

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
BACHARELADO EM MATEMÁTICA

Sofia Meneghel Silva

**Propriedade do Sombreamento e sua relação com
a Estabilidade Topológica em Espaços Shift**

Florianópolis
2023

Sofia Meneghel Silva

**Propriedade do Sombreamento e sua relação com
a Estabilidade Topológica em Espaços Shift**

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação em Bacharelado em Matemática do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do título de Bacharel em Matemática.

Orientador: Prof. Daniel Gonçalves, Dr.

Florianópolis

2023

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Silva, Sofia Meneghel
Propriedade do Sombreamento e sua relação com a
Estabilidade Topológica em Espaços Shift / Sofia Meneghel
Silva ; orientador, Daniel Gonçalves, 2023.
44 p.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) -
Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências
Físicas e Matemáticas, Graduação em Matemática -
Bacharelado, Florianópolis, 2023.

Inclui referências.

1. Matemática - Bacharelado. 2. Sombreamento. 3.
Dinâmica Simbólica. 4. Estabilidade Topológica. 5. Sistemas
Dinâmicos. I. Gonçalves, Daniel. II. Universidade Federal de
Santa Catarina. Graduação em Matemática - Bacharelado. III.
Título.

Sofia Meneghel Silva

**Propriedade do Sombreamento e sua relação com
a Estabilidade Topológica em Espaços Shift**

Este Trabalho Conclusão de Curso foi julgado adequado para obtenção do Título de Bacharel em Matemática e aprovado em sua forma final pelo Curso de Matemática.

Florianópolis, 2023

Prof. Felipe Lopes Castro, Dr.
Coordenador do Curso

Banca Examinadora:

Prof. Daniel Gonçalves, Dr.
Orientador
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Marcelo Sobottka, Dr.
Avaliador
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Natã Machado, Dr.
Avaliador
Universidade Federal de Santa Catarina

À minha família: meu pai Diomar, minha mãe Rubiléia e meu irmão Marcos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente aos meus pais, Diomar e Rubiléia, e ao meu irmão, Marcos, por todo o apoio na minha trajetória acadêmica. As ligações para contar os causos do dia fizeram minha vida em Florianópolis mais feliz e amenizaram a saudade de casa.

Agradeço a todos os amigos que fiz no curso de Matemática, principalmente os meus ex-colegas do PET Matemática. Minha graduação com certeza não teria sido tão leve quanto foi sem a presença e o apoio de vocês.

Agradeço aos meus amigos de longa data que estão comigo na UFSC, em especial à minha colega de apartamento Heloísa.

Agradeço ao meu namorado Renan, que está ao meu lado desde o ensino médio, e que foi o meu porto seguro em Florianópolis.

Agradeço a todos professores que marcaram a minha trajetória na UFSC, em especial ao Professor Daniel Gonçalves, que me orientou em quatro iniciações científicas e aceitou orientar também este trabalho.

Por fim, agradeço ao CAPES/CNPq. Fui bolsista de Iniciação Científica do primeiro ao último semestre da minha graduação, e este trabalho não teria sido possível sem o apoio dessas agências de fomento.

*“Mover-se é viver, dizer-se é sobreviver.
Não há nada de real na vida que o não seja porque se descreveu bem.”
(Fernando Pessoa)*

RESUMO

A partir da discretização de sistemas dinâmicos, surge a área da Dinâmica Simbólica. Neste trabalho, começamos estudando os objetos centrais dessa área: os espaços shift. Estudamos a sua definição clássica sobre alfabetos finitos por meio de blocos proibidos e de linguagens, e em seguida definimos um tipo especial de espaço shift, que são os shifts de tipo finito. Analisamos também algumas características topológicas dos espaços shift, em consequência da definição de uma métrica que permite vê-los como sistemas dinâmicos. A partir destas características, obtemos a caracterização dos espaços shift como sendo os subconjuntos invariantes e compactos do shift completo. Em seguida, expandimos essas definições e resultados para os espaços shift definidos sobre alfabetos infinitos, e vemos que o shift completo sobre um alfabeto infinito não é compacto. Estudamos as definições de órbita, pseudo-órbita e sombreamento, para posteriormente definir a propriedade do sombreamento. Analisamos alguns exemplos da ocorrência da propriedade do sombreamento, e provamos o seguinte resultado tradicional: um espaço shift tem a propriedade do sombreamento se, e somente se, for de tipo finito. Definimos e exemplificamos os conceitos de homeomorfismo expansivo e sistema dinâmico topologicamente estável, e com isso provamos o resultado principal para espaços métricos compactos: um sistema dinâmico que seja expansivo e tenha a propriedade do sombreamento é topologicamente estável. Por fim, expandimos esse resultado para os espaços shift de ordem M sobre alfabetos infinitos, que não são compactos.

Palavras-chave: Dinâmica Simbólica. Sombreamento. Estabilidade Topológica.

ABSTRACT

From the discretization of dynamical systems, the field of Symbolic Dynamics emerges. In this work, we begin by studying the central objects of this field: shift spaces. We investigate their classical definition over finite alphabets by using forbidden blocks and languages. Subsequently, we introduce a special type of shift space known as a shift of finite type. Additionally, we analyze some topological features of shift spaces, a consequence of defining a metric on these spaces that allows us to view them as dynamical systems. Based on these features, we obtain the characterization of shift spaces as the invariant and compact subsets of the full shift. We explore the definitions of orbit, pseudo-orbit, and shadowing, subsequently introducing the shadowing property. Several examples illustrating the occurrence of the shadowing property are presented, and we prove the traditional result that a shift space possesses the shadowing property if and only if it is of finite type. We define and provide examples of expansive homeomorphisms and topologically stable dynamical systems. Using these concepts, we prove the main result for a compact metric space: a dynamical system that is expansive and has the shadowing property is topologically stable. Finally, we extend this result to shift spaces of order M over infinite alphabets, which are not compact.

Keywords: Symbolic Dynamics. Shadowing. Topological Stability.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
2	ESPAÇOS SHIFT SOBRE ALFABETOS FINITOS E INFINITOS	12
2.1	ESPAÇOS SHIFT SOBRE ALFABETOS FINITOS	12
2.1.1	O Shift Completo	12
2.1.2	A função shift	14
2.1.3	Espaços Shift	15
2.1.4	Linguagens	18
2.1.5	Espaços Shift de Tipo Finito	21
2.1.6	Espaços shift vistos como Sistemas Dinâmicos	23
2.2	ESPAÇOS SHIFT SOBRE ALFABETOS INFINITOS	28
3	ESTABILIDADE TOPOLÓGICA DE SISTEMAS DINÂMICOS . .	30
3.1	PROPRIEDADE DO SOMBREAMENTO	30
3.2	ESTABILIDADE TOPOLÓGICA	35
3.2.1	O Caso dos Espaços Shift sobre Alfabetos Infinitos	40
4	CONCLUSÃO	42
	Referências	43

1 INTRODUÇÃO

Os sistemas dinâmicos, que encontram sua aplicação em diversas áreas da ciência, têm sido uma área de intensa investigação devido à sua capacidade de modelar e entender o comportamento temporal de fenômenos complexos. O seu estudo remonta ao trabalho pioneiro de matemáticos como Isaac Newton e Leonhard Euler, que estabeleceram as bases para as equações diferenciais, uma ferramenta fundamental na modelagem de sistemas dinâmicos contínuos. Tradicionalmente, a abordagem de um sistema dinâmico envolve a formulação e análise de equações diferenciais que descrevem as relações entre as variáveis envolvidas. Contudo, uma outra abordagem, conhecida como Dinâmica Simbólica, propõe um método alternativo que faz uso de símbolos e representações simbólicas para descrever e analisar os padrões intrínsecos presentes nos sistemas dinâmicos.

Esta monografia trata de um estudo sobre a relação entre os espaços shift, principal objeto de análise da Dinâmica Simbólica, e duas características de um sistema dinâmico: a propriedade do sombreamento e a estabilidade topológica. A propriedade do sombreamento caracteriza a existência de órbitas que aproximam pseudo-órbitas, e a estabilidade topológica reflete a robustez de um sistema dinâmico contra perturbações. A conexão entre esses três conceitos foi inicialmente delineada por Peter Walters em (WALTERS, 1978), uma referência que será explorada em conjunto com outros artigos e livros clássicos da área.

No Capítulo (2), iniciamos nossa abordagem com uma investigação das propriedades fundamentais dos espaços shift. Isso abrange desde a própria definição do espaço shift através de blocos proibidos e linguagens, a função shift que opera nesses espaços, a concepção de shift de tipo finito e o entendimento de espaços shift como um sistema dinâmico. Exploramos ainda como podemos estender essas definições e resultados quando o espaço shift é construído sobre um alfabeto infinito. Para este capítulo, tomamos como base a referência (LIND, MARCUS, 1995).

Em seguida, no Capítulo (3), vemos algumas propriedades de sistemas dinâmicos. Intuitivamente, podemos visualizar um Sistema Dinâmico como sendo uma tripla ordenada (X, d, f) , onde (X, d) é um espaço métrico não vazio e $f : X \rightarrow X$ é um homeomorfismo. Nosso objetivo, ao estudar um sistema dinâmico, é determinar como os pontos de X evoluem mediante a aplicação iterada de f . Neste trabalho, voltamos nossos olhos para duas características topológicas de um sistema dinâmico: a propriedade do sombreamento e a estabilidade topológica. Definimos primeiramente conceitos relacionados a propriedade do sombreamento, sendo estes órbita, pseudo-órbita e sombreamento. Posteriormente, exploramos a definição de homeomorfismo expansivo e, em seguida, a noção de estabilidade topológica. Os resultados encontrados acerca da propriedade do sombreamento em espaços shift provém de (WALTERS, 1978) e (KURKA, 2003), e a definição de sombreamento de Lipschitz e sua motivação provém de (PILYUGIN, SAKAI, 2017). Além disso, os exemplos

de homeomorfismos expansivos procedem de (BRYANT, 1962).

Assim, provamos o seguinte teorema principal, que provém de (WALTERS, 1978), e relaciona a propriedade do sombreamento, homeomorfismos expansivos e a estabilidade topológica em um sistema dinâmico:

Teorema 3.2.8. *Seja (X, d, T) um sistema dinâmico com a propriedade do sombreamento, em que (X, d) é um espaço métrico compacto e $T : X \rightarrow X$ é um homeomorfismo expansivo. Então, T é topologicamente estável.*

Por último, demonstramos que essa conclusão pode ser generalizada para os shift de tipo finito de ordem M sobre um alfabeto infinito, que mostramos no Capítulo (2) não serem, necessariamente, compactos (Proposição (2.2.2)).

2 ESPAÇOS SHIFT SOBRE ALFABETOS FINITOS E INFINITOS

Neste capítulo, apresentamos a definição dos espaços shift, que são os objetos centrais de investigação na Dinâmica Simbólica. Desenvolvemos as definições tanto para o caso comumente estudado de alfabetos finitos quanto para o caso mais geral de alfabetos infinitos. Além disso, introduzimos o conceito de shifts de tipo finito e estabelecemos uma métrica para os espaço shift, que nos permite vê-los como sistemas dinâmicos. Com essas definições em vigor, demonstramos algumas propriedades topológicas fundamentais associadas aos espaços shift. É relevante ressaltar que, neste trabalho, adotamos a convenção de incluir o zero no conjunto dos números naturais, isto é, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

2.1 ESPAÇOS SHIFT SOBRE ALFABETOS FINITOS

2.1.1 O Shift Completo

Como queremos trabalhar com espaços shift sobre alfabetos finitos, começamos definindo, primeiramente, o que entendemos por alfabeto finito.

Definição 2.1.1 (Alfabeto Finito e Símbolo). *Seja \mathcal{A} um conjunto finito não vazio, que chamamos de **alfabeto finito**. Os elementos do alfabeto \mathcal{A} são chamados de **símbolos**.*

Um exemplo simples de alfabeto finito, e que nos acompanhará durante o trabalho, é o conjunto $\mathcal{A}_{01} = \{0, 1\}$, conhecido como *alfabeto binário*. É a partir desse alfabeto que emergem as aplicações mais tradicionais da Dinâmica Simbólica, notadamente no estudo do armazenamento de informações em computadores mediante o uso do código binário.

Em particular, vamos estudar as sequências *bi-infinitas* formadas com os símbolos de um alfabeto finito \mathcal{A} . Uma sequência bi-infinita é uma sequência indexada pelos números inteiros, que pode ser representada por $x = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$, ou, mais precisamente,

$$x = \dots x_{-2}x_{-1} \cdot x_0x_1x_2 \dots,$$

onde cada $x_i \in \mathcal{A}$ é dito ser a i -ésima coordenada de x . Empregamos um ponto para separar as coordenadas com $i \geq 0$ das com $i < 0$, por conveniência e com o intuito de conferir à sequência bi-infinita uma semelhança com um número decimal. Abaixo, temos um exemplo de sequência bi-infinita.

Exemplo 2.1.2 (Sequência Bi-infinita). Considere a sequência bi-infinita x dada por $x = \dots 001.10\dots$, formada com os símbolos do alfabeto binário \mathcal{A}_{01} . A partir dessas informações, temos que $x_{-3} = 0$, $x_{-2} = 0$, $x_{-1} = 1$, $x_0 = 1$, $x_1 = 0$. \square

A seguir, definimos o \mathcal{A} -shift completo.

Definição 2.1.3 (\mathcal{A} -shift Completo). *Se \mathcal{A} é um alfabeto finito, então o \mathcal{A} -shift completo¹ é o conjunto de todas as seqüências bi-infinitas formadas por símbolos de \mathcal{A} . O \mathcal{A} -shift completo é denotado por*

$$\mathcal{A}^{\mathbb{Z}} = \{x = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}} : x_i \in \mathcal{A} \text{ para todo } i \in \mathbb{Z}\}.$$

Quando o alfabeto em questão é evidente, podemos omiti-lo ao nos referirmos ao \mathcal{A} -shift completo, utilizando apenas a expressão *shift completo*.

Os elementos do shift completo $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ são ditos serem os *pontos* do shift completo. Nossa abordagem não se restringe apenas aos pontos em $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$, mas também abrange os segmentos finitos contidos nesses pontos. São estes segmentos que definimos a seguir.

Definição 2.1.4 (Bloco e Tamanho). *Seja \mathcal{A} um alfabeto finito. Dizemos que*

- (1) Um **bloco** de \mathcal{A} é uma seqüência finita formada por símbolos de \mathcal{A} . A seqüência formada por nenhum símbolo é denominada *seqüência vazia* e representada por ϵ ;
- (2) O **tamanho** de um bloco u é a quantidade de símbolos que este contém, e é representado por $|u|$.

