Grau 9 1/2
Rio, 17/11/26
[signature]

ESCOLA NORMAL DE ARTES E OFFICIOS WENCESLAU BRAZ

Rio de Janeiro, 5 de Novembro de 1926

Nome do alumno Adelaide Moreira da Silva.

Anno 4º

Turma A4

Prova final de Trigonometria.

Nome do Professor

Ponto sorteado: nº 5 — «Divisão dos arcos» «Formulas de Simpson» — 3º caso de resolução dos triangulos obliquangulos.

— " —

1ª questão — Dado o ~~seno e~~ coseno de um arco, achar o seno e o coseno da metade desse arco.

— " —

2ª questão — Demonstrar as formulas de Thomas Simpson.

— " —

3ª Questão — Sejam: $a = 4770^m$ — $b = 3060^m$ — $c = 6480^m$; pedem-se os angulos e a area do triangulo.

— " —

A formula do coseno do dobro que é igual a: $\cos 2a = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a$, se dividirmos ambos os termos por 2 teremos: $\cos a = \cos^2 \frac{a}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{a}{2}$.

Se sommarmos essa formula á formula fundamental: $1 = \cos^2 \frac{a}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{a}{2}$ teremos:

$$\cos a = \cos^2 \frac{a}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{a}{2} + 1 = \cos^2 \frac{a}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{a}{2} =$$

$$\cos a + 1 = 2\cos^2 \frac{a}{2}$$

$$2\cos^2 \frac{a}{2} = \cos a + 1.$$

Se dividirmos ambos os termos por 2 teremos:

$$\cos^2 \frac{a}{2} = \frac{\cos a + 1}{2}$$

Extrahindo-se a raiz quadrada fica igual:

$$\cos \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\cos a + 1}{2}}$$

Essa ultima formula achada é a que serve para achar o coseno da metade

—"—

Seno da metade.

A formula do coseno do dobro é igual $cos^2\frac{a}{2} - sen^2\frac{a}{2}$ se subtrahirmos da formula primitiva teremos a formula do seno da metade.

$$-cos\,a = -cos^2\frac{a}{2} + sen^2\frac{a}{2}$$
$$1 = cos^2\frac{a}{2} + sen^2\frac{a}{2}:$$

$$cos\,a - 1 = 2\,sen^2\frac{a}{2}$$
$$2\,sen^2\frac{a}{2} = cos\,a - cos\,a$$

Vamos dividir ambos os termos por 2

$$sen^2\frac{a}{2} = \frac{cos\,a - cos\,a}{2}$$

Extrahindo-se a raiz quadrada teremos

$$sen^2\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{cos\,a - cos\,a}{2}}.$$

—"—

2ª questão —

Temos a formula do seno da somma que é igual a:

$$sen\,(a+b) = sen\,a\,cos\,b + sen\,b\,cos\,a$$

a formula do seno da differença é igual a:

$$sen\,(a-b) = sen\,a\,cos\,b - sen\,b\,cos\,a.$$

Se sommarmos essas duas formulas teremos:

$$sen\,(a+b) = sen\,a.cos\,b + sen\,b\,cos\,a$$
$$sen\,(a-b) = sen\,a\,cos\,b - sen\,b\,cos\,a$$

$$sen\,(a+b) + sen\,(a-b) = 2\,sen\,a\,cos\,b.$$

Transpondo-se sen (a − b) para o outro termo temos:

$$sen\,(a+b) = 2\,sen\,a\,cos\,b - sen\,(a-b)$$

Vamos substituir agora <u>a</u> por mb temos:

$$\operatorname{sen}(mb+b) = 2\operatorname{sen} mb \cos b - \operatorname{sen}(mb-b)$$

Collocamos agora b em evidencia e teremos.

$$\operatorname{sen}(m+1)b = 2\operatorname{sen} mb \cos b - \operatorname{sen}(m-1)b$$

Substituindo-se m por 1 e b por 10 temos:

$$\operatorname{sen} 20° = 2\operatorname{sen} 10 \cos 10 - \operatorname{sen} 0.$$

—— " ——

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$$
$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$$

$$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos a \cos b.$$

Transpondo-se $\cos(a-b)$ para o outro termo:

$$\cos(a+b) = 2\cos a \cos b - \cos(a-b)$$

Substituindo-se agora a por mb temos:

$$\cos(mb+b) = 2\cos mb \cos b - \cos(mb-b).$$

~~cos~~ Pondo-se b em evidencia temos.

$$\cos(m+1)b = 2\cos mb \cos b - \cos(m-1)b.$$

Substituindo-se m por 1 e b por 10 fica:

$$\cos 20° = 2\cos 10 \cos 10 - \cos 0.$$

—— " ——

3ª. questão —— $a = 4470^m$; $b = 3060$; $c = 6480$; determinar:

A, B, C, S

—— " ——

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{4095 \times 675}{7155 \times 2385}}$$

$$\log \operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{\log 4095 + \log 675 + \operatorname{colog} 7155 + \operatorname{colog} 2385}{2}$$

$$\log 4095 = 3,61225$$
$$\log 675 = 2,82930$$
$$\operatorname{colog} 7155 = \bar{4},14539$$
$$\operatorname{colog} 2385 = \bar{4},62251$$

$$\log \operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{\bar{1},20945}{2} = \bar{1},60472.$$

$$\frac{A}{2} = 21^\circ 55' 22''$$

$$A = 43^\circ 50' 44''$$

$$tg \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}$$

$$tg \frac{B}{2} = \frac{2385 \times 675}{7155 \times 4095}$$

$$\log tg \frac{B}{2} = \frac{\log 2385 + \log 675 + colog\, 7155 + colog\, 4095}{2}$$

$$\log 2385 = 3,37749$$
$$\log 675 = 2,82930$$
$$colog\, 7155 = \bar{4},14539$$
$$colog\, 4095 = \bar{4},38775$$

$$\log tg \frac{B}{2} = \frac{\bar{2},73993}{2} = \bar{1},36996$$

$$tg \frac{B}{2} = 13^\circ 11' 32''$$
$$B = 26^\circ 23' 4''$$

$$C = 180^\circ - (A + B)$$

$$C = \cancel{180}\ 109^\circ 46' 12''$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\log S = \frac{\log 7155 + \log 2385 + \log 4095 + \log 675}{2}$$

$$\log S = \frac{3,85461 + 3,37749 + 3,61225 + 2,82930}{2}$$

$$\log S = \frac{13,67365}{2} = 6,83682$$

$$S = 6867833 \, m^2$$

Adelaide M. da Silva

1º
Em 17/11/26

ESCOLA NORMAL DE ARTES E OFFICIOS WENCESLAU BRAZ

Rio de Janeiro, 5 de Novembro de 1926

Nome da alumna Angelina Barboza Pinto

Anno 4º

Turma A4

Prova final de Trigonometria

Nome do Professor

Ponto sorteado nº 5

"Divisão dos arcos _ Formulas de Simpson
3º caso de resolução dos triangulos obliquangulos"

1ª Questão: Dados o seno e o coseno de um arco, achar o seno e o coseno da metade desse arco.

2ª Questão: Demonstrar as formulas de Thomas Simpson.

3ª Questão: Seja $a = 4770$ m; $b = 3060$ m; $c = 6480$ m: pedem-se os angulos e a area do triangulo.

1ª Questão:

A formula do coseno do dobro é:

$\cos 2a = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a.$

Dividindo ambos os termos por 2:

$$\left.\begin{array}{l} \cos a = \cos^2 \frac{a}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{a}{2}. \\ 1 = \cos^2 \frac{a}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{a}{2}. \end{array}\right\} \text{Sommando-se}$$

$\cos a + 1 = 2\cos^2 \frac{a}{2}$

Invertendo os termos:

$2\cos^2 \frac{a}{2} = \cos a + 1.$

Dividindo-se ambos os termos por 2:

$$\cos^2 \frac{a}{2} = \frac{\cos a + 1}{2}.$$

Donde tiramos a formula do $\cos \frac{a}{2}$

$$\cos \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\cos a + 1}{2}}.$$

E assim achamos o coseno da metade.

Seno da metade.

$$\left.\begin{array}{l} -\cos a = -\cos^2 \frac{a}{2} \pm \operatorname{sen}^2 \frac{a}{2} \\ 1 = \cos^2 \frac{a}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{a}{2} \end{array}\right\} \text{Subtrahindo}$$

$$1 - \cos a = 2 \operatorname{sen}^2 \frac{a}{2}.$$

Invertendo termos:

$$2 \operatorname{sen}^2 \frac{a}{2} = 1 - \cos a$$

Dividindo-se ambos os termos por 2:

$$\operatorname{sen}^2 \frac{a}{2} = \frac{1 - \cos a}{2}$$

Donde tiramos o seno da metade:

$$\operatorname{sen} \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos a}{2}}.$$

2ª Questão:

$$\operatorname{sen}(a+b) = \cancel{2} \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$$

$$\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen} a \cos b - \operatorname{sen} b \cos a$$

$$\operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b) = 2 \operatorname{sen} a \cos b.$$

Trocando os termos do 1º para o 2º:

$$\operatorname{sen}(a+b) = 2 \operatorname{sen} a \cos b - \operatorname{sen}(a-b)$$

Substituindo a por mb

$$\operatorname{sen}(mb+b) = 2 \operatorname{sen} mb \cos b - \operatorname{sen}(mb-b)$$

Collocando b em evidencia r = 10"

$$\operatorname{sen}(m+1)b = 2 \operatorname{sen} mb \cos b - \operatorname{sen}(m-1)b$$

Supponde-se m = 1 e b = 10"

$$\operatorname{sen}(1+1)10'' = 2 \operatorname{sen} 10'' \cos 10'' - \operatorname{sen}(1-1)10'' =$$

$$\operatorname{sen} 20'' = 2 \operatorname{sen} 10'' \cos 10'' - \operatorname{sen} 0$$

Supponde que m = 2 e b = 10"

$$\operatorname{sen}(2+1)10'' = 2 \operatorname{sen} 20'' \cos 10'' - \operatorname{sen}(2-1)10'' =$$

$\text{sen } 30'' = 2 \text{ sen } 20'' \cos 10'' - \text{sen } 10''$

Assim acharemos todos os arcos de 10" em 10"

Vamos agora achar o coseno.

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \text{sen } a \text{ sen } b$

$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \text{sen } a \text{ sen } b$

$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2 \cos a \cos b$

Transpondo $\cos(a-b)$ para o 2º membro:

$\cos(a+b) = 2 \cos a \cos b - \cos(a-b)$

Substituindo a por mb temos:

$\cos(mb+b) = 2 \cos mb \cos b - \cos(mb-b)$

Collocando-se b em evidencia:

$\cos(m+1)b = 2 \cos mb \cos b - \cos(m-1)b$

Supondo-se que $m = 1$ e $b = 10''$

$\cos(1+1)10'' = 2 \cos 10'' \cos 10'' - \cos(1-1)10''$

$\cos 20'' = 2 \cos 10'' \cos 10'' - \cos 0$

Si m for $= 2$ e $b = 10''$

$\cos(2+1)10'' = 2 \cos 20'' \cos 10'' - \cos(2-1)10''$

$\cos 30'' = 2 \cos 20'' \cos 10'' - \cos 10''$

É necessario fazer o calculo de 5 em 5 afim de não augmentar o engano.

