



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Fernando Miguel Hahne

**Compactons em modelos com potencial não-analítico**

Florianópolis (SC)

2024

Fernando Miguel Hahne

**Compactons em modelos com potencial não-analítico**

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do título de doutor em física.  
Orientador: Prof. Pawel Klimas, Dr.

Florianópolis (SC)

2024

Ficha catalográfica gerada por meio de sistema automatizado gerenciado pela BU/UFSC.  
Dados inseridos pelo próprio autor.

Hahne, Fernando Miguel  
Compactons em modelos com potencial não-analítico /  
Fernando Miguel Hahne ; orientador, Pawel Klimas, 2024.  
107 p.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Santa  
Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas,  
Programa de Pós-Graduação em Física, Florianópolis, 2024.

Inclui referências.

1. Física. 2. Sólitons compactos. 3. Kinks. 4. Oscillons.  
5. Vórtices. I. Klimas, Pawel. II. Universidade Federal de  
Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Física. III.  
Título.

Fernando Miguel Hahne

**Compactons em modelos com potencial não-analítico**

O presente trabalho em nível de doutorado foi avaliado e aprovado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. Gabriel Luchini Martins, Dr.  
Universidade Federal do Espírito Santo

Prof. Lucas Nicolao, Dr.  
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Tiago José Nunes da Silva, Dr.  
Universidade Federal de Santa Catarina

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de doutor em física.

---

Coordenação do Programa de  
Pós-Graduação

---

Prof. Pawel Klimas, Dr.  
Orientador

Florianópolis (SC), 2024.

## **AGRADECIMENTOS**

Esse trabalho não seria possível sem a ajuda de várias pessoas e instituições, que merecem os devidos agradecimentos. Agradeço ao CNPq pelo financiamento durante a realização deste trabalho. Muito obrigado aos professores do Departamento de Física, em especial ao professor Pawel Klimas pela orientação. Agradeço também aos colegas e amigos João Streibel e Luiz Kubaski pelas discussões que ajudaram a tornar esse trabalho melhor. Deixo também agradecimentos especiais a todos os meus amigos e à minha namorada Giovana Conod pelo apoio e companhia.

## RESUMO

Teorias de campo escalares são importantes em diversas áreas da física, desde modelos de interações fundamentais até a descrição de estruturas de larga escala do universo. Entre as soluções dos modelos de campo escalar, se destacam as configurações localizadas chamadas sólitons. A maioria dos sólitons possui comportamento exponencial em largas distâncias. Uma exceção interessante é o caso dos compactons, soluções cuja parte não-trivial está estritamente contida em uma região compacta do espaço. Compactons podem ser encontrados em modelos cujo potencial é não-analítico nos seus pontos de mínimo. Neste trabalho estudamos a dinâmica de compactons em modelos desse tipo. Analisamos o kink compacto e como ele evolui caso perturbado. Estudamos através de simulações numéricas os processos de espalhamento kink-antikink e kink-kink. O espalhamento kink-antikink possui casos de captura e escape do par de sólitons, separados por uma velocidade crítica. Ao redor da velocidade crítica, o comportamento é fractal. O espalhamento kink-kink acontece de modo elástico, sem emissão de radiação. Realizamos uma descrição efetiva dos processos de kink perturbado e de espalhamento kink-antikink e kink-kink usando o método das coordenadas coletivas. Nos casos com radiação, vimos que esta é composta principalmente por oscillons compactos. Analisamos então a interação dos kinks compactos com oscillons compactos através de processos de espalhamento. Observamos que os oscillons são capazes de se propagar pelo corpo de um kink com a velocidade da luz. Estudamos a propagação de sinais sobre kinks, tanto no modelo original quanto em um modelo simplificado. Vimos que sinais se propagam pelo corpo do kink compacto seguindo uma equação de Klein-Gordon com  $m^2 = -1$ . Por fim, estudamos soluções de vórtices compactos em um modelo com potencial não-analítico. Mostramos que o campo magnético dos vórtices compactos possui uma descontinuidade na borda do suporte do vórtice, a menos que o setor eletromagnético da teoria tenha termos cinéticos quárticos. Nesse caso, foi necessário realizar um ajuste fino dos parâmetros do modelo para encontrar a solução.

**Palavras-chave:** Sólitons. Compactons. Kinks. Oscillons. Vórtices.

## ABSTRACT

Scalar field theories are important in a wide range of physical systems, from fundamental interaction models, to the large scale structures of the universe. Among the solutions of scalar field models, the localized configurations called solitons are specially interesting. Most solitons have exponential tails at large distances. An interesting exception is the case of compactons, solutions with non-trivial behavior only inside a compact region of space. Compactons can be found in models with non-analytic potentials at its minima. In this work, we studied the dynamics of compactons in such models. We analyzed a compact kink and how it evolves when perturbed. Using numerical simulation, we studied kink-antikink and kink-kink scattering processes. It was shown that the kink-antikink scattering has cases of capture and escape of the soliton pair, separated by a critical velocity. Around the critical velocity, the behavior is fractal. The kink-kink scattering happens elastically, without emission of radiation. We provided an effective description of perturbed kink, kink-antikink scattering, and kink-scattering, through the collective coordinate method. In the cases with radiation emission, this radiation was shown to be primarily made of compact oscillons. We then analyzed the interaction of compact kinks with compact oscillons in scattering processes. It was noted that oscillons can transverse the kink bulk with the speed of light. We studied the propagation of signals through the kink bulk, both in the original model and in a simplified one. We showed that signals propagate inside the kink bulk following a Klein-Gordon equation with  $m^2 = -1$ . At last, we studied compact vortex solutions in a model with non-analytic potential. It was shown that the vortex magnetic field has a discontinuity at the support border, unless the electromagnetic sector of the theory has non-standard fourth order kinetic terms. In the latter case, a fine tune of the model parameters was required to find a solution.

**Keywords:** Solitons. Compactons. Kinks. Oscillons. Vortices.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Sistema de partículas conectadas por molas. As partículas são aceleradas para baixo pela gravidade e colidem elasticamente com o chão. Cada partícula está presa em um poste, que limita seu movimento apenas à direção vertical. . . . .	16
Figura 2 – Regiões em que são definidas as soluções parciais de um oscillon compacto no modelo de signum-Gordon. . . . .	20
Figura 3 – Valores do campo para oscillon parado (esquerda) e em movimento uniforme com velocidade $v = 0,4$ (direita), “zig-zag” das bordas com velocidade $v_0 = 0,6$ e tamanho $l = 1$ . . . . .	22
Figura 4 – Exemplo de espalhamento de dois oscillons com velocidade 0,95 em relação ao centro de momento. O espalhamento gera uma onda de choque que decai em uma cascata de oscillons. . . . .	23
Figura 5 – Evolução temporal de um perfil inicial triangular com $A = 0,2$ e $\epsilon = 0,1$ . . . . .	26
Figura 6 – Esquema do $i$ -ésimo pêndulo em uma realização mecânica do modelo de sine-Gordon com limitação no movimento. . . . .	27
Figura 7 – Transformação de dobramento do campo. . . . .	28
Figura 8 – Exemplo de potencial para o campo desdobrado $\phi$ com $\bar{\phi}_{\max} = \pi/4$ . . . . .	28
Figura 9 – Potencial e sua derivada para modelo quadrático periódico. . . . .	36
Figura 10 – Perfil do campo para um kink $\eta_K$ (linha sólida) e um antikink $\eta_{\bar{K}}$ (linha tracejada). . . . .	39
Figura 11 – Densidade hamiltoniana de kinks deformados com tamanho $(1 + \epsilon)\pi$ . Linha verde representa borda do kink calculada através das coordenadas $b$ e $c$ . . . . .	43
Figura 12 – Densidade hamiltoniana (esquerda) e detalhe do campo (direita) para kink perturbado de tamanho $0,8\pi$ ( $\epsilon = -0,2$ ). . . . .	46
Figura 13 – Exemplo de condição inicial de um espalhamento kink-antikink com velocidade $v = 0,5$ . . . . .	47
Figura 14 – Campo $\eta(t, x)$ e densidade hamiltoniana $\mathcal{H}(t, x)$ para um espalhamento kink-antikink com velocidade $v$ . . . . .	48
Figura 15 – Valor do campo $\eta(t, 0)$ como uma função do tempo $t$ e da velocidade $v$ para um espalhamento kink-antikink. A linha vermelha delimita as faixas de velocidade para os quais fazemos <i>zoom</i> no gráfico seguinte. . . . .	49
Figura 16 – Fração da energia total levada pela radiação durante um espalhamento kink-antikink para velocidades $v < v_c$ , ou seja, quando os sólitons se aniquilam. . . . .	50



Figura 17 – Espalhamento kink-antikink para $v = 0.75$ . Esquerda: densidade hamiltoniana. Direita: “zoom” na diferença entre o valor do campo e o vácuo $-2$ , ou seja, $\eta(t,x) + 2$ , para a região no quadrado verde no gráfico da esquerda. . . . .	50
Figura 18 – Perfil do campo para uma sobreposição de kink e antikink. . . . .	51
Figura 19 – Métrica e potencial para um modelo de coordenada coletiva de uma colisão de kink-antikink com apenas o modo posicional. . . . .	52
Figura 20 – Previsão das coordenadas coletivas para o valor do campo $\eta(x = 0, a(t), c(t))$ como uma função do tempo $t$ e da velocidade $v$ para um espalhamento kink-antikink. A descrição inclui os modos posicional e interno de cada sóliton. . . . .	55
Figura 21 – Exemplo de configuração inicial de um espalhamento kink-kink com velocidade $v = 0,5$ . . . . .	56
Figura 22 – Campo $\eta(t, x)$ e densidade hamiltoniana $\mathcal{H}(t, x)$ para espalhamento kink-kink com velocidade $v$ . . . . .	57
Figura 23 – Perfil do campo como sobreposição de dois kinks. . . . .	58
Figura 24 – Métrica e potencial para a aproximação de coordenadas coletivas do espalhamento kink-kink, incluindo apenas o modo translacional. . . . .	59
Figura 25 – Valores de $x_{R,\min}$ calculados a partir das simulações e usando diferentes modelos de coordenadas coletivas. . . . .	60
Figura 26 – Na esquerda: potencial efetivo $U(a, c)$ para aproximação de coordenadas coletivas do espalhamento kink-kink, incluindo modos translacional e interno. As linhas coloridas representam duas soluções da equação de movimento. Na direita: gráfico do potencial para valores fixos de $c$ . . . . .	60
Figura 27 – Configurações iniciais para um oscillon de tamanho $l = 2$ em seu próprio referencial se movendo com velocidade do centro de momento $v = 0,6$ em direção a um kink em repouso. O oscillon realiza movimento de “zig-zag” com velocidade $v_0$ e tem fase $\alpha$ no instante da colisão. . . . .	63
Figura 28 – Perturbação $\chi(t,x) = \eta(t,x) - \eta_K(x)$ para simulações com $v = 0,75$ , $\alpha = 0$ , $v_0 = 0$ e diferentes valores de $l$ . As linhas pontilhadas delimitam o suporte do kink $\eta_K(x)$ . . . . .	64
Figura 29 – Perturbação $\chi(t,x) = \eta(t,x) - \eta_K(x)$ para simulações com $l = 0,5$ , $\alpha = 0$ , $v_0 = 0$ e diferentes valores de $v$ . As linhas pontilhadas delimitam o suporte do kink $\eta_K(x)$ . . . . .	65
Figura 30 – Perturbação $\chi(t,x) = \eta(t,x) - \eta_K(x)$ para simulações com $l = 1$ , $v = 0,6$ , $v_0 = 0$ e diferentes valores de $\alpha$ . As linhas pontilhadas delimitam o suporte do kink $\eta_K(x)$ . . . . .	67

Figura 31 – Perturbação $\chi(t,x) = \eta(t,x) - \eta_K(x)$ para simulações com $l = 0,75$ , $v = 0,8$ , $\alpha = 0$ e diferentes valores de $v_0$ . As linhas pontilhadas delimitam o suporte do kink $\eta_K(x)$ . . . . .	68
Figura 32 – Energias $E_n(t)/E_{osc}$ como função do tempo para $l = 1$ , $v_0 = 0$ e diferentes valores de $v$ e $\alpha$ . . . . .	69
Figura 33 – $E_3(t_1)/E_{osc}$ como função de dois dos parâmetros da simulação, mantendo os dois parâmetros remanescentes fixos. Para as regiões em branco a condição (4.1) não foi satisfeita para nenhum $t_1 \leq 10$ , ou seja, não há dados. . . . .	70
Figura 34 – Evolução no tempo do perfil da perturbação $\chi(t,x)$ para $l = 0,5$ , $v = 0,8$ , $\alpha = 0$ , $v_0 = 0$ . O oscillon é absorvido pelo kink sem alterações drásticas no perfil do campo. . . . .	71
Figura 35 – Densidade de energia para a sobreposição de um oscillon e um kink. O oscillon e o kink possuem pontos centrais alinhados. Os oscillons têm parâmetros $l = 1$ , $v = 0$ , $v_0 = 0$ , $\alpha = 0$ (esquerda) ou $\alpha = 0,25$ (direita). . . . .	72
Figura 36 – Evolução da perturbação $\chi(t,x) = \eta(t,x) - \eta_K(x)$ para a sobreposição de um oscillon e um kink. O oscillon e o kink possuem pontos centrais alinhados. O oscillon tem parâmetros $l = 1$ , $v = 0$ , $v_0 = 0$ e dois valores de $\alpha$ distintos. As linhas pontilhadas delimitam o suporte do kink. . . . .	73
Figura 37 – Perturbação $\chi(t,x)$ e densidade hamiltoniana $\mathcal{H}(t,x)$ para a sobreposição de um oscillon e um kink. O oscillon e o kink possuem pontos centrais alinhados. O oscillon tem parâmetros $l = 1$ , $v = 0,75$ , $v_0 = 0$ e dois valores de $\alpha$ distintos. Para $\alpha = 0,25$ o kink começa a se mover, fazendo com que $\chi(t,x)$ cresça com o tempo. . . . .	74
Figura 38 – Perturbação $\chi(t,x)$ e densidade hamiltoniana $\mathcal{H}(t,x)$ para a sobreposição de um oscillon e um kink. O oscillon e o kink suas bordas esquerdas alinhados. O oscillon tem parâmetros $l = 1$ , $v = 0,75$ , $v_0 = 0$ e dois valores de $\alpha$ distintos. . . . .	75
Figura 39 – Comparação entre resultado das simulações e resultado semi-analítico para amplitude da perturbação $\chi(t,x)$ como função da posição para diferentes tempos no caso $l = 1$ , $\alpha = 0,75$ e $v_0 = 0$ . A primeira linha de gráficos é o caso $v = 0$ e a segunda linha $v = 0,75$ . O oscillon foi posicionado de modo que seu ponto central esteja alinhado com o ponto central do kink. . . . .	77
Figura 40 – Potencial e sua derivada para modelo simplificado. . . . .	78

Figura 41 – Evolução da perturbação $\chi(t, x)$ (esquerda) para caso do oscillon localizado no centro do kink e com parâmetros $l = 1, v = 0, \alpha = 0,25, v_0 = 0$ . A localização da perturbação causa uma assimetria no perfil da perturbação (direita) que pode ser vista ainda antes da mesma alcançar as bordas do kink. . . . .	80
Figura 42 – Comparação entre simulação e resultado analítico para $l = 1, v = 0, \alpha = 0,25, v_0 = 0$ . Perfil do oscillon inicialmente centrado no ponto $x = \sqrt{2}/2$ . . . . .	80
Figura 43 – Comparação entre simulação e resultado analítico para $l = 1, v = 0,75, \alpha = 0, v_0 = 0$ . Perfil do oscillon inicialmente centrado no ponto $x = \sqrt{2}/2$ . . . . .	82
Figura 44 – Exemplos de potencial generalizado $V_k(\eta)$ (esquerda) e soluções de kink $\eta_K(x)$ para modelos com esses potenciais (direita). . . . .	83
Figura 45 – Assimetria $\chi(t, x) - \chi(t, -x)$ da perturbação para caso do oscillon localizado no centro do kink e com parâmetros $l = 1, v = 0, \alpha = 0,25, v_0 = 0$ . Nesse caso o oscillon e o kink tem seus centros alinhados com a origem. . . . .	84
Figura 46 – Potential generalizado $V_\delta( \phi )$ , que inclui o potencial de Higgs ( $V_0$ ) e o potencial não-analítico ( $V_\infty$ ) no caso $v = \lambda = 1$ . . . . .	88
Figura 47 – Solução numérica para $f(r)$ e $\alpha(r)$ no caso em que $n = \lambda = e = 1$ . Para esse caso, o vórtice tem raio $R \approx 1,35$ . . . . .	92
Figura 48 – Gráficos dos campos como função da posição para diferentes instantes de tempo. A evolução temporal foi iniciada através de um perfil de vórtice que deveria ser estático, ilustrando o papel da descontinuidade do campo magnético na estabilidade da solução. . . . .	93
Figura 49 – Solução de vórtice para caso de termo cinético $-\mathcal{F}^2$ para o campo eletromagnético, com parâmetros $R \approx 1,2, e \approx 2,5$ e $\lambda \approx 1,1$ . . . . .	94

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> . . . . .	<b>12</b>
1.1	ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO . . . . .	14
<b>2</b>	<b>MODELOS COM POTENCIAIS NÃO-ANALÍTICOS</b> . . . . .	<b>16</b>
2.1	PARTÍCULAS QUICANDO EM UMA SUPERFÍCIE . . . . .	16
<b>2.1.1</b>	<b>Oscillons</b> . . . . .	<b>18</b>
<b>2.1.2</b>	<b>Ondas de choque</b> . . . . .	<b>23</b>
2.2	PÊNDULOS INTERAGENTES COM RESTRIÇÃO . . . . .	26
2.3	SUBMODELO BPS DO MODELO DE SKYRME . . . . .	29
<b>3</b>	<b>DINÂMICA DE KINKS</b> . . . . .	<b>37</b>
3.1	DESCRIÇÃO POR COORDENADAS COLETIVAS . . . . .	39
3.2	KINK DEFORMADO . . . . .	42
3.3	ESPALHAMENTO KINK-ANTIKINK . . . . .	46
<b>3.3.1</b>	<b>Resultados numéricos</b> . . . . .	<b>47</b>
<b>3.3.2</b>	<b>Aproximação das coordenadas coletivas</b> . . . . .	<b>51</b>
3.4	ESPALHAMENTO KINK-KINK . . . . .	55
<b>4</b>	<b>INTERAÇÃO ENTRE KINK E OSCILLON</b> . . . . .	<b>62</b>
4.1	DINÂMICA DAS PERTURBAÇÕES . . . . .	70
4.2	MODELO SIMPLIFICADO . . . . .	78
4.3	MODELO GENERALIZADO . . . . .	83
<b>5</b>	<b>VÓRTICES COMPACTOS</b> . . . . .	<b>86</b>
5.1	CAMPO MAGNÉTICO COM TERMO CINÉTICO USUAL . . . . .	88
5.2	CAMPO MAGNÉTICO COM TERMO CINÉTICO NÃO-USUAL . . . . .	92
<b>6</b>	<b>CONCLUSÕES</b> . . . . .	<b>95</b>
6.1	PERSPECTIVAS FUTURAS . . . . .	98
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	<b>100</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Campos escalares são de interesse em várias áreas da física teórica, desde interações fundamentais, passando pela matéria condensada, até aplicações cosmológicas de larga escala. Uma situação onde modelos escalares são estudados com frequência é na descrição efetiva de processos físicos cujo modelo completo é desconhecido ou muito complexo. Por exemplo, a complexidade de certas teorias quântica de campo, como as teorias de Yang-Mills, levam a necessidade de descrições efetivas mais simples. Esses modelos efetivos não são necessariamente derivados das teorias mais fundamentais, mas postulados de modo a atender certos critérios, como simetrias e existência de sólitons topológicos [1–4].

O termo sóliton foi originalmente introduzido para se referir às ondas solitárias observadas no modelo de Korteweg–De Vries (KdV) [5]. Originalmente esse termo era usado para descrever configurações de campo em modelos com número infinito de cargas conservadas, conhecidos como teorias de campo integráveis. Sólitons nesse modelo possuem fortes limitações na sua dinâmica decorrentes da conservação destas cargas. Como consequência, suas interações não levam ao decaimento dos sólitons. No entanto, é comum o uso do termo sóliton também para outras configurações localizadas de campo que minimizam a energia em uma teoria não-linear. Usaremos o termo nesse sentido mais amplo. Em particular, sólitons topológicos são caracterizadas por uma carga topológica, um número inteiro que geralmente é o grau topológico ou *winding number* do campo [1]. Sólitons topológicos também são chamados defeitos topológicos. É comum identificarmos sólitons topológicos com o número de partículas menos o número de anti-partículas de uma teoria mais fundamental. Um exemplo famoso é o modelo de Skyrme, um modelo efetivo para matéria nuclear cuja carga topológica é identificada com o número bariônico [6,7]. O modelo de Skyrme foi amplamente estudado na literatura [8–12]. Também foram estudadas versões modificadas do modelo de Skyrme através da introdução de termos de ordem superior em potências de derivadas, permitindo reproduzir melhor a curva de ligação nuclear [13]. As soluções do modelo modificado saturam o limite de Bogomol’nyi-Prasad-Sommerfeld (BPS) [14,15] enquanto soluções não triviais do modelo original (com termos da segunda e quarta ordem) não o saturam.

Apesar de serem localizados, os sólitons de teorias escalares geralmente tem tamanhos infinitos, alcançando os vácuos assintoticamente através de caudas exponenciais. No entanto, existem exceções para esse comportamento, os chamados compactons. Compactons são soluções localizadas estritamente em um suporte compacto, originalmente descobertas para uma equação de KdV modificada [16]. Para uma revisão sobre compactons na teoria KdV, veja referência [17].

Posteriormente, compactons foram estudados em outros modelos, como modelos análogos ao modelo de Skyrme [18], modelos hidrodinâmicos [19], modelos mecânicos [20] e em modelos de rede discreta [21,22]. Além desses, compactons também estão presentes

em algumas teorias de campos escalares relativísticos. Uma possibilidade para sólitons compactos é quando a densidade lagrangiana possui potências mais altas, como os casos estudados nas referências [23–27]. Outra possibilidade é manter o termo cinético usual, mas tornar o potencial não-analítico [28]. Esse é o caso que iremos nos concentrar nesse trabalho. Um potencial é dito não-analítico se suas derivadas laterais ao redor dos pontos de mínimo diferem se calculadas pela esquerda e pela direita. Esses potenciais também são chamados potenciais em forma de V. Potenciais desse tipo se distinguem por não possuírem regime linear, mesmo para pequenas amplitudes do campo. Vale apontar que no regime estático, ambas as possibilidades podem levar às mesmas formas da solução, pois o comportamento em torno do vácuo é regido pela razão das potências do termo cinético e potencial.

Seguindo o trabalho original de Arodz [28], podemos demonstrar que a existência de compactons em modelos com potencial não-analítico partindo da equação do campo. Por simplicidade, vamos considerar o caso em 1 + 1 dimensões, cuja equação para um campo escalar  $\phi$  é na forma

$$\partial_t^2 \phi - \partial_x^2 \phi + V'(\phi) = 0$$

onde  $V(\phi)$  sendo um potencial não analítico ao redor do seu ponto de mínimo  $\phi_0$  e  $V'(\phi)$  sua derivada. No caso estático, essa equação de movimento se reduz a

$$-\phi''(x) + V'(\phi(x)) = 0.$$

Multiplicando por  $\phi'(x)$  e integrando na posição obtemos

$$\int_{x_0}^x \phi''(x) \phi'(x) dx = V(\phi) - V(\phi_0)$$

onde  $x_0$  é a posição em que o campo alcança o vácuo  $\phi_0$ . Para potenciais analíticos em  $\phi_0$  temos  $x_0 \rightarrow \infty$ . Usando o fato que  $d(\phi') = \phi'' dx$ , podemos escrever

$$\frac{\phi'^2}{2} = V(\phi) - V(\phi_0)$$

que nos permite isolar  $\phi'$  como

$$\phi' = \sqrt{2(V(\phi) - V(\phi_0))}.$$

Consideramos valores do campo próximos do vácuo,  $\phi(x) = \phi_0 + \delta\phi(x)$ , podemos expandir essa equação como

$$\begin{aligned} \delta\phi' &= \sqrt{2(V(\phi_0 + \delta\phi) - V(\phi_0))} \\ &= \sqrt{2\delta\phi V'(\phi_0)} \end{aligned}$$

com o termo  $V'(\phi_0)$  representando a derivada lateral do potencial no lado pelo qual o campo se aproxima do valor de vácuo. Essa equação diferencial é separável na forma

$$\int_0^{\delta\phi} \frac{d(\delta\phi)}{\sqrt{|\delta\phi|}} = \int_{x_0}^x dx \sqrt{2|V'(\phi_0)|}$$

e tem soluções

$$\delta\phi = \pm \frac{|V'(\phi_0)|}{2}(x - x_0)^2.$$

Portanto, o campo atinge o vácuo de modo parabólico. Como parábolas possuem raízes finitas,  $x_0$  é finito. Como o ponto onde o campo atinge o vácuo é finito, é possível ter soluções nas quais o campo atinge o vácuo em ambas as direções. Nesses casos, as configurações de interesse do campo estão contidas completamente em um intervalo compacto do eixo  $x$ . Note que caso o potencial fosse analítico, o termo  $V'(\phi_0)$  seria zero e equação para  $\delta\phi'$  seria dominada pelo próximo termo da expansão, levando ao comportamento exponencial mais tradicional.

Potenciais não-analíticos foram originalmente estudados no limite contínuo de sistemas de pêndulos acoplados, quando o movimento do pêndulo é restrito por paredes rígidas [28–31]. No entanto, eles encontram aplicações em outras áreas da física, como no estudo do modelo de Skyrme. Foi descoberto que o modelo de Skyrme pode ser decomposto em dois submodelos BPS acoplados [32, 33]. Para certas configurações, um destes submodelos pode ser reduzido a uma teoria de campo escalar com uma restrição nos valores do campo. Os procedimentos necessários para lidar com essa restrição são equivalentes a estudar um modelo com campo não restrito, mas com um potencial não-analítico [34]. Essa descoberta é muito importante, pois mostra que potenciais não-analíticos podem surgir naturalmente de outros modelos.

Outro contexto no qual os potenciais não-analíticos se provaram importantes foi no estudo de modelos  $CP^N$ , que são modelos com múltiplos campos escalares. Para casos de  $N$  ímpar, as equações de movimento desses campos foram reduzidas a uma equação para o perfil radial apenas. Tal equação somente possui solução para modelos com potencial cuja derivada primeira é não-nula em torno do mínimo. Portanto, os modelos  $CP^N$  com tais potenciais possuem soluções de compacton. Soluções do tipo de Q-balls e Q-shells já foram encontradas para esses modelos [35], bem como casos mais complexos com carga elétrica [36] e gravitação [37]. Uma importante aplicação de soluções desse tipo é em estrelas de bósons.

## 1.1 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Nesse trabalho estudamos compactons em modelos com potencial não-analítico, com foco especial no modelo em 1 + 1 dimensões deduzido a partir do primeiro submodelo BPS do modelo de Skyrme, pois este permite a existência de kinks e antikinks.

No capítulo 2 realizamos uma revisão da literatura. Deduzimos os modelos de potencial não-analítico mais importantes a partir do limite de teoria de campos de configurações mecânicas e também a partir do primeiro submodelo BPS do modelo de Skyrme. Também revisamos as soluções de oscillon e ondas de choque do modelo de signum-Gordon.

No capítulo 3 nos dedicamos aos kinks compactos. Construimos soluções de kinks e antikinks compactos e estudamos perturbações em relação à sua forma estática através de simulações. Também realizamos um estudo sistemático dos processos de espalhamento kink-antikink e kink-kink. No espalhamento kink-antikink, analisamos os casos de captura e escape do par de sólitons, bem como a estrutura fractal nas proximidades da velocidade crítica que separa os dois casos. No espalhamento kink-kink, analisamos o ponto de maior aproximação do par. Em todos esses processos, desenvolvemos uma descrição efetiva usando o método das coordenadas coletivas e comparamos os resultados dessa aproximação com os resultados numéricos completos. Discutimos as dificuldades matemáticas na construção do espaço dos *moduli* do espalhamento de sólitons compactos.

Nos dedicamos a estudar em mais detalhes a interação entre kinks compactos e radiação no capítulo 4. Como a radiação dos modelos de potencial não-analítico é composto primariamente de oscillons compactos, estudamos os processos de colisão entre kinks e oscillons compactos numericamente. Como essas colisões leva a propagação de sinais através do corpo dos kinks, analisamos como o perfil de um oscillon evolui quando dentro do suporte do kink. Conseguimos nesse caso reproduzir os resultados numéricos em certas configurações, tanto para o modelo completo quanto para um modelo simplificado. Os resultados originais dos capítulos 3 e 4 foram publicados nos trabalhos das referências [38, 39].

Ampliamos a nossa investigação para compactons em  $2 + 1$  dimensões no capítulo 5. Construimos soluções de vórtice compacto em um modelo com campo escalar com potencial em forma de  $V$  acoplado com o campo magnético. Tratamos tanto o caso do eletromagnetismo usual quanto um caso com termo cinético quártico para o campo eletromagnético.

Por fim, resumizamos e discutimos nossos resultados no capítulo 6 e discutimos caminhos para continuar essa pesquisa.



## 2 MODELOS COM POTENCIAIS NÃO-ANALÍTICOS

Nesse capítulo vamos apresentar três exemplos de modelos com potencial não-analítico. Dois deles surgem no limite de teoria de campos de sistema mecânicos. O terceiro surge do primeiro submodelo BPS do modelo de Skyrme. Cada um desses casos é interessante por motivos diferentes. O primeiro modelo é o mais simples e aproxima o comportamento de baixas amplitudes do campo em relação ao vácuo para todos os modelos com potencial não-analítico simétrico em torno do vácuo. O segundo modelo foi historicamente o primeiro exemplo estudado de potencial não-analítico em teoria de campos. O terceiro caso é especialmente interessante porque mostra que potenciais não-analíticos podem surgir naturalmente do estudo de modelos mais tradicionais.

### 2.1 PARTÍCULAS QUICANDO EM UMA SUPERFÍCIE

Vamos considerar um sistema com partículas de massa  $m$  presas a postes na vertical, como miçangas, limitando seu movimento apenas a essa direção. Os postes estão dispostos ao longo do eixo  $x$ , separados por uma distância  $\Delta x$ , como ilustrado na figura 1. Consideramos que o sistema se estende infinitamente em ambas as direções, de modo que não precisamos nos preocupar com as bordas. Cada partícula está conectada aos primeiros vizinhos por molas de constante elástica  $\kappa$  e comprimento de repouso igual à separação  $\Delta x$ . Além disso, consideramos a aceleração da gravidade  $g$ . Ao colidir com o chão ( $y = 0$ ), a partícula é perfeitamente refletida. Seguindo a referência [31], vamos mostrar que o limite contínuo desse sistema é uma teoria de campo com potencial não-analítico.

As variáveis desse sistema mecânico são as alturas  $y_i$  da  $i$ -ésima partícula. A ação desse sistema pode ser escrito como

$$S = \int dt \sum_i \left[ \frac{m}{2} \dot{y}_i^2 - \frac{\kappa}{2} (l_i - \Delta x)^2 - mgy_i \right]$$

onde  $l_i$  é o comprimento da mola conectando a partícula  $i$  com a partícula  $i + 1$ . Esse comprimento é dado pelo teorema de Pitágoras:

$$l_i^2 = \Delta x^2 + (y_{i+1} - y_i)^2.$$

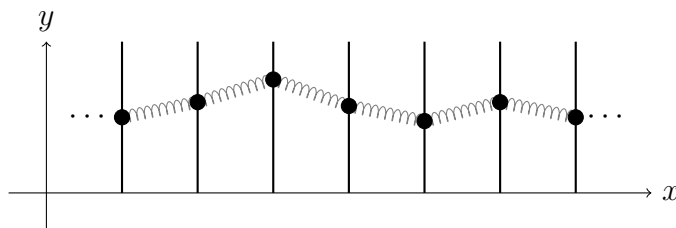


Figura 1 – Sistema de partículas conectadas por molas. As partículas são aceleradas para baixo pela gravidade e colidem elasticamente com o chão. Cada partícula está presa em um poste, que limita seu movimento apenas à direção vertical.

Além das equações de movimento, a evolução temporal dos  $y_i$  necessita de uma condição de reflexão para lidar com as colisões com o chão. Isto é, precisamos fazer a substituição  $\dot{y}_i(t) \rightarrow -\dot{y}_i(t)$  sempre que  $y_i(t) = 0$ . A necessidade de lidar com essa condição em separado das equações de movimento gera dificuldades. No entanto, podemos contornar esse problema permitindo que a variável  $y_i$  tome valores negativos. Nesse caso, a altura real das partículas passa a ser dada por  $|y_i|$  e precisamos substituir o termo  $mg y_i$  da ação por  $mg|y_i|$ .

Realizando essa alteração e considerando  $\Delta x$  pequeno, a ação se torna

$$\begin{aligned} S &= \int dt \sum_i \left[ \frac{m}{2} \dot{y}_i^2 - \frac{\kappa}{2} (y_{i+1} - y_i)^2 - mg|y_i| \right] \\ &= \int dt \sum_i \Delta x \left[ \frac{m}{2\Delta x} \dot{y}_i^2 - \frac{\kappa\Delta x}{2} \left( \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x} \right)^2 - \frac{mg}{\Delta x} |y_i| \right]. \end{aligned}$$

Iremos agora tomar o limite contínuo, no qual o sistema mecânico se torna uma teoria de campo. Tomamos esse limite de modo que a massa por comprimento  $\lambda \equiv m/\Delta x$  seja uma constante. Como a massa de cada partícula se torna infinitesimal, precisamos também aumentar a constante elástica das molas conforme diminuimos a separação, ou seja mantemos  $T \equiv \kappa\Delta x$  constante também. No limite contínuo, a soma se torna uma integral e as variáveis  $y_i$  se tornam valores de um campo  $\phi$  de modo que  $y_i(t) = \phi(t, x_i)$ . A ação para esse campo é dada por

$$S = \int dt dx \left[ \frac{\lambda}{2} (\partial_t \phi)^2 - \frac{T}{2} (\partial_x \phi)^2 - \lambda g |\phi| \right]$$

Esse sistema pode ser adimensionalizado fazendo as seguintes substituições:

$$\begin{aligned} \phi &\rightarrow \lambda^{-1/4} T^{-1/4} \phi, \\ x &\rightarrow \lambda^{-5/8} T^{3/8} g^{-1/2} x, \\ t &\rightarrow \lambda^{-1/8} T^{-1/8} g^{-1/2} t. \end{aligned}$$

Em termos das novas variáveis adimensionais, a ação é

$$S = \int dt dx \left[ \frac{1}{2} (\partial_t \phi)^2 - \frac{1}{2} (\partial_x \phi)^2 - |\phi| \right] \quad (2.1)$$

que descreve um campo escalar em 1 + 1 dimensões com potencial  $V(\phi) = |\phi|$ . Essa ação tem equação de Euler-Lagrange da forma

$$\partial_t^2 \phi - \partial_x^2 \phi + \text{sgn} \phi = 0, \quad (2.2)$$

onde a função  $\text{sgn}$  é definida de modo que  $\text{sgn}(0) = 0$  para que o estado fundamental  $\phi = 0$  esteja incluído entre as soluções da equação de movimento. O modelo descrito pela ação (2.1) é o modelo de signum-Gordon e a equação (2.2) é a equação de signum-Gordon. Esse nome vem da semelhança da equação com a equação de Klein-Gordon, com a única

diferença sendo a substituição do termo de massa pela função sinal do campo. Embora esta substituição pareça simples, ela muda completamente a dinâmica do campo escalar. Em particular, ela implica que pequenas perturbações do campo em torno de vácuo encontram uma força contrária de intensidade constante. Essa força dificulta a propagação das perturbações pelo espaço, bem como diminui a emissão de radiação por estruturas excitadas, como os kinks e oscillons que iremos apresentar depois.

Outra propriedade interessante é que o modelo de signum-Gordon possui invariância de escala. Isto é, se  $\phi(t, x)$  é solução da equação de signum-Gordon, a função

$$\phi'(t, x) = l^2 \phi\left(\frac{t}{l}, \frac{x}{l}\right)$$

também será solução para qualquer valor de  $l$ . Isso é visível da equação de signum-Gordon porque as derivadas segundas possuem essa simetria, bem como a função  $\text{sgn } \phi$ . Portanto, suas soluções podem ter qualquer tamanho. Além disso, o modelo de signum-Gordon é o exemplo mais simples de modelo com potencial não-analítico e aproxima nas vizinhanças do mínimo todos os modelos cujo potencial se aproxima do vácuo simetricamente com a forma de  $V$ . Por esses motivos, o modelo de signum-Gordon é muito importante no contexto de potenciais não-analíticos, tendo o mesmo papel que o modelo de Klein-Gordon tem para os potenciais analíticos.

Como o modelo de signum-Gordon aproxima outras teorias com potencial não-analítico, suas soluções aparecem na descrição de processos dinâmicos em outros modelos. Duas dessas soluções apareceram na pesquisa dessa tese e devem assim ser revisados: o oscillon compacto e a onda de choque compacta. Apesar de não serem o tema principal dessa tese, essas soluções desempenharão um importante papel no comportamento do campo escalar. Faremos aqui uma breve revisão chamando atenção às suas principais características. Para uma discussão mais completa, recomendamos consultar as referências originais ou a dissertação de mestrado onde elas foram estudadas em mais detalhes [40].

### 2.1.1 Oscillons

Oscillons são soluções localizadas, dependentes do tempo e periódicas, pelo menos de modo aproximado. O termo foi originalmente proposto para descrever configurações com essas características no modelo de Klein-Gordon  $\phi^4$  em  $3 + 1$  dimensões [41], apesar de que a existência de configurações oscilatórias em  $1 + 1$  dimensões já era conhecida [42]. No entanto, foi mostrado que essas configurações não são soluções periódicas exatas e devem decair em radiação eventualmente [43, 44]. Isso torna oscillons fundamentalmente diferente de *breathers*, soluções periódicas exatas do modelo de sine-Gordon [45]. Os *breathers* do modelo de sine-Gordon não irradiam e tem assim vida infinitamente longa.

Uma propriedade bastante curiosa do modelo de signum-Gordon é que foram encontradas soluções de vida infinitamente longa, sem emissão de radiação [46]. A existência de soluções assim é bastante surpreendente, pois signum-Gordon não é um modelo integrável

como sine-Gordon. Considerando o que foi discutido acima, essas soluções seriam mais apropriadamente chamadas *breathers*, no entanto, o trabalho original e a maior parte da literatura subsequente chamou essas soluções de *oscillons*. Portanto, iremos ser consistentes com literatura e usar o termo *oscillon* também.

Uma propriedade curiosa dos *oscillons* de modelos com potencial não-analítico é que, de modo geral, seu suporte pode realizar um movimento oscilatório no espaço mesmo quando o *oscillon* não possui momento linear. Além disso, o movimento do suporte não altera a energia total do *oscillon*. O suporte de um *oscillon* é contido entre duas curvas  $x = x_R(t)$  e  $x = x_L(t)$  de tipo tempo com separação constante  $l$ , que constitui o tamanho do *oscillon*. No caso de *oscillons* não perturbados do modelo de *signum-Gordon* o período também é igual a  $l$ .

As soluções de *oscillon* para o modelo de *signum-Gordon* foram inicialmente descobertas para o caso particular do *oscillon* com bordas estáticas  $x_L(t) = 0$  e  $x_R(t) = l$  [46]. Posteriormente, foi encontrada uma generalização para o caso da borda em movimento uniforme [47]. Por fim, a solução foi generalizada para bordas *time-like* arbitrárias [48]. Todas essas soluções tem a mesma energia para períodos de oscilação iguais. Essa degenerescência aponta a existência de alguma simetria dessas soluções, cuja explicação mais profunda permanece uma questão em aberto.

A solução de um *oscillon*  $\phi_{\text{osc}}(t, x)$  é construída a partir da solução parcial  $\varphi(t, x)$  válida durante o primeiro meio-período  $t \in [0, l/2]$ . A única informação necessária para a construção dessa solução é a forma da borda esquerda em coordenadas cone de luz  $y_- = g(y_+)$ ,  $y_+ = g^{-1}(y_-)$ . Com essa informação podemos escrever a solução parcial  $\varphi(t, x)$ , que tem forma

$$\varphi(t, x) = \begin{cases} F(x+t) - F(x-t+l) + \frac{t^2}{2} - \frac{l^2}{8} & \text{se } x_L(t) \leq x \leq t, \\ F(x+t) - F(x-t) + \frac{t^2}{2} & \text{se } t \leq x \leq l-t, \\ F(x+t-l) - F(x-t) + \frac{t^2}{2} - \frac{l^2}{8} & \text{se } l-t \leq x \leq x_R(t). \end{cases} \quad (2.3)$$

com a função  $F(x)$  determinada a partir da equação

$$F'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{4}[x - g(x)] & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{l}{2} + \Delta, \\ -\frac{1}{4}[g^{-1}(x-l) - x + l] & \text{se } \frac{l}{2} + \Delta \leq x \leq l \end{cases}$$

onde  $\Delta = x_L(l/2)$ . No restante desse trabalho, vamos nos limitar por simplicidade ao caso em que a borda do *oscillon* se move uniformemente com velocidade  $v_0$ . Nesse caso

$$g(x) = -\frac{1-v_0}{1+v_0}x.$$

Portanto,

$$F(x) = \begin{cases} F(0) - \frac{1}{1+v_0} \frac{x^2}{4} & \text{se } 0 \leq x \leq (1+v_0)\frac{l}{2}, \\ F(0) - \frac{l^2}{8} + \frac{1}{1-v_0} \frac{(l-x)^2}{4} & \text{se } (1+v_0)\frac{l}{2} \leq x \leq l. \end{cases} \quad (2.4)$$

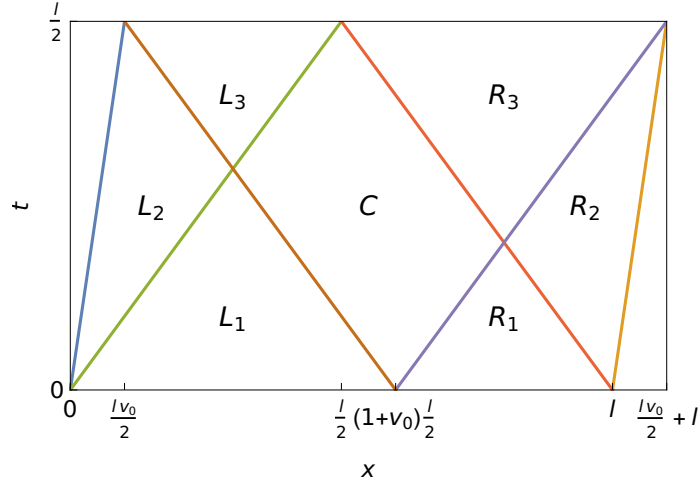


Figura 2 – Regiões em que são definidas as soluções parciais de um oscillon compacto no modelo de signum-Gordon.

