Desenho Linear

Martins Ribeiro
Cart.

Materias que constituem esta Bibliotheca

Elementos Geraes

1 — Desenho linear, exercicios praticos
2 — Elementos de Physica.
3 — Desenho de solidos, projecções e perspectiva.
4 — Arithmetica.
5 — Geometria.
6 — Elementos de Mecanica.
7 — Elementos de Chimica.

Mecanica

1 — Desenho de Machinas.
2 — Nomenclatura e Technologia de Caldeiras e Machinas de vapor.
3 — Physica Industrial.
4 — Chimica Industrial.
5 — Construcção de Machinas de vapor e Caldeiras.
6 — Motores Especiaes.

Construcção Civil

1 — Elementos de Architectura.
2 — Nomenclatura e Materiaes de Construcção.
3 — Construcção Civil.
4 — Arte decorativa e Estylos.
5 — Estylisação, composição e ornamentação.

Indicações praticas e Nomenclatura de officios

Manual do:
1 — Serralheiro Civil.
2 — Serralheiro Mecanico.
3 — Torneiro.
4 — Forjador.
5 — Fundidor.
6 — Conductor de Machinas.
7 — Electricista.
8 — Tintureiro.
9 — Fiandeiro e tecelão.
10 — Modelador, formador e estucador.

Manual do:
11 — Carpinteiro Civil.
12 — Carpinteiro de Moldes.
13 — Marceneiro.
14 — Entalhador.
15 — Pintor e Decorador.
16 — Pedreiro.
17 — Sapateiro.
18 — Funileiro.
19 — Encadernador.
20 — Tanoeiro.

Descripção de Industrias

1 — Hulha.
2 — Metallurgia.
3 — Tecidos e Fiação de Seda, Linho, Algodão, e Lã.
4 — Ceramica
5 — Estampagens e Tinturarias.
6 — Papel.
7 — Vidro.
8 — Azeite, Oleos, Sabão, Adubos.
9 — Industrias de alimentação: Pão, Queijo, Manteiga, Farinha, Assucar, Confeitaria, e Chocolate.
10 — Alcool, licores, cerveja.
11 — Galvanoplastia.
12 — Relojoaria.
13 — Borracha.
14 — Artes graphicas.
15 — Photographia Industrial.
16 — Hygiene das officinas.
17 — Escripturação de officinas, orçamentos.
18 — Industrias de Illuminação: Stearina, Gaz, Acetylene e Electricidade.
19 — Chapelaria.
20 — Inventos Modernos.
21 — Leis do trabalho, ensino industrial.

Manual do Operario

BIBLIOTHECA

de

Instrucção e Educação profissional

DESENHO LINEAR

LISBOA
Bibliotheca de Instrucção e Educação Profissional
CALÇADA DO FERREGIAL, 6, 1.º
1904

MANUAL DO OPERARIO

DESENHO LINEAR

INTRODUCÇÃO

A FALTA de livros verdadeiramente elementares, contendo apenas as noções essenciaes expostas methodicamente, e escriptas em linguagem simples, correcta e precisa, fez com que tentassemos preencher essa lacuna emprehendendo a presente publicação, destinada principalmente ao ensino industrial.

Começaremos pelo *desenho linear*, util a todas as classes.

O presente compendio contém além do traçado geometrico, rigoroso e exacto, feito com instrumentos de precisão, satisfazendo assim ao rigor que exigem as artes industriaes, uma collecção de exercicios, que os alumnos devem copiar, á simples vista, ou com o auxilio da regoa e do compasso.

Todas as linhas rectas e curvas são a base das figuras geometricas simples: o triangulo, o quadrado e o circulo, com os seus compostos: o hexagono e o octogono.

Com estas figuras poder-se-ha fazer uma variedade immensa de combinações elegantes.

Póde-se igualmente tirar grande partido das linhas rectas parallelas, horizontaes e verticaes, e bem assim do cruzamento d'estas linhas em angulo recto, compondo-se com estes elementos um numero infinito de desenhos rectilineos.

Os circulos e as combinações das suas intercepções dão tambem logar a variados desenhos.

Terminaremos por recommendar aos alumnos que todos os exercicios devem ser executados com o maximo cuidado, afim de não faltar rigor e exactidão.

A. Cunha Rosa

Professor da Escola Industrial Affonso Domingues

Xabregas

NOÇÕES PRELIMINARES

1 — O **desenho** em geral é a arte de representar por meio de linhas, sombras e côres convenientes todos os objectos que nós vemos ou imaginamos.

2 — O desenho póde classificar-se em:
a) **Desenho linear,**
b) **Desenho de ornato,**
c) **Desenho topographico,**
d) **Desenho do natural.**

3 — **Desenho linear** é a parte do desenho que tem por fim representar os objectos só por meio de **linhas.**

4 — O **desenho linear** applicado á **mecanica,** á **architectura,** ou á **industria** está dependente do conhecimento de certos principios geraes, e de construcções proprias da **geometria,** e por isso o seu estudo deve ser precedido de uma parte da **geometria pratica.**

5 — O desenho linear divide-se em *desenho linear geometrico* e *desenho linear á vista.*

6 — No **desenho linear geometrico** empregam-se construcções de geometria, e por conseguinte os instrumentos precisos para as executar, como regoas, esquadros, compassos, etc.

7 — O **desenho linear geometrico** divide-se em: *Desenho de figuras geometricas planas, desenho de perspectiva* e *desenho de projecções.*

8 — **Desenho de figuras geometricas planas** é o que ensina a traçar todas as figuras de **geometria plana** e as variadas applicações d'essas figuras.

9—**Desenho de perspectiva** é o que se occupa de representar os objectos taes como elles se nos apresentam á vista.

10—**Desenho de projecções** é o que tem por fim representar sobre um só plano a fórma dos corpos: esse plano é a folha de papel de desenho.

11—No **desenho à vista** todas as linhas são traçadas á mão e copiadas á vista sem o auxilio dos instrumentos.

12—O **desenho de ornato** é uma combinação do desenho linear com o do natural.

13—O **desenho topographico** representa as fórmas e os accidentes do terreno.

14—O **desenho do natural** representa a figura humana, animaes, flôres e fructos, paizagens, etc.

15—**Corpos** são os diversos objectos que nos cercam, e que de qualquer fórma impressionam os nossos sentidos.

16—**Espaço** é o que podemos conceber abstrahindo de todos os objectos da natureza.

17—**Extensão** é qualquer porção limitada do espaço.
A extensão póde ter uma só dimensão, póde ter duas e tres; mas não póde ter mais de tres.

18—**Volume** de um corpo é a porção de espaço occupada pelo mesmo corpo, ou a extensão com tres dimensões: *comprimento, largura e altura.*
A altura denomina-se tambem **espessura** ou **grossura** e **profundidade** ou **fundura.**
Assim se diz: a **altura** de um homem ou de uma casa, a **espessura** de uma parede, a **grossura** de uma tábua, a **profundidade** do mar, e a **fundura** de um poço.

19—**Superficie.** Quando se pega em um corpo, toca-se na sua superficie, quando se olha para um corpo opaco, é a sua superficie que se vê, quando se enverniza um movel, se pinta uma porta ou caia uma parede, é a superficie do movel, da porta ou da parede que é envernizada, pintada ou caiada.
A **superficie** é, portanto, a parte exterior de todos os objectos, o limite dos corpos em todos os sentidos, ou a extensão com duas dimensões: *comprimento* e *largura.*

Uma folha de papel, por exemplo, tem duas superficies, a frente e o verso. Em um vaso qualquer ha igualmente duas superficies, uma interior e outra exterior.

20 — **Linha.** O que vulgarmente se chama contorno das superficies, é uma linha ou uma serie de linhas.

Assim a orla de um rio é a linha que separa a terra da agua.

Esta linha póde ser representada por um fio muito fino, que segue fielmente as sinuosidades do rio.

O traço deixado por um lapis sobre uma folha de papel ou uma superficie qualquer, é uma linha.

A **linha** é, portanto, o limite das superficies ou a extensão com uma só dimensão: *comprimento*.

21 — **Ponto.** Muitas vezes a palavra ponto é empregada como synonymo de logar; é tambem no mesmo sentido que se emprega para indicar o cruzamento ou o encontro de duas ou mais ruas.

Se considerarmos essas ruas, mais ou menos largas, reduzidas a simples linhas, o seu encontro ou o ponto onde se cruzam é o **ponto geometrico.**

O ponto geometrico não tem comprimento, nem largura, nem espessura, isto é, não tem extensão alguma e póde ser considerado como o **limite das linhas.**

22 — As linhas são de duas especies: **rectas** e **curvas.** Da combinação d'estas duas especies fundamentaes de linhas resultam as linhas *polygonaes* e *mixtas*.

23 — **Linha recta** é aquella que póde girar sobre os seus extremos, sem mudar de posição, ou, é o caminho mais curto entre dois pontos, e mede a distancia entre elles.

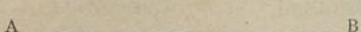


Fig. 1

Dão-nos exemplo da linha recta um fio bem esticado, tal como a corda de uma viola.

Para designar uma linha recta, escreve-se uma letra em cada extremidade e lêem-se successivamente. Assim se dirá: a linha A B, *fig. 1*. Diz-se tambem o ponto A ou o extremo A da linha A B.

24 — **Linha curva** é aquella que não é recta nem composta de linhas rectas.

Indica-se geralmente por tres letras. Tal é a linha A B C, *fig. 2*. Os pontos A e C são os seus extremos.

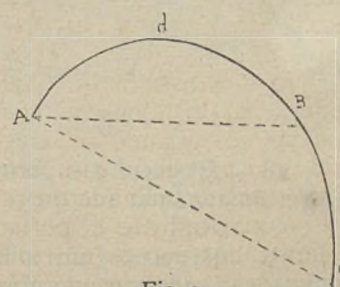


Fig. 2

Se a linha curva A B C girar sobre os seus extremos A e C andará em volta da recta A C e mudará de logar. A qualquer das suas partes, A d B, por exemplo, acontecerá o mesmo a respeito da recta A B, se girar sobre os seus extremos. Assim podemos tambem dizer que: *Linha curva é aquella que não póde girar sobre os seus extremos sem mudar de logar.*

Dão-nos exemplos da linha curva: o *arco-iris*, o contorno das folhas das plantas, etc.

25 — **Linha quebrada.** Uma serie de linhas rectas dispostas em diversas direcções, unidas duas a duas pelos seus extremos e formando o que vulgarmente se chama **zig-zag**, não é uma nova especie de linha, mas sim uma linha composta.

Denomina-se **linha quebrada** ou **polygonal**, pelo facto de representar uma linha recta partida em differentes partes, mas sem que estas estejam separadas d'aquella, muito embora tenham tomado direcções differentes. Indica-se por letras collocadas nos extremos das rectas componentes.

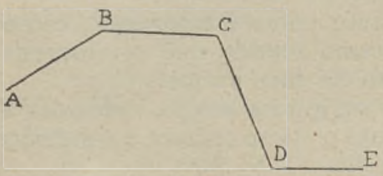


Fig. 3

Tal é a linha A B C D E, *fig. 3.* As letras M N Z dão-nos um exemplo da linha quebrada.

26 — Uma linha polygonal ou curva, e em geral qualquer figura, diz-se **convexa** quando não póde ser cortada por uma recta em mais de dois pontos, (*fig. 2.*)

27 — **Linha mixta** é a composta de rectas e curvas conjunctamente. A linha A B C D E F, *fig. 4*, é mixta.

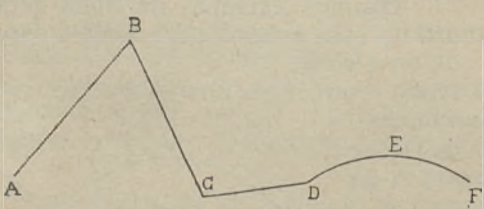


Fig. 4

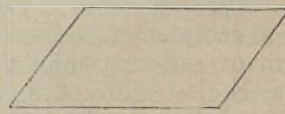


Fig. 5

28 — **Superficie plana** ou **plano** é aquella sobre a qual se póde ajustar uma recta em qualquer direcção, *fig. 5.*

29 — **Figura** é um nome generico dado aos volumes, superficies, linhas e pontos, ou ao conjuncto de algum d'estes elementos.

Figuras planas são aquellas que estão completamente assentes em um só plano.

30 — Duas ou mais figuras dizem-se **iguaes**, *fig. 6*, quando podem sobrepôr-se exactamente uma á outra, o que exige que haja igualdade na fórma e na extensão; **similhantes**, *fig. 7*, quando têem a mesma fórma, embora não tenham a mesma extensão; e **equivalentes**, *fig. 8*, quando têem a mesma extensão, embora não tenham a mesma fórma.

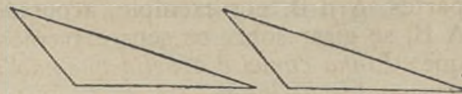


Fig. 6

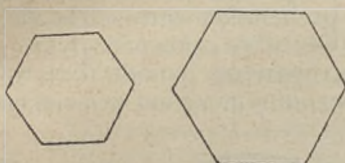


Fig. 7

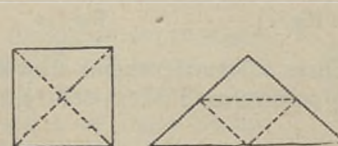


Fig. 8

31 — **Circumferencia** é uma linha curva, cujos pontos estão todos equidistantes de um ponto interior chamado *centro*. A circumferencia é uma figura convexa, porque não póde ser cortada por uma recta senão em dois pontos.

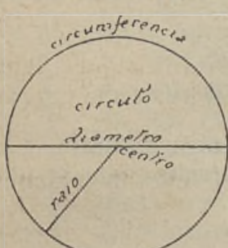


Fig. 9

Circulo é a porção de plano limitada pela circumferencia.

As rectas tiradas do centro para qualquer ponto da circumferencia dizem-se *raios*. É claro que todos os raios do mesmo circulo são iguaes.

Arco de circulo é uma porção qualquer da circumferencia.

Corda é a recta que une as extremidades de um arco.

Diametro é a recta que, passando pelo centro, tem os seus extremos na circumferencia. É claro que todos os diametros do mesmo circulo são iguaes, por ser cada um d'elles igual ao dobro do raio.

Tangente á circumferencia é a recta que com ella tem só um ponto commum. Este ponto diz-se *ponto de tangencia* ou *de contacto*.

Secante é toda a transversal que corta a circumferencia.

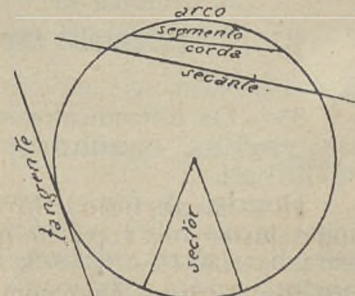


Fig. 10

Sector circular é a porção do circulo comprehendida entre um arco e os raios tirados para os seus extremos.

Segmento circular é a porção de circulo comprehendida entre um arco e a corda respectiva.

32 — Duas circumferencias dizem-se **concentricas**, *fig. 11*, quando têem o mesmo centro; e **excentricas** no caso contrario.

Diz-se **corôa circular** a porção do circulo maior comprehendida entre duas circumferencias concentricas.

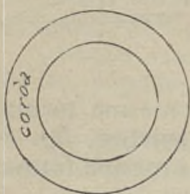


Fig. 11

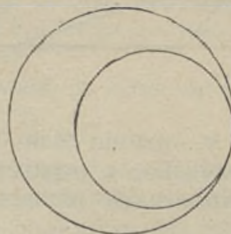


Fig. 12

Duas circumferencias dizem-se **tangentes** quando têem só um ponto commum. Pódem sel-o *interiormente*, *fig. 12*, ou *exteriormente*, *fig. 13*, segundo a de menor raio está dentro ou fóra da outra.

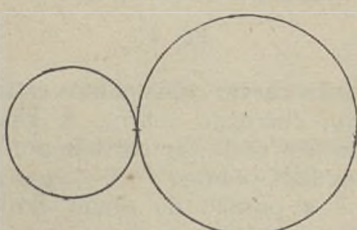


Fig. 13

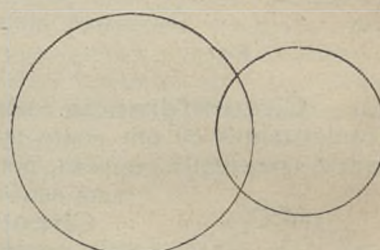


Fig 14

Circumferencias **secantes**, *fig. 14*, são aquellas que se interceptam.

CAPITULO I

Instrumentos empregados no desenho geometrico

33 — Os instrumentos indispensaveis para o desenho geometrico são: **regoas, esquadros, compassos, transferidores** e **tira-linhas.**

Regoa. A regoa, instrumento muito vulgar, serve para traçar linhas rectas sobre superficies planas: é ordinariamente feita de madeira bem secca e flexivel, e deve ser **direita e bem desempenada.**

Para verificar se uma regoa é **direita**, isto é, se as suas arestas são perfeitamente rectilineas, trace-se uma linha recta A B, *fig. 15*, seguindo com exactidão uma das arestas C D; volte-se depois a regoa,

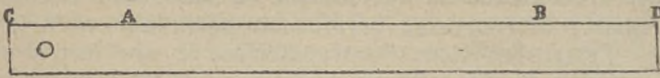


Fig. 15

de modo que a extremidade C mude para D e D para C, e trace-se uma nova linha, que coincidirá com a primeira, se a regoa fôr direita.

Para que a regoa esteja *bem desempenada* devem as suas faces assentar sobre uma superficie plana, sem que entre esta e a regoa haja o menor intervallo.

Algumas regoas teem os bordos divididos em centimetros e millimetros, e servem para medir linhas, ou para marcar o seu comprimento, quando elle nos fôr dado: estas regoas dizem-se *graduadas* e as mais usuaes teem 2 decimetros de comprimento, e chamam-se *duplos decimetros*.

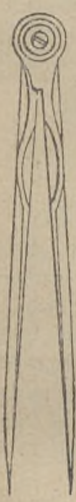


Fig. 16

Fig. 17

Esquadro. A descripção e verificação d'este instrumento vem no capitulo **perpendiculares e parallelas.**

Compassos. Compassos são instrumentos que servem para traçar circumferencias ou arcos sobre um plano, e para medir distancias.

Ha duas especies de compassos: de *pontas fixas* ou de *divisão*, e de *pontas moveis*. O primeiro, *fig. 16*, consta de duas hastes metallicas chamadas *pernas*, terminadas em ponta n'uma das suas extremidades e reunidas na outra por uma *charneira*, que permitte abrir mais ou menos o angulo formado pelas pernas.

O compasso de pontas moveis, *fig. 17*, só differe do antecedente em ter uma perna disposta para receber e reter, por meio d'um parafuso de pressão, um *porta-lapis*, *fig. 18*, ou um *tira-linhas*, *fig. 19*.

Os compassos são tanto mais exactos quanto mais agudas são

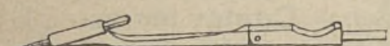


Fig. 18

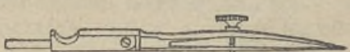


Fig. 19

as pontas, e devem usar-se pegando n'elles com os dedos maximo, indicador e pollegar da mão direita, e empregando pouca força para não romper o papel.

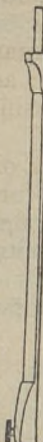


Fig. 20

Quando ha necessidade de descrever arcos de maior raio, que o dado pela maxima abertura do compasso, emprega-se a peça apresentada na *fig. 20,* que se substitue á perna movel, e á qual n'este caso se parafusa o porta-lapis ou o tira-linhas.

Transferidor. O transferidor é um instrumento que serve para medir os arcos, ou para os traçar com certo numero de graus. Consiste n'uma placa semi-circular de qualquer materia transparente, *fig. 21,* ou de metal, *fig. 22,* cujo bordo exterior chamado *limbo* está dividido em 180 partes iguaes, que se chamam *graus* e cujo diametro tem no centro um pequeno entalhe denominado *centro* do transferidor.

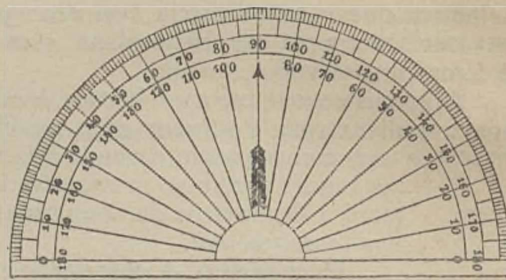


Fig. 21

Tira-linhas. O tira-linhas, *fig. 23*, consta de duas laminas de aço terminadas por um cabo de madeira ou de marfim e atravessadas por um parafuso, que serve para as approximar ou afastar uma da outra. A palavra tira-linhas explica o uso d'este instrumento, o qual deve ser empregado collocando-o quasi perpendicular ao papel e nunca inclinado para qualquer dos lados da linha que se quer cobrir.

34 — Além dos instrumentos que acabâmos de descrever, é necessario possuir os seguintes objectos para o estudo do desenho: **papel, lapis de plombagina, canivete, gomma elastica e nankim.**

O papel deve ser de boa qualidade e com a consistencia sufficiente para resistir á gomma elastica e receber a tinta.

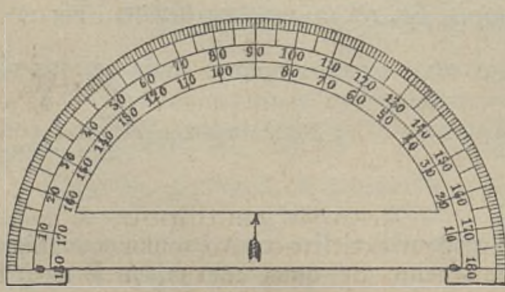


Fig. 22

Os melhores lapis, que se encontram no commercio, são os de **Faber**, ou de **Cónté**; são numerados desde 1 até 4, augmentando a dureza da plombagina na mesma ordem: os lapis n.^{os} 1 e 2 são

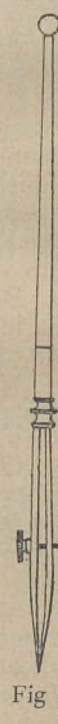


Fig 23

muito molles e bons para o desenho á vista; os n.os 3 e 4 empregam-se no desenho geometrico.

A melhor qualidade de gomma elastica é a de Faber; mas seja qual fôr a marca, deve-se escolher uma gomma bem flexivel; as gommas elasticas que são duras, riscam o papel e dão maus resultados.

O nankim, ou tinta da China, emprega-se para passar a tinta os desenhos, depois de feitos a lapis; para que seja bom, não deve formar residuos quando desfeito, e depois de secco deve apresentar um tom bronzeado e brilhante. Deve desfazer-se a tinta brandamente; por melhor que seja o nankim, carregando n'elle formará residuos.

Deve haver cuidado na escolha do canivete; basta que seja d'uma só folha, mas esta bem afiada.

Os instrumentos devem conservar-se sempre bem limpos, e em logar isento de sol e de humidade.

CAPITULO II

Angulos. — Sua classificação e construcção. — Divisão dos arcos e dos angulos em partes iguaes

35 — **Angulo, vertice, lados.** Diz-se **angulo** a figura formada por duas linhas rectas partindo do mesmo ponto, ou a inclinação reciproca de duas rectas que se encontram, *fig. 24*. O ponto commum ás duas rectas diz-se *vertice*, e as duas rectas, prolongadas tanto quanto se quizer, chamam-se *lados*. Designa-se um angulo escrevendo uma letra em cada lado, e outra no vertice, devendo na enunciação ser esta nomeada entre as duas outras. Quando o vertice não pertença senão a um angulo basta a letra do vertice.

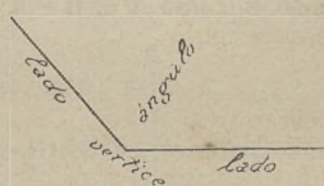


Fig. 24

A grandeza d'um angulo depende do afastamento dos seus lados e não do comprimento d'elles.

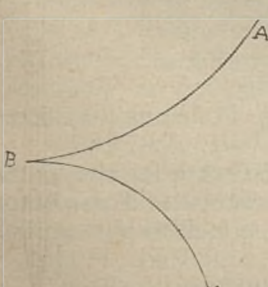


Fig. 25

36 — **Angulo rectilineo, curvilineo e mixtilineo.** Ao maior ou menor afastamento de duas curvas, A B e C B, *fig. 25*, ou de uma recta E F e uma curva

D E, *fig. 26,* que se encontram, tambem se dá o nome de angulo, d'onde resulta o dividirem-se os angulos emquanto á natureza dos seus lados em: **rectilineos**, *fig. 24,* quando os seus lados são linhas rectas; **curvilineos**, *fig. 25*, quando os seus lados são linhas curvas, e **mixtilineos**, *fig. 26*, quando os seus lados são formados por uma recta e uma curva.

37 — Dois angulos dizem-se **adjacentes**, quando teem o mesmo

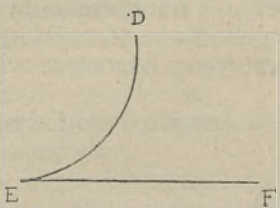


Fig. 26

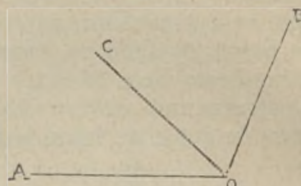


Fig. 27

vertice, um lado commum e os outros dois para lados differentes. Taes são os angulos A O C e C O B, *fig. 27*.

38 — **Angulos rectos e obliquos.** Quando uma linha recta encontra outra, fórma com ella dois angulos adjacentes que podem ser iguaes ou desiguaes. No primeiro caso os angulos denominam-se **rectos**, como A C B e A C D, *fig. 28*. No segundo caso os angulos

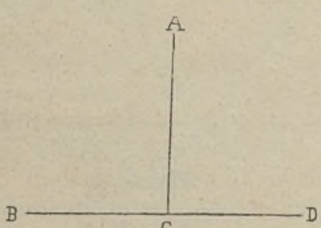


Fig. 28

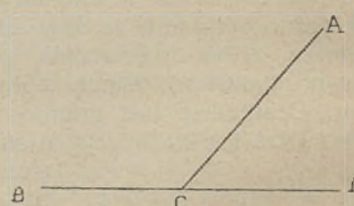


Fig. 29

são **obliquos**, como A C B e A C D, *fig. 29*. Podemos pois dizer que:

Angulo recto é um dos angulos que uma recta faz com outra não se inclinando mais para um lado do que para o outro d'essa outra recta; e **obliquo** quando essa inclinação não é a mesma para ambos os lados.

Os angulos obliquos são: **agudos e obtusos.**

Angulo agudo é o que é menor do que o recto. Tal é o angulo A C D, *(fig. 29)*.

Angulo obtuso é o que é maior do que o recto. Tal é o angulo A C B, (*fig. 29*).

39 — **Angulos complementares** são aquelles cuja somma é igual a um angulo recto.

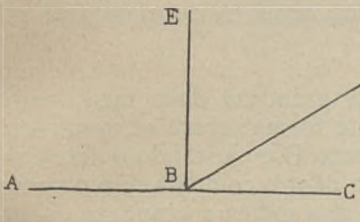


Fig. 30

Angulos supplementares são aquelles cuja somma é igual a dois angulos rectos.

Assim os angulos E B D e D B C, *fig. 30*, são *complementares*; e os angulos A B D e D B C *supplementares*.

40 — **Angulos verticalmente oppostos.** Se for dado um angulo e prolongarmos os seus lados além do vertice, formaremos um segundo angulo igual ao primeiro.

Estes dois angulos denominam-se *verticalmente oppostos*. Taes são os angulos A C D e B C E, *fig. 31*, bem como A C B e D C E.

41 — **Bissetriz** de um angulo é a recta que o divide em duas partes iguaes. A bissetriz do angulo A B C, *fig. 32*, é a linha B D.

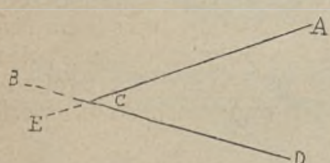


Fig. 31

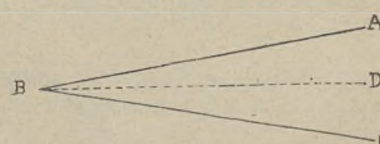


Fig. 32

42 — Demonstra-se em geometria que os angulos têem por medida os arcos descriptos dos seus vertices como centros e comprehendidos entre os lados; portanto a medição dos angulos reduz-se á dos arcos correspondentes, que, como já dissemos, se faz por meio do transferidor.

Queremos, por exemplo, medir o angulo A B C, *fig. 33*: ajuste se o centro do transferidor com o vertice B do angulo e faça-se coincidir o diametro o — 180° com um dos lados A B, a divisão do limbo correspondente ao outro lado B C indica

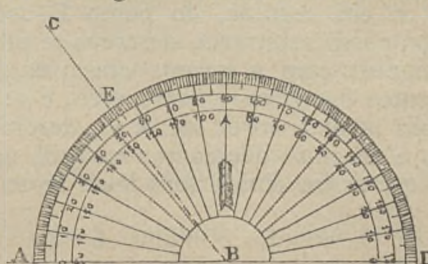


Fig. 33

a medida do angulo. A graduação dos transferidores comprehende só graus e meios graus, por isso, quando o segundo lado B C do angulo não coincidir exactamente com alguma das divisões do limbo, avalia-se á vista a distancia entre B C e a divisão mais proxima, e se fôr avaliada como $1/2$ de uma divisão, o angulo terá por medida, além dos graus comprehendidos entre os seus lados, mais $1/2$ de meio grau ou 15 minutos.

