João Guilherme Fritsche Colombo

PROPRIEDADES EQUIVALENTES À PROPRIEDADE DO SUPREMO

Brasil

2023

João Guilherme Fritsche Colombo

PROPRIEDADES EQUIVALENTES À PROPRIEDADE DO SUPREMO

Trabalho de Conclusão de Curso submetido como requisito parcial para a obtenção do grau de Bacharel em Matemática.

Universidade Federal de Santa Catarina
Departamento de Matemática
Curso de Graduação em Matemática

Orientador: Prof. Dr. Leandro Batista Morgado

Brasil
2023

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Colombo, João Guilherme Fritsche
Propriedades equivalentes à Propriedade do Supremo / João Guilherme Fritsche Colombo ; orientador, Leandro Batista Morgado, 2023.
69 p.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Graduação em Matemática - Bacharelado, Florianópolis, 2023.

Inclui referências.

1. Matemática - Bacharelado. 2. corpos ordenados. 3. topologia da ordem. 4. séries formais de Laurent. I. Morgado, Leandro Batista. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Graduação em Matemática - Bacharelado. III. Título.

João Guilherme Fritsche Colombo

PROPRIEDADES EQUIVALENTES À PROPRIEDADE DO SUPREMO

"Este Trabalho de Conclusão de Curso foi julgado adequado para a obtenção do título de Bacharel em Matemática, sendo aprovado em sua forma final pelo Curso de Matemática."

Florianópolis, 14 de novembro de 2023.

ICP-Edu
Documento assinado digitalmente
Felipe Lopes Castro
Data: 15/12/2023 16:56:30-0300
CPF: ***.060.710-**
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Prof. Dr. Felipe Lopes Castro
Coordenador do Curso

ICP-Edu
Documento assinado digitalmente
Leandro Batista Morgado
Data: 14/12/2023 12:33:14-0300
CPF: ***.351.519-**
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Prof. Dr. Leandro Batista Morgado
Orientador

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Fábio Junior Margotti
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Dr. Paulinho Demeneghi
Universidade Federal de Santa Catarina

AGRADECIMENTOS

À minha familia. À minha namorada, Blenda. Aos meus amigos do curso, Andrey, Gabriel, Gearlisson, Pedro, Ricardo e Rodrigo. Ao meu orientador, Leandro Batista Morgado e aos membros da banca, Fábio Junior Margotti e Paulinho Demeneghi. Aos professores Alexandre Sousa, Dirceu Bagio, Felipe Lopes Castro, Fernando de Lacerda Mortari, Francisco Caramello, Gilles Gonçalves de Castro, Jáuber Cavalcante de Oliveira, Mario Roldan, Raphael Falcão da Hora e às professoras Marianna Ravara Vago e Silvia Martini de Holanda. À Universidade Federal de Santa Catarina.

RESUMO

Neste trabalho exibimos vários teoremas de Análise na Reta como propriedades equivalentes a Propriedade do Supremo. Inicialmente, definimos a Propriedade Arquimediana que ao longo do trabalho relacionamos com a Propriedade do Supremo. Em seguida, demonstramos diversas equivalências em um corpo ordenado arquimediano como em um caminho fechado de dominós: Propriedade do Corte $\Longrightarrow$ Propriedade do Supremo $\Longrightarrow$ Propriedade do Ínfimo $\Longrightarrow$ Teorema da Sequência Monótona e Limitada $\Longrightarrow$ Teorema de Bolzano-Weierstrass $\Longrightarrow$ Cauchy-completude $\Longrightarrow$ Teste da Comparação Absoluta $\Longrightarrow$ Teste de Dirichlet $\Longrightarrow$ Teste da Série Alternada $\Longrightarrow$ Propriedade dos Intervalos Encaixados $\Longrightarrow$ Conexidade em Espaços Topológicos $\Longrightarrow$ Teorema do Anulamento $\Longrightarrow$ Teorema do Valor Intermediário $\Longrightarrow$ Teorema do Ponto Fixo $\Longrightarrow$ Propriedade do Corte. Depois, demonstramos equivalências que envolvem a noção de compacidade: Propriedade dos Intervalos Encaixados $\Longrightarrow$ Teorema de Heine-Borel $\Longrightarrow$ Teorema do Valor Extremo $\Longrightarrow$ Propriedade do Corte. Além disso, apresentamos uma prova alternativa que permite estender o caminho fechado feito anteriormente: Teorema do Valor Extremo $\Longrightarrow$ Teorema do Anulamento. Finalmente, demonstramos que a Propriedade dos Intervalos Encaixados $\Longrightarrow$ Cauchy-completude e damos um exemplo de corpo ordenado Cauchy-completo não arquimediano, o corpo das séries formais de Laurent.

Palavras-chaves: corpos ordenados; topologia da ordem; séries formais da Laurent.

ABSTRACT

We show many theorems of Real Analysis are equivalent to the Least Upper Bound Property. First, we define the Archimedean Property, which we relate to the Least Upper Bound Property throughout the text. Next, we show many equivalences over an Archimedean ordered field as a closed path of dominoes: Cut Property $\implies$ Least Upper Bound Property $\implies$ Greatest Lower Bound Property $\implies$ Bounded Monotone Sequence Theorem $\implies$ Bolzano-Weierstrass Theorem $\implies$ Cauchy Completeness $\implies$ Absolute Comparison Test $\implies$ Dirichlet Test $\implies$ Alternating Series Test $\implies$ Nested Interval Property $\implies$ Topological Connectedness $\implies$ Intermediate Value Theorem $\implies$ Fixed Point Theorem $\implies$ Cut Property. Then, we show equivalences related to compactness: Nested Interval Property $\implies$ Heine-Borel Theorem $\implies$ Extreme Value Theorem $\implies$ Cut Property. We also give an alternative proof that allow us to extend the closed loop: Extreme Value Theorem $\implies$ Intermediate Value Theorem. Finally, we show that the Nested Interval Property $\implies$ Cauchy Completeness and give an example of a non-Archimedean Cauchy-complete ordered field, the field of formal Laurent series.

Keywords: ordered fields, order topology, formal Laurent series.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

To be is to be perceived. (George Berkeley)

No início do século 19, principalmente com os trabalhos (independentes) de Bernard Bolzano (1781–1848) e Augustin-Louis Cauchy (1789–1857), adquirimos uma definição rigorosa para funções contínuas. Sedimentando ainda mais o Cálculo, em 1854, Bernhard Riemann (1826–1866) formalizou a integral. Finalmente, em 1872, Richard Dedekind (1831–1916) e Georg Cantor (1845–1918) nos deram as duas primeiras construções formais dos números reais. (GOWERS; BARROW-GREEN; LEADER, 2010, cap. II.5)

Juntando e organizando o que foi feito no período descrito acima e restringindo o escopo para funções de uma variável real, obtemos a área da Matemática denominada Análise na Reta. Normalmente, o primeiro tópico em um curso de Análise na Reta é justamente a formalização dos números reais, a última peça do quebra-cabeça que foi a fundamentação do Cálculo. Naturalmente, precisamos distinguir o conjunto dos números reais do conjunto dos números racionais. Para isso, podemos utilizar a Propriedade do Supremo: todo subconjunto não vazio e limitado superiormente admite supremo.

Supondo que no conjunto dos números reais vale tal propriedade e definindo precisamente com épsilons e deltas uma função contínua, conseguimos demonstrar rigorosamente os resultados esperados do Cálculo. Mas a relação entre funções contínuas e conjuntos limitados superiormente não é tão imediata. Entre os dois conceitos estão definições e teoremas a respeito de sequências, séries e noções topológicas. Neste trabalho, com o objetivo de revisitar alguns teoremas de Análise na Reta, vamos exibi-los como propriedades equivalentes à Propriedade do Supremo.

Inicialmente, no próximo capítulo, estabeleceremos as definições básicas de Álgebra e Topologia necessárias para as demonstrações das equivalências. Na Seção 2.1, definiremos anéis e corpos. Na Seção 2.2, definiremos relações de ordem e corpos ordenados. Na Seção 2.3, daremos noções básicas de topologia. Em particular, definiremos a topologia da ordem. Nas seções 2.4, 2.5 e 2.6 definiremos, respectivamente, funções contínuas, sequências e séries em um corpo ordenado qualquer a partir da topologia da ordem.

Depois, no capítulo principal do trabalho, demonstraremos algumas propriedades equivalentes à Propriedade do Supremo. Antes de apresentarmos as equivalências, definiremos, na Seção 3.1, a Propriedade Arquimediana que, ao longo do capítulo, relacionaremos com a Propriedade do Supremo. Na Seção 3.2, demonstraremos diversas equivalências como em um caminho fechado de peças de dominó. Na Seção 3.3, demonstraremos equivalências que envolvem compacidade e estenderemos o caminho fechado da seção anterior. Na Seção 3.4, apresentaremos um exemplo de corpo ordenado não arquimediano Cauchy-completo, a saber, o corpo das séries formais de Laurent.

Para guiar o que está por vir, ilustramos os caminhos das equivalências na Figura 1 na próxima página.

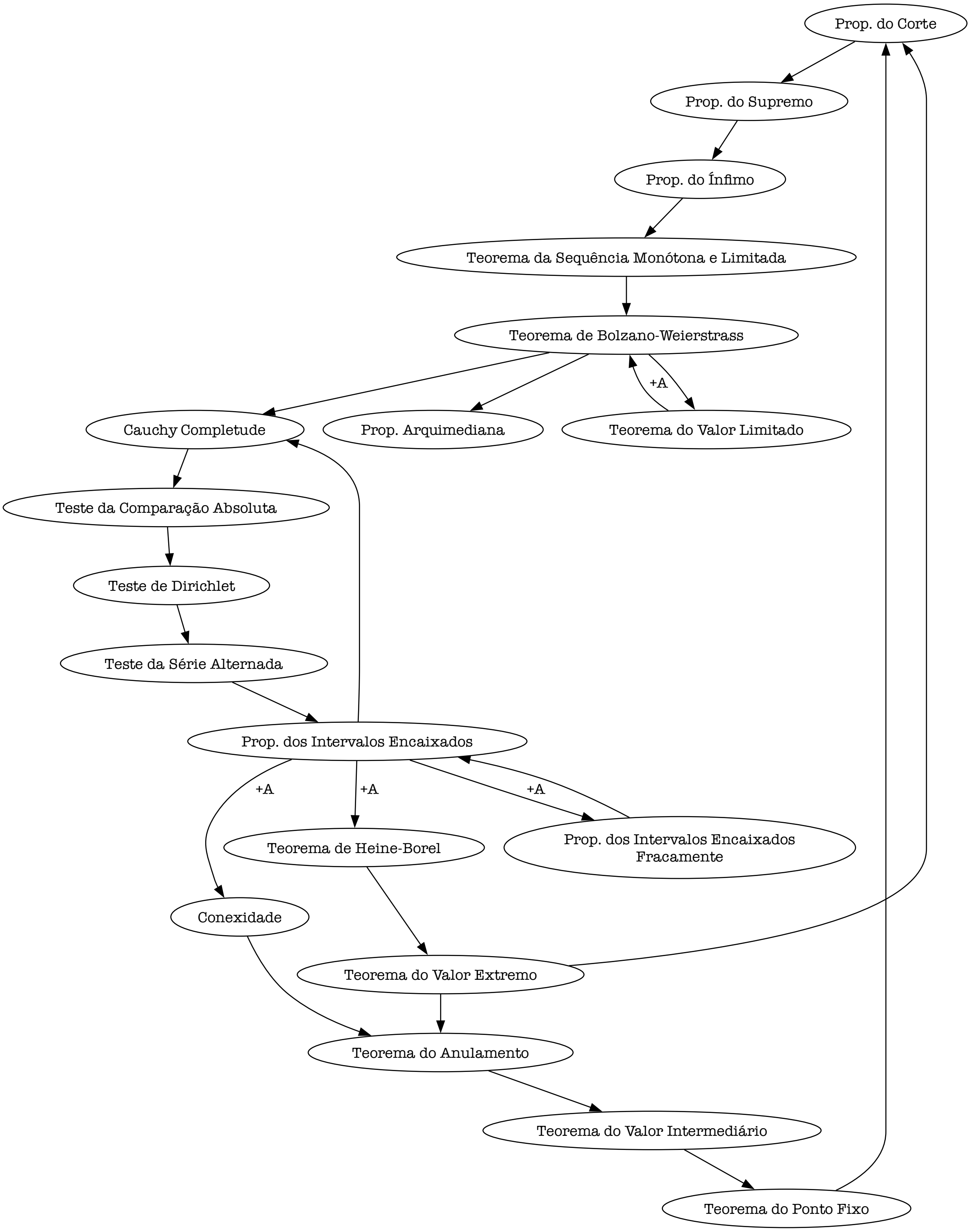

Figura 1 – Propriedades equivalentes em um corpo ordenado. O rótulo "+A" representa a hipótese adicional da Propriedade Arquimediana na aresta à esquerda.

2 PRELIMINARES

Neste capítulo revisaremos de forma rápida os conceitos de Álgebra e Topologia necessários para a elaboração do trabalho. Primeiro, definiremos corpos ordenados. Depois, daremos as definições de funções contínuas, sequências e séries a partir da topologia da ordem. Por conta da brevidade, este capítulo se assemelha mais a um formulário com vários recortes para consulta do que uma introdução de fato. Para uma apresentação digna dos conceitos reunidos aqui, recomendamos as principais referências utilizadas: (GONÇALVES, 2003) sobre Álgebra e (MUNKRES, 2000) sobre Topologia. Um resumo sobre o conteúdo apresentado aqui pode ser encontrado em (GELBAUM; OLMSTED, 2003).

2.1 ANÉIS E CORPOS

Antes de darmos a definição de corpo, daremos a definição de anel, uma estrutura algébrica um pouco mais genérica. No final desta seção, definiremos corpo como um tipo especial de anel.

Definição 2.1.1. Sejam A um conjunto e $+$ e $\cdot$ operações binárias bem-definidas sobre A denominadas soma e produto. A tupla $(A, +, \cdot)$ é um **anel** se valem os seguintes axiomas:

A1. Associatividade da soma: $(a + b) + c = a + (b + c)$ para todo a, b e $c \in A$.

A2. Elemento neutro da soma: existe $0 \in A$ tal que $a + 0 = 0 + a = a$ para todo $a \in A$.

A3. Inverso aditivo: para todo $a \in A$ existe $b \in A$ tal que $a + b = b + a = 0$.

A4. Comutatividade da soma: $a + b = b + a$ para todo a e $b \in A$.

A5. Associatividade do produto: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ para todo a, b e $c \in A$.

A6. Distributividade:

  a. Distributividade à esquerda: $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ para todo a, b e $c \in A$.

  b. Distributividade à direita: $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$ para todo a, b e $c \in A$.

Observação 2.1.2. Não falamos nada sobre a diferença nem sobre o quociente pois estas operações são definidas a partir da soma e do produto.

Notação 2.1.3. Denotaremos "$a \cdot b$" por "ab".

Notação 2.1.4. Por causa dos axiomas da associatividade, podemos omitir os parenteses e realizar a soma/produto de mais de dois elementos "ao mesmo tempo". Por exemplo, podemos escrever "$a+b+c$" em vez de "$(a+b)+c$". Quando misturarmos somas e produtos, para evitar ambiguidades, damos precedência ao produto.

Notação 2.1.5. Quando não houver ambiguidades, escreveremos "o anel A" em vez de "o anel $(A, +, \cdot)$".

Observação 2.1.6. Por causa do axioma do elemento neutro, A não pode ser vazio.

Exemplo 2.1.7. O conjunto $A = \{0\}$ munido das operações $0 + 0 := 0$ e $0 \cdot 0 := 0$ é um anel.

Notação 2.1.8. Denote o conjunto dos números naturais por $\mathbb{N}$, o conjunto dos números inteiros por $\mathbb{Z}$, o conjunto dos números racionais por $\mathbb{Q}$, o conjunto dos números reais por $\mathbb{R}$ e o conjunto dos números complexos por $\mathbb{C}$.

Exemplo 2.1.9. O conjunto $\mathbb{N}$ com as operações usuais de soma e produto não é um anel pois não vale o axioma do inverso aditivo.

Exemplo 2.1.10. Os conjuntos $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ com as operações usuais de soma e produto são anéis.

Observação 2.1.11. É importante que as operações de soma e produto estejam bem-definidas. Por exemplo, poderíamos definir a soma de dois números racionais $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ como $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} := \frac{a+c}{b+d}$. Mas dai, a soma dependeria da representação e teríamos absurdos como $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{2}{5} \neq \frac{3}{7} = \frac{2}{4} + \frac{1}{3}$. Outro problema dessa definição seria a divisão por zero quando os denominadores fossem inversos aditivos.

Notação 2.1.12. Quando omitimos as declarações das operações, estamos trabalhando com as operações usuais.

A partir da definição acima, podemos provar teoremas que valem para qualquer anel. Esta é a vantagem de uma abstração algébrica. Em outras palavras, abstraindo algebricamente exprimimos o que é necessário para algo acontecer.

Teorema 2.1.13. *Existe um único elemento neutro da soma.*

Teorema 2.1.14. *Sejam A anel e $a \in A$. Existe um único inverso aditivo de a.*

Notação 2.1.15. Denotaremos o inverso aditivo de a por $-a$ e "$a + (-b)$" por "$a - b$".

Teorema 2.1.16. *Seja A um anel. Para todo $a \in A$, $0 \cdot a = 0$.*

Teorema 2.1.17. *Seja A um anel. Para todo $a \in A$, $-(-a) = a$.*

Teorema 2.1.18. *Seja A um anel. Tome a, b e $c \in A$. Se $a + b = a + c$, então $b = c$.*

Na definição de um anel nem tudo que se espera da soma é esperado do produto. Enquanto temos quatro axiomas que tratam exclusivamente da soma, temos apenas um axioma que trata exclusivamente do produto. Restringindo o produto, isto é, adicionando novos axiomas para o produto, obtemos tipos específicos de anéis.

Definição 2.1.19. Um anel A é um **anel com unidade** se vale o seguinte axioma:

A7. Elemento neutro do produto: existe $1 \in A$ com $1 \neq 0$ tal que $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ para todo $a \in A$.

Exemplo 2.1.20. Os anéis $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ possuem unidade.

Exemplo 2.1.21. O conjunto dos números pares, denotado por $2\mathbb{Z}$, com as operações usuais de soma e produto, é um anel sem unidade.

Observação 2.1.22. A exigência de que $1 \neq 0$ faz com que um anel com unidade precise ter pelo menos dois elementos. Veja que se $1 = 0$ teríamos que para todo $a \in A$, $a = 1 \cdot a = 0 \cdot a = 0$.

Teorema 2.1.23. *Seja A um anel com unidade. Existe um único elemento neutro para o produto.*

Novamente, adaptando um axioma da soma, obtemos outro tipo de anel.

Definição 2.1.24. Um anel A é um **anel comutativo** se vale o seguinte axioma:

A8. Comutatividade do produto: $a \cdot b = b \cdot a$ para todo a e $b \in A$.

Exemplo 2.1.25. Os anéis $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ são comutativos.

Exemplo 2.1.26. O conjunto dos quatérnios, denotado por $\mathbb{H}$, é um anel não comutativo. Para uma definição de $\mathbb{H}$, veja (GONÇALVES, 2003, p. 38).

Agora, introduziremos uma restrição para o produto que não faz sentido para a soma.

Definição 2.1.27. Uma anel A é um **anel sem divisores de zero** se vale o seguinte axioma:

A9. Integridade: se $a \cdot b = 0$, então $a = 0$ ou $b = 0$ para todo a e $b \in A$.

Observação 2.1.28. Pelo axioma do inverso aditivo, em qualquer anel temos que $1 + (-1) = 0$. Sendo assim, o axioma da integridade não faz sentido para a soma.

Exemplo 2.1.29. Os conjuntos $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ são anéis sem divisores de zero.