Como a solução do oscillon e a função  $F(x)$  são definidas em pedaços, podemos montar  $\phi(t, x)$  a partir de soluções parciais  $\phi_k(t, x)$ ,  $k \in \{C, L_1, L_2, L_3, R_1, R_2, R_3\}$  válidas nas regiões mostradas na figura 2. Para  $t \in [0, l/2]$ , cada uma dessas soluções parciais é dada por polinômios  $\varphi_k$  em  $t$  e  $x$  na forma

$$\begin{aligned}\varphi_C(t, x; v_0) &= \frac{((1+v_0)l - 2x)^2 - 4((1+v_0)l - 2v_0x)t + 4(2 - v_0^2)t^2}{8(1 - v_0^2)}, \\ \varphi_{L_1}(t, x; v_0) &= \frac{t^2}{2} - \frac{xt}{1+v_0}, \\ \varphi_{L_2}(t, x; v_0) &= -\frac{(x - v_0t)^2}{2(1 - v_0^2)}, \\ \varphi_{L_3}(t, x; v_0) &= \frac{1}{2} \left( t - \frac{l}{2} \right) \left( t + \frac{l}{2} + \frac{2x - l}{1 - v_0} \right).\end{aligned}$$

As soluções  $\varphi_{R_i}$  podem ser obtidas a partir das soluções  $\varphi_{L_i}$  através das transformações

$$v_0 \rightarrow -v_0, \quad x \rightarrow l - x$$

de modo que

$$\varphi_{R_i}(t, x; v_0) = \varphi_{L_i}(t, l - x; -v_0).$$

Podemos ainda identificar, que a região central  $C$  é invariante sobre essa transformação.

Como cada solução parcial é válida em apenas uma região, é conveniente introduzir

as funções degrau

$$\Pi_C(t, x; v_0) = \theta\left(x + t - \frac{l(1 + v_0)}{2}\right) \theta(x - t) \theta\left(-x + t + \frac{l(1 + v)}{2}\right) \theta(-x - t + l),$$

$$\Pi_{L_1}(t, x; v_0) = \theta(x - t) \theta\left(-x - t + \frac{l(1 + v_0)}{2}\right),$$

$$\Pi_{L_2}(t, x; v_0) = \theta(x - v_0 t) \theta(-x + t) \theta\left(-x - t + \frac{l(1 + v_0)}{2}\right),$$

$$\Pi_{L_3}(t, x; v_0) = \theta(-x + t) \theta\left(x + t - \frac{l(1 + v_0)}{2}\right),$$

$$\Pi_{R_i}(t, x; v_0) = \Pi_{L_i}(t, l - x; -v_0)$$

que valem um na região em que  $\varphi_k$  é solução e zero fora dela. Nessas fórmulas,  $\theta$  é a função degrau de Heaviside.

Os polinômios  $\varphi_k$  não são periódicos, enquanto a solução  $\phi_{\text{osc}}$  é periódica. De modo a obtermos fórmulas válidas para todo tempo  $t$  introduzimos as funções periódicas

$$\begin{aligned} \tau(t) &= \frac{l}{\pi} \arcsin \left| \sin \left( \frac{\pi t}{l} \right) \right|, \\ \sigma(t) &= \text{sgn} \left( \sin \left( \frac{2\pi t}{l} \right) \right). \end{aligned}$$

A função  $\tau(t)$  serve para mapearmos o tempo para o intervalo  $[0, l/2]$ , enquanto a função  $\sigma(t)$  serve para controlarmos o sinal do oscillon, que muda a cada meio período. Para tempos arbitrários, escrevemos a solução de oscillon como a soma

$$\phi_{\text{osc}}(t, x; v_0) = \sum_k \sigma(t) \varphi_k(\tau(t), x; v_0) \Pi_k(\tau(t), x; v_0).$$

Pode ser mostrado que um oscillon do modelo de signum-Gordon possui energia total  $E = l^3/24$  e momento linear zero, independente do movimento de “zig-zag” das bordas. No entanto, podemos obter soluções de oscillons cujos centros de momento se movam uniformemente em relação ao referencial do laboratório através de uma transformação de Lorentz. No referencial do centro de momento  $S'$ , os oscillons se encontram em repouso. Nesse referencial são válidas as soluções obtidas acima, expressas como  $\phi_{\text{osc}}(t', x')$ . No referencial do laboratório  $S$ , os oscillons são descritos por uma solução  $\psi_{\text{osc}}(t, x)$ . Como o campo do modelo de signum-Gordon é um escalar, as soluções nos dois referenciais são relacionadas pela transformação de Lorentz

$$\psi_{\text{osc}}(t, x) = \phi_{\text{osc}}(t', x').$$

Para um oscillon se movendo com velocidade  $v$  em relação ao referencial do laboratório

$$\psi_{\text{osc}}(t, x; v) = \phi_{\text{osc}}(\gamma(t - vx), \gamma(x - vt)) \quad (2.5)$$

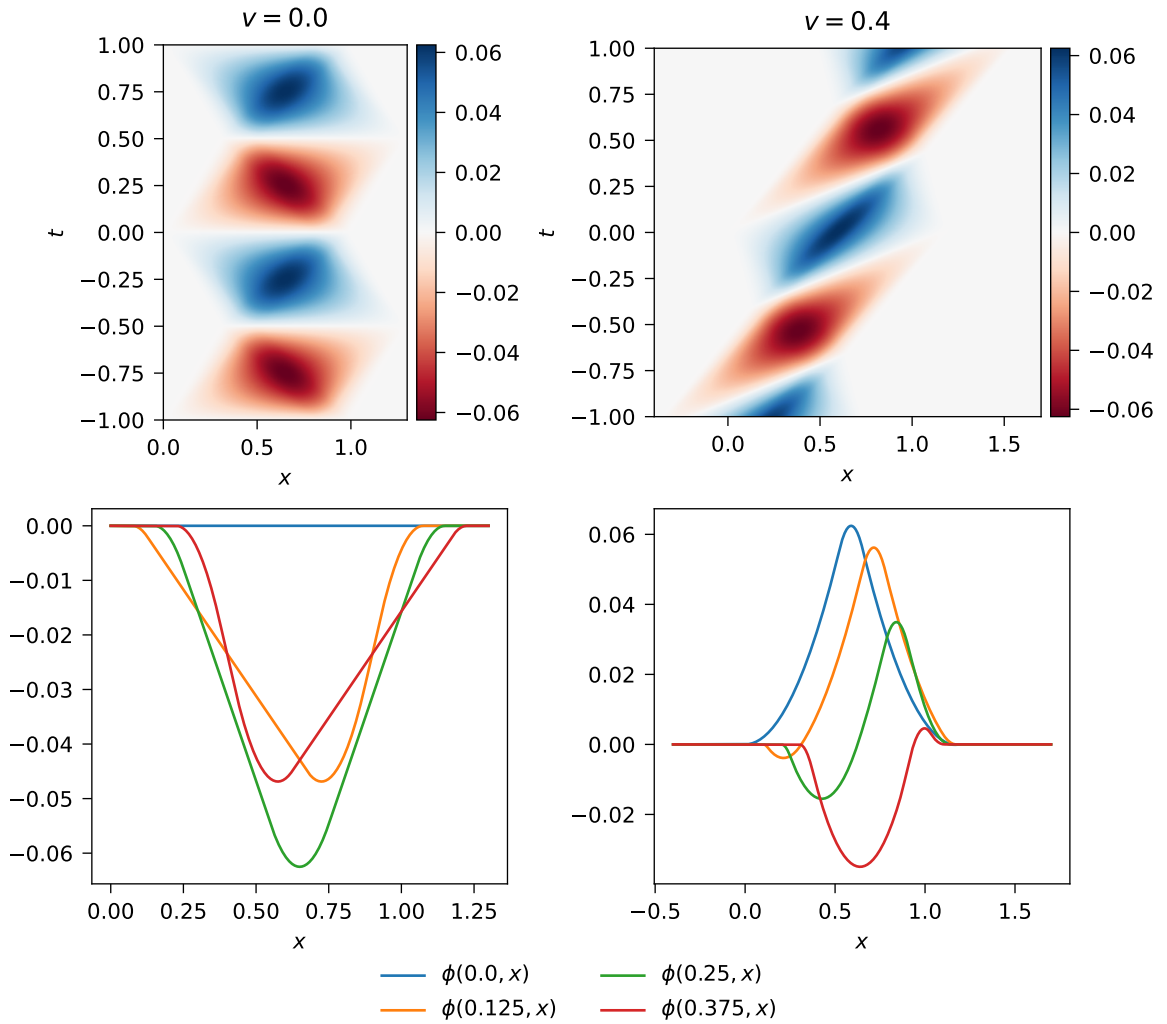


Figura 3 – Valores do campo para oscillon parado (esquerda) e em movimento uniforme com velocidade  $v = 0,4$  (direita), “zig-zag” das bordas com velocidade  $v_0 = 0,6$  e tamanho  $l = 1$ .

com  $\gamma = (1 - v^2)^{-1/2}$ . Note que não devemos confundir a velocidade do centro de momento do oscillon  $v$  com  $v_0$ , que é a velocidade de “zig-zag” das bordas no referencial de repouso. Exemplos de oscillons em repouso e em movimento podem ser vistos na figura 3.

As soluções de oscillon em movimento podem ser usados, por exemplo, para estudar o processo de espalhamento de dois oscillons. Em um trabalho anterior [49], o perfil de dois oscillons em direção um do outro foi tomado como condição inicial para simulações numéricas. Foi mostrado que certas configurações, principalmente aquelas em que o perfil inicial do campo era antissimétrico, permitem a colisão dos oscillons sem emissão de radiação, novamente um resultado surpreendente para um modelo não-integrável como signum-Gordon. No entanto, na maioria dos casos de colisões de um perfil simétrico ou sem paridade definida, a colisão de dois oscillons leva à produção de uma cascata de oscillons menores, que colidem entre si formando mais oscillons em um comportamento quase fractal. Em particular, para colisões de alta velocidade com perfil simétrico houve a

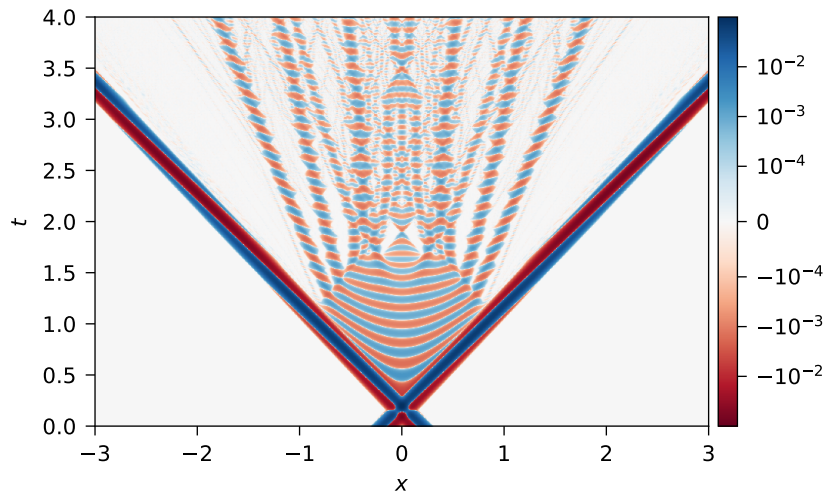


Figura 4 – Exemplo de espalhamento de dois oscillons com velocidade 0,95 em relação ao centro de momento. O espalhamento gera uma onda de choque que decai em uma cascata de oscillons.

formação de uma estrutura com forma de losango no diagrama de espaço tempo e zeros em hipérboles que decaiu em oscillons, como mostra a figura 4. Essa estrutura foi identificada como uma onda de choque.

### 2.1.2 Ondas de choque

Vamos agora revisar as soluções de ondas de choque do modelo de signum-Gordon. O caso que iremos estudar aqui é o de ondas de choque em  $1 + 1$  dimensões, originalmente introduzidas por Arodz, Klimas e Tyranowski [50]. Desde então, essas soluções foram descobertas também em  $2 + 1$  e  $3 + 1$  dimensões [51], casos que não iremos tratar aqui. Soluções de onda de choque podem ser obtidas no modelo de signum-Gordon assumindo que o campo é função apenas da variável

$$z \equiv \frac{1}{4}(x^2 - t^2).$$

Ou seja,  $\phi(t, x) = \phi(z)$ . Isso significa que as curvas de nível da função  $\phi(t, x)$  no diagrama de espaço-tempo têm a forma de hipérboles. Em termos da variável  $z$ , as derivadas do campo tomam a forma

$$\partial_t \phi(t, x) = -\frac{t}{2} \phi'(z), \quad \partial_x \phi(t, x) = \frac{x}{2} \phi'(z).$$

Substituindo as derivadas na equação de signum-Gordon, obtemos a seguinte equação para o campo  $\phi(z)$

$$z\phi''(z) + \phi'(z) = \text{sgn}(\phi(z)). \quad (2.6)$$

Adicionalmente, assumimos que o campo possui uma frente de onda que se propaga com a velocidade da luz, ou seja,  $\phi(z) = \theta(-z)W(z)$ . Em termos da função  $W(z)$ , as derivadas



do campo podem ser reescritas como

$$\begin{aligned}\phi'(z) &= \theta(-z)W'(z) - \delta(z)W(z), \\ \phi''(z) &= \theta(-z)W''(z) - 2\delta(z)W'(z) - W(z)\delta'(z)\end{aligned}$$

de modo que vale a expressão

$$z\phi''(z) = z\theta(-z)W''(z) + \delta(z)W(z).$$

Usamos as propriedades da função delta de Dirac

$$\begin{aligned}f(z)\delta(z) &= f(0)\delta(z), \\ f(z)\delta'(z) &= -f'(z)\delta(z).\end{aligned}$$

Substituindo essas derivadas na equação (2.6) obtemos a seguinte equação diferencial

$$zW''(z) + W'(z) = \text{sgn}(W(z)).$$

Essa equação pode ser resolvida analiticamente para cada região onde  $W(z)$  tem sinal definido  $(-1)^k$ , com  $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$ . Vamos denotar esses pedaços da solução por  $W_k(z)$ , cada um dos quais obedecendo à equação

$$zW''(z) + W'(z) = (-1)^k. \quad (2.7)$$

Impomos que a função  $W(z)$  é contínua e suave de modo que

$$W_k(-a_k) = W_{k+1}(-a_k) = 0, \quad (2.8)$$

$$W'_k(-a_k) = W'_{k+1}(-a_k). \quad (2.9)$$

para os pontos  $z = -a_k$ . Note que para a região interna da onda de choque  $z < 0$ , portanto  $a_k > 0$ . Como a equação (2.7) é separável, podemos usar a condição (2.8) para deduzir que

$$W_k(z) = (-1)^k \left( z + a_k + b_k \ln \frac{|z|}{a_k} \right). \quad (2.10)$$

A segunda igualdade da condição (2.8) implica que

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = 1 + \frac{b_k}{a_k} \ln \frac{a_{k+1}}{a_k}, \quad (2.11)$$

e a condição (2.9) implica que

$$\frac{b_{k+1}}{a_k} = 2 - \frac{b_k}{a_k}. \quad (2.12)$$

Note que precisamos ainda exigir que  $b_0 = 0$  para que  $W_k(z)$  não tenha uma singularidade logarítmica em  $z = 0$ . Com essa condição fixa, podemos obter os demais parâmetros como resultado das relações de recorrência (2.11) e (2.12), em termos do primeiro zero  $a_0$ , que

	$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$	$k = 6$
$a_k$	1,00	3,51	6,92	11,03	15,73	20,96	26,76
$b_k$	0,00	2,00	5,02	8,82	13,24	18,22	23,70
$t_k$	2,00	3,75	5,26	6,64	7,93	9,16	10,33

Tabela 1 – Valores numéricos dos primeiros  $a_k$ ,  $b_k$  e  $t_k$  para  $a_0 = 1$ .

deve ser tratado como um parâmetro livre. Essas relações de recorrência precisam ser resolvidas numericamente. A tabela 1 contém os valores numéricos dos primeiros  $a_k$  e  $b_k$  no caso  $a_0 = 1$ , assim como os tempos  $t_k$  para qual cada solução parcial  $W_k(z)$  se divide.

Para  $z = 0$  o campo vale  $W(0) = W_0(0) = a_0$ , de modo que a onda de choque é descontínua na sua frente. Essa descontinuidade faz com que o gradiente do campo se torne infinito nesse ponto causando uma divergência na energia total. Essa divergência tem origem nas condições iniciais da solução, porque para  $t = 0$  temos

$$\phi(0, x) = 0, \tag{2.13}$$

$$\partial_t \phi(0, x) \propto \delta(x) \tag{2.14}$$

devido à presença função degrau na fórmula da solução. Substituindo essas condições na energia

$$E = \int dx \left[ \frac{1}{2} (\partial_t \phi(t, x))^2 + \frac{1}{2} (\partial_x \phi(t, x))^2 + |\phi(t, x)| \right] \tag{2.15}$$

temos que integrar uma expressão proporcional ao quadrado de uma delta de Dirac. A integral de  $(\delta(x))^2$  não é bem comportada na teoria das distribuições, causando uma divergência. Essa divergência faz com que a borda da onda de choque atue como um reservatório de energia, alimentando sua expansão perpetuamente.

Foi proposto que ondas de choque realistas são formadas por condições iniciais na forma de funções delta [52]. Isto é, funções contínuas  $\delta_\varepsilon(x)$  com valores finitos, mas parametrizadas por uma variável  $\varepsilon$  de modo que seu limite fraco quando  $\varepsilon \rightarrow 0$  é delta de Dirac. Ou seja,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta_\varepsilon(x) f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x) f(x) = f(0) \tag{2.16}$$

para toda função teste  $f(x)$ . Como um exemplo, considere  $\delta_\varepsilon(x)$  na forma triangular, cuja expressão é

$$\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{\varepsilon - |x|}{\varepsilon^2} & \text{se } -\varepsilon \leq x \leq \varepsilon, \\ 0 & \text{nos outros casos.} \end{cases}$$

Simulações numéricas de configurações do campo com condições iniciais

$$\phi(0, x) = 0,$$

$$\partial_t \phi(0, x) = A \delta_\varepsilon(x)$$

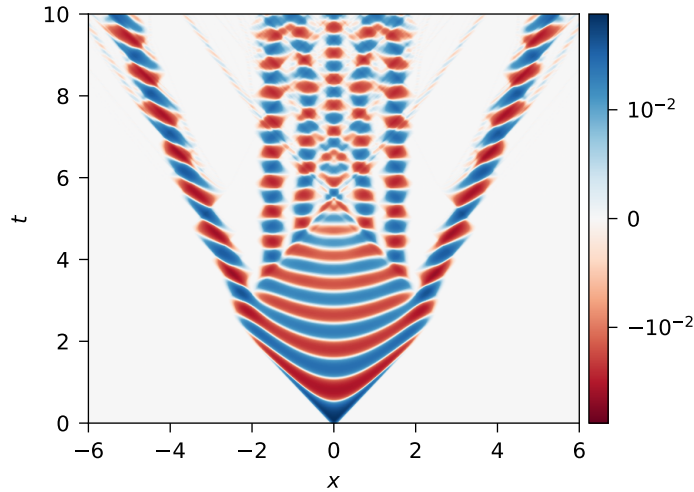


Figura 5 – Evolução temporal de um perfil inicial triangular com  $A = 0,2$  e  $\epsilon = 0,1$ .

reproduzem o comportamento visto por ondas de choque que aparecem naturalmente no processo de espalhamento de oscilons, como pode ser visto na figura 5. Ao invés de se propagarem para sempre, ondas de choque causadas por perfil sem divergência eventualmente esgotam seu reservatório de energia e decaem em uma cascata de oscilons.

## 2.2 PÊNDULOS INTERAGENTES COM RESTRIÇÃO

Vamos agora apresentar o primeiro exemplo conhecido na literatura de teoria de campo com potencial não-analítico. Esse exemplo foi apresentado no contexto do limite contínuo de um sistema de pêndulos interagentes. Sistemas desse tipo são exemplos clássicos de modelo mecânico que no limite contínuo se torna uma teoria de campos, como é o caso do famoso modelo de sine-Gordon. Iremos começar apresentando o modelo de sine-Gordon tradicional, como revisado na referência [4] e depois a modificação proposta por Arodz [28] que torna seu potencial não analítico

No modelo de sine-Gordon, estudamos um sistema de pêndulos elasticamente conectados. Vamos tomar cada pêndulo consistindo de uma barra de tamanho  $R$  e massa desprezível com uma massa  $m$  na sua ponta. Os pêndulos estão conectados elasticamente e dispostos ao longo do eixo horizontal. O  $i$ -ésimo pêndulo tem como coordenada dinâmica o seu ângulo  $\bar{\phi}_i$  com a vertical.

Para separações  $\Delta x$  pequenas entre os pêndulos, a lagrangiana desse sistema é dada por

$$\begin{aligned} L &= \sum_i \left[ \frac{mR^2}{2} \left( \frac{d\bar{\phi}_i}{dt} \right)^2 - \frac{\kappa R^2}{2} (\bar{\phi}_{i+1} - \bar{\phi}_i)^2 + mgR(1 - \cos \bar{\phi}_i) \right] \\ &= \sum_i \Delta x \left[ \frac{mR^2}{2\Delta x} \left( \frac{d\bar{\phi}_i}{dt} \right)^2 - \frac{\kappa R^2 \Delta x}{2} \left( \frac{\bar{\phi}_{i+1} - \bar{\phi}_i}{\Delta x} \right)^2 + \frac{mgR}{\Delta x} (1 - \cos \bar{\phi}_i) \right], \end{aligned}$$

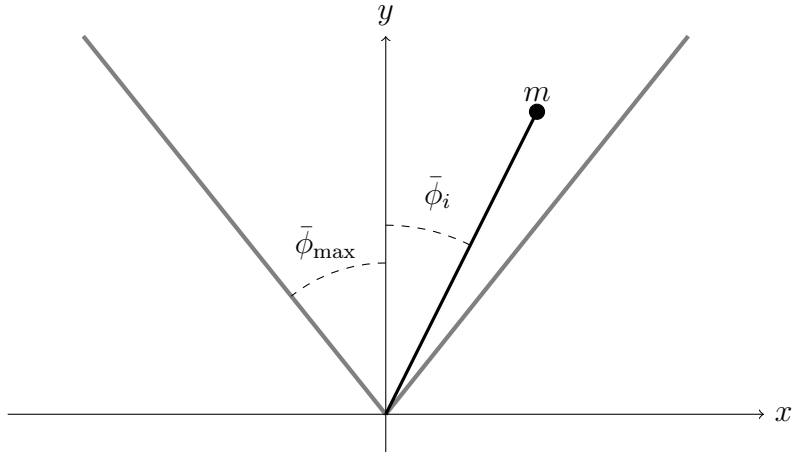


Figura 6 – Esquema do  $i$ -ésimo pêndulo em uma realização mecânica do modelo de sine-Gordon com limitação no movimento.

onde escolhemos o zero do potencial correspondendo ao pêndulo alinhado para cima. Novamente tomando  $\lambda = m/\Delta x$  e  $T = \kappa\Delta x$  como constantes, podemos tomar o limite contínuo. Nesse limite  $\bar{\phi}_i(t) = \bar{\phi}(t, x_i)$ , com o sistema sendo equivalente a uma teoria de campos com ação

$$S = \int dt dx \left[ \frac{R^2\lambda}{2} (\partial_t \bar{\phi})^2 - \frac{TR^2}{2} (\partial_x \bar{\phi})^2 + \lambda g R (1 - \cos \bar{\phi}) \right].$$

Adimensionalizado as variáveis, temos um sistema com ação

$$S = \int dt dx \left[ \frac{1}{2} (\partial_t \bar{\phi})^2 - \frac{1}{2} (\partial_x \bar{\phi})^2 - V(\bar{\phi}) \right],$$

onde o potencial é  $V(\bar{\phi}) = \cos \bar{\phi} - 1$ . O sistema neste ponto da exposição é descrito pelo tradicional modelo de sine-Gordon.

Podemos realizar uma modificação simples nesse sistema para tornar o seu potencial não analítico. Basta introduzirmos barreiras rígidas que limitem o movimento dos pêndulos para os ângulos  $-\bar{\phi}_{\max} \leq \bar{\phi} \leq \bar{\phi}_{\max}$ . Um diagrama esquemático para o  $i$ -ésimo pêndulo pode ser visto na figura 6. Novamente, impomos a condição de que colisões com as bordas leva a troca do sinal da velocidade:  $\partial_t \bar{\phi} \rightarrow -\partial_t \bar{\phi}$ .

Tal qual no caso das partículas quicando em uma superfície, podemos lidar com essa limitação no movimento permitindo com que os valores do campo assumam valores arbitrários e mapeando esses valores do campo de volta para o campo original. Introduzimos um novo campo  $\phi$ , chamado campo desdobrado, tal que o campo original  $\bar{\phi}$  é um “dobramento” de  $\phi$  no intervalo  $[-\bar{\phi}_{\max}, \bar{\phi}_{\max}]$ . Explicitamente, escrevemos

$$\bar{\phi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n (\phi - 2n\bar{\phi}_{\max}) S_n(\phi)$$

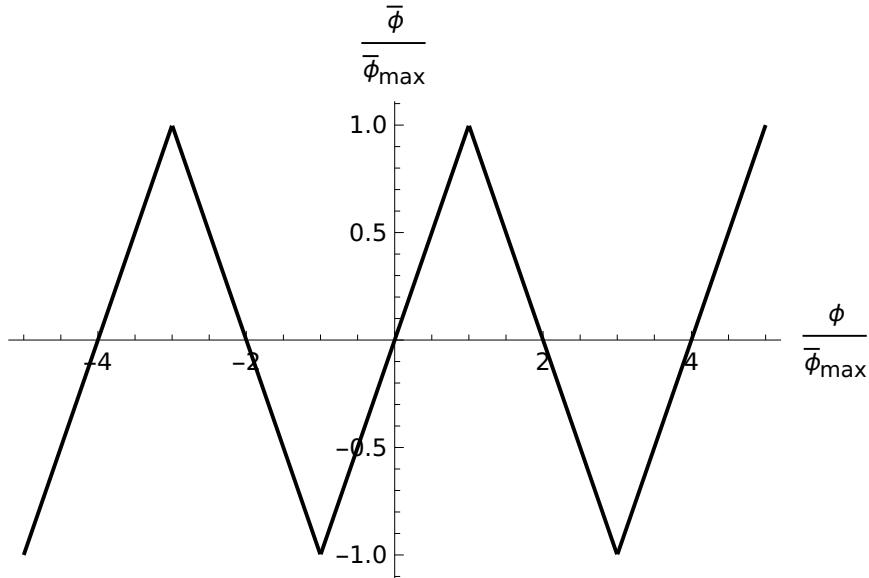
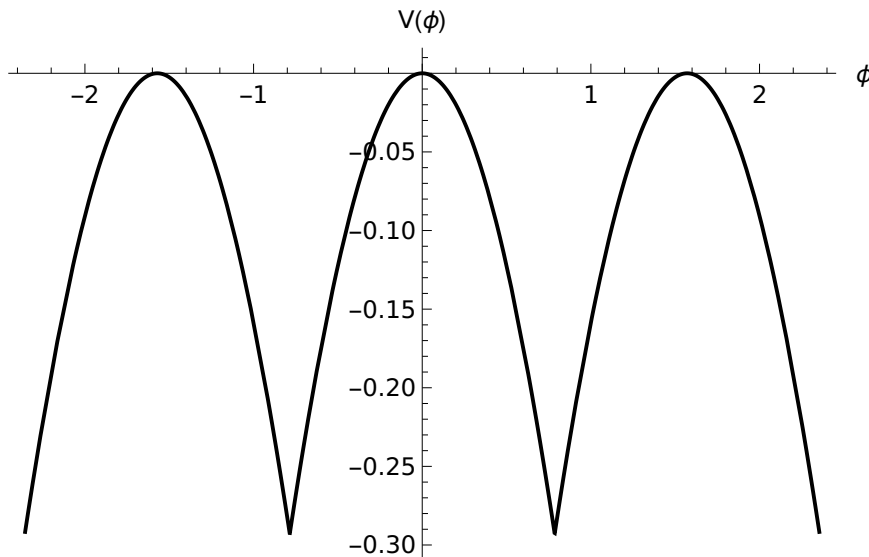


Figura 7 – Transformação de dobramento do campo.


 Figura 8 – Exemplo de potencial para o campo desdobrado  $\phi$  com  $\bar{\phi}_{\max} = \pi/4$ .

com  $S_n(\phi)$  sendo uma função degrau valendo um no intervalo  $((2n - 1)\bar{\phi}_{\max}, (2n + 1)\bar{\phi}_{\max})$  e zero fora dele. Em termos das funções degrau de Heaviside

$$S_n(\phi) = \theta(\phi - (2n - 1)\bar{\phi}_{\max}) - \theta(\phi - (2n + 1)\bar{\phi}_{\max}).$$

Uma ilustração da transformação de dobramento pode ser vista na figura 7.

Em termos do novo campo, o potencial é agora uma função periódica com mínimos em  $k\bar{\phi}_{\max}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , nos quais ele não é diferenciável. Obtivemos assim um potencial não-analítico, que pode ser visto na figura 8.

### 2.3 SUBMODELO BPS DO MODELO DE SKYRME

Por fim, vamos nos voltar agora ao modelo de Skyrme, e mostrar a relação deste modelo com potenciais não-analíticos. O modelo de Skyrme [6, 7] descreve a matéria nuclear através de um campo  $U$  pertencente ao grupo  $SU(2)$ . As soluções topológicas deste modelo são identificadas com bárions. A densidade lagrangiana é construída através da corrente

$$L_\mu \equiv U^\dagger \partial_\mu U$$

que pode ser escrita como a soma de uma parte quadrática  $\mathcal{L}_2$  e uma parte quártica  $\mathcal{L}_4$  na forma:

$$\mathcal{L} = \underbrace{-\frac{1}{2} \text{Tr}(L_\mu L^\mu)}_{\mathcal{L}_2} + \underbrace{\frac{1}{16} \text{Tr}([L_\mu, L_\nu][L^\mu, L^\nu])}_{\mathcal{L}_4}.$$

O modelo de Skyrme possui um invariante topológico

$$B = -\frac{1}{24\pi^2} \int d^3x \epsilon^{ijk} \text{Tr}(L_i L_j L_k)$$

que é conservado sob deformações contínuas do campo, inclusive evolução temporal. Esse invariante topológico é identificado com o número bariônico.

Já foi mostrado que o modelo de Skyrme pode ser escrito como dois submodelos BPS acoplados [33]. Para fazer isso, começamos parametrizando o campo  $U$  na forma

$$U = \exp(i\xi n^i \tau^i) = \cos \xi \mathbb{I} + i \sin \xi n^i \tau^i \quad (2.17)$$

onde  $\mathbb{I}$  é a matriz identidade  $2 \times 2$ ,  $\xi$  é um campo escalar real que pode variar no intervalo  $[0, \pi]$  e  $n^i$  são componentes de um vetor unitário ( $n^i n^i = 1$ ).

Uma vez adotada essa parametrização, reescrevemos a densidade lagrangiana em termos dos campos  $\xi$  e  $n^i$ . Começamos notando que a corrente  $L_\mu$  pode ser reescrita na forma

$$\begin{aligned} L_\mu &= U^\dagger \partial_\mu U \\ &= [\cos \xi \mathbb{I} - i \sin \xi (n^i \tau^i)] [-\xi_\mu \sin \xi \mathbb{I} + i \xi_\mu \cos \xi (n^i \tau^i) + i \sin \xi (\partial_\mu n^i \tau^i)] \\ &= i \xi_\mu n^i \tau^i + i \sin \xi \cos \xi (\partial_\mu n^i) \tau^i + i \sin^2 \xi \epsilon^{ijk} n^j (\partial_\mu n^k) \tau^i \\ &\equiv (L_\mu)^i \tau^i \end{aligned}$$

onde adotamos a notação

$$\begin{aligned} \xi_\mu &\equiv \partial_\mu \xi, \\ (L_\mu)^i &\equiv i \xi_\mu n^i + i \sin \xi \cos \xi \partial_\mu n^i + i \sin^2 \xi \epsilon^{ijk} n^j \partial_\mu n^k. \end{aligned}$$

As duas partes da densidade lagrangiana podem ser reescritas como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2 &= -\frac{1}{2} \text{Tr}(L_\mu L^\mu) = -(L_\mu)^i (L^\mu)^i, \\ \mathcal{L}_4 &= \frac{1}{16} \text{Tr}([L_\mu, L_\nu][L^\mu, L^\nu]) = -\frac{1}{2} [(L_\mu)^i (L^\mu)^i (L_\nu)^j (L^\nu)^j - (L_\mu)^i (L_\nu)^i (L^\mu)^j (L^\nu)^j]. \end{aligned}$$

Essas expressões possuem contrações do tipo  $(L_\mu)^i (L_\nu)^i$ . Esses termos podem ser calculados observando que  $(L_\mu)^i$  obedece as seguintes igualdades

$$\begin{aligned} (L_\mu)^i n^i &= i\xi_\mu, \\ (L_\mu)^i \partial_\nu n^i &= i \sin \xi \cos \xi (\partial_\mu n^i)(\partial_\nu n^i) + i \sin^2 \xi \epsilon^{ijk} (\partial_\mu n^i)(\partial_\nu n^j) n^k, \\ \epsilon^{ijk} (L_\mu)^i n^j (\partial_\nu n^k) &= -i \epsilon^{ijk} (\partial_\mu n^i)(\partial_\nu n^j) n^k \sin \xi \cos \xi + i \sin^2 \xi (\partial_\mu n^i)(\partial_\nu n^i) \end{aligned}$$

onde usamos  $n^i n^i = 1$ ,  $n^i (\partial_\mu n^i) = 0$  e  $\epsilon^{ijk} \epsilon^{imn} = \delta^{jm} \delta^{kn} - \delta^{jn} \delta^{km}$ . Usamos esses resultados para calcular a contração

$$\begin{aligned} (L_\mu)^i (L_\nu)^i &= (L_\mu)^i (i\xi_\nu n^i + i \sin \xi \cos \xi \partial_\nu n^i + i \sin^2 \xi \epsilon^{ijk} n^j \partial_\nu n^k) \\ &= -\xi_\mu \xi_\nu - (\partial_\mu n^i)(\partial_\nu n^i) \sin^2 \xi. \end{aligned}$$

Substituindo essas expressões na densidade lagrangiana obtemos

$$\mathcal{L}_2 = \xi^\mu \xi_\mu + \sin^2 \xi (\partial_\mu n^i)(\partial^\mu n^i), \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_4 &= \sin^2 \xi [(\xi_\mu \partial^\mu n^i)(\xi_\nu \partial^\nu n^i) - (\xi_\mu \xi^\mu)(\partial_\nu n^i)(\partial^\nu n^i)] \\ &\quad + \frac{1}{2} \sin^4 \xi [(\partial_\mu n^i)(\partial_\nu n^i)(\partial^\mu n^j)(\partial^\nu n^j) - (\partial_\mu n^i)(\partial^\mu n^i)(\partial_\nu n^i)(\partial^\nu n^i)] \end{aligned} \quad (2.19)$$

Até o momento utilizamos explicitamente todas as componentes  $n^i$ , que não são independentes devido ao vínculo  $n^i n^i = 1$ . Uma maneira de tornar o número de graus de liberdade explícito é reescrever  $n^i$  usando um campo complexo  $u$  e seu conjugado  $\bar{u}$  através da projeção estereográfica

$$(n^i) = \frac{1}{1 + |u|^2} (u + \bar{u}, -i(u - \bar{u}), 1 - |u|^2).$$

Para eliminarmos  $n^i$  da densidade lagrangiana precisamos obter sua derivada

$$\partial_\mu n^i = u_\mu \frac{\partial n^i}{\partial u} + \bar{u}_\mu \frac{\partial n^i}{\partial \bar{u}}$$

onde adotamos a notação  $u_\mu \equiv \partial_\mu u$  e  $\bar{u}_\mu \equiv \partial_\mu \bar{u}$ . Note que

$$\begin{aligned} \frac{\partial n^i}{\partial u} &= -\frac{\bar{u}}{1 + |u|^2} n^i + \frac{1}{1 + |u|^2} a^i \\ \frac{\partial n^i}{\partial \bar{u}} &= -\frac{u}{1 + |u|^2} n^i + \frac{1}{1 + |u|^2} \bar{a}^i \end{aligned}$$

com  $(a^i) = (1, -i, -\bar{u})$ . Usando estas expressões obtemos a fórmula

$$\partial_\mu n^i = \frac{1}{1 + |u|^2} [-(\bar{u}u_\mu + u\bar{u}_\mu)n^i + a^i u_\mu + \bar{a}^i \bar{u}_\mu].$$

As derivadas  $\partial_\mu n^i$  aparecem na densidade lagrangiana através de expressões do tipo

$$\begin{aligned} (\partial_\mu n^i)(\partial_\nu n^i) &= \frac{2(\bar{u}_\mu u_\nu + \bar{u}_\nu u_\mu)}{1 + |u|^2} \\ (\xi_\mu \partial_\mu n^i)(\xi_\nu \partial_\nu n^i) &= \frac{4 \xi^\mu u_\mu \xi^\nu \bar{u}_\nu}{1 + |u|^2}. \end{aligned}$$

Substituindo essas expressões nas equações (2.18) e (2.19) obtemos que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_2 &= \underbrace{\frac{4 \sin^2 \xi}{(1 + |u|^2)^2} u^\mu \bar{u}_\mu}_{\mathcal{L}_2^{(1)}} + \underbrace{\xi_\mu \xi^\mu}_{\mathcal{L}_2^{(2)}}, \\ \mathcal{L}_4 &= \underbrace{\frac{4 \sin^2 \xi}{(1 + |u|^2)^2} [(\xi_\mu u^\mu)(\xi_\nu \bar{u}^\nu) - (\xi_\mu \xi^\mu)(u_\nu \bar{u}^\nu)]}_{\mathcal{L}_4^{(1)}} + \underbrace{\frac{4 \sin^4 \xi}{(1 + |u|^2)^2} [(u_\mu u^\mu)(\bar{u}_\nu \bar{u}^\nu) - (u_\mu \bar{u}^\mu)^2]}_{\mathcal{L}_4^{(2)}}.\end{aligned}$$

Os termos  $\mathcal{L}_2^{(1)}$  e  $\mathcal{L}_4^{(1)}$  podem ser combinados na densidade lagrangiana

$$\mathcal{L}^{(1)} = \frac{4 \sin^2 \xi}{(1 + |u|^2)^2} [u^\mu \bar{u}_\mu + (\xi_\mu u^\mu)(\xi_\nu \bar{u}^\nu) - (\xi_\mu \xi^\mu)(u_\nu \bar{u}^\nu)] \quad (2.20)$$

assim como os termos  $\mathcal{L}_2^{(2)}$  e  $\mathcal{L}_4^{(2)}$  na densidade lagrangiana

$$\mathcal{L}^{(2)} = \xi_\mu \xi^\mu + \frac{4 \sin^4 \xi}{(1 + |u|^2)^2} [(u_\mu u^\mu)(\bar{u}_\nu \bar{u}^\nu) - (u_\mu \bar{u}^\mu)^2].$$

Cada uma dessas novas densidades lagrangianas, quando consideradas no setor estático, formam um submodelo BPS do modelo de Skyrme. Note que os dois submodelos não podem ser desacoplados. Ou seja, não existe nenhuma configuração dos campos tal que  $\mathcal{L}^{(1)}$  é zero sem que  $\mathcal{L}^{(2)}$  também seja zero e vice-versa. No entanto, existem motivações para estudar cada submodelo de modo independente. Por exemplo, o primeiro submodelo tem como soluções mapas racionais, que encontram aplicações no modelo de Skyrme completo. Desta forma, é esperado que os submodelos BPS possuam propriedades que possam ser úteis no estudo do modelo completo. Vamos nos concentrar no primeiro submodelo, definindo pela densidade lagrangiana  $\mathcal{L}^{(1)}$ .

No caso estático, as derivadas temporais da lagrangiana em (2.20) se tornam nulas e a densidade hamiltoniana é

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^{(1)} &= -\mathcal{L}^{(1)} \\ &= -\frac{4 \sin^2 \xi}{(1 + |u|^2)^2} [u^i \bar{u}_i + (\xi_i u^i)(\xi_j \bar{u}^j) - (\xi_i \xi^i)(u_j \bar{u}^j)] \\ &= \frac{4 \sin^2 \xi}{(1 + |u|^2)^2} [u_i \bar{u}_i - (\xi_i u_i)(\xi_j \bar{u}_j) + (\xi_i \xi_i)(u_j \bar{u}_j)].\end{aligned}$$

Essa expressão pode ser reescrita observando que

$$\begin{aligned}(u_i \pm i\epsilon^{ijk} \xi_j u_k)(\bar{u}_i \mp i\epsilon^{imn} \xi_m \bar{u}_n) &= u_i \bar{u}_i \mp i\epsilon^{imn} u_i \xi_m \bar{u}_n \pm i\epsilon^{ijk} \bar{u}_i \xi_j u_k + \epsilon^{ijk} \epsilon^{imn} \xi_j \xi_m u_k \bar{u}_n \\ &= u_i \bar{u}_i \pm 2i\epsilon^{ijk} \xi_i u_j \bar{u}_k + (\xi_i \xi_i)(u_j \bar{u}_j) - (\xi_i u_i)(\xi_j \bar{u}_j)\end{aligned} \quad (2.21)$$

de modo que

$$\mathcal{H}^{(1)} = \frac{4 \sin^2 \xi}{(1 + |u|^2)^2} [(u_i \pm i\epsilon^{ijk} \xi_j u_k)(\bar{u}_i \mp i\epsilon^{imn} \xi_m \bar{u}_n) \mp 2i\epsilon^{ijk} \xi_i u_j \bar{u}_k].$$



Integrando, obtemos a energia da configuração estática

$$E^{(1)} = \int d^3x \frac{4 \sin^2 \xi}{(1 + |u|^2)^2} [(u_i \pm i\epsilon^{ijk} \xi_j u_k)(\bar{u}_i \mp i\epsilon^{imn} \xi_m \bar{u}_n) \mp 2i\epsilon^{ijk} \xi_i u_j \bar{u}_k].$$

É possível mostrar [32] que em termos dos campos  $\xi$  e  $u$ , o número bariônico pode ser escrito como

$$B = -\frac{i}{\pi^2} \int d^3x \frac{\sin^2 \xi \epsilon^{ijk} \xi_i u_j \bar{u}_k}{(1 + |u|^2)^2},$$

de modo que

$$E^{(1)} = 8\pi^2 |B| + \int d^3x \frac{4 \sin^2 \xi}{(1 + |u|^2)^2} (u_i \pm i\epsilon^{ijk} \xi_j u_k)(\bar{u}_i \mp i\epsilon^{imn} \xi_m \bar{u}_n).$$

Essa expressão implica na desigualdade  $E^{(1)} \geq 8\pi^2 |B|$ . É de interesse saber em que casos essa desigualdade será saturada. Isso acontece quando forem válidas as equações de Bogomol'nyi

$$u_i \pm i\epsilon^{ijk} \xi_j u_k = 0, \quad (2.22)$$

$$\bar{u}_i \mp i\epsilon^{ijk} \xi_j \bar{u}_k = 0. \quad (2.23)$$

Essas são equações de primeira ordem para os campos e são consistentes com as equações de Euler-Lagrange, sendo essas de segunda ordem.

