



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CAMPUS FLORIANÓPOLIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Gustavo Henrique dos Santos

Interação Paramétrica de Feixes Gaussianos Parcialmente Coerentes com Twist

Florianópolis
2024

Gustavo Henrique dos Santos

Interação Paramétrica de Feixes Gaussianos Parcialmente Coerentes com Twist

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do título de doutor em Física. Orientador: Prof. Paulo Henrique Souto Ribeiro, Dr.

Florianópolis
2024

Ficha catalográfica gerada por meio de sistema automatizado gerenciado pela BU/UFSC.
Dados inseridos pelo próprio autor.

dos Santos, Gustavo Henrique
Interação Paramétrica de Feixes Gaussianos Parcialmente
Coerentes com Twist / Gustavo Henrique dos Santos ;
orientador, Paulo Henrique Souto Ribeiro, 2024.
175 p.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Santa
Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas,
Programa de Pós-Graduação em Física, Florianópolis, 2024.

Inclui referências.

1. Física. 2. Coerência Parcial. 3. Óptica não-linear. 4.
Conjugação de fase. I. Ribeiro, Paulo Henrique Souto . II.
Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós
Graduação em Física. III. Título.

Gustavo Henrique dos Santos

Interação Paramétrica de Feixes Gaussianos Parcialmente Coerentes com Twist

O presente trabalho em nível de doutorado foi avaliado e aprovado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof.(a) Gabriela Barreto Lemos, Dra.
Universidade Federal do Rio de Janeiro

Prof.(a) Marcos César Oliveira, Dr.
Universidade Estadual de Campinas

Prof.(a) Alexandre Dias Ribeiro, Dr.
Universidade Federal do Paraná

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de doutor em Física.

Coordenação do Programa de
Pós-Graduação

Prof. Paulo Henrique Souto Ribeiro, Dr.
Orientador

Florianópolis, 2024.

Este trabalho é dedicado à minha família, especialmente aos meus queridos pais, Reinaldo e Eneliz.

AGRADECIMENTOS

Este trabalho representa o marco mais importante em minha vida, até o momento. Dada as dificuldades encontradas ao longo de todo o caminho, creio que gostaria de agradecer a todos, não só os que contribuíram direta ou indiretamente, mas aos que marcaram parte da minha vida. Em meio ao turbilhão da escrita, agradecer sem esquecer pessoas importantes não é uma tarefa fácil. Por isso, já agradeço imensamente a todos os que fizeram parte da minha vida e não foram explicitamente citados.

Começo agradecendo as minhas bases, primeiramente a Deus por todas as bênçãos concedidas em minha vida; pela força nos momentos difíceis; por suprir as minhas necessidades emocionais sempre que precisei e principalmente por Sua benevolência.

Agradeço especialmente os meus pais, Reinaldo e Eneliz. É muito difícil pôr em palavras meus sentimentos e expressar a minha gratidão, assim como é difícil agradecê-los sem me emocionar. Sempre serviram de grandes exemplos para mim e meus irmãos, são a base da minha vida e a inspiração para tudo o que almejo ser. Saibam que sempre carregarei os princípios que me foi dado. Agradeço enormemente por todo o esforço que fizeram para me oferecer esta oportunidade de estudo, eu sei que não foi fácil para vocês e desejo profundamente que minhas conquistas reflitam o imenso amor e esforço que ambos dedicaram a mim. Amo muito vocês!

Na escala científica, começo agradecendo ao professor Paulo H. Souto Ribeiro, que além de um orientador exemplar, é mais do que tudo, um amigo. A minha vida científica é marcada, de maneira muito positiva, por 'antes' e 'depois' de conviver com o ambiente que o senhor proporciona aos alunos. Paulão, o senhor contribuiu muito para o meu crescimento pessoal e profissional e não consigo imaginar um cenário em que eu tivesse um orientador melhor. Continuarei na torcida e pulando as 7 ondas para que um dia o meu pai científico ganhe o prêmio Nobel, nem que seja o da Paz.

Também gostaria de agradecer a outros professores do grupo que marcaram minha vida. Primeiramente, ao professor Renné, é imensurável o quanto me ensinou ao longo de toda a trajetória no grupo. À professora Nara, eu devo muitos agradecimentos. Não foi uma nem duas vezes que me socorreu com simulações em MATLAB. Além de ser um exemplo com sua dedicação e sabedoria. Ao professor Duzzioni, é notável a dedicação pelo trabalho, pelos alunos, pela evolução do grupo.

Devo ressaltar que o meu convívio com o grupo está praticamente dividido em 2 eras, pré e pós-pandemia. Portanto, deixo aqui a minha gratidão aos membros GIQSul pré-pandemia. Especialmente ao professor Willamys, André, Zanin, Thomas, Cássia e Marcelo. Além de terem me ensinado muita física, foram companheiros que compartilharam os melhores momentos (boêmios, ou não), as melhores risadas, as melhores

reuniões de quarta-feira e, principalmente, os melhores *happy hours* intermináveis, de fechar bares e terminar a noite no posto. Também não poderia deixar de mencionar o professor Lucas Celeri, que contribuiu muito para as nossas quartas, terças, ou sextas-feiras serem frutíferas.

Já no período pós-pandemia, devo agradecer aos companheiros e companheiras de café e boas histórias. Agradeço à Laura, Maria, Raphael, Lucas e Bia, pela harmonia, pelo ambiente que vocês proporcionam no Laboratório e, principalmente, pelas trapalhadas, que na maioria, são provenientes do Lucas. Conhecer a cada um me fez ser uma pessoa melhor.

Também agradecer ao Renan e toda a turma da Química. É sempre bom ganhar algumas partidas de sinuca.

Agradeço também aos principais colaboradores ao longo deste doutorado. Aos professores Antônio Zela|), Steve, Gustavo Cañas, que são minhas fontes de inspiração. É gratificante discutir tópicos de física com todos vocês.

Ainda na esfera de Florianópolis, não poderia deixar de agradecer às mulheres que mais contribuem para o bom andamento do laboratório. A Maria, Angelina e Vivi, muito obrigado pelo carinho e serviço prestado em todos esses anos. Levo vocês no coração.

Não poderia deixar de agradecer aos chilenos que conheci na reta final do doutorado. Agradezco a Nelson, quien contribuyó mucho a las mediciones en la UBB, también contribuyó significativamente a mejorar mi comprensión del español (o mejor dicho, el dialecto chileno), ya que hasta el día de hoy tengo muchas dificultades para entender su español acelerado y lleno de modismos. Weón, te deseo mucho suceso en tu pesquisa y espero que tomemos muchas cervezas juntos.

De maneira especial, agradeço em português à Monse, que tornou a minha experiência no Chile muito especial, foi extremamente receptiva, paciente e tornou inesquecível a minha curta estadia. Tenho um apreço pelo seu caráter, por seu companheirismo, pela sua beleza, mas principalmente sou um admirador da sua risada. Agradeço ainda por fazer me sentir acolhido e em casa, mesmo enquanto estava 2540,42 km de casa (em linha reta, da sala dos meus pais até a sua sala, segundo o Google Maps). Além de tudo, proporcionou todo um ano muito mais alegre, leve e estes momentos me marcaram como nenhum outro. Agradezco igual a todos los miembros de su familia la alegría y el acogimiento que me ofrecieran. Los tengo a todos en mi corazón. Y vamos Fernández Vial! Ya vial, ya vial!

Também devo agradecer aos meus amigos de Apucarana. Amigos que cresceram comigo, marcaram a minha vida (se é de maneira positiva eu não sei, mas marcaram), deixaras MUITAS histórias e apesar da distância, dos encontros cada vez menos frequentes, ainda assim vocês serão sempre lembrados.

Finalmente, agradeço à minha família. De maneira especial agradeço ao meu

irmão Alan e sua família. Obrigado pelo companheirismo, por tudo que me ensinou, por todos os momentos que me ajudou, mas principalmente, agradeço pela sua família maravilhosa, a Dai, a Maria e o Luís, espero que eu possa contribuir para ser fonte de inspiração a eles e estar sempre à disposição para o que precisarem. Agradeço também à minha irmã Lorena, que a cada dia me surpreende mais, seja no âmbito pessoal como no profissional. É uma parceira incomparável e que tenho o prazer de compartilhar meus momentos bons e ruins.

Aos meus tios, tias, primos, primas, sobrinhos e sobrinhas. São muitos para agradecer um a um, mas quero que saibam que no mesmo dia que escrevo estes agradecimentos, comentei com o meu pai: "Gostaria de agradecer a todos, sem exceção. Pois, não tem nenhum membro direto da família em que eu não tenha um carinho muito grande a ponto de ser apenas indiferente. Não, eu gostaria de poder agradecer a todos". No entanto, por ser inviável, vou citar os tios e tias diretos e suas respectivas famílias, sintam-se lembrados.

Aos meus avós, *In Memoriam*, que foram exemplo de família, de carinho, de alegria, de humanitarismo. Nos momentos difíceis de minha vida, vocês foram o conforto que eu tanto buscava em meio a palavras silenciosas. À minha vó Mara, agradeço igualmente por contribuir positivamente durante muito tempo de minha infância.

Gostaria de agradecer então à classe de tios, começando pela tia Beth e todos os membros de sua família, vocês são os meus segundos pais e contribuíram imensamente no meu crescimento. À tia Cássia e sua família, sendo a pessoa que eu mais gosto de brincar. Você faz muita falta nos meus dias e desejo sempre o melhor a você e todos da sua família. Ao tio Carlo, devo agradecer pelo seu nome ser sinônimo de festa, alegria, compaixão e apoio. À tia Eliana, eu agradeço por marcar a vida não só minha, mas de todos que te conhecem. A alegria que você transmite é contagiante em todas as escalas. Você é uma pessoa extremamente carinhosa, abençoada que transmite sinceridade no seu sorriso. Desejo que sua família continue maravilhosa e cresçam com muito sucesso. Ao tio Roberto, pelos conselhos, as conversas, risadas e pelos momentos que passamos juntos. Embora não tenham sido muitos, foram marcantes.

Tenho boas recordações, algumas cenas gravadas na minha memória de alegria com todos vocês. Amo muito a todos vocês!

"Philosophy is written in this grand book, the universe, which stands continually open to our gaze. But the book cannot be understood unless one first learns to comprehend the language and read the letters in which it is composed."

- Galileo Galilei, 1623

RESUMO

A conversão paramétrica descendente estimulada (StimPDC) é um processo não-linear de mistura de três ondas. Entre os feixes envolvidos, tem-se que o feixe *idler* herda as características dos outros 2 feixes, dito *pump* e *signal*. Ao nível quântico, o processo se dá por um fóton *pump* que correlaciona os dois outros fótons do processo num contínuo de possibilidades. Dentre as diferenças dos processos espontâneo e estimulado, uma de extrema importância é a coerência do feixe medido. Um método apresenta ser uma fonte incoerente enquanto o outro apresenta ser uma fonte coerente. Assim, a combinação de ambos pode oferecer uma fonte parcialmente coerente. Fontes parcialmente coerentes podem ser descritas pela função espectral cruzada. Em particular, temos interesse por uma classe destas fontes para as quais a coerência espacial depende apenas da distância entre dois pontos. Este trabalho combina tópicos de óptica não-linear, com enfoque principal em feixes parcialmente coerentes por meio de investigação teórica e experimental. Nesta tese são apresentadas regras de seleção modal na StimPDC que vão além da tradicional conservação de momento angular orbital. Também explora-se a capacidade do processo não-linear atuar como modulador de feixes, tanto de amplitude quanto de fase. Com relação aos feixes parcialmente coerentes, esta tese contribui na avaliação e geração de feixes parcialmente coerentes do modelo de Schell com fase de torção (TGSM). Atualmente, os feixes TGSM são gerados a partir de vídeos holográficos que aplicam fases aleatórias em feixes de laser coerente. É mostrado haver presença de ruído coerente proveniente deste método de soma modal incoerente, assim como é mostrado ajustes para melhor estabelecer a quantificação do comprimento de coerência. No processo não-linear, é demonstrada a conjugação de fase dos feixes parcialmente coerentes, contribuindo para aplicações de feixes com baixo comprimento de coerência em protocolos de comunicação. Métodos de geração de feixes de coerência parcial também são propostos usando fontes de StimPDC. Por fim, um parâmetro de controle, dito ϵ -*coherent length*, de visibilidade em função da coerência espacial é proposto.

Palavras-chave: Comprimento de coerência. Densidade espectral cruzada. Conjugação de fase.

ABSTRACT

Stimulated parametric down-conversion is a three-wave mixing nonlinear process. In this process, the idler beam actively inherits the characteristics of the other two beams, known as pump and seed. A pump photon transfers correlation to the other two photons at the quantum level in a continuum of possibilities. A difference between spontaneous and stimulated processes is the coherence of the measured beam, with one method acting as an incoherent source and the other as a coherent source. Partially coherent sources are described by the cross-spectral density, having a class of sources whose characteristic is the dependence on spatial coherence given only by the difference between two points. This work combines descriptions of nonlinear optics with a principal approach to partially coherent beams through theoretical and experimental investigation. This thesis presents modal selection rules in StimPDC that go beyond the traditional conservation of orbital angular momentum. It also explores the ability of the nonlinear process to act as a beam modulator of both amplitude and phase. Involving partially coherent beams, this thesis strives to contribute to better evaluating and generating TGSM beams. Currently, the method used to synthesize the TGSM beams uses holographic videos that apply random phases to laser beams. We have shown that there is consistent noise arising from this incoherent modal summation method. We applied adjustments to establish a better quantification of the coherence length. We demonstrate the phase conjugation of partially coherent beams in the StimPDC, contributing to applications of beams with low coherence length in communication protocols. We propose to use StimPDC as a source to generate partial coherence beams controlled by the intensity of stimulation. Finally, we propose a parameter, ε -coherence length, for visibility control as a function of the transversal spatial coherence.

Keywords: Coherence length. Cross spectral density. Phase conjugation.

LISTA DE FIGURAS

<p>Figura 1 – Diagrama mostrando os parâmetros de um feixe Gaussiano. À esquerda a imagem indica o perfil de intensidade gaussiana do feixe em $z = 0$. À direita, é uma representação de um corte transversal de um feixe se propagando ao longo de z; indicando os parâmetros de cintura (w_0), largura do feixe ($w(z)$), raio de curvatura ($R(z)$) e comprimento de Rayleigh (z_r).</p>	29
<p>Figura 2 – Intensidade gaussiana normalizada. Esquerda: Perfil transversal; Direita: Representação em 3D.</p>	30
<p>Figura 3 – Representação da variação de fase da frente de onda de um feixe com momento angular orbital, onde o número de espirais é igual ao número l. (a) $l = 0$, (b) $l = 1$, (c) $l = 2$, (d) $l = 3$</p>	31
<p>Figura 4 – Perfil de intensidade dos modos de Laguerre-Gauss com índices radiais e azimutais variando até 3.</p>	32
<p>Figura 5 – Interferômetro de Michelson.</p>	34
<p>Figura 6 – Interferômetro de fenda dupla de Young - usado para medir coerência espacial.</p>	38
<p>Figura 7 – Setup do experimento de fenda dupla com interferência num ponto Q do anteparo com os feixes percorrendo distâncias s_1 e s_2 provenientes das fendas P_1 e P_2, respectivamente.</p>	39
<p>Figura 8 – Primeiro resultado obtido de geração de segundo harmônico em 1961. A imagem apresenta uma escala de comprimentos de onda e deveriam conter sinais de um feixe de 694 nm e o respectivo segundo harmônico de 347 nm confundido com um borrão e apagado da figura.</p>	44
<p>Figura 9 – Efeito não-linear de cristal de segunda ordem ($\chi^{(2)}$) tipo I acoplando (a) um campo E_1 de entrada de polarização vertical com 2 campos de saída E_2 e E_3 de polarização horizontal; (b) 2 campos de entrada E_1 e E_2 de polarização horizontal com um campo E_3 de saída de polarização vertical.</p>	46
<p>Figura 10 – Representação das condições de phase-matching no processo de geração de diferença de frequência. Os índices "p", "s" e "i" representam <i>pump</i>, <i>signal</i> e <i>idler</i>, respectivamente. (a) conversão paramétrica descendente com um cristal não-linear (NLC) de segunda ordem ($\chi^{(2)}$) convertendo o fóton do feixe <i>pump</i> em 2 fótons <i>signal</i> e <i>idler</i>; O processo deve conservar (b) momento e (c) energia</p>	47
<p>Figura 11 – Conversão paramétrica descendente estimulada.</p>	49
<p>Figura 12 – Ilustração mostrando o espectro angular do feixe <i>pump</i> sendo transferido para as medidas de coincidências.</p>	52

Figura 13 – Representação dos processos de conversão paramétrica descendente (a) espontâneo e (b) estimulado.	53
Figura 14 – Representação das camadas de um SLM de cristal líquido com 4 diferentes pixels com diferentes tensões entre os eletrodos, provocando diferentes configurações de alinhamento e, portanto, diferentes fases.	64
Figura 15 – Padrão de variação de fase azimutal com (a) $\ell = -1$ e (b) $\ell = 3$	66
Figura 16 – Padrão de intensidade a partir da superposição de modos com $\ell = 3$ e $\ell = 0$. (a) modo $\ell = 3$ puro; (b) modo $\ell = 3$ + modo $\ell = 0$; (c) 30% modo $\ell = 3$ + 70% modo $\ell = 0$	66
Figura 17 – Máscara holográfica de uma grade de difração.	67
Figura 18 – Máscara holográfica de OAM com $\ell = 1$ resultante da combinação da máscara de fase azimutal e grade de difração.	68
Figura 19 – Máscaras holográficas de geração dos modos de Laguerre-Gauss; (a) $LG_{1,0}$, (b) $LG_{3,0}$, (c) $LG_{2,1}$	68
Figura 20 – Máscaras holográficas criadas no SLM para a simulação de fontes parcialmente coerentes dispostas em (a) 4 fontes pontuais, (b) 6 fontes e (c) 8 fontes.	71
Figura 21 – Máscaras holográficas criadas no SLM para a simulação de fontes parcialmente coerentes: (a) 25 fontes dispostas em uma matriz 5x5; (b) 225 fontes dispostas em uma matriz 15x15.	71
Figura 22 – Simulação da distribuição de intensidade produzida por 12 diferentes frames. Em cada um dos frames há, à esquerda, um plot 2D da distribuição de intensidade, à direita, um plot 3D.	73
Figura 23 – Simulação da distribuição de intensidade produzida pela soma de 12 diferentes frames. À esquerda, um plot 2D da distribuição de intensidade; à direita, um plot 3D.	74
Figura 24 – Simulação da distribuição de intensidade produzida pela soma de 300 diferentes frames. À esquerda, um plot 2D da distribuição de intensidade; à direita, um plot 3D.	74
Figura 25 – Gráfico do valor médio do parâmetro de coerência residual Δ_L em função do número de <i>frames</i> L para valores obtidos pela média de 1000 repetições por ponto.	76
Figura 26 – Montagem experimental da etapa de caracterização da divergência no campo distante dos feixes TGSM.	77
Figura 27 – Variância média, entre os eixos x e y , do campo distante para diferentes valores de <i>twist</i> normalizado em função do inverso quadrado do comprimento de coerência.	80
Figura 28 – Montagem experimental da etapa de medição dos comprimentos de coerência e fases de <i>twist</i> dos feixes TGSM.	81

Figura 29 – Visibilidade como função do comprimento de coerência transversal para fase de <i>twist</i> normalizada $\tau = 0$. A curva pontilhada é a visibilidade do feixe TGSM sem correção do termo coerente. Círculos vermelhos são dados experimentais para vídeos de 300 <i>frames</i> de comprimento. Quadrados azuis são dados experimentais para vídeos de 30 <i>frames</i> de comprimento. As linhas azul e vermelho são curvas teóricas da visibilidade total corrigida pelo fator coerente com os devidos parâmetros. As barras de erros são menores que o tamanho dos símbolos	83
Figura 30 – Visibilidade como função do comprimento de coerência transversal para fase de <i>twist</i> normalizada $\tau = 1$. A curva pontilhada é a visibilidade do feixe TGSM sem correção do termo coerente. Círculos vermelhos são dados experimentais para vídeos de 300 <i>frames</i> de comprimento. Quadrados azuis são dados experimentais para vídeos de 30 <i>frames</i> de comprimento. As linhas azul e vermelho são curvas teóricas da visibilidade total corrigida pelo fator coerente com os devidos parâmetros. As barras de erros são menores que o tamanho dos símbolos	83
Figura 31 – Visibilidade em função do parâmetro de coerência Δ_L . Os pontos vermelhos são os valores médios das simulações usando os parâmetros: $\delta = 0.4$ mm e $\tau = 0$. As linhas vermelhas são as barras de desvio padrão e a linha preta corresponde à curva teórica dado pela Equação (179).	84
Figura 32 – Comparação entre os valores teóricos μ_{th} e medidos μ_{est} da fase de <i>twist</i> . A linha vermelha é a reta $\mu_{th} = \mu_{est}$	86
Figura 33 – Ilustração da geração de modos radiais e conservação de momento angular orbital na StimPDC.	89
Figura 34 – Montagem experimental de feixes <i>pump</i> e <i>seed</i> colimados usando telescópios, mandados para SLMs para serem modulados em modos de Laguerre-Gauss com índice radial nulo e então combinados em um cristal não-linear BBO para produzir StimPDC do tipo I. Imagens de campo próximo e distante do perfil de intensidade do <i>idler</i> são capturadas por uma câmera CMOS após propagação livre.	91
Figura 35 – Comparação entre simulação e medidas experimentais da distribuição de intensidade no campo distante para 8 diferentes combinações de carga topológica do <i>seed</i> e <i>pump</i> (l_s, l_p).	92

Figura 36 – Perfis transversais de intensidade (acima) e plot de densidade da intensidade (abaixo) do feixe <i>idler</i> simuladas e medidas, num plano fixo no campo distante, para diferentes combinações de cargas topológicas para os feixes <i>seed</i> e <i>pump</i> . Os perfis apresentados são obtidos através da média azimutal das imagens obtidas e normalizados pelo valor máximo de intensidade.	93
Figura 37 – Distribuição de intensidade do campo $1/2(LG_{0,0} - LG_{1,0})$ em $z = 0$.	95
Figura 38 – Distribuição de intensidade do campo $1/2(LG_{0,0} - LG_{1,0})$ no campo distante $z = \infty$. A direita, um corte transversal em $y = 0$ do perfil de intensidade. A escolha em escala de cinza foi escolhida por destacar melhor a ordem radial.	95
Figura 39 – Perfis experimentais e simulados para o feixe <i>idler</i> como função da distância de propagação (começando pelo plano do cristal), para diferentes combinações de vórtices ópticos em StimPDC. Os perfis de intensidade obtidos pela média azimutal mostram a evolução do campo próximo ao distante para os feixes gerados.	96
Figura 40 – Modulação cruzada dos campos de luz na conversão paramétrica descendente. Feixe <i>pump</i> com modulação triangular enquanto o feixe <i>seed</i> apresenta estrutura espacial de LG.	97
Figura 41 – Montagem experimental para modulação espacial cruzada do perfil de intensidade na conversão paramétrica descendente.	98
Figura 42 – Padrões de intensidade de campo distante medidos para os campos <i>seed</i> LG (fileira superior) e <i>idler</i> (fileira do meio) são apresentados. A fileira inferior exhibe os padrões teóricos do <i>idler</i>	99
Figura 43 – Montagem experimental de medidas de campo distante dos feixes <i>seed</i> e <i>idler</i> na conversão paramétrica descendente estimulada. Um feixe <i>pump</i> @405 nm de perfil gaussiano bombeia um cristal não-linear enquanto um feixe @780 nm estimula o processo, aumentando consecutivamente também o sinal complementar <i>idler</i> em \approx @840 nm.100	100
Figura 44 – Máscara holográfica de um <i>frame</i> do vídeo holográfico TGSM sobreposto à máscara de fenda dupla.	102
Figura 45 – Imagem captada pela câmera do cone de luz da conversão paramétrica descendente filtrado em 840 ± 10 nm.	102
Figura 46 – Padrão de interferência de experimento de fenda dupla no campo distante.	103

Figura 47 – Variância da distribuição de intensidade em função do inverso do comprimento de coerência ao quadrado para um feixe GSM. As esferas vermelhas são referentes aos dados do feixe <i>seed</i> , os quadrados azuis são os dados do feixe <i>idler</i> , as linhas sólidas foram obtidas por meio de um fit linear dos dados experimentais.	105
Figura 48 – Variância da distribuição de intensidade em função do inverso do comprimento de coerência ao quadrado para um feixe TGSM. As esferas vermelhas são referentes aos dados do feixe <i>seed</i> , os quadrados azuis são os dados do feixe <i>idler</i> , as linhas sólidas foram obtidas via um fit quadrático dos dados experimentais e as linhas pontilhadas são as projeções dos crescimentos lineares.	105
Figura 49 – Visibilidade em função do inverso do comprimento de coerência ao quadrado para feixes de $\tau_S = 1$	107
Figura 50 – Visibilidade em função do inverso do comprimento de coerência ao quadrado para feixes de $\tau_S = 0$	107
Figura 51 – Visibilidade em função do inverso do comprimento de coerência ao quadrado para feixes de $\tau_S = -1$	108
Figura 52 – Padrão de intensidade da fenda dupla comparado entre dois valores de comprimento de coerência transversal, $\delta_S = 0.56$ (à esquerda de cada painel) e $\delta_S = 5.00$ (à direita de cada painel).	109
Figura 53 – Método de obter a transformada de Radon de uma imagem. Mostra um objeto descrito por uma função $f(x,y)$ e para cada ângulo θ e deslocamento x' há uma transformada de Radon $R_\theta(x')$	110
Figura 54 – Um exemplo com uma imagem de blocos em diferentes níveis de cinza (esquerda) e o respectivo sinograma (direita), produzido aplicando a transformada de Radon.	111
Figura 55 – Padrão de Interferência no campo distante capturado pela câmera (esquerda) onde os eixos indicam espaço (x,y) ; e o sinograma gerado pela transformada de Radon (direita) onde os eixos indicam (ângulo, deslocamento x'). No sinograma está destacado, com um retângulo cor-de-rosa, a região de ângulos que indicam as franjas de máximos e mínimos.	111
Figura 56 – Ângulo de torção das franjas de interferência no experimento de dupla fenda para feixes com twist phase $\tau_S = 1$ em diferentes comprimentos de coerência transversal.	112

Figura 57 – O setup experimental para medir o comprimento de coerência da luz StimPDC consiste nos seguintes componentes: um laser azul de 405 nm (@405), um laser vermelho de 780 nm (@780), uma placa de meia-onda $\lambda/2$, um filtro de densidade neutra variável (VNDF), um cristal não-linear (NLC), espelhos M1, M2 e M3, divisores de feixe BS1 e BS2, e lentes L1, L2 e L3. Uma câmera CMOS é utilizada para medir o padrão de interferência do feixe idler em um interferômetro de Michelson com desalinhamento controlado.	115
Figura 58 – Simulação do padrão de interferência na saída de um interferômetro de Michelson com desalinhamento em um dos braços. As Figuras a, c, e, g são padrões de interferência com visibilidade máxima, as Figuras b, d, f, h são padrões de interferência para visibilidade igual a 0,4.	116
Figura 59 – Coerência mútua caracterizada pela visibilidade dos padrões de interferência gerados por um interferômetro de Michelson desalinhado por um deslocamento d em um dos braços	117
Figura 60 – Padrão de intensidade produzidos no feixe <i>idler</i> pela difração em fenda dupla em diferentes combinações de comprimento de coerência $\delta_p = 0.8$ mm (esquerda) e $\delta_p = 2.0$ mm (direita). e $\delta_s = 0.6$ mm para todas as nove combinações de <i>twist</i> $\tau_{p,s} = 1, 0, -1$	121
Figura 61 – Parâmetros de Stokes do perfil transversal dos feixes TGSM para 3 configurações de <i>twist</i>	122

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Valores de comprimento de coerência utilizados nos vídeos holográficos e seus respectivos valores de inverso de comprimento de coerência ao quadrado.	104
Tabela 2 – Ângulos de inclinação medidos dos feixes <i>seed</i> e <i>idler</i> para cada comprimento de coerência.	112
Tabela 3 – Intensidade normalizada da componente estimulada e o ε -comprimento de coerência obtido para diferentes intensidades do <i>seed</i>	118

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	20
1.1	MOTIVAÇÃO	24
1.2	OBJETIVOS	24
1.2.1	Publicações	25
2	FEIXES GAUSSIANOS	27
2.1	FEIXES GAUSSIANOS COERENTES	27
2.2	FEIXES GAUSSIANOS COERENTES COM MOMENTO ANGULAR ORBITAL	30
2.3	FEIXES GAUSSIANOS PARCIALMENTE COERENTES	33
2.3.1	Coerência Temporal	34
2.3.1.1	Função de autocorrelação	35
2.3.1.2	Visibilidade de Interferência	36
2.3.2	Coerência Espacial	37
2.3.2.1	Função de densidade espectral cruzada para fontes	40
2.3.3	Gaussian Schell-model	41
2.4	FEIXES GAUSSIANOS PARCIALMENTE COERENTES COM TWIST	42
2.4.1	Twisted Gaussian Schell-model	42
3	INTERAÇÃO PARAMÉTRICA NA CONVERSÃO PARAMÉTRICA DESCENDENTE	43
3.1	HISTÓRIA DA ÓPTICA NÃO-LINEAR	43
3.2	TIPOS DE PROCESSOS NÃO LINEARES	43
3.3	CONVERSÃO PARAMÉTRICA DESCENDENTE ESTIMULADA	44
3.4	CONVERSÃO PARAMÉTRICA DESCENDENTE ESPONTÂNEA	49
3.5	INTERAÇÃO PARAMÉTRICA DE FEIXES GAUSSIANOS COERENTES	53
3.6	INTERAÇÃO PARAMÉTRICA DE FEIXES GAUSSIANOS PARCIALMENTE COERENTES	55
3.6.1	A_p como onda plana	56
3.6.2	A_p preparado como função gaussiana	57
3.6.3	A_p preparado modo LG coerente	58
3.6.4	A_p parcialmente coerente	59
3.6.4.1	A_p correlacionado com A_s	60
3.6.4.2	A_p descorrelacionado com A_s	61
4	GERAÇÃO DE FEIXES COM MOMENTO ANGULAR ORBITAL OU TWIST	63
4.1	MODULADOR ESPACIAL DE LUZ	63
4.2	GERAÇÃO DE FEIXES COM OAM	65
4.3	GERAÇÃO DE FEIXES TWISTED GAUSSIAN SCHELL MODEL	69

4.4	AVALIAÇÃO DE FEIXES TGSM PRODUZIDOS POR CAMPOS COERENTES COM FASES ALEATÓRIAS	74
4.4.1	Medidas de Variância	77
4.4.2	Medidas de Comprimento de Coerência	80
4.4.3	Medidas da fase de <i>twist</i>	85
5	EXPERIMENTOS COM INTERAÇÃO PARAMÉTRICA DE FEIXES GAUSSIANOS COERENTES	87
5.1	REGRAS DE SELEÇÃO NA CONVERSÃO PARAMÉTRICA PARA LAGUERRE-GAUSS	87
5.1.1	Medidas no campo distante	91
5.1.2	Evolução do campo próximo ao distante	94
5.2	OBSERVAÇÃO DE PADRÃO DE DIFRAÇÃO DE REDE TRIANGULAR EM PROCESSOS NÃO-LINEARES	96
5.2.1	Geração de rede triangular	97
6	EXPERIMENTOS COM INTERAÇÃO PARAMÉTRICA DE FEIXES GAUSSIANOS PARCIALMENTE COERENTES	100
6.1	CONJUGAÇÃO DE FASE DE FEIXES TGSM NA CONVERSÃO PARAMÉTRICA DESCENDENTE ESTIMULADA	100
6.1.1	Medidas da variância no campo distante	103
6.1.2	Medições do comprimento de coerência	106
6.1.3	Medições do ângulo de torção	108
6.2	COERÊNCIA PARCIAL E COMPRIMENTO DE COERÊNCIA NA CONVERSÃO PARAMÉTRICA DESCENDENTE ESTIMULADA	113
6.2.1	Medidas da coerência mútua na StimPDC	114
7	CONCLUSÃO	119
7.1	PERSPECTIVAS FUTURAS	120
	Bibliografia	124
	APÊNDICE A – CÓPIA DAS PUBLICAÇÕES RELACIONADAS A ESTA TESE	141

1 INTRODUÇÃO

Em todas as escalas, da vastidão astronômica às complexidades quânticas, a importância da luz se destaca como incontestável. Ela atua não apenas como fonte de energia fundamental para a vida, mas também serve como um canal abundante de informações. A luminosidade, que permeia cada aspecto do universo, é fundamental, especialmente no que se refere ao sentido humano da visão, permitindo às pessoas compreenderem o mundo ao seu redor. No século XIX e início do século XX, com os avanços na física e na engenharia, surgiu uma compreensão mais técnica e quantitativa da informação. A teoria da informação clássica, formalizada em grande parte por Claude Shannon, define a informação em termos da quantidade da incerteza ou entropia [1, 2]. A formalização matemática da teoria da informação faz da óptica uma ferramenta poderosa para o desenvolvimento de novas tecnologias, principalmente devido às características exclusivas da luz com respeito à qualidade na preparação, manipulação, medição e, principalmente, à velocidade de transmissão de informação.

Para os canais de comunicação atuais, a unidade básica da informação clássica é o bit, que pode existir em um de dois estados distintos - geralmente representados como 0 e 1. Enquanto no caso quântico, a principal distinção reside na natureza e no comportamento desses estados de informação. Enquanto a informação clássica é baseada em bits que têm estados definidos e distintos, a informação quântica utiliza qubits, que podem existir em superposições de estados. Além disso, enquanto a informação clássica pode ser copiada e transmitida sem alteração, a informação quântica está protegida pelas leis da mecânica quântica [3, 4] e sujeita ao fenômeno do emaranhamento [5, 6] e o princípio da incerteza [7–9].

Tradicionalmente, a óptica clássica, baseada em leis da física como as equações de Maxwell [10] e a teoria da relatividade [11, 12], tratava a luz como uma onda eletromagnética que pode ser manipulada e transmitida para transportar informação. Este entendimento levou ao desenvolvimento de tecnologias como fibras ópticas [13–16] e lasers [17], que revolucionaram as comunicações [18–20] e o desenvolvimento da óptica não-linear [21–24].

Dentre os processos de óptica não-linear, a conversão paramétrica descendente (SPDC, do inglês *Spontaneous Parametric Down Conversion*) se mostrou eficaz na geração de fótons emaranhados em polarização [25, 26], momento linear [27], energia [28] e momento angular orbital [29, 30]. O que permite uma abordagem ampla em aplicações como experimentos de desigualdade de Bell [27, 28, 31–34], teletransporte [35–37], distribuição de chaves quânticas [38–40], computação quântica [41, 42], efeitos de anti-correlação de dois fótons [43] e muitos outros trabalhos que exploram a natureza não clássica do estado de dois fótons gerados [44–49] e transferência de correlação [50]. Para o caso clássico, a conversão paramétrica descendente estimu-

lada (StimPDC, do inglês *Stimulated Parametric Down Conversion*) atua principalmente como uma fonte de luz correlacionada em diversos graus de liberdade e tem a conjugação de fase como característica importante, a qual permite ser utilizada para correções de frente de onda [51].

Dos diversos graus de liberdade que a conversão paramétrica correlaciona, um que desempenha um papel interessante é o modo espacial da luz paraxial. Por possuir dimensão infinita, se torna uma ferramenta vantajosa para o armazenamento e transporte de informação, utilizando o perfil espacial como grau de liberdade [52, 53], ao nível clássico e quântico [54].

Entre os vários modos espaciais, os feixes que carregam momento angular orbital (OAM, sigla do inglês *orbital angular momentum*) [55, 56] são particularmente notáveis. Esses feixes, conhecidos como vórtices ópticos, são caracterizados por sua estrutura espiral e oferecem vastas possibilidades para a manipulação e transmissão de informações ópticas. O OAM não apenas aumenta a capacidade de dados [57–59], mas também fornece uma plataforma robusta para experimentos em óptica quântica [60, 61] e aprofunda estudos em meios turbulentos [62, 63].

Além da fase de vórtice, outras fases permitem um feixe carregar momento angular orbital [64–66]. Um exemplo é não convencional e que também possui OAM, é a *twist phase*. O conceito de fase de *twist* foi introduzido inicialmente por Simon e Mukunda em 1993, combinado com feixes do modelo Gaussian Schell [67, 68] para obter feixes do modelo Gaussian Schell torcido (TGSM, do inglês *Twisted Gaussian Schell Model*) [69]. Feixes com fase de *twist* apresentam rotação em torno de seu eixo durante a propagação [70]. Esses feixes da classe de Shell são feixes com coerência espacial parcial. A rigor, não existe um feixe de laser completamente coerente, mas, devido ao alto grau de coerência dos feixes laser, eles são classificados como totalmente coerentes. Na prática, todo campo eletromagnético tem flutuações associadas a eles, de forma que podem ser descritas em termos estatísticos. Então, Emil Wolf apresentou a teoria de coerência [71–73] utilizada para a descrição estatística dos campos eletromagnéticos.

Historicamente, em 1955 Wolf [74] formula a teoria de coerência parcial. Seis anos depois, Allan Schell estudando o desempenho de múltiplas antenas sob feixes parcialmente coerentes, propõe um modelo de fonte parcialmente coerente que descreve muito bem as fontes encontradas desta natureza [67]. Então, em 1975, Wolf e Carter sugeriram o conceito de fonte parcialmente coerente quase-homogênea gaussiana [75]. Pouco depois, a fonte do modelo gaussiano de Schell (GSM do inglês, *Gaussian Schell-model*) foi introduzida e totalmente desenvolvida por Wolf, Collet, Gori e outros [76–79]. Em 1982, Fridberg explorou esse modelo de fonte e caracterizou o feixe GSM [80]. Finalmente, em 1993, Simon e Mukunda propuseram o feixe *Twisted Gaussian Schell-model* ao descrever a densidade espectral cruzada gaussiana

mais geral possível no plano transversal, tal que seja invariante sob rotações arbitrárias no eixo de propagação z [69]. A partir daí, os feixes foram amplamente estudados e fenômenos interessantes foram relacionados com a coerência da luz. Dentre os resultados apresentados, salientamos a vantagem sobre os feixes totalmente coerentes em comunicação sob turbulência atmosférica [81–83] e a relação de pulsos parcialmente coerentes com efeitos na propagação superluminal, indo de superluminal a sub-luminal [84]. Feixes parcialmente coerentes, por sua vez, apresentam aplicações em microscopia [85], litografia [86], captura de partículas [87] e canais de comunicação [88].

De modo geral, a organização da tese está dividida em 3 conjuntos. Introdução e fundamentação teórica, descrição experimental e discussão dos resultados, e, finalmente, conclusões. A primeira parte se encarrega de abordar e descrever matematicamente os conceitos utilizados na tese, de maneira a não se estender tanto além do necessário para compreender os objetivos da tese. O Capítulo 2 inicia descrevendo a matemática dos feixes gaussianos coerentes, discute-se a coerência de um feixe, para finalmente obter uma forma matemática do feixe Twisted Gaussian Schell-model por meio da densidade espectral cruzada [71–73].

No Capítulo 3, o processo não-linear de conversão paramétrica descendente é apresentado com foco principal na emissão estimulada, estendendo-se a conceitos úteis do regime espontâneo. Esta abordagem quântica foi explorada visando comparar as diferenças de coerência entre o regime espontâneo e estimulado. A comparação terá efeito na abordagem dos resultados envolvendo a caracterização do sinal espontâneo e estimulado. Seguindo, também é discutido como que os feixes, sejam totalmente coerentes ou parcialmente coerentes, interagem no processo de conversão paramétrica.

Na sequência, o Capítulo 4 começa abordando a preparação dos feixes modulados espacialmente. É explicado o uso de dispositivos que modulam fases da frente de onda do feixe. Também são apresentadas técnicas de aplicar modulação de amplitude em modulações que envolvem vórtices ópticos e, na sequência, são apresentadas as técnicas de sintetização dos feixes parcialmente coerentes através da modulação da fase do perfil transversal de um laser coerente. Por fim, ainda no Capítulo 4 se inicia a segunda etapa da tese, a discussão dos resultados. Primeiro, apresentamos os resultados da investigação sobre a metodologia atualmente utilizada para gerar feixes TGSM [89], discutimos as consequências do método e oferecemos resultados que melhoram a adjacência entre a teoria e o experimento, relacionado ao comprimento de coerência gerado pelo método.

O Capítulo 5 apresenta 2 experimentos envolvendo StimPDC e feixes coerentes com OAM. O primeiro trabalho é motivado pela interação paramétrica em feixes de luz que possuem momento angular orbital com índice radial não-nulo. Este aspecto foi es-

tudado em outros processos não-lineares [90–93] onde observou-se regras de seleção específicas para os índices azimutais e radiais dos modos de Laguerre-Gauss. Assim, este trabalho propõe continuar essa investigação, abordando tanto a conservação do momento angular orbital quanto a observação de regras de seleção para ordens radiais. O segundo trabalho que compõe o capítulo é motivado pela capacidade da StimPDC em atuar como modulador espacial de um feixe de luz não apenas na amplitude, mas também na fase. A modulação se dá pela correlação dos campos no cristal não-linear. O feixe *idler* pode ser modulado pelas características do feixe *seed* sem modificar a estrutura do mesmo. Portanto, foi criado um padrão de difração de rede triangular [94] para o feixe *idler* no campo distante do cristal.

O Capítulo 6 carrega o coração desta tese, tratando dos resultados obtidos envolvendo os feixes de coerência espacial reduzida. O primeiro trabalho discutido aborda a verificação da conjugação de fase dos feixes parcialmente coerentes na StimPDC. Embora a conjugação de fase na StimPDC já esteja embasada, não é trivial que os feixes da classe TGSM também mantenham a conjugação da *twist phase*. O método de geração dos feixes TGSM consiste em uma soma temporal de intensidades, enquanto o processo não-linear é instantâneo. Tendo demonstrado os resultados de conjugação de fase, nosso trabalho permite um avanço nas análises envolvendo regras de seleção e aplicações de feixes parcialmente coerentes em protocolos de comunicação e correção da frente de onda. Por fim, o segundo tema pesquisado nesta tese envolvendo feixes parcialmente coerentes é a caracterização da StimPDC em termos da coerência parcial e comprimento de coerência. Para controlar a coerência do processo, buscou-se avaliar o método espontâneo e estimulado. O processo espontâneo atua como uma fonte incoerente, já o processo estimulado, coerente. Então, controlando o grau de estímulo (intensidade do feixe estimulador) é possível controlar a coerência do feixe convertido. Deste modo, neste trabalho foram avaliadas as características e consequências de diferentes intensidades de estimulação a fim de caracterizar o processo como uma fonte parcialmente coerente com comprimento de coerência controlado. Além disso, em informação quântica, certas conclusões sobre a natureza quântica da fonte somente pode ser alcançada para valores mínimos de visibilidade [95–97]. Assim, foi introduzido o conceito de uma variável ε -*coherence length*, definida como a maior distância entre dois pontos sob interferência cuja visibilidade assume valor ε , escolhido caso a caso.

Finalmente, o Capítulo 7 apresenta as conclusões, destacando os principais resultados em cada um dos experimentos e também as perspectivas futuras derivadas do estudo sobre a geração e interação de feixes parcialmente coerentes com *twist phase* na conversão paramétrica descendente. Nas perspectivas futuras, há ao menos 3 trabalhos que possuem ligação direta com esta tese, sendo uma extensão natural das investigações apresentadas aqui.

1.1 MOTIVAÇÃO

A StimPDC é um processo versátil que oferece aplicações amplas em contextos clássicos, permitindo uma análise mais rigorosa. Além de suas vantagens no âmbito clássico, especialmente na conjugação de fase, a StimPDC também se destaca como uma ferramenta eficaz para investigar correlações quânticas em processos espontâneos [98]. Esta abordagem possibilita a previsão de resultados quânticos por meio de medições de luz intensa, ampliando o alcance da StimPDC para aplicações em sistemas não estimulados.

Adicionalmente, uma classe de feixes de luz que vem recebendo crescente atenção são os feixes com coerência espacial reduzida, particularmente os feixes TGSM. Estes feixes são de especial interesse no contexto da StimPDC, pois sua característica de fase *twist* permite que carreguem momento angular orbital, abrindo novas avenidas de pesquisa. Além do momento angular orbital, em 2002, Ricklin *et al.* e Wang *et al.* em 2010, mostraram vantagens de usar feixes parcialmente coerentes em meios turbulentos[81, 82].

Alguns trabalhos ao longo da primeira etapa do doutorado contribuíram para demonstrar praticamente as vantagens de feixes parcialmente coerentes e, assim, reforçar o interesse em investigá-los no processo de conversão paramétrica descendente estimulado.

Segundo o artigo Physical Review A **102**, 033732 (2020) [99], feixes de coerência espacial parcial possuem desempenho superior aos feixes totalmente coerentes em manter as informações em propagação livre sob meios atmosféricos turbulentos. As análises foram realizadas comparando as taxas de coincidências dos feixes produzidos pela conversão paramétrica descendente espontânea em diferentes condições de turbulência, quando bombeado com feixe coerente ou então, bombeado com feixe parcialmente coerente. Outro artigo que apresenta resultados surpreendentes é o artigo Physical Review Letters **125**, 193602 (2020) [100], que segue a linha de analisar correlações nos fótons gerados pela conversão paramétrica descendente espontânea quando bombeados com feixes de coerência espacial reduzida. Mostraram que, em determinadas condições, ao irradiar o cristal não linear com feixes parcialmente coerentes e medir o grau de emaranhamento, feixes com fase de *twist* conseguem restabelecer o emaranhamento entre os fótons da SPDC em situações em que o estado gerado sem a fase de *twist* era separável.

1.2 OBJETIVOS

Durante a realização desta pesquisa de doutorado, foram conduzidos vários experimentos e investigações teóricas relacionadas à interação paramétrica descendente estimulada e feixes com modulações no perfil espacial. O principal objetivo da tese é

explorar o processo de conversão paramétrica descendente como uma fonte de feixes parcialmente coerentes, aproveitando a flexibilidade do processo em gerar feixes complexos. Além disso, há regimes de estimulação controlada, identificado como fontes naturais de luz parcialmente coerente. Assim, busca-se pavimentar o caminho para o entendimento da interação dos feixes parcialmente coerentes com a fase de *twist* do modelo de Schell, e explorar regimes e combinações que resultem na produção de feixes de interesse para a comunidade científica.

1.2.1 Publicações

Abaixo, a lista das cinco publicações que compõem o corpo desta tese, seguido de artigos publicados ou submetidos no mesmo período de doutoramento, mas que são frutos de colaborações extras ao tópico discutido nesta tese.

- I. Cañas, G., Gómez, E. S., dos Santos, G. H., de Oliveira, A. G., Rubiano da Silva, N., Joshi, S., Ismail, Y., Ribeiro, P. H. S. & Walborn, S. P. Evaluation of Twisted Gaussian Schell Model Beams Produced with Phase Randomized Coherent Fields. *Journal of Optics* **24**, 094004. ISSN: 2040-8978, 2040-8986 (set. de 2022).
- II. de Oliveira, A., Santos, G., da Silva, N. R., Pereira, L., Alves, G., Khoury, A. & Ribeiro, P. S. Beyond Conservation of Orbital Angular Momentum in Stimulated Parametric Down-Conversion. *Physical Review Applied* **16**, 044019. ISSN: 2331- 7019 (out. de 2021).
- III. Silva, B., H. dos Santos, G., de Oliveira, A., Rubiano da Silva, N., Buono, W., M. Gomes, R., C. Soares, W., Silva, A., Fonseca, E., Ribeiro, P. H. & Khoury, A. Observation of Triangular-Lattice Pattern in Nonlinear Wave Mixing with Optical Vortices. *Optica*. ISSN: 2334-2536 (jun. de 2022).
- IV. dos Santos, G. H., de Oliveira, A. G., da Silva, N. R., Cañas, G., Gómez, E. S., Joshi, S., Ismail, Y., Ribeiro, P. H. S. & Walborn, S. P. Phase conjugation of twisted Gaussian Schell model beams in stimulated down-conversion. *Nanophotonics* **11**, 763–770 (2022).
- V. Santos, G. d., Pimenta, R. S., Gomes, R., Walborn, S. & Ribeiro, P. S. Partial Coherence and Coherence Length in Stimulated Parametric Down-Conversion. *Phys. Rev. Appl.* **20**, 024007 (2 ago. de 2023).

- * G. H. dos Santos, D. C. Salles, M. G. Damaceno, B. T. Menezes, C. Corso, M. Martinelli, P. H. S. Ribeiro, and R. M. de Araújo. Decomposing Spatial Mode Superposition with a Triangular Optical Cavity. *Phys. Rev. Appl.* **16**, 034008 (2021).
- ** Pimenta, R. C. S., dos Santos, G. H., Barreto, A. B., Celeri, L. C. & Ribeiro, P. H. S. Photonic Entanglement with Accelerated Light. set. de 2023. arXiv: 2308.01764 [gr-qc, physics:quant-ph] (2023).
- * * * Rodrigues, L. M., Fagundes, L. M., Salles, D. C., dos Santos, G. H., Kondo, J. M., Khoury, A. Z., Ribeiro, P. H. S. & de Araújo, R. M. Resonance of Vector Vortex Beams in a Triangular Optical Cavity. out. de 2023. arXiv: 2310.15391 [physics:optics] (2023).
- * * * * de Oliveira, M. G., Santos Junior, A. L., Barbosa, A. C., Pinheiro da Silva, B., dos Santos, G. H., Cañas, G., Souto Ribeiro, P. H., Walborn, S. W., Khoury, A. Z. Anomalous Second Harmonic Generation of Twisted Gaussian Schell Model Beams. submetido (jan. de 2024).

2 FEIXES GAUSSIANOS

Este capítulo visa introduzir conceitos e propriedades fundamentais relacionados ao grau de liberdade espacial do perfil transversal de feixes de luz, assim como explorar a coerência espacial, essenciais para a compreensão dos feixes explorados ao longo desta tese. A descrição detalhada da interação não linear será abordada em um capítulo subsequente.

Iniciando com uma revisão a partir da solução mais básica da equação de Helmholtz, serão demonstradas as propriedades de um feixe gaussiano coerente. Posteriormente, abordaremos as soluções de ordens superiores para um conjunto específico de modos conhecidos como Laguerre-Gauss, destacando a presença significativa de fase azimutal em seus perfis transversais.

Ao avançar, exploraremos as propriedades de coerência inerentes aos feixes, além de fornecer uma descrição matemática do campo elétrico para fontes parcialmente coerentes. Os feixes centrais desta pesquisa são os do modelo gaussiano de Schell (GSM do acrônimo em inglês *Gaussian-Schell model*) e os feixes do modelo gaussiano de Schell com fase de torção (TGSM - *Twisted Gaussian-Schell model*), cujas características serão discutidas em profundidade ao longo deste capítulo.

2.1 FEIXES GAUSSIANOS COERENTES

Há um grande interesse em feixes que possuem um perfil transversal de intensidade gaussiano, pois trata-se de uma característica apresentada comumente pelos lasers comerciais.

Para deduzir a forma de um feixe gaussiano coerente, consideramos um campo eletromagnético em um meio não condutor e homogêneo, sem cargas livres ($\rho = 0$) e correntes ($\mathbf{J} = 0$). Sob estas condições, as equações de Maxwell simplificam-se para:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (\text{Lei de Gauss})$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{Lei de Faraday})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (\text{Lei de Gauss})$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (\text{Lei d'Ampère})$$

Aplicando o rotacional na Lei d'Ampère e na Lei de Faraday e usando a propriedade matemática $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$, encontramos equações de onda para o campo elétrico \mathbf{E} (Eq. (1)) e para o campo magnético \mathbf{B} (Eq. (2)) respectivamente, onde a velocidade de propagação é igual a $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$ [101, 102].

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (1)$$

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} \quad (2)$$

Na descrição de ondas eletromagnéticas, opta-se pelo uso do campo elétrico, com o campo magnético sendo definido a partir deste por meio da equação $\mathbf{B} = \frac{1}{c} \hat{k} \times \mathbf{E}$. A análise é simplificada ao considerar apenas ondas monocromáticas de frequência ω e polarização constante $\hat{\epsilon}$.

Adota-se o ansatz

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = u(x, y, z) \exp(i(kz - \omega t)) \hat{\epsilon},$$

representando uma onda plana modulada espacialmente pela função $u(x, y, z)$, conhecida como o envelope complexo do campo elétrico. Isso leva a uma equação diferencial específica para o envelope

$$\nabla^2 u + 2ik \frac{\partial u}{\partial z} + (\omega^2/c^2 - k^2)u = 0.$$

Na equação acima, o termo proporcional a u é anulado se considerarmos a relação de dispersão no vácuo: $\omega = kc$. Assim, podemos reescrevê-la como

$$\nabla_T^2 u + 2ik \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad (3)$$

onde $\nabla_T^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

Assumindo que a extensão transversal do feixe é muito maior que o comprimento de onda, então

$$\frac{\Delta u}{\Delta z} \ll \frac{u}{\lambda}$$

donde

$$\frac{\partial u}{\partial z} \ll ku$$

e

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \ll k \frac{\partial u}{\partial z},$$

podemos então dirimir o termo da segunda derivada, obtendo:

$$\nabla_T^2 u + 2ik \frac{\partial u}{\partial z} = 0. \quad (4)$$

A Equação (4) é chamada equação paraxial de Helmholtz. A solução de ordem zero desta equação é uma função gaussiana [103, 104], caracterizada pela sua simplicidade e propriedades ópticas notáveis. Ela é dada por:

$$u(x, y, z) = \frac{u_0}{q(z)} e^{-ik \left(\frac{x^2 + y^2}{2q(z)} \right)} \quad (5)$$

sendo u_0 uma constante e $q(z)$ um termo complexo definido como:

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R(z)} - i \frac{\lambda}{\pi w(z)^2}, \quad (6)$$

onde λ é o comprimento de onda, $R(z)$ é o raio de curvatura da frente de onda e $w(z)$ é a largura do feixe.

A função $q(z)$ também pode ser escrita como

$$q(z) = z + iz_R = z + i \frac{\pi w_0^2}{\lambda}, \quad (7)$$

em que z_R é uma distância medida entre a cintura do feixe $w_0 = w(z = 0)$ e o ponto onde a largura mede $\sqrt{2}w_0$. Assim, combinando as Equações (6) e (7) é possível encontrar a relação dos parâmetros do feixe em função da distância percorrida, ilustrados na Figura 1.

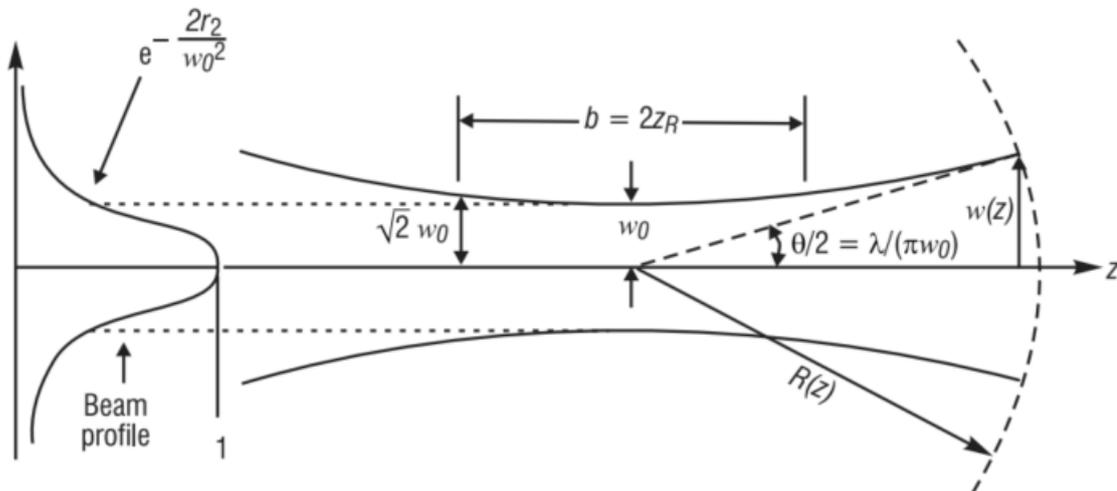


Figura 1 – Diagrama mostrando os parâmetros de um feixe Gaussiano. À esquerda a imagem indica o perfil de intensidade gaussiana do feixe em $z = 0$. À direita, é uma representação de um corte transversal de um feixe se propagando ao longo de z ; indicando os parâmetros de cintura (w_0), largura do feixe ($w(z)$), raio de curvatura ($R(z)$) e comprimento de Rayleigh (z_r).

Fonte: Roychoudhuri - 'Fundamentals of Photonics'.

Outras relações importantes entre os parâmetros do feixe são apresentados a seguir nas Equações (8) a (11):

$$w_0 = \left(\frac{\lambda z_R}{\pi} \right)^{1/2}, \quad (8)$$

$$w(z) = w_0 \left[1 + \left(\frac{z}{z_R} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad (9)$$

$$R(z) = z \left[1 + \left(\frac{z_R}{z} \right)^2 \right], \quad (10)$$

$$\zeta(z) = \tan^{-1} \left(\frac{z}{z_R} \right). \quad (11)$$

A fase de Gouy [105–107], $\zeta(z)$, surge como uma consequência da natureza curva das frentes de onda em um feixe gaussiano. À medida que o feixe se propaga e se espalha, as frentes de onda se tornam curvadas. Esta curvatura induz uma mudança extra na fase do feixe, que não é explicada apenas pelo termo de propagação linear e^{ikz} .

Assim, o campo $\mathbf{E}(\rho, z, t) = u(\rho, z) \exp(i(kz - \omega t)) \hat{\mathbf{e}}$ pode ser reescrito como:

$$u(\rho, z) = u_0 \frac{w_0}{w(z)} \exp \left[-\frac{\rho^2}{w(z)^2} \right] \exp \left[-ik \frac{\rho^2}{2R(z)} + i\zeta(z) \right], \quad (12)$$

onde $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Para esta solução, nota-se um perfil de intensidade gaussiano, ilustrado na Figura 2, e dado por

$$I(\rho, z) = \frac{I_0}{w(z)} \exp \left[-\frac{2\rho^2}{w(z)^2} \right]. \quad (13)$$

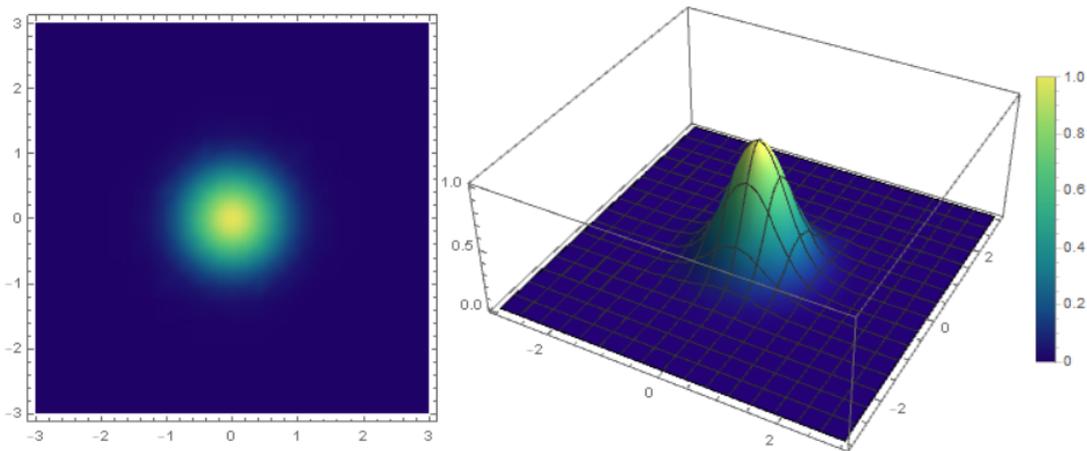


Figura 2 – Intensidade gaussiana normalizada. Esquerda: Perfil transversal; Direita: Representação em 3D.

Este padrão representa o perfil de intensidade do modo eletromagnético transversal TEM_{00} , caracterizado pela ausência de componentes longitudinais nos campos elétrico e magnético. Este modo é frequentemente observado em lasers comerciais.

2.2 FEIXES GAUSSIANOS COERENTES COM MOMENTO ANGULAR ORBITAL

A solução do feixe gaussiano não é única para a equação paraxial de Helmholtz. Na verdade, ela é apenas a solução de ordem zero e existem infinitas soluções de ordens superiores que possuem os perfis transversais descritos pelos polinômios de Hermite, além do envelope complexo do feixe gaussiano.

Além das soluções dos chamados feixes de Hermite-Gauss, podemos reescrever a equação paraxial de Helmholtz em coordenadas cilíndricas,

$$\left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + 2ik \frac{\partial}{\partial z} \right) LG_{p\ell}(r, \theta, z) = 0, \quad (14)$$

cujas soluções $LG_{p\ell}(r, \theta, z)$ são dadas por:

$$LG_{p\ell}(r, \theta, z) = C_1 \left(\frac{\sqrt{2}r}{w(z)} \right)^\ell L_p^\ell \left(\frac{2r^2}{w^2(z)} \right) \exp \left[-\frac{r^2}{w^2(z)} \right] \exp \left[ik \frac{r^2}{2R(z)} + i\ell\theta - i\zeta_{p\ell}(z) \right]. \quad (15)$$

O C_1 é uma constante de normalização, p e ℓ são números inteiros com $p \geq 0$, L_p^ℓ são os polinômios generalizados de Laguerre e a fase de Gouy, aqui, é reescrita como $\zeta_{p\ell}(z) = (2p + |\ell| + 1) \tan^{-1} \left(\frac{z}{z_R} \right)$, devido à ordem do feixe ser dada por $N = 2p + |\ell|$.

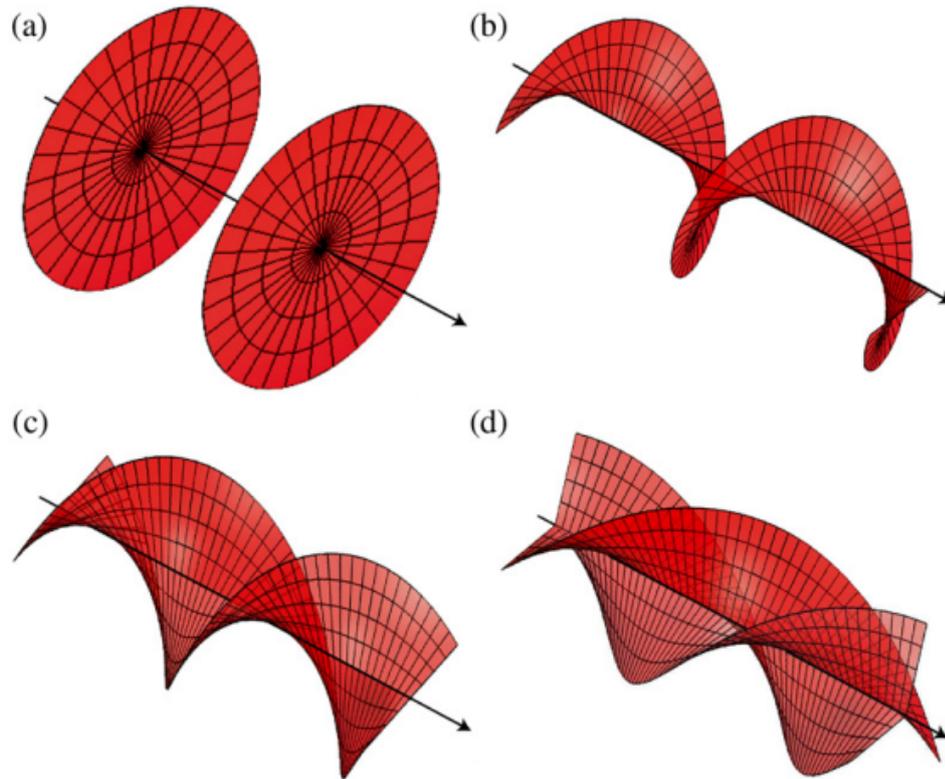


Figura 3 – Representação da variação de fase da frente de onda de um feixe com momento angular orbital, onde o número de espirais é igual ao número ℓ . (a) $\ell = 0$, (b) $\ell = 1$, (c) $\ell = 2$, (d) $\ell = 3$

Fonte: Yao (2011) [56]

Uma característica que torna os feixes de Laguerre-Gauss especialmente interessantes é a natureza helicoidal da fase da frente de onda para modos com $\ell \neq 0$ (Figura 3). Isso significa que a estrutura de fase do feixe rotaciona à medida que se

propaga no espaço e, portanto, carrega momento angular orbital (OAM, *orbital angular momentum*) [56].

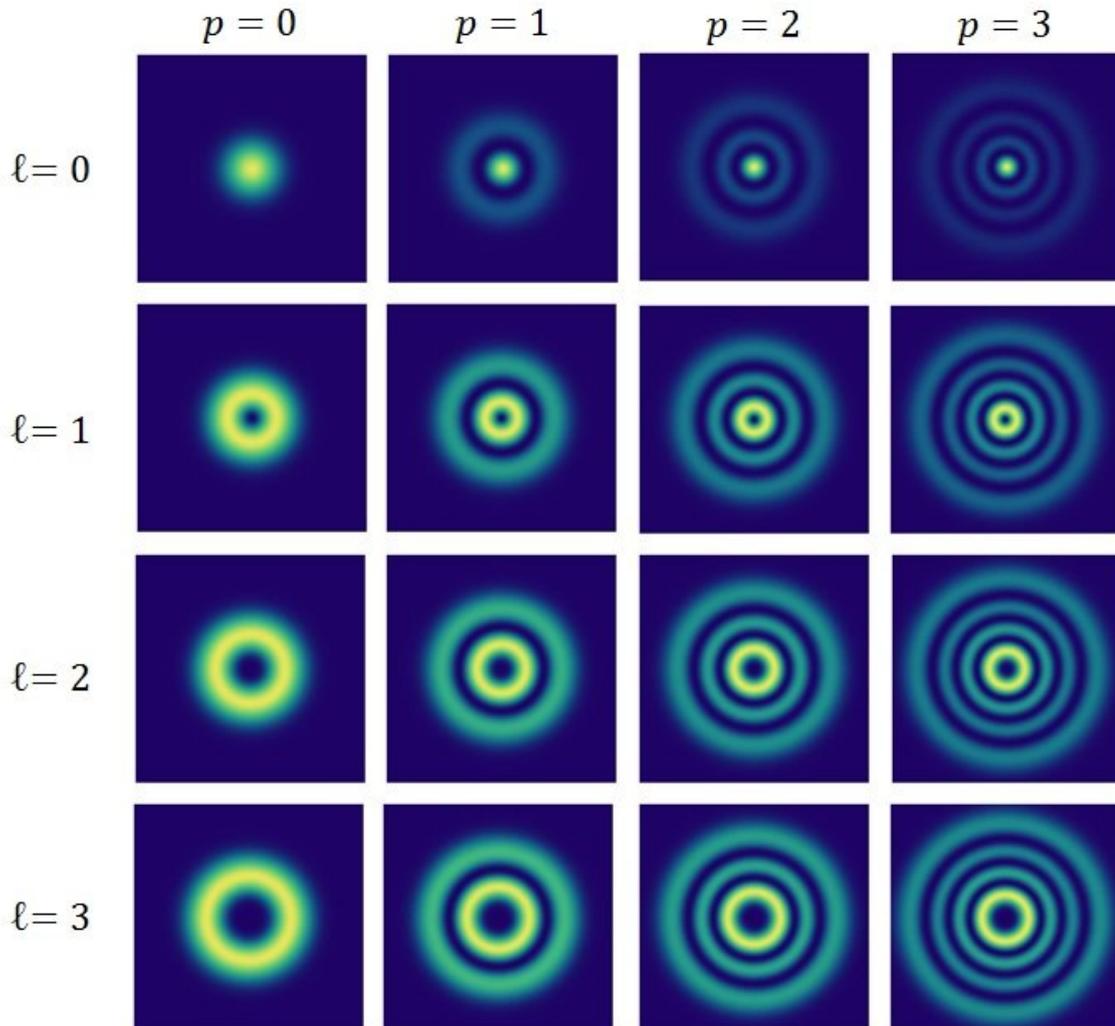


Figura 4 – Perfil de intensidade dos modos de Laguerre-Gauss com índices radiais e azimutais variando até 3.

Outros exemplos de perfis transversais de intensidade de modos de Laguerre-Gauss podem ser visto na Figura 4.

Uma propriedade importante dos modos de Laguerre-Gauss é o fato de constituírem um conjunto completo de soluções, satisfazendo

$$\int \int LG_{p\ell}(r,\theta,z) LG_{p'\ell'}^*(r,\theta,z) r dr d\theta = \delta_{p,p'} \delta_{\ell,\ell'}. \quad (16)$$

Desse modo, eles formam uma base ortonormal, sendo possível usá-los para expressar qualquer função de quadrado integrável a partir da combinação linear dos modos de Laguerre-Gauss. Além de ser uma propriedade interessante para aplicações em canais de comunicação [57, 59, 108].

2.3 FEIXES GAUSSIANOS PARCIALMENTE COERENTES

Os campos observados até o momento ilustram eficazmente os feixes de lasers que exibem um alto nível de coerência espacial. São sistemas extremamente estáveis em que o comprimento de coerência é considerado infinito, ou suficientemente extenso em relação às dimensões das aplicações laboratoriais.

No entanto, todo campo eletromagnético apresenta flutuações inerentes, as quais podem ser descritas em termos estatísticos. A teoria de coerência, proposta por Emil Wolf [71–73], concentra-se na análise estatística desses campos. A medição direta das flutuações desses campos é inviável devido à sua oscilação em uma escala temporal mais rápida do que a resolução dos detectores. No entanto, é possível inferir a existência dessas oscilações através de ajustes experimentais e medições de interferência entre os campos em dois ou mais pontos espaço-temporais, que consiste em avaliar os efeitos de superposição de dois feixes produzidos por uma mesma fonte.

A difração e interferência de ondas eletromagnéticas podem ser descritas por feixes completamente coerentes ou incoerentes. Enquanto feixes coerentes geram padrões observáveis de interferência em anteparos, feixes incoerentes não produzem tal efeito. No entanto, feixes reais exibem coerência parcial, resultando em padrões de interferência em condições específicas, porém com visibilidade reduzida em comparação com feixes idealmente coerentes.

Após a invenção do laser, ocorreu uma classificação sistemática dos fenômenos de coerência óptica, englobando efeitos de coerência de todas as ordens e uma descrição estatística completa dos campos ópticos.

A teoria da coerência opera exclusivamente com características mensuráveis. As vibrações eletromagnéticas são descritas por quantidades que oscilam rapidamente, e como previamente mencionado, nenhum detector real é capaz de acompanhar mudanças tão rápidas. Além disso, o campo representa um sistema de dinâmica estatística, o que requer a introdução de um processo de média para quantidades físicas, sendo apenas essas médias passíveis de serem medidas.

Neste contexto, serão apresentados conceitos fundamentais relacionados à coerência temporal e espacial, bem como métodos de medição, incluindo interferômetros do tipo Michelson e o experimento de fenda dupla de Young. Além disso, serão abordadas as respectivas funções de correlação entre os campos. Por fim, por meio da análise da função de correlação espacial, será possível caracterizar os feixes, que são o coração desta tese, especificamente a classe de feixes parcialmente coerentes descritas pelo modelo de Schell.