43 — A construcção d'um angulo de grandeza dada faz-se tambem por meio do transferidor, da seguinte fórma: traça-se uma recta A D, *fig. 33*, marca-se sobre ella um ponto B e ajustando o diametro do transferidor com A D de modo que o centro coincida com o ponto B, marca-se um ponto E junto á divisão que indica a grandeza do angulo, tirando em seguida o transferidor e unindo o ponto E ao ponto B por meio da recta E B, ter-se-ha construido o angulo E B A com a grandeza dada.

Estudemos agora a construcção dos angulos por meio do compasso.

Problema I — Construir um angulo igual a outro dado

Seja A B C o angulo dado, *fig. 34:* trace-se uma recta indefinida

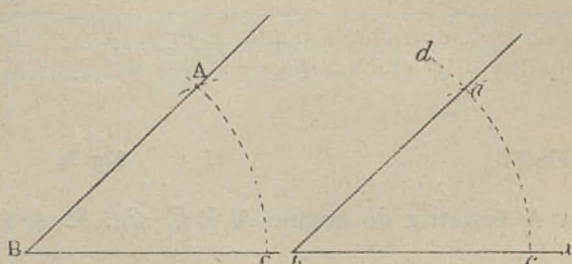


Fig. 34

b x, em seguida, do ponto B como centro, com uma abertura de compasso arbitraria, descreva-se um arco A C, que córte os lados do angulo; com a mesma abertura de compasso e do ponto *b* como centro descreva-se outro arco, *c d*; do ponto *c* como centro, e com um raio igual á corda de A C, descreva-se um arco que cortará *c d* em *a*, e unam-se depois por meio de uma recta os pontos *a* e *b*. O angulo *a b c* assim obtido será igual ao angulo dado A B C.

Problema II — Sommar dois angulos dados

Sejam A e B os angulos dados, *fig.* 35: trace-se uma recta indefinida *a b* e tire-se por um dos seus extremos *a* outra recta *a c*, que

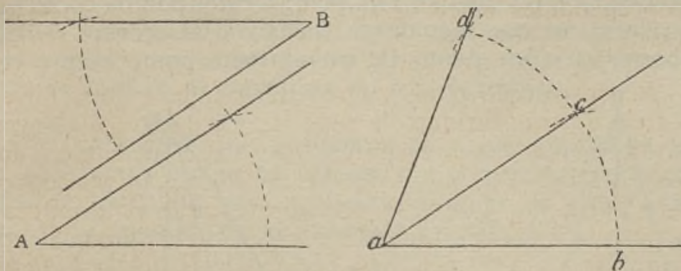


Fig. 35

fórme com *a b* um angulo igual a A (Problema I), construa-se depois sobre *a c* um angulo igual a B, o angulo resultante *d a b* será igual á somma dos dois angulos dados.

Problema III — Subtrahir um angulo de outro

Proponhamo-nos subtrahir o angulo B de A, *fig.* *36*: trace-se uma recta *a b* e construam se sobre ella os angulos *d a b* e *c a b* respectivamente iguaes aos angulos A e B dados; o angulo *d a c* exprimirá a differença pedida.

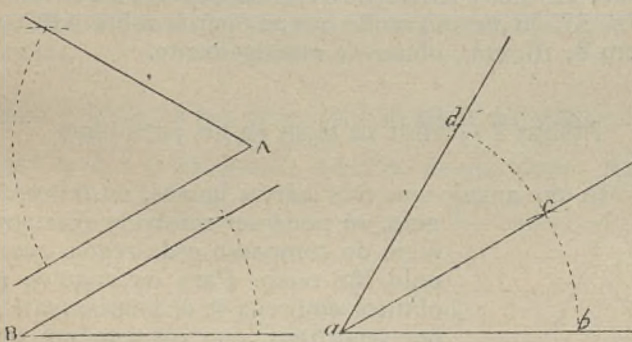


Fig. 36

Esta construcção serve tambem para comparar os angulos entre si.

Problema IV — Dividir um angulo em duas, quatro, oito, etc., partes iguaes

Seja A B C o angulo dado, *fig.* 37: do vertice B como centro, e com uma abertura de compasso arbitraria, descreva se um arco *a c*, que corte os lados do angulo, em *a* e *c*; d'estes pontos como centros e com um raio maior que metade da corda *a c* descrevam se dois arcos que se cortarão n'um ponto D; unindo este ponto com o vertice B

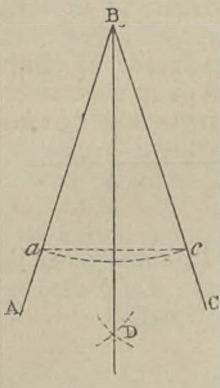


Fig. 37

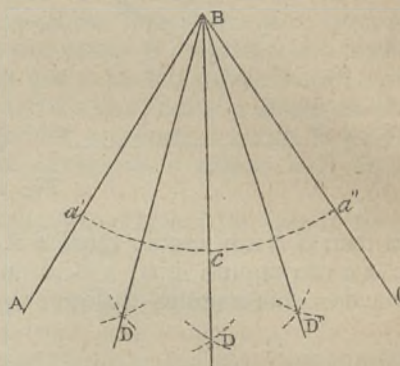


Fig. 38

ter-se-ha o angulo A B C dividido ao meio pela sua bissetriz B D.

A divisão dos angulos em quatro partes iguaes obtem se dividindo-os primeiro em duas partes e operando depois sobre cada uma das metades, *fig. 38*, do mesmo modo que se operou sobre ABC, *(fig. 37)*. A divisão em 8, 16, etc., obtem-se analogamente.

Problema V — Dividir um angulo em tres partes iguaes

A divisão do angulo em tres partes iguaes, ou *trisecção* do angulo, só póde ser resolvida exactamente por meio do compasso e da regoa, quando o angulo fôr recto. Para os angulos agudos e obtusos emprega-se ordinariamente a divisão por *tentativas*, que consiste em dividir em tres partes iguaes o arco comprehendido entre os lados do angulo pelo seguinte processo:

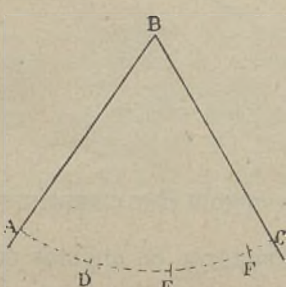


Fig. 39

Tome-se á vista uma abertura de compasso, que seja approximadamente a terça parte de A C, *fig. 39*, e applique-se tres vezes successivas sobre o arco, a partir de um dos seus extremos A. Se a terceira divisão coincidir com C o problema ficará resolvido; porém a maior parte das vezes ella fica antes ou depois d'este ponto; supponhamos que cahiu em F, sem deslocar a ponta do compasso do ponto E, augmente-se a sua abertura de uma quantidade que seja approximadamente a terça parte de F C, e applique-se de novo o compasso de A para C tres vezes. Se esta ultima abertura não fôr contida no arco A C tres vezes exactas, deve corrigir-se como precedentemente, até que o seja; o habito faz com que este problema se resolva só com duas ou tres tentativas.

44 — O processo que acabamos de expôr applica-se tambem á divisão das rectas em partes iguaes, e é conveniente pratical o, por que além de contribuir para a justeza do golpe de vista, é muitas vezes necessario quando não se possuem esquadros.

45 — A divisão do angulo recto em tres partes iguaes obtem-se exactamente por meio da seguinte construcção: seja A B C, *fig. 40*, o angulo que se pretende dividir; do vertice B como centro, com uma abertura de compasso arbitraria, descreva-se um arco A C, dos extremos A e C d'este arco, e com a mesma abertura de compasso descrevam-se os arcos B D, B E, que cortam A C nos pontos D e E; traçando depois as rectas B D e B E do vertice para os pontos de divisão do arco, ter-se-ha o angulo A B C dividido em tres partes iguaes.

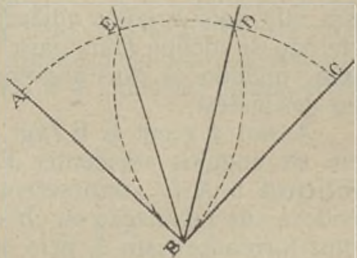


Fig. 40

Problema VI — Dividir em duas partes iguaes um angulo cujo vertice é desconhecido

Sejam A B e C D os dois lados do angulo dado, *fig. 41*: mar-

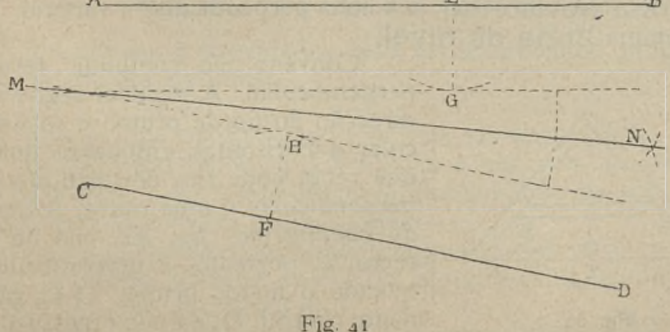


Fig. 41

quem-se sobre estes lados dois pontos quaesquer E e F, e tirem-se por elles perpendiculares a A B e a C D; marquem-se sobre estas perpendiculares duas distancias arbitrarias e iguaes E G e F H, e pelos pontos G e H tirem-se parallelas a A B e C D: estas parallelas cortar-se-hão formando um angulo igual ao dado e com a mesma bissectriz M N, que se determina por meio da construcção do problema IV.

CAPITULO III

Perpendiculares, obliquas e parallelas.—Divisão da recta em partes iguaes

46 — Uma recta diz-se **perpendicular** á outra, quando fórma com ella dois angulos adjacentes iguaes, de modo que cahindo sobre ella não se inclina mais para um lado do que para outro. Diz-se **obliqua**, quando os dois angulos adjacentes formados pelas duas rectas são desiguaes.

Assim a recta E B *(fig. 30)*, é **perpendicular** a A C por serem os angulos adjacentes E B A e E B C iguaes, e a recta D B é **obliqua** a A C, visto serem desiguaes os angulos D B A e D B C, sendo a sua inclinação ou obliquidade determinada pelo menor dos angulos formados, isto é, pelo angulo D B C e não por D B A.

O ponto B denomina-se **pé** da perpendicular E B, bem como da obliqua D B.

47 — A distancia que vae de um ponto a uma recta mede-se pela perpendicular baixada d'esse ponto sobre essa recta.

Assim a distancia que vae do ponto E á recta A C *(fig. 30)*, é representada pela perpendicular E B, que se mediria com a unidade linear (metro) e seus multiplos e submultiplos.

48 — **Linha vertical** é a que segue a direcção do fio de prumo.

Linha horisontal, é a linha perpendicular á vertical. Tambem se denomina **linha de nivel.**

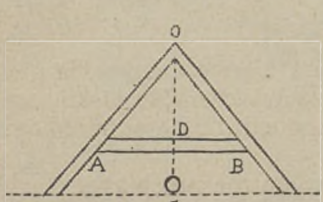


Fig. 42

Convém não confundir vertical com perpendicular. A vertical segue sempre a direcção do fio de prumo e só é perpendicular á horisontal, emquanto que uma linha recta póde ser, em qualquer direcção perpendicular a uma outra. Assim o *nivel do carpinteiro*, *fig. 42*, não dá o angulo recto, e, portanto, a perpendicular senão quando o fio de prumo O C, passa pelo ponto central, D, da peça transversal, A B.

Pelo contrario, o esquadro empregado no desenho, *fig. 43*, apresenta sempre um angulo recto A B C seja qual fôr a posição em que se colloque, visto o lado A B ser sempre perpendicular ao lado B C.

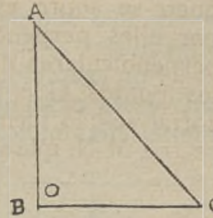


Fig. 43

49 — **Esquadro.** Os esquadros, *fig. 43*, são pequenas pranchas de madeira uniformemente espessas, tendo dois lados em angulo recto, e empregam-se no desenho para traçar linhas perpendiculares e parallelas.

Para verificar o esquadro trace se uma recta A B, *fig. 44*, e, sem deslocar a regoa, encoste-se a ella um dos lados menores C D do esquadro e tire-se uma recta seguindo-se com exactidão o outro lado D E. Volte-se depois o esquadro, de modo que o vertice do angulo que deve ser recto fique no mesmo ponto D e o lado C D torne a ficar encostado á regoa, e trace-se outra recta pelo lado D E; se esta recta coincidir com a primeira traçada, como acontece na *fig. 44*, o esquadro é perfeito; não coincidindo, o angulo C D E póde ser agudo, como

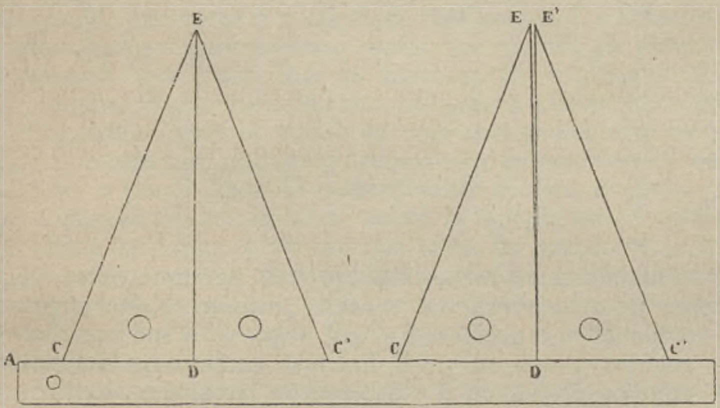


Fig. 44 Fig. 45

na *fig. 45*, ou obtuso, e o esquadro deve ser abandonado, porque não serve para operações rigorosas.

50 — Nota-se que os dois carris de uma via ferrea estão sempre á mesma distancia um do outro. Caminham a par, sem se afastarem nem approximarem e por mais que se prolonguem ou se supponham prolongados será impossivel encontrarem-se.

Observa-se igualmente que estão sempre no mesmo plano.

Se substituirmos aquelles carris por simples linhas geometricas, diremos que ellas são **parallelas.**

E' condição essencial que estejam no mesmo plano, pois, do contrario, não são parallelas duas linhas que, prolongadas, nunca se encontram.

Por exemplo: se considerar-mos como linhas uma das bordas de uma mesa e um dos pés do lado opposto e as prolongarmos indefinidamente, ellas nunca se encontram; apesar d'isso não são parallelas, visto não estarem no mesmo plano. Assim:

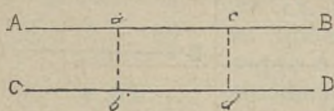


Fig. 46

Rectas parallelas são as que estando situadas no mesmo plano, por mais que se prolonguem nunca se encontram, *fig. 46.*

Duas rectas parallelas são equidistantes em todos os seus pontos; assim na *fig. 46* será *a b* igual a *c d.*

51 — **Curvas parallelas.** Vê-se que o que caracterisa duas rectas parallelas é o estarem situadas no mesmo plano e sempre a igual distancia. Por consequencia duas linhas curvas podem igualmente ser parallelas, como por exemplo as linhas A D C e D E F, *fig. 47.*

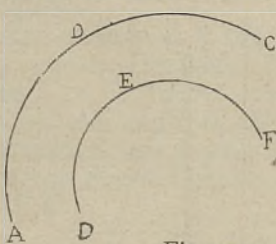


Fig. 47

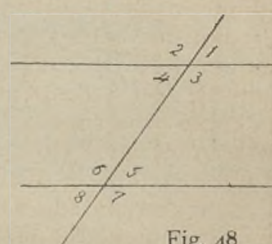


Fig. 48

52 — Quando duas rectas são cortadas por uma outra, a que se dá o nome de *transversal* ou *secante*, formam-se oito angulos, que têem denominações especiaes, *fig. 48*, segundo a sua posição.

Os angulos 1 e 2 ou 7 e 8 dizem-se **externos adjacentes.**

Os angulos 3 e 4 ou 5 e 6 dizem se **internos adjacentes.**

Os angulos 1 e 7 ou 2 e 8 dizem se **externos do mesmo lado da secante.**

Os angulos 3 e 5 ou 4 e 6 dizem-se **internos do mesmo lado da secante.**

Os angulos 1 e 8 ou 2 e 7 dizem-se **externos-alternos.**

Os angulos 3 e 6 ou 4 e 5 dizem-se **internos-alternos.**

Os angulos 1 e 5, ou 3 e 7, ou 2 e 6, ou 4 e 8 dizem-se **correspondentes.**

Problema VII — Tirar por um ponto dado uma perpendicular a uma recta

Este problema póde ser resolvido por meio *da regoa e do compasso*, ou por meio *da regoa e do esquadro.*

Estudemos primeiro a resolução por meio do *compasso*, e seja O o ponto por onde se pretende conduzir a perpendicular, o qual póde

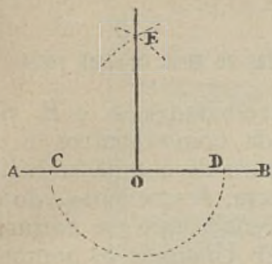


Fig. 49

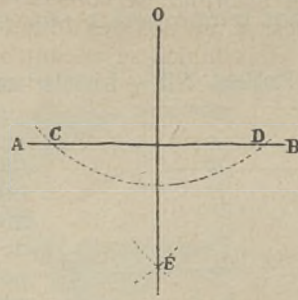


Fig. 50

estar sobre a recta dada A B, *fig. 49*, ou fóra d'ella, *fig. 50*: a perpendicular traça-se do mesmo modo em ambos os casos.

Determinem-se sobre a recta A B dois pontos C e D equidistantes do ponto dado O, descrevendo d'este ponto como centro um arco de circulo, que córte a recta A B. Dos pontos C e D como centros, com uma abertura de compasso maior que metade da distancia C D, descrevam-se dois arcos, que se interceptarão n'um ponto E, o qual unido ao ponto O por meio da recta O E, dará a perpendicular pedida.

Trataremos agora do modo de tirar perpendiculares empregando *a regoa e o esquadro*, e distinguiremos os mesmos dois casos:

1.º Se o ponto dado O estiver sobre a recta A B, *fig. 51*, para traçar a perpendicular ajusta-se sobre A B a aresta de uma regoa, e faz-se correr ao longo d'ella um dos lados do angulo recto do esquadro, até que o vertice d'este angulo attinja o ponto O; estando os instrumentos n'esta posição, firma-se o esquadro e traça-se pelo outro lado do angulo recto a recta O E, que será perpendicular a A B, se o esquadro fôr perfeito.

2.º Sendo o ponto O dado fóra da recta ajusta-se do mesmo modo a regoa sobre A B, *fig. 52*, e faz-se correr o esquadro ao longo d'ella,

Fig. 51

Fig. 52

até que o outro lado do angulo recto attinja o ponto O; depois traça-se a recta O E, que será a perpendicular pedida.

O traçado das perpendiculares por meio do compasso é mais rigoroso, que o obtido por meio do esquadro; todavia este processo tem sobre o primeiro uma vantagem manifesta, quando se houver de conduzir muitas perpendiculares a uma recta, a qual consiste em demandar menos tempo para a sua execução.

Problema VIII — Levantar uma perpendicular ao meio de uma recta

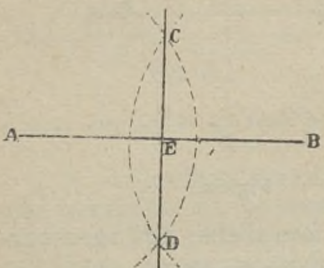


Fig. 53

Das extremidades A e B, *fig. 53*, da recta dada como centros e com a mesma abertura de compasso maior que metade da recta, descrevam-se dois arcos de circumferencia que se cortarão nos pontos C e D. Unam-se os pontos de intersecção por meio de uma recta C D, que é a perpendicular pedida.

Esta construcção serve tambem para *dividir uma recta em duas partes iguaes*.

Problema IX — Levantar uma perpendicular na extremidade de uma recta que se não póde prolongar

Seja A B a recta dada, *fig. 54*, e supponhamos que se não póde prolongar além de A; marque-se um ponto qualquer C fóra d'esta recta, e fazendo centro n'elle, com um raio C A igual á distancia de C ao extremo A da recta, descreva-se um arco que córte esta n'um ponto E; tirando depois o diametro E D e unindo a sua extremidade D com A, obteremos a recta A D, que será perpendicular a A B.

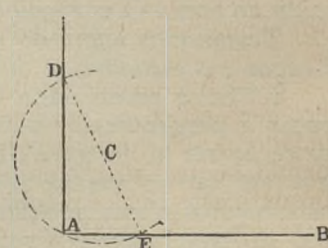


Fig. 54

Problema X — Tirar por um ponto uma recta parallela a outra

Seja C o ponto e A B a recta dada, *fig. 55:* do ponto C como centro e com uma abertura de compasso arbitraria descreva-se o arco indefinido E X, que córte A B n'um ponto E; d'este ponto como centro, e com a mesma abertura de compasso, trace-se outro arco C F; applicando depois a distancia F C de E para D, e unindo o ponto D com C, obter-se-ha a recta D C, que será parallela a A B.

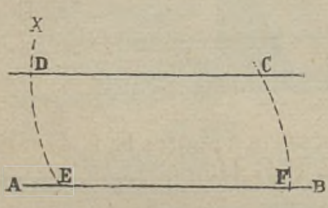


Fig. 55

Este problema póde tambem resolver-se por meio do esquadro; n'este caso procede-se da seguinte fórma: ajusta-se um lado do esquadro sobre a recta dada, *fig. 56,* e, encostando uma regoa a qualquer

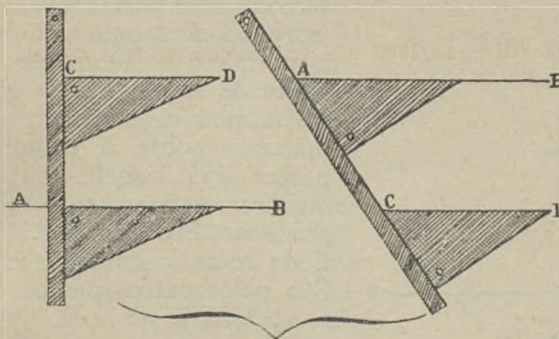


Fig 56

dos outros lados, faz-se escorregar o esquadro sobre esta, até que o lado que se ajustou com a recta dada esteja sobre o ponto pelo qual se quer tirar a parallela; fixando o systema dos dois instrumentos n'esta posição, trace-se uma recta C D ao longo d'este lado do esquadro, a qual será a parallela pedida.

53 — A construcção das parallelas tem muita applicação no desenho geometrico, e deve haver todo o cuidado na sua execução, especialmente quando se trabalhar com o esquadro, porque n'este caso a menor deslocação da regoa póde occasionar erros consideraveis.

Antes de dar principio aos trabalhos graphicos, deve-se *esquadrar* o papel, isto é, construir um rectangulo E F G H, *fig. 57*, cujos lados possam servir de referencia ao traçado das linhas *horisontaes* e *verticaes* dos mesmos trabalhos. Esta simples operação faz-se, tirando duas rectas A C, B D, entre os cantos oppostos do papel e descrevendo da sua intersecção O, com o mesmo raio, quatro arcos, que cortem as rectas nos pontos E, F, G, H, que unidos entre si formarão o rectangulo E F G H.

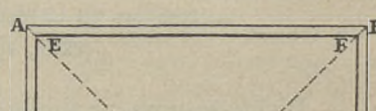


Fig. 57

Problema XI — Dividir uma recta em qualquer numero de partes iguaes

Seja A B a recta dada, *fig. 58*, que se pretende dividir, por exemplo, em sete partes iguaes: tire se pela extremidade A uma recta qualquer A C e marquem se sobre ella, a partir do ponto A, sete partes de grandeza arbitraria, porém iguaes entre si (em geral marca-se sobre A C um numero de partes igual áquelle em que se quer dividir a recta); unindo depois o ultimo ponto de divisão 7 com a extremidade B da recta, e conduzindo parallelas a B 7 pelos outros pontos de divisão 6, 5, 4, 3, 2, 1, ter-se-ha a recta A B dividida em 7 partes iguaes.

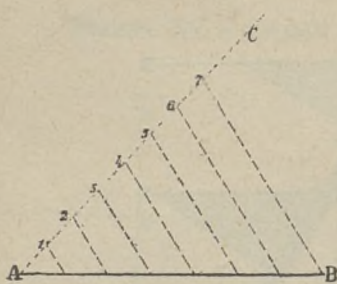


Fig. 58

CAPITULO IV

Divisão da circumferencia em partes iguaes. — Polygonos. — Inscripção dos polygonos regulares

Problema XII — Dividir uma circumferencia em duas, quatro, oito, etc. partes iguaes

Divide-se uma circumferencia em duas partes iguaes traçando qualquer diametro A B, *fig. 59;* levantando uma perpendicular ao meio de um diametro A B ter-se-ha a circumferencia dividida em quatro partes iguaes nos pontos A, C, B, D; dividindo ao meio os arcos A C e C B e tirando pelos pontos de divisão F e G os diametros E F e G H ter-se-ha o circulo dividido em oito partes iguaes. A divisão em dezeseis, trinta e duas, etc., partes iguaes, obtem-se continuando a subdividir os diversos angulos formados pelos diametros.

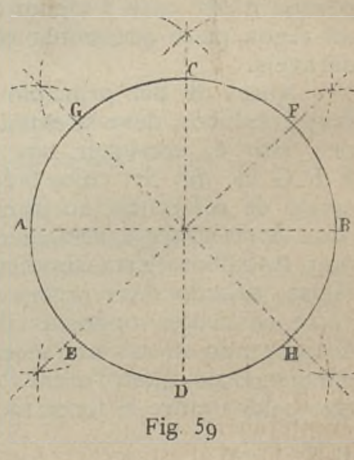


Fig. 59

Problema XIII — Dividir uma circumferencia em tres ou seis partes iguaes

Trace-se qualquer diametro A B, *fig. 60*, e de uma das suas extremidades A como centro, com um raio igual ao da circumferencia dada, descreva-se um arco C O D: os pontos de intersecção C e D d'este arco com a circumferencia e a extremidade B do diametro dividirão a circumferencia em tres partes iguaes B C, C D e D B.

A divisão em seis partes iguaes obtem-se descrevendo da outra extremidade B do diametro com o mesmo raio o arco E O F: os pontos de divisão da circumferencia são n'este caso A, C, E, B, F, D.

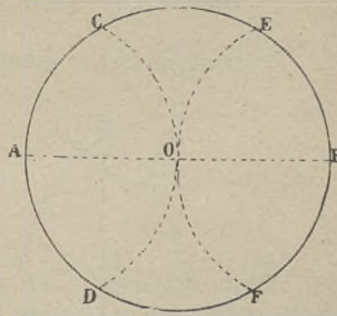


Fig. 60

Problema XIV — Dividir uma circumferencia em doze ou vinte e quatro partes iguaes

Tracem-se dois diametros A B, C D, *fig. 61*, perpendiculares entre si, e, fazendo centro nos extremos d'estes diametros com uma abertura de compasso igual ao raio, descrevam-se quatro arcos, que dividirão a circumferencia em doze partes iguaes.

Para a divisão em vinte e quatro partes iguaes emprega-se a cons-

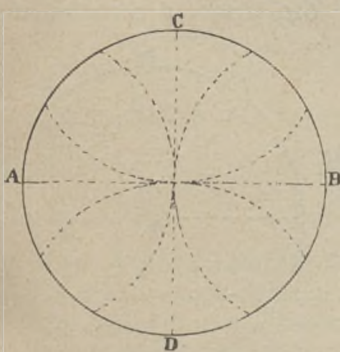


Fig. 61

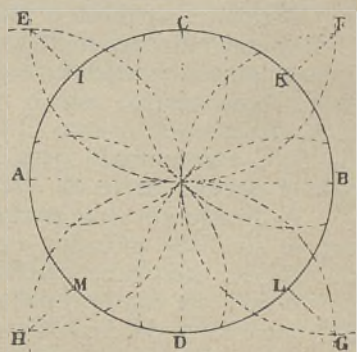


Fig. 62

trucção antecedente, para dividir primeiro a circumferencia em doze partes, prolongam-se depois os quatro arcos descriptos dos pontos A, B, C, D, *fig. 62*, até se interceptarem em E, F, G, H fóra da circumferencia; tiram se as rectas E G, F H; dos pontos de intersecção I, K, L, M d'estas rectas com a circumferencia, com uma abertura de compasso igual ao raio, descrevem-se novos arcos, que a dividirão em vinte e quatro partes iguaes.

Problema XV — Dividir uma circumferencia em cinco partes iguaes

Trace-se qualquer diametro A B, *fig. 63*, e levante-se-lhe ao meio a perpendicular C D; divida-se ao meio o raio C B, para o que basta descrever do ponto B, com uma abertura de compasso igual ao raio, um arco de circulo e unir os pontos de intercepção H, I por uma recta, que será perpendicular ao meio de C B; do ponto E como centro com o raio E D descreva-se o arco D F, e do ponto D, com um raio igual á corda d'este arco, trace-se o arco G F: o arco D G assim obtido será a quinta parte da circumferencia, e os pontos de divisão d'esta, determinam-se applicando cinco vezes sobre ella uma abertura de compasso igual á corda do arco D F ou D G.

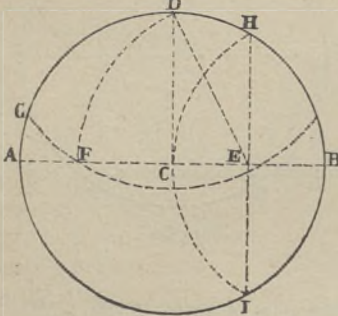


Fig. 63

Problema XVI—Dividir uma circumferencia em dez ou vinte partes iguaes

Divida-se ao meio o raio O A, *fig. 64*, tire-se a perpendicular O B e una-se o ponto B com E, como no problema antecedente; depois do ponto E como centro, com o raio E O = E A, descreva-se o arco O C; a distancia B C transportada para B F = B D dará a decima parte da circumferencia.