Usualmente, denotamos os blocos formados por símbolos de um alfabeto \mathcal{A} por $u = a_1 a_2 \dots a_k$, onde $a_i \in \mathcal{A}$, para $i = 1, 2, \dots, k$. Nesse caso, $|u| = k$. Por convenção, dizemos que $|\epsilon| = 0$.

Podemos compreender intuitivamente os blocos como sendo “fragmentos” de algum ponto no shift completo. Levando isso em consideração, também podemos definir o que seriam os “fragmentos” de um bloco, que denominamos de *sub-blocos*.

Definição 2.1.5 (Sub-bloco). *Seja \mathcal{A} um alfabeto finito e $u = a_1 a_2 \dots a_k$ um bloco formado por símbolos de \mathcal{A} . Um **sub-bloco** de u é um bloco da forma $a_i a_{i+1} \dots a_j$, onde tem-se $1 \leq i \leq j \leq k$.*

Por convenção, dizemos que a seqüência vazia ϵ é sub-bloco de qualquer bloco.

Seja $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ e $i \leq j$. Denotamos o bloco com as coordenadas de i a j de x por

$$x_{[i,j]} = x_i x_{i+1} \dots x_j.$$

A notação acima não faz sentido quando $i > j$, e por isso nesse caso dizemos que $x_{[i,j]} = \epsilon$. O bloco $x_{[-k,k]}$ é dito ser o $(2k + 1)$ -bloco central de x , e terá um papel importante quando estudarmos a métrica usual em um espaço shift. Também utilizaremos a notação $x_{[i,+\infty)}$ para representar a seqüência $x_i x_{i+1} x_{i+2} \dots$ e, similarmente, empregaremos a notação $x_{(-\infty, i]}$ para representar a seqüência $\dots x_{i-2} x_{i-1} x_i$.

Podemos pensar em “unir” dois blocos, e o resultado dessa operação seria um novo bloco. Essa operação é conhecida como *concatenação*.

¹ O termo *\mathcal{A} -shift completo* é meramente uma tradução do original *full \mathcal{A} -shift*, e não está relacionado com a completude de um espaço métrico.

Definição 2.1.6 (Concatenação). *Seja \mathcal{A} um alfabeto finito, e sejam $u = a_1a_2\dots a_k$ e $v = b_1b_2\dots b_l$ dois blocos formados com símbolos de \mathcal{A} . A **concatenação** de u e v é um novo bloco representado por uv e dado por*

$$uv = a_1a_2\dots a_kb_1b_2\dots b_l.$$

Por convenção, dizemos que $\epsilon u = u\epsilon = u$, para todo bloco u . Note que $|uv| = |u| + |v|$, e além disso, no geral, $uv \neq vu$, mas sempre $|uv| = |vu|$. Definimos u^n como sendo a concatenação de u consigo mesmo n vezes, e convencionamos $u^0 = \epsilon$. Disso vemos claramente que a concatenação satisfaz a regra dos expoentes, pois $u^m u^n = u^{m+n}$. Além disso, podemos também definir u^∞ como sendo o ponto $\dots uuu.uu\dots$. Abaixo, vemos um exemplo de concatenação de um bloco consigo mesmo.

Exemplo 2.1.7 (Concatenação). *Seja $u = 10$ um bloco sobre \mathcal{A}_{01} . Temos que $u^2 = 1010$ e $u^\infty = (10)^\infty = \dots 1010.1010\dots$ \square*

2.1.2 A função shift

A opção por trabalhar com sequências bi-infinitas decorre da intenção de considerá-las como marcadores da passagem do tempo. Essa escolha é motivada pelo fato de que os espaços shift são uma discretização de sistemas dinâmicos, frequentemente dependentes do tempo. A progressão temporal pode ser concebida como o deslocamento da sequência uma coordenada para a esquerda. É dessa perspectiva que se origina a definição da função shift.

Definição 2.1.8 (Função Shift). *A **função shift** $\sigma : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ no shift completo $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ leva um ponto x no ponto $\sigma(x)$ cuja i -ésima coordenada é $\sigma(x)_i = x_{i+1}$.*

$$\begin{array}{cccccccccccc} x = & \dots & x_{-3} & x_{-2} & x_{-1} & x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & \dots \\ \downarrow \sigma & & \swarrow & \swarrow & \swarrow & \swarrow & \swarrow & \swarrow & & \\ \sigma(x) = & \dots & x_{-2} & x_{-1} & x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \dots \end{array}$$

Figura 1: Representação da função shift

Como temos o objetivo de abordar o estudo dos espaços shift sob a ótica de Sistemas Dinâmicos, vejamos como um ponto x do shift completo se comporta quando a função shift σ é aplicada a ele k vezes. Observa-se que, dado que a aplicação de σ uma vez em um ponto do shift completo desloca todas as coordenadas uma posição para a esquerda, a aplicação de σ^k (isto é, σ composta consigo mesmo k vezes) em um ponto acarreta um deslocamento de todas as coordenadas desse ponto k posições para a esquerda.

Outra característica importante da função shift é a sua invertibilidade. Note que a inversa da função shift σ^{-1} é a função que desloca todas as coordenadas de um ponto

do shift completo uma posição para a direita, isto é, $\sigma^{-1}(x)_i = x_{i-1}$, para $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$. E, de maneira análoga, σ^{-k} desloca todas as coordenadas de um ponto do shift completo k posições para a direita. Em suma, para qualquer $k \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} \sigma^k : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} &\rightarrow \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \\ x &\mapsto \sigma^k(x), \end{aligned}$$

onde $\sigma^k(x)_i = x_{i+k}$, para todo $i \in \mathbb{Z}$. A seguir, vemos um exemplo da aplicação da função shift.

Exemplo 2.1.9 (Aplicação da função shift). Seja $x = (01)^\infty$ um ponto de $\mathcal{A}_{01}^{\mathbb{Z}}$. Então, temos que $\sigma(x) = (10)^\infty$ e, também, que $\sigma^{-1}(x) = (10)^\infty$.

$$\begin{array}{cccccccc} (01)^\infty & = & \dots & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \dots \\ & & & & \swarrow & \swarrow & \swarrow & \swarrow & \swarrow & \swarrow & \\ \downarrow \sigma & & & & & & & & & & \\ (10)^\infty & = & \dots & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots \end{array}$$

Figura 2: Representação de $\sigma(x)$

$$\begin{array}{cccccccc} (01)^\infty & = & \dots & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \dots \\ & & & & \searrow & \searrow & \searrow & \searrow & \searrow & \searrow & \\ \downarrow \sigma^{-1} & & & & & & & & & & \\ (10)^\infty & = & \dots & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots \end{array}$$

Figura 3: Representação de $\sigma^{-1}(x)$

2.1.3 Espaços Shift

Até agora, trabalhamos exclusivamente com o shift completo $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$, onde \mathcal{A} é um alfabeto finito. Naturalmente, pensamos em trabalhar com subconjuntos do shift completo. Dentro do contexto da Dinâmica Simbólica, nosso interesse recai sobre uma categoria específica desses subconjuntos, nomeadamente aqueles que podem ser caracterizados por meio de um conjunto de blocos proibidos.

Se $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ e u é um bloco formado com símbolos de \mathcal{A} , dizemos que u ocorre em x se existem índices i e j tais que $x_{[i,j]} = u$. Como convençionamos que $x_{[i,j]} = \epsilon$ sempre que $i > j$, segue que a sequência vazia ϵ ocorre em qualquer ponto do shift completo.

Seja \mathcal{F} um conjunto de blocos formados com os símbolos de \mathcal{A} , que dizemos ser o conjunto dos blocos proibidos. Assim sendo, definimos $X_{\mathcal{F}}$ como sendo o subconjunto de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ formado pelos pontos onde nenhum bloco de \mathcal{F} ocorre.

Definição 2.1.10 (Espaço Shift). Um **espaço shift** (ou simplesmente **shift**) é um subconjunto \mathcal{X} de um \mathcal{A} -shift completo tal que $\mathcal{X} = X_{\mathcal{F}}$ para algum conjunto \mathcal{F} de blocos proibidos.

Todas as palavras em português seguem a sintaxe estabelecida pela língua portuguesa. Considerando esse princípio, podemos conceber os espaços shift como sequências que aderem a uma sintaxe específica, delineada por um conjunto de blocos proibidos. Essa analogia entre a estrutura das palavras em um idioma e a conformidade das sequências aos blocos proibidos proporciona uma perspectiva interessante na compreensão dos espaços shift. Veremos agora vários exemplos de espaços shift, que serão referenciados durante o trabalho.

Exemplo 2.1.11 (Shift completo e vazio). Se $\mathcal{F} = \emptyset$, então nenhum bloco é proibido, e portanto $X_{\mathcal{F}} = \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$, isto é, o shift completo é um espaço shift. Similarmente, se $\mathcal{F} = \mathcal{A}$, então todos os símbolos são proibidos, e portanto $X_{\mathcal{F}} = \emptyset$, ou seja, o conjunto vazio também é um espaço shift. \square

Exemplo 2.1.12 (Shift da Razão Áurea \mathcal{X}_{φ}). Seja \mathcal{A}_{01} o alfabeto binário, e $\mathcal{F} = \{11\}$. Isto é, $\mathcal{X}_{\varphi} = X_{\mathcal{F}}$ é o conjunto de todas as sequências sobre \mathcal{A}_{01} onde não ocorrem dois 1's consecutivos, que conhecemos como shift da razão áurea². Note que para $\mathcal{F}_1 = \{11, 1111\}$ e $\mathcal{F}_2 = \{1^{2n} : n \geq 1\}$ temos $\mathcal{X}_{\varphi} = X_{\mathcal{F}} = X_{\mathcal{F}_1} = X_{\mathcal{F}_2}$. Ou seja, um mesmo espaço shift pode ser gerado por diversos conjuntos de blocos proibidos. Abaixo, temos alguns exemplos de pontos de $\mathcal{A}_{01}^{\mathbb{Z}}$ que pertencem, ou não, a \mathcal{X}_{φ} .

Pontos que pertencem a \mathcal{X}_{φ}	Pontos que não pertencem a \mathcal{X}_{φ}
$x = 0^{\infty} = \dots 000.000 \dots$	$x = 1^{\infty} = \dots 111.1 \boxed{11} \dots$
$x = (01)^{\infty} = \dots 101.010 \dots$	$x = (101)^{\infty} = \dots 10 \boxed{1.1} 01 \dots$
$x = (010)^{\infty} = \dots 010.010 \dots$	$x = (011)^{\infty} = \dots 011.0 \boxed{11} \dots$
$x = (100)^{\infty} = \dots 100.100 \dots$	$x = (1001)^{\infty} = \dots 100 \boxed{1.1} 001 \dots$
$x = (1010)^{\infty} \dots 1010.1010 \dots$	$x = (0110)^{\infty} = \dots 0 \boxed{11} 0.0110 \dots$

\square

Exemplo 2.1.13. (Shift Par) Seja \mathcal{A}_{01} o alfabeto binário, e defina $\mathcal{F} = \{10^{2n+1}1 : n \geq 0\}$. Logo, $\mathcal{X}_{\mathcal{P}} = X_{\mathcal{F}}$ é o conjunto das sequências onde não ocorre uma quantidade ímpar de 0's consecutivos entre dois 1's. Este espaço shift é conhecido como shift par. Abaixo, temos alguns exemplos de pontos de $\mathcal{A}_{01}^{\mathbb{Z}}$ que pertencem, ou não, a $\mathcal{X}_{\mathcal{P}}$.

² O nome “shift da razão áurea” é uma tradução direta de “golden mean shift”, e decorre do fato da entropia desse shift ser o logaritmo da razão áurea. Não trataremos da entropia de espaços shift nesse trabalho, porém mais informações podem ser encontradas no Capítulo 4 da referência (LIND, MARCUS, 1995)

Pontos que pertencem a \mathcal{X}_P	Pontos que não pertencem a \mathcal{X}_P
$x = 0^\infty = \dots 000.000 \dots$	$x = (01)^\infty = \dots 1\boxed{0}1.010 \dots$
$x = 1^\infty = \dots 111.111 \dots$	$x = (101)^\infty = \dots 1\boxed{0}1.101 \dots$
$x = (100)^\infty = \dots 100.100 \dots$	$x = (011)^\infty = \dots 011.\boxed{0}11 \dots$
$x = (001)^\infty = \dots 001.001 \dots$	$x = (1000)^\infty = \dots 1\boxed{000}.1000 \dots$
$x = (1001)^\infty = \dots 1001.1001 \dots$	$x = (1010)^\infty \dots 1010.1\boxed{0}10 \dots$

□

Exemplo 2.1.14 (Shift do Contexto Livre). Seja $\mathcal{A} = \{a, b, c\}$ um alfabeto, e com isso defina $\mathcal{F} = \{ab^m c^k a : m \neq k\}$. Isto é, $\mathcal{X}_C = X_{\mathcal{F}}$ é o conjunto das sequências formadas por símbolos de \mathcal{A} onde o bloco $ab^m c^k a$ só pode ocorrer em um ponto quando $m = k$. Este espaço shift é conhecido como shift do contexto livre. Abaixo, temos alguns exemplos de pontos de $\mathcal{A}_{01}^{\mathbb{Z}}$ que pertencem, ou não, a \mathcal{X}_C .

Pontos que pertencem a \mathcal{X}_C	Pontos que não pertencem a \mathcal{X}_C
$x = a^\infty = \dots aaa.aaa \dots$	$x = (ab)^\infty = \dots bab.a\boxed{b}a \dots$
$x = b^\infty = \dots bbb.bbb \dots$	$x = (ac)^\infty = \dots cac.a\boxed{c}a \dots$
$x = c^\infty = \dots ccc.ccc \dots$	$x = (aab)^\infty \dots aab.aa\boxed{b}a \dots$
$x = (abc)^\infty = \dots abc.abca \dots$	$x = (abbc)^\infty = \dots abbc.a\boxed{bbc}a \dots$
$x = (babbc)^\infty = \dots babbc.babbcabbc \dots$	$x = (bcca)^\infty = \dots a\boxed{bcc}a.bcca \dots$

□

A proposição a seguir nos oferece uma condição necessária, mas não suficiente, para que um subconjunto do shift completo seja um espaço shift.

Proposição 2.1.15. *Se \mathcal{X} é um espaço shift, então $\sigma(\mathcal{X}) = \mathcal{X}$, i.e., os espaços shift são invariantes em relação a aplicação da função shift.*

Demonstração. Seja $x \in \mathcal{X}$. Como \mathcal{X} é espaço shift, então $\mathcal{X} = X_{\mathcal{F}}$ para algum conjunto de blocos proibidos \mathcal{F} . Note que $x, \sigma(x)$ e $\sigma^{-1}(x)$ têm os mesmos blocos. Portanto, se $x \in X_{\mathcal{F}}$, então $\sigma(x), \sigma^{-1}(x) \in X_{\mathcal{F}}$. Ou seja, $\sigma(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{X}$.

