Florilegium de investigaciones que envuelven la teoría semiocognitiva del aprendizaje matemático de Raymond Duval

Méricles Thadeu Moretti (org)

2024

Edición GPEEM/PPGECT/UFSC

Florilegium de investigaciones que envuelven la teoría semiocognitiva del aprendizaje matemático de Raymond Duval (parte 3)

Edición GPEEM/PPGECT/UFSC
Florianópolis
2024

Méricles Thadeu Moretti (Org)

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Florilegium de investigaciones que envuelven la teoría semiocognitiva del aprendizaje matemático de Raymond Duval (parte 3) [livro eletrônico] / Méricles Thadeu Moretti (org.). – Florianópolis, SC: Ed. do Autor, 2024
PDF

Bibliografia.
ISBN 978-65-01-04754-6
DOI 105281/zenodo.11506904

1.Aprendizagem cognitiva 2. Aprendizagem - Metodologia 3. Matemática 4. Semiótica I. Moretti, Méricles Thadeu.

24-210303 CDD-510.7

Índices para catálogo sistemático:
1. Matemática: Ensino 510.7

Aline Graziele Benitez - Bibliotecária - CRB-1/312

Disponible en:

https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/203982

https://zenodo.org/records/11506904

ÍNDICE

PRESENTACIÓN

Es con gran satisfacción que el Grupo de Investigación en Epistemología y Enseñanza de la Matemática (GPEEM), asociado al Programa de Posgrado en Educación Científica y Tecnológica de la Universidad Federal de Santa Catarina (PPGECT/UFSC), presenta el "Florilegio de investigaciones que envuelven la teoría semiocognitiva del aprendizaje matemático de Raymond Duval – parte 3", que continúa el proyecto "Florilegio" lanzado en 2020.

Este *e-book* está estructurado en ocho capítulos que se refieren a la Teoría Semiótica y Cognitiva del Aprendizaje Matemático desarrollada por Raymond Duval, esencialmente abarca discusiones sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. En esta ocasión, los capítulos son el resultado de trabajos de autores invitados que también han estado investigando en esta dirección, y tratan especialmente de temas transversales a la teoría de Duval.

El objetivo principal de esta obra es contribuir al campo de la investigación en Educación Matemática, difundiendo la teoría de Raymond Duval como un aporte teórico versátil para el análisis, reflexión y problematización de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Por lo tanto, deseamos a todos una excelente lectura.

La teoría de los registros de representación semiótica de Raymond Duval ha demostrado ser un importante instrumento de investigación en el complejo proceso de aprendizaje de las matemáticas. De esta manera, muchos investigadores han comenzado a adoptarla como un marco teórico en sus investigaciones en el campo de la Educación Matemática. Este compromiso refuerza aún más este referente teórico, fundamental para comprender y superar los problemas presentes en el transcurso de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, además de legitimar la misión de difundirlo. En vista de ello, a través de esta obra, compartimos un poco de la teoría de Raymond Duval e invitamos al lector a empoderarse de este conocimiento.

El Capítulo I de este *e-book* es una contribución del propio Duval, donde describe dos criterios decisivos para evaluar la relevancia y la contribución de una teoría cognitiva para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, y finalmente aborda la siempre conflictiva cuestión de las relaciones entre el punto de vista cognitivo y el punto de vista matemático.

En el Capítulo II, Bruno D'Amore y Raymond Duval considerando que la mirada se revela como una complejidad notable y no esperada en el aprendizaje de la geometría, presentan un estudio donde sugieren modalidades didácticas para ayudar a educar esta mirada. Además, proponen analogías entre "ver" figuras geométricas y "ver" obras de arte figurativas. También analizan el fenómeno del reconocimiento de las llamadas figuras imposibles y proponen algunos ejemplos de obras de arte para las cuales la mirada no es suficiente para la interpretación, requiriendo un análisis semiótico.

En el Capítulo III, Juan D. Godino, Miguel R. Wilhelmi, Teresa F. Blanco, Ángel Contreras y Belén Giacomone destacan la aplicación de dos herramientas teóricas distintas: los conceptos de registro de representación semiótica y configuración ontosemiótica, para analizar una tarea que requiere la formulación de una conjetura y su demostración utilizando representaciones figurativas y algebraicas. Los autores revelan una potencial sinergia entre estas herramientas y señalan la posibilidad de avanzar en la articulación de los marcos teóricos correspondientes.

En el Capítulo IV, Fernando Hitt, Matías Camacho-Machín y Ramón Depool analizan un aspecto particular de un tipo específico de proceso de conversión relacionado con la noción de variable visual. Según los autores, el interés es estudiar el papel de esta noción en la resolución de problemas en general y, especialmente, en la resolución de problemas a través de la tecnología, dado que algunos solucionadores producen representaciones no institucionalizadas, que, por lo tanto, no forman parte de un registro en el sentido de Duval.

En el Capítulo V, Méricles T. Moretti y Adalberto Cans parten de consideraciones reveladas por Duval y realizan una revisión de la noción de aprehensión figural en el aprendizaje de la geometría. Esta reinterpretación renombró algunas de estas aprehensiones con el objetivo de acercarlas cada vez más al papel que desempeñan en la resolución de problemas de geometría con figuras. Por ejemplo, la aprehensión perceptiva ahora se define como dos tipos: una objetiva e inmediata, que se centra únicamente en lo que se ve en la figura, la aprehensión perceptiva inmediata, y otra, mucho más completa, que considera además de lo que se ve en la figura lo que se dice en el enunciado, denominada aprehensión perceptiva atenta. Este estudio también puso de relieve la aprehensión heurística que surge de la sinergia entre las aprehensiones perceptiva atenta y operativa, ampliando en gran medida el potencial heurístico de solución del problema.

En el capítulo VI, Bruno D'Amore, Martha Isabel F. Pinilla, Maura Iori y Maurizio Matteuzzi presentan una reflexión sobre el paradójico cognitivo del pensamiento matemático descrito por Duval (1993). Sin embargo, estos autores afirman que varios otros estudiosos de la semiótica ya habían destacado este fenómeno, y en este trabajo, proceden a analizar algunos estudios de estos investigadores.

Martha Isabel F. Pinilla y Bruno D'Amore, en el capítulo VII, abordan, a través de un ejemplo específico, cómo el cambio de una representación a otra mantiene el significado, pero puede cambiar el sentido de los objetos matemáticos cuando sus representaciones semióticas son sometidas a transformaciones que involucran tratamientos o conversiones.

En este último capítulo, Miglena Asenova, Agnese Del Zozzo y Marzia Garzetti investigan la influencia de la perspectiva semiótica en la formación de profesores de matemáticas. Este capítulo describe la estructura teórica del Conocimiento Interpretativo Semiótico (SIK), que integra el conocimiento interpretativo con la teoría de Duval, componentes del aprendizaje matemático y retroalimentación. Finalmente, propone la incorporación de la formación semiocognitiva en los programas de formación de profesores, con el objetivo de mejorar la capacidad interpretativa de estos profesionales hacia las respuestas de los estudiantes no estandarizadas.

Méricles T. Moretti
Adalberto Cans
Celia F. Brandt

CAPÍTULO I

Cuestionamientos sobre la "elección" y utilización de teorías en "Mathematics Education"[1]

Raymond Duval

Profesor emérito, Université du Littoral Côté d'Opale

El estudio de los procesos de adquisición de conocimientos en matemáticas se impuso, a partir de 1968, como campo de investigación específico, con la Reforma de las "Matemáticas Modernas" (*new Maths*) y la creación de los IREM en Francia.[2] Estos dos sucesos, netamente institucionales, deben ser reubicados en un movimiento más general y común a todos los países de la OCDE (**Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos**) y posteriormente, a los demás países. Por una parte, se presentó lo que se llamaba entonces la "masificación de la enseñanza secundaria", que había comenzado a partir de los años 60 y que impartía el mismo tipo de enseñanza a todos los estudiantes de una misma clase y edad, hasta los 15 a 16 años. Por otra parte, se impusieron nuevas expectativas de formación con impacto cada vez mayor en la vida cotidiana y en las prácticas profesionales, del desarrollo científico y tecnológico. El desarrollo de las tecnologías relativas a los *mass-media*, que anunciaron lo que actualmente se llama las *nuevas tecnologías* y el desafío que constituyó el lanzamiento del programa Apolo por Kennedy en mayo de 1961, son dos de los ejemplos más emblemáticos. La creación de la revista *Educational Studies in Mathematics*

---

[1] Cuestionamientos sobre la «elección» y utilización de teorías en «Mathematics Education». In B. D'Amore & M. Pinilla (compiladores)) La didáctica de la matemática. Una mirada internacional empírica y teórica. Bogota, Universidad de La Sabana, pp.159-182, 2015.

[2] Decreto aparecido en el Boletín oficial del 29 de julio de 1968. La aplicación de esta Reforma comenzó en 1969 para la clase de sexto (11-12 años) y después, en 1970, para la clase de quinto (12-13 años), etc. Esta Reforma hacía seguimiento a los trabajos de la Comisión Lichnérowicz que habían comenzado en enero de 1967 y concluyeron en 1973.

por Freudenthal, en 1968, marca el surgimiento de este campo específico de investigación.

El desarrollo de las investigaciones mostró desde entonces la amplitud y la complejidad de los fenómenos y preguntas que abarcan el campo de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas *(Mathematics Education*). Tres tipos de hechos marcan la especificidad de este campo.

Ante todo, el hecho de que *la enseñanza de las matemáticas aparece como un mundo abierto*, tanto por la organización de los *curricula* como por los contenidos de la enseñanza. Los objetivos educativos de una enseñanza común para todos los alumnos de una misma clase y edad, hasta los 16 años, no pueden ser los mismos que los de los últimos cursos, que están especializados en función de pre-orientaciones profesionales y que no conciernen sino a poblaciones restringidas con relación a la escuela primaria y secundaria. Las matemáticas enseñadas abarcan diferentes campos: los números (enteros, decimales, racionales, etc.), el álgebra (cálculo lineal, resolución de ecuaciones), la geometría (plana, del espacio), el análisis (funciones), la estadística, las probabilidades, etc. Este surgimiento se traduce concretamente en rupturas profundas que se producen en cada cambio de ciclo, de la primaria al colegio, luego al liceo, etc.[3] Ahora bien, estas rupturas se dan no solo en los cambios de exigencia matemática concernientes a los diferentes tipos de actividad y de habilidades esperadas en los alumnos, sino también en la introducción de los campos matemáticos correspondientes. Como se puede ver en geometría, o en algebra con el paso del cálculo lineal (limitado a la utilización de fórmulas) al "cálculo formal" (requerido para la resolución de ecuaciones), este cambio de exigencia corresponde al salto de una comprensión basada en verificaciones empíricas a una comprensión basada únicamente en el dominio de las propiedades matemáticas y de las demostraciones.

En segundo término, se presentan *las dificultades sistemáticas y recurrentes de comprensión en el aprendizaje de las matemáticas* para la gran

[3] El sistema educativo francés está dividido en tres ciclos. El primer ciclo comprende 5 niveles y se denomina Escuela primaria. Al segundo ciclo se le llama Colegio y comprende cuatro niveles (de sexto a tercero). Los programas de estos dos ciclos son comunes para todos los estudiantes hasta los 15 o 16 años. El tercer ciclo es el Liceo y se desarrolla durante dos años. En este último ciclo, los programas varían en función de la sección escogida por los estudiantes según su orientación profesional (niveles segundo y primero).

mayoría de los alumnos de la enseñanza común hasta los 16 años. Para verificarlo, basta con consultar las encuestas y evaluaciones nacionales e internacionales que no han dejado de multiplicarse y de ganar importancia desde los años 90.
En el aula, los profesores ven siempre a la mayoría de los alumnos quedar bloqueados cuando se trata de resolver un problema. Y esto sucede en todos los niveles de enseñanza, hasta el final de los estudios secundarios, ya se trate de problemas de adición, problemas de planteamiento de una ecuación, problemas de aplicación de propiedades geométricas hasta problemas abiertos de exploración con una perspectiva de generalización (Duval, 2013). Todo sucede como si hubiera un primer umbral en el aprendizaje de las matemáticas que la gran mayoría de los alumnos no logra pasar del todo a lo largo del currículo.

Por último, *la necesidad de situarse desde otros puntos de vista diferentes al de las matemáticas* en las investigaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje, para poder así analizar la complejidad de los procesos de adquisición de conocimientos en matemáticas y la organización del trabajo de los alumnos en el aula. La necesidad de situarse desde puntos de vista diferentes y no solo desde el de las matemáticas proviene del hecho de que los dispositivos de observación, es decir los tipos de tareas y las actividades elaboradas para lograr la producción de los estudiantes, así como las escalas de tiempo para la observación, dependen del punto de vista que se adopte. Dicho de otra manera, *los fenómenos que se pueden observar no son nunca los mismos según el punto de vista en que nos situemos.* El problema de las relaciones entre estos diferentes puntos de vista, e igualmente, de su relación con el punto de vista matemático, se situó rápidamente en el centro de las investigaciones y de su desarrollo. La cuestión de elegir y de utilizar teorías en «Mathematics Education» se inscribe en esta necesidad de adoptar diferentes puntos de vista y en los problemas que sus relaciones provocan.

Para evidenciar los criterios que permiten evaluar la pertinencia y el aporte de una teoría para las investigaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, debemos partir de la distinción entre punto de vista y teoría. Un punto de vista determina un tipo de fenómenos observables, y oculta muchos otros fenómenos que son acaso tan esenciales como los que se pueden observar. Una teoría debe cumplir dos funciones epistemológicas: explicar un conjunto de fenómenos observados evidenciando los factores y los procesos que explican las variaciones, y constituir una herramienta de exploración para descubrir otros fenómenos de la misma naturaleza. La consecuencia inmediata es que *todas las teorías elaboradas y utilizadas en las investigaciones en educación matemática son siempre relativas a un solo punto de vista.* No puede haber una teoría que abarque o sintetice todos los puntos de vista.

En este caso, nos interesa únicamente las teorías cognitivas, es decir las teorías relativas al punto de vista de los procesos de adquisición de conocimientos. Para esto, comenzaremos a aclarar los diferentes puntos de vista que se impusieron en las investigaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje y examinaremos los problemas sobre sus relaciones. Luego, evidenciaremos los dos criterios decisivos para evaluar la pertinencia y el aporte de una teoría cognitiva. Por último, abordaremos la cuestión, siempre conflictiva, de las relaciones entre el punto de vista cognitivo y el punto de vista de las matemáticas.

1. LOS TRES PUNTOS DE VISTA FUNDAMENTALES Y LOS DIFERENTES TIPOS DE TEORÍAS

Tres puntos de vista se impusieron sucesivamente como indispensables, además del punto de vista matemático. Corresponden a los respectivos puntos de vista de *tres tipos de actores que son las partes esenciales de todo sistema educativo*: en primer lugar, los alumnos, seguido de los profesores y por último, los responsables institucionales del sistema educativo (expertos, responsables políticos, etc.).

EL PUNTO DE VISTA DEL PROFESOR es el que primero se impuso, en razón de las necesidades institucionales de formación de los profesores. Además, las investigaciones sobre los procesos de adquisición de conocimientos matemáticos que se desarrollaron en Francia a partir de los años 70 se reagruparon bajo la denominación de *didáctica de las matemáticas,* para diferenciarse de los enfoques pedagógicos y psicológicos. Se trataba de preparar a los profesores no solamente en los nuevos contenidos matemáticos que debían enseñar, sino también en los nuevos métodos de enseñanza, orientados hacia el trabajo, a hacer-hacer en el aula, para que los alumnos descubrieran paso a paso,[4] o "construyeran" ellos mismos los

[4] La enseñanza programada y la elaboración de fichas que se basaban en el principio de la separación de un contenido matemático en una secuencia de mini-ejercicios se desarrollaron

conceptos a adquirir a lo largo del año escolar. Pero, muy pronto, surgió la idea de que la manera como el profesor dirigía o acompañaba el trabajo de los estudiantes, es decir, cómo tomaba en cuenta las reacciones y producciones de los alumnos, era tan importante como la preparación de sus actividades pedagógicas. El punto de vista del profesor es el de saber organizar y conducir el trabajo del aula con el fin de garantizar la participación de todos los estudiantes en una secuencia de actividades, concebida como una secuencia de etapas en la adquisición de un conocimiento matemático.

Las teorías y las ingenierías didácticas proponen lo que llamaré *esquemas funcionales* para organizar las secuencias de adquisición de conceptos o de algoritmos. Estos esquemas caracterizan las funciones que deben cumplir las actividades dadas a los estudiantes para que una secuencia de actividades permita descubrir y adquirir un conocimiento matemático: exploración de problemas, "validación" de formulaciones en el momento de una puesta en común y fijación bajo la forma matemática definida en los programas. Cuando situamos según este punto de vista a los profesores frente a su clase, las interacciones entre los estudiantes y las de ellos con el profesor constituyen los fenómenos a observar para estudiar los procesos de adquisición de conocimientos matemáticos.

EL PUNTO DE VISTA DE LOS EXPERTOS – responsables políticos y responsables del sistema educativo– no se impuso sino posteriormente, aunque haya jugado un papel importante en la Reforma de las matemáticas modernas. Este *punto de vista institucional* es socio-normativo. Por un lado, se ocupa de la elección de los conocimientos que van a ser los objetivos educativos en cada uno de los ciclos (primaria, colegio, liceo). Esta elección debe, a la vez, tomar en cuenta las expectativas sociales de formación y, el *orden de construcción matemática a seguir para la adquisición de los conocimientos elegidos como objetivos de un ciclo*. Por el otro, se ocupa de determinar los "programas", es decir, la segmentación anual de la secuencia para alcanzar los objetivos educativos. El punto de vista institucional es doblemente global y concierne a las "cohortes" de estudiantes de un país, y se sitúa en una escala de tiempo de por lo menos una quincena de años, es

---

en los años 70 y prepararon lo que sería la pedagogía por objetivos y el análisis por conocimientos en términos de *competencias* que se desarrollaron a partir de los años 80.

decir el recorrido de la enseñanza común hasta los 16 años, y el de los cursos especializados en función de las pre-orientaciones profesionales.
El punto de vista institucional tomó una nueva importancia desde los años 90, con el desarrollo de las pruebas nacionales e internacionales que pretenden evaluar un sistema educativo, de acuerdo con la proporción de estudiantes de un país que alcanza los objetivos educativos de un ciclo. Estas investigaciones, macro-comparativas, contribuyeron a imponer la noción de *competencia* para analizar la adquisición de conocimientos. Las competencias se definen *como los saber-hacer correspondientes al logro de uno o varios ítems de un corpus de ejercicios elementales.* Esto conduce a descomponer la adquisición de un conocimiento en listas de competencias, las cuales se retoman posteriormente como objetivos de enseñanza, para mejorar la eficacia del sistema educativo.

EL PUNTO DE VISTA DE LOS ALUMNOS, o más bien de cada alumno, apunta esencialmente a la cuestión de *comprender*. Frente a un problema o una pregunta, ¿cómo no esperar que alguien (el profesor o un estudiante) diga lo que hay que hacer, y, luego, si lo que se hizo está bien o mal? La comprensión en matemáticas se basa sobre la autonomía intelectual, es decir, en la capacidad de tomar iniciativas para buscar el camino de una solución y sobre la capacidad de ver por qué lo que se hizo funciona o no puede funcionar. Dicho de otra manera, comprender se traduce en tener confianza en su capacidad de iniciativa, de análisis y de control en matemáticas, frente a nuevas preguntas y frente a *lo que no se ha visto en el aula*. El problema de la comprensión y de la no comprensión en matemáticas es el problema central en la adquisición de conocimientos matemáticos. *Concierne al cuestionamiento de los procesos cognitivos que subyacen a la conducta autónoma de cualquier forma de actividad matemática.*

Teniendo en cuenta la amplitud y la persistencia de los problemas de comprensión en matemáticas, las investigaciones sobre la adquisición de conocimientos han *recurrido* sucesivamente a *tres tipos de teorías cognitivas.* Primero la teoría piagetiana centrada en la “construcción de conceptos” por el niño. Luego, a partir de los años 80, la de Vygotsky, centrada en las diferentes prácticas discursivas de la lengua natural: producciones orales, producciones internas y producciones escritas. Y a partir de los años 90, la de Peirce, a la vez semiótica y pragmática. Ahora bien, estas teorías son *en parte contradictorias sobre puntos esenciales respecto a los procesos cognitivos de* *comprensión*. La teoría piagetiana y la de Vygotsky se oponen en lo concerniente a la importancia del lenguaje en el aprendizaje, el cual es, sin embargo, esencial en clase. La de Pierce se opone a la de Piaget sobre el proceso de construcción de conceptos y a la de Vygotsky en el hecho de que la actividad cognitiva está basada no solo en la movilización de imágenes, de diagramas o en la percepción de indicios sino también, en el lenguaje. Actualmente se proponen versiones mejoradas de estas teorías que son en esencia síntesis que copian algunas nociones o algunas palabras claves de estas teorías.

2. ¿CUÁL DE ESTOS PUNTOS DE VISTA ES MÁS IMPORTANTE PARA EL ESTUDIO DE LOS PROCESOS DE ADQUISICIÓN DE CONOCIMIENTOS MATEMÁTICOS?

Según el punto de vista en el cual nos situemos, los fenómenos observados no son los mismos y, sobre todo, los procesos de adquisición de conocimientos descritos son radicalmente diferentes. Sin embargo, el objetivo de las investigaciones hechas según cada uno de los tres puntos de vista es el mismo: la adquisición de conceptos matemáticos para desarrollar la autonomía intelectual de los alumnos y para prepararlos a los múltiples usos de las matemáticas en la vida social y en la actividad profesional. Ahora bien, desde que el estudio de los procesos de adquisición se impuso como un campo específico de investigación, solo dos puntos de vista se consideran esenciales: el punto de vista matemático y el punto de vista didáctico de la organización de secuencias de actividades de clase.

La prioridad del punto de vista matemático es evidente, puesto que se trata de conocimientos matemáticos y porque no se puede aprender matemáticas sin *hacer* un poco de matemáticas, es decir, sin resolver problemas y por lo tanto, sin utilizar propiedades, algoritmos o fórmulas. Y el punto de vista didáctico, es decir el "*teaching*", parece adaptarse perfectamente con el punto de vista matemático, porque el objetivo de enseñanza en el aula es siempre un concepto matemático, un algoritmo o un procedimiento, y porque la naturaleza del trabajo pedido a los alumnos debe ser una actividad de resolución de problemas. El desafío para la investigación es entonces no solamente encontrar el tipo de problema que va a permitir introducir el concepto o proceso, sino también de organizarlo en una secuencia de actividades de resolución que conduzcan a los alumnos a *descubrir* o a *construir* lo que deben adquirir. Solo se toma en cuenta el punto de vista cognitivo para adaptar la organización de las secuencias de actividades a las etapas por las cuales los individuos pasan en la adquisición de nuevos conocimientos. Durante el primer periodo de las investigaciones en educación matemática, el constructivismo piagetiano fue el marco teórico de referencia porque parecía concordar perfectamente con el punto de vista didáctico y con el punto de vista matemático. Pero la amplitud, la complejidad y la persistencia de los fenómenos de la no comprensión de una gran mayoría de alumnos, puesto en evidencia por el desarrollo de trabajos didácticos, impusieron la búsqueda de otras teorías cognitivas para describir los procesos de adquisición de conocimientos matemáticos.

La multiplicación de teorías cognitivas, desde los años 80, muestra que el *análisis de los procesos cognitivos subyacentes a la conducta de cualquier actividad matemática* es el punto crucial de las investigaciones sobre los procesos de adquisición de conocimientos matemáticos. Pero, paradójicamente, esto no condujo a tomar en cuenta la complejidad y la persistencia de los fenómenos de la no comprensión en el aprendizaje de las matemáticas. Porque la utilización o la elaboración de teorías cognitivas se hacen casi siempre con la única perspectiva didáctica de la enseñanza. Dicho de otra manera, las condiciones del *learning* se estudian a partir de las exigencias del *teaching*. Lo que muestra bien la asociación *teaching/learning*, que es frecuentemente repetida como una consigna.

En realidad, tomar como campo de investigación el marco de trabajo en el aula crea cuatro limitaciones que impiden estudiar la naturaleza de los procesos cognitivos subyacentes a la actividad matemática y a la comprensión de las matemáticas.

La primera limitación proviene del hecho de que el trabajo en el aula está basado en una sucesión de sub-objetivos establecidos institucionalmente para cada año de un ciclo. Estos sub-objetivos locales se determinan mediante *un análisis de regresión en términos de prerrequisitos matemáticos* de los conocimientos que se seleccionaron como objetivos educativos para un ciclo de cuatro o cinco años. Este análisis de regresión es una descomposición de los conocimientos en conceptos y algoritmos que se convierten en sub-objetivos intermedios de adquisición. *Y reiterando este análisis, se obtiene lo que es matemáticamente más simple y lo más básico, y por lo tanto lo que debe ser introducido primero.* Los programas determinan de esta manera un orden inverso al de *re (construcción)* de los conceptos matemáticos y de los algoritmos aislados en este enfoque regresivo.[5] Todas las investigaciones que favorecen el marco de trabajo en el aula están necesariamente enfocadas en la adquisición de un contenido matemático particular, que fue aislado de esta manera. El punto de vista didáctico no está de acuerdo con el punto de vista matemático sino a través del filtro institucional de una progresión en el aprendizaje. Las formas específicas de trabajar las matemáticas están, por tanto, *ipso facto* fuera del alcance de la investigación.

La segunda limitación proviene del estudio del proceso de comprensión que se debe hacer en escalas de tiempo que van desde algunos segundos (para los fenómenos de reconocimiento) a varios meses o años (para las transferencias de fenómenos a contextos radicalmente distintos). Ahora bien, la observación de procesos de adquisición realizados en el marco de trabajo en el aula se hace solo en la escala de unas pocas semanas, ya que se centra en una secuencia de actividades relativas a la adquisición de un contenido matemático particular. Además, el estudio de los problemas de comprensión y adquisición requiere que se tengan en cuenta no solo los criterios matemáticos exitosos, es decir, la exactitud del resultado obtenido y su justificación, sino también los criterios cognitivos, el reconocimiento casi inmediato de lo que hablamos, lo que representa un gráfico, una figura, o la segmentación de una expresión algebraica, que constituye el criterio más importante.

La tercera limitación surge de los dispositivos de observación. Como parte del trabajo de aula, la solución de un problema es el dispositivo principal de la observación, ya que la resolución de problemas caracteriza la actividad matemática y el trabajo de los matemáticos. Pero el estudio de los procesos cognitivos que subyacen a esta actividad requiere que se puedan distinguir los diferentes factores que intervienen en esta actividad y que se puedan desarrollar tareas para movilizar específicamente cada uno de los factores cognitivos.

La última limitación se refiere a la brecha considerable que existe entre las micro-evaluaciones del trabajo de aula después de una secuencia de actividades y las macro evaluaciones de los logros a escala de la población de un país, después de cinco o diez años de aprendizaje de las matemáticas. Esta

[5] Un ejemplo típico es la descomposición en sub-objetivos anuales de dos objetivos globales de la enseñanza del algebra en el Colegio: la resolución de ecuaciones y su utilización para resolver problemas (Duval, próximo a aparecer).

diferencia indica que los objetivos establecidos están lejos de ser una realidad para la mayoría de la población, incluso cuando se observan los países mejor clasificados. Por ejemplo, lo concerniente a la enseñanza del álgebra, y aún más en lo que concierne la enseñanza de la geometría.

Tomar la perspectiva del maestro, es decir, la organización de secuencias de actividades en el aula que siempre están centradas en un contenido matemático específico, conduce a ignorar las opiniones de los estudiantes que no llegan a comprender, a lo largo de los cursos, cómo hacer para trabajar de manera matemática y para resolver problemas. Se puede así cuestionar la contribución real y la pertinencia de todas las teorías cognitivas que se elaboran o se utilizan directamente con la perspectiva de la organización del trabajo de aula.

3. LA PERTINENCIA Y UTILIDAD DE LAS TEORÍAS COGNITIVAS EN EL ESTUDIO DEL PROCESO DE APRENDIZAJE: ¿CON QUÉ CRITERIOS?

La amplitud y la persistencia de las dificultades de comprensión en el aprendizaje de las matemáticas se manifiestan en la resolución de problemas. Estos problemas son recurrentes. Se encuentran en todos los niveles de la educación hasta los 16 años, como si la gran mayoría de los estudiantes no pudiera ni reconocer ni utilizar los conocimientos *adquiridos*. Y se encuentran en todos los campos de las matemáticas que se enseñan, como si estas dificultades no estuvieran ante todo ligadas a la complejidad de los conceptos, sino a la forma de trabajar en matemáticas. La forma matemática de trabajo es básicamente la misma en todos los campos de las matemáticas. Podemos decir que es la misma para todos los niveles de enseñanza de las matemáticas, incluso si las exigencias relacionadas con la justificación de los resultados y la demostración no son en absoluto lo mismo. Pero la forma matemática de trabajar es radicalmente diferente de la forma de trabajar en otras disciplinas.

La forma matemática de trabajo proviene del *estatus epistemológico particular de las matemáticas*, en lo relacionado al acceso a los objetos matemáticos y a los procesos de prueba.[6] Desde un punto de vista

[6] Nadie podrá evidentemente confundir la *epistemología comparativa*, de la cual Kant es su fundador, aunque el término "epistemología" no apareció hasta comienzos del siglo XX, con

epistemológico, las matemáticas constituyen un área aparte de todos los otros conocimientos, porque no hay acceso perceptivo ni empírico a los objetos matemáticos. El acceso a los objetos matemáticos, incluso a los más simples y los más básicos, es semiótico y no perceptivo ni empírico. Además, la introducción de nuevos objetos (relativos, decimales, racionales, funciones, propiedades geométricas, etc.) o un nuevo campo de las matemáticas (álgebra, análisis, etc.) implica la apropiación de nuevos tipos de representaciones semióticas (Duval, 2011a). Este estatus epistemológico especial de las matemáticas se explica por la *paradoja cognitiva* de las matemáticas. La exigencia epistemológica fundamental, común a todas las ciencias –de no confundir el objeto con la representación que se ha dado– *deviene, en matemáticas, una exigencia cognitivamente paradójica*. ¿Cómo no confundir un objeto y su representación, si no hay un acceso perceptivo y empírico a los objetos matemáticos? Esta paradoja cognitiva tiene una consecuencia inmediata que todo maestro conoce bien: la de no reconocer un mismo objeto matemático en dos tipos de representaciones diferentes, y el bloqueo paralizante que se produce al tratar de resolver un problema. Y en cuanto a los procedimientos de prueba, la diferencia es aún mayor (Duval 2011b).

Considerar el estatuto epistemológico especial de las matemáticas es el primer criterio de la pertinencia de una teoría cognitiva. Sin embargo, todas las teorías importadas en las investigaciones sobre enseñanza de las matemáticas entre 1960 y 1990, y casi todas las que se han desarrollado desde 1990, se basan en un postulado cognitivo que rechaza explícitamente o implícitamente la idea de un estatuto epistemológico particular de las matemáticas.[7] Los procesos cognitivos de adquisición de conocimientos serían los mismos en matemáticas que en las otras disciplinas científicas. Para justificarlo se destacan dos similitudes superficiales. Por un lado, la adquisición de conocimientos sería la adquisición de *conceptos* y, en segundo

---

la epistemología intra-matemática, centrada en la aparición de los conceptos matemáticos y estrechamente ligada a la historia de las matemáticas.

[7] La epistemología genética de Piaget retoma las hipótesis y los análisis neo-kantianos que Brunschvicg desarrolló en *Las etapas de la filosofía matemática (1912)* y en *La experiencia humana y la causalidad física* (1912). En un largo informe de esta última obra, Piaget basó explícitamente todo su programa de investigación (Piaget, 1924). Los conceptos con los cuales Piaget estudió la génesis no son ni conceptos matemáticos, ni prerrequisitos para la comprensión de las matemáticas.

lugar, el método de trabajo para resolver los problemas seguiría los mismos pasos que el método experimental. Pero estas no son más que similitudes superficiales. Porque el proceso cognitivo de la formación y la comprensión de los conceptos matemáticos no tiene nada en común con el proceso de formación y comprensión de los conceptos de las otras ciencias. Además, la forma de trabajo en matemáticas no puede confundirse con los procedimientos de resolución que pueden ser específicos para los diferentes tipos de problemas matemáticos: enumeración, optimización, generalización, existencia, etc.

El segundo criterio es tomar en cuenta los criterios cognitivos de comprensión en el cumplimiento de las tareas propuestas, y no solamente los criterios matemáticos. En primer lugar, el éxito en un problema matemático propuesto con el fin de utilizar un conocimiento matemático no implica la comprensión y la adquisición de ese conocimiento. Porque los criterios cognitivos de comprensión difieren profundamente de los criterios matemáticos, en dos aspectos. El primero es la naturaleza de los fenómenos observados y las diferentes escalas de tiempo en el que son observables, como por ejemplo los fenómenos de reconocimiento y transferencia que son esenciales para toda resolución de problemas. Sin embargo, desde un punto de vista cognitivo, *todos los problemas matemáticos, incluso los más básicos, son un conjunto de varias tareas cognitivamente heterogéneas.* Se necesita entonces un dispositivo de observación específico, que permita aislar las diferentes tareas cognitivas implicadas en la resolución de un problema.[8] Una teoría cognitiva debe permitir identificar los diferentes tipos de tareas cognitivas que se requieren en la resolución de problemas matemáticos. En otras palabras, para cumplir las dos funciones epistemológicas de toda teoría, una teoría cognitiva debe permitir describir los factores de variación correspondientes para cada tipo de tarea cognitiva.

La mayoría de las teorías cognitivas desarrolladas desde 1990 no cumplen con este criterio, porque se hacen desde la perspectiva de la enseñanza. Se limitan a la observación de los procesos seguidos por los estudiantes para

[8] Con este objetivo elaboramos tareas de reconocimiento casi inmediato de la relación entre las unidades de sentido de una ecuación y los valores visuales de las representaciones gráficas cartesianas (determinadas por la oposición). Estas tareas fueron construidas según el principio de variación de los valores visuales en el registro de los gráficos y de la observación de la variación o no, de las unidades de sentido en las ecuaciones, para un mismo objeto "geométrico": una recta, un semi-plano, y por extensión, una curva, etc. (Duval 1988).

resolver un problema dado, en la escala de una o más sesiones. Y estos procedimientos son inducidos a partir de las interacciones entre varios estudiantes y sobre las intervenciones del maestro para reiniciar la búsqueda. ¡Como si la palabra fuera el fiel reflejo del pensamiento! Por último, las producciones de los estudiantes se interpretan en términos de avance grande o pequeño, y la proximidad con relación a la solución matemática del problema.

4. ¿CUÁL ES LA RELACIÓN ENTRE LA PERSPECTIVA COGNITIVA Y EL PUNTO DE VISTA MATEMÁTICO? LAS DOS CARAS DE LA ACTIVIDAD MATEMÁTICA

Estos dos puntos de vista parecen incompatibles. El punto de vista cognitivo parte de las dificultades sistemáticas de comprensión que el aprendizaje de las matemáticas plantea y que son recurrentes a lo largo del plan de estudios. En otras palabras, a diferencia del punto de vista didáctico, el punto de vista cognitivo parte del *learning* y no del *teaching*. El punto de vista matemático, que es completamente ajeno al punto de vista institucional de la organización de la enseñanza, parte de las exigencias científicas que son intrínsecas a la propia actividad matemática. Por lo que es casi imposible entender las matemáticas y adquirir conocimientos matemáticos sin *hacer matemáticas* o al menos un poco. Además, cada vez que propuse tareas centradas sobre la toma de conciencia de los procesos cognitivos específicos de la forma de pensar y trabajar en matemáticas, la reacción de los maestros fue primero, "¡pero entonces ya no sabemos hacer matemáticas!”.

La incompatibilidad entre la perspectiva cognitiva y el punto de vista matemático, para la organización de la enseñanza de las matemáticas hasta los 16 años, se basa en el desconocimiento de la actividad matemática. Porque la actividad matemática tiene necesariamente dos fases.

Está, en primer lugar, *el lado de todos los tratamientos matemáticos*, tanto los que constituyen la demostración de conjeturas como los que utilizan los conocimientos matemáticos para resolver problemas de la *realidad* física, económica o práctica. Los conocimientos matemáticos que se utilizan para demostrar o establecer modelos de situaciones de la realidad son las definiciones, los teoremas, los algoritmos. Y los objetos sobre los cuales se basan los teoremas presentan las dos características siguientes: son conjuntos de posibles variaciones, o posibles entidades (funciones, números, etc.), y son infinitos. Los *conceptos* matemáticos son la condensación verbal en términos de *propiedades* o la condensación simbólica en *fórmulas*, de todos los resultados obtenidos a lo largo del desarrollo histórico de las matemáticas. Esta fase la llamaremos *la fase expuesta* de las matemáticas.

Y está *la fase de las maneras de ver, explorar, decir y razonar* que se requieren para poder utilizar los conocimientos matemáticos y que van en contra de las formas de *ver, explorar, decir y razonar* fuera de las matemáticas. ¿Por qué? Esto obedece al hecho de que los objetos matemáticos estudiados, debido a sus dos características, no son nunca accesibles a nivel perceptual sino solo a nivel semiótico. Sin embargo, no son las representaciones semióticas las importantes para describir las formas de ver, explorar, decir y pensar en matemáticas, sino la transformación de las representaciones semióticas en otras representaciones semióticas. El concepto más importante es el de *registro* de representación,[9] debido a que permite distinguir *los diferentes tipos de transformación de representaciones semióticas que son independientes de cualquier referencia a un concepto.* Existen no solo las conversiones de representaciones, sino también tratamientos específicos para cada registro de representación. Por ejemplo, la visualización en la geometría plana y del espacio, la variedad de operaciones discursivas para designar un mismo objeto. La variedad de operaciones discursivas de designación es más importante que los términos técnicos o símbolos utilizados, sea en álgebra o en geometría: palabras, números, letras, sintagmas operatorios de números y letras, etc. (Duval, próxima aparición (a), (b)). Llamaremos a esta fase *la cara oculta* de las matemáticas, ya que se refiere a las formas de ver, explorar, de decir, de razonar que son específicas de la forma de trabajo en matemáticas. Mientras que no se llegue a esta forma de trabajo en matemáticas, los estudiantes permanecerán siempre a nivel de la observación y de la verificación empírica, no siempre pertinente para los

---

[9] Descartes fue el primero en analizar la actividad matemática, en las *Reglas para la dirección del espíritu* (1628), y en distinguir dos "registros" diferentes de representación: las Reglas XIV- XVIII. La conversión de las curvas en ecuación, y a la inversa de ecuaciones en curvas, en la *Geometrí*a (1637), es su sistematización metodológica, que fue radicalmente innovadora en la forma de trabajo de las matemáticas. Por el contrario, Kant (1788) buscó los conceptos requeridos para la posibilidad de la geometría euclidiana (concepto de espacio), lo mismo que los de la posibilidad de la física newtoniana (conceptos de tiempo, de movimiento, de causalidad). El constructivismo piagetiano, que se centra en la génesis de estos conceptos, no resolvió la problemática kantiana.

objetivos de la secuencia de actividades propuesta. El análisis de esta cara oculta de la actividad matemática y de los tipos de tareas que permiten a los estudiantes tomar conciencia es la esencia del *punto de vista cognitivo*.
Desde el punto de vista matemático, esta cara oculta no cuenta. Porque son los teoremas, las fórmulas o algoritmos utilizados los que posibilitan la solución de los problemas. Y los matemáticos y profesores de matemáticas, que reconocen inmediatamente en una representación semiótica dada el objeto matemático que representa, están convencidos de que la comprensión de los conceptos matemáticos conduciría naturalmente a la capacidad de utilizar los teoremas y fórmulas, es decir, a la adquisición de gestos intelectuales que permitan hacer matemáticas o aplicar conocimientos matemáticos.

Pero existe el hecho de las dificultades masivas, sistemáticas y recurrentes de la comprensión en el aprendizaje de matemáticas para la gran mayoría de los estudiantes de la educación común, hasta los 16 años. Por ejemplo, las conversiones directas e inversas de dos representaciones de un mismo objeto en dos registros diferentes deben ser casi inmediatas. De lo contrario, no hay ningún reconocimiento del objeto representado. Y hay un bloqueo para la investigación. Del mismo modo, todos los fenómenos de falso reconocimiento que conducen a errores sistemáticos y recurrentes están relacionados con los fenómenos de no-congruencia en la conversión de las representaciones (Duval, 2013). Y para la gran mayoría de los estudiantes de la escuela primaria hasta el liceo, la adquisición de los conceptos matemáticos no permite saber cómo utilizarlos para llegar a resolver problemas. Y es en la resolución de problemas donde los estudiantes pierden la confianza en sí mismos y comienza su progresivo desinterés por cualquier actividad matemática.

La fase crucial para comprender y, por tanto, para aprender las matemáticas es la cara oculta. *¡Porque solo por la cara oculta de la actividad matemática se puede realmente acceder a la cara expuesta de las matemáticas!* Sin embargo, toda la organización institucional de la enseñanza sigue una progresión matemática que va de lo simple a lo más complejo para llegar tan solo a la cara expuesta de las matemáticas (ver anteriormente el N. 2, la primera limitación). Pero lo que es matemáticamente simple o elemental no puede aparecer como tal, sino después de haber tomado conciencia de las maneras de ver, de definir y de razonar en matemáticas.

CONCLUSIÓN

Es fundamental no confundir jamás punto de vista y teoría para que haya un verdadero progreso en la investigación en el campo de la educación matemática. Vimos por qué era necesario distinguir cuatro puntos de vista. Con demasiada frecuencia, en el desarrollo de la investigación, la elección de una teoría se ha confundido con la elección de un punto de vista. Así las cosas, el punto de vista propiamente matemático se confunde con el punto de vista institucional de los programas, que pone de manera lineal y segmenta un conocimiento matemático complejo en conceptos, y que debido a la gran cantidad de saberes matemáticos que se deben enseñar, se pierde de vista la forma matemática de trabajar, que es la misma independientemente de los diferentes saberes. Así mismo, el punto de vista cognitivo se confunde con el punto de vista de la organización de las secuencias de actividades del aula sobre un concepto, una propiedad o un algoritmo en geometría, o en algebra, o…, o… etc.

Hemos intentado mostrar por qué el punto de vista cognitivo es tan importante como el punto de vista matemático para la enseñanza común de las matemáticas para los estudiantes hasta 16 años. El matemático, cuando hace matemáticas, solo se interesa en la cara expuesta de las matemáticas, la única científicamente relevante. El punto de vista cognitivo, por el contrario, se centra en el lado oculto de la actividad matemática, el relativo a las formas específicas de ver, de decir, de razonar de las matemáticas, sin el cual es imposible entrar en el proceso de *conceptualización* o de construcción de *modelos* matemáticos, o, todavía más simplemente, saber cuándo y cómo aplicar los conocimientos aprendidos incluso pragmáticamente. La cuestión de la elección de una teoría cognitiva solo puede hacerse en función de su relevancia, es decir, de tomar en cuenta o no el estatuto epistemológico especial de las matemáticas, y por lo tanto de los procesos cognitivos específicos que constituyen la cara oculta de la actividad matemática.
Esto nos conduce a resaltar varios cuestionamientos que nos remiten a los otros puntos de vista.

Ante todo, el punto de vista de los profesores y de la organización de secuencias de actividades a desarrollar como micro-progresión para la adquisición de un concepto. Esta es la visión que se impuso primero y sigue imponiéndose como principal punto de vista, a la que las demás deben estar subordinadas, hasta para la formación del profesorado y también para la demanda de futuros docentes. Pero en la realidad del aula, los profesores se enfrentan a una situación compleja que resulta de un triple desfase:

- *la falta de coincidencia* entre la secuencia organizada y lo que los estudiantes realmente hacen;
- *la diversidad o la heterogeneidad* de los estudiantes;
- *la distancia cognitiva y epistemológica* entre las matemáticas y otras áreas de conocimiento en las que los estudiantes trabajan justo antes de la sesión de Matemáticas y en las que tendrán que trabajar después.

Los docentes deben entonces ser capaces de reaccionar *en tiempo real* a lo que proponen y hacen los estudiantes, es decir deben ser capaces de hacer *dos tipos de diagnóstico*. El primero desde el punto de vista matemático: captar las sugerencias de los estudiantes y compartirlas en el aula. *El segundo tipo de diagnóstico desde un punto de vista cognitivo*. Los maestros deben entonces no solo identificar las causas profundas de la falta de comprensión y del bloqueo de los estudiantes, sino también encontrar las tareas o ejercicios para proponerles. ¿En este caso, los docentes no deben ellos mismos tomar conciencia de los procesos cognitivos que constituyen el lado oculto de la actividad matemática?

Está, en segundo lugar, el punto de vista institucional, que determina un orden de macro-progresión en la adquisición de conocimientos a lograr al final de un ciclo. Este orden de macro-progresión se traduce en sub-objetivos a alcanzar en el aula durante un año escolar. Ahora bien, cuando analizamos tanto la elección de conocimientos a lograr al final de un ciclo, como la manera como está definida la macro-progresión, vemos que solo se considera la cara expuesta de la matemática. Cualquier reforma que no toma en cuenta principalmente la cara oculta de la actividad matemática, en la elección de objetivos de adquisición para primaria y para el colegio, ¿puede cambiar significativamente la situación mencionada al principio de esta conferencia?

Finalmente, está la cuestión de la generalización de las observaciones realizadas en el campo específico de la Educación Matemática. Estas siguen en su mayoría una validación basada en el uso de métodos estadísticos de análisis. Pero este procedimiento, que tiende a ocultar la diversidad de puntos de vista, esconde el verdadero problema de la generalización de las observaciones. El tema de la generalización proviene de que la naturaleza de los fenómenos observados y de las escalas de tiempo consideradas para las observaciones no son, en absoluto, lo mismo al pasar de un punto de vista al otro. ¿Toda generalización de las observaciones realizadas desde un punto de vista puede extrapolarse a otro punto de vista, o, por el contrario, la única generalización posible no se basaría en la importancia primordial asignada a un punto de vista con relación a los otros?

Estas preguntas muestran la necesidad y la urgencia de desarrollar la investigación sobre la comprensión y el aprendizaje de las matemáticas desde el punto de vista cognitivo. Pero esta necesidad surge solo si reconocemos que el objetivo principal de la enseñanza de las matemáticas es contribuir al desarrollo de la autonomía intelectual de los estudiantes, más allá de las matemáticas por sí mismas y de su utilización en todos los sectores de actividad (Duval 2014).

REFERENCIAS

Duval, R. (1988). Gráficos y ecuaciones: la articulación de los dos registros. *Anales de Didáctica y de ciencias cognitivas*. 1, 235-255. [Graficos e equações: a articulação de dois registros (trad. Méricles Thadeu Moretti), 2011. *Revemat,* 6 (2), 96-112. https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat

Duval, R. (2011a). *Ver e ensinar a Matematica de outra forma. (I) Entrar no modo matematico de pensar: os registros de representações semióticas.* São Paulo: Proem Editora.

Duval, R. (2011b). Pruebas y prueba: las experiencias de los tipos de necesidad en que se basa el conocimiento científico. De la palabra al concepto. *Preuve,* 33-68. Grenoble: Presses Universitaires.

Duval, R. (2013). Los problemas en la adquisición de los conocimientos matemáticos: aprender cómo exponerlos para ser capaces de resolverlos. *Revemat*, *8*(1), 1-45. https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat

Duval, R. (2014). Mutaciones, actuales y futuras de los sistemas educativos. *Desafíos y referencias. Del año 1960 a los años… 2030!* Conferencia en la Universidad de Chipre. 20 de Noviembre de 2014.

Duval, R. (a aparecer):

(a) Introduzir a álgebra no ensino: Qual é o objetivo e como fazer isso?

(b) Figuras et visualización geométrica: «ver» en geometría.

Piaget, J. (1924). La experiencia humana y la causalidad física de L. Brunschvicg. *Journal de psychologie.* 21, 586-607.

CAPÍTULO II

Similitudes y diferencias entre la educación de la mirada en geometría elemental y en arte figurativo.

¿Qué variables cognitivas y didácticas intervienen? ¿Cómo se representa la imposibilidad en el arte?¿Qué elementos semióticos pueden intervenir en el arte?

Similarities and differences between gaze education in elementary geometry and figurative art

What cognitive and didactic variables are involved? How is impossibility represented in art? What semiotic elements can be involved in art?

Bruno D'Amore [I II III]
Raymond Duval [IV]

[I] Profesor titular experto, Doctorado Interinstitucional, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia.
[II] NRD, Departamento de Matematica, Università di Bologna, Italia.
[III] Miembro de la Academia de las Ciencias de Bologna, Italia
[LV] Profesor emérito, Université du Littoral Côte d'Opale, Francia.

Resumen: Un acto espontaneo y aparentemente inmediato y simple, como la mirada, que se usa para observar las figuras en geometría o las pinturas en el arte figurativo, revela por el contrario una complejidad notable no esperada en el aprendizaje de la geometría. En este estudio se sugieren modalidades didácticas para ayudar a educar esta mirada. Se proponen analogías entre el "ver" figuras geométricas y el "ver" obras del arte figurativo. Se analiza el fenómeno del reconocimiento de las figuras así llamadas imposibles y se proponen algunos ejemplos de obras de arte para la interpretación de las cuales no es suficiente la mirada, sino que es necesario un análisis de tipo semiótico (sugerida por el autor).
Palabras clave*:* geometría elemental, didáctica de la geometría, mirada, ver en geometría – ver en el arte figurativo.
Abstract: An apparently immediate and simple spontaneous act, as the sight, that we use to look at figures in geometry and at pictures in figurative art,

reveals on the contrary unexpected complexities with remarkable consequences on the learning of geometry. In this study we suggest didactical ways to educate it. We suggest several analogies between “seeing” geometrical figures and “seeing” in figurative art. We analyse the recognition of the so-called impossible figures and we provide some examples of works of art for whose interpretation sight is not enough, but it requires a semiotic analysis (suggested by the author).
Keywords: elementary geometry, geometry education, sight, to see in geometry – to see in figurative art.

1. PRÓLOGO

Este artículo aborda diversas cuestiones relacionadas con la mirada que se activa en los bocetos o dibujos que representan figuras del mundo de la geometría o de las obras de arte. Se trata tanto de comprender su funcionamiento como de estudiar su necesidad desde un punto de vista didáctico.

Duval (2018) afirma que ante una figura geométrica “construida” con instrumentos, y no dibujada a mano alzada, o ante una obra pictórica, “ver” y “reconocer” es lo mismo, pues son los mismos procesos cognitivos de reconocimiento visual los que controlan la mirada. Así, ante una figura geométrica, no basta con saber qué propiedad tiene, o tener conocimiento de lo que representa, para “verla” y poderla utilizar. Primero se requiere reconocer visualmente todas las configuraciones posibles que la figura ofrece a la mirada ya que, en matemática, el reconocer implica que se pueda convertir espontáneamente una representación de un registro en otro.

Ante una figura geométrica o un cuadro, los procesos de reconocimiento que controlan la mirada son cognitivamente complejos. Estos procesos no son los de la percepción de los objetos de nuestro entorno, ni los relacionados con la coordinación de los registros. Estos procesos requieren el despliegue de transformaciones semióticas específicas de los registros de representaciones bidimensionales. El análisis comparativo que se requiere en geometría para “ver” las formas de una figura y las que se requieren para ver una pintura ha permitido distinguir operaciones cognitivas comunes. Estas operaciones se basan en las formas percibidas, es decir en las unidades figurales que surgen de la estructura geométrica de la figura o de la composición de la pintura. Las transformaciones puramente figurales son como metamorfosis del reconocimiento a las cuales las unidades figurales pueden dar lugar en la mirada, sin necesidad de distinguir lo que se da a ver en el papel, en el lienzo o en la pantalla.

Para permitir que los alumnos entren en el mundo de la geometría (todos los alumnos, sin ninguna excepción), hay que empezar por la educación de la mirada, antes de cualquier adquisición de conocimientos, antes de cualquier exigencia de razonamiento, antes de cualquier uso de instrumentos de medida y de fórmulas para calcular. Sin esto, seguirá habiendo una incomunicación insuperable entre alumnos y profesores. Porque, ante una figura, los alumnos no ven en absoluto lo mismo que ven los profesores o los matemáticos.

En la primera parte del siguiente texto se esboza el esquema programático de una enseñanza de la geometría elemental, en el cual es la educación de la mirada la que introduce al mundo de la geometría.

La segunda parte del texto profundiza más decididamente en el mundo del arte. En Duval (2018) se destacó el problema del reconocimiento de la imposibilidad en el visionado de una figura o de una obra de arte. ¿Qué caracteriza esa imposibilidad? ¿Cómo se percibe con la mirada? A través de ejemplos apropiados, se intenta responder a estas preguntas. A continuación, se evidencia cómo el análisis semiótico es necesario en la interpretación de ciertas obras de arte, tomadas como modelo; y cómo la mera mirada o la simple observación, sin indicaciones semióticas interpretativas precisas dadas por el autor, permiten captar sólo la imagen, pero no el significado. Esto se trata de una debilidad de la sola mirada que, sin dejar de ser la protagonista de este estudio, debe ir acompañada del conocimiento, al menos en ciertas ocasiones, como las que se tomarán como ejemplo.

