

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO TECNOLÓGICO DE JOINVILLE
CURSO DE ENGENHARIA NAVAL

RAFAEL RODRIGUES CARDOSO

ANÁLISE DE INCERTEZAS EM EXPERIMENTOS HIDROSTÁTICOS E
HIDRODINÂMICOS

Joinville
2024

RAFAEL RODRIGUES CARDOSO

ANÁLISE DE INCERTEZAS EM EXPERIMENTOS HIDROSTÁTICOS E
HIDRODINÂMICOS

Trabalho apresentado como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Engenharia Naval do Centro Tecnológico de Joinville da Universidade Federal de Santa Catarina.

Orientador: Dr. André Luís Condino Fugarra

Coorientador: Dr. Alexandre Mikowski

Joinville
2024

RAFAEL RODRIGUES CARDOSO

ANÁLISE DE INCERTEZAS EM EXPERIMENTOS HIDROSTÁTICOS E
HIDRODINÂMICOS

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi julgado adequado para obtenção do título de Bacharel em Engenharia Naval, na Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico de Joinville.

Joinville (SC), 28 de Junho de 2024.

Prof. Dr. André Luís Condino Fajarra
Orientador
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Dr. Alexandre Mikowski
Coorientador
Universidade Federal de Santa Catarina

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Alexandre Mikowski
Coorientador e presidente da banca
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof^a. Dr^a. Viviane Lilian Soethe
Avaliadora
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Dr. Luiz Eduardo Bueno Minioli
Avaliador
Universidade Federal de Santa Catarina

Ficha catalográfica para trabalhos acadêmicos

Cardoso, Rafael Rodrigues

Análise de incertezas em experimentos hidrostáticos e hidrodinâmicos / Rafael Rodrigues Cardoso ; orientador, André Luis Condino Fugarra, coorientador, Alexandre Mikowski, 2024.

64 p.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) - Universidade Federal de Santa Catarina, Campus Joinville, Graduação em Engenharia Naval, Joinville, 2024.

Inclui referências.

1. Engenharia Naval. 2. Análise de Incertezas. 3. Modelo em escala reduzida. 4. Práticas Experimentais. 5. Validação teórica. I. Fugarra, André Luis Condino . II. Mikowski, Alexandre . III. Universidade Federal de Santa Catarina. Graduação em Engenharia Naval. IV. Título.

Dedico este trabalho aos meus pais, que sempre acreditaram em meu potencial e me apoiaram incondicionalmente em todas as etapas da minha vida acadêmica. Dedico também aos meus professores e colegas que fizeram parte da minha evolução dentro e fora da faculdade.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a dedicação e o tempo despendidos pelo professor Alexandre Mikowski, os quais foram fundamentais para a realização deste trabalho. Sua disponibilidade em compartilhar o desenvolvimento de equações referentes à lei de propagação de incertezas agrega grande valor a este estudo. Agradeço também a todos os estudantes de Engenharia Naval que cursaram a disciplina de Arquitetura Naval II no segundo semestre de 2022, pois somente com a participação deles foi possível a realização deste trabalho. Em especial, agradeço ao professor André Fajarra, que me deu a oportunidade de trabalhar em seu artigo, o qual originou meu último e um dos mais importantes trabalhos acadêmicos.

"Dê-me um ponto de apoio e moverei o mundo".

RESUMO

O desenvolvimento de projetos navais e oceânicos, especialmente de embarcações e plataformas de grande porte, exige um profundo conhecimento dos princípios hidrostáticos e hidrodinâmicos que ditam o comportamento dessas estruturas na água. Considerando os altos custos e a complexidade de construir e testar protótipos em escala real, a utilização de modelos em escala reduzida se tornou uma prática essencial em pesquisa e desenvolvimento na área. No entanto, a confiabilidade dos resultados obtidos com esses modelos depende diretamente da precisão na medição de suas características e da maneira como essas incertezas se propagam durante os cálculos de parâmetros hidrostáticos e hidrodinâmicos. Para investigar como essas incertezas inerentes ao processo de medição afetam os resultados, mesmo quando se busca um processo de construção padronizado, alunos de graduação em Engenharia Naval construíram e analisaram modelos em escala reduzida de embarcações, chamadas de Unidades Flutuantes Didáticas (UFDs). Após a construção, as principais características das UFDs, como suas dimensões e massa, foram cuidadosamente medidas e usadas em modelos matemáticos para calcular grandezas importantes que descrevem o comportamento da UFD na água, como sua estabilidade e capacidade de flutuação. A análise dos resultados demonstrou que mesmo pequenas variações nas medidas, inerentes a qualquer processo experimental, podem influenciar os valores finais dos parâmetros calculados. Este resultado destaca a importância da análise cuidadosa das incertezas para uma interpretação completa dos resultados. Compreender essa relação entre incertezas e resultados é essencial para a tomada de decisão em projetos de engenharia, garantindo assim o desenvolvimento de soluções robustas e confiáveis. O estudo reforça a importância de se considerar as incertezas em todas as etapas de um experimento, desde a medição até o cálculo de parâmetros, utilizando-se de ferramentas estatísticas adequadas, para que os resultados obtidos sejam representativos da realidade e possibilitem a tomada de decisão em projetos de engenharia.

Palavras-chave: Análise de Incertezas. Modelo em escala reduzida. Práticas Experimentais. Validação teórica.