Por outro lado, para $x \in X_{\mathcal{F}}$, tem-se que $\sigma(\sigma^{-1}(x)) = x \in X_{\mathcal{F}}$. Assim, $\mathcal{X} \subseteq \sigma(\mathcal{X})$. Ou seja, $\mathcal{X} = \sigma(\mathcal{X})$. □

De acordo com o resultado acima, um subconjunto do shift completo que não seja invariante pela função shift não pode ser um espaço shift. Abaixo, temos um exemplo de como essa condição pode ser empregada para determinar se um subconjunto do shift completo é, ou não, um espaço shift.

Exemplo 2.1.16 (Subconjunto não invariante). Seja \mathcal{A}_{01} o alfabeto binário e $\mathcal{X} = \{(01)^\infty\}$, subconjunto de \mathcal{A}_{01} , contendo um único ponto. Veja que $\sigma(01)^\infty = (10)^\infty \notin \mathcal{X}$, e portanto \mathcal{X} não é invariante a aplicação da função shift σ , e logo, pela Proposição (2.1.15), \mathcal{X} não é espaço shift.

$$\begin{array}{cccccccc}
 (01)^\infty = & \dots & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & \in \mathcal{X} \\
 \downarrow \sigma & & \swarrow & \swarrow & \swarrow & \swarrow & \swarrow & \swarrow & & & \\
 (10)^\infty = & \dots & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & \notin \mathcal{X}
 \end{array}$$

Figura 4: Representação da função shift

□

Ainda que a invariância de um subconjunto de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ seja condição necessária para que este seja um espaço shift, ela não é suficiente, conforme vemos no exemplo a seguir.

Exemplo 2.1.17. Seja \mathcal{A}_{01} o alfabeto binário e $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{A}_{01}^{\mathbb{Z}}$ o conjunto dos pontos que contém exatamente uma coordenada ocupada pelo 1 e o resto das coordenadas todas ocupadas pelo 0. Note, primeiramente, que \mathcal{X} é invariante a aplicação da função shift σ , mas que não é espaço shift. De fato, veja 0^k ocorre em todos os pontos de \mathcal{X} , para qualquer k , e portanto nenhum bloco de 0's é proibido. Segue que, se \mathcal{X} fosse espaço shift, então $0^\infty \in \mathcal{X}$, o que não pode ocorrer. Portanto, \mathcal{X} não é espaço shift. □

2.1.4 Linguagens

Na seção anterior, descrevemos os espaços shift utilizando conjuntos de blocos proibidos. No entanto, é possível seguir o caminho oposto e definir um espaço shift em termos dos blocos considerados “permitidos”. Pensando nisso, definimos abaixo o que consideramos como sendo a *linguagem* de um subconjunto do shift completo.

Definição 2.1.18 (Linguagem). *Seja \mathcal{X} um subconjunto de um shift completo, e defina $\mathcal{B}_n(\mathcal{X})$ como o conjunto de todos os blocos de tamanho n que ocorrem em pontos de \mathcal{X} . A linguagem de \mathcal{X} é o conjunto*

$$\mathcal{B}(\mathcal{X}) = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{B}_n(\mathcal{X}).$$

A partir da definição acima, vemos que é equivalente dizer que um bloco u ocorre em algum ponto de \mathcal{X} e que $u \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$. Como convencionamos que o bloco vazio ϵ é sub-bloco de qualquer bloco, segue que ϵ pertence a linguagem de qualquer espaço shift.

A seguir, vemos as linguagens dos exemplos dados na seção anterior.

Exemplo 2.1.19 (\mathcal{A}_{01} -shift completo). Considere $\mathcal{A}_{01}^{\mathbb{Z}}$ o shift completo sobre o alfabeto binário. A linguagem de $\mathcal{A}_{01}^{\mathbb{Z}}$ é

$$\mathcal{B}(\mathcal{A}_{01}^{\mathbb{Z}}) = \{\epsilon, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 001, 010, 100, 011, \dots\},$$

isto é, o conjunto de todos os blocos que podem ser formados com 0s e 1s, mais o bloco vazio ϵ . \square

Exemplo 2.1.20 (Shift da Razão Áurea). Considere \mathcal{X}_φ o shift da razão áurea, definido no Exemplo (2.1.12). Sua linguagem é

$$\mathcal{B}(\mathcal{X}_\varphi) = \{\epsilon, 0, 1, 00, 01, 10, 000, 001, 010, 100, 101, 0000, 0001, \dots\},$$

isto é, o conjunto de todos os blocos que podem ser formados com 0s e 1s onde não ocorrem dois 1s consecutivos, mais o bloco vazio ϵ . \square

Exemplo 2.1.21 (Shift Par). Considere \mathcal{X}_P o shift par, definido no Exemplo (2.1.13). Sua linguagem é

$$\mathcal{B}(\mathcal{X}_P) = \{\epsilon, 0, 1, 00, 11, 001, 100, 010, 111, 000, 1001, 1000, \dots\},$$

isto é, o conjunto de todos os blocos que podem ser formados com 0s e 1s onde não ocorra um número ímpar de 0s consecutivos entre dois 1s, mais o bloco vazio ϵ . \square

Exemplo 2.1.22 (Shift do contexto livre). Considere \mathcal{X}_C o shift do contexto livre, definido no Exemplo (2.1.14). Sua linguagem é

$$\mathcal{B}(\mathcal{X}_C) = \{\epsilon, a, b, c, aa, bb, cc, ab, bc, cd, ba, ac, ca, abc, acb, \dots\},$$

isto é, o conjunto de todos os blocos onde não ocorre $ab^m c^l a$ para $m \neq l$, mais o bloco vazio ϵ . \square

Usaremos a notação $\mathcal{B}(\mathcal{X})^c$ para representar o complementar de $\mathcal{B}(\mathcal{X})$, em relação ao conjunto de todos os blocos formados com os símbolos de \mathcal{A} . A proposição subsequente oferece informações cruciais acerca da linguagem de um espaço shift, fornecendo-nos ferramentas para discernir se um conjunto específico de blocos constitui, ou não, a linguagem de algum espaço shift.

Proposição 2.1.23.

(1) Seja \mathcal{X} um espaço shift, e $\mathcal{L} = \mathcal{B}(\mathcal{X})$ a sua linguagem. Se $w \in \mathcal{L}$, então

(a) todo sub-bloco de w pertence a \mathcal{L} , e

(b) existem blocos u e v não vazios em \mathcal{L} tais que $uwv \in \mathcal{L}$.

(2) As linguagens dos espaços shift são caracterizadas por (1). Isto é, se \mathcal{L} é um conjunto de blocos sobre \mathcal{A} , então $\mathcal{L} = \mathcal{B}(\mathcal{X})$ para algum espaço shift \mathcal{X} se, e somente se, \mathcal{L} satisfaz a condição (1).

(3) A linguagem de um espaço shift determina o espaço shift. De fato, para qualquer espaço shift \mathcal{X} , temos que $\mathcal{X} = X_{\mathcal{B}(\mathcal{X})^c}$. Portanto dois espaços shift são iguais se, e somente se, tiverem a mesma linguagem.

Demonstração. (1) (a) Seja $w \in \mathcal{L}$. Em outras palavras, w ocorre em algum ponto x de \mathcal{X} . Portanto, todo sub-bloco de w também ocorre em x , e portanto pertence a \mathcal{L} . (b) Como w ocorre em \mathcal{X} , então existem $x \in \mathcal{X}$ $i, j \in \mathbb{Z}$ tais que $w = x_{[i,j]}$. Defina $u = x_{[i-2,i-1]}$ e $v = x_{[i+1,i+2]}$. Dessa forma, u e v são não vazios e ocorrem em $x \in \mathcal{X}$, isto é, pertencem a \mathcal{L} . Além disso, $uvw = x_{[i-2,i+2]}$, e sendo assim $uvw \in \mathcal{L}$.

(2) Se $\mathcal{L} = \mathcal{B}(\mathcal{X})$ para algum espaço shift \mathcal{X} , então \mathcal{L} satisfaz a condição (1) pela demonstração anterior. Reciprocamente, seja \mathcal{L} um conjunto de blocos sobre \mathcal{A} , e suponha que \mathcal{L} satisfaz a condição (1). Definindo $\mathcal{X} = X_{\mathcal{L}^c}$, afirmamos que $\mathcal{L} = \mathcal{B}(\mathcal{X})$. De fato, se $w \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ então w ocorre em algum ponto de $X_{\mathcal{L}^c}$, implicando que $w \notin \mathcal{L}^c$, ou seja, $w \in \mathcal{L}$ e logo $\mathcal{B}(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{L}$. Suponha que $w = x_0x_1 \dots x_m \in \mathcal{L}$. Da condição (1b), podemos encontrar símbolos x_j com $j > m$ e x_i com $i < 0$ tais que por (1a) todo sub-bloco de $x = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ esteja em \mathcal{L} . Portanto, $x \in X_{\mathcal{L}^c}$. Como w ocorre em x , temos que $w \in \mathcal{B}(X_{\mathcal{L}^c}) = \mathcal{B}(\mathcal{X})$, provando que $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{X})$ e portanto $\mathcal{L} = \mathcal{B}(\mathcal{X})$, como desejado.

(3) Para um espaço shift \mathcal{X} , vamos mostrar que $\mathcal{X} = X_{\mathcal{B}(\mathcal{X})^c}$. Se $x \in \mathcal{X}$, então todos os blocos que ocorrem em x pertencem a $\mathcal{B}(\mathcal{X})$, ou seja, não pertencem a $\mathcal{B}(\mathcal{X})^c$. Logo, $x \in X_{\mathcal{B}(\mathcal{X})^c}$, isto é, $\mathcal{X} \subseteq X_{\mathcal{B}(\mathcal{X})^c}$. Reciprocamente, se $x \in X_{\mathcal{B}(\mathcal{X})^c}$, então nenhum bloco que ocorre em x pertence a $\mathcal{B}(\mathcal{X})^c$, e portanto todo bloco que ocorre em x pertence a $\mathcal{B}(\mathcal{X})$. Disso segue que $x \in \mathcal{X}$ e $X_{\mathcal{B}(\mathcal{X})^c} \subseteq \mathcal{X}$. Assim concluímos que $\mathcal{X} = X_{\mathcal{B}(\mathcal{X})^c}$, como desejado. \square

É relevante ressaltar três aspectos cruciais na demonstração do resultado anterior. Primeiramente, como discutido na seção anterior, um mesmo espaço shift \mathcal{X} pode ser representado por conjuntos distintos de blocos proibidos. Nesse contexto, o resultado em questão destaca que o *maior* desses conjuntos é precisamente $\mathcal{B}(\mathcal{X})^c$.

A segunda diz respeito a duas igualdades importantes, sendo estas $\mathcal{X} = X_{\mathcal{B}(\mathcal{X})^c}$, do item (3), e $\mathcal{L} = \mathcal{B}(X_{\mathcal{L}^c})$, do item (2). A relevância dessas igualdades reside na sua natureza como relações diretas entre as duas formas de definir um espaço shift que foram discutidas: através de seus blocos proibidos e através de sua linguagem.

Por fim, da demonstração do item (3) da Proposição (2.1.23), conclui-se que para determinar se um ponto x está em um dado espaço shift \mathcal{X} , basta mostrar que cada sub-bloco $x_{[i,j]}$ está em $\mathcal{B}(\mathcal{X})$. Formalizamos esta ideia no corolário a seguir.

Corolário 2.1.24. *Um subconjunto \mathcal{X} de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ é espaço shift se, e somente se, sempre que $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ e todo $x_{[i,j]} \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ tem-se que $x \in \mathcal{X}$.*

Demonstração. Suponha, primeiramente, que \mathcal{X} é um espaço shift. Seja $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ tal que cada $x_{[i,j]} \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$. Logo, não existem $m, n \in \mathbb{Z}$ tais que $x_{[m,n]} \in \mathcal{B}(\mathcal{X})^c$. Com isso, temos que $x \in X_{\mathcal{B}(\mathcal{X})^c}$, e do item (3) da Proposição (2.1.23) concluímos que $x \in \mathcal{X}$.

Reciprocamente, seja \mathcal{X} um subconjunto do \mathcal{A} -shift completo, e suponha que quando $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ e cada $x_{[i,j]} \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$, então $x \in \mathcal{X}$. Vamos mostrar que $X_{\mathcal{B}(\mathcal{X})^c} = \mathcal{X}$. Seja $x \in \mathcal{X}$. Logo, cada $x_{[i,j]} \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$, pela própria definição de linguagem. Isto é, $x_{[i,j]} \notin \mathcal{B}(\mathcal{X})^c$, para

quaisquer i e j . Portanto, $x \in X_{\mathcal{B}(\mathcal{X})^c}$, ou seja, $\mathcal{X} \subseteq X_{\mathcal{B}(\mathcal{X})^c}$. Agora, seja $x \in X_{\mathcal{B}(\mathcal{X})^c}$. Assim sendo, todo $x_{[i,j]}$ não pertence a $\mathcal{B}(\mathcal{X})^c$, em outras palavras, qualquer $x_{[i,j]}$ pertence a $\mathcal{B}(\mathcal{X})$. Portanto, da nossa hipótese, $x \in \mathcal{X}$. Assim, concluímos que $X_{\mathcal{B}(\mathcal{X})^c} \subseteq \mathcal{X}$, e por consequência $\mathcal{X} = X_{\mathcal{B}(\mathcal{X})^c}$. Isto é, \mathcal{X} é um espaço shift. \square

O Corolário (2.1.24) será aplicado com frequência quando for necessário verificar se um ponto x no shift completo pertence, ou não, a um espaço shift específico.

2.1.5 Espaços Shift de Tipo Finito

Nesta seção, definiremos os *shifts de tipo finito*. Estes são de suma importância para a teoria de somreamento que desenvolveremos posteriormente no trabalho.

Definição 2.1.25 (Espaço Shift de Tipo Finito). *Um espaço shift de tipo finito é um espaço shift que pode ser descrito por um conjunto finito de blocos proibidos, i.e., um espaço shift \mathcal{X} da forma $\mathcal{X} = X_{\mathcal{F}}$ para \mathcal{F} finito.*

Vamos empregar os diversos espaços shift definidos nas seções anteriores para identificar exemplos de shifts de tipo finito.