2. EL CONFLICTO COGNITIVO RELATIVO A LA GEOMETRÍA ELEMENTAL EN LA ESCUELA PRIMARIA Y SECUNDARIA

Desde un punto de vista matemático, la especificidad de la geometría elemental no es la de introducir figuras que vemos y podemos construir, sino que tenemos que utilizar términos definidos para saber qué representan y poder utilizar esos términos para nombrar y describir. En otras palabras, en la geometría elemental no se tendrían que ver las figuras a simple vista, al contrario, hay que usar ... lentes especiales para mirarlas. Estos lentes son las hipótesis dadas junto a la figura, o a veces sin ella, hipótesis que enuncian sus propiedades. En este sentido, la forma en que tenemos que mirar las figuras en la geometría elemental está a los antípodas con la forma en que miramos un cuadro en un museo. Un cuadro a menudo no necesita palabras: lo que ofrece para ser visto es autosuficiente y habla su propio lenguaje específico a los ojos. (En realidad, no siempre es así, como mostraremos más adelante).

La enseñanza de la geometría elemental en la escuela primaria y en los primeros años de la secundaria se enfrenta a esta inversión de la relación cognitiva entre el ver y el decir, donde las palabras ya no designan lo que se ve. Las columnas (A) y (B) del cuadro siguiente representan este *conflicto cognitivo inherente a la actividad geométrica*. Y las tres flechas entre estas dos columnas representan el dilema pedagógico que implica este conflicto cognitivo para la organización de las actividades de aprendizaje. O se parte de lo que interesa en matemática, y que sólo se puede entender y no ver: pero entonces todo se vuelve ininteligible, como fue el caso de la enseñanza de la geometría en el período de la llamada "matemática moderna" en los años 70-80. O bien se parte de figuras que se pueden ver, construir, medir y clasificar, como por ejemplo los polígonos regulares: pero entonces se abre una brecha entre una geometría empírica concreta y una geometría en la cual se resuelven problemas mediante micro demostraciones.

<table>
<tr><td colspan="2">**(A)** Lo que perceptivamente es dado para mirar</td><td>**(B)** Lo que matemáticamente se requiere "ver"</td></tr>
<tr><td>FIGURA TRAZADA
instrumentalmente</td><td>ESPACIO,
PLANO</td><td>HIPÓTESIS DADAS
recurso al lenguaje</td></tr>
<tr><td>**(2)** Figuras simples de base, presentadas *aisladamente*</td><td rowspan="2">Cuadriculación,
pavimentación,
plano reflejo</td><td rowspan="2">**(1)** *Términos* que indican propiedades (definiciones)
(3) *Hipótesis dadas y preguntas* (enunciado de un problema)
(5) Valores numéricos *codificados* sobre la figura trazada</td></tr>
<tr><td>**(4)** Composición de al menos dos figuras de base</td></tr>
<tr><td colspan="2">*Observar* diferentes figuras, o medirlas, para COMPARARLAS</td><td>CONSTRUIR
instrumentalmente
ESCRIBIR *un mensaje de reglas para la construcción*</td></tr>
</table>

Figura 1. Esquema del problema didáctico de la enseñanza de la geometría.

Tanto si se adopta el enfoque experimental e inductivo, como si se adopta el directamente vinculado con el descubrimiento de propiedades a partir de las restricciones que toda construcción de figuras requiere, la enseñanza de la geometría en Primaria y en los primeros años de Secundaria resulta conducir a un callejón sin salida. Los estudiantes, en su gran mayoría:
(1) permanecen con la percepción de figuras trazadas y un conocimiento "botánico" (Duval, 2008, p. 55) de las figuras geométricas básicas: triángulo, paralelogramo, cuadrado, círculo, ...;
(2) no pueden salir del contorno cerrado de la figura, ni siquiera para prolongar uno de sus lados;
(3) no pueden, en el proceso de resolución de un problema, añadir nuevas líneas en la figura para resaltar otras figuras básicas, es decir descomponerla y reconfigurarla;
(4) no adquieren o confunden los términos necesarios para el uso de hipótesis y la comprensión de enunciados, como se pone de manifiesto en el desfase, a menudo considerable, entre las producciones de los alumnos en las tareas de construcción de figuras y en las de escritura o explicación verbal de las instrucciones para que se construyan las figuras (Asenova, 2018);
(5) no pueden utilizar las figuras sino tomando medidas en el dibujo o utilizando valores numéricos dados, pero no siempre reconocen las fórmulas de cálculo que deberían utilizar, excepto las del perímetro y el área de los cuadriláteros.

Estos cinco obstáculos persisten a lo largo de todo el camino hasta la escuela secundaria.

El bloqueo del proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría en la escuela primaria y en los primeros años de secundaria proviene de ignorar o descuidar el conflicto cognitivo entre el "decir" y el "ver" el cual es inherente a la geometría elemental.

Dos preguntas son esenciales para aclarar los procesos cognitivos de comprensión específicos de la geometría elemental:

• ¿en qué consiste este acto cognitivo, y no matemático, que llamamos "ver"?;

• ¿cómo puede una figura dibujada visualizar propiedades geométricas que no pueden percibirse visualmente en una figura?

2. ANÁLISIS DEL PROCESO DE RECONOCIMIENTO VISUAL COMO PRERREQUISITO PARA "COMPRENDER" EN GEOMETRÍA ELEMENTAL

Desde un punto de vista cognitivo, *"ver" es reconocer una forma de un vistazo* gracias a su contorno cerrado o por el color que la resalta, como "figura", desde un fondo en relación con otras formas. Este reconocimiento visual se funde con el reconocimiento cognitivo del objeto cuyo perfil es su contorno característico. Pero ambos son independientes el uno del otro. Por lo tanto, al mirar un cuadro en un museo, el reconocimiento cognitivo de lo que está pintado allí es a menudo inútil: puede incluso ser un obstáculo para la "escucha visual" del cuadro.

Ver, por tanto, es en general un proceso automático que no implica los aparatos cognitivos, un acto puramente sensorial; pero, en geometría, este proceso adquiere un papel determinante en el aprendizaje o en la acción escolar: no sólo hay que "ver", sino también "saber ver" gracias a un entrenamiento cognitivo adecuado, lo cual significa distinguir, reconocer, establecer, relacionar, ...; mientras que en el mundo del arte figurativo "ver" puede coincidir con reconocer en ciertas expresiones del arte figurativo, pero sobre todo interpretar a partir de conocimientos específicos, otros modos artísticos (arte abstracto, informal, surrealismo, arte analítico, arte cinético, ...).

Las columnas I, II y III del diagrama siguiente representan el proceso cognitivo del acto de reconocimiento visual de los contornos cerrados en 2D, a simple vista, independientemente de cualquier hipótesis, es decir, antes de cualquier reconocimiento cognitivo de los objetos que representan.

La columna I recuerda el análisis gestáltico del proceso cognitivo del reconocimiento visual.

La columna II introduce la noción central para analizar este proceso, la de "unidad figural". Una unidad figural se caracteriza por su número de dimensiones *n*D, y por el número de dimensiones de su soporte material, 2D o 3D, lo que permite distinguir las figuras y los patrones. Son las unidades figurales que se ven y se reconocen a simple vista.

Por último, la columna III muestra un salto entre las unidades figurales *n*D inmediatamente reconocidas y *todas las posibles unidades figurales nD* que se pueden reconocer visualmente.

PRIMERA MIRADA sobre lo que se da para ver →		LA MIRADA	DENOMINAR PARA DEDUCIR
I. FORMA TRAZADA Y PERCIBIDA Un contorno cerrado *que se destaca de un fondo* (neutro o cuadriculado) o de un conjunto de otras formas	II. UNIDAD FIGURAL *n*D/(2D o 3D) *n*D: *número de dimensiones de la unidad figural* (2D): *dimensión del soporte* pantalla o papel, y (3D): modelos (maquetas)	III. TODAS LAS UNIDADES FIGURALES *n*D POSIBLES (1) *Muchas más unidades figurales posibles* que las unidades figurales reconocidas en una primera mirada (2) Posibilidad de mirar por *yuxtaposición o sobreposición*	IV LENGUAJE MATEMÁTICO (3) *Términos* (definiciones) (4) *Hipótesis dadas* *Razonamiento* (no deductivo ni de cálculo)
		(1) Y (2) **DESCOMPOSICION** *de las formas percibidas* 2D reconfiguraciones (3) **DESCONSTRUCCIÓN DIMENSIONAL** *de todas las unidades figurales posibles* 3D 2D 2D 1D	SUSTITUCIÓN de enunciados de uno a otro *en función de teoremas* y no de asociación de palabras, de ideas o de imágenes

Figura 2. Esquema del proceso cognitivo de comprensión en geometría elemental.

Para la geometría plana y para la pintura, todas las unidades figurales son obviamente unidades 2D/2D. Este proceso cognitivo de reconocimiento visual es el mismo tanto si se mira una figura geométrica como si se mira un cuadro. *El poder heurístico de las figuras y la creación de las pinturas residen en la actividad de la mirada que las explora o contempla, y no en el* *ensamblaje de contornos cerrados o de superficies que conforman la figura trazada o la pintura*.

La comparación de los dos esquemas muestra las diferencias entre el punto de vista matemático y el punto de vista cognitivo para analizar la adquisición de conocimientos en geometría.

La columna A del diagrama didáctico (Figura 1) se sustituye aquí por las columnas I y II, que hacen hincapié en el salto cognitivo que deben dar los alumnos para entrar en la *modalidad matemática de mirar una figura, independientemente de las hipótesis dadas*. La columna IV se basa en la columna B del diagrama anterior, salvo por una diferencia: ya no se trata de decir o de nombrar para "ver" lo que la figura representa, sino de nombrar para deducir nuevas propiedades a partir de hipótesis. Pero lo importante es la relación, en cada uno de los dos esquemas, entre la última columna, la del lenguaje matemático, que no cambia pasando de un esquema a otro, y las columnas correspondientes a la forma en que se ven las figuras. Esta relación está marcada por las flechas.

El esquema de la problemática didáctica enfatiza al mismo tiempo la reducción del "ver" como su subordinación al lenguaje y a las magnitudes, sin las cuales no es posible acceder a las propiedades y a los objetos matemáticos (Figura 1, flecha con línea continua que va de B a A). Pero las figuras, a pesar de todas las actividades de construcción, no ayudan a entenderlas (flecha punteada que va de B a A). estas figuras subsisten como una figura-tipo asociada a una palabra matemática (flecha punteada que va de A a B).

En el esquema del proceso cognitivo, ya no hay conflicto cognitivo entre el ver y el decir. En primer lugar, el descubrimiento de la forma matemática de ver se produce independientemente del lenguaje y de cualquier hipótesis. Las actividades deben basarse principalmente en el reconocimiento visual de las diferentes unidades 2D que forman una configuración (Figura 2, flecha horizontal con trazo continuo). Esto porque cada figura, incluso las denominadas "simples" o "de base", son configuraciones de unidades figurales *n*D. Ya no se trata de construir figuras, sino de descomponerlas para reconfigurar de otra manera las unidades figurales reconocidas (flecha de la columna IV a la III). Se observará que ninguna flecha parte de las columnas II y III para llegar a la columna IV.

Para comprender en geometría elemental y poder utilizar sus conocimientos, tenemos que aprender a ver y mirar todas las configuraciones *n*D/2D en el juego de transformaciones visuales que permiten (Duval, 2005). Tenemos que ser capaces de reconocer espontáneamente las unidades *n*D/2D para poder adquirir conceptos geométricos y resolver problemas. "Comprender" en geometría elemental es, pues, sinónimo de un conjunto de otros verbos: captar signos y rasgos específicos, ser capaz de distinguir elementos de signos, reconocer elementos específicos del dibujo o de la representación, a veces captar el significado progresivo de una figura que se presenta como una unidad estructural, saber referirse a figuras análogas, ser capaz de captar informaciones específicas, ...

3. LOS TRES TIPOS DE VISUALIZACIÓN GEOMÉTRICA Y PICTÓRICA

Aquí queremos destacar tres tipos de visualización que se despliegan tanto en la geometría como en la pintura. Los dos primeros tipos se basan en el reconocimiento de formas, es decir, de contornos cerrados. Estos son comunes a la geometría elemental, a la pintura y al mosaico; se distinguen entre sí por la ausencia (2D/2D) o la presencia de la tercera dimensión (3D/2D). El tercer tipo de visualización es específico de la geometría. El primer tipo de visualización es el necesario para introducir la geometría en la escuela primaria y en los primeros años de la secundaria.

Al comparar las figuras geométricas con las pinturas, se pueden identificar cinco variables cognitivas para la visualización inicial (Duval, 2018, pp. 216-219). Son las mismas variables que controlan la mirada y la exploración visual ante una figura o un cuadro. Y, en geometría, esto es heurísticamente decisivo para la resolución de problemas (Duval, 2008, p. 55, Figura 12; Duval, 2015, p. 152, Figura 2).

El objetivo de la educación de la mirada en este primer tipo de visualización es lograr que los alumnos puedan *reconocer todos los posibles contornos cerrados de una configuración,* los reconocibles por yuxtaposición y los reconocibles por superposición, *y que puedan recombinarlos para obtener diferentes configuraciones. Y esto debe hacerse casi por reflejo, en menos de uno o dos minutos*. Naturalmente, todas las actividades encaminadas a este objetivo *excluyen la consideración de las dimensiones* y, por tanto, las actividades de medición y todas las indicaciones de longitud relativas a unidades figuradas reconocidas.

El proceso de reconocimiento visual de las unidades figurales es el mismo para las configuraciones B y C de la Figura 1 (Duval, 2018, p. 216).

El trabajo de observación de las figuras es, en efecto, irrelevante, salvo desde la perspectiva de la heurística puramente visual; de lo contrario, la percepción seguirá siendo la principal fuente de bloqueo o error en la resolución de problemas, incluido el reconocimiento de las fórmulas que deben aplicarse para calcular una longitud o un área.

El segundo tipo de visualización impone tomar en consideración la tercera dimensión. Este tipo se asocia a la invención de la perspectiva. Se trata de una construcción matemática que organiza el campo de visualización subordinando todos los contornos cerrados reunidos en la misma configuración a relaciones de magnitud (Duval, 2018, p. 236, Figura 10). Pero el segundo tipo de visualización es mucho más amplio. Abarca cualquier composición de formas 2D/2D permitiendo la visualización de una superficie en relieve o cavidad, sólidos en 3D/2D (Duval, 2018, p. 233, Figura 8). En otras palabras, abarca cualquier visualización de un objeto *en el espacio* en función del lado desde el cual se mira, e independientemente de su posición con respecto a todos los demás objetos vistos al mismo tiempo.

La visualización propia de la geometría en el espacio es independiente de la visualización basada en la perspectiva. Esta da lugar, para los sólidos, a la fabricación de modelos 3D/3D manipulables o en cuyas caras se pueden dibujar las intersecciones de un plano de sección, ya que el razonamiento exige volver a las unidades figurales 2D/2D y 1D/2D. Pero la visualización de un sólido en el espacio puede llevar a la visualización de un objeto imposible (Duval, 2018, p. 237, Figura 11).[1]

Por último, la visualización del relieve de una superficie moviliza una construcción matemática menos compleja. Esta se basa en la reiteración de ciertas unidades figurales 2D jugando tanto con sus combinaciones como con su deformación progresiva (Duval, 2018, p. 220, Figura 3; y p. 235, Figura 9). Aquí, en última instancia, lo decisivo es la mirada del artista (por ejemplo, los colores pueden ser cruciales).

El tercer tipo de visualización es el que nos permite responder a la pregunta clave para entrar en la geometría: ¿Cómo puede una figura trazada visualizar propiedades geométricas que no se pueden percibir visualmente en una figura? Esta cuestión da un vuelco al problema didáctico de la enseñanza de la geometría. No se trata de construir figuras, ni siquiera con herramientas que exigen tener en cuenta las propiedades geométricas de la figura a

[1] Mas adelante regresaremos en este punto de una forma mas explicita.

construir (como la regla, la escuadra, el compás, …). Se trata de deconstruir las configuraciones 2D/2D en una red de líneas rectas 1D/2D subyacentes. Para dibujar esta red de rectas, es necesario no sólo prolongar todos los lados de la figura, sino también enriquecerla con nuevas rectas (Duval, 2015, p. 162, Figuras 6 y 7).

En otras palabras, la actividad de deconstrucción dimensional permite superar inmediatamente los obstáculos (2) y (3) mencionados anteriormente, mientras que la actividad de construcción conduce, por el contrario, a reforzarlos cognitivamente e institucionalizarlos. Sólo en una red de rectas deconstruidas dimensionalmente podemos ver las propiedades geométricas; todas estas se destacan visualmente como la relación entre dos unidades figurales, ya sean de la misma o diferentes dimensiones (Duval, 2015, p. 164, Figura 8).

Estos tres tipos de visualización son visualizaciones no icónicas. Se oponen a la *visualización icónica*, con la cual la pintura, desde el arte parietal de los Salones de los nobles del siglo XIX, se ha confundido durante mucho tiempo. Aquí, “ver” una imagen significa reconocer de un vistazo el tipo de objeto que representa: un rostro, un animal, una flor etc. En otras palabras, el criterio de la iconicidad es la posibilidad de yuxtaponer el modelo con la representación que la reproduce a partir de trazos o manchas, y no “imitándolo”.

Pero este reconocimiento sólo puede producirse con una doble condición: hay que conocer tanto el objeto representado, es decir, haber visto uno en precedencia; como también “ver” *la similitud entre el contorno cerrado que se ha trazado y el contorno del objeto*. El grado de particularización e información de la imagen, o del cuadro, depende entonces de la correspondencia que pueda establecerse entre los trazos internos al contorno cerrado y los detalles observables del objeto representado.

La superposición intuitiva de los respectivos contornos y el grado de particularización de la imagen son los dos criterios de similitud entre un dibujo o una pintura y lo que estos representan. Estos dos criterios permiten así distinguir *grados de iconicidad* entre la iconicidad perfecta de algunos cuadros que muestran a la “persona misma”, por ejemplo, en el caso de un retrato, y la generalidad extrema de un esquema que reduce el objeto a unos pocos rasgos (Duval, 2018, pp. 223-225, Figuras 4 y 5).

En pintura, el tipo de visualización basado exclusivamente en el reconocimiento de unidades figurales en 2D condujo a la revolución de la llamada pintura “abstracta”. Las formas de los objetos 3D/3D, tal y como las ve la mirada, se descomponen en fragmentos, geometrizados o relevantes desde diferentes puntos de vista posibles sobre el objeto, y los fragmentos elegidos se ensamblan en una reconfiguración no icónica (Duval, 2018, p. 225, Figuras 6 y 7).

4. ¿CÓMO EL VER UNA FIGURA, UNA IMAGEN O UN DIAGRAMA TRAE A LA MENTE PALABRAS?

La respuesta a esta pregunta cambia radicalmente según el tipo de visualización y según la función que llena la producción verbal. Nos limitaremos aquí a considerar sólo las figuras geométricas construidas instrumentalmente.

Las herramientas imponen, en el momento de la construcción de las figuras, la restricción de ciertas propiedades que las distinguen unas de otras (regla y compas o las instrucciones de un programa informático) y, por tanto, términos geométricos. En cualquier caso, cuando se mira una figura para resolver un problema, poco importa el tipo de herramienta que se utilizó para construirla, regla y compas o instrucciones de un “menú”; lo que cuenta es la forma en la cual se mira esa figura, independientemente de cualquier dimensión y de cualquier relación entre dimensiones. Entre los diferentes tipos de visualización que acabamos de distinguir, desde el punto de vista de su funcionamiento cognitivo, sólo dos son esenciales en lo que tiene que ver con la educación de la mirada en geometría.

El primer tipo de visualización matemática se refiere a la exploración visual heurística de las figuras a través de la descomposición y reconfiguración de unidades figuradas en 2D. La exploración visual de una figura es previa a cualquier formulación e independiente de las distintas propiedades que puedan tomarse como hipótesis.[2] Esta exploración puramente visual es más intuitiva y menos exigente que cualquier descripción o explicación verbal; por otra parte, descripciones o explicaciones verbales nunca han enseñado a mirar las figuras de forma matemática. Esta exploración visual es la que permite *reconocer el teorema, la definición o la*

[2] Para una misma figura construida, sólo se pueden cambiar los problemas planteados cambiando las hipótesis dadas. ¿Tendremos que concluir que hay tantas figuras como posibles opciones de hipótesis?

fórmula pertinente para resolver un problema asignado. Sin embargo, como por toda actividad intencional, mirar requiere una verbalización silenciosa que controle la gestión de esta exploración puramente visual y condense el resultado. La característica de esta verbalización silenciosa, como señaló Vygotsky, es que no necesita palabras para designar o calificar las unidades figurales 2D que han sido descompuestas y reconfiguradas por la mirada.

Por el contrario, el segundo tipo de visualización, es decir la deconstrucción dimensional de las formas, requiere una formulación explícita de las diferentes relaciones entre dos unidades figurales de menor dimensión que las unidades figurales 2D que han sido deconstruidas dimensionalmente. Es la deconstrucción dimensional la que permite comprender todo el vocabulario geométrico básico: esta excluye toda verbalización silenciosa. Y el uso del vocabulario, a diferencia de las palabras del lenguaje común, no se pueden utilizar más que en el razonamiento que funciona por sustitución de enunciados y no por acumulación de "razones" como pasa en una argumentación (Figura 2, IV: denominar para deducir). *Y, para que tenga sentido, nunca es necesaria una figura. ¡Sólo hay que indicar las hipótesis!* Eso, al menos para los matemáticos y los profesores. Y este es el espejismo que lleva a la enseñanza de la matemática a un callejón sin salida. Para los matemáticos y los profesores, esta formulación explícita basada en la deconstrucción dimensional de las formas detecta una verbalización silenciosa, tanto que se les ha hecho evidente y familiar. Y esta se proyecta en la exploración heurística visual de las formas, como si la visualización y el lenguaje matemático fueran cognitivamente la misma cosa.

Estos dos tipos de visualización se basan en el principio de separación de formas y dimensiones. En cambio, la visualización de la tercera dimensión subordina la construcción de unidades figurales en 2D a las igualdades de relaciones entre cantidades determinadas a partir de un punto de fuga. La construcción matemática es la de una red de rectas que convergen hacia un punto de fuga, y la construcción de formas 2D se realiza sobre esta red de rectas en función de las relaciones de magnitudes elegidas desde este punto de fuga para marcar su mayor o menor distancia. Ver una figura en este caso significa discernir esta red de rectas, que no evoca palabras sino números y cálculos. La visualización icónica de los edificios en el espacio (3D/3D) se basa en la estructuración previa de su campo mediante una red de rectas que convergen hacia un punto situado por encima de una recta, la línea del horizonte.

En geometría, por tanto, ver y entender son operaciones fuertemente conectadas estructuralmente; si entender sin ver (en cualquier forma de visión) se presenta como imposible, lo contrario es, en cambio, un fenómeno muy presente: un constructo geométrico es visto como una acción sensorial, pero su sentido, su mensaje, no puede ser interpretado, y por tanto no es entendido; cognitivamente hablando, ese constructo no tiene el sentido que su creador - hacedor pretendía darle. Ver y comprender no son en absoluto sinónimos, es más, es precisamente en su dicotomía donde se crean situaciones de aprendizaje negativas. En el arte, a veces se puede crear una ilusión de comprensión, ligada al ver; pero la mayoría de las veces, esto es sólo una ilusión; un inexperto en arte figurativo ve una obra de Jackson Pollock, pero no tiene ningún apoyo en lo cognitivo que posee: ve, pero no puede entender el significado de la operación pictórica, ni siquiera si recurre a un nombre, un título o una leyenda. Pero aquí, a diferencia que en geometría, la palabra no suele designar lo que el cuadro representa, sino lo que inspiró al pintor o la resonancia de las cosas y la luz en la mirada de quien mira (Duval, 2018, pp. 227-228), a menudo con referencia a la historia del arte, cuyo conocimiento reside en lo cognitivo y no sólo en la visión.

4. CÓMO PERCIBIR, RECONOCER Y EVALUAR LAS FIGURAS IMPOSIBLES EN EL ARTE FIGURATIVO; DE LA MIRADA AL ANÁLISIS VISUAL

Como ya habíamos anticipado, continuando el estudio iniciado por Duval (2018), abordamos ahora el problema del reconocimiento de la imposibilidad (estructural) de una imagen 3D representada en perspectiva en una superficie 2D. En este caso, la mera mirada ya no parece ser suficiente, ni sirven comparaciones en tres dimensiones, definiciones o conocimiento de términos.

Para hacer más efectivo el estudio, recurriremos a ejemplos del arte figurativo contemporáneo; muchos otros ejemplos, incluso mucho más antiguos, pueden encontrarse en D’Amore (2015a).

A partir de 1934, el entonces joven pintor sueco Oscar Reutersvärd se dedicó a dibujar “figuras imposibles” (éste era el nombre original), entre las que destaca desde el principio, es decir, mucho antes de 1958, el llamado “triángulo de Penrose” (D’Amore, 2000, 2002, 2015a). Esto no quita que, mientras el artista representaba lo imposible geométrico por puro gusto estético y para refinar una sensibilidad de perspectiva personal, los Penrose fueron los primeros en estudiar la psicología relacionada con la visión humana de esta forma 2D que alude a una 3D imposible (Penrose & Penrose, 1958). Sin embargo, el artista sueco se dedicó sobre todo a una versión asombrosamente diferente y muy famosa que consiste en cubos de perspectiva (D'Amore, 2005).

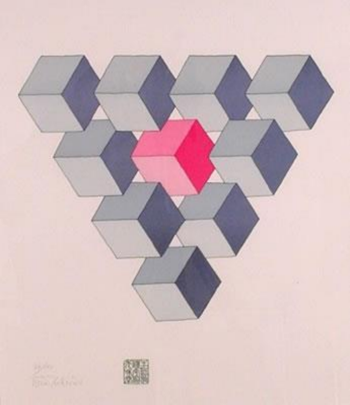


Figura 3. *Opus 1*, Oscar Reutersvärd, 1934.

La mirada capta la imposibilidad global con mayor dificultad que en el clásico triángulo imposible de los Penrose, quizá debido a la fragmentación de los componentes y a la dificultad de coordinar la mirada sometida a múltiples sugerencias visuales; los tres componentes laterales, lo que en el triángulo imposible serían los tres "lados", cada uno de los cuales (aisladamente) es posible, están aquí constituidos por cuatro pequeños cubos, cada uno de los cuales está correctamente representado desde un punto de vista perspectivo. Se puede eliminar el cubo central y estudiar lo que queda de la propuesta del artista.

Figura 4. Elaborazione di *Opus 1*, Oscar Reutersvärd.

La mirada queda como atrapada por la ilusoria estrella de 6 puntas que parece aparecer en el centro y el lenguaje silencioso la comenta mentalmente, describiéndola; en el transcurso de una segunda mirada, esta imagen se impone, como señaló el mismo artista.

A este momento se puede realizar una operación gráfica muy interesante: eliminar los dos cubos centrales de cada lado del triángulo, un lado a la vez, con el fin de restaurar una consistencia aceptable de la perspectiva de los tres componentes diferentes del diseño (D’Amore, 2015a, p. 458).

Figura 5. Elaboraciones de *Opus 1*, Oscar Reutersvärd: cada una de ellas es perspectivamente aceptablemente correcta.

La “yuxtaposición gráfica” de tres figuras aceptablemente correctas

desde el punto de vista perspectivo (aunque no perfectas) es una figura perspectivamente imposible.
En este análisis de una obra de arte, queda claro el papel que juegan las miradas, o, dicho de otra forma, su concatenación; y la importancia del llamado "diálogo silencioso".

5. EL PAPEL EXPLÍCITO DE LA SEMIÓTICA EN EL ANÁLISIS DE UNA OBRA DE ARTE, SEGÚN LA PRETENDE EL AUTOR: CUANDO LA MIRADA YA NO ES SUFICIENTE PARA ENTENDER LO QUE SE VE

Recordemos la muy célebre obra *Ceci n'est pas une pipe* (*Esta no es una pipa*) que el genial pintor belga, a menudo calificado como "surrealista", René Magritte, creó en varias versiones entre 1929 y 1946.[3]

Figura 6. *La trahison des images*, René Magritte, 1928-1929. Los Angeles County Museum of Art, Los Angeles.

En cuanto al título, destinado a sorprender al visitante, aunque la imagen de la pipa es icónicamente perfecta, no hay coincidencia entre el objeto 3D representado, inmediatamente perceptible y reconocible a primera vista, y su representación 2D casi fotográfica. Sin embargo, el discurso interior se vuelve interesante cuando, después de haber identificado imagen y objeto representado, al segundo vistazo el observador lee la frase subyacente y entra así en el juego semiótico 2D/3D deseado por el autor. Este es un

[3] Para un análisis histórico, crítico, semiótico y artístico de esta operación pictórica, véase D'Amore (2010; 2015a).

ejemplo perfecto de una obra en la cual no sólo hay que mirar, sino también leer; sin embargo, incluso la combinación mirada/lectura no es suficiente para entender el significado de la operación pictórica, si no hay más informaciones históricas-críticas-semióticas, estas últimas proporcionadas por el estudio de las intenciones del autor.

En otras obras del mismo autor, en las cuales se proponen situaciones que sólo parecen reales pero que en realidad son imposibles, tiene sentido la denominación "surrealismo" (que, en arte, tiene mil facetas diferentes); pero aquí el discurso, potente y culto, es sobre la interpretación semiótica del lenguaje del arte, un rebote continuo entre lo representado, lo representante, la percepción visual, la experiencia y la semiótica subyacente. Rebote en el cual juega un papel decisivo aquel lenguaje silencioso (y personal) mencionado varias veces.

Figura 7. *Les mots et les images*, René Magritte. Imagen tomada de la revista: *La Révolution Surréaliste*, diciembre de 1929.

Como prueba de esto, citemos un verdadero estudio teórico de Magritte, el dibujo/manifiesto *Les mots et les images* (*Las palabras y les imágenes*) (Magritte, 1929) que, aunque, como hemos dicho, es un estudio teórico, también fue expuesto como obra de arte.[4]

Dentro de este estudio, el detalle más famoso y perennemente discutido por su evidente referencia a una de las muchas versiones del llamado "triángulo semiótico" (Eco, 1975) es el relativo a la imagen del caballo. Aparece un caballo (obviamente dibujado, pero el significado es claro), una representación pictórica del mismo (en un lienzo apoyado en un caballete), una enunciación verbal del mismo.

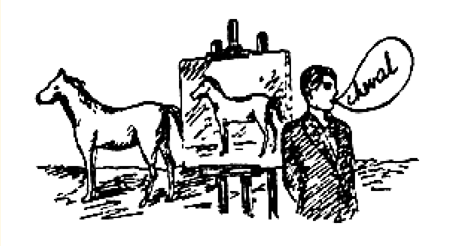


Figura 8. *Les mots et les images*, René Magritte, 1929. Particular.

Este análisis del lenguaje pictórico mediante una tríada de referencias semióticas y sus relaciones nos lleva a recordar los trabajos del lógico matemático alemán Gottlob Frege (1892) que, sin embargo, analizó el lenguaje lógico de la matemática. Pero sobre este punto glosamos, remitiéndonos a D'Amore (2010, 2015a).

La idea de Magritte tuvo un largo seguimiento (que aún continúa) entre los artistas de todo el mundo, especialmente entre los que, en los años 60-80, fueron los creadores de la llamada corriente "conceptual científica", aunque con sus múltiples facetas (D'Amore & Menna, 1974; Menna, 1975; Di Genova, 1993). Entre los principales intérpretes no sólo de la vertiente analítica, sino precisamente de esta coincidencia entre el arte figurativo expuesto y el análisis semiótico de la pareja objeto-representación, mencionamos por orden cronológico al estadounidense Joseph Kosuth y al

[4] Un análisis profundo de este famoso dibujo de Magritte, con reproducciones de otras obras del propio pintor belga y con la reedición de los escritos teóricos de Magritte, puede encontrarse en Lageira (2003).

francés Bernar Venet.

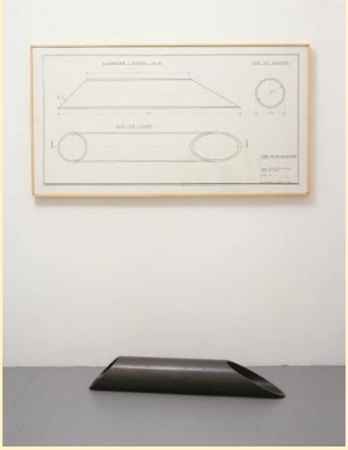


Figura 9. *Tube n° 150/45/60/1000*, Bernar Venet, 1966.

El objeto de arte (el que se expone) no es ni el tubo metálico real colocado en el suelo, ni su representación axonométrica, dibujada en una hoja de dibujo y colocada en un marco, colgada en la pared del fondo de una galería de arte. La obra de arte es puramente semiótica: la emergencia de un sistema de representaciones y transformaciones que llevan de una representación a otra (D'Amore, 2015b). La misma operación semiótica es realizada simultáneamente por Kosuth.

Figura 10. *One and three chairs*, Joseph Kosuth, 1965.

La misma obra ha sido recreada por Kosuth decenas de veces, con diferentes sillas, por tanto con diferentes fotografías, pero siempre en la tríada semiótica: objeto real, fotografía que reproduce el objeto, definición de silla tomada de un diccionario. Representaciones (fotografía y definición del objeto) en registros semióticos distintos, conversiones semióticas en curso. La obra de arte no es la tríada visual que cae bajo nuestro sentido de la vista, captada por la mirada, ni ninguno de estos objetos por separado: es la relación semiótica que emerge de estos, el forzar al observador a percibir cada elemento de la tríada con su mirada, distinguiendo sus funciones recíprocas, desencadenando un discurso silencioso que conecta cada uno de los elementos con los demás.

Sobre la interpretación de estas obras desde el punto de vista semiótico, véase también Duval (2008).

Otra obra de Joseph Kosuth que encaja perfectamente en nuestro discurso es *Neon electrical light English glass letters white eight*, 1966, que representa, como dice su título, “ocho letras blancas de vidrio inglesas en vidriode luz eléctrica de neon” (Museo Salomon Guggenheim, Nueva York); y también la obra *Painting*, 1966, que representa en una pintura la definición de “pintura” en un cuadro. (Estas obras también se han producido multitud de veces, en muchas versiones). Kosuth representa perfectamente el espíritu de esta investigación artística, jugando con la univocidad de la referencia semántica, una especie de mono-semía que se opone a la típica poli-semía que siempre ha caracterizado al arte en su sentido romántico. El conjunto de su obra de este período puede resumirse en su proyecto: *El arte como idea como idea* (D’Amore, 2015a).

Desde nuestro punto de vista, se trata de ejemplos, tomados del mundo del arte, que muestran como son decisivas las relaciones (a veces opuestas entre sí) entre lo que se ofrece a la vista, la aparición objetual, la compleja referencia semiótica, el profundo y silencioso discurso interno personal y la interpretación de los distintos componentes entre sí, y luego de éstos con la obra en su conjunto.

Esta complejidad no es tan diferente de ciertas situaciones determinadas en las aulas, durante las clases de geometría, cuando chocan entre ellos diferentes registros y diferentes componentes interpretativas. Así como en la obra de Kosuth relativa a las sillas hay implícitas transformaciones semióticas de conversión, cada una de las cuales reúne dos representaciones en registros diferentes que requieren interpretaciones específicas, lo mismo sucede al descifrar, comprender, deconstruir figuras que describen una situación, por ejemplo en relación con los diferentes pasos de una demostración o, por ejemplo, al pasar de una escritura algebraica a una analítica-gráfica cartesiana, como parece sugerir también esta obra de Venet, estudiada en detalle en D’Amore (2015b).

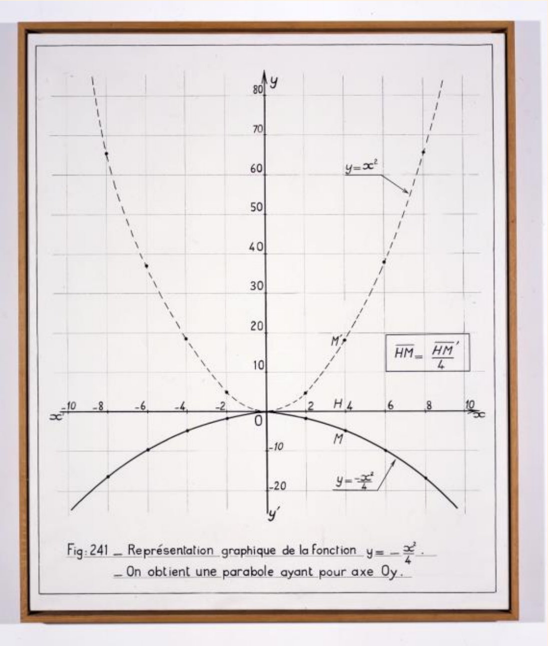


Figura 11. *Representación gráfica de la función y = -x^2/4,* Bernar Venet, 1966. Acrílico sobre lienzo, 146×121 cm. Museo Nacional de Arte Moderno, Centro Pompidou, París, Francia.

En esta obra se destacan tres representaciones semióticas de un mismo objeto matemático:
• en el registro analítico-gráfico (un dibujo en el plano cartesiano);
• en el registro algebraico (una fórmula);
• en el registro del lenguaje natural: una descripción en palabras: “Se obtiene una parábola que tiene como eje Oy”.

Pero el campo de la creación es el artístico, no una lección de geometría, y en los años en los cuales las reflexiones semióticas (al menos en matemáticas) estaban aún por llegar ...

REFERENCIAS

Asenova, M. (2018). Vedere geometricamente: La percezione non iconica nella scuola primaria. *La matematica e la sua didattica*, *26*(2), 173–210.

D'Amore, B. (2000). Oscar Reutersvärd. En A. Bonfiglioli & C. Valentini (Eds.), *Matematica, arte e tecnologia: da Escher alla computer* graphics (pp. xix–xxi). Bologna: Aspasia.

D'Amore, B. (2002). L'opera di Oscar Reutersvärd. *La matematica e la sua didattica*, *16*(3), 240–245.

D'Amore, B. (2005). Oscar Reutersvärd. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* (*RELIME*), *8*(3), 379–382.

D'Amore, B. (2010). Figurative arts and mathematics: Pipes, horses and meanings. En V. Capecchi, M. Buscema, P. Contucci, & B. D'Amore (Eds.), *Applications of Mathematics in Models, Artificial Neural Networks and Arts: Mathematics and Society* (pp. 491–504). Dordrecht, Heidelberg, London, New York: Springer.

D'Amore, B. (2015a). *Arte e matematica: Metafore, analogie, rappresentazioni, identità tra due mondi possibili.* Bari: Edizioni Dedalo.

D'Amore, B. (2015b). Bernar Venet: Elogio del processo razionale. *Nuova Meta*, 37, 30–41. Disponible en: www.rivistaartenuovameta.it

D'Amore, B., & Duval, R, (2019). L'educazione dello sguardo in geometria elementare e in arte figurativa. Quali variabili cognitive e didattiche sono coinvolte? Come si rappresenta in arte l'impossibilità? Quali elementi semiotici possono essere coinvolti nell'arte? The education of the gaze in elementary geometry and in figurative art. What are the cognitive and educational variables involved? How does art represent impossibility? What semiotic elements can we take into account be in art? *La matematica e la sua didattica*, *27*(1), 47-67. http://www.incontriconlamatematica.net/portale/rivista/88-rivista-la-matematica-e-la-sua-didattica-anno-27-aprile-2019-numero-1

D'Amore, B., & Menna, F. (1974). *De mathematica*. [Catalogo de la exhibición internacional homónima]. Roma: Galleria dell'Obelisco.

Di Genova, G. (1993). *Storia dell'arte italiana del '900*. Bologna: Bora.

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie: Développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 10*, 5–53.

Duval, R. (2008). Eight problems for a semiotic approach in mathematics education. En L. Radford, G. Schubring, & F. Seeger (Eds.), *Semiotics in Mathematics Education: Epistemology, History, Classroom and Culture* (pp. 39–61). Rotterdam: Sense Publishers.

Duval, R. (2015). Figures et visualisation géométrique: «voir» en géométrie. En J. Baillé (Ed.), *Du mot au concept: Figure* (pp. 147–182). Grenoble: Presses Universitaires.

Duval, R. (2018). Per l'educazione allo sguardo in geometria elementare e in pittura. *La matematica e la sua didattica*, *26*(2), 211–245.

Eco, U. (1975). *Trattato di semiotica generale*. Milano: Bompiani.

Frege, G. (1892). Über Sinn und Bedeutung. *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik*, 100, 25–50.

Lageira, J. (2003). *Magritte: Mots et images*. Paris: Gallimard.

Magritte, R. (1929). Les mots et les images. *La Révolution surréaliste*, *5*(1), 32–33.

Menna, F. (1975). *La linea analitica dell'arte moderna*. Milano: Einaudi.

Penrose, L. S., & Penrose, R. (1958). Impossible objects: A special type of visual illusion. *British Journal of Psychology*, *49*(1), 31–33.

CAPÍTULO III

ANÁLISIS DE LA ACTIVIDAD MATEMÁTICA MEDIANTE DOS HERRAMIENTAS TEÓRICAS: REGISTROS DE REPRESENTACIÓN SEMIÓTICA Y CONFIGURACIÓN ONTOSEMIÓTICA[1]

Juan D. Godino [I]
Miguel R. Wilhelmi [II]
Teresa F. Blanco [III]
Ángel Contreras [IV]
Belén Giacomone [V]

[I] Universidad de Granada (España)
[II] Universidad Pública de Navarra (España)
[III] Universidad de Santiago de Compostela (España)
[IV] Ángel Contreras, Universidad de Jaén (España)
[V] Belén Giacomone, Universidad de Granada (España)

Resumen: Para comprender las dificultades y conflictos de aprendizaje, es necesario analizar las tareas matemáticas y los diversos modos de abordarlas por los estudiantes. Dicho análisis, que precisa herramientas teóricas específicas para su realización, aporta información útil para el propio diseño de las tareas y la gestión de los conocimientos en el aula. En este trabajo realizamos el análisis de una tarea que requiere la formulación de una conjetura y su demostración haciendo uso de representaciones figurales y algebraicas, aplicando dos herramientas teóricas diferentes: las nociones de registro de representación semiótica y de configuración ontosemiótica. Los resultados revelan algunas complementariedades que nos permitieron mostrar la potencial utilidad de los análisis epistémico y cognitivo realizados. Se trata de mostrar la potencial sinergia existente entre dichas herramientas y la posibilidad de avanzar en la articulación de los marcos teóricos correspondientes.

Palabras claves: Prácticas matemáticas; registros de representación; configuración ontosemiótica; análisis cognitivo y epistémico; articulación de teorías.

Resumo: Para compreender as dificuldades e conflitos de aprendizagem, é necessário analisar as tarefas matemáticas e os diversos modos de resolução por parte dos estudantes. Esta análise, que precisa de ferramentas teóricas específicas para a

---

[1] Trabajo publicado previamente como artículo en la revista *Avances de Investigación en Educación Matemática 2016, Nº 10. 91-110.*

sua realização, fornece informação útil para o próprio desenho de tarefas e para a gestão de conhecimentos em sala de aula. Neste trabalho realizamos a análise de uma tarefa que requer a formulação de uma conjetura e sua demonstração, fazendo uso de representações figurais e algébricas, aplicando duas ferramentas teóricas diferentes: as noções de registo de representação semiótica e de configuração ontossemiótica. Os resultados revelam algumas complementaridades que nos permitem manifestar o potencial da utilização da análise epistémica e cognitiva realizada. Isto mostra o potencial da sinergia existente entre as ferramentas teóricas referidas e a possibilidade de avançar na articulação dos marcos teóricos correspondentes.
Palavras-chave: Práticas matemáticas; registos de representação; configuração ontosemiótica; análise cognitiva e epistémica; articulação de teorias.

Analysing mathematical activity through two theoretical tools: registers of semiotic representation and onto-semiotic configuration

Abstract: To understand the difficulties and conflicts of learning is necessary to analyse the mathematical tasks and the various ways of addressing them by students. This analysis provides information about the design of the tasks and the management of knowledge in the classroom, being necessary to apply specific theoretical tools for its realisation. In this paper, we analyse a task that requires the formulation of a conjecture and its proof using figural and algebraic representations, and applying two different theoretical tools: the notions of semiotic representation register and onto-semiotic configuration. The results reveal some complementarities that allowed us to show the potential utility of the epistemic and cognitive analysis carried out. The aim is to show the potential synergy between these tools and the possibility to progress in the articulation of the corresponding theoretical frameworks.
Key words: Mathematical practices; representation registers; onto-semiotic configuration; cognitive and epistemic analysis; networking theories.

Analyse de l’activité mathématique par le biais de deux outils théoriques : les registres de représentation sémiotique et la configuration ontologique et sémiotique

Résumé : Pour comprendre les difficultés et les conflits d’apprentissage, il faut analyser les tâches mathématiques et les différentes façons que les étudiants utilisent pour les résoudre. Cette analyse, qui a besoin des outils théoriques spécifiques pour sa mise en œuvre, fournit des informations utiles pour la conception des tâches et pour la gestion des connaissances dans le système didactique. Dans cet article, on analyse la formulation d’une conjecture pour la réalisation d’une tâche, ainsi que sa

démonstration par le biais de représentations figurales et algébriques. Pour atteindre cet objectif, on utilise deux notions théoriques différentes : les registres de représentation sémiotique et la configuration ontologique et sémiotique. Les résultats révèlent des complémentarités entre les outils théoriques utilisés et leur intérêt pour des analyses épistémiques et cognitives complexes. On a donc montré la synergie potentielle entre ces outils et on a aussi trouvé des solutions qui visent l'articulation des cadres théoriques.
Mots clés : Pratiques mathématiques ; registres de représentation; configuration ontologique et sémiotique; analyse cognitive et épistémologique ; articulation des théories.

1. INTRODUCCIÓN

La teoría de los Registros de Representación Semiótica (TRRS) (Duval, 1995; 2006) incluye nociones que permiten el análisis de los diversos tipos de representaciones materiales usadas en la realización de tareas matemáticas, las transformaciones de las mismas y el papel que juegan en la comprensión de las matemáticas. La disponibilidad y uso de diversos sistemas de representación semiótica, sus transformaciones y conversiones, se consideran imprescindibles para la comprensión, construcción y comunicación de las matemáticas. Asimismo, se asume que la producción y aprehensión de representaciones materiales no es espontánea y su dominio debe ser previsto en la enseñanza.

Por su parte, el Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y de la instrucción matemáticos (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007) ha puesto el énfasis en los diversos tipos de objetos matemáticos, su naturaleza y su emergencia de las prácticas matemáticas. El lenguaje, en sus diversas modalidades, se incluye como un tipo de objeto primario y se reconoce su papel (representacional e instrumental) como faceta ostensiva de los objetos matemáticos. En este marco, para analizar la actividad matemática, se definen unos objetos primarios (lenguajes, situaciones, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos), siendo los lenguajes un aspecto central del aprendizaje. De hecho, el EOS propone un conjunto de herramientas que permite el análisis contextual de los objetos, determinando los procesos donde son movilizados o emergen. Además, se ponen en relación unos procesos con otros, permitiendo un análisis de las condiciones de comunicación y comprensión de las matemáticas.

El objetivo de este trabajo es estudiar las posibilidades de articulación de estos dos marcos teóricos, siguiendo los pasos marcados por los recientes estudios sobre comprensión, comparación y articulación de teorías (Bikner-Ahsbahs y Prediger, 2014; Prediger, Bikner-Ahsbahs y Arzarello, 2008), y teniendo en cuenta los resultados de la investigación iniciada por Pino-Fan, Guzmán, Duval y Font (2015) sobre la articulación de la TRRS y el EOS. En una primera aproximación se puede prever que la noción de registro de representación semiótica, sus diversos tipos y las operaciones de tratamiento y conversión entre registros permite desarrollar el análisis de los elementos lingüísticos, siendo por tanto un enriquecimiento del EOS. Paralelamente, la noción de configuración de objetos y procesos puede aportar un enriquecimiento de la TRRS, al permitir un análisis detallado de los conocimientos implicados en las transformaciones entre registros de representación que se realizan en las prácticas matemáticas (Pino-Fan et al., 2015).

Aunque en los supuestos ontológicos y semióticos de ambos marcos teóricos se encuentran diferencias importantes se parte de la hipótesis de que es posible una cierta articulación de los mismos, lo que permitiría hacer análisis cognitivos y epistémicos más detallados de la actividad matemática, y, en consecuencia, contribuir a la comprensión de los procesos de enseñanza y aprendizaje.

En la siguiente sección hacemos una síntesis de los supuestos y herramientas de la TRRS y en la siguiente hacemos lo mismo con los correspondientes al EOS. En la Sección 4 aplicamos conjuntamente estas herramientas para analizar una tarea matemática, lo cual ayuda a identificar algunas concordancias y complementariedades. Se prefiere, en primer lugar, realizar el análisis sobre una resolución epistémica de la tarea, con el fin de explicitar de manera completa las prácticas institucionales requeridas y procurando, además, aplicar de manera sistemática la noción de función semiótica, tanto en su interpretación referencial (semántica) como operacional (pragmática). Seguidamente se realiza el análisis cognitivo de la respuesta de un estudiante de máster a la tarea, aplicando las mismas herramientas teóricas y mostrando las posibilidades ofrecidas por el análisis epistémico previo para interpretar y comprender la solución dada por el estudiante. Por último, en las secciones 6 y 7, se profundiza en la comparación y articulación de los dos marcos teóricos.

2. SUPUESTOS Y HERRAMIENTAS DE LA TRRS

En la perspectiva semiótica - cognitiva adoptada por la TRRS se plantea abordar los problemas de aprendizaje de las matemáticas a partir de los distintos tipos de signos que se usan en la práctica matemática (atendiendo a su función y naturaleza). Tales signos son entendidos como representaciones materiales o externas, más que como representaciones mentales, considerándose que el modo de acceso a los objetos matemáticos, a diferencia de los objetos de otros campos de conocimiento científico, nunca puede ser directo mediante la percepción, sino haciendo uso necesariamente de las representaciones de tales objetos. Así, en la TRRS son claves las nociones de *semiosis* y *noesis*.

> Se llama semiosis a la aprehensión o la producción de una representación semiótica, y noesis a los actos cognitivos como la aprehensión conceptual de un objeto, la discriminación de una diferencia o la comprensión de una inferencia (Duval, 1995, p. 3).

Contrariamente a muchos trabajos psicológicos y didácticos que consideran la noesis como independiente de la semiosis o, que al menos, la dirige, Duval considera que la noesis está íntimamente ligada a la movilización y a la articulación cuasi-inmediata de varios registros de representación semiótica. Se atribuye un papel esencial no solo al uso de diferentes sistemas de representación semiótica (SRS) para el trabajo matemático, sino al tratamiento de los signos dentro de cada sistema y la conversión entre diferentes SRS.

> ¡El papel que los signos juegan en matemáticas no es ser sustituidos por otros objetos sino por otros signos! Lo que importa no es la representación sino sus transformaciones. Contrariamente a otras áreas del conocimiento científico, los signos y la representación semiótica de las transformaciones son el corazón de la actividad matemática (Duval, 2006, p. 107).

Para que un conjunto estructurado de signos sea considerado un Registro de Representación Semiótica (RRS) Duval requiere que en su seno se puedan realizar tres actividades cognitivas fundamentales:

> En primer lugar, constituir una traza o un conjunto de trazas perceptibles que sean identificables como *una representación de cualquier cosa* en un sistema determinado. A continuación, transformar las representaciones mediante las únicas reglas propias del sistema de manera que se obtengan otras representaciones que pueden constituir un aporte de conocimiento con relación a las representaciones iniciales. Finalmente, convertir las representaciones producidas en un sistema en representaciones de otro sistema, de tal manera que estas últimas permitan explicitar otras significaciones relativas a lo que se representa (Duval, 1995, p. 21).

Como ejemplos de tales RRS se tienen, la lengua natural (oral, escrita); representaciones numéricas (entera, fraccionaria, decimal); representaciones figurales o gráficas (lineales, planas o espaciales) y representaciones alfanuméricas (algebraicas). Se reconoce la posición dominante del RRS de la lengua natural, en tanto metalenguaje de todos los lenguajes y de él mismo, es decir, como filtro de toda nuestra experiencia con el mundo natural, social y simbólico o cultural.

Las transformaciones posibles entre representaciones pueden ser de dos tipos:

•*Tratamiento*. La actividad supone una transformación entre representaciones de un mismo RRS.
•*Conversión*. La actividad supone una transformación entre representaciones de distintos RRS, siendo, en este caso, esencial la articulación de los registros.

En el enunciado y solución de una tarea matemática pueden intervenir distintas representaciones semióticas pertenecientes a diferentes RRS, las cuales pueden sufrir distintos tratamientos o conversiones. Dos representaciones se dice que son *congruentes* cuando cumplen tres condiciones: correspondencia semántica entre las unidades significantes que las constituyen, mismo orden posible de aprehensión de estas unidades en las dos representaciones, y para convertir una unidad significante de la representación de partida se tiene una única unidad significante en la representación de llegada (Duval, 1995, p. 6). Pero cuando uno de estos tres criterios no se verifica, las representaciones dejan de ser congruentes entre sí, y el paso de una a la otra no tiene nada de inmediato.

El análisis semiótico - cognitivo de la actividad matemática llevado a cabo dentro de la TRRS se centra en la identificación de los distintos registros usados y sus transformaciones, según las reglas propias de cada RRS. Duval (2006) concibe el objeto matemático como "el invariante de un conjunto de fenómenos o el invariante de alguna multiplicidad de posibles representaciones" (p. 129), e insiste en no confundir el objeto matemático con sus diversas representaciones. Esto le lleva a plantear la *paradoja cognitiva* del aprendizaje matemático:

> El problema crucial de la comprensión matemática para los estudiantes, en cualquier nivel del currículo, surge del conflicto cognitivo entre estos dos requerimientos opuestos: cómo pueden distinguir el objeto representado de la representación semiótica usada si no pueden tener acceso al objeto matemático sino por medio de las representaciones semióticas (Duval, 2006, p. 107).

