

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO TECNOLÓGICO DE JOINVILLE
ENGENHARIA DE TRANSPORTES E LOGÍSTICA

VITOR BOTELHO DE SOUZA

AVALIAÇÃO DE DESEMPENHO DE UM ARMAZÉM LOGÍSTICO: ANÁLISE
EXPLORATÓRIA COM A ANÁLISE ENVOLTÓRIA DE DADOS E O ÍNDICE DE
MALMQUIST

Joinville
2023

VITOR BOTELHO DE SOUZA

AVALIAÇÃO DE DESEMPENHO DE UM ARMAZÉM LOGÍSTICO: ANÁLISE
EXPLORATÓRIA COM A ANÁLISE ENVOLTÓRIA DE DADOS E O ÍNDICE DE
MALMQUIST

Trabalho apresentado como requisito para
obtenção do título de Bacharel em Engenha-
ria de Transportes e Logística, no Centro Tec-
nológico de Joinville, da Universidade Fede-
ral de Santa Catarina.

Orientador(a): Dr. Francielly Hedler Staudt

Joinville

2023

VITOR BOTELHO DE SOUZA

AVALIAÇÃO DE DESEMPENHO DE UM ARMAZÉM LOGÍSTICO: ANÁLISE
EXPLORATÓRIA COM A ANÁLISE ENVOLTÓRIA DE DADOS E O ÍNDICE DE
MALMQUIST

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi julgado adequado para obtenção do título de Bacharel em Engenharia de Transportes e Logística, no Centro Tecnológico de Joinville, da Universidade Federal de Santa Catarina.

Joinville (SC), 04 de dezembro de 2023.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Francielly Hedler Staudt
Orientador/Presidente
UFSC - Joinville

Prof. Mestre Natan Bissoli
Membro(a)
UFSC - Joinville

Prof. Dr. Christiane Wenck Nogueira Fernandes
Membro(a)
UFSC - Joinville

Prof. Dr. Fabio Antonio Sartori Piran
Membro(a)
UNISINOS - Pelotas

AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha orientadora pela valiosa atenção que me dedicou ao longo deste período. Também, sou grato à minha família e aos amigos que estiveram ao meu lado durante essa – longa – jornada em Joinville e na faculdade.

RESUMO

Explora-se a aplicação da Análise Envoltória de Dados (DEA) na logística de outbound de armazéns, utilizando os modelos Charnes, Cooper e Rhodes (CCR) e o Índice de Malmquist em uma análise temporal do desempenho operacional. A análise compreende 72 cenários diferentes, avaliando a periodicidade e a sensibilidade dos modelos a mudanças nas escalas dos indicadores e na orientação das variáveis (de output para input e vice-versa). Os resultados revelam que os métodos apresentam interpretações distintas quando aplicados periodicamente, com o CCR sendo menos intuitivo que o Índice de Malmquist. O estudo também destaca a reação dos modelos a mudanças de escala e orientação, identificando cenários com resultados menos satisfatórios e explorando as razões por trás dessas divergências.

Palavra-chave: Análise Envoltória de Dados. DEA. Logística de Outbound. Índice de Malmquist. CCR.

ABSTRACT

This study provides a detailed analysis of the application of Data Envelopment Analysis (DEA) in outbound logistics of warehouses, using Charnes, Cooper and Rhodes (CCR) and Malmquist Index models in a temporal performance evaluation. Covering 72 different scenarios, it investigates the periodic applicability of the models, their sensitivity to changes in the scale of indicators, and variable orientation shifts. The study reveals distinct interpretations when models are applied periodically, with CCR being less intuitive than the Malmquist Index. It also examines model sensitivity to scale changes and orientation, identifying scenarios with less satisfactory outcomes and exploring the reasons for these discrepancies.

Keywords: Data Envelopment Analysis. DEA. Outbound Logistics. Malmquist Index. CCR.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Exemplo de DMU e fronteira de eficiência	15
Figura 2 – Diferentes representações do modelo DEA de Charles, Coopers e Rhodes	20
Figura 3 – Diferentes representações do modelo DEA de Charles, Coopers e Rhodes	22
Figura 4 – Exemplo de envelope de eficiência utilizando CCR em uma siderúrgica .	25
Figura 5 – Ilustração gráfica Índice de Malmquist	26
Figura 6 – Diagrama em blocos da metodologia	31
Figura 7 – Comparação do CCR aplicado nos dados de Junho a Dezembro de 2018 para avaliação na aplicabilidade periódica do modelo	37
Figura 8 – Comparação do Índice de Malmquist aplicado nos dados até Junho 2018 e Dezembro de 2018 para avaliação na aplicabilidade periódica do modelo	40
Figura 9 – Comparação do DEA CCR sob diferentes orientações de variáveis	44
Figura 10 – Comparação dos resultados CCR DEA sob diferentes orientações de variáveis	47
Figura 11 – Comparação do Índice de Malmquist sob diferentes orientações de va- riáveis	48
Figura 12 – Exemplo de resultados extremos	50

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Indicadores de desempenho da logística de outbound	32
Quadro 2 – Orientação variáveis	34

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Exemplo: Aplicação do modelo CCR em Siderúrgicas	23
Tabela 2 – Exemplo: Resultados da mudança de orientação no modelo CCR primal	23
Tabela 3 – Exemplo: Resultados da mudança de orientação no modelo CCR dual .	23
Tabela 4 – Resumo estatístico da base de dados	33
Tabela 5 – Impacto da mudança de orientações nos resultados de eficiência por DEA CCR	46
Tabela 6 – Impacto da mudança de orientações nos resultados de eficiência pelo Índice de Malmquist	49

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CCB	Banker, Charnes e Cooper
CCR	Charnes, Cooper e Rhodes
CRS	Constant Returns to Scale
DEA	Data Envelopment Analysis
DMU	Decision Making Units
VRS	Variable Returns to Scale

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
1.1	OBJETIVO	13
1.2	ESTRUTURA DO TRABALHO	13
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	15
2.1	MODELO CCR DE Charnes et al. (1978)	16
2.1.1	Escolha do modelo CCR	19
2.1.2	Exemplo de aplicação do modelo CCR e interpretação de resultados	22
2.2	ÍNDICE DE MALMQUIST	26
3	REVISÃO DE LITERATURA	28
4	METODOLOGIA	30
5	ANÁLISE EXPLORATÓRIA: APLICAÇÃO DEA PARA AVALIAÇÃO DE DESEMPENHO DA LOGÍSTICA DE OUTBOUND NO ARMAZÉM	32
5.1	APRESENTAÇÃO DO ESTUDO DE CASO	32
5.2	ANÁLISE DOS DADOS E DEFINIÇÃO DOS INPUTS E OUTPUTS DO MODELO	33
5.3	DEFINIÇÃO DO MÉTODO DEA E INDICADORES PARA AVALIAÇÃO DOS RESULTADOS	34
5.4	AMBIENTE DE APLICAÇÃO E AVALIAÇÃO DOS MODELOS	35
5.5	AVALIAÇÃO DOS RESULTADOS - APLICABILIDADE PERIÓDICA DO MODELO	36
5.5.1	Aplicabilidade Periódica do Modelo CCR	36
5.5.2	Aplicabilidade Periódica do Índice de Malmquist	38
5.6	SENSIBILIDADE DO MODELO À ALTERAÇÃO DA ESCALA DAS VARIÁVEIS	40
5.6.1	Resultado de Sensibilidade de Escala das Variáveis no Modelo CCR e Malmquist	42
5.7	SENSIBILIDADE DO MODELO ÀS ALTERAÇÕES DE ORIENTAÇÃO DAS VARIÁVEIS	42
5.7.1	Sensibilidade dado à alterações de orientação das Variáveis no Modelo CCR	44
5.7.2	Sensibilidade dado à alterações de orientação das Variáveis no Índice de Malmquist	46
5.7.3	Verificação da semelhança entre os resultados	48
5.7.4	Considerações finais sobre as avaliações	49
6	CONCLUSÕES	52
	REFERÊNCIAS	54

7	APÊNDICE	57
7.1	EQUAÇÕES DO EXEMPLO DA FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	57
7.1.1	CCR Maximização Fracionado	57
7.1.2	CCR Primal Orientado a Input	59
7.1.3	CCR Dual Orientado a Input	60
7.1.4	CCR Minimização Fracionado	61
7.1.5	CCR Primal Orientado a Output	63
7.1.6	CCR Dual Orientado a Output	64

1 INTRODUÇÃO

Como menciona Han et al. (2022), a crescente geração de dados ressalta a importância dos dados como um recurso estratégico nas empresas. Por isso, a avaliação de sistemas, processos e organizações é uma ferramenta indispensável para o entendimento e a melhoria contínua.

Segundo Piran et al. (2021), no contexto de avaliação de eficiência, duas abordagens se destacam: a avaliação sistêmica e a avaliação reducionista. Ambas são essenciais em diferentes cenários, oferecendo perspectivas distintas e implicações variadas sobre como entendemos e interagimos com sistemas complexos.

A avaliação sistêmica baseia-se na ideia de que um sistema é mais do que a soma de suas partes. Esta abordagem holística considera todos os componentes de um sistema - sejam eles processos, pessoas ou tecnologias - e as inter-relações entre eles. Em vez de analisar elementos individuais isoladamente, a avaliação sistêmica busca entender como estes elementos interagem e contribuem para a funcionalidade e os resultados do sistema como um todo.

Por exemplo, em um contexto logístico, uma avaliação sistêmica de uma cadeia de suprimentos não se limitaria a examinar apenas a eficiência do transporte de mercadorias. Ela também analisaria a gestão de estoques, a coordenação entre diferentes centros de distribuição, a comunicação com fornecedores e clientes, e a influência de fatores externos, como condições climáticas e regulamentações comerciais. Essa abordagem ajuda a identificar como diferentes partes da cadeia de suprimentos afetam umas às outras e o desempenho geral do sistema logístico.

Por outro lado, a avaliação reducionista adota uma abordagem mais segmentada e focada, concentrando-se em avaliar componentes individuais de um sistema de maneira isolada, com o objetivo de determinar sua eficiência e eficácia. Esta abordagem é baseada na premissa de que aprimorar cada parte do sistema levará a melhorias no sistema como um todo.

No âmbito logístico, Christopher (2022) argumenta que a avaliação de desempenho integrativa envolve a combinação de diferentes métricas de desempenho em um modelo de avaliação unificado, proporcionando uma visão mais holística do desempenho, em contraste com a avaliação de métricas individuais de forma isolada.

Em 1978, Charnes, Cooper e Rhodes publicaram um artigo seminal apresentando o Data Envelopment Analysis (DEA), um modelo de programação linear capaz de calcular a eficiência relativa de uma unidade de decisão, como departamentos, filiais de empresas, hospitais, entre outros (THANASSOULIS, 2001). Desde então, o DEA vem sendo utilizado como uma possível abordagem sistêmica, pois analisa o conjunto de inputs e outputs e considerando como eles interagem e contribuem para a eficiência geral da unidade, con-

forme demonstrado nas revisões de literatura (SEIFORD, 1996; EMROUZNEJAD; YANG, 2018). Esses estudos apontam aplicações em que o DEA é aplicado em análises de benchmarking externo. Para Camp (1995) é um processo que compara o desempenho de uma organização com outras externas, visando identificar lacunas de desempenho e compreender as práticas líderes de mercado.

Contudo, apesar da predominância do uso do DEA em benchmarking externo, este trabalho avaliará o DEA como ferramenta de benchmarking interno, que consiste na avaliação de uma entidade em comparação com ela mesma ao longo do tempo. A justificativa para tal abordagem reside no fato de ser um campo ainda menos explorado na literatura, e espera-se que este trabalho possa contribuir para o aprimoramento desse conhecimento. Para isso, serão utilizados dois modelos a fim de realizar uma análise exploratória da aplicação deles na avaliação interna de eficiência relativa da logística outbound de um armazém, adotando uma perspectiva temporal.

1.1 OBJETIVO

Este trabalho tem como objetivo geral realizar uma análise exploratória de medição de eficiência relativa, utilizando-se dois métodos de DEA: CCR e Índice de Malmquist. Essa análise exploratória será realizada em uma base de dados com 5 anos de indicadores da logística outbound de um armazém. Para este objetivo geral, os seguintes objetivos específicos deverão ser cumpridos.

- Adaptar o DEA CCR e Índice de Malmquist para a aplicação.
- Definir diferentes experimentos quantitativos
- Aplicar o modelo DEA CCR para calcular a eficiência relativa ao longo do tempo
- Aplicar o Índice de Malmquist para analisar a mudança na eficiência relativa ao longo do tempo
- Apresentar e avaliar resultados obtidos das aplicações de ambos os modelos

1.2 ESTRUTURA DO TRABALHO

Na Seção 2, estabelece-se a base teórica essencial para a compreensão dos modelos DEA CCR e do Índice de Malmquist. Esta seção não se limitará apenas à teoria pura; ela também incluirá um exemplo prático, utilizando uma base de dados simplificada. O foco será em detalhar o modelo DEA CCR, considerando sua relevância e semelhança com o modelo utilizado para o Índice de Malmquist. A intenção é fornecer ao leitor uma compreensão profunda de como esses modelos são aplicados na prática, além de sua fundamentação teórica.

A Seção 3 foi realizada uma breve revisão literária sobre artigos já publicados do tema e que foram uma referência para a avaliação realizada neste trabalho. Depois, na

Seção 4 é definida a metodologia geral do trabalho. Nela, apresenta-se quais serão os experimentos realizados na base de dados para verificar as mudanças no DEA. Também, de onde serão extraídos os resultados.

A Seção 5 aborda a avaliação da logística outbound de uma empresa de metais sanitários em Joinville. Inicia-se com uma introdução à empresa e ao escopo do estudo, enfocando o centro de distribuição e os indicadores de desempenho (KPIs) usados para medir a eficiência da logística outbound. A Subseção 5.2 detalha a análise dos dados coletados ao longo de cinco anos, abrangendo a remoção de outliers e a definição de inputs e outputs para o modelo DEA.

Em seguida, a Subseção 5.3 define o uso do modelo DEA CCR para avaliação de eficiência periódica, uma abordagem distinta do uso comum do DEA para benchmarking. Aqui, o foco está na aplicação do DEA como um indicador de eficiência atualizável mensalmente. Aspectos como aplicabilidade periódica, sensibilidade às alterações de escala e orientação das variáveis são discutidos. Além disso, a Subseção 5.4 descreve o ambiente de aplicação e avaliação dos modelos DEA, com ênfase no uso de Python e na biblioteca PuLP.

A Subseção 5.5 explora a aplicabilidade periódica do Modelo DEA CCR e do Índice de Malmquist, destacando a necessidade de um indicador global que se adapte às atualizações periódicas dos KPIs da empresa. A Subseção 5.6 aborda a sensibilidade dos modelos às alterações na escala das variáveis, com experimentos que avaliam o impacto de mudanças de escala em vários indicadores, utilizando um método extensivo de combinações para testar diferentes cenários. Essas análises contribuem para uma avaliação abrangente da eficiência operacional da empresa estudada.

Por último, na Seção 6 serão feitas as conclusões e considerações finais do trabalho. Também, serão apresentadas sugestões para trabalhos futuros.

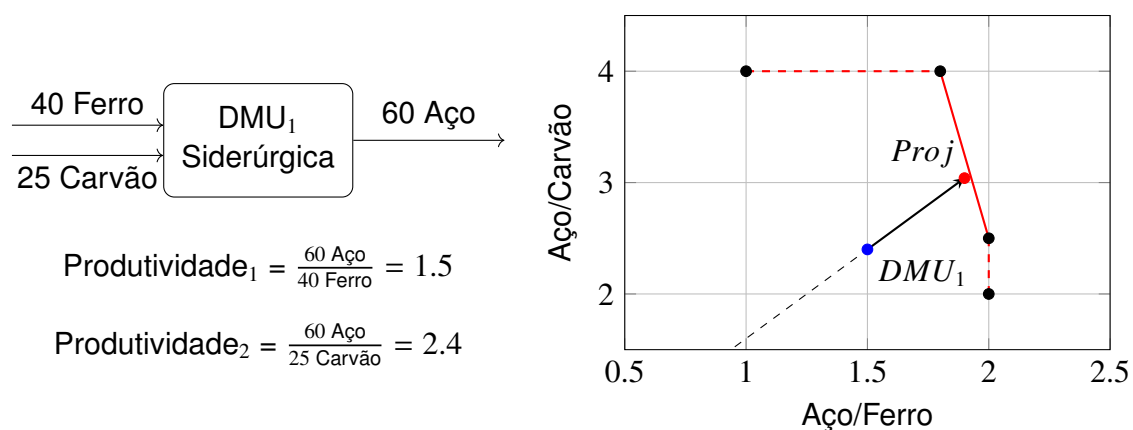
2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

A Análise Envoltória de Dados (Data Envelopment Analysis - DEA) é um método não paramétrico utilizado para avaliar a eficiência relativa entre Unidades de Tomada de Decisão (Decision Making Units - DMUs). Este modelo estabelece uma fronteira de eficiência para identificar as DMUs mais eficientes (COOPER et al., 2006).

De acordo com Banker et al. (1989), uma DMU é uma entidade responsável por transformar insumos (inputs) em produtos (outputs). No DEA, calcula-se a produtividade de cada DMU pela quantidade de output gerada em razão à quantidade dos inputs. Com esse valor de produção, é possível calcular um índice de eficiência para cada DMU, variando de 0 a 1, onde 1 indica máxima eficiência relativa (CHARNES et al., 1978).

Um exemplo de DMU é ilustrado na Figura 1. O DMU_1 é uma siderúrgica, que consome 40 unidades de ferro e 25 de carvão para produzir 60 unidades de aço. No DEA, a produtividade é medida pela razão entre os outputs e inputs. Desta forma, calcula-se a produtividade do aço em relação ao consumo de ferro ($produtividade_1$) e a produção de aço em relação ao consumo de carvão ($produtividade_2$), resultando em 1.5 e 2.4, respectivamente.

Figura 1 – Exemplo de DMU e fronteira de eficiência



Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

Esses níveis de produtividade são utilizados para posicionar a DMU no gráfico de eficiência (lado direito da Figura 1). A DMU_1 , representada pelo ponto azul, é comparada com outras siderúrgicas (pontos pretos) da mesma organização. Através da aplicação do DEA, estabelece-se uma fronteira de eficiência, representada pelas linhas vermelhas contínuas e tracejadas no gráfico. As empresas que se encontram nesta fronteira atingem um índice de eficiência de 1.

Observa-se que a DMU_1 está distante da fronteira de eficiência, indicando uma eficiência relativa menor que 1. Para alcançar a eficiência máxima, é necessário melhorar

seus indicadores de desempenho, visando a fronteira de eficiência, como exemplificado pelo ponto vermelho, que representa uma das projeções possíveis da DMU_1 na fronteira de eficiência.