Podemos ainda contrair as equações (2.22) e (2.23) com  $\xi_i$  para obter os vínculos

$$u_i \xi_i = 0, \quad (2.24)$$

$$\bar{u}_i \xi_i = 0. \quad (2.25)$$

Contraindo com  $u_i$  obtemos os vínculos

$$u_i u_i = 0, \quad (2.26)$$

$$\bar{u}_i \bar{u}_i = 0. \quad (2.27)$$

Os vínculos (2.24) e (2.25) podem ser satisfeitos identicamente tomando  $\xi$  e  $u$  como funções de conjuntos de variáveis diferentes

$$\xi = \xi(r),$$

$$u = u(\theta, \phi).$$

Já os vínculos (2.26) e (2.27) podem ser satisfeitos adotando mais uma vez a projeção estereográfica  $z = \tan(\theta/2) e^{i\phi}$ , mas desta vez no espaço das coordenadas. Escrevendo o campo  $u$  como uma função de  $z$  e  $\bar{z}$  podemos obter as fórmulas

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \theta} &= \frac{\partial z}{\partial \theta} u_z + \frac{\partial \bar{z}}{\partial \theta} u_{\bar{z}} = \frac{1}{2} \sec^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) (e^{i\phi} u_z + e^{-i\phi} u_{\bar{z}}) \\ \frac{\partial u}{\partial \phi} &= \frac{\partial z}{\partial \phi} u_z + \frac{\partial \bar{z}}{\partial \phi} u_{\bar{z}} = i \tan \left( \frac{\theta}{2} \right) (e^{i\phi} u_z - e^{-i\phi} u_{\bar{z}}) \end{aligned}$$

nas quais adotamos a notação  $u_z \equiv \partial_z u$  e  $u_{\bar{z}} \equiv \partial_{\bar{z}} u$ . Usando essas expressões obtemos que

$$u_i u_i = \frac{1}{r^2} (\partial_\theta u)^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} (\partial_\phi u)^2 = \frac{1}{r^2} \sec^4 \left( \frac{\theta}{2} \right) u_z u_{\bar{z}}.$$

Desta forma, os vínculos (2.26) e (2.27) serão satisfeitos identicamente se  $u = u(z)$  ou  $u = u(\bar{z})$ .

Vamos agora calcular a energia para uma configuração de campos satisfazendo esses vínculos. Através da densidade hamiltoniana (2.21) obtemos

$$E^{(1)} = \int d^3x \mathcal{H}^{(1)} = \int d^3x \frac{4 \sin^2 \xi}{(1 + |u|^2)^2} u_i \bar{u}_i (1 + \xi_r^2).$$

Em termos das coordenadas  $z$  e  $\bar{z}$  podemos escrever

$$\begin{aligned} u_i \bar{u}_i &= \frac{1}{r^2} (\partial_\theta u) (\partial_\theta \bar{u}) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} (\partial_\phi u) (\partial_\phi \bar{u}) \\ &= \frac{1}{4r^2} \sec^4 \left( \frac{\theta}{4} \right) (e^{i\phi} u_z + e^{-i\phi} u_{\bar{z}}) (e^{i\phi} \bar{u}_z + e^{-i\phi} \bar{u}_{\bar{z}}) \\ &\quad - \frac{1}{4r^2} \sec^4 \left( \frac{\theta}{4} \right) (e^{i\phi} u_z - e^{-i\phi} u_{\bar{z}}) (e^{i\phi} \bar{u}_z - e^{-i\phi} \bar{u}_{\bar{z}}) \\ &= \frac{(1 + |z|^2)^2}{2r^2} (u_z \bar{u}_{\bar{z}} + u_{\bar{z}} \bar{u}_z) \end{aligned}$$

de modo que a energia se torna

$$E^{(1)} = 2 \underbrace{\int dr \sin^2 \xi (1 + \xi_r^2)}_{E_\xi^{(1)}} \underbrace{\int d\Omega \frac{(1 + |z|^2)^2}{(1 + |u|^2)^2} (u_z \bar{u}_{\bar{z}} + u_{\bar{z}} \bar{u}_z)}_{E_u^{(1)}}.$$

Note que a parte  $E_\xi^{(1)}$  da energia obedece à relação

$$E_\xi^{(1)} = \int dr \sin^2 \xi [(1 \pm \xi_r)^2 \mp 2\xi_r] \geq 2 \left| \int dr \sin^2 \xi \xi_r \right|.$$

Para que o campo possua configurações topologicamente não triviais exigimos as condições de contorno

$$\begin{aligned} \xi(0) &= \pi, \\ \xi(\infty) &= 0. \end{aligned}$$

Desta forma, obtemos que

$$E_\xi^{(1)} \geq 2 \left| \int_0^\pi d\xi \sin^2 \xi \right| = \pi.$$

A desigualdade será saturada para configurações que satisfazem a equação de Bogomol'nyi

$$\sin \xi (\xi_r \pm 1) = 0$$

que possui a seguinte solução compacta

$$\xi(r) = \begin{cases} \pi - r & \text{se } 0 \leq r \leq \pi, \\ 0 & \text{se } r > \pi. \end{cases}$$

O termo  $E_u^{(1)}$  corresponde com a energia do modelo  $CP^1$  (sigma não-linear) em  $\mathbb{S}^2$ . Suas soluções de energia finita são dadas por funções racionais holomorfas  $u(z)$  e anti-holomorfas  $u(\bar{z})$ . Essas soluções saturam o limite de Bogomol'nyi  $E_\xi^{(1)} \geq 4\pi|N|$ , onde  $N$  é o *winding number* da função racional.

Uma propriedade notável do primeiro submodelo BPS do modelo de Skyrme é que as considerações acima podem ser generalizadas para o caso dinâmico. Começamos essa generalização pelos vínculos (2.24) e (2.25) de modo que

$$\xi_\mu u^\mu = \xi_\mu \bar{u}^\mu = 0. \quad (2.28)$$

Novamente, essa condição pode ser satisfeita se tomarmos os campos  $\xi$  e  $u$  como funções de conjuntos de variáveis diferentes na forma

$$\begin{aligned} \xi &= \xi(t, r), \\ u &= u(\theta, \phi). \end{aligned}$$

A condição (2.28) nos permite simplificar a densidade lagrangiana do primeiro submodelo como

$$\mathcal{L}^{(1)} = 4 \underbrace{\frac{u^\mu \bar{u}_\mu}{(1 + |u|^2)^2}}_{\mathcal{L}_{CP^1}} \underbrace{\sin^2 \xi (1 - \xi_\nu \xi^\nu)}_{\mathcal{L}_\xi}$$

onde foi possível fatorar a lagrangiana como o produto de dois termos que dependem de campos diferentes. Note ainda que a parte angular pode ser escrita como o produto

$$\mathcal{L}_{CP^1} = -4 \frac{u_i \bar{u}_i}{(1 + |u|^2)^2} = -2 \frac{(1 + |z|^2)^2}{r^2} \frac{u_z \bar{u}_{\bar{z}} + u_{\bar{z}} \bar{u}_z}{(1 + |u|^2)^2} \equiv \frac{1}{r^2} \tilde{\mathcal{L}}_{CP^1}$$

onde  $\tilde{\mathcal{L}}_{CP^1}$  não depende da variável  $r$ .

Considerando essa decomposição, a ação deste modelo reduzido pode ser escrita como

$$S = \int d^4x \mathcal{L}^{(1)} = \int d\theta d\phi \sin^2 \theta \tilde{\mathcal{L}}_{CP^1} \int dt \int dr \mathcal{L}_\xi.$$

Note que conseguimos separar completamente a parte angular da parte radial da teoria, de modo que a parte radial é equivalente a uma teoria em 1 + 1 dimensões. Se tomarmos o campo  $u$  tal que as equações (2.26) e (2.27) sejam satisfeitas, a ação se torna

$$S = -8\pi|B| \int dt \int_0^\infty dr \sin^2 \xi (1 - \xi_\mu \xi^\mu).$$

Note ainda que  $\xi_\mu \xi^\mu = \xi_t^2 - \xi_r^2$ , logo a ação leva à equação de movimento que tem a forma da equação para um campo em 1 + 1 dimensões.

Vamos agora fazer uma redefinição do campo dependente da coordenada radial. Vamos substituir o campo  $\xi$  por um novo campo  $\bar{\eta}$  definido como

$$\bar{\eta} = 1 - \cos \xi \quad (2.29)$$

em termos dos quais a ação pode ser escrita como

$$S = 16\pi|B| \int dt \int_0^\infty dr \left[ \frac{1}{2}(\partial_\mu \bar{\eta})(\partial^\mu \bar{\eta}) \underbrace{-\bar{\eta} + \frac{1}{2}\bar{\eta}^2}_{-V(\bar{\eta})} \right].$$

Pela definição (2.29), o campo  $\bar{\eta}$  deve estar limitado entre 0 e 2. A restrição para o campo  $\bar{\eta}$  ao intervalo  $[0, 2]$  pode ser implementada explicitamente adicionando paredes infinitas ao potencial  $V(\bar{\eta})$  na forma

$$V(\bar{\eta}) = \begin{cases} \infty & \text{se } \bar{\eta} < 0, \\ \bar{\eta} - \frac{1}{2}\bar{\eta}^2 & \text{se } 0 \leq \bar{\eta} \leq 2, \\ \infty & \text{se } \bar{\eta} > 2. \end{cases}$$

As barreiras infinitas no potencial  $V(\bar{\eta})$  são convenientes para garantir que o campo pertença ao intervalo  $0 \leq \bar{\eta} \leq 2$ , mas geram várias outras complicações matemáticas. Podemos nos livrar das barreiras identificando o campo  $\bar{\eta} \in [0, 2]$  como o resultado de uma transformação de dobramento de um campo  $\eta$  que pode assumir qualquer valor real.

Esse novo campo desdobrado  $\eta$ , é relacionado com  $\bar{\eta}$  pela transformação

$$\bar{\eta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\eta - 4n| H_n(\eta)$$

onde  $H_n$  é uma função degrau dupla, que vale um em  $(4n - 2, 4n + 2)$  e é nula fora dele. Em termos das funções degrau de Heaviside  $\theta$ ,  $H_n(\eta)$  é dada como

$$H_n(\eta) \equiv \theta(\eta - 4n + 2) - \theta(\eta - 4n - 2).$$

Para trabalharmos com o campo desdobrado  $\eta$ , tomamos seu potencial como uma extensão periódica do potencial de  $\bar{\eta}$ , de modo que

$$V(\eta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ |\eta - 4n| - \frac{1}{2}(\eta - 4n)^2 \right] H_n(\eta).$$

Desta forma, as barreiras infinitas são efetivamente removidas.

Note que a teoria está restrita para a linha semi-infinita  $r \in \mathbb{R}^+$ . No entanto, podemos estender a variável espacial para cobrir toda a reta real e lidar com um campo definido para posições  $x \in \mathbb{R}$ . Desde que as configurações do campo estejam localizadas longe da posição  $r = 0$ , essa extensão não leva a perda de generalidade.

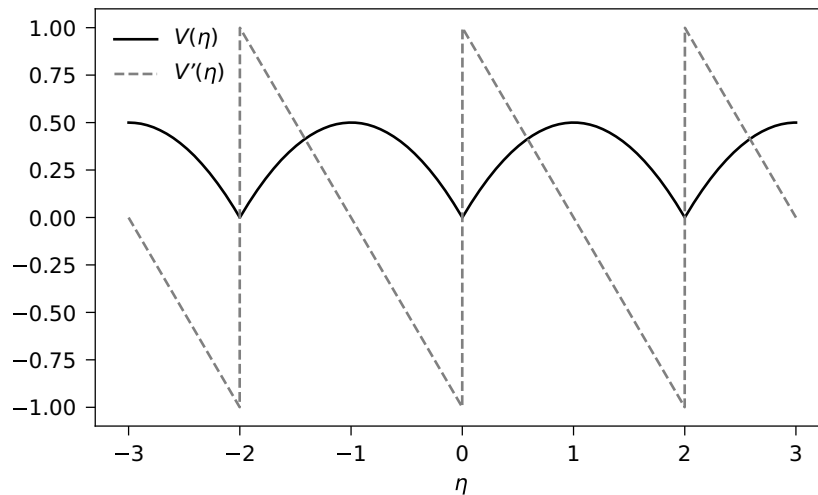


Figura 9 – Potencial e sua derivada para modelo quadrático periódico.

O campo desdobrado  $\eta(t, x)$  possui a equação de movimento

$$\partial_t^2 \eta - \partial_x^2 \eta + V'(\eta) = 0 \quad (2.30)$$

onde a derivada do potencial é

$$V'(\eta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\text{sgn}(\eta - 4n) - (\eta - 4n)] H_n(\eta).$$

Note que as derivadas do potencial não são contínuas, uma consequência de  $V(\eta)$  se aproximar dos seus mínimos com uma forma de  $V$ , como pode ser visto na figura 9.

Note que o potencial  $V(\eta)$  é bastante semelhante ao potencial obtido para o modelo de pêndulos acoplados da seção anterior. Principalmente para os casos de  $\phi_{\max}$  pequeno, em que a função cosseno é aproximado por parábolas. Portanto, estudar esse modelo, deduzido de um submodelo BPS do modelo de Skyrme, também nos dá informações sobre outro modelo com potencial não-analítico, o que é importante especialmente porque esse outro modelo possui realização mecânica. Além disso, o modelo dessa seção tem potencial dado por segmentos de parábolas, geralmente mais simples de trabalhar do que os segmentos de cosseno do modelo mecânico.

### 3 DINÂMICA DE KINKS

Um dos problemas mais relevantes na teoria de campos escalares é a dinâmica de kinks. Especialmente em teorias não-integráveis, onde além dos kinks existe também radiação, é importante entender como kinks interagem entre si e com a radiação. Outro aspecto importante é o foco na dinâmica de kinks excitados, analisando seus modos de excitação e emissão de radiação. Para kinks compactos, podemos fazer as mesmas perguntas que nos modelos com potenciais analíticos e testar os limites de aplicação dos métodos desenvolvidos para aqueles modelos.

Nesse capítulo vamos estudar um compacton topológico presente na teoria com potencial quadrático apresentada no final do último capítulo. A origem deste modelo a partir do primeiro submodelo BPS do modelo de Skyrme tem papel secundário. O modelo em questão pode ser tratado simplesmente como um exemplo simples de potencial não-analítico com estrutura de vácuos não trivial. Como visto, esse modelo tem equação de movimento

$$\partial_t^2 \eta - \partial_x^2 \eta + V'(\eta) = 0$$

em que

$$V'(\eta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\text{sgn}(\eta - 4n) - (\eta - 4n)] H_n(\eta).$$

Essa equação de movimento pode ser deduzida da ação

$$S = \int dt dx \left[ \frac{1}{2} (\partial_t \eta)^2 - \frac{1}{2} (\partial_x \eta)^2 - V(\eta) \right] \quad (3.1)$$

com potencial periódico contendo uma sequência infinita de parábolas na forma

$$V(\eta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ |\eta - 4n| - \frac{1}{2} (\eta - 4n)^2 \right] H_n(\eta).$$

Tal potencial tem mínimos em  $\eta = 2k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . A existência de múltiplos vácuos discretos permite a presença de soluções topológicas que conectam dois vácuos do modelo, de modo que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \eta(x) = 2k, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \eta(x) = 2(k \pm 1).$$

Essas soluções são chamadas kinks e antikinks. Vale notar, que no caso de compactons, os limites  $x \rightarrow \pm\infty$  são equivalentes à limites aos pontos na borda do suporte do kink. Caso os limites para  $x \rightarrow \infty$  e  $x \rightarrow -\infty$  fossem iguais, o campo poderia ser transformado em uma solução de vácuo constante através de uma transformação contínua. No entanto, para  $\eta_+ \neq \eta_-$  não há nenhuma transformação contínua que mantenha a energia finita e transforme o campo em uma configuração de vácuo. Isso acontece porque, durante tal transformação, o campo assumiria valores diferentes do vácuo no infinito, causando uma divergência da energia total. Portanto, uma configuração contendo um único kink ou antikink não pode ser destruída.

Podemos obter soluções de kinks procurando por soluções que minimizem a energia e conectem dois vácuos distintos. Note que a energia do campo  $\eta$  é dada pela integral

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[ \frac{1}{2}(\partial_t \eta)^2 + \frac{1}{2}(\partial_x \eta)^2 + V(\eta) \right].$$

Para campos dependentes da posição, a energia será minimizada para configurações estáticas. Além disso, podemos restringir a dependência da posição observando que

$$\left( \frac{1}{\sqrt{2}} \partial_x \eta \pm \sqrt{V(\eta)} \right)^2 = \frac{1}{2}(\partial_x \eta)^2 + V(\eta) \pm (\partial_x \eta) \sqrt{2V(\eta)} \geq 0,$$

o que implica na desigualdade

$$E \geq \left| \int_{-\infty}^{\infty} dx \sqrt{2V(\eta)} \eta' \right| = \left| \int_{2k}^{2(k\pm 1)} d\eta \sqrt{2V(\eta)} \right|.$$

Para que a desigualdade seja saturada, o campo deve obedecer uma das equações BPS

$$\eta'(x) = \pm \sqrt{2V(\eta(x))}$$

cujas soluções com o sinal positivo são kinks e as com sinal negativo antikinks. Essa equação de primeira ordem implica na equação de Euler-Lagrange no caso estático.

Vamos considerar configurações de campo entre os vácuos  $\eta = 0$  ( $k = 0$ ) e  $\eta = 2$  ( $k = 1$ ). Nessa região, o potencial tem a forma

$$V(\eta) = \eta - \frac{\eta^2}{2}$$

e a equação de Bogomol'nyi pode ser separada e integrada. O kink básico conectando esses dois vácuos pode ser obtido com a condição de contorno  $\eta(0) = 0$  e tem a forma

$$\eta_K(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0, \\ 1 - \cos x & \text{se } 0 \leq x \leq \pi, \\ 2 & \text{se } \pi < x. \end{cases}$$

Essa solução é compacta, tendo valores diferentes do vácuo apenas para  $x \in [0, \pi]$ . Portanto, a largura desse sóliton é  $\pi$ . Um antikink conectando  $\eta = 2$  e  $\eta = 0$  pode ser escrito como  $\eta_{\bar{K}} = 2 - \eta_K(x)$  devido à simetria do potencial. O perfil desses dois compactons topológicos é apresentado na figura 10. Esse par de compactons básicos pode ser usado para construir soluções de kink e antikink conectando quaisquer dois vácuos subsequentes simplesmente adicionando números inteiros pares. Desta forma, defeitos topológicos compactos podem ser escritos como

$$\begin{aligned} \eta_{(2k, 2k+2)}(x) &= \eta_K(x) + 2k, \\ \eta_{(2k+2, 2k)}(x) &= \eta_{\bar{K}}(x) + 2k = -\eta_K(x) + 2k + 2, \end{aligned}$$

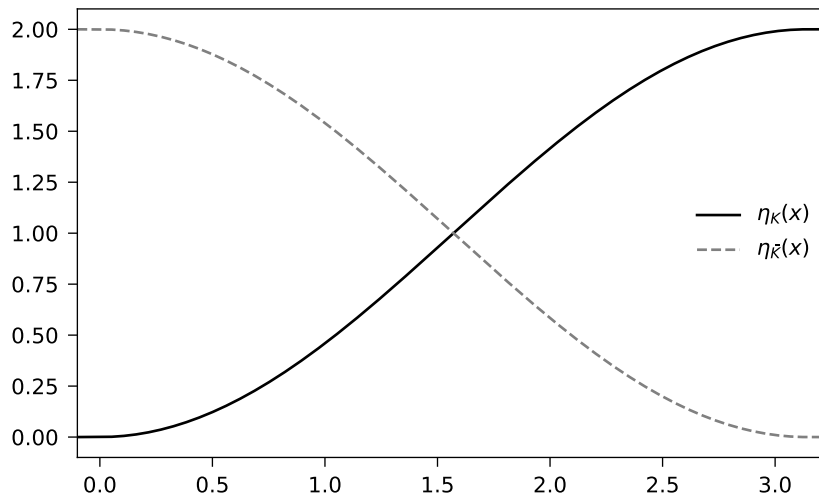


Figura 10 – Perfil do campo para um kink  $\eta_K$  (linha sólida) e um antikink  $\eta_{\bar{K}}$  (linha tracejada).

para  $k \in \mathbb{Z}$ , onde o índice em parênteses indica o par de vácuos sendo conectados. O suporte compacto dos kinks e antikinks permite construir uma sequência, até mesmo infinita, de kinks e antikinks estáticos que não interagem entre si. Esta é uma das diferenças fundamentais entre kinks compactos e kinks em modelos com potenciais analíticos. Em modelos tradicionais, kinks e antikinks interagem mesmo a grandes distâncias.

Também podemos obter soluções com suporte deslocado  $x \in [a, a + \pi]$  através de uma translação  $\eta_{(2k, 2k \pm 2)}(x - a)$ . Essas soluções são configurações estáticas. De modo similar ao caso dos oscillons, podemos obter configurações de kinks e de anti-kinks em movimento através de uma transformação de Lorentz. O campo para o kink ou anti-kink em movimento com velocidade  $v$  é dado por

$$\psi_{(2k, 2k \pm 2)}(t, x; v) = \eta_{(2k, 2k \pm 2)}(\gamma(x - vt))$$

onde  $\gamma = (1 - v^2)^{-1/2}$ . Como o suporte desses defeitos topológicos é compacto, configurações com múltiplos kinks e antikinks são permitidas simplesmente somando o perfil do kink ou antikink básico.

### 3.1 DESCRIÇÃO POR COORDENADAS COLETIVAS

Apresentamos até agora exemplo de sólitons estáticos ou com movimento uniforme em relação ao referencial do laboratório. No entanto, a dinâmica de sólitons pode se tornar bastante complexa quando consideramos situações com múltiplos defeitos topológicos, ou em que o sólitons se encontram em um estado perturbado, tendo mais energia do que a sua forma com movimento uniforme. Nessas situações, é útil encontrar descrições efetivas que reduzam o número de graus de liberdade do problema para apenas aquelas que mais influenciam no comportamento do campo. Uma ferramenta importante nessas situações é



a aproximação das coordenadas coletivas, também chamada aproximação do espaço dos *moduli*, originalmente introduzida por Manton [53].

Nessa aproximação, supomos que a dependência temporal do campo pode ser escrita implicitamente através de um número finito de graus de liberdade  $q(t) = (q^1(t), q^2(t), \dots)$ , de modo que  $\eta(t, x) = \eta(x, q(t))$ . Começando da ação da teoria de campo

$$S = \int dt dx \left[ \frac{1}{2}(\partial_t \eta)^2 - \frac{1}{2}(\partial_x \eta)^2 - V(\eta) \right]$$

podemos usar que  $\eta(t, x) = \eta(x, q(t))$  para obter

$$\begin{aligned} S &= \int dt dx \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial \eta}{\partial q^i} \frac{\partial \eta}{\partial q^j} \dot{q}^i \dot{q}^j - \frac{1}{2}(\partial_x \eta)^2 - V(\eta) \right] \\ &= \int dt \left[ \frac{1}{2} \left( \int dx \frac{\partial \eta}{\partial q^i} \frac{\partial \eta}{\partial q^j} \right) \dot{q}^i \dot{q}^j - \left( \int dx \frac{1}{2}(\partial_x \eta)^2 + V(\eta) \right) \right]. \end{aligned}$$

Identificamos o integrando como a lagrangiana das coordenadas  $q$ . Note que se trata de uma lagrangiana no sentido de mecânica analítica, não sendo a densidade lagrangiana de uma teoria de campos. Essa lagrangiana pode ser escrita como

$$L = \frac{1}{2} g_{ij}(q) \dot{q}^i \dot{q}^j - U(q) \quad (3.2)$$

onde introduzimos a métrica

$$g_{ij}(q) = \int dx \frac{\partial \eta}{\partial q^i} \frac{\partial \eta}{\partial q^j}$$

e o potencial

$$U(q) = \int dx \left[ \frac{1}{2}(\partial_x \eta)^2 + V(\eta) \right]$$

no espaço das coordenadas  $q$ . Note que a métrica refere-se a espaço das coordenadas coletivas e não deve ser confundida com métrica de Minkowski  $\eta_{\mu\nu}$  do espaço físico.

As equações de movimento para a lagrangiana (3.2) são

$$g_{ij} (\ddot{q}^j + \Gamma^j_{mn} \dot{q}^m \dot{q}^n) + \frac{\partial U}{\partial q^i} = 0 \quad (3.3)$$

onde

$$\Gamma^j_{mn} = \frac{1}{2} g^{jl} \left( \frac{\partial g_{nl}}{\partial q^m} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial q^n} - \frac{\partial g_{mn}}{\partial q^l} \right) = g^{jl} \int dx \frac{\partial \eta}{\partial q^l} \frac{\partial^2 \eta}{\partial q^m \partial q^n}$$

são os símbolos de Christoffel e  $g^{jl}$  é a inversa da matriz métrica. Quando o potencial  $U$  é uma constante, a equação (3.3) é uma equação geodésica. Caso contrário, a derivada de  $U$  pode ser escrita como

$$\frac{\partial U}{\partial q^i} = \int dx \left[ \frac{\partial^2 \eta}{\partial q^i \partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + V'(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial q^i} \right].$$

De forma explícita, podemos escrever as equações de movimento como

$$\ddot{q}^j \int dx \frac{\partial \eta}{\partial q^i} \frac{\partial \eta}{\partial q^j} + \dot{q}^j \dot{q}^k \int dx \frac{\partial \eta}{\partial q^i} \frac{\partial^2 \eta}{\partial q^j \partial q^k} + \int dx \left[ \frac{\partial^2 \eta}{\partial q^i \partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + V'(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial q^i} \right] = 0. \quad (3.4)$$

Formalmente, as integrais acima devem ser realizadas sobre todo o eixo  $x$ . No entanto, como lidamos com soluções compactas, a integração pode ser feita apenas no suporte de  $\eta$ . A fórmula mais explícita da equação (3.4) é útil para resolver numericamente a evolução temporal de  $q$  quando as expressões para a métrica e o potencial forem muito complicadas.

Vamos aplicar esse formalismo primeiro para descrever um único kink (ou antikink). Para isso, escrevemos o campo como

$$\eta = \eta_{(2k, 2k \pm 2)} \left( x - a + \frac{\pi}{2} \right)$$

onde  $a$  representa a posição do centro de momento do sóliton, por isso o termo  $\pi/2$  no argumento. A métrica nesse caso possui apenas um componente

$$g(a) \equiv g_{aa}(a) = \int_{a-\pi/2}^{a+\pi/2} dx \left( \frac{\partial \eta}{\partial a} \right)^2 = \frac{\pi}{2}$$

e o potencial é uma constante

$$U(a) = \frac{\pi}{2}.$$

A dinâmica do sóliton é aproximadamente a de uma partícula livre de massa  $\pi/2$ . É possível verificar que a energia total de um kink ou antikink é de fato  $\pi/2$ . O formalismo de coordenadas coletivas torna explícita a correspondência que muitas vezes é feita entre sólitons e partículas.

A descrição acima não considera a contração de Lorentz do suporte do defeito topológico, portanto dizemos ser uma descrição não-relativística. Podemos incluir uma nova coordenada  $b$  para modelar a contração de Lorentz. Nesse caso o campo pode ser escrito como

$$\eta = \eta_{(2k, 2k \pm 2)} \left( b(x - a) + \frac{\pi}{2} \right).$$

A métrica é diagonal com componentes

$$g_{aa}(a, b) = \frac{\pi b}{2}, \quad g_{bb}(a, b) = \frac{\pi(\pi^2 - 6)}{24b^3}, \quad g_{ab}(a, b) = 0$$

e o potencial tem a forma

$$U(a, b) = \frac{\pi(1 + b^2)}{4b}.$$

As equações de movimento para  $a$  e  $b$  são

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \pi \dot{a} b \right) &= 0 \\ \frac{d}{dt} \left[ \frac{\pi(\pi^2 - 6) \dot{b}}{24b^3} \right] - \frac{1}{4} \pi \dot{a}^2 + \frac{\pi(\pi^2 - 6) \dot{b}^2}{16b^4} - \frac{\pi(b^2 + 1)}{4b^2} + \frac{\pi}{2} &= 0. \end{aligned}$$

Essas equações têm soluções estacionárias  $\dot{a} = v$  e  $b = (1 - v^2)^{-1/2}$  para  $v$  constante. Essa solução corresponde à expressão de uma solução exata de kink ou antikink após uma transformação de Lorentz. Outras soluções não-estacionárias podem ser usadas para descrever processos dinâmicos nos quais o kink é perturbado da sua forma exata, como é o caso do problema que estudaremos agora.

### 3.2 KINK DEFORMADO

Para entender melhor a dinâmica de kinks compactos, vamos estudar o que acontece quando um kink é levemente perturbado em relação a sua forma estática. Vamos construir essa perturbação alterando o tamanho do suporte do sóliton, de modo que seu tamanho seja  $(1 + \epsilon)\pi$ , através da transformação de escala

$$\eta(x; \epsilon) = \eta_K \left( \frac{x}{1 + \epsilon} + \frac{\pi}{2} \right).$$

Por conveniência, também transladamos o argumento por  $\pi/2$  para que o centro do kink coincida com a origem. Dessa forma, esses kinks deformados possuem suporte  $[-\pi(1 + \epsilon)/2, \pi(1 + \epsilon)/2]$ .

A deformação faz com que a energia deste kink seja maior que a energia de um kink exato. Em particular

$$E(\epsilon) = \int_{-(1+\epsilon)\frac{\pi}{2}}^{(1+\epsilon)\frac{\pi}{2}} dx \left[ \frac{1}{2} \eta'^2(x; \epsilon) + V(\eta(x; \epsilon)) \right] = \left( 1 + \epsilon + \frac{1}{1 + \epsilon} \right) \frac{\pi}{4}.$$

A diferença  $\Delta E$  em relação ao kink não perturbado é

$$\Delta E = E(\epsilon) - E(0) = \frac{\epsilon^2}{1 + \epsilon} \frac{\pi}{4}.$$

Essa diferença significa que a configuração não pode permanecer estática.

Como não conseguimos obter a evolução temporal desta classe de configuração de modo analítico, precisamos obter a dependência no tempo através de simulações numéricas. As simulações foram realizadas discretizando a coordenada  $x$  em um *grid*, com as derivadas calculadas através do método das diferenças finitas em segunda ordem. Para que as bordas do *grid* não influenciem a dinâmica do campo, fazemos o *grid* grande o suficiente para que o compacton não interaja com as bordas durante a simulação. A evolução temporal foi obtida pelo método de Runge-Kutta de quarta ordem usando Julia [54] e a biblioteca DifferentialEquations.jl [55]. Outros métodos também foram testados e geraram resultados consistentes. A discretização do espaço foi feita com passos  $\Delta x$  variando de 0,001 a 0,005. O passo de tempo foi escolhido igual a  $\Delta x/10$ . O mesmo esquema numérico foi usado em todas as outras vezes que foi necessário resolver equações de campo numericamente nesse trabalho.

Na figura 11 apresentamos o gráfico para a densidade hamiltoniana resultante da simulação como um mapa de cores em escala logarítmica no diagrama espaço-tempo. Nesse caso, escolhemos a densidade hamiltoniana para visualização ao invés do próprio campo porque as amplitudes do campo em relação aos vácuos fora do corpo do kink são muito menores do que a diferença entre valores de campo que o kink conecta. Desta forma, seria muito difícil visualizar qualquer estrutura exceto o próprio kink em um gráfico do campo. Também não seria apropriado usar escala logarítmica porque há perturbações ao redor de dois vácuos diferentes.

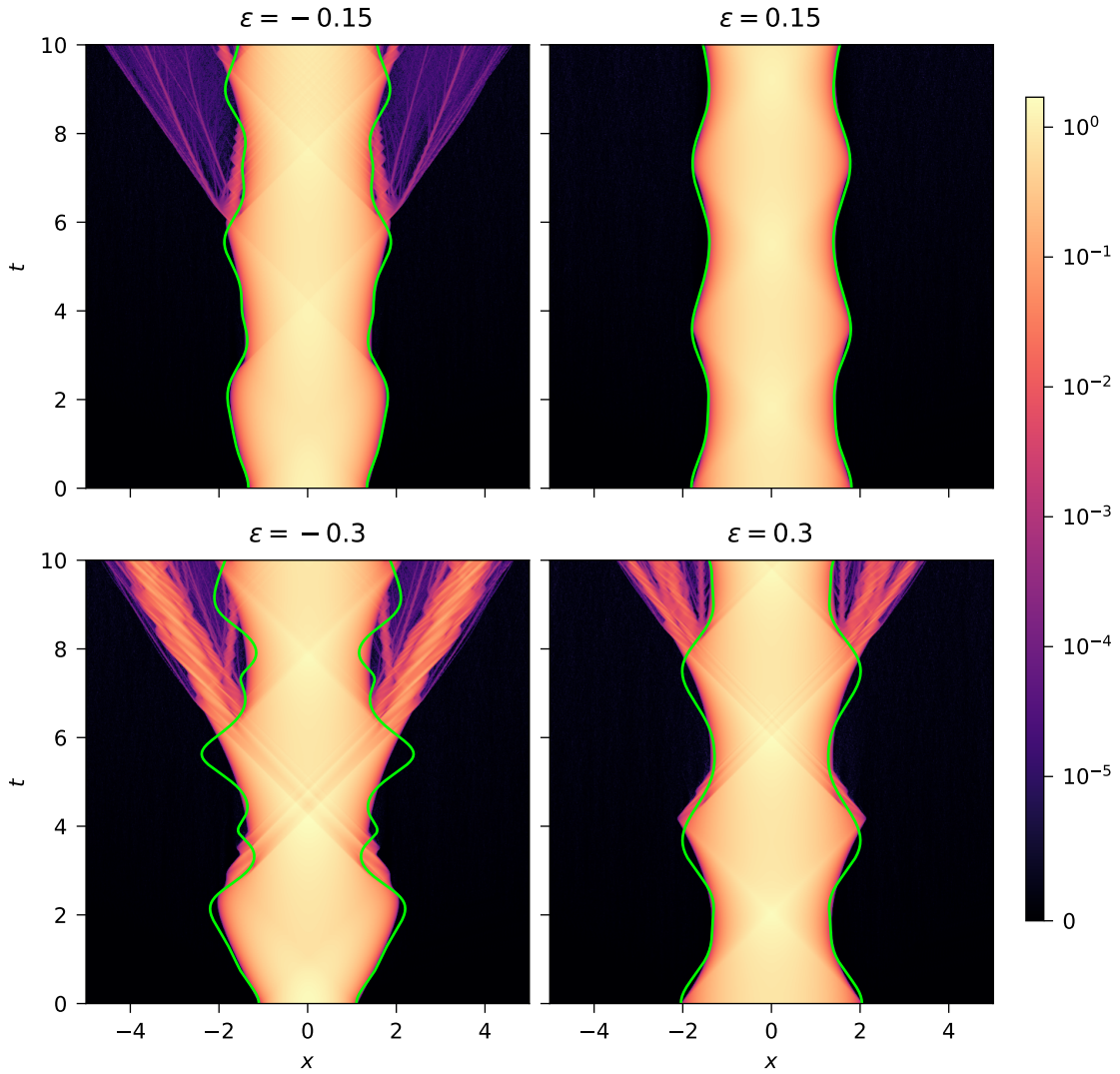


Figura 11 – Densidade hamiltoniana de kinks deformados com tamanho  $(1 + \epsilon)\pi$ . Linha verde representa borda do kink calculada através das coordenadas  $b$  e  $c$ .

Observamos que inicialmente as configurações esticadas ( $\epsilon > 0$ ) se contraem e as configurações contraídas ( $\epsilon < 0$ ) se expandem. Após esta fase inicial, os kinks vibram e, para valores de  $|\epsilon|$  grandes o suficiente, emitem radiação. As configurações contraídas, que possuem excesso de energia maior, emitem radiação com mais facilidade.

Podemos tentar descrever as vibrações do suporte do kink vistas na simulação usando a abordagem de coordenadas coletivas. A variável mais natural para tomarmos nesse caso é o fator de escala  $b(t)$  do suporte do kink, que anteriormente usamos para descrever a contração de Lorentz. Escrevemos o perfil do campo como uma deformação do kink estático na forma

$$\eta(t, x) = \eta_K \left( b(t)x + \frac{\pi}{2} \right).$$

A deformação associada ao fator de escala  $b$ , geralmente chamado modo de Derrick, já foi estudada em outros modelos [56], nos quais é um ingrediente importante da dinâmica de

sólitons, incluindo processos de espalhamento que iremos discutir depois. A métrica para o espaço dessa variável tem apenas uma componente, dada pela função

$$g_{bb}(b) = \frac{\pi(\pi^2 - 6)}{24b^3}.$$

Enquanto isso, potencial é dado pela função

$$U(b) = \frac{\pi}{4} \left( b + \frac{1}{b} \right).$$

A dinâmica da variável  $b(t)$  pode ser obtida por quadratura, observando que a energia

$$E = \frac{1}{2} g_{bb}(b) \dot{b}^2 + U(b)$$

é uma constante no tempo. Explicitamente,  $b(t)$  é dada pelas funções periódicas

$$b_{\pm}(t) = b_0 \frac{1 \pm (1 - b_0^2)^{1/2} |\sin(\omega(t + t_0))|}{\cos^2(\omega(t + t_0)) + b_0^2 \sin^2(\omega(t + t_0))}$$

nas quais  $b_0$  e  $t_0$  são parâmetros livres a serem determinados pelas condições iniciais e  $\omega \equiv \sqrt{\frac{12}{\pi^2 - 6}}$ . Essas soluções são periódicas, tais quais as bordas de um kink levemente deformado, mas seu período  $\pi/\omega \approx 1,78$  difere dos resultados numéricos. Note que as funções  $b_{\pm}(t)$  dependem dos valores absolutos de funções trigonométricas, portanto seus períodos são apenas metade daquele de funções trigonométricas.

Essa discrepância entre os resultados é indicativa de graus de liberdade faltando na nossa descrição efetiva para o kink perturbado. É comum que a descrição de kinks de outros modelos por coordenadas coletivas precise incluir modos internos. Normalmente esses modos internos correspondem às perturbações lineares em relação ao kink original com a menor frequência, como é o caso do chamado *shape-mode* do modelo  $\phi^4$ , originalmente descoberto por Sugiyama [57]. No entanto, o caráter não-analítico do potencial dificulta a análise de pequenas perturbações. Adotamos então outra abordagem, em que vamos propor uma forma de perturbação interna explorando a compacticidade do suporte e a paridade do perfil do kink.

Em particular, vamos exigir que o modo interno do kink seja uma função ímpar, diferente de zero apenas no suporte do kink, contínua e com a primeira derivada contínua. Essas exigências podem ser satisfeitas se o modo interno for escrito como uma série de Fourier, de modo que o campo tem a expressão

$$\eta(t, x) = \eta_K \left( b(t)x + \frac{\pi}{2} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \sin(2nb(t)x)$$

no suporte  $x \in [-\pi/2b, \pi/2b]$ . A continuidade de  $\partial_x \eta$  em  $x = \pm\pi/2b$  impõe a condição

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n c_n(t) = 0 \quad (3.5)$$

às funções  $c_n(t)$ . Como queremos um número finito de graus de liberdade, a série de Fourier precisa ser truncada. Como uma aproximação mais simples, vamos considerar apenas os dois primeiros termos. A condição (3.5) faz com que os graus de liberdade sejam  $b(t)$  e  $c_1(t) \equiv c(t)$ . Introduzindo a função

$$\chi(x) = \begin{cases} \sin(2x) + \frac{1}{2} \sin(4x) & \text{se } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{nos outros casos,} \end{cases} \quad (3.6)$$

o campo é escrito como

$$\eta(x; b, c) = \eta_K \left( bx + \frac{\pi}{2} \right) + c \chi(bx).$$

A partir de agora vamos nos referir à função  $\chi(x)$  como modo interno do kink, e à coordenada  $c$  como a amplitude do modo interno.

Supondo que a amplitude do modo interno  $c$  seja pequena o suficiente para que o campo permaneça no intervalo  $0 \leq \eta \leq 2$ , podemos calcular as componentes da métrica

$$\begin{aligned} g_{bb}(b, c) &= \frac{\pi^3 c^2}{3b^3} - \frac{275\pi c^2}{144b^3} + \frac{8\pi^2 c}{15b^3} - \frac{25216c}{3375b^3} + \frac{\pi^3}{24b^3} - \frac{\pi}{4b^3}, \\ g_{bc}(b, c) &= \frac{64}{75b^2} - \frac{5\pi c}{16b^2}, \\ g_{cc}(b, c) &= \frac{5\pi}{8b} \end{aligned}$$

e o potencial

$$U(b, c) = -\frac{5\pi c^2}{16b} + 2\pi b c^2 + \frac{16bc}{15} - \frac{16c}{15b} + \frac{\pi b}{4} + \frac{\pi}{4b}.$$

Para os casos mais gerais podemos usar a equação (3.4). As equações de Euler-Lagrange para as coordenadas  $b$  e  $c$  foram resolvidas numericamente usando um método simplético. A partir dos resultados numéricos, desenhamos as bordas do kink,  $x = \pm\pi/2b(t)$ , sobre o mapa de cores da simulação completa do sistema na figura 11. A interação entre as coordenadas  $b(t)$  e  $c(t)$  permite uma evolução temporal com mais detalhes da borda do kink.

Em cada simulação apresentada, a borda do kink evolui de modo diferente, com essas diferenças refletidas na descrição por coordenadas coletivas. O acordo entre as simulações e a descrição por coordenadas coletivas é especialmente bom para casos como pouca radiação, o ingrediente faltante da nossa descrição efetiva. De fato, observamos as maiores diferenças, no caso  $\epsilon = -0.3$ , justamente nos instantes que o kink deformado emite mais radiação.