Para isto fazemos o seguinte:

~~$\text{sen}(a+b) = 2 \text{ sen } a \cos b - \text{sen}(a-b)$~~

substituimos a por 30

~~$\text{sen}(30+b) = 2 \text{ sen } 30 \cos b - \text{sen}(30-b)$~~

3ª Questão:

$a = 4770$ m

$b = 8060$ m

$c = 8480$ m

Determinar os angulos A, B e C e a area do triangulo

$$tg\,\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

$$tg\,\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{4095 \times 675}{7155 \times 2385}}$$

$$tg\,\frac{A}{2} = \sqrt{\log 4095 + \log 675 + \operatorname{colog} 7155 + \operatorname{colog} 2385}$$

$\log 4095 = 3,61225$

$\log 675 = 2,82930$

$\operatorname{colog} 7155 = \bar{4},14539$

$\operatorname{colog} 2385 = \bar{4},62251$

$tg\,\frac{A}{2} = \bar{1},20945 - \bar{1},60472$

$A = 43°\ 50'\ 44''$

$$tg\,\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}$$

$$tg\,\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{2385 \times 675}{7155 \times 4095}}$$

$$tg\,\frac{B}{2} = \sqrt{\log 2385 + \log 675 + \operatorname{colog} 7155 + \operatorname{colog} 4095} =$$

$\log 2385 = 3,37749$

$\log 675 = 2,82930$

$\operatorname{colog} 7155 = \bar{4},14539$

$\operatorname{colog} 4095 = \bar{4},38774$

$\bar{2},73993 = \bar{1},36996$

$B = 26°\ 23''\ 4''$

ESCOLA NORMAL DE ARTES E OFFICIOS WENCESLAU BRAZ

Rio de Janeiro, de Novembro de 1926

Nome do alumno

Anno

Turma

Prova final de

Nome do Professor

$C = 180° - A + B$

$C = 180° - 70° 13' 48'' = 109° 46' 12''$

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$

$S = \sqrt{7155 \times 2385 \times 675}$ $\times 4095$ $\times 4095$

$S = \log 7155 + \log 2385 + \log 675$

$\log 7155 = 3,85461$

$\log 2385 = 3,37749$

$\log 4095 = 3,61225$

$\log 675 = 2,82930$

$S = 13,67365 = 6864833\ m^2.$

Angelina B. Pinto.

Fis 1º 17/11/26 Piol [illegible]

ESCOLA NORMAL DE ARTES E OFFICIOS WENCESLAU BRAZ

Rio de Janeiro, 5 de Novembro de 1926

Nome da alumna Elizabeth H. Barbosa.

Anno 3º

Turma 7ª

Prova final de Trigonometria.

Nome do Professor

Ponto sorteado: nº 5 - "Divisão dos arcos. Formulas de Sympson. 3º caso de resolução dos triangulos obliquangulos."

1ª Questão:

Dado ~~o~~ ~~seno~~ e o coseno de um arco, achar o seno e o coseno da metade desse arco.

2ª Questão:

Demonstrar as formulas de Thomas Simpson.

3ª Questão:

Seja $a = 4770$ mt; $b = 3060$ mt; $c = 6480$ mt: pedem-se os angulos e a area do triangulo.

1ª Questão:

Da formula do coseno do dobro mais a formula fundamental vamos tirar a formula do coseno da metade em funcção do coseno;

$$\cos a = \cos^2 \frac{a}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{a}{2}$$

$$1 = \cos^2 \frac{a}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{a}{2}$$

$$\cos a + 1 = 2 \cos^2 \frac{a}{2}$$

$$2 \cos^2 \frac{a}{2} = \cos a + 1$$

Divide-se ambos os termos por 2.

$$\cos^2 \frac{a}{2} = \frac{\cos a + 1}{2}$$

$$\cos \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\cos a + 1}{2}}$$

É essa a formula do coseno da metade.

Com essas mesmas formulas achamos o seno da metade.

$$-\cos\alpha = -\cos^2\frac{\alpha}{2} \pm \sin^2\frac{\alpha}{2}$$
$$1 = \cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$1-\cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$ ou

$$2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1-\cos\alpha$$

Dividindo ambos os termos por 2:

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

É esta a formula do seno da metade.

2ª Questão:

O seno póde ser considerado como um arco, desde que elle seja muito pequeno.

Vamos escrever as formulas do seno da somma e da differença:

$$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \sin b\cos a$$
$$\sin(a-b) = \sin a\cos b - \sin b\cos a$$
$$\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2\sin a\cos b$$

Vamos transpor o 2º membro do 1º membro para o 2º ou

$$\sin(a+b) = 2\sin a\cos b - \sin(a-b)$$

Suppondo que $a = mb$

$m = 1 \quad b = 10$

$$\sin(mb+b) = 2\sin mb\cos b - \sin(mb-b)$$

Vamos collocar b em factor commum:

$$\sin(m+1)b = 2\sin mb\cos b - \sin(~~m~~-1)b$$

Applicamos o valor de b, e achamos o seno e o coseno de um arco de 10° e poderemos achar os respectivos valores dos arcos applicando estas formulas, desde que elles sejam multiplos de 10° ou

$$\text{sen}\,(m+1)\,b = \text{sen}\,(1+1)\,b - \text{sen}\ 2\,b$$

$$\text{sen}\ 20° = 2\ \text{sen}\ 10°\ \cancel{\cos}\ 10° - \text{sen}\ 0$$

Si quizessemos achar o seno de um arco de 30° substituimos $m=2$.

O mesmo que foi feito com o seno faz-se com o coseno:

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \text{sen}\,a\ \text{sen}\,b$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \text{sen}\,a\ \text{sen}\,b$$

$$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2 \cos a \cos b$$

$$\cos(a+b) = 2 \cos a \cos b - \cos(a-b)$$

$$\cos(mb+b) = 2 \cos mb \cos b - \cos(mb-b) \quad \left|\ a = mb\right.$$

$$\cos(m+1)\,b = 2 \cos mb \cos b - \cos(m-1)\,b \quad \left|\ m = 1\right.$$

$$\left|\ b = 10\right.$$

3ª Questão:

$a = 4770$ ms.

$b = 3060$ ms.

$c = 6480$ ms.

Applicamos as respectivas formulas:

$$tg\,\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p\times(p-a)}}$$

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

$$p = \frac{4770+3060+6480}{2} = 7155.$$

$p-b = 4095$

$p-c = 675$

$p-a = 2385$

$$\log tg\,\frac{A}{2} = \frac{\log 4095 + \log 675 + \text{colog}\ 7155 + \text{colog}\ 2385}{2}$$

$$\log tg\,\frac{A}{2} = \frac{3,61225 + 2,82930 + \bar{4},14539 + \bar{4},62251}{2}$$

$$\log tg \frac{A}{2} = \frac{\bar{1},20945}{2} = \bar{1},60472$$

$$tg \frac{A}{2} = 21^\circ \quad 55' \quad 22''$$

$$tg A = 43^\circ \quad 50' \quad 44''$$

$$tg \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}$$

$$\log tg \frac{B}{2} = \frac{\log 2385 + \log 675 + colog\ 7155 + colog\ 4095}{2}$$

$$\log tg \frac{B}{2} = \frac{3,37749 + 2,82930 + \bar{4},14539 + \bar{4},38775}{2}$$

$$\log tg \frac{B}{2} = \frac{\bar{2},73993}{2} = \bar{1},36996.$$

$$tg \frac{B}{2} = 13^\circ \quad 11' \quad 32''$$

$$tg B = 26^\circ \quad 23' \quad 4''$$

$$C = 180 - A + B$$

$$C = 180 - 70^\circ \quad 13' \quad 48''$$

$$C = 109^\circ \quad 46' \quad 12''$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\log S = \frac{\log 7155 + \log 2385 + \log 4095 + \log 675}{2}$$

$$\log S = \frac{3,85461 + 3,37749 + 3,61225 + 2,82930}{2}$$

$$\log S = \frac{13,67365}{2}$$

$$\log S = 6,83682$$

$$S = 6867833\ m2.$$

Elisabeth H. Barbosa.

Rio 9 1/2
17/11/26
Rio

ESCOLA NORMAL DE ARTES E OFFICIOS WENCESLAU BRAZ
Rio de Janeiro, 5 de Novembro de 1926
Nome do alumno Ema Goulart
Anno 4º
Turma A4
Prova final de Trigonometria
Nome do Professor

Ponto sorteado:- nº 5 - "Divisão dos arcos. Formulas de Simpson. 3º Caso de resolução dos triangulos obliquangulos".

1ª Questão:- dados o ~~seno e~~ o coseno de um arco achar o seno e o coseno da metade desse arco

2ª Questão:- demonstrar as formulas de Thomas Simpson

3ª Questão:- ~~Seja~~ (~~a = 4760~~) a = 4770 ms
b = 3060 ms
c = 6480 ms

Pedem-se os angulos e a ~~area~~ do triangulo.

1ª Questão

Da formula do coseno do dobro, sommando-se a formula fundamental, vamos tirar a formula do coseno da metade, em funcção do coseno.

$$\cos a = \cos^2 \frac{a}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{a}{2}$$

$$1 = \operatorname{sen}^2 \frac{a}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{a}{2}$$

$$\cos a + 1 = 2\cos^2 \frac{a}{2}$$

$2\cos^2 \frac{a}{2} = \cos a + 1$. Divide-se ambos os membros por 2.

$$\cos^2\frac{a}{2} = \frac{\cos a + 1}{2}$$

$$\cos\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\cos. a + 1}{2}}$$

Esta é a formula do coseno da metade.
Por estas mesmas formulas vamos achar a do seno da metade.

$$-\cos.^2\frac{a}{2} + \operatorname{sen}^2\frac{a}{2}$$

$$1 = \cos^2\frac{a}{2} + \operatorname{sen}^2\frac{a}{2}$$

$$1 - \cos. a = 2\operatorname{sen}^2\frac{a}{2} \text{ ou}$$

$$2\operatorname{sen}^2\frac{a}{2} = 1 - \cos. a$$

Dividindo-se ambos os membros por 2 temos $\operatorname{sen}^2\frac{a}{2} = \frac{1-\cos. a}{2}$

$$\operatorname{sen}\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos. a}{2}}$$

Esta é a formula do seno da metade

2ª Questão:-

O seno pode ser considerado como um arco desde que seja muito pequeno.
Vamos escrever as formulas do seno da somma e da differença:-

$$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen}. a \cos b + \operatorname{sen}. b. \cos a.$$

$$\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen} a \cos b - \operatorname{sen}. b \cos. a.$$

$$\operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}.(a-b) = 2\operatorname{sen}. a \cos. b.$$

Vamos transpor o segundo membro do ~~terceiro~~ primeiro termo para o segundo ou:-

$$\operatorname{sen}(a+b) = 2\operatorname{sen}. a \cos. b - \operatorname{sen}.(a-b).$$

Suppondo que a seja igual a. mb $\left(\begin{matrix} m = 1. \\ b = 10 \end{matrix}\right)$

$sen(mb + b) = 2\ sen.\ mb\ cos\ b - sen\ (mb - b)$.