A aplicação do DEA como ferramenta para avaliação de eficiência não se restringe somente para o campo industrial. Ela é ampla e abarca outros setores como saúde, financeiro, energético, entre outros, ressaltando sua versatilidade e importância (EMROUZ-NEJAD; YANG, 2018; RATNER et al., 2023). Charnes et al. (1978) realizou o estudo inicial para o desenvolvimento do modelo, embora contribuições anteriores tenham sido fundamentais para sua formulação (SEIFORD, 1996). Desde então, o campo tem se expandido, com a introdução de novos modelos adaptados a uma variedade de contextos.

Nas próximas seções, serão explorados dois modelos DEA para avaliar o desempenho, visto que estes métodos serão aplicados no trabalho. Primeiro, o modelo de Charnes et al. (1978), também chamado de CCR, que utiliza retornos constantes de escala (CRS), Segundo, o Índice de Produtividade de Malmquist, que é utilizado para o cálculo de evolução de eficiência entre dois períodos.

2.1 MODELO CCR DE Charnes et al. (1978)

O modelo desenvolvido por Charnes et al. (1978), conhecido como modelo CCR, foi introduzido no artigo “Measuring The Efficiency of Decision Making Units” publicado em 1978. Este modelo propõe uma abordagem matemática para avaliar a eficiência relativa das unidades de tomada de decisão (DMUs). A eficiência de uma DMU específica, denotada como DMU_o , é avaliada maximizando o quociente de eficiência h_o , variando entre 0 e 1, onde o valor 1 indica eficiência máxima.

O modelo CCR está apresentado nas equações (1.1) a (1.3). Nele, sua função objetivo busca maximizar o quociente h_o de eficiência da DMU_o , com o valor variando entre zero (ineficiência total) e um (eficiência máxima). As restrições do modelo, conforme detalhado por Cook e Zhu (2006), incluem: (1.2) a normalização da eficiência de cada DMU, garantindo uma avaliação equilibrada; e (1.3) a condição de não negatividade dos pesos atribuídos aos inputs e outputs.

CCR Modelo Fracionário

$$\max h_o(u, v) = \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{ro}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{io}} \quad (1.1)$$

Sujeito a:

$$\frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}} \leq 1; \quad j = 1, \dots, n \quad (1.2)$$

$$u_r, v_i \geq 0; \quad r = 1, \dots, s; \quad i = 1, \dots, m \quad (1.3)$$

- y_{ro} representa o *output* r da DMU_o
- x_{io} indica o *input* i da DMU_o
- y_{rj} refere-se ao *output* r da DMU_j
- x_{ij} denota o *input* i da DMU_j
- u_r é o peso atribuído ao *output* r , e é um fator de eficiência que maximiza o *output* em relação aos *inputs*
- v_i é o peso atribuído ao *input* i , e é um fator de eficiência que minimiza os *inputs* em relação aos *outputs*
- m é o número total de *inputs* considerados no modelo
- n representa o número de $DMUs$ analisadas
- s é o número total de *outputs* considerados no modelo

Para resolver o modelo matemático fracionário, os autores optaram por uma linearização. Essa abordagem envolve a definição do denominador da Equação (1.1) como uma constante, como o número 1. Tal transformação resulta em um modelo orientado a input, detalhado nas equações (2.1) a (2.4). Esse processo de linearização é baseado em técnicas matemáticas descritas por Charnes e Cooper (1962).

Além do modelo orientado a input, há também os modelos orientados a output. Esses são derivados pela inversão das frações nas Equações (1.1) e (1.2) e definindo o denominador como constante. O modelo resultante, focado na minimização, é representado pelas equações (3.1) a (3.4).

O modelo CCR apresenta uma gama de representações. Até então, foi mostrado os modelos que se distinguem por sua forma (linear ou fracionária) e orientação (input ou output). Contudo, eles também podem se distinguir diante sua representação (dual ou primal). Como descrito por Cook e Zhu (2006), esta divisão decorre do teorema da dualidade em programação linear, que estabelece que para cada problema primal existe um problema dual correspondente. Segundo Bradley et al. (1977), cada variável do modelo primal corresponde a uma restrição no modelo dual e vice-versa. Além disso, o sentido da função objetivo é invertido nos modelos duais. As Equações (4.1) a (5.4) ilustram os modelos duais dos modelos primais do CCR

Há seis variantes possíveis no modelo CCR, cada qual oferecendo uma perspectiva única na avaliação da eficiência relativa de DMU_o . Apesar das diferenças entre elas, é essencial observar que todas convergem para um resultado similar em termos de eficiência, como explicado por Thanassoulis (2001).

De acordo com Charnes et al. (1978), $DMUs$ com eficiência relativa igual a 1 são consideradas candidatas para compor o envelope de eficiência máxima relativa. Para de-

CCR Orientado a Input Primal

$$z = \max \sum_{r=1}^s u_r y_{ro} \quad (2.1)$$

Sujeito a:

$$\sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \leq 0; \quad \forall j \quad (2.2)$$

$$\sum_{i=1}^m v_i x_{io} = 1 \quad (2.3)$$

$$u_r, v_i \geq 0; \quad \forall r, i \quad (2.4)$$

CCR Orientado a Output Primal

$$q = \min \sum_{i=1}^m v_i x_{io} \quad (3.1)$$

Sujeito a:

$$\sum_{i=1}^m v_i x_{ij} - \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} \geq 0; \quad \forall j \quad (3.2)$$

$$\sum_{r=1}^s u_r y_{ro} = 1 \quad (3.3)$$

$$u_r, v_i \geq 0; \quad \forall r, i \quad (3.4)$$

CCR Orientado a Input Dual

$$\theta^* = \min \theta \quad (4.1)$$

Sujeito a:

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq \theta x_{io}, \quad i = 1, \dots, m; \quad (4.2)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \geq y_{ro}, \quad r = 1, \dots, s; \quad (4.3)$$

$$\lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n. \quad (4.4)$$

CCR Orientado a Output Dual

$$\phi^* = \max \phi \quad (5.1)$$

Sujeito a:

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq x_{io}, \quad i = 1, \dots, m; \quad (5.2)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \geq \phi y_{ro}, \quad r = 1, \dots, s; \quad (5.3)$$

$$\lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n. \quad (5.4)$$

terminar definitivamente se uma DMU faz parte da barreira de eficiência, é necessário realizar uma segunda etapa do processo, que consiste em verificar se a DMU não possui folgas.

Matematicamente, as folgas são verificadas pela aplicação dos modelos detalhados nas Equações (8.1) a (9.4). Nestes modelos, as folgas são representadas pelas variáveis livres s_i^- e s_r^+ . Para que a DMU não tenha folgas, a função objetivo, composta pela soma das variáveis s_i^- e s_r^+ , deve ser igual a zero.

O cálculo de folgas representa a segunda etapa do modelo CCR. Para executar essa etapa, é antes necessário realizar a primeira etapa, que consiste em determinar a eficiência relativa por meio do modelo dual, dado por θ^* e ϕ^* nas equações (5.1) e (4.1). Esses valores serão usados como constantes nas Equações (8.2) e (9.3), que fazem parte da segunda etapa.

Para as DMUs que possuem eficiência menor do que um, as folgas podem ser usadas para calcular a projeção do DMU na fronteira de eficiência. As fórmulas para essa projeção são apresentadas nas equações (6.1) e (7.1). Elas consistem em adicionar à DMU os valores das folgas, aproximando-o assim a projeção à barreira de eficiência.

Projeção Orientada a Input

$$\begin{cases} \hat{x}_{io} = \theta^* x_{io} - s_i^-, & i = 1, 2, \dots, m \\ \hat{y}_{ro} = y_{ro} + s_r^+, & r = 1, 2, \dots, s \end{cases} \quad (6.1)$$

Projeção Orientada a Output

$$\begin{cases} \hat{x}_{io} = x_{io} - s_i^-, & i = 1, 2, \dots, m \\ \hat{y}_{ro} = \phi^* y_{ro} + s_r^+, & r = 1, 2, \dots, s \end{cases} \quad (7.1)$$

Folgas Orientado a Input

$$\max \sum_{r=1}^s s_r^+ + \sum_{i=1}^m s_i^- \quad (8.1)$$

Sujeito a:

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} + s_i^- = \theta^* x_{io}, \quad i = 1, \dots, m; \quad (8.2)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} - s_r^+ = y_{ro}, \quad r = 1, \dots, s; \quad (8.3)$$

$$\lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n. \quad (8.4)$$

Folgas Orientado a Output

$$\max \sum_{r=1}^s s_r^+ + \sum_{i=1}^m s_i^- \quad (9.1)$$

Sujeito a:

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} + s_i^- = x_{io}, \quad i = 1, \dots, m; \quad (9.2)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} - s_r^+ = \phi^* y_{ro}, \quad r = 1, \dots, s; \quad (9.3)$$

$$\lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n. \quad (9.4)$$

2.1.1 Escolha do modelo CCR

Na Seção 2.1, foram detalhadas as equações que constituem as diferentes formulações matemáticas do modelo DEA CCR. Observa-se que este modelo se distingue por: forma (linear ou fracionária), representação (dual ou primal) e orientação (input ou output), totalizando seis variantes.

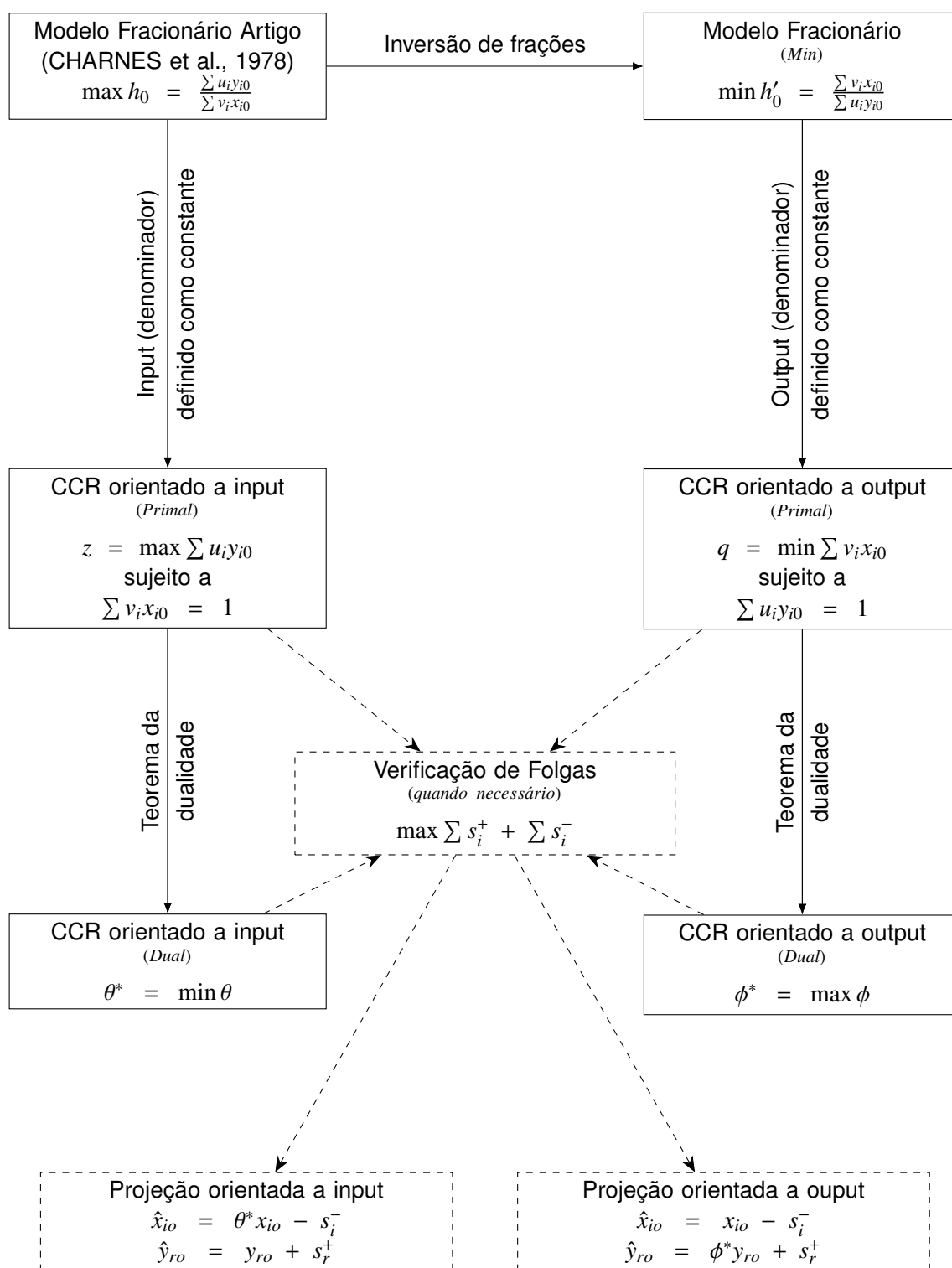
Para facilitar a compreensão dos diversos modelos CCR e suas inter-relações, uma representação visual é extremamente útil. A Figura 2 mostra um diagrama que sintetiza os modelos CCR. Neste diagrama, cada modelo é representado por um bloco individual, e as conexões entre eles são ilustradas por meio de setas. Estas setas simbolizam os processos matemáticos necessários para transformar um modelo na base da seta no modelo correspondente no topo da seta.

Um sétimo bloco, no centro da imagem e delineado por linhas tracejadas, representa o modelo de folgas. No caso da eficiência relativa ser igual a um, esse modelo pode ser utilizado para verificar se a DMU pertence à fronteira de eficiência. Ele também pode ser aplicado para identificar as folgas da DMU e assim calcular a projeção do DMU na barreira de eficiência. Ele está conectado aos outros modelos por linhas pontilhadas, ressaltando fazer parte da segunda etapa na análise da eficiência das DMUs (COOPER et al., 2011).

No DEA CCR os resultados de eficiência serão sempre os mesmos independentemente da escolha de qual variante for aplicada¹. Ainda assim, a determinação de qual

¹ Uma das exceções notáveis ocorre quando variáveis apresentam valores negativos, o que pode tornar o

Figura 2 – Diferentes representações do modelo DEA de Charles, Coopers e Rhodes



Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

variante aplicar é um procedimento importante, pois irá determinar o algoritmo utilizado e

modelo de programação primal viável, mas não limitado. Neste cenário, devido às características da dualidade descritas em (BRADLEY et al., 1977, p. 145), o modelo dual pode resultar em soluções inviáveis. No entanto, essa situação específica não será detalhada, visto que tanto a base de dados utilizada neste trabalho quanto a literatura em geral apresentam apenas valores não negativos.

as informações extraídas para análise de resultados.

Bazaraa et al. (2013) aborda uma ampla variedade de algoritmos fundamentais para a resolução de problemas em pesquisa operacional, abrangendo tanto contextos lineares quanto fracionários. Nota-se que, em comparação com os algoritmos aplicados em modelos lineares, aqueles destinados a modelagens fracionárias possuem uma abordagem de resolução distinta. Conseqüentemente, a escolha entre uma abordagem linear ou fracionária no DEA acarreta diferentes necessidades algorítmicas.

A respeito da orientação dos modelos, conforme Ward e Pascoe (2003), a escolha deve ser baseada no tipo de produção da Unidade de Tomada de Decisão (DMU). Nos modelos CCR orientados a inputs, há uma suposição de constância nos inputs, enquanto nos modelos orientados a outputs, os outputs são considerados constantes. Esta escolha afeta diretamente as variáveis livres u_r , v_i e λ_j , variando conforme a orientação selecionada. Uma análise empírica dessa diferença será apresentada na Seção 2.1.2.

Outro aspecto a ser considerado na escolha do modelo é sua orientação, primal ou dual. Ela impactará no tipo de informações que se pode obter da modelagem. Por exemplo, no problema primal, o resultado das variáveis livres u_r e v_i indica o peso de cada output ou input para a tomada de decisão. No problema dual, as variáveis livres λ_j indicam o conjunto de DMU mais eficientes. Com os λ , também é possível realizar uma análise de folgas e de projeções, como apresentado em (PIRAN et al., 2021).

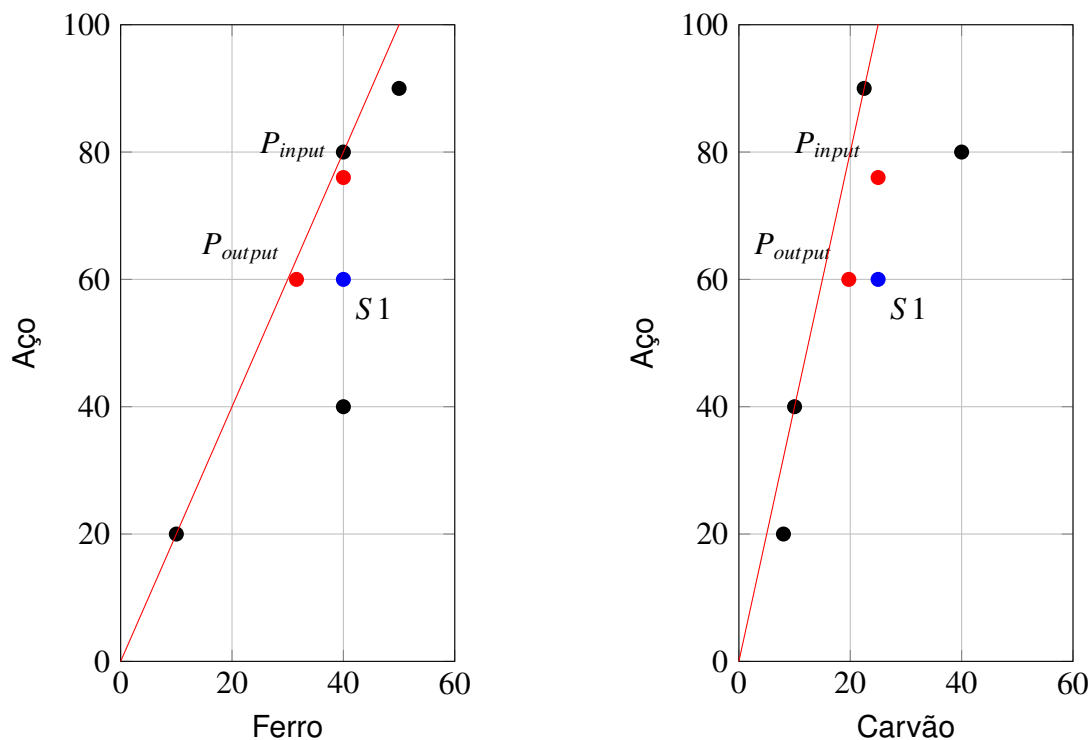
As projeções são pontos virtuais que representam uma configuração possível da DMU para alcançar a eficiência máxima. Elas podem ser calculadas a partir das folgas, que indicam o quanto é necessário ajustar os insumos – aumentar no caso de outputs ou diminuir no caso de inputs – para formar a projeção, conforme ilustrado nas equações 6.1 e 7.1 na Seção 2.1.

No modelo CCR orientado a inputs, a ênfase é dada no aumento dos outputs para estabelecer a projeção da DMU na fronteira de eficiência. Inversamente, na orientação a outputs, a prioridade recai sobre a redução dos inputs.