A divisão em vinte partes iguaes obtem-se dividindo primeiro a circumferencia em dez partes, e determinando depois o meio de cada um dos arcos iguaes á decima parte da circumferencia.

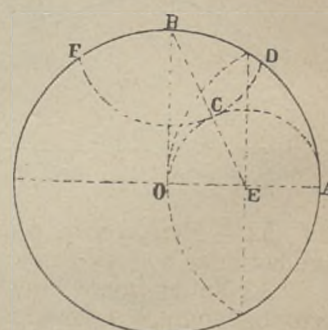


Fig. 64

Em geral, *quando uma circumferencia está dividida em um certo numero de partes iguaes, e se pretende passar para a divisão em o numero duplo de partes, basta dividir cada uma d'ellas ao meio.*

Problema XVII — Dividir approximadamente uma circumferencia em sete partes iguaes]

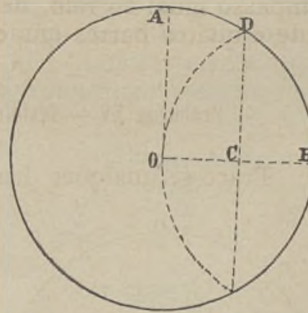


Fig. 65

Levante-se ao meio do raio O B, *fig. 65*, a perpendicular C D, que será approximadamente a corda da septima parte da circumferencia.

Problema XVIII — Dividir approximadamente uma circumferencia em qualquer numero de partes iguaes

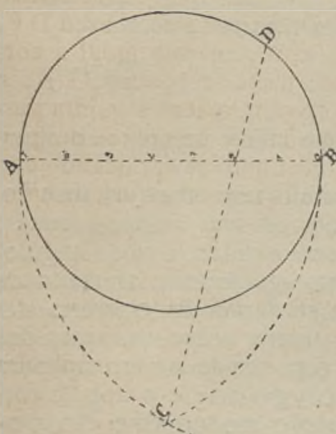


Fig. 66

Trace-se um diametro A B, *fig. 66*, e divida-se em tantas partes iguaes (problema XI) quantas são as que se pretende obter na circumferencia; dos extremos A e B como centros, com uma abertura de compasso igual ao diametro, descrevam-se dois arcos, que se interceptarão n'um ponto C; una-se este ponto com o extremo 2 da segunda divisão de A B, e prolongue-se a recta C 2 até encontrar a circumferencia em D: o arco B D assim obtido será approximadamente a fracção da circumferencia que se pretende, ou a septima parte no exemplo da figura.

Polygonos

1.° — Definições

54 — **Polygono** é uma figura plana terminada por linhas rectas unidas duas a duas pelos seus extremos, de modo que fechem espaço.

As linhas que o limitam chamam-se *lados*, a sua somma *perimetro*, os angulos formados por cada dois lados contiguos *angulos do polygono*, os pontos communs a dois lados contiguos *vertices do polygono*, e as rectas que unem dois vertices não consecutivos *diagonaes*.

Duas figuras que têem perimetros iguaes dizem-se i*soperimetras*.

Um polygono designa-se lendo successivamente as letras escriptas nos seus vertices.

Um angulo d'um polygono diz se **saliente**, quando os prolongamentos dos dois lados que o constituem se dirigem para fóra do polygono, e **reintrante** no caso contrario. Os polygonos cujos angulos são todos salientes, são **convexos**, *fig. 67*, e é d'elles que vamos especialmente tratar. São **concavos** os polygonos que têem um ou mais angulos reintrantes, *fig. 68*.

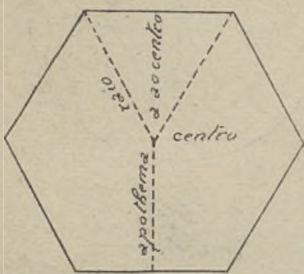


Fig 67

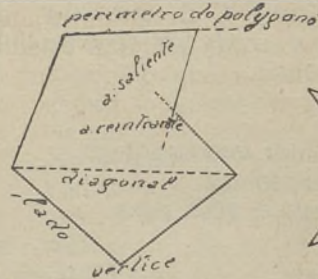


Fig 68

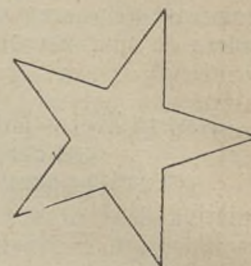


Fig. 69

Diz-se **estrellado** o polygono concavo cujos angulos são alternadamente salientes e reintrantes, *fig. 69*.

Um polygono diz se **equilatero** quando tem todos os seus lados iguaes, **equiangulo** quando tem todos os seus angulos iguaes, e **regular**, (*fig. 67*), quando é simultaneamente equilatero e equiangulo.

Nos polygonos regulares ha um ponto igualmente afastado de todos os vertices e de todos os lados, que se denomina **centro do polygono.** A perpendicular baixada do centro sobre qualquer dos lados, **apothema do polygono**; a recta tirada do centro para qualquer dos vertices diz-se **raio do polygono**; e o angulo formado por dois raios contiguos diz-se **angulo ao centro do polygono.**

55 — Os polygonos têem diversos nomes segundo o numero de lados. Assim, diz se:

Triangulo	o polygono de	3	lados
Quadrilatero	»	4	»
Pentagono	»	5	»
Hexagono	»	6	»
Heptagono	»	7	»
Octogono	»	8	»
Eneagono	»	9	»
Decagono	»	10	»
Endecagono	»	11	»
Dodecagono	»	12	»
Pentadecagono	»	15	»
Icosagono	»	20	»

O triangulo é o mais simples de todos os polygonos, porque menos de tres rectas não fecham espaço.

2.º — Triangulos

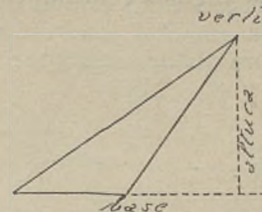


Fig. 70

Chama-se **base**, *fig. 70*, de um triangulo, e em geral de qualquer figura, o lado sobre o qual se suppõe que elle assenta; **vertice** o ponto mais afastado da base, e **altura** a perpendicular baixada do vertice sobre a base.

57 — Os triangulos, quanto á grandeza relativa dos lados, podem ser: **equilateros**, *fig. 71*, se têem todos os lados iguaes; **isosceles**, *fig. 72*, se têem só dois lados iguaes; e

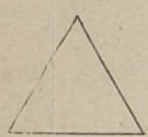


Fig. 71

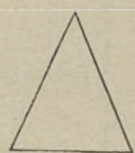


Fig. 72

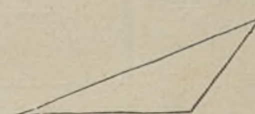


Fig. 73

escalenos, *fig. 73*, se os tres lados são desiguaes. Nos triangulos isosceles toma-se sempre para base o lado que não tem outro igual, e conseguintemente a altura passa pelo meio da base e é bissectriz do angulo do vertice, *fig. 74*.

58 — Os triangulos, quanto á natureza dos seus angulos, dizem-se

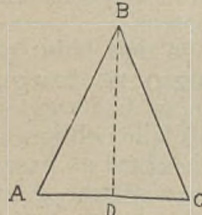


Fig. 74

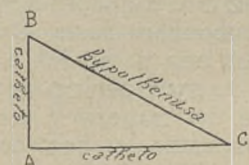


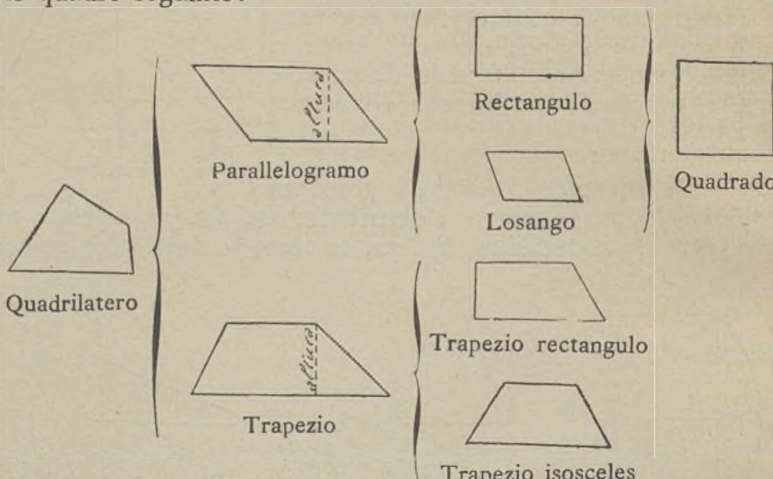
Fig. 75

rectangulos, *fig. 75*, se um dos angulos é recto; **obtusangulos**, *(fig. 70)*, se um dos angulos é obtuso; e **acutangulos**, *(fig. 72)*, se todos os tres angulos são agudos. Os triangulos acutangulos e obtusangulos têem o nome commum de *obliquangulos*.

Nos triangulos rectangulos o lado opposto ao angulo recto diz-se **hypothenusa**, e os outros dois dizem-se **cathetos**.

3.º — Quadrilateros

59 — Esta *familia* dos polygonos, para mais methodo na sua classificação e no estudo das suas propriedades, consideral-a-hemos dividida em dois *generos*, subdivididos ainda em duas *especies*, como se vê no quadro seguinte:



Parallelogrammo é o quadrilatero que tem os lados oppostos parallelos. O parallelogrammo diz-se **rectangulo** quando tem os angulos rectos, e **losango** quando tem os lados iguaes. Diz-se *altura* de um parallelogrammo a perpendicular baixada sobre a base, de qualquer ponto do lado opposto. No rectangulo a altura é evidentemente igual ao lado contiguo á base.

O parallelogrammo gosa da propriedade de ter os lados oppostos iguaes e bem assim iguaes os angulos oppostos.

Trapezio é o quadrilatero que tem só dois lados parallelos, os quaes se denominam *bases*. Diz-se **trapezio rectangulo** quando um dos lados não parallelos é perpendicular ás bases, e **trapezio isosceles** ou **symetrico** quando os dois lados obliquos são iguaes. A *altura* de um trapezio é a equidistancia entre as bases, representada pela perpendicular baixada sobre a base inferior, de qualquer dos pontos da base superior.

Quadrado é o quadrilatero que tem os lados iguaes e os angulos rectos. E' a figura regular da familia dos quadrilateros, e n'elle coexistem as propriedades das duas especies de parallelogrammos, por ser um *rectangulo-losango*.

Inscripção dos polygonos regulares

60 — Diz-se que um polygono está inscripto n'um circulo, quando

tem todos os vertices na circumferencia d'esse circulo. N'esse caso diz-se que, reciprocamente, o circulo está *circumscripto ao polygono.*

Inscreve se qualquer polygono regular no circulo, dividindo a circumferencia em um numero de partes igual ao dos lados do polygono, e unindo por meio de cordas os pontos de divisão. Assim dividindo uma circumferencia em tres partes iguaes, *fig. 76,* e traçando as cordas de cada uma das terças partes, ter-se-ha inscripto um triangulo equilatero. Procede-se analogamente para a inscripção dos seguintes polygonos regulares:

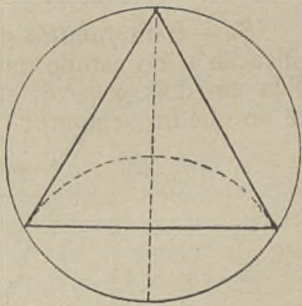


Fig. 76

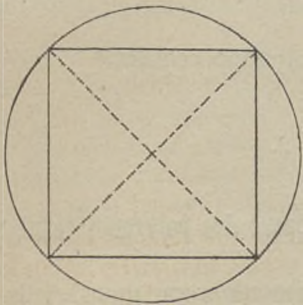


Fig. 77

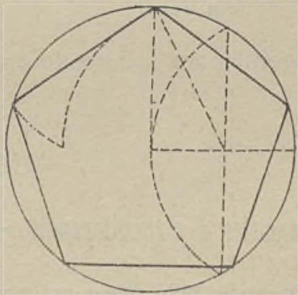


Fig. 78

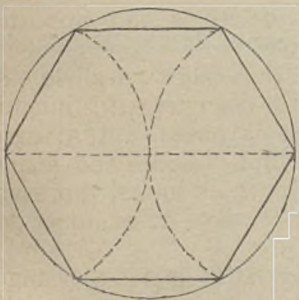


Fig 79

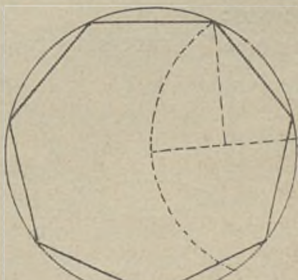


Fig. 80

quadrado.................... *fig. 77*
pentagono.................... » *78*
hexagono.................... » *79*
heptagono.................... » *80*

octogono .... » *81*
eneagono .... » *82*
decagono .... » *83*

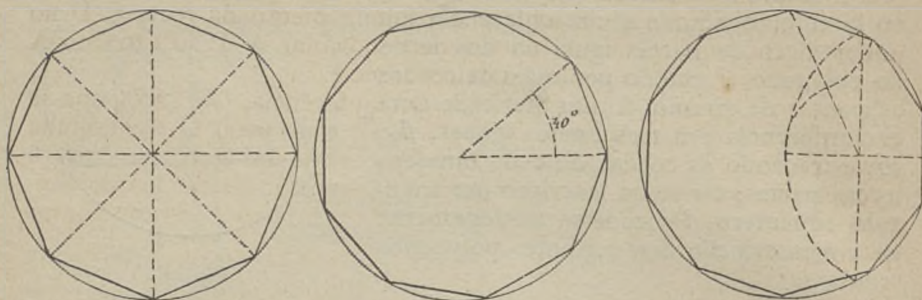


Fig. 81 Fig. 82 Fig. 83

e em geral para a de todo e qualquer polygono regular.

CAPITULO V

Tangentes á circumferencia. — Circumscripção dos polygonos regulares

Problema XIX — Tirar por um ponto dado tangentes a uma circumferencia

Seja A o ponto que póde ser dado sobre a circumferencia, *fig. 84*, ou fóra d'ella, *fig. 85*. Examinemos successivamente estes dois casos:

1.º Trace-se o raio C A, *(fig. 84)*, do ponto de contacto e con-

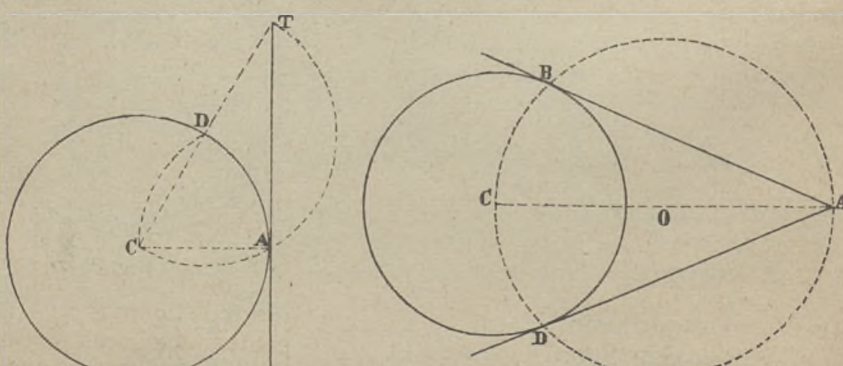


Fig. 84 Fig. 85

duza-se pela sua extremidade a perpendicular A T, que será a tangente pedida.

O traçado da perpendicular A T póde fazer-se descrevendo do ponto dado A, com o raio C A o arco C D e do ponto D com o raio C D o arco C A até encontrar o prolongamento da recta C D no ponto T, que unido com A, dará a perpendicular A T ao extremo A do raio, e portanto tangente á circumferencia.

2.º Se o ponto A fôr exterior á circumferencia, *(fig 85)*, una-se com o centro d'ella por meio da recta A C, e do meio O d'esta linha como centro com o raio O A = O C descreva-se um arco, que cortará a circumferencia dada nos pontos B e D, que são os pontos de contacto: para traçar as tangentes basta unir o ponto A com os pontos de contacto.

Problema XX — Tirar parallelamente a uma recta dada, uma tangente á circumferencia

Seja A B a recta dada, *fig. 86;* tire-se pelo centro O da circumferencia uma perpendicular a A B e pelo ponto C de intersecção d'esta perpendicular com a circumferencia trace-se a recta T C parallela a A B, e será T C a tangente pedida.

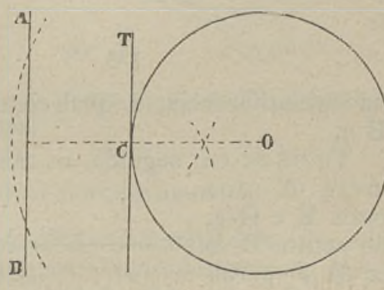


Fig. 86

Problema XXI — Traçar as tangentes communs a duas circumferencias

Duas circumferencias, que são tangentes á mesma recta, podem estar ambas do mesmo lado da recta ou uma de um lado e outra do outro; no primeiro caso a recta é uma **tangente commum exterior;** no segundo caso é uma **tangente commum interior.**

1.º—Tangentes exteriores, *fig. 87:*

Sejam A e B as duas circumferencias. Trace-se a recta A B, que une os centros, e fazendo centro em A, com um raio A *m* igual á differença dos raios dados, descreva-se uma circumferencia, á qual se tiram do ponto B duas tangentes auxiliares B *m* e B *n*. Tiram-se em seguida os raios A *m* e A *n* que se

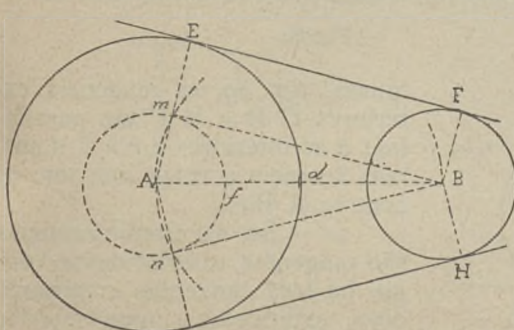


Fig. 87

prolongam até encontrar em E e G a circumferencia A, e pelo centro B, os raios B F e B H respectivamente parallelos a A E e A G; as rectas E F e G H são as tangentes pedidas.

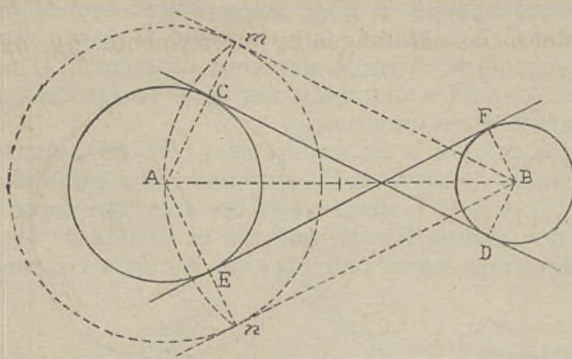


Fig. 88

2.º—**Tangentes interiores**, *fig. 88:*

Sejam A e B as duas circumferencias. Trace-se a recta A B e fazendo centro em A com um raio A *m* igual á somma dos raios das circumferencias dadas, descreva-se uma circumferencia, á qual se tiram do ponto B, as tangentes B *m* e B *n*.

Tiram-se em seguida, os raios A *m* e A *n* que cortam a circumferencia A nos pontos E e G e, pelo centro B, o raio B F parallelo a A E e B D parallelo a A G.

As rectas E F e C D são as tangentes pedidas.

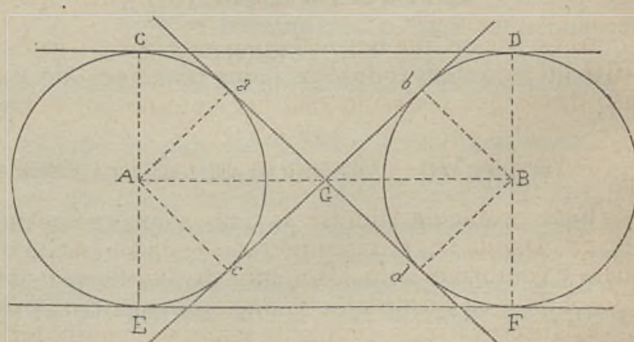


Fig. 89

Observações. 1.º — Se as duas circumferencias são iguaes, *fig. 89*, as tangentes exteriores C D e E F são parallelas; e as interiores *c b* e *a d* cortam ao meio a recta que une os centros A B.

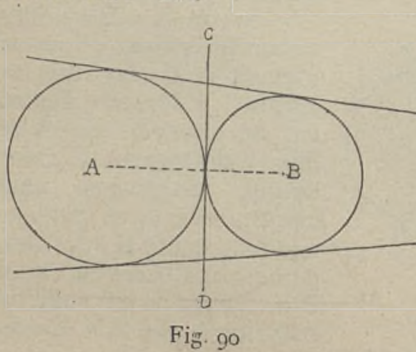


Fig. 90

2.º — Se as circumferencias são tangentes exteriormente, *fig. 90*, ha tres tangentes communs, duas exteriores e uma interior C D que é perpendicular á recta A B.

3.ª — Se as circumferencias são secantes, *fig. 91*, não se póde traçar tangente alguma interior, e ha apenas duas tangentes communs, que são as exteriores.

4.ª — Se as circumferencias são tangentes interiormente, *fig. 92*,

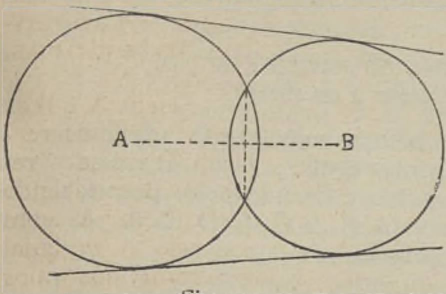


Fig. 91

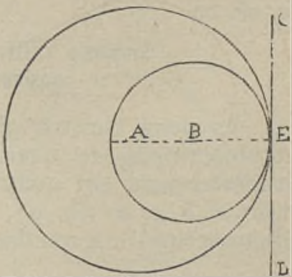


Fig. 92

só ha uma tangente commum C D, cujo ponto de contacto, é tambem o de contacto das duas circumferencias.

Circumscripção dos polygonos

61 — Diz-se que um polygono está **circumscripto a um circulo** quando tem todos os lados tangentes á circumferencia. N'este caso diz-se que o circulo está inscripto no polygono.

Problema XXII — Circumscrever um triangulo equilatero a um circulo

Este problema admitte as duas soluções seguintes:

1.ª Divida-se a circumferencia dada, *fig. 93*, em tres partes iguaes e conduzam-se pelos pontos de divisão *a*, *b*, *c*, as tangentes B C, A C, A B, que formarão o triangulo equilatero A B C circumscripto.

2.ª Inscreva-se no circulo dado um triangulo equilatero *a b c*, *fig. 94*,

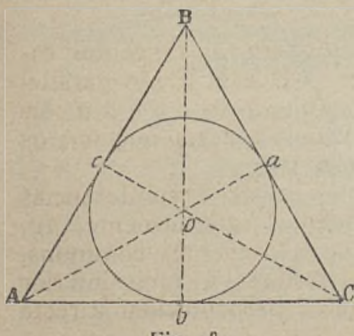


Fig. 93

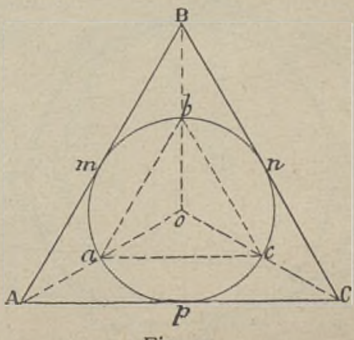


Fig. 94

e tirem-se as tangentes A B, B C, B A parallelas aos lados do triangulo circumscripto A B C.

Os pontos de contacto das tangentes são os pontos *m n* e *p*, meios respectivos dos arcos subtensos pelos lados do triangulo inscripto; os extremos das tangentes estão situados nos prolongamentos dos raios *oa*, *ob*, *oc*.

Problema XXIII — Circumscrever um quadrado e em geral qualquer polygono regular a um circulo

As duas construcções do problema antecedente applicam-se á circumscripção de qualquer polygono regular: assim, dividindo uma circumferencia em quatro partes iguaes e tirando pelos pontos de divisão *a*, *b*, *c*, *d*, *fig.* 95, as tangentes A B, B C, C D, D A, ter-se-ha circumscripto um quadrado ao circulo O.

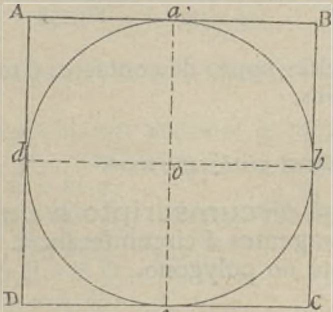


Fig. 95

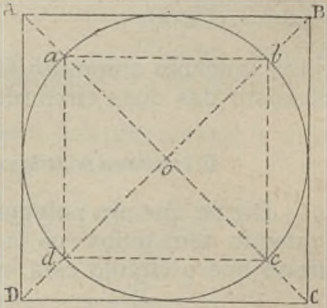


Fig. 96

Analogamente, se inscrevermos no circulo um quadrado *a b c d*, *fig.* 96, e tirarmos tangentes A B, B C, C D, D A parallelas aos lados d'este quadrado, ter-se-ha circumscripto o quadrado A B C D.

Procede-se do mesmo modo para a circumscripção do hexagono, *fig.* 97 e 98, e em geral para a circumscripção de qualquer polygono regular.

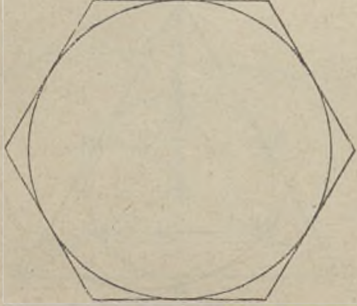


Fig. 97

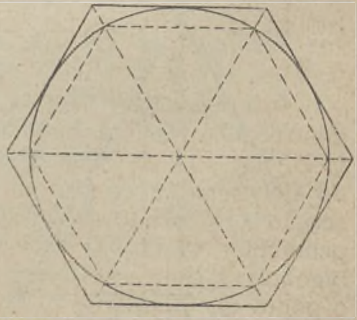


Fig. 98

Inscripção e circumscripção dos circulos

Problema XXIV — Inscrever um circulo em um triangulo equilatero

Seja A B C, *fig. 99,* o triangulo equilatero em que se pretende inscrever o circulo: tracem se as bissectrizes A O e C O de dois angulos contiguos do triangulo, e pelo ponto O de intersecção d'estas bissectrizes conduza-se uma perpendicular O D a qualquer lado do triangulo; para inscrever o circulo basta fazer centro no ponto O, e, com uma abertura de compasso igual a O D, descrever uma circumferencia.

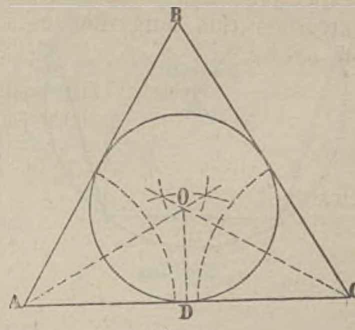


Fig. 99

Problema XXV — Circumscrever um circulo a um triangulo equilatero

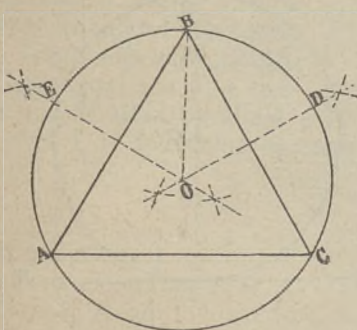


Fig. 100

Seja A B C o triangulo dado, *fig. 100:* levantem-se as perpendiculares O D, O E ao meio de dois lados contiguos B C, B A do triangulo dado, as quaes se interceptarão em um ponto O, que é o centro do circulo circumscripto; o raio d'este circulo é qualquer das rectas O A, O B ou O C.

E' esta a construcção empregada, como adiante se verá, para fazer passar uma circumferencia por tres pontos não em linha recta, e para determinar o centro de um circulo quando fôr desconhecido.

Problema XXVI — Inscrever um circulo em qualquer polygono regular

Inscreve-se um circulo em um polygono regular traçando as bissectrizes O A, O B, *fig. 101,* de dois angulos contiguos do polygono, e conduzindo pela intersecção O d'estas bissectrizes uma perpendicular O D a um dos lados do polygono. O centro do circulo inscripto é o ponto O, e o raio é O D.

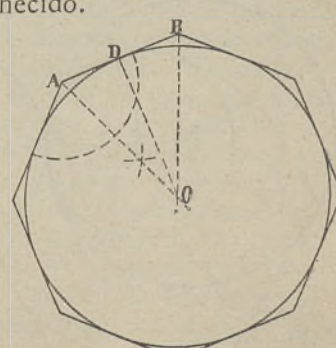


Fig. 101

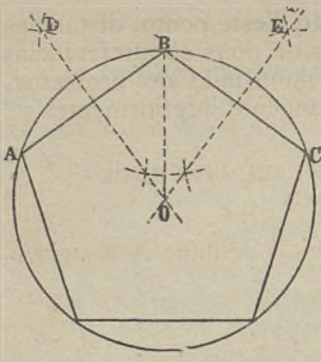


Fig. 102

Problema XXVII — Circumscrever um circulo a qualquer polygono regular

Circumscreve-se um circulo a qualquer polygono regular, conduzindo perpendiculares O D, O E ao meio de dois lados A B, B C, *fig. 102*, do polygono e unindo a intersecção O d'estas perpendiculares com um dos vertices B do mesmo polygono; o centro do circulo circumscripto é o ponto O e o raio é O B.

CAPITULO VI

Conferencias tangentes a outras e a rectas dadas

Problema XXVIII — Traçar, com um raio dado, uma circumferencia tangente a uma recta n'um ponto dado.

