



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
Programa de Pós-Graduação em Física

Estudo da matéria hadrônica magnetizada: o papel dos mésons

Joana Carolina Sodré

Florianópolis, Dezembro de 2023.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
Programa de Pós-Graduação em Física

Estudo da matéria hadrônica magnetizada: o papel dos mésons[†]

Joana Carolina Sodré

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do título de doutora em Física. Orientador: Prof. Sidney dos Santos Avancini, Dr.

Florianópolis, Dezembro de 2023.

[†]Trabalho financiado pelo Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES).

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Sodré, Joana Carolina

Estudo da matéria hadrônica magnetizada: o papel dos mésons / Joana Carolina Sodré ; orientador, Sidney dos Santos Avancini, 2023.

270 p.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Programa de Pós-Graduação em Física, Florianópolis, 2023.

Inclui referências.

1. Física. 2. Modelo Nambu--Jona-Lasinio. 3. Campos Magnéticos Fortes. 4. Método de Ritus. 5. Mésons. I. Avancini, Sidney dos Santos. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Física. III. Título.

Joana Carolina Sodré

Estudo da matéria hadrônica magnetizada: o papel dos mésons

O presente trabalho em nível de doutorado foi avaliado e aprovado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. Celso de Camargo Barros Jr., Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina

Profa. Dyana Cristiane Duarte, Dra.
Universidade Federal de Santa Maria

Prof. Ricardo Luciano Sonogo Farias, Dr.
Universidade Federal de Santa Maria

Prof. Marcus Emmanuel Benghi Pinto, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de doutora.

Coordenação do Programa de Pós-Graduação

Prof. Sidney dos Santos Avancini, Dr.
Orientador

Florianópolis, 2023.

Agradecimentos

Agradeço à todos os meus professores que ajudaram a pavimentar todo caminho para que eu chegasse aqui. Em especial, agradeço aos meus primeiros professores, meus pais, que me incentivaram desde cedo a aprender e a manter a curiosidade. Foi com minha mãe que aprendi a ler (e teoria de grupos também) e com meu pai que aprendi a gostar de ciência. Também agradeço à toda a minha família que sempre me apoiou.

Agradeço à Marli, minha segunda mãe, por todo carinho, acolhimento e preocupação.

Agradeço ao Sidney, meu orientador, pela confiança, paciência e compreensão.

Agradeço aos meus amigos pela torcida e pelas eventuais ajudas.

Agradeço à Karina por me ajudar a me manter firme e focar no que eu preciso.

Agradeço à CAPES pelo financiamento.

Agradeço ao Antônio, que enquanto trabalhava na pós sempre ajudou todos os alunos e professores, e depois que foi trilhar outros caminhos deixou um buraco no Programa.

E finalmente, agradeço ao Rafa, que sempre esteve ao meu lado, sem nunca me deixar desistir. Também por sempre acreditar em mim, mesmo quando nem eu acreditava mais.

Ao tio Vigand Theis, primeiro cientista da minha família. A todos os cientistas que não puderam ser.

Space: the final frontier. These are
the voyages of the starship
Enterprise. Its continuing mission:
to explore strange new worlds, to
seek out new life and new
civilizations, to boldly go where no
one has gone before.

Star Trek: The Next Generation

Resumo

Neste trabalho utilizaremos o modelo Nambu–Jona-Lasinio em sua formulação $SU(3)$, que contém os quarks leves u , d e s ; com uma interação de seis pontos dada pelo determinante de 't Hooft; e sob um campo magnético externo. Desejamos com isso calcular, na aproximação de campo médio, o valor dos condensados dos quarks em função do campo magnético, além de suas massas efetivas. Além disso, pretendemos calcular a massa polo dos mésons que compõem o noneto mesônico pseudoescalar em um meio magnético, o que podemos alcançar ao utilizarmos o método de autofunções de Ritus. Obtivemos resultados numéricos considerando tanto o acoplamento do modelo constante quanto o acoplamento dependente do campo magnético, e então comparamos com os resultados da QCD na rede.

Palavras Chave: Modelo Nambu–Jona-Lasinio, Campos magnéticos fortes, Método de Ritus, Méson.

Abstract

In this work we use the Nambu–Jona-Lasinio model in its $SU(3)$ formulation, which contains the light quarks u , d and s ; with a six-point interaction given by the 't Hooft determinant; and under an external magnetic field. With this we intend to calculate, in the mean field approximation, the value of the quark condensates as a function of the magnetic field, in addition to their effective masses. Furthermore, we intend to calculate the pole mass of the mesons of the pseudoscalar mesonic nonet in a magnetic medium, which we can achieve by using the Ritus eigenfunction method. We obtained numerical results considering the coupling constant given by the usual parametrization of the model and a magnetic-field dependent coupling, and then compared them with the QCD results on the lattice.

Keywords: Nambu–Jona-Lasinio Model, Strong Magnetic Fields, Ritus Method, Meson.

Sumário

Introdução	9
1 Conceitos Básicos	14
1.1 Simetrias e quebra de simetria	14
1.1.1 Simetrias	14
1.1.2 Quebra de Simetria	16
1.2 Cromodinâmica Quântica	19
1.2.1 Quarks	19
1.2.2 Hádrons	22
1.2.3 Carga de cor	27
1.2.4 Teoria de Yang-Mills	29
1.2.5 Acoplamento	29
1.2.6 Screening e Antiscreening	32
1.2.7 Liberdade Assintótica	34
1.2.8 Confinamento	35
1.2.9 Simetrias da QCD	36
1.2.10 Vácuo da QCD	37
1.2.11 Condensado de Quarks	38
1.2.12 Massa dos Quarks	40
1.2.13 Evidências da existência dos quarks	41
1.3 Diagrama de fases da QCD	45
1.4 Teorias Efetivas e Modelos Efetivos	48
1.4.1 Teorias fundamentais	49
1.4.2 Modelos Efetivos	49
1.4.3 Teoria Efetiva de Campos	51
1.4.4 Teoria de Perturbação Quiral	52
1.4.5 Relações entre teoria, modelo efetivo e EFT	53
2 O Modelo Nambu–Jona-Lasinio	54
2.1 Simetrias da QCD e o NJL	55

2.2	Problemas do modelo	55
2.2.1	Ausência de confinamento	55
2.2.2	Infinitos	56
2.2.3	Equação de Gap	56
2.3	Lagrangiana do modelo	57
2.3.1	Simetrias	58
3	Modelo Nambu–Jona-Lasinio no SU(3)	61
3.1	O Modelo Nambu–Jona-Lasinio no SU(3)	61
3.2	Densidade de Lagrangiana	62
3.2.1	Determinante de 't Hooft	63
3.3	Bosonização pela integral de caminho	65
3.3.1	Integração da parte fermiônica	67
3.3.2	Aproximação de Fase Estacionária (SPA)	68
3.4	Aproximação de campo médio	69
3.4.1	Inversa do Propagador	71
3.4.2	Expansão da ação bosonizada	71
3.4.3	Condições da SPA	73
3.5	Equação de Gap	74
3.6	Condensado de Quarks	75
3.7	Ação bosonizada quadrática	76
3.7.1	Primeiro termo	76
3.7.2	Segundo termo	78
3.7.3	Matriz de Massa	80
4	Polarizadores	84
4.1	Propagador na forma de Schwinger	84
4.2	Condensado de Quarks	85
4.2.1	Integração em \mathbf{x}	85
4.2.2	Integração em \mathbf{p}	86
4.3	Polarizador para $f = f'$ (<i>Mésons Neutros</i>)	87
4.3.1	Integração em \mathbf{p}	89
4.4	Polarizador dos káons neutros	91
4.5	Polarizador dos mésons carregados	93
4.5.1	Base de Ritus	94
4.5.2	Integração em \mathbf{p}_\perp e \mathbf{p}_\parallel	97
4.5.3	Mudança de variáveis em τ e τ'	97
5	Regularização das Integrais	99
5.1	MFIR	99

5.2	Condensado de Quarks	100
5.3	Função de polarização para $f \neq f'$	101
5.3.1	Regularização da função de polarização	102
5.4	Função de polarização para $f = f'$	103
5.4.1	Parte real e imaginária da função de polarização	106
6	Resultados Numéricos	110
6.1	QCD na Rede	110
6.1.1	A rede	111
6.2	Catálise Magnética e Catálise Magnética Inversa	111
6.3	Parametrização	114
6.4	Massa Efetiva dos Quarks	115
6.5	Condensados	116
6.6	Massa polo dos mésons	118
6.6.1	Mésons Neutros	120
6.6.2	Mésons carregados	122
	Conclusão	124
A	Definições e Convenções	126
A.1	Métrica de Minkowski	126
A.2	Métrica Euclidiana	128
A.3	Matrizes de Pauli e de Dirac	128
B	Matrizes de Gell-Mann	131
B.1	Constantes de estrutura	133
C	Cálculos do Capítulo 3	134
C.1	Prova da expressão (3.10)	134
C.2	Condições da SPA	141
C.2.1	Para s_α	141
C.2.2	Para p_α	142
C.3	Aproximação de Campo Médio e Flutuações da Inversa do Propagador Efetivo	143
C.3.1	Parte de campo médio	143
C.3.2	Parte de flutuações	144
C.4	Parte de Campo Médio de $\mathcal{L}_r^{\text{MF}}$	146
C.5	Mudança de Base	147
C.5.1	Mudança de base da ação bosonizada de campo médio	152
C.5.2	Mudança de base da condição (3.47a) da SPA	152
C.6	Derivadas da equação de gap	156

C.7	Setor escalar de S_{quad}^1	158
C.8	Setor pseudoescalar de S_{quad}^1	159
C.8.1	Mésons carregados e Káons neutros	161
C.8.2	Termo com acoplamento (Píon neutro/ η/η')	166
C.9	Passagem de (3.69) para (3.70)	171
C.10	Segundo termo da parte pseudoescalar da ação bosonizada quadrática	172
C.10.1	Mésons carregados e káons neutros	172
C.10.2	Mésons neutros	179
D	Cálculos do Capítulo 4	189
D.1	Condensado	189
D.1.1	Cálculo do traço no condensado	189
D.1.2	Integrais em \mathbf{p} do condensado	190
D.2	Polarizador para $f = f'$	192
D.2.1	Integração em $\mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{p}'$ e \mathbf{q}'	192
D.2.2	Cálculo do traço	193
D.2.3	Integração em \mathbf{p}_{\parallel}	198
D.2.4	Integração em \mathbf{p}_{\perp}	200
D.2.5	Mudança de variáveis de τ e τ'	202
D.2.6	Mudança de variáveis em τ e τ' - Organização da integral	204
D.3	Polarizador dos káons neutros	205
D.3.1	Fase de Schwinger	205
D.3.2	Integração em $\mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{p}'$ e \mathbf{q}'	206
D.3.3	Cálculo do Traço	207
D.3.4	Integração em \mathbf{p}_{\parallel}	211
D.3.5	Integração em \mathbf{p}_{\perp}	215
D.3.6	Mudança de variáveis de τ e τ'	219
D.3.7	Mudança de variáveis em τ e τ' - Organização da Integral	220
D.4	Polarizador para $f \neq f'$	223
D.4.1	Cálculo do Traço	223
D.4.2	Base de Ritus	227
D.4.3	Mudança de variáveis em \mathbf{p}_{\perp} e \mathbf{p}'_{\perp}	228
D.4.4	Mudança de variáveis em τ e τ'	228
E	Cálculos do Capítulo 5	230
E.1	Integral (5.4)	230
E.1.1	Termo finito da integral	230
E.1.2	Termo divergente da integral	233
E.2	Expansão da Integral (5.9) para $B = 0$	237
E.3	Passagem (5.11)-(5.13)	238

E.3.1	Integral \mathbf{I}'_2	240
E.3.2	Integral \mathbf{I}'_{1f}	242
E.3.3	Integral $\mathbf{I}'_{1f'}$	243
E.4	Integral $\mathbf{I}_{2f}^{\text{vac}}$	243
E.4.1	Parte Real	244
E.4.2	Parte Imaginária	245
E.5	Simplificação dos termos de (5.20)	245
E.5.1	Primeiro termo	245
E.5.2	Segundo termo	246
E.6	Prova da expressão (5.25)	247
E.7	Polos da Expressão (5.33)	250
E.7.1	Integral \mathbf{I}_a	251
E.7.2	Integral \mathbf{I}_b	253
	Referências	258

Lista de Figuras

1	Colisão não central	11
1.1	Potencial do tipo “chapéu mexicano”	17
1.2	Quebra espontânea da simetria devido à uma transição de fase.	18
1.3	Modelo Padrão	22
1.4	Núcleons	23
1.5	Híperons	23
1.6	Híperons Cascata	23
1.7	Octeto Bariônico	24
1.8	Decuplete Bariônico	24
1.9	Píons carregados	25
1.10	Káons	26
1.11	Noneto Mesônico	26
1.12	Mésons D	27
1.13	Mésons B	27
1.14	Diagramas de Feynman para a blindagem e a antibrindagem	30
1.15	Blindagem num meio dielétrico	32
1.16	Variação da carga efetiva e_{eff} com momento e a distância para o efeito de blindagem.	33
1.17	Blindagem na QCD	33
1.18	Variação da carga efetiva de cor g_{eff} com momento e a distância para o efeito de antibrindagem.	34
1.19	Aniquilação elétron-pósitron	43
1.20	Seção de choque para decaimentos $e^-e^+ \rightarrow$ hádrons	44
1.21	Primeiro diagrama de fases da QCD	45
1.22	Diagrama de fases da QCD	46
1.23	Diagramas de fase da QCD	48
1.24	“Torre de EFTs”	51
3.1	Interação de seis pontos	64
3.2	Interação efetiva de quatro pontos	70

3.3	Matriz de Massa	80
6.1	Média do condensado de quarks em função do campo magnético e da temperatura	112
6.2	Massa efetiva dos quarks em função do campo $e\mathbf{B}$	115
6.3	Massa constituinte dos quarks - Resultado da LQCD	116
6.4	Média e diferença do condensado de quarks em função do campo $e\mathbf{B}$	117
6.5	Média do condensado de quarks	118
6.6	Massa polo dos mésons neutros e estado de mais baixa energia dos mésons carregados em função do campo $e\mathbf{B}$	119
6.7	Massa polo e comprimento de decaimento do méson η'	120
6.8	Massa polo dos mésons neutros em função do campo magnético $e\mathbf{B}$	121
6.9	Massa polo do pión neutro	122
6.10	Massa polo e estado de mais baixa energia dos mésons carregados em função do campo $e\mathbf{B}$	123
E.1	Contorno de integração Γ	235
E.2	Ramo principal da função logaritmo	254

Lista de Tabelas

1.1	Propriedades dos Quarks	21
1.2	Simetrias da QCD	37
B.1	Constantes de Estrutura Simétricas	133
B.2	Constantes de Estrutura Antissimétricas	133

Introdução

O estudo da matéria na presença de campos magnéticos fortes tem tido destaque nos últimos anos na física de altas energias. Isso porque tais campos magnéticos podem ser encontrados em fenômenos de grande interesse para entendermos o universo. Estes campos magnéticos possivelmente são gerados em colisões não centrais de íons pesados ultra-relativísticos realizadas em colisores como o LHC (*Large Hadron Collider*) [1] e o RHIC (*Relativistic Heavy Ion Collider*) [2], onde se pretende testar o diagrama de fases da Cromodinâmica Quântica (QCD) no limite de altas temperaturas e baixas densidades. Acredita-se que nestes experimentos campos magnéticos da escala de $B = 10^{19}\text{G}$ são gerados, provavelmente os mais intensos do universo. Campos magnéticos fortes também têm um papel importante no estudo dos magnetares, objetos compactos que compõem uma classe de estrelas de nêutrons com campos magnéticos fortes e frequência de rotação relativamente baixa [3]. A intensidade dos campos nestas estrelas depende da densidade, sendo que na superfície podem atingir entre 10^{14}G e 10^{16}G [4]. Finalmente, o fato de que no universo primordial campos magnéticos foram gerados é consenso, apesar de vários mecanismos para isto serem propostos [5]. Uma forte evidência disso são as atuais observações de campos eletromagnéticos fortes intergaláticos [6].

O Modelo Padrão é a teoria que se propõe a explicar as partículas elementares que formam toda a matéria do universo e como elas interagem entre si. Segundo esta teoria, as partículas que compõem a matéria são os quarks e léptons, que interagem através dos bósons de calibre e cuja massa é gerada pelo mecanismo de Higgs. A estrutura matemática do modelo padrão tem como base as teorias de calibre [7], como a Eletrodinâmica Quântica (QED) e a Cromodinâmica Quântica (QCD). Os quarks compõem a matéria hadrônica, que interage através da força forte pela troca de glúons, que são os bósons de calibre desta teoria, a QCD. Neste trabalho, estamos interessados em estudar fenômenos relacionados à estas últimas partículas.

O confinamento e a liberdade assintótica são duas das principais propriedades da QCD. Enquanto o confinamento é caracterizado pelo fato de que não existem quarks livres na natureza, já que partículas com carga de cor sempre estão agrupadas em hádrons com carga de cor nula; o fato de que a intensidade da interação entre as partículas que

compõem os hádrons fica mais fraca conforme a distância diminui é devido à liberdade assintótica. Estas propriedades são explicadas de uma forma um pouco mais detalhada no Capítulo 1, ainda que de forma apenas introdutória. Uma consequência destas duas propriedades aparentemente contraditórias é o fato da QCD apresentar dois regimes de energia distintos, um perturbativo, de altas energias; e um não perturbativo, para baixas energias, cujo limite é caracterizado pela massa dos núcleons, $m_n \sim 1 \text{ GeV}$.

Enquanto o regime de altas energias pode ser resolvido com métodos perturbativos a partir da teoria da QCD completa, o mesmo não pode ser feito quando estudamos a QCD em baixas energias, já que a constante de acoplamento fica muito alta. Por isso, métodos alternativos são necessários para o estudo da QCD em baixas energias, pois, apesar de termos uma densidade de lagrangiana que contem toda a dinâmica da teoria, não é possível se extrair informações úteis dos processos físicos a partir desta lagrangiana [8]. Alguns destes métodos são o cálculo computacional através da QCD na rede (LQCD) ou os modelos efetivos.

No Capítulo 6 veremos que a LQCD é o único método não perturbativo que resolve com métodos computacionais as equações de movimento da QCD a partir de primeiros princípios [8]. Entretanto, devido ao problema do sinal, não é possível se realizar cálculos da LQCD para sistemas com potencial químico finito [9]. Neste caso, modelos e teorias efetivas são mais úteis.

Como detalhado no Capítulo 1, um modelo efetivo descreve as principais propriedades de um sistema no regime de energia desejado, mas de forma mais simples que a teoria completa, no nosso caso, a QCD. Como exemplos de modelos efetivos, podemos citar o modelo de Skyrme [10,11], o modelo Sigma [12], o *MIT bag model* [13] e o Modelo Nambu–Jona-Lasinio [14,15]. Além destes, temos teorias efetivas, como a teoria de perturbação quiral [16].

Utilizaremos neste trabalho o modelo Nambu–Jona-Lasinio (NJL) em sua formulação $SU(3)$, uma versão estendida do $SU(2)$ que contém, além dos quarks u e d , o quark s . Este modelo foi proposto originalmente para descrever núcleons interagindo através de píons como uma analogia à teoria BCS da supercondutividade, mas foi mais tarde reformulado para descrever a matéria de quarks. A principal vantagem deste modelo é o fato dele reproduzir algumas das principais simetrias da QCD de uma forma mais simples, além da quebra das mesmas. Uma das características do modelo NJL é o fato dele ser não renormalizável, o que requer a escolha de um esquema de regularização.

Um esquema de regularização é uma forma de remediar infinitos que aparecem em teorias e modelos não renormalizáveis ao se determinar qual a escala desta teoria. Existem vários esquemas de regularização, como o cutoff 3D e 4D, regularização de Pauli-Villars, regularização dimensional e regularização de tempo próprio; e a escolha do mais apro-

priado se baseia em critérios físicos, e não matemáticos. Sabe-se que a escolha de um esquema de regularização impróprio pode resultar no aparecimento de resultados não físicos, como destacado em [17]. Assim, o esquema escolhido neste trabalho é o MFIR (*Magnetic Field Independent Regularization*) [18,19], em que as contribuições magnéticas são separadas das contribuições no vácuo do sistema estudado, para então o modelo ser regularizado com um cutoff 3D. Embora a presença de um campo magnético B seja a principal motivadora da escolha do esquema de regularização neste trabalho, resultados não físicos também podem aparecer em outros casos, quando $B = 0$, como destacado por [8].

Como já mencionamos, as colisões não centrais de íons pesados são um dos fenômenos onde há a influência de campos magnéticos fortes. Em colisões de íons pesados, dois feixes de núcleos pesados, geralmente de chumbo ou ouro, são acelerados a velocidades ultra-relativísticas e seus feixes são direcionados um ao outro. Quando alguns dos núcleos nestes feixes se chocam, uma *fireball* (bola de fogo) quente e densa é produzida, onde quarks e glúons são efetivamente livres, o que chamamos da fase de Plasma de Quarks e Glúons (*Quark-Gluon Plasma - QGP*). Esta *fireball* então começa a expandir devido à sua pressão, e, conseqüentemente, começa a esfriar. Assim que esta temperatura atinge um certo valor, a temperatura crítica, a matéria começa a se hadronizar, ou seja, os quarks e glúons começam a se combinar para formar hádrons. Esta matéria hadrônica continua a expandir e esfriar, e reações inelásticas entre os mésons e bárions ocorrem nesta etapa da colisão. Quando tais colisões cessam ocorre o fenômeno chamado *chemical freeze-out*, onde a composição “química” do sistema é fixada. No momento em que as colisões elásticas entre os mésons e bárions formados param, o espectro dos momentos dos hádrons é fixado, fenômeno denominado *thermal or kinetic freeze-out*. As partículas resultantes deste processo são medidas por detectores posicionados ao redor do ponto de colisão.

Campos magnéticos muito fortes e dependentes do tempo possivelmente são criados quando essas colisões são não centrais, ilustradas na Figura 1. Acredita-se que isso ocorre pois ao considerarmos o referencial do centro de massa os dois núcleos que estão colidindo podem representar correntes elétricas em direções opostas, o que, de acordo com as equações de Maxwell, produziria um campo magnético B na direção perpendicular ao campo de reação [4]. Tais campos dependem da energia dos íons, do parâmetro de impacto b , da posição e do tempo. Nestes experimentos, se atingem campos da ordem

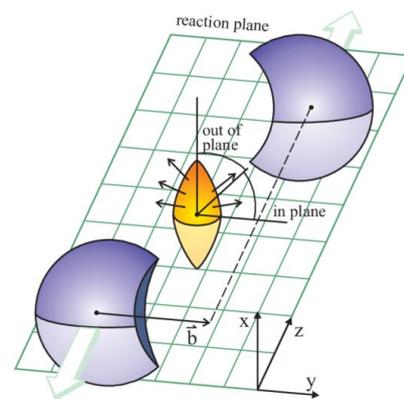


Figura 1: Colisão não central (Figura retirada de [20]).

de 10^{19}G ; ou $|qB| \sim 6m_\pi^2$, em que q é a carga elétrica do elétron e m_π é a massa do píon [4]. Como neste processo altas temperaturas e densidades são alcançadas, espera-se que uma fase localmente desconfiada ocorra, que é hadronizada ao esfriar. O modelo NJL não prevê o confinamento, mas pode ajudar a compreender este processo ao gerar algum entendimento sobre as relações da simetria quiral com a temperatura e a densidade [8].

Neste trabalho desejamos mostrar a influência que campos magnéticos externos têm na massa polo dos mésons do octeto mesônico pseudoescalar 0^- , ou seja, os píons, os káons e o méson η ; além da massa do méson η' . Como estamos estudando fenômenos em um regime de baixas energias da QCD, não é possível efetuar os cálculos utilizando métodos perturbativos, e um método alternativo deve ser escolhido. Aqui utilizaremos um modelo efetivo, o modelo Nambu–Jona-Lasinio na sua formulação $SU(3)$. Para incluir os efeitos de anomalia quiral, o termo de 't Hooft–Maskawa é introduzido e uma interação de seis pontos aparece na lagrangiana do modelo. Este termo é fundamental para que o acoplamento entre o píon neutro e os mésons η e η' seja evidenciado. Para encontrarmos a massa polo, precisamos encontrar a função de polarização para cada méson. Como utilizaremos os propagadores na forma de Schwinger [5] [21], o propagador dos mésons carregados apresenta fases de Schwinger, e é necessária uma forma de lidar com estas e diagonalizar os propagadores. Isto é realizado através do método de Ritus, onde o propagador é reescrito numa base em que é diagonal. Finalmente, é necessária a escolha de um esquema de regularização, que no nosso caso será o MFIR.

No Capítulo 1 introduziremos alguns conceitos importantes para o desenvolvimento do trabalho. Uma breve introdução sobre simetria e quebra de simetria é dada, assim como uma explicação qualitativa de algumas propriedades da QCD. Além disso, um breve panorama histórico desta teoria é traçado e alguns aspectos fundamentais do diagrama de fases da QCD são mostrados. Finalmente, neste capítulo, faremos uma curta discussão sobre as relações entre teorias fundamentais, modelos efetivos e teorias efetivas, mas como este assunto é extenso e fora do escopo do trabalho, outras referências serão indicadas.

O Capítulo 2 dedica-se a explicar a história do Modelo NJL e a expor algumas de suas propriedades no $SU(2)$ de maneira sucinta, já que no Capítulo 3 o assunto é aprofundado e estendido para o $SU(3)$. No Capítulo 3, além de introduzirmos o modelo NJL na sua formulação $SU(3)$, realizaremos a bosonização da ação efetiva do mesmo, processo fundamental para que as propriedades dos mésons que pretendemos estudar sejam explicitadas. Também realizaremos a aproximação de campo médio, para assim encontrar a equação de Gap e o condensado de quarks para o modelo. Por último, o cálculo é estendido para a próxima ordem além do campo médio, onde os polarizadores dos mésons aparecem, necessários para encontrarmos as massas polo dos mesmos.

Estes polarizadores são reescritos no formalismo de Schwinger no Capítulo 4, onde também são integrados algebricamente até onde é possível. Neste capítulo também reescrevemos os polarizadores dos mésons carregados utilizando a base de Ritus. Integrais divergentes são encontradas no Capítulo 4, e o Capítulo 5 dedica-se a regularizar estas integrais através do MFIR. Finalmente, o Capítulo 6 dedica-se a demonstrar os resultados numéricos obtidos a partir das expressões obtidas nos capítulos anteriores.

Capítulo 1

Conceitos Básicos

1.1 Simetrias e quebra de simetria

1.1.1 Simetrias

As simetrias têm um papel fundamental na física de altas energias, e é nessa área em que suas consequências são mais evidentes [22]. Da mesma forma, quando estas simetrias são quebradas e a forma como isso ocorre é e sempre foi um ponto central no estudo de partículas elementares.

Princípio de Simetria Global

Na mecânica quântica, os observáveis não dependem da fase da função de onda complexa que descreve o estado do sistema. Então a fase da função de onda pode ser rotacionada por uma quantidade que não depende do tempo e do espaço sem afetar as consequências físicas da teoria. Assim, a escolha da fase é feita por convenção [23]. Uma simetria global pode ser utilizada para classificar os estados das partículas de acordo com algum número quântico [24].

Considerando a densidade de lagrangiana¹

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi^*) - m^2 \phi^* \phi, \quad (1.1)$$

em que ϕ são campos complexos clássicos e m é um parâmetro, podemos mostrar que ela é invariante sob a transformação de simetria global

¹Por simplicidade, chamaremos a densidade de lagrangiana apenas de lagrangiana. Estas duas podem ser diferenciadas pelo fato de que a última sempre será denotada por um \mathcal{L} caligráfico.

$$\phi \rightarrow \exp(-iQ\Lambda)\phi, \quad (1.2)$$

onde Q é a carga conservada e Λ é o parâmetro da transformação de simetria. Quando Λ é constante no tempo e no espaço, a simetria é global.

Simetria Local

Em simetrias locais, a rotação da fase da função de onda é escolhida de forma independente em cada ponto do espaço-tempo e então ela depende do tempo e da posição [23]. Considerando a transformação introduzida anteriormente, em uma simetria local o parâmetro Λ dependeria do tempo e do espaço, ou seja, teríamos $\Lambda(x^\mu)$. Um problema que surge dessa formulação é que a lagrangiana (1.1) não é mais invariante quando a transformação é local. Uma forma de resolver isso é pela introdução de um campo extra, o campo de calibre A_μ . Assim, a lagrangiana deve ser reescrita como

$$\mathcal{L} = (D_\mu\phi)(D^\mu\phi^*) - m^2\phi^*\phi, \quad (1.3)$$

em que D_μ é a derivada covariante dada por

$$D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu, \quad (1.4)$$

e e é a carga do campo ϕ [25]. Com isso, a lagrangiana (1.3) é invariante sob a transformação

$$\begin{aligned} \phi &\rightarrow \exp[-iQ\Lambda(x^\mu)]\phi, \\ A_\mu &\rightarrow A_\mu + \frac{1}{Q}\partial_\mu\Lambda, \end{aligned} \quad (1.5)$$

que é chamada de transformação de calibre [22].

Teoria de Calibre Teorias de calibre dão a fundamentação teórica para as quatro forças fundamentais da natureza. Estas teorias são baseadas nas simetrias de calibre, um tipo particular de simetria que se difere das outras em dois pontos [26]:

1. Simetrias de calibre são simetrias locais;
2. Uma transformação de calibre deixa o estado físico invariante.

O exemplo mais simples de uma teoria de calibre é o eletromagnetismo [23], cujo grupo de simetria é o $U(1)$.

Teorias de calibre podem ser abelianas ou não abelianas. Em uma teoria abeliana, os campos de calibre são neutros, ou seja, não carregam a carga relacionada à teoria, e por isso só interagem entre si através dos campos de matéria. Já em uma teoria não abeliana, os campos de calibre carregam carga, assim, eles interagem entre si pela troca de outros campos de calibre [27]. Matematicamente, uma teoria não abeliana é gerada por simetrias descritas por uma álgebra não comutativa [28].

1.1.2 Quebra de Simetria

Tão importante quanto o conceito de simetria é o conceito de quebra da mesma, já que este processo é responsável por vários fenômenos físicos de bastante interesse, como o mecanismo de Higgs, transições de fase, entre outros. A simetria de um sistema pode ser quebrada de duas formas:

- **Quebra Explícita de Simetria:** A lagrangiana não tem uma simetria exata.
- **Quebra Espontânea de Simetria:** A lagrangiana é invariante sob a simetria, mas seu estado fundamental não é. Em outras palavras, “o sistema quebra a simetria sozinho” [29].

Quebra Espontânea de Simetria

Como já falamos, quando há quebra espontânea de simetria, o vácuo da teoria não é invariante sob a simetria. As consequências disso são muitas, dependendo do sistema estudado. Por exemplo, a quebra de simetria em ferromagnetos é responsável pela magnetização dos mesmos quando o sistema atinge uma temperatura menor que a temperatura de Curie. Usualmente a quebra espontânea de simetria está associada à uma transição de fase [30].

Simetria Global Contínua Como já foi mencionado, quando uma simetria global contínua é quebrada espontaneamente algumas relações se tornam de longo alcance, como se originassem da presença de partículas de massa zero [24]. Isso foi proposto por Nambu [31] e Goldstone [32, 33] no começo da década de 1960 na forma de um dos teoremas mais importantes para a física de altas energias:

Teorema de Nambu-Goldstone. *A quebra espontânea de uma simetria global e contínua implica na existência de partículas sem massa, chamadas de bósons de Nambu-Goldstone*

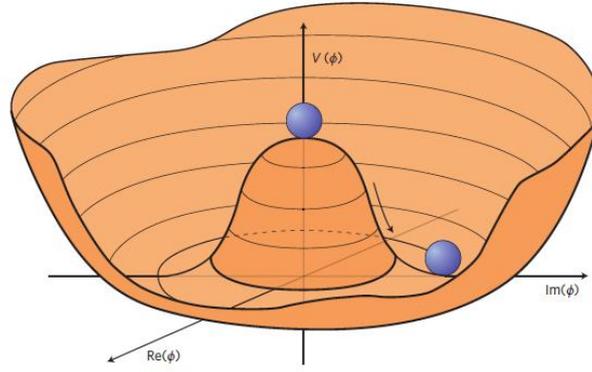


Figura 1.1: Potencial do tipo “chapéu mexicano” (Figura retirada de [34]).

Este fenômeno pode ser melhor visualizado ao se considerar o potencial do tipo “chapéu mexicano”, na Figura 1.1, que pode ser descrito pela lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} [(\partial \vec{\Phi})^2 + \mu^2 \vec{\Phi}^2] - \frac{\lambda}{4} (\vec{\Phi}^2)^2, \quad (1.6)$$

com o campo real $\vec{\Phi} = \phi_1, \phi_2$, cujo potencial é

$$V(\vec{\Phi}) = -\frac{\mu^2}{2} \vec{\Phi}^2 + \frac{\lambda}{4} (\vec{\Phi}^2)^2. \quad (1.7)$$

O mínimo desse potencial é

$$\phi_1^2 + \phi_2^2 = \frac{\mu^2}{\lambda}, \quad (1.8)$$

e se escolhermos

$$\begin{aligned} \phi_1 &= v \equiv \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}}, \\ \phi_2 &= 0, \end{aligned}$$

uma direção preferencial é escolhida, o que quebra a invariância rotacional do sistema. Neste caso, ao se considerar pequenas flutuações em torno destes campos, a lagrangiana pode ser reescrita como [29]

$$\mathcal{L} = \frac{\mu^4}{4\lambda} + \frac{1}{2} [(\partial \phi_1)^2 + (\partial \phi_2)^2] - \mu^2 \phi_1^2 + \mathcal{O}(\phi^3). \quad (1.9)$$

Assim, o campo ϕ_1 terá massa $m_{\phi_1} = \sqrt{2}\mu$ e o campo ϕ_2 não terá massa. Como consequência, um movimento (ou excitação) ao longo do vale do potencial, na direção angular, não requer gasto de energia, já que na prática esse movimento vai de ponto mínimo em ponto mínimo [24,29]. Por outro lado, uma excitação na direção radial requer gasto de energia. Esse estado de energia zero, ϕ_2 , pode ser identificado com um bóson de Goldstone. Pelo Teorema de Coleman-Mermin-Wagner [35,36], a quebra espontânea de uma simetria contínua é impossível para duas ou menos dimensões espaciais, como demonstrado em [29].

Quebra espontânea de simetria e transições de fase

A quebra espontânea de simetria muitas vezes está associada à transições de fase. Quando o sistema está em uma temperatura muito alta, ou seja, muito maior que o valor esperado do vácuo da teoria, as flutuações do campo ϕ são grandes. Assim, a elevação central do potencial não é importante e o estado de equilíbrio é simétrico (Figura 1.2a). Porém, quando a temperatura diminui é menos provável que o campo irá flutuar acima da elevação (Figuras 1.2b e 1.2c), e ele cairá no vale do potencial [37]. Neste último caso, o vácuo adquire um valor não nulo $\langle\phi\rangle \neq 0$, que é o parâmetro de ordem da transição.

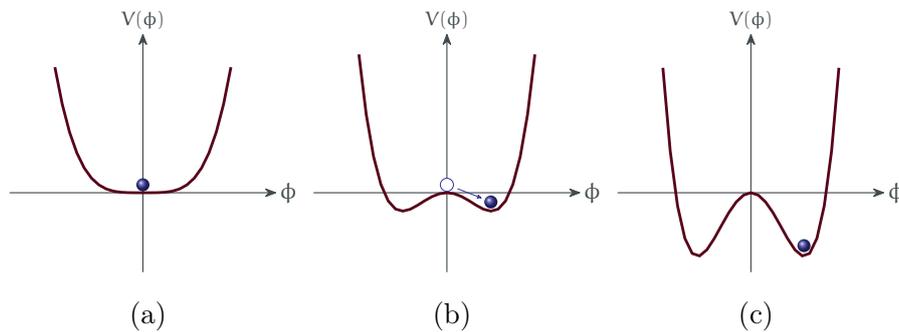


Figura 1.2: Quebra espontânea da simetria devido à uma transição de fase. Figura elaborada pela autora.

Um exemplo muito claro deste fenômeno é a magnetização de um ferromagneto, em que o estado fundamental espontaneamente quebra a simetria rotacional, já que os spins alinhados “escolhem” uma direção espacial preferencial. Conforme o sistema é aquecido, o movimento térmico faz com que a orientação dos spins comece a ficar aleatória, até que em uma temperatura crítica (Temperatura de Curie) os spins são aleatoriamente orientados e a invariância rotacional é restaurada [24].

1.2 Cromodinâmica Quântica

A forma como os quarks e glúons interagem é estudada pela Cromodinâmica Quântica (QCD), que é a parte do modelo padrão que descreve as interações fortes. Quarks interagem pela troca de glúons, que são partículas sem massa e com spin 1. A QCD explica porque os quarks só se combinam com configurações determinadas para formar hádrons. Esta teoria tem a estrutura matemática quase idêntica à da Eletrodinâmica Quântica (QED) e à teoria eletrofraca, já que todas elas são descritas por teorias de calibre, o que indica que futuramente estas interações possam ser unificadas à interação forte [23].

Uma propriedade peculiar da QCD é a de que a interação forte parece ser uma força que age em uma escala de distâncias pequenas. Entretanto, esta força parece aumentar conforme a distância aumenta, enquanto em distâncias muito curtas esta praticamente some. Um dos desafios da QCD é explicar uma força que parece tão contraditória à primeira vista. Tais contradições aparentes são explicadas pelas propriedades do confinamento e da liberdade assintótica. Matematicamente, uma teoria de calibre não abeliana é necessária para explicar o comportamento dos quarks e glúons.

1.2.1 Quarks

Quarks são as partículas subatômicas que se combinam de várias formas para gerar todos os hádrons conhecidos [38]. Como já falamos, eles interagem entre si através da força forte, que tem como bósons de calibre os glúons, partículas eletricamente neutras e sem massa, mas com carga de cor. Apesar de não podermos observar quarks diretamente, ao longo da última metade do século XX foram obtidas diversas evidências experimentais independentes da existência destas partículas, como delinearemos a seguir.

Pequeno Histórico

No ano de 1961, Murray Gell-Mann propôs que as interações nucleares (da força forte) poderiam ser descritas pela simetria unitária $SU(3)$ e que, além disso, todas as partículas que interagem por essa força poderiam ser classificadas de acordo com padrões estabelecidos por este grupo. Gell-Mann chamou este sistema de “*Eighfold Way*”² [40], uma alusão ao Nobre Caminho Octuplo do budismo. No mesmo ano, Yuval Ne’eman propôs de forma independente uma teoria similar [41].

A primeira ideia de que hádrons pudessem ser constituídos por partículas menores surgiu em 1963, quando Hayim Goldberg e Yuval Ne’eman [42] sugeriram que todas as partículas conhecidas na época poderiam ser construídas matematicamente a partir dos mesmos três blocos de construção, juntamente com as suas antipartículas.

²Caminho Óctuplo ou Caminho do Octeto [39].

Em 1964, M. Gell-Mann [43] e George Zweig [44] propõem independentemente o modelo de quarks para os hádrons. Zweig chamou estas partículas elementares de “*Aces*”, mas o nome dado por Gell-Mann, *quark*, foi mais aceito.

As primeiras evidências experimentais indiretas da existência de quarks surgiram em 1969, quando, através do espalhamento de elétrons em altas energias por prótons, se demonstra pela primeira vez que prótons se comportam como se fossem compostos por partículas. Este experimento foi realizado no Stanford Linear Accelerator (SLAC) pelo grupo de Henry W. Kendall, Jerome I. Friedman e Richard E. Taylor [45, 46], e seria semelhante ao experimento realizado pelo grupo de Rutherford [24]. Até 1964, um octeto mesônico e um octeto bariônico já haviam sido descobertos [38], e se supunha que para estes hádrons se formarem seriam necessários três sabores de quarks - o *up*, o *down* e o *strange*.

Um novo quark, o *charm*, é descoberto no ano de 1974 em experimentos no SLAC, pelo grupo de Burton Richter; [47] e no BNL, pela equipe de Samuel C. Ting [48]. Tal descoberta se deu pela observação de um novo méson, o J/ψ composto por um *charm* e um *anticharm* ($\bar{c}c$). Este quark teria uma massa de $m_c \approx 1,2$ GeV e uma carga de $q_c = 2e/3$ [38].

Com a descoberta do lepton tau (τ), em 1977 no SLAC pelo grupo de Martin Perl [49], a existência de uma terceira geração de partículas elementares seria sugerida. Neste mesmo ano, o méson upsilon (Υ) é observado no Fermilab por uma equipe liderada por Leon Lederman [50], o que evidenciou a existência de um novo quark, o *bottom*, com massa de aproximadamente $m_b \approx 4,5$ GeV. Este méson teria uma massa de $m_\Upsilon \approx 9,5$ GeV e seria formado por um par quark-antiquark $\bar{b}b$ [38].

Como cada geração de partículas deveria ter dois quarks, a existência de mais um quark era especulada desde a descoberta do quark *b*. Este novo quark foi descoberto em 1995 no colisor de próton-antipróton do Tevatron e foi chamado de quark *top* [51] [52], com uma massa de aproximadamente $m_t \approx 175$ GeV [38].

Atualmente conhecemos seis sabores diferentes de quarks: o *up* (**u**), o *down* (**d**) e o *strange* (**s**), que são os quarks mais leves; e o *charm* (**c**), o *bottom* (**b**) e o *top* (**t**). Suas propriedades estão resumidas na Tabela 1.1.

Quark	Carga	Spin	Isospin	Massa (MeV)	Número Quântico de Sabor			
					Strange	Charm	Bottom	Top
Up	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2.16	0	0	0	0
Down	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	4.67	0	0	0	0
Strange	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	0	93.4	-1	0	0	0
Charm	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	0	1275	0	1	0	0
Bottom	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	0	4180	0	0	1	0
Top	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	0	172690	0	0	0	1

Tabela 1.1: Propriedades dos Quarks (Os dados para as massas de corrente foram retirados de [53]).

Gerações de partículas

Antes mesmo do quark t ser descoberto, foi averiguado teoricamente que os quarks devem ser agrupados em três dupletos

$$\begin{array}{l}
 q = \frac{2}{3} \\
 \begin{array}{|c|c|c|}
 \hline
 u & c & t \\
 \hline
 \end{array} \\
 q = -\frac{1}{3} \\
 \begin{array}{|c|c|c|}
 \hline
 d & s & b \\
 \hline
 \end{array}
 \end{array}$$

Estes se relacionam com os três dupletos dos léptons pela força fraca

$$\begin{array}{|c|c|c|}
 \hline
 e & \mu & \tau \\
 \hline
 \nu_e & \nu_\mu & \nu_\tau \\
 \hline
 \end{array}$$

Essa conexão é chamada de teoria eletrofraca e descreve como essa força media o decaimento dos quarks [38]. Chamamos cada conjunto de um dupletto de quarks e um dupletto de léptons de geração, que contém um lépton carregado, seu neutrino correspondente, um quark com carga $-e/3$ e um quark com carga $2e/3$ [27], como podemos ver na Figura 1.3.

		Férmions			Bósons	
		I	II	III		
MASSA		2,16 MeV	1,27 GeV	172,69 GeV	0	125,25 GeV
CARGA		2/3	2/3	2/3	0	0
SPIN		1/2	1/2	1/2	1	0
		u up	c charm	t top	g glúon	H higgs
		4,67 MeV	93,4 MeV	4,18 GeV	0	
		-1/3	-1/3	-1/3	0	
		1/2	1/2	1/2	1	
		d down	s strange	b bottom	γ fóton	
		0,511 MeV	105,66 MeV	1,7768 GeV	91,19 GeV	
		-1	-1	-1	0	
		1/2	1/2	1/2	1	
		e elétron	μ múion	τ tau	Z bóson Z	
		< 0,8 eV	< 0,19 MeV	< 18,2 MeV	80,377 GeV	
		0	0	0	±1	
		1/2	1/2	1/2	1	
		ν_e neutrino do elétron	ν_μ neutrino do múion	ν_τ neutrino do tau	W bóson W	

- Quarks
- Leptons
- Bósons de calibre
- Bósons escalares

Figura 1.3: Partículas elementares segundo o Modelo Padrão (Dados retirados de [53], figura elaborada pela autora).

1.2.2 Hádrons

Hádrons são as partículas que sentem a força forte e que podem ser observados diretamente em laboratório. A ideia dos quarks surgiu para explicar a regularidade dos estados, cargas e spins dos hádrons [54]. Existem dois tipos de hádrons, os bárions e os mésons, que são classificados de acordo com sua composição.

Bárions

Bárions são partículas que se comportam como férmions, ou seja, partículas com spin semi-inteiro. Como quarks também têm spin semi-inteiro, bárions só podem ser formados por um número ímpar de quarks, e as propriedades deles são consistentes com bárions serem formados por três quarks (qqq) [24]. Assim, estas partículas só podem ter spin total $1/2$ ou $3/2$ [38] e carga total $q = +2, +1, 0, -1$ [55].

Os bárions mais leves e mais estáveis são formados apenas pelos quarks *up* e *down* e são os chamados núcleons: o próton e o nêutron, esboçados na Figura 1.4.

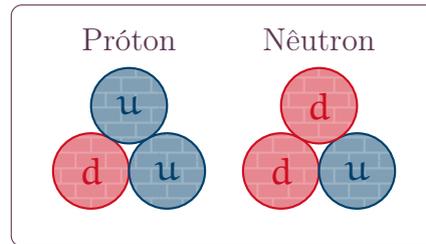


Figura 1.4: Núcleons. (Figura elaborada pela autora.)

O próton tem um tempo de vida maior que $1,6 \times 10^{25}$ anos, ou seja, é estável [38]. Esta estabilidade do próton é incorporada no modelo de quarks pela introdução de uma nova quantidade conservada (ou número quântico) em interações fortes: o número bariônico. Quarks têm número bariônico $1/3$ e antiquarks têm $-1/3$, enquanto bárions têm número bariônico 1.

Híperons são bárions que carregam número quântico de estranheza. Destes, alguns dos com estranheza $s = -1$ são delineados na Figura 1.5 [24].

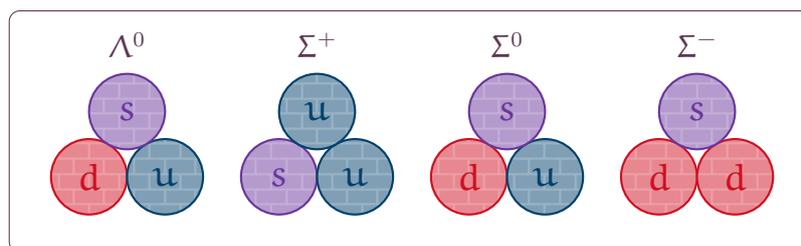


Figura 1.5: Híperons. (Figura elaborada pela autora.)

Além desses, temos os híperons cascata, com estranheza $s = -2$, na Figura 1.6

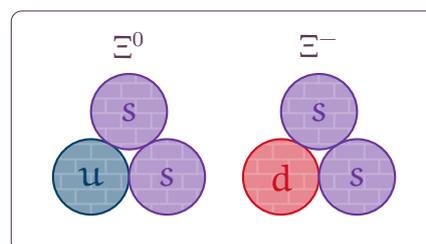


Figura 1.6: Híperons Cascata. (Figura elaborada pela autora.)

Todos os bárions, com exceção dos núcleons decaem muito rápido [54]. Os bárions podem ser classificados de acordo com seus números quânticos em diagramas. O octeto bariônico é o diagrama dos bárions compostos pelos quarks mais leves (u, d, s) com spin $1/2$ (Figura 1.7) e o decupleto pelos bárions com spin $3/2$ (Figura 1.8).

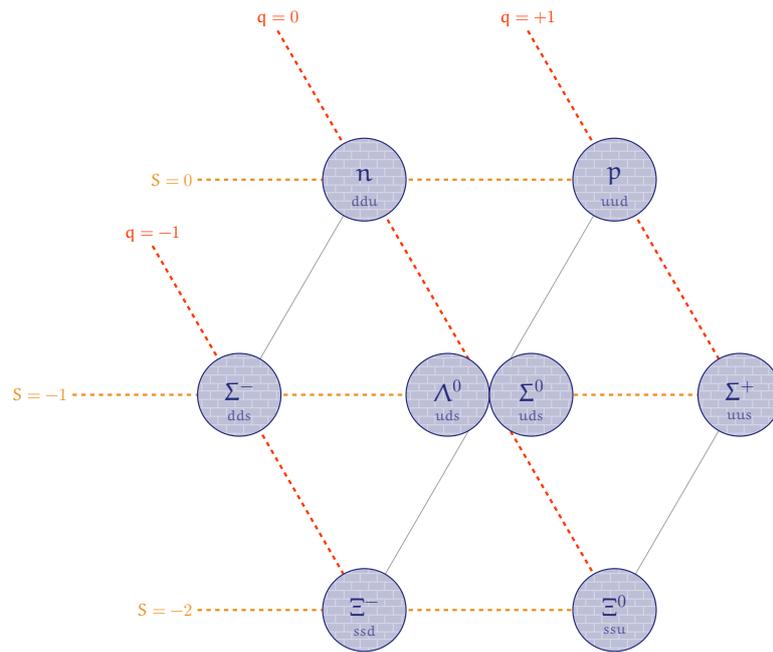


Figura 1.7: Octeto Bariônico: Bárions com spin $1/2$. (Figura elaborada pela autora.)

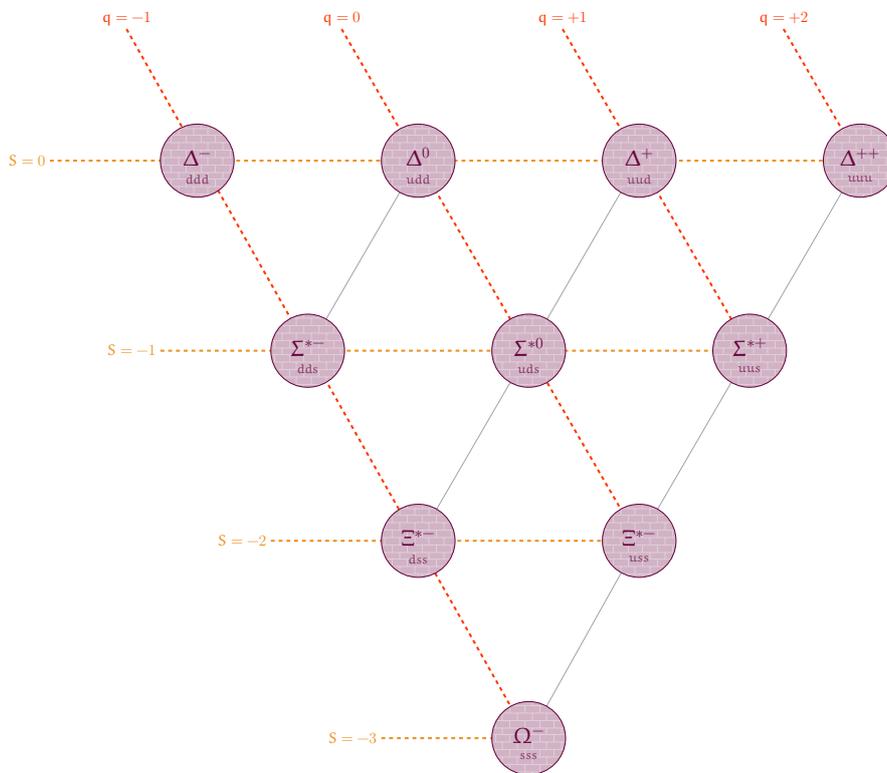


Figura 1.8: Decuplo Bariônico: Bárions com spin $3/2$. (Figura elaborada pela autora.)

Mésons

Mésons são hádrons que se comportam como bósons, ou seja, são partículas com spin inteiro. Como quarks são férmions, mésons só podem ser formados por um número par de quarks e todos os mésons conhecidos podem ser descritos como um estado ligado de um quark e um antiquark [24]. Se os spins dos quarks que compõem o méson estiverem paralelos, o spin total do méson será $S = 1$, caso contrário, se os spins estiverem antiparalelos, o spin total será $S = 0$ [38]. Como os quarks podem ter carga $2e/3$ ou $-e/3$, as cargas dos mésons só podem ser $q_M = +1, 0, -1$ [55].

Píons Os píons são os mésons mais leves, formados por quarks up e down. Foram previstos em 1935 por Yukawa, que os chamou de mésons pi devido à semelhança da letra grega π com o caractere chinês 介, que significa mediador [56]. Estas partículas foram os primeiros mésons observados experimentalmente, em 1947, por Cesar Lattes, Giuseppe Occhialini, Hugh Muirhead e Cecil Powel em uma colaboração liderada pelo último [57].

Os píons carregados π^+ e π^- têm carga $q = +1$ e $q = -1$ respectivamente e são a antipartícula um do outro. Eles são esboçados de forma esquemática na Figura 1.9.

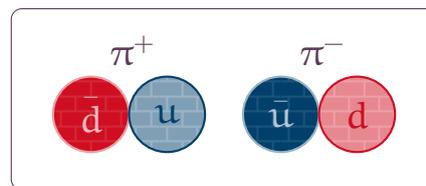


Figura 1.9: Píons carregados. (Figura elaborada pela autora.)

O pión neutro poderia ser descrito como o estado ligado de qualquer quark com seu antiquark, mas como todos os píons pertencem ao mesmo multiplete (de isospin forte), eles devem ter a mesma estrutura interna [24]. Assim, o pión neutro π^0 pode ser descrito como

$$\pi^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{u}u - \bar{d}d).$$

Káons A primeira partícula com estranheza foi observada por George Dixon Rochester e Clifford Charles Butler em 1947 através da observação de raios cósmicos [58]. Tais partículas, com massa de aproximadamente $m_K \approx 500$ MeV, foram produzidas por colisões em altas energias dos raios cósmicos através da força forte. O tempo de interação foi calculado em aproximadamente 10^{-24} s, pela divisão do raio de um núcleo pela velocidade das partículas dos raios cósmicos. Estes káons eventualmente decaem em pions, e

o tempo deste decaimento é de aproximadamente 10^{-9} s. Como estas partículas não decaem tão rápido quanto elas eram produzidas, foram chamadas de partículas estranhas (*strange particles*) [38]. A produção de partículas estranhas é confirmada no Cosmotron, no Brookhaven National Laboratory (BNL) em 1953 [59].

Os káons formam um grupo de quatro partículas que são compostas pelos quarks u , d e s , ilustrados na Figura 1.10

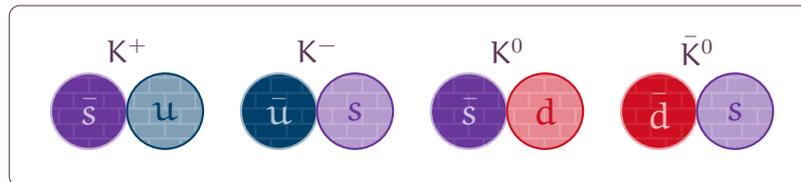


Figura 1.10: Káons. (Figura elaborada pela autora.)

Os mésons mais leves podem ser classificados conforme seus números quânticos em um diagrama chamado octeto mesônico³, mostrado na Figura 1.11.

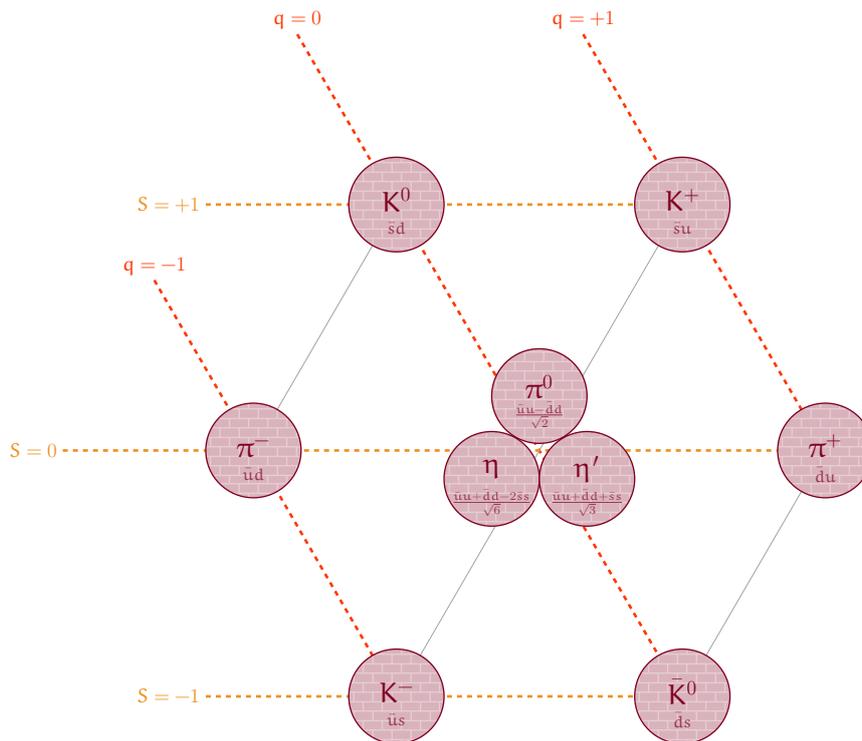


Figura 1.11: Noneto Mesônico. (Figura elaborada pela autora.)

³O octeto mesônico é formado pelos píons, káons e pelo méson η ; e o méson η' forma um singlete. Chamaremos estes dois conjuntos de Noneto Mesônico.

Mésons D São semelhantes aos káons, mas contém um quark c [24]. Além desses, temos os mésons D_s que também carregam número quântico de estranheza. Ilustramos estes mésons na Figura 1.12.

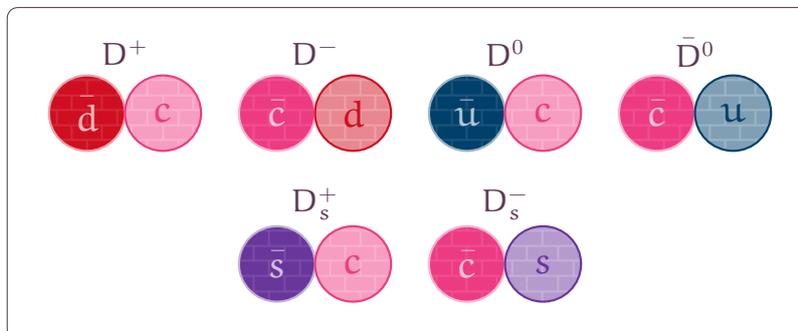


Figura 1.12: Mésons D. (Figura elaborada pela autora.)

Mésons B São análogos aos káons, mas com um quark b . Os mésons B que carregam estranheza tem a propriedade similar ao sistema $K^0 - \bar{K}^0$, que exibe uma violação CP em seu decaimento [24]⁴. Esboçamos estes mésons na Figura 1.13

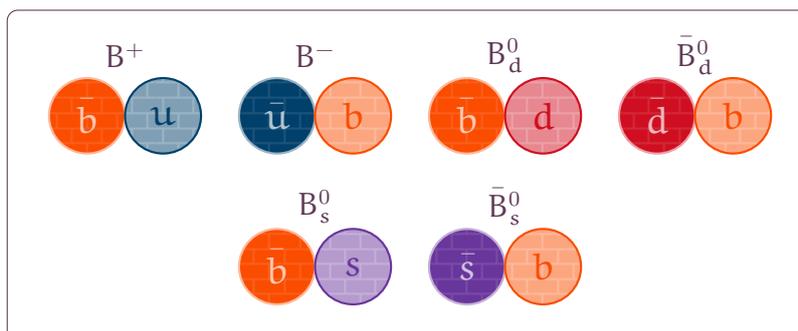


Figura 1.13: Mésons B. (Figura elaborada pela autora.)

1.2.3 Carga de cor

Consideraremos agora o bárion Δ^{++} , que é uma ressonância pion-núcleon. Esta partícula tem carga $q = 2e$, não tem estranheza, tem spin total $J = 3/2$ e é composto por [24]

$$\Delta^{++} = uuu.$$

⁴Este decaimento viola as simetrias discretas de carga (C) e paridade (P). Mais detalhes sobre a simetria CPT podem ser vistos em [7], [24], [60], [61] e [62]. Mais detalhes sobre a violação CP por káons podem ser vistos em [63], [64], [65] e [66]. Um pouco da história da descoberta deste fenômeno pode ser vista em [67] e [68].

No estado fundamental, os três quarks \mathbf{u} deveriam ter spins paralelos para que $J = 3/2$

$$|\Delta^{++}, J = 3/2\rangle = |\mathbf{u} \uparrow, \mathbf{u} \uparrow, \mathbf{u} \uparrow\rangle,$$

mas isso viola o princípio de exclusão de Pauli, já que a função de onda do estado final, que representaria três férmions idênticos, seria simétrica sob a troca de quaisquer dois quarks [24]. Uma possível solução seria considerar um momento angular mais alto para os quarks, mas isso não estaria de acordo com a previsão do momento magnético dos bárions baseada na onda S de três quarks, ou seja, os três quarks devem estar em estados S [28].

A solução mais apropriada para este problema é a introdução de um novo grau de liberdade para os quarks, ou seja, um novo número quântico. Assim, o estado final de Δ^{++} seria antissimétrico no espaço [24].

$$|\Delta^{++}, J = 3/2\rangle = \varepsilon_{ijk} |\mathbf{u}^i \uparrow, \mathbf{u}^j \uparrow, \mathbf{u}^k \uparrow\rangle,$$

em que ε_{ijk} é o tensor totalmente antissimétrico de Levi-Civita. Este novo número quântico é o número quântico de cor (ou carga de cor). São necessárias pelo menos três cores diferentes para diferenciar os três quarks: vermelho (*red*), verde (*green*) e azul (*blue*) [28]. A cor é o equivalente das interações fortes para a carga na força eletromagnética, ou seja, é a fonte para os campos [24]. Como a cor é considerada a carga conservada nas interações fortes, é necessário encontrar uma simetria de calibre que teria a conservação da carga de cor como consequência. Um candidato óbvio é o grupo unitário $SU(3)$ [23].

Os mediadores da interação forte são oito bósons sem massa e com spin 1, um para cada gerador do grupo de simetria. Esses bósons são os glúons, que agem como a cola que mantém os quarks juntos dentro dos hádrons [23]. Quando um quark emite um glúon, sua carga de cor muda. Assim, o glúon emitido tem uma combinação da carga do quark antes da emissão e da (anti)carga de depois [54].

A carga de cor nunca foi identificada experimentalmente, mas o número de cores (3) pode ser medido indiretamente, como demonstraremos mais adiante. Por isso, todos os hádrons são neutros na carga de cor [54]. Três fatos sugerem que os quarks deveriam ter um novo número quântico [28]:

1. O problema na construção de funções de ondas dos bárions, como já discutimos acima;
2. A não observação de quarks isolados;

3. A discrepância entre a previsão e os experimentos nas taxas de decaimento para $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ e na seção de choque total de $e^+e^- \rightarrow$ Hádrons.

Explicaremos melhor o terceiro ponto na Subseção 1.2.13.

1.2.4 Teoria de Yang-Mills

Em 1954, C.N. Yang e R.L. Mills [69] estabeleceram que é possível utilizar a invariância de calibre local para se deduzir uma teoria de forças nucleares. Inicialmente, foi constatado que a interação nuclear é independente da carga elétrica, ou seja, tem a mesma intensidade quando é entre próton-próton, próton-nêutron ou nêutron-nêutron. Assim, a ideia de núcleon foi estabelecida: o próton e o nêutron podem ser vistos como dois estados da mesma partícula, de forma semelhante ao spin. Esta nova propriedade foi chamada de isospin. Um próton seria um núcleon com isospin pra cima e o nêutron teria o isospin pra baixo. A independência de carga (elétrica) então reflete a invariância das interações fortes sob rotações de isospin, cujo grupo de simetria é o $SU(2)$ [23].

Se o isospin é considerado um grupo de calibre, como foi suposto no parágrafo anterior, a invariância de calibre local exige que existam três partículas de calibre sem massa e com spin 1, que corresponderiam aos três geradores do $SU(2)$. Uma diferença dessa teoria de calibre para o eletromagnetismo é que campos de calibre do $SU(2)$ carregam isospin, e, conseqüentemente, interagem entre si, o que não ocorre com as partículas de calibre do eletromagnetismo (os fótons). Quando os campos de calibre interagem entre si temos um grupo de calibre não abeliano [23].

1.2.5 Acoplamento

O acoplamento $\alpha_s(Q)$ da QCD é uma medida da intensidade da força forte [54], e é análogo à constante de estrutura fina da QED [70]. O acoplamento controla a probabilidade de um quark emitir um glúon, o que produz a força entre os quarks, e depende do momento carregado pelo glúon emitido. Ele é grande para momentos baixos e diminui conforme o momento aumenta, o que caracteriza a liberdade assintótica [54].

Uma forma mais intuitiva de definir o acoplamento é em termos da energia potencial U_{QCD} entre um quark e um antiquark mantidos afastados por uma distância r [70]

$$U_{QCD}(r) = \frac{\alpha_s \hbar c}{r} \rightarrow \alpha_s = \left(\frac{r}{\hbar c} \right) U_{QCD}(r). \quad (1.10)$$

Assim, α_s é uma função da distância, propriedade chamada variação do acoplamento (*running of the coupling*). Esta propriedade do acoplamento aumentar com a distância

está relacionada à liberdade assintótica: a carga de cor efetiva de um quark diminui conforme é medida em distâncias menores e aumenta conforme a distância aumenta [70].

A equação (1.10) tem origem na troca de um glúon entre um quark e um antiquark separados por uma distância r , como ilustrado na Figura 1.14a [70]. Tal processo viola a conservação da energia devido ao glúon (virtual) enquanto este viaja do quark até o antiquark ou vice-versa,

$$\Delta t = \frac{r}{c},$$

o que é permitido, desde que satisfaça a incerteza tempo-energia da mecânica quântica,

$$E_{\text{gluon}} \leq \frac{\hbar}{\Delta t} = \frac{\hbar c}{r}.$$

A equação (1.10) denota a energia máxima $U_{\text{QCD}}(r)$ de um glúon trocado entre um quark e um antiquark a uma distância r vezes a probabilidade $\alpha_s(r)$ do glúon ser emitido [70].

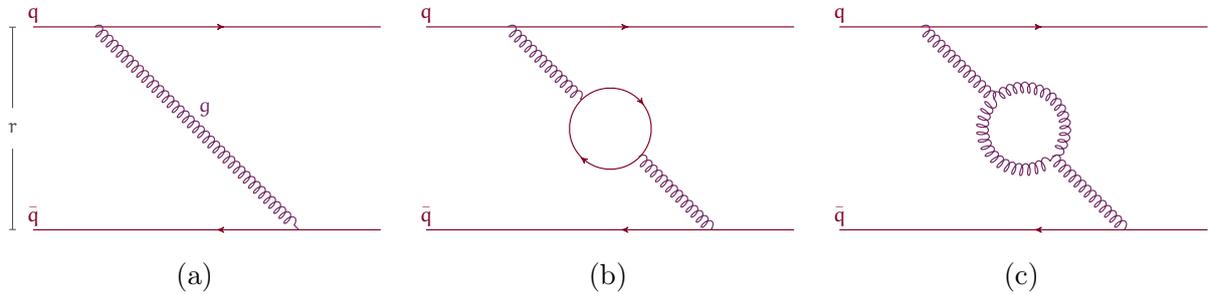


Figura 1.14: Diagramas de Feynman para os processos de blindagem e antiblindagem. (Figura elaborada pela autora.)

Uma outra possibilidade se dá no processo em que enquanto o glúon viaja do quark até o antiquark ele se separa momentaneamente num par quark-antiquark (Figura 1.14b) ou num par de glúons (1.14c). A variação do acoplamento se dá pela mistura destes dois processos [70], como explicaremos mais adiante.

A constante de acoplamento α_s é medida experimentalmente ao se acelerar partículas compostas por quarks em colisões quark-quark ou quark-lepton [70].

Variação do Acoplamento

Quando estamos tratando de reações onde interações fortes estão presentes, devemos diferenciá-las conforme o seu momento Q , devido à propriedade de variação do acoplamento. Em processos com o momento Q alto (reações duras - *hard reactions*), é possível se utilizar métodos perturbativos para o cálculo, já que devido à liberdade assintótica o valor do acoplamento diminui com Q^2 . Assim, é necessário especificar o valor deste acoplamento em determinado ponto de referência, o que é dificultado pelo confinamento. Uma solução para esse problema é a introdução de uma escala arbitrária μ como ponto de referência. Por essa escala ser artificial e arbitrária, os observáveis não podem depender dela. Então, as expressões nesta escala são relacionadas aos observáveis através da equação do grupo de renormalização. Estes processos de Q grande (processos duros - *hard processes*) são separados dos processos de Q baixo (processos moles - *soft processes*) através da fatoração (*factorization*). A escala de energia característica que separa tais processos é de $Q \sim \Lambda_{\text{QCD}} \sim 200$ MeV, e abaixo desta escala o confinamento ocorre. Em escalas de energia $Q \gtrsim m_{\text{hadron}} \sim 1$ GeV é possível se utilizar métodos perturbativos. A parte de baixas energias não pode ser tratada com métodos perturbativos, mas pode ser separada e renormalizada em funções dependentes da escala. A fatoração permite conectar as previsões da QCD aos experimentos com aproximações razoáveis [71].

Renormalização

A predição da QCD para um observável em uma escala de energia Q^2 pode ser expressa como uma soma de termos perturbativos e não perturbativos [71].

Quando um observável é expandido em uma série perturbativa, ele pode ser escrito como

$$P = c_1 \alpha_s + c_2 \alpha_s^2 + \dots,$$

e os coeficientes c_1, c_2, \dots são obtidos ao se calcular os diagramas de Feynman correspondentes. Em ordens de correção mais altas, aparecem diagramas de *loop* divergentes, que são regulados pela introdução de um parâmetro de *cutoff* e absorvidos na definição da constante de acoplamento, na massa ou na normalização do campo, o que é chamado renormalização. Existem vários esquemas de renormalização, que dependem de como as divergências são tratadas [71].

1.2.6 Screening e Antiscreening

Uma explicação para o fato da variação do acoplamento ocorrer pode ser dada pela competição dos efeitos de blindagem (*screening*) e antiblindagem (*antiscreening*). Para entender estes efeitos, precisamos primeiro compreender como ocorre a polarização de um meio dielétrico.

Polarização de um meio dielétrico Pela eletrodinâmica, se uma carga é colocada em uma região em que outras cargas são livres para se movimentarem, os efeitos desta carga serão modificados. Se considerarmos um meio dielétrico, a introdução de uma carga teste fará com que este seja polarizado, ou seja, os polos de carga oposta à partícula de teste se alinharão em direção à mesma, enquanto os polos de carga igual serão repelidos, como podemos ver na Figura 1.15.

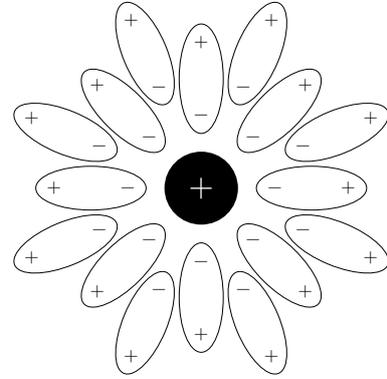


Figura 1.15: Blindagem de uma carga num meio dielétrico (Figura baseada em [72] e elaborada pela autora).

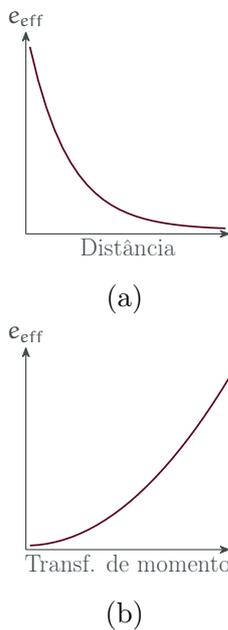


Figura 1.16: Variação da carga efetiva e_{eff} com momento e a distância para o efeito de blindagem. (Figura elaborada pela autora, baseada em [24].)

Neste caso, a efetividade da carga é diminuída pelo meio que a cerca, fenômeno chamado de efeito de blindagem (*screening effect*). Assim, quando a carga é vista de longe, mas ainda dentro do meio, sua intensidade parece ser menor do que seria caso não houvesse este efeito [23]. Ou seja, sua carga efetiva depende da distância em que ela é observada, como podemos ver na Figura 1.16a. Como a magnitude da carga aumenta conforme a distância diminui, apenas assintoticamente, com a maior transferência de momento, podemos obter a carga real da partícula teste, como na Figura 1.16b. Assim, a transferência de momento é inversamente proporcional a distância em que a carga é observada. Então, a carga elétrica efetiva, ou seja, a intensidade da interação eletromagnética, aumenta com a transferência de momento.

Polarização do vácuo O vácuo da teoria quântica de campos não é um espaço completamente vazio, e sim um meio em que pares virtuais carregados de partícula-antipartícula se formam e se aniquilam rapidamente. Estas flutuações podem ser polarizadas, como no exemplo do meio dielétrico. Assim, as cargas dos elétrons sofrem blindagem em longas distâncias. Então, na QED a carga efetiva aumenta conforme a distância diminui [23]. Por isso a constante de estrutura fina aumenta ligeiramente com a transferência de momento. Espalhamentos e^+e^- em altas energias confirmam isso: a constante de estrutura fina é aproximadamente 7% maior que em baixas energias [24].

Polarização do vácuo da QCD Neste caso, os glúons carregam carga de cor, enquanto fótons são eletricamente neutros. Assim, além do efeito de blindagem igual ao da QED, a carga de cor do quark pode ser compartilhada com a nuvem de glúons [23]. Neste sentido, uma partícula teste carregando carga de cor pode polarizar o meio de duas formas:

1. Criando pares de partículas com cargas de cor opostas ($\bar{r}r$, $\bar{g}g$, $\bar{b}b$);
2. Criando três partículas com cores distintas, mantendo a neutralidade de cor (rgb).

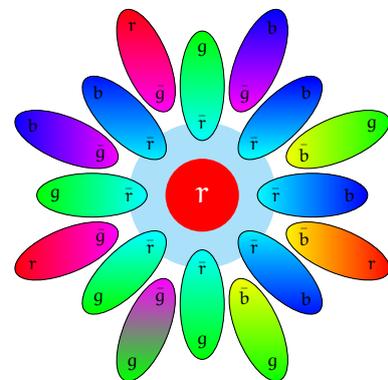
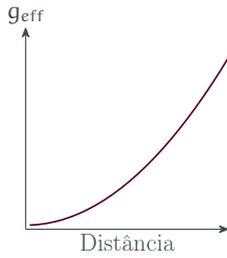
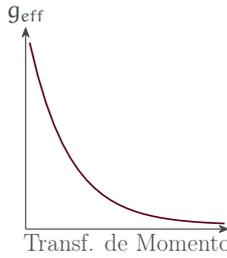


Figura 1.17: Efeito de blindagem na QCD (Figura baseada em [23] e elaborada pela autora).



(a)



(b)

Figura 1.18: Variação da carga efetiva de cor g_{eff} com momento e a distância para o efeito de antibrindagem. (Figura elaborada pela autora, baseada em [24].)

Como a carga fica espalhada em vez de estar localizada, como podemos ver na Figura 1.17, a carga de cor efetiva parece ser maior a longas distâncias e menor em curtas distâncias. O resultado da competição entre blindagem e antibrindagem depende do número de tipos de quark que podem blindar a carga de cor e do número de glúons que podem compartilhar a carga de cor. Como o grupo de calibre é o $SU(3)$, o efeito que ganha é o antibrindagem, desde que hajam menos que 17 sabores de quarks [23]. Então, muito perto do quark a carga de cor efetiva fica tão pequena que é praticamente nula. Assim, quarks próximos se comportam como se fossem partículas livres que não interagem entre si.

Como mostra a Figura 1.18a, a intensidade da interação forte diminui com o aumento da transferência de momento e tende a zero assintoticamente. Em energias infinitas, os quarks se comportam como partículas livres porque a intensidade efetiva do acoplamento da interação vai à zero neste limite. No regime de energias muito altas, os hádrons são formados por quarks que se comportam como partículas livres, e este limite da QCD é conhecido como modelo de pártons.

Outra forma de entender como acontecem esses fenômenos é analisando os diagramas das Figuras 1.14b e 1.14c. Quando um glúon passa um tempo como um par de quarks, como na Figura 1.14b, ele tende a blindar a carga do quark original. Quanto maior a distância r , a blindagem ocorre por um tempo maior, o que tende a diminuir a carga conforme r aumenta. Esse é o fenômeno do efeito de blindagem, que é análogo ao diamagnetismo. Já quando o glúon passa um tempo como um par de glúons, como na Figura 1.14c, a carga dos glúons tende a aumentar a carga do quark original, fenômeno chamado antibrindagem e análogo ao paramagnetismo [70].

1.2.7 Liberdade Assintótica

Historicamente, a descrição da interação forte não pode ser explorada de maneira fundamental pois cálculos perturbativos em ordens mais baixas não são confiáveis devido ao valor alto do acoplamento da teoria. [23]. Entretanto, em 1973, H. David Politzer [73],

David J. Gross e Frank Wilczek [74] demonstraram que teorias de Yang-Mills são assintoticamente livres, ou seja, o acoplamento da interação nestas teorias vai a zero no limite de momentos grandes (limite ultravioleta) e tende ao infinito, ou um valor muito alto, no limite de momentos pequenos (limite infravermelho) [29].

Chamamos de liberdade assintótica a propriedade da QCD que garante que em distâncias e tempos curtos o bastante a teoria é descrita por quarks e glúons interagindo pouco [70]. A liberdade assintótica foi a principal responsável pelo sucesso do modelo de pártons em explicar o fenômeno do espalhamento profundamente elástico, já que esse modelo trata as partículas constituintes dos hádrons como partículas livres [71]. A descoberta da liberdade assintótica sugere, mas não prova, que a QCD é capaz de produzir forças muito intensas e confinamento em longas distâncias [75].

1.2.8 Confinamento

A propriedade da interação forte de aumentar de intensidade em baixas energias aponta a possibilidade de que conforme o acoplamento de cor aumenta, os quarks formam estados ligados sem carga de cor, ou seja, os quarks formam hádrons [24]. No regime de baixas energias, podemos escrever o potencial entre dois quarks de forma qualitativa como

$$V(r) \propto kr.$$

Podemos imaginar um sistema quark-antiquark $\bar{q}q$ como se fosse ligado por uma corda. Conforme o par é forçado a se separar, o potencial entre os dois quarks aumenta e, a uma determinada separação entre os dois, é mais favorável energeticamente para o par $\bar{q}q$ se separar em dois pares $\bar{q}q$. Isso acontece porque a intensidade da força forte aumenta com a separação entre os quarks, o que acaba excluindo a possibilidade de se observar um quark isolado [24]. Esta propriedade é chamada de confinamento, e por causa dela todas as partículas observadas são neutras na carga de cor.

Existem fortes evidências de cálculos da teoria de calibre na rede de que o confinamento é uma propriedade dinâmica da QCD e tem origem no acoplamento forte e não linear dos glúons na lagrangiana [76]. É possível mostrar que a energia de um par $\bar{q}q$ estático cresce linearmente com a distância r separando o par [76].

Como a massa dos quarks leves está muito abaixo da escala Λ_{QCD} , em que o acoplamento diverge, quarks leves são criados livremente no vácuo. O processo em que quarks e glúons formam hádrons (bárions e mésons) é chamado de hadronização. Este é um processo não perturbativo e relativístico, então é difícil de se calcular as propriedades deste sistema tanto com métodos perturbativos quanto com simulações na rede [75].

1.2.9 Simetrias da QCD

Por simplicidade, consideraremos apenas dois sabores de quark: o u e o d . Neste caso, a lagrangiana da QCD pode ser escrita como

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4\alpha_s^2} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - \hat{m})\psi, \quad (1.11)$$

em que $a = u, d$ são os índices de sabor, ψ são os campos e \hat{m} é a matriz das massas dos quarks, dados por

$$\psi = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}, \quad \hat{m} = \begin{pmatrix} m_u & 0 \\ 0 & m_d \end{pmatrix},$$

onde m_u, m_d são as massas de corrente dos quarks. D_μ é a derivada covariante e $F_{\mu\nu}^a$ são os campos dos glúons.

Quando $m_u = m_d$, a lagrangiana é invariante sob a transformação

$$\psi \rightarrow e^{i\theta \cdot \tau} \psi,$$

e a teoria tem uma simetria $SU_V(2)$ que rotaciona um quark u num quark d , ou seja, a lagrangiana é invariante sob transformações de isospin (de Heisenberg) [29].

Na natureza as massas dos quarks u e d são muito próximas, mas não iguais. Ainda, como m_u e m_d são muito menores que a escala de energia da interação forte Λ_{QCD} , a simetria de isospin $SU_V(2)$ é uma simetria aproximada [29]. No limite de massa zero, esta simetria se torna exata em todas as ordens da teoria de perturbação para qualquer número finito de glúons emitidos ou absorvidos [75].

Quando $m_u = m_d = 0$, a lagrangiana é invariante sob transformações de simetria quiral do $SU_A(2)$, ou seja,

$$q \rightarrow e^{i\phi \cdot \tau \gamma_5} q,$$

Neste caso, a teoria tem duas simetrias $SU_A(2)$ independentes: os quarks de mão direita e os de mão esquerda são totalmente desacoplados [30]. Assim cada multipletto de isospin deveria estar acompanhado de um um “multipletto espelho” [8], ou, de outra

forma, cada hádron deveria ter um “parceiro quirial” aproximadamente degenerado, com paridade oposta [77]. Entretanto, estes multipletos não se manifestam na natureza, o que sugere que a simetria quirial não ocorre diretamente no vácuo da QCD. Portanto, a simetria quirial é espontaneamente quebrada no vácuo, se manifestando através dos modos de Goldstone. Os bósons de Goldstone desta quebra de simetria são os pions, hipótese confirmada pelo fato de que a massa do pión observada experimentalmente ser baixa se comparada com a massa dos núcleons [8], com uma razão de 15%⁵.

Outra simetria importante para a QCD é a simetria axial $U_A(1)$. Da mesma forma que a $SU_A(2)$, esta simetria não se manifesta diretamente na QCD. Esperava-se que existisse um méson pseudoescalar com $I = 0$ com aproximadamente a massa do pión, mas este méson nunca foi observado [8], o que deu origem ao chamado “ $U_A(1)$ puzzle”. Este problema foi resolvido em 1976 por 't Hooft, que sugeriu que a simetria não se manifesta fisicamente devido a efeitos de instantons [78].

As simetrias mais importantes para a QCD estão listadas na Tabela 1.2.

Simetria	Transformação	Corrente	Nome	Manifestação
$SU_V(2)$	$\psi \rightarrow e^{-\frac{i}{2}\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\omega}}\psi$	$J_\mu^k = \bar{\psi}\gamma_\mu\tau^k\psi$	Simetria de Isospin	Aproximadamente Conservada
$U_V(1)$	$\psi \rightarrow e^{-i\alpha}\psi$	$j_\mu = \bar{\psi}\gamma_\mu\psi$	Simetria Bariônica	Sempre Conservada
$SU_A(2)$	$\psi \rightarrow e^{-\frac{i}{2}\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\theta}\gamma_5}\psi$	$J_{5\mu}^k = \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\tau^k\psi$	Simetria Quiral	Modo de Goldstone
$U_A(1)$	$\psi \rightarrow e^{-i\beta\gamma_5}\psi$	$j_{5\mu} = \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi$	Simetria Axial	$U_A(1)$ puzzle

Tabela 1.2: Simetrias da QCD (Tabela baseada em [8]).