A diferença nos resultados da análise de folga devido à orientação do modelo é exemplificada geometricamente na Figura 3. Nela, utiliza-se a DMU_1 , que já havia sido apresentada anteriormente na Figura 1 da Seção 2. A Figura 1 destaca as projeções da DMU_1 como pontos vermelhos. Observa-se que, no DEA orientado a outputs, o DMU_1 aproxima-se da barreira de eficiência pela redução dos inputs e isso se observa pelo deslocamento no eixo horizontal. Por outro lado, o modelo orientado a inputs adota uma estratégia diferente para alcançar a eficiência máxima, que é através do aumento do output, visível pelo deslocamento do DMU_1 ao longo do eixo vertical, correspondente aos outputs neste exemplo.

Em suma, a seleção de uma variante específica do modelo DEA CCR deve ser guiada pelo contexto da análise e pelas características da DMU em estudo. As diferenças entre os modelos, embora inexistentes em termos de resultados de eficiência, são signifi-

Figura 3 – Diferentes representações do modelo DEA de Charles, Coopers e Rhodes



Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

ficativas no que diz respeito à interpretação dos dados e às implicações práticas. Esta escolha criteriosa permite que analistas e gestores obtenham uma compreensão mais profunda e aplicável das eficiências e ineficiências das DMUs, contribuindo assim para uma tomada de decisão mais informada e estratégica. A aplicação empírica dessas considerações será explorada na Seção 2.1.2, fornecendo um contexto prático para esta discussão teórica.

2.1.2 Exemplo de aplicação do modelo CCR e interpretação de resultados

Na seção anterior foram explicadas as diversas nuances do modelo de DEA CCR. Com o propósito de tornar a explicação sobre isso mais didática, aplicaram-se os diferentes modelos matemáticos lineares em uma base de dados simplificada criada pelo autor.

A base de dados utilizada encontra-se na Tabela 1. Ela apresenta a eficiência de diferentes siderúrgicas de aço, considerando ferro e carvão como insumos. Os modelos apresentados anteriormente foram equacionados no apêndice 7.1 e solucionados usando a linguagem de programação Python e a biblioteca PuLP (<https://github.com/coin-or/pulp>).

Os resultados obtidos são apresentados nas tabelas 2 e 3. Observa-se que os níveis de eficiência (θ) são consistentes em todas as variantes do modelo. Contudo, variáveis como λ , v , u , s^+ e s^- apresentam valores distintos, refletindo a orientação escolhida.

Tabela 1 – Exemplo: Aplicação do modelo CCR em Siderúrgicas

DMU	Ferro	Carvão	Aço
S1	40	25	60
S2	50	22.5	90
S3	10	8	20
S4	40	10	40
S5	40	40	80

Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

Por exemplo, os valores de λ na Tabela 3 diferem para S1 entre as orientações de input e output.

Tabela 2 – Exemplo: Resultados da mudança de orientação no modelo CCR primal

DMU	Orientação	θ	v_{ferro}	v_{carvao}	u_{aco}	s_{ferro}^-	s_{carvao}^-	s_{aco}^+
S1	Input	0.789	0.026	0.010	0.017	0	0	16
	Output	0.789	0.020	0.008	0.013	8.421	5.263	0
S2	Input	1	0.017	0.006	0.011	0	0	0
	Output	1	0.017	0.006	0.011	0	0	0
S3	Input	1	0.077	0.029	0.050	0	0	0
	Output	1	0.077	0.029	0.050	0	0	0
S4	Input	1	0.000	0.100	0.025	17.778	0	0
	Output	1	0.000	0.100	0.025	17.778	0	0
S5	Input	1	0.025	0.000	0.013	0	8	0
	Output	1	0.025	0.000	0.013	0	8	0

Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

Tabela 3 – Exemplo: Resultados da mudança de orientação no modelo CCR dual

DMU	Orientação	θ	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	Grupo
S1	Input	0.789	0	0.4	2	0	0	(S2, S3)
	Output	0.789	0	0.316	1.579	0	0	(S2, S3)
S2	Input	1	0	1	0	0	0	(S2)
	Output	1	0	1	0	0	0	(S2)
S3	Input	1	0	0	1	0	0	(S3)
	Output	1	0	0	1	0	0	(S3)
S4	Input	1	0	0.444	0	0	0	(S2)
	Output	1	0	0.444	0	0	0	(S2)
S5	Input	1	0	0	4	0	0	(S3)
	Output	1	0	0	4	0	0	(S3)

Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

As siderúrgicas 2, 3, 4 e 5 demonstram maior eficiência relativa com $\theta = 1$, posicionando-as como candidatas à fronteira de eficiência. Entretanto, conforme Charnes et al. (1978), para compor essa fronteira, além de apresentar eficiência relativa igual a um, a DMU não deve possuir folgas. As folgas para cada DMU são representadas como

s_{ferro}^- , s_{carvao}^- e s_{aco}^+ na Tabela 2. Os valores de folga foram obtidos aplicando os modelos das equações 8.1 a 9.4.

A siderúrgica 4 exibe uma folga de 17.78 unidades no insumo ferro ($s_{ferro}^- = 17.78$), enquanto a siderúrgica 5, com eficiência relativa de um, tem uma folga de 8 unidades em carvão ($s_{carvao}^- = 8$). Devido à presença dessas folgas, conclui-se que essas DMUs não integram a fronteira de eficiência. Por outro lado, as siderúrgicas 2 e 3 compõem essa fronteira, por não possuírem folgas em suas variáveis.

Destaca-se a Siderúrgica 1 por sua eficiência inferior a um. A Tabela 3 mostra que S1 tem como referência as DMUs S2 e S3 (Grupo = (S2,S3)), indicando que a eficiência máxima teórica de S1 é alcançável através da combinação das práticas de S2 e S3, conforme discutido por Piran et al. (2021) e Cook e Zhu (2006). A projeção de S1 é um ponto virtual resultante dessa combinação, localizado próximo à fronteira de eficiência. Matematicamente isso significa que a projeção de S1 pode ser derivada da combinação linear de S2 e S3 (THANASSOULIS, 2001).

As projeções são calculadas aplicando as equações 6.1 e 7.1 da Seção 2.1, utilizando dados das Tabelas 2 e 3. As projeções obtidas são:

- $\widehat{S1}$ (orientada input): ferro = 40, carvão = 25, aço = 76
- $\widehat{S1}$ (orientada output): ferro = 31.576, carvão = 19.737, aço = 60
- $\widehat{S2}$: Coincide com sua própria projeção, estando na fronteira de eficiência.
- $\widehat{S3}$: Coincide com sua própria projeção, estando na fronteira de eficiência.
- $\widehat{S4}$: ferro = 19, carvão = 10, aço = 40
- $\widehat{S5}$: ferro = 40, carvão = 32, aço = 80

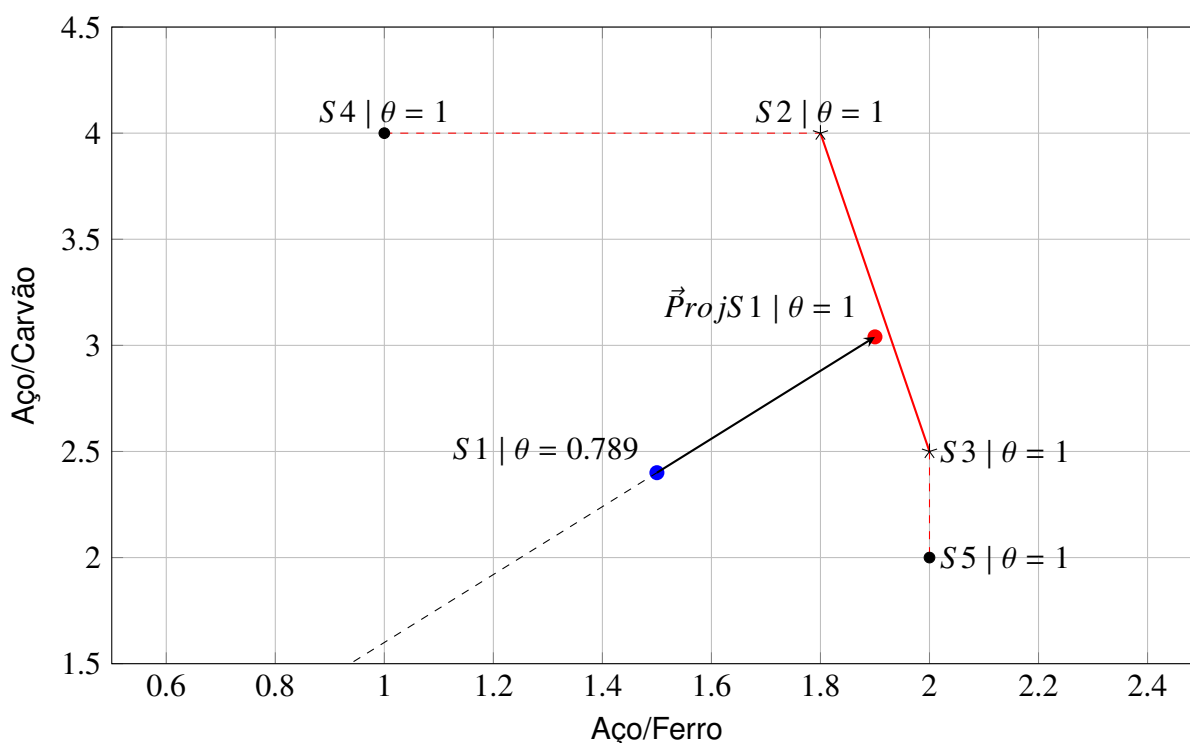
Com base nesses resultados, identifica-se que $\widehat{S4}$, a projeção da Siderúrgica 4, apresenta valores idênticos aos da Siderúrgica 2. Isso sugere que, para atingir a máxima eficiência, a Siderúrgica 4 deveria adotar as práticas implementadas em S2. Aplica-se a mesma lógica em $\widehat{S5}$, a projeção de S5, que possui valores correspondentes aos de S3.

Nota-se também que $\widehat{S1}$ tem duas projeções distintas, refletindo a orientação do modelo. Conforme discutido na Seção 2.1.1, o modelo CCR orientado a inputs enfatiza o aumento dos outputs para a formação da projeção, enquanto o orientado a outputs enfoca a redução dos inputs. Por isso, as projeções encontradas para S1 foram diferentes.

Uma representação geométrica deste modelo é ilustrada na Figura 4, onde se destaca a fronteira de eficiência, marcada em vermelho, que respeita os critérios de concavidade descritos por (COOK; ZHU, 2006).

Na barreira, encontram-se as Siderúrgicas 2, 3, 4 e 5, todas com eficiência relativa de $\theta = 1$. No entanto, apenas as Siderúrgicas 2 e 3 são verdadeiramente eficientes e por isso estão destacadas como uma estrela preta. Como já mencionado anteriormente, a Siderúrgica 4 e 5 são candidatas à barreira de eficiência, mas foram rejeitadas devido a presença de folgas. Por isso elas foram destacadas como pontos pretos. As folgas em

Figura 4 – Exemplo de envelope de eficiência utilizando CCR em uma siderúrgica



Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

S_4 são visíveis geometricamente no eixo horizontal, enquanto a da S_5 , no eixo vertical. A Siderúrgica 1 possui um θ inferior a 1, por estar distante da fronteira de eficiência máxima. Sua projeção aproxima-se da fronteira de eficiência, mas não é colinear. Isso ocorre porque a projeção da Siderúrgica 1 é uma combinação linear das Siderúrgicas 2 e 3. Conforme a teoria de álgebra linear descrita por Steinbruch e Paulo (1987), como as Siderúrgicas 2 e 3 não são ortogonais entre si, não é possível gerar espaço dos números reais pela combinação de seus dois vetores. No entanto, essa é uma limitação específica quando se aplica o DEA com um número reduzido de observações em comparação ao número de dimensões.

Por isso Cooper et al. (2007) sugere seguir a regra empírica da equação (10). Esta regra fornece um critério para evitar a insuficiência de discriminação em análises DEA, um problema conhecido como “curse of dimensionality”. De acordo com a equação (10), onde n representa o número de DMUs, m o número de inputs e s o número de outputs, o modelo exige um número mínimo de DMUs. Este número é determinado com base na quantidade de inputs e outputs. A aplicação deste critério é ilustrada na equação (11) onde observa-se que a base de dados não passou no critério.

$$n \geq \max(m \times s, 3(m + s)) \quad (10)$$

$$5 \geq \max(2 \times 1, 3(2 + 1)) \quad (11)$$

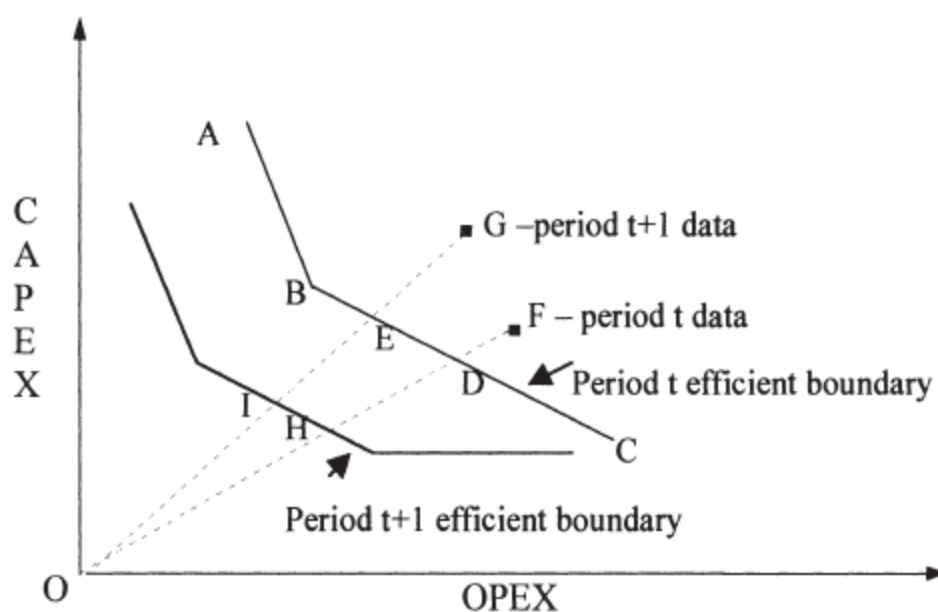
2.2 ÍNDICE DE MALMQUIST

Segundo Cooper et al. (2011), o Índice de Malmquist permite avaliar a evolução ou declínio de uma Unidade de Tomada de Decisão (DMU) ao longo do tempo. Ele é constituído por dois elementos: o efeito de recuperação (catch-up effect) e o efeito de mudança na fronteira (frontier-shift effect).

A representação geométrica do Índice de Malmquist é exemplificada na Figura 5. Esta ilustração permite avaliar a eficiência de um setor entre os períodos t e $t+1$, considerando seu capital (capex) e despesas operacionais (opex). Neste exemplo, o objetivo é a minimização destes indicadores financeiros.

O desempenho da DMU em questão é graficamente representado pelos pontos F no período t e G no período $t+1$. A eficiência relativa da DMU em cada período é calculada como $\frac{OD}{OF}$ para t e $\frac{OI}{OG}$ para $t+1$. Consta-se que a eficiência relativa em $t+1$ é inferior, evidenciada pela maior distância do ponto G da sua fronteira correspondente. Este fenômeno é identificado como efeito de recuperação (catch-up effect).

Figura 5 – Ilustração gráfica Índice de Malmquist



Fonte: (THANASSOULIS, 2001)

Além disso, a Figura indica que a fronteira em $t+1$ está mais próxima da origem, o que sinaliza uma melhoria na barreira de eficiência, por ser um problema de minimização. Esta melhoria é quantificada em relação a G por $\frac{OE}{OG} \div \frac{OI}{OG}$, simplificada como $\frac{OE}{OI}$. Em contrapartida, a mudança na fronteira em relação a F é expressa por $\frac{OD}{OF} \div \frac{OH}{OF}$, simplificada como $\frac{OD}{OH}$. A média geométrica destas razões permite quantificar o efeito de mudança na fronteira (frontier-shift effect).

O Indicador de Malmquist (Malmquist Index - MI) é então obtido pela multiplicação do efeito de recuperação pelo efeito de mudança na fronteira. A expressão matemática é definida na Equação (12).

$$MI = \left(\frac{OI}{OG} \div \frac{OD}{OF} \right) \times \left(\frac{OE}{OI} \cdot \frac{OD}{OH} \right)^{0.5} \quad (12)$$

Como discutido em Coelli et al. (2005), o modelo DEA CCR pode ser utilizado para medir eficiências radiais. Assim, uma adaptação do modelo CCR facilita a determinação dos valores de $\frac{OI}{OG}$, $\frac{OD}{OF}$, $\frac{OE}{OG}$ e $\frac{OH}{OF}$ em situações mais complexas. Esses valores são acessíveis através da função δ . A função delta está descrita nas equações (13.1) a (13.4).

DEA - Malmquist

$$\delta^\alpha((x_o, y_o)^\gamma) = \min \theta \quad (13.1)$$

Sujeito a:

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij}^\alpha \leq \theta x_{io}^\gamma, \quad i = 1, \dots, m; \quad (13.2)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj}^\alpha \geq y_{ro}^\gamma, \quad r = 1, \dots, s; \quad (13.3)$$

$$\lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n. \quad (13.4)$$

Sendo assim, é possível rescrever cada um dos valores obtidos geometricamente por um modelo de DEA. A re-escritura encontra-se a seguir. Note que, realizou-se uma pequena mudança de t para $t-1$ e de $t+1$ para t por uma questão de notação que será útil nas explicações das seções mais adiante no trabalho.

- $\frac{OI}{OG} = \delta^t((x_o, y_o)^t) \rightsquigarrow$ Eficiência da DMU_o em t com a fronteira em t
- $\frac{OD}{OF} = \delta^{t-1}((x_o, y_o)^{t-1}) \rightsquigarrow$ Eficiência da DMU_o em $t-1$ com a fronteira em $t-1$
- $\frac{OE}{OG} = \delta^{t-1}((x_o, y_o)^t) \rightsquigarrow$ Eficiência da DMU_o em t com a fronteira em $t-1$
- $\frac{OH}{OF} = \delta^t((x_o, y_o)^{t-1}) \rightsquigarrow$ Eficiência da DMU_o em $t-1$ com a fronteira em t

Por fim, a equação (14) mostra o cálculo do Índice de Malmquist calculado pelo DEA. Ele também pode ser reescrito no formato apresentado na equação (15), contudo o formato da equação (14) tem como vantagem visualizar como os componentes do efeito de recuperação e mudança na fronteira influenciaram no valor final (COOPER et al., 2011; THANASSOULIS, 2001)

$$MI = \left(\frac{\delta^t((x_o, y_o)^t)}{\delta^{t-1}((x_o, y_o)^{t-1})} \right) \times \left(\frac{\delta^{t-1}((x_o, y_o)^{t-1})}{\delta^t((x_o, y_o)^{t-1})} \cdot \frac{\delta^{t-1}((x_o, y_o)^t)}{\delta^t((x_o, y_o)^t)} \right)^{0.5} \quad (14)$$

$$MI = \left(\frac{\delta^{t-1}((x_o, y_o)^t)}{\delta^{t-1}((x_o, y_o)^{t-1})} \cdot \frac{\delta^t((x_o, y_o)^t)}{\delta^t((x_o, y_o)^{t-1})} \right)^{0.5} \quad (15)$$

3 REVISÃO DE LITERATURA

O artigo de Ghosh et al. (2014) visa avaliar a eficiência dos bancos indianos listados na Bolsa de Valores de Bombaim. A metodologia inclui a DEA e um modelo de Super Eficiência, utilizando dados financeiros públicos dos bancos para avaliar sua eficiência em comparação com outros do setor.