Exemplo 2.1.30. O conjunto das matrizes 2 por 2 de entradas reais, denotado por $M_2(\mathbb{R})$, com as operações usuais de soma e produto é um anel com divisores de zero.

Teorema 2.1.31. *Seja A um anel com o axioma da integridade. Para todo a e $b \in A$, se $a \cdot a = b \cdot b$, então $a = b$ ou $a = -b$.*

Definição 2.1.32. Um **domínio de integridade** é um anel comutativo com unidade e sem divisores de zero.

Exemplo 2.1.33. Os anéis $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ são domínios de integridade.

Exemplo 2.1.34. O conjunto das funções reais contínuas com as operações usuais de soma e produto de funções não é um domínio de integridade pois não vale o axioma da integridade.

Teorema 2.1.35. *Seja A um domínio de integridade. Então, $a \cdot a = a$ se, e somente se, $a = 0$ ou $a = 1$.*

Finalmente, após juntar todas as especificidades vistas acima, estamos prontos para definir um corpo. Fazemos isto adaptando o axioma que faltava da soma para o produto.

Definição 2.1.36. Um domínio de integridade A é um **corpo** se vale o seguinte axioma:

A10. Inverso multiplicativo: para todo $a \in A \setminus \{0\}$ existe $b \in A$ tal que $a \cdot b = b \cdot a = 1$.

Observação 2.1.37. Pedimos que $a \neq 0$ na definição acima pois pelo axioma do elemento neutro da soma, $0 \cdot b = 0$ para todo $b \in A$ e, por definição, $0 \neq 1$.

Exemplo 2.1.38. Os anéis $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ são corpos.

Exemplo 2.1.39. O anel $\mathbb{Z}$ é um domínio de integridade mas não é um corpo pois não vale o axioma do inverso multiplicativo.

Exemplo 2.1.40. O conjunto dos restos da divisão por 5, denotado por $\mathbb{Z}_5$, com as operações de soma e produto módulo 5 é um corpo finito. Generalizando, se p é um número primo, então o conjunto dos restos da divisão por p, denotado por $\mathbb{Z}_p$, é um corpo finito.

Teorema 2.1.41. *Sejam A um corpo e $a \in A \setminus \{0\}$. Existe um único inverso multiplicativo de a.*

Notação 2.1.42. Denotaremos o inverso multiplicativo de $a \neq 0$ por a^{-1}. Para qualquer b, denotaremos ba^{-1} por $\frac{b}{a}$. Em particular, $a^{-1} = 1 \cdot a^{-1} = \frac{1}{a}$.

Notação 2.1.43. Seja n um inteiro. Se $a = 0$ e $n \neq 0$, denotaremos $0^n := 0$. Se $a \neq 0$, então denotaremos

$$a^n := \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0, \\ a \cdot a^{n-1} & \text{se } n > 0, \\ \frac{1}{a^{-n}} & \text{se } n < 0. \end{cases}$$

Teorema 2.1.44. *Na presença dos demais axiomas, o axioma do inverso multiplicativo implica no axioma da integridade.*

Exemplo 2.1.45. Embora $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ sejam corpos, $\mathbb{Q}$ é enumerável mas $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ não são.

2.2 RELAÇÕES DE ORDEM

Uma relação de ordem formaliza a noção intuitiva de ordem.

Definição 2.2.1. Uma relação $<$ em um conjunto X é uma **relação de ordem** se valem as seguintes propriedades:

1. Comparabilidade: se $a \neq b$, então $a < b$ ou $b < a$ para todo a e $b \in X$.
2. Irreflexividade: se $a < b$, então $a \neq b$ para todo a e $b \in X$.
3. Transitividade: se $a < b$ e $b < c$, então $a < c$ para todo a, b e $c \in X$.

Definição 2.2.2. Um **conjunto ordenado** é um par $(X, <)$ em que X é um conjunto e $<$ é uma relação de ordem em X.

Notação 2.2.3. Quando não houver ambiguidades, escreveremos "o conjunto ordenado X" em vez de "o conjunto ordenado $(X, <)$".

Exemplo 2.2.4. Os conjuntos $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ com as relações usuais de $<$ são conjuntos ordenados.

Notação 2.2.5. Quando omitimos a declaração da relação de ordem, estamos trabalhando com a relação de ordem usual.

Exemplo 2.2.6. Podemos ordenar o conjunto $\mathbb{C}$ usando a ordem lexicográfica da seguinte maneira:

$$a + bi < c + di \iff (a < c) \text{ ou } [a = c \text{ e } (b < d)].$$

Observação 2.2.7. A comparabilidade garante que não existem dois elementos distintos do conjunto que não estejam relacionados. Ou seja, a ordem é total.

Notação 2.2.8. Se $a < b$, também denotamos $b > a$. Se $a < b$ e $b < c$, denotamos $a < b < c$ e assim por diante. Se $a = b$ ou $a < b$, denotamos $a \leq b$. Similarmente, denotamos $a \geq b$ e $a \leq b \leq c$.

Teorema 2.2.9 (Tricotomia)**.** *Sejam X um conjunto ordenado e a e $b \in X$. Exclusivamente ou $a < b$ ou $a = b$ ou $a > b$.*

Demonstração. Pela comparabilidade, pelo menos uma das afirmações ocorre. Resta provar que cada uma das afirmações implica a negação das outras duas:

1. Caso $a = b$. Suponha por absurdo que $a < b$. Absurdo pela irreflexividade. Similarmente não temos que $b < a$.

2. Caso $a < b$. Pela irreflexividade, temos que $a \neq b$. Suponha por absurdo que $a > b$. Assim pela transitividade temos que $a < a$. Absurdo pela irreflexividade.

3. Caso $a > b$. Análogo ao caso acima. $\square$

Para dizer que um anel é ordenado, pedimos mais duas condições:

Definição 2.2.10. Um anel A em que A é ordenado é um **anel ordenado** se valem:

1. Se $b < c$, então $a + b < a + c$ para todo a, b e $c \in A$.

2. Se $a > 0$ e $b > 0$, então $ab > 0$ para todo a e $b \in A$.

Teorema 2.2.11. *Seja K um corpo ordenado. Se $a < b$, então $-a > -b$.*

Teorema 2.2.12. *Seja K um corpo ordenado. Se $a > 0$ e $b > 0$, então $\frac{a}{b} > 0$.*

Teorema 2.2.13. *Um corpo finito não é um corpo ordenado.*

Exemplo 2.2.14. Os corpos $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ são ordenados.

Outra forma de definir um corpo ordenado é identificando os elementos positivos do corpo.

Teorema 2.2.15. *Um corpo K em que K é ordenado é um corpo ordenado se, e somente se, existe um conjunto $K^+ \subseteq K$ tal que:*

1. *se a e $b \in K^+$, então $(a + b) \in K^+$,*

2. *se a e $b \in K^+$, então $(a \cdot b) \in K^+$,*

3. *para todo $a \in K$ vale exclusivamente $a \in K^+$ ou $a = 0$ ou $-a \in K^+$.*

Aqui a relação $<$ de ordem é dada por

$$a < b \iff a - b \in K^+$$

para todo a e $b \in K^+$.

Demonstração. Ida: Basta tomar $K^+ = \{a \in K \mid a > 0\}$:

1. Tome a e $b \in K^+$. Assim, $0 < a = a + 0 < a + b$ e portanto $a + b \in K^+$.

2. Tome a e $b \in K^+$. Assim, $ab > 0$ e $ab \in K^+$.

3. Pelo Teorema 2.2.9.

Volta: Sejam a, b e $c \in K$. Veja que valem as propriedades de uma relação de ordem:

1. Comparabilidade: Se $a \neq b$, temos que $a - b \neq 0$. Logo, $a - b \in K^+$ e $a > b$ ou $b - a \in K^+$ e $b > a$.

2. Irreflexividade: Se $a < b$, então $b - a \in K^+$. Assim, $b - a \neq 0$ e $a \neq b$.

3. Transitividade: Se $a < b$ e $b < c$ temos que $b - a \in K^+$ e $c - b \in K^+$. Logo, $c - a = c - b + b - a = (c - b) + (b - a) \in K^+$ e portanto $a < c$.

Além disso, valem as propriedades de um corpo ordenado:

1. Se $b < c$, então $c - b \in K^+$. Logo $a + c - (a + b) = c - b \in K^+$ e $a + b < a + c$.

2. Se $a > 0$ e $b > 0$, temos que $ab \in K^+$. $\square$

Definição 2.2.16. O **conjunto dos elementos positivos** de um corpo ordenado K é dado por $K^+ = \{a \in K \mid a > 0\}$. O **conjunto dos elementos negativos** de K é dado por $K \setminus (K^+ \cup \{0\}) = \{a \in K \mid a < 0\}$.

Teorema 2.2.17. *Seja K um corpo ordenado. Para todo $a \in K$, a^2 é não negativo.*

Corolário 2.2.18. *Em um corpo ordenado, $1 = 1 \cdot 1 > 0$.*

Exemplo 2.2.19. O conjunto $\mathbb{C}$ é um corpo que não pode ser ordenado pois $i^2 = -1 < 0$.

Observação 2.2.20. A ordem nos racionais e nos reais é única no sentido em que só existe um conjunto K^+ que satisfaz as condições do Teorema 2.2.15. Mas esse nem sempre é o caso. Para um contraexemplo, veja (GELBAUM; OLMSTED, 2003, p. 14).

A partir de qualquer elemento de um anel ordenado, podemos obter um valor não negativo.

Definição 2.2.21. Sejam A um anel ordenado e $a \in A$. O **valor absoluto** de a, denotado por $|a|$, é a se $a \geq 0$ e $-a$ se $a < 0$.

Teorema 2.2.22. *Seja A um anel ordenado. Para todo a e $b \in A$, $|ab| = |a||b|$.*

Teorema 2.2.23 (Desigualdade Triangular)**.** *Seja A um anel ordenado. Para todo a e $b \in A$, $|a - b| \leq |a| + |b|$. Em particular, para todo a, b e $c \in A$,*

$$|a - b| = |a - c + c - b| \leq |(a - c) + (c - b)| \leq |a - c| + |c - b|.$$

Observação 2.2.24. Note que $f \; : K \to (K^+ \cup \{0\})$ dada por $f(x) = |x|$ não é necessariamente uma norma pois K não é necessariamente um subconjunto dos reais não negativos.

Além de relacionar elementos de um conjunto, uma relação de ordem também nos permite, em alguns casos, relacionar subconjuntos com elementos.

Definição 2.2.25. Sejam X um conjunto ordenado e $Y \subseteq X$. Um elemento $a \in X$ é uma **cota superior** de Y se $b \leq a$ para todo $b \in Y$.

Definição 2.2.26. Sejam X um conjunto ordenado. Um conjunto $Y \subseteq X$ é um **conjunto limitado superiormente** se existe uma cota superior de Y em X.

Definição 2.2.27. Sejam X um conjunto ordenado e $Y \subseteq X$. Uma cota superior a de Y é um **supremo** de Y se $a \leq b$ para toda cota superior b de Y. Se além disso, $a \in Y$, então a é o **máximo** de Y.

Teorema 2.2.28. *Sejam X um conjunto ordenado e $Y \subseteq X$. Se a e b são supremos de Y, então $a = b$.*

Observação 2.2.29. Similarmente, definimos cota inferior, conjunto limitado inferiormente, ínfimo e mínimo.

Exemplo 2.2.30. O ínfimo do subconjunto $\left\{\frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\right\} \subseteq \mathbb{R}$ é 0.

Exemplo 2.2.31. O supremo do conjunto $A = \{a \mid a^2 < 2\} \subseteq \mathbb{R}$ é a raiz quadrada de 2. O conjunto $B = \{a \mid a^2 < 2\} \subseteq \mathbb{Q}$ não possui supremo.

Teorema 2.2.32. *Um corpo ordenado não possui mínimo nem máximo.*

Definição 2.2.33. Um **conjunto limitado** é um conjunto limitado superiormente e inferiormente.

Exemplo 2.2.34. O conjunto dos números primos é um subconjunto dos números inteiros que não é limitado.

Observação 2.2.35. Existem outras definições, não equivalentes, de conjunto limitado. Para mais detalhes, veja (MUNKRES, 2000, p. 121).

Em um conjunto ordenado é interessante considerar certos tipos de subconjuntos.

Definição 2.2.36. Seja X um conjunto ordenado. Um conjunto $Y \subseteq X$ é um **intervalo** se para todo a e b em Y com $a < b$, temos que $c \in Y$ para todo $c \in X$ tal que $a < c < b$.

Exemplo 2.2.37. O conjunto vazio, um conjunto unitário e todo o conjunto são intervalos.

Notação 2.2.38. Sejam X um conjunto ordenado, a e $b \in X$ com $a \leq b$. Utilizaremos a notação especial para certos tipos de intervalos:

1. $(a, b) = \{c \in X \mid a < c < b\}$ denominado aberto à esquerda e a direita,

2. $(a, b] = \{c \in X \mid a < c \leq b\}$ denominado aberto à esquerda e fechado à direita,

3. $[a, b) = \{c \in X \mid a \leq c < b\}$ denominado fechado à esquerda e aberto à direita,

4. $[a, b] = \{c \in X \mid a \leq c \leq b\}$ denominado fechado à esquerda e à direita,

5. $(a, +\infty) = \{c \in X \mid a < c\}$ denominado aberto à esquerda e ilimitado a direita,

6. $(-\infty, a) = \{c \in X \mid c < a\}$ denominado ilimitado à esquerda e aberto à direita,

7. $[a, +\infty) = \{c \in X \mid a \leq c\}$ denominado fechado à esquerda e ilimitado à direita,

8. $(-\infty, a] = \{c \in X \mid c \leq a\}$ denominado ilimitado à esquerda e fechado à direita,

em que a e b são os extremos do intervalo. Denominamos um intervalo aberto (fechado) à esquerda e à direita simplesmente como um intervalo aberto (fechado). O mesmo vale quando um dos "extremos" é ∞ ou $-\infty$. As vezes, quando estiver implícito pelo contexto, omitiremos o "$\subseteq K$". Por exemplo, escreveremos "o intervalo $[a, b]$" em vez de "o intervalo $[a, b] \subseteq K$". Também denotaremos X por $(-\infty, \infty)$.

Exemplo 2.2.39. Em $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$, $\cap_{n=1}^{\infty} (0, 1/n) = \emptyset$.

Observação 2.2.40. Nem todo intervalo é de uma das formas acima. Por exemplo, o subconjunto $\{a + bi \mid a \in [-1, 1] \subseteq \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{C}$ com a ordem lexicográfica é um intervalo.

Agora provaremos alguns resultados técnicos.

Teorema 2.2.41. *Seja X um conjunto ordenado. A interseção de dois intervalos fechados ou é o conjunto vazio ou é um intervalo fechado.*

Demonstração. Sejam $[a, b]$ e $[c, d]$ intervalos fechados de X. Temos dois casos:

1. A interseção é vazia.

2. A interseção não é vazia. Logo, existe e tal que

$$a \leq e \leq b,$$
$$c \leq e \leq d.$$

Assim, $m := \max\{a, c\} \leq \min\{b, d\} =: M$ e $[a, b] \cap [c, d] = [m, M]$. □

Teorema 2.2.42. *Sejam K um corpo ordenado e a e $b \in K$. Para todo $\varepsilon \in K$ com $\varepsilon > 0$, $|a - b| < \varepsilon$ se, e somente se, $a \in (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$.*

Demonstração. Ida: Temos dois casos:

1. Caso $a \geq b$. Temos que $|a - b| = a - b$. Por hipótese, $0 \leq a - b < \varepsilon$. Logo, $b - \varepsilon < b \leq a < b + \varepsilon$ e $a \in (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$.

2. Caso $a < b$. Temos que $|a - b| = -(a - b) = b - a$. Por hipótese, $0 < b - a < \varepsilon$. Assim, $0 > a - b > -\varepsilon$. Logo, $b + \varepsilon > b > a > b - \varepsilon$ e $a \in (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$.

A volta é análoga. □

Teorema 2.2.43. *Sejam K um corpo ordenado e $A \subseteq K$. São equivalentes:*

1. *A é limitado.*
2. *Existem a e $b \in K$ tais que $A \subseteq (a, b)$.*
3. *Existe $M \in K$ com $M > 0$ tal que para todo $c \in A$, $|c| \leq M$.*

Demonstração. O caso $A = \emptyset$ é trivial. Suponha que A seja não vazio.

$\boxed{\text{(1) implica (2)}}$ Como A é limitado existem c_1 cota inferior e c_2 cota superior de A tais que $A \subseteq (a, b)$ em que $a = c_1 - 1$ e $b = c_2 + 1$.

$\boxed{\text{(2) implica (3)}}$ Seja $M = \max\{|a|, |b|\} \geq 0$. Como $a \neq b$, $M > 0$. Tome $c \in A$. Temos dois casos:

1. Caso $c < 0$. Assim $a < c < 0$. Logo $-c < -a = |a| \leq M$.
2. Caso $c \geq 0$. Assim $0 \leq c < b = |b| \leq M$.

$\boxed{\text{(3) implica (1)}}$ Temos que M é cota superior de A e $-M$ é cota inferior de A. Portanto A é limitado. □

2.3 ESPAÇOS TOPOLÓGICOS

Um espaço topológico é o contexto mais abstrato em que podemos trabalhar com continuidade. Gradualmente abstraindo a definição de uma função contínua na reta obtemos a definição topológica que será dada na próxima seção. Para uma descrição deste salto, recomendamos o artigo de divulgação (FLORIT, 2017).

Em um curso de Espaços Métricos é visto como definir conjuntos abertos a partir de uma métrica[1]. Em particular, o espaço inteiro e o conjunto vazio são abertos. Além disso, toda união arbitrária de abertos resulta em um conjunto aberto e toda interseção finita de abertos resulta em um conjunto aberto. É dessas 3 características que exprimimos a definição topológica de conjunto aberto.

Definição 2.3.1. Uma <u>**topologia**</u> em um conjunto X é uma coleção $\mathcal{T}$ de subconjuntos de X tal que:

---

[1] Uma métrica em X é um função $d : X \times X \to \mathbb{R}$ tal que $d(a, a) = 0\ \forall a$, $d(a, b) > 0\ \forall a \neq b$, $d(a, b) = d(b, a)\ \forall a, b$ e $d(a, b) \leq d(a, c) + d(c, b)\ \forall a, b, c$. Um espaço métrico é o par (X, d). Um conjunto $Y \subseteq X$ é aberto em (X, d) se para todo $a \in Y$, existe um real $\varepsilon > 0$ tal que para todo $b \in X$, $d(a, b) < \varepsilon$ implica $b \in Y$.

1. $\emptyset \in \mathcal{T}$ e $X \in \mathcal{T}$.

2. A união de elementos de uma subcoleção de $\mathcal{T}$ está em $\mathcal{T}$.

3. A interseção de elementos de uma subcoleção finita de $\mathcal{T}$ está em $\mathcal{T}$.

Um conjunto pertencente a $\mathcal{T}$ é um **conjunto aberto** e o par $(X, \mathcal{T})$ é um **espaço topológico**.

Exemplo 2.3.2. A coleção de todos os subconjuntos de X é uma topologia em X e é denominada a topologia discreta.

Exemplo 2.3.3. A coleção $\{\emptyset, X\}$ é uma topologia em X e é denominada a topologia caótica.

Notação 2.3.4. Quando não houver ambiguidades, escreveremos "o espaço topológico X" em vez de "o espaço topológico $(X, \mathcal{T})$".

Definição 2.3.5. Uma topologia $\mathcal{T}_1$ é **mais fina** que uma topologia $\mathcal{T}_2$ se $\mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{T}_1$ propriamente.

Em vez de especificar cada conjunto aberto de uma topologia, podemos apenas, de forma mais econômica, especificar uma base que gera esta topologia.

Definição 2.3.6. Uma **base** em um conjunto X é uma coleção $\mathcal{B}$ de subconjuntos de X tal que:

1. Para cada a em X, existe $U \in \mathcal{B}$ tal que $a \in U$.

2. Se $a \in U \cap V$ em que U e $V \in \mathcal{B}$, então existe $W \in \mathcal{B}$ tal que $a \in W \subseteq U \cap V$.

