quando comparados aos obtidos em lâminas finas, mesmo em frequências nas quais normalmente as perdas dinâmicas são desprezíveis.

Assim, utilizou-se uma bancada produzida no GRUCAD (BATISTELA, 2001). Esta bancada emprega um sistema de controle por modos deslizantes para garantir a forma de onda da tensão no secundário. Esta bancada também utiliza um transformador entre a fonte e o quadro de Epstein para garantir que a forma de onda não tenha um valor contínuo (o nível DC deve ser nulo). O nível DC no dispositivo poderá magnetizá-lo, levando à saturação magnética do material do núcleo, inviabilizando os ensaios. Outras soluções como filtros passa-altas são de difícil implementação, já que tais filtros também reduziram significativamente a amplitude das formas de onda de baixas frequências que são empregados nos ensaios, pois alguns ensaios podem ser realizados em frequências inferiores a 1 Hz. Uma foto da bancada do GRUCAD é apresentada na figura 5.2a. O quadro de Epstein utilizado é apresentado em foto na figura 5.2b.

Figura 5.2 – Bancada e quadro de Epstein utilizados.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A bancada do GRUCAD utiliza alguns sinais externos para suas referências, um sinal triangular utilizado em seu inversor e o sinal que se deseja impor na tensão do secundário. Para o sinal triangular, utilizou-se um gerador de sinais *Tektronix CFG250* apresentado na figura 5.3a. Para o sinal de referência do controle da tensão do secundário, utilizou-se uma placa eletrônica *NI USB-6212* da *National Instruments* associada a um programa de geração de sinais produzido em *software LabVIEW* (BITTER; MOHIUDDIN; NAWROCKI, 2006). A placa *NI USB-6212* é apresentada na figura 5.3b. Ela gera o sinal analógico em uma das suas saídas, que é então enviado como referência à bancada por um cabo coaxial.

A medição das formas de onda de corrente e de tensão foi realizada com um osciloscópio *Tektronix DPO 4104*, apresentado na figura 5.3c. A medição de tensão foi feita com sondas próprias do osciloscópio e a medição da corrente no primário foi feita com a sonda de corrente *Tektronix TCP0030*, apresentada na figura 5.3d. Obtidas as formas de onda com o osciloscópio, os sinais foram enviados para um computador que contém um programa de aquisição dos dados e análise implementado em *LabVIEW*.

Figura 5.3 – Equipamentos utilizados para a medição.

(a) Gerador de funções.



(b) Placa eletrônica de geração e de aquisição de sinais.



(c) Osciloscópio e sonda de tensão.



(d) Sonda de corrente.



Fonte: Elaborado pelo autor.

5.2 MÉTODO DE SEPARAÇÃO DE PERDAS

Os ensaios realizados no quadro de Epstein para amostras de aço para fins elétricos são realizados para uma faixa de valores de indução magnética de pico. Esta faixa geralmente estende-se de $B_m = 0,1$ T, que representa uma região de baixa saturação do material, até cerca de $B_m = 2$ T, que representa uma região de alta saturação, ou até o material ficar saturado magneticamente (comercialmente, os valores de perdas magnéticas são dados no mínimo para 1 T e 1,5 T, em 50 Hz ou 60 Hz). De modo a garantir que a separação das perdas seja feita em uma região na qual os modelos de perdas representem bem o comportamento do material, os valores mínimos e máximos de B_m utilizados na separação são determinados durante o processo de separação.

Após a obtenção dos dados experimentais, é necessário realizar o processo de

separação de perdas, obtendo assim as constantes de perda k_h e α_h para a perda por histerese conforme a equação (5.8), e k_f e k_e para as perdas dinâmicas para uma frequência base, conforme (5.10). Devido à característica estática da perda por histerese, essa separação comumente é feita em unidades de energia por massa da amostra, de modo que as constantes do modelo de perda por histerese sejam válidas para quaisquer frequências, sem os efeitos que significativamente modifiquem o caminho magnético ou outra propriedade do material conforme a frequência.

A separação das perdas geralmente é feita em duas etapas:

- (i) a etapa estática, que utiliza um conjunto de pontos obtidos em baixa frequência f_{LF} obtendo-se valores de densidade de perda W_{LF} com valores de indução de pico B_m . A frequência do ensaio deve ser baixa o suficiente a ponto de que as perdas dinâmicas possam ser desprezadas. Considera-se então que a perda obtida nesta frequência W_{LF} é devida apenas a perda por histerese, e então os parâmetros k_h e α_h do seu modelo podem ser obtidos a partir de um processo de ajuste de curvas, realizado para a relação (5.8).

$$W_{LF}(B_m) = k_h B_m^{\alpha_h} \quad (5.8)$$

- (ii) a segunda etapa consiste em um ensaio em uma frequência superior a do ensaio para a medição das perdas por histerese, geralmente escolhendo-se uma frequência f_{OF} em que se deseja utilizar o material da amostra em sua aplicação destinada. Subtrai-se a perda por histerese estimada na etapa estática da perda total obtida nos ensaios, resultando em um conjunto de pontos que estima as perdas dinâmicas presentes na amostra, conforme (5.9).

$$W_{Din}(B_m) = W_{OF}(B_m) - k_h B_m^{\alpha_h} \quad (5.9)$$

A partir deste conjunto de pontos, obtém-se as constantes k_f e k_e das perdas dinâmicas, realizando outro processo de ajuste de curvas relativo à equação (5.10).

$$W_{Din}(B_m) = k_f B_m^2 + k_e B_m^{1,5} \quad (5.10)$$

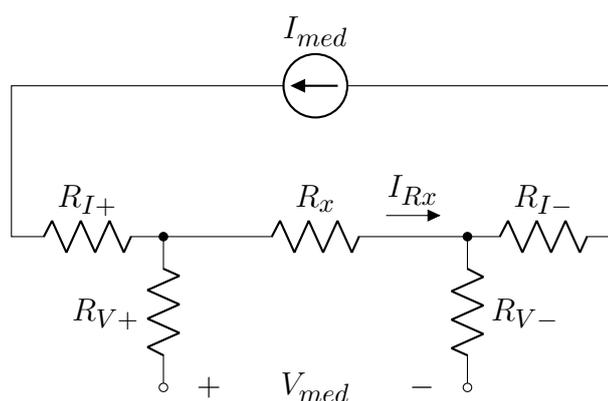
5.3 MEDIÇÃO DE CONDUTIVIDADE COM MEDIÇÃO DE RESISTÊNCIA A QUATRO FIOS

Com o objetivo de buscar a possibilidade de comparação do resultado das perdas por correntes induzidas, utilizou-se a medição de resistência a quatro fios para

se obter o valor da resistência elétrica entre dois pontos de uma lâmina de aço elétrico. Com o valor da resistência elétrica e as dimensões da lâmina, pode-se estimar sua condutividade elétrica, conforme apresentado no capítulo 3.

O método de medição a quatro fios é destinado para medir a resistência de um dispositivo sem a intervenção das resistências dos cabos e conectores utilizados na realização da medida. A figura 5.4 apresenta um circuito representando a medição de uma resistência R_x pelo método a quatro fios. Este método consiste de quatro terminais (fios), no qual um par impõe a corrente que passa por R_x , e o outro se refere a medição de tensão em R_x . Considerando que a resistência do voltímetro utilizado para medir V_{med} é muito maior que a resistência que se deseja medir R_x , tem-se que $I_{med} = I_{R_x}$ e $I_{V_{med}} \approx 0$. Assim, tem-se que a queda de tensão em R_{V+} e R_{V-} é praticamente nula e, portanto, $V_{med} = V_{R_x}$. Dessa maneira, a resistência R_x pode ser calculada com (5.11).

Figura 5.4 – Circuito representando a medição de resistência pelo método a quatro fios



Fonte: Elaborado pelo autor.

$$R_x = \frac{V_{med}}{I_{med}} \quad (5.11)$$

Note que, ao contrário da medição de resistência a dois fios, no método a quatro fios as resistências R_{I+} , R_{I-} , R_{V+} e R_{V-} possuem interferências desprezíveis no processo de medição, já que a corrente que circula por R_x não circula pelos terminais da medição do valor de tensão.

Para medir a resistência da lâmina, utilizou-se um multímetro de bancada de precisão *Agilent 34410A*. Este equipamento possui a capacidade de realizar a medição a quatro fios, com precisão de $1 \text{ m}\Omega$. Como o aço elétrico é um bom condutor, um medidor capaz de medir resistências baixas é necessário para este procedimento.

5.4 CONSIDERAÇÕES FINAIS DO CAPÍTULO

Neste capítulo apresentou-se o equipamento padrão quadro de Epstein para realizar a medição de perdas em lâminas de material ferromagnético. Apresentou-se também a bancada utilizada para os ensaios, juntamente com outros dispositivos utilizados para a realização de medidas. Apresentou-se também os procedimentos para se obter os valores das grandezas magnéticas, bem como de se obter os valores das perdas no material ferromagnético. Finalmente, comentou-se brevemente sobre o processo de segregação dos tipos de perdas magnéticas que é utilizado para estimar os valores dos parâmetros dos modelos das componentes de perdas.

O próximo capítulo apresenta os dados obtidos a partir dos procedimentos apresentados para duas amostras, uma fina e outra espessa. Realiza-se a separação de perdas e explora-se os resultado obtidos através de procedimentos de análises.

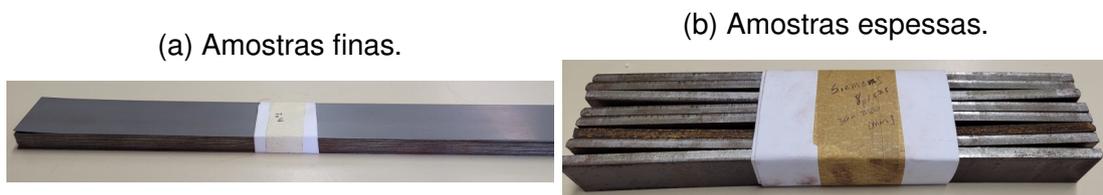
6 ESTUDOS EXPERIMENTAIS

Neste capítulo são apresentados ensaios em dois conjuntos de amostras de material ferromagnético. Os ensaios foram realizados variando a frequência e a indução magnética de pico. Apresentam-se os laços B-H obtidos para as frequências e valores de indução dos ensaios. Realiza-se análises dos comportamentos observados experimentalmente, associando análises teóricas. Realiza-se também separação de perdas magnéticas de modo a obter as constantes dos modelos de perdas para os materiais ensaiados.

6.1 AS AMOSTRAS UTILIZADAS

Os ensaios experimentais foram realizados em dois conjuntos de amostras. Um conjunto é composto por amostras finas de ferro-silício de grãos-orientados, com espessura 0,27 mm, vide foto na figura 6.1a. O outro conjunto é composto por amostras espessas de aço-carbono, de espessura 6,35 mm, vide foto na figura 6.1b. Ambos possuem as demais dimensões conforme os padrões do quadro de Epstein, com largura de 30 mm e comprimento de 280 mm.

Figura 6.1 – Fotos das amostras utilizadas nos ensaios.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Tem-se disponível 48 e 8 amostras de cada tipo, respectivamente. Entretanto, devido à limitação de altura de abertura do quadro de Epstein, foi possível realizar o ensaio com 4 amostras do tipo espessa, resultando em uma lâmina por braço. Para o conjunto de amostras finas, utilizou-se 32 amostras para os ensaios, distribuídas em 8 lâminas por braço. Para comparação visual entre as dimensões das amostras, apresenta-se fotos das visões superior e lateral nas figuras 6.2a e 6.2b, respectivamente. A tabela 6.1 apresenta os parâmetros das amostras utilizadas nos ensaios. A figura 6.3 apresenta as distribuições dos módulos das densidades de corrente nas seções das duas amostras obtidas pelo método de simulação numérica apresentado. As entradas $\frac{dB}{dt}$ e σ do programa foram mantidos iguais aquelas nas simulações do capítulo 4. Nota-se que as distribuições da densidade de corrente são distintas. O valor máximo da densidade de corrente na amostra espessa é cerca de 20 vezes maior que o na amostra fina. A distribuição para a amostra fina ($n \approx 111$) se aproxima ao

caso da lâmina fina. Na amostra espessa ($n \approx 4,72$) é possível observar diferenças na distribuição da densidade de corrente nas laterais da amostra.

Figura 6.2 – Fotos das amostras utilizadas nos ensaios, com uma caneta para referência de escala.



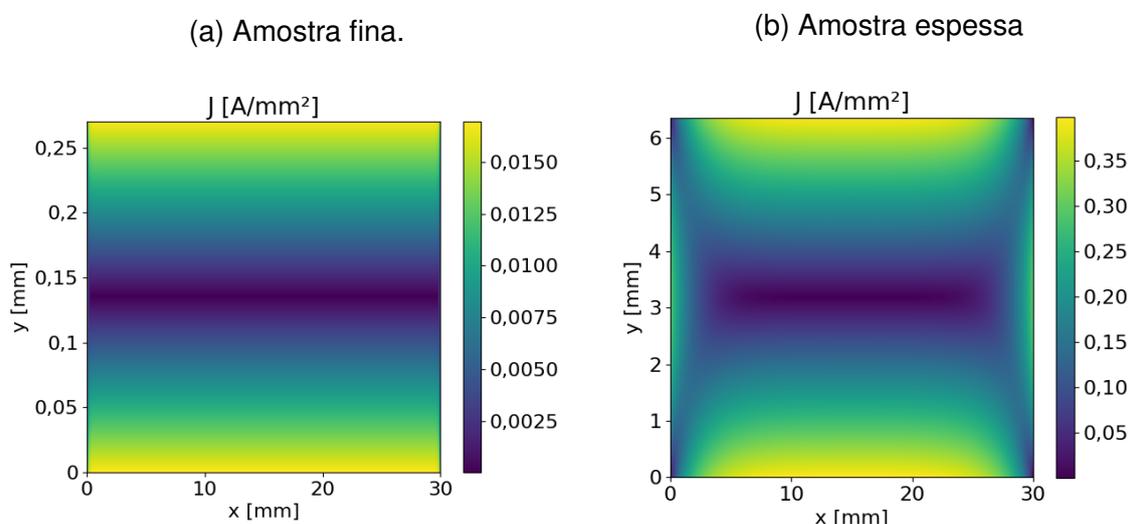
Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela 6.1 – Parâmetros das amostras utilizadas nos ensaios

Amostra	Lâmina fina	Lâmina espessa
Espessura	0,27 mm	6,35 mm
Largura	30 mm	30 mm
Comprimento	280 mm	280 mm
Número de amostras utilizadas	32	4
Número de amostras por braço	8	1
Massa do conjunto	539,09 g	1724,22 g
Densidade fornecida	7650 kg/m ³	7850 kg/m ³

Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 6.3 – Distribuição do módulo da densidade de corrente por simulação numérica nas amostras.