Exemplo 2.1.26 (Shift completo e conjunto vazio). O espaço shift completo $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ sobre um alfabeto finito \mathcal{A} e o espaço shift vazio \emptyset são exemplos de shifts de tipo finito, pois $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}} = X_{\emptyset}$ e $\emptyset = X_{\mathcal{A}}$. \square

Exemplo 2.1.27 (Shift da razão áurea). O shift da razão áurea \mathcal{X}_{φ} é um shift de tipo finito, pois $\mathcal{X}_{\varphi} = X_{\{11\}}$. \square

Exemplo 2.1.28 (Shift par). O shift par \mathcal{X}_P não é um shift de tipo finito. Isso ocorre pois não é possível encontrar \mathcal{F} finito que proíba todos os blocos nos quais ocorre um número ímpar de 0s consecutivos entre dois 1s. Provaremos isso com mais detalhes no Exemplo (2.1.33). \square

Exemplo 2.1.29 (Shift do contexto livre). O shift do contexto livre \mathcal{X}_C não é um shift de tipo finito, por um argumento similar ao do exemplo anterior. \square

Com o intuito de facilitar a apresentação de resultados que envolvem shifts de tipo finito, almejamos que o conjunto finito de blocos proibidos \mathcal{F} associado a um shift desse tipo seja constituído por blocos de tamanho uniforme. A partir disso, temos a definição a seguir.

Definição 2.1.30 (Ordem M). *Um shift de tipo finito tem **ordem** M se pode ser descrito por um conjunto de blocos proibidos onde todos os blocos tem tamanho M , em que $M \geq 0$.*

Pelos exemplos anteriores, vemos que o shift completo tem ordem 0, o shift vazio tem ordem 1 e o shift da razão áurea tem ordem 2. A proposição abaixo nos diz que todo shift de tipo finito sobre um alfabeto finito tem ordem M , para algum $M \geq 0$.

Proposição 2.1.31. *Se \mathcal{X} é um shift de tipo finito sobre um alfabeto finito, então existe $M \geq 0$ tal que \mathcal{X} é de ordem M .*

Demonstração. Seja \mathcal{X} um shift de tipo finito sobre um alfabeto $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$. Então, existe \mathcal{F} conjunto finito de blocos proibidos tal que $\mathcal{X} = X_{\mathcal{F}}$. Se $\mathcal{F} = \emptyset$, então $M = 0$. Se \mathcal{F} é não vazio, digamos $\mathcal{F} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$, defina $M = \max_{1 \leq i \leq n} |u_i|$.

Proibir um bloco u é equivalente a proibir o conjunto de blocos $\{ua_1, ua_2, \dots, ua_m\}$. Utilizando esse argumento, podemos formar um conjunto $\overline{\mathcal{F}}$ a partir de \mathcal{F} tal que todos os blocos de $\overline{\mathcal{F}}$ tenham tamanho M e $X_{\overline{\mathcal{F}}} = \mathcal{X} = X_{\mathcal{F}}$. Com isso, mostramos que \mathcal{X} tem ordem M , como desejado. \square

O teorema a seguir proporciona uma caracterização de um shift de tipo finito de ordem M com base na sua linguagem.

Teorema 2.1.32. *Um espaço shift \mathcal{X} é um shift de tipo finito de ordem $M + 1$ se, e somente se, quando $uv, vw \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ e $|v| \geq M$, então $uvw \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$.*

Demonstração. Começamos supondo que \mathcal{X} é um shift de tipo finito de ordem $M + 1$, ou seja, $\mathcal{X} = X_{\mathcal{F}}$ onde \mathcal{F} é um conjunto finito composto por blocos de tamanho $M + 1$. Sejam $uv, vw \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$, onde $|v| = n \geq M$. Então, da invariância de \mathcal{X} em relação a função shift σ , existem pontos $x, y \in \mathcal{X}$ tais que $x_{[-k, n]} = uv$ e $y_{[1, l]} = vw$, logo $x_{[1, n]} = y_{[1, n]} = v$. Para provar que $uvw \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$, vamos mostrar que o ponto $z = x_{(-\infty, 0]}vy_{[n+1, +\infty)}$ pertence a \mathcal{X} . De fato, caso algo bloco de \mathcal{F} ocorra em z , ele deve ocorrer exclusivamente ou em $x_{(-\infty, 0]}v = x_{(-\infty, n]}$ ou em $vy_{[n+1, +\infty)} = y_{[1, +\infty)}$, já que $|v| \geq M$ por hipótese. Porém, isso contradiz a suposição de que x e y pertencem a \mathcal{X} , e portanto

$$uvw = x_{[-k, 0]}vy_{[n+1, l]} = z_{[-k, l]} \in \mathcal{B}(\mathcal{X}),$$

como desejado.

Reciprocamente, suponha agora que \mathcal{X} é um espaço shift e quando $uv, vw \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ e $|v| \geq M$, então $uvw \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$. Seja \mathcal{F} o conjunto de todos os blocos de tamanho $M + 1$ que não pertencem a $\mathcal{B}_{M+1}(\mathcal{X})$. Vamos mostrar que $\mathcal{X} = X_{\mathcal{F}}$, e com isso concluímos que \mathcal{X} é um shift de tipo finito de ordem $M + 1$.

Se $x \in \mathcal{X}$, então nenhum bloco de \mathcal{F} ocorre em x , e portanto $x \in X_{\mathcal{F}}$. Isso mostra que $\mathcal{X} \subseteq X_{\mathcal{F}}$. Agora, seja $x \in X_{\mathcal{F}}$. Logo, $x_{[0, M]}$ e $x_{[1, M+1]}$ pertencem a $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ pela nossa definição de \mathcal{F} , e defina $u = x_0$, $v = x_{[1, M]}$ e $w = x_{M+1}$. Como $X_{\mathcal{F}}$ é um shift de tipo finito de ordem $M + 1$ e $uv, vw \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$, então do que provamos anteriormente nesta demonstração segue que $uvw = x_{[0, M+1]}$ pertence a $\mathcal{B}(\mathcal{X})$. Sabendo agora que $x_{[0, M+1]} \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ e utilizando um

argumento análogo com $u = x_0$, $v = x_{[1, M+1]}$ e $w = x_{M+2}$, obtemos que $x_{[0, M+2]}$ pertence a $\mathcal{B}(\mathcal{X})$. Repetindo esse argumento indutivamente em ambas as direções encontramos que $x_{[-k, l]} \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ para todo $k, l \geq 0$. Assim, do Corolário (2.1.24) concluímos que $x \in \mathcal{X}$ e portanto $X_{\mathcal{F}} \subseteq \mathcal{X}$, como desejado. \square

No exemplo a seguir, ilustramos como podemos empregar o teorema acima para verificar se um espaço shift é de tipo finito ou não.

Exemplo 2.1.33. Seja \mathcal{X}_P o shift par. Mostramos no Exemplo (2.1.28) que \mathcal{X}_P não é de tipo finito. De fato, pois, caso fosse, seria de ordem M para algum $M \geq 1$. Como 10^{2M+1} e $0^{2M+1}1$ são blocos que pertencem a $\mathcal{B}(\mathcal{X}_P)$, então pelo Teorema (2.1.32) temos $10^{2M+1}1 \in \mathcal{B}(\mathcal{X}_P)$, o que configura uma contradição. \square

Além do teorema previamente demonstrado, contamos com uma segunda abordagem para caracterizar um shift de tipo finito, que será empregada com maior frequência. Essa abordagem está descrita na proposição a seguir.

Proposição 2.1.34. *Seja \mathcal{X} um espaço shift. Temos que \mathcal{X} é um shift de tipo finito de ordem M se, e somente se, quando $y \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ e todo subbloco de tamanho M pertence a $\mathcal{B}(\mathcal{X})$, então $y \in \mathcal{X}$.*

Demonstração. Suponha que \mathcal{X} é um shift de tipo finito com ordem M . Então, existe \mathcal{F} conjunto de blocos proibidos tal que $\mathcal{X} = X_{\mathcal{F}}$ e todos os elementos de \mathcal{F} tem tamanho M . Ou seja, todo $u \in \mathcal{F}$ é tal que $|u| = M$ e $u \notin \mathcal{B}(\mathcal{X})$. Seja $y \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ tal que $y_{[n, n+M-1]} \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Portanto, nenhum elemento de \mathcal{F} ocorre em y . Disso segue que $y \in X_{\mathcal{F}}$, ou seja, $y \in \mathcal{X}$.

Reciprocamente, suponha que quando $y \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ e $y_{[n, n+M-1]} \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$, para todo $n \in \mathbb{Z}$, então $y \in \mathcal{X}$. Seja \mathcal{F} o conjunto dos blocos de tamanho M sobre \mathcal{A} que não pertencem a $\mathcal{B}_M(\mathcal{X})$, ou seja, $\mathcal{F} = \mathcal{B}_M(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}) \cap \mathcal{B}_M(\mathcal{X})^C$. Vamos mostrar que $\mathcal{X} = X_{\mathcal{F}}$. Se $x \in \mathcal{X}$, então $x_{[n, n+M-1]} \in \mathcal{B}_M(\mathcal{X})$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Isto é, nenhum elemento de \mathcal{F} ocorre em x . Portanto, $x \in X_{\mathcal{F}}$ e $\mathcal{X} \subseteq X_{\mathcal{F}}$. Agora, se $x \in X_{\mathcal{F}}$, então nenhum elemento de \mathcal{F} ocorre em x . Disso segue que $x_{[n, n+M-1]} \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Da nossa hipótese, segue que $x \in \mathcal{X}$. Consequentemente, $X_{\mathcal{F}} \subseteq \mathcal{X}$ e $\mathcal{X} = X_{\mathcal{F}}$. Como todos os elementos de \mathcal{F} tem tamanho M , segue que \mathcal{X} é um espaço shift de tipo finito com ordem M . \square

2.1.6 Espaços shift vistos como Sistemas Dinâmicos

Dado que nossa intenção é investigar a relação entre as propriedades de sombreamento e a estabilidade topológica nos espaços shift, e uma vez que essas são noções inerentes a sistemas dinâmicos, iniciamos esta seção com a definição formal do que consideramos como um sistema dinâmico.

Definição 2.1.35 (Sistema Dinâmico). Um **sistema dinâmico** (M, d, T) consiste de um espaço métrico (M, d) e um homeomorfismo $T : M \rightarrow M$.

Para abordar os espaços shift como sistemas dinâmicos, é necessário definir uma métrica para eles. Inicialmente, definiremos uma métrica para o espaço shift completo, e posteriormente a restringiremos para um espaço shift qualquer. Com isso, definimos a função $\rho : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \times \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{R}$ para todo $x, y \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ por

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 2^{-k}, & \text{se } x \neq y, \text{ e } k \text{ é o menor natural tal que } x_{[-k, k]} \neq y_{[-k, k]}; \\ 0, & \text{se } x = y. \end{cases} \quad (2.1.36)$$

Assim, para calcular a distância entre dois pontos x e y do espaço shift completo, encontramos o menor k natural tal que os blocos centrais de tamanho $2k + 1$ de x e de y não concordem. Convencionamos que $\rho(x, y) = 0$ caso $x = y$ pois $2^{-k} \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow +\infty$. Além disso, se $x_0 \neq y_0$, veja que $\rho(x, y) = 2^0 = 1$. Isto é, $\rho(x, y) \leq 1$ para quaisquer $x, y \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$.

Exemplo 2.1.37 (Distância entre dois pontos do shift completo). Sejam $x = \dots 001.010 \dots$ e $y = \dots 001.011 \dots$ pontos de $\mathcal{A}_{01}^{\mathbb{Z}}$. Note que $x_0 = y_0$, $x_{[-1, 1]} = y_{[-1, 1]} = 101$, porém $x_{[-2, 2]} = 01010$ e $y_{[-2, 2]} = 01011$, isto é, $x_{[-2, 2]} \neq y_{[-2, 2]}$. Portanto, $\rho(x, y) = 2^{-2} = 1/4$. \square

Agora, mostraremos que ρ , da maneira definida em (2.1.36), é de fato uma métrica para o espaço shift completo $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$.

Proposição 2.1.38. *Seja \mathcal{A} um alfabeto. A função $\rho : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \times \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{R}$, definida em (2.1.36), é uma métrica para $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$.*

Demonstração. Precisamos mostrar que, para todo $x, y, z \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$,

- (a) $\rho(x, y) = 0$ se, e somente se, $x = y$;
- (b) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$; e
- (c) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$.

As condições (a) e (b) seguem diretamente da definição da métrica em (2.1.36), e então nos resta provar a condição (c), que conhecemos como desigualdade triangular.

Sejam $x, y, z \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$. Suponha que $\rho(x, z) = 2^{-(k+1)}$ e $\rho(z, y) = 2^{-(l+1)}$, em outras palavras, $x_{[-k, k]} = z_{[-k, k]}$ e $z_{[-l, l]} = y_{[-l, l]}$. Defina $m = \min\{k, l\}$, e com isso obtemos $x_{[-m, m]} = y_{[-m, m]}$. Portanto,

$$\rho(x, y) \leq 2^{-(m+1)} \leq 2^{-(k+1)} + 2^{-(l+1)} = \rho(x, z) + \rho(z, y),$$

como desejado. \square

Com isso, para obter uma métrica para qualquer espaço shift \mathcal{X} , basta restringir ρ a $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$. Quando estiver claro o espaço shift que estamos trabalhando, omitiremos a restrição.

Exemplo 2.1.39 (Convergência com a métrica ρ). Neste exemplo, vamos estudar o que significa a convergência de uma sequência em um espaço shift com a métrica ρ . Sabemos que uma sequência de pontos $\{x^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}$ em um espaço shift \mathcal{X} (usamos a notação $x^{(n)}$ para o n -ésimo termo de uma sequência de pontos, pois x_n usualmente denota a n -ésima coordenada de um ponto x) converge para um ponto x desse mesmo espaço se $\rho(x^{(n)}, x) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow +\infty$, ou seja, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \rho(x^{(n)}, x) = 0$. Em outras palavras, uma sequência de pontos $\{x^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}$ em um espaço shift \mathcal{X} converge para $x \in \mathcal{X}$ quando para todo $k \geq 0$ existe $n_k \geq 0$ tal que $x_{[-k,k]}^{(n)} = x_{[-k,k]}$ para todo $n \geq n_k$. De maneira intuitiva, dizer que uma sequência de pontos $\{x^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}$ em um espaço shift converge para algum ponto x do espaço shift, quando $n \rightarrow +\infty$, é, na verdade, dizer que para todo $k \geq 0$ existe $n_k \geq 0$ tal que os blocos centrais de tamanho $2k + 1$ de x e $x^{(n)}$ concordam, para $n \geq n_k$. \square

Exploraremos alguns exemplos de sequências convergentes a seguir.