A **topologia $\mathcal{T}$ gerada por uma base $\mathcal{B}$** é definida da seguinte maneira: um conjunto $U \subseteq X$ é aberto (isto é, $U \in \mathcal{T}$) se para todo $a \in U$, existe um **aberto básico** $B \in \mathcal{B}$ tal que $a \in B$ e $B \subseteq U$.

Observação 2.3.7. Toda topologia admite base. Basta tomar $\mathcal{B} = \mathcal{T}$.

A topologia que adotaremos é justamente aquela gerada por alguns dos intervalos que definimos anteriormente (Definição 2.2.38).

Definição 2.3.8. Seja X um conjunto ordenado com pelo menos dois elementos. A **topologia da ordem** é a topologia gerada pela base formada por:

1. Todos os conjuntos do tipo $(a, b) \subseteq X$.

2. Todos os conjuntos do tipo $[m, b) \subseteq X$ em que m é (se existir) o mínimo de X.

3. Todos os conjuntos do tipo $(a, M] \subseteq X$ em que M é (se existir) o máximo de X.

Teorema 2.3.9. *Os conjuntos do tipo (a, b) formam uma base para topologia da ordem em um corpo ordenado.*

Demonstração. Consequência imediata do Teorema 2.2.32. □

Teorema 2.3.10. *Seja X um corpo ordenado. Um conjunto $U \subseteq X$ é aberto se, e somente se, para todo $a \in U$ existe $\varepsilon \in K$ com $\varepsilon > 0$ tal que $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subseteq U$.*

Demonstração. Volta: Trivial. Ida: Como U é aberto, existe um aberto básico (b, c) tal que $a \in (b, c) \subseteq U$. Faça $\varepsilon = \min\{a - b, c - a\}$. Assim, $a \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subseteq (b, c) \subseteq U$. □

Observação 2.3.11. Os espaços métricos são menos gerais do que espaços topológicos. Toda métrica induz uma topologia e nesse caso chamamos o espaço topológico de um espaço metrizável. É de se perguntar se a topologia da ordem é metrizável. A resposta é não. Um contraexemplo é o *Ordered square* (MUNKRES, 2000, p. 90). Além disso, nem todo corpo ordenado munido da topologia da ordem é metrizável (LIU; TANAKA, 2011; DOBBS, 2000).

A partir da caracterização de conjuntos fechados por conjuntos abertos feita em Espaços Métricos, definimos um conjunto fechado em um espaço topológico.

Definição 2.3.12. Seja X um espaço topológico. Um conjunto $Y \subseteq X$ é um **conjunto fechado** em X se seu complemento $X \setminus Y$ é aberto.

Observação 2.3.13. Poderíamos ter definido uma topologia apenas especificando os conjuntos fechados.

Teorema 2.3.14. *A interseção arbitrária de conjuntos fechados é um conjunto fechado.*

Teorema 2.3.15. *A união finita de conjuntos fechados é um conjunto fechado.*

Teorema 2.3.16. *Seja X um conjunto ordenado munido da topologia da ordem. Os intervalos fechados de X são conjuntos fechados em X.*

Demonstração. Pois $(-\infty, b] = X \setminus (b, \infty)$ e $[a, \infty) = X \setminus (-\infty, a)$ são complementos de abertos e $[a, b] = (-\infty, b] \cap [a, \infty)$ é a interseção de fechados. □

O item 2 da Definição 2.3.1 e o Teorema 2.3.14 nos garantem que existem o maior conjunto aberto contido em um conjunto Y e o menor conjunto fechado que contém Y.

Definição 2.3.17. Seja X um espaço topológico. O **interior** de $Y \subseteq X$, denotado por $\mathrm{int}(Y)$, é união de todos os conjuntos abertos em X contidos em Y. O **fecho** de Y, denotado por $\overline{Y}$ é a interseção de todos os conjuntos fechados de X que contém Y.

Teorema 2.3.18. *Um conjunto é aberto se, e somente se, é igual ao seu interior.*

Teorema 2.3.19. *Um conjunto é fechado se, e somente se, é igual ao seu fecho.*

Outra forma de definir o fecho de um conjunto é por meio dos seus pontos de acumulação.

Definição 2.3.20. Seja X espaço topológico. Uma **vizinhança de um ponto** $a \in X$ é um conjunto aberto de X que contém a.

Observação 2.3.21. Alguns autores usam outra definição para vizinhança em que uma vizinhança de um ponto a é qualquer conjunto que contém a em seu interior.

Definição 2.3.22. Seja X um espaço topológico. Um **ponto de acumulação** de $Y \subseteq X$ é um ponto $a \in X$ tal que para toda vizinhança V de a, a interseção $V \cap (Y \setminus \{a\})$ é não nula.

Notação 2.3.23. Denotaremos o conjunto dos pontos de acumulação de Y por Y'.

Teorema 2.3.24. $\overline{Y} = Y \cup Y'$.

Teorema 2.3.25. *Y é fechado se, e somente se, $Y' \subseteq Y$.*

Definição 2.3.26. Um ponto $a \in Y$ é um **ponto isolado** de Y se $a \notin Y'$.

Dado um espaço topológico $(X, \mathcal{T})$ e um conjunto $Y \subseteq X$, podemos obter uma topologia para Y.

Definição 2.3.27. Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico e $Y \subseteq X$. A **topologia de subespaço** de Y é o conjunto $\mathcal{T}_Y = \{U \cap Y \mid U \in \mathcal{T}\}$.

Notação 2.3.28. Dizemos que $(Y, \mathcal{T}_Y)$ é um subespaço de X.

É de se perguntar se em um conjunto ordenado a topologia de subespaço concorda com a topologia da ordem.

Exemplo 2.3.29. Seja $X = \mathbb{R}$ com a topologia da ordem e $Y = [0, 1) \cup \{2\}$. O conjunto $\{2\}$ é aberto na topologia de subespaço de Y, pois $\{2\} = Y \cap (1, 3)$, mas não é aberto na topologia da ordem de Y (pois $\operatorname{int}(\{2\}) = \emptyset \neq \{2\}$).

Teorema 2.3.30. *Sejam X um espaço topológico em que X é ordenado e $Y \subseteq X$. A topologia do subespaço de Y é mais fina do que ou igual à topologia da ordem de Y.*

Teorema 2.3.31. *Sejam X um espaço topológico em que X é ordenado e $Y \subseteq X$. Se Y é um intervalo, então a topologia da ordem e a topologia de subespaço de Y coincidem.*

Notação 2.3.32. Caso não seja dito o contrário, estamos trabalhando com a topologia de subespaço.

2.4 FUNÇÕES CONTÍNUAS

A partir da definição de conjuntos abertos, definiremos funções contínuas. Esta definição topológica generaliza as definições vistas em um curso de Espaços Métricos.

Definição 2.4.1. Seja $f : X \to Y$ uma função. A **pré-imagem** de $V \subseteq Y$ por f, denotada por $f^{-1}(V)$ é o conjunto $\{a \mid f(a) \in V\} \subseteq X$.

Definição 2.4.2. Sejam X e Y espaços topológicos. Uma função $f : X \to Y$ é uma **função contínua** se para todo aberto V em Y, a pré-imagem $f^{-1}(V)$ é aberto em X.

Exemplo 2.4.3. Nos reais com a topologia da ordem usual, as funções $x \mapsto \cos(x)$ e $x \mapsto \sin(x)$ são contínuas.

Observação 2.4.4. A continuidade de uma função não depende somente da definição da função, mas também da topologia especificada para o seu domínio e seu contra-domínio.

Teorema 2.4.5. *Sejam X e Y espaços topológicos. Uma função $f : X \to Y$ é contínua se, e somente se, para todo fechado A em Y, a pré-imagem $f^{-1}(A)$ é fechada em X.*

Assim como em Espaços Métricos, também podemos estar interessados na continuidade pontual de uma função.

Definição 2.4.6. Uma função $f : X \to Y$ é **contínua em um ponto** $a \in X$ se para toda vizinhança V de $f(a)$, existe uma vizinhança U de a tal que $f(U) \subseteq V$.

Teorema 2.4.7. *Uma função $f : X \to Y$ é contínua se, e somente se, é continua em todo $a \in X$.*

Observação 2.4.8. Sejam Y um subespaço de X, $a \in Y$ um ponto isolado de Y e f uma função com domínio igual a Y. Como $\{a\}$ é aberto na topologia de subespaço, temos que f é contínua em a. Em particular, se Y tem a topologia discreta, f é contínua.

Aproveitamos agora para enunciar alguns teoremas a respeito de funções contínuas que usaremos nas demonstrações do próximo capítulo.

Teorema 2.4.9. *Toda função constante é contínua.*

Teorema 2.4.10. *A função $f : X \to X$ dada por $f(x) = x$ é contínua.*

Teorema 2.4.11. *Se $f : X \to Y$ é contínua e Z é um subespaço de X, então a função $g : Z \to Y$ dada por $g(x) = f(x)$ é contínua. Isto é, restringir o domínio de uma função contínua não altera a sua continuidade.*

Teorema 2.4.12. *Se $f : X \to Y$ é contínua e Z é um subespaço de Y com $f(X) \subseteq Z$, então a função $g : X \to Z$ dada por $g(x) = f(x)$ é contínua.*

Teorema 2.4.13. *Se $f : X \to Y$ é contínua e Y é um subespaço de Z, então a função $g : X \to Z$ dada por $g(x) = f(x)$ é contínua. Isto é, expandir o contradomínio de uma função não altera a sua continuidade.*

Teorema 2.4.14 (Lema da Colagem)**.** *Sejam X um espaço topológico, A e B conjuntos fechados (ou abertos) em X com $X = A \cup B$, $f : A \to Y$ e $g : B \to Y$ contínuas. Se $f(a) = g(a)$ para todo $a \in A \cap B$, então a função $h : X \to Y$ dada por:*

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & se\ x \in A, \\ g(x) & se\ x \in B. \end{cases}$$

é contínua.

Demonstração. Seja C um conjunto fechado em Y. Por hipótese temos que

$$h^{-1}(C) = f^{-1}(C) \cup g^{-1}(C).$$

Como f e g são contínuas, $f^{-1}(C)$ e $g^{-1}(C)$ são fechados. Como é a união finita de fechados, $h^{-1}(C)$ é fechado. Logo, h é contínua. □

Teorema 2.4.15. *Sejam X um espaço topológico, Y um conjunto ordenado munido da topologia da ordem e f e g funções de X para Y contínuas. O conjunto $\{a \in X \mid f(a) \leq g(a)\}$ é fechado.*

Demonstração. (MUNKRES, 2000, p. 111). □

Teorema 2.4.16. *Sejam A e B subespaços de um corpo ordenado K. A função $f : A \to B$ é contínua em $a \in A$ se, e somente se, para todo $\varepsilon \in K$ com $\varepsilon > 0$ existe $\delta \in K$ com $\delta > 0$ tal que $b \in A$ e $|b - a| < \delta$ implicam $|f(b) - f(a)| < \varepsilon$.*

Demonstração. Ida: Seja $\varepsilon > 0$. Considere a vizinhança $V = (f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon) \cap B$ de $f(a)$ em B. Como f é contínua em a, existe uma vizinhança U em A tal que $f(U) \subseteq V$. Como U é aberto em A, $A = W \cap A$ em que W é aberto em K. Como W é aberto, existe $\delta \in K$ com $\delta > 0$ tal que $a \in (a - \delta, a + \delta) \subseteq W$. Tome $b \in A$ com $|b - a| < \delta$. Assim, $b \in [(a-\delta, a+\delta) \cap A] \subseteq [W \cap A] = U$. Logo, $f(b) \in f(U) \subseteq V$. Isto é, $f(b) \in (f(b)-\varepsilon, f(b)+\varepsilon)$ e $|f(b) - f(a)| < \varepsilon$.

Volta: Tome uma vizinhança V de $f(a)$. Assim, $V = W \cap B$ em que W é aberto em K. Como W é aberto, existe $\varepsilon \in K$ com $\varepsilon > 0$ tal que $(f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon) \subseteq W$. Por hipótese, existe $\delta \in K$ tal que $b \in A$ e $|b - a| < \delta$ implica $|f(b) - f(a)| < \varepsilon$. Faça $U = (b - \delta, b + \delta) \cap A$. Assim, $f(U) \subseteq V$. □

Teorema 2.4.17. *Seja A um subespaço de um corpo ordenado K. Se as funções $f : A \to K$ e $g : A \to K$ são contínuas, então a função $h : A \to K$ dada por $h(x) = f(x) + g(x)$ é contínua.*

Demonstração. Tome $a \in A$. Vamos mostrar que h é contínua em a. Seja $\varepsilon > 0$.

Defina $2 \coloneqq 1 + 1$. Como K é um corpo ordenado, $0 < 1 < 1 + 1 = 2$ e $0 < \varepsilon/2$. Pelo Teorema 2.4.16, existem δ_1 e $\delta_2 \in K$ com $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que para todo $b \in A$, $|b - a| < \delta_1$ implica $|f(b) - f(a)| < \varepsilon/2$ e $|b - a| < \delta_2$ implica $|g(b) - g(a)| < \varepsilon/2$. Assim, para $\delta = \min \delta_1, \delta_2$, temos, pelo Teorema 2.2.23, que $b \in A$ e $|b - a| < \delta$ implica

$$\begin{aligned} |h(b) - h(a)| &= |f(b) + g(b) - (f(a) + g(a))| \\ &\leq |f(b) - f(a)| + |g(b) - g(a)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \end{aligned}$$

e portanto h é contínua em a. Pelo Teorema 2.4.7, h é contínua. $\square$

Teorema 2.4.18. *Seja A um subespaço de um corpo ordenado K. Se a função $f : A \to K$ é contínua e $c \in K$, então a função $g : A \to K$ dada por $g(x) = cf(x)$ é contínua.*

Demonstração. Se $c = 0$, g é contínua pelo Teorema 2.4.9. Tome $a \in A$. Vamos mostrar que g é contínua em a. Seja $\varepsilon \in K$ com $\varepsilon > 0$. Pelo Teorema 2.4.16, existe $\delta \in K$ com $\delta > 0$ tal que $b \in A$ e $|b - a| < \delta$ implicam $|f(b) - f(a)| < \varepsilon/|c|$. Logo, para $b \in A$ e $|b-a| < \delta$, $|g(b)-g(a)| = |cf(b)-cf(a)| = |c(f(b)-f(a))| = |c||f(b)-f(a)| < |c|\varepsilon/|c| = \varepsilon$ e g é contínua em a. Pelo Teorema 2.4.7, g é contínua. $\square$

Teorema 2.4.19 (Permanência de Sinal)**.** *Sejam A e B subespaços de um corpo ordenado K e $f : A \to B$ uma função contínua. Se $f(a) > 0$, então existe $\delta \in K$ com $\delta > 0$ tal que $b \in A$ e $|b - a| < \delta$ implicam $f(b) > 0$. O mesmo vale trocando as desigualdades para $f(a) < 0$ e $f(b) < 0$.*

Demonstração. Como f é contínua em a, existe $\delta \in K$ com $\delta > 0$ tal que $b \in A$ e $|b - a| < \delta$ implicam $|f(a) - f(b)| < f(a)/2$. Isto é, $|f(b) - f(a)| < f(a)/2$. Ou seja, $-f(a)/2 < f(b) - f(a)$. Logo, $f(b) > f(a)/2 > 0$, como desejado. Analogamente, para obter o resultado com as desigualdades trocadas, basta tomar $\varepsilon = -f(a)/2$. $\square$

2.5 SEQUÊNCIAS

A partir da definição de conjuntos abertos, definiremos a convergência de sequências. Esta definição topológica generaliza as definições vistas em um curso de Espaços Métricos.

Definição 2.5.1. Seja X um conjunto. Uma **sequência** em X é uma função $f : \mathbb{N}\backslash\{0\} \to X$.

Notação 2.5.2. Denotamos uma sequência por (a_n) em que $a_n = f(n)$ e denotaremos o conjunto dos pontos da sequência $\{a_n = f(n) \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ simplesmente por $\{a_n\}$.

Definição 2.5.3. Sejam X um espaço topológico. Uma sequência (a_n) é uma **sequência convergente** e converge para $a \in X$, denotado por $a_n \to a$, se para toda vizinhança V de a existe um natural n_0 tal que $a_n \in V$ para todo $n > n_0$.

Exemplo 2.5.4. Nos reais com a topologia da ordem usual, a sequência $a_n = 1/n$ converge para 0.

Observação 2.5.5. Podemos trocar o "$n > n_0$" acima por "$n \geq n_1 = n_0 + 1$".

Definição 2.5.6. Uma **sequência divergente** é uma sequência que não converge para nenhum ponto.

Exemplo 2.5.7. Nos reais com a topologia da ordem usual, a sequência $a_n = n$ é divergente.

Teorema 2.5.8. *Sejam X um espaço topológico e $A \subseteq X$. Se existe uma sequência $(a_n) \subseteq A$ com $a_n \to a$, então $a \in \overline{A}$.*

Observação 2.5.9. A reciproca do Teorema 2.5.8 não é verdadeira. Veja contraexemplos em (GELBAUM; OLMSTED, 2003, p. 164).

Teorema 2.5.10. *Se $f : X \to Y$ é contínua e (a_n) é uma sequência em X com $a_n \to a$, então $(f(a_n))$ é uma sequência convergente em Y com $f(a_n) \to f(a)$.*

Observação 2.5.11. A reciproca do Teorema 2.5.10 não é verdadeira. Veremos um contraexemplo no Exemplo 2.5.17.

Diferente do que acontece em Espaços Métricos, em Espaços Topológicos o limite de uma sequência nem sempre é único, para contraexemplos veja (GELBAUM; OLMSTED, 2003, p. 160). Porém, adicionando uma exigência para nosso espaço topológico, podemos garantir a unicidade do limite.

Definição 2.5.12. Um espaço topológico $(X, \mathcal{T})$ é um **espaço de Hausdorff** se para dois pontos a e $b \in X$ distintos, existem vizinhanças V_a de a e V_b de b com $V_a \cap V_b = \emptyset$.

Exemplo 2.5.13. Um espaço com a topologia da ordem é um espaço de Hausdorff.

Teorema 2.5.14. *Em um espaço de Hausdorff o limite de uma sequência é único.*

Corolário 2.5.15. *Em um corpo ordenado o limite de uma sequência é único.*

Definição 2.5.16. Uma sequência (a_n) é **eventualmente constante** igual à a se existe um natural n_0 tal que $a_n = a$ para todo $n > n_0$.

Exemplo 2.5.17. Exemplo retirado de (GELBAUM; OLMSTED, 2003, p. 161). Defina a topologia coenumerável nos reais como

$$\mathcal{T}_C = \{A \subseteq \mathbb{R} \mid \mathbb{R} \setminus A \text{ é enumerável}\} \cup \{\emptyset\}.$$

Temos que as sequências convergentes em X são as sequências eventualmente constantes. Portanto, o limite de uma sequência convergente em $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_C)$ é único. Note também que é o mesmo que acontece se tivéssemos tomado a topologia discreta, ou seja duas topologias diferentes podem induzir as mesmas sequências convergentes.

Veja que $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_C)$ não é Hausdorff e portanto não vale a reciproca do Teorema 2.5.14: Para todo U e $V \in \mathcal{T}_C \setminus \{\emptyset\}$, temos, pela não enumerabilidade de $\mathbb{R}$, que $U \cap V \neq \emptyset$.

Veja que não vale a reciproca do Teorema 2.5.10: Considere $f : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_C) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_D)$ em que $\mathcal{T}_D$ é a topologia discreta e f é dada por $f(x) = x$. Assim, para toda sequência convergente $a_n \to a$, temos que a_n é eventualmente constante. Logo, $f(a_n)$ é eventualmente constante igual a $f(a)$ e portanto $f(a_n) \to f(a)$. Suponha por absurdo que f é contínua. Como $\{0\} \in \mathcal{T}_D$, temos que $f^{-1}(\{0\}) \in \mathcal{T}_C$. Absurdo pois $f^{-1}(\{0\}) = \{0\}$ e $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ é não enumerável. Logo, f não é contínua.