Podemos reparar que a emissão de radiação acontece após a propagação de pulsos com velocidade iguais ou próximas da velocidade da luz sobre o corpo do kink. Esses pulsos ricocheteiam nas laterais do kink e ocasionalmente conseguem sair do kink na forma de radiação. Observando em detalhes o campo na figura 12 é possível ver que essa radiação é formada por oscillons muito similares às soluções exatas do modelo de signum-Gordon. Um estudo mais detalhado da interação dos kinks com esses oscillons será feito no capítulo 4.

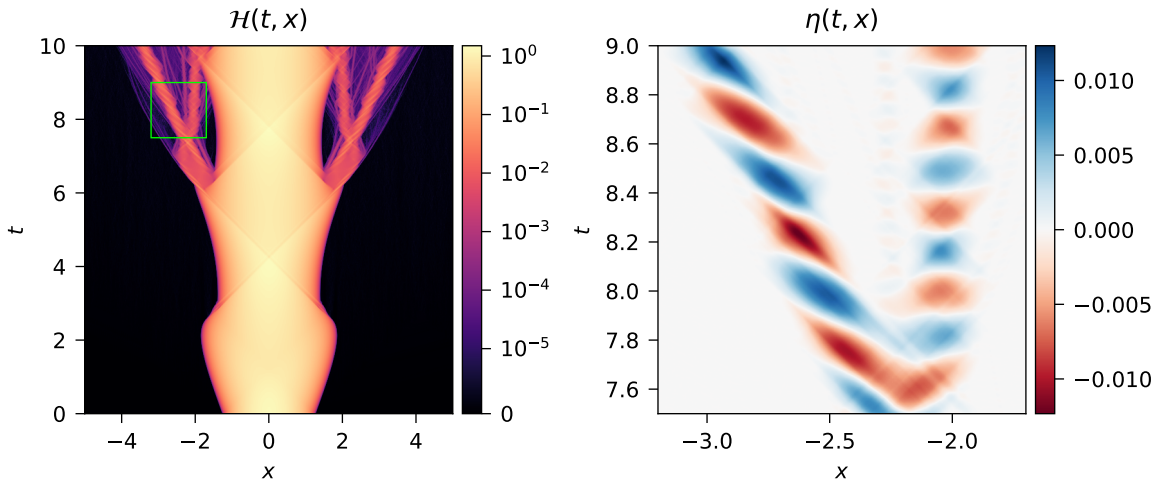


Figura 12 – Densidade hamiltoniana (esquerda) e detalhe do campo (direita) para kink perturbado de tamanho  $0,8\pi$  ( $\epsilon = -0,2$ ).

### 3.3 ESPALHAMENTO KINK-ANTI-KINK

O fato das soluções de kink e antikink serem compactas nos permite construir soluções exatas das equações de campo contendo múltiplos sólitons. Enquanto esses sólitons não se encontram, a solução das equações do campo é exatamente conhecida. No entanto, quando os sólitons colidem, temos um processo altamente não trivial de espalhamento. O espalhamento de sólitons é um problema que tem sido estudado há várias décadas, e permanece até hoje um tópico de pesquisa ativo [58, 59].

Vamos considerar uma configuração espacialmente simétrica contendo um par kink-antikink, se movendo em direção um ao outro. O kink conecta os vácuos  $\eta = 0$  e  $\eta = 2$ , enquanto o antikink conecta os vácuos  $\eta = 2$  e  $\eta = 0$ , de modo que a configuração é topologicamente equivalente ao vácuo  $\eta = 0$ . O kink se aproxima pela esquerda com velocidade  $v$  e o antikink se aproxima pela direita com velocidade  $-v$ . Antes deles colidirem, o campo é descrito exatamente pela simples soma da solução de kink e antikink. No instante da colisão, o kink e o antikink tem suportes nas regiões  $-\pi/\gamma < x < 0$  e  $0 < x < \pi/\gamma$ , respectivamente. Definindo o instante que a colisão começa como  $t = 0$ , a condição inicial para a evolução temporal do processo de espalhamento é dada por

$$\begin{aligned}\eta(0, x) &= \psi_{(0,2)}(0, x + \pi/\gamma; v) + \psi_{(2,0)}(0, x; -v) - 2 \\ \partial_t \eta(0, x) &= \partial_t \psi_{(0,2)}(0, x + \pi/\gamma; v) + \partial_t \psi_{(2,0)}(0, x; -v).\end{aligned}$$

Um exemplo desta configuração inicial pode ser visto na figura 13.

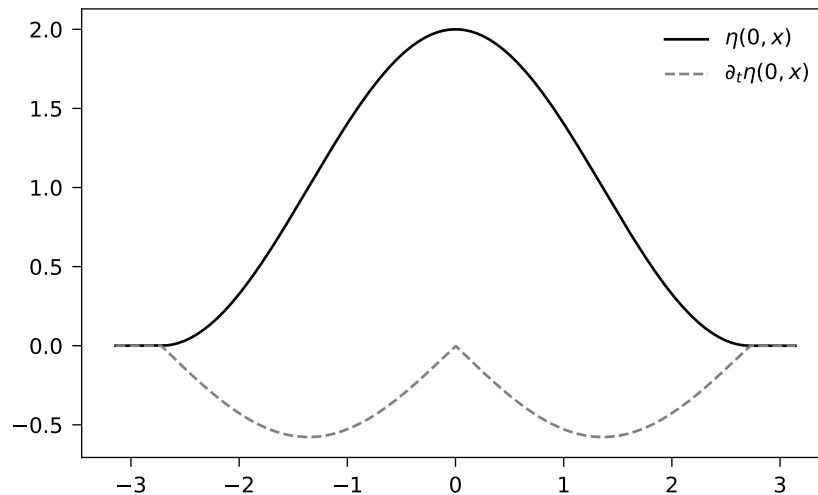


Figura 13 – Exemplo de condição inicial de um espalhamento kink-antikink com velocidade  $v = 0,5$ .

### 3.3.1 Resultados numéricos

Evoluímos numericamente o campo a partir das condições iniciais acima. Alguns exemplos de resultados estão representados em gráficos do campo e da densidade hamiltoniana na figura 14. Para velocidades de espalhamento pequenas, a colisão kink-antikink leva à formação de uma configuração que oscila entre os vácuos  $\eta = \pm 2$ . Para velocidades maiores, os sólitons podem escapar da colisão, passando um pelo outro. No entanto, o vácuo entre o kink e o antikink muda de  $\eta = 2$  para  $\eta = -2$ . Como nosso modelo não é integrável, é esperada a emissão de radiação, que de fato pode ser vista nos gráficos da densidade hamiltoniana. A radiação é mais visível em casos de baixa velocidade de espalhamento, e diminui conforme a velocidade aumenta.

Podemos identificar se o kink e o antikink se aniquilam ou escapam da colisão observando o valor do campo em  $x = 0$  como uma função do tempo. Se o valor do campo  $\eta(t, 0)$  oscila, o espalhamento resultou na aniquilação do par de sólitons. Se  $\eta(t, 0)$  alcança um valor de vácuo diferente de zero e permanece nele, o par kink-antikink emergiu da colisão. Realizamos várias simulações para velocidades entre 0 e 0,5 e apresentamos o valor do campo  $\eta(t, 0)$  no ponto central  $x = 0$  como uma função do tempo  $t$  e da velocidade de espalhamento  $v$  no primeiro gráfico da figura 15.

Podemos observar a existência de uma velocidade crítica  $v_c \approx 0,413$  tal que se  $v \lesssim v_c$  os sólitons se aniquilam e se  $v \gtrsim v_c$  o par kink-antikink escapa da colisão. Uma particularidade dos nossos resultados é não haver uma janela de velocidades para as quais o par oscila algumas vezes e então se separa. Tais janelas aparecem frequentemente em modelos com potencial analítico. No entanto, isso não necessariamente significa que o comportamento do espalhamento é monotônico em  $v$ . Há duas janelas de velocidades,  $0,05 \lesssim v \lesssim 0,1$  e  $0,34 \lesssim v \lesssim v_c$ , para as quais o campo depende de  $v$  de modo bastante



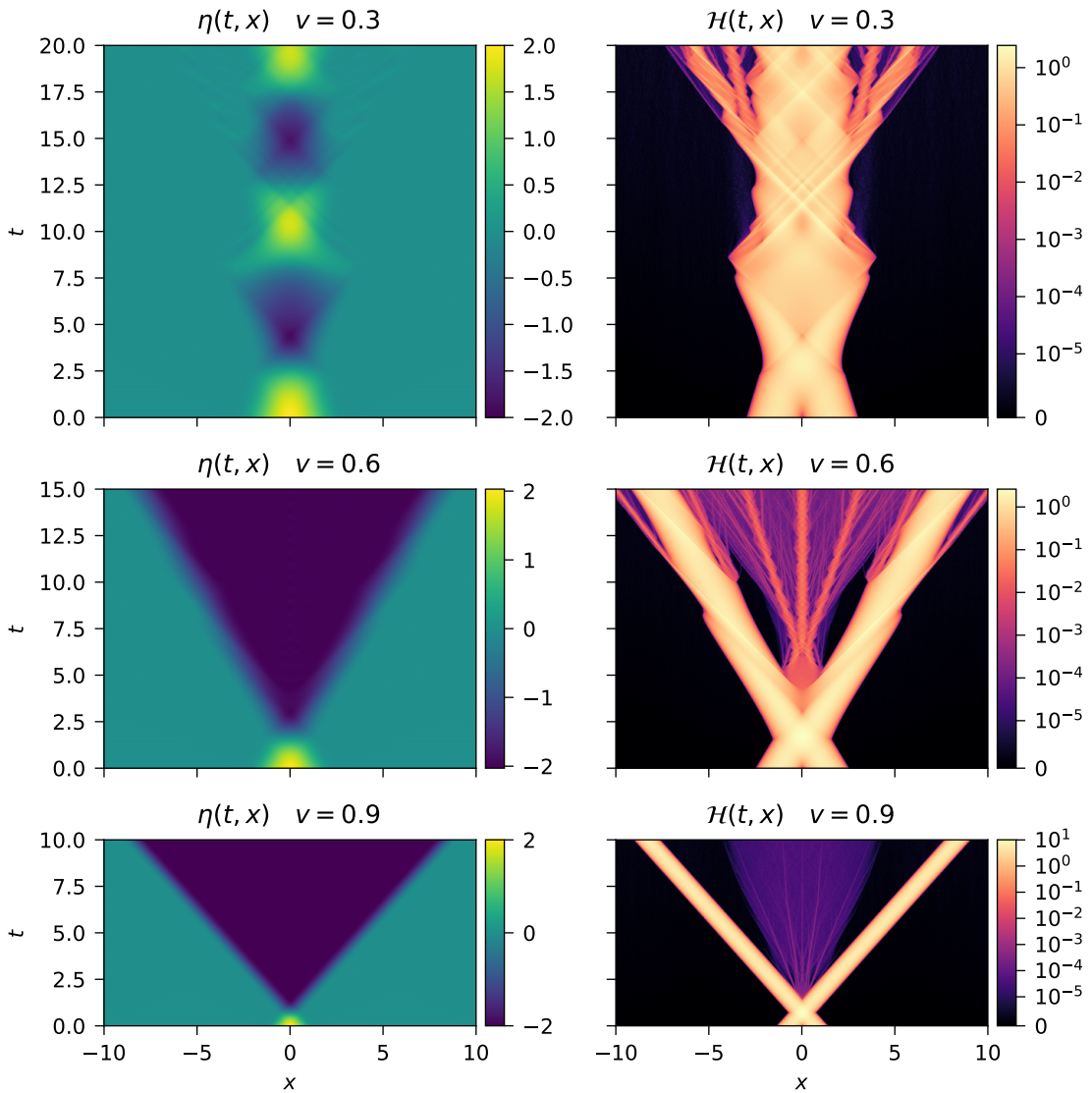


Figura 14 – Campo  $\eta(t, x)$  e densidade hamiltoniana  $\mathcal{H}(t, x)$  para um espalhamento kink-antikink com velocidade  $v$ .

caótico.

A divisão em casos de aniquilação e escape do par de defeitos topológicos é típica de processos de espalhamento desse tipo. Por exemplo, esse comportamento é presente no modelo  $\phi^4$  [42]. No entanto, no caso  $\phi^4$ , há casos de múltiplas oscilações do campo após aniquilação, seguidas eventualmente por escape do par kink-antikink [60]. Esse comportamento não foi observado para o espalhamento de kinks compactos no nosso modelo, sendo uma das diferenças mais significativas. Além disso, no modelo  $\phi^4$ , as janelas de múltiplas oscilações e escape se alternam de modo fractal [61].

Observamos um comportamento fractal também em nosso modelo, porém ele está presente nas vizinhanças da velocidade crítica  $v_c$ . Isso pode ser visto na segunda linha de gráficos da figura 15, na qual fazemos um *zoom* em janelas de velocidade próximas da velocidade crítica. Nós checamos alterações na velocidade em passos tão pequenos quanto

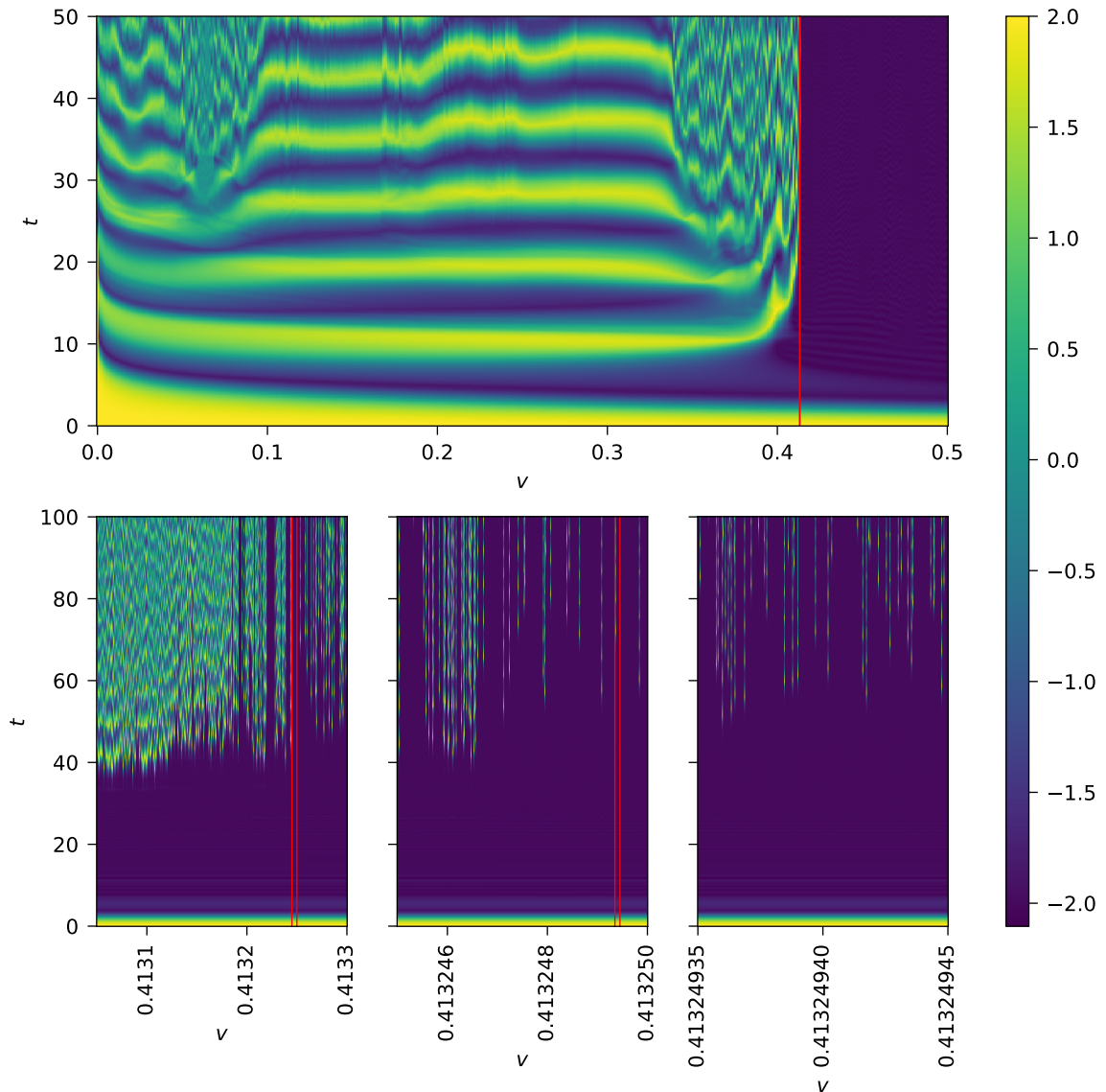


Figura 15 – Valor do campo  $\eta(t, 0)$  como uma função do tempo  $t$  e da velocidade  $v$  para um espalhamento kink-antikink. A linha vermelha delimita as faixas de velocidade para os quais fazemos *zoom* no gráfico seguinte.

$10^{-8}$  e observamos alternância entre casos de aniquilação e escape. Esse comportamento fractal em torno da velocidade crítica já foi reportado em outros modelos com kinks compactos [62].

Também observamos que os casos de comportamento mais caótico são os mesmos com mais emissão de radiação. Podemos demonstrar isso calculando de modo sistemático a quantidade de energia carregada para longe do par kink-antikink. Nós estimamos essa energia para  $v < v_c$  como a energia na região  $|x| > \pi$ . Essa energia da radiação pode ser escrita como a integral

$$E_{\text{rad}} = \int_{-\infty}^{-\pi} dx \mathcal{H} + \int_{\pi}^{\infty} dx \mathcal{H} = 2 \int_{\pi}^{\infty} dx \mathcal{H}$$

que pode ser calculada dos dados numéricos. Na figura 16 apresentamos a razão  $E_{\text{rad}}/(\gamma\pi)$ ,

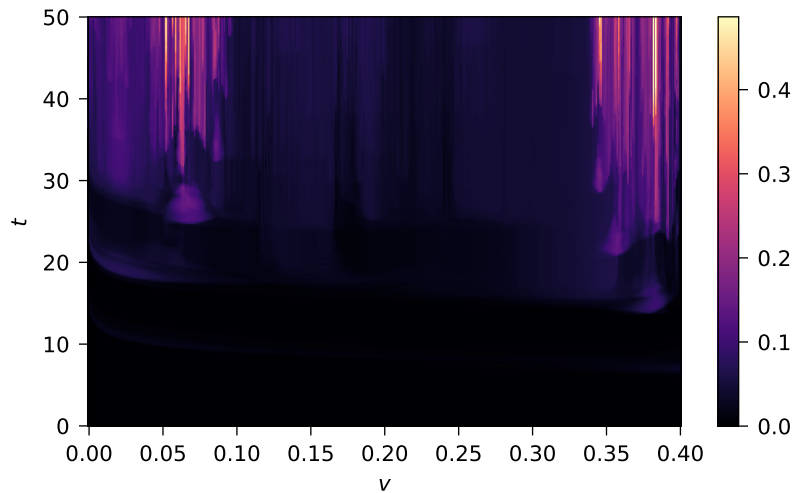


Figura 16 – Fração da energia total levada pela radiação durante um espalhamento kink-antikink para velocidades  $v < v_c$ , ou seja, quando os sólitons se aniquilam.

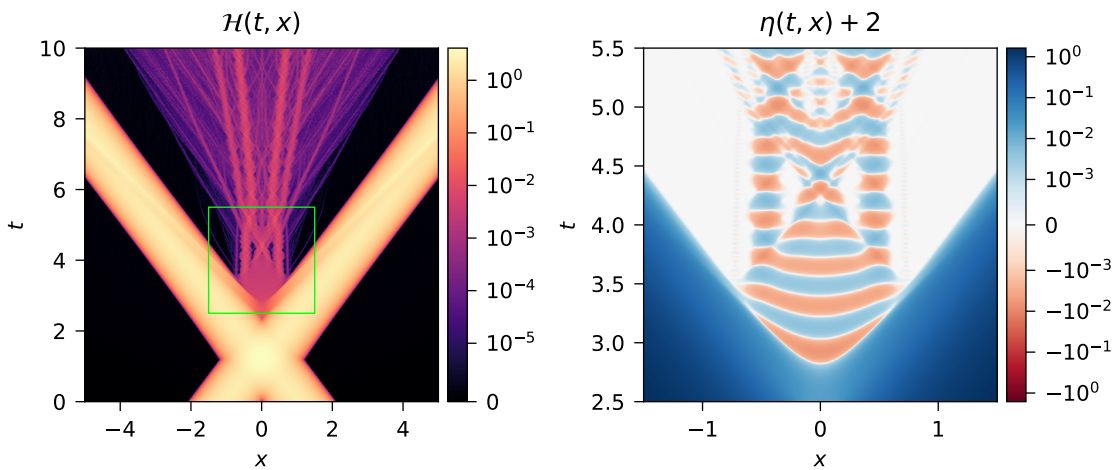


Figura 17 – Espalhamento kink-antikink para  $v = 0.75$ . Esquerda: densidade hamiltoniana. Direita: “zoom” na diferença entre o valor do campo e o vácuo  $-2$ , ou seja,  $\eta(t, x) + 2$ , para a região no quadrado verde no gráfico da esquerda.

onde  $\gamma\pi$  é a energia total do processo de espalhamento. As regiões com mais emissão de radiação são as mesmas regiões de comportamento caótico na figura 15.

Uma das formas que a radiação é emitida é através de jatos de oscilons a partir dos kinks perturbados pela colisão, como pode ser observado nos gráficos da densidade hamiltoniana na figura 14. Outra maneira de termos emissão de radiação é quando o par kink-antikink escapa. Nesse caso, na região entre os dois defeitos topológicos, surge uma configuração com a forma de um losango no diagrama de espaço-tempo, que pode ser vista na figura 17. Para essa configuração, o campo alcança valores de vácuo em hipérbolas no espaço-tempo. Esse comportamento é característico de ondas de choque compactas do

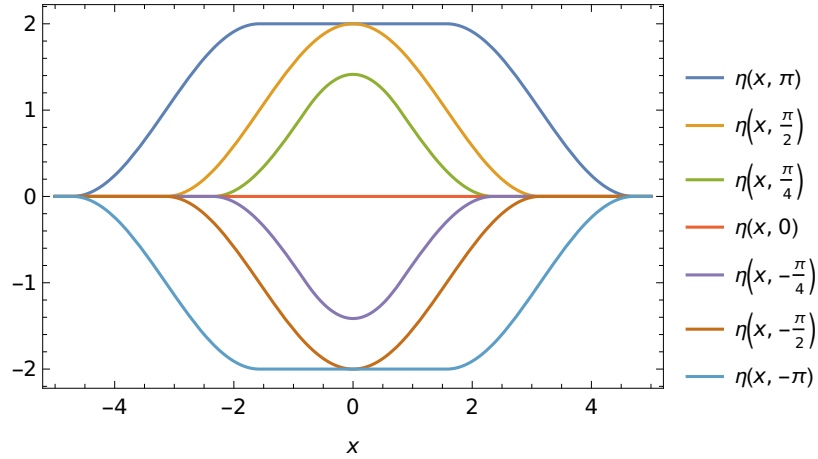


Figura 18 – Perfil do campo para uma sobreposição de kink e antikink.

modelo de signum-Gordon, como as discutidas na seção 2.1.2. Em particular, como essa onda de choque está sendo produzida em uma situação realista, sua energia total é finita. Portanto, a onda de choque eventualmente decai em uma cascata de oscillons.

Notamos também que o processo de espalhamento não leva à criação de novos pares kink-antikink para nenhuma velocidade até 0,999. A criação de pares seria possível para casos com energia  $E = \gamma\pi \geq 2\pi$ , ou seja, para  $v \geq \sqrt{3}/2 \approx 0.866$ . No entanto, isso não é observado nas nossas simulações. A energia da colisão não é transferida do modo translacional do campo para a sua amplitude em quantidades suficientes para que o campo alcance vácuos mais distantes do que os originalmente atingidos pelo par que colidiu.

### 3.3.2 Aproximação das coordenadas coletivas

Nessa seção vamos abordar o problema de espalhamento de kink-antikink através da aproximação de coordenadas coletivas. Essa técnica tem encontrado sucesso recentemente no estudo de colisões de kinks em outros modelos, como o modelo Klein-Gordon  $\phi^4$  [63–69]. Começamos assumindo que durante toda a colisão o campo pode ser escrito como uma sobreposição simétrica de um kink e um antikink na forma

$$\eta(x, a) = \eta_K \left( x + a + \frac{\pi}{2} \right) - \eta_K \left( x - a + \frac{\pi}{2} \right) \quad (3.7)$$

onde  $a$  é a posição do centro de momento do antikink. Não precisamos introduzir uma coordenada diferente para a posição do kink devido à simetria do problema. O perfil do campo para diferentes valores de  $a$  pode ser visto na figura 18.

Note que a expressão para o campo é uma função ímpar em relação a  $a$ . Como a métrica e o potencial são independentes do sinal do campo, sabemos que eles serão uma função apenas de  $|a|$ . Como as expressões do campo são dadas por fórmulas separadas dependendo de  $x$ , devemos considerar cada um dos seguintes casos.

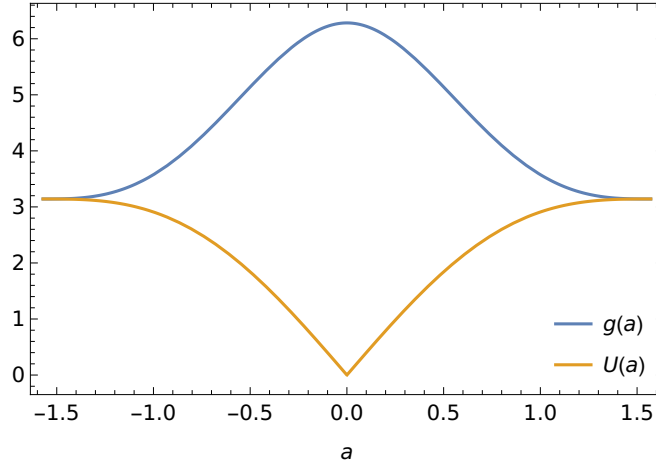


Figura 19 – Métrica e potencial para um modelo de coordenada coletiva de uma colisão de kink-antikink com apenas o modo posicional.

- Se  $|a| \geq \pi/2$ , os suportes do kink e antikink não se sobrepõem, e em particular para  $\dot{a} = 0$ , a configuração corresponde a uma solução exata de dois sólitons estáticos.
- Se  $|a| < \pi/2$ , há uma região  $|a| - \pi/2 < x < -|a| + \pi/2$  onde ambos os sólitons se sobrepõem. Como os sólitons têm suporte compacto, esta é a única situação em que os sólitons interagem. Isso é fundamentalmente diferente de modelos como o modelo  $\phi^4$ , onde há interação mesmo a grandes distâncias entre os centros de momento.

Realizando as integrações necessárias e considerando cada um dos casos acima, obtemos as seguintes expressões para a métrica e o potencial:

$$g(a) = \begin{cases} \pi & \text{se } |a| \geq \frac{\pi}{2}, \\ \pi + \sin(2|a|) + (\pi - 2|a|) \cos(2a) & \text{se } |a| < \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

$$U(a) = \begin{cases} \pi & \text{se } |a| \geq \frac{\pi}{2}, \\ 2|a| + \sin(2|a|) & \text{se } |a| < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

O formato dessas funções no intervalo não trivial  $|a| < \pi/2$  é mostrado na figura 19.

A evolução temporal de  $a$  pode ser determinada tanto pela equação de Euler-Lagrange quanto a partir da condição de conservação de energia

$$\frac{1}{2}g(a)\dot{a}^2 + U(a) = E.$$

A partir desta última, podemos obter  $a(t)$  implicitamente a partir da integral

$$\int_{a(0)}^{a(t)} da \sqrt{\frac{g(a)}{2(E - U(a))}} = \pm t$$

com o sinal a ser determinado pelo sinal de  $\dot{a}(0)$ . Para o processo de espalhamento, temos

$$E = \frac{\pi}{2}v^2 + \pi.$$

Note que para todo  $a$  a energia total é maior do que o pico do potencial, ou seja  $E > U(a)$ . Desta forma, a trajetória de  $a$  não tem nenhum ponto de retorno durante a colisão. Isso significa que a aproximação de coordenada coletiva prevê que o kink e o antikink sempre passarão um pelo outro, o que contradiz os resultados da simulação.

Nós podemos interpretar essa contradição como uma indicação que algum modo do campo é ativado durante a colisão, tomando parte da energia do modo translacional. Poderíamos imaginar que o modo de Derrick, da contração de Lorentz, é o responsável por isso. Uma expressão para o campo considerando o modo de Derrick é da forma

$$\eta(x, a, b) = \eta_K \left( b(x + a) + \frac{\pi}{2} \right) - \eta_K \left( b(x - a) + \frac{\pi}{2} \right)$$

em que o fator de escala  $b$  modela a contração de Lorentz. No entanto, observamos ao calcular a derivada

$$\frac{\partial \eta(x, a, b)}{\partial b} = (x + a) \eta'_K \left( b(x + a) + \frac{\pi}{2} \right) - (x - a) \eta'_K \left( b(x - a) + \frac{\pi}{2} \right)$$

que para  $a = 0$  os dois termos se cancelam e temos  $\partial_b \eta = 0$ . Portanto, uma linha e uma coluna inteiras da matriz métrica são nulas, o que significa que seu determinante também é nulo. Ao mesmo tempo, o potencial tem a forma

$$U(a, b) = \begin{cases} \frac{\pi(b^2+1)}{2b} & \text{se } |a| \geq \frac{\pi}{2b}, \\ -\frac{(b^2-3)\sin(2b|a|)+(b^2-1)(\pi-2b|a|)\cos(2b|a|)-4b|a|-\pi b^2+\pi}{2b} & \text{se } |a| < \frac{\pi}{2b} \end{cases}$$

cujos mínimos é justamente em  $a = 0$ . Neste caso, nada proíbe a evolução das coordenadas de alcançar  $a = 0$ . Nesse ponto, a métrica é degenerada e não pode ser invertida para resolvermos as equações de movimento. Isso implica que o modelo relativístico de coordenadas coletivas do espalhamento kink-antikink não é metricamente completo. Um problema similar ocorre em outros modelos, como o modelo  $\phi^4$ , onde pode ser contornado adicionando as contribuições relativísticas perturbativamente [67]. No entanto, essa estratégia não pode ser aplicada aqui porque não podemos truncar a série de Taylor de  $\eta$  ao redor de  $b = 1$  sem sacrificar a continuidade de  $\partial_x \eta$  nas bordas do kink.

No entanto, há outras possíveis explicações para a existência de pontos de retorno durante a colisão. A emissão de radiação, por exemplo, gasta parte da energia da colisão. Outra possibilidade é que algum modo interno dos sólitons seja ativado, como o apresentado na equação (3.6). Uma expressão tentativa para o campo levando em conta o modo interno é da forma

$$\eta(x, a, c) = \eta_K \left( x + a + \frac{\pi}{2} \right) - \eta_K \left( x - a + \frac{\pi}{2} \right) + c[\chi(x + a) - \chi(x - a)].$$

Porém, novamente temos um problema. Como os modos internos se cancelam para o caso que o sólitons se sobrepõem, temos  $\partial_c \eta = 0$  para  $a = 0$ . Um problema similar ocorre no modelo  $\phi^4$ , quando o *shape-mode* é incluído na descrição do espalhamento kink-antikink.

Este problema é referido como problema do vetor nulo (em inglês, *null-vector problem*) [70, 71]. No caso do modelo  $\phi^4$ , esse problema foi resolvido por uma mudança de variáveis  $c \rightarrow c/f(a)$ , onde  $f(a)$  é uma função linear em  $a$  para  $a$  pequeno [63, 64]. Essencialmente,  $f(a)$  cancela o comportamento linear em  $a$  na derivada do campo, impedindo que ela seja nula para  $a = 0$ . Como, para pequenos valores de  $a$ , a sobreposição dos modos internos tem expansão

$$\chi(a+x) - \chi(x-a) = 4ac(\cos(2x) + \cos(4x)) + \mathcal{O}(a^3)$$

podemos adotar a mesma técnica aqui e escrever o campo como

$$\eta(x, a, c) = \eta_K\left(x + a + \frac{\pi}{2}\right) - \eta_K\left(x - a + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{c}{f(a)}[\chi(x+a) - \chi(x-a)].$$

A forma específica de  $f(a)$  não é importante, desde que ela tenha a expansão  $f(a) \sim a$  para pequenos  $a$ . Em particular, escolhemos

$$f(a) = \begin{cases} \sin(a) & \text{se } -\frac{\pi}{2} < a < \frac{\pi}{2}, \\ \text{sgn}(a) & \text{em outros casos,} \end{cases}$$

de modo que o problema do vetor nulo é resolvido quando os sólitons se sobrepõem, mas a interpretação de  $c$  como a amplitude do modo interno é mantida para o caso em que os sólitons não interagem.

A métrica e o potencial nesse caso possuem expressões muito longas, que não iremos escrever aqui. Em particular, a fórmula do potencial irá mudar para as regiões nas quais o modo interno muda o sinal de  $\eta + 2k$ , para  $k \in \mathbb{Z}$ . Considerar todos esses casos analiticamente se torna proibitivamente difícil. No entanto, a evolução temporal de  $a$  and  $c$  pode ser obtida numericamente de modo bem direto pela equação (3.4). Resumimos os resultados em gráficos do campo no ponto central  $x = 0$  como uma função do tempo e da velocidade de espalhamento, de modo similar ao que fizemos com as simulações. Esse gráfico é apresentado na figura 20.

O comportamento do campo  $\eta$  em  $x = 0$  indica que esse modelo de coordenadas coletivas com  $a$  e  $c$  captura algumas das principais características do processo de espalhamento. Para velocidade pequenas o suficiente, o par forma uma configuração oscilante, conseguindo escapar apenas para velocidades maiores. No entanto, a velocidade crítica é cerca de 0,3, diferente da observada nas simulações da teoria de campo completa. Isso pode ser atribuído, ao menos parcialmente, a emissão de radiação. Quando a configuração irradia, parte de sua energia é perdida e precisa de mais energia inicial para conseguir escapar o estado ligado. Também é possível que modos internos não conhecidos estejam sendo ativados. Por exemplo, devido às dificuldades mencionadas anteriormente, não conseguimos incluir a contração de Lorentz, apesar de que aniquilação de pares é um processo relativístico.

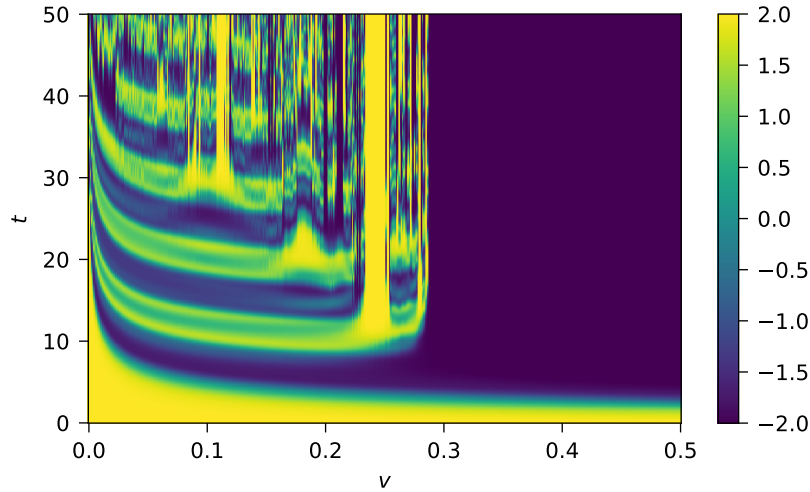


Figura 20 – Previsão das coordenadas coletivas para o valor do campo  $\eta(x = 0, a(t), c(t))$  como uma função do tempo  $t$  e da velocidade  $v$  para um espalhamento kink-antikink. A descrição inclui os modos posicional e interno de cada sóliton.

Outra diferença visível, é a existência de janelas de velocidade nas quais o kink e o antikink conseguem escapar para o mesmo lado do qual eles vieram. Isso corresponde aos casos nos quais o campo em  $x = 0$  retorna para  $\eta = 2$  e permanece com esse valor. Isso não acontece nas simulações completas. Novamente, possíveis explicações são radiação e modos desconhecidos.

### 3.4 ESPALHAMENTO KINK-KINK

Vamos estudar agora o espalhamento de dois kinks. Em particular, vamos considerar um kink conectando os vácuos  $\eta = -2$  e  $\eta = 0$  vindo da esquerda com velocidade  $v$ , enquanto um kink conectando os vácuos  $\eta = 0$  e  $\eta = 2$  vem da direita com velocidade  $-v$ . As condições iniciais são da forma

$$\begin{aligned}\eta(0, x) &= \psi_{(-2,0)}(0, x + \pi/\gamma; v) + \psi_{(0,2)}(0, x; -v), \\ \partial_t \eta(0, x) &= \partial_t \psi_{(-2,0)}(0, x + \pi/\gamma; v) + \partial_t \psi_{(0,2)}(0, x; -v).\end{aligned}$$

Um exemplo desta configuração inicial pode ser visto na figura 21. No instante inicial, o kink  $\psi_{(-2,0)}$  está localizado na região  $x \in [-\pi/\gamma, 0]$  e o kink  $\psi_{(0,2)}$  está localizado em  $x \in [0, \pi/\gamma]$ . Cada kink tem energia  $\gamma\pi/2$ , de modo que a energia total da configuração é  $\gamma\pi$ .

Apesar da forma das condições iniciais ser bem similar ao espalhamento kink-antikink, esse é um processo bem diferente porque o par kink-kink possui carga topológica diferente de zero. Como as cargas topológicas são quantidades conservadas sob transformações contínuas, incluindo evolução temporal, o par não se aniquila. Além disso, a condição inicial é uma função ímpar em  $x$ . Como paridade é uma simetria das equações de



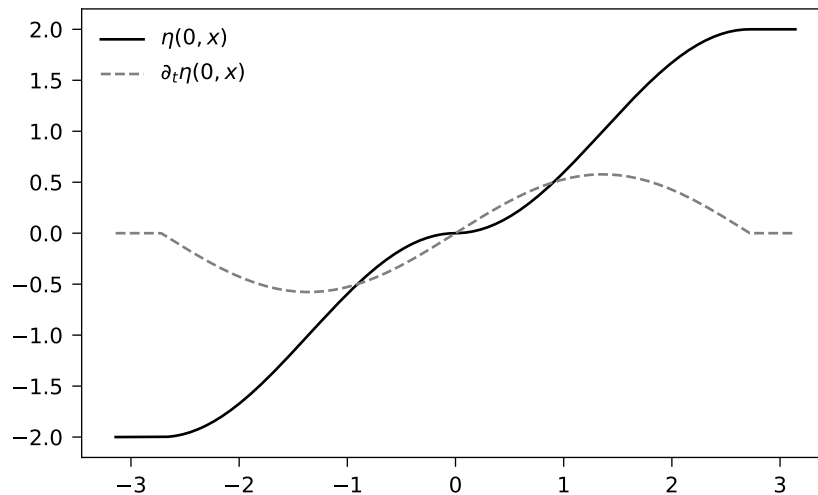


Figura 21 – Exemplo de configuração inicial de um espalhamento kink-kink com velocidade  $v = 0,5$ .

movimento, o campo no ponto médio entre os kinks permanece estático, ou seja  $\eta(t, 0) = 0$ . Isso limita fortemente a forma da radiação durante o espalhamento. Esperamos que a colisão cause apenas uma troca de momento, com muito pouca ou nenhuma radiação.

Podemos confirmar nossas expectativas através de simulações numéricas da evolução temporal do campo. Apresentamos alguns exemplos dessas simulações na figura 22 como mapas de cor no diagrama espaço-tempo. Os kinks apenas quicam um no outro, sem emissão de radiação. Note que o gráfico da densidade hamiltoniana é logarítmico, então mesmo quantidades bem pequenas de radiação seriam visíveis.

O comportamento simples desses espalhamentos nos deixa tentados a descrevê-los através da aproximação de coordenadas relativas. Vamos considerar os seguintes quatro conjuntos de coordenadas.

- *Não-relativístico*. Caso com apenas o modo translacional. Nesse caso o campo é dado como uma sobreposição simples de dois kinks. A única coordenada é a posição do centro de momento do kink da direita. O campo tem então a forma

$$\eta(x, a) = \eta_K \left( x + a + \frac{\pi}{2} \right) + \eta_K \left( x - a + \frac{\pi}{2} \right) - 2$$

onde a constante  $-2$  foi incluída para fazer os kinks conectarem os vácuos  $-2$ ,  $0$  e  $2$ . Alguns exemplos do campo podem ser vistos na figura 23.

- *Não-relativístico com modo interno*. Caso em que incluímos a amplitude do modo interno  $c$  como uma coordenada. O campo é dado por

$$\eta(x, a, c) = \eta_K \left( x + a + \frac{\pi}{2} \right) + \eta_K \left( x - a + \frac{\pi}{2} \right) - 2 + c [\chi(x - a) + \chi(x + a)].$$

Como os modos internos não se cancelam para  $a = 0$  no caso kink-kink, não precisamos regularizar a amplitude  $c$  como antes.

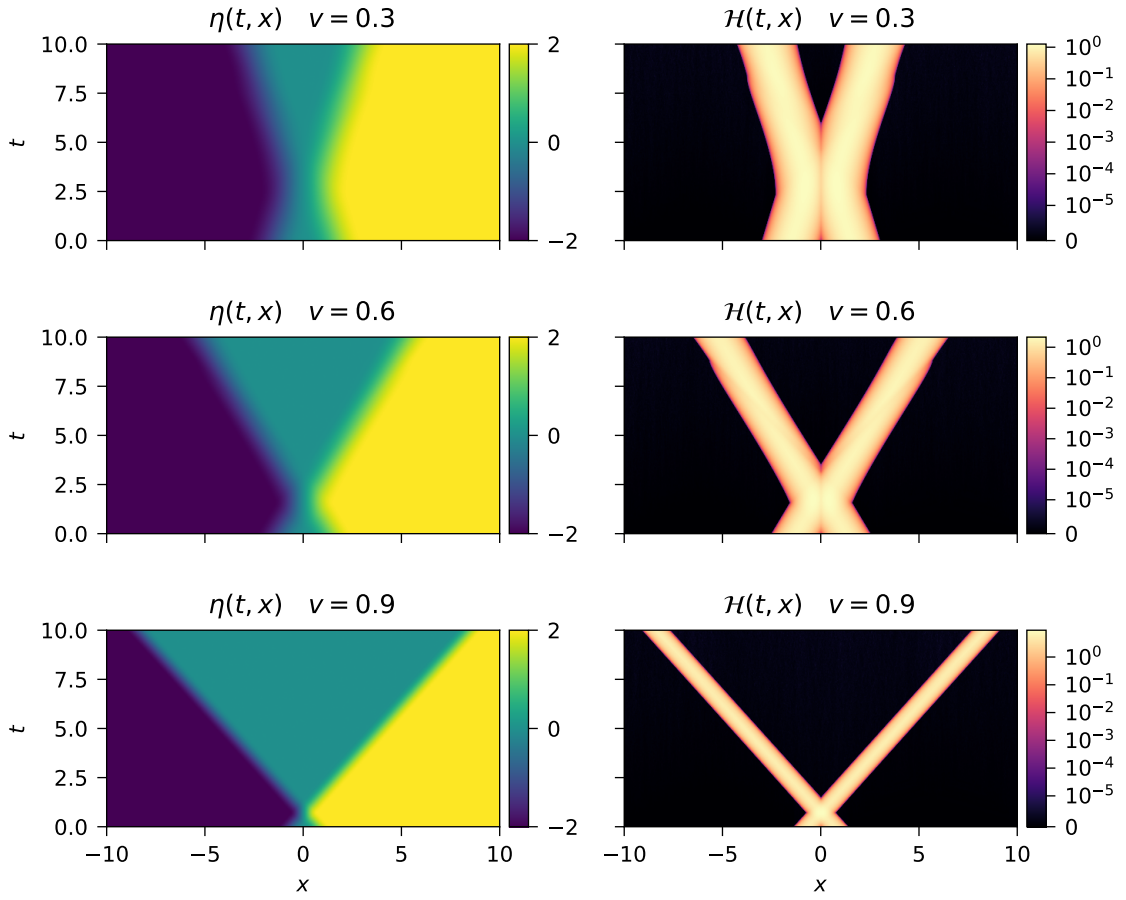


Figura 22 – Campo  $\eta(t, x)$  e densidade hamiltoniana  $\mathcal{H}(t, x)$  para espalhamento kink-kink com velocidade  $v$ .