Seja, *fig. 103*, *a b* o raio da circumferencia pedida, A B a recta dada e C o ponto de contacto. Levante-se em C a perpendicular C *c* á recta A B, e tome-se sobre ella um comprimento C O igual ao raio dado *a b*; o ponto O é o centro da circumferencia procurada.

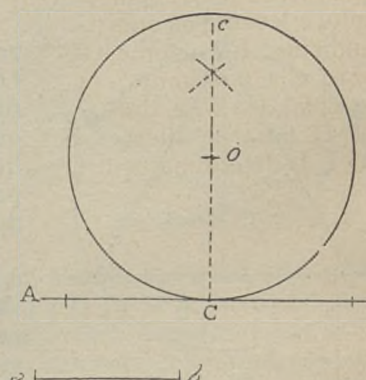


Fig. 103

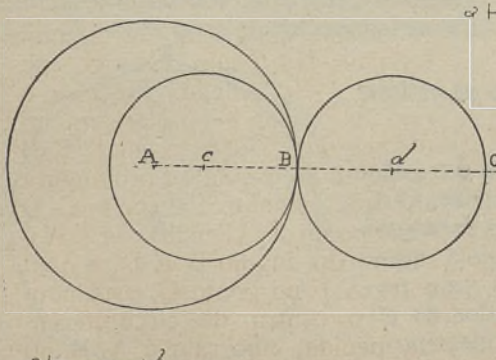


Fig. 104

Problema XXIX — Traçar, com um raio dado, uma circumferencia tangente a outra n'um ponto dado.

Seja *a b*, *fig. 104*, o raio da circumferencia pedida; A a circumferencia e B o ponto dado. Trace-se o raio A B e prolongue-se indefinidamente; tomem-se sobre A C e a partir de B para um e outro lado d'este ponto, distancias iguaes a *a b*: os pontos *c*, *d*, são os centros de duas circumferencias que satisfazem á condição designada no ennunciado do problema, sendo uma tangente exteriormente e outra tangente interiormente.

Problema XXX — Descrever, com um raio dado, uma circumferencia tangente a outra e a uma recta

Seja *a b*, *fig. 105* o raio da circumferencia pedida; A a circumferencia e B C a recta dada. Trace se na circumferencia A um raio qualquer A D e prolongue-se indefinidamente; a partir de D marque-se um comprimento D E igual a *a b* e descreva-se um arco com o raio A E. Tome-se um ponto qualquer sobre B, C, F, por exemplo, e levante-se uma perpendicular F G; tome-se sobre ella um comprimento igual a *a b*; e tire-se por H uma parallela a B C, a qual encontrando o arco E I' nos pontos I, I' determina os centros de duas circumferencias que satisfazem ao problema.

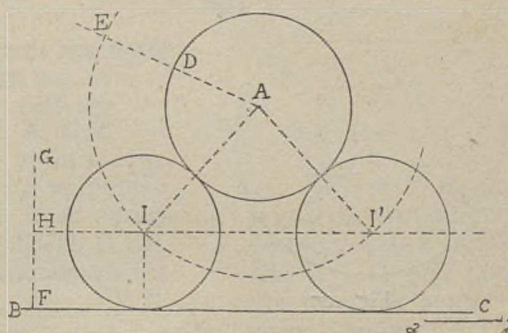


Fig. 105

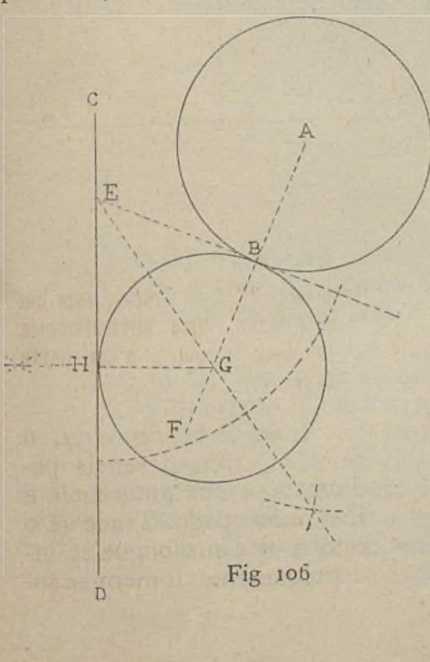


Fig 106

Problema XXXI — Traçar uma circumferencia que seja tangente a outra n'um ponto dado e a uma recta dada

Seja A, *fig. 106*, a circumferencia; B o ponto de tangencia; e C D a recta dada. Trace-se o raio A B, que se prolongará indefinidamente, e a tangente E B no ponto B, a qual se prolongará até que encontre a recta C D n'um ponto E. Construa-se a bissectriz do angulo B E D, a qual corta A F no ponto G: este ponto é o centro da circumferencia pedida, cujo raio é A B ou B G.

CAPITULO VII

Traçado da circumferencia e de algumas linhas do circulo em casos especiaes. — Rectificação da circumferencia

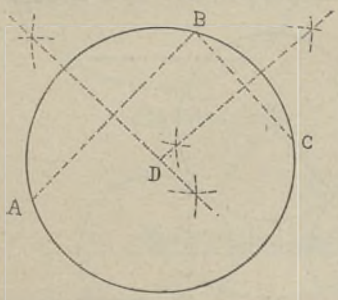


Fig. 107

Problema XXXII
Traçar uma circumferencia que passe por tres pontos não em linha recta

Seja A B e C os pontos dados, *fig. 107*. Una-se A com B e B com C; levantem se perpendiculares ao meio das rectas A B e B C; o ponto de intersecção D das duas perpendiculares é o centro da circumferencia pedida.

Problema XXXIII — Achar o centro d'uma circumferencia dada

Seja A B D a circumferencia dada, *fig. 108*. Trace-se uma corda A B e levante-se ao meio d'ella a perpendicular C D que será o diametro; dividindo C D ao meio determina-se o centro da

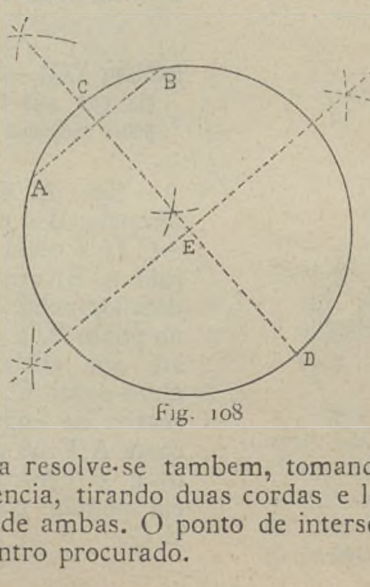


Fig. 108

circumferencia.

Este problema resolve-se tambem, tomando tres pontos quaesquer da circumferencia, tirando duas cordas e levantando as perpendiculares ao meio de ambas. O ponto de intersecção d'essas perpendiculares será o centro procurado.

Problema XXXIV — Traçar d'um ponto dado como centro uma circumferencia, que corte uma recta em um ponto dado.

Seja C o centro; A B a recta dada e D o ponto da recta, *fig. 109*. Faça-se centro em C e com o raio igual a C D descreva-se uma circumferencia que é a pedida.

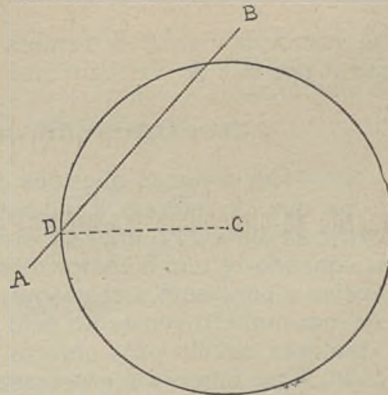


Fig. 109

Problema XXXV — Traçar, com um raio dado, uma circumferencia, que corte uma recta em dois pontos dados

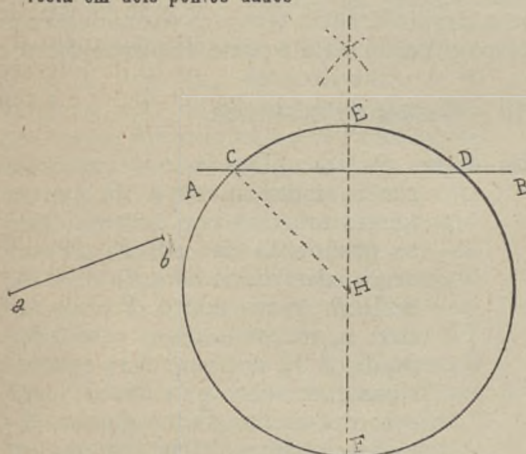


Fig. 110

Seja *a b fig. 110*, o raio da circumferencia pedida; A B a recta dada; C e D dois pontos da recta. Levante-se uma perpendicular E F ao meio de C D e fazendo centro em C ou em D descreva se de qualquer d'estes pontos um arco, com o raio *a b* que córte a perpendicular E F n'um ponto H, que é o centro da circumferencia pedida.

Problema XXXVI — Sobre uma recta dada como corda, descrever um segmento em que possa existir um angulo dado.

Seja A B, *fig. 111*, a recta dada e M o angulo. Construa-se n'um dos extremos B, da recta A B, um angulo CAB, igual ao angulo M; levante-se uma perpendicular DA no ponto A á recta A C, e uma outra ao meio de A B. O ponto F, intercepção d'estas

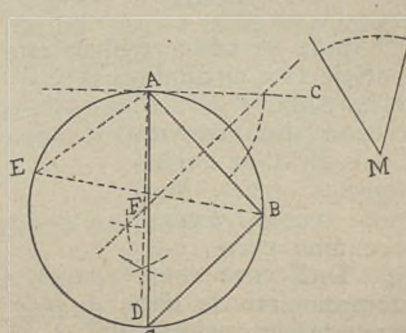


Fig. 111

duas perpendiculares, determina o centro d'uma circumferencia que passará por B e A. O segmento A E B contém o angulo dado M.

Rectificação da circumferencia

62 — Em diversas questões de desenho, e especialmente em muitas das que se referem á industria, apparece a necessidade de saber **rectificar** uma circumferencia, isto é, de conhecer a sua extensão linear, quando se tem o comprimento do diametro. Em todas as circumferencias é constante a relação da circumferencia para o diametro, isto é, ha um numero constante pelo qual se deve multiplicar o diametro de qualquer circulo para obter o comprimento da circumferencia rectificada. Esse numero é representado pela letra grega π (que se lê *pi*), e tem para valor o numero 3,14159.... ou approximadamente $\frac{22}{7}$. Este ultimo valor mostra que a circumferencia tem approximadamente o comprimento de tres diametros e mais a setima parte de um diametro.

Problema XXXVII — Rectificar a circumferencia

Seja C a circumferencia dada, *fig. 112*. Divida-se a circumferencia n'um numero de partes iguaes tal, oito por exemplo, que as grandezas das cordas d'esses arcos, determinados pela divisão, diffiram muito pouco das dos arcos; e, traçando uma recta indefinida A B, appliquem-se successivamente sobre ella tantas vezes o comprimento d'uma d'essas divisões quantas ellas forem; no caso presente, A-8 representará approximadamente a rectificação da circumferencia.

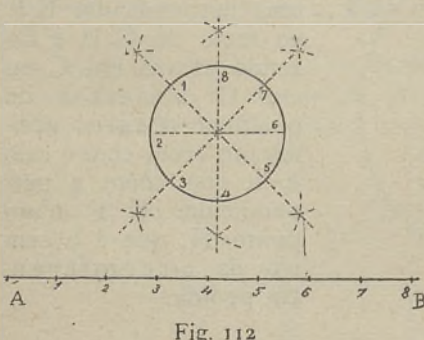


Fig. 112

Ainda se póde resolver este problema pelo processo seguinte:

Seja O a circumferencia dada, *fig. 113*. Trace-se um diametro A B e divida-se em sete partes iguaes. Marcando successivamente sobre uma recta indefinida D X, tres vezes o comprimento do diametro da circumferencia (D 1", 1" 2", 2" 3")

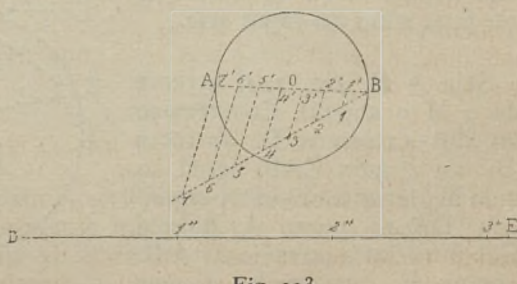


Fig. 113

e mais a setima parte do mesmo diametro, obter-se-ha a recta D E que representará approximadamente a extensão linear da circumferencia.

Este processo era conhecido de alguns antigos operarios pela denominação de **regra de tres e um setimo.**

CAPITULO VIII

Construcção dos polygonos

Construcção dos triangulos

Problema XXXVIII — Construir um triangulo sendo dados um lado e dois angulos

Marque se sobre a recta indefinida A X, *fig. 114*, uma distancia A B igual ao lado dado: se os angulos dados forem adjacentes a este lado, construam-se nos pontos A e B os angulos BAY, ABZ, que lhes sejam respectivamente iguaes; se um dos angulos for adjacente ao lado dado e o outro for opposto, construa-se o primeiro no ponto A sobre a recta A B, e o segundo em qualquer ponto da recta AY e sobre ella; depois tire-se pelo ponto B uma parallela ao segundo lado d'este ultimo angulo. Construir-se-ha assim o triangulo ABC, que satisfaz ás condições do problema.

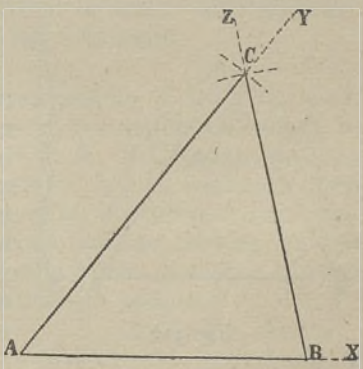


Fig. 114

Problema XXXIX — Construir um triangulo com dois lados e o angulo comprehendido

Construa-se um angulo XAY, *(fig. 114)*, igual ao angulo dado, marquem se sobre AX e AY as grandezas AB e AC respectivamente iguaes aos lados dados e una-se o ponto B com C; o triangulo ABC é a solução do problema.

Problema XL — Construir um triangulo com tres rectas dadas

Marque-se sobre A X, *(fig. 114,)* uma parte A B igual a uma das rectas; faça-se centro em A e com uma abertura de compasso igual á segunda recta descreva-se um arco de circumferencia; do ponto B como centro, com um raio igual á terceira recta dada, descreva-se outro arco que corte o primeiro em um ponto C: tirando depois as rectas A C e B C ter-se-ha construido o triangulo A B C.

Para que se possa formar triangulo com tres rectas dadas, é necessario que qualquer d'ellas seja menor que a somma das outras duas e maior que a sua differença, condições estas que se dão, logo que *a recta maior seja menor que a somma das outras duas.*

Problema XLI — Construir um triangulo com dois lados e o angulo opposto ao maior

Construa-se um angulo X A Y igual *(fig. 114)* ao angulo dado; marque-se sobre A X a parte A B igual ao menor lado, e do ponto B como centro, com uma abertura de compasso igual ao maior dos lados, descreva-se um arco, que corte a recta A X em um ponto C, que unido com B formará o triangulo A B C.

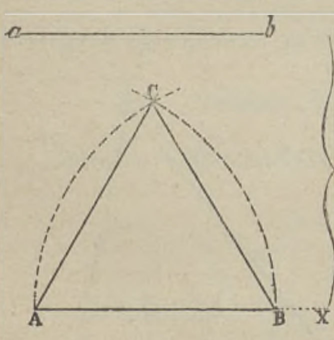


Fig. 115

Problema XLII — Construir um triangulo equilatero, sendo o lado igual a uma recta dada.

Seja *a b* a recta dada, *fig. 115*: trace-se uma recta indefinida A X e marque-se sobre ella a distancia A B igual a *a b*; dos pontos A e B como centros, com uma abertura de compasso igual a A B, descrevam-se dois arcos de circulo, que se cortem em um ponto C, que unido com A e B por meio das rectas C A, C B, completará o triangulo pedido.

Construcção dos quadrilateros

Problema XLIII — Construir um parallelogrammo sendo dados dois lados contiguos e o angulo por elles formado

Construa-se um angulo D A B, *fig. 116*, igual ao angulo dado, e marquem-se sobre os lados as distancias A D e A B respectivamente iguaes a cada um dos lados contiguos dados; do ponto B como centro, com o raio A D, descreva-se um arco de circulo, e do ponto D, com o raio A B, descreva-se outro, que córte o primeiro em um ponto C, que unido com D e B completará o parallelogrammo A B C D.

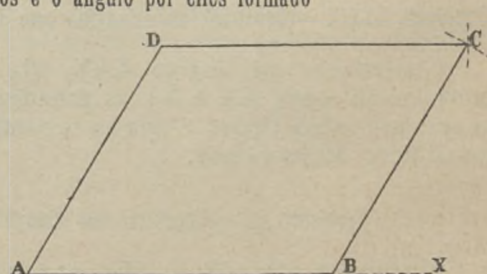


Fig. 116

Problema XLIV — Construir um rectangulo sendo dados dois lados contiguos

Trace-se um angulo recto D A B, *fig. 117*, e marquem-se sobre os seus lados as distancias A D e A B respectivamente iguaes a cada um dos lados dados; do ponto B com o raio A D descreva-se um arco de circulo e do ponto D com o raio AB descreva-se outro, que córte o primeiro em um ponto C, que unido com D e B formará o rectangulo pedido.

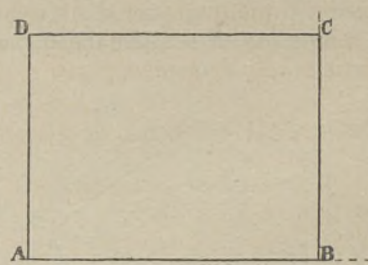


Fig. 117

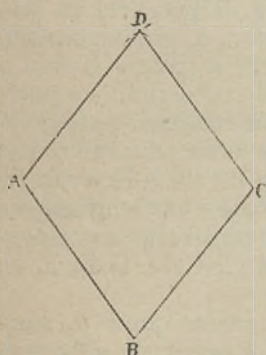


Fig. 118

Problema XLV — Construir um losango sendo conhecido um lado e um angulo

Construa-se um angulo A B C, *fig. 118*, igual ao angulo dado, e marquem-se sobre os lados as distancias B A, B C iguaes ao lado do losango; dos pontos A e C, com uma abertura de compasso igual ao mesmo lado, descrevam-se dois arcos, que se cortem em um ponto D; unindo este ponto com A e C teremos construido o losango pedido.

Problema XLVI — Construir um quadrado sendo conhecido um lado

Seja *a b* o lado dado, *fig. 119*, trace-se uma recta indefinida A X, e marque-se sobre ella a parte A B igual ao lado dado; levante-se uma perpendicular a A B no extremo A, e marque se sobre ella a distancia A C igual a A B; dos pontos B e C como centros, com o raio *a b*, descrevam-se dois arcos, que se cortem em um ponto D; unindo este ponto com B e C ter-se-ha construido o quadrado A B D C.

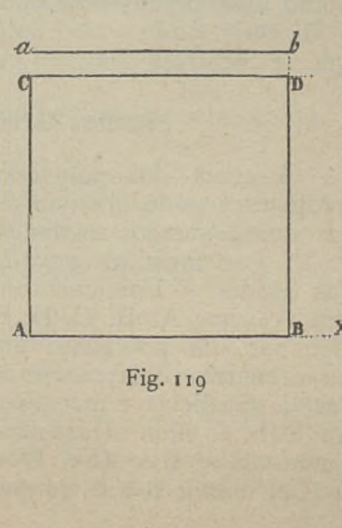


Fig. 119

Construcção de um polygono qualquer

Problema XLVII — Construir um polygono regular sendo conhecido o lado

Seja *a b* o lado dado, *fig. 120*: descreva-se uma circumferencia com qualquer raio e inscreva-se n'ella um polygono regular de tantos lados, quantos deve ter o polygono pedido, 5, por exemplo. Se os lados do polygono *a' c d e f* assim inscripto forem menores que *a b*, como acontece na figura, prolongue-se qualquer d'elles *a' c* e marque-se sobre elle, a partir de *a'*, a parte *a' b'* igual a *a b*; pelo ponto *b'* tire-se *b'* B parallela ao raio *o a'*, até encontrar o prolongamento de *o c* no ponto B: a recta *o* B será o raio do circulo circumscripto ao polygono pedido. Para construir este polygono, descreva se uma circumferencia do ponto O com o raio *o* B; tirem-se os raios *o d*, *o f*, *o e* e prolonguem-se, até encontrar a circumferencia nos pontos C, D, E, que, unidos por meio das cordas B C, C D, D E, E A, A B formarão o polygono pedido.

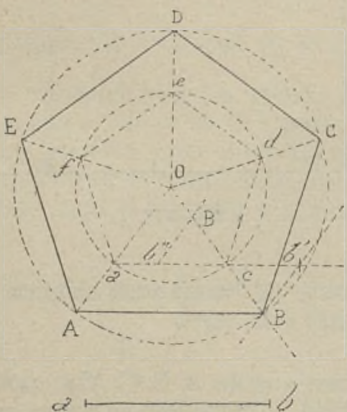


Fig. 120

Se o lado *a' c* do pentagono inscripto fosse maior que *a b*, marcava-se do mesmo modo a parte *a b* sobre *a' c*, a partir de *a'*, e suppondo que o extremo d'esta parte cahia em *b''*, tirava-se por este ponto uma parallela ao raio *a' o* até encontrar o raio *o c*; a distancia *o* B' seria então o raio do circulo circumscripto ao polygono pedido, que se construia como no caso antecedente.

Problema XLVIII — Copiar um polygono irregular

A ccpia dos polygonos irregulares póde obter-se pelos dois processos seguintes:

1.° *Por meio de parallelas iguaes.* — Por cada um dos vertices, A, B, C, D, E, *fig. 121*, do polygono, que se pretende copiar, tirem-se rectas parallelas e marquem-se sobre ellas distancias iguaes A *a*, B *b*, C *c*, D *d*, e E *e*; unindo depois os pon-

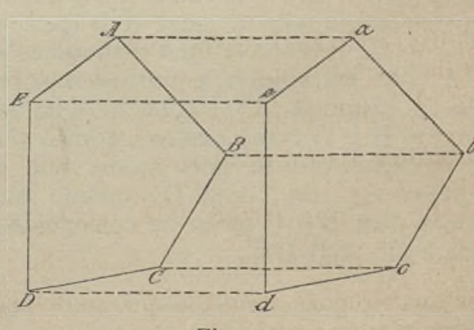


Fig. 121

tos a, b, c, ... assim obtidos, ter-se-ha uma copia do polygono dado.

2.º *Por meio da decomposição em triangulos.* — Decomponha-se o polygono dado A B C D E, *fig. 122*, em triangulos por meio das diagonaes E B, E C tiradas de um vertice E, e sobre uma recta a b,

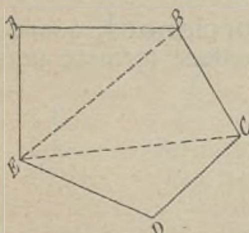


Fig. 122

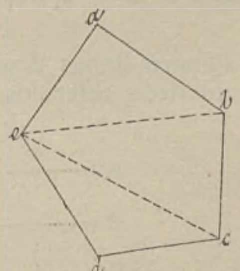


Fig. 123

fig. 123, de posição dada, construa-se o triangulo a b e igual a A B E; construindo depois successivamente sobre b e o triangulo b e c igual a B E C, e sobre e c o triangulo e c d igual a E C D, ter-se-ha copiado o polygono irregular A B C D E.

CAPITULO IX

Linhas proporcionaes. — Construcção dos polygonos semelhantes. — Escalas do desenho

63 — Uma recta póde ser representada por um numero, comparando-a com uma unidade linear.

64 — **Razão entre duas quantidades** é o quociente indicado da divisão d'uma quantidade por outra. Assim, a razão entre 8 e 4 é $\frac{8}{4}$, que tambem se escreve 8 : 4, e lê-se oito dividido por quatro, ou oito está para quatro.

65 — **Proporção** é a igualdade de duas razões. Exemplo: $\frac{8}{4} = \frac{24}{12}$, que tambem se escreve 8 : 4 :: 24 : 12, e lê-se oito dividido por quatro igual a vinte e quatro dividido por doze; ou 8 está para 4, assim como 24 está para 12.

66 — **Proporção contínua** é aquella que tem os meios iguaes.

67 — **Razão entre duas rectas** é a razão dos numeros que as exprimem quando medidas com a mesma unidade. Assim, se medirmos duas rectas A B e C D, *fig. 124*, e acharmos que é A B = 3 centimetros e C D = 2 centimetros, será $\frac{AB}{CD} = \frac{3}{2}$.

68 — Quatro linhas dizem-se **proporcionaes**, quando os seus valores numericos referidos á mesma unidade formam uma propor-

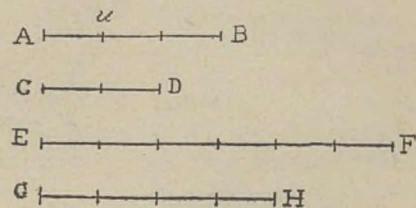


Fig. 124

ção. Assim suppondo que a unidade A *u*, *fig. 124*, se contém 3 vezes na recta A B, 2 em C D, 6 em E F e 4 em G H, por ser $\frac{3}{2} = \frac{6}{4}$ diriamos que estas rectas são proporcionaes, e poderiamos formar tambem com ellas a seguinte proporção:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{EF}{GH}$$

69 — **Achar a quarta proporcional a tres rectas dadas** é achar uma recta que forme o quarto termo de uma proporção, cujos tres primeiros termos são as rectas dadas.

70 — **Achar a terceira proporcional a duas rectas dadas** é achar uma recta que seja o quarto termo de uma proporção, cujo primeiro termo é uma das rectas dadas e cujos meios são iguaes á outra recta dada.

71 — **Achar a meia proporcional entre duas rectas dadas** é achar uma recta que seja o meio de uma proporção continua, cujos extremos são as duas rectas dadas.

72 — **Polygonos semelhantes** são aquelles que teem os angulos respectivamente iguaes, cada um a cada um, e os lados que terminam nas vertices dos angulos iguaes respectivamente proporcionaes.

Assim, o polygono A B C D E será similhante ao polygono

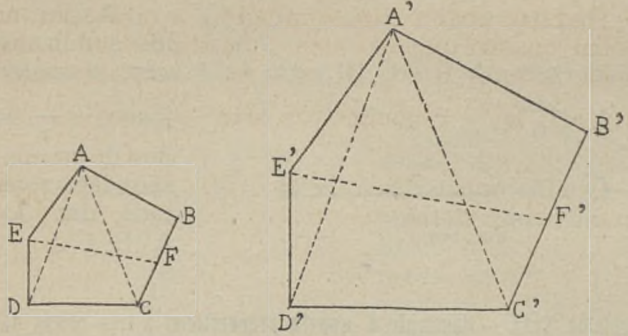


Fig. 125

A' B' C' D' E', *fig. 125*, se tiverem:

$$A = A', B = B', C = C', D = D', E = E'$$

e bem assim

$$\frac{A\,B}{A'\,B'} = \frac{B\,C}{B'\,C'} = \frac{C\,D}{C'\,D'} = \frac{D\,E}{D'\,E'} = \frac{E\,A}{E'\,A'}$$

73 — De um modo geral e breve póde dizer-se que as **figuras similhantes**, *fig. 126*, são caracterisadas pela *igualdade dos angulos e proporcionalidade dos lados*, vindo assim a deferir na grandeza e não na fórma.

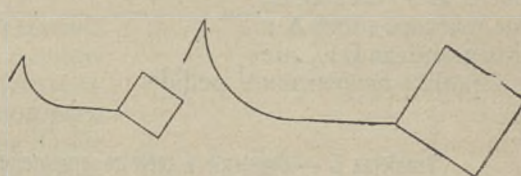


Fig. 126

Vê-se que são figuras similhantes os polygonos regulares do mesmo numero de lados e bem assim os circulos.

Em figuras similhantes dizem-se **vertices homologos** os que pertencem a angulos respectivamente iguaes; **lados homologos** os que terminam em vertices homologos, e, em geral, **linhas homologas** e **pontos homologos** os que estão similhantemente dispostos.

Assim, na *(fig. 125)* o lado C' D' é homologo de C D, o vertice A' homologo de A, a diagonal A' D' homologa de A D, o ponto F homologo de F' e a linha E' F' homologa de E F.

74 — Nas figuras similhantes a razão constante que existe entre

as linhas homologas diz-se **razão de similhança**, e no desenho tem o nome de escala.

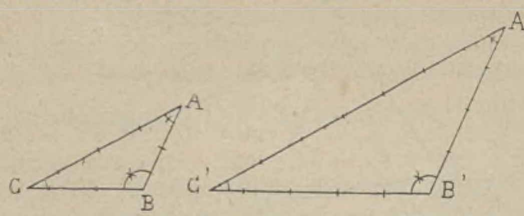


Fig. 127

Assim, nos triangulos similhantes da *fig. 127*, a rasão de similhança é $\frac{1}{2}$, isto é, os lados do triangulo A B C são respectivamente metade dos do triangulo A' B' C'.

Problema XLIX — Construir a quarta proporcional a tres rectas dadas

Sejam *a*, *b* e *c* as tres rectas dadas, *fig. 128*; tracem-se duas rectas A X, A Y, que formem um angulo qualquer, e marquem-se na primeira as grandezas A B, B C iguaes respectivamente a *a* e *b*, e na segunda a distancia A D igual a *c*; unam-se os pontos B e D e tire-se pelo ponto C a parallela C E á recta B D, que marcará sobre A *y* uma grandeza D E, que é a *quarta proporcional* pedida.