Em um conjunto ordenado, podemos classificar sequências de acordo com a forma em que os seus termos estão ordenados ou também pelo conjunto de pontos da sequência.

Definição 2.5.18. Seja X um conjunto ordenado. Uma sequência (a_n) em X é não decrescente se $a_n \leq a_{n+1}$ para todo natural n e é não crescente se $a_n \geq a_{n+1}$ para todo natural n. Uma **sequência monótona** é uma sequência não decrescente ou não crescente.

Definição 2.5.19. Seja X um conjunto ordenado. Uma sequência (a_n) em X é uma **sequência limitada** se $\{a_n\}$ é um conjunto limitado.

Definição 2.5.20. Seja (a_n) uma sequência em um conjunto X dada pela função $f : \mathbb{N} \setminus \{0\} \to X$. Uma **subsequência** de (a_n) é uma restrição do domínio de f para algum subconjunto infinito de $\mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Notação 2.5.21. Já que de cada subconjunto infinito de $\mathbb{N}\setminus\{0\}$ existe uma bijeção monótona para $\mathbb{N}\setminus\{0\}$, trataremos uma subsequência como uma sequência. Isto é, "elevaremos" a restrição feita e a trataremos como uma função com o domínio em $\mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Teorema 2.5.22. *Seja (a_n) uma sequência em X e (b_n) uma subsequência de (a_n). Se $a_n \to a$, então $b_n \to a$.*

Como não estamos em um espaço métrico não podemos utilizar a definição que considera a distância entre elementos da sequência para definir o que é um sequência de Cauchy[2]. Para contornar isso, utilizaremos a definição de sequência de Cauchy utilizada em espaços vetoriais topológicos, por exemplo em (RUDIN, 1991, p. 20).

Definição 2.5.23. Seja K um corpo ordenado. Uma sequência (a_n) em K é uma **sequência de Cauchy** se para toda vizinhança (b, c) com $0 \in (b, c)$, existe n_0 tal que $a_n - a_m \in (b, c)$ para todo $m, n > n_0$.

Observação 2.5.24. Podemos trocar o "$n > n_0$" acima por "$n \geq n_1 = n_0 + 1$".

[2] Uma sequência (a_n) em um espaço métrico (X, d) é de Cauchy se para todo real $\varepsilon > 0$, existe um natural N tal que $n, m > N \implies d(a_n, a_m) < \varepsilon$.

Teorema 2.5.25. *Seja K um corpo ordenado. Toda sequência convergente é de Cauchy.*

Teorema 2.5.26. *Toda sequência de Cauchy é limitada.*

Demonstração. Como (a_n) é de Cauchy, existe n_0 tal que para todo $n, m > n_0$,

$$a_n - a_m \in (-1, 1).$$

Isto é, $-1 < a_n - a_m < 1$. Em particular, fazendo $k = n_0 + 1$, temos que $-1 < a_n - a_k < 1$. Assim,

$$a_k - 1 < a_n < 1 + a_k.$$

Isto é, $a_n \in (a_k - 1, a_k + 1)$ para todo $n > n_0$. Seja

$$d = \max\{|a_1 - a_k|, |a_2 - a_k|, \ldots, |a_{n_0} - a_k|, 1\} + 1.$$

Assim, $a_n \in (a_k - d, a_k + d)$ para todo n e (a_n) é limitada. □

Teorema 2.5.27. *Se uma sequência de Cauchy possui uma subsequência convergente, então a sequência converge.*

Demonstração. Seja (a_n) uma sequência de Cauchy. Suponha que exista uma subsequência de (a_n) que converge para algum a.

Seja (b, c) uma vizinhança de a. Assim, existe $\varepsilon > 0$ tal que $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subseteq (b, c)$. Logo, basta provar que existe n_0 tal que $a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ para todo $n > n_0$.

Faça $2 \coloneqq 1 + 1$. Como K é um corpo ordenado, $0 < 1 < 1 + 1 = 2$ e $0 < \frac{\varepsilon}{2}$. Como (a_n) é de Cauchy, existe n_1 tal que para todo $m, n > n_1$,

$$a_n - a_m \in \left(\frac{-\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Como existe uma subsequência de (a_n) que converge para a, existe a_k com $k > n_1$ tal que

$$a_k \in \left(a - \frac{\varepsilon}{2}, a + \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Note que

$$a_k < a + \frac{\varepsilon}{2}$$

e portanto $a_k + \frac{\varepsilon}{2} < a + \varepsilon$. Similarmente, $a - \varepsilon < a_k - \frac{\varepsilon}{2}$. Assim, para todo $n > k$, temos que

$$a_n \in \left(a_k - \frac{\varepsilon}{2}, a_k + \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Resumindo,

$$a - \varepsilon < a_k - \frac{\varepsilon}{2} < a_n < a_k + \frac{\varepsilon}{2} < a + \varepsilon.$$

Isto é, $a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ para todo $n > k$. Por definição, (a_n) é convergente. □

A utilização de um ε na demonstração do Teorema 2.5.27 sugere que a definição que utilizamos para sequências de Cauchy (Definição 2.5.23) é equivalente a definição utilizada em espaços métricos trocando a distância pelo valor absoluto da diferença e a condição $\varepsilon \in \mathbb{R}$ por $\varepsilon \in K$. O que de fato acontece.

Teorema 2.5.28. *Seja K um corpo ordenado. Uma sequência (a_n) é de Cauchy se, e somente se, para todo $\varepsilon \in K$ com $\varepsilon > 0$, existe um natural n_0 tal que para todo $n, m > n_0$, $|a_n - a_m| < \varepsilon$.*

Demonstração. Ida: Seja $\varepsilon > 0$. Como a_n é de Cauchy, existe um natural n_0 tal que $n, m > n_0$ implica $a_n - a_m \in (-\varepsilon, \varepsilon) = (0 - \varepsilon, 0 + \varepsilon)$. Pelo Teorema 2.2.42, $|a_n - a_m| = |(a_n - a_m) - 0| < \varepsilon$.

Volta: Seja (a, b) com $0 \in (a, b)$. Faça $\varepsilon = \min\{-a, b\}$. Assim, existe um natural n_0 tal que $m, n > n_0$ implica $|a_n - a_m| < \varepsilon$. Pelo Teorema 2.2.42, $a_n - a_m \in (0 - \varepsilon, 0 + \varepsilon) \subseteq (a, b)$ e a_n é de Cauchy. $\square$

Finalizamos esta seção demonstrando que de fato a definição topológica de convergência de sequências generaliza a definição vista em um curso de Espaços Métricos.

Teorema 2.5.29. *Seja K um corpo ordenado. Uma sequência (a_n) em K converge para $a \in K$ se, e somente se, para todo $\varepsilon \in K$ com $\varepsilon > 0$ existe um natural n_0 tal que para todo $n > n_0$, $|a_n - a| < \varepsilon$.*

Demonstração. Ida: Seja $\varepsilon > 0$ e considere a vizinhança $V = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Como $a_n \to a$, existe um natural n_0 tal que $n > n_0$ implica $a_n \in V$. Pelo Teorema 2.2.42, $|a - a_n| < \varepsilon$.

Volta: Seja V uma vizinhança de a. Logo existe um aberto básico $\varepsilon > 0$ tal que $a \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subseteq V$. Por hipótese, existe um natural n_0 tal que $n > n_0$ implica $|a - a_n| < \varepsilon$. Pelo Teorema 2.2.42, $a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subseteq V$. $\square$

A partir de agora utilizaremos à vontade (isto é, sem mencionar) as caracterizações dadas nos teoremas 2.5.28 e 2.5.29.

Teorema 2.5.30 (Teorema do Confronto)**.** *Sejam (a_n) e (b_n) sequências em um corpo ordenado K. Se $0 \leq a_n \leq b_n$ para todo n e $b_n \to 0$, então $a_n \to 0$.*

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$. Como $b_n \to 0$, existe um natural n_1 tal que $n > n_1$ implica $|b_n - 0| < \varepsilon$. Logo, para $n > n_1$, temos que

$$0 \leq |a_n - 0| = |a_n| = a_n \leq b_n = |b_n| = |b_n - 0| < \varepsilon.$$

Isto é, $a_n \to 0$. $\square$

Teorema 2.5.31. *Sejam (a_n) e (b_n) sequências em um corpo ordenado K. Se (a_n) é limitada e $b_n \to 0$, então $(a_n b_n) \to 0$.*

Demonstração. Como (a_n) é limitada, existe $M \in K$ com $M > 0$ tal que $|a_n| < M$.

Seja $\varepsilon > 0$. Como $M > 0$ e $b_n \to 0$, existe N tal que $n > N$ implica

$$|b_n| = |b_n - 0| < \frac{\varepsilon}{M}.$$

Assim, para $n > N$,

$$|a_n b_n - 0| = |a_n b_n| = |a_n||b_n| < M|b_n| < M\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$$

e portanto $(a_n b_n) \to 0$. □

Teorema 2.5.32. *Sejam (a_n) e (b_n) sequências em um corpo ordenado K. Se $a_n \to a$ e $b_n \to b$, então $(a_n + b_n) \to (a + b)$.*

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$. Como $a_n \to a$, existe um natural n_1 tal que $|a_n - a| < \varepsilon/(1+1)$ para todo natural $n > n_1$. Similarmente, existe um natural n_2 tal que $|b_n - b| < \varepsilon/(1+1)$ para todo natural $n > n_2$. Veja agora que para todo natural $n > \max\{n_1, n_2\}$, temos que

$$\begin{aligned}|(a_n + b_n) - (a + b)| &= |a_n - a + b_n - b| \\ &\leq |a_n - a| + |b_n - b| \\ &\leq \varepsilon/(1+1) + \varepsilon/(1+1) = \varepsilon.\end{aligned}$$

Logo $(a_n + b_n) \to (a + b)$. □

Teorema 2.5.33. *Sejam (a_n) uma sequência em um corpo ordenado K e $b \in K$. Se $a_n \to a$, então $(ba_n) \to ba$.*

Demonstração. O caso $b = 0$ é trivial. Suponha que $b \neq 0$. Seja $\varepsilon > 0$. Como $a_n \to a$, existe um natural N tal que $|a_n - a| < \varepsilon/|b|$ para todo natural $n > N$. Logo para $n > N$, temos que $|ba_n - ba| = |b(a_n - a)| = |b||a_n - a| \leq |b|\varepsilon/|b| = \varepsilon$ e $(ba_n) \to ba$. □

2.6 SÉRIES

Quando temos a operação de soma bem definida em um conjunto, podemos somar os termos de qualquer sequência para obter uma nova sequência.

Definição 2.6.1. Uma **série** é uma sequência (s_n) em um corpo ordenado.

Definição 2.6.2. A **sequência de termos** da série (s_n) é a sequência (a_n) dada por $a_1 = s_1$ e $a_{n+1} = s_{n+1} - s_n$.

Notação 2.6.3. Denotaremos uma série por $\sum_{i=1}^{\infty} a_n$.

Definição 2.6.4. Uma **série limitada** é uma série tal que sua sequência de termos é limitada.

Definição 2.6.5. A **soma parcial** de índice n de uma série $\sum_{i=1}^{\infty} a_n$ é a soma $\sum_{i=1}^{n} a_n$.

Definição 2.6.6. Uma **série convergente** é uma série tal que sua sequência de somas parciais converge.

Teorema 2.6.7. *Se uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente, então a_n converge para* 0.

Definição 2.6.8. Uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente quando a série $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ é convergente.

Teorema 2.6.9. *Em um espaço de Hausdorff a sequência de somas parciais de uma série convergente converge para um único ponto.*

Demonstração. Consequência imediata do Teorema 2.5.14. □

Notação 2.6.10. Quando a sequência de somas parciais de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge para um único ponto S, escrevemos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$.

Exemplo 2.6.11. Nos reais com a topologia da ordem usual, as série $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^a$ converge se, e somente se, $a > 1$.

Exemplo 2.6.12. Nos reais com a topologia da ordem usual, a série $\sum_{n=1}^{\infty} a^n$ converge se, e somente se, $-1 < a < 1$. Quando ela converge, $\sum_{n=1}^{\infty} a^n = a/(1-a)$.

3 EQUIVALÊNCIAS

Neste capítulo, demonstraremos propriedades equivalentes à Propriedade do Supremo. A respeito destas propriedades está relacionada a Propriedade Arquimediana, que definiremos na próxima seção. Feito isso, na Seção 3.2, provaremos a primeira leva de equivalências como em um caminho fechado de dominós. Em seguida, na Seção 3.3, demonstraremos equivalências envolvendo compacidade e estenderemos ainda mais o caminho fechado da seção anterior. Finalmente, na Seção 3.4, daremos um exemplo para destacar quais propriedades demonstradas anteriormente necessitam da propriedade arquimediana para serem equivalentes, a saber, o do corpo das séries formais de Laurent. As principais referências utilizadas foram livros de Análise na Reta (ABBOTT, 2015; LIMA, 2022) e os artigos (PROPP, 2013; TEISMANN, 2013).

3.1 PROPRIEDADE ARQUIMEDIANA

Assim como definimos $2 := 1 + 1$ em algumas das demonstrações do capítulo anterior, podemos, em um corpo ordenado, repetir o processo e obter uma "cópia" de cada natural. Aplicando o inverso aditivo obtemos uma cópia dos inteiros e aplicando o inverso multiplicativo obtemos uma cópia de cada racional. Mais formalmente, obtemos um subanel isomorfo aos racionais.

Definição 3.1.1. Seja A um anel. Um conjunto $B \subseteq A$ induz um **subanel** B se $(B, +, \cdot)$ é um anel em que $+$ e $\cdot$ são, respectivamente, as operações de soma e produto de A restritas à B.

Teorema 3.1.2. *Seja A um domínio de integridade com unidade 1_A e seja B um subanel de A com unidade 1_B. Então, $1_A = 1_B$.*

Demonstração. Consequência imediata do Teorema 2.1.35. $\square$

Definição 3.1.3. A **característica** de um anel com unidade é o menor natural n tal que

$$\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n \text{ vezes}} = 0$$

se existe tal n e 0 caso o contrário.

Exemplo 3.1.4. $\mathbb{Z}_5$ tem característica 5.

Definição 3.1.5. Uma anel A é **isomorfo** a um anel B se existe uma função bijetiva $f : A \to B$, denominada isomorfismo de A sobre B, tal que para todo a e $b \in A$ vale que:

1. $f(a + b) = f(a) + f(b)$,
2. $f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$.

Definição 3.1.6. Sejam A e B anéis ordenados, $f : A \to B$ isomorfismo e a e $b \in A$. Se $a < b$, então $f(a) < f(b)$. Ainda, se A e B são corpos, então $f(A^+) = B^+$.

Definição 3.1.7. Seja K um anel com característica 0 e unidade 1_K. Para cada natural n defina $n_K = \sum_{i=1}^{n} 1_K$. Defina também:

$$\mathbb{N}_K = \{n_K \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Aplicando o inverso aditivo, defina

$$\mathbb{Z}_K = \mathbb{N}_K \cup \{0\} \cup \{-a \mid a \in \mathbb{N}_K\}.$$

Ainda, se K for um corpo, aplicando o inverso multiplicativo, defina

$$\mathbb{Q}_K = \left\{a \cdot b^{-1} \,\middle|\, a \in \mathbb{Z}_K \text{ e } b \in \mathbb{Z}_K \setminus \{0\}\right\}.$$

Observação 3.1.8. Pelo Teorema 3.1.6, as cópias descritas acima preservam a ordem de K.

Teorema 3.1.9. *Seja K um anel com característica 0. $\mathbb{Z}_K$ é um subanel de K isomorfo aos inteiros.*

Teorema 3.1.10. *Seja K um corpo com característica 0. $\mathbb{Q}_K$ é um subanel de K isomorfo aos racionais.*

Corolário 3.1.11. *Todo corpo ordenado possui um subanel isomorfo aos racionais.*

Demonstração. Basta mostrar que um corpo ordenado tem característica 0. De fato, pela definição de ordem, para todo natural n,

$$0 < 1 < 1 + 1 < \cdots < \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n \text{ vezes}}.$$

Pela Tricotomia (Teorema 2.2.9),

$$0 \neq \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n \text{ vezes}}.$$

□

Notação 3.1.12. Quando não houver ambiguidades, não faremos distinção entre $q_K \in \mathbb{Q}_K$ e $f(q_K) \in \mathbb{Q}$ em que f é o isomorfismo do Teorema 3.1.10.

Agora, definiremos uma propriedade relacionada com a Propriedade do Supremo. Exploraremos essa relação nas próximas seções.

Definição 3.1.13. Um anel A ordenado com característica 0 é **arquimediano** se $\mathbb{N}_A$ não é limitado superiormente.

Teorema 3.1.14. *Seja K um corpo ordenado. São equivalentes:*

1. *K é arquimediano.*

2. *Para todo a e $b \in K$ com $a > 0$ e $b > 0$, existe $n_K \in \mathbb{N}_K$ tal que $n_K \cdot a > b$.*

3. *A sequência $(1/n_K)$ converge para 0.*

Demonstração. $\boxed{\text{(1) implica (2)}}$ Como K é arquimediano, $\mathbb{N}_K$ não é limitado e existe $n_K \in \mathbb{N}_K$ tal que $n_K > b/a$. Isto é $n_K \cdot a > b$.

$\boxed{\text{(2) implica (3)}}$ Seja $\varepsilon \in K$ com $\varepsilon > 0$. Tome $a = 1$ e $b = 1/\varepsilon$. Por hipótese, existe $N_K \in \mathbb{N}_K$ tal que $N_K = N_K \cdot 1 > 1/\varepsilon$. Assim, para $n > N_K$, temos que $|1/n_K - 0| = |1/n_K| = 1/n_K < \varepsilon$ e $(1/n_K)$ converge para 0.

$\boxed{\text{(3) implica (1)}}$ Suponha por absurdo que K não seja arquimediano. Logo existe a tal que $n_K < a$ para todo $n_K \in \mathbb{N}_K$. Logo, $0 < 1/a < 1/n_K$ para todo n_K. Como $(1/n_K)$ converge para 0, existe $N_K \in \mathbb{N}_K$ tal que $1/a > |1/N_K - 0| = |1/N_K| = 1/N_K$ o que é um absurdo. Logo K é arquimediano. □

Exemplo 3.1.15. O anel ordenado $\mathbb{Z}$ é arquimediano.

Exemplo 3.1.16. Os corpos ordenados $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ são arquimedianos.

Observação 3.1.17. O item (1) do Teorema 3.1.14 significa que K não tem nenhum elemento "muito grande" e o item (3) significa que K não tem nenhum elemento "muito pequeno".

Exemplo 3.1.18. Um exemplo de um corpo ordenado não arquimediano adaptado de (MARSDEN; HOFFMAN, 1993, p. 102). Seja K a união de duas cópias distintas de $\mathbb{Q}$. Denote os elementos da primeira cópia por a e os da segunda cópia por $f(a)$. Ilustramos K na Figura 2. Defina a soma e o produto como:

$$\begin{aligned}
a + b &\coloneqq a + b,\\
a + f(b) &\coloneqq f(a + b),\\
f(a) + f(b) &\coloneqq a + b,\\
ab &\coloneqq ab,\\
af(b) &\coloneqq f(ab),\\
f(a)f(b) &\coloneqq ab.
\end{aligned}$$

Assim o elemento neutro da soma é o 0, o elemento neutro do produto é o 1 e os inversos são:

$$
\begin{aligned}
a + (-a) &= 0, \\
f(a) + f(-a) &= 0, \\
a \cdot \frac{1}{a} &= 1, \\
f(a) \cdot f\left(\frac{1}{a}\right) &= 1.
\end{aligned}
$$

Instaure uma ordem fazendo: $a < b$ se $a < b$ em $\mathbb{Q}$, $a \leq f(b)$ para todo a e $b \in \mathbb{Q}$ e $f(a) \leq f(b)$ se $a \leq b$ em $\mathbb{Q}$. Veja que K é um corpo ordenado. Como os naturais são todos copiados para a primeira cópia, temos que o conjuntos do naturais é limitado por qualquer $f(b)$ da segunda cópia. Logo, K não é arquimediano.