Un sujeto tendrá acceso a un objeto representado solamente si se cumplen dos condiciones: 1) que disponga de al menos dos registros diferentes para representar el objeto; y 2) que pueda pasar de manera natural de un registro a otros, aun sin ser consciente de las representaciones que está articulando. Si esto no ocurre, la representación y el objeto representado (notación y contenido) se confunden.

> La actividad conceptual no puede ser aislada de la actividad semiótica porque la comprensión conceptual aparece ligada al descubrimiento de una invariancia entre representaciones semióticas heterogéneas (Duval, 1995, p. 1).

Los planteamientos expuestos han posibilitado la constitución de una herramienta didáctica (RRS) que pone de manifiesto la necesidad de integrar la manipulación de registros (*ostensivos*) y la interpretación de esta manipulación (*significado*). Así, se observan dos niveles de análisis: uno, referido a los "objetos" (ostensivos - materiales o conceptuales) matemáticos involucrados; otro, sobre las relaciones entre ellos y su función contextual en la actividad matemática, discriminando, en particular, los objetos emergentes.

Estos dos niveles deben ser integrados, para lo cual es preciso determinar las configuraciones de objetos y la función significante que cumple cada uno de ellos (Montiel, Wilhelmi, Vidakovic y Elstak, 2009).

Por otro lado, el postulado de la TRRS sobre la necesidad para el acceso a un objeto de que el sujeto disponga de al menos dos registros diferentes para representarlo no es general. Por ejemplo, cuando un niño en el aula de tres años de Educación Infantil recibe un conjunto de triángulos, cuadrados y círculos de diferentes tamaños, colores y grosores y, dado un ejemplar cualquiera de cada figura, se le solicita "coge todos los que tienen la misma forma", el niño realiza una clasificación del conjunto, que es una abstracción de las propiedades de las figuras. Aquí el niño no dispone de otro registro de representación de las figuras, que no sea el material-manipulable (como representante de la clase "cuadrado", "triángulo" y "círculo"). De hecho, el niño puede no saber nombrar las figuras en lenguaje natural y, en todo caso, lo figural está condicionado por la psicomotricidad fina (Dickson, Brown y Gibson, 1991). Sin embargo, es capaz de apresar características suficientes de los objetos, abstrayendo otras características físicas, para realizar la tarea de clasificación. Es pues necesario para describir este aprendizaje un análisis que excede el cambio de registros.

3. SUPUESTOS Y HERRAMIENTAS DEL EOS: LA NOCIÓN DE CONFIGURACIÓN ONTOSEMIÓTICA

Godino (2012) presenta el EOS como un enfoque teórico inclusivo para la investigación en didáctica de las matemáticas. El EOS aporta herramientas para abordar cuestiones de tipo epistemológico, cognitivo e instruccional en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, desde una aproximación antropológica y semiótica. En la figura 1 se destacan como elementos claves de la modelización epistemológica y cognitiva del conocimiento matemático las nociones de *práctica*, *objeto*, *proceso* (secuencia de prácticas de las que emerge el objeto) y *función semiótica*,

Interpretando la noción de "función de signo" de Hjemslev (1943) y "función semiótica" de Eco (1976), en el EOS se entiende una función semiótica como la correspondencia o relación de dependencia entre una entidad antecedente (expresión, significante) y otra consecuente (contenido, significado) establecida por un sujeto (persona o institución) según una determinada regla, hábito o criterio establecida en un acto de interacción comunicativa. Así mismo, de acuerdo con la semiótica de Peirce (1978), se asume que tanto la expresión (antecedente de una función semiótica) y el contenido (consecuente) pueden ser cualquier tipo de entidad de las introducidas en el EOS: un sistema de prácticas o cualquiera de las entidades primarias que intervienen en las prácticas (problemas, lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos). Como tales entidades se pueden contemplar desde diferentes puntos de vista duales (personal- institucional, unitario- sistémico, ostensivo - no ostensivo, particular-general), los significados también pueden ser considerados desde dichos puntos de vista. El significado de un objeto (una palabra, un concepto, etc.), entendido como el uso o rol que dicho objeto desempeña en un contexto o juego de lenguaje específico, queda contemplado como el caso en el que el contenido de la función semiótica es un sistema de prácticas (significado pragmático u operacional). Se tiene de esta manera una conceptualización muy general y operativa de nociones claves en psicología y educación, como son las de significado y representación.

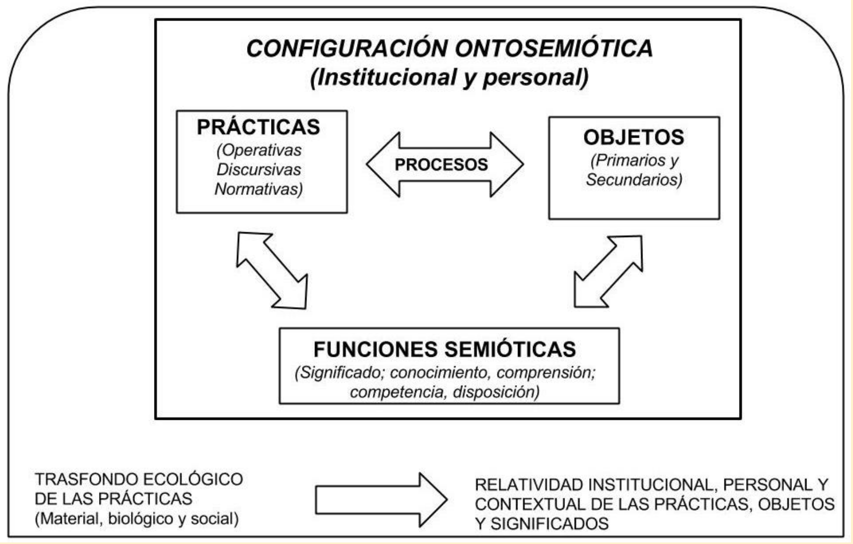


Figura 1. Entidades primarias de la ontología y epistemología EOS

El EOS incluye una tipología explícita de objetos (y de sus respectivos procesos), que condiciona la descripción y el análisis de la actividad matemática; estos son:

Lenguajes (términos, expresiones, notaciones, gráficos) en sus diversos registros (escrito, oral, gestual, etc.).

- Situaciones-problemas (aplicaciones intra o extra-matemáticas, ejercicios).
- Conceptos- definición (introducidos mediante definiciones o descripciones) (recta, punto, número, media, función).
- Proposiciones (enunciados sobre conceptos).
- Procedimientos (algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo).
- Argumentos (enunciados usados para justificar o explicar las proposiciones y procedimientos, deductivos o de otro tipo).

Estos objetos pueden ser analizados desde cinco pares de puntos de vista duales (figura 2) (Font, Godino y Gallardo, 2013), según su función contextual y funcional en las prácticas matemáticas, así como de los procesos matemáticos relacionados.

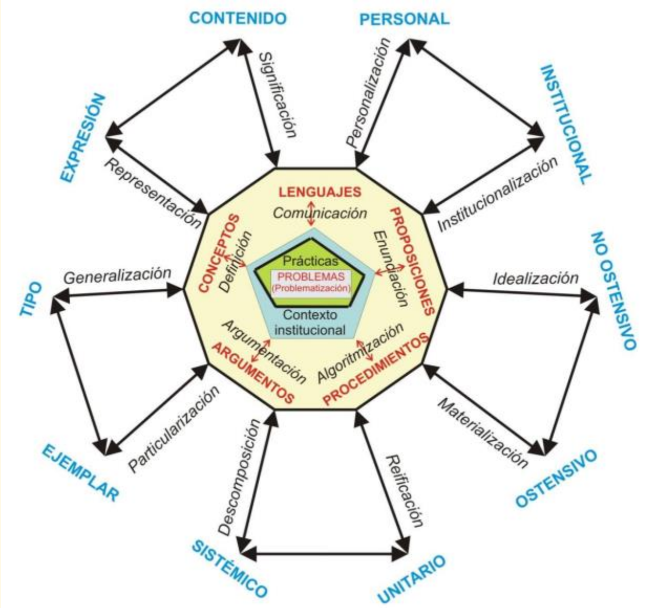


Figura 2. Objetos y procesos que intervienen en las prácticas matemáticas

Tanto las dualidades como los objetos se pueden analizar desde la perspectiva proceso-producto. La emergencia de los objetos primarios (problemas, definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos) tiene lugar mediante los respectivos procesos matemáticos de comunicación, problematización, definición, enunciación, elaboración de procedimientos (algoritmización, rutinización, ...) y argumentación. Por otra parte, las dualidades dan lugar a los siguientes procesos cognitivos/epistémicos: institucionalización – personalización; generalización – particularización; análisis/descomposición – síntesis/reificación; materialización /concreción – idealización/ abstracción; expresión/representación – significación.

La noción de sistema semiótico de la TRSS se interpreta en el EOS en términos de las configuraciones de objetos y procesos, que no quedan restringidas a conjuntos de signos relacionados. Así, estos sistemas están formados por la configuración de objetos que intervienen y emergen en los sistemas de prácticas, junto con los procesos de interpretación que se establecen entre los mismos (esto es, incluyendo la red de funciones semióticas que relacionan los objetos constituyentes de la configuración) (Godino, Font, Wilhelmi y Lurduy, 2011).

Las configuraciones epistémicas /cognitivas están constituidas por los elementos lingüísticos de distinta naturaleza (gestos, palabras, inscripciones, …) y también por los objetos conceptuales, proposiciones, procedimientos y argumentos, junto con los problemas que constituyen la razón de ser de la actividad, y las relaciones que se establecen entre los constituyentes mencionados. Son por lo tanto heterogéneas, multimodales y dinámicas, ya que cambian y se enriquecen según evolucionan los procesos instruccionales.

4. ANÁLISIS CONJUNTO DE UNA TAREA MEDIANTE LA TRRS Y EL EOS

En este apartado vamos a analizar el enunciado y una posible solución (experta o ideal) de una tarea aplicando herramientas teóricas de la TRRS y del EOS. Se aportará un análisis a partir de las herramientas de la TRRS, identificando ciertas cuestiones abiertas que serán abordadas con las herramientas de EOS. Este ejemplo integra distintos tipos de lenguajes (natural, figural, numérico y simbólico-literal), resaltando la importancia de la visualización en la adquisición de conocimientos matemáticos siempre que estas sean internas y globales, detectándose conflictos en la actividad matemática si son externas y parciales (Ortega y Pecharromán, 2015).

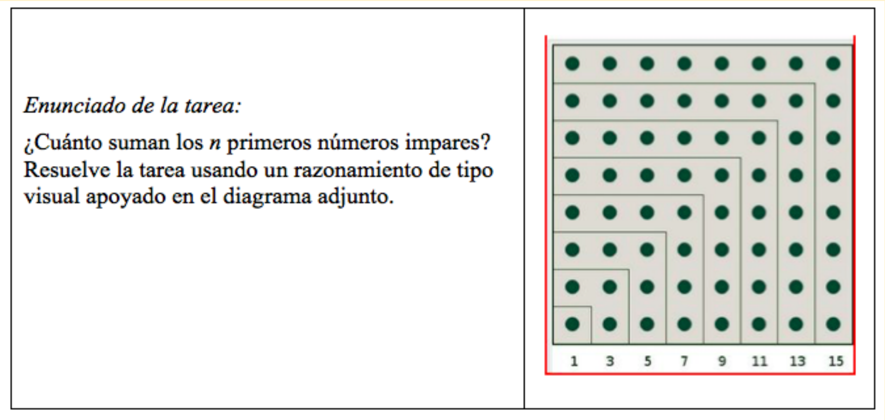


Figura 3. Enunciado de una tarea visual – algebraica

4.1. SISTEMA DE ACCIONES QUE COMPONEN LA SOLUCIÓN

La representación de la Figura 3 presenta una “demostración visual” clásica de este teorema. Se muestra visualmente la suma de los ocho primeros números impares, de la cual se puede formular una conjetura para el caso de la suma de los primeros *n* números impares: $1 + 3 + \cdots + (2n - 1) = n^2$. La demostración de esta fórmula para cualquier número natural puede obtenerse aplicando el principio de inducción matemática. Para que el diagrama de la Figura 3 desempeñe su función explicativa se considera necesario realizar una secuencia de prácticas o acciones similares a las que indicamos a continuación:

• 1 El diagrama de la Figura 3 se debe descomponer en 8 sub-diagramas (Figura 4) según las líneas angulares interiores. La secuencia de las ocho figuras establece una correspondencia entre los primeros ocho números impares y el número de orden de la figura.

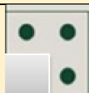
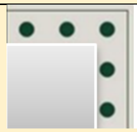
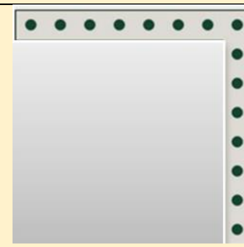
			…	…		…	…	
1	3	5	7	9		11	13	15
1	2	3	4	5		6	7	8

Figura 4. Distinción de 8 casos

• 2 En cada caso se calcula el número de puntos de dos formas: como área discreta de un cuadrado (*números cuadrados*) y como suma de números impares consecutivos (Figura 5).

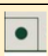
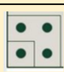
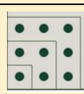
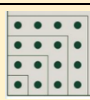
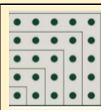
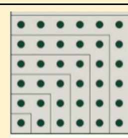
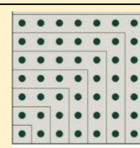
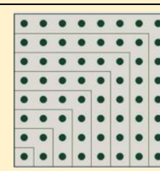
							
1	4	9	16	25	36	49	64
$1^2=$ 1	$2^2=1+$ 3	$3^2=1+3$ $+5$	4^2 = 1+3+5 +7	$5^2=1+3$ +5+7+9	$6^2=1+3+5+7$ +9+ 11	$7^2=1+3+5+7+$ 9+11+13	$8^2=1+3+5+7+$ 9+11+13+ 15
1	2	3	4	5	6	7	8

Figura 5. Descomposición del diagrama e interpretaciones

• 3 Cada número impar que se suma se puede escribir como el doble de su posición en la secuencia menos 1. Así, el número impar sumado correspondiente a la posición 8 corresponde a:

$$\mathbf{15 = (2\times 8 - 1)}$$

• 4 El número cuadrado 8^2 corresponde a la suma de los ocho primeros números impares:

$8^2 = (2\times1 - 1) + (2\times2 - 1) + (2\times3 - 1) + (2\times4 - 1) + (2\times5 - 1) + (2\times6 - 1) + (2\times7 - 1) + (2\times8 - 1)$

• 5 La secuencia de pasos anteriores permite conjeturar que la suma de los n primeros números impares se puede calcular mediante la expresión:

$$\mathbf{1 + 3 + \cdots + (2n - 1) = n^2} \text{ (A)}$$

• 6 La expresión (A) se ha comprobado que es válida para los ocho primeros números impares. El paso de un caso al siguiente supone añadir el número impar siguiente de puntos, dispuestos en el ángulo superior derecho del cuadrado anterior. Esto supone añadir $n + n + 1 = 2n + 1$ puntos a los n^2 puntos anteriores, obteniendo un nuevo cuadrado de lado $n + 1$ (Figura 6).

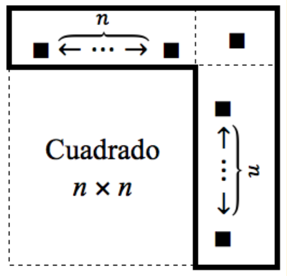


Figura 6. Composición del cuadrado que ocupa el lugar n+1 a partir del que ocupa el lugar n.

Por tanto, la suma de los n+1 números impares es $(n+1)^2$. En efecto, en aplicación del principio de inducción se tiene:

a) Si $n = 1$: $1 = 1^2$.

b) Si la expresión A es válida para la suma de los n primeros números impares, entonces es cierta para la suma de los n+1 (hipótesis de inducción, HI):

$$[1 + 3 + \ldots + (2n - 1)] + (2n + 1) \underbrace{=}_{HI} n^2 + (2n + 1) = (n + 1)^2$$

4.2. REGISTROS DE REPRESENTACIÓN SEMIÓTICA Y CONFIGURACIÓN ONTOSEMIÓTICA

En la Tabla 1 sintetizamos los diversos registros de representación semiótica así como los tratamientos y conversiones usados en cada una de las prácticas indicadas en el apartado 4.1. El análisis de la práctica matemática que se sigue de estos registros y sus cambios asociados es completado con la configuración de objetos matemáticos implícitos (no ostensivos). Los procesos de interpretación y comprensión requeridos se incluyen en la Sección 4.3 aplicando la noción de función semiótica, mediante la cual se completa la identificación de la trama de conocimientos que se ponen en juego en la resolución de la tarea.

Tabla 1. Análisis conjunto de las prácticas matemáticas

Registros de representación semiótica (tratamientos y conversiones)	**Prácticas operativas y discursivas textualizadas**	**Objetos no ostensivos** (conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos)
– RR lengua natural, RR figural y RR numérico. – *Conversión no congruente* entre RR lengua natural y figural.	***Enunciado:*** ¿Cuánto suman los *n* primeros números impares? Resuelve la tarea usando un razonamiento de tipo visual apoyado en el diagrama adjunto.	– *Conceptos*: números naturales e impares; orden y adición en N; cardinal de un conjunto; números figurados. – *Argumento*: razonamiento visual.
– RR lengua natural, RR figural y RR numérico. – *Tratamiento* dentro del RR figural descomponiendo un diagrama en ocho sub-diagramas, visualizando solo la disposición angular de los impares. – Correspondencia entre los sub-diagramas y sus respectivas posiciones en la secuencia numérica (*conversión congruente*).	1) El diagrama de la Figura 3 se debe descomponer en ocho sub-diagramas (Figura 4) según las líneas angulares interiores. La secuencia de las 8 figuras establece una correspondencia entre los primeros 8 números impares y el número de orden de la figura.	– *Procedimiento*: descomposición de un diagrama (tratamiento) – *Concepto*: número natural como secuencia de numerales; función de variable natural que relaciona la posición de la figura con el impar “figurado angularmente”.

...continúa

Registros de representación semiótica (tratamientos y conversiones)	**Prácticas operativas y discursivas textualizadas**	**Objetos no ostensivos** (conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos)
– RR lengua natural, RR figural y RR numérico – *Tratamiento* dentro del RR figural componiendo ocho sub-diagramas a partir de los diagramas de la Figura 4, visualizando los "números cuadrados". – *Conversión* del RR figural al RR numérico en cada sub-diagrama cuadrangular.	2) En cada caso se calcula el número de puntos de dos formas: como área discreta de un cuadrado ("números cuadrados) y como suma de números impares (Figura 5).	– *Concepto*: cardinal de un conjunto de puntos. – *Procedimientos*: composición de la disposición cuadrangular de los puntos a partir de las figuras angulares; paso del registro gráfico al numérico-aritmético; multiplicación como producto cartesiano (área discreta de cada cuadrado). – *Proposiciones*: $1^2=1$; $2^2= 1+3 =$; … – *Argumentos*: comprobación visual y aritmética
– RR lengua natural; RR numérico. – *Tratamiento* dentro del RR numérico.	3) Todo número impar se puede escribir como $2\times n–1$, donde n representa su posición en la secuencia natural.	– *Proposiciones*: ….; $15 = (2\times 8 – 1)$ – *Argumento*: comprobación mediante cálculo aritmético
– RR lengua natural; RR numérico. – *Tratamiento* dentro del RR numérico.	4) El número cuadrado 8^2 corresponde a la suma de los 8 primeros números impares: $8^2 = (2\times 1–1) + \ldots + (2\times 8–1)$	– *Procedimiento*: cálculo aritmético (tratamiento dentro del registro numérico).

...continúa

Registros de representación semiótica (tratamientos y conversiones)	**Prácticas operativas y discursivas textualizadas**	**Objetos no ostensivos** (conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos)
– RR lengua natural; RR algebraico. – *Tratamiento* dentro del RR numérico. – *Conversión* del RR numérico al RR algebraico.	5) La secuencia de pasos anteriores permite conjeturar que la suma de los n primeros números impares se puede calcular mediante la expresión: $1 + 3 + ... + (2n–1) = n^2$ (A)	– *Concepto*: variable *n* que expresa una posición genérica en la serie de números naturales. – *Proceso*: generalización inductiva. – *Proposición*: $1 + 3 + ... + (2n-1) = n^2$ – *Argumento*: justificación de la proposición mediante la secuencia de pasos previos (para un valor fijo de *n* aunque indeterminado).
– RR lengua natural; RR algebraico; RR figural (evocado). – *Conversión* del RR figural (evocado) al RR algebraico. – *Tratamiento* dentro del RR algebraico.	6) La expresión (A) se ha comprobado que es válida para los 8 primeros números impares… Por el principio de inducción se demuestra que la suma de los n+1 números impares es $(n+1)^2$.	– *Proposición*: la expresión A es válida para todo *n* natural. – *Argumento*: verificación por el principio de inducción matemática. – *Procedimiento*: razonamiento de inducción matemática.

La conversión y tratamiento de la TRRS pueden ser asimilados sin tensiones por el EOS como procedimientos en las prácticas operativas y discursivas. Así, por ejemplo, la práctica 2, la composición-descomposición de los puntos que representan los números impares (escuadras) y su suma (cuadrado) es un procedimiento que supone un tratamiento figural. Por otro lado, el procedimiento que permite la interpretación numérica de la representación gráfica es una conversión.

4.3. IDENTIFICACIÓN DE FUNCIONES SEMIÓTICAS

Los tratamientos y conversiones son tipos de prácticas matemáticas y como tales ponen en juego no solo la “manipulación” de objetos ostensivos sino también de no ostensivos. Tales manipulaciones involucran una trama de funciones semióticas cuya identificación permite revelar la complejidad de los procesos de interpretación y actuación requeridos, así como la lógica e intencionalidad de cada acción. Un acto de interpretación o semiosis pone en relación un objeto antecedente con otro consecuente según un cierto convenio o regla de correspondencia. El acto de semiosis puede consistir en dar sentido, uso o finalidad, a una acción, o secuencia de acciones, en el marco de la actividad en desarrollo.

Cada práctica en que se ha dividido el proceso resolutivo del problema se puede analizar en términos de la trama de objetos matemáticos (ostensivos y no ostensivos) y de las funciones semióticas que se establecen entre los mismos. El análisis ontosemiótico va a requerir descomponer las prácticas (primarias) inicialmente enunciadas en otras más elementales. A título de ejemplo mostramos a continuación las funciones semióticas implicadas en el enunciado y en las prácticas 1) y 2).

Enunciado

a. Los términos, ‘cuánto’, ‘suman’, ‘primeros números impares’, refieren a sus respectivos contenidos conceptuales, que vienen definidos en el contexto matemático.
b. ‘Razonamiento visual’ refiere, en el contexto escolar, a una secuencia de prácticas discursivas y operativas que se deben realizar sobre el diagrama dado las cuales conducirán finalmente a una respuesta a la cuestión planteada.
c. La letra *n* refiere a un número natural cualquiera, y por tanto, asociado a la noción de variable y, en el contexto, la necesidad de argumentación de la validez por medio de la inducción matemática. Así, la respuesta esperada es una expresión algebraica que sintetice las relaciones y su interpretación en los registros del lenguaje natural, figural y simbólico.
d. ‘Diagrama adjunto’ refiere a la disposición geométrica cuadrangular de puntos y los 8 primeros números impares de la Figura 3; en estas funciones semióticas ambos funtivos son ostensivos.

e. El texto completo del enunciado es referido como ‘enunciado de la tarea’, como una consigna que hay que interpretar y que induce a desplegar una actividad matemática específica regulada por los significados convenidos para los distintos términos y expresiones.

Práctica 1

a. El sujeto interpreta las líneas angulares encajadas de la Figura 3 como la superposición de 8 casos, aplicando un tratamiento visual guiado por las líneas angulares interiores. Tales líneas tienen un significado actuativo u operatorio, es decir, sugieren tácitamente la operación de descomposición ostensiva de la Figura 3 en 8 sub-figuras.
b. La finalidad, el uso o significado operativo de estas acciones es la obtención de la secuencia de los primeros 8 números impares, cada uno representado como un “impar figural angular”.
c. El objeto figural impar se pone en correspondencia con la secuencia de números naturales del 1 al 8, con la finalidad de producir la función $f(n) = 2n - 1$, particularizada a los 8 primeros números naturales.
d. Se trata de una conversión del registro figural al numérico que es congruente porque cada unidad del registro de partida se corresponde con una unidad correspondiente en el de llegada.

Práctica 2

a) Tratamiento figural para pasar de las disposiciones angulares de los impares a los “números cuadrados”. Para el primer caso, la unión de un punto junto con tres puntos (antecedente) produce un cuadrado (consecuente). En cierto modo podríamos decir que el cuadrado “significa” el resultado de agregar dos números impares figurales, en el sentido de que es el consecuente de la función semiótica que los relaciona. Este tratamiento se usa, o tiene como fin en esta práctica, para relacionar la suma de impares con los números cuadrados.

b) Conversión 1: Correspondencia entre cada conjunto de puntos dispuestos en forma cuadrangular y el cardinal correspondiente (número de puntos); donde:

- Antecedente: figural.
- Consecuente: numérico.

- Criterio: convencional (el número de puntos se expresa con los numerales correspondientes en el sistema posicional decimal).

Es pues una conversión congruente: cada unidad significante del registro de partida (figuras cuadrangulares de puntos) se corresponde con la potencia de orden 2 del lado correspondiente. La disposición tabular de figuras y números establece un mismo orden de aprehensión de las unidades.

c) ¿Qué significado, uso o intencionalidad tiene la conversión 1? Es un paso auxiliar previo al tratamiento que produce la expresión numérica de los "números cuadrados".

d) Conversión 2: registro gráfico (disposición angular de puntos) al numérico (suma de impares, 1+3; 1+3+5; …). La disposición cuadrangular se debe interpretar como unión de las disposiciones angulares que la componen, lo que da como resultado la suma de los impares correspondientes. Se pretende poner en relación la suma de impares con los números cuadrados previamente identificados. Es una conversión congruente porque hay correspondencia entre las unidades significantes de cada registro.

e) Tratamiento numérico 1: Expresión de 1, 4, 9, …, como $1^2, 2^2, 3^2, \ldots$

f) Tratamiento numérico 2: Producción de la equivalencia de las expresiones, $1^2 = 1,\ 2^2 = 1 + 3;\ 3^2 = 1 + 3 + 5, \ldots$

Podemos decir que, de este modo, se identifica en cada práctica una "configuración ontosemiótica elemental", constituyendo la secuencia de tales configuraciones una "trayectoria ontosemiótica" del proceso resolutivo. El análisis de los distintos tipos de RRS usados (tratamientos y conversiones; congruentes o no congruentes), se realiza de manera articulada y conjunta con los objetos no ostensivos imbricados, lo cual permite reconocer de manera explícita la sinergia entre la semiosis y la noesis. En el EOS, la noesis se puede describir como un proceso de interpretación y "manipulación" de los objetos no ostensivos que participan en las prácticas matemáticas, en conjunción dialéctica con los ostensivos que necesariamente les acompañan.

5. CONFIGURACIÓN COGNITIVA DE UNA SOLUCIÓN AL PROBLEMA VISUAL – ALGEBRAICO

En este apartado analizamos la respuesta dada por un estudiante al problema planteado en la sección anterior, aplicando las herramientas configuración ontosemiótica y registros de representación semiótica. La solución está reflejada en la Figura 7 y fue seleccionada entre las respuestas dadas por futuros docentes en un Máster en Profesorado de Matemáticas en Educación Secundaria. Este problema (Figura 3) es usado para promover la reflexión de los estudiantes sobre los objetos y procesos implicados en la actividad matemática. En nuestro caso, el análisis que realizamos trata de mostrar la potencial utilidad del análisis epistémico realizado en la Sección 4 para interpretar y comprender la configuración cognitiva movilizada por el estudiante e identificar algunas limitaciones metodológicas.

1) Observamos el diagrama que se adjunta para extraer un patrón que nos sirva para ver la relación existente entre números impares y números cuadrados.
2) Observando el diagrama obtenemos los siguientes resultados:

$$1 = 1^2$$
$$1 + 3 = 4 = 2^2$$
$$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$$
$$\ldots$$
$$1 + 3 + 5 + \cdots (2n - 1) = n^2$$

3) Por lo tanto vemos que la suma de los n primeros números impares es, efectivamente n^2

Figura 7. Solución de un estudiante

En la Tabla 2 indicamos los objetos no ostensivos puestos en juego en las prácticas matemáticas manifestadas por el estudiante, así como los registros de representación semiótica (RRS), clasificados según el registro: lenguaje natural (RRL), numérico (RRN), algebraico (RRA) o figural (RRF).

En términos de la teoría de los registros de representación semiótica (TRRS), el estudiante comienza realizando de manera implícita o mental un tratamiento dentro del registro de representación figural (RRF). Este tratamiento le permite al sujeto establecer relaciones diagramáticas, y luego pasar del RRF y de la lengua natural (enunciado de la tarea) al registro de representación numérico (RRN) (suma de números impares consecutivos y su relación con los números cuadrados). En el RRN se realizan determinados tratamientos, para finalmente pasar al registro algebraico: 1+3+5+…+(2n – 1)= n^2. Pero como se muestra en la secuencia de prácticas 1) a 3), el RRF no se manifiesta explícitamente como recurso de soporte para hallar la solución;

en este caso, el tratamiento de los diagramas figurales resulta costoso y poco operativo.

Tabla 2. Análisis conjunto de las prácticas matemáticas de un estudiante

Registros de representación semiótica (Tratamientos y conversiones)	**Prácticas operativas y discursivas textualizadas**	**Objetos no ostensivos** (Conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos)
– RR figural (presente en el enunciado). – RRL	1) Observamos el diagrama que se adjunta para extraer un patrón que nos sirva para ver la relación existente entre números impares y números cuadrados.	– *Conceptos*: diagrama; patrón; números impares, números cuadrados; – *Proposición:* relación entre números impares y números cuadrados.
– RRF; RRL; RRN; RRA – Tratamiento implícito dentro del RR figural (interpretación y descomposición del diagrama de la Figura 3. Se visualizan los números impares y cuadrados). – Conversión del RRF al RRN de cada sub-diagrama formado por las líneas angulares. – Tratamiento dentro del RRN (se relacionan la suma de números impares consecutivos con los números cuadrados). – Conversión del RRN al RRA (generalización para un número cualquiera *n*).	2) Observando el diagrama obtenemos los siguientes resultados: $1=1^2$ $1+3=4=2^2$ $1+3+5=9=3^2$ … $1+3+5+\ldots+(2n-1)= n^2$	– *Conceptos:* diagrama; número impar; números cuadrados; igualdad aritmética (resultado de operaciones); variable *n* que expresa una posición genérica en la serie de números naturales. – *Procedimiento:* 1º Descomposición (implícita) del diagrama de la Figura 3 siguiendo las líneas angulares interiores (tratamiento RRF). 2º Conversión del registro gráfico al numérico – aritmético [se asocian los puntos como suma de números impares y con el área discreta del cuadrado y, esto es p. e.: $1+3=4=2^2$] 3º Cálculo aritmético (tratamiento) – *Proposición*: $1 + 3 + ... + (2n-1) = n^2$

		– *Argumento:* justificación de la proposición mediante la secuencia de pasos previos (asignando un valor fijo de *n* aunque indeterminado). – *Proceso*: generalización inductiva
- RRL - RRA	3) Por tanto vemos que la suma de los n primeros números impares es, efectivamente, n^2.	– *Proposición:* La expresión dada en la práctica anterior es válida para todo *n* natural.

El estudiante encuentra la solución finalmente mediante un procedimiento aritmético-algebraico de cálculo basándose en un proceso de *generalización inductiva*, que acepta como suficiente. La demostración por inducción matemática de la fórmula encontrada para todo número natural, tiene que ser realizada entonces de forma magistral por el docente.

En la práctica 2), a partir de tratamientos y conversiones no explicitados, el estudiante construye las sumas consecutivas de los números impares; de esta manera se obtiene una relación a partir de la cual la suma de los números impares se relaciona con los números cuadrados correspondientes. El estudiante realiza una serie de cálculos aritméticos logrando establecer una proposición que considera solución de la tarea. No obstante, no es consciente de que con el proceso inductivo que sigue lo que obtiene es una conjetura cuya validez, para cualquier número natural, requiere aplicar el principio de inducción matemática. Dado que se pide una justificación visual sería necesario finalmente construir un diagrama similar al mostrado en la Figura 6.

6. COMPARACIÓN Y ARTICULACIÓN DE LA TRRS Y EL EOS

En esta sección, profundizamos en la comparación y articulación de los dos enfoques teóricos. Como se ha señalado en la Sección 4.2, las nociones de tratamiento y conversión permiten sintetizar procesos en el marco del EOS. Aún más, dado que los lenguajes forman también parte de la ontología matemática del EOS, concreciones del tipo "tratamiento en RRF" o "conversión RRN" pueden asimismo utilizarse sin tensiones en el marco del EOS. Esta asunción, no solo no genera conflictos desde el punto de vista teórico, sino que es extendida mediante la noción de función semiótica (Sección 4.3).

6.1. SUPUESTOS ONTOLÓGICOS Y SEMIÓTICOS DE AMBOS MARCOS TEÓRICOS

La TRRS asume de manera implícita una posición que podemos calificar de empirista sobre la naturaleza de los objetos matemáticos. Esto se infiere del postulado de que es necesario el uso de dos o más representaciones para la comprensión del objeto, y de que tal objeto es "el invariante de un conjunto de fenómenos o el invariante de alguna multiplicidad de posibles representaciones". La semiótica asumida enfatiza la faceta representacionista/referencial, aunque también se reconoce una valencia instrumental/operacional de las inscripciones simbólicas: "La escritura de un número representa un número y tiene una significación operatoria ligada a los tratamientos que permiten efectuar las operaciones. Los tratamientos no son los mismos para la escritura decimal y para la escritura fraccionaria" (Duval, 1995, p. 64).

La ontología EOS es pragmatista - antropológica y la semiótica es básicamente peirceana- wittgeinsteiniana. Se asume que las representaciones materiales o externas tienen una *valencia representacional*, de referir a otro objeto no ostensivo, y también una *valencia operacional*, esto es, los objetos ostensivos se usan para hacer el trabajo matemático sin que tengan que representar a otro objeto. Además, siguiendo la semiótica peirceana, el antecedente de las funciones semióticas pueden ser objetos no ostensivos.

El objeto matemático es visto por la TRRS como 'objeto de conocimiento', como una entidad cognitiva que reside en la mente del sujeto individual, y se plantea como una cuestión esencial el estudio de las operaciones cognitivas necesarias para la realización de diferentes tipos de tareas matemáticas, sean un cálculo, un razonamiento o el uso de una figura en una demostración geométrica. Cuando un sujeto no es capaz de realizar una determinada conversión o tratamiento desde la TRRS solo se puede decir que carece del conocimiento del objeto matemático correspondiente. Es aquí donde el EOS puede complementar los análisis representacionales de la TRSS.

¿Por qué son necesarias las representaciones semióticas en la actividad matemática? ¿Qué relación existe entre el objeto matemático y sus diversas representaciones? La adopción del postulado antropológico para los objetos no ostensivos (conceptos, proposiciones, procedimientos) permite afrontar esas cuestiones. Los objetos matemáticos son reglas gramaticales de los lenguajes que usamos para describir nuestros mundos, por lo que el uso de tales lenguajes (representaciones semióticas) es imprescindible. No puede haber gramática sin lenguaje. Aún más, las reglas gramaticales no se deben confundir con el enunciado lingüístico de las mismas.

6.2. FUNCIÓN SEMIÓTICA *VERSUS* REPRESENTACIÓN

La noción de registro de representación semiótica, sus tipos, los tratamientos y conversiones entre registros aportan un recurso analítico que desarrolla y complementa a la categoría del objeto primario ‘lenguaje’ del EOS, pudiendo ser incorporada sin ningún problema. La TRRS amplía la categoría del lenguaje del EOS distinguiendo distintos tipos y desvelando el papel esencial de las transformaciones que se realizan entre (y dentro) los distintos tipos de lenguaje, ahora considerados como RRS. Dada la naturaleza intradiscursiva de los objetos matemáticos, parece necesario tener en cuenta la trama de objetos que se ponen en juego en las transformaciones realizadas con las representaciones semióticas.

La dualidad ejemplar-tipo (extensivo-intensivo) se aplica a todos los tipos de objetos primarios, incluyendo los elementos lingüísticos. Esto permite interpretar que la relación entre ‘representación semiótica’ y ‘registro de representación semiótica’ es del tipo *extensivo-intensivo*. Una representación semiótica es un ejemplar particular, un registro es un tipo o clase de representación. Entre los elementos constituyentes de los tipos de representación se debe poder hacer con ellos determinadas transformaciones siguiendo un conjunto de reglas.

La noción de función semiótica amplia la noción de *representación* (Godino y Font, 2010). La semiótica pragmatista/antropológica asumida por el EOS propone que los objetos que se ponen en correspondencia en las funciones semióticas (funtivos) no son solamente objetos lingüísticos ostensivos (palabras, símbolos, expresiones, diagramas), sino que los conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos, incluso las situaciones pueden ser también antecedentes de las funciones semióticas. Los funtivos también pueden ser entidades unitarias o sistémicas, particulares o generales, materiales o inmateriales, personales o institucionales.

En el ejemplo analizado en la Sección 4 hemos mostrado que la noción de función semiótica permite analizar de manera microscópica la secuencia de pasos implicados tanto en los tratamientos como en las conversiones, identificando los objetos antecedentes, consecuentes y reglas de correspondencia que se movilizan en cada caso. De ese modo, se pueden explicar los conflictos potenciales o efectivos que tienen lugar en tales transformaciones semióticas en términos de los conocimientos matemáticos específicos requeridos en cada caso. En las conversiones entre registros se ponen en juego tramas de funciones semióticas en las que los antecedentes y consecuentes corresponden a tipos (registros) de representaciones diferentes (p. e., pasaje de lenguaje natural a simbólico). Del mismo modo, en cada paso de un tratamiento el criterio de la correspondencia semiótica puede ser conflictivo para el estudiante de matemáticas (Rojas, 2015).

Cada RRS usado para representar y operar con un objeto matemático proporciona un significado específico para dicho objeto. La comprensión del objeto en su integridad supone o requiere la articulación de los diferentes significados parciales (o sentidos), lo cual no se logra de manera espontánea. El uso de los lenguajes natural, numérico (decimal, fraccionario), algebraico, diagramas, figuras geométricas, gráficos cartesianos, tablas, son RRS diferentes y cada uno plantea cuestiones específicas de aprendizaje. El conocimiento de las reglas de correspondencia entre dos registros diferentes no es suficiente para que puedan ser movilizados y utilizados de manera pertinente.

7. A MODO DE CONCLUSIÓN

Como resultado de los análisis cognitivos hechos con la TRRS se llega a conclusiones del tipo, “hay deficiencias en el conocimiento del sujeto puesto que no realiza la conversión –pasaje o tratamiento–”. Se detectan las contradicciones en la actividad cognitiva del sujeto y se determina si la tarea se resolvió o no con éxito. Con las herramientas del EOS es posible proporcionar una explicación, desde el punto de vista epistémico, sobre cuáles son las carencias del conocimiento del sujeto a propósito de un problema determinado, al identificar y describir de manera pormenorizada los objetos matemáticos y procesos involucrados en las prácticas matemáticas operativas, discursivas y normativas.

La importancia crucial que se da a la conversión de representaciones (tanto en la enseñanza como en el aprendizaje) desde el punto de vista cognitivo es consecuencia de entender la "comprensión" básicamente en términos de procesos mentales y de asumir un postulado empirista sobre las abstracciones matemáticas. En el EOS se reconoce el papel importante que juegan las diferentes representaciones ostensivas y las traducciones entre ellas en la comprensión matemática (Font y Peraire 2001), pero se adopta una posición antropológica - pragmatista sobre esta cuestión (Font, Godino, y Contreras, 2008). Para el EOS, la comprensión alcanzada por un sujeto en un momento dado difícilmente será total o nula, sino que será parcial y progresiva. Se considera que un alumno ha comprendido un determinado contenido cuando lo usa de manera competente en diversas prácticas. Se entiende pues, la comprensión, básicamente, como una capacidad que tiene el alumno y no tanto como un proceso mental que se produce en su mente cuando articula representaciones. La capacidad se traduce en prácticas que son evaluables públicamente[2], mientras que el proceso mental es una experiencia privada de la persona.

Desde un punto de vista ontosemiótico, el problema no es si hay que introducir una sola representación de un objeto o más de una, ni qué traducciones o relaciones entre representaciones hay que tener en cuenta. El problema está realmente en determinar si las representaciones introducidas facilitan, o no, la realización de las prácticas que interesan que formen parte del significado global del alumno, en saber si aumentan o disminuyen la complejidad semiótica y también en saber si hacen emerger o no conflictos semióticos innecesarios.

Así, por ejemplo, en el análisis de la tarea se ha observado que los RRS utilizados por los estudiantes no han generado las condiciones para hacer emerger la necesidad de una demostración formal de la fórmula de la suma de los n primeros números impares. La demostración basada en la RRF (Figura 6) supone una estrategia docente para mejorar la *idoneidad didáctica* (Godino et al., 2006) ya que: a) supone un control mayor sobre la validez de la inducción empírica (*idoneidad epistémica*), b) se adecúa al significado personal adquirido por el estudiante (*idoneidad cognitiva*), c) parte de las

[2] Desde el punto de vista del diseño, se pueden definir variables operativas y sus aspectos asociados (indicadores y escalas, instrumentos y procedimientos de medición, así como las formas de expresión final para el análisis).

interacciones previas docente- estudiante y de la resolución de conflictos aparecidos (*idoneidad interaccional*) y, finalmente, d) contextualiza la propiedad de la suma de los *n* primeros números impares dentro de un técnica general de demostración (*idoneidad ecológica*).

Reconocimiento

Trabajo realizado en el marco de los proyectos de investigación EDU2012-31869 y EDU2013- 41141-P, Ministerio de Economía y Competitividad (MINECO).

REFERENCIAS

Bikner-Ahsbahs, A. y Prediger, S. (Eds.). (2014). *Networking of theories as a research practice in Mathematics Education*, Advances in Mathematics Education. Dordrecht, The Netherlands: Springer.

Dickson, L., Brown, M. y Gibson, O. (1991). *El aprendizaje de las matemáticas*. Barcelona, España: Labor.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée*: *registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne, Switzerland: Peter Lang.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*(1-2), 103-131.

Eco, U. (1976). *Tratado de semiótica general*. Barcelona: Lumen.

Font, V., Godino, J. D. y Contreras, A. (2008). From representation to onto-semiotic configurations in analysing mathematics teaching and learning processes. En, L. Radford, G. Schubring y F. Seeger (Eds.), *Semiotics in mathematics education: epistemology, history, classroom, and culture* (pp. 157–173). Rotterdam: Sense Publishers.

Font, V., Godino, J. D. y Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics*, *82,* 97-124.

Font, V. y Peraire, R. (2001). Objetos, prácticas y ostensivos asociados. El caso de la cisoide. *Educación Matemática*, *13*(2), 55-67.

Fontes, S., García, C., Quintanilla, L., Rodríguez, R., Rubio y P. Sarriá, E. (2010). *Fundamentos de investigación en psicología*. Madrid: UNED.

Godino, J. D. (2012). Origen y aportaciones de la perspectiva ontosemiótica de investigación en Didáctica de la Matemática. En A. Estepa, A. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 49 - 68). Jaén: SEIEM.

Godino, J.D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM-The International Journal on Mathematics*

Education, *39*(1), 127-135.

Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2006). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de matemáticas. *Paradigma*, *27*(2), 221-252.

Godino, J. D. y Font, V. (2010). The theory of representations as viewed from the onto-semiotic approach to mathematics education. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, *9*(1), 189-210.

Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. y Lurduy, O. (2011). Why is the learning of elementary arithmetic concepts difficult? Semiotic tools for understanding the nature of mathematical objects. *Educational Studies in Mathematics*, *77*(2), 247-265.

Hjelmslev, L. (1943). *Prolegomena to a theory of language*. Madison, WI: University of Wisconsin Press.

Montiel, M., Wilhelmi, M. R., Vidakovic, D. y Elstak, I. (2009). Using the onto-semiotic approach to identify and analyze mathematical meaning when transiting between different coordinate systems in a multivariate context. *Educational Studies in Mathematics, 72*, 139-160.

Ortega, T. y Pecharomán, C. (2015). Aprendizaje de conceptos geométricos a través de visualizaciones. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 7*, 95-117.

Peirce, C. S. (1978). *The collected papers of Charles Sanders Peirce*. Cambridge, MA: The Belknap Press of Harvard University.

Pino-Fan, L., Guzmán, I., Duval, R. y Font, V. (2015). The theory of registers of semiotic representation and the onto-semiotic approach to mathematical cognition and instruction: linking looks for the study of mathematical understanding. En Beswick, K., Muir, T. y Wells, J. (Eds.), *Proceedings of the 39th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 33-40). Hobart, Australia: PME Group.

Prediger, S., Bikner-Ahsbahs, A. y Arzarello, F. (2008). Networking strategies and methods for connection theoretical approaches: first steps towards a conceptual framework. *ZDM-The International Journal on Mathematics Education*, *40*(2), 165-178.

Rojas, P. (2015). Objetos matemáticos, representaciones semióticas y sentidos. *Enseñanza de las Ciencias*, *33*(1), 151-165.

CAPÍTULO IV

Variables visuales y conversión entre registros de representación y su extensión a la visualización matemática en la resolución de problemas con tecnología[1][2]

Fernando Hitt [I]
Matias Camacho-Machin [II]
Ramón Depool [III]

[I] UQAM, Canadá
[II] ULL, España
[III] Unexpo, Venezuela

Resumen

En este capítulo se analiza una de las nociones más importantes del constructivismo, la noción de esquema y su relación con los procesos de conversión entre representaciones en el sentido de Duval (1988, 1993, 1995). La experimentación que presentaremos se centra en un aspecto particular de cierto tipo de procesos de conversión relacionados con la noción de variable visual (Duval, 1988). Nuestro interés consiste en profundizar el papel que juega esta noción en la resolución de problemas en general y, sobre todo, en la resolución de problemas utilizando tecnología. Puesto que en los procesos de modelización matemática la literatura muestra, como lo veremos más adelante, que algunos resolutores llegan a producir representaciones no institucionales, que por lo tanto no son parte de un registro en el sentido de Duval (1993), ellas también serán consideradas en el análisis que se realiza en este capítulo, como parte esencial en la construcción de conocimiento.

1. De Piaget a Duval en la línea constructivista

La influencia de Piaget a mediados del pasado siglo empezaba a tener una gran presencia entre psicólogos y matemáticos interesados en los procesos de aprendizaje

---

[1] Queremos dedicar este trabajo al Dr. Martín Manuel Socas Robayna, jubilado recientemente, cuyas ideas teóricas han sido de una gran inspiración para la conformación de este capítulo.

[2] Los autores agradecen el soporte recibido durante el desarrollo de esta investigación por el grupo TEMA y el Proyecto del Plan Nacional del gobierno español y el MCIN/AEI /10.13039/501100011033 /FEDER, UE y FSE+, con referencia PID2022-13900NB.100.

de las matemáticas. De hecho, Piaget era invitado a los congresos de la CIEAEM[3] en los que confluían, desde una perspectiva interdisciplinar, diferentes investigadores, entre los que se incluían didactas de las matemáticas.

Una noción clave de Piaget que fue retomada por psicólogos y matemáticos interesados en el aprendizaje de las matemáticas, es la noción de "*Schème*" (esquema). Esta noción es central en el trabajo de Piaget y además es el constructo que rompe con las ideas del conductismo. Para Piaget, un esquema es una estructura cognitiva que utilizan los humanos para organizar y comprender el mundo. Analizando las fuentes que propone la "Fundación Jean Piaget", se podría destacar que, desde ese momento, la Fundación inicia una discusión de lo que Piaget e Inhelder (1966) pensaban sobre la noción de esquema:

> "Un esquema es la estructura u organización de acciones de tal manera que se transfieren o generalizan cuando esta acción se repite en circunstancias similares o análogas." (*La psychologie de l'enfant*, p. 11).

Esta noción de esquema, que aparece en el pie de página (p. 11) como una información adicional, poco a poco llegó a constituirse la noción más poderosa del constructivismo, que incluso, tal y como señalan Vergnaud y Récopé (2000), es la noción que diferencia el constructivismo de las teorías socioculturales (p. 43).

Skemp (1962), psicólogo, matemático y educador, explica en una experimentación la noción de esquema y los procesos de asimilación y acomodación desde un punto de vista de la utilización simbólica en lugar de objetos concretos:

> La única teoría disponible hasta el momento que hace esto, ha sido propuesta por Piaget (1950). A ese conjunto de conocimientos lo llama "esquema". La incorporación de nuevos conocimientos a un esquema existente se llama "asimilación": y la ampliación de un esquema, que puede ser necesaria si no es adecuada para el propósito anterior en su forma existente, se llama "adaptación". Estos tres conceptos relacionados parecieran ofrecer una base para el tipo de teoría del aprendizaje que se necesita. (p. 133)

Skemp explica las nociones de Piaget ligadas al aprendizaje de las matemáticas e inicia con ejemplos de la vida real, por ejemplo, Skemp (1971), menciona que (Figura 1):

---

[3] CIEAEM es la sigla de The International Commission for the Study and Improvement of Mathematics teaching.

> En un nivel inferior clasificamos cada vez que reconocemos un objeto como uno que hemos visto antes... A partir de estos hechos abstraemos ciertas propiedades invariantes, y estas propiedades persisten en la memoria por más tiempo que la memoria de cualquier presentación particular del objeto. (p. 10)

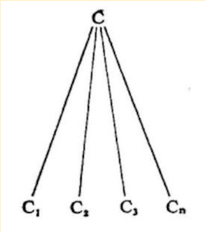


Figura 1. c_1, c_2, … representan sucesivas experiencias pasadas sobre el mismo objeto, digamos una silla (Skemp, 1971)

Como podemos apreciar, la construcción de esquemas descritos ya sea por Piaget en psicología en general o por Skemp enfocado en el aprendizaje de las matemáticas, surgen a partir de ejemplos de la vida real. De hecho, para Piaget, la construcción cognitiva inicial es la que se construye vía una abstracción empírica y, en otro nivel más profundo, se puede realizar una abstracción reflexiva.

Posteriormente, Duval (1988) imprime un acercamiento particular a estas nociones en el campo de investigación de la didáctica de las matemáticas. Duval utiliza por primera vez la noción de registro desde una perspectiva muy particular, la cual está ligada a los conflictos cognitivos que se presentan en los alumnos en los procesos de conversión entre representaciones. Cinco años después, como veremos más adelante, proporciona una definición (Duval, 1993). Sin embargo, si bien en los 80s la noción de representación y sistema matemático de signos ya eran utilizados por algunos autores en didáctica de las matemáticas (e.g., Douady, 1984; Kaput, 1987; Janvier, 1987), Duval proporciona un especial cuidado al papel que juegan las representaciones tanto en la comunicación como en el aprendizaje. Duval (1993) señala que:

> La primera, la más trivial, consiste en decir que las representaciones semióticas cumplen la función de comunicación, *olvidando que igualmente cumplen las funciones tan primordiales de tratamiento de la información y de objetivación* o toma de consciencia.

> La segunda, más sutil, consiste en ver en las representaciones semióticas un soporte para las representaciones mentales y en estimar que se pasa espontáneamente de la forma que representa al contenido representado. (p. 38)

En su estudio de 1988, Duval proporciona una especial atención a las representaciones y a las dificultades de los estudiantes en el paso de una representación a otra, por ejemplo, de una representación algebraica, digamos $y = 2x$, $y = x + 2$, a su representación gráfica. Duval muestra que, de una población de 105 alumnos, solamente 26 logran reconocer la representación gráfica de $y = x + 2$, y 39 la representación gráfica de $y = 2x$.

En esa investigación, Duval señala que, desde un punto de vista cognitivo, es más difícil pasar de una representación gráfica a su representación algebraica. Y a partir de la reflexión de este obstáculo cognitivo, Duval concibe la noción de variable visual y su relación con una unidad simbólica del registro algebraico, primordial en el paso de una representación gráfica a su representación en forma algebraica.

Duval (1995), en su acercamiento teórico, nos señala que toda representación es parcial con respecto al objeto matemático que representa, por ello, son imprescindibles los procesos de conversión entre representaciones. En esta línea de pensamiento, Duval define en 1993 la noción de registro que ya la había utilizado en forma intuitiva, sin definirla, en su trabajo de 1988. Así, resumiendo sus ideas podemos designar un registro como *un sistema formal de símbolos, con operaciones bien definidas que se utilizan con sus elementos, enfatizando tres actividades cognitivas fundamentales ligadas a la semiosis: 1. La formación de una representación identificable en un registro dado; 2. El tratamiento de una representación como transformación dentro del registro mismo; 3. La conversión de una representación de un registro a otro registro* (Duval, 1993).

Debemos señalar que esta noción de registro no necesariamente comprende la totalidad de un sistema de signos como en el trabajo de Douady (1986). La noción de registro que propone Duval, considera que un registro puede estar formado por una parte de un sistema formal de signos que tiene su propia manera de operar entre sus elementos. Duval ejemplifica esta noción discutiendo diferentes registros que son parte del sistema formal de signos que resulta ser la aritmética. Conociendo cierto tipo de problemas de aprendizaje ligados a la conversión entre representaciones en aritmética, Duval proporciona un ejemplo que es el de considerar números entre cero y uno con dos cifras decimales. Así, un registro será considerado por notación en su forma decimal, por ejemplo 0.25; otro registro, se tendrá con la notación de ese número de la forma $25*10^{-2}$ (utilizando notación llamada científica); otro registro con la escritura de ¼ (utilizando notación de fracción). Cada registro tiene sus propias leyes para realizar un tratamiento. Por ejemplo, para sumar o multiplicar por sí mismo los elementos de cada registro antes citados, el algoritmo es diferente. Desde este punto de vista, Duval proporciona elementos teóricos para realizar un análisis más profundo de los obstáculos cognitivos de los alumnos, en los procesos de conversión entre los registros antes mencionados.