ABSTRACT

The development of naval and oceanic projects, especially large vessels and platforms, requires a deep understanding of the hydrostatic and hydrodynamic principles that govern the behavior of these structures in water. Considering the high costs and complexity of building and testing full-scale prototypes, the use of scaled-down models has become an essential practice in research and development in this field. However, the reliability of the results obtained with these models depends directly on the accuracy of the measurement of their characteristics and the way these uncertainties propagate during the calculation of hydrostatic and hydrodynamic parameters. To investigate how these uncertainties inherent to the measurement process affect the results, even when a standardized construction process is sought, undergraduate students in Naval Engineering built and analyzed scaled-down models of vessels, called Didactic Floating Units (DFUs). After construction, the main characteristics of the DFUs, such as their dimensions and mass, were carefully measured and used in mathematical models to calculate important quantities that describe the behavior of the DFU in water, such as its stability and buoyancy. Analysis of the results showed that even small variations in measurements, inherent to any experimental process, can influence the final values of the calculated parameters. This result highlights the importance of careful uncertainty analysis for a complete interpretation of the results. Understanding this relationship between uncertainties and results is essential for decision-making in engineering projects, thus ensuring the development of robust and reliable solutions. The study reinforces the importance of considering uncertainties at all stages of an experiment, from measurement to parameter calculation, using appropriate statistical tools, so that the results obtained are representative of reality and enable decision-making in engineering projects.

Keywords: Uncertainty Analysis. Scale Model. Experimental Practices. Theoretical Validation.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Definição do sistema coordenado ($Oxyz$). Casco modelado com o auxílio do program FreeShip+, de distribuição livre	20
Figura 2 – Parâmetros de um sistema hidrostático de um corpo flutuante	24
Figura 3 – Sequência de passos para a obtenção da UFD	29
Figura 4 – Modelo físico esquematizado da UFD	30
Figura 5 – Recipiente usado para a medição da densidade do lastro	31
Figura 6 – Recipiente com a argamassa	32
Figura 7 – Vista da caixa usada para a fabricação da UFD	34
Figura 8 – Gráfico da função de densidade de probabilidade em função das medidas de comprimento	38

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Resultados das análises de incertezas - Parâmetros Geométricos .	44
Tabela 2 – Resultados das análises de incertezas - Parâmetros Estimados . .	44
Tabela 3 – Resultados das análises de incertezas - Parâmetros Inerciais	44
Tabela 4 – Resultados das análises de incertezas - Parâmetros Restauradores	44
Tabela 5 – Síntese dos resultados das análises de incertezas - Parâmetro Dinâmico	44

LISTA DE SÍMBOLOS

UFD	Unidade Flutuante Didática
\vec{i}	Versor na direção x
\vec{j}	Versor na direção y
\vec{k}	Versor na direção z
L	Comprimento
B	Boca
T	Pontal, ou Período natural
\overline{GM}	Altura metacêntrica
\overline{KB}	Altura do centro de carena
\overline{BM}	Raio metacêntrico
\overline{KG}	Altura do centro de gravidade
∇	Volume de fluido deslocado
H	Calado
A_{wl}	Área de linha d'água
I_T	Inércia transversal
I_L	Inércia longitudinal
m_n	Massa individual
z_n	Distância vertical do centroide da massa até o ponto K
ρ_a	Densidade da água
M	Massa total
Δ	Deslocamento
J_{xx}	Inércia de massa em rotação ao redor do eixo x
J_{yy}	Inércia de massa em rotação ao redor do eixo y
J_{zz}	Inércia de massa em rotação ao redor do eixo z

J_{44}	Inércia de massa em rotação ao redor do eixo longitudinal (roll)
R_{44}	Raio de giração em torno do eixo x
X_F	Força na direção x
g	Aceleração da gravidade
θ	Ângulo de inclinação
t	Tempo
D	Coeficiente de amortecimento
R	Constante de restauração hidrostática
T_{n4}	Período natural em roll
τ	Força restauradora
δ	Inércia adicional de massa
M_c	Massa do casco
M_l	Massa do lastro
ρ_l	Densidade do lastro
σ_{ρ_l}	Incerteza da densidade do lastro
Z_c	Altura do centro de gravidade do casco
Z_l	Altura do centro de gravidade do lastro
σ	Desvio padrão
ω	Função genérica
x, y, z	Variáveis genéricas
$\delta_x, \delta_y, \delta_z$	Incertezas padrão das variáveis x, y, z
K	Coeficientes de sensibilidade
$\overline{\Delta}_8$	Média da massa total das 8 UFDs lastreadas
PP	Popa
PR	Proa
BE	Boreste

BB	Bombordo
M	Metacentro
G	Centro de gravidade
M	Metacentro
F_0	Plano de linha d'agua
F_1	Plano de linha d'agua
B_0	Centro de carena alinhado com F_0
B_1	Centro de carena alinhado com F_1
Z	Ponto de referência do braço de endireitamento
E	Força de empuxo
D	Força da gravidade, ou Coeficiente de amortecimento
φ	Angulo de endireitamento
\overline{GM}_T	Altura metacêntrica transversal
\overline{GM}_L	Altura metacêntrica longitudinal
\overline{BM}_T	Raio metacêntrico transversal
F	Força
r	Raio
Σ	Somatória
EDO	Equação Diferencial Ordinária
I	Momento de inércia
$\partial \nabla$	Derivada parcial do volume deslocado
∂I_t	Derivada parcial da inércia de linha d'água
$\partial \overline{GM}$	Derivada parcial da altura metacêntrica
$\partial \overline{KB}$	Derivada parcial da altura do centro de carena
$\partial \overline{BM}$	Derivada parcial do raio metacêntrico
$\partial \overline{KG}$	Derivada parcial da altura do centro de gravidade