Vamos collocar b em factor commum.

$sen.\ (m+1)b = 2\ sen.\ mb\ cos.\ b - sen.\ (m-1)\ b$.

Applicamos o valor de b e achamos o seno e o coseno de um arco de 10° e poderemos achar os respectivos valores dos arcos por essas formulas, desde que sejam multiplos de 10. ou: seno de $(m + 1)\ b = sen.\ (1+1)\ b - sen.\ 2b$.

$sen\ 20° = 2\ sen\ 10° + cos 10° - sen\ 0$.

Se quizessemos achar o seno de um arco de 30°, substituiamos $m = 2$ e o mesmo que fizermos com o seno, poderemos fazer com o coseno.

$$\cos.(a+b) = \cos a \cos b \mp sen.\ a\ sen.\ b$$
$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + sen\ a\ sen.\ b$$
$$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\ cosen\ a.\ \cos.\ b$$
$$\cos(a+b) = 2 \cos a. \cos. b - \cos.(a-b)$$

$\left(\begin{matrix} a = mb \\ m = 1 \\ b = 10° \end{matrix}\right)$

$$\cos.(mb+b) = 2 \cos mb. \cos. mb - \cos(mb - b).$$
$$\cos.(m+1)b = 2\cos.\ m\ b. \cos b - \cos(m-1)\ b$$

3ª Questão:

$a = 4770$ ms

$b = 3060$ ms

$c = 6480$ ms.

Applicando-se as formulas correspondentes temos:

$$tg\ \frac{7}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}.\ p = \frac{a+b+c}{2}.\ p = \frac{4770+3060+6480}{2} =$$

$=7155.$

$p-b=4095$

$p-c=675$

$p-a=2385$

$$\log \cdot tg\frac{A}{2}=\frac{\log 4095+\log 675+\operatorname{colog}.7155+\operatorname{colog}.2385}{2}.$$

$$\log \cdot tg\frac{A}{2}=\frac{3,61225+2,82930+\bar{4},14539+\bar{4},62251}{2}$$

$$\log tg\frac{A}{2}=\frac{\bar{1},20945}{2}=\bar{1},60472.$$

$$tg\frac{A}{2}=21^\circ-55'-22''$$

$$tg\,A=43^\circ-50'-44''$$

$$tg\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}.$$

$$tg\frac{B}{2}=\frac{\log 2385+\log .675+\operatorname{colog} 7155+\operatorname{colog} 4095}{2}.$$

$$tg\frac{B}{2}=\frac{3,37749+2,82930+\bar{4},14539+\bar{4},38775}{2}$$

$$\log tg\frac{B}{2}=\bar{1},36996.$$

$$tg\frac{B}{2}=\cancel{26^\circ}\ 13^\circ-11'-32''$$

$$tg\,B=26^\circ-23'-4''$$

$$C=180-\overline{AB}.$$

$$C=180-70^\circ-13'-48''$$

$$C=109^\circ-46'\,12''$$

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

$$\log S=\frac{\log 7155+\log 2385+\log 4095+\log .675}{}$$

$$\log S=\frac{3{,}85461+3{,}37749+3{,}61225+2{,}82930}{2}$$

ESCOLA NORMAL DE ARTES E OFFICIOS WENCESLAU BRAZ

RIO DE JANEIRO, 5 DE NOVEMBRO DE 1926.

NOME DO ALUMNO Eva Goulart

ANNO 4º

TURMA A4

PROVA FINAL DE Trigonometria

NOME DO PROFESSOR continuação.

$\log S = \frac{13,67365}{2}$

$\log S = 6,83682 \quad (6,83682)$

$S = 6867833\ m^2$

Eva Goulart

Pão 9½
R. 17/11/26

ESCOLA NORMAL DE ARTES E OFFICIOS WENCESLAU BRAZ
Rio de Janeiro, 5 de Novembro de 1926
Nome do alumno Emygdio Couto Braga
Anno 1º
Turma A
Prova final de "Trigonometria"
Nome do Professor

Ponto sorteado: nº 5 "Divisão dos arcos. Formulas de Simpsom. Terceiro caso de resolução de triangulos obliquangulos"

1ª Questão:

Dados o ~~seno~~ e o coseno de um arco, achar o seno e o coseno da metade desse arco.

2ª Questão

Demonstrar as formulas de Thomas Simpson

3ª Questão

Seja a = 4470ms; b = 3060ms; c = 6480ms; pedem-se os angulos e a area do triangulo.

Solução da 1ª questão:

Para determinar a formula do coseno da metade vamos sommar as formulas do coseno do dobro com a 1ª fundamental:

$$\cos a = \cos^2\frac{a}{2} - \cancel{\sin^2\frac{a}{2}}$$
$$1 = \cos^2\frac{a}{2} + \cancel{\sin^2\frac{a}{2}}$$

$$\cos a + 1 = 2\cos^2\frac{a}{2}$$ (dividindo por 2)

$$\cos^2\frac{a}{2} = \frac{\cos a + 1}{2}$$

$$\cos\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\cos a + 1}{2}}$$ (Esta formula é empregada para achar o coseno da metade)

Para determinar a formula do seno da metade em funcção do coseno temos que subtrahir as formulas em vez de sommar.

$$-\cos a = -\cancel{\cos^2\frac{a}{2}} \pm \sin^2\frac{a}{2}$$
$$1 = \cancel{\cos^2\frac{a}{2}} + \sin^2\frac{a}{2}$$

$$1 - \cos a = 2\sin^2\frac{a}{2}$$
$$2\sin^2\frac{a}{2} = 1 - \cos a$$
$$\sin^2\frac{a}{2} = \frac{1-\cos a}{2}$$

$$\sin\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos a}{2}}$$

Sommando as formulas acharemos o coseno da metade subtrahindo teremos o seno da metade.

Solução da 2ª Questão:

Vamos escrever as formulas do seno da somma e da differença

$$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cancel{\sin b\cos a}$$
$$\sin(a-b) = \sin a\cos b - \cancel{\sin b\cos a}$$

$$\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2\sin a\cos b$$

Vamos transpor:

$$\sin(a+b) = 2\sin a\cos b - \sin(a-b)$$

Supponde que $\underline{a}$ seja igual a $m.b$ fica:

$$\sin(mb+b) = 2\sin m.b.\cos bmb - \sin(mb-b)$$

Collocando $\underline{b}$ em factor commum fica:

$$\sin(m+1)b = 2\sin mb.\cos bmb - \sin(m-1)b$$

Supponde q. $m = 1$ e $b = 10$ vamos substituil-o na formula: e acharemos o seno e o coseno de um arco de 10° e poderemos achar os respectivos valores dos arcos por essas formulas desde que elle seja multiplo de 10 ou:

~~Para determinarmos a formula do seno da~~

$$\operatorname{sen}(m+1)b = \operatorname{sen}(1+1)b - \operatorname{sen} 2b$$

$$\operatorname{sen} 20° = 2 \operatorname{sen} 10° \cos 10° - \operatorname{sen} 0.$$

Se quizessemos achar o seno de 30° substituiriamos m por 2.

O mesmo que fizemos com o seno fa- amos fazer com o coseno, applicando as formulas do coseno da somma e da differença:

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b \mp \cancel{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}$$
$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \cancel{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}$$
$$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2 \cos a . \cos b$$

Transpondo o 2º membro:

$$\cos(a+b) = 2 \cos a \cos b - \cos(a-b)$$

Supponho que a seja igual $m.b$:

$$\cos(m.b+b) = 2 \cos mb - \cos(mb-b)$$

Collocando b como factor commum:

$$\cos(m+1)b = 2 \cos mb - \cos(m+1)b. \quad \begin{cases} m = 1 \\ b = 10 \end{cases}$$

Solução da 3ª questão:

$$tg \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

$$tg \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}$$

$$C = 180 - A + B$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$a = 4470$

$b = 3060$

$c = 6480$

$$\log tg \frac{A}{2} = \frac{\log 4095 + \log 675 + colog\, 7155 + colog\, 2385}{2}$$

$$\log 4095 = 3,61225$$
$$\log 675 = 2,82930$$
$$\text{colog } 7155 = \bar{4},14539$$
$$\text{colog } 2385 = \bar{4},62251$$
$$\bar{1},20945$$

$$\log tg \frac{A}{2} = \frac{\bar{1},20945}{2} = \bar{1},60472$$

$$tg \frac{A}{2} = 21^\circ\ 55'\ 22''$$

$$tg\ A = 43^\circ\ 50'\ 44''$$

$$\log tg \frac{B}{2} = \frac{\log 2385 + \log 675 + \text{colog } 7155 + \text{colog } 4.095}{2}$$

$$\log 2385 = 3,37749$$
$$\log 675 = 2,82930$$
$$\text{colog } 7155 = \bar{4},14539$$
$$\text{colog } 4095 = \bar{4},38775$$
$$\log tg \frac{B}{2} \quad \frac{\bar{2},73993}{2}$$

$$\log tg \frac{B}{2} = \bar{1},36996$$

$$tg \frac{B}{2} = 13^\circ - 11' - 32''$$

$$tg\ B = 26^\circ - 23' - 4''$$

$$C = 180^\circ - A + B = 180^\circ - 70^\circ\ 13'\ 48'' =$$
$$C = 109^\circ\ 46'\ 12''$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\log S = \frac{\log 7155 + \log 2385 + \log 4095 + \log 675}{2}$$

ESCOLA NORMAL DE ARTES E OFFICIOS WENCESLAU BRAZ

RIO DE JANEIRO, DE NOVEMBRO DE 1926.

NOME DO ALUMNO Eurydice Couto Braga

ANNO

TURMA

PROVA FINAL DE Continuação de trigonometria

NOME DO PROFESSOR

$$\log 7155 = 3,85461$$

$$\log 2385 = 3,37749$$

$$\log 4095 = 3,61225$$

$$\log 675 = 2,82930$$

$$\log S = \frac{13,67365}{2} = 6,83682$$

$$S = 6867833 \ ms^2$$

Eurydice Couto Braga

J.M.J.

Grão 10
Rio, 17/11/26
[illegible]

ESCOLA NORMAL DE ARTES E OFFICIOS WENCESLAU BRAZ

Rio de Janeiro, 5 de Novembro de 1926

Nome da alumna Eurydice Rangel de Oliveira

Anno 4º

Turma A⁴

Prova final de Trigonometria

Nome do Professor

Ponto sorteado: Nº 5 – "Divisão dos arcos. Formulas de Simpson. 3º caso de Resolução dos triangulos obliquangulos".