Como se indicó con anterioridad, en el marco teórico de Duval, el proceso de conversión entre representaciones de diferentes registros es fundamental en la construcción del objeto matemático o concepto que se espera que se desarrolle en el alumno.

Precisamente, la distinción de registro es sumamente importante en el trabajo de Duval, ya que emerge del análisis de problemas cognitivos de los alumnos en la conversión de una representación a otra. Así, la conversión entre representaciones es el punto clave en su marco teórico. De hecho, como antes lo habíamos mencionado, Duval señala que una representación de un objeto matemático es parcial con respecto a lo que representa. Por ello, la conversión entre representaciones es fundamental en el aprendizaje de las matemáticas.

Las actividades de conversión entre representaciones de diferentes registros será un trabajo ligado a la semiosis, y la aprehensión conceptual, esto es, la noesis; y como consecuencia, Duval afirma algo muy importante: no hay noesis sin semiosis.

En la Figura 2, se presenta una interpretación del esquema proporcionado por Duval (1993) sobre las nociones de tratamiento y conversión (p. 47). Se muestran ahí aspectos sobre las variables visuales y su relación con unidades significativas, procesos de conversión entre representaciones y diferentes registros de representación, todo ello ligado al concepto de función.

El esquema utilizado por Duval o el representado en la Figura 2, muestra un proceso en términos de que, si realizamos las actividades cognitivas fundamentales de reconocimiento, tratamiento y conversión entre representaciones de un objeto matemático, podemos “tener posibilidades” de construir un concepto.

Como lo hemos señalado, son los procesos de conversión entre representaciones la parte esencial en el marco teórico de Duval en la construcción de conceptos y de allí las nociones de variable visual y unidades significativas de diferentes registros. Este acercamiento teórico de los registros de representación profundiza las nociones presentadas por Skemp (1971) en la Figura 1.

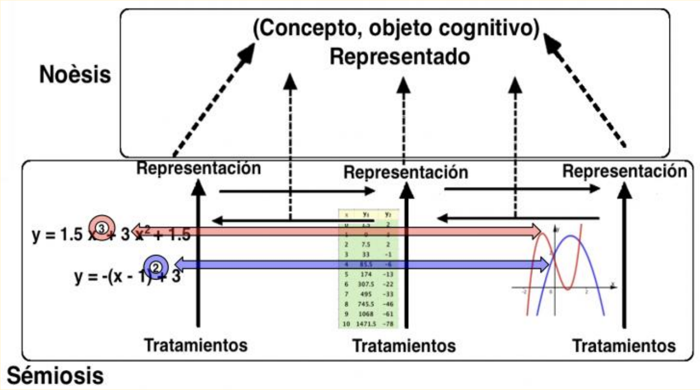


Figura 2. Interpretación de la figura de Duval (1993, p. 47), considerando la noción de variable visual sobre la concavidad y cambio de concavidad, se ligan estas variables visuales a las unidades significativas correspondientes a las funciones polinomiales de 2º grado y 3er grado

Un hecho importante que se debe señalar es que la *semiosis* tiene que ver con la noción de *reflexión empírica* y la *noésis* con la de *abstracción reflexiva*. De este modo, Duval ha profundizado en las nociones desarrolladas por Piaget, bajo una perspectiva ligada directamente al aprendizaje de las matemáticas y poniendo la noción de reconocimiento, tratamiento y conversión entre representaciones como los elementos más importantes en la construcción del conocimiento matemático.

2. Expandiendo la noción de esquema en el contexto del marco teórico de los registros de representación

Los estudios de Hitt, Guzmán & Paéz (2001) y Socas (2007) se centran en la construcción de la noción de esquema en el sentido Piagetiano, pero inmersos en el marco teórico de Duval. Ellos, conservando las nociones de reconocimiento, tratamiento y conversión utilizan una notación especial. Consideremos inicialmente el siguiente conjunto de representaciones que las designaremos como V = Verbal, A = Algebraico, G = Gráfico, F = Figural, de este modo, obtenemos el conjunto de representaciones que las utilizaremos más abajo como subíndices {V, A, G, F}. A continuación, se presenta la nomenclatura para designar las tres actividades cognitivas fundamentales ligadas a los registros de representación:

- Reconocimiento de elementos de un registro: R_V, R_A, R_G, R_F, etc.
- Transformaciones internas (o tratamientos) a un registro: $T_{V\uparrow}$, $T_{A\uparrow}$, $T_{G\uparrow}$, etc.
- Conversiones (transformaciones externas) de una representación de un registro a otro registro: $C_{V\rightarrow A}$, $C_{A\rightarrow G}$, $C_{V\rightarrow A}$, etc.
- Coordinación de representaciones entre diferentes registros: $C_{V\leftrightarrow A}$, $C_{A\leftrightarrow G}$, $C_{V\leftrightarrow G}$, etc.

Como lo habíamos señalado antes, en los procesos de modelización matemática pueden emerger representaciones no institucionales que nos interesaría reconocerlas en los procesos de resolución de problemas.

- Producción de representaciones espontáneas en la resolución de un problema particular que no necesariamente es una representación institucional: PRE_V, PRE_A, PRE_G, PRE_F, …

Un elemento más se ha añadido al avanzar en nuestras investigaciones, que es la manipulación de objetos físicos, en un proceso de modelización matemática (ver sección 6). La notación que utilizaremos es TMR_{Mo} (Transformación que se realiza con la manipulación de objetos en el Mundo Real).

La idea principal de utilizar esta notación es que la construcción de un concepto se realiza por etapas, y es importante contar con la posibilidad de señalar, en un momento dado, lo que es capaz un alumno de realizar. Estas ideas llevaron a Hitt (1998) y Hitt, Guzmán & Páez (2001) a proponer un modelo de competencia dividido en cinco categorías, en resumen:

Categoría A. Estudiantes con ideas imprecisas sobre un concepto (mezcla incoherente de diferentes representaciones).

Categoría B. Estudiantes que reconocen los elementos de un sistema semiótico de representación en relación con un determinado objeto matemático o un concepto.

Categoría C. Estudiantes que realizan actividades de transformación de un sistema de representación dentro de un mismo registro.

Categoría D. Estudiantes que realizan satisfactoriamente actividades de conversión de representaciones de un sistema semiótico a otro.

Categoría E. Estudiantes que articulan varias representaciones, de un registro a otro y entre varios registros. Esto requiere que el estudiante sea capaz de realizar procesos de conversión entre los registros en los dos sentidos. (p. 175)

Este modelo ha sido utilizado para el estudio de las funciones trigonométricas (Presmeg, 2008). Camacho-Machín et al. (2014) adaptan el modelo de competencia de Duval, combinándolo con otros elementos que propone Socas (2007), y establecen un modelo de competencia cognitivo que distingue tres estadios de desarrollo cognitivo (semiótico, estructural y autónomo) para el concepto de Integral Definida, dividido cada uno en dos categorías.

Para completar este acercamiento constructivista, conviene mencionar el trabajo de Hiebert & Carpenter (1992), quien señala respecto a la comprensión que:

> Comenzamos definiendo la comprensión en términos de la forma en que se representa y estructura la información. Una idea, procedimiento o hecho matemático se comprende si forma parte de una red interna. Más específicamente las matemáticas se comprenden si su representación mental forma parte de una red de representaciones. El grado de comprensión está determinado por el número y la fuerza de las conexiones. Una idea, procedimiento o hecho matemático se comprende completamente si está vinculado a redes existentes con conexiones más fuertes o numerosas. (p. 67)

Es así que, siguiendo esta noción de comprensión de Hiebert y Carpenter, para Hitt (1998), Hitt, Guzmán & Páez (2001) y para Socas (2007), una concepción ligada a un concepto o un concepto en construcción resultan ser una red interna de representaciones estructuradas que satisfacen las tres propiedades cognitivas fundamentales de los registros de representación.

Bajo estas consideraciones teóricas, Hitt, Guzmán & Páez (2001), elaboraron dos cuestionarios (ver anexo) con la intención de determinar la construcción del concepto de función realizada por un grupo de alumnos preuniversitarios (edades de 16 a 17 años). Los cuestionarios se diseñaron siguiendo específicamente el marco teórico de Duval, con la intención de medir las tres actividades fundamentales ligadas a la coordinación de los registros de representación. En ese estudio, los investigadores proporcionaron una interpretación de los niveles en que se encuentran, mediante una red semántica, siguiendo las nociones de Duval, por un lado, y las de Hiebert & Carpenter, por el otro, construida por tres tipos de estudiantes (ver Figura 3), cuyos niveles, con respecto al concepto de función, se encuentran en el nivel bajo (A-B), nivel intermedio (C-D) y nivel alto (E).

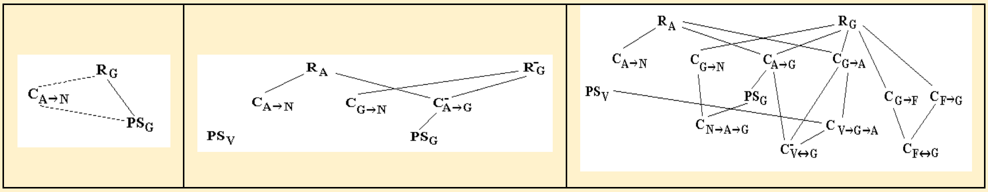


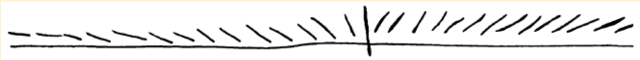
Figura 3. Interpretación de redes cognitivas parciales (esquemas) sobre el concepto de función

Si bien desde una perspectiva constructivista esta noción de redes internas de representaciones ligadas a la noción de esquema es importante. Como se mencionó en la sección precedente, existen representaciones espontáneas que son fundamentales a considerar y que no forman parte de un registro. En la siguiente sección nos ocuparemos de este tipo de representaciones (espontáneas) que no son necesariamente elementos de un registro.

3. Representaciones espontáneas (no necesariamente institucionales) y su papel en el aprendizaje de las matemáticas

Las investigaciones de finales del siglo XX empiezan a mostrar que las representaciones espontáneas no necesariamente institucionales, son parte esencial en el aprendizaje de las matemáticas y de la ciencia. Consideremos, por ejemplo, el estudio de diSessa et al. (1991), quienes, en una experimentación con alumnos de primaria, presentan la siguiente producción realizada por un equipo de alumnos al resolver una tarea (ver Figura 4).

Tarea: Un automovilista circula a toda velocidad por el desierto y tiene mucha sed. Cuando ve un cactus, se detiene en seco para beber de él. Luego vuelve a subir a su coche y se aleja lentamente.

Producción de Mitchel: 

Mitchel explicó que su idea clave era utilizar la inclinación del segmento para representar la velocidad: "Si la línea es horizontal, él va muy, muy rápido. Y cuanto más arriba se inclina la línea, más lento va. Y luego, cuando se pone como esto (vertical), está parado."

Figura 4. Producción de Mitchel en el estudio de diSessa et al. (1991, p. 131)

Se observa que la representación de Mitchel es original, y muestra una relación espontánea implícita entre tiempo y velocidad, utilizando una representación que no es institucional. Se puede concluir que este tipo de representación espontánea es fundamental en los procesos de modelización matemática.

Duval (2006) de hecho, reconoce este tipo de representaciones, llamándolas *"transitional auxiliary representations"* (p. 111) y las considera como una representación intermedia que facilita el paso a las representaciones institucionales como elementos de un registro. Se puede afirmar que este tipo de representaciones se han mostrado mucho más importantes de lo que se pensaba en esa época. Esta noción de *representación espontánea* que no es necesariamente institucional, empieza a jugar un importante papel en nuestras investigaciones, llevando a Hitt & Quiroz (2019) a proporcionar una definición de lo que sería una *representación funcional espontánea* (en sus siglas en francés RF-S):

> Una RF-S es una representación que surge en los individuos en la práctica, frente a una actividad no rutinaria: las acciones vinculadas a la interacción con la situación tienen características funcionales (mentales, orales, cinestésicas, esquemáticas) y están vinculadas a una representación espontánea (externa). La representación es funcional en el sentido de que el estudiante necesita darle sentido a la situación y además es espontánea, porque se expresa naturalmente en la acción cuando intentamos comprender y resolver la situación no rutinaria. (pág.79)

Este constructo ha permitido avanzar en nuestras investigaciones, dado que han proporcionado explicaciones más precisas sobre los procesos de modelización matemática (e.g. Cortés, Hitt & Saboya, 2016; Hitt, Saboya y Cortés, 2017; Hitt, Quiroz, Saboya y Lupiáñez, 2023).

En los siguientes apartados se muestra la importancia de las representaciones espontáneas ligadas a la modelización matemática en ambientes tecnológicos evidenciando acciones de futuros profesores en la resolución de problemas haciendo uso de GeoGebra.

4. Expandiendo la noción de esquema considerando la tecnología y la noción de representación espontánea

Janvier (1987), Kaput (1987) y Duval (1988) mostraron que en la década de los años 80 del pasado siglo se empezó a romper con una enseñanza centrada fundamentalmente en un acercamiento algebraico (mono-registro). La resolución de problemas empezó a emerger (e.g. Schoenfeld, 1985) como un campo de investigación robusto y las teorías sobre representaciones, desde un punto de vista constructivista, encajaban bien.

Al mismo tiempo, la tecnología avanzaba a grandes zancadas y en la década siguiente se produce el "boom" tecnológico. Así, se consuma el "matrimonio" de "la pareja perfecta" (teoría sobre representaciones y tecnología). Es decir, las teorías sobre representaciones, como la de Duval, proporcionaban una fuerza enorme a las propuestas que utilizaban tecnología, e.g., Schwarz, Dreyfus & Brukheimer (1990), con su propuesta de "*A model of the function concept in a three-fold representation*", o el libro "*CALCULUS Graphical, Numerical, Algebraic*", de Finney, Thomas, Demana & Waits (1994). En la década de los 90s se pensó ingenuamente que muchos problemas de aprendizaje serían resueltos utilizando tecnología.

Sin embargo, como en toda pareja perfecta, los problemas comenzaron a surgir. Guin & Trouche (1999) nos muestran los problemas cognitivos que poseen estudiantes preuniversitarios cuando utilizan calculadoras con capacidades de representación gráfica y simbólica[4]. La incorporación de la tecnología al aula de matemáticas no era y continúa no siendo, tan simple como se pensó en los 90s. Seguramente, los resultados obtenidos con estos planteamientos impulsaron las investigaciones encaminadas hacia la búsqueda de nuevos marcos teóricos.

Rabardel (1995), desde la perspectiva de la ergonomía cognitiva, establece una distinción entre artefacto e instrumento, presenta su trabajo sobre la noción de génesis instrumental y pone en relieve las nociones de instrumentación e instrumentalización, procesos que nos interesa discutir en esta sección. Un artefacto puede ser no solamente un objeto material sino también un objeto abstracto.

La génesis instrumental es un proceso conformado por dos elementos principales, un sujeto (con sus conocimientos) y un artefacto (con sus restricciones y sus potencialidades) que debe ser transformado en instrumento, lo cual se consigue dotando al artefacto de lo que se denominan esquemas de utilización que permiten al sujeto controlar las tareas y actividades realizadas con el artefacto. En el centro de la Figura 5, reproducida de (Maschietto & Trouche, 2010) se observan los procesos mencionados de instrumentación (dirigida hacia el sujeto que aprende) e instrumentalización (dirigida hacia el artefacto). En este mismo sentido, Maschietto & Trouche (2010), profundizan las nociones de Rabardel (1995) de

[4] Calculadoras simbólicas y gráficas como la TI-92 o la Voyage 2000.

"*instrumentación*" e "*instrumentalización*" en didáctica de las matemáticas (ver Figura 5).

Un sujeto construye un instrumento para realizar un tipo de tarea; Por lo tanto, este instrumento se compone tanto del artefacto (en realidad, una parte del artefacto utilizado para realizar estas tareas) como de esquemas de utilización del sujeto, que le permiten realizar tareas y controlar su actividad.

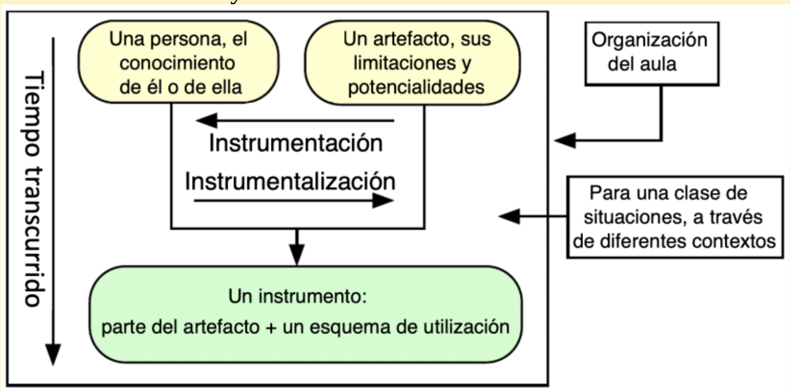


Figura 5. Traducción de la génesis instrumental de Maschietto & Trouche (2010, p.37)

En síntesis, siguiendo las ideas de Rabardel (1995), se producen cierto tipo de esquemas de utilización durante los procesos de instrumentación cuando el sujeto sigue las restricciones en el uso de un artefacto. El esquema en un individuo se transforma cuando él mismo utiliza el artefacto para sus propios fines, en un proceso de instrumentalización. La experiencia y práctica en el uso del artefacto produce un enriquecimiento del esquema, proporcionándole al individuo una mayor solidez en el uso del artefacto convirtiéndolo en instrumento (o herramienta) para el aprendizaje (Figura 5).

Un elemento importante que convendría señalar es, que Rabardel (1995) desarrolla su marco teórico bajo un acercamiento sociocultural ligado a la teoría de la acción de Leontiev (1978). Se puede observar que las teorías constructivistas y socioculturales empiezan a acercarse.

A continuación, se proporcionan algunos ejemplos en los que se pueden encontrar representaciones espontáneas que refuerzan nuestros planteamientos y que surgen a partir de la resolución de problemas en una experimentación desarrollada con estudiantes en formación para devenir profesores, los cuales cursaron un taller en el que se promueve el uso del Sistema de Geometría Dinámica GeoGebra para su formación como futuros profesores de Educación Secundaria (12-18 años)

5. Un estudio experimental en la formación de profesores de matemáticas y en un ambiente tecnológico

Realizamos una experimentación con estudiantes de un Máster realizado en una universidad española que capacita a los Graduados en Matemáticas para habilitarse como profesores de matemáticas de Educación Secundaria[5] (12 a 16 años) y Bachillerato (17 y 18 años).

Los aspectos metodológicos en esta experimentación se basan principalmente en el uso de tecnología (GeoGebra) para la resolución de problemas matemáticos, promoviendo principalmente un acercamiento que se inicia a partir de la visualización matemática y los procesos de modelización, como elementos básicos de control sobre los procesos y procedimientos algebraicos. Es decir, se trata de realizar un acercamiento que promueva las ideas intuitivas que surgen a partir de los procesos de visualización matemática, combinados con los procesos de anticipación, de predicción y de establecimiento de conjeturas, antes de implicarse en un proceso algebraico que promueva la resolución de los problemas propuestos. Estas ideas, proporcionan mayor fuerza al acercamiento que propone Freudenthal (1991) hacia lo que él denomina matemática horizontal tratando con ello de preparar al estudiante hacia una matemática vertical (ver Figura 6).

En la experimentación, se presentaron a los estudiantes diferentes tipos de problemas solicitándoles hallar valores máximos y/o mínimos, requiriéndose inicialmente realizar acercamientos geométricos y gráficos para su resolución que permitieran visualizar el problema o situación. Todo ello, con la intención de anticipar y conjeturar su solución antes de realizar un procedimiento algebraico. Una vez resuelto el problema, tendrían que presentar su trabajo de resolución a todo el grupo.

Como se verá a continuación, bajo este acercamiento, la noción de variable visual es muy importante y se conecta con las ideas iniciales de Duval (1988). Se utilizan esas ideas iniciales dado que, se considera un nuevo significado de variable visual al introducir la variable tecnológica en la resolución de esos problemas de

[5] Cuando se habla de Educación Secundaria, nos referimos a un alumnado de 12-16 años (Educación Secundaria Obligatoria que se conoce como ESO y de 16-18 años como el Bachillerato).

optimización. Las construcciones dinámicas de figuras geométricas imprimen una nueva variante a esta noción, tal y como se presentará en las secciones sucesivas.

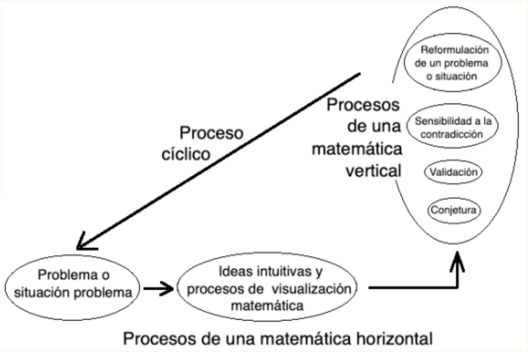


Figura 6. Adaptación del modelo de Freudenthal (1991) en un ambiente tecnológico

6. Análisis de resultados del estudio experimental en la formación de profesores

El análisis de los resultados se organiza en torno a una serie de episodios tal y como lo hacen Baumanns & Rott (2022) en su investigación. Conviene incorporar algunas notaciones particulares relacionadas con el uso de la tecnología, con el objetivo de realizar un acercamiento práctico a la sección siguiente en la que se analizarán los procesos de conversión entre representaciones cuando se incorpora, en la resolución de tareas, las herramientas tecnológicas. Ello debido a que el trabajo con el SGD GeoGebra no corresponde necesariamente a los registros mencionados antes en la sección 2 de este documento, sino que requieren una nueva notación. De esta manera, las acciones que vamos a tener en cuenta serán:

Reconocimiento de una representación algebraica: R_A.

Reconocimiento de una representación figural tecnológica: R_{FT}.

Reconocimiento de una representación gráfica tecnológica: R_{GT}.

Transformación en el mundo real a través de la manipulación de objetos físicos: TMR_{Mo}.

El conjunto de representaciones sería entonces: {V, A, G, F, FT, GT, Mo}. Consecuentemente, debemos también ampliar la notación a las producciones semióticas en pantalla, en la resolución de un problema particular haciendo uso de tecnología: PRE_{VT}, PRE_{AT}, PRE_{GT}, PRE_{FT}.

6.1 El caso Josefa.

A Josefa se le pide resolver el problema siguiente y una vez resuelto, reformular el problema para generalizarlo y realizar su presentación a todo el grupo.

Caso 4. Josefa	***Problema:*** *Los lados laterales y una de las bases de un trapecio isósceles son iguales a **m**. Determinar el otro lado de tal modo que el área sea máxima.*

Figura 7. Problema proporcionado a Josefa para su resolución

Josefa trabaja de manera individual y al finalizar se pide que explique a todo el grupo el proceso seguido en su resolución. Simplificamos, para poder interpretar la resolución hecha por Josefa, estableciendo diferentes episodios siguiendo la notación establecida en el apartado 2 (Hitt, Guzmán & Páez, 2001 p. 172), y añadiendo la nomenclatura para las representaciones realizadas en la pantalla del ordenador como lo señalamos anteriormente. Se establecen así, siete episodios que se describen a continuación:

Episodio 1. Transformación del enunciado de partida a otro expresado con sus propias palabras. Es decir, en el registro verbal (R_V), realiza una transformación ($T_V\uparrow$).

Episodio 2. Conversión al registro figural (R_F), realiza un dibujo (en la pizarra) ligado al enunciado (Figura 8).

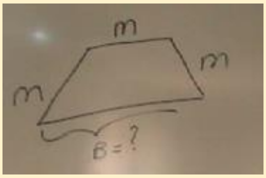


Figura 8. Producción de una representación figural para resolver el problema

Episodio 3. Construcción en GeoGebra la situación planteada. Utiliza exclusivamente una ventana para la construcción geométrica y la representación gráfica de la situación ($PRE_{FT} \Leftrightarrow PRE_{GT}$). Esta notación está ligada a la producción de representaciones figurales dinámicas (utilizando tecnología) y representaciones gráficas dinámicas, producto del arrastre de un punto clave en la construcción y la herramienta "lugar geométrico" (ver Figura 9).

Primero construye un “segmento arbitrario” [A,B], y otro segmento [C,D], con la misma medida que [A,B]. Traslada la medida d(E,F) construyendo una primera circunferencia y enseguida otra circunferencia con radio la medida de la superficie del trapecio. Así construye un punto O cuya abscisa es (E,F)) y cuya ordenada (área del trapecio). Activa la traza de ese punto, y visualmente encuentra el máximo, asociándolo al doble del valor d(A,B).

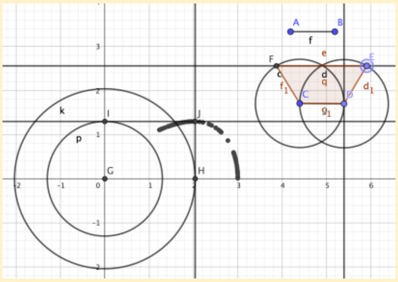


Figura 9. Producción de una representación figural dinámica y gráfica para resolver el problema utilizando GeoGebra

Episodio 4. Regreso al dibujo (en la pizarra) y prepara su figura para un proceso algebraico. Aquí, hay una mezcla de registros (figural y algebraico). El registro figural añadiendo elementos del registro algebraico.

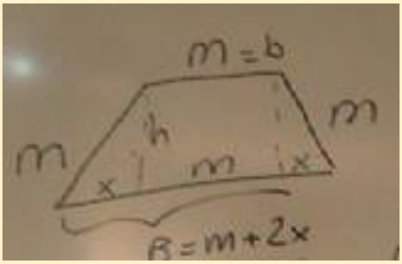


Figura 10. Retorno al registro figural y la estudiante añade elementos del registro algebraico

Episodio 5. Pasa al registro algebraico (R_A) y encuentra el valor de la base en términos de la variable *x*. *B* = *m*+2*x*. Posteriormente, calcula el valor de *h* utilizando el Teorema de Pitágoras; $h = \sqrt{m^2 - x^2}$, y obtiene el área total del trapecio en términos del parámetro *m* y la variable *x*.

$$A_T = \frac{(m + 2x + m)\sqrt{m^2 - x^2}}{2} = (m + x)\sqrt{m^2 - x^2}$$

Sigue el "procedimiento" aprendido sobre el cálculo de máximos y mínimos (Teorema de la condición suficiente), obviándose la necesidad de que la función sea derivable en su dominio.

a) Calcula la derivada de la función A_T,
b) Resuelve la ecuación $A'_T = 0$, encuentra los valores $x = -m,\ x = \frac{m}{2}$. Rechaza el valor negativo aduciendo que no sirve según el contexto.
c) Calcula la segunda derivada A''_T, y sustituye el valor $x = \frac{m}{2}$, obteniendo un resultado negativo.
d) El resultado en c) le permite llegar a que si (el lado distinto) $B = 2m$ el trapecio tiene un área máxima.

Episodio 6. Explica que el resultado obtenido algebraicamente, coincide con el resultado obtenido geométricamente con GeoGebra.

En realidad, la coincidencia es exclusivamente en el resultado final. La estudiante tomó un tipo de variable para la representación figural tecnológica (PRE_{FT}) diferente al de la representación gráfica de la función (PRE_{GT}) (ver análisis en la sección 7.1). Si la estudiante hubiera utilizado la traza y representado la función que obtuvo, habría un desplazamiento (ver Figura 11). La estudiante no hace explícita la coordinación entre las dos representaciones con GeoGebra. Ello es algo muy importante (conciliar o coordinar las dos representaciones). Sin embargo, la estudiante tiene confianza en su resultado algebraico y no realiza una comparación visual para confirmar la coordinación entre representaciones ($PRE_{FT} \longleftrightarrow PRE_{GT}$ digamos como la presentada en la Figura 11).

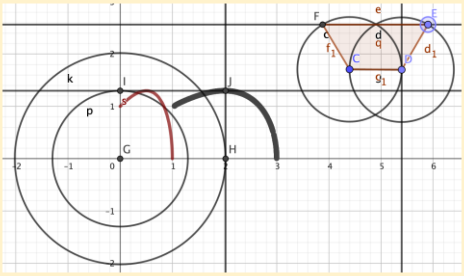


Figura 11. Interpretación de una representación conjunta del modelo figural y la representación gráfica ligado al modelo algebraico

Josefa finaliza con una reformulación del enunciado.

Episodio 7. Reformulación del enunciado en un contexto real, pero con un planteamiento no suficientemente claro, ni bien formulado ¿qué habría que maximizar?, no lo indica.

"Una empresa de construcción del norte de Tenerife está llevando a cabo la construcción de un residencial en Santa Úrsula. Se quieren fabricar chalets con tejados con forma de trapecios isósceles. Sabemos que una de las bases y dos de sus lados tienen que valer m. *¿Cuánto valdrá la otra base si se quiere maximizar dicho tejado?"*	

Figura 12. Reformulación del problema inicial

6.2 Análisis de los episodios de Josefa **según el modelo de Schoenfeld y Baumanns & Rott**

A continuación, organizamos los episodios de la sección 6.1 siguiendo el modelo de Schoenfeld y Baumanns & Rott.

La estudiante al reconocer que se trataba de un problema de máximos y mínimos le viene a la mente un algoritmo a desarrollar. Vemos que es en el uso de GeoGebra donde le toma más tiempo. Josefa hubiera podido utilizar ventanas diferentes con GeoGebra, pero decidió utilizar una sola ventana, representando la figura dinámica y la representación gráfica conjuntamente. Josefa llegó a visualizar la solución y pasó al desarrollo algebraico. Debemos decir aquí que Josefa ya sabía a dónde tenía que llegar. Josefa hubiera podido utilizar GeoGebra CAS para el algoritmo del cálculo de máximos y mínimos, sin embargo, pasó al cálculo en papel y lápiz. Si bien el episodio 6 es muy corto, este es fundamental desde el punto de vista del desarrollo de las matemáticas, ya que le proporcionó a Josefa la seguridad de que no había errores en su proceso algebraico. Si hubiera habido un error, es en esa comparación en donde ella se habría percatado de una posible contradicción. De hecho, como lo hemos señalado, no sabemos que reacción hubiera tenido Josefa si hubiera realizado la representación de la Figura 11, al percatarse que se trataba de dos funciones diferentes dado que la variable no era la misma.

Tabla 1. Organización de los episodios siguiendo las ideas de Schoenfeld y Baumanns & Rott.

	Episodios						
Representacions	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Reformulación del problema							
R_A, R_{FT}, R_{GT}						$C_{A\leftrightarrow FT\leftrightarrow GT}$	
R_F, R_A					$C_{F\leftrightarrow A}$		
R_{FT}, R_{GT}, R_F, R_A				$C_{FT\leftrightarrow GT\rightarrow F\leftrightarrow A}$			
R_F, R_{FT}, R_{GT}			$C_{F\rightarrow FT\leftrightarrow GT}$				
R_V, R_F		$C_{V\rightarrow F}$					
R_V	$T_V\uparrow$						
Tiempo	40s	30s	7m9s	1m52s	2m30s	20s	2m

Regresando al marco teórico de Duval (1988) en el que se explicita la noción de variable visual, es importante señalar que en la resolución de problemas cuando se incluye un acercamiento tecnológico, la noción de registro que se presenta es mucho más compleja. Analicemos para ello el episodio 3.

En primer lugar, debemos señalar que el proceso mental para pasar de una representación espontánea figural (ver Figura 8) a su correspondiente en GeoGebra no es trivial. Josefa en su representación figural intenta representar un trapecio isósceles con tres lados iguales (variable *m*). Al realizar un proceso de conversión a GeoGebra, la variable *m* se convierte en un segmento de medida arbitrario [A,B], no era necesaria la construcción de otro segmento de igual medida [C,D], Josefa hubiera podido realizar su construcción sobre [A,B]. Posiblemente era para enfatizar la variable independiente. La construcción dinámica del trapecio isósceles es fundamental para la representación gráfica utilizando el arrastre de un punto. Josefa hubiera podido construir directamente el punto *O = (distancia(E,F),área del trapecio)*, sin embargo, Josefa decide realizar una construcción geométrica utilizando la abscisa y la ordenada, cada una, ligada al radio de un círculo. Esto muestra que Josefa tiene preferencias sobre la construcción geométrica. Incluso, el hecho de no continuar con GeoGebra CAS, muestra que Josefa tiene más facilidades con la parte geométrica de GeoGebra, y que para ella es natural la transformación de una variable visual en el contexto figural tecnológico a una variable visual en el contexto gráfico tecnológico. Resumimos esta idea en la Figura 9. Es importante señalar que Josefa en el ambiente tecnológico utiliza la variable distancia(E,F) entre "*m*" y "3*m*" como variable independiente y el área del trapecio como variable dependiente. Ella observa que el máximo se alcanza para *distancia(E,F) = 2m* (lado del trapecio buscado). En cambio, en el proceso algebraico, su variable independiente es "*x*" entre "*0*" y "*m*" (ver Figura 11 y 13). Ello le permite concluir que la base buscada *B = 2m*.

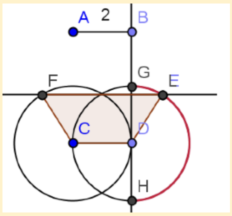
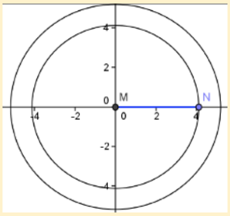
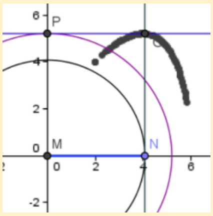
Variable visual en figura dinámica	Variable visual en representación gráfica	Variable visual en la representación gráfica
		

Figura 13. Complejidad de la noción de variable visual en un medio tecnológico

Al analizar los 7 episodios ligados al trabajo de Josefa, uno podría pensar que el paso tecnológico era *innecesario*, ya que parece que Josefa conoce perfectamente la condición suficiente de obtención de los puntos críticos de una función diferenciable. Se podría pensar en que Josefa pudiera pasar del episodio 2, al episodio 5 directamente, sin embargo, los episodios intermedios proporcionaron a Josefa mayor seguridad en sus procesos algebraicos. Le permitieron realizar una predicción y una anticipación de que el resultado (la base de su trapecio) debería ser $2m$.

6.3 El caso Alex

A Alex se le pide que resuelva una versión del bien conocido problema de "*optimizar la caja de volumen máximo*".

Caso 5. Alex	***Problema:*** *Una fábrica de cajas recibe láminas de cartulina de tamaño $a \times b$. Con una máquina especial puedes recortar cuadrados en las cuatro esquinas, y plegarla para hacer una caja abierta. Para ello, deben introducir el tamaño del lado del cuadrado que quieres que corte. ¿Qué valor deben introducir en la máquina para que las cajas que salgan tengan la mayor capacidad posible?*

Figura 14. Problema proporcionado a Alex para su resolución

Se establecen solamente cinco episodios en este análisis, dos menos que en el otro caso analizado:

Episodio 1. A partir del enunciado inicial, Alex verbaliza y transforma el enunciado ($T_{V\uparrow}$: Transformación en el registro verbal) enfatizando el cálculo del volumen máximo.

Alex: Si nos olvidamos de la utilización de la fábrica y de todo eso, una posible transcripción matemática sería. Desde un rectángulo de lados $a \times b$, calcula cómo debemos realizar cortes cuadrados idénticos en las cuatro esquinas, para que el prisma abierto resultante de plegar los cortes tenga volumen máximo.

Episodio 2. Alex cambia de registro y utiliza la tecnología con GeoGebra (R_{FT}) al mismo tiempo que explica utilizando dibujos en la pizarra (R_F) y manipulando una hoja de papel (manipulación de objetos MR_{Mo}, en el mundo real) (Figura 15). Es decir que, en este episodio, en forma simultánea, Alex realiza procesos de conversión entre diferentes registros $C_{FT\leftrightarrow F\leftrightarrow Mo}$.

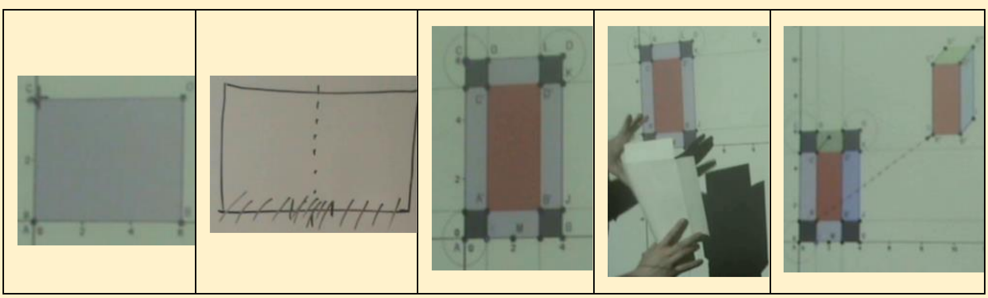


Figura 15. Procesos de conversión entre diferentes registros en forma simultánea ($C_{FT\leftrightarrow F\leftrightarrow Mo}$)

Episodio 3. Cambio de registro al algebraico (R_A) y trabajo simultáneo con la representación gráfica (ver Figura 15). Es importante señalar que la representación en GeoGebra está ligada al deslizamiento de la figura y uso de la traza para representar el volumen máximo. Cambio de registro al figural-algebraico para mostrar relaciones, y así llegar a la representación algebraica de una función. Una vez que Alex obtiene la función, realiza la representación respectiva en GeoGebra (Figura 16).

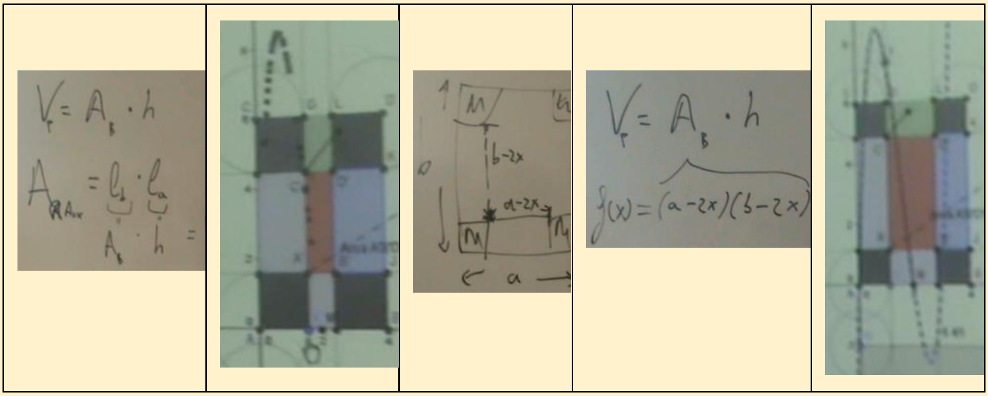


Figura 16. Procesos utilizando diferentes registros en forma simultánea $(C_{A\leftrightarrow FT\leftrightarrow F\leftrightarrow A\leftrightarrow GT})$

Episodio 4. Este episodio es muy importante, el estudiante muestra elementos de control sobre la matemática que realiza. Precisamente, Alex explica:

Alex: Antes de resolver nuestra función analíticamente, … lo que yo hice fue comprobar que efectivamente nuestro lugar geométrico, dado que aquí podemos representar funciones, ver si nuestro lugar geométrico se parece a esa función que tenemos aquí … vemos que, en la parte de nuestro dominio de la x, recordemos que era entre el punto A y el punto M, nuestras dos funciones efectivamente coinciden, por tanto, parece que en principio nos ha salido bien…

Es en este episodio en el que Alex menciona que el lugar geométrico construido con GeoGebra coincide con la representación gráfica del polinomio, lo que le permite seguir avanzando ya que no percibe contradicción alguna (ver Figura 17).

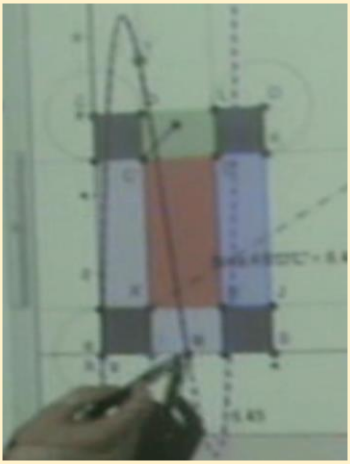


Figura 17. Comprobación visual de que no hay contradicciones comparando lugar geométrico con representación gráfica del polinomio de 3er grado

Episodio 5. Cambio de registro al algebraico (R_A). Alex utiliza la técnica algebraica (el Teorema de la condición suficiente) para calcular los valores que optimizan la función (polinomio de 3er grado) que ha obtenido al final del episodio 3: $f(x) = (a - 2x)(b - 2x)x$.

A continuación, se presenta una síntesis del proceso seguido en la Tabla 2, al igual que en el caso anterior de Josefa.

6.4 Análisis de los episodios de Alex según el modelo de Schoenfeld y Baumanns & Rott

La tabla siguiente representa el avance temporal seguido por Alex.

En esta tabla, ligada a los procesos realizados por Alex, es notorio que Alex dedicó mucho más tiempo a los procesos de conversión entre diferentes registros, incluyendo la manipulación de objetos físicos. También Alex proporcionó mucha mayor importancia a la comparación entre un resultado geométrico con GeoGebra y un resultado algebraico que en el caso de Josefa.

TABLA 2. Organización de los episodios del caso Alex.

	Episodios				
Representaciones	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
R_{FT}, R_A					$C_{FT\leftrightarrow A}$
R_{FT}, R_{GT}				$C_{FT\leftrightarrow GT}$	
R_A, R_{FT}, R_F, R_{GT}			$C_{A\leftrightarrow FT\leftrightarrow F\leftrightarrow A\leftrightarrow GT}$		
R_V, R_{FT}, R_F, R_{Mo}		$C_{V\rightarrow FT\leftrightarrow F\leftrightarrow Mo}$			
R_V	$T_V\uparrow$				
Tiempo	1m12s	15m53s	8m50s	5m20s	4m46s

7 Implicaciones de la experimentación

A partir de los análisis realizados en el apartado anterior, conviene retomar el acercamiento hacia la matemática horizontal y la vertical de la Figura 6, para lo que se debe proporcionar una mayor precisión de lo que consideramos como matemática horizontal. De acuerdo con la Tabla 1, los episodios de 1 a 4 forman parte de procesos que pueden ser considerados como propios de una matemática horizontal, y los episodios 5 a 7 se pueden ser enmarcados en procesos característicos de una matemática vertical (ver Figura 19). De la Tabla 2 (el caso de Alex), se podría considerar que los episodios 1 y 2 forman parte de procesos cuya característica es relativa a una matemática horizontal y los episodios 3, 4 y 5, relativos a una matemática vertical.

El proceso de visualización inicial con la representación espontánea figural, ha permitido a Josefa desarrollar ese proceso en GeoGebra y lo que a su vez ha promovido la predicción y anticipación del resultado. El proceso de visualización inicial se complementó con la producción dinámica de la figura y la representación dinámica de la gráfica, todo ello, desde nuestro punto de vista, dentro de una matemática horizontal (episodios 1 a 4). Apoyándose en los resultados obtenidos en estos primeros episodios, Josefa a continuado hacia una matemática vertical.

Con respecto a la reformulación del problema, Josefa no parece añadirle gran cosa al enunciado al pasar de un contexto matemático a un contexto de la vida real. Se podría decir que Josefa no analiza aspectos que puedan promover una reflexión más profunda cambiando el enunciado.

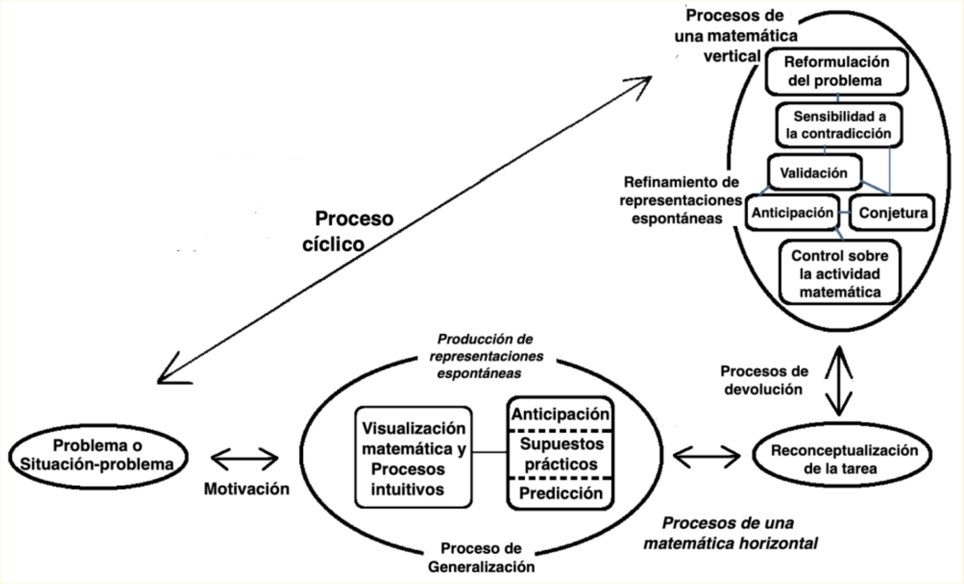


Figura 19. Adaptación sobre la organización de una matemática horizontal y una matemática vertical considerando el modelo inicial de Freudenthal (1991)

En el caso de Alex, el inicio es diferente. Alex presenta una serie de procesos de conversión entre registros fuera y dentro del ambiente tecnológico, mostrando una articulación entre los diferentes registros. Un elemento adicional en su producción es precisamente el momento en el que hace explícita la correspondencia entre el registro figural tecnológico con la representación de la gráfica de la función que construyó. Este episodio es una evidencia de que Alex tiene un control sobre la matemática que realiza (episodio 4).

En los dos casos, existe una tendencia en contar con una articulación entre los procesos tecnológicos de visualización con los resultados desde un punto de vista algebraico. En el caso de Josefa, ella se centra más en el resultado final para determinar el máximo, y no se percata que no hay una coincidencia exacta entre su lugar geométrico utilizando su figura dinámica y la representación gráfica de la función. Ello, como ya lo señalamos antes, debido a que no utilizó la misma variable, y Josefa simplemente dice que hay una coincidencia entre los resultados en la construcción geométrica y la algebraica, sin verificarlo visualmente. En el caso de Alex, él le dedica mucho más tiempo a la comprobación visual correspondiente a la coordinación entre los diferentes registros (5m20s). Ello le proporciona mayor seguridad en los procesos para controlar la matemática que realiza y no caer en una contradicción.

En los dos casos, tanto Josefa como Alex, no utilizan el entorno de cálculo simbólico (CAS) de GeoGebra. Sus técnicas clásicas de lápiz y papel dominan la manera algorítmica de obtener los máximos y/o mínimos de funciones por el Teorema clásico para funciones diferenciables.

En esta sección, para concluir, se puede afirmar que hemos explicitado nuestras ideas sobre la visualización matemática, así como la capacidad de los estudiantes para visualizar variables y actuar acorde a esa visualización en un medio tecnológico. Los procesos de conversión para predecir, anticipar y conjeturar un resultado son propios de una matemática horizontal, que facilitan el empleo del registro algebraico mediante procesos específicos de una matemática vertical.

7. Conclusiones

En este capítulo, presentamos un análisis de la noción de variable visual y su importancia para promover procesos de visualización matemática para la predicción, anticipación y conjetura dentro de lo que podría constituir una matemática horizontal según el modelo de Freudenthal (1991) y como consecuencia, mover al alumno hacia una matemática vertical. De hecho, un episodio crucial dentro de esta matemática vertical, cuando se está en un medio tecnológico como GeoGebra, es el elemento de control mostrado por Alex al realizar una comparación visual entre su representación gráfica dinámica con la figura y la representación algebraica obtenida en el proceso de modelización.

La noción de esquema de Piaget y de Skemp ha sido contextualizada en las acciones de reconocimiento, transformación y conversión entre representaciones, de acuerdo con el acercamiento teórico de Duval. Al añadir la variable tecnológica, se presentan nuevas maneras de representar, ya que la tecnología permite un acercamiento dinámico de figuras y un acercamiento dinámico de representación gráfica sobre los problemas a tratar. Hemos extendido la noción de variable visual en un medio tecnológico, respetando la noción de comprensión proporcionada por Hiebert & Carpenter (1992), formando así, una red conceptual. Estas ideas necesitarían de nuevos estudios para precisar con más detalle los procesos de la construcción de una red conceptual como lo hemos tratado en este capítulo. Podría ser importante relacionar estas ideas utilizando el marco teórico de Rabardel sobre los procesos de génesis instrumental.

Los ejemplos que presentamos en una primera parte muestran, posterior a la resolución de un cuestionario, qué tipo de red conceptual tiene un alumno con respecto a una población. Si bien es una información importante cuando se quiere conocer los conocimientos de los alumnos con respecto a un concepto dado en el aula, en nuestro caso el de función, el acercamiento es estático como si fuera una fotografía. En cambio, en el 2o estudio, al analizar los procesos de los alumnos partiendo del análisis en episodios, es posible crear tableros que muestran globalmente el camino seguido por el resolutor, proporcionando una visión global de su actuación.

Otro factor importante por considerar es la idea de promover en los estudiantes una matemática horizontal ligada a los procesos de visualización matemática, predicción y anticipación antes de lanzarse hacia una matemática vertical. En este estudio en la formación de profesores, la tecnología jugó un papel crucial en la promoción de esta matemática horizontal (Freudenthal, 1991). Precisamente, siguiendo la metodología de partir el análisis de la producción de los estudiantes en episodios, según Baumanns & Rott, 2022 y Schoenfeld (1985), y partiendo de la noción fundamental de los procesos de conversión de Duval (1995), los episodios se determinaron según los cambios de registro. Ello permite apreciar con mayor claridad el proceso de resolución realizado por los estudiantes.

Sería conveniente realizar nuevas investigaciones no solo sobre la resolución de problemas o situaciones problema como se presentaron en este capítulo, sino también en la construcción de conceptos y ligarlos a la formulación de problemas.

Referencias

Baumanns, L. & Rott, B. (2022). The process of problem posing: development of a descriptive phase model of problem posing. *Educationa Studies in Mathematics*, 110, 251-269. *https://doi.org/10.1007/s10649-021-10136-y*

Camacho-Machín, M., Afonso, M. C., Depool, R. y M. M. Socas (2014) University students' understanding of tasks involving ways to approximate definite integrals. *Far East Journal of Mathematical Education.* Vol. 13 (2) 2014 pp. 91-115.

Cortés C., Hitt F. & Saboya M. (2016). Pensamiento aritmético-algebraico a través de un espacio de trabajo matemático en un ambiente de papel, lápiz y tecnología en la escuela secundaria. *Bolema Río Claro (SP),* 30(54), 240-264.

diSessa, A., Hammer, D., Sherin, B. & Kolpakowski, T. (1991). Inventing Graphing: Meta-Representational Expertise in Children. *Journal of Mathematical Behavior*, 10, 117-160.

Douady R. (1986) Jeux de cadres et Dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* Vol. 7, No. 2, 5-31.

Duval, R. (1988). Graphiques et Equations: L'articulation de deux registres. *Annales de Didactique et de Science Cognitives, 1*, 235-253. [Traducción en *Antología en Educación Matemática.* In R. Cambray, E. Sánchez y G. Zubieta (Eds.), (pp. 125-139). México : DME-Cinvestav, 1992.]

Duval R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Science Cognitives, 5,* 37-65. [Traducción en F. Hitt (Ed., 1998), *Investigaciones en Matemática Educativa II*, (pp. 173-201), México: Grupo Editorial Iberoamérica.]

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Neuchâtel: Peter Lang. [Traducción de Myriam B. Vega R. (2017)*, Semiosis y pensamiento humano* (2ª ed.). Programa Editorial de Universidad del Valle. Colombia]

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61: pp. 103-131.

Finney, R., Thomas, G., Demana, F. & Waits, B. (1994). *CALCULUS.* Graphical, Numerical, Algebraic. De. Addison-Wesley.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer.

Guin, D. & Trouche, L. (1999). The complex process of converting tools into mathematical instruments: The case of calculators. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 3*, 195-227.

Hiebert, J., et Carpenter, T. (1992). Learning and Teaching with Understanding. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* (pp. 65-97), MacMillan Publishing Company.

Hitt, F., Guzmán, J. & Paéz, R. (2001). Que signifie être compétent dans une théorie des représentations des concepts mathématiques. *Actes du Colloque Annuel du Groupe des Didacticiens des Mathématiques du Québec*. Montréal, Canada, pp. 173-187.

Hitt, F. et Quiroz, S. (2019). Formation et évolution des représentations fonctionnelles-spontanées à travers d'un apprentissage socioculturel. *Annales de didactique et de Sciences Cognitives*, vol. 24, 75-106.

Hitt, F., Saboya, M. and Cortés C. (2017a). Rupture or continuity: the arithmetico-algebraic thinking as an alternative in a modelling process in a paper and pencil and technology environment. *Educational Studies in Mathematics, 94*(1), 97-116. DOI 10.1007/s10649-016-9717-4

Hitt, F., Quiroz, S., Saboya, M. and Lupiáñez J-L. (2023). Une approche socioculturelle pour la construction d'habiletés de généralisation arithmético-algébriques dans les écoles québécoises et mexicaines. *Educación Matemática*, 35(3), 112-150.