Fonte: Elaborado pelo autor.

6.2 OS ENSAIOS REALIZADOS

Realizou-se ensaios para os dois conjuntos de amostras na bancada do GRU-CAD. Por meio do seu sistema de controle em malha fechada, esta bancada mantém a tensão no enrolamento secundário com forma de onda sinusoidal, de modo que o fluxo magnético nas amostras também tem forma de onda sinusoidal. Como esta forma de onda é monotônica (i.e., possui só uma componente de frequência), possibilita-se a realização de estudos dos comportamentos dos materiais em frequências distintas.

Os ensaios foram realizados para frequências a partir de 0,5 Hz até a frequência máxima possível de se realizar os ensaios nas amostras (100 Hz para o conjunto de amostras finas e 40 Hz para o de amostras espessas). A partir de certa frequência, a fonte que alimenta a bancada não consegue fornecer a potência instantânea ou corrente de pico adequadas para realizar os ensaios. Para frequências baixas, um transformador utilizado para remover o nível DC das formas de onda provenientes de um inversor de tensão com filtro, a partir de um nível de tensão, entra em saturação, dificultando a realização de ensaios para B_m elevados. Para frequências baixas e B_m baixos, tem-se a interferência de ruídos, afetando a precisão da medição, pois a tensão no secundário passa ter valores relativamente baixos, próximos aos níveis do ruído. Assim, a bancada é apta para realizar ensaios em certa faixa de frequência e de indução de pico. Esta faixa é diferente para cada conjunto de amostras.

Para a amostra fina, foi possível realizar ensaios variando a frequência de 0,5 Hz até 100 Hz. Para a amostra espessa, foi possível realizar os ensaios de 0,5 Hz até 40 Hz. A tabela 6.2 apresenta os valores de frequência e indução de pico para os ensaios realizados em ambos os conjuntos de amostras. As figuras 6.4a e 6.4b apresentam os dados da tabela em forma de gráficos. Pelos gráficos da figura 6.4 é possível observar as limitações em certas combinações de indução e frequência nos ensaios realizados na bancada.

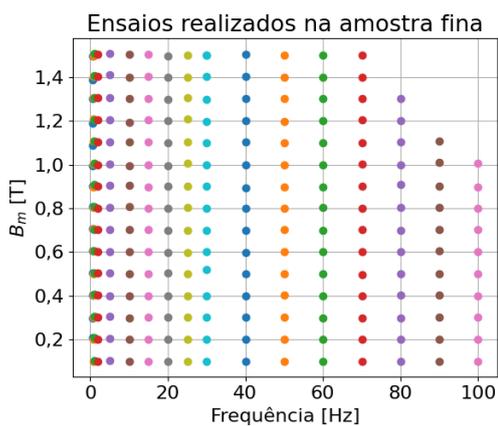
Tabela 6.2 – Frequências e induções de pico na quais foram realizados os ensaios.

Frequência	Lâmina fina			Lâmina espessa		
	B_m mín.	B_m máx.	Passo B_m	B_m mín.	B_m máx.	Passo B_m
0,5 Hz	0,1 T	1,5 T	0,1 T	0,05 T	0,48 T	0,05 T
0,75 Hz	0,1 T	1,5 T	0,1 T	0,05 T	0,75 T	0,05 T
1 Hz	0,1 T	1,5 T	0,1 T	0,05 T	0,9 T	0,05 T
2 Hz	0,1 T	1,5 T	0,1 T	0,05 T	1,25 T	0,05 T
5 Hz	0,1 T	1,5 T	0,1 T	0,1 T	1,5 T	0,1 T
7,5 Hz	-	-	-	0,1 T	1,5 T	0,1 T
10 Hz	0,1 T	1,5 T	0,1 T	0,1 T	1,5 T	0,1 T
12,5 Hz	-	-	-	0,1 T	1,5 T	0,1 T
15 Hz	0,1 T	1,5 T	0,1 T	0,1 T	1,4 T	0,1 T
20 Hz	0,1 T	1,5 T	0,1 T	0,1 T	1,1 T	0,1 T
25 Hz	0,1 T	1,5 T	0,1 T	0,1 T	0,9 T	0,1 T
30 Hz	0,1 T	1,5 T	0,1 T	0,1 T	0,8 T	0,1 T
35 Hz	-	-	-	0,1 T	0,7 T	0,05 T
40 Hz	0,1 T	1,5 T	0,1 T	0,1 T	0,6 T	0,05 T
50 Hz	0,1 T	1,5 T	0,1 T	-	-	-
60 Hz	0,1 T	1,5 T	0,1 T	-	-	-
70 Hz	0,1 T	1,5 T	0,1 T	-	-	-
80 Hz	0,1 T	1,3 T	0,1 T	-	-	-
90 Hz	0,1 T	1,1 T	0,1 T	-	-	-
100 Hz	0,1 T	1 T	0,1 T	-	-	-

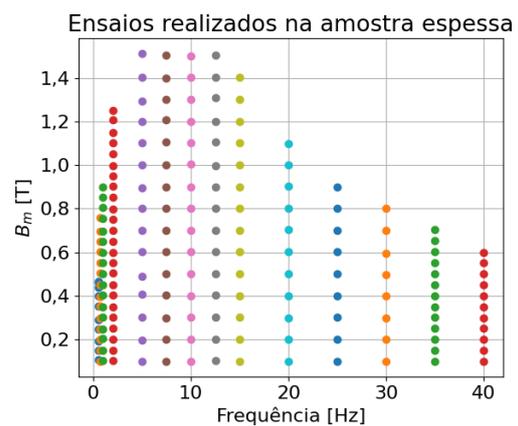
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 6.4 – Pontos de medição em função das frequências e das induções de pico nos ensaios para cada conjunto de amostras.

(a) Amostra fina.



(b) Amostra espessa.



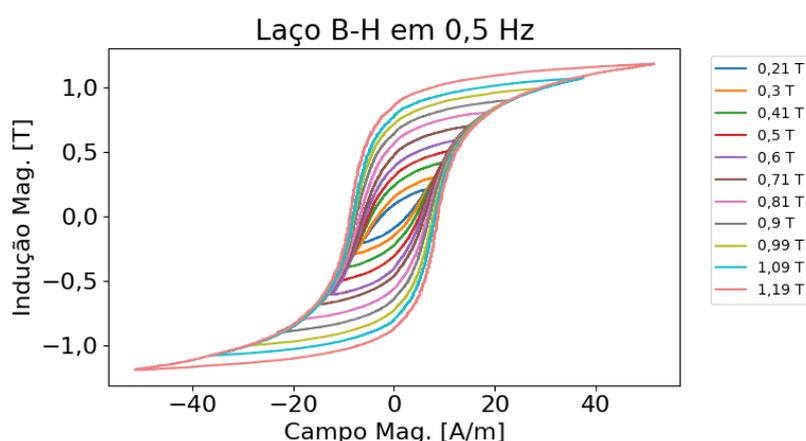
Fonte: Elaborado pelo autor.

6.2.1 Amostras finas

Com as formas de onda da corrente no enrolamento primário do quadro de Epstein e da tensão em seu enrolamento secundário, obtém-se o campo magnético

e a indução magnética no material. A partir das formas de onda, traça-se o laço B-H do material para cada ponto de ensaio. A figura 6.5 apresenta os laços B-H obtidos na frequência de 0,5 Hz para valores de B_m nas amostras finas. Nota-se que os laços B-H nessa figura são estreitos, variando pouco os valores dos campos coercitivos, indicando que as perdas dinâmicas não são significativas.

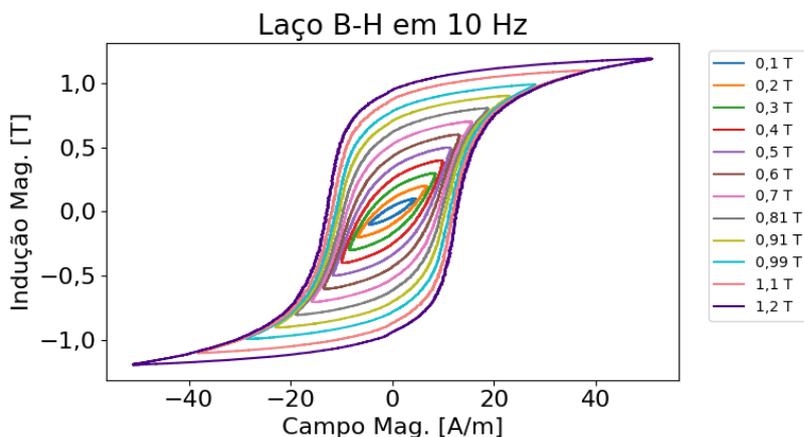
Figura 6.5 – Laços B-H experimentais em 0,5 Hz para diversos valores de B_m nas amostras finas.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A figura 6.6 apresenta os laços B-H obtidos na frequência de 10 Hz nas amostras finas. Comparando os laços desta figura com os da figura 6.5, os laços em 10 Hz são mais “largos” que os obtidos à 0,5 Hz, indicando um crescimento das perdas dinâmicas. Nota-se nos laços que os pontos de máximos e mínimos, tanto das induções quanto dos campos magnéticos, ocorrem simultaneamente.

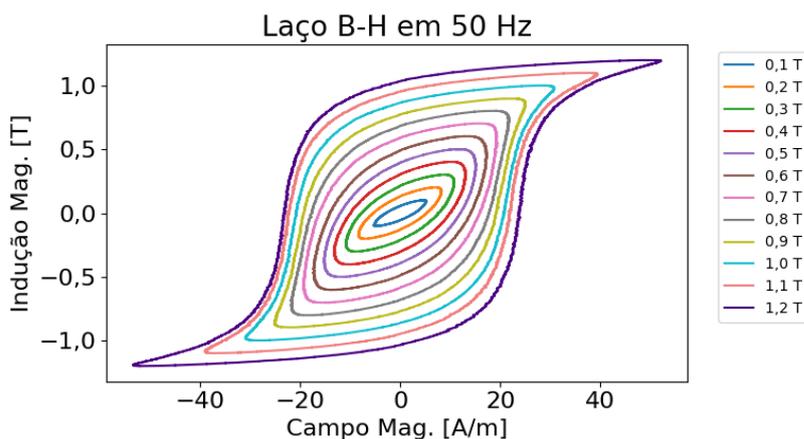
Figura 6.6 – Laços B-H experimentais em 10 Hz para diversos valores de B_m nas amostras finas.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A figura 6.7 apresenta os laços B-H obtidos na frequência de 50 Hz para diversos valores de B_m nas amostras finas. Nota-se agora uma maior influência das perdas dinâmicas, resultando em laços mais “arredondados”, com valores de campos coercitivos bem distintos.

Figura 6.7 – Laços B-H experimentais em 50 Hz para diversos valores de B_m nas amostras finas.

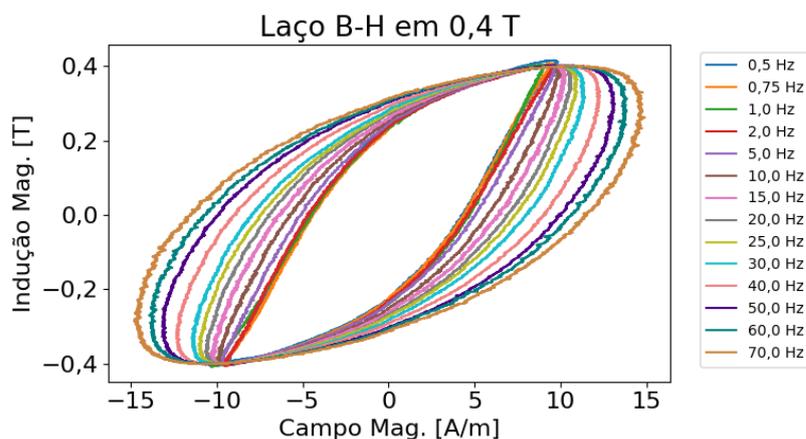


Fonte: Elaborado pelo autor.

A figura 6.8 apresenta os laços B-H obtidos para um valor de indução de pico de 0,4 T em várias frequências de operação das amostras finas. Nessa figura é possível notar o crescimento das perdas dinâmicas com o aumento da frequência. Nota-se

também que, para frequências a partir de cerca de 25 Hz, o ponto onde ocorre a indução de pico não coincide com o ponto onde ocorre o campo de pico.

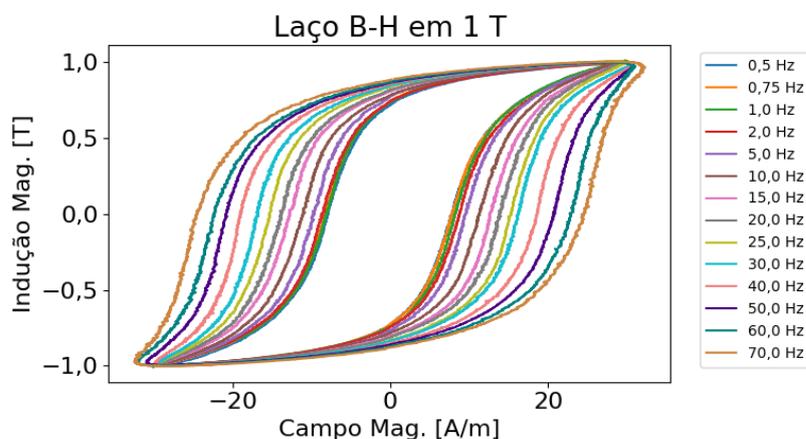
Figura 6.8 – Laços B-H experimentais em 0,4 T para diversos valores de frequência nas amostras finas.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A figura 6.9 apresenta os laços B-H obtidos para uma indução de pico de 1 T para frequências de operação das amostras finas. Nessa figura também é possível notar o crescimento das perdas dinâmicas, principalmente a partir de 10 Hz, onde o valor do campo coercitivo aumenta significativamente. Neste valor de indução de pico, a não coincidência entre os picos de indução e campo ocorrem em uma frequência superior do que para a indução de pico de 0,4 T (vide figura 6.8). Aqui, este comportamento começa a aparecer a partir da frequência de 70 Hz.