2.3.1 Coerência Temporal

Para compreender o conceito de coerência, será primeiramente abordada a coerência temporal através do experimento de Michelson, representado na Figura 5. O experimento consiste em enviar um feixe de luz coerente para um espelho semitransparente, parte do feixe será refletida para o espelho 1 e parte do feixe será transmitida para o espelho 2; os feixes são recombinados no espelho semitransparente e analisado o padrão de interferência no anteparo. Considerando que a distância entre o espelho 1 e o espelho semitransparente é L e a distância entre o espelho 2 e o espelho transparente é $L + \Delta l$, se a distância Δl for muito pequena, franjas de interferência serão formadas no anteparo, manifestando a coerência temporal entre os dois feixes.

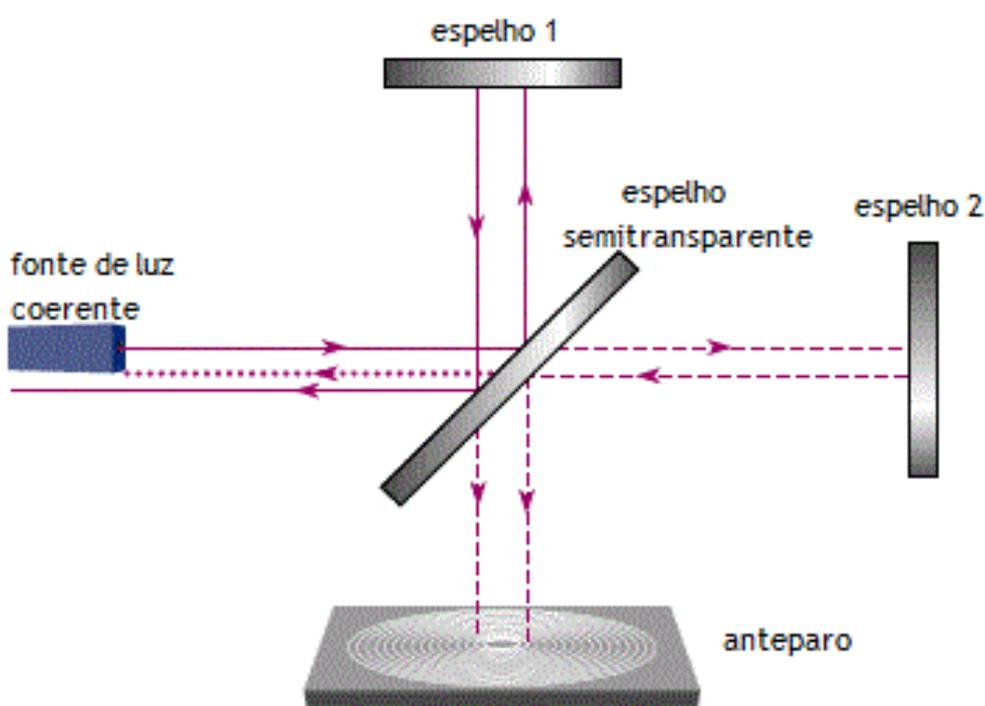


Figura 5 – Interferômetro de Michelson.

Fonte: Wikipédia Português - Interferômetro de Michelson

É conhecido experimentalmente que as franjas de interferência serão formadas quando o tempo de atraso entre feixes ($\Delta\tau$) obedecer a condição

$$\Delta\tau\Delta\nu \leq 1, \quad (17)$$

onde $\Delta\nu$ é a largura de banda do feixe de luz e deve ser pequena comparada com a frequência média ν , não apresentando flutuações em níveis macroscópicos.

O tempo de atraso máximo, tal que ainda forme franjas de interferência, é conhecido como coerência temporal e está relacionado com o comprimento de coerência longitudinal pela relação $\Delta l = c\Delta\tau$, sendo a distância que o feixe percorre no tempo

$\Delta\tau$. Se este tempo de atraso entre os dois feixes começa a ser aumentado, as franjas de interferência se tornam menos definidas. Já para o caso de um tempo de atraso suficientemente longo, não haverá nenhuma franja de interferência formada. Portanto, haverá uma forte correlação entre os dois feixes no anteparo se o tempo de atraso introduzido num dos braços for pequeno comparado com o tempo de coerência da luz e, por outro lado, não haverá correlação para tempos de atrasos muito grandes.

2.3.1.1 Função de autocorrelação

Agora, usando o exemplo do interferômetro de Michelson, precisaremos de um tratamento quantitativo para descrever as propriedades dos campos estatisticamente. Por isso, vamos considerar um campo escalar estatisticamente estacionário que representa as perturbações de campo em um ponto numa posição r no tempo t pela função complexa $\mathbf{E}(r, t)$. É conveniente usar campos complexos em vez de campos reais.

Como vimos na mesma seção 2.3.1, a coerência temporal mede a coerência entre $E_1(r, t_1)$ e $E_2(r, t_2)$, ou seja, entre dois valores do campo no mesmo ponto r mas em tempos diferentes. Seja $E_1(r, t_1)$ o feixe que chega ao anteparo pelo espelho $M1$ e $E_2(r, t_2)$ aquele que chega ao anteparo pelo espelho $M2$. Então, considerando que o espelho semirefletor divide o feixe de entrada uniformemente (um divisor de feixe de 50-50), os campos, depois de recombinados, podem ser escritos como

$$E_2(r, t) = E_1(r, t + \tau) \quad (18)$$

e a interferência de ambos os campos no anteparo é dada por

$$E(r, t) = E_1(r, t) + E_2(r, t). \quad (19)$$

Como os detectores possuem um tempo de resposta muito longo, só conseguem medir a intensidade média de luz, expressa por

$$I(t) = \langle E(t)E^*(t) \rangle. \quad (20)$$

$$I(t) = \langle (E_1(t) + E_2(t))(E_1(t) + E_2(t))^* \rangle. \quad (21)$$

Então,

$$I(t) = I_1(t) + I_2(t) + 2\text{Re}\{\langle E_1^*(t)E_2(t) \rangle\}, \quad (22)$$

onde $I_n(t) = \langle E_n(t)E_n^*(t) \rangle$ com o índice n podendo ser 1 ou 2.

Pode ser visto que a intensidade total no detector é composta por um termo referente ao primeiro feixe ($I_1(t)$), um referente ao segundo feixe ($I_2(t)$) e um terceiro de interferência $\langle E_1^*(t)E_2(t) \rangle$. Usando a Equação (18) no termo de interferência, obtemos a definição da função de auto coerência $\Gamma(\tau)$ dada por

$$\Gamma(\tau) = \langle E_1^*(t)E_1(t + \tau) \rangle \quad (23)$$

$$\Gamma(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} E_1^*(t) E_1(t + \tau) dt. \quad (24)$$

Esta é a função de autocorrelação da onda de luz representada pelo campo complexo $E_1(t)$. As funções de correlação especificam o grau de correlação em função de uma distância espacial ou temporal. Para a intensidade, temos então

$$I(\tau) = I_1(t) + I_2(t) + 2\text{Re}\{\Gamma(\tau)\}. \quad (25)$$

Agora, para dois feixes provenientes de fontes distintas, a coerência temporal é definida pela função de correlação cruzada

$$\Gamma_{12}(\tau) = \langle E_1^*(t) E_2(t + \tau) \rangle, \quad (26)$$

obtidas num local fixo no espaço. Esta função é uma quantidade complexa e pode ser reescrita como

$$\Gamma_{12}(\tau) = |\Gamma_{12}(\tau)| e^{i\varphi(\tau)}. \quad (27)$$

A equação (26) é chamada de coerência mútua das vibrações da luz em pontos $P1$ e $P2$. As vibrações em $P2$ são consideradas no intervalo de tempo τ depois que $P1$. Chamaremos $\Gamma_{12}(\tau)$ de função de coerência mútua de campos e, quando os pontos $P1$ e $P2$ são coincidentes, então

$$\Gamma_{11}(\tau) = \langle E_1^*(t) E_1(t + \tau) \rangle \quad (28)$$

é a auto coerência das vibrações da luz no ponto $P1$, que se reduz à intensidade ordinária quando $\tau = 0$:

$$\Gamma_{11}(0) = I_1, \quad \Gamma_{22}(0) = I_2.$$

O grau complexo de auto coerência é um valor normalizado, definido como

$$\gamma_{12}(\tau) = \frac{\Gamma_{12}(\tau)}{\sqrt{\Gamma_{11}(0)\Gamma_{22}(0)}} \quad (29)$$

que satisfaz

$$|\gamma_{12}(\tau)| \leq 1. \quad (30)$$

Finalmente podemos escrever a equação da intensidade como

$$I(\tau) = I_1(t) + I_2(t) + 2\sqrt{I_1(t)I_2(t)}\text{Re}\{\gamma_{12}(\tau)\}. \quad (31)$$

2.3.1.2 Visibilidade de Interferência

A nitidez das franjas de interferência é medida pela visibilidade, conceito introduzido por Michelson e definida como

$$V = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}. \quad (32)$$

As funções $\Gamma_{12}(\tau)$ e $\gamma_{12}(\tau)$ não são obtidas diretamente. No entanto, é fácil encontrar a visibilidade das franjas de interferência. A intensidade máxima e mínima das franjas de interferência não ocorrem no mesmo deslocamento de tempo da onda. Se τ_1 e τ_2 forem, respectivamente, o tempo para o qual o máximo e o mínimo de intensidade aparecem, então a visibilidade é definida como

$$V(\tau) = \frac{I_{max}(\tau_1) - I_{min}(\tau_2)}{I_{max}(\tau_1) + I_{min}(\tau_2)}. \quad (33)$$

Como vimos, as intensidades podem ser expressas em termos de $\Gamma_{12}(\tau)$. A função de auto coerência possui valor absoluto constante, mas os máximos e mínimos dependem do deslocamento no tempo, tal que

$$Re\{\Gamma_{12}(\tau_1)\} = |\Gamma_{12}(\tau)| \quad (34)$$

e

$$Re\{\Gamma_{12}(\tau_2)\} = -|\Gamma_{12}(\tau)|. \quad (35)$$

Portanto, as intensidades máximas e mínimas se tornam

$$I_{max(\tau_1)} = I_1(t) + I_2(t) + 2|\Gamma_{12}(\tau)| \quad (36)$$

$$I_{min(\tau_2)} = I_1(t) + I_2(t) - 2|\Gamma_{12}(\tau)| \quad (37)$$

e no caso de as intensidades $I_1(t)$ e $I_2(t)$ serem iguais, a visibilidade se torna

$$V(\tau) = |\gamma_{12}(\tau)|. \quad (38)$$

Então, para um feixe monomodo, completamente coerente a visibilidade é igual a 1. Para um feixe totalmente incoerente a visibilidade é zero e para os casos em que os feixes são parcialmente coerentes a visibilidade assume um valor entre zero e um.

2.3.2 Coerência Espacial

A coerência espacial consiste em medir a coerência entre dois valores do campo da onda em diferentes pontos ao mesmo tempo. Para isto é usado o famoso experimento de fenda dupla mostrado na Figura 6. Para muitas fontes de luz, a propriedade de interferência da luz emitida se perde quando são estendidas espacialmente, como uma fonte térmica.

Vamos considerar que uma fonte quase monocromática incoerente é usada para iluminar as fendas P1 e P2 no experimento de interferência de Young. Se as fendas estiverem próximas ao eixo de simetria, franjas de interferência serão observadas em torno do ponto P no anteparo. A capacidade de dois feixes de luz para formar franjas é devido à correlação presente entre eles em condições onde uma separação espacial $\Delta x = P1P2$ foi introduzida. Verifica-se que se a distância entre a fonte e o plano com

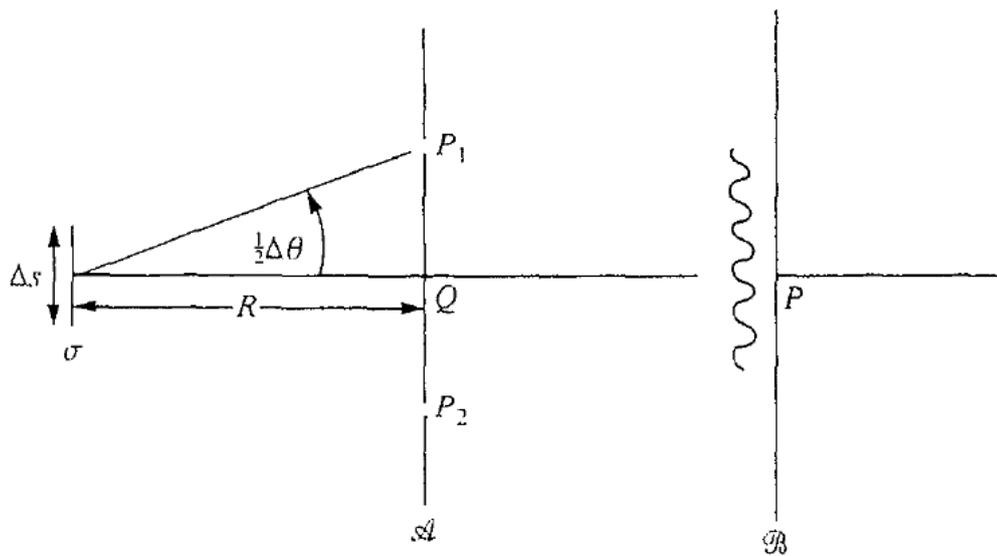


Figura 6 – Interferômetro de fenda dupla de Young - usado para medir coerência espacial.

Fonte: Mandel and Wolf - 'Optical Coherence and Quantum Optics'

as fendas for grande o suficiente, as franjas de interferência estarão em torno de P somente se

$$\Delta\theta\Delta s \approx \lambda \quad (39)$$

onde $\Delta\theta$ é o ângulo formado entre a fonte e a distância das fendas e λ é o comprimento de onda da luz.

Considerando que a fonte está a uma distância R do plano que contém as fendas, então para visualizar franjas de interferência nas proximidades de P, é necessário que as aberturas estejam em torno do ponto axial Q no plano A na qual a área ΔA é dada pela relação

$$\Delta A \sim (R\Delta\theta)^2 \sim \frac{R^2\lambda^2}{S}, \quad (40)$$

onde S é a área da fonte. Esta região é chamada de área de coerência e a raiz quadrada desta área é o comprimento transversal de coerência.

O campo no anteparo num ponto Q, que percorre caminhos de distância s_1 e s_2 , conforme a figura 7, num tempo t, pode ser escrito como uma superposição linear dos campos complexos $E(r_i, t_i)$ vindo das i-ésimas fendas.

$$E(r, t) = K_1 E(r_1, t'_1) + K_2 E(r_2, t'_2), \quad (41)$$

onde r_1 e r_2 são as posições das fendas, $t'_1 = t - \frac{s_1}{c}$ e $t'_2 = t - \frac{s_2}{c}$ são os tempos retardados, que é o tempo necessário para a luz percorrer uma distância s_1 e s_2 , respectivamente.

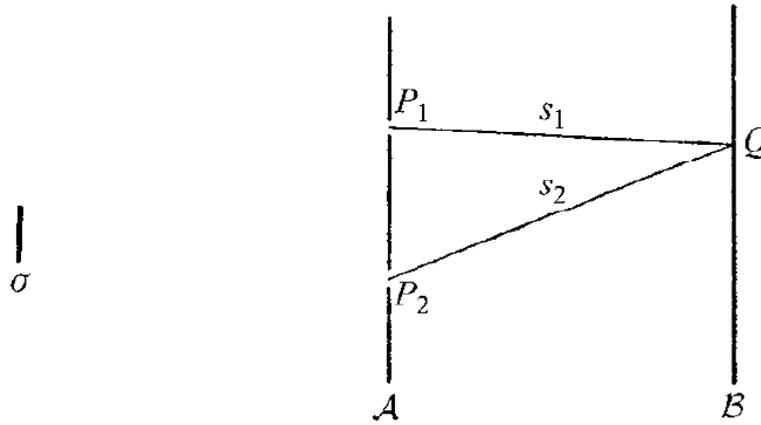


Figura 7 – Setup do experimento de fenda dupla com interferência num ponto Q do anteparo com os feixes percorrendo distâncias s_1 e s_2 provenientes das fendas P_1 e P_2 , respectivamente.

Fonte: Born and Wolf - 'Principles of Optics'

As quantidades K_1 e K_2 são fatores que são inversamente proporcionais às distâncias s_1 e s_2 , também dependem do tamanho da abertura das fendas e do ângulo de incidência e difração em P_1 e P_2 .

Assim, a intensidade no ponto Q, definida genericamente como

$$I(r,t) = E^*(r,t)E(r,t),$$

é igual a

$$I(r,t) = |K_1|^2 I(r_1,t'_1) + |K_2|^2 I(r_2,t'_2) + 2\text{Re}\{K_1^* K_2 E^*(r_1,t'_1) E(r_2,t'_2)\}. \quad (42)$$

Assim como feito para a coerência temporal, usaremos a abordagem estatística para descrever a intensidade através da intensidade média, obtendo então

$$\langle I(r,t) \rangle = |K_1|^2 \langle I(r_1,t'_1) \rangle + |K_2|^2 \langle I(r_2,t'_2) \rangle + 2\text{Re}\{K_1^* K_2 \Gamma_{12}(r_1, r_2, t'_1, t'_2)\}, \quad (43)$$

onde $\Gamma_{12}(r_1, r_2, t'_1, t'_2)$ é a função de correlação cruzada do campo complexo $E(r_1, t)$ e $E(r_2, t)$. Neste caso, ela representa a correlação que existe entre as vibrações da luz nas fendas P_1 e P_2 nos tempos t_1 e t_2 , respectivamente.

O ensemble da função de correlação cruzada $\Gamma_{12}(r_1, r_2, t'_1, t'_2)$ é substituído pelo correspondente temporal da função de correlação cruzada

$$\Gamma_{12}(r_1, r_2, \tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} E^*(r_1, t) E(r_2, t + \tau) dt, \quad (44)$$

onde $\tau = t'_2 - t'_1$.

Agora podemos escrever a função de coerência mútua normalizada de segunda ordem, como

$$\gamma_{12}(r_1, r_2, \tau) = \frac{\Gamma_{12}(r_1, r_2, \tau)}{\sqrt{\Gamma_{11}(r_1, r_1, 0) \Gamma_{22}(r_2, r_2, 0)}}. \quad (45)$$

Como a função de correlação cruzada $\Gamma_{12}(r_1, r_2, \tau)$ é uma função complexa, então o grau de coerência complexo pode ser escrito como

$$\gamma_{12}(r_1, r_2, \tau) = |\gamma_{12}(r_1, r_2, \tau)| e^{i\phi(r_1, r_2, \tau)} \quad (46)$$

e de maneira análoga ao caso feito para a correlação temporal, podemos obter a visibilidade em função do grau de coerência mútuo,

$$V(r) = \frac{2\sqrt{|K_1|^2 \langle I(r_1, t) \rangle |K_2|^2 \langle I(r_2, t) \rangle}}{|K_1|^2 \langle I(r_1, t) \rangle + |K_2|^2 \langle I(r_2, t) \rangle} |\gamma_{12}(r_1, r_2, \tau)| \quad (47)$$

e quando as ondas que se interferem possuem a mesma intensidade, então a visibilidade se reduz a

$$V(r) = |\gamma_{12}(r_1, r_2, \tau)|. \quad (48)$$

2.3.2.1 Função de densidade espectral cruzada para fontes

Vamos considerar uma fonte primária tal que a. Seja $Q(\mathbf{r}, t)$ a variável da flutuação de uma fonte primária em um ponto \mathbf{r} no tempo t , então, o campo gerado pela fonte é representado pela variável de flutuações do campo $V(\mathbf{r}, t)$. Assumindo que as variáveis de flutuações da fonte e do campo são escalares, então as variáveis são relacionadas por uma equação inhomogênea

$$\nabla^2 V(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = -4\pi Q(\mathbf{r}, t). \quad (49)$$

Para analisar os feixes, é mais apropriado trabalhar no espaço das frequências, portanto denotaremos as flutuações por

$$\rho(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int Q(\mathbf{r}, t) \exp(i\omega t) dt \quad (50)$$

e

$$\varepsilon(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int V(\mathbf{r}, t) \exp(i\omega t) dt. \quad (51)$$

Por conta do processo randômico estacionário ser decorrelacionado, os componentes de diferentes frequências possuem a relação

$$\langle \rho(\mathbf{r}_1, \omega) \rho(\mathbf{r}_2^*, \omega') \rangle = W_Q(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) \delta(\omega - \omega') \quad (52)$$

$$\langle \varepsilon(\mathbf{r}_1, \omega) \varepsilon(\mathbf{r}_2^*, \omega') \rangle = W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) \delta(\omega - \omega') \quad (53)$$

onde $\delta(\omega - \omega')$ é a função Delta de Dirac. As funções W e W_Q são conhecidas como funções de densidade espectral cruzada (CSD do inglês *Cross-Spectral Density*) do campo flutuando e da fonte flutuando, respectivamente.

A função de densidade espectral cruzada é a transformada de Fourier da função de coerência mútua

$$W_Q(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int \Gamma_Q(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) \exp(i\omega\tau) d\tau \quad (54)$$

e

$$W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int \Gamma_E(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) \exp(i\omega\tau) d\tau. \quad (55)$$

Segundo [109], a densidade espectral cruzada do campo pode ser expressa em termos da CSD da fonte pela fórmula

$$W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) = \int \int W_Q(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2, \omega) \frac{\exp[ik(R_2 - R_1)]}{(R_1 R_2)} d^3 r'_1 d^3 r'_2, \quad (56)$$

onde

$$R_j = |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}'_j|. \quad (57)$$

Assim, é possível relacionar as funções de densidade espectrais cruzadas do feixe no campo distante com a da fonte.

Além da relação acima mencionada, outra grandeza importante para se tomar conhecimento é o grau de coerência espacial da fonte, $\mu_Q(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega)$ o qual é representado por:

$$\mu_Q(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) = \frac{W_Q(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega)}{\sqrt{I_Q(\mathbf{r}_1, \omega)} \sqrt{I_Q(\mathbf{r}_2, \omega)}}. \quad (58)$$

2.3.3 Gaussian Schell-model

No modelo proposto primeiramente por Schell [67, 68] é assumido que o grau de coerência espacial depende de \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 somente pela diferença, isto é

$$\mu_Q(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) = g_Q(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \omega). \quad (59)$$

Fontes deste tipo caracterizam matematicamente muito bem muitas das fontes encontradas na natureza. Esta classe de fontes são conhecidas como fontes do modelo de Schell, ou *Schell-model source*.

Nós vamos nos restringir ao caso do modelo de Schell gaussiano GSM que consiste em considerar que tanto a intensidade $I_Q(\mathbf{r}, \omega)$ quanto o grau de coerência $g_Q(\mathbf{r}', \omega)$ são gaussianos

$$I_Q(\mathbf{r}, \omega) = A \exp\left(-\frac{\mathbf{r}^2}{2w^2}\right), \quad (60)$$

$$g_Q(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) = \exp\left(-\frac{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)^2}{2\delta^2}\right), \quad (61)$$

onde A , w , δ são constantes positivas. Aplicando as Equações (60) e (61) em (58), então a função de densidade espectral cruzada é escrita como

$$W_Q(r_1, r_2, v) = A \exp \left[-\frac{r_1^2 + r_2^2}{4w^2} \right] \exp \left[-\frac{(r_1 - r_2)^2}{2\delta^2} \right]. \quad (62)$$

2.4 FEIXES GAUSSIANOS PARCIALMENTE COERENTES COM TWIST

Dada a descrição sobre o feixe GSM, então introduziremos os conceitos envolvendo a fase de torção (*twist phase*) seguindo a demonstração de Simon e Mukunda (1993) [69], obtendo assim uma generalização dos feixes parcialmente coerentes, conhecidos como *Twisted Gaussian Schell-model*.

2.4.1 Twisted Gaussian Schell-model

Inicialmente o interesse é descrever a densidade espectral cruzada gaussiana mais geral possível no plano transversal, tal que seja invariante sob rotações arbitrárias no eixo z .

Então, considerando um ponto $z = cte$, as combinações que são invariantes envolvendo $\boldsymbol{\rho}$ e $\boldsymbol{\rho}'$ tal que $\boldsymbol{\rho} = (x, y)$, são as expressões quadráticas. Portanto, $x^2 + y^2$, $x'^2 + y'^2$, $xx' + yy'$ e $xy' - yx'$.

O campo mais geral é então escrito como

$$E(x, y, x', y') = \alpha(x^2 + y^2) + \beta(x'^2 + y'^2) + \gamma(xx' + yy') + \delta(xy' - yx') \quad (63)$$

e portanto pode-se encontrar a função de densidade espectral cruzada como

$$\begin{aligned} W_z(x_1, y_1, x_2, y_2, v) = & \frac{I(v)}{2\pi w(v)^2} \text{Exp} \left[-\frac{x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2}{4w(v)^2} \right] \\ & \times \text{Exp} \left[-\frac{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}{2\delta(v)^2} \right] \\ & \times \text{Exp} \left[-i \frac{k}{2R(v)} (x_1^2 - x_2^2 + y_1^2 - y_2^2) \right] \\ & \times \text{Exp} [-ik\mu(v)(x_1 y_2 - x_2 y_1)] \end{aligned} \quad (64)$$

onde $w(v)$ é a largura efetiva do feixe, $\delta(v)$ é o comprimento de coerência, $R(v)$ é o raio de curvatura da frente de onda e $\mu(v)$ é a fase de torção.

3 INTERAÇÃO PARAMÉTRICA NA CONVERSÃO PARAMÉTRICA DESCENDENTE

No Capítulo 2, exploramos a representação matemática do campo elétrico de feixes coerentes da família de Laguerre-Gauss e a descrição equivalente de feixes parcialmente coerentes por meio da densidade espectral cruzada. Dando continuidade a essa base teórica, este capítulo carrega o coração desta tese, trazendo o objetivo primário de descrever teoricamente o processo de interação paramétrica dos feixes parcialmente coerentes no regime descendente estimulado. Essa descrição teórica fornecerá a base para compararmos os resultados experimentais envolvendo o feixe TGSM no regime apropriado.

Além disso, considerando a relevância de trabalhos adjacentes que abordam tanto feixes coerentes quanto regimes de estimulação intermediária, torna-se essencial explorar a interação paramétrica de feixes coerentes no regime espontâneo e discutir em detalhes a conversão paramétrica espontânea. Assim, este capítulo não somente fornece as ferramentas teóricas essenciais para uma análise abrangente, mas também estabelece um alicerce para a discussão de diversos trabalhos publicados durante o doutorado, integrando-os significativamente ao escopo mais amplo da pesquisa.

3.1 HISTÓRIA DA ÓPTICA NÃO-LINEAR

A óptica não linear diz respeito a processos que ocorrem devido à modificação das propriedades ópticas do material pela presença de luz. Basicamente é um meio no qual a densidade de polarização \mathbf{P} responde ao campo elétrico da luz \mathbf{E} de maneira não linear [110]. Teve seu início em 1931, quando a magnífica Maria Göppert-Mayer previu teoricamente a absorção de dois fótons por átomos [111]. No entanto, como é necessária luz de elevada intensidade para modificar as propriedades ópticas do material e verificar o efeito de não linearidade, o efeito de absorção de dois fótons foi demonstrado experimentalmente somente em 1961 [112], logo após a criação do laser em 1960 [17]. Também em 1961, foi possível “mostrar” os primeiros sinais da geração de segundo harmônico [21].

Curiosamente, o resultado que demonstra a geração de segundo harmônico, mostrado na Figura 8, foi confundido com um borrão indesejado pelo editor da revista e apagado do artigo para publicação [113].

3.2 TIPOS DE PROCESSOS NÃO LINEARES

Os processos não lineares são divididos em 2 classes, os processos paramétricos e os processos não paramétricos. Um processo paramétrico consiste em uma interação onde o estado quântico do material não-linear não é alterado pela interação com o campo óptico. Isso faz o processo ser instantâneo, preservando a conserva-

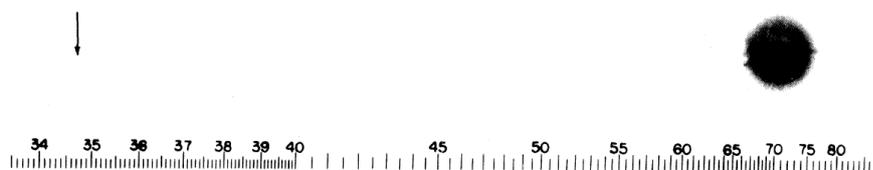


FIG. 1. A direct reproduction of the first plate in which there was an indication of second harmonic. The wavelength scale is in units of 100 Å. The arrow at 3472 Å indicates the small but dense image produced by the second harmonic. The image of the primary beam at 6943 Å is very large due to halation.

Figura 8 – Primeiro resultado obtido de geração de segundo harmônico em 1961. A imagem apresenta uma escala de comprimentos de onda e deveriam conter sinais de um feixe de 694 nm e o respectivo segundo harmônico de 347 nm confundido com um borrão e apagado da figura.

Fonte: Physical Review Letters, 7, 4, 1961

ção de energia e momento do campo óptico. Em consequência, a polarização e o casamento de fase (*phase-matching*) são fundamentais para o processo ocorrer.

Abaixo temos alguns dos processos não lineares mais utilizados e conhecidos:

- Geração de Segundo Harmônico (SHG);
- Geração de Soma de Frequência (SFG);
- Geração de Diferença de Frequência (DFG);
- Oscilador Paramétrico Óptico (OPO);
- Geração de Terceiro Harmônico (THG);
- Absorção Saturável – Não Paramétrico;
- Absorção de Dois Fótons – Não Paramétrico.

Dentre os processos citados acima, o que nos mais interessa é a geração de diferença de frequência (DFG) sendo o processo que descreve a conversão paramétrica descendente.

3.3 CONVERSÃO PARAMÉTRICA DESCENDENTE ESTIMULADA

Para ocorrer o processo não linear, primeiramente precisamos considerar um material dielétrico, assim, escrevendo a equação de onda do campo eletromagnético em função do campo de deslocamento elétrico \mathbf{D} , da intensidade do campo magnético \mathbf{H} e fazendo algumas considerações, encontramos a equação de onda. Portanto, considerando um meio não magnético sem cargas externas e correntes, teremos as relações

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

, para o deslocamento elétrico, onde \mathbf{P} é o vetor de polarização do meio, e

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$$

, para o campo magnético.

Então, a equação de onda fica:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2}, \quad (65)$$

onde a polarização \mathbf{P} podendo ser escrita como $\mathbf{P} = \mathbf{P}^L + \mathbf{P}^{NL}$, sendo \mathbf{P}^L o termo de polarização linear e \mathbf{P}^{NL} o termo não linear.

Para reescrever a equação de onda (65) em função do termo de polarização não linear, podemos decompor o campo de deslocamento elétrico em um termo linear e um não linear

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^L + \mathbf{P}^{NL}. \quad (66)$$

tal que

$$\mathbf{D}^L = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}^L. \quad (67)$$

Então, pode-se expressar a relação entre \mathbf{D}^L e \mathbf{E} através dum termo real do tensor dielétrico com frequência independente ϵ^L ,

$$\mathbf{D}^L = \epsilon_0 \epsilon^L \mathbf{E}. \quad (68)$$

No entanto, para um meio isotrópico o tensor dielétrico se torna um escalar ϵ^L . Com isto, a equação de onda (65) pode ser escrita como:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{\epsilon^L}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{P}^{NL}}{\partial t^2}. \quad (69)$$

Nota-se que a Equação (69) apresenta o termo não-linear da polarização atuando como uma fonte. As características desta fonte serão regidas pelas propriedades dos cristais, tais como, a susceptibilidade óptica e o emparelhamento de fase. Considerando as propriedades dos cristais do laboratório de óptica e informação quântica da Universidade Federal de Santa Catarina, foi utilizado um cristal de beta borato de bário (BBO) tipo I [114], cuja susceptibilidade é de segunda ordem. Isso significa que a rede cristalina oferece um eixo extraordinário onde acoplará a componente de polarização paralela ao eixo do modo de entrada com 2 modos de saída polarizados no eixo perpendicular (ordinário) e vice-versa.

Alinhando o eixo extraordinário do cristal com o eixo vertical da mesa óptica, então o acoplamento pode ser representado pela Figura 9. A Figura 9a representa o processo de conversão paramétrica descendente, onde um feixe de maior energia é convertido em 2 feixes de energias menores, enquanto a Figura 9b descreve a geração de soma de frequência, ou conversão paramétrica ascendente, onde 2 feixes de menores energias são convertidos em um feixe de maior energia.

O cristal é produzido de maneira a oferecer propriedades birrefringentes que favorecem a geração de um processo paramétrico, onde energia e momento devem

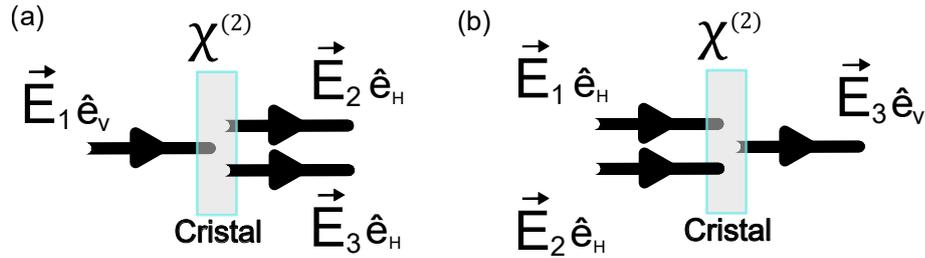


Figura 9 – Efeito não-linear de cristal de segunda ordem ($\chi^{(2)}$) tipo I acoplando (a) um campo E_1 de entrada de polarização vertical com 2 campos de saída E_2 e E_3 de polarização horizontal; (b) 2 campos de entrada E_1 e E_2 de polarização horizontal com um campo E_3 de saída de polarização vertical.

ser conservados. Esta condição é chamada de casamento de fase (*phase-matching*, em inglês) [gurzadian1999] e expressa por:

$$\hbar\omega_1 = \hbar\omega_2 + \hbar\omega_3 \quad (70)$$

e

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3. \quad (71)$$

As condições de *phase-matching* da conversão paramétrica descendente estão representados na Figura 10. A Figura 10a mostra a conversão paramétrica descendente com um feixe de maior energia, chamado de feixe de bombeio (*pump*) incidindo no cristal e gerando 2 outros feixes chamados de sinal (*signal*) e complementar (*idler*), representados pelos índices 'p', 's' e 'i', respectivamente. A Figura 10b é uma representação da Equação (71), onde $k_1 = k_p$, $k_2 = k_s$ e $k_3 = k_i$. A Figura 10c é uma representação da Equação (70), onde a relação de índices é análoga ao caso dos momentos.

Como a interação envolve principalmente o termo não linear de segunda ordem, o processo é dito "mistura de três ondas", por conta da interação de 2 campos gerar um terceiro. Sendo assim, pode-se analisar matematicamente o termo não linear de maneira simples considerando que a interação ocorre para dois campos ópticos com duas componentes de frequência ω_1 e ω_2 , então, o campo é dado por:

$$\tilde{E}(t) = E_1 e^{-i\omega_1 t} + E_2 e^{-i\omega_2 t} + c.c. \quad (72)$$

e a interação não-linear de segunda ordem,

$$\tilde{P}^{(NL)}(t) = \epsilon_0 \chi^{(2)} \tilde{E}(t)^2, \quad (73)$$

onde $\chi^{(2)}$ é um tensor chamado de susceptibilidade do meio não linear de segunda ordem. Mas para simplificação, foi fixado a direção de propagação e polarização, tornando possível expressar a polarização não linear em termos de um χ efetivo escalar que depende das propriedades do cristal.

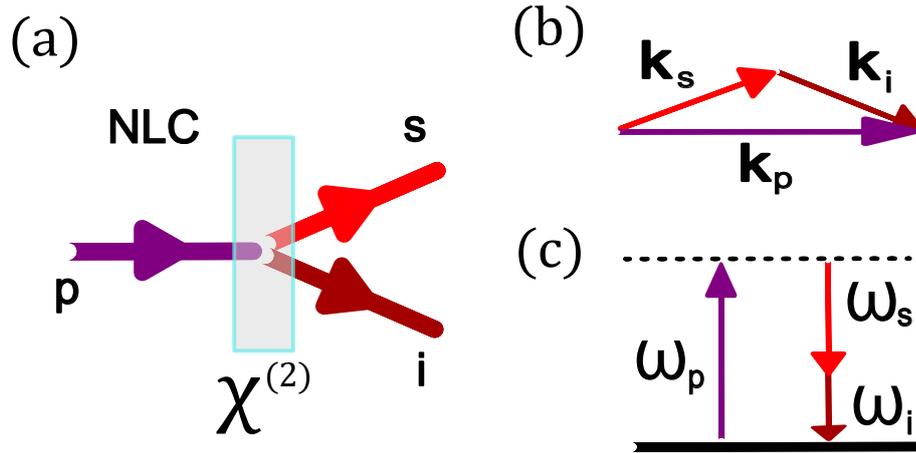


Figura 10 – Representação das condições de phase-matching no processo de geração de diferença de frequência. Os índices "p", "s" e "i" representam *pump*, *signal* e *idler*, respectivamente. (a) conversão paramétrica descendente com um cristal não-linear (NLC) de segunda ordem ($\chi^{(2)}$) convertendo o fóton do feixe *pump* em 2 fótons *signal* e *idler*; O processo deve conservar (b) momento e (c) energia

Expandindo os termos, da Equação (72) em (73), a polarização não-linear pode ser escrita na forma:

$$\tilde{P}^{(NL)}(t) = \sum_n P(\omega_n) e^{-i\omega_n t}, \quad (74)$$

onde cada uma das componentes é referente a um processo não linear. No caso da componente $P(2\omega_1)$ e $P(2\omega_2)$, temos a geração de segundo harmônico das respectivas frequências ω_1 e ω_2 ; a componente $P(\omega_1 + \omega_2)$ é referente à geração de soma de frequências; a componente $P(\omega_1 - \omega_2)$ é referente a conversão paramétrica descendente, enquanto há um termo de intensidades $E_1 E_1^* + E_2 E_2^*$ referente à retificação óptica.

Assim, a conversão paramétrica descendente é determinada pelo termo:

$$P(\omega_1 - \omega_2) = 2\varepsilon_0 \chi^{(2)} E_1(\omega_1) E_2^*(\omega_2). \quad (75)$$

Portanto, em termos dos feixes *pump*, *signal* e *idler*, podemos reescrever a Equação (75) como:

$$P_i = 2\varepsilon_0 \chi^{(2)} E_p E_s^*. \quad (76)$$

Os índices i, p e s representam os campos *idler*, *pump* e *signal*, P_i é a componente de polarização para a frequência ω_i , E_p e E_s os campos elétricos de frequência ω_p e ω_s , respectivamente.

Agora, conhecendo o termo de polarização não linear, podemos aplicar a Equação (76) em (69) e considerar o campo elétrico em termos do feixe de interesse E_i ,

$$E_j = A_j i(k_j z - \omega_j t) + c.c. \quad (77)$$

tal que a amplitude da onda A_j é constante, o feixe está se propagando ao longo da direção z e o termo 'c.c.' é o termo complexo conjugado da solução imposta.

Como os campos dependem apenas na coordenada longitudinal z , é possível substituir o Laplaciano ∇^2 por $\frac{d^2}{dz^2}$, então a equação de onda se torna:

$$\left[\frac{d^2 A_j}{dz^2} + 2ik_j \frac{dA_j}{dz} - k_j^2 A_j + \frac{\varepsilon^{(L)}(\omega_j)^2 A_j}{c^2} \right] e^{i(k_j z - \omega_j t)} + c.c. = -\frac{\omega_j^2}{\varepsilon_0 c^2} P_j + c.c. \quad (78)$$

Como $k_j = \frac{n_j \omega_j}{c}$ e $n_j^2 = \varepsilon^{(L)}$, então o terceiro e o quarto termo se anulam, ficando:

$$\left[\frac{d^2 A_j}{dz^2} + 2ik_j \frac{dA_j}{dz} \right] e^{i(k_j z - \omega_j t)} + c.c. = -\frac{\omega_j^2}{\varepsilon_0 c^2} P_j + c.c. \quad (79)$$

Para os casos em que a extensão transversal do feixe é muito maior que o comprimento de onda, então pode-se assumir a aproximação onde a amplitude do campo varia lentamente:

$$\left| \frac{d^2 A_j}{dz^2} \right| \ll \left| k_j \frac{dA_j}{dz} \right|. \quad (80)$$

Assumindo esta aproximação e substituindo a Equação (76) em (79), a equação fica:

$$\frac{dA_j}{dz} = \frac{i\chi^{(2)}\omega_j}{n_j c} A_p A_s^*. \quad (81)$$

Da mesma maneira, é possível obter a relação com amplitude acoplada para os campos *signal* e *pump*, que ficam:

$$\frac{dA_s}{dz} = \frac{i\chi^{(2)}\omega_s}{n_s c} A_p A_j^* \quad (82)$$

e

$$\frac{dA_p}{dz} = \frac{i\chi^{(2)}\omega_p}{n_p c} A_j A_s. \quad (83)$$

Agora, seguindo as relações de Manley-Rowe [115, 116], a solução para as amplitudes dos campos é:

$$A_j(z) = i \sqrt{\frac{\omega_j n_s}{\omega_s n_j}} \frac{A_p}{|A_p|} A_s^*(0) \sinh(\alpha z), \quad (84)$$

$$A_s(z) = A_s(0) \cosh(\alpha z), \quad (85)$$

$$\alpha = \frac{\chi^{(2)} |A_p|}{c} \sqrt{\frac{\omega_j n_s}{\omega_s n_j}}. \quad (86)$$

Destas soluções do processo paramétrico, podemos notar que o campo do feixe *idler* dependerá diretamente do produto entre o feixe *pump* e o conjugado do *signal*. Então, quando o *pump* for uma onda plana, ou um perfil gaussiano, o *idler* terá a mesma decomposição modal do feixe *signal* conjugado. Com base nisto, o processo se torna ainda mais interessante para diversas aplicações [117–122], sendo explorado como uma importante ferramenta neste doutorado.

Além da conjugação de fase dos feixes, é essencial ter um campo *signal* inicial para o efeito ocorrer. Caso $A_s(0) = 0$, então, a amplitude do campo $A_s(z) = 0$ e $A_i(z) = 0$. Ou seja, não é possível descrever o processo de conversão paramétrica descendente espontânea com a óptica clássica. Somente em regime estimulado é possível encontrar uma solução. Assim, o processo não linear consiste em um feixe *pump* incidindo no cristal BBO juntamente com um segundo feixe atuando como estimulador (também conhecido como 'semente' ou 'seed'), cuja função é de estimular a conversão não-linear do campo *signal* e *idler*, conforme representado na Figura 11.

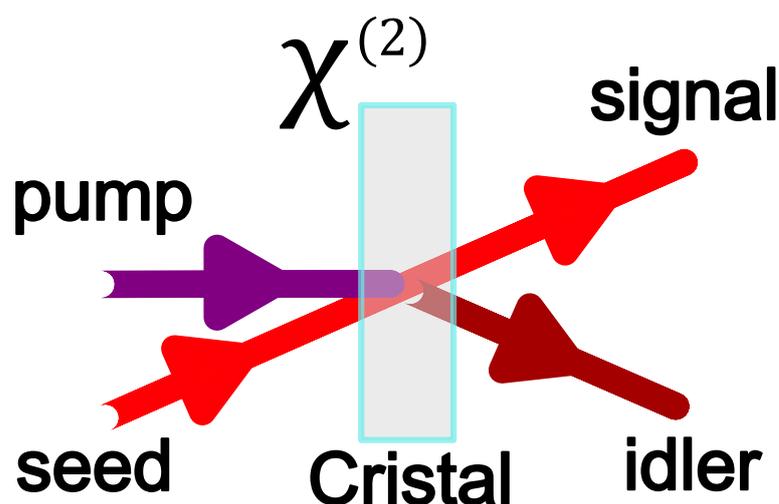


Figura 11 – Conversão paramétrica descendente estimulada.

Para simplificar, considerando que o ângulo de incidência entre os feixes *pump* e *seed* são pequenos, é possível escrever o perfil do *idler* na geração ($z=0$) pela conversão paramétrica descendente estimulada (StimPDC, de *stimulated parametric down-conversion*) como

$$A_i(\mathbf{r},0) = igA_p(\mathbf{r},0)A_s^*(\mathbf{r},0), \quad (87)$$

onde g é uma constante de acoplamento real e positiva. Esta equação será de grande valia para analisar as interações entre os modos coerentes e parcialmente coerentes, descritos nas seções futuras 3.5 e 3.6.

3.4 CONVERSÃO PARAMÉTRICA DESCENDENTE ESPONTÂNEA

Na seção anterior foram apresentadas as correlações entre os campos ópticos da conversão paramétrica descendente em regime estimulado. Em grande parte da

tese, entender a interação estimulada é suficiente para explorar os diferentes resultados obtidos com feixes coerentes e parcialmente coerentes. No entanto, é muito importante tomar conhecimento das correlações em regime quântico e fazer um comparativo com o regime clássico. Tendo conhecimento das semelhanças e diferenças entre o mundo clássico e quântico, numa seção futura, serão apresentados os resultados da pesquisa envolvendo coerência parcial e comprimento de coerência no processo estimulado de conversão paramétrica descendente, tarefa que foi realizada em 3 regimes, espontâneo, estimulado e estimulado fracamente (com contribuição significativa mútua, espontânea e estimulada).

Portanto, esta seção visa descrever sucintamente a conversão paramétrica descendente espontânea (SPDC, de *spontaneous parametric down-conversion*) a fim de caracterizar a função de onda do *idler* com correlações entre os modos transversais similares às apresentadas na Equação (87) e discutir as consequências de não haver um feixe inicial estimulando.

As condições de susceptibilidade elétrica, acoplamento modal do cristal, birrefringência e *phase-matching* serão as mesmas do caso estimulado. Então, as propriedades paramétricas se mantêm inalteradas para a conservação de energia,

$$\omega_p = \omega_s + \omega_i, \quad (88)$$

e para a conservação linear de momento

$$\mathbf{k}_p = \mathbf{k}_s + \mathbf{k}_i. \quad (89)$$

Para explorar a interação não linear da susceptibilidade elétrica em regime quântico, será quantizado o campo a partir do Hamiltoniano de um campo eletromagnético num meio dielétrico

$$H(t) = \frac{1}{2} \int_V d\mathbf{r} [\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)], \quad (90)$$

onde \mathbf{D} é o vetor de deslocamento elétrico, \mathbf{E} é o campo elétrico, \mathbf{B} é a indução magnética e \mathbf{H} é o campo magnético. Como a conversão paramétrica descendente é descrita pelo termo não linear de segunda ordem, o Hamiltoniano é separado

$$H(t) = H_0(t) + H_I(t), \quad (91)$$

onde H_0 contém as interações lineares e H_I é o Hamiltoniano de interação, dado por:

$$H_I(t) = \frac{1}{2} \int_V d\mathbf{r} \int_0^\infty dt' \int_0^\infty dt'' \chi_{ijk}^{(2)}(t', t'') E_i(\mathbf{r}, t) E_j(\mathbf{r}, t - t') E_k(\mathbf{r}, t - t''). \quad (92)$$

Após o processo de quantização, o operador Hamiltoniano de interação se torna:

$$\begin{aligned} \hat{H}_I(t) = & \frac{1}{2V^{3/2}} \sum_{\mathbf{k}_s} \sum_{\mathbf{k}_i} \sum_{\mathbf{k}_p} g_s^* g_i^* g_p \hat{a}_s^\dagger \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_p \text{Exp}[i(\omega_s + \omega_i - \omega_p)t] \times \\ & \times \chi_{i,j,k}^{(2)} \mathbf{e}_s^* \mathbf{e}_i^* \mathbf{e}_p \int_V \text{Exp}[-i(\mathbf{k}_s + \mathbf{k}_i - \mathbf{k}_p) \cdot \mathbf{r}] d\mathbf{r} + H.c. \end{aligned} \quad (93)$$

onde \mathcal{V} é o volume de quantização, g_j é um fator que surge no processo de quantização, ao selecionar as frequências assumindo um filtro de interferência, \hat{a}_j^\dagger e \hat{a}_j são os operadores de criação e aniquilação, respectivamente, \mathbf{e}_j é o vetor de polarização e H.c. é o Hamiltoniano conjugado.

Agora, para encontrar o estado quântico em um tempo t é aplicado o operador de evolução temporal no estado inicial $|\psi(0)\rangle$,

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t)|\psi(0)\rangle, \quad (94)$$

onde

$$\hat{U}(t) = \exp\left(\frac{1}{i\hbar} \int_0^t d\tau \hat{H}_I(\tau)\right). \quad (95)$$

Para obter o estado quântico a um tempo t de maneira simplificada, é necessário fazer algumas aproximações [123]: o cristal é transversalmente grande comparado ao tamanho do *pump*; considerando que o estado é medido em detectores distantes com pequenas aberturas, de modo a selecionar um único modo espacial e com filtros de frequência com largura de linha estreita, aproximação de cristal fino, além das condições de acoplamento entre os modos. Então, para um estado inicial de vácuo, o estado de dois fótons gerados pela SPDC pode ser escrito como [50]

$$|\Psi_{SPDC}\rangle = C_1|vac\rangle + C_2 \int d\mathbf{q}_s \int d\mathbf{q}_i \nu(\mathbf{q}_s + \mathbf{q}_i) \hat{a}_s^\dagger \hat{a}_i^\dagger |vac\rangle, \quad (96)$$

onde \mathbf{q} são as coordenadas transversais do vetor de onda \mathbf{k} , $\nu(\mathbf{q}_s + \mathbf{q}_i)$ é o espectro angular do *pump*.

Diferente do caso estimulado, onde o campo do *idler* é definido pelo perfil do *pump* e *seed*, no caso espontâneo, por não haver um modo de estímulo para o *seed*, o espectro angular do *pump* se espalha para a função de onda bi-fotônica. A Figura 12 representa a transferência do espectro angular do *pump* para as contagens registradas nos detectores em tempos simultâneos, também chamado de contagens de coincidências. Embora as distribuições de intensidades em cada um dos detectores permaneçam gaussianas, as coincidências recuperam o perfil espacial do *pump*.

Na Figura 12 o *pump* passa por uma fenda em formato da letra "C", sendo direcionado ao cristal. Entre a máscara e o cristal há uma lente fazendo imagem do plano da máscara num plano após o cristal. Então, um dos detectores é mantido fixo enquanto é feita uma varredura bidimensional no plano transversal, mapeando as contagens de coincidência. Assim, o formato da máscara "C", é recuperado na análise de coincidências.

A relação entre os planos de imagem do *pump* e das distâncias de detecção esta presente na taxa de coincidência, dada por:

$$C(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_i) = |C_2|^2 |\mathcal{W}(\mathbf{R}; z_0)|^2, \quad (97)$$

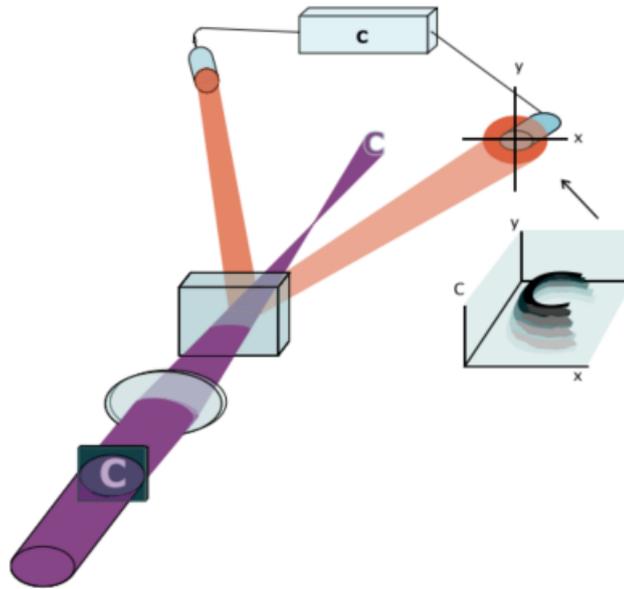


Figura 12 – Ilustração mostrando o espectro angular do feixe *pump* sendo transferido para as medidas de coincidências.

Figura retirada de [123]

onde $C(r_s, r_i)$ são as coincidências em função das coordenadas transversais r do *signal* e *idler*, $\mathcal{W}(\mathbf{R}; z_0)$ é o perfil espacial transverso do *pump* propagado para $z = z_0$, onde

$$\frac{1}{z_0} = \frac{\omega_s}{\omega_p} \frac{1}{z_s} + \frac{\omega_i}{\omega_p} \frac{1}{z_i} \quad (98)$$

e

$$\mathbf{R} = \frac{\omega_s z_0}{\omega_p z_s} \mathbf{r}_s + \frac{\omega_i z_0}{\omega_p z_i} \mathbf{r}_i, \quad (99)$$

onde z_s e z_i são as distâncias entre o cristal e o plano de detecção.

A Equação (87) relaciona diretamente as propriedades transversais do campo do *idler* com o *pump* e o conjugado do *seed*. Então, num caso mais simples, quando o *pump* assume a forma de uma onda plana, o feixe *idler* carrega o modo espacial equivalente ao conjugado do *seed*.

Outra característica dos processos de conversão paramétrica descendente é a preservação da relação de fase no processo,

$$\varphi_p = \varphi_s + \varphi_i. \quad (100)$$

Porém, diferente do que acontece no caso estimulado, no caso espontâneo a conservação de energia (Equação (70)), de momento linear (Equação (71)) e a relação de fase (Equação (100)) permitem diversas configurações de modos que satisfazem essas condições, proporcionando um contínuo de modos e tornando a fonte incoerente. No caso estimulado, as condições de geração do *idler* estão amarradas às condições do *pump* e *seed*, gerando modos coerentes.

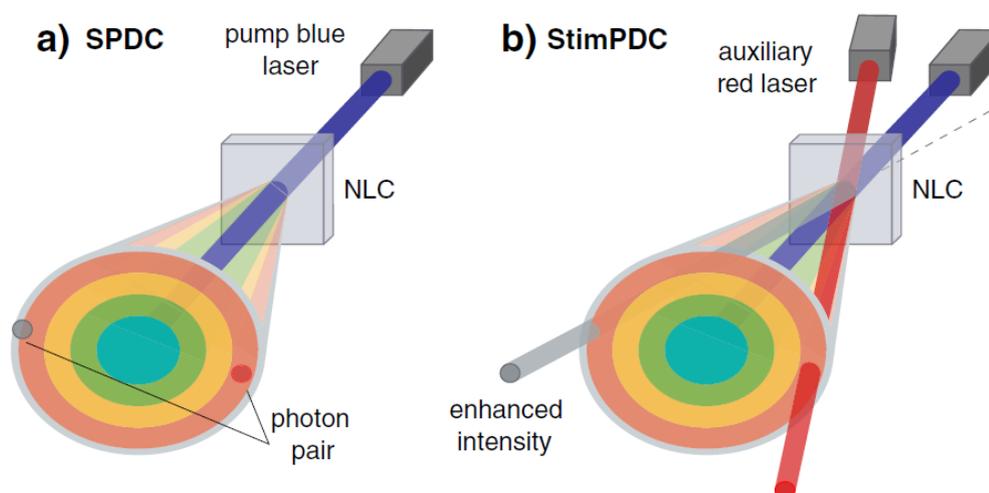


Figura 13 – Representação dos processos de conversão paramétrica descendente (a) espontâneo e (b) estimulado.

Figura retirada de [124]

Devido à liberdade que o caso espontâneo possui em satisfazer a conservação de energia, há um espectro grande em frequência de pares de fótons na saída do cristal, como representado na Figura 13.

No caso espontâneo (Figura 13a), um feixe azul *pump* bombeia um cristal gerando luz emitidas em formato de cone, em pares de fótons emaranhados. No caso estimulado (Figura 13b), um laser auxiliar vermelho é alinhado à direção de emissão da espontânea com os fótons que possuem o mesmo comprimento de onda e vetor de onda, induzindo a conversão nos mesmos modos do feixe auxiliar e, consecutivamente, aumentando indiretamente a geração do par "gêmeo". A Figura 13b representa um regime onde há contribuição da parte espontânea, os quais são todos os outros comprimentos de ondas que não estão estimulados e também a contribuição da parte estimulada.

3.5 INTERAÇÃO PARAMÉTRICA DE FEIXES GAUSSIANOS COERENTES

Devido às correlações que a conversão paramétrica descendente oferece, podemos explorá-la utilizando graus de liberdade de polarização ou o grau de liberdade modal do perfil transversal espacial, como uma grande ferramenta para canais de comunicação [35, 125–128], criptografia [129, 130], ou correção de frente de onda [51, 131].

Esta seção será utilizada para descrever o processo de interação entre feixes coerentes, especificamente os modos da família de Laguerre-Gauss, visando demonstrar a conservação de momento angular orbital no processo de conversão paramétrica descendente espontânea [30, 132, 133] ou estimulada [134].

Historicamente, a primeira evidência experimental da conservação de momento angular na SPDC foi de Mair *et. al.* [30], preparando um experimento que consiste em bombear o cristal com um *pump* com $\ell = -1, 0$ e 1 e analisar as correlações dos feixes *signal* e *idler*. Para medir o momento angular em experimentos de SPDC, dois efeitos devem ser considerados:

- O primeiro consiste no fato de feixes com fase helicoidal $\exp(i\ell\varphi)$ possuírem momento angular orbital [55]. Então, ao introduzir uma fase helicoidal num feixe gaussiano ($\ell = 0$), o mesmo passará a conter OAM. Assim como, se introduzir fases helicoidais em feixes com vórtices ópticos (*vortex beams*) a fase azimutal é cumulativa, ou seja, ao introduzir uma fase $\exp(-i2\varphi)$ num *vortex beam* com $\ell = 2$, o mesmo passa a ter frente de onda plana ($\ell = 0$).
- A segunda consideração é relacionada ao método de detecção. Um método muito utilizado para medir OAM em experimentos de SPDC é acoplar o fóton da SPDC em fibras monomodos, tal que somente o modo gaussiano é acoplado e, consecutivamente, medido.

Dito isso, o experimento introduziu diversas combinações de fases helicoidais nos feixes *signal* e *idler* e os mediam na fibra óptica monomodo, consecutivamente, analisaram-se as coincidências baseadas nas fases introduzidas em cada feixe. Então, quando o *pump* é uma onda sem OAM, as combinações de fases que se registra coincidências são $(\ell_s = 0, \ell_j = 0)$; $(\ell_s = 1, \ell_j = -1)$ e $(\ell_s = 2, \ell_j = -2)$ e essas mesmas combinações inversas. Ou seja, em primeira instância, quando não foi aplicado nenhuma fase helicoidal, em nenhum dos feixes *signal* e *idler* encontraram coincidências. No entanto, quando aplicaram uma fase helicoidal $\ell = 1$ no feixe *signal* e conseguiram acoplar o modo na fibra, isso é um indício de que o modo gerado pela SPDC possuía $\ell_s = -1$, tal que,

$$\ell_s + \text{fase aplicada} = 0.$$

Assim, encontraram coincidências significativas, somente quando aplicaram a fase com $\ell = -1$ no *idler*. Repetiram o mesmo processo nos casos em que o *pump* possuía fases helicoidais com $\ell_p = 1$ e $\ell_p = -1$, encontrando para todos os casos resultados consistentes com a equação:

$$\ell_p = \ell_s + \ell_j. \quad (101)$$

Os feixes de Laguerre-Gauss constituem uma classe dentre os *vortex beams* e a conservação de momento angular pode facilmente ser verificada no caso da StimPDC aplicando os *vortex beams* (Equação (102)) na equação da conversão estimulada (Equação (87)). Os feixes com vórtices ópticos podem ser escritos como:

$$E(r, \theta) = E_0(r)\exp(i\ell\theta) \quad (102)$$

onde $E_0(r)$ é referente ao perfil transversal. No caso de $E(r, \theta)$ ser um modo de LG, o termo $E_0(r)$ contém todos os termos da envoltória gaussiana, o polinômio generalizado de Laguerre, os termos de normalização e todas as fases distintas da azimutal.

Assim, o lado esquerdo da Equação (87) fica:

$$A_i = g^2 E_{0,p}(r) E_{0,s}^*(r) \exp(i(\ell_p - \ell_s)\theta), \quad (103)$$

então tem-se diretamente a relação

$$\exp(i\ell_j\theta) = \exp(i(\ell_p - \ell_s)\theta) \quad (104)$$

e, portanto,

$$\ell_j = \ell_p - \ell_s. \quad (105)$$

Esta relação de conservação de OAM é de grande importância e vem sendo explorada em muitos trabalhos até os dias atuais [29, 30, 132, 133, 135–137], mas a decomposição modal completa para modos de Laguerre-Gauss será discutida na seção futura ao discutir a publicação II presente nesta tese, referente a experimentos com interação paramétrica de feixes Gaussianos coerentes.

3.6 INTERAÇÃO PARAMÉTRICA DE FEIXES GAUSSIANOS PARCIALMENTE COERENTES

Nesta seção, assim como visto para feixes totalmente coerentes, será analisada a interação paramétrica descendente para feixes de coerência parcial.

Uma observação importante é feita a respeito da notação utilizada para a função CSD. Na Equação (43), um termo referente à função de correlação cruzada $\Gamma_{12}(r_1, r_2, t'1, t'2)$, ou função de coerência mútua, é introduzido. Entretanto, na Equação (54), a CSD é apresentada como a transformada de Fourier da função de coerência mútua:

$$W_Q(\mathbf{r}1, \mathbf{r}2, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int \Gamma_Q(\mathbf{r}1, \mathbf{r}2, \tau) \exp(i\omega\tau) d\tau.$$

Conseqüentemente, na literatura é comum e conveniente representar a função Γ em termos da frequência $\Gamma(r_1, r_2, \omega)$ e nomeá-la como CSD. Estabelecidas as relações e definições para a densidade espectral cruzada, a simbologia de Γ será sempre utilizada, renunciando as análises envolvendo a função de coerência mútua e evitando confusões entre as notações.

Definidas as notações, o foco recai sobre a representação do processo de StimPDC em termos da CSD. Especificamente, analisa-se a densidade espectral cruzada do feixe *idler* ao utilizar um feixe parcialmente coerente como bombeio ou estimulador.

Além disso, a função CSD que caracteriza a fonte parcialmente coerente é definida por:

$$\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \langle A(\mathbf{r}_1)A^*(\mathbf{r}_2) \rangle, \quad (106)$$

onde $\mathbf{r} = (x, y)$ representa a posição transversa, A o envelope do campo elétrico, e o termo $\langle \cdot \rangle$ denota a média do ensemble.

Portanto, a função CSD do *idler* é obtida como:

$$\Gamma_i(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \langle A_i(\mathbf{r}_1)A_i^*(\mathbf{r}_2) \rangle = g^2 \langle A_p(\mathbf{r}_1)A_s^*(\mathbf{r}_1)A_p^*(\mathbf{r}_2)A_s(\mathbf{r}_2) \rangle. \quad (107)$$

Para determinar a CSD do feixe *idler*, é essencial conhecer a correlação de quarta ordem, ou as flutuações dos campos no processo de StimPDC que afetam o feixe *idler*. A exploração dessas flutuações, especialmente em interações genéricas, apresenta um desafio significativo devido à complexidade das correlações.

Portanto, a análise é aprofundada pela investigação da função CSD do feixe *idler* sob diferentes configurações de A_p e considerando que o feixe *seed* A_s é um feixe TGSM.

3.6.1 A_p como onda plana

Na composição mais simples envolvendo um feixe TGSM, será considerado uma onda plana no *pump*. A proporção do *idler* ao conjugado do *seed* é intuitivamente imaginada, dada a frente de onda constante da onda plana. A igualdade de fase em todos os pontos da frente de onda plana permite a consideração de $r_1 = r_2$ e, por conseguinte, $A_p(r_1) = A_p(r_2)$. Adicionalmente, a onda plana, sendo totalmente coerente, não contribui para a média temporal das flutuações. A Equação (107) é, portanto, expressa como:

$$\Gamma_i(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = g^2 |A_p|^2 \langle A_s^*(\mathbf{r}_1)A_s(\mathbf{r}_2) \rangle. \quad (108)$$

Considerando-se que o *seed* é um TGSM por conveniência, tem-se:

$$\langle A_s(\mathbf{r}_1)A_s^*(\mathbf{r}_2) \rangle = \Gamma_{TGSM}, \quad (109)$$

e, conseqüentemente,

$$\Gamma_i(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = g^2 |A_p|^2 \Gamma_{TGSM}^*. \quad (110)$$

Nesta configuração, a CSD do *idler* é identificada como o conjugado da função TGSM do *seed*, mantendo os mesmos parâmetros que caracterizam o *seed*, como a largura do feixe e o comprimento de coerência. Esta configuração é considerada útil para a transferência das características conjugadas do feixe TGSM para outro comprimento de onda.

A onda plana, embora não seja um feixe físico real de quadrado integrável, pode ser aproximada expandindo-se suficientemente um feixe de laser, de modo que, no plano do cristal, na região de interação, a aproximação de uma onda plana é alcançada.

É importante mencionar detalhes quanto à geração de uma onda plana. Apesar de possível, muitas vezes não é viável devido ao conflito entre a baixa potência com que o laser atinge o cristal e a necessidade de intensidades elevadas para o processo não-linear.

Consequentemente, uma configuração mais viável para fins experimentais será discutida a seguir.

3.6.2 A_p preparado como função gaussiana

Em uma configuração onde o feixe *pump* assume uma forma gaussiana, a geração de um feixe TGSM no *idler* torna-se mais factível. Nesta configuração, o *pump* A_p é caracterizado por:

$$A_p(\mathbf{r}_1) = a_p \text{Exp} \left(-\frac{r_1^2}{w_p^2} \right), \quad (111)$$

onde a_p representa a amplitude normalizada do campo e w_p a cintura do feixe *pump*. Sob esta disposição, a CSD do *idler* é expressa como:

$$\Gamma_i(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = g^2 |a_p|^2 \text{Exp} \left(-\frac{r_1^2 + r_2^2}{w_p^2} \right) \Gamma_{TGSM}^*. \quad (112)$$

Contudo, considerando que a função Γ_{TGSM} também inclui um termo gaussiano relativo à cintura do *seed*, a Equação (112) pode ser simplificada. A combinação dos termos gaussianos relativos às cinturas do *pump* e do *seed* resulta em:

$$\text{Exp} \left(-\frac{r_1^2 + r_2^2}{w_p^2} \right) \text{Exp} \left(-\frac{r_1^2 + r_2^2}{w_s^2} \right) = \text{Exp} \left(-\frac{r_1^2 + r_2^2}{w_i^2} \right), \quad (113)$$

onde a relação para a cintura do feixe *idler* é dada por:

$$w_i^2 = \frac{w_p^2 w_s^2}{w_p^2 + w_s^2}. \quad (114)$$

Dessa forma, a Equação (112) pode ser reescrita como:

$$\Gamma_i(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = g^2 |a_p|^2 \Gamma_{TGSM}^* \quad (115)$$

mantendo a relação anterior para a cintura do feixe.

Nesta combinação de feixes, a preservação do caráter TGSM no *idler* é possível através do ajuste do tamanho da cintura do feixe, proporcionando uma alternativa mais viável para a conversão no processo não-linear. No limite onde $w_p \rightarrow \infty$, o *pump* se aproxima de uma onda plana e a cintura w_i converge para w_s , como pode ser visto na Equação (114).

3.6.3 A_p preparado modo LG coerente

Agora, considerando uma configuração onde o feixe *pump* adota uma forma mais generalizada com modos de Laguerre de ordens superiores, os efeitos resultantes no *idler* se tornam igualmente interessantes. Nesta situação, o *pump* A_p é descrito por:

$$A_p(r_1, \theta_1, \ell, q) = C_1 (r_1)^{|\ell|} L_q^\ell \left(\frac{2r_1^2}{w_p^2} \right) \exp \left[-\frac{r_1^2}{w_p^2} \right] \exp[i\ell\theta_1] \quad (116)$$

onde C_1 representa a amplitude normalizada, L_q^ℓ é o modo generalizado de Laguerre, e os índices ℓ e q correspondem às componentes azimutal e radial, respectivamente.

Semelhante aos casos anteriores e devido à coerência do feixe *pump*, que não contribui para a média das flutuações, a CSD do *idler* é facilmente escrita como:

$$\Gamma_i(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = g^2 |C_1|^2 (r_1)^{|\ell|} (r_2)^{|\ell|} L_q^\ell \left(\frac{2r_1^2}{w_p^2} \right) L_q^{\ell*} \left(\frac{2r_2^2}{w_p^2} \right) \Gamma_{TGSM}^* \text{Exp}[i\ell(\theta_1 - \theta_2)]. \quad (117)$$

Aqui, a função Γ_{TGSM} mantém a mesma relação de cintura conforme a Equação (114).

A CSD do *idler*, conhecida como *twisted Laguerre Gaussian Schell-model* (TLGSM), foi teoricamente apresentada em 2018 pelo grupo do professor Yangjian Cai, na referência [138].

No artigo mencionado, a geração de feixes TLGSM é sugerida mediante um feixe TGSM passando por conjuntos de lentes cilíndricas. Entretanto, o processo de StimPDC já fornece uma alternativa direta para a geração de feixes TLGSM na fonte.

Prosseguindo com essa linha de raciocínio, percebe-se que outras classes de feixes envolvendo TGSM e modos de outras famílias também são viáveis no processo de StimPDC. Exemplos incluem os feixes *twisted Hermite Gaussian Schell-model* (THGSM) [139] e *twisted vortex Gaussian Schell-model* (TVGSM) [140].

Além disso, há oportunidades para expandir as classes de modos gerados. Isso é alcançável aplicando combinações de feixes no processo de StimPDC com dois cristais alinhados cujos eixos ordinários são ortogonais entre si. Esta configuração permite a criação de feixes com polarização horizontal (ou vertical) no primeiro cristal e polarização ortogonal no segundo, gerando, dependendo das combinações de modos de entrada, feixes *idler* vetoriais. Essa abordagem permite a geração de feixes de classes vetoriais como *radially polarized twisted partially coherent vortex* (RPTPCV) [141].

3.6.4 A_p parcialmente coerente

Após discutidas algumas combinações de *pump* coerente e *seed* TGSM, resultando em feixes de interesse da comunidade científica, serão abordadas nesta seção as interações de ambos os feixes parcialmente coerentes. Diferente do que foi apresentado até o momento, quando o *pump* também é um feixe parcialmente coerente, as flutuações do campo influenciam na média temporal. Então, algumas sutilezas na análise e escolha do *pump* devem ser consideradas.

Em todas as análises que envolveram *pump* coerente, a CSD do *idler* é equivalente à de um TGSM puro com algumas fases ou um envelope de algum modo gaussiano. Para os casos envolvendo ambos os feixes parcialmente coerentes, nem sempre essa condição é satisfeita.

Agora, para prosseguir, será necessário introduzir alguns conceitos que serão discutidos mais amplamente no capítulo posterior, quando será abordado o tema de métodos de geração dos feixes TGSM a partir de um feixe laser coerente. No entanto, a fim de compreender a CSD resultante da interação, podemos abordar brevemente alguns conceitos.

Como já mencionado, a estratégia se baseia em propriedades de campos estocásticos, então, o objetivo é gerar uma soma incoerente de modos coerentes.

$$A(\mathbf{r}) = \sum_n \sqrt{\lambda_n} K_n(\mathbf{r}) e^{i\varphi_n}, \quad (118)$$

onde λ_n são os coeficientes de cada modo coerente (K_n) que compõe a soma e φ_n é a fase aleatória, tal que:

$$\langle A(\mathbf{r}_1) A^*(\mathbf{r}_2) \rangle = \sum_n \lambda_n K_n(\mathbf{r}_1) K_n^*(\mathbf{r}_2) \approx \Gamma_{TGSM}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2). \quad (119)$$

Para alcançarmos a relação acima é necessário considerar

$$\langle e^{i(\varphi_m - \varphi_n)} \rangle = \delta_{m,n}. \quad (120)$$

A origem dessa relação reside nas propriedades estocásticas dos campos considerados. Em um campo estocástico, as fases das ondas são distribuídas aleatoriamente, o que implica que a correlação média entre duas ondas diferentes (com $m \neq n$) ao longo do tempo será zero. Isso ocorre porque as fases aleatórias tornam as ondas ortogonais entre si em média. Por outro lado, a autocorrelação de uma onda com ela mesma (quando $m = n$) não é zero, refletindo a natureza consistente da fase da onda consigo mesma.