1.2.10 Vácuo da QCD

O vácuo da QCD não é um espaço com ausência total de conteúdo. Na verdade, este age como um supercondutor para a QCD. Uma forma de imaginar como o confinamento age é imaginar que o vácuo repele as linhas de força entre os campos dos quarks, da mesma forma que os campos magnéticos são repelidos dentro de um supercondutor. Assim, quanto maior a separação entre quarks isolados dentro deste supercondutor, maior a energia necessária para superar a repulsão. Por isso, é mais vantajoso energeticamente se criar pares de quark-antiquark quando um par é separado [54].

⁵Esta precisão é calculada a partir de

$$\frac{m_\pi}{m_N} \approx \frac{139 \text{ MeV}}{938 \text{ MeV}} \sim 0,15.$$

1.2.11 Condensado de Quarks

De acordo com a hipótese do modelo padrão, no começo do universo nenhuma partícula tinha massa. Neste cenário, a invariância de calibre vale para os campos de mão esquerda e de mão direita independentemente, o que garante que a QCD tenha uma simetria quiral de calibre baseada nos graus de liberdade de cor e uma simetria quiral global $[\text{SU}_L(2) \times \text{SU}_R(2)]_{\text{flavor}}$ baseada nos graus de liberdade de sabor ($\mathbf{u} \leftrightarrow \mathbf{d}$) [71]. Este cenário mudou há 14 bilhões de anos, quando a temperatura do universo esfriou abaixo de $T_c \sim \Lambda_{\text{QCD}}$, causando uma transição de fase pela quebra espontânea da simetria quiral. Neste momento, a energia térmica dos quarks ficou menor que sua energia de ligação, o que causou a hadronização do universo [30].

A geração de massa pela quebra espontânea da simetria eletrofraca quebra a parte axial das simetrias acima, mas mantém o vetor de corrente diagonal de sabor ⁶

$$\partial_\mu V_0^\mu(x) = \partial_\mu \bar{\mathbf{u}}(x) \gamma^\mu \mathbf{u}(x) = \partial_\mu \bar{\mathbf{d}}(x) \gamma^\mu \mathbf{d}(x) = 0,$$

ou seja, as simetrias $\text{SU}(3)_{\text{color}}$ e $\text{U}(1)_{\text{flavor}}$ são conservadas, mas a simetria vetorial $V_+^\mu(x)$ e a simetria axial A_+^μ não o são [71]

$$\partial_\mu V_+^\mu(x) = \partial_\mu (\bar{\psi} \gamma^\mu \tau_+ \psi) = \partial_\mu [\bar{\mathbf{u}}(x) \gamma^\mu \mathbf{d}(x)] = i(m_d - m_u) \bar{\mathbf{u}}(x) \mathbf{d}(x), \quad (1.12)$$

em que há a quebra da simetria de isospin, com o grau de quebra da simetria dado por $\Delta m = m_d - m_u$; e

$$\partial_\mu A_+^\mu(x) = \partial_\mu (\bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \tau_+ \psi) = \partial_\mu [\bar{\mathbf{u}}(x) \gamma^\mu \gamma^5 \mathbf{d}(x)] = i(m_d + m_u) \bar{\mathbf{u}}(x) \gamma^5 \mathbf{d}(x), \quad (1.13)$$

em que a simetria quiral é quebrada, com um grau de quebra de $m_{\mathbf{u+d}} = m_u + m_d$ [71]. Como $\Delta m \sim m_{\mathbf{u+d}}$, o grau de quebra das duas simetrias é da mesma ordem. Podemos observar a simetria de isospin aproximada ($\mathbf{u} \leftrightarrow \mathbf{d}$) de forma fenomenológica

$$m_{\pi^+} \simeq m_{\pi^0} \quad \text{e} \quad m_p \simeq m_n,$$

mas a simetria quiral ($\text{L} \leftrightarrow \text{R}$) não é aparente, já que não existem mésons escalares com massa aproximadamente igual, como acontece com o pion, ou seja ⁷

⁶Por simplicidade, consideraremos apenas os quarks \mathbf{u} e \mathbf{d} .

⁷Aqui denotamos um multipletto de hádrons pela notação J^P , em que:

$$m(0^+) \gg m(0^-) \quad \text{e} \quad m(1^+) \gg m(1^-).$$

A diferença entre essas duas simetrias é a forma como o vácuo se comporta. A quebra espontânea da simetria quiral é no modo de Nambu-Goldstone [71].

No lado direito da equação (1.13) há um número quântico de π^+

$$\partial_\mu \mathcal{A}_+^\mu = f_\pi m_\pi^2 \phi_\pi(x), \quad (1.14)$$

em que $f_\pi = 132 \text{ MeV}$ ⁸ é a constante de decaimento do pión e ϕ_π é o campo do pión, que é composto por um estado assintótico de $\bar{u}d$. No limite $m_\pi \rightarrow 0$, o lado direito da equação se cancela, fenômeno conhecido como conservação parcial das correntes axiais (*Partial conservation of the axial current*, PCAC).

Para mostrar que a simetria quiral é espontaneamente quebrada, partimos da função de dois pontos⁹

$$\Pi^{\mu\nu}(q) = i \int d^4x e^{iq \cdot x} \langle T[\mathcal{A}_+^\mu(x) \mathcal{A}_+^\nu(0)^\dagger] \rangle_0,$$

e considerando (1.13) e (1.14), é possível mostrar que

$$(m_u + m_d) \langle \bar{u}u + \bar{d}d \rangle_0 = \frac{f_\pi^2 m_\pi^2}{2} \{1 + \mathcal{O}(m_\pi^2) + \dots\}. \quad (1.15)$$

Como sabemos a partir dos experimentos que $m_u, m_d \neq 0$, então a equação (1.15) é uma forte indicação de que $\langle \bar{u}u + \bar{d}d \rangle_0 \neq 0$. Assim, a simetria quiral é quebrada espontaneamente e globalmente na QCD [71]. Pelo teorema de Goldstone, por causa da simetria quebrada um bóson de Nambu-Goldstone sem massa deve aparecer. No $SU(2)$, esse bóson é o pión.

-
- O J é o spin dos hádrons do multipleteo;
 - O P é a paridade dos hádrons do multipleteo.

Assim, 0^- denota os mésons com spin 0 e paridade negativa, que é o octeto (noneto) mesônico pseudo-escalar; e 1^- denota os mésons vetoriais (K^{*+} , K^{*0} , ρ^+ , ρ^0 , ρ^- , ω , ϕ , \bar{K}^{*0} e K^{*-}) [7].

⁸Também é comum na literatura ver a constante de decaimento definida como $f_\pi = 93.4 \text{ MeV}$, que seria equivalente a multiplicar o valor definido aqui por $\sqrt{2}$

⁹Estes cálculos são feitos com detalhes em [71]

A simetria quiral também é quebrada explicitamente pela massa finita dos quarks, que agem como uma força externa que quebra a simetria de sabor, o que dá massa aos bósons de Goldstone [71].

A constante de decaimento do káon é de $f_K = 157$ MeV, bastante próxima da constante de decaimento do pión. A partir disso, podemos inferir que a mesma dinâmica acontece para os káons. Assim, a simetria aproximada de sabor do $SU(2)$ pode ser estendida para o $SU(3)_{\text{flavor}}$, que descreve partículas compostas pelos três quarks mais leves: u , d e s . Para este caso, todos os mésons do octeto mesônico pseudoescalar são bósons de Goldstone da teoria, o que explicaria porque estes mésons são tão leves. Não é viável qualquer extensão além do $SU(3)$, pois as massas dos quarks c , b e t estão acima do limite Λ_{QCD} [71].

1.2.12 Massa dos Quarks

O termo de massa aparece na lagrangiana como

$$m\bar{\psi}\psi = m(\bar{\psi}_L\psi_R + \bar{\psi}_R\psi_L),$$

então podemos vê-lo como uma interação que transforma campos de mão direita em campos de mão esquerda e vice versa. Assim, ela pode ser vista da mesma forma que a constante de acoplamento α_S , e assim como esta última, pode variar com o momento. A massa é modificada quando correções de ordens mais altas são incluídas, quando ela se torna uma função do momento Q^2 [71].

A massa efetiva dos quarks fica menor conforme a energia aumenta, de forma análoga ao que acontece com a constante de acoplamento. Para avaliar objetos que variam dessa forma, é necessário um ponto de referência

$$\begin{aligned} \bar{m}_q &= m_q(1\text{GeV}) & \text{para } u, d, s; \\ \bar{m}_q &= m_q(m_q) & \text{para } c, b, t. \end{aligned}$$

No caso dos quarks mais leves, como sua massa é menor que 1 GeV, se usa este ponto de referência, já que esta é a energia mínima em que a liberdade assintótica começa a valer. As relações entre as massas de quarks de diferentes sabores são independentes do esquema de renormalização e podem ser fixadas pelo mecanismo de quebra espontânea da simetria quiral [71].

Na ausência da massa dos quarks, a QCD respeita a simetria quiral global, mas fenomenologicamente esta simetria não é respeitada [71]. Ela é espontaneamente quebrada pela

condensação do par quark-antiquark e os mésons do octeto pseudoescalar são os bósons de Goldstone, que não deveriam ser massivos. Entretanto, estes bósons adquirem massa pelo mecanismo de Higgs, que age como uma força externa que quebra explicitamente a simetria [71].

O valor absoluto (ou seja o valor “real”) das massas dos quarks pode ser estimado por diferentes métodos, como as regras de soma da QCD [79, 80], análise do decaimento do lépton τ [81, 82]; ou pela QCD na rede [83–85]. As massas determinadas destas maneiras são chamadas de massas de corrente.

1.2.13 Evidências da existência dos quarks

Em 1966, durante a XIII International Conference on High Energy Physics [86], em Berkeley, Califórnia, Richard Dalitz defende que várias evidências sugerem a existência de quarks [55]

- A existência de regularidades experimentalmente observadas nas propriedades das partículas criadas em aceleradores de alta energia;
- O fato de que colisões entre tipos diferentes de partículas são relacionadas;
- O fato de que as propriedades eletromagnéticas de diferentes mésons e bárions estão relacionadas;
- A razão experimental dos momentos magnéticos do próton e do nêutron;
- A aniquilação de um próton e um antipróton quase sempre produz três mésons.

Todos estes fatos convergem independentemente na mesma conclusão: Mésons e Bárions são constituídos pelas mesmas partículas elementares [55]. O conceito de convergência independente pode ser descrito de forma resumida como

The scientific community reaches conclusions by a pattern of independent convergence (a kind of intellectual triangulation), which is along with accurate prediction, one of the most powerful confidence-building patterns in scientific research.

(The Schools we need and why we don't have them, E.D. Hirsch Jr. [87])

e pode ser visto como uma evidência forte para a existência dos quarks. Ainda assim, o modelo de quarks não foi aceito imediatamente devido ao fato de que as cargas fracionárias que os quarks teriam nunca haviam sido observadas experimentalmente até então [55].

Na década de 1970, experimentos de espalhamento de elétrons no SLAC forneceram a evidência indireta da existência destas cargas fracionárias [88]. Nestes experimentos, elétrons com altas energias são disparados em alvos de prótons e sofrem espalhamento

pela troca de um fóton. O que se observou foi que os elétrons eram espalhados por objetos pontuais com carga fracionária dentro dos prótons, como previsto pelo modelo de quarks [55]. Mas, ainda que os quarks fossem atingidos por elétrons em altas energias, eles não eram arrancados do próton, como acontece no espalhamento do elétron pelo núcleo atômico, em que os prótons e nêutrons são violentamente arrancados do núcleo devido a fraca ligação entre eles [23]. Ou seja, quarks livres e isolados nunca foram observados. Quarks são mantidos dentro dos núcleons por forças muito fortes que os mantêm confinados, mas, ao mesmo tempo, os dados do espalhamento de elétrons indicam que os objetos que os espalham transferem energia e momento como se fossem partículas livres [55].

Além disso, quando a energia é grande o suficiente, o próton atingido se divide em fragmentos com altas energias, no processo chamado de espalhamento profundamente inelástico (*deep-inelastic scattering*), outra evidência da existência de partículas carregadas muito menores que o núcleon [54]. Como as forças que mantêm os quarks unidos em hádrons são muito grandes (apenas a longas distâncias), a energia para separá-los é muito grande. Assim, quando um quark dentro de um núcleon é atingido com energia suficiente para separá-lo dos outros quarks, um novo par quark-antiquark é criado. Neste processo, o antiquark se combina com o quark atingido e cria um méson, enquanto o quark criado se combina com os outros quarks do núcleon original [55]. Por isso, colisões em altas energias produzem muitos estados de ressonância, equivalentes à partículas com um tempo de vida curto [27]. Estes estados são observados em jatos de partículas (*particle jets*), onde os pares de quark-antiquark criados se recombinaem de várias maneiras e criam uma corrente de mésons e bárions [55]. A espectroscopia destes estados hadrônicos revelou uma ordem e uma simetria entre os hádrons que poderia ser interpretada em termos de representações do grupo de simetria $SU(3)$ [27].

Como já mencionado, outra evidência (indireta) para a existência dos quarks é o momento magnético anômalo dos núcleons. O caso do nêutron é o mais evidente, já que o nêutron não possui carga elétrica. Entretanto, seu momento magnético equivale ao de uma partícula com carga negativa, o que leva à conclusão de que ele é formado por partículas menores que têm carga elétrica. No caso do próton, seu momento magnético é maior do que seria caso a partícula fosse puntual [24, 55]. No fim dos anos 1960, experimentos de espalhamento de elétrons por hidrogênio e deutério, realizadas pelo grupo de Jerome Friedman, Henry Kendall e Richard Taylor no Stanford Linear Accelerator Center (SLAC) [45, 46] forneceram dados que demonstravam que os núcleons poderiam ser compostos por partículas menores com cargas fracionárias, em um experimento semelhante ao do grupo de Rutherford [24].

Aniquilação elétron-pósitron

Neste processo, um elétron e um pósitron colidem e se aniquilam em um estado virtual de um único fóton (Figura 1.19). Este fóton se transforma em um par de qualquer partícula-antipartícula com carga elétrica não nula (q) [54]. A seção de choque para a produção de hádrons nesse processo depende do número de maneiras que um fóton pode produzir um par quark-antiquark, e é proporcional ao número de cores, e a razão R das seções de choque σ de produção de partículas é dada por

$$R = \frac{\sigma(e^-e^+ \rightarrow \text{hádrons})}{\sigma(e^-e^+ \rightarrow \mu^-\mu^+)}, \quad (1.16)$$

e também deve ser proporcional ao número de cores dos quarks. A produção de hádrons nesse processo também depende da carga elétrica dos quarks, e por isso os dados experimentais deste processo confirmam a carga elétrica fracionária dos quarks [24].

A aniquilação elétron-pósitron em altas energias é a forma mais fácil de se estabelecer a existência de novos sabores de quarks. Quando a energia do sistema e^-e^+ passa do limite para a produção de hádrons contendo um novo sabor de quark, a razão (1.16) aumenta e apresenta um degrau naquela energia, como podemos ver na Figura 1.20¹⁰. Assim, uma vez que estes limites são ultrapassados, novos hádrons contendo novos sabores de quarks podem ser observados nos estados finais da colisão [24].

A seção de choque deste processo de aniquilação é dada por

$$\sigma(e^-e^+ \rightarrow \text{hádrons}) = \frac{4\pi\alpha_s^2}{3s} N_c \sum_{i=1}^{N_f} Q_i^2, \quad (1.17)$$

em que s é a energia total do centro de massa ao quadrado, Q_i é a carga do i -ésimo quark, N_f é o número de sabores e N_c é o número de cores. Ao considerarmos $N_c = 3$, a equação concorda com os dados experimentais [28]. Assim, a teoria só descreverá a natureza caso o número de quântico de cor seja introduzido.

¹⁰Esta figura não é um gráfico das equações (1.16) e (1.17), mas ilustra bem o processo descrito aqui.

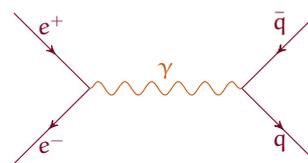


Figura 1.19: Aniquilação elétron-pósitron. (Figura elaborada pela autora.)

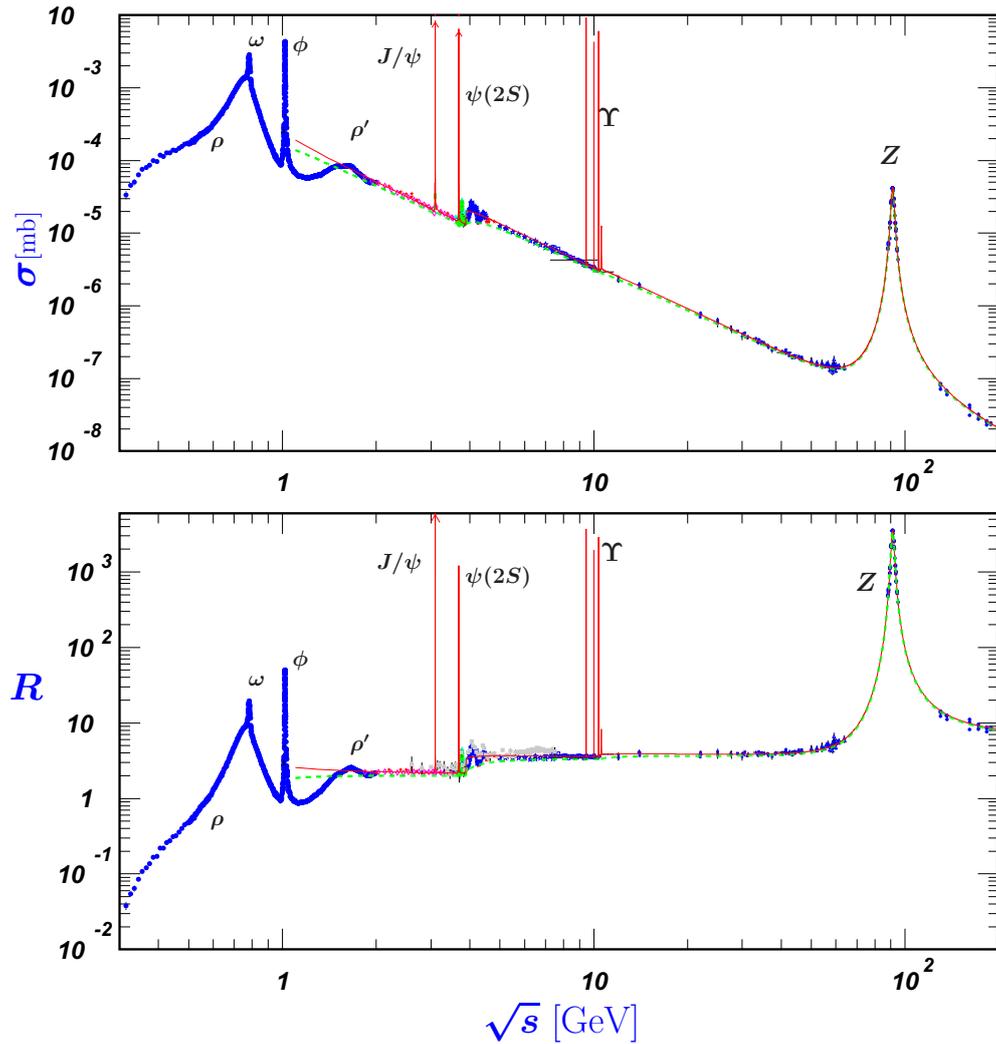


Figura 1.20: Em cima: Seção de choque para $e^-e^+ \rightarrow$ hádrons, Em baixo: Razão (1.16) para $e^-e^+ \rightarrow$ hádrons. Os picos em ambas as figuras estão relacionados aos limites para a produção do hádron especificado (Figura retirada de [53]).

Decaimento $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$

Pode-se calcular a taxa de decaimento total de $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ através de diagramas de Feynman de ordem mais baixa (em teoria de perturbação) (*Lowest Order Feynman diagram*),

$$\Gamma(\pi^0 \rightarrow 2\gamma) = N_c^2 (Q_u^2 - Q_d^2) \frac{\alpha^2 m_{\pi^0}^2}{64\pi^3 f_\pi^3}, \quad (1.18)$$

cujas variáveis estão definidas no Quadro 1.2.1. Experimentalmente, o valor desta taxa de decaimento é $\Gamma_{\text{exp}} = 4.48 \pm 0.33 \text{ eV}$ [28]. Considerando que temos todos os outros valores para calcular (1.18), podemos substituir $N_c = 1$, para o caso sem graus de liberdade de cor, obtemos $\Gamma(\pi^0 \rightarrow 2\gamma) = 0.84 \text{ eV}$, o que não explicaria os dados experimentais. Entretanto, a previsão teórica quando considerarmos $N_c = 3$ é de $\Gamma(\pi^0 \rightarrow 2\gamma) = 7.6 \text{ eV}$, valor muito próximo do que é obtido experimentalmente. Isto aponta que possivelmente quarks e glúons devem ter um novo número quântico, a carga de cor.

1.2.1

- $Q_u, Q_d \rightarrow$ Carga dos quarks u e d em unidades da carga do próton e;
- $Q_u = 2/3$
- $Q_d = -1/3$
- $m_{\pi^0} \rightarrow$ Massa do pion neutro;
- $\alpha = e^2/4\pi \rightarrow$ Constante de estrutura fina;
- $f_\pi = 91 \text{ MeV} \rightarrow$ Constante de decaimento do pión;
- $N_c \rightarrow$ Número de cores.

1.3 Diagrama de fases da QCD

Durante a década de 1970, logo após o modelo de quarks se estabelecer e os primeiros trabalhos sobre liberdade assintótica serem publicados, especulou-se que a matéria hadrônica teria um comportamento dividido em fases [77]. Um dos primeiros trabalhos a esboçar um diagrama de fases foi publicado em 1975 por N. Cabbibo e G. Parisi [89]. Este diagrama seria formado por duas fases: a fase hadrônica, onde quarks e glúons estariam confinados dentro de hádrons; e a fase do plasma de quarks e glúons (*Quark-Gluon Plasma - QGP*), com as partículas desconfiadas (Figura 1.21) [77]. No final da década de 1990 uma fase supercondutora de cor é adicionada ao diagrama, apesar de haverem trabalhos falando da possibilidade de tal fase desde a década de 1970 [90].

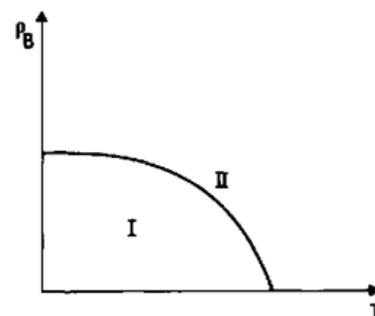


Figura 1.21: Primeiro diagrama de fases da QCD, retirado de [89].

A estrutura de fases da QCD é representada em um diagrama de fases (Figura 1.22) que geralmente tem como parâmetros a temperatura T e o potencial químico bariônico

μ_B (ou potencial químico dos quarks), que está relacionado à conservação do número bariônico [91]. Como o acoplamento da QCD tende à zero em temperaturas ou densidades muito grandes, quarks e glúons estariam desconfinados nestes regimes [92], formando o QGP em temperaturas altas e as fases supercondutoras de cor para temperaturas baixas e densidades altas.

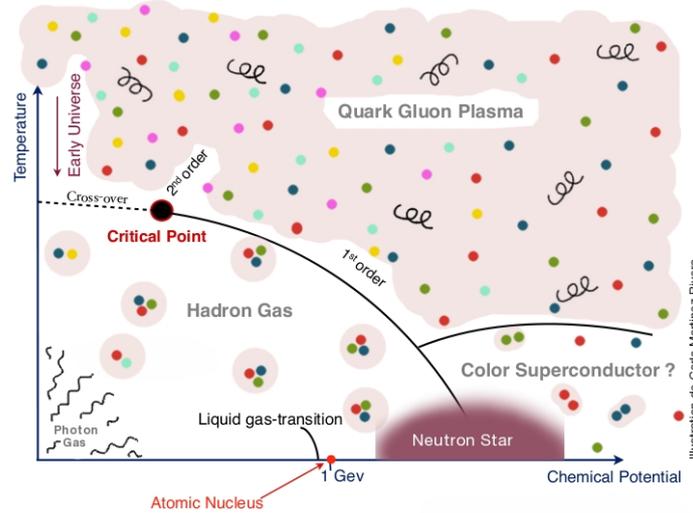


Figura 1.22: Diagrama de fases da QCD. Figura retirada de [93].

O estado fundamental da matéria nuclear está no ponto $(T, \mu_B)_0 = (0, 308)$ MeV, que marca o início da matéria densa [77] (ou seja, para a região com $\mu_B < 308$ MeV temos o vácuo). Este ponto também faz parte do limite de uma transição de fase de primeira ordem que termina num ponto crítico em $T \sim 15$ MeV [77]. Esta transição divide a fase de gás de hádrons para $\mu_B < 308$ MeV e uma fase de líquido hadrônico para $\mu_B > 308$ MeV [77]. Depois do ponto crítico estas duas fases se tornam indistinguíveis [92].

A fase hadrônica está na região $T \lesssim 160$ MeV e $\mu_B \lesssim 350$ MeV [92] e a ordem da transição desta fase para as fases sem confinamento depende do número de sabores de quarks considerado e de suas massas.

Há uma linha de transição de fase de primeira ordem que separa o QGP da fase hadrônica até o ponto crítico $(T, \mu_B) \sim (160, 240)$ MeV, ponto em que a transição torna-se um *crossover* para valores menores de μ_B [92].

A ordem da transição de fase quiral em temperaturas finitas e $\mu_B \lesssim 350$ MeV pode ser deduzida a partir de argumentos de simetria, e depende do número de sabores leves considerado. Quando se considera o quark s pesado (acima do limite Λ_{QCD}), a transição de fase quiral é de segunda ordem quando $m_u = m_d = 0$ e torna-se um *crossover* suave quando estes quarks adquirem massa. Se o quark s for leve, a transição será de

primeira ordem até o ponto crítico. Dados da QCD na rede indicam que essa transição é provavelmente um *crossover* para $\mu_B = 0$ [77].

O *crossover*, mesmo não sendo uma transição de fase real, acontece rápido o suficiente para que possamos definir uma temperatura de transição [77]. Pode-se definir tal temperatura ao calcularmos o máximo da susceptibilidade quiral, que é proporcional à curvatura do condensado de quarks, e o valor encontrado é de $T \sim 170$ MeV. A susceptibilidade relacionada ao *loop* de Polyakov, que é o parâmetro de ordem da transição de desconfinamento, tem um máximo na mesma temperatura. Assim, a transição quiral e a de desconfinamento coincidem para μ_B pequeno [77].

Para regimes com potencial químico alto e temperaturas baixas, a transição de fase provavelmente é de primeira ordem [77]. Para potenciais químicos acima desta transição, temos as fases supercondutoras de cor. Existem várias destas fases, que dependem das simetrias e dos parâmetros de ordem para a condensação dos pares de Cooper [92]. Dentre estas fases, podemos citar [77]

- **CFL - Color-flavor locked condensate:** Os quarks u , d e s formam pares de Cooper num condensado em potenciais químicos muito altos;
- **2SC:** Em densidades mais baixas os quarks s são suprimidos por sua massa, então apenas os quarks u e d formam pares.

A fase 2SC pode ser substituída parcialmente ou totalmente pelas fases [77]

- **CFL-K:** Supercondutor de cor com três sabores e káons condensados;
- **LOFF phase:** Supercondutor de cor cristalino.

O diagrama de fases pode ser generalizado de diversas maneiras, dependendo da situação física que se deseja descrever, como ilustrado na Figura 1.23. Como há um potencial químico para cada quantidade conservada, o diagrama pode ser construído com diversos tipos de potenciais químicos, podendo inclusive ter mais que duas dimensões [77]. Pode-se, por exemplo, se utilizar um potencial químico μ_f independente para cada sabor de quark. Para dois sabores de quarks outra possibilidade é definir o potencial químico $\mu_B = \mu_u + \mu_d$ e o potencial químico de isospin $\mu_I = \mu_u - \mu_d$, o que possibilita que novas fases com condensação de pions apareça quando $\mu_I \geq m_\pi$. Também é possível adicionar novos eixos para cada massa de quark [4].

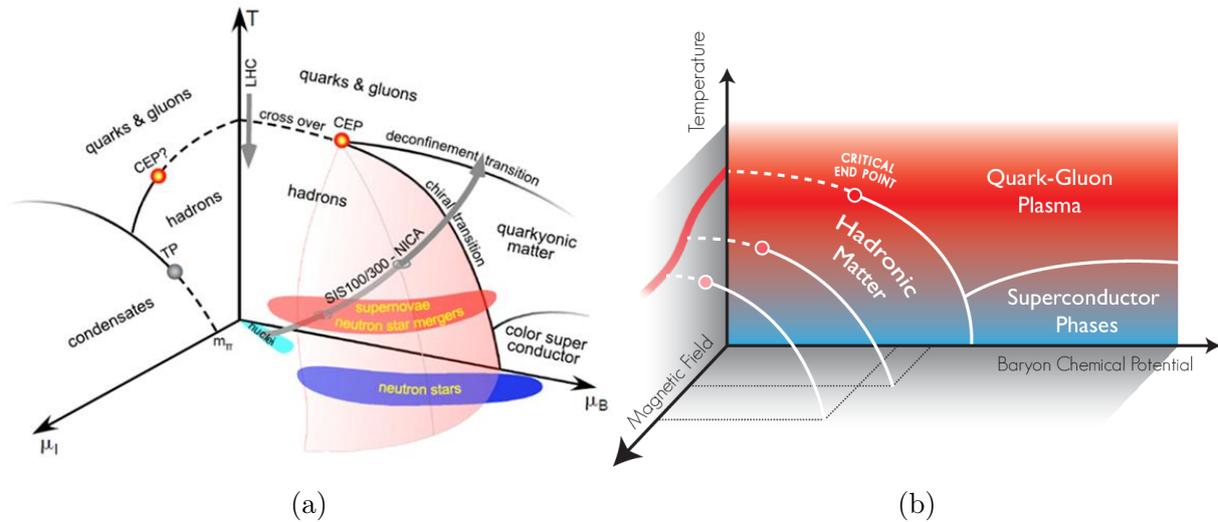


Figura 1.23: Diagramas de fase da QCD. (a) Retirado de [94]; (b): Retirado de [95].

O diagrama de fase é apenas uma representação esquemática baseada em argumentos teóricos, com poucos resultados exatos extraídos da QCD. Assim, cálculos utilizando modelos efetivos poderiam nos dar uma compreensão melhor de como seria tal diagrama.

At the same time, it makes obvious that the issue is not at all settled. Note that all phase diagrams shown in the figure are only “schematic”, i.e., educated guesses, based on certain theoretical results or arguments. In this situation, and since exact results from QCD are rather limited, model calculations may provide a useful tool to test the robustness of these ideas and to develop new ones. (BUBALLA, 2005, p. 205 [77])

1.4 Teorias Efetivas e Modelos Efetivos

Como já vimos, a QCD é a teoria ‘fundamental’ das interações fortes, ou seja, é a teoria que descreve os mais variados fenômenos que envolvem a força forte, desde a formação dos núcleos dos átomos até a mecânica de estrelas de nêutrons. Entretanto, esta abrangência na descrição de fenômenos pode ser uma desvantagem dependendo do que esperamos alcançar com a teoria. Como também já mencionamos, devido ao valor muito alto do acoplamento da QCD, uma abordagem perturbativa da teoria só é possível para altas energias e outros métodos são necessários quando o sistema estudado não está dentro deste limite. Além da LQCD, pode-se recorrer às teorias efetivas de campos (*Effective Field Theories* - EFT) ou aos modelos efetivos. Uma breve descrição destes métodos será dada a seguir, mas uma abordagem e discussão mais aprofundadas fogem do escopo deste trabalho. Para uma melhor compreensão destes assuntos, os trabalhos de [96], [97], [98], [99] e [100] podem ser consultados.

1.4.1 Teorias fundamentais

Uma teoria fundamental pode ser aplicada em um amplo espectro de fenômenos, unificando vários deles em um grupo coeso. A QCD, por exemplo, descreve as propriedades e interações entre hádrons; as estrelas de nêutrons; as condições iniciais do universo; entre outros fenômenos. Entretanto, teorias nem sempre dão um “entendimento local” do fenômeno estudado, como se estivéssemos o vendo de longe [100], geralmente necessitando de um tratamento numérico.

Theories produce ‘global understanding’ by fitting an object or system under consideration into a bigger framework, but tend to fall short in their efforts to produce local understanding. (HARTMANN, 2001, p. 267. [100])

Ainda assim, teorias podem restringir as suposições feitas em modelos já estabelecidos e sugerir novos modelos.

A QCD como uma teoria ‘fundamental’

Até o desenvolvimento da QCD, haviam apenas modelos fenomenológicos que descreviam as interações fortes. Dentre estes modelos, os principais são o modelo da gota líquida (*liquid drop model*) e o modelo nuclear de camadas (*nuclear shell model*). O modelo da gota líquida ajuda a entender a fissão nuclear [101], mas não consegue demonstrar porque algumas configurações nucleares são mais estáveis que outras. Este último fenômeno é melhor explicado pelo modelo nuclear de camadas. Além destes dois modelos, vários modelos foram desenvolvidos para descrever as partículas constituintes dos núcleos, ou seja, prótons, nêutrons e píons. Dentre estes estão os modelos de sacola (*bag models*) [13], os modelos quirais de quarks [12] [14, 15] [10, 11] e regras de soma derivadas da matriz S [102].

Entretanto, com o estabelecimento da QCD na década de 1970, apenas fenômenos em altas energias podiam ser descritos pela nova teoria devido ao valor da constante de acoplamento da mesma. A física de baixas energias, do domínio da física nuclear e de hádrons, continuou a se desenvolver de maneira quase independente da QCD [100], descrevendo os fenômenos a partir de modelos efetivos e EFTs. Enquanto EFTs podem ser obtidas diretamente a partir da QCD, modelos efetivos levam em conta apenas alguns aspectos da teoria.

1.4.2 Modelos Efetivos

Uma forma simples de definir um modelo efetivo é como um conjunto de suposições sobre o sistema que se quer descrever [100]. Enquanto algumas suposições sobre esse sistema podem ser inspirados pela teoria fundamental, outras suposições e parâmetros

são colocados *ad hoc* ou a partir de dados experimentais.

Modelos fenomenológicos se inspiram nas características de pelo menos uma teoria e as adaptam para descrever o fenômeno ou o sistema. Estas teorias não precisam necessariamente estar relacionadas à teoria que o modelo tenta simplificar, como é o caso do modelo NJL, que é inspirado na teoria BCS, mas descreve o comportamento de partículas e interações distintas (mas semelhantes) dos supercondutores.

Na QCD em baixas energias, os fenômenos característicos mais relevantes são o confinamento e a quebra dinâmica da simetria quiral. Modelos efetivos da QCD geralmente descrevem uma destas características.

O confinamento pode ser descrito pelos modelos de sacola (*bag models*), sendo o primeiro e mais utilizado o *MIT Bag Model* [13]. Nestes modelos, o confinamento é incluído ao se restringir o movimento dos quarks em uma região finita do espaço - a sacola (*bag*). Para isto, condições de contorno são impostas à função de onda do quark, que se presume que é uma solução da equação de Dirac livre. Assim, este modelo não tem como base uma teoria quântica de campos (QFT - *Quantum Field Theory*), mas sim uma teoria quântica relativística, que é mais simples para descrever o fenômeno.

A quebra dinâmica da simetria quiral geralmente é descrita por modelos quirais. Entre eles, se destacam o modelo Nambu–Jona-Lasinio e o modelo de Skyrme. O primeiro, que será descrito com mais detalhes nos próximos capítulos, leva em conta apenas os graus de liberdade dos quarks. O modelo de Skyrme [10, 11] descreve os hádrons em termos de campos escalares e pseudoescalares de mésons, sem graus de liberdade dos quarks. Boa parte destes modelos foi desenvolvida antes da QCD, e as relações entre as massas dos hádrons foram derivadas apenas a partir de suposições da simetria quiral, que posteriormente foram confirmadas em experimentos. O melhor exemplo disto é a relação de Gell-Mann–Oakes–Renner [103], que relaciona as propriedades do pión com propriedades dos quarks.

O estudo de modelos efetivos é importante pois estes produzem um entendimento local do fenômeno estudado, já que levam em conta apenas a física “essencial” para explicar o fenômeno em questão, a partir de poucas suposições e poucos parâmetros [100]. Por isso, modelos são mais fáceis de lidar matematicamente se comparados com a teoria fundamental e produzem resultados de maneira mais eficiente.

Entretanto, modelos efetivos têm limitações, já que as suposições feitas pelos modelos podem não ter uma fundamentação teórica muito profunda. Além disso, muitas vezes os modelos não têm uma relação dedutiva direta com a teoria. Seus parâmetros podem ser derivados da teoria, mas com frequência são retirados de dados experimentais, sem um significado teórico. Outro problema é que suposições de um modelo podem contradizer suposições de outros modelos. Entre os modelos efetivos da QCD, o *MIT Bag Model* viola

a simetria quiral, enquanto o NJL não descreve o confinamento¹¹.

1.4.3 Teoria Efetiva de Campos

Ao contrário de uma teoria fundamental, uma EFT só leva em conta os graus de liberdade relevantes para descrever o sistema estudado em uma dada escala de energia [100]. Assim, se o fenômeno estudado está relacionado à como núcleons interagem em baixas energias, os graus de liberdade da teoria serão os dos píons e núcleons, já que apenas estas partículas tomam parte nos processos neste regime. Assim, EFTs são aproximações (ou simplificações) da teoria fundamental em questão [108], o que torna os cálculos mais tratáveis e o entendimento intuitivo do fenômeno mais fácil [100].

O conceito de EFTs foi sugerido inicialmente em 1979 por S. Weinberg [109, 110], quando o desenvolvimento de técnicas de grupo de renormalização permitiram que teorias tivessem alguns infinitos. Até então, se uma teoria apresentasse resultados infinitos (ou divergentes), esta era descartada ou tida apenas como uma solução provisória e sem resultados confiáveis. As técnicas de grupo de renormalização permitiram que estes infinitos fossem tratados, o que reabilitou teorias não renormalizáveis [100].

Teorema do desacoplamento

Outro fator que contribuiu para o desenvolvimento das EFTs foi a proposição do teorema do desacoplamento (*Decoupling theorem*) por Appelquist e Carazzone em 1975 [112]. Segundo este teorema, considerando dois sistemas acoplados com escalas de energia m_1 e m_2 , $m_1 < m_2$, descritos por uma teoria renormalizável, sempre há uma condição de renormalização em que os efeitos físicos na escala de energia mais alta m_2 possam ser incluídos de maneira efetiva na teoria de escala mais baixa m_1 pela mudança dos parâmetros da teoria correspondente. Assim, há uma EFT numa escala m_1 que deixa de valer quando se aproxima de m_2 . Com isso, a física das energias mais altas pode ser incluída nos parâmetros de uma EFT não renormalizável, que só será válida até determinado nível de energia e este limite superior de energia acabaria com os infinitos indesejados [98].

Uma consequência interessante deste teorema é o fato das escalas de energias mais

¹¹O confinamento pode ser introduzido no modelo NJL através de um *loop* de Polyakov [104–107], mas aqui estamos considerando o modelo como ele foi proposto originalmente.

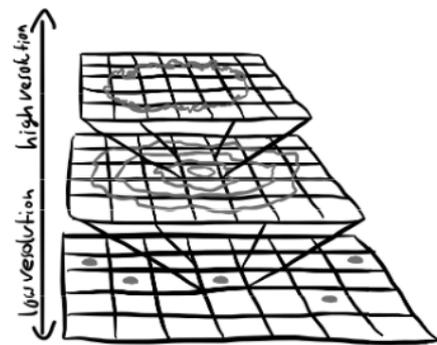


Figura 1.24: “Torre de EFTs” (Figura retirada de [111]).

altas se desacoplarem das escalas de energia mais baixa. Isso seria como se existisse um conjunto de “domínios quase autônomos” (*quasi-autonomous domains*) [100], cada um descrito por uma EFT que só leva em conta as partículas e interações relevantes para a sua escala de energia, como ilustrado na Figura 1.24.

EFTs compartilham papéis tanto com modelos quanto com teorias fundamentais. Da mesma forma que um modelo efetivo, as EFTs fornecem um entendimento local do fenômeno, já que levam em conta apenas os graus de liberdade relevantes para o fenômeno descrito, tornando-as relativamente mais fáceis de lidar. Porém, uma EFT representa uma parte de um quadro maior, que é a teoria, da qual esta é derivada [100]. Assim, EFTs ajudam a fazer previsões e testar a teoria. Entretanto, só é possível derivar uma EFT se as escalas de energia se separam bem.

1.4.4 Teoria de Perturbação Quiral

A Teoria de Perturbação Quiral (*Chiral Perturbation Theory* - ChPT) é uma teoria fenomenológica da QCD que lida com os fenômenos de hádrons em baixas energias, ou seja, na fase hadrônica, onde a liberdade assintótica não pode ser aplicada [71]. Esta teoria depende apenas das simetrias da QCD; da forma como o vácuo da QCD quebra a sua simetria; e de seus graus de liberdade relevantes [4]. Inicialmente se assume que os mésons escalares leves do octeto pseudoescalar são os bósons de Goldstone não massivos, que são produzidos pela quebra espontânea da simetria quiral. A massa dos quarks gerada pela força eletrofraca age como uma perturbação externa que quebra a simetria e produz a massa dos bósons de Goldstone. Os píons e os káons são tratados como campos assintóticos que são induzidos pela condensação de pares de quarks [71].

A ChPT é uma série infinita de potências dos campos dos mésons Φ e de $\partial_\mu \Phi$, e por isso é uma teoria não renormalizável, mas pode se tornar finita se tomada até uma dada ordem. Essa teoria reproduz bem a dinâmica dos mésons em baixas energias [71].

Pela expansão da ChPT, as massas dos quarks leves podem ser expandidas quantitativamente [75]

$$\begin{aligned} 1,5\text{MeV} &\leq m_u \leq 4\text{ MeV}, \\ 4\text{MeV} &\leq m_d \leq 8\text{ MeV}, \\ 80\text{MeV} &\leq m_s \leq 155\text{ MeV}, \end{aligned}$$

que são massas menores que Λ . Para os quarks pesados, temos

$$m_c = 1 \sim 1,5\text{ GeV},$$

$$m_b = 4 \sim 4,5 \text{ GeV},$$
$$m_t \sim 180 \text{ GeV}.$$

1.4.5 Relações entre teoria, modelo efetivo e EFT

Nem sempre é possível se deduzir um modelo a partir da teoria fundamental, mas mesmo assim teorias podem inspirar modelos: uma característica da teoria é escolhida e adaptada a um quadro teórico mais simples. Ainda assim, o modelo pode servir para sondar como a teoria fundamental se comporta levando em conta apenas um aspecto dela, o que pode gerar mais entendimento da mesma.

Pode ser difícil de se distinguir um modelo efetivo de uma EFT, já que as vezes uma EFT pode ser parecida com um modelo desenvolvido antes. Além disso, uma EFT pode ser tratada como um modelo efetivo quando não há um esforço para se calcular as constantes de acoplamento e as massas renormalizadas de primeiros princípios [100].

Most important are the cases where theories, models and EFTs complement each other. The establishment of dynamical chiral symmetry breaking as a feature of QCD, for example, resulted from the interaction of all three approaches. Lattice gauge calculations suggested models, consequences of models were used to derive an EFT, which in turn inspired other models and allowed for analytical results. It is this interaction between various tools that makes scientific research so exciting. (HARTMANN, 2001, p. 267. [100])

Capítulo 2

O Modelo Nambu–Jona-Lasinio

O modelo Nambu–Jona-Lasinio (NJL) foi proposto em 1961 por Yoichiro Nambu e Giovanni Jona-Lasinio como uma teoria dinâmica de partículas elementares [14, 15], que descrevia núcleons interagindo a partir da troca de mésons numa interação efetiva de dois corpos. Com o surgimento da QCD, o modelo NJL foi deixado de lado, já que o confinamento não é descrito por esta teoria. Entretanto, na metade da década de 1970 a teoria é reinterpretada como um modelo efetivo de baixas energias em que quarks interagem através de uma interação local de quatro pontos, inicialmente no trabalho de Eguchi e Sugawara [113]. Além deste, foram importantes os trabalhos de Kleinert [114]; Volkov [115]; e Hatsuda e Kunihiro [116].

Como o modelo NJL foi proposto antes da formulação da QCD, o fenômeno do confinamento dos quarks não era conhecido. Entretanto, já haviam indicações da existência da PCAC, e, assim, da conservação e quebra da simetria quiral. Por isso, uma teoria mais simples que descrevesse tal fenômeno era necessária. Como já mencionado, a proposta inicial de Nambu e Jona-Lasinio era descrever a interação entre núcleons. Para isso, os autores observaram e estabeleceram uma analogia entre o gap de massa no espectro de Dirac do núcleon e o gap de energia da teoria da supercondutividade de Bardeen, Cooper e Schrieffer (Teoria BCS):

The scheme is motivated by the observation of an interesting analogy between the properties of Dirac particles and the quasi-particle excitations that appear in the theory of superconductivity, which was originated with great success by Bardeen, Cooper, and Schrieffer [117], and subsequently given an elegant mathematical formulation by Bogoliubov [118]. The characteristic feature of the BCS theory is that it produces an energy gap between the ground state and the excited states of a superconductor, a fact which has been confirmed experimentally. (NAMBU E JONA-LASINIO, 1961, p. 345 [14])

2.1 Simetrias da QCD e o NJL

Apesar de não descrever o confinamento, o modelo NJL incorpora a simetria quiral da QCD de forma muito mais simples do que na teoria fundamental. Assim, este modelo é bastante útil na descrição desta simetria, assim como na descrição da quebra dinâmica da mesma¹ e todos os fenômenos associados à isso. De forma particular, uma das características do modelo é a geração dinâmica da massa dos férmions a partir da quebra desta simetria [8]. Como o NJL descreve as simetrias da QCD, algumas relações que são consequências apenas destas simetrias também devem ser mantidas pelo modelo, como a Relação de Goldberger-Treiman [119] e a Relação de Gell-Mann–Oakes–Renner (GOR) [103]. De fato, estas relações podem ser derivadas explicitamente a partir da lagrangiana do modelo.

Como já mencionado, uma consequência da quebra espontânea de uma simetria é o surgimento de bósons de Goldstone, e no caso da simetria quiral para dois sabores de quarks estes bósons são os píons. Isto também é observado no modelo NJL, o que é uma de suas principais vantagens [4]. Outra consequência da quebra dinâmica da simetria quiral no modelo é a geração de um condensado de quarks não nulo no vácuo.

2.2 Problemas do modelo

Como o NJL é um modelo efetivo, existem limitações e problemas em sua aplicação. Dentre estes, os principais são

- Ausência de Confinamento;
- O modelo é não renormalizável.

Cada um destes problemas e suas consequências serão brevemente discutidos a seguir.

2.2.1 Ausência de confinamento

O confinamento é uma das características mais peculiares e importantes da QCD, como já discutido. Este fenômeno, apesar de não ser totalmente compreendido, possivelmente é responsável pelo fato de nunca podermos observar quarks isolados. Assim, o fato do modelo NJL não apresentar confinamento é uma limitação. Entretanto, o modelo só é válido para baixas energias (abaixo de Λ_{QCD}), ou seja, os fenômenos estudados estão abaixo do limite em que isso passa a ser mais relevante [8].

¹“A quebra espontânea de uma simetria por um campo dinamicamente gerado às vezes é chamado de quebra dinâmica da simetria.” (ZEE, 2010, [29])

Ainda assim, consequências da ausência do confinamento no modelo NJL podem aparecer no cálculo das funções de polarização dos mésons estudados, que podem adquirir uma parte imaginária para $q^2 > 4M^2$, onde q é o quadrimomento do méson. Ou seja, mésons com massa maior que $2M$ têm uma largura finita, e desta forma se tornam instáveis e podem decair em um par quark-antiquark mesmo quando tais decaimentos não são observados experimentalmente ou previstos pela teoria. No caso do pión no vácuo, isto não é observado [77], mas quando estamos trabalhando com temperaturas ou campos magnéticos finitos isso pode se tornar um problema a ser contornado, como veremos com mais detalhes no Capítulo 5.

2.2.2 Infinitos

Como no modelo NJL as interações entre os quarks são pontuais, integrais divergentes podem surgir, que não podem ser remediadas pelo processo de renormalização. Desta forma, o modelo NJL é uma teoria não renormalizável. Por isso, uma parte fundamental do modelo é a especificação de um esquema de regularização, o que define a escala da teoria [8]. Esta escala é definida pelo *cutoff* Λ no momento dos quarks, que de uma maneira rudimentar pode ser vista como uma implementação “artificial” da liberdade assintótica, já que Λ suprime a interação entre quarks que tem uma transferência de momento muito grande, agindo de forma similar à variação do acoplamento [8].

Como será visto no Capítulo 5, existem vários esquemas de regularização, mas pode-se destacar que estes esquemas podem ser definidos a partir de duas formas diferentes de *cutoff*.

Sharp cutoff A escala de momento Λ tem um valor fixo, e pode ser interpretada como um limite superior (ou inferior) para a validade do modelo;

Smooth cutoff Também pode ser chamado de fator de forma $F(\mathbf{p})$, e, como depende do momento, replica de forma grosseira a liberdade assintótica [4]

$$F(\mathbf{p}) = \frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 + \mathbf{p}^2}. \quad (2.1)$$

2.2.3 Equação de Gap

Como já mencionamos, o modelo NJL é uma analogia à teoria BCS para supercondutividade. Uma das principais características desta teoria é o surgimento de um gap de energia ϕ entre o estado fundamental e os estados excitados de um supercondutor. Isto se dá pelo fato de que a interação atrativa entre os elétrons produz pares de elétrons com

momentos opostos próximos da superfície de Fermi, chamados de pares de Cooper, e é necessária uma quantidade finita de energia para quebrar essa correlação [14]. Nambu e Jona-Lasinio sugeriram que, em analogia ao fato deste gap de energia ϕ no supercondutor ser criado por uma interação, a massa de uma partícula de Dirac seria criada devido à interação entre *férmions não vestidos*. Enquanto uma quasi-partícula no supercondutor é uma mistura de *elétrons não vestidos* com cargas elétricas opostas mas spin igual, uma partícula de Dirac massiva seria uma mistura de *férmions não vestidos* com quiralidades opostas, mas mesma carga ou número fermiônico. Sem o gap ϕ ou a massa m , estas partículas seriam autoestados da carga elétrica ou da quiralidade [14].

Podemos descrever o vácuo da QCD como um meio cheio de flutuações quânticas responsáveis pela geração não perturbativa das massas dos quarks. Quando a matéria está em um estado quente e denso os quarks ficam livres, e por isso esperamos que em algum ponto aconteça uma transição de fase de um estado com quarks confinados e pesados para uma fase com quarks leves. Chamamos esta transição de transição de fase quiral. Quando consideramos temperaturas e potenciais químicos finitos, o parâmetro de ordem (aproximado) desta transição de fase é o condensado de quarks $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$, que tem um valor de aproximadamente $(0.24 \text{ GeV})^3$ no vácuo [120].

Este fato de que o estado fundamental da QCD tem uma condensação de pares quark-antiquark é análogo ao fato de que o estado fundamental de um supercondutor do tipo BCS tem condensação dos elétrons em pares de Cooper [121]. Assim, da mesma forma que o gap de energia em supercondutores depende do par de Cooper, no nosso caso, a equação de gap depende do condensado de quarks $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$.

2.3 Lagrangiana do modelo

A lagrangiana original do modelo NJL tinha campos de núcleons ψ com uma interação de quatro pontos e com simetria quiral. No espaço de Minkowski, esta lagrangiana é

$$\mathcal{L}_{\text{NJL}} = \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi + G \left[(\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5\vec{\tau}\psi)^2 \right], \quad (2.2)$$

em que m é a massa nua dos núcleons, τ são as matrizes de Pauli e G é uma constante de acoplamento do modelo. Esta lagrangiana foi construída para ter simetria $\text{SU}_V(2) \otimes \text{SU}_A(2) \otimes \text{U}_V(1) \otimes \text{U}_A(1)$, mas posteriormente a simetria $\text{U}_A(1)$ foi excluída pela introdução do termo de 't Hooft [8]. O canal de interação núcleon-antinúcleon desta teoria é atrativo, e, como na teoria BCS, é responsável pela criação de análogos aos pares de Cooper. A auto-energia gerada por essa interação gera uma massa efetiva muito maior que a massa nua m dos núcleons, que permanece alta mesmo com $m = 0$. Assim

aparecem excitações coletivas de núcleons-antinúcleons que são leves e, no limite quiral, não têm massa [77]. Tais excitações podem ser associadas aos píons, que são os bósons de Goldstone da teoria.

Quando reinterpretada para dois sabores de quark, a lagrangiana do modelo NJL é

$$\mathcal{L}_{\text{NJL}}(x) = \bar{\psi}(x)(i\not{\partial} - \hat{m})\psi(x) + G \left\{ [\bar{\psi}(x)\psi(x)]^2 + [\bar{\psi}(x)i\gamma_5\vec{\tau}\psi(x)]^2 \right\}, \quad (2.3)$$

onde

$$\hat{m} = \begin{pmatrix} m_u & 0 \\ 0 & m_d \end{pmatrix}, \quad (2.4)$$

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_u \\ \psi_d \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

e $\vec{\tau}$ são as matrizes de Pauli.

2.3.1 Simetrias

Se considerarmos o limite quiral para a lagrangiana (2.3) [8],

$$\mathcal{L}_{\text{chiral}}^{(1)} = \bar{\psi}i\not{\partial}\psi + G \left[(\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5\vec{\tau}\psi)^2 \right], \quad (2.6)$$

podemos ver que esta é invariante sob a simetria $SU_A(2)$

$$\psi \rightarrow \exp\left(-\frac{i\vec{\tau}\cdot\theta}{2}\gamma_5\right)\psi, \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}\exp\left(-\frac{i\vec{\tau}\cdot\theta}{2}\gamma_5\right). \quad (2.7)$$

Ao substituírmos (2.7), podemos reescrever o bilinear $\bar{\psi}\psi$ como

$$\begin{aligned} \bar{\psi}\psi &\rightarrow \left[\bar{\psi}\exp\left(-\frac{i\vec{\tau}\cdot\theta}{2}\gamma_5\right) \right] \left[\exp\left(-\frac{i\vec{\tau}\cdot\theta}{2}\gamma_5\right)\psi \right] \\ \bar{\psi}\psi &\rightarrow \bar{\psi}\exp(-i\vec{\tau}\cdot\theta)\psi, \end{aligned} \quad (2.8)$$

e ao reescrevermos a exponencial como

$$\exp(-i\vec{\tau} \cdot \theta) = \cos \theta - (i\gamma_5 \vec{\tau} \cdot \theta) \sin \theta, \quad (2.9)$$

o bilinear fica

$$\bar{\psi}\psi \rightarrow (\bar{\psi}\psi) \cos \theta - (\bar{\psi}i\gamma_5 \vec{\tau} \cdot \hat{\theta}\psi) \sin \theta \quad (2.10)$$

Da mesma forma, podemos substituir (2.7) no bilinear $(\bar{\psi}i\gamma_5 \tau_i \psi)$ e ficaremos com

$$(\bar{\psi}i\gamma_5 \tau_i \psi) \rightarrow (\bar{\psi}i\gamma_5 \tau_i \psi) + (\bar{\psi}\psi) \hat{\theta}_i \sin \theta - (\bar{\psi}i\gamma_5 \vec{\tau} \cdot \hat{\theta}\psi) \hat{\theta}_i (1 - \cos \theta), \quad (2.11)$$

com $\hat{\theta} = \theta_i / |\hat{\theta}|$.

Podemos reescrever cada termo de interação como

$$\begin{aligned} (\bar{\psi}\psi)^2 &\rightarrow [(\bar{\psi}\psi) \cos \theta - (\bar{\psi}i\gamma_5 \vec{\tau} \cdot \hat{\theta}\psi) \sin \theta]^2; \\ &= (\bar{\psi}\psi)^2 \cos^2 \theta - (\bar{\psi}\psi) (\bar{\psi}i\gamma_5 \tau_i \psi) 2 \sin \theta \cos \theta + (\bar{\psi}i\gamma_5 \tau_i \psi)^2 \sin^2 \theta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\bar{\psi}i\gamma_5 \tau_i \psi)^2 &\rightarrow [(\bar{\psi}i\gamma_5 \tau_i \psi) + (\bar{\psi}\psi) \hat{\theta}_i \sin \theta - (\bar{\psi}i\gamma_5 \vec{\tau} \cdot \hat{\theta}\psi) \hat{\theta}_i (1 - \cos \theta)], \\ &= (\bar{\psi}\psi)^2 \sin^2 \theta + (\bar{\psi}\psi) (\bar{\psi}i\gamma_5 \tau_i \psi) 2 \sin \theta \cos \theta + (\bar{\psi}i\gamma_5 \tau_i \psi)^2 \cos^2 \theta. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Substituindo nos termos de interação de (2.6),

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_{\text{int}} &= G \left\{ (\bar{\psi}\psi)^2 \cos^2 \theta - (\bar{\psi}\psi) (\bar{\psi}i\gamma_5 \tau_i \psi) 2 \sin \theta \cos \theta + (\bar{\psi}i\gamma_5 \tau_i \psi)^2 \sin^2 \theta \right. \\ &\quad \left. + (\bar{\psi}\psi)^2 \sin^2 \theta + (\bar{\psi}\psi) (\bar{\psi}i\gamma_5 \tau_i \psi) 2 \sin \theta \cos \theta + (\bar{\psi}i\gamma_5 \tau_i \psi)^2 \cos^2 \theta \right\}, \\ &= G \left\{ (\bar{\psi}\psi)^2 [\cos^2 \theta + \sin^2 \theta] + (\bar{\psi}i\gamma_5 \tau_i \psi)^2 [\sin^2 \theta + \cos^2 \theta] \right\}, \\ &= G \left[(\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5 \tau_i \psi)^2 \right] = \mathcal{L}_{\text{int}}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

ou seja, a lagrangiana é invariante sob as transformações (2.7) do $SU_A(2)$.

Este capítulo tem como objetivo fazer apenas uma breve introdução sobre o modelo NJL, já que pretendemos estudá-lo de forma mais aprofundada no Capítulo 3, onde consideraremos sua formulação no $SU(3)$.

Capítulo 3

Modelo Nambu–Jona-Lasinio no $SU(3)$

3.1 O Modelo Nambu–Jona-Lasinio no $SU(3)$

Neste capítulo, nos concentraremos no estudo do modelo NJL com três sabores de quark: u , d e s , já que são tais quarks que estão presentes em fenômenos de baixas energias (abaixo de 1GeV). Quando proposto por Nambu e Jona-Lasinio, o modelo pretendia descrever apenas dois núcleons, então seu grupo de simetria no espaço de sabores era o $SU(2)$. Assim, é necessária uma reestruturação do modelo para representar o $SU(3)$. Isto foi feito inicialmente por Ebert e Reinhardt [122]; Bernard, Jaffe e Meissner [123]; e Hatsuda e Kunihiro [124], todos em 1987. Além destes, também foram importantes os trabalhos de Reinhardt e Alkofer [125], de 1988; de Takizawa, Kunihiro e Kubodera [126]; e de Klimt, Lutz, Vogl e Weise [127], ambos de 1990.

O quark *strange* é peculiar, já que sua massa ($m_s \simeq 93.4_{-3.4}^{+8.6}\text{MeV}$ [53]) é pequena se comparada ao limite Λ_{QCD} , mas grande quando comparada às massas dos quarks *up* e *down*. Assim, não é mais possível considerar as massas de todos os quarks do modelo iguais no limite em que isso era possível no $SU(2)$, e como consequência, alguns aspectos de simetria do modelo são alterados. A simetria $SU(3)$ agora é explicitamente quebrada, além da simetria $U_A(1)$, que é quebrada pela anomalia axial. A mistura destes dois elementos tem uma influência distinta na dinâmica do sistema: enquanto a quebra da simetria $SU(3)$ suprime a mistura de sabor, a anomalia axial a potencializa [121].

3.2 Densidade de Lagrangiana

A densidade de lagrangiana do modelo NJL com $N_f = 3$ e determinante de 't Hooft, em coordenadas Euclidianas¹, é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{NJL}} = & \bar{\psi}(-i\mathcal{D} + \hat{m})\psi - G \sum_{\alpha=0}^8 [(\bar{\psi}\lambda_\alpha\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5\lambda_\alpha\psi)^2] \\ & + K\{\det[\bar{\psi}(1 + \gamma_5)\psi] + \det[\bar{\psi}(1 - \gamma_5)\psi]\}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

onde G é a constante de acoplamento de interação; K é a constante de acoplamento da interação de seis pontos; ψ são os campos fermiônicos, dados por

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_u \\ \psi_d \\ \psi_s \end{pmatrix}; \quad (3.2)$$

\hat{m} é a matriz de massa de corrente dos quarks,

$$\hat{m} = \begin{pmatrix} m_u & 0 & 0 \\ 0 & m_d & 0 \\ 0 & 0 & m_s \end{pmatrix}; \quad (3.3)$$

e λ^α são as matrizes de Gell-Mann. $\mathcal{D} = \gamma^\mu D_\mu$ é a derivada covariante, que descreve a interação entre os férmions e o campo eletromagnético \mathcal{A}_μ ; e é definida como

$$D_\mu = \partial_\mu - i\hat{Q}\mathcal{A}_\mu, \quad (3.4)$$

com a matriz das cargas dos quarks \hat{Q} dada por

$$\hat{Q} = \begin{pmatrix} q_u & 0 & 0 \\ 0 & q_d & 0 \\ 0 & 0 & q_s \end{pmatrix}, \quad (3.5)$$

¹Por conveniência, utilizaremos coordenadas Euclidianas desde o início do nosso cálculo. Mais detalhes são dados no Apêndice [A.2](#)

em que

$$\mathbf{q}_u = \frac{2}{3}\mathbf{e}, \quad \mathbf{q}_d = -\frac{\mathbf{e}}{3}, \quad \mathbf{q}_s = -\frac{\mathbf{e}}{3},$$

onde \mathbf{e} é a carga do próton.

Podemos separar a lagrangiana (3.1) em três partes [128]

$$\mathcal{L}_{\text{NJL}} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\text{int}} + \mathcal{L}_{\text{det}}, \quad (3.6)$$

em que \mathcal{L}_0 é a lagrangiana livre de Dirac

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}(-i\not{D} + \hat{m})\psi, \quad (3.7)$$

\mathcal{L}_{int} é a lagrangiana de interação do modelo NJL

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = G \sum_{\alpha=0}^8 [(\bar{\psi}\lambda_\alpha\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5\lambda_\alpha\psi)^2], \quad (3.8)$$

e \mathcal{L}_{det} é a lagrangiana da interação de seis pontos, dada pelo determinante de 't Hooft

$$\mathcal{L}_{\text{det}} = K \{ \det[\bar{\psi}(1 + \gamma_5)\psi] + \det[\bar{\psi}(1 - \gamma_5)\psi] \}, \quad (3.9)$$

em que o determinante é sobre os índices de sabor.

3.2.1 Determinante de 't Hooft

A expressão (3.9), \mathcal{L}_{det} , corresponde ao termo de Kobayashi-Maskawa-'t Hooft, que é uma interação de $2N_f$ pontos que envolve um quark de cada sabor entrando e outro saindo [77]. Este termo foi proposto inicialmente em 1970 por Kobayashi e Maskawa [129, 130] para descrever a propriedade de mistura dos mésons η e η' , assim como a massa alta do

méson η' ² [121]. Posteriormente, 't Hooft encontrou uma forma de solucionar o problema do $U_A(1)$ inserindo instantons³ em uma interação efetiva para os quarks [138, 139].

Instantons são soluções de energia constante para equações de movimento da mecânica quântica com uma estrutura característica e estável localizada no tempo. O nome ‘instanton’, cunhada por 't Hooft, reflete a existência desta ‘pseudopartícula’⁴ no tempo, em vez do espaço. Instantons estão associados à pontos críticos (máximos e mínimos locais, pontos de sela) da ação.

(LANCASTER E BLUNDELL, 2014, p. 457 [132])

Esta lagrangiana é simétrica no grupo $SU_L(N_f) \times SU_R(N_f)$, mas quebra a simetria $U_A(1)$. Este termo é introduzido para “simular” a anomalia axial, e tem o significado fenomenológico de gerar a separação correta das massas dos mésons η e η' . Mesmo no limite quiral ($m_u = m_d = m_s = 0$), com este termo a massa do méson η' continua finita [77].

Instantons, através da anomalia de Adler-Bell-Jackiw [140, 141], quebram a simetria global $U_L(N_f) \times U_R(N_f)$ para quarks sem massa para a simetria $SU_L(N_f) \times SU_R(N_f) \times U_V(1)$ [125]. Estes instantons induzem uma interação efetiva de $2N_f$ pontos dada pelo termo do determinante de 't Hooft. No nosso caso, para $N_f = 3$, temos uma interação de seis pontos, ilustrada na Figura 3.1.

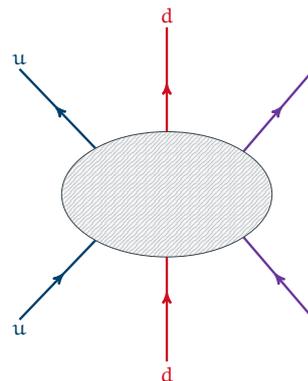


Figura 3.1: Interação de seis pontos. Figura baseada em [142] e elaborada pela autora.

Queremos escrever a lagrangiana (3.9) em termos das densidades escalar e pseudoes-

²Experimentalmente, as massas dos mésons η e η' são [53]

$$m_\eta = 547.862 \pm 0.017 \text{ MeV},$$

$$m_{\eta'} = 957.78 \pm 0.06 \text{ MeV}.$$

Para o η , a massa é maior que a do π , mas considerando que o primeiro tem quarks s em sua composição, a diferença faz sentido. Entretanto, para o η' a massa é mais alta do que deveria mesmo se considerando a massa do quark s . Isso é explicado pela presença da anomalia axial, em que a corrente axial relacionada à simetria $U_A(1)$ não é conservada mesmo no limite quiral [131].

³Alguns textos introdutórios sobre instantons podem ser encontrados em [132] e [133]. Para um estudo um pouco mais avançado, é possível consultar, por exemplo, [134], [135], [136] e [137].

⁴“Particle-like” no texto original.

calar j_α^s e j_α^p

$$\mathcal{L}_{\text{det}} = \frac{K}{6} \mathbf{d}_{\alpha\beta\gamma} [j_\alpha^s j_\beta^s j_\gamma^s - 3j_\alpha^s j_\beta^p j_\gamma^p], \quad (3.10)$$

em que a densidade escalar é

$$j_\alpha^s = \bar{\psi} \lambda_\alpha \psi, \quad (3.11)$$

e a densidade pseudoescalar é

$$j_\alpha^p = \bar{\psi} i\gamma_5 \lambda_\alpha \psi, \quad (3.12)$$

e $\mathbf{d}_{\alpha\beta\gamma}$ são as constantes de estrutura totalmente simétricas do $\text{SU}(3)$ dadas no Apêndice B. A passagem de (3.9) para (3.10) é dada no Apêndice C.1 e sua dedução foi baseada em [143].

3.3 Bosonização pela integral de caminho

O processo de bosonização de uma teoria fermiônica ocorre quando a lagrangiana original desta teoria é transformada em uma lagrangiana equivalente que depende apenas de graus de liberdade bosônicos. Esta abordagem tem como vantagem o fato de que as relações entre observáveis físicos⁵ são mais evidentes [142].

Considerando um modelo com N_f sabores, quando $N_f = 2$ a bosonização pela integral de caminho é trivial, porque a integral funcional sobre os campos auxiliares é uma gaussiana. Entretanto, para $N_f > 2$ precisamos utilizar métodos de aproximação [125]. No nosso caso, como o número de sabores é $N_f = 3$, precisaremos de tais métodos. Utilizaremos a aproximação de fase estacionária (*Stationary Phase Approximation* - SPA)⁶. Para isso, precisamos primeiro introduzir os campos auxiliares escalares σ_α e s_α e os campos auxiliares pseudoescalares π_α e p_α , com os vínculos [125]

$$\begin{aligned} 1 &= \int \prod_\alpha \mathcal{D}s_\alpha \mathcal{D}p_\alpha \delta(s_\alpha - \bar{\psi} \lambda_\alpha \psi) \delta(p_\alpha - \bar{\psi} i\gamma_5 \lambda_\alpha \psi), \\ &= \int \prod_\alpha \mathcal{D}\sigma_\alpha \mathcal{D}\pi_\alpha \mathcal{D}s_\alpha \mathcal{D}p_\alpha \exp \left\{ \int d^4x [\sigma_\alpha (s_\alpha - \bar{\psi} \lambda_\alpha \psi) + \pi_\alpha (p_\alpha - \bar{\psi} i\gamma_5 \lambda_\alpha \psi)] \right\}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

⁵Constante de acoplamento, condensado...

⁶Para maiores detalhes, pode-se consultar [144, 145]

em que utilizamos as definições

$$\delta(s_\alpha - \bar{\psi}\lambda_\alpha\psi) = \int \mathcal{D}\sigma_\alpha \exp \left[\int d^4x \sigma_\alpha (s_\alpha - \bar{\psi}\lambda_\alpha\psi) \right]; \quad (3.14)$$

$$\delta(p_\alpha - \bar{\psi}i\gamma_5\lambda_\alpha\psi) = \int \mathcal{D}\pi_\alpha \exp \left[\int d^4x \pi_\alpha (p_\alpha - \bar{\psi}i\gamma_5\lambda_\alpha\psi) \right]. \quad (3.15)$$

A amplitude de transição do vácuo é dada pelo funcional

$$Z = \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{-S_E},$$

em que S_E é a ação euclidiana. Pela definição da ação,

$$Z = \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \exp \left\{ - \int d^4x \mathcal{L}_{\text{NJL}} \right\}. \quad (3.16)$$

Inserindo as identidades (3.13) em (3.16), obtemos

$$Z = \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\sigma_\alpha \mathcal{D}\pi_\alpha \mathcal{D}s_\alpha \mathcal{D}p_\alpha \exp \left\{ - \int d^4x \mathcal{L}'_{\text{NJL}} \right\}, \quad (3.17)$$

em que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_{\text{NJL}} = & \bar{\psi}(-i\mathcal{D} + \hat{m})\psi - G \sum_{\alpha=0}^8 [(s_\alpha)^2 + (p_\alpha)^2] + \frac{K}{6} \mathbf{d}_{\alpha\beta\gamma} [s_\alpha s_\beta s_\gamma - 3s_\alpha p_\beta p_\gamma] \\ & - \sigma_\alpha (s_\alpha - \bar{\psi}\lambda_\alpha\psi) - \pi_\alpha (p_\alpha - \bar{\psi}i\gamma_5\lambda_\alpha\psi). \end{aligned}$$

Reescrevemos $\mathcal{L}'_{\text{NJL}}$ como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_{\text{NJL}} = & \bar{\psi}(-i\mathcal{D} + \hat{m} + \lambda_\alpha\sigma_\alpha + i\gamma_5\lambda_\alpha\pi_\alpha)\psi - G \sum_{\alpha=0}^8 [(s_\alpha)^2 + (p_\alpha)^2] \\ & + \frac{K}{6} \mathbf{d}_{\alpha\beta\gamma} [s_\alpha s_\beta s_\gamma - 3s_\alpha p_\beta p_\gamma] - \sigma_\alpha s_\alpha - \pi_\alpha p_\alpha, \end{aligned} \quad (3.18)$$

e podemos separar \mathcal{L}_{NJL} em duas partes [128]

$$\mathcal{L}_q = \bar{\psi}(-i\not{D} + \hat{m} + \lambda_\alpha \sigma_\alpha + i\gamma_5 \lambda_\alpha \pi_\alpha)\psi, \quad (3.19a)$$

$$\mathcal{L}_r = -G \sum_{\alpha=0}^8 [(s_\alpha)^2 + (p_\alpha)^2] + \frac{K}{6} \mathbf{d}_{\alpha\beta\gamma} [s_\alpha s_\beta s_\gamma - 3s_\alpha p_\beta p_\gamma] - \sigma_\alpha s_\alpha - \pi_\alpha p_\alpha, \quad (3.19b)$$

e a amplitude do vácuo fica

$$Z = \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\sigma_\alpha \mathcal{D}\pi_\alpha \exp\left\{-\int d^4x \mathcal{L}_q\right\} \int \mathcal{D}s_\alpha \mathcal{D}p_\alpha \exp\left\{-\int d^4x \mathcal{L}_r\right\}. \quad (3.20)$$

Separar a lagrangiana nestas duas partes facilitará o processo de bosonização, como veremos nas próximas subseções.

3.3.1 Integração da parte fermiônica

Para prosseguir com a bosonização da nossa teoria, precisamos integrar os campos fermiônicos presentes no funcional para que este dependa apenas de graus de liberdade bosônicos. Fazemos isso ao integrar a parte fermiônica do funcional,

$$Z_f = \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\sigma_\alpha \mathcal{D}\pi_\alpha \exp\left\{-\int d^4x \mathcal{L}_q\right\}, \quad (3.21)$$

em $\mathcal{D}\psi$ e $\mathcal{D}\bar{\psi}$. Para destacar os campos fermiônicos, reescrevemos \mathcal{L}_q como

$$\mathcal{L}_q = \bar{\psi} \mathcal{S}^{-1}(x - x') \psi, \quad (3.22)$$

onde \mathcal{S}^{-1} é a inversa do propagador efetivo dos férmions, dada por

$$\mathcal{S}^{-1}(x - x') = \delta^{(4)}(x - x') [-i\not{D} + \hat{m} + \lambda_\alpha \sigma_\alpha + i\gamma_5 \lambda_\alpha \pi_\alpha]. \quad (3.23)$$

Assim, Z_f fica

$$Z_f = \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\sigma_\alpha \mathcal{D}\pi_\alpha \exp\left\{-\int d^4x \bar{\psi} \mathcal{S}^{-1}(x - x') \psi\right\}, \quad (3.24)$$

e podemos agora integrar os campos fermiônicos. Fazemos isso ao considerar as propriedades das variáveis de Grassmann,

$$\int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \exp \left\{ - \int d^4x \bar{\psi} \mathcal{S}^{-1} \psi \right\} = \det \left[\mathcal{S}^{-1}(x - x') \Big|_{x=x'} \right]. \quad (3.25)$$

Além disso, precisamos considerar as propriedades do determinante,

$$\det [\mathcal{S}^{-1}] = \exp [\ln (\det \mathcal{S}^{-1})],$$

$$\ln [\det \mathcal{S}^{-1}] = \text{Tr} [\ln \mathcal{S}^{-1}],$$

e ficamos com

$$Z_f = \int \mathcal{D}\sigma_a \mathcal{D}\pi_a \exp [\text{Tr} [\ln \mathcal{S}^{-1}]]. \quad (3.26)$$

O funcional gerador agora não depende mais dos campos fermiônicos, mas os campos auxiliares bosônicos s_α e p_α ainda precisam ser integrados [144].

3.3.2 Aproximação de Fase Estacionária (SPA)

Como já mencionamos, se estivéssemos trabalhando com o modelo NJL no SU(2), a parte bosônica do funcional seria composta por integrais gaussianas, que podem ser integradas de forma trivial. Entretanto, como a parte bosônica do funcional é

$$\begin{aligned} Z_r &= \int \mathcal{D}\sigma_\alpha \mathcal{D}\pi_\alpha \mathcal{D}s_\alpha \mathcal{D}p_\alpha \exp \left\{ - \int d^4x \mathcal{L}_r \right\}, \\ &= \int \mathcal{D}\sigma_\alpha \mathcal{D}\pi_\alpha \mathcal{D}s_\alpha \mathcal{D}p_\alpha \exp \left\{ - \int d^4x \sum_{\alpha,\beta,\gamma=0}^8 \left[-G[(s_\alpha)^2 + (p_\alpha)^2] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{K}{6} d_{\alpha\beta\gamma} [s_\alpha s_\beta s_\gamma - 3s_\alpha p_\beta p_\gamma] - \sigma_\alpha s_\alpha - \pi_\alpha p_\alpha \right] \right\}, \end{aligned} \quad (3.27)$$

temos integrais divergentes. Para fazer a integração em s_α e p_α precisamos utilizar a aproximação de fase estacionária. Para isso, devemos escolher estes campos de forma que eles minimizem a exponencial em (3.27) [125, 128, 144]. Assim, ao fazermos

$$\frac{\delta}{\delta s_\alpha} \int d^4x \mathcal{L}_r = 0 \quad , \quad \frac{\delta}{\delta p_\alpha} \int d^4x \mathcal{L}_r = 0,$$

podemos impor as condições para os campos s_α e p_α

$$-2G s_\alpha + \frac{1}{2} K d_{\alpha\beta\gamma} (s_\beta s_\gamma - p_\beta p_\gamma) - \sigma_\alpha = 0, \quad (3.28a)$$

$$-2G p_\alpha - K d_{\alpha\beta\gamma} s_\beta p_\gamma - \pi_\alpha = 0, \quad (3.28b)$$

e s_α e p_α agora são consideradas funções implícitas de σ_α e π_α . Detalhes desta passagem são dadas no Apêndice C.2. Considerando as condições da SPA (3.28), podemos escrever o funcional gerador (3.20) como

$$Z = \int \mathcal{D}\sigma_\alpha \mathcal{D}\pi_\alpha \mathcal{D}s_\alpha \mathcal{D}p_\alpha \exp \left\{ \text{Tr}[\ln \mathcal{S}^{-1}] - \int d^4x \left[-G \sum_{\alpha=0}^8 [(s_\alpha)^2 + (p_\alpha)^2] + \frac{K}{6} d_{\alpha\beta\gamma} (s_\alpha s_\beta s_\gamma - 3s_\alpha p_\beta p_\gamma) - \sigma_\alpha s_\alpha - \pi_\alpha p_\alpha \right] \right\}. \quad (3.29)$$

Pela definição do funcional gerador

$$Z = \int \mathcal{D}\sigma_\alpha \mathcal{D}\pi_\alpha \mathcal{D}s_\alpha \mathcal{D}p_\alpha \exp(-S_E), \quad (3.30)$$

em que S_E é a ação euclidiana, podemos escrever a ação bosonizada como

$$S^{\text{bos}} = -\text{Tr}(\ln \mathcal{S}^{-1}) - \int d^4x \left\{ G \sum_{\alpha=0}^8 [(s_\alpha)^2 + (p_\alpha)^2] - \frac{K}{6} d_{\alpha\beta\gamma} [s_\alpha s_\beta s_\gamma - 3s_\alpha p_\beta p_\gamma] + \sigma_\alpha s_\alpha + \pi_\alpha p_\alpha \right\}. \quad (3.31)$$

3.4 Aproximação de campo médio

Uma aproximação de campo médio reduz um sistema de muitos corpos a um sistema de uma única partícula que interage com um campo resultante da interação média de todos os outros graus de liberdade do sistema [76].

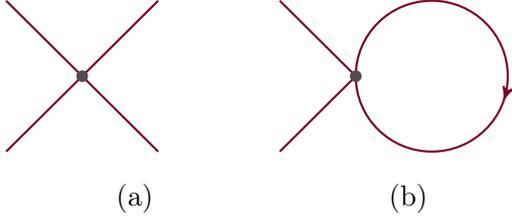


Figura 3.2: (a) Interação efetiva de quatro pontos. (b) Interação efetiva de quatro pontos linearizada.

Numa teoria de muitos corpos, o método de aproximação de campo médio consiste em substituir pares de operadores por seus valores esperados no vácuo. Outra forma de ver este processo é considerar que quando substituímos um par por seu valor esperado estamos fechando um *loop* de dois quarks, como podemos observar na Figura 3.2. Isso significa que estamos linearizando a interação, utilizando a aproximação de campo médio de Hartree [142].

Assim, vamos agora expandir a ação bosonizada em torno dos valores esperados dos campos σ_α e π_α

$$\sigma_\alpha(\mathbf{x}) = \bar{\sigma}_\alpha(\mathbf{x}) + \delta\sigma_\alpha(\mathbf{x}), \quad (3.32a)$$

$$\pi_\alpha(\mathbf{x}) = \delta\pi_\alpha(\mathbf{x}). \quad (3.32b)$$

Pela conservação de carga, temos a relação [143]

$$[\hat{Q}, \lambda_\alpha] = 0, \quad (3.33)$$

e como a matriz de carga, dada por (3.5), é diagonal, a relação (3.33) só é verdadeira para as matrizes λ_0 , λ_3 e λ_8 . Por isso, só consideraremos os campos escalares σ_0 , σ_3 e σ_8 . Reescrevemos os campos bosônicos σ como

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_u & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_d & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_s \end{pmatrix} = \sigma_0 \lambda_0 + \sigma_3 \lambda_3 + \sigma_8 \lambda_8, \quad (3.34)$$

e, como vimos pela expressão (3.28a), \mathbf{s} é uma função implícita de σ , e por isso podemos escrever esses campos como

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} s_u & 0 & 0 \\ 0 & s_d & 0 \\ 0 & 0 & s_s \end{pmatrix} = s_0 \lambda_0 + s_3 \lambda_3 + s_8 \lambda_8. \quad (3.35)$$

3.4.1 Inversa do Propagador

Antes de prosseguir com o cálculo da aproximação de campo médio da ação bosonizada, precisamos calcular a inversa do propagador efetivo dos férmions nesta aproximação. Substituindo as equações (3.32) em (3.23), o propagador pode ser reescrito como

$$\mathcal{S}^{-1}(x - x') = \delta^{(4)}(x - x') \left[\underbrace{-i\mathcal{D} + \hat{m} + \bar{\sigma}_\alpha \lambda_\alpha}_{\text{CAMPO M\u00c9DIO}} + \underbrace{\delta\sigma_\alpha \lambda_\alpha + i\gamma_5 \delta\pi_\alpha \lambda_\alpha}_{\text{FLUTUA\u00c7\u00d5ES}} \right]. \quad (3.36)$$

Podemos separar a inversa do propagador efetivo dos férmions (3.36) em uma parte de campo médio e uma de flutuações

$$\mathcal{S}^{-1} = \mathcal{S}_{\text{MF}}^{-1} + \delta\mathcal{S}^{-1}. \quad (3.37)$$

No Ap\u00eandice C.3 reescrevemos a parte de campo médio da inversa do propagador efetivo em termos da base de sabores como

$$\mathcal{S}_{\text{MF},f}^{-1}(x - x') = \delta^{(4)}(x - x') [-i\mathcal{D} + M_f], \quad (3.38)$$

em que $M_f = m_f + \bar{\sigma}_f$ \u00e9 a massa efetiva; e a parte de flutua\u00e7\u00f5es como

$$\delta\mathcal{S}^{-1}(x - x') = \delta^{(4)}(x - x') \begin{pmatrix} \delta\sigma_u + i\gamma_5 \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \delta\pi_0 + \delta\pi_3 + \frac{1}{\sqrt{3}} \delta\pi_8 \right) & \sqrt{2}i\gamma_5 \delta\pi^+ & \sqrt{2}i\gamma_5 \delta K^+ \\ \sqrt{2}i\gamma_5 \delta\pi^- & \delta\sigma_d + i\gamma_5 \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \delta\pi_0 - \delta\pi_3 + \frac{1}{\sqrt{3}} \delta\pi_8 \right) & \sqrt{2}i\gamma_5 \delta K^0 \\ \sqrt{2}i\gamma_5 \delta K^- & \sqrt{2}i\gamma_5 \delta \bar{K}^0 & \delta\sigma_s + i\gamma_5 \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \delta\pi_0 - \frac{2}{\sqrt{3}} \delta\pi_8 \right) \end{pmatrix}. \quad (3.39)$$

3.4.2 Expans\u00e3o da a\u00e7\u00e3o bosonizada

Agora podemos expandir a a\u00e7\u00e3o bosonizada (3.31) em torno dos valores de campo m\u00e9dio dos m\u00e9sons. Por conveni\u00eancia, a separaremos em duas partes

$$\mathcal{S}^{\text{bos}} = -\mathcal{S}_{\text{tr}}^{\text{bos}} - \mathcal{S}_{\text{r}}^{\text{bos}}, \quad (3.40)$$

que calcularemos separadamente.