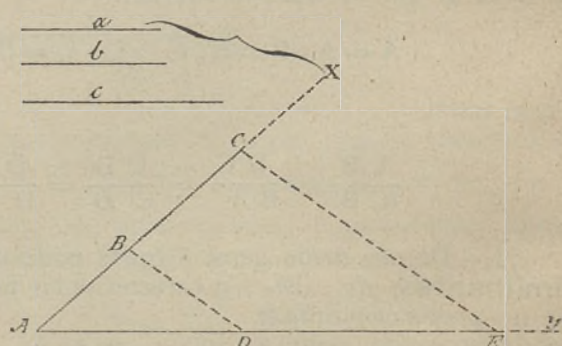


Fig. 128

Problema L — Construir a terceira proporcional a duas rectas dadas

Sejam *a* e *b* as rectas dadas, *fig. 129*: tracem-se duas rectas A X, A Y, que façam um angulo qualquer, e marquem-se na primeira as grandezas A B, B C respectivamente iguaes a *a* e *b*, e na segunda a distancia A D tambem igual a *b (porque a terceira recta é igual á segunda)*; unam se os pontos B e D e tire-se pelo pon-

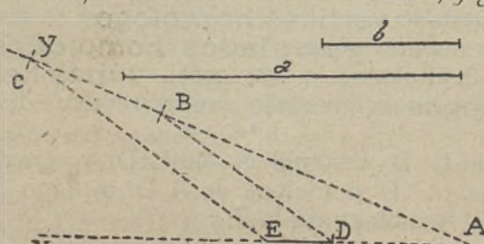


Fig. 129

to C a parallela C E á recta B D, que marcará sobre A Y uma grandeza D E, que é a *terceira proporcional* pedida.

Problema LI — Construir a meia proporcional a duas rectas dadas

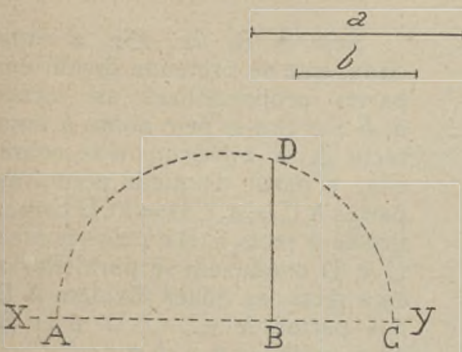


Fig. 130

Sejam *a* e *b* as rectas dadas, *fig. 130*; trace-se uma recta indefinida X Y, e tomem-se sobre ella duas grandezas A B e B C respectivamente iguaes a *a* e *b*. Descreva-se sobre A C, como diametro, uma semi-circumferencia, e levante-se em B uma perpendicular a A C: a parte B D d'esta perpendicular, comprehendida entre o diametro e a circumferencia é a *meia proporcional pedida.*

Problema LII — Construir uma recta que esteja para outra n'uma rasão dada

Temos a distinguir dois casos: 1.º, a rasão dada é definida por duas rectas; 2.º, o seu valor é expresso em numeros.

1.º Quando a rasão é expressa em linhas, e se pretende, por exemplo, achar uma recta que esteja para outra *c (fig. 128)* como *a* está para *b*; a construcção do problema XLIX resolve a questão, por isso que a recta pedida é evidentemente uma quarta proporcional á recta dada e ás outras duas, que formam a rasão.

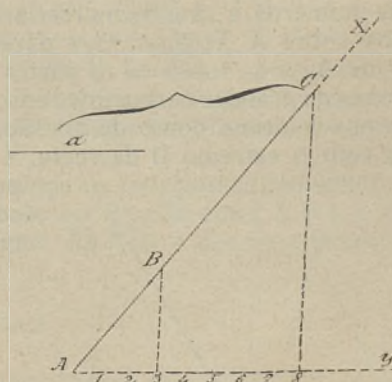


Fig. 131

2.º Sendo o valor da rasão expresso em numeros, *fig. 131*, se nos propozermos, por exemplo, construir uma recta, que esteja para outra *a, fig. 131*, como 3 para 5; então a solução do problema será a seguinte: tracem-se duas rectas A X, A Y, que formem um angulo qualquer, e marquem-se sobre a primeira a parte A B igual a *a*, e sobre a segunda A Y marquem-se 3 + 5 partes iguaes de grandeza arbitraria; una-se o ponto n.º 3 de divisão com B, e tire-se pelo ponto n.º 8 a parallela C 8 a B 3, que marcará sobre A X uma parte B C, que será a recta pedida.

Problema LIII — Dividir uma recta em partes proporcionaes a rectas ou numeros dados

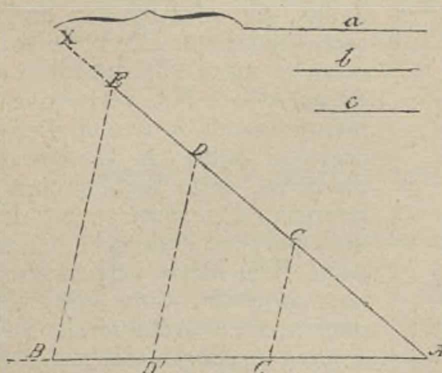


Fig 132

Seja A B, *fig. 132*, a recta dada, que se pretende dividir em partes proporcionaes ás rectas *a*, *b* e *c*: tire-se pelo ponto A uma recta A X e marquem-se sobre ella, a partir d'aquelle ponto, as partes A C = *a*, C D = *b* e D E = *c*; tire-se a recta E B e pelos pontos C e D conduzam-se parallelas a esta recta, as quaes dividem A B nas partes A C', C' D' e D' B proporcionaes a *a*, *b* e *c*.

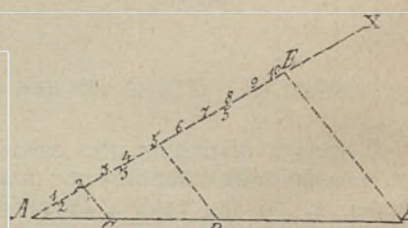


Fig. 133

Se quizessemos dividir a recta A B em partes proporcionaes aos numeros 2, 3 e 5, marcariamos sobre A X, *fig. 133*, a partir de A, 2 + 3 + 5 = 10 partes iguaes de grandeza arbitraria, uniriamos o ultimo ponto de divisão 10 com o extremo B da recta, e pelos pontos de divisão n.os 2 e 2 + 3 = 5 conduziriamos parallelas a E B: as partes pedidas seriam A C, C D e D B.

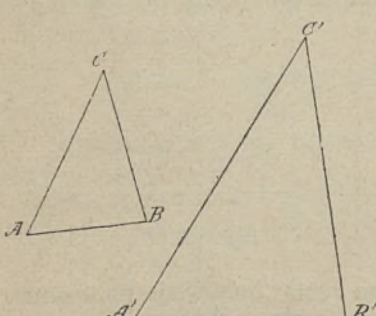


Fig. 134

Problema LIV — Construir sobre uma recta dada um triangulo similhante a outro

Seja A' B', *fig. 134*, a recta, sobre a qual se pretende construir um triangulo similhante a A B C: construam-se sobre A' B' com os vertices em A' e B' os angulos C' A' B' e A' B' C' respectivamente iguaes aos angulos C A B e A B C, adjacentes ao lado homologo de A' B' no triangulo dado, e obter-se-ha assim o triangulo A' B' C' similhante a A B C.

Problema LV — Construir um polygono similhante a outro conhecendo um dos lados ou a rasão de similhança

1.º Dá-se o lado A' B' homologo de A B, *fig. 135*, lado do poly-

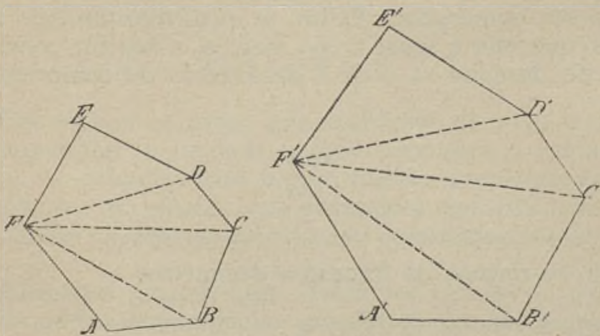


Fig. 135

gono conhecido A B C D E F e pretende se construir sobre A' B' um polygono similhante a este: decomponha-se o polygono dado em triangulos, tirando por um dos vertices F as diagonaes F B, F C e F D; construa-se depois sobre A' B' um triangulo A' B' F' similhante a A B F, sobre B' F' um triangulo B' C' F' similhante a B C F, e assim successivamente até á construcção do triangulo D' E' F' similhante a D E F. O polygono A' B' C' D' E' F' assim obtido e o polygono dado A B C D E F serão similhantes, por serem compostos do mesmo numero de triangulos similhantes e similhantementes dispostos.

2.º Dá se a rasão de similhança entre os polygonos: determina-se o lado A' B', *fig. 135*, pela condição de ser a rasão entre A B e A' B' igual á rasão de similhança (problema XLXII) e depois procede se como no caso anterior.

Escalas

75 — É muito raro que um objecto possa ser desenhado na sua grandeza natural; umas vezes ha necessidade de o ampliar na copia, para se poderem analysar melhor os seus detalhes, outras é preciso reduzil-o, isto é desenhal-o *em ponto menor*, para que a copia possa caber no papel do desenho. Ora, quer se amplie, quer se reduza a copia, para que o desenho seja exacto, tem de se modificar proporcionalmente todas as dimensões; d'onde resulta que a copia, n'este caso, é uma figura similhante á do objecto na sua grandeza natural: a *rasão de similhança* recebe n'este caso o nome de *escala*.

76 — As escalas pódem ser *numericas* ou *graphicas*.

As escalas *numericas* representam-se por uma fracção cujo numerador exprime o comprimento de um lado do desenho e cujo denominador representa o valor do lado homologo ou correspondente do objecto; sendo de toda a vantagem pratica que ella tenha por numerador a unidade, o que se consegue dividindo ambos os termos da fracção pelo seu numerador. Assim, se medirmos um lado do objecto, e acharmos que elle é igual a 200 metros, e nos fôr conveniente representa-lo no desenho só com 2 decimetros de comprimento, a escala será

$$\frac{0^m,2}{200}$$

ou reduzindo os termos da fracção a decimetros

$$\frac{2}{2000}$$

e dividindo os termos pelo numerador

$$\frac{1}{1000}$$

o que quer dizer, que a 1:000 metros do original corresponde 1 metro na copia.

77 — Estabelecida a escala numerica, determina-se o comprimento que devem ter as linhas do desenho *multiplicando a escala pela extensão real das linhas correspondentes do objecto:* assim na escala $\frac{1}{1000}$ o comprimento que deve ter no desenho uma linha que corresponde a outra de 300 metros do objecto, é

$$300 \times \frac{1}{1000}$$

ou

$$\frac{300}{1000} = 0^m,3$$

Inversamente, para determinar a extensão real de uma linha correspondente a outra de um desenho ja feito n'uma certa escala, *divide-se* *o comprimento d'esta linha pela fracção que representa a escala:* assim, feito um desenho na escala $\frac{1}{100}$, uma linha d'este desenho, que tenha $0^m,02$ de comprimento corresponderá a outra do objecto de

$$0^m,02 : \frac{1}{100}$$

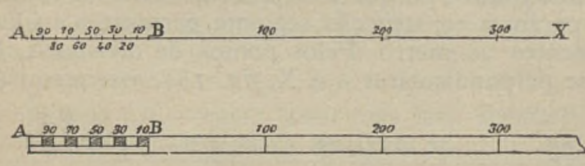
ou

$$0^m,02 \times 100 = 2^m.$$

78 — Em ambos os casos que acabâmos de considerar, a escala tem por numerador a unidade, o que simplifica o calculo, porque, como se viu, no primeiro caso bastou *dividir a extensão real da linha pelo denominador da escala*, e no segundo *a multiplicação do comprimento das linhas do desenho pelo mesmo dominador* resolve a questão.

79 — **Escalas graphicas.** Além das escalas de que acabamos de tratar, ha outras denominadas *graphicas*, que dão immediatamente a grandeza das linhas do desenho ou do objecto, sem ser necessario recorrer ao calculo. Estas escalas são figuras geometricas, que devem, sempre que fôr possivel, ter uma extensão igual á linha correspondente ao maior lado e conter um certo numero de multiplos e submultiplos da unidade adoptada.

As *figs. 136* e *137* representam escalas de $\frac{1}{5000}$, nas quaes o he-



Figs. 136 e 137

ctometro é expresso por $0^m,02$ e o decametro por $0^m,002$. [1] Para as construir, trace-se uma recta A X, marquem-se sobre ella um certo numero de partes A B, B–100, 100–200, etc., iguaes entre si e a $0^m,02$, as quaes representarão centenas de metros ou hectometros; divida-se A B em dez partes iguaes e ter-se-hão os decametros, que se numeram como indicam as figuras.

Para determinar por meio d'estas escalas um comprimento de

[1] Reduzindo a fracção $\frac{1}{5000}$ a dizima, acha-se para quociente $0^m,0002$, que é o valor correspondente ao metro na escala dada. O decametro será portanto representado por $0^m,002$ e o hectometro por $0^m,02$.

290^m, por exemplo, ajusta-se uma ponta do compasso com a divisão n.º 200 de A X e vae-se procurar com a outra ponta a divisão n.º 90 de A B.

80 — A construcção de qualquer outra escala fazia-se do mesmo modo; o valor das divisões depende do denominador da escala: assim se a escala dos exemplos anteriores fosse de $\frac{1}{50}$ em logar de $\frac{1}{5000}$, as divisões das *figs. 136* e *137* teriam outros valores; as partes A B, B–100, 100–200, etc., representariam metros e por isso numerar-se-hiam A B, B–1, 1–2, etc.; e as divisões de A B exprimiriam decimetros.

81 — Quando o denominador da escala excede 2000, o decametro é representado por um comprimento de alguns millimetros, e é muito difficil, e algumas vezes até impossivel, dividir este comprimento em dez partes iguaes para obter os metros, por isso recorre-se á seguinte construcção, que os permitte avaliar, recebendo a escala n'este caso a denominação de *escala de dizima.*

82 — Supponhamos que se pretende construir uma escala de $\frac{1}{5000}$, em que sejam representados os metros: a inspecção da (*fig. 136*), mostra-nos que 1 decametro é representado por $0^m,002$; é evidente que com a escala assim disposta o menor comprimento que se póde avaliar é o decametro, porque é impossivel dividir $0^m,002$ em dez partes iguaes; porém a construcção seguinte permitte a avaliação de porções equivalentes ao metro. Pelos pontos de divisão A, B, 100 100, etc., tirem-se perpendiculares a A X, *fig. 138*, marquem-se sobre uma

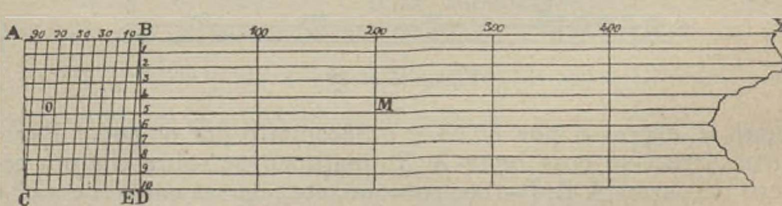


Fig. 138

d'ellas dez partes iguaes de grandeza arbitraria, e pelos pontos de divisão 1, 2, 3, 4,... 10 tirem-se parallelas a A X; sobre a ultima e a partir de D marque-se D E igual a uma divisão de A B; unam-se os pontos B e E e tirem-se parallelas a B E pelos pontos de divisão de A B; fórma-se d'este modo uma serie de triangulos similhantes a E B D, nos quaes os lados parallelos a E D representam 1^m, 2^m, 3^m,....9^m. Na escala assim construida as divisões B–100, 100–200, 200–300, etc., representam centenas de metros ou hectometros, as divisões de A B representam dezenas de metros, como na *(fig. 136)*, e as porções das parallelas a A X comprehendidas no triangulo E B D representam as unidades ou metros.

Querendo n'esta escala determinar um comprimento correspondente a 275 metros, por exemplo, colloca-se uma ponta do compasso no ponto O de intersecção da divisão 70 de A B com a parallela a A B tirada pelo ponto n.º 5 de B D, e abre-se o compasso até que a outra ponta coincida com o ponto M de intersecção do prolongamento da recta 0–5 com a parallela a B D que tem o n.º 200.

Reciprocramente, querendo determinar a extensão real de uma linha do desenho, tome-se uma abertura de compasso igual a esta linha e applique-se sobre a escala. Supponhamos que esta abertura comprehende 3 centenas de metros mais uma fracção: faz-se escorregar uma ponta do compasso pela linha n.º 300, até que a outra ponta encontre alguma das intersecções das parallelas a A B com as parallelas a B E, ou córte uma das parallelas a B E entre duas parallelas a A B; suppondo que a ponta do compasso encontra a linha 50 na intersecção da parallela n.º 7, o comprimento procurado é 357 metros; se não coincidir com alguma das intersecções e encontrar a linha 50 entre as parallelas n.ºs 6 e 7, então o comprimento procurado estará comprehendido entre 356 e 357 metros.

83 — A escolha da escala deve ser feita de modo que os objectos de menores dimensões que haja no desenho sejam representados com dimensões superiores a $0^m,0002$, porque, por muito perfeita que seja a execução no desenho geometrico, é quasi impossivel evitar erros d'estas dimensões.

Problema LVI — Reduzir, n'uma rasão dada, superficies de contornos irregulares

Da similhança de todos os quadrados deriva um methodo muito commodo, denominado *methodo das quadriculas*, para copiar uma figura reduzindo ou ampliando a copia n'uma razão dada.

Seja dada uma carta geographica, *fig. 139*, ou qualquer outro desenho para reduzir na rasão de $\frac{1}{2}$, por exemplo: envolva-se a figura dada

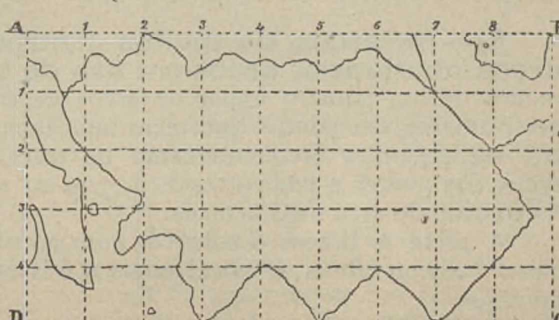


Fig. 139

n'um rectangulo A B C D, que se divide em quadrados iguaes, por meio de parallelas tiradas pelos pontos de divisão 1, 2, 3, ... de A B e A D; construa-se um rectangulo similhante $a\ b\ c\ d$, *fig. 140*, em que seja $a\,b = \frac{1}{2}$ A B e $a\,d = \frac{1}{2}$ A D e divida-se em tantos quadrados iguaes quantos forem os contidos em A B C D.

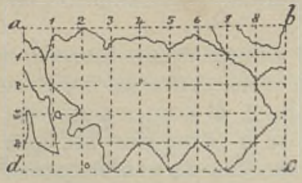


Fig. 140

Todos os pontos da copia reduzida são facilmente determinados por esta quadricula, cujos quadrados e linhas constituem outros tantos pontos de referencia.

Este methodo é excellente nas reducções de superficies de contornos irregulares; mas apresenta menos exactidão nas copias ampliadas, porque no primeiro caso o erro tende a diminuir, e no segundo tende, pelo contrario, a augmentar.

CAPITULO X

Curvas usuaes e curvas conicas

§ 1.º

Curvas usuaes

Arcos de muitos centros

84 — Os **arcos de muitos centros**, denominados tambem **arcos abatidos** ou **arcos em aza de cesto**, *fig. 141*, são formados de um numero impar de arcos de circulo que se ligam successivamente em pontos que têem uma tangente commum. Estes arcos empregam-se frequentemente no traçado das abobadas e dos arcos das pontes e podem ter 3, 5, 7, 9 ou 11 centros; trataremos só do traçado do arco de 3 centros.

A recta A B tem o nome de *base* ou *vão* do arco, C B denomina-se *flexa* ou *altura*, e os extremos A e B da base dizem-se *pontos de nascença*.

A flexa dos arcos abatidos é sempre menor que metade da base e é medida na perpendicular ao meio d'esta.

Problema LVII — Traçar um arco de tres centros conhecendo a base e a flexa

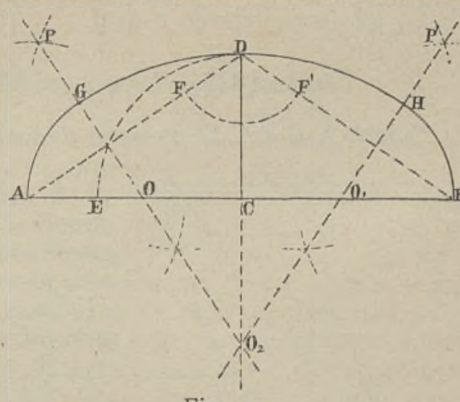


Fig. 141

Seja A B, *fig.*[a] *141*, a base dada e C D a flexa; tracem-se as rectas A D e B D, e do ponto C com o raio C D descreva-se o arco D E; do ponto D com o raio A E descreva-se o arco F F' e levantem-se perpendiculares ao meio de A F e B F', as quaes determinarão os centros O, O_1, O_2 dos arcos que constituem o arco abatido; para o traçar descrevem-se dos pontos O e O_1 com o raio O A = O_1 B os arcos A G e B H, e do ponto O_2 com o raio O_2 D o arco G D H.

Oval

85 — A oval, *fig. 142,* é uma curva fechada composta de quatro arcos de circulo ligados dois a dois.

86 — Dois arcos abatidos unidos pelos pontos de nascença formam uma oval.

87 — *Eixos da oval* são as rectas A B e P Q que a dividem em duas partes iguaes: o 1.º tem o nome de *eixo maior*, o 2.º *eixo menor*.

O traçado da oval póde fazer-se sendo dado um eixo ou dois: examinaremos successivamente estes dois casos.

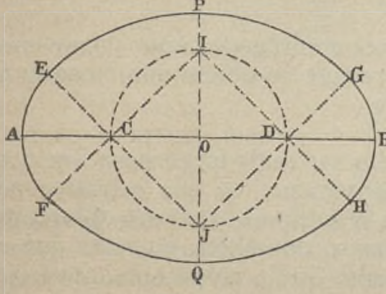


Fig. 142

Problema LVIII — Traçar a oval sendo dado o eixo maior

Seja A B, *fig. 142*, o eixo maior dado: devida-se esta linha em quatro partes iguaes A C, C O, O D, D B: levante-se a perpendicular P Q ao meio O de A B, e d'este ponto como centro com o raio C O descreva-se um circulo: tracem-se as cordas I D, I C, J C, J D e prolonguem-se; depois dos pontos C e D com o raio A C = B D descrevam-se os arcos E F, G H e dos pontos I e J com o raio I F = J E descrevam-se os arcos F H e E G, que completarão a oval.

Problema LIX — Traçar a oval sendo dados os dois eixos

Sejam A B e C D os eixos dados, *fig. 143*; marque-se um ponto

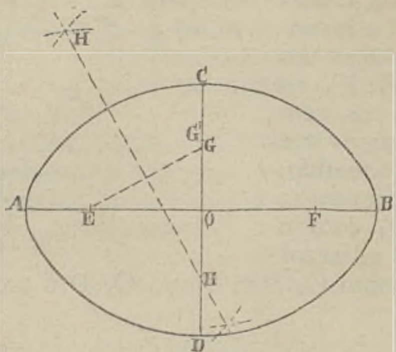


Fig. 143

qualquer G sobre o semi-eixo menor O C e applique-se a distancia C G de A para E e de B para F. Una-se o ponto E ao ponto G e levante-se a perpendicular H H' ao meio de E G que encontrará o semi-eixo O D no ponto H; marque-se a distancia O H de O para G'; depois descrevam-se dos pontos E e F com o raio E A dois arcos de circulo e dos pontos G' e H com o raio H C outros dois arcos, que completarão a oval. Os pontos de ligação dos arcos podem determinar-se unindo entre si os pontos E, H, F, G' e prolongando as rectas H E, G' E, G' F e H F.

88 — A oval é **regular** ou **irregular**, conforme os arcos de que é formada são iguaes dois a dois, ou não. A oval irregular tem o nome de **ovulo**.

89 — O **ovulo** ou ovo, muitas vezes empregado como ornamento na *decoração* dos edificios, é uma figura que se obtem combinando a **oval** com o circulo.

90 — Differe o **ovulo** da **oval** em ser mais largo para um dos extremos do que para outro, similhantemente ao que acontece ao ovo, de cuja fórma deriva o seu nome; resulta ainda d'esta differença entre as duas figuras que o **ovulo** tem só um **eixo**, ou recta que o divide em duas partes iguaes, em quanto que a **oval** tem, como se disse, dois eixos desiguaes.

91 — Descrevem-se geralmente os **ovulos** por meio de arcos de circulo com quatro ou seis centros distinctos.

Problema LX — Traçar um ovulo de quatro centros

Ao meio da recta dada C_1 C_3, *fig. 144*, levante-se a perpendicular A B, que representará o eixo unico da figura, e do ponto C como centro e com o raio C C_1 (metade de C_1 C_3) descreva-se uma circumferencia; tracem-se as cordas C_1 C_2 e C_3 C_2 e prolonguem-se; depois dos pontos C_1, C_2 e C_3 como centros, descrevam-se os arcos C_3 *b*, *b* B *b'* e *b'* C_1, que completarão o ovulo.

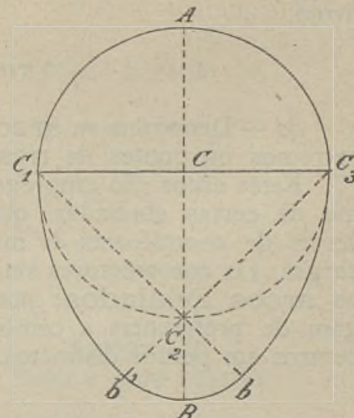


Fig. 144

Problema LXI—Traçar um ovulo de seis centros

Seja D E, *fig. 145*, a recta dada: divida-se esta linha em quatro

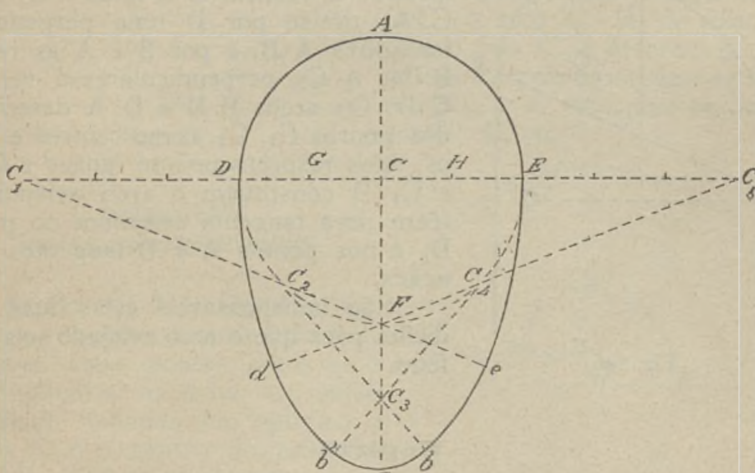


Fig. 145

partes iguaes D G, G C, C H, H E; descreva-se sobre D E como diametro uma circumferencia; marquem-se as distancias D C_1, E C_5 iguaes a tres divisões de D E e F C_3 igual a uma das mesmas divisões; unam-se os pontos C_1, C_5 com F e os pontos C_2, C_4 com C_3; finalmente dos pontos C, C_1, C_2, C_3, C_4 e C_5, como centros, descrevam-se os arcos D A E, E *e*, *e b*, *b* B *b'*, *b' d* e *d* D, que completarão o ovulo.

Arcos aviajados

92 — Denomina-se **arco aviajado** o arco que não tem os seus extremos ou pontos de **nascença** sobre a mesma linha horisontal.

Estes arcos são empregados muitas vezes para determinar a fórma de certas abobadas, que devem sustentar lanços de escadas, ou servir de contrafortes ás muralhas, que têem de supportar grandes cargas. Os constructores servem-se de diversas curvas para descrever os **arcos aviajados**; porém, em grande numero de casos empregam de preferencia a combinação de varios arcos de circulo com os centros em pontos distinctos.

Problema LXII — Traçar um arco aviajado, suppondo conhecidos os pontos de nascença e a direcção da linha vertical

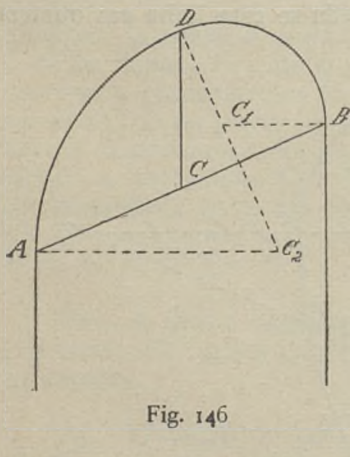


Fig. 146

Sejam A e B, *fig. 146*, os pontos de nascença: por o meio da recta A B trace-se a vertical C D igual a B C, ou C A; tire-se por D uma perpendicular sobre A B, e por B e A as rectas B C_1, A C_2, perpendiculares á vertical C D. Os arcos B D e D A descriptos dos pontos C_1, C_2, como centros e com os raios respectivamente iguaes a C_1 B e C_2 D constituem o arco aviajado, e têem uma tangente commum no ponto D, e nos pontos A e B tangentes verticaes.

São indispensaveis estas duas condições para que o arco aviajado seja perfeito.

Espiral

93 — A **espiral**, *fig. 147*, é uma curva composta de um numero illimitado de arcos ligados dois a dois, de modo que os pontos de ligação se afastam sempre a mesma quantidade do ponto de partida.