Portanto, a CSD do *idler*:

$$\Gamma_i(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = g^2 \langle A_p(r_1) A_s^*(r_1) A_p^*(r_2) A_s(r_2) \rangle. \quad (121)$$

Substituindo a Equação (118) em (121)

$$\Gamma_i(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = g^2 \sum_{m,n,j,k} \sqrt{\lambda_m \lambda_n^* \lambda_j^* \lambda_k} K_{m,p}(r_1) K_{n,s}^*(r_1) K_{j,p}^*(r_2) K_{k,s}(r_2) \langle e^{i(\varphi_m - \varphi_n - \varphi_j + \varphi_k)} \rangle, \quad (122)$$

que é a forma generalizada da CSD do *idler* para feixes *pump* e *seed* TGSM, sintetizados a partir da soma incoerente de modos coerentes. Para uma forma mais explícita da CSD é necessário analisar as condições iniciais, ou as condições de sintetização dos feixes.

3.6.4.1 A_p correlacionado com A_s

Para entender melhor essas relações, será primeiramente considerado que o campo A_p está correlacionado com o campo A_s , ou seja, $A_p = A_s$. Como as informações de frequência não estão contidas no campo A_p e A_s , não há inconsistência em igualá-los, por conter somente informação do perfil transversal. Então,

$$A_p(r) = A_s(r) = A(r) \quad (123)$$

e ambos formam um feixe TGSM com os mesmos coeficientes λ_n , modos K_n e, principalmente, mesmas fases φ_n .

Então, temos que encontrar todas as combinações que as fases aleatórias possuem autocorrelações. Para o caso em questão, como os feixes *pump* e *seed* foram propositalmente considerados correlacionados, então o termo $A_p(r_1)$ estará correlacionado com os termos $A_s^*(r_1)$ e $A_p^*(r_2)$ para obter uma relação equivalente à Equação (120). Portanto,

$$\langle e^{i(\varphi_m - \varphi_n)} \rangle = \delta_{m,n} \quad (124)$$

e

$$\langle e^{i(\varphi_m - \varphi_j)} \rangle = \delta_{m,j}. \quad (125)$$

Assim como o termo $A_s(r_2)$ estará correlacionado com os mesmos termos $A_s^*(r_1)$ e $A_p^*(r_2)$. Obtendo as relações

$$\langle e^{i(\varphi_k - \varphi_n)} \rangle = \delta_{k,n} \quad (126)$$

e

$$\langle e^{i(\varphi_k - \varphi_j)} \rangle = \delta_{k,j}. \quad (127)$$

Então, as somas diferentes de zero ocorrerão quando as correlações entre os termos forem:

1. $A_p(r_1) \rightarrow A_s^*(r_1)$ e $A_p^*(r_2) \rightarrow A_s(r_2)$,
2. $A_p(r_1) \rightarrow A_p^*(r_2)$ e $A_s^*(r_1) \rightarrow A_s(r_2)$,
3. $A_p(r_1) \rightarrow A_s^*(r_1) \rightarrow A_p^*(r_2) \rightarrow A_s(r_2)$.

Porém, quando é considerado todas as possibilidades da primeira e a segunda condições, a terceira condição automaticamente está inclusa. Isso faz com que ela seja considerada em duplicata. Portanto, a combinação de deltas que satisfazem a Equação (122) é:

$$\langle e^{i(\varphi_m - \varphi_n - \varphi_j + \varphi_k)} \rangle = \delta_{m,j} \delta_{n,k} + \delta_{m,n} \delta_{j,k} - \delta_{m,n} \delta_{j,k} \delta_{m,j}. \quad (128)$$

Aplicando a Equação (128) em (122), encontramos,

$$\begin{aligned} \Gamma_i(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = & g^2 \sum_{m,n} |\lambda_m| |\lambda_n| K_m(r_1) K_n^*(r_1) K_m^*(r_2) K_n(r_2) + \\ & + g^2 \sum_{m,j} |\lambda_m| |\lambda_j| K_m(r_1) K_m^*(r_1) K_j^*(r_2) K_j(r_2) + \\ & - g^2 \sum_m |\lambda_m|^2 K_m(r_1) K_m^*(r_1) K_m^*(r_2) K_m(r_2) \end{aligned} \quad (129)$$

e, portanto,

$$\Gamma_i(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = g^2 \left(\Gamma_{TGS}^2 + \sum_m \sum_{j \neq m} |\lambda_m| |\lambda_j| |K_m(r_1)|^2 |K_j(r_2)|^2 \right). \quad (130)$$

Neste caso específico, onde os campos *pump* e *seed* estão correlacionados, a função CSD não retorna a CSD de um TGS como nos casos de *pump* coerente. Aqui temos uma função que é a CSD do TGS *idler* mais um termo coerente. Embora o termo Γ_{TGS} esteja ao quadrado, como as funções são gaussianas, então podem ser reescritas em termos de um Γ_{TGS} linear ajustando os parâmetros da cintura e do comprimento de coerência.

3.6.4.2 A_p descorrelacionado com A_s

Por fim, outra solução interessante ocorre no caso onde as sintetizações dos feixes *pump* e *seed* não estão correlacionadas. Isso quer dizer que, embora ambos os feixes possuam características de TGS, possuam os mesmos coeficientes λ_n e modos coerentes K_n , as fases aleatórias que compõem cada modo são descorrelacionadas. As condições de autocorrelação presentes na Equação (121) serão simplificadas. As correlações cruzadas, entre A_p e A_s , não estarão presentes. Então o termo $A_p(r_1)$ estará correlacionado apenas com $A_p^*(r_2)$, assim como o termo $A_s(r_2)$ estará correlacionado apenas com $A_s^*(r_1)$.

Portanto, a combinação de índices que não anula um termo da Equação (122) é expressa por:

$$\langle e^{i(\varphi_m - \varphi_n - \varphi_j + \varphi_k)} \rangle = \delta_{m,j} \delta_{n,k}. \quad (131)$$

Aplicando a Equação (131) em (122), temos,

$$\Gamma_i(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = g^2 \sum_m |\lambda_m| K_{m,p}(r_1) K_{m,p}^*(r_2) \sum_n |\lambda_n| K_{n,s}^*(r_1) K_{n,s}(r_2), \quad (132)$$

onde o segundo índice dos modos coerentes é referente à discriminação dos campos de *pump* e *seed* e, reescrevendo em termos da CSD de um TGSM, a CSD do *idler* fica:

$$\Gamma_i(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = g^2 \Gamma_{TGSM,p} \Gamma_{TGSM,s}^*, \quad (133)$$

sendo a multiplicação entre a CSD de um TGSM formado pelas características do *pump* e a CSD conjugada do *seed*.

As CSD do idler pode ser escrita em termos de uma função TGSM

$$\Gamma_{TGSM,i} = \Gamma_{TGSM,p} \Gamma_{TGSM,s}^*, \quad (134)$$

considerando a cintura do feixe

$$w_i^2 = \frac{w_p^2 w_s^2}{w_p^2 + w_s^2}, \quad (135)$$

o comprimento de coerência transverso

$$\delta_i^2 = \frac{\delta_p^2 \delta_s^2}{\delta_p^2 + \delta_s^2}, \quad (136)$$

a fase de curvatura

$$\frac{k_i}{R_i} = \frac{k_p}{R_p} - \frac{k_s}{R_s}, \quad (137)$$

e a fase de twist

$$k_i \mu_j = k_p \mu_p - k_s \mu_s. \quad (138)$$

Portanto, a CSD do feixe *idler* assume esta forma sintetizada:

$$\Gamma_i(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = g^2 \Gamma_{TGSM,i}, \quad (139)$$

possuindo também as características de feixe TGSM, com propriedades provenientes do *pump* e do *seed*. Isto difere dos casos em que o *pump* é coerente, em que apenas os parâmetros conjugados do *seed* definiam a CSD do *idler*. Ambas as configurações são interessantes, o caso de *pump* coerente fornece um feixe conjugado de maneira direta, enquanto o caso de *pump* TGSM fornece algumas regras de seleção, inclusive para a fase de *twist*. Um exemplo é o caso onde $k_p \mu_p = k_s \mu_s$, oferecendo um feixe GSM no *idler* (sem fase de torção).

4 GERAÇÃO DE FEIXES COM MOMENTO ANGULAR ORBITAL OU TWIST

Para explorar as propriedades e relações do perfil transversal na StimPDC de feixes coerentes e parcialmente coerentes, se faz necessário a sintetização desses feixes com parâmetros controláveis. Para a geração eficiente desses feixes é utilizado um dispositivo de modulação de fase do perfil transversal (SLM, *spatial light modulator*). Com técnicas de holografia, este dispositivo pode produzir uma vasta variedade de feixes com qualidade suficiente para diversas aplicações.

O capítulo se inicia com a apresentação dos dispositivos moduladores do perfil espacial de luz, descrevendo seu princípio de funcionamento. Em seguida, serão apresentados métodos de geração dos vórtices ópticos escalares, especialmente os modos de Laguerre-Gauss. Também serão apresentadas as técnicas para modular a amplitude dos feixes utilizando um modulador de fase, assim como o processo de sintetização de feixes parcialmente coerentes a partir de laser coerente. Por fim, também será discutida a publicação I desta tese, relacionada a correção do comprimento de coerência transversal do feixe parcialmente coerente produzidos por campos coerentes com fases aleatórias.

4.1 MODULADOR ESPACIAL DE LUZ

Os moduladores espaciais de luz, comumente conhecidos pela sigla em inglês SLM (*Spatial Light Modulators*), são dispositivos que usam um meio anisotrópico controlável de um cristal líquido. Sendo assim, são capazes de impor algum tipo de modificação sobre um feixe de luz em termos de sua fase e amplitude, apenas mudando a birrefringência através da mudança do sinal do dispositivo elétrico.

A origem dos SLMs formados por uma matriz de pixels, teve origem no início dos anos 70 [142, 143]. À medida que a pesquisa óptica avançava, a necessidade de controlar e manipular feixes de luz tornou-se evidente. Os primeiros SLMs eram dispositivos ineficientes na manipulação de fase devido ao mecanismo de funcionamento baseado no efeito eletro-óptico de espalhamento dinâmico, o qual, por sua natureza, requer uma corrente elétrica para sua ativação. Esta limitação ocorre porque dispositivos de espalhamento dinâmico funcionam emitindo uma corrente elétrica por um cristal líquido (LC) dopado ionicamente, levando à condução de eletricidade pelo LC. Então, no início dos anos 80, surgiu o primeiro dispositivo nemático de LCOS (*liquid crystal on silicon* com efeito capaz de modular a fase [144]). Basicamente, um SLM funciona como um arranjo de pixels, com cada pixel funcionando como um pequeno modulador óptico. Ao aplicar uma tensão específica a um pixel individual, pode-se controlar a fase que reflete a partir daquele ponto. Ao fazer isso em uma matriz de pixels, um SLM pode criar padrões de luz complexos.

A capacidade de controlar a luz ao nível de pixel abriu a porta para o desenvol-

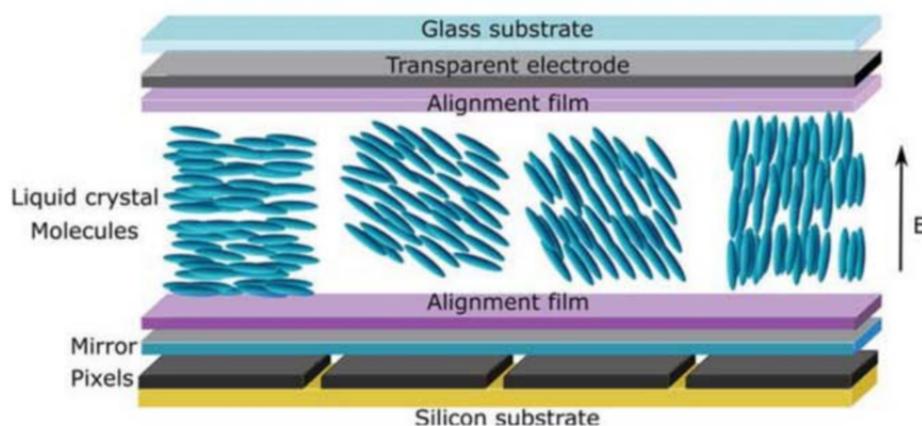


Figura 14 – Representação das camadas de um SLM de cristal líquido com 4 diferentes pixels com diferentes tensões entre os eletrodos, provocando diferentes configurações de alinhamento e, portanto, diferentes fases.

Fonte: How to Shape Light with Spatial Light Modulators, Rosales-Gusmán [176]

vimento de sistemas de exibição avançados. Os SLMs são amplamente usados em óptica adaptativa, onde são empregados para corrigir distorções em feixes de luz que passam por meios turbulentos [145–148]. Isso é crucial em observações astronômicas [149] e em comunicações laser de longa distância. Os SLMs também possuem aplicações em modelagem de feixes [150–153], holografia [154–158], armadilhas [159–161], pinças ópticas [162–165]. São também muito utilizados, pelo laboratório de óptica quântica da UFSC para geração de feixes com vórtices ópticos [124, 166–168], feixes estruturados de Hermite [169], em termodinâmica quântica de sistemas fotônicos [170–173] e principalmente na geração de feixes mais complexos como os feixes parcialmente coerentes [89, 174], ou o feixe de Airy [175] (submetido para publicação).

Tecnicamente, os dispositivos SLMs comerciais comumente utilizados são configurados para aplicarem uma variação de até 2π para o comprimento de onda de interesse. O dispositivo utilizado em todos os trabalhos desta tese foi o modelo Pluto-NIR-011 da Holoeye. Este modelo consiste em uma matriz de 1920×1080 pixels, com 8 bits de tons de cinza disponíveis, onde os níveis de cinza representam a diferença de fase aplicada na frente de onda. Por exemplo, se uma imagem em tons de cinza é carregada partindo do preto (valor 0) até o branco (valor 255), calibrada para aplicar uma diferença de fase de 0 quando preto, a 2π , quando branco, e os valores intermediários variam linearmente entre cada um dos 256 níveis.

A Figura 14 mostra a estrutura esquemática de uma tela SLM com diferentes alinhamentos entre as moléculas de cristal líquido para cada pixel. A frente da tela apresenta uma camada de vidro e um eletrodo transparente, seguido de uma camada de moléculas de cristal líquido entre 2 películas de filmes de alinhamento. Ao fundo, existe um espelho sobre os pixels e por fim, a camada com substrato de silício.

A propriedade mais importante para a manipulação de fase dos cristais líquidos

é a birrefringência:

$$\Delta n = n_e - n_o, \quad (140)$$

onde n_o é o índice de refração no eixo ordinário perpendicular ao eixo longo da molécula (eixo de ordenamento das moléculas) e n_e é o índice de refração no eixo extraordinário, paralelo ao eixo de alinhamento.

Isso significa que, para diferentes tensões aplicadas, haverá diferentes alinhamentos das moléculas. Este alinhamento induz a mudança do índice de refração, surgindo este efeito de birrefringência eletro-óptica. O índice de refração extraordinário dependente do ângulo é chamado de índice de refração extraordinário efetivo e pode ser determinado segundo o ângulo entre o eixo longo das moléculas e o plano normal do SLM φ , como [177]:

$$\frac{1}{n_e^2(\varphi)} = \frac{\sin^2\varphi}{n_e^2} + \frac{\cos^2\varphi}{n_o^2}. \quad (141)$$

Para um feixe incidindo no SLM com um ângulo θ , dado que o eixo de alinhamento das moléculas é φ , o índice de refração efetivo é escrito como:

$$n_e(\theta, \varphi) = \frac{n_e n_o}{\sqrt{n_e^2 \cos^2(\varphi + \theta) + n_o^2 \sin^2(\varphi + \theta)}} \quad (142)$$

e a diferença de fase aplicada ao feixe é dada por:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{d}{\cos\theta} (n_e(\theta, \varphi) - n_o) \quad (143)$$

onde d é a espessura do cristal líquido.

Então, tendo o controle de modulação de fase para cada pixel, é possível criar máscaras holográficas que geram feixes com vórtices ópticos.

4.2 GERAÇÃO DE FEIXES COM OAM

O método holográfico surgiu decorrente de trabalhos de Dennis Gabor [178, 179] que demonstrou uma maneira de produzir imagens através da interferência de dois campos. Originalmente, o método envolvia a criação de um padrão de interferência em um filme fotográfico. Um feixe coerente, separado por um *beam splitter*, foi utilizado para isso. Parte desse feixe interagiu com o objeto de interesse, e a luz espalhada subsequente foi direcionada para um filme fotográfico. Lá, ela foi recombinada com a segunda parte do feixe coerente de referência, produzindo assim um padrão de interferência. Com esse padrão de interferência estabelecido, tornou-se possível enviar um feixe de laser para recriar o padrão de fase do objeto de interesse.

Dada a matriz de pixels do SLM, o campo modulado é dado por:

$$E'(x, y) = E(x, y) \exp(i\varphi(x, y)), \quad (144)$$

onde $E'(x,y)$ é o campo refletido modulado pelo SLM e $E(x,y)$ o campo incidente.

Portanto, para o caso dos feixes com vórtices ópticos, cujo interesse é produzir uma máscara holográfica que imprime um padrão de fase azimutal $\exp(il\varphi)$ no feixe de interesse, a máscara deve conter um padrão semelhante ao da Figura 15.

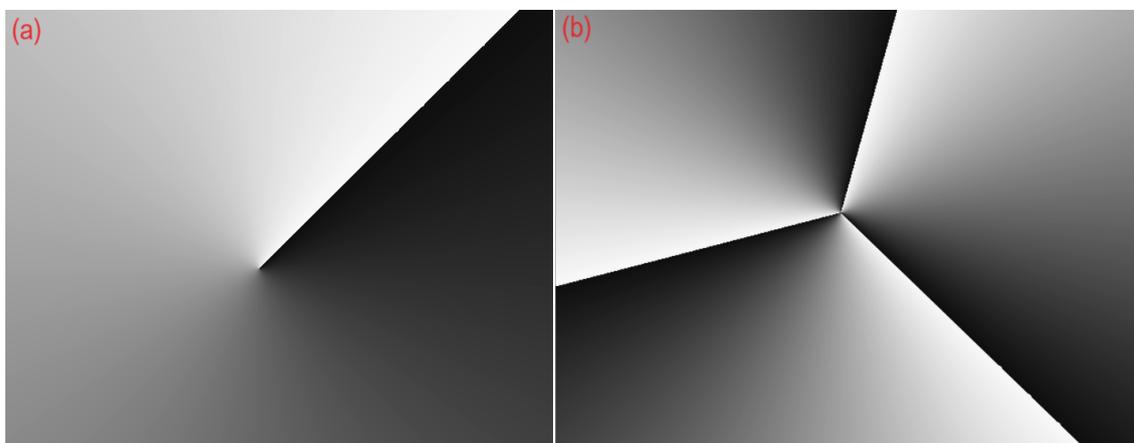


Figura 15 – Padrão de variação de fase azimutal com (a) $\ell = -1$ e (b) $\ell = 3$

Em geral, a tela do SLM modula somente uma componente da polarização dos feixes. No caso do SLM utilizado aqui, a polarização incidente foi ajustada para ser horizontal. No entanto, mesmo o feixe sendo praticamente totalmente horizontalmente polarizado, as pequenas contribuições de polarização vertical contribuirão como ruído para a modulação desejada. Assim como parte do feixe refletido na camada de vidro do SLM. Assim, ao aplicar uma máscara de fase, o padrão de intensidade na saída do SLM pode não ser exatamente o desejado. Considerando o caso de modulação de vórtice óptico com $\ell = 3$, o campo na saída será uma superposição de modos $\ell = 3$ com o ruído gaussiano. A depender da proporção de cada um dos modos, o padrão de intensidade na saída muda completamente, como representado na Figura 16.

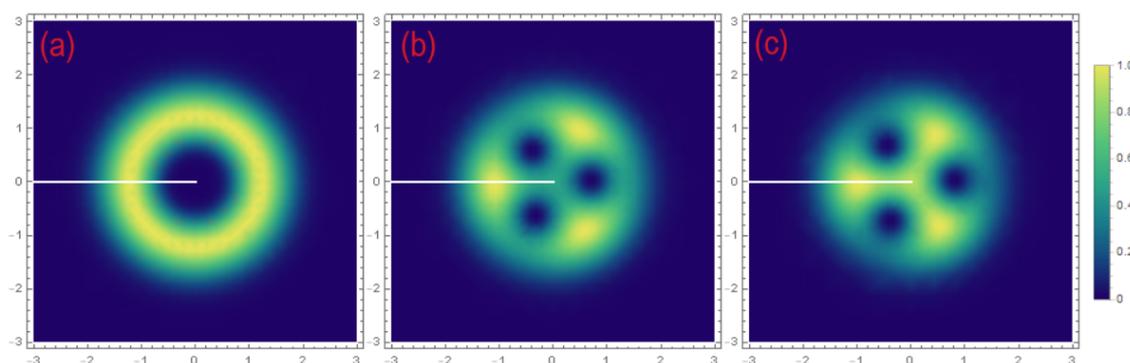


Figura 16 – Padrão de intensidade a partir da superposição de modos com $\ell = 3$ e $\ell = 0$. (a) modo $\ell = 3$ puro; (b) modo $\ell = 3$ + modo $\ell = 0$; (c) 30% modo $\ell = 3$ + 70% modo $\ell = 0$.

Para evitar alteração do modo desejado por ruído não modulado, é criada uma máscara que simula uma grade de difração. A grade de difração que desejamos simular

é uma grade especial, conhecida como *echelle grating* ou *blazed grating* [180, 181]. O objetivo desta grade é otimizar a máxima eficiência de conversão do feixe para uma ordem específica de difração. A grade *blazed* possui equação de difração semelhante às grades de transmissão e reflexão comuns,

$$d[\sin(\theta_m) + \sin(\theta_i)] = m\lambda, \quad (145)$$

onde d é a distância entre as fendas, θ_m é o ângulo refletido, θ_i é o ângulo incidente com relação à superfície normal e m é a ordem de difração. Tendo a configuração Littrow como um caso especial, isto é, quando o ângulo de incidência θ_i é igual ao ângulo de difração θ_m , assim, a Equação (145) toma a forma:

$$2d\sin(\theta_m) = m\lambda. \quad (146)$$

Assim, para um comprimento de onda conhecido, e definidas as distâncias entre as fendas como um múltiplo dos números de píxels, é possível obter facilmente o ângulo de *blaze* para a primeira ordem de difração, ou ângulo da rampa que simula uma grade *blazed*.

A reprodução das grades de *blaze* no SLM depende então de uma função periódica dente de serra, com as rampas tendo ângulo θ_m . Resultando em algo similar à Figura 17.

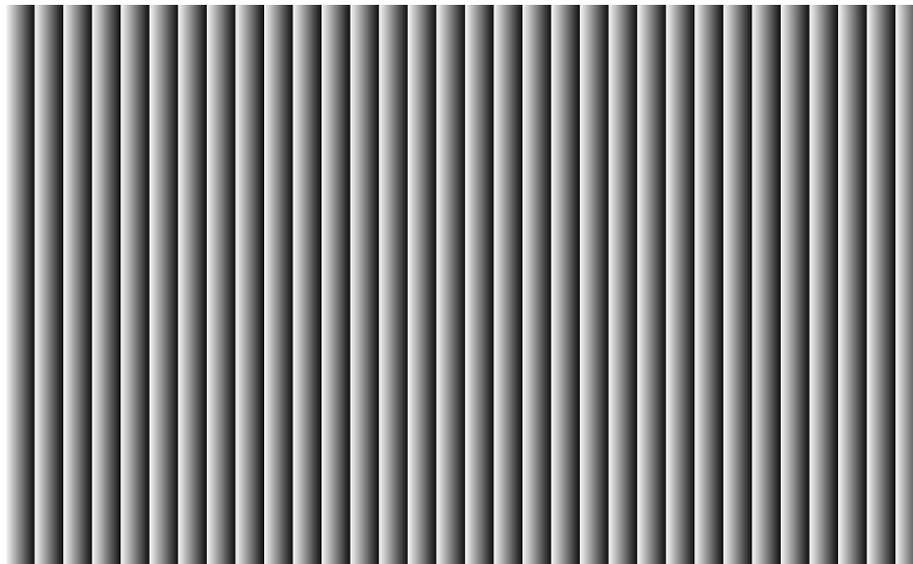


Figura 17 – Máscara holográfica de uma grade de difração.

A combinação das máscaras holográficas da grade de difração com a máscara holográfica do vórtice óptico, resulta nas máscaras de garfo (Figura 18), que obtém este nome pelo padrão apresentado no ponto central, onde o número de dentes do garfo está associado ao valor do OAM.

Estas máscaras em forma de garfo são eficientes para geração de vórtices ópticos, mas embora o vórtice óptico tenha as propriedades de conservação de momento

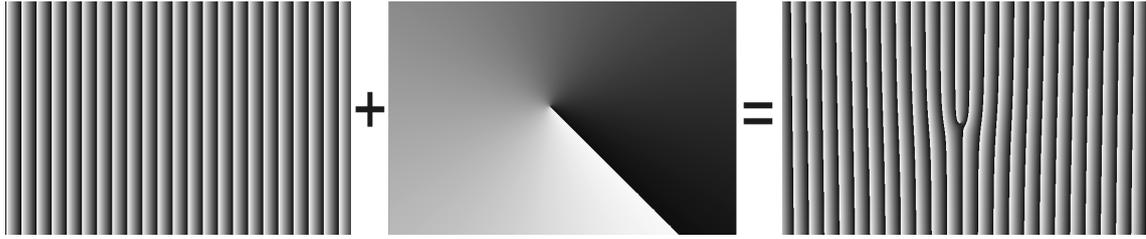


Figura 18 – Máscara holográfica de OAM com $\ell = 1$ resultante da combinação da máscara de fase azimutal e grade de difração.

angular na StimPDC, o objetivo desta tese são os feixes de Laguerre-Gauss. Alguns trabalhos utilizam esta máscara holográfica como máscara para gerar LG, devido à grande similaridade com o modo $LG_{\ell,p=0}$, mas, se decomposmos o vórtice óptico em modos de LG, temos:

$$E'(x,y) = \text{Exp}(-(x^2 + y^2))\text{Exp}(i\ell \text{atan}(y/x)) \quad (147)$$

e

$$E'(x,y) = \sum_n c_n LG_{\ell,n}, \quad (148)$$

onde $\sum_n |c_n|^2 = 1$.

Então, para o caso de $\ell = 1$:

$$E'(x,y) = 0.8862LG_{1,0} + 0.3133LG_{1,1}e^{i\varphi_1} + 0.1919LG_{1,2}e^{i\varphi_2} + \mathcal{O}[3] \quad (149)$$

onde φ_1 e φ_2 são fases entre os modos e $\mathcal{O}[3]$ são os termos de ordem superior.

Uma estratégia para criar um modo puro de LG apenas utilizando um SLM que modula somente fase, é expandir o feixe de entrada como uma onda plana e criar uma máscara de difração parcial. Assim, a máscara direcionará para a ordem 1 de difração, quantidades proporcionais da intensidade do feixe, como a máscara da Figura 19.

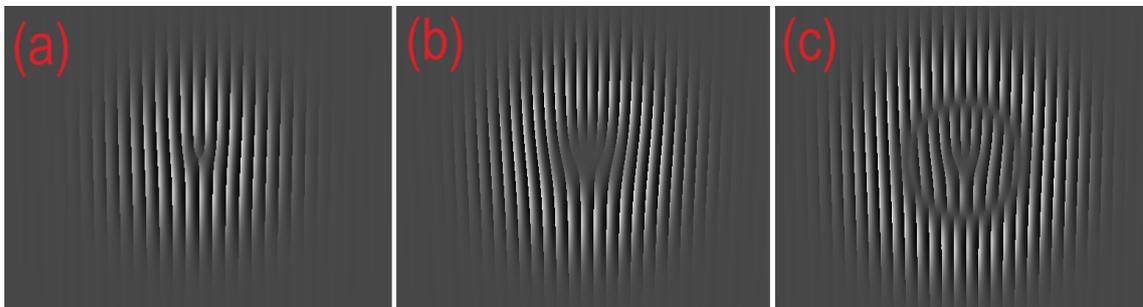


Figura 19 – Máscaras holográficas de geração dos modos de Laguerre-Gauss; (a) $LG_{1,0}$, (b) $LG_{3,0}$, (c) $LG_{2,1}$.

Diferente das máscaras de vórtices ópticos, em que todo o feixe é difratado para a ordem 1, as máscaras holográficas geradoras dos modos de Laguerre-Gauss possui parte da máscara que direciona para a ordem 1, enquanto outra parte da máscara

atua como um espelho, direcionando para a ordem zero. Criando, assim, regiões de modulação de amplitude controlada pela superposição de máscara grade + espelho. As máscaras de Laguerre-Gauss foram utilizadas nas publicações II e III desta tese, apresentadas no Capítulo 5.

4.3 GERAÇÃO DE FEIXES TWISTED GAUSSIAN SCHELL MODEL

Durante a seção 2.3 foi abordada uma descrição puramente matemática sobre fontes de luz parcialmente coerentes e a representação através da densidade espectral cruzada. Na seção 3.6.4, foi discutida matematicamente a propriedade de campos estocásticos, formados pela soma incoerente de modos coerentes, já visando uma maneira menos abstrata de tratar as fontes parcialmente coerentes. Nesta seção, além de retomar a descrição matemática de reconstrução da densidade espectral cruzada a partir de modos coerentes, será descrita uma alternativa de criar de maneira prática as somas de campos estocásticos utilizando o modulador espacial de luz.

O objetivo é claramente gerar um feixe com propriedades de feixe do modelo de Schell-gaussiano com fase de torção. Assim, a CSD alvo já está bem definida como descrita na Equação (64):

$$\begin{aligned}
 W_z(x_1, y_1, x_2, y_2, \nu) = & \frac{I(\nu)}{2\pi w(\nu)^2} \text{Exp} \left[-\frac{x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2}{4w(\nu)^2} \right] \\
 & \times \text{Exp} \left[-\frac{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}{2\delta(\nu)^2} \right] \\
 & \times \text{Exp} \left[-i\frac{k}{2R(\nu)}(x_1^2 - x_2^2 + y_1^2 - y_2^2) \right] \\
 & \times \text{Exp} [-ik\mu(\nu)(x_1 y_2 - x_2 y_1)].
 \end{aligned}$$

Para um feixe quase monocromático, podemos suprimir a dependência da frequência na equação, assim, para um feixe colimado com a frente de onda praticamente plana, podemos escrever a CSD normalizada do feixe TGSM como:

$$\Gamma_{TGSM}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = e^{-\frac{r^2 + r'^2}{4w^2}} e^{-\frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2}{2\delta^2}} e^{-ik\mu(xy' - yx')}. \quad (150)$$

Em *Devising genuine spatial correlation functions* [182], Gori e Santarsiero propõem um critério para estabelecer que a CSD é uma função definida não-negativa (*nonnegative definite*) de modo a garantir a estabilidade física dos sistemas. A função de intensidade mútua $J(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ em óptica deve ser *nonnegative definite* para garantir que as intensidades calculadas sejam fisicamente realistas (não negativas). A função de intensidade mútua é um caso especial da função de correlação cruzada $\Gamma_{12}(r_1, r_2, \tau)$ quando $\tau = 0$, ou função de correlação para tempos iguais [183]. Como a função de

intensidade mútua tem ligação direta com a CSD, então, a CSD pode ser expressa na forma integral:

$$\Gamma_{TGSM}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \int p(\mathbf{u}) K(\mathbf{r}, \mathbf{u}) K^*(\mathbf{r}', \mathbf{u}) d^2 u, \quad (151)$$

onde $\mathbf{u} = (u_x, u_y)$ é um vetor no plano transversal, $p(\mathbf{u})$ é uma função peso não negativa e $K(\mathbf{r}, \mathbf{u})$ representa um kernel arbitrário de quadrado integrável, modos não-ortogonais ou pseudo-modos [184].

Esta decomposição em pseudo-modos é muito importante, pois permite uma maneira direta de sintetizar os feixes parcialmente coerentes. Para expressar a CSD de um TGSM em termos dos pseudo-modos, basta considerar [174, 184–186]:

$$K(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \exp \left[-\frac{w^2}{2aw^2 + 1} \left(\frac{\mathbf{r}}{2w^2} + a\mathbf{r} - a\mathbf{v} \right)^2 \right] \exp[-ik\mu(xv_y - yv_x)] \quad (152)$$

e a função peso

$$p(\mathbf{v}) = \exp \left(-\frac{av^2}{2aw^2 + 1} \right) \quad (153)$$

com o parâmetro

$$a = \frac{1}{\delta^2} \left(1 + \sqrt{1 - k^2 \mu^2 \delta^4} \right). \quad (154)$$

Tendo um intervalo suficientemente pequeno entre os vetores de deslocamento transversal \mathbf{v}_n , a integral pode ser substituída por uma soma finita

$$\Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \approx \sum_n^N p(\mathbf{v}_n) K^*(\mathbf{r}, \mathbf{v}_n) K(\mathbf{r}', \mathbf{v}_n). \quad (155)$$

De maneira prática e intuitiva, esta equação representa uma CSD de uma fonte extensa compostas por várias fontes pontuais independentes. Essas fontes independentes de luz parcialmente coerente estão dispostas em uma matriz nas posições \mathbf{v}_n . Sendo que a probabilidade de emissão $p(\mathbf{v}_n)$ tem uma distribuição normal.

Conforme apresentado na seção 3.6.4, para um dado tempo t , podemos escrever o campo total desta fonte como a soma de cada uma das fontes. No entanto, esta soma é incoerente, ou seja, não há correlação de fase entre as emissões. Assim, a soma de campos estocásticos para um determinado tempo t é dado pela Equação (118):

$$A(\mathbf{r}) = \sum_n \sqrt{\lambda_n} K_n(\mathbf{r}) e^{i\varphi_n}.$$

Portanto, para uma área definida da tela do SLM, podemos simular várias fontes K_n espaçadas a um passo Δv_n que possuem distribuição gaussiana e fase de *twist*. Para efeito de visualização, a Figura 20 traz três imagens de máscaras holográficas no SLM para (a) 4 fontes, dispostas numa matriz 2x2, (b) 6 fontes dispostas numa matriz 3x2 e (c) 8 fontes dispostas numa matriz 4x2.

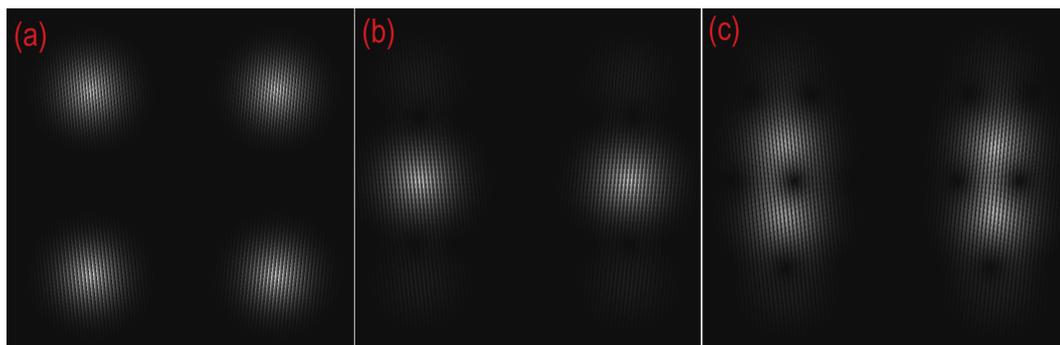


Figura 20 – Máscaras holográficas criadas no SLM para a simulação de fontes parcialmente coerentes dispostas em (a) 4 fontes pontuais, (b) 6 fontes e (c) 8 fontes.

Claramente, as máscaras holográficas representadas na Figura 20 não representam bem uma fonte coerente devido ao espaçamento entre as fontes, atuando como fontes distintas. Mas facilita no entendimento do processo de criação. Na Figura 20c, há uma pequena região de superposição entre as fontes, onde pode haver interferência construtiva ou destrutiva. Para matrizes maiores como 5×5 e 15×15 , os efeitos já começam a se assemelhar com a sintetização de fonte parcialmente coerente, mostrado na Figura 21

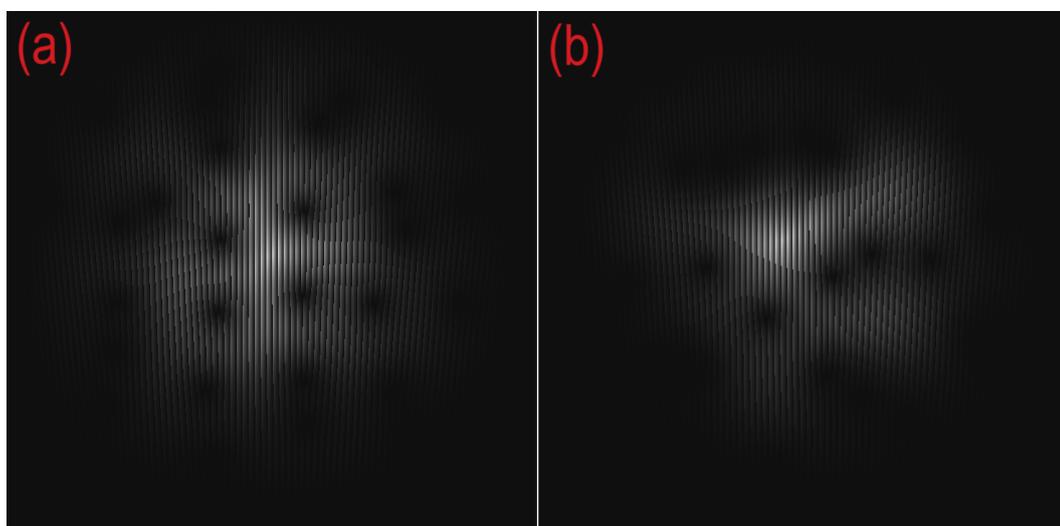


Figura 21 – Máscaras holográficas criadas no SLM para a simulação de fontes parcialmente coerentes: (a) 25 fontes dispostas em uma matriz 5×5 ; (b) 225 fontes dispostas em uma matriz 15×15 .

Na Figura 21a, ainda há uma separação suficientemente grande entre as fontes tal que é possível identificar visualmente as regiões de intersecção entre uma fonte e outra. Na Figura 21b, já não se produz um padrão tão bem definido a fim de identificar as posições de cada fonte individual, tornando assim uma máscara holográfica que se aproxima mais do modelo ideal. Para as medições utilizadas nos experimentos das publicações I e IV, utilizamos a configuração de matriz 23×23 .

No entanto, a Equação (118) ainda não torna o campo de saída um feixe parcialmente coerente. A combinação de 529 fontes dispostas em uma matriz 23x23 com fases aleatórias oferece regiões de interferência construtiva e regiões de interferência destrutiva. Cada máscara holográfica, fruto da combinação destas 529 fontes, será considerada um *frame*. Mas ao enviar uma onda plana num único *frame*, o campo continua coerente com as intensidades definidas pelo padrão da máscara. O que tornará o campo parcialmente coerente será uma soma temporal. Ao integrar a intensidade resultante de vários *frames* independentes, o padrão produzido é de um feixe com distribuição gaussiana e CSD de TGSM. A soma temporal de fases aleatórias proporciona a Equação (119)

$$\langle A(\mathbf{r}_1)A^*(\mathbf{r}_2) \rangle = \sum_n \lambda_n K_n(\mathbf{r}_1)K_n^*(\mathbf{r}_2) \approx \Gamma_{TGSM}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2),$$

dado a propriedade da Equação (120)

$$\langle e^{j(\varphi_m - \varphi_n)} \rangle = \delta_{m,n}.$$

A fim de demonstrar o efeito, considerando que o campo de entrada no SLM é uma onda plana, a Figura 22 representa a simulação de intensidades produzidas por cada *frame* das máscaras holográficas, para 12 combinações diferentes de frames. A Figura 23 é a soma das intensidades dos 12 *frames* apresentados e a Figura 24 é a soma de intensidades para 300 *frames*.

Portanto, ao enviar uma onda plana, ou um perfil gaussiano suficientemente expandido na tela do SLM, ao introduzir máscaras holográficas que simulam campos estocásticos, é possível obter um feixe com características TGSM após a soma de um número grande de máscaras holográficas. Ou seja, se uma câmera integrar no tempo as intensidades medidas após o feixe passar por 300 frames distintos, é obtido um padrão de intensidade com características de feixes TGSM. Os parâmetros relacionados ao comprimento de coerência, fase de torção e largura do feixe estão contidos nos parâmetros da máscara $K(\mathbf{r}, \mathbf{v})$, $p(\mathbf{v})$ e a .

Na prática, o SLM reproduziu vídeos compostos por cerca de 300 frames distintos e uma câmera capturou e integrou as intensidades durante a transcorrência do vídeo holográfico. Nos trabalhos I e IV foram medidos os parâmetros para critério de validação e serão apresentados em seções futuras.

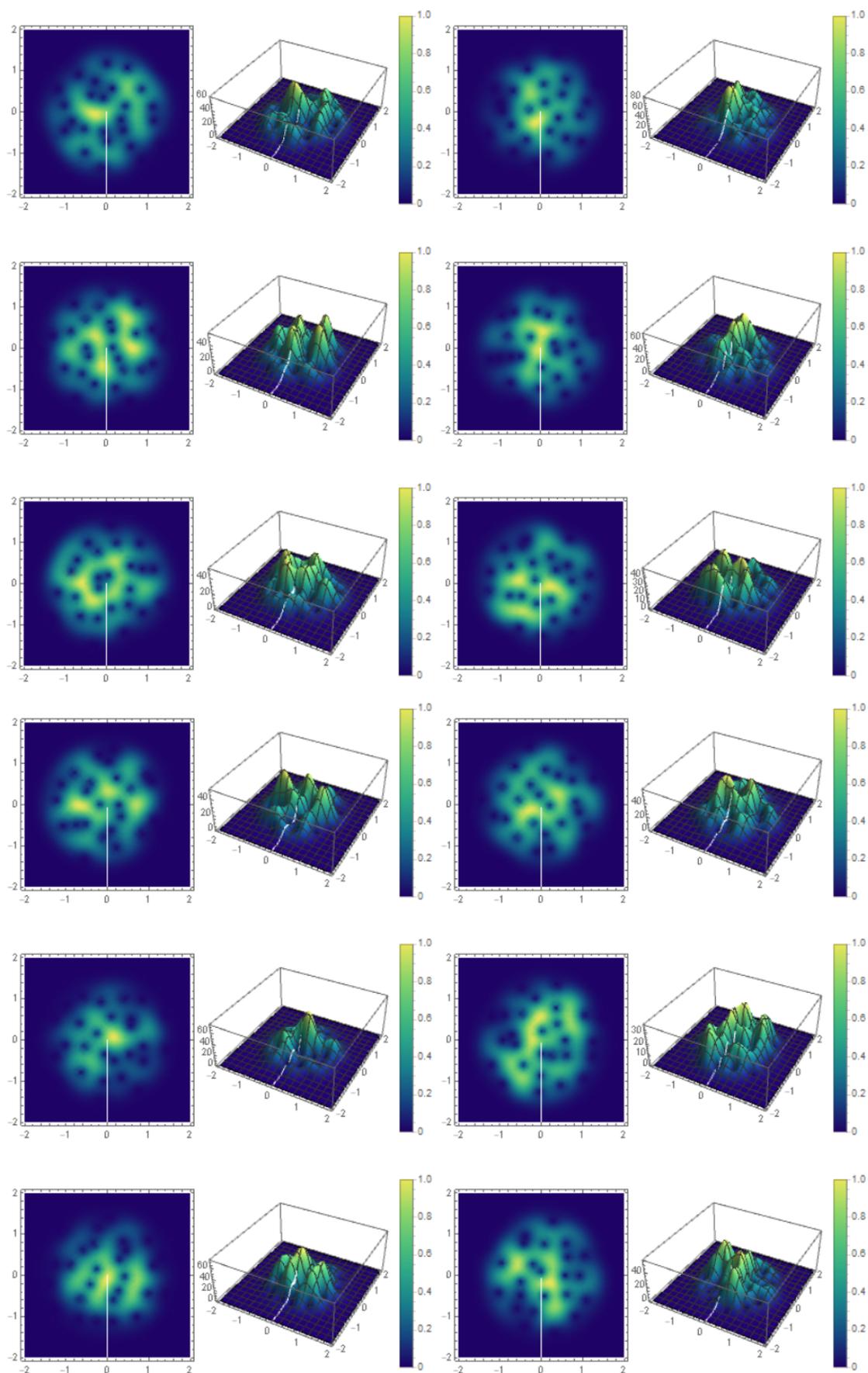


Figura 22 – Simulação da distribuição de intensidade produzida por 12 diferentes frames. Em cada um dos frames há, à esquerda, um plot 2D da distribuição de intensidade, à direita, um plot 3D.

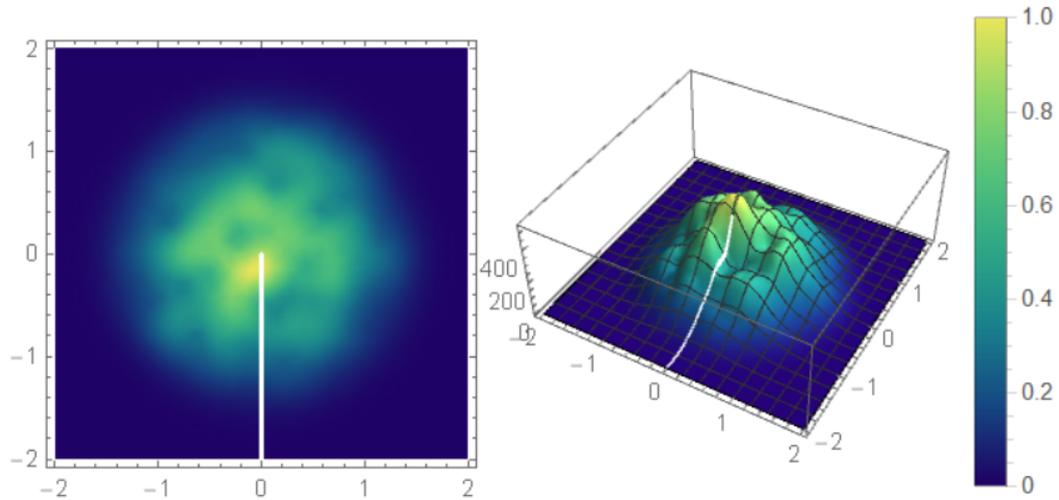


Figura 23 – Simulação da distribuição de intensidade produzida pela soma de 12 diferentes frames. À esquerda, um plot 2D da distribuição de intensidade; à direita, um plot 3D.

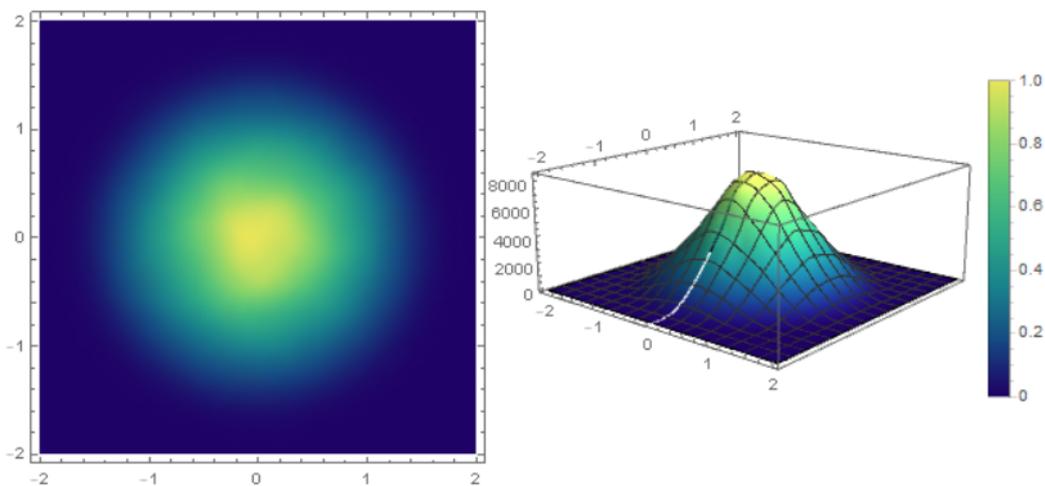


Figura 24 – Simulação da distribuição de intensidade produzida pela soma de 300 diferentes frames. À esquerda, um plot 2D da distribuição de intensidade; à direita, um plot 3D.

4.4 AVALIAÇÃO DE FEIXES TGSM PRODUZIDOS POR CAMPOS COERENTES COM FASES ALEATÓRIAS

Esta seção é dedicada a apresentar as ideias e resultados referente à publicação I desta tese, intitulada *Evaluation of twisted Gaussian Schell model beams produced with phase randomized coherent fields* [89] e publicado na revista *Journal of Optics* em agosto de 2022.

O principal objetivo deste trabalho é mostrar que o método de geração descrito na seção 4.3, primeiramente apresentado por Tian *et.al.* [185], pode conter ruídos coerentes que atrapalham a caracterização do feixe TGSM. Assim, uma proposta teórica incluindo uma coerência residual foi explorada e confirmada com dados experimentais.

Até aqui foi considerada a validade da propriedade de soma de fases aleatórias da Equação (120),

$$\langle e^{i(\varphi_m - \varphi_n)} \rangle = \delta_{m,n}.$$

Para o número de *frames* tendendo a infinito, esta condição é satisfeita, ou, no caso de um número muito grande de *frames*, esta média pode ser aproximada a zero. A questão é tomar conhecimento do quão grande deve ser a quantidade de *frames* para a condição ser válida, ou então, entender quais as consequências de um número limitado de *frames*.

Então, em cada *frame* temos uma função Φ associada dada por:

$$\Phi_l(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^N \sqrt{\rho(\mathbf{v}_n)} K(\mathbf{r}, \mathbf{v}_n) e^{i\varphi_{l,n}} \quad (156)$$

onde l é o índice que representa o *frame* do vídeo holográfico.

Portanto, a CSD do vídeo será a soma em l das CSD de cada *frame*.

$$\Gamma_{video}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \sum_{l=1}^L \sum_{n,m} \sqrt{\rho(\mathbf{v}_n) \rho^*(\mathbf{v}_m)} K(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_n) K^*(\mathbf{r}_2, \mathbf{v}_m) e^{i(\varphi_{l,n} - \varphi_{l,m})}. \quad (157)$$

Para $L \rightarrow \infty$ a soma em L das exponenciais tendem a $\delta_{n,m}$, enquanto para um valor finito de L , a soma é $L(\delta_{n,m} + \Delta_L)$, com:

$$\Delta_L = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L e^{i(\varphi_{l,n} - \varphi_{l,m})} \quad (158)$$

para $n \neq m$.

O parâmetro Δ_L pode ser interpretado como uma coerência residual entre os pseudo-modos.

Então, para avaliar a Equação (158) foi simulado a influência da coerência residual para valores de L num intervalo de 10 a 19000. Para cada valor de L , foi realizado 1000 amostragens a fim de obter um valor médio para Δ_L , então foi obtido o valor médio dado o número de *frames* $\langle \Delta_L \rangle$ e o desvio padrão σ_{Δ_L} .

A Figura 25 apresentam os resultados médios entre 1000 repetições das simulações de coerência residual Δ_L . Os valores acordaram bem com o fit de exponencial de inverso,

$$\langle \Delta_L \rangle \approx 3.56 \left(\exp \left(\frac{1}{4\sqrt{L}} \right) - 1 \right), \quad (159)$$

com desvio padrão

$$\sigma_{\Delta_L} \approx \frac{\langle \Delta_L \rangle}{2}. \quad (160)$$

Em um cenário de poucos *frames*, foi visto na Figura 23, que nem o padrão de intensidade gaussiano é formado e a contribuição coerente é muito grande. Para

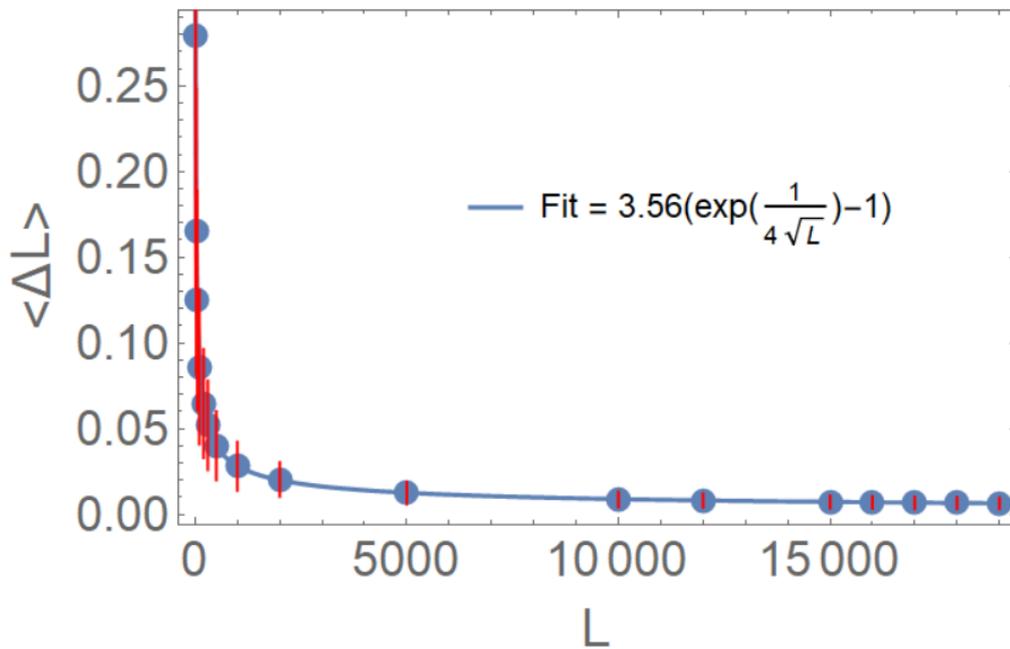


Figura 25 – Gráfico do valor médio do parâmetro de coerência residual Δ_L em função do número de *frames* L para valores obtidos pela média de 1000 repetições por ponto.

$L = 10$, a média Δ_{10} é aproximadamente 0.28 ± 0.15 , enquanto para $L = 19000$ foi obtido nas simulações $\Delta_{19000} \approx 0.0064 \pm 0.0033$. Já no caso mais realístico, onde o número de *frames* é da ordem de algumas centenas, a Figura 24 indica que o padrão de intensidade acorda muito bem com uma distribuição gaussiana, enquanto as simulações indicam coerência residual

$$\Delta_{300} \approx 0.051 \pm 0.027$$

, representando um valor não desprezível.

Para alcançar o caso ideal $\Delta_L \approx 0$, se faz necessário um número muito grande de *frames*. Esse número elevado torna inviável a sintetização desses feixes para os equipamentos atuais. Tanto a câmera quanto o SLM são dispositivos que operam com taxas de atualizações na casa de dezenas de Hertz. Assim, na maioria das aplicações, que estão limitadas à sintetização com cerca de algumas centenas de imagens, um fundo coerente está presente e pode ter contribuições notáveis.

Para levar essas contribuições em conta, retorna-se à CSD do vídeo, Equação (157), separando as somatórias em 2 conjuntos, somatória de $n = m$ e outra para $n \neq m$. Nota-se que a CSD de saída pode então ser escrita como uma combinação incoerente do feixe TGSM desejado, juntamente com um termo de fundo coerente

$$\Gamma_{\text{video}}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \Gamma_{n=m}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + \Gamma_{n \neq m}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \quad (161)$$

Na somatória de $n = m$, a somatória em l retorna L , resultando em

$$\Gamma_{n=m}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = L \cdot \Gamma_{\text{TGSM}}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \quad (162)$$

enquanto, para o caso $n \neq m$, aplicando a Equação (158) encontramos

$$\Gamma_{n \neq m}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = L \cdot \Delta_L \Gamma_{coh}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2), \quad (163)$$

onde

$$\Gamma_{coh}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \sum_{n=1}^N \sqrt{\rho(\mathbf{v}_n)} K(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{v}_n) \sum_{m=1}^M \sqrt{\rho^*(\mathbf{v}_m)} K^*(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{v}_m)$$

O fator L que aparece em ambas CSD pode ser suprimido no processo de renormalização. Após realizar a aproximação em primeira ordem da expansão em série de Taylor para Δ_L pequeno nos coeficientes $\frac{1}{1+\Delta_L}$ e $\frac{\Delta_L}{1+\Delta_L}$, temos

$$\Gamma_{video}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = (1 - \Delta_L) \Gamma_{TGSM}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + \Delta_L \Gamma_{coh}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2), \quad (165)$$

mostrando a CSD do vídeo em termos da CSD de um feixe TGSM e uma CSD de um ruído coerente, com pesos relativos dados por $1 - \Delta_L$ e Δ_L , respectivamente.

4.4.1 Medidas de Variância

O trabalho foi dividido em duas configurações de medições, a primeira configuração (Figura 26) é utilizada para a caracterização do sistema, para garantir que o feixe gerado é de fato um TGSM com distribuição de intensidade gaussiana e respeita a divergência no campo distante conforme os parâmetros de geração. Na sequência, visando medir a fase de twist e comprimento de coerência do feixe, se faz necessário a interferência espacial por um experimento de fenda dupla (Figura 28).

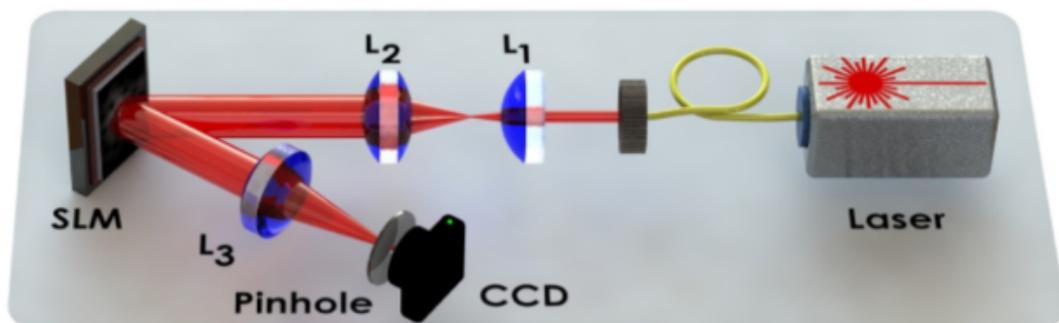


Figura 26 – Montagem experimental da etapa de caracterização da divergência no campo distante dos feixes TGSM.

Figura adaptada de [89]

O experimento descrito pela Figura 26 consiste em um laser contínuo operando a 1550nm acoplado em uma fibra monomodo que transmite o modo gaussiano TEM_{00} (modo eletromagnético transversal de ordem 00). O conjunto das lentes L1 e L2 expande o feixe para produzir uma onda colimada e com distribuição aproximadamente plana no SLM modelo Holoeye Pluto-Telco-013. Antes do SLM há uma placa de meia

onda (*half wave plate*, HWP) e um divisor de feixe polarizado (*polarizing beam splitter*, PBS), não mostrados na Figura 26, usados para preparar um feixe polarizado horizontalmente na tela do SLM. Na saída, o feixe já modulado pelos vídeos holográficos passam pela lente L3, que atua aplicando a transformada de Fourier do plano do SLM no plano da câmera CCD. Um pinhole é adicionado na entrada da câmera (plano de Fourier), utilizado como filtro espacial. A transformada de Fourier fornecerá as características do campo distante do plano da fonte (SLM).

Para a geração do feixe TGSM foi utilizado um vídeo holográfico conforme apresentado nas seções anteriores, onde o vídeo correu em repetição contínua no SLM a uma taxa de atualização de 15 *frames* por segundo (fps). Cada vídeo é composto por uma matriz 23x23 de fontes independentes. A câmera CCD utilizada foi configurada com um tempo de exposição equivalente aos 15 fps. Portanto, foi capturado uma sequência de *frames* únicos pela CCD e posteriormente somado cada uma das imagens utilizando softwares de edição dos dados.

Um método comum de avaliar as propriedades de coerência de um feixe TGSM é através da divergência do feixe [187]. Para isso, foi avaliada a geração dos feixes parcialmente coerentes, comparando a variância do feixe no campo próximo e distante com os previstos teoricamente.

No campo próximo, a variância

$$\sigma^2 = (1 - \Delta_L)\sigma_{TGSM}^2 + \Delta_L\sigma_{coh}^2 = \int \int [X_1 - E(X_1)]^2 [X_2 - E(X_2)]^2 \Gamma(X_1, X_2) dx_1 dx_2 \quad (166)$$

da CSD do feixe TGSM (Equação (150)) contém o termo da média do campo igual a zero

$$E(X_j) = 0$$

, por ser simétrico. Já o termo da média do quadrado do campo, pode ser avaliada na diagonal, onde $r_1 = r_2$. Portanto,

$$\sigma^2 = \int r_1^2 \Gamma(r_1, r_1) dr_1 = w^2, \quad (167)$$

tanto para o feixe TGSM quanto para o fundo coerente, tal que a variância total também é $\sigma^2 = w^2$.

Para realizar medidas do campo próximo, utiliza-se um conjunto de lentes para transportar o plano imagem no plano de detecção, ao invés do plano de Fourier, para o caso de medidas do campo distante.

As máscaras holográficas possuem $w_0 = 1$ mm e o feixe incidente no SLM foi medido com $w_{in} = 2.7 \pm 0.3$ mm, tal que o feixe é suficientemente grande a fim de ter intensidade aproximadamente constante na região de interação com a máscara.

Foram realizadas medições para diferentes máscaras holográficas que variam o comprimento de coerência de 0.4 a 5 mm e o valor da fase de *twist* entre 0 e 1. Na

média, as variâncias em x e y foram 0.99 ± 0.06 mm quando o *twist* normalizado é $\tau = 0$ e 0.96 ± 0.05 mm quando $\tau = 1$.

Agora, para as medidas da variância no campo distante, há um termo de fase referente ao raio de curvatura que deve ser considerado. O termo está representado na Equação (64), quando definida a CSD do feixe TGSM, mas foi suprimido na Equação (150) o termo referente ao raio de curvatura da frente de onda por simplicidade, por aproximar por ondas planas interagindo.

Então, para calcular a variância no campo distante, primeiro será necessário aplicar a transformada de Fourier espacial (r_1, r_2) na CSD do feixe e depois integrar a T.F. da CSD para $k_1 = k_2$. Assim como no campo próximo, a média do campo será zero, portanto a variância se dá por:

$$\sigma_{ff}^2 = \int k_1^2 \mathcal{F}\{\Gamma(r_1, r_2)\}_{k_1=k_2} d\mathbf{k}_1, \quad (168)$$

onde a CSD $\Gamma(r_1, r_2)$ contém o termo $\text{Exp}[-i\frac{k}{2R}(r_1^2 - r_2^2)]$.

Para o termo referente à CSD do TGSM a variância encontrada foi

$$\sigma_{ff-TGSM}^2 = \frac{1}{4w^2} + \frac{k^2 w^2}{R^2} + \frac{1}{\delta^2} + \frac{\tau^2 w^2}{\delta^4} \quad (169)$$

e, para a CSD coerente,

$$\sigma_{ff-coh}^2 = \frac{1}{4w^2} + \frac{k^2 w^2}{R^2}. \quad (170)$$

Portanto, a variância total é

$$\sigma_{ff}^2 = \frac{1}{4w^2} + \frac{k^2 w^2}{R^2} + (1 - \Delta_L) \left[\frac{1}{\delta^2} + \frac{\tau^2 w^2}{\delta^4} \right], \quad (171)$$

onde $\tau = \mu k \delta^2$ é o *twist* normalizado.

Para as medidas de divergência do feixe, apenas os vídeos com algumas centenas de *frames* foram utilizados, de modo que, na Equação (171), o termo $(1 - \Delta_L)$ pode ser aproximado para 1. Como visto na seção 4.3, para vídeos com dezenas de *frames*, o perfil de intensidade não toma a forma gaussiana, não sendo possível avaliar a dispersão no campo distante.

Portanto, a variância no campo distante,

$$\sigma_{ff}^2 = \frac{1}{4w^2} + \frac{k^2 w^2}{R^2} + \left[\frac{1}{\delta^2} + \frac{\tau^2 w^2}{\delta^4} \right], \quad (172)$$

tem uma dependência direta com o inverso quadrado do comprimento de coerência $1/\delta^2$, tornando a variância uma função quadrática em função da variável 'inverso quadrado do comprimento de coerência'

$$\sigma_{ff}^2 = \sigma_0^2 + \left[\chi + \tau^2 w^2 \chi^2 \right], \quad (173)$$

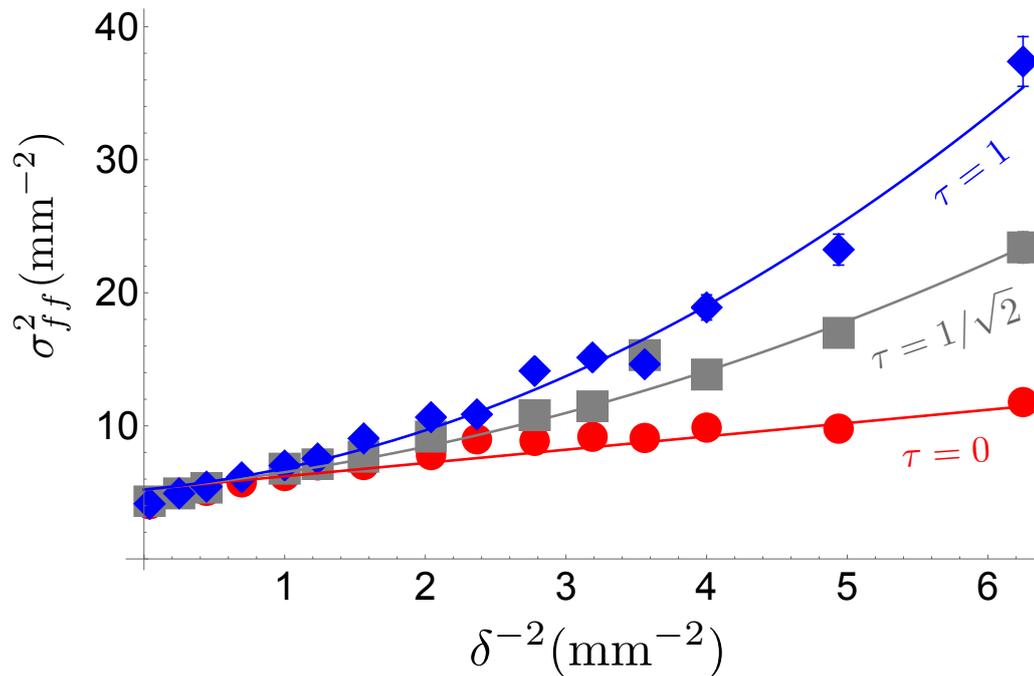


Figura 27 – Variância média, entre os eixos x e y , do campo distante para diferentes valores de *twist* normalizado em função do inverso quadrado do comprimento de coerência.

onde $X = 1/\delta^2$ e σ_0^2 englobam os termos que não dependem de parâmetros exclusivos de feixes parcialmente coerentes. A equação foi escrita em termos de X somente para deixar explícita a dependência quadrática no termo da fase de *twist*, indicando que feixes TGSM divergem mais que feixes GSM ($\tau = 0$) ou feixes coerentes ($X \approx 0$). A Figura 27 apresenta os resultados das medidas da variância média no campo distante para *twist* normalizados $\tau = 0, 1/\sqrt{2}, 1$ em função do inverso quadrado do comprimento de coerência.

As curvas são plots da Equação (172) com valores de w obtidos nas medidas de campo próximo. As esferas vermelhas são pontos experimentais de máscaras holográficas de GSM (*twist* nulo), os quadrados cinzas são medidas experimentais das máscaras holográficas de feixes TGSM com fase de *twist* normalizado $1/\sqrt{2}$ e os losangos azuis são medidas experimentais das máscaras holográficas para *twist* máximo. Os pontos experimentais acordam muito bem com as curvas teóricas, validando a qualidade de geração dos feixes parcialmente coerentes pelos vídeos holográficos.

4.4.2 Medidas de Comprimento de Coerência

Para prosseguir na avaliação dos parâmetros dos feixes parcialmente coerentes é necessário alterar o *setup* experimental. Para medidas diretas da fase de *twist* e do comprimento de coerência é necessária alguma interferência espacial [188]. Por isso será utilizado o *setup* descrito na Figura 28, onde uma lente L4 colima o feixe após a

filtragem espacial feita pelo *pinhole*. O conjunto de lentes L3 e L4 projetam a imagem do plano do SLM para o plano onde foi inserido a fenda dupla, após, a lente L5 aplica a transformada de Fourier do plano da fenda dupla no plano de detecção da CCD.

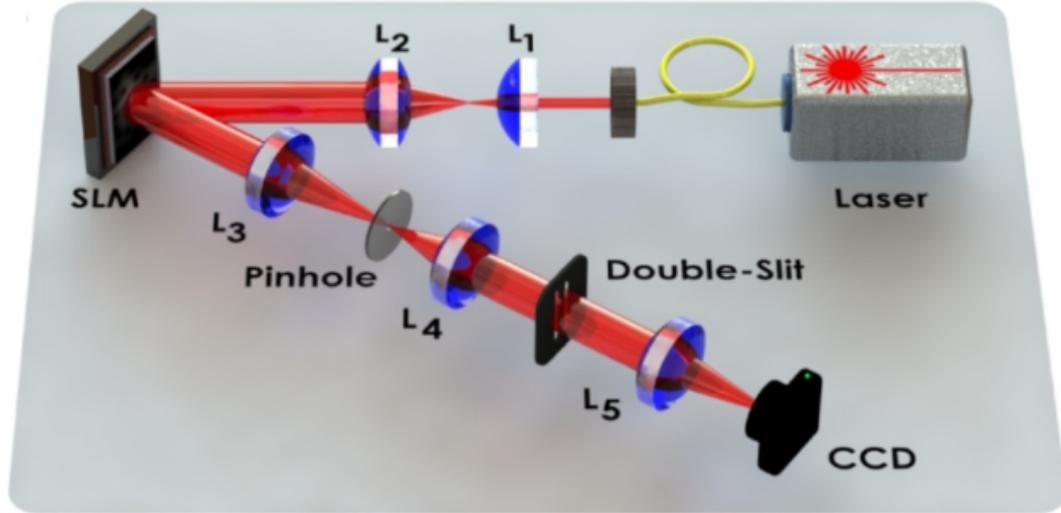


Figura 28 – Montagem experimental da etapa de medição dos comprimentos de coerência e fases de twist dos feixes TGSM.

Figura adaptada de [89]

A fenda dupla é orientada na direção x , com fendas posicionadas em $x = \pm d$ no plano imagem do SLM, então trata-se uma interação de campo próximo com o feixe TGSM ideal, descrito pela Equação (64). Ao integrar sobre o grau de liberdade y , é obtido o padrão de interferência no campo distante da fenda dupla e pode ser expresso por:

$$I_{TGSM}(x, \delta, \mu) = \gamma_{TGSM}(d, d) + \text{Re} [\gamma_{TGSM}(d, -d)] \cos \left(\frac{2dkx}{z} \right), \quad (174)$$

em que $\gamma_{TGSM}(d, -d)$ representa uma notação simplificada para a CSD avaliada em $x_1 = d$, $x_2 = -d$ e integrada sobre y . A visibilidade $V(\delta, \mu)$ é calculada, resultando em:

$$V(\delta, \mu) = \frac{\text{Re} [\gamma_{TGSM}(d, -d)]}{\gamma_{TGSM}(d, d)} = e^{-2\frac{d^2}{\delta^2}(1+\tau^2\sigma^2)}. \quad (175)$$

É possível notar que para um valor μ conhecido, o comprimento de coerência pode ser obtido pela visibilidade.