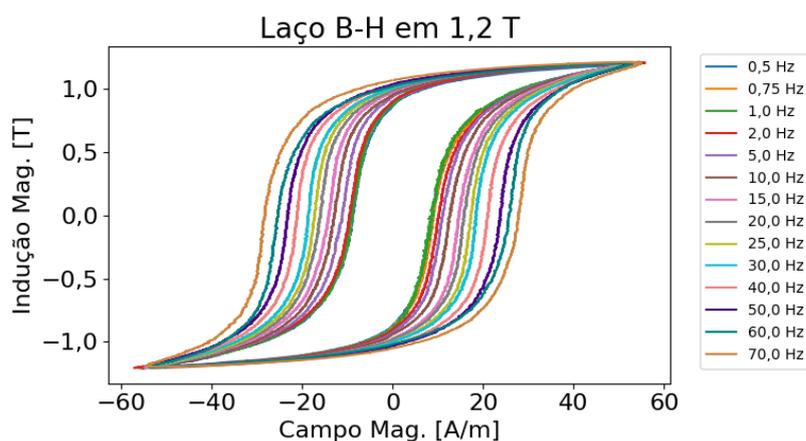
Figura 6.9 – Laços B-H experimentais em 1 T para diversos valores de frequência nas amostras finas.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A figura 6.10 apresenta os laços B-H obtidos para uma indução de pico de 1,2 T para valores de frequência nas amostras finas. Diferente dos outros casos com menor indução magnética de pico, os valores de pico da indução magnética e do campo magnético ocorreram no mesmo instante para todas as frequências.

Figura 6.10 – Laços B-H experimentais em 1,2 T para diversos valores de frequência nas amostras finas.



Fonte: Elaborado pelo autor.

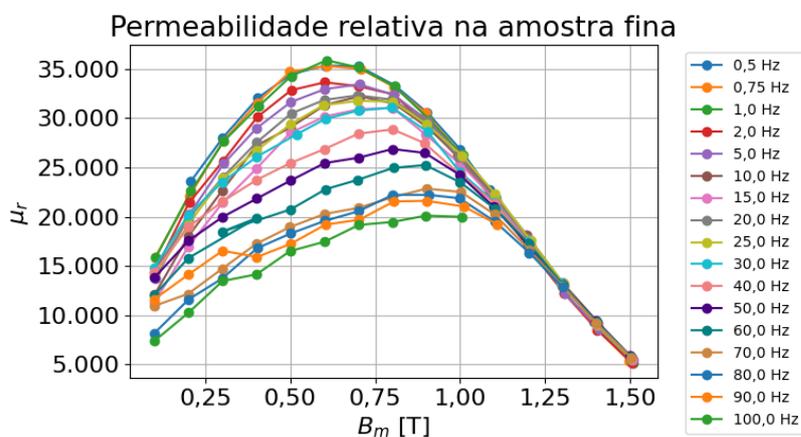
A permeabilidade relativa da amostra pode ser estimada a partir dos valores de indução magnética de pico e campo magnético de pico, conforme (6.1). Essa equação é válida quando B_m e H_m ocorrerem no mesmo instante, quando o ponto em que

a indução magnética atinge o seu máximo coincide com o ponto em que o campo magnético possui o seu valor máximo.

$$\mu_r = \frac{B_m}{\mu_0 H_m} \quad (6.1)$$

A figura 6.11 apresenta curvas para a permeabilidade relativa da amostra em função da frequência de operação, variando a indução de pico. Nota-se que as curvas estimadas por (6.1) variam conforme a frequência e o valor da indução de pico. Como esperado, os maiores valores de permeabilidade relativa ocorrem na baixa frequência. Para frequências elevadas, há maiores perdas dinâmicas, exigindo um campo magnético maior para o mesmo valor de indução, diminuindo o valor da permeabilidade relativa. Quando ocorre a não coincidência dos valores de pico para ambas as grandezas, valores estimados de permeabilidade relativa obtidos são menores ou inconsistentes. A partir de $B_m = 1,2$ T, as diferenças entre as curvas visualmente diminuem em relação às diferenças entre as curvas para valores menores de B_m . Este efeito ocorre porque o material começa a saturar magneticamente.

Figura 6.11 – Permeabilidade relativa estimada para as amostras finas a partir dos dados de ensaios.



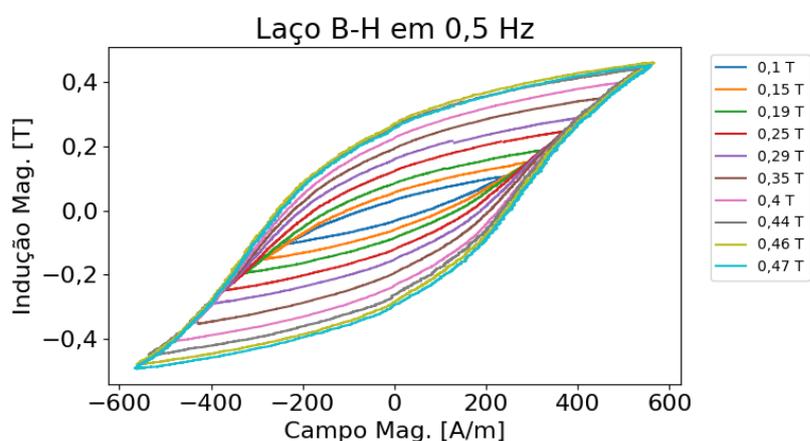
Fonte: Elaborado pelo autor.

6.2.2 Amostras espessas

Este comportamento da estimação da permeabilidade magnética é observado com mais evidência no conjunto de amostras espessas. Neste caso, como a amostra é espessa, ela tem maiores perdas dinâmicas relativamente à amostra fina. A figura 6.12 apresenta laços B-H obtidos para o conjunto de amostras espessas na frequência de operação de 0,5 Hz. Devido às limitações do transformador de saída da bancada

utilizada para os ensaios, não foi possível obter pontos para induções superiores à $B_m = 0,47$ T. Pelo laço de $B_m = 0,47$ T, estima-se um $H_c \approx 300$ A/m, consideravelmente maior do que o valor encontrado para a amostra fina, (com H_c entre 5 A/m e 10 A/m). Tipicamente, o valor de H_c está entre 6 A/m e 10 A/m para materiais de grãos orientados e entre 25 A/m e 80 A/m para materiais de grãos não orientados (CULLITY; GRAHAM, 2011). Assim, pode-se classificar estas amostras de material como aço não concebido para fins de aplicações elétricas.

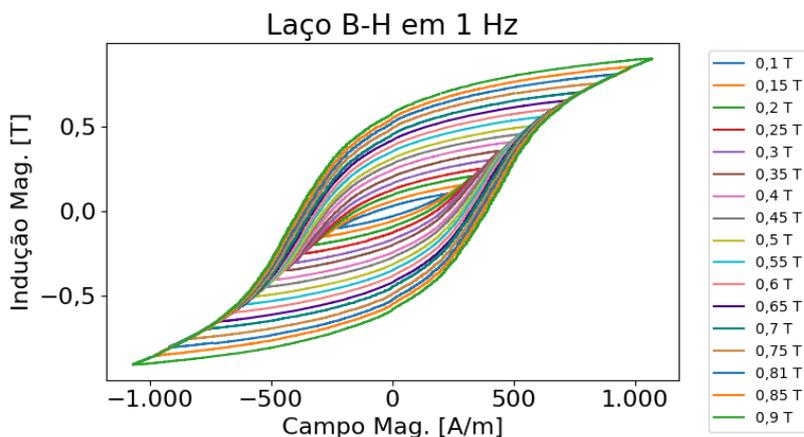
Figura 6.12 – Laços B-H experimentais em 0,5 Hz para diversos valores de B_m nas amostras espessas.



Fonte: Elaborado pelo autor.

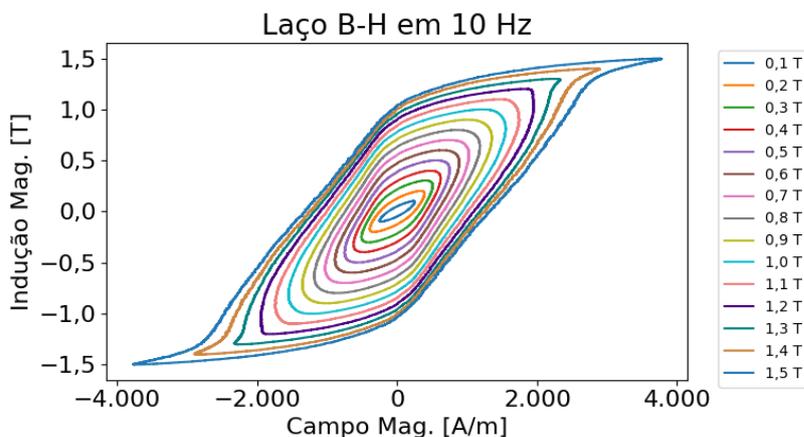
A figura 6.13 apresenta laços B-H obtidos em 1 Hz para vários valores de indução de pico (foi possível operar a bancada até $B_m = 0,9$ T nessa frequência), e a figura 6.14 apresenta os laços obtidos em 10 Hz. É possível notar que as perdas dinâmicas são mais acentuadas do que para a frequência de 1 Hz. Para certas induções de pico, os laços são formados com pontos de máximo de B_m e H_m ocorrendo em pontos não coincidentes.

Figura 6.13 – Laços B-H experimentais em 1 Hz para diversos valores de B_m nas amostras espessas.



Fonte: Elaborado pelo autor.

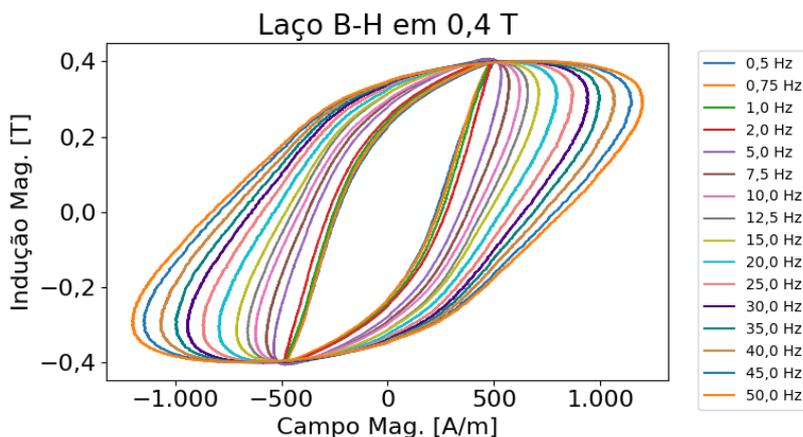
Figura 6.14 – Laços B-H experimentais em 10 Hz para diversos valores de B_m nas amostras espessas.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A figura 6.15 apresenta laços B-H obtidos em uma indução fixa de $B_m = 0,4\text{ T}$, mas para várias frequências. Nota-se o aparecimento crescente das perdas dinâmicas com um aumento da frequência de operação, as quais já são significativas a partir de 5 Hz.

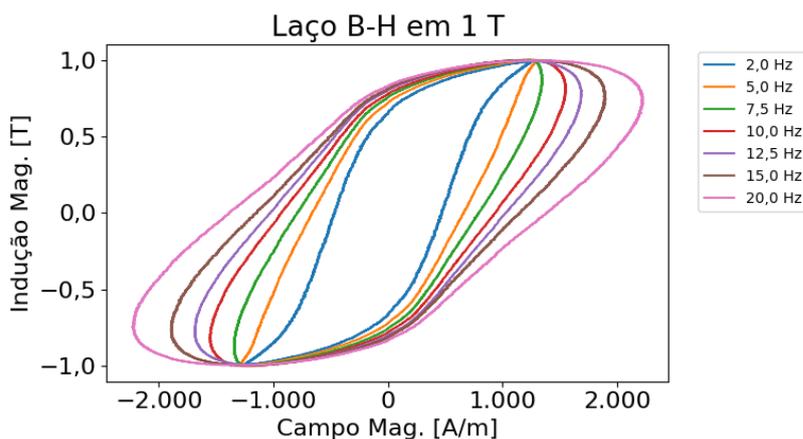
Figura 6.15 – Laços B-H experimentais em 0,4 T para diversos valores de frequência nas amostras espessas.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A figura 6.16 apresenta laços B-H obtidos para o valor de indução de pico fixo em 1 T, para as frequências nas quais foi possível realizar o ensaio para este valor de indução. Percebe-se novamente a parcela significativa das perdas dinâmicas já a partir de 5 Hz.

Figura 6.16 – Laços B-H experimentais em 1 T para diversos valores de frequência nas amostras espessas.