94 — A espiral diz-se *bicentrica*, *tricentrica*, *quadricentrica*, etc., conforme tem 2, 3, 4 centros.

Problema LXIII — Traçar a espiral bicentrica

Sejam C, C', *fig. 147*, os dois centros dados; unam-se estes pontos entre si e prolongue-se a recta C C' para um e outro lado; descreva-se do ponto C como centro e com o raio C C' a semi-circumferencia C' *a b;* do ponto C' como centro com o raio C' *b* descreva-se *b c d*, trace-se depois *d e f* com o centro em C e assim successiva e indefinidamente.

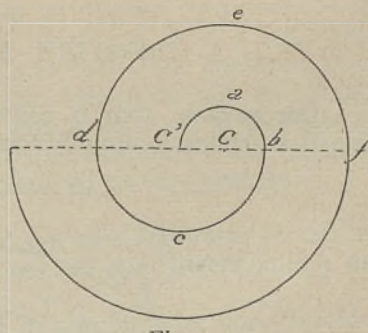


Fig 147

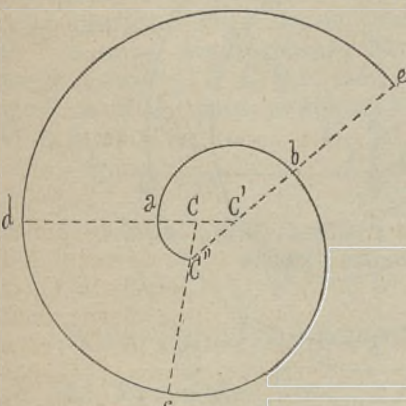


Fig. 148

Problema LXIV
Traçar a espiral tricentica

Sejam C, C', C'', *fig. 148*, os tres centros dados; unam-se estes pontos entre si e prolonguem-se as linhas de união do modo indicado na figura, descreva-se do ponto C como centro e com o raio C C'' o arco C'' *a*, do ponto C' com o raio C' *a* descreva-se o arco *a b*, e depois descrevam-se os arcos *b c*, *c d*, etc., com os centros em C'', C, etc.

Problema LXV
Traçar a espiral quadricentrica

Sejam C, C_1, C_2, C_3, *fig. 149*, os quatro centros dados; unam-se estes pontos entre si e prolonguem-se as linhas de união do modo indicado na figura; o ponto C é o centro do primeiro arco C_3 A, que se descreve com o raio C C_3; C_1 é centro do segundo arco A B, que é descripto com o raio C_1 A; C_2 é centro de B D, que tem para raio C_2 B, e succesivamente se descreverão tantos arcos quantos se quizerem.

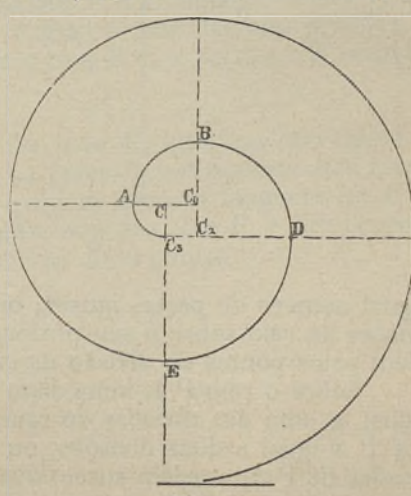


Fig. 149

Problema LXVI — Traçar a espiral de Archimedes

Descreva-se com o centro n'um ponto P, *fig. 150*, e com um raio P *h* arbitrario uma circumferencia; divida-se esta e o raio P *h* em

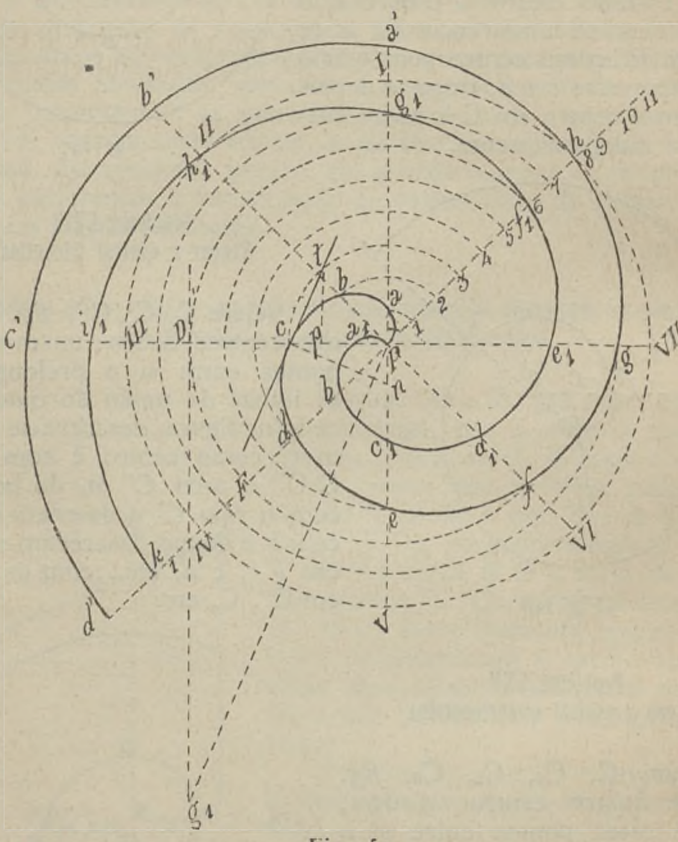


Fig. 150

igual numero de partes iguaes, oito por exemplo; appliquem-se as divisões do raio sobre o seu prolongamento e tirem-se os raios que passam pelos pontos de divisão da circumferencia.

Sobre o raio P I, immediato a P *h*, marque-se uma grandeza P *a* igual a uma das divisões do raio, sobre P II marque-se uma grandeza P *b* igual a duas divisões, ou P_2, sobre P-III marquem-se tres divisões de P *h*, e assim successiva e indefenidamente; a curva P *a b c d* ... *c' d'* etc., chama-se **espiral de Archimedes**, porque foi este celebre geometra quem descobriu as sua principaes propriedades. O ponto P é o **pólo da espiral**, a recta indefinida P*h* é o **eixo polar**. O arço P *a b c d e f g h*, ou qualquer outro, que comece no raio P*h*, e que corresponda a uma revolução inteira do raio do circulo, fórma uma **espira**; a distancia P*h*, e, em geral, a parte da recta indefinida P*h*, ou de qualquer outro raio, que fica entre duas **espiras** successivas, denomina-se **passo da espiral** de Archimedes.

95 — Do ponto P, *(fig. 150)*, com um raio arbitrario P2 descreva-se um arco de circulo, e seja *b* o ponto em que elle encontra a **espiral** ha pouco traçada.

Querendo construir outra espiral de Archimedes com o polo P e o passo P *h*, é forçoso escolher outro **eixo polar**, para que a nova **espiral** deixe de se confundir com a antiga. Sendo a recta P *b* o novo **eixo polar**, basta diminuir de cada um dos **raios vectores** P *c*, P *d*, P *e*, etc., que se seguem a P *b*, uma quantidade igual a P *b*, para se obter a nova **espiral de Archimedes** P a_1 b_1 c_1... i_1 k_1...

Problema LXVII — Construir a tangente a uma espiral de Archimedes, suppondo conhecido o ponto de contacto

Seja *c*, *(fig. 150)*, o ponto de contacto.

1.º Processo: Tire-se o **raio vector** P *c*, e marque-se sobre elle, a contar de *c* para P, uma grandeza *c p*, que seja igual, por exemplo, a uma das divisões do **passo** P *h* e sobre a recta *p t*, que é perpendicular a P*c*, tome-se *p t* igual a uma das oito divisões da circumferencia descripta de P com o raio P *c*; a recta *t c* é tangente á espiral.

2.º Processo: Descreva-se do polo P, com um raio duplo de P *c*, um arco D F *f*, que termine na espiral, rectifique-se este arco e applique-se a sua grandeza de D para g_1 sobre a tangente em D ao mesmo arco, una-se o extremo g_1 da tangente com P, e tire-se por *c* uma parallela á recta g_1 P, que une os ditos pontos.

§ 2.º

Curvas conicas

Ellipse

96 — **Ellipse** é uma curva plana, tal que a somma das distancias de cada um de seus pontos a dois pontos fixos interiores é constante: os dois pontos fixos F e F', *fig. 151*, chamam-se *focos* da ellipse e as rectas F P, F' P que unem os focos a qualquer ponto P da ellipse, dizem-se *raios vectores* d'este ponto.

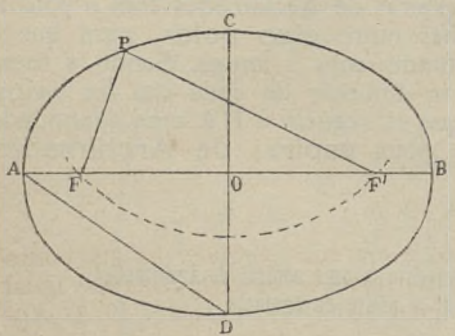


Fig. 151

97 — *Eixo maior da ellipse* é a recta A que passa pelos focos e termina na ellipse.

Corda é qualquer recta D A cujos extremos estão sobre a ellipse.

Eixo menor é a corda C D perpendicular ao meio do eixo maior.

Centro da ellipse é o ponto O de intersecção dos eixos.

Raio da ellipse é qualquer recta tirada do centro para a curva.

Diametro da ellipse é toda a corda C D que passa pelo centro.

As distancias O A, O B são os *semi eixos maiores* da ellipse, e O C, O D são os *semi-eixos menores*.

Vertices da ellipse são os extremos A, B, C, D dos eixos.

98 — Dados os eixos da ellipse *determinam-se os focos* F, F', *(fig. 151)*, fazendo centro em um dos extremos C do eixo menor com uma abertura de compasso igual ao semi-eixo maior O B = O A, e descrevendo um arco de circulo; as intersecções F e F' d'este arco com o eixo maior são os focos.

99 — Em todas as ellipses, a somma das distancias de um ponto qualquer aos focos é constante e igual ao eixo maior.

100 — Ha varios processos para traçar a ellipse; porém trataremos só dos dois seguintes:

1.º Traçado por meio da tira de papel;

2.º Traçado por movimento continuo, ou traçado dos jardineiros.

Problema LXVIII — Traçar a ellipse por meio da tira de papel, dados os eixos

Sejam A B e C D os eixos dados, *fig. 152*, tome-se uma tira de

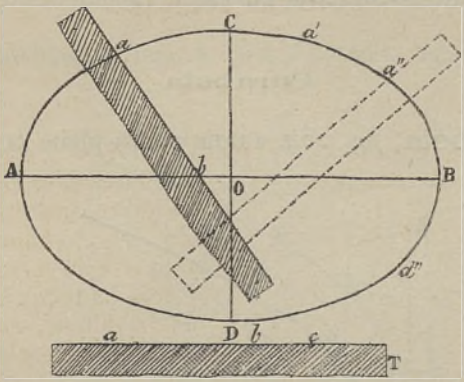


Fig. 152

papel T com um bordo rectilineo e marque-se sobre ella um ponto qualquer *a*; a partir d'este ponto marquem-se as distancias *a b* igual ao semi-eixo menor O C, e *a c* igual ao semi-eixo maior O A. Applique-se depois a tira sobre os eixos, de modo que o ponto *b* fique sobre o eixo maior e o ponto *c* sobre o eixo menor, e marque-se um ponto junto á divisão *a*, que pertencerá á ellipse: fazendo depois mover circularmente a tira, de modo que o ponto *b* nunca sáia do eixo maior e *c* do eixo menor, e marcando-se successivamente os pontos *a'*, *a''*, ..., descriptos pela divisão *a* da tira de papel, fica determinada a ellipse, cujo traçado se executa á mão, passando um traço continuo pelos pontos marcados.

Problema LXIX—Traçar a ellipse por movimento continuo

Este traçado serve especialmente para traçar grandes ellipses sobre o terreno.

Determinem-se os focos F, F', *fig. 153*, da ellipse (98) e cravem-se n'elles dois alfinetes (ou duas estacas, sendo sobre o terreno) aos quaes se atam os extremos de um fio inextensivel F P F', cujo comprimento seja igual ao eixo maior A B; estire-se o fio applicando contra elle um lapis (uma estaca, sen-

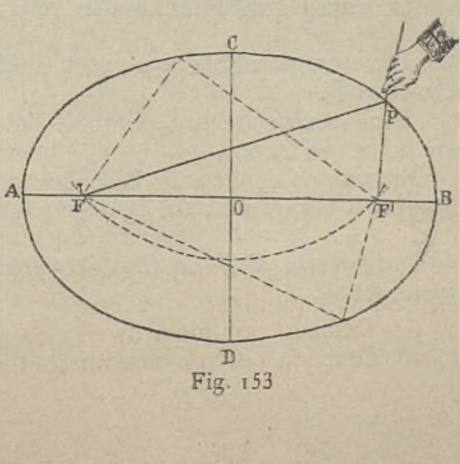


Fig. 153

do no terreno) e faça-se mover circularmente a ponta do lapis sobre o papel para um dos lados do eixo maior: descrever-se-ha assim metade da ellipse; estirando depois o fio para o outro lado do eixo maior, traçar-se-ha a outra metade da curva.

Parabola

101—Parabola, *fig. 154*, é uma curva plana cujos pontos estão

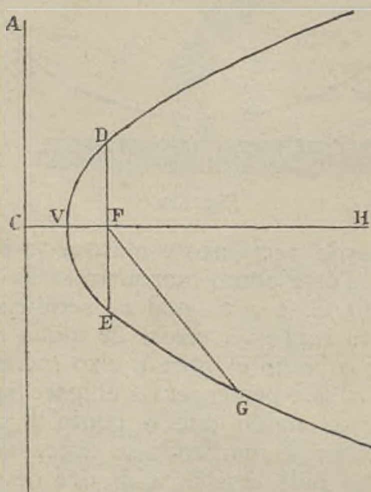


Fig. 154

igualmente afastados de um ponto fixo F e de uma recta fixa A B.

O ponto fixo F chama-se *foco* e a recta fixa A B diz se *directriz*.

Eixo da parabola é a recta C H perpendicular á directriz tirada pelo foco F.

Raio vector de um ponto G da parabola é a recta F G que une este ponto ao fóco.

Parametro é a corda D E que passa pelo fóco e é perpendicular ao eixo. O parametro é igual ao dobro da distancia do fóco á directriz.

A distancia V F do fóco ao vertice da parabola denomina-se *distancia focal*.

Problema LXX — Traçar a parabola, dado o fóco e a directriz

Póde este problema ser resolvido por dois modos:

1.º **Por pontos.** — Seja A B a directriz, *fig. 155*, e F o foco

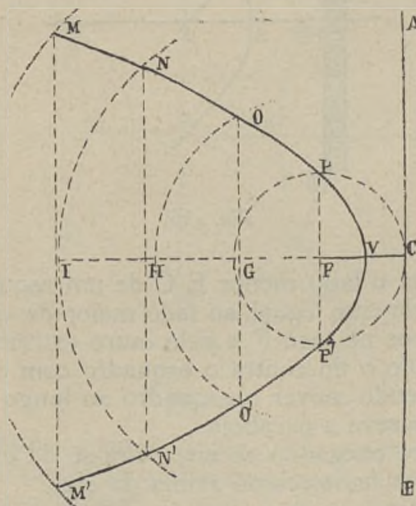


Fig. 155

dado.

Conduza-se pelo fóco a perpendicular I C á directriz e marque-se o meio V da distancia focal F C, o qual será o vertice da parabola; tirem-se por quaesquer pontos marcados sobre o eixo I, H, G, F as perpendiculares M M', N N', O O', P P' e descrevam-se, fazendo centro no foco F com os raios C F, C G, C H, C I diversos arcos de circulo, que interceptarão cada um a sua perpendicular em dois pontos P, P'; O, O'; N, N'; M, M'... que pertencerão á parabola. Os pontos P, P' resultam das intersecções do arco descripto do foco com o raio C F; O e O' são determinados por um arco descripto do fóco com o raio C G; e assim se determinam successivamente tantos pontos, quantos se pretenderem para o traçado da parabola, que se executa á mão passando um traço continuo pelos pontos marcados.

Quanto mais proximos forem os pontos I, H, G, tanto mais exacto será o traçado da curva.

2.º **Por movimento continuo.**—Sejam dados a directriz D D' e o fóco F.

Faz-se coincidir a aresta d'uma regua com D D' *fig. 156*, e ajus-

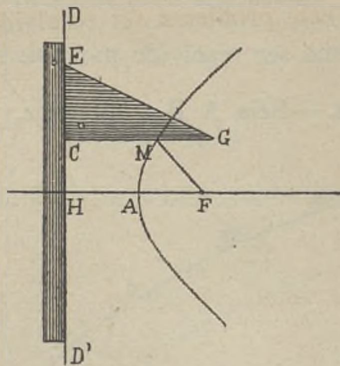


Fig. 156

ta-se contra a regua o lado menor E C de um esquadro E C G. Um fio com um comprimento egual ao lado maior do esquadro, está fixo por um dos extremos no foco F e pelo outro extremo no vertice G do esquadro. Retesando o fio contra o esquadro com um ponteiro, lapis ou tira-linhas e fazendo mover o esquadro ao longo da regua, a ponta do instrumento descreve a parabola.

Em o esquadro chegando ao eixo, vira-se da outra face, e continua-se a descrever a linha, como acima do eixo.

Hyperbole

102 — *Hyperbole* é uma curva plana, tal que a differença das distancias de cada um dos seus pontos a dois pontos fixos F e F', *fig. 157*, situados no seu plano, é constante. A hyperbole tem dois ramos separados e abertos, tendo cada um o seu fóco. Os pontos F e F' são os *focos* da hyperbole e as rectas que unem os focos a qualquer ponto da curva dizem-se *raios vectores*.

Duas hyperboles que têem os mesmos focos dizem-se *homofocaes*.

Eixo transverso ou *eixo real* da hyperbole é a recta A B que termina nos dois ramos da curva e cujo prolongamento passa pelos focos.

Eixo não transverso ou *eixo imaginario* da hyperbole é a recta C D perpendicular ao meio do eixo transverso.

Centro da hyperbole é o ponto O de intersecção dos eixos.

Vertices são os pontos A e B extremos do eixo transverso.

Diametro da hyperbole é qualquer recta que passe pelo centro. Os diametros dizem-se *reaes* quando terminam na curva, e *imaginarios* no caso contrario.

Problema LXXI — Traçar a hyperbole, sendo dados os focos e o eixo transverso

Póde igualmente este problema ser resolvido por dois modos:

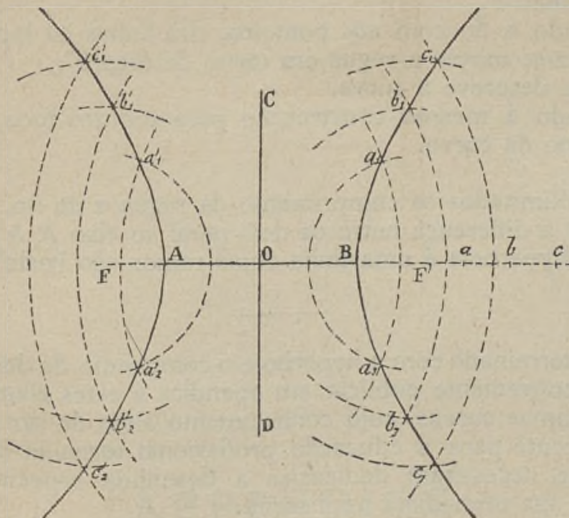


Fig. 157

1.° **Por pontos.**—Seja A B, *fig. 157*, o eixo transverso dado, e F, F', os focos; prolongue-se o eixo transverso e marquem-se sobre o seu prolongamento quaesquer pontos *a*, *b*, *c*; dos focos F e F' como centros com os raios B*a*, B*b*, B*c*, descrevam-se arcos de circulo e com os raios A*a*, A*b*, A*c*, descrevam-se novos arcos que cortarão os primeiros nos pontos a_1, a_2, a'_1, a'_2, b_1, b_2, b'_1, b'_2,... que pertencerão á hyperbole. Os pontos a_1, a_2, a'_1, a'_2, são determinados pelas intersecções dos arcos descriptos dos focos com os raios respectivamente iguaes ás distancias B*a* e A*a*; os pontos b_1, b_2, b'_1, b'_2, determinam-se com os raios B*b* e A*b*, e assim se determinarão todos os pontos necessarios para o traçado da hyperbole, o qual se executa á mão.

2.° **Por movimento continuo.** — Sejam dados o eixo transverso A A' e os focos F, F', *fig. 158*.

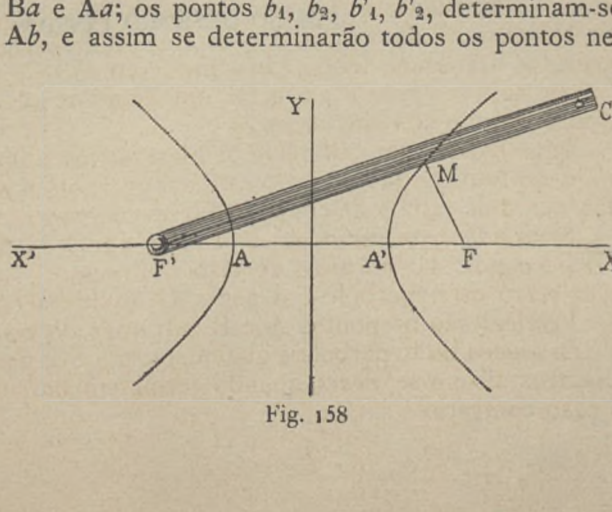


Fig. 158

Toma-se uma regua F' C, maior

que a distancia focal e um fio igual ao comprimento da regua diminuindo de A A'.

Fixa-se um dos extremos do fio em C sobre a regua e o outro extremo no foco F.

Retesando o fio com um ponteiro, tira-linhas ou lapis, ao longo da regua, faz-se mover a regua em torno do foco F'.

A ponta descreve a curva.

Repetindo a mesma construcção para o outro foco, obtem-se o segundo ramo da curva.

Sendo illimitados os comprimento da regua e do fio, e sob a condição de ser a differença entre os dois igual ao eixo A A', percebe-se bem que a hyperbole é uma linha cujos ramos são indefinidos.

Tendo terminado com a hyperbole o compendio de desenho linear, parece-nos conveniente publicar em apendice a estes elementos o traçado de algumas curvas, cujo conhecimento além de ser mais um factor concorrente para a educação profissional torna-se indispensavel áquelles que necessitam dedicar-se a desenhos especiaes onde vão encontrar a sua immediata applicação.

FIM DO DESENHO LINEAR

APPENDICE

APPENDICE

AOS

ELEMENTOS DE DESENHO LINEAR

CAPITULO I

Evolvente do circulo; cycloide

103 — Em geral, quando a tangente a uma curva se move, conservando-se tangente, de modo que o ponto de contacto se desloca, percorrendo na tangente e na curva comprimentos iguaes, qualquer ponto fixo da tangente movel descreve uma linha que é evolvente da curva dada. Imaginando um fio perfeitamente flexivel e inextensivel enrolado sobre uma curva fixa e suppondo que se desenrola de fórma tal que a parte desenrolada fique recta e tangente á curva, é claro que o extremo da parte desenrolada, ou qualquer dos seus pontos, descreve uma evolvente. D'onde se vê que a mesma curva tem uma infinidade de evolventes.

No circulo todas as *evolventes são iguaes porque é sempre possivel sobrepôr exactamente umas ás outras.*

Problema LXXII — Traçar a evolvente d'um circulo

Divida-se a circumferencia dada, *fig. 159,* em um numero par de partes iguaes, oito por exemplo, tirem-se pelos pontos de divisão as tangentes *b*B, *d*D, *e*E, etc., e, tomando para origem da curva o ponto *a*, marque-se a partir do ponto *f*, diametralmente opposto de *a*, sobre a tangente tirada por aquelle ponto, uma distancia *f*F igual a metade da circumferencia rectificada. Divida-se *f*F em tantas partes iguaes, quantas são as divisões da semi-circumferencia, e applique-se a partir do ponto de contacto, e sempre no mesmo sentido, uma d'aquellas divisões sobre a tangente *b*B, duas sobre *d*D, tres sobre *e*E, e assim successiva e indefinidamente: os pontos *a*, B, D, E, F, etc., pertencem á evolvente.

Poder-se-hia em vez de marcar sobre *f*F a semi-circumferencia rectificada, marcar toda a circumferencia sobre A*a*, tangente ao circulo na origem da evolvente; n'este caso dividir-se-hia A*a* no mesmo numero de partes iguaes em que se dividiu toda a circumferencia, e então poderia ser empregado o mesmo processo, ainda mesmo que o numero de divisões da circumferencia fosse impar.

Depois de obter o ponto A, pode-se prolongar a evolvente, marcando sobre as tangentes *b*B, *d*D, *e*E, etc., a contar de *b*, *d*, *e*, etc., 9, 10, 11, etc., divisões de *f*F, ou de A*a*.

Tomando outro ponto *h* para origem acha se a evolvente *h* J' A' B' D' E' etc.

Problema LXXIII — Traçar a tangente á evolvente n'um ponto dado

Seja E o ponto dado, *fig. 159;* conduza-se por este ponto a tan

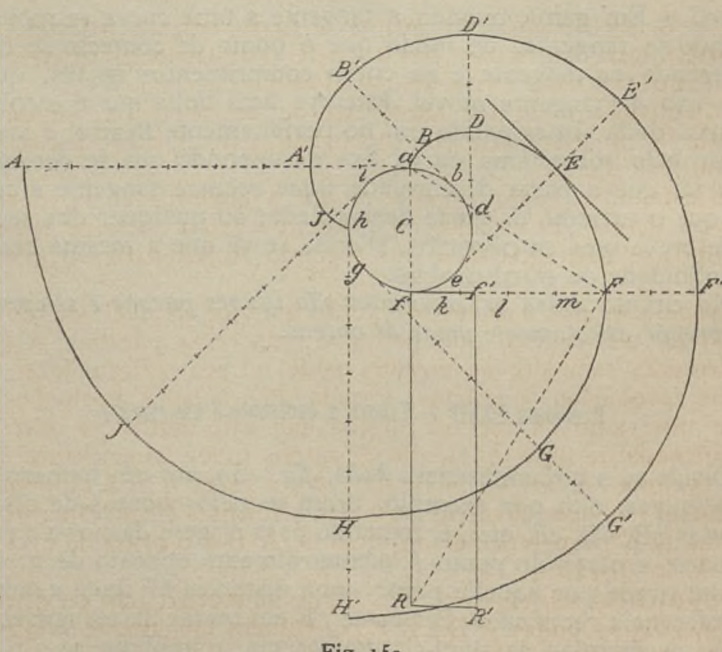


Fig. 159

gente E*e* á circumferencia e pelo mesmo ponto tire-se uma perpendicular á tangente que será tangente á evolvente.

Problema LXXIV—Rectificar um arco da evolvente comprehendido entre a origem e qualquer ponto da curva

Seja *a* a origem e F o ponto dado, *fig. 159*; construa-se a terceira proporcional ao diametro do circulo e á parte *f*F da tangente pela seguinte fórma: tire-se a tangente F*f* ao circulo e o diametro *f*C*a*, una-se *a* com F e trace-se FR perpendicularmente a *a*F; a parte *f*R do prolongamento do diametro, que passa por *f*, será a terceira proporcional pedida e igual ao arco *a* B D E F da evolvente rectificado.

104 — Construindo sobre *f*R, *fig. 159*, e sobre um terço *ff'* de *f*F como lados um rectangulo *f' f* R R', acha-se uma figura equivalente á que é limitada por o arco *a* B D E F da evolvente, por a tangente F *f* e por o arco *f e d b a* do circulo.

Cycloide

105 — A cycloide em geral é uma curva gerada por um ponto, que se move arrastado por uma circumferencia, que rola sobre uma recta dada.

A cycloide póde ser perfeita ou imperfeita, segundo o ponto movel, ou gerador da cycloide, estiver sobre a circumferencia, ou fóra d'ella.

Não estando o *ponto gerador* sobre a circumferencia, deve estar fóra ou dentro do circulo; no primeiro caso a cycloide imperfeita denomina-se alongada, e no segundo achatada ou encurtada.

Em qualquer dos tres casos o ponto gerador da cycloide move-se em torno de um centro, que percorre uma recta parallela á que é constantemente tangente ao circulo, póde no seu trajecto fazer uma ou muitas revoluções completas; a cada uma d'estas revoluções corresponde um ramo da cycloide, a qual por este motivo se deve considerar formada de uma infinidade de ramos todos iguaes entre si.

Na cycloide A *m' m''* *n* B, *fig. 160*, a recta A B é tangente ao circulo movel nas suas diversas posições e fórma a base da cycloide, a linha D E perpendicular ao meio de A B é o eixo da cycloide, o ponto E o vertice.

Na cycloide alongada, *fig. 161*, e na achatada ou encurtada, *fig. 162*, as linhas A B e D E constituem igualmente a base e o eixo das respectivas cycloides.

Na cycloide **perfeita**, *fig. 160,* a base A B é sempre igual á circumferencia movel rectificada e o **eixo** é igual ao diametro da mesma circumferencia.