De maneira análoga, as expressões (174) e (175) podem ser escritas para o feixe coerente como

$$I_{coh}(x, \delta, \mu) = \gamma_{coh}(d, d) + \text{Re} [\gamma_{coh}(d, -d)] \cos \left(\frac{2dkx}{z} \right), \quad (176)$$

e

$$V_{coh}(\delta, \mu) = \frac{\text{Re} [\gamma_{coh}(d, -d)]}{\gamma_{coh}(d, d)} = 1. \quad (177)$$

Considerando o padrão de interferência determinado pela soma ponderada do campo coerente e do feixe TGSM como

$$I_{tot} = (1 - \Delta_L)I_{TGSM} + \Delta_L I_{coh}, \quad (178)$$

então a visibilidade total \mathcal{V}_{total} resulta em:

$$\mathcal{V}_{total} = \frac{(1 - \Delta_L)\sqrt{abe^{-d^2b}} + 4\pi\Delta_L}{(1 - \Delta_L)e^{\frac{d^2k^2\mu^2}{a}}\sqrt{ab} + 4\pi\Delta_L}, \quad (179)$$

onde a é definido na Equação (154) e b é definido como $a + 2\tau^2w^2$.

Para confirmar a veracidade da Equação (179), foram realizadas medições no campo distante do padrão de difração por uma fenda dupla. Foram utilizadas lentes com distâncias focais de $f_3 = 500$ mm e $f_4 = 150$ mm, proporcionando um fator de ampliação de 0.3. As fendas utilizadas possuem largura de $80\mu m$ e estão separadas por uma distância de $250\mu m$. Em relação aos parâmetros do feixe no plano do SLM, as dimensões da fenda são aumentadas por um fator 3.33 devido ao sistema de imagem, sendo $d = 250/0.3 = 833\mu m$.

No campo distante da fenda foram obtidas as distribuições de intensidade marginal na direção x pela soma das imagens 2D na direção y . Para estimar a visibilidade, foi realizado fits conforme a Equação (174). Nas Figuras 29 e 30, um gráfico dos dados experimentais é apresentado para $\tau = 0$ e $\tau = 1$, respectivamente, com círculos vermelhos e quadrados azuis representando feixes TGSM obtidos de $L = 300$ e $L = 30$ imagens. As linhas sólidas são referentes às curvas teóricas corrigidas pela Equação (179) enquanto a linha tracejada é um plot da Equação (175).

Tanto para $\tau = 0$ (Figura 29) quanto $\tau = 1$ (Figura 30) foram utilizados os valores de $\Delta_L = 0.05$ para $L = 300$ e $\Delta_L = 0.166$ para $L = 30$. É evidente que os dados experimentais concordam muito melhor com a equação corrigida para a visibilidade total (179).

Os dados indicam que, para um comprimento de coerência δ fixo, uma visibilidade superior é obtida com um número menor de imagens de vídeo (menor L), como consequência do maior fundo coerente. Esta observação foi posteriormente testada e validada pelo modelo teórico por meio de simulação de dados experimentais. A Figura 31 exibe a visibilidade obtida a partir de padrões de interferência simulados do experimento para parâmetros $\delta = 0.4$ mm e $\tau = 0$. A média e o desvio padrão da visibilidade são calculados a partir de um conjunto de 30 sequências aleatórias de L quadros, onde L variou de 30 a 980.

Para cada valor de L , a média e o desvio padrão de Δ_L são obtidos por amostragem de 10^3 repetições dos valores das fases aleatórias e utilizando a Equação (158). A curva sólida preta representa a previsão teórica dada pela Equação (179). Como observado, os valores para a visibilidade estão fortemente correlacionados com os de

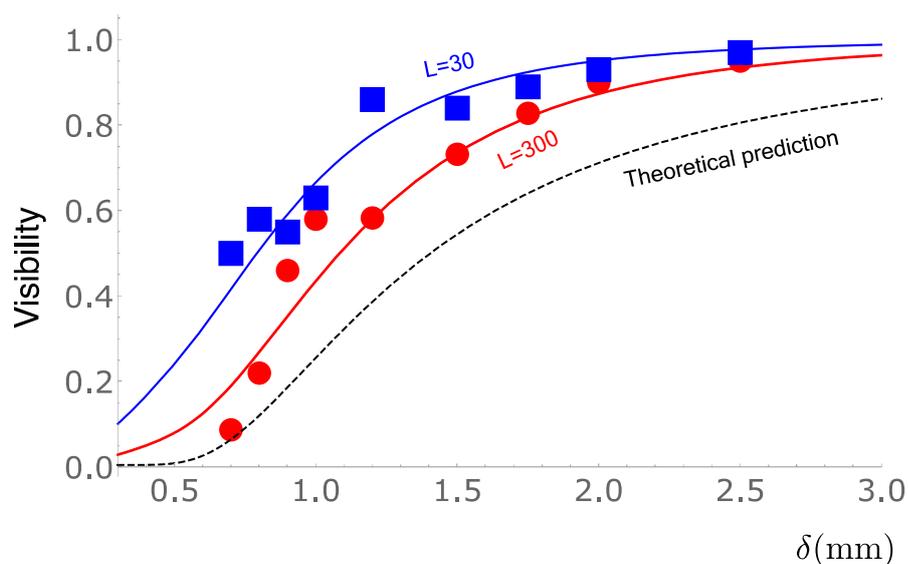


Figura 29 – Visibilidade como função do comprimento de coerência transversal para fase de *twist* normalizada $\tau = 0$. A curva pontilhada é a visibilidade do feixe TGSM sem correção do termo coerente. Círculos vermelhos são dados experimentais para vídeos de 300 *frames* de comprimento. Quadrados azuis são dados experimentais para vídeos de 30 *frames* de comprimento. As linhas azul e vermelho são curvas teóricas da visibilidade total corrigida pelo fator coerente com os devidos parâmetros. As barras de erros são menores que o tamanho dos símbolos

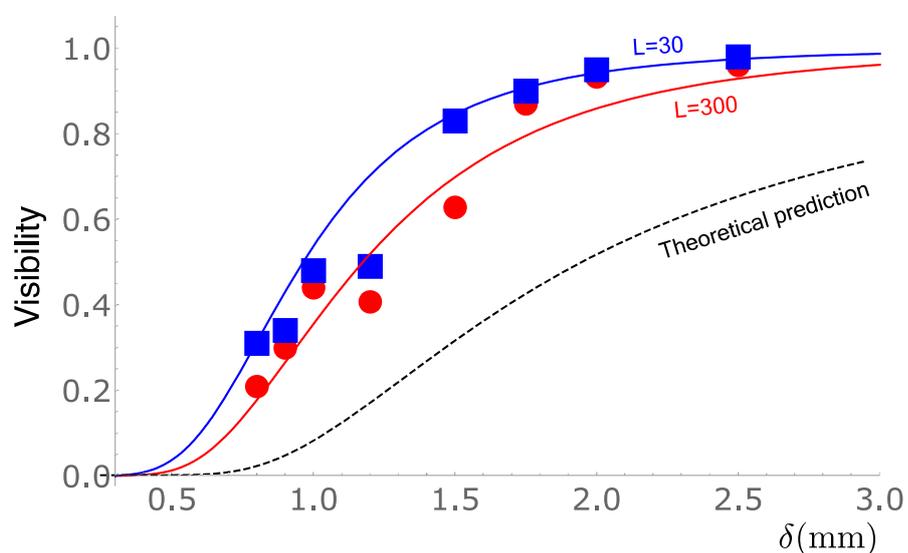


Figura 30 – Visibilidade como função do comprimento de coerência transversal para fase de *twist* normalizada $\tau = 1$. A curva pontilhada é a visibilidade do feixe TGSM sem correção do termo coerente. Círculos vermelhos são dados experimentais para vídeos de 300 *frames* de comprimento. Quadrados azuis são dados experimentais para vídeos de 30 *frames* de comprimento. As linhas azul e vermelho são curvas teóricas da visibilidade total corrigida pelo fator coerente com os devidos parâmetros. As barras de erros são menores que o tamanho dos símbolos

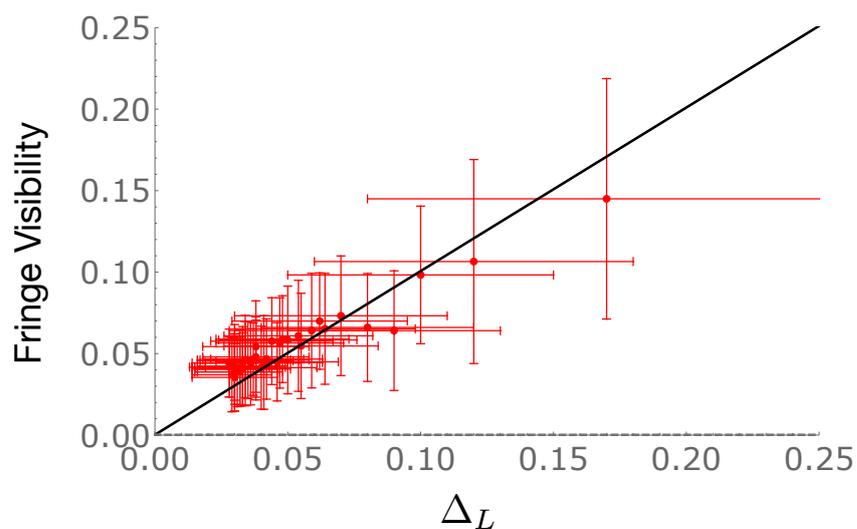


Figura 31 – Visibilidade em função do parâmetro de coerência Δ_L . Os pontos vermelhos são os valores médios das simulações usando os parâmetros: $\delta = 0.4$ mm e $\tau = 0$. As linhas vermelhas são as barras de desvio padrão e a linha preta corresponde à curva teórica dado pela Equação (179).

Δ_L e estão em acordo com o modelo teórico, demonstrando a validade do modelo e a importância da coerência residual entre os pseudo-modos.

4.4.3 Medidas da fase de *twist*

O termo da fase de *twist* quadrático exerce um efeito notável tanto na largura do feixe no campo distante quanto na visibilidade da interferência de fenda dupla, conforme discutido nas subseções anteriores. Contudo, esses métodos não fornecem indicações sobre o sinal da fase de *twist* ser positivo ou negativo.

Um método que permitiu a medição experimental da fase de torção envolve a observação da rotação do feixe em função da distância de propagação [185]. Aqui, foi realizado um método alternativo e conveniente, que explora o fato do padrão de interferência na fenda dupla ser influenciado pela fase de *twist*. Após difratar na abertura da fenda e propagar por uma distância z até o campo distante, o padrão de intensidade é descrito por:

$$I(\mathbf{r}) \approx e^{-\frac{x^2}{w_x^2}} e^{-\frac{y^2}{w_y^2}} \left[1 + e^{-\frac{2a^2}{\delta^2}} \cos \left\{ dk \left(\frac{x}{z} + 2\mu y \right) \right\} \right]. \quad (180)$$

Observa-se um desvio proporcional à μ no argumento da função cosseno. O desvio está relacionado à torção, amarrando os eixos x e y . Para $y = 0$, o desvio é nulo, para $y > 0$ o desvio é para a direita, enquanto na linha onde $y < 0$ há um desvio do máximo para a esquerda. O pico central é definido em $x = -2\mu zy$. Então, para um valor deslocado do centro numa quantidade $y = \pm h$ há um desvio relativo dado por $4\mu h$, que permite determinar o valor de μ .

A Figura 32 apresenta alguns exemplos da estimação do valor da fase de *twist* baseado no deslocamento do máximo central nos pontos $y = h$ e $y = -h$. O diagrama apresenta uma comparação entre o valor de μ estimado pelos deslocamentos dos máximos de intensidade μ_{est} em função do μ teórico utilizado na geração das máscaras holográficas μ_{th} .

Na Figura 32, μ_{th} é o valor teórico utilizado para gerar o feixe TGSM pelo SLM, enquanto μ_{est} é o valor estimado a partir do deslocamento do padrão. Os dados experimentais acordam razoavelmente com a teoria proposta, além de apresentarem uma maneira prática de medir a fase de torção não só em módulo, mas também em orientação.

Com isso, espera-se que o método possa contribuir para um entendimento amplo da geração de feixes parcialmente coerentes com fase de *twist* a partir de um laser coerente. Este entendimento aprimorado auxilia numa melhor validação dos parâmetros de saída, permitindo um ajuste *a priori* dos vídeos holográficos, levando em consideração os parâmetros alvos.

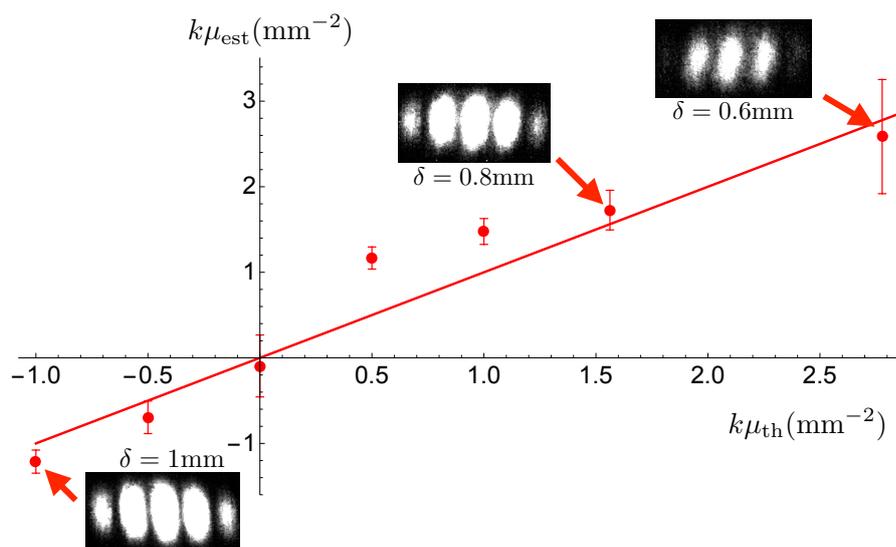


Figura 32 – Comparação entre os valores teóricos μ_{th} e medidos μ_{est} da fase de *twist*. A linha vermelha é a reta $\mu_{th} = \mu_{est}$.

5 EXPERIMENTOS COM INTERAÇÃO PARAMÉTRICA DE FEIXES GAUSSIANOS COERENTES

Este capítulo é dedicado a apresentar resultados da conversão paramétrica descendente estimulada para feixes totalmente coerentes, provenientes deste projeto. As discussões apresentadas aqui recorrem tanto à parte da teoria apresentada nas seções 2.2, 3.3, 3.5 e 4.2 quanto aos resultados se encontram nas publicações *II* e *III*.

5.1 REGRAS DE SELEÇÃO NA CONVERSÃO PARAMÉTRICA PARA LAGUERRE-GAUSS

Esta seção é dedicada a apresentar os resultados referente à publicação IV desta tese, intitulada *Beyond conservation of orbital angular momentum in stimulated parametric down-conversion* [167] e publicado na revista *Physical Review Applied* em outubro de 2021.

Este trabalho investiga algumas regras de seleção modais na conversão paramétrica descendente estimulada envolvendo, além da conservação de momento angular orbital, modos radiais.

O principal objetivo deste estudo foi em explorar as combinações modais geradas no processo de conversão paramétrica descendente, que surgem como consequência da conservação de momento angular orbital, apresentada na seção 3.5.

Seguindo a ideia utilizada por Mair *et al.* [30] no experimento de demonstração de conservação de momento angular na SPDC, é natural pensar que ao aplicar uma fase helicoidal de sinal oposto ao que um vortex óptico carrega, o mesmo passará a ocupar o modo TEM_{00} . No entanto, quando são considerados feixes estruturados, como os de Laguerre-Gauss, essa ideia não é válida.

E uma maneira prática de notar isso é considerar uma operação que adiciona fase azimutal, análogo ao SLM atuando num modo de Laguerre-Gauss. O campo de saída, modulado pela fase azimutal, será:

$$E'(\mathbf{r}, \theta, z) = E(\mathbf{r}, \theta, z) \text{Exp}[i\ell\theta], \quad (181)$$

onde $E'(\mathbf{r}, \theta, z)$ é o campo refletido e $E(\mathbf{r}, \theta, z)$ é o campo incidente. Para um modo $LG_{p,\ell}$ que passa por um modulador com fase $-\ell$ em um plano $z = 0$, o perfil transversal do campo adquire a forma

$$E'(\mathbf{r}, \theta) = C_1 \left(\frac{\sqrt{2}r}{w_0} \right)^\ell L_p^\ell \left(\frac{2r^2}{w_0^2} \right) \exp \left[-\frac{r^2}{w_0^2} \right], \quad (182)$$

que apresenta amplitude estruturada de um modo de $LG_{p,\ell}$, porém, sem a fase helicoidal. Então, para reescrever o campo em termos dos modos de frente de onda plana ($\ell = 0$), o campo fica escrito como uma soma sobre os índices radiais dos modos de

mesmo índice azimutal $\ell = 0$,

$$E'(\mathbf{r}, \theta) = \sum_{p'=0}^P c_{p',0} LG_{p',0}, \quad (183)$$

onde $c_{p',0}$ são os coeficientes de cada modo, definido por:

$$c_{p',0} = \int C_1 \left(\frac{\sqrt{2}r}{w_0} \right)^\ell L_p^\ell \left(\frac{2r^2}{w_0^2} \right) \exp \left[-\frac{r^2}{w_0^2} \right] \cdot LG_{p',0}^* dA, \quad (184)$$

onde o número de modos que descrevem o campo dependerá dos índices p, ℓ do campo inicial. Portanto, para um experimento envolvendo os vórtices ópticos da classe de Laguerre-Gauss, a aplicação de máscara de fase helicoidal e acoplamento em fibra monomodo TEM_{00} , produzirá uma perda de

$$Perda = 1 - |c_{0,0}|^2, \quad (185)$$

que se refere apenas à decomposição modal, uma vez que está sendo considerado um acoplamento perfeito, sem considerar outros parâmetros como eficiência de acoplamento na fibra ou tamanho do feixe.

Portanto, devido a sutilezas na composição modal que muitas vezes são descon sideradas, foi conduzida uma investigação experimental dos modos de Laguerre-Gauss no processo de conversão paramétrica descendente estimulado. O objetivo principal desta investigação é identificar superposições radiais no feixe *idler* a partir de feixes *pump* e *seed* com $p = 0$.

Antes de descrever matematicamente o campo *idler* em termos dos modos LG, pode-se perceber que modos com mesma distribuição de intensidade e fase azimutal opostas ℓ e $-\ell$ produzem resultados bem distintos, como apresentado na Figura 33.

A Figura 33 ilustra uma interação onde o *pump*, no modo $LG_{0,2}$, interage com o *seed*, também no modo $LG_{0,2}$. Ambos os feixes, sem índices radiais, geram no campo distante uma superposição de modos sem OAM. A análise inclui duas situações distintas: na primeira, o *pump* está preparado no modo $LG_{0,2}$ e o *seed* apresenta uma configuração com $l_s = -2$, resultando em um modo puro com $l_j = +2 - (-2) = +4$. Na segunda situação, com $l_s = +2$, o resultado é uma superposição de modos com $l_j = 0$.

A figura também destaca uma propriedade crucial que auxilia na distinção entre um modo puro e uma superposição: o padrão de intensidade tanto no campo próximo quanto no distante. No campo próximo, ambas as combinações exibem uma distribuição de intensidade anelar (exceto para os casos triviais, $l_p = l_s = 0$), influenciada pelo padrão anelar do *pump*. No entanto, no campo distante, o modo puro mantém seu perfil anelar, mas com aumento da largura do feixe $w(z)$ devido aos efeitos da divergência. Para a superposição modal com os mesmos índices azimutais, mas índices radiais

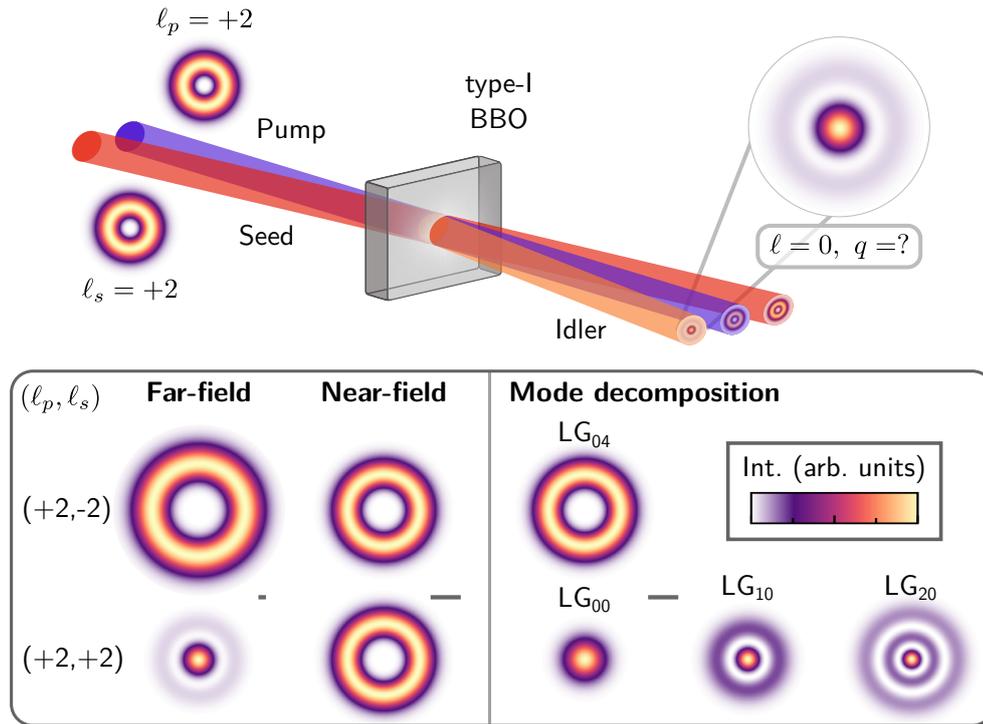


Figura 33 – Ilustração da geração de modos radiais e conservação de momento angular orbital na StimPDC.

Figura retirada de [167]

distintos, as diferenças nas fases de Gouy, resultantes das distintas ordens dos feixes, alteram a distribuição de intensidade devido às interferências.

Matematicamente, consideramos o campo no feixe *idler* representado pela Equação (87)

$$A_i(\mathbf{r}, 0) = igA_p(\mathbf{r}, 0)A_s^*(\mathbf{r}, 0).$$

Quando o *pump* e *seed* assumem um modo LG com $p = 0$, o campo do *idler* é escrito como:

$$A_i(\mathbf{r}, 0) = ig\mathcal{E}_p\mathcal{E}_s^*u_{0,\ell_p}u_{0,\ell_s}^*. \quad (186)$$

A estrutura espacial é determinada pelo produto dos modos LG,

$$u_{0,\ell_p}u_{0,\ell_s}^* = C_{\ell_p,\ell_s} \left(\frac{\sqrt{2}r}{w_i} \right)^{|\ell_p|+|\ell_s|} \text{Exp} \left[- \left(\frac{r^2}{w_i^2} + i(\ell_p - \ell_s)\theta \right) \right], \quad (187)$$

onde

$$C_{\ell_p,\ell_s} = \frac{2}{\pi} \frac{1}{w_p w_s} \frac{1}{\sqrt{|\ell_p|!|\ell_s|!}} \frac{w_i^{|\ell_p|+|\ell_s|}}{w_p^{|\ell_p|} w_s^{|\ell_s|}} \quad (188)$$

e

$$w_i = \frac{w_p w_s}{\sqrt{w_p^2 + w_s^2}}. \quad (189)$$

A Equação (187), por conter polinômios de elevada ordem a módulo de ℓ_p e ℓ_s , permite formas distintas a depender da combinação de sinais de *pump* e *seed*.

Quando os vórtices são contra-girantes ($\ell_p \ell_s \leq 0$), então

$$|\ell_p - \ell_s| = |\ell_p| + |\ell_s|$$

e o expoente do polinômio coincide com a ordem da carga topológica. Assim, a menos de fatores de normalização, o termo é escrito como um único modo da família de LG com determinada cintura w_i .

Já quando os vórtices são co-girantes ($\ell_p \ell_s > 0$), o módulo $|\ell_p - \ell_s| \neq |\ell_p| + |\ell_s|$ e o expoente do monômio na coordenada radial não coincide com o valor absoluto da carga topológica. No entanto, ele pode ser escrito como uma superposição de ordens radiais de carga topológica $\ell_p - \ell_s$ e a Equação (187) torna-se

$$u_{0,\ell_p} u_{0,\ell_s}^* = C_{\ell_p,\ell_s} \left(\frac{\sqrt{2}r}{w_i} \right)^{|\ell_p|+|\ell_s|} \left(\frac{2r^2}{w_i^2} \right)^P \text{Exp} \left[- \left(\frac{r^2}{w_i^2} + i(\ell_p - \ell_s)\theta \right) \right] \quad (190)$$

onde

$$P \equiv \frac{(|\ell_p| + |\ell_s| - |\ell_p - \ell_s|)}{2} = \min(|\ell_p|, |\ell_s|)$$

Usando a relação

$$x^P = \sum_{q=0}^P \frac{(-1)^q P!(P + |\ell|)!}{(P - q)!(q + |\ell|)!} L_q^{|\ell|}(x), \quad (191)$$

na Equação (190), obtemos

$$u_{0,\ell_p} u_{0,\ell_s}^* = C_{\ell_p,\ell_s} \sum_{q=0}^P c_q^P u_{q,\ell_j}, \quad (192)$$

onde

$$c_q^P = \frac{(-1)^q P!(P + |\ell_j|)!}{(P - q)! \sqrt{q!(q + |\ell_j|)!}}$$

e

$$\ell_j = \ell_p - \ell_s.$$

Neste caso, o campo *idler* é escrito como:

$$A_j(\mathbf{r}, 0) = ig \varepsilon_p \varepsilon_s^* C_{\ell_p,\ell_s} \sum_{q=0}^P c_q^P u_{q,\ell_j}. \quad (193)$$

Portanto, nos casos em que os campos incidentes no cristal *pump* e *seed* possuem cargas topológicas co-girantes, o feixe *idler* é composto por uma superposição de modos radiais com ℓ_j , como já ilustrava a Figura 33.

5.1.1 Medidas no campo distante

Para medir o perfil das estruturas formadas no campo distante, foi realizado uma montagem experimental como descrito na Figura 34, onde um laser de diodo com comprimento de onda igual a 405 nm é preparado para ser modulado pelo SLM 1. Para isso, o feixe é polarizado horizontalmente por uma placa de meia onda e expandido pelo conjunto de lentes ($L1$ e $L2$). Após a modulação, uma placa de meia onda a $\pi/4$ gira a polarização para a vertical a fim de interagir com o cristal não-linear BBO do tipo I (NLC). De maneira similar, o feixe *seed* (@780 nm) é também preparado para modulação no SLM2, por uma placa de meia onda e lentes $L3$ e $L4$. Após, o feixe *seed* é direcionado para o cristal para incidir com $\approx 0,07$ rad em relação à normal do cristal, para melhor satisfazer as condições de *phase-matching*.

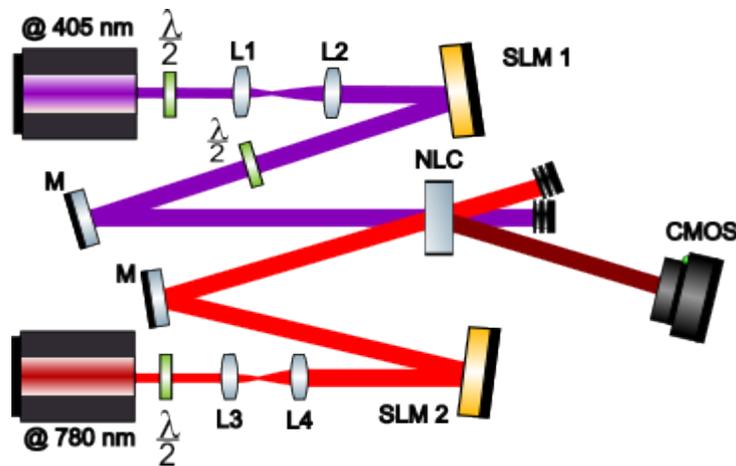


Figura 34 – Montagem experimental de feixes *pump* e *seed* colimados usando telescópios, mandados para SLMs para serem modulados em modos de Laguerre-Gauss com índice radial nulo e então combinados em um cristal não-linear BBO para produzir StimPDC do tipo I. Imagens de campo próximo e distante do perfil de intensidade do *idler* são capturadas por uma câmera CMOS após propagação livre.

Um SLM da Holoeye, modelo Pluto NIR-011 foi utilizado para modular os feixes em modos LG, conforme apresentado na seção 4.2. Ambos os feixes incidiram no SLM com aproximadamente 40 mW de potência, difratado para a primeira ordem de difração o modo de LG desejado, o qual passe por filtro espacial após o cristal. No cristal, o *pump* possui cerca de 5 mW de potência, enquanto o *seed* possui cerca de 12 mW. Após a interação no cristal não-linear, uma câmera registra o padrão de intensidade formado pelo feixe *idler* após cerca de 60 cm de propagação livre.

As análises foram realizadas mantendo a carga topológica do *pump* sempre negativa $\ell_p = -1$ ou $\ell_p = -2$, enquanto a carga topológica do *seed* variou de $+2$ a -2 . A Figura 35 apresenta as simulações teóricas e as medidas experimentais do perfil transversal de intensidades no campo distante para combinações (ℓ_s, ℓ_p) . Os casos em que as cargas topológicas são iguais (colunas 1 e 2), o *idler* não possui OAM,

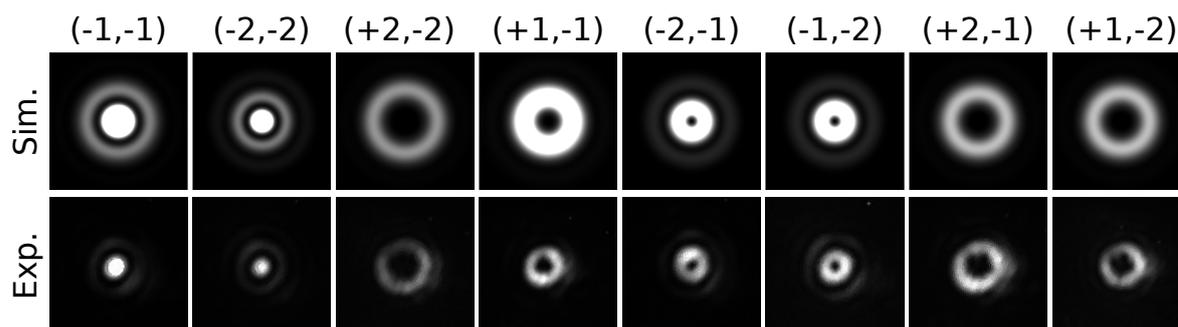


Figura 35 – Comparação entre simulação e medidas experimentais da distribuição de intensidade no campo distante para 8 diferentes combinações de carga topológica do *seed* e *pump* (ℓ_s, ℓ_p).

resultando em luz no centro do feixe seguido de anéis provenientes da ordem radial (1 anel para o caso $(-1, -1)$ e 2 anéis para o caso $(-2, -2)$). No caso apresentado nas colunas 5 e 6, onde as fases dos feixes são co-girantes, mas de diferentes cargas topológicas, então o *idler* possui o anel central proveniente da carga topológica e 1 anel externo devido ao modo radial. Os dois feixes apresentados nas colunas 5 e 6 possuem o mesmo perfil de intensidade devido a possuírem o mesmo módulo topológico, diferenciando-os apenas pelo sinal positivo e negativo, respectivamente. Já os casos apresentados nas colunas 3, 4, 7 e 8 os feixes *pump* e *seed* são contra-girantes, oferecendo um modo puro de LG definido pela carga topológica $\ell_i = \ell_p - \ell_s$.

Alguns modos, especialmente os contra-girantes que deveriam ser modos puros, apresentam pequenas discrepâncias entre os dados experimentais e simulados, especialmente a aparição de anéis externos discretos quando nenhum deveria se manifestar. Estas imperfeições são devidas a desvios do cenário ideal. A presença de aberturas circulares no arranjo experimental, como as bordas das lentes, introduz efeitos de difração no feixe de luz que podem ser observados como padrões de intensidade em forma de anel no campo distante. Tais anéis inesperados, no entanto, são muito menos intensos do que os relacionados aos modos radiais gerados. A relação de intensidade pode ser observada na Figura 36 que exibe uma comparação entre as distribuições de intensidade transversal do feixe *idler* experimental e simulado em um plano fixo no campo distante, para várias combinações de cargas topológicas dos feixes *pump* e *seed*. Foi utilizada a simetria cilíndrica das imagens e obtido os perfis de intensidade sobre a média azimutal das imagens.

Nota-se que em todas as imagens há a interferência de um ruído que provoca um aumento de intensidade na primeira ordem radial. Para os casos co-girantes, as medidas experimentais apresentam um pico levemente maior que o previsto teórico, já em medidas contra-girantes, surge um excesso de intensidade na base do padrão Laguerre-gaussiano. Em especial, o caso $(+1, -2)$ apresenta um efeito notável do excesso provocado pelo anel indesejado. Outro caso notável é o $(+2, -2)$ que o excesso de luz provoca um alargamento da base do perfil Laguerre-gaussiano, enquanto no

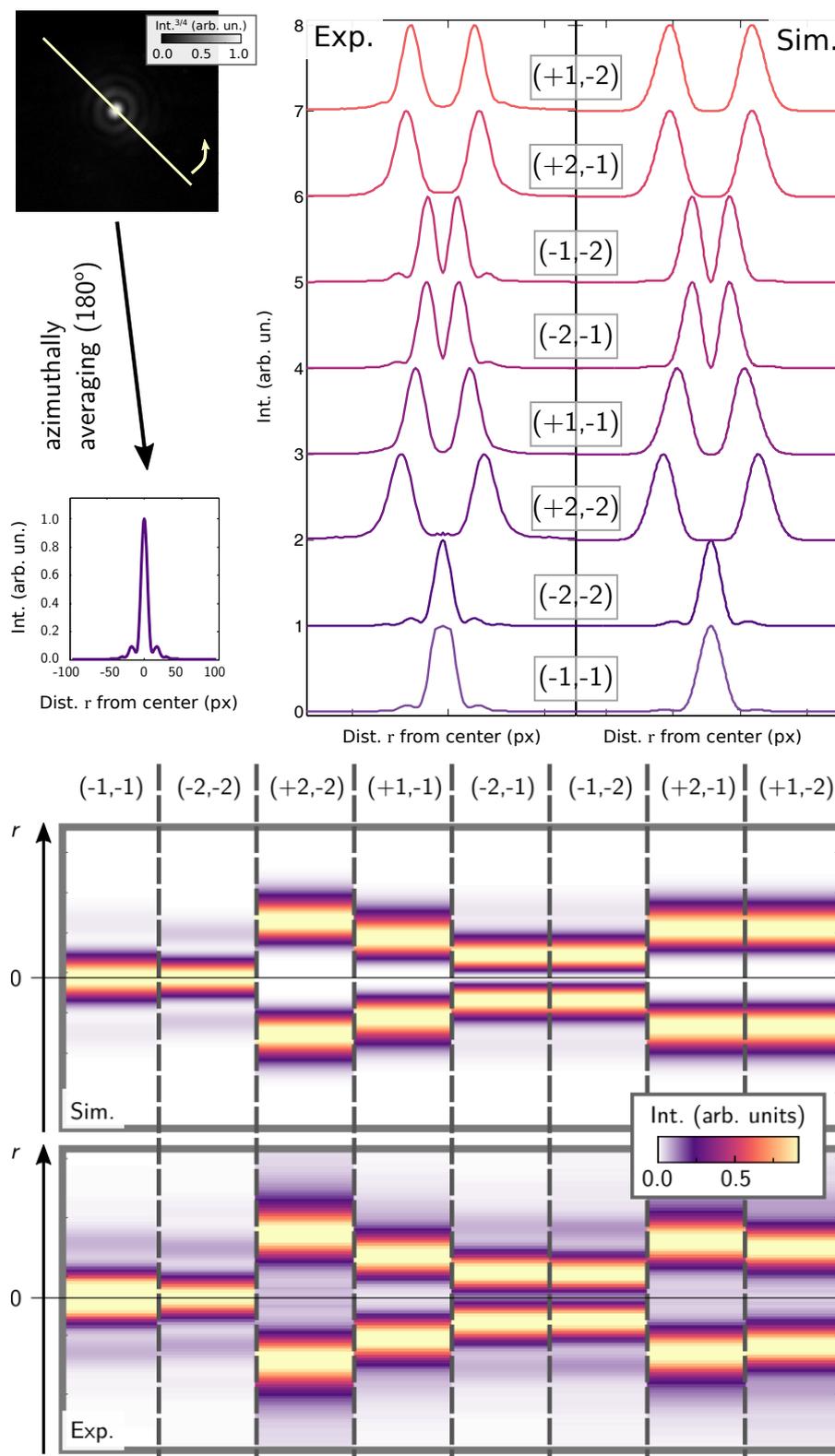


Figura 36 – Perfis transversais de intensidade (acima) e plot de densidade da intensidade (abaixo) do feixe *idler* simuladas e medidas, num plano fixo no campo distante, para diferentes combinações de cargas topológicas para os feixes *seed* e *pump*. Os perfis apresentados são obtidos através da média azimutal das imagens obtidas e normalizados pelo valor máximo de intensidade.

centro apresenta oscilações ruidosas.

Embora a presença destes anéis indesejáveis possa, em primeira vista, ser interpretado como efeito de modos radiais, eles contribuem com intensidades bem abaixo dos modos de LG ($p \neq 0$) e os perfis de intensidade concordam muito bem com as previsões teóricas, não deixando dúvida sobre a interpretação dos mesmos.

5.1.2 Evolução do campo próximo ao distante

Como mencionado anteriormente, quando *pump* e *seed* têm cargas topológicas iguais, observa-se o aparecimento de uma região luminosa ao redor do eixo óptico na área de campo distante. Esse fenômeno pode parecer surpreendente inicialmente, já que o perfil do *idler* na saída do cristal é formado pela sobreposição das intensidades dos feixes interagentes, os quais são vórtices ópticos com intensidade nula neste eixo. No entanto, este resultado é explicado devido à conservação do momento angular orbital no processo de conversão, onde o feixe convertido deve ter carga topológica resultante nula. O aparecimento destes máximos centrais de intensidade é compreendido ao considerar a presença de modos radiais gerados durante o processo de conversão.

Por exemplo, para o caso de *pump* $\ell_p = -1$ e *seed* $\ell_s = -1$, no plano do cristal ($z = 0$) o campo é descrito como:

$$A_i(\mathbf{r}, 0) \approx r^2 \text{Exp} \left[-\frac{r^2}{w_i^2} \right], \quad (194)$$

que pode ser decomposto em modos de LG de $\ell = 0$ como

$$A_i(\mathbf{r}, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}} (LG_{0,0} - LG_{1,0}), \quad (195)$$

já que o polinômio associado de Laguerre para $p = 1$ é $L_p^\ell(x) = L_1^0(x) = -x + 1$, enquanto o $L_0^0(x) = 1$. Assim, como o modo de Laguerre-Gauss está escrito em função do polinômio associado de Laguerre com argumento quadrático ($2r^2/w^2$), facilmente podemos perceber a relação entre as Equações (194) e (195).

Então, em $z = 0$, a Equação (194) tem distribuição de intensidade mostrado na Figura 37.

Já no campo distante, quando modos adquirem diferentes fases de Gouy

$$\zeta_{p\ell}(z) = (2p + |\ell| + 1) \tan^{-1} \left(\frac{z}{z_R} \right)$$

, devido às ordens diferentes, o padrão de intensidade se torna como o mostrado na Figura 38. Nela, é apresentado o perfil de intensidade dos modos $1/\sqrt{2}(LG_{0,0} - LG_{1,0})$ no campo distante $z = \infty$ e também é apresentado um corte transversal em $y = 0$ para evidenciar a presença da ordem radial.

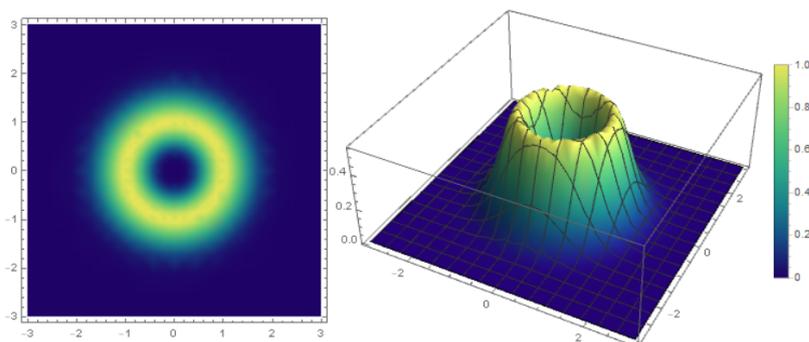


Figura 37 – Distribuição de intensidade do campo $1/2(LG_{0,0} - LG_{1,0})$ em $z = 0$

Para observar como o perfil de intensidade do campo evolui do campo próximo para o distante, medições foram efetuadas em vários planos, começando no plano do cristal em $z = 0$ e se estendendo até um ponto suficientemente afastado onde o padrão de intensidade se estabiliza. Para facilitar estas medições, um telescópio foi conectado à câmera, permitindo capturar imagens a uma distância de 28,5 cm do plano de detecção da câmera.

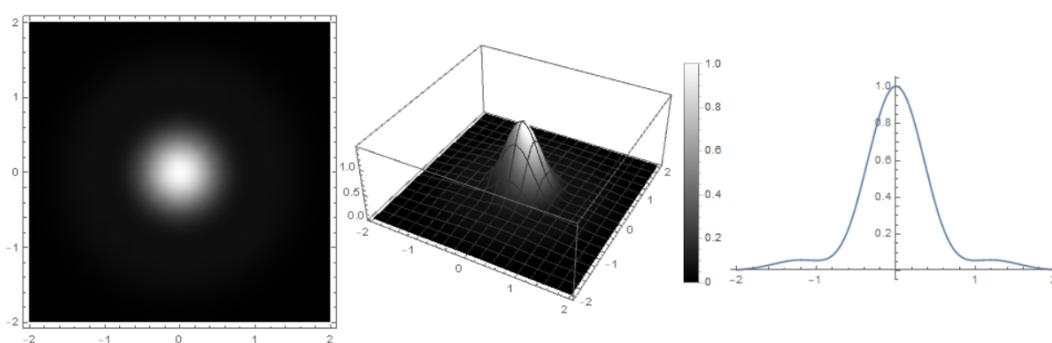


Figura 38 – Distribuição de intensidade do campo $1/2(LG_{0,0} - LG_{1,0})$ no campo distante $z = \infty$. A direita, um corte transversal em $y = 0$ do perfil de intensidade. A escolha em escala de cinza foi escolhida por destacar melhor a ordem radial.

A Figura 39 apresenta a simulação e as respectivas medidas experimentais da propagação do campo próximo do cristal ao campo distante, para modo do *pump* preparado em $LG_{0,-1}$ e *seed* preparado como $LG_{0,-1}$, $LG_{0,+1}$, $LG_{0,-2}$ e $LG_{0,+2}$. Para modos com OAM co-girantes, a distribuição transversal do *idler* sofre alteração ao longo da propagação devido às diferentes fases de Gouy adquirida por modos de ordens distintas. Enquanto as combinações de modos contra-girantes apresentam um padrão de divergência natural de um modo puro de Laguerre-Gauss.

Analisando a propagação do campo próximo ao campo distante, os padrões demonstram um acordo muito bom com as simulações, confirmando a interpretação sobre os modos de LG gerados e sobre os ruídos anelares.

Neste trabalho, foram descobertas regras de seleção que vão além da conservação do momento angular na StimPDC. Relações matemáticas simples foram obtidas

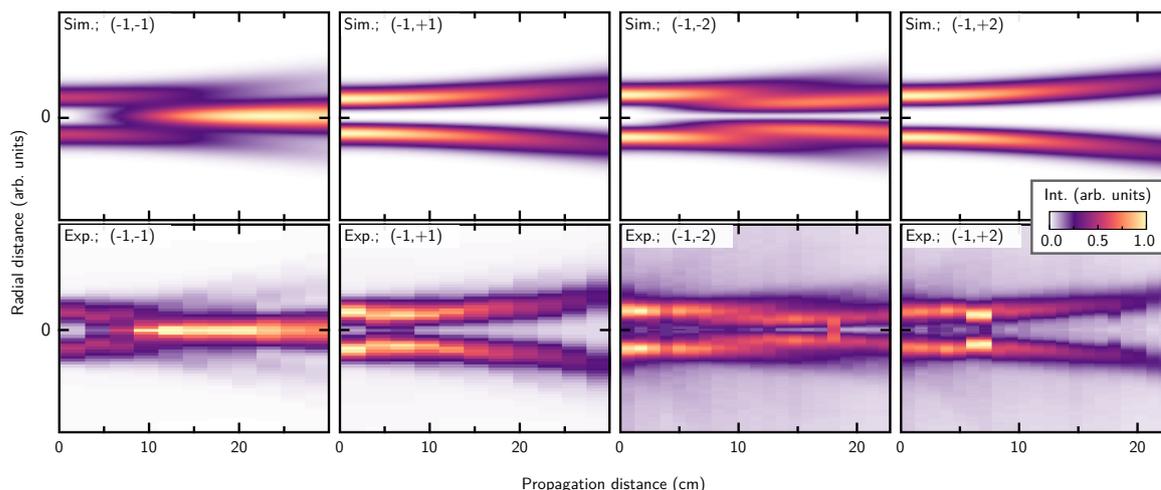


Figura 39 – Perfis experimentais e simulados para o feixe idler como função da distância de propagação (começando pelo plano do cristal), para diferentes combinações de vórtices ópticos em StimPDC. Os perfis de intensidade obtidos pela média azimutal mostram a evolução do campo próximo ao distante para os feixes gerados.

entre as cargas topológicas do *pump* e do *seed*, as quais determinam a estrutura do modo radial do campo *idler*. Para combinações resultantes em um número radial nulo, identifica-se que o *idler* é um modo LG puro, pois as partes radiais e angulares do campo se correspondem. Entretanto, destaca-se a possibilidade de serem gerados campos *idler* com ordem radial não nula e OAM líquido a partir de feixes de entrada de ordem radial zero. Nesses casos, o campo é sempre caracterizado como uma superposição de modos, devido à presença de um descompasso radial-angular. Os resultados também se encontram em acordo com o processo análogo de conversão paramétrica ascendente (*up-conversion*) [90, 92]. No caso da *up-conversion*, a relação entre feixes co-girantes e contra-girantes se inverte devido à conjugação de fase que acontece no processo de conversão descendente.

5.2 OBSERVAÇÃO DE PADRÃO DE DIFRAÇÃO DE REDE TRIANGULAR EM PROCESSOS NÃO-LINEARES

Esta seção é dedicada a apresentar os resultados referentes à parte que envolve a conversão paramétrica descendente estimulada na publicação III desta tese, intitulada *Observation of a triangular-lattice pattern in nonlinear wave mixing with optical vortices* [168] e publicado na revista *Optica* em agosto de 2022.

O foco principal deste trabalho é ressaltar a importância dos sistemas não-lineares na capacidade de modulação espacial dos feixes. As técnicas propostas neste estudo possibilitam a extensão da modulação da luz pela luz para ser aplicada em feixes com comprimentos de onda onde os SLMs atuais apresentam resolução limitada.

O processo de conversão paramétrica descendente descrito na seção 3.3 de-

monstra a sobreposição espacial entre os modos interagentes na Equação (87)

$$A_i(\mathbf{r},0) = igA_p(\mathbf{r},0)A_s^*(\mathbf{r},0).$$

No entanto, uma representação física mais atrativa é considerar as propriedades de propagação do campo de saída como resultado da modulação cruzada espacial devido à interação não linear entre os feixes de entrada, equivalendo à difração através de uma abertura.

Explorando esse efeito para uma abertura triangular (Figura 40), demonstra-se a ocorrência de um efeito marcante nos fenômenos de difração de feixes de vórtice gerados no processo óptico não linear, nomeadamente, a formação de uma rede triangular nos padrões de campo distante [94, 189, 190].

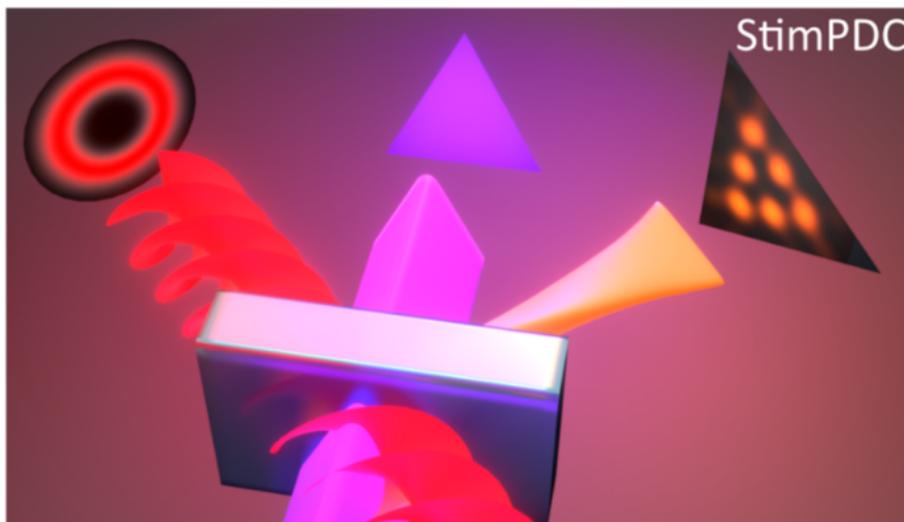


Figura 40 – Modulação cruzada dos campos de luz na conversão paramétrica descendente. Feixe *pump* com modulação triangular enquanto o feixe *seed* apresenta estrutura espacial de LG.

5.2.1 Geração de rede triangular

Para explorar a geração da rede triangular no feixe *idler* no campo distante, é necessário simular o feixe *idler* passando por um obstáculo de abertura triangular, no plano do cristal, um campo descrito por:

$$A_{out}(\mathbf{r}) = \mathcal{T}(\mathbf{r})A_{in}(\mathbf{r}), \quad (196)$$

onde $\mathcal{T}(\mathbf{r})$ é a função de transmissão do obstáculo.

Para gerar o campo A_{out} no feixe *idler*, pode-se considerar o campo *seed* como o de entrada A_{in} e o campo do *pump* com o perfil transversal dado por $\mathcal{T}(\mathbf{r})$. Portanto, foi realizado uma montagem experimental típica de StimPDC, com o feixe *pump* passando por uma abertura física triangular.

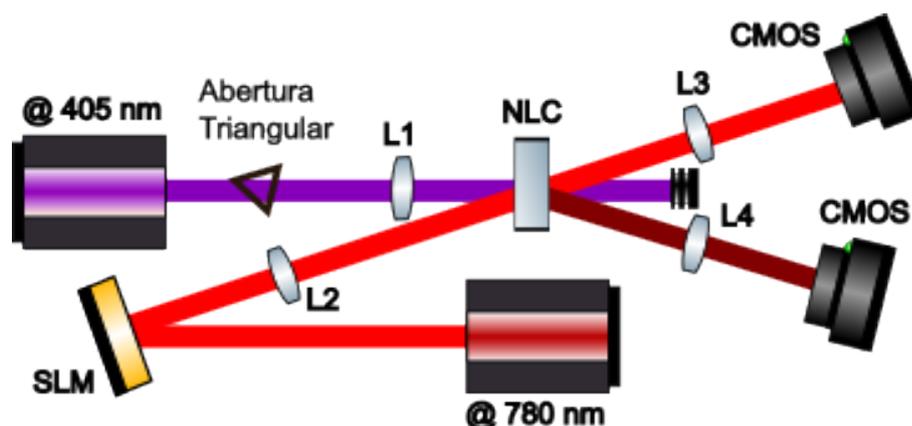


Figura 41 – Montagem experimental para modulação espacial cruzada do perfil de intensidade na conversão paramétrica descendente.

A Figura 41 mostra o esquema do arranjo experimental. Um feixe de laser de 405 nm, polarizado verticalmente e de 30 mW, é usado para bombear um cristal não linear de beta borato de bário. O feixe é transmitido através de uma abertura triangular mecânica (não SLM). O plano da abertura é projetado no plano do cristal usando uma lente (L1) de 30 cm de distância focal. Como feixe *seed*, é utilizado um laser de 780 nm de comprimento de onda e polarização horizontal. Um SLM é utilizado para modelar o feixe *seed* como modos LG, e o plano do SLM é projetado no plano do cristal usando uma lente (L2) de 30 cm de distância focal. O feixe *pump* incide quase perpendicularmente à superfície do cristal BBO, enquanto o feixe *seed* incide a cerca de 0,07 rad em relação a ele. As distribuições de intensidade de campo distante de ambos os feixes *seed* e *idler* são registradas por câmeras CMOS com a ajuda de lentes (L3 e L4) de 40 cm de distância focal que fazem a transformada de Fourier do plano do cristal no plano da câmera.

Foram utilizados feixes *seed* LG com cargas topológicas variando de -3 a $+3$. Os resultados são mostrados na Figura 42. A fileira superior exibe os perfis de intensidade dos feixes LG medidos. Imagens dos padrões de intensidade de campo distante do feixe *idler* medidos e calculados teoricamente são mostradas nas fileiras do meio e inferior, respectivamente.

Os resultados demonstram a boa concordância entre os padrões de intensidade experimentais e teóricos. Para cada processo de conversão individualmente, observa-se a formação de uma rede triangular com carga topológica $|j| = N - 1$, onde N é o número de lóbulos de alta intensidade nas bordas, e a orientação depende do sinal de ℓ_s . Esses resultados reforçam a representação física apresentada anteriormente, ao seguirem o que é observado ao difratar um feixe LG por uma abertura triangular [94].

Os resultados explicitam que a modulação espacial efetiva na StimPDC é tanto de amplitude quanto de fase. Esse resultado oferece a StimPDC como uma poderosa ferramenta para modulação de feixes e é de grande valia para o principal objeto de

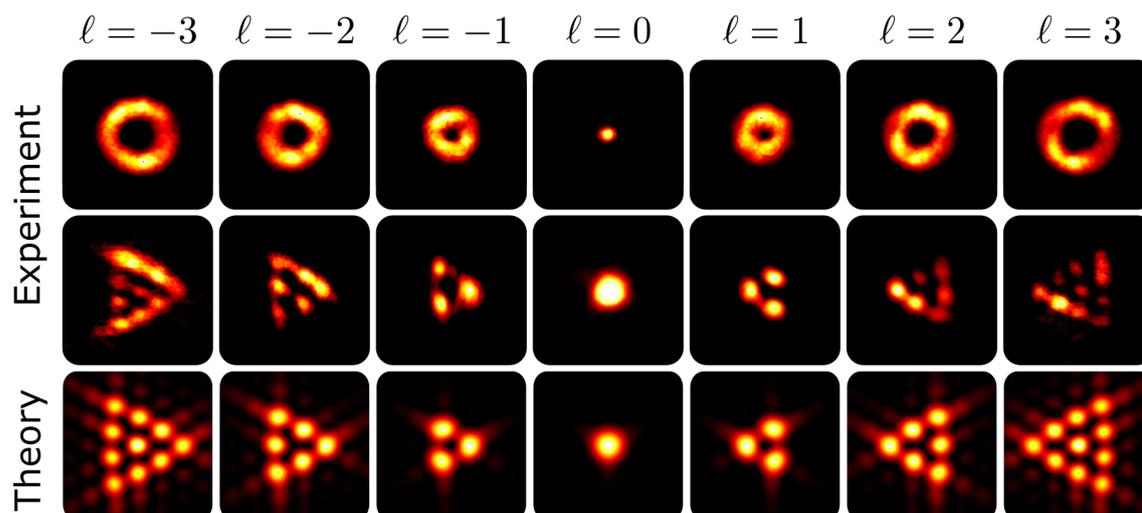


Figura 42 – Padrões de intensidade de campo distante medidos para os campos *seed* LG (fileira superior) e *idler* (fileira do meio) são apresentados. A fileira inferior exhibe os padrões teóricos do *idler*.

estudo desta tese, pois permite aplicações diretas em feixes com coerência parcial reduzida.

6 EXPERIMENTOS COM INTERAÇÃO PARAMÉTRICA DE FEIXES GAUSSIANOS PARCIALMENTE COERENTES

Este capítulo é dedicado a apresentar resultados provenientes deste projeto envolvendo os feixes parcialmente coerentes e o processo de conversão paramétrica descendente. Os resultados apresentados aqui se encontram nas publicações *IV* e *V*.

6.1 CONJUGAÇÃO DE FASE DE FEIXES TGSM NA CONVERSÃO PARAMÉTRICA DESCENDENTE ESTIMULADA

Esta seção é dedicada a apresentar os resultados referente à publicação *IV* desta tese, intitulado *Phase conjugation of twisted Gaussian Schell model beams in stimulated down-conversion* [174] e publicado na revista *Nanophotonics* em novembro de 2021.

O principal objetivo deste trabalho consiste na demonstração experimental da interação paramétrica descendente de feixes gaussianos parcialmente coerentes, apresentados na seção 3.6, utilizando métodos de sintetização apresentados na seção 4.3. A teoria fundamental para o entendimento deste trabalho já foi detalhada nos capítulos anteriores. A configuração mais generalizada está descrita na 3.6.4.2, onde o feixe *pump* e *seed* são feixes TGSM independentes.

O experimento é montado com uma configuração padrão de experimentos em StimPDC, apresentados na Figura 43. Com um feixe *pump* preparado com polarização vertical e comprimento de onda igual a 405 nm, bombeia-se um cristal não-linear BBO tipo I, enquanto um feixe *seed* com comprimento de onda igual a 780 nm é preparado em polarização horizontal, passa por um SLM, onde é modulado espacialmente por vídeos holográficos, sendo direcionado para o cristal não-linear. Para obter as condi-

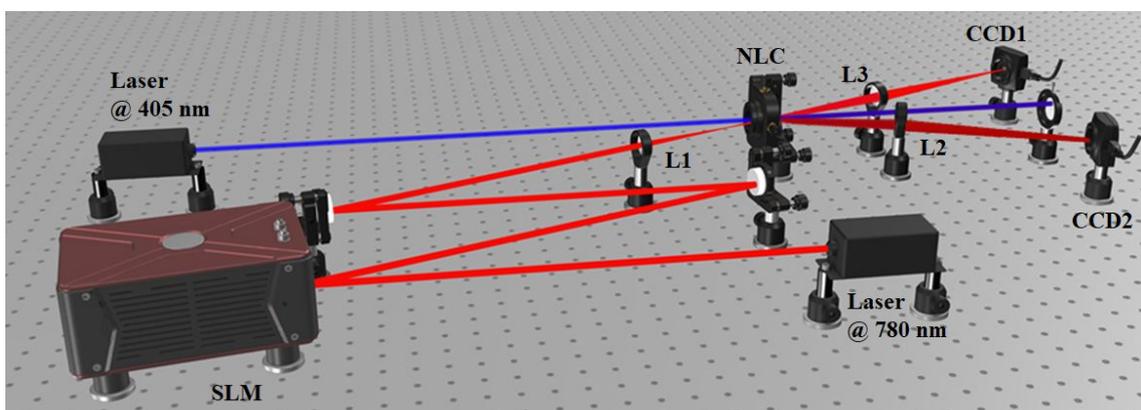


Figura 43 – Montagem experimental de medidas de campo distante dos feixes *seed* e *idler* na conversão paramétrica descendente estimulada. Um feixe *pump* @405 nm de perfil gaussiano bombeia um cristal não-linear enquanto um feixe @780 nm estimula o processo, aumentando consecutivamente também o sinal complementar *idler* em \approx @840 nm.

ções de *phase-matching* o feixe *seed* é incidido com um ângulo de aproximadamente 0,07 rad. A lente $L1$ com distância focal de 30 cm, é usada para projetar o plano imagem da tela do SLM no plano do cristal com um fator de magnificação de 0.56. As lentes $L2$ e $L3$ são lentes de 40 cm de distância focal sendo utilizadas para projetar o campo distante do plano do cristal no plano de detecção das câmeras CCD1 e CCD2. As câmeras foram programadas para captar imagens num período de 20 segundos, dispostas em 20 capturas contínuas com tempo de aquisição de 1 segundo cada.

Os vídeos holográficos foram preparados de maneira similar ao apresentado na seção 4.3 e na publicação / [89], descrita na seção 4.4, com comprimento $L = 300$. Embora o mesmo método de geração de feixes parcialmente coerentes tenha sido utilizado, segundo as Equações (152)-(154), aqui foi adicionado uma máscara holográfica simulando uma fenda dupla.

A máscara holográfica que simula uma fenda dupla, pode ser simulada por uma reprodução de uma área selecionada dos vídeos holográficos (Figura 44). A seleção da área é gerada por combinações de funções de Heaviside

$$H(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0, \\ 1, & \text{se } x \geq 0. \end{cases} \quad (197)$$

Para uma fenda dupla de abertura a e espaçamento entre as fendas d , a função é

$$f_{DS}(y) = H\left(y_c + \frac{d}{2} + \frac{a}{2}\right) - H\left(y_c + \frac{d}{2} - \frac{a}{2}\right) + H\left(y_c - \frac{d}{2} + \frac{a}{2}\right) - H\left(y_c - \frac{d}{2} - \frac{a}{2}\right) \quad (198)$$

onde y_c é a posição da centralização das máscaras holográficas em número de píxels.

A Equação (198) gera duas funções degrau simétricas em torno do centro da modulação TGSM, sendo igual a um na área selecionada e zero no restante. Como o vídeo holográfico consta com uma máscara sobreposta que simula a grade de difração, o SLM atua direcionando o feixe para a ordem um de difração apenas na região selecionada e em todo o resto atua como espelho (ordem zero de difração). Portanto, na ordem de interesse temos um efeito análogo ao feixe passando por uma fenda dupla (Figura 44).

A fenda foi gerada verticalmente por concordar melhor com a difração gerada pela conversão descendente. Como a SPDC gera um cone de luz e estamos olhando na região próxima ao plano $y = 0$, então a faixa selecionada pelo filtro seletor de banda se estende mais ao longo da vertical que da horizontal.

A Figura 45 apresenta uma imagem do feixe *idler* obtida pela câmera CCD no plano distante. O feixe é selecionado por filtros de passa-banda, para o *idler* de 840 ± 10 nm. O aro brilhante é parte do cone de luz produzido pela conversão paramétrica descendente espontânea, enquanto que a região de maior brilho é o feixe estimulado. O feixe estimulado está saturado na imagem devido à maior intensidade que possui naturalmente, comparado ao feixe espontâneo. Então, para obter uma imagem nítida

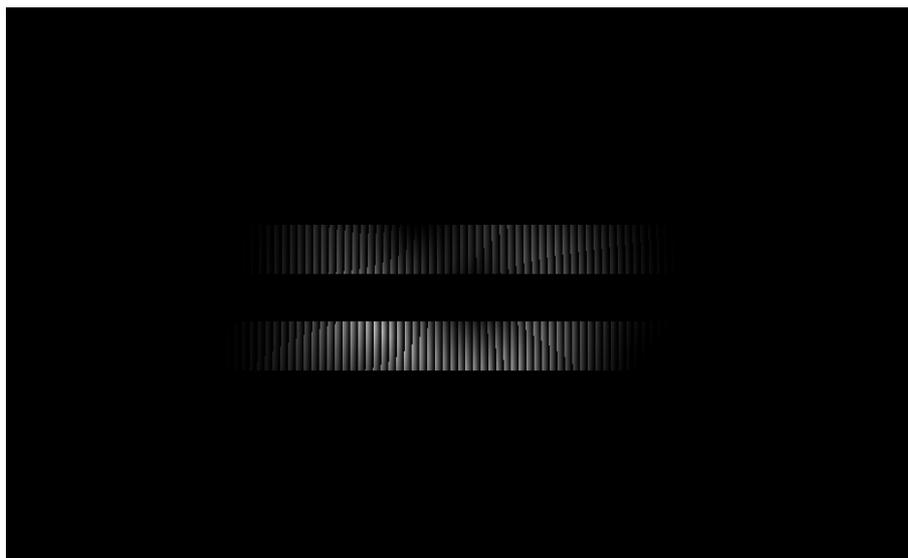


Figura 44 – Máscara holográfica de um *frame* do vídeo holográfico TGSM sobreposto à máscara de fenda dupla.



Figura 45 – Imagem captada pela câmera do cone de luz da conversão paramétrica descendente filtrado em 840 ± 10 nm.

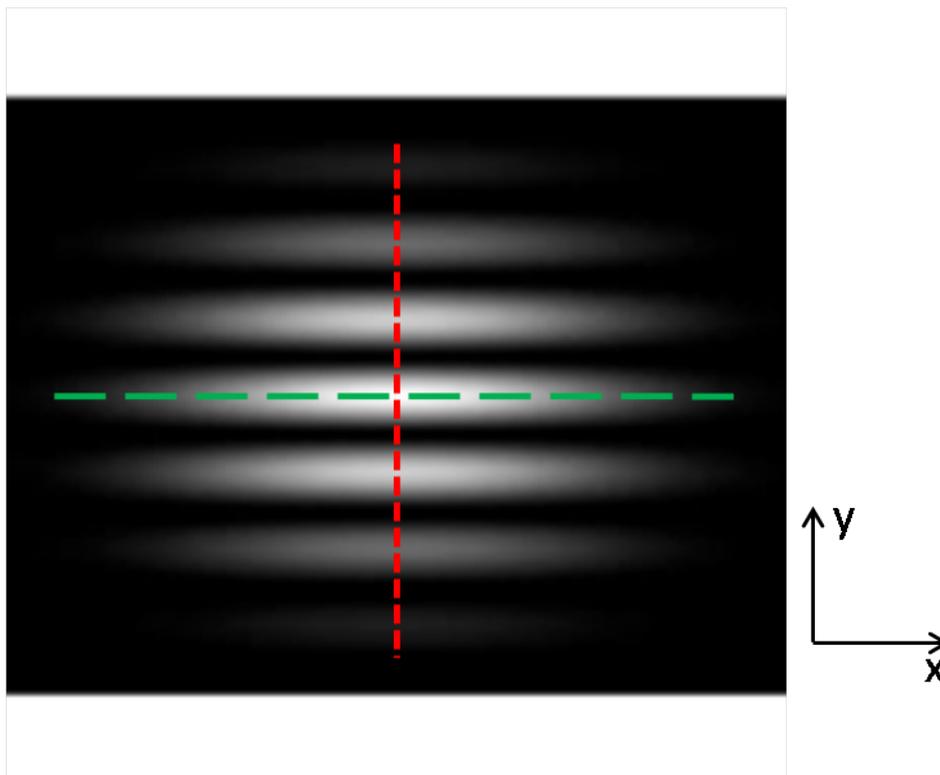


Figura 46 – Padrão de interferência de experimento de fenda dupla no campo distante.

do cone de luz se faz necessário baixar os níveis de máximos e mínimos da imagem, tendo como consequência a saturação da parte estimulada e perda de resolução. No entanto, para as medições sempre foi tomado o cuidado de trabalhar em regimes onde o feixe estimulado estava abaixo do brilho máximo permitido pela câmera (16 bits = 65.536 níveis de cinza).

Diferente do que foi realizado na seção 4.4 [89], aqui utilizamos as mesmas configurações de máscaras holográficas sobrepostas em fenda dupla para ambas as medições, variância no campo distante e visibilidade. Embora o padrão de interferência gerado pela fenda dupla no campo distante não ofereça informações sobre a largura do feixe, foi analisado a variância no eixo x , enquanto a visibilidade pela interferência no eixo y . A Figura 46 representa um padrão de interferência de experimento de fenda dupla no campo distante. As informações referentes à variância foram obtidas a partir da distribuição marginal ao longo do eixo x (linha pontilhada verde), enquanto a visibilidade foi obtida pela distribuição marginal ao longo da linha tracejada vermelha (eixo y).

6.1.1 Medidas da variância no campo distante

Para confirmar a eficiência de geração de um feixe do tipo GSM e TGSM, medimos o campo distante do feixe *seed* e *idler* para diferentes valores de comprimento de coerência. Assim como em 4.4 foram utilizados os critérios de avaliação da variân-

cia no campo distante e visibilidade de difração por uma fenda dupla. A variância do campo É dada pela Equação (172)

$$\sigma_{ff}^2 = \frac{1}{4w^2} + \frac{k^2 w^2}{R^2} + \left[\frac{1}{\delta^2} + \frac{\tau^2 w^2}{\delta^4} \right].$$

Utilizamos vídeos holográficos com 17 diferentes comprimentos de coerência para 3 valores diferentes de fase de torção ($\tau_s = 0, \pm 1$), totalizando 51 vídeos. Os valores de cada comprimento de coerência pode ser visto na tabela 1 que indica qual o valor do comprimento de coerência e o valor do inverso do comprimento de coerência ao quadrado.

δ_s (mm)	δ_s^{-2} (mm ⁻²)
0.40	6.25
0.45	4.94
0.50	4.00
0.53	3.56
0.56	3.19
0.60	2.78
0.65	2.37
0.70	2.04
0.80	1.56
0.90	1.23
1.00	1.00
1.20	0.69
1.50	0.44
1.75	0.33
2.00	0.25
2.50	0.16
5.00	0.04

Tabela 1 – Valores de comprimento de coerência utilizados nos vídeos holográficos e seus respectivos valores de inverso de comprimento de coerência ao quadrado.

Para os feixes tipo GSM ($\tau = 0$) observamos a variação linear da variância em função do inverso do comprimento de coerência ao quadrado, apresentado na Figura 47. Enquanto para os feixes tipo TGSM com *twist* máximo ($\tau = |1|$) observamos a variação quadrática, apresentado na Figura 48.

As Figuras 47 e 48 demonstram as divergências dos feixes *seed* (vermelho) e *idler* (azul) no campo distante, em função do inverso do comprimento de coerência ao quadrado. Como esperado, para o caso GSM, os feixes com coerências menores divergem mais em uma função linear com o inverso do comprimento de coerência ao quadrado. Já no caso TGSM a divergência dos feixes *seed* e *idler* dos feixes produzidos com *twist phase*, o comportamento da divergência foi quadrática, em função

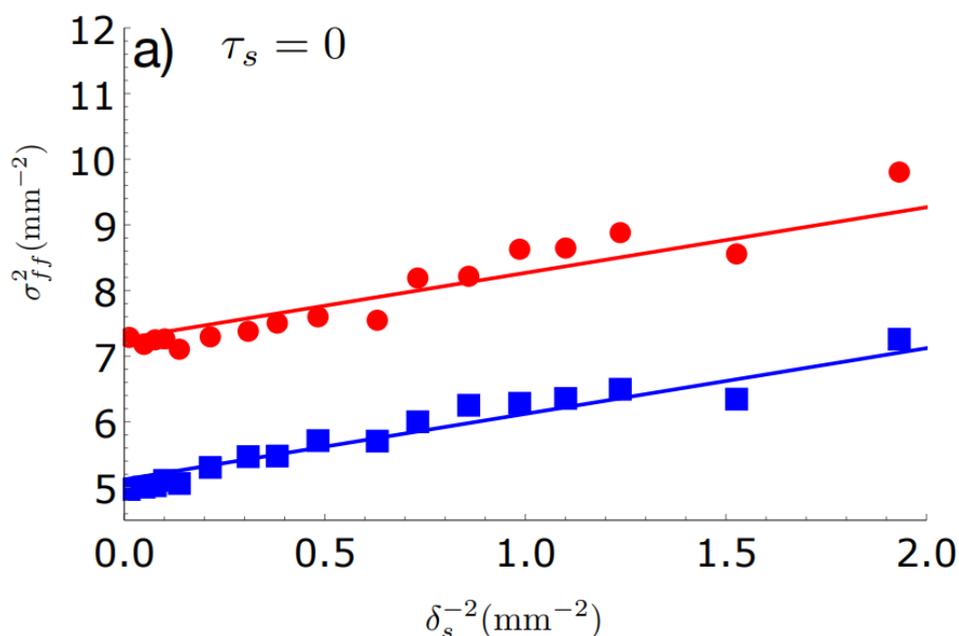


Figura 47 – Variância da distribuição de intensidade em função do inverso do comprimento de coerência ao quadrado para um feixe GSM. As esferas vermelhas são referentes aos dados do feixe *seed*, os quadrados azuis são os dados do feixe *idler*, as linhas sólidas foram obtidas por meio de um fit linear dos dados experimentais.