—

1ª Questão: Dados o seno e o coseno de um arco, achar o seno e o coseno da metade desse arco.

2ª Questão: Demonstrar as formulas de Thomas Simpson

3ª Questão: Seja $a = 4770^{ms}$; $b = 3.060^{ms}$; $c = 6.480$: Pedem-se os angulos e a area do triangulo.

Soluções:

1ª Questão:–

Vamos escrever a formula do coseno de um arco duplo:

$$\cos a = \cos^2\frac{a}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{a}{2}$$

Agora vamos escrever a 1ª formula fundamental:

$$\cos^2 a + \operatorname{sen}^2 a = 1 \quad \text{ou} \quad 1 = \cos^2 a + \operatorname{sen}^2 a$$

Em vez de tomarmos, o arco igual a a, vamos tomal-o igual a $\frac{a}{2}$; logo temos:

$$1 = \cos^2\frac{a}{2} + \operatorname{sen}^2\frac{a}{2}$$

Vamos sommar agora a 1ª formula citada com a ultima:

$$\cos a = \cos^2\frac{a}{2} - \cancel{\operatorname{sen}^2\frac{a}{2}}$$
$$1 = \cos^2\frac{a}{2} + \cancel{\operatorname{sen}^2\frac{a}{2}}$$

$$\cos a + 1 = 2\cos^2\frac{a}{2}$$

5

Vamos trocar os membros, para ficar melhor comprehendido:

$$2\cos^2\frac{a}{2} = \cos a + 1$$

Vamos agora dividir, ambos os termos por 2:

$$\cos^2\frac{a}{2} = \frac{\cos a + 1}{2}$$

$$\cos\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\cos a + 1}{2}} \quad \text{(formula)}$$

Esta formula serve para achar o coseno da metade.

Vamos procurar agora a formula que nos dá o seno da metade em funcção com o coseno.

Vamos escrever a formula do coseno do doblo:

$$\cos a = \cos^2\frac{a}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{a}{2}$$

1ª formula fundamental, sendo $a = \frac{a}{2}$:

$$1 = \cos^2\frac{a}{2} + \operatorname{sen}^2\frac{a}{2}$$

Subtrahimos agora a 2ª formula da 1ª, tendo o cuidado de trocar os signaes da 1ª:

$$-\cos a = \cancel{-\cos^2\frac{a}{2}} + \operatorname{sen}^2\frac{a}{2}$$

$$1 = \cancel{\cos^2\frac{a}{2}} + \operatorname{sen}^2\frac{a}{2}$$

$$1 - \cos a = 2\operatorname{sen}^2\frac{a}{2}$$

Vamos trocar o lugar dos membros:

$$2\operatorname{sen}^2\frac{a}{2} = 1 - \cos a$$

$$\operatorname{sen}^2\frac{a}{2} = \frac{1-\cos a}{2}$$

Dividindo ambos os termos por 2 temos:

$$\operatorname{sen}\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos a}{2}} \quad \text{(formula)}$$

X

2ª Questão:

Como já vimos em aula, o arco pode ficar igual ao seno, porque a differença é ~~assi~~ insignificantissima.

Para se achar o arco torna-se facil, desde que se considere o raio igual a 1.

Conhecendo-se o seno e o coseno, temos depois o dobro delles, applicando as formulas já estudadas.

Porém, por meio das formulas de Thomas Simpson, mais facilidade.

Assim, temos o seguinte:

Escrevamos as formulas do seno da somma e o da differença, e sommemos:

$$\text{sen}(a+b) = \text{sen}\,a.\cos b + \cancel{\text{sen}\,b.\cos a}$$

$$\text{sen}(a-b) = \text{sen}\,a.\cos b - \cancel{\text{sen}\,b.\cos a}$$

$$\text{sen}(a+b) + \text{sen}(a-b) = 2\,\text{sen}\,a.\cos b$$

Agora, vamos transpor o 2º termo do 1º membro para o 2º membro. Assim, temos:

$$\text{sen}(a+b) = 2\,\text{sen}\,a.\cos b - \text{sen}(a-b)$$

Substituimos agora a por mb:

$$\text{sen}(mb+b) = 2\,\text{sen}\,mb.\cos b - \text{sen}(mb-b)$$

Vamos collocar b em factor commum.

$$\text{sen}(m+1)b = 2\,\text{sen}\,mb.\cos b - \text{sen}(m-1)b$$

Esta formula serve para achar qualquer seno ou coseno multiplo de 10.

Applicação da formula:

Vamos suppor que m seja igual a 1 e b, igual a 10"

(Formula - $\text{sen}(m+1)b = 2\,\text{sen}\,mb.\cos b - \text{sen}(m-1)b$

$$\text{sen}(1+1)10^{\circ} = 2\,\text{sen}\,1 \times 10''.\cos 10'' - \text{sen}(1-1)10''$$

$$\text{sen}\,20^{\circ} = 2\,\text{sen}\,10''.\cos 10'' - \text{sen}\,0''$$

Temos ahi o seno de 20°, conhecendo-se o seno e o coseno de 10".

Todo este raciocinio que fizemos para o ~~seno~~, podemos fazer para o coseno.

Vamos escrever as duas formulas do coseno e sommemos:

$$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \cancel{\operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b}$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cdot \cos b + \cancel{\operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b}$$

$$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos a \cdot \cos b$$

$$\cos(a+b) = 2\cos a \cdot \cos b - \cos(a-b).$$

Vamos considerar $a = mb$

$$\cos(mb+b) = 2\cos mb \cdot \cos b - \cos(mb-b)$$

Vamos collocar b em factor commum:

$$\cos(m+1)b = 2\cos mb \cdot \cos b - \cos(m-1)b$$

Applicação da formula:

Vamos suppor que m seja igual a 1 e b igual a $10''$.

$$\cos(1+1)10'' = 2\cos 1.10'' \cdot \cos 10'' - \cos(1-1)10''$$

$$\cos 20'' = 2\cos 10'' \cdot \cos 10'' - \cos 0''$$

E assim por diante, vamos achando os cosenos de 10 em 10.

X

<u>3ª Questão</u>

Formulas:

$$tg\,\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}.$$

$$tg\,\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}$$

$$tg\,\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}} \quad \text{ou } C = 180° - (A+B$$

Solução:

(Continúa)

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} = \sqrt{\frac{(7155-3060)(7155-6480)}{7155(7155-4770)}} =$$

$$= \operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{4095 \cdot 675}{7155 \cdot 2385}}$$

$$\log\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{\log 4095 + \log 675 + \operatorname{colog} 7155 + \operatorname{colog} 2385}{2}$$

$$\log 4095 = 3,61225$$
$$\log 675 = 2,82930$$
$$\operatorname{colog} 7155 = \bar{4},14539$$
$$\operatorname{colog} 2385 = \bar{4},62251$$

$$\log\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{1,20945}{2} = \bar{1},60472$$

$$\frac{A}{2} = 21^\circ 55' 22''$$
$$A = 43^\circ 50' 44''$$

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}} = \sqrt{\frac{(7155-4770)(7155-6480)}{7155(7155-3060)}} =$$

$$= \operatorname{tg}\frac{B}{2} \sqrt{\frac{2385 \times 675}{7155 \times 4095}}$$

$$\log\operatorname{tg}\frac{B}{2} = \frac{\log 2385 + \log 675 + \operatorname{colog} 7155 + \operatorname{colog} 4095}{2}$$

$$\log 2385 = 3,37749$$
$$\log 675 = 2,82930$$
$$\operatorname{colog} 7155 = \bar{4},14539$$
$$\operatorname{colog} 4095 = \bar{4},38775$$

$$\log\operatorname{tg}\frac{B}{2} = \frac{\bar{2},73993}{2} = \bar{1},36996$$

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2} = 13^\circ 11' 32''$$

$$B = 26^\circ 23' 4''$$

$$C = 180° - (A + B)$$
$$C = 109° \, 46' \, 12''$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$S = \sqrt{7155 \times 2385 \times 4095 \times 675}$$

$$\log S = \frac{\log 7155 + \log 2385 + \log 4095 + \log 675}{2}$$

$$\log 7155 = 3{,}85461$$
$$\log 2385 = 3{,}37749$$
$$\log 4095 = 3{,}61225$$
$$\log 675 = 2{,}82930$$

$$\log S = \frac{13{,}67365}{2} = 6{,}83682$$

$$S = 6.867.833 \, m^2$$

Eurydice Rangel de Oliveira

Fini 9
17/11/26
Bri

ESCOLA NORMAL DE ARTES E OFFICIOS WENCESLAU BRAZ
Rio de Janeiro, 5 de Novembro de 1926
Nome do alumno Irene Bruno
Anno 4º
Turma A4
Prova final de Trigonometria
Nome do Professor

Ponto sorteado: nº 5 – "Divisão dos Arcos. Formulas de Simpson. III caso de resolução dos triangulos obliquangulos.

I Questão:
Dados o seno e o coseno de um arco, achar o seno e o coseno da metade desse arco.

II Questão:
Demonstrar as formulas de Thomas Simpson.

III Questão:
Seja $a = 4770^{ms}$; $b = 3.060^{ms}$; $c = 6480^{ms}$. Pedem-se os angulos e a area do triangulo.

I Questão:
Da formula do coseno do dobro sommando á primeira formula fundamental, vamos tirar a formula do coseno da metade, isto é em funcção do coseno; ou:

$$\cos a = \cos^2 \frac{a}{2} - sen^2 \frac{a}{2}$$

$$1 = \cos^2 \frac{a}{2} + sen^2 \frac{a}{2}$$

$$\cos a + 1 = 2 \cos^2 \frac{a}{2}$$

$$2\cos^2\frac{a}{2} = \cos a + 1$$

Vamos dividir ambos, os termos por 2.

$$\cos^2\frac{a}{2} = \frac{\cos a + 1}{2}$$

$$\cos^2\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\cos a + 1}{2}}$$

É esta a formula do <u>coseno</u> <u>da metade</u>

Das mesmas formulas, porem, subtrahindo, vamos tirar a formula do seno da metade em funcção do coseno:

$$-\cos a = -\cos^2\frac{a}{2} \pm \operatorname{sen}^2\frac{a}{2}$$

$$1 = \cos^2\frac{a}{2} + \operatorname{sen}^2\frac{a}{2}$$

$$1 - \cos a = 2\operatorname{sen}^2\frac{a}{2}$$

$$2\operatorname{sen}^2\frac{a}{2} = 1 - \frac{\cos a}{2}$$

Vamos dividir ambos, os termos por 2

$$\operatorname{sen}^2\frac{a}{2} = 1 - \frac{\cos a}{2}$$

$$\operatorname{sen}\frac{a}{2} = \frac{\sqrt{1 - \cos a}}{2}$$

É esta a formula do <u>seno</u> da <u>metade</u>

IV Questão:

Sabemos que o arco póde ficar igual ao seno; pois a differença é insignificante. Para achar o arco é facil; desde que se considere o raio igual a unidade. Conhecendo-o o seno e o coseno; teremos o dobro delles, applicando as formulas já estu dadas. Porem por meio das formulas de Simpson encontramos mais facilidade. Temos o seguinte:

Escrevemos as formulas do seno da somma e do seno da differença, e sommamos.

$$
\begin{array}{l}
\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen}a \cdot \cos b + \operatorname{sen}b \cdot \cos a \\
\underline{\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen}a \cdot \cos b - \operatorname{sen}b \cdot \cos a} \\
\operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b) = 2\operatorname{sen}a \cdot \cos b
\end{array}
$$

Agora vamos transpor o segundo termo do 1º membro para o 2º membro. Temos:

$$\operatorname{sen}(a+b) = 2\operatorname{sen}a \cdot \cos b - \operatorname{sen}(a-b)$$

Vamos substituir o $\underline{\underline{a}}$ por $\underline{\underline{mb}}$

$$\operatorname{sen}(mb+b) = 2\operatorname{sen}mb \cdot \cos b - \operatorname{sen}(mb-b)$$

Vamos collocar $\underline{\underline{b}}$ em factor commum:

$$\operatorname{sen}(m+1)b = 2\operatorname{sen}mb \cdot \cos b - \operatorname{sen}((m-1)b$$

Esta formula serve para achar qualquer seno ou coseno multiplo de 10'.