Exemplo 2.1.40. A sequência $\{x^{(n)}\}_{n=0}^{\infty} \subseteq \mathcal{A}_{01}^{\mathbb{Z}}$, cujo termo geral é dado por

$$x^{(n)} = (0^n 1)^{\infty} = \dots \underbrace{10 \dots 01}_{n \text{ vezes}} 1 \dots,$$

converge para $x = 0^{\infty} 1 0^{\infty}$ quando $n \rightarrow +\infty$. De fato, seja $k \geq 0$ e defina $n_k = k + 1$. Temos então que $x_{[-k,k]}^{(n)} = 0^{k-1} 1 0^{k+1} = x_{[-k,k]}$ para todo $n \geq k + 1$. \square

Exemplo 2.1.41. A sequência $\{x^{(n)}\}_{n=0}^{\infty} \subseteq \mathcal{A}_{01}^{\mathbb{Z}}$, cujo termo geral é dado por

$$x^{(n)} = (10^n)^{\infty} 1 (0^n 1)^{\infty} = \dots \underbrace{10 \dots 01}_{n \text{ vezes}} 1 \dots,$$

converge para $x = 0^{\infty} 1 0^{\infty}$ quando $n \rightarrow +\infty$. O argumento é análogo ao do exemplo anterior. \square

Dado que buscamos abordar um espaço shift como um Sistema Dinâmico, é necessário demonstrar que a função shift é um homeomorfismo em relação à métrica ρ .

Proposição 2.1.42. *Seja \mathcal{X} um espaço shift. A função shift $\sigma : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ é contínua em relação a métrica ρ .*

Demonstração. Seja \mathcal{X} um espaço shift e $\{x^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}$ um sequência em \mathcal{X} tal que $x^{(n)}$ converge para x quando $n \rightarrow +\infty$. Vamos provar que $\sigma(x^{(n)})$ converge para $\sigma(x)$ quando $n \rightarrow +\infty$.

Seja $k \geq 0$. Uma vez que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x^{(n)} = x$, então existe $n_{k+1} \geq 0$ tal que $x_{[-k-1,k+1]}^{(n)} = x_{[-k-1,k+1]}$ para todo $n \geq n_{k+1}$. Visto que $\sigma(x^{(n)})_i = x_{i+1}^{(n)}$, portanto, para todo $n \geq n_{k+1}$,

$$\sigma(x^{(n)})_{[-k-2,k]} = x_{[-k-1,k+1]}^{(n)} = x_{[-k-1,k+1]} = \sigma(x)_{[-k-2,k]}, \quad (2.1.43)$$

e, em particular, $\sigma(x^{(n)})_{[-k,k]} = \sigma(x)_{[-k,k]}$ para todo $n \geq n_{k+1}$. Em outras palavras, $\sigma(x^{(n)}) \rightarrow \sigma(x)$ quando $n \rightarrow +\infty$. \square

Com o resultado provado acima, conseguimos mostrar que a função shift σ é um homeomorfismo.

Corolário 2.1.44. *Seja \mathcal{X} um espaço shift. A função shift $\sigma : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ é um homeomorfismo, em relação a métrica ρ .*

Demonstração. Sabemos que a função shift σ é inversível, e da Proposição (2.1.42) obtemos que σ é contínua. A demonstração que σ^{-1} é contínua é análoga a da Proposição (2.1.42), e portanto σ é um homeomorfismo. \square

Agora, exploraremos algumas propriedades topológicas dos espaços shift. Para tanto, iniciaremos com algumas definições clássicas.

Definição 2.1.45 (Bola aberta, Conjuntos Abertos e Fechados). *Seja (M, d) um espaço métrico. Para $x \in M$ e $r > 0$, a **bola aberta de raio r centrada em x** é o conjunto $B_r(x) = \{y \in M : d(x, y) < r\}$. Um subconjunto $U \subseteq M$ é **aberto** se, para todo $x \in U$, existe $r > 0$ tal que $B_r(x) \subseteq U$. Um subconjunto $V \subseteq M$ é **fechado** se o seu complementar $M \setminus V$ é aberto.*

Com as definições fornecidas acima, podemos demonstrar que todo espaço shift é compacto.

Proposição 2.1.46. *Seja \mathcal{X} um espaço shift munido da métrica definida em (2.1.36). Então \mathcal{X} é compacto.*

Demonstração. Vamos mostrar que toda sequência em \mathcal{X} possui uma subsequência convergente. Seja $\{x^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}$ uma sequência em \mathcal{X} . Consideramos primeiro as 0-ésimas coordenadas $x_0^{(n)}$. Como o alfabeto \mathcal{A} é finito, existe um conjunto infinito S_0 formado por números naturais tal que $x_0^{(n)}$ é o mesmo símbolo para todo $n \in S_0$. Veja que os blocos centrais de tamanho 3, ou seja, os da forma $x_{[-1,1]}^{(n)}$ para $n \in S_0$, pertencem ao conjunto finito de blocos de tamanho 3, e então existe um subconjunto infinito $S_1 \subseteq S_0$ tal que $x_{[-1,1]}^{(n)}$ é o mesmo para todo $n \in S_1$. Repetindo esse argumento indutivamente, encontramos para cada $k \geq 1$ um subconjunto infinito $S_k \subseteq S_{k-1}$ tal que os blocos $x_{[-k,k]}^{(n)}$ são os mesmos para todo $n \in S_k$.

Defina x como sendo a sequência onde $x_{[-k,k]} = x_{[-k,k]}^{(n)}$ para algum $n \in S_k$. Como $S_k \subseteq S_{k-1}$, o bloco central de tamanho $2k-1$ de $x_{[-k,k]}$ é $x_{[-k+1,k-1]}$, e portanto x está bem definido. Além disso, observe que todo bloco de x ocorre em algum $x_{[-k,k]} = x_{[-k,k]}^{(n)} \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$, e portanto x , pertence ao espaço shift \mathcal{X} , pelo Corolário (2.1.24).

Defina n_0 como sendo o menor elemento de S_0 e, para cada $k \geq 1$, defina n_k como sendo o menor elemento de S_k que exceda n_{k-1} . Note que é possível escolher tais n_k graças

ao Princípio da Boa Ordenação. Assim, definimos uma subsequência $x^{(n_k)}$, que claramente converge para x quando $k \rightarrow \infty$. \square

A seguir, veremos um exemplo interessante de subconjuntos de um espaço shift, conhecidos como *conjuntos cilindro*.

Exemplo 2.1.47 (Conjuntos Cilindro). Seja \mathcal{X} um espaço shift, e fixe $u \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ e $k \in \mathbb{Z}$. Definimos o *conjunto cilindro* $C_k^{\mathcal{X}}(u)$ como

$$C_k^{\mathcal{X}}(u) := \{x \in \mathcal{X} : x_{[k, k+|u|-1]} = u\},$$

isto é, $C_k^{\mathcal{X}}(u)$ é o conjunto de todos os pontos em \mathcal{X} tais que o bloco u ocorre iniciando na coordenada k . Quando \mathcal{X} for claro no contexto, omitiremos o \mathcal{X} na notação de um conjunto cilindro, e diremos somente $C_k(u)$.

Vamos começar mostrando que os conjuntos cilindro são abertos. Note que para todo $n \geq 0$ e $x \in \mathcal{X}$, temos, como $|x_{[-n, n]}| = 2n + 1$,

$$\begin{aligned} C_{-n}(x_{[-n, n]}) &= \{y \in \mathcal{X} : y_{[-n, -n+(2n+1)-1]} = x_{[-n, n]}\} \\ &= \{y \in \mathcal{X} : y_{[-n, n]} = x_{[-n, n]}\} \\ &= \{y \in \mathcal{X} : \rho(x, y) < 2^{-n}\} \\ &= B_{2^{-n}}(x). \end{aligned}$$

Portanto, se $x \in C_k(u)$ e $n = \max\{|k|, |k + |u| - 1|\}$, então

$$B_{2^{-n}}(x) = C_{-n}(x_{[-n, n]}) \subseteq C_k(u),$$

provando que $C_k(u)$ é aberto. Para ver que $C_k(u)$ é também fechado, note que

$$\begin{aligned} \mathcal{X} \setminus C_k(u) &= \{x \in \mathcal{X} : x_{[k, k+|u|-1]} \neq u\} \\ &= \bigcup_{v \in \mathcal{B}_{|u|}(\mathcal{X}) \setminus \{u\}} C_k(v), \end{aligned}$$

e como cada $C_k(v)$ é aberto e união de abertos é aberta, segue que $\mathcal{X} \setminus C_k(u)$ é aberto e portanto $C_k(u)$ é fechado. \square

O fato dos conjuntos cilindro serem simultaneamente abertos e fechados oferece um contraste interessante com o caso \mathbb{R}^n , onde os únicos conjuntos simultaneamente abertos e fechados são o próprio \mathbb{R} e o vazio. Em outras palavras, o que mostramos no exemplo acima é que os espaços shift \mathcal{X} não são conexos.

Teorema 2.1.48. *Um subconjunto de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ é um espaço shift se, e somente se, for invariante pela função shift e compacto.*

Demonstração. Seja $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ um espaço shift. Já mostramos anteriormente que todo espaço shift é invariante a função shift (Proposição 2.1.15) e compacto (Proposição 2.1.46).

Reciprocamente, seja $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ tal que $\sigma(\mathcal{X}) = \mathcal{X}$ e \mathcal{X} é compacto. Como \mathcal{X} é subconjunto compacto de um espaço métrico compacto, então \mathcal{X} é fechado, ou seja, $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \setminus \mathcal{X}$ é aberto. Portanto, para cada $y \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \setminus \mathcal{X}$ existe $k = k(y)$ tal que se u_y denota o bloco $y_{[-k,k]}$, então $C_{-k}^{\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}}(u_y) \subseteq \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \setminus \mathcal{X}$. Defina $\mathcal{F} = \{u_y : y \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \setminus \mathcal{X}\}$. Vamos mostrar que $\mathcal{X} = X_{\mathcal{F}}$.

De fato, seja $x \in \mathcal{X}$. Suponha que algum u_y ocorre em x . Isto é,

$$u_y = y_{[-k,k]} = x_{[i,i+2k]},$$

para algum $i \in \mathbb{Z}$. Como \mathcal{X} é invariante pela função shift, então $\sigma^{-i-k}(x)$ pertence a \mathcal{X} . Com isso, temos que $\sigma^{-i-k}(x)_{[-k,k]} = x_{[i,i+2k]} = u_y$. Logo,

$$\sigma^{-i-k}(x) \in C_{-k}^{\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}}(u_y) \subseteq \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \setminus \mathcal{X},$$

o que configura uma contradição com a suposição de que $x \in \mathcal{X}$. Assim, nenhum elemento de \mathcal{F} ocorre em x , e portanto $x \in X_{\mathcal{F}}$, isto é, $\mathcal{X} \subseteq X_{\mathcal{F}}$.

Agora, seja $x \in X_{\mathcal{F}}$. Caso $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \setminus \mathcal{X}$, teríamos que $u_x \in \mathcal{F}$, e disso seguiria $x \notin X_{\mathcal{F}}$. Portanto, concluímos que $X_{\mathcal{F}} \subseteq \mathcal{X}$.

Disso segue que $\mathcal{X} = X_{\mathcal{F}}$, e assim provamos que \mathcal{X} é um espaço shift. \square

O resultado que acabamos de demonstrar é significativo, pois proporciona uma caracterização topológica para os espaços shift. Até o momento, abordamos os espaços shift a partir da sua definição por meio de blocos proibidos ou linguagens. A partir deste ponto, passamos a conceber os espaços shift não apenas como conjuntos gerados por coleções de blocos proibidos, mas, sobretudo, como os subconjuntos invariantes e compactos de um shift completo.

2.2 ESPAÇOS SHIFT SOBRE ALFABETOS INFINITOS

Uma das nossas primeiras suposições, realizadas logo no início da primeira seção, foi a de que trabalharíamos com os espaços shift sobre um alfabeto \mathcal{A} finito. Agora, examinaremos como os conceitos apresentados nas seções anteriores se modificam quando consideramos um alfabeto infinito.

Inicialmente, seja $\overline{\mathcal{A}}$ um conjunto infinito, que trataremos como um alfabeto infinito. Definimos o espaço shift completo $\overline{\mathcal{A}}^{\mathbb{Z}}$ de forma análoga ao caso com alfabeto finito³:

$$\overline{\mathcal{A}}^{\mathbb{Z}} := \{x = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}} : x_i \in \overline{\mathcal{A}} \text{ para todo } i \in \mathbb{Z}\}.$$

Com isso, vemos que a função shift σ e a métrica ρ definidas em, respectivamente, (2.1.8) e (2.1.36), podem ser também analogamente definidas para o caso em que $\overline{\mathcal{A}}$ é infinito. Por influência do Teorema (2.1.48), definimos os espaços shift sobre alfabetos infinitos da maneira abaixo.

³ Existem outras maneiras de definir um shift completo sobre um alfabeto infinito, em particular, quando este é infinito enumerável. Uma destas pode ser encontrada em (OTT, TOMFORDE, WILLIS, 2014)

Definição 2.2.1. *Seja $\overline{\mathcal{A}}$ um alfabeto infinito. Um subconjunto de $\overline{\mathcal{A}}^{\mathbb{Z}}$ é um espaço shift se for invariante pela função shift e fechado em relação a métrica ρ .*

Porém, nem todo resultado se estende trivialmente. No caso com alfabeto finito, os shifts de tipo finito são aqueles gerados a partir de um conjunto finito de blocos proibidos, e mantemos essa caracterização quando o alfabeto é infinito. Entretanto, pela Proposição (2.1.31), todo shift de tipo finito é de ordem M para algum $M \geq 0$, quando o alfabeto é finito. Porém, a demonstração da Proposição (2.1.31) não é válida para o caso em que estamos trabalhando com um alfabeto infinito. Ou seja, ainda que todo shift de ordem M seja um shift de tipo finito, nem todo shift de tipo finito é de ordem M para algum $M \geq 0$. No decorrer da análise subsequente sobre estabilidade topológica (no Capítulo (3)), nosso foco se direcionará para os shifts de ordem M sobre alfabetos infinitos.

Dito isso, tratemos de outro problema que surge ao tentar estender o já feito anteriormente para o caso em que o alfabeto é infinito: a compacidade do shift completo $\overline{\mathcal{A}}^{\mathbb{Z}}$. Conforme mostramos na Proposição (2.1.46), o shift completo $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ é compacto quando \mathcal{A} é finito. No entanto, esse resultado não se mantém no caso em que $\overline{\mathcal{A}}$ é infinito, conforme veremos a seguir.