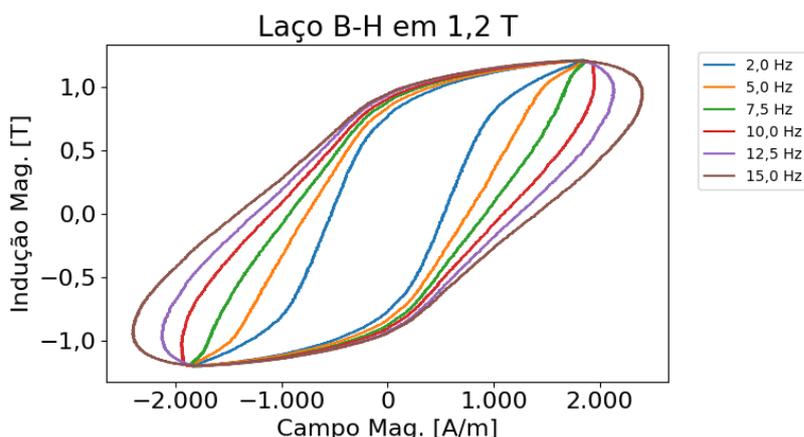


Fonte: Elaborado pelo autor.

A figura 6.17 apresenta laços B-H obtidos para uma indução de pico de 1,2 T para as frequências em que foi possível alcançar esta indução de pico. Nota-se a ocorrência significativa de uma parcela de perdas dinâmicas já em 5 Hz. Até 7,5 Hz, os

valores de máximo da indução e do campo ocorrem no mesmo ponto, permitindo uma estimativa da permeabilidade relativa empregando (6.1) de maneira condizente.

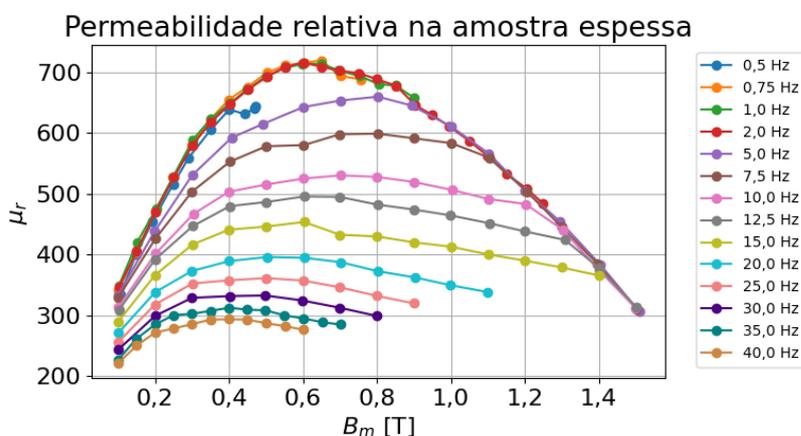
Figura 6.17 – Laços B-H experimentais em 1,2 T para diversos valores de frequência nas amostras espessas.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Calculando-se a permeabilidade relativa com (6.1) a partir dos valores de pico da indução magnética e do campo magnético para as amostras espessas, obteve-se as curvas apresentadas na figura 6.18. Nota-se um comportamento similar ao observado na curva de permeabilidade das amostras finas. O valor da permeabilidade da amostra espessa é cerca de 50 vezes menor do que a permeabilidade da amostra fina.

Figura 6.18 – Gráfico da permeabilidade magnética relativa obtida para a amostra espessa.

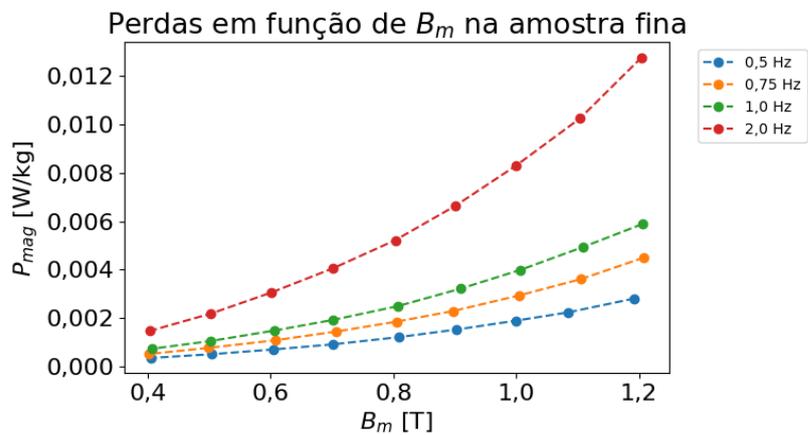


Fonte: Elaborado pelo autor.

6.3 SEPARAÇÃO DE PERDAS

Com as formas de onda de indução magnética e de campo magnético, calculou-se as perdas por unidade de massa nas amostras para cada ponto de operação. A figura 6.19 apresenta a evolução das perdas em potência para as frequências de 0,5 Hz, 0,75 Hz, 1 Hz e 2 Hz, em função da indução magnética de pico B_m . Nota-se que as perdas dadas em potência aumentam de acordo com as frequências de operação mesmo sendo relativamente baixas, na faixa de frequência onde as perdas dinâmicas são consideradas baixas.

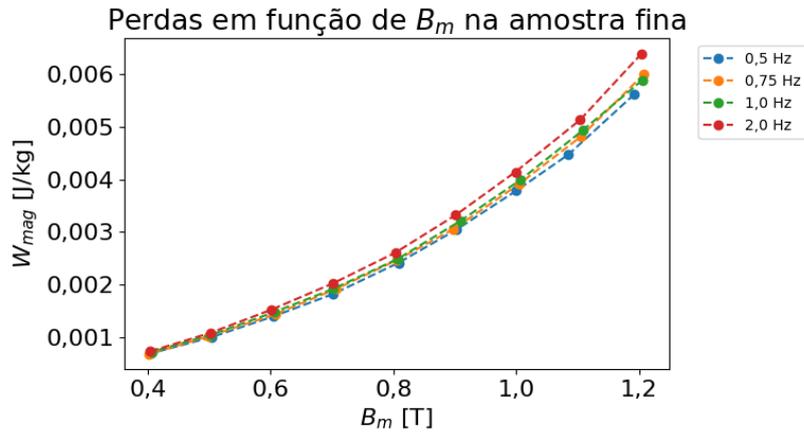
Figura 6.19 – Gráfico das perdas P_{mag} por B_m para frequências baixas de operação em ensaios na amostra fina.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Para realizar a separação dos tipos de perdas, transforma-se as perdas em potência para perdas em energia (dadas em J/kg), cujas curvas em função da indução magnética são apresentadas na figura 6.20. Nota-se que as curvas das perdas obtidas em baixas frequências são próximas, já que as perdas dinâmicas nas amostras finas têm pouca participação no processo de magnetização em operações em baixas frequências. Dessa maneira, pode-se considerar que as perdas obtidas nessas frequências representam quase que somente as perdas por histerese.

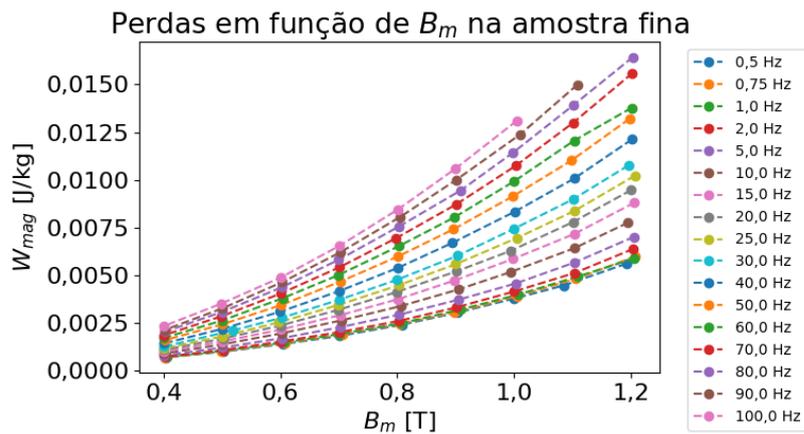
Figura 6.20 – Gráfico das perdas W_{mag} por B_m para frequências baixas de operação em ensaios na amostra fina.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A figura 6.21 apresenta as curvas das perdas energéticas para todas as frequências ensaiadas na amostra fina. Nota-se que as perdas dinâmicas são mais significativas para as frequências elevadas.

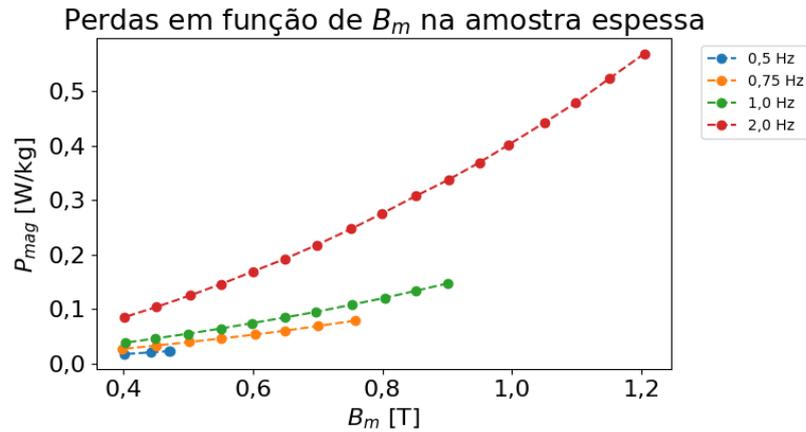
Figura 6.21 – Gráfico das perdas W_{mag} por B_m para todas as frequências de operação em ensaios na amostra fina.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A figura 6.22 apresenta as curvas das perdas em potência obtidas para as frequências 0,5 Hz, 0,75 Hz, 1 Hz e 2 Hz nas amostras espessas. Como essas perdas estão em unidade de potência, tem-se que seu valor aumenta com a frequência, pois leva em conta o número de ciclos por segundo, o que dificulta processos de separação de perdas.

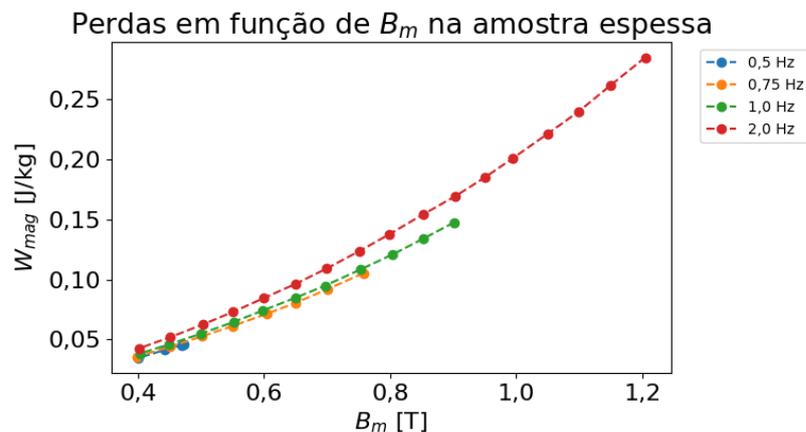
Figura 6.22 – Gráfico das perdas P_{mag} por B_m para frequências baixas de operação em ensaios na amostra espessa.



Fonte: Elaborado pelo autor.

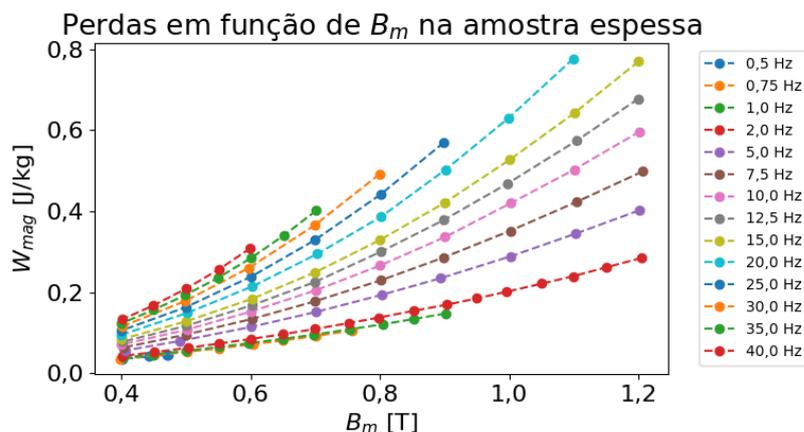
Transformando as perdas em potência para perdas em energia (em J/kg por ciclo), obtêm-se as curvas apresentadas na figura 6.23 em função da indução de pico. Nessa figura, nota-se que os valores das perdas energéticas em função da indução são muito próximos para as frequências até 1 Hz. Mas para estas amostras espessas, as perdas em 2 Hz já apresentam perdas dinâmicas consideráveis. A figura 6.24 apresenta as curvas das perdas para todas as frequências de ensaio na amostra espessa. Nota-se também que as perdas totais em frequências mais elevadas apresentam maiores perdas dinâmicas.

Figura 6.23 – Gráfico das perdas W_{mag} por B_m para frequências baixas de operação em ensaios na amostra espessa.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 6.24 – Gráfico das perdas W_{mag} por B_m para todas as frequências ensaiadas na amostra espessa.



Fonte: Elaborado pelo autor.

6.3.1 Separação de perdas estáticas

Realizou-se então o processo de separação dos tipos de perdas para se obter os valores dos parâmetros do modelo de Steinmetz para a perda por histerese. Para a obtenção dos valores dos parâmetros da perda por histerese, considerou-se que as perdas dinâmicas em 0,5 Hz são desprezíveis nas duas amostras ensaiadas. Isto pode ser levado em conta pela observação dos laços B-H (figura 6.8 até a figura 6.10, para amostras finas; e figura 6.15 até a figura 6.17, para amostras espessas) e as curvas de perdas analisadas e discutidas acima. Os valores dos parâmetros obtidos para a perda por histerese foram $k_h = 0,003\ 830$ e $\alpha_h = 2,065$ para a amostra fina. O coeficiente de determinação do ajuste de curvas foi $r^2 = 0,9981$. A faixa da indução de pico utilizada para a separação foi para B_m entre 0,38 T e 1,22 T. Para a amostra espessa, os valores dos parâmetros resultaram em $k_h = 0,1601$ e $\alpha_h = 1,668$. Essa separação também foi feita em 0,5 Hz e com a faixa de indução entre 0,4 T e 0,47 T. O coeficiente de determinação neste caso foi de $r^2 = 0,9983$. A tabela 6.3 agrupa os valores dos parâmetros das perdas por histerese obtidos para as duas amostras.

Tabela 6.3 – Parâmetros das perdas por histerese obtidos.