Janvier, C. (Ed.). (1987). *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics*. London: Lawrence Erlbaum Associates.

Kaput, J. (1987). Representation Systems and Mathematics. In C. Janvier (Ed.), *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 19-26). Lawrence Erlbaum Associates.

Leontyev, A. (1978). *Activity, consciousness, and personality*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.

Presmeg, N. C. (2008). Trigonometric connections through a semiotic lens. In L. Radford, G. Schubring and F. Seeger (Eds.), *Semiotics in Mathematics Education* (pp. 103-119). Rotterdam: Sense Publisher.

Maschietto, M. & Trouxe, L. (2010). mathematics learning and tools from theoretical, historical and practical point of view: the productrice notion of mathematics labotatories. ZDM Mathematics Education 42, 33 – 47. https://doi.org/10.1007/s11858-009-0215-3

Piaget, J. et Inhelder, B. (1966). La psychologie de l'enfant. Paris : PUF.

Schoenfeld, A. (1985). Metacognitive and epistemological issues in mathematical understanding. In Edward A. Silver (Ed.), *Teaching and learning mathematical* *problem solving: Multiple research perspectives* (pp. 361-379). Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Schwarz, B., Dreyfus, T. & Brukheimer, M. (1990). A model of the function concept in a three-fold representation. *Computers Education*, *14*(3), 249-262.

Skemp, R. (1962). The Needneed for a Schematic Learning Theory, schematic learning theory. *The British Journal of Educational Psychology*, 32, P2 *Vol. XXXII*, 133–-142. http://dx.doi.org/10.1111/j.2044-8279.1962.tb01748.x, consulted marzo, 2023.

Skemp, R. (1971). *The Psychology of Learning Mathematics*. Penguin Books.

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies, approche cognitive des instruments Contemporains*. Armand Colin. HAL: hal-01017462, consulted 5 april 2016.

Socas, M. (2007). Dificultades y Errores en el Aprendizaje de las Matemáticas. Análisis desde el Enfoque Lógico Semiótico. En M. Camacho; P. Bolea; P. Flores (Eds). *Investigación en Educación Matemática, XI. Tenerife,* 19-52.

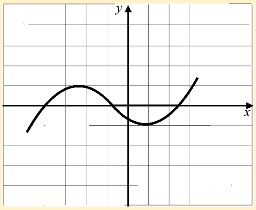
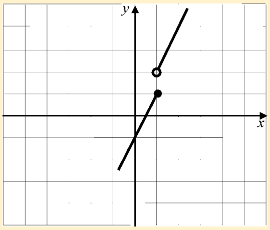
Vergnaud, G. y Récopé M. (2000). De Revault d'Allonnes à une théorie du schème aujourd'hui. *Psychologie Français*, No. 45(1), 35-50.

Anexos

Cuestionarios de Hitt, Guzmán & Páez (2001) de acuerdo con el marco teórico de Duval (1988).

Cuestionario A

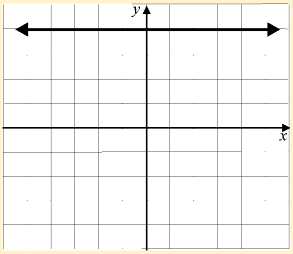
1. ¿Cuáles de las gráficas siguientes representan una función? Justifica en cada caso.

a) 	b) 
☐ Si ☐ No Justificación:	☐ Si ☐ No Justificación:

2. Las expresiones siguientes, ¿representan una función? Justifica en cada caso.

a) $y = 3 - 2x$	☐ Si ☐ No Justificación:
d) $f(x) = x^2 + 3x - 1$	☐ Si ☐ No Justificación:

3. Sea la función $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$, $f(x) = 4$ (ver figura).



a) Indica con una ✕ los números que pertenecen al dominio de la función

☐ 2	☐ π
☐ -7,423	☐ 2 + 3i
☐ $-\frac{7}{15}$	☐ $\frac{8}{7}$
☐ 0	☐ -2
☐ $\sqrt{5}$	☐ 4
Justifica tus respuestas:	

b) Indica con una ✕ los números que son parte del conjunto imagen de la función.

☐ $\frac{5}{3}$	☐ 0
☐ $-\frac{8}{4}$	☐ -36
☐ 5,303	☐ 4
☐ $\sqrt{2}$	☐ 1
☐ π	☐ -3 + 2i
Justifica tus respuestas :	

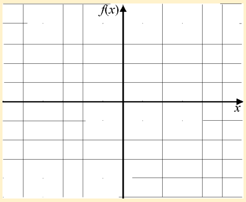
c) Identifica con una ✕ las parejas ordenadas que pertenecen a la representación gráfica de la función.

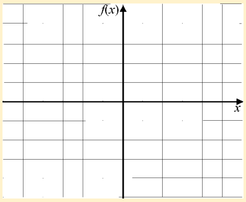
☐ $\left(\frac{1}{3},\ 4\right)$	☐ $(-4,\ 4)$
☐ (0, 0)	☐ $(4,\ \pi)$

☐ (-27, 4)	☐ $(\pi,\ 4)$
Justifica tus respuestas:	

4. Proporciona una definición de función de variable real.

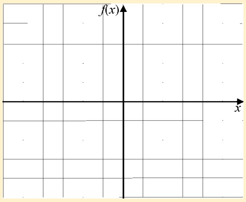
5. Proporciona dos ejemplos para los cuales su representación gráfica no representa el de una función.



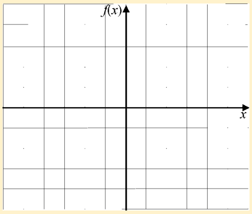


6. Dibuja la gráfica de cada una de las siguientes funciones:

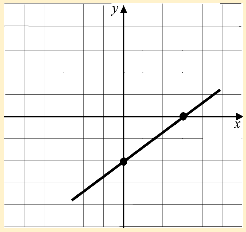
a) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$, para toda x en $\mathrm{R}-\{1\}$.



b) $f(x)=\begin{cases} 1 & \text{si } x<0 \\ x+1 & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$



7. Proporciona la expresión algebraica, en términos de x, que esté ligada a la representación gráfica. Explica qué partes de la gráfica te han ayudado en la construcción de la expresión algebraicas.

<table>
<tr><td>a)

</td><td>y =

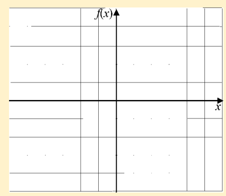
Explicación:</td></tr>
</table>

8. Construir la función solicitada con dominio R y que cumpla las condiciones abajo presentadas.

<table>
<tr><td rowspan="3">Restricciones a la función:

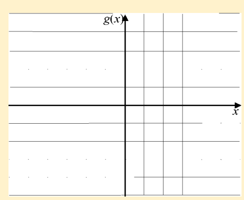
a)

$f(0) = 0$

$f(-1) = 1$</td><td colspan="2">Respuesta</td></tr>
<tr><td>Representación algebraica</td><td>Representación gráfica</td></tr>
<tr><td>$f(x) =$</td><td>
</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Restricciones a la función:

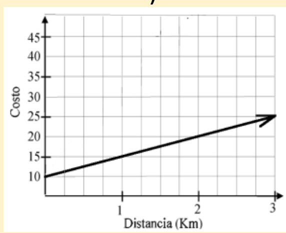
b)

g(0) = 0

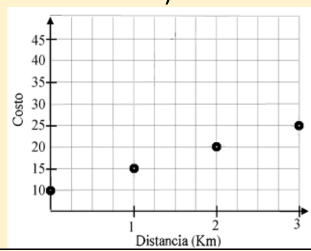
$g(-1) = 1$</td><td colspan="2">Respuesta</td></tr>
<tr><td>Representación algebraica</td><td>Representación gráfica</td></tr>
<tr><td>$g(x) =$</td><td>
</td></tr>
</table>

9. En un viaje especial, a un chofer de taxi se le pagan 10$ por el primer kilómetro recorrido y 5$ por cada kilómetro adicional. ¿Qué gráfica representa la situación sobre los gastos del pasajero?

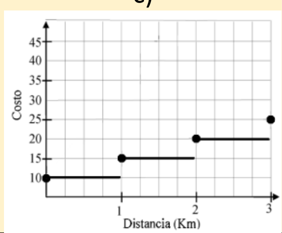
a)



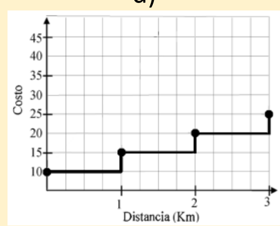
b)



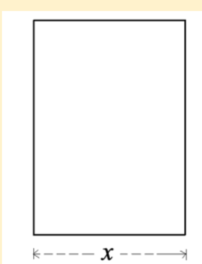
c)



d)

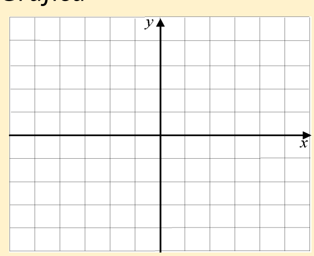


10. Se cuenta con una ventana en forma de rectángulo. Si el perímetro de la ventana es de 4 metros, escribe su área ***A*** como función de la base (ver figura). Dibuja también la representación gráfica de la función obtenida.

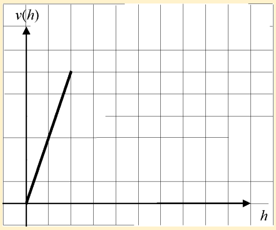


Expresión algebraica

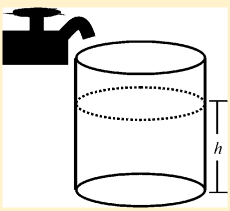
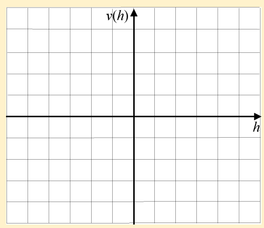
Gráfica



11. En la gráfica mostrada, ***v*** representa el volumen de un líquido en un recipiente en función de la altura ***h***. Conociendo la representación gráfica siguiente, dibuja la forma que podría tener un recipiente.

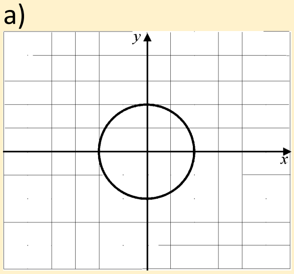
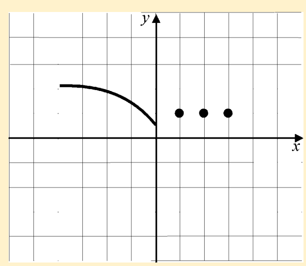
		*Justificación*

12. En el recipiente que se muestra, ***v*** representa el volumen de un líquido en un recipiente en función de la altura ***h***. Proporciona la representación gráfica de la función ***v***.

a) 		*Justificación*

Anexo B: Cuestionario

13. De las representaciones siguientes, decide si representan o no una función.

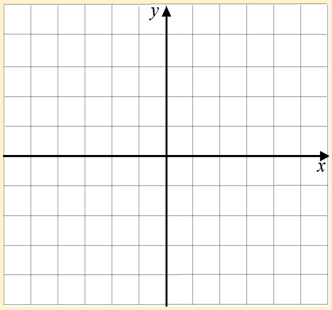
a) 	b) 
☐ Si ☐ No Justificación:	☐ Si ☐ No Justificación:

14. Las expresiones siguientes, ¿representan una función? Proporciona una justificación en cada caso.

c) $2x^2 + y^2 = 4$	☐ Oui ☐ Non Justification:

15 Dada la siguiente tabla, proporciona la representación gráfica de la situación en donde el eje x represente la altura e y la temperatura.

Altura Km	Temperatura ºC
0	20
10	-48
20	-50
40	-18
60	-12
80	-80
110	-20



a) ¿Corresponde a una función la representación gráfica?

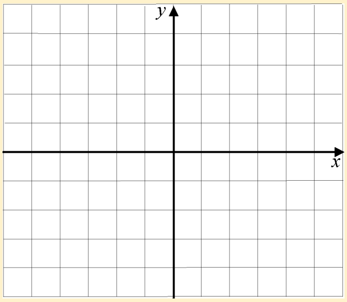
☐ Si ☐ No Explique:

b) Si se trata de una función, especifique el conjunto de puntos del dominio y el conjunto de puntos de la imagen de la función.

16. Se ha realizado un examen de Geometría a un solo alumno, y se han sacado 10 fotocopias del examen. Se han seleccionado 10 profesores de matemáticas y se les ha proporcionado una copia del examen a cada profesor. Se les ha solicitado que proporcionen una nota al examen. Los resultados son los proporcionados en la tabla siguiente.

Profesor No.	Nota
1	5.5
2	6.5
3	7
4	6.5
5	5.5
6	6.5
7	6
8	7
9	4
10	6

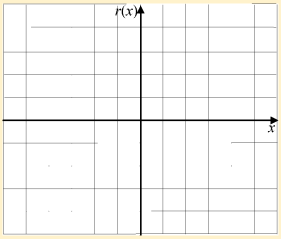
a) Representar gráficamente la situación mostrada en el tablero, e indicar cuál es la variable x y cuál es la variable y.

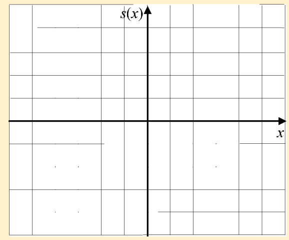


b) ¿La gráfica corresponde a una función? ☐ Si ☐ No Explique:

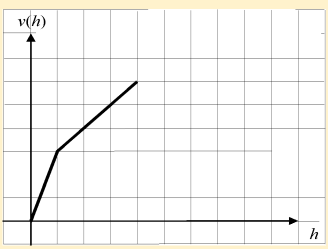
c) Si es una función, especifique el conjunto de puntos del dominio y el conjunto de puntos de la imagen.

17. Construya la función con domino R que cumpla con las condiciones enunciadas.

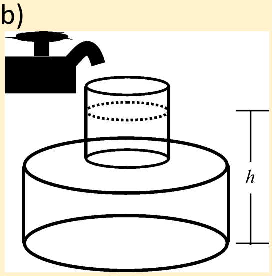
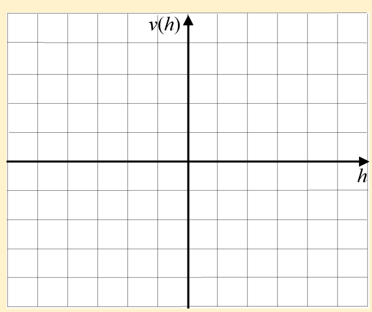
Restricciones a la función: a) $r(-2)=3$ $r(0)=-1$ $r(3)=8$	*Respuesta*	
	Representación algebraica	*Representación gráfica*
	$r(x)=$	
Restricciones a la función:	*Respuesta*	
	Representación algebraica	*Representación gráfica*

b) $s(-2)=3$ $s(0)=-1$ $s(3)=8$	$s(x)=$	

18. En la gráfica mostrada, ***v*** representa el volumen de un líquido en un recipiente en función de la altura ***h***. Conociendo la representación gráfica siguiente, dibuja la forma que podría tener un recipiente.

		*Justificación*

19. En el recipiente que se muestra, ***v*** representa el volumen de un líquido en un recipiente en función de la altura ***h***. Proporciona la representación gráfica de la función ***v***.

b) 		*Justificación*

CAPÍTULO V

La mirada en geometría: relectura de las aprehensiones figurales diseñadas por Raymond Duval para el aprendizaje de la Geometría[1]

The look in Geometry: reinterpretation of the figural apprehensions conceived by Raymond Duval for learning Geometry

O olhar em geometria: releitura das apreensões figurais concebidas por Raymond Duval para aprendizagem da Geometria

Méricles Thadeu Moretti [I]
Adalberto Cans [II]

[I] Universidade Federal de Santa Catarina, Programa de Pos-Graduação em Educação Científica e Tecnológica (PPGECT/UFSC). Brasil.
https://orcid.org/0000-0002-3710-9873

[II] Universidade Federal de Santa Catarina, Programa de Pos-Graduação em Educação Científica e Tecnológica (PPGECT/UFSC). Brasil.
https://orcid.org/0000-0001-7580-6373

INTRODUCCIÓN

La fascinación por la geometría es una fuente de inspiración que siempre acompaña nuestras investigaciones en Educación Matemática. Por analogía con los fractales, podemos conjeturar que la geometría son trazos de la naturaleza estampados en las matemáticas. Además, la complejidad

[1] Traducido del portugués al español por José Amarino Maciel de Brito (UFAM) - E-mail: ammacbr@msn.com

cognitiva que implica su enseñanza y aprendizaje es un tema que nos suscita mucho interés, partiendo del supuesto de que:

> Entre todos los dominios de conocimiento que el estudiante debe explorar, la geometría es la que requiere una actividad cognitiva más completa, ya que solicita el gesto, el lenguaje y la mirada. En ella, es necesario construir, razonar y ver de manera indisoluble. Pero la geometría también es el dominio más difícil de enseñar y uno de los que, incluso cuando los objetivos permanecen muy modestos, los resultados alcanzados son decepcionantes (Duval, 2022, p. 3).

Por lo tanto, como fundamentación teórica de este trabajo, revisitamos la noción de *aprehensión figural* en el aprendizaje de la geometría, concebida en la teoría semiocognitiva de aprendizaje matemático de Raymond Duval. Por otro lado, también consideramos la relectura de Moretti y Cans (2024) sobre algunas de estas operaciones.

Esta reinterpretación rebautizó algunas aprehensiones con el objetivo de acercarlas cada vez más al papel que desempeñan en la resolución de problemas de geometría con figuras, según los autores, siguiendo recomendaciones didácticas en este sentido, reveladas por el propio Duval (1994, 1995, 2012, 2022), como podemos mencionar: “existe así un hiato entre la visión de una figura, es decir, su aprehensión perceptiva espontánea, y la forma matemática de abordarla. Una aparece muchas veces como un obstáculo a la segunda, mientras que, sin la primera, la segunda no sería posible” (Duval, 1994, p. 122, nuestra traducción). O incluso, en el contexto de una actividad matemática, una figura “es objeto de dos actitudes generalmente opuestas: una inmediata y automática, la aprehensión perceptiva de las formas; y otro controlado, que posibilita el aprendizaje, la interpretación discursiva elementos figurales" (Duval, 2012, p. 120).

Lo que se puede concluir de estas citas es que una figura geométrica, a los efectos del aprendizaje de geometría, es el resultado de la interacción semiocognitiva entre las aprehensiones perceptivas y discursivas y la figura misma.

Así, para estos autores, por ejemplo, la aprehensión perceptiva pasó a ser definida como dos: una objetiva e inmediata, que se enfoca solo en lo que se ve en la figura *aprehensión perceptiva inmediata* y otra, mucho más completa, que también considera el enunciado del problema, elevando su potencial heurístico. Esta última fue denominada *aprehensión perceptiva atenta* (Moretti; Cans, 2024).

Con esta relectura, los autores trajeron a la atención la *aprehensión heurística*, fruto de la asociación entre la *aprehensión perceptiva atenta* y la *aprehensión operativa*, que requieren una mayor atención en la próxima sección de este capítulo. Por lo tanto, en este trabajo se pretende evidenciar el perfeccionamiento de estas operaciones semiocognitivas que están presentes de manera invariable en la resolución de problemas en geometría.

Este texto, además de la Introducción y consideraciones finales, también incluye la Sección 1: Las aprehensiones en el aprendizaje de la geometría, que fundamenta la importancia de estas aprehensiones para este campo de la Matemática, y la Sección 2: Aprehensiones figurales en ejercicio, que ejemplifica y explora las aprehensiones figurales en un tono más pragmático. Esta comunicación también es relevante para el preámbulo de una tesis de doctorado, que se desarrolla en el Programa de Posgrado en

Educación Científica y Tecnológica de la Universidad Federal de Santa Catarina (PPGECT/UFSC).

1 LAS APREHENSIONES EN EL APRENDIZAJE DE GEOMETRÍA

De acuerdo con Duval (2017, p. 205) “No puede haber enseñanza de la geometría que no tome en consideración las diferentes aprehensiones a las cuales una figura da lugar”. Se destaca que estas operaciones semiocognitivas son especialmente activas en la resolución de problemas de geometría que se basan en una representación visual geométrica — una representación figural proporcionada o no en el enunciado. De esta manera, no es exagerado decir que las figuras geométricas tienen un papel sumamente importante en el aprendizaje de la geometría. Construidas a partir del enunciado del problema o acompañándolo, ellas son parte integral del problema propuesto.

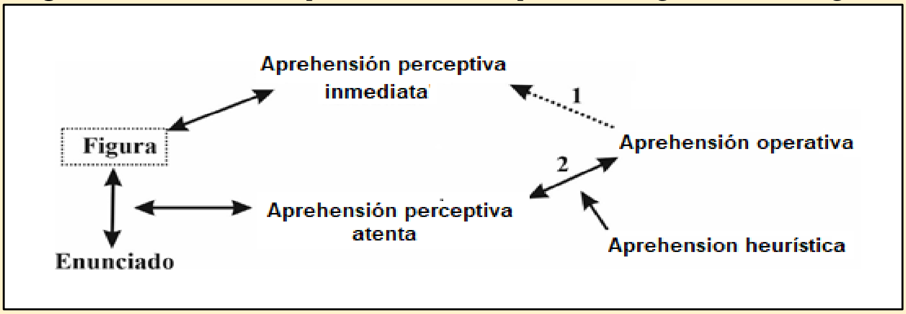
En vista de esto, la resolución de este tipo de problema requiere un desarrollo del proceso cognitivo del alumno para la exploración heurística de las representaciones figurales. Estas interacciones alumno-representación son formas de interpretación autónomas de una figura, denominadas aprehensiones figurales (Duval, 2012). Para el aprendizaje de la geometría, Duval (1994, 1995, 2004, 2012, 2017, 2022) introdujo las aprehensiones independientes, a saber: perceptiva, discursiva, operativa y secuencial. "La aprehensión secuencial se solicita explícitamente en actividades de construcción o en actividades de descripción, con el objetivo de reproducir una figura dada" (Duval, 2012, p. 120). Por este motivo, no será abordada en este capítulo[2].

Según Duval,

> La figura dibujada en un problema de matemáticas es objeto de tres aprehensiones: la perceptiva de las formas, que es la más inmediata, la discursiva de los elementos figurativos y del texto involucrado en el problema que indican instrucciones, y la operativa, que involucra los aspectos heurísticos del pensamiento para resolver el problema en sí (Duval, 2012, p. 136).

Sin embargo, a partir de la contribución de Moretti y Cans (2024), subsidiados en Duval (1994, 1995), para la resolución de problemas de geometría que incluyen figuras, ahora consideramos cuatro aprehensiones, cuya actuación semiocognitiva está esquematizada en la Figura 1.

Figura 1 – Acción de las aprehensiones en un problema de geometría con figura



Fuente: Moretti y Cans, 2024, p. 303

El esquema de la Figura 1 revela que la **aprehensión operativa** relacionada con la flecha 1, que se forma únicamente en la figura estimulada

[2] Para mayor profundidad sobre estas aprehensiones, así como otros elementos semiocognitivos relacionados con el aprendizaje de la geometría, sugerimos Duval (1994, 1995, 2004, 2012, 2017, 2022), Moretti (2013), Moretti y Brandt (2021).

por la **aprehensión perceptiva inmediata**, es discontinua, ya que puede o no conducir a la solución del problema, lo cual dependerá en gran medida de la congruencia semántica y de la equivalencia referencial entre la figura, el enunciado del problema y los procedimientos matemáticos de resolución. Por otro lado, la **aprehensión operativa** indicada por la doble fecha 2, que se realiza a partir de la **aprehensión perceptiva atenta**, formada en la sinergia entre el enunciado y la figura, da lugar a la **aprehensión heurística**, que reúne las condiciones para la solución del problema, dependiendo de una expansión discursiva (Moretti, Cans, 2024). En las siguientes subsecciones abordaremos cada una de estas aprehensiones.

1.1 La aprehensión discursiva de las figuras

En principio, "La forma perceptiva se destaca en relación con la discursiva, ya que existe una tendencia a mirar el aspecto visual del problema propuesto" (Moretti; Brandt, 2015, p. 605). Para Duval, "La aprehensión discursiva de una figura equivale a sumergir, según las indicaciones de un enunciado, una figura geométrica particular en una red semántica, que es, al mismo tiempo, más compleja y estable" (Duval, 2012, p. 135).

En efecto, al resolver actividades de geometría con figuras se pueden presentar dos problemas de congruencia, uno entre la figura y el enunciado y otro entre la figura y el tratamiento. Sin embargo, se considera que las propiedades pertinentes capaces de promover la exploración heurística de la figura geométrica dada están cada vez más presentes en el planteamiento del problema, por lo que la aprehensión perceptiva "queda subordinada" y establecida como parte de la aprehensión discursiva (Duval, 2012).

"De hecho, las propiedades pertinentes y las únicas aceptables dependen cada vez de lo que se dice en el enunciado como hipótesis. [...] una figura geométrica no se muestra a primera vista a partir de su trazado y sus formas, sino a partir de lo que se dice" (Duval, 2012, p. 133). Dicho esto, los elementos y propiedades que aparecen sobre una figura son, de cierta manera, fragmentos del discurso teórico, el cual está guiado por definiciones, axiomas y teoremas preestablecidos. Por lo tanto, aunque la aprehensión perceptiva está relacionada con otras aprehensiones e influye en ellas, estas afirmaciones de Duval sugieren sutilmente la necesidad de asociarse aprehensiones, con el objetivo de potenciar la capacidad heurística de las figuras, como por ejemplo, la **aprehensión perceptiva atenta**.

1.2 La aprehensión perceptiva de las figuras

Ante el intento de resolver un problema de geometría, experimentamos la actividad cognitiva de la percepción o *aprehensión perceptiva* según Duval (1994). "Es a través de la aprehensión perceptiva que podemos obtener ideas para resolver un problema, por ejemplo, al prever caminos de subdivisión, creación de líneas auxiliares, rotaciones, entre otros procedimientos, permitiendo que la figura pueda ejercer su papel heurístico" (Duval, 1998, p. 147). "La aprehensión perceptiva es la operación semiocognitiva más importante en el aprendizaje de la geometría, ya que todas las demás aprehensiones dependen no solo de la vista, sino también de otras operaciones semiocognitivas de las que es responsable" (Moretti; Cans, 2024, p. 303).

Sin embargo, una aprehensión perceptiva atenta de una figura facilita la solución del problema. Simétricamente, una percepción desatenta puede dificultar e incluso llevar a soluciones equivocadas en un problema de geometría. Esta constatación, ejemplificada más adelante, confirma la descomposición de la **aprehensión perceptiva** en *aprehensiones* **perceptivas inmediatas y perceptivas atentas**, propuesta por Moretti y Cans (2024).

1.2.1 La aprehensión perceptiva inmediata de las figuras

Esta es la aprehensión que se lleva a cabo específicamente en la figura. "Esto se realiza a través del procesamiento cognitivo que se lleva a cabo automáticamente, por lo tanto, de manera inconsciente. Es por eso que la forma de una figura, o las que la componen, se reconoce desde la primera vez, y este reconocimiento permanece estable" (Duval, 1994, p. 124).

Del punto de vista psicofisiológico, Koffka (1936, p. 138) establece que hay dos fuerzas, una interna que imprime, en el proceso de distribución, la forma más simple posible, mientras que la fuerza externa y el patrón de estímulo intentan impedir esa simplificación.

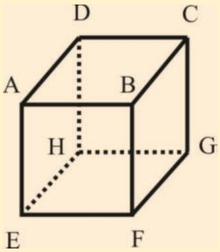
Así, esta aprehensión está guiada por las leyes de la *Gestalt* o Psicología de la Forma, principalmente, el Cierre: "tendencia perceptiva que establece o contribuye a la formación de unidades. Así, la percepción se dirige naturalmente a cerrar o completar los contornos de los objetos que no están completos, obteniendo la sensación de cierre visual" (Hillesheim, 2021, p. 88); la Buena Continuación: "[...] la impresión visual de cómo las partes se suceden a través de la organización perceptiva de forma coherente, sin interrupciones en su trayectoria o fluidez visual" (Gomes Filho, 2004, p. 33); y la Proximidad: "En condiciones iguales, los estímulos más cercanos entre sí, ya sea en forma, color, tamaño, textura, brillo, peso, dirección y otros, tendrán una mayor tendencia a agruparse y formar unidades" (Gomes Filho, 2004, p. 34). También hay otras leyes y elementos *gestálticos*[3] que influyen en la organización de una figura. Tomemos como ejemplo el problema representado en la Figura 2:

Figura 2 – Pregunta de geometría propuesta a 392 estudiantes del primer año de la secundaria

En el cubo al lado, ¿es el triángulo CBF un triángulo rectángulo?

Sí (   ).

No (   ).



Fuente: Informe del Acuerdo n. 174/95 CAPES/COFECUB (1996)

El informe indica que el 21% de los 392 alumnos del primer año de la secundaria, hoy conocida como Enseñanza Media en Brasil, o sea, solo 82 de ellos, reconocieron el triángulo *CBF* como un triángulo rectángulo. Es muy probable que esto haya sido resultado de una **aprehensión perceptiva inmediata** desatenta al enunciado, ya que el enunciado menciona que la figura es un cubo y, por lo tanto, todas las caras son cuadrados. Sin embargo, el cubo es una figura tridimensional (3D), por lo que su representación en un plano hace que las caras que no pertenecen al plano frontal-paralelo, en

[3] Mayores profundizaciones pueden encontrarse en el libro clásico de Koffka (1936), en Guillaume (1979) o en Gomes Filho (2004).

relación con el observador, sufran una anamorfosis[4]. En otras palabras, la cara *CBFG* no se percibe como un cuadrado, lo que explica en gran parte por qué el 79% de los alumnos no reconocieron el ángulo $C\hat{B}F$ como un ángulo recto. Si el texto hiciera referencia a uno de los triángulos que se pueden formar en la cara *ABFE*, es probable que el nivel de aciertos fuera mucho mayor. Esta cara se encuentra en el plano frontal-paralelo, una posición muy privilegiada en la enseñanza que aumenta la congruencia semántica entre lo que se pregunta y lo que se ve en la figura. En este caso, la aprehensión perceptiva inmediata conduciría a una interpretación exitosa de la pregunta.

1.2.2 La aprehensión perceptiva atenta de las figuras

"Al aprender geometría, una figura necesita ser lo que se explica en el enunciado o en la propia figura, con signos convencionales como: signos para designar la misma longitud de segmentos, la misma medida de ángulos, rectas paralelas, ángulos rectos etc." (Moretti; Cans, 2024, p. 304). Con esta perspectiva, **aprehensión perceptiva atenta**: es la aprehensión que combina el "ver" en la figura con el decir del enunciado, abarcando la aprehensión discursiva y subordinándose a sus axiomas, hipótesis, definiciones, teoremas etc.

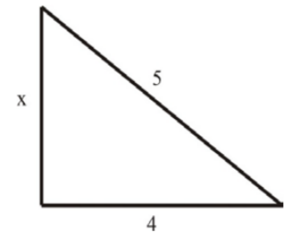
Traemos a la mesa, representado en la Figura 3, un problema simple pero extremadamente didáctico para esta situación.

[4] Distorsión visual provocada por la representación de una figura tridimensional (3D) en un plano bidimensional (2D), como una hoja de papel o pantalla de computadora.

En primer lugar, no hay congruencia semántica entre la figura y el enunciado: la figura sugiere un solo lado del valor x y el enunciado pregunta por "los valores posibles de x".

Figura 3 – Necesidad de una aprehensión perceptiva atenta

¿Cuáles son los posibles valores de *x* en la figura, considerando las longitudes *x*, *5* y *4* en la misma unidad de medida?



Fuente: Mello, 1999, p. 65 (Nuestra Traducción)

La reacción automática (aprehensión perceptiva inmediata) es identificar, por la posición del triángulo en la práctica común, la figura como un triángulo rectángulo. Otro agravante para aquellos que se centran en la figura son los valores 4 y 5, para los lados del triángulo, lo que sugiere la tríada 3, 4 y 5, muy común y conocida en el aula como los lados de un triángulo pitagórico o triángulo rectángulo. Esto, erróneamente, induce al tipo de tratamiento a aplicar: el teorema de Pitágoras.

Hay que tenerse en cuenta que toda esta conclusión no es más que una abducción[5], ya que no hay hipótesis en el enunciado, ni siquiera signos convencionales en la figura, que garanticen que el triángulo sea rectángulo. Por lo tanto, una percepción atenta al enunciado (aprehensión perceptiva atenta) puede hacer que el problema sea "trivial". Es decir, un problema con

[5] El tipo de razonamiento descrito por Peirce: una hipótesis explicativa posible para un contexto, una inferencia.

suficiente sustento teórico para dirigir de manera significativa las asociaciones cognitivas que amplían la capacidad heurística del problema. Por hipótesis discursiva, se desea descubrir los posibles valores para uno de los lados de un triángulo cualquiera, de esta forma se deduce que la solución del problema depende del conocimiento conceptual del estudiante sobre el teorema de la existencia del triángulo[6]: "cada lado de un triángulo es menor que la suma de los otros dos". Este caso obliga a:

$x < 5 + 4 \Rightarrow x < 9$;

$4 < 5 + x$, que ocurre para todo x; y

$5 < 4 + x \Rightarrow x > 1$, donde, por sustitución, se concluye, $1 < x < 9$.

Por otro lado, destacamos que alcanzar la aprehensión heurística del problema no es tan "trivial" como parece para los matemáticos. De hecho, en este caso, la aprehensión perceptiva inmediata solo proporcionó algunas abducciones (pistas), pero es la sinergia entre la aprehensión perceptiva y la aprehensión discursiva lo que amplió la capacidad heurística de la figura permitiendo nuevos razonamientos, es decir, se crean condiciones que habilitan la **aprehensión heurística** que puede llevar al descubrimiento de soluciones para el problema, una expansión cognitiva[7], como la deducción de usar el teorema de la existencia del triángulo. Además, destacamos la actuación implícita de la aprehensión operativa representada en la

---

[6] La Proposición 20, del Libro I, de "Los Elementos" de Euclides. EUCLIDES. **Los Elementos**. La traducción e introducción de: BICUDO, Irineu. São Paulo: Ed. UNESP, 2009. 600 p.

[7] La expansión cognitiva es una forma de expansión discursiva, tema de una tesis en desarrollo en PPGECT/UFSC. Sugerimos para estudio el capítulo 2 de Duval (1995, 2004, 2017), Sabel; Moretti (2022) y Moretti; Cans (2024).

desconstrucción dimensional de la figura bidimensional del triángulo, en sus lados, segmentos unidimensionales.

1.3 La aprehensión operativa de las figuras

Según Duval (2022, p. 11) "toda figura es generadora de otra, ya sea por extensión de su procedimiento de construcción o por la reorganización visual de las formas inmediatamente reconocidas. Este proceso es intrínsecamente autónomo [...]". Sin embargo, este proceso que ocurre mediante modificaciones en la figura depende en gran medida de una actividad semiocognitiva muy importante desde el punto de vista heurístico para la geometría, la **aprehensión operativa**. "La aprehensión operativa de figuras es una aprehensión centrada en las modificaciones posibles de una figura inicial y en las reorganizaciones posibles de estas modificaciones" (Duval, 2012, p. 125).

El Cuadro 1, a continuación, presenta las modificaciones más importantes en una figura, son posibles tratamientos realizados sobre las figuras con fines heurísticos, el rol de la *aprehensión operativa*. Las modificaciones mereológicas, por ejemplo, conscientes o no, son bastante presentes en la enseñanza de geometría con figuras, ya sea por reconfiguración intermedia o por desconstrucción dimensional.

Cada una de estas modificaciones puede llevarse a cabo gráfica o mentalmente, y para cada tipo de modificación existen diversas operaciones posibles (Duval, 2012). Dependiendo del tipo de modificación elegida, y el papel de la **aprehensión operativa**, pueden surgir posibilidades de tratamiento muy diferentes entre sí, ampliando la productividad heurística de las figuras. Por ejemplo, agregar trazos para dividir una figura en subfiguras permite evidenciar una igualdad por adición de áreas, mientras que considerar una figura como ampliación de otra privilegia el uso del teorema de la semejanza.

Cuadro 1 - Posibles modificaciones figurales para la aprehensión operativa

Tipo de modificación figural	**Operaciones que constituyen productividad heurística**	**Factores que afectan la visibilidad**
Modificación Mereológica (decomposición en subfiguras)	- Reconfiguración intermedia (yuxtaposición, subdivisión, inmersión, adición de trazos etc.) - Deconstrucción dimensional (adición de trazos, extensión, separación etc.)	- Característica convexa o no convexa de las partes elementales
Modificación Óptica	- Superposibilidad - Anamorfosis	- Cobertura parcial - Orientación
Modificación de posición	- Rotación - Translación - Reflexión	- Estabilidad de referencias en el campo perceptivo para apoyar figuras

Fuente: adaptado de Duval, 2012, p. 127

1.4 La aprehensión heurística de las figuras

Dado un problema de geometría, la **aprehensión heurística** es la habilidad que actúa sobre el problema en búsqueda de una solución. Esto ocurre en un movimiento de sinergia que combina "dos" aprehensiones: la aprehensión perceptiva atenta, que se basa y actúa más allá de la mirada en la figura, con lo que se dice en el enunciado y las indicaciones simbólicas convencionales proporcionadas en la propia figura; y la aprehensión operativa que realiza posibles modificaciones en la figura con fines heurísticos (Moretti; Cans, 2024).

Con efecto, todo objeto geométrico o representación figural posee una capacidad heurística inerte, inherente al objeto y lista para ser explorada. En otras palabras, las figuras incuban conexiones conceptuales que, cuando se orquestan de manera armónica con la información adicional, no solo generan razonamientos que respaldan el proceso de resolución del problema, basados en una red de significados, sino también un momento de aprendizaje. Sin embargo, el *start* y el acceso a este potencial heurístico no son habilidades naturales y, por lo tanto, necesitan ser entrenadas.

Podemos, por ejemplo, hacer una analogía con el juego de ajedrez, ampliamente utilizado hoy en día en el proceso de gamificación de la educación[8] para aumentar la motivación y la participación de los estudiantes. Es un hecho que este juego milenario, probablemente originario de la India, tiene una fuerte capacidad para desarrollar el pensamiento cognitivo del alumno. Sin embargo, no es posible explorar este potencial sin que:

- se conozca el tablero y se aprendan las reglas del juego — aprehensiones perceptivas y discursivas (aprehensión perceptiva atenta); y

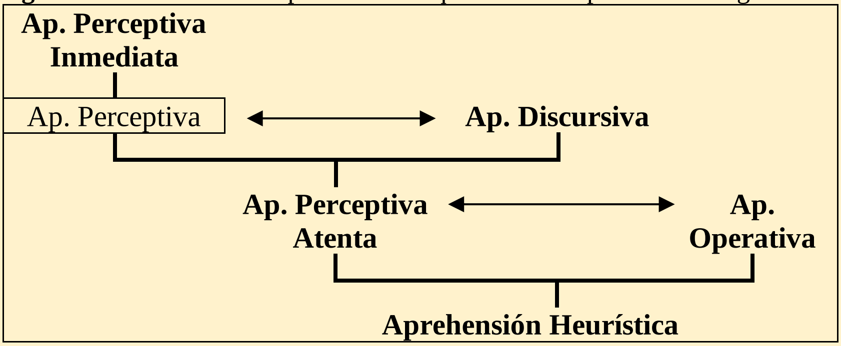
[8] Una aproximación que utiliza elementos de juegos en actividades y procesos educativos como opción para educar a los alumnos.

• se practique el juego, experimentando todas sus posibles variaciones — aprehensión operativa.

Estas son las condiciones necesarias para el desarrollo de la capacidad que reside allí, es decir, son las condiciones que proporcionan al alumno la habilidad de planificar las estrategias que presentarán soluciones al problema, ¿cuál es el mejor movimiento? (Aprehensión heurística).

En suma, en la perspectiva de Moretti y Cans (2024), la aprehensión perceptiva se descompone en la **aprehensión perceptiva inmediata**, que es la única que opera de forma aislada, aunque bajo el comando de las leyes de la *Gestalt* o la Psicología de la forma, y por lo tanto también podría llamarse aprehensión *gestáltica*. Y cuando se asocia con la **aprehensión discursiva**, origina la **aprehensión perceptiva atenta**. Esta aprehensión se une a la **aprehensión operativa** para formar la **aprehensión heurística**, como se ilustra en la Figura 4.

Figura 4 – Formación de aprehensiones que actúan en problemas de geometría



Fuente: los autores

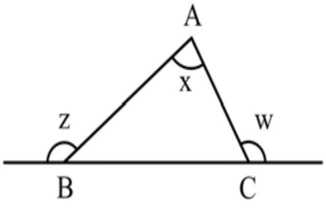
La **aprehensión heurística**, desde esta perspectiva, parece ser "un punto culminante" en este estudio. Es decir, nos parece muy adecuada la decisión de los autores de reconocer la aprehensión heurística como un trabajo colectivo, es decir, una habilidad resultante de la interacción entre las demás aprehensiones concebidas por Duval.

2 APREHENSIONES FIGURALES EN EJERCICIO

Dando continuidad y respaldo a lo discutido en la sección anterior, presentamos dos problemas que evidencian la actuación de las aprehensiones. Los problemas[9] en discusión han tenido sus soluciones analizadas semiocognitivamente. Esta evaluación buscó destacar actividades como: las miradas en geometría, la reconfiguración intermedia, la desconstrucción dimensional, las aprehensiones y la expansión cognitiva. El enfoque de este trabajo está centrado en las aprehensiones. El primer problema está representado en la Figura 5, las soluciones en la Figura 6 y los análisis semiocognitivos en la Figura 7 y 8.

Figura 5 – Problema de geometría plana

En el triángulo ABC, *x* es la medida de un ángulo interior, *z* y *w* son medidas de ángulos exteriores. Si, $z + w = 225^o$ y $z - 25^o = w$. ¿Cuál es la medida del ángulo *x*?

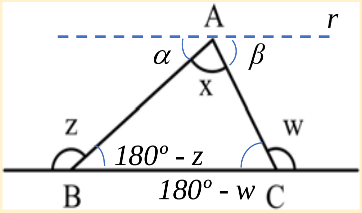
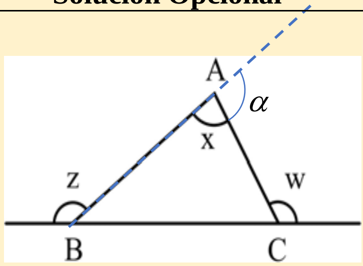


Fuente: adaptado de la Escuela Especializada en Aeronáutica (EEAR 2020-21)

[9] Problemas aplicados a 20 profesores matriculados en la disciplina "Fundamentos de semiótica en perspectivas de aprendizaje matemático" del PPGECT/UFSC, impartida por M. T. Moretti, en el segundo semestre de 2023.

En primer lugar, el enunciado proporciona información que es claramente visible en la figura. Por lo tanto, el enunciado y la figura son semánticamente congruentes y referencialmente equivalentes, es decir, la comprensión del problema parece ser simple. Sin embargo, no se puede decir lo mismo de la figura en relación con los procedimientos matemáticos de resolución, ya que estos procedimientos requerirán modificaciones en la figura. A continuación, en la Figura 6, se presentan dos de estas posibilidades.

Figura 6 – Dos soluciones diferentes al problema de la Figura 5

Solución Clásica	**Solución Opcional**
	

Fuente: los autores

Solución Clásica

Inicialmente, trazamos la recta *r* paralela a *BC*, luego identificamos y designamos los ángulos entre la recta *r* y los lados *AB* y *AC* del triángulo, respectivamente, como α y β. Estas modificaciones cognitivas en la figura pueden ocurrir sin un objetivo específico, más bien como una especulación, salvo en la búsqueda de una solución para el problema, ya que la identificación de elementos matemáticos se facilita con esta característica. Note que los procedimientos matemáticos ahora son mucho más claros:

- ✓ $\alpha = (180^o – z)$, el ángulo α es alternante interno al suplemento de *z*, $(180^o – z)$, por consiguiente, congruentes (designación funcional);
- ✓ $\beta = (180^o – w)$, el ángulo β es alternante interno al suplemento de *w*, $(180^o – w)$, por consiguiente, congruentes (designación funcional);
- ✓ $(180^o – z) + x + (180^o – w) = 180^o$, los ángulos $(180^o – z)$, *x* y $(180^o – w)$ forman un ángulo llano (designación funcional);
- ✓ por los tratamientos establecidos en el registro algebraico, se tiene la ecuación, $x = z + w – 180^o$; y
- ✓ una visita al enunciado trae $(z + w) = 225^o$, por sustituciones y operaciones aritméticas adecuadas, se obtiene $\boldsymbol{x = 45^o}$.

Solución Opcional[10]

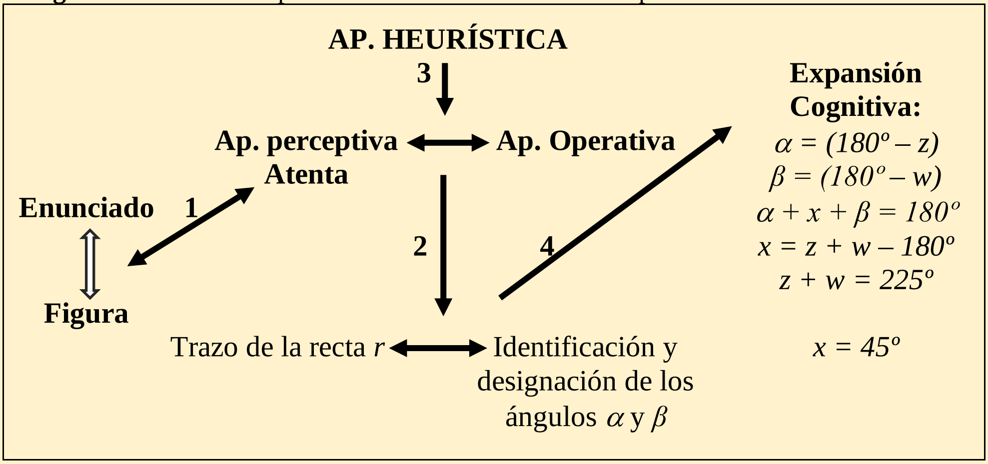
Partimos ahora de la prolongación del lado *BA*, identificando y designando como α (designación pura) al ángulo formado entre la prolongación del lado *BA* y el lado *AC* del triángulo. Estas modificaciones en la figura son operaciones cognitivas y pueden ocurrir sin un objetivo específico, excepto en la búsqueda de una solución para el problema, ya que la identificación de elementos matemáticos se simplifica mediante este procedimiento. Observamos que los procedimientos matemáticos ahora son más claros:

- ✓ $x + \alpha = 180^o$, o, $x = 180^o – \alpha$, los ángulos *x* y α son suplementares (designación funcional);

[10] Esta solución fue presentada por los alumnos A y E en la asignatura Fundamentos de Semiótica en Perspectivas de Aprendizaje del PPGECT/UFSC, 2023-2.

- ✓ z, w y α, son ángulos externos al triángulo;
- ✓ $z + w + \alpha = 360^o$, la suma de los ángulos externos de un polígono es igual a 360º;
- ✓ una visita al enunciado trae $(z + w) = 225^o$, por consiguiente, $\alpha = 135^o$; y obviamente,
- ✓ $x = 180^o - 135^o$, donde $\boldsymbol{x = 45^o}$ (como ya se esperaba).

Figura 7 – Rol de las aprehensiones en la resolución del problema — Solución Clásica



Fuente: los autores

A partir de la lectura del enunciado y el análisis de la Figura 5 (flecha doble 1, Figura 7), se producen aprehensiones discursivas y perceptivas, es decir, aprehensión perceptiva atenta: se traza la recta r paralela a BC (flecha 2 en la Figura 7 y línea punteada en la Solución Clásica), se identifican los ángulos entre la recta r y los lados AB y AC del triángulo, designados respectivamente por α y β. Además, en la Figura 6 – Solución Clásica, estamos realizando una modificación mereológica, una deconstrucción dimensional 2D/1D[11] por adición de trazo (unidimensional), es decir, aprehensión operativa actuando con fines heurísticos.

La flecha 2 señala tanto el trazado de la recta *r* como la identificación de los ángulos α y β. El objetivo es mostrar que en esta sinergia de aprehensiones no se sabe con certeza qué ocurrió primero: el trazo de la recta puede haber ocurrido en un intento de descubrir una solución para el problema, o, por el contrario, la identificación de los ángulos se realizó únicamente a través de la observación operativa y el trazado de la recta sirvió como confirmación.

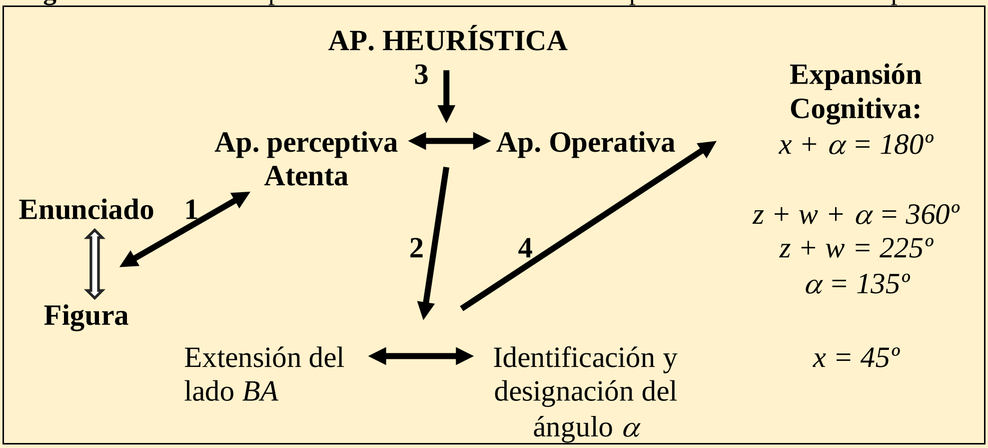
Después de este proceso, están reunidas las condiciones que habilitan la aprehensión heurística (flecha 3, Figura 7), capaz de dirigir una solución al problema por un proceso de expansión cognitiva (flecha 4, Figura 7): los ángulos α y β formados después del trazado de la recta *r* son congruentes, respectivamente, con los suplementos de *z* y *w* en el triángulo *ABC*, ya que son alternos internos, $\alpha = (180^o - z)$ y $\beta = (180^o - w)$; la observación del ángulo llano, $(180^o - z) + x + (180^o - w) = 180^o$ y la información del enunciado $(z + w) = 225^o$, forman el sistema suficiente para que se llegue a la solución, $\boldsymbol{x = 45^o}$.

La lectura del enunciado y la observación de la Figura 5 (flecha doble 1, Figura 8) provocan aprehensiones discursivas y perceptivas, es decir, aprehensión perceptiva atenta. Como resultado, se prolonga el lado *BA* (flecha 2 en la Figura 8 y línea punteada en la Solución Opcional), identificando y

[11] De 2D a 1D, significa el cambio en la visualización de elementos de dimensión 2 (triángulo y ángulos) a un elemento de dimensión 1, la recta *r* trazada, lo que siempre supone una dificultad adicional.

designando el ángulo α que se forma entre la prolongación del lado *BA* y el lado *AC* del triángulo. Se observa que hay una modificación mereológica en la Figura 6 – Solución Opcional, una deconstrucción dimensional por adición de trazo (el prolongamiento del lado *BA*), es decir, aprehensión operativa actuando con fines heurísticos.

Figura 8 – Rol de las aprehensiones en la resolución del problema — Solución Opcional



Fuente: los autores

La flecha 2 señala tanto la prolongación del lado *BA* como la identificación del ángulo α, para mostrar que, en esta sinergia de aprehensiones, no se sabe qué ocurrió primero: la prolongación del lado puede haber ocurrido por ensayo y error, en la búsqueda de una solución para el problema, o, por el contrario, la identificación del ángulo se realizó únicamente a través de la observación operativa y la prolongación surgió como confirmación.

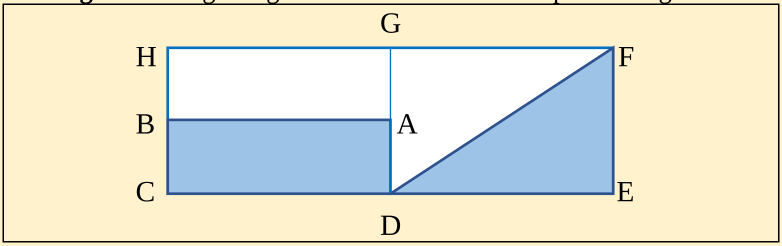
Tras este desarrollo, se crean condiciones que permiten la aprehensión heurística (flecha 3, Figura 8), que puede dar una solución al problema a través de un proceso de expansión cognitiva (flecha 4, Figura 8): el ángulo α, formado después de la prolongación del lado *BA*, y el ángulo *x* son suplementarios $(x + \alpha) = 180^o$; la constatación de que α, *z* e *w* son los ángulos externos del triángulo *ABC*, o sea, $\alpha + z + w = 360^o$, y la información del enunciado $(z + w) = 225^o$, forman el sistema suficiente para que se llegue a la solución $\alpha = 135^o$ y, consecuentemente, $\boldsymbol{x = 45^o}$.