- *Relativístico*. Caso em que incluímos o fator de escala  $b$  para modelar a contração de Lorentz. O campo é escrito como

$$\eta(x, a, b) = \eta_K \left( b(x + a) + \frac{\pi}{2} \right) + \eta_K \left( b(x - a) + \frac{\pi}{2} \right) - 2.$$

- *Relativístico com modo interno*. Caso em que incluímos tanto o fator de escala  $b$  e a amplitude do modo interno  $c$ , de modo que o campo é

$$\begin{aligned} \eta(x, a, b, c) = \eta_K \left( b(x + a) + \frac{\pi}{2} \right) + \eta_K \left( b(x - a) + \frac{\pi}{2} \right) - 2 \\ + c [\chi(b(x - a)) + \chi(b(x + a))]. \end{aligned}$$

Infelizmente, a descrição do espalhamento kink-kink apresenta um problema de vetor nulo no modo translacional  $a$ . Para todos os quatro casos acima, a derivada  $\partial_a \eta$  é zero para  $a = 0$ . Por exemplo, para o caso não-relativístico, a derivada é

$$\frac{\partial \eta(x, a)}{\partial a} = \eta'_K \left( x + a + \frac{\pi}{2} \right) - \eta'_K \left( x - a + \frac{\pi}{2} \right)$$

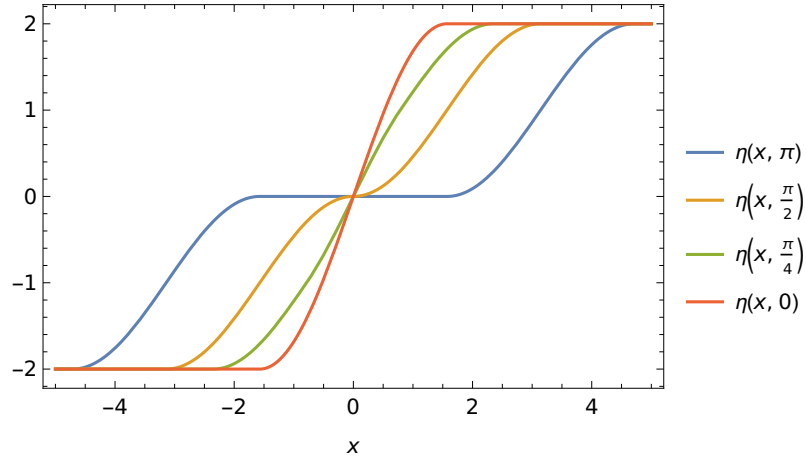


Figura 23 – Perfil do campo como sobreposição de dois kinks.

e os dois termos se cancelam quando os kinks se sobrepõem completamente. O mesmo acontece para todos os quatro conjuntos de coordenadas, porque todos eles incluem o modo translacional de modo similar.

Esse problema do vetor nulo também aparece no modelo de sine-Gordon, onde foi resolvido permitindo que a coordenada  $a$  obtivesse valores imaginários [67]. Isso foi possível porque a forma específica do campo naquele modelo permanece real mesmo quando  $a$  é imaginário. No entanto, no nosso modelo  $a$  também aparece na definição do suporte do kink, portanto não podemos permitir que tenha valores imaginários. Similar ao caso relativístico do espalhamento kink-antikink, o suporte compacto do kink restringe nossa capacidade de usar métodos conhecidos de outros modelos de modo direto. Isso ilustra como modelos com potenciais não-analíticos formam uma classe bastante distinta de teorias de campo, apesar de suas similaridades com modelos mais tradicionais em vários aspectos.

No entanto, isso não quer dizer a aproximação de coordenadas coletivas seja inútil nesse caso. Para ilustrar isso, vamos calcular as expressões da métrica e do potencial no caso não-relativístico. Tomando cuidado com os casos  $|a| > \pi/2$  e  $|a| < \pi/2$  de modo similar ao feito no espalhamento kink-antikink, obtemos

$$U(a) = \begin{cases} \pi & \text{se } |a| \geq \frac{\pi}{2}, \\ 2|a| - \sin(2|a|) + 4 \cos(a) & \text{se } |a| < \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

$$g(a) = \begin{cases} \pi & \text{se } |a| \geq \frac{\pi}{2}, \\ \pi - \sin(2|a|) - (\pi - 2|a|) \cos(2a) & \text{se } |a| < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

O gráfico dessas funções é apresentado na figura 24.

Note que o potencial tem a forma de uma barreira para  $|a| < \pi/2$ , diferente do caso kink-antikink. Se a barreira do potencial em  $a = 0$  fosse infinita, o problema do vetor nulo seria completamente evitado, porque a coordenada  $a$  nunca alcançaria esse ponto e a métrica seria sempre não-degenerada. No entanto, como  $U(0) = 4$ , o máximo de  $U(a)$  é

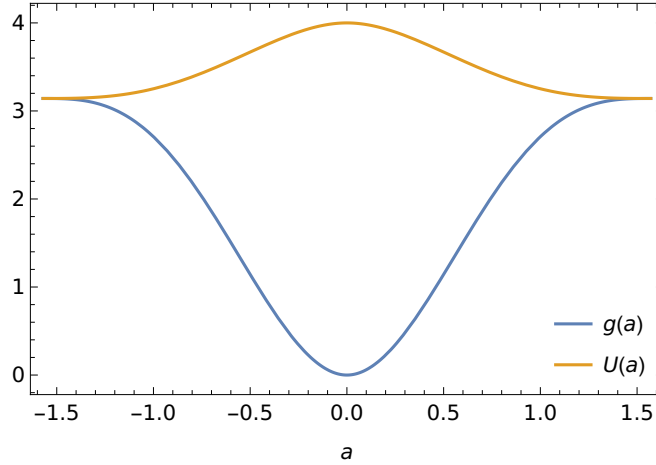


Figura 24 – Métrica e potencial para a aproximação de coordenadas coletivas do espalhamento kink-kink, incluindo apenas o modo translacional.

acessível se a energia total  $E$  for alta que chega. Na descrição não-relativística, a energia do espalhamento é  $E = \pi + \pi v^2/2$ , portanto o ponto  $a = 0$  é acessível quando  $E = 4$ , ou seja, quando  $v = \sqrt{8/\pi - 2} \approx 0,739$ . Além dessa velocidade, a evolução temporal para  $a$  não pode ser obtida das equações de movimento. Considerações similares são válidas para o caso relativístico e ambos os casos com o modo interno.

Essas descrições por coordenadas coletivas não são metricamente completas. Porém, para velocidades pequenas o suficiente para que o máximo do potencial em  $a = 0$  não seja alcançável, nós ainda podemos usá-las. Gostaríamos de testar as previsões da aproximação de coordenadas coletivas para esses casos. Uma maneira de fazer isso sistematicamente é calcular a maior aproximação do par de kinks durante o espalhamento e comparar com o resultado das simulações. Como os gráficos na figura 22 indicam que os kinks ricocheteiam um contra o outro, a função  $x_R(t)$ , que representa a trajetória da borda direita do kink conectando  $\eta = 0$  e  $\eta = 2$ , tem um mínimo global  $x_{R,\min}$ . Os valores da simulação para  $x_R(t)$  foram encontrados como o menor valor de  $x_R$  que satisfaz  $|\eta(t, x_R) - 2| < 10^{-7}$ . Esse mínimo também pode ser encontrado para as coordenadas coletivas minimizando as funções

$$x_R(t) = a(t) + \frac{\pi}{2}$$

para os casos não-relativísticos e

$$x_R(t) = a(t) + \frac{\pi}{2b(t)}$$

para os casos relativísticos. Os resultados para  $x_{R,\min}$  para diferentes velocidades de espalhamento  $v$  podem ser vistos na figura 25, em que incluímos resultados das simulações e das coordenadas coletivas.

Uma propriedade curiosa da previsão dos valores de  $x_{R,\min}$  pela aproximação não-relativística com modo interno é a descontinuidade em  $v \approx 0.557$ . Essa descontinuidade pode ser explicada se repararmos que para valores mais altos de  $v$ , a amplitude do modo

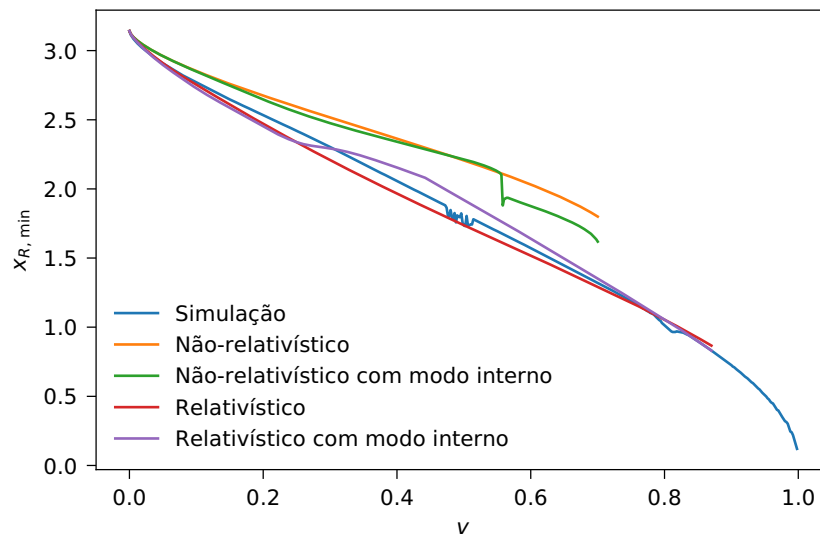


Figura 25 – Valores de  $x_{R,\min}$  calculados a partir das simulações e usando diferentes modelos de coordenadas coletivas.

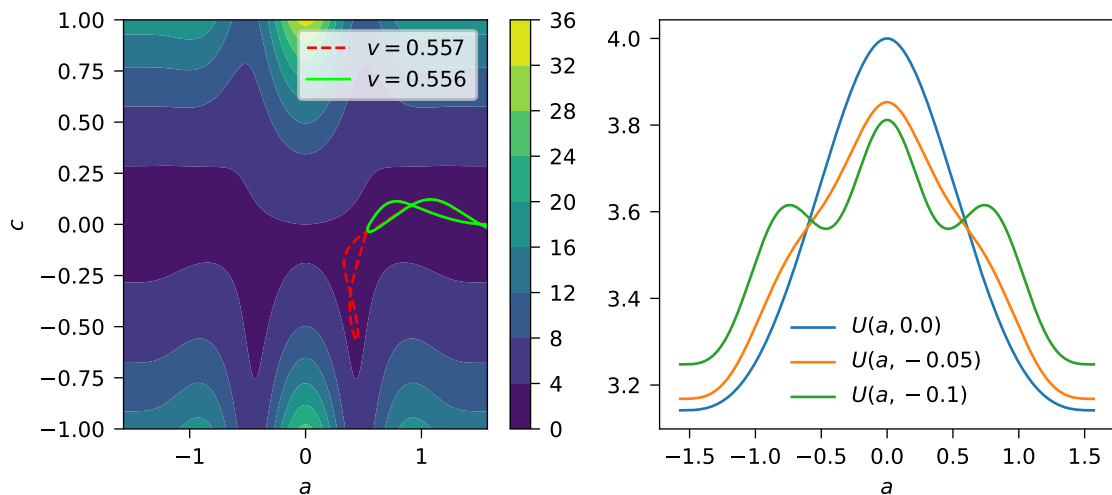


Figura 26 – Na esquerda: potencial efetivo  $U(a,c)$  para aproximação de coordenadas coletivas do espalhamento kink-kink, incluindo modos translacional e interno. As linhas coloridas representam duas soluções da equação de movimento. Na direita: gráfico do potencial para valores fixos de  $c$ .

interno  $c$  alcança valores tais que o potencial tem novos mínimos locais. Na figura 26 podemos ver que o potencial  $U(a, c)$  passa por uma transição análoga a uma transição de fase para  $c \approx 0.05$ . Isso reduz a energia necessária para que os kinks fiquem mais próximos um do outro, ou seja, tenham menores valores de  $a$ , explicando o salto na curva para  $x_{R,\min}$ . No entanto, esse salto não está presente nas simulações, cujos resultados são melhor explicados pelo modelo relativístico. No modelo relativístico, a inclusão do modo interno não melhora significativamente os resultados.

## 4 INTERAÇÃO ENTRE KINK E OSCILLON

Vamos agora estudar a interação entre kink compacto e radiação, que nos modelos com potencial não-analítico é composta primariamente por oscillons compactos. Como vimos no capítulo anterior, radiação é presente em certos processos dinâmicos de kinks, como perturbações e espalhamento kink-antikink. Como as soluções de oscillon e kink tem suporte compacto, é possível compor configurações contendo mais de uma das soluções, desde que seus suportes não se sobreponham. Vamos considerar primeiro configurações contendo um kink e um oscillon do modelo de signum-Gordon. O potencial quadrático periódico que foi deduzido do primeiro submodelo BPS do modelo de Skyrme se aproxima dos mínimos de modo simétrico com forma de  $V$ . Portanto, para pequenas amplitudes em relação ao vácuo ele pode ser aproximado pelo modelo de signum-Gordon. Assim o oscillon do modelo de signum-Gordon é solução aproximada do modelo quadrático periódico, contanto que seu tamanho  $l$  seja pequeno o suficiente para que a amplitude da solução em relação ao vácuo seja pequena também.

Vamos analisar essas configurações em um referencial no qual o kink se encontra inicialmente parado na região  $x \in [0, \pi]$  e é atingido por um oscillon se movendo uniformemente com velocidade  $v$ . Além deste movimento uniforme, o oscillon também pode realizar um movimento de “zig-zag” com velocidade constante  $v_0$ . A princípio, poderíamos considerar um movimento de “zig-zag” arbitrário (por exemplo, acelerado), mas nos restringimos ao caso de velocidade constante  $v_0$  por simplicidade.

Como o oscillon não é uma solução estática, oscilando com período  $l$  no seu próprio referencial, temos ainda mais um parâmetro livre que é fase do oscillon. Definimos a fase como um número  $\alpha \in [0, 1)$ , tal que o perfil do oscillon pode ser descrito no referencial do laboratório como

$$\chi_{\text{osc}}(t, x) = \psi_{\text{osc}}(t + \alpha l \gamma, x + x_0; v)$$

onde  $\psi_{\text{osc}}$  é a solução para um oscillon em movimento na equação (2.5) e o fator  $\gamma = (1 - v^2)^{-1/2}$  é necessário devido à dilatação de Lorentz do período. O parâmetro de translação  $x_0$  é escolhido de modo que a posição da borda direita do oscillon seja  $x = 0$  no instante  $t = 0$ . Dessa forma, a interação entre o kink e o oscillon deve começar imediatamente após o instante inicial.

As condições iniciais dessa configuração são escritas como

$$\begin{aligned} \eta(0, x) &= \eta_K(x) + \chi_{\text{osc}}(0, x), \\ \partial_t \eta(0, x) &= \partial_t \chi_{\text{osc}}(0, x). \end{aligned}$$

A configuração inicial pode ser escrita simplesmente como uma soma porque as soluções de oscillons e kinks tem suportes compactos que não se sobrepõem no instante  $t = 0$ . Exemplos de configurações iniciais podem ser vistas na figura 27. As configurações iniciais dependem de quatro parâmetros do oscillon: seu tamanho  $l$  (medido no referencial do

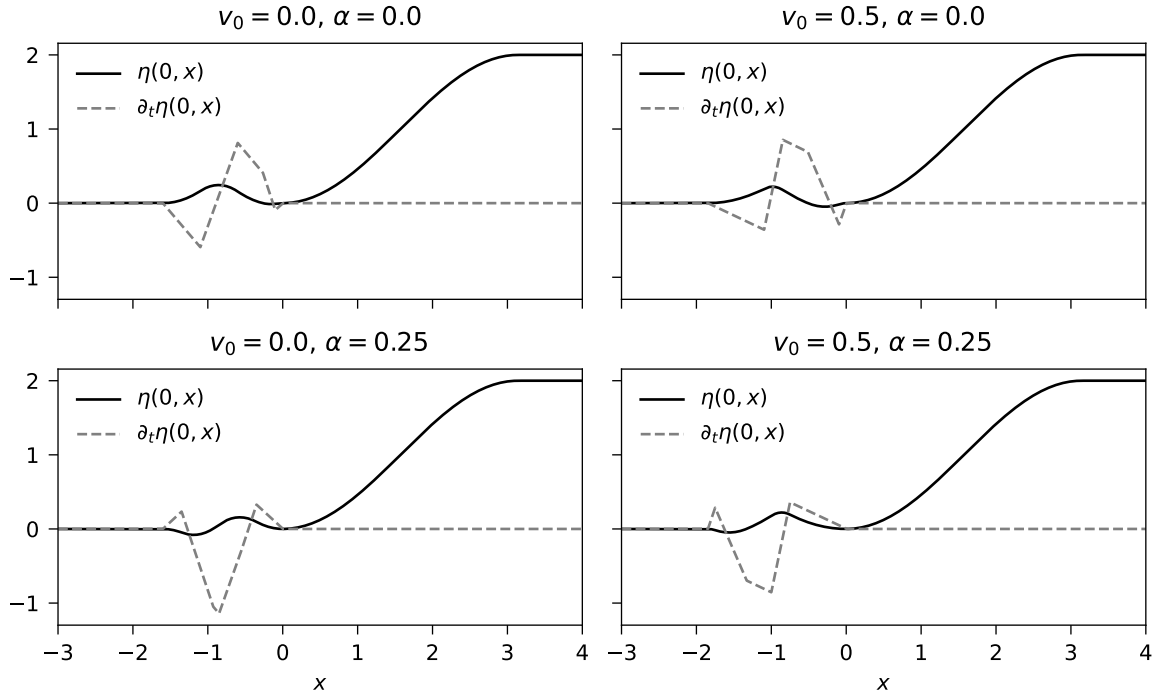


Figura 27 – Configurações iniciais para um oscillon de tamanho  $l = 2$  em seu próprio referencial se movendo com velocidade do centro de momento  $v = 0,6$  em direção a um kink em repouso. O oscillon realiza movimento de “zig-zag” com velocidade  $v_0$  e tem fase  $\alpha$  no instante da colisão.

próprio oscillon), sua velocidade  $v$  em relação ao kink, sua fase  $\alpha$  e a velocidade de “zig-zag”  $v_0$  das bordas (medida no referencial do próprio oscillon).

Da mesma maneira que no caso da dinâmica dos kinks, a evolução temporal dessa configuração precisa ser obtida numericamente. Evitamos visualizar os resultados usando diretamente valores do campo porque é difícil distinguir pequenas estruturas em comparação com o kink. Porém, nesse caso não precisamos usar a densidade de energia no lugar do campo. Observamos nas simulações que o kink não ganha momento linear durante a colisão e conseqüentemente seu suporte permanece inalterado. Tomamos vantagem desse fato para fazer os gráficos usando a amplitude da perturbação em relação ao kink. Definimos essa perturbação como

$$\chi(t, x) = \eta(t, x) - \eta_K(x)$$

onde  $\eta(t, x)$  é campo obtido numericamente. Note que  $\chi(0, x) = \chi_{\text{osc}}(0, x)$ .

Os valores de  $\chi(t, x)$  obtidos numericamente podem ser visualizados nas figuras 28–31. Em cada uma dessas figuras variamos um dos parâmetros da simulação, mantendo os demais parâmetros fixos. Queremos dessa maneira conseguir identificar a dependência do processo de espalhamento em cada parâmetro.

Na figura 28 estão representadas simulações com  $v = 0,75$ ,  $\alpha = 0$  e  $v_0 = 0$  para valores de  $l$  indo de 0,5 a 2. Em todos os casos, após a colisão o oscillon é completamente



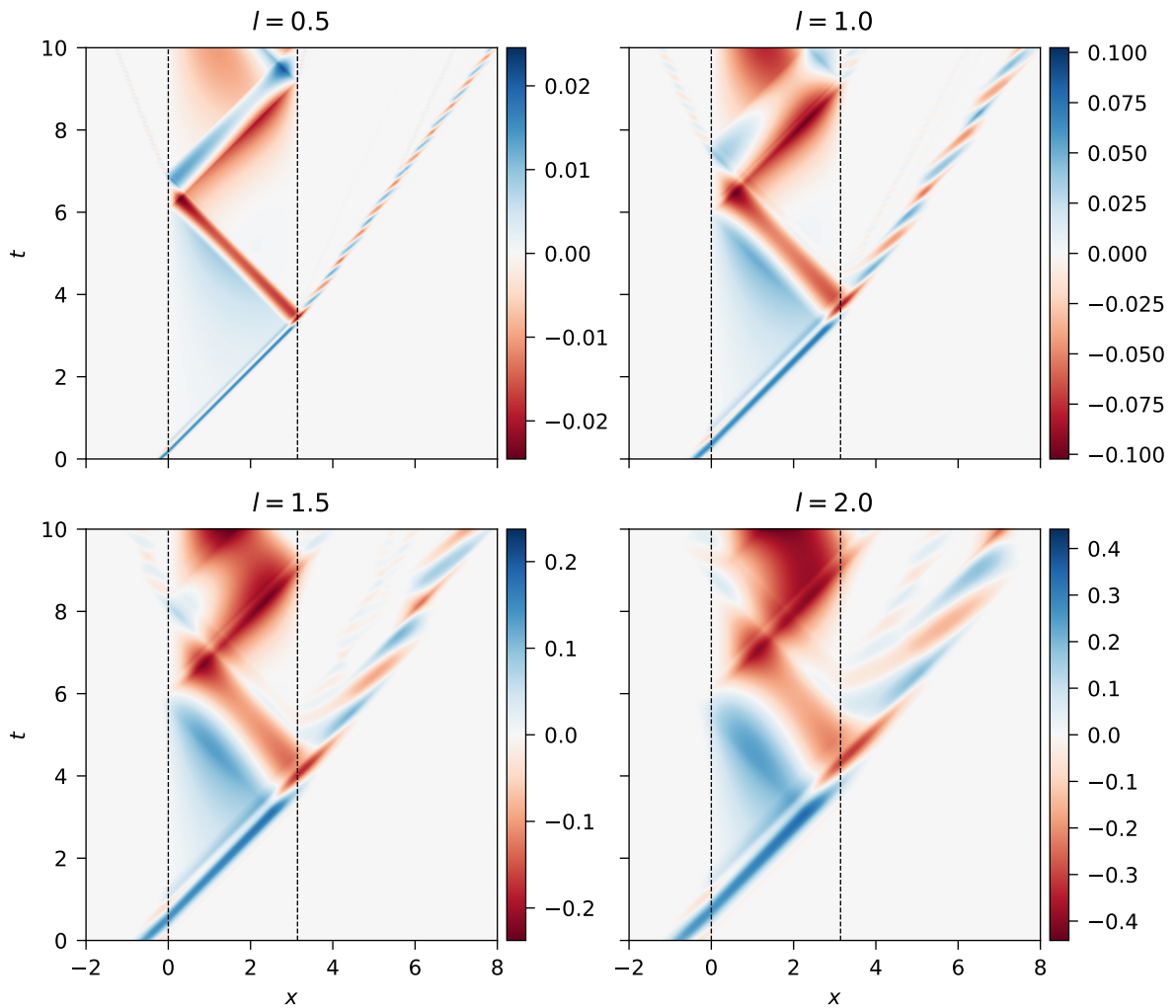


Figura 28 – Perturbação  $\chi(t,x) = \eta(t,x) - \eta_K(x)$  para simulações com  $v = 0,75$ ,  $\alpha = 0$ ,  $v_0 = 0$  e diferentes valores de  $l$ . As linhas pontilhadas delimitam o suporte do kink  $\eta_K(x)$ .

absorvido pelo kink, gerando um pulso que viaja com a velocidade da luz sobre o corpo do mesmo. Conforme o pulso se propaga sobre o kink ele deixa um rastro que continua a aumentar em amplitude com o tempo. Ao se aproximar da borda direita do kink, o pulso inverte de sinal e se divide em dois. Uma parte do pulso é refletida para a esquerda, onde ele arrasta consigo a perturbação deixada anteriormente. O pulso refletido deixa o seu próprio rastro de perturbação, mas dessa vez com o sinal invertido. A outra parte do pulso consegue escapar do corpo do kink para a região da direita, onde ele dá origem a um ou mais oscillons perturbados. Podemos observar que o oscillon é mais perturbado quanto maior o valor de  $l$ . Na figura para  $l = 2$  podemos inclusive ver que dois oscillons foram emitidos.

Acompanhando o pulso refletido podemos ver o mesmo processo se repetindo na borda esquerda para os casos  $l = 0,5$ ,  $1$  e  $1,5$ . No caso  $l = 2$  não há uma nova emissão de oscillon durante o tempo simulado, podemos ver apenas uma nova reflexão da perturbação

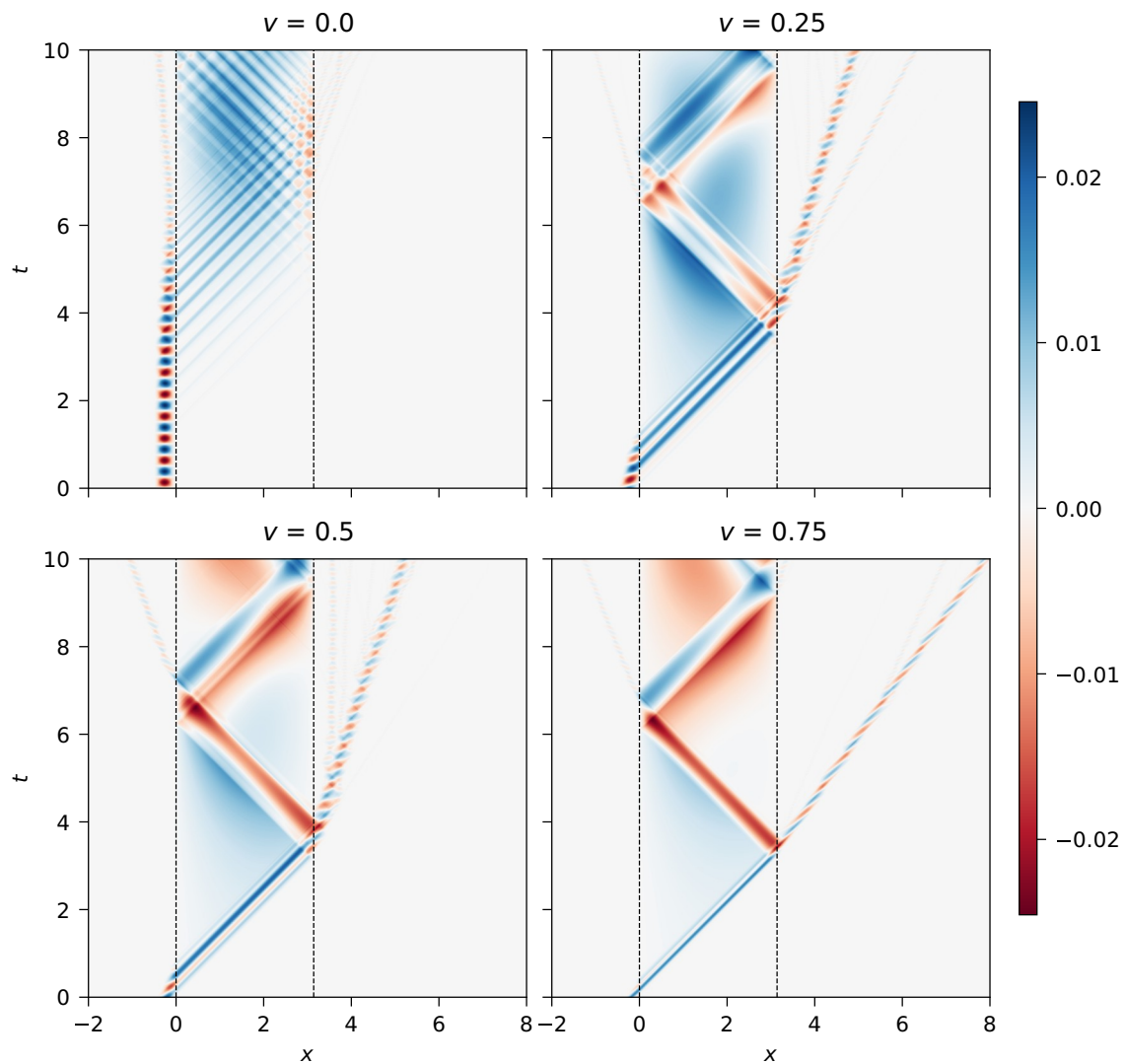


Figura 29 – Perturbação  $\chi(t, x) = \eta(t, x) - \eta_K(x)$  para simulações com  $l = 0,5$ ,  $\alpha = 0$ ,  $v_0 = 0$  e diferentes valores de  $v$ . As linhas pontilhadas delimitam o suporte do kink  $\eta_K(x)$ .

na borda esquerda, mas desta vez sem mudança de sinal.

Na figura 29 estão representadas simulações com  $l = 0,5$ ,  $\alpha = 0$ ,  $v_0 = 0$  com valores de  $v$  indo de zero a 0,75. Como se pode esperar de um processo de espalhamento, a evolução temporal depende fortemente da velocidade. Um caso especial nesse conjunto de simulações é o caso  $v = 0$ . Caso a evolução temporal do oscillon fosse regida pela equação de signum-Gordon, sua evolução temporal seria conhecida analiticamente. O oscillon continuaria a oscilar com período  $l$  perpetuamente. No entanto, no nosso caso as soluções analíticas de um oscillon de signum-Gordon são apenas aproximadas. O comportamento de oscillons do modelo de signum-Gordon quando colocados no modelo quadrático periódico já foi estudado anteriormente [34]. Para oscillons de amplitude pequena, como é o caso nesse conjunto de simulações, o oscillon continua sendo periódico e não emite quantidades

visíveis de radiação. No entanto, seu período difere levemente de  $l$ , e o suporte da solução se expande e contrai levemente durante a oscilação. Essa última diferença em relação ao oscillon exato causa interação entre oscillon e kink, mesmo para  $v = 0$ . (Outra possibilidade de interação para  $v = 0$  seria tomando  $v_0 \neq 0$ , pois dessa maneira o oscillon muda de posição sem depender de efeitos específicos do modelo quadrático.) Essa interação se dá na forma da emissão de pulsos que se propagam dentro do kink, emitidos para  $t \gtrsim 3$  quando o oscillon tem sinal positivo. Esses pulsos se propagam de modo similar aos casos analisados antes, porém só levam à emissão de oscillons muito pequenos no lado direito, visíveis fracamente para  $t \gtrsim 8$ . O oscillon original gradualmente encolhe e eventualmente começa a se afastar do kink. Para as outras velocidades, a evolução temporal é similar ao observado anteriormente. Um detalhe interessante é que para  $v = 0,75$  o oscillon emitido na região da direita é mais regular e tem velocidade maior que os casos  $v = 0,25$  e  $v = 0,5$ .

Na figura 30 estão representadas simulações com  $l = 1$ ,  $v = 0,6$ ,  $v_0 = 0$  com valores de  $\alpha$  indo de zero a 0,75. Essas figuras mostram que a fase do oscillon também é um parâmetro relevante para os processos de espalhamento. É possível ver que o oscillon cria pulsos no kink preferencialmente quando o sinal do oscillon é positivo. Esse mesmo efeito já podia ser observado em figuras anteriores, nos casos de baixa velocidade, pois nesses casos há tempo o suficiente antes da colisão ser concluída para o sinal do oscillon mudar.

Por fim, representamos na figura 31 simulações com  $l = 0,75$ ,  $v = 0,8$ ,  $\alpha = 0$  para valores de  $v_0$  indo de zero à 0,75. A velocidade de “zig-zag” do oscillon parece influenciar menos a transmissão dos pulsos sobre o corpo do kink do que os outros parâmetros. No entanto, esse parâmetro ainda é relevante para determinar a forma do oscillon resultante, bem como a sua velocidade. A evolução dos oscillons menores que são emitidos do oscillon resultantes também apresenta dependência em  $v_0$ .

Podemos quantificar de modo melhor a influência que cada um dos parâmetros tem no oscillon que aparece no lado direito analisando a energia em cada região como função do tempo. Definimos a região 1 como sendo a região à esquerda do kink  $x \in (-\infty, 0]$ , a região 2 como sendo a corpo do kink  $x \in (0, \pi]$  e a região 3 como sendo a região à direita do kink  $x \in (\pi, \infty)$ . As energias  $E_n$  da perturbação na região  $n$  são dadas pelas integrais

$$\begin{aligned} E_1(t) &= \int_{-\infty}^0 dx \left[ \frac{1}{2}(\partial_t \eta)^2 + \frac{1}{2}(\partial_x \eta)^2 + V(\eta) \right] \\ E_2(t) &= \int_0^\pi dx \left[ \frac{1}{2}(\partial_t \eta)^2 + \frac{1}{2}(\partial_x \eta)^2 + V(\eta) \right] - \frac{\pi}{2} \\ E_3(t) &= \int_\pi^\infty dx \left[ \frac{1}{2}(\partial_t \eta)^2 + \frac{1}{2}(\partial_x \eta)^2 + V(\eta) \right] \end{aligned}$$

sendo que na região 2 temos que subtrair a energia do kink  $\pi/2$ . Essas energias obedecem as relações  $E_1(0) = E_{\text{osc}}$ ,  $E_2(0) = 0$ ,  $E_3(0) = 0$  e  $E_1(t) + E_2(t) + E_3(t) = E_{\text{osc}}$  nas quais  $E_{\text{osc}}$  é a energia do oscillon. Alguns exemplos da dependência de  $E_n(t)$  no tempo podem ser vistos na figura 32. Nesses gráficos é possível ver que a energia do oscillon é transferida

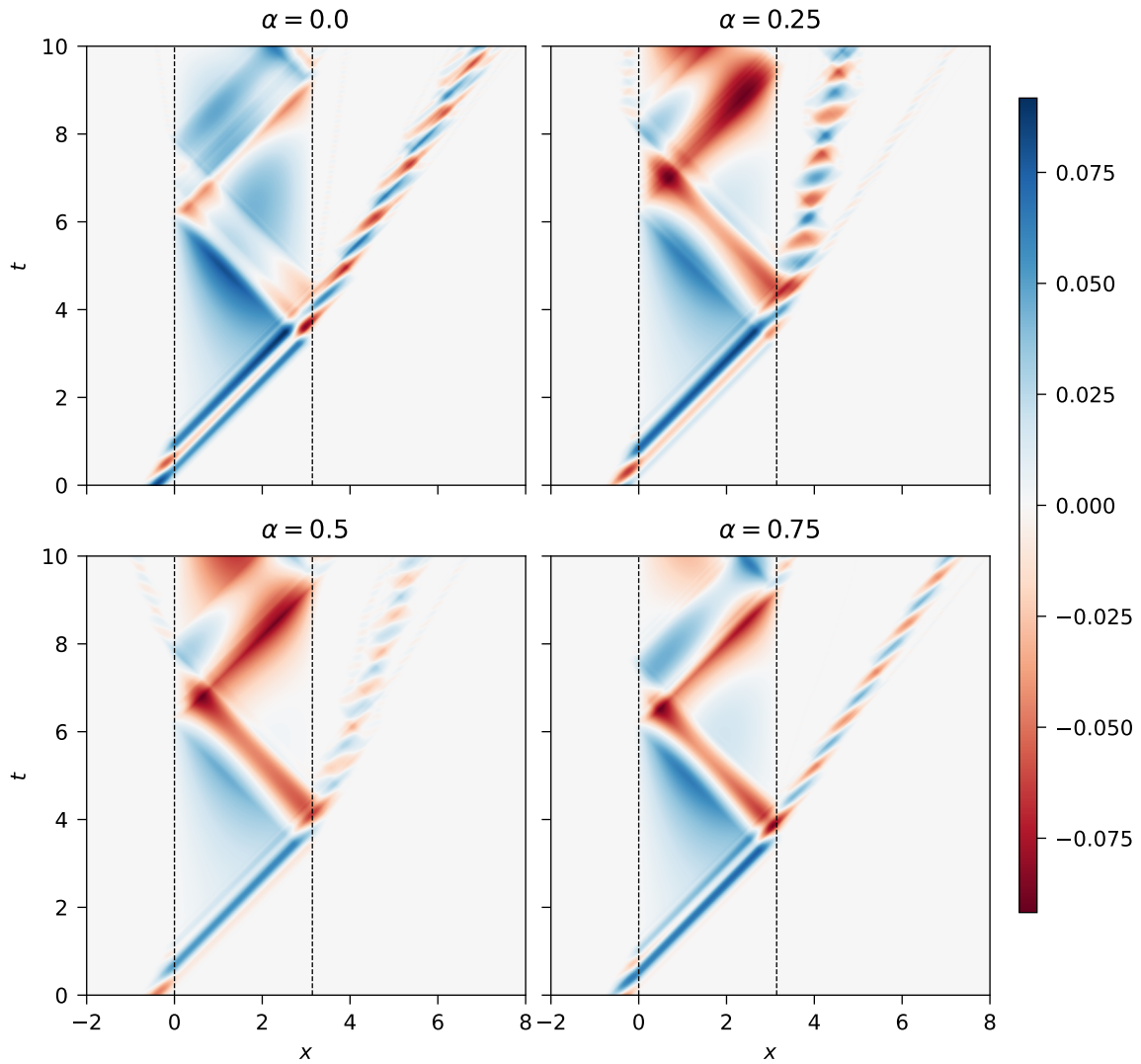


Figura 30 – Perturbação  $\chi(t,x) = \eta(t,x) - \eta_K(x)$  para simulações com  $l = 1$ ,  $v = 0,6$ ,  $v_0 = 0$  e diferentes valores de  $\alpha$ . As linhas pontilhadas delimitam o suporte do kink  $\eta_K(x)$ .

completamente da região 1 para a região 2 quando o oscillon colide com o kink. Depois que os pulsos gerados pela colisão viajam pelo kink, um oscillon é emitido na região 3, causando um queda em  $E_2$  e um aumento em  $E_3$ . No entanto, essa emissão do oscillon não é completamente eficiente, e alguma energia sobra na região 2, o que corresponde com os pulsos que são refletidos na borda direita do kink. Essa eficiência depende dos parâmetros da simulação.

Vamos procurar a dependência dessa eficiência em relação aos parâmetros de modo sistemático em nossas simulações. Para isso precisamos estimar o tempo  $t_1$  no qual o primeiro oscillon é emitido na região 3 de modo completo. Esse tempo pode ser escrito como

$$t_1 = t_a + \Delta t_t + \Delta t_e$$

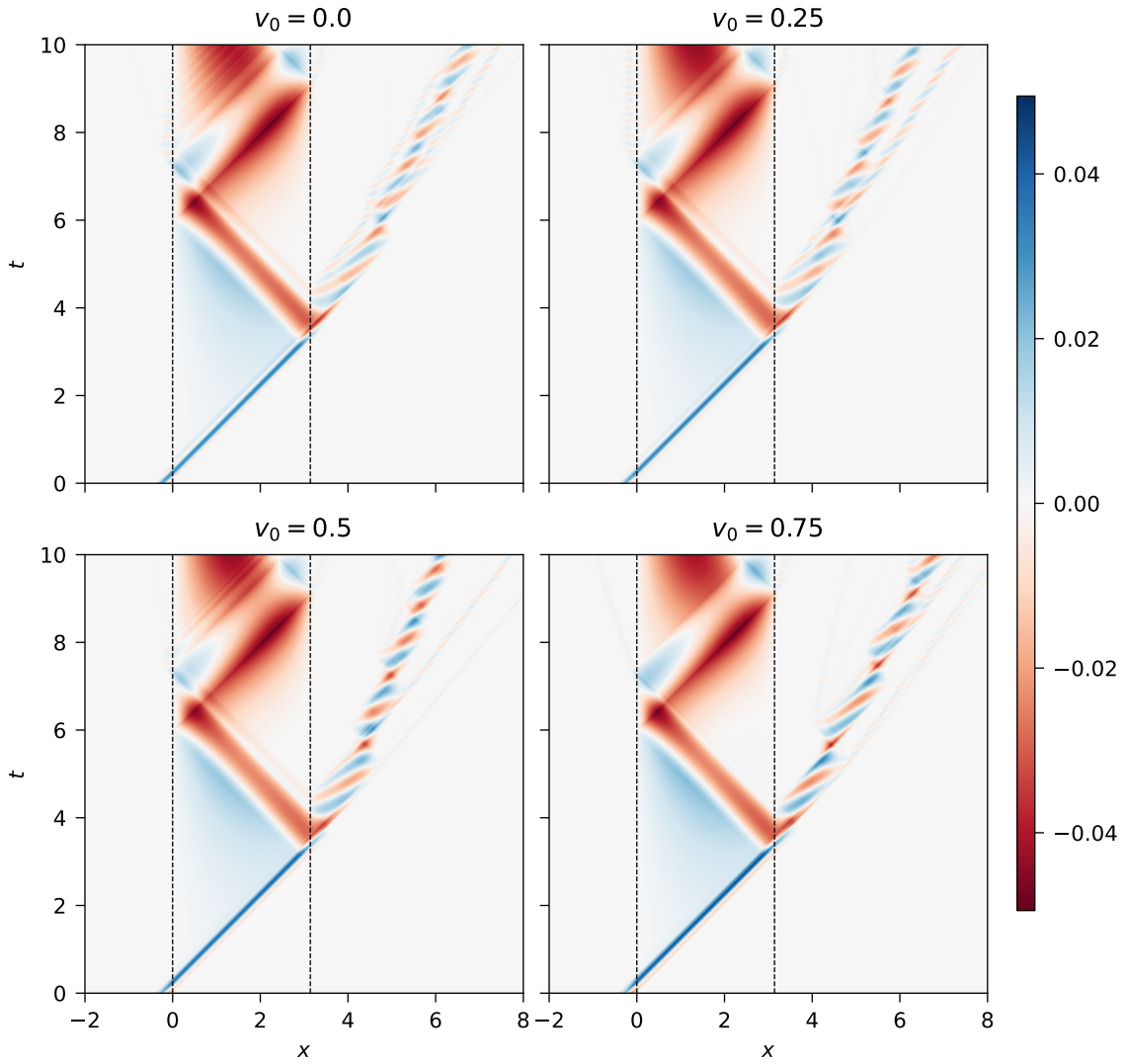


Figura 31 – Perturbação  $\chi(t, x) = \eta(t, x) - \eta_K(x)$  para simulações com  $l = 0,75$ ,  $v = 0,8$ ,  $\alpha = 0$  e diferentes valores de  $v_0$ . As linhas pontilhadas delimitam o suporte do kink  $\eta_K(x)$ .

no qual  $t_a$  no qual o oscillon é absorvido pelo kink, ou seja, o tempo no qual o oscillon passa completamente da região 1 para a região 2,  $\Delta t_t$  é o tempo que o pulso leva para atravessar o kink e  $\Delta t_e$  é o tempo necessário para o pulso da região 2 dar origem a um oscillon na região 3.