Este artigo se diferencia de outros trabalhos no campo ao utilizar uma abordagem combinada DEA e do Modelo de Super Eficiência para avaliar a eficiência técnica dos bancos indianos. Esta combinação permite uma análise mais detalhada e abrangente das performances dos bancos, identificando não apenas os mais eficientes, mas também aqueles com potencial de melhoria. Além disso, o foco em bancos listados na Bolsa de Valores de Bombaim oferece uma perspectiva única sobre o setor bancário indiano, contribuindo para a literatura existente com novas percepções e benchmarks de eficiência.

O conceito de super eficiência é uma extensão do modelo tradicional de DEA, pois enquanto o padrão identifica se uma unidade é eficiente ou não, comparando-a com um conjunto de unidades similares, o modelo de super eficiência vai além. Ele permite a avaliação de unidades já consideradas eficientes, distinguindo entre as eficientes e as super eficientes. Isso é útil para classificar as unidades eficientes entre si, oferecendo um entendimento mais detalhado do desempenho relativo mesmo entre aquelas que atingem o padrão de eficiência máximo no modelo DEA convencional.

Pelo artigo de Ghosh et al. (2014) é possível notar o DEA sendo utilizado como benchmarking externo. Também, que o DEA pode ser modificado com outras metodologias para suprir uma necessidade específica na avaliação.

Um outro artigo avaliado foi o de Park et al. (2011), que analisa a eficiência das empresas de construção coreanas usando o modelo DEA/Window. O DEA/Window, ou Análise Envoltória de Dados com Janela de Tempo, é uma técnica que permite a análise da eficiência de unidades ao longo do tempo, considerando as mudanças nas condições operacionais e de mercado. No artigo, o DEA/Window é aplicado para avaliar a eficiência de empresas de construção coreanas ao longo de um período de cinco anos (2006-2010). Isso permite uma análise tanto da eficiência estática (em um único ano, 2008) quanto da eficiência dinâmica (ao longo dos cinco anos), oferecendo uma visão mais abrangente das tendências de eficiência nas empresas estudadas. Dele, conclui-se que o estudo fornece insights importantes para a melhoria da eficiência de gestão nas empresas de construção coreanas, destacando a importância da análise de eficiência dinâmica para entender as tendências e a estabilidade no setor.

Por último, o artigo de Rashidi et al. (2014) introduz um modelo adaptado do DEA, através do uso do Índice de Malmquist. O Índice de Malmquist é uma metodologia que possibilita a aplicação do DEA para avaliar a variação da eficiência ao longo do tempo. Ao

contrário de outros estudos, este enfoque permite calcular a evolução da eficiência de uma única entidade ao longo de um período temporal específico. Nesse contexto, a eficiência da Empresa Nacional Iraniana de Petróleo foi calculada para o período compreendido entre 1977 e 1988. Um gráfico da evolução da eficiência ao longo do tempo foi elaborado, evidenciando uma queda na eficiência. Como resultado, pode-se concluir que esse método apresenta valores mais consistentes em comparação com o Índice de Malmquist tradicional.

4 METODOLOGIA

Este estudo realiza uma análise exploratória quantitativa do método DEA, investigando o comportamento do modelo em diversos cenários. A pesquisa inicia com a obtenção e interpretação da base de dados, onde se analisam os KPIs disponíveis. Esta fase é crucial para entender a composição dos KPIs, suas representações numéricas e como eles se estruturam dentro da base de dados.

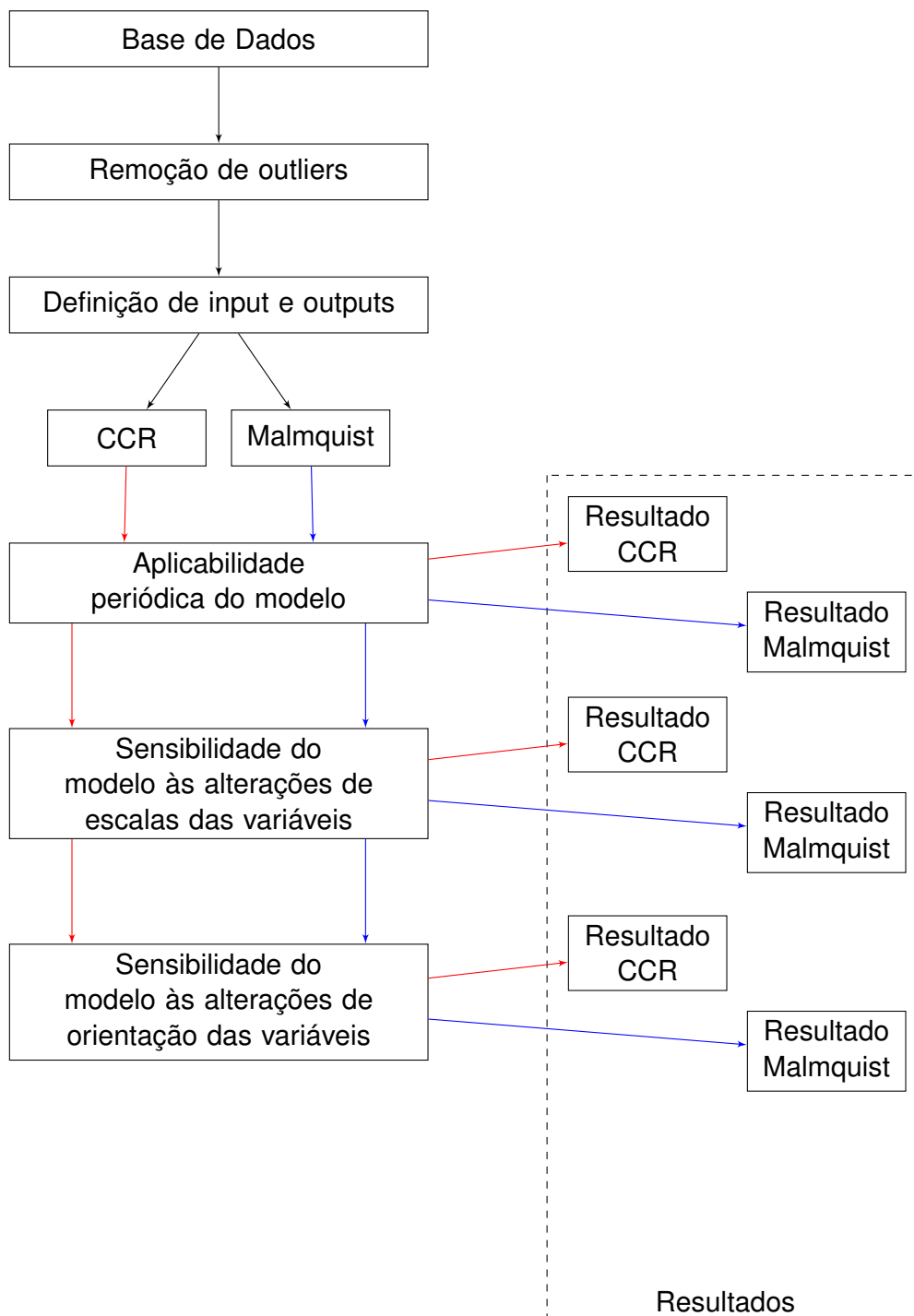
Após a análise inicial, procede-se à remoção de outliers ou valores espúrios. Esta etapa é essencial para garantir a integridade dos dados, eliminando ou ajustando valores que apresentam desvios significativos da distribuição normal esperada. A metodologia adotada para identificar e tratar esses outliers é meticulosamente detalhada, assegurando a precisão da análise subsequente.

Segue-se então a definição de inputs e outputs, um passo fundamental para a aplicação do modelo DEA. A correta categorização dos KPIs, como inputs ou outputs, é crucial para a eficácia do modelo e influencia diretamente os resultados das etapas seguintes. Com os dados devidamente preparados e organizados, os modelos CCR e Malmquist são aplicados em diferentes cenários. Estes cenários são divididos em três grupos de análises exploratórias: a aplicabilidade periódica do modelo, a sensibilidade do modelo às alterações de escalas das variáveis, e a sensibilidade do modelo às alterações de orientações das variáveis. Cada cenário é examinado cuidadosamente para extrair insights relevantes e entender as nuances do modelo DEA.

Finalmente, os resultados obtidos em cada cenário são analisados e compilados. Esta análise proporciona uma visão abrangente do desempenho e eficácia do modelo DEA nas diferentes condições testadas, destacando a flexibilidade e robustez do método.

É importante ressaltar que adaptações foram realizadas nos modelos CCR e Malmquist para atender às especificidades deste estudo. Essas modificações são explicadas em detalhes na seção dedicada à aplicação dos modelos, garantindo transparência e clareza na metodologia adotada.

Figura 6 – Diagrama em blocos da metodologia



Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

5 ANÁLISE EXPLORATÓRIA: APLICAÇÃO DEA PARA AVALIAÇÃO DE DESEMPENHO DA LOGÍSTICA DE OUTBOUND NO ARMAZÉM

5.1 APRESENTAÇÃO DO ESTUDO DE CASO

Este trabalho visa avaliar o desempenho da Logística de Outbound de uma empresa de Joinville, Santa Catarina, especializada na produção de metais sanitários de alta qualidade. A empresa atende tanto o mercado nacional quanto o internacional.

O armazém dessa operação possui uma área de 4000 m², é responsável pelo despacho de 95% dos produtos fabricados pela empresa. Nele, a logística de *outbound* é responsável pelas atividades desde a separação e embalagem dos produtos, carregamento dos caminhões, até as entregas de produtos aos clientes.

Para medir a eficiência da logística de outbound da empresa, o gestor conta com uma série de indicadores e KPIs (Key Performance Indicators). Como descrito por Parmenter (2015) KPI são medidas financeiras e não financeiras que são usadas para definir e avaliar o sucesso de uma organização. Dentre o conjunto de indicadores mensurados na logística de outbound, serão avaliados neste trabalho oito KPIs utilizados pelo gestor para reportar o desempenho da logística de outbound à diretoria da empresa. O Quadro 1 apresenta os indicadores avaliados e suas respectivas equações, assim como os acrônimos que serão utilizados ao longo do trabalho.

Quadro 1 – Indicadores de desempenho da logística de outbound

Acrônimo	Nome do Indicador	Unidade do Indicador	Equação
PDS	Productivity in SKU's	$\frac{\text{SKU's embalados}}{\text{hora homem}}$	$\frac{\text{número SKU's embalados}}{\text{horas trabalhadas}}$
PDR	Productivity in pieces	$\frac{\text{Peças embaladas}}{\text{hora homem}}$	$\frac{\text{número peças embaladas}}{\text{horas trabalhadas}}$
TP	Performance of transportation	%	$\frac{\text{pedidos entregues no prazo}}{\text{total de pedidos entregues}}$
SL	Service Level	%	$\frac{\text{pedidos despachados no prazo}}{\text{total de pedidos despachados}}$
OTIF	On time in full	%	$\frac{\text{pedidos no prazo}}{\text{total de pedidos entregues}}$
FC	Freight cost from net operating revenue	%	$\frac{\text{despesas de frete}}{\text{receita líquida operacional}}$
STOCK	Estoque de produtos acabados	dias de receita operacional líquida	$\frac{\text{estoque de produtos acabados (\$)} \times 360}{\text{receita operacional líquida anual}}$
ABSE	Absentismo	%	$\frac{\text{horas não trabalhadas}}{\text{total de horas}}$

Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

5.2 ANÁLISE DOS DADOS E DEFINIÇÃO DOS INPUTS E OUTPUTS DO MODELO

Os dados fornecidos pela empresa abrangem um período de cinco anos, de Janeiro de 2014 a Dezembro de 2018, e consistem em 60 registros mensais. Nela, aplicou-se uma análise e remoção de outliers, definidos como valores além da média ± 3 desvios padrões. Foram identificados três outliers e substituídos pelo valor máximo encontrado na série, uma vez que excediam o limite superior.

A Tabela 4 apresenta um resumo estatístico da base de dados, com valores médios, máximos, mínimos e desvio padrão.

Tabela 4 – Resumo estatístico da base de dados

	PDS	PDR	FC	TP	SL	OTIF	STOCK	ABSE
Mín	35	330	1.50%	81.90%	72.60%	66.70%	7	0%
Máx	48	513	2.20%	97.20%	96.10%	95.00%	18	2.90%
Média	43.18	421.82	1.80%	92.80%	89.10%	86.10%	12.88	1.00%
DP	2.79	41.47	0.10%	3.20%	5.90%	6.50%	2.02	0.70%

Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

Para fins de aplicação da metodologia DEA, é importante destacar outras características dos dados tais como:

- Presença de indicadores absolutos (PDS, PDR, STOCK) e relativos (FC, TP, SL, OTIF, ABSE).
- Diferenças significativas de escala entre os indicadores, especialmente entre PDR e (FC, ABSE).
- Ausência de indicadores com valores negativos.
- Presença de indicadores com valores nulos.

Para a modelagem do DEA, cada observação da base de dados (linhas) foi tratada como uma DMU. Portanto, serão avaliadas 60 DMUs, ou seja os 60 meses de operações. Inicialmente, é necessário avaliar se a base de dados fornecida possui um número mínimo de DMUs para a aplicação do método. A equação (16), baseada na equação (10) apresentada na Seção 2.1.2, demonstra que a base de dados está adequada para a aplicação.

$$60 \geq \max(3 \times 5, 3(3 + 5)) \quad (16)$$

Por último, deve-se definir quais variáveis serão inputs e outputs do modelo. Neste trabalho, a orientação das variáveis seguiu a estratégia da empresa, no sentido de que indicadores que devem ser minimizados são definidos como inputs e indicadores que devem ser maximizados são definidos como outputs.

Assim, os indicadores FC, STOCK e ABSE são definidos como inputs, com a premissa de que a minimização destes indicadores melhora a eficiência. Por outro lado, PDS, PDR, TP, SL e OTIF foram considerados outputs, visando a maximização para o benefício da eficiência da logística de outbound. Essas definições são apresentadas no Quadro 2.

Quadro 2 – Orientação variáveis

Orientação	Variável				
Output	PDS	PDR	TP	SL	OTIF
Input	STOCK	FC	ABSE		

Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

A classificação de STOCK – % de estoque em relação ao ROL anual da empresa – como input é discutível, pois, dependendo da estratégia da empresa, ter estoques muito baixos pode levar a ruptura e não-atendimento dos clientes. Contudo, a empresa foco do estudo tem como meta um teto máximo para este indicador, o que foi interpretado neste estudo como variável input.

5.3 DEFINIÇÃO DO MÉTODO DEA E INDICADORES PARA AVALIAÇÃO DOS RESULTADOS

A literatura utiliza os modelos clássicos de DEA majoritariamente para a realização de benchmarking (entre empresas, entre unidades da mesma empresa, entre linhas de produção da mesma fábrica). Porém, este trabalho se difere dos demais na aplicação do DEA CCR para avaliação de eficiência periódica de uma mesma DMU. Isso ocorre pois uma característica desejada na prática empresarial é avaliar o seu desempenho global na mesma periodicidade que os KPIs são mensurados. Assim, o objetivo deste estudo é avaliar a aplicação do DEA como um indicador de eficiência passível de ser atualizado mensalmente, fornecendo ao gestor uma comparação do seu desempenho global ao longo do tempo.

Para a avaliação dos resultados, é importante realizar uma análise tanto da sensibilidade da eficiência global assim como da aplicabilidade prática. Estes aspectos são considerados:

1. **Aplicabilidade Periódica do Modelo:** Este aspecto visa avaliar a eficácia do modelo em atualizações periódicas, essenciais devido à geração mensal de novos KPIs pela empresa. Um modelo que facilite a interpretação e a comparação de eficiência mês a mês será considerado mais adequado.

2. **Sensibilidade do Modelo às Alterações de Escala das Variáveis:** Este aspecto investiga a sensibilidade do modelo frente às variações na escala das variáveis. Um modelo menos sensível a tais alterações é considerado mais robusto.
3. **Sensibilidade do Modelo às Alterações de Orientação das Variáveis:** Verifica-se a adaptabilidade do modelo frente às mudanças na orientação das variáveis. Como exemplificado no Quadro 2, Seção 5.2, variáveis como FC, TP, SL, OTIF e ABSE são relativas. Portanto, é possível alterar sua orientações. Por exemplo, ABSE, que representa absentéismo, pode ser transformado em ASSD (assiduidade) através da fórmula $ASSD = \overline{ABSE} = 1 - ABSE$.

A análise será conduzida utilizando o DEA dual orientado a output para os pontos 1 a 3. Esta escolha foi arbitrária, visto que, como revelado na Seção 2, variações do modelo não atteram os resultados de eficiência (θ).

A Figura 6 ilustra a metodologia da avaliação dos aspectos mencionados. Nela, é possível notar que cada um dos aspectos terão resultados e que esses resultados juntos serão avaliados para identificar pontos positivos e negativos no uso da metodologia como um indicador global de eficiência.

5.4 AMBIENTE DE APLICAÇÃO E AVALIAÇÃO DOS MODELOS

Para a aplicação e avaliação dos modelos, foi utilizada a linguagem de programação Python e a biblioteca PuLP. Python é uma linguagem de programação conhecida por sua simplicidade e legibilidade, tornando-a particularmente popular para o desenvolvimento (PYTHON, 2023). Entre as bibliotecas disponíveis para Python, a PuLP se destaca no campo da otimização, sendo uma opção gratuita e de código aberto que permite criar e resolver modelos de otimização.

A literatura utilizada como referência para a modelagem nos modelos CCR foi (COOK; ZHU, 2006). Para assegurar a correta implementação dos modelos CCR, testou-se o programa com base nas literaturas Toloo (2021), Bradley et al. (1977), Seiford (1996) e Piran et al. (2021). Além disso, realizou-se uma comparação de resultados com o software OSDEA (<https://opensourcedea.org/>), um software livre focado em aplicação DEA. Em todos os casos, os resultados encontrados estavam em conformidade com a implantação utilizada nesta análise.

No caso do modelo do Índice Malmquist, a literatura de referência incluiu Coelli et al. (2005) e Lovell (2003). O programa também foi verificado com as literaturas Cooper et al. (2011) e Thanassoulis (2001).

5.5 AVALIAÇÃO DOS RESULTADOS - APLICABILIDADE PERIÓDICA DO MODELO

No início de cada mês, a empresa realiza o fechamento de seus indicadores, tornando necessária a atualização das métricas para avaliar o desempenho do mês anterior. Nesse contexto, é importante que um indicador de avaliação global seja capaz de se adaptar a atualizações periódicas.