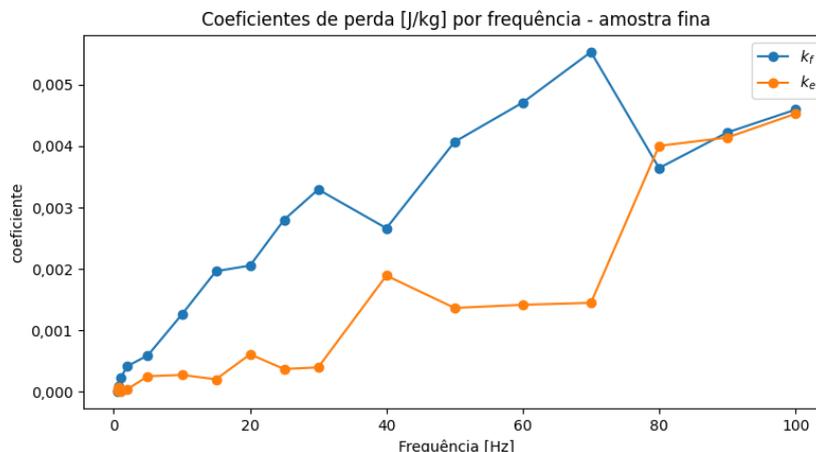
Amostra	Lâmina fina	Lâmina espessa
k_h	0,003 830	0,1601
α_h	2,065	1,668
r^2	0,9981	0,9983

Fonte: Elaborado pelo autor.

6.3.2 Separação de perdas dinâmicas

Com os valores dos parâmetros do modelo das perdas por histerese, pode-se estimar os valores das perdas dinâmicas subtraindo as perdas histeréticas das perdas totais obtidas em uma frequência onde ocorrem significativamente perdas dinâmicas. A partir de pontos de perdas dinâmicas estimadas, realiza-se mais um processo de ajuste de curvas para obter os valores dos coeficientes k_f e k_e das perdas por correntes induzidas e excedentes, respectivamente. Esse processo foi realizado repetidamente para cada frequência dos ensaios realizados. A figura 6.25 apresenta a evolução dos valores dos coeficientes k_f e k_e em função da frequência, obtidos no processo de separação de perdas para a amostra fina. O processo de ajuste de curvas para obtenção dos valores dos coeficientes utilizou todos os pontos de perdas em função da indução de pico. Nota-se que os valores dos coeficientes variam consideravelmente conforme a frequência. Estes resultados não representam o comportamento do material. Estas variações são devidas à dificuldade inerente ao processo de separação de perdas utilizado.

Figura 6.25 – Curvas da evolução dos coeficientes de perdas dinâmicas em função da frequência do ensaio para a amostra fina.

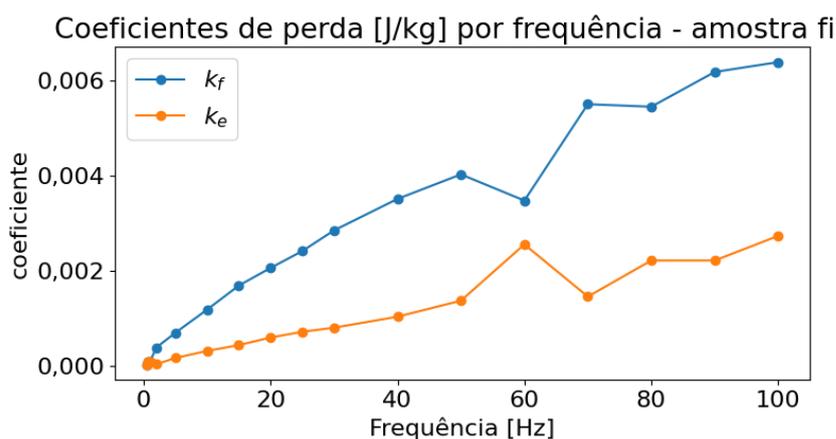


Fonte: Elaborado pelo autor.

A figura 6.26 apresenta a evolução dos valores dos coeficientes k_f e k_e obtidos para a amostra fina em função da frequência, mas agora se reduzindo a faixa utilizada da indução magnética de pico entre $B_m = 0,38$ T e $B_m = 1,22$ T. Note que agora as curvas seguem um padrão com menos variações e aumentam com a frequência conforme esperado. Este resultado reforça a necessidade da utilização de uma faixa de valores de B_m em que os modelos representem adequadamente os comportamentos. Nota-se que pode não haver uma boa representação para valores baixos ou altos de B_m (LANDGRAF *et al.*, 1999). Há ainda um ponto que foge da tendência. Esse

ponto se refere ao ensaio na frequência de 60 Hz (frequência da rede elétrica no Brasil). Pode estar ocorrendo uma interferência eletromagnética no processo de medição da bancada.

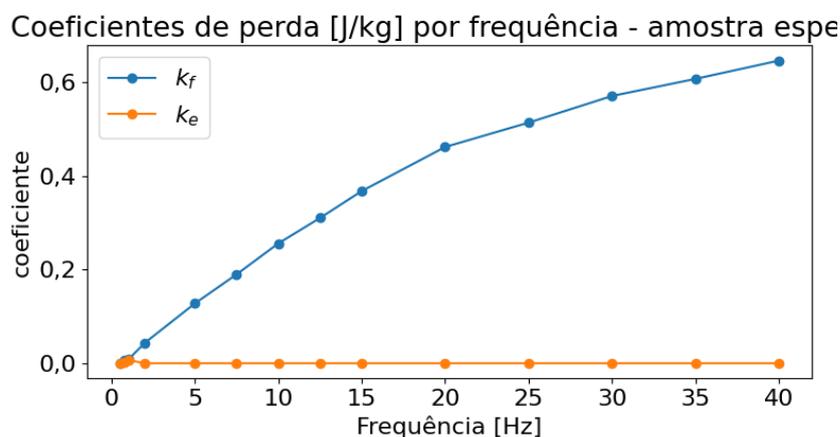
Figura 6.26 – Curvas da evolução dos coeficientes de perdas dinâmicas em função da frequência do ensaio para a amostra fina com faixa reduzida de B_m .



Fonte: Elaborado pelo autor.

O mesmo processo de separação de perdas foi realizado para a amostra espessa, obtendo-se a evolução dos valores dos coeficientes apresentados na figura 6.27. Nota-se novamente que o coeficiente das perdas de Foucault aumenta com a frequência, mas que o seu comportamento não é linear após cerca de 15 Hz. O valor do coeficiente das perdas excedentes é relativamente pequeno, aproximando-se a zero. Isto não significa que essa amostra não tenha perdas excedentes. Este comportamento pode indicar que o seu valor é muito inferior às demais perdas e, portanto, seu processo de estimação de seus valores é prejudicado.

Figura 6.27 – Gráfico dos coeficientes de perdas dinâmicas em função da frequência do ensaio para a amostra espessa.



Fonte: Elaborado pelo autor.

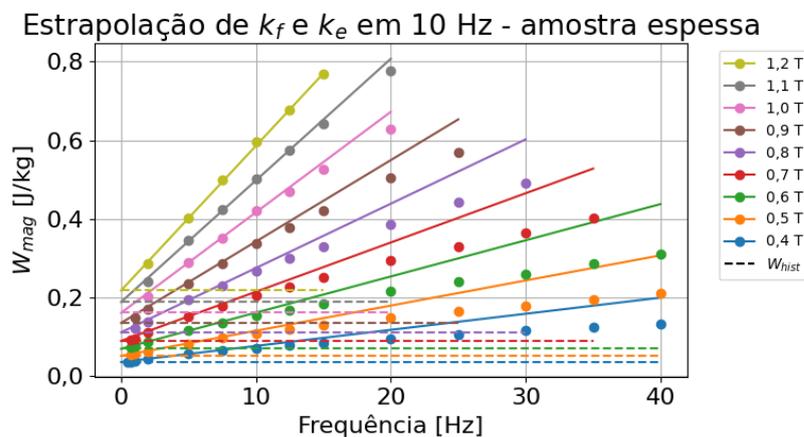
Apesar do modelo empregado prever que as perdas por correntes induzidas são proporcionais à frequência (em unidades de energia), ele não considera o efeito pelicular. Este fenômeno reduz a área eficaz, alterando a distribuição do fluxo magnético na seção da amostra. Isto tende a reduzir as correntes induzidas e, portanto, as suas perdas. O efeito pelicular é tanto mais notável quanto o material tiver maiores condutividade e permeabilidade, e operem em frequências elevadas. Para um dado material operando em uma dada frequência, quanto maiores as suas dimensões, mais notável também será o efeito pelicular. Em lâminas comumente aplicadas em máquinas elétricas e transformadores, esse efeito geralmente é desconsiderado, visto que as lâminas são geralmente consideradas finas, tornando este efeito desprezível nas frequências normais de operação (para materiais de espessura até 1 mm, o quadro de Epstein pode caracterizar os materiais até cerca de 400 Hz conforme as normas (ABNT, 1977)). Entretanto, a amostra em que se realizou os ensaios tem espessura consideravelmente maior (> 6 mm). Devido ao seu material, essa amostra possui permeabilidade e condutividade relativamente altas (por mais que se deseje diminuir a condutividade dos aços empregados em máquinas elétricas, o valor da sua condutividade elétrica ainda é considerável). Para uma determinada amostra, é esperado que, a partir de uma certa frequência, o efeito pelicular seja significativo. Esta frequência geralmente é bem maior do que a frequência de operação das amostras. Entretanto, para a amostra espessa em questão, o efeito pelicular já ocorre em frequências menores, como será visto.

Para verificar a eficácia do encontro dos valores dos parâmetros no processo de separação de perdas, comparou-se os valores das perdas totais medidas com os valores das perdas totais estimadas pelo processo de separação realizado na frequência

base de 10 Hz (vide evolução dos coeficientes das perdas dinâmicas na figura 6.27, em que k_f apresenta comportamento linear nesta frequência). Para se estimar a evolução das perdas totais, empregou-se (6.2), em que k_{f10} e k_{e10} são os valores dos coeficientes definidos para a frequência base $f_b = 10$ Hz. Essa comparação é apresentada na figura 6.28 que apresenta os pontos de perdas totais W_{mag} obtidas em função da frequência do ensaio, para cada indução de pico B_m . Os valores dos parâmetros das perdas por histerese foram encontradas em 0,5 Hz. Os valores das perdas por histerese para cada valor de B_m são apresentados por retas tracejadas. As perdas totais (histerese + dinâmicas) são representadas por retas sólidas. As perdas excedentes obtidas pelo seu modelo são desprezíveis frente as demais, e estão embutidas nas curvas das perdas totais.

$$W_{est}(f) = k_h B_m^{\alpha_h} + k_{f10} B^2 \left(\frac{f}{f_b} \right) + k_{e10} B^{1,5} \sqrt{\frac{f}{f_b}} \quad (6.2)$$

Figura 6.28 – Comparação das perdas calculadas com os coeficientes de perdas obtidos em 10 Hz com as perdas totais medidas para a amostra espessa.

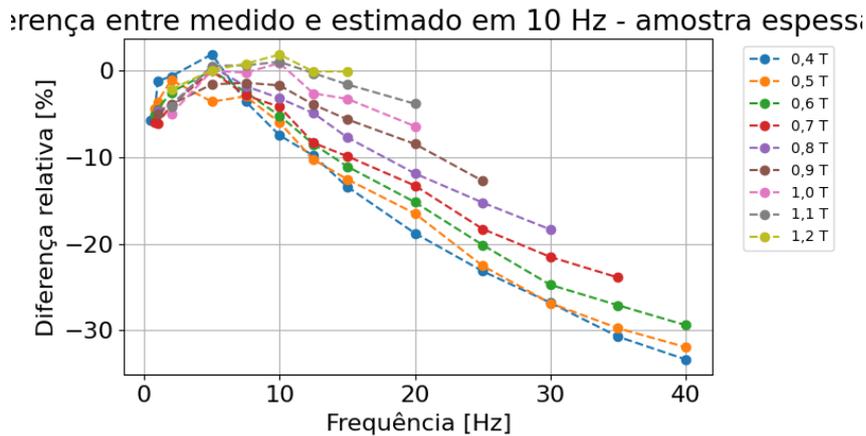


Fonte: Elaborado pelo autor.

Como pode-se observar na figura 6.28 e em detalhe na figura 6.29, a diferença absoluta entre as perdas estimadas e as perdas medidas aumenta com a frequência e diminui com o aumento do valor da indução de pico. Conforme a curva da figura 6.18, a permeabilidade do material alcança o seu valor máximo próximo de $B_m = 0,6$ T, e diminui com o aumento da indução de pico. Relacionando isto com o fato de que o efeito pelicular é mais intenso conforme a permeabilidade do material for maior, o comportamento apresentado pela diferença entre os valores estimados e os medidos condiz com efeitos peliculares que podem estar ocorrendo na amostra. Para um maior

valor de indução magnética, a permeabilidade do material é menor (vide figura 6.18). Assim o efeito pelicular também tem efeito menor, e então ocorrem diferenças menores como apresentam as curvas da figura 6.28 e figura 6.29.

Figura 6.29 – Diferença entre as perdas calculadas com os coeficientes de perdas obtidos em 10 Hz e o valor medido.



Fonte: Elaborado pelo autor.

6.3.3 Determinação de valores de condutividade elétrica pela separação de perdas

A partir da equação clássica das perdas por correntes induzidas para o regime de fluxo sinusoidal (2.28), juntamente com a equação de separação de perdas utilizando a constante k_f (5.10), igualadas em (6.3), isola-se k_f obtendo-se (6.4).

$$W_f = \frac{\sigma_c a^2 f \pi^2 B_m^2}{6m_v} = k_f B_m^2 \quad (6.3)$$

$$k_f = \frac{\sigma_c a^2 f \pi^2}{6m_v} \quad (6.4)$$

Isolando σ_c , resulta-se em (6.5), que relaciona a condutividade do material com a constante das perdas de Foucault k_f obtida de resultados de ensaios.

$$\sigma_c = \frac{6k_f m_v}{f a^2 \pi^2} \quad (6.5)$$

Pode-se também aplicar o mesmo procedimento alterando o modelo clássico para as perdas por correntes induzidas pelo modelo proposto, empregando o fator γ . Assim o valor da condutividade σ_γ estimada para lâminas espessas é dada por (6.6).