O tempo de absorção  $t_a$  pode ser estimado numericamente a partir das simulações como sendo o menor tempo para o qual

$$E_1(t_a) \leq \epsilon E_{osc}. \quad (4.1)$$

O parâmetro  $\epsilon$  representa a fração de energia remanescente na região 1 após a transição do oscillon da região 1 para a região 2. Como a absorção do oscillon acontece de modo relativamente rápido, principalmente para velocidades mais altas, o valor exato de  $\epsilon$  não é tão relevante. No que segue tomamos  $\epsilon = 0,1$ .

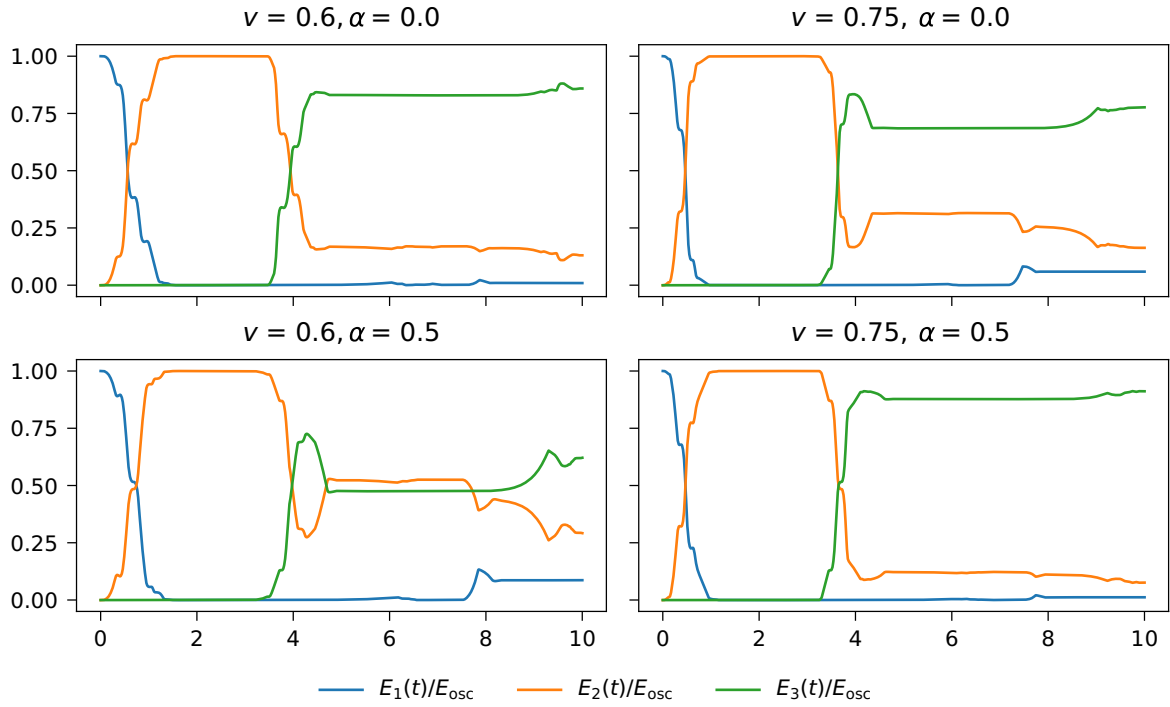


Figura 32 – Energias  $E_n(t)/E_{\text{osc}}$  como função do tempo para  $l = 1$ ,  $v_0 = 0$  e diferentes valores de  $v$  e  $\alpha$ .

O tempo de transmissão  $\Delta t_t$  pode ser estimado observando que os pulsos viajam sobre o corpo do oscillon com a velocidade da luz. Portanto tomamos  $\Delta t_t = \pi$ .

Por fim, o tempo de emissão pode ser estimado por inspeção visual das figuras 28–32. Em geral o processo de emissão parece levar cerca de uma unidade de tempo, portanto tomamos  $\Delta t_e = 1$ . Portanto  $t_1 = t_a + \pi + 1$ , com  $t_a$  sendo determinado numericamente. Note que esse tempo é físico, não sendo diretamente relacionado com os passos de tempo do método numérico.

Na figura 33 representamos a fração da energia do oscillon inicial  $E_{\text{osc}}$  carregada pelo oscillon emitido na região 3. Em cada um dos gráficos fixamos dois dos parâmetros da simulação e realizamos cerca de dez mil simulações variando os demais parâmetros. Cada uma dessas simulações foi feita com discretização do espaço com separação  $\Delta x = 5 \times 10^{-3}$  e integrada no tempo com passos  $\Delta t = 5 \times 10^{-4}$  no intervalo  $t \in [0, 10]$ .

A primeira coisa que podemos notar é que em nem todos os casos a condição (4.1) foi satisfeita dentro do tempo da simulação. Ou seja, nem sempre o oscillon é absorvido pelo kink, principalmente para baixas velocidades  $v$  e oscillons de tamanho  $l$  grande. Outra observação imediata é de que o parâmetro  $v_0$  de fato influencia pouco na eficiência com que oscillon é emitido. As maiores dependências são na fase  $\alpha$  e na velocidade  $v$ . A dependência na velocidade  $v$  é particularmente interessante porque ela é não-monotônica. Apesar da eficiência aumentar de modo geral com a velocidade, existem faixas de velocidade para as quais a eficiência é baixa. A posição específica dessas faixas de velocidade depende dos

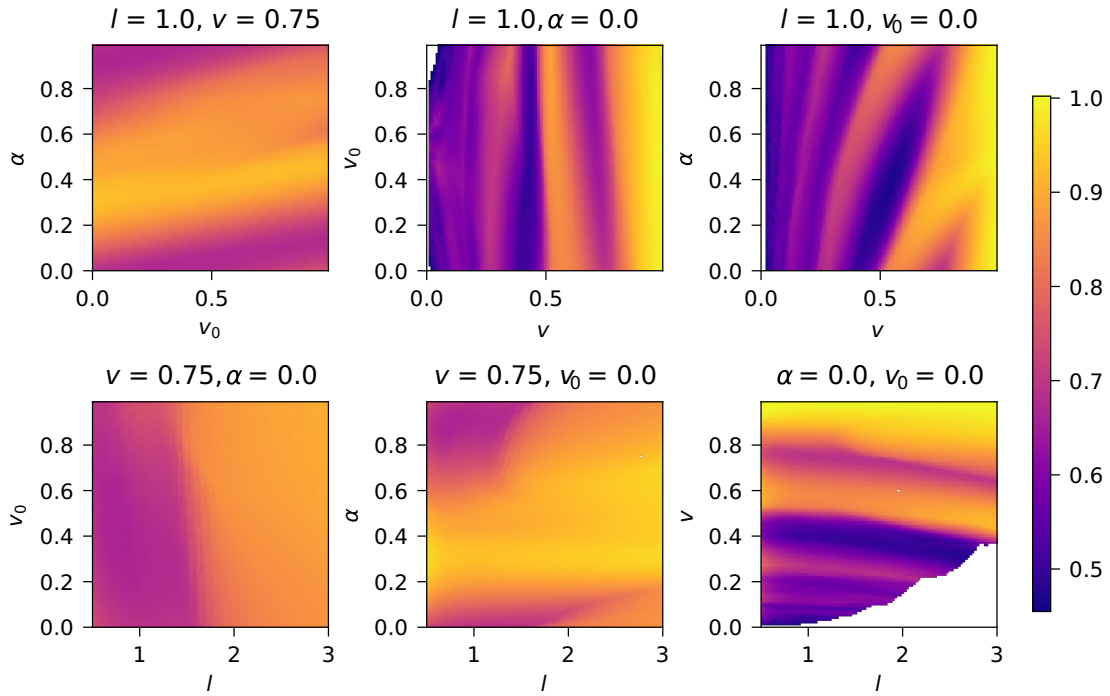


Figura 33 –  $E_3(t_1)/E_{\text{osc}}$  como função de dois dos parâmetros da simulação, mantendo os dois parâmetros remanescentes fixos. Para as regiões em branco a condição (4.1) não foi satisfeita para nenhum  $t_1 \leq 10$ , ou seja, não há dados.

outros parâmetros, principalmente de  $\alpha$  e  $l$ .

Como foi discutido aqui, a dinâmica dos processos de espalhamento é fortemente influenciada pela propagação de sinais sobre o corpo do kink e o processo pelo qual esses sinais dão origem a oscillons. Analisando a evolução do perfil da perturbação  $\chi(t, x)$  nos seus instantes iniciais (figura 34), podemos ver que o perfil do oscillon se altera pouco nesses primeiros instante. Isso levanta a possibilidade que a adição de um perfil de oscillon diretamente sobre um kink pode replicar a emissão de oscillons na região 3 observada nos processos de espalhamento.

Nas próximas seções vamos voltar nossa atenção à dinâmica de perturbações sobre o corpo de um kink. Iremos analisar numericamente a evolução temporal de configurações iniciais nas quais o perfil de um oscillon é adicionado na região do suporte do oscillon. Também iremos procurar abordagens analíticas para estudar a propagação dos pulsos com velocidade da luz observados sobre os kinks.

#### 4.1 DINÂMICA DAS PERTURBAÇÕES

Vamos estudar agora a dinâmica de perturbações sobre o perfil de um kink do modelo quadrático periódico. Motivados pela observação de que o perfil de um oscillon se altera pouco no processo de se tornar um pulso sobre o kink durante o espalhamento, vamos considerar perturbações com a forma de um oscillon exato do modelo de signum-Gordon.

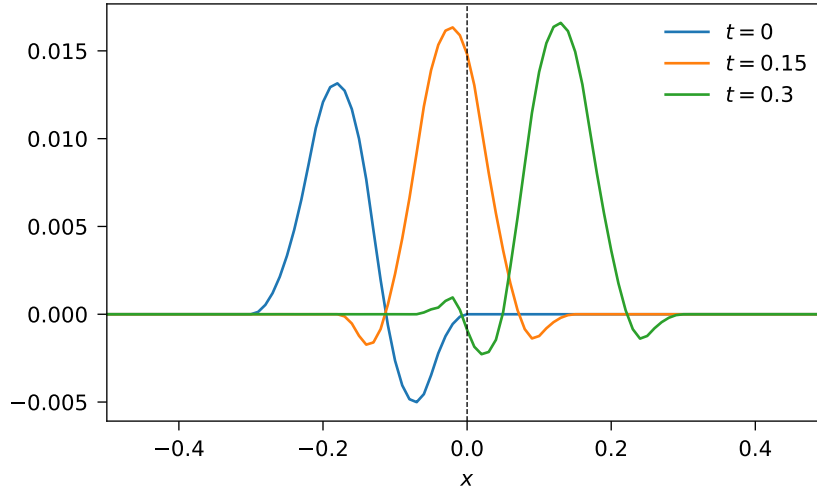


Figura 34 – Evolução no tempo do perfil da perturbação  $\chi(t, x)$  para  $l = 0,5$ ,  $v = 0,8$ ,  $\alpha = 0$ ,  $v_0 = 0$ . O oscillon é absorvido pelo kink sem alterações drásticas no perfil do campo.

Esse tipo de configurações é descrita pelas condições iniciais

$$\begin{aligned}\eta(0, x) &= \eta_K(x) + \chi_{\text{osc}}(0, x + x_0), \\ \partial_t \eta(0, x) &= \partial_t \chi_{\text{osc}}(0, x + x_0),\end{aligned}$$

nas quais  $x_0$  é um parâmetro de translação que nos permite escolher a posição exata do oscillon sobre o kink. Vamos nos restringir a valores de  $x_0$  tais que o suporte do oscillon esteja completamente localizado sobre o suporte do kink.

Note que a superposição de um oscillon sobre um kink para tempos arbitrários não corresponde à uma solução das equações do campo, uma vez que estas não são lineares. Além disso, o oscillon é uma solução exata apenas no modelo de signum-Gordon, sendo válido como solução do modelo mais completo apenas como uma aproximação quando próximo dos vácuos. Em todo caso, ainda podemos considerar configurações dessa forma. Essa escolha de perturbação é justificada tanto pela fenomenologia do processo de espalhamento, que mostra que oscillons são absorvidos pelo kink com pouca alteração na sua forma, e pelo fato de que as funções que descrevem o oscillon são pulsos localizados, sendo assim boas formas de perturbar um kink de modo local.

No entanto, não são todas as possibilidades de configuração que são úteis. Um oscillon isolado com  $v = 0$  possui momento linear nulo. No entanto, a configuração na qual esse oscillon é somado ao perfil de um kink possui momento linear dado pela expressão

$$p = - \int_{-\infty}^{\infty} dx \partial_t \eta \partial_x \eta = - \int dx \partial_t \chi_{\text{osc}}(0, x) \partial_x \eta_K(0, x)$$

que não é zero em geral. Ou seja, apesar da perturbação e do kink não terem momento linear separadamente, o mesmo não é necessariamente válido para a sobreposição dos



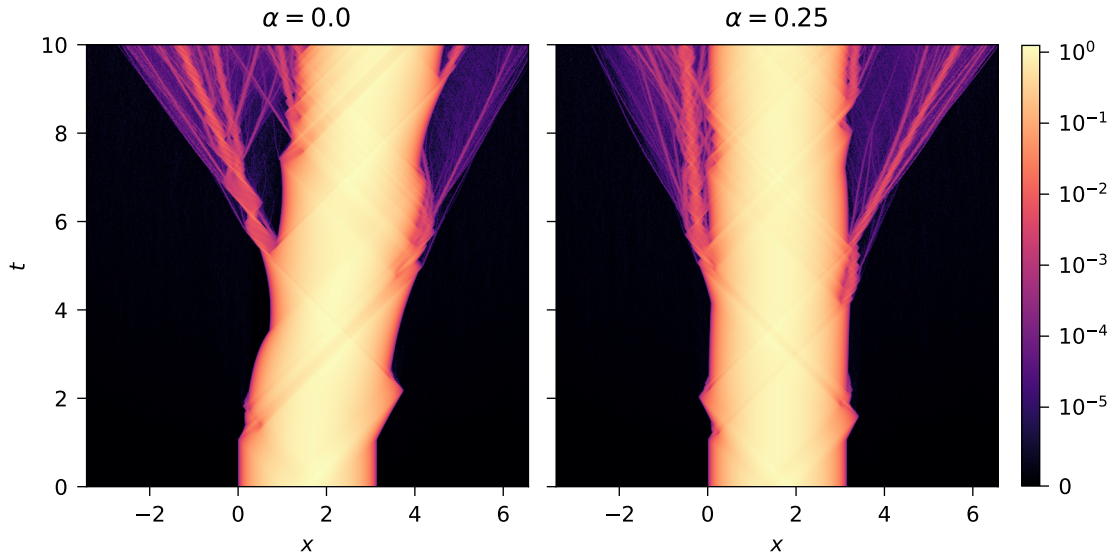


Figura 35 – Densidade de energia para a sobreposição de um oscillon e um kink. O oscillon e o kink possuem pontos centrais alinhados. Os oscillons têm parâmetros  $l = 1$ ,  $v = 0$ ,  $v_0 = 0$ ,  $\alpha = 0$  (esquerda) ou  $\alpha = 0,25$  (direita).

dois. Por exemplo, na figura 35 temos a densidade de energia para uma configuração que inicialmente consistia de um oscillon com  $l = 1$ ,  $v = 0$ ,  $v_0 = 0$  e fase  $\alpha$  sobreposto a um kink de modo que os pontos centrais de cada solução estavam alinhados. No caso  $\alpha = 0$ , a configuração inicial possui  $p \neq 0$ , e o kink absorve esse momento linear, se deslocando para a direita. Já no caso  $\alpha = 0,25$ , o momento linear total é nulo porque para um oscillon em repouso  $\partial_t \phi(0,25l, x) = 0$ . O mesmo acontece para a fase  $\alpha = 0,75$ .

Para as fases  $\alpha \in \{0,25, 0,75\}$  o kink permanece parado no seu lugar, portanto podemos analisar a evolução da perturbação  $\chi(t, x) = \eta(t, x) - \eta_K(x)$ . Os resultados nesses casos podem ser vistos na figura 36. Primeiramente, podemos notar que esses dois casos são essencialmente o mesmo, refletidos no espaço em torno do ponto central do kink e com o sinal de  $\chi(t, x)$  invertido. Isso acontece porque tanto as equações de campo quanto as condições iniciais são simétricas pela reflexão do eixo  $x$  em torno do ponto central do kink juntamente com a transformação  $\eta \rightarrow 2 - \eta$ . Para essas fases, o perfil do oscillon dá origem a dois pulsos, que se propagam em direções opostas. Cada um desses pulsos reflete nas laterais do kink. Para  $t \approx 5$ , um desses pulsos dá origem a um oscillon.

Esse comportamento é similar ao visto nos processos de espalhamento. As principais diferenças estão no número de pulsos e na facilidade com que oscillons são emitidos para fora do suporte do kink. Essas diferenças são naturais, já que estamos considerando oscillons com  $v = 0$ .

Quando consideramos um caso com  $v = 0,75$  (figura 37) apenas um pulso é emitido a partir do perfil do oscillon, deixando um rastro que cresce com o tempo, de modo bastante similar ao que acontece no espalhamento. No entanto, para certas fases, por exemplo

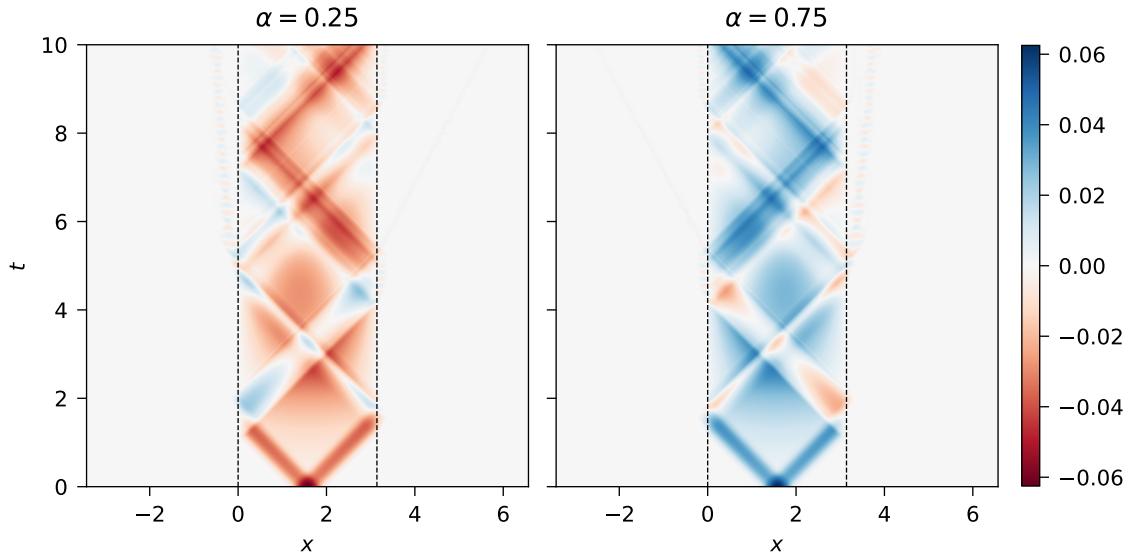


Figura 36 – Evolução da perturbação  $\chi(t, x) = \eta(t, x) - \eta_K(x)$  para a sobreposição de um oscillon e um kink. O oscillon e o kink possuem pontos centrais alinhados. O oscillon tem parâmetros  $l = 1$ ,  $v = 0$ ,  $v_0 = 0$  e dois valores de  $\alpha$  distintos. As linhas pontilhadas delimitam o suporte do kink.

$\alpha = 0,25$ , o kink começa a se mover, o que não acontecia no processo de espalhamento.

Podemos obter resultados em que o suporte do kink não se move colocando o oscillon com a sua borda esquerda alinhada com a borda esquerda do kink (figura 38). Esses casos são portanto ainda mais similares aos casos do espalhamento. Essa similaridade é de se esperar, considerando que no caso do espalhamento o perfil do oscillon se altera pouco durante do período em que ele é absorvido pelo kink (desde que a velocidade seja grande o suficiente) e que o kink tem valores de campo pequenos nas regiões próxima à sua borda esquerda.

Em certas condições, é possível obter a evolução temporal das perturbações sobre o kink de modo independente das simulações. Na região entre os vácuos  $\eta = 0$  e  $\eta = 2$ , a equação do campo possui a forma

$$\partial_t^2 \eta - \partial_x^2 \eta + \text{sgn}(\eta) - \eta = 0.$$

Escrevemos o campo na forma  $\eta(t, x) = \eta_K(t, x) + \chi(t, x)$ , na qual  $\chi(t, x)$  representa a parte do campo correspondente apenas à perturbação. Neste caso, é possível reescrever a equação de movimento

$$\partial_t^2 \eta_K - \partial_x^2 \eta_K + \text{sgn}(\eta_K + \chi) - \eta_K + \partial_t^2 \chi - \partial_x^2 \chi - \chi = 0.$$

Se a perturbação for pequena o suficiente para que  $\text{sgn}(\eta_K + \chi) = \text{sgn} \eta_K$ , então é possível simplificar a equação na forma

$$\partial_t^2 \chi - \partial_x^2 \chi - \chi = 0.$$

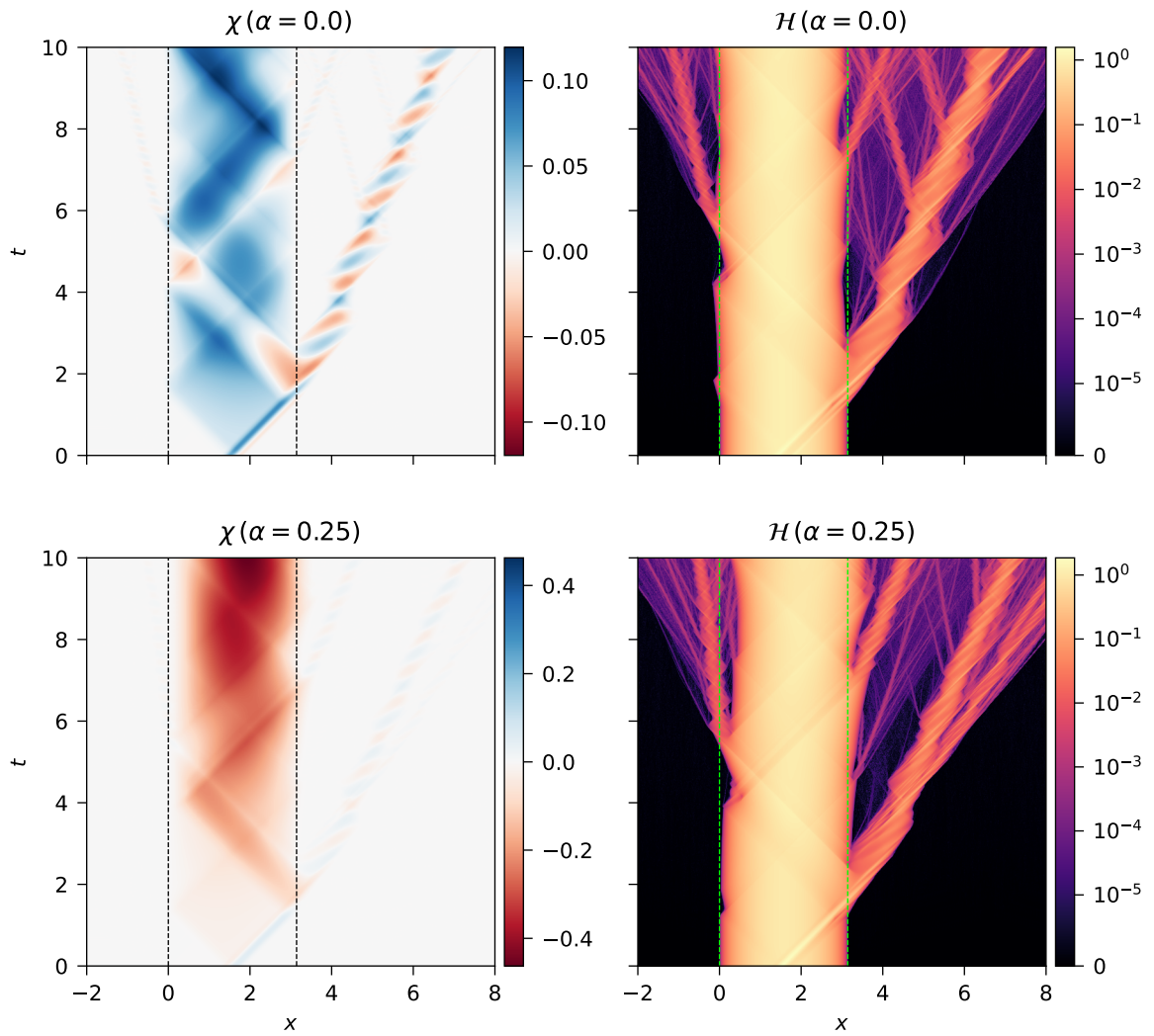


Figura 37 – Perturbação  $\chi(t, x)$  e densidade hamiltoniana  $\mathcal{H}(t, x)$  para a sobreposição de um oscillon e um kink. O oscillon e o kink possuem pontos centrais alinhados. O oscillon tem parâmetros  $l = 1$ ,  $v = 0,75$ ,  $v_0 = 0$  e dois valores de  $\alpha$  distintos. Para  $\alpha = 0,25$  o kink começa a se mover, fazendo com que  $\chi(t, x)$  cresça com o tempo.

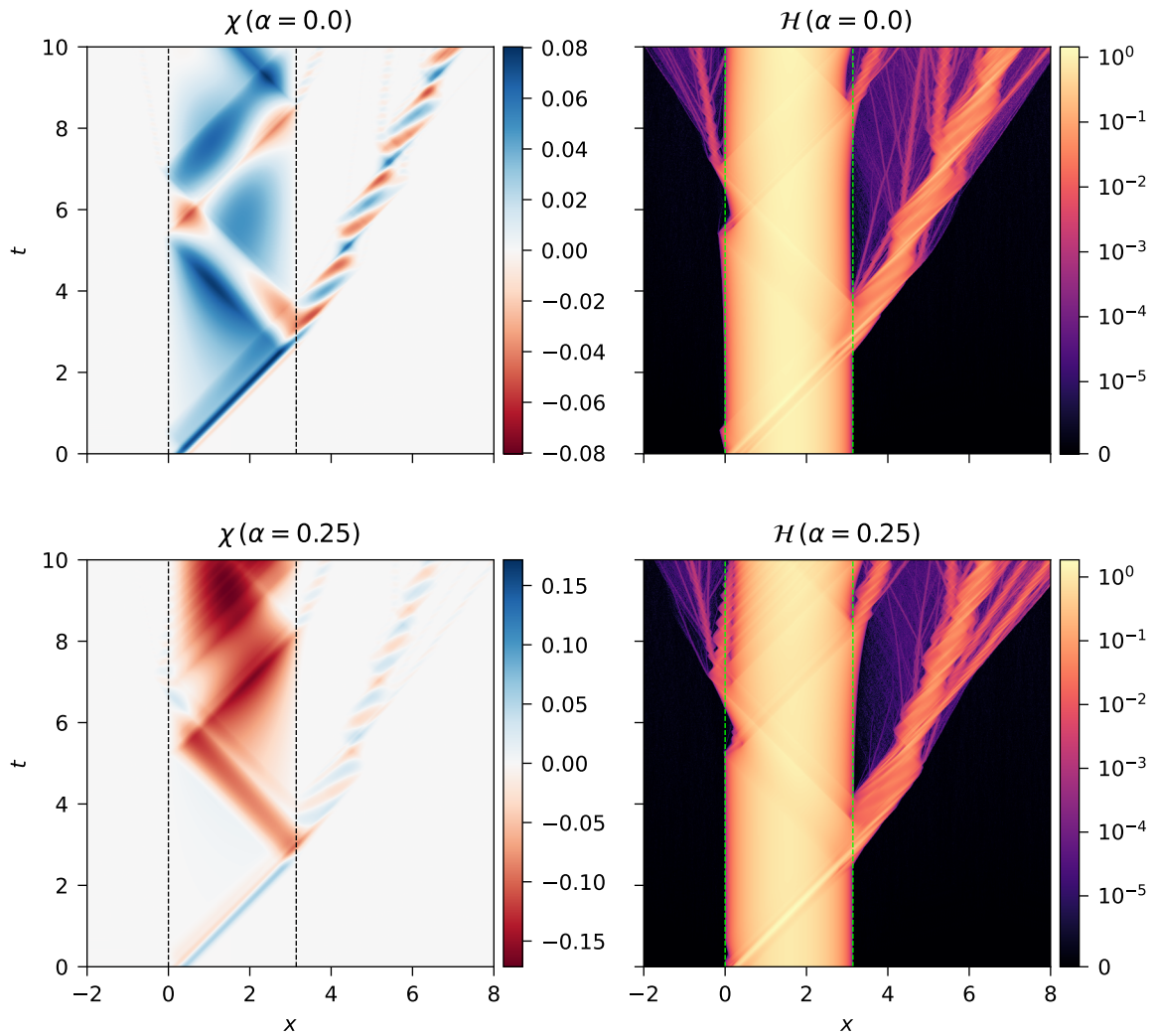


Figura 38 – Perturbação  $\chi(t, x)$  e densidade hamiltoniana  $\mathcal{H}(t, x)$  para a sobreposição de um oscillon e um kink. O oscillon e o kink suas bordas esquerdas alinhados. O oscillon tem parâmetros  $l = 1$ ,  $v = 0,75$ ,  $v_0 = 0$  e dois valores de  $\alpha$  distintos.

Essa é a tradicional equação de Klein-Gordon para  $m^2 = -1$  cujas soluções podem ser escritas como sobreposições das ondas planas  $e^{i(kx + \omega_k t)}$  com relação de dispersão  $-\omega_k^2 + k^2 - 1 = 0$ .

Usando a relação de dispersão, é possível obter a seguinte fórmula para a perturbação:

$$\begin{aligned} \chi(t, x) = & \int_{k^2 \geq 1} dk \left[ a(k) e^{i\sqrt{k^2-1}t} + b(k) e^{-i\sqrt{k^2-1}t} \right] e^{ikx} \\ & + \int_{k^2 \leq 1} dk \left[ a(k) e^{\sqrt{1-k^2}t} + b(k) e^{-\sqrt{1-k^2}t} \right] e^{ikx}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Se as condições iniciais  $\chi(0, x)$  e  $\partial_t \chi(0, x)$  e suas transformadas de Fourier forem conhecidas

na forma

$$\begin{aligned}\chi(0, x) &= f(x) = \int dk \tilde{f}(k) e^{ikx}, \\ \partial_t \chi(0, x) &= g(x) = \int dk \tilde{g}(k) e^{ikx}\end{aligned}$$

podemos comparar as condições iniciais com a expressão (4.2) e obter as expressões

$$\begin{aligned}\tilde{f}(k) &= a(k) + b(k), \\ \tilde{g}(k) &= \begin{cases} i\sqrt{k^2 - 1} [a(k) - b(k)] & \text{se } k^2 \geq 1, \\ \sqrt{1 - k^2} [a(k) - b(k)] & \text{se } k^2 < 1, \end{cases}\end{aligned}$$

nas quais  $\tilde{f}(k)$  e  $\tilde{g}(k)$  são as transformadas de Fourier das condições iniciais. Finalmente, podemos isolar as expressões

$$\begin{aligned}a(k) &= \begin{cases} \frac{1}{2} \left[ \tilde{f}(k) + \frac{1}{i\sqrt{k^2 - 1}} \tilde{g}(k) \right] & \text{se } k^2 \geq 1, \\ \frac{1}{2} \left[ \tilde{f}(k) + \frac{1}{\sqrt{1 - k^2}} \tilde{g}(k) \right] & \text{se } k^2 < 1, \end{cases} \\ b(k) &= \begin{cases} \frac{1}{2} \left[ \tilde{f}(k) - \frac{1}{i\sqrt{k^2 - 1}} \tilde{g}(k) \right] & \text{se } k^2 \geq 1, \\ \frac{1}{2} \left[ \tilde{f}(k) - \frac{1}{\sqrt{1 - k^2}} \tilde{g}(k) \right] & \text{se } k^2 < 1. \end{cases}\end{aligned}$$

A fórmula (4.2) em termos de  $\tilde{f}(k)$  e  $\tilde{g}(k)$  é assim escrita como

$$\begin{aligned}\chi(t, x) &= \int_{k^2 \geq 1} dk \left[ \tilde{f}(k) \cos(\sqrt{k^2 - 1}t) + \frac{\tilde{g}(k)}{\sqrt{k^2 - 1}} \sin(\sqrt{k^2 - 1}t) \right] e^{ikx} \\ &+ \int_{k^2 \leq 1} dk \left[ \tilde{f}(k) \cosh(\sqrt{1 - k^2}t) + \frac{\tilde{g}(k)}{\sqrt{1 - k^2}} \sinh(\sqrt{1 - k^2}t) \right] e^{ikx}.\end{aligned}\tag{4.3}$$

Por completeza, escrevemos também as fórmulas para as transformadas de Fourier das condições iniciais:

$$\begin{aligned}\tilde{f}(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{2\pi} f(x) e^{-ikx}, \\ \tilde{g}(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{2\pi} g(x) e^{-ikx}.\end{aligned}$$

Expressamos a integral formalmente sobre toda a reta real, mas  $f(x)$  e  $g(x)$  devem ter suportes compactos localizados dentro do kink, portanto somente nesses suportes o integrando é diferente de zero. Reduzimos o problema de encontrar a evolução temporal da perturbação  $\chi(t, x)$  a um problema de transformadas de Fourier e suas inversas. Especificamente, a transformada de Fourier da perturbação é dada pelo integrando em (4.3), valendo

$$\tilde{\chi}(t, k) = \begin{cases} \tilde{f}(k) \cos(\sqrt{k^2 - 1}t) + \frac{1}{\sqrt{k^2 - 1}} \tilde{g}(k) \sin(\sqrt{k^2 - 1}t) & \text{se } k^2 \geq 1, \\ \tilde{f}(k) \cosh(\sqrt{1 - k^2}t) + \frac{1}{\sqrt{1 - k^2}} \tilde{g}(k) \sinh(\sqrt{1 - k^2}t) & \text{se } k^2 < 1. \end{cases}$$

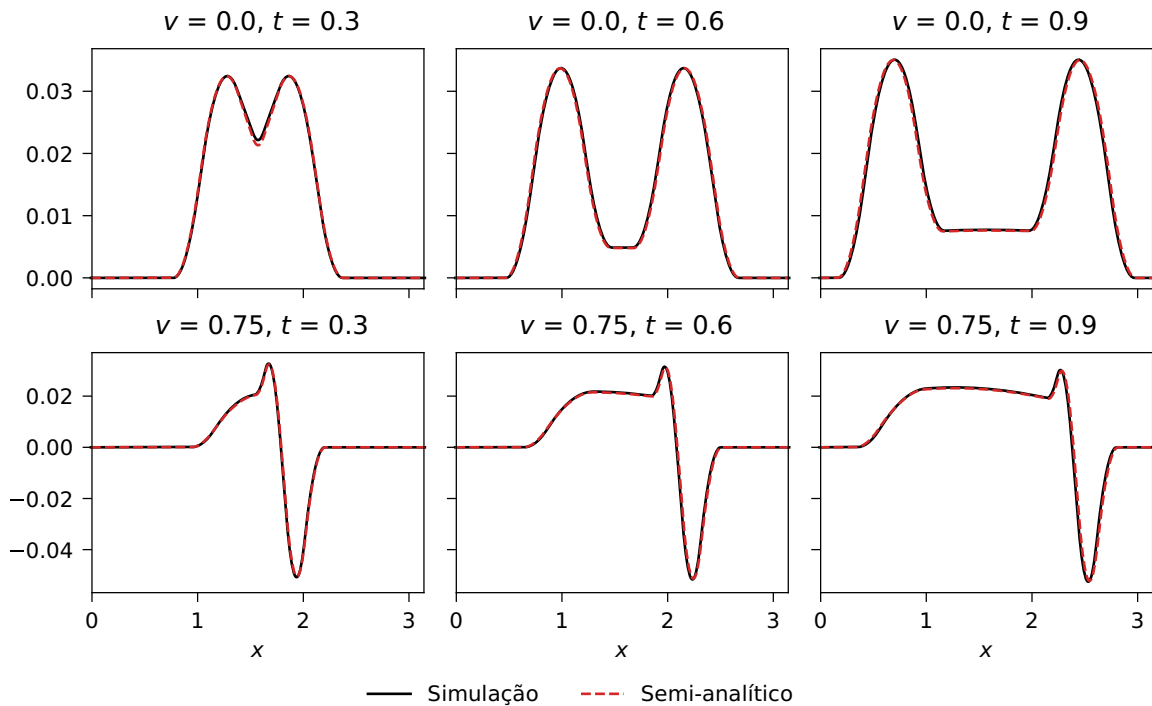


Figura 39 – Comparação entre resultado das simulações e resultado semi-analítico para amplitude da perturbação  $\chi(t, x)$  como função da posição para diferentes tempos no caso  $l = 1$ ,  $\alpha = 0,75$  e  $v_0 = 0$ . A primeira linha de gráficos é o caso  $v = 0$  e a segunda linha  $v = 0,75$ . O oscillon foi posicionado de modo que seu ponto central esteja alinhado com o ponto central do kink.

Infelizmente, em geral a transformada inversa dessa função não pode ser resolvida analiticamente. No entanto, transformadas de Fourier podem ser facilmente calculadas numericamente através da biblioteca FFTW [72].

É importante observar que, apesar de estarmos novamente recorrendo a ferramentas numéricas, estas são de uma natureza fundamentalmente diferente das simulações realizadas anteriormente. Enquanto as simulações integram as equações de movimento completas, partindo de condições iniciais incluindo tanto o kink quanto a perturbação, estamos agora usando uma redução do problema, sem a necessidade de informar diretamente o programa das equações completas ou da presença do kink. Por esse motivo, podemos dizer que a presente abordagem é semi-analítica, e provê uma descrição suficientemente distinta das simulações para que possamos comparar ambos os resultados e checar a validade do trabalho desenvolvido. Comparando os resultados das duas abordagens (figura 39) vemos que ambos os métodos de calcular a perturbação são consistentes.

Note que a solução para a  $\chi(t, x)$  possui tanto modos oscilatórios ( $k^2 \geq 1$ ) quanto modos exponenciais ( $k^2 < 1$ ). Caso  $\chi(t, x)$  representasse a evolução temporal de um campo livre, os modos exponenciais deveriam ser explicitamente eliminados, para impedir que a amplitude do campo crescesse indefinidamente. A eliminação desses modos tornaria a solução  $\chi(t, x)$  não-causal, permitindo a propagação de sinais com velocidade maior que

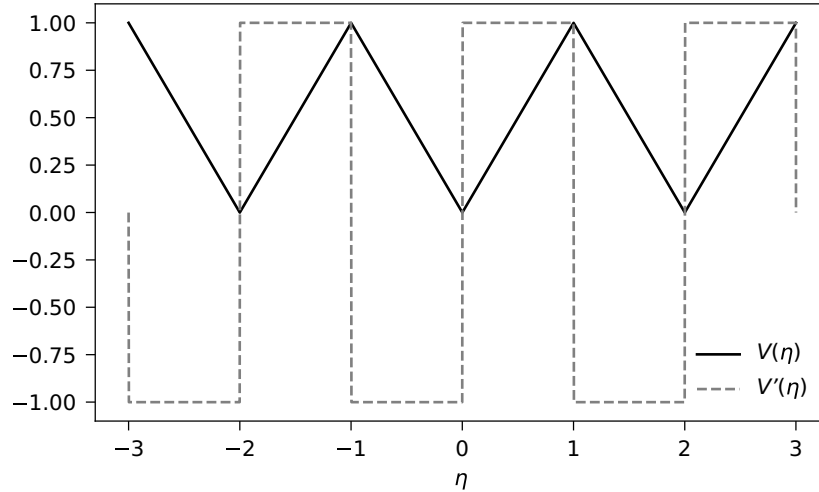


Figura 40 – Potencial e sua derivada para modelo simplificado.

a da luz. No entanto, para o nosso caso, a equação de Klein-Gordon com  $m^2 = -1$  é válida apenas enquanto a condição  $\text{sgn}(\eta_K + \chi) = \text{sgn} \eta_K$  for satisfeita. Ou seja, quando a amplitude de  $\chi$  for grande o suficiente para mudar o sinal de  $\eta$ , voltamos a ter que considerar o modelo completo. Dessa forma não é necessário excluir os modos exponenciais e não temos problemas de causalidade [73].

## 4.2 MODELO SIMPLIFICADO

O potencial do modelo quadrático periódico é suficientemente complicado para que mesmo a evolução temporal de pequenas perturbações sobre kinks não seja solúvel de modo completamente analítico. Portanto, é interessante encontrar um modelo simplificado, capaz de reproduzir as principais características do modelo em questão, mas que permita um tratamento analítico de certos problemas. Uma possibilidade de simplificar o problema é substituir as parábolas do potencial por duas retas, uma de inclinação positiva e a outra de inclinação negativa. A forma específica deste potencial simplificado é

$$V_0(\eta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (1 - |\eta - 2n - 1|)h_n(\eta),$$

$$h_n(\eta) := \theta(\eta - 2n) - \theta(\eta - 2n - 2).$$

A derivada do potencial é dada por

$$V'_0(\eta) = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{sgn}(\eta - 2n - 1)h_n(\eta)$$

e devemos novamente impor a condição de que  $V'_0(\eta_{\min}) = 0$  para os pontos de mínimo  $\eta_{\min}$  do potencial.