∂R_{44}	Derivada parcial do raio de giração
∂T_{n4}	Derivada parcial do período natural em roll
σ_{∇}	Incerteza do volume deslocado
σ_{M_c}	Incerteza da massa do casco
σ_{M_t}	Incerteza da massa do lastro
σ_{ρ_a}	Incerteza da densidade da água
σ_{I_t}	Incerteza da inércia de linha d'água
σ_L	Incerteza do comprimento
σ_B	Incerteza da boca
$\sigma_{\overline{GM}}$	Incerteza da altura metacêntrica
$\sigma_{\overline{KB}}$	Incerteza da altura do centro de carena
$\sigma_{\overline{BM}}$	Incerteza do raio metacêntrico
$\sigma_{\overline{KG}}$	Incerteza da altura do centro de gravidade
σ_T	Incerteza do pontal
σ_{ρ_l}	Incerteza da densidade do lastro
$\sigma_{R_{44}}$	Incerteza do raio de giração
σ_{δ}	Incerteza da inércia adicional
σ_g	Incerteza da aceleração da gravidade
$\sigma_{T_{n4}}$	Incerteza do período natural em roll
$K_{\nabla,1}$	Constante relacionada à incerteza da massa do casco no volume deslocado
$K_{\nabla,2}$	Constante relacionada à incerteza da massa do lastro no volume deslocado
$K_{\nabla,3}$	Constante relacionada à incerteza da densidade da água no volume deslocado
$K_{I_t,1}$	Constante relacionada à incerteza do comprimento na inércia de linha d'água

$K_{I_t,2}$	Constante relacionada à incerteza da boca na inércia de linha d'água
$K_{\overline{GM},1}$	Constante relacionada à incerteza da altura do centro de carena na altura metacêntrica
$K_{\overline{GM},2}$	Constante relacionada à incerteza do raio metacêntrico na altura metacêntrica
$K_{\overline{GM},3}$	Constante relacionada à incerteza da altura do centro de gravidade na altura metacêntrica
$K_{\overline{KB},1}$	Constante relacionada à incerteza da massa do casco na altura do centro de carena
$K_{\overline{KB},2}$	Constante relacionada à incerteza da massa do lastro na altura do centro de carena
$K_{\overline{KB},3}$	Constante relacionada à incerteza da densidade da água na altura do centro de carena
$K_{\overline{KB},4}$	Constante relacionada à incerteza do comprimento na altura do centro de carena
$K_{\overline{KB},5}$	Constante relacionada à incerteza da boca na altura do centro de carena
$K_{\overline{BM},1}$	Constante relacionada à incerteza do comprimento no raio metacêntrico
$K_{\overline{BM},2}$	Constante relacionada à incerteza da boca no raio metacêntrico
$K_{\overline{BM},3}$	Constante relacionada à incerteza da densidade da água no raio metacêntrico
$K_{\overline{BM},4}$	Constante relacionada à incerteza da massa do casco no raio metacêntrico
$K_{\overline{BM},5}$	Constante relacionada à incerteza da massa do lastro no raio metacêntrico
$K_{\overline{KG},1}$	Constante relacionada à incerteza da boca na altura do centro de gravidade
$K_{\overline{KG},2}$	Constante relacionada à incerteza do comprimento na altura do centro de gravidade

$K_{\overline{KG},3}$	Constante relacionada à incerteza do pontal na altura do centro de gravidade
$K_{\overline{KG},4}$	Constante relacionada à incerteza da densidade do lastro na altura do centro de gravidade
$K_{\overline{KG},5}$	Constante relacionada à incerteza da massa do casco na altura do centro de gravidade
$K_{\overline{KG},6}$	Constante relacionada à incerteza da massa do lastro na altura do centro de gravidade
$K_{R44,1}$	Constante relacionada à incerteza da massa do lastro no raio de giração
$K_{R44,2}$	Constante relacionada à incerteza da densidade do lastro no raio de giração
$K_{R44,3}$	Constante relacionada à incerteza da boca no raio de giração
$K_{R44,4}$	Constante relacionada à incerteza do comprimento no raio de giração
$K_{Tn4,1}$	Constante relacionada à incerteza do raio de giração no período natural em roll
$K_{Tn4,2}$	Constante relacionada à incerteza da inércia adicional no período natural em roll
$K_{Tn4,3}$	Constante relacionada à incerteza da aceleração da gravidade no período natural em roll
$K_{Tn4,4}$	Constante relacionada à incerteza da altura metacêntrica no período natural em roll
mm	Milímetro
g	Gramas
mm ³	Milímetro cúbico
mm ⁴	Milímetro elevado à quarta potência
kg/m ³	Quilograma por metro cúbico
s	Segundo
m/s ²	Metro por segundo ao quadrado