Hay que señalar que la resolución del problema mediante la Solución Opcional parece ser más fácil. De hecho, aunque los procedimientos matemáticos solo se faciliten después de la prolongación del lado *BA* y la designación del ángulo α, a partir de ese momento, el nivel de congruencia semántica entre la figura y los procedimientos matemáticos de resolución en esta solución aumenta espontáneamente. Esto se debe a que la correspondencia semántica entre las unidades significativas de la figura, que muestran dos ángulos externos *z* y *w*, y las unidades significativas de los procedimientos matemáticos de resolución, que identifican los tres ángulos externos *z*, *w* y α del triángulo, disminuye el costo cognitivo de la solución. Este tema podría profundizarse más en Duval (2012) y Moretti *et al*. (2022).

Vamos a abordar un nuevo problema: el rectángulo *CEFH* ha sido dividido por la mitad por la mediana *GD*, que conecta los puntos medios de los lados de mayor longitud. Luego, cada uno de los dos rectángulos resultantes fue dividido a su vez por la mitad: uno de ellos con una mediana *BA* y el otro con una diagonal *DF*, como se muestra en la Figura 9. Demuestra que las partes sombreadas tienen áreas iguales, partiendo del principio de que dos áreas son iguales si pueden superponerse perfectamente.

El enunciado aporta informaciones que están claramente representadas en la Figura 9. Por lo tanto, el enunciado y la figura son semánticamente congruentes y referencialmente equivalentes, lo que significa que el problema es fácil de entender.

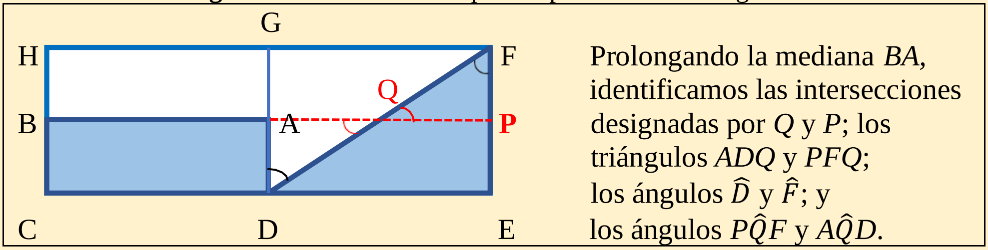
Figura 9 – Figuras geométricas diferentes - superficies iguales



Fuente: los autores, de D'Amore e Iori, 2015, p. 102

Sin embargo, lo mismo no se puede decir de la relación entre la figura y los procedimientos matemáticos de resolución, ya que estos procedimientos requerirán modificaciones en la figura. ¿Qué hacer? Obviamente, el problema permite diversas soluciones. Aquí, vamos a presentar una que nos parece más elegante, como se muestra en la Figura 10.

Figura 10 – Una solución para el problema de la Figura 9



Fuente: los autores

Estas inserciones cognitivas en la figura pueden ocurrir sin un objetivo específico, como una abducción, excepto cuando se busca una solución para el problema, ya que ahora se estimula la identificación de elementos matemáticos. Percíbase que los procedimientos matemáticos ahora son mucho más transparentes:

✓ el segmento $FP \equiv AD$ (misma medida, por la mediana *BA*);

✓ el ángulo $\widehat{D} \equiv \hat{F}$ (misma medida, porque son ángulos alternos internos); y

✓ el ángulo $P\hat{Q}F \equiv A\hat{Q}D$ (misma medida, ángulos opuestos por el vértice).

Por lo tanto, según el criterio Lado, Ángulo y Ángulo opuesto a este lado (L.A.Ao.), el triángulo $QAD \equiv QPF$; y, por consiguiente, triángulos congruentes poseen la misma área.

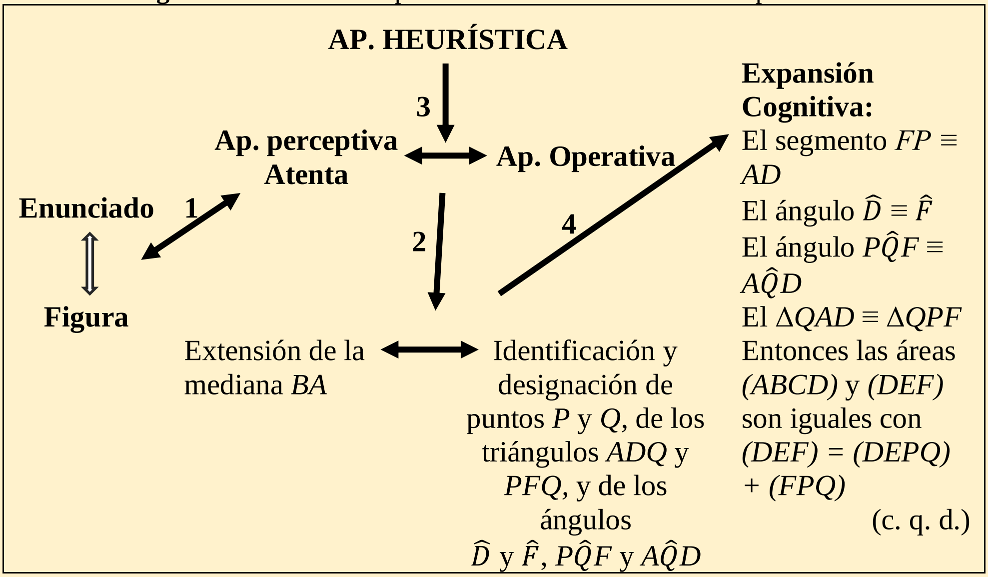
Así pues, las áreas sombreadas (*ABCD*) y (*DEF*), (*DEF*) = (*DEPQ*) + (*FPQ*), son iguales, ya que el corte del área (*DEF*) por el segmento *PQ* permite la superposición, tal como queríamos mostrar.

A continuación, presentamos en la Figura 11 el análisis semiocognitivo. La lectura del enunciado acompañada por la observación de la Figura 9 (flecha doble 1, Figura 11) estimula las aprehensiones discursivas y perceptivas, es decir, la aprehensión perceptiva atenta. Como resultado, se prolonga la mediana *BA* (flecha 2 en la Figura 11 y línea punteada en la solución de la Figura 10), se identifican las intersecciones designadas como *Q* y *P*, los triángulos *ADQ* y *PFQ*, los ángulos $\hat{D}$ y $\hat{F}$ (con más signos convencionales), y los ángulos $P\hat{Q}$F y A$\hat{Q}D$ (con más signos convencionales).

Se están llevando a cabo modificaciones mereológicas en la Figura 10, una descomposición dimensional mediante la adición de un trazo (extensión de la mediana *BA*), la identificación de los puntos de intersección *P* y *Q* (dimensión cero) y la congruencia de los segmentos *FP* y *AD*. Sin embargo, también hay una reconfiguración intermedia mediante la subdivisión del triángulo *DEF*, o sea, una aprehensión operativa que actúa con fines heurísticos.

La flecha 2, en la Figura 11, señala tanto hacia la extensión de la mediana *BA* como hacia las identificaciones y designaciones, para mostrar que, en esta sinergia de aprehensiones, no se sabe qué ocurrió primero: la extensión de la mediana puede haber ocurrido por inferencia, en la búsqueda de una solución para el problema, o, por el contrario, las identificaciones surgieron simplemente a través de la observación operativa y la extensión vino como confirmación.

Figura 11 – Rol de las aprehensiones en la resolución del problema



Fuente: los autores

Esta sinergia de aprehensiones genera condiciones que habilitan la aprehensión heurística (flecha 3, Figura 11), que puede conducir a una solución para el problema por un proceso de expansión cognitiva (flecha 4, Figura 11): después de la extensión de la mediana *BA*, el segmento *FP* es congruente con *AD* (lados, que tienen la misma medida debido a la extensión de la mediana *BA*); el ángulo $\widehat{D}$ es congruente con $\hat{F}$ (ángulos, alternos internos); y los ángulos opuestos por el vértice $P\hat{Q}F$ y $A\hat{Q}D$ son congruentes (ángulos opuestos a los lados *FP* y *AD*). Por lo tanto, según el criterio (L.A.Ao.), los triángulos *ADQ* e *PFQ* son congruentes y, por consiguiente, tienen áreas iguales, ya que pueden superponerse. Por lo tanto, las áreas sombreadas (*ABCD* y *DEF*) son iguales, ya que el corte del área (*DEF*) por el segmento *PQ* garantiza la posibilidad de superposición, tal como queríamos demostrar.

CONSIDERACIONES FINALES

A partir de la lectura de algunas operaciones semiocognitivas, específicamente de las aprehensiones figurativas propuestas por Duval (1994, 1995) para el aprendizaje de la geometría, buscamos hacer más tangible el papel de cada una de ellas; nos atrevemos a dar algunos nuevos nombres a estas aprehensiones con el objetivo explícito de aclarar aún más la función de cada una de ellas en la resolución de problemas en geometría.

También buscamos destacar que la resolución de problemas de geometría con figuras está directamente relacionada con el grado de congruencia semántica y equivalencia referencial entre la figura, el enunciado del problema y los procedimientos matemáticos de resolución. Como en el caso, por ejemplo, del problema representado en la Figura 5, cuya solución, en la versión Opcional, podría tener una tasa de éxito mayor debido a la mayor congruencia semántica entre la figura, con la prolongación del lado *BA*, y los procedimientos matemáticos de resolución.

En otro momento, los autores coinciden al hablar del papel problemático que puede presentar la aprehensión perceptiva, como en el problema representado en la Figura 2, donde una aprehensión perceptiva inmediata, debido a la anamorfosis en la cara *CBFG* del cubo, llevó a una tasa mínima de aciertos, solo del 21%. Sin embargo, si la observación de la figura se asociara con lo expresado en el enunciado (el texto dice que la figura es un cubo), es decir, si se produjera una aprehensión perceptiva atenta, probablemente la tasa de aciertos sería mucho mayor. O también, en el problema representado en la Figura 3, donde la reacción automática ante el triángulo, como resultado de la aprehensión perceptiva inmediata, conduce a una respuesta incorrecta al aplicar el teorema de Pitágoras.

Desde una perspectiva didáctica, creemos que este trabajo puede dejar algunas consideraciones para el aprendizaje de la geometría. En primer lugar, se debe priorizar la aprehensión perceptiva atenta sobre la aprehensión perceptiva inmediata, consolidándose en movimientos sinérgicos, entre el enunciado del problema y la mirada no icónica sobre la figura, denominada por Duval (2022) como "el ojo del inventor". Además, esta aprehensión aún desempeña un papel fundamental en la identificación de elementos figurales, que pueden resultar en conocimientos matemáticos útiles para la resolución del problema. Por ejemplo, hay que reconocer que dos ángulos son opuestos por el vértice lleva a considerar, mediante un proceso de expansión cognitiva, que tienen la misma medida.

Por consiguiente, los autores consultados advierten que "un trazo añadido en una figura en un problema de geometría puede no tener claramente un objetivo definido, algún conocimiento matemático a ser utilizado, sino que simplemente se produce con la intención de intentar una salida para la resolución del problema propuesto [abducción]" (Moretti; Cans, 2024, p. 310). Duval (1995, p. 181) también había advertido: "es el proceso de abducción el que orienta a la deducción". Este fue el caso, ejemplificado en los problemas representados por las Figuras 5 y 9, donde la inserción de un trazo hizo mucho más visibles los procedimientos matemáticos de resolución.

En segundo lugar, estas modificaciones figurativas son pertinentes a la aprehensión operativa y tienen fines heurísticos, es decir, potencian la capacidad heurística de las figuras: una propiedad inerte e inherente a toda figura geométrica. Por lo tanto, deben ser estimuladas por el profesor y practicadas por los alumnos, ya que la aprehensión operativa en sinergia con la aprehensión perceptiva atenta da origen a la aprehensión heurística, la cual reúne las condiciones para que una expansión cognitiva encuentre una solución definitiva para el problema.

REFERENCIAS

Coordenadoria de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior/Comitê Francês de Avaliação da Cooperação Universitária com o Brasil. (1996). Programa de Pesquisa sobre o Ensino de Matemática. *Relatório do Acordo 174/95*. UFSC & UNISTRA.

D’Amore, B.; Pinilla, M. I. F. & Iori, M. (2015). *Primeiros Elementos de Semiótica: sua presença e sua importância no processo de ensino-aprendizagem da matemática*. (M. C. Bonomi, Trad.). Livraria da Física.

Duval, R. (1994). Les differents fonctionnements d'une figure dans une démarche geometrique. *Répères* (n. 17, pp. 121-138). Topiques éditions.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine : registres sémiotiques et apprentissages intellectuels* (1ª ed.). Peter Lang.

Duval, R. (1998). Como Analisar a Questão Crucial da Compreensão em Matemática?(Méricles T. Moretti, Trad.). *Revista Eletrônica de Educação Matemática - REVEMAT*, 13(2), pp. 1-27, Florianópolis: UFSC/MTM/PPGECT.

Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales* (1ª ed., M. V. Restrepo, Trad.). Universidad del Valle.

Duval, R. (2012). Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de Congruência. (M. T. Moretti, Trad.). *Revista Eletrônica de Educação Matemática - REVEMAT*, *7*(1), pp. 118-138. https://doi.org/10.5007/1981-1322.2012v7n1p118

Duval, R. (2017). *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales* (2ª ed., M. V. Restrepo, Trad.). Universidad del Valle.

Duval, R. (2022). As condições cognitivas da aprendizagem da geometria: desenvolvimento da visualização, diferenciação dos raciocínios e coordenação de seus funcionamentos (C. R. M. Arinos, J. L. M. de Freitas, & M. T. Moretti, Trads.). *Revista Eletrônica de Educação Matemática - REVEMAT*, *17*, pp. 01-52. https://doi.org/10.5007/1981-1322.2020.e85937

Gomes Filho J. (2004). *Gestalt do objeto: sistema de leitura visual* (6ª ed.). Escrituras.

Guillaume, P. (1979). *La Psychologie de la forme*. Flamarion.

Hillesheim, S. F. (2021). *Engenharia Didática Colaborativa para a Aprendizagem da Geometria: possibilidades semiocognitivas na formação de professores pedagogos.* [Tese de Doutorado, Universidade Federal de Santa Catarina]. Repositório Institucional da UFSC.

Koffka, K. (1936). *Principles of Gestalt psychology*. Kegan Paul, Trench, Trubner & Co., Ltd.

Mello, E. G. S. de. (1999). *Demonstração: uma sequência didática para a introdução de seu aprendizado no ensino da geometria.* [Dissertação de Mestrado, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo].

Moretti, Méricles T. (2013). Semiosfera do olhar: um espaço possível para a aprendizagem da geometria. *Acta Scientiae*, 15(2), pp. 289-303.

Moretti, Méricles T. & Brandt, C. F. (2015). Construção de um desenho metodológico de análise semiótica e cognitiva de problemas de geometria que envolvem figuras. *Educação Matemática Pesquisa*, 17(3), pp. 597-616. http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/viewFile/25673

Moretti, Méricles T. & Brandt, C. F. (2021). Elementos semiocognitivos que perpassam a aprendizagem matemática segundo Raymond Duval. In F. J. Rauen, M. C. Cardoso, B. M. de Andrade Filho, & L. B. M. Morini (Orgs.), *Linguagem e ensino de ciências e matemática: perspectivas de interfaces*, p. 53-73. Real Conhecer. https://editora.realconhecer.com.br/

Moretti, Méricles T.; Brandt, C. F. & Almouloud, S. Ag. (2022). Congruência semântica: um fenômeno semiótico e cognitivo a ser levado em conta na aprendizagem matemática. *Quadrante: Revista de investigação em Educação Matemática*, 31(1), pp. 92-112.

Moretti, Méricles T. & Cans, A. (2024). Releitura das Apreensões em Geometria e a Ideia de Expansão Figural a Partir dos Estudos de Raymond Duval. *Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática – JIEEM*, 16(4), pp. 303-310. https://doi.org/10.17921/2176-5634.2023v16n3p303

Sabel, Eduardo; Moretti, Méricles T. Para além da comunicação em sala de aula: o papel das funções discursivas na aprendizagem matemática. Educação Matemática em Foco (UFPB). v. 10, 2022.

CAPÍTULO VI

Análisis de los antecedentes históricos de la "paradoja cognitiva" de Duval

Bruno D'Amore [I II III]
Martha Isabel Fandiño Pinilla [II]
Maura Iori [II]
Maurizio Matteuzzi [IV]

[I] Profesor titular experto, Doctorado Interinstitucional, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia
[II] NRD, Dipartimento di Matematica, Università di Bologna, Italia
[III] Miembro de la Academia de las Ciencias de Bologna, Italia
[IV] Dipartimento de Filosofia, Università di Bologna, Italia

Resumen: En un famoso artículo publicado en 1993, Raymond Duval evidenciaba el siguiente hecho: *el estudiante puede confundir el objeto matemático O, que está tratando de construir cognitivamente, con una determinada representación semiótica R(O) de dicho objeto*. Explicaba que esta confusión se debía a una especie de paradoja inevitable: sólo quien ha construido el objeto O, puede reconocer R(O) como representación de O y no como objeto en sí. Esta reflexión tuvo una gran influencia en los investigadores en los años sucesivos. Pero, varios estudiosos de semiótica, si bien es cierto no lo dicen con estas mismas palabras, ya habían evidenciado el fenómeno. En este escrito nos proponemos estudiar algunos de ellos.
Palabras claves: paradoja cognitiva de Duval, semiosis y noesis, construcción cognitiva del objeto matemático, representación semiótica de un objeto matemático.
Abstract: In a famous article published in 1993, Raymond Duval highlighted a simple fact: *the student may confuse the mathematical object O he is trying to build cognitively with one of its semiotic representations R(O)*. Duval explained that this confusion was due to a sort of inevitable paradox: only someone who has already built O, can recognize R(O) as a representation of O and not as an object in itself. Thereafter, this thought has been extremely influential for researchers. However, even if in different terms, many scholars of semiotics have emphasized the same phenomenon. In this paper we propose to remind some of them.

Keywords: Duval's cognitive paradox, semiosis and noesis, cognitive construction of mathematical objects, semiotic representations of a mathematical object.

1. PREMISA

Los estudios de Raymond Duval abrieron, indudablemente, una nueva línea de investigación internacional en Didáctica de la Matemática, tanto teórica como práctica; reconocer que uno de los mayores obstáculos en el aprendizaje de la Matemática está relacionado con las características específicas del único instrumento posible de su denotación, los sistemas semióticos, ha abierto caminos hasta hace algunos tiempos inexplorados. A partir de los '90, un gran número de estudiosos de todo el mundo, cada vez con mayor profundidad, están afrontando el tema. Afirmamos que en la actualidad éste es uno de los temas de mayor difusión en el mundo, en ámbito investigativo.

Precisamente por el hecho de que hoy es considerado un tema clásico, nos sentimos autorizados a abrir otra línea de investigación en esta misma temática, la línea histórico-epistemológico-filosófico-crítica, para encontrar una ascendencia consolidada e ilustre de las reflexiones del psicólogo francés Raymond Duval.

Un "instrumento matemático", una vez consolidado, se hace "objeto matemático" de conocimiento e inicia, por tanto, una caracterización histórica que lo teoriza al interior de un sistema que tiene como representantes diversos estudiosos; generalmente no especialistas del ámbito, en nuestro caso no necesariamente didácticos, sino filósofos principalmente. Es esto lo que sucede con todos los "instrumentos matemáticos", una vez que se convierten en objetos de la Matemática (Douady, 1986; Sfard, 1991).

Más adelante aludiremos a la temática introducida por Duval bajo la forma de paradoja cognitiva. Mostraremos y comentaremos, brevemente, sin ninguna intención de exhaustividad, algunos precedentes: autores que han sostenido sustancialmente la misma tesis de este estudioso, en diversos ámbitos, todos filosóficamente relevantes.

Debemos hacer notar que citaremos explícitamente investigadores contemporáneos que publicaron alguna frase análoga a la de Duval, no quienes, de alguna forma, afrontaron temas similares.

Nuestro objetivo no es delinear una posición específicamente teórica relacionada con el tema que aparece en el título; nuestro objetivo es el de evidenciar cómo, en repetidas ocasiones, o tal vez siempre, las ideas que cambian el curso de los estudios relativos a una disciplina o a una teoría, tuvieron precedentes ilustres que es necesario tomar en consideración para entender mejor y con mayor profundidad dichas ideas. Un estudio histórico-filosófico de este tipo nos parece que reviste cierto interés en quien se ocupa profesionalmente de los temas en cuestión, en este caso de la Didáctica de la Matemática en relación con el uso de registros semióticos para el acceso a los objetos matemáticos y proponerlos para el aprendizaje de los estudiantes.

Aceptamos la existencia de la paradoja cognitiva de Duval de la forma como él la presentó hace 20 años aunque, es evidente, que con el pasar del tiempo, los estudios de dicho autor, de otros, incluso nuestros, llevaron a reflexiones cada vez más profundas y críticas. Por tanto, en este artículo se acepta y se examina la paradoja como se presentó históricamente en 1993 Nuestro trabajo pretende realizar un análisis histórico que, en un futuro, puede fungir como sustento para un análisis crítico posterior. Si bien durante el curso del texto se realizarán referencias a la praxis didáctica de enseñanza-aprendizaje – sin entrar en los detalles que amerita una reflexión al respecto – hacemos explícito que este estudio no pretende brindar una consecuencia didáctica, sino que estará focalizado en un análisis histórico.

2. **RAYMOND DUVAL**

Veamos cómo Raymond Duval enunciaba, hace 20 años, su famosa *paradoja cognitiva del pensamiento matemático*, la cual tuvo una fuerte repercusión:

> (…) por un lado, el aprendizaje de los objetos matemáticos sólo puede ser un aprendizaje conceptual y, por el otro, es sólo a través de representaciones semióticas que es posible una actividad sobre los objetos matemáticos. Esta paradoja puede constituir un verdadero círculo vicioso para el aprendizaje. ¿Cómo, sujetos en fase de aprendizaje, podrían no confundir los objetos matemáticos con sus representaciones semióticas si ellos únicamente pueden tener relación con las representaciones semióticas? La imposibilidad de un acceso directo a los objetos matemáticos, más allá de cualquier representación semiótica, hace la confusión casi inevitable. Y, por el contrario, ¿cómo pueden los estudiantes adquirir el dominio de los tratamientos

> matemáticos, necesariamente ligados a las representaciones semióticas, si no tienen el domino conceptual de los objetos representados? Esta paradoja es aún más fuerte si se identifica actividad matemática con actividad conceptual y si se consideran las representaciones semióticas como secundarias o extrínsecas. (Duval, 1993, p. 38; la traducción es nuestra, concordada con el Autor)[1]

En las últimas líneas del texto de Duval ya se explica cómo debe entenderse la paradoja cognitiva: el docente propone al estudiante representaciones semióticas de un objeto matemático con la intención que el estudiante lo construya cognitivamente; pero lo único que puede hacer es proponerles representaciones semióticas dado que no existe forma alguna de mostrar, indicar (en el sentido etimológico de la palabra), dicho objeto; el estudiante entra, por tanto, concretamente en contacto con representaciones, no con el objeto, aprende a hacer referencia a dichas representaciones, no al objeto, y a manipularlas. Parecería un itinerario destinado al fracaso cognitivo. Y, por el contrario, el estudiante, al final, aprende, construye, hace propio el objeto, en una situación que tiene mucho de paradójica y que es de gran interés estudiar siempre más en profundidad.

En la sistematización teórica de Duval, las representaciones semióticas de un objeto matemático deben ser interpretadas como una operación explícita de designación, distintas del objeto matemático (abstracto, ideal, que constituye un invariante de ellas) a la cual hacen referencia; del cual son, precisamente, representaciones.

Si se le pregunta a un niño pequeño: ¿qué es “el número tres”?, él mostrará tres dedos, alzando la mano derecha. La pregunta tiene que ver con el objeto matemático “tres” pero tiene como respuesta una representación semiótica de dicho objeto, normalmente sólo una. Si se le plantea la misma pregunta a un niño que está terminando la escuela primaria, él seguramente escribirá con un lápiz en una hoja de papel la cifra 3. Cambia la

---

[1] El texto reportado es el que se encuentra en Duval (1993); siendo pasados más de veinte años, es obvio que todos nosotros y en particular el mismo autor identifiquen en dicho texto frases que podrían ser escritas de otra forma, incluso teniendo cuenta de los estudios críticos sucesivos llevados a cabo por el mismo Duval y por otros investigadores. Pero nuestro objetivo no es crítico-analítico, queremos sólo hacer una reseña histórica y por tanto debemos aceptar los textos por lo que son en origen y usar las fuentes de forma correcta, sin aportar modificaciones.

representación, pero el problema de la diferencia entre objeto matemático y su representación permanece. Sin duda, la pregunta va más allá de la capacidad de los sujetos: una pregunta con esta carga epistemológica no puede tener otra respuesta por parte de los niños, y las cosas no cambian con el pasar del tiempo.

Si se pregunta a un joven de quince años: ¿qué es una recta?, podemos tener como respuesta el dibujo de una mancha de grafito, derecha, más o menos larga y delgada; o una ecuación lineal del tipo $ax+by+c=0$, escrita con un lápiz sobre una hoja de papel. En los dos casos se trata de representaciones semióticas del objeto matemático pedido, no es el objeto matemático al cual se hace referencia.

Si se pregunta a un estudiante de los últimos años de la secundaria: ¿qué es una derivada?, él escribirá $f'(x)$, ofreciéndonos una representación semiótica, cuando la pregunta hace referencia al objeto matemático "derivada". Y esta historia prosigue en la universidad, sin muchos cambios.

Sólo un experto intentaría dar una respuesta epistemológicamente significativa a la pregunta planteada sobre un objeto matemático, mostrando dos (o más) representaciones semióticas de este, reconociendo que una única representación semiótica del objeto matemático no permite agolpar todos los componentes conceptuales del objeto, o aquellos más idóneos a la situación (D'Amore, Fandiño Pinilla e Iori, 2013). En otras palabras, no permite transformación alguna (tratamiento o conversión) de la representación, por tanto, no permite *objetivación* alguna, que se tiene que entender aquí como la toma de conciencia sobre éste (referido objeto), del cual no se era consciente antes de producir (por sí mismos) una representación (Duval, 1995).

Por otro lado, demasiadas representaciones tienden a confundir al aprendiz, puede ser que no todas sean relevantes conceptualmente hablando y, por tanto, no favorecer la construcción cognitiva del objeto (D'Amore et al., 2013). La multiplicidad de las representaciones y de sus transformaciones debe ser estudiada, monitoreada y calibrada con atención en todo contexto o situación. Esto requiere por parte del docente una formación específica, que no se adquiere espontáneamente, ni tan sólo con la "experiencia". Una formación que no se centre sólo en los contenidos matemáticos específicos a enseñar, en las actividades a desarrollar, en las situaciones o en los problemas a proponer, para introducir un determinado contenido y para afrontar un determinado examen, sino también, y básicamente, sobre la dimensión epistemológica (que traduce la exigencia, transversal a todos los conocimientos, de no confundir los objetos con sus representaciones, y que se encuentra también en la *República*, VI, 509d–510b, de Platón) y sobre la dimensión semiótica y cognitiva peculiar de la Matemática (para profundizar tales aspectos véase: Duval, 2009b, 2011, 2012).

La caracterización semio-cognitiva de los objetos matemáticos que Duval (1995, 1998a, 1998b, 2006, 2009a, 2009b, 2011, 2012) propone, tiene como objetivo el de ofrecer diversos instrumentos para intervenir eficazmente en las dificultades que los estudiantes encuentran en la gestión de las representaciones semióticas de los objetos matemáticos. Un objeto matemático no es otra cosa que el invariante (operatorio o lógico-discursivo) de una multiplicidad de representaciones semióticas posibles (Duval, 1995, 2009b, 2011). Dicha caracterización no requiere hipótesis alguna sobre "existencia" o "pre-existencia", "construcción dentro de sí" o "comprensión en sí" del objeto matemático; en otras palabras, ninguna interpretación filosófica (de tipo realista o idealista, constructivista o platónica) puede ser deducida de la caracterización semio-cognitiva que Duval da de los objetos matemáticos. El objeto de conocimiento emerge del reconocimiento de que dos o más representaciones semióticas son representaciones de un "mismo objeto", aunque sus contenidos no tienen nada en común. Sin embargo, como ya lo hemos enunciado, el objeto matemático se distingue de los objetos de las otras disciplinas científicas por la modalidad de acceso, meramente semiótico, no perceptivo (directo o instrumental), es decir, el objeto matemático emerge meramente de la actividad específica de producción y de transformación (tratamientos y conversiones) de signos oportunos (representaciones semióticas) dentro o entre particulares sistemas semióticos (registros de representación). La falta de un doble acceso, semiótico o perceptivo (directo o instrumental), a los objetos matemáticos lleva casi inevitablemente a confundir una cierta representación de un determinado objeto matemático, R(O), con el mismo objeto O (Duval, 1993); obstaculizando así, la construcción cognitiva del objeto, es decir, la gestión de las representaciones semióticas de las cuales el objeto matemático emerge como invariante.

Para la comprensión de los procesos de aprendizaje de la Matemática, la cuestión relevante que Duval afronta no es si los objetos matemáticos vienen antes o después de la actividad matemática, antes o después de las prácticas institucionales o personales, o antes o después de las representaciones semióticas, sino que es la siguiente: "¿Cómo no confundir un objeto matemático con una representación semiótica del objeto en cuestión, si no es posible acceder al objeto matemático sin producir (implícitamente o explícitamente) una representación semiótica?” (Duval, 2006, p. 69).

Esta cuestión es ignorada por numerosos estudios de los aspectos semióticos y cognitivos de los procesos de aprendizaje, de todos aquello que asumen implícitamente que los procesos cognitivos de aprendizaje sean idénticos en todos los campos del conocimiento: en Matemática como en Biología, Física o Química, entre otros. El enfoque pragmatista de tradición peirceana y el enfoque constructivista de tradición piagetiana constituyen dos ejemplos.

Para la enseñanza-aprendizaje de la Matemática, por tanto, la cuestión de cómo se puede acceder a los objetos matemáticos se vuelve crucial, y es relacionada estrechamente con aquella de los procesos semio-cognitivos, específicamente aquellos movilizados en Matemática, es decir, con la producción o con la elección de representaciones semióticas en los oportunos registros y su movilización (implícita o explícita) en dos tipos de transformaciones: tratamiento (transformación de una representación a otra del mismo tipo, es decir, en el mismo registro semiótico, del mismo objeto) y de conversión (transformación de una representación semiótica en otra de tipo diferente, es decir, en otro registro, del mismo objeto). Está en esto, precisamente, la construcción cognitiva del objeto matemático (D’Amore et al., 2013). De aquí la necesidad de tomar conciencia del fenómeno para poder reconocer, interpretar y afrontar las dificultades de comprensión que el aprendizaje de la Matemática inevitablemente evidencia en todos los niveles escolares.

A nuestro criterio, Raymond Duval tenía razón cuando afirmaba: *no existe noética sin semiótica* (1993). Hoy sabemos que debemos pasar a través de varias representaciones semióticas para alcanzar la gradual y consciente construcción cognitiva del objeto, es decir, lograr que el aprendiz se dé cuenta que, frente a un objeto O, existen varias representaciones semióticas R_i(O) de O ($i = 1, 2, 3, \ldots$). El día en el cual dominará dichas representaciones, las sabrá usar en contextos oportunos y las podrá transformar las unas en las otras, entonces podremos decir que el estudiante ha construido cognitivamente O. Esta es la propuesta filosófica-didáctica de D’Amore (2003).

Pero, como ya hemos dicho, la posición de Duval tiene análogas, ilustres y precedentes enunciaciones que mostraremos y analizaremos con el fin de evidenciar el hecho de que su posición no es un *unicum* en la historia de lo que podemos llamar *semiótica en el aprendizaje*. En otras palabras, una posición cercana a aquella de Duval se encuentra en varios pensadores antecedentes y contemporáneos, no necesariamente estudiosos de la Didáctica.

3. LOS ANTECEDENTES FILOSÓFICOS O SEMIÓTICOS

La relación entre conocimiento, lenguaje, mundo, nos lleva a un problema semántico milenario, a la problemática de explicar qué es el *significado,* es decir, disponer de un marco teórico que muestre las relaciones entre palabras, ideas y cosas, problema que se inserta directamente en la Teoría del conocimiento, o Gnoseología, y en aquella del ser, u Ontología. De hecho, estamos en el punto de apoyo de toda theoresis filosófica. Aquí deberíamos, como consecuencia, describir todo el desarrollo del pensamiento humano. Sin embargo, nuestra intención dista de querer ser exhaustivos en este aspecto, sino que procuraremos hacer referencia a lo que nos compete para nuestro estudio actual.

PLATÓN (-427 – -347)

Se considera a Platón como un punto de referencia de toda la filosofía sucesiva. La teoría platónica del conocimiento y, en consecuencia, de la Pedagogía, se centra en la asunción de que el alma humana tuvo una vida precedente, en el mundo de las ideas, o en el *hiperuranio* (literalmente: más allá del cielo). Ésta es una breve síntesis de la célebre teoría de la *anamnesis*: el conocimiento es recuerdo, recuperar lo que en un tiempo fue conocido por contacto directo. La directa consecuencia en el plano pedagógico es evidente: nada pasa del maestro al discípulo, lo que sucede es que el maestro suscita en el discípulo un proceso de reminiscencia, ayudándole a ‘recordar’. Surge inmediatamente por tanto la idea de que quien aprende debe cumplir un proceso del todo interior, encontrando dentro de sí el conocimiento, la verdad.

Ahora bien, pensemos en estos términos la paradoja cognitiva de la cual nos estamos ocupando: ¿cómo puede el aprendiz buscar dentro de sí aquello que no conoce, dado que él no sabe qué buscar? Todo lo que el maestro puede ofrecer no es obviamente el objeto matemático, sino una expresión (por ejemplo, lingüística) que tiene como objetivo denotarlo

(D'Amore y Fandiño Pinilla, 2012). Es así como el estudiante recibe un *denotans* (una expresión) momentáneamente privado de su *denotatum* (el objeto al que la expresión se refiere), dado que él aún no tiene acceso al objeto matemático involucrado. Y, sin embargo, esta incitación puede hacer que el estudiante 'excave' dentro de sí en la búsqueda de una imagen (un recuerdo) del ente adecuado que, según Platón, él ya encontró indudablemente en el mundo de las ideas. De aquí derivan todas las teorías pedagógicas que asumen al aprendiz como parte activa, como sujeto y no como un objeto amorfo del proceso de aprendizaje (incluyendo metáforas como la lastra de mármol no esculpida o no cincelada, el vaso que debe ser llenado, entre tantas). Y esto vale también para otros autores que, a diferencia de Platón, no asumen la hipótesis ontológicamente drástica de la existencia de un oportuno sobre-mundo: para ~~tantos~~ otros autores, también en tiempos modernos, el proceso de aprendizaje se desarrolla totalmente "dentro" del aprendiz, y no es otorgado por el maestro. En el lado opuesto encontramos, notamos de paso, la teoría del *trasiego* que encuentra su máxima expresión en la pedagogía de los Jesuitas.

Por tanto, inferimos de aquí un modelo de la paradoja inicial: lo que transmigra del maestro al alumno es un signo lingüístico considerado en sí mismo, sin ninguna relación con un objeto, una pura posibilidad de funcionar como signo o como representación semiótica de un objeto matemático, para decirlo en términos actuales, y aquí se desencadena el procedimiento de la mayéutica socrática, el educar como *e-ducere* 'portar afuera' (en sentido etimológico exacto), de las reminiscencias de la vida precedente, el objeto matemático, un recuerdo, como en el admirable y célebre apartado de la obra del *Menon*, muy bien conocido, en el cual Sócrates induce al esclavo, quien ignora los fundamentos de la geometría, a re-descubrir, a recordar, una verdad geométrica.

Nuestra paradoja se resuelve, según Platón, asumiendo que el alma del aprendiz, humana e inmortal, haya "visto" el objeto matemático en su vida precedente, antes de su nacimiento, que lo haya olvidado en el momento de su nacimiento y que pueda recordarlo en situaciones adecuadas.

Pero en Platón hay mucho más. Tomamos de *República*, VI, 510c–511a (Platón, 1992):

> Sócrates: Pues veamos nuevamente; será más fácil que entiendas si te digo esto antes. Creo que sabes que los que se ocupan de geometría y de cálculo suponen lo impar y lo par, las figuras y

> tres clases de ángulos y cosas afines, según lo investigan en cada caso. Como si las conocieran, las adoptan como supuestos, y de ahí en adelante no estiman que deban dar cuenta de ellas ni a sí mismos ni a otros, como si fueran evidentes a cualquiera; antes bien, partiendo de ellas atraviesan el resto de modo consecuente, para concluir en aquello que proponían al examen.
> Glaucón: Sí, esto lo sé.
> S: Sabes, por consiguiente, que se sirven de figuras visibles y hacen discursos acerca de ellas, aunque no pensando en éstas sino en aquellas cosas a las cuales éstas se parecen, discurriendo en vista al Cuadrado en sí y a la Diagonal en sí, y no en vista de la que dibujan, y así con lo demás. De las y de estas cosas que dibujan se sirven como imágenes, buscando divisar aquellas cosas en sí que no podrían divisar de otro modo que con el pensamiento.
> G: Dices verdad.
> S: A esto me refería como la especie inteligible. Pero en esta su primera sección, el alma se ve forzada a servirse de supuestos en su búsqueda, sin avanzar hacia un principio, por no poder remontarse más allá de los supuestos. Y para eso usa como imágenes a los objetos que abajo eran imitados, y que habían sido conjeturados y estimados como claros respecto de los que eran sus imitaciones.

El matemático quiere comunicar el objeto matemático en sí, pero se sirve de imágenes y a aquellas parece que hace referencia, pero las cosas no están así; usa estas imágenes para evocar ideas en sí, el cuadrado en sí, la diagonal en sí, objetos que "no podría divisar de otro modo que con el pensamiento". Platón no tiene intención de hacer un discurso didáctico, sino en general matemático, y termina con capturar el sentido de la cosa desde un punto de vista mucho más amplio.

ARISTÓTELES (-384 – -322)

En los escritos de lógica de Aristóteles encontramos el primer tratado dedicado al lenguaje, *Sobre la interpretación* (*De interpretatione*, en latín; *Perì hermeneias*, en griego). Desde las primeras palabras, Aristóteles proporciona una teoría del significado:

> Así, pues, lo [que hay] en el sonido son símbolos de las afecciones [que hay] en el alma, y la escritura [es símbolo] de lo [que hay] en el sonido. Y, así como las letras no son las mismas

> para todos, tampoco los sonidos son los mismos. Ahora bien, aquello de lo que esas cosas son signos primordialmente, las afecciones del alma [son] las mismas para todos, y aquello de lo que éstas son semejanzas, las cosas, también [son] las misma. (Aristóteles, *Sobre la interpretación*, 1)

Por tanto, las letras escritas son símbolos de los sonidos de la voz; los sonidos de la voz son símbolos de las afecciones del alma y las afecciones del alma son semblanzas o imágenes de las cosas (*pragmata*). Mientras las cosas y las afecciones del alma son *las mismas para todos* los seres humanos, las expresiones lingüísticas que convencionalmente designan las afecciones del alma, no lo son. Así, mientras existe una relación convencional, arbitraria, entre las expresiones lingüísticas y las afecciones del alma, entre estas últimas y las cosas existe una relación motivada, icónica, basada en una semejanza "natural". Las cosas se conocen a través de las afecciones del alma, sin que exista conexión directa entre las cosas y las expresiones lingüísticas que a esas reenvían. Las expresiones lingüísticas, por tanto, son símbolos no de las cosas, sino de las 'afecciones del alma', conexas a dichas cosas.

Pero, ¿qué son exactamente estas 'afecciones del alma', cuya compartición es garantía de nuestro entendernos mutuamente? La expresión aristotélica es *pathémata tes psichés*. Ahora bien, *páthema* viene del verbo *pascho*, padecer, una de las categorías aristotélicas, en contraposición de *ago*, actuar. Y es así como nos encontramos frente a esquemas conceptuales recibidos del intelecto, que los acepta pasivamente. En este sentido estos son, por tanto, *objetivos* y por ende, a mayor razón, *ínter-subjetivos*. Estos, a su vez, están por los objetos, que son los mismos para todos. Entonces, la estructura explicativa del problema del significado es la siguiente: las afecciones del alma, es decir, los objetos mentales (conceptos, pensamientos o entidades mentales), son imágenes de cosas y nosotros expresamos los objetos mentales a través de signos lingüísticos, que no son los mismos para todos, y prueba de esto es la multitud de idiomas. Pero el compartir de los objetos mentales (nótese que Aristóteles usa, para alma, *psichés*, que también podría ser correctamente traducido como 'mente') permite, por fin, compartir los significados.

¿Cómo se presenta entonces nuestra paradoja? La situación, aún en ausencia de la hipótesis del sobre-mundo, no presenta grandes diferencias con respecto a la de Platón: el maestro ofrece signos que, para él, son símbolos de objetos mentales; mientras que para el aprendiz son manchas de tinta o sonidos de la voz, por lo menos en un primer momento, entidades que no designan objeto mental alguno. El aprendiz, recordémoslo, tiene dentro de sí los mismos objetos mentales del maestro, dado que *son los mismos para todos*, y, para entender, debe lograr determinar, dentro de sí, cuál precisamente, entre todos esos, es imagen de las cosas, o similar a ellas (hechos, acciones, prácticas operativas, etc.) que el maestro le está proporcionando.

En otras palabras, para el aprendiz A, una expresión lingüística L significa directamente el objeto mental O si y sólo si O es el objeto mental al cual la expresión L está ligada convencionalmente. L, además, significa indirectamente la cosa C si y sólo si C reenvía al objeto mental O (aquel al cual la expresión L está convencionalmente ligada) gracias a alguna relación de semejanza entre O y C [para un análisis más completo desde un punto de vista filosófico, se recomienda leer a Charles (2000)].

Las categorías de Aristóteles se pueden interpretar como esquemas conceptuales preformados por el intelecto. Esto muestra cómo las distinciones de Aristóteles establecen una interpretación del significado de los “supuestos analíticos”, distintos de las ideas platónicas. Para Aristóteles, sólo las expresiones lingüísticas, las palabras leídas o escuchadas, permiten recordar lo que ya conocemos (afecciones del alma). Así, sólo la escucha, la lectura, las palabras conocidas y recordadas, además de la experiencia adquirida, permiten al aprendiz reconocer lo que tiene la apariencia de mancha escrita, o de sonido de la voz, como símbolo de un objeto mental que él, aprendiz, ya posee. Se requiere, por tanto, por parte del alumno, del reconocimiento de una relación convencional entre expresión lingüística que es transmitida del maestro a él, en cuanto transmisible, y el objeto mental, no transmitido ni transmisible, pero pre-existente en su mente. Lo que viaja, lo que aparece en el mundo es la expresión como objetivación del pensamiento. En los dos extremos del viaje encontramos los dos objetos mentales: el objeto del maestro y el del estudiante, que se asumen a priori como idénticos. El aprendizaje consiste entonces en el descubrimiento por parte del estudiante de dicha identidad, a través del uso de expresiones que constituyen sus representaciones semióticas.

El aprendizaje debe, de todas formas, partir de cosas familiares o ya conocidas, de cosas observadas, o de expresiones o representaciones lingüísticas o no lingüísticas ya reconocidas como representaciones de objetos mentales. En otras palabras, el aprendiz debe conocer algo de todo aquello que se dispone a aprender. Para Aristóteles, como afirma Eikeland (2008): "Todos los estudiantes tienen necesidad de una forma de 'conocimiento tácito' o de una experiencia de la cual partir. Una particular forma de percepción o de comprensión es un pre-requisito y es presupuesta" (p. 257).

Para Aristóteles, nuestra paradoja se resuelve entonces presuponiendo la existencia de objetos mentales, los mismos para todos, a los cuales se puede acceder directamente a través de las expresiones lingüísticas que convencionalmente los designan, pero que es necesario adquirir antes, mediante la lectura o la escucha, además de considerar como medio la experiencia, sea cual sea su naturaleza.

LA SEMÁNTICA ESTOICA: ZENÓN DE CIZIO (-333 – -263), CLEANTE DE ASSO (-330 – -232), CRISIPPO DE SOLI (-280 – -208)

Poco tiempo después de la muerte de Aristóteles, pero sobre presupuestos teóricos muy diferentes, nace una teoría semántica igualmente importante, destinada a tener una gran influencia posterior: el estoicismo. Ésta se convertirá en la filosofía griega más apropiada a la mentalidad fuertemente práctica de los romanos, impregnando de sí misma la filosofía latina de la edad clásica, es decir, aquella que rige desde el siglo -I hasta los primeros siglos del imperio. La cultura latina privilegia los aspectos prácticos, por lo cual el estoicismo se consolida prevalentemente en los aspectos morales, es decir, en el plano ético; sin embargo, la difusión de la parte teorética fue muy poca, hecho del cual incluso hoy se evidencian las consecuencias: aún es poco conocida, fuera del estrecho círculo de los expertos. Para el estoicismo la Filosofía se articula en tres grandes campos: el de la *lógica*, el de la *física* (la acepción de este término, en griego, es muy diferente de la nuestra de hoy en día; esto porque *physis* significa 'naturaleza', podríamos interpretar 'física' como ciencia de la naturaleza en general) y el de la *ética*.

En relación con nuestro argumento, hay que tomar en consideración una teoría del significado, es decir, el así llamado 'triángulo estoico' o triángulo semántico. Los Estoicos, así como Aristóteles, se dan cuenta perfectamente que la relación lenguaje/mundo necesita como mínimo de otro elemento para explicar el concepto de 'significado'. En otros términos, se debe partir de la constatación de que el significado, o *denotatum*, no es directamente la cosa del mundo. Por ejemplo, tomando un ejemplo clásico de la semántica estoica, podemos suponer la siguiente situación: cuando yo hablo con el bárbaro, que no entiende mi idioma, y le digo "Ves a Dione que camina", el bárbaro no me entiende. Sin embargo, él percibe mis palabras, porque no es sordo; e igualmente, puede ver "la cosa" porque, no siendo ciego, ve a su vez a Dione que camina delante de nosotros. Pero, aún así él no me comprende. ¿Qué es lo que le falta? Para responder esta pregunta es necesario, en primer lugar, considerar el triángulo semántico. Tres son los elementos que entran en juego en una expresión lingüística y que constituyen, precisamente, el triángulo semántico: el *significante* (*semainon*), es decir, el aspecto fonético o la expresión (palabra, frase) pronunciada, el *significado* (*semainómenon*), es decir, el contenido asociado a la expresión y el *referente* (*tynchánon*), es decir, la cosa o realidad concreta a la cual la expresión hace referencia (objeto material o evento).

Los Estoicos nos advierten que, de los tres términos, dos son corpóreos, el significante y el referente, mientras que el otro, el significado, no lo es. El significado no es ni una afección del alma en el sentido aristotélico, ni una idea en el sentido platónico; no es pensamiento ni algo puramente psicológico (porque en este caso sería corpóreo),[2] así como no es una entidad invariante entre comunidades lingüísticas o entre culturas; en cuanto incorpóreo, el significado es un estado de cosas, una forma de ser o de ver las cosas, una unidad cultural (Eco, 1984). El significado (*semainómenon*) asume así la función de medio entre significante (*semainon*) y referente (*tynchánon*) y es condición ineliminable de la comunicación y de la comprensión.

Como evidencia Umberto Eco (1986), Sesto Empírico (II s.) en su *Adversus mathematicos* (*Contra los matemáticos*) identifica el *semainómenon* (significado) con el *lektón*, que es un *asómaton* (incorpóreo), pero la relación aparece, por el contrario, más articulada.

Traducir *lektón* en un idioma moderno es un asunto difícil; hay quienes lo identifican con un término técnico, otros afirman que *lektón* no era originariamente un término técnico porque indicaba la característica principal de las cosas (*pragmata*) de ser usada en los discursos y de significar los sonidos emitidos (Versteegh, 1977).

---

[2] En la física estoica, casi todo constituye una entidad material, incluso Dios, el alma y el pensamiento.

Séneca (-4 – 65), precisamente en referencia al ejemplo anterior, elegido no por caso, trata de traducirlo al latín con *dictum* o *effatum*. Si *lexis* es expresión, *lektón* es lo análogo en forma pasiva, lo expresado, lo denotado. Pero, entre los *lektá*, los Estoicos distinguen, más en particular, aquellos completos de aquellos incompletos. El *lektón* es llamado *completo* si transmite una información que pueda inequívocamente ser juzgada verdadera o falsa. El *lektón* es llamado, por el contrario, *incompleto* si expresa algo que debe ser integrado con alguna otra cosa para transmitir una información que pueda ser juzgada como verdadera o falsa. Por ejemplo, un predicado sin sujeto ("camina") expresa un *lektón* incompleto, mientras una proposición ("Dione camina") expresa un *lektón* completo. Los *lektá* incompletos son por tanto partes de una proposición (sujeto y predicado en nuestro ejemplo), entendidas no como entidades gramaticales sino como contenidos expresados o expresables, virtuales, es decir, considerados independientemente de sus relaciones con un determinado significante. Un *lektón* completo, en combinación con un significante, constituye una proposición que afirma algo plausible de ser juzgado verdadero o falso.

El bárbaro, por tanto, percibe tanto la voz emitida como el evento físico (un hombre, Dione, que camina), pero no reconoce la primera como expresión que reenvía a la segunda, es decir, como elemento portador de sentido, no conociendo la regla (o el código) que permite articular la voz emitida al evento físico (como el humo al fuego, en algún caso), por tanto cuanto expresado o expresable, es decir, el *lektón*; no siendo este último invariante respecto a las culturas.

Y es precisamente esto lo que le falta al bárbaro para la comprensión. El papel del *lektón* es fundamental, porque es precisamente así que se determina la relación funcional entre expresión y cosa, relación virtual, no directa sino, precisamente, mediada.

Volvamos ahora a nuestro problema, dentro de este ulterior panorama explicativo. El aprendiz percibe a través de los sentidos la voz emitida por el profesor, el objeto material o la cosa que el maestro exhibe (una representación de un objeto matemático, para el maestro). El proceso de conocimiento, para los Estoicos, tiene origen precisamente de aquí, de la percepción a través de los sentidos. Esta última, una vez que se adquiere consciencia, se convierte en *representación* (*phantasia*, una impresión en el alma). Una representación es como la impresión de un sello en la cera, es el objeto mismo a producirla en el aprendiz; durante su formación, el alma permanece pasiva y es a través de la representación que el objeto correspondiente se muestra al aprendiz. Después que el objeto fue removido, permanece en el aprendiz la memoria del objeto.

Un gran número de memorias de este tipo constituyen lo que los Estoicos llaman *experiencia* (*empeiria*). Los conceptos se forman en la fase sucesiva, a partir de las representaciones, y se forman espontáneamente (cuando representaciones símiles se funden en nociones universales, sin una plena consciencia por parte del aprendiz) o conscientemente (a través de una actividad reflexiva que permita al aprendiz individuar semejanzas y analogías entre las representaciones, y combinarlas en conceptos o conocimientos). Según Cicerón (-106 – -43) (*Academica*, II, 47), Zenón comparaba la percepción a una mano abierta, el ascenso a una mano semi-cerrada, la comprensión (*katalêpsis*) a la mano completamente cerrada (el puño) y el conocimiento (*scientia*) al puño cerrado con fuerza por la otra mano. El conocimiento, según esta visión, es por tanto *katalêpsis* perfecta [para un estudio más profundo y general ver (Stöckl, 1887)].

El aprendiz recibe, por tanto, del maestro el signo material (lo que para el maestro constituye una representación del objeto matemático). De otra parte, una vez que esto es impreso en su mente, el mismo aprendiz debe encontrar, siempre en su mente, precisamente la representación de dicho objeto matemático que pueda ser puesta en correspondencia con aquel signo preciso que le fue ofrecido y, así, con el objeto matemático al cual el maestro intenta, desea, referirse.

Sólo la determinación del oportuno *lektón* podrá coronar con éxito el proceso de aprendizaje. En otras palabras, el fin, el *ubi consistam* del aprendizaje se alimenta, asume sustancia concreta, precisamente en el descubrimiento de la relación entre R(O) y O.

Sin duda alguna, la posición aquí descrita parece anticipar la frase de Duval que reportamos al inicio de este artículo.

AGUSTÍN DE HIPONA (354 – 430)

Agustín de Tagaste o de Hipona, según se elija la ciudad de su nacimiento o la ciudad de su muerte para completar su topónimo, es indudablemente un personaje emblemático de inicios del Medioevo. Muy bien conocido como teólogo, un poco menos como matemático aunque existen estudios sobre ello (Bagni, 2012; Carruccio, 1964; D’Amore e

Matteuzzi, 1976), es un referente para los estudios sobre la semiótica (ver por ejemplo, D'Amore et al., 2013).

Él fue quien unificó dos teorías precedentes y en contraposición, aquella del lenguaje y aquella del signo. El signo es un dato sensorial:

> Signum est enim res, praeter speciem quam ingerit sensibus, aliud aliquid ex se faciens in cogitationem venire; sicut vestigio viso, transisse animal cuius vestigium est, cogitamus; et fumo viso, ignem subesse cognoscimus; et voce animantis audita, affectionem animi eius advertimus, et tuba sonante milites vel progredi se vel regredi, et si quid aliud pugna postulat, oportere noverunt.[3] (Agustín, *De doctrina cristiana*, II, 1.1)

Pero eso, para la mente de quien lo percibe, indica siempre alguna cosa. Existen por tanto un vehículo del signo (algo) y un referente (otro algo); el intérprete, a veces no mencionado, es presupuesto en todo modelo de signo; no constituye por tanto un ulterior, tercer elemento de la relación entre signos, en la tradición que distingue sistemáticamente sentido y referente, como lo plantearon en su hipótesis los Estoicos (Nöth, 1995).

Agustín proporciona una definición de signo: "Dicimus enim et signa universaliter omnia quae significant aliquid, ubi etiam verba esse invenimus."[4] (Agustín, *De Magistro*, I, 4.9).