Vamos fazer applicação da formula:

Suppor que $\underline{\underline{m}}$ seja igual a 1 ($\underline{\underline{m}}$ pode ter qualquer valor) e b seja igual a 10''

formula: $\operatorname{sen}(m+1)b = 2\operatorname{sen} mb \cos b - \operatorname{sen}(m-1)b$

$$\operatorname{sen}(1+1)10'' = 2\operatorname{sen} 1 \times 10'' \times \cos 10'' - \operatorname{sen}(1-1)\,10''$$

Temos aqui o seno de 20'' conhecendo-se o seno e o coseno de 10''

Si quizermos achar o de 30'' é só substituir o valor de $\underline{\underline{m}}$. Em vez de ser igual a 1, igual a 2

Portanto temos:

$$\operatorname{sen} 30'' = 2\operatorname{sen} 20''\cos 10'' - \operatorname{sen} 10''$$

40° ______ : $\underline{\underline{m}}$ portanto $= 3$

ou $\operatorname{sen} 40° = 2\operatorname{sen} 30''.\cos 10'' - \operatorname{sen} 20''$

Assim póde-se organisar as listas de todos os senos.

Todo o raciocinio que fizemos com o seno faremos para o coseno

Escrevemos as formulas do coseno e sommamos:

$$\cos(a+b) = \cos a.\cos b - \cancel{\operatorname{sen} a.\operatorname{sen} b}$$
$$\underline{\cos(a-b) = \cos a.\cos b + \cancel{\operatorname{sen} a.\operatorname{sen} b}}$$
$$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos a.\cos b$$
$$\cos(a+b) = 2\cos a.\cos b - \cos a\,(a-b)$$

Vamos considerar $\underline{\underline{a}} = mb$

$$\cos(mb+b) = 2\cos a\; mb.\cos b - \cos mb\,(mb-b)$$

ESCOLA NORML DE ARTES E OFFICIOS WENCESLAU BRAZ

Rio de Janeiro, 5 de Novembro de 1926

Nome do alumno Irene Bruno

Anno 4º

Turma 1ª

Prova final de Trigonometria "Continuação"

Nome do Professor

$\cos(m+1)b = 2\cos mb . \cos b . \cos(m-1)b$ formula
E assim vão se formando os cosenos de 10 em 10.

III Questão:

$a = 4770;\ b = 3060^{m};\ c = 6480^{m}$

$$tg \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

$$tg \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}$$

$$tg \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}$$

$$tg \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{4095 \times 675}{7155 \times 2385}}$$

$$\log tg \frac{A}{2} = \frac{\log 4095 + \log 675 + colog\, 7155 + colog\, 2385}{2}$$

$\log 4095 = 3,61225$
$\log 675 = 2,82930$
$colog\, 7155 = \bar{4},14539$

$$\text{colog } 2385 = \bar{4},62251$$
$$\overline{\bar{1},20945}$$

$$\log tg \frac{A}{2} = \frac{\bar{1},20945}{2} = \bar{1},60472$$

$$\frac{A}{2} = 21^\circ - 55' - 22''$$

$$A = 43^\circ - 50' - 44''$$

$$tg \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}$$

$$tg \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{2385 \times 675}{7155 \times 4095}}$$

$$\log tg \frac{B}{2} = \frac{\log 2385 + \log 675 + \text{colog } 7155 + \text{colog } 4095}{2}$$

$$\log 2385 = 3,37749$$
$$\log 675 = 2,82930$$
$$\text{colog } 7155 = \bar{4},14539$$
$$\text{colog } 4095 = \bar{4},38775$$
$$\overline{\bar{2},73993}$$

$$\log tg \frac{B}{2} = \frac{\bar{2},73993}{2} = \bar{1},36996$$

$$tg \frac{B}{2} = 13^\circ - 11' - 32''$$

$$B = 26^\circ - 23' - 4''$$

$$C = 180^\circ - (A + B)$$

$C = 109° - 46' - 12''$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$S = \sqrt{7155 \times 2385 \times 4095 \times 675}$$

$$\log S = \frac{\log 7155 + \log 2385 + \log 4095 + \log 675}{2}$$

$\log 7155 = 3,85461$
$\log 2385 = 3,37749$
$\log 4095 = 3,61225$
$\log 675 = 2,82930$

$$\log S = \frac{13,67365}{2}$$

$$\log S = \frac{13,67365}{2} = 6,83682$$

$$S = 6867833^{m^2}$$

Irene Bruno

1926.

7

Ri 1º
17/11/26

ESCOLA NORMAL DE ARTES E OFFICIOS WENCESLAU BRAZ
Rio de Janeiro, 5 de Novembro de 1926
Nome do alumno Isaura V. Costa
Anno 1º
Turma A
Prova final de Trigonometria
Nome do Professor

Ponto sorteado: nº 5 – "divisão dos arcos. Formulas de Sympson. 3º caso de resolução dos triangulos obliquangulos"

1ª questão – Dados o seno e o coseno de um arco, achar o seno e coseno da metade deste arco.

2ª questão – Demonstrar as formulas Thomas Sympson.

3ª questão – Seja a = 4.770 metros; b = 3.060 metros; c = 6.480. Pedem-se os angulos e a area do triangulo.

$$\cos a = \cos^2\frac{a}{2} - \sin^2\frac{a}{2}$$

$$1 = \cos^2\frac{a}{2} + \sin^2\frac{a}{2}$$

$$\cos a + 1 = 2\cos^2\frac{a}{2}$$

$$2\cos^2\frac{a}{2} = \cos a + 1$$

$$\cos^2\frac{a}{2} = \frac{\cos a + 1}{2}$$

$$\cos\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\cos a + 1}{2}}$$

Sommamos a formula do dobro com a 1ª fundamental e teremos a formula do coseno da metade do arco depois de modificações inalteraveis e explicadas a esquerda

Si entretanto não mais sommarmos, porem diminuirmos teremos a formula do seno da metade pelas mesmas razões.

assim temos a seguinte diminuição

$$1 = \cos^2 \frac{a}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{a}{2}$$
$$-\cos a = -\cos^2 \frac{a}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{a}{2}$$

$$1 - \cos a = 2\operatorname{sen}^2 \frac{a}{2}$$

$$2\operatorname{sen}^2 \frac{a}{2} = 1 - \cos a$$

$$\operatorname{sen}^2 \frac{a}{2} = \frac{1 - \cos a}{2}$$

$$\operatorname{sen} \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos a}{2}}$$

—

Sabemos por lições anteriores que o seno pode ser considerado como sendo igual ao arco, pois a differença achada é insignificantissima

Sommam-se estas formulas

$$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$$
$$\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen} a \cos b - \operatorname{sen} b \cos a$$

$$\operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b) = 2\operatorname{sen} a \cos b$$

Transpondo $\operatorname{sen}(a-b)$ para o segundo termo, assim temos

$$\operatorname{sen}(a+b) = 2\operatorname{sen} a \cos b - \operatorname{sen}(a-b)$$

Substituimos a por mb

$$\operatorname{sen}(mb+b) = 2\operatorname{sen} mb \cos b - \operatorname{sen}(mb-b)$$ Collocando b em evidencia temos: $\operatorname{sen}(m+1)b = 2\operatorname{sen} mb \cos b - \operatorname{sen}(m-1)b$

Temos pois a formula, substituimos los valores assim temos: $m = 1$; $b = 10$ Teremos então:

$$\operatorname{sen}(1+1)10 = 2\operatorname{sen} 1 \times 10 \cos 10 - \operatorname{sen}(1-1)10$$
$$\operatorname{sen} 20 = 2\operatorname{sen} 10 \cos 10 - \operatorname{sen} 0$$

—

O mesmo fazemos para o coseno do coseno, usando as formulas

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$$
$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$$
$$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos a \cos b$$

Procedendo da mesma maneira como para o seno temos:

$$\cos(a+b) = 2\cos a \cos b - \cos(a-b)$$

$$\cos(mb+b) = 2\cos mb \cos b - \cos(mb-b)$$

$$\cos(m+1)b = 2\cos mb \cos b - \cos(m-1)b$$

$$\cos(1+1)10 = 2\cos 1\times 10 \cos 10 - \cos(1-1)10$$

$$\cos 20^\circ = 2\cos 10 \cos 10 - \cos 0$$

Resolução do problema

$a = 4770$; $b = 3060$; $c = 6.480$

$$tg\,\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

$a = 4770$
$b = 3060$
$c = 6.480$
$2p = 14.310$
$p = 7.155$

$$tg\,\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(7.155-3.060)(7155-6.480)}{7.155\,(7155-4770)}}$$

$$tg\,\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{4.095\times 675}{7.155\times 2385}}$$

$$\log tg \frac{A}{2} = \frac{\log 4.095 + \log 675 + colog\, 7155 + colog\, 2385}{2}$$

$$\log tg \frac{A}{2} = \frac{\bar{1},20945}{2} = \bar{1},60472$$

$$\log tg \frac{A}{2} = \bar{1},60472$$

$$\frac{A}{2} = 21^\circ\ 55'\ 22''$$

$$A = 43^\circ\ 50'\ 44''$$

$$tg \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}$$

$$tg \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(7155-4770)(7155-6470)}{7155(7155-3060)}}$$

$$tg \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{2385 \times 675}{7155 \times 4095}}$$

$$\log tg \frac{B}{2} = \frac{\log 2385 + \log 675 + colog\, 7155 + colog\, 4095}{2}$$

$$\log tg \frac{B}{2} = \frac{\bar{2},73993}{2} = \bar{1},36996$$

$$tg \frac{B}{2} = 13^\circ\ 11'\ 32''$$

$$B = 26^\circ - 23' - 4''$$

$$180 - (A+B) = C$$

$$180 - 70^\circ\ 50'\ 44'' = 109^\circ\ 46'\ 12''$$

ESCOLA NORMAL DE ARTES E OFFICIOS WENCESLAU BRAZ

Rio de Janeiro, 5 de Novembro de 1926

Nome do alumno Maura Vieira Costa

Anno 4º

Turma A[4]

Prova final de Trigonometria (continuação)

Nome do Professor

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\log S = \frac{\log 7155 + \log 2385 + \log 4095 + \log 675}{2}$$

$$\log S = \frac{3,85461 + 3,37749 + 3,61225 + 2,82930}{2}$$

$$\log S = \frac{13,67365}{2}$$

$$\log S = 6,83682$$

$$S = 6867833 \text{ m}^2$$

Rio 5 1/2
17/11/926
Rio

ESCOLA NORMAL DE ARTES E OFFICIOS WENCESLAU BRAZ

Rio de Janeiro, de Novembro de 1926

Nome do alumno Lygia Fernandes da Ponte

Anno 4º

Turma 1ª

Prova final de Trigonometria

Nome do Professor

Ponto sorteado: no 4 Divisão dos arcos formulas de Simpson 3º caso da 1ª de resolução dos triangulos obliquangulos.