Proposição 2.2.2. *Seja $\overline{\mathcal{A}}$ um conjunto infinito. Então, com respeito a métrica ρ , o shift completo $\overline{\mathcal{A}}^{\mathbb{Z}}$ não é compacto.*

Demonstração. Considere $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\}$ um subconjunto infinito enumerável composto por elementos distintos de $\overline{\mathcal{A}}$. Vamos mostrar que a sequência $\{x^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}$ em $\overline{\mathcal{A}}^{\mathbb{Z}}$, dada pelo termo geral

$$x^{(n)} = a_n^{\infty} = \dots a_n a_n \cdot a_n a_n \dots,$$

não possui subsequência convergente. Vamos prosseguir por absurdo, e logo suponha que exista $\{x^{(n_k)}\}_{n_k=0}^{\infty}$ subsequência de $\{x^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}$ tal que $\lim_{n_k \rightarrow +\infty} x^{(n_k)} = x$, para algum ponto x de $\overline{\mathcal{A}}^{\mathbb{Z}}$. Isto é, para todo $m \geq 0$ existe n_{k_m} tal que, para todo $n_k \geq n_{k_m}$, tem-se $x_{[-m, m]}^{(n_k)} = x_{[-m, m]}$. Porém, disso segue que $x_{[-m, m]}^{(n_{k_m})} = a_{n_{k_m}}^{2m+1}$ e $x_{[-m, m]}^{(n_{k_{m+1}})} = a_{n_{k_{m+1}}}^{2m+1}$, e como $a_{n_{k_m}} \neq a_{n_{k_{m+1}}}$, encontramos um absurdo. Com isso, concluímos que não pode haver subsequência convergente para a sequência dada, e portanto $\overline{\mathcal{A}}^{\mathbb{Z}}$ não é compacto. \square

Como veremos no próximo capítulo, a falta de compacidade de $\overline{\mathcal{A}}^{\mathbb{Z}}$ não interferirá na obtenção do resultado principal.

3 ESTABILIDADE TOPOLÓGICA DE SISTEMAS DINÂMICOS

Nesta seção, iniciamos nossa análise explorando a propriedade do sombreamento e apresentando alguns exemplos pertinentes. Em seguida, introduzimos a noção de estabilidade topológica, e estudamos a relação entre essa propriedade e o sombreamento em sistemas dinâmicos sobre conjuntos compactos em geral. Por fim, estendemos esses resultados para os shift de ordem M sobre um alfabeto infinito que, conforme visto na Proposição (2.2.2), não são necessariamente compactos.

3.1 PROPRIEDADE DO SOMBREAMENTO

Para podermos definir a propriedade do sombreamento, precisamos antes entender algumas noções mais elementares. A primeira dessas noções é a de *órbita*.

Definição 3.1.1 (Órbita). *Seja (X, d) um espaço métrico e $T : X \rightarrow X$ um homeomorfismo. A **T -órbita** de um ponto $x \in X$ é o conjunto*

$$\begin{aligned} \{T(x)\}_{-\infty}^{\infty} &:= \{T^n(x) \mid n \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{\dots, T^{-3}(x), T^{-2}(x), T^{-1}(x), x, T(x), T^2(x), T^3(x), \dots\}. \end{aligned}$$

$$\dots \xrightarrow{T} T^{-2}(x) \xrightarrow{T} T^{-1}(x) \xrightarrow{T} x \xrightarrow{T} T(x) \xrightarrow{T} T^2(x) \xrightarrow{T} \dots$$

Figura 4: A T -órbita de um ponto $x \in X$.

Quando está claro qual para qual T a T -órbita de um ponto x está sendo calculada, omitimos T e dizemos somente a *órbita de x* .

Definição 3.1.2 (Pseudo-órbita). *Seja (X, d) um espaço métrico, $T : X \rightarrow X$ um homeomorfismo e $\delta > 0$. Uma **δ -pseudo-órbita** é uma sequência bi-infinita $\{x^{(n)}\}_{-\infty}^{\infty}$ de pontos em X tal que*

$$d(T(x^{(n)}), x^{(n+1)}) \leq \delta, \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (3.1.3)$$

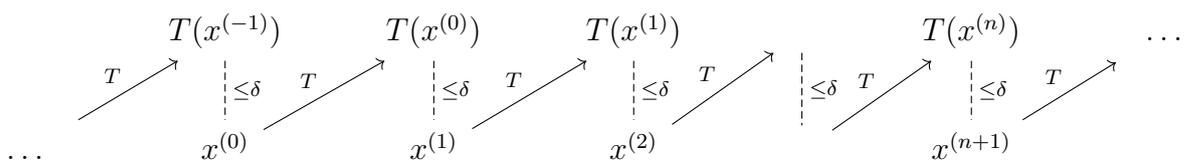


Figura 5: Representação de uma δ -pseudo-órbita $\{x^{(n)}\}_{-\infty}^{\infty}$.

Ao chamar uma sequência de δ -pseudo-órbita, estamos insinuando que ela é *quase* uma órbita, a menos de uma distância no máximo δ . Note que, se imaginarmos uma

δ -pseudo-órbita onde $\delta > 0$ é muito pequeno, então a sequência de fato se aproxima de uma órbita.

Definição 3.1.4 (Sombreamento). *Seja (X, d) um espaço métrico, $T : X \rightarrow X$ um homeomorfismo e $\varepsilon > 0$. Uma sequência $\{x^{(n)}\}_{-\infty}^{\infty}$ é ε -sombreada por um ponto $x \in X$ quando*

$$d(T^n(x), x^{(n)}) < \varepsilon, \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (3.1.5)$$

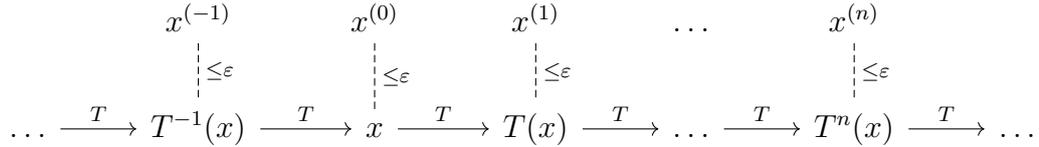


Figura 6: Representação de uma sequência $\{x^{(n)}\}_{-\infty}^{\infty}$ ε -sombreada por $x \in X$

Ao afirmarmos que uma sequência é ε -sombreada por um ponto, queremos transmitir a ideia de que a órbita desse ponto age como uma *sombra* da sequência, permanecendo sempre próxima aos termos da sequência, a uma distância máxima de ε .

Definição 3.1.6 (Propriedade do Sombreamento). *Dizemos que um sistema dinâmico (X, d, T) tem a **Propriedade do Sombreamento** se para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que toda δ -pseudo-órbita é ε -sombreada por algum $x \in X$.*

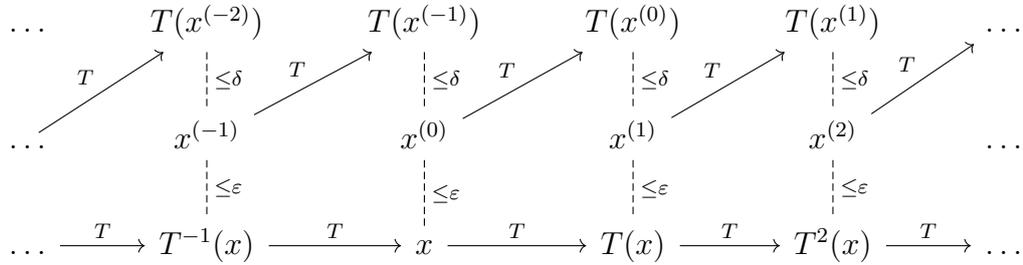


Figura 7: Representação de uma δ -pseudo-órbita $\{x^{(n)}\}_{-\infty}^{\infty}$ ε -sombreada por $x \in X$

Em termos intuitivos, dizer que um sistema dinâmico tem a propriedade do sombreamento é dizer que, para $\varepsilon > 0$ tão pequeno quanto queiramos, existe $\delta > 0$ tal que toda δ -pseudo-órbita está muito próxima da órbita de um ponto x . Existem algumas variantes da propriedade do sombreamento, como a que está definida a seguir.

Definição 3.1.7 (Propriedade do Sombreamento de Lipschitz). *Dizemos que um sistema dinâmico (X, d, T) tem a **Propriedade do Sombreamento de Lipschitz** se existem constantes $\delta_0, \delta_1 > 0$ tais que para toda δ -pseudo-órbita $\{x^{(n)}\}_{-\infty}^{\infty}$ com $\delta \leq \delta_0$ existe um ponto $x \in X$ que satisfaz a seguinte desigualdade:*

$$d(x^{(n)}, T^n(x)) \leq \delta \cdot \delta_1, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

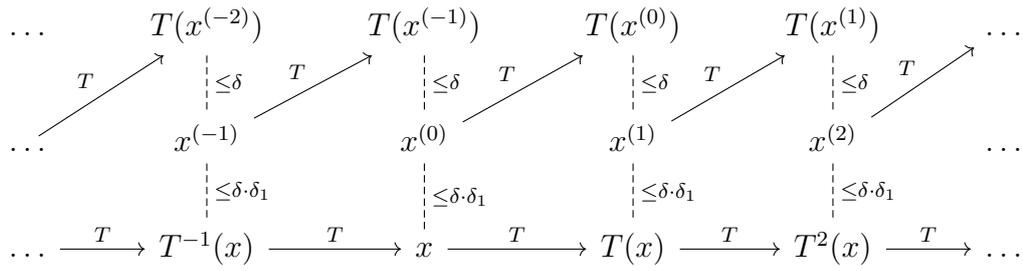


Figura 8: Representação de uma δ -pseudo-órbita $\{x^{(n)}\}_{-\infty}^{\infty}$ $\delta \cdot \delta_1$ -sombreada por $x \in X$.

O estudo da propriedade do sombreamento de Lipschitz foi motivada pela sua relação com a estabilidade topológica em fluxos, conforme pode ser visto em (PILYUGIN, SAKAI, 2017).

Nos exemplos a seguir, examinaremos duas situações que ilustram a presença da propriedade do sombreamento.

Exemplo 3.1.8. Seja $X = [0, 1]$ com a métrica usual dos reais (euclidiana), dada por $d(x, y) = |x - y|$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$. Defina $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ por $T(x) = x/2$, para todo $x \in [0, 1]$. Vamos mostrar que $([0, 1], |\cdot|, T)$ tem a Propriedade do Sombreamento. Seja $\varepsilon > 0$ e defina $\delta = \varepsilon/2$. Seja $\{x^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}$ uma δ -pseudo-órbita. Vamos mostrar, por indução, que $x^{(0)}$ ε -sombreia a δ -pseudo-órbita em questão. No caso base $n = 0$, temos

$$d(T^0(x^{(0)}), x^{(0)}) = |x^{(0)} - x^{(0)}| = 0 \leq \varepsilon.$$

Note que $T^n(x) = 2^{-n}x$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Suponha, por indução, que

$$d(T^n(x^{(0)}), x^{(n)}) = |T^n(x^{(0)}) - x^{(n)}| = |2^{-n}x^{(0)} - x^{(n)}| \leq \varepsilon,$$

para algum $n \in \mathbb{N}$, temos que

$$\begin{aligned} d(T^{n+1}(x^{(0)}), x^{(n+1)}) &= |2^{-(n+1)}x^{(0)} - x^{(n+1)}| \\ &\leq \left| 2^{-(n+1)}x^{(0)} - \frac{x^{(n)}}{2} \right| + \left| \frac{x^{(n)}}{2} - x^{(n+1)} \right| \\ &= \frac{|2^{-n}x^{(0)} - x^{(n)}|}{2} + \left| \frac{x^{(n)}}{2} - x^{(n+1)} \right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \delta \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Assim, provamos que $([0, 1], |\cdot|, T)$ tem, de fato, a Propriedade do Sombreamento. \square

Agora, provaremos o resultado que caracteriza a propriedade do sombreamento em espaços shift.

Teorema 3.1.9. *Seja \mathcal{X} um espaço shift. Então, $(\mathcal{X}, \rho, \sigma)$ tem a propriedade do sombreamento se, e somente se, \mathcal{X} é de tipo finito.*

Demonstração. Suponha que \mathcal{X} é um shift de tipo finito, com ordem $M \geq 0$. Seja $\varepsilon > 0$. Escolha $m \geq M$ tal que $2^{-m} < \varepsilon$.

Seja $\{x^{(n)}\}_{-\infty}^{\infty} \in \mathcal{X}$ uma 2^{-m} -pseudo-órbita. Então, para todo $n \in \mathbb{Z}$,

$$\rho(\sigma(x^{(n)}), x^{(n+1)}) < 2^{-m}.$$

Disso, temos que, para todo $n \in \mathbb{Z}$,

$$x_{[-m, m]}^{(n+1)} = \sigma(x^{(n)})_{[-m, m]} = x_{[-m+1, m+1]}^{(n)}.$$

Defina $y \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ por $y_n = x_0^{(n)}$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Vamos mostrar que y ε -sombreia $\{x^{(n)}\}_{-\infty}^{\infty} \in \mathcal{X}$. Note que, para $0 \leq i \leq m+1$,

$$y_{n+i} = x_0^{(n+i)} = x_1^{(n+i-1)} = x_2^{(n+i-2)} = \dots = x_i^{(n)}.$$

Perceba que, com isso, para todo $n \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} y_{[n, n+M-1]} &= x_0^{(n)} x_0^{(n+1)} x_0^{(n+2)} \dots x_0^{(n+M-1)} \\ &= x_0^{(n)} x_1^{(n)} x_1^{(n+1)} \dots x_1^{(n+M-2)} \\ &= x_0^{(n)} x_1^{(n)} x_2^{(n)} \dots x_2^{(n+M-3)} \\ &\vdots \\ &= x_0^{(n)} x_1^{(n)} x_2^{(n)} \dots x_{M-1}^{(n)} \\ &= x_{[0, M-1]}^{(n)} \in \mathcal{B}(\mathcal{X}). \end{aligned}$$

Ou seja, todos os blocos de tamanho M que ocorrem em y pertencem a linguagem de \mathcal{X} . Portanto, da Proposição (2.1.34), $y \in \mathcal{X}$. Além disso, y ε -sombreia a 2^{-m} -pseudo-órbita $\{x^{(n)}\}_{-\infty}^{\infty}$. De fato,

$$\begin{aligned} \rho(\sigma^n(y), x^{(n)}) &= \rho(\dots x_{[0, M-1]}^{(n)} \dots, x^{(n)}) \\ &< 2^{-(M-1)} \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto, $(\mathcal{X}, \rho, \sigma)$ tem a propriedade do sombreamento.

Reciprocamente, suponha que $(\mathcal{X}, \rho, \sigma)$ tem a propriedade do sombreamento. Considerando $\varepsilon = 1/2$, existe $\delta > 0$ tal que toda δ -pseudo-órbita é $1/2$ -sombreada por algum ponto. Seja $N > 1$ tal que $2^{-N} < \delta$. Vamos mostrar que \mathcal{X} é um shift de tipo finito de ordem no mínimo $2N + 1$.