Primeiro termo da Ação bosonizada

Substituindo (3.37) no primeiro termo da ação bosonizada (3.31), obtemos

$$S_{\text{tr}}^{\text{bos}} = \text{Tr}[\ln \mathcal{S}^{-1}] = \text{Tr}[\ln \mathcal{S}_{\text{MF}}^{-1}] + \text{Tr}[\ln(1 + \mathcal{S}_{\text{MF}} \delta \mathcal{S}^{-1})]. \quad (3.41)$$

Considerando a expansão de $\ln(1 + x)$ na série de Maclaurin,

$$\ln(1 + x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n,$$

podemos expandir o último termo da equação (3.41)

$$\text{Tr}[\ln(1 + \mathcal{S}_{\text{MF}} \delta \mathcal{S}^{-1})] = \text{Tr} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (\mathcal{S}_{\text{MF}} \delta \mathcal{S}^{-1})^n \right], \quad (3.42)$$

e a equação (3.41) fica

$$\text{Tr}[\ln \mathcal{S}^{-1}] = \text{Tr}[\ln \mathcal{S}_{\text{MF}}^{-1}] + \text{Tr} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (\mathcal{S}_{\text{MF}} \delta \mathcal{S}^{-1})^n \right]. \quad (3.43)$$

Segundo termo da ação bosonizada

Como o segundo termo da ação bosonizada (3.31) é dado por

$$S_{\text{r}}^{\text{bos}} = \int d^4x \mathcal{L}_{\text{r}}, \quad (3.44)$$

precisamos expandir \mathcal{L}_{r} nos campos (3.32). Como demonstrado no Apêndice C.4, ao realizarmos tal expansão, a parte de campo médio $\mathcal{L}_{\text{r}}^{\text{MF}}$ é obtida e teremos

$$\mathcal{L}_{\text{r}}^{\text{MF}} = -G \bar{s}_{\alpha} \bar{s}_{\alpha} + \frac{K}{6} d_{\alpha\beta\gamma} \bar{s}_{\alpha} \bar{s}_{\beta} \bar{s}_{\gamma} - \bar{\sigma}_{\alpha} \bar{s}_{\alpha}. \quad (3.45)$$

Assim, a ação bosonizada de campo médio é

$$S_{\text{MF}}^{\text{bos}} = -\text{Tr}[\ln \mathcal{S}_{\text{MF}}^{-1}] - \int d^4x \left[-G \bar{s}_{\alpha} \bar{s}_{\alpha} - \frac{K}{6} d_{\alpha\beta\gamma} \bar{s}_{\alpha} \bar{s}_{\beta} \bar{s}_{\gamma} + \bar{\sigma}_{\alpha} \bar{s}_{\alpha} \right]. \quad (3.46)$$

3.4.3 Condições da SPA

Como a ação bosonizada tem termos \bar{s}_α , que são funções implícitas de σ_α e π_α , precisamos calcular a aproximação de campo médio das condições da SPA, (3.28).

Condição (3.28a) Substituindo (3.32) em (3.28a)

$$-2G\underbrace{\bar{s}_\alpha}_{\text{1ª Ordem}} - 2G\underbrace{\delta s_\alpha}_{\text{2ª Ordem}} + \frac{K}{2} \mathbf{d}_{\alpha\beta\gamma} \left[\underbrace{\bar{s}_\beta \bar{s}_\gamma}_{\text{1ª Ordem}} + \underbrace{\bar{s}_\beta \delta s_\gamma}_{\text{2ª Ordem}} + \underbrace{\bar{s}_\gamma \delta s_\beta}_{\text{2ª Ordem}} + \underbrace{\delta s_\beta \delta s_\gamma}_{\text{2ª Ordem}} - \underbrace{\delta p_\beta \delta p_\gamma}_{\text{2ª Ordem}} \right] - \underbrace{\bar{\sigma}_\alpha}_{\text{1ª Ordem}} - \underbrace{\delta \sigma_\alpha}_{\text{2ª Ordem}} = 0,$$

- Campo Médio
- 1ª Ordem
- 2ª Ordem

e então a parte de campo médio é

$$-\bar{\sigma}_\alpha + \frac{K}{2} \mathbf{d}_{\alpha\beta\gamma} \bar{s}_\beta \bar{s}_\gamma - 2G\bar{s}_\alpha = 0.$$

Condição (3.28b) Substituindo (3.32) em (3.28b)

$$-2G\underbrace{\delta p_\alpha}_{\text{2ª Ordem}} - K\underbrace{\mathbf{d}_{\alpha\beta\gamma} \bar{s}_\beta \delta p_\gamma}_{\text{2ª Ordem}} - K\underbrace{\mathbf{d}_{\alpha\beta\gamma} \delta s_\beta \delta p_\gamma}_{\text{2ª Ordem}} - \underbrace{\delta \pi_\alpha}_{\text{2ª Ordem}} = 0.$$

Esta condição não tem parte de campo médio, ou seja,

$$\bar{p}_\alpha = 0.$$

Assim, as condições da SPA na aproximação de campo médio são

$$-\bar{\sigma}_\alpha + \frac{K}{2} \mathbf{d}_{\alpha\beta\gamma} \bar{s}_\beta \bar{s}_\gamma - 2G\bar{s}_\alpha = 0, \quad (3.47a)$$

$$\bar{p}_\alpha = 0. \quad (3.47b)$$

Antes de continuarmos, precisamos reescrever os resultados obtidos até aqui na base de sabores. Isto é feito no Apêndice C.5. Então, a ação bosonizada de campo médio pode ser reescrita como

$$S_{MF}^{\text{bos}} = -\text{Tr}[\ln S_{MF}^{-1}] - \frac{V^{(4)}}{2} \sum_{f,g,h} \left[G\bar{s}_f \bar{s}_f + \bar{\sigma}_f \bar{s}_f - \frac{K}{12} \varepsilon_{fgh} \varepsilon_{fgh} \bar{s}_f \bar{s}_g \bar{s}_h \right], \quad (3.48)$$

e as condições da SPA são reescritas como

$$\bar{\sigma}_u - \frac{K}{2} \bar{s}_d \bar{s}_s + 2G \bar{s}_u = 0; \quad (3.49a)$$

$$\bar{\sigma}_d - \frac{K}{2} \bar{s}_u \bar{s}_s + 2G \bar{s}_d = 0; \quad (3.49b)$$

$$\bar{\sigma}_s - \frac{K}{2} \bar{s}_u \bar{s}_d + 2G \bar{s}_s = 0, \quad (3.49c)$$

ou, de forma compacta

$$\bar{\sigma}_f + 2G \bar{s}_f - \frac{K}{4} \varepsilon_{fgh} \varepsilon_{fgh} \bar{s}_g \bar{s}_h = 0, \quad (3.50)$$

em que $f, g, h = u, d, s$ e ε_{fgh} são os tensores totalmente antissimétricos de Levi-Civita.

3.5 Equação de Gap

Para encontrar as equações de gap utilizamos o princípio da mínima ação, ou seja

$$\frac{\delta S_{MF}^{\text{bos}}}{\delta \bar{\sigma}_f} = 0; \quad \sigma_f = \bar{\sigma}_f; \quad f \in \{u, d, s\}. \quad (3.51)$$

Substituindo (3.48) na expressão acima, ficamos com

$$\begin{aligned} \frac{\delta S_{MF}^{\text{bos}}}{\delta \bar{\sigma}_f} &= \frac{\delta}{\delta \bar{\sigma}_f} \left\{ -\text{Tr}[\ln \mathcal{S}_{MF}^{-1}] - \frac{V^{(4)}}{2} \left[G \bar{s}_f \bar{s}_f + \bar{\sigma}_f \bar{s}_f - \frac{K}{12} \varepsilon_{fgh} \varepsilon_{fgh} \bar{s}_f \bar{s}_g \bar{s}_h \right] \right\}, \\ &= -\frac{\delta}{\delta \bar{\sigma}_f} \left\{ \text{Tr}[\ln \mathcal{S}_{MF}^{-1}] \right\} - \frac{V^{(4)}}{2} \frac{\delta}{\delta \bar{\sigma}_f} \left[G \bar{s}_f \bar{s}_f + \bar{\sigma}_f \bar{s}_f - \frac{K}{12} \varepsilon_{fgh} \varepsilon_{fgh} \bar{s}_f \bar{s}_g \bar{s}_h \right]. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Ao derivarmos os dois termos separadamente, no Apêndice C.6, reescrevemos (3.52) como

$$\frac{\delta S_{MF}^{\text{bos}}}{\delta \bar{\sigma}_f} = -\frac{V^{(4)}}{2} \bar{s}_f - N_c \int \frac{d^4x}{(2\pi)^4} \text{tr}_D \mathcal{S}_{MF}^f = 0. \quad (3.53)$$

e então

$$\bar{s}_f = \frac{2N_c}{V^{(4)}} \int \frac{d^4x}{(2\pi)^4} \text{tr}_D \mathcal{S}_{MF}^f. \quad (3.54)$$

Substituindo a definição da massa efetiva,

$$M_f = m_f + \bar{\sigma}_f, \quad (3.55)$$

nas condições da SPA (3.49), obtemos

$$M_u = m_u + \frac{K}{2} \bar{s}_d \bar{s}_s - 2G \bar{s}_u; \quad (3.56a)$$

$$M_d = m_d + \frac{K}{2} \bar{s}_u \bar{s}_s - 2G \bar{s}_d; \quad (3.56b)$$

$$M_s = m_s + \frac{K}{2} \bar{s}_u \bar{s}_d - 2G \bar{s}_s, \quad (3.56c)$$

que juntamente com (3.54) formam as equações de gap (acopladas).

3.6 Condensado de Quarks

Calculamos o condensado de quark utilizando o teorema de Hellmann-Feynman [143], ou seja, diferenciamos a ação efetiva em relação à massa de corrente dos quarks

$$\langle \bar{\psi}_f \psi_f \rangle = \frac{1}{V^{(4)}} \frac{\delta \mathcal{S}_{MF}^{\text{bos}}}{\delta m_f}. \quad (3.57)$$

Substituindo (3.48)

$$\langle \bar{\psi}_f \psi_f \rangle = \frac{1}{V^{(4)}} \frac{\delta}{\delta m_f} \text{Tr} [\ln \mathcal{S}_{MF,f}^{-1}], \quad (3.58)$$

e considerando a equação (C.89) obtida no Apêndice C.6, obtemos

$$\begin{aligned} \langle \bar{\psi}_f \psi_f \rangle &= -\frac{4}{V^{(4)}} \frac{\delta}{\delta m_f} \left[N_c \text{tr}_D \int \frac{d^4x}{(2\pi)^4} \ln(-i\not{D}_f + M_f) \right], \\ &= -\frac{N_c}{V^{(4)}} \int \frac{d^4x}{(2\pi)^4} \text{tr}_D \mathcal{S}_{MF}^f. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Podemos notar que

$$\langle \bar{\psi}_f \psi_f \rangle = -2\bar{s}_f,$$

e podemos escrever as massas efetivas dos quarks em termos dos condensados de quarks.

3.7 Ação bosonizada quadrática

Até agora, encontramos uma expressão para a equação de gap e para o condensado de quarks, ambas em campo médio. Estas são importantes para demonstrarmos como a massa efetiva dos quarks varia com o campo magnético B (no Capítulo 6), assim como para visualizarmos o fenômeno da catálise magnética. Entretanto, o objetivo principal deste trabalho é encontrar a massa polo dos mésons pseudoescalares, o que só é possível ao considerarmos a próxima ordem além do campo médio. Por conveniência, calcularemos cada termo da ação bosonizada separadamente.

3.7.1 Primeiro termo

O termo de segunda ordem da expressão (3.43) é

$$S_{\text{quad}}^1 = -\frac{1}{2} \text{Tr} \left[(\mathcal{S}_{\text{MF}} \delta \mathcal{S}^{-1})^2 \right], \quad (3.60)$$

e considerando a expressão para as flutuações da inversa do propagador,

$$\delta \mathcal{S}^{-1} = \delta^{(4)}(x - x') [\delta \sigma_\alpha \lambda_\alpha + i \gamma_5 \delta \pi_\alpha \lambda_\alpha], \quad (3.61)$$

reescrevemos (3.60) como

$$S_{\text{quad}}^1 = -\frac{1}{2} \text{Tr} \left[(\mathcal{S}_{\text{MF}} \delta \sigma_\alpha \lambda_\alpha)^2 \right] - \frac{1}{2} \text{Tr} \left[(i \mathcal{S}_{\text{MF}} \gamma_5 \delta \pi_\alpha \lambda_\alpha)^2 \right]. \quad (3.62)$$

Calcularemos este termo separadamente para o setor escalar e para o setor pseudoescalar nos Apêndices C.7 e C.8. Entretanto, só estamos interessados no setor pseudoescalar S_1^P , já que queremos calcular a massa polo dos mésons pseudoescalares. O setor pseudoescalar do primeiro termo da ação bosonizada de segunda ordem é

$$S_1^P = -\frac{1}{2} \text{Tr} \left[(\mathcal{S}_{MF} i\gamma_5 \delta\pi_\alpha \lambda_\alpha)^2 \right]. \quad (3.63)$$

Ao reescrevermos (3.63) em termos dos campos dos mésons, separamos a expressão em uma parte para os campos dos mésons carregados e káons neutros, S_1^M , calculados no Apêndice C.8.1; e outro em que os campos do π^0 , η e η' estão acoplados, $S_1^{\alpha\beta}$, calculados no Apêndice C.8.2. Assim, expressamos S_1^P como

$$S_1^P = -\sum_M S_1^M - \sum_{\alpha\beta=0,3,8} S_1^{\alpha\beta}, \quad (3.64)$$

em que

$$S_1^M = -\frac{1}{2} \int d^4x d^4x' \delta M^*(x') \delta M(x) J_M(x, x'), \quad (3.65a)$$

$$S_1^{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} \int d^4x d^4x' \delta\pi_\alpha(x') \delta\pi_\beta(x) J_{\alpha\beta}(x, x'). \quad (3.65b)$$

Podemos escrever S_1^P de forma explícita como

$$\begin{aligned} S_1^P = \frac{1}{2} \int d^4x d^4x' \{ & (\delta\pi^+)^*(x') \delta\pi^+(x) J_{\pi^+}(x, x') + (\delta\pi^-)^*(x') \delta\pi^-(x) J_{\pi^-}(x, x') \\ & + (\delta K^+)^*(x') \delta K^+(x) J_{K^+}(x, x') + (\delta K^-)^*(x') \delta K^-(x) J_{K^-}(x, x') \\ & + (\delta K^0)^*(x') \delta K^0(x) J_{K^0}(x, x') + (\delta \bar{K}^0)^*(x') \delta \bar{K}^0(x) J_{\bar{K}^0}(x, x') \\ & + \delta\pi_0(x') \delta\pi_0(x) J_{00}(x, x') + \delta\pi_0(x') \delta\pi_3(x) J_{03}(x, x') \\ & + \delta\pi_3(x') \delta\pi_3(x) J_{33}(x, x') + \delta\pi_0(x') \delta\pi_8(x) J_{08}(x, x') \\ & + \delta\pi_3(x') \delta\pi_8(x) J_{38}(x, x') + \delta\pi_8(x') \delta\pi_8(x) J_{88}(x, x') \}, \end{aligned} \quad (3.66)$$

em que os polarizadores dos mésons são

$$J_{\pi^+}(x, x') = 2N_c \text{tr} [\mathcal{S}_{MF}^d(x-x') \gamma_5 \mathcal{S}_{MF}^u(x'-x) \gamma_5] = J_{du}(x, x'); \quad (3.67a)$$

$$J_{\pi^-}(x, x') = 2N_c \text{tr} [\mathcal{S}_{MF}^u(x-x') \gamma_5 \mathcal{S}_{MF}^d(x'-x) \gamma_5] = J_{ud}(x, x'); \quad (3.67b)$$

$$J_{K^+}(x, x') = 2N_c \text{tr} [\mathcal{S}_{MF}^s(x-x') \gamma_5 \mathcal{S}_{MF}^u(x'-x) \gamma_5] = J_{su}(x, x'); \quad (3.67c)$$

$$J_{K^-}(x, x') = 2N_c \text{tr} [\mathcal{S}_{MF}^u(x-x') \gamma_5 \mathcal{S}_{MF}^s(x'-x) \gamma_5] = J_{us}(x, x'); \quad (3.67d)$$

$$J_{K^0}(x, x') = 2N_c \text{tr} [\mathcal{S}_{MF}^s(x-x') \gamma_5 \mathcal{S}_{MF}^d(x'-x) \gamma_5] = J_{sd}(x, x'); \quad (3.67e)$$

$$J_{\bar{k}0}(x, x') = 2N_c \text{tr} [\mathcal{S}_{MF}^d(x - x') \gamma_5 \mathcal{S}_{MF}^s(x' - x) \gamma_5] = J_{ds}(x, x'); \quad (3.67f)$$

$$J_{00}(x, x') = \frac{J_{uu} + J_{dd} + J_{ss}}{3}; \quad (3.67g)$$

$$J_{03}(x, x') = \sqrt{\frac{2}{3}} [J_{uu} - J_{dd}]; \quad (3.67h)$$

$$J_{33}(x, x') = \frac{J_{uu} + J_{dd}}{2}; \quad (3.67i)$$

$$J_{08}(x, x') = \frac{\sqrt{2}}{3} [J_{uu} + J_{dd} - 2J_{ss}]; \quad (3.67j)$$

$$J_{38}(x, x') = \frac{J_{uu} - J_{dd}}{\sqrt{3}}; \quad (3.67k)$$

$$J_{88}(x, x') = \frac{J_{uu} + J_{dd} - 4J_{ss}}{6}. \quad (3.67l)$$

Nestas equações, definimos um polarizador genérico para um méson composto por um quark f e um quark f' como

$$J_{ff'}(x, x') = 2N_c \text{tr} [\mathcal{S}_{MF}^f(x - x') \gamma_5 \mathcal{S}_{MF}^{f'}(x' - x) \gamma_5]. \quad (3.68)$$

3.7.2 Segundo termo

Como já vimos em (C.51), no Apêndice C.4, o segundo termo da ação bosonizada quadrática é

$$\begin{aligned} S_{\text{quad}}^2 = \int d^4x \left\{ -G[\delta s_\alpha \delta s_\alpha - \delta p_\alpha \delta p_\alpha] + \frac{K}{2} d_{\alpha\beta\gamma} [\bar{s}_\alpha \delta s_\beta \delta s_\gamma - \bar{s}_\alpha \delta p_\beta \delta p_\gamma] \right. \\ \left. - \delta \sigma_\alpha \delta s_\alpha - \delta \pi_\alpha \delta p_\alpha \right\}. \end{aligned} \quad (3.69)$$

Precisamos escrever (3.69) apenas em termos das flutuações dos campos do σ e do π , o que é feito em detalhes no Apêndice C.9. Então, obtemos

$$S_{\text{quad}} = \int d^4x d^4x' \left[\frac{S_{\alpha\beta}^{-1}}{2} \delta \sigma_\alpha(x) \delta \sigma_\beta(x') + \frac{P_{\alpha\beta}^{-1}}{2} \delta \pi_\alpha(x) \delta \pi_\beta(x') \right] \delta^{(4)}(x - x'), \quad (3.70)$$

com

$$S_{\alpha\beta} = 2G\delta_{\alpha\beta} - Kd_{\alpha\beta\gamma} \bar{s}_\gamma, \quad (3.71a)$$

$$P_{\alpha\beta} = 2G\delta_{\alpha\beta} + Kd_{\alpha\beta\gamma}\bar{s}_\gamma. \quad (3.71b)$$

Calculamos explicitamente cada componente do termo pseudoescalar de (3.70) nos Apêndices C.10.1 e C.10.2. Não faremos os cálculos para o termo escalar, mas estes são semelhantes ao setor pseudoescalar.

Finalmente, podemos escrever a parte pseudoescalar da ação bosonizada quadrática como

$$\begin{aligned} S_{\text{quad}}^{\text{bos,P}} = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{\mathbf{M}} \int d^4x d^4x' \delta M^*(x') \delta M(x) [\delta^{(4)}(x-x') T_{\mathbf{M}} + J_{\mathbf{M}}(x, x')] \right. \\ \left. + \sum_{\alpha, \beta} \int d^4x d^4x' \delta \pi_\alpha(x') \delta \pi_\beta(x) [\delta^{(4)}(x-x') T_{\alpha\beta} + J_{\alpha\beta}(x, x')] \right\}. \quad (3.72) \end{aligned}$$

Definimos os coeficientes de massa como

$$\mathcal{G}_{\mathbf{M}}(x, x') = \delta^{(4)}(x-x') T_{\mathbf{M}} + J_{\mathbf{M}}(x, x'), \quad (3.73a)$$

$$\mathcal{G}_{\alpha\beta}(x, x') = \delta^{(4)}(x-x') T_{\alpha\beta} + J_{\alpha\beta}(x, x'), \quad (3.73b)$$

em que os termos $T_{\mathbf{M}}$ são definidos pelas equações (C.183) no Apêndice C.10.1 e os termos $T_{\alpha\beta}$ pelas equações (C.206) no Apêndice C.10.2. Então a parte pseudoescalar da ação bosonizada quadrática fica

$$\begin{aligned} S_{\text{quad}}^{\text{bos,P}} = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{\mathbf{M}} \int d^4x d^4x' \delta M^*(x') \delta M(x) \mathcal{G}_{\mathbf{M}}(x, x') \right. \\ \left. + \sum_{\alpha\beta} \int d^4x d^4x' \delta \pi_\alpha(x') \delta \pi_\beta(x) \mathcal{G}_{\alpha\beta}(x, x') \right\}. \quad (3.74) \end{aligned}$$

Podemos expressar os coeficientes de massa \mathcal{G} explicitamente como

$$\mathcal{G}_{\pi^+} = \delta^{(4)}(x-x') \left(2G - \frac{K}{2}\bar{s}_s \right)^{-1} + 2N_c \text{tr} [\mathcal{S}_{\text{MF}}^d(x-x') \gamma_5 \mathcal{S}_{\text{MF}}^u(x'-x) \gamma_5]; \quad (3.75a)$$

$$\mathcal{G}_{\pi^-} = \delta^{(4)}(x-x') \left(2G - \frac{K}{2}\bar{s}_s \right)^{-1} + 2N_c \text{tr} [\mathcal{S}_{\text{MF}}^u(x-x') \gamma_5 \mathcal{S}_{\text{MF}}^d(x'-x) \gamma_5]; \quad (3.75b)$$

$$\mathcal{G}_{K^+} = \delta^{(4)}(x-x') \left(2G - \frac{K}{2}\bar{s}_d \right)^{-1} + 2N_c \text{tr} [\mathcal{S}_{\text{MF}}^s(x-x') \gamma_5 \mathcal{S}_{\text{MF}}^u(x'-x) \gamma_5]; \quad (3.75c)$$

$$\mathcal{G}_{K^-} = \delta^{(4)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \left(2G - \frac{K}{2} \bar{s}_d \right)^{-1} + 2N_c \text{tr} [\mathcal{S}_{MF}^u(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \gamma_5 \mathcal{S}_{MF}^s(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \gamma_5]; \quad (3.75d)$$

$$\mathcal{G}_{K^0} = \delta^{(4)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \left(2G - \frac{K}{2} \bar{s}_u \right)^{-1} + 2N_c \text{tr} [\mathcal{S}_{MF}^s(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \gamma_5 \mathcal{S}_{MF}^d(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \gamma_5]; \quad (3.75e)$$

$$\mathcal{G}_{\bar{K}^0} = \delta^{(4)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \left(2G - \frac{K}{2} \bar{s}_u \right)^{-1} + 2N_c \text{tr} [\mathcal{S}_{MF}^d(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \gamma_5 \mathcal{S}_{MF}^s(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \gamma_5]; \quad (3.75f)$$

$$\mathcal{G}_{00} = \delta^{(4)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \frac{1}{3\Delta} \left\{ 48G^2 - 8GK(\bar{s}_u + \bar{s}_d + \bar{s}_s) - K^2 \left[\bar{s}_u \bar{s}_u + (\bar{s}_d - \bar{s}_s)^2 - \bar{s}_u(\bar{s}_d + \bar{s}_s) \right] \right\} + \frac{J_{uu} + J_{dd} + J_{ss}}{3}; \quad (3.75g)$$

$$\mathcal{G}_{33} = \delta^{(4)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \frac{1}{2\Delta} \left\{ 32G^2 + 8GK\bar{s}_s - K^2(\bar{s}_u + \bar{s}_d)^2 \right\} + \frac{J_{uu} + J_{dd}}{2}; \quad (3.75h)$$

$$\mathcal{G}_{88} = \delta^{(4)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \frac{1}{6\Delta} \left\{ 96G^2 + 8GK[2(\bar{s}_u \bar{s}_u + \bar{s}_d \bar{s}_d) - \bar{s}_s \bar{s}_s] - K^2 \left[(\bar{s}_u - \bar{s}_d)^2 + 4\bar{s}_s(\bar{s}_u + \bar{s}_d) + 4\bar{s}_s \bar{s}_s \right] \right\} + \frac{J_{uu} + J_{dd} - 4J_{ss}}{6}; \quad (3.75i)$$

$$\mathcal{G}_{03} = \delta^{(4)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \frac{K}{\sqrt{6}\Delta} (\bar{s}_u - \bar{s}_d) [4G - K(\bar{s}_u + \bar{s}_d - \bar{s}_s)] + \sqrt{\frac{2}{3}} [J_{uu} - J_{dd}]; \quad (3.75j)$$

$$\mathcal{G}_{08} = \delta^{(4)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \frac{K}{3\sqrt{2}\Delta} \left\{ 4G(\bar{s}_u + \bar{s}_d - 2\bar{s}_s) - K \left[(\bar{s}_u - \bar{s}_d)^2 + \bar{s}_s(\bar{s}_u + \bar{s}_d) - 2\bar{s}_s \bar{s}_s \right] \right\} + \frac{\sqrt{2}}{3} [J_{uu} + J_{dd} - 2J_{ss}]; \quad (3.75k)$$

$$\mathcal{G}_{38} = \delta^{(4)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \frac{K}{2\sqrt{3}\Delta} (\bar{s}_u - \bar{s}_d) [-8G - K(\bar{s}_u + \bar{s}_d - 2\bar{s}_s)] + \frac{J_{uu} - J_{dd}}{\sqrt{3}}. \quad (3.75l)$$

3.7.3 Matriz de Massa

Podemos considerar que os coeficientes de massa \mathcal{G} são os termos de uma matriz 9×9 , ilustrada na Figura 3.3, em que os termos em azul representam os coeficientes de massa dos píons carregados; os termos em verde, os káons carregados; e os termos em vermelho, os káons neutros, todos na diagonal da matriz. Por sua vez, os termos em roxo representam os coeficientes de massa para os mésons π^0 , η e η' , que estão acoplados. Isso pode ser visto pelo fato de

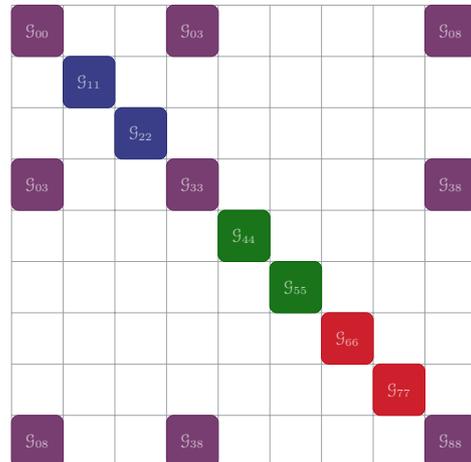
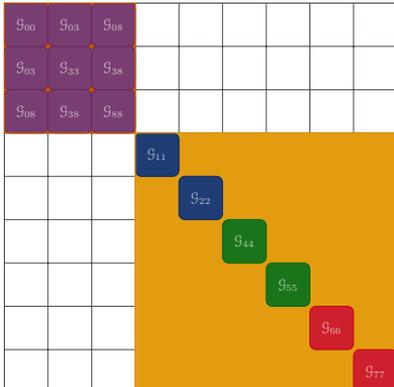


Figura 3.3: Matriz de Massa \mathcal{G}_{TOT}

existirem coeficientes em roxo fora da diagonal da matriz.

Podemos encontrar a massa polo dos mésons diagonalizando a matriz e fazendo $\mathcal{G}_{\text{TOT}} = 0$. Se reorganizarmos os termos desta matriz, podemos particioná-la e transformá-la em uma matriz diagonal por blocos. Assim, podemos reescrevê-la como

$$\mathcal{G}_{\text{TOT}} = \begin{pmatrix} [\mathcal{G}_{\alpha\beta}] & 0 \\ 0 & \mathcal{G}_{\mathcal{M}} \end{pmatrix} =$$


A parte dos mésons carregados e káons neutros já é uma matriz diagonal, já que não há acoplamento entre estes mésons. Assim, para encontrarmos as massas polo destes, só é necessário igualar cada elemento da diagonal de $\mathcal{G}_{\mathcal{M}}$ à zero prosseguir com o cálculo. Para isso, precisaremos reescrever os polarizadores de forma que possamos realizar todas as integrações. Isto será feito até onde possível no Capítulo 4, em que escrevemos os propagadores dos férmions na forma de Schwinger; e no Capítulo 5, em que regularizamos as integrais obtidas no capítulo anterior.

Entretanto, ainda precisamos encontrar um meio de diagonalizar a matriz dos mésons neutros, que possuem elementos fora da diagonal principal. Assim, definimos a matriz de massa dos mésons neutros como

$$\mathcal{M} \equiv [\mathcal{G}_{\alpha\beta}] = \begin{pmatrix} \mathcal{G}_{00} & \mathcal{G}_{03} & \mathcal{G}_{08} \\ \mathcal{G}_{03} & \mathcal{G}_{33} & \mathcal{G}_{38} \\ \mathcal{G}_{08} & \mathcal{G}_{38} & \mathcal{G}_{88} \end{pmatrix}. \quad (3.76)$$

Considerando que a matriz \mathcal{M} é diagonalizável, podemos escrever

$$\mathcal{M} = \mathcal{P}^{-1} \mathcal{M}_{\mathcal{D}} \mathcal{P}, \quad (3.77)$$

em que \mathcal{P} é uma matriz de transformação linear que diagonaliza \mathcal{M} [146]. Se tomarmos o determinante em ambos os lados de (3.77), teremos

$$\begin{aligned}\det[\mathcal{M}] &= \det[\mathcal{P}^{-1}] \det[\mathcal{M}_D] \det[\mathcal{P}], \\ &= \det[\mathcal{P}^{-1}] \det[\mathcal{P}] \det[\mathcal{M}_D],\end{aligned}$$

mas $\det[\mathcal{P}^{-1}] = \det[\mathcal{P}]^{-1}$, então

$$\det[\mathcal{P}^{-1}] \det[\mathcal{P}] = \frac{\det[\mathcal{P}]}{\det[\mathcal{P}]} = 1.$$

Assim,

$$\det[\mathcal{M}] = \det[\mathcal{M}_D], \quad (3.78)$$

e se quisermos encontrar as massas polo dos mésons neutros, precisamos apenas encontrar as raízes de $\det[\mathcal{M}]$ ⁷

Considerando a expressão (3.76), o determinante de \mathcal{M} é

$$\begin{aligned}\det[\mathcal{M}] &= \begin{vmatrix} \mathcal{G}_{00} & \mathcal{G}_{03} & \mathcal{G}_{08} \\ \mathcal{G}_{03} & \mathcal{G}_{33} & \mathcal{G}_{38} \\ \mathcal{G}_{08} & \mathcal{G}_{38} & \mathcal{G}_{88} \end{vmatrix}, \\ &= \mathcal{G}_{00}\mathcal{G}_{33}\mathcal{G}_{88} + 2\mathcal{G}_{03}\mathcal{G}_{08}\mathcal{G}_{38} - \mathcal{G}_{33}(\mathcal{G}_{08})^2 - \mathcal{G}_{88}(\mathcal{G}_{03})^2 - \mathcal{G}_{00}(\mathcal{G}_{38})^2. \end{aligned} \quad (3.79)$$

Podemos separar cada coeficiente de massa $\mathcal{G}_{\alpha\beta}$ em sua parte real e sua parte imaginária,

⁷**Outra forma de mostrar isso:** Se a matriz \mathcal{M} tem autovalores m_a , $a = 0, 3, 8$, então

$$\det[\mathcal{M}] = m_0 m_3 m_8.$$

Também podemos considerar que quando diagonalizamos a matriz \mathcal{M} , os elementos presentes em sua diagonal principal são seus autovalores, ou seja

$$\mathcal{M}_D = \begin{pmatrix} m_0 & 0 & 0 \\ 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & m_8 \end{pmatrix}.$$

$$\mathcal{G}_{\alpha\beta} = \text{Re}[\mathcal{G}_{\alpha\beta}] + i\text{Im}[\mathcal{G}_{\alpha\beta}] \equiv \mathcal{G}_{\alpha\beta}^{\text{R}} + i\mathcal{G}_{\alpha\beta}^{\text{I}}.$$

Assim, podemos escrever a parte real do determinante como

$$\begin{aligned} \text{Re}[\det \mathcal{M}] &= \mathcal{G}_{00}^{\text{R}} \left[\mathcal{G}_{33}^{\text{R}} \mathcal{G}_{88}^{\text{R}} - \mathcal{G}_{33}^{\text{I}} \mathcal{G}_{88}^{\text{I}} - (\mathcal{G}_{38}^{\text{R}})^2 + (\mathcal{G}_{38}^{\text{I}})^2 \right] - \mathcal{G}_{00}^{\text{I}} \left[\mathcal{G}_{33}^{\text{R}} \mathcal{G}_{88}^{\text{I}} + \mathcal{G}_{33}^{\text{I}} \mathcal{G}_{88}^{\text{R}} - 2 \mathcal{G}_{38}^{\text{R}} \mathcal{G}_{38}^{\text{I}} \right] \\ &+ 2 \mathcal{G}_{03}^{\text{R}} \left[\mathcal{G}_{08}^{\text{R}} \mathcal{G}_{38}^{\text{R}} - \mathcal{G}_{08}^{\text{I}} \mathcal{G}_{38}^{\text{I}} \right] - 2 \mathcal{G}_{03}^{\text{I}} \left[\mathcal{G}_{08}^{\text{R}} \mathcal{G}_{38}^{\text{I}} + \mathcal{G}_{08}^{\text{I}} \mathcal{G}_{38}^{\text{R}} \right] - \mathcal{G}_{33}^{\text{R}} \left[(\mathcal{G}_{08}^{\text{R}})^2 - (\mathcal{G}_{08}^{\text{I}})^2 \right] \\ &+ 2 \mathcal{G}_{33}^{\text{I}} \mathcal{G}_{08}^{\text{R}} \mathcal{G}_{08}^{\text{I}} - \mathcal{G}_{88}^{\text{R}} \left[(\mathcal{G}_{03}^{\text{R}})^2 - (\mathcal{G}_{03}^{\text{I}})^2 \right] + 2 \mathcal{G}_{88}^{\text{I}} \mathcal{G}_{03}^{\text{R}} \mathcal{G}_{03}^{\text{I}}, \end{aligned} \quad (3.80)$$

e a parte imaginária como

$$\begin{aligned} \text{Im}[\det \mathcal{M}] &= \mathcal{G}_{00}^{\text{I}} \left[\mathcal{G}_{33}^{\text{R}} \mathcal{G}_{88}^{\text{R}} - \mathcal{G}_{33}^{\text{I}} \mathcal{G}_{88}^{\text{I}} - (\mathcal{G}_{38}^{\text{R}})^2 + (\mathcal{G}_{38}^{\text{I}})^2 \right] + \mathcal{G}_{00}^{\text{R}} \left[\mathcal{G}_{33}^{\text{R}} \mathcal{G}_{88}^{\text{I}} + \mathcal{G}_{33}^{\text{I}} \mathcal{G}_{88}^{\text{R}} - 2 \mathcal{G}_{38}^{\text{R}} \mathcal{G}_{38}^{\text{I}} \right] \\ &+ 2 \mathcal{G}_{03}^{\text{I}} \left[\mathcal{G}_{08}^{\text{R}} \mathcal{G}_{38}^{\text{R}} - \mathcal{G}_{08}^{\text{I}} \mathcal{G}_{38}^{\text{I}} \right] + 2 \mathcal{G}_{03}^{\text{R}} \left[\mathcal{G}_{08}^{\text{R}} \mathcal{G}_{38}^{\text{I}} + \mathcal{G}_{08}^{\text{I}} \mathcal{G}_{38}^{\text{R}} \right] - \mathcal{G}_{33}^{\text{I}} \left[(\mathcal{G}_{08}^{\text{R}})^2 - (\mathcal{G}_{08}^{\text{I}})^2 \right] \\ &- 2 \mathcal{G}_{33}^{\text{R}} \mathcal{G}_{08}^{\text{R}} \mathcal{G}_{08}^{\text{I}} - \mathcal{G}_{88}^{\text{I}} \left[(\mathcal{G}_{03}^{\text{R}})^2 - (\mathcal{G}_{03}^{\text{I}})^2 \right] - 2 \mathcal{G}_{88}^{\text{R}} \mathcal{G}_{03}^{\text{R}} \mathcal{G}_{03}^{\text{I}}. \end{aligned} \quad (3.81)$$

Para encontrarmos as massas polo dos mésons neutros, \mathbf{m}_{M} , e suas larguras de decaimento, Γ_{M} , precisamos resolver numericamente o sistema de equações

$$\text{Re}[\det \mathcal{M}](\mathbf{m}_{\text{M}}, \Gamma_{\text{M}}) = 0, \quad (3.82a)$$

$$\text{Im}[\det \mathcal{M}](\mathbf{m}_{\text{M}}, \Gamma_{\text{M}}) = 0. \quad (3.82b)$$

em que cada uma das três raízes estão associadas à um dos mésons π^0 , η e η' . Para os dois primeiros mésons, pode-se fazer $\Gamma_{\pi^0} = \Gamma_{\eta} = 0$, mas o mesmo não ocorre para o méson η' .

Os termos presentes em (3.81) e (3.80) ainda precisam ser calculados explicitamente, o que será feito nos próximos capítulos.

Neste capítulo, a partir da aproximação de campo médio, encontramos a equação de gap e uma expressão para o condensado de quarks no modelo NJL. Além disso, quando consideramos a segunda ordem da aproximação, pudemos expressar as funções de polarização dos mésons neutros e carregados em termos dos propagadores dos quarks e dos condensados. Até aqui, apesar de aparecer implicitamente nas expressões, a influência do campo magnético não foi vista de forma explícita. No capítulo seguinte, poderemos observar esse comportamento ao resolvermos algebricamente as integrais que aparecem, para no Capítulo 5 regularizarmos as integrais divergentes resultantes.

Capítulo 4

Polarizadores

No capítulo anterior encontramos expressões para as funções de polarizador de cada méson do noneto mesônico pseudoescalar¹, mas estes foram escritos de uma forma mais genérica. Como estamos interessados em estudar o efeito de campos magnéticos fortes no comportamento da massa polo dos mésons, assim como na massa efetiva dos quarks e em seus condensados, precisaremos reescrever nossas expressões em termos que explicitem essa influência dos campos magnéticos. Assim, consideraremos um campo magnético estático e constante na direção z e utilizaremos o calibre de Landau,

$$\mathcal{A}_\mu = \delta_{\mu 2} \chi_1 B. \quad (4.1)$$

Além disso, utilizaremos os propagadores na forma de Schwinger e, para os mésons carregados, aplicaremos o método de Ritus para eliminarmos as fases de Schwinger.

4.1 Propagador na forma de Schwinger

Vamos utilizar o propagador na forma de Schwinger [21] na sua forma Euclidiana

$$\mathcal{S}_{MF}^f(x - x') = e^{i\Phi_f(x, x')} \int \frac{d^4\mathbf{p}}{(2\pi)^4} \tilde{\mathcal{S}}_p^f e^{ip(x-x')}, \quad (4.2)$$

em que o propagador na forma de Schwinger $\tilde{\mathcal{S}}_p^f$ é dado por [5]

¹Chamamos de noneto mesônico o conjunto dos mésons pseudoescalares formados pelo octeto mesônico pseudoescalar de spin 0, 0^- , composto pelos píons, pelos káons e pelo méson η ; e pelo singlete do méson η'

$$\tilde{\mathcal{S}}_p^f = \int_0^\infty d\tau \exp \left[-\tau \left(M_f^2 + p_\parallel^2 + p_\perp^2 \frac{\tanh(B_f \tau)}{B_f \tau} \right) \right] \left\{ [-(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma})_\parallel + M_f] [1 + i\gamma_1 \gamma_2 s_f \tanh(B_f \tau)] - \frac{(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma})_\perp}{\cosh^2(B_f \tau)} \right\}, \quad (4.3)$$

4.1.1

$$s_f = \text{sign}[q_f B]$$

$$B_f = |q_f B|$$

$$p_\perp = (p_1, p_2)$$

$$p_\parallel = (p_3, p_4)$$

e a fase de Schwinger é dada por

$$\Phi_f = \frac{iq_f}{2} B(x_1 + x'_1)(x_2 - x'_2). \quad (4.4)$$

4.2 Condensado de Quarks

Como vimos no Capítulo 3, na expressão (3.59), o condensado de quarks é dado por

$$\langle \bar{\psi}_f \psi_f \rangle = - \frac{N_c}{V^{(4)}} \int \frac{d^4 x}{(2\pi)^4} \text{tr } \mathcal{S}_{MF}^f. \quad (4.5)$$

Como agora estamos considerando o campo magnético constante B , precisamos reescrever esta expressão em termos do mesmo. Começamos reescrevendo (4.5) em termos do propagador na fase de Schwinger, (4.2),

$$\langle \bar{\psi}_f \psi_f \rangle = - \frac{N_c}{V^{(4)}} \int \frac{d^4 x}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{ip(x-x')} e^{i\Phi_f(x,x')} \text{tr } \tilde{\mathcal{S}}_p^f \Big|_{x=x'}. \quad (4.6)$$

Seguiremos realizando analiticamente todas as integrais possíveis, para então realizarmos a integração numérica.

4.2.1 Integração em x

Tomando o limite $x \rightarrow x'$, e considerando a fase de Schwinger, (4.4); as exponenciais de (4.6) ficam

$$e^{ip(x-x')} e^{i\Phi_f(x,x')} = e^{ip \cdot 0} e^{i \cdot 0} = 1.$$

Assim, podemos fazer a integração em x

$$\frac{1}{V^{(4)}} \int d^4x = \frac{V^{(4)}}{V^{(4)}} = 1,$$

e podemos reescrever (4.6) como

$$\langle \bar{\psi}_f \psi_f \rangle = \frac{N_c}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{tr} \tilde{S}_p^f. \quad (4.7)$$

O termo do traço é calculado no Apêndice D.1.1, e a expressão (4.7) pode ser reescrita como

$$\langle \bar{\psi}_f \psi_f \rangle = - \frac{N_c}{(2\pi)^4} 4M_f \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \int_0^\infty d\tau \exp \left[-\tau \left(M_f^2 + p_{\parallel}^2 + p_{\perp}^2 \frac{\tanh(B_f \tau)}{B_f \tau} \right) \right]. \quad (4.8)$$

4.2.2 Integração em \mathbf{p}

Para realizarmos a integração em \mathbf{p} , podemos escrever

$$d^4p = d^2p_{\parallel} d^2p_{\perp},$$

em que $d^2p_{\perp} = dp_1 dp_2$ e $d^2p_{\parallel} = dp_3 dp_4$. Então a integral (4.8) pode ser expressa como

$$\langle \bar{\psi}_f \psi_f \rangle = - \frac{N_c}{(2\pi)^4} \frac{4M_f}{(2\pi)^4} \int_0^\infty d\tau \exp(-\tau M_f) I_1 I_2, \quad (4.9)$$

com

$$I_1 = \int d^2p_{\parallel} \exp(-\tau p_{\parallel}^2), \quad (4.10a)$$

$$I_2 = \int d^2p_{\perp} \exp \left[-\tau p_{\perp}^2 \frac{\tanh(B_f \tau)}{B_f \tau} \right]. \quad (4.10b)$$

Calculamos cada uma destas integrais separadamente nos Apêndices D.1.2 e D.1.2 respectivamente e obtemos

$$I_1 = \frac{\pi}{\tau}, \quad (4.11a)$$

$$I_2 = \frac{B_f \pi}{\tanh(B_f \tau)}, \quad (4.11b)$$

para podermos escrever (4.9) como

$$\langle \bar{\psi}_f \psi_f \rangle = - \frac{N_c}{(2\pi)^4} \frac{4M_f}{(2\pi)^4} \int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau^2} \exp(-\tau M_f^2) B_f \tau \coth(B_f \tau). \quad (4.12)$$

Ao definirmos

$$I = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau^2} \exp(-\tau M_f^2) B_f \tau \coth(B_f \tau), \quad (4.13)$$

podemos finalmente expressar o condensado de quarks em função da integral (4.13),

$$\langle \bar{\psi}_f \psi_f \rangle = - \frac{N_c M_f}{(2\pi)^4} I. \quad (4.14)$$

A integral (4.13) contém infinitos que precisam ser tratados, o que faremos na seção 5.2 do Capítulo 5.

4.3 Polarizador para $f = f'$ (*Mésons Neutros*)

Nos concentraremos primeiro no polarizador mais simples, com apenas um sabor de quark. No Capítulo 3, encontramos a expressão (3.68) para o polarizador de um méson genérico composto pelos quarks f e f' . Quando consideramos sabores de quark iguais, ou seja, $f = f'$, teremos

$$J_{ff} = 2N_c \text{tr} [S_{MF}^f(x - x') \gamma_5 S_{MF}^f(x' - x) \gamma_5]. \quad (4.15)$$

Novamente iremos calcular essa expressão utilizando os propagadores na forma de Schwinger. Assim, substituindo (4.2) na equação (4.15), obtemos

$$J_{ff}(x, x') = 2N_c \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p'}{(2\pi)^4} \text{tr} [\tilde{S}_p^f \gamma_5 \tilde{S}_{p'}^f \gamma_5] e^{i\Phi_f(x, x')} e^{i\Phi_f(x', x)} e^{i(p-p')(x-x')}. \quad (4.16)$$

Como temos $f = f'$, as fases de Schwinger, dadas por (4.4), se cancelam. Assim, podemos reescrever a função de polarização como

$$J_{ff}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 2N_c \int \frac{d^4\mathbf{p}}{(2\pi)^4} \frac{d^4\mathbf{p}'}{(2\pi)^4} \text{tr} [\tilde{S}_p^f \gamma_5 \tilde{S}_{p'}^f \gamma_5] e^{i(\mathbf{p}-\mathbf{p}')(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}. \quad (4.17)$$

Como na parte espacial o polarizador depende apenas da diferença $(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$, então este é invariante translacional e o momento do méson é conservado.

Queremos calcular a integral

$$\begin{aligned} I_{ff} &= \int d^4\mathbf{x} d^4\mathbf{x}' \delta\pi_\alpha(\mathbf{x}') \delta\pi_\beta(\mathbf{x}) [2N_c \text{tr} [S_{MF}^f(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \gamma_5 S_{MF}^f(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \gamma_5]], \\ &= \int d^4\mathbf{x} d^4\mathbf{x}' \delta\pi_\alpha(\mathbf{x}') \delta\pi_\beta(\mathbf{x}) \left[2N_c \int \frac{d^4\mathbf{p}}{(2\pi)^4} \frac{d^4\mathbf{p}'}{(2\pi)^4} \text{tr} [\tilde{S}_p^f \gamma_5 \tilde{S}_{p'}^f \gamma_5] e^{i(\mathbf{p}-\mathbf{p}')(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} \right]. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Para isso, podemos primeiro tomar a transformada de Fourier dos campos dos mésons,

$$\delta\pi_\alpha(\mathbf{x}) = \int \frac{d^4\mathbf{q}}{(2\pi)^4} e^{i\mathbf{q}\mathbf{x}} \delta\pi_\alpha(\mathbf{q}), \quad (4.19)$$

e a integral (4.18) fica

$$\begin{aligned} I_{ff} &= \int d^4\mathbf{x} d^4\mathbf{x}' \frac{d^4\mathbf{p}}{(2\pi)^4} \frac{d^4\mathbf{p}'}{(2\pi)^4} \left[\int \frac{d^4\mathbf{q}}{(2\pi)^4} e^{i\mathbf{q}\mathbf{x}} \delta\pi_\alpha(\mathbf{q}) \right] \\ &\quad \times \left[\int \frac{d^4\mathbf{q}'}{(2\pi)^4} e^{i\mathbf{q}'\mathbf{x}'} \delta\pi_\alpha(\mathbf{q}') \right] 2N_c \text{tr} [\tilde{S}_p^f \gamma_5 \tilde{S}_{p'}^f \gamma_5] e^{i(\mathbf{p}-\mathbf{p}')(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

O momento do méson só será conservado se $-\mathbf{q}' = \mathbf{q}$, mas isso aparece naturalmente, como podemos ver no Apêndice D.2.1. Assim, ao definirmos $\mathbf{p}_\pm = \mathbf{p} \pm \frac{\mathbf{q}}{2}$ obtemos

$$I_{ff} = \int \frac{d^4\mathbf{q}}{(2\pi)^4} \delta\pi_\alpha(-\mathbf{q}) \delta\pi_\beta(\mathbf{q}) G_{ff}, \quad (4.21)$$

onde o polarizador no espaço dos momentos é definido como

$$G_{ff}(\mathbf{q}) = 2N_c \int \frac{d^4\mathbf{p}}{(2\pi)^4} \text{tr} [\tilde{S}_{p_+}^f \gamma_5 \tilde{S}_{p_-}^f \gamma_5]. \quad (4.22)$$

O traço em (4.22) precisa ser calculado, o que realizamos no Apêndice D.2.2. O polarizador no espaço dos momentos então é escrito como

$$\begin{aligned}
G_{ff}(\mathbf{q}) = 2N_c \int \frac{d^4\mathbf{p}}{(2\pi)^4} \int d\tau d\tau' \exp \left[-\tau \left(M_f^2 + p_{+\parallel}^2 + p_{+\perp}^2 \frac{\tanh(B_f\tau)}{B_f\tau} \right) \right] \\
\exp \left[-\tau' \left(M_f^2 + p_{-\parallel}^2 + p_{-\perp}^2 \frac{\tanh(B_f\tau')}{B_f\tau'} \right) \right] 4 \left\{ [(\mathbf{p}_+ \cdot \mathbf{p}_-)_{\parallel} + M_f^2] \right. \\
\left. [1 + \tanh(B_f\tau) \tanh(B_f\tau')] + \frac{(\mathbf{p}_+ \cdot \mathbf{p}_-)_{\perp}}{\cosh^2(B_f\tau) \cosh^2(B_f\tau')} \right\}, \quad (4.23)
\end{aligned}$$

onde

$$\mathbf{p}_{\pm} = \mathbf{p} \pm \frac{\mathbf{q}}{2}. \quad (4.24)$$

Considerando a expressão (4.24), podemos expressar $p_{\pm\perp}^2$ como

$$\begin{aligned}
p_+ = \mathbf{p} + \frac{\mathbf{q}}{2} &\Rightarrow p_{+\perp}^2 = \left(p_1 + \frac{q_1}{2} \right)^2 + \left(p_2 + \frac{q_2}{2} \right)^2, \\
p_- = \mathbf{p} - \frac{\mathbf{q}}{2} &\Rightarrow p_{-\perp}^2 = \left(p_1 - \frac{q_1}{2} \right)^2 + \left(p_2 - \frac{q_2}{2} \right)^2,
\end{aligned}$$

para então reescrevemos $G_{ff}(\mathbf{q})$

$$\begin{aligned}
G_{ff}(\mathbf{q}) = 8N_c \int \frac{d^4\mathbf{p}}{(2\pi)^4} \int d\tau d\tau' \exp[-M_f^2(\tau + \tau')] \\
\exp \left\{ -\tau \left\{ p_{+\parallel}^2 + \left[\left(p_1 + \frac{q_1}{2} \right)^2 + \left(p_2 + \frac{q_2}{2} \right)^2 \right] \frac{\tanh(B_f\tau)}{B_f\tau} \right\} \right\} \\
\exp \left\{ -\tau' \left\{ p_{-\parallel}^2 + \left[\left(p_1 - \frac{q_1}{2} \right)^2 + \left(p_2 - \frac{q_2}{2} \right)^2 \right] \frac{\tanh(B_f\tau')}{B_f\tau'} \right\} \right\} \\
\left\{ [M_f^2 + (\mathbf{p}_+ \cdot \mathbf{p}_-)_{\parallel}] [1 + \tanh(B_f\tau) \tanh(B_f\tau')] + \frac{p_1^2 + p_2^2 + \frac{1}{4}(q_1^2 + q_2^2)}{\cosh^2(B_f\tau) \cosh^2(B_f\tau')} \right\}. \quad (4.25)
\end{aligned}$$

4.3.1 Integração em \mathbf{p}

Precisamos reescrever o integrando no momento, já que expressamos \mathbf{p} em termos de \mathbf{p}_{\perp} e \mathbf{p}_{\parallel} . Desta forma, teremos

$$d^4\mathbf{p} = d^2\mathbf{p}_{\parallel} d^2\mathbf{p}_{\perp},$$

e então

$$\begin{aligned}
G_{ff}(\mathbf{q}) &= \frac{8N_c}{(2\pi)^4} \int d^2\mathbf{p}_\perp d^2\mathbf{p}_\parallel \int_0^\infty d\tau \int_0^\infty d\tau' \exp[-M_f^2(\tau + \tau')] \exp[-\tau\mathbf{p}_{+\parallel}^2 - \tau'\mathbf{p}_{-\parallel}^2] \\
&\quad \times \exp\left\{-\tau\mathbf{p}_{+\perp}^2 \frac{\tanh(B_f\tau)}{B_f\tau} - \tau'\mathbf{p}_{-\perp}^2 \frac{\tanh(B_f\tau')}{B_f\tau'}\right\} \left\{ [M_f^2 + (\mathbf{p}_+ \cdot \mathbf{p}_-)_\parallel] \right. \\
&\quad \left. \times [1 + \tanh(B_f\tau) \tanh(B_f\tau')] + \frac{(\mathbf{p}_+ \cdot \mathbf{p}_-)_\perp}{\cosh^2(B_f\tau) \cosh^2(B_f\tau')} \right\}. \tag{4.26}
\end{aligned}$$

Precisamos agora fazer a integração em \mathbf{p}_\parallel e em \mathbf{p}_\perp . Isto é realizado nos Apêndices [D.2.3](#) e [D.2.4](#) respectivamente, e obtemos

$$\begin{aligned}
G_{ff}(\mathbf{q}) &= \frac{4 \cdot 2}{4 \cdot 4\pi^2} \frac{\pi^2}{\pi^2} \int_0^\infty d\tau d\tau' \exp[-M_f^2(\tau + \tau')] \exp\left[-\frac{\tau\tau'}{(\tau + \tau')} \mathbf{q}_\parallel^2\right] \exp\left[-\frac{t t'}{(t + t')} \mathbf{q}_\perp^2\right] \\
&\quad \times \left\{ \frac{1}{(\tau + \tau')} \frac{1}{\cosh^2(B_f\tau) \cosh^2(B_f\tau')} \frac{B_f^2}{(t + t')} \left[1 + \frac{(t - t')^2}{(t + t')} \frac{\mathbf{q}_\perp^2}{4B_f}\right] \right. \\
&\quad + \frac{B_f}{(t + t')} \left\{ \frac{1}{(\tau + \tau')} \left(M_f^2 - \frac{\mathbf{q}_\parallel^2}{4}\right) [1 + t t'] - \frac{1}{4(\tau + \tau')} \frac{\mathbf{q}_\perp^2}{\cosh^2(B_f\tau) \cosh^2(B_f\tau')} \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{(\tau + \tau')^2} \left[1 + \frac{(\tau - \tau')^2}{(\tau + \tau')} \frac{\mathbf{q}_\parallel^2}{4}\right] [1 + t t'] \right\} \right\}. \tag{4.27}
\end{aligned}$$

Para integrarmos em τ e τ' , faremos a mudança de variáveis

$$\tau = zy, \quad \tau' = z(1 - y),$$

onde $z \in [0, \infty[$ e $y \in [0, 1]$. Detalhes desta mudança de variáveis são dados no Apêndice [D.2.5](#). A equação obtida é reorganizada no Apêndice [D.2.6](#) e finalmente obtemos

$$\begin{aligned}
G_{ff}(\mathbf{q}) &= \frac{N_c}{2\pi^2} B_f \int_0^\infty dz \int_0^1 dy \exp\left\{-z \left[M_f^2 + y(1 - y) \mathbf{q}_\parallel^2\right]\right\} \\
&\quad \times \exp\left\{-\frac{\sinh(B_f zy) \sinh[B_f z(1 - y)]}{\sinh(B_f z)}\right\} \left\{ \coth(B_f z) \left[M_f^2 + \frac{1}{z} - y(1 - y) \mathbf{q}_\parallel^2\right] \right. \\
&\quad \left. + \frac{B_f}{\sinh^2(B_f z)} \left[1 - \frac{\mathbf{q}_\perp^2}{B_f} \frac{\sinh(B_f zy) \sinh[B_f z(1 - y)]}{\sinh(B_f z)}\right] \right\}. \tag{4.28}
\end{aligned}$$

Esta integral contém divergências, mas lidaremos com isso no Capítulo [5](#).

4.4 Polarizador dos káons neutros

Os káons neutros são compostos por um quark e um antiquark de sabores diferentes, então a sua função de polarização deve levar isso em conta. Entretanto, como as cargas destes mésons são nulas, estes polarizadores são mais simples. Definimos estas funções em (3.67e) e (3.67f) como

$$J_{K^0}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 2N_c \operatorname{tr} [\mathcal{S}_{MF}^s(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \gamma_5 \mathcal{S}_{MF}^d(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \gamma_5], \quad (4.29a)$$

$$J_{\bar{K}^0}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 2n_c \operatorname{tr} [\mathcal{S}_{MF}^d(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \gamma_5 \mathcal{S}_{MF}^s(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \gamma_5], \quad (4.29b)$$

e podemos reescrever estes polarizadores de forma generalizada como

$$J_{ff'}^0(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 2N_c \operatorname{tr} [\mathcal{S}_{MF}^f(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \gamma_5 \mathcal{S}_{MF}^{f'}(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \gamma_5]. \quad (4.30)$$

Queremos calcular integrais do tipo

$$\begin{aligned} I_M &= \int d^4\mathbf{x} d^4\mathbf{x}' \delta M^*(\mathbf{x}') \delta M(\mathbf{x}) J_{ff'} \\ &= 2N_c \int d^4\mathbf{x} d^4\mathbf{x}' \delta M^*(\mathbf{x}') \delta M(\mathbf{x}) \operatorname{tr} [\mathcal{S}_{MF}^f(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \gamma_5 \mathcal{S}_{MF}^{f'}(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \gamma_5], \end{aligned} \quad (4.31)$$

e para isto utilizamos o propagador na forma de Schwinger (4.2). Assim, substituindo (4.3) na equação (4.31), considerando que as fases de Schwinger se cancelam, como podemos ver no Apêndice D.3.1, teremos a integral

$$I_M = 2N_c \int \frac{d^4\mathbf{p}}{(2\pi)^4} \frac{d^4\mathbf{p}'}{(2\pi)^4} \operatorname{tr} [\tilde{\mathcal{S}}_p^f \gamma_5 \tilde{\mathcal{S}}_{p'}^{f'} \gamma_5] \int d^4\mathbf{x} d^4\mathbf{x}' \delta M^*(\mathbf{x}') \delta M(\mathbf{x}) e^{i(\mathbf{p}-\mathbf{p}') \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{x}')}. \quad (4.32)$$

Da mesma forma que fizemos anteriormente, podemos tomar a transformada de Fourier dos campos δM ,

$$\delta M(\mathbf{x}) = \int \frac{d^4\mathbf{q}}{(2\pi)^4} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} \delta M_{\bar{\mathbf{q}}} = \int \frac{d^4\mathbf{q}}{(2\pi)^4} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} \delta M(\mathbf{q}), \quad (4.33)$$

para reescrever a integral (4.32) como

$$I_M = 2N_c \int \frac{d^4\mathbf{p}}{(2\pi)^4} \frac{d^4\mathbf{p}'}{(2\pi)^4} \text{tr} \left[\tilde{\mathcal{S}}_{\mathbf{p}}^f \gamma_5 \tilde{\mathcal{S}}_{\mathbf{p}'}^{f'} \gamma_5 \right] \int d^4\mathbf{q} d^4\mathbf{q}' \frac{d^4\mathbf{x}}{(2\pi)^4} \frac{d^4\mathbf{x}'}{(2\pi)^4} e^{i(\mathbf{p}-\mathbf{p}')(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} \\ \times e^{i\mathbf{q}\mathbf{x}} e^{i\mathbf{q}'\mathbf{x}'} \delta M^*(\mathbf{q}') \delta M(\mathbf{q}). \quad (4.34)$$

As integrações em \mathbf{x} , \mathbf{x}' , \mathbf{p}' e \mathbf{q}' são realizadas no Apêndice D.3.2, onde obtemos

$$I_M = 2N_c \int \frac{d^4\mathbf{p}}{(2\pi)^4} \frac{d^4\mathbf{q}}{(2\pi)^4} \text{tr} \left[\tilde{\mathcal{S}}_{\mathbf{p}_-}^f \gamma_5 \tilde{\mathcal{S}}_{\mathbf{p}_+}^{f'} \gamma_5 \right] \delta M^*(-\mathbf{q}) \delta M(\mathbf{q}), \quad (4.35)$$

com $\mathbf{p}_{\pm} = \mathbf{p} \pm \frac{\mathbf{q}}{2}$.

Para prosseguir, precisamos definir o polarizador no espaço dos momentos como

$$G_{ff'}(\mathbf{q}) = 2N_c \int \frac{d^4\mathbf{p}}{(2\pi)^4} \text{tr} \left[\tilde{\mathcal{S}}_{\mathbf{p}_-}^f \gamma_5 \tilde{\mathcal{S}}_{\mathbf{p}_+}^{f'} \gamma_5 \right]. \quad (4.36)$$

O termo do traço em (4.36) é calculado no Apêndice D.3.3, e então o polarizador no espaço dos momentos (4.36) é expresso como

$$G_{ff'} = 8N_c \int \frac{d^4\mathbf{p}}{(2\pi)^4} \int_0^\infty d\tau d\tau' \int_0^\infty d\tau d\tau' \exp \left[-\tau \left(M_f^2 + \mathbf{p}_{-\parallel}^2 + \mathbf{p}_{-\perp}^2 \frac{\tanh(B_f\tau)}{B_f\tau} \right) \right] \\ \exp \left[-\tau' \left(M_{f'}^2 + \mathbf{p}_{+\parallel}^2 + \mathbf{p}_{+\perp}^2 \frac{\tanh(B_{f'}\tau')}{B_{f'}\tau'} \right) \right] \\ \times 4 \left\{ [(\mathbf{p}_+ \cdot \mathbf{p}_-)_{\parallel} + M_f M_{f'}] [1 + \tanh(B_f\tau) \tanh(B_{f'}\tau')] \right. \\ \left. + \frac{(\mathbf{p}_+ \cdot \mathbf{p}_-)_{\perp}}{\cosh^2(B_f\tau) \cosh^2(B_{f'}\tau')} \right\}. \quad (4.37)$$

É necessário agora realizar a integração em \mathbf{p}_{\parallel} , o que é feito no Apêndice D.3.4; e em \mathbf{p}_{\perp} , feita no Apêndice D.3.5, e ficamos com

$$G_{ff'}(\mathbf{q}) = \frac{2N_c}{(2\pi)^2} \frac{4\pi^2}{4\pi^2} \int_0^\infty d\tau d\tau' \exp \left[-(\tau M_f^2 + \tau' M_{f'}^2) \right] \exp \left[-\frac{\tau\tau'}{\tau + \tau'} \mathbf{q}_{\parallel}^2 \right] \exp \left[-\frac{t t'}{t + t'} \frac{\mathbf{q}_{\perp}^2}{B_f} \right] \\ \left\{ \frac{1}{\tau + \tau'} \frac{1}{\cosh^2(B_f\tau) \cosh^2(B_{f'}\tau')} \frac{B_f^2}{(t + t')^2} \left[1 + \frac{\mathbf{q}_{\perp}^2}{4B_f} \frac{(t - t')^2}{(t + t')} \right] \right. \\ \left. + \frac{B_f}{(t + t')} \left\{ \frac{1}{(\tau + \tau')} \left(M_f M_{f'} - \frac{\mathbf{q}_{\parallel}^2}{4} \right) (1 + t t') - \frac{1}{4(\tau + \tau')} \frac{\mathbf{q}_{\perp}^2}{\cosh^2(B_f\tau) \cosh^2(B_{f'}\tau')} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{(\tau + \tau')^2} \left[1 + \frac{(\tau - \tau')^2}{(\tau + \tau')} \frac{\mathbf{q}_{\parallel}^2}{4} \right] (1 + t t') \right\} \right\}. \quad (4.38)$$

Finalmente, é necessário fazer a mudança de base de τ e τ' , cujos detalhes são dados no Apêndice D.3.6. A equação obtida então é reorganizada no Apêndice D.3.7, e teremos

$$\begin{aligned} G_{ff'}(q) = & \frac{2N_c}{(2\pi)^2} B_f \int_0^\infty dz \int_0^1 dy \exp\left\{-z\left[\mathbf{y}M_f^2 + (1-y)M_{f'}^2 - \mathbf{y}(1-y)q_{\parallel}^2\right]\right\} \\ & \exp\left[-\frac{\sinh(B_f z \mathbf{y}) \sinh[B_f z(1-y)]}{\sinh(B_f z)} \frac{q_{\perp}^2}{B_f}\right] \\ & \left\{ \frac{B_f}{\sinh^2(B_f z)} \left[1 - \frac{q_{\perp}^2}{4} \frac{\sinh(B_f z \mathbf{y}) \sinh[B_f z(1-y)]}{\sinh(B_f z)}\right] \right. \\ & \left. + \coth(B_f z) \left[M_f M_{f'} + \frac{1}{z} - \mathbf{y}(1-y)q_{\parallel}^2\right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Novamente, a integral obtida é divergente, e a regularizamos no Capítulo 5.

4.5 Polarizador dos mésons carregados

Finalmente, iremos calcular os polarizadores escritos de maneira mais generalizada, em que a carga dos mésons não é nula e os sabores de quark são diferentes. Consideraremos o caso dos mésons com carga positiva, mas o cálculo para os mésons com carga negativa é similar. Assim, os polarizadores para os mésons carregados (com carga (+)), calculados no Capítulo 3 e dados pelas expressões (3.67a) e (3.67c) são

$$\begin{aligned} J_{\pi^+}(x, x') &= 2N_c \operatorname{tr}[\mathcal{S}_{MF}^d(x-x')\gamma_5 \mathcal{S}_{MF}^u(x'-x)\gamma_5], \\ J_{K^+}(x, x') &= 2N_c \operatorname{tr}[\mathcal{S}_{MF}^s(x-x')\gamma_5 \mathcal{S}_{MF}^u(x'-x)\gamma_5], \end{aligned}$$

que podemos reescrever como

$$J_{M^+}(x, x') = 2N_c \operatorname{tr}[\mathcal{S}_{MF}^f \gamma_5 \mathcal{S}_{MF}^{f'} \gamma_5], \quad (4.41)$$

em que M representa cada canal mesônico e f e f' são os índices de sabor.

Da mesma forma que anteriormente, queremos resolver integrais do tipo

$$I_M = \int d^4x d^4x' \delta M_+^*(x) J_{M^+} \delta M_+,$$

$$= -2N_c \int d^4x d^4x' \delta M_+^*(x) \text{tr} \left[\mathcal{S}_{MF}^f(x-x') \gamma_5 \mathcal{S}_{MF}^{f'}(x'-x) \gamma_5 \right] \delta M_+(x'). \quad (4.42)$$

Novamente, podemos calcular a expressão (4.42) usando os propagadores na forma de Schwinger dados por (4.2). Assim, reescrevemos (4.42) como

$$I_M = 2N_c \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{d^4p'}{(2\pi)^4} \text{tr} \left[\tilde{\mathcal{S}}_p^f \gamma_5 \tilde{\mathcal{S}}_{p'}^{f'} \gamma_5 \right] \int d^4x d^4x' e^{i\Phi_f(x,x')} e^{i\Phi_{f'}(x',x)} e^{i(p-p')(x-x')} \delta M_+^*(x) \delta M_+(x'). \quad (4.43)$$

As fases de Schwinger, dadas por (4.4), ficam

$$\begin{aligned} i\Phi_f(x, x') + i\Phi_{f'}(x', x) &= \frac{i}{2} [q_f B(x_1 + x'_1)(x_2 - x'_2) + q_{f'} B(x'_1 + x_1)(x_2 - x_2)], \\ &= \frac{B}{2} (x_1 - x'_1)(x_2 - x'_2) [q_f - q_{f'}]. \end{aligned}$$

Como $q_f \neq q_{f'}$, desta vez as fases de Schwinger não se cancelam, pois os sabores de quark e suas cargas são diferentes. Por isso, a invariância translacional é quebrada e precisamos de um método para diagonalizar os campos dos mésons carregados. Dentre os métodos conhecidos, utilizaremos o método que utiliza o formalismo de Ritus [147].

4.5.1 Base de Ritus

Utilizamos a base de Ritus para expandir o campo do méson

$$\delta M_+(x) \equiv \sum_{\bar{q}} \mathbb{F}_{\bar{q}}^+(x) \delta M_{\bar{q}+}, \quad (4.44)$$

em que definimos

$$\sum_{\bar{q}} \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \int \frac{dq_2}{(2\pi)^4} \frac{dq_3}{(2\pi)^4} \frac{dq_4}{(2\pi)^4},$$

e $\bar{q} \equiv (k, q_2, q_3, q_4)$, onde k são os níveis de Landau dos mésons carregados. Então, podemos escrever a equação (4.43) como

$$I_M = -2N_c \sum_{\bar{q}, \bar{q}'} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p'}{(2\pi)^4} \text{tr} \left[\tilde{\mathcal{S}}_p^f \gamma_5 \tilde{\mathcal{S}}_{p'}^{f'} \gamma_5 \right] \int d^4 x d^4 x' e^{i\Phi_f(x, x')} e^{i\Phi_{f'}(x', x)} e^{i(p-p')(x-x')} (\mathbb{F}_{\bar{q}}^+(x))^* \mathbb{F}_{\bar{q}'}^+(x') (\delta M_{\bar{q}}^+)^* \delta M_{\bar{q}'}^+, \quad (4.45)$$

Podemos definir o polarizador na base de Ritus como

$$G_{\bar{q}\bar{q}'}^+ = - \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p'}{(2\pi)^4} N_c \text{tr} \left[\tilde{\mathcal{S}}_p^f \gamma_5 \tilde{\mathcal{S}}_{p'}^{f'} \gamma_5 \right] \int d^4 x d^4 x' e^{i\Phi_f(x, x')} e^{i\Phi_{f'}(x', x)} e^{i(p-p')(x-x')} (\mathbb{F}_{\bar{q}}^+(x))^* \mathbb{F}_{\bar{q}'}^+(x'), \quad (4.46)$$

em que definimos as autofunções de Ritus como

$$\mathbb{F}_{\bar{q}}^+(x) = N_k e^{i q_2 x_2 + i q_{\parallel} x_{\parallel}} D_k(\rho_+), \quad (4.47)$$

onde $D_k(\rho_+)$ são as funções parabólicas cilíndricas dadas por

$$D_k(\rho_+) = 2^{-\frac{k}{2}} e^{-\frac{\rho_+}{4}} H_k \left(\frac{\rho_+}{\sqrt{2}} \right),$$

no qual H_k são os polinômios de Hermite e suas variáveis estão descritas no Quadro 4.5.1.

Assim, a integral (4.45) fica

$$I_M = \sum_{\bar{q}, \bar{q}'} G_{\bar{q}\bar{q}'}^+ (\delta M_{\bar{q}}^+)^* (\delta M_{\bar{q}'}^+). \quad (4.48)$$

Podemos reescrever a equação (4.46) como

$$G_{\bar{q}\bar{q}'}^+ = -N_c \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p'}{(2\pi)^4} \text{tr} \left[\tilde{\mathcal{S}}_p^f \gamma_5 \tilde{\mathcal{S}}_{p'}^{f'} \gamma_5 \right] \tilde{I}_{pp'}, \quad (4.49)$$

em que

4.5.1 Base de Ritus

- $\rho_+ = \sqrt{2B_+} x_1 - s_+ \sqrt{\frac{2}{B_+}} q_2$
- $\bar{q} = (k, q_2, q_3, q_4)$
- $N_k = \frac{(4\pi B_+)^{1/4}}{\sqrt{k!}}$
- $B_+ = B_{M^+} = |q_M B|$
- $s_+ = \text{sign}(q_M B)$

$$\tilde{\mathbb{I}}_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} = \int d^4\mathbf{x} d^4\mathbf{x}' e^{i\Phi_f(\mathbf{x},\mathbf{x}')} e^{i\Phi_{f'}(\mathbf{x}',\mathbf{x})} e^{i(\mathbf{p}-\mathbf{p}')(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} (\mathbb{F}_{\mathbf{q}}^\pm(\mathbf{x}))^* \mathbb{F}_{\mathbf{q}}^\pm(\mathbf{x}'). \quad (4.50)$$

O traço da expressão (4.49) é calculado no Apêndice D.4.1, e a integral (4.50) é reescrita na base de Ritus no Apêndice D.4.2; e após algumas integrações, como mostrado em [148], obtemos

$$\begin{aligned} \bullet \quad & \text{tr} \left[\tilde{\mathbb{S}}_{\mathbf{p}}^f \gamma_5 \tilde{\mathbb{S}}_{\mathbf{p}'}^{f'} \gamma_5 \right] = \int_0^\infty \int_0^\infty d\tau d\tau' \exp \left[-\tau \left(M_f^2 + \mathbf{p}_{\parallel}^2 + \mathbf{p}_{\perp}^2 \frac{\tanh(B_f \tau)}{B_f \tau} \right) \right] \\ & \times \exp \left[-\tau' \left(M_{f'}^2 + \mathbf{p}'_{\parallel}{}^2 + \mathbf{p}'_{\perp}{}^2 \frac{\tanh(B_{f'} \tau')}{B_{f'} \tau'} \right) \right] \\ & \times 4 \left\{ [(\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}')_{\parallel} + M_f M_{f'}] [1 + s_f s_{f'} \tanh(B_f \tau) \tanh(B_{f'} \tau')] \right. \\ & \left. + \frac{(\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}')_{\perp}}{\cosh^2(B_f \tau) \cosh^2(B_{f'} \tau')} \right\}, \end{aligned} \quad (4.51)$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad & \tilde{\mathbb{I}}_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} = \delta_{234}^{(3)}(\mathbf{q} - \mathbf{q}') \delta^{(2)}(\mathbf{p}_{\parallel} - \mathbf{p}'_{\parallel} - \mathbf{q}_{\parallel}) \frac{4\pi^{\frac{3}{2}}}{B_+^{\frac{3}{2}}} N_k N_{k'} (-1)^{k'} 2^{\frac{k'-k}{2}} k! \\ & \times \exp \left[-\frac{[(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}'_1)^2 + (\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}'_2)^2]}{B_+} \right] \left[\frac{i(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}'_1)}{\sqrt{B_+}} + s_+ \frac{(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}'_2)}{\sqrt{B_+}} \right]^{k'-k} \\ & \times L_k^{k'-k} \left[2 \left[\frac{[(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}'_1)^2 + (\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}'_2)^2]}{B_+} \right] \right]. \end{aligned} \quad (4.52)$$

onde $L_k^{k'-k}$ é a função associada de Laguerre. Substituindo as equações (4.51) e (4.52) na expressão (4.46),

$$\begin{aligned} G_{\mathbf{q}\mathbf{q}'}^+ &= -N_c \int \frac{d^4\mathbf{p}}{(2\pi)^4} \frac{d^4\mathbf{p}'}{(2\pi)^4} \left\{ \int_0^\infty \int_0^\infty d\tau d\tau' \exp \left[-\tau \left(M_f^2 + \mathbf{p}_{\parallel}^2 + \mathbf{p}_{\perp}^2 \frac{\tanh(B_f \tau)}{B_f \tau} \right) \right] \right. \\ & \times \exp \left[-\tau' \left(M_{f'}^2 + \mathbf{p}'_{\parallel}{}^2 + \mathbf{p}'_{\perp}{}^2 \frac{\tanh(B_{f'} \tau')}{B_{f'} \tau'} \right) \right] 4 \left\{ [(\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}')_{\parallel} + M_f M_{f'}] \right. \\ & \left. \times [1 + s_f s_{f'} \tanh(B_f \tau) \tanh(B_{f'} \tau')] + \frac{(\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}')_{\perp}}{\cosh^2(B_f \tau) \cosh^2(B_{f'} \tau')} \right\} \left. \right\} \\ & \times \left\{ \delta_{234}^{(3)}(\mathbf{q} - \mathbf{q}') \delta^{(2)}(\mathbf{p}_{\parallel} - \mathbf{p}'_{\parallel} - \mathbf{q}_{\parallel}) \frac{4\pi^{\frac{3}{2}}}{B_+^{\frac{3}{2}}} N_k N_{k'} (-1)^{k'} 2^{\frac{k'-k}{2}} k! \right. \\ & \times \exp \left[-\frac{[(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}'_1)^2 + (\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}'_2)^2]}{B_+} \right] \left[\frac{i(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}'_1)}{\sqrt{B_+}} + s_+ \frac{(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}'_2)}{\sqrt{B_+}} \right]^{k'-k} \\ & \left. \times L_k^{k'-k} \left[2 \left[\frac{[(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}'_1)^2 + (\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}'_2)^2]}{B_+} \right] \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.53)$$

Poderemos agora seguir com a integração em \mathbf{p}_\perp e \mathbf{p}_\parallel .

4.5.2 Integração em \mathbf{p}_\perp e \mathbf{p}_\parallel

Antes de integrarmos (4.53), precisamos fazer uma mudança de variáveis, que mostramos no Apêndice D.4.3. Depois disso, é necessário calcular as integrais em (4.53). Com isso, obtemos

$$G_{\bar{q}\bar{q}'}^+ = \delta_{\bar{q}\bar{q}'} G^+(\mathbf{k}, \mathbf{q}_\parallel), \quad (4.54)$$

com

$$\begin{aligned} G^+(\mathbf{k}, \mathbf{q}_\parallel) = & -\frac{N_c}{(2\pi)^2} B_f B_{f'} \int_0^\infty \int_0^\infty d\tau d\tau' \frac{1}{(\tau + \tau')} \exp\left[-\tau M_f^2 - \tau' M_{f'}^2 - \frac{\tau\tau'}{(\tau + \tau')} q_\parallel^2\right] \\ & \times \frac{C_-^k}{C_+^{k+1}} \left\{ \left[M_f M_{f'} - \frac{q_\parallel^2}{4} + \frac{1}{(\tau + \tau')} \left[1 + \frac{(\tau - \tau')^2}{(\tau + \tau')} \frac{q_\parallel}{4} \right] \right] \right. \\ & \times [1 + s_f s_{f'} \tanh(B_f \tau) \tanh(B_{f'} \tau')] + [1 - \tanh^2(B_f \tau)] [1 - \tanh^2(B_{f'} \tau')] \\ & \left. \times \frac{B_f B_{f'}}{C_+ C_-} [C_- - k(C_+ - C_-)] \right\}, \quad (4.55) \end{aligned}$$

em que $\delta_{\bar{q}\bar{q}'} \equiv (2\pi) \delta_{kk'} \delta_{234}^{(3)}(\mathbf{q} - \mathbf{q}')$.

4.5.3 Mudança de variáveis em τ e τ'

Como feito anteriormente, realizaremos a mudança de variáveis,

$$\begin{aligned} \tau = zy & & \tau + \tau' = z \\ \tau' = z(1 - y) & \Rightarrow & \tau - \tau' = z(2y - 1) \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{2} \left(\frac{\tau - \tau'}{\tau + \tau'} + 1 \right), \quad (4.56) \end{aligned}$$

em que $z \in [0, \infty[$ e $y \in [0, 1]$. O jacobiano desta mudança de variáveis é

$$\left| \frac{\partial(\tau, \tau')}{\partial(z, y)} \right| = z.$$

Precisamos reescrever alguns termos de (4.55), o que é feito no Apêndice D.4.4. Finalmente, podemos expressar a equação (4.55) como

$$\begin{aligned}
G^+(\mathbf{k}, \mathbf{q}_{\parallel}) = & -\frac{N_c}{(2\pi)^2} \int_0^{\infty} dz \int_0^1 dy \exp\left[-zyM_f^2 - z(1-y)M_{f'}^2 - zy(1-y)q_{\parallel}^2\right] \\
& \times \frac{\alpha_-^k}{\alpha_+^{k+1}} \left\{ \left[M_f M_{f'} + \frac{1}{z} - y(1-y)q_{\parallel}^2 \right] [1 + s_f s_{f'} \tanh(B_f zy) \tanh(B_{f'} z(1-y))] \right. \\
& \left. + [1 - \tanh^2(B_f zy)] [1 - \tanh^2(B_{f'} z(1-y))] \frac{1}{\alpha_+ \alpha_-} [\alpha_- + k(\alpha_+ - \alpha_-)] \right\}.
\end{aligned} \tag{4.57}$$

Novamente obtemos integrais com divergências que precisam ser tratadas. Isso será feito no Capítulo 5.

Capítulo 5

Regularização das Integrais

Como o modelo que estudamos aqui não é renormalizável, é necessária uma forma de lidarmos com as divergências que aparecem no limite ultravioleta. Isto é feito através da escolha de um esquema de regularização, que é feita não por critérios matemáticos, mas físicos, já que alguns destes esquemas podem trazer resultados não físicos para o modelo, como destacado em [8, 17]. Uma boa regularização deve manter as propriedades fisicamente esperadas do modelo e as considerações de simetria, e para o NJL espera-se que sejam mantidas [8, 149–156].

5.1 MFIR

Neste trabalho, utilizaremos como método de regularização o MFIR (Magnetic Field Independent Regularization) [18, 19], em que subtraímos da expressão que desejamos regularizar a integral não regularizada no limite $B = 0$, que chamamos de $I_{B=0}$; e a adicionamos na forma regularizada $I_{B=0}^{(reg)}$, o que expressamos como

$$I^{(reg)} = I_{B=0}^{(reg)} + I^{(mag)}. \quad (5.1)$$

Esse procedimento é útil, pois além das contribuições das partes magnética e do vácuo ficarem analiticamente claras, comportamentos não físicos são evitados quando o cálculo numérico é realizado. No modelo NJL, estes comportamentos ocorrem principalmente no condensado quiral, na massa dos mésons e em quantidades termodinâmicas do modelo, como discutido em [17].