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	17
1.1	OBJETIVO	17
1.1.1	Objetivo Geral	17
1.1.2	Objetivos Específicos	18
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	19
2.1	CARACTERIZAÇÃO TÍPICA DE MODELOS EM ESCALA REDUZIDA	19
2.1.1	Características geométricas	19
2.1.2	Características inerciais	22
2.1.3	Características restauradoras	23
2.1.4	Características dinâmicas	25
2.2	Tratamento dos dados e a Lei de propagação de incertezas	26
3	METODOLOGIA	28
3.1	MODELO FÍSICO DE TRABALHO – A UFD	28
3.2	ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO NO ÂMBITO DA TURMA	30
3.3	GRANDEZAS ASSOCIADAS AS UFDS	32
3.3.1	Deslocamento e volume deslocado	33
3.3.2	Inércia de área de linha d'água	33
3.3.3	Altura do centro de carena	33
3.3.4	Altura do centro de gravidade	34
3.3.5	Raio metacêntrico	35
3.3.6	Altura metacêntrica	35
3.3.7	Raio de giração em torno do eixo x	36
3.3.8	Período natural em <i>roll</i>	36
3.4	Tratamento dos dados e a aplicação da lei de propagação de incertezas	37
4	RESULTADOS	38
4.1	RESULTADOS DA CARACTERIZAÇÃO GEOMÉTRICA	38
4.2	RESULTADOS DOS PARÂMETROS ESTIMADOS	39
4.3	RESULTADOS INERCIAIS	40
4.3.1	Deslocamento e volume deslocado	40
4.3.2	Inércia de área de linha d'água	41
4.3.3	Raio de giração em torno do eixo x	41
4.4	RESULTADOS DA RESTAURAÇÃO	42
4.4.1	Altura do centro de gravidade	42
4.4.2	Altura do centro de carena	42

4.4.3	Raio metacêntrico	42
4.4.4	Altura metacêntrica	42
4.5	RESULTADOS DINÂMICOS	43
4.5.1	Período natural em roll	43
4.6	SÍNTESE INTEGRADORA DOS RESULTADOS	43
5	CONCLUSÕES	47
	REFERÊNCIAS	49
	APÊNDICE A	52
	APÊNDICE B	53
	APÊNDICE C	54
	APÊNDICE D	55
	APÊNDICE E	56
	APÊNDICE F	57
	APÊNDICE G	59
	APÊNDICE H	61

1 INTRODUÇÃO

O desenvolvimento de sistemas navais e oceânicos, em especial embarcações e plataformas de grande porte, exige uma compreensão aprofundada dos princípios hidrostáticos e hidrodinâmicos que governam seu comportamento. Dadas as dimensões e os custos inerentes à construção e aos testes em escala real, a utilização de modelos em escala reduzida se consolida como uma ferramenta crucial para a pesquisa e desenvolvimento nesse campo (MANDEL, 1993; NEWMAN, 1977).

A aplicação eficaz de modelos reduzidos depende da garantia de similaridade entre o modelo e o sistema real. As leis de semelhança, como discutido por (BERTRAM, 2012) e (CHAKRABARTI, 1994), fornecem o arcabouço teórico para a correta redução de escala, assegurando a similaridade geométrica, cinemática e dinâmica, sendo a semelhança de Froude frequentemente empregada nesse contexto (FALTINSEN, 1990).

A construção do modelo físico, no entanto, representa apenas o passo inicial. A caracterização precisa de suas propriedades, incluindo dimensões principais, parâmetros inerciais, restauradores e períodos naturais, é fundamental para a confiabilidade dos resultados experimentais (HOLTHUIJSEN, 2003).

A análise de incertezas assume um papel crítico nesse processo de caracterização. A precisão na determinação das propriedades do modelo impacta diretamente a confiabilidade dos resultados experimentais e a extrapolação para o sistema em escala real (Joint Committee for Guides in Metrology - JCGM, 2008).

Este trabalho investiga a aplicação de métodos de análise de incertezas na caracterização de modelos reduzidos para experimentos hidrostáticos e hidrodinâmicos. A propagação de incertezas na determinação de grandezas relevantes para o comportamento de sistemas flutuantes é crucial para a interpretação adequada dos resultados experimentais e para o desenvolvimento de projetos navais e oceânicos mais seguros e eficientes (Society of Naval Architects and Marine Engineers - SNAME, 1950).

1.1 OBJETIVO

Para aplicar a análise de incertezas em experimentos hidrostáticos e hidrodinâmicos, propõem-se neste trabalho os seguintes objetivos:

1.1.1 Objetivo Geral

Determinar e analisar as incertezas na medição de grandezas diretas, bem como propagá-las na determinação indireta de parâmetros, com vistas à caracterização

hidrostática e hidrodinâmica de modelo reduzido de um sistema naval simplificado, construído a partir de materiais de baixo custo e fácil acesso.

1.1.2 Objetivos Específicos

- Introduzir a importância das análises de incerteza para a engenharia naval;
- Dar um subsídio teórico para a caracterização de modelos em escala reduzida;
- Mostrar um método para construir uma Unidade Flutuante Didática (UFD);
- Explicar como extrair as medidas e parâmetros necessários para o desenvolvimento do trabalho;
- Demonstrar a importância da análise de incerteza e como calculá-la, apresentando resultados numéricos;

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

De maneira prática, é preciso introduzir alguns conceitos físicos, a fim de facilitar o entendimento do trabalho como um todo. Dessa forma, será realizada a caracterização de modelos em escala reduzida, que poderão ser fabricados com materiais de fácil acesso. Dentro dessa caracterização, encontram-se as características geométricas, inerciais, restauradoras e dinâmicas.

2.1 CARACTERIZAÇÃO TÍPICA DE MODELOS EM ESCALA REDUZIDA

A caracterização de modelos em escala reduzida destinados a experimentos hidrostáticos e hidrodinâmicos de sistemas navais ou oceânicos é um assunto bastante disperso na literatura, encontrado de maneira parcial em relatórios ou investigações bastante aplicadas, que normalmente não consolidam os procedimentos e as práticas de uma maneira suficientemente didática.