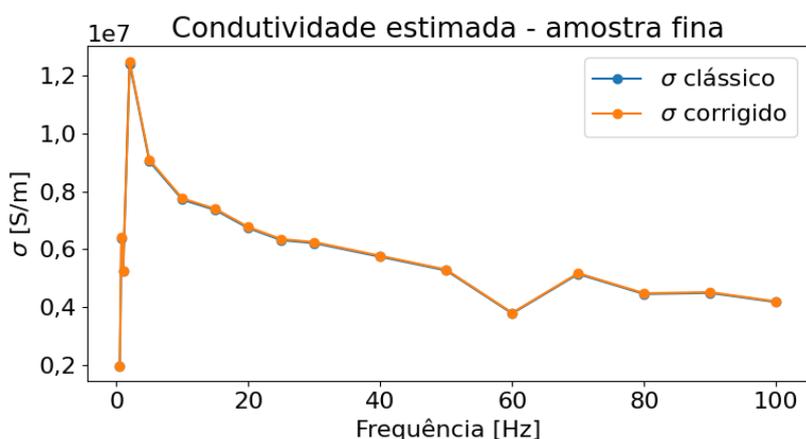
$$\sigma_\gamma = \frac{6k_f m_v}{\gamma f a^2 \pi^2} \tag{6.6}$$

Note que a diferença no cálculo dos valores da condutividade pelos dois modelos é dada apenas pelo fator γ , conforme (6.7).

$$\sigma_\gamma = \frac{\sigma_c}{\gamma} \tag{6.7}$$

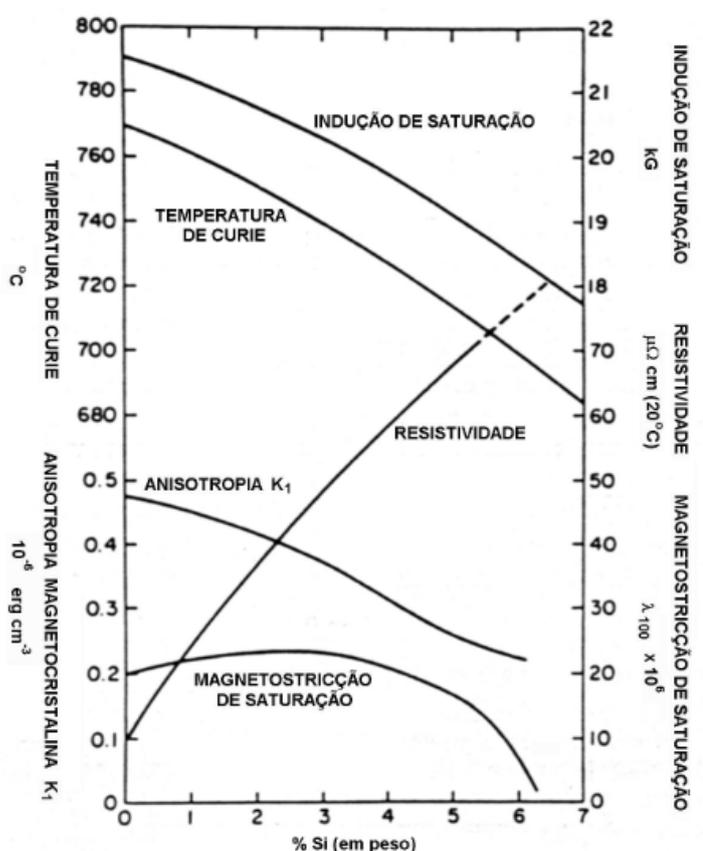
Calculando-se os valores da condutividade para cada valor de k_f em função da frequência de ensaio da amostra fina ($\gamma \approx 1$), obtém-se as curvas praticamente coincidentes da figura 6.30. Observa-se que há uma variação significativa nos valores da condutividade do material na faixa das frequências baixas (< 10 Hz). Isto pode ser devido à baixa intensidade das perdas por correntes induzidas em comparação com as perdas por histerese nessas frequências. Um pequeno desvio na estimação das perdas por histerese pode resultar em um grande desvio na obtenção dos valores das perdas por correntes induzidas e portanto da condutividade. Observa-se também um comportamento fora da tendência do valor da condutividade em 60 Hz devido ao observado na determinação do valor de k_f nessa mesma frequência. Considerando a frequência base de 50 Hz, o valor da condutividade determinado pelo procedimento para este material é aproximadamente $6 \cdot 10^6$ S/m. A figura 6.31 contém a curva da resistividade de ligas de ferro-silício em função da proporção de silício. O valor da resistividade é de cerca de $10 \mu\Omega\text{cm}$ para 0% de silício, e $65 \mu\Omega\text{cm}$ para 5%. Em termos de condutividade, esta faixa corresponde a cerca de $1,5 \cdot 10^6$ S/m a $10 \cdot 10^6$ S/m (LITTMANN, 1971). Não se conhece a porcentagem de silício para o material aqui ensaiado.

Figura 6.30 – Gráfico da condutividade estimada para os dois modelos de perdas de Foucault na amostra fina.



Fonte: Elaborado pelo autor.

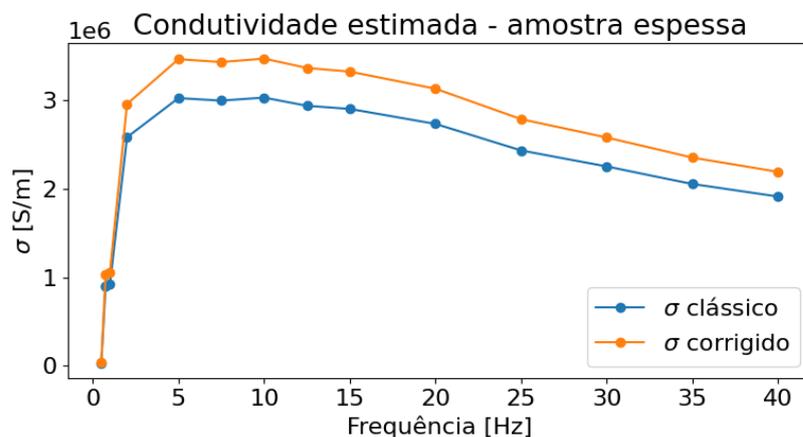
Figura 6.31 – Variação de propriedades de ligas de ferro-silício em função da proporção de silício.



Fonte: Adaptado de (LITTMANN, 1971).

A figura 6.32 apresenta as curvas dos valores da condutividade elétrica em função da frequência de ensaios para a amostra espessa. Apesar de serem espessas, nota-se novamente a dificuldade para a estimação dos valores em baixas frequências. Para esta espessura de amostra, entretanto, os valores da condutividade se estabilizam na faixa de frequências entre 5 Hz e 15 Hz. Para frequências superiores, os valores da condutividade estimada decrescem, conforme esperado devido aos efeitos peliculares. Para esta amostra espessa, a diferença entre os valores determinados utilizando os modelos clássicos e proposto para as perdas por correntes induzidas é de cerca de 13%. Para o modelo proposto e utilizando o k_f de 10 Hz, o valor da condutividade é de cerca de $3,36 \cdot 10^6$ S/m.

Figura 6.32 – Gráfico da condutividade estimada para os dois modelos de perdas de Foucault na amostra espessa.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Procurou-se realizar estimativas dos valores da condutividade elétrica dos materiais das amostras através da medição de resistência elétrica. Porém, com os equipamentos disponíveis, não obteve-se o sucesso esperado. Os procedimentos são apresentados no apêndice E.

6.4 CONSIDERAÇÕES FINAIS DO CAPÍTULO

Neste capítulo, apresentou-se os ensaios e seus resultados para dois conjuntos de amostras de materiais ferromagnéticos, uma fina e outra espessa. Analisou-se seus laços B-H, observando-se os efeitos devido às perdas dinâmicas conforme variou-se a frequência e a indução de pico no ensaio. Realizou-se processos de separação dos tipos de perdas para essas amostras, onde os resultados foram empregados para os estudos dos modelos de perdas por correntes induzidas. Observou-se na amostra espessa que o efeito pelicular foi significativo nas frequências estudadas. Obteve-se valores de condutividade elétrica a partir dos coeficientes de ambos os modelos de perdas de Foucault. No capítulo seguinte, apresenta-se as considerações finais deste trabalho, juntamente com sugestões para trabalhos futuros.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho propôs um método de cálculo de campos baseado nas equações rotacionais das leis de Maxwell. O método foi obtido a partir da aplicação das formas integrais das leis de Faraday e Ampère em uma rede (*grid*) de discretização. O modelo proposto é composto por um conjunto de equações lineares, que pode ser resolvido por métodos numéricos aplicados a uma matriz esparsa. O modelo proposto foi explorado, apresentando resultados condizentes. O método proposto pode ser utilizado para realizar simulações numéricas e obter comportamentos de grandezas eletromagnéticas, mesmo quando a solução analítica é difícil de ser obtida. Este método pode ser aplicado para qualquer material condutor.

O presente trabalho está inserido em estudos de materiais ferromagnéticos. O modelo de simulação numérica proposto foi empregado para desenvolver um modelo das perdas por correntes induzidas em lâminas de seção retangular espessa com melhor precisão do que o modelo clássico de perdas por correntes de Foucault. Dessa maneira, atendeu-se o objetivo principal deste trabalho. Ademais, o modelo proposto para as perdas por correntes induzidas ficou idêntico a um modelo proposto na literatura, mas obtido com outra metodologia/abordagem.

Mesmo não sendo o enfoque deste trabalho, ensaios para a obtenção de dados e resultados experimentais no que se refere às perdas por correntes induzidas foram realizados. Dois conjuntos de amostras de material ferromagnético foram estudados: amostras de lâminas finas e espessas. A análise de curvas obtidas a partir dos ensaios e de modelos, juntamente com a aplicação de processos de separação dos tipos de perdas magnéticas, foram também realizadas para aprofundar e validar as abordagens deste trabalho, apresentando também as limitações encontradas. Assim, tratou-se de algumas dificuldades e imprecisões que aparecem nos procedimentos experimentais e de modelagem. Dentre elas, observou-se a influência do efeito pelicular nos estudos do conjunto de amostras espessas.

Um dos resultados do trabalho se constitui nos estudos da determinação de valores de condutividade elétrica de materiais ferromagnéticos. Apresentou-se resultados de obtenção de valores da condutividade obtidos aplicando a metodologia abordada neste trabalho.

As contribuições deste trabalho abrem novas perspectivas para investigações aprofundadas ou aplicações pontuais, tais como aprimoramento da obtenção de valores de condutividade elétrica em materiais ferromagnéticos. Sob o aspecto teórico, o procedimento/ algoritmo de cálculo de campos pode ser aplicado em outros estudos. Em trabalhos futuros, melhorias podem ser agregadas, tais como a inclusão no modelo de campos de reação a fim de capacitar a metodologia para simular fenômenos tais como o efeito pelicular e a distribuição de fluxo magnético não uniforme em

materiais ferromagnéticos. O modelo de simulação também pode ser aplicado em investigações para obter correntes induzidas entre lâminas, seja no seu isolante ou em curtos-circuitos de faltas que podem ocorrer no núcleo.

Como sugestões adicionais, pode-se fazer alterações no modelo para se realizar simulações numéricas de determinação do campo magnético em amostras quando se impõe tanto corrente ou campo, quanto tensão ou fluxo. Modificações podem ser realizadas para adaptar a modelagem para determinadas aplicações. Ainda, pode-se buscar melhorar sua eficiência de cálculo, seja em uma implementação em uma linguagem de programação compilada *ahead of time*, utilizando métodos numéricos mais adequados ao processo matemático envolvido na construção das matrizes ou em sua resolução. Metodologias de geração de malhas para criação automática da rede é também uma sugestão de continuidade deste trabalho.

Este trabalho evidencia que a separação de perdas é um processo que exige cautela, pois outros fenômenos podem estar presentes e podem afetar a determinação dos valores dos parâmetros de perdas, tais como o efeito pelicular observado.

REFERÊNCIAS

ABNT, NBR. 5161, “Produtos laminados planos de aço para fins elétricos-Verificação de propriedades,” **ABNT-Assoc. Bras. Normas Técnicas**, p. 35, 1977.

ADLER, E.; PFEIFFER, H. The influence of grain size and impurities on the magnetic properties of the soft magnetic alloy 47.5% NiFe. **IEEE Transactions on Magnetics**, v. 10, n. 2, p. 172–174, 1974.

BASTOS, J. P. A.; HOFFMANN, K.; LEITE, J. V.; SADOWSKI, N. A New and Robust Hysteresis Modeling Based on Simple Equations. **IEEE Transactions on Magnetics**, v. 54, n. 3, p. 1–4, 2018.

BASTOS, J.P.A. **Eletromagnetismo e calculo de campos**. [S.l.]: Ed. da UFSC, 1996.

BASTOS, João Pedro A; SADOWSKI, Nelson. **Electromagnetic modeling by finite element methods**. [S.l.]: CRC press, 2003.

BATISTELA, N. J. **Caracterização e Modelagem Eletromagnética de Lâminas de Aço ao Silício**. 2001. Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Santa Catarina.

BERTOTTI, G. **Hysteresis in Magnetism: For Physicists, Materials Scientists, and Engineers**. [S.l.]: Gulf Professional Publishing, 1998.

BITTER, Rick; MOHIUDDIN, Taqi; NAWROCKI, Matt. **LabVIEW: Advanced programming techniques**. [S.l.]: Crc Press, 2006.

CULLITY, B.D.; GRAHAM, C.D. **Introduction to Magnetic Materials**. [S.l.]: Wiley, 2011. ISBN 9781118211496.