5.2 Condensado de Quarks

No Capítulo 4, mostramos que o condensado de quarks depende da integral divergente dada por (4.13),

$$I = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau^2} \exp(-\tau M_f^2) B_f \tau \coth(B_f \tau). \quad (5.2)$$

Para regularizá-la, utilizaremos o MFIR, como mencionado anteriormente. Como a divergência de (5.2) está na função $\frac{1}{\tau^2} B_f \tau \coth(B_f \tau)$ próxima ao limite inferior de integração, expandiremos a função cotangente em torno de $\tau = 0$ para podermos separar a divergência,

$$B_f \coth(B_f \tau) = \underbrace{\frac{1}{\tau}}_{\text{DIVERGE}} + \frac{B_f^2 \tau}{3} + \frac{B_f^4 \tau^3}{45} + \mathcal{O}(\tau^5), \quad (5.3)$$

subtraímos e somamos o termo que diverge na integral (5.2) e separamos a parte que diverge da que converge

$$I = \underbrace{\frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau^2} e^{-\tau M_f^2} \tau \left[B_f \coth(B_f \tau) - \frac{1}{\tau} \right]}_{\text{TERMO FINITO}} + \underbrace{\frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau^2} e^{-\tau M_f^2} \tau \frac{1}{\tau}}_{\text{TERMO QUE DIVERGE}}. \quad (5.4)$$

Assim, podemos definir

$$\bullet \quad I^{(\text{mag})} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau^2} e^{-\tau M_f^2} [\tau B_f \coth(B_f \tau) - 1], \quad (5.5a)$$

$$\bullet \quad I^{(\text{div})} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty d\tau \frac{e^{-\tau M_f^2}}{\tau^2}. \quad (5.5b)$$

Realizamos a integração do termo (5.5a) no Apêndice E.1.1 e a integração do termo (5.5b) no Apêndice E.1.2 para finalmente podermos reescrever o condensado como

$$\langle \bar{\psi}_f \psi_f \rangle = - \frac{N_c M_f}{(2\pi)^4} \left[I_{B=0}^{(\text{reg})} + I^{(\text{mag})} \right], \quad (5.6)$$

com

$$I^{(\text{mag})} = \frac{2B_f x_f}{(2\pi)^2} \left[\frac{\ln(\Gamma(x_f))}{x_f} - \frac{\ln(2\pi)}{2x_f} + 1 - \ln(x_f) \left(1 - \frac{1}{2x_f} \right) \right]; \quad (5.7a)$$

$$I_{B=0}^{(\text{reg})} = \frac{M_f^2}{(2\pi)} \left\{ \Lambda \sqrt{\Lambda^2 + M_f^2} + M_f^2 \ln \left(\frac{M_f}{\sqrt{\Lambda^2 + M_f^2} + \Lambda} \right) \right\}, \quad (5.7b)$$

onde

$$x_f = \frac{M_f^2}{2B_f}. \quad (5.8)$$

Os resultados numéricos obtidos a partir de (5.7) serão analisados no Capítulo 6, em 6.5.

5.3 Função de polarização para $f \neq f'$

No capítulo anterior, encontramos uma expressão para uma função de polarização com sabores de quark diferentes e sob um campo magnético externo constante. Esta é dada pela equação (4.57), reproduzida novamente aqui

$$\begin{aligned} G_{ff'}(k, q_{\parallel}) &= -\frac{N_c}{(2\pi)^2} \int_0^{\infty} dz \int_0^1 dy \exp \left[-zyM_f^2 - z(1-y)M_{f'}^2 - zy(1-y)q_{\parallel}^2 \right] \\ &\times \frac{\alpha_-^k}{\alpha_+^{k+1}} \left\{ \left[M_f M_{f'} + \frac{1}{z} - y(1-y)q_{\parallel}^2 \right] [1 + s_f s_{f'} \tanh(B_f zy) \tanh(B_{f'} z(1-y))] \right. \\ &\left. + [1 - \tanh^2(B_f zy)] [1 - \tanh^2(B_{f'} z(1-y))] \frac{1}{\alpha_+ \alpha_-} [\alpha_- + k(\alpha_+ - \alpha_-)] \right\}, \quad (5.9) \end{aligned}$$

com

$$\alpha_{\pm} = \frac{B_{f'} \tanh(B_f zy) + B_f \tanh[B_{f'} z(1-y)] \pm B_M \tanh(B_f zy) \tanh[B_{f'} z(1-y)]}{B_f B_{f'}}. \quad (5.10)$$

A expressão (5.9) é divergente, e vamos regularizá-la com o MFIR. O primeiro passo é tomar o limite quando $B \rightarrow 0$, e, considerando esta expansão, alguns termos de (5.9) precisam ser reescritos. Isto é feito no Apêndice E.2, onde a equação é reescrita como

$$\begin{aligned} G_{ff'}(q_{\parallel}^2, B=0) &= -\frac{N_c}{2\pi^2} \int_0^{\infty} dz \int_0^1 dy \exp \left\{ -z \left[yM_f^2 + (1-y)M_{f'}^2 + y(1-y)q_{\parallel}^2 \right] \right\} \\ &\times \frac{1}{z} \left[M_f M_{f'} + \frac{2}{z} - y(1-y)q_{\parallel}^2 \right]. \quad (5.11) \end{aligned}$$

5.3.1 Regularização da função de polarização

Para regularizar a equação (5.9), consideraremos a função de polarização magnetizada em campo magnético finito,

$$G_{ff'}^B(\mathbf{k}, \Pi^2) = G_{ff'}^R(\mathbf{k}, \Pi^2) = G_{ff'}(\mathbf{k}, \mathbf{q}_{\parallel}^2 = \Pi^2 - (2k + 1)B_M) - G_{ff'}(\mathbf{q}_{\parallel}^2 = \Pi^2, B = 0),$$

em que $\Pi^2 = \mathbf{q}_{\parallel}^2 + (2k + 1)B_M$; e utilizaremos o MFIR para regularizar esta integral, expresso como

$$G_{ff'} = G_{ff'}^R(\mathbf{k}, \mathbf{q}_{\parallel}^2 = \Pi^2 - (2k + 1)B_M) + G_{ff'}(\mathbf{q}_{\parallel}^2 = \Pi^2, B = 0), \quad (5.12)$$

em que $G_{ff'}(\mathbf{q}_{\parallel}^2 = \Pi^2, B = 0)$ é a função de polarização não regularizada do NJL em $B = 0$, que será regularizada com um cutoff 3D. Podemos mostrar que a expressão (5.11) para a função de polarização com $B = 0$ pode ser escrita como

$$G_{ff'}(\mathbf{q}^2, B = 0) = -4N_c \left\{ I_{1f}^{\text{vac}} + I_{1f'}^{\text{vac}} - \left[\mathbf{q}^2 - (M_f - M_{f'})^2 \right] I_{2ff'} \right\}, \quad (5.13)$$

com

$$\begin{aligned} I_{1f}^{\text{vac}} &= i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - M_f^2} = \frac{1}{4\pi^2} \int dp \frac{p^2}{E_f}, \\ &= \frac{1}{8\pi^2} \left[\Lambda E_f^\wedge - M_f^2 \ln \left(\frac{\Lambda + E_f^\wedge}{M_f} \right) \right], \end{aligned} \quad (5.14)$$

em que $E_f = \sqrt{p^2 + M_f^2}$ e $E_f^\wedge = \sqrt{\Lambda^2 + M_f^2}$; e

$$\begin{aligned} I_{2ff'}^{\text{vac}} &= 2i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{\left[(k + q/2)^2 - M_f^2 \right] \left[(k - q/2)^2 - M_{f'}^2 \right]}, \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\wedge dp \frac{p^2}{E_f E_{f'}} \frac{E_f + E_{f'}}{q^2 - (E_f + E_{f'})^2}. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Na última integral, $q^2 = M^2$, em que M é a massa do méson. Quando $q^2 = \mathbf{q}_0^2 > (M_f M_{f'})$, a integral tem um polo no eixo real. Esta passagem é feita no Apêndice E.3

5.4 Função de polarização para $f = f'$

Consideraremos agora o caso específico quando os dois sabores na integral de polarização são iguais. Neste caso, utilizamos a expressão (4.39). Assim, podemos simplificar a função de polarização

$$G_{ff}(q_{\parallel}^2) = G_f^{\text{vac}}(q_{\parallel}^2) + G_f^{\text{B}}(q_{\parallel}^2), \quad (5.16)$$

com

$$G_f^{\text{vac}}(q_{\parallel}^2) = -4N_c \left[2I_{1f}^{\text{vac}} - (-q_{\parallel}^2)I_{2f}^{\text{vac}} \right], \quad (5.17)$$

e

$$\begin{aligned} I_{2f}^{\text{vac}} &= -\frac{1}{8\pi^2} \int_0^{\Lambda} dp \frac{p^2}{E_f} \frac{1}{\left(p^2 + M_f^2 + \frac{q_{\parallel}^2}{4}\right)} \Bigg|_{q_{\parallel}^2 = m_M^2}, \\ &= \frac{1}{8\pi^2} \int_0^{\Lambda} dp \frac{p^2}{E_f} \frac{1}{p^2 - \left(\frac{m_M^2}{4} - M_f^2\right)}. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Como $q_{\parallel}^2 = -m_M^2$, então

$$\begin{aligned} I_{2f}^{\text{vac}} &= -\frac{1}{8\pi^2} \int_0^{\Lambda} dp \frac{p^2}{E_f} \frac{1}{\left(p^2 + M_f^2 - \frac{m_M^2}{4}\right)}, \\ &= -\frac{1}{8\pi^2} \int_0^{\Lambda} dp \frac{p^2}{E_f} \frac{1}{p^2 - \left(\frac{m_M^2}{4} - M_f^2\right)}. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Na última integral, quando $m_M \geq 2M_f$ aparece um polo no eixo real da integral. Um canal de decaimento para o méson é aberto quando a massa do méson é maior ou igual a duas vezes a massa efetiva dos quarks. Este caso é tratado no Apêndice E.4.

Considerando (5.9), quando $f = f'$ o momento canônico e o cinético são iguais, então

$$q_{\parallel}^2 = \Pi^2;$$

$$\begin{aligned} \mathbf{k} &= 0; \\ \mathbf{B}_M &= |\mathbf{q}_M \mathbf{B}| = |(\mathbf{q}_f - \mathbf{q}_f) \mathbf{B}| = 0; \end{aligned}$$

Assim, reescrevemos (5.9) como

$$\begin{aligned} G_f(q_{\parallel}^2) &= -\frac{N_c}{2\pi^2} \int_0^{\infty} dz \int_0^1 dy \exp\left\{-z \left[y M_f^2 + M_f^2 - y M_f^2 + y(1-y) q_{\parallel}^2 \right]\right\} \\ &\quad \frac{\alpha_-^0}{\alpha_+^1} \left[\left(M_f M_f + \frac{1}{z} - y(1-y) q_{\parallel}^2 \right) \left(1 + \cancel{s_f s_f} \tanh(B_f z y) \tanh[B_f z(1-y)] \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{[1 - \tanh^2(B_f z y)][1 - \tanh^2(B_f z(1-y))]}{\alpha_+ \alpha_-} [\alpha_- + 0(\alpha_- - \alpha_+)] \right], \end{aligned}$$

e, considerando apenas α_+ ,

$$\alpha_+ = \frac{1}{B_f} [\tanh(B_f z y) + \tanh[B_f z(1-y)]],$$

então $G_f(q_{\parallel}^2)$ fica

$$\begin{aligned} G_f(q_{\parallel}^2) &= -\frac{N_c}{2\pi^2} \int_0^{\infty} dz \int_0^1 dy \exp\left\{-z \left[M_f^2 + y(1-y) q_{\parallel}^2 \right]\right\} \\ &\quad \times \left\{ B_f \left(M_f^2 + \frac{1}{z} - y(1-y) q_{\parallel}^2 \right) \frac{[1 + \tanh(B_f z y) \tanh[B_f z(1-y)]]}{[\tanh(B_f z y) + \tanh[B_f z(1-y)]]} \right. \\ &\quad \left. + B_f^2 \frac{[1 - \tanh^2(B_f z y)][1 - \tanh^2[B_f z(1-y)]]}{[\tanh(B_f z y) + \tanh[B_f z(1-y)]]^2} \right\}. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Os termos em destaque são simplificados no Apêndice E.5, e podemos reescrever (5.20) como

$$\begin{aligned} G_f(q_{\parallel}^2) &= -\frac{N_c}{2\pi^2} \int_0^{\infty} dz \int_0^1 dy \exp\left\{-z \left[M_f^2 + y(1-y) q_{\parallel}^2 \right]\right\} \\ &\quad \times \left[B_f \left(M_f^2 + \frac{1}{z} - y(1-y) q_{\parallel}^2 \right) \coth(B_f z) + \frac{B_f^2}{\sinh^2(B_f z)} \right]. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Precisamos agora encontrar a contribuição magnética de G_f . Fazemos isso ao subtrair de (5.21) a expressão (5.11) para $f = f'$, dada por

$$G_f(q_{\parallel}^2, B = 0) = -\frac{N_c}{2\pi^2} \int_0^{\infty} dz \int_0^1 dy \exp\left\{-z\left[M_f^2 + y(1-y)q_{\parallel}^2\right]\right\} \frac{1}{z} \left(M_f^2 + \frac{2}{z} - y(1-y)q_{\parallel}^2\right),$$

e definindo

- $\bar{M}_f^2 = M_f^2 + y(1-y)q_{\parallel}^2$,
- $2M_f^2 - \bar{M}_f^2 = M_f^2 - y(1-y)q_{\parallel}^2$,

Assim, obtemos

$$G_f^B \equiv G_f^R(q_{\parallel}^2) = -\frac{N_c}{2\pi^2} \int_0^{\infty} dz \int_0^1 dy e^{-z\bar{M}_f^2} \left[\frac{1}{z} \left(B_f \coth(B_f z) - \frac{1}{z} \right) + (2M_f^2 - \bar{M}_f^2) \left(B_f \coth(B_f z) - \frac{1}{z} \right) + \frac{B_f^2}{\sinh^2(B_f z)} - \frac{1}{z^2} \right]. \quad (5.22)$$

Fazendo a mudança de variáveis

$$z' = B_f z \Rightarrow dz' = B_f dz \Rightarrow dz = \frac{dz'}{B_f},$$

a expressão (5.22) pode ser expressa como¹

$$G_f^B(q_{\parallel}^2) = -\frac{N_c B_f}{2\pi^2} \int_0^{\infty} dz \int_0^1 dy \exp\left[-\frac{z\bar{M}_f^2}{B_f}\right] \left\{ \frac{1}{z} \left(\coth(z) - \frac{1}{z} \right) + \frac{2M_f^2 - \bar{M}_f^2}{B_f} \left(\coth(z) - \frac{1}{z} \right) + \frac{1}{\sinh^2(z)} - \frac{1}{z^2} \right\}. \quad (5.23)$$

Ao definirmos

$$I_{1f}^B = \frac{B_f}{8\pi^2} \left[\ln \Gamma(x_f) - \frac{1}{2} \ln(2\pi) + x_f - \frac{1}{2}(2x_f - 1) \ln(x_f) \right]; \quad (5.24a)$$

¹Por simplicidade, $z' \rightarrow z$

$$\begin{aligned}
I_{2f}^B &= -\frac{1}{16\pi^2} \int_0^\infty dz \int_0^1 dy e^{-\frac{z\bar{M}_f^2}{B_f}} \left(\coth(z) - \frac{1}{z} \right); \\
&= \frac{1}{16\pi^2} \int_0^1 dy \left[\Psi\left(\frac{\bar{M}_f^2}{2B_f}\right) + \frac{B_f}{M_f^2} - \ln\left(\frac{\bar{M}_f^2}{2B_f}\right) \right],
\end{aligned} \tag{5.24b}$$

com

$$\chi_f = \frac{M_f^2}{2B_f} \quad \bar{M}_f^2 = M_f^2 - i\varepsilon - y(1-y)m_M^2,$$

e podemos reescrever (5.23) como

$$G_f^B(m_M^2) = -4N_c (2I_{1f}^B - m_M^2 I_{2f}^B). \tag{5.25}$$

Esta passagem é mostrada no Apêndice E.6.

5.4.1 Parte real e imaginária da função de polarização

Precisamos separar as partes real e imaginária das funções de polarização obtidas anteriormente de forma a facilitar o cálculo numérico. Por conveniência, faremos a mudança de variáveis

$$y' = m_M \left(y - \frac{1}{2} \right) \Rightarrow y = \frac{y'}{m_M} + \frac{1}{2},$$

e então

$$\bar{M}_f^2 = y'^2 - y_0^2, \tag{5.26}$$

com

$$y_0^2 = \frac{m_M^2}{4} - M_f^2 + i\varepsilon;$$

$$dy' = dy m_M \Rightarrow dy = \frac{dy'}{m_M}.$$

Substituindo (5.26) na equação (5.24b) e considerando que a função no integrando é par, temos²

$$I_{2f}^B = \frac{1}{8\pi^2 m_M} \int_0^{m_M/2} dy \left[\Psi\left(\frac{y^2}{2B_f} - \frac{y_0^2}{2B_f}\right) + \frac{B_f}{y^2 - y_0^2} - \ln\left(\frac{y^2 - y_0^2}{2B_f}\right) \right]. \quad (5.27)$$

A função digama tem polos em \mathbb{Z}_- (números inteiros não positivos). Podemos ver isso na expansão da função digama³ [158]

$$\Psi(z) = -\gamma - \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z}{n(z+n)}. \quad (5.28)$$

Consideraremos o caso $y_0 \geq 0$ ($m_M \geq 2M_f$). A função digama na equação (5.27) diverge quando

$$\frac{y_0^2}{2B_f} \in 0, 1, 2, \dots,$$

então temos $n + 1$ polos, com n dado por

$$n = \left\lfloor \frac{y_0^2}{2B_f} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\frac{m_M^2}{4} - M_f^2}{2B_f} \right\rfloor, \quad (5.29)$$

em que $\lfloor x \rfloor$ é a função piso, ou seja, $\lfloor x \rfloor$ é o maior número inteiro menor ou igual à x . Uma forma prática de calcular numericamente a equação (5.24b) é isolar de forma apropriada os polos da função Ψ . Temos a relação de recorrência da função digama [157]

$$\Psi(x+1) = \Psi(x) + \frac{1}{x}, \quad (5.30)$$

então, por iteração ficamos com

$$\Psi(x) = \Psi(x+n+1) - \sum_{m=0}^n \frac{1}{x+m}. \quad (5.31)$$

²Por simplicidade, consideraremos $y' \rightarrow y$.

³A Constante de Euler-Mascheroni é dada por $\gamma = 0,577215664901$ [157].

Considerando

$$x = \frac{y^2 - y_0^2}{2B_f},$$

podemos reescrever (5.27) como

$$I_{2f}^B = \frac{1}{8\pi^2 m_M} \int_0^{m_M/2} dy \left[\Psi\left(\frac{y^2 - y_0^2}{2B_f} + n + 1\right) - \sum_{m=0}^n \frac{1}{\left(\frac{y^2 - y_0^2}{2B_f}\right) + m} + \frac{B_f}{y^2 - y_0^2} - \ln\left(\frac{y^2 - y_0^2}{2B_f}\right) \right]. \quad (5.32)$$

Considerando $g_m = 2 - \delta_{m0}$, reescrevemos (5.32) como

$$I_{2f}^B = \frac{1}{8\pi^2 m_M} \int_0^{m_M/2} dy \left[\Psi\left(\frac{y^2 - y_0}{2B_f} + n + 1\right) - \sum_{m=0}^n \frac{g_m B_f}{y^2 - y_0^2 + 2B_f m} - \ln\left(\frac{y^2 - y_0^2}{2B_f}\right) \right]. \quad (5.33)$$

Para continuar, precisamos considerar a continuação analítica da última expressão, pois isso é conveniente para o cálculo numérico. A expressão (5.33) tem os seguintes termos com polos ou infinitos:

- Denominador do segundo termo do integrando;
- Termo com o logaritmo.

Estes termos são tratados no Apêndice E.7, e podemos reescrever (5.33) como

$$I_{2f}^B = \frac{1}{8\pi^2 m_M} \left[\int_0^{m_M/2} dy \Psi\left(\frac{y^2 - y_0}{2B_f} + n + 1\right) - \sum_{m=0}^n \frac{g_m B_f}{2y_m} \ln\left(\frac{\frac{m_M}{2} - y_m}{\frac{m_M}{2} + y_m}\right) - \sum_{m=0}^n \frac{ig_m B_f \pi}{2y_m} - m_M \ln(M_f) + m_M - 2y_0 \ln\left(\frac{\frac{m_M}{2} + y_0}{M_f}\right) + i\pi y_0 + \frac{m_M}{2} \ln(2B_f) \right]. \quad (5.34)$$

Separando a parte real da parte imaginária, teremos

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\{I_{2f}^B\} &= \frac{1}{8\pi^2 m_M} \int_0^{m_M/2} dy \Psi\left(\frac{y^2 - y_0}{2B_f} + n + 1\right) - \frac{1}{8\pi^2 m_M} \sum_{m=0}^n \frac{g_m B_f}{2y_m} \ln\left(\frac{\frac{m_M}{2} - y_m}{\frac{m_M}{2} + y_m}\right) \\ &\quad - \frac{1}{8\pi^2 m_M} \left[m_M \ln(M_f) - m_M + 2y_0 \ln\left(\frac{\frac{m_M}{2} + y_0}{M_f}\right) - \frac{m_M}{2} \ln(2B_f) \right], \end{aligned} \quad (5.35a)$$

$$\operatorname{Im}\{I_{2f}^B\} = -\frac{\pi}{8\pi^2 m_M} \left[\sum_{m=0}^n \frac{g_m B_f}{2y_m} - y_0 \right]. \quad (5.35b)$$

Com as expressões obtidas neste capítulo, podemos calcular numericamente as massas polo dos mésons, ao considerarmos as expressões (3.75) para os coeficientes de massa \mathcal{G} obtidas no Capítulo 3. Estes resultados serão mostrados no Capítulo 6.

Capítulo 6

Resultados Numéricos

Apresentaremos neste Capítulo os resultados obtidos a partir do cálculo numérico realizado com as expressões obtidas nos capítulos anteriores. Todos os resultados referentes à essa tese foram publicados em [159].

6.1 QCD na Rede

Como já falamos, não se pode utilizar métodos perturbativos para cálculos da QCD em baixas energias. Uma das alternativas para o estudo deste regime de energia é a QCD na rede (*Lattice QCD* - LQCD), em que, entre outras coisas, as equações de movimento da QCD podem ser resolvidas a partir de primeiros princípios utilizando métodos computacionais [8]. Assim, a LQCD é a forma mais fundamental de se calcular propriedades termodinâmicas da matéria que interage sob a força forte [92].

Na LQCD, os campos dos quarks são posicionados em pontos individuais de uma rede, ou seja, a QCD é formulada ao se discretizar o espaço-tempo Euclidiano em uma rede (*lattice*), sem a introdução de novos parâmetros ou variáveis de campos [160].

Numericamente, as simulações da LQCD são feitas através a integração de integrais de caminho Euclidianas a partir do método de Monte Carlo, desenvolvido na mecânica estatística. Assim, além dos erros sistemáticos devido a discretização da rede, os resultados das simulações também possuem erros estatísticos [160]. Outro problema da LQCD é chamado de problema do sinal, em que cálculos com potencial químico finito não são possíveis. Assim, cálculos da LQCD normalmente são feitos para potenciais químicos nulos [92] [161].

6.1.1 A rede

Os cálculos da LQCD são não perturbativos e realizados ao se utilizar o método das integrais de caminho de Feynman. Nesta formulação, a função de partição da teoria no espaço-tempo Euclidiano,

$$Z = \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{\int d^4x \mathcal{L}_{\text{QCD}}},$$

é discretizada numa rede definida por

$$V \times \frac{1}{T} = (\alpha_\sigma N_\sigma)^3 \alpha_\tau N_\tau,$$

com

$$\alpha_\sigma \equiv \frac{L}{N_\sigma} \quad \alpha_\tau \equiv \frac{1}{TN_\tau},$$

cujas variáveis são definidas no Quadro 6.1.1. Os pontos nessa rede são parametrizados como

$$x^\mu \equiv (\alpha_\tau l, \alpha_\sigma i, \alpha_\sigma j, \alpha_\sigma k) \quad \begin{aligned} 0 \leq l \leq N_\tau, \\ 0 \leq i, j, k \leq N_\sigma, \end{aligned}$$

e é comum que a rede seja definida de forma simétrica, ou seja, $\alpha_\sigma = \alpha_\tau \equiv \alpha$ [92]. O espaçamento da rede α é a menor escala de comprimento da rede, que corresponde à escala de momento máxima $\Lambda_{\text{UV}} \sim \alpha^{-1}$. É esta escala de momento que faz com que a LQCD não contenha divergências ultravioletas comuns em teorias de campo, já que ela serve como um cutoff que regulariza a teoria [92]. A extensão da rede, αN_σ , é a maior escala de comprimento, que determina a menor escala de momento, $\Lambda_{\text{IR}} \sim (\alpha N_\sigma)^{-1}$.

6.2 Catálise Magnética e Catálise Magnética Inversa

Um dos principais fenômenos que fundamentam os resultados deste trabalho é a Catálise Magnética (*Magnetic Catalysis* - MC). Este fenômeno está associado à quebra da simetria quiral e a transição de fase que ocorre devido à essa quebra. No limite quiral, o parâmetro de ordem desta transição de fase é o condensado de quiral $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$, que se torna

6.1.1

- $V \rightarrow$ Volume
- $T \rightarrow$ Temperatura
- $\alpha_\sigma \rightarrow$ Espaçamento da rede na direção espacial
- $\alpha_\tau \rightarrow$ Espaçamento da rede no tempo Euclidiano
- $N_\sigma \rightarrow$ Número de pontos da rede na direção espacial
- $N_\tau \rightarrow$ Número de pontos da rede na direção temporal

um parâmetro aproximado quando consideramos a massa de corrente não nula para os quarks. Este condensado apresenta um comportamento característico quando exposto à campos magnéticos externos: seu valor aumenta conforme este campo também aumenta, fenômeno que chamamos de Catálise Magnética. Como mencionado em [5] e em [162], este fenômeno é observado em diversos modelos e teorias efetivas, assim como em simulações na LQCD. Mais especificamente, a catálise magnética costuma ser bem reproduzida em modelos efetivos na aproximação de campo médio, como o modelo NJL, modelo de Gross-Neveu, modelo sigma linear, inclusive em altas temperaturas.

Entretanto, quando são consideradas altas temperaturas e campos acima de $eB \sim 0,2 \text{ GeV}^2$, a LQCD prevê um comportamento não monótono para o condensado de quarks, conhecido como catálise magnética inversa (*Inverse magnetic catalysis - IMC*) [162], como observado na Figura 6.1a.

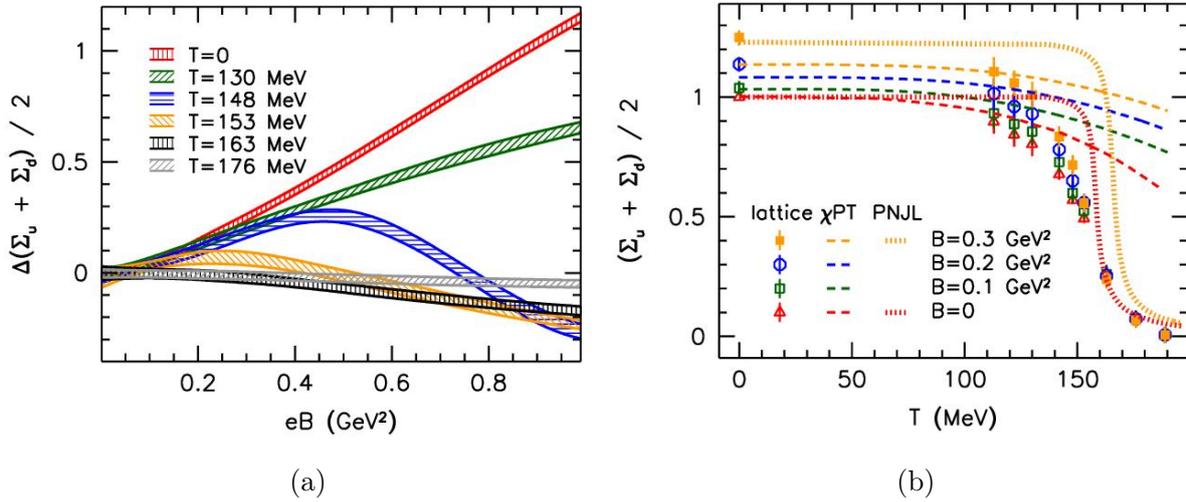


Figura 6.1: (a) Média do condensado de quarks em função do campo magnético eB para vários valores de T . (b) Média do condensado de quarks em função da temperatura T . Figuras retiradas de [162].

Na Figura 6.1a, retirada de [162], podemos ver estes dois efeitos. Nela, o a média do condensado é esboçada em função do campo magnético eB para temperaturas diferentes. Pode-se observar que para baixas temperaturas ($T \leq 130$ MeV) a média do condensado aumenta com o campo magnético até que em temperaturas entre $T = 148$ MeV e $T = 153$ MeV a média do condensado apresenta um comportamento não monótono. Quando temperaturas mais altas ($T = 163$ MeV) são atingidas, a média do condensado diminui com o campo magnético. Para temperaturas acima do limite $T \gtrsim 190$ MeV, a média do condensado volta a aumentar com o campo magnético.

Podemos observar, a partir do comportamento da média do condensado de quarks em função da temperatura, o efeito da IMC na Figura 6.1b. Nesta figura, podemos ob-

servar que a temperatura pseudocrítica diminui conforme o campo magnético aumenta, outro efeito da IMC além do comportamento não monótono observado na Figura 6.1a. Entretanto, resultados recentes da LQCD indicam que este decréscimo observado da temperatura pseudocrítica somente ocorre quando uma determinada faixa de valores para a massa dos píons é utilizada nas simulações [163].

O estudo de modelos efetivos sob um campo magnético externo demonstrou que este tem a tendência de quebrar a simetria, o que não era esperado, já que na teoria BCS ocorre o oposto. Uma possível explicação (e primeira) para o este comportamento do condensado é dada em [8], em que se argumenta que o efeito do campo magnético está relacionado ao fato das partículas do par de quarks que forma o condensado terem cargas opostas, diferente do que ocorre em um supercondutor, onde as partículas do par de Cooper - os elétrons - têm a mesma carga.

6.3 Parametrização

Para obter os dados numéricos, utilizamos os parâmetros dados no Quadro 6.3.1, que foram retirados de [164]. Para se obter tais parâmetros, foram utilizados os dados apresentados no Quadro 6.3.2 para campos magnéticos nulos. Com tal parametrização, é possível se obter a massa do méson η , $m_\eta = 514.8$ MeV, que é próxima do valor físico $m_\eta^{\text{phys}} = 548.8$ MeV. Além disso, é possível se obter $\langle \bar{\psi}\psi \rangle_f^{1/3} = -242$ MeV.

Apesar do modelo NJL local reproduzir bem o fenômeno da Catálise Magnética, ele não tem tanto sucesso ao reproduzir a Catálise Magnética Inversa. Uma solução foi proposta em [165, 166], onde os autores sugerem que a constante de acoplamento do modelo varie com o campo magnético, já que este comportamento é observado no acoplamento da QCD, que diminui com o aumento do campo magnético. Assim, estes autores introduzem através de um *ansatz* um acoplamento G que depende da temperatura e do campo magnético para o modelo NJL no $SU(2)$. Uma solução semelhante, mas para o $SU(3)$, é proposta por [167], onde um acoplamento dependente do campo magnético B é definido como

$$G(B) = G \left[\frac{1 + a(eB/\Lambda_{\text{QCD}}^2)^2 + b(eB/\Lambda_{\text{QCD}}^2)^3}{1 + c(eB/\Lambda_{\text{QCD}}^2)^2 + d(eB/\Lambda_{\text{QCD}}^2)^4} \right], \quad (6.1)$$

cujos parâmetros são dados no Quadro 6.3.3. Viu-se que um tratamento semelhante para a constante de acoplamento de 't Hooft, K , e para o cutoff Λ não é necessário. Este acoplamento escalar é ajustado para reproduzir as temperaturas pseudocríticas da transição quiral na LQCD.

6.3.1 Parametrização

$$m_u = m_d = 5.5 \text{ MeV}$$

$$m_s = 140.7 \text{ MeV}$$

$$\Lambda = 602.3 \text{ MeV}$$

$$G\Lambda^2 = 1.835$$

$$K\Lambda^5 = 12.36$$

6.3.2

$$m_\pi = 135 \text{ MeV}$$

$$m_K = 497.7 \text{ MeV}$$

$$m_{\eta'} = 957.8 \text{ MeV}$$

$$f_\pi = 92.4 \text{ MeV}$$

6.3.3

$$a = 0.018805$$

$$b = -1.0133 \times 10^{-4}$$

$$c = 0.02228$$

$$d = 1.84558 \times 10^{-4}$$

$$\Lambda_{\text{QCD}} = 300 \text{ MeV}$$

6.4 Massa Efetiva dos Quarks

Na Figura 6.2 apresentamos os resultados para a massa efetiva dos quarks em função do campo magnético eB . Podemos notar que quando consideramos um acoplamento G constante, a massa de todos os quarks aumenta conforme o campo magnético aumenta. Entretanto, quando aplicamos o acoplamento dependente do campo magnético, a massa efetiva dos quarks adota um comportamento não monótono. Para os quarks d e s , a massa efetiva inicialmente diminui com o campo magnético, mas quando este atinge valores próximos à $0.6 - 0.7 \text{ GeV}^2$, as massas efetivas começam a subir. Para o quark u o comportamento é o oposto: para valores baixos de eB a massa efetiva sobe, mas para valores mais altos a massa efetiva decresce.

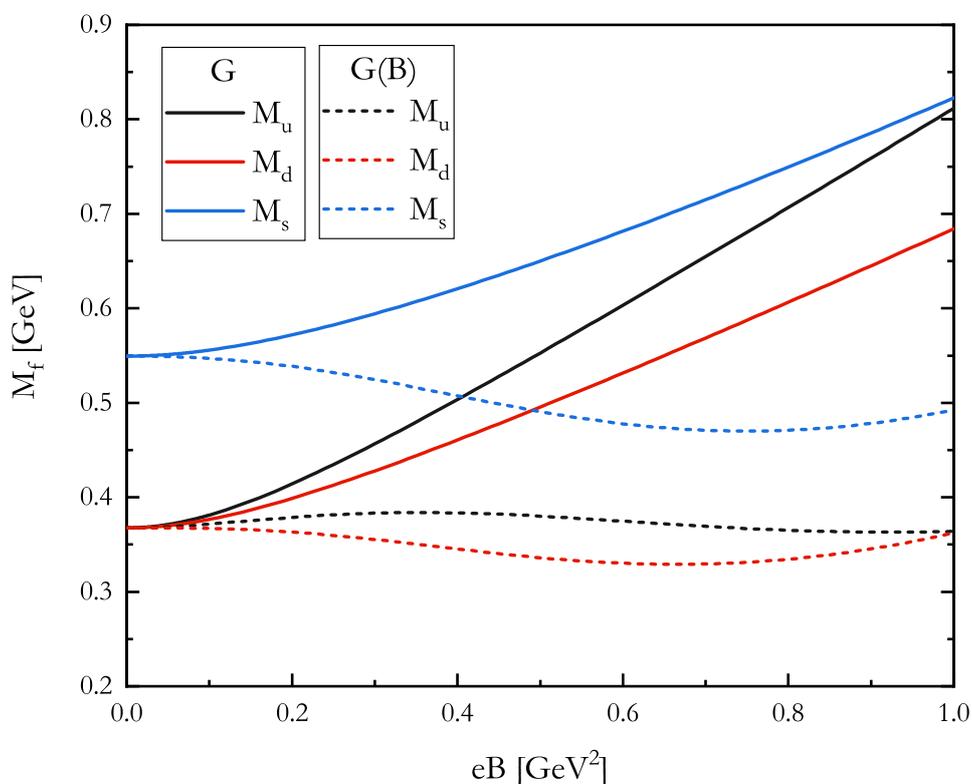


Figura 6.2: Massa efetiva dos quarks em função do campo eB . As linhas sólidas representam valores para G constante enquanto a linha tracejada representa valores para $G(eB)$. A massa do quark u está em preto, a do quark d em vermelho e a do quark s em azul. (Figura retirada de [159])

Estes resultados são consistentes com os obtidos em [168] para a massa constituinte dos quarks, como podemos ver na Figura 6.3. Neste trabalho, as massas constituintes dos quarks são calculadas a partir do cálculo das massas dos bárions na LQCD numa aproximação baseada no modelo da massa constituinte dos quarks.

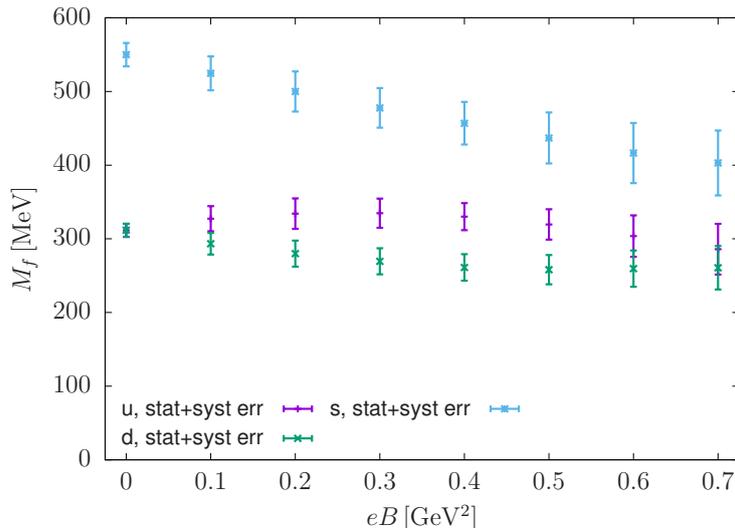


Figura 6.3: Massa constituinte dos quarks em função do campo eB . Figura retirada de [168]

6.5 Condensados

O efeito de catálise magnética é observado tanto para cálculos com o acoplamento constante quanto para $G(B)$. Isto pode ser visto na Figura 6.4, em que usamos a definição do condensado normalizado dos quarks leves dada em [162]

$$\Sigma_f = \frac{2m_f}{D^4} [\phi_f^{\text{reg}}(B) + \phi_f^{\text{reg}}(0)] + 1, \quad (6.2)$$

em que $D = (86 \text{ MeV} \times 135 \text{ MeV})^{1/2}$ é uma constante de normalização e m_f é a massa de corrente dos quarks. Esta normalização, D , é introduzida para que o valor obtido em (6.2) seja adimensional, e ela é calculada ao se considerar o primeiro termo da relação de Gell-Mann–Oakes–Renner, $D = M_\pi^2 F^2$, onde $M_\pi = 135 \text{ MeV}$ é a massa do pión para um campo magnético nulo e $F = 86 \text{ MeV}$ é a constante de decaimento do pión no limite quiral [162]. A partir disso, no lado esquerdo da figura esboçamos o condensado médio $\Delta\bar{\Sigma}$, dado por

$$\Delta\bar{\Sigma} = \frac{(\Sigma_u - \Sigma_d)}{2} - 1;$$

e no lado direito esboçamos a diferença dos condensados $\Sigma^- = \Sigma_u - \Sigma_d$.

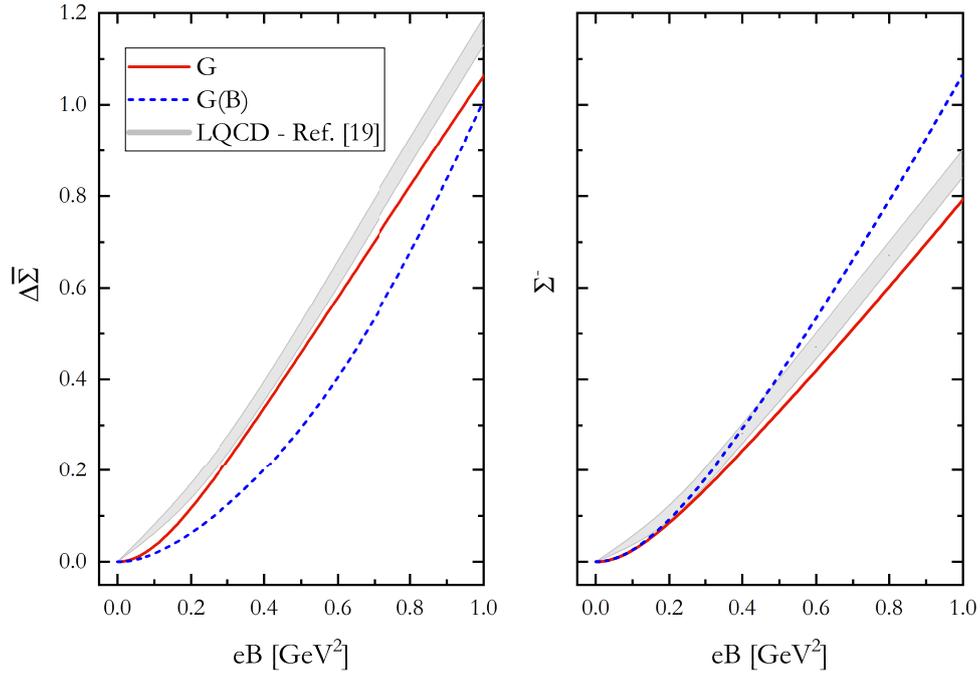


Figura 6.4: Na esquerda: Média do condensado $\Delta\bar{\Sigma}$ em função do campo magnético eB . Na direita: Diferença do condensado Σ^- em função do campo magnético eB . Em ambas as figuras, as linhas sólidas vermelhas representam os valores com o acoplamento constante G , as linhas tracejadas azuis representam valores com o acoplamento dependente do campo $G(B)$ e as faixas cinzas são os resultados obtidos na LQCD em [162]. (Figura retirada de [159])

A partir disso, podemos observar que as previsões para G constante são mais próximas dos resultados obtidos na LQCD, mas as previsões para $G(B)$ também são boas. Outras formas de se definir o acoplamento dependente do campo magnético têm tendências similares aos resultados que obtivemos, como em [150] e [168], como podemos observar na Figura 6.5.

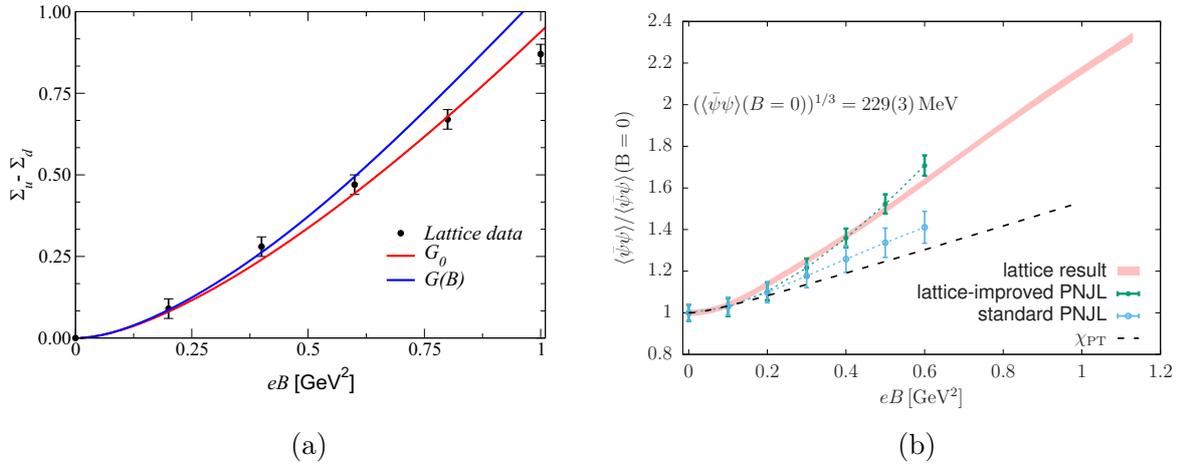


Figura 6.5: Média do condensado de quarks. (a) Resultados calculados no NJL SU(2) para G constante e $G(B)$ comparados aos dados da LQCD. Figura retirada de [150]. (b) Média do condensado calculada na LQCD. Figura retirada de [168].

6.6 Massa polo dos mésons

Na Figura 6.6, mostramos nossos resultados das massas polo para o noneto mesônico, ou para o estado de mais baixa energia no caso dos mésons carregados, dada por¹

$$\begin{aligned}
 E_{M^\pm} &= \sqrt{m_{M^\pm} + (2k+1)eB + q_3^2} \Big|_{\substack{q_3=0 \\ k=0}} \\
 &= \sqrt{m_{M^\pm} + eB}.
 \end{aligned} \tag{6.3}$$

Podemos notar que para os mésons neutros, com exceção do η' , a dependência do campo é fraca, enquanto as massas dos mésons carregados crescem bastante com o aumento do campo B . Discutiremos estes dois casos com mais detalhes mais adiante.

¹Tanto m_{M^\pm} quanto E_{M^\pm} dependem do campo B .

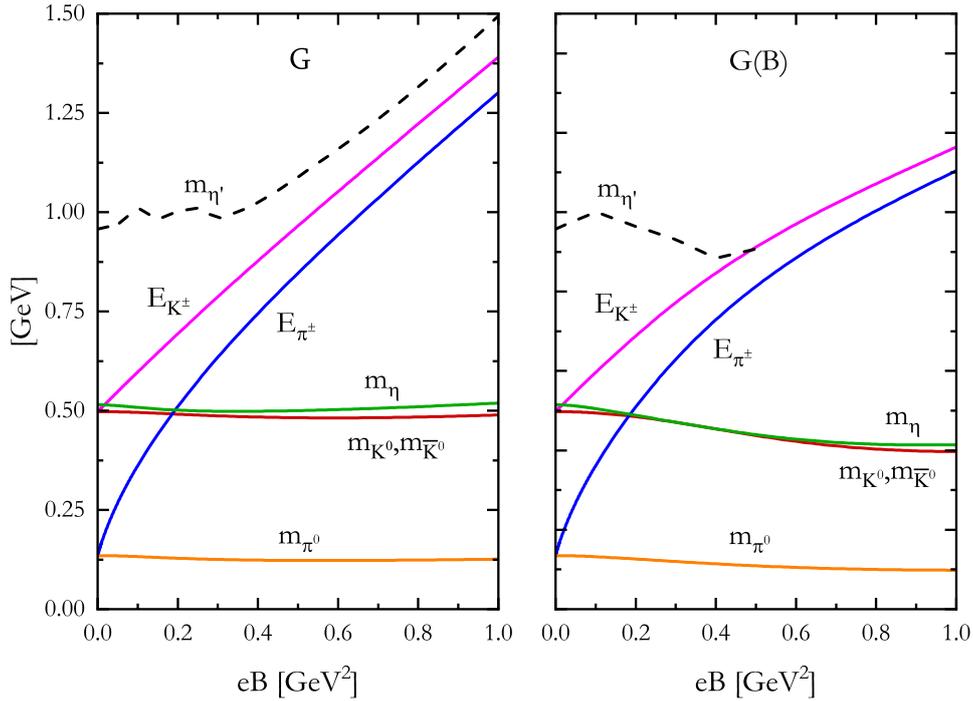


Figura 6.6: Massa polo dos mésons neutros e estados de mais baixa energia dos mésons carregados em função do campo magnético $e\mathbf{B}$. Na esquerda, estes valores com o acoplamento constante G ; e na direita, com acoplamento dependendo do campo magnético $G(B)$. (Figura retirada de [159])

O caso do η' é especial, já que mesmo em $B = 0$, a massa polo deste já está acima do limite para o decaimento de $\bar{\psi}_f\psi_f$. Assim, o diagrama de polarização associado à $\bar{\psi}_f\psi_f$ tem uma parte imaginária não física. Segundo [164], isso é inevitável no modelo NJL. Então, a massa polo de η' é definida como a parte real do polo correspondente no plano complexo.

Devido aos problemas mencionados acima, as previsões para a massa do η' são menos confiáveis, e isso se torna pior quando campos magnéticos externos são considerados. Isso ocorre devido ao surgimento de novas divergências em campos magnéticos fracos causadas pela existência de limiares associados aos níveis de Landau de estados intermediários de quarks. Tais divergências são ao longo do eixo real e geram o comportamento oscilatório para $eB \lesssim 0,2 \text{ GeV}^2$. Ao se incluir a parte imaginária da função de polarização no cálculo, estas divergências se tornam menos danosas. Esta contribuição não é considerada em [121], o que torna a determinação de $m_{\eta'}$ cheia de ambiguidades.

Outro problema é que, enquanto a largura Γ de η' para $B = 0$ já é considerável ($\Gamma_{\eta'}^{B=0} = 269 \text{ MeV}$), quando um campo magnético finito é adicionado, esta cresce ainda mais, o que podemos observar na Figura 6.7. Para um acoplamento G constante, o valor médio da largura perto do vácuo é de $\Gamma_{\eta'}^{B,\text{mean}} = 332 \text{ MeV}$, enquanto em campos intermediários este

valor pode chegar a $\Gamma_{\eta'}^B \sim 590$ MeV. Já quando um acoplamento dependente do campo $G(B)$ é considerado, Γ cresce ainda mais rápido e em $eB \sim 0,5$ GeV² pode chegar a $\Gamma_{\eta'}^B \sim 1,46$ GeV, maior que a massa do η' . O aumento da largura $\Gamma_{\eta'}^B$ e a diminuição de $G(B)$ com o aumento do campo magnético faz com que para $eB \lesssim 0,5$ GeV² não existam soluções para a equação (3.76) que não estejam associadas à π^0 e η . Acima destes campos, a força do acoplamento não é suficiente para formar uma ressonância do η' no contínuo $\bar{\psi}_f \psi_f$.

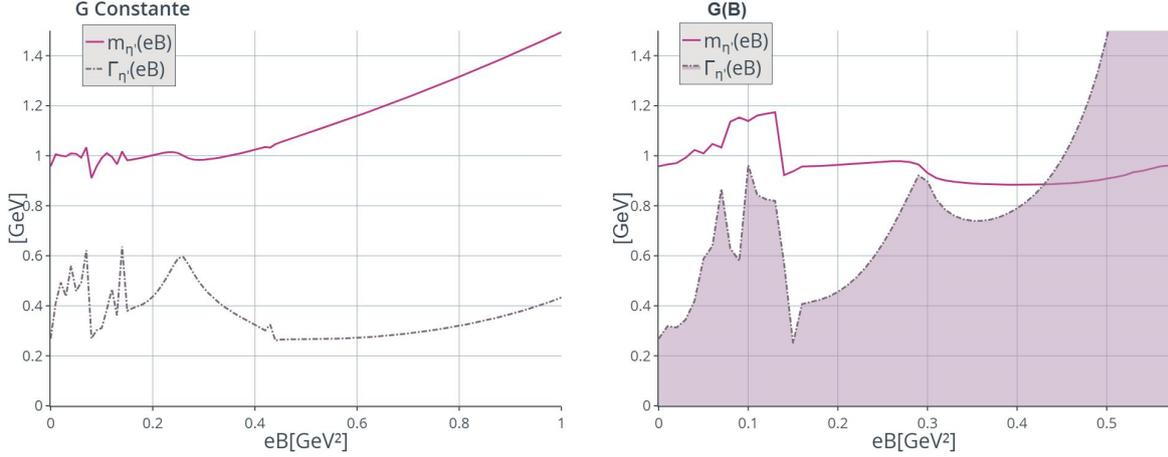


Figura 6.7: Massa polo do Méson η' (linha contínua) e seu comprimento de decaimento $\Gamma_{\eta'}$ (linha tracejada). (Figura elaborada pela autora.)

6.6.1 Mésons Neutros

Vamos agora nos concentrar na massa polo dos mésons neutros, esboçados na Figura 6.8. Nesta figura, comparamos nossos resultados com valores obtidos em cálculos da LQCD, que correspondem à uma massa não física para o pión para $B = 0$ de $m_\pi = 415$ MeV em [169] e $m_\pi = 220$ MeV em [170]. Nestes cálculos, a massa do π^0 tem um decréscimo acentuado com o crescimento do campo magnético B . Este decréscimo mais acentuado é observado nos nossos cálculos com $G(B)$, enquanto um acoplamento constante não apresenta uma diminuição tão grande da massa. Um comportamento semelhante foi observado em [150], em que os cálculos, que foram feitos no SU(2), são mostrados na Figura 6.9. Isso corrobora a hipótese da relação entre o efeito de IMC e a redução da massa do π^0 em campos magnéticos finitos, o que também é mencionado em [170].

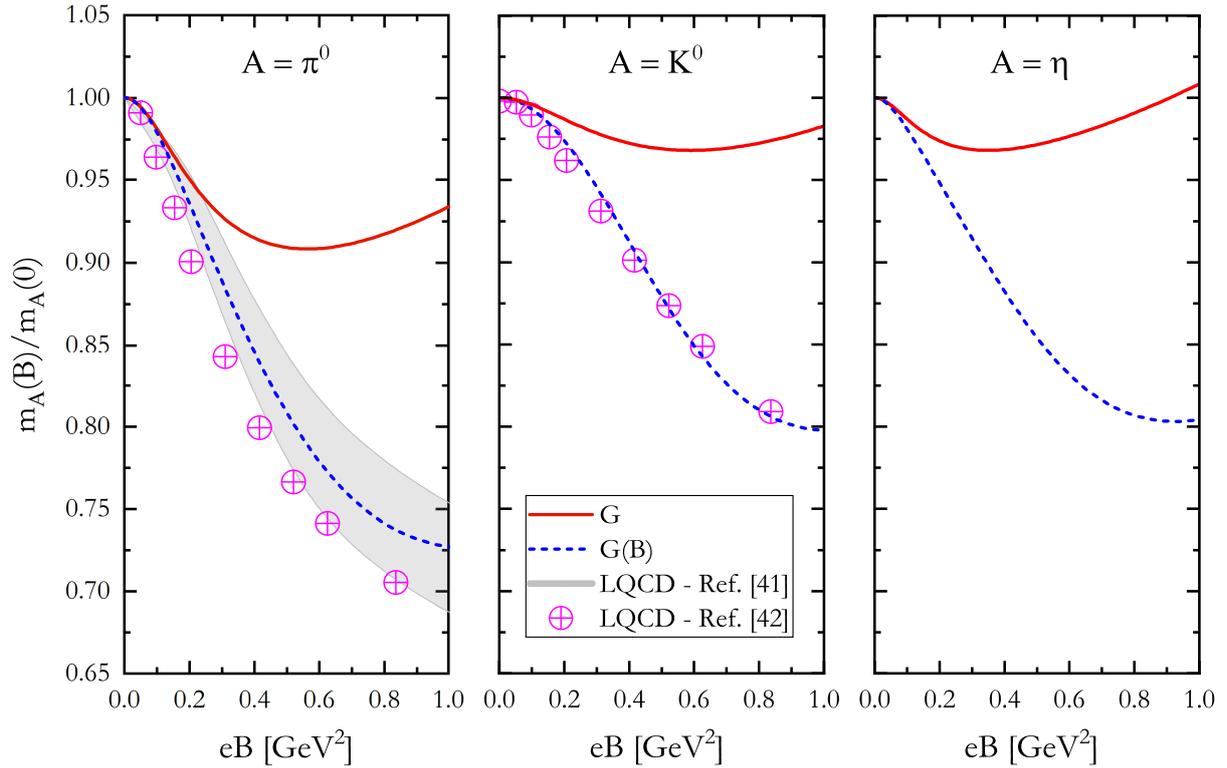


Figura 6.8: Massa polo dos mésons neutros em função do campo magnético eB . As linhas sólidas vermelhas representam valores com acoplamento G constante, as linhas azuis tracejadas representam valores com acoplamento $G(B)$ dependente do campo magnético. As faixas cinza representam resultados da LQCD obtidos em [169] e os círculos magenta representam resultados da LQCD obtidos em [170]. (Figura retirada de [159])

Para os káons neutros, apenas existem cálculos de sua massa na LQCD em [170]. Novamente, os nossos resultados [159] que mais concordam são aqueles para $G(B)$.

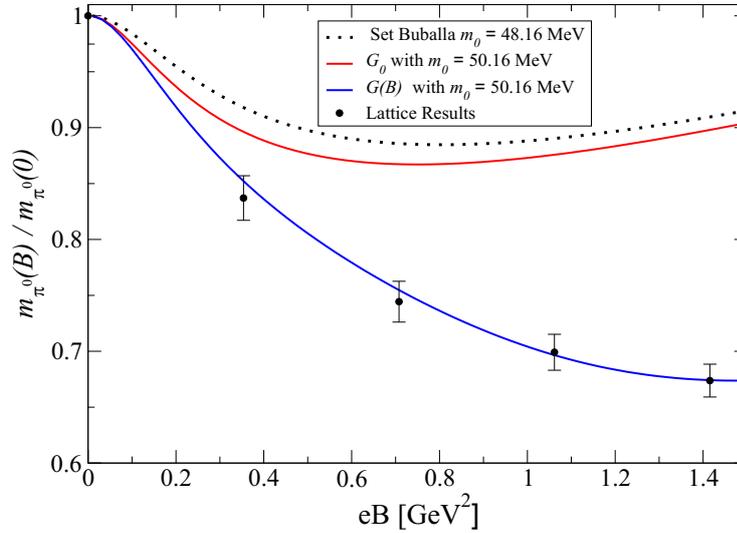


Figura 6.9: Massa polo do pión neutro calculada para o modelo NJL no $SU(2)$. Figura retirada de [150].

Finalmente, podemos observar que o méson η tem um comportamento semelhante ao de K^0 e \bar{K}^0 .

6.6.2 Mésons carregados

Por último, consideraremos as massas polo dos mésons carregados e seus estados de mais baixa energia, mostradas na Figura 6.10. Na parte inferior da figura, apresentamos a diferença do estado de mais baixa energia, dada por

$$\Delta E = E^2(B) - E^2(B = 0),$$

na esquerda para os pions e na direita para os kions carregados. Podemos notar que quando consideramos um acoplamento G constante, ΔE cresce mais que os mésons pontuais, representados pela linha pontilhada verde. Entretanto, quando um acoplamento $G(B)$ dependente do campo magnético é considerado, estes valores ficam mais próximos dos mésons pontuais.

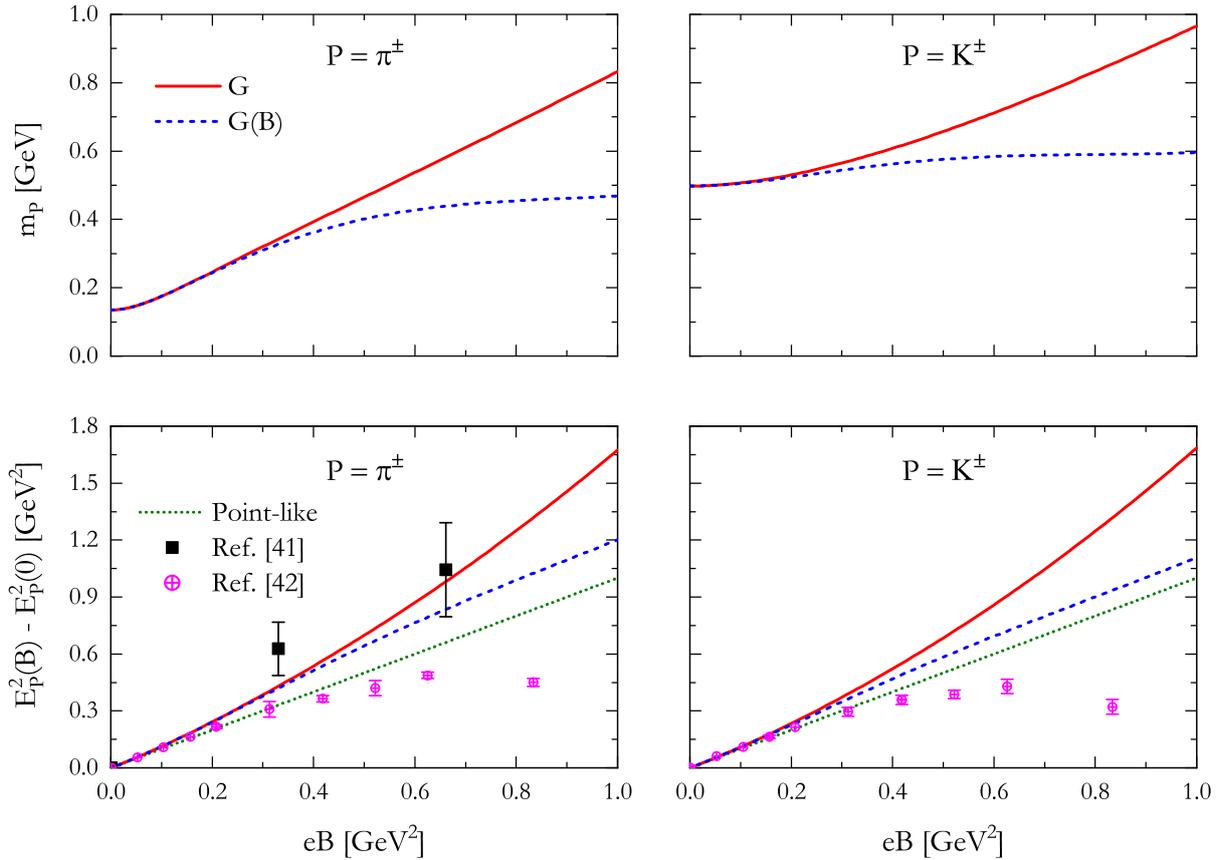


Figura 6.10: Em cima: Massa polo dos mésons carregados em função do campo magnético eB . Embaixo: Diferença do estado de mais baixa energia dos mésons carregados em função do campo magnético eB . Na esquerda, estes valores para os pions carregados e na direita para os kaons carregados. As linhas sólidas vermelhas representam valores com o acoplamento G constante e as linhas azuis tracejadas para o acoplamento $G(B)$ dependente do campo magnético. A linha verde pontilhada representa mésons carregados pontuais. Quadrados pretos mostram valores obtidos na rede em [169] e os círculos magenta, valores obtidos em [170]. (Figura retirada de [159])

Considerando os dados da LQCD obtidos em [169], apenas foram obtidos resultados para os pions que correspondem a um valor maior e não físico para a massa destes mésons em $B = 0$, com uma barra de erro grande, mas nossos resultados para os pions são mais próximos. O trabalho de [170] mostra um comportamento não monótono para o ΔE de ambos os mésons carregados, diferente do que obtemos.

Uma última observação que podemos fazer é de que o momento magnético anômalo dos quarks, obtidos em [171] para o $SU(2)$, não parece afetar a tendência da massa do pión carregado que obtivemos.

Considerações Finais

Neste trabalho conseguimos encontrar como as massas polo dos mésons do noneto mesônico se comportam com um campo magnético externo a partir do modelo Nambu–Jona-Lasinio em sua formulação no $SU(3)$. Apesar de não termos introduzido temperaturas e densidades finitas nos cálculos, o que obtemos aqui é um passo importante para a introdução destes posteriormente.

Para um melhor embasamento do trabalho, tentamos esboçar de forma qualitativa alguns aspectos teóricos e fenomenológicos ligados aos fenômenos que pretendíamos estudar, no Capítulo 1. Além de dar um contexto ao que estudamos, este Capítulo pode servir de ponto de partida a quem pretende iniciar os estudos nesta área. O Capítulo 2 também pretende dar o contexto histórico do modelo que utilizamos, além de algumas propriedades fundamentais do modelo.

Para encontrarmos as expressões para as massas polo dos mésons do noneto mesônico, primeiramente tivemos que encontrar expressões de campo médio para a equação de Gap do modelo, que fornece o valor das massas efetivas dos quarks, assim como do condensado de quarks. Quando consideramos o cálculo em segunda ordem, pudemos encontrar expressões para as funções de polarização dos mésons, cujos polos constituem a massa polo dos mesmos. Estes cálculos são apresentados no Capítulo 3.

Entretanto, para conseguirmos resultados numéricos das expressões encontradas no Capítulo 3, precisamos primeiro reescrevê-las. Isso é realizado no Capítulo 4, onde reescrevemos nossas expressões para o condensado de quarks e para as funções de polarização no formalismo de Schwinger. Embora as funções de polarização para os mésons neutros possam ser reescritas de forma direta, é necessário um cuidado especial com os mésons carregados, já que fases de Schwinger aparecem em seus polarizadores. Isso é realizado através do formalismo da base de Ritus, em que uma mudança de base é feita para que as fases de Schwinger se cancelem.

As expressões encontradas no Capítulo 4 possuíam divergências que precisavam ser resolvidas através de um esquema de regularização. Fizemos isso no Capítulo 5, onde utilizamos o MFIR para separar as contribuições magnéticas das contribuições do vácuo,

para em seguida poder regularizar as divergências a partir de um cutoff 3D do momento. Como já mencionado, a escolha do esquema de regularização foi fundamental para que não encontrássemos resultados não físicos.

Os resultados numéricos obtidos a partir das expressões encontradas no Capítulo 5 e no Capítulo 3 são apresentados no Capítulo 6. Neste capítulo, demonstramos que as previsões de como a massa efetiva dos quarks se comporta quando sujeita a um campo magnético externo a partir no modelo NJL apresentam uma boa concordância com os dados da LQCD, que usamos como *parâmetro experimental*. Estes resultados são mais próximos da LQCD quando consideramos que a constante de acoplamento do modelo, G , depende do campo magnético, o que se provou real para praticamente todos os outros dados obtidos.

Ao considerarmos a média do condensado de quarks para os sabores u e d , pudemos notar que, além de concordar com os dados da LQCD, o comportamento de Catálise Magnético pode ser observado. Apesar do comportamento do condensado ser mais próximo da LQCD quando consideramos $G(B)$, um comportamento semelhante é observado para um acoplamento constante.

Por fim, quando calculamos a massa polo dos mésons em função do campo magnético, de forma geral nossos resultados concordam com os dados da rede, além de outros trabalhos no mesmo sentido. A massa polo do pión e dos káons neutros apresentam um decréscimo acentuado quando os cálculos são feitos com um acoplamento $G(B)$, o que está mais próximo dos dados da rede, enquanto que para G constante essa tendência é menos acentuada. Para os mésons carregados, observou-se um comportamento crescente da massa com o campo magnético.

Um caso que deve ser considerado a parte é o da massa polo do méson η' . Como já mencionamos, a massa deste méson já está acima do limite do nosso modelo mesmo quando consideramos $B = 0$. Sua largura de decaimento também tem valores não desprezíveis mesmo para o caso de campos magnéticos nulos, de aproximadamente um terço do valor da massa polo do η' . Quando consideramos $G(B)$, esta largura chega a ultrapassar os valores de massa para campos magnéticos suficientemente grandes. Além disso, há um comportamento não monótono e não físico na região de campos magnéticos baixos causado por divergências. Assim, os resultados obtidos para esse méson são menos confiáveis e devem ser considerados com cuidado.

Os cálculos feitos aqui podem ser estendidos para o caso em que a temperatura ou a densidade não são nulas, assim com para quando os mésons vetoriais também são considerados. O primeiro caso pode ser importante para que possamos estudar melhor o diagrama de fases da QCD, especialmente quando consideramos densidades bariônicas não nulas, já que cálculos da rede falham para esses regimes devido ao problema do sinal.

Apêndice A

Definições e Convenções

Neste texto adotamos a notação de unidades naturais

$$\hbar = c = 1, \tag{A.1}$$

onde \hbar é a constante de Planck e c é a velocidade da luz.

Um comutador é denotado por

$$[A, B] = AB - BA, \tag{A.2}$$

enquanto um anticomutador é denotado por

$$\{A, B\} = AB + BA. \tag{A.3}$$

Por convenção, denotamos o traço maiúsculo Tr como o traço em todos os espaços, enquanto o traço minúsculo tr é apenas no espaço de Dirac, a menos que seja especificado diferente.

A.1 Métrica de Minkowski

Primeiramente, precisamos considerar a métrica de Minkowski, dada por

$$\mathbf{g}^{\mu\nu} = \mathbf{g}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.4})$$

Em nossa convenção, índices gregos são definidos como $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ e índices latinos como $i, j = 1, 2, 3$. Vetores contravariantes são definidos como

$$\mathbf{x}^\mu = (x^0, \mathbf{x}) = (t, x, y, z), \quad (\text{A.5})$$

enquanto os vetores covariantes são dados por

$$\mathbf{x}_\mu = \mathbf{g}_{\mu\nu}\mathbf{x}^\nu = (x_0, -\mathbf{x}) = (t, -x, -y, -z). \quad (\text{A.6})$$

O produto escalar entre dois quadrivetores é dado por

$$\mathbf{a}\mathbf{b} = \mathbf{a}^\mu\mathbf{b}_\mu = \mathbf{g}_{\mu\nu}\mathbf{a}^\mu\mathbf{b}^\nu = \mathbf{a}^0\mathbf{b}^0 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}, \quad (\text{A.7})$$

onde utilizamos a notação de Einstein, em que índices repetidos indicam uma soma implícita em relação a estes. A generalização quadridimensional da derivada espacial é, para o caso em relação à um quadrivetor contravariante, em que a derivada é covariante,

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right). \quad (\text{A.8})$$

Já a derivada contravariante, que é uma derivada em relação à um quadrivetor covariante, é

$$\partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial x_0}, -\frac{\partial}{\partial x_1}, -\frac{\partial}{\partial x_2}, -\frac{\partial}{\partial x_3} \right). \quad (\text{A.9})$$

Para denotar uma função em relação a um quadrivetor, utilizamos a seguinte notação:

$$f(\mathbf{x}) \equiv f(t, \mathbf{x}). \quad (\text{A.10})$$

A.2 Métrica Euclidiana

Neste trabalho, utilizaremos a métrica Euclidiana, dada por

$$\eta^{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.11})$$

e para reescrever nossas expressões no espaço euclidiano, consideramos

$$\begin{array}{ccc} x_0 & \rightarrow & ix_4 \\ \begin{array}{c} d^4x \\ \text{Minkowski} \end{array} & \rightarrow & \begin{array}{c} id^4x \\ \text{Euclidiano} \end{array} \\ \begin{array}{c} x^2 \\ \text{Minkowski} \end{array} & \rightarrow & \begin{array}{c} -x^2 \\ \text{Euclidiano} \end{array} \end{array}$$

A.3 Matrizes de Pauli e de Dirac

As matrizes de Pauli σ , ou indicadas por τ quando estão relacionadas à simetrias de isospin, são dadas por

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.12})$$

As matrizes de Dirac γ no espaço Euclidiano são dadas por [172]

$$\gamma^4 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_i \\ i\sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.13})$$

têm a propriedade

$$\gamma^\mu = \gamma^{\mu\dagger} = (\gamma^\mu)^{-1}, \quad (\text{A.14})$$

e obedecem à relação

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\delta^{\mu\nu} \mathbb{1}_4. \quad (\text{A.15})$$

A matriz γ^5 é definida como

$$\gamma_5 = \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \gamma^4, \quad (\text{A.16})$$

e tem como propriedades

$$\{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0; \quad (\text{A.17})$$

e

$$(\gamma^5)^2 = 1, \quad (\gamma^5)^\dagger = \gamma^5. \quad (\text{A.18})$$

Algumas propriedades de contração das matrizes γ são [173]

$$\bullet \quad \gamma_\lambda \gamma^\lambda = 4, \quad (\text{A.19a})$$

$$\bullet \quad \gamma_\lambda \gamma^\alpha \gamma^\lambda = -2\gamma^\alpha, \quad (\text{A.19b})$$

$$\bullet \quad \gamma_\lambda \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\lambda = 4\delta^{\alpha\beta} \mathbb{1}_4, \quad (\text{A.19c})$$

$$\bullet \quad \gamma_\lambda \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\gamma \gamma^\lambda = -2\gamma^\gamma \gamma^\beta \gamma^\alpha, \quad (\text{A.19d})$$

$$\bullet \quad \gamma_\lambda \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\gamma \gamma^\delta \gamma^\lambda = 2(\gamma^\delta \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\gamma + \gamma^\gamma \gamma^\beta \gamma^\alpha \gamma^\delta), \quad (\text{A.19e})$$

e algumas propriedades do traço destas matrizes são

$$\bullet \quad \text{tr}[\gamma^\alpha \gamma^\beta \dots \gamma^\mu \gamma^\nu] = 0, \text{ para um número ímpar de matrizes } \gamma, \quad (\text{A.20a})$$

- $\text{tr}[\gamma^\alpha \gamma^\beta] = 4\delta^{\alpha\beta} \mathbb{1}_4,$ (A.20b)

- $\text{tr}[\gamma^\alpha \gamma^\beta \dots \gamma^\mu \gamma^\nu] = \text{tr}[\gamma^\nu \gamma^\mu \dots \gamma^\beta \gamma^\alpha],$ (A.20c)

- $\text{tr}[\gamma^5] = \text{tr}[\gamma^5 \gamma^\alpha] = \text{tr}[\gamma^5 \gamma^\alpha \gamma^\beta] = \text{tr}[\gamma^5 \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\gamma] = 0.$ (A.20d)

Apêndice B

Matrizes de Gell-Mann

As oito matrizes de Gell-Mann formam uma base para o $SU(3)$, e são dadas pelo conjunto completo de matrizes Hermitianas e sem traço

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} & & \\ \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} & \lambda_8 &= \sqrt{\frac{1}{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

que são normalizadas de forma que

$$\text{tr}[\lambda_a \lambda_b] = 2\delta_{ab}. \quad (\text{B.1})$$

Estas matrizes obedecem às relações de comutação e anticomutação

$$[\lambda_a, \lambda_b] = 2if_{abc}\lambda_c; \quad (\text{B.2a})$$

$$\{\lambda_a, \lambda_b\} = \frac{4}{3}\delta_{ab} + 2d_{abc}\lambda_c, \quad (\text{B.2b})$$

ou, conseqüentemente,

$$\lambda_a \lambda_b = if_{abc} + \frac{2}{3}\delta_{ab} + d_{abc}\lambda_c. \quad (\text{B.3})$$

Também podemos definir, a partir de (B.1) e (B.2),

$$\text{tr}\{\lambda_a, \lambda_b\}\lambda_c = 4d_{abc}, \quad (\text{B.4a})$$

$$\text{tr}[\lambda_a, \lambda_b] = 4if_{abc}. \quad (\text{B.4b})$$

Nestas últimas expressões, d_{abc} são as constantes de estrutura simétricas, mostradas na Tabela B.1; e f_{abc} são as constantes de estrutura antissimétricas, mostradas na Tabela B.2.

Além destas, devemos também considerar a matriz

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.5})$$

com as constantes de estrutura

$$d_{000} = \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad d_{0bc} = -\frac{1}{\sqrt{6}}\delta_{bc}. \quad (\text{B.6})$$

B.1 Constantes de estrutura

$d_{118} = \frac{1}{\sqrt{3}}$	$d_{228} = \frac{1}{\sqrt{3}}$	$d_{338} = \frac{1}{\sqrt{3}}$	$d_{888} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$
$d_{448} = \frac{-1}{2\sqrt{3}}$	$d_{558} = \frac{-1}{2\sqrt{3}}$	$d_{668} = \frac{-1}{2\sqrt{3}}$	$d_{778} = \frac{-1}{2\sqrt{3}}$
$d_{344} = \frac{1}{2}$	$d_{355} = \frac{1}{2}$	$d_{366} = -\frac{1}{2}$	$d_{377} = -\frac{1}{2}$
$d_{247} = -\frac{1}{2}$	$d_{146} = \frac{1}{2}$	$d_{157} = \frac{1}{2}$	$d_{256} = \frac{1}{2}$

Tabela B.1: Constantes de Estrutura Simétricas.

$f_{123} = 1$		
$f_{147} = \frac{1}{2}$	$f_{156} = -\frac{1}{2}$	$f_{246} = \frac{1}{2}$
$f_{257} = \frac{1}{2}$	$f_{345} = \frac{1}{2}$	$f_{367} = -\frac{1}{2}$
$f_{458} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$f_{678} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	

Tabela B.2: Constantes de Estrutura Antissimétricas.

Apêndice C

Cálculos do Capítulo 3

C.1 Prova da expressão (3.10)

Queremos reescrever a expressão

$$\mathcal{L}_{\text{det}} = \mathbb{K}\{\det[\bar{\Psi}(1 + \gamma_5)\Psi] + \det[\bar{\Psi}(1 - \gamma_5)\Psi]\}, \quad (\text{C.1})$$

em função da densidade escalar j_α^{S} e da densidade pseudoescalar j_α^{P} , dadas por

$$j_\alpha^{\text{S}} = \bar{\Psi}\lambda_\alpha\Psi, \quad (\text{C.2})$$

$$j_\alpha^{\text{P}} = \bar{\Psi}i\gamma_5\lambda_\alpha\Psi. \quad (\text{C.3})$$

Para isso, seguiremos a dedução de [143]. Definimos \mathbf{d}^\pm como

$$\mathbf{d}^\pm = \bar{\Psi}(1 \mp \gamma_5)\Psi, \quad (\text{C.4})$$

e podemos reescrever a expressão (3.9) como

$$\mathcal{L}_{\text{det}} = \mathbb{K}\{\det(\mathbf{d}^-) + \det(\mathbf{d}^+)\}. \quad (\text{C.5})$$

Precisamos reescrever os determinantes de (C.5) de forma que eles fiquem mais tratáveis. Para isso, primeiro utilizaremos a fórmula de Newton e Girard

$$\det(\mathbf{d}^\pm) = \frac{1}{6}(\text{tr } \mathbf{d}^\pm)^3 - \frac{1}{2}(\text{tr } \mathbf{d}^\pm)[\text{tr}[(\mathbf{d}^\pm)^2]] + \frac{1}{3}\text{tr}[(\mathbf{d}^\pm)^3], \quad (\text{C.6})$$

onde o traço é apenas no espaço de sabor.

Como a base deste espaço é composto pelas matrizes de Gell-Mann juntamente com matriz $\lambda_0 = \sqrt{\frac{2}{3}}\mathbb{1}$, e cujas propriedades são descritas no Apêndice B, podemos escrever¹

$$\mathbf{d}^\pm = \sum_{\alpha=0}^8 c_\alpha^\pm \lambda_\alpha \quad \Leftrightarrow \quad \text{tr}\{\lambda_\alpha \mathbf{d}^\pm\} = 2c_\alpha^\pm. \quad (\text{C.7})$$

Considerando que $\text{tr}[\lambda_\alpha \lambda_\beta] = 2\delta_{\alpha\beta}$, teremos

$$\begin{aligned} \text{tr}[\lambda_\beta \mathbf{d}^\pm] &= \sum_{\alpha=0}^8 c_\alpha^\pm 2\delta_{\beta\alpha}; \\ &= 2c_\beta^\pm, \end{aligned}$$

e podemos escrever

$$c_\alpha^\pm = \frac{1}{2} \text{tr}[\lambda_\alpha \mathbf{d}^\pm]. \quad (\text{C.8})$$

Pela definição de \mathbf{d}^\pm , teremos

$$\frac{1}{2} \text{tr}[\lambda_\alpha \mathbf{d}^\pm] = \frac{1}{2} [(\bar{\psi} \lambda_\alpha \psi) \pm i(\bar{\psi} i\gamma_5 \lambda_\alpha \psi)],$$

e, substituindo em (C.8),

$$c_\alpha^\pm = \frac{1}{2} [(\bar{\psi} \lambda_\alpha \psi) \pm i(\bar{\psi} i\gamma_5 \lambda_\alpha \psi)]. \quad (\text{C.9})$$

Tendo em conta as definições de (C.2) e (C.3),

¹Podemos verificar esta última expressão ao multiplicarmos ambos os lados da primeira expressão por λ_β e tomarmos o traço.

$$\mathbf{c}_\alpha^\pm = \frac{1}{2}[\mathbf{j}_\alpha^s \pm \mathbf{i}\mathbf{j}_\alpha^p], \quad (\text{C.10})$$

e então teremos

$$\mathbf{j}_\alpha^s = 2(\mathbf{c}_\alpha^+ + \mathbf{c}_\alpha^-), \quad \mathbf{j}_\alpha^p = 2\mathbf{i}(\mathbf{c}_\alpha^+ - \mathbf{c}_\alpha^-). \quad (\text{C.11})$$

Voltando à fórmula de Newton e Girard (C.6), calcularemos cada termo separadamente.

Primeiro Termo O primeiro termo fica

$$\begin{aligned} \text{tr}(\mathbf{d}^\pm) &= \text{tr} \left[\sum_{\alpha=0}^8 \mathbf{c}_\alpha^\pm \lambda_\alpha \right], \\ &= \sum_{\alpha=0}^8 \mathbf{c}_\alpha^\pm \text{tr}(\lambda_\alpha), \end{aligned}$$

e como apenas o traço de λ_0 é diferente de zero,

$$\boxed{\text{tr}(\mathbf{d}^\pm) = 2\sqrt{\frac{3}{2}}\mathbf{c}_0^\pm.} \quad (\text{C.12})$$

Segundo Termo O segundo termo fica

$$\begin{aligned} \text{tr}[(\mathbf{d}^\pm)^2] &= \text{tr}[(\mathbf{c}_\alpha^\pm \lambda_\alpha)(\mathbf{c}_\beta^\pm \lambda_\beta)], \\ &= \mathbf{c}_\alpha^\pm \mathbf{c}_\beta^\pm \text{tr}(\lambda_\alpha \lambda_\beta), \\ &= \mathbf{c}_\alpha^\pm \mathbf{c}_\beta^\pm (2\delta_{\alpha\beta}), \end{aligned}$$

então

$$\boxed{\text{tr}[(\mathbf{d}^\pm)^2] = 2\mathbf{c}_\alpha^\pm \mathbf{c}_\alpha^\pm.} \quad (\text{C.13})$$

Terceiro Termo O terceiro termo fica

$$\text{tr}[(\mathbf{d}^\pm)^3] = \text{tr}[(\mathbf{c}_\alpha^\pm \lambda_\alpha)(\mathbf{c}_\beta^\pm \lambda_\beta)(\mathbf{c}_\gamma^\pm \lambda_\gamma)],$$

e assim,

$$\boxed{\text{tr}[(\mathbf{d}^\pm)^3] = \mathbf{c}_\alpha^\pm \mathbf{c}_\beta^\pm \mathbf{c}_\gamma^\pm \text{tr}(\lambda_\alpha \lambda_\beta \lambda_\gamma)}. \quad (\text{C.14})$$

Substituindo estes resultados em (C.5),

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{det}} = \mathcal{K} \left\{ 2\sqrt{\frac{3}{2}}[(\mathbf{c}_0^+)^3 + (\mathbf{c}_0^-)^3] - 2\sqrt{\frac{3}{2}}[\mathbf{c}_0^+ \mathbf{c}_\alpha^+ \mathbf{c}_\alpha^+ + \mathbf{c}_0^- \mathbf{c}_\alpha^- \mathbf{c}_\alpha^-] \right. \\ \left. + \frac{1}{3}[\mathbf{c}_\alpha^+ \mathbf{c}_\beta^+ \mathbf{c}_\gamma^+ + \mathbf{c}_\alpha^- \mathbf{c}_\beta^- \mathbf{c}_\gamma^-] \text{tr}(\lambda_\alpha \lambda_\beta \lambda_\gamma) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

Antes de continuarmos, vamos escrever cada termo com \mathbf{c}_α^\pm em termos de \mathbf{j}_α^s e \mathbf{j}_α^p .