1 Questão: _ Dados o seno e o coseno de um arco, achar o seno e o coseno da metade desse arco.

2ª " " Demonstrar as formulas de Thomas Simpson

3ª " " Seja a = 4770m, b = 3,060, c = 6480m; pede-se os angulos e a area dos triangulos

1ª Questão: Para determinar as formulas do coseno da metade temos que somar as formulas

$$\cos a = \cos^2 \frac{a}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{a}{2}$$

$$1 = \cos^2 \frac{a}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{a}{2}$$

$$\cos a + 1 = 2\cos^2 \frac{a}{2}$$

$2\cos^2 \frac{a}{2} = \cos a + 1$. Dividimos ambos os termos por dois

$$\cos^2 \frac{a}{2} = \frac{\cos a + 1}{2}$$

$$\cos \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\cos + 1}{2}}$$

Esta formula é do coseno da metade.
Para acharmos o coseno do ~~[illegible]~~ vamos applicar as ~~mesmas~~ formulas

$-\cos 2a^2 + \sin^2 \frac{a}{2}$

$1 = \cos^2 \frac{a}{2} + \sin^2 \frac{a}{2}$

$1 - \cos. a = 2 \sin^2 \frac{a}{2}$ ou

$2 \sin^2 \frac{a}{2} = 1 - \cos. a$

Dividindo-se ambos os termos por 2 teremos

$\sin^2 \frac{a}{2} = \frac{1-\cos a}{2}$

$\sin \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{1-\cos. a}}{2}$

Esta é a formula do seno da metade.

2 Questão. O seno pode ser considerado como um arco desde que seja pequeno. Vamos repor as formulas do seno da somma e da differença.

$$\begin{aligned}
\sin(a+b) &= \sin a \cos b + \sin b \cos a \\
\sin(a-b) &= \sin a \cos b - \sin b \cos. a \\
\hline
\sin(a+b) + \sin(a-b) &= 2 \sin a \cos b
\end{aligned}$$

Vamos transpor o segundo membro do primeiro termo para o segundo.

$\sin(a+b) = 2 \sin a \cos b - \sin(a-b)$

Supponhamos que $\underline{a}$ seja igual $a = mb$ $\left(\begin{matrix} m = 1 \\ b = 10 \end{matrix}\right)$

$\operatorname{sen}(mb+b) = 2 \operatorname{sen} mb \cos b - \operatorname{sen}(mb-b)$

Vamos collocar b em factor commum

$\operatorname{sen}(m+1)b = 2 \operatorname{sen} mb \cos b - \operatorname{sen}(m-1)b.$

Applicando-se o valor de b acharemos o seno e o coseno de um arco de $10°$ e assim acharemos os valores dos arcos; por estas formulas desde que sejam multiplos de 10. ou

sen de $(m+1)b = \operatorname{sen}(1+1)b = \operatorname{sen} 2b$

$\operatorname{sen} 2° = 2 \operatorname{sen} 10° + \cos 10° - \operatorname{sen} 0.$

Querendo-se achar o seno de um arco de $30°$ = temos que substituir $m = 2$ e o mesmo temos que fazer com o coseno.

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b$$

$$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2 \operatorname{sen} a \cdot \cos b.$$

$$\cos(a+b) = 2 \cos a \cdot 2 \cos b - \cos(a-b)$$

$$\left(\begin{matrix} a = mb \\ m = 1 \\ b = 10 \end{matrix}\right)$$

$$\cos(mb+b) = 2 \cos mb \cdot \cos b - \cos(mb-b)$$

$$\cos(m+1)b = 2 \cos mb \cdot \cos b - \cos(m-1)b$$

3ª Questão:

$a = 4770 m$

$b = 3,060 m$

$c = 6480 m$

Appliquemos as formulas correspondentes:

$$\operatorname{tg} \frac{b}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

$$p = \frac{4770 + 3060 + 6480}{2} = 7155.$$

$p - b = 4095$

$p - c = 675$

$p - a = 2385$

$$\log tg \frac{A}{2} = \frac{\log 4095 + \log 675 + colog\, 7155 + colog\, 2385}{2}$$

$$\log tg \frac{A}{2} = \frac{3,61226 + 2,82930 + \bar{4},14539 + \bar{4},62251}{2}$$

$$\log tg \frac{A}{2} = \frac{\bar{1},20945}{2} = \bar{1},60472$$

$$tg \frac{A}{2} = 21^\circ - 55' - 22''$$

$$tg\, A = 43^\circ - 50' - 44''$$

$$tg\, B = \frac{\log 2385 + \log 675 + colog\, 7155 + colog\, 4095}{2}$$

$$\log tg \frac{B}{2} = \bar{1},36996.$$

$$tg \frac{B}{2} = 13^\circ - 11' - 32''$$

$$tg\, B = 26^\circ - 23' - 4''$$

$c = 180^\circ - AB$

$c = 180^\circ - 70^\circ - 13' - 48''$

$c = 109^\circ - 46' - 12''$

$s = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$\log s = \log 7155 + \log 2385 + \log 4095 + \log 675$

$\log s = 3,85461 + 3,37749 + 3,61225 + 2,82930$

$\log s = \frac{13,67365}{2}$; $\log s = 6,83682$

$s = 6867783^{m^2}$.

Visto
17/11/26
[illegible]

ESCOLA NORMAL DE ARTES E OFFICIOS WENCESLAU BRAZ

Rio de Janeiro, 5 de Novembro de 1926

Nome do alumno Mafalda Leone

Anno 4ª

Turma A4ª

Prova final de Trigonometria

Nome do Professor

Ponto sorteado: nº 5 – "Divisão dos arcos. Formulas de Simpson. 3º caso de resolução dos triangulos obliquangulos."

1ª Questão:

Dados o seno e o coseno de um arco, achar o seno e o coseno da metade dess[e] arco.

2ª Questão:

Demonstrar as formulas de Thomas Simpson

3ª Questão

Seja a = 4770 metros, b = 3060 metros, c = 6480 metros: pedem-se os angulos e a area do triangulo.

1ª Questão:

Formula do coseno do dobro.

$$\cos a = \cos^2 \frac{a}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{a}{2}$$

1ª equação das linhas trigonometricas.

$$1 = \cos^2 + \operatorname{sen}^2$$

Subtrahindo a 2ª da 1ª temos:

$$\cancel{1} + \cancel{\cos^2} + \cancel{\operatorname{sen}^2}$$

$$\cos a = \cos^2 \frac{a}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{a}{2}$$

$$-1 = -\cos^2 \frac{a}{2} \mp \operatorname{sen}^2$$

$$1 - \cos a = 2 \operatorname{sen}^2 \frac{a}{2}$$

Se transpuzermos os termos, teremos:

$$2\,sen^2 \frac{a}{2} = 1 - \cos a$$

Dividindo ambos os termos por $\underline{\underline{2}}$, obteremos:

$$sen^2 \frac{a}{2} = \frac{1-\cos a}{2}$$

Extrahindo a raiz quadrada

$$sen\ a = \sqrt{\frac{1-\cos a}{2}}$$

É esta a formula para acharmos o seno da metade do arco.

Vamos agora, determinar o coseno da metade, mas neste caso, sommamos em logar da subtracção

$$\cos a = \cos^2 \frac{a}{2} - sen^2 \frac{a}{2}$$

$$\frac{1}{1+\cos a} \begin{matrix} = \cos^2 + sen^2 \\ = 2\cos^2 \frac{a}{2} \end{matrix}$$

Transpondo os termos:

$$2\cos^2 \frac{a}{2} = 1 + \cos a$$

Dividindo por $\underline{\underline{2}}$:

$$\cos^2 \frac{a}{2} = \frac{1+\cos a}{2}$$

Extrahindo a raiz quadrada:

$$\cos \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos a}{2}}$$

Eis a formula para obtermos o coseno da metade.

2ª Questão

O arco, pode ser considerado como igual ao seno, pois a differença é insignificantissima.

Para achar o arco, considerando-se o raio = 1 é facil de sabermos o valor delle.

Sommando a formula do seno da somma de dois arcos com a do seno da differença, temos então:

$$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a . \cos b + \cancel{\operatorname{sen} b . \cos a}$$
$$\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen} a . \cos b - \cancel{\operatorname{sen} b . \cos a}$$

$$\operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b) = 2 \operatorname{sen} a . \cos b.$$

Transpõe-se o seno $(a-b)$ para o 2º termo:

$$\operatorname{sen}(a+b) = 2 \operatorname{sen} a . \cos b - \operatorname{sen}(a-b).$$

Vamos dar a a, o valor de mb (pode ser qualquer valor).

$$\operatorname{sen}(mb+b) = 2 \operatorname{sen} mb . \cos b - \operatorname{sen}(mb-b).$$
$$\operatorname{sen}(m+1)b = 2 \operatorname{sen} mb . \cos b - \operatorname{sen}(m-1)b$$

É esta a formula procurada. Vamos substituir m e b por seus suppostos valores, $m = 1$; $b = 10$

Assim, podemos achar o seno de qualquer arco que seja multiplo de 10.

$$\operatorname{sen} 30'' = 2 \operatorname{sen} 20'' . \cos 10 - \operatorname{sen} 10''$$

Para acharmos o coseno, vamos proceder desta mesma forma.

$$\cos(a+b) = \cos a . \cos b - \cancel{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}$$
$$\cos(a-b) = \cos a . \cos b + \cancel{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}$$

$$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2 \cos a . \cos b$$

Transpondo o $\cos(a-b)$ obteremos:

$$\cos(a+b) = 2 \cos a . \cos b - \cos(a-b)$$

Dando-se um valor qualquer a a, temos.

$\cos(mb+b) = 2\cos mb \cdot \cos b - \cos(mb-b)$

$\cos(m+1)b = 2\cos mb \cdot \cos b - \cos(m-1)b$

Substituindo pelos seus suppostos valores. $m = 1$, $b = 10$.