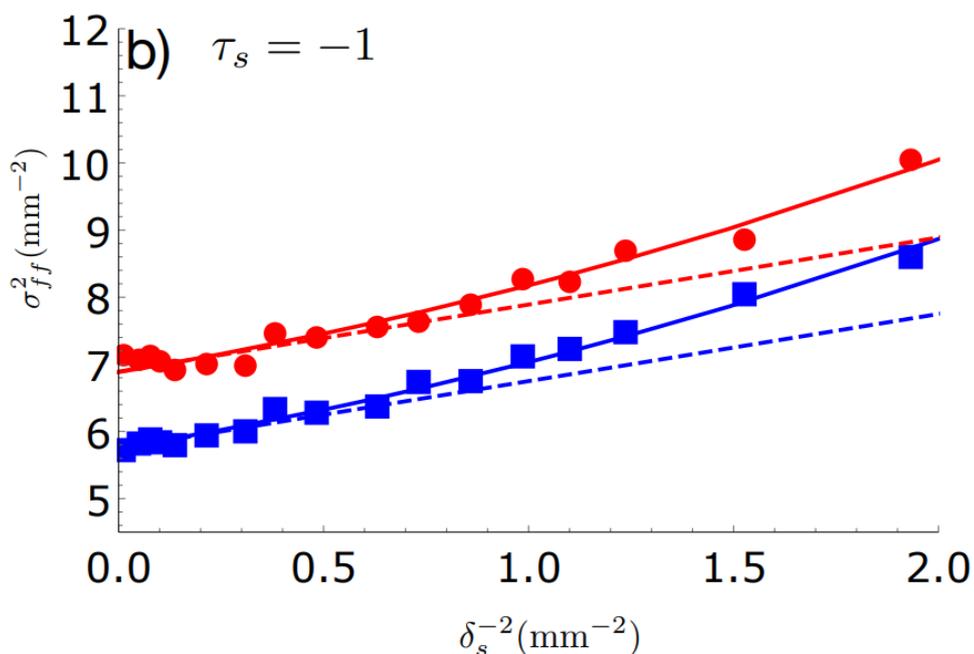


Figura 48 – Variância da distribuição de intensidade em função do inverso do comprimento de coerência ao quadrado para um feixe TGSM. As esferas vermelhas são referentes aos dados do feixe *seed*, os quadrados azuis são os dados do feixe *idler*, as linhas sólidas foram obtidas via um fit quadrático dos dados experimentais e as linhas pontilhadas são as projeções dos crescimentos lineares.

do mesmo parâmetro δ_s^{-2} . As linhas sólidas representam os fits em relação aos dados experimentais (fit linear para o caso GSM e quadrático para o TGSM), enquanto as pontilhadas simulam um crescimento linear para os parâmetros medidos no caso TGSM. É possível notar que, para comprimentos de coerência grandes (δ_s^{-2} pequenos), o feixe TGSM tem a fase de torção reduzida e em primeira ordem o feixe tem o mesmo comportamento de um feixe GSM, enquanto para pequenos comprimentos de coerência a fase de torção tem uma contribuição significativa para o espalhamento do feixe.

Outra característica importante é o fato do comportamento do feixe *idler* seguir as mesmas características do *seed* tanto para a dependência linear na Figura 47 e quadrática na Figura 48. Indicando que o feixe *idler* também é um feixe do tipo GSM e TGSM, respectivamente.

6.1.2 Medições do comprimento de coerência

Seguindo os mesmos critérios de análise apresentados no capítulo 4, medimos a distribuição da intensidade em relação à visibilidade dado pela Equação (180) escrita para fendas verticais, na coordenada y , como:

$$I(\mathbf{r}) \approx \left[1 + e^{-\frac{2d^2}{\delta^2}} \cos \left(2dk \left(\frac{y}{f} - \mu x \right) \right) \right]. \quad (199)$$

Os gráficos de visibilidade em função do δ_s^2 são dados pelas Figuras 49, 50 e 51. Nos 3 casos, os pontos em vermelho são os valores experimentais obtidos através dos fits nas distribuições marginais, conforme a Equação (174), os pontos azuis são os valores do feixe *idler* obtidos pelo mesmo método, enquanto as linhas sólidas são referentes aos fits dos valores de visibilidade de acordo com a equação (199). Os erros experimentais foram obtidos através do desvio padrão dos fits.

A Figura 49 é referente ao feixe *seed* com *twist phase* positiva. Os dados indicam que ambos os feixes possuem um decaimento exponencial da visibilidade em função de δ_s^{-2} . Para o feixe *seed* (vermelho) a visibilidade máxima obtida foi de 0.9 quando o comprimento de coerência é $\delta_s = 5.00$. Para comprimentos de coerência menores, a visibilidade converge para um valor aproximado de 0.28. No caso do feixe *idler*, para $\delta_s = 5.00$ a visibilidade é igual a 0.8 e converge para 0.17 quando a coerência tende a zero.

No caso dos feixes sem fase de torção, Figura 50, a visibilidade máxima, quando o comprimento de coerência do *seed* (vermelho) é igual a 5.00, também fica na margem entre 80 e 90% tanto para o *seed* quanto para o *idler* (azul). Já para comprimentos de coerência tendendo a zero, a visibilidade converge para 27% e 33% para os feixes *seed* e *idler*, respectivamente.

E quando a fase de torção é $\tau_s = -1$ (Figura 51), então a visibilidade dos feixes *seed* e *idler* convergem para 0.29 e 0.25 quando o comprimento de coerência tende a

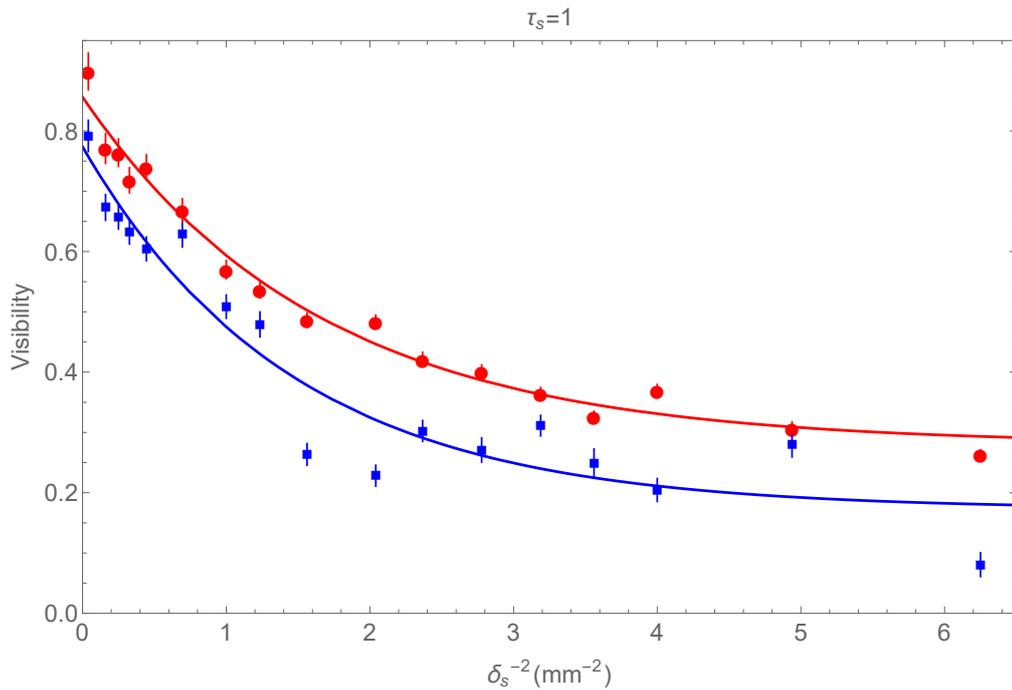


Figura 49 – Visibilidade em função do inverso do comprimento de coerência ao quadrado para feixes de $\tau_s = 1$.

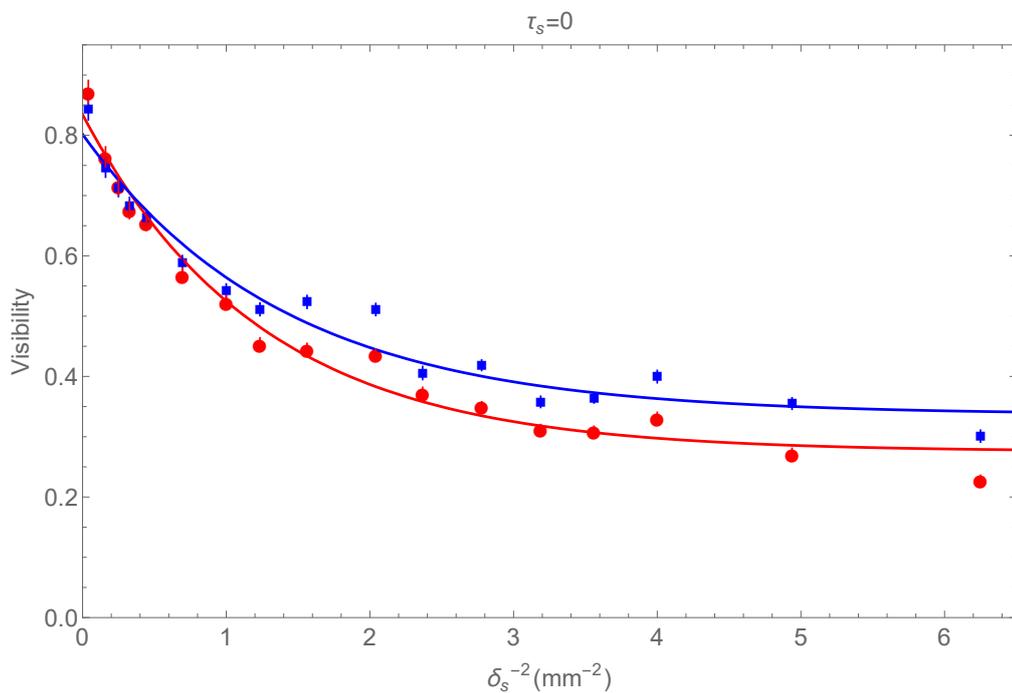


Figura 50 – Visibilidade em função do inverso do comprimento de coerência ao quadrado para feixes de $\tau_s = 0$.

zero e, análogo aos casos anteriores, a visibilidade é em torno de 90% na coerência máxima analisada.

Para os comprimentos de coerência grandes, ou seja, $\delta_s^{-2} \rightarrow 0$, os feixes possuem características de feixes coerentes e a fase de torção deixa de existir, mostrando

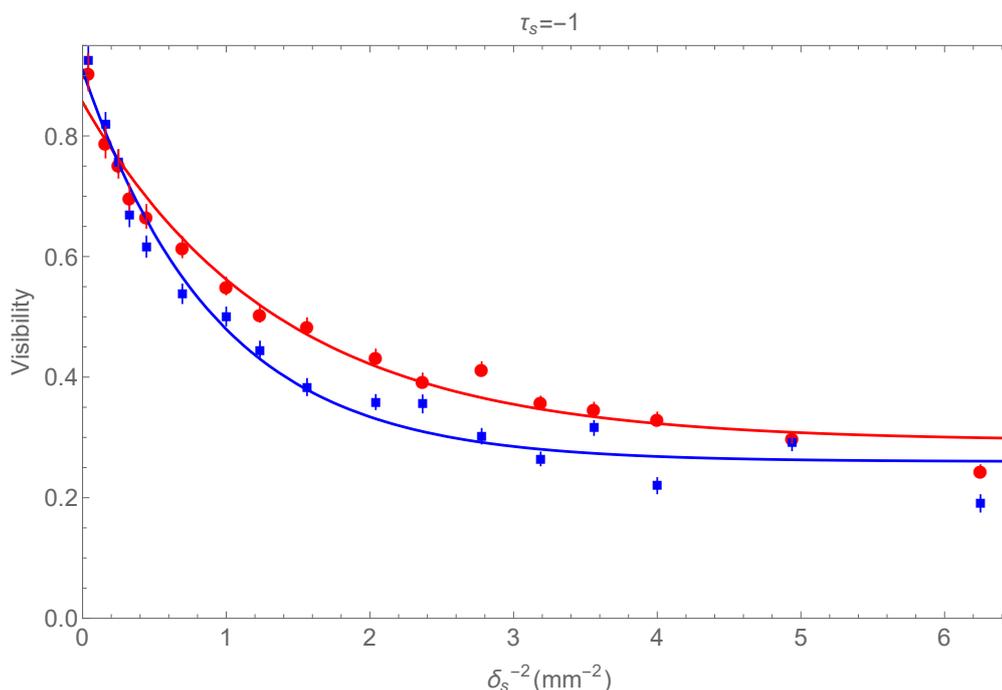


Figura 51 – Visibilidade em função do inverso do comprimento de coerência ao quadrado para feixes de $\tau_s = -1$.

que os resultados são consistentes. Para comprimentos de coerência pequenos, as visibilidades com *twist phase* ± 1 são semelhantes entre si, mas distintas do caso sem *twist phase*. É neste regime que podemos notar a influência da fase de torção no padrão de interferência e na coerência total do feixe. Além do citado acima, em nenhum caso a visibilidade tende a zero, mas converge para um valor em torno de 0.35, quando não há fase de torção, e 0.30, quando possui fase de torção máxima.

6.1.3 Medições do ângulo de torção

Para constatar o efeito de conjugação de fase do feixe *idler* com relação ao feixe *signal*, é necessário produzir um feixe elíptico [186, 191] para observar o efeito de *twist*, ou então fazer um sistema de interferência para observar o padrão de fase. Portanto, com o mesmo experimento de fendas duplas aplicado para o cálculo de visibilidade, constatamos a inclinação das franjas de interferência que é proporcional à fase de torção. Então, simplesmente analisando o padrão de inclinação das franjas de interferência já é suficiente para a demonstração da conjugação de fase, desde que, para as mesmas condições de geração de feixe, os feixes *signal* e *idler* devem estar com as franjas de interferência inclinadas para lados opostos.

Dentre os diversos feixes com diferentes comprimentos de coerência, foi escolhido o que visualmente melhor demonstra o efeito de torção. Já que a rotação é maior quanto menor a coerência. No entanto, para baixas coerências, as visibilidades das franjas são menores, as tornando de difícil visualização. Como a *twist phase* depende

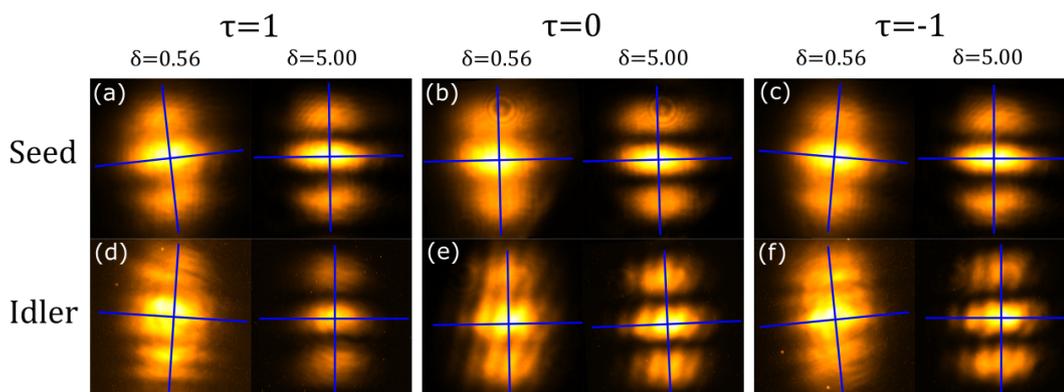


Figura 52 – Padrão de intensidade da fenda dupla comparado entre dois valores de comprimento de coerência transversal, $\delta_S = 0.56$ (à esquerda de cada painel) e $\delta_S = 5.00$ (à direita de cada painel).

do comprimento de coerência ($\mu = \frac{1}{\delta^2}$), já que a mesma só existe em feixes parcialmente coerentes, utilizamos dados de 2 comprimentos de coerência que melhores demonstram o efeito desejado. A Figura 52 apresenta os padrões de interferência para ambos os feixes, *seed* e *idler*, para a fase de torção normalizada do feixe *seed* $\tau_S = 0, \pm 1$ e comprimentos de coerência $\delta_S = 0.56\text{mm}$ e $\delta_S = 5.00\text{mm}$. As Figuras 52a-c são dados do feixe *seed*, enquanto que as Figuras 52d-f são dados do feixe *idler*.

Os quadros à esquerda de cada painel mostram medições, quando preparado o *seed* no SLM com comprimento de coerência igual a 0.56 mm. As Figuras 52a e 52d mostram os dados de $\tau_S = 1$ é possível notar que elas rotacionam em direções opostas – linhas cruzadas em azul foram adicionadas nos padrões para facilitar a visualização da orientação das rotações. As Figuras 52c e 52f são referentes à *twist phase* do feixe *seed* negativa $\tau_S = -1$ e também demonstram o mesmo efeito de rotação em direções opostas entre si. Além da oposição entre os feixes, as Figuras 52c e 52f estão em oposição com as respectivas figuras de τ_S positivo. Já no caso de $\tau_S = 0$, não há fase de torção e o padrão de interferência apresenta ter rotação próxima de zero, como o esperado.

As imagens à direita em cada painel da Figura 52 referem-se ao feixe *seed* preparado com comprimento de coerência igual a 5.0 mm. Devido ao alto valor de comprimento de coerência, o feixe possui característica mais coerente e, portanto, a fase de torção é menos evidente. Então o objetivo destas análises é mostrar que a rotação observada em feixes de baixo comprimento de coerência é devido a *twist phase* e nenhum outro aspecto do feixe. Visualmente, todos os dados com comprimento de coerência igual a 5.0 mm parecem não sofrerem rotação alguma. Como esperado teoricamente, nas Figuras 52a, 52c, 52d e 52f (parte direita de cada painel), verifica-se uma inclinação muito suave, enquanto as Figuras 52b e 52e não apresentam rotação.

Experimentalmente, para quantificar as rotações, foi utilizado o método das

transformadas de Radon [192, 193]. Este método consiste em mapear uma imagem em várias integrais de linha, mudando o ângulo e o deslocamento da reta a ser integrada. A Figura 53¹ demonstra uma imagem sendo mapeada através da transformada de Radon. Para cada ângulo θ , várias integrais de linhas paralelas são calculadas para construir um sinograma, como no exemplo da Figura 54.

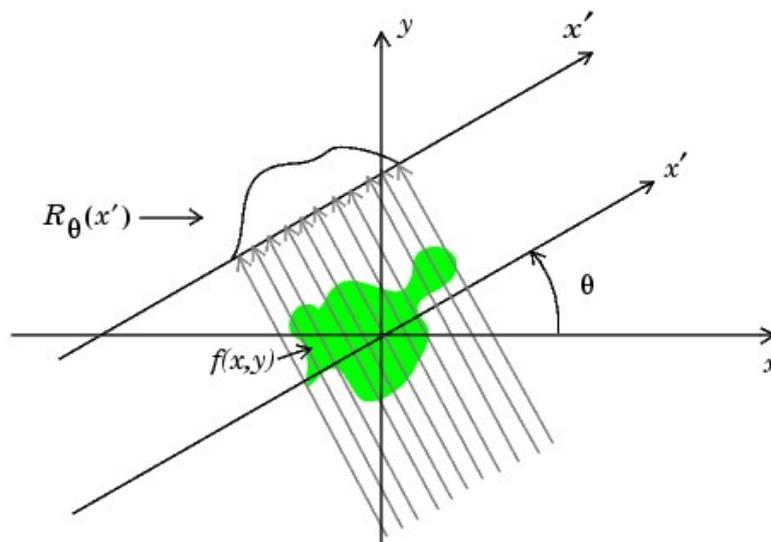


Figura 53 – Método de obter a transformada de Radon de uma imagem. Mostra um objeto descrito por uma função $f(x,y)$ e para cada ângulo θ e deslocamento x' há uma transformada de Radon $R_\theta(x')$.

Fonte: Brendan F. Hayden, 2005

A transformada é definida matematicamente como

$$R(\rho, \tau) = \int f(x, \rho x + \tau) dx, \quad (200)$$

onde ρ e τ é a inclinação e a interceptação das linhas, respectivamente.

No caso das franjas de interferência, este método permite medir o ângulo da imagem, pois para um determinado ângulo e deslocamentos laterais (x') o sinograma produzido indicará regiões de máximos e mínimos. Portanto, analisando qual a região que possui uma maior visibilidade entre as franjas de máximos e mínimos, é possível saber qual o ângulo da imagem. A Figura 55 mostra uma das imagens do feixe *idler* com *twist phase* e o sinograma produzido pela transformada de Radon que identifica o ângulo de giro do padrão de interferência.

Utilizando os dados de $\tau_S = 1$, geramos as transformadas de Radon para cada comprimento de coerência, tanto para o feixe *seed* quanto para o *idler*. Os resultados podem ser encontrados na Figura 56.

¹ As Figuras 53 e 54 estão disponíveis no link: https://homepages.inf.ed.ac.uk/rbf/CVonline/LOCAL_COPIES/AV0405/HAYDEN/Slice_Reconstruction.html

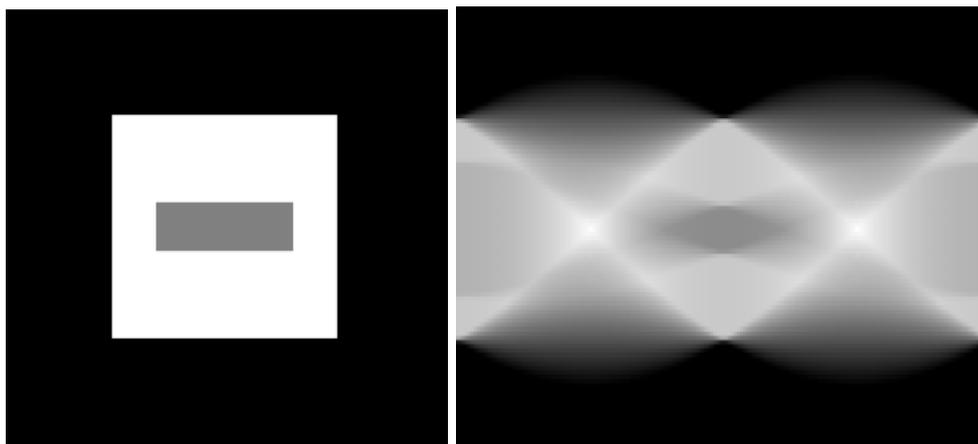


Figura 54 – Um exemplo com uma imagem de blocos em diferentes níveis de cinza (esquerda) e o respectivo sinograma (direita), produzido aplicando a transformada de Radon.

Fonte: Brendan F. Hayden, 2005

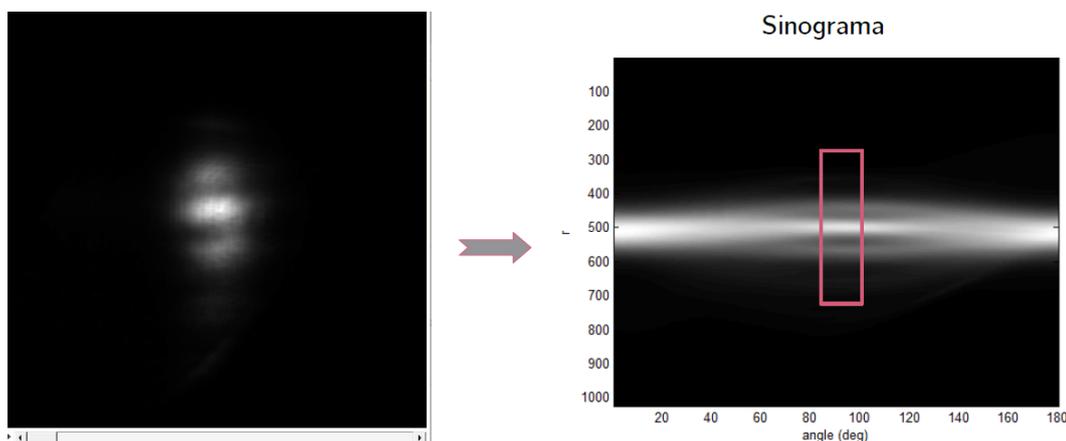


Figura 55 – Padrão de Interferência no campo distante capturado pela câmera (esquerda) onde os eixos indicam espaço (x,y) ; e o sinograma gerado pela transformada de Radon (direita) onde os eixos indicam (ângulo, deslocamento x'). No sinograma está destacado, com um retângulo cor-de-rosa, a região de ângulos que indicam as franjas de máximos e mínimos.

Devido à limitação técnica do código utilizado, os ângulos analisados possuíam passo igual a 1 grau. Com isso, temos uma margem de erro de ± 0.5 grau, que é bem grande quando comparada com o valor total da rotação, que chegou a 6 graus nos melhores casos, como apresentados na Tabela 2.

Devido às variações e inconsistências nos feixes, algumas imagens podem não ter resolução adequada para determinar a maior visibilidade entre os sinogramas. Por isso, em casos de comprimentos de coerência específicos, mais de um ângulo pode ser identificado como o ajuste mais adequado. Nesse contexto, optou-se por selecionar o valor médio. Assim, na Tabela 2, é possível encontrar valores que são semi-inteiros

A Figura 56 mostra os dados experimentais dos ângulos obtidos através da transformada de Radon, para os feixes *seed* em azul e *idler* em vermelho. As linhas

δ_s (mm)	Ângulo <i>seed</i> (graus)	ângulo <i>idler</i> (graus)
0,56	$6,0 \pm 0,5$	$-5,5 \pm 0,5$
0,60	$5,5 \pm 0,5$	$-5,0 \pm 0,5$
0,65	$4,5 \pm 0,5$	$-5,0 \pm 0,5$
0,70	$3,5 \pm 0,5$	$-5,0 \pm 0,5$
0,80	$2,5 \pm 0,5$	$-4,0 \pm 0,5$
0,90	$2,0 \pm 0,5$	$-4,0 \pm 0,5$
1,00	$1,0 \pm 0,5$	$-3,0 \pm 0,5$
1,20	$1,0 \pm 0,5$	$-3,0 \pm 0,5$
1,50	$0,5 \pm 0,5$	$-3,0 \pm 0,5$
1,75	$0,0 \pm 0,5$	$-1,5 \pm 0,5$
2,00	$0,5 \pm 0,5$	$-0,5 \pm 0,5$
2,50	$1,0 \pm 0,5$	$-0,5 \pm 0,5$
5,00	$0,5 \pm 0,5$	$-0,5 \pm 0,5$

Tabela 2 – Ângulos de inclinação medidos dos feixes *seed* e *idler* para cada comprimento de coerência.

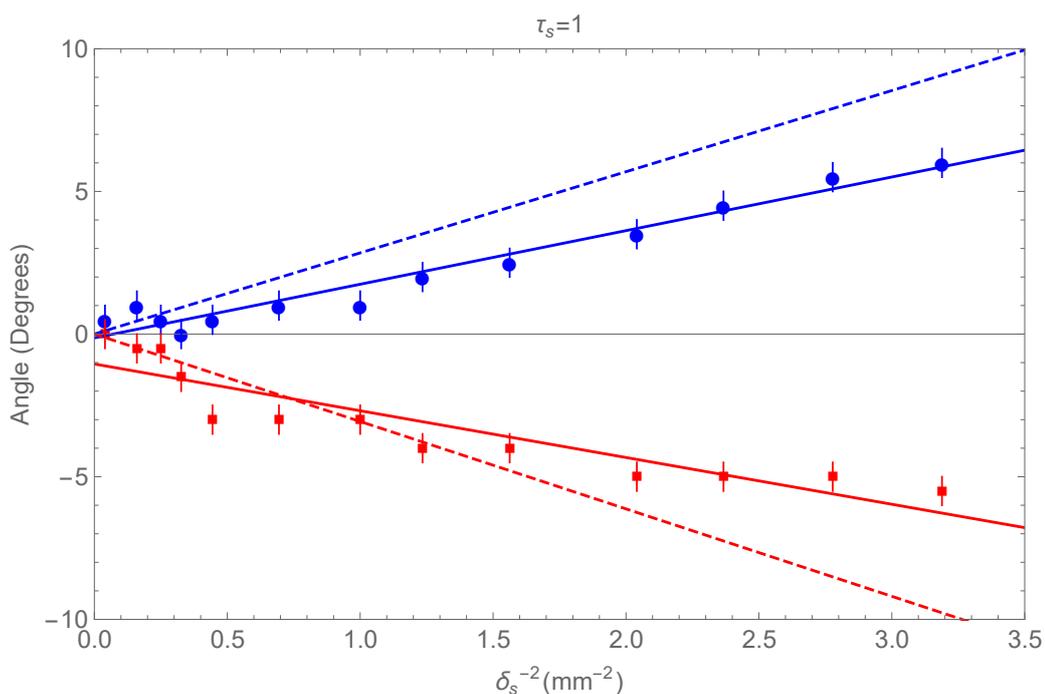


Figura 56 – Ângulo de torção das franjas de interferência no experimento de dupla fenda para feixes com twist phase $\tau_s = 1$ em diferentes comprimentos de coerência transversal.

sólidas representam o fit linear da relação entre o inverso do comprimento transversal de coerência ao quadrado e o ângulo obtido, enquanto as linhas pontilhadas indicam as curvas teóricas para os respectivos valores de *twist phase* e comprimento de coerência.

Nota-se que o ângulo quantificado (em módulo) está abaixo do previsto teoricamente para o respectivo comprimento de coerência. Embora haja limitações na técnica utilizada e no passo escolhido, os ângulos teóricos apresentam uma discrepância

acima de 1 grau, com relação às medições. Portanto, a metodologia escolhida influencia apenas na qualidade do fit linear e não explica a redução na rotação. O fenômeno que contribui para a diminuição da torção está associado ao aumento da coerência, um efeito gerado pelo processo de criação dos vídeos holográficos, abordado na seção 4.4. Ao analisar as medidas de visibilidade (Figuras 49-51), observa-se que a redução exponencial da visibilidade em função do encurtamento do comprimento de coerência não chega a zero para qualquer valor de *twist*. Em todas as instâncias, a visibilidade se estabiliza entre aproximadamente 0.30 e 0.35, uma característica residual oriunda da coerência inerente ao método de sintetização.

As máscaras holográficas selecionadas nesta pesquisa não passaram pela correção do método descrito na publicação I, pelo fato de cronologicamente, a pesquisa de correção ter sido desenvolvida posteriormente. Na estrutura desta tese, a publicação I é discutida inicialmente por se alinhar mais estreitamente com os temas abordados. No entanto, em termos de desenvolvimento cronológico, ela foi desenvolvida após a publicação que é tratada nesta seção.

6.2 COERÊNCIA PARCIAL E COMPRIMENTO DE COERÊNCIA NA CONVERSÃO PARAMÉTRICA DESCENDENTE ESTIMULADA

Esta última seção visa apresentar as ideias e resultados referente à publicação V desta tese, intitulada *Partial coherence and coherence length in Stimulated Parametric Down-Conversion* [194] e publicada na revista *Physical Review Applied* em agosto de 2023.

Esta publicação baseia-se na caracterização da função de coerência mútua normalizada em diferentes regimes de intensidade de estímulo. A teoria discutida apura as diferenças entre fonte coerente e incoerente, apresentadas nas seções 3.3 e 3.4. Este trabalho é uma extensão do Souto Ribeiro et al. (1995) [195], que caracteriza o processo de StimPDC investigando a coerência mútua normalizada resultante da soma de campos coerentes e incoerentes. Utilizando um experimento de fenda dupla, o estudo mensurou o grau de visibilidade dos padrões de interferência em função da intensidade de estímulo aplicada. Com base nestes conhecimentos, o estudo atual adota uma metodologia focada no comprimento de coerência transversal, relacionando-o aos modos parcialmente coerentes GSM, permitindo explorar a StimPDC como uma potencial fonte GSM.

Analisando a CSD do campo *idler* com contribuições da parte espontânea e da estimulada, pode-se escrever a CSD como:

$$W_i(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = W_{sp}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + W_{stim}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2). \quad (201)$$

Dividindo pela intensidade total, a Equação (201) pode ser reescrita em termos

da intensidade de estímulo como

$$\mu_j = (1 - \beta)\mu_{sp} + \beta\mu_{stim}, \quad (202)$$

com $\beta = I_{stim}/(I_{sp} + I_{stim})$.

A coerência μ_{stim} é influenciada pelas propriedades de coerência dos feixes de *pump* e *seed*, podendo ser inferior a um, o que sinaliza que a contribuição estimulada é parcialmente coerente. Contudo, é relevante considerar o cenário específico em que os feixes *pump* e *seed* são feixes Gaussianos puros e completamente coerentes, resultando em $\delta_{pump} = \delta_{seed} \rightarrow \infty$. Neste contexto, a coerência mútua do *idler* pode ser descrita em termos de componentes incoerentes e coerentes.

Em relação aos campos GSM, a coerência normalizada varia conforme a distância relativa $d = |r_1 - r_2|$ entre os pontos 1 e 2. Contudo, ao se considerar que o componente estimulado é coerente, $\mu_{stim} = \mu_c$ equivale idealmente a 1 e não depende de d . Com isso, a coerência mútua do StimPDC pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\mu_j(d) = (1 - \beta)\mu_{sp}(d) + \beta. \quad (203)$$

Geralmente, o comprimento de coerência transversal l_t é definido como o valor de d para o qual o valor absoluto da coerência mútua normalizada é $|\mu_j(d = l_t)| = \varepsilon$, onde ε é uma pequena constante arbitrária. O comprimento de coerência pode ser determinado resolvendo a seguinte relação para l_t e alguma função específica $\mu_{sp}(x)$:

$$|\mu_j(l_t)| = |(1 - \beta)\mu_{sp}(l_t) + \beta| = \varepsilon. \quad (204)$$

No caso específico do feixe GSM, o qual é de interesse nessa análise, a função $\mu_{sp}(x)$ é dada por:

$$\mu_{sp}(x) = e^{-\frac{(x-r)^2}{2\delta_{sp}^2}} \quad (205)$$

e, como todas as quantidades μ_j , β e μ_{sp} são positivas, μ_j é, portanto:

$$\mu_j(d) = (1 - \beta)e^{-\frac{d^2}{2\delta_{sp}^2}} + \beta. \quad (206)$$

6.2.1 Medidas da coerência mútua na StimPDC

Para investigar a coerência mútua do processo de StimPDC foi montado um esquema experimental demonstrado na Figura 57, o qual consiste em um laser de bombeio @405 nm verticalmente polarizado incidindo no cristal não-linear a fim de gerar o processo de conversão paramétrica descendente. Um laser auxiliar de @780 nm horizontalmente polarizado é utilizado como estimulador, alinhado com as condições de *phase-matching* do cristal e com a cintura no cristal controlada pelas lentes L1 e L2. Para o controle da intensidade do feixe *seed* é utilizado um sistema com um filtro

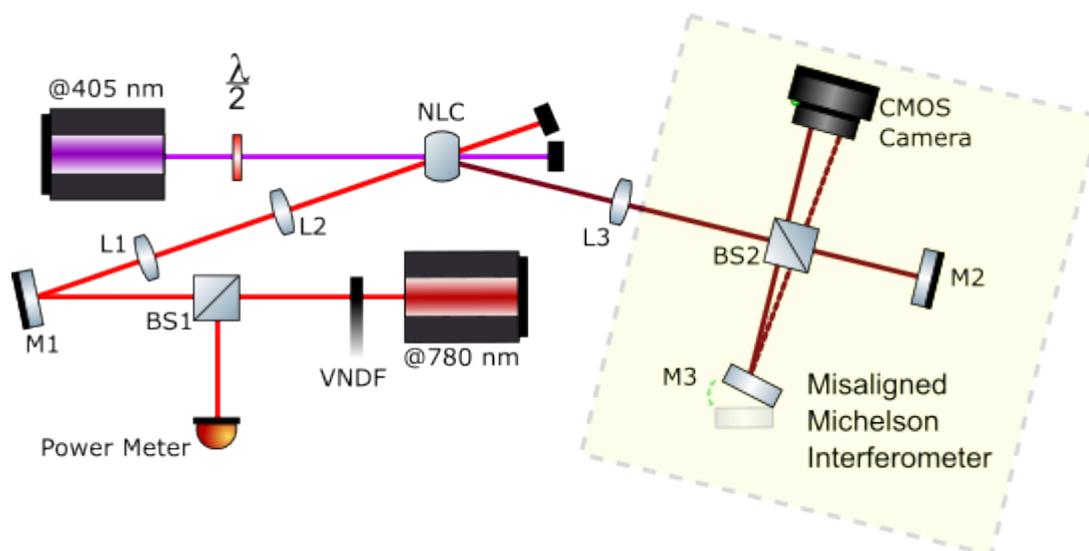


Figura 57 – O setup experimental para medir o comprimento de coerência da luz StimPDC consiste nos seguintes componentes: um laser azul de 405 nm (@405), um laser vermelho de 780 nm (@780), uma placa de meia-onda $\lambda/2$, um filtro de densidade neutra variável (VNDF), um cristal não-linear (NLC), espelhos M1, M2 e M3, divisores de feixe BS1 e BS2, e lentes L1, L2 e L3. Uma câmera CMOS é utilizada para medir o padrão de interferência do feixe idler em um interferômetro de Michelson com desalinhamento controlado.

neuro de densidade variável e um divisor de feixe (BS, *beam splitter*) 50:50, onde uma das saídas há um medidor de potência. No feixe *idler*, uma lente L3 projeta o plano a 8 cm do cristal no plano de saída do interferômetro de Michelson, analisado por uma câmera CMOS.

A estratégia para medir a coerência transversal é utilizar um sistema interferométrico de Michelson com um dos braços sendo desalinhado controladamente. A visibilidade do padrão de interferência está associada com o comprimento de coerência do feixe, portanto, para um feixe com coerência parcial, conforme a distância de separação dos feixes aumenta, a visibilidade diminui.

A Figura 58 apresenta as simulações do padrão de interferência formado para diferentes desalinhamentos para visibilidade fixada em 1 (Figura 58a, c, e, g) e 0,4 (Figura 58b, d, f, h). Considerando que o comprimento dos braços são idênticos, nos casos a) e b) o interferômetro está perfeitamente alinhado, formando um padrão de interferência construtiva. Os casos c) e d) estão com um deslocamento de 0,3 unidades arbitrárias, é notável um deslocamento da franja de interferência máxima para a esquerda, análogo a um padrão de interferência de fenda dupla deslocado. Os casos e) e f) estão deslocados em 0,6 u.a., o deslocamento maior provoca uma interferência máxima também deslocada numa quantidade maior. Aqui, torna-se evidente que nas bordas existem regiões onde a contribuição de cada gaussiana na interferência é distinta, apresentando interferências nas cristas de uma base gaussiana. Contudo,

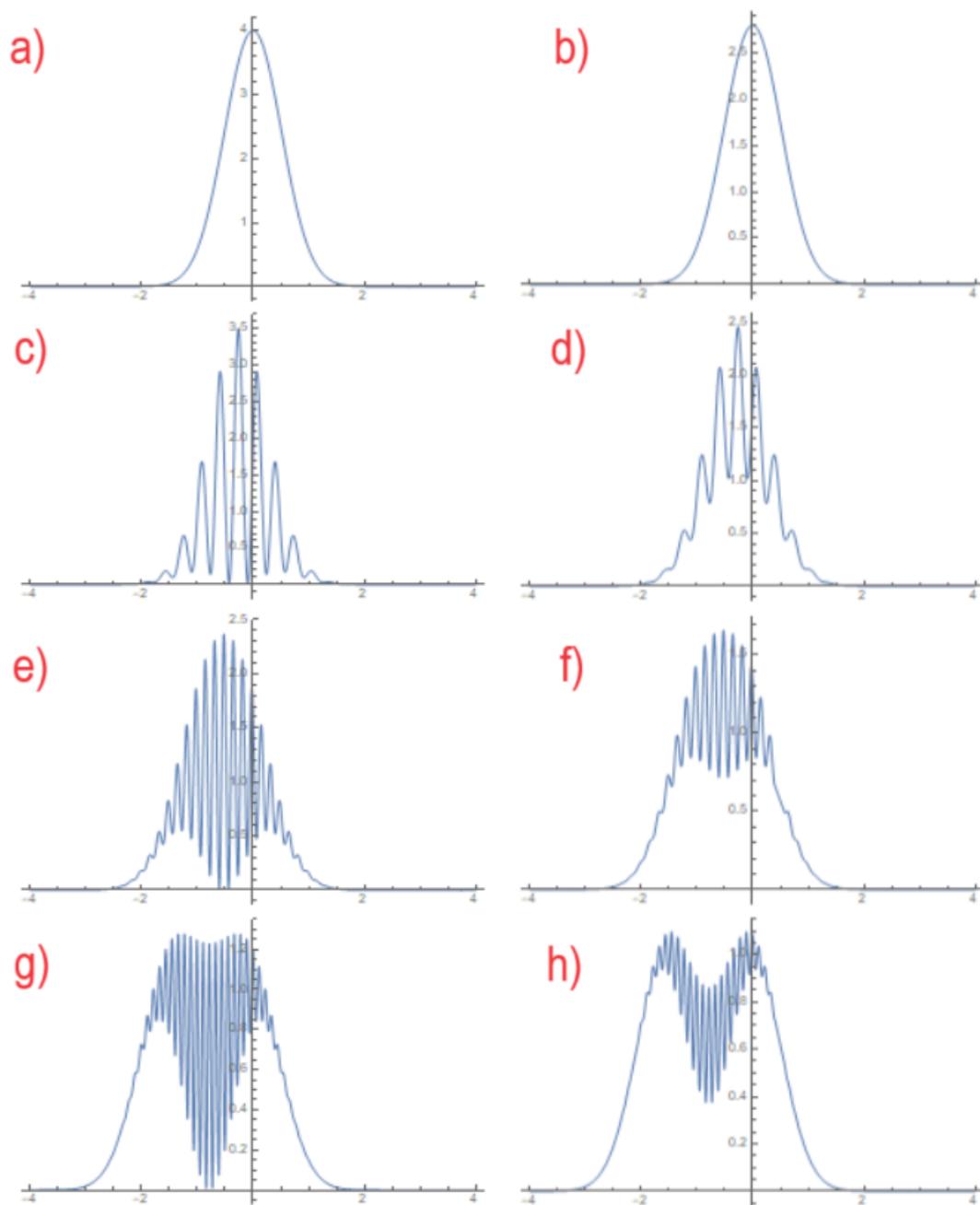


Figura 58 – Simulação do padrão de interferência na saída de um interferômetro de Michelson com desalinhamento em um dos braços. As Figuras a, c, e, g são padrões de interferência com visibilidade máxima, as Figuras b, d, f, h são padrões de interferência para visibilidade igual a 0,4.

na região central da interferência, a visibilidade mantém uma distribuição similar aos casos de deslocamentos menores. Finalmente, nas imagens *g*) e *h*), com um deslocamento de 0,9 unidades arbitrárias, a interação das duas gaussianas produz frequências mais altas na região central, mas em um cenário teórico ideal e sem ruídos, o sistema preserva a mesma relação.

Experimentalmente, foram realizadas medições para várias intensidades de estímulo em ao menos quatro deslocamentos distintos do interferômetro, como mostrado na Figura 59.

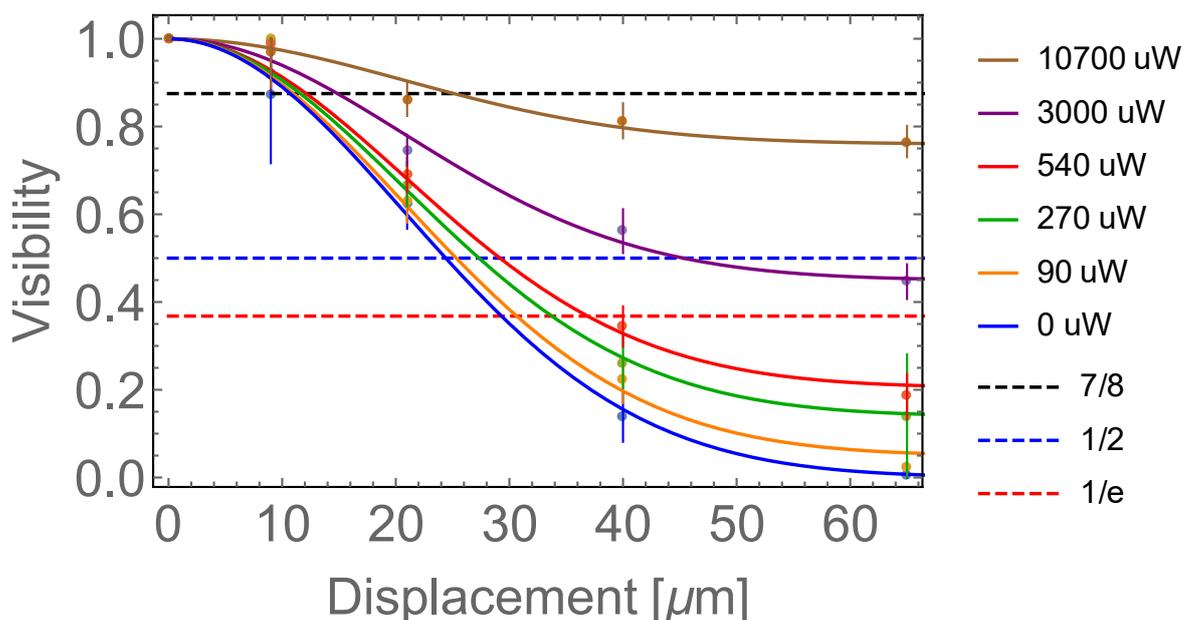


Figura 59 – Coerência mútua caracterizada pela visibilidade dos padrões de interferência gerados por um interferômetro de Michelson desalinhado por um deslocamento d em um dos braços

Os dados experimentais foram ajustados conforme a Equação (206), inicialmente para o caso espontâneo ($\beta = 0$), resultando no valor de $\delta_{sp} = 20,72 \pm 0,59 \mu\text{m}$. Este valor de δ_{sp} foi então aplicado aos demais ajustes, mantendo β como o único parâmetro livre.

Como visto na Figura 59 e também na Equação (206), uma propriedade notável da luz emitida no processo é que o grau de coerência não necessariamente diminui tendendo a zero. O valor mínimo do grau de coerência é determinado por β , a intensidade normalizada do componente estimulado, considerando que a luz estimulada é quase tão coerente quanto os feixes *pump* e *seed*. Assim, ao caracterizar o comprimento de coerência usando um valor mínimo da coerência mútua conforme a Equação (204), pode-se concluir que feixes parcialmente coerentes (com $\beta > \varepsilon$) podem, teoricamente, apresentar um comprimento de coerência infinito. Paralelamente, a seleção do parâmetro ε é subjetiva. Para possuir relevância prática, deve alinhar-se com os requisitos de coerência exigidos por uma aplicação específica. Por exemplo, em informação

quântica, certas conclusões sobre a natureza quântica da fonte somente pode ser alcançada para valores mínimos de visibilidade [95–97]. Assim, foi introduzido o conceito de uma variável ε -*coherence length*, definido como a maior distância entre dois pontos sob interferência cuja visibilidade assume valor ε , escolhido segundo o sistema de interesse. Na Figura 59 os traços pontilhados representam 3 valores de ε -*coherence length* distintos, 7/8 em preto, 1/2 em azul e 1/e em vermelho. Os comprimentos de coerência obtidos estão dispostos na Tabela 3.

I_{seed} (μW)	β (%)	$\varepsilon = 1/e$ (μm)	$\varepsilon = 1/2$ (μm)	$\varepsilon = 7/8$ (μm)
0	0	29.30	24.40	10.71
90	4.9 ± 3.5	30.64	25.32	11.00
270	13.9 ± 2.7	33.74	27.32	11.61
540	20.5 ± 2.5	36.88	29.17	12.12
3000	44.9 ± 1.8	∞	45.30	14.87
10700	76.0 ± 1.7	∞	∞	25.12

Tabela 3 – Intensidade normalizada da componente estimulada e o ε -comprimento de coerência obtido para diferentes intensidades do *seed*.

A Tabela 3 dispõe dos valores de intensidade do feixe estimulador, seguido da respectiva contribuição no feixe *idler*, seguido dos comprimentos de coerência encontrados para cada ε -*coherence length*. Para a definição usual de comprimento de coerência ($\varepsilon = 1/e$) a StimPDC em questão oferece feixes parcialmente coerentes com comprimento de coerência mensurável até um limite de estimulação de $\approx 36,7\%$. Acima deste limiar, os feixes passam a conter comprimento de coerência infinito, devido à contribuição coerente, embora continue sendo parcialmente coerente. Em outras aplicações, em que maiores visibilidades mínimas são exigidas, o feixe *idler* pode ser também caracterizado em limites de estímulo intenso, 44,9% para o caso de $\varepsilon = 1/2$ e 76% para o caso de $\varepsilon = 7/8$.

A fonte de StimPDC não gere feixes puramente descritos pela CSD de um feixe GSM, pois, em geral,

$$\Gamma_{GSM} \neq \Gamma_{sp} + \Gamma_{stim}, \quad (207)$$

e a condição de igualdade é satisfeita apenas em regimes específicos. Ainda assim, o processo de StimPDC fornece feixes parcialmente coerentes com dependência do comprimento de coerência espacial que podem ser controlados em função da intensidade do feixe estimulador. Esta fonte pode ser prática para muitos experimentos que requerem feixes com coerência espacial reduzida, já que o método de sintetização de feixes GSM e TGSM necessitam de grandes escalas de tempo, para integração dos frames.

Aqui, além de um método de quantificar o comprimento de coerência para aplicações com distribuições complexas, também foi apresentada uma alternativa viável de gerar feixes com coerência parcial.

7 CONCLUSÃO

Nesta tese de doutorado foi estudada a interação paramétrica descendente estimulada dos feixes parcialmente coerentes do modelo de Schell com amplitude gaussiana e dos feixes parcialmente coerentes do modelo de Schell com *twist phase*. O processo de StimPDC é um processo de mistura de três ondas, onde o feixe *idler* herda as características espaciais dos feixes *pump* e *seed*. Essa característica torna o processo uma ferramenta poderosíssima no que diz respeito à modulação de feixes, não só em amplitude, mas também em fase. O estudo inclui algumas abordagens envolvendo tanto feixes totalmente coerentes quanto feixes de coerência espacial reduzida.

No processo de análise da conservação de OAM na StimPDC, foi notado a presença de modos com índices radiais no feixe *idler*, mesmo quando os feixes interagentes no processo não-linear possuem apenas modos azimutais [167]. Este resultado permitiu encontrar regras de seleção para o processo de StimPDC que estão além da conservação de momento angular orbital. Outro avanço envolvendo modos coerentes com modulação de Laguerre-Gauss foi na abordagem de utilizar os sistemas não-lineares como moduladores de luz utilizando luz [168]. Esta investigação mostrou que a StimPDC é eficiente na modulação tanto de amplitude quanto de fase. O aspecto fascinante aqui é que, ao utilizar o *seed* para modular o feixe *idler*, o feixe *seed* consegue realizar esta função sem comprometer ou alterar suas características iniciais.

No que diz respeito a geração dos feixes do modelo de Schell, foi investigado a eficiência na qualidade de geração dos feixes parcialmente coerentes a partir dos métodos de sintetização utilizados atualmente. Como o método consiste em aplicar uma soma incoerente em modos coerentes provenientes do laser, para um tempo hábil de geração, os feixes apresentam estrutura de feixes GSM (TGSM), porém apresentam coerência residual não desprezível. Para a real avaliação do comprimento de coerência, deve ser considerado o método de correção pelo número de *frames* do vídeo holográfico utilizado para a sintetização do feixe GSM (TGSM) [89].

Quando utilizados os feixes do modelo de Schell na StimPDC, os resultados se mostraram promissores em relação à conjugação da fase de *twist* [174]. Estes resultados abrem a possibilidade de usar a StimPDC em sistemas para correção de distorções na frente de onda de feixes parcialmente coerentes. Nossos resultados motivam o uso de feixes GSM e TGSM em protocolos de comunicação, dada a vantagem demonstrada em *Physical Review A* **102**, 033 732 (2020) [99].

Abordando as propriedades quânticas da conversão paramétrica descendente, exploramos alguns regimes onde o processo espontâneo possui intensidades significativas em relação ao estimulado, permitindo utilizar o processo como uma possível fonte de feixes parcialmente coerentes com coerência espacial controlada pela intensidade

do estimulador [194], já que os métodos de sintetização atuais para os feixes GSM e TGSM dependem de vídeos holográficos que duram dezenas de segundos. Além disso, introduzimos o conceito de um parâmetro ε -*coherent length*, definido como a maior distância entre dois pontos para o qual a visibilidade do feixe é ε e usamos este conceito para caracterizar o feixe *idler*. Em experimentos de informação quântica, algumas conclusões dependem de um valor mínimo de visibilidade [95–97], tornando o conceito factível.

Todos os resultados apresentados aqui apresentam uma concordância muito boa com as previsões teóricas, mesmo quando as condições laboratoriais não eram ideais.

7.1 PERSPECTIVAS FUTURAS

Esta tese deu o primeiro passo na exploração de feixes parcialmente coerentes no processo de conversão paramétrica descendente estimulado. Algumas extensões naturais surgiram conforme as investigações avançaram. Há ao menos três propostas concretas e factíveis que são frutos da pesquisa realizada nesta tese.

A primeira possibilidade é a ideia apresentada na seção 3.6.3, que consiste em explorar a StimPDC como ferramenta de geração de feixes TGSM de outras classes, como *Twisted Laguerre-Gaussian Schell-model*, *Twisted Hermite-Gaussian Schell-model* ou classes ainda mais complexas. A natureza de interação entre os campos no cristal não-linear permite esta modulação do campo utilizando outro campo elétrico. Em uma maneira mais atrativa, é dito que, no processo, ocorre modulação de luz com luz. Então, o conjunto *SLM + StimPDC* é a ferramenta mais concreta que permite a sintetização generalizada de feixes TGSM, independentemente da classe. A combinação entre os processos permite a geração de classes generalizadas de feixes parcialmente coerentes com o mesmo grau de dificuldade que as classes mais simples e diretas. Isso faz da StimPDC um método capaz de ganhar espaço em laboratórios que utilizam feixes parcialmente coerentes sintetizados por outros métodos.

A segunda proposta direta que surge dos resultados apresentados é analisar os perfis espaciais provenientes da interação de ambos feixes *pump* e *seed* do tipo TGSM. O processo de conversão paramétrica, assim como conserva o momento angular orbital, conserva a fase de *twist* dos feixes TGSM. Esta ideia de trabalho já se encontra encaminhada em processo de medições e análise, para em breve ser submetido para publicação. A Figura 60 apresenta um dos conjuntos de dados que indicam a conservação de fase de *twist* no processo de StimPDC, através do padrão de difração do feixe *idler* no campo distante após passar por uma fenda dupla gerados pela interação de feixes preparados como TGSM no *pump* e *seed*. No quadro esquerdo são padrões para comprimento de coerência do *pump* $\delta_p = 0.8$ mm e do *seed* $\delta_s = 0.6$ mm. No quadro direito são resultados para $\delta_p = 2.0$ mm e $\delta_s = 0.6$ mm. As linhas são parâme-

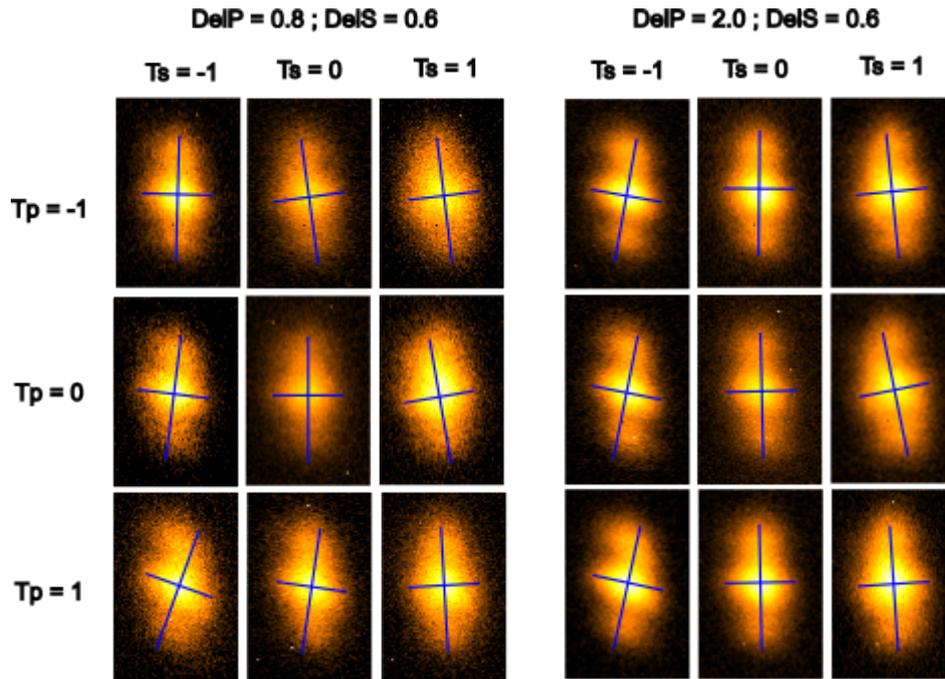


Figura 60 – Padrão de intensidade produzidos no feixe *idler* pela difração em fenda dupla em diferentes combinações de comprimento de coerência $\delta_p = 0.8$ mm (esquerda) e $\delta_p = 2.0$ mm (direita). e $\delta_s = 0.6$ mm para todas as nove combinações de *twist* $\tau_{p,s} = 1, 0, -1$.

tros da fase de *twist* normalizado do *pump* iguais a $\tau_p = -1, 0$ e 1 , respectivamente, de cima para baixo. As colunas representam os mesmos valores de *twist* normalizado para o *seed* da esquerda para a direita. No quadro da esquerda, como os valores de comprimento de coerência do *pump* e *seed* são similares, na diagonal principal o *twist* do *idler* deve ser aproximadamente nulo. Na parte inferior à diagonal principal, os *twists* contribuem positivamente, oferecendo uma rotação no sentido horário, tendo a rotação máxima para a combinação $\tau_p = 1$ e $\tau_s = -1$. Na parte superior à diagonal principal, a análise é semelhante, mas a contribuição manifesta-se no sentido anti-horário. No quadro da direita, como o comprimento de coerência do *pump* é muito grande, ele contribui pouco para a fase de torção, se tornando quase coerente. Então, o *twist* do *idler* será, basicamente, definido pelo oposto do *twist* do *seed*.

A terceira proposta consiste em expandir as ideias e conceitos dos feixes TGSM escalares para explorar os feixes TGSM vetoriais. Esta proposta também já se encontra em andamento. Uma investigação seguindo esta linha se iniciou em parceria com os pesquisadores das universidades: Universidad del Bío-Bío e Universidad de Concepción, no Chile. O projeto consiste em propor uma configuração experimental para a geração de feixes TGSM vetoriais e analisar as características e consequências da propriedade vetorial.

Basicamente, no processo de vetorização do feixe TGSM, o mesmo adquire diferentes graus de coerência entre os eixos horizontal e vertical. O feixe pode ser

vetorial tanto no aspecto de polarização, que está condicionado com a fase de *twist*, quanto em coerência, onde os eixos horizontal e vertical apresentam diferentes graus de coerência. A Figura 61 apresenta 3 casos de feixes TGSM vetoriais, com fase de

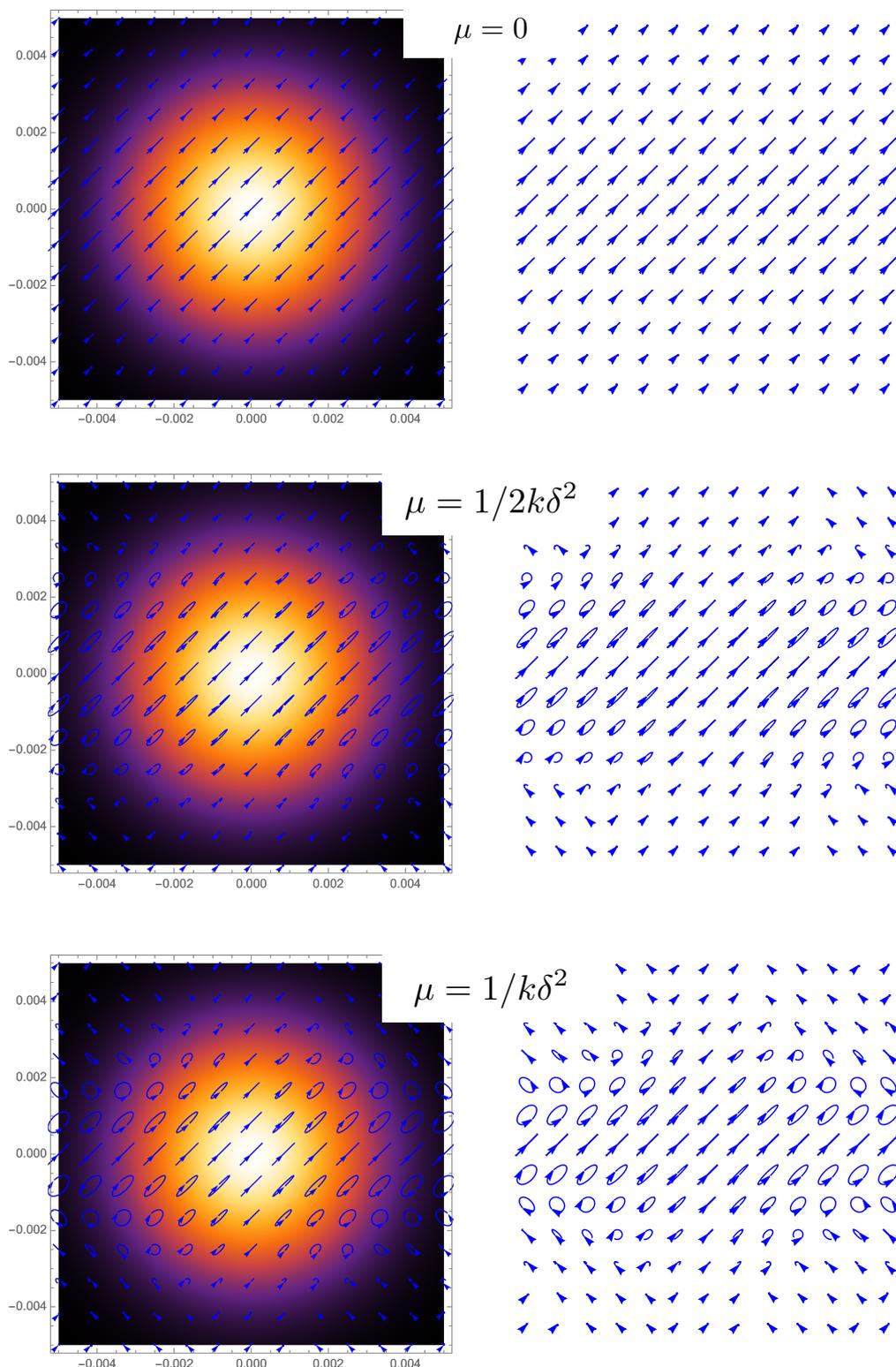


Figura 61 – Parâmetros de Stokes do perfil transversal dos feixes TGSM para 3 configurações de *twist*.

twist normalizado $\tau = 0$, $1/2$ e 1 . Para o primeiro caso, o feixe possui polarização escalar diagonal em todo o perfil transversal, para o caso de *twist* não nulo, as polarizações apresentam fase relativa conforme se afastam dos eixos principais, $x = 0$ e $y = 0$. Devido à fase de *twist* ter a dependência tipo $\text{Exp}[-ik\mu(xy)]$, para uma das variáveis fixa x (y) a fase varia ao longo do perfil transversal com amplitude proporcional a μ . A coerência também sofre alteração, devido ao processo de vetorização. Independente do *twist*, possui o mesmo grau de coerência que apresentam diferenças entre as orientações do perfil transversal. No eixo vertical a coerência tem um perfil gaussiano, enquanto é constante para o eixo horizontal.

Existem outras propostas que, embora ainda não tão concretizadas quanto as anteriores, demonstram um grande potencial. Estas baseiam-se na ideia de que, uma vez estabelecido o entendimento dos feixes TGSM vetoriais, pode-se aplicá-los em diferentes configurações de *pump* e *seed* na StimPDC. Esse conceito é fundamentado em conhecimentos adquiridos de trabalhos anteriores que envolveram feixes com vórtices vetoriais na StimPDC [196, 197]. Dada a eficácia da StimPDC como ferramenta para gerar feixes TGSM escalares, é plausível que esse entendimento possa ser expandido, tornando-a uma fonte eficiente também para a síntese de feixes TGSM vetoriais.

Outra possibilidade é explorar as emissões espontâneas com mais vigor, a fim de encontrar alternativas de produzir feixes com características TGSM de maneira mais rápida que as sintetizações atuais.

Esta tese marca uma etapa inicial na investigação de feixes parcialmente coerentes no processo de conversão paramétrica descendente estimulada, criando oportunidades para investigar combinações mais complexas. Espera-se que as descobertas e análises apresentadas neste trabalho contribuam significativamente para o desenvolvimento da Óptica Não-Linear, especialmente no uso de feixes parcialmente coerentes. Esta pesquisa tem o potencial de abrir novos caminhos para aplicações inovadoras, particularmente no uso de feixes com reduzida coerência espacial transversal, no transporte de informação em contextos clássicos e quânticos.

BIBLIOGRAFIA

1. Shannon, C. E. A Mathematical Theory of Communication. *Bell System Technical Journal* **27**, 379–423. ISSN: 00058580 (jul. de 1948).
2. Shannon, C. E. & Weaver, W. *The Mathematical Theory of Communication* 21. print. ISBN: 978-0-252-72548-7 (Univ. of Illinois Press, Urbana, 1998).
3. Wootters, W. K. & Zurek, W. H. A Single Quantum Cannot Be Cloned. *Nature* **299**, 802–803. ISSN: 0028-0836, 1476-4687 (out. de 1982).
4. Dieks, D. Communication by EPR Devices. *Physics Letters A* **92**, 271–272. ISSN: 03759601 (nov. de 1982).
5. Einstein, A., Podolsky, B. & Rosen, N. Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete? *Physical Review* **47**, 777–780. ISSN: 0031-899X (mai. de 1935).
6. Schrödinger, E. Die gegenwärtige Situation in der Quantenmechanik. *Die Naturwissenschaften* **23**, 807–812. ISSN: 0028-1042, 1432-1904 (nov. de 1935).
7. Heisenberg, W. über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik. *Zeitschrift für Physik* **43**, 172–198. ISSN: 1434-6001, 1434-601X (mar. de 1927).
8. Kennard, E. H. Zur Quantenmechanik einfacher Bewegungstypen. *Zeitschrift für Physik* **44**, 326–352. ISSN: 1434-6001, 1434-601X (abr. de 1927).
9. Landau, L. D. *Quantum Mechanics: Non-Relativistic Theory* 3d ed., rev. and enl. *Their Course of Theoretical Physics v. 3*. ISBN: 978-0-08-020940-1 (Pergamon Press, Oxford New York, 1977).
10. Maxwell, J. On Physical Lines of Force. *Philosophical Magazine* **90**, 11–23. ISSN: 1478-6435, 1478-6443 (fev. de 2010).
11. Einstein, A. Zur Elektrodynamik Bewegter Körper. *Annalen der Physik* **322**, 891–921 (1905).
12. Einstein, A. Die feldgleichungen der gravitation. *Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse* **25**, 844–847 (1915).
13. Hopkins, H. H. & Kapany, N. S. A Flexible Fibrescope, Using Static Scanning. *Nature* **173**, 39–41. ISSN: 0028-0836, 1476-4687 (jan. de 1954).

14. Hecht, J. Illuminating the Origin of Light Guiding. *Optics and Photonics News* **10**, 26. ISSN: 1047-6938, 1541-3721 (out. de 1999).
15. Hecht, J. *City of Light: The Story of Fiber Optics* ISBN: 978-0-19-510818-7 (Oxford University Press, New York, 1999).
16. Johnston, W. K. The Birth of Fiberoptics from "Light Guiding". *Journal of Endourology* **18**, 425–426. ISSN: 0892-7790, 1557-900X (jun. de 2004).
17. Maiman, T. H. Stimulated Optical Radiation in Ruby. *Nature* **187**, 493–494. ISSN: 0028-0836, 1476-4687 (ago. de 1960).
18. Miller, S. E. Communication by Laser. *Scientific American* **214**, 19–27 (jan. de 1966).
19. Pratt, W. K. *Laser Communication Systems* ISBN: 978-0-471-69650-6 (Wiley, New York, 1969).
20. Agrawal, G. P. in *Optics in Our Time* (ed. Al-Amri, M. D., El-Gomati, M. & Zubairy, M. S.) 177–199 (Springer International Publishing, Cham, 2016). ISBN: 978-3-319-31902-5 978-3-319-31903-2.
21. Franken, P. A., Hill, A. E., Peters, C. W. & Weinreich, G. Generation of Optical Harmonics. *Physical Review Letters* **7**, 118–119. ISSN: 0031-9007 (ago. de 1961).
22. Smith, A. W. & Braslau, N. Optical Mixing of Coherent and Incoherent Light [Letter to the Editor]. *IBM Journal of Research and Development* **6**, 361–362. ISSN: 0018-8646, 0018-8646 (jul. de 1962).
23. Klishko, D. N. & Krindach, D. P. Observation of Parametric Luminescence in a Lithium Niobate Crystal Excited by an Argon Laser. **27**, pp. 371–543 (set. de 1968).
24. Burnham, D. C. & Weinberg, D. L. Observation of Simultaneity in Parametric Production of Optical Photon Pairs. *Physical Review Letters* **25**, 84–87. ISSN: 0031-9007 (jul. de 1970).
25. Kwiat, P. G., Mattle, K., Weinfurter, H., Zeilinger, A., Sergienko, A. V. & Shih, Y. New High-Intensity Source of Polarization-Entangled Photon Pairs. *Physical Review Letters* **75**, 4337–4341. ISSN: 0031-9007, 1079-7114 (dez. de 1995).
26. Kwiat, P. G., Waks, E., White, A. G., Appelbaum, I. & Eberhard, P. H. Ultrabright Source of Polarization-Entangled Photons. *Physical Review A* **60**, R773–R776. ISSN: 1050-2947, 1094-1622 (ago. de 1999).