Termo $(\mathbf{c}_0^\pm)^3$ Pela expressão (C.10), teremos

$$(\mathbf{c}_0^+)^3 = \frac{1}{2^3} \{ [(j_0^s)^3 - 3j_0^s(j_0^p)^2] + i[3(j_0^s)^2 j_0^p - (j_0^p)^3] \}. \quad (\text{C.16})$$

Considerando

$$(\mathbf{c}_0^+)^3 + (\mathbf{c}_0^-)^3 = \mathbf{c}_R^3 + i\mathbf{c}_I^3 + \mathbf{c}_R^3 - i\mathbf{c}_I^3 = 2\mathbf{c}_R^3, \quad (\text{C.17})$$

podemos escrever

$$(\mathbf{c}_0^+)^3 + (\mathbf{c}_0^-)^3 = 2 \text{Re} [(\mathbf{c}_0^+)^3] = 2 \text{Re} [(\mathbf{c}_0^-)^3]. \quad (\text{C.18})$$

Então

$$\boxed{(\mathbf{c}_0^+)^3 + (\mathbf{c}_0^-)^3 = \frac{1}{4} j_0^s [(j_0^s)^2 - 3(j_0^p)^2]} \quad (\text{C.19})$$

Termo $\mathbf{c}_0^\pm \mathbf{c}_\alpha^\pm \mathbf{c}_\alpha^\pm$ Novamente, pela definição (C.10)

$$\mathbf{c}_0^+ \mathbf{c}_\alpha^+ \mathbf{c}_\alpha^+ = \frac{1}{2^3} \{ [j_0^s (j_\alpha^s)^2 - j_0^s (j_\alpha^p)^2 - 2j_\alpha^s j_0^p j_\alpha^p] + i [2j_0^s j_\alpha^s j_\alpha^p + j_0^p (j_\alpha^s)^2 - j_0^p (j_\alpha^p)^2] \}. \quad (\text{C.20})$$

De forma semelhante à (C.18), podemos escrever

$$\mathbf{c}_0^+ \mathbf{c}_\alpha^+ \mathbf{c}_\alpha^+ + \mathbf{c}_0^- \mathbf{c}_\alpha^- \mathbf{c}_\alpha^- = 2 \operatorname{Re} [\mathbf{c}_0^+ \mathbf{c}_\alpha^+ \mathbf{c}_\alpha^+], \quad (\text{C.21})$$

e substituindo (C.20) em (C.21) ficamos com

$$\boxed{\mathbf{c}_0^+ \mathbf{c}_\alpha^+ \mathbf{c}_\alpha^+ + \mathbf{c}_0^- \mathbf{c}_\alpha^- \mathbf{c}_\alpha^- = \frac{1}{4} \{ j_0^s [(j_\alpha^s)^2 - (j_\alpha^p)^2] - 2j_\alpha^s j_0^p j_\alpha^p \}.} \quad (\text{C.22})$$

Termo $\mathbf{c}_\alpha^\pm \mathbf{c}_\beta^\pm \mathbf{c}_\gamma^\pm$ Como os índices são simétricos, podemos escrever

$$\mathbf{c}_\alpha^+ \mathbf{c}_\beta^+ \mathbf{c}_\gamma^+ = \frac{1}{2^3} \{ [j_\alpha^s j_\beta^s j_\gamma^s - 3j_\alpha^s j_\beta^p j_\gamma^p] + i [3j_\alpha^s j_\beta^s j_\gamma^p - j_\alpha^p j_\beta^p j_\gamma^p] \}. \quad (\text{C.23})$$

De forma semelhante à (C.18), podemos escrever

$$\mathbf{c}_\alpha^+ \mathbf{c}_\beta^+ \mathbf{c}_\gamma^+ + \mathbf{c}_\alpha^- \mathbf{c}_\beta^- \mathbf{c}_\gamma^- = 2 \operatorname{Re} [\mathbf{c}_\alpha^+ \mathbf{c}_\beta^+ \mathbf{c}_\gamma^+]. \quad (\text{C.24})$$

Então

$$\boxed{\mathbf{c}_\alpha^+ \mathbf{c}_\beta^+ \mathbf{c}_\gamma^+ + \mathbf{c}_\alpha^- \mathbf{c}_\beta^- \mathbf{c}_\gamma^- = \frac{1}{4} [j_\alpha^s j_\beta^s j_\gamma^s - 3j_\alpha^s j_\beta^p j_\gamma^p].} \quad (\text{C.25})$$

Agora podemos substituir (C.19), (C.22) e (C.25) em (C.15)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\det} = \mathbf{K} & \left\{ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2}} j_0^s [(j_0^s)^2 - 3(j_0^p)^2] - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2}} [j_0^s [(j_\alpha^s)^2 - (j_\alpha^p)^2] - 2j_\alpha^s j_0^p j_\alpha^p] \right. \\ & \left. + \frac{1}{12} [j_\alpha^s j_\beta^s j_\gamma^s - 3j_\alpha^s j_\beta^p j_\gamma^p] \operatorname{tr}(\lambda_\alpha \lambda_\beta \lambda_\gamma) \right\}. \quad (\text{C.26}) \end{aligned}$$

Ainda precisamos calcular o traço $\text{tr}(\lambda_\alpha \lambda_\beta \lambda_\gamma)$. Pela álgebra do $\text{SU}(3)$, temos

$$[\lambda_a, \lambda_b] = 2if_{abc}\lambda_c; \quad (\text{C.27a})$$

$$\{\lambda_a, \lambda_b\} = \frac{4}{3}\delta_{ab} + 2d_{abc}\lambda_c, \quad (\text{C.27b})$$

em que d_{abc} é a constante de estrutura simétrica e f_{abc} é a constante de estrutura antissimétrica do $\text{SU}(3)$, com $a, b, c = 1, \dots, 8$, definidas no Apêndice B. Somando (C.27a) e (C.27b), temos

$$\lambda_a \lambda_b = if_{abc} + \frac{2}{3}\delta_{ab} + d_{abc}\lambda_c. \quad (\text{C.28})$$

Os índices das matrizes λ do traço vão de 0 a 8, enquanto os índices da relação (C.28) vão de 1 a 8. Por isso, precisamos reescrever o traço

$$\text{tr}(\lambda_\alpha \lambda_\beta \lambda_\gamma) = \text{tr}(\lambda_0 \lambda_0 \lambda_0) + 3 \text{tr}(\lambda_0 \lambda_a \lambda_b) + 3 \text{tr}(\lambda_0 \lambda_0 \lambda_a) + \text{tr}(\lambda_a \lambda_b \lambda_c). \quad (\text{C.29})$$

Simplificando cada termo de (C.29) separadamente, ficamos com

$$\text{tr}(\lambda_0 \lambda_0 \lambda_0) = 2\sqrt{\frac{2}{3}}; \quad (\text{C.30a})$$

$$\text{tr}(\lambda_0 \lambda_a \lambda_b) = 2\sqrt{\frac{2}{3}}\delta_{ab}; \quad (\text{C.30b})$$

$$\text{tr}(\lambda_0 \lambda_0 \lambda_a) = 0; \quad (\text{C.30c})$$

$$\text{tr}(\lambda_a \lambda_b \lambda_c) = 2if_{abc} + 2d_{abc}; \quad (\text{C.30d})$$

e substituindo estes resultados em (C.29), teremos

$$\text{tr}(\lambda_\alpha \lambda_\beta \lambda_\gamma) = 2\sqrt{\frac{2}{3}} + 3 \cdot 2\sqrt{\frac{2}{3}}\delta_{ab} + 2if_{abc} + 2d_{abc}. \quad (\text{C.31})$$

Assim, o terceiro termo de (C.26) pode ser escrito como

$$\frac{1}{12} [j_\alpha^s j_\beta^s j_\gamma^s - 3j_\alpha^s j_\beta^p j_\gamma^p] \text{tr}(\lambda_\alpha \lambda_\beta \lambda_\gamma) = \frac{2}{12} \sqrt{\frac{2}{3}} [(j_0^s)^3 - 3j_0^s (j_0^p)^2]$$

$$+ \frac{6}{12} \sqrt{\frac{2}{3}} \delta_{ab} (j_0^s j_a^s j_b^s - j_0^s j_a^p j_b^p - 2j_a^s j_0^p j_b^p) + \frac{2}{12} d_{abc} (j_a^s j_b^s j_c^s - 3j_a^s j_b^p j_c^p). \quad (\text{C.32})$$

Considerando (C.32), a lagrangiana (C.26) pode ser expressa como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{det}} = \mathbb{K} & \left\{ \frac{3}{4} \sqrt{\frac{2}{3}} [(j_0^s)^3 - 3j_0^s (j_0^p)^2] - \frac{3}{4} \sqrt{\frac{2}{3}} [j_0^s j_\alpha^s j_\alpha^s - j_0^s j_\alpha^p j_\alpha^p - 2j_\alpha^s j_0^p j_\alpha^p] \right. \\ & + \frac{2}{12} \sqrt{\frac{2}{3}} [(j_0^s)^3 - 3j_0^s (j_0^p)^2] + \frac{6}{12} \sqrt{\frac{2}{3}} \delta_{ab} [j_0^s j_a^s j_b^s - j_0^s j_a^p j_b^p - 2j_a^s j_0^p j_b^p] \\ & \left. + \frac{2}{12} d_{abc} [j_a^s j_b^s j_c^s - 3j_a^s j_b^p j_c^p] \right\}. \quad (\text{C.33}) \end{aligned}$$

Ainda precisamos reescrever os dois primeiros termos,

$$\begin{aligned} \frac{3}{4} \sqrt{\frac{2}{3}} [(j_0^s)^3 - 3j_0^s (j_0^p)^2] - \frac{3}{4} \sqrt{\frac{2}{3}} [j_0^s j_\alpha^s j_\alpha^s - j_0^s j_\alpha^p j_\alpha^p - 2j_\alpha^s j_0^p j_\alpha^p] &= \frac{3}{4} \sqrt{\frac{2}{3}} [(j_0^s)^3 - 3j_0^s (j_0^p)^2] \\ & - \frac{3}{4} \sqrt{\frac{2}{3}} [(j_0^s)^3 - 3j_0^s (j_0^p)^2] - \frac{3}{4} \sqrt{\frac{2}{3}} [j_0^s j_a^s j_a^s - j_0^s j_a^p j_a^p - 2j_a^s j_0^p j_a^p], \\ &= -\frac{3}{4} \sqrt{\frac{2}{3}} \delta_{ab} [j_0^s j_a^s j_a^s - j_0^s j_a^p j_a^p - 2j_a^s j_0^p j_a^p], \quad (\text{C.34}) \end{aligned}$$

e então (C.33) fica

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{det}} = \mathbb{K} & \left\{ \frac{1}{6} \sqrt{\frac{2}{3}} [(j_0^s)^3 - 3j_0^s (j_0^p)^2] + \left(\frac{2}{4}\right) \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right) \delta_{ab} [j_0^s j_a^s j_b^s - j_0^s j_a^p j_b^p - 2j_a^s j_0^p j_b^p] \right. \\ & \left. + \frac{1}{6} d_{abc} [j_a^s j_b^s j_c^s - 3j_a^s j_b^p j_c^p] \right\}. \quad (\text{C.35}) \end{aligned}$$

Para finalmente escrever (C.35) em termos dos índices no espaço-tempo $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \dots$, precisamos ainda definir as constantes de estrutura simétrica para termos que envolvem a parte temporal,

$$d_{000} = \sqrt{\frac{2}{3}} \quad , \quad d_{0ab} = -\frac{\delta_{ab}}{\sqrt{6}}.$$

Devemos tomar cuidado no segundo termo. Note que, já que d_{0ab} é totalmente simétrico, teremos para $\mathbf{a}, \mathbf{b} = 1$ (por exemplo)

$$\mathbf{d}_{0ab} \xrightarrow{a,b=1} \mathbf{d}_{011} + \mathbf{d}_{101} + \mathbf{d}_{110},$$

ou seja

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{\sqrt{6}} \right) \delta_{ab} j_0 j_a j_b &= C \mathbf{d}_{0ab} j_0 j_a j_b, \\ \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{\sqrt{6}} \right) j_0 j_1 j_1 &= C [\mathbf{d}_{011} j_0 j_1 j_1 + \mathbf{d}_{101} j_1 j_0 j_1 + \mathbf{d}_{110} j_1 j_1 j_0], \\ \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{\sqrt{6}} \right) j_0 j_1 j_1 &= C \left(-\frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{6}} \right) j_0 j_1 j_1, \\ \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{\sqrt{6}} \right) &= 3C \left(-\frac{1}{\sqrt{6}} \right), \end{aligned}$$

$$C = \frac{1}{6}.$$

Finalmente, podemos reescrever (C.35) como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\det} = \mathbf{K} \left\{ \frac{1}{6} \mathbf{d}_{000} [(j_0^s)^3 - 3j_0^s (j_0^p)^2] + \frac{1}{6} \mathbf{d}_{0ab} [j_0^s j_a^s j_b^s - j_0^s j_a^p j_b^p - 2j_a^s j_0^p j_b^p] \right. \\ \left. + \frac{1}{6} \mathbf{d}_{abc} [j_a^s j_b^s j_c^s - 3j_a^s j_b^p j_c^p] \right\}, \end{aligned}$$

e ao juntar os índices temporais e espaciais, ficamos com

$$\boxed{\mathcal{L}_{\det} = \frac{\mathbf{K}}{6} \mathbf{d}_{\alpha\beta\gamma} [j_\alpha^s j_\beta^s j_\gamma^s - 3j_\alpha^s j_\beta^p j_\gamma^p].} \quad (\text{C.36})$$

C.2 Condições da SPA

C.2.1 Para s_α

Queremos calcular a derivada

$$\frac{\delta}{\delta s_\alpha} \int d^4x \mathcal{L}_r = \frac{\delta}{\delta s_\alpha} \int d^4x \left\{ -G \sum_{\alpha=0}^8 [(s_\alpha)^2 + (p_\alpha)^2] \right\}$$

$$\begin{aligned}
& \left. + \frac{\mathbf{K}}{6} \mathbf{d}_{\alpha\beta\gamma} [s_\alpha s_\beta s_\gamma - 3s_\alpha p_\beta p_\gamma] - s_\alpha \sigma_\alpha - p_\alpha \pi_\alpha \right\}, \\
& = -2\mathbf{G}s_\alpha + \frac{\mathbf{K}}{6} \mathbf{d}_{\alpha\beta\gamma} \frac{\delta}{\delta s_\alpha} (s_\alpha s_\beta s_\gamma) - \frac{3}{6} \mathbf{K} \mathbf{d}_{\alpha\beta\gamma} \frac{\delta}{\delta s_\alpha} (s_\alpha p_\beta p_\gamma) - \sigma_\alpha. \quad (\text{C.37})
\end{aligned}$$

Vamos calcular separadamente as derivadas do terceiro e do quarto termos

Terceiro Termo O terceiro termo de (C.37) é

$$\begin{aligned}
\frac{\delta}{\delta s_\alpha} (s_\alpha s_\beta s_\gamma) &= \left(\frac{\delta s_\alpha}{\delta s_\alpha} \right) s_\beta s_\gamma + s_\alpha \left(\frac{\delta s_\beta}{\delta s_\alpha} \right) s_\gamma + s_\alpha s_\beta \left(\frac{\delta s_\gamma}{\delta s_\alpha} \right), \\
&= s_\beta s_\gamma + s_\alpha \delta_{\alpha\beta} s_\gamma + s_\alpha s_\beta \delta_{\gamma\alpha}, \\
&= s_\beta s_\gamma + s_\beta s_\gamma + s_\beta s_\gamma, \\
&= 3s_\beta s_\gamma.
\end{aligned}$$

Quarto Termo O quarto termo de (C.37) é

$$\begin{aligned}
\frac{\delta}{\delta s_\alpha} (s_\alpha p_\beta p_\gamma) &= \left(\frac{\delta s_\alpha}{\delta s_\alpha} \right) p_\beta p_\gamma + s_\alpha \left(\frac{\delta p_\beta}{\delta s_\alpha} \right) p_\gamma + s_\alpha p_\beta \left(\frac{\delta p_\gamma}{\delta s_\alpha} \right), \\
&= p_\beta p_\gamma.
\end{aligned}$$

Substituindo o resultado acima em (C.37), ficamos com

$$\boxed{-2\mathbf{G}s_\alpha + \frac{1}{2}\mathbf{K}\mathbf{d}_{\alpha\beta\gamma}(s_\beta s_\gamma - p_\beta p_\gamma) - \sigma_\alpha = 0.}$$

C.2.2 Para p_α

Precisamos encontrar a derivada

$$\begin{aligned}
\frac{\delta}{\delta p_\alpha} \int d^4x \mathcal{L}_r &= \frac{\delta}{\delta p_\alpha} \int d^4x \left\{ -G \sum_{\alpha=0}^8 [(s_\alpha)^2 + (p_\alpha)^2] \right. \\
&\quad \left. + \frac{K}{6} d_{\alpha\beta\gamma} [s_\alpha s_\beta s_\gamma - 3s_\alpha p_\beta p_\gamma] - s_\alpha \sigma_\alpha - p_\alpha \pi_\alpha \right\} \\
&= -2Gp_\alpha + -\frac{3}{6} K d_{\alpha\beta\gamma} \frac{\delta}{\delta p_\alpha} (s_\alpha p_\beta p_\gamma) - \pi_\alpha
\end{aligned}$$

Calculando separadamente a derivada no segundo termo

$$\begin{aligned}
\frac{\delta}{\delta p_\alpha} (s_\alpha p_\beta p_\gamma) &= \left(\frac{\delta s_\alpha}{\delta p_\alpha} \right) p_\beta p_\gamma + s_\alpha \left(\frac{\delta p_\beta}{\delta p_\alpha} \right) p_\gamma + s_\alpha p_\beta \left(\frac{\delta p_\gamma}{\delta p_\alpha} \right) \\
&= s_\alpha p_\gamma \delta_{\alpha\beta} + s_\alpha p_\beta \delta_{\alpha\gamma} \\
&= s_\beta p_\gamma + s_\gamma p_\beta \\
&= 2s_\beta p_\gamma.
\end{aligned}$$

Então ficamos com

$$\boxed{-2Gp_\alpha - K d_{\alpha\beta\gamma} s_\beta p_\gamma - \pi_\alpha = 0.}$$

C.3 Aproximação de Campo Médio e Flutuações da Inversa do Propagador Efetivo

C.3.1 Parte de campo médio

A parte de campo médio da inversa do propagador efetivo dos férmions é dada por

$$S_{MF}^{-1}(x - x') = \delta^{(4)}(x - x') [-i\mathcal{D} + \hat{m} + \bar{\sigma}_\alpha \lambda_\alpha]. \quad (C.38)$$

Podemos escrevê-la como uma matriz diagonal²

²Por que esta matriz é diagonal?

- Os termos \mathcal{D} e \hat{m} são diagonais por definição;
- Os únicos termos não nulos de $\sigma_\alpha \lambda^\alpha$ são diagonais.

$$\mathcal{S}_{\text{MF}}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathcal{S}_{\text{MF,u}}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{S}_{\text{MF,d}}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{S}_{\text{MF,s}}^{-1} \end{pmatrix}, \quad (\text{C.39})$$

onde cada componente da matriz é

$$\mathcal{S}_{\text{MF,f}}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \delta^{(4)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') [-i\mathcal{D} + \mathbf{m}_f + \bar{\sigma}_f], \quad (\text{C.40})$$

em que $\bar{\sigma}_f$ são os elementos diagonais da matriz $\bar{\sigma}$. Podemos definir a massa efetiva como

$$\mathbf{M}_f = \mathbf{m}_f + \bar{\sigma}_f, \quad (\text{C.41})$$

e reescrevemos a inversa do propagador como

$$\boxed{\mathcal{S}_{\text{MF,f}}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \delta^{(4)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') [-i\mathcal{D} + \mathbf{M}_f]}. \quad (\text{C.42})$$

C.3.2 Parte de flutuações

A parte de flutuações é dada por

$$\delta\mathcal{S}^{-1} = \delta^{(4)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') [\delta\sigma_\alpha \lambda_\alpha + i\gamma_5 \delta\pi_\alpha \lambda_\alpha]. \quad (\text{C.43})$$

Vamos calcular explicitamente os elementos das matrizes $\delta\sigma_\alpha \lambda_\alpha$ e $\delta\pi_\alpha \lambda_\alpha$

Para $\delta\sigma_\alpha$ Como já vimos, apenas consideraremos os termos σ_0 , σ_3 e σ_8 . Assim, teremos

$$\delta\sigma_\alpha \lambda_\alpha = \delta\sigma_0 \lambda_0 + \delta\sigma_3 \lambda_3 + \delta\sigma_8 \lambda_8 = \begin{pmatrix} \delta\sigma_u & 0 & 0 \\ 0 & \delta\sigma_d & 0 \\ 0 & 0 & \delta\sigma_s \end{pmatrix}. \quad (\text{C.44})$$

Para $\delta\pi_\alpha$ Temos que abrir o produto $\delta\pi_\alpha\lambda_\alpha$

$$\begin{aligned}\delta\pi_\alpha\lambda_\alpha &= \delta\pi_0\lambda_0 + \delta\pi_1\lambda_1 + \delta\pi_2\lambda_2 + \delta\pi_3\lambda_3 + \delta\pi_4\lambda_4 + \delta\pi_5\lambda_5 + \delta\pi_6\lambda_6 + \delta\pi_7\lambda_7 + \delta\pi_8\lambda_8 \\ &= \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} \delta\pi_0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta\pi_0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta\pi_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \delta\pi_1 & 0 \\ \delta\pi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -i\delta\pi_2 & 0 \\ i\delta\pi_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} \delta\pi_3 & 0 & 0 \\ 0 & -\delta\pi_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \delta\pi_4 \\ 0 & 0 & 0 \\ \delta\pi_4 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i\delta\pi_5 \\ 0 & 0 & 0 \\ i\delta\pi_5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta\pi_6 \\ 0 & \delta\pi_6 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i\delta\pi_7 \\ 0 & i\delta\pi_7 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \delta\pi_8 & 0 & 0 \\ 0 & \delta\pi_8 & 0 \\ 0 & 0 & -2\delta\pi_8 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

e somando as matrizes

$$\delta\pi_\alpha\lambda_\alpha = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}}\delta\pi_0 + \delta\pi_3 + \frac{1}{\sqrt{3}}\delta\pi_8 & \delta\pi_1 - i\delta\pi_2 & \delta\pi_4 - i\delta\pi_5 \\ \delta\pi_1 + i\delta\pi_2 & \sqrt{\frac{2}{3}}\delta\pi_0 - \delta\pi_3 + \frac{1}{\sqrt{3}}\delta\pi_8 & \delta\pi_6 - i\delta\pi_7 \\ \delta\pi_4 + i\delta\pi_5 & \delta\pi_6 + i\delta\pi_7 & \sqrt{\frac{2}{3}}\delta\pi_0 - \frac{2}{\sqrt{3}}\delta\pi_8 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.45})$$

Associamos os π_α aos mésons físicos

$$\delta\pi_1 \mp i\delta\pi_2 = \sqrt{2}\delta\pi^\pm, \quad (\text{C.46a})$$

$$\delta\pi_4 \mp i\delta\pi_5 = \sqrt{2}\delta K^\pm, \quad (\text{C.46b})$$

$$\delta\pi_6 - i\delta\pi_7 = \sqrt{2}\delta K^0, \quad (\text{C.46c})$$

$$\delta\pi_6 + i\delta\pi_7 = \sqrt{2}\delta \bar{K}^0, \quad (\text{C.46d})$$

e então podemos escrever (C.45) como

$$\delta\pi_\alpha\lambda_\alpha = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}}\delta\pi_0 + \delta\pi_3 + \frac{1}{\sqrt{3}}\delta\pi_8 & \sqrt{2}\delta\pi^+ & \sqrt{2}\delta K^+ \\ \sqrt{2}\delta\pi^- & \sqrt{\frac{2}{3}}\delta\pi_0 - \delta\pi_3 + \frac{1}{\sqrt{3}}\delta\pi_8 & \sqrt{2}\delta K^0 \\ \sqrt{2}\delta K^- & \sqrt{2}\delta \bar{K}^0 & \sqrt{\frac{2}{3}}\delta\pi_0 - \frac{2}{\sqrt{3}}\delta\pi_8 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.47})$$

A parte de flutuações da inversa do propagador é

$$\delta\mathcal{S}^{-1}(\chi - \chi') = \delta^{(4)}(\chi - \chi') \begin{pmatrix} \delta\sigma_u + i\gamma_5 \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\delta\pi_0 + \delta\pi_3 + \frac{1}{\sqrt{3}}\delta\pi_8 \right) & \sqrt{2i\gamma_5}\delta\pi^+ & \sqrt{2i\gamma_5}\delta\mathbf{K}^+ \\ \sqrt{2i\gamma_5}\delta\pi^- & \delta\sigma_d + i\gamma_5 \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\delta\pi_0 - \delta\pi_3 + \frac{1}{\sqrt{3}}\delta\pi_8 \right) & \sqrt{2i\gamma_5}\delta\mathbf{K}^0 \\ \sqrt{2i\gamma_5}\delta\mathbf{K}^- & \sqrt{2i\gamma_5}\delta\mathbf{K}^0 & \delta\sigma_s + i\gamma_5 \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\delta\pi_0 - \frac{2}{\sqrt{3}}\delta\pi_8 \right) \end{pmatrix}. \quad (\text{C.48})$$

C.4 Parte de Campo Médio de $\mathcal{L}_r^{\text{MF}}$

Substituindo (3.32a) e (3.32b) em (3.19b)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_r = & -G \sum_{\alpha=0}^8 [(\bar{s}_\alpha + \delta s_\alpha)(\bar{s}_\alpha + \delta s_\alpha) + \delta p_\alpha](\delta p_\alpha) \\ & + \frac{\mathbf{K}}{6} \mathbf{d}_{\alpha\beta\gamma} [(\bar{s}_\alpha + \delta s_\alpha)(\bar{s}_\beta + \delta s_\beta)(\bar{s}_\gamma + \delta s_\gamma) - 3(\bar{s}_\alpha + \delta s_\alpha)(\delta p_\beta)(\delta p_\gamma)] \\ & - (\bar{\sigma}_\alpha + \delta\sigma_\alpha)(\bar{s}_\alpha + \delta s_\alpha) - (\delta\pi_\alpha)(\delta p_\alpha). \end{aligned}$$

Ao abrirmos os produtos, teremos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_r = & -G \left[\bar{s}_\alpha \bar{s}_\alpha + 2\bar{s}_\alpha \delta s_\alpha + \delta s_\alpha \delta s_\alpha + \delta p_\alpha \delta p_\alpha \right] \\ & + \frac{\mathbf{K}}{6} \mathbf{d}_{\alpha\beta\gamma} \left[\bar{s}_\alpha \bar{s}_\beta \bar{s}_\gamma + \bar{s}_\alpha \bar{s}_\beta \delta s_\gamma + \bar{s}_\alpha \delta s_\beta \bar{s}_\gamma \right. \\ & + \bar{s}_\alpha \delta s_\beta \delta s_\gamma + \delta s_\alpha \bar{s}_\beta \bar{s}_\gamma + \delta s_\alpha \bar{s}_\beta \delta s_\gamma + \delta s_\alpha \delta s_\beta \bar{s}_\gamma \\ & \left. + \delta s_\alpha \delta s_\beta \delta s_\gamma - 3\bar{s}_\alpha \delta p_\beta \delta p_\gamma - 3\delta s_\alpha \delta p_\beta \delta p_\gamma \right] \\ & - \bar{\sigma}_\alpha \bar{s}_\alpha + \bar{\sigma}_\alpha \delta s_\alpha - \delta\sigma_\alpha \bar{s}_\alpha - \delta\sigma_\alpha \delta s_\alpha - \delta\pi_\alpha \delta p_\alpha. \quad (\text{C.49}) \end{aligned}$$

- Campo Médio
- 1ª Ordem
- 2ª Ordem
- 3ª Ordem

Os termos de campo médio são

$$\mathcal{L}_r^{\text{MF}} = -G\bar{s}_\alpha \bar{s}_\alpha + \frac{\mathbf{K}}{6} \mathbf{d}_{\alpha\beta\gamma} \bar{s}_\alpha \bar{s}_\beta \bar{s}_\gamma - \bar{\sigma}_\alpha \bar{s}_\alpha, \quad (\text{C.50})$$

e os termos quadráticos são

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_r^{(2)} = & -G[\delta s_\alpha \delta s_\alpha - \delta p_\alpha \delta p_\alpha] + \frac{\mathbf{K}}{2} \mathbf{d}_{\alpha\beta\gamma} [\bar{s}_\alpha \delta s_\beta \delta s_\gamma - \bar{s}_\alpha \delta p_\beta \delta p_\gamma] \\ & - \delta\sigma_\alpha \delta s_\alpha - \delta\pi_\alpha \delta p_\alpha. \quad (\text{C.51}) \end{aligned}$$

C.5 Mudança de Base

Precisamos reescrever os resultados obtidos na base de sabores. Como já vimos em (3.34), podemos escrever $\sigma_\alpha \lambda_\alpha$ como

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_u & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_d & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_s \end{pmatrix} = \sigma_0 \lambda_0 + \sigma_3 \lambda_3 + \sigma_8 \lambda_8.$$

Abrindo a matriz

$$\sigma = \sigma_0 \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \sigma_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \sigma_8 \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

e então

$$\begin{pmatrix} \sigma_u & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_d & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_0 + \sigma_3 + \frac{\sigma_8}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_0 - \sigma_3 + \frac{\sigma_8}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_0 - \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_8 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.52})$$

Assim, teremos as relações de mudança de base

$$\begin{aligned} \sigma_u &= \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_0 + \sigma_3 + \frac{\sigma_8}{\sqrt{3}}, \\ \sigma_d &= \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_0 - \sigma_3 + \frac{\sigma_8}{\sqrt{3}}, \\ \sigma_s &= \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_0 - \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_8. \end{aligned}$$

Precisamos agora encontrar a mudança de base inversa, ou seja, precisamos escrever σ_0 , σ_3 e σ_8 em função de σ_u , σ_d e σ_s .

Campo σ_0 Para expressarmos σ_0 em termos de σ_f , consideramos a soma

$$\sigma_u + \sigma_d + \sigma_s = \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_0 + \sigma_3 + \frac{\sigma_8}{\sqrt{3}} \right) + \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_0 - \sigma_3 + \frac{\sigma_8}{\sqrt{3}} \right) + \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_0 - \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_8 \right),$$

$$= 2\sqrt{\frac{3}{2}}\sigma_0,$$

$$\Rightarrow \sigma_0 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}(\sigma_u + \sigma_d + \sigma_s).$$

Campo σ_3 Ao realizarmos a subtração $\sigma_u - \sigma_d$, podemos encontrar uma expressão para σ_3 como

$$\begin{aligned}\sigma_u - \sigma_d &= \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_0 + \sigma_3 + \frac{\sigma_8}{\sqrt{3}} \right) - \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_0 - \sigma_3 + \frac{\sigma_8}{\sqrt{3}} \right), \\ &= 2\sigma_3,\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sigma_3 = \frac{1}{2}(\sigma_u - \sigma_d).$$

Campo σ_8 Finalmente, para expressarmos σ_8 em termos de σ_f , consideramos a expressão

$$\begin{aligned}\sigma_u + \sigma_d - 2\sigma_s &= \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_0 + \sigma_3 + \frac{\sigma_8}{\sqrt{3}} \right) + \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_0 - \sigma_3 + \frac{\sigma_8}{\sqrt{3}} \right) - 2\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_0 - \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_8 \right), \\ &= 2\sqrt{3}\sigma_8,\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sigma_8 = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{3}}(\sigma_u + \sigma_d - 2\sigma_s).$$

Assim, teremos seguintes relações para a mudança de base de $\sigma_\alpha \rightarrow \sigma_f$ e $\sigma_f \rightarrow \sigma_\alpha$

$$\sigma_u = \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_0 + \sigma_3 + \frac{\sigma_8}{\sqrt{3}}, \quad (\text{C.53a}) \quad \sigma_0 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}(\sigma_u + \sigma_d + \sigma_s), \quad (\text{C.54a})$$

$$\sigma_d = \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_0 - \sigma_3 + \frac{\sigma_8}{\sqrt{3}}, \quad (\text{C.53b}) \quad \sigma_3 = \frac{1}{2}(\sigma_u - \sigma_d), \quad (\text{C.54b})$$

$$\sigma_s = \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_0 - \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_8, \quad (\text{C.53c}) \quad \sigma_8 = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{3}}(\sigma_u + \sigma_d - 2\sigma_s), \quad (\text{C.54c})$$

Da mesma forma, levando em conta (3.35), podemos escrever a mudança de base de s_α para s_f como

$$s_u = \sqrt{\frac{2}{3}}s_0 + s_3 + \frac{s_8}{\sqrt{3}}, \quad (\text{C.55a}) \quad s_0 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}(s_u + s_d + s_s), \quad (\text{C.56a})$$

$$s_d = \sqrt{\frac{2}{3}}s_0 - s_3 + \frac{s_8}{\sqrt{3}}, \quad (\text{C.55b}) \quad s_3 = \frac{1}{2}(s_u - s_d), \quad (\text{C.56b})$$

$$s_s = \sqrt{\frac{2}{3}}s_0 - \frac{2}{\sqrt{3}}s_8, \quad (\text{C.55c}) \quad s_8 = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{3}}(s_u + s_d - 2s_s). \quad (\text{C.56c})$$

Na ação bosonizada e nas condições da SPA, temos termos do tipo

- $\sigma_\alpha s_\alpha$,
- $s_\alpha s_\beta$,
- $d_{\alpha\beta\gamma} s_\alpha s_\beta s_\gamma$.

A seguir iremos mostrar como estes produtos ficam separadamente para $\alpha, \beta, \gamma = 0, 3, 8$

Produto $\sigma_\alpha s_\alpha$ Utilizando as relações (C.54) e (C.56), após algumas manipulações algébricas obtemos

$$\sigma_0 s_0 = \frac{1}{6}(\sigma_u s_u + \sigma_d s_d + \sigma_s s_s + \sigma_u s_d + \sigma_d s_u + \sigma_u s_s + \sigma_s s_u + \sigma_d s_s + \sigma_s s_d), \quad (\text{C.57a})$$

$$\sigma_3 s_3 = \frac{1}{4}(\sigma_u s_u + \sigma_d s_d - \sigma_u s_d - \sigma_d s_u), \quad (\text{C.57b})$$

$$\sigma_8 s_8 = \frac{1}{12}(\sigma_u s_u + \sigma_d s_d + 4\sigma_s s_s + \sigma_u s_d + \sigma_d s_u - 2\sigma_u s_s - 2\sigma_s s_u - 2\sigma_d s_s - 2\sigma_s s_d). \quad (\text{C.57c})$$

Produto $s_\alpha s_\beta$ Considerando (C.56), obtemos

$$s_0 s_0 = \frac{1}{6}(s_u s_u + s_d s_d + s_s s_s + 2s_u s_d + 2s_u s_s + 2s_d s_s), \quad (\text{C.58a})$$

$$s_3 s_3 = \frac{1}{4}(s_u s_u + s_d s_d - 2s_u s_d), \quad (\text{C.58b})$$

$$s_8 s_8 = \frac{1}{12}(s_u s_u + s_d s_d + 4s_s s_s + 2s_u s_d - 4s_u s_s - 4s_d s_s), \quad (\text{C.58c})$$

e para os termos cruzados

$$s_0 s_3 = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{3}}(s_u s_u - s_d s_d + s_u s_s - s_d s_s), \quad (\text{C.59a})$$

$$s_0 s_8 = \frac{\sqrt{2}}{12} (s_u s_u + s_d s_d - 2s_s s_s + 2s_u s_d - s_u s_s - s_d s_s), \quad (\text{C.59b})$$

$$s_3 s_8 = \frac{1}{4\sqrt{3}} (s_u s_u - s_d s_d - 2s_u s_s + 2s_d s_s). \quad (\text{C.59c})$$

Produto $d_{\alpha\beta\gamma} s_\alpha s_\beta s_\gamma$ Por último, considerando as equações (C.56) e as definições das constantes de estrutura simétrica, podemos encontrar

$$d_{000} s_0 s_0 s_0 = \frac{1}{18} (s_u s_u s_u + s_d s_d s_d + s_s s_s s_s + 3s_u s_u s_d + 3s_u s_u s_s + 3s_u s_d s_d + 3s_d s_d s_s + 3s_u s_s s_s + 3s_d s_s s_s + 6s_u s_d s_s), \quad (\text{C.60a})$$

$$d_{003} s_0 s_0 s_3 = 0, \quad (\text{C.60b})$$

$$d_{008} s_0 s_0 s_8 = 0, \quad (\text{C.60c})$$

$$d_{033} s_0 s_3 s_3 = -\frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} (s_u s_u s_u + s_d s_d s_d - s_u s_u s_d + s_u s_u s_s - s_u s_d s_d + s_d s_d s_s - 2s_u s_d s_s), \quad (\text{C.60d})$$

$$d_{088} s_0 s_8 s_8 = -\frac{1}{6 \cdot 12} (s_u s_u s_u + s_d s_d s_d + 4s_s s_s s_s + 3s_u s_u s_d - 3s_u s_u s_s + 3s_u s_d s_d - 3s_d s_d s_s - 6s_u s_d s_s), \quad (\text{C.60e})$$

$$d_{038} s_0 s_3 s_8 = 0, \quad (\text{C.60f})$$

$$d_{333} s_3 s_3 s_3 = 0, \quad (\text{C.60g})$$

$$d_{338} s_3 s_3 s_8 = \frac{1}{8 \cdot 3} (s_u s_u s_u + s_d s_d s_d - s_u s_u s_d - 2s_u s_u s_s - s_u s_d s_d - 2s_d s_d s_s + 4s_u s_d s_s), \quad (\text{C.60h})$$

$$d_{388} s_3 s_8 s_8 = 0, \quad (\text{C.60i})$$

$$d_{888} s_8 s_8 s_8 = -\frac{1}{6 \cdot 12} (s_u s_u s_u + s_d s_d s_d - 8s_s s_s s_s + 3s_u s_u s_d - 6s_u s_u s_s + 3s_u s_d s_d - 6s_d s_d s_s + 12s_u s_s s_s + 12s_d s_s s_s - 12s_u s_d s_s) \quad (\text{C.60j})$$

Agora que encontramos cada termo dos produtos, precisamos encontrar as suas somas. Na ação bosonizada de campo médio (3.46) temos somas do tipo

$$\bar{s}_\alpha \bar{s}_\alpha, \quad (\text{C.61})$$

$$\bar{s}_\alpha \bar{\sigma}_\alpha, \quad (\text{C.62})$$

$$d_{\alpha\beta\gamma} \bar{s}_\alpha \bar{s}_\beta \bar{s}_\gamma, \quad (\text{C.63})$$

e na condição da SPA em campo médio (3.47a), temos a soma

$$\mathbf{d}_{\alpha\beta\gamma}\bar{s}_\beta\bar{s}_\gamma. \quad (\text{C.64})$$

Precisamos reescrever estas somas na nova base. O cálculo é simples para (C.61)-(C.63), mas não podemos calcular (C.64) da mesma forma, já que α não está somado. Consideramos os casos mais simples primeiro agora, e mais adiante consideraremos (C.64) mais adiante. Para (C.62), teremos

$$\bar{\sigma}_\alpha\bar{s}_\alpha = \bar{\sigma}_0\bar{s}_0 + \bar{\sigma}_3\bar{s}_3 + \bar{\sigma}_8\bar{s}_8, \quad (\text{C.65})$$

e substituindo (C.57)

$$\bar{\sigma}_0\bar{s}_0 + \bar{\sigma}_3\bar{s}_3 + \bar{\sigma}_8\bar{s}_8 = \frac{1}{2}(\bar{\sigma}_u\bar{s}_u + \bar{\sigma}_d\bar{s}_d + \bar{\sigma}_s\bar{s}_s). \quad (\text{C.66})$$

Da mesma forma que fizemos para (C.66), substituindo (C.58), teremos

$$\bar{s}_0\bar{s}_0 + \bar{s}_3\bar{s}_3 + \bar{s}_8\bar{s}_8 = \frac{1}{2}(\bar{s}_u\bar{s}_u + \bar{s}_d\bar{s}_d + \bar{s}_s\bar{s}_s). \quad (\text{C.67})$$

Por fim, queremos ver como é a soma $\mathbf{d}_{\alpha\beta\gamma}\bar{s}_\alpha\bar{s}_\beta\bar{s}_\gamma$

$$\mathbf{d}_{\alpha\beta\gamma}\bar{s}_\alpha\bar{s}_\beta\bar{s}_\gamma = \mathbf{d}_{000}\bar{s}_0\bar{s}_0\bar{s}_0 + \mathbf{d}_{888}\bar{s}_8\bar{s}_8\bar{s}_8 + \mathbf{d}_{033}\bar{s}_0\bar{s}_3\bar{s}_3 + \mathbf{d}_{088}\bar{s}_0\bar{s}_8\bar{s}_8 + \mathbf{d}_{338}\bar{s}_3\bar{s}_3\bar{s}_8, \quad (\text{C.68})$$

e, substituindo (C.60a), (C.60d), (C.60e), (C.60h) e (C.60j)

$$\mathbf{d}_{\alpha\beta\gamma}\bar{s}_\alpha\bar{s}_\beta\bar{s}_\gamma = \frac{3}{2}\bar{s}_u\bar{s}_d\bar{s}_s. \quad (\text{C.69})$$

Com estas expressões podemos encontrar a mudança de base da ação bosonizada de campo médio.

C.5.1 Mudança de base da ação bosonizada de campo médio

Finalmente podemos reescrever a ação bosonizada de campo médio (3.46) na base de sabores. Substituindo (C.66), (C.67) e (C.69) em (3.46)

$$S_{\text{MF}}^{\text{bos}} = -\text{Tr}[\ln \mathcal{S}_{\text{MF}}^{-1}] - \int d^4x \left[G \left(\frac{1}{2} (\bar{\sigma}_u \bar{s}_u + \bar{\sigma}_d \bar{s}_d + \bar{\sigma}_s \bar{s}_s) \right) - \frac{K}{6} \left(\frac{3}{2} \bar{s}_u \bar{s}_d \bar{s}_s \right) + G \left(\frac{1}{2} (\bar{s}_u \bar{s}_u + \bar{s}_d \bar{s}_d + \bar{s}_s \bar{s}_s) \right) \right],$$

e então

$$S_{\text{MF}}^{\text{bos}} = -\text{Tr}[\ln \mathcal{S}_{\text{MF}}^{-1}] - \int d^4x \frac{1}{2} \left[\sum_{f,g,h} (G \bar{s}_f \bar{s}_f + \bar{\sigma}_f \bar{s}_f) - \frac{3}{6} K \bar{s}_u \bar{s}_d \bar{s}_s \right]. \quad (\text{C.70})$$

Podemos reescrever a expressão acima como

$$S_{\text{MF}}^{\text{bos}} = -\text{Tr}[\ln \mathcal{S}_{\text{MF}}^{-1}] - \int d^4x \frac{1}{2} \sum_{f,g,h} \left[G \bar{s}_f \bar{s}_f + \bar{\sigma}_f \bar{s}_f - \frac{K}{12} \varepsilon_{fgh} \varepsilon_{fgh} \bar{s}_f \bar{s}_g \bar{s}_h \right], \quad (\text{C.71})$$

e integrando o segundo termo no volume

$$\boxed{S_{\text{MF}}^{\text{bos}} = -\text{Tr}[\ln \mathcal{S}_{\text{MF}}^{-1}] - \frac{V^{(4)}}{2} \sum_{f,g,h} \left[G \bar{s}_f \bar{s}_f + \bar{\sigma}_f \bar{s}_f - \frac{K}{12} \varepsilon_{fgh} \varepsilon_{fgh} \bar{s}_f \bar{s}_g \bar{s}_h \right]}. \quad (\text{C.72})$$

C.5.2 Mudança de base da condição (3.47a) da SPA

Precisamos reescrever a equação (3.47a) na base de sabores. Reescrevemos explicitamente estas equações e isolamos $\bar{\sigma}_\alpha$

$$\bar{\sigma}_0 = \frac{K}{2} d_{0\beta\gamma} \bar{s}_\beta \bar{s}_\gamma - 2G \bar{s}_0, \quad (\text{C.73a})$$

$$\bar{\sigma}_3 = \frac{K}{2} d_{3\beta\gamma} \bar{s}_\beta \bar{s}_\gamma - 2G \bar{s}_3, \quad (\text{C.73b})$$

$$\bar{\sigma}_8 = \frac{K}{2} d_{8\beta\gamma} \bar{s}_\beta \bar{s}_\gamma - 2G \bar{s}_8. \quad (\text{C.73c})$$

Podemos substituir estas expressões nas equações (C.53) e teremos

$$\bar{\sigma}_u - \frac{K}{2} \left(\sqrt{\frac{2}{3}} d_{0\beta\gamma} + d_{3\beta\gamma} + \frac{d_{8\beta\gamma}}{\sqrt{3}} \right) \bar{s}_\beta \bar{s}_\gamma + 2G\bar{s}_u = 0 \quad (\text{C.74a})$$

$$\bar{\sigma}_d - \frac{K}{2} \left(\sqrt{\frac{2}{3}} d_{0\beta\gamma} - d_{3\beta\gamma} + \frac{d_{8\beta\gamma}}{\sqrt{3}} \right) \bar{s}_\beta \bar{s}_\gamma + 2G\bar{s}_d = 0 \quad (\text{C.74b})$$

$$\bar{\sigma}_s - \frac{K}{2} \left(\sqrt{\frac{2}{3}} d_{0\beta\gamma} - \frac{2}{\sqrt{3}} d_{8\beta\gamma} \right) \bar{s}_\beta \bar{s}_\gamma + 2G\bar{s}_s = 0 \quad (\text{C.74c})$$

Como já encontramos a mudança de base de $\bar{s}_\beta \bar{s}_\gamma$, seguiremos o cálculo para cada sabor separadamente

Para $\bar{\sigma}_u$ Definimos

$$\mathbf{u}_{\beta\gamma} = \sqrt{\frac{2}{3}} d_{0\beta\gamma} + d_{3\beta\gamma} + \frac{1}{\sqrt{3}} d_{8\beta\gamma}, \quad (\text{C.75})$$

então podemos escrever (C.74a) como

$$\bar{\sigma}_u - \frac{K}{2} \mathbf{u}_{\beta\gamma} \bar{s}_\beta \bar{s}_\gamma + 2G\bar{s}_u = 0. \quad (\text{C.76})$$

Como cada $\mathbf{u}_{\beta\gamma}$ é

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{00} &= \frac{2}{3}, & \mathbf{u}_{33} &= 0, & \mathbf{u}_{88} &= -\frac{2}{3}, \\ \mathbf{u}_{30} &= -\frac{1}{\sqrt{6}}, & \mathbf{u}_{80} &= -\frac{\sqrt{2}}{6}, & \mathbf{u}_{38} &= \frac{1}{\sqrt{3}}, \end{aligned}$$

o segundo termo de (C.74a) fica

$$\mathbf{u}_{\beta\gamma} = \frac{2}{3} \bar{s}_0 \bar{s}_0 + 0 \bar{s}_3 \bar{s}_3 - \frac{2}{3} \bar{s}_8 \bar{s}_8 - \frac{2}{\sqrt{6}} \bar{s}_0 \bar{s}_3 - \frac{2\sqrt{2}}{6} \bar{s}_0 \bar{s}_8 + \frac{2}{\sqrt{3}} \bar{s}_3 \bar{s}_8. \quad (\text{C.77})$$

Substituindo (C.58) e (C.59),

$$\mathbf{u}_{\beta\gamma} \bar{s}_\beta \bar{s}_\gamma = \bar{s}_d \bar{s}_s, \quad (\text{C.78})$$

finalmente, podemos escrever (C.74a) como

$$\bar{\sigma}_u - \frac{K}{2} \bar{s}_d \bar{s}_s + 2G \bar{s}_u = 0.$$

Para $\bar{\sigma}_d$ Definimos

$$D_{\beta\gamma} = \sqrt{\frac{2}{3}} d_{0\beta\gamma} - d_{3\beta\gamma} + \frac{1}{\sqrt{3}} d_{8\beta\gamma}, \quad (\text{C.79})$$

então podemos escrever (C.74b) como

$$\bar{\sigma}_d - \frac{K}{2} D_{\beta\gamma} \bar{s}_\beta \bar{s}_\gamma + 2G \bar{s}_d = 0.$$

Cada $D_{\beta\gamma}$ é

$$\begin{aligned} D_{00} &= \frac{2}{3}, & D_{33} &= 0, & D_{88} &= -\frac{2}{3}, \\ D_{30} &= \frac{1}{\sqrt{6}}, & D_{80} &= -\frac{\sqrt{2}}{6}, & D_{38} &= -\frac{1}{\sqrt{3}}, \end{aligned}$$

e o segundo termo de (C.74b) fica

$$D_{\beta\gamma} = \frac{2}{3} \bar{s}_0 \bar{s}_0 - \frac{2}{3} \bar{s}_8 \bar{s}_8 + \frac{2}{\sqrt{6}} \bar{s}_0 \bar{s}_3 - \frac{2\sqrt{2}}{6} \bar{s}_0 \bar{s}_8 - \frac{2}{\sqrt{3}} \bar{s}_3 \bar{s}_8.$$

Substituindo (C.58) e (C.59),

$$D_{\beta\gamma} \bar{s}_\beta \bar{s}_\gamma = \bar{s}_u \bar{s}_s, \quad (\text{C.80})$$

e podemos escrever (C.74b) como

$$\bar{\sigma}_d - \frac{K}{2} \bar{s}_u \bar{s}_s + 2G \bar{s}_d = 0.$$

Para $\bar{\sigma}_s$ Definimos

$$S_{\beta\gamma} = \sqrt{\frac{2}{3}}d_{0\beta\gamma} - \frac{2}{\sqrt{3}}d_{8\beta\gamma}, \quad (\text{C.81})$$

então podemos escrever (C.74c) como

$$\bar{\sigma}_s - \frac{K}{2}S_{\beta\gamma}\bar{s}_\beta\bar{s}_\gamma + 2G\bar{s}_s = 0.$$

Cada $S_{\beta\gamma}$ é

$$\begin{aligned} S_{00} &= \frac{2}{3}, & S_{33} &= -1, & S_{88} &= \frac{1}{3}, \\ S_{30} &= 0, & S_{80} &= \frac{\sqrt{2}}{3}, & S_{38} &= 0, \end{aligned}$$

e o segundo termo de (C.74c) fica

$$S_{\beta\gamma} = \frac{2}{3}\bar{s}_0\bar{s}_0 - \bar{s}_3\bar{s}_3 + \frac{1}{3}\bar{s}_8\bar{s}_8 + \frac{2\sqrt{2}}{3}\bar{s}_0\bar{s}_8.$$

Substituindo (C.58) e (C.59)

$$S_{\beta\gamma}\bar{s}_\beta\bar{s}_\gamma = \bar{s}_u\bar{s}_d, \quad (\text{C.82})$$

podemos escrever (C.74c) como

$$\bar{\sigma}_s - \frac{K}{2}\bar{s}_u\bar{s}_d + 2G\bar{s}_s = 0.$$

As condições impostas aos campos pela SPA (na base de sabores) são

$$\bar{\sigma}_u - \frac{K}{2}\bar{s}_d\bar{s}_s + 2G\bar{s}_u = 0, \quad (\text{C.83a})$$

$$\bar{\sigma}_d - \frac{K}{2} \bar{s}_u \bar{s}_s + 2G\bar{s}_d = 0, \quad (\text{C.83b})$$

$$\bar{\sigma}_s - \frac{K}{2} \bar{s}_u \bar{s}_d + 2G\bar{s}_s = 0, \quad (\text{C.83c})$$

ou, de forma compacta

$$\boxed{\bar{\sigma}_f + 2G\bar{s}_f - \frac{K}{4} \varepsilon_{fgh} \varepsilon_{fgh} \bar{s}_g \bar{s}_h = 0}, \quad (\text{C.84})$$

com $f, g, h = u, d, s$, onde ε_{fgh} são os tensores de Levi-Civita.

C.6 Derivadas da equação de gap

Segundo termo O segundo termo de (3.52) é

$$\frac{V^{(4)}}{2} \frac{\delta}{\delta \bar{\sigma}_f} \left[G\bar{s}_f \bar{s}_f + \bar{\sigma}_f \bar{s}_f - \frac{K}{12} \varepsilon_{fgh} \varepsilon_{fgh} \bar{s}_f \bar{s}_g \bar{s}_h \right] = \frac{V^{(4)}}{2} \left[G \frac{\delta}{\delta \bar{\sigma}_f} (\bar{s}_f \bar{s}_f) + \frac{\delta}{\delta \bar{\sigma}_f} (\bar{\sigma}_f \bar{s}_f) - \frac{K}{12} \varepsilon_{fgh} \varepsilon_{fgh} \frac{\delta}{\delta \bar{\sigma}_f} (\bar{s}_f \bar{s}_g \bar{s}_h) \right].$$

Aplicando a regra da cadeia

$$= \frac{V^{(4)}}{2} \left[\frac{\delta}{\delta \bar{\sigma}_f} (\bar{\sigma}_f \bar{s}_f) + \frac{\delta \bar{s}_f}{\delta \bar{\sigma}_f} \frac{\partial}{\partial \bar{s}_f} (\bar{\sigma}_f \bar{s}_f) + G \frac{\delta \bar{s}_f}{\delta \bar{\sigma}_f} \frac{\partial}{\partial \bar{s}_f} (\bar{s}_f \bar{s}_f) - \frac{K}{12} \varepsilon_{fgh} \varepsilon_{fgh} \frac{\delta \bar{s}_f}{\delta \bar{\sigma}_f} \frac{\partial}{\partial \bar{s}_f} (\bar{s}_f \bar{s}_g \bar{s}_h) \right],$$

e então

$$\frac{V^{(4)}}{2} \frac{\delta}{\delta \bar{\sigma}_f} \left[G\bar{s}_f \bar{s}_f + \bar{\sigma}_f \bar{s}_f - \frac{K}{12} \varepsilon_{fgh} \varepsilon_{fgh} \bar{s}_f \bar{s}_g \bar{s}_h \right] = \frac{V^{(4)}}{2} \left\{ \bar{s}_f + \frac{\delta \bar{s}_f}{\delta \bar{\sigma}_f} \left[\bar{\sigma}_f + 2G\bar{s}_f - \frac{K}{4} \varepsilon_{fgh} \varepsilon_{fgh} \bar{s}_g \bar{s}_h \right] \right\},$$

em que o segundo termo é igual a zero devido à condição (3.50) da SPA em campo médio. Assim, o segundo termo da derivada fica

$$\boxed{\frac{V^{(4)}}{2} \frac{\delta}{\delta \bar{\sigma}_f} \left[G\bar{s}_f \bar{s}_f + \bar{\sigma}_f \bar{s}_f - \frac{K}{12} \varepsilon_{fgh} \varepsilon_{fgh} \bar{s}_f \bar{s}_g \bar{s}_h \right] = \frac{V^{(4)}}{2} \bar{s}_f}. \quad (\text{C.85})$$

Primeiro Termo Antes de prosseguirmos com a derivação do primeiro termo, precisamos calcular o traço de sabor e de cor do mesmo

$$\text{Tr}[\ln \mathcal{S}_{MF}^{-1}] = N_c \sum_f \text{tr}_D \int \frac{d^4x}{(2\pi)^4} \ln(\mathcal{S}_{MF,f}^{-1}). \quad (\text{C.86})$$

Pela expressão (3.38), $\mathcal{S}_{MF,f}^{-1}$ é definida como

$$\mathcal{S}_{MF,f}^{-1} = [-i\not{D}_f + \mathbf{m}_f + \bar{\sigma}_f].$$

Definindo a massa efetiva como

$$M_f = \mathbf{m}_f + \bar{\sigma}_f, \quad (\text{C.87})$$

ficamos com

$$\mathcal{S}_{MF,f}^{-1} = -i\not{D}_f + M_f. \quad (\text{C.88})$$

Assim, podemos reescrever (C.86) como

$$\text{Tr}[\ln \mathcal{S}_{MF}^{-1}] = N_c \sum_f \text{tr}_D \int \frac{d^4x}{(2\pi)^4} \ln(-i\not{D}_f + M_f), \quad (\text{C.89})$$

e ao derivarmos (C.89) em relação à $\bar{\sigma}_f$, obteremos

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta \bar{\sigma}_f} [\text{Tr} \ln \mathcal{S}_{MF,f}^{-1}] &= \frac{\delta}{\delta \bar{\sigma}_f} \left\{ N_c \sum_f \text{tr}_D \int \frac{d^4x}{(2\pi)^4} \ln(-i\not{D}_f + M_f) \right\}, \\ &= N_c \text{tr}_D \int \frac{d^4x}{(2\pi)^4} \frac{\delta}{\delta \bar{\sigma}_f} [\ln(-i\not{D}_f + M_f)]. \end{aligned}$$

Aplicando a regra da cadeia

$$\frac{\delta}{\delta \bar{\sigma}_f} [\text{Tr} \ln \mathcal{S}_{MF,f}^{-1}] = N_c \text{tr}_D \int \frac{d^4x}{(2\pi)^4} \frac{\delta M_f}{\delta \bar{\sigma}_f} \frac{\delta}{\delta M_f} [\ln(-i\not{D}_f + M_f)],$$

estas derivadas ficam

- $\frac{\delta M_f}{\delta \bar{\sigma}_f} = \frac{\delta}{\delta \bar{\sigma}_f} (m_f + \bar{\sigma}_f) = 1;$
- $\frac{\delta}{\delta M_f} \ln(-i\not{D}_f + M_f) = \frac{1}{-i\not{D}_f + M_f} \frac{\delta}{\delta M_f} (-i\not{D}_f + M_f) = \frac{1}{-i\not{D}_f + M_f},$

e a derivada do primeiro termo fica

$$\frac{\delta}{\delta \bar{\sigma}_f} [\text{Tr} \ln \mathcal{S}_{\text{MF},f}^{-1}] = N_c \int \frac{d^4x}{(2\pi)^4} \text{tr}_D \left[\frac{1}{-i\not{D}_f + M_f} \right]. \quad (\text{C.90})$$

Ao definirmos o propagador efetivo dos férmions como

$$\mathcal{S}_{\text{MF}}^f = \frac{1}{-i\not{D}_f + M_f}, \quad (\text{C.91})$$

podemos reescrever (C.90) como

$$\boxed{\frac{\delta}{\delta \bar{\sigma}_f} [\text{Tr} \ln \mathcal{S}_{\text{MF},f}^{-1}] = N_c \int \frac{d^4x}{(2\pi)^4} \text{tr}_D \mathcal{S}_{\text{MF}}^f.}$$

Por fim, podemos escrever a derivada que queríamos calcular como

$$\frac{\delta \mathcal{S}_{\text{MF}}^{\text{bos}}}{\delta \bar{\sigma}_f} = -\frac{V^{(4)}}{2} \bar{s}_f - N_c \int \frac{d^4x}{(2\pi)^4} \text{tr}_D \mathcal{S}_{\text{MF}}^f = 0. \quad (\text{C.92})$$

C.7 Setor escalar de $\mathcal{S}_{\text{quad}}^1$

Considerando (C.39), podemos escrever \mathcal{S}_{MF} como

$$\mathcal{S}_{\text{MF}} = \begin{pmatrix} \mathcal{S}_{\text{MF}}^u & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{S}_{\text{MF}}^d & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{S}_{\text{MF}}^s \end{pmatrix}, \quad (\text{C.93})$$

e então, substituindo (C.44) e (C.93) no primeiro termo de (3.62) teremos

$$S_1^S = -\frac{1}{2} \text{Tr} \left[\begin{pmatrix} \mathcal{S}_{MF}^u \delta\sigma_u \mathcal{S}_{MF}^u \delta\sigma_u & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{S}_{MF}^d \delta\sigma_d \mathcal{S}_{MF}^d \delta\sigma_d & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{S}_{MF}^s \delta\sigma_s \mathcal{S}_{MF}^s \delta\sigma_s \end{pmatrix} \right].$$

Efetuando o traço de sabor e de cor

$$S_1^S = -\frac{1}{2} \int d^4x d^4x' \sum_{f=u,d,s} \delta\sigma_f(x') \{ N_c \text{tr} [\mathcal{S}_{MF}^f(x-x') \mathcal{S}_{MF}^f(x'-x)] \} \delta\sigma_f(x). \quad (\text{C.94})$$

Definimos o polarizador do σ como

$$J_\sigma(x, x') = N_c \text{tr} [\mathcal{S}_{MF}^f(x-x') \mathcal{S}_{MF}^f(x'-x)], \quad (\text{C.95})$$

então a expressão (C.94) fica

$$S_1^S = -\frac{1}{2} \int d^4x d^4x' \sum_{f=u,d,s} \delta\sigma_f(x') J_\sigma(x, x') \delta\sigma_f(x). \quad (\text{C.96})$$

O complexo conjugado de $\delta\sigma_f$ é ele mesmo

$$\delta\sigma_f(x) = \delta\sigma_f^*(x),$$

então

$$S_1^S = -\frac{1}{2} \int d^4x d^4x' \sum_{f=u,d,s} \delta\sigma_f^*(x') J_\sigma(x, x') \delta\sigma_f(x). \quad (\text{C.97})$$

C.8 Setor pseudoescalar de S_{quad}^1

O termo pseudoescalar de (3.62) é

$$S_1^P = -\frac{1}{2} \text{Tr} \left[(\mathcal{S}_{MF} i\gamma_5 \delta\pi_\alpha \lambda_\alpha)^2 \right], \quad (\text{C.98})$$

e considerando (C.47), o produto das matrizes dentro do traço é

$$(\mathcal{S}_{\text{MF}} i\gamma_5 \delta\pi_\alpha \lambda_\alpha)^2 = \begin{pmatrix} \mathcal{S}_{\text{MF}}^u i\gamma_5 \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \delta\pi_0 + \delta\pi_3 + \frac{1}{\sqrt{3}} \delta\pi_8 \right) & \mathcal{S}_{\text{MF}}^u i\gamma_5 \sqrt{2} \delta\pi^+ & \mathcal{S}_{\text{MF}}^u i\gamma_5 \sqrt{2} \delta K^+ \\ \mathcal{S}_{\text{MF}}^d i\gamma_5 \sqrt{2} \delta\pi^- & \mathcal{S}_{\text{MF}}^d i\gamma_5 \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \delta\pi_0 - \delta\pi_3 + \frac{1}{\sqrt{3}} \delta\pi_8 \right) & \mathcal{S}_{\text{MF}}^d i\gamma_5 \sqrt{2} \delta K^0 \\ \mathcal{S}_{\text{MF}}^s i\gamma_5 \sqrt{2} \delta K^- & \mathcal{S}_{\text{MF}}^s i\gamma_5 \sqrt{2} \delta \bar{K}^0 & \mathcal{S}_{\text{MF}}^s i\gamma_5 \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \delta\pi_0 - \frac{2}{\sqrt{3}} \delta\pi_8 \right) \end{pmatrix}^2. \quad (\text{C.99})$$

Podemos escrever o quadrado de uma matriz 3×3 como

$$\left[\begin{pmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & I \end{pmatrix} \right]^2 = \begin{pmatrix} AA + BD + CG & AB + BE + DH & AC + BF + CI \\ DA + ED + FG & DB + EE + FH & DC + EF + FI \\ GA + HD + IG & GB + HE + IH & GC + HF + II \end{pmatrix}, \quad (\text{C.100})$$

Assim, cada termo da diagonal matriz (C.99) é

$$A = \left[\mathcal{S}_{\text{MF}}^u i\gamma_5 \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \delta\pi_0 + \delta\pi_3 + \frac{1}{\sqrt{3}} \delta\pi_8 \right) \right]^2 + \mathcal{S}_{\text{MF}}^u i\gamma_5 \sqrt{2} \delta\pi^+ \mathcal{S}_{\text{MF}}^d i\gamma_5 \sqrt{2} \delta\pi^- + \mathcal{S}_{\text{MF}}^u i\gamma_5 \sqrt{2} \delta K^+ \mathcal{S}_{\text{MF}}^s i\gamma_5 \sqrt{2} \delta K^-,$$

$$E = \mathcal{S}_{\text{MF}}^d i\gamma_5 \sqrt{2} \delta\pi^- \mathcal{S}_{\text{MF}}^u i\gamma_5 \sqrt{2} \delta\pi^+ + \left[\mathcal{S}_{\text{MF}}^d i\gamma_5 \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \delta\pi_0 - \delta\pi_3 + \frac{1}{\sqrt{3}} \delta\pi_8 \right) \right]^2 + \mathcal{S}_{\text{MF}}^d i\gamma_5 \sqrt{2} \delta K^0 \mathcal{S}_{\text{MF}}^s i\gamma_5 \sqrt{2} \delta \bar{K}^0,$$

$$I = \mathcal{S}_{\text{MF}}^s i\gamma_5 \sqrt{2} \delta K^- \mathcal{S}_{\text{MF}}^u i\gamma_5 \sqrt{2} \delta K^+ + \mathcal{S}_{\text{MF}}^s i\gamma_5 \sqrt{2} \delta \bar{K}^0 \mathcal{S}_{\text{MF}}^d i\gamma_5 \sqrt{2} \delta K^0 + \left[\mathcal{S}_{\text{MF}}^s i\gamma_5 \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \delta\pi_0 - \frac{2}{\sqrt{3}} \delta\pi_8 \right) \right]^2.$$

Como queremos calcular um traço, apenas os elementos da diagonal principal nos interessam. Vamos separar essa matriz em matrizes diagonais para os pares de mésons K^0/\bar{K}^0 , K^+/K^- , π^+/π^- e para $\pi^0/\eta/\eta'$

$$\mathcal{M}_{\pi^0\eta\eta'} = \begin{pmatrix} \left[\mathcal{S}_{\text{MF}}^u i\gamma_5 \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \delta\pi_0 + \delta\pi_3 + \frac{1}{\sqrt{3}} \delta\pi_8 \right) \right]^2 & 0 & 0 \\ 0 & \left[\mathcal{S}_{\text{MF}}^d i\gamma_5 \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \delta\pi_0 - \delta\pi_3 + \frac{1}{\sqrt{3}} \delta\pi_8 \right) \right]^2 & 0 \\ 0 & 0 & \left[\mathcal{S}_{\text{MF}}^s i\gamma_5 \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \delta\pi_0 - \frac{2}{\sqrt{3}} \delta\pi_8 \right) \right]^2 \end{pmatrix}, \quad (\text{C.101})$$

$$M_{\pi^\pm} = \begin{pmatrix} 2i^2 \mathcal{S}_{MF}^u \gamma_5 \delta\pi^+ \mathcal{S}_{MF}^d \gamma_5 \delta\pi^- & 0 & 0 \\ 0 & 2i^2 \mathcal{S}_{MF}^d \gamma_5 \delta\pi^- \mathcal{S}_{MF}^u \gamma_5 \delta\pi^+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{C.102})$$

$$M_{K^\pm} = \begin{pmatrix} 2i^2 \mathcal{S}_{MF}^u \gamma_5 \delta K^+ \mathcal{S}_{MF}^s \gamma_5 \delta K^- & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2i^2 \mathcal{S}_{MF}^s \gamma_5 \delta K^- \mathcal{S}_{MF}^u \gamma_5 \delta K^+ \end{pmatrix}, \quad (\text{C.103})$$

$$M_{K^0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2i^2 \mathcal{S}_{MF}^d \gamma_5 \delta K^0 \mathcal{S}_{MF}^s \gamma_5 \delta \bar{K}^0 & 0 \\ 0 & 0 & 2i^2 \mathcal{S}_{MF}^s \gamma_5 \delta \bar{K}^0 \mathcal{S}_{MF}^d \gamma_5 \delta K^0 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.104})$$

Podemos agora encontrar os polarizadores para os mésons pseudoescalares

C.8.1 Mésons carregados e Káons neutros

Mésons π^+ e π^-

O termo que corresponde aos píons carregados é

$$S_1^{\pi^\pm} = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\begin{pmatrix} -2\mathcal{S}_{MF}^u \gamma_5 \delta\pi^+ \mathcal{S}_{MF}^d \gamma_5 \delta\pi^- & 0 & 0 \\ 0 & -2\mathcal{S}_{MF}^d \gamma_5 \delta\pi^- \mathcal{S}_{MF}^u \gamma_5 \delta\pi^+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right]. \quad (\text{C.105})$$

Pela expressão (C.46a), temos que

$$\delta\pi_1 \mp i\delta\pi_2 = \sqrt{2}\delta\pi^\pm,$$

então podemos ver que

$$(\delta\pi^\pm)^* = \delta\pi^\mp. \quad (\text{C.106})$$

Substituímos isso na expressão (C.105)

$$S_1^{\pi^\pm} = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\begin{pmatrix} -2\mathcal{S}_{MF}^u \gamma_5 (\delta\pi^-)^* \mathcal{S}_{MF}^d \gamma_5 \delta\pi^- & 0 & 0 \\ 0 & -2\mathcal{S}_{MF}^d \gamma_5 (\delta\pi^+)^* \mathcal{S}_{MF}^u \gamma_5 \delta\pi^+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right], \quad (\text{C.107})$$

e podemos separar as matrizes do π^+ e do π^- .

Méson π^+ A matriz para π^+ é

$$S_1^{\pi^+} = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2S_{MF}^d \gamma_5 (\delta\pi^+)^* S_{MF}^u \gamma_5 \delta\pi^+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right]. \quad (\text{C.108})$$

Efetuando o traço de sabor e de cor

$$S_1^{\pi^+} = -\frac{2}{2} N_c \int d^4x d^4x' (\delta\pi^+)^*(x') \text{tr} [S_{MF}^d(x-x') \gamma_5 S_{MF}^u(x'-x) \gamma_5] \delta\pi^+(x). \quad (\text{C.109})$$

Se definimos o polarizador do π^+ como

$$J_{\pi^+}(x, x') = 2N_c \text{tr} [S_{MF}^d(x-x') \gamma_5 S_{MF}^u(x'-x) \gamma_5], \quad (\text{C.110})$$

a expressão (C.109) fica

$$\boxed{S_1^{\pi^+} = -\frac{1}{2} \int d^4x d^4x' (\delta\pi^+)^*(x') J_{\pi^+}(x, x') \delta\pi^+(x)}. \quad (\text{C.111})$$

Méson π^- A matriz para o π^- é

$$S_1^{\pi^-} = -\frac{1}{2} \text{Tr} \left[\begin{pmatrix} -2S_{MF}^u \gamma_5 (\delta\pi^-)^* S_{MF}^d \gamma_5 \delta\pi^- & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right]. \quad (\text{C.112})$$

Efetuando o traço de sabor e de cor

$$S_1^{\pi^-} = -\frac{2}{2} N_c \int d^4x d^4x' (\delta\pi^-)^*(x') \text{tr} [S_{MF}^u(x-x') \gamma_5 S_{MF}^d(x'-x) \gamma_5] \delta\pi^-(x), \quad (\text{C.113})$$

podemos definir o polarizador do π^- como

$$J_{\pi^-}(x, x') = 2N_c \text{tr} [S_{MF}^u(x-x') \gamma_5 S_{MF}^d(x'-x) \gamma_5], \quad (\text{C.114})$$

e a expressão (C.113) fica

$$\boxed{S_1^{\pi^-} = -\frac{1}{2} \int d^4x d^4x' (\delta\pi^-)^* J_{\pi^-}(x, x') \delta\pi^-(x')}. \quad (\text{C.115})$$

Mésons K^+ e K^-

A matriz para os káons carregados é

$$S_1^{K^\pm} = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\begin{pmatrix} -2S_{MF}^u \gamma_5 \delta K^+ S_{MF}^s \gamma_5 \delta K^- & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2S_{MF}^s \gamma_5 \delta K^- S_{MF}^u \gamma_5 \delta K^+ \end{pmatrix} \right]. \quad (\text{C.116})$$

Considerando a expressão (C.46b), temos que

$$\delta\pi_4 \mp i\delta\pi_5 = \sqrt{2}\delta K^\pm,$$

então podemos ver que

$$(\delta K^\pm)^* = \delta K^\mp. \quad (\text{C.117})$$

Substituímos isso na expressão (C.116)

$$S_1^{K^\pm} = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\begin{pmatrix} -2S_{MF}^u \gamma_5 (\delta K^-)^* S_{MF}^s \gamma_5 \delta K^- & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2S_{MF}^s \gamma_5 (\delta K^+)^* S_{MF}^u \gamma_5 \delta K^+ \end{pmatrix} \right], \quad (\text{C.118})$$

e podemos separar as matrizes do K^+ e do K^- .