Problema LXXV — Traçar a cycloide perfeita suppondo conhecida ou a base ou o eixo

Se fôr conhecido o eixo D E, *fig. 160,* rectifica se a circumferen-

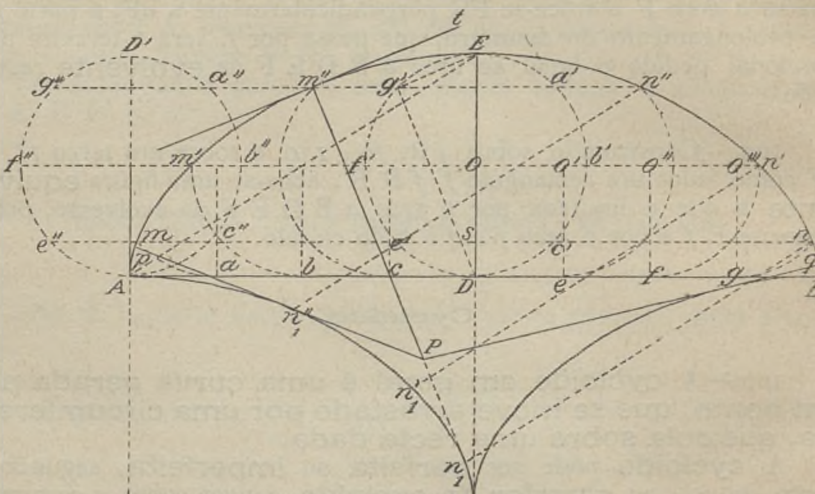


Fig. 160

cia construida sobre D E como diametro e a linha resultante será a base A B da cycloide. Conhecendo-se a base A B determina-se o diametro D E do circulo, cuja circumferencia rectificada é igual a A B, e tem-se o eixo.

Levante-se portanto ao meio da **base** A B a perpendiculrr D E igual ao **eixo** e obter-se-hão tres pontos A, E, B, que pertencem á cycloide; os outros pontos determinam-se pela fórma seguinte:

Construa-se uma circumferencia sobre D E como diametro, que representará uma das posições do circulo movel, dividam-se em igual numero de partes iguaes a **base** A B e a circumferencia, pelo centro d'esta tire-se a parallela á recta A B, e pelos pontos de divisão de A B parallelas a D E; dos pontos O', O", O''', como centros e com um raio igual a metade de D E descrevam-se circumferencias e tiremse pelos pontos de divisão da circumferencia O parallelas a A B; estas parallelas interceptam as circumferencias correspondentes nos pontos *n''*, *n'*, *n*, que existem sobre a cycloide. A correspondencia entre os circulos e as rectas conhece-se comparando os ponto de divisão *e*, *f*, *g* de D B, contados de D para B, com os pontos *a'*, *b'*, *c'*, da semi-circumferencia contados no sentido E *a' b' c'* D.

O arco A *m m' m''* E da cycloide obtem-se, ou seguindo o processo que acaba de ser descripto, ou determinando para a esquerda de D E os pontos symetricos de *n*, *n'*, *n''*.

Problema LXXVI—Traçar a tangente á cycloide sendo conhecido o ponto de contacto

Trace-se o eixo e sobre elle como diametro descreva-se o circulo.

Sendo *m''* *(fig. 160)*, o ponto dado, conduza-se parallelamente a A B a recta *m'' g'* e por o primeiro ponto, *g'*, em que ella encontra a circumferencia, tire-se a corda *g'* E; a recta *m'' t* parallela a *g'* E será tangente á cycloide.

Nos pontos, taes como A e B, em que a cycloide encontra a base, e que se denominam pontos de reversão quando n'elles se reunem dois ramos, as tangentes são perpendiculares á base.

Problema LXXVII — Traçar a normal á cycloide conhecido o ponto de incidencia

Seja *m''* *(fig. 160)* o ponto de incidencia. Trace-se parallelamente a A B, a recta *m'' g'*, e por o ponto *m''* conduza se uma parallela *m'' c* á corda *g'* D; a recta *m'' c* é a normal pedida. Póde tambem determinar-se o ponto *c*, ou outro qualquer da normal, sem traçar a parallela á corda, tomando na base uma parte D *c* igual a *g' m''*, ou outra D *b* igual a *f' m'*, etc.

Problema LXXVIII — Traçar a evoluta da cycloide, ou a linha que passa pelos differentes centros de curvatura

1.º Processo.—Tirem-se normaes pelos differentes pontos da curva e sobre o prolongamento de cada uma como *m'' c* *(fig. 160)*, por exemplo, marque-se uma grandeza $c\,n_1$, igual á mesma normal *m'' c*; os pontos obtidos são os centros de curvatura dos diversos pontos da cycloide e a linha que passa por elles, é a evoluta.

2.º Processo.—Tire-se a corda E A da cycloide e por differentes pontos do arco E *n'' n' n* B conduzam-se rectas $n''\,n''_1$, $n'\,n'_1$, $n\,n_1$, etc., iguaes e parallelas á corda E A; os pontos n''_1, n'_1, n_1, etc., pertencem á evoluta que se pretende traçar.

Problema LXXIX — Traçar a normal á cycloide por um ponto, fóra da curva

Seja P, *(fig. 160)*, o ponto dado. Trace-se a evoluta da cycloide e tirem-se por P as rectas P*p*, P*m*'' e P*q* tangentes á mesma evoluta; os pontos *p*, *m*'' e *q* são os pontos de incidencia das tres nomaes, que passam por P.

Problema LXXX—Traçar a cycloide alongada

Ao meio da base A B, *fig. 161*, levante-se a perpendicular D E

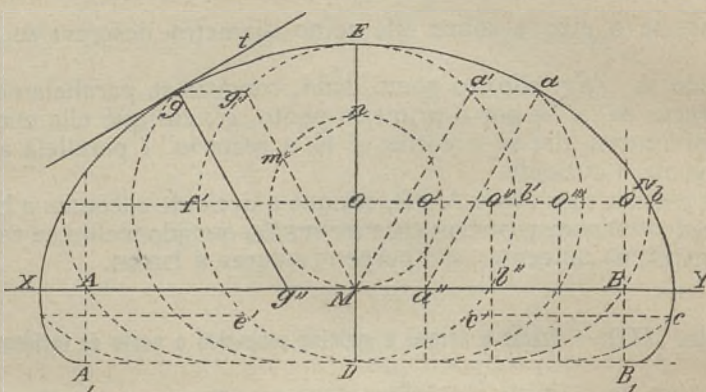


Fig. 161

e sobre ella tomem-se as partes M O, igual ao raio do circulo cuja circumferencia rectificada é igual a A B, e O E igual á distancia do centro d'este circulo ao ponto gerador, que se suppõe existir em E. Do centro O com um raio igual a O E descreva-se uma circumferencia e divida-se esta e a base A B no mesmo numero de partes iguaes, e conduzam-se, por os pontos de divisão da circumferencia, rectas parallelas a A B, e por os pontos de divisão de A B perpendiculares a esta recta até encontrarem em O', O'', O''', etc., a recta conduzida por O parallelamente á base A B. Dos pontos O', O'', O''', etc., como centros descrevam-se circulos com os raios iguaes a O D e determinem-se os pontos *a*, *b*, *c*, B_1, em que elles encontram as parallelas tiradas por *a*', *b*', *c*' e D.

Problema LXXXI — Traçar a tangente a um ponto da cycloide alongada

Seja *g* o ponto dado, *fig. 161;* tire-se por elle a recta *g g*', parallela a A B, e una-se o ponto de encontro *g*' da parallela com a circumferencia cujo diametro é D E, com M, e pelo ponto *m*, em que *g*' M corta a circumferencia M *m n*, trace-se a corda *m n*, tirando finalmente pelo ponto dado *g*, uma parallela a esta corda, obter-se-ha a tangente pedida.

Problema LXXXII — Traçar a normal a um ponto de cycloide alongada

Trace-se pelo ponto dado *g*, *fig. 161*, a recta *g g*' parallelamente a A B e tire se *g*' M; a recta *g g*'' parallela a *g*' M é a normal á cycloide.

106 — O traçado da cycloide achatada ou encurtada, *fig. 162*, bem como o das suas tangentes e normaes em qualquer ponto da

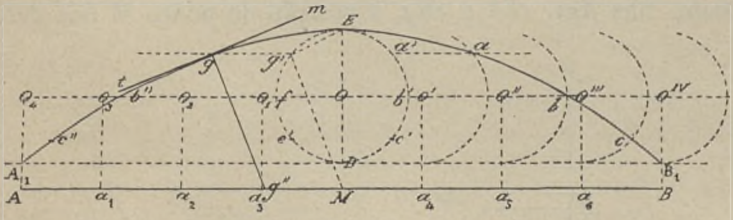


Fig. 162

curva, faz-se por meios perfeitamente analogos áquelles que foram empregados na cycloide alongada.

CAPITULO II

Logarithmica, Catenaria

108 — Os differentes pontos de uma curva são muitas vezes determinados por meio das distancias d'elles a duas rectas perpendiculares ou obliquas entre si.

Assim, nas *figs. 163* e *164*, a posição do ponto M fica determi-

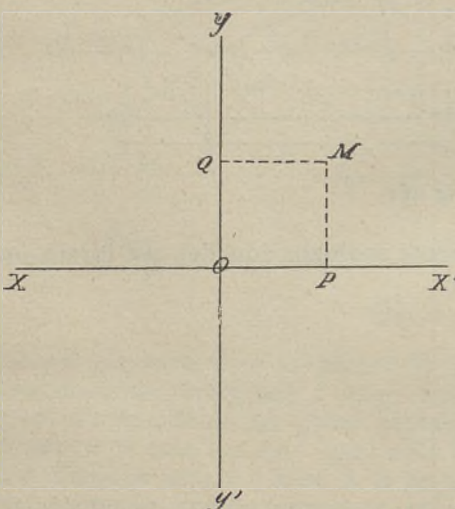


Fig. 163

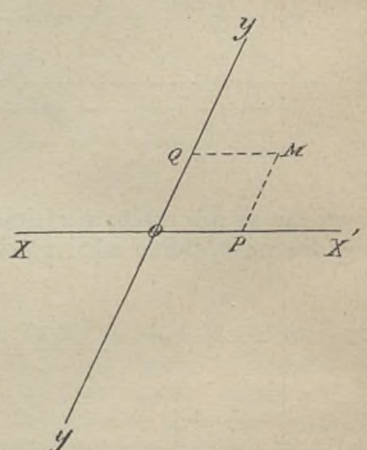


Fig. 164

nada, quando se dão as distancias M P e M Q, ás duas rectas xx' e yy' ou O Q e O P respectivamente iguaes áquellas.

A distancia O P chama-se *obscissa* do ponto M, e designa-se pela lettra x; a distancia M P chama-se **ordenada**, e designa-se pela lettra y. Além d'isto, estas duas distancias têem o nome commum de **coordenadas** do ponto M.

As duas rectas fixas xx' e yy' chamam-se **eixos**; a primeira **eixo das abscissas** ou dos xx, e a segunda **eixo das ordenadas** ou dos yy. Os dois eixos têem o nome commum de **eixos das coordenadas**, e a sua intersecção O chama se **origem das coorde-**

nadas. As coordenadas são orthogonaes, ou obliquas, segundo os eixos coordenados forem perpendiculares, ou obliquos, um ao outro.

Portanto: *ordenada de um ponto é a perpendicular abaixada d'esse ponto sobre o eixo dos x*; e *abscissa é a distancia da origem ao pé da ordenada.*

Problema LXXXIII — Traçar uma logarithmica suppondo conhecidos os eixos coordenados

Sejam X x e Y y *fig. 165*, os eixos coordenados, perpendiculares entre si.

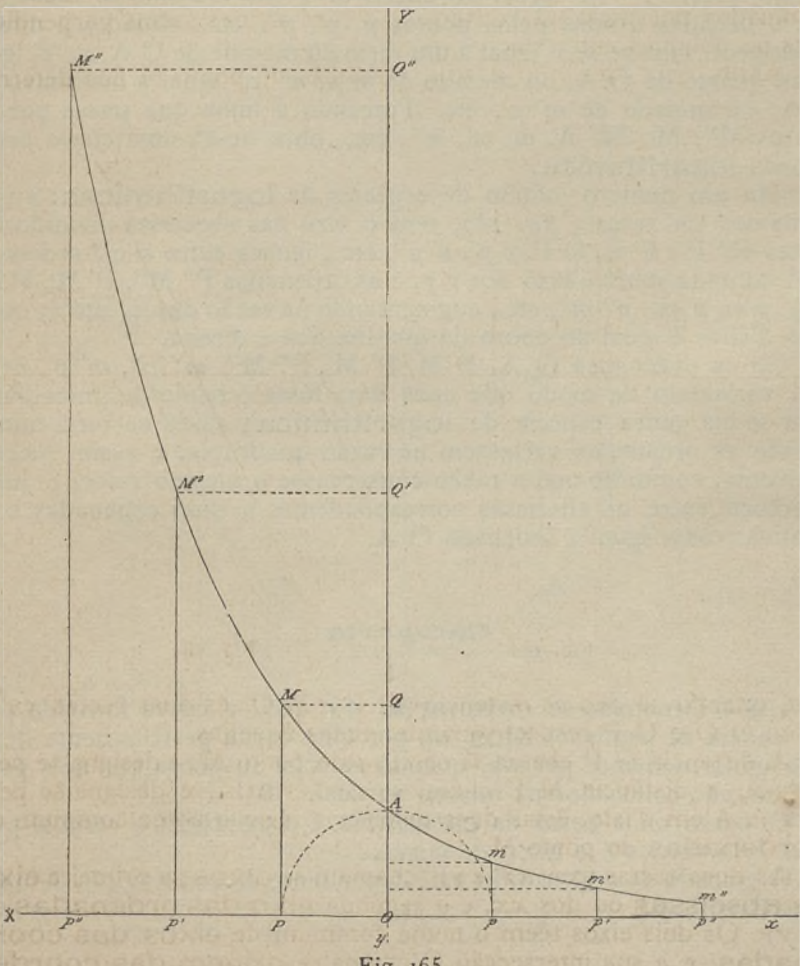


Fig 165

Marquem-se sobre o eixo dos *xx*, a partir da origem O para a esquerda as abscissas O P, O P', O P'', etc., respectivamente eguaes a uma, duas, tres, etc., unidades arbitrarias, de modo que cada abscissa seja egual á precedente augmentada da grandeza O P, que se toma para unidade. Para a direita de O marquem-se as abscissas O *p*, O *p*', O *p*'' etc., que vão variando como aquellas, sempre na mesma razão.

Pelos pontos O, P, P', P'', etc., e *p*, *p*', *p*'', etc., levantem-se perpendiculares ao eixo dos *xx*, e marque-se na primeira a grandeza O A egual a O P, ou á unidade, na segunda P M egual a dois, ou o dobro de O A, na terceira P' M' egual a quatro, ou ao dobro de P M, na quarta P'' M'' igual ao dobro de P' M' e assim por diante, e nas ordenadas tiradas pelos pontos *p*, *p*', *p*'', etc., situados á direita da origem, faça-se *m p* igual a um meio ou metade de O A, *m*' *p*' igual a um quarto de O A, ou metade de *m p*, *m*'' *p*'' igual a um oitavo de O A, ou metade de *m*' *p*', etc. Traçando a linha que passa por os pontos M'', M', M, A, *m*, *m*', *m*'', etc., obter-se-ha uma curva denominada logarithmica.

Ha um numero infinito de especies de logarithmicas: a que acabámos de traçar, *fig. 165*, tem o eixo das abscissas dividido em partes P'' P', P' P, O P, *p p*', *p*' *p*'', etc., iguaes entre si e á ordenada O A contada sobre o eixo dos *y y*, e as ordenadas P'' M'', P' M', P M, O A, *p m*, *p*' *m*', *p*'' *m*'', etc., augmentando na razão dupla, isto é, qualquer d'ellas é igual ao dobro da que lhe fica á direita.

Se as ordenadas O A, P M, P' M', P'' M'', *m*'' *p*'', *m*' *p*', *m p*, etc., variassem de modo que cada uma fosse o triplo da immediata, obter-se-hia outra especie de logarithmica; ainda se teria outra, quando as ordenadas variassem na razão quadrupla, e assim successivamente, comtanto que a razão conservasse o mesmo valor, e que a differença entre as abscissas correspondentes a duas ordenadas consecutivas fosse igual á ordenada O A.

Catenaria

108 — Denomina-se catenaria, *fig. 166*, a curva formada por uma cadeia de pequenos élos, ou por uma corda perfeitamente flexivel e uniformemente pesada, quando se acha suspensa por dois pontos fixos não collocados na mesma vertical.

O ponto mais baixo da catenaria é o vertice; a vertical que passa pelo vertice é o eixo da curva.

O traçado da catenaria está dependente da construcção de uma logarithmica.

Problema LXXXIV—Traçar a catenaria sendo conhecidos dois pontos situados na mesma horisontal e o vertice

Sejam B e D, *fig. 166,* os dois pontos situados na horisontal B D e A o vertice da catenaria.

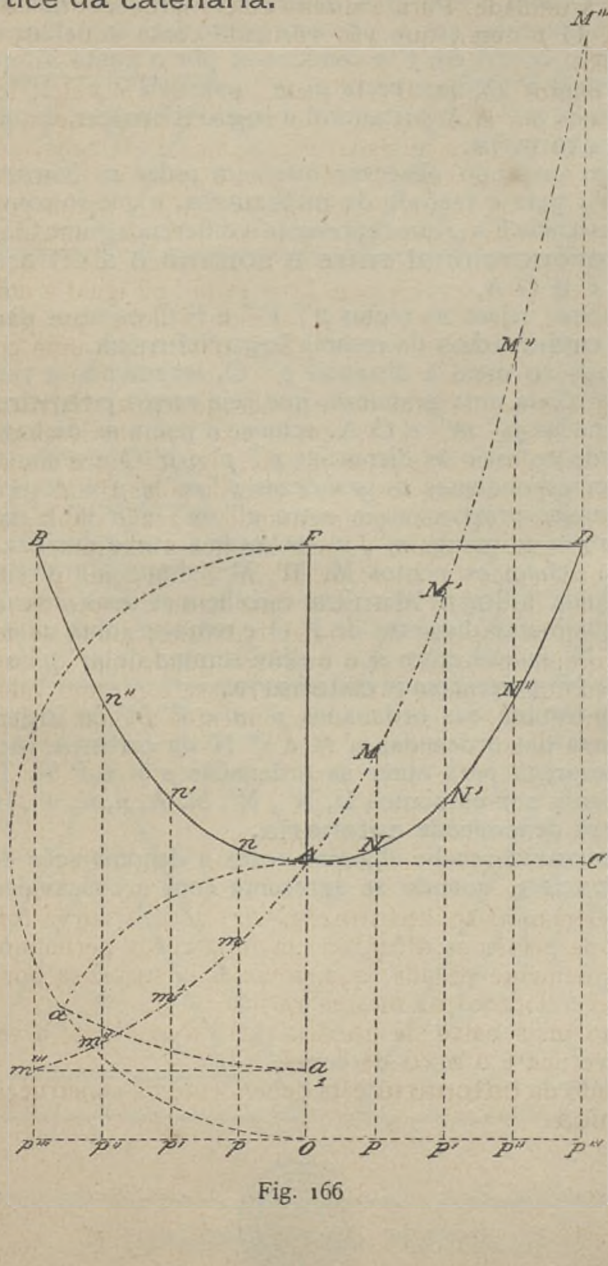


Fig. 166

Tome-se sobre a vertical F A, e para baixo do vertice, um ponto O arbitrario, tire-se por elle uma recta parallela a B D e por os pontos B e D rectas verticaes, ou parallelas a F A.

Sobre F O como diametro descreva-se uma semi-circumferencia e do ponto O com o raio O A descreva-se um arco, que interceptará a semi-circumferencia em a, por este ponto faça-se passar um arco de circulo com o centro em F e conduza-se por o ponto a_1, em que elle corta a vertical F O, uma recta a_1 m''' parallela a p''' P'''.

Os pontos m''' e A pertencem á **logarithmica**, da qual se póde deduzir a **catenaria**.

Convém comtudo observar que nem todas as **logarithmicas** podem servir para o traçado da **catenaria**, e que só convirá áquella em que a distancia F a_1, que representa a differença entre O F e m''' p''', fôr **meia proporcional entre a somma e a differença das linhas** O F **e** O A.

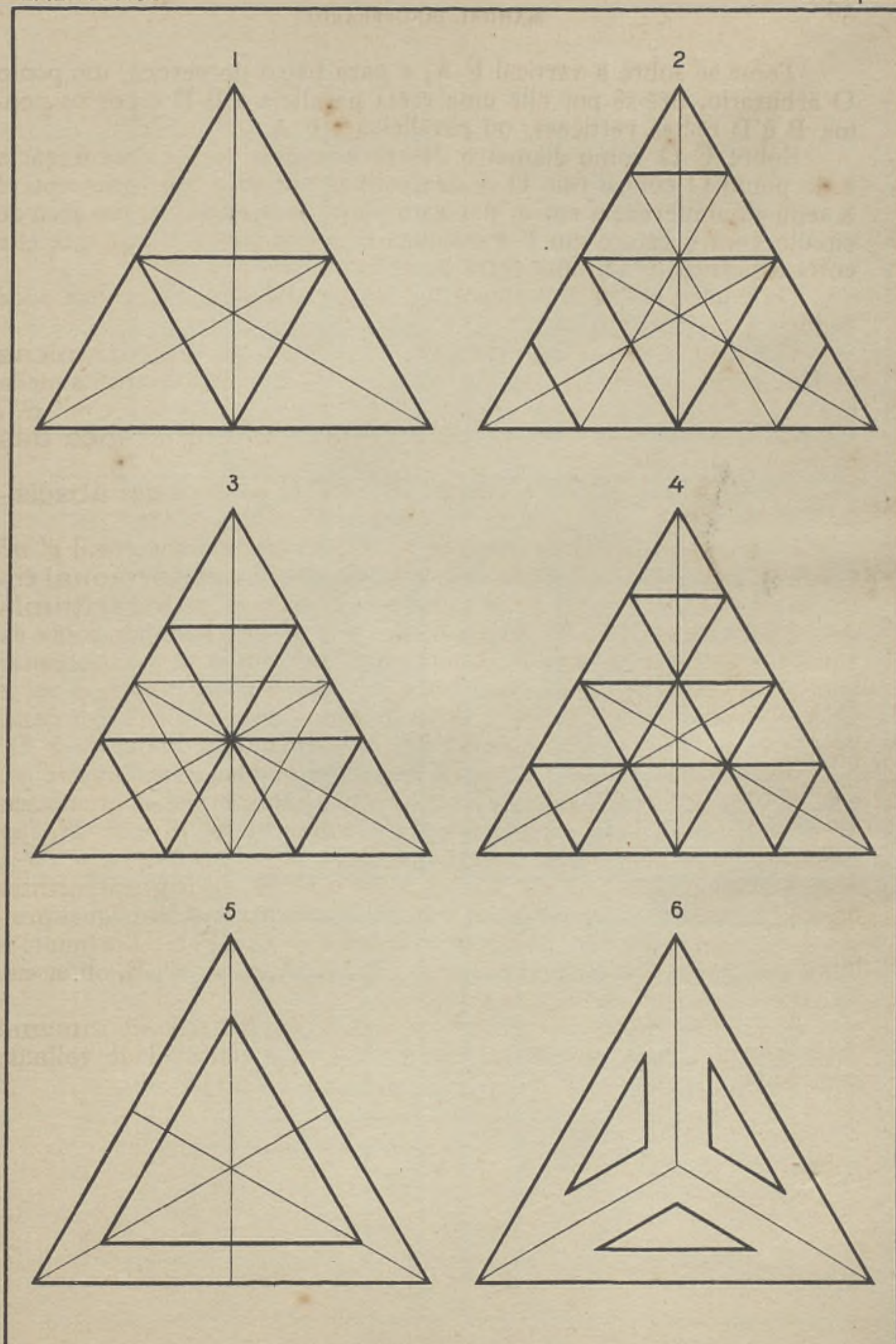
Posto isto, sejam as rectas p''' P''' e F O os eixos das **abscissas** e das **ordenadas** da mesma **logarithmica**.

Dividindo ao meio a distancia p''' O, levantando a vertical p' m' e marcando n'esta uma grandeza, que seja **meia proporcional** entre as ordenadas p''' m''' e O A, acha-se o ponto m' da **logarithmica**, dividindo ao meio as distancias p''' p' e p' O e tomando sobre as verticaes correspondentes as grandezas p'' m'' e p m respectivamente iguaes ás meias proporcionaes entre p''' m''' e p' m' e entre p' m' e O A obteem-se os pontos m'', m da mesma curva auxiliar. Por igual processo se acham os pontos M, M', M'', situados á direita de F O.

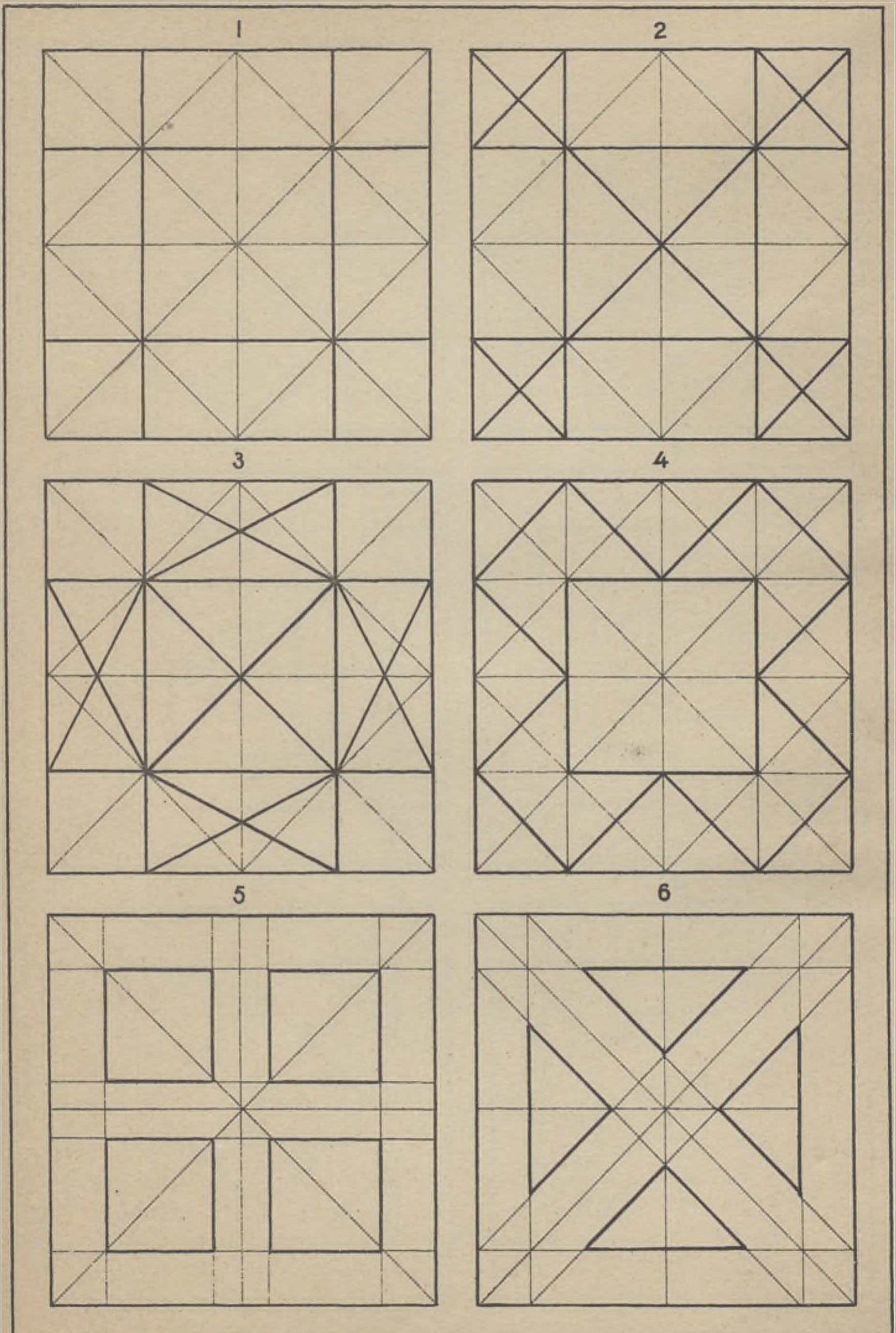
Construida a **logarithmica** escolhem se duas *ordenadas* m'' p'' e M'' P'' igualmente distantes de F O e toma-se sobre ellas grandezas p'' n'' e P'' N'' iguaes entre si e á semi-somma de m'' p'' e M'' P''; os pontos n'' e N'' pertencem á **catenaria**.

A semi-somma das ordenadas p' m' e P' M' da **logarithmica** dá a grandeza das ordenadas p' n' e P' N' da **catenaria**; igual processo se emprega para obter as ordenadas p n e P N. Traçando a linha que passa por os pontos D, N'', N', N, A, n, n', n'', B, obter-se-ha uma curva denominada **catenaria**.