La inclusión de las palabras dentro de los signos es una novedad y es necesario buscar otra definición en otro texto: "(Verbum est) uniuscuiuisque rei signum, quod ab audiente possit intellegi, a loquente prolatum. [(Palabra es) un signo de algo que puede ser comprendido por quien escucha cuando es pronunciado por quien habla]" (Agustín, *De dialéctica*, cap. V).

En este mismo texto, Agustín distingue cuatros componentes de la palabra: (1) el *verbum*, la palabra dicha, el significante; (2) la *dictio*, es decir, la palabra dicha por alguien para significar algo, por tanto una combinación de significante y significado; (3) el *dicibile*, lo que de la palabra se entiende y es contenido en la mente; (4) la *res* (*cosa*), a lo que refiere la palabra a través de los sentidos o del intelecto, o que no es accesible a los sentidos.

---

[3] Un signo es algo que, más allá de su aspecto sensible, trae a la mente algo diferente de sí, como la huella que deja un animal, el humo del cual se infiere la presencia del fuego, el lamento que indica dolor, o la trompeta que comunica órdenes a los soldados.

[4] Se definen genéricamente signos todas las cosas que significan algo, y entre estos se encuentran también las palabras.

Para Agustín, no se pasa del signo al significado, sino de un signo a otro signo, dado que un signo no puede, por su naturaleza, hacer evidente un significado. Aún más, esto vale en la relación entre signo S y objeto O: es necesario conocer el objeto O para poder reconocer que aquel determinado signo S es signo de un determinado objeto S(O). El conocimiento de O permite reconocer S como S(O), pero S, por sí sólo, sin el previo conocimiento de O, no permite entender que S es signo de O.

Esto trae como consecuencia una jerarquía de importancia en el aprendizaje: primero se aprenden las cosas y sólo después los signos de las cosas.

> Cum enim mihi signum datur, si nescientem me invenit cuius rei signum sit, docere me nihil potest: si vero scientem, quid disco per signum?[5] (Agustín, *De Magistro*, 10, 115)

El signo puede indicarnos dónde debemos dirigirnos para poder ver (función deíctica o ostensiva) y, por tanto, para aprender (función cognitiva), o puede tener una función evocativa, es decir, traer a la mente un concepto, un significado, o una imagen (Agustín, *De Magistro*, 10, 168); esto tiene entonces en origen como primaria una función ostensiva. El signo es por tanto utilizado en función del objeto.

Reportamos en seguida un apartado de la obra *De Magistro* que contiene la cita precedentemente hecha en su contexto más general.

> 10.33. Pero si lo consideras con más detención, no hallarás tal vez nada que se aprenda por sus signos. Cuando alguno me muestra un signo, si ignoro lo que significa, no me puede enseñar nada; pero si lo sé, ¿qué es lo que aprendo por el signo? La palabra no me muestra lo que significa cuando leo: Y sus *sarabarae* (cofias) no fueron deterioradas. Porque si este nombre (*sarabarae*) representa ciertos adornos de la cabeza, ¿acaso, al oírlo, he aprendido qué es cabeza o qué es adorno? Yo los había conocidos antes, y no tuve conocimiento de ellos al ser nombrados por otros, sino al ser vistos por mí. En efecto, la primera vez que estas dos sílabas *caput* (cabeza) hirieron mis oídos, ignoré tanto lo que significaban como al oír o leer por primera vez el nombre "sarabarae". Mas al decir muchas veces

[5] Cuando, de hecho, me han dado un signo, si me encuentro en que no tengo conocimiento de la cosa de la cual es signo, no puede enseñarme nada; pero, si ya lo conozco, entonces ¿qué estoy aprendiendo mediante el signo?

cabeza, notando y advirtiendo cuándo se decía, descubrí que éste era el nombre de una cosa que la vista me había hecho conocer perfectamente. Antes de este descubrimiento, la tal palabra era para mí solamente un sonido; supe que era un signo cuando descubrí de qué cosa era signo; esto, como he dicho, no lo había aprendido significándoseme, sino viéndola yo. Así pues, mejor se aprende el signo una vez conocida la cosa que al revés.
10.34. Para que más claramente entiendas esto, suponte que nosotros oímos ahora por vez primera la palabra "cabeza", y que, ignorando si esta voz es solamente un sonido o si también significa algo, preguntamos qué es una cabeza (recuerda que no queremos conocer la cosa significada, sino su signo, y no tenemos su conocimiento mientras ignoramos de qué es signo). Ahora bien, si a nuestra pregunta se responde señalando la cosa con el dedo, una vez vista aprendemos el signo que habíamos oído solamente, pero que no habíamos conocido. Ahora bien, como en este signo hay dos cosas, el sonido y la significación, no percibimos el sonido por medio del signo, sino por el oído herido por él; y percibimos la significación después de ver la cosa significada. Porque la acción de señalar con el dedo no puede significar otra cosa que aquello a que el dedo apunta; y apunta no al signo, sino al miembro que se llama cabeza. Por lo tanto, no puedo yo conocer por la acción del dedo la cosa que conocía, ni el signo, al cual no apunta el dedo. Pero no me cuido mucho de la dirección del dedo porque más bien me parece signo de la demostración que de las cosas que se demuestran, como sucede con el adverbio "he aquí"; pues con este adverbio solemos extender el dedo, no sea que un signo no vaya a ser bastante. Y principalmente me esfuerzo en persuadirte – si soy capaz – de que no aprendemos nada por medio de los signos que se llaman "palabra". Como ya he dicho, no es el signo el que nos hace conocer la cosa, antes bien, el conocimiento de ella nos enseña el valor de la palabra, es decir, el significado que entraña el sonido.
(Traducción tomada de: es.scribd.com/doc/59573973/San-Agustín-De-Magister-El-Maestro)

Consideramos que Agustín constituye un precedente ilustre, más aún, un explícito precedente para nuestra 'paradoja cognitiva', sobre el cual debemos obligatoriamente reflexionar.

La teoría de Agustín resulta comparable con la constatación de Duval: el signo no es en sí portador de un objeto, y no puede por tanto sostener algún evento transactivo. Yo en cuanto maestro, puedo al máximo alcanzar al estudiante el signo o, para decirlo utilizando las palabras de Duval, puedo ofrecerle la representación semiótica del objeto; pero no puedo consignarle el objeto.

Agustín desarrolla esta tesis en función platónica, en apoyo de la teoría del anamnesis; Duval, menos estrechamente adherente a la tesis platónica, sostiene sin embargo, igualmente, que sólo quien ha ya construido el objeto, o de cualquier forma está en grado de construirlo dentro de sí, está en grado de decodificar el signo recibido, en cuanto que capta aquel al cual el signo mismo alude.

Con el signo de raíz cuadrada yo no enseño nada a quien no sepa comprender qué es la raíz cuadrada. El signo de por sí es un objeto concreto, o un acontecimiento físico que está en el mundo, una mancha de tinta sobre un papel, o una onda acústica en el espacio: si nos limitamos a esta evidencia física, no hay diferencia alguna con cualquier otro objeto. La noción de convertirse plenamente en *signo* se da en el momento en el cual se reconoce lo que representa, en su aludir a otro, diferente de sí. Pero si el receptor no posee el elemento de destinación, el *quid* al cual el signo se dirige, entonces él no tendrá a disposición realmente un signo, sino una presencia física que se evidencia en una cosa, simple contenido perceptivo; y no podrá obtener de esto ningún incremento de conocimiento. En este sentido, la teoría agustiniana nos manifiesta como uno de los antecedentes que mejor se puede comparar con la paradoja cognitiva de Duval.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ (1646 – 1716)

De la gran producción de Gottfried Wilhelm Leibniz, cuyo legado se compone de más de 150.000 páginas, consideraremos aquí un ensayo, dedicado completamente al problema semántico. Se trata de *Dialogus*, editado por primera vez por Erdmann en 1840.[6] Leibniz imagina un diálogo entre dos personajes, a quienes llama simplemente A y B, el primero de los cuales representa el papel de guía y expresa las ideas del mismo Leibniz. Inicia con la consideración de una verdad geométrica simple. A pide entonces a B: *Hoccine verum esse putas, etiamsi a te non cogitetur* (¿Consideras que

[6] Erdmann lo titula: *Dialogus de connexione inter res et verba, et veritatis realitate*, mientras que el mismo Leibniz lo había titulado simplemente: *Dialogus*. Leibniz nos proporciona también una fecha exacta, escribiendo debajo del título: “August, 1677”.

esto sea verdadero aunque no sea pensado por ti?). Y B responde: *Imo, antequam vel Geometrae id demonstrassent, vel homines observassent* (Pero ciertamente, esto era verdadero aún antes de que los geómetras lo demostrasen, o los hombres lo hubiesen observado).

Este es un importante aspecto. Aquí se asume que las verdades matemáticas son *ab aeterno*, y no dependen de la producción humana. Podríamos definir esta posición como realista, o también platónica, en antítesis con las posiciones *constructivistas*, es decir de aquellos que consideran, por el contrario, que el objeto matemático es producto de la mente del matemático [pensemos, por ejemplo, al intuicionismo de Luitzen Brouwer (1881 – 1966) o de Arend Heyting (1898 – 1980)].[7] La cuestión de la existencia en Matemática, que no podemos ciertamente afrontar aquí, es, sin embargo, un presupuesto que debemos tener presente para entender nuestra paradoja cognitiva.

Adherir a la primera o a la segunda hipótesis tiene consecuencias de gran relevancia: una cosa es suponer que O, el objeto matemático, existe en sí mismo; otra cosa diferente es suponer que O deba ser *construido*.
Forzamos un poco las cosas buscando un ejemplo dentro de una situación de aprendizaje; aspecto que, en realidad, no se cita en ningún momento en Leibniz. Lo hacemos sólo para articular el pensamiento de Leibniz con nuestro objetivo de encontrar precedentes a la paradoja de Duval. No está dicho que, empezando con el tener en cuenta R(O), que es todo lo que recibe, el alumno esté siempre en grado de construir cognitivamente dicho objeto O cuya existencia cognitiva, por tanto, no es de hecho garantizada (Duval, 1993).

Leibniz prosigue intimidando cada vez más a su interlocutor que, considerando verdadero incluso lo que no ha sido pensado, es llevado a colocar la verdad, y por tanto el significado, *en las* cosas. De aquí se desprende la contradicción por la cual deberían existir cosas falsas, puesto que no todo aquello que decimos es verdadero. Esta es la clásica *aporía* en la cual se cae al reducir el significado a la cosa. Leibniz se gana de aquí la atribución de la verdad a las proposiciones en cuanto posibles, así que, según como se piense de una o de otra forma, su pensamiento será falso o verdadero:

---

[7] Actualmente, después del segundo Wittgenstein, se tiende a distinguir entre posiciones realistas, precisamente, y pragmatistas (D'Amore, 2001; D'Amore e Fandiño Pinilla, 2001; y otros).

> Vides ergo veritatem esse propositionum seu cogitationum, sed possibilium, ita ut saltem certum sit, si quis hoc aut contrario modo cogitet, cogitationem eius veram aut falsam fore.[8] (Leibniz, 1840, p. 76)

El paso sucesivo es la confrontación del nominalismo o, de cualquier forma, de las teorías convencionalistas del lenguaje: el criterio de verdad se funda en lo real.

Contra la famosa objeción anónima, que Leibniz imagina fue avanzada por Thomas Hobbes (1588 – 1679), que el lenguaje está basado en convenciones, y que la elección de las palabras es arbitraria, Leibniz se la jugó bien al notar que, no obstante la diferencia de los signos usados, “es idéntica la geometría de los griegos, de los latinos y de los alemanes”. Debemos notar que los pensamientos pueden producirse sin vocablos, pero no sin otros signos. Leibniz desafía su interlocutor: “Tenta quaeso an ullum Arithmeticum calculum instituere possis sine signis numeralibus”[9].[10]

La tesis final a la cual Leibniz llega es que el signo (o *carácter*), aunque no debe “semejar” a la cosa, presenta, con respecto a la cosa, a lo real, o respecto al concepto que este designa, un isomorfismo estructural (una iconicidad diagramática, en términos de Peirce) que no depende de las convenciones o de la elección de los signos. Así, los matemáticos pueden llegar a resultados invariantes, aún usando sistemas posicionales diversos, por ejemplo, en base decimal o en base duodecimal; “a menos que los enunciados tengan que ver con los mismos caracteres”. Y el ensayo termina precisamente con un ejemplo matemático. Consideremos a^2. Podemos asumir que a sea igual a $b+c$, y entonces tenemos que a^2 es equivalente a b^2+c^2+2bc, o que a sea igual a d-e, y entonces tendremos que el cuadrado de a es d^2+e^2-2de. Es fácil para Leibniz mostrar, con algunas igualdades, cómo el objeto matemático, aún representado con signos diferentes, es en definitiva el mismo.

Según Leibniz esta es, por tanto, la vía para salir de la paradoja:

---

[8] Así, la verdad es una propiedad de las proposiciones o de los pensamientos pero en cuanto estos son posibles; entonces, por lo menos esto es cierto, que, si alguien piensa de una o de otra forma, su pensamiento resultará falso o verdadero.

[9] Prueba, si lo logras, ¡a hacer un cálculo aritmético sin signos numerales!

[10] En el margen de la hoja, Leibniz anota la célebre frase que el lógico francés Louis Couturat (1868 – 1914) elegirá como mote*:* “Cum Deus calculat […] fit mundus” (Cuando Dios calcula se hace el mundo).

reconocer la invariancia de las propiedades del objeto matemático respecto a la arbitrariedad de los signos utilizados, que también se encuentran en los estudios de Duval (1995, 1998a, 1998b, 2009a). Entonces, el punto es pasar de la representación semiótica privada, personal, que se coloca según Leibniz en la mente del sujeto, a una representación "objetiva" o, por lo menos, "ínter-subjetiva". Este pasaje será explicitado mejor por Frege, como veremos a continuación, y forma parte de las conquistas didácticas actuales, no sólo en el campo investigativo (D'Amore et al., 2013).

GOTTLOB FREGE (1848 – 1925)

De la vasta producción de Gottlob Frege conviene hacer énfasis en el ensayo *Über Sinn und Bedeutung*, que podríamos traducir como *Sobre Sentido y Referencia*, aunque no faltan alternativas.[11] Se trata del escrito que probablemente ha influenciado fuertemente en las teorías modernas y contemporáneas del significado. En Frege (1892), el significado de un concepto se establece usando los términos: signo, sentido y referencia. Por lo tanto, si dos términos distintos denotan un mismo objeto, esto no implica que tengan el mismo significado, ya que este también consiste en el modo de denotar y en el uso de denotación. La distinción fundamental sobre la cual Frege basa sus argumentos es aquella entre 'sentido' y 'referencia', precisamente, es decir, entre *intensión* y *extensión*, o *connotación* y *denotación*, distinción conocida desde los inicios; por ejemplo, ciertamente ya Aristóteles la conocía, pero nunca estuvo analizada de forma sistemática, con la excepción de varios escritos de Leibniz, pero que quedaron inéditos.

Tomemos el término "triángulo" (en el sentido común de uso en Geometría, palabra en la cual se evidencia la presencia de tres ángulos) y el término "trilátero" (una línea poligonal cerrada de tres lados, palabra en la cual se evidencia la presencia de tres lados). Dado que un triángulo debe ser necesariamente trilátero, y viceversa, decimos en acuerdo con Frege que los dos términos denotan el mismo objeto pero tienen *sentidos* diferentes. Se podría caer en la tentación de rendir un tributo a la navaja de Occam, y

[11] La traducción al español es *Sobre Sentido y Referencia*, términos comunes en los trabajos de filosofía en castellano de esta obra (por ejemplo, véase: editor Jesús Mosterín, Editorial Crítica Grijalbo Mondadori, Barcelona, 1996). Sin embargo, fue el mismo Frege a pronunciarse por la solución *Sentido y significado*, en una letra personal (una de las tantas) a Giuseppe Peano (1858 – 1932); lo cual consideramos cierra la cuestión.

eliminar el sentido: en fondo, por lo que respecta a la Matemática, lo que nos interesa parece ser, en primer lugar, el significado (el conjunto de signo, sentido, referencia). Y, de hecho, gran parte de las teorías formales basan su semántica en la extensión, y renuncian, o tratan de renunciar, a la intensión.
Sin embargo, las cosas no son tan simples como parece. El concepto de identidad canonizado por Leibniz se basa en la mutua 'sustituibilidad' en todos los contextos: "Eadem sunt quae mutui substitui possunt salva veritate"[12] (Leibniz, *Die Philosophische Schriften*. VII, p. 219) (véase Bagni, 2006). Por tanto, si demostré que A = B, puedo reemplazar el primero (A) con el segundo (B), sin modificar el valor de verdad del enunciado.
Pero volvamos a nuestro ejemplo: habiendo acordado que 'triángulo' y 'trilátero' son el mismo objeto, podemos concluir que todo predicado que vale para el primero vale también para el segundo, y viceversa. Sin embargo, consideramos el enunciado siguiente:
1) Con un simple razonamiento podemos convencernos de que todo triángulo es un trilátero.
Ahora, sobre la base del principio expuesto líneas arriba, sustituimos 'trilátero' con 'triángulo' en 1). Tendremos:
2) Con un simple razonamiento podemos convencernos de que todo triángulo es un triángulo.

Mientras que 1) nos parece un enunciado matemáticamente sensato, y además simple, 2) no nos comunica ninguna verdad geométrica.

Por tanto, atención: la identidad del *denotatum* de dos términos no permite su sustituibilidad real en *todos* los contextos, sólo en aquellos puramente extensionales, en una acepción que puede ser definida rigurosamente.

El discurso nos podría llevar lejos. Pero nuestra intención es, por el contrario, volver a nuestra paradoja cognitiva; y hacernos la pregunta: cuando el maestro propone una expresión lingüística, ¿qué es lo que recibe el estudiante, el simple sentido o el significado, de lo que Duval llama 'representación semiótica'? O, mejor aún, ¿parcialmente los dos? Es sensato pensar que, cada vez, se pueden presentar todos los casos posibles.

Veamos un ejemplo. Quiero enseñar un teorema de geometría plana. Pido al estudiante considerar el triángulo ABC y hacer una figura que lo represente. ¿Qué estoy comunicando? De aquí se entiende que prevalece el

---

[12] Son iguales los que se pueden substituir mutuamente.

Sinn, el sentido: el estudiante reconoce la característica intrínseca que califica el objeto, que en nuestro caso es la de tener tres ángulos, característica que es suficiente para determinar la pertenencia del objeto a una precisa clase y no a otra. Después le pido prolongar la base BC. Inmediatamente su atención recae en el objeto, cuyo icono está bajo su mirada: aquí prevalece el *Bedeutung*, la referencia, el *denotatum*. Las propiedades del objeto, la de ser un segmento, el poder ser pensado como un conjunto de puntos más que numerable, el hecho de considerar sólo lo largo sin el ancho, etcétera, pasan a un segundo plano. No es que el objeto no tenga estas propiedades, ni que el estudiante las ignore: simplemente, salen del campo de la representación semiótica. Estas serán recuperadas, tal vez, a continuación, cuando se pide continuar la demostración o en sucesivas ocasiones.

Haciendo un salto en el tiempo de varios siglos, de otro lado, precisamente los estudios pioneros de Duval han permitido distinguir en cada representación semiótica $R_i(O)$, de un objeto matemático O, las características de O que $R_i(O)$ logra representar a diferencia de otras $R_j(O)$, $i \neq j$ (D'Amore, 2000).

EDMUND HUSSERL (1859 – 1938)

La solución semántica propuesta por Edmund Husserl, en particular en *Prolegómenos* (Husserl, 1900) y en la *Primera investigación lógica*, *Expresión y significación* (Husserl, 1901), resulta la más articulada y sofisticada de todas las que hasta ahora hemos visto.

"Todo signo es signo de algo, pero no todo signo tiene un 'significado', un 'sentido' que el signo expresa" (Husserl, 1970). Inicia así su análisis del lenguaje, de la afirmación que algunos signos, además de indicar algo, expresan un significado (tales son, en particular, todas las expresiones lingüísticas), mientras otros signos (notas, marcas, etc.) indican algo sin expresar significado. Los primeros los llama *expresiones*, mientras los segundos *índices* (o *indicaciones*).

Un signo de tipo 'expresión' está, por tanto, asociado a un modelo triádico: *expresión* (el vehículo del signo), *significado* (el sentido) y *cosa* (el referente). Un signo de tipo 'índice' es, por el contrario, asociado a un modelo diádico: *índice* (el vehículo del signo) y *cosa* (el referente).

Así, mientras una expresión tiene un significado e indica algo a través de su significado, un índice indica algo sin tener de por sí un significado. La relación con el referente, en este último caso, es directa y de tipo psicológico, en el sentido que la convicción de la existencia de una cosa motiva la convicción de otra; la relación entre una expresión y su referente, por el contrario, está mediada por el significado y no es una cuestión de convicción (para mayores detalles véase Mensch, 2001).

En el caso de la expresión, Husserl distingue en particular tres ingredientes de la significación (Nöth, 1995): (1) un "acto de conferir significado" o "intención significante", por parte del productor de la expresión, a la cual corresponde un "acto de llenado de significado" por parte del intérprete; (2) el *contenido* o significado de estos actos; (3) el *objeto* significado de la expresión. El significado es en todo caso una entidad ideal, fuera de la mente humana, pero asociada a la consciencia humana a través del acto intencional de significación. Solamente el acto intencional de la conciencia confiere significado al signo (Nörth, 1995). Por tanto, mientras la expresión presupone siempre un acto intencional de significación, el índice no; sin embargo, en el caso del índice, "nosotros generalmente sentimos la conexión" del vehículo del signo con el objeto simultáneamente presente (Husserl, 1970).

Es posible que en esto Husserl sienta la influencia de sus estudios matemáticos. Husserl estudió bajo la dirección de Carl Weierstrass (1815 – 1897), junto con, notamos de paso, Georg Cantor (1845 – 1918) nada menos (y conoció muy bien la obra del amigo y colega sobre la teoría de los conjuntos trans-finitos).

Si yo escribo a_i y a_j, ¿qué función expresiva tienen i y j? Por un lado, estos no nos dicen nada de las 'a' a la cuales hacen referencia, sin embargo, tienen carácter de individuación. En primer lugar, nos dicen que el segundo objeto es distinto del primero. Pero también, si a continuación volvemos a usar a_j, se entiende que no es un 'a' cualquiera con la condición de que sea diferente de a_i, pero también que es la misma a_j de antes. La conclusión es, por tanto, que la referencia al objeto existe, es decir, estamos frente a una denotación (D'Amore y Fandiño Pinilla, 2012). Por otro lado, el carácter descriptivo es nulo: Frege diría que falta el *Sinn*. El proceso expresivo parte de la *Intencionalidad*, del hacer referencia intencional a un objeto por parte de quien habla. Este es uno de los fundamentos de la fenomenología husserliana: el pensamiento es *direccional*, puede *centrarse* en el objeto que desee. A este punto lo puede indicar o expresar o las dos cosas. De esta forma cumple un 'acto significante'. Aquí es relevante que, además del contenido lingüístico en sí, se proporciona una ulterior información, que consiste en la intención de comunicar.

La originalidad del enfoque de Husserl respecto a todas las situaciones precedentes será reconocida particularmente por Karl Bühler (1879 – 1963) con la llamada *Kundgabe Theorie der Sprache*, o teoría del completamiento: simplificando los pasajes, podríamos sintéticamente decir que el escuchante, o receptor, frente al acto significante, busca en sí mismo un posible 'contenido llenante', es decir, una representación que pueda colmar la forma que se dio en el acto comunicativo en sí. De hecho, aquí tenemos una visión semántica que no se limita a ponerse de parte de quien habla, o a postular una improbable simetría entre los dos actores, sino que se coloca también en el polo opuesto del receptor, es decir, en nuestro caso, del estudiante. ¿Y 'dónde' busca el receptor? En su *Erlebnis*, es decir, en sus vivencias, en su experiencia, en su cognitivo, que no está dicho que contemple aún el objeto tema del discurso del emisor. El modelo se complica, como decíamos, pero, precisamente es por este hecho que ofrece una explicación más profunda.

De nuevo, tornando a nuestra paradoja, se encuentra en forma mucho más articulada el mismo proceso agustiniano: "Noli foras ire, in te ipsum rede"[13] (Agustín, *De vera religione*, XXXIX, 72). Recibido el acto lingüístico, es decir, la representación semiótica, es dentro de mi *Erlebnis*, o en la combinación de componentes que extraigo de esta, que puedo construir el objeto, es decir, reconocer el "rellenado" adecuado para que el sentido[14] sea conferido, y el proceso alcance el éxito.

LUDWIG WITTGENSTEIN (1889 – 1951)

En el ámbito de la Filosofía del lenguaje del siglo pasado, sin duda Wittgenstein representa un punto de imprescindible discontinuidad. Imprescindible, porque cada una de las sucesivas tomas de posición sobre el problema semántico, y por tanto, en cierta medida, sobre el argumento que nos interesa, nos lleva inevitablemente a Wittgenstein; pero, de otra parte, punto de discontinuidad porque el autor en cuestión no se deja enmarcar en ninguna corriente de pensamiento canónica.

---

[13] No andar fuera, entra en ti mismo.

[14] Usamos aquí 'sentido' en la acepción de Husserl, la cual es diversa de la acepción que proporciona Frege.

Al aumentar la complejidad, que a esta altura es un hecho historiográficamente establecido, desde el punto de vista, de la Filosofía, que existe una brecha muy sensible entre un primero y un segundo Wittgenstein o, como se dice, entre el Wittgenstein del *Tractatus* y el Wittgenstein de las *Investigaciones filosóficas*. Y, aún, coexisten tanto sobre el primero como sobre el segundo, interpretaciones muy diferentes. Sin embargo, no pretendemos presentar o comentar su obra en pocas páginas, sino mostrar cómo ciertas posiciones de Wittgenstein puedan ser interpretadas en la dirección que caracteriza nuestro trabajo.

Es bien conocido que las *Investigaciones filosóficas* de Ludvig Wittgenstein inician con la refutación de una propuesta que Agustín hace en las *Confesiones* a propósito de cómo un niño aprende el lenguaje. Wittgenstein acepta la idea agustiniana según la cual, al inicio, las primeras aproximaciones al lenguaje objeto de aprendizaje son de tipo ostensivo (de parte del adulto que enseña) – imitativo (de parte del niño que aprende), basando los primeros éxitos parciales del niño en una imagen de lenguaje que Agustín intenta proponer, haciendo presión en las palabras que el adulto usa en sentido ostensivo.

> En estas palabras encontramos, así lo considero, una determinada imagen de la naturaleza del lenguaje humano. Y precisamente esta: las palabras del lenguaje denominan objetos – las proposiciones son conexiones de dichas denominaciones. – En esta imagen del lenguaje encontramos la raíz de la idea: toda palabra tiene un significado. Este significado es asociado a la palabra. Es el objeto por el cual la palabra está. (PI, I, párr. 1)[15]

Por tanto, Wittgenstein evidencia y arroja luz a dos puntos en la tesis de Agustín, haciéndola propia por ahora y rediscutiéndola con palabras propias: las palabras denominan objetos; las proposiciones son conexiones de dichas denominaciones.

Por tanto, las palabras son entonces por ahora nombres que indican objetos concretos; las proposiciones sirven para mostrar relaciones entre cosas, por tanto entre nombres (y es lógicamente posible, sobre la base de la referencia a los “hechos” reales, inferir cuáles proposiciones son verdaderas

[15] PI = *Philosophical Investigations* (Wittgenstein, 1953), parte I, seguida del número de párrafo; Parte II, seguida del número de página.

y cuáles son falsas).[16]

El niño pareciera que aprende a causa de la ostensión hecha por el adulto, asociando un nombre a una cosa concreta, por imitación, repitiendo el sonido de la voz que escuchó.

Aquí inicia la crítica a la posición de Agustín:

> De una diferencia entre tipos de palabras Agustín no habla. Quien describe de esta forma el aprendizaje del lenguaje piensa, creo, básicamente a sustantivos como "mesa", "silla", "pan", y a nombres de persona, y sólo en un segundo momento a los nombres de ciertas actividades y propiedades; y piensa a los restantes tipos de palabras como algo que se ajustarán por sí mismo. (PI, I, párr. 1)

Para Agustín, la esencia del lenguaje está en la nominalización inicial referida a objetos concretos, el resto vendrá por sí mismo espontáneamente (Spinicci, 2002), tesis que Wittgenstein considera, explícitamente, demasiado apresurada.

A este punto, Wittgenstein proporciona algunos ejemplos muy bien conocidos con los cuales quiere mostrar que el lenguaje es algo más (el famoso ejemplo de "mando uno a hacer el mercado", puro experimento mental, en el cual Wittgenstein muestra que el lenguaje es en gran medida comunicativo y que la reacción a cada una de las palabras contenidas en un mensaje provoca reacciones diversas por parte de quien las propone y quien las recibe, interpretándolas: "manzanas", "rojas", "cinco").

Para Agustín, por tanto, el lenguaje es hecho de nombres, cada uno de los cuales ilustra una realidad, mejor aún, cada objeto de dicha realidad; pero esta tesis no se sostiene en el momento de pruebas empíricas de la experiencia o en el uso concreto de los signos (orales, escritos), dado que es la pareja "palabra – uso de dicha palabra en un cierto contexto" lo que determina el significado (que no es el significado banal ostensivo de denominación).

> Para Wittgenstein el lenguaje es parte de un actuar y puede ser entendido sólo si se acoge en su valencia instrumental. Gracias al lenguaje hacemos muchas cosas diferentes y esta diversidad caracteriza también las formas lingüísticas, incluso si permanece encubierta por debajo de la relativa igualdad exterior de las

[16] La tentación de decir algo más en esta dirección, citando el Wittgenstein del *Tractatus* (1921/1922) es muy fuerte, pero nos llevaría demasiado lejos.

palabras. (Spinicci, 2002, p. 13)

Wittgenstein prosigue con otros ejemplos – experimentos mentales (que ciertos autores criticaron después lo que desea llegar a evidenciar es que el “sentido” de las palabras de un lenguaje se define, es individuado, es compartido no sólo por el nombre en sí, sino también por el uso que se hace.

“El significado de una palabra está en el uso que se hace de ésta en el lenguaje” (PI, I, párr. 43).

“El significado de una palabra es el papel que dicha palabra juega en el cálculo del lenguaje” (PG, p. 67).[17]

Pero en todo esto es importante no confundir “el portador de un nombre con el significado del nombre” (PI, I, párr. 40; PG, pp. 63–64). En las palabras de Duval: una representación con lo que representa, un signo con lo que el signo reenvía.

En el ámbito de esta aparente teoría del aprendizaje del lenguaje por parte de un niño, es necesario hacer referencia a la idea de “juego lingüístico” (PI, I, párr. 7; Wittgenstein, 1958, pero recordemos que este 1958 significa 1933-1934).

Algunos de los estudiosos que hacen referencia a esta noción la banalizan y otros la sobreestiman, según nuestra opinión. Un “juego lingüístico” no es otra cosa que una modalidad de uso de los signos que sea la más banal, elemental y primitiva posible, ejemplificable en la de los niños que están iniciando a hacer uso de un lenguaje basado en la pareja de modalidades ostensiva-imitativa de la cual se ha hablado.

En otras palabras, incluso el signo más simple (como un nombre) es un signo (un nombre) sólo en un juego lingüístico; el significado de un signo es precisamente el papel que ese tiene en un tal juego (PI, I, párr. 49, párr. 261; PG, p. 130). Y aquí Wittgenstein cita a Frege: “Esto es también lo que Frege quiso decir cuando dice que la palabra tiene significado sólo como parte de una frase” (PI, I, párr. 49).

Wittgenstein (1958, p. 5) afirma además que comprender una frase significa comprender un lenguaje, el sistema de signos al cual pertenece el lenguaje. En particular, comprendemos una frase cuando somos capaces de sustituirla con otra frase que expresa la misma cosa en el mismo lenguaje o en un lenguaje diferente; o cuando podemos traducir una palabra en un gesto

[17] PG = *Philosophische Grammatik* (Wittgenstein, 1913).

o un gesto en una palabra (PG, pp. 40–42).

Esto nos lleva inevitablemente a Duval (quien cita tanto a Frege como a de Saussure): una representación semiótica de un objeto matemático se produce siempre al interior de un registro de representación, y no es concebible fuera de este, así como un signo funciona como signo sólo al interior de un sistema semiótico, en oposición a otros signos, independientemente de cualquier referencia al objeto. La comprensión, es decir, la construcción cognitiva de un objeto matemático es inseparable de la producción o elección de representaciones semióticas adecuadas y de sus transformaciones mediante tratamientos o conversiones, por tanto es inseparable del reconocimiento de la correspondencia entre representaciones diferentes de un mismo objeto en el mismo registro o en registros diferentes.

En un juego lingüístico, como dice el mismo Wittgenstein, se trata de reflexionar sobre una forma de lenguaje primitivo; cuando nos preocupamos de la verdad y la falsedad de las proposiciones, de la concordancia de éstas con la realidad que nos circunda, es importante hacerlo en este tipo de situaciones, antes de que aparezcan complicados procesos de pensamiento que modifican el escenario en el cual estas proposiciones toman sentido, antes que aparezcan las nieblas mentales que oscurecen el uso del lenguaje; las formas complicadas de lenguaje se construirán después precisamente a partir de aquellas formas primitivas (Wittgenstein, 1958, p. 17).

> En cierto sentido la semejanza salta a la vista: aquí, de hecho, el concepto de juego lingüístico se introduce explícitamente como una forma que permite reconocer en la simplicidad de una estructura poco articulada el juego de las acciones y reacciones de las cuales consta el lenguaje.
>
> Ahora, esta simplicidad ha sido siempre reconectada con el problema del aprendizaje: cualquiera que sea la forma empírica en la cual el aprendizaje se realiza, es de todas formas razonable sostener que el niño aprende a hablar moviendo precisamente de los “juegos lingüísticos”, es decir, de situaciones en las cuales es fácil identificar actividades y reacciones y, junto a estas, las reglas que las sostienen. (…)
>
> El reenvió a la idea de juego no está determinada únicamente por la relativa simplicidad de los ejemplos propuestos en contra de la complejidad del lenguaje cotidiano, sino también por la evidencia con la cual se muestran las reglas en los juegos. En esta perspectiva, el juego es en verdad ejemplar: los juegos

> constan siempre de reglas que debemos seguir, que deben ser aprehendidas y que en ocasiones deben ser rememoradas explícitamente durante las fases más sugestivas del juego. (Spinicci, 2002, p. 39)

Y aquí Wittgenstein se aproxima a consideraciones sobre juegos específicos que creemos poder interpretar en la dirección que estamos persiguiendo y que resumimos así: sería necesario conocer las reglas para poder jugar, es decir, para poder aprender sería necesario que alguien se las explicara al discente; una vez conocidas las reglas del juego, se juega, en otras palabras, se aprende; pero si ninguno explica las reglas, se corre el riesgo de jugar a un juego con reglas diversas, por tanto de aprender cosas diferentes de aquellas que se auspician.

¿Cómo adviene el aprendizaje, si no por ostensión e imitación, siguiendo reglas la mayor parte de las veces no declaradas de un juego? Aquí, Wittgenstein comienza a examinar en profundidad el sentido de las "definiciones ostensivas" que para él están en la base, pero que no regulan y que no son suficientes para regular el aprendizaje (PI, I, párr. 28–32).

> La definición del número dos: Esto se llama 'dos' – y así diciendo se indican dos nueces – es perfectamente exacta. – ¿Pero cómo es posible definir el dos de esta forma? A quien se le da la definición no sabe qué se quiere denominar con 'dos'; supondrá que ¡tú denominas *este* grupo de nueces! – Puede suponerlo, pero tal vez no lo supone. Por el contrario, si queremos atribuir un nombre a este grupo de nueces, el otro podría pensarlo como un numeral. Y, de la misma, manera, a quien yo le doy una definición ostensiva del nombre de una persona podría interpretarlo como el nombre de un color, como la designación de una raza incluso con el nombre de un punto cardinal. Esto quiere decir que la definición ostensiva puede en *cualquier* caso ser interpretada en esta o en otras formas posibles. (PI, párr. 28)
> La definición ostensiva explica el uso – el significado – de la palabra cuando el papel total de la palabra en el lenguaje es ya claro. (PI, párr. 30)
> Quien llega a una tierra extranjera en ocasiones aprende el idioma de los nativos del lugar mediante las definiciones ostensivas que ellos les dan; y generalmente deberá adivinar cómo se deben interpretar estas definiciones y en ocasiones su adivinación es correcta, en otras no. (PI, párr. 32)

La definición ostensiva a la cual hace referencia Wittgenstein está basada en primera instancia en un gesto, aquel hecho por quien enseña dirigiéndose a quien está aprendiendo, indicando un objeto; la definición ostensiva puede servir para hacer aprender algo alrededor a la cosa concreta (nuez) o a algo abstracto (dos), como en nuestro caso. Estamos frente a una versión de la paradoja cognitiva. Lo cual nos vuelve a enviar, a nosotros y a Wittgenstein, a Agustín: "Agustín describe el aprendizaje del lenguaje humano igual que si el niño arribase en tierra extranjera y no comprendiese el idioma del país; en otras palabras: como si poseyese ya una lengua, pero no dicha lengua" (PI, I, párr. 32).

Pero Wittgenstein es aún más radical dado que llega a afirmar que no se trata sólo de la situación paradoxal del aprender, sino que también involucra el enseñar: podemos significativamente indicar algo a alguien sólo al interior de un juego lingüístico, sólo con reglas compartidas; ni siquiera la frase banal "Esto es …" se puede decir dando un sentido a lo dicho, muchas cosas deberían ser ya conocidas y concordadas (PI, I, párr. 31). En otras palabras, la enseñanza ostensiva presupone un lenguaje que el aprendiz no conoce; de otra parte, el éxito de la definición ostensiva exige el dominio individual de un lenguaje (Williams, 1999): "Se debe ya conocer (o ser capaces de hacer) algo para ser capaces de pedir el nombre de una cosa" (PI, I, párr. 30).

Para Wittgenstein la enseñanza ostensiva debe por tanto estar acompañada de una enseñanza sobre el uso del signo. Pero, el uso del signo está determinado por la práctica en la cual el signo está inmerso, por tanto presupone un contexto de dominio de un lenguaje (Williams, 1999).

Nos parece que las posiciones precedentemente ilustradas de Wittgenstein constituyen otro precedente de la paradoja cognitiva de Duval.

LUÍS RADFORD

Queremos aún recordar al lector que no es nuestra intención dar una lista exhaustiva de *todos* los estudiosos que han afrontado las problemáticas escondidas en aquella que hemos llamamos "paradoja cognitiva"; queremos sólo mostrar algunos antecedentes históricos, evidenciando aquellos autores que, más que otros, expresaron por escrito posiciones cercanas a aquellas descritas en la "paradoja".

Pero no queremos silenciar una posición que no es precedente, sino sucesiva, dado que las palabras usadas por este autor, como veremos, son similares a aquellas usadas por Raymond Duval.

A modo de cierre, retomamos lo enunciado por Luis Radford: “El problema epistemológico se puede sintetizar en la siguiente pregunta: ¿Cómo podemos llegar al conocimiento de estos objetos generales, dado que no tenemos acceso a estos objetos sino a través de representaciones que nos hacemos de estos?” (Radford, 2005, p. 195).

Fuera de toda duda, la representación de los objetos en Matemática privilegia el uso de signos específicos; pero los signos son artefactos, objetos a su vez “lingüísticos” (en un sentido amplio), términos que tienen como objetivo representar para indicar: “¿Cuáles son los medios para mostrar el objeto? Son aquellos que denomino *medios semióticos de objetivación.* Son objetos, artefactos, términos lingüísticos, en general signos, que se utilizan para hacer visible una intención y para conducir a termine una acción” (Radford, 2005, p. 203).

El significado de un objeto emerge, por tanto, de los medios semióticos de objetivación, es decir, por signos, gestos, lenguajes, artefactos que permiten tomar conciencia subjetiva del objeto (Radford, 2003).
En la dirección de Radford (1997, 2002, 2003, 2004, 2005, 2006, 2013), específicamente socio-cultural, los objetos matemáticos son considerados como “modelos fijos” de actividad, “fijos” no en naturaleza, no en la mente, sino en la práctica social:

> Desde el punto de vista de una antropología epistemológica, la forma en la cual yo considero que el enigma de los objetos matemáticos pueda ser resuelto es considerar los objetos matemáticos como modelos fijos de actividades incorporados en el reino siempre mutable de la práctica social mediata y reflexiva. (Radford, 2004, p. 21)

Y los signos están siempre incorporados en sistemas semióticos culturales, sistemas histórica y socialmente constituidos que incluyen las convicciones de una cultura y los modelos sociales de producción de significado. Los signos no son, en cualquier caso, meros indicadores de actividad mental, sino que son parte constitutiva del pensar y el conocimiento es concebido como el producto de una praxis reflexiva cognitiva mediada. En dicho enfoque, por tanto, el conocimiento es una forma de reflexión codificada histórica y culturalmente; los objetos de conocimiento son puras posibilidades que adquieren realidad solamente a través de la actividad, confundiéndose con esta. El aprendizaje, en cuanto proceso de objetivación, se confunde o se identifica con el proceso social de progresiva y crítica toma de consciencia de sistemas de ideas, significados culturales, formas de pensamiento, entre otros, incorporados en los medios semióticos de objetivación.

4. CONCLUSIÓN

La teoría y la práctica se funden en una admirable visión única y múltiple, cuando se inspiran la una en la otra. Colaboran, una para proponer problemas a la otra, la otra para pedir organizaciones y definiciones que no pueden depender de toda la gama posible de casos posibles.

Una situación que la práctica nos permite cuestionar es la siguiente: es relevante analizar el momento en el que una docente de pre-escolar presenta a sus estudiantes un objeto de madera, pintado de rojo con la forma de un cubo, denominándolo "cubo" (por tanto: una representación ostensiva y lingüística, una doble representación semiótica); y al día siguiente, al mostrar *otro* objeto de metal gris, brillante, con mayor volumen siempre en forma de cubo, llamándolo de nuevo 'cubo', se encontró frente a risas de niños que consideraban que la maestra los estaba engañando. Para los niños, *cubo* era la denominación de aquel objeto, "el objeto de ayer, rojo y de madera".

¿Cómo 'limpiar' un significado de todas las componentes indéxales desviantes que todo objeto de la realidad concreta lleva consigo? ¿De qué sabor es una pirámide? ¿Qué olor tiene una recta? ¿Pesa más un ángulo o un número primo? Lejos de ser preguntas ligeras, estas son preguntas embarazosas de cierto espesor.

Sabemos que la equivalencia semántica o aquella semiótica son conquistas que, enunciadas por Platón, sólo ahora se comienzan a entender, pero estas equivalencias constituyen la base de la Matemática.

El estudiante indefenso, que tiene todo el derecho de ser *ignorante* en sentido etimológico, que debe construir cognitivamente los objetos de la Matemática, se ve obligado a confundir el objeto con su representación semiótica. Hemos mostrado desde diferentes corrientes filosóficas que esto tiene una explicación teórica y que no sólo que depende de la voluntad del individuo. Esta es una contribución más al conocimiento y, sobre todo, a la construcción del conocimiento.

Kant toca el problema, pero no lo estudia en profundidad. Para él, el ser humano que construye conocimiento es un adulto culto que sabe y que desea construir conocimiento, un adulto culto que sabe y que desea saber más; no examina el caso del joven, inmerso en una institución, que parte de bases muy diferentes. Pero nosotros, hoy sabemos que el bagaje de conocimiento que se construye está constituido por el objeto que el docente (o la institución) propone y pretende que se conozca y se construya, con toda la complicación semiótica que esto trae con sí, el lenguaje típico de la disciplina que juega un papel importante entre las teorías y las prácticas.

Una buena dosis de referencias filosóficas que ilustran la problemática, lejos de ser un ejercicio estéril de estilo analítico, es, por el contrario, una base sólida para fundamentar la cuestión.

Por otro lado, no somos los primeros en establecer relaciones entre lo que se conoce y lo que no se conoce: esta relación es posible sólo cuando lo que se ignora tenga al menos algo que ver con lo que constituye lo conocido; esta es una de las bases de la *Doctae Ignorantiae* de Nicola Cusano (1401 – 1464) (tomada en préstamo de Agustín, en realidad). En nuestra paradoja, si el objeto matemático es desconocido y de éste se nos presenta una representación semiótica en un determinado registro, lo que vemos, escuchamos, tocamos, olemos, probamos, es el objeto-representación no el objeto matemático en sí. Porque, precisamente, tenemos a disposición otras representaciones semióticas que constituyen aquello que para Cusano sería lo que tiene "al menos algo que ver con lo que constituye lo conocido".

Y, dado que Husserl nos ha enseñado a valorizar la intención comunicativa, todo esto se relaciona con ciertas consideraciones famosas de Lev Semënovich Vygotsky (1896 – 1934) para quien el desarrollo en general y el desarrollo cognitivo del joven son netamente influenciados por el ambiente social, es decir, por las interacciones semióticas entre seres humanos (entre las cuales el lenguaje es privilegiado) al interno del ambiente con funciones y resultados muy diversos entre las interacciones adulto-joven y entre coetáneos. El desarrollo cognitivo se describe en términos de interacciones sociales, actividades mediadas e interiorizadas por formas culturales; el signo (lingüístico) ejerce aquí como mediador entre el individuo y su contexto, además que hace de contenedor de significado; en particular, es un medio de transformación de las funciones psíquicas del individuo; es esto precisamente lo que permite el pasaje de los objetos de conocimiento del plano social al plano individual. La producción semiótica está, sin embargo, limitada al lenguaje.

En resumen y para cerrar este análisis teórico, la paradoja permanece porque no puede ser de otra forma; porque es ella parte de la realidad cognitiva.

REFERENCIAS

Bagni, G. T. (2006). Eadem sunt, quae sibi mutuo substitui possunt, salva veritate. En S. Sbaragli (Ed.), *La matematica e la sua didattica: Vent'anni di impegno*. Actas del congreso internacional para los 60 años de Bruno D'Amore (pp. 34–37). Roma: Carocci Faber.

Bagni, G. T. (2012). S. Agostino e la matematica. Ultima lezione di Giorgio T. Bagni nell'Ateneo di Treviso (15 mayo 2009). *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 35A-B*(3), 217–227.

Carruccio, E. (1964). Il valore ascetico della matematica nel pensiero di S. Agostino. *Studium, 60*, 868–870.

Charles, D. (2000). *Aristotle on meaning and essence*. New York: Oxford University Press.

D'Amore, B. (2000). "Concetti" e "oggetti" in matematica. *Rivista di matematica dell'Università di Parma, 3*(6), 143–151.

D'Amore, B. (2001). Un contributo al dibattito su concetti e oggetti matematici: La posizione "ingenua" in una teoria "realista" vs il modello "antropologico" in una teoria "pragmatica". *La matematica e la sua didattica, 15*(1), 31–56.

D'Amore, B. (2003). *Le basi filosofiche, pedagogiche, epistemologiche e concettuali della didattica della matematica*. Prefacio de Guy Brousseau. Bologna: Pitagora. [Versión en idioma español: D'Amore, B. (2005). [Bologna: Bonomo, 2023]. *Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la didáctica de la matemática*. Prefacio de Guy Brousseau. Prefacio a la edición en idioma español de Ricardo Cantoral. México DF, México: Reverté-Relime].

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2001). Concepts et objects mathématiques. En A. Gagatsis (Ed.), *Learning in mathematics and science and educational technology*. Proceedings of the third intensive programme Socrates-Erasmus (pp. 111–130). Nicosia (Chipre): Intercollege.

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2012). Su alcune D in didattica della matematica: designazione, denotazione, denominazione, descrizione, definizione, dimostrazione. Riflessioni matematiche e didattiche che possono

portare lontano. *Bollettino dei docenti di matematica*, 64, 33–46.
D'Amore, B., & Matteuzzi, M. (1976). *Gli interessi matematici*. Venezia: Marsilio.
D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., & Iori, M. (2013). *Primi elementi di semiotica. La sua presenza e la sua importanza nel processo di insegnamento-apprendimento della matematica*. Prefacios de Raymond Duval y Luis Radford. Bologna: Pitagora. [Bologna: Bonomo, 2023]. [Edición en idioma español: D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., & Iori, M. (2013). *La semiótica en la didáctica de la matemática*, con prefacio a la edición española de Carlos Eduardo Vasco. Bogotá: Magisterio].
Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-object. *Recherches en didactique des mathématiques*, *7*(2), 5–31.
Duval, R. (1993). Registres de représentations sémiotiques et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Science Cognitives*, *5*(1), 37–65.
Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne: Peter Lang.
Duval, R. (1998a). Signe et objet (I): Trois grandes étapes dans la problématique des rapports entre représentations et objet. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, *6*(1), 139–163.
Duval, R. (1998b). Signe et objet (II): Questions relatives à l'analyse de la connaissance. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, *6*(1), 165–196.
Duval, R. (2006). Quelle sémiotique pour l'analyse de l'activité et des productions mathématiques? En L. Radford & B. D'Amore (Eds.), *Semiotics, Culture and Mathematical Thinking* [Special Issue]. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *9*(1), 45–81. Obtenido de http://www.clame.org.mx/relime.htm
Duval, R. (2009a). «Objet»: un mot pour quatre ordres de réalité irréductibles? En J. Baillé (Ed.), *Du mot au concept: Objet* (pp. 79–108). Grenoble: PUG.
Duval, R. (2009b). Sémiosis, pensée humaine et activité mathématique. *Amazônia-Revista de educação em ciências e matemáticas*, *6*(11), 126–143. Obtenido de http://www.periodicos.ufpa.br/index.php/revistaamazonia/index
Duval, R. (2011). *Ver e ensinar a matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas*. São Paulo: Proem.
Duval, R. (2012). Quelles théories et quelles méthodes pour les recherches sur l'enseignement des mathématiques? *Práxis educativa*, *7*(2), 305–330. doi: 10.5212/PraxEduc.v.7i2.0001

Eco, U. (1984). *Semiotica e filosofia del linguaggio*. Torino: Einaudi.

Eco, U. (1986). Sign. En T. A. Sebeok (Ed.), *Encyclopedic dictionary of semiotics*. Berlin: Mouton de Gruyter.

Eikeland, O. (2008). *The ways of Aristotle: Aristotelian phrónêsis, Aristotelian philosophy of dialogue, and action research.* Bern: Peter Lang Publishers.

Frege, G. (1892). Über Sinn und Bedeutung. *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik*, *100*(1), 25–50.

Husserl, E. (1900). *Logische Untersuchungen. Erster Teil: Prolegomena zur reinen Logik.* Halle: Niemeyer.

Husserl, E. (1901). *Logische Untersuchungen. Zweite Teil: Untersuchungen zur Phänomenologie und Theorie der Erkenntnis*. Halle: Niemeyer.

Husserl, E. (1970). *Logical investigations* (J. N. Findlay, Trans.). London: Routledge and Kegan Paul. (Trabajo original publicado 1900-01).

Leibniz, G. W. (1840). Dialogus de connexione inter res et verba, et veritatis realitate. In J. E. Erdmann (Ed.), *God. Guil. Leibnitii Opera philosophica quae exstant latina gallica germanica omnia* (Vol. 1, pp. 76–78). Berlin: Sumtibus G. Eichleri.

Mensch, J. R. (2001). *Postfoundational phenomenology: Husserlian reflection on presence and embodiment*. University Park, PA: Penn State Press.

Nöth, W. (1995). *Handbook of semiotics*. Bloomington, IN: Indiana University Press.

Platón (1992). *Republica* (C. Eggers Lan, Trad.). Madrid: Gredos.

Radford, L. (1997). On psychology, historical epistemology and the teaching of mathematics: Towards a socio-cultural history of mathematics. *For the learning of mathematics*, *17*(1), 26–33.

Radford, L. (2002). The seen, the spoken and the written: A semiotic approach to the problem of objectification of mathematical knowledge. *For the learning of mathematics*, *22*(2), 14–23.

Radford, L. (2003). Gestures, speech and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to students' types of generalization. *Mathematical thinking and learning*, *5*(1), 37–70.

Radford, L. (2004). Cose sensibili, essenze, oggetti matematici ed altre ambiguità. *La matematica e la sua didattica*, *18*(1), 4–23.

Radford, L. (2005). La generalizzazione matematica come processo semiotico. *La matematica e la sua didattica*, *19*(2), 191–213.

Radford, L. (2006). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. En L. Radford & B. D'Amore (Eds.), *Semiotics, Culture and Mathematical Thinking*

[Special Issue]. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *9*(1), 103–129. Obtenido de http://www.clame.org.mx/relime.htm

Radford, L. (2013). Three key concepts of the theory of objectification: knowledge, knowing and learning. *Journal of research in mathematics education*, *2*(1), 7–44. doi: 10.4471/redimat.2013.19

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflection on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational studies in mathematics*, *22*(1), 1–36.

Spinicci, P. (2002). *Lezioni sulle Ricerche filosofiche di Ludwig Wittgenstein*. Milano: CUEM.

Stöckl, A. (1887). *Handbook of the history of philosophy. Part one: Pre-Scholastic philosophy* (Finlay T. A., Trans.). Dublin: M. H. Gill and Son.

Versteegh, C. H. M. (1977). *Greek elements in Arabic linguistic thinking*. Leiden: E. J. Brill.

Williams, M. (1999). *Wittgenstein, Mind and Meaning: Toward a social conception of mind*. London and New York: Routledge.

Wittgenstein, L. (1913). *Philosophische Grammatik*. Oxford: Basil Blackwell.