Méson K^+ A matriz para K^+ é

$$S_1^{K^+} = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2S_{MF}^s \gamma_5 (\delta K^+)^* S_{MF}^u \gamma_5 \delta K^+ \end{pmatrix} \right]. \quad (\text{C.119})$$

Efetuando o traço de sabor e de cor

$$S_1^{K^+} = -\frac{2}{2}N_c \int d^4x d^4x' (\delta K^+)^*(x') \text{tr}[\mathcal{S}_{MF}^s(x-x')\gamma_5 \mathcal{S}_{MF}^u(x'-x)\gamma_5] \delta K^+(x), \quad (\text{C.120})$$

definimos o polarizador do K^+ como

$$J_{K^+} = 2N_c \text{tr}[\mathcal{S}_{MF}^s(x-x')\gamma_5 \mathcal{S}_{MF}^u(x'-x)\gamma_5], \quad (\text{C.121})$$

então a expressão (C.120) fica

$$\boxed{S_1^{K^+} = -\frac{1}{2} \int d^4x d^4x' (\delta K^+)^*(x') J_{K^+}(x, x') \delta K^+(x).} \quad (\text{C.122})$$

Méson K^- A matriz para K^- é

$$S_1^{K^-} = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\begin{pmatrix} -2\mathcal{S}_{MF}^u\gamma_5(\delta K^-)^*\mathcal{S}_{MF}^s\gamma_5\delta K^- & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right]. \quad (\text{C.123})$$

Efetuando o traço de sabor e de cor

$$S_1^{K^-} = -\frac{2}{2}N_c \int d^4x d^4x' (\delta K^-)^*(x') \text{tr}[\mathcal{S}_{MF}^u(x-x')\gamma_5 \mathcal{S}_{MF}^s(x'-x)\gamma_5] \delta K^-(x), \quad (\text{C.124})$$

podemos definir o polarizador do K^- como

$$J_{K^-}(x, x') = 2N_c \text{tr}[\mathcal{S}_{MF}^u(x-x')\gamma_5 \mathcal{S}_{MF}^s(x'-x)\gamma_5], \quad (\text{C.125})$$

então a expressão (C.124) fica

$$\boxed{S_1^{K^-} = -\frac{1}{2} \int d^4x d^4x' (\delta K^-)^*(x') J_{K^-}(x, x') \delta K^-(x).} \quad (\text{C.126})$$

Mésons K^0 e \bar{K}^0

A matriz para os káons neutros é

$$S_1^{K^0} = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2S_{MF}^d \gamma_5 \delta K^0 S_{MF}^s \gamma_5 \delta \bar{K}^0 & 0 \\ 0 & 0 & -2S_{MF}^s \gamma_5 \delta \bar{K}^0 S_{MF}^d \gamma_5 \delta K^0 \end{pmatrix} \right] .. \quad (\text{C.127})$$

Considerando as expressões (C.46c) e (C.46d), temos

$$\begin{aligned} \delta\pi_6 - i\delta\pi_7 &= \sqrt{2}\delta K^0; \\ \delta\pi_6 + i\delta\pi_7 &= \sqrt{2}\delta \bar{K}^0, \end{aligned}$$

então podemos ver que

$$(\delta K^0)^* = \delta \bar{K}^0 \quad ; \quad (\delta \bar{K}^0)^* = \delta K^0. \quad (\text{C.128})$$

Substituímos (C.128) na expressão (C.127)

$$S_1^{K^0} = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2S_{MF}^d \gamma_5 (\delta \bar{K}^0)^* S_{MF}^s \gamma_5 \delta \bar{K}^0 & 0 \\ 0 & 0 & -2S_{MF}^s \gamma_5 \delta (K^0)^* S_{MF}^d \gamma_5 \delta K^0 \end{pmatrix} \right], \quad (\text{C.129})$$

e podemos separar as matrizes do K^0 e do \bar{K}^0

Méson K^0 A matriz para K^0 é

$$S_1^{K^0} = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2S_{MF}^s \gamma_5 \delta (K^0)^* S_{MF}^d \gamma_5 \delta K^0 \end{pmatrix} \right]. \quad (\text{C.130})$$

Efetuada o traço de sabor e de cor

$$S_1^{K^0} = -\frac{2}{2} N_c \int d^4x d^4x' (\delta K^0)^*(x') \text{tr} [S_{MF}^s(x-x') \gamma_5 S_{MF}^d(x'-x) \gamma_5] \delta K^0(x), \quad (\text{C.131})$$

definimos o polarizador do K^0 como

$$J_{K^0}(x, x') = 2N_c \text{tr} [\mathcal{S}_{MF}^s(x - x') \gamma_5 \mathcal{S}_{MF}^d(x' - x) \gamma_5], \quad (\text{C.132})$$

então a expressão (C.131) fica

$$\boxed{S_1^{K^0} = -\frac{1}{2} \int d^4x d^4x' (\delta K^0)^*(x') J_{K^0}(x, x') \delta K^0(x)}. \quad (\text{C.133})$$

Méson \bar{K}^0 Finalmente, a matriz para \bar{K}^0 é

$$S_1^{\bar{K}^0} = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2\mathcal{S}_{MF}^d \gamma_5 (\delta \bar{K}^0)^* \mathcal{S}_{MF}^s \gamma_5 \delta \bar{K}^0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right]. \quad (\text{C.134})$$

Efetuada o traço de sabor e de cor

$$S_1^{\bar{K}^0} = -\frac{2}{2} N_c \int d^4x d^4x' (\delta \bar{K}^0)^*(x') \text{tr} [\mathcal{S}_{MF}^d(x - x') \gamma_5 \mathcal{S}_{MF}^s(x' - x) \gamma_5] \delta \bar{K}^0(x). \quad (\text{C.135})$$

Definimos o polarizador do \bar{K}^0 como

$$J_{\bar{K}^0} = 2N_c \text{tr} [\mathcal{S}_{MF}^d(x - x') \gamma_5 \mathcal{S}_{MF}^s(x' - x) \gamma_5], \quad (\text{C.136})$$

então a expressão (C.135) fica

$$\boxed{S_1^{\bar{K}^0} = -\frac{1}{2} \int d^4x d^4x' (\delta \bar{K}^0)^* J_{\bar{K}^0}(x, x') \delta \bar{K}^0(x)}. \quad (\text{C.137})$$

C.8.2 Termo com acoplamento (Píon neutro/ η/η')

Queremos calcular o traço da matriz (C.101). Precisamos primeiro abrir os quadrados de seus elementos não nulos

$$\begin{aligned}
A &= \left[\mathcal{S}_{MF}^u i\gamma_5 \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \delta\pi_0 + \delta\pi_3 + \frac{1}{\sqrt{3}} \delta\pi_8 \right) \right]^2, \\
&= -\mathcal{S}_{MF}^u \gamma_5 \mathcal{S}_{MF}^u \gamma_5 \left[\underbrace{\frac{2}{3} \delta\pi_0 \delta\pi_0}_{\text{orange}} + \underbrace{2\sqrt{\frac{2}{3}} \delta\pi_0 \delta\pi_3}_{\text{red}} + \underbrace{\delta\pi_3 \delta\pi_3}_{\text{pink}} + \underbrace{\frac{2\sqrt{2}}{3} \delta\pi_0 \delta\pi_8}_{\text{purple}} \right. \\
&\quad \left. + \underbrace{\frac{2}{\sqrt{3}} \delta\pi_3 \delta\pi_8}_{\text{blue}} + \underbrace{\frac{1}{3} \delta\pi_8 \delta\pi_8}_{\text{green}} \right], \tag{C.138a}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E &= \left[\mathcal{S}_{MF}^d i\gamma_5 \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \delta\pi_0 - \delta\pi_3 + \frac{1}{\sqrt{3}} \delta\pi_8 \right) \right]^2, \\
&= -\mathcal{S}_{MF}^d \gamma_5 \mathcal{S}_{MF}^d \gamma_5 \left[\underbrace{\frac{2}{3} \delta\pi_0 \delta\pi_0}_{\text{orange}} - \underbrace{2\sqrt{\frac{2}{3}} \delta\pi_0 \delta\pi_3}_{\text{red}} + \underbrace{\delta\pi_3 \delta\pi_3}_{\text{pink}} + \underbrace{\frac{2\sqrt{2}}{3} \delta\pi_0 \delta\pi_8}_{\text{purple}} \right. \\
&\quad \left. - \underbrace{\frac{2}{\sqrt{3}} \delta\pi_3 \delta\pi_8}_{\text{blue}} + \underbrace{\frac{1}{3} \delta\pi_8 \delta\pi_8}_{\text{green}} \right], \tag{C.138b}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I &= \left[\mathcal{S}_{MF}^s i\gamma_5 \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \delta\pi_0 - \frac{2}{\sqrt{3}} \delta\pi_8 \right) \right]^2, \\
&= -\mathcal{S}_{MF}^s \gamma_5 \mathcal{S}_{MF}^s \gamma_5 \left[\underbrace{\frac{2}{3} \delta\pi_0 \delta\pi_0}_{\text{orange}} - \underbrace{\frac{4\sqrt{2}}{3} \delta\pi_0 \delta\pi_8}_{\text{purple}} + \underbrace{\frac{4}{3} \delta\pi_8 \delta\pi_8}_{\text{green}} \right]. \tag{C.138c}
\end{aligned}$$

Vamos separar a matriz em seis matrizes, uma para cada combinação de pares de π_0 , π_3 e π_8 . Precisamos primeiro definir um polarizador de um méson pseudoescalar genérico, composto por um par de quark/antiquark f e f'

$$J_{ff'}(x, x') = 2N_c \text{tr} \left[\mathcal{S}_{MF}^f(x - x') \gamma_5 \mathcal{S}_{MF}^{f'}(x' - x) \gamma_5 \right]. \tag{C.139}$$

Termos com $\pi_0\pi_0$ Consideramos os termos sublinhados em laranja em (C.138),

$$S_1^{00} = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} S_{MF}^u \gamma_5 S_{MF}^u \delta\pi_0 \delta\pi_0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} S_{MF}^d \gamma_5 S_{MF}^d \delta\pi_0 \delta\pi_0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} S_{MF}^s \gamma_5 S_{MF}^s \delta\pi_0 \delta\pi_0 \end{pmatrix} \right], \quad (\text{C.140})$$

e ao Efetuar o traço de sabor e de cor, teremos

$$S_1^{00} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} N_c \int d^4x d^4x' \delta\pi_0(x') \delta\pi_0(x) \left\{ \text{tr}[S_{MF}^u(x-x') \gamma_5 S_{MF}^u(x'-x) \gamma_5] \right. \\ \left. + \text{tr}[S_{MF}^d(x-x') \gamma_5 S_{MF}^d(x'-x) \gamma_5] + \text{tr}[S_{MF}^s(x-x') \gamma_5 S_{MF}^s(x'-x) \gamma_5] \right\}.$$

Considerando (C.139)

$$\boxed{S_1^{00} = -\frac{1}{6} \int d^4x d^4x' \delta\pi_0(x') \delta\pi_0(x) [J_{uu}(x, x') + J_{dd}(x, x') + J_{ss}(x, x')].} \quad (\text{C.141})$$

Termos com $\pi_0\pi_3$ Considerando os termos em vermelho de (C.138),

$$S_1^{03} = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\begin{pmatrix} -2\sqrt{\frac{2}{3}} S_{MF}^u \gamma_5 S_{MF}^u \delta\pi_0 \delta\pi_3 & 0 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{\frac{2}{3}} S_{MF}^d \gamma_5 S_{MF}^d \delta\pi_0 \delta\pi_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right], \quad (\text{C.142})$$

e efetuando o traço de sabor e de cor

$$S_1^{03} = -2 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{3}} N_c \int d^4x d^4x' \delta\pi_0(x') \delta\pi_3(x) \left\{ \text{tr}[S_{MF}^u(x-x') \gamma_5 S_{MF}^u(x'-x) \gamma_5] \right. \\ \left. - \text{tr}[S_{MF}^d(x-x') \gamma_5 S_{MF}^d(x'-x) \gamma_5] \right\}.$$

Considerando (C.139)

$$\boxed{S_1^{03} = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{3}} \int d^4x d^4x' \delta\pi_0(x') \delta\pi_3(x) [J_{uu}(x, x') - J_{dd}(x, x')].} \quad (\text{C.143})$$

Termos com $\pi_3\pi_3$ Considerando os termos em rosa de (C.138),

$$S_1^{33} = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\begin{pmatrix} -\mathcal{S}_{\text{MF}}^u \gamma_5 \mathcal{S}_{\text{MF}}^u \gamma_5 \delta\pi_3 \delta\pi_3 & 0 & 0 \\ 0 & -\mathcal{S}_{\text{MF}}^d \gamma_5 \mathcal{S}_{\text{MF}}^d \gamma_5 \delta\pi_3 \delta\pi_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right], \quad (\text{C.144})$$

ao efetuar o traço de sabor e de cor teremos

$$S_1^{33} = -\frac{1}{2} N_c \int d^4x d^4x' \delta\pi_3(x') \delta\pi_3(x) \left\{ \text{tr}[\mathcal{S}_{\text{MF}}^u(x-x') \gamma_5 \mathcal{S}_{\text{MF}}^u(x'-x) \gamma_5] \right. \\ \left. + \text{tr}[\mathcal{S}_{\text{MF}}^d(x-x') \gamma_5 \mathcal{S}_{\text{MF}}^d(x'-x) \gamma_5] \right\}.$$

Considerando (C.139),

$$\boxed{S_1^{33} = -\frac{1}{4} \int d^4x d^4x' [J_{uu}(x, x') + J_{dd}(x, x')].} \quad (\text{C.145})$$

Termos com $\pi_0\pi_8$ Levando em conta os termos em roxo de (C.138),

$$S_1^{08} = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\begin{pmatrix} -\frac{2\sqrt{2}}{3} \mathcal{S}_{\text{MF}}^u \gamma_5 \mathcal{S}_{\text{MF}}^u \gamma_5 \delta\pi_0 \delta\pi_8 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{s\sqrt{2}}{3} \mathcal{S}_{\text{MF}}^d \gamma_5 \mathcal{S}_{\text{MF}}^d \gamma_5 \delta\pi_0 \delta\pi_8 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4\sqrt{2}}{3} \mathcal{S}_{\text{MF}}^s \gamma_5 \mathcal{S}_{\text{MF}}^s \gamma_5 \delta\pi_0 \delta\pi_8 \end{pmatrix} \right]. \quad (\text{C.146})$$

Efetuando o traço de sabor e de cor teremos

$$S_1^{08} = -\frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{3} N_c \int d^4x d^4x' \delta\pi_0(x') \delta\pi_8(x) \left\{ 2 \text{tr}[\mathcal{S}_{\text{MF}}^u(x-x') \gamma_5 \mathcal{S}_{\text{MF}}^u(x'-x) \gamma_5] \right. \\ \left. + 2 \text{tr}[\mathcal{S}_{\text{MF}}^d(x-x') \gamma_5 \mathcal{S}_{\text{MF}}^d(x'-x) \gamma_5] - 4 \text{tr}[\mathcal{S}_{\text{MF}}^s(x-x') \gamma_5 \mathcal{S}_{\text{MF}}^s(x'-x) \gamma_5] \right\},$$

e considerando (C.139),

$$\boxed{S_1^{08} = -\frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{3} \int d^4x d^4x' \delta\pi_0(x') \delta\pi_8(x) [J_{uu}(x, x') + J_{dd}(x, x') - 2J_{ss}(x, x')].} \quad (\text{C.147})$$

Termos com $\pi_3\pi_8$ Levando em conta os termos em azul de (C.138),

$$S_1^{38} = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{3}} \mathcal{S}_{\text{MF}}^u \gamma_5 \mathcal{S}_{\text{MF}}^u \gamma_5 \delta\pi_3 \delta\pi_8 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} \mathcal{S}_{\text{MF}}^d \gamma_5 \mathcal{S}_{\text{MF}}^d \gamma_5 \delta\pi_3 \delta\pi_8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right]. \quad (\text{C.148})$$

Efetutando o traço de sabor e de cor

$$S_1^{38} = -\frac{1}{2} \frac{2}{\sqrt{3}} N_c \int d^4x d^4x' \delta\pi_3(x') \delta\pi_8(x) \left\{ \text{tr}[\mathcal{S}_{\text{MF}}^u(x-x') \gamma_5 \mathcal{S}_{\text{MF}}^u(x'-x) \gamma_5](x, x') \right. \\ \left. - \text{tr}[\mathcal{S}_{\text{MF}}^d(x-x') \gamma_5 \mathcal{S}_{\text{MF}}^d(x'-x) \gamma_5](x, x') \right\},$$

e, considerando (C.139),

$$\boxed{S_1^{38} = -\frac{1}{2\sqrt{3}} \int d^4x d^4x' \delta\pi_3(x') \delta\pi_8(x) [J_{\text{uu}}(x, x') - J_{\text{dd}}(x, x')].} \quad (\text{C.149})$$

Termos com $\pi_8\pi_8$ Os termos em verde de (C.138) são

$$S_1^{88} = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \mathcal{S}_{\text{MF}}^u \gamma_5 \mathcal{S}_{\text{MF}}^u \gamma_5 \delta\pi_8 \delta\pi_8 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \mathcal{S}_{\text{MF}}^d \gamma_5 \mathcal{S}_{\text{MF}}^d \gamma_5 \delta\pi_8 \delta\pi_8 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{3} \mathcal{S}_{\text{MF}}^s \gamma_5 \mathcal{S}_{\text{MF}}^s \gamma_5 \delta\pi_8 \delta\pi_8 \end{pmatrix} \right]. \quad (\text{C.150})$$

Efetutando o traço de sabor e de cor

$$S_1^{88} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{2} N_c \int d^4x d^4x' \delta\pi_8(x') \delta\pi_8(x) \left\{ \text{tr}[\mathcal{S}_{\text{MF}}^u(x-x') \gamma_5 \mathcal{S}_{\text{MF}}^u(x'-x) \gamma_5] \right. \\ \left. + \text{tr}[\mathcal{S}_{\text{MF}}^d(x-x') \gamma_5 \mathcal{S}_{\text{MF}}^d(x'-x) \gamma_5] - 4 \text{tr}[\mathcal{S}_{\text{MF}}^s(x-x') \gamma_5 \mathcal{S}_{\text{MF}}^s(x'-x) \gamma_5] \right\}.$$

Considerando (C.139)

$$\boxed{S_1^{88} = -\frac{1}{12} \int d^4x d^4x' \delta\pi_8(x') \delta\pi_8(x) [J_{\text{uu}}(x, x') + J_{\text{dd}}(x, x') + 4J_{\text{ss}}(x, x')].} \quad (\text{C.151})$$

Por simplicidade, definimos os polarizadores

$$J_{00}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{J_{uu} + J_{dd} + J_{ss}}{3}, \quad (\text{C.152a}) \quad J_{08}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{\sqrt{2}}{3}[J_{uu} + J_{dd} - 2J_{ss}], \quad (\text{C.152d})$$

$$J_{03}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \sqrt{\frac{2}{3}}[J_{uu} - J_{dd}], \quad (\text{C.152b}) \quad J_{38}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{J_{uu} - J_{dd}}{\sqrt{3}}, \quad (\text{C.152e})$$

$$J_{33}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{J_{uu} + J_{dd}}{2}, \quad (\text{C.152c}) \quad J_{88}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{J_{uu} + J_{dd} - 4J_{ss}}{6}. \quad (\text{C.152f})$$

C.9 Passagem de (3.69) para (3.70)

Queremos escrever (3.69) apenas em termos das flutuações dos campos do σ e do π . Entretanto, a forma mais simples para fazer isso é inicialmente escrever a expressão apenas em termos de s_α e p_α para depois poder reescrever a expressão da forma desejada. Para isso, precisamos dos termos de primeira ordem da expansão das condições da SPA. Estes termos são

$$\begin{aligned} -2G\delta s_\alpha + Kd_{\alpha\beta\gamma}\bar{s}_\beta\delta s_\gamma - \delta\sigma_\alpha &= 0; \\ -2G\delta p_\alpha - Kd_{\alpha\beta\gamma}\bar{s}_\beta\delta p_\gamma - \delta\pi_\alpha &= 0, \end{aligned}$$

e isolando $\delta\sigma_\alpha$ e $\delta\pi_\alpha$ nestas equações teremos

$$\delta\sigma_\alpha = -2G\delta s_\alpha + Kd_{\alpha\beta\gamma}\bar{s}_\beta\delta s_\gamma, \quad (\text{C.153a})$$

$$\delta\pi_\alpha = -2G\delta p_\alpha - Kd_{\alpha\beta\gamma}\bar{s}_\beta\delta p_\gamma. \quad (\text{C.153b})$$

Substituindo (C.153) em (3.69), teremos

$$S_{\text{quad}}^2 = \int d^4x \left\{ \frac{1}{2}[2G\delta_{\alpha\beta} - Kd_{\alpha\beta\gamma}\bar{s}_\gamma]\delta s_\alpha\delta s_\beta + \frac{1}{2}[2G\delta_{\alpha\beta} + Kd_{\alpha\beta\gamma}\bar{s}_\gamma]\delta p_\alpha\delta p_\beta \right\}. \quad (\text{C.154})$$

Definimos

$$S_{\alpha\beta} = 2G\delta_{\alpha\beta} - Kd_{\alpha\beta\gamma}\bar{s}_\gamma, \quad (\text{C.155a})$$

$$P_{\alpha\beta} = 2G\delta_{\alpha\beta} + Kd_{\alpha\beta\gamma}\bar{s}_\gamma, \quad (\text{C.155b})$$

então podemos reescrever (C.154) como

$$S_{\text{quad}}^2 = \int d^4x \left[\frac{1}{2} \delta s_\alpha \delta s_\beta S_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \delta p_\alpha \delta p_\beta P_{\alpha\beta} \right]. \quad (\text{C.156})$$

Precisamos escrever (C.156) em termos das flutuações dos campos σ e π . Para isso, podemos reescrever (C.153) como

$$\begin{aligned} \delta\sigma_\alpha &= -[2G\delta_{\alpha\beta} - Kd_{\alpha\beta\gamma}\bar{s}_\gamma]\delta s_\beta, \\ \delta\pi_\alpha &= -[2G\delta_{\alpha\beta} + Kd_{\alpha\beta\gamma}\bar{s}_\gamma]\delta p_\beta, \end{aligned}$$

e assim podemos substituir (C.155) nas últimas expressões

$$-\delta\sigma_\alpha = S_{\alpha\beta}\delta s_\beta; \quad (\text{C.157a})$$

$$-\delta\pi_\alpha = P_{\alpha\beta}\delta p_\beta. \quad (\text{C.157b})$$

Multiplicando o primeiro e os segundo termo de (C.156) por $1 = \frac{S_{\beta\alpha}}{S_{\beta\alpha}}$ e $1 = \frac{P_{\beta\alpha}}{P_{\beta\alpha}}$ respectivamente, e substituindo (C.157), teremos

$$S_{\text{quad}} = \int d^4x d^4x' \left[\frac{S_{\alpha\beta}^{-1}}{2} \delta\sigma_\alpha(x) \delta\sigma_\beta(x') + \frac{P_{\alpha\beta}^{-1}}{2} \delta\pi_\alpha(x) \delta\pi_\beta(x') \right] \delta^{(4)}(x - x'). \quad (\text{C.158})$$

C.10 Segundo termo da parte pseudoescalar da ação bosonizada quadrática

C.10.1 Mésons carregados e káons neutros

Píons carregados

Os campos de π^+ e π^- estão associados às matrizes de Gell-Mann λ_1 e λ_2 . Ou seja, consideraremos os termos com $\alpha, \beta = 1, 2$. Teremos

$$\begin{aligned} S_2^{\pi^+} = \int d^4x d^4x' \frac{\delta^{(4)}(x - x')}{2} & \left[\delta\pi_1 \delta\pi_1 P_{11}^{-1} + \delta\pi_2 \delta\pi_2 P_{22}^{-1} \right. \\ & \left. + \delta\pi_1 \delta\pi_2 P_{12}^{-1} + \delta\pi_2 \delta\pi_1 P_{21}^{-1} \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.159})$$

Precisamos encontrar $P_{\alpha\beta}$

$$P_{11} = 2G\delta_{11} + Kd_{11\gamma}\bar{s}_\gamma.$$

Como $d_{11\gamma} \neq 0$ somente quando $\gamma = 0, 8$, consideraremos apenas as constantes de estrutura simétricas

$$d_{110} = -\frac{1}{\sqrt{6}}, \quad d_{118} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

e então P_{11} fica

$$\begin{aligned} P_{11} &= 2G + K\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\bar{s}_0 + K\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\bar{s}_8, \\ &= 2G - \frac{K}{2}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\bar{s}_0 - \frac{2}{\sqrt{3}}\bar{s}_8\right). \end{aligned}$$

Considerando (C.55c), podemos reescrever a expressão acima como

$$P_{11} = 2G - \frac{K}{2}\bar{s}_s = P_{\pi^\pm}. \quad (\text{C.160})$$

As constantes de estrutura simétrica são iguais às de P_{11} para o P_{22} , então

$$P_{11} = P_{22} = P_{\pi^\pm}.$$

Para os termos cruzados P_{12} e P_{21} não existem constantes de estrutura não nulas, então $P_{12} = P_{21} = 0$. Então podemos reescrever (C.159) como

$$S_2^{\pi^\pm} = \int d^4x d^4x' \frac{\delta^{(4)}(x-x')}{2} [\delta\pi_1(x)\delta\pi_1(x') + \delta\pi_2(x)\delta\pi_2(x')] P_{\pi^\pm}^{-1}. \quad (\text{C.161})$$

Precisamos escrever esta expressão em termos dos campos do π^+ e do π^- . Considerando (C.46a), teremos

$$\delta\pi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\delta\pi^+ + \delta\pi^-), \quad (\text{C.162a})$$

$$\delta\pi_2 = \frac{i}{\sqrt{2}}(\delta\pi^+ - \delta\pi^-), \quad (\text{C.162b})$$

então

$$\begin{aligned} \delta\pi_1\delta\pi_2 + \delta\pi_2\delta\pi_1 &= \frac{1}{2}(\delta\pi^+ + \delta\pi^-)(\delta\pi^+ + \delta\pi^-) + \frac{i^2}{2}(\delta\pi^+ - \delta\pi^-)(\delta\pi^+ - \delta\pi^-), \\ &= \delta\pi^+\delta\pi^- + \delta\pi^-\delta\pi^+. \end{aligned}$$

Considerando (C.106)

$$\delta\pi_1\delta\pi_2 + \delta\pi_2\delta\pi_1 = (\delta\pi^-)^*\delta\pi^- + (\delta\pi^+)^*\delta\pi^+, \quad (\text{C.163})$$

a expressão (C.161) fica

$$S_2^{\pi^\pm} = \int d^4x d^4x' \frac{\delta^{(4)}(x-x')}{2} [(\delta\pi^-)^*(x')\delta\pi^-(x) + (\delta\pi^+)^*(x')\delta\pi^+(x)] P_{\pi^\pm}^{-1}. \quad (\text{C.164})$$

Definimos

$$T_{\pi^+} = T_{\pi^-} = P_{\pi^\pm}^{-1} = \left(2G - \frac{K}{2}\bar{s}_s\right)^{-1}, \quad (\text{C.165})$$

então

$$S_2^{\pi^+} = \int d^4x d^4x' \frac{\delta^{(4)}(x-x')}{2} (\delta\pi^-)^*(x')\delta\pi^-(x) T_{\pi^+}, \quad (\text{C.166a})$$

$$S_2^{\pi^-} = \int d^4x d^4x' \frac{\delta^{(4)}(x-x')}{2} (\delta\pi^+)^*(x')\delta\pi^+(x) T_{\pi^-}. \quad (\text{C.166b})$$

Káons carregados

Os campos de K^+ e K^- estão associados às matrizes de Gell-Mann λ_4 e λ_5 . Ou seja, consideraremos os termos com $\alpha, \beta = 4, 5$. Temos

$$\begin{aligned} S_2^{K^\pm} = \int d^4x d^4x' \frac{\delta^{(4)}(x-x')}{2} & \left[\delta\pi_4\delta\pi_4 P_{44}^{-1} + \delta\pi_5\delta\pi_5 P_{55}^{-1} \right. \\ & \left. + \delta\pi_4\delta\pi_5 P_{45}^{-1} + \delta\pi_5\delta\pi_4 P_{54}^{-1} \right], \end{aligned} \quad (\text{C.167})$$

mas ainda precisamos encontrar $P_{\alpha\beta}$

$$P_{44} = 2G\delta_{44} + Kd_{44\gamma}\bar{s}_\gamma.$$

Como $d_{22\gamma} \neq 0$ quando $\gamma = 0, 3, 8$, então consideraremos as constantes de estrutura simétricas

$$d_{440} = -\frac{1}{\sqrt{6}}, \quad d_{443} = \frac{1}{2}, \quad d_{448} = -\frac{1}{2\sqrt{3}},$$

e P_{44} fica

$$\begin{aligned} P_{44} &= 2G + K\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\bar{s}_0 + K\left(\frac{1}{2}\right)\bar{s}_3 + K\left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}\right), \\ &= 2G - \frac{K}{2}\left[\sqrt{\frac{2}{3}}\bar{s}_0 - \bar{s}_3 + \frac{\bar{s}_8}{\sqrt{3}}\right]. \end{aligned}$$

Considerando (C.55b),

$$P_{44} = 2G - \frac{K}{2}\bar{s}_d = P_{K^\pm}. \quad (\text{C.168})$$

Para o P_{55} as constantes de estrutura simétricas são iguais às de P_{44} , então

$$P_{55} = P_{44} = P_{K^\pm}.$$

Não existem constantes de estrutura não nulas para os termos cruzados P_{45} e P_{54} , então $P_{45} = P_{54} = 0$. Podemos reescrever (C.167) como

$$S_2^{K^\pm} = \int d^4x d^4x' \frac{\delta^{(4)}(x-x')}{2} [\delta\pi_4(x)\delta\pi_4(x') + \delta\pi_5(x)\delta\pi_5(x')] P_{K^\pm}^{-1}. \quad (\text{C.169})$$

Precisamos escrever essa expressão em termos dos campos do K^+ e do K^- . Considerando (C.46b),

$$\delta\pi_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\delta K^+ + \delta K^-), \quad (\text{C.170a})$$

$$\delta\pi_5 = \frac{i}{\sqrt{2}}(\delta K^+ - \delta K^-), \quad (\text{C.170b})$$

então

$$\begin{aligned} \delta\pi_4\delta\pi_4 + \delta\pi_5\delta\pi_5 &= \frac{1}{2}(\delta K^+ + \delta K^-)(\delta K^+ + \delta K^-) + \frac{i^2}{2}(\delta K^+ - \delta K^-)(\delta K^+ - \delta K^-), \\ &= \delta K^+\delta K^- + \delta K^-\delta K^+. \end{aligned}$$

Considerando (C.117),

$$\delta\pi_4\delta\pi_4 + \delta\pi_5\delta\pi_5 = (\delta K^-)^*\delta K^- + (\delta K^+)^*\delta K^+, \quad (\text{C.171})$$

e (C.169) fica

$$S_2^{K^\pm} = \int d^4x d^4x' \frac{\delta^{(4)}(x-x')}{2} [(\delta K^-)^*(x')\delta K^-(x) + (\delta K^+)^*(x')\delta K^+(x)] P_{K^\pm}^{-1}. \quad (\text{C.172})$$

Definimos

$$T_{K^+} = T_{K^-} = P_{K^\pm}^{-1} = \left(2G - \frac{K}{2}\bar{s}_d\right)^{-1}, \quad (\text{C.173})$$

então

$$S_2^{K^+} = \int d^4x d^4x' \frac{\delta^{(4)}(x-x')}{2} (\delta K^+)^*(x')\delta K^+(x) T_{K^+}, \quad (\text{C.174a})$$

$$S_2^{K^-} = \int d^4x d^4x' \frac{\delta^{(4)}(x-x')}{2} (\delta K^-)^*(x')\delta K^-(x) T_{K^-}. \quad (\text{C.174b})$$

Káons Neutros

Os campos de K^0 e \bar{K}^0 estão associados às matrizes de Gell-Mann λ_6 e λ_7 . Ou seja, consideraremos os termos com $\alpha, \beta = 6, 7$. Teremos

$$S_2^{K^0} = \int d^4x d^4x' \frac{\delta^{(4)}(x - x')}{2} [\delta\pi_6\delta\pi_6 P_{66}^{-1} + \delta\pi_7\delta\pi_7 P_{77}^{-1} + \delta\pi_6\delta\pi_7 P_{67}^{-1} + \delta\pi_7\delta\pi_6 P_{76}^{-1}]. \quad (\text{C.175})$$

Precisamos encontrar $P_{\alpha\beta}$

$$P_{66} = 2G\delta_{66} + Kd_{66\gamma}\bar{s}_\gamma.$$

Uma vez que $d_{66\gamma} \neq 0$ apenas quando $\gamma = 0, 3, 8$, então consideraremos as constantes de estrutura simétricas

$$d_{660} = -\frac{1}{\sqrt{6}}, \quad d_{663} = -\frac{1}{2}, \quad d_{668} = -\frac{1}{2\sqrt{3}},$$

então P_{66} fica

$$\begin{aligned} P_{66} &= 2G + K\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\bar{s}_0 + K\left(-\frac{1}{2}\right)\bar{s}_3 + K\left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)\bar{s}_8, \\ &= 2G - \frac{K}{6} \left[\sqrt{\frac{2}{3}}\bar{s}_0 + \bar{s}_3 + \frac{1}{\sqrt{3}}\bar{s}_8 \right]. \end{aligned}$$

Considerando (C.55a)

$$P_{66} = 2G - \frac{K}{2}\bar{s}_u = P_{K^0}. \quad (\text{C.176})$$

Para o P_{77} , as constantes de estrutura simétricas são iguais às de P_{66} , então

$$P_{77} = P_{66} = P_{K^0},$$

e para os termos cruzados P_{67} e P_{76} não existem constantes de estrutura não nulas, então $P_{67} = P_{76} = 0$. Podemos reescrever (C.175) como

$$S_2^{K^0} = \int d^4x d^4x' \frac{\delta^{(4)}(x - x')}{2} [\delta\pi_6\delta\pi_6 + \delta\pi_7\delta\pi_7] P_{K^0}^{-1}. \quad (\text{C.177})$$

Precisamos escrever esta expressão em termos dos campos do K^0 e do \bar{K}^0 . Considerando (C.46c) e (C.46d)

$$\delta\pi_6 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\delta K^0 + \delta\bar{K}^0), \quad (\text{C.178a})$$

$$\delta\pi_7 = \frac{i}{\sqrt{2}}(\delta K^0 - \delta\bar{K}^0), \quad (\text{C.178b})$$

então

$$\begin{aligned} \delta\pi_6\delta\pi_6 + \delta\pi_7\delta\pi_7 &= \frac{1}{2}(\delta K^0 + \delta\bar{K}^0)(\delta K^0 + \delta\bar{K}^0) + \frac{i^2}{2}(\delta K^0 - \delta\bar{K}^0)(\delta K^0 - \delta\bar{K}^0), \\ &= \delta K^0\delta\bar{K}^0 + \delta\bar{K}^0\delta K^0. \end{aligned}$$

Considerando (C.128)

$$\delta\pi_6\delta\pi_6 + \delta\pi_7\delta\pi_7 = (\delta\bar{K}^0)^*\delta\bar{K}^0 + (\delta K^0)^*\delta K^0, \quad (\text{C.179})$$

(C.177) fica

$$S_2^{K^0} = \int d^4x d^4x' \frac{\delta^{(4)}(x-x')}{2} [(\delta\bar{K}^0)^*(x')\delta\bar{K}^0(x) + (\delta K^0)^*(x')\delta K^0(x)] P_{K^0}^{-1}. \quad (\text{C.180})$$

Definimos

$$T_{K^0} = T_{\bar{K}^0} = P_{K^0}^{-1} = \left(2G - \frac{K}{2}\bar{s}_u\right)^{-1}, \quad (\text{C.181})$$

então

$$S_2^{K^0} = \int d^4x d^4x' \frac{\delta^{(4)}(x-x')}{2} (\delta K^0)^*(x')\delta K^0(x) T_{K^0}, \quad (\text{C.182a})$$

$$S_2^{\bar{K}^0} = \int d^4x d^4x' \frac{\delta^{(4)}(x-x')}{2} (\delta\bar{K}^0)^*(x')\delta\bar{K}^0(x) T_{\bar{K}^0}. \quad (\text{C.182b})$$

Finalmente, podemos expressar explicitamente cada T_M como

$$T_{\pi^+} = \left(2G - \frac{K}{2}\bar{s}_s\right)^{-1}, \quad (\text{C.183a}) \quad T_{K^-} = \left(2G - \frac{K}{2}\bar{s}_d\right)^{-1}, \quad (\text{C.183d})$$

$$T_{\pi^-} = \left(2G - \frac{K}{2}\bar{s}_s\right)^{-1}, \quad (\text{C.183b}) \quad T_{K^0} = \left(2G - \frac{K}{2}\bar{s}_u\right)^{-1}, \quad (\text{C.183e})$$

$$T_{K^+} = \left(2G - \frac{K}{2}\bar{s}_d\right)^{-1}, \quad (\text{C.183c}) \quad T_{\bar{K}^0} = \left(2G - \frac{K}{2}\bar{s}_u\right)^{-1}. \quad (\text{C.183f})$$

C.10.2 Mésons neutros

Os campos do π^0 , do η e do η' estão relacionados às matrizes de Gell-Mann λ_0 , λ_3 e λ_8 . Ou seja, consideraremos $\alpha, \beta = 0, 3, 8$. Temos

$$S_2^0 = \int d^4x d^4x' \frac{\delta^{(4)}(x-x')}{2} \delta\pi_\alpha(x') \delta\pi_\beta(x) P_{\alpha\beta}^{-1}. \quad (\text{C.184})$$

Ao abrirmos a matriz $P_{\alpha\beta}$, obtemos

$$P_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} P_{00} & 0 & 0 & P_{03} & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{08} \\ 0 & P_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ P_{03} & 0 & 0 & P_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{38} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{55} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{77} & 0 \\ P_{08} & 0 & 0 & P_{38} & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{88} \end{pmatrix}.$$

Como podemos ver na matriz acima, para os outros mésons, todos os elementos não nulos da matriz $P_{\alpha\beta}$ fazem parte da diagonal principal. Entretanto, para o π^0 , o η e o η' existem elementos não nulos fora da diagonal principal. Podemos escrever a matriz reduzida (simétrica)

$$P'_{\alpha\beta} = P_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} P_{00} & P_{03} & P_{08} \\ P_{30} & P_{33} & P_{38} \\ P_{80} & P_{83} & P_{88} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{00} & P_{03} & P_{08} \\ P_{03} & P_{33} & P_{38} \\ P_{08} & P_{38} & P_{88} \end{pmatrix}. \quad (\text{C.185})$$

Antes de encontrar os termos da ação bosonizada quadrática, precisamos encontrar a inversa da matriz $P_{\alpha\beta}$. Primeiro iremos escrever explicitamente os elementos desta matriz na base de sabores.

Elemento P_{00} Temos

$$P_{00} = 2G\delta_{00} + Kd_{00\gamma}\bar{s}_\gamma,$$

Os coeficientes simétricos são $d_{00\gamma} \neq 0$ apenas quando $\gamma = 0$. Então consideraremos a constante de estrutura simétrica

$$d_{000} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Assim, P_{00} fica

$$P_{00} = 2G + K\sqrt{\frac{2}{3}}\bar{s}_0.$$

Considerando (C.56a),

$$P_{00} = 2G + K\sqrt{\frac{2}{3}} \left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}(\bar{s}_u + \bar{s}_d + \bar{s}_s) \right],$$

$$P_{00} = 2G + \frac{K}{3}(\bar{s}_u + \bar{s}_d + \bar{s}_s).$$

Elemento P_{33} Temos

$$P_{33} = 2G\delta_{33} + Kd_{33\gamma}\bar{s}_\gamma.$$

Como $d_{33\gamma} \neq 0$ somente quando $\gamma = 0, 8$, consideraremos as constantes de estrutura simétricas

$$d_{330} = -\frac{1}{\sqrt{6}}, \quad d_{338} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

e P_{33} fica

$$\begin{aligned} P_{33} &= 2G + K\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\bar{s}_0 + K\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\bar{s}_8, \\ &= 2G - \frac{K}{2}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\bar{s}_0 - \frac{2}{\sqrt{3}}\bar{s}_8\right). \end{aligned}$$

Considerando (C.55c),

$$P_{33} = 2G - \frac{K}{2}\bar{s}_s$$

Elemento P_{88} Considerando

$$P_{88} = 2G\delta_{88} + Kd_{88\gamma}\bar{s}_\gamma,$$

temos que $d_{88\gamma} \neq 0$ apenas quando $\gamma = 0, 8$. Então consideraremos as constantes de estrutura simétricas

$$d_{880} = -\frac{1}{\sqrt{6}}, \quad d_{888} = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Então P_{88} fica

$$P_{88} = 2GK\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\bar{s}_0 + \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\bar{s}_8,$$

e considerando (C.56a) e (C.56c),

$$P_{88} = 2G - K\left[\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3}(\bar{s}_u + \bar{s}_d + \bar{s}_s) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}(\bar{s}_u + \bar{s}_d - 2\bar{s}_s)\right]$$

$$P_{88} = 2G - \frac{K}{6}(2\bar{s}_u + 2\bar{s}_d - \bar{s}_s).$$

Elemento P_{03} Temos

$$P_{03} = 2G\delta_{03}^0 + Kd_{03\gamma},$$

e como $d_{03\gamma} \neq 0$ quando $\gamma = 3$, então consideraremos a constante de estrutura simétrica

$$d_{033} = -\frac{1}{\sqrt{6}},$$

Então P_{03} fica

$$P_{03} = -\frac{K}{\sqrt{6}}\bar{s}_3.$$

Considerando (C.56b),

$$P_{03} = -\frac{K}{2\sqrt{6}}(\bar{s}_u - \bar{s}_d).$$

Elemento P_{08} Levando em conta

$$P_{08} = 2G\delta_{08}^0 + Kd_{08\gamma}\bar{s}_\gamma,$$

temos que $d_{08\gamma} \neq 0$ quando $\gamma = 8$. Então consideraremos a constante de estrutura simétrica

$$d_{088} = -\frac{1}{\sqrt{6}}.$$

Então P_{08} fica

$$P_{08} = -\frac{K}{\sqrt{6}}\bar{s}_8.$$

Considerando (C.56c)

$$P_{08} = -\frac{K}{6\sqrt{2}}(\bar{s}_u + \bar{s}_d - 2\bar{s}_s).$$

Elemento P_{38} Considerando

$$P_{38} = 2G\delta_{38}^0 + Kd_{38\gamma}\bar{s}_\gamma,$$

temos que $d_{38\gamma} \neq 0$ quando $\gamma = 3$. Então consideraremos a constante de estrutura simétrica

$$d_{383} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Então P_{38} fica

$$P_{38} = \frac{K}{\sqrt{3}}\bar{s}_3,$$

e considerando (C.56b),

$$P_{38} = \frac{K}{2\sqrt{3}}(\bar{s}_u - \bar{s}_d)$$

Como $P_{\alpha\beta}$ é simétrico,

$$P_{03} = P_{30}, \quad P_{08} = P_{80}, \quad P_{38} = P_{83},$$

os elementos da matriz $P_{\alpha\beta}$ (C.184) são

$$P_{00} = 2G + \frac{K}{3}(\bar{s}_u + \bar{s}_d + \bar{s}_s), \quad (C.186a) \quad P_{03} = -\frac{K}{2\sqrt{6}}(\bar{s}_u - \bar{s}_d), \quad (C.186d)$$

$$P_{33} = 2G - \frac{K}{2}\bar{s}_s, \quad (C.186b) \quad P_{08} = -\frac{K}{6\sqrt{2}}(\bar{s}_u + \bar{s}_d - 2\bar{s}_s), \quad (C.186e)$$

$$P_{88} = 2G - \frac{K}{6}(2\bar{s}_u + 2\bar{s}_d - \bar{s}_s), \quad (C.186c) \quad P_{38} = \frac{K}{2\sqrt{3}}(\bar{s}_u - \bar{s}_d). \quad (C.186f)$$

Inversa da matriz

Podemos encontrar a inversa de uma matriz 3×3 com [174, 175]

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj}(A), \quad (\text{C.187})$$

em que a adjunta³ da matriz A é

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{a}_{22} & \mathbf{a}_{23} \\ \mathbf{a}_{32} & \mathbf{a}_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \mathbf{a}_{13} & \mathbf{a}_{12} \\ \mathbf{a}_{33} & \mathbf{a}_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \mathbf{a}_{12} & \mathbf{a}_{13} \\ \mathbf{a}_{22} & \mathbf{a}_{23} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} \mathbf{a}_{23} & \mathbf{a}_{21} \\ \mathbf{a}_{33} & \mathbf{a}_{31} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{13} \\ \mathbf{a}_{31} & \mathbf{a}_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \mathbf{a}_{13} & \mathbf{a}_{11} \\ \mathbf{a}_{23} & \mathbf{a}_{21} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} \\ \mathbf{a}_{31} & \mathbf{a}_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \mathbf{a}_{12} & \mathbf{a}_{11} \\ \mathbf{a}_{32} & \mathbf{a}_{31} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} \end{vmatrix} \end{pmatrix}, \quad (\text{C.188})$$

em que cada elemento dessa matriz 3×3 é um dos menores da mesma⁴. O determinante da matriz (C.185) é

$$\det P_{\alpha\beta} = P_{00}P_{33}P_{88} + 2P_{03}P_{08}P_{38} - P_{33}P_{08}^2 - P_{88}P_{03}^2 - P_{00}P_{38}^2, \quad (\text{C.189})$$

e cada termo é dado por

$$\begin{aligned} P_{00}P_{33}P_{88} &= 8G^3 + GK^2 \left[-\frac{2}{9}\bar{s}_u\bar{s}_u - \frac{2}{9}\bar{s}_d\bar{s}_d - \frac{7}{18}\bar{s}_s\bar{s}_s - \frac{4}{9}\bar{s}_u\bar{s}_d - \frac{1}{9}\bar{s}_u\bar{s}_s - \frac{1}{9}\bar{s}_d\bar{s}_s \right] \\ &+ K^3 \left[\frac{1}{18}\bar{s}_u\bar{s}_u\bar{s}_s + \frac{1}{36}\bar{s}_u\bar{s}_s\bar{s}_s + \frac{1}{18}\bar{s}_d\bar{s}_d\bar{s}_s + \frac{1}{36}\bar{s}_s\bar{s}_s\bar{s}_s \right. \\ &\left. + \frac{1}{9}\bar{s}_u\bar{s}_d\bar{s}_s - \frac{1}{36}\bar{s}_s\bar{s}_s\bar{s}_s \right], \end{aligned} \quad (\text{C.190a})$$

$$\begin{aligned} 2P_{03}P_{08}P_{38} &= \frac{K^3}{72} [\bar{s}_u\bar{s}_u\bar{s}_u + \bar{s}_d\bar{s}_d\bar{s}_d - \bar{s}_u\bar{s}_u\bar{s}_d - \bar{s}_u\bar{s}_d\bar{s}_d - 2\bar{s}_u\bar{s}_u\bar{s}_s \\ &- 2\bar{s}_d\bar{s}_d\bar{s}_s + 4\bar{s}_u\bar{s}_d\bar{s}_s], \end{aligned} \quad (\text{C.190b})$$

³Esta matriz adjunta é a transposta da matriz dos cofatores. Não confundir com a adjunta hermitiana.

⁴Considerando uma matriz A $m \times m$, seus menores de grau $(m - k)$, $k \leq m$, são os determinantes das submatrizes $k \times k$ de A [146]. Aqui calcularemos os primeiros menores, ou menores de grau 1

$$\begin{aligned}
P_{33}P_{08}^2 = & GK^2 \left[\frac{1}{36} \bar{s}_u \bar{s}_u + \frac{1}{36} \bar{s}_d \bar{s}_d + \frac{1}{9} \bar{s}_s \bar{s}_s + \frac{1}{18} \bar{s}_u \bar{s}_d - \frac{1}{9} \bar{s}_u \bar{s}_s - \frac{1}{9} \bar{s}_d \bar{s}_s \right] \\
& + K^3 \left[-\frac{1}{144} \bar{s}_u \bar{s}_u \bar{s}_s + \frac{1}{36} \bar{s}_u \bar{s}_s \bar{s}_s - \frac{1}{144} \bar{s}_d \bar{s}_d \bar{s}_s + \frac{1}{36} \bar{s}_d \bar{s}_s \bar{s}_s \right. \\
& \left. - \frac{1}{72} \bar{s}_u \bar{s}_d \bar{s}_s - \frac{1}{36} \bar{s}_s \bar{s}_s \bar{s}_s \right], \tag{C.190c}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{88}P_{03}^2 = & GK^2 \left[\frac{1}{12} \bar{s}_u \bar{s}_u - \frac{1}{6} \bar{s}_u \bar{s}_d + \frac{1}{12} \bar{s}_d \bar{s}_d \right] + K^3 \left[-\frac{1}{72} \bar{s}_u \bar{s}_u \bar{s}_u - \frac{1}{72} \bar{s}_d \bar{s}_d \bar{s}_d \right. \\
& \left. + \frac{1}{72} \bar{s}_u \bar{s}_u \bar{s}_d + \frac{1}{72} \bar{s}_u \bar{s}_d \bar{s}_d - \frac{1}{72} \bar{s}_u \bar{s}_d \bar{s}_s + \frac{1}{144} \bar{s}_u \bar{s}_u \bar{s}_s + \frac{1}{144} \bar{s}_d \bar{s}_d \bar{s}_s \right] \tag{C.190d}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{00}P_{38}^2 = & GK^2 \left[\frac{1}{6} \bar{s}_u \bar{s}_u + \frac{1}{6} \bar{s}_d \bar{s}_d - \frac{1}{3} \bar{s}_u \bar{s}_d \right] + K^3 \left[\frac{1}{36} \bar{s}_u \bar{s}_u \bar{s}_u + \frac{1}{36} \bar{s}_d \bar{s}_d \bar{s}_d \right. \\
& \left. + -\frac{1}{36} \bar{s}_u \bar{s}_u \bar{s}_d - \frac{1}{36} \bar{s}_u \bar{s}_d \bar{s}_d + \frac{1}{36} \bar{s}_u \bar{s}_u \bar{s}_s + \frac{1}{36} \bar{s}_d \bar{s}_d \bar{s}_s - \frac{1}{18} \bar{s}_u \bar{s}_d \bar{s}_s \right]. \tag{C.190e}
\end{aligned}$$

Juntando as expressões (C.190) podemos escrever o determinante de $P_{\alpha\beta}$ como

$$\det P_{\alpha\beta} = 8G^3 - \frac{GK^2}{2} [\bar{s}_u \bar{s}_u + \bar{s}_d \bar{s}_d + \bar{s}_s \bar{s}_s] + \frac{K^3}{4} \bar{s}_u \bar{s}_d \bar{s}_s = \frac{\Delta}{4}. \tag{C.191}$$

Precisamos agora encontrar os menores da matriz (C.185) para encontrar a sua adjunta, e, em seguida, sua inversa.

Elemento t_{00} O menor t_{00} é

$$t_{00} = P_{00}^{\text{adj}} = \begin{vmatrix} P_{33} & P_{38} \\ P_{38} & P_{88} \end{vmatrix} = P_{33}P_{88} - P_{38}^2, \tag{C.192}$$

então

$$t_{00} = 4G^2 - \frac{2}{3} GK [\bar{s}_u + \bar{s}_d + \bar{s}_s] - \frac{K^2}{12} \left[\bar{s}_u \bar{s}_u + (\bar{s}_d - \bar{s}_s)^2 - 2\bar{s}_u (\bar{s}_d + \bar{s}_s) \right]. \tag{C.193}$$

Elemento t_{33} Este menor é

$$t_{33} = P_{33}^{\text{adj}} = \begin{vmatrix} P_{00} & P_{08} \\ P_{08} & P_{88} \end{vmatrix} = P_{00}P_{88} - P_{08}^2, \quad (\text{C.194})$$

então

$$t_{33} = 4G^2 + GK\bar{s}_s + K^2(\bar{s}_u + \bar{s}_d)^2. \quad (\text{C.195})$$

Elemento t_{88} O menor t_{88} é

$$t_{88} = P_{88}^{\text{adj}} = \begin{vmatrix} P_{00} & P_{03} \\ P_{03} & P_{33} \end{vmatrix} = P_{00}P_{33} - P_{03}^2, \quad (\text{C.196})$$

e então

$$t_{88} = 4G^2 + \frac{GK}{3}[2(\bar{s}_u\bar{s}_u + \bar{s}_d\bar{s}_d) - \bar{s}_s\bar{s}_s] - \frac{K^2}{24}[(\bar{s}_u - \bar{s}_d)^2 + 4\bar{s}_s(\bar{s}_u + \bar{s}_d) + 4\bar{s}_s\bar{s}_s]. \quad (\text{C.197})$$

Elemento t_{03} Este menor é

$$t_{03} = P_{03}^{\text{adj}} = \begin{vmatrix} P_{08} & P_{03} \\ P_{88} & P_{38} \end{vmatrix} = P_{08}P_{38} - P_{03}P_{88}, \quad (\text{C.198})$$

e assim

$$t_{03} = \frac{K}{4\sqrt{6}}(\bar{s}_u - \bar{s}_d)[4G - K(\bar{s}_u + \bar{s}_d - \bar{s}_s)]. \quad (\text{C.199})$$

Elemento t_{08} Este menor é

$$t_{08} = P_{08}^{\text{adj}} = \begin{vmatrix} P_{03} & P_{08} \\ P_{33} & P_{38} \end{vmatrix} = P_{03}P_{38} - P_{08}P_{33}, \quad (\text{C.200})$$

logo

$$t_{08} = \frac{K}{12\sqrt{2}} \left\{ 4G(\bar{s}_u + \bar{s}_d - 2\bar{s}_s) - K[(\bar{s}_u - \bar{s}_d)^2 + \bar{s}_s(\bar{s}_u + \bar{s}_d) - 2\bar{s}_s\bar{s}_s] \right\}. \quad (\text{C.201})$$

Elemento t_{38} Este menor é

$$t_{38} = P_{38}^{\text{adj}} = \begin{vmatrix} P_{08} & P_{00} \\ P_{38} & P_{03} \end{vmatrix} = P_{08}P_{03} - P_{00}P_{38}, \quad (\text{C.202})$$

e assim

$$t_{38} = \frac{K}{8\sqrt{3}}(\bar{s}_u - \bar{s}_d)[-8G - K(\bar{s}_u + \bar{s}_d - 2\bar{s}_s)]. \quad (\text{C.203})$$

A inversa da matriz $P_{\alpha\beta}$ é dada pela matriz simétrica $T_{\alpha\beta}$

$$T_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} T_{00} & T_{03} & T_{08} \\ T_{03} & T_{33} & T_{38} \\ T_{08} & T_{38} & T_{88} \end{pmatrix} \quad (\text{C.204})$$

em que cada elemento é dado por

$$T_{\alpha\beta} = \frac{t_{\alpha\beta}}{\Delta/4} = \frac{4t_{\alpha\beta}}{\Delta}$$

com o determinante de $P_{\alpha\beta}$ dado por

$$\Delta = 32G^3 - 2GK^2(\bar{s}_u\bar{s}_u + \bar{s}_d\bar{s}_d + \bar{s}_s\bar{s}_s) + K^3\bar{s}_u\bar{s}_d\bar{s}_s \quad (\text{C.205})$$

Então, cada elemento de $T_{\alpha\beta}$ é

$$T_{00} = \frac{1}{3\Delta} \left\{ 48G^2 - 8GK(\bar{s}_u + \bar{s}_d + \bar{s}_s) - K^2 \left[\bar{s}_u\bar{s}_u + (\bar{s}_d - \bar{s}_s)^2 - 2\bar{s}_u(\bar{s}_d + \bar{s}_s) \right] \right\}, \quad (\text{C.206a})$$

$$T_{33} = \frac{1}{2\Delta} \left\{ 32G^2 + 8GK\bar{s}_s - K^2(\bar{s}_u + \bar{s}_d)^2 \right\}, \quad (\text{C.206b})$$

$$T_{88} = \frac{1}{6\Delta} \left\{ 96G^2 + 8GK[2(\bar{s}_u\bar{s}_u + \bar{s}_d\bar{s}_d) - \bar{s}_s\bar{s}_s] - K^2 \left[(\bar{s}_u - \bar{s}_d)^2 + 4\bar{s}_s(\bar{s}_u + \bar{s}_d) + 4\bar{s}_s\bar{s}_s \right] \right\}, \quad (\text{C.206c})$$

$$T_{03} = \frac{K}{\sqrt{6}\Delta}(\bar{s}_u - \bar{s}_d)[4G - K(\bar{s}_u + \bar{s}_d - \bar{s}_s)], \quad (\text{C.206d})$$

$$T_{08} = \frac{K}{3\sqrt{2}\Delta} \left\{ 4G(\bar{s}_u + \bar{s}_d - 2\bar{s}_s) - K \left[(\bar{s}_u - \bar{s}_d)^2 + \bar{s}_s(\bar{s}_u + \bar{s}_d) - 2\bar{s}_s\bar{s}_s \right] \right\}, \quad (\text{C.206e})$$

$$T_{38} = \frac{K}{2\sqrt{3}\Delta}(\bar{s}_u - \bar{s}_d)[-8G - K(\bar{s}_u + \bar{s}_d - 2\bar{s}_s)]. \quad (\text{C.206f})$$

Apêndice D

Cálculos do Capítulo 4

D.1 Condensado

D.1.1 Cálculo do traço no condensado

Precisamos calcular o termo do traço. Considerando (4.3), ficamos com

$$\begin{aligned} \text{tr } \tilde{\mathcal{S}}_p^f = \int_0^\infty d\tau \exp \left[-\tau \left(M_f^2 + p_{\parallel}^2 + p_{\perp}^2 \frac{\tanh(B_f \tau)}{B_f \tau} \right) \right] \text{tr} \left\{ [-(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\parallel} + M_f] \right. \\ \left. \times [1 + i\gamma_1 \gamma_2 s_f \tanh(B_f \tau)] - \frac{(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\perp}}{\cosh^2(B_f \tau)} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{D.1})$$

Definimos o termo do traço de (D.1) como

$$\mathbf{t} = \text{tr} \left\{ [-(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\parallel} + M_f] [1 + i\gamma_1 \gamma_2 s_f \tanh(B_f \tau)] - \frac{(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\perp}}{\cosh^2(B_f \tau)} \right\}, \quad (\text{D.2})$$

então

$$\text{tr } \tilde{\mathcal{S}}_p^f = \int_0^\infty d\tau \exp \left[-\tau \left(M_f^2 + p_{\parallel}^2 + p_{\perp}^2 \frac{\tanh(B_f \tau)}{B_f \tau} \right) \right] \times \mathbf{t}. \quad (\text{D.3})$$

Calculando o traço (D.2), teremos

$$\mathbf{t} = \text{tr} \left\{ -(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\parallel} - (\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\parallel} \gamma_1 \gamma_2 i s_f \tanh(B_f \tau) + M_f + M_f i \gamma_1 \gamma_2 s_f \tanh(B_f \tau) - \frac{(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\perp}}{\cosh^2(B_f \tau)} \right\}.$$

em que consideramos que $\text{tr}[\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\gamma \dots] = 0$ quando temos um número ímpar de matrizes γ (em azul) e $\text{tr}[\gamma_\mu \gamma_\nu] = 0$ quando $\mu \neq \nu$ (em vermelho). Assim, o traço fica

$$t = 4M_f. \quad (\text{D.4})$$

Substituindo (D.4) em (D.3)

$$\text{tr} \tilde{S}_p^f = \int_0^\infty d\tau \exp \left[-\tau \left(M_f^2 + p_\parallel^2 + p_\perp^2 \frac{\tanh(B_f \tau)}{B_f \tau} \right) \right] 4M_f, \quad (\text{D.5})$$

e substituindo (D.5) em (4.7)

$$\langle \bar{\psi}_f \psi_f \rangle = -\frac{N_c}{(2\pi)^4} 4M_f \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \int_0^\infty d\tau \exp \left[-\tau \left(M_f^2 + p_\parallel^2 + p_\perp^2 \frac{\tanh(B_f \tau)}{B_f \tau} \right) \right]. \quad (\text{D.6})$$

D.1.2 Integrais em p do condensado

Integral I_1 do condensado

A integral I_1 é dada por

$$I_1 = \int d^2 p_\parallel \exp(-\tau p_\parallel^2).$$

Podemos escrever

$$d^2 p_\parallel = dp_3 dp_4,$$

$$p_\parallel^2 = p_3^2 + p_4^2,$$

e então a integral fica

$$I_1 = \int dp_3 dp_4 \exp[-\tau(p_3^2 + p_4^2)],$$

$$= \int dp_3 \exp(-\tau p_3^2) \int dp_4 \exp(-\tau p_4^2). \quad (\text{D.7})$$

Temos a integral gaussiana

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-i\alpha x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\alpha}}, \quad (\text{D.8})$$

então

$$\boxed{I_1 = \frac{\pi}{\tau}}. \quad (\text{D.9})$$

Integral I_2 do condensado

$$I_2 = \int d^2 p_{\perp} \exp \left[-\tau p_{\perp}^2 \frac{\tanh(B_f \tau)}{B_f \tau} \right].$$

Considerando

$$d^2 p_{\perp} = dp_1 dp_2;$$

$$p_{\perp}^2 = p_1^2 + p_2^2;$$

a integral fica

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} dp_1 \exp \left[-\frac{\tanh(B_f \tau)}{B_f} p_1^2 \right] \int_{-\infty}^{\infty} dp_2 \exp \left[-\frac{\tanh(B_f \tau)}{B_f} p_2^2 \right]. \quad (\text{D.10})$$

Novamente temos integrais do tipo (D.8), então

$$\boxed{I_2 = \frac{B_f \pi}{\tanh(B_f \tau)}}. \quad (\text{D.11})$$

D.2 Polarizador para $f = f'$

D.2.1 Integração em x, x', p' e q'

Temos a integral

$$I_{ff} = \int d^4x d^4x' \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{d^4p'}{(2\pi)^4} \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{d^4q'}{(2\pi)^4} \delta\pi_\alpha(q') \delta\pi_\beta(q) \\ \times 2N_c \text{tr} [\tilde{\mathcal{S}}_p^f \gamma_5 \tilde{\mathcal{S}}_{p'}^f \gamma_5] e^{i(p-p')(x-x')} e^{-iqx} e^{iq'x'}. \quad (\text{D.12})$$

Organizando as exponenciais,

$$\int \frac{d^4x}{(2\pi)^4} \frac{d^4x'}{(2\pi)^4} e^{i(p-p')(x-x')} e^{-iqx} e^{iq'x'} = \int \frac{d^4x}{(2\pi)^4} \frac{d^4x'}{(2\pi)^4} e^{ipx} e^{-ip'x} e^{-ipx'} e^{ip'x'} e^{-iqx} e^{iq'x'}, \\ = \int \frac{d^4x}{(2\pi)^4} \frac{d^4x'}{(2\pi)^4} e^{ix(p-p'-q)} e^{ix'(p'-p+q')},$$

e integrando em x e x'

$$\int \frac{d^4x}{(2\pi)^4} \frac{d^4x'}{(2\pi)^4} e^{i(p-p')(x-x')} e^{-iqx} e^{iq'x'} = \delta^{(4)}[-p' + (p - q)] \delta^{(4)}[p' - (p - q')], \\ = \delta^{(4)}[p' - (p - q')]. \quad (\text{D.13})$$

Substituindo na integral (D.12)

$$I_{ff} = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{d^4q}{(2\pi)^4} d^4p' d^4q' \delta\pi_\alpha(q') \delta\pi_\beta(q) 2N_c \text{tr} [\tilde{\mathcal{S}}_p^f \gamma_5 \tilde{\mathcal{S}}_{p'}^f \gamma_5] \\ \times \delta^{(4)}[p' - (p - q)] \delta^{(4)}[p' - (p - q')].$$

Integrando em p' e em q'

$$I_{ff} = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \delta\pi_\alpha(-q) \delta\pi_\beta(q) 2N_c \text{tr} [\tilde{\mathcal{S}}_p^f \gamma_5 \tilde{\mathcal{S}}_{p-q}^f], \quad (\text{D.14})$$

e fazendo a substituição

$$p = p' + \frac{q}{2}, \quad \Rightarrow \quad p - q = p' - \frac{q}{2}, \quad (\text{D.15})$$

podemos reescrever a integral (D.14) como¹

¹ Por simplicidade, faremos $p \rightarrow p'$

$$I_{ff} = \int \frac{d^4\mathbf{p}}{(2\pi)^4} \frac{d^4\mathbf{q}}{(2\pi)^4} \delta\pi_\alpha(-\mathbf{q}) \delta\pi_\beta(\mathbf{q}) 2N_c \text{tr} \left[\tilde{\mathcal{S}}_{\mathbf{p}+\frac{\mathbf{q}}{2}} \gamma_5 \tilde{\mathcal{S}}_{\mathbf{p}-\frac{\mathbf{q}}{2}} \gamma_5 \right]. \quad (\text{D.16})$$

Definindo

$$\mathbf{p}_\pm = \mathbf{p} \pm \frac{\mathbf{q}}{2}, \quad (\text{D.17})$$

temos

$$I_{ff} = \int \frac{d^4\mathbf{q}}{(2\pi)^4} \delta\pi_\alpha(-\mathbf{q}) \delta\pi_\beta(\mathbf{q}) \mathbf{G}_{ff}, \quad (\text{D.18})$$

com

$$\mathbf{G}_{ff}(\mathbf{q}) = 2N_c \int \frac{d^4\mathbf{p}}{(2\pi)^4} \text{tr} \left[\tilde{\mathcal{S}}_{\mathbf{p}_+}^f \gamma_5 \tilde{\mathcal{S}}_{\mathbf{p}_-}^f \gamma_5 \right]. \quad (\text{D.19})$$

D.2.2 Cálculo do traço

Substituindo (4.3) no traço em (4.22), temos

$$\begin{aligned} \text{tr} \left[\tilde{\mathcal{S}}_{\mathbf{p}_+}^f \gamma_5 \tilde{\mathcal{S}}_{\mathbf{p}_-}^f \gamma_5 \right] &= \int d\tau d\tau' \exp \left[-\tau \left(M_f^2 + \mathbf{p}_{+\parallel}^2 + \mathbf{p}_{-\perp}^2 \frac{\tanh(\mathbf{B}_f \tau)}{\mathbf{B}_f \tau} \right) \right] \\ &\quad \exp \left[-\tau' \left(M_f^2 + \mathbf{p}_{-\parallel}^2 + \mathbf{p}_{-\perp}^2 \frac{\tanh(\mathbf{B}_f \tau')}{\mathbf{B}_f \tau'} \right) \right] \\ &\quad \text{tr} \left\{ \left[[-(\mathbf{p}_+ \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\parallel} + M_f] [1 - i\gamma_1 \gamma_2 \mathbf{s}_f \tanh(\mathbf{B}_f \tau)] - \frac{(\mathbf{p}_+ \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\perp}}{\cosh^2(\mathbf{B}_f \tau)} \right] \gamma_5 \right. \\ &\quad \left. \left[[-(\mathbf{p}_- \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\parallel} + M_f] [1 - i\gamma_1 \gamma_2 \mathbf{s}_f \tanh(\mathbf{B}_f \tau')] - \frac{(\mathbf{p}_- \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\perp}}{\cosh^2(\mathbf{B}_f \tau')} \right] \gamma_5 \right\}. \end{aligned}$$

Definimos o termo que envolve as matrizes $\boldsymbol{\gamma}$ como

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &= \text{tr} \left\{ \left[[-(\mathbf{p}_+ \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\parallel} + M_f] \Pi_f(\tau) - \frac{(\mathbf{p}_+ \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\perp}}{\cosh^2(\mathbf{B}_f \tau)} \right] \gamma_5 \right. \\ &\quad \left. \times \left[[-(\mathbf{p}_- \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\parallel} + M_f] \Pi_f(\tau') - \frac{(\mathbf{p}_- \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\perp}}{\cosh^2(\mathbf{B}_f \tau')} \right] \gamma_5 \right\}, \quad (\text{D.20}) \end{aligned}$$

onde

$$\Pi_f(\tau) = 1 - i\gamma_1\gamma_2s_f \tanh(B_f\tau).$$

Considerando

$$\begin{aligned}\gamma_5(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\parallel} &= -(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\parallel}\gamma_5, \\ \gamma_5(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\perp} &= -(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\perp}\gamma_5, \\ \gamma_5\Pi_f(\tau) &= \Pi_f(\tau)\gamma_5,\end{aligned}$$

reescrevemos a equação (D.20) como

$$\begin{aligned}\mathbf{t} = \text{tr} \left\{ \left[-(\mathbf{p}_+ \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\parallel} + M_f \right] \Pi_f(\tau) - \frac{(\mathbf{p}_+ \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\perp}}{\cosh^2(B_f\tau)} \right. \\ \left. \times \left[-(\mathbf{p}_- \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\parallel} + M_f \right] \Pi_f(\tau') - \frac{(\mathbf{p}_- \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\perp}}{\cosh^2(B_f\tau')} \right\},\end{aligned}\quad (\text{D.21})$$

e, abrindo os produtos,

$$\begin{aligned}\mathbf{t} = \text{tr} \left\{ -(\mathbf{p}_+ \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\parallel} \Pi_f(\tau) (\mathbf{p}_- \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\parallel} \Pi_f(\tau') - \cancel{(\mathbf{p}_+ \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\parallel} \Pi_f(\tau) M_f \Pi_f(\tau')} \right. \\ - (\mathbf{p}_+ \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\parallel} \Pi_f(\tau) \frac{(\mathbf{p}_- \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\perp}}{\cosh^2(B_f\tau')} + \cancel{M_f \Pi_f(\tau) (\mathbf{p}_- \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\parallel} \Pi_f(\tau')} + M_f \Pi_f(\tau) M_f \Pi_f(\tau') \\ + \cancel{M_f \Pi_f(\tau) \frac{(\mathbf{p}_- \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\perp}}{\cosh^2(B_f\tau')}} - \frac{(\mathbf{p}_+ \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\perp}}{\cosh^2(B_f\tau)} (\mathbf{p}_- \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\parallel} \Pi_f(\tau') - \cancel{\frac{(\mathbf{p}_+ \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\perp}}{\cosh^2(B_f\tau)} M_f \Pi_f(\tau')} \\ \left. - \frac{(\mathbf{p}_+ \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\perp}}{\cosh^2(B_f\tau)} \frac{(\mathbf{p}_- \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\perp}}{\cosh^2(B_f\tau')} \right\},\end{aligned}$$

em que consideramos que $\text{tr}[\gamma_{\mu}\gamma_{\nu}\gamma_{\beta}\dots] = 0$ para um número ímpar de matrizes γ (em vermelho). Então, podemos expressar \mathbf{t} como

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_2 + \mathbf{t}_3 + \mathbf{t}_4 + \mathbf{t}_5, \quad (\text{D.22})$$

com

$$\begin{aligned}
\mathbf{t}_1 &= -\operatorname{tr}[(\mathbf{p}_+ \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\parallel} \Pi_f(\boldsymbol{\tau})(\mathbf{p}_- \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\parallel} \Pi_f(\boldsymbol{\tau}')], \\
\mathbf{t}_2 &= -\operatorname{tr}\left[(\mathbf{p}_+ \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\parallel} \Pi_f(\boldsymbol{\tau}) \frac{(\mathbf{p}_- \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\perp}}{\cosh^2(\mathbf{B}_f \boldsymbol{\tau}')}\right], \\
\mathbf{t}_3 &= \operatorname{tr}[\mathbf{M}_f \Pi_f(\boldsymbol{\tau}) \mathbf{M}_f \Pi_f(\boldsymbol{\tau}')], \\
\mathbf{t}_4 &= -\operatorname{tr}\left[\frac{(\mathbf{p}_+ \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\perp}}{\cosh^2(\mathbf{B}_f \boldsymbol{\tau})} (\mathbf{p}_- \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\parallel} \Pi_f(\boldsymbol{\tau}')\right], \\
\mathbf{t}_5 &= -\operatorname{tr}\left[\frac{(\mathbf{p}_+ \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\perp}}{\cosh^2(\mathbf{B}_f \boldsymbol{\tau})} \frac{(\mathbf{p}_- \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\perp}}{\cosh^2(\mathbf{B}_f \boldsymbol{\tau}')}\right].
\end{aligned}$$

Calcularemos estes traços separadamente. Nestes cálculos consideraremos a propriedade

$$(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\parallel} \Pi_f(\boldsymbol{\tau}) = \Pi_f(\boldsymbol{\tau})(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\parallel}.$$

Termo \mathbf{t}_1 Temos

$$\begin{aligned}
\mathbf{t}_1 &= -\operatorname{tr}[(\mathbf{p}_+ \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\parallel} \Pi_f(\boldsymbol{\tau})(\mathbf{p}_- \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\parallel} \Pi_f(\boldsymbol{\tau}')], \\
&= -\operatorname{tr}[(\mathbf{p}_+ \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\parallel} (\mathbf{p}_- \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\parallel} \Pi_f(\boldsymbol{\tau}) \Pi_f(\boldsymbol{\tau}')].
\end{aligned}$$

Calculando cada produto separadamente teremos

$$(\mathbf{p}_+ \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\parallel} (\mathbf{p}_- \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\parallel} = -(\mathbf{p}_+ \cdot \mathbf{p}_-)_{\parallel} + (\mathbf{p}_4^- \mathbf{p}_3^- - \mathbf{p}_3^+ \mathbf{p}_4^-) \gamma_4 \gamma_3, \quad (\text{D.23})$$

$$\Pi_f(\boldsymbol{\tau}) \Pi_f(\boldsymbol{\tau}') = \left\{ 1 + \cancel{s_f^2}^1 \tanh(\mathbf{B}_f \boldsymbol{\tau}) \tanh(\mathbf{B}_f \boldsymbol{\tau}') + s_f [\tanh(\mathbf{B}_f \boldsymbol{\tau}) + \tanh(\mathbf{B}_f \boldsymbol{\tau}')] i \gamma_1 \gamma_2 \right\}. \quad (\text{D.24})$$

Substituindo em \mathbf{t}_1

$$\boxed{\mathbf{t}_1 = 4(\mathbf{p}_+ \cdot \mathbf{p}_-)_{\parallel} [1 + \tanh(\mathbf{B}_f \boldsymbol{\tau}) \tanh(\mathbf{B}_f \boldsymbol{\tau}')],}$$

em que consideramos as propriedades

$$\begin{aligned}\text{tr}(\gamma_i \gamma_j) &= 0 \quad \text{se } i \neq j, \\ \text{tr}(\gamma_4 \gamma_3 \gamma_2 \gamma_1) &= \text{tr}(-\gamma_5) = 0.\end{aligned}$$

Termo t_2 Temos

$$t_2 = -\frac{1}{\cosh^2(\mathbf{B}_{f'} \boldsymbol{\tau}')} \text{tr}[(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\parallel} \Pi_f(\boldsymbol{\tau})(\mathbf{p}' \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\perp}].$$

Podemos continuar o cálculo de duas formas

1. Pela propriedade cíclica do traço

$$t_2 = -\frac{1}{\cosh^2(\mathbf{B}_{f'} \boldsymbol{\tau}')} \text{tr}[\Pi_f(\boldsymbol{\tau})(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\parallel}(\mathbf{p}' \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\perp}].$$

2. Pela equação (D.124)

$$t_2 = -\frac{1}{\cosh^2(\mathbf{B}_{f'} \boldsymbol{\tau}')} \text{tr}[\Pi_f(\boldsymbol{\tau})].$$

Precisamos ver qual a relação de comutação entre $(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\parallel}$ e $(\mathbf{p}' \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\perp}$. Após algumas manipulações, obtemos

$$(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\parallel}(\mathbf{p}' \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\perp} = -(\mathbf{p}' \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\perp}(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\parallel},$$

então podemos reescrever t_2 como

$$t_2 = \frac{-1}{\cosh^2(\mathbf{B}_{f'} \boldsymbol{\tau}')} \text{tr}[\Pi_f(\mathbf{p}' \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\perp}(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\parallel}] = \frac{-1}{\cosh^2(\mathbf{B}_{f'} \boldsymbol{\tau}')} \text{tr}[\Pi_f(-1)(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\parallel}(\mathbf{p}' \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\perp}],$$

e o argumento do traço fica

$$\Pi_f(\boldsymbol{\tau})(\mathbf{p}' \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\perp}(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\parallel} = -\Pi_f(\boldsymbol{\tau})(\mathbf{p}' \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\perp}(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\parallel},$$

o que só pode ser verdade quando o argumento é igual a zero. Então

$$\boxed{t_2 = 0.} \tag{D.25}$$

Termo t_3 Temos

$$t_3 = M_f^2 \text{tr}[\Pi_f(\boldsymbol{\tau})\Pi_f(\boldsymbol{\tau}')].$$

Pela equação (D.24),

$$t_3 = 4M_f^2[1 + \tanh(B_f\boldsymbol{\tau}) \tanh(B_f\boldsymbol{\tau}')].$$

Termo t_4 Considerando o mesmo argumento de t_2 em D.2.2,

$$t_4 = -\text{tr}\left[\frac{(\mathbf{p}_+ \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\perp}}{\cosh^2(B_f\boldsymbol{\tau})} (\mathbf{p}_- \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\parallel} \Pi_f(\boldsymbol{\tau}')\right] = 0.$$

Termo t_5 Temos

$$\begin{aligned} t_5 &= -\text{tr}\left[\frac{(\mathbf{p}_+ \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\perp}}{\cosh^2(B_f\boldsymbol{\tau})} \frac{(\mathbf{p}_- \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\perp}}{\cosh^2(B_f\boldsymbol{\tau}')}\right], \\ &= \frac{-1}{\cosh^2(B_f\boldsymbol{\tau}) \cosh^2(B_f\boldsymbol{\tau}')} \text{tr}[(\mathbf{p}_+ \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\perp} (\mathbf{p}_- \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\perp}]. \end{aligned}$$

Considerando

$$\text{tr}[(\mathbf{p}_+ \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\perp} (\mathbf{p}_- \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\perp}] = -4(\mathbf{p}_+ \cdot \mathbf{p}_-)_{\perp},$$

então

$$t_5 = \frac{4(\mathbf{p}_+ \cdot \mathbf{p}_-)_{\perp}}{\cosh^2(B_f\boldsymbol{\tau}) \cosh^2(B_f\boldsymbol{\tau}')}.$$

Finalmente, podemos escrever o traço t como

$$t = 4 \left\{ [(\mathbf{p}_+ \cdot \mathbf{p}_-)_{\parallel} + M_f^2][1 + \tanh(B_f\boldsymbol{\tau}) \tanh(B_f\boldsymbol{\tau}')] + \frac{(\mathbf{p}_+ \cdot \mathbf{p}_-)_{\perp}}{\cosh^2(B_f\boldsymbol{\tau}) \cosh^2(B_f\boldsymbol{\tau}')} \right\}.$$

(D.26)

D.2.3 Integração em p_{\parallel}

Antes de começarmos a integração, devemos levar em conta que

$$(\mathbf{p}_+ \cdot \mathbf{p}_-)_{\parallel} = p_{\parallel}^2 + \frac{q_{\parallel}^2}{2}.$$

Temos integrais do tipo

$$\begin{aligned} \int d^2\mathbf{p}_{\parallel} \exp\left[-(p_{+\parallel}^2 \tau + p_{-\parallel}^2 \tau')\right] \cdot [1, p_{\parallel}^2] = \\ \int d^2\mathbf{p}_{\parallel} \exp\left\{-\left[\left(p_{\parallel} + \frac{q_{\parallel}}{2}\right)^2 \tau + \left(p_{\parallel} - \frac{q_{\parallel}}{2}\right)^2 \tau'\right]\right\} [1, p_{\parallel}^2] \equiv I_{1,2}, \end{aligned} \quad (\text{D.27})$$

ou seja,

$$\begin{aligned} I_1 &= \int d^2\mathbf{p}_{\parallel} \exp\left\{-\left[\left(p_{\parallel} + \frac{q_{\parallel}}{2}\right)^2 \tau + \left(p_{\parallel} - \frac{q_{\parallel}}{2}\right)^2 \tau'\right]\right\}, \\ I_2 &= \int d^2\mathbf{p}_{\parallel} p_{\parallel}^2 \exp\left\{-\left[\left(p_{\parallel} + \frac{q_{\parallel}}{2}\right)^2 \tau + \left(p_{\parallel} - \frac{q_{\parallel}}{2}\right)^2 \tau'\right]\right\}. \end{aligned}$$

Integral I_1

A primeira integral que precisamos calcular é

$$I_1 = \int d^2\mathbf{p}_{\parallel} \exp\left\{-\left[\left(p_{\parallel} + \frac{q_{\parallel}}{2}\right)^2 \tau + \left(p_{\parallel} - \frac{q_{\parallel}}{2}\right)^2 \tau'\right]\right\}. \quad (\text{D.28})$$

Para expressarmos a integral em coordenadas polares, precisamos reescrever as variáveis como

- $\int d^2\mathbf{p}_{\parallel} = \int dp_3 dp_4 = \int d\theta \int |\mathbf{p}_{\parallel}| dp_{\parallel} = \int d\theta \int du u,$
- $\mathbf{u} = (p_3^2 + p_4^2)^{\frac{1}{2}} = |\mathbf{p}_{\parallel}|,$
- $p_3 = |\mathbf{p}_{\parallel}| \cos \theta = u \cos \theta,$
- $p_4 = |\mathbf{p}_{\parallel}| \sin \theta = u \sin \theta,$

$$\bullet \quad \mathbf{q}_{\parallel} = |\vec{\mathbf{q}}_{\parallel}| = (\mathbf{q}_3^2 + \mathbf{q}_4^2)^{\frac{1}{2}},$$

e então a integral fica

$$I_1 = \int_0^{\infty} du \, u \exp \left\{ - \left[\mathbf{u}^2 (\tau + \tau') + \frac{\mathbf{q}_{\parallel}^2}{4} (\tau + \tau') \right] \right\} \int_0^{2\pi} d\theta \exp [- (\tau - \tau') u \mathbf{q}_{\parallel} \cos \theta].$$

A parte angular desta expressão é resolvida ao utilizarmos a integral notável²

$$\int_0^{2\pi} d\theta e^{-\lambda \cos \theta} = 2\pi I_0(\lambda), \quad (\text{D.29})$$

em que I_0 é a função de Bessel modificada de primeira espécie. Assim, I_1 fica

$$I_1 = \int_0^{\infty} du \, u \exp [- (\tau + \tau') u^2] 2\pi I_0 [(\tau - \tau') u \mathbf{q}_{\parallel}] \exp \left[- \frac{(\tau - \tau')}{4} \mathbf{q}_{\parallel}^2 \right].$$

Esta integral é tabelada³

$$\int_0^{\infty} dx \, x e^{-px^2} I_0(cx) = A_0^2 = \frac{1}{2p} \exp \left(\frac{c^2}{4p} \right), \quad (\text{D.30})$$

então

$$\boxed{I_1 = \frac{\pi}{(\tau + \tau')} \exp \left(- \frac{\tau \tau'}{\tau + \tau'} \mathbf{q}_{\parallel}^2 \right)}. \quad (\text{D.31})$$

Integral I_2

A segunda integral que queremos encontrar é

$$I_2 = \int d^2 \mathbf{p}_{\parallel} \, \mathbf{p}_{\parallel}^2 \exp \left\{ - \left[\left(\mathbf{p}_{\parallel} + \frac{\mathbf{q}_{\parallel}}{2} \right)^2 \tau + \left(\mathbf{p}_{\parallel} - \frac{\mathbf{q}_{\parallel}}{2} \right)^2 \tau' \right] \right\}. \quad (\text{D.32})$$

²Equação 3.339, p.340 de [158].

³Página 306, [176].