É bem verdade que organismos como a *International Towing Tank Conference* (ITTC) e o *International Ship and Offshore Structures Congress* (ISSC) regularmente organizam e atualizam compêndios de recomendações, procedimentos e diretrizes para os principais experimentos do segmento naval e oceânico. No entanto, não há uma preocupação em apresentá-los de uma maneira que possa ser replicada por discentes ou profissionais iniciantes.

Sendo assim, imaginando um cenário hipotético em que se queiram realizar experimentos hidrostáticos e hidrodinâmicos, as próximas subseções apresentam subsídios teóricos e comentários a respeito da caracterização típica para um modelo físico em escala reduzida.

De antemão, tendo em mente que os experimentos pretendem fornecer informações precisas a respeito do modelo reduzido exposto a problemas e fenômenos navais e oceânicos, sua caracterização deve contemplar grandezas da própria geometria, da distribuição de massa, da hidrostática, da restauração e também da própria dinâmica, a partir de perturbações no entorno de sua condição de equilíbrio inicial. As próximas subseções sintetizam aspectos importantes dessa caracterização.

2.1.1 Características geométricas

Em se tratando de geometria, o modelo físico em escala reduzida deve ser completamente verificado, o que tem sido feito por meio de sistemas de metrologia óptica tridimensional em laboratórios mais modernos.

Para os objetivos deste trabalho, no entanto, basta manter o foco nas dimensões principais do modelo em escala reduzida. Para tanto, é importante inicialmente

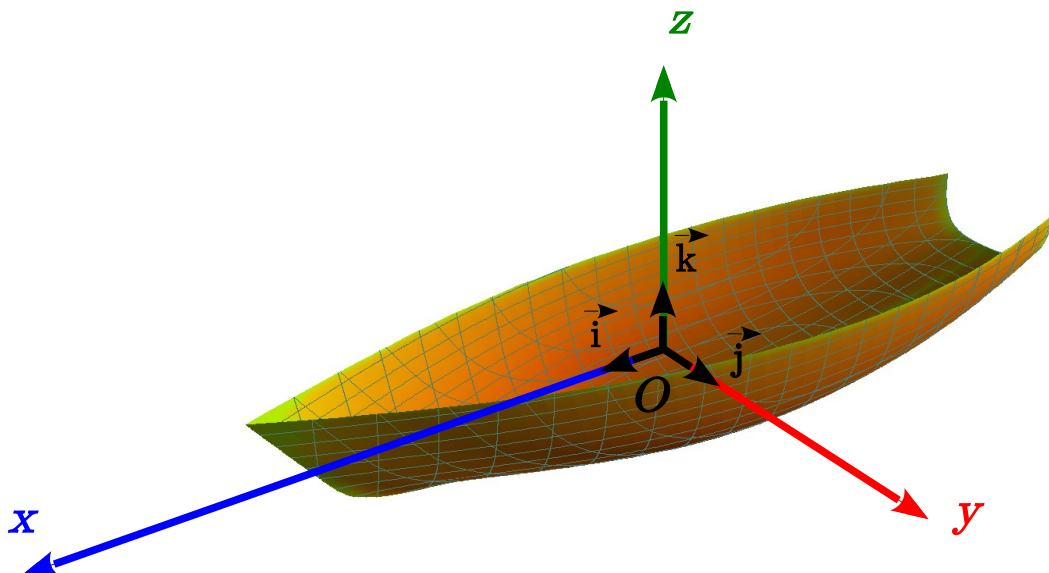
estabelecer claramente o sistema de coordenadas, que, no caso das aplicações navais e oceânicas, é tipicamente definido da seguinte forma:

Direção-x: corresponde à distribuição longitudinal do navio, caracterizada pelo versor \vec{i} , com sentido positivo de popa (PP) para a proa (PR);

Direção-y: corresponde à distribuição transversal do navio, caracterizada pelo versor \vec{j} , com sentido positivo da direita (boreste, BE) para a esquerda (bombordo, BB) de quem olha de PP para PR; e

Direção-z: diz respeito à distribuição vertical, caracterizada pelo produto vetorial $\vec{i} \times \vec{j}$, ou seja, \vec{k} positivo do fundo para o convés.

Figura 1 – Definição do sistema coordenado $(Oxyz)$. Casco modelado com o auxílio do program FreeShip+, de distribuição livre



Fonte: Elaborada pelo Prof. Dr. André Luís Condino Fajarra (2022).

Mediante este sistema de coordenadas, as grandezas geométricas do sistema flutuante de interesse para este trabalho são: o comprimento (L), que é a distância horizontal de PP a PR; a boca (B), que diz respeito à distância horizontal de BE a BB; e o pontal (T), que é a distância vertical da posição mais abaixo no casco (fundo) até a sua posição mais acima (posição do convés principal).

Os parâmetros importantes, que dependem essencialmente das características geométricas do corpo flutuante, podem ser, então, calculados para avaliar a condição de estabilidade do corpo flutuante. De acordo com a teoria encontrada, por exemplo, em (MOORE, 2010), a altura metacêntrica (\overline{GM}) é o segmento entre o centro de gravidade (G) e o metacentro (M), responsável pela condição de estabilidade estática inicial.