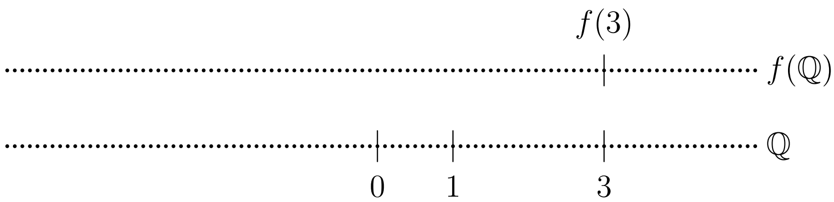

Figura 2 – Ilustração do corpo do Exemplo 3.1.18.

3.2 PROPRIEDADE DO SUPREMO

No teorema que segue, quando dizemos que um item é equivalente a outro queremos dizer que sob as hipóteses do teorema, em K vale uma propriedade (ou teorema) P_1 se, e só se, em K também vale a propriedade (ou teorema) P_2.

Teorema 3.2.1. *Seja K um corpo ordenado arquimediano. Os seguintes itens, de* (1) *até* (14)*, são equivalentes:*

1. *Propriedades a respeito de conjuntos:*

   (1) Propriedade do Corte: Sejam A e B subconjuntos não vazios e disjuntos com $K = A \cup B$ e $a < b$ para quaisquer $a \in A$ e $b \in B$. Existe um $c \in K$ tal que para todo $d \in K \setminus \{c\}$, $d < c$ implica $d \in A$ e $d > c$ implica $d \in B$.

   (2) Propriedade do Supremo: Todo subconjunto não vazio limitado superiormente admite supremo.

   (3) Propriedade do Ínfimo: Todo subconjunto não vazio limitado inferiormente admite ínfimo.

2. *Propriedades a respeito de sequências:*

(4) *Teorema da Sequência Monótona e Limitada: Toda sequência monótona e limitada converge.*

(5) *Teorema de Bolzano-Weierstrass: Toda sequência limitada possui uma subsequência convergente.*

(6) *Cauchy-completude: Toda sequência de Cauchy converge.*

3. *Propriedades a respeito de séries:*

(7) *Teste da Comparação Absoluta: Se* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *converge com* $b_n \geq 0$ *e existem* $c > 0$ *em* K *e um natural* n_0 *tais que* $|a_n| \leq cb_n$ *para* $n > n_0$*, então* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge.*

(8) *Teste de Dirichlet: Se* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é uma série (não necessariamente convergente) tal que suas somas parciais são limitadas e* $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n \geq \cdots \geq 0$ *com* $b_n \to 0$*, então* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *converge.*

(9) *Teste da Série Alternada: Se* $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq \cdots \geq 0$ *com* $a_n \to 0$*, então* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ *converge.*

4. *Propriedades a respeito de intervalos:*

(10) *Propriedade dos Intervalos Encaixados: Se* $[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq \cdots \supseteq [a_n, b_n] \supseteq \cdots$ *e* $(b_n - a_n) \to 0$*, então existe* $c \in \cap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$*.*

(11) *Conexidade em Espaços Topológicos: Os únicos subconjuntos de* K *que são abertos e fechados ao mesmo tempo são o* $\emptyset$ *e o próprio* K*.*

5. *Propriedades a respeito de funções contínuas:*

(12) *Teorema do Anulamento: Se* $f : [a, b] \to K$ *é contínua tal que* $f(a)$ *e* $f(b)$ *tem sinais opostos, então existe* $c \in (a, b)$ *tal que* $f(c) = 0$*.*

(13) *Teorema do Valor Intermediário: Se* $f : [a, b] \to K$ *é contínua e* $d \in K$ *está entre* $f(a)$ *e* $f(b)$*, então existe* $c \in (a, b)$ *tal que* $f(c) = d$*.*

(14) *Teorema do Ponto Fixo: Se* $f : [a, b] \to [a, b]$ *é contínua, então existe* $c \in [a, b]$ *tal que* $f(c) = c$*.*

Demonstração. Provaremos as implicações na ordem em que foram colocadas.

$\boxed{\text{(1) implica (2)}}$ Tome $C \subseteq K$ um conjunto não vazio limitado superiormente. Seja $B \subseteq K$ o conjunto de cotas superiores de C. Como C é limitado superiormente, B é não vazio. Faça $A = K \setminus B$. Portanto, $K = A \cup B$. Tome $a \in A$ e $b \in B$. Suponha por absurdo que $b \leq a$. Como b é cota superior de A, a também deve ser. Absurdo pois pela definição de B, $a \in B$. Logo $a < b$. Pela Propriedade do Corte, existe $c \in K$ tal que para todo $d \in K \setminus \{c\}$, $d < c$ implica $d \in A$ e $d > c$ implica $d \in B$. Veja que c é o supremo de C:

1. c é cota superior de C: Suponha por absurdo que existe $d \in C$ tal que $c < d$. Como $(d+c)/2 > c$ temos que $(d+c)/2 \in B$. Isto é $(d+c)/2$ é cota superior de C. Absurdo pois $(d+c)/2 < d \in C$.

2. c é a menor das cotas superiores de C: Seja d cota superior de C. Suponha por absurdo que $d < c$. Como $d < c$, $d \in A$. Isto é $d \notin B$. Absurdo pois pela definição de B, d não é cota superior de C. Logo $c \leq d$.

$\boxed{\text{(2) implica (3)}}$ Tome $A \subseteq K$ um conjunto não vazio limitado inferiormente. Seja B o conjunto de cotas inferiores de A. Como A é não vazio, existe $a \in A$. Assim, a é cota superior de B e portanto B é limitado superiormente. Além disso como A é limitado inferiormente, existe $b \in B$. Logo, B é não vazio e limitado superiormente. Pela Propriedade do Supremo, B admite um supremo c. Veja que c é o ínfimo de A:

1. c é cota inferior de A: Suponha por absurdo que exista um $d \in A$ com $d < c$. Absurdo pois d seria uma cota superior de B menor do que c.

2. c é a maior das cotas inferiores de A: Suponha por absurdo que existe outra cota inferior d de A com $c < d$. Como c é cota superior de B, temos que $d \notin B$. Absurdo pois supomos que $d \in B$.

$\boxed{\text{(3) implica (4)}}$ Seja (a_n) uma sequência monótona e limitada em K. Sem perda de generalidade, suponha que (a_n) é não crescente (os outros casos são análogos, basta multiplicar cada termo da sequência por -1 e usar o Teorema 2.5.33). Como (a_n) é limitada, o conjunto $\{a_n\}$ é limitado. Pela Propriedade do Ínfimo, $\{a_n\}$ admite ínfimo a.

Afirmamos que $a_n \to a$: Seja $\varepsilon > 0$. Como a é o ínfimo de $\{a_n\}$, existe $a_N \in \{a_n\}$ tal que $a \leq a_N < a + \varepsilon$. Como (a_n) é não crescente, para todo $n > N$, temos que $a_n \leq a_N$. Assim, para todo $n > N$,

$$a - \varepsilon < a \leq a_n \leq a_N < a + \varepsilon.$$

Isto é, $|a_n - a| < \varepsilon$ para todo $n > N$. Logo, $a_n \to a$.

$\boxed{\text{(4) implica (5)}}$ Seja (a_n) um sequência limitada em K. Observe que qualquer subsequência de (a_n) é limitada. Portanto, por hipótese, basta encontrar uma subsequência monótona de (a_n). Seja a_n um termo qualquer de (a_n). Defina a_n como um pico de (a_n) se $a_n \geq a_m$ para todo $m > n$. Temos dois casos:

1. (a_n) tem uma infinidade de picos $a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots, a_{n_k}, \ldots$ em que $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$. Assim, $a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots, a_{n_k}, \ldots$ é um subsequência monótona não crescente de (a_n).

2. (a_n) tem k picos $a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots, a_{n_k}$ em que $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$. Seja $m_1 = n_k + 1$. Como a_{m_1} não é um pico, existe $m_2 > m_1$ tal que $a_{m_2} > a_{m_1}$. Similarmente como m_2 não é pico, existe $m_3 > m_2$ tal que $a_{m_3} > a_{m_2}$. Continuando assim, obtemos um subsequência $a_{m_1}, a_{m_2}, \ldots, a_{m_k}, \ldots$ monótona crescente de (a_n).

Em ambos casos obtemos uma subsequência monótona e limitada. Logo, pelo Teorema da Sequência Monótona e Limitada, a sequência possui uma subsequência convergente.

$\boxed{\text{(5) implica (6)}}$ Seja (a_n) uma sequência de Cauchy em K. Pelo Teorema 2.5.26, (a_n) é limitada. Por hipótese, (a_n) tem uma subsequência convergente. Finalmente, pelo Teorema 2.5.27, (a_n) converge.

$\boxed{\text{(6) implica (7)}}$ Seja (s_n) a sequência das somas parciais de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e (t_n) as somas parciais de $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Isto é,

$$s_n = \sum_{i=0}^{n} a_i \quad \text{e} \quad t_n = \sum_{i=0}^{n} b_i.$$

Mostraremos que (s_n) é uma sequência de Cauchy e portanto é convergente. Primeiro, veja que, por hipótese, existem $c \in K$ e um natural n_0 tal que para todo $n, m > n_0$,

$$0 \leq |s_m - s_n| \leq |ct_n - ct_m| = |c||t_n - t_m| = c|t_n - t_m|.$$

Como $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é convergente, temos, por definição, que (t_n) é convergente. Pelo Teorema 2.5.25, (t_n) é de Cauchy. Logo, existe um natural n_1 tal que $n, m > n_1$ implica $|t_n - t_m| < \varepsilon/c$.

Tomando $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$, temos que para todo $n, m > n_2$,

$$0 \leq |s_m - s_n| \leq c|t_n - t_m| < c\frac{\varepsilon}{c} = \varepsilon.$$

Isto é, (s_n) é de Cauchy e pela Cauchy-completude, é convergente.

$\boxed{\text{(7) implica (8)}}$ Considere a soma dos m primeiros termos de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$:

$$\begin{aligned} a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_mb_m &= a_1(b_1 - b_2) \\ &+ (a_1 + a_2)(b_2 - b_3) \\ &+ (a_1 + a_2 + a_3)(b_3 - b_4) \\ &\vdots \\ &+ (a_1 + a_2 + \cdots + a_{m-1})(b_{m-1} - b_m) \\ &+ (a_1 + a_2 + \cdots + a_m)b_m. \end{aligned}$$

Denotando as somas parciais de índice n de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ por s_n, temos que

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_mb_m = \left[\sum_{n=2}^{m} s_{n-1}(b_{n-1} - b_n)\right] + s_mb_m.$$

Primeiro trataremos a série. Como, por hipótese, (s_n) é limitada, existe $M > 0$ tal que $|s_n| < M$. Além disso, $\sum_{n=2}^{m}(b_{n-1} - b_n)$ é uma soma telescópica igual a $(b_1 - b_m)$. Por hipótese, $b_n \to 0$, assim, pelo Teorema 2.5.32, $\sum_{n=2}^{\infty}(b_{n-1} - b_n)$ converge para b_1. Logo $\sum_{n=2}^{\infty} s_{n-1}(b_{n-1} - b_n)$ é uma série convergente. Agora trataremos o segundo termo. Como (s_n) é limitada e $b_n \to 0$, pelo Teorema 2.5.31, $(s_n b_n) \to 0$. Finalmente, concluímos que $(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots a_n b_n)$ é convergente e vale o Teste de Dirichlet.

$\boxed{\text{(8) implica (9)}}$ Pois as somas parciais de $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$ são 1 ou 0 e portanto são limitadas. Logo, basta tomar $a_n = (-1)^{n+1}$ na hipótese do Teste de Dirichlet para obter o Teste da Série Alternada.

$\boxed{\text{(9) implica (10)}}$ Sejam $[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq \cdots \supseteq [a_n, b_n] \supseteq \cdots$ com $(b_n - a_n) \to 0$. Defina $c_{2n-1} = (b_n - a_n)$ e $c_{2n} = (b_n - a_{n+1})$. Considere a série $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} c_n$. Assim,

$$\begin{aligned} c_{2n-1} - c_{2n} &= (b_n - a_n) - (b_n - a_{n+1}) = a_{n+1} - a_n \geq 0, \\ c_{2n} - c_{2n+1} &= (b_n - a_{n+1}) - (b_{n+1} - a_{n+1}) = (b_n - b_{n+1}) \geq 0. \end{aligned}$$

Portanto, a sequência (c_n) é não crescente. Além disso, como $b_n \geq a_n$, $0 \leq (b_n - a_n) = c_{2n-1}$ e $0 \leq (b_n - a_{n+1}) = c_{2n}$, temos que $0 \leq c_n$. Logo, pelo Teste da Série Alternada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} c_n$ converge para algum $S \in K$.

Denotando as somas parciais de índice n de $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} c_n$ por s_n temos que

$$0 \leq s_2 \leq s_4 \leq \cdots \leq s_{2n} \leq \cdots \leq S \leq \cdots \leq s_{2n-1} \leq \cdots \leq s_3 \leq s_1.$$

Somando a_1 a todos os termos da desigualdade acima, obtemos que

$$\begin{aligned} a_1 + 0 &\leq a_1 + s_2 \leq a_1 + s_4 \leq \cdots \leq a_1 + s_{2n} \leq \cdots \\ &\leq a_1 + S \\ &\leq \cdots \leq a_1 + s_{2n-1} \leq \cdots \leq a_1 + s_3 \leq a_1 + s_1. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Agora veja que:

$$\begin{aligned} a_1 + s_1 &= a_1 + (b_1 - a_1) = b_1, \\ a_1 + s_2 &= a_1 + (b_1 - a_1) - (b_1 - a_2) = a_2, \\ a_1 + s_3 &= a_1 + (b_1 - a_1) - (b_1 - a_2) + (b_2 - a_2) = b_2, \\ &\vdots \\ a_1 + s_{2n-1} &= b_n, \\ a_1 + s_{2n} &= a_{n+1}. \end{aligned}$$

Substituindo em (3.1), obtemos que

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots \leq a_1 + S \leq \cdots \leq b_n \leq \cdots \leq b_2 \leq b_1.$$

Ou seja, $a_1 + S \in \cap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$ e vale a Propriedade dos Intervalos Encaixados.

$\boxed{\text{(10) implica (11)}}$ Suponha por absurdo que existe um conjunto $A \subseteq K$ não vazio diferente de K tal que A é aberto e fechado. Seja B o complemento de A. Note que B também é aberto, fechado e não vazio. Assim, $K = A \cup B$ com $\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \emptyset$.

Tome $a_1 \in A$ e $b_1 \in B$. Sem perda de generalidade suponha que $a_1 < b_1$. Seja c_1 o ponto médio de a_1 e b_1. Temos dois casos:

1. Caso $c_1 \in A$. Faça $a_2 = c_1$ e $b_2 = b_1$.

2. Caso $c_1 \in B$. Faça $a_2 = a_1$ e $b_2 = c_1$.

Em ambos os casos obtemos um intervalo $[a_2, b_2] \subseteq [a_1, b_1]$ com $b_2 - a_2 = (b_1 - a_1)/2$. Repetindo o processo obtemos uma sequência de intervalos encaixados $[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq \cdots \supseteq [a_n, b_n] \supseteq \cdots$ com $(b_n - a_n) \to 0$ (já que K é arquimediano). Pela Propriedade dos Intervalos Encaixados, temos que existe $c \in \cap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$. Isto é, $a_1 \leq a_2 \leq \cdots a_n \leq \cdots \leq c \leq \cdots \leq b_n \leq \cdots \leq b_2 \leq b_1$. Em particular, $c \in [a_1, b_1]$. Como $K = A \cup B$, $c \in A$ ou $c \in B$.

Veja agora que $b_n \to c$: Seja $\varepsilon > 0$. Como $(b_n - a_n) \to 0$, existe um natural N tal que $|b_n - a_n| = |b_n - a_n - 0| < \varepsilon$ para todo $n > N$. Assim para $n > N$, $|b_n - c| < |b_n - a_n| < \varepsilon$.

Como $b_n \to c$, pelo Teorema 2.5.8, $c \in \overline{B}$. Similarmente, temos que $a_n \to c$ e $c \in A$. Absurdo pois $\overline{A} \cap B = A \cap B = A \cap \overline{B} = \emptyset$. Logo não existe um subconjunto $A \subseteq K$ aberto e fechado e vale a Conexidade em Espaços Topológicos.

$\boxed{\text{(11) implica (12)}}$ Considere os conjuntos

$$A = \{x \in [a, b] \mid f(x) \leq 0\},$$
$$B = \{x \in [a, b] \mid f(x) \geq 0\}.$$

Como $f(a)$ e $f(b)$ tem sinais opostos, temos que A e B são não vazios. Como f é contínua, temos pelo Teorema 2.4.15 que A e B são fechados. Logo $[a, b] = A \cup B = \overline{A} \cup B = A \cup \overline{B}$. Portanto, por hipótese, a interseção $A \cap B$ não pode ser vazia e existe $c \in A \cap B$. Isto é, existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = 0$. Como $f(a) \neq 0$ e $f(b) \neq 0$, temos que $c \in (a, b)$ e vale o Teorema do Anulamento.

$\boxed{\text{(12) implica (13)}}$ Sem perda de generalidade suponha que $f(a) < d < f(b)$.

Pelo Teorema 2.4.9 a função $g : K \to K$ dada por $g(x) = -d$ é contínua. Pelo Teorema 2.4.17, a função $h : [a, b] \to K$ dada por

$$h(x) = f(x) - d$$

é contínua. Assim, $h(a) = f(a) - d < 0$ e $h(b) = f(b) - d > 0$. Logo, pelo Teorema do Anulamento, existe $c \in (a, b)$ tal que $h(c) = 0$. Isto é, $0 = h(c) = f(c) - d$. Logo, $f(c) = d$.

$\boxed{\text{(13) implica (14)}}$ Pelo Teorema 2.4.13, a função $g_1 : [a,b] \to K$ dada por $g_1(x) = f(x)$ é contínua. Pelos teoremas 2.4.10, 2.4.18 e 2.4.11, a função $g_2 : [a,b] \to K$ dada por $g_2(x) = -x$ é contínua. Pelo Teorema 2.4.17, a função $h : [a,b] \to K$ dada por

$$h(x) = f(x) - x$$

é contínua. Agora, temos dois casos:

1. Caso $f(a) = a$.

2. Caso $f(a) > a$. Novamente, temos dois casos:

   a) Caso $f(b) = b$.

   b) Caso $f(b) < b$. Como $f(a) > a$, $h(a) = f(a) - a > 0$. Como $f(b) < b$, $h(b) = f(b) - b < 0$. Pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $c \in (a,c)$ tal que $h(c) = 0$. Isto é, $f(c) = c$.

$\boxed{\text{(14) implica (1)}}$ Provaremos pela contrapositiva. Suponha que existam dois conjuntos A e B não vazios e disjuntos com $K = A \cup B$ e

$$a < b \text{ para todo } a \in A \text{ e } b \in B \tag{3.2}$$

tal que não existe $c \in K$ tal que

$$\text{para todo } d \in K \setminus \{c\},\ d < c \text{ implica } d \in A \text{ e } d > c \text{ implica } d \in B. \tag{3.3}$$

Afirmamos que A e B são fechados: Primeiro mostraremos que A é fechado. Pelo Teorema 2.3.25, basta mostrar que $A' \subseteq A$. De fato, tome $d \in A'$. Suponha por absurdo que $d \notin A$. Isto é, $d \in B$. Agora tome $e \in K \setminus \{d\}$. Temos dois casos:

1. $d < e$: Suponha por absurdo que $e \in A$. Absurdo por (3.2). Logo, $e \notin A$. Como $K = A \cup B$, temos que $e \in B$.