Da mesma forma que fizemos com I_1 , reescrevemos I_2 em coordenadas polares e integramos em θ usando a expressão (D.29) para obtermos

$$I_2 = \int_0^\infty du u^3 \exp[-(\tau + \tau')u^2] 2\pi I_0[(\tau - \tau')u q_{\parallel}] \exp\left[-\frac{(\tau + \tau')}{4} q_{\parallel}^2\right].$$

Utilizamos a propriedade

$$\int_0^\infty dx x^3 e^{-px^2} I_0(cx) = -\frac{\partial}{\partial p} \int_0^\infty dx x e^{-ipx^2} I_0(cx) = \frac{1}{2p^2} \left[1 + \frac{c^2}{4p}\right] e^{\frac{c^2}{4p}}, \quad (\text{D.33})$$

então

$$I_2 = \frac{\pi}{(\tau + \tau')^2} \left[1 + \frac{(\tau - \tau')^2}{4(\tau + \tau')} q_{\parallel}^2\right] \exp\left[-\frac{\tau\tau'}{(\tau + \tau')} q_{\parallel}^2\right]. \quad (\text{D.34})$$

Substituindo (D.31) e (D.34) na equação (4.26),

$$\begin{aligned} G_{ff}(\mathbf{q}) &= \frac{8N_c}{(2\pi)^4} \pi \int d^2\mathbf{p}_\perp \int d\tau d\tau' \exp[-M_f^2(\tau + \tau')] \exp\left[-\frac{\tau\tau'}{(\tau + \tau')} q_\perp^2\right] \\ &\times \exp\left\{-\left[\tau p_{+\perp}^2 \frac{\tanh(B_f\tau)}{B_f\tau} + \tau' p_{-\perp}^2 \frac{\tanh(B_f\tau')}{B_f\tau'}\right]\right\} \\ &\times \left\{\frac{1}{(\tau + \tau')^2} \left[\left(M_f^2 - \frac{q_{\parallel}^2}{4}\right) [1 + \tanh(B_f\tau) \tanh(B_f\tau')] + \frac{(\mathbf{p}_+ \cdot \mathbf{p}_-)_{\perp}}{\cosh^2(B_f\tau) \cosh^2(B_f\tau')}\right]\right. \\ &\left. + \frac{1}{(\tau + \tau')^2} \left[1 + \frac{(\tau - \tau')^2}{(\tau + \tau')} \frac{q_{\parallel}^2}{4}\right] [1 + \tanh(B_f\tau) \tanh(B_f\tau')]\right\}. \quad (\text{D.35}) \end{aligned}$$

D.2.4 Integração em \mathbf{p}_\perp

Da mesma forma que fizemos pra \mathbf{p}_{\parallel} , temos integrais da forma

$$\begin{aligned} I_3 &= \int d^2\mathbf{p}_\perp \exp\left\{-\left[\left(\mathbf{p}_\perp + \frac{\mathbf{q}_\perp}{2}\right)^2 t + \left(\mathbf{p}_\perp - \frac{\mathbf{q}_\perp}{2}\right)^2 t'\right]\right\}, \\ I_4 &= \int d^2\mathbf{p}_\perp p_\perp^2 \exp\left\{-\left[\left(\mathbf{p}_\perp + \frac{\mathbf{q}_\perp}{2}\right)^2 t + \left(\mathbf{p}_\perp - \frac{\mathbf{q}_\perp}{2}\right)^2 t'\right]\right\}, \end{aligned}$$

onde definimos

$$t = \tanh(B_f \tau), \quad t' = \tanh(B_f \tau').$$

Integral I_3

A primeira integral que queremos calcular é

$$I_3 = \int d^2 p_{\perp} \exp \left\{ - \left[\left(p_{\perp} + \frac{q_{\perp}}{2} \right)^2 t + \left(p_{\perp} - \frac{q_{\perp}}{2} \right)^2 t' \right] \right\}. \quad (\text{D.36})$$

Expressando a integral em coordenadas polares,

$$\int d^2 p_{\perp} = \int dp_1 dp_2 = \int d\theta \int |p_{\perp}| dp_{\perp} = \int d\theta \int v dv,$$

com

- $v = (p_1^2 + p_2^2)^{\frac{1}{2}} = |p_{\perp}|,$
- $p_1 = |p_{\perp}| \cos \theta = v \cos \theta,$
- $p_2 = |p_{\perp}| \sin \theta = v \sin \theta,$
- $q_{\perp} = |\vec{q}_{\perp}| = (q_1^2 + q_2^2)^{\frac{1}{2}}.$

Então

$$I_3 = \int_0^{\infty} dv v \exp \left\{ - \left[v^2 (t + t') + \frac{q_{\perp}^2}{4B_f} (t + t') \right] \right\} \int_0^{2\pi} d\theta \exp \left[- \frac{(t - t')}{B_f} v q_{\perp} \cos \theta \right].$$

A parte angular é dada pela integral notável (D.29), assim

$$I_3 = \int_0^{\infty} dv v \exp \left[- \frac{t + t'}{B_f} v^2 \right] 2\pi I_0 \left[\frac{(t - t')}{B_f} v q_{\perp} \right] \exp \left[- \frac{(t + t')}{4B_f} q_{\perp}^2 \right].$$

Como vimos em (D.30), essa integral é tabelada. Então

$$\boxed{I_3 = \frac{\pi B_f}{(t + t')} \exp \left(- \frac{q_{\perp}^2}{B_f} \frac{tt'}{t + t'} \right)}. \quad (\text{D.37})$$

Integral I_4

Queremos resolver a integral

$$I_4 = \int d^2\mathbf{p}_\perp p_\perp^2 \exp\left\{-\left[\left(\mathbf{p}_\perp + \frac{\mathbf{q}_\perp}{2}\right)^2 t + \left(\mathbf{p}_\perp - \frac{\mathbf{q}_\perp}{2}\right)^2 t'\right]\right\}. \quad (\text{D.38})$$

Da mesma forma que fizemos com I_2 , obteremos

$$I_4 = \int_0^\infty dv v^3 \exp\left[-\frac{(t+t')}{B_f} v^2\right] 2\pi I_0\left[\frac{(t-t')}{B_f} v q_\perp\right] \exp\left[-\frac{(t+t')}{4B_f} q_\perp^2\right].$$

e pela propriedade (D.33),

$$I_4 = \frac{\pi B_f^2}{(t+t')^2} \left[1 + \frac{(t-t')^2}{(t+t')} \frac{q_\perp^2}{4B_f}\right] \exp\left[-\frac{q_\perp}{B_f} \frac{tt'}{(t+t')}\right]. \quad (\text{D.39})$$

Substituindo (D.37) e (D.38) na equação (D.35),

$$\begin{aligned} G_{ff}(\mathbf{q}) &= \frac{4 \cdot 2}{4 \cdot 4\pi^2} \frac{\pi^2}{\pi^2} \int_0^\infty d\tau d\tau' \exp[-M_f^2(\tau + \tau')] \exp\left[-\frac{\tau\tau'}{(\tau + \tau')} q_\parallel^2\right] \exp\left[-\frac{tt'}{(t+t')} q_\perp^2\right] \\ &\times \left\{ \frac{1}{(\tau + \tau')} \frac{1}{\cosh^2(B_f\tau) \cosh^2(B_f\tau')} \frac{B_f^2}{(t+t')} \left[1 + \frac{(t-t')^2}{(t+t')} \frac{q_\perp^2}{4B_f}\right] \right. \\ &+ \frac{B_f}{(t+t')} \left\{ \frac{1}{(\tau + \tau')} \left(M_f^2 - \frac{q_\parallel^2}{4}\right) [1 + tt'] - \frac{1}{4(\tau + \tau')} \frac{q_\perp^2}{\cosh^2(B_f\tau) \cosh^2(B_f\tau')} \right. \\ &\left. \left. + \frac{1}{(\tau + \tau')^2} \left[1 + \frac{(\tau - \tau')^2}{(\tau + \tau')} \frac{q_\parallel^2}{4}\right] [1 + tt'] \right\} \right\}. \quad (\text{D.40}) \end{aligned}$$

D.2.5 Mudança de variáveis de τ e τ'

Focaremos agora na mudança de variáveis

$$\tau = zy, \quad \tau' = z(1-y),$$

onde $z \in [0, \infty[$ e $y \in [0, 1]$. O jacobiano desta mudança é

$$\frac{\partial(\tau, \tau')}{\partial(z, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial\tau}{\partial z} & \frac{\partial\tau}{\partial y} \\ \frac{\partial\tau'}{\partial z} & \frac{\partial\tau'}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & z \\ (1-y) & -z \end{vmatrix} = |-zy - (1-y)z| = z. \quad (\text{D.41})$$

Precisamos reescrever alguns termos

$$\bullet \tau + \tau' = z, \quad (\text{D.42})$$

$$\bullet \tau - \tau' = (2y - 1)z, \quad (\text{D.43})$$

$$\bullet \frac{\tau\tau'}{(\tau + \tau')} = zy(1 - y), \quad (\text{D.44})$$

$$\bullet \frac{(\tau - \tau')^2}{(\tau + \tau')} = z(2y - 1), \quad (\text{D.45})$$

$$\bullet t + t' = \frac{\tanh(\mathbf{B}_f z) [1 - \tanh^2(\mathbf{B}_f zy)]}{[1 - \tanh(\mathbf{B}_f z) \tanh(\mathbf{B}_f zy)]}, \quad (\text{D.46})$$

$$\bullet t - t' = \frac{2 \tanh(\mathbf{B}_f zy) - [1 + \tanh^2(\mathbf{B}_f zy)] \tanh(\mathbf{B}_f z)}{1 - \tanh(\mathbf{B}_f z) \tanh(\mathbf{B}_f zy)}, \quad (\text{D.47})$$

$$\bullet tt' = \tanh(\mathbf{B}_f zy) \left[\frac{\tanh(\mathbf{B}_f z) - \tanh(\mathbf{B}_f zy)}{1 - \tanh(\mathbf{B}_f z) \tanh(\mathbf{B}_f zy)} \right], \quad (\text{D.48})$$

$$\bullet \frac{tt'}{t + t'} = \frac{\sinh(\mathbf{B}_f zy) \sinh[\mathbf{B}_f z(1 - y)]}{\sinh(\mathbf{B}_f z)}, \quad (\text{D.49})$$

$$\bullet (1 + tt') = \frac{1 - \tanh^2(\mathbf{B}_f zy)}{1 - \tanh(\mathbf{B}_f z) \tanh(\mathbf{B}_f zy)}, \quad (\text{D.50})$$

$$\bullet \frac{1 + tt'}{t + t'} = \coth(\mathbf{B}_f z), \quad (\text{D.51})$$

$$\bullet \frac{1}{\cosh^2(\mathbf{B}_f zy) \cosh^2[\mathbf{B}_f z(1 - y)]} = \frac{[1 - \tanh^2(\mathbf{B}_f zy)]^2 [1 - \tanh^2(\mathbf{B}_f z)]}{[1 - \tanh(\mathbf{B}_f z) \tanh(\mathbf{B}_f zy)]^2}, \quad (\text{D.52})$$

$$\bullet \frac{1}{\cosh^2(B_f z y) \cosh^2[B_f z(1-y)]} \frac{1}{(t+t')^2} = \frac{1}{\sinh^2(B_f z)}. \quad (\text{D.53})$$

D.2.6 Mudança de variáveis em τ e τ' - Organização da integral

Antes de substituir os termos calculados até aqui em $G_{ff}(\mathbf{q})$, precisamos organizá-los. A equação (4.27) fica

$$\begin{aligned} G_{ff}(\mathbf{q}) &= \frac{2N_c}{4\pi^2} B_f \int_0^\infty d\tau d\tau' \exp[-M_f^2(\tau + \tau')] \exp\left[-\frac{\tau\tau'}{(\tau + \tau')} q_{\parallel}^2\right] \exp\left[-\frac{tt'}{t+t'} \frac{q_{\perp}^2}{B_f}\right] \\ &\quad \frac{1}{(\tau + \tau')} \left\{ \frac{1}{\cosh^2(B_f\tau) \cosh^2(B_f\tau')} \frac{B_f}{(t+t')^2} + \frac{1}{\cosh^2(B_f\tau) \cosh^2(B_f\tau')} \frac{B_f}{(t+t')^2} \frac{(t-t')^2}{(t+t')} \frac{q_{\perp}^2}{4B_f} \right. \\ &\quad \left. + \left(M_f^2 - \frac{q_{\parallel}^2}{4}\right) \frac{(1+tt')}{(t+t')} - \frac{(t+t')}{(t+t')^2} \frac{1}{\cosh^2(B_f\tau) \cosh^2(B_f\tau')} \frac{q_{\perp}^2}{4} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{(\tau + \tau')} \left[1 + \frac{(\tau - \tau')^2}{\tau + \tau'} \frac{q_{\parallel}^2}{4} \right] \frac{(1+tt')}{t+t'} \right\}, \\ &= \frac{N_c}{2\pi^2} B_f \int_0^\infty d\tau d\tau' \exp\left[-M_f(\tau + \tau') - \frac{\tau\tau'}{\tau + \tau'} q_{\parallel}^2\right] \exp\left[-\frac{tt'}{t+t'} \frac{q_{\perp}^2}{B_f}\right] \frac{1}{(\tau + \tau')} \\ &\quad \left\{ \frac{1}{\cosh^2(B_f\tau) \cosh^2(B_f\tau')} \frac{B_f}{(t+t')^2} + \frac{1}{\cosh^2(B_f\tau) \cosh^2(B_f\tau')} \frac{1}{(t+t')^2} \frac{q_{\perp}^2}{4} \left[\frac{(t-t')^2}{t+t'} - (t+t') \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{(1+tt')}{t+t'} \left[\left(M_f^2 - \frac{q_{\parallel}^2}{4}\right) + \frac{1}{\tau + \tau'} \left[1 + \frac{(\tau - \tau')^2}{\tau + \tau'} \frac{q_{\parallel}^2}{4} \right] \right] \right\}. \end{aligned}$$

Considerando

$$\frac{(t+t')^2}{t+t'} - (t+t') = -\frac{4tt'}{t+t'},$$

então

$$\begin{aligned} G_{ff}(\mathbf{q}) &= \frac{N_c}{2\pi^2} B_f \int_0^\infty d\tau d\tau' \exp\left[-M_f^2(\tau + \tau') - \frac{\tau\tau'}{\tau + \tau'} q_{\parallel}^2\right] \exp\left[-\frac{tt'}{t+t'} \frac{q_{\perp}^2}{B_f}\right] \\ &\quad \times \frac{1}{(\tau + \tau')} \left\{ \frac{1}{\cosh^2(B_f\tau) \cosh^2(B_f\tau')} \frac{B_f}{(t+t')^2} \left[1 - \frac{q_{\perp}^2}{B_f} \frac{tt'}{t+t'} \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{(1+tt')}{t+t'} \left[\left(M_f^2 - \frac{q_{\parallel}^2}{4}\right) + \frac{1}{(\tau + \tau')} \left[1 + \frac{(\tau - \tau')^2}{\tau + \tau'} \frac{q_{\parallel}^2}{4} \right] \right] \right\}, \end{aligned}$$

em que deixamos em destaque as expressões que precisam ser substituídas. Ao considerarmos (D.42), (D.44), (D.45), (D.49), (D.51) e (D.53), teremos

$$\begin{aligned} G_{ff}(\mathbf{q}) = & \frac{N_c}{2\pi^2} B_f \int_0^\infty dz z \int_0^1 dy \exp \left[-M_f^2 z - zy(1-y)q_{\parallel}^2 \right] \\ & \times \exp \left[-\frac{\sinh(B_f zy) \sinh[B_f z(1-y)]}{\sinh(B_f z)} \frac{q_{\perp}^2}{B_f} \right] \\ & \times \frac{1}{z} \left\{ \coth(B_f z) \left[\left(M_f^2 - \frac{q_{\parallel}^2}{4} \right) + \frac{1}{z} \left[1 + z(2y-1) \frac{q_{\parallel}^2}{4} \right] \right] \right. \\ & \left. + \left\{ \frac{B_f}{\sinh^2(B_f z)} \left[1 - \frac{q_{\perp}^2}{B_f} \frac{\sinh(B_f zy) \sinh[B_f z(1-y)]}{\sinh(B_f z)} \right] \right\} \right\}, \end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned} G_{ff}(\mathbf{q}) = & \frac{N_c}{2\pi^2} B_f \int_0^\infty dz \int_0^1 dy \exp \left\{ -z \left[M_f^2 + y(1-y)q_{\parallel}^2 \right] \right\} \exp \left\{ -\frac{\sinh(B_f zy) \sinh[B_f z(1-y)]}{\sinh(B_f z)} \right\} \\ & \times \left\{ \coth(B_f z) \left[M_f^2 + \frac{1}{z} - y(1-y)q_{\parallel}^2 \right] \right. \\ & \left. + \frac{B_f}{\sinh^2(B_f z)} \left[1 - \frac{q_{\perp}^2}{B_f} \frac{\sinh(B_f zy) \sinh[B_f z(1-y)]}{\sinh(B_f z)} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{D.54})$$

D.3 Polarizador dos káons neutros

D.3.1 Fase de Schwinger

Podemos escrever as fases de Schwinger de (4.31) como

$$\Phi_f(\mathbf{x}, \mathbf{x}') + \Phi_{f'}(\mathbf{x}', \mathbf{x}) = \frac{iB}{2} (\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}'_1)(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}'_2)(\mathbf{q}_f - \mathbf{q}_{f'}).$$

Apesar de $f \neq f'$, as cargas são iguais, já que

$$\mathbf{q}_d = \mathbf{q}_s = -\frac{e}{3},$$

em que e é a carga do próton. Assim, as fases de Schwinger se cancelam, e ficamos com

$$\boxed{e^{i\Phi_f(\mathbf{x}, \mathbf{x}')} e^{i\Phi_{f'}(\mathbf{x}', \mathbf{x})} = 1.}$$

D.3.2 Integração em x , x' , p' e q'

Integrando em x e x' , utilizando a definição do delta de Dirac, temos

$$\int \frac{d^4x}{(2\pi)^4} \frac{d^4x'}{(2\pi)^4} e^{i(p-p')(x-x')} e^{iqx} e^{iq'x'} = \delta^{(4)}[p' - (p+q)] \delta^{(4)}[q' - (p-p')]. \quad (D.55)$$

Substituindo na integral (4.34) e integrando em p' e q'

$$I_M = 2N_c \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \text{tr} \left[\tilde{S}_p^f \gamma_5 \tilde{S}_{p+q}^{f'} \gamma_5 \right] \delta M^*(-q) \delta M(q). \quad (D.56)$$

Faremos a substituição

$$\begin{aligned} p &= p' + \frac{q}{2}, \\ p+q &= p' - \frac{q}{2} + q = p' + \frac{q}{2}, \end{aligned}$$

então⁴

$$I_M = 2N_c \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \text{tr} \left[\tilde{S}_{p-\frac{q}{2}}^f \gamma_5 \tilde{S}_{p+\frac{q}{2}}^{f'} \gamma_5 \right] \delta M^*(-q) \delta M(q). \quad (D.57)$$

Definindo

$$p_{\pm} = p \pm \frac{q}{2}, \quad (D.58)$$

teremos

$$I_M = 2N_c \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \text{tr} \left[\tilde{S}_{p_-}^f \gamma_5 \tilde{S}_{p_+}^{f'} \gamma_5 \right] \delta M^*(-q) \delta M(q). \quad (D.59)$$

⁴Por simplicidade $p' \rightarrow p$

D.3.3 Cálculo do Traço

Substituindo (4.3) no traço em (4.36), obtemos

$$\begin{aligned} \text{tr} \left[\tilde{\mathcal{S}}_{\mathbf{p}_-}^f \gamma_5 \tilde{\mathcal{S}}_{\mathbf{p}_+}^{f'} \gamma_5 \right] &= \text{tr} \left\{ \left[\int_0^\infty d\tau \exp \left[-\tau \left(M_f^2 + \mathbf{p}_{-\parallel}^2 + \mathbf{p}_{-\perp}^2 \frac{\tanh(\mathbf{B}_f \tau)}{\mathbf{B}_f \tau} \right) \right] \right. \right. \\ &\quad \left. \left[[-(\mathbf{p}_- \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\parallel} + M_f] [1 - \gamma_1 \gamma_2 s_f \tanh(\mathbf{B}_f \tau)] - \frac{(\mathbf{p}_- \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\perp}}{\cosh^2(\mathbf{B}_f \tau)} \right] \right] \gamma_5 \\ &\quad \left[\int_0^\infty d\tau' \exp \left[-\tau' \left(M_{f'}^2 + \mathbf{p}_{+\parallel}^2 + \mathbf{p}_{+\perp}^2 \frac{\tanh(\mathbf{B}_{f'} \tau')}{\mathbf{B}_{f'} \tau'} \right) \right] \right. \\ &\quad \left. \left[[-(\mathbf{p}_+ \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\parallel} + M_{f'}] [1 - \gamma_1 \gamma_2 s_{f'} \tanh(\mathbf{B}_{f'} \tau')] - \frac{(\mathbf{p}_+ \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\perp}}{\cosh^2(\mathbf{B}_{f'} \tau')} \right] \right] \gamma_5 \left. \right\}. \end{aligned}$$

Definimos

$$\Pi_f(\tau) = 1 + i\gamma_1 \gamma_2 s_f \tanh(\mathbf{B}_f \tau), \quad (\text{D.60})$$

então

$$\begin{aligned} \text{tr} \left[\tilde{\mathcal{S}}_{\mathbf{p}_-}^f \gamma_5 \tilde{\mathcal{S}}_{\mathbf{p}_+}^{f'} \gamma_5 \right] &= \int_0^\infty d\tau d\tau' \exp \left[-\tau \left(M_f^2 + \mathbf{p}_{-\parallel}^2 + \mathbf{p}_{-\perp}^2 \frac{\tanh(\mathbf{B}_f \tau)}{\mathbf{B}_f \tau} \right) \right] \\ &\quad \exp \left[-\tau' \left(M_{f'}^2 + \mathbf{p}_{+\parallel}^2 + \mathbf{p}_{+\perp}^2 \frac{\tanh(\mathbf{B}_{f'} \tau')}{\mathbf{B}_{f'} \tau'} \right) \right] \\ &\quad \times \text{tr} \left\{ \left[[-(\mathbf{p}_- \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\parallel} + M_f] \Pi_f(\tau) - \frac{(\mathbf{p}_- \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\perp}}{\cosh^2(\mathbf{B}_f \tau)} \right] \gamma_5 \right. \\ &\quad \left. \left[[-(\mathbf{p}_+ \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\parallel} + M_{f'}] \Pi_{f'}(\tau') - \frac{(\mathbf{p}_+ \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\perp}}{\cosh^2(\mathbf{B}_{f'} \tau')} \right] \gamma_5 \right\}. \quad (\text{D.61}) \end{aligned}$$

Definimos o termo que envolve as matrizes $\boldsymbol{\gamma}$ como

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &= \text{tr} \left\{ \left[[-(\mathbf{p}_- \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\parallel} + M_f] \Pi_f(\tau) - \frac{(\mathbf{p}_- \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\perp}}{\cosh^2(\mathbf{B}_f \tau)} \right] \gamma_5 \right. \\ &\quad \left. \times \left[[-(\mathbf{p}_+ \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\parallel} + M_{f'}] \Pi_{f'}(\tau') - \frac{(\mathbf{p}_+ \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\perp}}{\cosh^2(\mathbf{B}_{f'} \tau')} \right] \gamma_5 \right\}. \quad (\text{D.62}) \end{aligned}$$

Considerando

$$\gamma_5 (\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\parallel} = -(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\parallel} \gamma_5, \quad (\text{D.63})$$

$$\gamma_5(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\perp} = -(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\perp} \gamma_5, \quad (\text{D.64})$$

$$\gamma_5 \Pi_f(\boldsymbol{\tau}) = \Pi_f(\boldsymbol{\tau}) \gamma_5, \quad (\text{D.65})$$

então

$$\mathbf{t} = \text{tr} \left\{ \begin{aligned} & -(\mathbf{p}_- \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\parallel} \Pi_f(\boldsymbol{\tau}) (\mathbf{p}_+ \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\parallel} \Pi_{f'}(\boldsymbol{\tau}') - (\mathbf{p}_- \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\parallel} \Pi_f(\boldsymbol{\tau}) \cancel{\mathcal{M}_{f'} \Pi_{f'}(\boldsymbol{\tau}')} \xrightarrow{0} \\ & -(\mathbf{p}_- \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\parallel} \Pi_f(\boldsymbol{\tau}) \frac{(\mathbf{p}_+ \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\perp}}{\cosh^2(\mathbf{B}_{f'} \boldsymbol{\tau}')} + \cancel{\mathcal{M}_f \Pi_f(\boldsymbol{\tau}) (\mathbf{p}_+ \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\parallel} \Pi_{f'}(\boldsymbol{\tau}')} \xrightarrow{0} + \mathcal{M}_f \Pi_f(\boldsymbol{\tau}) \mathcal{M}_{f'} \Pi_{f'}(\boldsymbol{\tau}') \\ & + \cancel{\mathcal{M}_f \Pi_f(\boldsymbol{\tau}) \frac{(\mathbf{p}_+ \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\perp}}{\cosh^2(\mathbf{B}_{f'} \boldsymbol{\tau}')} - \frac{(\mathbf{p}_- \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\perp}}{\cosh^2(\mathbf{B}_f \boldsymbol{\tau})} (\mathbf{p}_+ \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\parallel} \Pi_{f'}(\boldsymbol{\tau}')} \xrightarrow{0} - \frac{(\mathbf{p}_- \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\perp}}{\cosh^2(\mathbf{B}_f \boldsymbol{\tau})} \cancel{\mathcal{M}_{f'} \Pi_{f'}(\boldsymbol{\tau}')} \xrightarrow{0} \\ & - \frac{(\mathbf{p}_- \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\perp}}{\cosh^2(\mathbf{B}_f \boldsymbol{\tau})} \frac{(\mathbf{p}_+ \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\perp}}{\cosh^2(\mathbf{B}_{f'} \boldsymbol{\tau}')} \end{aligned} \right\},$$

em que consideramos a propriedade $\text{tr}[\gamma_{\alpha} \gamma_{\beta} \gamma_{\gamma} \dots] = 0$ para um número ímpar de matrizes γ . Podemos escrever \mathbf{t} como

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_2 + \mathbf{t}_3 + \mathbf{t}_4 + \mathbf{t}_5, \quad (\text{D.66})$$

em que

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_1 &= -\text{tr}[(\mathbf{p}_- \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\parallel} \Pi_f(\boldsymbol{\tau}) (\mathbf{p}_+ \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\parallel} \Pi_{f'}(\boldsymbol{\tau}')], \\ \mathbf{t}_2 &= -\text{tr}\left[(\mathbf{p}_- \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\parallel} \Pi_f(\boldsymbol{\tau}) \frac{(\mathbf{p}_+ \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\perp}}{\cosh^2(\mathbf{B}_{f'} \boldsymbol{\tau}')} \right], \\ \mathbf{t}_3 &= \text{tr}[\mathcal{M}_f \Pi_f(\boldsymbol{\tau}) \mathcal{M}_{f'} \Pi_{f'}(\boldsymbol{\tau}')], \\ \mathbf{t}_4 &= -\text{tr}\left[\frac{(\mathbf{p}_- \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\perp}}{\cosh^2(\mathbf{B}_f \boldsymbol{\tau})} (\mathbf{p}_+ \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\parallel} \Pi_{f'}(\boldsymbol{\tau}') \right], \\ \mathbf{t}_5 &= -\text{tr}\left[\frac{(\mathbf{p}_- \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\perp}}{\cosh^2(\mathbf{B}_f \boldsymbol{\tau})} \frac{(\mathbf{p}_+ \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\perp}}{\cosh^2(\mathbf{B}_{f'} \boldsymbol{\tau}')} \right]. \end{aligned}$$

Calculando cada termo separadamente, ficamos com

Termo \mathbf{t}_1

$$\mathbf{t}_1 = -\text{tr}[(\mathbf{p}_- \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\parallel} \Pi_f(\boldsymbol{\tau}) (\mathbf{p}_+ \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\parallel} \Pi_{f'}(\boldsymbol{\tau}')], \quad (\text{D.67})$$

$$= -\text{tr}[(\mathbf{p}_- \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\parallel} (\mathbf{p}_+ \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\parallel} \Pi_f(\boldsymbol{\tau}) \Pi_{f'}(\boldsymbol{\tau}')].$$

Considerando o produto $(\mathbf{p}_- \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\parallel} (\mathbf{p}_+ \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\parallel}$ ⁵,

$$(\mathbf{p}_- \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\parallel} (\mathbf{p}_+ \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\parallel} = -(\mathbf{p}_+ \cdot \mathbf{p}_-)_{\parallel} + (\mathbf{p}_4^- \mathbf{p}_3^+ - \mathbf{p}_3^- \mathbf{p}_4^+) \gamma_4 \gamma_3, \quad (\text{D.68})$$

e o produto $\Pi_f(\boldsymbol{\tau}) \Pi_{f'}(\boldsymbol{\tau}')$ ⁶

$$\Pi_f(\boldsymbol{\tau}) \Pi_{f'}(\boldsymbol{\tau}') = 1 + \tanh(\mathbf{B}_f \boldsymbol{\tau}) \tanh(\mathbf{B}_{f'} \boldsymbol{\tau}') + i s_f \gamma_1 \gamma_2 [\tanh(\mathbf{B}_f \boldsymbol{\tau}) + \tanh(\mathbf{B}_{f'} \boldsymbol{\tau}')], \quad (\text{D.69})$$

podemos escrever \mathbf{t}_1 como

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_1 = -\text{tr} \left\{ & -(\mathbf{p}_+ \cdot \mathbf{p}_-)_{\parallel} - (\mathbf{p}_+ \cdot \mathbf{p}_-)_{\parallel} \tanh(\mathbf{B}_f \boldsymbol{\tau}) \tanh(\mathbf{B}_{f'} \boldsymbol{\tau}') \right. \\ & - i(\mathbf{p}_+ \cdot \mathbf{p}_-)_{\parallel} s_f \gamma_1 \gamma_2 [\tanh(\mathbf{B}_f \boldsymbol{\tau}) + \tanh(\mathbf{B}_{f'} \boldsymbol{\tau}')] + (\mathbf{p}_4^- \mathbf{p}_3^+ - \mathbf{p}_3^- \mathbf{p}_4^+) \gamma_4 \gamma_3 \\ & - (\mathbf{p}_4^- \mathbf{p}_3^+ - \mathbf{p}_3^- \mathbf{p}_4^+) \gamma_4 \gamma_3 \tanh(\mathbf{B}_f \boldsymbol{\tau}) \tanh(\mathbf{B}_{f'} \boldsymbol{\tau}') \\ & \left. + (\mathbf{p}_4^- \mathbf{p}_3^+ - \mathbf{p}_3^- \mathbf{p}_4^+) \gamma_4 \gamma_3 \gamma_1 \gamma_2 i s_f [\tanh(\mathbf{B}_f \boldsymbol{\tau}) + \tanh(\mathbf{B}_{f'} \boldsymbol{\tau}')] \right\}, \end{aligned}$$

em que utilizamos as propriedades

$$\bullet \text{tr}(\gamma_i \gamma_j) = 0 \quad \text{se } i \neq j, \quad (\text{D.70a})$$

$$\bullet \text{tr}(\gamma_4 \gamma_3 \gamma_1 \gamma_2) = \text{tr}(-\gamma_5) = 0. \quad (\text{D.70b})$$

Então

$$\boxed{\mathbf{t}_1 = 4(\mathbf{p}_+ \cdot \mathbf{p}_-)_{\parallel} [1 + \tanh(\mathbf{B}_f \boldsymbol{\tau}) \tanh(\mathbf{B}_{f'} \boldsymbol{\tau}')].} \quad (\text{D.71})$$

Termo \mathbf{t}_2 Considerando o mesmo argumento que utilizamos para \mathbf{t}_2 em [D.2.2](#),

$$\mathbf{t}_2 = -\text{tr} \left[(\mathbf{p}_- \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\parallel} \Pi_f(\boldsymbol{\tau}) \frac{(\mathbf{p}_+ \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\perp}}{\cosh^2(\mathbf{B}_{f'} \boldsymbol{\tau}')}] = 0. \quad (\text{D.72})$$

⁵Consideramos a propriedade $\gamma_{\alpha} \gamma_{\alpha} = -1$

⁶É fácil mostrar que $s_f s_{f'} = s_f^2 = 1$.

Termo t_3 Temos

$$t_3 = \text{tr}[M_f \Pi_f(\tau) M_{f'} \Pi_{f'}(\tau')], \quad (\text{D.73})$$

e pela equação (D.69),

$$\boxed{t_3 = 4M_f M_{f'} [1 + \tanh(B_f \tau) \tanh(B_{f'} \tau')].} \quad (\text{D.74})$$

Termo t_4 Pelo mesmo argumento de t_2 ,

$$\boxed{t_4 = -\text{tr} \left[\frac{(\mathbf{p}_- \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\perp}}{\cosh^2(B_f \tau)} (\mathbf{p}_+ \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\parallel} \Pi_{f'}(\tau') \right]} = 0. \quad (\text{D.75})$$

Termo t_5 O último termo do traço é

$$t_5 = -\text{tr} \left[\frac{(\mathbf{p}_- \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\perp}}{\cosh^2(B_f \tau)} \frac{(\mathbf{p}_+ \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\perp}}{\cosh^2(B_{f'} \tau')} \right], \quad (\text{D.76})$$

e após algumas manipulações algébricas, obtemos

$$\boxed{t_5 = \frac{4(\mathbf{p}_+ \cdot \mathbf{p}_1)_{\perp}}{\cosh^2(B_f \tau) \cosh^2(B_{f'} \tau')}}. \quad (\text{D.77})$$

Assim, podemos escrever o traço t como

$$t = 4 \left\{ [(\mathbf{p}_+ \cdot \mathbf{p}_-)_{\parallel} + M_f M_{f'}] [1 + \tanh(B_f \tau) \tanh(B_{f'} \tau')] + \frac{(\mathbf{p}_+ \cdot \mathbf{p}_-)_{\perp}}{\cosh^2(B_f \tau) \cosh^2(B_{f'} \tau')} \right\}. \quad (\text{D.78})$$

Substituindo (D.78) em (D.61),

$$\begin{aligned}
\text{tr} \left[\tilde{\mathcal{S}}_{\mathbf{p}_-}^f \gamma_5 \tilde{\mathcal{S}}_{\mathbf{p}_+}^{f'} \gamma_5 \right] &= \int_0^\infty d\tau d\tau' \exp \left[-\tau \left(M_f^2 + \mathbf{p}_{-\parallel}^2 + \mathbf{p}_{-\perp}^2 \frac{\tanh(B_f \tau)}{B_f \tau} \right) \right] \\
&\quad \exp \left[-\tau' \left(M_{f'}^2 + \mathbf{p}_{+\parallel}^2 + \mathbf{p}_{+\perp}^2 \frac{\tanh(B_{f'} \tau')}{B_{f'} \tau'} \right) \right] \\
&\quad \times 4 \left\{ [(\mathbf{p}_+ \cdot \mathbf{p}_-)_{\parallel} + M_f M_{f'}] [1 + \tanh(B_f \tau) \tanh(B_{f'} \tau')] \right. \\
&\quad \left. + \frac{(\mathbf{p}_+ \cdot \mathbf{p}_-)_{\perp}}{\cosh^2(B_f \tau) \cosh^2(B_{f'} \tau')} \right\}. \tag{D.79}
\end{aligned}$$

D.3.4 Integração em \mathbf{p}_{\parallel}

Nos próximos cálculos, devemos levar em conta que

$$\mathbf{p}_+ = \mathbf{p} + \frac{\mathbf{q}}{2} \quad \text{e} \quad \mathbf{p}_- = \mathbf{p} - \frac{\mathbf{q}}{2}.$$

então

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}_{+\parallel} &= \left[\left(p_3 + \frac{q_3}{2} \right), \left(p_4 + \frac{q_4}{2} \right) \right] = p_{\parallel} + \frac{\mathbf{q}_{\parallel}}{2}, \\
\mathbf{p}_{-\parallel} &= \left[\left(p_3 - \frac{q_3}{2} \right), \left(p_4 - \frac{q_4}{2} \right) \right] = p_{\parallel} - \frac{\mathbf{q}_{\parallel}}{2},
\end{aligned}$$

e podemos escrever os termos \mathbf{p}_{\parallel} como

$$(\mathbf{p}_+ \cdot \mathbf{p}_-)_{\parallel} = p_{\parallel}^2 - \frac{\mathbf{q}_{\parallel}^2}{4},$$

$$\begin{aligned}
p_{+\parallel}^2 &= \left(p_3 + \frac{q_3}{2} \right)^2 + \left(p_4 + \frac{q_4}{2} \right)^2, \\
p_{-\parallel}^2 &= \left(p_3 - \frac{q_3}{2} \right)^2 + \left(p_4 - \frac{q_4}{2} \right)^2.
\end{aligned}$$

Reescrevemos $\mathbf{G}_{ff'}(\mathbf{q})$, dado por (4.37), como

$$\begin{aligned}
G_{ff'}(\mathbf{q}) &= 8N_c \int \frac{d^4\mathbf{p}}{(2\pi)^4} \int d\tau d\tau' \exp[-\tau M_f^2 - \tau' M_{f'}^2] \\
&\quad \times \exp\left[-\tau \mathbf{p}_{-\perp}^2 \frac{\tanh(B_f \tau)}{B_f \tau} - \tau' \mathbf{p}_{+\perp}^2 \frac{\tanh(B_{f'} \tau')}{B_{f'} \tau'}\right] \\
&\quad \times \exp\left[-\tau \left(\mathbf{p}_{\parallel} - \frac{\mathbf{q}_{\parallel}}{2}\right)^2 - \tau' \left(\mathbf{p}_{\parallel} + \frac{\mathbf{q}_{\parallel}}{2}\right)^2\right] \left\{ \left[\mathbf{p}_{\parallel}^2 - \frac{\mathbf{q}_{\parallel}^2}{4} + M_f M_{f'} \right] \right. \\
&\quad \left. [1 + \tanh(B_f \tau) \tanh(B_{f'} \tau')] + \frac{(\mathbf{p}_+ \cdot \mathbf{p}_-)_{\perp}}{\cosh^2(B_f \tau) \cosh^2(B_{f'} \tau')} \right\}. \tag{D.80}
\end{aligned}$$

Considerando

$$d^4\mathbf{p} = d^2\mathbf{p}_{\parallel} d^2\mathbf{p}_{\perp},$$

então

$$\begin{aligned}
G_{ff'}(\mathbf{q}) &= \frac{8N_c}{(2\pi)^4} \int d\tau d\tau' \int d^2\mathbf{p}_{\perp} \exp[-\tau M_f^2 - \tau' M_{f'}^2] \\
&\quad \times \exp\left[-\tau \mathbf{p}_{-\perp}^2 \frac{\tanh(B_f \tau)}{B_f \tau} - \tau' \mathbf{p}_{+\perp}^2 \frac{\tanh(B_{f'} \tau')}{B_{f'} \tau'}\right] \\
&\quad \times \left\{ \left[\int d^2\mathbf{p}_{\parallel} \exp\left[-\tau \left(\mathbf{p}_{\parallel} - \frac{\mathbf{q}_{\parallel}}{2}\right)^2 - \tau' \left(\mathbf{p}_{\parallel} + \frac{\mathbf{q}_{\parallel}}{2}\right)^2\right] \mathbf{p}_{\parallel}^2 [1 + \tanh(B_f \tau) \tanh(B_{f'} \tau')] \right] \right. \\
&\quad + \left[\int d^2\mathbf{p}_{\parallel} \exp\left[-\tau \left(\mathbf{p}_{\parallel} - \frac{\mathbf{q}_{\parallel}}{2}\right)^2 - \tau' \left(\mathbf{p}_{\parallel} + \frac{\mathbf{q}_{\parallel}}{2}\right)^2\right] \left[\left[M_f M_{f'} - \frac{\mathbf{q}_{\parallel}^2}{4} \right] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \times [1 + \tanh(B_f \tau) \tanh(B_{f'} \tau')] + \frac{(\mathbf{p}_+ \cdot \mathbf{p}_-)_{\perp}}{\cosh^2(B_f \tau) \cosh^2(B_{f'} \tau')} \right] \right] \right\}. \tag{D.81}
\end{aligned}$$

Vamos fazer a integração em \mathbf{p}_{\parallel} . Temos integrais do tipo

$$\bullet I_1 = \int d^2\mathbf{p}_{\parallel} \exp\left\{-\tau \left[\tau \left(\mathbf{p}_{\parallel} - \frac{\mathbf{q}_{\parallel}}{2}\right)^2 + \tau' \left(\mathbf{p}_{\parallel} + \frac{\mathbf{q}_{\parallel}}{2}\right)^2 \right]\right\}, \tag{D.82}$$

$$\bullet I_2 = \int d^2\mathbf{p}_{\parallel} \mathbf{p}_{\parallel}^2 \exp\left\{-\tau \left[\tau \left(\mathbf{p}_{\parallel} - \frac{\mathbf{q}_{\parallel}}{2}\right)^2 + \tau' \left(\mathbf{p}_{\parallel} + \frac{\mathbf{q}_{\parallel}}{2}\right)^2 \right]\right\}. \tag{D.83}$$

Integral I_1

A primeira integral que queremos calcular é

$$I_1 = \int d^2 \mathbf{p}_{\parallel} \exp \left\{ -\tau \left[\tau \left(\mathbf{p}_{\parallel} - \frac{\mathbf{q}_{\parallel}}{2} \right)^2 + \tau' \left(\mathbf{p}_{\parallel} + \frac{\mathbf{q}_{\parallel}}{2} \right)^2 \right] \right\}.$$

Em coordenadas polares

$$\int d^2 \mathbf{p}_{\parallel} = \int dp_3 dp_4 = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} |\mathbf{p}_{\parallel}| dp_{\parallel} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} du u, \quad (\text{D.84})$$

com

- $u = (p_3^2 + p_4^2)^{\frac{1}{2}} = |\mathbf{p}_{\parallel}|,$
- $p_3 = |\mathbf{p}_{\parallel}| \cos \theta = u \cos \theta$
- $p_4 = |\mathbf{p}_{\parallel}| \sin \theta = u \sin \theta,$
- $q_{\parallel} = |\vec{\mathbf{q}}_{\parallel}| = (q_3^2 + q_4^2)^{\frac{1}{2}}.$

Então⁷

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} dp_{\parallel} |\mathbf{p}_{\parallel}| \exp \left\{ - \left[\left(\mathbf{p}_{\parallel}^2 - \mathbf{p}_{\parallel} \cdot \mathbf{q}_{\parallel} + \frac{q_{\parallel}^2}{4} \right) \tau + \left(\mathbf{p}_{\parallel}^2 + \mathbf{p}_{\parallel} \cdot \mathbf{q}_{\parallel} + \frac{q_{\parallel}^2}{4} \right) \tau' \right] \right\}, \\ &= \int_0^{\infty} du u \exp \left\{ - \left[u^2 (\tau + \tau') + \frac{q_{\parallel}^2}{4} (\tau + \tau') \right] \right\} \int_0^{2\pi} d\theta \exp [-(\tau' - \tau) u q_{\parallel} \cos \theta]. \end{aligned} \quad (\text{D.85})$$

⁷Escrevemos o produto $\mathbf{p}_{\parallel} \cdot \mathbf{q}_{\parallel}$ como

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{\parallel} \cdot \mathbf{q}_{\parallel} &= \overbrace{|\mathbf{p}_{\parallel}| |\mathbf{q}_{\parallel}| \cos \theta}^{\text{Produto Escalar}}, \\ &= u q_{\parallel} \cos \theta. \end{aligned}$$

A parte angular é a integral notável⁸

$$\int_0^{2\pi} d\theta e^{-\lambda \cos \theta} = 2\pi I_0(\lambda), \quad (\text{D.86})$$

em que I_0 é a função de Bessel modificada de primeira espécie. Então

$$I_1 = \int_0^\infty du u \exp[-u^2(\tau + \tau')] \exp\left[-\frac{q_{\parallel}^2}{4}(\tau + \tau')\right] 2\pi I_0[uq_{\parallel}(\tau' - \tau)]. \quad (\text{D.87})$$

Essa integral é tabelada⁹

$$\int_0^\infty dx x e^{-px^2} I_0(cx) = A_0^2 = \frac{1}{2p} \exp\left(\frac{c^2}{4p}\right), \quad (\text{D.88})$$

então¹⁰

$$I_1 = 2\pi \exp\left[-\frac{q_{\parallel}^2}{4}(\tau + \tau')\right] \frac{1}{2(\tau + \tau')} \exp\left[\frac{q_{\parallel}^2}{4} \frac{(\tau' - \tau)^2}{(\tau + \tau')}\right], \quad (\text{D.89})$$

e organizando o argumento do exponencial,

$$\boxed{I_1 = \frac{\pi}{(\tau + \tau')} \exp\left[-\frac{\tau\tau'}{\tau + \tau'} q_{\parallel}^2\right]}. \quad (\text{D.90})$$

Integral I_2

A segunda integral que precisamos calcular é

$$I_2 = \int d^2 p_{\parallel} p_{\parallel}^2 \exp\left\{-\tau \left[\tau \left(p_{\parallel} - \frac{q_{\parallel}}{2}\right)^2 + \tau' \left(p_{\parallel} + \frac{q_{\parallel}}{2}\right)^2\right]\right\}.$$

Da mesma forma que fizemos para I_1 , fazemos a mudança de variáveis para coordenadas polares e integramos a parte angular. Assim, temos

⁸Equação 3.339, p.340 de [158].

⁹Página 306, [176].

¹⁰Consideramos $p \rightarrow \tau + \tau'$ e $c \rightarrow q_{\parallel}(\tau' - \tau)$.

$$I_2 = \int_0^\infty du u^3 \exp[-(\tau + \tau')u^2] \exp\left[-\frac{q_{\parallel}^2}{4}(\tau + \tau')\right] 2\pi I_0[(\tau' - \tau)uq_{\parallel}]. \quad (\text{D.91})$$

Utilizamos a propriedade

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dx x^3 e^{-px^2} I_0(cx) &= -\frac{\partial}{\partial p} \int_0^\infty dx x e^{-px} I_0(cx), \\ &= \frac{1}{2p^2} \left[1 + \frac{c^2}{4p}\right] e^{\frac{c^2}{4p}}, \end{aligned} \quad (\text{D.92})$$

e então

$$\boxed{I_2 = \frac{\pi}{(\tau + \tau')^2} \left[1 + \frac{(\tau - \tau')^2 q_{\parallel}^2}{(\tau + \tau')^2 4}\right] \exp\left[-\frac{\tau\tau'}{\tau + \tau'} q_{\parallel}^2\right]}. \quad (\text{D.93})$$

Substituindo (D.90) e (D.93) em (D.81),

$$\begin{aligned} G_{ff'}(q) &= \frac{8N_c}{(2\pi)^4} \pi \int_0^\infty d\tau d\tau' \int d^2p_{\perp} \exp[-\tau M_f^2 - \tau' M_{f'}^2] \exp\left[-\frac{\tau\tau'}{\tau + \tau'} q_{\parallel}^2\right] \\ &\quad \exp\left[-\tau p_{-\perp}^2 \frac{\tanh(B_f \tau)}{B_f \tau} - \tau' p_{+\perp}^2 \frac{\tanh(B_{f'} \tau')}{B_{f'} \tau'}\right] \\ &\quad \times \left\{ \frac{1}{(\tau + \tau')^2} \left[1 + \frac{(\tau - \tau')^2 q_{\parallel}^2}{\tau + \tau'} \frac{q_{\parallel}^2}{4}\right] [1 + \tanh(B_f \tau) \tanh(B_{f'} \tau')] \right. \\ &\quad + \frac{1}{(\tau + \tau')} \left[\left(M_f M_{f'} - \frac{q_{\parallel}^2}{4}\right) [1 + \tanh(B_f \tau) \tanh(B_{f'} \tau')] \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{(\mathbf{p}_+ \cdot \mathbf{p}_-)_{\perp}}{\cosh^2(B_f \tau) \cosh^2(B_{f'} \tau)} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{D.94})$$

D.3.5 Integração em p_{\perp}

Reescrevemos (D.94) como

$$\begin{aligned}
\mathbf{G}_{ff'}(\mathbf{q}) = & \frac{8N_c}{(2\pi)^4} \pi \int_0^\infty d\tau d\tau' \exp[-\tau M_f^2 - \tau' M_{f'}^2] \exp\left[-\frac{\tau\tau'}{\tau + \tau'} q_{\parallel}^2\right] \\
& \times \left\{ \left[\int d^2\mathbf{p}_{\perp} \exp\left\{-\left[\tau\left(\mathbf{p}_{\perp} - \frac{\mathbf{q}_{\perp}}{2}\right)^2 \frac{t}{B_f\tau} + \tau'\left(\mathbf{p}_{\perp} + \frac{\mathbf{q}_{\perp}}{2}\right)^2 \frac{t'}{B_{f'}\tau'}\right]\right\} \right] \right. \\
& \left[\frac{1}{(\tau + \tau')^2} \left[1 + \frac{(\tau - \tau')^2}{\tau + \tau'} \frac{q_{\parallel}^2}{4} \right] [1 + tt'] + \frac{1}{(\tau + \tau')} \left(M_f M_{f'} - \frac{q_{\parallel}^2}{4} \right) [1 + tt'] \right] \right. \\
& \left. + \left[\int d^2\mathbf{p}_{\perp} (\mathbf{p}_+ \cdot \mathbf{p}_-)_{\perp} \exp\left\{-\left[\tau\left(\mathbf{p}_{\perp} - \frac{\mathbf{q}_{\perp}}{2}\right)^2 \frac{t}{B_f\tau} + \tau'\left(\mathbf{p}_{\perp} + \frac{\mathbf{q}_{\perp}}{2}\right)^2 \frac{t'}{B_{f'}\tau'}\right]\right\} \right] \right. \\
& \left. \frac{1}{(\tau + \tau')} \frac{1}{\cosh^2(B_f\tau) \cosh^2(B_{f'}\tau')} \right] \left. \right\},
\end{aligned}$$

mas, da mesma forma que fizemos para \mathbf{p}_{\parallel} ,

$$(\mathbf{p}_- \cdot \mathbf{p}_+)_{\perp} = \mathbf{p}_{\perp}^2 + \frac{q_{\perp}^2}{4}, \quad (\text{D.95})$$

então

$$\begin{aligned}
\mathbf{G}_{ff'}(\mathbf{q}) = & \frac{8N_c}{(2\pi)^4} \pi \int_0^\infty d\tau d\tau' \exp[-(-\tau M_f^2 + \tau' M_{f'}^2)] \exp\left[-\frac{\tau\tau'}{\tau + \tau'} q_{\parallel}^2\right] \\
& \times \left\{ \left[\int d^2\mathbf{p}_{\perp} \exp\left\{-\left[\left(\mathbf{p}_{\perp} - \frac{\mathbf{q}_{\perp}}{2}\right)^2 \frac{t}{B_f} + \left(\mathbf{p}_{\perp} + \frac{\mathbf{q}_{\perp}}{2}\right)^2 \frac{t'}{B_{f'}}\right]\right\} \right] \right. \\
& \times \left[\frac{1}{(\tau + \tau')^2} \left[1 + \frac{(\tau + \tau')^2}{\tau + \tau'} \frac{q_{\parallel}^2}{4} \right] [1 + tt'] \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{(\tau + \tau')} \left[\left(M_f M_{f'} - \frac{q_{\parallel}^2}{4} \right) [1 + tt'] - \frac{q_{\perp}^2}{4 \cosh^2(B_f\tau) \cosh^2(B_{f'}\tau')} \right] \right] \right] \\
& \left[\int d^2\mathbf{p}_{\perp} \mathbf{p}_{\perp}^2 \exp\left\{-\left[\left(\mathbf{p}_{\perp} - \frac{\mathbf{q}_{\perp}}{2}\right)^2 \frac{t}{B_f} + \left(\mathbf{p}_{\perp} + \frac{\mathbf{q}_{\perp}}{2}\right)^2 \frac{t'}{B_{f'}}\right]\right\} \right. \\
& \left. \frac{1}{(\tau + \tau')} \frac{1}{\cosh^2(B_f\tau) \cosh^2(B_{f'}\tau')} \right] \left. \right\}. \quad (\text{D.96})
\end{aligned}$$

com

$$t = \tanh(B_f\tau), \quad t' = \tanh(B_{f'}\tau'). \quad (\text{D.97})$$

Da mesma forma que fizemos com \mathbf{p}_{\parallel} , temos integrais do tipo

$$\bullet I_3 = \int d^2\mathbf{p}_\perp \exp\left\{-\left[\frac{\mathbf{t}}{B_f}\left(\mathbf{p}_\perp - \frac{\mathbf{q}_\perp}{2}\right)^2 + \frac{\mathbf{t}'}{B_{f'}}\left(\mathbf{p}_\perp + \frac{\mathbf{q}_\perp}{2}\right)^2\right]\right\}, \quad (\text{D.98})$$

$$\bullet I_4 = \int d^2\mathbf{p}_\perp p_\perp^2 \exp\left\{-\left[\frac{\mathbf{t}}{B_f}\left(\mathbf{p}_\perp - \frac{\mathbf{q}_\perp}{2}\right)^2 + \frac{\mathbf{t}'}{B_{f'}}\left(\mathbf{p}_\perp + \frac{\mathbf{q}_\perp}{2}\right)^2\right]\right\}. \quad (\text{D.99})$$

Integral I_3

A primeira integral é

$$I_3 = \int d^2\mathbf{p}_\perp \exp\left\{-\left[\frac{\mathbf{t}}{B_f}\left(\mathbf{p}_\perp - \frac{\mathbf{q}_\perp}{2}\right)^2 + \frac{\mathbf{t}'}{B_{f'}}\left(\mathbf{p}_\perp + \frac{\mathbf{q}_\perp}{2}\right)^2\right]\right\},$$

que quando é reescrita em coordenadas polares fica

$$\int d^2\mathbf{p}_\perp = \int dp_1 dp_2 = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty dp_\perp |p_\perp| = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty dv v,$$

com

- $v = (p_1^2 + p_2^2)^{\frac{1}{2}} = |p_\perp|,$
- $q_\perp = |\vec{q}_\perp| = (q_1^2 + q_2^2)^{\frac{1}{2}},$
- $p_1 = |p_\perp| \cos \theta = v \cos \theta,$
- $p_2 = |p_\perp| \sin \theta = v \sin \theta,$
- $\vec{p}_\perp \cdot \vec{q}_\perp = v q_\perp \cos \theta.$

Podemos escrever I_3 como

$$I_3 = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty dv v \exp\left\{-\left[\left(v^2 - v q_\perp \cos \theta + \frac{q_\perp^2}{4}\right) \frac{\mathbf{t}}{B_f} + \left(v^2 + v q_\perp \cos \theta + \frac{q_\perp^2}{4}\right) \frac{\mathbf{t}'}{B_{f'}}\right]\right\}. \quad (\text{D.100})$$

Como $q_f = q_{f'}$ e $B_f = |q_f B|$, então

$$\mathbf{B}_f = \mathbf{B}_{f'}, \quad (\text{D.101})$$

e I_3 fica

$$I_3 = \int_0^\infty dv v \exp \left\{ - \left[\frac{v^2}{B_f} (t + t') + \frac{q_\perp^2}{4B_f} (t + t') \right] \right\} \int_0^{2\pi} d\theta \exp \left[- \frac{(t' - t)}{B_f} v q_\perp \cos \theta \right].$$

A parte angular é dada por (D.86)

$$I_3 = \int_0^\infty dv v \exp \left[- \frac{v^2}{B_f} (t + t') \right] \exp \left[- \frac{q_\perp^2}{4B_f} (t + t') \right] 2\pi I_0 \left[\frac{(t' - t)}{B_f} v q_\perp \right],$$

e considerando (D.88), podemos integrar I_3 em v ¹¹

$$\boxed{I_3 = \frac{\pi B_f}{(t + t')} \exp \left[- \frac{tt'}{t + t'} \frac{q_\perp^2}{B_f} \right]}. \quad (\text{D.102})$$

Integral I_4

A segunda integral que queremos resolver é

$$I_4 = \int d^2 \mathbf{p}_\perp p_\perp^2 \exp \left\{ - \left[\frac{t}{B_f} \left(\mathbf{p}_\perp - \frac{\mathbf{q}_\perp}{2} \right)^2 + \frac{t'}{B_{f'}} \left(\mathbf{p}_\perp + \frac{\mathbf{q}_\perp}{2} \right)^2 \right] \right\}.$$

Da mesma forma que fizemos para I_3 , efetuaremos a mudança de variáveis para coordenadas polares e integraremos a parte angular. Assim, ficamos com

$$I_4 = \int_0^\infty dv v^3 \exp \left[- \frac{v^2}{B_f} (t + t') \right] \exp \left[- \frac{q_\perp^2}{2B_f} (t + t') \right] 2\pi I_0 \left[\frac{(t' - t)}{B_f} v q_\perp \right]. \quad (\text{D.103})$$

Para integrarmos em v utilizamos a propriedade (D.92)

$$\boxed{I_4 = \frac{\pi B_f^2}{(t + t')^2} \left[1 + \frac{q_\perp^2}{4B_f} \frac{(t - t')^2}{(t + t')} \right] \exp \left[- \frac{tt'}{t + t'} \frac{q_\perp^2}{B_f} \right]}. \quad (\text{D.104})$$

¹¹Consideramos $\mathbf{p} \rightarrow \frac{(t+t')}{B_f} \mathbf{c} \rightarrow \frac{q_\perp}{B_f} (t' - t)$.

Substituindo (D.102) e (D.104) em (D.96), ficamos com

$$\begin{aligned}
G_{ff'}(\mathbf{q}) = & \frac{2N_c}{(2\pi)^2} \frac{4\pi^2}{4\pi^2} \int_0^\infty d\tau d\tau' \exp[-(\tau M_f^2 + \tau' M_{f'}^2)] \exp\left[-\frac{\tau\tau'}{\tau + \tau'} \mathbf{q}_\parallel^2\right] \exp\left[-\frac{t t'}{t + t'} \frac{\mathbf{q}_\perp^2}{B_f}\right] \\
& \left\{ \frac{1}{\tau + \tau'} \frac{1}{\cosh^2(B_f \tau) \cosh^2(B_{f'} \tau')} \frac{B_f^2}{(t + t')^2} \left[1 + \frac{\mathbf{q}_\perp^2}{4B_f} \frac{(t - t')^2}{(t + t')}\right] \right. \\
& + \frac{B_f}{(t + t')} \left\{ \frac{1}{(\tau + \tau')} \left(M_f M_{f'} - \frac{\mathbf{q}_\parallel^2}{4}\right) (1 + t t') \right. \\
& \left. \left. - \frac{1}{4(\tau + \tau')} \frac{\mathbf{q}_\perp^2}{\cosh^2(B_f \tau) \cosh^2(B_{f'} \tau')} + \frac{1}{(\tau + \tau')^2} \left[1 + \frac{(\tau - \tau')^2}{(\tau + \tau')} \frac{\mathbf{q}_\parallel^2}{4}\right] (1 + t t') \right\} \right\}. \tag{D.105}
\end{aligned}$$

D.3.6 Mudança de variáveis de τ e τ'

Faremos a mudança de variáveis

$$\bullet \quad \tau = zy, \tag{D.106a}$$

$$\bullet \quad \tau' = z(1 - y), \tag{D.106b}$$

com $z \in [0, \infty[$ e $y \in [0, 1]$. O jacobiano desta mudança de variáveis é

$$\frac{\partial(\tau, \tau')}{\partial(z, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial\tau}{\partial z} & \frac{\partial\tau}{\partial y} \\ \frac{\partial\tau'}{\partial z} & \frac{\partial\tau'}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & z \\ 1 - y & -z \end{vmatrix} = |-zy - z(1 - y)| = z. \tag{D.107}$$

Vamos reescrever alguns termos separadamente¹²

$$\bullet \quad \tau + \tau' = z, \tag{D.108}$$

$$\bullet \quad \tau - \tau' = z(2y - 1), \tag{D.109}$$

$$\bullet \quad t + t' = \frac{\tanh(B_f z) [1 - \tanh^2(B_f zy)]}{1 - \tanh(B_f zy) \tanh(B_f z)}, \tag{D.110}$$

¹²Consideramos que $B_f = B_{f'}$

$$\bullet \quad t - t' = \frac{2 \tanh(B_f z y) - \tanh(B_f z) q t y [1 - \tanh^2(B_f z y)]}{1 - \tanh(B_f z) \tanh(B_f z y)}, \quad (\text{D.111})$$

$$\bullet \quad t t' = \tanh(B_f z y) \left[\frac{\tanh(B_f z) - \tanh(B_f z y)}{1 - \tanh(B_f z) \tanh(B_f z y)} \right], \quad (\text{D.112})$$

$$\bullet \quad \frac{t t'}{t + t'} = \frac{\sinh(B_f z y) \sinh[B_f z (1 - y)]}{\sinh(B_f z)}, \quad (\text{D.113})$$

$$\bullet \quad 1 + t t' = \frac{1 - \tanh^2(B_f z y)}{1 - \tanh(B_f z) \tanh(B_f z y)}, \quad (\text{D.114})$$

$$\bullet \quad \frac{1 + t t'}{t + t'} = \coth(B_f z), \quad (\text{D.115})$$

$$\bullet \quad \frac{1}{\cosh^2(B_f \tau) \cosh^2(B_f \tau')} = \frac{[1 - \tanh(B_f z y)]^2 [1 - \tanh^2(B_f z)]}{[1 - \tanh(B_f z) \tanh(B_f z y)]^2}, \quad (\text{D.116})$$

$$\bullet \quad \frac{1}{\cosh^2(B_f \tau) \cosh^2(B_f \tau')} \frac{1}{(t + t')^2} = \frac{1}{\sinh^2(B_f z)}, \quad (\text{D.117})$$

$$\bullet \quad \frac{\tau \tau'}{\tau + \tau'} = z y (1 - y), \quad (\text{D.118})$$

$$\bullet \quad \frac{(\tau - \tau')^2}{(\tau + \tau')} = (2y - 1)^2 z. \quad (\text{D.119})$$

D.3.7 Mudança de variáveis em τ e τ' - Organização da Integral

Antes de fazer a substituição em $G_{ff'}(q)$, precisamos organizar seus termos. A equação (4.38) fica

$$\begin{aligned}
G_{ff'}(q) &= \frac{2N_c}{(2\pi)^2} B_f \int_0^\infty d\tau d\tau' \exp[-(\tau M_f^2 + \tau' M_{f'}^2)] \exp\left[-\frac{\tau\tau'}{\tau + \tau'} q_{\parallel}^2\right] \\
&\exp\left[-\frac{tt'}{t+t'} \frac{q_{\perp}^2}{B_f}\right] \frac{1}{(\tau + \tau')} \left\{ \frac{1}{\cosh^2(B_f\tau) \cosh^2(B_{f'}\tau')} \frac{B_f}{(t+t')^2} \right. \\
&+ \frac{1}{\cosh^2(B_f\tau) \cosh^2(B_{f'}\tau')} \frac{B_f}{(t+t')^2} \frac{q_{\perp}^2}{4} \frac{(t-t')^2}{(t+t')} \\
&+ \left(M_f M_{f'} - \frac{q_{\parallel}^2}{4} \right) \frac{(1+tt')}{(t+t')} - \frac{(t+t')}{(t+t')^2} \frac{1}{\cosh^2(B_f\tau) \cosh^2(B_{f'}\tau')} \frac{q_{\perp}^2}{4} \\
&\left. + \frac{1}{(\tau + \tau')} \left[1 + \frac{(\tau - \tau')^2 q_{\parallel}^2}{(\tau + \tau') 4} \right] \frac{(1+tt')}{(t+t')} \right\}, \\
&= \frac{2N_c}{(2\pi)^2} B_f \int_0^\infty d\tau d\tau' \exp[-(\tau M_f^2 + \tau' M_{f'}^2)] \exp\left[-\frac{\tau\tau'}{\tau + \tau'} q_{\parallel}^2\right] \\
&\exp\left[-\frac{tt'}{t+t'} \frac{q_{\perp}^2}{4}\right] \frac{1}{(\tau + \tau')} \left\{ \frac{1}{\cosh^2(B_f\tau) \cosh^2(B_{f'}\tau')} \frac{B_f}{(t+t')^2} \right. \\
&+ \frac{1}{\cosh^2(B_f\tau) \cosh^2(B_{f'}\tau')} \frac{1}{(t+t')^2} \frac{q_{\perp}^2}{4} \left[\frac{(t-t')^2}{t+t'} - (t+t') \right] \\
&\left. + \left(M_f M_{f'} - \frac{q_{\parallel}^2}{4} \right) \frac{(1+tt')}{(t+t')} + \frac{1}{(\tau + \tau')} \left[1 + \frac{(\tau - \tau')^2 q_{\parallel}^2}{(\tau + \tau') 4} \right] \frac{(1+tt')}{(t+t')} \right\}.
\end{aligned}$$

Reorganizando o termo

$$\begin{aligned}
\frac{(t-t')}{t+t'} - (t+t') &= \frac{(t-t')^2 - (t+t')^2}{(t+t')} \\
&= \frac{t^2 - 2tt' + t'^2 - t^2 - 2tt' - t'^2}{t+t'} \\
&= \frac{4tt'}{t+t'}
\end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned}
G_{ff'}(\mathbf{q}) &= \frac{2N_c}{(2\pi)^2} B_f \int_0^\infty d\tau d\tau' \exp[-(\tau M_f^2 + \tau' M_{f'}^2)] \exp\left[-\frac{\tau\tau'}{\tau + \tau'} q_{\parallel}^2\right] \exp\left[-\frac{t t'}{t + t'} \frac{q_{\perp}^2}{B_f}\right] \\
&\quad \frac{1}{\tau + \tau'} \left\{ \frac{1}{\cosh^2(B_f \tau) \cosh^2(B_f \tau')} \frac{1}{(t + t')^2} B_f \left[1 - \frac{t t'}{t + t'} \frac{q_{\perp}^2}{B_f} \right] \right. \\
&\quad \left. + \frac{1 + t t'}{t + t'} \left[\left(M_f M_{f'} - \frac{q_{\parallel}^2}{4} \right) + \frac{1}{\tau + \tau'} \left[1 + \frac{(\tau - \tau')^2}{(\tau + \tau')} \frac{q_{\parallel}^2}{4} \right] \right] \right\}, \quad (D.120)
\end{aligned}$$

onde destacamos os termos que precisam ser substituídos. Considerando (D.106a), (D.106b), (D.108), (D.113), (D.115), (D.117), (D.118) e (D.119), reescrevemos (D.120) como,

$$\begin{aligned}
G_{ff'}(\mathbf{q}) &= \frac{2N_c}{(2\pi)^2} B_f \int_0^\infty dz \int_0^1 dy \exp\{-[zy M_f^2 + z(1-y) M_{f'}^2]\} \exp[-zy(1-y) q_{\parallel}^2] \\
&\quad \exp\left[-\frac{\sinh(B_f zy) \sinh[B_f z(1-y)]}{\sinh(B_f z)} \frac{q_{\perp}^2}{B_f}\right] \\
&\quad \frac{1}{z} \left\{ \frac{1}{\sinh^2(B_f z)} B_f \left[1 - \frac{q_{\perp}^2}{4} \frac{\sinh(B_f zy) \sinh[B_f z(1-y)]}{\sinh(B_f z)} \right] \right. \\
&\quad \left. + \coth(B_f z) \left[\left(M_f M_{f'} - \frac{q_{\parallel}^2}{4} \right) + \frac{1}{z} \left[1 + (2y-1)^2 z \frac{q_{\parallel}^2}{4} \right] \right] \right\}.
\end{aligned}$$

Reescrevendo o termo em destaque

$$\begin{aligned}
\left(M_f M_{f'} - \frac{q_{\parallel}^2}{4} \right) + \frac{1}{z} \left[1 + (2y-1)^2 z \frac{q_{\parallel}^2}{4} \right] &= M_f M_{f'} - \frac{q_{\parallel}^2}{4} + \frac{1}{z} + \frac{z}{z} (4y^2 - 4y + 1) \frac{q_{\parallel}^2}{4}, \\
&= M_f M_{f'} - \frac{q_{\parallel}^2}{4} + \frac{1}{z} + \frac{4}{4} q_{\parallel}^2 y^2 - \frac{4}{4} q_{\parallel}^2 y + \frac{q_{\parallel}^2}{4}, \\
&= M_f M_{f'} + \frac{1}{z} - y(1-y) q_{\parallel}^2,
\end{aligned}$$

Finalmente, podemos escrever o polarizador $G_{ff'}(\mathbf{q})$ como

$$\begin{aligned}
G_{ff'}(\mathbf{q}) &= \frac{2N_c}{(2\pi)^2} B_f \int_0^\infty dz \int_0^1 dy \exp\{-z[y M_f^2 + (1-y) M_{f'}^2 - y(1-y) q_{\parallel}^2]\} \\
&\quad \exp\left[-\frac{\sinh(B_f zy) \sinh[B_f z(1-y)]}{\sinh(B_f z)} \frac{q_{\perp}^2}{B_f}\right]
\end{aligned}$$

$$\left\{ \frac{B_f}{\sinh^2(B_f z)} \left[1 - \frac{q_{\perp}^2 \sinh(B_f z y) \sinh[B_f z (1 - y)]}{4 \sinh(B_f z)} \right] + \coth(B_f z) \left[M_f M_{f'} + \frac{1}{z} - y(1 - y) q_{\parallel}^2 \right] \right\}. \quad (\text{D.121})$$

D.4 Polarizador para $f \neq f'$

D.4.1 Cálculo do Traço

Precisamos calcular o traço na expressão (4.46). Para isso, utilizamos a expressão (4.3) e obtemos

$$\begin{aligned} \text{tr} \left[\tilde{S}_p^f \gamma_5 \tilde{S}_p^{f'} \gamma_5 \right] &= \int_0^\infty \int_0^\infty d\tau d\tau' \exp \left[-\tau \left(M_f^2 + p_{\parallel}^2 + p_{\perp}^2 \frac{\tanh(B_f \tau)}{B_f \tau} \right) \right] \\ &\quad \exp \left[-\tau' \left(M_{f'}^2 + p'_{\parallel}{}^2 + p'_{\perp}{}^2 \frac{\tanh(B_{f'} \tau')}{B_{f'} \tau'} \right) \right] \\ &\quad \text{tr} \left\{ \left[[-(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\parallel} + M_f] [1 + i\gamma_1 \gamma_2 s_f \tanh(B_f \tau)] - \frac{(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\perp}}{\cosh^2(B_f \tau)} \right] \gamma_5 \right. \\ &\quad \left. \left[[-(\mathbf{p}' \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\parallel} + M_{f'}] [1 + i\gamma_1 \gamma_2 s_{f'} \tanh(B_{f'} \tau')] - \frac{(\mathbf{p}' \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\perp}}{\cosh^2(B_{f'} \tau')} \right] \gamma_5 \right\}. \end{aligned} \quad (\text{D.122})$$

Definimos o termo que envolve as matrizes $\boldsymbol{\gamma}$ como

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &= \text{tr} \left\{ \left[[-(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\parallel} + M_f] \Pi_f(\tau) - \frac{(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\perp}}{\cosh^2(B_f \tau)} \right] \gamma_5 \right. \\ &\quad \left. \times \left[[-(\mathbf{p}' \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\parallel} + M_{f'}] \Pi_{f'}(\tau') - \frac{(\mathbf{p}' \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\perp}}{\cosh^2(B_{f'} \tau')} \right] \gamma_5 \right\}, \end{aligned} \quad (\text{D.123})$$

em que definimos

$$\Pi_f(\tau) = 1 + i\gamma_1 \gamma_2 s_f \tanh(B_f \tau).$$

Precisamos reescrever separadamente alguns termos que envolvem a matriz γ_5 ,

- $\gamma_5(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\parallel} = -(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\parallel} \gamma_5$,
- $\gamma_5 \Pi_f(\tau) = \Pi_f(\tau) \gamma_5$,

$$\bullet \quad \gamma_5(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\perp} = -(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\perp} \gamma_5,$$

e a equação (D.123) fica

$$\mathbf{t} = \text{tr} \left\{ \left[[-(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\parallel} + \mathbf{M}_f] \Pi_f(\boldsymbol{\tau}) - \frac{(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma})_s}{\cosh^2(\mathbf{B}_f \boldsymbol{\tau})} \right] \left[[-(\mathbf{p}' \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\parallel} + \mathbf{M}_{f'}] \Pi_{f'}(\boldsymbol{\tau}') - \frac{(\mathbf{p}' \cdot \boldsymbol{\gamma})_s}{\cosh^2(\mathbf{B}_{f'} \boldsymbol{\tau}')} \right] \gamma_5^2 \right\}.$$

em que consideramos que $\gamma_5^2 = 1$. Efetuando o produto

$$\begin{aligned} \mathbf{t} = \text{tr} \left\{ & \cancel{-(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\parallel} \Pi_f(\boldsymbol{\tau}) (\mathbf{p}' \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\parallel} \Pi_{f'}(\boldsymbol{\tau}') - (\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\parallel} \Pi_f(\boldsymbol{\tau}) \mathbf{M}_{f'} \Pi_{f'}(\boldsymbol{\tau}')} \right. \\ & \cancel{-(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\parallel} \Pi_f(\boldsymbol{\tau}) \frac{(\mathbf{p}' \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\perp}}{\cosh^2(\mathbf{B}_{f'} \boldsymbol{\tau}')} + \mathbf{M}_f \Pi_f(\boldsymbol{\tau}) (\mathbf{p}' \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\parallel} \Pi_{f'}(\boldsymbol{\tau}') + \mathbf{M}_f \Pi_f(\boldsymbol{\tau}) \mathbf{M}_{f'} \Pi_{f'}(\boldsymbol{\tau}')} \\ & \cancel{+ \mathbf{M}_f \Pi_f(\boldsymbol{\tau}) \frac{(\mathbf{p}' \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\perp}}{\cosh^2(\mathbf{B}_{f'} \boldsymbol{\tau}')} - \frac{(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\perp}}{\cosh^2(\mathbf{B}_f \boldsymbol{\tau})} (\mathbf{p}' \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\parallel} \Pi_{f'}(\boldsymbol{\tau}') - \frac{(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\perp}}{\cosh^2(\mathbf{B}_f \boldsymbol{\tau})} \mathbf{M}_{f'} \Pi_{f'}(\boldsymbol{\tau}')} \\ & \left. - \frac{(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\perp}}{\cosh^2(\mathbf{B}_f \boldsymbol{\tau})} \frac{(\mathbf{p}' \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\perp}}{\cosh^2(\mathbf{B}_{f'} \boldsymbol{\tau}')} \right\}, \end{aligned}$$

onde utilizamos $\text{tr}[\gamma_{\mu} \gamma_{\nu} \gamma_{\rho} \dots] = 0$ para um número ímpar de matrizes $\boldsymbol{\gamma}$. Reescrevemos \mathbf{t} como

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_2 + \mathbf{t}_3 + \mathbf{t}_4 + \mathbf{t}_5,$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_1 &= -\text{tr}[(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\perp} \Pi_f(\boldsymbol{\tau}) (\mathbf{p}' \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\parallel} \Pi_{f'}(\boldsymbol{\tau}')], \\ \mathbf{t}_2 &= -\text{tr} \left[(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\parallel} \Pi_f(\boldsymbol{\tau}) \frac{(\mathbf{p}' \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\perp}}{\cosh^2(\mathbf{B}_{f'} \boldsymbol{\tau}')} \right], \\ \mathbf{t}_3 &= \text{tr}[\mathbf{M}_f \mathbf{M}_{f'} \Pi_f(\boldsymbol{\tau}) \Pi_{f'}(\boldsymbol{\tau}')], \\ \mathbf{t}_4 &= \text{tr} \left[\frac{(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\perp}}{\cosh^2(\mathbf{B}_f \boldsymbol{\tau})}, (\mathbf{p}' \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\parallel} \Pi_{f'}(\boldsymbol{\tau}') \right] \\ \mathbf{t}_5 &= -\text{tr} \left[\frac{(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\perp}}{\cosh^2(\mathbf{B}_f \boldsymbol{\tau})} \frac{(\mathbf{p}' \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\perp}}{\cosh^2(\mathbf{B}_{f'} \boldsymbol{\tau}')} \right]. \end{aligned}$$

Antes de calcular estes traços devemos notar que como

$$(\mathbf{p}_3\gamma_3) \cdot (i\gamma_1\gamma_2) = i\mathbf{p}_3\gamma_1\gamma_3\gamma_2 = i\gamma_1\gamma_2\mathbf{p}_3\gamma_3,$$

então

$$(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\parallel} \Pi(\boldsymbol{\tau}) = \Pi_f(\boldsymbol{\tau})(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\parallel}. \quad (\text{D.124})$$

Termo \mathbf{t}_1 O primeiro termo do traço é

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_1 &= -\text{tr}[(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\perp} \Pi_f(\boldsymbol{\tau})(\mathbf{p}' \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\parallel} \Pi_{f'}(\boldsymbol{\tau}')], \\ &= -\text{tr}[(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\perp} (\mathbf{p}' \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\parallel} \Pi_f(\boldsymbol{\tau}) \Pi_{f'}(\boldsymbol{\tau}')]. \end{aligned} \quad (\text{D.125})$$

Ao calcular os produtos $(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\parallel} (\mathbf{p}' \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\parallel}$ e $\Pi_f(\boldsymbol{\tau}) \Pi_{f'}(\boldsymbol{\tau}')$ separadamente, obtemos

$$(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\parallel} (\mathbf{p}' \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\parallel} = -(\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}')_{\parallel} + (\mathbf{p}_4\mathbf{p}'_3 - \mathbf{p}_3\mathbf{p}'_4)\gamma_4\gamma_3, \quad (\text{D.126})$$

$$\begin{aligned} \Pi_f(\boldsymbol{\tau}) \Pi_{f'}(\boldsymbol{\tau}') &= 1 + \mathbf{s}_f \mathbf{s}_{f'} \tanh(\mathbf{B}_f \boldsymbol{\tau}) \tanh(\mathbf{B}_{f'} \boldsymbol{\tau}') \\ &\quad + i\gamma_1\gamma_2 [\mathbf{s}_f \tanh(\mathbf{B}_f \boldsymbol{\tau}) + \mathbf{s}_{f'} \tanh(\mathbf{B}_{f'} \boldsymbol{\tau}')]. \end{aligned} \quad (\text{D.127})$$

Substituindo (D.126) e (D.127) em \mathbf{t}_1

$$\boxed{\mathbf{t}_1 = 4(\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}')_{\parallel} [1 + \mathbf{s}_f \mathbf{s}_{f'} \tanh(\mathbf{B}_f \boldsymbol{\tau}) \tanh(\mathbf{B}_{f'} \boldsymbol{\tau}')].} \quad (\text{D.128})$$

Termo \mathbf{t}_2 Considerando o mesmo argumento que utilizamos em D.2.2,

$$\boxed{\mathbf{t}_2 = -\text{tr} \left[(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\parallel} \Pi_f(\boldsymbol{\tau}) \frac{(\mathbf{p}' \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\perp}}{\cosh^2(\mathbf{B}_{f'} \boldsymbol{\tau}')} \right] = 0.} \quad (\text{D.129})$$

Termo t_3 O terceiro termo de t é

$$t_3 = \text{tr}[\mathbf{M}_f \mathbf{M}_{f'} \Pi_f(\boldsymbol{\tau}) \Pi_{f'}(\boldsymbol{\tau}')]. \quad (\text{D.130})$$

Usando a equação (D.127)

$$\boxed{t_3 = 4\mathbf{M}_f \mathbf{M}_{f'} [1 + s_f s_{f'} \tanh(\mathbf{B}_f \boldsymbol{\tau}) \tanh(\mathbf{B}_{f'} \boldsymbol{\tau}')].} \quad (\text{D.131})$$

Termo t_4 Utilizando o mesmo raciocínio que usamos para t_2 ,

$$\boxed{t_4 = 0.} \quad (\text{D.132})$$

Termo t_5 O último traço que precisamos calcular é

$$t_5 = -\text{tr} \left[\frac{(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\perp}}{\cosh^2(\mathbf{B}_f \boldsymbol{\tau})} \frac{(\mathbf{p}' \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\perp}}{\cosh^2(\mathbf{B}_{f'} \boldsymbol{\tau}')} \right]. \quad (\text{D.133})$$

Após alguma manipulação algébrica, encontramos

$$\boxed{t_5 = \frac{4(\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}')_{\perp}}{\cosh^2(\mathbf{B}_f \boldsymbol{\tau}) \cosh^2(\mathbf{B}_{f'} \boldsymbol{\tau}')}.} \quad (\text{D.134})$$

Finalmente, podemos reescrever o traço da equação (D.123) como

$$\begin{aligned} t = & \underbrace{4(\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}')_{\parallel} [1 + s_f s + f' \tanh(\mathbf{B}_f \boldsymbol{\tau}) \tanh(\mathbf{B}_{f'} \boldsymbol{\tau}')]}_{t_1} + \underbrace{0}_{t_2} \\ & + \underbrace{4\mathbf{M}_f \mathbf{M}_{f'} [1 + s_f s_{f'} \tanh(\mathbf{B}_f \boldsymbol{\tau}) \tanh(\mathbf{B}_{f'} \boldsymbol{\tau}')]}_{t_3} + \underbrace{0}_{t_4} + \underbrace{\frac{4(\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}')_{\perp}}{\cosh^2(\mathbf{B}_f \boldsymbol{\tau}) \cosh^2(\mathbf{B}_{f'} \boldsymbol{\tau}')}}_{t_5} \end{aligned}$$

e, manipulando alguns termos,

$$\mathbf{t} = 4[(\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}')_{\parallel} + M_f M_{f'}][1 + s_f s_{f'} \tanh(B_f \tau) \tanh(B_{f'} \tau)] + \frac{4(\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}')_{\perp}}{\cosh^2(B_f \tau) \cosh^2(B_{f'} \tau)}. \quad (\text{D.135})$$

Substituindo (D.135) na equação (D.122),

$$\begin{aligned} \text{tr} \left[\tilde{\mathcal{S}}_p^f \gamma_5 \tilde{\mathcal{S}}_{p'}^{f'} \gamma_5 \right] &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} d\tau d\tau' \exp \left[-\tau \left(M_f^2 + p_{\parallel}^2 + p_{\perp}^2 \frac{\tanh(B_f \tau)}{B_f \tau} \right) \right] \\ &\times \exp \left[-\tau' \left(M_{f'}^2 + p'_{\parallel}{}^2 + p'_{\perp}{}^2 \frac{\tanh(B_{f'} \tau')}{B_{f'} \tau'} \right) \right] \\ &\times 4 \left\{ [(\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}')_{\parallel} + M_f M_{f'}][1 + s_f s_{f'} \tanh(B_f \tau) \tanh(B_{f'} \tau')] \right. \\ &\left. + \frac{(\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}')_{\perp}}{\cosh^2(B_f \tau) \cosh^2(B_{f'} \tau')} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{D.136})$$

D.4.2 Base de Ritus

Podemos reescrever a equação (4.46) como

$$\mathbf{G}_{\bar{q}q}^+ = -N_c \int \frac{d^4 \mathbf{p}}{(2\pi)^4} \frac{d^4 \mathbf{p}'}{(2\pi)^4} \text{tr} \left[\tilde{\mathcal{S}}_p^f \gamma_5 \tilde{\mathcal{S}}_{p'}^{f'} \right] \tilde{\mathbb{I}}_{pp'}, \quad (\text{D.137})$$

em que

$$\tilde{\mathbb{I}}_{pp'} = \int d^4 x d^4 x' e^{i\Phi_f(x, x')} e^{i\Phi_{f'}(x', x)} e^{i(\mathbf{p}-\mathbf{p}') \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{x}')} (\mathbb{F}_{\bar{q}}^{\perp}(x))^* \mathbb{F}_{\bar{q}'}^{\perp}(x'). \quad (\text{D.138})$$

Como já vimos, as fases de Schwinger ficam

$$i\Phi_f(x, x') + i\Phi_{f'}(x', x) = (q_f - q_{f'}) \frac{i\mathbf{B}}{2} (\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}'_1) (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}'_2).$$

Ao definirmos

$$\mathbf{B}_Q \equiv (q_f - q_{f'}) \mathbf{B} \equiv q_M \mathbf{B}, \quad (\text{D.139})$$

em que q_M é a carga do méson, então a soma das fases de Schwinger fica

$$i\Phi_f(x, x') + i\Phi_{f'}(x', x) = \frac{i\mathbf{B}_Q}{2} (\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}'_1) (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}'_2). \quad (\text{D.140})$$

D.4.3 Mudança de variáveis em \mathbf{p}_\perp e \mathbf{p}'_\perp

Precisamos fazer a mudança de variáveis

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}'_1; \quad \mathbf{v}_1 = \frac{\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}'_1}{2} &\Rightarrow \mathbf{p}_1 = \mathbf{v}_1 + \frac{\mathbf{u}_1}{2}; \quad \mathbf{p}'_1 = \mathbf{v}_1 - \frac{\mathbf{u}_1}{2} \\ \mathbf{u}_2 = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}'_2; \quad \mathbf{v}_2 = \frac{\mathbf{p}_2 + \mathbf{p}'_2}{2} &\Rightarrow \mathbf{p}_2 = \mathbf{v}_2 + \frac{\mathbf{u}_2}{2}; \quad \mathbf{p}'_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{u}_2}{2} \end{aligned}$$

Alguns termos de (4.53) precisam ser reescritos,

- $\int d^2\mathbf{p}_\perp d^2\mathbf{p}'_\perp = \int d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 d\mathbf{p}'_1 d\mathbf{p}'_2 = \int d\mathbf{v}_1 d\mathbf{u}_1 d\mathbf{v}_2 d\mathbf{u}_2 \equiv \int d^2\mathbf{u}_\perp d^2\mathbf{v}_\perp,$
- $\mathbf{p}_\perp^2 = \mathbf{p}_1^2 + \mathbf{p}_2^2 = \left(\mathbf{v}_1 + \frac{\mathbf{u}_1}{2}\right)^2 + \left(\mathbf{v}_2 + \frac{\mathbf{u}_2}{2}\right)^2,$
- $\mathbf{p}'_\perp^2 = \mathbf{p}'_1^2 + \mathbf{p}'_2^2 = \left(\mathbf{v}_1 - \frac{\mathbf{u}_1}{2}\right)^2 + \left(\mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{u}_2}{2}\right)^2,$
- $(\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}')_\perp = \mathbf{p}_1\mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}_2\mathbf{p}'_2 = \left(\mathbf{v}_1 + \frac{\mathbf{u}_1}{2}\right)\left(\mathbf{v}_1 - \frac{\mathbf{u}_1}{2}\right) + \left(\mathbf{v}_2 + \frac{\mathbf{u}_2}{2}\right)\left(\mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{u}_2}{2}\right),$
 $= \mathbf{v}_1^2 - \frac{\mathbf{u}_1^2}{4} + \mathbf{v}_2^2 - \frac{\mathbf{u}_2^2}{4} = \mathbf{v}_1^2 + \mathbf{v}_2^2 - \left(\frac{\mathbf{u}_1^2 + \mathbf{u}_2^2}{4}\right),$
- $\int d^4\mathbf{p} d^4\mathbf{p}' = \int d^2\mathbf{p}_\parallel d^2\mathbf{p}'_\parallel d^2\mathbf{p}_\perp d^2\mathbf{p}'_\perp = \int d^2\mathbf{p}_\parallel d^2\mathbf{p}'_\parallel d^2\mathbf{u}_\perp d^2\mathbf{v}_\perp.$

e podemos expressar $\mathbf{G}_{\bar{q}\bar{q}'}^+$ como

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{\bar{q}\bar{q}'}^+ &= -\frac{16\pi^{\frac{3}{2}}}{\mathbf{B}_+^{\frac{3}{2}}} \mathbf{N}_c \delta_{234}^{(3)}(\mathbf{q} - \mathbf{q}') \mathbf{N}_k \mathbf{N}_{k'} (-1)^{k'} 2^{\frac{k'-k}{2}} k! \int \frac{d^2\mathbf{p}_\parallel}{(2\pi)^4} \frac{d^2\mathbf{p}'_\parallel}{(2\pi)^4} d^2\mathbf{u}_\perp d^2\mathbf{v}_\perp \delta^{(2)}(\mathbf{p}_\parallel - \mathbf{p}'_\parallel - \mathbf{q}_\parallel) \\ &\quad \times \int_0^\infty \int_0^\infty d\tau d\tau' \exp(-M_f^2\tau - M_{f'}^2\tau') \\ &\quad \times \exp\left\{-\tau\left\{\mathbf{p}_\parallel^2 + \left[\left(\mathbf{v}_1 + \frac{\mathbf{u}_1}{2}\right)^2 + \left(\mathbf{v}_2 + \frac{\mathbf{u}_2}{2}\right)^2\right] \frac{\tanh(\mathbf{B}_f\tau)}{\mathbf{B}_f\tau}\right\}\right\} \\ &\quad \times \exp\left\{-\tau'\left\{\mathbf{p}'_\parallel^2 + \left[\left(\mathbf{v}_1 - \frac{\mathbf{u}_1}{2}\right)^2 + \left(\mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{u}_2}{2}\right)^2\right] \frac{\tanh(\mathbf{B}_{f'}\tau')}{\mathbf{B}_{f'}\tau'}\right\}\right\} \\ &\quad \times \left\{[\mathbf{M}_f\mathbf{M}_{f'} + (\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}')_\parallel][1 + \mathbf{s}_f\mathbf{s}_{f'} \tanh(\mathbf{B}_f\tau) \tanh(\mathbf{B}_{f'}\tau')] + \frac{\mathbf{v}_1^2 + \mathbf{v}_2^2 - \frac{1}{4}(\mathbf{u}_1^2 + \mathbf{u}_2^2)}{\cosh^2(\mathbf{B}_f\tau) \cosh^2(\mathbf{B}_{f'}\tau')}\right\} \\ &\quad \times \exp\left[-\frac{\mathbf{u}_1^2 + \mathbf{u}_2^2}{\mathbf{B}_+}\right] \left[\frac{i\mathbf{u}_1 + \mathbf{s}_+\mathbf{u}_2}{\sqrt{\mathbf{B}_+}}\right]^{k'-k} \mathbf{L}_k^{k'-k} \left[\frac{2}{\mathbf{B}_+}(\mathbf{u}_1^2 + \mathbf{u}_2^2)\right]. \end{aligned} \quad (\text{D.141})$$

D.4.4 Mudança de variáveis em τ e τ'

Faremos a mudança de variáveis

$$\tau = zy, \quad (\text{D.142})$$

$$\tau' = z(1 - y), \quad (\text{D.143})$$

mas precisamos reescrever alguns termos

$$\bullet \frac{(\tau - \tau')}{(\tau + \tau')} = 2y - 1, \quad (\text{D.144})$$

$$\bullet \frac{\tau\tau'}{\tau + \tau'} = yz(1 - y), \quad (\text{D.145})$$

$$\bullet q_{\parallel}^2 \left[-\frac{1}{4} + \frac{1}{\tau + \tau'} \frac{(\tau - \tau')^2}{4(\tau + \tau')} \right] = q_{\parallel}^2 y(y - 1). \quad (\text{D.146})$$

Definindo

$$\begin{aligned} \alpha_{\pm} &= \frac{C_{\pm}}{B_f B_{f'}}, \\ &= \frac{B_{f'} \tanh(B_f \tau) + B_f \tanh(B_{f'} \tau') \pm B_{\pm} \tanh(B_f \tau) \tanh(B_{f'} \tau')}{B_f B_{f'}}, \end{aligned} \quad (\text{D.147})$$

então

$$C_{\pm} = B_f B_{f'} \alpha_{\pm}.$$

Apêndice E

Cálculos do Capítulo 5

E.1 Integral (5.4)

E.1.1 Termo finito da integral

O termo finito da integral (5.4) é dado por

$$I^{(\text{mag})} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau^2} e^{-\tau M_f^2} [\tau B_f \coth(B_f \tau) - 1].$$

Ao fazermos a mudança de variáveis

$$u_f = \tau B_f \Rightarrow du_f = B_f d\tau \Rightarrow d\tau = \frac{du_f}{B_f},$$

teremos

$$I^{(\text{mag})} = \frac{B_f}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \frac{du_f}{u_f^2} \exp\left(-u_f \frac{M_f^2}{B_f}\right) [u_f \coth(u_f) - 1]. \quad (\text{E.1})$$

Como a divergência está em $1/u_f^2$, somamos o valor infinitesimal ε em seu expoente e tomamos o limite $\varepsilon \rightarrow 0$

$$I^{(\text{mag})} = \frac{B_f}{(2\pi)^2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_0^\infty du_f \exp\left(-u_f \frac{M_f^2}{B_f}\right) u^{\varepsilon-1} \coth u_f - \int_0^\infty du_f \exp\left(-u_f \frac{M_f^2}{B_f}\right) u^{\varepsilon-2} \right\}. \quad (\text{E.2})$$

Temos as integrais tabeladas¹

$$\bullet \int_0^{\infty} dx x^{\mu-1} e^{-\beta x} \coth x = \Gamma(\mu) \left[2^{1-\mu} \zeta\left(\mu, \frac{\beta}{2}\right) - \beta^{-\mu} \right] \quad \text{Re } \mu > 1, \quad (\text{E.3})$$

$$\text{Re } \beta > 0,$$

$$\bullet \int_0^{\infty} dx x^{\nu-1} e^{-\beta x} = \frac{1}{\beta^{\nu}} \Gamma(\nu) \quad \text{Re } \nu > 0 \quad (\text{E.4})$$

$$\text{Re } \beta > 0,$$

então (E.2) fica²

$$\begin{aligned} \Gamma^{(\text{mag})} = \frac{B_f}{(2\pi)^2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \left[\Gamma(\varepsilon) \left[2^{1-\varepsilon} \zeta\left(\varepsilon, \frac{M_f^2}{2B_f}\right) - \left(\frac{M_f^2}{B_f}\right)^{-\varepsilon} \right] \right] \right. \\ \left. - \left[\left(\frac{B_f}{M_f^2}\right)^{\varepsilon-1} \Gamma(\varepsilon-1) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{E.5})$$

Consideramos as propriedades da função gama

$$\bullet \Gamma(-1 + \varepsilon) = -\left(\frac{1}{\varepsilon} + 1 - \gamma_E + \mathcal{O}(\varepsilon)\right), \quad (\text{E.6a})$$

$$\bullet \Gamma(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad (\text{E.6b})$$

$$\bullet \Gamma(\varepsilon + 1) = 1 - \gamma_E \varepsilon, \quad (\text{E.6c})$$

e as propriedades da função zeta de Hurwitz-Riemann

$$\bullet \zeta(1 + \varepsilon, \mathbf{a}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} + \gamma_0(\mathbf{a}), \quad (\text{E.7a})$$

$$\bullet \zeta'(0, \mathbf{a}) = \ln(\Gamma(\mathbf{a})) - \frac{1}{2} \ln(2\pi), \quad (\text{E.7b})$$

$$\bullet \zeta(0, \mathbf{a}) = \frac{1}{2} - \mathbf{a}, \quad (\text{E.7c})$$

além de

$$\bullet \mathbf{a}^{-\varepsilon} = 1 - \varepsilon \ln \mathbf{a}. \quad (\text{E.8})$$

¹A integral (E.3) é a equação 3.551.3 de [158] e a integral (E.4) é a equação 3.381.4 de [158].