Nas regiões  $|\eta - 2n| < 1$ , o potencial tem a forma de V, centrada nos pontos de mínimo (figura 40), sendo idêntico ao modelo de signum-Gordon nessas regiões. Portanto, soluções do modelo de signum-Gordon são soluções exatas para esse *toy model*, desde que a amplitude do campo em relação aos vácuos respeite a relação  $|\eta - 2n| < 1$ . Um ponto no qual o modelo simplificado se diferencia do modelo anterior é na presença de máximos não-analíticos, enquanto o modelo quadrático possui máximos suaves.

O modelo modificado possui vários vácuos, o que permite a existência de kinks, ao contrário do modelo de signum-Gordon. De modo análogo ao caso do modelo quadrático, podemos integrar a equação BPS e obter a seguinte solução de kink

$$\eta_K(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0, \\ \frac{1}{2}x^2 & \text{se } 0 \leq x \leq \sqrt{2}, \\ 2 - \frac{1}{2}(x - 2\sqrt{2})^2 & \text{se } \sqrt{2} \leq x \leq 2\sqrt{2}, \\ 2 & \text{se } 2\sqrt{2} < x. \end{cases}$$

Vamos considerar novamente o comportamento de pequenas perturbações sobre o corpo dos kink. Para perturbações na forma de oscillons, vamos ter condições iniciais

$$\begin{aligned} \eta(0, x) &= \eta_K(x) + \chi_{\text{osc}}(0, x), \\ \partial_t \eta(0, x) &= \partial_t \chi_{\text{osc}}(0, x). \end{aligned}$$

Na ausência do kink, a evolução da perturbação seria governada pela equação de signum-Gordon, portanto tomaria a forma de um oscillon exato. No entanto, na presença do kink, a perturbação  $\chi(t, x) = \eta(t, x) - \eta_K(x)$  tem a equação de movimento

$$\partial_t^2 \chi - \partial_x^2 \chi + \text{sgn}(\eta - 1) - \text{sgn}(\eta_K - 1) = 0$$

contanto que a amplitude do campo obedeça a condição  $0 < \eta < 2$ . Nos casos em que  $\text{sgn}(\eta - 1) = \text{sgn}(\eta_K - 1)$ , a perturbação irá obedecer a equação de onda  $\partial_t^2 \chi - \partial_x^2 \chi = 0$  e terá soluções na forma  $\chi(t, x) = F(x + t) + G(x - t)$ .

Note que a condição  $\text{sgn}(\eta - 1) = \text{sgn}(\eta_K - 1)$  exclui as regiões próximas do ponto no qual  $\eta_K(x) = 1$ . Em particular, quando essa condição não é satisfeita, o termo resultante nas equações de movimento causa uma assimetria na evolução da perturbação ainda antes dela alcançar as bordas do kink (figura 41).

Portanto vamos nos concentrar na evolução de perturbações localizadas inicialmente em regiões que não incluam o ponto central do kink. Para condições iniciais na forma

$$\chi(0, x) = f(x), \quad \partial_t \chi(0, x) = g(x)$$

é possível escrever a seguinte expressão para a perturbação

$$\chi(t, x) = \frac{1}{2} [f(x + t) + f(x - t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} ds g(s) \quad (4.4)$$



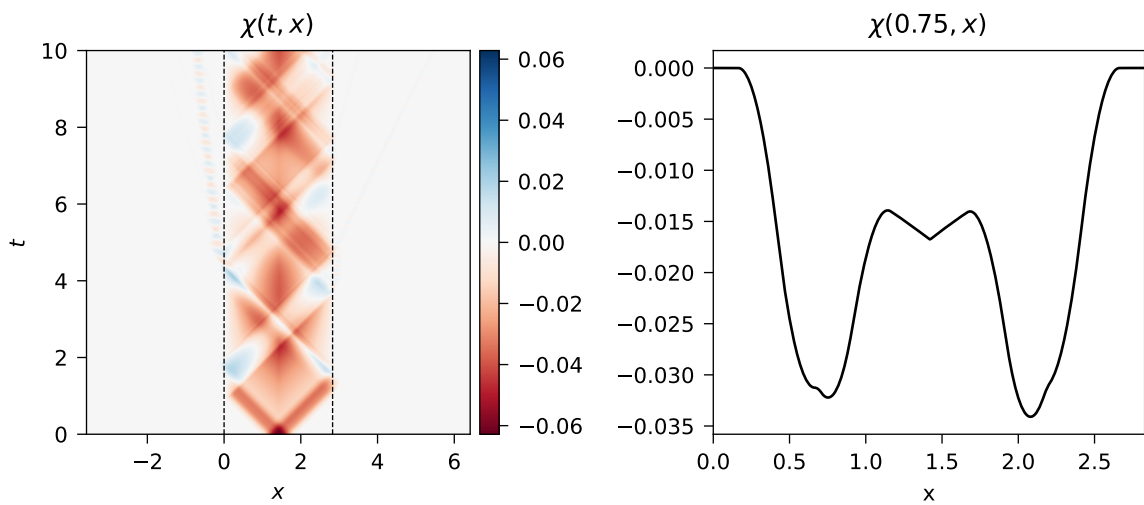


Figura 41 – Evolução da perturbação  $\chi(t, x)$  (esquerda) para caso do oscillon localizado no centro do kink e com parâmetros  $l = 1$ ,  $v = 0$ ,  $\alpha = 0,25$ ,  $v_0 = 0$ . A localização da perturbação causa uma assimetria no perfil da perturbação (direita) que pode ser vista ainda antes da mesma alcançar as bordas do kink.

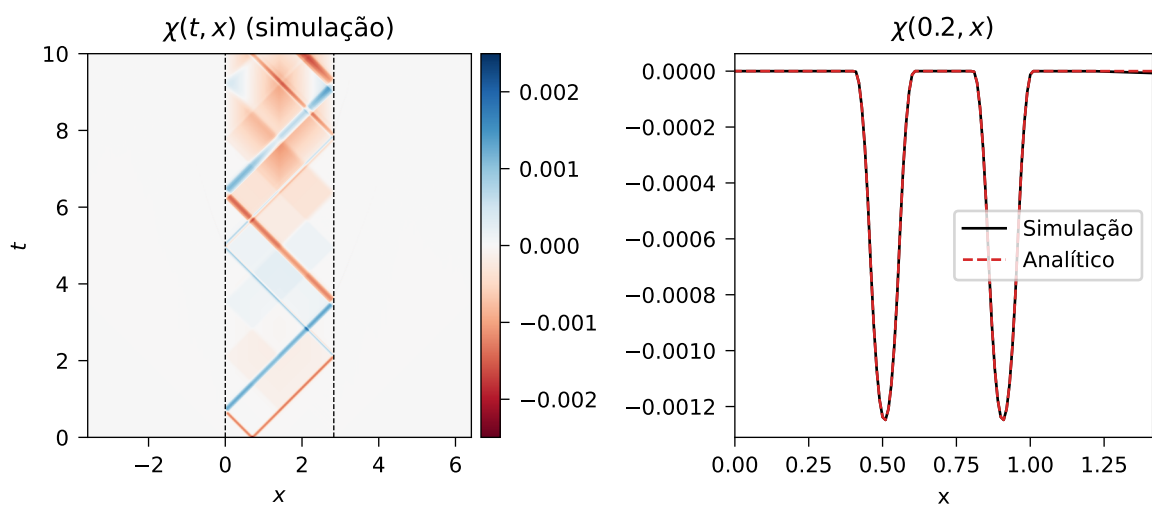


Figura 42 – Comparação entre simulação e resultado analítico para  $l = 1$ ,  $v = 0$ ,  $\alpha = 0,25$ ,  $v_0 = 0$ . Perfil do oscillon inicialmente centrado no ponto  $x = \sqrt{2}/2$ .

contanto que  $\text{sgn}(\eta - 1) = \text{sgn}(\eta_K - 1)$  e  $0 < \eta < 2$ .

Vamos considerar primeiro o caso mais simples no qual a perturbação corresponde ao perfil de um oscillon em repouso ( $v = 0$ ) com fase  $\alpha = 0,25$ . Por simplicidade vamos tomar  $v_0 = 0$ . Para esse caso  $g(x) = 0$  e a função  $f(x)$  é dada em pedaços

$$f_k(x) = \phi_k \left( x - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{l}{2} \right)$$

com  $k \in \{L_2, C, R_2\}$ . As soluções de oscillon nos pedaços relevantes são dadas pelas expressões

$$\begin{aligned} \phi_{L_2}(x) &= -\frac{x^2}{2}, \\ \phi_C(x) &= \frac{x^2}{2} - \frac{lx}{2} + \frac{l^2}{16}, \\ \phi_{R_2}(x) &= -\frac{(l-x)^2}{2}. \end{aligned}$$

Nesse caso, a perturbação é simplesmente dois pulsos compactos  $f(x \pm t)/2$ . O resultado desse cálculo analítico é consistente com o resultado da simulação (figura 42).

Vamos considerar agora o caso mais complicado, quando  $v = 0,75$ . Para um oscillon com  $l = 1$  e  $\alpha = v_0 = 0$ , o perfil do oscillon consiste de cinco soluções parciais conectadas nos pontos

$$x_1 = \frac{2}{7}\gamma^{-1}, \quad x_2 = \frac{4}{7}\gamma^{-1}, \quad x_3 = \frac{2}{3}\gamma^{-1}, \quad x_4 = \frac{6}{7}\gamma^{-1}. \quad (4.5)$$

Em  $x_0 = 0$  e  $x_5 = \gamma^{-1}$  o oscillon se conecta com o vácuo  $\varphi = 0$  (do modelo de signum-Gordon). Os pedaços do campo do oscillon  $\varphi_k(0, x)$  e sua derivada  $\partial_t \varphi_k(0, x)$  são dados pelas fórmulas

$$\begin{aligned} \varphi_1(0, x) &= \frac{15}{14}x^2, & \partial_t \varphi_1(0, x) &= -\frac{13}{7}x & \text{se } x_0 < x < x_1, \\ \varphi_2(0, x) &= -\frac{17}{7}x^2 + \frac{\sqrt{7}}{2}x - \frac{1}{8}, & \partial_t \varphi_2(0, x) &= \frac{36}{7}x - \frac{\sqrt{7}}{2} & \text{se } x_1 < x < x_2, \\ \varphi_3(0, x) &= \frac{15}{14}x^2 - \frac{\sqrt{7}}{2}x + \frac{3}{8}, & \partial_t \varphi_3(0, x) &= -\frac{13}{7}x + \frac{\sqrt{7}}{2} & \text{se } x_2 < x < x_3, \\ \varphi_4(0, x) &= \frac{33}{14}x^2 - \frac{13}{2\sqrt{7}}x + \frac{5}{8}, & \partial_t \varphi_4(0, x) &= -\frac{37}{7}x + \frac{15}{2\sqrt{7}} & \text{se } x_3 < x < x_4, \\ \varphi_5(0, x) &= -\frac{8}{7} \left( x - \frac{\sqrt{7}}{4} \right)^2, & \partial_t \varphi_5(0, x) &= \frac{12}{7} \left( x - \frac{\sqrt{7}}{4} \right) & \text{se } x_4 < x < x_5. \end{aligned}$$

A perturbação para um oscillon de tamanho  $\epsilon$  pode ser obtida através de uma transformação de escala combinada com uma translação. Em particular, queremos que o centro do oscillon esteja no ponto  $x_c = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\epsilon}{2\gamma}$ , a meio caminho da borda esquerda e do centro do kink. As

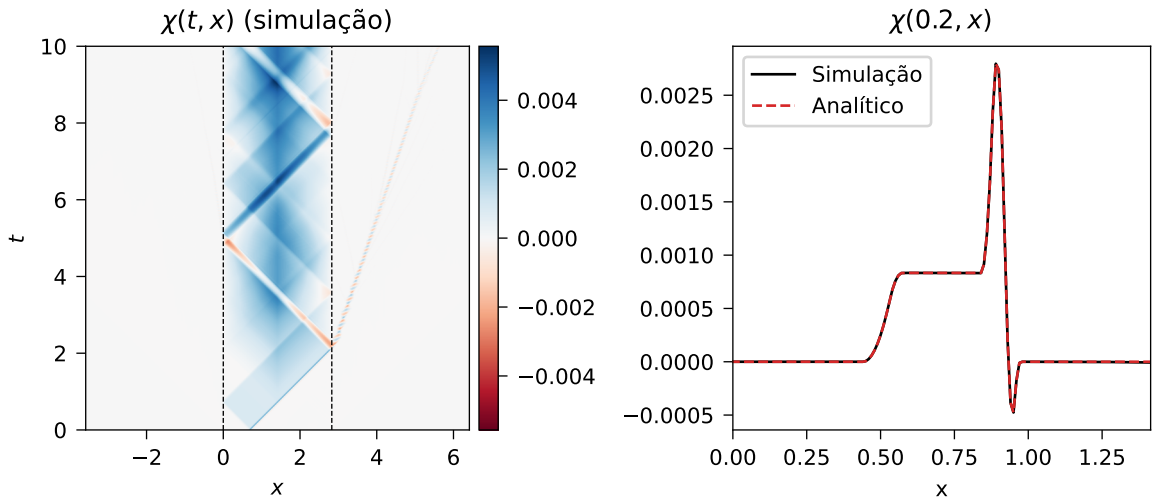


Figura 43 – Comparação entre simulação e resultado analítico para  $l = 1$ ,  $v = 0,75$ ,  $\alpha = 0$ ,  $v_0 = 0$ . Perfil do oscillon inicialmente centrado no ponto  $x = \sqrt{2}/2$ .

condições iniciais dessa configuração são definidas pelas funções

$$f_k(x) = \epsilon^2 \varphi_{\epsilon,k}(0, x - x_c) = \epsilon^2 \varphi_k \left( 0, \frac{x - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\epsilon} + \frac{1}{2\gamma} \right), \quad (4.6)$$

$$g_k(x) = \epsilon \partial_t \varphi_{\epsilon,k}(0, x - x_c) = \epsilon \partial_t \varphi_k \left( 0, \frac{x - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\epsilon} + \frac{1}{2\gamma} \right). \quad (4.7)$$

com  $k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . Os pontos em que as soluções parciais se conectam são dados por

$$\tilde{x}_k = x_c + \epsilon x_k = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\epsilon}{2\gamma} + \epsilon x_k, \quad k = 0, 1, \dots, 5$$

com  $x_k$  dados pelas equações (4.5).

Com essas fórmulas para as condições iniciais obter expressões para a perturbação usando a equação (4.4). Em particular, para  $t > \epsilon/(2\gamma)$ , a perturbação será composta por onze soluções parciais

$$\chi_C(t, x) = \frac{\epsilon^2}{48},$$

$$\chi_{R_1}(t, x) = (x - t)^2 + \left( \frac{\sqrt{7}\epsilon}{4} - \sqrt{2} \right) (x - t) + \frac{1}{192} \left( 96 - 24\sqrt{14}\epsilon + 25\epsilon^2 \right),$$

$$\chi_{R_2}(t, x) = -\frac{5}{2}(x - t)^2 + \left( \frac{5}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{7}\epsilon}{8} \right) (x - t) + \frac{1}{384} \left( -480 + 24\sqrt{14}\epsilon + 23\epsilon^2 \right),$$

$$\chi_{R_3}(t, x) = (x - t)^2 - \left( \sqrt{2} + \frac{\sqrt{7}\epsilon}{4} \right) (x - t) + \frac{1}{192} \left( 96 + 24\sqrt{14}\epsilon + 13\epsilon^2 \right),$$

$$\chi_{R_4}(t, x) = \frac{5}{2}(x - t)^2 - \left( \frac{5}{\sqrt{2}} + \frac{3\sqrt{7}\epsilon}{8} \right) (x - t) + \frac{1}{128} \left( 160 + 24\sqrt{14}\epsilon + 11\epsilon^2 \right),$$

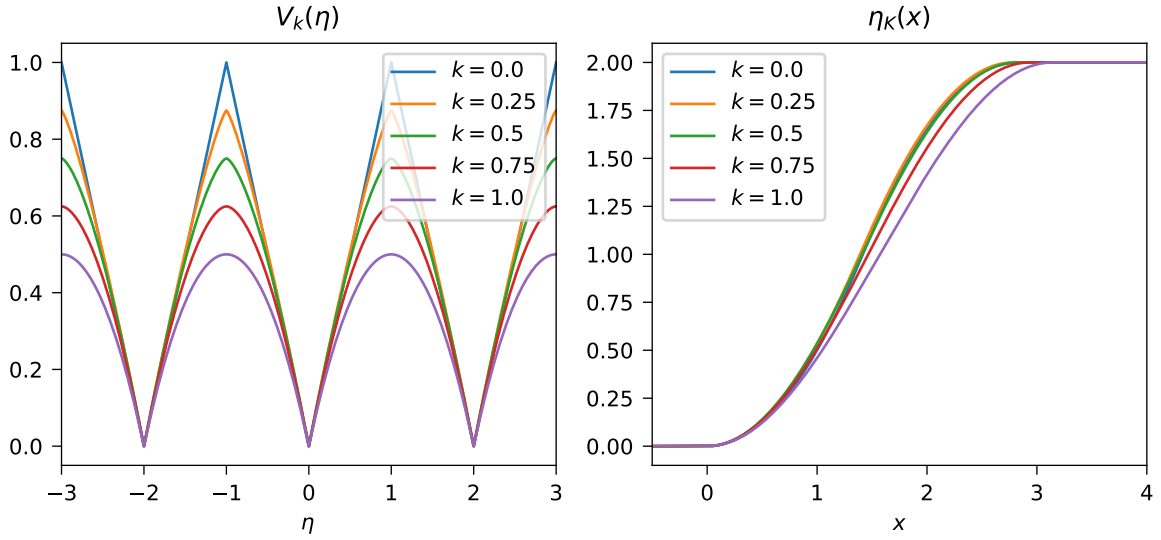


Figura 44 – Exemplos de potencial generalizado  $V_k(\eta)$  (esquerda) e soluções de kink  $\eta_K(x)$  para modelos com esses potenciais (direita).

$$\begin{aligned} \chi_{R_5}(t, x) &= -(x-t)^2 + \left( \sqrt{2} + \frac{\sqrt{7}\epsilon}{4} \right) (x-t) + \frac{1}{64} \left( -32 - 8\sqrt{14}\epsilon - 7\epsilon^2 \right), \\ \chi_{L_1}(t, x) &= -\frac{1}{7}(x+t)^2 + \frac{1}{28} \left( 4\sqrt{2} + \sqrt{7}\epsilon \right) (x+t) + \frac{-96 - 24\sqrt{14}\epsilon + 7\epsilon^2}{1344}, \\ \chi_{L_2}(t, x) &= \chi_{L_1}(t, x), \\ \chi_{L_3}(t, x) &= \frac{1}{14}(x+t)^2 + \frac{1}{56} \left( -4\sqrt{2} + \sqrt{7}\epsilon \right) (x+t) + \frac{1}{896} \left( 32 - 8\sqrt{14}\epsilon + 7\epsilon^2 \right), \\ \chi_{L_4}(t, x) &= \chi_{L_3}(t, x), \\ \chi_{L_5}(t, x) &= \chi_{L_3}(t, x). \end{aligned}$$

A solução  $\chi_C$  é válida no intervalo  $\tilde{x}_5 - t < x \leq \tilde{x}_0 + t$ . Cada solução  $\chi_{R_k}$  é válida na região  $\tilde{x}_{k_1} + t < x \leq \tilde{x}_k + t$ . Cada solução  $\chi_{L_k}$  é válida na região  $\tilde{x}_{k_1} - t < x \leq \tilde{x}_k - t$ . Na figura 43 comparamos o resultado analítico com o resultado da simulação para  $\epsilon = 0,2$ . Novamente os resultados são consistentes.

### 4.3 MODELO GENERALIZADO

Para ilustrar as consequências da não-analiticidade do máximo do potencial, vamos brevemente considerar o modelo generalizado com potencial

$$V_k(\eta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2-k}{2} (1 - |x - 2n - 1|^{1+k}) h_n(\eta)$$

que se reduz ao modelo simplificado quando  $k = 0$  e ao modelo quadrático quando  $k = 1$ . O fator multiplicativo de  $(2-k)/2$  nesse potencial foi introduzido para que todos os potenciais  $V_k(\eta)$  alcancem os vácuos com derivadas laterais valendo  $\pm 1$ . A presença de

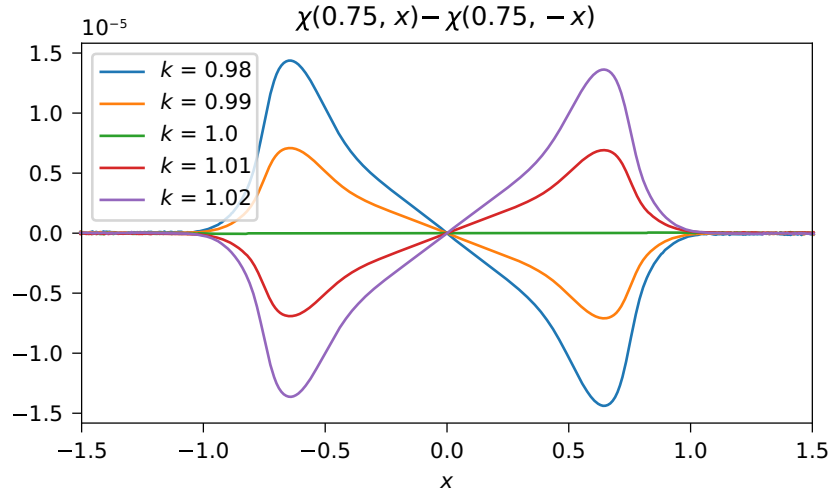


Figura 45 – Assimetria  $\chi(t, x) - \chi(t, -x)$  da perturbação para caso do oscillon localizado no centro do kink e com parâmetros  $l = 1$ ,  $v = 0$ ,  $\alpha = 0,25$ ,  $v_0 = 0$ . Nesse caso o oscillon e o kink tem seus centros alinhados com a origem.

vários vácuos, permite a existência de soluções de kink para cada potencial  $V_k(\eta)$  com  $k \in [0, 1]$ . Esses kinks são obtidos através da equação BPS, e seus perfis são as funções  $\eta_K(x)$  que satisfazem a equação

$$\int_0^{\eta_K(x)} \frac{d\eta}{\sqrt{(2-k)(1-|\eta-1|^{1+k})}} = x$$

no intervalo  $\eta \in [0, 2]$ . A integral acima pode ser expressa em termos da função hipergeométrica  ${}_2F_1(a, b, c; z)$  da seguinte forma

$$\frac{-1 + \eta_K(x)}{\sqrt{2-k}} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{1+k}, 1 + \frac{1}{1+k}; |1 - \eta_K(x)|^{1+k}\right) = x - x_0(k) \quad (4.8)$$

na qual  $x_0(k)$  é a posição do ponto central do kink e tem a seguinte expressão

$$x_0(k) = \sqrt{\frac{\pi}{2-k} \frac{\Gamma(1 + \frac{1}{1+k})}{\Gamma(\frac{1}{2} + \frac{1}{1+k})}}.$$

O kink tem suporte  $x \in [0, 2x_0(k)]$ . De modo geral, o perfil do kink precisa ser obtido encontrando as raízes da equação (4.8). Exemplos do potencial generalizado  $V_k(\eta)$  e suas soluções de kink  $\eta_K(x)$  podem ser vistos na figura 44.

Com a exceção do caso  $k = 1$ , todos esses potenciais  $V_k(x)$  possuem máximos não-analíticos para  $\eta = 2n + 1$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Vamos considerar um perfil de oscillon com o centro alinhado com  $x_0(k)$ . No caso do modelo simplificado ( $k = 0$ ), essa configuração apresenta uma assimetria logo nos momentos iniciais da evolução da perturbação. Além disso, na região central da perturbação possui uma amplitude diferente de zero que continua crescendo mesmo depois dos pulsos se afastarem (figura 41). Vamos evoluir a mesma configuração no modelo generalizado, com valores de  $k$  próximos de 1. Para facilitar

a visualização, transladamos a configuração inicial em  $x_0(k)$ , de modo que o centro do kink e do oscillon coincida com a origem. Na figura 45 vemos a assimetria  $\chi(t, x) - \chi(t, -x)$  da perturbação para  $t = 0,75$ . Para  $k = 1$ , a configuração permanece simétrica. No entanto, para os outros modelos, mesmo sendo bastante semelhantes ao modelo quadrático, há uma assimetria. Quando maior a diferença desses modelos em relação ao modelo quadrático, mais acentuada é a assimetria na perturbação. Vale ressaltar que essa assimetria aparece na perturbação antes da interação com as bordas do kink, que são outra fonte de assimetria na evolução do campo, que se torna visível para tempos mais remotos.

## 5 VÓRTICES COMPACTOS

Vamos agora expandir nossa discussão para o caso de  $2 + 1$  dimensões. No caso de  $1 + 1$  dimensões, as bordas do espaço no infinito formam um conjunto discreto com apenas dois pontos. Consequentemente um campo escalar admite sólitons topológicos se sua variedade de vácuo for também um conjunto discreto. Desta forma em cada canto do espaço, o campo está em um vácuo distinto, e assim o sóliton não pode ser desfeito por uma transformação contínua. No entanto, para dimensões mais altas, as bordas espaço não são mais discretas, sendo círculos, esferas, ou hiperesferas, dependendo da dimensionalidade. Nesses casos, a variedade de vácuo do campo deve ser equivalente a esses objetos, para que o campo atinja pontos distintos da borda do espaço com valores distintos do vácuo. Para  $2 + 1$  dimensões, as bordas do espaço formam um círculo. Portanto, um campo que admita sólitons topológicos não pode tomar simplesmente valores escalares reais no infinito, pois nesse caso sua variedade de vácuo não seria um círculo. Para termos um campo escalar cuja variedade de vácuo é um círculo, devemos tomar um campo com duas coordenadas, ou equivalentemente um campo complexo. A densidade lagrangiana para esse campo seria da forma

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - V(|\phi|) \quad (5.1)$$

para o caso com termos cinéticos usuais quadráticos, que temos nos concentrado aqui.

No entanto, tomar o campo escalar complexo não é suficiente para termos sólitons topológicos em  $2 + 1$  dimensões. Isso acontece porque para um sóliton topológico interpolar diferentes valores de vácuo no infinito, ele necessariamente deve mudar de valor ao longo do círculo que define a borda do espaço. No caso de um campo escalar complexo estático  $\phi$ , escrevemos a energia em coordenadas polares  $(r, \theta)$  como

$$E = \int dr d\theta r (\nabla \phi^* \cdot \nabla \phi + V(|\phi|)) = \int dr d\theta r \left( \left| \frac{\partial \phi}{\partial r} \right|^2 + \frac{1}{r^2} \left| \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right|^2 + V(|\phi|) \right).$$

Como o campo precisa alterar de valor ao longo do círculo no infinito, a derivada  $\partial_\theta \phi$  é diferente de zero no infinito, causando uma divergência logarítmica na energia total.

Essa divergência pode ser contornada se a derivada  $\partial_\mu$  no termo cinético for substituída por alguma derivada covariante  $D_\mu$  de modo que  $D_\theta \phi = 0$  no infinito mesmo quando  $\phi$  muda de valor com o ângulo  $\theta$ . Isso é possível no caso de uma teoria em que o campo escalar esteja acoplado ao campo eletromagnético. Note que a densidade lagrangiana na equação (5.1) possui simetria de calibre global sob a transformação  $\phi \rightarrow e^{i\Lambda} \phi$  com  $\Lambda$  constante. Essa simetria pode ser estendida para o caso local em que  $\Lambda = \Lambda(x)$  é uma função da posição através da introdução de um campo vetorial  $A^\mu$ , identificado com o potencial eletromagnético, que se acopla com o campo escalar através da derivada covariante

$$D_\mu \phi = \partial_\mu \phi + ie A_\mu \phi$$

na qual a constante de acoplamento  $e$  é identificada com a carga elétrica do campo escalar. A substituição  $\partial_\mu \rightarrow D_\mu$  na densidade lagrangiana estende a simetria de gauge para o caso de  $\Lambda(x)$  depende da posição desde que o campo vetorial  $A_\mu$  se transforme na forma

$$A_\mu \rightarrow A_\mu - \frac{1}{e} \partial_\mu \Lambda$$

sob uma transformação de calibre.

Para que o campo  $A_\mu$  tenha caráter dinâmico, precisamos introduzir um termo cinético na densidade lagrangiana. Esse termo não pode ser simplesmente a derivada ao quadrado de  $A_\mu$  pois é necessário conservar a simetria pela transformação de calibre. Para isso notamos que o tensor

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu,$$

é invariante sob transformações de calibre. Esse tensor tem como suas componentes os campos elétrico e magnético. Considerando também que a densidade lagrangiana deve ser escalar sob transformações de Lorentz, devemos construir o termo cinético a partir da quantidade

$$\mathcal{F} = \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

onde o fator de 4 foi introduzido por conveniência.

Tendo introduzido o acoplamento entre o campo escalar e o campo eletromagnético, podemos agora encontrar soluções de sólitons topológicos em  $2 + 1$ . Estas soluções topológicas são chamadas de vórtices, pois elas circulam os valores de vácuo do modelo. O exemplo mais tradicional é o caso de teoria com potencial do tipo Higgs,

$$V_{\text{Higgs}}(|\phi|) = \lambda (|\phi|^2 - v^2)^2,$$

e termos cinéticos padrão, originalmente discutido no contexto de supercondutores [74, 75]. No caso bastante especial de acoplamento crítico, definido por  $\lambda = 1/4$ , esse modelo permite encontrar equações BPS de primeira ordem equivalentes às equações do campo de segunda ordem. As soluções de vórtice destas equações de primeira ordem minimizam a energia para dada carga topológica, garantindo a estabilidade da solução. Isto é análogo aos kinks em  $1 + 1$  dimensões que estudamos até agora, pois estes também minimizam a energia satisfazendo equações BPS.

Neste capítulo vamos investigar a possibilidade de construir soluções de vórtice compactas. Vórtices compactos já foram descobertos em modelos com termo cinético não-usual para o campo escalar [27] e para termo cinético não usual para ambos o campo escalar e eletromagnético [24]. Vamos aqui manter o termo cinético usual e tentar obter compactons usando um potencial não analítico. Essa possibilidade é vantajosa frente aos casos com termo cinético não usual, pois permite a evolução temporal das soluções e conseqüentemente o estudo da sua dinâmica. No entanto, seremos obrigados a considerar também um caso com termo cinético não-usual no setor eletromagnético.



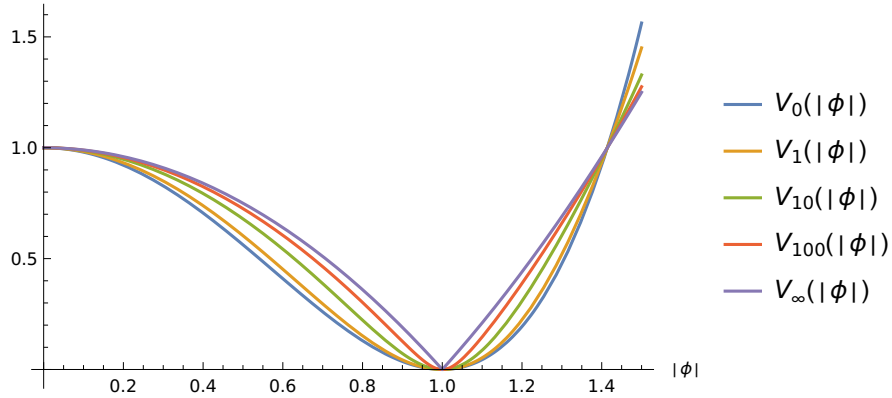


Figura 46 – Potential generalizado  $V_\delta(|\phi|)$ , que inclui o potencial de Higgs ( $V_0$ ) e o potencial não-analítico ( $V_\infty$ ) no caso  $v = \lambda = 1$ .

### 5.1 CAMPO MAGNÉTICO COM TERMO CINÉTICO USUAL

Vamos considerar primeiro o caso do eletromagnetismo usual, no qual o termo cinético do campo eletromagnético é quadrático nas derivadas de  $A_\mu$ . Nesse caso, temos a densidade lagrangiana

$$\mathcal{L} = D_\mu \phi^* D^\mu \phi - V(|\phi|) - \mathcal{F}. \quad (5.2)$$

Queremos encontrar soluções de vórtice topológico. Como as bordas de um plano no infinito forma um círculo, queremos que os mínimos de  $V(|\phi|)$  tenham a forma de um círculo também. Para que as soluções de vórtice sejam compactas, vamos alterar a forma do potencial em relação o potencial de Higgs para que ele tenha formato de V no mínimo. Propomos assim um potencial na forma

$$V(|\phi|) = \lambda \left| |\phi|^2 - v^2 \right|.$$

Note que podemos fixar o parâmetro  $v = 1$  sem perda de generalidade, pois os casos de  $v$  mais geral podem ser obtidos através de uma transformação de escala do campo  $\phi$  e da carga  $e$ .

Essa potencial modificado pode ser motivada pelo fato que o potencial não-analítico e o potencial de Higgs podem ambos ser obtidos como casos limites do potencial mais geral

$$V_\delta(|\phi|) = \lambda \frac{\sqrt{\delta (|\phi|^2 - 1)^2 + 1} - 1}{\sqrt{\delta + 1} - 1}.$$

Em particular  $V_0$  corresponde ao potencial de Higgs e  $V_\infty$  ao potencial não-analítico (que iremos denotar apenas como  $V$ ). Ou seja, há uma deformação contínua que leva o potencial de Higgs a um potencial não-analítico, e vice-versa. Podemos ver exemplos desse potencial mais geral para diferentes valores de  $\delta$  na figura 46.

No caso de campos reais, na região entre os vácuos esse potencial tem a mesma forma que o potencial trabalhado nos capítulos anteriores, estando apenas deslocado. Nesse

sentido, o potencial não-analítico deste capítulo pode ser visto como uma extensão para o caso de campo complexo do potencial quadrático que vínhamos trabalhando até agora.

As equações de Euler-Lagrange para a densidade lagrangiana (5.2) com potencial não-analítico são a equação de Klein-Gordon modificada

$$D_\mu D^\mu \phi + \lambda \phi \operatorname{sgn}(|\phi|^2 - 1) = 0$$

e a equação de Maxwell

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$$

na qual a corrente tem a forma  $j^\nu = ie(\phi^* D^\nu \phi - \phi D^\nu \phi^*)$ . No infinito, o campo escalar circula entre os valores de vácuo, que correspondem aos calibres puros  $e^{i\Lambda(\theta)}$ . Portanto, devemos ter que  $\phi \rightarrow e^{i\Lambda(\theta)}$  quando  $r \rightarrow \infty$ . No caso de compactons, esse comportamento assintótico se materializa a distâncias finitas. Ou seja, teremos  $\phi = e^{i\Lambda(\theta)}$  quando  $r = R$ , onde  $R$  é o raio do suporte do vórtice. Como a variável  $\theta$  é angular, devemos ter  $e^{i\Lambda(\theta)} = e^{i\Lambda(\theta+2\pi)}$  para que o campo  $\phi$  tem um único valor complexo em cada ponto do espaço. Em particular iremos tomar  $\Lambda(\theta) = n\theta$ , onde  $n$  é um número inteiro. O número  $n$  é o quantidade de voltas que o campo dá na variedade de vácuo no infinito, e corresponde a carga topológica do vórtice. Considerando isso, um *ansatz* apropriado para o campo escalar do vórtice é da forma

$$\phi = f(r)e^{in\theta}$$

em que o perfil radial  $f(r)$  tem condição de contorno  $f(R) = 1$ , mantendo esse mesmo valor para  $r > R$ . No caso de um vórtice não-compacto, como o encontrado no potencial tipo Higgs, a condição de contorno seria no infinito  $r \rightarrow \infty$ . Além disso, para que a ambiguidade do ângulo  $\theta$  em  $r = 0$  não gere problemas, impomos a condição  $f(0) = 0$ .

O sistema aqui considerado está restrito à duas dimensões espaciais, então o campo magnético possui apenas uma componente  $B = -F^{12}$ . Desta forma, o sistema é análogo a um corte transversal de um problema de eletromagnetismo em que o campo magnético aponta apenas em uma direção. Um exemplo clássico deste tipo de sistema é um solenoide de comprimento infinito na direção perpendicular ao plano. Nesses casos, a equação de Maxwell pode ser resolvida com um *ansatz* para o potencial vetor na direção polar, de forma que

$$A^i = -\frac{\alpha(r)}{er^2} \epsilon_{ij} x^j$$

no qual  $\epsilon_{ij}$  é o símbolo de Levi-Civita e o fator  $1/e$  foi introduzido por conveniência. Além disso, supomos que o potencial eletrostático  $A^0$  é nulo. O campo magnético dessa configuração é dado por

$$B = \epsilon_{ij} \partial_i A^j = \frac{\alpha'(r)}{er}.$$

Vamos agora usar as formas propostas de  $\phi$  e  $A^i$  para obter equações dos perfis radiais  $f(r)$  e  $\alpha(r)$ . A derivada covariante do campo escalar vai ser escrita como

$$D_i \phi = \partial_i (f(r)e^{in\theta}) + i \frac{x^j}{r} f(r) \alpha(r) e^{in\theta}.$$

Mudando as derivadas para coordenadas polares, obtemos que

$$\begin{aligned} D_i \phi &= \left[ \frac{x^i}{r} f'(r) + i \epsilon_{ij} \frac{x^j}{r^2} (\alpha(r) - n) f(r) \right] e^{in\theta}, \\ D_i D_i \phi &= \left[ f''(r) + \frac{f'(r)}{r} - (\alpha(r) - n)^2 \frac{f(r)}{r^2} \right] e^{in\theta}. \end{aligned}$$

Substituindo na equação de Euler-Lagrange para  $\phi$  temos a seguinte equação diferencial para o perfil radial  $f(r)$ :

$$f''(r) + \frac{f'(r)}{r} - (n - \alpha(r))^2 \frac{f(r)}{r^2} - \lambda f(r) \operatorname{sgn}(f(r)^2 - 1) = 0. \quad (5.3)$$

Agora para a equação de Maxwell, a corrente elétrica terá apenas as componentes espaciais, escritas na forma

$$j^i = 2e \epsilon_{ij} \frac{x^j}{r^2} f(r)^2 (\alpha(r) - n).$$

As equações de Maxwell relevantes são então  $\partial_1 F^{12} = j^2$  e  $\partial_2 F^{21} = j^1$ . Ambas as equações levam à mesma equação diferencial para o perfil radial  $\alpha(r)$ :

$$\alpha''(r) - \frac{\alpha'(r)}{r} + 2e^2 (n - \alpha(r)) f(r)^2 = 0. \quad (5.4)$$

Para resolvermos essas equações para os perfis radiais, precisamos obter as condições de contorno para o perfil  $\alpha(r)$  do potencial eletromagnético. Fazemos isso analisando a energia do vórtice. Como estamos no regime estático, a densidade hamiltoniana terá a forma  $\mathcal{H} = -\mathcal{L}$ . Assim, a energia pode ser escrita como

$$\begin{aligned} E &= \int d^2x \left[ D_i \phi^* D_i \phi + \frac{1}{4} F_{ij} F_{ij} + V(|\phi|) \right] \\ &= \int d^2x \left[ f'(r)^2 + (n - \alpha(r))^2 \frac{f(r)^2}{r^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha'(r)}{er} \right)^2 + \lambda |f(r)^2 - 1| \right]. \end{aligned}$$

Notamos dessa expressão que o vácuo do campo eletromagnético é  $\alpha = n$ . Precisamos então impor as condições de contorno  $\alpha(R) = n$ , além das condições  $f(0) = 0$  e  $f(R) = 1$  já discutidas antes.

As equações dos perfis radiais precisarão ser resolvidas numericamente através de um método de *shooting*. Por simplicidade vamos focar apenas no caso de  $n = 1$ . Obtemos as soluções variando as condições iniciais no centro do sistema de coordenadas até conseguirmos satisfazer as condições na borda. Para encontrar os parâmetros a serem variados assumimos que os perfis radiais possuem expansões

$$\begin{aligned} f(r) &= \sum_{l=1}^{\infty} f_l r^l, \\ \alpha(r) &= \sum_{l=2}^{\infty} \alpha_l r^l \end{aligned}$$

para raios pequenos. Note que já impomos que  $f_0 = 0$  devido à condição inicial  $f(0) = 0$ , bem como  $\alpha_0 = \alpha_1 = 0$  para garantir que  $A^i$  e  $B$  sejam finitos na origem. Dentro do suporte do vórtice temos  $\text{sgn}(f(r)^2 - 1) = -1$ , portanto substituindo as expansões nas equação (5.3) obtemos que

$$3f_2 + r(2\alpha_2 f_1 + f_1 \lambda + 8f_3) + r^2(2\alpha_2 f_2 + 2\alpha_3 f_1 + f_2 \lambda + 15f_4) + r^3(2\alpha_2 f_3 + 2\alpha_3 f_2 - (\alpha_2^2 - 2\alpha_4) f_1 + f_3 \lambda + 24f_5) + \mathcal{O}(r^4) = 0.$$

Já para a equação (5.4) temos

$$3\alpha_3 r + r^2(8\alpha_4 + 2e^2 f_1^2) + r^3(15\alpha_5 + 4e^2 f_1 f_2) + r^4(24\alpha_6 + 2e^2(-\alpha_2 f_1^2 + 2f_3 f_1 + f_2^2)) + \mathcal{O}(r^4) = 0.$$

Analisando essas duas equações, podemos determinar os coeficientes de índice mais alto a partir dos primeiros coeficiente em cada série:  $f_1$  e  $\alpha_2$ . Em particular, achamos que os  $f_l$  para  $l$  par são nulos, bem como os  $\alpha_l$  para  $l$  ímpar. Os primeiros coeficientes não nulos são

$$\begin{aligned} f_3 &= -\frac{1}{8} f_1 (2\alpha_2 + \lambda), \\ f_5 &= \frac{1}{192} f_1 (4\alpha_2 \lambda + 12\alpha_2^2 + 4e^2 f_1^2 + \lambda^2), \\ \alpha_4 &= -\frac{1}{4} e^2 f_1^2, \\ \alpha_6 &= \frac{1}{48} e^2 f_1^2 (6\alpha_2 + \lambda). \end{aligned}$$

Os parâmetros  $f_1$  e  $\alpha_2$  devem ser ajustados pelo método de *shooting*, de modo a satisfazer as condições de contorno. Além disso, determinamos raio  $R$  pela condição de que o campo escalar alcance o vácuo com a primeira derivada contínua. Ou seja,  $f'(R) = 0$ .