Em linhas gerais, determinada de acordo com a equação (1), a altura metacêntrica positiva caracteriza a condição de equilíbrio inicial estável ($\overline{GM} > 0$), assim como as condições de equilíbrio inicial indiferente e instável são, respectivamente,

definidas por $\overline{GM} = 0$ e $\overline{GM} < 0$, sendo estas duas indesejáveis nos projetos navais.

$$\overline{GM} = \overline{KB} + \overline{BM} - \overline{KG} \quad (1)$$

De fato, a equação (1) serve tanto para a caracterização da estabilidade longitudinal (\overline{GM}_L) quanto para a transversal (\overline{GM}_T), sendo esta última a mais crítica para as embarcações típicas, motivo pelo qual é mantida sob foco neste trabalho.

Sendo assim, para a determinação da altura metacêntrica transversal, inicia-se com o cálculo da altura do centro de carena (\overline{KB}), ou seja, o centróide do volume (∇) de fluido deslocado pelo corpo, também chamado de volume deslocado, medido a partir do ponto no casco mais distante da superfície livre, denominado K . A equação (2) define matematicamente este cálculo, onde H diz respeito ao calado do sistema naval/oceânico, ou seja, à altura imersa do casco.

$$\overline{KB} = \frac{\int_0^H z A_{wl}(z) dz}{\int_0^H A_{wl}(z) dz} = \frac{\int_0^H z A_{wl}(z) dz}{\nabla} \quad (2)$$

Neste ponto, é importante destacar que, se a área de linha d'água for constante ($A_{wl}(z) = A_{wl}$), então a altura do centro de carena será igual à metade do calado: $\overline{KB} = H/2$.

O próximo segmento a ser determinado é o raio metacêntrico transversal (\overline{BM}_T), conforme a equação (1), cuja dedução pode ser encontrada, por exemplo, em (MOORE, 2010).

$$\overline{BM}_T = \frac{\frac{2}{3} \int_0^L y^3 dx}{\nabla} = \frac{I_T}{\nabla} \quad (3)$$

O numerador diz respeito à inércia da área de flutuação ao redor do eixo longitudinal do corpo flutuante, ou inércia transversal (I_T). A inércia de área, também conhecida como segundo momento de área, é uma propriedade geométrica que reflete a maneira como a área de um objeto está distribuída em relação a um eixo, nesse caso, o eixo x .

$$I_T = \int y^2 dA \quad (4)$$

Analisando a equação acima, y é a distância perpendicular ao eixo de rotação e dA é o elemento infinitesimal de área. Naturalmente, pode-se determinar, de maneira análoga, a inércia longitudinal de área, bastando agora considerar suas componentes

em relação ao eixo transversal do corpo flutuante. Para as embarcações típicas, no entanto, é possível depreender que I_T é muito menor que I_L , o que justifica uma preocupação maior com a condição de estabilidade transversal, conforme já mencionado.

Para a determinação da altura metacêntrica (\overline{GM}), resta, então, determinar a altura do centro de gravidade (\overline{KG}), o que é feito mediante a ponderação das massas a bordo em relação às suas distâncias até o ponto K , conforme enuncia a equação (5).

$$\overline{KG} = \frac{\sum_{n=1}^N m_n z_n}{\sum_{n=1}^N m_n} = \frac{\sum_{n=1}^N m_n z_n}{\rho \nabla} \quad (5)$$

Conforme a equação acima z_n são as distâncias verticais dos centroides das massas m_n a bordo até o ponto K .

2.1.2 Características inerciais

Outro grupo importante de grandezas a serem calibradas no modelo físico em escala reduzida é aquele eminentemente relacionado às características inerciais.

Fazem parte desse grupo a massa (M) – em engenharia naval denominada deslocamento (Δ) – e as inércias de massa em rotação ao redor dos três eixos coordenados que passam pelo centro de gravidade do modelo: J_{xx} , J_{yy} e J_{zz} . A rigor, é importante deixar claro que, nos sistemas navais e oceânicos, existem alguns termos cruzados de inércia, conforme apresentado e discutido, por exemplo, em (FALTINSEN, 1990).

Com relação ao deslocamento, e novamente considerando-se um modelo com área de linha d'água constante ($A_{wl} = LB$), é possível estabelecer a relação da equação (6):

$$\Delta = \rho_a \nabla = \rho_a A_{wl} H \quad (6)$$

Pode-se observar na equação (6), que H é o calado, ou profundidade imersa do modelo, e ρ_a , a densidade da água.

No tocante às inércias de massa em rotação, para efeito didático, este trabalho dá foco à inércia de rotação ao redor do eixo longitudinal (J_{xx}), justamente por ser aquela de menor valor nas embarcações típicas, o que deve implicar menores períodos de oscilação. Nesse caso, é usado o índice 44, que se refere ao movimento de *roll* dentro da matriz de inércia.

Assim sendo, para obter o momento de inércia de massa em relação ao eixo longitudinal, é necessário considerar a distribuição de massa do corpo em relação a esse eixo, descrita pela equação de forma genérica, a seguir:

$$J_{44} = \int r^2 dm. \quad (7)$$

Para algumas formas geométricas, a equação pode ser simplificada usando as dimensões do objeto, como uma caixa:

$$J_{44} = \frac{1}{12} M(T^2 + B^2). \quad (8)$$

A partir da equação acima, observa-se que M é a massa total, T é a altura da caixa e B é a largura da caixa.

Outro parâmetro importante relacionado à inércia de massa é o raio de giração, que indica a distribuição da massa de um corpo flutuante em relação ao seu eixo de interesse; nesse caso, o eixo longitudinal. Um raio de giração maior significa que mais massa está distribuída longe do eixo, resultando em maior resistência à mudança no movimento em torno do eixo x . Por outro lado, um raio de giração menor indica que mais massa está concentrada perto do eixo, resultando em menor resistência à mudança no movimento em torno do eixo x . A distribuição da massa pode ser afetada por fatores como a distribuição do peso interno.