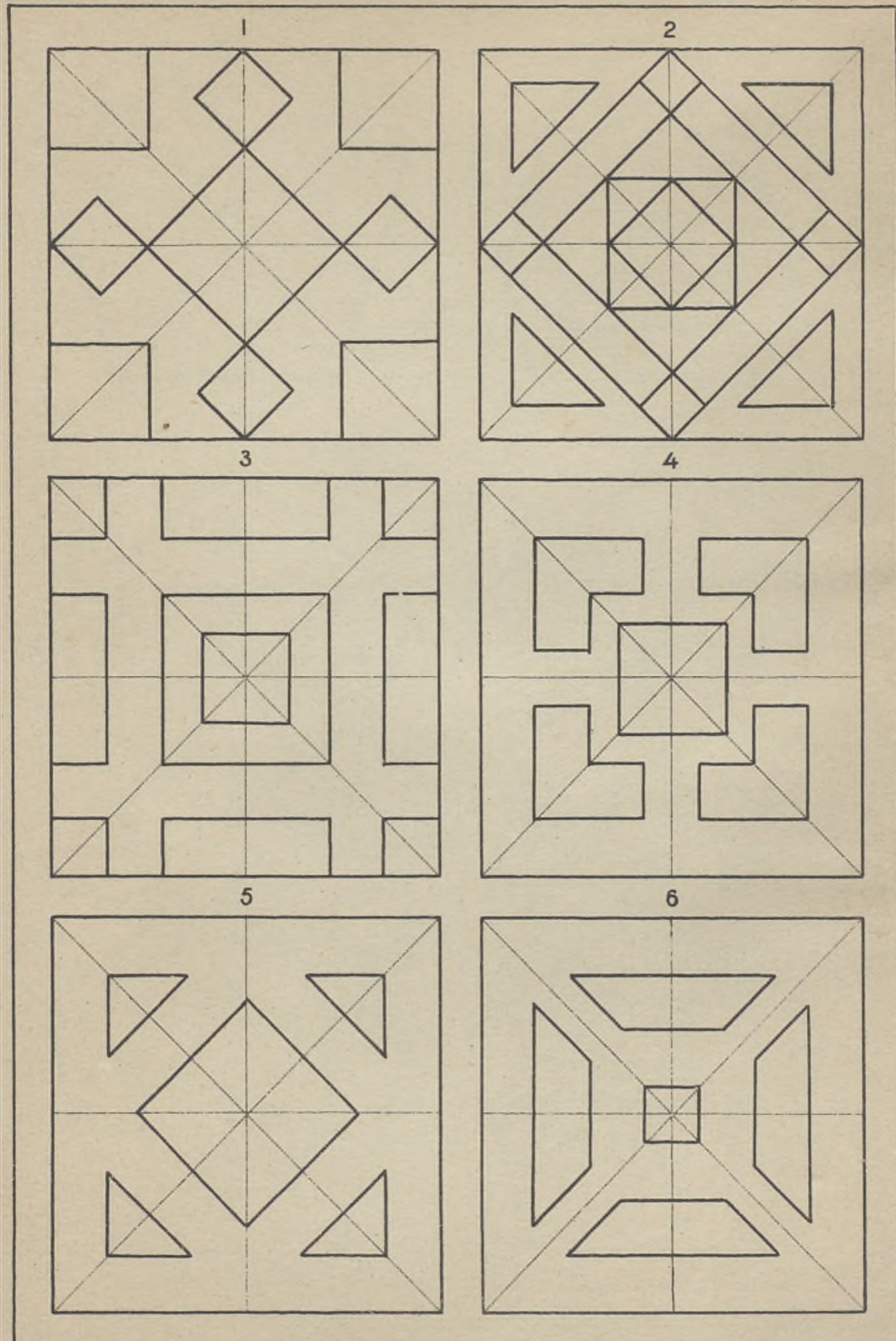
A catenaria recebe algumas vezes a denominação de **curvas das abobadas**, quando se apresenta com a concavidade voltada para baixo.



COMBINAÇÕES DO TRIANGULO

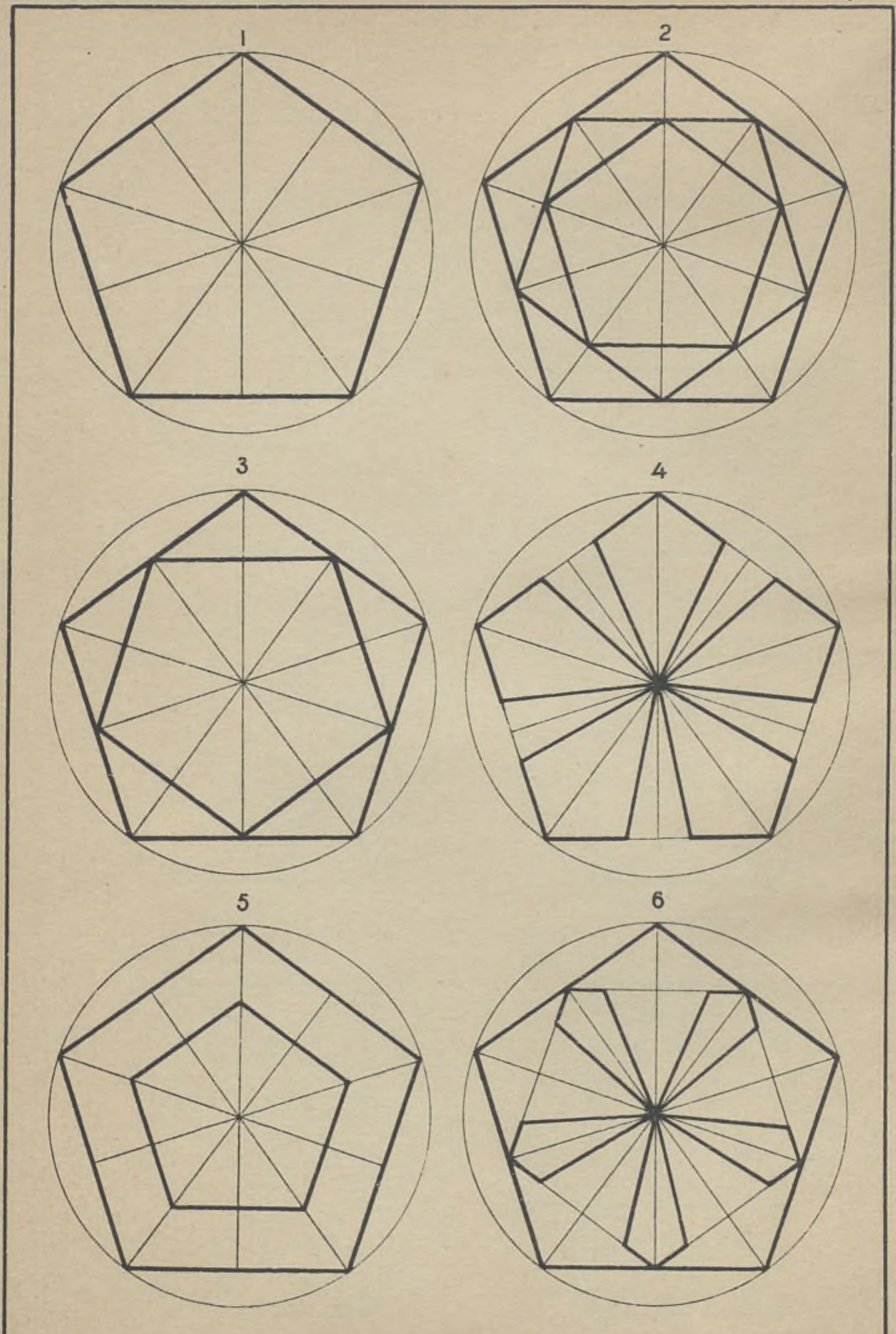


COMBINAÇÕES DO QUADRADO



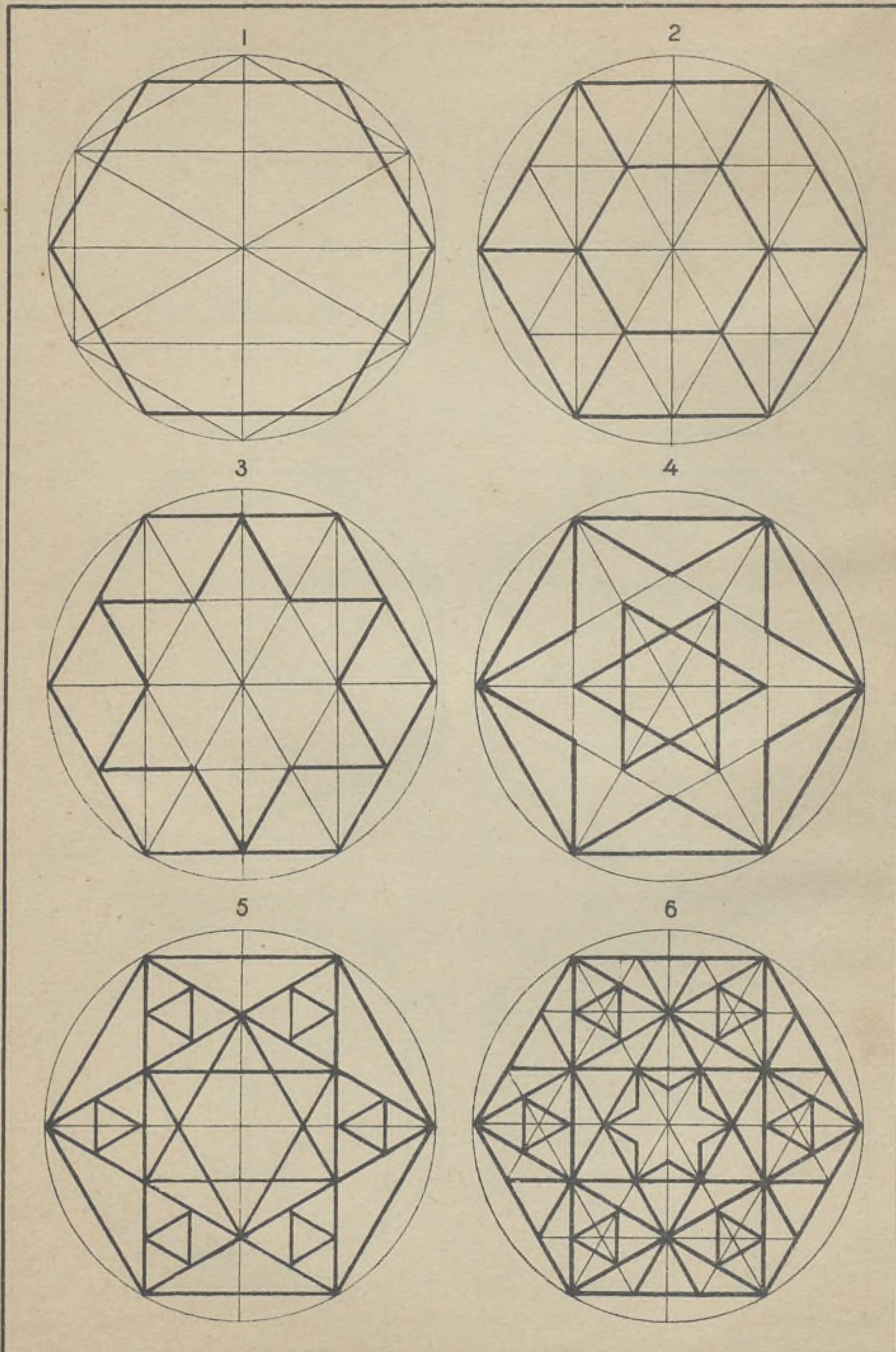
OFF. PHOTOMECHANICA

COMBINAÇÕES DO QUADRADO



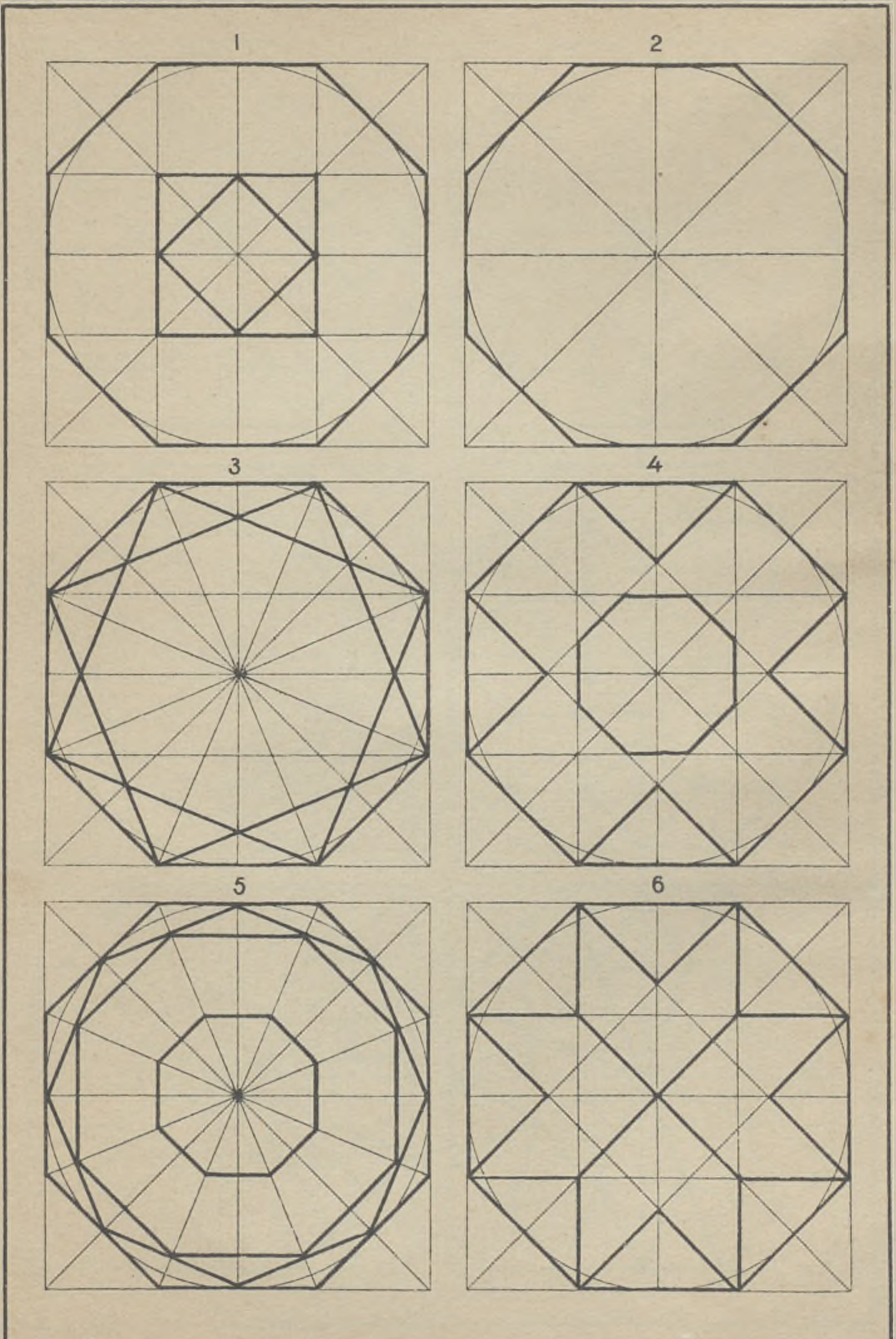
OFF. PHOTOMECHANICA

COMBINAÇÕES DO PENTAGONO



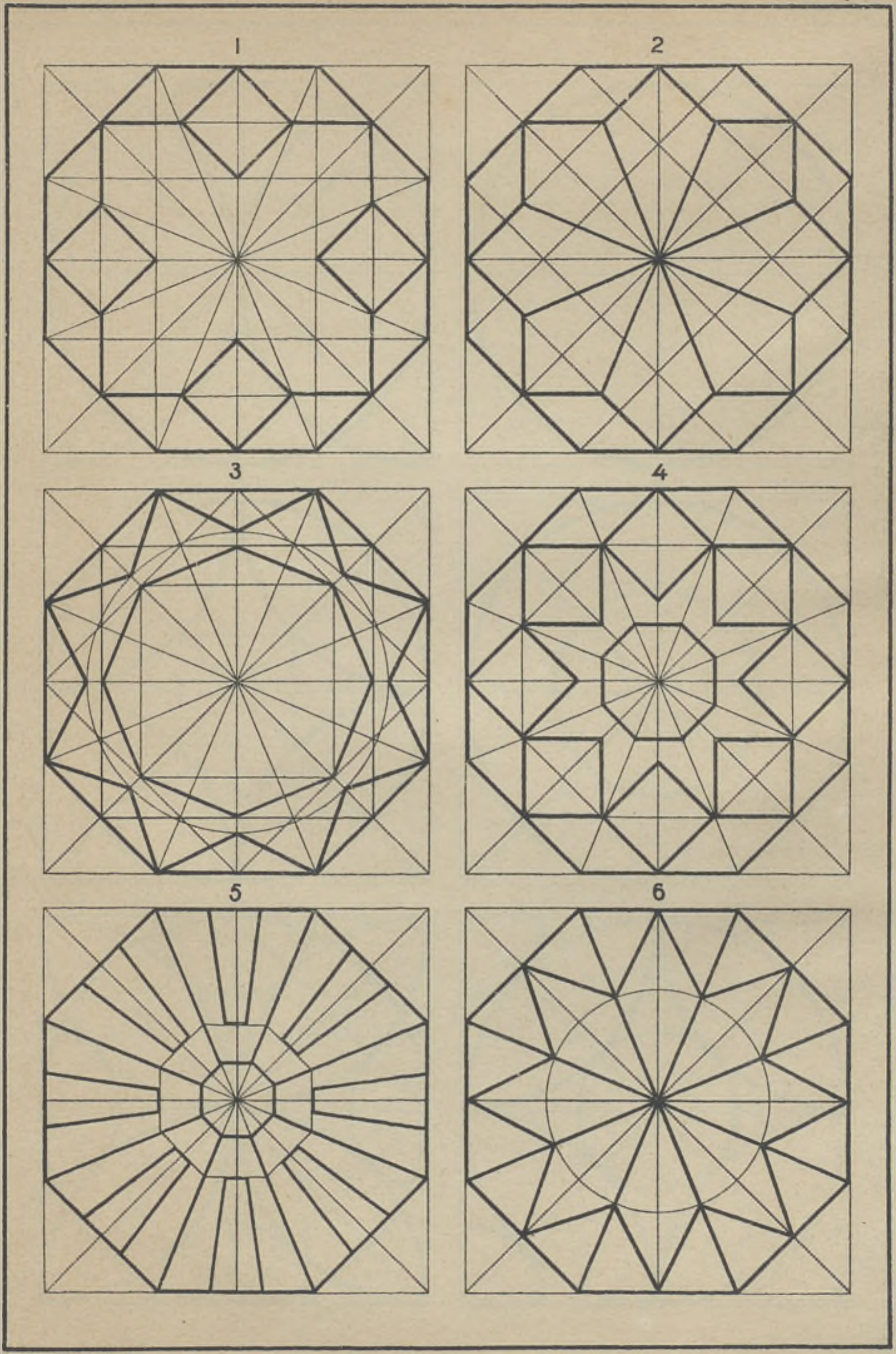
OFF. PHOTOMECHANICA.

COMBINAÇÕES DO HEXAGONO



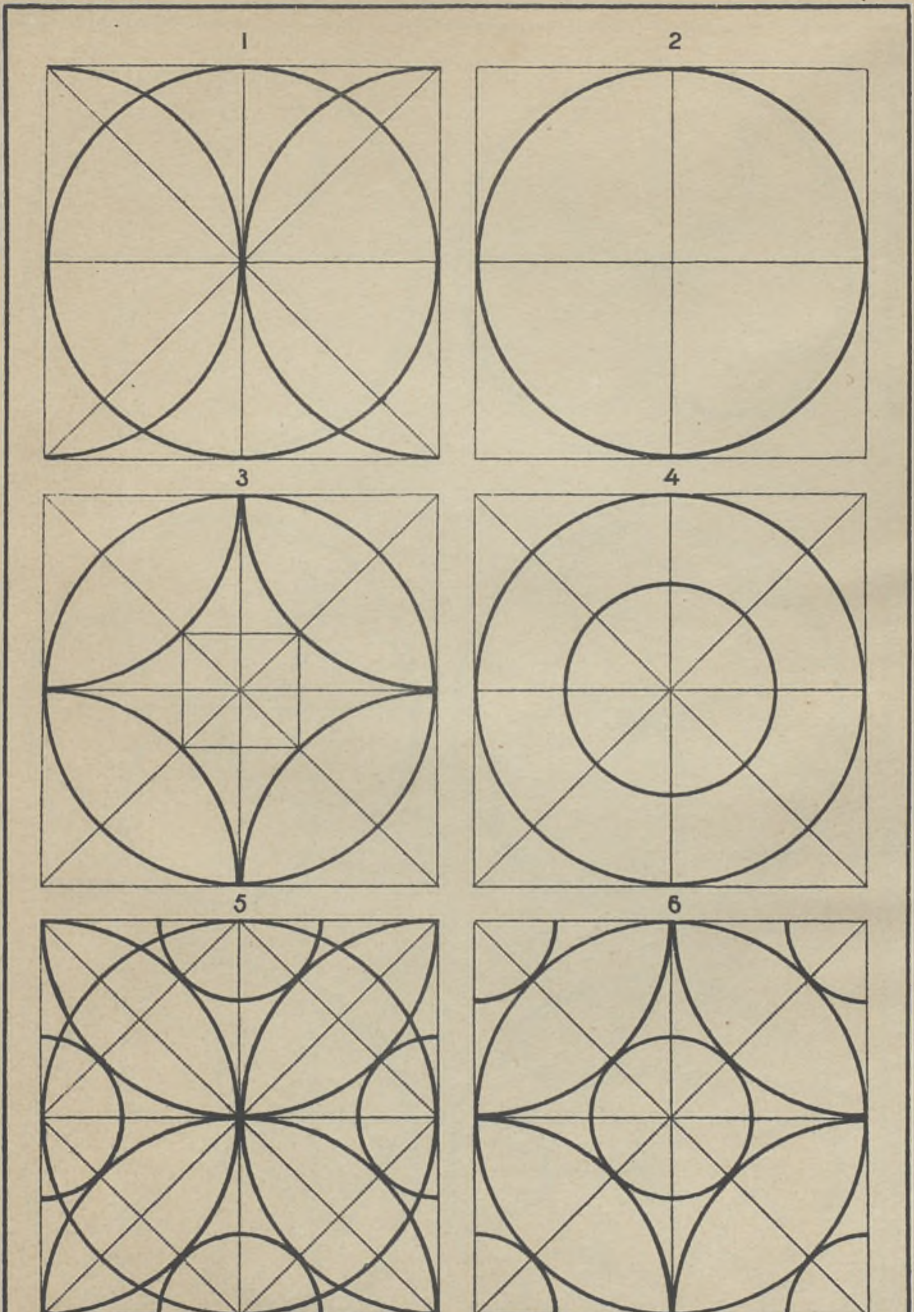
OFF. PHOTOMECHANICA

COMBINAÇÕES DO OCTOGONO



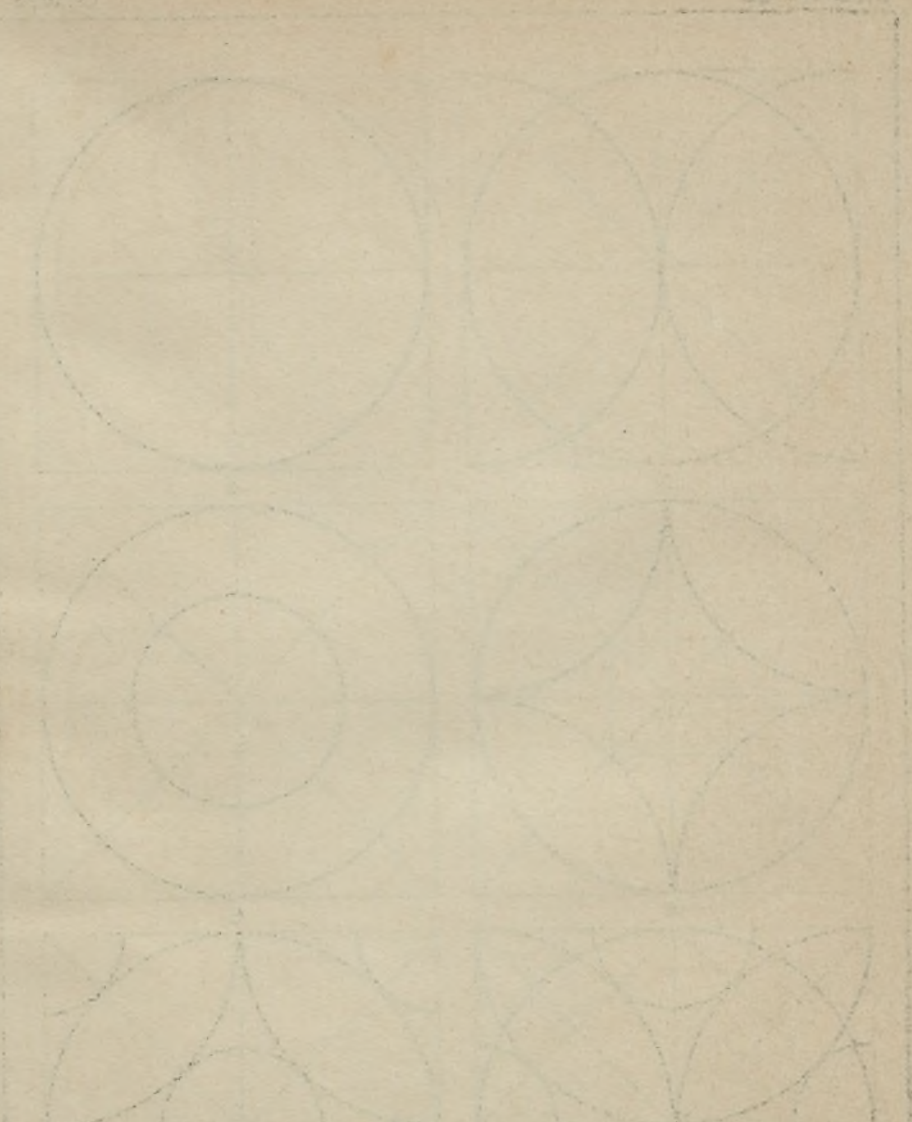
OFF. PHOTOMECHANICA.

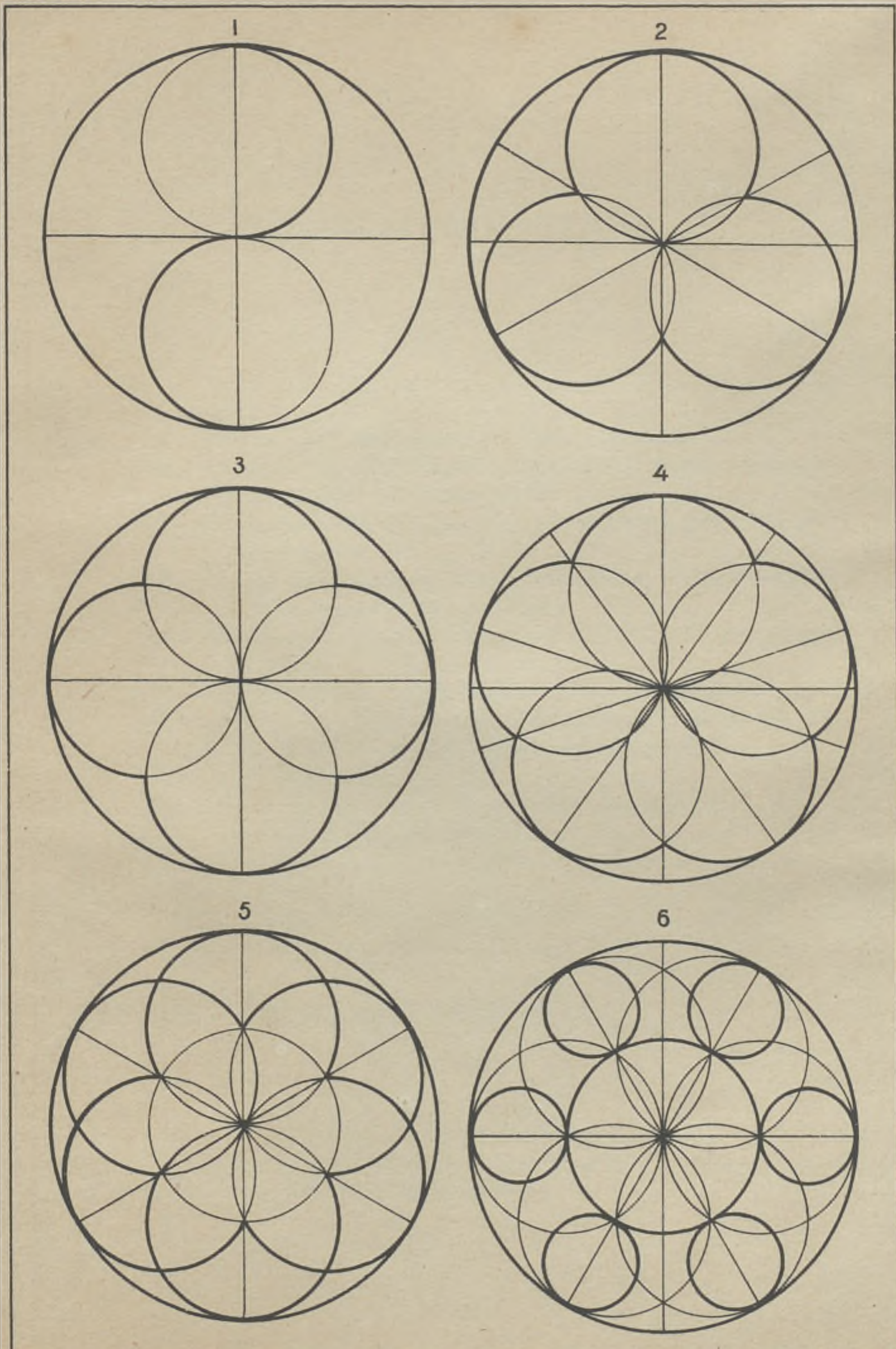
COMBINAÇÕES DO OCTOGONO



OFF. PHOTOMECHANICA.

COMBINAÇÕES DO CIRCULO





OFF. PHOTOMECHANICA.

COMBINAÇÕES DO CIRCULO

INDICE DAS MATERIAS

A collocação das 9 estampas é no fim do volume.

ERRATA

Na pagina 38, no titulo do capitulo VI, onde se lê: *Conferencias tangentes*, etc., deve lêr-se: *Circumferencias tangentes*, etc.

Typ. — Rua Ivens, 45 e 47 — Lisboa