Para testar essa aplicabilidade, realizou-se uma simulação na base de dados. Nela, 36 dos 60 meses foram reservados como histórico inicial. A partir desse histórico, foi realizada uma simulação mensal de atualização dos indicadores para observar o desempenho do modelo.

5.5.1 Aplicabilidade Periódica do Modelo CCR

Neste experimento, empregou-se o Modelo DEA CCR orientado à output para simular uma aplicação mensal na aferição de eficiências. Estabeleceu-se o início do período em Janeiro de 2017, correspondendo ao DMU 37 na base de dados e o período de Dezembro de 2018 como o final, último registro de dados. A lógica utilizada para construir um indicador mensal está descrito no algoritmo 1.

Algoritmo 1 – Função para Cálculo do modelo CCR adaptado para Eficiência Temporal

```

1: function CALCULAREFICIENCIASCCR(DMU)
2:   ListaEficiencias ← {}
3:   for  $t = 37$  até 60 do
4:      $X \leftarrow$  inputs de  $DMU_1$  até  $DMU_t$ 
5:      $Y \leftarrow$  outputs de  $DMU_1$  até  $DMU_t$ 
6:      $x_t \leftarrow$  inputs de  $DMU_t$ 
7:      $y_t \leftarrow$  outputs de  $DMU_t$ 
8:      $EficienciaRelativa_t \leftarrow$  CCR( $X, Y, x_t, y_t$ )
9:     ListaEficiencias ← ListaEficiencias  $\cup$  { $EficienciaRelativa_t$ }
10:  end for
11:  retorne ListaEficiencias
12: end function

```

Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

Ressalta-se que teorizou-se duas abordagens distintas para a aplicação periódica do modelo DEA CCR. A primeira abordagem propõe a aplicação mensal do modelo para avaliar a eficiência relativa do mês corrente, bem como de todos os meses anteriores. Esta metodologia permitiria uma revisão contínua da série temporal de eficiência. Entretanto, um dos desafios inerentes a esta abordagem reside na necessidade de atualização constante da eficiência dos meses precedentes. Considera-se isso como uma limitação nessa abordagem, uma vez que a reavaliação periódica dos meses anteriores a cada atualização pode levar a mudança de eficiência dos meses, após a atualização. Por exemplo, um mês particularmente eficiente, inicialmente avaliado com eficiência 1, poderia ter sua eficiência

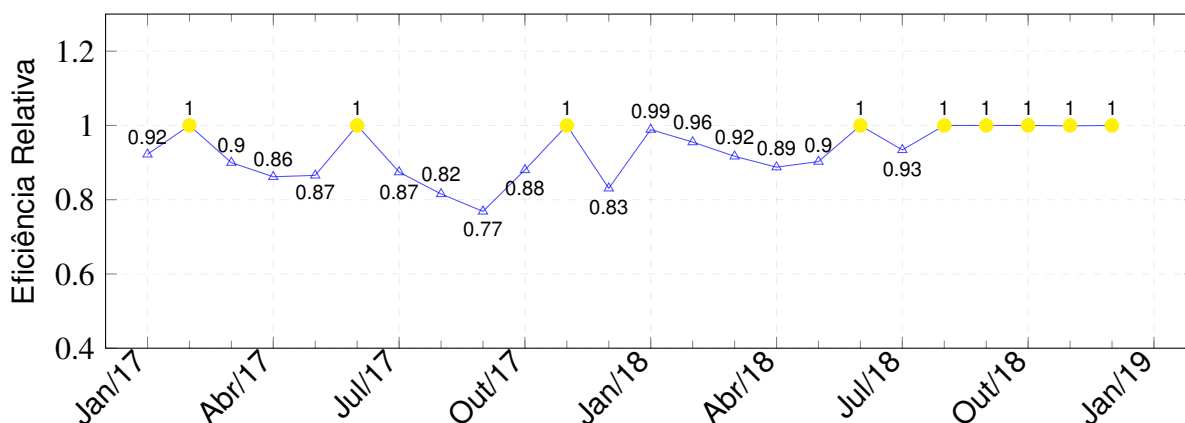
reajustada para um valor inferior em função da ocorrência subsequente de um mês com desempenho ainda mais elevado.

A metodologia adotada neste trabalho é diferente. Ela consiste em avaliar mensalmente apenas o último mês em comparação com os meses anteriores. Esta abordagem ignora a reavaliação da eficiência dos meses precedentes. A preferência por esta metodologia fundamenta-se em evitar ter um gráfico de eficiências que muda a cada atualização. Pode-se imaginar esta metodologia como o uma captura instantânea de eficiência realizada. A serie temporal é o acúmulo mês a mês dessa captura.

Os resultados da aplicação mensal são apresentados na Figura 7. Cada ponto é uma espécie de foto da eficiência relativa do mês (DMU) relativo aos demais meses anteriores.

Na imagem, observa-se a presença de pontos próximos à eficiência relativa de um, denotando meses nos quais o operação operou no limiar de eficiência máxima. No gráfico, os pontos em amarelo destacam os meses que, conforme a metodologia do DEA CCR, alcançaram eficiência máxima sem apresentar folgas, integrando, portanto, a fronteira de eficiência máxima. Nota-se uma sequência notável de cinco meses no término da simulação, apresentando eficiência igual a um.

Figura 7 – Comparação do CCR aplicado nos dados de Junho a Dezembro de 2018 para avaliação na aplicabilidade periódica do modelo



Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

Apesar da utilidade do método DEA CCR na mensuração da eficiência relativa, sua aplicação periódica revela uma peculiaridade: a eficiência máxima não excede o valor de 1, mesmo com meses consecutivamente mais eficientes, evidenciando uma descontinuidade temporal entre os resultados mensais. Assim, a aplicação periódica do modelo DEA CCR pode oferecer uma interpretação contra-intuitiva na análise de eficiência ao longo do tempo. Por exemplo, em um cenário de melhoria operacional contínua de 5% ao mês, alcançando patamares de eficiência inéditos, a quantificação dessa evolução ope-

racional seria desafiadora, uma vez que, segundo a metodologia DEA CCR, a eficiência mensal resultaria sempre em 100%, e não 105%, valor intuitivamente esperado.

5.5.2 Aplicabilidade Periódica do Índice de Malmquist

Na aplicação do Índice de Malmquist, verifica-se a evolução da eficiência relativa ao longo do período de Janeiro de 2017 a Dezembro de 2018. A análise temporal, realizada por meio do Índice de Malmquist, foi conduzida de maneira comparativa, mês a mês, com o objetivo de avaliar a variação da eficiência entre o mês t e o mês anterior $t - 1$.

Notou-se que nestas referências bibliográficas Cooper et al. (2011), Thanassoulis (2001) e Coelli et al. (2005) o Índice de Malmquist é empregado em contextos que visam analisar a evolução de uma entidade ao longo do tempo, em relação a outras entidades, também chamados de dados tabulares. No entanto, neste estudo, o foco recai exclusivamente na avaliação ao longo do tempo da entidade com ela mesma, o que levou a adaptações no método para assegurar sua aplicabilidade.

A expressão do Índice de Malmquist é representada pela Equação (17), que consiste em uma composição de multiplicações e divisões da função δ .

$$MI = \left[\frac{\delta^{t-1}((x_o, y_o)^t)}{\delta^{t-1}((x_o, y_o)^{t-1})} \times \frac{\delta^t((x_o, y_o)^t)}{\delta^t((x_o, y_o)^{t-1})} \right]^{1/2} \quad (17)$$

De forma genérica, a função δ pode ser formulada como $\delta^\alpha((x_o, y_o)^\gamma)$. A interpretação desta função é a seguinte: ela avalia a eficiência relativa da entidade o no período γ em relação a todas as outras entidades no período α . Uma outra maneira de expressar isso é que a função calcula a eficiência relativa do DMU_o^γ em relação aos $DMU_i^\alpha \mid \forall i$, onde os subscritos indicam a identidade e os sobrescritos indicam o tempo.

Essa função δ é uma espécie de representação mais genérica do modelo DEA CCR. Isso ocorre porque, quando α e γ são iguais, a formulação matemática coincide com a do CCR.

No entanto, é importante destacar que este estudo engloba apenas uma entidade que possui diferentes $DMUs$ ao longo do tempo. Portanto, a aplicação da função δ para comparar a eficiência relativa de uma DMU em t com base apenas à outra DMU em $t - 1$ pode apresentar resultados inconsistentes. Embora Cooper et al. (2007) não tenha mencionado explicitamente essa restrição para a função δ , devido às suas semelhanças matemáticas com o modelo testado em seu artigo, é plausível concluir que a avaliação da eficiência relativa de uma DMU com base em apenas outra DMU pode produzir resultados inconsistentes.

Sendo assim, foi necessário modificar o modelo a fim de aumentar o número de $DMUs$ envolvidas na aplicação da função δ . O novo modelo é apresentado na equação (18). Diferentemente da equação (17), nesta nova equação, o parâmetro α da função δ é substituído por um conjunto de períodos temporais representado por T . Isso indica que,

ao contrário do método tradicional que aplica a função δ apenas nas DMUs no tempo t , estamos usando como base de referência para o cálculo da eficiência relativa todo o histórico desde o período t até o passado. O mesmo princípio se aplica a $T - 1$, que representa um histórico de DMU do período $t - 1$ até o passado.

$$MI = \left[\frac{\delta^{T-1}((x_o, y_o)^t)}{\delta^{T-1}((x_o, y_o)^{t-1})} \times \frac{\delta^T((x_o, y_o)^t)}{\delta^T((x_o, y_o)^{t-1})} \right]^{1/2} \quad (18)$$

O algoritmo 2 foi criado como complemento à explicação. Nele, calcula-se o Índice de Malmquist adaptado a esta pesquisa. Observa-se que é realizada uma iteração de cálculo do indicador para t variando de 36 a 60. O motivo para iniciar o cálculo no período 36 é semelhante ao mencionado na aplicação do CCR, que consiste em ter um número mínimo de DMUs para obter resultados consistentes para a aplicação do modelo do DEA (COOPER et al., 2007).

Algoritmo 2 – Função para Cálculo do Índice de Malmquist Adaptado para Eficiência Temporal

```

1: function CALCULAREFICIENCIASMALMQUIST(DMU)
2:   ListaEficiencias ← {}
3:   for  $t = 36$  até  $60$  do
4:      $X_t$  ← inputs de  $DMU_1$  até  $DMU_t$ 
5:      $X_{t-1}$  ← inputs de  $DMU_1$  até  $DMU_{t-1}$ 
6:      $Y_t$  ← outputs de  $DMU_1$  até  $DMU_t$ 
7:      $Y_{t-1}$  ← outputs de  $DMU_1$  até  $DMU_{t-1}$ 
8:      $x_t$  ← inputs do  $DMU_t$ 
9:      $x_{t-1}$  ← inputs do  $DMU_{t-1}$ 
10:     $y_t$  ← outputs do  $DMU_t$ 
11:     $y_{t-1}$  ← outputs do  $DMU_{t-1}$ 
12:     $\delta^t((x_o, y_o)^t) \leftarrow \delta(X_t, Y_t, x_t, y_t)$ 
13:     $\delta^t((x_o, y_o)^{t-1}) \leftarrow \delta(X_t, Y_t, x_{t-1}, y_{t-1})$ 
14:     $\delta^{t-1}((x_o, y_o)^t) \leftarrow \delta(X_{t-1}, Y_{t-1}, x_t, y_t)$ 
15:     $\delta^{t-1}((x_o, y_o)^{t-1}) \leftarrow \delta(X_{t-1}, Y_{t-1}, x_{t-1}, y_{t-1})$ 
16:     $MI(t) \leftarrow \left[ \frac{\delta^{t-1}((x_o, y_o)^t)}{\delta^{t-1}((x_o, y_o)^{t-1})} \times \frac{\delta^t((x_o, y_o)^t)}{\delta^t((x_o, y_o)^{t-1})} \right]^{1/2}$ 
17:    ListaEficiencias ← ListaEficiencias  $\cup$  { $MI(t)$ }
18:   end for
19:   retorne ListaEficiencias
20: end function

```

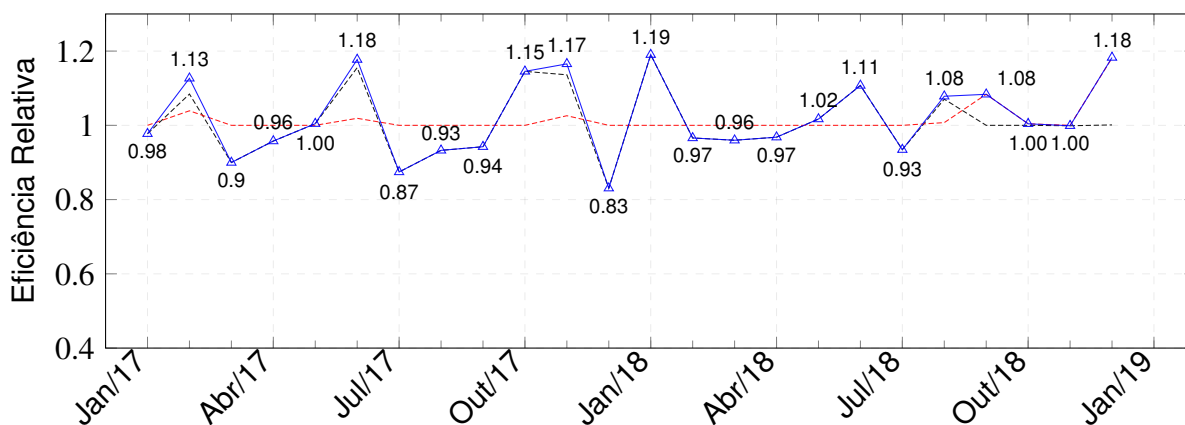
Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

Apesar dessas adaptações, acredita-se que o índice ainda seja capaz de mensurar tanto o catch-up e o frontier-shift effect, sendo esta última avaliada por meio do deslocamento da fronteira de eficiência. No entanto, devido ao fato de a base de dados em t ser uma extensão da base em $t - 1$, isso resulta em um frontier-shift effect que pode ser apenas igual a 1 ou superior. Isso implica que, sob a ótica desse indicador adaptado, somente serão identificadas melhorias na fronteira de eficiência.

Os resultados obtidos com a aplicação do Índice de Malmquist, sob as condições previamente delineadas, estão apresentados na Figura 8. A linha azul contém os resultados do Índice de Malmquist. Dela, observa-se que, ao contrário do DEA, o Índice de Malmquist permite valores superiores a 1, com os pontos mais elevados indicando os meses de maior eficiência. Em preto, indica-se a variação relativa à eficiência técnica, que se refere à capacidade da operação em utilizar seus inputs para atingir seus outputs. Em vermelho, está a mudança na barreira de eficiência, associada à variação da fronteira de eficiência. No gráfico, também foram inseridos rótulos de dados para o resultado do Indicador de Malmquist, para cada mês.

Observa-se na Figura 8 que os valores da eficiência técnica foram os que predominantemente influenciaram no *MI*. Isso porque, a linha tracejada preta encontra-se tampada pela azul, uma vez que elas compartilham muito de seus valores. Nos momentos em que elas não compartilharam os mesmos valores, foi porque o Índice de Malmquist teve um incremento devido ao aumento de fronteira técnica. Esses aumentos são evidenciados nos meses de Fevereiro, Junho, Novembro de 2017 e em Agosto e Dezembro de 2018. Inclusive, em Dezembro de 2018 foi o período com maior aumento tecnológico e *MI* foi majoritariamente composto por ele. Por isso, a linha vermelha tracejada encontra-se abaixo da linha azul.

Figura 8 – Comparação do Índice de Malmquist aplicado nos dados até Junho 2018 e Dezembro de 2018 para avaliação na aplicabilidade periódica do modelo



Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

5.6 SENSIBILIDADE DO MODELO À ALTERAÇÃO DA ESCALA DAS VARIÁVEIS

Neste análise exploratória verificou-se a influência que a escala de algumas variáveis apresentam no resultado final de eficiência relativa.

Para a análise de sensibilidade, selecionaram-se os indicadores mensurados percentualmente, a saber: FC, TP, SL, OTIF e ABSE. Nestas, aplicou-se a multiplicação por

100 para aumentar a escala e verificar o impacto dessa alteração na eficiência do modelo. Optou-se por estas variáveis na avaliação da sensibilidade, devido à observação de sua variação entre 0 a 1, enquanto as demais variáveis do modelo possuem uma amplitude bem maior, conforme apresentado na Tabela 4. Assim, neste experimento, avaliam-se os impactos de uma aproximação de escalas.

Algoritmo 3 – Avaliação da sensibilidade do modelo à alteração da escala das variáveis

```

1: procedure SENSIBILIDADEVARIÁVEIS(DMU, MetodoEficiencia)
2:   BASE ← Base de dados           ▷ Base de dados cuja informação é acessível por
3:                                     ▷  $BASE_i^j$  onde i informa o mês e j o KPI
4:   ListaEfi ← {}                   ▷ Lista com as eficiências periódicas de um experimento
5:   Indice ← {}                       ▷ Índice chave do experimento
6:   ListaExper ← {}                 ▷ Lista com resultado de cada experimento no formato de
7:                                     ▷ {Indice, ListaEficiencia}
8:   for all vTP ∈ {1, 100} do
9:     for all vSL ∈ {1, 100} do
10:      for all vOTIF ∈ {1, 100} do
11:        for all vFC ∈ {1, 100} do
12:          for all vABSE ∈ {1, 100} do
13:            DMU ← BASE
14:            for t = 1 até 60 do
15:               $DMU_t^{TP} \leftarrow DMU_t^{TP} \times vTP$ 
16:               $DMU_t^{SL} \leftarrow DMU_t^{SL} \times vSL$ 
17:               $DMU_t^{OTIF} \leftarrow DMU_t^{OTIF} \times vOTIF$ 
18:               $DMU_t^{FC} \leftarrow DMU_t^{FC} \times vFC$ 
19:               $DMU_t^{ABSE} \leftarrow DMU_t^{ABSE} \times vABSE$ 
20:            end for
21:            ListaEfi ← METODOEFICIENCIA(DMU)
22:            Indice ← “|”.CONCATENA(vTP, vSL, vOTIF, vFC, vABSE)
23:            ListaExper ← ListaExper ∪ {Indice, ListaEfi}
24:          end for
25:        end for
26:      end for
27:    end for
28:  end for
29: end procedure

```

Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

Avaliaram-se cenários distintos, envolvendo possibilidades diferentes, com 5 variáveis assumindo 2 estados distintos: o estado atual, de 0 a 1, e o estado aumentado, de 0 a 100. Ao todo, foram 32 cenários decorrentes do cálculo 2^5 , que representam o número total de combinações. A metodologia para a criação e avaliação dos distintos cenários encontra-se descrita no Algoritmo 3.