Eis a formula para se achar o coseno que seja multiplo de 10.

$$\cos(1+1)10'' = 2\cos 1\times 10 \cdot \cos 10 - \cos(1-1)10.$$

3ª Questão:

$a = 4770^{ms}$; $b = 3060^{ms}$; $c = 6480^{ms}$.

$$tg\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} = \frac{(7155-3060)(7155-6480)}{7155(7155-4770)}$$

$$tg\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}} = \frac{(7155-4770)(7155-6480)}{7155(7155-3060)}$$

$$tg\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}} = \frac{(7155-4770)(7155-3060)}{7155(7155-6480)}$$

$$tg\frac{A}{2} = \frac{4095\times 675}{7155\times 2385} = \frac{\log 4095 + \log 675 + colg\, 7155 + colg\, 2385}{2}$$

$\log 4095 = 3,61225$

$\log 675 = 2,82930$

$colg\, 7155 =$ [illegible]14539

$colg\, 2385 = \bar{4},62251$

$$\log tg\frac{A}{2} = \frac{\bar{1},20945}{2} = \bar{1},60472$$

$tg\dfrac{A}{2} = 21°\ 55'\ 22''$

$A = 43°\ 50'\ 44''$

$$tg\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{2385\times 675}{7155\times 4095}}$$

Continuação

$\log 2385 = 3,37749$
$\log 675 = 2,82930$
$\operatorname{colg} 7155 = \bar{4},14539$
$\operatorname{colg} 4095 = \bar{4},38775$

$\log tg \frac{B}{2} = \frac{\bar{2},73993}{2}$

$\log tg B = \bar{1},36996 = 13^\circ\ 11'\ 32''$
$B = 26^\circ\ 23'\ 4''$

~~$tg \frac{C}{2}$~~ Para achar C, ha uma formula mais facil

$C = 180^\circ (A + B)$

$C = 109^\circ\ 46'\ 12''$

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$S = \sqrt{\frac{7155 \times 2385 \times 4095 \times 675}{2}}$

$\log 7155 = 3,85461$
$\log 2385 = 3,37749$
$\log 4095 = 3,61225$
$\log 675 = 2,82930$
$\log S = \frac{13,67365}{2} = 6,83628$

$S = 6867833\ m^2$

Mafalda Leone

Prova 9
17/11/26

ESCOLA NORMAL DE ARTES E OFFICIOS WENCESLAU BRAZ

Rio de Janeiro, 5 de Novembro de 1926

Nome do alumno Maria da Annunciação Silva

Anno 4º

Turma A4

Prova final de Trigonometria

Nome do Professor

Ponto sorteado: nº 5 "Divisão dos arcos. Formulas de Simpsom. 3º caso de resolução dos triangulos obliquangulos"

1ª Questão: ~~Dados o seno~~ e o coseno de um arco, achar o seno e o coseno da metade desse arco.

2ª Questão

Demonstrar as formulas de Thomas Simpson

3ª Questão

Seja a = 4.770 metros; b = 3.060 metros; c = 6.480 metros: pedem-se os angulos e a area do triangulo.

Para se achar o coseno da metade em funcção do coseno: sommam-se as formulas

$$\cos a = \cos^2\frac{a}{2} - \cancel{\operatorname{sen}^2\frac{a}{2}}$$

$$1 = \cos^2\frac{a}{2} + \cancel{\operatorname{sen}^2\frac{a}{2}}$$

$$\cos a + 1 = 2\cos^2\frac{a}{2}$$

Transpondo o 1º termo para o 2º termo:

$$2\cos^2\frac{a}{2} = \cos a + 1.$$

Dividindo ambos os termos por 2 resulta o seguinte:

$$\cos^2\frac{a}{2} = \frac{\cos a + 1}{2}$$

$$\cos \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\cos a + 1}{2}}$$

Formula que nos dá o coseno da metade em funcção do coseno.

2ª formula ~~ao~~: Da formula do coseno do dobro e da 1ª fundamental podemos obter a do seno da metade em funcção do coseno

$$\cos a = \cos^2 \frac{a}{2} - \sin^2 \frac{a}{2}$$

$$1 = \cos^2 \frac{a}{2} + \sin^2 \frac{a}{2}$$

Subtraindo temos que mudar o signal da primeira formula

$$-\cos a = \cancel{-\cos^2 \frac{a}{2}} + \sin^2 \frac{a}{2}$$
$$1 = \cancel{\cos^2 \frac{a}{2}} + \sin^2 \frac{a}{2}$$

$$1 - \cos a = 2 \sin^2 \frac{a}{2}$$

Transpondo :—

$$2 \sin^2 \frac{a}{2} = 1 - \cos a$$

Dividindo por 2 :—

$$\sin^2 \frac{a}{2} = \frac{1 - \cos a}{2}$$

$$\sin \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos a}{2}}$$

Formula que nos da o seno da metade em funcção do coseno.

2ª Lição

O seno pode ser considerado coseno desde que seja um arco muito pequeno.
Vamos escrever a formula do seno da somma e a differença:

$$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$$
$$\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen} a \cos b - \operatorname{sen} b \cos a$$

Sommando:

$$\operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b) = 2 \operatorname{sen} a \cos b.$$

Vamos transpor $\operatorname{sen}(a-b)$ para o segundo termo:–

$$\operatorname{sen}(a+b) = 2 \operatorname{sen} a \cos b - \operatorname{sen}(a-b)$$

Substituimos a por mb

$$\operatorname{sen}(mb+b) = 2 \operatorname{sen} mb \cos b - \operatorname{sen}(mb-b)$$

Collocando o b em factor commum temos

$$\operatorname{sen}(m+1)b = 2 \operatorname{sen} mb \cos b - \operatorname{sen}(mb-1)b.$$

Esta formula serve para achar o seno de qualquer grão multiplo de 10.

Damos ao b o valor conhecido — $b = 10$
e substituimos o m por 1.

$$\operatorname{sen}(m+1)b = 2 \operatorname{sen} mb \cos b - \operatorname{sen}(m-1)b$$
$$\operatorname{sen}(1+1)10 = 2 \operatorname{sen} 1.10 \cos 10 - \operatorname{sen}(1-1)10 =$$
$$\operatorname{sen} 20'' = 2 \operatorname{sen} 10 \cos 10 - \operatorname{sen} 0$$

$m = 2$

$$\operatorname{sen} 30'' = 2 \operatorname{sen} 20 \cos 10 - \operatorname{sen} 10$$

$m = 3$

$$\operatorname{sen} 40 = 2 \operatorname{sen} 30 \cos 10 - \operatorname{sen} 20$$

Para o coseno procederemos da mesma forma que o seno: Escrevemos o coseno da somma e da differença:

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \cancel{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}$$
$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \cancel{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}$$
$$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2 \cos a \cos b$$

$$\cos(a+b) = 2 \cos a \cos b - \cos(a-b) \qquad a = mb$$
$$\cos(mb+b) = 2 \cos mb \cos b - \cos(mb-b)$$
$$\cos(m+1)b = 2 \cos mb \cos b - \cos(mb-1)b$$

3ª Genestad

$$\left.\begin{array}{l} a = 4770 \\ b = 3060 \\ c = 6480 \end{array}\right\}$$

$$tg \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

$$tg \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{4095 \times 675}{7155 \times 2385}}$$

$$\log tg \frac{A}{2} = \frac{\log 4095 + \log 675 + colog\, 7155 + colog\, 2385}{2}$$

$$\begin{array}{rl} \log 4095 = & 3,61225 \\ \log 675 = & 2,82930 \\ colog\, 7155 = & \bar{4},14539 \\ colog\, 2385 = & \bar{4},62251 \\ \hline & \bar{1},20945 \end{array}$$

$$\log tg \frac{A}{2} = \frac{\bar{1},20945}{2} = \bar{1},60472$$

$$tg \frac{A}{2} = 21°55'22'' \qquad tg\, A = 43°50'44''$$

$$\cancel{\log}\ tg \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}$$

$$\log tg \frac{B}{2} = \frac{\log 2385 + \log 675 + colog\, 7155 + colog\, 4095}{2}$$

$$\begin{array}{rl} \log 2385 = & 3,37749 \\ \log 675 = & 2,82930 \\ colog\, 7155 = & \bar{4},14539 \\ colog\, 4095 = & \bar{4},38775 \\ \hline & \bar{2},73993 \end{array}$$

$$\log tg \frac{B}{2} = \frac{\bar{2},73993}{2} = \bar{1},36996$$

$$\cancel{\log}\ tg \frac{B}{2} = 13°11'32'' \qquad tg\, B = 26°23'4''$$

$C = 180 - (A+B)$

Continuação (Trigonometria)

$$\begin{array}{r} 43°\ 50'\ 44'' \\ 26°\ 23'\ 4'' \\ \hline 70°\ 13'\ 48'' \end{array} \qquad \begin{array}{r} 179°\quad \overset{59}{\cancel{62}}\quad 60 \\ \cancel{180°} \\ 70°\ 13'\ 48'' \\ \hline 109°\ 46'\ 12 \end{array}$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\log S = \frac{\log 7155 + \log 2385 + \log 4095 + \log 675}{2}$$

$$\begin{array}{l} \log 7155 = 3{,}85461 \\ \log 2385 = 3{,}37749 \\ \log 4095 = 3{,}61225 \\ \log 675 = 2{,}82930 \\ \hline \qquad\qquad 13{,}67365 \end{array}$$

$$\log S = \frac{13{,}67365}{2} = 6{,}83682$$

$$S = 6867833\ m^2$$

Maria da Annunciação Silva

Grau 10
Rio, 17/11/26

ESCOLA NORMAL DE ARTES E OFFICIOS WENCESLAU BRAZ

Rio de Janeiro, de Novembro de 1926

Nome do alumno: Maria Julia Lirio Corrêa Netto.

Anno: 1º.

Turma: A4

Prova final de: Trigonometria.

Nome do Professor

Ponto sorteado: numero 5 — "Divisão dos arcos. Formula Simpson. 3º caso de resolução dos triangulos."

1ª Questão: Dado o coseno de um arco, achar o seno e o coseno da metade desse arco.

Da formula do coseno do dobro, sommando a 1ª formula fundamental, vamos tirar a formula do coseno da metade, em função do coseno, ou:

$$\cos a = \cos^2 \frac{a}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{a}{2}$$

$$1 = \cos^2 \frac{a}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{a}{2}$$

$$\cos a + 1 = 2\cos^2 \frac{a}{2} \quad \text{ou}$$

$$2\cos^2 \frac{a}{2} = \cos a + 1$$

Vamos dividir ambos os termos por, 2, ou:

$$\cos^2 \frac{a}{2} = \frac{\cos a + 1}{2}$$

$$\cos \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\cos a + 1}{2}}$$

Eis a formula do coseno da metade.