DAVIS, Timothy A.; GILBERT, John R.; LARIMORE, Stefan I.; NG, Esmond G. Algorithm 836: COLAMD, a Column Approximate Minimum Degree Ordering Algorithm. **ACM Trans. Math. Softw.**, Association for Computing Machinery, New York, NY, USA, v. 30, n. 3, p. 377–380, set. 2004. ISSN 0098-3500.

DAY, P. **The Philosopher’s Tree: Michael Faraday’s life and work in his own words**. [S.l.]: Taylor & Francis, 1999. ISBN 9780750305716.

DE LA BARRIÈRE, Olivier; LOBUE, Martino; MAZALEYRAT, Frédéric. Semianalytical and Analytical Formulas for the Classical Loss in Granular Materials With Rectangular and Elliptical Grain Shapes. **IEEE transactions on magnetics**, vol. 50, no. 10, 2014.

GÜRBÜZ, I. T.; RASILO, P.; MARTIN, F.; OSEMWINYEN, O.; BELAHCEN, A. 2-D Analytical Model for Computing Eddy-Current Loss in Nonlinear Thick Steel Laminations. **IEEE transactions on magnetics**, vol. 58, no. 9, 2022.

HARRIS, Charles R. *et al.* Array programming with NumPy. **Nature**, Springer Science e Business Media LLC, v. 585, n. 7825, p. 357–362, set. 2020.

HECHT, F. New development in FreeFem++. **J. Numer. Math.**, v. 20, n. 3-4, p. 251–265, 2012. ISSN 1570-2820.

HUNTER, J. D. Matplotlib: A 2D graphics environment. **Computing in Science & Engineering**, IEEE COMPUTER SOC, v. 9, n. 3, p. 90–95, 2007.

IEC, 60404-2. Magnetic Materials—Part 2: Methods of Measurement of the Magnetic Properties of Electrical Steel Strip and Sheet by Means of an Epstein Frame, Consolidated Edition, 2008.

JILES, David C; ATHERTON, David L. Theory of ferromagnetic hysteresis. **Journal of magnetism and magnetic materials**, Elsevier, v. 61, n. 1-2, p. 48–60, 1986.

LANDGRAF, Fernando José Gomes; TEIXEIRA, JC; EMURA, M; DE CAMPOS, Marcos Flavio; MURANAKA, CS. Separating components of the hysteresis loss of non-oriented electrical steels. *In*: TRANS TECH PUBLICATIONS LTD. MATERIALS Science Forum. [S.l.: s.n.], 1999. v. 302, p. 440–445.

LITTMANN, M. Iron and silicon-iron alloys. **IEEE Transactions on Magnetism**, v. 7, n. 1, p. 48–60, 1971.

PREISACH, Ferenc. Über die magnetische Nachwirkung. **Zeitschrift für physik**, Springer, v. 94, n. 5-6, p. 277–302, 1935.

SCHLEGEL, Jean Paul. **Desenvolvimento de um sistema de avaliação de estatores sob campos rotacionais**. [S.l.: s.n.], 2012.

STEENTJES, S.; LESSMANN, M.; HAMEYER, K. Advanced iron-loss calculation as a basis for efficiency improvement of electrical machines in automotive application. **Electrical Systems for Aircraft, Railway and Shio Propulsion, IEEE**, 2012.

STEINMETZ, Chas P. On the law of hysteresis. **Proceedings of the IEEE**, IEEE, v. 72, n. 2, p. 197–221, 1984.

VAN ROSSUM, Guido; DRAKE, Fred L. **Python 3 Reference Manual**. Scotts Valley, CA: CreateSpace, 2009. ISBN 1441412697.

VIRTANEN, Pauli *et al.* SciPy 1.0: Fundamental Algorithms for Scientific Computing in Python. **Nature Methods**, v. 17, p. 261–272, 2020.

XUE, S.; FENG, J.; GUO, S.; PENG, J.; CHU, W. Q.; ZHU, Z. Q. A New Iron Loss Model for Temperature Dependencies of Hysteresis and Eddy Current Losses in Electrical Machines. **IEEE Transactions on Magnetics**, vol. 54, no .1, 2017.

YAN, Di; WU, Tao; LIU, Ying; GAO, Yang. An efficient sparse-dense matrix multiplication on a multicore system. *In: 2017 IEEE 17th International Conference on Communication Technology (ICCT)*. [S.l.: s.n.], 2017. P. 1880–1883.

APÊNDICE A – ALGUMAS PROVAS MATEMÁTICAS PARA COMPLEMENTAR O TRABALHO

Neste apêndice apresentam-se algumas provas matemáticas para complementar a explicação do trabalho.

A.1 PROVA QUE A MATRIZ DA SIMULAÇÃO É ESPARSA

Apresenta-se aqui a prova que $\overline{\overline{M}}$ é uma matriz esparsa. A esparsidade da matriz é definida pela proporção de elementos nulos na matriz (YAN *et al.*, 2017). Em matrizes utilizadas para modelos de simulação, deseja-se que conforme o tamanho da matriz aumenta, a proporção de elementos não-nulos vá a zero. Isto é, dada uma matriz com um total de N_t elementos, sendo, desses, N_{el} elementos não nulos. Essa matriz é dita esparsa se o limite (A.1) vai a zero.

$$\lim_{N_t \rightarrow \infty} \frac{N_{el}}{N_t} = 0 \quad (\text{A.1})$$

Especificamente para a matriz $\overline{\overline{M}}$, tem-se no total N_E elementos em cada dimensão, em que N_E é o número total de células utilizadas na simulação. Assim, para essa matriz $N_t = N_E^2$. Como, por construção, cada linha da matriz $\overline{\overline{M}}$ tem 4 elementos não nulos, tem-se um total de $4N_E$ elementos não nulos na matriz. Assim, a proporção de elementos não nulos é dada por (A.2). O limite dessa proporção é portanto dado por (A.3).

$$p_{(el \neq 0)} = \frac{4N_E}{N_E^2} = \frac{4}{N_E} \quad (\text{A.2})$$

$$\lim_{N_E \rightarrow \infty} p_{(el \neq 0)} = \lim_{N_E \rightarrow \infty} \frac{4N_E}{N_E^2} = \lim_{N_E \rightarrow \infty} \frac{4}{N_E} = 0 \quad (\text{A.3})$$

Assim, tem-se que $\overline{\overline{M}}$ é esparsa.

A.2 PROVA QUE O CONJUNTO TOTAL DAS EQUAÇÕES DE CONSERVAÇÃO DE CORRENTE NA REDE É LINEARMENTE DEPENDENTE

Nesta seção, é apresentada uma prova que o conjunto de todas as equações de conservação obtidas na rede é linearmente dependente. Considere o caso com apenas uma célula, tem-se portanto o conjunto de equações de conservação de correntes, apresentado em (A.7). Em forma matricial (e utilizando a relação constitutiva $J_i = \sigma_i E_i$), este sistema é apresentado em (A.8). Note que a soma de todas as linhas da matriz

resulta em uma linha nula. Assim, o determinante dessa matriz é nulo, e portanto, essa matriz é linearmente dependente. Deste modo o sistema linear não pode ser resolvido com estas 4 equações.

$$-J_0\hat{b} - J_2\hat{a} = 0 \tag{A.4}$$

$$J_0\hat{b} - J_3\hat{a} = 0 \tag{A.5}$$

$$-J_1\hat{b} + J_2\hat{a} = 0 \tag{A.6}$$

$$J_1\hat{b} + J_3\hat{a} = 0 \tag{A.7}$$

$$\begin{bmatrix} -\sigma_0\hat{b} & 0 & -\sigma_2\hat{a} & 0 \\ \sigma_0\hat{b} & 0 & 0 & -\sigma_3\hat{a} \\ 0 & -\sigma_1\hat{b} & \sigma_2\hat{a} & 0 \\ 0 & \sigma_1\hat{b} & 0 & \sigma_3\hat{a} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_0 \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{A.8}$$

Removendo-se uma das linhas da matriz, e substituindo-a por uma relativa a equação provinda da lei de Faraday, obtém-se o sistema (A.9). Note que o determinante desta matriz não é nulo, e portanto este sistema é linearmente independente.

$$\begin{bmatrix} \hat{a} & -\hat{a} & -\hat{b} & \hat{b} \\ -\sigma_0\hat{b} & 0 & -\sigma_2\hat{a} & 0 \\ \sigma_0\hat{b} & 0 & 0 & -\sigma_3\hat{a} \\ 0 & -\sigma_1\hat{b} & \sigma_2\hat{a} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_0 \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{d\phi}{dt} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{A.9}$$

O mesmo ocorre quando se tem um número maior de células, em que o conjunto das equações de variação de fluxo e de conservação de corrente possui sempre uma equação em excesso. Assim, para evitar sistemas lineares superdeterminados, remove-se uma das equações de conservação de corrente obtidas.

APÊNDICE B – PROGRAMA DE SIMULAÇÃO DESENVOLVIDO

Parte da dissertação é relacionada ao desenvolvimento de um método de cálculo de campos para a simulação das correntes induzidas. Para obter resultados desse modelo desenvolvido, o método de cálculo de campos apresentado no capítulo 3 foi implementado em um programa de computador para poder realizar as simulações apresentadas no trabalho. Este apêndice apresenta brevemente sobre essa implementação.

B.1 INTERFACE E OPÇÕES DO PROGRAMA DE SIMULAÇÃO

Devido a sua utilização para testes do modelo de simulação, a implementação do método possui apenas uma interface em linha de comando (CLI, na sigla em inglês). Essa interface permite a execução do programa de maneira eficiente e versátil, permitindo alterações nos parâmetros utilizados na simulação pela linha de comando.

Por meio desta interface, diversos parâmetros e opções de simulação são expostas ao operador. Entre elas, pode-se definir o número de células em cada dimensão N , o tamanho da região de cálculo, se a amostra deve ser dividida em lâminas, e em quantas lâminas dividir. Pode-se também definir a condutividade da amostra e outros parâmetros como o seu formato. Ainda, pode-se escolher como apresentar os resultados obtidos, escolhendo-se parâmetros dos gráficos de resultados. A interface também possui uma opção de ajuda, que permite ao operador conhecer quais as opções expostas ao usuário do programa.

Ainda, a implementação da interface em linha de comando permite de maneira simples a opção de rodar a simulação a partir de *scripts* ou outros programas externos, facilitando a realização de simulações variadas e em grande quantidade.

B.2 TEMPO DE PROCESSAMENTO DAS SIMULAÇÕES

Para realizar as simulações presentes neste trabalho, utilizou-se de um computador cujas características são: processador Intel i7-9700, com 4 núcleos (8 *threads*) e frequência de 4,700 GHz, e memória *RAM* de 32 GB. O sistema operacional utilizado foi o Linux Pop!_OS, versão 22.04.

Como comentado no capítulo 3, a implementação foi feita em python, versão 3.10. Utilizou-se as bibliotecas *numpy* e *scipy* para realizar as manipulações numéricas e matriciais, e a biblioteca *matplotlib* para produzir os gráficos de resultados.

Ainda, onde possível, utilizou-se operações otimizadas para matrizes esparsas com o objetivo de melhorar a eficiência numérica das simulações, permitindo-se realizar simulações com um maior número de células.

Com essas configurações, o tempo de processamento para uma simulação

com $N = (1000, 1000)$, totalizando 1 000 000 de células, foi de cerca de 1 min e 34 s. Foi necessário cerca de metade do tempo (52 s) para montar a matriz \overline{M} a partir das equações e parâmetros do modelo. O resto do tempo de processamento (42 s) foi para resolver o sistema linear. A operação para produzir \overline{M} é realizada em processamento *single-core*, enquanto a resolução do sistema linear esparsa é feita em processamento *multi-core*, podendo utilizar as 8 *threads* do processador em paralelo, agilizando o processo. Para a maior simulação realizada, com $N = (2000, 2000)$, totalizando 4 000 000 células, o tempo de construção da matriz foi de 3 min e 36 s, e o de resolução do sistema foi de 5 min e 29 s, para um total de 9 min e 7 s de tempo de simulação.

O tempo de processamento para outros tamanhos de simulação é variado. Para $N = (1000, 100)$, o tempo de processamento foi de 5 s para construir a matriz, e 1 s para resolver o sistema, totalizando 6 s. Para $N = (100, 100)$, o tempo de processamento total é menor que 1 s.

Implementou-se uma funcionalidade de armazenamento dos resultados da solução do sistema linear, o que só torna necessário a resolução do sistema linear uma vez para os mesmos parâmetros de entrada. Isso permite maior agilidade quando se deseja visualizar novamente os resultados de uma simulação já feita anteriormente.

Uma das limitações da implementação utilizada é da quantidade de memória *RAM* utilizada durante a resolução do sistema. O processamento para $N = (1000, 1000)$ utiliza cerca de 5,7 GB de memória no seu pico de utilização. Já para $N = (2000, 2000)$, a utilização foi de cerca de 25,5 GB, portanto, próximo do máximo que pode ser simulado com o computador utilizado. Para um número de células menor, a utilização de memória é mais baixa, apenas passando a faixa de 1 GB para $N \approx (500, 500)$. Assim, mesmo com quantidades baixas de memória disponíveis para a simulação, ainda é possível realizar o processamento para um número de células considerável.

Vale ressaltar que a implementação produzida para este trabalho teve como objetivo uma prova de conceitos e validação do modelo. Assim, uma implementação mais metódica e com métodos numéricos mais adequados pode resultar em simulações com tempos de processamento e uso de memória significativamente menores.

APÊNDICE C – EQUAÇÕES PARA MODELO COM CAMPOS DE REAÇÃO

Neste apêndice apresentam-se algumas equações que podem ser utilizadas para a implementação de um modelo de simulação que considere campos de reação. Esse tipo de modelo pode ser utilizado para simular fenômenos como o efeito pelicular, ou o comportamento do fluxo magnético dentro de uma amostra de material ferromagnético.