Vamos mostrar que, para todo $m \geq 2N + 1$, todo bloco $u = a_1 \dots a_m$ em $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ cujos subblocos de tamanho $2N + 1$ pertencem a $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ é tal que $u \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$. Mostraremos isso por indução sobre m . O resultado é claramente válido para o caso base $m = 2N + 1$.

Suponha, por indução, que todo bloco u de tamanho m em $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ cujos subblocos de tamanho $2N + 1$ pertencem a $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ é tal que $u \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$. Suponha que $v = a_1 \dots a_{m+1}$ é um bloco de tamanho $m + 1$ e cujos subblocos de tamanho $2N + 1$ pertencem a $\mathcal{B}(\mathcal{X})$. Pela hipótese de indução, existem $x \in \mathcal{X}$ tal que $x_{[-N, -N+1+m]} = a_1 \dots a_m$, e $y \in \mathcal{X}$ tal que $y_{[-N+1, -N+m]} = a_2 \dots a_{m+1}$. Temos que $\rho(x, y) \leq 2^{-N} < \delta$, e portanto

$$\{\dots, \sigma^{-2}(x), \sigma^{-1}(x), x, y, \sigma(y), \sigma^2(y) \dots\}$$

é uma δ -pseudo-órbita. Seja $z \in \mathcal{X}$ um ponto que $1/2$ -sombreia essa δ -pseudo-órbita. Ou seja, $z_{[-N, -N+m]} = a_1 \dots a_m + 1$, e portanto $v = a_1 \dots a_{m+1} \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$. Com isso concluímos que \mathcal{X} é um shift de tipo finito, de ordem no máximo $2N + 1$. \square

A seguir, provamos a equivalência das propriedades do sombreamento e do sombreamento de Lipschitz em espaços shift.

Proposição 3.1.10. *Um espaço shift $(\mathcal{X}, \rho, \sigma)$ tem a propriedade do sombreamento se, e somente se, tiver a propriedade do sombreamento de Lipschitz.*

Demonstração. Suponha que o espaço shift $(\mathcal{X}, \rho, \sigma)$ tenha a propriedade do sombreamento. Como mostramos no teorema anterior, isso implica que \mathcal{X} é um shift de tipo finito. Defina $\delta_0 = 1$, $\delta_1 = 1$ e seja $\{x^{(n)}\}_{-\infty}^{\infty}$ uma δ -pseudo-órbita.

Defina o ponto $y \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ como sendo $y_n = x_0^{(n)}$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. De maneira análoga a demonstração anterior, mostramos que y δ -sombreia a δ -pseudo-órbita $\{x^{(n)}\}_{-\infty}^{\infty}$. Como $\delta_1 = 1$, disto segue que y $\delta \cdot \delta_1$ -sombreia a δ -pseudo-órbita $\{x^{(n)}\}_{-\infty}^{\infty}$, e portanto $(\mathcal{X}, \rho, \sigma)$ tem a propriedade do sombreamento de Lipschitz.

Reciprocamente, suponha que o espaço shift $(\mathcal{X}, \rho, \sigma)$ tenha a propriedade do sombreamento de Lipschitz. Ou seja, existem constantes $\delta_0, \delta_1 > 0$ tais que toda δ -pseudo-órbita, com $\delta \leq \delta_0$, é $\delta \cdot \delta_1$ sombreada por algum $x \in \mathcal{X}$.

Seja $\varepsilon > 0$. Caso $\varepsilon \geq \delta_0 \cdot \delta_1$, então definimos $\delta = \delta_0$. Assim, para qualquer $\{x^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}$ δ_0 -pseudo-órbita, existe $x \in \mathcal{X}$ tal que

$$\begin{aligned} \rho(x^{(n)}, \sigma^n(x)) &\leq \delta \cdot \delta_1 \\ &= \delta_0 \cdot \delta_1 \\ &\leq \varepsilon, \end{aligned}$$

isto é, x ε -sombreia a δ_0 -pseudo-órbita dada, e portanto $(\mathcal{X}, \rho, \sigma)$ tem a propriedade do sombreamento.

Caso $\varepsilon < \delta_0 \cdot \delta_1$, escolha $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{\delta_1}{n_0} < \varepsilon.$$

Com isso, escolha $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0$ e

$$\frac{1}{n} \leq \delta_0.$$

Note que

$$\frac{\delta_1}{n} \leq \frac{\delta_1}{n_0} < \varepsilon.$$

Defina $\delta = 1/n$. Como $(\mathcal{X}, \rho, \sigma)$ tem a propriedade do sombreamento de Lipschitz e $1/n = \delta \leq \delta_0$, toda δ -pseudo-órbita é ε -sombreada por algum $x \in \mathcal{X}$. Assim, $(\mathcal{X}, \rho, \sigma)$ tem a propriedade do sombreamento. \square

3.2 ESTABILIDADE TOPOLÓGICA

Nesta seção falaremos sobre a Estabilidade Topológica de uma sistema dinâmico, e como esta se relaciona com a propriedade do sombreamento. Porém, precisamos ainda de uma peça extra, que são os *homeomorfismos expansivos*.

Definição 3.2.1 (Homeomorfismo Expansivo). *Seja (X, d) um espaço métrico. Um homeomorfismo $T : X \rightarrow X$ é dito ser **expansivo** se existe $e_T > 0$ tal que se*

$$d(T^n(x), T^n(y)) \leq e_T \tag{3.2.2}$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$, então $x = y$. A constante e_T é chamada de **constante de expansividade**.

$$\begin{array}{cccccccccccc} \dots & \xrightarrow{T} & T^{-1}(x) & \xrightarrow{T} & x & \xrightarrow{T} & T(x) & \xrightarrow{T} & \dots & \xrightarrow{T} & T^n(x) & \xrightarrow{T} & \dots \\ & & \vdots \leq e_T & & \vdots \leq e_T & & \vdots \leq e_T & & & & \vdots \leq e_T & & \\ \dots & \xrightarrow{T} & T^{-1}(y) & \xrightarrow{T} & y & \xrightarrow{T} & T(y) & \xrightarrow{T} & \dots & \xrightarrow{T} & T^n(y) & \xrightarrow{T} & \dots \\ & & & & & & & & & & & & \\ & & & & \implies & & & & & & & & x = y \end{array}$$

Figura 9: Representação de um homeomorfismo expansivo

Um primeiro exemplo de homeomorfismo expansivo são os próprios espaços shift, como vemos no exemplo a seguir.

Exemplo 3.2.3. Seja \mathcal{X} um espaço shift. Temos que a função shift $\sigma : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ é um homeomorfismo expansivo e $e_\sigma = 1/2$ é uma constante de expansividade. De fato, mostramos no Corolário (2.1.44) que σ é homeomorfismo, e, além disso, se $d(\sigma^n(x), \sigma^n(y)) \leq 1/2$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $x_n = y_n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, e disso segue que $x = y$, e portanto σ é um homeomorfismo expansivo. \square

Exemplo 3.2.4. Seja $X = \mathbb{R}$ com a métrica euclidiana, dada por $d(x, y) = |x - y|$, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$. Defina $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por $T(x) = 2x$. De maneira indutiva, tem-se que $T^n(x) = 2^n x$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Portanto, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$ e para qualquer $n \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} d(T^n(x), T^n(y)) &= |T^n(x) - T^n(y)| \\ &= |2^n x - 2^n y| \\ &= 2^n |x - y| = 2^n d(x, y). \end{aligned}$$

Com isso, sendo e_T é um número real positivo qualquer, se $d(T^n(x), T^n(y)) \leq e_T$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, então

$$d(x, y) \leq \frac{e_T}{2^n}, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z},$$

e portanto $d(x, y) = 0$, ou seja, $x = y$. Em outras palavras, T é um homeomorfismo expansivo. \square

Para f, g funções, representamos a função composta de f com g por $f \circ g$. Para $f, g : X \rightarrow X$ funções contínuas, onde X é um espaço métrico compacto em relação a uma métrica d' , definimos a distância d_∞ entre f e g como sendo

$$d_\infty(f, g) = \sup\{d'(f(x), g(x)) \mid x \in \mathcal{X}\}.$$

Note que a função distância d_∞ está bem definida, pois funções contínuas em um conjunto compacto são limitadas.

Definição 3.2.5 (Estabilidade Topológica). *Seja (X, d, T) um sistema dinâmico. O homeomorfismo $T : X \rightarrow X$ é **topologicamente estável** se para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $S : X \rightarrow X$ é um homeomorfismo com $d_\infty(S, T) < \delta$, então existe $h : X \rightarrow X$ contínua tal que $h \circ S = T \circ h$ e $d(h(x), x) < \varepsilon$, para todo $x \in X$.*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{h} & X \\ \downarrow T & & \downarrow S \\ X & \xrightarrow{h} & X \end{array}$$

Figura 10: Representação de um sistema topologicamente estável

Em breve, apresentaremos o resultado central deste trabalho, que estabelece uma conexão entre a propriedade do sombreamento, homeomorfismos expansivos e estabilidade topológica. Para demonstrar isso, são necessários dois lemas preliminares.

Lema 3.2.6. *Seja (X, d, T) um sistema dinâmico, em que (X, d) é um espaço métrico compacto e $T : X \rightarrow X$ é um homeomorfismo expansivo com constante de expansividade e_T . Para cada $N \geq 1$, existe $\delta > 0$ com a propriedade de que $d(x, y) < \delta$ implica $d(T^n(x), T^n(y)) \leq e_T$ para todo n com $|n| < N$. Reciprocamente, se para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \geq 1$ tal que $d(T^n(x), T^n(y)) \leq e_T$ sempre que n com $|n| < N$, então $d(x, y) < \varepsilon$.*

Demonstração. Seja $N \geq 1$. Como T é homeomorfismo expansivo, em particular é contínuo, e a composição consigo mesmo n vezes também é contínua.

Conseqüentemente, para todo $n \in \mathbb{Z}$, existe $\delta_n > 0$ tal que $d(x, y) < \delta_n$ implica em $d(T^n(x), T^n(y)) < e_T$. Defina $\delta = \min_{|n| < N} \{\delta_n\}$, e note que $d(x, y) < \delta$ implica $d(T^n(x), T^n(y)) < e_T$ para todo $|n| < N$.

Reciprocamente, seja $\varepsilon > 0$. Vamos prosseguir essa demonstração por contradição, e portanto suponha que não exista $N \geq 1$ tal que se $d(T^n(x), T^n(y)) \leq e_T$ sempre

que n com $|n| < N$, então $d(x, y) < \varepsilon$. Então, para cada $N \geq 1$ existem $x_N, y_N \in X$ tais que $d(T^n(x_N), T^n(y_N)) \leq e_T$ para todo $n < N$ e $d(x_N, y_N) \geq \varepsilon$. Como X é compacto, toda sequência em X admite subsequência convergente. Logo, existem x_{N_i} e y_{N_j} subsequências de x_N tais que $x_{N_i} \rightarrow x$ e $y_{N_j} \rightarrow y$, onde $x, y \in X$. Portanto, $d(x, y) \geq \varepsilon$ e $d(T^n(x), T^n(y)) \leq e_T$ para todo n , o que contradiz a expansividade de T . \square

É relevante observar que o Lema (3.2.6), faz uso da suposição de que o espaço métrico (X, d) é compacto. Portanto, não é viável aplicá-lo nos espaços shift sobre alfabetos infinitos, uma vez que estes não são necessariamente compactos, conforme evidenciado pela Proposição (2.2.2).

Lema 3.2.7. *Seja (X, d, T) um sistema dinâmico com a propriedade do sombreamento, em que $T : X \rightarrow X$ é um homeomorfismo expansivo. Se $\varepsilon < e_T/2$, então existe $\delta > 0$ tal que toda δ -pseudo-órbita é ε -sombreada por um único $x \in X$.*

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon < e_T/2$. Como (X, d, T) tem a propriedade do sombreamento, existe $\delta > 0$ tal que toda δ -pseudo-órbita é ε -sombreada por algum ponto em X . Seja $\{x_n\}_{-\infty}^{\infty}$ uma δ -pseudo-órbita. Suponha que existam $x, y \in X$ que ε -sombreiam $\{x_n\}_{-\infty}^{\infty}$. Então, para qualquer $n \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} d(T^n(x), T^n(y)) &\leq d(T^n(x), x_n) + d(T^n(y), x_n) \\ &< \varepsilon + \varepsilon \\ &< e_T/2 + e_T/2 \\ &= e_T. \end{aligned}$$

Como T é homeomorfismo expansivo, segue que $x = y$. \square

Com isso, podemos finalmente provar o teorema principal deste trabalho.

Teorema 3.2.8. *Seja (X, d, T) um sistema dinâmico com a propriedade do sombreamento, em que (X, d) é um espaço métrico compacto e $T : X \rightarrow X$ é um homeomorfismo expansivo. Então, T é topologicamente estável. (De fato, mostraremos uma versão mais forte desse resultado: seja e_T uma constante de expansividade para T . Então, para todo $\varepsilon > 0$ com $\varepsilon < e_T/3$ existe $\delta > 0$ tal que se $S : X \rightarrow X$ é um homeomorfismo e $d_\infty(S, T) < \delta$, então existe um único $h : X \rightarrow X$ contínuo tal que $h \circ S = T \circ h$ e $d(h(x), x) < \varepsilon$, para todo $x \in X$.*

Demonstração. Seja $\varepsilon < e_T/3$. Como (X, d, T) tem a propriedade do sombreamento, existe $\delta > 0$ tal que toda δ -pseudo-órbita é ε -sombreada por algum ponto em X . Seja $S : X \rightarrow X$ um homeomorfismo com $d_\infty(S, T) < \delta$. Note que a S -órbita de $x \in X$, dada por $\{S^n(x)\}_{-\infty}^{\infty}$, é uma δ -pseudo-órbita em relação a T , pois, visto que $d_\infty(S, T) < \delta$, tem-se, para todo $n \in \mathbb{Z}$,

$$d(T(S^n(x)), S^{n+1}(x)) \leq d_\infty(S, T) < \delta. \quad (3.2.9)$$

Como $\varepsilon < e_T/3$, então, em particular, $\varepsilon < e_T/2$. Portanto, pelo Lema (3.2.7), existe um único ponto $h(x) \in X$ cuja T -órbita ε -sombreira $\{S^n(x)\}_{-\infty}^{\infty}$. Com isso, definimos uma função $h : X \rightarrow X$ tal que, para todo $n \in \mathbb{Z}$ e para todo $x \in X$,

$$d(T^n(h(x)), S^n(x)) < \varepsilon. \quad (3.2.10)$$

Note que, substituindo $n = 0$ na desigualdade acima, obtemos $d(h(x), x) < \varepsilon$ para todo $x \in X$, como desejado.