Dessas mesmas formulas, porém, subtrahindo, vamos achar o seno da metade, em funcção do coseno, ou:

$$-\cos a = -\cos^2\frac{a}{2} + \cancel{\operatorname{sen}^2\frac{a}{2}}$$

$$1 = \cos^2\frac{a}{2} + \cancel{\operatorname{sen}^2\frac{a}{2}}$$

$$1 - \cos a = 2\operatorname{sen}^2\frac{a}{2} \quad \text{ou}$$

$$2\operatorname{sen}^2\frac{a}{2} = 1 - \cos a$$

Vamos dividir ambos os termos por 2, ou:

$$\operatorname{sen}^2\frac{a}{2} = \frac{1-\cos a}{2}$$

$$\operatorname{sen}\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos a}{2}}$$

Eis a formula do seno da metade.

2ª Questão:

Formulas de Simpson

Sabemos que o seno póde ser considerado como um arco, desde que este seja sufficientemente pequeno.

Escrevemos as formulas do seno da somma e da differença:

$$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \cancel{\operatorname{sen} b \cos a}$$

$$\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen} a \cos b - \cancel{\operatorname{sen} b \cos a}$$

$$\operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b) = 2\operatorname{sen} a \cos b$$

Vamos transpor o 2º termo do 1º membro para o 2º, ou:

$$\operatorname{sen}(a+b) = 2\operatorname{sen} a \cos b - \operatorname{sen}(a-b)$$

Vamos suppor que $a = mb$; $m = 1$ e $b = 10''$

$$\operatorname{sen}(mb+b) = 2\operatorname{sen} mb \cos b - \operatorname{sen}(mb-b)$$

Vamos collocar b em factor commum, ou:

$$\operatorname{sen}(m+1)b = 2\operatorname{sen} mb \cos b - \operatorname{sen}(m-1)b$$

Applicamos em b o seu valor, e achamos o seno e o coseno do arco de $10''$, e poderemos achar dos outros arcos por esta formula, desde que sejam estes multiplos de $10''$, ou:

$$\operatorname{sen}(m+1)b = \operatorname{sen}(1+1)b = \operatorname{sen} 2b$$

$$\operatorname{sen} 20'' = 2\operatorname{sen} 10'' \cos 10'' - \operatorname{sen} 0$$

Si quizessemos achar o seno de um arco de 30", consideramos $m = 2$.

O mesmo que fizemos com o seno, faremos com o coseno, ou;

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$$
$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$$
$$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2 \cos a \cos b$$
$$\cos(a+b) = 2 \cos a \cos b - \cos(a-b)$$
$$\cos(mb+b) = 2 \cos mb \cos b - \cos(mb-b)$$
$$\cos(m+1)b = 2 \cos mb \cos b - \cos(m-1)b$$

$a = mb$

$m = 1$

$b = 10"$

3ª Questão:

Sejam $a = 4770^m$; $b = 3060^m$; $c = 6480^m$; pedem-se os angulos e a area do triangulo.

Solução:

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{4095 \times 675}{7155 \times 2385}}$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{\log 4095 + \log 675 + \operatorname{colog} 7155 + \operatorname{colog} 2385}{2}$$

$$\log 4095 = 3,61225$$
$$\log 675 = 2,82930$$
$$\operatorname{colog} 7155 = \bar{4},14537$$
$$\operatorname{colog} 2385 = \bar{4},62251$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{\bar{1},20945}{2} = \bar{1},60472$$

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = 21° \; 55' \; 22"$$

$$\operatorname{tg} A = 43° \; 50' \; 44"$$

$$\operatorname{tg} \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}$$

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{2385 \times 675}{7155 \times 4095}}$$

$$\log \operatorname{tg}\frac{B}{2} = \frac{\log 2385 + \log 675 + \operatorname{colog} 7155 + \operatorname{colog} 4095}{2}$$

$\log 2385 = 3,37749$

$\log 675 = 2,82930$

$\operatorname{colog} 7155 = \bar{4},14539$

$\operatorname{colog} 4095 = \bar{4},38775$

$\log \operatorname{tg}\frac{B}{2} = \frac{\bar{2},73993}{2} = \bar{1},36996$

$\operatorname{tg}\frac{B}{2} = 13° \; 11' \; 32''$

$\operatorname{tg} B = 26° \; 23' \; 4''$

$C = 180 - (A + B).$

$C = 109° \; 46' \; 12''.$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$S = \sqrt{7155 \times 2385 \times 4095 \times 675}$$

$$\log S = \frac{\log 7155 + \log 2385 + \log 4095 + \log 675}{2}$$

$\log 7155 = 3,85461$

$\log 2385 = 3,37749$

$\log 4095 = 3,61225$

$\log 675 = 2,82930$

$\log S = \frac{13,67365}{2} = 6,83682.$

$S = 6867833.^{m^2}$

Julia

Grão 10
Rio, 17/11/26
[illegible]

ESCOLA NORMAL DE ARTES E OFFICIOS WENCESLAU BRAZ

Rio de Janeiro, 5 de Novembro de 1926

Nome do alumno Nyiia Cysneiros

Anno 4°

Turma A

Prova final de Trigonometria

Nome do Professor

Ponto sorteado: — nº 5 —

"Divisão dos arcos. Formulas de Simpson. Terceiro caso da resolução dos triangulos obliquangulos."

— " —

1ª Questão.

Dados o ~~seno~~ e o coseno de um arco, achar o seno e o coseno da metade desse arco.

— " —

2ª Questão.

Demonstrar as formulas de Thomas Simpson.

— " —

3ª Questão.

Seja $a = 4770^m$, $b = 3060^m$; $c = 6480^m$: pedem-se os angulos e a area do triangulo.

— " —

1ª Questão.

Se sommarmos a formula do coseno do dobro com a primeira formula fundamental encontraremos a formula do coseno da metade.

Logo,

$$\cos a = \cos^2 \frac{a}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{a}{2}$$

$$1 = \cos^2 \frac{a}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{a}{2}$$

$$\cos a + 1 = 2 \cos^2 \frac{a}{2}$$

$$2 \cos^2 \frac{a}{2} = \cos a + 1$$

Vamos dividir ambos os seus membros por 2, temos

$$\cos^2 \frac{a}{2} = \frac{\cos a + 1}{2}$$

que extrahindo a raiz quadrada fica:

$$\cos \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\cos a + 1}{2}}$$

Logo, a formula para achar o coseno da metade é:

$$\cos \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\cos a + 1}{2}}$$

÷ Seno da metade ÷

Temos a formula do coseno do dobro si subtrahirmos a formula primitiva, encontraremos a formula do seno da metade.

$$-\cos a = -\cos^2 \frac{a}{2} + \text{sen}^2 \frac{a}{2}$$

$$1 = \cos^2 \frac{a}{2} + \text{sen}^2 \frac{a}{2}$$

$$1 - \cos a = 2 \,\text{sen}^2 \frac{a}{2}$$

$$2 \,\text{sen}^2 \frac{a}{2} = 1 - \cos a$$

Dividindo esses membros por 2, temos:

$$\text{sen}^2 \frac{a}{2} = \frac{1 - \cos a}{2}$$

Extrahindo a raiz temos:

$$\text{sen}^2 \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos a}{2}}$$

— " —

2ª Questão:

O seno póde ser considerado como um arco, desde que elle seja muito pequeno.

Vamos escrever as formulas do seno da somma e da differença:

$$\text{sen}\,(a + b) = \text{sen}\, a \cos b + \text{sen}\, b \cos a$$

$$\text{sen}\,(a - b) = \text{sen}\, a \cos b - \text{sen}\, b \cos a$$

$$\text{sen}\,(a + b) + \text{sen}\,(a - b) = 2\, \text{sen}\, a \cos b.$$

Vamos transpor $\operatorname{sen}(a-b)$ para o outro termo:

$$\operatorname{sen}(a+b) = 2 \operatorname{sen} a \cos b - \operatorname{sen}(a-b)$$

Vamos substituir a por mb

$$\operatorname{sen}(mb+b) = 2 \operatorname{sen} mb \cos b - \operatorname{sen}(mb-b)$$

Vamos por b em evidencia:

$$\operatorname{sen}(m+1)b = 2 \operatorname{sen} mb \cos b - \operatorname{sen}(m-1)b$$

Applicação:

Substituindo m por 1 e b por 10 e empregando a formula temos:

$$\operatorname{sen} 20'' = 2 \operatorname{sen} 10 \cos 10 - \operatorname{sen} 0$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$$
$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$$
$$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2 \cos a \cos b$$

Transpondo $\cos(a-b)$ temos:

$$\cos(a+b) = 2 \cos a \cos b - \cos(a-b)$$

$a = mb$

$$\cos(mb+b) = 2 \cos mb \cos b - \cos(mb-b)$$

Vamos por b em evidencia:

$$\cos(m+1)b = 2 \cos mb \cos b - \cos(m-1)b$$

Applicação:

Consideremos $m = 1$ e b por 10

$$\cos 20 = 2 \cos 10 \cos 10 - \cos 0$$

3ª Questão:

Seja $a = 4770^m$; $b = 3060^m$; $c = 6480^m$: pedem-se os angulos e a area do triangulo:

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1095 \times 675}{7155 \times 2385}}$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{\log 4095 + \log 675 + \operatorname{colog} 7155 + \operatorname{colog} 2385}{2}$$

$$\log 4095 = 3,61225$$
$$\log 675 = 2,82930$$
$$\operatorname{colog} 7155 = \bar{4},14539$$
$$\operatorname{colog} 2385 = \bar{4},62251$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{\bar{1},20945}{2} = \bar{1},60472$$

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = 21^\circ - 55' - 22''$$

$$A = 43^\circ - 50' \ 44''$$

— " —

$$\operatorname{tg} \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{2385 \times 675}{7155 \times 4095}}$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{B}{2} = \frac{\log 2385 + \log 675 + \operatorname{colog} 7155 + \operatorname{colog} 4095}{2}$$

$$\log 2385 = 3,37749$$
$$\log 675 = 2,82930$$
$$\operatorname{colog} 7155 = \bar{4},14539$$
$$\operatorname{colog} 4095 = \bar{4},38775$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{B}{2} = \frac{\bar{2},73993}{2} = \bar{1},36996$$

$$\operatorname{tg} \frac{B}{2} = 13^\circ - 11' - 32''$$

$$B = 26^\circ - 23' - 4''$$

— " —

$$C = 180^\circ - (A + B)$$
$$C = 109^\circ \ 46' \ 12''$$

— " — " —

ESCOLA NORML DE ARTES E OFFICIOS WENCESLAU BRAZ

Rio de Janeiro, 5 de Novembro de 1926

Nome do alumno Nyeia Cysneiros

Anno 4º

Turma A4

Prova final de

Nome do Professor

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\log S = \frac{\log 7155 + \log 2385 + \log 4095 + \log 675}{2}$$

$$\log S = \frac{3,85461 + 3,37749 + 3,61225 + 2,82930}{2}$$

$$\log S = \frac{13,67365}{2} = 6,83682$$

$$S = 6867833^{m^2}$$

Nycia