Assim como a derivada do fluxo magnético produz um campo elétrico, a corrente elétrica induzida produz um campo magnético. E de forma análoga à conservação de corrente, tem-se a conservação do fluxo magnético. Com essas duas leis e suas devidas equações, pode-se adaptar o sistema de equações para incluir o efeito dos campos de reação. Para o caso em que o fluxo não é imposto, o fluxo magnético no material é alterado pelos campos magnéticos de reação gerados pela corrente induzida. A alteração do fluxo magnético no material, por sua vez, irá também alterar instantaneamente o valor do campo elétrico e das correntes induzidas, alterando, portanto, o campo magnético de reação, formado processos interdependentes. É interessante que o cálculo dessas grandezas seja realizado em conjunto e simultaneamente, de maneira a garantir a obtenção de uma solução em apenas uma etapa, evitando a necessidade de recorrência.

Neste trabalho, apresentou-se como obter um sistema linear que relaciona a distribuição do campo elétrico E e da densidade de corrente J com a distribuição de variação de fluxo magnético $\frac{d\phi}{dt}$. De maneira análoga, pode-se obter o sistema linear que relaciona a distribuição do campo magnético H e da indução magnética B com a distribuição de corrente elétrica I . Assim, obtém-se o sistema de equações (C.1), em que $\overline{\overline{M}}_s$ representa a matriz desse sistema, \underline{H} o vetor de incógnitas dos módulos do campo magnético e I_{ei} o vetor de correntes elétricas no interior das células da rede. Assim como no caso do vetor de fontes $\underline{\psi}$, o vetor I_{ei} também possui elementos nulos, que neste caso estão relacionados às equações de conservação de fluxo magnético.

$$\overline{\overline{M}}_s \cdot \underline{H} = I_{ei} \quad (C.1)$$

Considerando duas redes de discretização em dois planos ortogonais entre si, pode-se relacionar I_{ei} com \underline{E} e \underline{H} com $\underline{\psi}$. Assim, tem-se dois sistemas de equações relacionados, (C.1) e (C.2).

$$\overline{\overline{M}} \cdot \underline{E} = \underline{\psi} \quad (C.2)$$

Definindo-se a relação entre \underline{E} e I_{ei} , juntamente com a relação entre \underline{H} e $\underline{\psi}$, é possível juntar os dois sistemas de equações em um, que pode ser então resolvido para obter a distribuição de H , B , E ou J .

Também é possível adicionar a corrente de deslocamento $\frac{dD}{dt}$ nesse sistema. Utilizando-se de fasores, isto pode ser feito considerando valores complexos de J , em que o valor da componente imaginária é relacionado à corrente de deslocamento. Essa relação também pode ser feita em função do tempo, mas neste caso, seria necessário um número maior de simulações para poder representar cada instante de tempo simulado. Uma relação semelhante é necessária para relacionar os termos de variação de fluxo $\frac{d\phi}{dt}$ de $\underline{\psi}$ com \underline{B} .

C.1 CÁLCULO DE CAMPOS DE REAÇÃO PARA UMA CORRENTE SINUSOIDAL IMPOSTA

Nesta seção é apresentado brevemente um conjunto de equações matriciais para considerar campos de reação. No caso considerado tem-se como fonte a distribuição de corrente \underline{I}_{ei} em um material. Também considera-se um regime sinusoidal, de modo que é possível utilizar fasores para obter as derivadas de um vetor pela multiplicação por $j\omega$, em que ω é a frequência angular do sistema. Juntando-se as equações (C.1) e (C.2), e isolando \underline{I}_{ei} como vetor de fontes, obtém-se (C.3). Nesta equação, $\overline{\overline{Q}}$ é uma matriz intermediária dada por (C.4).

$$(\overline{\overline{M}}_s - \overline{\overline{Q}}) \cdot \underline{H} = \underline{I}_{ei} \quad (\text{C.3})$$

$$\overline{\overline{Q}} = \overline{\overline{Q}}_s \cdot \overline{\overline{\mu}} = j\omega \overline{\overline{\sigma}}_s \cdot \overline{\overline{W}}_s \cdot \overline{\overline{\mu}} \quad (\text{C.4})$$

Realizando-se a solução do sistema e obtendo-se \underline{H} , pode-se calcular o vetor de campos elétricos devido aos campos de reação \underline{E}_v com (C.5). Juntamente com o campo elétrico \underline{E}_i que produz \underline{I}_{ei} , (obtido com (C.6)), pode-se obter o campo elétrico total \underline{E} com (C.7).

$$\underline{E}_v = \overline{\overline{W}}_s \cdot j\omega \overline{\overline{\mu}} \cdot \underline{H} \quad (\text{C.5})$$

$$\underline{I}_{ei} = \overline{\overline{\sigma}}_s \cdot \underline{E}_i \quad (\text{C.6})$$

$$\underline{E} = \underline{E}_i + \underline{E}_v \quad (\text{C.7})$$

APÊNDICE D – PERDAS POR CORRENTES INDUZIDAS EM FUNÇÃO DA MUDANÇA DE ESCALA DA SEÇÃO RETANGULAR

Neste apêndice apresenta-se um desenvolvimento para relacionar a variação das perdas por correntes induzidas perante uma variação de escala da seção da amostra.

D.1 PROPRIEDADES MATEMÁTICAS

Dado um fator de mudança de escala ζ , tem-se que o fator k deve seguir a propriedade (D.1).

$$k(\zeta a, \zeta b) = \zeta^2 k(a, b) \quad (\text{D.1})$$

Considera-se então que k pode ser separado conforme (D.2). A escolha do termo a^2 ainda será discutida. Nessa equação, n é a relação entre as dimensões a e b da seção retangular da amostra, conforme (D.3). Note que n é um fator adimensional, que se mantém quando se altera a escala de ambas as dimensões em ζ .

$$k(a, b) = a^2 k'(n) \quad (\text{D.2})$$

$$n = \frac{b}{a} = \frac{\zeta b}{\zeta a} \quad (\text{D.3})$$

Juntamente com (D.3), tem-se que (D.2) respeita a propriedade (D.1), como se observa no desenvolvimento apresentado de (D.4) a (D.6).

$$k(\zeta a, \zeta b) = (\zeta a)^2 k'(n = \frac{\zeta b}{\zeta a}) \quad (\text{D.4})$$

$$= \zeta^2 a^2 k'(n = \frac{b}{a}) \quad (\text{D.5})$$

$$= \zeta^2 k(a, b) \quad (\text{D.6})$$

Note que a escolha do fator a^2 , ao invés de ab ou b^2 , não afeta os resultados, pois as relações (D.7) e (D.8) são relacionadas com (D.2) por (D.9).

$$k(a, b) = ab k'_{ab}(n) \quad (\text{D.7})$$

$$k(a, b) = b^2 k'_{b^2}(n) \quad (\text{D.8})$$

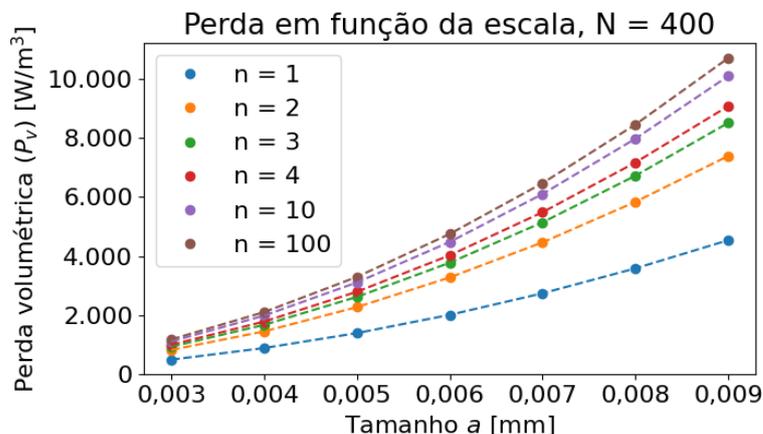
$$a^2 k'(n) = \frac{ab}{n} k'_{ab}(n) = \frac{b^2}{n^2} k'_{b^2}(n) \quad (D.9)$$

A divisão ou multiplicação do fator n nessas relações não afeta o resultado apresentado, já que n não se modifica quando se altera a escala da seção por ζ . Assim, essas três escolhas para $k'(n)$ são equivalentes.

D.2 COMPORTAMENTO OBSERVADO NAS SIMULAÇÕES

A propriedade da alteração do valor das perdas por correntes induzidas com o quadrado da mudança de escala pode ser observada nas simulações, como apresentado na tabela 4.1. A figura D.1 apresenta os valores calculados para as perdas por correntes induzidas obtidos via simulação numérica para diferentes valores de n e a , juntamente com curvas tracejadas calculadas considerando a relação quadrática de P_v com a . Observa-se que os valores de perdas calculados apresentam o comportamento esperado por (D.1).

Figura D.1 – Perdas volumétricas simuladas em função do tamanho a e relação entre as dimensões da seção da amostra $n = b/a$.



Fonte: Elaborado pelo autor.

APÊNDICE E – CÁLCULO DE CONDUTIVIDADE PELA MEDIÇÃO DE RESISTÊNCIA

De maneira a tentar estimar a condutividade das amostras ensaiadas, mediu-se a sua resistência com o método a quatro fios utilizando o multímetro de bancada. Para isso, fez-se a medição da resistência elétrica entre os pontos médios de cada extremidade da amostra, de maneira a medir a maior resistência possível entre dois pontos na lâmina. Para a amostra fina, mediu-se cerca de $R_{sim} \approx 18 \text{ m}\Omega$, com o indicador do multímetro de bancada variando entre $16 \text{ m}\Omega$ e $20 \text{ m}\Omega$. Desse modo, a medida possui certa imprecisão, de pelo menos $\pm 10\%$.

Para estimar a condutividade, utilizou-se do método descrito no capítulo 3 para a estimação da condutividade elétrica de uma amostra a partir da medição da resistência, juntamente com a simulação com o modelo de cálculo de campos apresentado. Simulou-se a lâmina com uma discretização de 1000 células em seu comprimento de 280 mm, e com 100 células em sua largura, de 30 mm. Considerou-se na simulação que $\sigma_{init} = 1 \cdot 10^7 \text{ S/m}$, e que a espessura do material tem 0,27 mm. O valor da resistência retornado pela simulação foi de $R_{sim} = 4,157 \text{ m}\Omega$. Realizando o cálculo apresentado em (3.41), obtém-se (E.3).

$$\sigma_{med} = \sigma_{init} \frac{R_{sim}}{R_{med}} \quad (\text{E.1})$$

$$= 1 \cdot 10^7 \text{ S/m} \frac{4,157 \text{ m}\Omega}{18 \text{ m}\Omega} \quad (\text{E.2})$$

$$\approx 2,310 \cdot 10^6 \text{ S/m} \quad (\text{E.3})$$

Utilizado a aproximação que a corrente é uniformemente distribuída na lâmina, tem-se a equação (E.4), em que $L_{amostra}$ é o comprimento da amostra e $A_{amostra}$ é a sua área. O valor obtido para a condutividade elétrica é apresentado por (E.6).

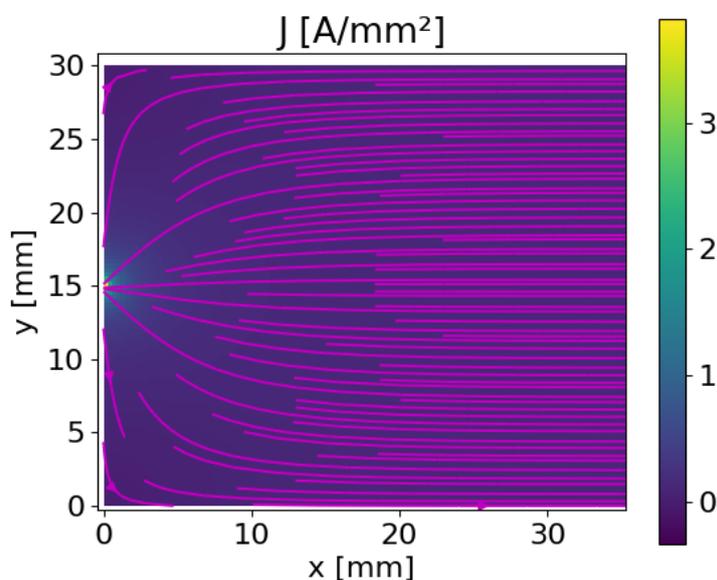
$$\sigma_u = \frac{L_{amostra}}{R_{med} A_{amostra}} \quad (\text{E.4})$$

$$= \frac{280 \text{ mm}}{18,000 \text{ m}\Omega \cdot 30 \text{ mm} \cdot 0,27 \text{ mm}} \quad (\text{E.5})$$

$$= 1,920 \cdot 10^6 \text{ S/m} \quad (\text{E.6})$$

Assim, tem-se uma diferença de cerca de 20% entre as duas estimativas. Note, entretanto, que a corrente que percorre a lâmina não é uniformemente distribuída, já que a corrente entra pontualmente na amostra. Este comportamento pode ser observado na figura E.1, que apresenta a densidade de corrente em uma das extremidades da lâmina simulada. Nota-se nessa figura que a corrente é concentrada ao redor do ponto de sua inserção, apenas se distribuindo mais uniformemente após cerca de 15 mm da sua extremidade.

Figura E.1 – Densidade de corrente simulada na lâmina fina.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Entretanto, os dois valores diferem do valor obtido pela separação de perdas. O valor obtido pela separação de perdas é cerca de 3 vezes maior do que o obtido pela medição. Essa diferença pode ser devido a problemas de medição de resistência, já que a medição de valores muito baixos é complicada de ser realizada, mesmo utilizando a técnica de medição a quatro fios. Tem-se também que a medida está próxima do limite de medição do multímetro de bancada utilizado, que não apresenta valores menores do que $1 \text{ m}\Omega$. A diferença também pode ser devida a dificuldades de estimação devido ao processo de separação, podendo haver algum outro fenômeno que atrapalhe a estimação.

Devido a sua maior espessura, a resistência das lâminas grossas é consideravelmente menor do que a das lâminas finas, mesmo que sua condutividade seja um pouco menor. Dessa maneira, não foi possível realizar a medição da sua condutividade, já que, quando colocada para ser medida pelo multímetro, este apresentava uma leitura que variava entre $0 \text{ m}\Omega$ e $1 \text{ m}\Omega$.