Wittgenstein, L. (1922). *Tractatus Logico-Philosophicus* (F. P. Ramsey & C. K. Ogden, Eds.). London: Routledge & Kegan Paul. (Trabajo original publicado 1921).

Wittgenstein, L. (1953). *Philosophische Untersuchungen* (G. E. M. Anscombe & R. Rhees, Eds.). Oxford: Blackwell.

Wittgenstein, L. (1958). *The Blue and Brown Books*. Oxford: Blackwell.

CAPÍTULO VII

How the sense of mathematical objects changes when their semiotic representations undergo treatment or conversion

Martha Isabel Fandiño Pinilla [II]
Bruno D'Amore [I II III]

[I] Profesor titular experto, Doctorado Interinstitucional, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia
[II] NRD, Departamento de Matematica, Università di Bologna, Italia
[III] Miembro de la Academia de las Ciencias de Bologna, Italia

Summary: In this paper I will demonstrate a consequence at times manifest in the semiotic transformations involving the treatment and conversion of a semiotic representation whose sense derives from a shared practice. The shift from one representation of a mathematical object to another via transformations, on the one hand maintains the meaning of the object itself, but on the other can change its sense. This is demonstrated in detail through a specific example, while at the same time it is collocated within a broad theoretical framework that poses fundamental questions concerning mathematical objects, their meanings and their representations.
Keywords: mathematical object, semiotic representations, treatment, conversion.

1. PRELIMINARY REMARKS

It often happens, at any school level, in mathematical situations that can also be very different between each other, that we are surprised by a statement that suddenly reveals a missed conceptual construction regarding topics that instead appeared thoroughly acquired.

We will give a roundup of examples that we found in the past years and we will try to give one of the possible explanations of this phenomenon, analysing in particular an example.

We will refer to Radford (2004) (*Figure 1*) where one can find this diagram that we appreciate because of its attempt to put in the right place the ideas of *sense* and *understanding*.

Note how the sense allows to give different "presentations" of the same object, whereas the understanding allows to say that the synthesis of these presentations leads to the understanding of the object.

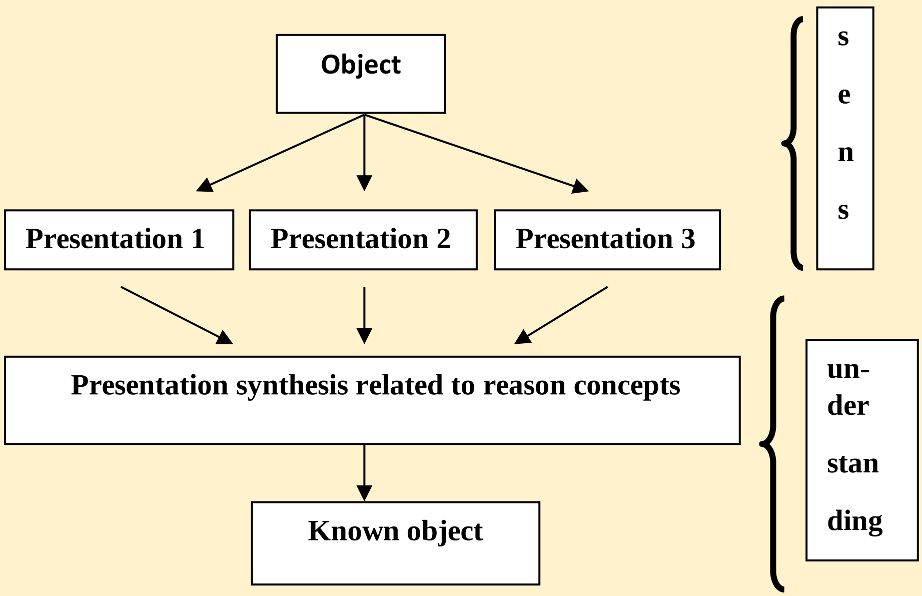


Figure 1: Sense and understanding

2. MATHEMATICAL OBJECT, ITS SHARED MEANING AND ITS SEMIOTIC REPRESENTATIONS: THE NARRATION OF AN EPISODE

In a fifth class (pupils aging 10 years) of an Italian Primary School, the teacher has conducted an introductory lesson in a-didactic situation concerning the first elements of probability, in which the pupils construct, with at least the use of some examples, the idea of "event" and "the probability of simple events". As an example, the teacher uses a normal die with six faces to study the random results from a statistical point of view. From this emerges a frequency probability which is, however, interpreted in the classical sense. The teacher then proposes the following exercise:

> *Calculate the probability of the following event: the result of an even number when throwing the die*.

Pupils discuss in groups and above all sharing strategies devised under the direction of the teacher decide that the answer is expressed by the fraction

$\frac{3}{6}$ because "the possible results are 6 (at the denominator) while the results that render the event true are 3 (at the numerator)".

After having institutionalised the construction of this knowledge, satisfied by the result of the experience and the fact that the outcome has been rapidly obtained and the pupils have shown considerable skill in handling fractions, the teacher proposes that, on the basis of the equivalence between $\frac{3}{6}$ and $\frac{50}{100}$, it is also possible to express the probability by writing 50% and that this is indeed more expressive, since it means that the probability of such a result is a half, in terms of the generality of all possible events which is 100. A pupil observes that "so we can also use the [fraction] $\frac{1}{2}$", and the proposal is verified through the explanation of the pupil, rapidly accepted by all and once again institutionalised by the teacher.

If we analyse the different semiotic representations of the same event which emerge during this activity – "the result of throwing a die is an even number" – it is possible to identify at least the following:

• semiotic register: natural language: probability that the result of throwing a die is an even number

• semiotic register: the language of fractions: $\frac{3}{6}$, $\frac{50}{100}$, $\frac{1}{2}$

• semiotic register: the language of percentages: 50%.

Each of the preceding semiotic representations is the signifier which follows from a preceding single meaning (Duval, 2003). The shared "sense" of what was being developed together was always the same and therefore the mathematical practice carried out and described led to semiotic transformations for which the final results were easily accepted:

• conversion: from the semiotic representation expressed in the natural language register to the written form $\frac{3}{6}$

• treatment: from the written forms $\frac{3}{6}$ and $\frac{1}{2}$ to $\frac{50}{100}$

• conversion: from the written form $\frac{50}{100}$ to 50%.

At the end of the sequence the pupils are asked if the fraction $\frac{4}{8}$ can be used to represent the same event, since it is equivalent to $\frac{3}{6}$. *The answer is negative, unanimous and without hesitation*. Even the teacher, who had previously handled the situation with confidence, asserts that "$\frac{4}{8}$ *cannot* represent the event because a die has 6 faces and not 8". Pressed to consider further the question, the teacher adds: "There are not only dice with 6 faces, but also dice with 8 faces. In that case, yes, the fraction $\frac{4}{8}$ can represent the result of throwing a die is an even number".

3. A SYMBOLISM FOR SEMIOTIC PRINCIPLES

In other studies we have already used the following symbols (D'Amore, 2001, 2003a,b, and elsewhere):
Hereafter we will use:
• r^m $=_{df}$ m^{th} semiotic register
• $R^m{}_i(A)$ $=_{df}$ i^{th} semiotic representation of concept A in the semiotic register r^m
(m = 1, 2, 3, …; i = 1, 2, 3, …).

The following diagram illustrates the question even more clearly (with reference to Duval, 1993): characteristics of the semiotic: *representation – treatment – conversion* [imply different cognitive activities] (m, n, i, j, h = 1, 2, 3, …):
• concept A to be represented → choice of distinctive features of A
• *REPRESENTATION* of A [$R^m{}_i(A)$] in a given semiotic register r^m
• transformation of representation *TREATMENT*
• new representation (i≠j) [$R^m{}_j(A)$] in the *same* semiotic register r^m

• transformation of register *CONVERSION*
• new representation ($h \neq i$, $h \neq j$) [$R^n_h(A)$] in a *different* semiotic register r^n ($n \neq m$).

4. LET'S TURN BACK TO THE EPISODE

There exists a mathematical object (meaning) O_1 to represent: the probability that the result of throwing a die is an even number;
• a *sense* is ascribed to the object on the basis of a presumable shared experience which is part of a social practice shared in the class;
• a semiotic register r^m is chosen in order to represent O_1: $R^m_i(O_1)$;
• a treatment is effected: $R^m_i(O_1) \rightarrow R^m_j(O_1)$;
• a conversion is effected: $R^m_i(O_1) \rightarrow R^n_h(O_1)$;
• $R^m_j(O_1)$ is interpreted and the mathematical object (meaning) O_2 is recognised in it;
• $R^n_h(O_1)$ is interpreted and the mathematical object (meaning) O_3 is recognised in it.

What is the relationship between O_2, O_3 and O_1?

Identity can be recognised; and this means that there is a previous knowledge, on the basis of which identity itself can be pointed out.

But we can avoid to recognise identity, so the "interpretation" is or seems different, and in this case we lose the *sense* of the original starting-object (meaning) O_1.

Duval too treats the question of different representation of the same object (Duval 2006).

CONCLUSION

What we would like to emphasize here is how the sense of a mathematical object is more complex than is considered within the usual pair (object and its representations). There are semantic links between pairs of this kind: (object, its representation) – (object, its *other* representation)

These links are due to semiotic transformations between the representations of the same object, but then cause the loss of sense of the initial object. Although both object and semiotic transformations are the result of shared practices, the outcomes of the transformations can require *other* attributions of sense through *other* shared practices. This is highly suggestive for all studies of ontology and knowledge.

The phenomenon described can be used to complete the picture proposed by Duval of the role of the multiple representations of an object in understanding it and also to break the vicious circle of the paradox. Every representation carries with it a *different* "subsystem of practices", from which emerge *different* objects (previously called O_i, $i \geq 1$). But the articulation of these objects within a more general system requires a change of perspective, a movement into another context in which the search for a *common structure* is a part of the system of global practices in which distinct "partial objects" play a role.

The progressive development of the use of different representations undoubtedly enriches the meaning, the knowledge and the understanding of the object, but also its complexity. In one sense the mathematical object presents itself as unique, in another as multiple.

What is then the nature of the mathematical object? The only reply would seem to be "structural, formal, grammatical" (in the epistemological sense) together with "global, mental, structural" (in the psychological sense) which we as subjects construct within our brains as our experience is progressively enriched.

REFERENCES

D'Amore B. (2001). Concettualizzazione, registri di rappresentazioni semiotiche e noetica. *La matematica e la sua didattica*. 2, 150-173. [Version in Spanish: (2004). *Uno*. 35, 90-106].

D'Amore B. (2003a). La complexité de la noétique en mathématiques ou les raisons de la dévolution manquée. *For the learning of mathematics*. 23, 1, 47-51. [Version in Spanish: (2002). *TED*. Bogotà, Universidad Pedagogica Nacional. 11, 63-71].

D'Amore B. (2003b). *Le basi filosofiche, pedagogiche, epistemologiche e concettuali della Didattica della Matematica*. Preface by Guy Brousseau. Bologna: Pitagora. [Version in Spanish: (2005). México DF: Reverté-Relme. Preface: Ricardo Cantoral]. [Version in Portugese: (2005). São Paulo: Escrituras. Preface: Ubiratan D'Ambrosio].

Duval R. (1993). Registres de représentations sémiotiques et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*. 5, 37-65.

Duval R. (2003). Décrire, visualiser ou raisonner: quels 'apprentissages premiers' de l'activité mathématique? *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*. 8, 13-

62.
Duval R. (2006). Transformations de representations semiotiques et demarche de pensée en mathématiques. Colloque COPIRELEM, Strasbourg, 30th may 2006 – 1st june 2006. In press.
Radford L. (2004). Cose sensibili, essenze, oggetti matematici ed altre ambiguità. *La matematica e la sua didattica*, *18*(1), 4-23.

CAPÍTULO VIII

The Semiotic perspective in teachers' training in Mathematics Education

Miglena Asenova [I]

Agnese Del Zozzo [II]

Marzia Garzetti [III]

[I] Free University of Bozen,
miglena.asenova@unibz.it

[II] Università degli studi di Trento,
agnese.delzozzo@unitn.it

[III] Università di Genova,
marzia.garzetti@edu.unige.it

Abstract. This chapter delves into the semiotic perspective in mathematics teachers' training, emphasizing the fundamental role of Semiotic Interpretative Knowledge (SIK). Rooted in Duval's semio-cognitive approach, Semiotic Interpretative Knowledge addresses the semiotic challenges inherent in interpreting students' mathematical reasoning and providing effective feedback. The chapter outlines the theoretical framework of Semiotic Interpretative Knowledge, which integrates interpretative knowledge, Duval's theory of semiotic registers, components of mathematical learning, and feedback. Through chosen examples and their analysis, it demonstrates how pre-service teachers can improve their feedback by recognizing and utilizing semiotic functions. The chapter concludes with a proposal for incorporating semiotic training into teacher education programs, aiming to enhance teachers' ability to interpret students' non-standard responses and support their mathematical understanding. This work highlights the necessity of semiotic awareness in fostering inclusive and effective mathematics education.

1. Introduction

This chapter explores the relationship between interpretation and feedback from a semio-cognitive approach, focusing on its implications for teacher education. Mathematics education research has emphasized how interpreting students' reasoning in mathematics necessitates a robust semiotic competence regarding the patterns of sign use and production (e.g. D'Amore & Fandiño Pinilla, 2007; Duval, 1993; 2006a; Iori, 2018; Santi, 2011). Indeed, since the 1990s, a growing body of studies has indicated that the persistent difficulties students encounter in mathematical activities are intrinsically linked to the semiotic manipulation of mathematical objects (D'Amore, 2001, 2006; Duval, 1988a, 1988b, 1993, 1995).

Moreover, various studies in mathematics education have examined the types of feedback teachers spontaneously provide: typically conceptual, strategic, or procedural features are emphasized, while the semiotic aspects related to sign use and production remain neglected (Galleguillos & Ribeiro, 2019; Santos & Pinto, 2010; Stovner & Klette, 2022).

With this respect, Iori (2018) particularly emphasizes the need for mathematics teacher education programs to adopt approaches that account for the central role of teachers' knowledge about the semio-cognitive reasons behind students' difficulties in mathematics. Iori highlights how teachers could benefit from understanding the distinction between mathematical objects and their semiotic representations, intentionally producing different semiotic representations of a mathematical object, recognizing the various aspects of a semiotic representation concerning students' achievements and difficulties, and being aware of potential pitfalls arising from representations that are cognitively distant or not semantically congruent.

The concept of Semiotic Interpretative Knowledge (SIK) introduced in this chapter builds upon Duval's semio-cognitive approach (1988a, 1988b, 1993, 1995) and the importance of semiotic awareness, as also highlighted by Iori (2018). This awareness is crucial for understanding each student's unique strategies and providing appropriate feedback.

Asenova and colleagues (2023a) define SIK as "the knowledge needed by teachers in order to interpret students' answers [...] and give appropriate feedback to them when conceptual knowledge is hindered and, thus, remains hidden, behind difficulties related to patterns of sign use and production, including individual creativity in sign use. " (p. 11). This type of knowledge is particularly important when interacting with students with learning disabilities, who are more likely to use non-standard representation systems and problem-solving strategies (Del Zozzo & Santi, 2023). However, SIK is essential in any context as it supports the right to learning for all students by making sense of incorrect or unusual responses (Asenova et al., 2023a).

This chapter underscores the significance of SIK in effective mathematics teaching, highlighting the relationship between interpretation and feedback from a semio-cognitive perspective. It also proposes strategies to implement SIK in a training program and enhance the effectiveness of mathematics education.

In section 2, we present the theoretical framework underpinning SIK, in section 3 we present two examples of spontaneous use of SIK in pre-service teachers' feedback, and in section 4 we provide a proposal for teacher training based on Duval's perspective, which serves as one of the pillars of SIK.

2. Theoretical framework and definition of SIK

The theoretical framework of SIK is composed by the construct of Interpretative Knowledge (Ribeiro et al., 2016); the semiotic register theory (Duval, 1995; 2017), including semiotic functions of conceptualization (D'Amore, 2003); components of mathematical learning (Fandiño Pinilla, 2023); and feedback exchange in mathematics (Hattie & Timperley, 2007). In the following we briefly present all the four theoretical components and discuss their mutual relation.

2.1 Interpretative knowledge

The first theoretical construct on which the SIK definition is based is the notion of interpretative knowledge, introduced by Ribeiro and colleagues (2016). The authors, drawing on the Mathematical Knowledge for Teaching introduced by Ball and colleagues (2008), define the teacher's Interpretative Knowledge as that part of mathematical knowledge which "allows teachers to give sense to pupils' non-standard answers (*i.e.*, adequate answers that differ from the ones teachers would give or expect) or to answers containing errors." (Ribeiro e al., 2016 p. 9). In their paper, the authors present an activity in which prospective elementary school teachers are first asked to solve the problem: "If we divide five bars of chocolate equally among six children, what amount of chocolate would each child get"? They are then asked to judge the mathematical correctness of some students' answers and to justify their position. For answers deemed inadequate, they are asked to formulate questions that will guide the students in understanding the process and arriving at a correct solution. In the original task seven student-answers are proposed. Here we report only Mariana’s answer along with two examples of pre-service teachers’ (PTs) interpretation (Table 1). In the following Mariana's solution and the PTs' comments are used to illustrate the functions of the different components of the theoretical framework in defining SIK.

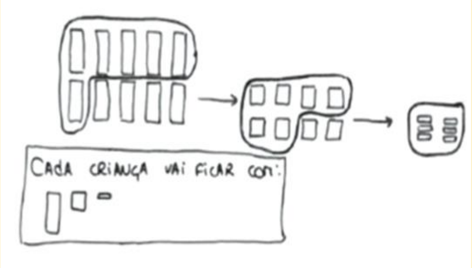
 (Each child gets)	PT1: Mariana’s solution cannot be understood, so the first question would be, what does this representation mean? After listening to her answer, I would try to show her my own representation, in order for us to arrive at the solution together. PT2: I have been teaching for ten years (...) and I find these solutions very confusing. (…) Indeed, I always try to make the visual images as clear as possible and encourage my pupils to do the same. In this case, the reasoning paths are very disorderly and lead to confusion.

Table 1. Mariana’s solution and two excerpts from the PTs comments on it (Ribeiro et al., 2016, p. 10)

The authors shed light on the difficulties of PTs to leave their own solution space, which corresponds to the difficulty of giving a mathematical meaning to the student's answer. This difficulty prompted the authors to critically rethink their role as educators of PTs and led them to conceive of their courses more as communities of inquiry (Jaworski & Goodchild, 2006) in which analysis of the discussions allowed “to reflect on the development of the interpretive knowledge that both prospective teachers and educators should aim to attain” (Ribeiro et al., 2016, p. 12).

Starting from the seminal work of Ribeiro and colleagues (2016), research on interpretative knowledge has delved into conceptual, strategic, and affective factors (Di Martino et al., 2019). However, the study of semiotic aspects, as highlighted by Iori (2018) remains marginal. The SIK construct extends that of interpretative knowledge by placing the semiotic complexity of mathematical learning at the center. This is in line with what Fandiño Pinilla (2023) proposed in structuring the components that characterize learning in mathematics, which is the content of the next section.

2.2 Components of mathematical learning

Fandiño Pinilla (2023) characterizes the learning of mathematics as consisting of (at least) five components: the *conceptual component*, related to the understanding of the mathematical object as such; the *strategic component*, related to problem solving; the *algorithmic component*, related to the execution of procedures and algorithms; the *communicative component*, which concerns both the communicative modes specific to mathematics, such as proof and proving, and more generally the communicative practices that characterize learning; and the *semiotic component*, which concerns the handling of signs in mathematics and the relationship between signs representing the same object. The semiotic component cuts across the others and specifically characterizes mathematical learning. Although these are components related to mathematical learning, and thus centered on the student, they require specific attention on the part of the teacher.

Let us look again at Mariana's response (left column of Table 1) from this perspective. On closer analysis, Mariana's behavior shows a good level of conceptual, strategic, and algorithmic learning.

Indeed:

- the first step in her solution is to divide the five chocolate bars in half, resulting in ten "half-bars": one for each child;
- the second step focuses on the remaining four half-bars, which are again divided in half: one for each child;
- at this point, there are two "half" bars left, which Mariana divides into three: one for each child;
- she concludes that each child will end up with one of the pieces from each of the three divisions.

Mariana's approach shows a good conceptual understanding of fractions as dividing into equitable parts; the approach to the problem is effective and coherent, and the conscious progression shows good control of the algorithmic aspects. Nevertheless, there is a need for attention at the level of the communicative and semiotic components, as evidenced by the teachers' difficulty in interpreting her answer. In the next section, we delve deeper into the semiotic component of mathematical learning.

2.3 Semiotics

According to Duval (2017), in mathematics, ostensive references are impossible because we cannot directly access mathematical objects through our senses. Conceptualization itself, called *noesis*, is identified in mathematics with a complex coordination of several semiotic systems (called *semiosis*), rooted in semiotic transformations within the same semiotic system (*treatments*) and semiotic transformations between different semiotic systems (*conversions*) (Duval, 2017). A *semiotic system* (or register) is defined by Duval (1995) and Ernest (2006) as consisting of: (1) a set of basic signs that have meaning only when set against or in relation to other basic signs (e.g., the meaning of digits in the decimal number system); (2) a set of rules for producing signs from basic signs and for transforming them. According to Duval, D'Amore (2003) identifies conceptualization with the following semiotic functions specific to mathematics: (1) choice of the distinctive features of a mathematical object and its representation in a semiotic system; (2) treatment in the same semiotic system; (3) conversion between semiotic systems. The management of such semiotic complexity within the structure of semiotic systems and the processing of semiotic functions encounters Duval's famous cognitive paradox (Duval, 2017): on the one hand, the student gets to know the abstract mathematical objects only through the semiotic activity; on the other hand, such a semiotic activity requires the student's conceptual knowledge of the mathematical objects involved in it (noesis requires semiotics). According to Duval (2009), a mathematical object, intended as an epistemic object, emerges as an invariant behind treatments and transformations and thus requires the interplay of at least two semiotic registers.

Let us look again at Mariana's answer and ask ourselves: what is the distinctive feature of the concept of fractions that is emphasized in Mariana's representation? It emphasizes (correctly) the ideas of fractions as a division into equal parts, and of division as subsequent subtractions. Nevertheless, it relies (almost) exclusively on figurative representations, and it lacks connections to the natural language of the task. It is precisely this semiotic mismatch that creates the conditions of communicative "incommensurability" between Mariana's solution strategy and PT1's and PT2's comments on it (Table 1) (we refer to Asenova and colleagues (2023a) for other examples showing such a mismatch). In other words, semiotic aspects intervene in the exchange of feedback between students and teachers. Therefore, in order to propose a semiotic perspective on feedback, it is necessary to add the latter to the SIK-theoretical framework.

2.4 Feedback

Feedback is defined by Hattie and Timperley (2007) as “information provided by an agent (e.g., teacher, peer, book, parent, self, experience) regarding aspects of one’s performance or understanding” (p. 81). Galleguillos and Ribeiro (2019) investigate prospective teachers’ ability to use interpretative knowledge in giving feedback: teachers were asked to solve a task in small groups and then provide feedback to chosen solutions given by students to the same task. These authors classify the provided feedback into four categories: (a) Feedback on how to solve the problem; (b) Confusing feedback: when the feedback seems to be correct, but it can be confusing for the student; (c) Counterexample as feedback; (d) Superficial feedback: the content of such feedback was insufficient (too broad or inconsistent) to allow the solver to understand its meaning. As we can see, the work of the two researchers focuses on the content of the feedback but does not consider the semiotic aspects. However, as discussed above, such aspects can be fundamental in interpreting students' "non-standard" responses. Indeed, coming back to Mariana's solution and the feedback provided by the PTs (Table 1), we can see that they are not able to provide effective feedback because of a lack of an appropriate interpretation of Mariana's representation.

2.5 The definition of Semiotic Interpretative Knowledge

We recall the definition of SIK, anticipated in the introduction, as “the knowledge needed by teachers in order to interpret students’ answers (be they standard or non-standard), as well as students’ behavior, and to give an appropriate feedback to them, when conceptual knowledge is hindered, and thus remains hidden behind difficulties related to patterns of sign use and production, including individual creativity in sign use” (Asenova et al., 2023a, p. 11). In light of the theoretical references described in this chapter, we now have the tools to understand the importance of addressing the teachers' interpretative knowledge in a teaching-learning context, beyond just a conceptual or strategic perspective. For instance, in Mariana's solution, semiotic aspects profoundly influenced the teacher's interpretation (see Table 1). By examining the feedback aspect, we can see how the components that characterize the learning of mathematics, as introduced by Fandino Pinilla (2023), can be linked to those related to the teacher's interpretation, focusing on strategic, conceptual, communicative, semiotic, and algorithmic aspects. Galleguillos and Ribeiro (2019) emphasize the conceptual and strategic aspects of interpretation and feedback. However, in Mariana's case, PT1 explicitly refers to the semiotic component when giving feedback, stating, "the first question would be: what does this representation mean?", and adding, "after listening to her answer, I would try to show her my own representation." It seems the teacher only considers the possibility of Mariana's failure at the conceptual and/or strategic level. Training in SIK would foster greater awareness of interpretation and feedback from a semiotic perspective, allowing for a finer distinction between conceptual, strategic, algorithmic, communicative, and semiotic aspects.

In the next section, we present two examples where two PTs provide feedback on a student's written protocol. These examples are part of a broader research effort aimed at analyzing and classifying feedback provided by PTs from the perspective of SIK. Following this, we will discuss a teacher training proposal based on the semio-cognitive approach outlined in this section.

3. A study on SIK in pre-service teachers' feedback

Given the lack of research on the spontaneous use of semiotic resources in teacher feedback, in Asenova et al. (2023b), we extended the approach to feedback based on the development of appropriate interpretative knowledge, as proposed by Galleguillos and Ribeiro (2019), incorporating considerations related to SIK. The aim of the study was to demonstrate that the construct of SIK serves as a theoretical tool to further explore the nature of teacher feedback. The study involved 180 first-year students from the Faculty of Education (future primary school teachers), 16 students from the Master Degree Course in Mathematics (future secondary school mathematics teachers), and 4 students from the Master Degree Course in Didactics and Science Communication (future secondary school teachers of Mathematics and Science, or Science). Participants completed a questionnaire designed to collect data on how teachers in initial training interpret a student's incorrect answers to four mathematics tasks, and the feedback they would provide.

As an example, Figure 1 shows the first task of the questionnaire, chosen because it drives the use of semiotic functions (conversions involving symbolic language, natural language, and figural representations).

Task 1

Starting from the representation of the number $\frac{5}{6}$, Gina have to represent the numbers $\frac{8}{6}$, $\frac{1}{2}$ and 2.

Question 1.1: What do you think has happened? **Question 1.2**: How would you intervene?

Figure 1. Task 1 (with the kind permission of prof. Cristina Sabena, inspired by prof. Elisabetta Robotti's research on teaching-learning of fractions)

Out of the 200 prospective teachers who responded to the questionnaire, 21 agreed to be interviewed to investigate in more detail how SIK was used to support their interpretation and feedback.

The data analysis of the questionnaire reveals that many trainee teachers naturally feel the need to base their feedback on a network of various semiotic systems to achieve greater effectiveness and clarity. However, this need can be hindered by a lack of adequate semiotic skills. In general, when trainee teachers spontaneously use SIK, they tend to employ a complex network of semiotic functions, especially when providing feedback. However, spontaneous management of these resources does not seem sufficient to ensure the effectiveness of feedback from a semantic perspective. The internalization of SIK appears to require specific training within teacher education programs.

Below, we present the interview of Sara, a student from the Faculty of Education without specific training in semiotics, and Giulia, a student from the Faculty of Mathematics with specific training in semiotics. Both the interviews concern Task 1 (Figure 1).

3.1 Sara

In the questionnaire, Sara's answers in Task 1 were:

Answer to question 1.1 (interpretation): "To determine the sequence, the fraction is a division of numbers and a half corresponds to 0.5 while 5/6 corresponds to 0.8. the child takes into account only the denominator but the denominators are to be carried back to a common denominator to verify the parts taken into account."

Answer to question 1.2 (feedback): "1/2 5/6 8/6 2".

Sara's interview began with a request to explain her feedback to make it more effective (it only contained the correct order of fractions). She spontaneously performs treatments and conversions: after transforming all the fractions to 6 as the common denominator (i.e. a treatment from $\frac{1}{2}$ $\frac{5}{6}$ $\frac{8}{6}$, 2 to $\frac{3}{6}$ $\frac{5}{6}$ $\frac{8}{6}$ $\frac{12}{6}$), she grabs the Montessori rod (materials she uses at school with her students, Figure 2a).

Figure 2: The Montessori-rods used by Sara to represent the fractions

Sara: If I want to represent $\frac{1}{2}$ which is halfway the length of the rod, three coloured rectangles on one side and three on the other. I consider three of the coloured rectangles [she scrolls the small red rectangle over the rod and counts $1, 2, 3$ (Figure 2b)]. The same holds for $\frac{5}{6}$ [she scrolls the red rectangle counting $1, 2, 3, 4, 5$].

Researcher: How would you represent $\frac{8}{6}$ with Montessori-rods?

Sara: The only thing I can think of is to take ... [she grabs a rod with 6 colored rectangles and a rod with 2 colored rectangles (Figure 2c)]. One represents the number 6 and the other represents the number 2, the 6-rod represents quantity 6 and the 2-rod represents quantity 2. I jump in quantity because I start with the number 1, this red one. When I count I do so $1, 2, 3$ ... [scrolls the 1-rod over the 6-rod counting $1, 2, 3, 4, 5$]. This is the useful step to take, this is the 6-rod but I consider 1, 2, 3, 4, 5 [referring to $\frac{5}{6}$]. If I consider this [the 2-rectangles colored rod] it means I consider 8 parts, it means I consider 8 units and I'm on the wrong path, I'm somewhere else like this. I no longer have the base and that's it, but I have the base plus two and it comes 8 as a whole. I mess up the student's understanding. So to do $\frac{8}{6}$ It's easier to use pie charts, where I consider all the quantities. The half divides me into two parts, because these wedges are made equal. I have the $\frac{1}{2}$ and it gives me the whole, then I have the $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$ and $\frac{1}{2}$ and so on. It's all divided in this fashion [drawing on a sheet of paper] 1, 2, 3, 4 [counting the wedges on the pie chart] up to 6. So, I take another pie chart divided in six wedges and I consider this and this and this 8 times [writing $\frac{1}{6}$ of the 8 slices she is pointing to (Figure 3)].

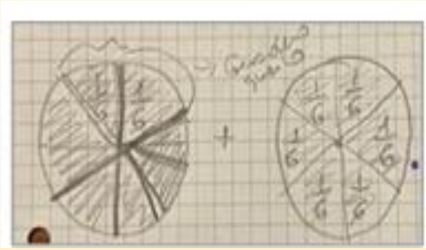


Figure 3: Sara's drawing of the pie charts used to represent the fractions

The articulation of Sara's feedback during the interview ends here. Sara's interview highlights the lack of appropriate SIK: after the first treatment of transforming to fractions with denominator 6, the first conversion to the use of the Montessori rods fails because of the lack of consideration of distinctive featuress. The second conversion attempt with pie charts is successful. However, in order for the feedback to be effective, the pie chart representation should be reconnected to the one that Gina, the student (see Figure 1), was working on by performing a transformation in the graphics tab that allows the pie charts to shift to the original rectangle. In doing so, the distinctive features highlighted with the two representations have to be considered. In the starting rectangular representation (Figure 1) the unit is fixed implicitly through the position of the fraction $\frac{5}{6}$ (*i.e.* here we have a fraction as an operator) but In the pie chart representation the unit is explicitly given (*i.e.* here we have a fraction as a part of a whole). To semiotically connect the two representations, Sara would first have to bridge the two representations with $\frac{5}{6}$ in the pie chart (Figure 4a) and 1 in the rectangle (Figure 4b).

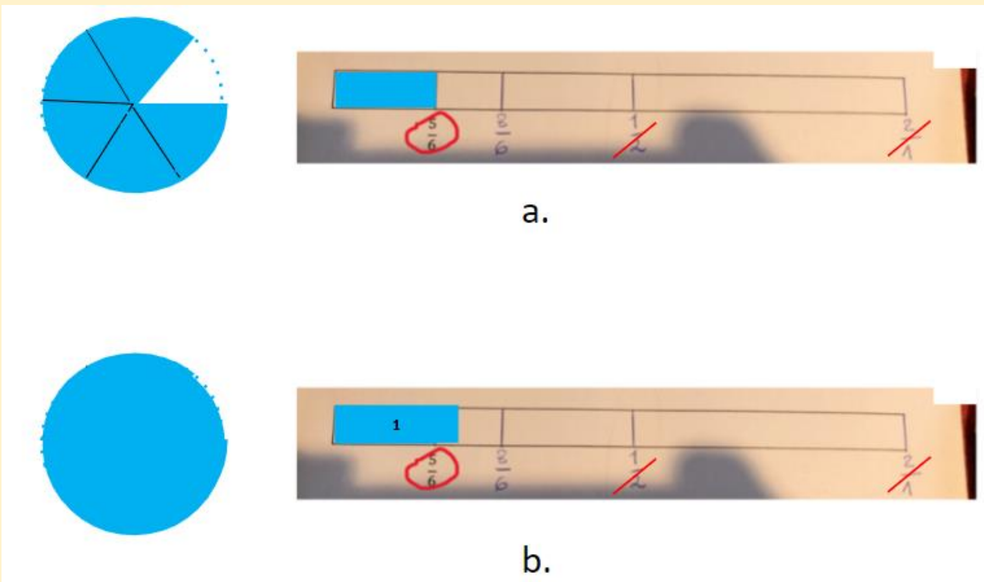


Figure 4: Semiotic connection of the pie chart and the rectangle representations

Then, continuing with the same approach, to materialize the connection, each fraction represented on the pie chart should have its corresponding representation in the rectangle.

3.2 Giulia

Giulia is a student specializing in mathematics; we consider the same task presented in the previous section. In the first phase of the interview, that of interpretation, she refers to pie chart-representation of fractions as a means of overcoming the difficulty of identifying the unit on the rectangle. Giulia notes that while the student correctly identified $\frac{1}{2}$ within the rectangle, confusion arose when positioning the number 2 within the same context. Consistently with her interpretation, she proposes exploring different representations to determine if the student’s difficulty is conceptual or specific to the rectangle representation. By drawing and dissecting the rectangle, she suggests checking if the student's difficulty is consistent across various representations or tied to the specific visual model used.

Giulia focuses on distinguishing the semiotic from the conceptual component, recommending that the student marks the first number to understand her strategic choice. For example, if the student marked 2 first, it could indicate a misinterpretation of the unit. She emphasizes the need of explaining that the half of 2 is 1, and thus 1 should be placed at the midpoint of the rectangle, not $\frac{1}{2}$. Giulia also highlights the conceptual understanding of fractions using the example of $\frac{8}{6}$. She suggests, using a pie chart, to visually separate units, making the part-whole relationship clearer than with a rectangle. By dividing each unit into six parts, the student can see and select eight parts, thus understanding how to represent $\frac{8}{6}$.

Giulia’s feedback is supported by a good SIK: she tries to separate and address the semiotic and conceptual aspects of the student's work. She stresses the importance of recognizing the student’s strategic choices and converting between verbal and visual registers to enhance conceptual understanding. Giulia uses distinctive features, conversions, and treatments, and relates them to the student's work.

In this section we have seen that referring to representations and using representations from different registers does not in itself guarantee effective feedback. Sara uses transformations and treatments but does not explicitly link them to the representation chosen by the student. Giulia, on the other hand, makes a specific reflection on the student's choices and focuses her attention on the choice of distinctive features to represent, based on what the student has done. Giulia's training, based on Duval's semio-cognitive approach, could allow for greater awareness in the choice and use of representations in feedback to the student.

In the next section, we introduce a teacher training proposal based on this approach, highlighting how this type of proposal can make the student more aware of this crucial aspect of the learning of mathematics.

4. Semiotics in Teacher Training: Supporting Effective SIK Implementation

In Asenova and colleagues (2023b) we have shown that PTs seem to implicitly assume that feedback effectiveness grows with increasing use of semiotic resources. The above-mentioned study shows also that they often fail in this because of a lack of awareness on the semiotic transformations involved in their feedback (as in Sara's case) and that the effectiveness of their feedback grows with their SIK (as in the case of Giulia). The necessity to consider SIK an explicit content area in teacher training, specifically in reference to feedback effectiveness, goes with a lack of research on how to implement teacher training focused on SIK. In the following, we make a proposal on how to implement a first step of teacher training with a focus on SIK.

In particular, as a robust SIK requires the teacher's awareness of the semiotic tools needed to recognize and perform the semiotic functions of noetics, teachers should be introduced to Duval's semio-cognitive approach (1993, 2006b, 2017), and in particular to the aspects related to the semiotic functions and their role in the recognition of the mathematical object as invariant behind treatments and conversions (Duval, 2009). In this section we present a way of introducing PTs to this perspective. In accordance with Iori (2018), the proposal aims to help teachers to understand the distinction between mathematical objects and their semiotic representations, supposing that in this way they will be able to intentionally produce different semiotic representations of a mathematical object and to recognize the semiotic aspects concerning the students' achievements and difficulties.

First of all, focusing on D'Amore's definition of conceptualization (D'Amore, 2003), based on Duval's semio-cognitive approach, various examples of choice and representation of distinctive features are discussed with the participants. This discussion aims to draw their attention back to the properties of mathematical objects and to how their distinctive features are represented in chosen registers or semiotic systems. In Figure 5, four such examples are presented.

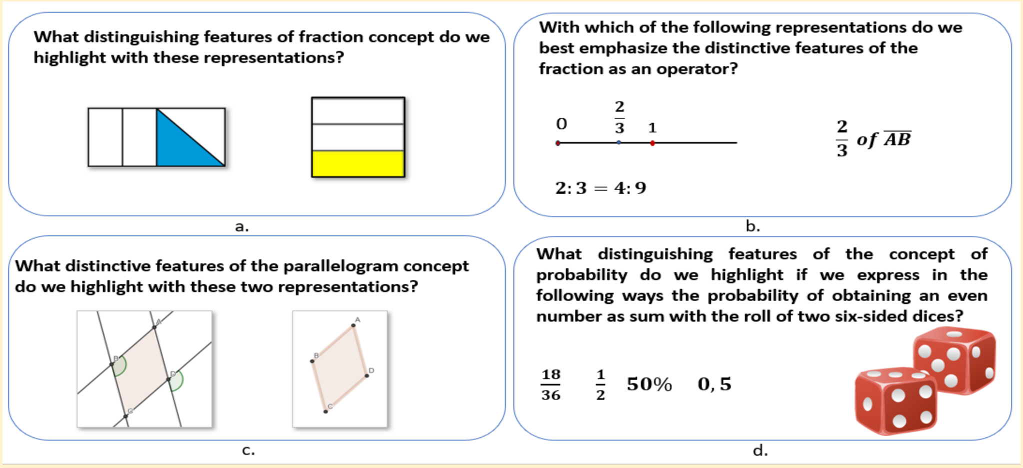


Figure 5. Examples of choice and representation of distinctive features of mathematical objects to be discussed with the participants during teacher training on SIK

In the first example (Figure 5a), selecting the representation on the left emphasizes the unique aspect of a fraction as a ratio between equal areas, while selecting the representation on the right emphasizes a fraction as a ratio of the areas of congruent figures. In the second example (Figure 5b), only one of the representations ($\frac{2}{3}$ of AB) emphasizes the distinctive features of a fraction as an operator applied to a magnitude (the length of an unitary segment). In the third example (Figure 5c), one can see that the representation on the left highlights the distinctive features of the parallelogram as a quadrilateral with two pairs of parallel sides and, consequently, two pairs of congruent angles, while the representation on the right brings out the distinctive feature of the parallelogram as a quadrilateral, but by looking at it as an icon rather than as a bidimensional geometric figure (Duval, 2005). In the fourth example (Figure 5d), the initial representation ($\frac{18}{36}$) emphasizes the distinctive features of probability as the ratio of favorable outcomes to total outcomes; the second representation ($\frac{1}{2}$) can still be associated to probability as a ratio, but in a more abstract way: for each of the favorable outcomes, there are two possible outcomes; in the third representation (50%) the distinctive features of probability as a ratio are still present, but only mediated by the meaning of percentage (“per cent” as “per hundred”, from the

Latin word "cento", 'hundred'): there are 50 favorable cases out of 100 possible cases; finally, the fourth representation (0.5) highlights the distinctive feature of probability as a real number in the interval $[0; 1]$.

Discussing these examples with the teachers aims to raise their awareness on the critical attention needed when selecting one representation rather than another, highlighting the consequent emphasizing or hiding of different characteristics.

The next step in teachers' training on SIK focuses on semiotic transformations. The participants are introduced to the concepts of treatments and conversions that are at the core of the semiotic activity within Duval's semio-cognitive approach. For this purpose, examples such as those displayed in Figure 6 are presented and discussed with the participants.

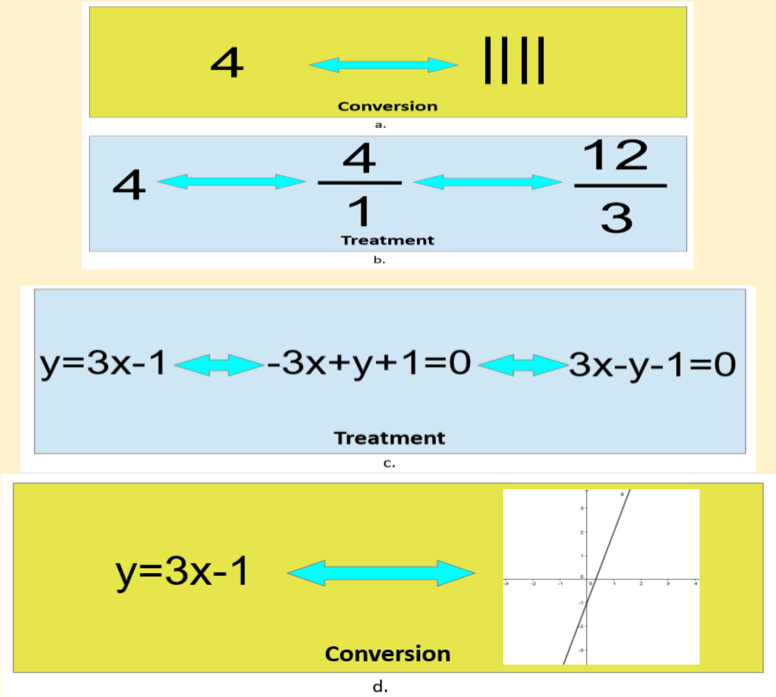


Figure 6. Examples of semiotic transformations to be discussed with the participants during teacher training on SIK

The first example (Figure 6a) refers to a conversion between 4 in the decimal arithmetic semiotic system and 4 as an iconic representation belonging to the semiotic system of pictograms. The second example (Figure 6b) shows treatments within the decimal arithmetic semiotic system, according to the rules that allow to transform 4 in $\frac{4}{1}$ and $\frac{4}{1}$ in $\frac{12}{3}$. In the third example (Figure 6c), two treatments in the algebraic register that allow switching from the implicit to the explicit equation of the line, are presented. Finally, in the third example (Figure 6d), a conversion between the algebraic semiotic system and the cartesian semiotic system is represented. A discussion on the correspondences between the distinctive features of the mathematical object in both semiotic systems should take place here: the coefficient '3' corresponds to the slope in the cartesian system; the constant '-1' corresponds to the intercept on the y-axis; each ordered pair $(x; y)$ of numbers that satisfies the equation $y = 3x - 1$ corresponds to a point on the line in the cartesian representation. According to Duval (2017), the awareness of the correspondences is fundamental to support conceptualization during a conversion; in this sense, it is not enough to provide representations in different semiotic registers, but it is necessary to make explicit the correspondences between the distinctive features in the different systems. Furthermore, Duval (2017) stresses that conversions are necessary for the conceptualization of the mathematical object, but the shift from one semiotic register to another often brings out a loss of meaning behind the performed transformation. Teachers that are not aware of the semiotic dimension of mathematical knowledge, could overlook this crucial aspect: they are already familiar with the concept that remains constant across various representations in different systems, but students frequently miss this invariant and perceive the representations as distinct entities. Referring to the third representation in Figure 3d, students could not recognize a representation of the same object "line" behind the algebraic and the cartesian representations. But not only conversions could lead to a loss of meaning; as research shows (D'Amore & Fandiño Pinilla, 2007), also treatments often lead to a loss of the invariant behind the transformations. An example are the different representations of probability discussed above (Figure 2d): the meaning of probability in classical sense, as ratio between the number of favorable outcomes to total outcomes is gradually lost by shifting from the representation on the left $\left(\frac{18}{36}\right)$ to the representation on the right (0.5). The choice of the distinctive features, i.e. the properties of the object to be represented, strongly depends on the choice of the representation system, as the possibility to represent strictly depends on the semiotic resources provided by the system itself (D'Amore & Fandiño Pinilla, 2007).

To offer representations in various semiotic systems in the mathematics class is thus important for at least two reasons: (1) identifying an invariant (mathematical object) across different contexts (semiotic systems) requires at least two such systems; (2) a single semiotic system is insufficient to carry out all the key features of a mathematical object that students need to coordinate to fully grasp the concept.

As discussed above, a strong SIK is important for the teacher's own interpretation of the student's answers, solutions and difficulties. But it becomes a key ingredient in a teacher's ability to provide effective feedback, as shown in sections 3.1 and 3.2. This argument goes beyond the scope of this chapter, focused on Duval's semio-cognitive approach in teacher training, but we refer the interested reader to Asenova et al. (accepted), where a model for teacher training on SIK related to feedback is proposed and discussed.

5. Conclusive remarks

Research in mathematics education during the last decades has shown the importance of semiotics for the interpretation of the student's reasoning in mathematics classroom (D'Amore, 2006; D'Amore & Fandiño Pinilla, 2007; Duval, 1993, 2017; Iori, 2018;). Research highlights also the necessity to distinguish different components of mathematical knowledge (conceptual, strategic, communicative, algorithmic and semiotic), recognizing a special role to the semiotic competence as transversal to all others (Fandiño Pinilla, 2023) that give rise to analogous components of teacher's interpretative knowledge. The semiotic component of his/her interpretative knowledge is strongly needed by the teacher to interpret the student's solutions and provide effective feedback. Our research line, after having defined the concept of SIK within a suitable theoretical framework (Asenova et al., 2023a) and having shown how challenging it is to provide an effective feedback without an appropriate SIK (Asenova et al., 2023b), represents a response to the challenge issued by Iori (2018) that claims for teacher training on semiotic aspects in teaching and learning mathematics. The characterization of teacher training on SIK, focused on the three semiotic functions highlighted in section 2.3, provides a first operationalization of SIK in this sense. It is based on Duval's semio-cognitive approach (1993; 2017) that provides the technical tools able to untangle the complex net of semiotic functions that characterizes the learning and teaching processes in mathematics and represents the core-knowledge needed by teachers to acquire a robust SIK.

References

Asenova, M., Del Zozzo, A., & Santi, G. (2023a). Unfolding Teachers' Interpretative Knowledge into Semiotic Interpretative Knowledge to Understand and Improve Mathematical Learning in an Inclusive Perspective. *Education Sciences, 13*(1), 65. https://doi.org/10.3390/educsci13010065

Asenova, M., Del Zozzo, A., &, Santi, G. (2023b). From Interpretative Knowledge to Semiotic Interpretative Knowledge in prospective teachers' feedback to students' solutions. In M. Ayalon, B. Koichu, R. Leikin, L. Rubel, & M. Tabach (Eds.), *Proceedings of the 46th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 51–58). PME.

Asenova, M., Del Zozzo, A., & Garzetti, M. (accepted). Enhancing Teacher Training in Mathematics Education: A Model for a Semiotic Approach to Feedback and Interpretative Knowledge. *First ERME topic conference on Feedback & Assessment in Mathematics Education* (FAME).

Ball, D.L., Thames, M.H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal for Teacher Education*, *59*(5), 389–407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M.I. (2007). How the sense of mathematical objects changes when their semiotic representations undergo treatment and conversion. La *matematica e la sua didattica, 21*(1), 87–92.

D'Amore, B. (2001). Un contributo al dibattito su concetti e oggetti matematici: la posizione "ingenua" in una teoria "realista" vs il modello "antropologico" in una teoria "pragmatica". *La matematica e la sua didattica, 15*(1), 4–30.

D'Amore, B. (2003). La complexité de la noétique en mathématiques ou les raisons de la dévolution manquée. *For the Learning of Mathematics, 23*(1), 47–51.

D'Amore B. (2006). Oggetti matematici e senso. Le trasformazioni semiotiche cambiano il senso degli oggetti matematici. *La matematica e la sua didattica, 20*(4), 557–583.

Del Zozzo, A., & Santi, G. (2023). L'inclusione in matematica come differenziazione per tutti e per ciascuno: un'interpretazione semiotica. *Caminhos da Educação Matemática em Revista (Online), 13*(2), 68–79.

Di Martino, P., Mellone, M., & Ribeiro, M. (2019). Interpretative Knowledge. In S. Lerman (2019). *Encyclopedia of Mathematics Education*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-77487- 9_100019-1

Duval, R. (1988a). Ecarts sémantiques et cohérence mathématique: Introduction aux problèmes de congruence [Semantic disparities and mathematical coherence: An introduction to the problems of congruence]. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives, 1*(1), 7–25.

Duval, R. (1988b). Approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruence [A cognitive approach to the geometrical problems in term of congruence]. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives, 1*(1), 57–74.

Duval, R. (1993). Registres de représentations sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée [Registers of semiotic representations and cognitive functioning of thought]. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 5*(1), 37–65.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels* [Semiosis and human thought: Semiotic registers and intellectual learning]. Peter Lang.

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie: Développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 10*, 5–53.

Duval, R. (2006a). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*(1–2), 103–131. https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z

Duval, R. (2006b). Quelle sémiotique pour l'analyse de l'activité et des productions mathématiques? [What semiotics for the analysis of mathematical activity and productions?]. In L. Radford & B. D'Amore (Eds.), Semiotics, Culture and

Mathematical Thinking [Special Issue]. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 9*(1), 45–81.

Duval, R. (2009). «Objet»: Un mot pour quatre ordres de réalité irréductibles? [Object: A word for four irreducible orders of reality?]. In J. Baillé (Ed.), *Du mot au concept: Objet* (pp. 79–108). PUG.

Duval, R. (2017). *Understanding the Mathematical Way of Thinking: The Registers of Semiotic Representations*. Springer.

Ernest, P. (2006). A semiotic perspective of mathematical activity: The case of number. *Educational Studies in Mathematics, 61*(1-2), 67–101. https://doi.org/10.1007/s10649-006-6423-7

Fandiño Pinilla, M.I. (2023). *Diversi aspetti che definiscono l'apprendimento e la valutazione in matematica.* Bonomo. (Original work published in 2010, Pitagora Editor).

Galleguillos, J., & Ribeiro, M. (2019). Prospective mathematics teachers' interpretative knowledge: Focus on the provided feedback. In U. T. Jankvist, M. Van den Heuvel-Panhuizen, & M. Veldhuis (Eds.), *Proceedings of CERME11*, February 6 – 10, 2019, Utrecht (pp. 3281–3288). Freudenthal Group & Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME.

Hattie, J., & Timperley, H. (2007). The Power of Feedback. *Review of Educational Research, 77*(1), 81–112. https://doi.org/10.3102/003465430298487

Iori, M. (2018). Teachers' awareness of the semio-cognitive dimension of learning mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 98*(1), 95–113. https://doi.org/10.1007/s10649-018-9808-5

Jaworski, B. & Goodchild, S. (2006) Inquiry community in an activity theory frame. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, & N. Stehlíková (Eds.) *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 353-360). PME.

Ribeiro, M., Mellone, M., & Jakobsen, A. (2016). Interpreting students' non-standard reasoning: insights for mathematics teacher education. *For The learning of mathematics*, *36*(2), 8-13.

Santi, G. (2011). Objectification and semiotic function. *Educational Studies in Mathematics*, 77(2- 3), 285–311. https://doi.org/10.1007/s10649-010-9296-8

Santos, L., & Pinto, J. (2010). The evolution of feedback practice of a Mathematics teacher. In M.F. Pinto, & T.F. Kawasaki (Eds.), *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Belo Horizonte (Vol. 4, pp. 145–152). PME.

Stovner, R.B., & Klette, K. (2022). Teacher feedback on procedural skills, conceptual understanding, and mathematical practices: A video study in lower secondary mathematics classrooms. *Teaching and Teacher Education, 110*(1), 1–12. https://doi.org/10.1016/j.tate.2021.103593

Libros electrónicos publicados sobre la teoría semiocognitiva de Raymond Duval por el grupo de investigación GPEEM/PPGECT/UFSC

Disponibles en:
https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/203982

- Análise de atividades didáticas segundo a teoria semiocognitiva de aprendizagem matemática de Raymond Duval. 2024.
Autor: Méricles T. Moretti

- Florilégio de pesquisas que envolvem a teoria semiocognitiva de aprendizagem matemática de Raymond Duval (parte 2). 2023.
Org. Méricles T. Moretti & Eduardo Sabel

- Gráficos e equações: abordagem global qualitativa segundo Raymond Duval. 2022.
Org. Méricles T. Moretti & Eduardo Sabel

- Florilégio de pesquisas que envolvem a teoria semio-cognitiva de aprendizagem matemática de Raymond Duval. 2020.
Org. Méricles T. Moretti & Celia F Brandt

- Regra dos sinais: saga e implicações didáticas. 2020.
Autores: Selma Felisbino Hillesheim & Méricles T. Moretti

- Ensinar e aprender matemática: possibilidades para a prática educativa. 2016.
Org. Celia F. Brandt & Méricles T. Moretti