Resolvemos as equações (5.3) e (5.4) numericamente. Para o caso  $e = \lambda = 1$  obtivemos soluções com raio  $R \approx 1,35$  e parâmetros  $\alpha_2 \approx 0,893$  e  $f_1 \approx 1,28$ . Estas soluções estão exibidas na figura 47. Note que  $\alpha'(r)$  se aproxima da borda do vórtice com valor diferente de zero. Isso significa que a função  $\alpha'(r)$  e o campo magnético  $B$  possuem uma descontinuidade nesse ponto.

Esta descontinuidade se manifesta também na densidade de energia, pois esta é uma função de  $\alpha'(r)$  e possui sérias consequências sobre a estabilidade da solução. Quando a solução de vórtice compacto obtida aqui é tomada como condição inicial da dinâmica dos campos, a configuração não permanece estática, ao contrário do esperado pela construção da solução. A descontinuidade do campo magnético gera um sinal que faz com que a configuração evolua no tempo, como pode ser visto nos resultados numéricos da figura 48.

Além disso, a estabilidade da configuração nunca foi uma garantia. Contrário ao caso dos vórtices no modelo com potencial de Higgs e acoplamento crítico, os vórtices compactos não são uma solução de equação BPS de primeira ordem que minimiza a energia.

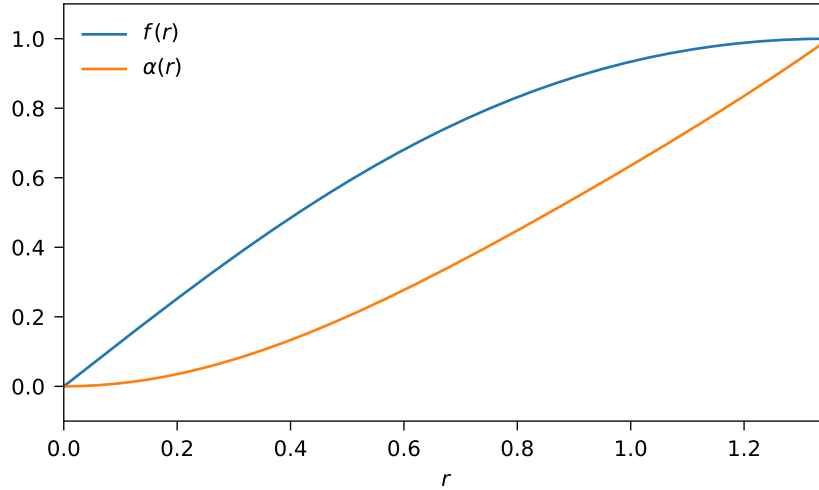


Figura 47 – Solução numérica para  $f(r)$  e  $\alpha(r)$  no caso em que  $n = \lambda = e = 1$ . Para esse caso, o vórtice tem raio  $R \approx 1,35$ .

No caso do potencial não-analítico, se realizarmos o truque usual de completar o quadrado na densidade hamiltoniana, as equações de primeira ordem que saturam a desigualdade da energia total não são equivalentes às equações de segunda ordem da teoria de campos completa. Portanto, nada garante que a solução de vórtice obtida é a configuração de menor energia com a carga topológica especificada.

## 5.2 CAMPO MAGNÉTICO COM TERMO CINÉTICO NÃO-USUAL

Vamos considerar agora o caso de um termo cinético não-padrão para o campo eletromagnético. Consideramos a densidade lagrangiana como

$$\mathcal{L} = (D^\mu \phi)^*(D_\mu \phi) - V(|\phi|) - \mathcal{F}^k$$

com  $k \neq 1$ . Nesse caso, a equação de Euler-Lagrange para o campo eletromagnético é

$$\partial_\mu (k \mathcal{F}^{k-1} F^{\mu\nu}) = j^\nu.$$

Adotamos o mesmo *ansatz* para os campos que no caso usual. A equação para o perfil  $f(r)$  permanece a mesma, enquanto a equação para o perfil  $\alpha(r)$  nesse caso é

$$k(2k-1) \left(\frac{\alpha'}{r}\right)^{2k-2} \left(\frac{\alpha'}{r}\right)' + 2^k e^{2k} \frac{f^2}{r} (n - \alpha) = 0. \quad (5.5)$$

Como queremos satisfazer condições de contorno na borda, vamos escrever os perfis radiais na forma

$$\begin{aligned} f(r) &= 1 - g(R - r), \\ \alpha(r) &= 1 - \beta(R - r). \end{aligned}$$

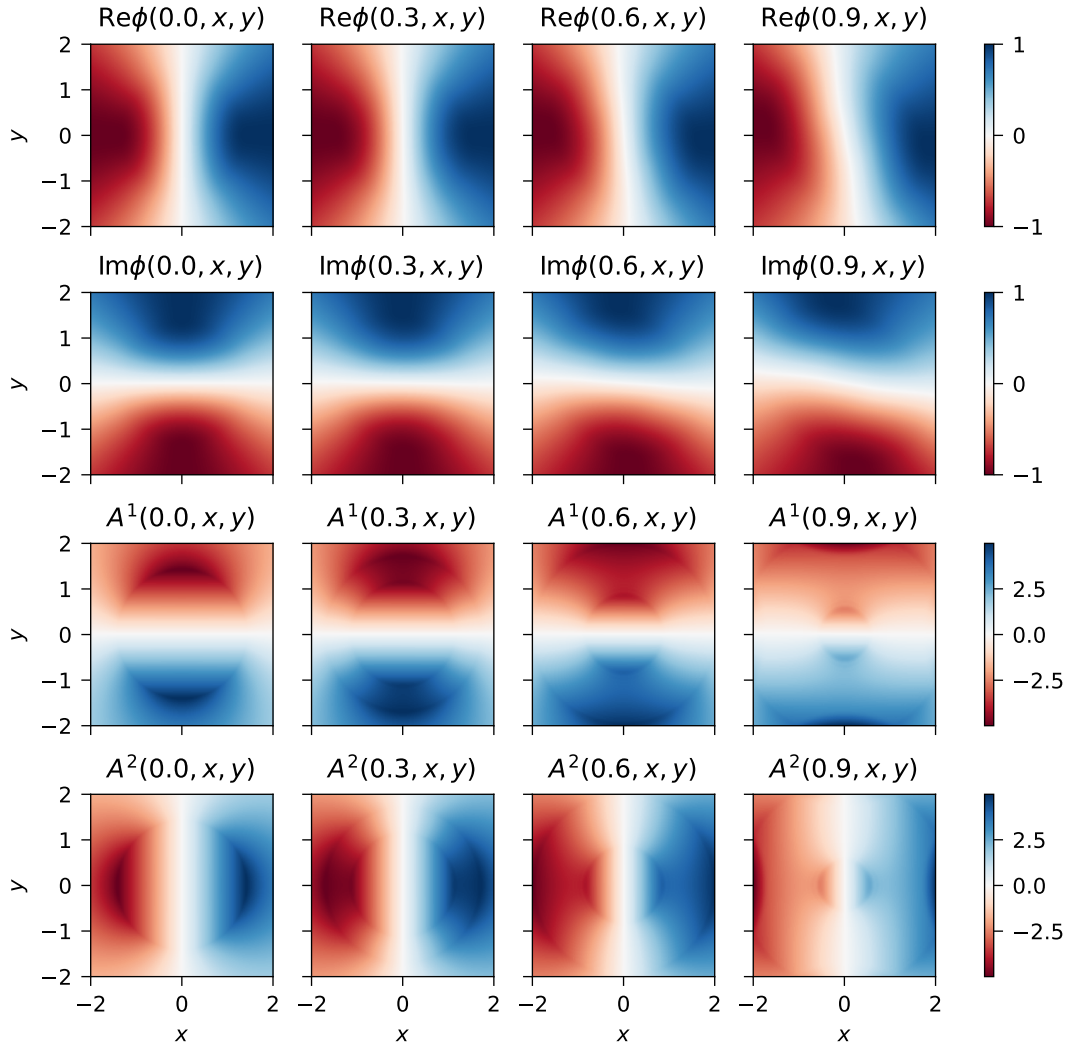


Figura 48 – Gráficos dos campos como função da posição para diferentes instantes de tempo. A evolução temporal foi iniciada através de um perfil de vórtice que deveria ser estático, ilustrando o papel da descontinuidade do campo magnético na estabilidade da solução.

Introduzindo a variável  $\epsilon = R - r$  para representar a distância da borda do vórtice, escrevemos as seguintes expansões em série para essas novas funções.

$$g(\epsilon) = \sum_{l=2}^{\infty} c_l \epsilon^l,$$

$$\beta(\epsilon) = \sum_{l=2}^{\infty} \beta_l \epsilon^l.$$

onda já impomos as condições na borda fazendo com que os termos de ordem zero e um da série sejam nulos. Aplicando essa expansão na equação (5.5) para  $n = 1$  obtemos que

$$\frac{2^k e^{2k} \beta_2 \epsilon^2}{R} + O(\epsilon^3) + \left(\frac{\beta_2 \epsilon}{R}\right)^{2k-2} \left(-\frac{2^{2k-1} k(2k-1) \beta_2}{R} + O(\epsilon)\right) = 0.$$

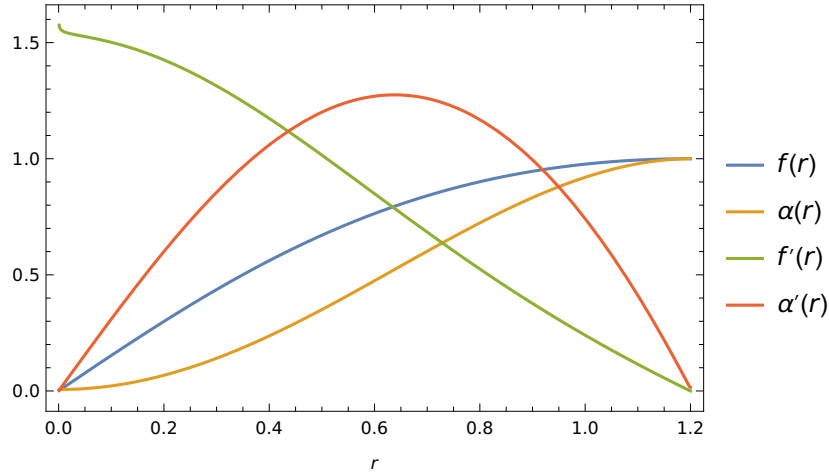


Figura 49 – Solução de vórtice para caso de termo cinético  $-\mathcal{F}^2$  para o campo eletromagnético, com parâmetros  $R \approx 1,2$ ,  $e \approx 2,5$  e  $\lambda \approx 1,1$ .

Para que essa equação seja satisfeita, é preciso que o primeiro termo da equação acima seja cancelado por algum termo dentro do parênteses. Isso só será possível se os expoentes de  $\epsilon$  em ambos os termos forem os mesmos. Por isso precisamos exigir que  $2k - 2 = 2$ , o que implica em  $k = 2$ .

Considerando já  $k = 2$ , substituindo as séries dos perfis radiais nas equações (5.3) e (5.5) obtemos:

$$\begin{aligned} & (\lambda - 2g_2) + \epsilon \left( \frac{2g_2}{R} - 6g_3 \right) + \epsilon^2 \left( -g_2\lambda + \frac{3g_3R + 2g_2}{R^2} - 12g_4 \right) \\ & + \epsilon^3 \left( -g_3\lambda + \frac{4g_4R^2 + 3g_3R + 2g_2}{R^3} - 20g_5 \right) + \mathcal{O}(\epsilon^4) = 0, \\ & \frac{4\epsilon^2 (\beta_2 e^4 R^2 - 12\beta_2^3)}{R^3} + \frac{4\epsilon^3 (-48\beta_2^3 + \beta_3 e^4 R^3 + \beta_2 e^4 R^2 - 72\beta_2^2 \beta_3 R)}{R^4} + \mathcal{O}(\epsilon^4) = 0. \end{aligned}$$

Essas equações permitem determinar os coeficientes. O caso do vórtice compacto corresponde à solução positiva para os coeficientes  $\beta_2$ . Nesse caso, podemos determinar

$$g_2 = \frac{\lambda}{2}, \quad \beta_2 = \frac{e^2 R}{2\sqrt{3}}, \quad g_3 = \frac{\lambda}{6R}, \quad \beta_3 = -\frac{1}{10}\sqrt{3}e^2.$$

Note que há um único parâmetro livre  $R$ . Isso faz com que não seja possível no caso geral satisfazer as condições de contorno na origem. Portanto, para o caso do vórtice compacto com termo cinético eletromagnético não-usual, a existência da solução não é garantida. No entanto, fomos capazes de encontrar um exemplo de solução para valores dos parâmetros  $\lambda$  e  $e$  da teoria, tal que a solução existe. Essa solução, de raio  $R \approx 1,2$ , carga  $e \approx 2,5$  e  $\lambda \approx 1,1$  está representada na figura 49.

## 6 CONCLUSÕES

Neste trabalho, analisamos as soluções compactas de teorias de campo com potencial não-analítico. Começamos revisando a dedução de modelos deste tipo em  $1 + 1$  dimensões a partir de três sistemas físicos. Os dois primeiros foram sistemas mecânicos e o último partiu da formulação do modelo de Skyrme como dois submodelos BPS. Esse último caso é de particular interesse pois dá origem a um dos modelos com potencial não-analítico mais simples que permite a presença de kinks e antikinks, e também ilustra como potenciais não-analíticos podem surgir naturalmente no estudo de modelos mais gerais. Também revisitamos alguns resultados anteriores sobre oscillons e ondas de choque no modelo de signum-Gordon, modelo este que aproxima a dinâmica perto do vácuo em outros modelos com potencial não-analítico simétrico em torno dos mínimos.

Então olhamos para a dinâmica de kinks compactos. O modelo com potencial não-analítico deduzido a partir do primeiro submodelo BPS do modelo de Skyrme possui soluções de defeitos topológicos interpolando vácuos vizinhos da teoria. A solução da equação BPS deste modelo corresponde a uma configuração estática que minimiza a energia. Soluções em movimento uniforme foram construídas por uma transformação de Lorentz. Usando o método das coordenadas coletivas, vimos que um sólito desse tipo isoladamente possui uma descrição efetiva equivalente à uma partícula em uma dimensão.

O kink compacto foi então perturbado da sua forma de mínima energia para permitir o estudo da dinâmica do modelo. Realizamos simulações da dinâmica do campo usando métodos numéricos, que mostraram que kinks excitados emitem seu excesso de energia através de oscillons compactos. Além disso, conseguimos descrever o comportamento do kink propriamente dito usando o modo de Derrick e um modo interno introduzido através de argumentos fenomenológicos.

Estudamos então o processo de espalhamento entre kinks compactos em dois casos: kink-antikink e kink-kink. No caso do espalhamento kink-antikink, nossas simulações revelaram dois tipos principais de resultados possíveis. No primeiro caso, para velocidades de espalhamento mais baixas, o par kink-antikink se aniquila gerando uma configuração de campo que oscila entre os vácuos  $\eta = \pm 2$ . Essa configuração emite o seu excesso de energia na forma de radiação. Mostramos que os casos de maior radiação correspondem aos casos de evolução mais caótica do campo. O segundo caso, para velocidades de espalhamento mais altas, o par kink-antikink foi capaz de escapar da colisão. Nesses casos, observamos a formação de uma onda de choque compacta entre os sólitons. Essa onda de choque eventualmente decai em uma cascata de oscillons compactos. Esse comportamento é similar ao que foi observado em colisões de oscillons compactos no modelo de signum-Gordon. A onda de choque e, conseqüentemente, a radiação emitida diminuem com a velocidade de espalhamento nesse caso.

Uma propriedade interessante do espalhamento kink-antikink, é que o compor-



tamento ao redor da velocidade crítica que separa os casos de aniquilação e escape é fractal. Conforme alteramos a velocidade da colisão perto da velocidade crítica, os casos de colisão e escape se alternam. Essa alternância continua ocorrendo mesmo para variações de velocidade bem pequenas. Esse comportamento fractal parece ser uma propriedade mais geral da colisão de kinks compactos, tendo sido reportada em outros modelos também. Também é notável que não encontramos casos em que o sólitons se aniquilam, geram uma configuração que oscila algumas vezes, e finalmente escapam. Janelas de múltiplas oscilações seguidas de escape são uma característica notável do espalhamento kink-antikink no modelo  $\phi^4$ , o modelo não-integrável protótipo, mas estão ausentes aqui.

Fomos capazes de usar um modelo de coordenadas coletivas para descrever algumas características do espalhamento kink-antikink. Para isso usamos o modo posicional e o modo interno do kink. Mostramos que a inclusão do modo de Derrick leva a um problema de vetor nulo que impede a evolução temporal das coordenadas. A solução recentemente empregada em outros modelos, de incluir o modo de Derrick perturbativamente, não se mostrou apropriada para o caso de compactons. Ressaltamos que uma descrição por coordenadas coletivas do espalhamento kink-antikink pode ser dificultada de modo irreparável pela emissão de radiação.

Já no caso do espalhamento kink-kink, o par colide de modo elástico sem emissão de radiação. Essa ausência de radiação foi atribuída à fortes restrições à dinâmica do campo impostas pela paridade das condições iniciais. A descrição por coordenadas coletivas no caso kink-kink também foi dificultada por um problema de vetor nulo, desta vez presente no modo posicional. Novamente, a abordagem usada em outros modelos, neste caso de permitir que a posição assuma valores imaginários, não foi possível devido à compacticidade da solução. No entanto, como o potencial de interação entre kinks é repulsivo, o problema pode ser evitado na maioria dos casos. Nesses casos, fomos capazes de prever o ponto de maior aproximação entre os sólitons. É notável que a inclusão do modo interno, que significativamente melhorou os resultados nos outros casos, foi de pouco efeito no caso kink-kink.

Modelos com potenciais não-analíticos são em muitos aspectos bastante similares à modelos mais usuais, principalmente por terem termos cinéticos quadráticos usuais. No entanto, o estudo dos processos de espalhamento ressaltou que, apesar das similaridades, a forma em  $V$  do potencial e a consequente compacticidade das soluções introduzem dificuldades que impedem a aplicação direta de técnicas de sucesso em outros modelos. A descrição de processos dinâmicos envolvendo a mudança na posição e tamanho dos compactons inevitavelmente leva a uma dependência do suporte nas coordenadas efetivas. Isso limita seriamente nossa habilidade de realizar expansões de Taylor e continuações analíticas do campo nas coordenadas coletivas.

Diferente de modelos tradicionais, modelos com potenciais não-analíticos não podem ser linearizados ao redor dos mínimos. Isso torna muito difícil a formulação do problema

de pequenas perturbações sobre o kink no caso geral. Até mesmo expansões de Taylor da própria solução podem ser problemáticas no caso de compactons, pois podem estragar a continuidade da primeira derivada nas bordas do suporte. Nosso trabalho tornou mais claro a necessidade de desenvolver novas ferramentas matemáticas para melhor compreender as propriedades de compactons.

Na sequência, estudamos a interação entre kinks compactos e radiação. Em particular, como olhamos a interação com oscillons compactos, que são o principal componente da radiação em modelos com potencial em  $V$ . A compacticidade tanto do kink quanto da radiação é uma propriedade bastante interessante, pois implica que não há interação de longas distâncias. Ou seja, kink e oscillon apenas interagem quando seus suportes se tocam em um processo de espalhamento. Nesses processos, observamos que oscillons se propagam sobre o suporte de um kink na forma de pulsos na velocidade da luz. Esse pulso dá origem a oscillons no lado oposto ao do oscillon incidente. Exploramos a dependência desse processo nos diversos parâmetros livres do oscillon. Em particular, encontramos forte dependência na velocidade e na fase. De modo surpreendente, a eficiência com que o oscillon atravessa o kink depende de modo não-monotônico da velocidade de espalhamento.

Vimos que a propagação de sinais sobre o corpo do kink é um processo importante para entender a dinâmica das interações. Portanto, estudamos situações em que o perfil de um oscillon foi somado ao perfil de um kink, sobrepondo as duas configurações. Conseguimos mostrar que durante a maior parte da sua propagação, os sinais que viajam sobre o kink obedecem a equação de Klein–Gordon para  $m^2 = -1$ . Esse fato explica o porquê os sinais viajam com a velocidade da luz, e também nos permitiu obter uma expressão para a evolução da perturbação em termos de transformadas de Fourier. A comparação dessa expressão com os resultados de nossas simulações mostraram excelente consistência.

Dedicamos nossa atenção também a um modelo simplificado, que permitiu a obtenção de fórmulas analíticas para a evolução da perturbação. Nesse modelo simplificado, a perturbação evolui de acordo com a equação da onda, e os sinais também viajam com a velocidade da luz. Novamente houve consistência com o resultado das simulações.

Simulações de perturbações sobrepostas sobre o kink, tanto no modelo original quanto no modelo simplificado reproduziram vários dos comportamentos observados nos processos de espalhamento. Além disso, o estudo do modelo simplificado abriu a possibilidade de analisar modelos com máximos não-analíticos (ao contrário dos modelos que estudamos antes, que tinham apenas os mínimos não analíticos) e algumas de suas consequências na propagação de sinais sobre kinks.

Por fim, consideramos a possibilidade de usar potenciais não-analíticos para obter vórtices compactos em  $1 + 1$  dimensões. A principal motivação era encontrar soluções de vórtices em uma teoria com termo cinético usual, para permitir o estudo da dinâmica do modelo. No entanto, as soluções de vórtices obtidas apresentam uma descontinuidade no campo magnético, afetando a estabilidade da solução. Podemos construir um vórtice

compacto sem essa descontinuidade apenas tomando um termo cinético não usual para o campo eletromagnético. No entanto, nesse caso a solução não existe no caso geral, requerendo um ajuste fino dos parâmetros do modelo.

## 6.1 PERSPECTIVAS FUTURAS

Durante esse trabalho, conseguimos esclarecer o funcionamento da dinâmica de compactons em modelos com potencial não-analítico. No entanto, os resultados obtidos também deixaram mais claras algumas questões em aberto que podem ser exploradas no futuro. Portanto, vamos terminar essa tese apontando algumas direções que a pesquisa desenvolvida pode ser continuada.

1. *Compreender os modos internos de kinks compactos.* Um ponto importante a ser entendido melhor é o comportamento de pequenas perturbações que cobrem todo o corpo dos kinks compactos. Sólitons em outros modelos podem ter suas pequenas perturbações analisadas a partir da equação de movimento, da qual é possível obter uma equação do tipo de Schrödinger, cujas autofunções correspondem aos modos internos dos kinks. No entanto, os modelos com potencial não-analítico introduzem dificuldades nessa análise devido à presença de funções  $\text{sgn}$  na equação do campo. Por esse motivo, os modos internos dos kinks compactos tiveram que ser analisados de modo fenomenológico até o momento. O primeiro objetivo dessa proposta é entender melhor os modos internos dos kinks compactos a partir de primeiros princípios, analisando a sua equação de movimento. Em particular, podemos analisar como a transição de modelos de massa finita, como o  $\phi^4$ , para o limite de massas infinitas, caracterizado por potenciais não-analíticos, afeta os modos internos dos kinks. Esperamos assim tornar mais claras as limitações do modelo de coordenadas coletivas, que é uma ferramenta importante na descrição da dinâmica de sólitons.
2. *Estudar a quantização de compactons.* A maior parte dos trabalhos realizados até o momento no campo de compactons focou nas características das soluções das equações de campo clássicas. Existem alguns trabalhos que abordaram correções quânticas para compactons [76] e renormalização de potenciais não-analíticos [77]. Seria interessante investigar as correções mais importantes nas propriedades dos kinks compactos e investigar a possibilidade de uma descrição quântica de sua dinâmica. Um caminho para essa descrição seria realizar um procedimento de quantização canônica nas coordenadas coletivas.
3. *Compreender melhor a estabilidade ou não de vórtices compactos.* Apresentamos soluções de vórtices compactos em  $2 + 1$  dimensões. Seria interessante investigar a estabilidade destas soluções de modo mais formal. Os resultados apresentados aqui apontam que a descontinuidade do campo magnético para vórtices com-

pactos afeta a sua estabilidade. É necessário formalizar a demonstração dessa instabilidade, ou então saber se ela pode ser contornada de alguma forma.

4. *Investigar aplicações cosmológicas de compactons.* Outro objetivo importante é investigar aplicações cosmológicas de compactons topológicos auto-gravitantes no contexto de cosmologia de *thick branes*. Uma abordagem para esse problema foi estudada nas referências [23, 78, 79], onde a presença de um defeito topológico compacto permitiu determinar a correlação entre o acoplamento gravitacional e a constante cosmológica. Naqueles trabalhos, a existência de compactons estava relacionada a termos não-padrão na parte cinética da densidade lagrangiana. Seria interessante saber se esses resultados podem ser replicados para um modelo com termo cinético usual e potencial não-analítico.

## REFERÊNCIAS

- [1] MANTON, N.; SUTCLIFFE, P. *Topological Solitons*. Cambridge: Cambridge University Press, 2004. (Cambridge Monographs on Mathematical Physics). ISBN 978-0-521-83836-8. Citado na página 12.
- [2] RUBAKOV, V. A. *Classical Theory of Gauge Fields*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 2002. ISBN 978-0-691-05927-3. Citado na página 12.
- [3] BURGESS, M. *Classical Covariant Fields*. [S.l.]: Oxford University Press, 2002. ISBN 978-1-00-928988-7 978-1-00-928990-0 978-1-00-928986-3 978-0-521-67577-2 978-0-521-81363-1 978-0-511-03021-5. Citado na página 12.
- [4] SHNIR, Y. M. *Topological and Non-Topological Solitons in Scalar Field Theories*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2018. ISBN 978-1-108-63625-4. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 26.
- [5] ZABUSKY, N. J.; KRUSKAL, M. D. Interaction of “Solitons” in a Collisionless Plasma and the Recurrence of Initial States. *Physical Review Letters*, American Physical Society, v. 15, n. 6, p. 240–243, ago. 1965. Citado na página 12.
- [6] SKYRME, T. H. R. A non-linear field theory. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, v. 260, n. 1300, p. 127–138, 1961. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 29.
- [7] SKYRME, T. H. R. A unified field theory of mesons and baryons. *Nuclear Physics*, v. 31, p. 556–569, mar. 1962. ISSN 0029-5582. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 29.
- [8] MARLEAU, L. Modifying the Skyrme model: Pion mass and higher derivatives. *Physical Review D: Particles and Fields*, American Physical Society, v. 43, n. 3, p. 885–890, fev. 1991. Citado na página 12.
- [9] MARLEAU, L. All-orders skyrmions. *Physical Review D: Particles and Fields*, American Physical Society, v. 45, n. 5, p. 1776–1781, mar. 1992. Citado na página 12.
- [10] NETO, J. A. A note on the Skyrme model with higher derivative terms. *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, IOP Publishing, v. 20, n. 9, p. 1527–1530, set. 1994. Citado na página 12.
- [11] JACKSON, A. et al. A modified skyrmion. *Physics Letters B*, Elsevier BV, v. 154, n. 2-3, p. 101–106, abr. 1985. Citado na página 12.
- [12] FLORATOS, I.; PIETTE, B. Multi-Skyrmion solutions for the sixth order Skyrme model. *Physical Review D: Particles and Fields*, American Physical Society, v. 64, n. 4, p. 045009, jul. 2001. Citado na página 12.

- [13] ADAM, C.; Sánchez-Guillén, J.; WERESZCZYŃSKI, A. A Skyrme-type proposal for baryonic matter. *Physics Letters B*, Elsevier BV, v. 691, n. 2, p. 105–110, jul. 2010. Citado na página 12.
- [14] BOGOMOLNY, E. B. Stability of Classical Solutions. *Sov. J. Nucl. Phys.*, v. 24, p. 449, 1976. Citado na página 12.
- [15] PRASAD, M. K.; SOMMERFIELD, C. M. Exact Classical Solution for the 't Hooft Monopole and the Julia-Zee Dyon. *Physical Review Letters*, American Physical Society, v. 35, n. 12, p. 760–762, set. 1975. Citado na página 12.
- [16] ROSENAU, P.; HYMAN, J. M. Compactons: Solitons with finite wavelength. *Physical Review Letters*, American Physical Society, v. 70, n. 5, p. 564–567, fev. 1993. Citado na página 12.
- [17] ROSENAU, P.; ZILBURG, A. Compactons. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, IOP Publishing, v. 51, n. 34, p. 343001, jul. 2018. ISSN 1751-8121. Citado na página 12.
- [18] GISIGER, T.; PARANJAPE, M. B. Solitons in a baby-Skyrme model with invariance under area-preserving diffeomorphisms. *Physical Review D*, American Physical Society, v. 55, n. 12, p. 7731–7738, jun. 1997. Citado na página 12.
- [19] VLADIMIROV, V. A. Compacton-like solutions of the hydrodynamic system describing relaxing media. *Reports on Mathematical Physics*, v. 61, n. 3, p. 381–400, jun. 2008. ISSN 0034-4877. Citado na página 12.
- [20] DUSUEL, S.; MICHAUX, P.; REMOISSENET, M. From kinks to compactonlike kinks. *Physical Review E*, American Physical Society, v. 57, n. 2, p. 2320–2326, fev. 1998. Citado na página 12.
- [21] GORBACH, A. V.; FLACH, S. Compactlike discrete breathers in systems with nonlinear and nonlocal dispersive terms. *Physical Review E*, v. 72, n. 5, p. 056607, nov. 2005. ISSN 1539-3755, 1550-2376. Citado na página 12.
- [22] ABDULLAEV, F. Kh. et al. Compacton existence and spin-orbit density dependence in Bose-Einstein condensates. *Physical Review E*, American Physical Society, v. 107, n. 4, p. 044218, abr. 2023. Citado na página 12.
- [23] ADAM, C. et al. Compact self-gravitating solutions of quartic ( $k$ ) fields in brane cosmology. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, IOP Publishing, v. 41, n. 37, p. 375401, ago. 2008. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 99.

- [24] ADAM, C. et al. Compact gauge  $k$  vortices. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, v. 42, n. 13, p. 135401, abr. 2009. ISSN 1751-8113, 1751-8121. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 87.
- [25] ADAM, C. et al. Compact shell solitons in K field theories. *Journal of Mathematical Physics*, v. 50, n. 10, p. 102303, out. 2009. ISSN 0022-2488. Citado na página 13.
- [26] ADAM, C. et al. Compact boson stars in K field theories. *General Relativity and Gravitation*, v. 42, n. 11, p. 2663–2701, nov. 2010. ISSN 1572-9532. Citado na página 13.
- [27] BAZEIA, D. et al. Compactlike kinks and vortices in generalized models. *Physical Review D*, American Physical Society, v. 81, n. 12, p. 125016, jun. 2010. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 87.
- [28] ARODŹ, H. Topological compactons. *Acta Physica Polonica B*, v. 33, n. TPJU-13-2001, p. 1241–1252, 2002. Citado 3 vezes nas páginas 13, 14 e 26.
- [29] ARODŹ, H. Symmetry breaking transition and appearance of compactons in a mechanical system. *Acta Physica Polonica B*, v. 35, n. arXiv:hep-th/0312036, p. 625–638, dez. 2003. Citado na página 14.
- [30] ARODŹ, H.; KLIMAS, P. Chain of impacting pendulums as non-analytically perturbed sine-Gordon system. *Acta Physica Polonica B*, v. 36, n. 3, jan. 2005. Citado na página 14.
- [31] ARODŹ, H.; KLIMAS, P.; TYRANOWSKI, T. Field-theoretic models with V-shaped potentials. *Jagellonian University*, v. 36, p. 3861–3876, 2005. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 16.
- [32] ADAM, C. et al. BPS sectors of the Skyrme model and their non-BPS extensions. *Physical Review D*, American Physical Society (APS), v. 97, n. 3, fev. 2018. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 32.
- [33] ADAM, C.; Sanchez-Guillen, J.; WERESZCZYNSKI, A. BPS submodels of the Skyrme model. *Physics Letters B*, Elsevier BV, v. 769, p. 362–367, jun. 2017. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 29.
- [34] KLIMAS, P. et al. Oscillons in a perturbed signum-Gordon model. *Journal of High Energy Physics*, v. 2018, n. 4, p. 102, abr. 2018. ISSN 1029-8479. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 65.
- [35] KLIMAS, P.; LIVRAMENTO, L. Compact  $Q$ -balls and  $Q$ -shells in  $CP^N$ -type models. *Physical Review D*, American Physical Society, v. 96, n. 1, p. 016001, jul. 2017. Citado na página 14.

- [36] KLIMAS, P. et al. *Gauged compact Q-balls and Q-shells in a multi-component CP<sup>N</sup> model*. [S.l.]: arXiv, 2023. Citado na página 14.
- [37] KLIMAS, P.; SAWADO, N.; YANAI, S. Gravitating compact Q-ball and Q-shell solutions in the CP<sup>N</sup> nonlinear sigma model. *Physical Review D*, American Physical Society, v. 99, n. 4, p. 045015, fev. 2019. Citado na página 14.
- [38] HAHNE, F. M.; KLIMAS, P. Compact kink and its interaction with compact oscillons. *Journal of High Energy Physics*, v. 2022, n. 9, p. 100, set. 2022. ISSN 1029-8479. Citado na página 15.
- [39] HAHNE, F. M.; KLIMAS, P. Scattering of compact kinks. *Journal of High Energy Physics*, v. 2024, n. 1, p. 67, jan. 2024. ISSN 1029-8479. Citado na página 15.
- [40] HAHNE, F. M. *Dinâmica de oscillons, ondas de choque e kinks em modelo com potencial não-analítico*. Tese (Dissertação de mestrado) — Universidade Federal de Santa Catarina, 2020. Citado na página 18.
- [41] GLEISER, M. Pseudostable bubbles. *Physical Review D*, American Physical Society, v. 49, n. 6, p. 2978–2981, mar. 1994. Citado na página 18.
- [42] KUDRYAVTSEV, A. E. Solitonlike solutions for a Higgs scalar field. *JETP Lett. (USSR) (Engl. Transl.)*, v. 22, no. 3, pp. 82-83, Institute of Theoretical and Experimental Physics, ago. 1975. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 48.
- [43] SEGUR, H.; KRUSKAL, M. D. Nonexistence of small-amplitude breather solutions in phi<sup>4</sup> theory. *Physical Review Letters*, American Physical Society, v. 58, n. 8, p. 747–750, fev. 1987. Citado na página 18.
- [44] VUILLERMOT, P. A. Nonexistence of spatially localized free vibrations for a class of nonlinear wave equations. *Commentarii Mathematici Helvetici*, v. 62, n. 1, p. 573–586, dez. 1987. ISSN 1420-8946. Citado na página 18.
- [45] ABLOWITZ, M. J. et al. Method for Solving the Sine-Gordon Equation. *Physical Review Letters*, American Physical Society, v. 30, n. 25, p. 1262–1264, jun. 1973. Citado na página 18.
- [46] ARODŹ, H.; KLIMAS, P.; TYRANOWSKI, T. Compact oscillons in the signum-Gordon model. *Physical Review D*, American Physical Society, v. 77, n. 4, p. 047701, fev. 2008. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 19.
- [47] ARODŹ, H.; ŚWIERCZYŃSKI, Z. Swaying oscillons in the signum-Gordon model. *Physical Review D*, American Physical Society, v. 84, n. 6, p. 067701, set. 2011. Citado na página 19.



- [48] ŚWIERCZYŃSKI, Z. On the oscillons in the signum-Gordon model. *Journal of Nonlinear Mathematical Physics*, Informa UK Limited, v. 24, n. 1, p. 20–28, dez. 2016. Citado na página 19.
- [49] HAHNE, F. M. et al. Scattering of compact oscillons. *Journal of High Energy Physics*, v. 2020, n. 1, p. 6, jan. 2020. ISSN 1029-8479. Citado na página 22.
- [50] ARODŹ, H.; KLIMAS, P.; TYRANOWSKI, T. Scaling, self-similar solutions and shock waves for V-shaped field potentials. *Physical Review E*, v. 73, n. 4, p. 046609, abr. 2006. ISSN 1539-3755, 1550-2376. Citado na página 23.
- [51] KLIMAS, P.; STREIBEL, J. S. *The Signum-Gordon Shock Waves in 2+1 and 3+1 Dimensions*. [S.l.]: arXiv, 2023. Citado na página 23.
- [52] HAHNE, F. M.; KLIMAS, P.; STREIBEL, J. S. Decay of shocklike waves into compact oscillons. *Physical Review D*, v. 101, n. 7, p. 076013, abr. 2020. ISSN 2470-0010, 2470-0029. Citado na página 25.
- [53] MANTON, N. S. An effective Lagrangian for solitons. *Nuclear Physics B*, v. 150, p. 397–412, jan. 1979. ISSN 0550-3213. Citado na página 40.
- [54] BEZANSON, J. et al. Julia: A Fresh Approach to Numerical Computing. *SIAM Review*, Society for Industrial and Applied Mathematics, v. 59, n. 1, p. 65–98, jan. 2017. ISSN 0036-1445. Citado na página 42.
- [55] RACKAUCKAS, C.; NIE, Q. DifferentialEquations.jl – A Performant and Feature-Rich Ecosystem for Solving Differential Equations in Julia. *Journal of Open Research Software*, Ubiquity Press, v. 5, n. 1, p. 15, maio 2017. ISSN 2049-9647. Citado na página 42.
- [56] RICE, M. J. Physical dynamics of solitons. *Physical Review B*, American Physical Society, v. 28, n. 6, p. 3587–3589, set. 1983. Citado na página 43.
- [57] SUGIYAMA, T. Kink-antikink collisions in the two-dimensional  $\phi^4$  model. *Progress of Theoretical Physics*, v. 61, n. 5, p. 1550–1563, maio 1979. ISSN 0033-068X. Citado na página 44.
- [58] KEVREKIDIS, P. G.; GOODMAN, R. H. *Four Decades of Kink Interactions in Nonlinear Klein-Gordon Models: A Crucial Typo, Recent Developments and the Challenges Ahead*. [S.l.]: arXiv, 2019. Citado na página 46.
- [59] KEVREKIDIS, P. G.; CUEVAS-MARAVAR, J. (Ed.). *A Dynamical Perspective on the  $\phi^4$  Model: Past, Present and Future*. Cham: Springer International Publishing, 2019. v. 26. (Nonlinear Systems and Complexity, v. 26). ISBN 978-3-030-11838-9 978-3-030-11839-6. Citado na página 46.

- [60] ABLOWITZ, M. J.; KRUSKAL, M. D.; LADIK, J. F. Solitary Wave Collisions. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, Society for Industrial and Applied Mathematics, v. 36, n. 3, p. 428–437, 1979. ISSN 0036-1399. Citado na página 48.
- [61] ANNINOS, P.; OLIVEIRA, S.; MATZNER, R. A. Fractal structure in the scalar  $\lambda(\varphi^2 - 1)^2$  theory. *Physical Review D*, American Physical Society, v. 44, n. 4, p. 1147–1160, ago. 1991. Citado na página 48.
- [62] BAZEIA, D. et al. Scattering of compactlike structures. *The European Physical Journal C*, v. 79, n. 12, p. 1000, dez. 2019. ISSN 1434-6052. Citado na página 49.
- [63] MANTON, N. et al. Collective coordinate model of kink-antikink collisions in  $\phi^4$  theory. *Physical Review Letters*, American Physical Society, v. 127, n. 7, p. 071601, ago. 2021. Citado 2 vezes nas páginas 51 e 54.
- [64] MANTON, N. S. et al. Kink moduli spaces: Collective coordinates reconsidered. *Physical Review D*, American Physical Society, v. 103, n. 2, p. 025024, jan. 2021. Citado 2 vezes nas páginas 51 e 54.
- [65] PEREIRA, C. F. S. et al. Some novel considerations about the collective coordinates approximation for the scattering of  $\phi^4$  kinks. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, IOP Publishing, v. 54, n. 7, p. 075701, jan. 2021. ISSN 1751-8121. Citado na página 51.
- [66] PEREIRA, C. F. S.; dos Santos Costa Filho, E.; TASSIS, T. Collective coordinates for the hybrid model. *International Journal of Modern Physics A*, World Scientific Publishing Co., v. 38, n. 01, p. 2350006, jan. 2023. ISSN 0217-751X. Citado na página 51.
- [67] ADAM, C. et al. Relativistic moduli space for kink collisions. *Physical Review D*, American Physical Society, v. 105, n. 6, p. 065012, mar. 2022. Citado 3 vezes nas páginas 51, 53 e 58.
- [68] ADAM, C. et al. Relativistic moduli space and critical velocity in kink collisions. *Physical Review E*, American Physical Society, v. 108, n. 2, p. 024221, ago. 2023. Citado na página 51.
- [69] BLASCHKE, F.; KARPÍŠEK, O. N.; RAFAJ, L. Mechanization of a scalar field theory in 1 + 1 dimensions: Bogomol’nyi-prasad-sommerfeld mechanical kinks and their scattering. *Physical Review E*, American Physical Society, v. 108, n. 4, p. 044203, out. 2023. Citado na página 51.
- [70] CAPUTO, J. G.; FLYTZANIS, N. Kink-antikink collisions in sine-gordon and  $\varphi^4$  models: Problems in the variational approach. *Physical Review A*, American Physical Society, v. 44, n. 10, p. 6219–6225, nov. 1991. Citado na página 54.

- [71] TAKYI, I.; WEIGEL, H. Collective coordinates in one-dimensional soliton models revisited. *Physical Review D*, v. 94, n. 8, p. 085008, out. 2016. ISSN 2470-0010, 2470-0029. Citado na página 54.
- [72] FRIGO, M.; JOHNSON, S. The Design and Implementation of FFTW3. *Proceedings of the IEEE*, v. 93, n. 2, p. 216–231, fev. 2005. ISSN 1558-2256. Citado na página 77.
- [73] AHARONOV, Y.; KOMAR, A.; SUSSKIND, L. Superluminal Behavior, Causality, and Instability. *Physical Review*, American Physical Society, v. 182, n. 5, p. 1400–1403, jun. 1969. Citado na página 78.
- [74] ABRIKOSOV, A. A. On the Magnetic properties of superconductors of the second group. *Sov. Phys. JETP*, v. 5, p. 1174–1182, 1957. Citado na página 87.
- [75] GINZBURG, V. L.; LANDAU, L. D. On the Theory of superconductivity. *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, v. 20, p. 1064–1082, 1950. Citado na página 87.
- [76] BAZEIA, D.; VASSILEVICH, D. V. A Note on Quantum Compactons. *arXiv.org*, jan. 2015. Citado na página 98.
- [77] ALEXANDRE, J. et al. Renormalisation of non-differentiable potentials. *Journal of High Energy Physics*, v. 2022, n. 7, p. 12, jul. 2022. ISSN 1029-8479. Citado na página 98.
- [78] ADAM, C.; SANCHEZ-GUILLEN, J.; WERESZCZYNSKI, A.  $k$ -defects as compactons. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, v. 42, n. 8, p. 089801, fev. 2009. ISSN 1751-8113, 1751-8121. Citado na página 99.
- [79] ADAM, C. et al.  $k$  fields, compactons, and thick branes. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, v. 41, n. 21, p. 212004, maio 2008. ISSN 1751-8113, 1751-8121. Citado na página 99.