O algoritmo primeiro inicializa as estruturas de dados necessárias, como a base de dados (*BASE*), uma lista vazia para armazenar as eficiências periódicas (*ListaEfi*), um

índice para identificar o experimento (*Indice*) e uma lista para armazenar os resultados de cada experimento (*ListaExper*). Em seguida, utiliza cinco laços aninhados, um para cada uma das variáveis: vTP , vSL , $vOTIF$, vFC , $vABSE$. Cada laço percorre os valores 1 e 100 dessas variáveis, gerando todas as combinações possíveis.

Para cada combinação de variáveis, o algoritmo atualiza a base de dados *DMU* multiplicando os valores das variáveis de cada período (t) por vTP , vSL , $vOTIF$, vFC , $vABSE$. Uma vez a base de *DMU* ter sido atualizada, aplica-se um método de eficiência, representado pela função *MetodoEficiencia*. Esse método retorna uma lista temporal de eficiências para o período de Janeiro de 2017 a Dezembro de 2018. Os resultados, juntamente com um índice que representa a combinação de variáveis utilizadas, são armazenados na lista indexada *ListaExper* para análise posterior. Após a conclusão dos laços, todos os 32 cenários são avaliados, e a análise é realizada com base nos resultados armazenados na lista *ListaExper*. Isso permite a comparação e a identificação de possíveis variações significativas na eficiência do modelo de acordo com as diferentes escalas das variáveis.

5.6.1 Resultado de Sensibilidade de Escala das Variáveis no Modelo CCR e Malmquist

Ao realizar a comparação dos resultados obtidos em diferentes cenários, constatou-se que as medidas de eficiência mantiveram-se inalteradas. Dessa forma, infere-se que, neste contexto específico, o modelo CCR e Malmquist não apresenta sensibilidade às variações de escala das variáveis.

Tal achado diverge das expectativas iniciais. Isso se deve ao fato de que Ali et al. (1995) realizou uma análise semelhante, evidenciando alterações significativas nos resultados diante da modificação de escala de uma variável, como a multiplicação por fatores de 100. No artigo, o autor utiliza o modelo BCC, que é uma variação do modelo CCR. Ainda assim, esperava-se obter resultados semelhantes. A diferença entre o modelo CCR e BCC deve-se a seu retorno de escala. CCR possui Constant Return to Scale, enquanto no artigo citado aplicou-se um modelo com retorno variável de escala Variable Return to Scale.

5.7 SENSIBILIDADE DO MODELO ÀS ALTERAÇÕES DE ORIENTAÇÃO DAS VARIÁVEIS

Na seção (5.2), os KPIs PDS, PDR, TP, SL e OTIF foram definidos como outputs, e FC, STOCK e ABSE como inputs. A composição desses KPIs, derivada dos cálculos mensais, está detalhada no Quadro 1. Nota-se que KPIs percentuais podem ser apresentados em formas originais ou complementares, com o valor complementar de uma variável x sendo calculado como $\bar{x} = 1 - x$.

Neste experimento avaliaram-se 32 cenários distintos, onde cada variável poderia adotar seu valor inicial ou complementar. O objetivo era analisar as variações nos resultados do modelo. A metodologia empregada é ilustrada no algoritmo 4, que detalha a abordagem adotada para esta análise.

Algoritmo 4 – Avaliação da sensibilidade do modelo à alteração das orientações das variáveis

```

1: procedure SENSIBILIDADEORIENTACAO(DMU, MetodoEficiencia)
2:   BASE ← Base de dados           ▶ Base de dados cuja informação é acessível por
3:                                   ▶  $BASE_i^j$  onde i informa o mês e j o KPI
4:   ListaEfi ← {}                 ▶ Lista com as eficiências periódicas de um experimento
5:   Indice ← {}                   ▶ Índice chave do experimento
6:   ListaExper ← {}              ▶ Lista com resultado de cada experimento no formato de
7:                                   ▶ {Indice, ListaEficiencia}
8:   for all vTP ∈ {0, 1} do
9:     for all vSL ∈ {0, 1} do
10:      for all vOT ∈ {0, 1} do
11:        for all vFC ∈ {0, 1} do
12:          for all vAB ∈ {0, 1} do
13:            DMU ← BASE
14:            for t = 1 até 60 do
15:               $DMU_t^{TP} \leftarrow (1 - vTP) \times DMU_t^{TP} + vTP \times (1 - DMU_t^{TP})$ 
16:               $DMU_t^{SL} \leftarrow (1 - vSL) \times DMU_t^{SL} + vSL \times (1 - DMU_t^{SL})$ 
17:               $DMU_t^{OT} \leftarrow (1 - vOT) \times DMU_t^{OT} + vOT \times (1 - DMU_t^{OT})$ 
18:               $DMU_t^{FC} \leftarrow (1 - vFC) \times DMU_t^{FC} + vFC \times (1 - DMU_t^{FC})$ 
19:               $DMU_t^{AB} \leftarrow (1 - vAB) \times DMU_t^{AB} + vAB \times (1 - DMU_t^{AB})$ 
20:            end for
21:            ListaEfi ← METODOEFICIENCIA(DMU)
22:            Indice ← “|”.CONCATENA(vTP, vSL, vOT, vFC, vAB)
23:            ListaExper ← ListaExper ∪ {Indice, ListaEfi}
24:          end for
25:        end for
26:      end for
27:    end for
28:  end for
29: end procedure

```

Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

Nota: As variáveis OTIF e ABSE foram abreviadas para OT e AB respectivamente com o objetivo de deixar o código visualmente mais organizado.

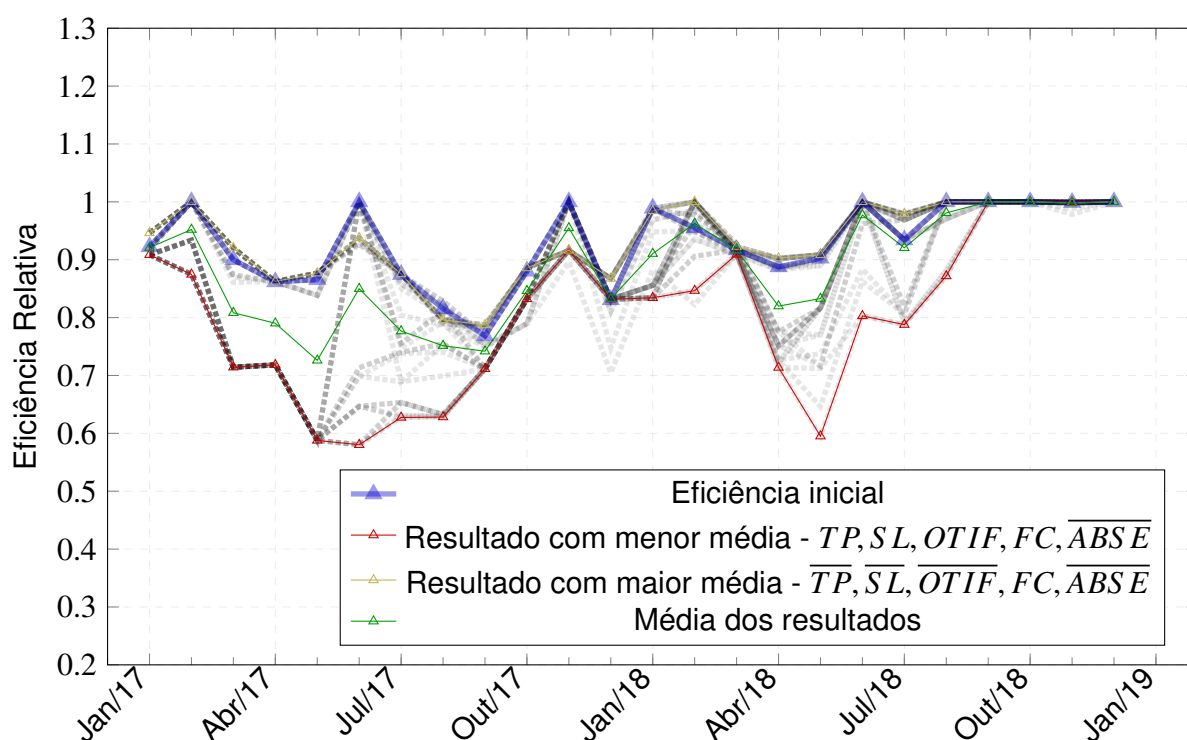
O algoritmo implementa cinco loops aninhados, correspondendo a cada variável manipulada: *vTP*, *vSL*, *vOT*, *vFC*, *vAB*. Cada loop explora os valores 0 e 1, gerando todas as combinações possíveis de cenários. A base de dados *DMU* é atualizada para cada conjunto de variáveis conforme a fórmula: $DMU_t^{KPI} = (1 - vKPI) \times DMU_t^{KPI} + vKPI \times (1 - DMU_t^{KPI})$. Esta abordagem matemática foi apresentada por Hillier e Lieberman (2013)

e permite alternar entre o valor original e o complementar de DMU_i^{KPI} . Posteriormente, aplica-se um método de eficiência, representado por *MetodoEficiencia*, à base de dados atualizada. Os resultados são armazenados na lista *ListaExper*, junto com um índice indicativo da combinação de variáveis utilizada. Completados os loops, os 32 cenários são analisados, permitindo uma comparação detalhada dos resultados armazenados.

5.7.1 Sensibilidade dado à alterações de orientação das Variáveis no Modelo CCR

Observou-se uma variação significativa na eficiência relativa entre as diferentes orientações das variáveis. Tal variação é ilustrada na Figura 9, exibindo todas as 32 séries temporais de eficiência. Destaca-se a disparidade entre os resultados, particularmente notável em meados de 2017 e 2018, com algumas séries atingindo valores próximos a 100%, enquanto outras registram eficiências relativas consideravelmente inferiores, aproximadamente 60%. Intervalos temporais específicos, como o período entre Setembro e Dezembro de 2018, demonstram resultados notavelmente próximos. Em contrapartida, os meses de Maio, Junho e Julho de 2017 apresentam maior variabilidade. Para quantificar a proximidade entre os valores em cada período, utilizou-se o cálculo do desvio padrão entre os pontos do mesmo mês. Períodos com desvio padrão elevado indicam maior variância nos resultados, enquanto um desvio padrão reduzido sugere menor variância.

Figura 9 – Comparação do DEA CCR sob diferentes orientações de variáveis



Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

No gráfico, algumas séries temporais foram coloridas para destacar tendências em específico. Em azul, mostra-se qual foi o resultado obtido da configuração inicial, que foi apresentada na Seção 5.5, para ter um parâmetro de comparação. A série temporal em vermelho mostra qual das séries temporais teve a menor média aritmética. Dela, obtêm-se 0.80, o que indicaria que a logística de outbound estaria em média operado a 80% da eficiência relativa máxima. Dentre todos os cenários, esse seria o cenário mais pessimista. Em amarelo, está o cenário cuja média aritmética da serie temporal foi a maior. Nela, obteve-se 0.93, o que indica que a logística em média operou a 0.93% da sua capacidade relativa máxima durante esse período. Esse cenário pode ser considerado o mais otimista. Por último, em verde, mostra uma outra série temporal, que não fazia parte dos cenários analisados, pois é a média entre os resultados dados pelos diferentes cenários. Dela, observa-se a tendência média global (dentre os cenários). Sua eficiência média é de 89%, o que indicaria que em média o armazém operou nesse nível de eficiência, diante todos os cenários.

Dada a variação observada na Figura 9, e considerando a diferença de 13 pontos percentuais entre as maiores e menores médias de eficiência relativa (0.93 - 0.80), conclui-se que a orientação das variáveis exerce influência significativa nos resultados do modelo CCR. A Tabela 5 busca ilustrar como cada alteração na orientação das variáveis afeta o resultado.

Para o cálculo, inicialmente os resultados foram divididos em dois grupos de 16. O primeiro grupo inclui cenários com a variável em sua forma original, enquanto o segundo grupo abrange cenários com a variável em sua forma complementar. Foram calculadas as médias dos valores mínimos, médios, máximos e do desvio padrão das séries temporais para cada grupo. A última coluna da tabela apresenta a diferença entre os valores obtidos para os dois grupos, evidenciando o impacto (ou não) da escolha do KPI complementar nos resultados das séries temporais.

A análise da Tabela 5 indica que a alteração da variável de sua forma original para a complementar não produz mudanças significativas nos resultados, de forma isolada. Para identificar possíveis motivos nos resultados terão que ser aplicados métodos diferentes.

A Figura 10 ilustra o cálculo para a variável absentismo, com experimentos divididos entre aqueles com absentismo complementar (parte superior) e sem absentismo complementar (parte inferior). Para cada grupo, foram calculadas as médias dos indicadores de valor máximo, médio, mínimo e desvio padrão. Estes dados correspondem às informações apresentadas na coluna Diferença da Tabela 5.

Tabela 5 – Impacto da mudança de orientações nos resultados de eficiência por DEA CCR

KPI	Análise	Inicial	Complementar	Diferença
TP	Max	1.0	1.0	0.0
	μ	0.885	0.887	0.002
	Min	0.679	0.675	-0.004
	σ	0.102	0.102	0.0
SL	Max	1.0	1.0	0.0
	μ	0.883	0.889	0.006
	Min	0.679	0.675	-0.004
	σ	0.101	0.103	0.002
OTIF	Max	1.0	1.0	0.0
	μ	0.882	0.891	0.009
	Min	0.679	0.675	-0.003
	σ	0.101	0.103	0.003
FC	Max	1.0	1.0	0.0
	μ	0.926	0.847	-0.079
	Min	0.768	0.586	-0.182
	σ	0.072	0.132	0.061
ABSE	Max	1.0	1.0	0.0
	μ	0.893	0.88	-0.013
	Min	0.67	0.684	0.015
	σ	0.102	0.102	-0.001

Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

5.7.2 Sensibilidade dado à alterações de orientação das Variáveis no Índice de Malmquist

Os resultados obtidos pelo Índice de Malmquist também demonstraram sensibilidade à alteração das orientações das variáveis, similarmente ao observado no modelo CCR. Os diferentes cenários estão detalhados na Figura 11, seguindo a mesma coloração empregada na Figura 9. Destacam-se alguns cenários específicos: em azul, o cenário inicial descrito na Seção 5.5; em vermelho, o cenário com a menor média ao longo dos anos; e em amarelo, o cenário com a maior média. Estes representam, respectivamente, os cenários mais pessimista e otimista de análise de eficiência.

No gráfico, observa-se que certos períodos apresentam eficiências mais uniformes entre os cenários. Janeiro de 2017 e Outubro e Novembro de 2018 foram os períodos com menor variância entre os cenários. Embora não idênticos, esses resultados assemelham-se aos encontrados no modelo CCR, indicando menor variação nesses períodos comparativamente aos demais. Os períodos de Maio, Junho e Julho de 2017, por outro lado, exibiram a maior variabilidade de dados na Figura 11, coincidindo com os observados no CCR, reforçando a semelhança entre as respostas dos dois modelos.

Figura 10 – Comparação dos resultados CCR DEA sob diferentes orientações de variáveis

Experimentos	Max	μ	Min	σ
$\overline{TP, SL, OTIF, FC, ABSE}$	1.0	0.926	0.782	0.064
$\overline{TP, SL, OTIF, \overline{FC}, ABSE}$	1.0	0.804	0.58	0.138
$\overline{TP, SL, \overline{OTIF}, FC, ABSE}$	1.0	0.931	0.787	0.065
$\overline{TP, SL, OTIF, FC, \overline{ABSE}}$	1.0	0.836	0.58	0.142
$\overline{TP, \overline{SL}, OTIF, FC, ABSE}$	1.0	0.928	0.783	0.065
$\overline{TP, \overline{SL}, OTIF, \overline{FC}, ABSE}$	1.0	0.829	0.58	0.14
$\overline{TP, \overline{SL}, \overline{OTIF}, FC, ABSE}$	1.0	0.932	0.787	0.066
$\overline{TP, \overline{SL}, \overline{OTIF}, \overline{FC}, ABSE}$	1.0	0.844	0.58	0.144
$\overline{\overline{TP}}, SL, OTIF, FC, ABSE$	1.0	0.926	0.782	0.064
$\overline{\overline{TP}}, SL, OTIF, \overline{FC}, ABSE$	1.0	0.812	0.588	0.128
$\overline{\overline{TP}}, SL, \overline{OTIF}, FC, ABSE$	1.0	0.931	0.787	0.065
$\overline{\overline{TP}}, SL, \overline{OTIF}, \overline{FC}, ABSE$	1.0	0.842	0.588	0.137
$\overline{\overline{TP}}, \overline{SL}, OTIF, FC, ABSE$	1.0	0.928	0.783	0.065
$\overline{\overline{TP}}, \overline{SL}, OTIF, \overline{FC}, ABSE$	1.0	0.832	0.588	0.136
$\overline{\overline{TP}}, \overline{SL}, \overline{OTIF}, FC, ABSE$	1.0	0.932	0.787	0.066
$\overline{\overline{TP}}, \overline{SL}, \overline{OTIF}, \overline{FC}, ABSE$	1.0	0.847	0.588	0.139
$\overline{TP, SL, OTIF, FC, ABSE}$	1.0	0.929	0.768	0.071
$\overline{TP, SL, OTIF, \overline{FC}, ABSE}$	1.0	0.834	0.588	0.132
$\overline{TP, SL, \overline{OTIF}, FC, ABSE}$	1.0	0.931	0.768	0.073
$\overline{TP, SL, \overline{OTIF}, \overline{FC}, ABSE}$	1.0	0.858	0.588	0.129
$\overline{TP, \overline{SL}, OTIF, FC, ABSE}$	1.0	0.931	0.768	0.071
$\overline{TP, \overline{SL}, OTIF, \overline{FC}, ABSE}$	1.0	0.858	0.588	0.127
$\overline{TP, \overline{SL}, \overline{OTIF}, FC, ABSE}$	1.0	0.925	0.748	0.076
$\overline{TP, \overline{SL}, \overline{OTIF}, \overline{FC}, ABSE}$	1.0	0.866	0.588	0.128
$\overline{\overline{TP}}, SL, OTIF, FC, ABSE$	1.0	0.922	0.753	0.079
$\overline{\overline{TP}}, SL, OTIF, \overline{FC}, ABSE$	1.0	0.854	0.588	0.126
$\overline{\overline{TP}}, SL, \overline{OTIF}, FC, ABSE$	1.0	0.923	0.749	0.082
$\overline{\overline{TP}}, SL, \overline{OTIF}, \overline{FC}, ABSE$	1.0	0.876	0.588	0.124
$\overline{\overline{TP}}, \overline{SL}, OTIF, FC, ABSE$	1.0	0.922	0.753	0.082
$\overline{\overline{TP}}, \overline{SL}, OTIF, \overline{FC}, ABSE$	1.0	0.873	0.588	0.124
$\overline{\overline{TP}}, \overline{SL}, \overline{OTIF}, FC, ABSE$	1.0	0.898	0.704	0.091
$\overline{\overline{TP}}, \overline{SL}, \overline{OTIF}, \overline{FC}, ABSE$	1.0	0.881	0.588	0.124

\overline{ABSE}
<i>Média(Max)</i> = 1.0
<i>Média(μ)</i> = 0.88
<i>Média(Min)</i> = 0.684
<i>Média(σ)</i> = 0.102