27. Rarity, J. G. & Tapster, P. R. Experimental Violation of Bell's Inequality Based on Phase and Momentum. *Physical Review Letters* **64**, 2495–2498. ISSN: 0031-9007 (mai. de 1990).
28. Tapster, P. R., Rarity, J. G. & Owens, P. C. M. Violation of Bell's Inequality over 4 Km of Optical Fiber. *Physical Review Letters* **73**, 1923–1926. ISSN: 0031-9007 (out. de 1994).
29. Vaziri, A., Weihs, G. & Zeilinger, A. Experimental Two-Photon, Three-Dimensional Entanglement for Quantum Communication. *Physical Review Letters* **89**, 240401. ISSN: 0031-9007, 1079-7114 (nov. de 2002).
30. Mair, A., Vaziri, A., Weihs, G. & Zeilinger, A. Entanglement of the Orbital Angular Momentum States of Photons. *Nature* **412**, 313–316. ISSN: 0028-0836, 1476-4687 (jul. de 2001).
31. Ou, Z. Y. & Mandel, L. Violation of Bell's Inequality and Classical Probability in a Two-Photon Correlation Experiment. *Physical Review Letters* **61**, 50–53. ISSN: 0031-9007 (jul. de 1988).
32. Shih, Y. H. & Alley, C. O. New Type of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm Experiment Using Pairs of Light Quanta Produced by Optical Parametric Down Conversion. *Physical Review Letters* **61**, 2921–2924. ISSN: 0031-9007 (dez. de 1988).
33. Torgerson, J., Branning, D., Monken, C. & Mandel, L. Experimental Demonstration of the Violation of Local Realism without Bell Inequalities. *Physics Letters A* **204**, 323–328. ISSN: 03759601 (ago. de 1995).
34. Pan, J.-W., Bouwmeester, D., Daniell, M., Weinfurter, H. & Zeilinger, A. Experimental Test of Quantum Nonlocality in Three-Photon Greenberger–Horne–Zeilinger Entanglement. *Nature* **403**, 515–519. ISSN: 0028-0836, 1476-4687 (fev. de 2000).
35. Bouwmeester, D., Pan, J.-W., Mattle, K., Eibl, M., Weinfurter, H. & Zeilinger, A. Experimental Quantum Teleportation. *Nature* **390**, 575–579. ISSN: 0028-0836, 1476-4687 (dez. de 1997).
36. Kim, Y.-H., Kulik, S. P. & Shih, Y. Quantum Teleportation of a Polarization State with a Complete Bell State Measurement. *Physical Review Letters* **86**, 1370–1373. ISSN: 0031-9007, 1079-7114 (fev. de 2001).
37. Pan, J.-W., Daniell, M., Gasparoni, S., Weihs, G. & Zeilinger, A. Experimental Demonstration of Four-Photon Entanglement and High-Fidelity Teleportation. *Physical Review Letters* **86**, 4435–4438. ISSN: 0031-9007, 1079-7114 (mai. de 2001).

38. Jennewein, T., Simon, C., Weihs, G., Weinfurter, H. & Zeilinger, A. Quantum Cryptography with Entangled Photons. *Physical Review Letters* **84**, 4729–4732. ISSN: 0031-9007, 1079-7114 (mai. de 2000).
39. Naik, D. S., Peterson, C. G., White, A. G., Berglund, A. J. & Kwiat, P. G. Entangled State Quantum Cryptography: Eavesdropping on the Ekert Protocol. *Physical Review Letters* **84**, 4733–4736. ISSN: 0031-9007, 1079-7114 (mai. de 2000).
40. Tittel, W., Brendel, J., Zbinden, H. & Gisin, N. Quantum Cryptography Using Entangled Photons in Energy-Time Bell States. *Physical Review Letters* **84**, 4737–4740. ISSN: 0031-9007, 1079-7114 (mai. de 2000).
41. Pittman, T. B., Jacobs, B. C. & Franson, J. D. Demonstration of Nondeterministic Quantum Logic Operations Using Linear Optical Elements. *Physical Review Letters* **88**, 257902. ISSN: 0031-9007, 1079-7114 (jun. de 2002).
42. O'Brien, J. L., Pryde, G. J., White, A. G., Ralph, T. C. & Branning, D. Demonstration of an All-Optical Quantum Controlled-NOT Gate. *Nature* **426**, 264–267. ISSN: 0028-0836, 1476-4687 (nov. de 2003).
43. Nogueira, W. A. T., Walborn, S. P., Pádua, S. & Monken, C. H. Experimental Observation of Spatial Antibunching of Photons. *Physical Review Letters* **86**, 4009–4012. ISSN: 0031-9007, 1079-7114 (abr. de 2001).
44. Tittel, W., Brendel, J., Gisin, B., Herzog, T., Zbinden, H. & Gisin, N. Experimental Demonstration of Quantum Correlations over More than 10 Km. *Physical Review A* **57**, 3229–3232. ISSN: 1050-2947, 1094-1622 (mai. de 1998).
45. Fonseca, E. J. S., Monken, C. H. & Pádua, S. Measurement of the de Broglie Wavelength of a Multiphoton Wave Packet. *Physical Review Letters* **82**, 2868–2871. ISSN: 0031-9007, 1079-7114 (abr. de 1999).
46. Ribeiro, P. H. S., Pádua, S., Machado Da Silva, J. C. & Barbosa, G. A. Controlling the Degree of Visibility of Young's Fringes with Photon Coincidence Measurements. *Physical Review A* **49**, 4176–4179. ISSN: 1050-2947, 1094-1622 (mai. de 1994).
47. Shih, Y. H., Sergienko, A. V., Rubin, M. H., Kiess, T. E. & Alley, C. O. Two-Photon Entanglement in Type-II Parametric down-Conversion. *Physical Review A* **50**, 23–28. ISSN: 1050-2947, 1094-1622 (jul. de 1994).
48. Rubin, M. H., Klyshko, D. N., Shih, Y. H. & Sergienko, A. V. Theory of Two-Photon Entanglement in Type-II Optical Parametric down-Conversion. *Physical Review A* **50**, 5122–5133. ISSN: 1050-2947, 1094-1622 (dez. de 1994).

49. Souto Ribeiro, P. H. Partial Coherence with Twin Photons. *Physical Review A* **56**, 4111–4117. ISSN: 1050-2947, 1094-1622 (nov. de 1997).
50. Monken, C. H., Ribeiro, P. H. S. & Pádua, S. Transfer of Angular Spectrum and Image Formation in Spontaneous Parametric Down-Conversion. *Physical Review A* **57**, 3123–3126. ISSN: 1050-2947, 1094-1622 (abr. de 1998).
51. Yeh, P., Chiou, A. E., Hong, J., Beckwith, P., Chang, T. & Khoshnevisan, M. in *Landmark Papers on Photorefractive Nonlinear Optics* 525–540 (WORLD SCIENTIFIC, jul. de 1995). ISBN: 978-981-02-1443-2 978-981-283-204-7.
52. Gisin, N. & Thew, R. Quantum Communication. *Nature Photonics* **1**, 165–171. ISSN: 1749-4885, 1749-4893 (mar. de 2007).
53. Forbes, A., De Oliveira, M. & Dennis, M. R. Structured Light. *Nature Photonics* **15**, 253–262. ISSN: 1749-4885, 1749-4893 (abr. de 2021).
54. Forbes, A. & Nape, I. Quantum Mechanics with Patterns of Light: Progress in High Dimensional and Multidimensional Entanglement with Structured Light. *AVS Quantum Science* **1**, 011701. ISSN: 2639-0213 (dez. de 2019).
55. Allen, L., Beijersbergen, M. W., Spreeuw, R. J. C. & Woerdman, J. P. Orbital Angular Momentum of Light and the Transformation of Laguerre-Gaussian Laser Modes. *Physical Review A* **45**, 8185–8189. ISSN: 1050-2947, 1094-1622 (jun. de 1992).
56. Yao, A. M. & Padgett, M. J. Orbital Angular Momentum: Origins, Behavior and Applications. *Advances in Optics and Photonics* **3**, 161. ISSN: 1943-8206 (jun. de 2011).
57. Barreiro, J. T., Wei, T.-C. & Kwiat, P. G. Beating the Channel Capacity Limit for Linear Photonic Superdense Coding. *Nature Physics* **4**, 282–286. ISSN: 1745-2473, 1745-2481 (abr. de 2008).
58. Xie, Z., Lei, T., Li, F., Qiu, H., Zhang, Z., Wang, H., Min, C., Du, L., Li, Z. & Yuan, X. Ultra-Broadband on-Chip Twisted Light Emitter for Optical Communications. *Light: Science & Applications* **7**, 18001–18001. ISSN: 2047-7538 (abr. de 2018).
59. Bozinovic, N., Yue, Y., Ren, Y., Tur, M., Kristensen, P., Huang, H., Willner, A. E. & Ramachandran, S. Terabit-Scale Orbital Angular Momentum Mode Division Multiplexing in Fibers. *Science* **340**, 1545–1548. ISSN: 0036-8075, 1095-9203 (jun. de 2013).
60. Paterson, L., MacDonald, M. P., Arlt, J., Sibbett, W., Bryant, P. E. & Dholakia, K. Controlled Rotation of Optically Trapped Microscopic Particles. *Science* **292**, 912–914. ISSN: 0036-8075, 1095-9203 (mai. de 2001).

61. MacDonald, M. P., Paterson, L., Volke-Sepulveda, K., Arlt, J., Sibbett, W. & Dholakia, K. Creation and Manipulation of Three-Dimensional Optically Trapped Structures. *Science* **296**, 1101–1103. ISSN: 0036-8075, 1095-9203 (mai. de 2002).
62. Fu, S. & Gao, C. Influences of Atmospheric Turbulence Effects on the Orbital Angular Momentum Spectra of Vortex Beams. *Photonics Research* **4**, B1. ISSN: 2327-9125 (out. de 2016).
63. Li, Y., Yu, L. & Zhang, Y. Influence of Anisotropic Turbulence on the Orbital Angular Momentum Modes of Hermite-Gaussian Vortex Beam in the Ocean. *Optics Express* **25**, 12203. ISSN: 1094-4087 (mai. de 2017).
64. Gori, F., Guattari, G. & Padovani, C. Bessel-Gauss Beams. *Optics Communications* **64**, 491–495. ISSN: 00304018 (dez. de 1987).
65. Liu, C., Liu, J., Niu, L., Wei, X., Wang, K. & Yang, Z. Terahertz Circular Airy Vortex Beams. *Scientific Reports* **7**, 3891. ISSN: 2045-2322 (jun. de 2017).
66. Kotlyar, V. V., Kovalev, A. A. & Porfirev, A. P. Astigmatic Laser Beams with a Large Orbital Angular Momentum. *Optics Express* **26**, 141. ISSN: 1094-4087 (jan. de 2018).
67. Schell, A. *The Multiple Plate Antenna* tese de dout. (Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, 1961).
68. Schell, A. A Technique for the Determination of the Radiation Pattern of a Partially Coherent Aperture. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* **15**, 187–188. ISSN: 0018-926X, 1558-2221 (jan. de 1967).
69. Simon, R. & Mukunda, N. Twisted Gaussian Schell-model Beams. *Journal of the Optical Society of America A* **10**, 95. ISSN: 1084-7529, 1520-8532 (jan. de 1993).
70. Simon, R. & Mukunda, N. Twist Phase in Gaussian-beam Optics. *Journal of the Optical Society of America A* **15**, 2373. ISSN: 1084-7529, 1520-8532 (set. de 1998).
71. Born, M., Wolf, E. & Bhatia, A. B. *Principles of Optics: Electromagnetic Theory of Propagation, Interference, and Diffraction of Light* Seventh (expanded) anniversary edition, 60th anniversary edition. ISBN: 978-1-108-76991-4 (Cambridge University Press, Cambridge, 2019).
72. Mandel, L. & Wolf, E. *Optical Coherence and Quantum Optics* 1^a ed. ISBN: 978-0-521-41711-2 (Cambridge University Press, set. de 1995).

73. Mandel, L. & Wolf, E. Spectral Coherence and the Concept of Cross-Spectral Purity*. *Journal of the Optical Society of America* **66**, 529. ISSN: 0030-3941 (jun. de 1976).
74. Wolf, E. *Contributions to the Theory of Interference and Diffraction of Light and Related Investigations* tese de dout. (University of Edinburgh, set. de 1955).
75. Wolf, E. & Carter, W. H. Angular Distribution of Radiant Intensity from Sources of Different Degrees of Spatial Coherence. *Optics Communications* **13**, 205–209. ISSN: 00304018 (mar. de 1975).
76. Wolf, E. & Collett, E. Partially Coherent Sources Which Produce the Same Far-Field Intensity Distribution as a Laser. *Optics Communications* **25**, 293–296. ISSN: 00304018 (jun. de 1978).
77. Collett, E. & Wolf, E. New Equivalence Theorems for Planar Sources That Generate the Same Distributions of Radiant Intensity*. *Journal of the Optical Society of America* **69**, 942. ISSN: 0030-3941 (jul. de 1979).
78. De Santis, P., Gori, F., Guattari, G. & Palma, C. An Example of a Collett-Wolf Source. *Optics Communications* **29**, 256–260. ISSN: 00304018 (jun. de 1979).
79. Gori, F. Collett-Wolf Sources and Multimode Lasers. *Optics Communications* **34**, 301–305. ISSN: 00304018 (set. de 1980).
80. Friberg, A. T. & Sudol, R. J. Propagation Parameters of Gaussian Schell-model Beams. *Optics Communications* **41**, 383–387. ISSN: 00304018 (mai. de 1982).
81. Ricklin, J. C. & Davidson, F. M. Atmospheric Turbulence Effects on a Partially Coherent Gaussian Beam: Implications for Free-Space Laser Communication. *Journal of the Optical Society of America A* **19**, 1794. ISSN: 1084-7529, 1520-8532 (set. de 2002).
82. Wang, F. & Cai, Y. Second-Order Statistics of a Twisted Gaussian Schell-model Beam in Turbulent Atmosphere. *Optics Express* **18**, 24661. ISSN: 1094-4087 (nov. de 2010).
83. Zhou, M., Fan, W. & Wu, G. Evolution Properties of the Orbital Angular Momentum Spectrum of Twisted Gaussian Schell-model Beams in Turbulent Atmosphere. *Journal of the Optical Society of America A* **37**, 142. ISSN: 1084-7529, 1520-8532 (jan. de 2020).
84. Wang, L.-G., Liu, N.-H., Lin, Q. & Zhu, S.-Y. Superluminal Propagation of Light Pulses: A Result of Interference. *Physical Review E* **68**, 066606. ISSN: 1063-651X, 1095-3787 (dez. de 2003).

85. Mehta, S. B. & Sheppard, C. J. Using the Phase-Space Imager to Analyze Partially Coherent Imaging Systems: Bright-Field, Phase Contrast, Differential Interference Contrast, Differential Phase Contrast, and Spiral Phase Contrast. *Journal of Modern Optics* **57**, 718–739. ISSN: 0950-0340, 1362-3044 (mai. de 2010).
86. Bartels, R. A., Paul, A., Green, H., Kapteyn, H. C., Murnane, M. M., Backus, S., Christov, I. P., Liu, Y., Attwood, D. & Jacobsen, C. Generation of Spatially Coherent Light at Extreme Ultraviolet Wavelengths. *Science* **297**, 376–378. ISSN: 0036-8075, 1095-9203 (jul. de 2002).
87. Liu, X. & Zhao, D. Optical Trapping Rayleigh Particles by Using Focused Multi-Gaussian Schell-model Beams. *Applied Optics* **53**, 3976. ISSN: 1559-128X, 2155-3165 (jun. de 2014).
88. Oh, C. W., Cao, Z., Tangdiongga, E. & Koonen, T. Free-Space Transmission with Passive 2D Beam Steering for Multi-Gigabit-per-Second per-Beam Indoor Optical Wireless Networks. *Optics Express* **24**, 19211. ISSN: 1094-4087 (ago. de 2016).
89. Cañas, G., Gómes, E. S., dos Santos, G. H., de Oliveira, A. G., da Silva, N. R., Joshi, S., Ismail, Y., Ribeiro, P. H. S. & Walborn, S. P. Evaluation of Twisted Gaussian Schell Model Beams Produced with Phase Randomized Coherent Fields (2022).
90. Pereira, L. J., Buono, W. T., Tasca, D. S., Dechoum, K. & Khoury, A. Z. Orbital-Angular-Momentum Mixing in Type-II Second-Harmonic Generation. *Physical Review A* **96**, 053856. ISSN: 2469-9926, 2469-9934 (nov. de 2017).
91. Alves, G. B., Barros, R. F., Tasca, D. S., Souza, C. E. R. & Khoury, A. Z. Conditions for Optical Parametric Oscillation with a Structured Light Pump. *Physical Review A* **98**, 063825. ISSN: 2469-9926, 2469-9934 (dez. de 2018).
92. Buono, W. T., Santos, A., Maia, M. R., Pereira, L. J., Tasca, D. S., Dechoum, K., Ruchon, T. & Khoury, A. Z. Chiral Relations and Radial-Angular Coupling in Nonlinear Interactions of Optical Vortices. *Physical Review A* **101**, 043821. ISSN: 2469-9926, 2469-9934 (abr. de 2020).
93. Wu, H.-J., Mao, L.-W., Yang, Y.-J., Rosales-Guzmán, C., Gao, W., Shi, B.-S. & Zhu, Z.-H. Radial Modal Transitions of Laguerre-Gauss Modes during Parametric up-Conversion: Towards the Full-Field Selection Rule of Spatial Modes. *Physical Review A* **101**, 063805. ISSN: 2469-9926, 2469-9934 (jun. de 2020).
94. Hickmann, J. M., Fonseca, E. J. S., Soares, W. C. & Chávez-Cerda, S. Unveiling a Truncated Optical Lattice Associated with a Triangular Aperture Using Light's Orbital Angular Momentum. *Physical Review Letters* **105**, 053904. ISSN: 0031-9007, 1079-7114 (jul. de 2010).

95. Borges, C. V. S., Hor-Meyll, M., Huguenin, J. A. O. & Khoury, A. Z. Bell-like Inequality for the Spin-Orbit Separability of a Laser Beam. *Physical Review A* **82**, 033833. ISSN: 1050-2947, 1094-1622 (set. de 2010).
96. Carvalho, M. A. D., Ferraz, J., Borges, G. F., De Assis, P.-L., Pádua, S. & Walborn, S. P. Experimental Observation of Quantum Correlations in Modular Variables. *Physical Review A* **86**, 032332. ISSN: 1050-2947, 1094-1622 (set. de 2012).
97. Borges, G., Carvalho, M., De Assis, P.-L., Ferraz, J., Araújo, M., Cabello, A., Cunha, M. T. & Pádua, S. Quantum Contextuality in a Young-type Interference Experiment. *Physical Review A* **89**, 052106. ISSN: 1050-2947, 1094-1622 (mai. de 2014).
98. Arruda, M. F. Z., Soares, W. C., Walborn, S. P., Tasca, D. S., Kanaan, A., Medeiros De Araújo, R. & Souto Ribeiro, P. H. Klyshko's Advanced-Wave Picture in Stimulated Parametric down-Conversion with a Spatially Structured Pump Beam. *Physical Review A* **98**, 023850. ISSN: 2469-9926, 2469-9934 (ago. de 2018).
99. Phehlukwayo, S. P., Umuhire, M. L., Ismail, Y., Joshi, S. & Petruccione, F. Influence of Coincidence Detection of a Biphoton State through Free-Space Atmospheric Turbulence Using a Partially Spatially Coherent Pump. *Physical Review A* **102**, 033732. ISSN: 2469-9926, 2469-9934 (set. de 2020).
100. Hutter, L., Lima, G. & Walborn, S. P. Boosting Entanglement Generation in Down-Conversion with Incoherent Illumination. *Physical Review Letters* **125**, 193602. ISSN: 0031-9007, 1079-7114 (nov. de 2020).
101. Jackson, J. D. *Classical Electrodynamics* ISBN: 978-0-471-43132-9 (Wiley, New York, 1975).
102. Griffiths, D. J. *Introduction to Electrodynamics* Fourth edition. ISBN: 978-1-108-42041-9 (Cambridge University Press, Cambridge, United Kingdom ; New York, NY, 2018).
103. Saleh, B. E. A. & Teich, M. C. *Fundamentals of Photonics* ISBN: 978-0-471-21374-1 (Wiley-Interscience, Hoboken, NJ, 2001).
104. Roychoudhuri, C. *Fundamentals of Photonics* ISBN: 978-0-8194-7128-4 (SPIE, 1000 20th Street, Bellingham, WA 98227-0010 USA, mai. de 2008).
105. Gouy, L. *Sur Une Propriété Nouvelle Des Ondes Lumineuses* (Gauthier-Villars, 1890).
106. Rubinowicz, A. On the Anomalous Propagation of Phase in the Focus. *Physical Review* **54**, 931–936. ISSN: 0031-899X (dez. de 1938).

107. Boyd, R. W. Intuitive Explanation of the Phase Anomaly of Focused Light Beams. *Journal of the Optical Society of America* **70**, 877. ISSN: 0030-3941 (jul. de 1980).
108. Shieh, W. *Applying Orthogonality to Optical Communications in European Conference and Exhibition on Optical Communication* (OSA, Amsterdam, 2012), We.2.D.5.
109. Wolf, E. & Carter, W. H. Coherence and Radiant Intensity in Scalar Wave Fields Generated by Fluctuating Primary Planar Sources. *Journal of the Optical Society of America* **68**, 953. ISSN: 0030-3941 (jul. de 1978).
110. Boyd, R. W. *Nonlinear Optics* Third edition. ISBN: 978-0-08-048596-6 978-0-12-369470-6 (Elsevier, Academic Press, Amsterdam Heidelberg, 2008).
111. Göppert-Mayer, M. Über Elementarakte Mit Zwei Quantensprüngen. *Annalen der Physik* **401**, 273–294. ISSN: 0003-3804, 1521-3889 (jan. de 1931).
112. Kaiser, W. & Garrett, C. G. B. Two-Photon Excitation in Ca F 2 : Eu 2 +. *Physical Review Letters* **7**, 229–231. ISSN: 0031-9007 (set. de 1961).
113. Haroche, S. Essay: Fifty Years of Atomic, Molecular and Optical Physics in Physical Review Letters. *Physical Review Letters* **101**, 160001. ISSN: 0031-9007, 1079-7114 (out. de 2008).
114. Boeuf, N. Calculating Characteristics of Noncollinear Phase Matching in Uniaxial and Biaxial Crystals. *Optical Engineering* **39**, 1016. ISSN: 0091-3286 (abr. de 2000).
115. Manley, J. & Rowe, H. Some General Properties of Nonlinear Elements-Part I. General Energy Relations. *Proceedings of the IRE* **44**, 904–913. ISSN: 0096-8390 (jul. de 1956).
116. New, G. *Introduction to Nonlinear Optics* ISBN: 978-0-521-87701-5 (Cambridge University Press, Cambridge ; New York, 2011).
117. Grice, W. P., Erdmann, R., Walmsley, I. A. & Branning, D. Spectral Distinguishability in Ultrafast Parametric Down-Conversion. *Physical Review A* **57**, R2289–R2292. ISSN: 1050-2947, 1094-1622 (abr. de 1998).
118. Souto Ribeiro, P. H., Caetano, D. P., Almeida, M. P., Huguenin, J. A., Coutinho Dos Santos, B. & Houry, A. Z. Observation of Image Transfer and Phase Conjugation in Stimulated Down-Conversion. *Physical Review Letters* **87**, 133602. ISSN: 0031-9007, 1079-7114 (set. de 2001).

119. Parigi, V., Zavatta, A., Kim, M. & Bellini, M. Probing Quantum Commutation Rules by Addition and Subtraction of Single Photons to/from a Light Field. *Science* **317**, 1890–1893. ISSN: 0036-8075, 1095-9203 (set. de 2007).
120. Liscidini, M. & Sipe, J. E. Stimulated Emission Tomography. *Physical Review Letters* **111**, 193602. ISSN: 0031-9007, 1079-7114 (nov. de 2013).
121. Rozema, L. A., Wang, C., Mahler, D. H., Hayat, A., Steinberg, A. M., Sipe, J. E. & Liscidini, M. Characterizing an Entangled-Photon Source with Classical Detectors and Measurements. *Optica* **2**, 430. ISSN: 2334-2536 (mai. de 2015).
122. Ciampini, M. A., Geraldi, A., Cimini, V., Macchiavello, C., Sipe, J. E., Liscidini, M. & Mataloni, P. Stimulated Emission Tomography: Beyond Polarization. *Optics Letters* **44**, 41. ISSN: 0146-9592, 1539-4794 (jan. de 2019).
123. Walborn, S., Monken, C., Pádua, S. & Souto Ribeiro, P. Spatial Correlations in Parametric Down-Conversion. *Physics Reports* **495**, 87–139. ISSN: 03701573 (out. de 2010).
124. De Oliveira, A. G., Arruda, M. F. Z., Soares, W. C., Walborn, S. P., Khoury, A. Z., Kanaan, A., Ribeiro, P. H. S. & De Araújo, R. M. Phase Conjugation and Mode Conversion in Stimulated Parametric Down-Conversion with Orbital Angular Momentum: A Geometrical Interpretation. *Brazilian Journal of Physics* **49**, 10–16. ISSN: 0103-9733, 1678-4448 (fev. de 2019).
125. Jin, R.-B., Takeoka, M., Takagi, U., Shimizu, R. & Sasaki, M. Highly Efficient Entanglement Swapping and Teleportation at Telecom Wavelength. *Scientific Reports* **5**, 9333. ISSN: 2045-2322 (mar. de 2015).
126. Im, D.-G., Lee, C.-H., Kim, Y., Nha, H., Kim, M. S., Lee, S.-W. & Kim, Y.-H. Optimal Teleportation via Noisy Quantum Channels without Additional Qubit Resources. *npj Quantum Information* **7**, 86. ISSN: 2056-6387 (jun. de 2021).
127. Hardy, N. D., Ben Dixon, P. & Hamilton, S. A. *Teleportation Fidelity Improvement with Quantum Memory in Quantum 2.0 Conference and Exhibition* (Optica Publishing Group, Boston, MA, 2022), QM4B.4.
128. Sephton, B., Vallés, A., Nape, I., Cox, M. A., Steinlechner, F., Konrad, T., Torres, J. P., Roux, F. S. & Forbes, A. Quantum Transport of High-Dimensional Spatial Information with a Nonlinear Detector. *Nature Communications* **14**, 8243. ISSN: 2041-1723 (dez. de 2023).
129. Sergienko, A. V., Atatüre, M., Walton, Z., Jaeger, G., Saleh, B. E. A. & Teich, M. C. Quantum Cryptography Using Femtosecond-Pulsed Parametric down-Conversion. *Physical Review A* **60**, R2622–R2625. ISSN: 1050-2947, 1094-1622 (out. de 1999).

130. Gisin, N., Ribordy, G., Tittel, W. & Zbinden, H. Quantum Cryptography. *Reviews of Modern Physics* **74**, 145–195. ISSN: 0034-6861, 1539-0756 (mar. de 2002).
131. Courme, B., Cameron, P., Faccio, D., Gigan, S. & Defienne, H. Manipulation and Certification of High-Dimensional Entanglement through a Scattering Medium. *PRX Quantum* **4**, 010308. ISSN: 2691-3399 (jan. de 2023).
132. Arnaut, H. H. & Barbosa, G. A. Orbital and Intrinsic Angular Momentum of Single Photons and Entangled Pairs of Photons Generated by Parametric Down-Conversion. *Physical Review Letters* **85**, 286–289. ISSN: 0031-9007, 1079-7114 (jul. de 2000).
133. Franke-Arnold, S., Barnett, S. M., Padgett, M. J. & Allen, L. Two-Photon Entanglement of Orbital Angular Momentum States. *Physical Review A* **65**, 033823. ISSN: 1050-2947, 1094-1622 (fev. de 2002).
134. Caetano, D. P., Almeida, M. P., Souto Ribeiro, P. H., Huguenin, J. A. O., Coutinho Dos Santos, B. & Khoury, A. Z. Conservation of Orbital Angular Momentum in Stimulated Down-Conversion. *Physical Review A* **66**, 041801. ISSN: 1050-2947, 1094-1622 (out. de 2002).
135. Barbosa, G. A. & Arnaut, H. H. Twin Photons with Angular-Momentum Entanglement: Phase Matching. *Physical Review A* **65**, 053801. ISSN: 1050-2947, 1094-1622 (abr. de 2002).
136. Torres, J. P., Deyanova, Y., Torner, L. & Molina-Terriza, G. Preparation of Engineered Two-Photon Entangled States for Multidimensional Quantum Information. *Physical Review A* **67**, 052313. ISSN: 1050-2947, 1094-1622 (mai. de 2003).
137. Torres, J. P., Alexandrescu, A. & Torner, L. Quantum Spiral Bandwidth of Entangled Two-Photon States. *Physical Review A* **68**, 050301. ISSN: 1050-2947, 1094-1622 (nov. de 2003).
138. Peng, X., Liu, L., Wang, F., Popov, S. & Cai, Y. Twisted Laguerre-Gaussian Schell-model Beam and Its Orbital Angular Moment. *Optics Express* **26**, 33956. ISSN: 1094-4087 (dez. de 2018).
139. Liu, L., Wang, H., Liu, L., Dong, Y., Wang, F., Hoenders, B. J., Chen, Y., Cai, Y. & Peng, X. Propagation Properties of a Twisted Hermite-Gaussian Correlated Schell-Model Beam in Free Space. *Frontiers in Physics* **10**, 847649. ISSN: 2296-424X (fev. de 2022).
140. Stahl, C. S. D. & Gbur, G. Twisted Vortex Gaussian Schell-model Beams. *Journal of the Optical Society of America A* **35**, 1899. ISSN: 1084-7529, 1520-8532 (nov. de 2018).

141. Liu, L., Wang, H., Liu, L., Ye, Y., Wang, F., Cai, Y. & Peng, X. Radially Polarized Twisted Partially Coherent Vortex Beams. *Optics Express* **30**, 7511. ISSN: 1094-4087 (fev. de 2022).
142. Ernstoff, M., Leupp, A., Little, M. & Peterson, H. *Liquid Crystal Pictorial Display in 1973 International Electron Devices Meeting* (IRE, 1973), 548–551.
143. Zhang, Z., You, Z. & Chu, D. Fundamentals of Phase-Only Liquid Crystal on Silicon (LCOS) Devices. *Light: Science & Applications* **3**, e213–e213. ISSN: 2047-7538 (out. de 2014).
144. Crossland, W. A., Ayliffe, P. J. & Ross, P. W. A Dyed-Phase-Change Liquid-Crystal Display over a MOSFET Switching Array. *A dyed-phase-change liquid-crystal display over a MOSFET switching array*, 15–22 (1982).
145. Jesacher, A., Schwaighofer, A., Fürhapter, S., Maurer, C., Bernet, S. & Ritsch-Marte, M. Wavefront Correction of Spatial Light Modulators Using an Optical Vortex Image. *Optics Express* **15**, 5801. ISSN: 1094-4087 (2007).
146. Vishniakou, I. & Seelig, J. D. Wavefront Correction for Adaptive Optics with Reflected Light and Deep Neural Networks. *Optics Express* **28**, 15459. ISSN: 1094-4087 (mai. de 2020).
147. Lin, L.-C., Huang, C.-H., Chen, Y.-F., Chu, D. & Cheng, C.-J. Deep Learning-Assisted Wavefront Correction with Sparse Data for Holographic Tomography. *Optics and Lasers in Engineering* **154**, 107010. ISSN: 01438166 (jul. de 2022).
148. Xu, Y., Tang, S., Nicholas Black, A. & Boyd, R. W. Orthogonal Spatial Coding with Stimulated Parametric Down-Conversion. *Optics Express* **31**, 42723. ISSN: 1094-4087 (dez. de 2023).
149. Harwit, M. Photon Orbital Angular Momentum in Astrophysics. *The Astrophysical Journal* **597**, 1266–1270. ISSN: 0004-637X, 1538-4357 (nov. de 2003).
150. Yang, Y., Kang, X. & Cao, L. Robust Propagation of a Steady Optical Beam through Turbulence with Extended Depth of Focus Based on Spatial Light Modulator. *Journal of Physics: Photonics* **5**, 035002. ISSN: 2515-7647 (jul. de 2023).
151. Forbes, A., Dudley, A. & McLaren, M. Creation and Detection of Optical Modes with Spatial Light Modulators. *Advances in Optics and Photonics* **8**, 200. ISSN: 1943-8206 (jun. de 2016).
152. Göröcs, Z., Erdei, G., Sarkadi, T., Ujhelyi, F., Reményi, J., Koppa, P. & Lorincz, E. Hybrid Multinary Modulation Using a Phase Modulating Spatial Light Modulator and a Low-Pass Spatial Filter. *Optics Letters* **32**, 2336. ISSN: 0146-9592, 1539-4794 (ago. de 2007).

153. Frumker, E. & Silberberg, Y. Phase and Amplitude Pulse Shaping with Two-Dimensional Phase-Only Spatial Light Modulators. *Journal of the Optical Society of America B* **24**, 2940. ISSN: 0740-3224, 1520-8540 (dez. de 2007).
154. Reicherter, M., Zwick, S., Haist, T., Kohler, C., Tiziani, H. & Osten, W. Fast Digital Hologram Generation and Adaptive Force Measurement in Liquid-Crystal-Display-Based Holographic Tweezers. *Applied Optics* **45**, 888. ISSN: 0003-6935, 1539-4522 (fev. de 2006).
155. Kelner, R. & Rosen, J. Methods of Single-Channel Digital Holography for Three-Dimensional Imaging. *IEEE Transactions on Industrial Informatics* **12**, 220–230. ISSN: 1551-3203, 1941-0050 (fev. de 2016).
156. Shimobaba, T., Kakue, T., Yamamoto, Y., Hoshi, I., Shiomi, H., Nishitsuji, T., Takada, N. & Ito, T. Hologram Generation via Hilbert Transform. *OSA Continuum* **3**, 1498. ISSN: 2578-7519 (jun. de 2020).
157. Shi, L., Li, B., Kim, C., Kellnhofer, P. & Matusik, W. Towards Real-Time Photorealistic 3D Holography with Deep Neural Networks. *Nature* **591**, 234–239. ISSN: 0028-0836, 1476-4687 (mar. de 2021).
158. Li, R., Gao, Y. & Cao, L. In Situ Calibration for a Phase-Only Spatial Light Modulator Based on Digital Holography. *Optical Engineering* **59**, 1. ISSN: 0091-3286 (mai. de 2020).
159. Hadad, B., Froim, S., Nagar, H., Admon, T., Eliezer, Y., Roichman, Y. & Bahabad, A. Particle Trapping and Conveying Using an Optical Archimedes' Screw. *Optica* **5**, 551. ISSN: 2334-2536 (mai. de 2018).
160. Wen, J., Gao, B., Zhu, G., Liu, D. & Wang, L.-G. Precise Position and Angular Control of Optical Trapping and Manipulation via a Single Vortex-Pair Beam. *Optics and Lasers in Engineering* **148**, 106773. ISSN: 01438166 (jan. de 2022).
161. Zwick, S., Haist, T., Miyamoto, Y., He, L., Warber, M., Hermerschmidt, A. & Osten, W. Holographic Twin Traps. *Journal of Optics A: Pure and Applied Optics* **11**, 034011. ISSN: 1464-4258, 1741-3567 (mar. de 2009).
162. Chapin, S. C., Germain, V. & Dufresne, E. R. Automated Trapping, Assembly, and Sorting with Holographic Optical Tweezers. *Optics Express* **14**, 13095. ISSN: 1094-4087 (dez. de 2006).
163. Mejean, C. O., Schaefer, A. W., Millman, E. A., Forscher, P. & Dufresne, E. R. Multiplexed Force Measurements on Live Cells with Holographic Optical Tweezers. *Optics Express* **17**, 6209. ISSN: 1094-4087 (abr. de 2009).

164. Kim, H., Lee, W., Lee, H.-g., Jo, H., Song, Y. & Ahn, J. In Situ Single-Atom Array Synthesis Using Dynamic Holographic Optical Tweezers. *Nature Communications* **7**, 13317. ISSN: 2041-1723 (out. de 2016).
165. Jesacher, A., Frhapter, S., Bernet, S. & Ritsch-Marte, M. Size Selective Trapping with Optical "Cogwheel" Tweezers. *Optics Express* **12**, 4129. ISSN: 1094-4087 (2004).
166. Rubiano Da Silva, N., De Oliveira, A., Arruda, M., Medeiros De Araújo, R., Soares, W., Walborn, S., Gomes, R. & Souto Ribeiro, P. Stimulated Parametric Down-Conversion with Vector Vortex Beams. *Physical Review Applied* **15**, 024039. ISSN: 2331-7019 (fev. de 2021).
167. de Oliveira, A., Santos, G., da Silva, N. R., Pereira, L., Alves, G., Khoury, A. & Ribeiro, P. S. Beyond Conservation of Orbital Angular Momentum in Stimulated Parametric Down-Conversion. *Physical Review Applied* **16**, 044019. ISSN: 2331-7019 (out. de 2021).
168. Silva, B., H. dos Santos, G., de Oliveira, A., Rubiano da Silva, N., Buono, W., M. Gomes, R., C. Soares, W., Silva, A., Fonseca, E., Ribeiro, P. H. & Khoury, A. Observation of Triangular-Lattice Pattern in Nonlinear Wave Mixing with Optical Vortices. *Optica*. ISSN: 2334-2536 (jun. de 2022).
169. dos Santos, G. H., Salles, D. C., Damaceno, M. G., Menezes, B. T., Corso, C., Martinelli, M., Ribeiro, P. H. S. & de Araújo, R. M. Decomposing Spatial Mode Superpositions with a Triangular Optical Cavity. *Physical Review Applied* **16**, 034008. ISSN: 2331-7019 (set. de 2021).
170. Ribeiro, P. H. S., Häffner, T., Zanin, G. L., Da Silva, N. R., De Araújo, R. M., Soares, W. C., De Assis, R. J., Céleri, L. C. & Forbes, A. Experimental Study of the Generalized Jarzynski Fluctuation Relation Using Entangled Photons. *Physical Review A* **101**, 052113. ISSN: 2469-9926, 2469-9934 (mai. de 2020).
171. Häffner, T., Zanin, G. L., Gomes, R. M., Céleri, L. C. & Ribeiro, P. H. S. Remote Preparation of Single Photon Vortex Thermal States. *The European Physical Journal Plus* **135**, 601. ISSN: 2190-5444 (jul. de 2020).
172. Araújo, R. M. D., Häffner, T., Bernardi, R., Tasca, D. S., Lavery, M. P. J., Padgett, M. J., Kanaan, A., Céleri, L. C. & Ribeiro, P. H. S. Experimental Study of Quantum Thermodynamics Using Optical Vortices. *Journal of Physics Communications* **2**, 035012. ISSN: 2399-6528 (mar. de 2018).
173. Zanin, G. L., Häffner, T., Talarico, M. A. A., Duzzioni, E. I., Ribeiro, P. H. S., Landi, G. T. & Céleri, L. C. Experimental Quantum Thermodynamics with Linear Optics. *Brazilian Journal of Physics* **49**, 783–798. ISSN: 0103-9733, 1678-4448 (out. de 2019).

174. dos Santos, G. H., de Oliveira, A. G., Rubiano da Silva, N., Cañas, G., Gómez, E. S., Joshi, S., Ismail, Y., Souto Ribeiro, P. H. & Walborn, S. P. Phase Conjugation of Twisted Gaussian Schell Model Beams in Stimulated Down-Conversion. *Nanophotonics* **11**, 763–770. ISSN: 2192-8614 (fev. de 2022).
175. Pimenta, R. C. S., dos Santos, G. H., Barreto, A. B., Celeri, L. C. & Ribeiro, P. H. S. Photonic Entanglement with Accelerated Light (2023).
176. Rosales-Guzmán, C. & Forbes, A. *How to Shape Light with Spatial Light Modulators* ISBN: 978-1-5106-1301-0 (SPIE Press, Bellingham, Washington, 2017).
177. Khoo, I.-C. *Liquid Crystals* 2nd ed. ISBN: 978-0-471-75153-3 (Wiley-Interscience, Hoboken, N.J, 2007).
178. NobelPrize.org. *Dennis Gabor – Facts* out. de 2023.
179. Gabor, D. Holography, 1948-1971. *Science* **177**, 299–313. ISSN: 0036-8075, 1095-9203 (jul. de 1972).
180. Harrison, G. R., Loewen, E. G. & Wiley, R. S. Echelle Gratings: Their Testing and Improvement. *Applied Optics* **15**, 971. ISSN: 0003-6935, 1539-4522 (abr. de 1976).
181. Engman, S. & Lindblom, P. Blaze Characteristics of Echelle Gratings. *Applied Optics* **21**, 4356. ISSN: 0003-6935, 1539-4522 (dez. de 1982).
182. Gori, F. & Santarsiero, M. Devising Genuine Spatial Correlation Functions. *Optics Letters* **32**, 3531. ISSN: 0146-9592, 1539-4794 (dez. de 2007).
183. Wolf, E. & Devaney, A. J. On a Relationship between Spectral Properties and Spatial Coherence Properties of Light. *Optics Letters* **6**, 168. ISSN: 0146-9592, 1539-4794 (abr. de 1981).
184. Wang, R., Zhu, S., Chen, Y., Huang, H., Li, Z. & Cai, Y. Experimental Synthesis of Partially Coherent Sources. *Optics Letters* **45**, 1874. ISSN: 0146-9592, 1539-4794 (abr. de 2020).
185. Tian, C., Zhu, S., Huang, H., Cai, Y. & Li, Z. Customizing Twisted Schell-model Beams. *Optics Letters* **45**, 5880. ISSN: 0146-9592, 1539-4794 (out. de 2020).
186. Wang, H., Peng, X., Zhang, H., Liu, L., Chen, Y., Wang, F. & Cai, Y. Experimental Synthesis of Partially Coherent Beam with Controllable Twist Phase and Measuring Its Orbital Angular Momentum. *Nanophotonics* **11**, 689–696. ISSN: 2192-8614 (fev. de 2022).

187. Friberg, A. T., Tervonen, E. & Turunen, J. Interpretation and Experimental Demonstration of Twisted Gaussian Schell-model Beams. *Journal of the Optical Society of America A* **11**, 1818. ISSN: 1084-7529, 1520-8532 (jun. de 1994).
188. Fowles, G. R. *Introduction to Modern Optics* ISBN: 978-0-486-13492-5 (Dover Publications, Newburyport, 2012).
189. Melo, L. A., Jesus-Silva, A. J., Chávez-Cerda, S., Ribeiro, P. H. S. & Soares, W. C. Direct Measurement of the Topological Charge in Elliptical Beams Using Diffraction by a Triangular Aperture. *Scientific Reports* **8**, 6370. ISSN: 2045-2322 (abr. de 2018).
190. Shen, Y., Fu, X. & Gong, M. Truncated Triangular Diffraction Lattices and Orbital-Angular-Momentum Detection of Vortex SU(2) Geometric Modes. *Optics Express* **26**, 25545. ISSN: 1094-4087 (out. de 2018).
191. Luo, M. & Zhao, D. Elliptical Laguerre Gaussian Schell-model Beams with a Twist in Random Media. *Optics Express* **27**, 30044. ISSN: 1094-4087 (out. de 2019).
192. Radon, J. On the Determination of Functions from Their Integral Values along Certain Manifolds. *IEEE Transactions on Medical Imaging* **5**, 170–176. ISSN: 0278-0062, 1558-254X (dez. de 1986).
193. Bracewell, R. N. *The Fourier Transform and Its Applications* 3rd ed. ISBN: 978-0-07-303938-1 (McGraw Hill, Boston, 2000).
194. Santos, G. D., Pimenta, R. S., Gomes, R., Walborn, S. & Ribeiro, P. S. Partial Coherence and Coherence Length in Stimulated Parametric Down-Conversion. *Physical Review Applied* **20**, 024007. ISSN: 2331-7019 (ago. de 2023).
195. Souto Ribeiro, P. H., Pádua, S., Machado Da Silva, J. C. & Barbosa, G. A. Control of Young's Fringes Visibility by Stimulated down-Conversion. *Physical Review A* **51**, 1631–1633. ISSN: 1050-2947, 1094-1622 (fev. de 1995).
196. De Oliveira, A. G., Arruda, M. F. Z., Soares, W. C., Walborn, S. P., Gomes, R. M., Medeiros De Araújo, R. & Souto Ribeiro, P. H. Real-Time Phase Conjugation of Vector Vortex Beams. *ACS Photonics* **7**, 249–255. ISSN: 2330-4022, 2330-4022 (jan. de 2020).
197. De Oliveira, A., Rubiano Da Silva, N., Medeiros De Araújo, R., Souto Ribeiro, P. & Walborn, S. Quantum Optical Description of Phase Conjugation of Vector Vortex Beams in Stimulated Parametric Down-Conversion. *Physical Review Applied* **14**, 024048. ISSN: 2331-7019 (ago. de 2020).

APÊNDICE A – CÓPIA DAS PUBLICAÇÕES RELACIONADAS A ESTA TESE

- Avaliação dos feixes TGSMs produzidos por campos coerentes com fases aleatórias
 - Cañas, G., Gómez, E. S., dos Santos, G. H., de Oliveira, A. G., Rubiano da Silva, N., Joshi, S., Ismail, Y., Ribeiro, P. H. S. & Walborn, S. P. Evaluation of Twisted Gaussian Schell Model Beams Produced with Phase Randomized Coherent Fields. *Journal of Optics* **24**, 094004. ISSN: 2040-8978, 2040-8986 (set. de 2022).

- Experimentos com interação paramétrica de feixes Gaussianos coerentes
 - de Oliveira, A., Santos, G., da Silva, N. R., Pereira, L., Alves, G., Khoury, A. & Ribeiro, P. S. Beyond Conservation of Orbital Angular Momentum in Stimulated Parametric Down-Conversion. *Physical Review Applied* **16**, 044019. ISSN: 2331- 7019 (out. de 2021).

 - Silva, B., H. dos Santos, G., de Oliveira, A., Rubiano da Silva, N., Buono, W., M. Gomes, R., C. Soares, W., Silva, A., Fonseca, E., Ribeiro, P. H. & Khoury, A. Observation of Triangular-Lattice Pattern in Nonlinear Wave Mixing with Optical Vortices. *Optica*. ISSN: 2334-2536 (jun. de 2022).

- Experimentos com interação paramétrica de feixes Gaussianos parcialmente coerentes
 - dos Santos, G. H., de Oliveira, A. G., da Silva, N. R., Cañas, G., Gómez, E. S., Joshi, S., Ismail, Y., Ribeiro, P. H. S. & Walborn, S. P. *Nanophotonics* **11**, 763–770 (2022).

 - Santos, G. d., Pimenta, R. S., Gomes, R., Walborn, S. & Ribeiro, P. S. Partial Coherence and Coherence Length in Stimulated Parametric Down-Conversion. *Phys. Rev. Appl.* **20**, 024007 (2 ago. de 2023).

Evaluation of twisted Gaussian Schell model beams produced with phase randomized coherent fields

G Cañas^{1,2} , E S Gómez^{2,3}, G H dos Santos⁴ , A G de Oliveira⁴, N Rubiano da Silva⁴, Stuti Joshi⁵, Yaseera Ismail⁶, P H S Ribeiro^{4,*}  and S P Walborn^{2,3,*}

¹ Departamento de Física, Universidad del Bío-Bío, Collao 1202, 5-C Concepción, Chile

² Millennium Institute for Research in Optics, Universidad de Concepción, 160-C Concepción, Chile

³ Departamento de Física, Universidad de Concepción, 160-C Concepción, Chile

⁴ Departamento de Física, Universidade Federal de Santa Catarina, CEP, 88040-900 Florianópolis, SC, Brazil

⁵ Optics and Photonics Centre, Indian Institute of Technology Delhi, Hauz Khas, New Delhi 110016, India

⁶ Quantum Research Group, School of Chemistry and Physics, University of KwaZulu-Natal, Durban 4001, South Africa

E-mail: p.h.s.ribeiro@ufsc.br and swalborn@udec.cl

Received 30 May 2022, revised 27 July 2022

Accepted for publication 29 July 2022

Published 8 August 2022



Abstract

The twisted Gaussian Schell Model describes a family of partially coherent beams that present several interesting characteristics, and as such have attracted attention in classical and quantum optics. Recent techniques have been demonstrated to synthesize these beams from a coherent source using a discrete set of ‘pseudo-modes’, where the phase of each mode is randomized so that they are mutually incoherent. Here we investigate this technique and evaluate the resulting beam parameters, such as divergence, coherence length and twist phase. We show that for a finite set of modes there is also some residual coherence, which can have an observable effect. A theoretical model is developed for the output field that includes residual coherence and agrees very well with experimental data. In addition, we demonstrate a simple method to measure the twist phase using double slit interference.

Keywords: twisted Gaussian Schell model, partial coherence, low coherence, spatial modulation, twisted phase, residual coherence

(Some figures may appear in colour only in the online journal)

1. Introduction

Spatial coherence is one of the fundamental properties of a light field that describes the correlation between fluctuating electric field components at two spatial points. Optical beams with low spatial coherence, such as Gaussian Schell-model (GSM) beams, are extensively studied due to their wide range of applications in imaging, free-space optical communication,

optical scattering, nonlinear optics, etc [1–6]. Simon and Mukunda have introduced a position dependent twist phase in the correlation function of a GSM beam [7] which was first experimentally realized by Friberg *et al* [8]. The family of partially coherent beams that possess twist-phase are termed as twisted Gaussian Schell-model (TGSM) beams. The twist phase is not an optical phase in the usual sense, as its modulus is bounded by the inverse of the square of the spatial coherence length; therefore, it can only exist when the beams are partially coherent. The twist phase is related to orbital angular momentum of the beam, and is responsible for the rotation of

* Authors to whom any correspondence should be addressed.

the beam along the propagation direction. The sense of rotation can be defined by the handedness of the beam. Additionally, other classes of TGSM beams such as twisted Laguerre Gaussian Schell-model (TLGSM) [9], twisted Hermite GSM (THGSM) beams [10], ring-shaped twisted Gaussian Schell-model array (RTGSMA) [11], and twisted vortex Gaussian Schell-model (TVGSM) beams [12] have been introduced and their propagation properties have been studied. Due to the unique properties of the twist phase, TGSM beams find applications in various research areas such as optical communication through atmospheric and underwater turbulence [13–17], in resisting coherence induced depolarization, overcoming the classical Rayleigh limit [18], to control the coherence of optical solitons [19], to boost entanglement in photon pairs [20], and in stimulated parametric down-conversion [21].

Despite the extensive theoretical progress in studies involving TGSM beams, and the appeal of these beams in several applications, very few experimental attempts have been made to generate, characterize, and study their propagation properties [8, 12, 22–26]. The experimental setup used in [8] consisted of a complex optical system which was the combination of six-cylindrical lenses and a variable-coherence anisotropic GSM source. A different method was used by Wang *et al* which have developed a method to generate TGSM beams by converting an anisotropic GSM beam into a TGSM beam with a set of three cylindrical lenses [22]. The generation of TGSM beams has also been demonstrated by implementing the continuous coherent beam integral function in a discrete form [23]. More recently, the generation of TGSM beams with controllable twist phase using an incoherent superposition of random modes obeying Gaussian statistics has been reported [26]. Moreover, besides the usual TGSM beams, an alternative kind of partially coherent vector beam named radially polarized twisted partially coherent vortex (RPTPCV) beam was also generated [25]. It was demonstrated that the twist phase, vortex phase, polarization and coherence all together influence the far-field statistical properties of the RPTPCV beam.

In this paper we study the TGSM beam generation method demonstrated in [23], which uses a finite sequence of images displayed on a spatial light modulator. Since this method uses a discretized form of a decomposition into a continuous set of non-orthogonal ‘pseudo-modes’, it is an approximation of a TGSM beam. Here we implement this technique and characterize the parameters of the beams that are produced. In particular, we observe corrections to the transverse coherence length that arise from the coherent background light. Previous work has shown results for only one or two values of the twist phase and/or coherence length. Here we show results for a wide range of values, and explore several known techniques for evaluating twist phase and coherence length. We also propose a new method to measure the twist phase using double slit interference, so that this type of setup can be used to obtain the coherence length and twist phase from a single 2D interferogram. We expect these results to be very useful in performing experiments where a fine control of the coherence length and twist phase is required.

2. Theory

The cross spectral density (CSD) of a monochromatic scalar field can be decomposed as a convex combination given by [27]:

$$\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \iint d\mathbf{v} p(\mathbf{v}) K^*(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}) K(\mathbf{r}_2, \mathbf{v}), \quad (1)$$

where K are non-orthogonal modes or ‘pseudo-modes’ [28]. Here $\mathbf{r}_j = (x_j, y_j)$ and $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$ are two-dimensional vectors in the transverse plane. The function $p(\mathbf{v})$ is a weight function. This pseudo-mode decomposition is quite useful as it can be used to synthesize partially coherent beams [23, 28, 29].

A TGSM beam can be described by:

$$\Gamma_{TG}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = e^{-\frac{r_1^2 + r_2^2}{4\sigma^2}} e^{-\frac{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2}{2\delta^2}} e^{-ik\mu(x_1 y_2 - y_1 x_2)}, \quad (2)$$

where k is the wave number and σ is the beam waist. The parameter μ is the twist phase, such that $|\mu| \leq 1/(k\delta^2)$, where δ is the transverse coherence length. One can also define the normalized twist phase $\tau = k\delta^2\mu$. To express the CSD (2) in the form (1), we follow [23, 28], and find that the mode functions:

$$K(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \exp\left[-\frac{\sigma^2}{2a\sigma^2 + 1} \left(\frac{\mathbf{r}}{2\sigma^2} + a\mathbf{r} - a\mathbf{v}\right)^2\right] \times \exp[-ik\mu(xv_y - yv_x)], \quad (3)$$

and weight functions:

$$p(\mathbf{v}) = \exp\left(-\frac{av^2}{(2a\sigma^2 + 1)}\right), \quad (4)$$

with parameter:

$$a = \frac{1}{\delta^2} \left(1 + \sqrt{1 - k^2\mu^2\delta^2}\right), \quad (5)$$

when plugged into (1) and integrated, result in a TGSM beam with cross spectral density given by (2).

In practice, to construct an arbitrary partially coherent field from an input coherent field a finite set of modes K is used. Thus, one needs to replace the integral in (1) with a finite sum, giving:

$$\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \approx E^*(\mathbf{r}_1) E(\mathbf{r}_2) \sum_n^N p(\mathbf{v}_n) K^*(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_n) K(\mathbf{r}_2, \mathbf{v}_n), \quad (6)$$

where $E(\mathbf{r})$ is the optical field illuminating the device. Our goal here is to make the CSD (6) as close as possible to the TGSM beam described by (2). Ideally, the input illuminating field approximates a plane wave such that $E(\mathbf{r}) \sim E_0$ is constant. To determine the number of modes N required for an accurate representation of the partially coherent field given in (1), [23, 28] have used the degree of coherence (DOC), given by:

$$\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \sqrt{\frac{\Gamma^*(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)}{\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1)\Gamma(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2)}}. \quad (7)$$

Calculating the DOC using the exact expression for the TGSM beam (2) gives $\exp(-|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2/2\delta^2)$. On the other hand, by plugging equation (6) into (7), one can determine the DOC for the approximate field. Numerical results show that when N is large enough, on the order of a few hundred modes, the exact result can be reproduced with large precision.

To produce the incoherent sum of modes in (6) using a coherent light source, [23, 28, 29] have introduced a method where a spatial light modulator (SLM) is used to modulate the amplitude and phase of an input field through a film composed of L images. Below we will describe the SLM technique in more detail. For now, it suffices to consider that each image is associated to the function:

$$\Phi_l(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^N \sqrt{p(\mathbf{v}_n)} K(\mathbf{r}, \mathbf{v}_n) e^{i\varphi_{l,n}}, \quad (8)$$

where l is the image index running from 1 to L . The phases $\varphi_{l,n}$ are randomly chosen between 0 and 2π for each mode in each image, while the displacement vectors $\mathbf{v}_n = (v_{nx}, v_{ny})$ are chosen uniformly within a sub-area of the SLM. In this way, the cross spectral density of the output field averaged over the L images is:

$$\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = E^*(\mathbf{r}_1) E(\mathbf{r}_2) \sum_{n,m}^N \sqrt{p(\mathbf{v}_n) p(\mathbf{v}_m)} \times K^*(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_n) K(\mathbf{r}_2, \mathbf{v}_m) \sum_l^L e^{i(\varphi_{l,m} - \varphi_{l,n})}. \quad (9)$$

The sum in l is over the randomly chosen phases, and is responsible for the coherence between different SLM images. For $L \rightarrow \infty$, this sum goes to zero, and we have partial coherence as determined by the chosen value of δ . For finite L this sum gives $L(\delta_{n,m} + \Delta_L)$, where the real parameter:

$$\Delta_L = \frac{1}{L} \sum_{l,s.t.n \neq m}^L e^{i(\varphi_{l,m} - \varphi_{l,n})}, \quad (10)$$

can be thought of as a residual coherence between the pseudo-modes. Evaluating expression (10) for L from 10 to 19 000 with 1000 random samples for each data point, we obtain the mean $\langle \Delta_L \rangle$ and standard deviation σ_{Δ_L} . By curve fitting, we find that the mean values are well described by the expression $\langle \Delta_L \rangle \approx 3.56(\exp(1/4\sqrt{L}) - 1)$, with standard deviation $\sigma_{\Delta_L} \approx \langle \Delta_L \rangle/2$. For $L=300$, our simulation gives $\Delta_{300} \approx 0.051 \pm 0.027$. For $L=19\,000$, we find $\Delta_{19000} \approx 0.0064 \pm 0.0033$. To achieve the ideal case $\Delta_L = 0$, a very large number of images is required. However, this can lead to very long sampling times, since the refresh rate of SLMs and the frame rate of CCD cameras and similar devices are typically on the order of tens of Hz. Thus, in most applications, which are limited to sampling around a few hundred images, a coherent background is present, and might have noticeable consequences as we will demonstrate in the following sections.

Another experimental parameter that can have relevant consequences is the field used to illuminate the SLM. We assume

that this is a coherent beam with a Gaussian spatial profile, given by:

$$E(\mathbf{r}) = E_0 e^{-r^2/4w^2} e^{-ikr^2/2R}, \quad (11)$$

where $2w$ is the beam waist and R is the radius of phase curvature. To achieve the ideal case of plane wave illumination, these parameters should be much sufficiently large so that the amplitude and phase profile of the illuminating field can be considered to be constant. We will see in the following section that both w and R can have relative consequences on the parameters of the synthesized beam.

To take these issues into account, we return to the output CSD (9), and notice from equation (10) that the output field can then be written as an incoherent combination of the desired TGSM beam, together with a coherent background field:

$$\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = (1 - \Delta_L) \Gamma_{TG}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + \Delta_L \Gamma_{coh}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2), \quad (12)$$

with the CSD of the TGSM beam given by equation (2), the CSD of the coherent field given by:

$$\Gamma_{coh}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = E^*(\mathbf{r}_1) \sum_n^N \sqrt{p(\mathbf{v}_n)} K^*(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_n) \times E(\mathbf{r}_2) \sum_m^N \sqrt{p(\mathbf{v}_m)} K(\mathbf{r}_2, \mathbf{v}_m), \quad (13)$$

and relative weights given by $1 - \Delta_L$ and Δ_L , respectively. Here we have also dropped a multiplicative factor L for convenience. In the next section, we explore this model and the role of the background coherent field experimentally.

3. Experiment

To synthesize the partially coherent TGSM beams, we produce films of 300 grayscale images, where each image is composed of $N = 23 \times 23 = 529$ Gaussians K given by equation (3). Again following [23, 28], we choose the components of the vector $\mathbf{v}_n = (v_{nx}, v_{ny})$ uniformly in a 23×23 grid within a range defined by twice the waist of $\sqrt{p(\mathbf{v}_n)}$ where the weight function is appreciable, corresponding to the interval $[-2\sqrt{(2\sigma^2 + 1/a)}, 2\sqrt{(2\sigma^2 + 1/a)}]$. We use the first-order diffraction of the SLM. To do so, the images are constructed by first defining a uniform phase grating $\propto 2\pi u_0 X$ modulo 2π , with first-order diffraction angle determined by the spatial angular frequency $2\pi u_0$, and X being the horizontal coordinate on the SLM. Superposed on top of this is the sum of mode functions given in equation (8).

To evaluate the parameters of the TGSM beams, we resort to the setup depicted in figure 1. The source is a continuous-wave (CW) laser, operating at 1550 nm. The output of the CW laser is connected to a single-mode fiber to obtain a TEM₀₀ mode, and then it is expanded via a 4f optical system (L_1 and L_2 lenses) so that the entire SLM screen is illuminated. A half-wave plate and polarizing beam splitter (not shown in figure 1) placed at the output of the 4f optical system are used to set the horizontal polarization of the CW laser.

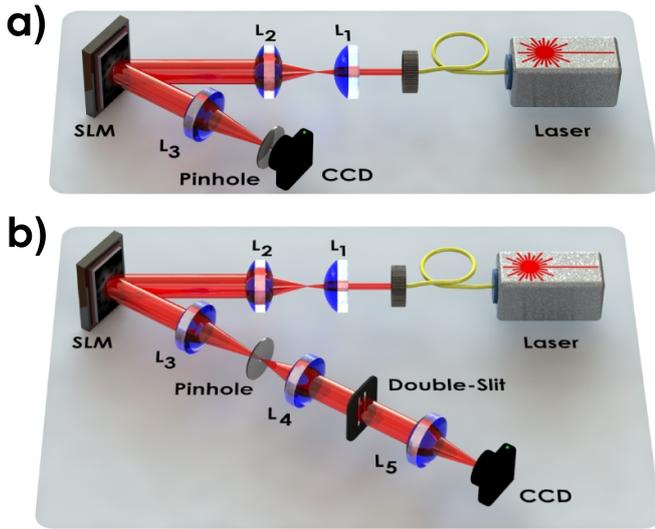


Figure 1. (a) Experimental setup for measuring the beam width in the far-field. (b) Setup for measurements of coherence and twist phase using a Young double-slit.

Then the phase-only SLM (Holoeye Pluto-Telco-013) is illuminated by the CW laser, on which a computer-generated hologram (CGH) is addressed to modulate the amplitude and phase of the incident beam. Several strategies have been implemented to encode arbitrary scalar complex fields on a phase-only CGH [30–34]. Here, we implement the method proposed by Arrizon *et al* [32] to generate type 3 phase-only CGH.

Based on this method, we generate each of the L phase-only CGHs corresponding to each of the functions represented by equation (8) for index l running from 1 to L . Then, we create a video file composed of the L images as frames, which is used to generate the TGSM beams for different values of δ and μ . To complete the generation of the TGSM beams, a lens L_3 is used to collect the output light and a pinhole placed at the focal plane filters out unwanted diffraction orders and background noise. A CCD camera is used to capture images at the output plane. It is important that the data acquisition time be large enough to adequately capture all L images. This can be done by using a CCD with exposure time that is larger than the time necessary to display all L images on the SLM. Alternatively, one can stroboscopically capture CCD images, and then compute the integrated image. We choose the second approach, as it allows us to better control the gain on the CCD without creating excessive saturation.

The films are played in a continuous loop on the SLM at a frame rate of 15 frames per second (fps). The CCD camera is set to 15 fps capture rate, with a shutter window $1\text{ s}/15 \approx 66.7$ ms. We thus record a single CCD image for each image displayed on the SLM. The CCD images are then added in post-processing, to obtain the full ‘integrated’ image.

We use several techniques, as shown in figures 1(a) and (b), which will be described in the next section, to evaluate the output field produced with this technique.

4. Results

We evaluate several beam properties using the setups shown in figure 1 and compare them with the theoretically predicted values from section 2.

4.1. Beam width in the near-field

Based on the theory of the previous section, the near field variance of the TGSM beam (2) is σ^2 . By direct calculation, we find that the near-field variance of the coherent background (13) is σ^2 , so that the near-field variance of the total field (12) is also σ^2 .

We program the SLM so that $\sigma_0 = 1$ mm. We measure the near-field variance of TGSM field by imaging the SLM plane onto the CCD camera using an imaging system composed of spherical lenses with focal lengths $L_3 = 500$ mm and $L_4 = 150$ mm, as shown in figure 1(b) (CCD placed at double slit plane). We choose values of the coherence length δ ranging from 0.4 to 5 mm and normalized twist phase $\tau = 0, 1$. Correcting for the magnification factor, we find that the variances in the x and y have a mean value 0.99 ± 0.06 mm for $\tau = 0$ and 0.96 ± 0.05 mm for $\tau = 1$. These values agree with the theoretical prediction $\sigma_0 = 1$ mm. The width of the laser beam incident on the SLM was measured to be 2.7 ± 0.3 mm, which is sufficiently large as to approximate the transverse profile as constant.

4.2. Beam width in the far-field

As a second evaluation method, we analyze the width of the beam in the far field. For the TGSM beam (2), the far-field variance is $1/(4\sigma^2) + (1 + k^2\mu^2\sigma^2)/\delta^2$, while for the ideal coherent background we use equation (13) to calculate $1/(4\sigma^2)$. However, each of these fields will also acquire the phase curvature of the illuminating beam, resulting in an additional term given by $k^2\sigma^2/R^2$. For the total field, we then have a far field variance given by:

$$\sigma_{ff}^2 = \frac{1}{4\sigma^2} + \frac{k^2\sigma^2}{R^2} + (1 - \Delta_L) \left[\frac{1}{\delta^2} + \frac{\tau^2\sigma^2}{\delta^4} \right], \quad (14)$$

where we use the definition of the normalized twist phase τ . Note that the residual coherence factor enters into equation (14) through the multiplicative factor $1 - \Delta_L$. If sufficient image frames are used, such that $\Delta_L \ll 1$, we can approximate $1 - \Delta_L \sim 1$.

Using the experimental setup shown in figure 1(a), we acquire CCD images in the far-field for the entire length of the SLM film. From the CCD images we calculate the marginal distributions in the x and y directions, and obtain the variance through curve fitting to a Gaussian function. This process was repeated for several values of δ and normalized twist $\tau = 0, 1/\sqrt{2}, 1$. In figure 2, we show the mean variance (average over x and y directions) as a function of the inverse square of the transverse coherence length δ . The curves are plots of

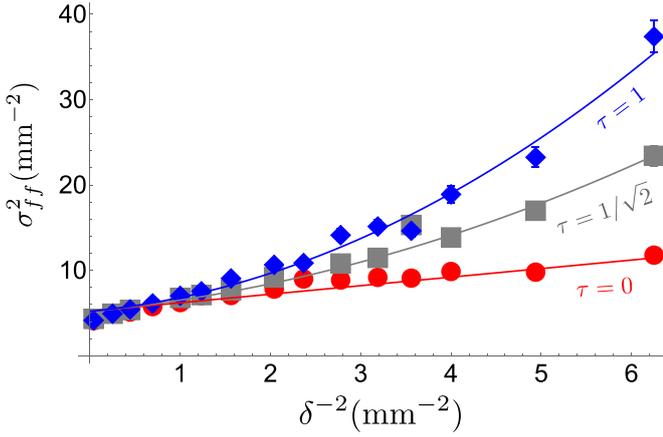


Figure 2. Mean variance in the far field for normalized twist phase $\tau = 0, 1/\sqrt{2}, 1$ (from lower to upper curve). The solid curves are theoretical predictions, where the y -intercept is an adjustable parameter.

(14) using σ obtained from the near-field measurements. The correspondence between theory and experiment is quite good. We use the radius of phase curvature R of the laser beam as a free parameter determined by the y -intercept of the plots, and find $R \sim 1.45$ m, which is reasonable given the optical setup. Thus, we find the divergence of the produced TGSM beams to be in agreement with theory, and close to the ideal value ($\Delta_L = 0$). We note also that the divergence allows one to obtain the square of the twist phase, as was first observed in [8]. We also tested the divergence for larger values of Δ_L , where we expect to see larger discrepancies from the ideal case. However, these results suffer from the fact that the image sequences used to obtain the beams contain only a few frames, which produces integrated images with a transverse profile that is not always Gaussian. The role of the background coherence will be better evaluated in the following section.

4.3. Coherence length

The transverse coherence length δ can be measured directly using double slit interference [35]. Let us consider a double slit aperture in the x direction, with slits at $x = \pm d$, placed in the near-field of a perfect TGSM beam described by (2). Integrating over the y degree of freedom, the interference pattern in the far-field of the double slit is:

$$I_{TG}(x, \delta, \mu) = \gamma_{TG}(d, d) + \text{Re}[\gamma_{TG}(d, -d)] \cos\left(\frac{2dkx}{z}\right), \quad (15)$$

where $\gamma_{TG}(d, -d)$ is a shorthand notation for the CSD evaluated at $x_1 = d, x_2 = -d$ and integrated over $y_1 = y_2 = y$. The visibility $V(\delta, \mu)$ can be calculated, giving:

$$V(\delta, \mu) = \frac{\text{Re}[\gamma_{TG}(d, -d)]}{\gamma_{TG}(d, d)} = e^{-2\frac{d^2}{\delta^2}(1+\tau^2\sigma^2)}. \quad (16)$$

We can see that when μ is known, the visibility is an indicator of δ . We perform the double slit experiment using the

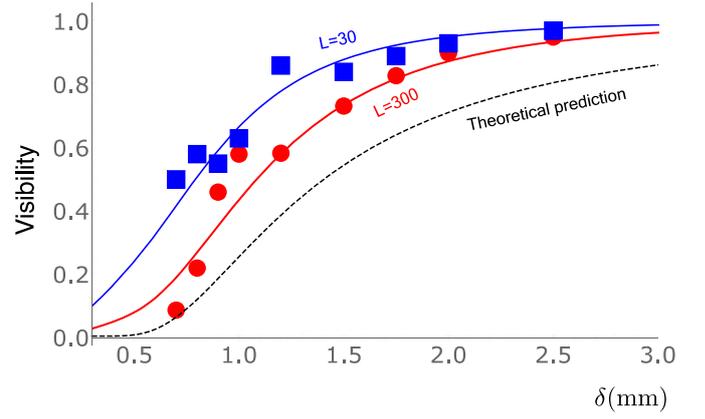


Figure 3. Visibility as a function of the transverse coherence length δ for normalized twist phase $\tau = 0$. The black dashed curve is the TGSM visibility without coherent background given by (16). Red circles and blue squares are experimental data obtained with $L = 300$ and $L = 30$ video images, respectively. The associated red and blue curves are the visibility of the TGSM field with coherent background (18) with $\tau = 0$. Error bars are smaller than the size of the symbols.

setup shown in figure 1(b), where the double-slit aperture is placed in the image plane of the SLM, created using spherical lenses with focal lengths $f_3 = 500$ mm and $f_4 = 150$ mm, giving a magnification factor of 0.333. We use slits separated by $500 \mu\text{m}$, and slit widths of $80 \mu\text{m}$. The effective slit dimensions, relative to the beam parameters at the plane of the SLM, are larger by a factor of three due to the imaging system, giving $d = 250/0.33 \approx 758 \mu\text{m}$. We take images of the interference pattern for the entire duration of the SLM films, as described in the previous section. The marginal intensity distributions in the x -direction are obtained by summing the 2D images over the y -direction. Curve fits using equation (15) are used to estimate the visibility. A plot of the experimental data is shown in figures 3 and 4 for $\tau = 0$ and $\tau = 1$, respectively. The red circles and blues squares correspond to TGSM beams obtained from $L = 300$ and $L = 30$ images. The solid curves will be described below. The black dashed curves give the theoretical prediction for the visibility using the TGSM expression (16). Clearly, both figures show that the experimental data lies far from the theoretical curve, suggesting that the coherent background field must be taken into account to accurately describe the data.