2. $e < d$: Suponha por absurdo que $e \in B$. Como $d \in A'$, existe i em $(e, d+1) \cap A$. Mas $e < i$. Absurdo por (3.2). Logo, $e \notin B$. Como $K = A \cup B$, temos que $e \in A$.

Pelo visto acima, d atende (3.3). Absurdo. Logo $d \in A$ e A é fechado. Similarmente, temos que B é fechado.

Como A e B são não vazios, tome $a \in A$ e $b \in B$. Agora, considere as funções $f : K \to K$ dada por $f(x) = b$, $g : K \to K$ dada por $g(x) = a$ e $h : K \to K$ dada por

$$h(x) = \begin{cases} b & \text{se } x \in A, \\ a & \text{se } x \in B. \end{cases}$$

Pelo Teorema 2.4.9, f e g são contínuas. Pelo Teorema 2.4.11, as restrições de f e g, respectivamente, aos conjuntos A e B são contínuas. Assim, pelo Lema da Colagem (Teorema 2.4.14), h é contínua. Logo, temos uma função h contínua em que não vale a tese do Teorema do Valor Fixo e a contrapositiva está provada. $\square$

Definição 3.2.2. Um conjunto ordenado K é **Dedekind-completo** se em K vale a Propriedade do Supremo.

Definição 3.2.3. Um corpo ordenado K é **Cauchy-completo** se em K toda sequência de Cauchy converge.

Exemplo 3.2.4. O anel $\mathbb{Z}$ é ordenado arquimediano e Dedekind-completo mas não é um corpo.

Exemplo 3.2.5. O corpo $\mathbb{C}$ é Cauchy-completo (usando a definição de sequência de Cauchy de Espaços Métricos) mas não é ordenado.

Exemplo 3.2.6. O subconjunto $\{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Q}\} \subseteq \mathbb{C}$ induz um subanel que é um corpo não ordenado e não Cauchy-completo (usando a definição de sequência de Cauchy de Espaços Métricos).

Exemplo 3.2.7. O corpo $\mathbb{Q}$ é ordenado arquimediano mas não é Dedekind-completo nem Cauchy-completo.

Exemplo 3.2.8. O corpo do Exemplo 3.1.18 é um corpo ordenado não arquimediano não Dedekind-completo e não Cauchy-completo.

Exemplo 3.2.9. O corpo $\mathbb{R}$ é ordenado arquimediano Dedekind-completo e Cauchy-completo.

Exemplo 3.2.10. Seja $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \sin(1/x) & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Veja que f é um contraexemplo que mostra que a reciproca do Teorema do Valor Intermediário não é verdadeira.

O próximo teorema relaciona a Propriedade do Supremo com a Propriedade Arquimediana.

Teorema 3.2.11. *Seja K um corpo ordenado. Os itens* (1), (2), (3), (4), (5), (11), (12), (13) *do Teorema 3.2.1 implicam a Propriedade Arquimediana.*

Demonstração. Na demonstração do Teorema 3.2.1, a Propriedade Arquimediana não é utilizada nas implicações (11) $\implies$ (12) $\implies$ (13) $\implies$ (1) $\implies$ (2) $\implies$ (3) $\implies$ (4) $\implies$ (5). Portanto, basta mostrar que (5) implica a Propriedade Arquimediana.

Seja K um corpo ordenado em que vale a Teorema de Bolzano-Weierstrass. Suponha por absurdo que K não é arquimediano. Considere a sequência (a_n) com $a_n = n_K$. Como K não é arquimediano, (a_n) é limitada. Pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, existe uma subsequência (b_n) de (a_n) que converge. Isto é, $b_n \to b \in K$.

Tome $\varepsilon = 1 > 0$. Assim, existe um natural N tal que $|b_n - b| < 1$ para $n \geq N$. Em particular, $|b_N - b| < 1$ e $|b_{N+2} - b| < 1$. Por definição, $|b_N - b_{N+2}| \geq 2_K$. Absurdo pois pelo Teorema 2.2.23,

$$2_K \leq |b_N - b_{N+2}| \leq |b_N - b| + |b - b_{N+2}| < 2_K.$$

Logo K é arquimediano. □

Corolário 3.2.12. *Todo corpo ordenado Dedekind-completo é arquimediano.*

Finalizamos esta seção com algumas consequências da Propriedade do Supremo.

Exemplo 3.2.13. Podemos determinar a existência de um $a \in \mathbb{R}$ tal que $a^2 = 2$ usando as propriedades do Teorema 3.2.1:

1. Usando conjuntos: Considere o conjunto $\{a \in \mathbb{R} \mid a^2 \leq 2\}$.

2. Usando sequências: Considere a sequência $a_1 = 2$ e $a_n = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{a_n}$.

3. Usando funções: Considere a função $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2 - 2$.

Teorema 3.2.14. *O c na Propriedade dos Intervalos Encaixados é único.*

Demonstração. Sem perda de generalidade, suponha que existem c_1 e c_2 em $\cap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$ com $c_1 < c_2$. Assim,

$$a_n \leq c_1 < c_2 \leq b_n$$

para todo n. Logo, $b_n - a_n \geq c_2 - c_1 \neq 0$ para todo n. Absurdo pois $(b_n - a_n) \to 0$. □

Teorema 3.2.15. *Seja K um corpo ordenado. Se K é Dedekind-completo, então K é isomorfo aos reais.*

Demonstração. (SPIVAK, 2008, p. 603). □

Exemplo 3.2.16. Veja que $(\mathbb{R}^+, \cdot, \uparrow)$ tal que $\cdot$ é o produto usual e $a \uparrow b$ é dado por $a^{\ln(b)}$ em que ln é o logaritmo natural é um corpo ordenado (com a ordem usual) Dedekind-completo. Logo, pelo Teorema 3.2.15, $(\mathbb{R}^+, \cdot, \uparrow)$ é isomorfo aos reais. De fato, um isomorfismo de corpos ordenados é dado por $f(x) = e^x$ em que e é o limite da sequência $(1 + 1/n)^n$.

3.3 COMPACIDADE

Nesta seção demonstraremos a equivalência de propriedades que envolvem a noção de compacidade.

Definição 3.3.1. Uma coleção $\mathcal{C}$ de subconjuntos de um espaço topológico X é uma **cobertura** de X se a união de todos os conjuntos de $\mathcal{C}$ é igual à X. Se todo $U \in \mathcal{C}$ é aberto, $\mathcal{C}$ é denominada uma **cobertura aberta**.

Definição 3.3.2. Um espaço topológico X é um <u>**espaço compacto**</u> se toda cobertura aberta de X contém uma subcoleção finita que também é cobertura de X.

Teorema 3.3.3. *Todo corpo ordenado arquimediano K é não compacto.*

Demonstração. Como K é arquimediano, $\mathcal{C} = \{(-n_K, n_K) \mid n_K \in \mathbb{N}_K\}$ é uma cobertura de K que não possui subcobertura finita que cobre K. $\square$

Teorema 3.3.4. *Um subespaço Y de X é compacto se, e somente se, toda coleção $\mathcal{C}$ de abertos de X tal que Y está contido na união de todos os conjuntos de $\mathcal{C}$ possui uma subcoleção finita $U_1, U_2, \ldots, U_n$ tal que $Y \subseteq (U_1 \cup \cdots \cup U_n)$.*

Demonstração. (MUNKRES, 2000, p. 164) $\square$

Teorema 3.3.5. *Seja X um espaço Hausdorff. Se $Y \subseteq X$ é compacto, então Y é fechado em X.*

Demonstração. (MUNKRES, 2000, p. 165). $\square$

Teorema 3.3.6. *Seja K um corpo ordenado. Se $A \subseteq K$ é compacto, então A é limitado.*

Demonstração. Seja A um conjunto compacto. Considere a cobertura aberta

$$A \subseteq \cup_{a \in A}(a-1, a+1).$$

Como A é compacto, existem $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tais que

$$A \subseteq (a_1 - 1, a_1 + 1) \cup \cdots \cup (a_n - 1, a_n + 1).$$

Faça $m = \min\{a_1 - 1, \ldots, a_n - 1\}$ e $M = \max\{a_1 + 1, \ldots, a_n + 1\}$. Assim, $A \subseteq (m, M)$ e A é limitado. $\square$

Corolário 3.3.7. *Seja K um corpo ordenado. Todo conjunto compacto em K é fechado e limitado.*

Teorema 3.3.8. *Sejam X compacto e $Y \subseteq X$. Se Y é fechado, então Y é compacto.*

Demonstração. (MUNKRES, 2000, p. 165). $\square$

Teorema 3.3.9. *Seja $f : X \to Y$ uma função contínua. Se X é compacto, então $f(X)$ é compacto.*

Demonstração. (MUNKRES, 2000, p. 166). $\square$

Teorema 3.3.10. *Sejam X um espaço topológico compacto e Y um conjunto ordenado munido da topologia da ordem. Se a função $f : X \to Y$ é contínua, então existem a e b em X tais que $f(a) \leq f(c) \leq f(b)$ para todo $c \in X$.*

Demonstração. Como f é contínua e X é compacto, pelo Teorema 3.3.9, $A = f(X)$ é compacto. Suponha por absurdo que A não admite máximo. Logo, a coleção

$$\{(-\infty, c) \mid c \in A\}$$

é uma cobertura aberta de A. Como A é compacto, existe existem $c_1, \ldots, c_n$ em A tais que

$$A \subseteq B = ((-\infty, c_1) \cup \cdots \cup (-\infty, c_n)).$$

Tome $c_i = \max\{c_1, \ldots, c_n\}$. Absurdo pois $c_i \in A \subseteq B$ mas $c_i \notin B$. Logo A admite máximo. Isto é, existe $b \in X$ tal que $f(c) \leq f(b)$ para todo $c \in X$. Similarmente podemos demonstrar que A admite mínimo e concluir que existe $a \in X$ tal que

$$f(a) \leq f(c) \leq f(b)$$

para todo $c \in X$, como desejado. □

Teorema 3.3.11. *Seja K um corpo ordenado arquimediano. Os seguintes itens são equivalentes:*

(10) Propriedade dos Intervalos Encaixados: Se $[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq \cdots \supseteq [a_n, b_n] \supseteq \cdots$ e $(b_n - a_n) \to 0$, então existe $c \in \cap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$.

(15) Teorema de Heine-Borel: Todo conjunto fechado e limitado é compacto.

(16) Teorema do Valor Extremo: Seja $A \subseteq K$ não vazio, fechado e limitado. Se $f : A \to K$ é contínua, então existe a em A com $f(b) \leq f(a)$ para todo $b \in A$.

Demonstração. $\boxed{\text{(10) implica (15)}}$ Seja $A \subseteq K$ fechado e limitado. Como A é limitado existem a e $b \in K$ tais que $A \subseteq (a, b) \subset [a, b]$. Pelo Teorema 3.3.8, basta mostrar que $[a, b]$ é compacto. Suponha por absurdo que $[a, b]$ não é compacto. Pelo Teorema 3.3.4, existe uma cobertura aberta $\mathcal{C}$ tal que não existe uma subcoleção finita de $\mathcal{C}$ que é cobertura de $[a, b]$. Seja c_1 o ponto médio de $a_1 = a$ e $b_1 = b$. Temos dois casos (não excludentes):

1. Caso $[a_1, c_1]$ não seja coberto por uma subcoleção finita de $\mathcal{C}$. Faça $a_2 = a_1$ e $b_2 = c_1$.

2. Caso $[c_1, b_1]$ não seja coberto por uma subcoleção finita de $\mathcal{C}$. Faça $a_2 = c_1$ e $b_2 = b_1$.

Em ambos os casos obtemos um intervalo $[a_2, b_2]$ que não é coberto por uma subcoleção finita de $\mathcal{C}$ com $b_2 - a_2 = (b_1 - a_1)/2$. Repetindo o processo obtemos uma sequência de intervalos encaixados $[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq \cdots \supseteq [a_n, b_n] \supseteq \cdots$ com $(b_n - a_n) \to 0$ (já que K é arquimediano). Pela Propriedade dos Intervalos Encaixados, temos que existe $c \in \cap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$.

Como $c \in [a, b]$ e $\mathcal{C}$ é cobertura de $[a, b]$, existe um aberto $U \in \mathcal{C}$ com $c \in U$. Como $c \in U$ e U é aberto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $(c - \varepsilon, c + \varepsilon) \subseteq U$. Como $(b_n - a_n) \to 0$, existe N tal que $(b_N - a_N) < \varepsilon$. Isto é, $[a_n, b_n] \subseteq (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$. Absurdo pois $[a_n, b_n]$ não pode ser coberto por um subcoleção finita de $\mathcal{C}$ mas $[a_n, b_n] \subseteq U \in \mathcal{C}$ que é apenas um conjunto de $\mathcal{C}$. Logo, $[a, b]$ é compacto.

$\boxed{\text{(15) implica (16)}}$ Pelo Teorema 3.3.10.

$\boxed{\text{(16) implica (10)}}$ Pelo Teorema 3.2.1, basta mostrar que (16) implica a Propriedade do Corte. Procedemos de maneira análoga à prova de que (14) implica (1) na demonstração do Teorema 3.2.1 e provaremos a contrapositiva. Suponha que existam dois conjuntos A e B não vazios e disjuntos com $K = A \cup B$ e

$$a < b \text{ para todo } a \in A \text{ e } b \in B \tag{3.4}$$

tal que não existe $c \in K$ tal que

$$\text{para todo } d \in K \setminus \{c\},\ d < c \text{ implica } d \in A \text{ e } d > c \text{ implica } d \in B. \tag{3.5}$$

Como visto anteriormente, temos que A e B são fechados. Como A é não vazio, existe $a \in A$. Agora, considere a função $f : K \to K$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in A, \\ a & \text{se } x \in B. \end{cases}$$

Pelo Lema da Colagem, f é contínua. Como B é não vazio, existe $b \in B$. Seja g a restrição de f ao intervalo $[a, b]$. Como A é aberto (já que B é fechado e é o complemento de A), g não possui máximo e a contrapositiva está provada. $\square$

A seguir, apresentamos uma prova alternativa que permite estender o caminho fechado de dominós feito na seção anterior.

Teorema 3.3.12. *Seja K um corpo ordenado. Se em K vale o:*

(16) Teorema do Valor Extremo: Seja $A \subseteq K$ não vazio, fechado e limitado. Se $f : A \to K$ é contínua, então existe a em A com $f(b) \leq f(a)$ para todo $b \in A$.

Então, em K vale o:

(12) Teorema do Anulamento: Se $f : [a, b] \to K$ é contínua tal que $f(a)$ e $f(b)$ tem sinais opostos, então existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

Demonstração. Seja $f : [a, b] \to K$ contínua. Sem perda de generalidade suponha que $f(a) < 0 < f(b)$. Considere o conjunto

$$A = f^{-1}((-\infty, 0]) = \{c \in [a, b] \mid f(c) \leq 0\}.$$

Ilustramos o conjunto A para uma função real na Figura 3.

Como f é contínua e $(-\infty, 0]$ é fechado, temos que A é fechado em $[a, b]$. Como $A \subseteq [a, b]$, A é limitado e fechado em K. Como $a \in A$, A é não vazio.

Defina a função $g : A \to K$ dada por $g(x) = x$. Pelo Teorema do Valor Extremo, existe $c \in A$ tal que $g(d) \leq g(c)$ para todo $d \in A$.

Como $c \in A$, $f(c) \leq 0$. Logo $c \neq b$ e $c \in [a, b)$. Suponha por absurdo que $f(c) < 0$. Pela Permanência de Sinal (Teorema 2.4.19), existe $\delta > 0$ tal que $c + \delta \in A$. Absurdo pois $g(c + \delta) = c + \delta > c$. Pela Tricotomia (Teorema 2.2.9), $f(c) = 0$.

Além disso, como $f(a) < 0$, temos que $c \neq a$. Logo $c \in (a, b)$ e vale o Teorema do Anulamento. □

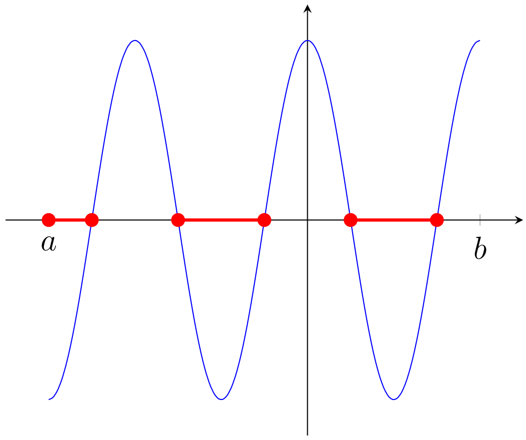

Figura 3 – Conjunto A da demonstração do Teorema 3.3.12 em que f é a função real $\cos(x)$ restrita ao intervalo $[-3\pi, 2\pi]$. A função está em azul e os pontos do conjunto estão em vermelho. Fonte: elaborada pelo autor.

3.4 SÉRIES FORMAIS DE LAURENT

Até agora vimos um exemplo de corpo ordenado não arquimediano e não Cauchy-completo (Exemplo 3.1.18), um exemplo de corpo ordenado arquimediano não Cauchy-completo (os racionais) e um exemplo de corpo ordenado arquimediano Cauchy-completo (os reais). Nesta seção, veremos um exemplo de corpo ordenado não arquimediano Cauchy-completo.

Observação 3.4.1. Mais adiante, veremos porque mesmo utilizando os reais em vez dos racionais no Exemplo 3.1.18 ainda obtemos um corpo não Cauchy-completo.

Definição 3.4.2. Uma **série formal de Laurent** sobre um corpo K é uma expressão da forma

$$\cdots + \frac{c_{-i}}{t^i} + \cdots + \frac{c_{-2}}{t^2} + \frac{c_{-1}}{t} + c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \cdots + c_j t^j + \cdots$$

em que $c_n = f(n)$ com $f : \mathbb{Z} \to K$, t é uma variável livre e existe um inteiro N tal que $c_n = 0$ para todo $n < N$.

Notação 3.4.3. Denotaremos uma série formal de Laurent por $c = \sum_{n=N} c_n t^n$ e denotaremos o conjunto das séries formais de Laurent sobre K por $K((t))$. Além disso, dizemos que c_n é o coeficiente de grau n de c.

Observe que quando a série possui pelo menos um termo não nulo, temos um N mínimo tal que $c_n \neq 0$.

Definição 3.4.4. Seja $a = \sum_{n=N} a_n t^n$ uma série formal de Laurent tal que existe $a_n \neq 0$. A **ordem** de a, denotada por $\operatorname{ord}(a)$, é o o menor inteiro n tal que $a_n \neq 0$.

Podemos definir a soma e o produto de duas séries de Laurent a partir da soma e produto de K.

Definição 3.4.5. Sejam $a = \sum_{n=N_1} a_n t^n$ e $b = \sum_{n=N_2} b_n t^n$ séries formais de Laurent. A soma de a e b é

$$a + b = \sum_{n=\min\{N_1,N_2\}} (a_n + b_n)t^n.$$

O produto de a e b é

$$a \cdot b = \sum_{n=N_1+N_2} \left(\sum_{i+j=n} a_i b_j \right) t^n.$$

Note que a soma $\sum_{i+j=n} a_i b_j$ interna do produto sempre possui um número finito de termos não nulos e portanto sempre está bem definida (é por isso que exigimos que exista um N mínimo nas condições da Definição 3.4.2).

Embora seja tedioso, demonstraremos que $K((t))$ é de fato um corpo ordenado.

Teorema 3.4.6. *$K((t))$ é um corpo.*

Demonstração. Para evitar ambiguidades, denote o elemento neutro da soma de K por 0_K e o elemento neutro do produto por 1_K. Nesta prova, para economizar espaço em branco, teremos algumas sucessões de igualdades divididas por quebras de página.