Dessa forma, com base na equação (8), pode-se obter o raio de giração da seguinte maneira:

$$R_{44} = \sqrt{\frac{J_{44}}{\Delta}}. \quad (9)$$

2.1.3 Características restauradoras

Essencialmente, as características hidrostáticas de um sistema naval e oceânico são, sem dúvidas, uma das mais importantes. São elas que irão determinar se o sistema é ou não viável. Nessa diretriz, a obtenção das características hidrostáticas do modelo físico em escala reduzida é uma das prioridades (LEWIS, 1988).

Essas características são fundamentalmente baseadas no princípio de Arquimedes, que estabelece que um corpo submerso em um fluido recebe uma força de baixo para cima igual ao peso do fluido deslocado pelo corpo (FOX; MCDONALD; PRITCHARD, 2018). Este princípio foi elucidado nas características inerciais e obedece à fórmula (6). Dessa maneira, obedecendo uma das regras da estática

$$\sum F = 0. \quad (10)$$

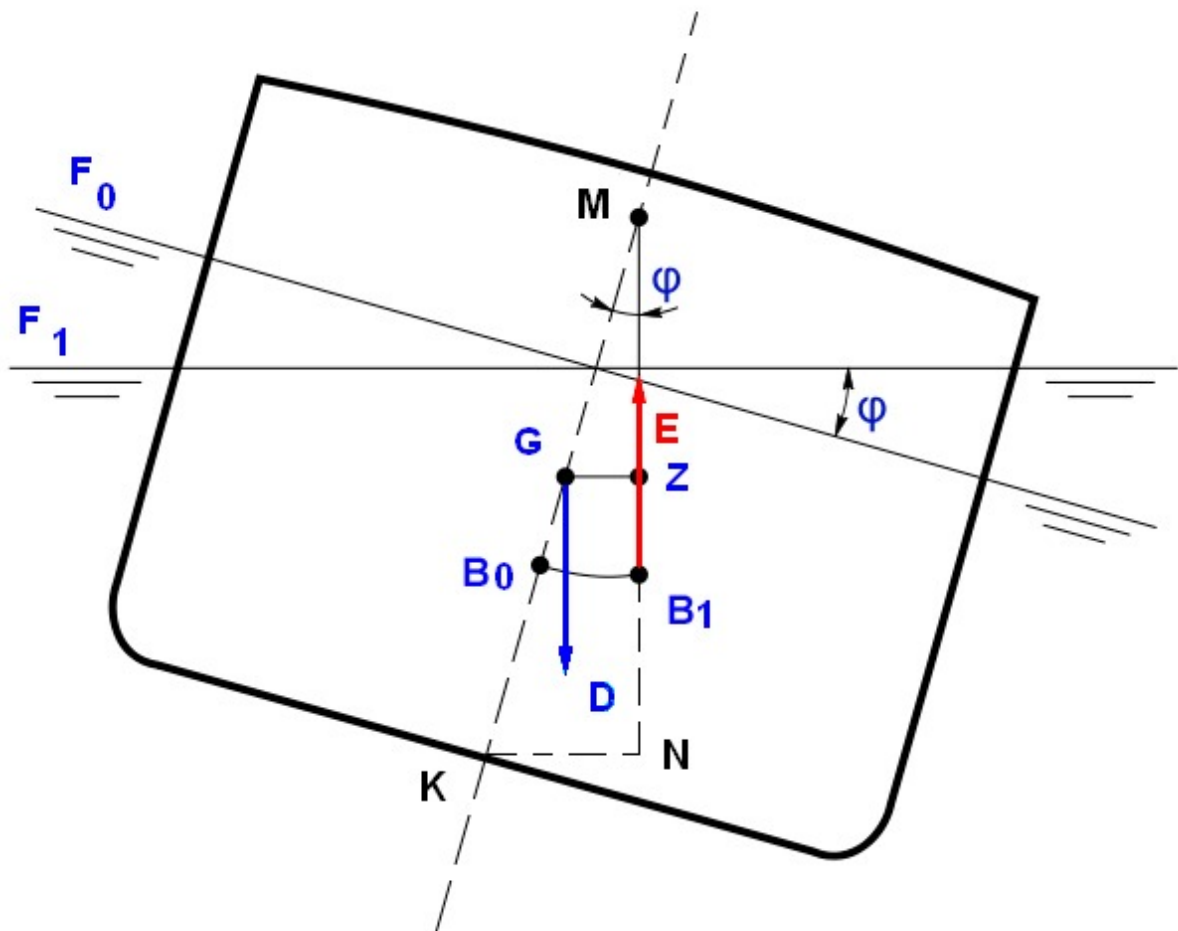
Pode-se obter uma das equações fundamentais para a estabilidade de um corpo flutuante, sendo:

$$Mg = \Delta g, \quad (11)$$

em que g é a aceleração da gravidade e M a massa do corpo flutuante (FALTINSEN, 1990).