²Consideramos $\mu \rightarrow \varepsilon$, $\beta \rightarrow \frac{M_f^2}{B_f}$ e $\nu \rightarrow \varepsilon - 1$.

Expandimos a função ζ até primeira ordem

$$\zeta\left(\varepsilon, \frac{M_f^2}{2B_f}\right) = \zeta\left(0, \frac{M_f^2}{2B_f}\right) + \varepsilon\zeta'\left(0, \frac{M_f^2}{2B_f}\right). \quad (\text{E.9})$$

Reescrevendo (E.5),

$$\begin{aligned} I^{(\text{mag})} = \frac{B_f}{(2\pi)^2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \Gamma(\varepsilon) \left[2 \cdot 2^{-\varepsilon} \zeta\left(\varepsilon, \frac{M_f^2}{2B_f}\right) - \left(\frac{M_f^2}{B_f}\right)^{-\varepsilon} \right] \right. \\ \left. - \left(\frac{M_f^2}{B_f}\right)^{-\varepsilon} \frac{M_f^2}{B_f} \Gamma(\varepsilon - 1) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{E.10})$$

Considerando (E.6), (E.7) e (E.9),

$$\begin{aligned} I^{(\text{mag})} = \frac{B_f}{(2\pi)^2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \left(\frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E\right) \left[2(1 - \varepsilon \ln 2) \left[\zeta\left(0, \frac{M_f^2}{2B_f}\right) + \varepsilon\zeta'\left(0, \frac{M_f^2}{2B_f}\right) \right] \right. \right. \\ \left. \left. - \left[1 - \varepsilon \ln\left(\frac{2M_f^2}{2B_f}\right) \right] \right] - \frac{2M_f}{2B_f} \left[1 - \varepsilon \ln\left(\frac{2M_f^2}{2B_f}\right) \right] \left[-\left(\frac{1}{\varepsilon} + 1 - \gamma_E\right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{E.11})$$

Definimos

$$x_f = \frac{M_f^2}{2B_f}, \quad (\text{E.12})$$

então

$$\begin{aligned} I^{(\text{mag})} = \frac{B_f}{(2\pi)^2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \left(\frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E\right) \left[2(1 - \varepsilon \ln 2) \left[\zeta(0, x_f) + \varepsilon\zeta'(0, x_f) \right] - [1 - \varepsilon \ln(2x_f)] \right. \right. \\ \left. \left. + 2x_f [1 - \varepsilon \ln(2x_f)] \left(\frac{1}{\varepsilon} + 1 - \gamma_E\right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{E.13})$$

Considerando (E.7b) e (E.7c)

$$\begin{aligned} I^{(\text{mag})} = \frac{B_f}{(2\pi)^2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \{ [2 \ln(\Gamma(x_f)) - \ln(2\pi) + \ln(x_f)(1 - 2x_f) + 2x_f] \\ + \varepsilon [-2 \ln 2 \ln(\Gamma(x_f)) + \ln 2 \ln(2\pi) - \gamma_E \ln(\Gamma(x_f)) + \gamma_E \ln(2\pi) \\ - \gamma_E \ln(x_f) - 2x_f \ln 2 - 2x_f \ln(x_f) + 2x_f \gamma_E \ln(x_f)] \\ + \varepsilon^2 [2\gamma_E \ln 2 \ln(\Gamma(x_f)) - \gamma_E \ln 2 \ln(2\pi)] \} \end{aligned} \quad (\text{E.14})$$

Tomando o limite, podemos considerar

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{a}\varepsilon = 0, \quad (\text{E.15})$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{b}\varepsilon^2 = 0. \quad (\text{E.16})$$

Substituindo (E.15) e (E.16) em (E.14),

$$\boxed{I^{(\text{mag})} = \frac{2\mathbf{B}_f \chi_f}{(2\pi)^2} \left[\frac{\ln(\Gamma(\chi_f))}{\chi_f} - \frac{\ln(2\pi)}{2\chi_f} + 1 - \ln(\chi_f) \left(1 - \frac{1}{2\chi_f} \right) \right]}. \quad (\text{E.17})$$

E.1.2 Termo divergente da integral

O termo divergente da integral (5.4) é

$$I^{(\text{div})} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty d\tau \frac{e^{-\tau M_f^2}}{\tau^2}.$$

Faremos a mudança de variáveis

$$\tau M_f^2 = z \Rightarrow \tau = \frac{z}{M_f^2},$$

$$dz = M_f^2 d\tau,$$

e então

$$I^{(\text{div})} = \frac{M_f^2}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dz \frac{e^{-z}}{z^2}. \quad (\text{E.18})$$

Como a integral diverge em z^{-2} , então introduzimos um termo infinitesimal ε e calculamos a integral no limite $\varepsilon \rightarrow 0$

$$I^{(\text{div})} = \frac{M_f^2}{(2\pi)^2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\infty dz e^{-z} z^{\varepsilon-2}. \quad (\text{E.19})$$

Podemos definir a função gama como

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} dt t^{z-1} e^{-t}, \quad (\text{E.20})$$

então $I^{(\text{div})}$ fica

$$I^{(\text{div})} = \frac{M_f^2}{(2\pi)^2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Gamma(\varepsilon - 1). \quad (\text{E.21})$$

Podemos mostrar que a integral (E.21) equivale à integral no vácuo (com $B = 0$)

$$I_{B=0} = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p \frac{1}{p^2 - M_f^2 + i\varepsilon}. \quad (\text{E.22})$$

Prova da relação (E.22) Precisamos primeiro fazer a integração em p_0 . Considerando

$$\frac{d^4p}{(2\pi)^4} = \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{dp_0}{(2\pi)},$$

e

$$p^2 - M_f^2 = p_0^2 - \mathbf{p}^2 - M_f^2 = p_0^2 - E_f^2, \quad (\text{E.23})$$

em que $E_f^2 = \mathbf{p}^2 + M_f^2$. Então reescrevemos (E.22) como

$$I_{B=0} = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_0}{(2\pi)} \frac{1}{p_0^2 - E_f^2 + i\varepsilon}. \quad (\text{E.24})$$

Reescrevemos o denominador para evidenciar os polos

$$I_{B=0} = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_0}{(2\pi)} \frac{1}{(p_0 - E_f + i\varepsilon')(p_0 + E_f - i\varepsilon')}. \quad (\text{E.25})$$

Temos polos em $\pm(E_f - i\varepsilon')$. Escolhemos o contorno de integração dado pela Figura E.1

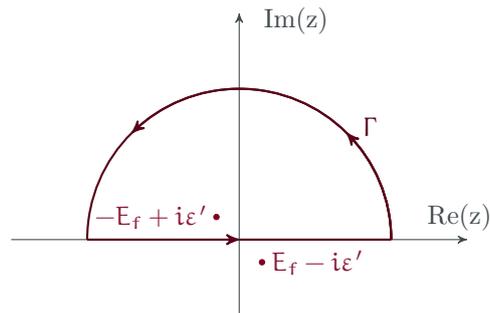


Figura E.1: Contorno de integração Γ .

Considerando o contorno de integração, apenas o polo $-iE_f + i\varepsilon'$ contribui com a integral. Pelo teorema dos resíduos, ficamos com

$$I_{B=0} = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2(p^2 + M_f^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad (\text{E.26})$$

ou, em coordenadas polares

$$I_{B=0} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dp \frac{p^2}{(p^2 + M_f^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (\text{E.27})$$

Para facilitar o cálculo, reescrevemos (E.27) como

$$I_{B=0} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dp \left(\frac{p^2}{M_f^2} + 1 \right)^{-\frac{1}{2}} M_f \frac{p^2}{M_f^2}, \quad (\text{E.28})$$

e fazemos a mudança de variáveis

$$p' = \frac{p}{M_f} \Rightarrow dp' = \frac{dp}{M_f},$$

então³

$$I_{B=0} = \frac{M_f^2}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dp (p^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} p^2. \quad (\text{E.29})$$

³Por simplicidade, $p' \rightarrow p$.

Como temos uma divergência no denominador, somamos ε no seu expoente e tomamos o limite $\varepsilon \rightarrow 0$. Então

$$I_{B=0} = \frac{M_f^2}{(2\pi)^2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\infty dp (p^2 + 1)^{-\frac{1}{2}-\varepsilon} p^2. \quad (\text{E.30})$$

Como a função beta é definida como

$$\frac{1}{2}B\left(\frac{\mu}{2}, 1 - \nu - \frac{\mu}{2}\right) = \int_0^\infty dx x^{\mu-1} (1+x^2)^{\nu-1}, \quad (\text{E.31})$$

comparando com (E.30), podemos escrever

$$I_{B=0} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2}B\left(\frac{3}{2}, \varepsilon - 1\right). \quad (\text{E.32})$$

Pela propriedade da função beta,

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \quad (\text{E.33})$$

podemos escrever (E.32) como

$$I_{B=0} = \frac{M_f^2}{(2\pi)^2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Gamma(3/2)\Gamma(\varepsilon - 1)}{\Gamma(\varepsilon + 1/2)}. \quad (\text{E.34})$$

Ao calcularmos o limite separadamente, considerando as propriedades da função gama, obtemos

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(\varepsilon + 1/2)} \underset{\text{Tomando o limite}}{=} \frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(1/2)} = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(1/2)}{\Gamma(1/2)} = \frac{1}{2}, \quad (\text{E.35})$$

então (E.34) fica

$$I_{B=0} = \frac{1}{2} \frac{M_f^2}{(2\pi)^2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Gamma(\varepsilon - 1). \quad (\text{E.36})$$

Comparando com (E.21),

$$I^{(\text{div})} = 2I_{B=0}, \quad (\text{E.37})$$

então

$$I^{(\text{div})} \sim I_{B=0}^{(\text{reg})} = \frac{2M_f^2}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dp \frac{p^2}{(p^2 + M_f^2)^{\frac{1}{2}}}. \quad (\text{E.38})$$

A integral (E.38) diverge, mas podemos definir uma regularização. Escolhemos um cutoff 3D Λ

$$I_{B=0}^{(\text{reg})} = \frac{2M_f^2}{(2\pi)^2} \int_0^\Lambda dp \frac{p^2}{(p^2 + M_f^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad (\text{E.39})$$

e integrando em \mathbf{p} ficamos com

$$I_{B=0}^{(\text{reg})} = \frac{M_f^2}{(2\pi)} \left\{ \Lambda \sqrt{\Lambda^2 + M_f^2} + M_f^2 \ln \left(\frac{M_f}{\sqrt{\Lambda^2 + M_f^2} + \Lambda} \right) \right\}. \quad (\text{E.40})$$

E.2 Expansão da Integral (5.9) para $B = 0$

Consideraremos

$$\begin{aligned} G_{ff'}(k, q_{\parallel}) &= -\frac{N_c}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dz \int_0^1 dy \exp \left[-zyM_f^2 - z(1-y)M_{f'}^2 - zy(1-y)q_{\parallel}^2 \right] \\ &\times \frac{\alpha_-^k}{\alpha_+^{k+1}} \left\{ \left[M_f M_{f'} + \frac{1}{z} - y(1-y)q_{\parallel}^2 \right] [1 + s_f s_{f'} \tanh(B_f zy) \tanh(B_{f'} z(1-y))] \right. \\ &\left. + [1 - \tanh^2(B_f zy)] [1 - \tanh^2(B_{f'} z(1-y))] \frac{1}{\alpha_+ \alpha_-} [\alpha_- + k(\alpha_+ - \alpha_-)] \right\}, \quad (\text{E.41}) \end{aligned}$$

com

$$\alpha_{\pm} = \frac{B_{f'} \tanh(B_f zy) + B_f \tanh[B_{f'} z(1-y)] \pm B_M \tanh(B_f zy) \tanh[B_{f'} z(1-y)]}{B_f B_{f'}}. \quad (\text{E.42})$$

Precisamos expandir a tangente hiperbólica em torno de $x = 0$ [158]

$$\begin{aligned}\tanh(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n} 4^n (4^n - 1)}{(2n)!} x^{2n-1}, \\ &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \mathcal{O}(x^7),\end{aligned}\tag{E.43}$$

em que B_{2n} são os números de Bernoulli, dados por

$$B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \quad B_6 = \frac{1}{42}.$$

Substituindo (E.43) em (E.42) até primeira ordem,

$$\alpha_{\pm} = z.\tag{E.44}$$

Precisamos ainda reescrever os outros termos que dependem da tangente hiperbólica,

$$\bullet \frac{\alpha_-^k}{\alpha_+^{k+1}} = \frac{1}{z},\tag{E.45}$$

$$\bullet \tanh(B_f z y) \tanh[B_{f'} z (1 - y)] = (B_f z y)[B_{f'} z (1 - y)] = 0,\tag{E.46}$$

$$\bullet \frac{[1 - \tanh^2(B_f z y)][1 - \tanh^2[B_{f'} z (1 - y)]]}{\alpha_+ \alpha_-} = \frac{1}{z^2},\tag{E.47}$$

$$\bullet [\alpha_- + k(\alpha_- - \alpha_+)] = [z + k(z - z)] = z,\tag{E.48}$$

em que cancelamos os termos de segunda ordem. Ao substituirmos estas expressões em (5.9), obtemos (E.43).

E.3 Passagem (5.11)-(5.13)

Considerando o polarizador $J_{ff'}$ no vácuo

$$\frac{1}{i} J_{ff'}(q^2) = -4N_c \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{M_f M_{f'} - k^2 + q^2/2}{[(k + q/2)^2 - M_f^2][(k - q/2)^2 - M_{f'}^2]},$$

faremos a mudança de variáveis

$$\begin{aligned} p &= k - \frac{q}{2} \Rightarrow k = p + \frac{q}{2}, \\ &\Rightarrow k^2 = p^2 + pq + \frac{q^2}{4}, \\ k + \frac{q}{2} &= \left(p + \frac{q}{2}\right) + \frac{q}{2} = p + q, \end{aligned}$$

então o polarizador fica

$$\frac{1}{i} J_{ff'}(q^2) = -4N_c \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{M_f M_{f'} - p(p + q)}{[(p + q)^2 - M_f^2][p^2 - M_{f'}^2]}.$$

Precisamos reescrever o integrando

$$\frac{1}{[(p + q)^2 - M_f^2]} + \frac{1}{[p^2 - M_{f'}^2]} = \frac{-2[M_f M_{f'} - p(p + q)]}{[(p + q)^2 - M_f^2][p^2 - M_{f'}^2]} + \frac{q^2 - (M_f - M_{f'})^2}{[(p + q)^2 - M_f^2][p^2 - M_{f'}^2]},$$

então

$$\frac{M_f M_{f'} - p(p + q)}{[(p + q)^2 - M_f^2][p^2 - M_{f'}^2]} = \frac{1}{2} \left[\frac{q^2 - (M_f - M_{f'})^2}{[(p + q)^2 - M_f^2][p^2 - M_{f'}^2]} - \frac{1}{[(p + q)^2 - M_f^2]} - \frac{1}{[p^2 - M_{f'}^2]} \right],$$

e a integral fica

$$\frac{1}{i} J_{ff'}(q^2) = -\frac{4N_c}{2} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left[\underbrace{\frac{q^2 - (M_f^2 - M_{f'})^2}{[(p + q)^2 - M_f^2][p^2 - M_{f'}^2]}}_{I'_2} - \underbrace{\frac{1}{[(p + q)^2 - M_f^2]}}_{I'_{1f}} - \underbrace{\frac{1}{[p^2 - M_{f'}^2]}}_{I'_{1f'}} \right].$$

Vamos calcular os termos em destaque separadamente

E.3.1 Integral I'_2

A primeira integral que queremos calcular é

$$\frac{I'_2}{i} = -2N_c \int \frac{d^4\mathbf{p}}{(2\pi)^4} \frac{q^2 - (M_f^2 - M_{f'})^2}{[(\mathbf{p} + \mathbf{q})^2 - M_f^2][p^2 - M_{f'}^2]}.$$

Temos a relação

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 dy \frac{1}{[B + (A - B)y]^2},$$

em que consideramos

$$\begin{aligned} A &= (\mathbf{p} + \mathbf{q})^2 - M_f^2, \\ B &= p^2 - M_{f'}^2, \end{aligned}$$

e então I'_2 fica

$$\frac{1}{i} I'_2 = -2N_c \int_0^1 dy \int \frac{d^4\mathbf{p}}{(2\pi)^4} \frac{q^2 - (M_f - M_{f'})^2}{\{(p^2 - M_{f'}^2) + [2\mathbf{p}\mathbf{q} + q^2 - (M_f^2 - M_{f'}^2)]y\}^2}.$$

Podemos reescrever o denominador como

$$(p^2 - M_{f'}^2) + [2\mathbf{p}\mathbf{q} + q^2 - (M_f^2 - M_{f'}^2)]y = (\mathbf{p} + \mathbf{y}\mathbf{q})^2 + q^2\mathbf{y}(1 - \mathbf{y}) - M_f^2\mathbf{y} - M_{f'}^2(1 - \mathbf{y}),$$

então

$$\frac{1}{i} I'_2 = -2N_c \int_0^1 dy \int \frac{d^4\mathbf{p}}{(2\pi)^4} \frac{q^2 - (M_f - M_{f'})^2}{\{(\mathbf{p} + \mathbf{y}\mathbf{q})^2 + q^2\mathbf{y}(1 - \mathbf{y}) - M_f^2\mathbf{y} - M_{f'}^2(1 - \mathbf{y})\}^2}.$$

Fazemos a mudança de variáveis

$$\mathbf{k} = \mathbf{p} + \mathbf{y}\mathbf{q} \Rightarrow \mathbf{p} = \mathbf{k} - \mathbf{y}\mathbf{q},$$

então

$$\frac{1}{i} I'_2 = -2N_c \int_0^1 dy \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{q^2 - (M_f - M_{f'})^2}{[k^2 + q^2 y(1-y) - M_f^2 y M_{f'}^2 (1-y)]^2}.$$

Mudando para o espaço euclidiano

$$\begin{array}{ll} k_0 & \rightarrow \quad ik_4 \\ \text{Minkowski } d^4 k & \rightarrow \quad i d^4 k \\ k^2 & \rightarrow \quad -k^2 \\ \text{Minkowski } q^2 & \rightarrow \quad -q^2 \\ & \text{Euclidiano} \end{array}$$

então

$$I'_2 = 2N_c \int_0^1 dy \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{-[q^2 - (M_f - M_{f'})^2]}{[k^2 + q^2 y(1-y) + M_f^2 y + M_{f'}^2 (1-y)]^2},$$

Pela expressão

$$\frac{1}{A^2} = \frac{1}{\Gamma(2)} \int_0^\infty dz z e^{-zA}$$

podemos reescrever I'_2 como

$$I'_2 = -2N_c \int_0^1 dy \int_0^\infty dz \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} z e^{-zk^2} \exp\{-z[q^2 y(1-y) + M_f^2 y + M_{f'}^2 (1-y)]\} \\ [q^2 + (M_f - M_{f'})^2]$$

Se considerarmos

$$\bullet \int d^4 k e^{-zk^2} = 2\pi^2 \int_0^\infty dk k^3 e^{-zk^2},$$

$$\bullet \int_0^\infty dk k^n e^{-zk^2} = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2z^{\frac{n+1}{2}}},$$

então podemos fazer a integração em k

$$2\pi^2 \int_0^\infty dk k^3 e^{-zk^2} = \frac{\pi^2}{z^2}.$$

Reescrevemos a integral

$$I'_2 = -\frac{N_c}{8\pi^2} \int_0^1 dy \int_0^\infty \frac{dz}{z} \exp\{-z[q^2 y(1-y) + M_f^2 y + M_{f'}(1-y)]\} [q^2 + (M_f - M_{f'})^2],$$

e definimos

$$I_{2ff'} = \frac{1}{8\pi^2} \int_0^1 dy \int_0^\infty \frac{dz}{z} \exp\{-z[q^2 y(1-y) + M_f^2 y + M_{f'}(1-y)]\},$$

e finalmente teremos

$$I'_2 = -N_c [q^2 + (M_f - M_{f'})^2] I_{2ff'}.$$

E.3.2 Integral I'_{1f}

Queremos resolver

$$I'_{1f} = 2N_c \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(p+q)^2 - M_f^2]}.$$

Fazemos a mudança de variáveis

$$p+q = p' = p,$$

então

$$I'_{1f} = 2N_c \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 - M_f^2}.$$

E.3.3 Integral $I'_{1f'}$

Finalmente, precisamos encontrar

$$I'_{1f'} = 2N_c \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{[p^2 - M_{f'}^2]}.$$

Para I'_{1f} e $I'_{1f'}$, podemos escrever

$$I'_{1f} = 2N_c I_{1f}^{\text{vac}},$$

com

$$I_{1f}^{\text{vac}} = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 - M_f^2}.$$

Assim, temos

$$J_{ff'}(q^2) = -2N_c [I_{1f}^{\text{vac}} + I_{1f'}^{\text{vac}} - [q^2 - (M_f - M_{f'})^2] I_{2ff'}].$$

E.4 Integral I_{2f}^{vac}

Queremos resolver a integral

$$I_{2f}^{\text{vac}} = -\frac{1}{8\pi^2} \int_0^\Lambda dp \frac{p^2}{E_f} \frac{1}{p^2 - \left(\frac{m_M^2}{4} - M_f^2\right)} \quad (\text{E.49})$$

quando $m_M \geq 2M_f$. Para isso, usamos a fórmula de Sokhotski-Plemelj,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{p - x_0 \pm i\varepsilon} = P\left(\frac{1}{p - x_0}\right) \mp i\pi\delta(p - x_0), \quad (\text{E.50})$$

em que P é o valor principal de Cauchy. Assume-se que a fórmula (E.50) é multiplicada por uma função de p e integrada em relação a p , com x_0 dentro do intervalo de integração. O valor principal de Cauchy de uma função arbitrária com um polo de primeiro ordem em p_0 , com $p_0 \in [a, b]$, pode ser escrito como

$$P \int_a^b dp \frac{f(p)}{p - p_0} = \int_a^b dp \frac{f(p) - f(p_0)}{p - p_0} + f(p_0) \ln \left(\frac{b - p_0}{p_0 - a} \right). \quad (\text{E.51})$$

Considerando $p_0 = \sqrt{\frac{m_M^2}{4} - M_f^2}$, a equação (E.49) fica

$$I_{2f}^{\text{vac}} = -\frac{1}{8\pi^2} \int_0^\wedge dp \frac{p^2}{E_f(p + p_0)} \frac{1}{p - p_0}. \quad (\text{E.52})$$

Substituindo (E.50) em (E.52),

$$I_{2f}^{\text{vac}} = -\frac{1}{8\pi^2} \int_0^\wedge dp \frac{p^2}{E_f(p + p_0)} P \left(\frac{1}{p - p_0} \right) + i \frac{\pi}{8\pi^2} \int_0^\wedge dp \frac{p^2}{E_f(p + p_0)} \delta(p - p_0). \quad (\text{E.53})$$

Podemos dividir a integral em uma parte real e em uma imaginária

$$I_{2f}^{\text{vac}} = \text{Re}\{I_{2f}^{\text{vac}}\} + i \text{Im}\{I_{2f}^{\text{vac}}\}, \quad (\text{E.54})$$

com

$$\bullet \text{Re}\{I_{2f}^{\text{vac}}\} = -\frac{1}{8\pi^2} \int_0^\wedge dp \frac{p^2}{E_f(p + p_0)} P \left(\frac{1}{p - p_0} \right), \quad (\text{E.55})$$

$$\bullet \text{Im}\{I_{2f}^{\text{vac}}\} = \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\wedge dp \frac{p^2}{E_f(p - p_0)} \delta(p - p_0). \quad (\text{E.56})$$

E.4.1 Parte Real

A parte real da integral (E.53) é

$$\text{Re}\{I_{2f}^{\text{vac}}\} = -\frac{1}{8\pi^2} \int_0^\wedge dp \frac{p^2}{E_f(p + p_0)} P \left(\frac{1}{p - p_0} \right).$$

A função de p que está multiplicando o polo é

$$f(p) = \frac{p^2}{E_f(p + p_0)} = \frac{p^2}{\sqrt{p^2 + M_f^2} (p + p_0)}.$$

Avaliando $f(\mathbf{p})$ em $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0$ temos

$$f(\mathbf{p}_0) = \frac{\mathbf{p}_0}{m_M}. \quad (\text{E.57})$$

Substituindo (E.51) em (E.55) e considerando (E.57),

$$\boxed{\text{Re}\{I_{2f}^{\text{vac}}\} = -\frac{1}{8\pi^2} \left[\int_0^\Lambda d\mathbf{p} \left(\frac{\mathbf{p}_0}{E_f(\mathbf{p} + \mathbf{p}_0)} - \frac{\mathbf{p}_0}{m_M} \right) \frac{1}{(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0)} + \frac{\mathbf{p}_0}{m_M} \ln\left(\frac{\Lambda - \mathbf{p}_0}{\mathbf{p}_0}\right) \right]}. \quad (\text{E.58})$$

E.4.2 Parte Imaginária

A parte imaginária da integral (E.53) é

$$\text{Im}\{I_{2f}^{\text{vac}}\} = \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\Lambda d\mathbf{p} \frac{\mathbf{p}^2}{E_f(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0)} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0),$$

e considerando (E.57),

$$\boxed{\text{Im}\{I_{2f}^{\text{vac}}\} = \frac{1}{8\pi} \frac{\mathbf{p}_0}{m_M}}. \quad (\text{E.59})$$

E.5 Simplificação dos termos de (5.20)

Simplificando os termos em destaque da expressão (5.20) separadamente,

E.5.1 Primeiro termo

O primeiro termo que queremos simplificar é

$$\frac{[1 + \tanh(B_f z \mathbf{y}) \tanh[B_f z(1 - \mathbf{y})]]}{[\tanh(B_f z \mathbf{y}) + \tanh[B_f z(1 - \mathbf{y})]]}.$$

Usando a fórmula de adição

$$\tanh(x + \mathbf{y}) = \frac{\tanh(x) + \tanh(\mathbf{y})}{1 + \tanh(x) \tanh(\mathbf{y})},$$

teremos

$$\boxed{\frac{[1 + \tanh(\mathbf{B}_f z \mathbf{y}) \tanh[\mathbf{B}_f z(1 - \mathbf{y})]]}{[\tanh(\mathbf{B}_f z \mathbf{y}) + \tanh[\mathbf{B}_f z(1 - \mathbf{y})]]} = \coth(\mathbf{B}_f z).$$

E.5.2 Segundo termo

O segundo termo que queremos reescrever é

$$\frac{[1 - \tanh^2(\mathbf{B}_f z \mathbf{y})][1 - \tanh^2[\mathbf{B}_f z(1 - \mathbf{y})]]}{[\tanh(\mathbf{B}_f z \mathbf{y}) + \tanh[\mathbf{B}_f z(1 - \mathbf{y})]]^2}.$$

Podemos reescrever como

$$\frac{[1 - \tanh^2(\mathbf{B}_f z \mathbf{y})][1 - \tanh^2[\mathbf{B}_f z(1 - \mathbf{y})]]}{[\tanh(\mathbf{B}_f z \mathbf{y}) + \tanh[\mathbf{B}_f z(1 - \mathbf{y})]]^2} = \frac{[1 - \tanh^2(\mathbf{a})][1 - \tanh^2(\mathbf{b})]}{[\tanh(\mathbf{a}) + \tanh(\mathbf{b})]^2},$$

e considerando a relação $\operatorname{sech}^2(x) = 1 - \tanh^2(x)$, então

$$\frac{[1 - \tanh^2(\mathbf{a})][1 - \tanh^2(\mathbf{b})]}{[\tanh(\mathbf{a}) + \tanh(\mathbf{b})]^2} = \left\{ [\cosh(\mathbf{b}) \sinh(\mathbf{a}) + \cosh(\mathbf{a}) \sinh(\mathbf{b})]^2 \right\}^{-1}.$$

Pela relação de adição

$$\sinh(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \sinh(\mathbf{a}) \cosh(\mathbf{b}) + \cosh(\mathbf{a}) \sinh(\mathbf{b}),$$

temos

$$\frac{[1 - \tanh^2(\mathbf{a})][1 - \tanh^2(\mathbf{b})]}{[\tanh(\mathbf{a}) + \tanh(\mathbf{b})]^2} = \frac{1}{\sinh^2(\mathbf{a} + \mathbf{b})}.$$

Como $\mathbf{a} = \mathbf{B}_f z \mathbf{y}$ e $\mathbf{b} = \mathbf{B}_f z(1 - \mathbf{y})$, o argumento do seno será

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{B}_f z.$$

Assim,

$$\boxed{\frac{[1 - \tanh^2(\mathbf{B}_f z \mathbf{y})][1 - \tanh^2[\mathbf{B}_f z(1 - \mathbf{y})]]}{[\tanh(\mathbf{B}_f z \mathbf{y}) + \tanh[\mathbf{B}_f z(1 - \mathbf{y})]]^2} = \frac{1}{\sinh^2(\mathbf{B}_f z)}}.$$

E.6 Prova da expressão (5.25)

Definimos $x = \bar{M}_f^2/\mathbf{B}_f$, então (5.23) fica⁴

$$G_f^B(q_{\parallel}^2) = -\frac{N_c \mathbf{B}_f}{2\pi^2} \int_0^\infty dz \int_0^1 dy e^{-zx} \left[\left(x - 2y(1-y) \frac{m^2}{\mathbf{B}_f} + \frac{1}{z} \right) \left(\coth(z) - \frac{1}{z} \right) + \left(\frac{1}{\sinh^2(z)} - \frac{1}{z^2} \right) \right].$$

Considerando

$$I = \int_0^\infty dz e^{-zx} \left[\coth(z) - \frac{1}{z} \right],$$

podemos integrar I por partes, com

$$\begin{aligned} du &= x e^{-zx} dz, & v &= \coth(z) - \frac{1}{z}, \\ u &= e^{-zx}, & dv &= -\left(\frac{1}{\sinh^2(z)} - \frac{1}{z^2} \right) dz, \end{aligned}$$

então

$$I = -e^{-zx} \left(\coth(z) - \frac{1}{z} \right) \Big|_0^\infty - \int_0^\infty dz (-e^{-zx})(-1) \left(\frac{1}{\sinh^2(z)} - \frac{1}{z^2} \right),$$

e assim

$$\int_0^\infty dz e^{-zx} \left[\coth(z) - \frac{1}{z} \right] = - \int_0^\infty dz e^{-zx} \left(\frac{1}{\sinh^2(z)} - \frac{1}{z^2} \right).$$

⁴Os cálculos desta seção foram baseados em notas enviadas por Norberto N. Scoccola.

G_f^B fica

$$G_f^B(q_{\parallel}^2) = -\frac{N_c B_f}{2\pi^2} \int_0^{\infty} dz e^{-\frac{zM_f^2}{B_f}} \left(\coth(z) - \frac{1}{z} \right) \int_0^1 dy e^{y(1-y)\frac{m^2}{B}z} \left(\frac{2m^2}{B_f} (y - y^2) + \frac{1}{z} \right).$$

Definindo

$$I_n = \int_0^1 dy y^n e^{y(1-y)\frac{m^2}{B}z},$$

então

$$G_f^B(q_{\parallel}^2) = -\frac{N_c B_f}{2\pi^2} \int_0^{\infty} dz e^{-\frac{zM_f^2}{B_f}} \left(\coth(z) - \frac{1}{z} \right) \left[\frac{2m^2}{B_f} (I_1 - I_2) + \frac{1}{z} I_0 \right].$$

Considerando

$$I_0 = \int_0^1 dy e^{y(1-y)\frac{m^2}{B}z},$$

integraremos I_0 por partes

$$\begin{aligned} du &= dy, & v &= \exp\left[y(1-y)\frac{m^2}{B}z\right], \\ u &= y, & dy &= \frac{zm^2}{B_f}(1-2y) \exp\left[y(1-y)\frac{m^2}{B}z\right] dy. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} I_0 &= ye^{y(1-y)\frac{m^2}{B}z} \Big|_0^{\infty} - \int_0^1 dy y \frac{zm^2}{B_f} (1-2y) e^{y(1-y)\frac{m^2}{B}z}, \\ &= 1 - \frac{zm^2}{B_f} \int_0^1 dy (y - 2y^2) e^{y(1-y)\frac{m^2}{B}z}, \end{aligned}$$

$$I_0 = 1 - \frac{zm^2}{B_f} (I_1 - 2I_2),$$

então

$$\begin{aligned}
G_f^B(q_{\parallel}^2) &= -\frac{N_c B_f}{2\pi^2} \int_0^\infty dz e^{-\frac{zM_f^2}{B_f}} \left(\coth(z) - \frac{1}{z} \right) \left[\frac{2m^2}{B_f} (I_1 - I_2) + \frac{1}{z} \left(1 - \frac{zm^2}{B_f} (I_1 - 2I_2) \right) \right], \\
&= -\frac{N_c B_f}{2\pi^2} \int_0^\infty dz e^{-\frac{zM_f^2}{B_f}} \left(\coth(z) - \frac{1}{z} \right) \left[\frac{m^2}{B_f} (2I_1 - 2I_2 - I_1 + 2I_2) + \frac{1}{z} \right], \\
&= -\frac{N_c B_f}{2\pi^2} \int_0^\infty dz e^{-\frac{zM_f^2}{B_f}} \left(\coth(z) - \frac{1}{z} \right) \left[\frac{m^2}{B_f} I_1 + \frac{1}{z} \right], \\
&= -\frac{N_c B_f}{2\pi^2} \left\{ \int_0^\infty \frac{dz}{z} \left(\coth(z) - \frac{1}{z} \right) e^{-\frac{zM_f^2}{B_f}} \right. \\
&\quad \left. + \frac{m}{B_f} \int_0^\infty dz e^{-\frac{zM_f^2}{B_f}} \left(\coth(z) - \frac{1}{z} \right) \int_0^1 dy y e^{zy(1-y)\frac{m^2}{B_f}} \right\}.
\end{aligned}$$

Usando

$$\int_0^1 dy y e^{y(1-y)\frac{m^2 z}{B_f}} = \frac{1}{2} \int_0^1 dy e^{y(1-y)\frac{m^2 z}{B_f}},$$

temos

$$\begin{aligned}
G_f^B &= -\frac{N_c B_f}{2\pi^2} \left\{ \int_0^\infty \frac{dz}{z} \left(\coth(z) - \frac{1}{z} \right) e^{-\frac{zM_f^2}{B_f}} \right. \\
&\quad \left. + \frac{m}{2B_f} \int_0^1 dy \int_0^\infty dz e^{-\frac{z}{B_f} [M_f^2 - y(1-y)m^2]} \left(\coth(z) - \frac{1}{z} \right) \right\},
\end{aligned}$$

e definindo

$$x_f = \frac{M_f^2}{2B_f}, \quad \bar{x} = \frac{\bar{M}_f^2}{2B_f},$$

ficamos com

$$G_f^B = -\frac{N_c B_f}{2\pi^2} \left\{ \int_0^\infty \frac{dz}{z} \left(\coth(z) - \frac{1}{z} \right) e^{-2zx_f} + \frac{m}{2B_f} \int_0^1 dy \int_0^\infty dz e^{-2z\bar{x}} \left(\coth(z) - \frac{1}{z} \right) \right\}.$$

Considerando as integrais

- $\int_0^\infty dz e^{-\bar{x}z} \left(\coth(z) - \frac{1}{z} \right) = -\Psi(\bar{x}) - \frac{1}{2\bar{x}} + \ln \bar{x},$
- $\int_0^\infty dz e^{-x_f z} \frac{1}{z} \left(\coth(z) - \frac{1}{z} \right) = 2 \ln \Gamma(x_f) - \ln(2\pi) + (1 - 2x_f) \ln x_f + 2x_f,$

então

$$G_f^B(q_{\parallel}^2) = -\frac{-N_c B_f}{2\pi^2} \left\{ [2 \ln \Gamma(x_f) - \ln(2\pi) + (1 - 2x_f) \ln x_f + 2x_f] + \frac{m}{2B_f} \int_0^1 dy \left[-\Psi(\bar{x}) - \frac{1}{2\bar{x}} + \ln \bar{x} \right] \right\},$$

$$G_f^B(q_{\parallel}^2) = -4N_c \left\{ 2 \frac{B_f}{8\pi^2} \left[\ln \Gamma(x_f) - \frac{\ln(2\pi)}{2} + \frac{1}{2}(1 - 2x_f) \ln(x_f) + x_f \right] - \frac{m}{16\pi^2} \left[\int_0^1 dy \left[\Psi(\bar{x}) + \frac{1}{2\bar{x}} - \ln \bar{x} \right] \right] \right\}.$$

Definindo

$$I_1^B = \frac{B_f}{8\pi^2} \left[\ln \Gamma(x_f) - \frac{\ln(2\pi)}{2} + \frac{1}{2}(1 - 2x_f) \ln(x_f) + x_f \right],$$

$$I_2^B = \frac{1}{16\pi^2} \int_0^1 dy \left[\Psi(\bar{x}) + \frac{1}{2\bar{x}} - \ln \bar{x} \right],$$

podemos escrever

$$G_f^B(q_{\parallel}^2) = -4N_c [2I_1^B - m^2 I_2^B].$$

E.7 Polos da Expressão (5.33)

Queremos reescrever a expressão

$$I_{2f}^B = \frac{1}{8\pi^2 m_M} \int_0^{m_M/2} dy \left[\Psi \left(\frac{y^2 - y_0}{2B_f} + n + 1 \right) - \sum_{m=0}^n \frac{g_m B_f}{y^2 - y_0^2 + 2B_f m} - \ln \left(\frac{y^2 - y_0^2}{2B_f} \right) \right]. \quad (\text{E.60})$$

Ao separarmos as integrais com polos ou infinitos na expressão acima, podemos escrevê-la como

$$I_{2f}^B = \frac{1}{8\pi^2 m_M} \left[\int_0^{m_M/2} dy \Psi \left(\frac{y^2 - y_0}{2B_f} + n + 1 \right) - \sum_{m=0}^n g_m B_f I_a - I_b + \int_0^{m_M/2} dy \ln(2B_f) \right], \quad (\text{E.61})$$

com

$$I_a = \int_0^{m_M/2} dy \frac{1}{y^2 - y_0^2 + 2B_f m}, \quad (\text{E.62a})$$

$$I_b = \int_0^{m_M/2} dy \ln(y^2 - y_0^2). \quad (\text{E.62b})$$

E.7.1 Integral I_a

Definimos um novo parâmetro positivo y_m^2

$$y_m^2 \equiv \frac{m_M^2}{4} - M_f^2 - 2B_f m \geq 0, \quad (\text{E.63})$$

então

$$y^2 - y_0^2 + 2B_f m = y^2 - y_m^2 - i\varepsilon. \quad (\text{E.64})$$

O termo com singularidades no denominador é

$$I_a \equiv \int_0^{m_M/2} dy \frac{1}{(y^2 - y_m^2) - i\varepsilon},$$

$$= \int_0^{m_M/2} dy \frac{1}{(y + y_m)[(y - y_m) - i\epsilon']}, \quad (\text{E.65})$$

e, usando a fórmula de Sokhotski-Plemelj, teremos

$$I_a = P \int_0^{m_M/2} dy \frac{1}{(y^2 - y_m^2)} + i\pi \int_0^{m_M/2} dy \frac{\delta(y - y_m)}{y + y_m}. \quad (\text{E.66})$$

O valor principal no primeiro termo é

$$\begin{aligned} P \int_0^{m_M/2} dy \frac{1}{(y^2 - y_m^2)} &= P \int_0^{m_M/2} \frac{dy}{2y_m} \frac{1}{y - y_m} - P \int_0^{m_M/2} \frac{dy}{2y_m} \frac{1}{y + y_m}, \\ &= I_1 - I_2. \end{aligned}$$

Calcularemos cada integral separadamente.

Integral I_1

A primeira integral é

$$I_1 = P \int_0^{m_M/2} \frac{dy}{2y_m} \frac{1}{y - y_m}.$$

Fazemos a mudança de variáveis

$$\begin{aligned} y - y_m = x &\Rightarrow dx = dy, \\ y \rightarrow 0 &\Rightarrow x \rightarrow 0 - y_m \rightarrow -y_m, \\ y \rightarrow \frac{m_M}{2} &\Rightarrow x \rightarrow \frac{m_M}{2} - y_m, \end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2y_m} \int_{-y_m}^{\frac{m_M}{2} - y_m} dx \frac{1}{x}, \\ &= \frac{1}{2y_m} \left[\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-y_m}^{0-\epsilon} dx \frac{1}{x} + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{0+\epsilon}^{\frac{m_M}{2} - y_m} dx \frac{1}{x} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2y_m} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\ln \left(\frac{-\varepsilon}{-y_m} \right) + \ln \left(\frac{\frac{m_M}{2} - y_m}{\varepsilon} \right) \right], \\
&= \frac{1}{2y_m} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \ln \left[\frac{\cancel{\varepsilon} \left(\frac{m_M}{2} - y_m \right)}{\cancel{\varepsilon} y_m} \right] \right\}, \\
I_1 &= \frac{1}{2y_m} \ln \left(\frac{\frac{m_M}{2} - y_m}{y_m} \right).
\end{aligned}$$

Integral I_2

$$\begin{aligned}
I_2 &= P \int_0^{m_M/2} \frac{dy}{2y_m} \frac{1}{y + y_m}, \\
&= \int_0^{m_M/2} \frac{1 - 1}{y + y_m} + \frac{1}{2y_m} \ln \left(\frac{\frac{m_M}{2} - (-y_m)}{-y_m - 0} \right), \\
I_2 &= \frac{1}{2y_m} \ln \left(\frac{\frac{m_M}{2} + y_m}{-y_m} \right).
\end{aligned}$$

O termo do valor principal de Cauchy de I_a é

$$\begin{aligned}
P \int_0^{m_M/2} dy \frac{1}{(y^2 - y_m^2)} &= I_1 - I_2, \\
&= \frac{1}{2y_m} \ln \left[\frac{\frac{m_M}{2} - y_m}{\frac{m_M}{2} + y_m} \right],
\end{aligned}$$

então podemos reescrever (E.66) como

$$\boxed{I_a = \frac{1}{2y_m} \ln \left[\frac{\frac{m_M}{2} - y_m}{\frac{m_M}{2} + y_m} \right] + i \frac{\pi}{2y_m}} \quad (\text{E.67})$$

E.7.2 Integral I_b

O outro termo de (5.33) que é divergente é o termo com o logaritmo

$$\begin{aligned}
I_b &\equiv \int_0^{m_M/2} dy \ln(y^2 - y_0^2), \\
&= \int_0^{y_0} dy \ln(y^2 - y_0^2) + \int_{y_0}^{m_M/2} dy \ln(y^2 - y_0^2).
\end{aligned} \quad (\text{E.68})$$

No primeiro termo do lado direito de (E.68), o argumento do logaritmo é negativo. Assim, é preciso fazer uma continuação analítica da função para o plano complexo. A função logaritmo complexo assume infinitos valores, ou seja, é uma função multivalorada⁵ [177]. Esta função tem como ponto de ramificação $z = 0$ e a linha de corte (ou corte de ramificação) é o eixo real negativo, como podemos ver na Figura E.2. Esta função pode ser definida como

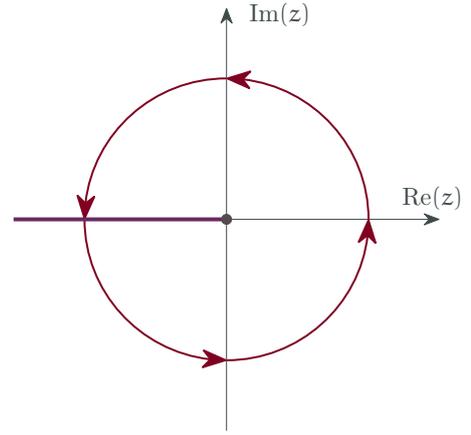


Figura E.2: Ramo principal da função logaritmo.

$$\ln(z) = \ln(r) + i(\theta + 2n\pi), \quad (\text{E.69})$$

com $z = re^{i\theta}$, $r = |z|$ e $\theta \in]-\pi, \pi]$. Então, considerando a ramificação principal, quando $n = 0$, podemos escrever a função como

$$w = \ln(z) = \ln(r) + i\theta. \quad (\text{E.70})$$

Quando z é um número real negativo, podemos reescrever a função logaritmo de duas formas

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\ln(-r + i\varepsilon)] = \ln(re^{i\pi}) = \ln(r) + i\pi, \quad (\text{E.71a})$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\ln(-r - i\varepsilon)] = \ln(re^{i\pi}) = \ln(r) - i\pi. \quad (\text{E.71b})$$

Se reescrevermos o primeiro termo de (E.68) considerando a definição de y_0 ,

$$\int_0^{y_0} dy \ln(y^2 - y_0^2) = \int_0^{y_0} dy \ln \left[y^2 - \left(\frac{m_M^2}{4} - M_f^2 + i\varepsilon \right) \right], \quad (\text{E.72})$$

então veremos que a expressão corresponde à (E.71b). Assim,

$$\int_0^{y_0} dy \ln(y^2 - y_0^2) = \int_0^{y_0} dy [\ln |y^2 - y_0| - i\pi],$$

⁵Ou função multivalente, multívoca, polídroma...

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{y_0} dy \ln |y^2 - y_0^2| - \int_0^{y_0} dy i\pi, \\
&= \int_0^{y_0} dy \ln(y_0^2 - y^2) - i\pi y_0.
\end{aligned}$$

Logo, podemos reescrever I_b como

$$I_b = \int_0^{y_0} dy \ln(y_0^2 - y^2) + \int_{y_0}^{m/2} dy \ln(y^2 - y_0^2) - i\pi y_0. \quad (\text{E.73})$$

Como

$$\int dy \ln(y^2 - y_0^2) = \int dy \ln(y_0^2 - y^2), \quad (\text{E.74})$$

resolvendo a integral indefinida podemos encontrar os valores das duas integrais definidas de (E.73). Então, integrando por partes,

$$\begin{aligned}
f &= \ln(y_0^2 - y^2), & dg &= dy, \\
df &= \frac{2y}{y^2 - y_0^2} dy, & g &= y,
\end{aligned}$$

teremos (sem considerar a constante de integração)

$$\int dy \ln(y_0^2 - y^2) = y \ln(y_0^2 - y^2) - \int dy \frac{2y^2}{y^2 - y_0^2}. \quad (\text{E.75})$$

Agora, podemos reescrever o integrando do lado direito de (E.75) como

$$\begin{aligned}
\frac{2y^2}{y^2 - y_0^2} &= 2 + \frac{2y_0^2}{y^2 - y_0^2}, \\
&= 2 + \frac{y_0}{y - y_0} - \frac{y_0}{y + y_0},
\end{aligned}$$

e então

$$\int dy \frac{y^2}{y^2 - y_0^2} = \int dy \left[2 + \frac{y_0}{y - y_0} - \frac{y_0}{y + y_0} \right],$$

$$\begin{aligned}
&= 2y + y_0 \int \frac{dy}{y - y_0} - y_0 \int \frac{dy}{y + y_0}, \\
&= 2y + y_0 \ln |y - y_0| - y_0 \ln |y + y_0|, \\
&= 2y - y_0 \ln \left| \frac{y + y_0}{y - y_0} \right|. \tag{E.76}
\end{aligned}$$

Logo

$$\int dy \ln(y_0^2 - y^2) = y \ln(y_0^2 - y^2) - 2y + y_0 \ln \left| \frac{y + y_0}{y - y_0} \right|, \tag{E.77}$$

e podemos reescrever (E.73) como

$$\begin{aligned}
I_b &= \left[y \ln(y_0^2 - y^2) - 2y + y_0 \ln \left| \frac{y + y_0}{y - y_0} \right| \right]_0^{y_0} \\
&\quad + \left[y \ln(y_0^2 - y^2) - 2y + y_0 \ln \left| \frac{y + y_0}{y - y_0} \right| \right]_{y_0}^{m_M/2} - i\pi y_0 \\
&= \cancel{y_0 \ln(y_0 - y_0)} - \cancel{2y_0} + y_0 \ln \left| \frac{2y_0}{y_0 - y_0} \right| - y_0 \ln \left| \frac{y_0}{-y_0} \right| \\
&\quad + \frac{m_M}{2} \ln \left(\frac{m_M^2}{4} - y_0^2 \right) - m_M + \ln \left| \frac{\frac{m_M}{2} + y_0}{\frac{m_M}{2} - y_0} \right| - \cancel{y_0 \ln(y_0^2 - y_0^2)} \\
&\quad + \cancel{2y_0} - y_0 \ln \left| \frac{2y_0}{y_0 - y_0} \right| - i\pi y_0,
\end{aligned}$$

e assim

$$I_b = \frac{m_M}{2} \ln \left| \frac{m_M^2}{4} - y_0^2 \right| - m_M + y_0 \ln \left| \frac{\frac{m_M}{2} + y_0}{\frac{m_M}{2} - y_0} \right| - i\pi y_0. \tag{E.78}$$

Pela definição de y_0 , podemos reescrever os termos com os logaritmos como

$$\ln \left| \frac{m_M^2}{4} - y_0^2 \right| = \ln \left| \frac{m_M^2}{4} - \frac{m_M^2}{4} + M_f^2 + i\varepsilon \right| = 2 \ln |M_f|,$$

$$\ln \left| \frac{\frac{m_M}{2} + y_0}{\frac{m_M}{2} - y_0} \right| = \ln \left| \frac{\left(\frac{m_M}{2} + y_0 \right)^2}{\frac{m_M^2}{4} - y_0^2} \right| = \ln \left| \frac{\left(\frac{m_M}{2} + y_0 \right)^2}{M_f^2} \right| = 2 \ln \left| \frac{\frac{m_M}{2} + y_0}{M_f} \right|,$$

e, finalmente, a integral I_b pode ser expressa como

$$I_b = m_M \ln |M_f| - m_M + 2y_0 \ln \left| \frac{\frac{m_M}{2} + y_0}{M_f} \right| - i\pi y_0. \quad (\text{E.79})$$

Agora podemos escrever I_{2f}^B em termos das integrais que calculamos

$$\begin{aligned} I_{2f}^B = & \frac{1}{8\pi^2 m_M} \left[\int_0^{m_M/2} dy \Psi \left(\frac{y^2 - y_0}{2B_f} + n + 1 \right) - \sum_{m=0}^n \frac{g_m B_f}{2y_m} \ln \left(\frac{\frac{m_M}{2} - y_m}{\frac{m_M}{2} + y_m} \right) \right. \\ & - \sum_{m=0}^n \frac{ig_m B_f \pi}{2y_m} - m_M \ln(M_f) + m_M - 2y_0 \ln \left(\frac{\frac{m_M}{2} + y_0}{M_f} \right) \\ & \left. + i\pi y_0 + \frac{m_M}{2} \ln(2B_f) \right]. \quad (\text{E.80}) \end{aligned}$$

Referências Bibliográficas

- [1] CERN. Conseil Européen pour la Recherche Nucléaire.
- [2] BNL. Brookhaven National Laboratory.
- [3] R. C. Duncan and C. Thompson. Formation of very strongly magnetized neutron stars - Implications for gamma-ray bursts. *The Astrophysical Journal*, 392, 1992.
- [4] J. O. Andersen, W. R. Naylor, and A. Tranberg. Phase Diagram of QCD in a Magnetic Field. *Reviews of Modern Physics*, 88(2):025001, 2016.
- [5] V. Miransky and I. Shovkovy. Quantum Field Theory in a Magnetic Field: From Quantum Chromodynamics to Graphene and Dirac Semimetals. *Physics Reports*, 576:1–209, 2015.
- [6] D. Grasso and H. R. Rubinstein. Magnetic Fields in the Early Universe. *International Journal of Theoretical Physics*, 38:1315–1332, 1994.
- [7] Y. Nagashima. *Elementary Particle Physics: Quantum Field Theory and Particles*, volume 1. John Wiley & Sons, 2011.
- [8] S. P. Klevansky. The Nambu—Jona-Lasinio model of quantum chromodynamics. *Reviews of Modern Physics*, 64(3):649, 1992.
- [9] H.-T. Ding. Lattice QCD at nonzero temperature and density. *arXiv preprint arXiv:1702.00151*, 2017.
- [10] T. Skyrme. A non-linear field theory. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 260:127 – 138, 1961.
- [11] T. Skyrme. A Unified Field Theory of Mesons and Baryons. *Nuclear Physics*, 31:556–569, 1962.
- [12] M. Gell-Mann and M. Lévy. The axial vector current in beta decay. *Il Nuovo Cimento (1955-1965)*, 16(4):705–726, 1960.
- [13] A. Chodos, R. L. Jaffe, K. Johnson, and C. B. Thorn. Baryon structure in the bag theory. *Physical Review D*, 10(8):2599, 1974.

-
- [14] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio. Dynamical Model of Elementary Particles Based on an Analogy with Superconductivity. I. *Physical Review*, 122(1):345, 1961.
- [15] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio. Dynamical Model of Elementary Particles Based on an Analogy with Superconductivity. II. *Physical Review*, 124(1):246, 1961.
- [16] S. Scherer. Chiral perturbation theory: Introduction and recent results in the one-nucleon sector. *Progress in Particle and Nuclear Physics*, 64(1):1–60, 2010.
- [17] S. S. Avancini, R. L. S. Farias, N. N. Scoccola, and W. R. Tavares. NJL-type models in the presence of intense magnetic fields: The role of the regularization prescription. *Physical Review D*, 2019.
- [18] P. G. Allen, A. G. Grunfeld, and N. N. Scoccola. Magnetized color superconducting cold quark matter within the $SU(2)_f$ NJL model: A novel regularization scheme. *Physical Review D*, 92:074041, 2015.
- [19] D. Ebert and K. Klimenko. Quark droplets stability induced by external magnetic field. *Nuclear Physics*, 728:203–225, 2003.
- [20] B. Betz. Jet Propagation and Mach-Cone Formation in (3+1)-dimensional Ideal Hydrodynamics. *arXiv: Nuclear Theory*, 2009.
- [21] J. S. Schwinger. On gauge invariance and vacuum polarization. *Physical Review*, 82:664–679, 1951.
- [22] L. H. Ryder. Symmetries and Conservation Laws. In J. P. Francoise, G. L. Naber, and S. T. Tsou, editors, *Encyclopedia of Mathematical Physics*, volume 5, pages 166–172. Academic Press, 2006.
- [23] C. Quigg. Quantum Chromodynamics. In *McGraw Hill Encyclopedia of Science & Technology*, volume 14, pages 670–676. McGraw-Hill Companies, Incorporated, 2007.
- [24] A. Das and T. Ferbel. *Introduction to Nuclear and Particle Physics*. EBSCO ebook academic collection. World Scientific, 2003.
- [25] L. H. Ryder. *Quantum field theory*. Cambridge University Press, 1996.
- [26] M. Bucher. Gauge theory. In *McGraw Hill Encyclopedia of Science & Technology*, volume 7, pages 738–740. McGraw-Hill Companies, Incorporated, 2007.
- [27] L. W. Jones and O. W. Greenberg. Quarks. In *McGraw Hill Encyclopedia of Science & Technology*, volume 14, pages 712–718. McGraw-Hill Companies, Incorporated, 2007.

- [28] T. Muta. Quantum Chromodynamics (QCD). In R. A. Meyers, editor, *Encyclopedia of Physical Science and Technology (Third Edition)*, pages 319–343. Academic Press, New York, third edition, 2003.
- [29] A. Zee. *Quantum Field Theory in a Nutshell: (Second Edition)*. In a Nutshell. Princeton University Press, 2010.
- [30] M. D. Schwartz. *Quantum Field Theory and the Standard Model*. Cambridge University Press, 2014.
- [31] Y. Nambu. Axial vector current conservation in weak interactions. *Physical Review Letters*, 4(7):380, 1960.
- [32] J. Goldstone. Field theories with «Superconductor» solutions. *Il Nuovo Cimento (1955-1965)*, 19(1):154–164, 1961.
- [33] J. Goldstone, A. Salam, and S. Weinberg. Broken symmetries. *Physical Review*, 127(3):965, 1962.
- [34] J. Ellis, M. K. Gaillard, and D. V. Nanopoulos. A historical profile of the Higgs boson. *The standard theory of particle physics*, pages 255–274, 2016.
- [35] N. D. Mermin and H. Wagner. Absence of ferromagnetism or antiferromagnetism in one-or two-dimensional isotropic Heisenberg models. *Physical Review Letters*, 17(22):1133, 1966.
- [36] S. Coleman. There are no Goldstone bosons in two dimensions. *Communications in Mathematical Physics*, 31(4):259–264, 1973.
- [37] T. W. B. Kibble. Symmetry Breaking in Field Theory. In J. P. Francoise, G. L. Naber, and S. T. Tsou, editors, *Encyclopedia of Mathematical Physics*, volume 5, pages 198–204. Academic Press, 2006.
- [38] A. V. Tollestrup. Quarks. In J. S. Rigden, editor, *Building Blocks of Matter: A Supplement to the Macmillan Encyclopedia of Physics*, pages 398–402. Macmillan Reference, 2003.
- [39] C. O. Silva and P. L. Natti. Modelo de quarks e sistemas multiquarks. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 29(2):175–187, 2007.
- [40] M. Gell-Mann. The Eightfold Way: A Theory of strong interaction symmetry. 3 1961.
- [41] Y. Ne’eman. Derivation of Strong Interactions from a Gauge Invariance. *Nuclear Physics*, 26:222–229, 1961.

-
- [42] H. Goldberg and Y. Ne'eman. Baryon charge and R-inversion in the octet model. *Il Nuovo Cimento (1955-1965)*, 27:1–5, 1963.
- [43] M. Gell-Mann. A schematic model of baryons and mesons. *Physics Letters*, 8(3):214–215, 1964.
- [44] G. Zweig. *An $SU(3)$ model for strong interaction symmetry and its breaking. Version 2*, pages 22–101. 2 1964.
- [45] E. D. Bloom, D. H. Coward, H. DeStaebler, J. Drees, G. Miller, L. W. Mo, R. E. Taylor, M. Breidenbach, J. I. Friedman, G. C. Hartmann, and H. W. Kendall. High-Energy Inelastic $e - p$ Scattering at 6° and 10° . *Phys. Rev. Lett.*, 23:930–934, Oct 1969.
- [46] M. Breidenbach, J. I. Friedman, H. W. Kendall, E. D. Bloom, D. H. Coward, H. DeStaebler, J. Drees, L. W. Mo, and R. E. Taylor. Observed Behavior of Highly Inelastic Electron-Proton Scattering. *Phys. Rev. Lett.*, 23:935–939, Oct 1969.
- [47] J. E. Augustin et al. Discovery of a Narrow Resonance in e^+e^- Annihilation. *Phys. Rev. Lett.*, 33:1406–1408, 1974.
- [48] J. J. Aubert, U. Becker, P. J. Biggs, J. Burger, M. Chen, G. Everhart, P. Goldhagen, J. Leong, T. McCorriston, T. G. Rhoades, M. Rohde, S. C. C. Ting, S. L. Wu, and Y. Y. Lee. Experimental observation of a heavy particle j . *Phys. Rev. Lett.*, 33:1404–1406, Dec 1974.
- [49] M. L. Perl et al. Evidence for Anomalous Lepton Production in e^+e^- Annihilation. *Phys. Rev. Lett.*, 35:1489–1492, 1975.
- [50] S. W. Herb, D. C. Hom, L. M. Lederman, J. C. Sens, H. D. Snyder, J. K. Yoh, J. A. Appel, B. C. Brown, C. N. Brown, W. R. Innes, K. Ueno, T. Yamanouchi, A. S. Ito, H. Jöstlein, D. M. Kaplan, and R. D. Kephart. Observation of a Dimuon Resonance at 9.5 GeV in 400-GeV Proton-Nucleus Collisions. *Phys. Rev. Lett.*, 39:252–255, Aug 1977.
- [51] S. Abachi et al. Observation of the top quark. *Phys. Rev. Lett.*, 74:2632–2637, 1995.
- [52] The Cdf Collaboration. Observation of Top Quark Production in $\bar{p}p$ Collisions. 1995.
- [53] R. L. Workman et al. Review of Particle Physics. *PTEP*, 2022:083C01, 2022.
- [54] G Serman. Quantum Chromodynamics. In J.S. Rigden, editor, *Building Blocks of Matter: A Supplement to the Macmillan Encyclopedia of Physics*, pages 375–348. Macmillan Reference, 2003.

-
- [55] H. J. Lipkin. Discovery of Quarks. In J. S. Rigden, editor, *Building Blocks of Matter: A Supplement to the Macmillan Encyclopedia of Physics*, pages 403–406. Macmillan Reference, 2003.
- [56] A. Zee. *Fearful Symmetry: The Search for Beauty in Modern Physics*. Collier Books, 1989.
- [57] C. M. G. Lattes, H. Muirhead, G. P. S. Occhialini, and C. F. Powell. Processes involving charged mesons. *Nature*, 159(4047):694–697, 1947.
- [58] G. D. Rochester and C. C. Butler. Evidence for the existence of new unstable elementary particles. *Nature*, 160(4077):855–857, 1947.
- [59] W. B. Fowler, R. P. Shutt, A. M. Thorndike, and W. L. Whittemore. Observation of V^0 Particles Produced at the Cosmotron. *Phys. Rev.*, 90:1126–1127, Jun 1953.
- [60] C. Itzykson and J. B. Zuber. *Quantum field theory*. Courier Corporation, 2012.
- [61] B. R. Martin and G. Shaw. *Particle physics*. John Wiley & Sons, 2016.
- [62] E. Zeidler. *Quantum field theory I: Basics in mathematics and physics: A bridge between mathematicians and physicists*. Springer, 2006.
- [63] J. F. Donoghue, E. Golowich, and B. R. Holstein. *Dynamics of the standard model*. Cambridge University Press, 2014.
- [64] F. Halzen and A. D. Martin. *Quarks and leptons: An introductory course in modern particle physics*. John Wiley and Sons, New York, NY, 1984.
- [65] G. L. Kane. *Modern Elementary Particle Physics*. Cambridge University Press, 2017.
- [66] U. Mosel. *Fields, Symmetries and Quarks*. Springer Science & Business Media, 1999.
- [67] J. Cronin. The discovery of CP violation. In L. Hoddeson, M. Riordan, and M. Dresden, editors, *The rise of the standard model: A history of particle physics from 1964 to 1979*. Cambridge University Press, 1997.
- [68] M. Kobayashi. Flavor mixing and CP violation. In L. Hoddeson, M. Riordan, and M. Dresden, editors, *The rise of the standard model: A history of particle physics from 1964 to 1979*. Cambridge University Press, 1997.
- [69] C. N. Yang and R. L. Mills. Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance. *Phys. Rev.*, 96:191–195, Oct 1954.

-
- [70] G. Sterman. Asymptotic Freedom. In J. S. Rigden, editor, *Building Blocks of Matter: A Supplement to the Macmillan Encyclopedia of Physics*, pages 47–50. Macmillan Reference, 2003.
- [71] Y. Nagashima. *Elementary Particle Physics: Foundations of the Standard Model*, volume 2. Wiley, 2013.
- [72] C. Quigg. *Gauge Theories of the Strong, Weak, and Electromagnetic Interactions*. Princeton University Press, 2013.
- [73] H. D. Politzer. Reliable Perturbative Results for Strong Interactions? *Phys. Rev. Lett.*, 30:1346–1349, 1973.
- [74] D. J. Gross and F. Wilczek. Ultraviolet Behavior of Nonabelian Gauge Theories. *Phys. Rev. Lett.*, 30:1343–1346, 1973.
- [75] G. Sterman. Quantum Chromodynamics. In J. P. Francoise, G. L. Naber, and S. T. Tsou, editors, *Encyclopedia of Mathematical Physics*, volume 4, pages 144–153. Academic Press, 2006.
- [76] J. D. Walecka. *Theoretical Nuclear and Subnuclear Physics*. Theoretical Nuclear and Subnuclear Physics. Imperial College Press, 2004.
- [77] M. Buballa. NJL-Model Analysis of Dense Quark Matter. *Physics Reports*, 407(4-6):205–376, 2005.
- [78] G. 't Hooft. Symmetry breaking through Bell-Jackiw anomalies. *Physical Review Letters*, 37(1):8–11, 1976.
- [79] J. Prades. $m_u + m_d$ from QCD-hadron duality. *Nuclear Physics B-Proceedings Supplements*, 64(1-3):253–257, 1998.
- [80] J. Bijnens, J. Prades, and E. de Rafael. Light quark masses in QCD. *Physics Letters B*, 348(1-2):226–238, 1995.
- [81] A. Pich and J. Prades. Strange quark mass determination from Cabibbo-suppressed tau decays. *Journal of High Energy Physics*, 1999(10):004, 1999.
- [82] S. Narison. Strange-quark mass from combined e^+e^- and τ -decay data: test of the isospin symmetry and implications on ϵ'/ϵ and $m_{u,d}$. *Physics Letters B*, 466(2-4):345–354, 1999.
- [83] D. Becirevic, Ph. Boucaud, J. P. Leroy, V. Lubicz, and F. Mescia. Non-perturbatively renormalized light-quark masses with the alpha action. *Physics Letters B*, 444(3-4):401–410, 1998.

- [84] V. Gimenez, L. Giusti, F. Rapuano, and M. Talevi. Lattice quark masses: a non-perturbative measurement. *Nuclear Physics B*, 540(1-2):472–490, 1999.
- [85] S. Aoki, M. Fukugita, S. Hashimoto, K. I. Ishikawa, N. Ishizuka, Y. Iwasaki, K. Kanaya, T. Kaneda, S. Kaya, Y. Kuramashi, et al. Nonperturbative determination of quark masses in quenched lattice QCD with the Kogut-Susskind fermion action. *Physical review letters*, 82(22):4392, 1999.
- [86] M. H. Alston-Garnjost, editor. *Proceedings, 13th International Conference on High-Energy Physics (ICHEP 66): Berkeley, CA, USA, August 31- September 07, 1966*, Berkeley, CA, 1967. Calif. Univ. Press.
- [87] E. D. Hirsch. *The Schools We Need: And Why We Don't Have Them*. Knopf Doubleday Publishing Group, 2010.
- [88] J. Friedman, H. W. Kendall, R. E. Taylor, E. D. Bloom, F. J. Gilman, M. Breidenbach, and et al. Deep inelastic electron scattering. *Physical Review Letters*, 24(11):624, 1970.
- [89] N. Cabibbo and G. Parisi. Exponential Hadronic Spectrum and Quark Liberation. *Phys. Lett. B*, 59:67–69, 1975.
- [90] J. C. Collins and M. J. Perry. Superdense Matter: Neutrons Or Asymptotically Free Quarks? *Phys. Rev. Lett.*, 34:1353, 1975.
- [91] S. Moller. Pion-Pion Scattering and Shear Viscosity in the Nambu–Jona-Lasinio Model. Master’s thesis, Technische Universität Darmstadt, 2012.
- [92] D. H. Rischke. The quark–gluon plasma in equilibrium. *Progress in Particle and Nuclear Physics*, 52(1):197–296, 2004.
- [93] G. Martinez. Advances in Quark Gluon Plasma. 4 2013.
- [94] NuPECC. NuPECC Long Range Plan 2017: Perspectives for Nuclear Physics, 2017.
- [95] P. Costa, M. Ferreira, and C. Providência. Magnetized QCD phase diagram: critical end points for the strange quark phase transition driven by external magnetic fields. In *Proceedings of XVII International Conference on Hadron Spectroscopy and Structure — PoS(Hadron2017)*. Sissa Medialab, feb 2018.
- [96] H. Georgi. Effective Field Theory. *Annual Review of Nuclear and Particle Science*, 43:209–252, 1993.
- [97] D. B. Kaplan. Effective Field Theories. 1995.
- [98] U. L. van Kolck. Effective field theory of nuclear forces. *Progress in Particle and Nuclear Physics*, 43:337–418, 1999.

-
- [99] A. Pich. Effective Field Theory. *arXiv: High Energy Physics - Phenomenology*, 1998.
- [100] S. Hartmann. Effective field theories, reductionism and scientific explanation. *Studies in History and Philosophy of Science Part B: Studies in History and Philosophy of Modern Physics*, 32(2):267–304, 2001.
- [101] N. Bohr and J. A. Wheeler. The mechanism of nuclear fission. *Physical Review*, 56(5):426, 1939.
- [102] A. V. Manohar and H. Georgi. Chiral Quarks and the Non-relativistic Quark Model. *Nuclear Physics B*, 234(2):189–213, 1984.
- [103] M. Gell-Mann, R. J. Oakes, and B. Renner. Behavior of current divergences under $SU(3) \times SU(3)$. *Physical Review*, 175:2195–2199, 1968.
- [104] C. Ratti, S. Roessner, M. A. Thaler, and W. Weise. Thermodynamics of the PNJL model. *The European Physical Journal C*, 49:213–217, 2007.
- [105] C. Ratti, M. A. Thaler, and W. Weise. Phases of QCD: lattice thermodynamics and a field theoretical model. *Physical Review D*, 73:014019, 2005.
- [106] H. Hansen, W. M. A., A. Beraudo, A. Molinari, M. Nardi, and C. Ratti. Mesonic correlation functions at finite temperature and density in the Nambu–Jona-Lasinio model with a Polyakov loop. *International Journal of Modern Physics E-nuclear Physics*, 16:2249–2255, 2006.
- [107] K. Fukushima and C. Sasaki. The phase diagram of nuclear and quark matter at high baryon density. *Progress in Particle and Nuclear Physics*, 72:99–154, 2013.
- [108] G. Ecker. Effective Field Theories. In J. P. Francoise, G. L. Naber, and S. T. Tsou, editors, *Encyclopedia of Mathematical Physics*, volume 2, pages 139–147. Academic Press, 2006.
- [109] S. Weinberg. Phenomenological lagrangians. *Physica, A;(Netherlands)*, 96, 1979.
- [110] S. Weinberg. Effective gauge theories. *Physics Letters B*, 91(1):51–55, 1980.
- [111] J. Schwichtenberg. *No-Nonsense Quantum Field Theory: A Student-Friendly Introduction*. No-nonsense books, 2020.
- [112] T. Appelquist and J. Carazzone. Infrared singularities and massive fields. *Physical Review D*, 11(10):2856, 1975.
- [113] T. Eguchi and H. Sugawara. Extended model of elementary particles based on an analogy with superconductivity. *Physical Review D*, 10(12):4257, 1974.

-
- [114] H. Kleinert. *Hadronization of Quark Theories*, pages 289–389. Springer US, Boston, MA, 1978.
- [115] M. K. Volkov. Meson Lagrangians in a superconductor quark model. *Annals of Physics*, 157(1):282–303, 1984.
- [116] T. Hatsuda and T. Kunihiro. Possible critical phenomena associated with the chiral symmetry breaking. *Physics Letters B*, 145(1-2):7–10, 1984.
- [117] J. Bardeen, L. N. Cooper, and J. R. Schrieffer. Theory of superconductivity. *Physical review*, 108(5):1175, 1957.
- [118] N. N. Bogolyubov. A New method in the theory of superconductivity. I. *Sov. Phys. JETP*, 7:41–46, 1958.
- [119] M. L. Goldberger and S. B. Treiman. Conserved currents in the theory of Fermi interactions. *Physical Review*, 110(6):1478, 1958.
- [120] K. Fukushima and T. Hatsuda. The phase diagram of dense QCD. *Reports on Progress in Physics*, 74(1):014001, 2010.
- [121] T. Hatsuda and T. Kunihiro. QCD Phenomenology Based on a Chiral Effective Lagrangian. *Physics Reports*, 247(5-6):221–367, 1994.
- [122] D. Ebert and H. Reinhardt. Effective chiral hadron lagrangian with anomalies and Skyrme terms from quark flavour dynamics. *Nuclear Physics*, 271:188–226, 1986.
- [123] V. Bernard, R. L. Jaffe, and Ulf-G. Meissner. Strangeness mixing and quenching in the Nambu-Jona-Lasinio model. *Nuclear Physics*, 308:753–790, 1988.
- [124] T. Hatsuda and T. Kunihiro. Character changes of pion and σ -meson at finite temperatures. *Physics Letters B*, 185:304–309, 1987.
- [125] H. Reinhardt and R. Alkofer. Instanton-induced flavour mixing in mesons. *Physics Letters B*, 207:482–488, 1988.
- [126] M. Takizawa, T. Kunihiro, and K. Kubodera. Axial-vector matrix elements of the proton in the Nambu-Jona-Lasinio model. *Physics Letters B*, 237:242–247, 1990.
- [127] S. Klimt, M. F. M. Lutz, U. Vogl, and W. Weise. Generalized SU(3) Nambu-Jona-Lasinio model: (I). Mesonic modes. *Nuclear Physics*, 516:429–468, 1990.
- [128] A. A. Osipov and B. Hiller. Path integral bosonization of the 't Hooft determinant: fluctuations and multiple vacua. *Physics Letters B*, 539:76–84, 2002.
- [129] M. Kobayashi and T. Maskawa. Chiral Symmetry and η -X Mixing. *Progress of Theoretical Physics*, 44:1422–1424, 1970.

-
- [130] M. Kobayashi, H. Kondo, and T. Maskawa. Symmetry Breaking of the Chiral $U(3) \otimes U(3)$ and the Quark Model. *Progress of Theoretical Physics*, 45:1955–1959, 1971.
- [131] M. Ogilvie and Institute of Physics (Great Britain). *A Multidisciplinary Approach to Quantum Field Theory: Advanced topics. Volume 2*. IOP (Series). IOP Publishing, 2022.
- [132] T. Lancaster and S. J. Blundell. *Quantum field theory for the gifted amateur*. OUP Oxford, 2014.
- [133] R. Jackiw. Instantons. In *McGraw Hill Encyclopedia of Science & Technology*, volume 9, pages 259–260. McGraw-Hill Companies, Incorporated, 2007.
- [134] T. P. Cheng and L. F. Li. *Gauge Theory of Elementary Particle Physics*. Oxford science publications. Clarendon Press, 1984.
- [135] S. Coleman. *Aspects of Symmetry: Selected Erice Lectures*. Online access with purchase: Cambridge Books Online. Cambridge University Press, 1988.
- [136] D. Diakonov. Instantons at work. *Progress in Particle and Nuclear Physics*, 51(1):173–222, 2003.
- [137] A. I. Vainshtein, V. I. Zakharov, V. A. Novikov, and M. A. Shifman. ABC’s of Instantons. *Sov. Phys. Usp.*, 25:195, 1982.
- [138] G. ’t Hooft. Computation of the Quantum Effects Due to a Four-Dimensional Pseudoparticle. *Phys. Rev. D*, 14:3432–3450, 1976. [Erratum: *Phys.Rev.D* 18, 2199 (1978)].
- [139] G. ’t Hooft. How instantons solve the $U(1)$ problem. *Physics Reports*, 142(6):357–387, 1986.
- [140] S. L. Adler. Axial-Vector Vertex in Spinor Electrodynamics. *Phys. Rev.*, 177:2426–2438, Jan 1969.
- [141] J. S. Bell and R. Jackiw. A PCAC puzzle: $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ in the σ -model. *Il Nuovo Cimento A (1965-1970)*, 60:47–61, 1969.
- [142] U. Vogl and W. Weise. The Nambu and Jona-Lasinio Model: Its Implications for Hadrons and Nuclei. *Progress in Particle and Nuclear Physics*, 27:195–272, 1991.
- [143] T. Hell, S. Rössner, M. Cristoforetti, and W. Weise. Thermodynamics of a three-flavor nonlocal Polyakov-Nambu-Jona-Lasinio model. *Physical Review D*, 81:074034, 2009.

- [144] A. A. Osipov, B. Hiller, V. Bernard, and A. H. Blin. Aspects of $U_A(1)$ breaking in the Nambu and Jona-Lasinio model. *Annals of Physics*, 321:2504–2534, 2005.
- [145] D. Ebert, H. Reinhardt, and M. K. Volkov. Effective hadron theory of QCD. *Progress in particle and nuclear physics*, 33:1–120, 1994.
- [146] C. D. Meyer. *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*. Other Titles in Applied Mathematics. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM, 3600 Market Street, Floor 6, Philadelphia, PA 19104), 2000.
- [147] V. I. Ritus. Method of eigenfunctions and mass operator in quantum electrodynamics of a constant field. Technical report, CM-P00067532, 1978.
- [148] D. G. Dumm, M. F. Izzo Villafañe, S. Noguera, V. P. Pagura, and N. N. Scoccola. Strong magnetic fields in nonlocal chiral quark models. *Physical Review D*, 96:114012, 2017.
- [149] S. S. Avancini, W. R. Tavares, and M. B. Pinto. Properties of magnetized neutral mesons within a full RPA evaluation. *Physical Review D*, 93:014010, 2015.
- [150] S. S. Avancini, R. L. S. Farias, M. B. Pinto, W. R. Tavares, and V. S. Timóteo. π^0 pole mass calculation in a strong magnetic field and lattice constraints. *Physics Letters B*, 767:247–252, 2016.
- [151] R. L. S. Farias, S. S. Avancini, and W. R. Tavares. Neutral meson properties in hot and magnetized quark matter. *Journal of Physics: Conference Series*, 1291, 2018.
- [152] S. S. Avancini, R. L.vS. Farias, M. B. Pinto, T. E. Restrepo, and W. R. Tavares. Regularizing thermo and magnetic contributions within nonrenormalizable theories. *Physical Review D*, 2020.
- [153] W. R. Tavares, R. L. S. Farias, S. S. Avancini, V. S. Timóteo, M. B. Pinto, and G. I. Krein. Nambu–Jona-Lasinio $SU(3)$ model constrained by lattice QCD: thermomagnetic effects in the magnetization. *The European Physical Journal A*, 57, 2021.
- [154] S. S. Avancini, R. L. S. Farias, W. R. Tavares, and V. S. Timóteo. Magnetized pole-mass of neutral ρ meson within full RPA evaluation. *Nuclear Physics B*, 2022.
- [155] D. P. Menezes, M. B. Pinto, S. S. Avancini, and C. Providência. Quark matter under strong magnetic fields in the $SU(3)$ Nambu-Jona-Lasinio model. *Physical Review C*, 80:065805, 2009.
- [156] D. P. Menezes, M. B. Pinto, S. S. Avancini, A. P. Martinez, C. Providencia, and B. G. Zakharov. Quark matter under strong magnetic fields in the Nambu–Jona-Lasinio Model. 2008.

-
- [157] M. Abramowitz and I. A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions: With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Applied mathematics series. Dover Publications, 1965.
- [158] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik. *Table of integrals, series, and products*. Elsevier/Academic Press, Amsterdam, seventh edition, 2007.
- [159] S. S. Avancini, J. C. Sodr e, M. Coppola, and N. N. Scoccola. Light pseudoscalar meson masses under strong magnetic fields within the SU(3) Nambu–Jona-Lasinio model. *Physical Review D*, 2021.
- [160] R. Gupta. Introduction to lattice QCD. *arXiv preprint hep-lat/9807028*, 1998.
- [161] H. Ding. Lattice QCD at nonzero temperature and density. *arXiv preprint arXiv:1702.00151*, 2017.
- [162] G. S. Bali, F. Bruckmann, G. Endr odi, Z. Fodor, S. D. Katz, and A. Sch afer. QCD quark condensate in external magnetic fields. *Physical Review D*, 86:071502, 2012.
- [163] G. Endr odi, M. Giordano, S. D. Katz, T. G. Kov acs, and F. Pittler. Magnetic catalysis and inverse catalysis for heavy pions. *JHEP*, 07:007, 2019.
- [164] P. Rehberg, S. P. Klevansky, and J. H ufner. Hadronization in the SU(3) Nambu–Jona-Lasinio model. *Physical review. C, Nuclear physics*, 53 1:410–429, 1995.
- [165] R. L. S. Farias, K. P. Gomes, G. I. Krein, and M. B. Pinto. Importance of asymptotic freedom for the pseudocritical temperature in magnetized quark matter. *Phys. Rev. C*, 90(2):025203, 2014.
- [166] R. L. S. Farias, K. P. Gomes, G. Krein, and M. B. Pinto. The role of asymptotic freedom for the pseudocritical temperature in magnetized quark matter. *J. Phys. Conf. Ser.*, 630(1):012046, 2015.
- [167] M. Ferreira, P. Costa, O. Louren o, T. Frederico, and C. Provid encia. Inverse magnetic catalysis in the (2+1)-flavor Nambu–Jona-Lasinio and Polyakov–Nambu–Jona-Lasinio models. *Physical Review D*, 89:116011, 2014.
- [168] G. Endr odi and G. Mark o. Magnetized baryons and the QCD phase diagram: NJL model meets the lattice. *Journal of High Energy Physics*, 2019, 2019.
- [169] G. S. Bali, B. B. Brandt, G. Endr odi, and B. Glaesle. Meson masses in electromagnetic fields with Wilson fermions. *Physical Review D*, 97:034505, 2017.
- [170] H.-T. Ding, S.-T. Li, A. Tomiya, X.-D. Wang, and Y. Zhang. Chiral properties of (2+1)-flavor QCD in strong magnetic fields at zero temperature. *Physical Review D*, 2020.

- [171] K. Xu, J. Chao, and M. Huang. Spin polarization inducing diamagnetism, inverse magnetic catalysis and saturation behavior of charged pion spectra. *arXiv: High Energy Physics - Phenomenology*, 2020.
- [172] C. Gattringer and C. B. Lang. *Quantum Chromodynamics on the Lattice: An Introductory Presentation*. Lecture Notes in Physics. Springer Berlin Heidelberg, 2009.
- [173] F. Mandl and G. Shaw. *Quantum Field Theory*. John Wiley & Sons, 2010.
- [174] K. B. Petersen, M. Syskind Pedersen, et al. The matrix cookbook. *Technical University of Denmark*, 7(15):510, 2008.
- [175] C. Stover and E. W. Weisstein. Matrix inverse. From MathWorld—A Wolfram Web Resource.
- [176] A. P. Prudnikov, I. U. A. Brychkov, and O. I. Marichev. *Integrals and Series: Special functions*. Integrals and Series. Gordon and Breach Science Publishers, 1986.
- [177] P. M. C. Morse and H. Feshbach. *Methods of Theoretical Physics*. Number pt. 1 in International series in pure and applied physics. McGraw-Hill, 1953.