↓
↓
↓

<i>Diferença</i>
<i>Média(Max)</i> = 0.0
<i>Média(μ)</i> = -0.013
<i>Média(Min)</i> = 0.015
<i>Média(σ)</i> = -0.001

↑
|
|

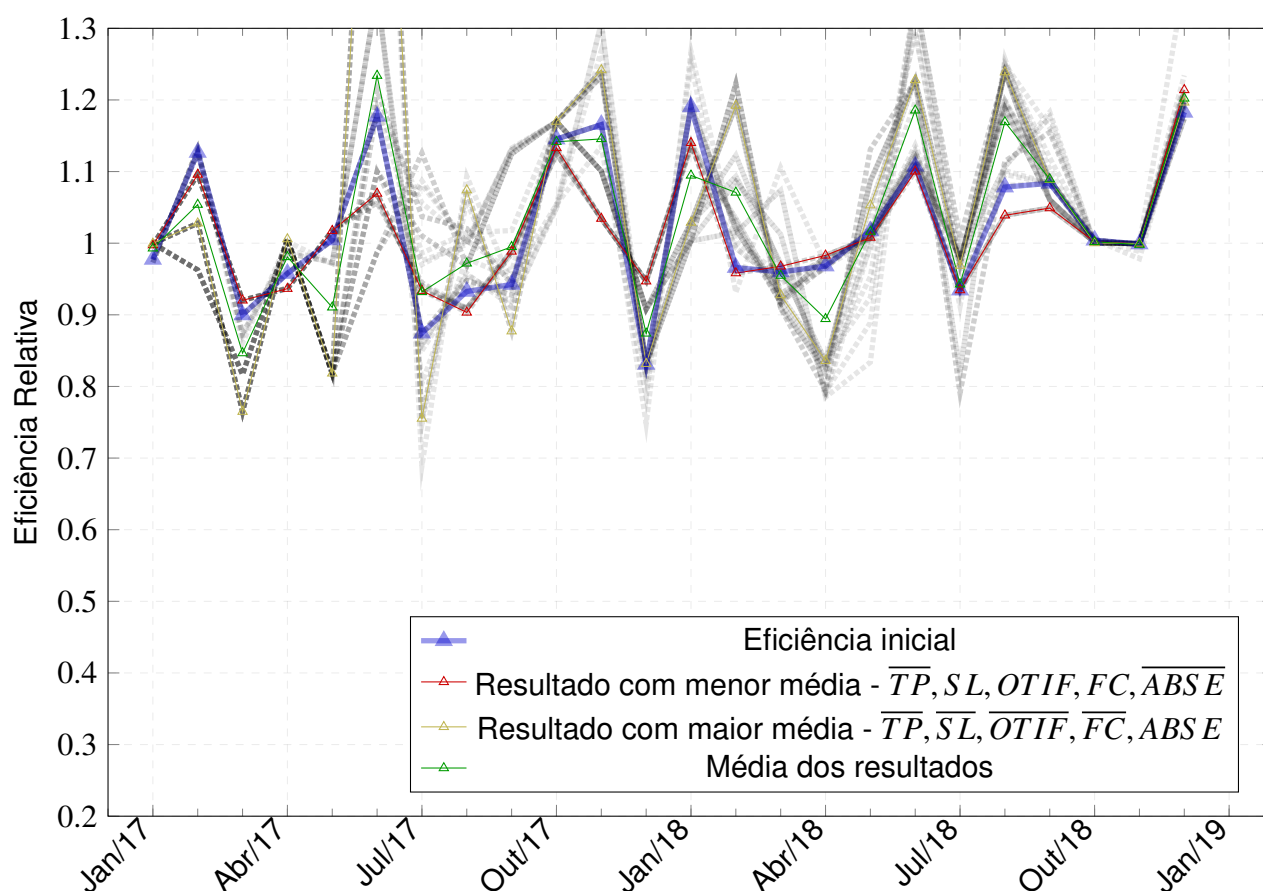
$ABSE$
<i>Média(Max)</i> = 1.0
<i>Média(μ)</i> = 0.893
<i>Média(Min)</i> = 0.67
<i>Média(σ)</i> = 0.102

Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

Em junho de 2017 foi onde se teve uma maior variância dos dados. Neste caso, foi uma variância muito maior do que qualquer outro mês. Isso se deve ao fato de que, em alguns cenários, o valor de eficiência nesse mês alcançou valores muito acima dos demais meses, inclusive ultrapassando o valor de 1,3 que é o limite superior do gráfico da Figura 11.

A Tabela 6 apresenta o impacto da mudança de cada KPI de seu valor inicial para o complementar nas estatísticas da série temporal. Similar ao observado no CCR, pouca

Figura 11 – Comparação do Índice de Malmquist sob diferentes orientações de variáveis



Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

diferença estatística foi notada ao alterar um único KPI de seu valor inicial para o complementar, com exceção dos KPIs TP, FC e ABSE, que apresentaram maiores diferenças na estatística máxima. Tais achados sugerem a necessidade de novas metodologias de avaliação para compreender a sensibilidade de certos períodos às orientações das variáveis.

5.7.3 Verificação da semelhança entre os resultados

A comparação entre o indicador CCR e Malmquist deve ser feita com cuidado. Isso porque, por mais que eles representem a eficiência relativa, suas amplitudes e valores absolutos são diferentes, sendo o CCR limitado de 0 a 1 enquanto que o Malmquist sem essa limitação.

Ainda assim, é possível comparar os resultados obtidos para o mesmo modelo utilizado. Optou-se por verificar o quão semelhantes são os resultados obtidos para os diferentes cenários de cada abordagem. Para isso, utilizou-se a similaridade de cosseno, amplamente utilizados na literatura (AGGARWAL; REDDY, 2013). Ela é calculada pela equação (19), onde A e B são vetores. No caso da base de dados deste trabalho, o vetor é dado pela série temporal, onde cada dimensão é um mês.

Tabela 6 – Impacto da mudança de orientações nos resultados de eficiência pelo Índice de Malmquist

KPI	Análise	Inicial	Complementar	Diferença
TP	Max	1.25	1.431	0.18
	μ	1.026	1.032	0.005
	Min	0.82	0.815	-0.005
	σ	0.118	0.145	0.026
SL	Max	1.354	1.327	-0.028
	μ	1.029	1.029	0.0
	Min	0.817	0.818	0.001
	σ	0.131	0.132	0.001
OTIF	Max	1.339	1.343	0.004
	μ	1.026	1.032	0.006
	Min	0.817	0.818	0.001
	σ	0.132	0.131	0.0
FC	Max	1.242	1.439	0.197
	μ	1.025	1.034	0.009
	Min	0.859	0.777	-0.082
	σ	0.101	0.162	0.06
ABSE	Max	1.445	1.236	-0.209
	μ	1.035	1.023	-0.012
	Min	0.78	0.855	0.075
	σ	0.158	0.105	-0.053

Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

$$\text{similaridade cosseno}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{\|\mathbf{A}\| \|\mathbf{B}\|} \quad (19)$$

Esta análise resultou em valores de 0.993 para o Índice de Malmquist e 0.996 para o DEA CCR. Conforme Banik (2018), índices superiores a 0.7 são comumente reconhecidos como indicativos de alta similaridade. Portanto, nota-se um elevado grau de semelhança nas séries temporais analisadas.

5.7.4 Considerações finais sobre as avaliações

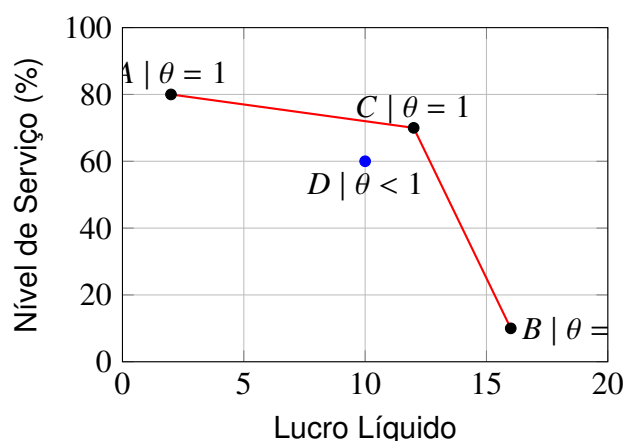
Como apresentado na Seção 5.7.3, obteve-se um resultado de similaridade de cosseno alto entre as análises. Contudo, ainda assim é possível observar alguns meses cujas eficiências relativas tiveram resultados bem diferentes. Por exemplo, no mês de Junho de 2017, conforme apresentado na Figura 9, nota-se que para algumas orientações, esse mês teve um valor de eficiência quase máximo, enquanto que para outros cenários, o valor de eficiência foi um dos piores. Verificaram-se os valores da base de dados e identificou-se que nesse mês houve ótimos resultados em absentéismo (ABSE), produtividade em SKU (PDS) e desempenho de transporte (TP). A alta eficiência relativa nesses meses deve-se à valorização desses indicadores. Após uma avaliação na base de dados,

acredita-se que uma eficiência tão baixa quanto 0.6 ou tão alta quanto 1 não é realista, apesar de o modelo ter apresentado esses resultados.

Na mesma Figura 9, uma comparação semelhante pode ser feita com o resultado do último mês (Dezembro de 2018), que obteve uma eficiência relativa de 1 para todos os modelos. Pela análise da base de dados, nota-se que isso se deve ao fato de este mês ter obtido o melhor resultado histórico em STOCK. Devido ao funcionamento do modelo de envelope, compreende-se que, por isso, esse mês alcançou uma eficiência igual a 1. Contudo, numa avaliação mais realista do resultado, acredita-se que essa avaliação foi superestimada. Isso porque também se obteve um dos piores resultados em desempenho de transporte (TP) e nível de serviço (SL). Portanto, a redução do estoque em detrimento de uma piora em TP e SL é questionável se deve ser recompensada com uma eficiência de um. Essa característica foi identificada como resultado com indicadores extremos: Alguns muito bons e outros muito ruins. Essa mesma característica que recompensa esse mês é observada pelo índice de Malmquist na Figura 11. Nela, é possível notar como, no último mês, existe um aumento na eficiência pelo indicador, também devido ao KPI STOCK ter tido seu melhor resultado histórico.

Sendo assim, nota-se uma característica comum a ambos os modelos, considerada uma fraqueza na avaliação global de eficiência. Definiu-se esse caso como “resultados extremos”. Esses casos podem ser visualizados em um exemplo minimalista exposto na Figura 12. Ela apresenta um envelope de eficiência com dois KPI: Lucro e Nível de Serviço. Nesse exemplo, a empresa tem como objetivo a maximização de ambos os indicadores. É possível notar em vermelho a barreira de eficiência.

Figura 12 – Exemplo de resultados extremos



Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

Para o modelo DEA, todos os pontos do exemplo que estão na barreira de eficiência possuem eficiência máxima, como nos pontos A, B e C. O único ponto com eficiência menor do que 1 é o ponto D, que está dentro do envelope de eficiência. Porém, em um contexto empresarial, acredita-se que considerar os pontos A e C como eficiência máxima

seja algo pouco provável. Isso porque é difícil imaginar gestores optando por um nível de serviço muito alto em detrimento de um lucro baixo (no caso do ponto A) ou por um lucro alto e um nível de serviço baixo (ponto D). Provavelmente, valores centrais, como os do ponto D e C, seriam priorizados como estratégia a longo prazo, mesmo tendo o DEA indicado uma eficiência relativa menor para esse caso.

Como complemento a esses casos extremos, nota-se que o DEA penaliza ou recompensa a eficiência de maneira linear. Isso significa que uma diminuição de um indicador hipotético de 100 para 60 tem o mesmo impacto que a diminuição de 60 para 20. Contudo, nem sempre essa avaliação dos indicadores é a mais adequada. Por exemplo, para uma empresa, a redução de 100 para 60 no lucro líquido provavelmente será melhor vista do que em um cenário em que a redução seja de 60 para 20.

Sendo assim, evidencia-se uma fraqueza na aplicação prática do modelo na base de dados. Acredita-se que ele pode se beneficiar ao implementar uma penalização não linear para se adequar a uma melhor interpretação de 'resultados extremos', como citado anteriormente.

6 CONCLUSÕES

Neste estudo, realizou-se uma análise exploratória utilizando o método DEA (Análise Envoltória de Dados) em uma base de dados de logística outbound, pertencente a uma empresa localizada em Joinville, Santa Catarina. Os modelos DEA selecionados para esta pesquisa foram o CCR (Charnes, Cooper e Rhodes) e o Índice de Malmquist. Um aspecto distintivo desta pesquisa reside na utilização de KPIs (Indicadores Chave de Desempenho) como base para a análise, diferenciando-se, assim, das aplicações convencionais do DEA que geralmente se concentram em recursos e produtos.

No contexto desses modelos DEA, foram conduzidos experimentos destinados a avaliar a capacidade desses modelos em mensurar a eficiência mês a mês. Além disso, foi investigada a sensibilidade desses métodos em relação a mudanças na escala dos KPIs, bem como nas orientações dos mesmos.

Como resultado deste estudo, observou-se que o modelo CCR apresenta uma limitação em relação à sua amplitude, uma vez que seus resultados estão restritos a uma variação entre 0 e 1. A abordagem utilizada para a atualização dos indicadores resultou em uma representação mensal da eficiência relativa, revelando uma sequência de eficiência igual a um nos últimos meses. Tal constatação indica que a interpretação dessa eficiência relativa pode ser desafiadora, uma vez que a barreira de eficiência é atualizada mensalmente. Por outro lado, o Índice de Malmquist não possui essa limitação de amplitude e incorpora indicadores adicionais que facilitam uma interpretação mais intuitiva dos resultados.

A análise da escala dos KPIs incluiu a multiplicação de alguns KPI por um fator de 100, uma prática já realizada na literatura. Surpreendentemente, para os modelos DEA aplicados neste trabalho, não observou-se uma sensibilidade à mudanças na escala, contradizendo as expectativas iniciais.

No entanto, uma notável sensibilidade foi observada ao variar a orientação dos KPIs. Durante esse experimento, foram alteradas as orientações de input para output e vice-versa em relação a cinco KPIs da base de dados. A execução dos dois modelos para cenários específicos revelou uma variação significativa nos resultados, não apenas em termos de semelhança de cosseno, mas também em termos de valores absolutos de eficiência para determinados meses. Esse achado ressalta a importância da escolha da orientação dos KPIs, uma vez que essa decisão pode impactar substancialmente os resultados finais de eficiência.

Além disso, foi identificado que as variações significativas na eficiência relativa ocorreram devido às limitações do modelo ao avaliar a eficiência em situações de KPIs extremos. Em particular, meses com desempenhos excepcionalmente elevados exibiram alguns indicadores muito positivos e outros extremamente negativos. Esse fenômeno in-

dica uma penalização desigual dos indicadores pelo modelo, resultando em resultados inadequados do ponto de vista gerencial.

Diante dessas observações, surge a oportunidade de aprimorar os métodos DEA. Sugerem-se pesquisas que explorem adaptações capazes de proporcionar uma avaliação mais equilibrada da eficiência, especialmente em DMUs cujos indicadores apresentam extremos (ou seja, alguns muito bons e outros muito ruins). Por fim, para futuros trabalhos, propõe-se a exploração de diferentes modelos DEA, como o modelo de Banker, Charnes e Cooper, o modelo aditivo, a Medida Baseada em Slack e o DEA Estocástico, uma vez que podem apresentar resultados mais aprimorados e possuem referências literárias.

REFERÊNCIAS

AGGARWAL, C. C.; REDDY, C. K. **Data Clustering: Algorithms and Applications**. [S.l.]: CRC Press, 2013.

ALI, A. I.; LERME, C. S.; SEIFORD, L. M. Components of efficiency evaluation in data envelopment analysis. **European Journal of Operational Research**, Elsevier, v. 80, n. 3, p. 462–473, 1995.

BANIK, R. **Hands-On Recommendation Systems with Python**. Packt, 2018. ISBN 9781788993753. Disponível em: <https://www.packtpub.com/product/hands-on-recommendation-systems-with-python/9781788993753>.

BANKER, R.; CHARNES, A.; COOPER, W. W.; SWARTS, J.; THOMAS, D. A. An introduction to data envelopment analysis with some of its models and their uses. **Research in Governmental and Nonprofit Accounting**, JAI Press Inc., v. 5, p. 125–163, 1989.

BAZARAA, M. S.; SHERALI, H. D.; SHETTY, C. M. **Nonlinear programming: theory and algorithms**. [S.l.]: John wiley & sons, 2013.

BRADLEY, S. P.; HAX, A. C.; MAGNANTI, T. L. Applied mathematical programming. (**No Title**), 1977.

CAMP, R. C. **Business Process Benchmarking: Finding and Implementing Best Practices**. Milwaukee, WI: ASQC Quality Press, 1995.

CHARNES, A.; COOPER, W.; RHODES, E. Measuring the efficiency of decision making units. **European Journal of Operational Research**, v. 2, n. 6, p. 429–444, 1978. ISSN 0377-2217. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0377221778901388>.

CHARNES, A.; COOPER, W. W. Programming with linear fractional functionals. **Naval Research logistics quarterly**, Wiley Online Library, v. 9, n. 3-4, p. 181–186, 1962.

CHRISTOPHER, M. **Logistics and supply chain management**. [S.l.]: Pearson Uk, 2022.

COELLI, T. J.; RAO, D. S. P.; O'DONNELL, C. J.; BATTESE, G. E. **An introduction to efficiency and productivity analysis**. [S.l.]: springer science & business media, 2005.

COOK, W. D.; ZHU, J. **Modeling performance measurement: applications and implementation issues in DEA**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2006. v. 566.

COOPER, W. W.; SEIFORD, L. M.; TONE, K. **Introduction to data envelopment analysis and its uses: with DEA-solver software and references**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2006.

COOPER, W. W.; SEIFORD, L. M.; TONE, K. et al. **Data envelopment analysis: a comprehensive text with models, applications, references and DEA-solver software**. [S.l.]: Springer, 2007. v. 2.

COOPER, W. W.; SEIFORD, L. M.; ZHU, J. Handbook on data envelopment analysis. Springer Science & Business Media, 2011.

EMROUZNEJAD, A.; YANG, G.-I. A survey and analysis of the first 40 years of scholarly literature in dea: 1978–2016. **Socio-Economic Planning Sciences**, v. 61, p. 4 – 8, 2018. Cited by: 760; All Open Access, Green Open Access, Hybrid Gold Open Access. Disponível em: <https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-85013083057&doi=10.1016%2fj.seps.2017.01.008&partnerID=40&md5=a7ba11251279ed444dcc58ed95fc36a2>.

GHOSH, A.; DEY, M.; BANDYOPADHYAY, G.; GUHA, B. Technical efficiency measurement of indian banking companies: An investigation using dea and super efficiency model. **Lecture Notes on Information Theory**, Engineering and Technology Publishing, v. 2, n. 3, p. 273–278, 2014.

HAN, J.; PEI, J.; TONG, H. **Data mining: concepts and techniques**. [S.l.]: Morgan kaufmann, 2022.