Tome a, b e $c \in K((t))$. Assim, existem inteiros N_1, N_2 e N_3 tais que

$$\begin{aligned} a &= \sum_{n=N_1} a_n t^n, \\ b &= \sum_{n=N_2} b_n t^n, \\ c &= \sum_{n=N_3} c_n t^n. \end{aligned}$$

Mostraremos que em $K((t))$ vale cada um dos axiomas de corpo.

$\boxed{\text{Associatividade da soma}}$

$$\begin{aligned} (a+b)+c &= \left(\sum_{n=\min\{N_1,N_2\}} (a_n + b_n)t^n \right) + \sum_{n=N_3} c_n t^n \\ &= \sum_{n=\min\{\min\{N_1,N_2\},N_3\}} ((a_n + b_n) + c_n)t^n \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=\min\{N_1,N_2,N_3\}} ((a_n+b_n)+c_n)t^n \\
&= \sum_{n=\min\{N_1,\min\{N_2,N_3\}\}} ((a_n+b_n)+c_n)t^n \\
&= \sum_{n=\min\{N_1,\min\{N_2,N_3\}\}} (a_n+(b_n+c_n))t^n \\
&= \sum_{n=N_1} a_nt^n + \left(\sum_{n=\min\{N_2,N_3\}} (b_n+c_n)t^n\right) \\
&= a+(b+c).
\end{aligned}
$$

$\boxed{\text{Elemento neutro}}$ Podemos definir o elemento neutro da soma em $K((t))$ como $0_{K((t))} \coloneqq \sum_{n=N} 0_K t^n$ em que N é qualquer. Assim,

$$
\begin{aligned}
a + 0_{K((t))} &= \sum_{n=N_1} a_nt^n + \sum_{n=N_1} 0_Kt^n \\
&= \sum_{n=N_1} (a_n+0_K)t^n \\
&= \sum_{n=N_1} a_nt^n \\
&= a.
\end{aligned}
$$

$\boxed{\text{Axioma do inverso aditivo}}$ Defina $-a \coloneqq \sum_{n=N_1}(-a_n)t^n$. Assim,

$$
\begin{aligned}
a+(-a) &= \sum_{n=N_1} a_nt^n + \sum_{n=N_1} (-a_n)t^n \\
&= \sum_{n=N_1} (a_n-a_n)t^n \\
&= \sum_{n=N_1} 0_Kt^n \\
&= 0_{K((t))}.
\end{aligned}
$$

$\boxed{\text{Comutatividade da soma}}$

$$
\begin{aligned}
a+b &= \sum_{n=\min\{N_1,N_2\}} (a_n+b_n)t^n \\
&= \sum_{n=\min\{N_2,N_1\}} (a_n+b_n)t^n \\
&= \sum_{n=\min\{N_1,N_2\}} (b_n+a_n)t^n \\
&= b+a.
\end{aligned}
$$

$\boxed{\text{Associatividade do produto}}$

$$
(a\cdot b)\cdot c = \left[\sum_{n=N_1+N_2}\left(\sum_{i+j=n} a_ib_j\right)t^n\right]\cdot\left(\sum_{n=N_3} c_nt^n\right)
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=(N_1+N_2)+N_3} \left[\sum_{k+l=n} \left(\sum_{i+j=k} a_i b_j \right) c_l \right] t^n \\
&= \sum_{n=(N_1+N_2)+N_3} \left[\sum_{k+l=n} \left(\sum_{i+j=k} a_i b_j c_l \right) \right] t^n \\
&= \sum_{n=N_1+(N_2+N_3)} \left[\sum_{k+l=n} \left(\sum_{i+j=k} a_i b_j c_l \right) \right] t^n \\
&= \sum_{n=N_1+(N_2+N_3)} \left(\sum_{i+j+l=n} a_i b_j c_l \right) t^n \\
&= \sum_{n=N_1+(N_2+N_3)} \left[\sum_{i+m=n} \left(\sum_{j+l=m} a_i b_j c_l \right) \right] t^n \\
&= \sum_{n=N_1+(N_2+N_3)} \left[\sum_{i+m=n} a_i \left(\sum_{j+l=m} b_j c_l \right) \right] t^n \\
&= \left(\sum_{n=N_1} a_n t^n \right) \left[\sum_{n=N_2+N_3} \left(\sum_{j+l=n} b_j c_l \right) t^n \right] \\
&= a \cdot (b \cdot c).
\end{aligned}
$$

$\boxed{\text{Distributividade a esquerda}}$

$$
\begin{aligned}
a \cdot (b+c) &= \left[\sum_{n=N_1} a_n t^n \right] \cdot \left(\sum_{n=\min\{N_2,N_3\}} (b_n + c_n) t^n \right) \\
&= \sum_{n=N_1+\min\{N_2,N_3\}} \left[\sum_{i+j=n} a_i (b_j + c_j) \right] t^n \\
&= \left[\sum_{n=N_1+\min\{N_2,N_3\}} \left(\sum_{i+j=n} a_i b_j \right) t^n \right] + \left[\sum_{n=N_1+\min\{N_2,N_3\}} \left(\sum_{i+j=n} a_i c_j \right) t^n \right] \\
&= \left[\sum_{n=N_1+N_2} \left(\sum_{i+j=n} a_i b_j \right) t^n \right] + \left[\sum_{n=N_1+N_3} \left(\sum_{i+j=n} a_i c_j \right) t^n \right] \\
&= (a \cdot b) + (a \cdot c).
\end{aligned}
$$

A distributividade à direita é provada de forma análoga.

Pelo visto até agora, $K((t))$ é um anel.

$\boxed{\text{Comutatividade do produto}}$

$$
\begin{aligned}
a \cdot b &= \sum_{n=N_1+N_2} \left(\sum_{i+j=n} a_i b_j \right) t^n \\
&= \sum_{n=N_1+N_2} \left(\sum_{i+j=n} b_j a_i \right) t^n
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=N_2+N_1} \left(\sum_{i+j=n} b_j a_i \right) t^n \\
&= \sum_{n=N_2+N_1} \left(\sum_{j+i=n} b_j a_i \right) t^n \\
&= b \cdot a.
\end{aligned}
$$

$\boxed{\text{Elemento neutro do produto}}$ Defina $1_{K((t))} := \sum_{n=0} u_n t^n$ em que $u_0 = 1_K$ e $u_n = 0_K$ para todo $n \neq 0$. Note que $0_{K((t))} \neq 1_{K((t))}$. Assim,

$$
\begin{aligned}
a \cdot 1_{K((t))} &= \sum_{n=N_1+0} \left(\sum_{i+j=n} a_i u_j \right) t^n \\
&= \sum_{n=N_1+0} a_n t^n \\
&= \sum_{n=N_1} a_n t^n \\
&= a.
\end{aligned}
$$

Pelo Teorema 2.1.44, só resta mostrar que vale o

$\boxed{\text{Inverso multiplicativo}}$ Supondo que $a \neq 0$ e denotando N_1 por N (para simplificar a notação), temos que

$$a = a_N t^N + a_{N+1} t^{N+1} + \cdots .$$

Vamos definir o inverso multiplicativo de a de forma recursiva. De acordo com a unidade $1_{K((t))}$ que obtemos acima, queremos um $d \in K((t)) \setminus \{0\}$ tal que

$$ad = (a_N t^N + a_{N+1} t^{N+1} + \cdots)(d_M t^M + d_{M+1} t^{M+1} + \cdots) = 1 + 0t + 0t^2 + \cdots$$

em que $M = \operatorname{ord}(d)$. Primeiro veja que fazendo $M = -N$ e fazendo $d_N = a_N^{-1}$, obtemos

$$
\begin{aligned}
(a_N t^N + a_{N+1} t^{N+1} + \cdots)(d_{-N} t^{-N}) &= (a_N t^N + a_{N+1} t^{N+1} + \cdots)(a_N^{-1} t^{-N}) \\
&= a_N a_N^{-1} t^N t^{-N} + a_{N+1} a_N^{-1} t^{N+1} t^{-N} + \cdots \\
&= 1 + a_{N+1} a_N^{-1} t + \cdots .
\end{aligned}
$$

Agora precisamos anular os outros coeficientes de ad. Para isso, precisamos determinar d_{-N+1}. Veja que

$$
\begin{aligned}
&(a_N t^N + a_{N+1} t^{N+1} + \cdots)(d_{-N} t^{-N} + d_{-N+1} t^{-N+1}) \\
&= (1 + a_{N+1} a_N^{-1} t + \cdots) + (a_N d_{-N+1} t^N t^{-N+1} + a_{N+1} d_{-N+1} t^{N+1} t^{-N+1} + \cdots) \\
&= (1 + a_{N+1} a_N^{-1} t + \cdots) + (a_N d_{-N+1} t + a_{N+1} d_{-N+1} t^2 + \cdots)
\end{aligned}
$$

Ou seja, precisamos que

$$a_{N+1} a_N^{-1} + a_N d_{-N+1} = 0.$$

Para isso, basta fazer

$$d_{-N+1} = \frac{-a_{N+1}a_N^{-1}}{a_N}.$$

Continuando dessa maneira é possível obter todos os coeficientes de d. Para ilustrar ainda mais, vamos determinar d_{-N+2}: Veja que

$$\begin{aligned}
&(a_N t^N + a_{N+1}t^{N+1} + a_{N+2}t^{N+2} + \cdots)(d_{-N}t^{-N} + d_{-N+1}t^{-N+1} + d_{-N+2}t^{-N+2}) \\
&= (1 + a_{N+1}a_N^{-1}t + a_{N+2}a_N^{-1}t^2 \cdots) \\
&+ (-a_{N+1}a_N^{-1}t + a_{N+2}\frac{-a_{N+1}a_N^{-1}}{a_N}t^2 + \cdots) \\
&+ (a_N d_{-N+2}t^N t^{-N+2} + a_{N+1}d_{-N+2}t^{N+2}t^{-N+1} + \cdots) \\
&= (1 + a_{N+1}a_N^{-1}t + a_{N+2}a_N^{-1}t^2 \cdots) \\
&+ (-a_{N+1}a_N^{-1}t + a_{N+2}\frac{-a_{N+1}a_N^{-1}}{a_N}t^2 + \cdots) \\
&+ (a_N d_{-N+2}t^2 + a_{N+1}d_{-N+2}t^3 + \cdots).
\end{aligned}$$

Pelo visto acima, precisamos fazer com que

$$a_{N+2}a_N^{-1} + a_{N+2}\frac{-a_{N+1}a_N^{-1}}{a_N} + a_N d_{-N+2} = 0.$$

Isto é, fazer

$$d_{-N+2} = -\left[a_{N+2}a_N^{-1} + a_{N+2}\frac{-a_{N+1}a_N^{-1}}{a_N}\right]/a_N.$$

Para exemplificar as fórmulas obtidas acima, vamos calcular os primeiros coeficientes do inverso de

$$a = 1 + t + t^2.$$

Substituindo $N = 0, a_0 = 1, a_1 = 1$ e $a_2 = 1$, obtemos que

$$\begin{aligned}
&M = -N = 0, \\
&d_0 = a_N^{-1} = 1, \\
&d_1 = \frac{-a_1a_0^{-1}}{a_0} = \frac{-1}{1}, \\
&d_2 = -\left[a_{N+2}a_N^{-1} + a_{N+2}\frac{-a_{N+1}a_N^{-1}}{a_N}\right]/a_N = \left[1\cdot 1 + 1\cdot\frac{-1\cdot 1}{1}\right]/1 = 0.
\end{aligned}$$

Isto é, $d = 1 - t + 0t^2 + \cdots$. Note que

$$(1 + t + t^2)(1 - t + 0t^2) = 1 - t^3$$

como esperado pois $-t^3$ é anulado pelos coeficientes d_n com $n > 2$.

Logo em $K((t))$ vale o axioma do inverso multiplicativo e $K((t))$ é um corpo. □

Definição 3.4.7. Seja K um corpo ordenado. Um elemento $a \in K((t))$ é positivo se

$$a \in K((t))^+ := \left\{ a = \sum_{n=N_1} a_n t^n \in K((t)) \;\middle|\; a_{\text{ord}(a)} > 0_K \right\}.$$

Teorema 3.4.8. *Seja K um corpo ordenado. $K((t))$ é um corpo ordenado.*

Demonstração. Tome a e b em $K((t))^+$. Assim existem inteiros N_1 e N_2 tais que

$$a = \sum_{n=N_1} a_n t^n,$$
$$b = \sum_{n=N_2} b_n t^n.$$

Pela definição da soma em $K((t))$,

$$(a+b)_{\text{ord}(a+b)} = (a+b)_{\min\{N_1,N_2\}} > 0_K.$$

Portanto, $(a+b) \in K((t))^+$. Pela definição do produto em $K((t))$,

$$\begin{aligned}(a \cdot b)_{\text{ord}\,(a \cdot b)} = (a+b)_{N_1+N_2} &= \sum_{i+j=N_1+N_2} a_i b_j \\ &= a_{N_1} b_{N_2} > 0_K.\end{aligned}$$

Portanto, $(a \cdot b) \in K((t))^+$.

Agora tome $c \in K$. Temos exclusivamente que $c = 0_{K((t))}$ ou $c_{\text{ord}(c)} > 0_K$ ou $c_{\text{ord}(c)} < 0_K$. Isto é, ou $c = 0_{K((t))}$ ou $c \in K((t))^+$ ou $c \notin (K((t))^+ \cup \{0\})$. □

Finalmente, verificaremos quais das propriedades das seções anteriores valem em $K((t))$.

Teorema 3.4.9. *Seja K um corpo ordenado. $K((t))$ não é arquimediano.*

Demonstração. Pela definição da unidade em $K((t))$, um natural m é mapeado para $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n t^n$ em que $c_n = 0$ para todo $n \neq 1$ e $c_0 = m$. Pela ordem estabelecida, temos que

$$\frac{1}{t} - m > 0.$$

Isto é, $m < \frac{1}{t}$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Logo, $N_{K((t))}$ é limitado por $\frac{1}{t}$ e $K((t))$ não é arquimediano. □

Exemplo 3.4.10. Em $K((t))$ temos que

$$\begin{aligned}&\cdots < \frac{-1}{t^n} < \cdots < \frac{-1}{t^2} < \frac{-1}{t} < \cdots < -n < \cdots < -2 < -1 \\ &< 0 \\ &< \cdots < t^n < \cdots < t^2 < t^1 < 1 < 2 < \cdots < n < \cdots < \frac{1}{t} < \frac{1}{t^2} < \cdots < \frac{1}{t^n} < \cdots\end{aligned}$$

em que n é natural.

Teorema 3.4.11. *Seja K um corpo ordenado. Os seguintes itens são equivalentes:*

(6) Cauchy-completude: Toda sequência de Cauchy converge.

(7) Teste da Comparação Absoluta: Se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge com $b_n \geq 0$ e existem $c > 0$ em K e um natural n_0 tais que $|a_n| \leq cb_n$ para $n > n_0$, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

(8) Teste de Dirichlet: Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é uma série (não necessariamente convergente) tal que suas somas parciais são limitadas e $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n \geq \cdots \geq 0$ com $b_n \to 0$, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ converge.

(9) Teste da Série Alternada: Se $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq \cdots \geq 0$ com $a_n \to 0$, então $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ converge.

(10) Propriedade dos Intervalos Encaixados: Se $[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq \cdots \supseteq [a_n, b_n] \supseteq \cdots$ e $(b_n - a_n) \to 0$, então existe $c \in \bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$.

Demonstração. Temos dois casos excludentes: ou em K existe uma sequência de elementos positivos que converge para 0 ou não. No segundo caso veja que, pelos teoremas 2.5.22 e 2.5.33, todas as sequências que convergem para zero são as sequências eventualmente constantes iguais a zero. Note que, pelo Teorema 3.1.14, K não é arquimediano. Veja que no segundo caso todas as propriedades do teorema valem:

1. (6) vale: Seja (b_n) uma sequência de Cauchy. Veja que $(|b_n - b_{n+1}|) \to 0$. De fato, tome $\varepsilon > 0$. Assim existe N_1 tal que $n, m \geq N_1$ implica $|b_n - b_m| < \varepsilon$. Em particular, $|b_n - b_{n+1}| < \varepsilon$ para $n \geq N_1$. Logo $(|b_n - b_{n+1}|) \to 0$. Portanto, $(|b_n - b_{n+1}|)$ é eventualmente constante igual a zero. Isto é, existe N_2 tal que $n > N_2$ implica $|b_n - b_{n+1}| = 0$. Logo, (b_n) também é eventualmente constante e portanto convergente.

2. (7) vale: Pelo Teorema 2.6.7, temos que $b_n \to 0$. Portanto (b_n) é eventualmente constante igual a zero. Pelo Teorema 2.5.30, $|a_n|$ também é. Logo a_n é eventualmente constante e também igual a zero. Ou seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é uma soma finita e portanto convergente.

3. (8) vale: Como $b_n \to 0$, temos que (b_n) é eventualmente constante igual a zero. Logo $(a_n b_n)$ também é. Ou seja, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ é uma soma finita e portanto convergente.

4. (9) vale: Como $a_n \to 0$, temos que (a_n) é eventualmente constante igual a zero. Logo a sequência $((-1)^{n+1}a_n)$ também é. Ou seja, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ é uma soma finita e portanto convergente.

5. (10) vale: Como $(b_n - a_n) \to 0$, temos que $(b_n - a_n)$ é eventualmente constante igual a zero. Assim, existe N tal que $n \geq N$ implica $a_n = b_n$. Portanto, $a_N = b_N \in \bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$.

Pelo visto acima, no segundo caso todas as propriedades são equivalentes. Agora vamos tratar o primeiro caso. Isto é, no caso em que existe uma sequência em K de elementos positivos que converge para 0. Observe que na demonstração do Teorema (3.2.1), fizemos as implicações (6) $\implies$ (7) $\implies$ (8) $\implies$ (9) $\implies$ (10) sem usar a hipótese de K ser arquimediano. Portanto, resta apenas demonstrar que:

$\boxed{\text{(10) implica (6)}}$ Como descrito no parágrafo anterior, podemos assumir que existe uma sequência (a_n) em K de elementos positivos que converge para 0. Seja (b_n) uma sequência de Cauchy. Como (b_n) é de Cauchy, para cada natural p, existe n_p tal que $n, m > n_p$ implica $|b_n - b_m| < a_p$. Sem perda de generalidade, podemos supor que (n_p) é crescente. Defina

$$\begin{aligned} c_p &= b_{n_p}, \\ I_1 &= [c_1 - a_1, c_1 + a_1], \\ I_{p+1} &= [c_{p+1} - a_{p+1}, c_{p+1} + a_{p+1}] \cap I_p. \end{aligned}$$

Pela definição acima,

$$\begin{aligned} I_{p+1} = [c_{p+1} - a_{p+1}, c_{p+1} + a_{p+1}] \cap [c_p - a_p, c_p + a_p] \\ \cap \cdots \cap [c_2 - a_2, c_2 + a_2] \cap [c_1 - a_1, c_1 + a_1]. \end{aligned}$$

Como (n_p) é uma sequência crescente, temos por definição que

$$\begin{aligned} |c_{p+1} - c_1| &< a_1, \\ |c_{p+1} - c_2| &< a_2, \\ &\vdots \\ |c_{p+1} - c_p| &< a_p. \end{aligned}$$

Ou seja, $c_{p+1} \in (I_1 \cap \cdots \cap I_p)$. Como $c_{p+1} \in [c_{p+1} - a_{p+1}, c_{p+1} + a_{p+1}]$, temos que $c_{p+1} \in I_{p+1}$. Isto é, $I_{p+1} \neq \emptyset$. Logo, pelo Teorema 2.2.41, I_{p+1} é um intervalo fechado. Denote $I_p = [d_p, e_p]$. Por definição, $I_{p+1} \subseteq I_p$.