Correcting for the coherent background, using equation (9), the interference pattern should be a weighted sum of the interference patterns of the TGSM and the background field: $I_{tot} = (1 - \Delta_L)I_{TG} + \Delta_L I_{coh}$. For the coherent component, we have:

$$I_{coh}(x, \delta, \mu) = \gamma_{coh}(d, d) + \text{Re}[\gamma_{coh}(d, -d)] \cos\left(\frac{2dkx}{z}\right), \quad (17)$$

where we use the same shorthand notation for the coherent field as in equation (15). Using the CSD (13), one

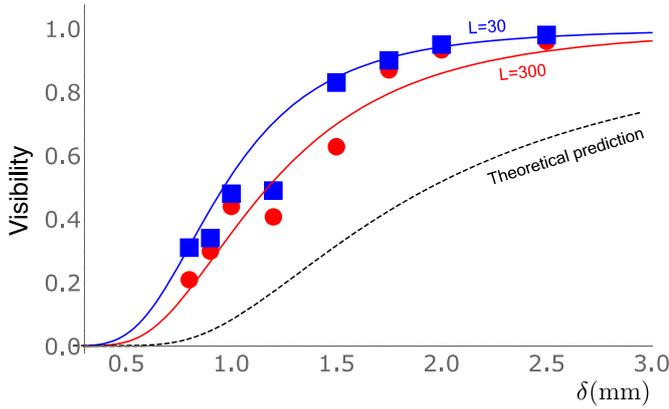


Figure 4. Visibility as a function of the transverse coherence length δ for normalized twist phase $\tau = 1$. The black dashed curve is the TGSM visibility without coherent background given by (16). Red circles and blue squares are experimental data obtained with $L = 300$ and $L = 30$ video images, respectively. The associated red and blue curves are the visibility of the TGSM field with coherent background (18) with $\tau = 1$. Error bars are smaller than the size of the symbols.

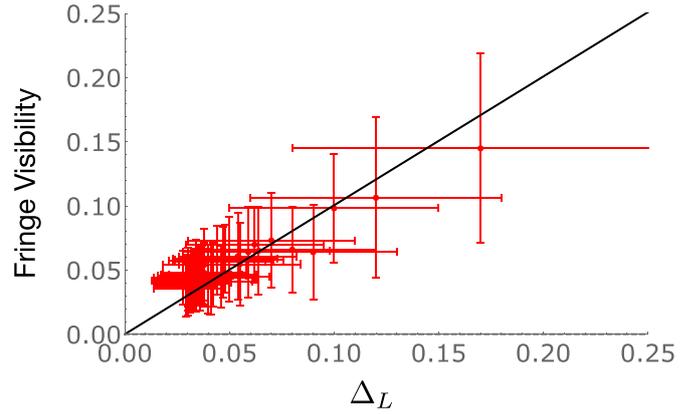


Figure 5. Visibility as a function of the coherence parameter Δ_L . The red points are simulated experimental interference patterns with $\delta = 0.4$ mm, $\tau = 0$ and other experimental parameters given in the text. The black curve corresponds to the theoretical model given by equation (18).

can check that $\text{Re}[\gamma_{coh}(d, -d)] = \gamma_{coh}(d, d)$, giving visibility $V_{coh} = 1$.

The overall visibility \mathcal{V}_{total} of the entire field can then be calculated, giving:

$$\mathcal{V}_{total} = \frac{(1 - \Delta_L)\sqrt{abe^{-d^2b} + 4\pi\Delta_L}}{(1 - \Delta_L)e^{\frac{d^2k^2\mu^2}{a}}\sqrt{ab} + 4\pi\Delta_L}, \quad (18)$$

where a is given in equation (5) and here we define $b = a + 2\tau^2\sigma^2$. Equation (18) for $\tau = 0$ is plotted as the solid curves in figure 3 using the estimated value of $\Delta_L = 0.05$ ($\Delta_L = 0.166$) for the $L = 300$ ($L = 30$) SLM images and the experimental parameters described above. We can see that there is a much better correspondence with the experimental data. The solid curves in figure 4 show plots of (18) for $\tau = 1$, and also shows much better agreement with the experimental data.

Our data shows that for a fixed coherence length δ , a superior visibility is obtained with fewer video images (lower L), as a consequence of the larger coherent background. We further test this and our theoretical model by simulating experimental data. Figure 5 displays the visibility as obtained from simulated interference patterns of the experiment for parameters $\delta = 0.4$ mm and $\tau = 0$. The mean and standard deviation of the visibility are calculated from a set of 30 random sequences of L frames, where L varied from 30 to 980. For each value of L , we obtain the mean and standard deviation of Δ_L by sampling 10^3 values of the random phases and using equation (10). The black solid curve is our theoretical prediction given by equation (18). As can be observed, the values for the visibility are strongly correlated with those for Δ_L and are in agreement with our theoretical model, demonstrating the validity of the model and the importance of the residual coherence between the pseudo-modes.

5. Measuring twist phase

The square of the twist phase has observable effect on the far-field beam width as well as the double slit interference visibility discussed in the last subsections. However, neither of these give an indication of the sign of the twist phase. One method with which the twist phase has been measured experimentally is by observing the rotation of the beam as a function of the propagation distance [23]. Here we provide a convenient alternative method, taking advantage of the fact that the 2D Young double slit interference pattern is twist-phase dependent. Let us consider a double slit aperture, with infinitesimal slits located at $x = \pm d$. After free-space propagation of length z to the far-field, the intensity pattern is:

$$I(\mathbf{r}) \approx e^{-\frac{x^2}{s}} e^{-\frac{y^2}{t}} \left[1 + e^{-\frac{2d^2}{s^2}} \cos \left\{ dk \left(\frac{x}{z} + 2\mu y \right) \right\} \right], \quad (19)$$

where s and t are two width parameters related to the optical system. One can see that the 2D interference pattern is shifted by a value that is proportional to μ . The insets in figure 6 show examples of the shifted interferograms. From equation (19), we see that the central interference peak (cosine argument = 0) lies along a line in the transverse plane defined by $x = -2\mu zy$. Thus, at positions $y = \pm h$, there is relative offset in the peak position given by $4\mu h$, from which one can determine μ .

We test our TGSM beams for different values of $k\mu$, shown in figure 6. μ_{th} is the theoretical value used to produce the TGSM beam with the SLM, while μ_{est} is the value determined from the offset, calculated using five values of h ranging between one and two standard deviations from $y = 0$. The solid line is $k\mu_{est} = k\mu_{th}$. The experimental data agrees reasonably well with theory, validating the presence of twist phase in the TGSM beams as well this technique as a method for measuring twist phase (both magnitude and sign). Moreover, it should be possible to use this technique to measure twist phase in the correlations of photon pairs [4, 20], either directly measuring a shift in the correlations as in [36], or using optical Fractional Fourier transforms [37].

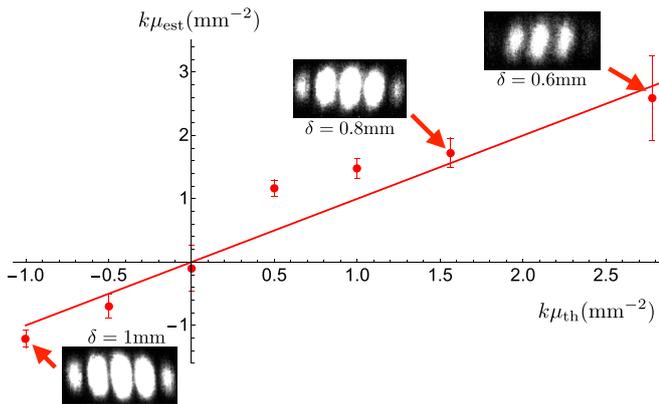


Figure 6. Comparison between theoretical and measured values of twist phase. Here μ_{th} is a theoretical value used to produce the TGSM beams, and μ_{est} is the value estimated from the offset of the interference pattern. The red line is $\mu_{th} = \mu_{est}$. Experimental results are in agreement with the theory. The insets show CCD camera images of the interference pattern obtained with synthesized TGSM beams.

6. Conclusion

In conclusion, we have analysed a method to synthesize partially coherent TGSM beams from a coherent source, first demonstrated in [23]. The technique uses a film sequence of images (300 in the present case) displayed on a spatial light modulator. When illuminated by a coherent Gaussian beam, a partially coherent beam is observed, provided the observation time is longer than the display time of the film. In the present work, the properties of the synthesized beams, such as near-field waist, far-field waist (divergence), transverse coherence length and twist phase were explored for a wide range of values of twist phase and coherence length. A theory was developed that includes the residual background that arises when a finite image sequence is used. For films composed of 300 images we observed that the residual coherence had null or negligible effect on the beam width in the near and far-field. However, it was observed that the residual coherence has observable effect on the effective transverse coherence length, when measured through Young double-slit interference. This was well-described by the theoretical model. The twist phase was measured using a novel technique based on 2D interferograms, where the twist phase produced a shift of the interference pattern. We found good agreement between theory and experiment. Whereas our proposal is related to the generation method, we can extend it to other classes of partially coherent beams like twisted rectangular multi-Gaussian Schell-model or twisted anisotropic Gaussian Schell-model [38]. Our results further validate the beam synthesis technique, and highlight the need to consider background coherence in certain instances.

Data availability statement

The data that support the findings of this study are available upon reasonable request from the authors.

Acknowledgments

This work was funded by the Chilean agencies Fondo Nacional de Desarrollo Científico y Tecnológico (FONDECYT—DOI 501100002850) (1190901, 1190933, 1200266); National Agency of Research and Development (ANID) Millennium Science Initiative Program-ICN17-012; the Brazilian agencies Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES DOI 501100002322), Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Santa Catarina (FAPESC—DOI 501100005667), Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq—DOI 501100003593), Instituto Nacional de Ciência e Tecnologia de Informação Quântica (INCT-IQ 465469/2014-0); the National Research Foundations of South Africa.

ORCID iDs

G Cañas <https://orcid.org/0000-0002-9357-8025>

G H dos Santos <https://orcid.org/0000-0002-0389-1430>

P H S Ribeiro <https://orcid.org/0000-0002-0060-1717>

References

- [1] Chen Y, Wang F and Cai Y 2022 Partially coherent light beam shaping via complex spatial coherence structure engineering *Adv. Phys. X* **7** 2009742
- [2] Ismail Y, Joshi S and Petruccione F 2017 Polarization-entangled photon generation using partial spatially coherent pump beam *Sci. Rep.* **7** 12091
- [3] Phehlukwayo S P, Umuhire M L, Ismail Y, Joshi S and Petruccione F 2020 Influence of coincidence detection of a biphoton state through free-space atmospheric turbulence using a partially spatially coherent pump *Phys. Rev. A* **102** 033732
- [4] Lucas Hutter E S Lima G, G and Walborn S P 2021 Partially coherent spontaneous parametric downconversion: twisted Gaussian biphotons *AVS Quantum Sci.* **3** 031401
- [5] Zhang W, Fickler R, Giese E, Chen L and Boyd R W 2019 Influence of pump coherence on the generation of position-momentum entanglement in optical parametric down-conversion *Opt. Express* **27** 20745–53
- [6] Jing M, Jiajie W, Tan L and Siyuan Y 2017 Polarization properties of Gaussian–Schell model beams propagating in a space-to-ground optical communication downlink *Appl. Opt.* **56** 1781–7
- [7] Simon R and Mukunda N 1993 Twisted Gaussian Schell-model beams *J. Opt. Soc. Am. A* **10** 95
- [8] Friberg A T, Tervonen E and Turunen J 1994 Interpretation and experimental demonstration of twisted Gaussian Schell-model beams *J. Opt. Soc. Am. A* **11** 1818
- [9] Peng X, Liu L, Wang F, Popov S and Cai Y 2018 Twisted Laguerre-Gaussian Schell-model beam and its orbital angular momentum *Opt. Express* **26** 33956–69
- [10] Liu L, Wang H, Liu L, Dong Y, Fei Wang B J Hoenders Y C, Cai Y and Peng X 2022 Propagation properties of a twisted hermite-Gaussian correlated Schell-model beam in free space *Frontiers Phys.* **10** 847649
- [11] Zheng S, Yuan C, Ji X and Wang T 2020 Ring-shaped twisted Gaussian Schell-model array beams *J. Opt. Soc. Am. A* **37** 444–9
- [12] Stahl C S D and Gbur G 2018 Twisted vortex Gaussian Schell-model beams *J. Opt. Soc. Am. A* **35** 1899–906

- [13] Cai Y and Sailing H 2006 Propagation of a partially coherent twisted anisotropic Gaussian Schell-model beam in a turbulent atmosphere *Appl. Phys. Lett.* **89** 041117
- [14] Wang F and Cai Y 2010 Second-order statistics of a twisted Gaussian Schell-model beam in turbulent atmosphere *Opt. Express* **18** 24661–72
- [15] Wang F, Cai Y, Eyyuboğlu H T and Baykal Y 2012 Twist phase-induced reduction in scintillation of a partially coherent beam in turbulent atmosphere *Opt. Lett.* **37** 184–6
- [16] Peng X, Liu L, Cai Y and Baykal Y 2017 Statistical properties of a radially polarized twisted Gaussian Schell-model beam in an underwater turbulent medium *J. Opt. Soc. Am. A* **34** 133–9
- [17] Zhou Y and Zhao D 2018 Propagation properties of a twisted rectangular multi-Gaussian Schell-model beam in free space and oceanic turbulence *Appl. Opt.* **57** 8978–83
- [18] Tong Z and Korotkova O 2012 Beyond the classical Rayleigh limit with twisted light *Opt. Lett.* **37** 2595–7
- [19] Ponomarenko S A 2001 Twisted Gaussian Schell-model solitons *Phys. Rev. E* **64** 036618
- [20] Hutter L, Lima G and Walborn S P 2020 Boosting entanglement generation in down-conversion with incoherent illumination *Phys. Rev. Lett.* **125** 193602
- [21] dos Santos G H, de Oliveira A G, Rubiano da Silva N, Cañas G, Gómez E S, Joshi S, Ismail Y, Souto Ribeiro P H and Walborn S P 2022 Phase conjugation of twisted Gaussian Schell model beams in stimulated down-conversion *Nanophotonics* **11** 763–70
- [22] Wang H, Peng X, Liu L, Wang F, Cai Y and Ponomarenko S A 2019 Generating bona fide twisted Gaussian Schell-model beams *Opt. Lett.* **44** 3709–12
- [23] Tian C, Zhu S, Huang H, Cai Y and Zhenhua Li 2020 Customizing twisted Schell-model beams *Opt. Lett.* **45** 5880–3
- [24] Zhang Y, Zhang X, Wang H, Yan Y, Liu L, Chen Y, Wang F and Cai Y 2021 Generating a twisted Gaussian Schell-model beam with a coherent-mode superposition *Opt. Express* **29** 41964–74
- [25] Liu L, Wang H, Liu L, Yan Y, Wang F, Cai Y and Peng X 2022 Radially polarized twisted partially coherent vortex beams *Opt. Express* **30** 7511–25
- [26] Wang H, Peng X, Zhang H, Liu L, Chen Y, Wang F and Cai Y 2022 Experimental synthesis of partially coherent beam with controllable twist phase and measuring its orbital angular momentum *Nanophotonics* **11** 689–96
- [27] Born M and Wolf E 1964 *Principles of Optics: Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light* 2nd edn (Oxford: Pergamon)
- [28] Wang R, Zhu S, Chen Y, Huang H, Zhenhua Li and Cai Y 2020 Experimental synthesis of partially coherent sources *Opt. Lett.* **45** 1874–7
- [29] Wang H, Peng X, Zhang H, Liu L, Chen Y, Wang F and Cai Y 2021 Experimental synthesis of partially coherent beam with controllable twist phase and measuring its orbital angular momentum *Nanophotonics* **11** 689–96
- [30] Victor A 2003 Optimum on-axis computer-generated hologram encoded into low-resolution phase-modulation devices *Opt. Lett.* **28** 2521–3
- [31] Bagnoud V and Zuegel J D 2004 Independent phase and amplitude control of a laser beam by use of a single-phase-only spatial light modulator *Opt. Lett.* **29** 295–7
- [32] Arrizón V, Ruiz U, Carrada R and González L A 2007 Pixelated phase computer holograms for the accurate encoding of scalar complex fields *J. Opt. Soc. Am. A* **24** 3500–7
- [33] Zhang Z, You Z and Chu D 2014 Fundamentals of phase-only liquid crystal on silicon (LCOS) devices *Light Sci. Appl.* **3** e213
- [34] Clark T W, Offer R F, Franke-Arnold S, Arnold A S and Radwell N 2016 Comparison of beam generation techniques using a phase only spatial light modulator *Opt. Express* **24** 6249–64
- [35] Fowles G R 1989 *Introduction to Modern Optics* (New York: Dover)
- [36] Gomes R M, Salles A, Toscano F, Souto Ribeiro P H and Walborn S P 2009 Observation of a nonlocal optical vortex *Phys. Rev. Lett.* **103** 033602
- [37] Tasca D S, Walborn S P, Souto Ribeiro P H and Toscano F 2008 Detection of transverse entanglement in phase space *Phys. Rev. A* **78** 010304
- [38] Mei Z and Korotkova O 2017 Random sources for rotating spectral densities *Opt. Lett.* **42** 255

Beyond Conservation of Orbital Angular Momentum in Stimulated Parametric Down-Conversion

A.G. de Oliveira¹, G. Santos¹, N. Rubiano da Silva¹, L.J. Pereira², G.B. Alves²,
A.Z. Khoury² and P.H. Souto Ribeiro^{1,*}

¹*Departamento de Física, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, Santa Catarina CEP 88040-900, Brazil*

²*Instituto de Física, Universidade Federal Fluminense, Niterói, Rio de Janeiro CEP 24210-346, Brazil*



(Received 23 June 2021; accepted 24 September 2021; published 13 October 2021)

Stimulated parametric down-conversion is a nonlinear optical process in which the orbital angular momentum of light is conserved under most practical conditions. However, there are instances in which the topological charge is not compatible with the remaining modal structure of the stimulated idler beam. As a result, the stimulated down-converted light diffracts and gives rise to Laguerre-Gaussian-like beams with nonzero radial indices. We present a theoretical and experimental analysis demonstrating this fundamental aspect of nonlinear processes with light beams possessing orbital angular momentum.

DOI: [10.1103/PhysRevApplied.16.044019](https://doi.org/10.1103/PhysRevApplied.16.044019)

I. INTRODUCTION

The orbital angular momentum (OAM) of light beams has been established as one of the most relevant and useful degrees of freedom of light [1], from both a fundamental [2] and an applied [3] perspective, in the physical sciences [4]. The use of OAM modes, especially Laguerre-Gaussian (LG) beams, in nonlinear optical interactions has also been extensively explored [5–8]. In this paper, we are concerned with the parametric-down-conversion process [9] in the case where one of the down-converted beams, say the signal, is seeded by a laser and gives rise to an idler beam, which is indirectly stimulated [10,11]. We refer to this process as stimulated parametric down-conversion (StimPDC). Apart from the spontaneous-emission contribution to the intensity of the down-converted beams, StimPDC can be described by classical optics. However, the relationship between the pump, signal, and idler modes is the same in both the spontaneous- and the stimulated-emission regime, leading to useful connections between the classical and quantum regimes.

As a result, StimPDC is finding several applications in the context of quantum optics. The paradigmatic source of quantum light, a crystal pumped by a classical laser field, yielding spontaneous parametric down-conversion, can be characterized by stimulated-emission tomography [12–14]. The fundamental commutation rules of quantum mechanics have been experimentally verified by means of photon addition and subtraction using a StimPDC setup [15]. Moreover, if both the signal and the idler beam are seeded with coherent fields, multiphoton interference

effects may arise, along with potential applications to quantum optical interferometry [16] and spatiotemporal quantum metrology [17]. The proper understanding and control of the OAM degrees of freedom in StimPDC is a key point towards enhanced applications.

An important feature of StimPDC concerns optical phase conjugation [18], resulting in a light beam that behaves like the time-reversed version of another one [19]. In StimPDC, we have forward phase conjugation, which can be realized with two different wavelengths. This distinguishes StimPDC as a phase-conjugation process as compared with other nonlinear processes such as four-wave mixing, for instance [20].

When StimPDC is realized with light beams possessing orbital angular momentum, it has been shown that the topological charge is conserved and the charges of the signal and idler beams add up to that of the pump [21]. This conservation law depends on the geometrical characteristics of the process and holds for small enough signal and idler output angles. StimPDC has also been realized with vector vortex beams, allowing the observation of full phase conjugation, meaning that both the wavefront and the polarization states are conjugated [22]. Full phase conjugation is finding applications such as correction of wavefront distortions that affect the polarization and the spatial mode. Moreover, the information encoded in the seed mode can be transferred to an idler mode with a different wavelength, which offers a resource for quantum information and communication schemes in the same fashion as sum-frequency generation is used in quantum cryptography [23].

Another important aspect of the parametric interaction between beams carrying orbital angular momentum

*p.h.s.ribeiro@ufsc.br

concerns the role of modes with nonzero radial index. This subject has been investigated in the context of cavity-free up-conversion [24–26] and sum-frequency generation [27], which are nonlinear processes where two input beams are summed to generate a third one with a higher frequency. It was shown that selection rules involving both the azimuthal- and the radial-order indices can be used to determine successful mode conversion. As for down-conversion, selection rules have been investigated when the process occurs in an optical parametric oscillator [28], where signal and idler beams are produced above a given threshold of the pump power, at which the parametric gain surpasses the losses in the resonator.

In the present paper, we address the question of how the phase-matching conditions in cavity-free StimPDC affect the idler-beam mode structure beyond the conservation of OAM, when both the pump and the stimulating beam carry topological charges. We find that, despite the conservation of the topological charge, there are some instances where the idler beam is not a single LG mode. As a result, the beam diffracts and, in the far field, shows a radial mode structure even if both the pump and the seed are pure OAM modes with a null radial number ($q = 0$). In the same way as in the up-conversion processes, this is due to an effective modulation of the converted field by the amplitude distribution of the input fields. However, in contrast to up-conversion, StimPDC shows phase conjugation, which results in different rules for determining the idler mode structure for given combinations of pump and seed beams. We present a theoretical and experimental analysis of the StimPDC process, demonstrating the effect of different combinations of pump and seed OAM input modes on the resulting idler beam.

II. THEORY

Figure 1 displays the light-conversion process used for the generation of LG modes with nonzero radial numbers, starting from beams with null radial number. The pump and seed beams are optical vortices with no radial index, and interact in a nonlinear crystal, generating a light beam (idler) by StimPDC. The idler beam inherits its properties from the pump and seed beams. In particular, its spatial mode is determined by *conservation of linear momentum and topological charge* in the conversion process [21]. In Fig. 1, for example, the topological order of the idler beam is null because $\ell_p - \ell_s = +2 - (+2) = 0$. The selection rules for radial modes in the converted idler field, however, are not as straightforward, as we show next. It is also important to analyze the compatibility between the topological charge and the mode structure. Our analysis is based on a description of the StimPDC fields in terms of Laguerre-Gaussian modes.

We start by considering the pump and seed beams to be used in the experiments; namely, each is a pure LG mode with null radial order, propagating along the z direction.

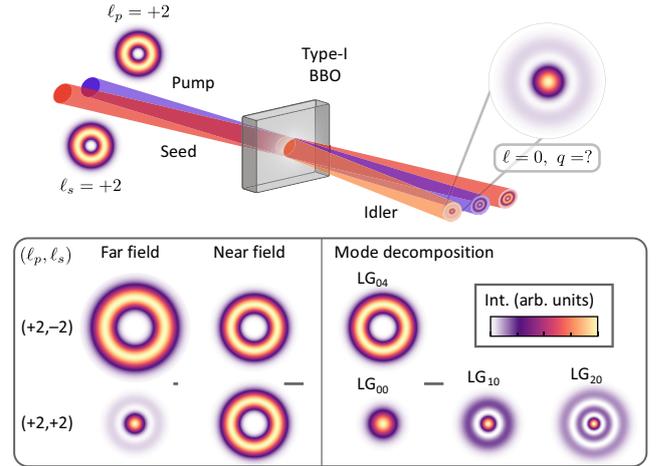


FIG. 1. Illustration of the generation of radial modes and the conservation of angular momentum in StimPDC. BBO, β -barium borate. Box: examples of idler field generated for different combinations of pump and seed beams, and their decomposition into Laguerre-Gaussian modes $LG_{q\ell}$. Int., intensity. The far-field patterns are computed for a propagation distance of $5z_R$, and all scale bars correspond to $1000\lambda_i$ (where λ_i is the wavelength of the idler field).

Their fields are given by

$$E_p(\mathbf{r}, z) \sim \mathcal{E}_p u_{0\ell}^p(\mathbf{r}, z),$$

$$E_s(\mathbf{r}, z) \sim \mathcal{E}_s u_{0m}^s(\mathbf{r}, z),$$

respectively, where \mathcal{E}_p and \mathcal{E}_s are the amplitudes of the pump and seed fields, of topological orders $\ell_p = l$ and $\ell_s = m$, respectively. $u_{0\ell}^j$, with $j = p, s$, is the Laguerre-Gauss mode function in cylindrical coordinates, of a particular family defined by the beam waist w_j :

$$u_{q\ell}^j(\mathbf{r}, z) = \frac{\mathcal{N}_{q\ell}}{w_j(z)} \left(\frac{\sqrt{2}r}{w_j(z)} \right)^{|\ell|} L_q^{|\ell|} \left(\frac{2r^2}{w_j^2(z)} \right) \times \exp \left[-\frac{r^2}{w_j^2(z)} + i \left(\ell\theta + \frac{k_j r^2}{2R_j(z)} - \Phi_{q\ell}(z) \right) \right], \quad (1)$$

with

$$\mathcal{N}_{q\ell} = \sqrt{\frac{2q!}{\pi (q + |\ell|)!}},$$

$$w_j(z) = w_j \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R} \right)^2},$$

$$R_j(z) = z \left[1 + \left(\frac{z_R}{z} \right)^2 \right],$$

$$\Phi_{q\ell}(z) = (2q + |\ell| + 1) \arctan \left(\frac{z}{z_R} \right). \quad (2)$$

In these definitions, z_R is the Rayleigh distance, q is the radial number, and ℓ is the topological charge of the mode associated with its orbital angular momentum.

In general, to compute the idler field at the output of the crystal, one needs to solve the coupled dynamical equations describing all interacting fields (pump, seed, and idler) in a three-wave mixing process in the nonlinear crystal [29]. Here, however, we assume that the energy conversion into the idler is sufficiently small that the input fields can be treated as constants. Moreover, we make the paraxial and thin-crystal (crystal length $L \ll z_R$) approximations, so that the fields at the exit of the crystal can be simply written as

$$\begin{aligned} E_p^{\text{in}}(\mathbf{r}) &= \sqrt{\frac{2\omega_p}{n_p c \epsilon_0}} \mathcal{E}_p u_{0l}^p(\mathbf{r}, 0), \\ E_s^{\text{in}}(\mathbf{r}) &= \sqrt{\frac{2\omega_s}{n_s c \epsilon_0}} \mathcal{E}_s u_{0m}^s(\mathbf{r}, 0), \\ E_i^{\text{out}}(\mathbf{r}) &= \frac{i\chi\omega_i L}{2cn_i} E_p^{\text{in}}(\mathbf{r}) E_s^{\text{in}*}(\mathbf{r}), \end{aligned} \quad (3)$$

where the crystal is centered at $z = 0$, and the index i indicates variables related to the idler field. Therefore, the converted field is

$$E_i^{\text{out}}(\mathbf{r}) = \frac{i\chi\omega_i L}{c^2 \epsilon_0 n_i} \sqrt{\frac{\omega_p \omega_s}{n_p n_s}} \mathcal{E}_p \mathcal{E}_s^* u_{0l}^p(\mathbf{r}, 0) u_{0m}^{s*}(\mathbf{r}, 0). \quad (4)$$

As we can see, the spatial structure of the generated beam is determined by products of Laguerre-Gaussian modes. We next investigate the orbital angular momentum and radial structure produced by such mode products.

The mode product that appears in Eq. (4) can be written in the convenient form

$$\begin{aligned} u_{0l}^p(\mathbf{r}, 0) u_{0m}^{s*}(\mathbf{r}, 0) &= \frac{2}{\pi} \frac{1}{w_p w_s} \frac{1}{\sqrt{|l|! |m|!}} \frac{w_i^{|m|+|l|}}{w_p^{|l|} w_s^{|m|}} \left(\frac{\sqrt{2}r}{w_i} \right)^{|m|+|l|} \\ &\times \exp \left[- \left(\frac{r^2}{w_i^2} \right) + in\theta \right], \end{aligned} \quad (5)$$

where we define

$$\begin{aligned} n &= l - m, \\ \frac{1}{w_i^2} &= \frac{1}{w_s^2} + \frac{1}{w_p^2}. \end{aligned} \quad (6)$$

Note that, except for the trivial case $l = m = 0$, the spatial distribution of the down-converted field at the crystal exit always shows a doughnut shape, since the down-converted photons are generated inside the intensity overlap region of

the interacting fields. However, a nontrivial radial structure may arise in the far field. Depending on the relative chirality of m and l , the structure described by Eq. (5) can be either a single Laguerre-Gaussian mode or a mode superposition involving several radial orders. Next, we inspect this feature more closely.

A. Counter-rotating vortices: $\ell_p \ell_s \leq 0$

In this case, $|n| = |m| + |l|$, and the exponent of the monomial in the radial coordinate matches the absolute value of the resulting topological charge. Apart from a constant factor and a redefinition of the mode waist given by Eq. (6), the mode product represents a pure Laguerre-Gaussian mode

$$u_{0l}^p(\mathbf{r}, 0) u_{0m}^{s*}(\mathbf{r}, 0) = C_{ml} \sqrt{|n|!} u_{0n}^i(\mathbf{r}, 0), \quad (7)$$

where

$$C_{ml} = \sqrt{\frac{2/\pi}{|l|! |m|!}} \frac{w_s^{|l|} w_p^{|m|}}{(w_s^2 + w_p^2)^{(|m|+|l|+1)/2}}. \quad (8)$$

The output field at the down-converted frequency ω_i is then given by

$$E_i^{\text{out}}(\mathbf{r}) = \frac{i\chi\omega_i L}{c^2 \epsilon_0 n_i} \sqrt{\frac{\omega_s \omega_p}{n_s n_p}} \mathcal{E}_p \mathcal{E}_s^* C_{ml} \sqrt{|n|!} u_{0n}^i(\mathbf{r}, 0). \quad (9)$$

B. Corotating vortices: $\ell_p \ell_s > 0$

In this case, $|n| \neq |m| + |l|$, and the exponent of the monomial in the radial coordinate in Eq. (5) does not match the absolute value of the resulting topological charge. However, the mode product can be cast as a superposition of radial orders. To do so, we start by rewriting Eq. (5) as

$$\begin{aligned} u_{0l}^p(\mathbf{r}, 0) u_{0m}^{s*}(\mathbf{r}, 0) &= \frac{2}{\pi} \frac{1}{w_p w_s} \frac{1}{\sqrt{|l|! |m|!}} \frac{w_i^{|m|+|l|}}{w_p^{|l|} w_s^{|m|}} \left(\frac{\sqrt{2}r}{w_i} \right)^{|m|} \left(\frac{2r^2}{w_i^2} \right)^P \\ &\times \exp \left[- \left(\frac{r^2}{w_i^2} \right) + in\theta \right], \end{aligned} \quad (10)$$

where $P \equiv (|m| + |l| - |n|)/2 = \min(|m|, |l|)$. We can now benefit from the relation

$$x^P = \sum_{q=0}^P \frac{(-1)^q P! (P + |l|)!}{(P - q)! (q + |l|)!} L_q^{|l|}(x), \quad (11)$$

where $L_q^{|l|}(x)$ are the associated Laguerre polynomials. Using Eq. (11) in Eq. (10), we get

$$u_{0l}^p(\mathbf{r}, 0) u_{0m}^{s*}(\mathbf{r}, 0) = C_{ml} \sum_{q=0}^P c_q^P u_{qn}^i(\mathbf{r}, 0), \quad (12)$$

where

$$c_q^P = \frac{(-1)^q P!(P + |n|)!}{(P - q)! \sqrt{q!(q + |n|)!}}. \quad (13)$$

In this case, the output field at the down-converted frequency ω_i is then given by

$$E_i^{out}(\mathbf{r}) = \frac{i\chi\omega_i L}{c^2\epsilon_0 n_i} \sqrt{\frac{\omega_s\omega_p}{n_s n_p}} \mathcal{E}_p \mathcal{E}_s^* C_{ml} \sum_{q=0}^P c_q^P u_{qn}^i(\mathbf{r}, 0). \quad (14)$$

Therefore, the stimulated down-converted field carries a radial-mode superposition when the input vortices have the same chirality. This is the opposite of what happens in up-conversion, where radial modes are generated when the incoming vortices have opposite chirality [24,26]. This difference stems from the phase conjugation that takes place in the down-conversion process. The number of radial modes generated is determined by the minimum absolute value of the incoming topological charges. We note that the same result could be obtained by expanding Eq. (5) in the proper family of LG modes, i.e., with the proper beam waist radius as given in Eq. (6).

C. Far-field patterns

After it has left the crystal, the spatial structure formed by the nonlinear interaction follows free propagation, with the Rayleigh distance of the converted beam given by

$$z_R = \frac{k_i}{2} \left(\frac{w_s^2 w_p^2}{w_s^2 + w_p^2} \right), \quad (15)$$

as a consequence of the second relation presented in Eq. (6). Each Laguerre-Gaussian component generated inside the crystal then acquires a curved wavefront and a Gouy phase according to its respective Rayleigh distance. Therefore, the field distribution from the crystal in $z > L/2$ is given by

$$E_i(\mathbf{r}, z) = \frac{i\chi\omega_i L}{c^2\epsilon_0 n_i} \sqrt{\frac{\omega_s\omega_p}{n_s n_p}} \mathcal{E}_p \mathcal{E}_s^* C_{ml} \sum_{q=0}^P c_q^P u_{qn}^i(\mathbf{r}, z), \quad (16)$$

with

$$P = \frac{|l| + |m| - |l - m|}{2} = \begin{cases} 0, & \text{if } m \cdot l \leq 0, \\ \min(|m|, |l|), & \text{if } m \cdot l > 0, \end{cases} \quad (17)$$

where the results for corotating and counter-rotating incoming vortices are combined in a single expression. In Fig. 1, we show a simulation of the near- and far-field distributions for $|l| = |m| = 2$. The near-field patterns exhibit

the same simple hollow intensity distribution. However, the two cases lead to very distinctive patterns in the far field. For $l = -m$, the down-converted field is a single mode, and hence its intensity distribution remains the same upon propagation (apart from a scaling factor). For $l = m$, the down-converted field E_i is generated with topological charge $n = 0$ and radial modes $q = 0, 1, 2$. The presence of radial modes becomes evident in the far-field pattern, where a ring structure appears as a consequence of the nonsynchronized Gouy phases.

III. EXPERIMENTAL SETUP

In order to investigate radial-mode generation in Stim-PDC, we employ a type-I BBO crystal in the setup sketched in Fig. 2. Accordingly, the crystal is pumped with horizontally polarized light (wavelength 405 nm, with about 5 mW of power), and the down-converted light (wavelength 840 nm), as well as the seed beam (wavelength 780 nm, with about 12 mW of power), has a vertical polarization. Both input beams are produced by cw diode lasers, and are collimated using a telescope before being overlapped on the crystal, so that their diameters are about 0.6 mm across the interaction volume. We use phase-only SLMs (Holoeye Pluto 2) to prepare the pump and seed beams in LG modes. An ℓ -pitchfork hologram is displayed on the screen of the SLM, modulated by a radial Gaussian function with its full width at half maximum determined by the size of the beam impinging on the SLM, resulting in high-purity LG modes of topological charge ℓ and zero radial order. We note that both lasers hit each SLM with about 40 mW of power, but only part of that power is transferred to the diffraction order corresponding to the LG mode, which is spatially filtered by an aperture placed before the crystal.

A good mode-matching situation for the pump and seed beams in the interaction volume is ensured by the spatial overlap. Besides, the angle between the input beams is kept small (about 4°), in order to avoid significant spatial walk-off within the crystal. Moreover, the Rayleigh length is

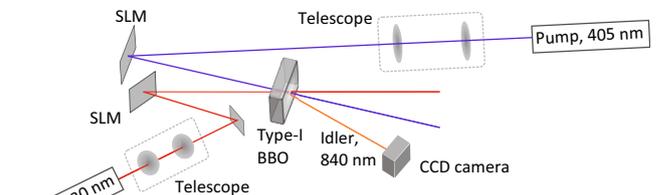


FIG. 2. Experimental setup. The pump and seed beams are collimated using telescopes, prepared as optical vortices using spatial light modulators (SLMs), and overlapped on a nonlinear crystal. The down-converted field (idler) is imaged in the near and far field with a telescope and a CCD camera.

much larger than the crystal thickness, such that the Gouy phase, the wavefront curvature, and the widths of the input beams can be taken to be constant throughout the interaction volume. The converted beam intensity is imaged using a telescope and a CCD camera. We record images in a fixed far-field plane (about 60 cm distant from the crystal) for several combinations of the topological charges of the input beams. To investigate the evolution of the propagating field, we record the idler beam at several propagation distances, from the near to the far field.

IV. RESULTS AND DISCUSSION

Figure 3 shows a comparison of the experimental and simulated idler-beam transverse intensity distributions in a fixed plane in the far field, for several combinations of topological charges of the pump and seed beams (the radial number is zero). We make use of the cylindrical symmetry of the images and show the azimuthally averaged intensity profiles of the images (see the top panel). Conservation of angular momentum (i.e., $\ell_i = \ell_p - \ell_s$) is verified by topological-charge measurements with a tilted lens [30] (not shown here). The images exhibit (do not exhibit) a bright spot in the center when the pump and seed beams

have the same (different) topological charges. The maximum at the center is present only for LG modes of null topological charge, u_{q0}^i .

Beyond the conservation of angular momentum, the idler intensity profiles in Fig. 3 reveal the mode distribution predicted by Eqs. (16) and (17). For pump and seed beams prepared as counter-rotating vortices (third, fourth, seventh, and eighth columns), the doughnut-shaped profile with no extra rings indicates the absence of radial orders. In contrast, for all combinations of corotating pump and seed vortices (first, second, fifth, and sixth columns), the presence of rings in the intensity profiles attests to the generation of radial modes. In addition, the number of rings (i.e., the maximum radial number) is the smallest number between $|\ell_p|$ and $|\ell_s|$. We also note that when the topological charges of the pump and seed beams are swapped (fifth and sixth columns, and seventh and eighth columns), the intensity distribution of the resulting idler beam is the same.

The minor discrepancies between the experimental and simulated data, especially the appearance of discrete outer rings when none should be manifested (see, e.g., the third column in Fig. 3), are due to deviations from the ideal scenario. The presence of circular openings in the experimental setup, such as lens edges, introduces diffraction effects in the light beam that can be observed as ringlike intensity patterns in the far field. Such unexpected rings, however, are much less intense than the ones related to the generated radial modes.

The appearance of a bright spot on the optical axis in the far field, when the pump and seed topological charges are equal, may appear intriguing at first, since the intensity profiles of both input beams have a null on that axis, and, consequently, so does the converted field at the crystal exit. However, this is expected because the idler beam has null topological charge. As a result, it is equivalent to a superposition containing only LG modes with a central maximum, and with at least two radial orders. As mentioned in Sec. C, for corotating pump and seed vortices, the nonsynchronization of the Gouy phases of each of these modes induces an evolution of the intensity distribution during propagation. The modes develop fully in the Fourier domain of the crystal plane, and the intensity maximum is manifested only in the far field.

Figure 4 shows the development of the idler field from the near to the far field, for different combinations of pump and seed beams. In accordance with the simulated results, the experimentally obtained profiles show that the evolution always starts from a near-field hollow intensity distribution. For corotating pump and seed vortices, the idler-field transverse distribution changes severely during propagation to the far field, evidencing that this distribution is composed of LG modes of different orders. In contrast, for counter-rotating input vortices, the shape of the idler beam remains constant during propagation (except for

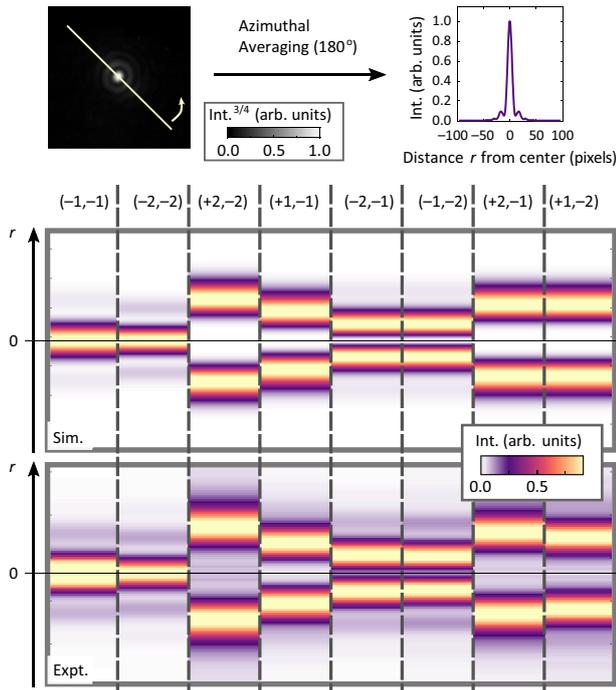


FIG. 3. Experimental and simulated idler-beam profiles at a fixed plane in the far field, for different combinations of topological charges of the pump and seed beams. The azimuthally averaged profiles are displayed instead of the images, given the cylindrical symmetry of the transverse intensity distribution. Each profile is individually normalized by its maximum intensity value.

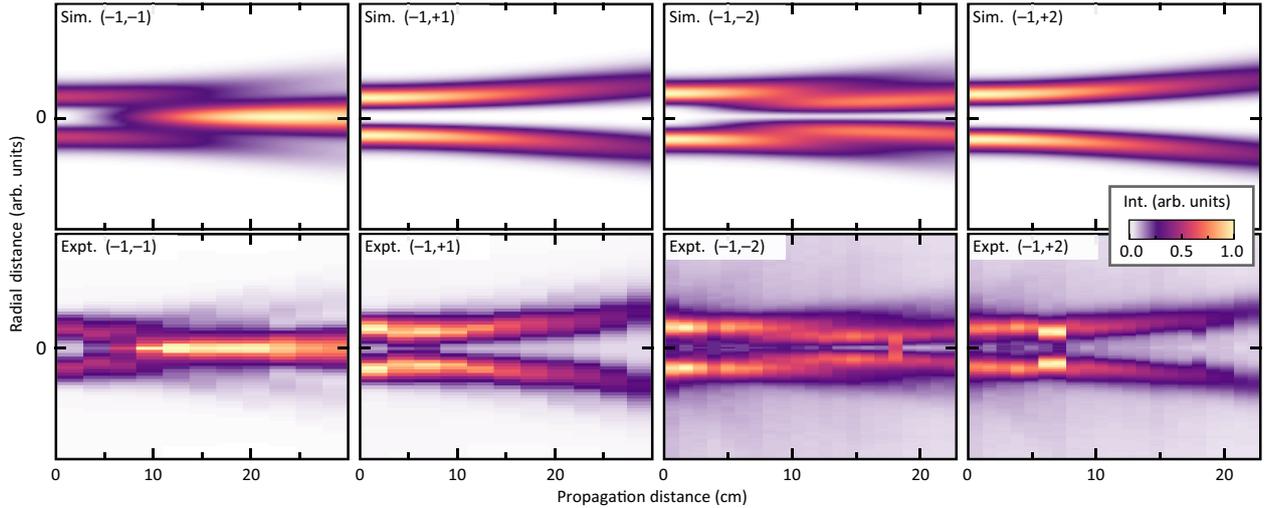


FIG. 4. Experimental and simulated idler-beam profiles as a function of the propagation distance (starting from the crystal plane), for different combinations of topological charges of the pump and seed beams. The azimuthally averaged profiles show the buildup of the far-field intensity distribution.

the expected divergence), which confirms that the field is a single LG-mode field.

Finally, it is interesting to discuss how the approximations considered in the theoretical analysis apply in the experimental setup employed here, especially the thin-crystal approximation used to obtain the interacting fields at the exit of the nonlinear crystal [see Eq. (3)]. The BBO crystal utilized is 2 mm thick, which may not be considered thin, but is still much less than the Rayleigh lengths of both the pump and the seed beam (2 and 1 m, respectively). In this softly focusing regime, the phase (namely, the Gouy phase and the wavefront curvature) and intensity (namely, the width) of the input fields are approximately constant within the interaction volume. Accordingly, both fields can still be approximated as Laguerre-Gaussian modes in a fixed plane ($z = 0$), so that the longitudinal phase-matching condition and the transverse mode overlap can be treated separately. Therefore, Eq. (3) is still valid, although one could replace the constant L by the full expression $L \text{sinc}(\Delta kL/2)$ for completeness. In other words, the phase-matching condition contributes only a multiplicative term to the output field in this scenario. Moreover, this term is independent of the topological charge of the input fields, and hence does not alter our conclusions regarding the generation of radial modes in the converted field, as is confirmed by the clear agreement between the experimental and simulated results in Figs. 3 and 4.

V. CONCLUSIONS

In conclusion, we present a theoretical and experimental study of StimPDC using OAM modes for pumping and seeding the process. We analyze the transverse spatial

distribution of the intensity of the idler beam in the regime where the stimulated emission is much stronger than the spontaneous emission, in the near and far field. We also work in the small-output-angle regime, where the topological charge is conserved. We observe an incompatibility between the spatial mode structure and the topological charge of the idler beam for some combinations of pump and seed modes. When the modal structure is not compatible with the topological charge, the idler beam diffracts, leading to a far-field intensity distribution that is different from the near-field distribution, with the presence of a radial mode structure. We present experimental results showing these features.

The main result of our paper is that we find selection rules beyond the conservation of angular momentum in StimPDC. We obtain simple mathematical relations between the pump and seed topological charges that determine the radial mode structure of the idler field. For combinations leading to null radial number, the idler is a pure LG mode because the radial and angular parts of the field match one another. However, a special feature is the possibility of generating idler fields with nonzero radial order and net OAM from input beams of zero radial order. In this situation, the field is always a superposition of modes due to the presence of a radial-angular mismatch. In Ref. [31], the concept of hyperbolic momentum is introduced, a quantity related to the radial order of LG modes. An interesting perspective is to investigate the connection between the radial-angular mismatch demonstrated here and the hyperbolic momentum. It has already been shown that the radial number is a quantum number [32]. We believe that an understanding of the mode coupling between the pump, seed, and idler beams in StimPDC,

in connection with the radial quantum number of LG modes, creates opportunities for employing this process in applications such as those described in Refs. [31–33].

ACKNOWLEDGMENTS

The authors would like to thank the Brazilian Agencies, the Conselho Nacional de Desenvolvimento Tecnológico (CNPq), the Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro (FAPERJ), the Fundação de Amparo à Pesquisa e Inovação do Estado de Santa Catarina (FAPESC), and the Brazilian National Institute of Science and Technology of Quantum Information (INCT/IQ). This study was funded in part by the Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES), Finance Code 001.

-
- [1] M. J. Padgett, Orbital angular momentum 25 years on [Invited], *Opt. Express* **25**, 11265 (2017).
- [2] C. V. S. Borges, M. Hor-Meyll, J. A. O. Huguenin, and A. Z. Khoury, Bell-like inequality for the spin-orbit separability of a laser beam, *Phys. Rev. A* **82**, 033833 (2010).
- [3] H. Rubinsztein-Dunlop *et al.*, Roadmap on structured light, *J. Opt.* **19**, 013001 (2016).
- [4] A. Forbes, M. de Oliveira, and M. R. Dennis, Structured light, *Nat. Photonics* **15**, 253 (2021).
- [5] K. Dholakia, N. B. Simpson, M. J. Padgett, and L. Allen, Second-harmonic generation and the orbital angular momentum of light, *Phys. Rev. A* **54**, R3742 (1996).
- [6] J. Arlt, K. Dholakia, L. Allen, and M. J. Padgett, Parametric down-conversion for light beams possessing orbital angular momentum, *Phys. Rev. A* **59**, 3950 (1999).
- [7] J. W. R. Tabosa and D. V. Petrov, Optical Pumping of Orbital Angular Momentum of Light in Cold Cesium Atoms, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 4967 (1999).
- [8] S. Barreiro and J. W. R. Tabosa, Generation of Light Carrying Orbital Angular Momentum via Induced Coherence Grating in Cold Atoms, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 133001 (2003).
- [9] Y. A. Il'inskii, D. N. Klyshko, and V. M. Petnikova, Photon statistics in parametric interaction of three waves, *Sov. J. Quantum Electron.* **5**, 1343 (1975).
- [10] Z. Y. Ou, L. J. Wang, X. Y. Zou, and L. Mandel, Coherence in two-photon down-conversion induced by a laser, *Phys. Rev. A* **41**, 1597 (1990).
- [11] L. J. Wang, X. Y. Zou, and L. Mandel, Observation of induced coherence in two-photon downconversion, *J. Opt. Soc. Am. B* **8**, 978 (1991).
- [12] M. Liscidini and J. E. Sipe, Stimulated Emission Tomography, *Phys. Rev. Lett.* **111**, 193602 (2013).
- [13] L. A. Rozema, C. Wang, D. H. Mahler, A. Hayat, A. M. Steinberg, J. E. Sipe, and M. Liscidini, Characterizing an entangled-photon source with classical detectors and measurements, *Optica* **2**, 430 (2015).
- [14] M. A. Ciampini, A. Galdini, V. Cimini, C. Macchiavello, J. E. Sipe, M. Liscidini, and P. Mataloni, Stimulated emission tomography: Beyond polarization, *Opt. Lett.* **44**, 41 (2019).
- [15] V. Parigi, A. Zavatta, M. Kim, and M. Bellini, Probing quantum commutation rules by addition and subtraction of single photons to/from a light field, *Science* **317**, 1890 (2007).
- [16] R. Birrittella, A. Gura, and C. C. Gerry, Coherently stimulated parametric down-conversion, phase effects, and quantum-optical interferometry, *Phys. Rev. A* **91**, 053801 (2015).
- [17] F. S. Roux, Stimulated parametric down-conversion for spatiotemporal metrology, *ArXiv:2106.13575* (2021).
- [18] P. H. Souto Ribeiro, D. P. Caetano, M. P. Almeida, J. A. Huguenin, B. Coutinho dos Santos, and A. Z. Khoury, Observation of Image Transfer and Phase Conjugation in Stimulated Down-Conversion, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 133602 (2001).
- [19] D. M. Pepper, Nonlinear optical phase conjugation, *OE* **21**, 212156 (1982).
- [20] E. Bochove, Theory of phase conjugation by degenerate four-wave mixing using spatially varying pump beams, *J. Opt. Soc. Am.* **73**, 1330 (1983).
- [21] D. P. Caetano, M. P. Almeida, P. H. Souto Ribeiro, J. A. O. Huguenin, B. Coutinho dos Santos, and A. Z. Khoury, Conservation of orbital angular momentum in stimulated down-conversion, *Phys. Rev. A* **66**, 041801(R) (2002).
- [22] A. G. de Oliveira, M. F. Z. Arruda, W. C. Soares, S. P. Walborn, R. M. Gomes, R. Medeiros de Araújo, and P. H. Souto Ribeiro, Real-time phase conjugation of vector vortex beams, *ACS Photonics* **7**, 249 (2020).
- [23] R. T. Thew, S. Tanzilli, L. Krainer, S. C. Zeller, A. Rochas, I. Rech, S. Cova, H. Zbinden, and N. Gisin, Low jitter up-conversion detectors for telecom wavelength GHz QKD, *New J. Phys.* **8**, 32 (2006).
- [24] L. J. Pereira, W. T. Buono, D. S. Tasca, K. Dechoum, and A. Z. Khoury, Orbital-angular-momentum mixing in type-II second-harmonic generation, *Phys. Rev. A* **96**, 053856 (2017).
- [25] H.-J. Wu, H.-R. Yang, C. Rosales-Guzmán, W. Gao, B.-S. Shi, and Z.-H. Zhu, Vectorial nonlinear optics: Type-II second-harmonic generation driven by spin-orbit-coupled fields, *Phys. Rev. A* **100**, 053840 (2019).
- [26] W. T. Buono, A. Santos, M. R. Maia, L. J. Pereira, D. S. Tasca, K. Dechoum, T. Ruchon, and A. Z. Khoury, Chiral relations and radial-angular coupling in nonlinear interactions of optical vortices, *Phys. Rev. A* **101**, 043821 (2020).
- [27] H.-J. Wu, L.-W. Mao, Y.-J. Yang, C. Rosales-Guzmán, W. Gao, B.-S. Shi, and Z.-H. Zhu, Radial modal transitions of Laguerre-Gauss modes during parametric up-conversion: Towards the full-field selection rule of spatial modes, *Phys. Rev. A* **101**, 063805 (2020).
- [28] G. B. Alves, R. F. Barros, D. S. Tasca, C. E. R. Souza, and A. Z. Khoury, Conditions for optical parametric oscillation with a structured light pump, *Phys. Rev. A* **98**, 063825 (2018).
- [29] R. W. Boyd, *Nonlinear Optics* (Academic Press, London, 2008) 3rd ed.
- [30] P. Vaity, J. Banerji, and R. P. Singh, Measuring the topological charge of an optical vortex by using a tilted convex lens, *Phys. Lett. A* **377**, 1154 (2013).

- [31] W. N. Plick and M. Krenn, Physical meaning of the radial index of Laguerre-Gauss beams, [Phys. Rev. A **92**, 063841 \(2015\)](#).
- [32] E. Karimi, D. Giovannini, E. Bolduc, N. Bent, F. M. Miatto, M. J. Padgett, and R. W. Boyd, Exploring the quantum nature of the radial degree of freedom of a photon via Hong-Ou-Mandel interference, [Phys. Rev. A **89**, 013829 \(2014\)](#).
- [33] G. Molina-Terriza, L. Torner, E. M. Wright, J. J. García-Ripoll, and V. M. Pérez-García, Vortex revivals with trapped light, [Opt. Lett. **26**, 1601 \(2001\)](#).



Observation of a triangular-lattice pattern in nonlinear wave mixing with optical vortices

B. PINHEIRO DA SILVA,^{1,2,*} G. H. DOS SANTOS,³ A. G. DE OLIVEIRA,³ N. RUBIANO DA SILVA,³ W. T. BUONO,⁴ R. M. GOMES,⁵ W. C. SOARES,⁶ A. J. JESUS-SILVA,⁷ E. J. S. FONSECA,⁷ P. H. SOUTO RIBEIRO,³ AND A. Z. KHOURY¹

¹Instituto de Física, Universidade Federal Fluminense, 24210-346 Niterói, RJ, Brazil

²School of Science and Engineering, University of Dundee, Dundee, DD1 4HN, Scotland, UK

³Departamento de Física, Universidade Federal de Santa Catarina, CEP 88040-900, Florianópolis, SC, Brazil

⁴School of Physics, University of the Witwatersrand, Private Bag 3, Johannesburg 2050, South Africa

⁵Instituto de Física, Universidade Federal de Goiás, CEP 74690-900, Goiânia, GO, Brazil

⁶Núcleo de Ciências Exatas—NCEX, Universidade Federal de Alagoas, CEP 57309-005, Arapiraca, AL, Brazil

⁷Instituto de Física, Universidade Federal de Alagoas, CEP 57072-970, Maceió, AL, Brazil

*Corresponding author: braianps@gmail.com

Received 1 April 2022; revised 7 June 2022; accepted 25 June 2022; published 4 August 2022

Preparation, control, and measurement of optical vortices are increasingly important, as they play essential roles in both fundamental science and optical technology applications. Spatial light modulation is the main approach behind the control strategies, although there are limitations concerning the controllable wavelength. It is therefore crucial to develop approaches that expand the spectral range of light modulation. Here, we demonstrate the modulation of light by light in nonlinear optical interactions to demonstrate the identification of the topological charge of optical vortices. A triangular-lattice pattern is observed in light beams resulting from the spatial cross modulation between an optical vortex and a triangular shaped beam undergoing parametric interaction. Both up- and downconversion processes are investigated, and the far-field image of the converted beam exhibits a triangular lattice. The number of sites and the lattice orientation are determined by the topological charge of the vortex beam. In the downconversion process, the lattice orientation can also be affected by phase conjugation. The observed cross modulation works for a large variety of spatial field structures. Our results show that modulation of light by light can be used at wavelengths for which solid-state devices are not yet available. © 2022 Optica Publishing Group under the terms of the [Optica Open Access Publishing Agreement](#)

<https://doi.org/10.1364/OPTICA.459812>

1. INTRODUCTION

The cross talk between spatial structures in nonlinear wave mixing is widely relevant in both classical and quantum regimes. The nonlinear optical process of parametric downconversion (PDC) has been extensively employed to generate quantum states of light structured in the transverse spatial degrees of freedom [1]. In the classical regime, the same process can be operated in the stimulated emission mode (StimPDC) [2,3], providing a convenient platform for the design of quantum optical schemes [4–6], and for the study of the interplay between the spatial structures of the interacting light fields in the parametric process [7–11]. In the same way, parametric upconversion plays an important role in a wide variety of applications in quantum and classical optical schemes, as, for instance, frequency conversion of squeezed light fields [12,13] and imaging with visible and invisible light [14,15]. The spatial structure of light beams, including the so-called optical vortex [16], gives rise to interesting effects in upconversion [17–21]. Therefore, frequency conversion of structured light paves the way for an increasing number of applications [22,23].

In the present work, we investigate the fields generated in the process of parametric upconversion and stimulated downconversion. It is known that the nonlinear evolution of optical vortex beams undergoing parametric up- and downconversion is subjected to selection rules, which determine orbital angular momentum (OAM) conservation as a ubiquitous condition [8,17], and the appearance of radial modes as a possible side effect depending on the relative chirality of the interacting beams [24–28]. Both conditions naturally appear from the straightforward calculation of the spatial overlap between the interacting modes. However, a more appealing physical picture is to consider the propagation properties of the outgoing field as a result of the spatial cross modulation due to the nonlinear interaction between incoming beams, which is equivalent to diffraction through an aperture.

Exploiting this simple physical picture, we demonstrate the occurrence of one striking effect in the diffraction phenomena of vortex beams generated in the nonlinear optical process, namely, the formation of a triangular lattice in far-field patterns [29–31].

We observe this outcome in both frequency up- and downconversion by mixing a vortex beam with a triangular shaped beam. The triangular lattice in the converted field evinces the effect, and the lattice orientation and number of sites are determined by the topological charge of the incoming vortex beam. In the downconversion process, the lattice orientation is also affected by phase conjugation [7,32], depending on whether the vortex structure is prepared in the pump or seed beam. Our findings advance the understanding of the role of spatial transverse structures in light fields generated from interaction in a nonlinear medium. Moreover, the fact that these fields have different wavelengths for the pump and seed allows wavefront manipulation and sensing in frequency ranges for which there are no commercial modulation devices.

2. SPATIAL CROSS MODULATION IN NONLINEAR WAVE MIXING

The wave mixing of two input signals inside a nonlinear crystal generates a new field contribution, which is coherently amplified along the interaction length, provided the phase matching condition is fulfilled. Phase matching implies a constraint between the wave vectors of the interacting fields [33]. In the paraxial regime, it is useful to analyze this constraint separately in longitudinal and transverse directions. In the case of an optically thin nonlinear medium, the bandwidth of the longitudinal phase matching is large, and the spatial profile of the field generated in the nonlinear interaction is essentially determined by the product of the transverse structures carried by the input beams [34]. The output field carries the combined information of the input beams, in a situation that is quite equivalent to usual diffraction problems, where the field distribution immediately after an obstacle is the product between the incident field distribution and the transmission function $\mathcal{T}(\mathbf{r})$ that characterizes the obstacle: $\mathcal{E}_{\text{out}}(\mathbf{r}) = \mathcal{T}(\mathbf{r})\mathcal{E}_{\text{in}}(\mathbf{r})$. Therefore, the patterns generated in nonlinear wave mixing can be viewed as an effective diffraction problem where one input beam plays the role of an obstacle or spatial modulator. We next analyze the up- and downconversion processes separately, demonstrating the striking triangular pattern formed by transmission of an optical vortex through a triangular aperture.

Upconversion. In the upconversion configuration, two input beams \mathbf{E}_1 and \mathbf{E}_2 are mixed in the nonlinear medium and generate the output field \mathbf{E}_3 , satisfying energy $\omega_1 + \omega_2 = \omega_3$ and momentum $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3$ conservation. Each field component carries a

spatial structure $\mathcal{E}_j(\mathbf{r})$ ($j = 1, 2, 3$) and a polarization unit vector $\hat{\mathbf{e}}_j$, so that

$$\mathbf{E}_j = \mathcal{E}_j(\mathbf{r})\hat{\mathbf{e}}_j. \quad (1)$$

The spatial structure of the upconverted beam is proportional to the product of those carried by the incoming beams [26,27]:

$$\mathcal{E}_3(\mathbf{r}) = g\mathcal{E}_1(\mathbf{r})\mathcal{E}_2(\mathbf{r}), \quad (2)$$

where g is the effective coupling constant. Therefore, the pattern formed by the upconverted beam after the interaction region corresponds to the cross modulation between the input (usually infrared) beams. In this sense, the resulting pattern can be viewed as the diffraction of one beam through an effective transmission function embodied by the other. This interpretation is illustrated in Fig. 1 (left panel).

Stimulated parametric downconversion. In the stimulated downconversion configuration (StimPDC), two input beams \mathbf{E}_p (pump) and \mathbf{E}_s (seed) are mixed in the nonlinear medium and generate the output field \mathbf{E}_i (idler), satisfying energy $\omega_p - \omega_s = \omega_i$ and momentum $\mathbf{k}_p - \mathbf{k}_s = \mathbf{k}_i$ conservation. Each field component has a spatial structure $\mathcal{E}_j(\mathbf{r})$ ($j = p, s, i$) and a polarization unit vector $\hat{\mathbf{e}}_j$, as before. The spatial structure of the downconverted beam is proportional to the product between the structure carried by the pump and the conjugate of the one carried by the seed beam [7]:

$$\mathcal{E}_i(\mathbf{r}) = g\mathcal{E}_p(\mathbf{r})\mathcal{E}_s^*(\mathbf{r}), \quad (3)$$

where g is the effective coupling constant. Therefore, the pattern formed by the downconverted beam after the interaction region corresponds to the cross modulation between the pump and the conjugate seed structures. In this case, the role of the effective transmission function is played differently by the pump and seed beams. Figure 1 (right panel) illustrates the situation of having the triangular aperture in the pump field.

3. EXPERIMENT

Upconversion setup. We start by describing the experiment of sum-frequency generation. The experimental setup is sketched in Fig. 2(a). The horizontally polarized Gaussian beam is produced by a 100 mW, c.w. Nd:YAG laser ($\lambda = 1064$ nm), which is split in a beam splitter (BS). One spatial light modulator (SLM) divided in two panels is used to produce a triangular-shaped beam, which

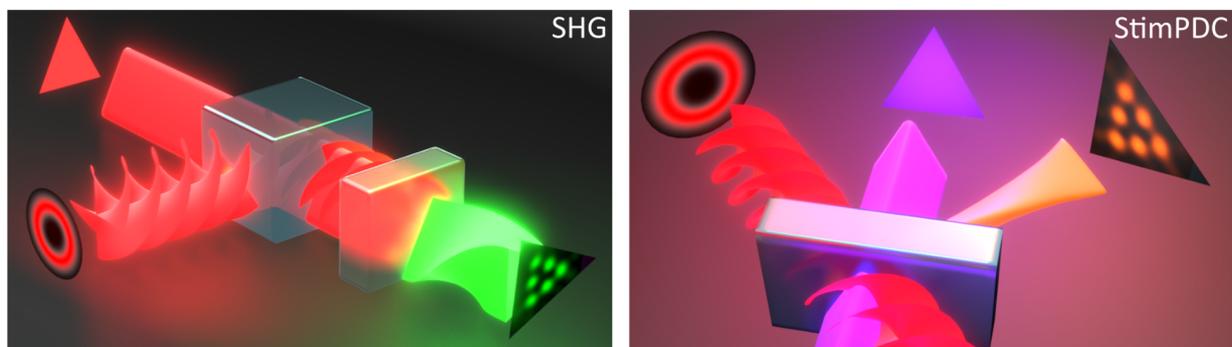


Fig. 1. Cross modulation of light fields in nonlinear wave mixing. Left panel: input fields (in red) with orthogonal polarizations, equal frequencies, and different spatial structures incident on a polarizing beam splitter for second-harmonic generation (SHG). Right panel: input fields of different frequencies and spatial structures (in red and purple) in stimulated parametric downconversion (StimPDC).

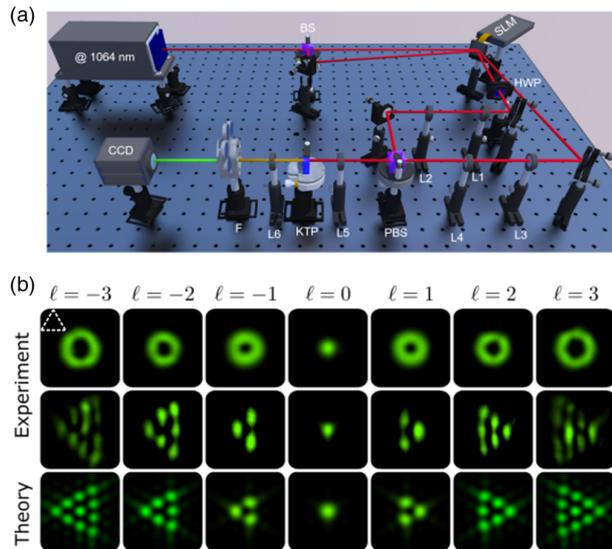


Fig. 2. (a) Experimental scheme for spatial cross modulation in upconversion. BS, beam splitter; SLM, spatial light modulator; HWP, half-wave plate; L1–L6, lenses; PBS, polarizing beam splitter; KTP, potassium titanyl phosphate nonlinear crystal; F, bandpass filter; CCD, camera. The power ratio between triangle and LG beam is one. (b) Measured far-field intensity patterns for the LG input fields (top row) and for the upconverted ones (middle row). The bottom row shows the theoretical upconverted patterns. The dashed white triangle illustrates the orientation of the triangular beam.

is transmitted, and also a Laguerre–Gaussian (LG) mode that is reflected by the BS. In both cases, we use the standard modulation approach based on blazed phase gratings and forked masks for the LG modes. To preserve the transverse structure along the propagation to the nonlinear crystal, we use $4f$ imaging lens systems ($f = 10$ cm) L1/L2 and L3/L4 in upper and lower paths, respectively. The polarization for proper phase matching is set by a half-wave plate oriented at 45° in the path of the triangular beam, resulting in vertical polarization. The beams are focused on a potassium titanyl phosphate (KTP) crystal cut for type-II phase matching using a 10 cm focal length lens. A bandpass filter is used to prevent the non-converted infrared beams from reaching the CCD camera, while the upconverted green light ($\lambda = 532$ nm) is imaged after collimation by a 10 cm focal length lens. Far-field intensity profiles are registered with the camera.

Figure 2(b) displays the experimental results for LG input beams having topological charges ranging from -3 to $+3$. The images in the upper row show the measured LG beam intensity profiles. In the second and bottom rows, the measured and theoretical far-field intensity patterns for the upconverted beam are respectively shown.

StimPDC setup. We have also investigated the StimPDC process. The sketch of the experimental setup is shown in Fig. 3(a). We use a vertically polarized, 30 mW, c.w. 405 nm laser beam to pump a beta barium borate (BBO) nonlinear crystal. The beam is transmitted through a *mechanical (not SLM)* triangular aperture, and then imaged in the crystal plane using a 30 cm focal length lens. As the seed beam, we use laser light of 780 nm wavelength and horizontal polarization. We use a SLM to shape the seed beam as LG modes, and the SLM plane is imaged onto the crystal plane using a 30 cm focal length lens. The pump beam is incident nearly perpendicular to the BBO crystal surface, while the seed beam

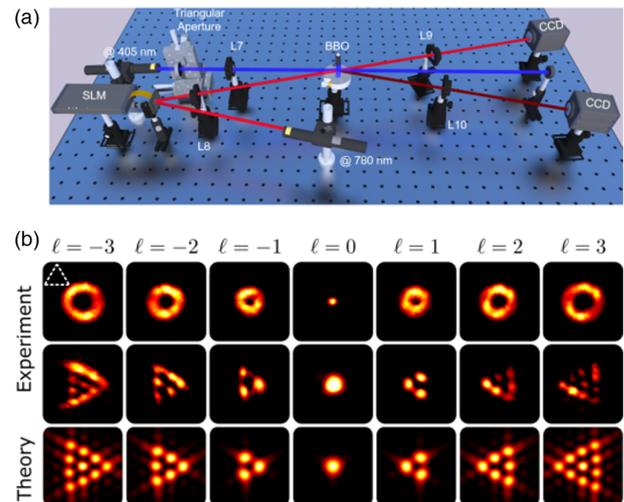


Fig. 3. (a) Experimental scheme for spatial cross modulation in stimulated downconversion. SLM, spatial light modulator; L7–L10, lenses; BBO, beta barium borate nonlinear crystal; CCD, camera. The power ratio between triangle and LG beam is two. (b) Measured far-field intensity patterns for LG seed (top row) and idler (middle row) fields. The bottom row shows the theoretical idler patterns. The dashed white triangle illustrates the orientation of the triangular beam.

is incident at about 4° with respect to it. The far-field intensity distributions of both seed and idler beams are registered by CCD cameras with the aid of 40 cm focal length lenses.

Similar to the upconversion measurements, we used LG seed beams having topological charges ranging from -3 to $+3$. The results are shown in Fig. 3(b). The top row displays the measured LG beam intensity profiles. Images of the measured and theoretically calculated far-field intensity patterns of the idler beam are shown in the middle and bottom rows, respectively.

4. DISCUSSION

Figures 2(b) and 3(b) demonstrate the good agreement between experimental and theoretical intensity patterns. For each conversion process alone, we observe the formation of a triangular lattice with topological charge $|\ell| = N - 1$, where N is the number of high intensity lobes at the edges, and orientation is dependent on the sign of ℓ . These results reinforce the physical picture presented above, since they follow what is observed when diffracting a LG beam through a triangular aperture [29].

The opposite orientations of the triangular lattices for upconversion and StimPDC emphasize the phase conjugation effect existing only in StimPDC. Equation (3) shows the dependence of the idler field on the phase conjugated seed field $\mathcal{E}_s^*(\mathbf{r})$. In this case, because the seed is prepared as a LG beam with topological charge $+\ell$, the triangular lattice formed in the idler looks like it was the diffraction of a $-\ell$ beam.

The results also show that the effective spatial modulation in nonlinear wave mixing is of both amplitude and phase. Even though the phase modulation effect is more clearly demonstrated for StimPDC, it also works for upconversion.

5. CONCLUSION

In conclusion, we demonstrated triangular-lattice patterns generated by nonlinear wave mixing of an optical vortex with a triangular

aperture-shaped beam, which works as a spatial modulation device. The cross modulation between input optical fields in the conversion schemes is, however, more general, and could be used to overcome the lack of devices in certain frequency ranges, whereas its counterpart in the visible range is readily available. Wavefront shaping in the THz, in the extreme ultraviolet, and in the x-ray ranges, for instance, can be achieved by using a SLM to control the visible input field. In the THz range, for instance, nonlinear optical conversion from visible light is already used to generate [35] and detect [36] THz fields, and a scheme to optically control metasurfaces generating THz radiation has been recently demonstrated [37]. In addition, wavefront sensing of telecom and x-ray fields can be accomplished by conversion to the visible range. The phase information thus transferred to the visible output field can be recorded using a common CCD camera. One example of such application is the conversion of infrared images to visible [15] using upconversion. In the upconversion experiment of our work, we use the same kind of cross modulation for a different purpose, to demonstrate detection of topological charges.