HILLIER, F. S.; LIEBERMAN, G. J. **Introdução à pesquisa operacional**. [S.l.]: McGraw Hill Brasil, 2013.

LOVELL, C. K. The decomposition of malmquist productivity indexes. **Journal of productivity analysis**, Springer, v. 20, p. 437–458, 2003.

PARK, J.-L.; KIM, S.-S.; CHOI, S.-Y.; KIM, J.-H.; KIM, J.-J. Measuring relative efficiency of korean construction company using dea/window. **World Academy of Science, Engineering and Technology**, v. 60, n. 1, p. 12–22, 2011.

PARMENTER, D. **Key performance indicators: developing, implementing, and using winning KPIs**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2015.

PIRAN, F. S.; LACERDA, D. P.; CAMARGO, L. F. R. **Análise e gestão da eficiência: Aplicação em sistemas produtivos de bens e serviços**. [S.l.]: Folio Digital, 2021.

PYTHON. 2023. <https://www.python.org/>. Acessado em: [data de acesso].

RASHIDI, S. F.; BARATI, R.; KAMALI, Z. Measurement efficiency by malmquist method in data envelopment analysis. **Trends in Applied Sciences Research**, Academic Journals Inc., v. 9, n. 1, p. 54, 2014.

RATNER, S. V.; SHAPOSHNIKOV, A. M.; LYCHEV, A. V. Network dea and its applications (2017–2022): A systematic literature review. **Mathematics**, v. 11, n. 9, 2023. Cited by: 3; All Open Access, Gold Open Access. Disponível em: <https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-85159217816&doi=10.3390%2fmath11092141&partnerID=40&md5=2a68c48b5777e02a943aa69ce42c81e4>.

SEIFORD, L. M. Data envelopment analysis: the evolution of the state of the art (1978–1995). **Journal of productivity analysis**, Springer, v. 7, p. 99–137, 1996.

STEINBRUCH, A.; PAULO, W. **Álgebra linear**. [S.l.: s.n.], 1987.

THANASSOULIS, E. **Introduction to the theory and application of data envelopment analysis**. [S.l.]: Springer, 2001.

TOLOO, M. An equivalent linear programming form of general linear fractional programming: A duality approach. **Mathematics**, Mdpi, v. 9, n. 14, p. 1586, 2021.

WARD, J.; PASCOE, S. **Measuring and assessing capacity in fisheries**. [S.l.]: Food & Agriculture Org., 2003.

7 APÊNDICE

7.1 EQUAÇÕES DO EXEMPLO DA FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

7.1.1 CCR Maximização Fracionado

$$\text{DMU 1} \\ \max h_1(u, v) = \frac{90u_1}{50v_1 + 22.5v_2}$$

Sujeito a:

$$\frac{90u_1}{50v_1 + 22.5v_2} \leq 1$$

$$\frac{60u_1}{40v_1 + 25v_2} \leq 1$$

$$\frac{20u_1}{10v_1 + 8v_2} \leq 1$$

$$\frac{40u_1}{40v_1 + 10v_2} \leq 1$$

$$\frac{80u_1}{40v_1 + 40v_2} \leq 1$$

$$v_1, v_2, u_1 \geq 0$$

$$\text{DMU 2} \\ \max h_2(u, v) = \frac{60u_1}{40v_1 + 25v_2}$$

Sujeito a:

$$\frac{90u_1}{50v_1 + 22.5v_2} \leq 1$$

$$\frac{60u_1}{40v_1 + 25v_2} \leq 1$$

$$\frac{20u_1}{10v_1 + 8v_2} \leq 1$$

$$\frac{40u_1}{40v_1 + 10v_2} \leq 1$$

$$\frac{80u_1}{40v_1 + 40v_2} \leq 1$$

$$v_1, v_2, u_1 \geq 0$$

$$\text{DMU 3} \\ \max h_3(u, v) = \frac{20u_1}{10v_1 + 8v_2}$$

Sujeito a:

$$\frac{90u_1}{50v_1 + 22.5v_2} \leq 1$$

$$\frac{60u_1}{40v_1 + 25v_2} \leq 1$$

$$\frac{20u_1}{10v_1 + 8v_2} \leq 1$$

$$\frac{40u_1}{40v_1 + 10v_2} \leq 1$$

$$\frac{80u_1}{40v_1 + 40v_2} \leq 1$$

$$v_1, v_2, u_1 \geq 0$$

$$\text{DMU 4} \\ \max h_4(u, v) = \frac{40u_1}{40v_1 + 10v_2}$$

Sujeito a:

$$\frac{90u_1}{50v_1 + 22.5v_2} \leq 1$$

$$\frac{60u_1}{40v_1 + 25v_2} \leq 1$$

$$\frac{20u_1}{10v_1 + 8v_2} \leq 1$$

$$\frac{40u_1}{40v_1 + 10v_2} \leq 1$$

$$\frac{80u_1}{40v_1 + 40v_2} \leq 1$$

$$v_1, v_2, u_1 \geq 0$$

DMU 5

$$\max h_5(u, v) = \frac{80u_1}{40v_1 + 40v_2}$$

Sujeito a:

$$\frac{90u_1}{50v_1 + 22.5v_2} \leq 1$$

$$\frac{60u_1}{40v_1 + 25v_2} \leq 1$$

$$\frac{20u_1}{10v_1 + 8v_2} \leq 1$$

$$\frac{40u_1}{40v_1 + 10v_2} \leq 1$$

$$\frac{80u_1}{40v_1 + 40v_2} \leq 1$$

$$v_1, v_2, u_1 \geq 0$$

7.1.2 CCR Primal Orientado a Input

DMU 1

$$\max 90u_1$$

Sujeito a:

$$90u_1 - 50v_1 - 22.5v_2 \leq 0$$

$$60u_1 - 40v_1 - 25v_2 \leq 0$$

$$20u_1 - 10v_1 - 8v_2 \leq 0$$

$$40u_1 - 40v_1 - 10v_2 \leq 0$$

$$80u_1 - 40v_1 - 40v_2 \leq 0$$

$$50v_1 + 22.5v_2 = 1$$

$$v_1, v_2, u_1 \geq 0$$

DMU 3

$$\max 20u_1$$

Sujeito a:

$$90u_1 - 50v_1 - 22.5v_2 \leq 0$$

$$60u_1 - 40v_1 - 25v_2 \leq 0$$

$$20u_1 - 10v_1 - 8v_2 \leq 0$$

$$40u_1 - 40v_1 - 10v_2 \leq 0$$

$$80u_1 - 40v_1 - 40v_2 \leq 0$$

$$10v_1 + 8v_2 = 1$$

$$v_1, v_2, u_1 \geq 0$$

DMU 2

$$\max 60u_1$$

Sujeito a:

$$90u_1 - 50v_1 - 22.5v_2 \leq 0$$

$$60u_1 - 40v_1 - 25v_2 \leq 0$$

$$20u_1 - 10v_1 - 8v_2 \leq 0$$

$$40u_1 - 40v_1 - 10v_2 \leq 0$$

$$80u_1 - 40v_1 - 40v_2 \leq 0$$

$$40v_1 + 25v_2 = 1$$

$$v_1, v_2, u_1 \geq 0$$

DMU 4

$$\max 40u_1$$

Sujeito a:

$$90u_1 - 50v_1 - 22.5v_2 \leq 0$$

$$60u_1 - 40v_1 - 25v_2 \leq 0$$

$$20u_1 - 10v_1 - 8v_2 \leq 0$$

$$40u_1 - 40v_1 - 10v_2 \leq 0$$

$$80u_1 - 40v_1 - 40v_2 \leq 0$$

$$40v_1 + 10v_2 = 1$$

$$v_1, v_2, u_1 \geq 0$$

DMU 5

$$\max 80u_1$$

Sujeito a:

$$90u_1 - 50v_1 - 22.5v_2 \leq 0$$

$$60u_1 - 40v_1 - 25v_2 \leq 0$$

$$20u_1 - 10v_1 - 8v_2 \leq 0$$

$$40u_1 - 40v_1 - 10v_2 \leq 0$$

$$80u_1 - 40v_1 - 40v_2 \leq 0$$

$$40v_1 + 40v_2 = 1$$

$$v_1, v_2, u_1 \geq 0$$

7.1.3 CCR Dual Orientado a Input

DMU 1

$$\min \theta$$

Sujeito a:

$$50\lambda_1 + 40\lambda_2 + 10\lambda_3 + 40\lambda_4 + 40\lambda_5 \leq \theta 50$$

$$22.5\lambda_1 + 25\lambda_2 + 8\lambda_3 + 10\lambda_4 + 40\lambda_5 \leq \theta 22.5$$

$$90\lambda_1 + 60\lambda_2 + 20\lambda_3 + 40\lambda_4 + 80\lambda_5 \geq 90$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5 \geq 0$$

DMU 3

$$\min \theta$$

Sujeito a:

$$50\lambda_1 + 40\lambda_2 + 10\lambda_3 + 40\lambda_4 + 40\lambda_5 \leq \theta 10$$

$$22.5\lambda_1 + 25\lambda_2 + 8\lambda_3 + 10\lambda_4 + 40\lambda_5 \leq \theta 8$$

$$90\lambda_1 + 60\lambda_2 + 20\lambda_3 + 40\lambda_4 + 80\lambda_5 \geq 20$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5 \geq 0$$

DMU 2

$$\min \theta$$

Sujeito a:

$$50\lambda_1 + 40\lambda_2 + 10\lambda_3 + 40\lambda_4 + 40\lambda_5 \leq \theta 40$$

$$22.5\lambda_1 + 25\lambda_2 + 8\lambda_3 + 10\lambda_4 + 40\lambda_5 \leq \theta 25$$

$$90\lambda_1 + 60\lambda_2 + 20\lambda_3 + 40\lambda_4 + 80\lambda_5 \geq 60$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5 \geq 0$$

DMU 4

$$\min \theta$$

Sujeito a:

$$50\lambda_1 + 40\lambda_2 + 10\lambda_3 + 40\lambda_4 + 40\lambda_5 \leq \theta 40$$

$$22.5\lambda_1 + 25\lambda_2 + 8\lambda_3 + 10\lambda_4 + 40\lambda_5 \leq \theta 10$$

$$90\lambda_1 + 60\lambda_2 + 20\lambda_3 + 40\lambda_4 + 80\lambda_5 \geq 40$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5 \geq 0$$

DMU 5

 $\min \theta$

Sujeito a:

$$50\lambda_1 + 40\lambda_2 + 10\lambda_3 + 40\lambda_4 + 40\lambda_5 = \theta 40$$

$$22.5\lambda_1 + 25\lambda_2 + 8\lambda_3 + 10\lambda_4 + 40\lambda_5 = \theta 40$$

$$90\lambda_1 + 60\lambda_2 + 20\lambda_3 + 40\lambda_4 + 80\lambda_5 = 80$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5 \geq 0$$

7.1.4 CCR Minimização Fracionado

DMU 1

$$\min h_1(u, v) = \frac{50v_1 + 22.5v_2}{90u_1}$$

Sujeito a:

$$\frac{50v_1 + 22.5v_2}{90u_1} \geq 1$$

$$\frac{40v_1 + 25v_2}{60u_1} \geq 1$$

$$\frac{10v_1 + 8v_2}{20u_1} \geq 1$$

$$\frac{40v_1 + 10v_2}{40u_1} \geq 1$$

$$\frac{40v_1 + 40v_2}{80u_1} \geq 1$$

$$v_1, v_2, u_1 \geq 0$$

DMU 2

$$\min h_2(u, v) = \frac{40v_1 + 25v_2}{60u_1}$$

Sujeito a:

$$\frac{50v_1 + 22.5v_2}{90u_1} \geq 1$$

$$\frac{40v_1 + 25v_2}{60u_1} \geq 1$$

$$\frac{10v_1 + 8v_2}{20u_1} \geq 1$$

$$\frac{40v_1 + 10v_2}{40u_1} \geq 1$$

$$\frac{40v_1 + 40v_2}{80u_1} \geq 1$$

$$v_1, v_2, u_1 \geq 0$$

$$\text{DMU 3} \\ \min h_3(u, v) = \frac{10v_1 + 8v_2}{20u_1}$$

Sujeito a:

$$\frac{50v_1 + 22.5v_2}{90u_1} \geq 1$$

$$\frac{40v_1 + 25v_2}{60u_1} \geq 1$$

$$\frac{10v_1 + 8v_2}{20u_1} \geq 1$$

$$\frac{40v_1 + 10v_2}{40u_1} \geq 1$$

$$\frac{40v_1 + 40v_2}{80u_1} \geq 1$$

$$v_1, v_2, u_1 \geq 0$$

$$\text{DMU 4} \\ \min h_4(u, v) = \frac{40v_1 + 10v_2}{40u_1}$$

Sujeito a:

$$\frac{50v_1 + 22.5v_2}{90u_1} \geq 1$$

$$\frac{40v_1 + 25v_2}{60u_1} \geq 1$$

$$\frac{10v_1 + 8v_2}{20u_1} \geq 1$$

$$\frac{40v_1 + 10v_2}{40u_1} \geq 1$$

$$\frac{40v_1 + 40v_2}{80u_1} \geq 1$$

$$v_1, v_2, u_1 \geq 0$$

$$\text{DMU 5} \\ \min h_5(u, v) = \frac{40v_1 + 40v_2}{80u_1}$$

Sujeito a:

$$\frac{50v_1 + 22.5v_2}{90u_1} \geq 1$$

$$\frac{40v_1 + 25v_2}{60u_1} \geq 1$$

$$\frac{10v_1 + 8v_2}{20u_1} \geq 1$$

$$\frac{40v_1 + 10v_2}{40u_1} \geq 1$$

$$\frac{40v_1 + 40v_2}{80u_1} \geq 1$$

$$v_1, v_2, u_1 \geq 0$$

7.1.5 CCR Primal Orientado a Output

DMU 1

$$\min 50v_1 + 22.5v_2$$

Sujeito a:

$$50v_1 + 22.5v_2 - 90u_1 \geq 1$$

$$40v_1 + 25v_2 - 60u_1 \geq 1$$

$$10v_1 + 8v_2 - 20u_1 \geq 1$$

$$40v_1 + 10v_2 - 40u_1 \geq 1$$

$$40v_1 + 40v_2 - 80u_1 \geq 1$$

$$90u_1 = 1$$

$$v_1, v_2, u_1 \geq 0$$

DMU 2

$$\min 40v_1 + 25v_2$$

Sujeito a:

$$50v_1 + 22.5v_2 - 90u_1 \geq 1$$

$$40v_1 + 25v_2 - 60u_1 \geq 1$$

$$10v_1 + 8v_2 - 20u_1 \geq 1$$

$$40v_1 + 10v_2 - 40u_1 \geq 1$$

$$40v_1 + 40v_2 - 80u_1 \geq 1$$

$$60u_1 = 1$$

$$v_1, v_2, u_1 \geq 0$$

DMU 3

$$\min 10v_1 + 8v_2$$

Sujeito a:

$$50v_1 + 22.5v_2 - 90u_1 \geq 1$$

$$40v_1 + 25v_2 - 60u_1 \geq 1$$

$$10v_1 + 8v_2 - 20u_1 \geq 1$$

$$40v_1 + 10v_2 - 40u_1 \geq 1$$

$$40v_1 + 40v_2 - 80u_1 \geq 1$$

$$20u_1 = 1$$

$$v_1, v_2, u_1 \geq 0$$

DMU 4

$$\min 40v_1 + 10v_2$$

Sujeito a:

$$50v_1 + 22.5v_2 - 90u_1 \geq 1$$

$$40v_1 + 25v_2 - 60u_1 \geq 1$$

$$10v_1 + 8v_2 - 20u_1 \geq 1$$

$$40v_1 + 10v_2 - 40u_1 \geq 1$$

$$40v_1 + 40v_2 - 80u_1 \geq 1$$

$$40u_1 = 1$$

$$v_1, v_2, u_1 \geq 0$$

DMU 5

$$\min 40v_1 + 40v_2$$

Sujeito a:

$$50v_1 + 22.5v_2 - 90u_1 \geq 1$$

$$40v_1 + 25v_2 - 60u_1 \geq 1$$

$$10v_1 + 8v_2 - 20u_1 \geq 1$$

$$40v_1 + 10v_2 - 40u_1 \geq 1$$

$$40v_1 + 40v_2 - 80u_1 \geq 1$$

$$80u_1 = 1$$

$$v_1, v_2, u_1 \geq 0$$

7.1.6 CCR Dual Orientado a Output

DMU 1

$$\max \phi$$

Sujeito a:

$$50\lambda_1 + 40\lambda_2 + 10\lambda_3 + 40\lambda_4 + 40\lambda_5 \leq 50$$

$$22.5\lambda_1 + 25\lambda_2 + 8\lambda_3 + 10\lambda_4 + 40\lambda_5 \leq 22.5$$

$$90\lambda_1 + 60\lambda_2 + 20\lambda_3 + 40\lambda_4 + 80\lambda_5 \geq \phi 90$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5 \geq 0$$

DMU 3

$$\max \phi$$

Sujeito a:

$$50\lambda_1 + 40\lambda_2 + 10\lambda_3 + 40\lambda_4 + 40\lambda_5 \leq 10$$

$$22.5\lambda_1 + 25\lambda_2 + 8\lambda_3 + 10\lambda_4 + 40\lambda_5 \leq 8$$

$$90\lambda_1 + 60\lambda_2 + 20\lambda_3 + 40\lambda_4 + 80\lambda_5 \geq \phi 20$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5 \geq 0$$

DMU 2

$$\max \phi$$

Sujeito a:

$$50\lambda_1 + 40\lambda_2 + 10\lambda_3 + 40\lambda_4 + 40\lambda_5 \leq 40$$

$$22.5\lambda_1 + 25\lambda_2 + 8\lambda_3 + 10\lambda_4 + 40\lambda_5 \leq 25$$

$$90\lambda_1 + 60\lambda_2 + 20\lambda_3 + 40\lambda_4 + 80\lambda_5 \geq \phi 60$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5 \geq 0$$

DMU 4

$$\max \phi$$

Sujeito a:

$$50\lambda_1 + 40\lambda_2 + 10\lambda_3 + 40\lambda_4 + 40\lambda_5 \leq 40$$

$$22.5\lambda_1 + 25\lambda_2 + 8\lambda_3 + 10\lambda_4 + 40\lambda_5 \leq 10$$

$$90\lambda_1 + 60\lambda_2 + 20\lambda_3 + 40\lambda_4 + 80\lambda_5 \geq \phi 40$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5 \geq 0$$

DMU 5

$\max \phi$

Sujeito a:

$$50\lambda_1 + 40\lambda_2 + 10\lambda_3 + 40\lambda_4 + 40\lambda_5 \leq 40$$

$$22.5\lambda_1 + 25\lambda_2 + 8\lambda_3 + 10\lambda_4 + 40\lambda_5 \leq 40$$

$$90\lambda_1 + 60\lambda_2 + 20\lambda_3 + 40\lambda_4 + 80\lambda_5 \geq \phi 80$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5 \geq 0$$