Agora veja que, $0 < (e_p - d_p) \leq [c_p + a_p - (c_p - a_p)] = (a_p + a_p)$. Como $a_p \to 0$, temos pelo Teorema 2.5.32 que $(a_p + a_p) \to 0$. Pelo Teorema 2.5.30, $(e_p - d_p) \to 0$.

Pelo visto acima, $[d_p, e_p]$ é um sequência de intervalos encaixados com $(e_p - d_p) \to 0$. Logo, pela Propriedade dos Intervalos Encaixados, existe $c \in \cap_{n=1}^{\infty} [d_p, e_p]$.

Afirmamos que $b_n \to c$: Seja $\varepsilon > 0$. Como $a_n \to 0$ e $a_n > 0$, existe um natural p tal que $n \geq p$ implica $|a_n - 0| < \varepsilon/2_K$. Em particular, $\varepsilon/2_K > |a_p - 0| = |a_p| = a_p$. Tome $n > n_p$. Pelo Teorema 2.2.23,

$$|b_n - c| \leq |b_n - c_p| + |c_p - c|.$$

Por definição, $c_p = b_{n_p}$. Portanto,

$$\begin{aligned}|b_n - c| &\leq |b_n - b_{n_p}| + |c_p - c| \\ &\leq a_p + a_p \\ &\leq \varepsilon/2_K + \varepsilon/2_K = \varepsilon.\end{aligned}$$

Logo, por definição, $b_n \to c$ e (b_n) é convergente, como desejado. □

Observação 3.4.12. A primeira vista, poderíamos tentar obter um corpo ordenado não arquimediano porém Cauchy-completo fazendo duas cópias dos reais em vez dos racionais no Exemplo 3.1.18. Mas ainda assim teríamos um corpo não Cauchy-completo. Para ver o porque, considere os intervalos encaixados: $[n, f(-n)]$ com $n \geq 1$. Ilustramos os intervalos na Figura 4.

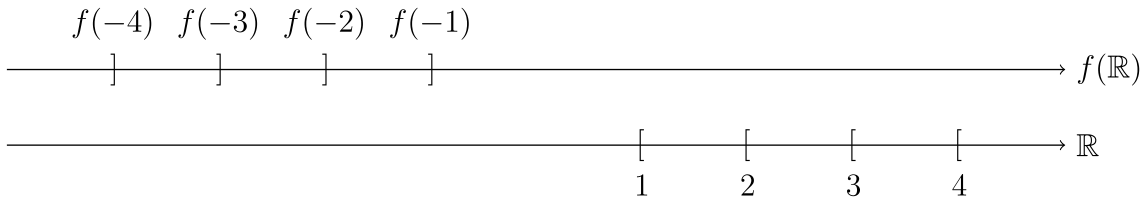

Figura 4 – Intervalos da Observação 3.4.12. Fonte: elaborada pelo autor.

Exemplo 3.4.13. Em $K((t))$, a sequência (t^n) converge para 0: Seja $\varepsilon > 0$. Denote $\varepsilon = \sum_{n=N} \varepsilon_n t^n$ em que $N = \operatorname{ord}(\varepsilon)$ que está bem definido pois $\varepsilon \neq 0$. Assim, para todo $n \geq N+1$, temos que $\varepsilon - t^n = \varepsilon_N t^N + \cdots > 0$. Isto é, $|t^n - 0| = |t^n| = t^n < \varepsilon$ para todo $n \geq N+1$ e $(t^n) \to 0$.

Teorema 3.4.14. *Seja K um corpo ordenado. $K((t))$ é Cauchy-completo.*

Demonstração. Basta demonstrar que vale uma das propriedades do Teorema 3.4.11. Demonstraremos que em $K((t))$ vale a Propriedade dos Intervalos Encaixados. Esta prova é adaptada de (EFIMOV, 1980, p. 212). Para evitar ambiguidades entre os índices dos limites dos intervalos e os índices dos coeficientes das séries, denotaremos os limites do intervalo de índice m como $a^{\langle m\rangle}$ e $b^{\langle m\rangle}$. Sejam $\left[a^{\langle 1\rangle}, b^{\langle 1\rangle}\right] \supseteq \left[a^{\langle 2\rangle}, b^{\langle 2\rangle}\right] \supseteq \cdots \supseteq \left[a^{\langle m\rangle}, b^{\langle m\rangle}\right] \supseteq \cdots$ com $\left(b^{\langle m\rangle} - a^{\langle m\rangle}\right) \to 0$. Denote

$$\begin{aligned}a^{\langle m\rangle} &= \sum_{n=A_m} a_n^{\langle m\rangle} t^n, \\ b^{\langle m\rangle} &= \sum_{n=B_m} b_n^{\langle m\rangle} t^n\end{aligned}$$

em que $A_m = \operatorname{ord}\left(a^{\langle m\rangle}\right)$ quando $a^{\langle m\rangle} \neq 0$, $A_m = 0$ quando $a^{\langle m\rangle} = 0$ e B_m é definido de forma similar. Temos dois casos:

1. A sequência (A_m) não é limitada inferiormente. Assim, existem p e q tais que
$$A_q < A_p < B_1$$
com $p < q$. Como $\left(a^{\langle m\rangle}\right)$ é uma sequência não decrescente, temos que
$$0 \leq a^{\langle q\rangle} - a^{\langle p\rangle} = \left(a^{\langle q\rangle}_{A_q} - a^{\langle p\rangle}_{A_q}\right) t^{A_q} + \cdots .$$
Como $A_q < A_p$, temos que $a^{\langle p\rangle}_{A_q} = 0$ e assim $a^{\langle q\rangle}_{A_q} = a^{\langle q\rangle}_{A_q} - a^{\langle p\rangle}_{A_q} \geq 0$.
Como $A_q < B_1$, temos que $b^{\langle 1\rangle}_{A_q} = 0$ e portanto
$$a^{\langle q\rangle} - b^{\langle 1\rangle} = a^{\langle q\rangle}_{A_q} t^{A_q} + \cdots \geq 0.$$
Logo, $b^{\langle 1\rangle} \leq a^{\langle q\rangle}$. Como $\left[a^{\langle 1\rangle}, b^{\langle 1\rangle}\right] \supseteq \left[a^{\langle q\rangle}, b^{\langle q\rangle}\right]$, temos também que $a^{\langle q\rangle} \leq b^{\langle 1\rangle}$. Assim, $[a^{\langle q\rangle}, b^{\langle q\rangle}] = [b^{\langle 1\rangle}, b^{\langle 1\rangle}]$ e vale a Propriedade dos Intervalos Encaixados.

2. A sequência (A_m) é limitada inferiormente.

   Novamente temos dois casos:

   a) A sequência (B_m) não é limitada inferiormente. Análogo ao caso em que (A_m) não é limitada inferiormente.

   b) A sequência (B_m) é limitada inferiormente.

   Como (A_m) e (B_m) são limitadas inferiormente, temos que existe um inteiro N tal que $N \leq A_m$ e $N \leq B_m$ para todo m. Assim, sem perda de generalidade podemos escrever
$$a^{\langle m\rangle} = \sum_{n=N} a^{\langle m\rangle}_n t^n,$$
$$b^{\langle m\rangle} = \sum_{n=N} b^{\langle m\rangle}_n t^n.$$
   Suponha por absurdo que
$$b^{\langle m\rangle}_N - a^{\langle m\rangle}_N > 0$$
   para todo m. Assim, tomando $\varepsilon = t^{N+1}$, temos que
$$b^{\langle m\rangle} - a^{\langle m\rangle} = \left(b^{\langle m\rangle}_N - a^{\langle m\rangle}_N\right) t^N + \cdots > t^{N+1} = \varepsilon$$
   para todo m. Absurdo pois $\left(b^{\langle m\rangle} - a^{\langle m\rangle}\right) \to 0$.
   Logo existe m_0 tal que $b^{\langle m_0\rangle}_N - a^{\langle m_0\rangle}_N \leq 0$. Como $a^{\langle m_0\rangle} \leq b^{\langle m_0\rangle}$, temos que $b^{\langle m_0\rangle}_N - a^{\langle m_0\rangle}_N = 0$. Assim, $a^{\langle m_0\rangle} = b^{\langle m_0\rangle}$. Faça $c_N = a^{\langle m_0\rangle}_N = b^{\langle m_0\rangle}_N$.
   Repetindo o processo obtemos $\{c_{N+1}, c_{N+2}, \ldots\}$. Faça
$$c = c_N t^N + c_{N+1} t^{N+1} + \cdots .$$
   Por construção $c \in \left[a^{\langle m\rangle}, b^{\langle m\rangle}\right]$ para todo m. Logo, vale a Propriedade dos Intervalos Encaixados. $\square$

Observação 3.4.15. Pelos teoremas 3.4.11 e 3.4.14, nenhuma das propriedades a respeito de séries apresentadas no trabalho implicam a Propriedade Arquimediana. Mas isso só aconteceu porque escolhemos estas propriedades para ficarem entre a Cauchy-completude e a Propriedade do Intervalos Encaixados e ambas não implicam a Propriedade Arquimediana. Como contraexemplo, mencionamos que o Teste da Razão é uma propriedade a respeito de séries que é equivalente a Propriedade do Supremo e portanto implica a Propriedade Arquimediana. Para mais detalhes, veja (PROPP, 2013).

Finalizamos esta seção apresentando versões mais fracas de algumas das propriedades vistas anteriormente.

Teorema 3.4.16. *Seja K um corpo ordenado arquimediano. Os seguintes itens são equivalentes:*

(10) Propriedade dos Intervalos Encaixados: Se $[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq \cdots \supseteq [a_n, b_n] \supseteq \cdots$ e $(b_n - a_n) \to 0$, então existe $c \in \cap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$.

(17) Propriedade dos Intervalos Encaixados Fracamente: Se $[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq \cdots \supseteq [a_n, b_n] \supseteq \cdots$, então existe $c \in \cap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$.

Demonstração. Ida: Como K é arquimediano, podemos fatiar os intervalos $[a_n, b_n]$ e obter intervalos $[A_n, B_n]$ com $[A_n, B_n] \subseteq [a_n, b_n]$ e $(A_n - B_n) \to 0$ para aplicar a Propriedade dos Intervalos Encaixados. A volta é óbvia. □

Exemplo 3.4.17. No corpo das séries formais de Laurent sobre os números reais, não vale a Propriedade dos Intervalos Encaixados Fracamente. De fato, considere os intervalos $[n, 1/(nt)]$. Veja que $1/(nt) - n > 0$ e portanto$[n, 1/(nt)]$ é um intervalo. Como $(n+1)-n = 1 > 0$ e $1/n - 1/(n+1) > 0$, temos que $[n, 1/(nt)]$ atende as hipóteses da Propriedade dos Intervalos Encaixados Fracamente.

Veja agora que a interseção $\cap_{n=1}^{\infty}[n, 1/(nt)]$ é vazia: Suponha por absurdo que existe $a \in \cap_{n=1}^{\infty}[n, 1/(nt)]$. Denote $a = \sum_{n=N_1}^{\infty} a_n t^n$. Como $a \in [1, 1/t]$, $a \geq 1 > 0$ e portanto $a_{N_1} > 0$. Temos 4 casos:

1. Caso $N_1 < -1$. Absurdo pois para todo n teríamos que $1/(nt) - a < 0$.

2. Caso $N_1 = -1$. Assim para todo n teríamos que $1/n - a_{-1} > 0$. Isto é, $1/n > a_{-1}$. Absurdo pois teríamos para todo n que $1/n > a_{-1} > 0$ com $a_{-1} \in \mathbb{R}$.

3. Caso $N_1 = 0$. Absurdo pois, como $\mathbb{R}$ é arquimediano, para algum n teríamos que $a - n < 0$.

4. Caso $N_1 > 0$. Absurdo pois para todo n teríamos que $a - n < 0$.

Em todos os casos obtemos um absurdo, logo a interseção $\cap_{n=1}^{\infty}[n, 1/(nt)]$ é vazia.

Teorema 3.4.18. *Seja K um corpo ordenado arquimediano. Os seguintes itens são equivalentes:*

(4) Teorema de Bolzano-Weierstrass: Toda sequência limitada possui uma subsequência convergente.

(18) Teorema do Valor Limitado: Seja $A \subseteq K$ não vazio, fechado e limitado. Se $f : A \to K$ é contínua, então f é limitada.

Demonstração. $\boxed{\text{(4) implica (18)}}$ Suponha que f não é limitada. Para cada natural n, escolha $a_n \in K$ tal que $f(a_n) > n_K$. Como A é limitado, (a_n) é limitada. Pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, (a_n) tem uma subsequência convergente (a_{n_k}) com $a_{n_k} \to a$. Pelo Teorema 2.5.10, $(f(a_{n_k})) \to f(a)$. Absurdo pois $(f(a_{n_k}))$ não é limitada. Logo, f é limitada e vale o Teorema do Valor Limitado.

$\boxed{\text{(18) implica (4)}}$ Vamos provar pela contrapositiva. Isto é, vamos supor que não vale o Teorema de Bolzano-Weierstrass e mostrar que não vale o Teorema do Valor Limitado.

Suponha que existe uma sequência (a_n) limitada em K tal que toda subsequência de (a_n) é divergente.

Como (a_n) é limitada, existem a e $b \in K$ tais que $a_n \in (a, b)$ para todo natural n. Ainda, $a_n \in (a, b) \subseteq [a, b]$.

Note que como $\{a_n\}$ não tem nenhuma subsequência convergente, $\{a_n\}$ não admite pontos de acumulação e é um conjunto fechado.

Seja $A = \{a_n\}$. Considere agora a função $f : A \to K$ dada por

$$f(a_n) = n_K.$$

Como a topologia de A é a topologia discreta, pela Observação 2.4.8, f é contínua. Finalmente, como K é arquimediano, f é ilimitada e não vale o Teorema do Valor Limitado. □

Teorema 3.4.19. *Seja K um corpo ordenado. O conjunto $\mathbb{N}_K$ só contém pontos isolados.*

Demonstração. Tome $n_K \in \mathbb{N}_K$. Assim, $(n_K - 1, n_K + 1) \cap \mathbb{N}_K = \{n_K\}$ e n_K é um ponto isolado de $\mathbb{N}_K$. □

Teorema 3.4.20. *O conjunto $\mathbb{N}_{\mathbb{R}((t))}$ é fechado e limitado.*

Demonstração. Pelo Teorema 3.4.9, $\mathbb{N}_{\mathbb{R}((t))} \subseteq [0, 1/t]$ e portanto é limitado. Vamos mostrar agora que $\mathbb{N}'_{\mathbb{R}((t))} = \emptyset$ e que assim, pelos teoremas 3.4.19 e 2.3.25, $\mathbb{N}_{\mathbb{R}((t))}$ é fechado. Tome $a \in \mathbb{R}((t))$. Vamos dividir o argumento em casos e mostrar que em cada caso $a \notin \mathbb{N}'_{\mathbb{R}((t))}$:

1. Se $a \notin [0, 1/t]$, temos dois casos:

a) Caso $a \in (-\infty, 0)$. Como $(-\infty, 0) \cap \mathbb{N}_{\mathbb{R}((t))} = \emptyset$, $a \notin \mathbb{N}'_{\mathbb{R}((t))}$.

b) Caso $a \in (1/t, \infty)$. Como $(1/t, \infty) \cap \mathbb{N}_{\mathbb{R}((t))} = \emptyset$, $a \notin \mathbb{N}'_{\mathbb{R}((t))}$.

2. Se $a = 0$, como $(-1, 1) \cap \left(\mathbb{N}_{\mathbb{R}((t))} \setminus \{0\}\right) = \emptyset$, temos que $a \notin \mathbb{N}'_{\mathbb{R}((t))}$.

3. Se $a = 1/t$, como $\left(\frac{9}{10t}, \frac{11}{10t}\right) \cap \mathbb{N}_{\mathbb{R}((t))} = \emptyset$, temos que $a \notin \mathbb{N}'_{\mathbb{R}((t))}$.

4. Se $a \in (0, 1/t)$. Como $a > 0$, podemos denotar

$$a = \sum_{n=N} a_n t^n$$

em que $a_N > 0$. Suponha por absurdo que $N < -1$. Absurdo pois teríamos que $1/t < a$. Suponha por absurdo que $N > 0$. Absurdo pois $a < 1$. Resta apenas dois casos:

a) Caso $N = -1$. Temos que $a = a_N/t + \cdots$. Como $0 < 1 < a < 1/t$, $a_N \in (0, 1)$. Assim,

$$\left(\frac{a_N}{2t}, \frac{1}{t}\right) \cap \mathbb{N}_{\mathbb{R}((t))} = \emptyset$$

e portanto $a \notin \mathbb{N}'_{\mathbb{R}((t))}$.

b) Caso $N = 0$. Temos que $a = a_N + \cdots$. Pelo Teorema 3.4.19, podemos supor que $a \notin \mathbb{N}_{\mathbb{R}((t))}$. Assim, $a_N \in (b, b+1)$ para algum $b \in \mathbb{N}_{\mathbb{R}((t))}$. Como $(b, b+1) \cap \mathbb{N}_{\mathbb{R}((t))} = \emptyset$, $a \notin \mathbb{N}'_{\mathbb{R}((t))}$. $\square$

Exemplo 3.4.21. No corpo das séries formais de Laurent sobre os números reais, não vale o Teorema do Valor Limitado. De fato, considere a função $f : \mathbb{N}_{\mathbb{R}((t))} \to \mathbb{R}((t))$ dada por

$$f(n_K) = 1/t^n.$$

Pelo Teorema 3.4.19, a topologia de $\mathbb{N}_{\mathbb{R}((t))}$ é a topologia discreta. Logo, pela Observação 2.4.8, f é contínua. Note que f é ilimitado com $\mathbb{N}_{\mathbb{R}((t))}$ fechado e limitado (pelo Teorema 3.4.20) e portanto não vale o Teorema do Valor Limitado. Note que f também serve como contraexemplo para o Teorema do Valor Extremo (o que já era esperado pois $\mathbb{R}_{((t))}$ não é arquimediano).

Para ver exemplos de corpos ordenados em que valem as propriedades apresentadas nos teoremas 3.4.16 e 3.4.18, consulte (PROPP, 2013). Com estes teoremas, finalizamos todos os caminhos da Figura 1.

REFERÊNCIAS

ABBOTT, S. *Understanding Analysis*. 2. ed. New York: Springer, 2015.

DOBBS, D. E. When is an ordered field a metric space? *Tsukuba Journal of Mathematics*, Institute of Mathematics, University of Tsukuba, v. 24, n. 2, dez. 2000.

EFIMOV, N. *Higher Geometry*. Moscow: Mir, 1980.

FLORIT, L. A. Você poderia ter inventado a topologia. 2017.

GELBAUM, B. R.; OLMSTED, J. M. H. *Counterexamples in Analysis*. New York: Dover, 2003.

GONÇALVES, A. *Introdução à Álgebra*. 2. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2003.

GOWERS, T.; BARROW-GREEN, J.; LEADER, I. (Ed.). *The Princeton Companion to Mathematics*. New Jersey: Princeton University Press, 2010.

LIMA, E. L. *Curso de análise*. 15. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2022. v. 1.

LIU, C.; TANAKA, Y. Metrizability of ordered additive groups. *Tsukuba Journal of Mathematics*, Institute of Mathematics, University of Tsukuba, v. 35, n. 2, dez. 2011.

MARSDEN, J. E.; HOFFMAN, M. J. *Elementary Classical Analysis*. 2. ed. New York: W. H. Freeman, 1993.

MUNKRES, J. R. *Topology*. 2. ed. New Jersey: Prentice Hall, 2000.

PROPP, J. Real analysis in reverse. *The American Mathematical Monthly*, v. 120, n. 5, p. 392, 2013.

RUDIN, W. *Functional Analysis*. 2. ed. New York: McGraw-Hill, 1991. ISBN 9780070542365.

SPIVAK, M. *Calculus*. 4. ed. Texas: Publish or Perish, 2008.

TEISMANN, H. Toward a more complete list of completeness axioms. *The American Mathematical Monthly*, v. 120, n. 2, p. 99–114, 2013.