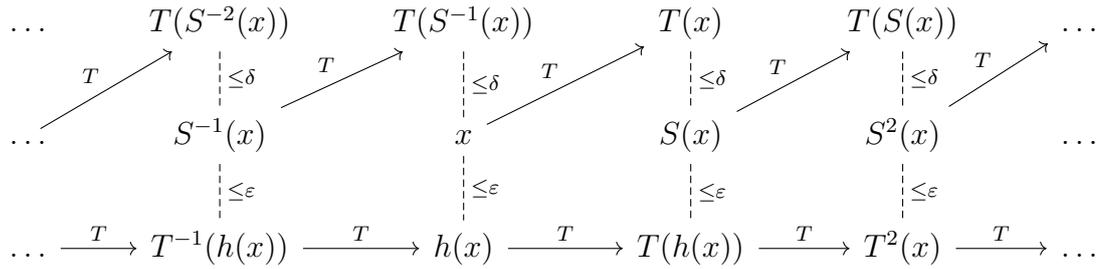


Figura 11: Representação do sistema topologicamente estável

De (3.2.10), temos que, para todo $n \in \mathbb{Z}$ e para todo $x \in X$,

$$d(T^n(h(S(x))), S^{n+1}(x)) < \varepsilon.$$

Além disso, também de (3.2.10), temos que para todo $n \in \mathbb{Z}$ e para todo $x \in X$,

$$d(T^n(T(h(x))), S^{n+1}(x)) = d(T^{n+1}(h(x)), S^{n+1}(x)) < \varepsilon.$$

Portanto, $(h \circ S)(x)$ e $(T \circ h)(x)$ ε -sombream $\{S^{n+1}(x)\}_{-\infty}^{\infty}$. Assim, pelo Lema (3.2.7), obtemos que $h \circ S = T \circ h$, como desejado.

Agora resta-nos mostrar que h é contínua. Seja $\varepsilon' > 0$. Do Lema (3.2.6), podemos escolher $N \geq 1$ tal que se $d(T^n(u), T^n(v)) < e_T$ para todo $|n| \leq N$, então $d(u, v) < \varepsilon'$, para todo $u, v \in X$. Note que, como S é função contínua em um compacto, ela é, em particular, uniformemente contínua. Portanto, escolha $\delta' > 0$ tal que para quaisquer $x, y \in X$, $d(x, y) < \delta'$ implique $d(S^n(x), S^n(y)) < e_T/3$, para todo $|n| \leq N$. Então, se $d(x, y) < \delta'$, obtemos, para todo $|n| \leq N$,

$$\begin{aligned} d(T^n(h(x)), T^n(h(y))) &= d(h(S^n(x)), h(S^n(y))) \\ &\leq d(h(S^n(x)), S^n(x)) + d(S^n(x), S^n(y)) + d(S^n(y), h(S^n(y))) \\ &< \varepsilon + \frac{e_T}{3} + \varepsilon \\ &< e_T. \end{aligned}$$

Portanto, $d(x, y) < \delta'$ implica $d(h(x), h(y)) < \varepsilon'$, e assim a continuidade de h está provada. A função h é a única tal que $h \circ S = T \circ h$ e $d(h(x), x) < \varepsilon$ para todo $x \in X$. De

fato, se $l : X \rightarrow X$ fosse outra, teríamos, para todo $n \in \mathbb{Z}$ e $x \in X$,

$$\begin{aligned} d(T^n(l(x)), T^n(h(x))) &= d(l(S^n(x)), h(S^n(x))) \\ &\leq d(l(S^n(x)), S^n(x)) + d(S^n(x), h(S^n(x))) \\ &< 2\varepsilon \\ &< e_T, \end{aligned}$$

e, portanto, pela expansividade de T , concluímos que $l(x) = h(x)$ para todo $x \in X$, isto é, h é única. \square

No exemplo a seguir, veremos que, em uma sistema topologicamente estável, a função h encontrada pode não ser injetora.

Exemplo 3.2.11. Para cada $m \in \mathbb{N}$, defina $S_m : \mathcal{A}_{01}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathcal{A}_{01}^{\mathbb{Z}}$ por

$$S_m(x)_n = \begin{cases} x_n & \text{se } n < -m \text{ ou } n > m, \\ x_{n+1} & \text{se } -m \leq n < m, \\ x_{-m} & \text{se } n = m. \end{cases}$$

Veja que $d_\infty(S_m, \sigma) < 1/2^m$, pois $\sigma(x)_{[-m, m]} = x_{[-m+1, m+1]} = S_m(x)_{[-m, m]}$ para todo x em $\mathcal{A}_{01}^{\mathbb{Z}}$. Além disso, S_m é um homeomorfismo. Veja que o shift completo $\mathcal{A}_{01}^{\mathbb{Z}}$ é compacto (Proposição (2.1.46)), é um shift de tipo finito (Exemplo (2.1.26)), e portanto tem a propriedade do sombreamento (Teorema (3.1.9)). Além disso, a função shift é um homeomorfismo expansivo (Exemplo (3.2.3)). Ou seja, do Teorema (3.2.8), $(\mathcal{A}_{01}, \rho, \sigma)$ é tal que σ é topologicamente estável.

Seja $\varepsilon > 0$. Portanto, existe $\delta > 0$ tal que se $S : \mathcal{A}_{01}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathcal{A}_{01}^{\mathbb{Z}}$ é um homeomorfismo com $d_\infty(S, \sigma) < \delta$, então existe $h : \mathcal{A}_{01}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathcal{A}_{01}^{\mathbb{Z}}$ função contínua tal que $h \circ S = \sigma \circ h$ e $d(h(x), x) < \varepsilon$, para todo $x \in \mathcal{A}_{01}^{\mathbb{Z}}$. Logo, existe $m' \in \mathbb{N}$ grande o bastante tal que $d_\infty(S_{m'}, \sigma) < \delta$, e portanto existe $h : \mathcal{A}_{01}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathcal{A}_{01}^{\mathbb{Z}}$ contínuo tal que $h \circ S_{m'} = \sigma \circ h$ e $d(h(x), x) < \varepsilon$, para todo $x \in \mathcal{A}_{01}^{\mathbb{Z}}$. Note que $S_{m'}^{2m'+1}(x) = x$ para todo $x \in \mathcal{A}_{01}^{\mathbb{Z}}$, e portanto

$$\sigma^{2m'+1}(h(x)) = h(S_{m'}^{2m'+1}(x)) = h(x),$$

para todo $x \in \mathcal{A}_{01}^{\mathbb{Z}}$. Ou seja, a imagem de h está contida no subconjunto finito de $\mathcal{A}_{01}^{\mathbb{Z}}$ composto pelos pontos periódicos de período $2m' + 1$, e conseqüentemente h não pode ser injetora. \square

No Teorema a seguir, observamos que, ao introduzir algumas hipóteses adicionais, podemos assegurar a existência de uma função h injetora.

Teorema 3.2.12. *Seja (X, d, T) um sistema dinâmico com a propriedade do sombreamento, em que (X, d) é um espaço métrico compacto e $T : X \rightarrow X$ é um homeomorfismo expansivo. Logo, para todo $\varepsilon > 0$ com $\varepsilon < e_T/3$ existe $\delta > 0$ tal se $S : X \rightarrow X$ é um*

homeomorfismo expansivo com constante de expansividade $e_S \geq 2\varepsilon$ e $d_\infty(S, T) < \delta$, então a função conjugada correspondente h é injetora.

Demonstração. Seja (X, d, T) um sistema dinâmico com a propriedade do sombreamento, em que (X, d) é um espaço métrico compacto e $T : X \rightarrow X$ é um homeomorfismo expansivo. Do Teorema (3.2.8), T é topologicamente estável. Então, existe $\delta > 0$ tal que se $S : X \rightarrow X$ é um homeomorfismo com $d_\infty(S, T) < \delta$, então existe $h : X \rightarrow X$ contínua tal que $h \circ S = T \circ h$ e $d(h(x), x) < \varepsilon$, para todo $x \in X$.

Seja $S : X \rightarrow X$ um homeomorfismo expansivo com constante de expansividade $e_S \geq 2\varepsilon$ e $d_\infty(S, T) < \delta$. Assim, obtemos a função h com os mesmos procedimentos da demonstração do Teorema (3.2.8). Com isso, vamos provar que h é injetora.

Sejam x, y em X tais que $h(x) = h(y)$. Então, para todo $n \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} d(S^n(x), S^n(y)) &\leq d(S^n(x), h(S^n(x))) + d(h(S^n(x)), h(S^n(y))) + d(h(S^n(y)), S^n(y)) \\ &= d(S^n(x), h(S^n(x))) + d(T^n(h(x)), T^n(h(y))) + d(h(S^n(y)), S^n(y)) \\ &< 2\varepsilon \\ &\leq e_S, \end{aligned}$$

e, portanto, $x = y$, pois S é um homeomorfismo expansivo. Isto é, h é injetora. \square

3.2.1 O Caso dos Espaços Shift sobre Alfabetos Infinitos

Conforme discutido na seção (2.2), o shift completo sobre um alfabeto infinito não é compacto, e portanto não podemos concluir dos resultados demonstrados anteriormente que um espaço shift de tipo finito sobre alfabeto infinito é topologicamente estável. Essa impossibilidade é decorrente do Lema (3.2.6), empregado na demonstração do Teorema (3.2.8) para concluir que a função h construída é contínua e exige a compacidade do espaço métrico.

Com exceção do Lema (3.2.6), os outros resultados importantes para a demonstração do Teorema (3.2.8) continuam válidos para o caso em que o espaço shift é de ordem M sobre um alfabeto infinito, sendo estes o Teorema (3.1.9), o Exemplo (3.2.3) e o Lema (3.2.7).

Com isso, é possível mostrar que os espaços shift de ordem M sobre um alfabeto infinito são topologicamente estáveis, conforme veremos no teorema a seguir.

Teorema 3.2.13. *Seja \mathcal{X} um shift de tipo finito de ordem M sobre um alfabeto infinito, e $\sigma : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ a função shift. Logo, σ é topologicamente estável.*

Demonstração. Seja \mathcal{X} um shift de tipo finito de ordem M sobre um alfabeto infinito. Do Teorema (3.1.9), $(\mathcal{X}, \rho, \sigma)$ tem a propriedade do sombreamento. Além disso, sabemos do Exemplo (3.2.3) que σ é um homeomorfismo expansivo. Ademais, $(\mathcal{X}, \rho, \sigma)$ satisfaz as hipóteses do Lema (3.2.7).

Portanto, definimos a função $h(x)$ da mesma maneira que na demonstração do Teorema (3.2.8). O fato de \mathcal{X} não ser compacto não influencia na demonstração da conjugação $h \circ S = \sigma \circ h$ e da desigualdade $d(h(x), x) < \varepsilon$, para todo $x \in \mathcal{X}$. Logo, resta mostrar que h é contínua.

Note que, de (3.2.10) e como $h \circ S = \sigma \circ h$, temos que, para todo $n \in \mathbb{Z}$ e $x \in \mathcal{X}$,

$$\rho(\sigma^n(h(x)), S^n(x)) < \varepsilon < e_\sigma = 1/2.$$

Como $\sigma^n(h(x))_1 = h(x)_n$, para todo $n \in \mathbb{Z}$ e $x \in \mathcal{X}$,

$$h(x)_n = S^n(x)_1. \quad (3.2.14)$$

Vamos provar que se $x^{(n)}$ converge para x , então $h(x^{(n)})$ converge para $h(x)$. Isto é, para todo $M > 0$ existe $L > 0$ tal que $h(x^{(n)})_{[-M, M]} = h(x)_{[-M, M]}$ para todo $n > L$.

Seja $\{x^{(n)}\} \subset \mathcal{X}$ tal que $x^{(n)}$ converge para x . Seja $M > 0$. Como S^i são contínuas, para $i = -M, \dots, M$, então $S^i(x^{(n)}) \rightarrow S^i(x)$ quando $n \rightarrow +\infty$, para todo $i = -M, \dots, M$. Logo, para cada $i = -M, \dots, M$ existe $L_i > 0$ tal que $S^i(x^{(n)})_{[-M, M]} = S^i(x)_{[-M, M]}$ para todo $n > L_i$.

Defina $L = \max_{-M \leq i \leq M} L_i$. Assim, $S^i(x^{(n)})_{[-M, M]} = S^i(x)_{[-M, M]}$, para todo $i = -M, \dots, M$ e para todo $n > L$. Então, para todo $n > L$ e $j = -M, \dots, M$,

$$h(x^{(n)})_j = S^j(x^{(n)})_1 = S^j(x)_1 = h(x)_j,$$

como desejado, e assim provamos que $h(x^{(n)}) \rightarrow h(x)$. □

4 CONCLUSÃO

A presente monografia proporcionou um estudo sobre a interseção entre os espaços shift, a propriedade do sombreamento e a estabilidade topológica. Ao estabelecermos as bases teóricas no Capítulo (2), exploramos as propriedades fundamentais dos espaços shift, desde suas definições primárias até a expansão desses conceitos para o caso de alfabetos infinitos.

No Capítulo (3), direcionamos nosso enfoque para características topológicas dos sistemas dinâmicos, introduzindo conceitos fundamentais como órbita, pseudo-órbita, sombreamento, homeomorfismo expansivo e estabilidade topológica. O resultado principal, expresso no Teorema (3.2.8), revela que um homeomorfismo expansivo com a propriedade do sombreamento é topologicamente estável.

Adicionalmente, demonstramos que essa conclusão pode ser generalizada para o caso de um shift de ordem M sobre um alfabeto infinito, permitindo assim a aplicabilidade desses resultados em casos mais abrangentes.

REFERÊNCIAS

- [1] BRYANT, B. F.. Expansive Self-Homeomorphisms of a Compact Metric Space. The American Mathematical Monthly, [S.L.], v. 69, n. 5, p. 386, maio 1962.
- [2] KURKA, Petr. *Topological and Symbolic Dynamics*. Paris: Société Mathématique de France, 2003
- [3] LIND, Douglas; MARCUS, Brian. *An Introduction to Symbolic Dynamics and Coding*. Cambridge: Cambridge University Press, 1995.
- [4] MUNKRES, James R.. *Topology*. 2. ed. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2000.
- [5] OTT, William; TOMFORDE, Mark; WILLIS, Paulette N.. *One-sided shift spaces over infinite alphabets*. New York Journal Of Mathematics. Nova Iorque, 2014.
- [6] PILYUGIN, Sergei Yu.; SAKAI, Kazuhiro. *Shadowing and Hyperbolicity*. Cham: Springer, 2017.
- [7] WALTERS, Peter. *On the pseudo orbit tracing property and its relationship to stability*. In: MARKLEY, Nelson; MARTIN, John; PERRIZO, William. *The Structure of Attractors in Dynamical Systems*. Berlim: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1978. p. 231-244.