Moreover, our scheme of StimPDC allows for filtering phase information. Recently, Rocha *et al.* [38] introduced a way of filtering the random phase from speckles through nonlinear wave mixing. The configuration presented there works only if the conjugate phase is present in one of the patterns, a restriction that is naturally lifted in StimPDC. A possible application would be using a random phase or medium as an encryption key in optical communication. An image (seed beam) encodes information, which is transferred to the idler beam in StimPDC. The decoded information would be obtained by propagating the idler through the key. Directly filtering the random phase in a speckle pattern is of paramount importance also to imaging systems, and mode sorters, where the information is commonly achieved through computationally extensive post-processing using statistical correlation.

Our findings advance the knowledge of the role of spatially structured light in nonlinear wave mixing. The theoretical modeling and experimental control of frequency conversion processes is crucial in applications such as quantum communication and quantum memories and relays [39].

Funding. Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior; Instituto Nacional de Ciência e Tecnologia de Informação Quântica; Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Goiás; Fundação de Amparo à Pesquisa e Inovação do Estado de Santa Catarina; Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro; Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico.

Disclosures. The authors declare no conflicts of interest.

Data availability. The data analyzed in the presented research are included in the main text.

REFERENCES

1. S. Walborn, C. Monken, S. Pádua, and P. Souto Ribeiro, "Spatial correlations in parametric down-conversion," *Phys. Rep.* **495**, 87–139 (2010).
2. Z. Y. Ou, L. J. Wang, and L. Mandel, "Photon amplification by parametric downconversion," *J. Opt. Soc. Am. B* **7**, 211–214 (1990).
3. Z. Y. Ou, L. J. Wang, X. Y. Zou, and L. Mandel, "Coherence in two-photon down-conversion induced by a laser," *Phys. Rev. A* **41**, 1597–1601 (1990).
4. M. Liscidini and J. E. Sipe, "Stimulated emission tomography," *Phys. Rev. Lett.* **111**, 193602 (2013).
5. L. A. Rozema, C. Wang, D. H. Mahler, A. Hayat, A. M. Steinberg, J. E. Sipe, and M. Liscidini, "Characterizing an entangled-photon source with classical detectors and measurements," *Optica* **2**, 430–433 (2015).
6. M. A. Ciampini, A. Gherardi, V. Cimini, C. Macchiavello, J. E. Sipe, M. Liscidini, and P. Mataloni, "Stimulated emission tomography: beyond polarization," *Opt. Lett.* **44**, 41–44 (2019).
7. P. H. Souto Ribeiro, D. P. Caetano, M. P. Almeida, J. A. Huguenin, B. C. dos Santos, and A. Z. Khoury, "Observation of image transfer and phase conjugation in stimulated down-conversion," *Phys. Rev. Lett.* **87**, 133602 (2001).
8. D. P. Caetano, M. P. Almeida, P. H. Souto Ribeiro, J. A. O. Huguenin, B. C. dos Santos, and A. Z. Khoury, "Conservation of orbital angular momentum in stimulated down-conversion," *Phys. Rev. A* **66**, 041801 (2002).
9. M. F. Z. Arruda, W. C. Soares, S. P. Walborn, D. S. Tasca, A. Kanaan, R. M. de Araújo, and P. H. S. Ribeiro, "Klyshko's advanced-wave picture in stimulated parametric down-conversion with a spatially structured pump beam," *Phys. Rev. A* **98**, 023850 (2018).
10. A. G. de Oliveira, M. F. Z. Arruda, W. C. Soares, S. P. Walborn, R. M. Gomes, R. M. de Araújo, and P. H. S. Ribeiro, "Real-time phase conjugation of vector vortex beams," *ACS Photon.* **7**, 249–255 (2020).
11. A. G. de Oliveira, N. R. da Silva, R. M. de Araújo, P. H. S. Ribeiro, and S. P. Walborn, "Quantum optical description of phase conjugation of vector vortex beams in stimulated parametric down-conversion," *Phys. Rev. Appl.* **14**, 024048 (2020).
12. C. E. Vollmer, C. Baune, A. Sambrowski, T. Eberle, V. Händchen, J. Fiurášek, and R. Schnabel, "Quantum up-conversion of squeezed vacuum states from 1550 to 532 nm," *Phys. Rev. Lett.* **112**, 073602 (2014).
13. H. Kerdoncuff, J. B. Christensen, and M. Lassen, "Quantum frequency conversion of vacuum squeezed light to bright tunable blue squeezed light and higher-order spatial modes," *Opt. Express* **29**, 29828–29840 (2021).
14. A. Barh, P. J. Rodrigo, L. Meng, C. Pedersen, and P. Tidemand-Lichtenberg, "Parametric upconversion imaging and its applications," *Adv. Opt. Photon.* **11**, 952–1019 (2019).
15. X. Qiu, F. Li, W. Zhang, Z. Zhu, and L. Chen, "Spiral phase contrast imaging in nonlinear optics: seeing phase objects using invisible illumination," *Optica* **5**, 208–212 (2018).
16. M. J. Padgett, "Orbital angular momentum 25 years on invited," *Opt. Express* **25**, 11265–11274 (2017).
17. K. Dholakia, N. B. Simpson, M. J. Padgett, and L. Allen, "Second-harmonic generation and the orbital angular momentum of light," *Phys. Rev. A* **54**, R3742–R3745 (1996).
18. D. S. Ether, P. H. S. Ribeiro, C. H. Monken, and R. L. de Matos Filho, "Effects of spatial transverse correlations in second-harmonic generation," *Phys. Rev. A* **73**, 053819 (2006).
19. Y. Zhang, J. Wen, S. N. Zhu, and M. Xiao, "Nonlinear Talbot effect," *Phys. Rev. Lett.* **104**, 183901 (2010).
20. X.-H. Hong, B. Yang, C. Zhang, Y.-Q. Qin, and Y.-Y. Zhu, "Nonlinear volume holography for wave-front engineering," *Phys. Rev. Lett.* **113**, 163902 (2014).
21. H. Liu, X. Zhao, H. Li, Y. Zheng, and X. Chen, "Dynamic computer-generated nonlinear optical holograms in a non-collinear second-harmonic generation process," *Opt. Lett.* **43**, 3236 (2018).
22. F. Steinlechner, N. Hermosa, V. Pruneri, and J. P. Torres, "Frequency conversion of structured light," *Sci. Rep.* **6**, 21390 (2016).
23. H.-J. Wu, B.-S. Yu, Z.-H. Zhu, W. Gao, D.-S. Ding, Z.-Y. Zhou, X.-P. Hu, C. Rosales-Guzmán, Y. Shen, and B.-S. Shi, "Conformal frequency conversion for arbitrary vectorial structured light," *Optica* **9**, 187–196 (2022).
24. W. T. Buono, L. F. C. Moraes, J. A. O. Huguenin, C. E. R. Souza, and A. Z. Khoury, "Arbitrary orbital angular momentum addition in second harmonic generation," *New J. Phys.* **16**, 093041 (2014).
25. L. J. Pereira, W. T. Buono, D. S. Tasca, K. Dechoum, and A. Z. Khoury, "Orbital-angular-momentum mixing in type-II second-harmonic generation," *Phys. Rev. A* **96**, 053856 (2017).
26. W. T. Buono, J. Santiago, L. J. Pereira, D. S. Tasca, K. Dechoum, and A. Z. Khoury, "Polarization-controlled orbital angular momentum switching in nonlinear wave mixing," *Opt. Lett.* **43**, 1439–1442 (2018).
27. W. T. Buono, A. Santos, M. R. Maia, L. J. Pereira, D. S. Tasca, K. Dechoum, T. Ruchon, and A. Z. Khoury, "Chiral relations and radial-angular coupling in nonlinear interactions of optical vortices," *Phys. Rev. A* **101**, 043821 (2020).
28. A. de Oliveira, G. Santos, N. R. da Silva, L. Pereira, G. Alves, A. Khoury, and P. H. S. Ribeiro, "Beyond conservation of orbital angular momentum in stimulated parametric down-conversion," *Phys. Rev. Appl.* **16**, 044019 (2021).

29. J. M. Hickmann, E. J. S. Fonseca, W. C. Soares, and S. Chávez-Cerda, "Unveiling a truncated optical lattice associated with a triangular aperture using light's orbital angular momentum," *Phys. Rev. Lett.* **105**, 053904 (2010).
30. L. A. Melo, A. J. Jesus-Silva, S. Chávez-Cerda, P. H. S. Ribeiro, and W. C. Soares, "Direct measurement of the topological charge in elliptical beams using diffraction by a triangular aperture," *Sci. Rep.* **8**, 6370 (2018).
31. Y. Shen, X. Fu, and M. Gong, "Truncated triangular diffraction lattices and orbital-angular-momentum detection of vortex SU(2) geometric modes," *Opt. Express* **26**, 25545–25557 (2018).
32. A. G. de Oliveira, M. F. Z. Arruda, W. C. Soares, S. P. Walborn, A. Z. Khoury, A. Kanaan, P. H. S. Ribeiro, and R. M. de Araújo, "Phase conjugation and mode conversion in stimulated parametric down-conversion with orbital angular momentum: a geometrical interpretation," *Braz. J. Phys.* **49**, 10–16 (2019).
33. W. Zhang, H. Yu, H. Wu, and P. S. Halasyamani, "Phase-matching in nonlinear optical compounds: a materials perspective," *Chem. Mater.* **29**, 2655–2668 (2017).
34. N. Bloembergen, *Nonlinear Optics* (Addison-Wesley, 1977).
35. P. Bai, Y. Zhang, T. Wang, Z. Fu, D. Shao, Z. Li, W. Wan, H. Li, J. Cao, X. Guo, and W. Shen, "Broadband THz to NIR up-converter for photon-type THz imaging," *Nat. Commun.* **10**, 3513 (2019).
36. B. Haase, M. Kutas, F. Rieinger, P. Bickert, A. Keil, D. Molter, M. Bortz, and G. von Freymann, "Spontaneous parametric down-conversion of photons at 660 nm to the terahertz and sub-terahertz frequency range," *Opt. Express* **27**, 7458–7468 (2019).
37. K. Jana, E. Okocha, S. H. Møller, Y. Mi, S. Sederberg, and P. B. Corkum, "Reconfigurable terahertz metasurfaces coherently controlled by wavelength-scale-structured light," *Nanophotonics* **11**, 787–795 (2021).
38. J. C. A. Rocha, D. G. Pires, J. G. M. N. Neto, A. J. Jesus-Silva, N. M. Litchinitser, and E. J. S. Fonseca, "Speckle filtering through nonlinear wave mixing," *Opt. Lett.* **46**, 3905–3908 (2021).
39. D. Castelvecchi, "Quantum network is step towards ultrasecure internet," *Nature* **590**, 540–541 (2021).

Research Article

Gustavo H. dos Santos, Andre G. de Oliveira, Nara Rubiano da Silva, Gustavo Cañas, Esteban S. Gómez, Stuti Joshi, Yaseera Ismail, Paulo H. Souto Ribeiro and Stephen Patrick Walborn*

Phase conjugation of twisted Gaussian Schell model beams in stimulated down-conversion

<https://doi.org/10.1515/nanoph-2021-0502>

Received August 30, 2021; accepted October 19, 2021;

published online November 3, 2021

Abstract: Stimulated parametric down-conversion is a nonlinear optical process that can be used for phase conjugation and frequency conversion of an optical field. A precise description of the outgoing stimulated field has been developed for the case where the input pump and seed fields are coherent. However, partially coherent beams can have interesting and important characteristics that are absent in coherent beams. One example is the twist phase, a novel optical phase that can appear in partially coherent Gaussian beams and gives rise to a nonzero orbital angular momentum. Here, we consider stimulated down-conversion for partially coherent input fields. As a case study, we use twisted Gaussian Schell-Model beams as the seed and pump beams in stimulated parametric down-conversion. It is shown both theoretically and experimentally that the stimulated idler beam can be

written as a twisted Gaussian Schell-Model beam, where the beam parameters are determined entirely by the seed and pump. When the pump beam is coherent, the twist phase of the idler is the conjugate of that of the seed. These results could be useful for the correction of wavefront distortion such as in atmospheric turbulence in optical communication channels, and synthesis of partially coherent beams.

Keywords: phase conjugation; stimulated down-conversion; twist phase; twisted Gaussian Schell-model.

1 Introduction

Parametric nonlinear processes play a central role in classical and quantum optics, as they can give rise to amplification, modulation and frequency conversion of optical fields. Typically, the input fields are assumed to be spatially and temporally coherent. However, many modern light sources display only partial transverse coherence. Moreover, partially coherent beams can have interesting and useful characteristics. One example is the Twisted Gaussian Schell-model (TGSM) beam [1, 2], which carry a so-called twist phase, and could be useful in communication through turbulence [3, 4] and imaging [5].

The role of partial transverse coherence in nonlinear optics has been studied for the case of spontaneous parametric down-conversion [6–17]. A related process, known as stimulated parametric down-conversion (StimPDC), occurs when a pump and a seed beam interact in a medium with a nonzero second-order susceptibility [18]. They produce a third field, known as the stimulated or idler field, which can be the phase conjugate of the seed [19–22]. Phase conjugation can be used to correct wavefront distortion [23], with applications in laser construction [24, 25], high-resolution imaging [26], and communications [27–29]. StimPDC has also been used to produce quantum states of light [30–33]. Using an appropriate source, StimPDC has been used for phase conjugation and frequency conversion

*Corresponding author: Stephen Patrick Walborn, Departamento de Física, Universidad de Concepción, 160-C Concepción, Chile; and ANID - Millennium Institute for Research in Optics, Universidad de Concepción, 160-C Concepción, Chile, E-mail: swalborn@udec.cl. <https://orcid.org/0000-0002-3346-8625>

Gustavo H. dos Santos, Andre G. de Oliveira, Nara Rubiano da Silva and Paulo H. Souto Ribeiro, Departamento de Física, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC CEP 88040-900, Brazil, E-mail: fisica.gu@gmail.com (G.H. dos Santos), ago.lvr@gmail.com (A.G. de Oliveira), nara.rubiano@gmail.com (N. Rubiano da Silva), p.h.s.ribeiro@ufsc.br (P.H. Souto Ribeiro). <https://orcid.org/0000-0003-0692-5066> (N. Rubiano da Silva)

Gustavo Cañas, Departamento de Física, Universidad del Bío-Bío, Collao 1202, 5-C Concepción, Chile, E-mail: gcanas@ubiobio.cl

Esteban S. Gómez, Departamento de Física, Universidad de Concepción, 160-C Concepción, Chile; and ANID – Millennium Science Initiative Program – Millennium Institute for Research in Optics, Universidad de Concepción, 160-C Concepción, Chile, E-mail: estesepulveda@udec.cl

Stuti Joshi, Optics and Photonics Centre, Indian Institute of Technology Delhi, Hauz Khas, New Delhi 110016, India, E-mail: stutijoshi86@gmail.com

Yaseera Ismail, Quantum Research Group, School of Chemistry and Physics, University of KwaZulu-Natal, Durban 4001, South Africa, E-mail: Ismail@ukzn.ac.za

of vector beams [22, 34–36], and as a tool for probing the spontaneous regime with an increased signal [37].

Even though StimPDC has been recently addressed in several different contexts, including studies using structured light, the role of partial transverse coherence in the process has not yet been addressed. Here, we consider partially coherent StimPDC, with the aim of elucidating the relationship between the transverse degree of coherence as well as the twist phase of the pump, signal and idler beams. This knowledge will help to enhance the applications of TGSM beams. Section 2 develops a general description of the output idler field in terms of monochromatic but partially coherent pump and seed beams. We then apply this to the case in which both input fields are described by the TGSM [1, 2]. In Section 3 we present results of a StimPDC experiment using a TGSM seed beam with a coherent pump beam, observing that the idler beam is the phase conjugate of the seed.

2 Partially coherent StimPDC

Let us first recall StimPDC using spatially coherent beams in a single, thin nonlinear crystal. For a sufficiently strong seed beam, and considering that the crystal length ℓ_z is much smaller than the Rayleigh length of the pump beam z_R , it was shown in Refs. [19, 35] that the output idler field is described by

$$\phi(\mathbf{q}_i) = \iint d\mathbf{q}_s \mathcal{P}(\mathbf{q}_s + \mathbf{q}_i) S^*(\mathbf{q}_s), \quad (1)$$

where $\mathcal{P}(\mathbf{q})$ is the angular spectrum of the pump beam, and $S^*(\mathbf{q}_s)$ is the angular spectrum of the seed field. The vectors of the form $\mathbf{q} = (q_x, q_y)$ are the transverse wave vectors of the seed (s) and idler (i) fields. Taking the Fourier transform, the outgoing idler field profile is

$$\Phi(\mathbf{r}) = P(\mathbf{r}) S^*(\mathbf{r}), \quad (2)$$

where P and S are the field profiles of the pump and seed beams, respectively. The above expressions assume beams with perfect transverse coherence.

A simple and intuitive approach to StimPDC with partially coherent beams is to consider that every partially coherent beam can be decomposed as a convex sum of coherent beams. Thus, for partially coherent pump and seed beams, this results in a statistical mixture of coherent StimPDC processes, each with coherent pump beam and seed profiles given by $P_j(\mathbf{r})$ and $S_k^*(\mathbf{r})$, respectively. The output idler field is no longer described by a coherent field

as in (2), but rather by the cross-spectral density (CSD) function

$$W_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{j,k} \lambda_j \beta_k P_j^*(\mathbf{r}) S_k^*(\mathbf{r}) P_j(\mathbf{r}') S_k(\mathbf{r}'), \quad (3)$$

where the weighting coefficients λ_j and β_k are nonnegative and each sum to unity. One can recognize

$$W_p(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum \lambda_j P_j^*(\mathbf{r}) P_j(\mathbf{r}'), \quad (4)$$

as a coherent mode decomposition [38] of the CSD function of a partially coherent pump beam. A similar expression can be written for the seed beam. Moreover, we can recognize the CSD function of the idler field (3) as the product of the CSD function of the pump beam with the complex conjugate of the CSD function of the seed beam:

$$W_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = W_p(\mathbf{r}, \mathbf{r}') W_s^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}'). \quad (5)$$

We note that this expression is quite general, considering only that the pump and the seed be monochromatic paraxial fields, incident on a thin nonlinear crystal. In the next section, we apply this result to the special case of TGSM beams.

2.1 StimPDC with twisted Schell-model beams

There are several types of partially coherent beams. Perhaps the most well-known is the Gaussian Schell-model (GSM) [38], whose intensity and degree-of-coherence profile follow Gaussian distributions. A more general class are the TGSM beams [1, 2, 39, 40], which include a novel twist phase μ . The TGSM beams reduce to GSM beams when $\mu = 0$. These are Gaussian beams, which at the beam waist are described by the CSD function

$$T(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mu) = A e^{-\frac{r^2+r'^2}{4w^2}} e^{-\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')^2}{2\delta^2}} e^{-ik\frac{(r^2-r'^2)}{2R}} e^{-ik\mu(xy'-y\alpha')}, \quad (6)$$

where w is the beam waist, δ is the transverse coherence length, and R is the radius of curvature. In the near-field, the intensity distribution has variance $\sigma_{\text{nf}}^2 = w^2$. The positivity constraint on the CSD function determines that the twist phase μ satisfies $k|\mu| \leq 1/\delta^2$ [1, 2].

Considering both the seed and pump as TGSM beams, and using Eq. (6) in Eq. (5), the idler field can be written as

$$W_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = A e^{-\frac{r^2+r'^2}{4w_i^2}} e^{-\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')^2}{2\delta_i^2}} e^{-ik_i\frac{(r^2-r'^2)}{2R_i}} e^{-ik_i\mu_i(xy'-y\alpha')}, \quad (7)$$

suggesting that the output idler field can be described by a TGSM beam with beam waist

$$w_i^2 = \frac{w_s^2 w_p^2}{w_s^2 + w_p^2}, \quad (8)$$

transverse coherence length

$$\delta_i^2 = \frac{\delta_s^2 \delta_p^2}{\delta_s^2 + \delta_p^2}, \quad (9)$$

phase curvature

$$\frac{k_i}{R_i} = \frac{k_p}{R_p} - \frac{k_s}{R_s}, \quad (10)$$

and twist phase

$$k_i \mu_i = k_p \mu_p - k_s \mu_s, \quad (11)$$

where i, s, p stand for idler, signal (seed) and pump, respectively. Taking the absolute value of Eq. (11) and using (9), we note that the positivity constraint on the twist phase is satisfied, namely:

$$k_i |\mu_i| \leq k_p |\mu_p| + k_s |\mu_s| \leq 1/\delta_p^2 + 1/\delta_s^2 = 1/\delta_i^2, \quad (12)$$

showing that the output idler field can indeed be understood as a bona fide TGSM beam. The above equations show that the parameters of the TGSM seed and pump beams can be used to engineer TGSM idler beams.

Equation (9) gives the coherence length of the idler field as a function of the coherence lengths of the seed and pump beams, from which we see that the transverse coherence length of the idler field is always less than or equal to that of the least coherent beam $\delta_i \leq \min(\delta_s, \delta_p)$. For example, if $\delta_s = \delta_p$, then the coherence length of the idler is $\delta_i = \delta_s/\sqrt{2}$. However, since coherence length is always considered with respect to the beam waist, it is more illustrative to consider the ratio

$$\frac{\delta_i}{w_i} = \sqrt{\frac{\delta_s^2 \delta_p^2}{\delta_s^2 + \delta_p^2} \frac{w_s^2 + w_p^2}{w_s^2 w_p^2}}. \quad (13)$$

When $w_p = w_s$ and $\delta_p = \delta_s$, the ratio of coherence length and beam waist of the idler field remain the same as that of the pump or signal (seed) photon ($\delta_i/w_i = \delta_s/w_s = \delta_p/w_p$). However, the beam waist and coherence length of the idler field are each related to those of the pump/seed by a factor of $1/\sqrt{2}$.

When the pump beam has zero twist phase ($\mu_p = 0$), then from Eq. (11) the idler twist phase $\mu_i = -(k_s/k_i)\mu_s$, so that the twist phase of signal and idler are equal in amplitude when the fields are degenerate. The idler twist phase is thus the opposite of the seed, but the two beams are not necessarily complex conjugates of one another, due

to the other beam parameters. Specifying further that the pump beam described by a coherent plane wave ($\delta_p^2 \gg \delta_s^2$, $\mu_p = 0$, $w_p^2 \gg w_s^2$, $k_s/R_s \gg k_p/R_p$), we have $w_i \approx w_s$, $\delta_i \approx \delta_s$ and $k_i \mu_i = -k_s \mu_s$, so that, aside from a possible change in wavelength, the output idler field is

$$W_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = T_s(\mathbf{r}, \mathbf{r}', -\mu_s) = T_s^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mu_s), \quad (14)$$

showing that the outgoing idler beam is the phase conjugate of the incoming seed beam. In the next section, we confirm these theoretical results in a StimPDC experiment.

The term phase conjugation is very often related to the idea of a light beam reflected by a phase conjugation mirror, which produces a copy of the input beam propagating backwards in time. In the context of StimPDC, it is also possible to produce an idler beam that is a copy of the seed beam evolving backwards in time. However, it is not a reflection, and this occurs when the pump can be approximated by a plane wave. A more general way of understanding the phase conjugation that occurs in StimPDC is by envisioning the idler beam as the field resulting from the scattering of the seed beam in a modulator described by the pump beam, which propagates backwards in time. The effective modulation provided by the pump can change the wavelength, amplitude and phase of the idler as compared to the input seed beam.

3 Experiment

Figure 1 shows a sketch of the experimental setup. It is a typical StimPDC experiment [34, 36], where a 2 mm long BBO (Beta-Barium-Borate) nonlinear crystal is pumped by a diode laser oscillating at 405 nm. The phase matching conditions for the crystal are type I, so that the vertically polarized pump gives rise to horizontally polarized signal and idler at 780 and 840 nm, respectively. In order to achieve stimulated emission in the idler mode, a seed laser beam (780 nm) is input into the seed mode.

The key difference from previous StimPDC experiments is the use of a partially coherent seed beam, which is prepared as a TGSM beam. It is produced by sending the initially coherent seed laser onto a spatial light modulator (SLM) that is broadcasting a sequence of phase-randomized images, following the methods demonstrated in Refs. [41–43]. To achieve partial coherence, we use a video composed of 300 images played at 15 frames per second, giving a total sampling time of 20 s. Each image is given by a blazed grating pattern to maximize transmission into the first diffraction order. Upon the blazed grating, we imprint a phase profile corresponding to

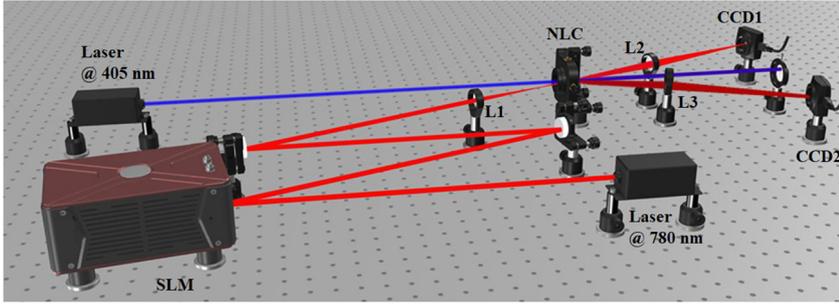


Figure 1: Experimental setup. A pump beam is incident on a nonlinear crystal producing parametric down-conversion. An auxiliary laser is used as a seed to stimulate the parametric emission aligned with the signal beam. It is prepared as a TGSM beam using a spatial light modulator (SLM), where a (~ 20 s) movie of 300 phase-randomized phase/amplitude masks is used to produce the partially coherent seed field. Both seed and idler beams after the crystal are measured with a CCD camera.

$$\Phi_l(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^N \sqrt{p(\mathbf{v}_n)} K(\mathbf{r}, \mathbf{v}_n) e^{i\varphi_{l,n}}, \quad (15)$$

with

$$K(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \exp \left[-\frac{w^2}{2aw^2 + 1} \times \left(\frac{\mathbf{r}}{2w^2} + a\mathbf{r} - a\mathbf{v} \right)^2 - ik\mu(xv_y - yv_x) \right] \quad (16)$$

and weight function

$$p(\mathbf{v}) = \exp \left(-\frac{av^2}{(2aw^2 + 1)} \right), \quad (17)$$

and the parameter $a = \frac{1}{\delta^2} \left(1 + \sqrt{1 - k^2 \mu^2 \delta^2} \right)$. Thus, each image is composed of $N = 529$ Gaussian functions displaced by the vector \mathbf{v}_n with cartesian components sampled uniformly in the range $[-2\sqrt{(2w^2 + 1/a)}, 2\sqrt{(2w^2 + 1/a)}]$. The phases $\varphi_{l,n}$ are chosen randomly between 0 and 2π , so that the Gaussian functions can be considered mutually incoherent [41–43] when averaged over the 300 images in each video. Upon averaging, the output field is given by $\sum_l \Phi_l(\mathbf{r}_1) \Phi_l(\mathbf{r}_2) \approx T(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$. After preparing the seed beam in the SLM, lens L1 is used to project the image of the SLM surface onto the crystal plane with a magnification factor of 0.56. Lenses L2 and L3 are used to perform the optical Fourier transform of signal and idler fields at the crystal plane to the detection plane, at which CCD1 and CCD2 are used to record images of the Fourier-transformed seed and idler fields with an integration time of 1 s. A total of 20 CCD images are recorded and the final intensity distributions are obtained by summing over the entire set of images. For the purposes of this experiment, the pump beam is prepared as a collimated Gaussian mode with width 0.5 mm. The pump beam is coherent, with transverse coherence length $\delta_p \gg \delta_s$. All beams were prepared with

a large radius of phase curvature $R \gg z_R$ corresponding to an approximately flat wave front.

In what follows, we classify TGSM beams according to the normalized twist phase $\tau = \mu k \delta^2$, such that $-1 \leq \tau \leq 1$. We prepare the seed beam with normalized twist phases $\tau_s = 0, \pm 1$. For each twist phase, we perform measurements for seed and idler beams while varying the transverse coherence length δ_s of the seed. In a first set of measurements, we measure the far-field variance σ_{ff}^2 . In the second, we measure the visibility of interference fringes produced in a double-slit experiment.

4 Results

4.1 Coherence transfer

The first set of measurements was carried out with the goal of studying the transverse coherence properties of the stimulated idler beam, as a function of the properties of the seed beam. With the coherent and collimated pump beam, and the seed beam prepared as a TGSM beam, from Section 2.1 we expect $\delta_i \approx \delta_s$ and $\mu_i = -k_s \mu_s / k_i \approx -\mu_s$ since the fields are nearly degenerate ($\lambda_i / \lambda_s \sim 1.08$). A common method for studying the coherence properties of TGSM beams is through the divergence of the beam [44]. Here, we use the CCD camera to measure the variance of the intensity distribution in the far-field σ_{ff}^2 of both the seed and idler, as a function of the transverse coherence length δ of the seed beam. The expected far-field variance from (6) is

$$\sigma_{\text{ff}}^2 = \left(\frac{1}{4w^2} + \frac{k^2 w^2}{R^2} \right) + \frac{1}{\delta^2} + \frac{\tau^2 w^2}{\delta^4}, \quad (18)$$

showing that the beam diverges faster for nonzero twist phase. Figure 2 shows plots of the far-field variance σ_{ff}^2 of

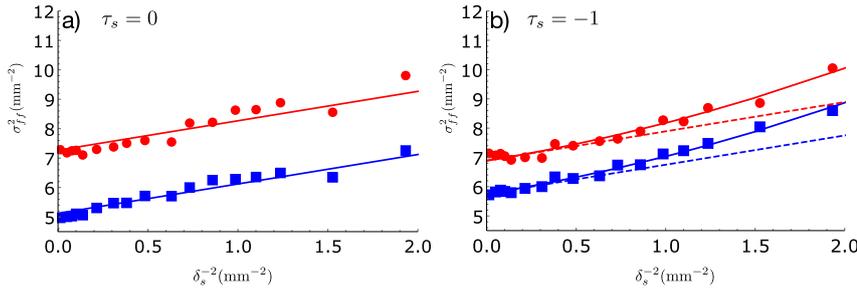


Figure 2: Transverse variance in the far-field as a function of the inverse square of the transverse coherence length ($1/\delta_s^2$) for the seed (red circles) and idler (blue squares) beams. Error bars are smaller than the symbols. In (a) $\tau_s = 0$ and (b) $\tau_s = -1$. The variance of the idler beam mimics the seed, showing that the transverse coherence of the idler follows that of the seed beam. The distinct y -intercepts are due to slightly different phase curvatures. See main text for additional details.

both the seed and idler beams versus the inverse square coherence length of the seed beam $1/\delta_s^2$. Here, we scale both the coherence length and beam width to account for the magnification factor of the imaging system from the SLM to the image plane at the crystal. In Figure 2a we see that the far-field variance of the seed beam increases linearly with the parameter $1/\delta_s^2$ as expected for normalized twist phase $\tau = 0$. The solid lines have slope equal to one, following (18). The idler beam behaves nearly identically to the seed beam, indicating that the transverse degree of coherence of the idler follows that of the seed. Similar results are observed when the seed is a TGSM beam with $\tau_s = -1$, shown in Figure 2b. However, in this case the solid lines correspond to plots of $a + \delta_s^{-2} + b\delta_s^{-4}$, with a and b free parameters. For $\tau_s = -1$ we obtain $b = 0.29 \pm 0.04 \text{ mm}^2$ for the seed and $b = 0.27 \pm 0.02 \text{ mm}^2$ for the idler beam, showing that the idler beam diverges nearly identically to the seed. These values are consistent with the theoretical value of $b = \tau^2 w^2 \approx 0.3 \text{ mm}^2$. For comparison, the dashed lines have slope equal to one and y -intercept given by a , showing the increase in divergence due to the nonzero twist phase. The different y -intercepts between seed and idler in all plots, which correspond to the term in parentheses in (18), can be attributed principally

to a slightly different phase curvature of the beams. This is due to the fact that the curvature of the idler beam depends upon both the seed and the pump, following (10). The similarity between the far-field variances of the seed and idler beams partially confirm (14).

As an additional test of the coherence properties, in a second set of measurements we have analysed the visibility of the interference fringes in a double-slit experiment as a function of the transverse coherence length. The double-slit aperture was imprinted over the TGSM images on the SLM, and this profile was imaged onto the crystal plane. The CCD camera was again placed in the far-field of the double-slit, as shown in Figure 1. The resulting interference fringes were accumulated over 20 s (all 300 TGSM frames). The visibility \mathcal{V} was calculated by curve fitting the fringe patterns to a typical interference function of the form $I(y) = A \exp(-y^2/B^2)[1 + \mathcal{V} \cos((y - y_0)/C)]$. Figure 3 shows the visibility as a function of $1/\delta_s^2$ for the seed and idler beams. In both cases, the visibility decays exponentially with the inverse square coherence length. The maximum value for large δ_s is around 0.8, due to the finite transverse coherence of the seed laser beam incident on the SLM. For small δ_s , the minimum visibility is around 0.3, due to a small background of coherent laser light that is produced

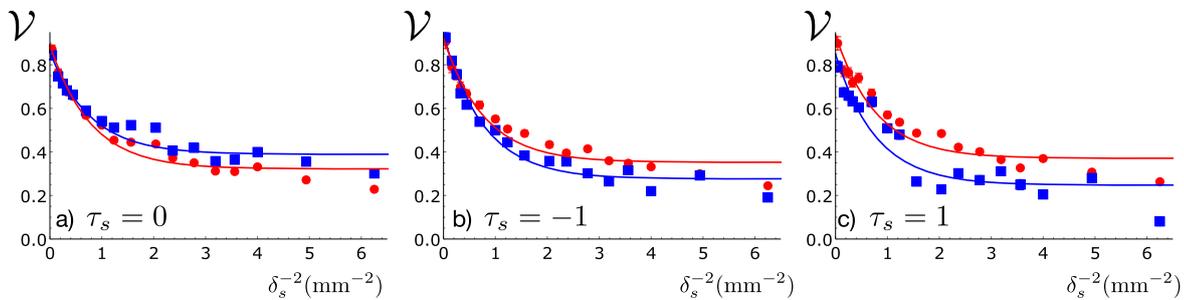


Figure 3: Visibility in Young double-slit interference as a function of $1/\delta_s^2$ for both the seed and the idler beam. The normalized twist phases are (a) $\tau_s = 0$, (b) $\tau_s = -1$ and (c) $\tau_s = 1$. The visibility serves as an indicator of transverse coherence. Thus, these results show that the transverse coherence of the idler beam follows the seed. Error bars are smaller than the symbols.

by the SLM. To take into account these imperfections, we fit the data using the function $\mathcal{V} = \mathcal{V}_0 + D \exp(-2d^2/\delta_s^2)$, with $2d = 0.8$ mm the center-to-center distance of two slits. These results demonstrate that the transverse coherence of the idler follows that of the signal, in this particular case where the pump beam is a fully coherent Gaussian beam.

4.2 Transfer and conjugation of twist phase

The results presented in Figure 2 confirm the presence of twist phase in the seed and idler beams given in Eq. (14). What remains is to observe the phase conjugation relation between the TGSM seed and idler beams. To do so, we exploit the fact that the 2D double-slit interference pattern is rotated by an amount proportional to the twist phase, with far-field intensity pattern give by:

$$I(\mathbf{r}) \approx \left[1 + e^{-\frac{2d^2}{\delta^2}} \cos \left\{ 2dk \left(\frac{y}{f} - \mu x \right) \right\} \right], \quad (19)$$

where $f = 400$ mm is the focal length of the far-field optical system (lenses L2 and L3), and $2d$ is the distance between

the centers of the slits. Thus, the central interference maximum lies along $y = (f\mu)x$. We can thus use the interference patterns to estimate not only the amplitude but also the sign of the twist phase.

Figure 4 shows interference patterns for both seed and idler fields for normalized twist phase of the seed beam $\tau_s = 0, \pm 1$, and two values of the transverse coherence. For a qualitative demonstration we choose two coherence length values that, combined between visibility and rotation angle, best illustrate the rotation. For $\tau_s = 1$, we obtained the results presented in Figure 4a and d for the seed and idler beams, respectively. In these cases, as in Figure 4c and f with $\tau_s = -1$, for $\delta_s = 0.56$ mm, we can observe the seed and idler beams rotate in opposite directions. For $\tau_s = 0$, as in Figure 4b and e, we observe very little rotation of the images, as expected. We include the results for $\delta_s = 5.0$ mm, which show only very small tilt, to further demonstrate that observed rotation is a result of the twist phase ($\mu \propto 1/\delta^2$), and not other aspects of the beam.

To quantify the rotations, we use a Radon transform of the images to identify the rotation angle as the one which maximizes the marginal visibility of the interference

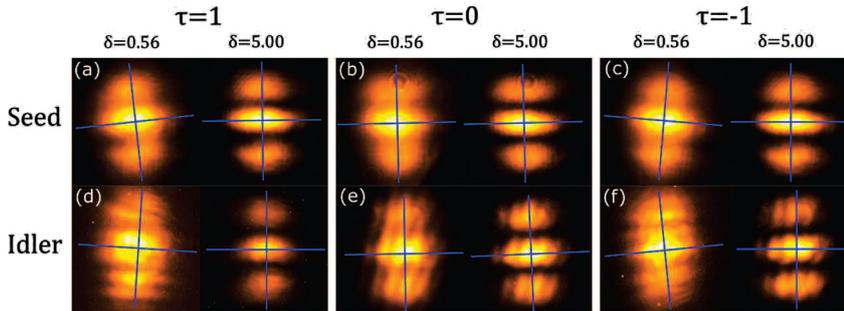


Figure 4: Interference intensity patterns of double-slits compared between two different transverse coherence lengths, $\delta = 0.56$ mm (left in each panel) and $\delta = 5.00$ mm (right in each panel). The coordinate systems represent the rotation angles given in the text. The seed beam (a) undergoes a counterclockwise rotation with normalized twist phase $\tau_s = 1$, (b) does not rotate when $\tau_s = 0$, and (c) undergoes a clockwise rotation with $\tau_s = -1$. The idler beam, as the phase conjugate of the seed, rotates in the opposite direction. We see in (d) a clockwise rotation when $\tau_s = 1$, (e) close to zero rotation for $\tau_s = 0$, and in (f) a counterclockwise rotation when $\tau_s = -1$.

Table 1: Twist phase of signal and idler beams obtained from the interference patterns shown in Figure 4.

Theory ($\times 10^3$ mm $^{-1}$)	$\mu_s = 0.40$	$\mu_s = 0$	$\mu_s = -0.40$
μ_s ($\times 10^3$ mm $^{-1}$)	0.26 ± 0.04	-0.02 ± 0.04	-0.13 ± 0.04
μ_i ($\times 10^3$ mm $^{-1}$)	-0.15 ± 0.04	-0.04 ± 0.04	0.22 ± 0.04
Theory ($\times 10^3$ mm $^{-1}$)	$\mu_s = 0.005$	$\mu_s = 0$	$\mu_s = -0.005$
μ_s ($\times 10^3$ mm $^{-1}$)	0.04 ± 0.04	0.00 ± 0.04	0.04 ± 0.04
μ_i ($\times 10^3$ mm $^{-1}$)	0.02 ± 0.04	0.02 ± 0.04	-0.02 ± 0.04

The top (bottom) three rows correspond to coherence length $\delta_s = 0.56$ mm ($\delta_s = 5.0$ mm). The expected twist phase for $\delta_s = 5.0$ mm is smaller than our experimental precision. The idler beam takes on a twist phase that is consistent with the conjugation of the seed twist phase.

pattern. We obtained data given in Table 1, where we calculate $\mu = \theta_\mu/f$ after converting θ_μ to radians, for both seed and idler. Also given is the theoretical value of the twist phase for the seed beam. We can see that the numerical values obtained are consistent with the TGSM idler beam being the phase conjugate of the TGSM seed beam.

5 Conclusions

We have studied StimPDC in the case where the pump and seed beams have partial transverse coherence. In particular, when the pump and seed beams are described by the TGSM, we have shown analytically that the stimulated idler beam is also a TGSM beam, with properties determined by those of the pump and seed. These results were investigated experimentally using a pump beam with large transverse coherence. In this case, we experimentally confirm our theoretical results, showing that the coherence properties of the idler are determined by the seed beam alone. We have also demonstrated that the TGSM idler beam is the phase conjugate of the TGSM seed beam. These results open up the possibility of using stimulated down-conversion in schemes for correction of distortions in the wavefront of partially coherent beams. Our results motivate the use of the GSM and TGSM fields in communication protocols or imaging scenarios where light beams propagate through disturbing media. An interesting avenue for future research concerns polarization-induced spatial incoherence, and/or partial polarization, which can be addressed using a two-crystal source as in Refs. [34, 36]. We note that the control of the degree of polarization might allow for the generation of TGSM-like beams without the use of movie-masks in an SLM.

Author contribution: All the authors have accepted responsibility for the entire content of this submitted manuscript and approved submission.

Research funding: This work was funded by the Chilean agencies Fondo Nacional de Desarrollo Científico y Tecnológico (FONDECYT – DOI 501100002850) (1190901, 1190933, 1200266); National Agency of Research and Development (ANID) Millennium Science Initiative Program—ICN17-012; the Brazilian agencies Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES – DOI 501100002322), Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Santa Catarina (FAPESC – DOI 501100005667), Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq – DOI 501100003593), Instituto Nacional de Ciência e Tecnologia de Informação Quântica (INCT-IQ 465469/2014-0); the National Research Foundations of South Africa.

Conflict of interest statement: The authors declare no conflicts of interest regarding this article.

References

- [1] R. Simon and N. Mukunda, “Twisted Gaussian Schell-model beams,” *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 10, p. 95, 1993.
- [2] R. Simon and N. Mukunda, “Twist phase in Gaussian-beam optics,” *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 15, p. 2373, 1998.
- [3] F. Wang and Y. Cai, “Second-order statistics of a twisted Gaussian Schell-model beam in turbulent atmosphere,” *Opt. Express*, vol. 18, p. 24661, 2010.
- [4] M. Zhou, W. Fan, and G. Wu, “Evolution properties of the orbital angular momentum spectrum of twisted Gaussian Schell-model beams in turbulent atmosphere,” *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 37, p. 142, 2020.
- [5] Y. Liu, X. Liu, L. Liu, F. Wang, Y. Zhang, and Y. Cai, “Ghost imaging with a partially coherent beam carrying twist phase in a turbulent ocean: a numerical approach,” *Appl. Sci.*, vol. 9, 2019, Art no. 3023.
- [6] G. Lima, F. Torres-Ruiz, L. Neves, A. Delgado, C. Saavedra, and S. Pádua, “Generating mixtures of spatial qubits,” *Opt. Commun.*, vol. 281, p. 5058, 2008.
- [7] A. K. Jha and R. W. Boyd, “Spatial two-photon coherence of the entangled field produced by down-conversion using a partially spatially coherent pump beam,” *Phys. Rev. A*, vol. 81, p. 013828, 2010.
- [8] M. E. Olvera and S. Franke-Arnold, arXiv: Quantum Physics, 2015.
- [9] Y. Ismail, S. Joshi, and F. Petruccione, “Polarization-entangled photon generation using partial spatially coherent pump beam,” *Sci. Rep.*, vol. 7, p. 12091, 2017.
- [10] E. Giese, R. Fickler, W. Zhang, L. Chen, and R. W. Boyd, “Influence of pump coherence on the quantum properties of spontaneous parametric down-conversion,” *Phys. Scripta*, vol. 93, p. 084001, 2018.
- [11] H. Defienne and S. Gigan, “Spatially entangled photon-pair generation using a partial spatially coherent pump beam,” *Phys. Rev. A*, vol. 99, p. 053831, 2019.
- [12] W. Zhang, R. Fickler, E. Giese, L. Chen, and R. W. Boyd, “Influence of pump coherence on the generation of position-momentum entanglement in optical parametric down-conversion,” *Opt. Express*, vol. 27, p. 20745, 2019.
- [13] S. Joshi and B. Kanseri, “Spatial coherence properties of down converted biphoton field generated using partially coherent pump beam,” *Optik*, vol. 217, p. 164941, 2020.
- [14] B. Kanseri and P. Sharma, “Effect of partially coherent pump on the spatial and spectral profiles of down-converted photons,” *J. Opt. Soc. Am. B*, vol. 37, p. 505, 2020.
- [15] S. P. Phehlukwayo, M. L. Umuhire, Y. Ismail, S. Joshi, and F. Petruccione, “Influence of coincidence detection of a biphoton state through free-space atmospheric turbulence using a partially spatially coherent pump,” *Phys. Rev. A*, vol. 102, p. 033732, 2020.
- [16] L. Hutter, G. Lima, and S. P. Walborn, “Boosting entanglement generation in down-conversion with incoherent illumination,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 125, p. 193602, 2020.

- [17] L. Hutter, E. S. Gómez, G. Lima, and S. P. Walborn, “Partially coherent spontaneous parametric downconversion: twisted Gaussian biphotons,” *AVS Quantum Sci.*, vol. 3, p. 031401, 2021.
- [18] L. Wang, X. Zou, and L. Mandel, “Observation of induced coherence in two-photon downconversion,” *J. Opt. Soc. Am. B*, vol. 8, p. 978, 1991.
- [19] P. H. S. Souto Ribeiro, S. Pádua, and C. H. Monken, “Image and coherence transfer in the stimulated down-conversion process,” *Phys. Rev. A*, vol. 60, p. 5074, 1999.
- [20] P. H. Souto Ribeiro, D. P. Caetano, M. P. Almeida, J. A. Huguenin, B. Coutinho dos Santos, and A. Z. Khoury, “Observation of image transfer and phase conjugation in stimulated down-conversion,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 87, p. 133602, 2001.
- [21] D. P. Caetano, M. P. Almeida, P. H. Souto Ribeiro, J. A. O. Huguenin, B. Coutinho dos Santos, and A. Z. Khoury, “Conservation of orbital angular momentum in stimulated down-conversion,” *Phys. Rev. A*, vol. 66, p. 041801, 2002.
- [22] A. G. de Oliveira, M. F. Arruda, W. C. Soares, et al., “Phase conjugation and mode conversion in stimulated parametric down-conversion with orbital angular momentum: a geometrical interpretation,” *Braz. J. Phys.*, vol. 49, p. 10, 2019.
- [23] B. Y. Zel'Dovich, V. Popovichev, V. Ragul'Skii, and F. Faizullof, *Landmark Papers on Photorefractive Nonlinear Optics*, Singapore, World Scientific, 1995, pp. 303–306.
- [24] R. McFarlane and D. Steel, “Laser oscillator using resonator with self-pumped phase-conjugate mirror,” *Opt. Lett.*, vol. 8, p. 208, 1983.
- [25] M. Gower, “Krf laser amplifier with phase-conjugate Brillouin retroreflectors,” *Opt. Lett.*, vol. 7, p. 423, 1982.
- [26] M. D. Levenson, “High-resolution imaging by wave-front conjugation,” *Opt. Lett.*, vol. 5, p. 182, 1980.
- [27] K. R. MacDonald, W. R. Tompkin, and R. W. Boyd, “Passive one-way aberration correction using four-wave mixing,” *Opt. Lett.*, vol. 13, p. 485, 1988.
- [28] R. W. Boyd, K. R. MacDonald, and M. S. Malcuit, *Laser Wavefront Control*, vol. 1000, International Society for Optics and Photonics, 1989, pp. 69–81.
- [29] S. Set, S. Yamashita, M. Ibsen, et al., “Ultra-high bit rate optical phase conjugation/wavelength conversion in DSF and SOA with novel configuration incorporating inline fibre DFB lasers,” *Electron. Lett.*, vol. 34, p. 1681, 1998.
- [30] A. Zavatta, S. Viciani, and M. Bellini, “Quantum-to-classical transition with single-photon-added coherent states of light,” *Science*, vol. 306, p. 660, 2004.
- [31] A. Kolkiran and G. S. Agarwal, “Quantum interferometry using coherent beam stimulated parametric down-conversion,” *Opt. Express*, vol. 16, p. 6479, 2008.
- [32] M. Barbieri, N. Spagnolo, M. G. Genoni, et al., “Non-Gaussianity of quantum states: an experimental test on single-photon-added coherent states,” *Phys. Rev. A*, vol. 82, p. 063833, 2010.
- [33] T. Kiesel, W. Vogel, M. Bellini, and A. Zavatta, “Nonclassicality quasiprobability of single-photon-added thermal states,” *Phys. Rev. A*, vol. 83, p. 032116, 2011.
- [34] A. G. de Oliveira, M. F. Z. Arruda, W. C. Soares, et al., “Real-time phase conjugation of vector vortex beams,” *ACS Photonics*, vol. 7, p. 249, 2020.
- [35] A. de Oliveira, N. Rubiano da Silva, R. Medeiros de Araújo, P. Souto Ribeiro, and S. Walborn, “Quantum optical description of phase conjugation of vector vortex beams in stimulated parametric down-conversion,” *Phys. Rev. Appl.*, vol. 14, p. 024048, 2020.
- [36] N. Rubiano da Silva, A. de Oliveira, M. Arruda, et al., “Stimulated parametric down-conversion with vector vortex beams,” *Phys. Rev. Appl.*, vol. 15, p. 024039, 2021.
- [37] L. A. Rozema, C. Wang, D. H. Mahler, et al., “Characterizing an entangled-photon source with classical detectors and measurements,” *Optica*, vol. 2, p. 430, 2015.
- [38] L. Mandel and E. Wolf, *Optical Coherence and Quantum Optics*, New York, Cambridge University Press, 1995.
- [39] R. Simon, K. Sundar, and N. Mukunda, “Twisted Gaussian Schell-model beams I Symmetry structure and normal-mode spectrum,” *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 10, p. 2008, 1993.
- [40] K. Sundar, R. Simon, and N. Mukunda, “Twisted Gaussian Schell-model beams II Spectrum analysis and propagation characteristics,” *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 10, p. 2017, 1993.
- [41] R. Wang, S. Zhu, Y. Chen, H. Huang, Z. Li, and Y. Cai, “Experimental synthesis of partially coherent sources,” *Opt. Lett.*, vol. 45, p. 1874, 2020.
- [42] C. Tian, S. Zhu, H. Huang, Y. Cai, and Z. Li, “Customizing twisted Schell-model beams,” *Opt. Lett.*, vol. 45, p. 5880, 2020.
- [43] H. Wang, X. Peng, H. Zhang, et al., “Experimental synthesis of partially coherent beam with controllable twist phase and measuring its orbital angular momentum,” *Nanophotonics*, 2021. <https://doi.org/10.1515/nanoph-2021-0432>.
- [44] A. T. Friberg, E. Tervonen, and J. Turunen, “Interpretation and experimental demonstration of twisted Gaussian Schell-model beams,” *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 11, p. 1818, 1994.

Partial Coherence and Coherence Length in Stimulated Parametric Down-Conversion

G.H. dos Santos^{1,*}, R.C. Souza Pimenta¹, R.M. Gomes², S.P. Walborn^{3,4,†} and P.H. Souto Ribeiro^{1,‡}

¹*Departamento de Física, Universidade Federal de Santa Catarina, CEP 88040-900, Florianópolis, Santa Catarina, Brazil*

²*Instituto de Física, Universidade Federal de Goiás, CEP 74690-900, Goiânia, Goiás, Brazil*

³*Departamento de Física, Universidad de Concepción, 160-C Concepción, Chile*

⁴*Millennium Institute for Research in Optics, Universidad de Concepción, 160-C Concepción, Chile*

 (Received 5 April 2023; revised 28 June 2023; accepted 21 July 2023; published 3 August 2023)

In parametric down-conversion, a nonlinear crystal is pumped by a laser and spontaneous emission takes place in signal and idler modes according to the phase-matching conditions. A seed laser can stimulate the emission in the signal beam if there is mode overlap between them. This also enhances the emission in the idler beam, affecting its coherence properties. While the degree of coherence of the idler field as a function of the seed power has already been studied, the transverse coherence length has not yet been properly investigated. The transverse coherence length is a key parameter of optical beams that determines the beam divergence, for example. Here, we present a theoretical and experimental investigation of the transverse coherence length in stimulated down-conversion. In addition, we make a connection between stimulated down-conversion and partially coherent sources like the Gaussian-Schell model beams, and show that in general the idler field cannot be described with this model.

DOI: [10.1103/PhysRevApplied.20.024007](https://doi.org/10.1103/PhysRevApplied.20.024007)

I. INTRODUCTION

The coherence of a light field is a fundamental property that affects all degrees of freedom. In several circumstances it is possible to treat temporal coherence and transverse spatial coherence as independent properties, and here we focus on the spatial coherence. Most natural light sources are spatially incoherent in the source, but becomes partially coherent with propagation [1]. Therefore, partial coherence is a relevant issue in most applications of natural light. A particularly relevant case of partially coherent light is the so-called Gaussian-Schell model beam (GSM) [2,3], which finds applications in imaging, optical communication, light scattering, nonlinear optics, and others [4–11].

On the other hand, laser fields are nearly perfectly coherent. In this case the light can be described by deterministic electric field functions, while the partially coherent ones require other mathematical tools that include stochastic fluctuations, as in the GSM model. We analyze here a different kind of partially coherent light source: stimulated parametric down-conversion (StimPDC). In this nonlinear

process, spontaneously emitted light is mixed with stimulated emission in the so-called idler mode. The degree of coherence of the light emitted depends on the stimulating power [12] and so it is expected that the coherence properties will also depend on this parameter. We present here a theoretical and experimental investigation of the coherence length of the light produced in StimPDC. This coherence property has not yet been investigated previously.

The main motivation for this study is concerned with applications of partially coherent light. While GSM and TGSM beams are suited to most of the applications mentioned above, they are not easily prepared in the laboratory, having control of the key parameters like the transverse coherence length. The present investigation contributes to the search for alternative methods for preparing partially coherent beams with controlled parameters. In addition, we compare the StimPDC partially coherent beam with GSM beams, showing that in some cases they are equivalent. Therefore, StimPDC light is presented as a reliable source of partially coherent light.

II. THEORY

The mutual coherence of the idler field in StimPDC with a coherent seed beam was studied in Ref. [12], where it was

*fisica.gu@gmail.com

†swalborn@udec.cl

‡p.h.s.ribeiro@ufsc.br

shown that

$$\mu_i = \frac{\mu_{sp}I_{sp} + \mu_c I_c}{I_{sp} + I_c}, \quad (1)$$

where μ_i is the normalized mutual coherence between fields at points 1 and 2 in a plane transverse to the propagation direction of the idler beam (the position dependence is not included explicitly in μ for brevity). For StimPDC the mutual coherence is composed of two terms. The first, which we denote as μ_{sp} , is the mutual coherence between fields at the same points due to the contribution of the spontaneously emitted light, and μ_c is the contribution due to the coherent stimulation by the seed beam and is ideally unit. The parameters I_{sp} and I_c describe the intensities of the spontaneous emission and stimulated emission, respectively.

The normalized mutual coherence μ can be calculated using the cross-spectral density (CSD) $W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$:

$$\mu \equiv \mu(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)}{\sqrt{W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1)W(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2)}}. \quad (2)$$

As mentioned above, the output idler beam has components originating from the spontaneous and stimulated emission at the source. It has been shown recently that, in typical experimental situations, both of these contributions can be described using the well-known GSM beams, which have a CSD given by

$$W_{\text{GSM}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = Ie^{-\frac{r^2+r'^2}{4w^2}} e^{-\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')^2}{2\delta^2}} e^{-ik\frac{(r^2-r'^2)}{2R}}, \quad (3)$$

where I is the maximum beam intensity, w is the beam waist, δ the transverse coherence length, and R the phase curvature.

In the case of the spontaneous emission term and nearly degenerate signal and idler fields, Hutter *et al.* [8,9] showed that the idler beam produced in SPDC with a GSM pump beam is described by a GSM beam. Thus, we can define the spontaneous (“sp”) component with CSD $W_{sp} = W_{\text{GSM}}$ for some specific parameters I, w, δ, R . The stimulated (“stim”) component, on the other hand, has been studied in Ref. [10]. Considering both the seed and pump as GSM beams, the CSD of the stimulated component can be written as $W_{stim} = W_{\text{GSM}}$ for some intensity depending also on nonlinear coefficients of the crystal, and the following idler beam parameters given as functions of the pump and seed beam parameters:

$$\frac{1}{w_{stim}^2} = \frac{1}{w_{seed}^2} + \frac{1}{w_{pump}^2}, \quad (4)$$

transverse coherence length

$$\frac{1}{\delta_{stim}^2} = \frac{1}{\delta_{seed}^2} + \frac{1}{\delta_{pump}^2}, \quad (5)$$

phase curvature

$$\frac{k_i}{R_{stim}} = \frac{k_{pump}}{R_{pump}} - \frac{k_{seed}}{R_{seed}}, \quad (6)$$

where stim, seed, pump stand for stimulated idler, seed, and pump, respectively.

Including the contribution coming from both the spontaneous and stimulated components in StimPDC, the CSD for the idler field becomes

$$W_i(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = W_{stim}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + W_{sp}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2). \quad (7)$$

Both W_{stim} and W_{sp} can be GSM type, depending on the pump and seed CSD and relative intensities. Therefore, W_i will be GSM type in several practical conditions. However, in general it may not be a GSM beam.

Dividing Eq. (7) by the total intensity $I_i = I_{stim} + I_{sp}$ leads to a relation for the normalized mutual coherence of the total idler field:

$$\mu_i = (1 - \beta)\mu_{sp} + \beta\mu_{stim}, \quad (8)$$

where $\beta = I_{stim}/(I_{sp} + I_{stim})$.

We emphasize that the coherence μ_{stim} depends on the pump and seed beams' coherence properties and it may be smaller than one, meaning that the stimulated contribution is partially coherent in Eq. (8). However, let us consider the special case where pump and seed beams are pure Gaussian beams (not partially coherent beams), so that $\delta_{pump} = \delta_{seed} \rightarrow \infty$, giving a stimulated component, which is completely coherent $\delta_{stim} \rightarrow \delta_c = \infty$. In this case, the normalized mutual coherence from Eq. (8) leads directly to Eq. (1) with $\mu_{stim} = \mu_c$, as observed years ago [12]. For the GSM fields, the normalized coherence is a function of the relative distance $d = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ between points 1 and 2. However, if we assume that the stimulated component is coherent, $\mu_{stim} = \mu_c$ is constant, ideally unity and independent of d . Thus, we can rewrite the mutual coherence of StimPDC as

$$\mu_i(d) = (1 - \beta)\mu_{sp}(d) + \beta\mu_c, \quad (9)$$

where now $\beta = I_c/(I_{sp} + I_c)$. We are interested in this special case, which we will investigate experimentally. Typically, the transverse coherence length l_t is defined as the value of d for which the absolute value of the normalized mutual coherence is $|\mu_i(d = l_t)| = \epsilon$, where ϵ is a small arbitrary constant.

The coherence length can be obtained by solving the following relation for l_t and some specific function $\mu_{sp}(x)$:

$$|\mu_i(l_t)| = |(1 - \beta)\mu_{sp}(l_t) + \beta\mu_c| = \epsilon. \quad (10)$$

Before we further discuss the characterization of the coherence length, let us present an experiment and results investigating the mutual coherence of StimPDC.

III. EXPERIMENT

The experimental setup is sketched in Fig. 1. A 405-nm diode laser with beam waist equal to $900\ \mu\text{m}$ is used to pump a 2-mm-long β -barium-borate (BBO) nonlinear crystal (NLC), where parametric down-conversion takes place. The pump beam is linearly polarized along the horizontal direction and the phase matching is type I. A second diode laser with beam waist of $500\ \mu\text{m}$, at 780-nm wavelength, called *seed* beam, is aligned with one of the down-converted modes, say the signal beam, and its emission is stimulated. A scheme using a variable neutral density filter (VNDF), a beam splitter (BS1), and a power meter is used to control the intensity of the seed beam. The lenses L1 and L2 are used to control the size of the beam on the nonlinear crystal. The corresponding idler beam at 840 nm is indirectly stimulated, due to the photon-pair emission in the process. In the idler beam, we select an observation plane located 8-cm away from the crystal. Lens L3 images the observation plane onto the output of the Michelson interferometer, which is analyzed with the CMOS camera. The strategy to measure the transverse coherence length consists in misaligning the interfering beams from the interferometer shifting one path by a tilt in the mirror M3 so that different points in the wave front are superposed with different separations as illustrated in Fig. 1.

IV. RESULTS AND DISCUSSION OF COHERENCE LENGTH

Figure 2 shows plots of the mutual coherence, identified as the visibility of interference patterns for different displacements d . They were obtained by varying the separation between the interfering beams at the output of the Michelson interferometer. The separations are on the order of tens of microns, and are controlled by tilting one

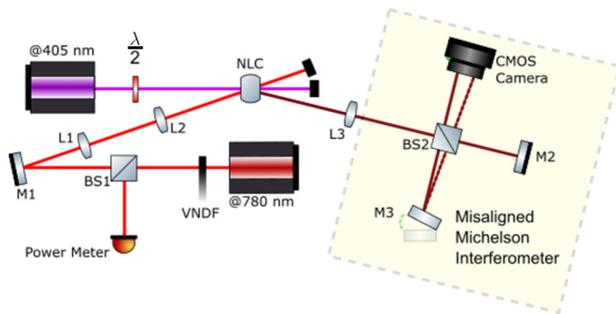


FIG. 1. Experimental setup for measuring the coherence length StimPDC light. @405 is a blue laser at 405 nm, @780 is a red laser at 780 nm, $\frac{\lambda}{2}$ is a half-wave plate, VNDF is a variable neutral density filter, NLC is a nonlinear crystal, M1, M2, and M3 are mirrors, BS1 and BS2 are beam splitters, L1, L2, and L3 are lenses. A CMOS camera measure the interference pattern of the idler beam in a controlled misaligned Michelson interferometer.

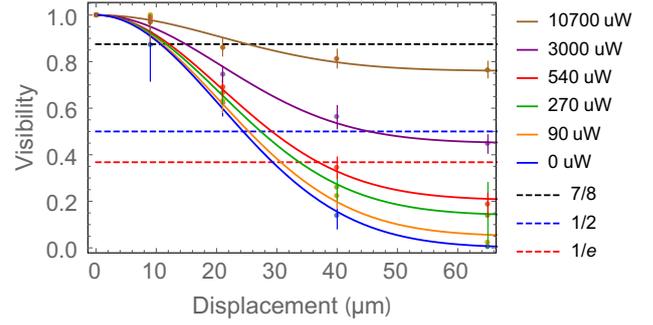


FIG. 2. Mutual coherence as characterized by the visibility of the interference pattern as a function of beam displacement d in a misaligned Michelson interferometer.

of the beams and measuring the displacement between the peaks of the two interfering distributions taken separately. The interference patterns are photographed with a CMOS camera. Measurements are performed for several different separations and several different ratios between the spontaneously emitted and the stimulated emitted light contributions. Qualitatively, we observe that the visibilities of the interference patterns decrease with increasing separation between interfering beams, as expected. Moreover, the degree of coherence for displacement $d > 0$ always increases when the seed power increases.

Using Eq. (2) and the GSM for the spontaneous contribution, we can calculate $\mu_{sp}(d) = e^{-\frac{d^2}{2\delta_{sp}^2}}$. The normalized mutual coherence of the idler field is then

$$\mu_i(d) = (1 - \beta) e^{-\frac{(r-r')^2}{2\delta_{sp}^2}} + \beta. \quad (11)$$

The absolute values in Eq. (10) were dropped, because all quantities are positive. The data points were fitted to Eq. (11), with β as a free parameter, and maintaining δ_{sp}^2 fixed. With $\beta = 0$ we found $\delta_{sp} = 20.72 \pm 0.59\ \mu\text{m}$, and used this value for all fittings, so that only β was a free parameter. The results are shown in Table I. As seen in Fig. 2 and also in Eq. (11), one signature of the light emitted in the process is that the degree of coherence does not always decrease tending to zero. The minimum value of the degree of coherence is given by β , the normalized intensity of the stimulated component, since the stimulated light is nearly as coherent as the pump and seed. Therefore, if one characterizes coherence length using a minimum value of the mutual coherence as in Eq. (10), there may be partially coherent beams (those with $\beta > \epsilon$) with infinite coherence length, in principle.

At the same time, the choice of parameter ϵ is arbitrary. To have some operational meaning, it should correspond to the coherence requirements for a particular application. For example, in quantum information, certain conclusions about the quantum nature of the source can only be reached

TABLE I. Normalized intensity of the stimulated component and ϵ -coherence lengths obtained for different seed beam intensities.

I_{seed} (μW)	β (%)	$\epsilon = 1/e$ (μm)	$\epsilon = 1/2$ (μm)	$\epsilon = 7/8$ (μm)
0	0	29.30	24.40	10.71
90	4.9 ± 3.5	30.64	25.32	11.00
270	13.9 ± 2.7	33.74	27.32	11.61
540	20.5 ± 2.5	36.88	29.17	12.12
3000	44.9 ± 1.8	∞	45.30	14.87
10 700	76.0 ± 1.7	∞	∞	25.12

for a minimum value of the visibility [13–15]. Thus, in order to characterize the coherence length of a StimPDC light source, we introduce the term “ ϵ -coherence length,” where ϵ is the minimum required interference visibility (mutual coherence) and can in principle take on values between zero and one. In Fig. 2 thus plot the cutoff for the $1/e$ -coherence length, $1/2$ -coherence length, and $7/8$ coherence length. The coherence lengths obtained are summarized in Table I.

We might look to other parameters in Eq. (11) to characterize the coherence length of a StimPDC light source. The width of the Gaussian contribution δ_{sp} is due to the spontaneous component alone, being the same for all values of β , and thus not a good parameter (except perhaps when β is small, where the usual definition works fine). The parameter β gives the minimum coherence, and does not reveal information about the distance d at which it can be reached.

V. CONCLUSION

We have studied the transverse coherence length of the idler beam in StimPDC, taking into account spontaneous and stimulated emission of light. Our results demonstrate that StimPDC is a reliable source of partially coherent light with controllable coherence length. We showed theoretically that the idler beam is a weighted combination of two GSM beams, and thus is not a GSM beam in the general case. This leads to a normalized mutual coherence function, that is not a simple Gaussian distribution, which can render the usual definition of the coherence length meaningless in some cases. We note that other experiments have shown nontrivial and even nonmonotonic coherence functions [16,17]. Experimentally, we considered the case where the pump and seed laser beams have infinite coherence length. This configuration allows measuring and characterizing the effective coherence length of the idler as a function of the contributions coming from the spontaneously emitted component and the normalized intensity of the stimulated emitted one. We have evaluated the visibility pattern as a function of the seed beam

intensity, obtained in a Michelson interferometer, in which one path is displaced horizontally by a controlled length. We introduce the notion of “ ϵ -coherence length,” defined as the largest distance between two interfering points of the field for which the visibility is above ϵ , and use it to characterize the idler field. Our work contributes to the development of alternative approaches for synthesizing partially coherent optical beams and introduces the notion of coherence length in nontrivial field distributions, according to its practical application.

ACKNOWLEDGMENTS

This work was funded by the Brazilian agencies Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq - DOI 501100003593), Instituto Nacional de Ciência e Tecnologia de Informação Quântica (INCT-IQ 465469/2014-0), Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES DOI), Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Santa Catarina (FAPESC - DOI 501100005667), Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Goiás (FAPEG - DOI 501100005285), and the Chilean agencies Fondo Nacional de Desarrollo Científico y Tecnológico (FONDECYT - DOI 501100002850, regular project 1200266); National Agency of Research and Development (ANID), and Millennium Science Initiative Program–ICN17-012.

- [1] Max Born, Emil Wolf, A. B. Bhatia, P. C. Clemmow, D. Gabor, A. R. Stokes, A. M. Taylor, P. A. Wayman, and W. L. Wilcock, *Principles of Optics: Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light* (Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1999), 7th ed.
- [2] Allan Carter Schell, The Multiple Plate Antenna. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, 1956.
- [3] Ari T. Friberg, Eero Tervonen, and Jari Turunen, Interpretation and experimental demonstration of twisted Gaussian Schell-model beams, *J. Opt. Soc. Am. A* **11**, 1818 (1994).
- [4] Jing Ma, Jiajie Wu, Liying Tan, and Siyuan Yu, Polarization properties of Gaussian–Schell model beams propagating in a space-to-ground optical communication downlink, *Appl. Opt.* **56**, 1781 (2017).
- [5] Y. Ismail, S. Joshi, and F. Petruccione, Polarization-entangled photon generation using partial spatially coherent pump beam, *Sci. Rep.* **7**, 12091 (2017).
- [6] Wuhong Zhang, Robert Fickler, Enno Giese, Lixiang Chen, and Robert W. Boyd, Influence of pump coherence on the generation of position-momentum entanglement in optical parametric down-conversion, *Opt. Express* **27**, 20745 (2019).
- [7] Samukelisiwe Purity Phehlukwayo, Marie Louise Umuhire, Yaseera Ismail, Stuti Joshi, and Francesco Petruccione, Influence of coincidence detection of a biphoton state through free-space atmospheric turbulence using a partially spatially coherent pump, *Phys. Rev. A* **102**, 033732 (2020).

- [8] Lucas Hutter, G. Lima, and S. P. Walborn, Boosting Entanglement Generation in Down-Conversion with Incoherent Illumination, *Phys. Rev. Lett.* **125**, 193602 (2020).
- [9] Lucas Hutter, E. S. Gomez, G. Lima, and S. P. Walborn, Partially coherent spontaneous parametric downconversion: Twisted Gaussian biphotons, *AVS Quantum Sci.* **3**, 031401 (2021).
- [10] Gustavo H. dos Santos, Andre G. de Oliveira, Nara Rubiano da Silva, Gustavo Cañas, Esteban S. Gómez, Stuti Joshi, Yaseera Ismail, Paulo H. Souto Ribeiro, and Stephen Patrick Walborn, Phase conjugation of twisted Gaussian Schell model beams in stimulated down-conversion, *Nanophotonics* **11**, 763 (2022).
- [11] Yahong Chen, Fei Wang, and Yangjian Cai, Partially coherent light beam shaping via complex spatial coherence structure engineering, *Adv. Phys.: X* **7**, 2009742 (2022).
- [12] P. H. Souto Ribeiro, S. Pádua, J. C. Machado da Silva, and G. A. Barbosa, Control of Young's fringes visibility by stimulated down-conversion, *Phys. Rev. A* **51**, 1631 (1995).
- [13] C. V. S. Borges, M. Hor-Meyll, J. A. O. Huguenin, and A. Z. Khoury, Bell-like inequality for the spin-orbit separability of a laser beam, *Phys. Rev. A* **82**, 033833 (2010).
- [14] M. A. D. Carvalho, J. Ferraz, G. F. Borges, P.-L. de Assis, S. Pádua, and S. P. Walborn, Experimental observation of quantum correlations in modular variables, *Phys. Rev. A* **86**, 032332 (2012).
- [15] Gilberto Borges, Marcos Carvalho, Pierre-Louis de Assis, José Ferraz, Mateus Araújo, Adán Cabello, Marcelo Terra Cunha, and Sebastião Pádua, Quantum contextuality in a Young-type interference experiment, *Phys. Rev. A* **89**, 052106 (2014).
- [16] S. P. Walborn, P. H. Souto Ribeiro, and C. H. Monken, Interference effects induced by non-local spatial filtering, *Opt. Express* **19**, 17308 (2011).
- [17] J. O. de Almeida, S. P. Walborn, P. H. Souto Ribeiro, and M. Hor-Meyll, Fourth-order coherence induced by spatial mode parity selection, *Phys. Rev. A* **86**, 033839 (2012).