Como foi falado anteriormente nas características geométricas, a estabilidade inicial estável se dá quando $\overline{GM} > 0$. É importante destacar que a estabilidade não exige o alinhamento do centro de carena (B) com o centro de gravidade (G), apenas que o primeiro esteja abaixo do segundo. Quando o centro de carena não está alinhado verticalmente com o CG, mas a condição de $\overline{GM} > 0$ é mantida, um momento restaurador surge. Esse momento atua para restaurar o equilíbrio do corpo flutuante, levando o centro de carena a se posicionar diretamente abaixo do centro de gravidade, não necessariamente os alinhando na mesma vertical (PAULLING; WEBSTER, 1975).

Figura 2 – Parâmetros de um sistema hidrostático de um corpo flutuante



Fonte: Adaptado de (Promilitares, 2020).

Segundo a Figura 2, podem-se identificar com clareza os parâmetros comentados em 2.1.1. No entanto, o centro de carena está sendo representado pelo ponto B_0 que se refere ao centro de carena do corpo flutuante alinhado com o plano de linha d'água F_0 , e o B_1 , para o plano de linha d'água F_1 , mostrando, então, a mudança do centro de carena quando o corpo flutuante é excitado. Além disso, pode-se observar o ponto Z , usado para determinar o braço de endireitamento. As letras E e D na figura representam o empuxo e a força gravitacional, respectivamente; já φ representa o ângulo formado após o deslocamento do centro de carena, também chamado de ângulo de endireitamento (LEWIS, 1988).

O momento restaurador dependerá do ângulo gerado por \overline{GM} quando o corpo flutuante é excitado para fora do seu estado de equilíbrio, além da magnitude do deslocamento (NEWMAN, 1977).

2.1.4 Características dinâmicas

Para a caracterização dinâmica dos sistemas flutuantes, pode-se aproximá-la a um movimento descrito por um sistema de vibração livre regido por uma Equação Diferencial Ordinária (EDO), como a descrita a seguir (CRAIG, 1981):

$$I\ddot{\theta} + D\dot{\theta} + R\theta = 0, \quad (12)$$

em relação à equação (12), θ é o ângulo de inclinação do corpo flutuante em relação à posição de equilíbrio, I é o momento de inércia do corpo em relação ao eixo de rotação, D é o coeficiente de amortecimento e R é a constante de restauração hidrostática (momento restaurador) (FOSSSEN, 2011).

A inércia do corpo foi comentada na subseção 2.1.2. No entanto, um exemplo do período natural de oscilações (T), de forma genérica, obedece à seguinte equação:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\tau}}, \quad (13)$$

sendo I o momento de inércia do sistema e τ a força restauradora (NEWLAND, 1993).

A EDO descreve o comportamento do corpo flutuante em resposta a uma perturbação inicial, como um deslocamento angular. A solução dessa equação fornece a variação do ângulo de inclinação ao longo do tempo, permitindo analisar o decaimento das oscilações e determinar características importantes, como a frequência natural de vibração e o tempo de amortecimento (MEIROVITCH, 2001).

A solução geral da EDO depende dos valores específicos de I , D e R , que estão relacionados às propriedades geométricas e físicas do corpo flutuante, bem como às características do fluido. Esses valores podem ser obtidos por meio de cálculos teóricos ou experimentais, e um método para a análise desses sistemas é a realização de ensaios de decaimento (LEWIS, 1989).

O ensaio de decaimento é realizado medindo-se a variação do ângulo de inclinação do corpo flutuante ao longo do tempo após uma perturbação inicial conhecida. Essa medida pode ser realizada por meio de sensores, como acelerômetros ou inclinômetros, que registram o movimento do corpo. Os dados coletados são, então, analisados para determinar os parâmetros da EDO e obter informações sobre o comportamento dinâmico do corpo flutuante (PAULLING; ROSENBERG, 1983).

2.2 TRATAMENTO DOS DADOS E A LEI DE PROPAGAÇÃO DE INCERTEZAS

Ao apresentar a incerteza em um estudo científico, é crucial considerar se a medida é direta ou derivada de uma função.

Para medidas diretas, a incerteza é frequentemente expressa como o desvio padrão das medições (TAYLOR, 1997). O desvio padrão fornece uma medida da dispersão dos dados em torno da média. Em um conjunto de dados normalmente distribuído, cerca de 68% dos valores estarão dentro de um desvio padrão da média. Portanto, se o comprimento de uma UFD é medido diretamente várias vezes com resultados variando de 15 cm a 25 cm com uma média de 20 cm e um desvio padrão de 2 cm, o comprimento da unidade flutuante pode ser relatado como 20 ± 2 cm.

No entanto, para quantidades que são calculadas como uma função de várias medidas - por exemplo, o centro de massa de uma unidade flutuante didática, que é uma função das massas e posições individuais dos componentes - a propagação das incertezas é usada para calcular a incerteza (KU, 1966). A lei de propagação das incertezas permite que a incerteza em cada medida individual seja propagada através da função para fornecer uma estimativa da incerteza na quantidade calculada. Por exemplo, se o centro de massa é calculado como 5,948 com uma incerteza de 0,556, ele seria relatado como $5,948 \pm 0,556$ cm.

Em ambos os casos, é importante lembrar que essas medidas de incerteza representam apenas a incerteza aleatória e não levam em conta possíveis erros sistemáticos, como erros de calibração do equipamento de medição. Além disso, essas técnicas assumem que os erros são normalmente distribuídos, o que pode não ser o caso em todas as situações. Ao calcular as incertezas, a distribuição dos dados é um fator importante a ser considerado. Duas das distribuições mais comuns são a Gaussiana (ou Normal) e a Retangular (ou Uniforme) (TAYLOR, 1997).

A distribuição Gaussiana é talvez a mais conhecida. Ela é caracterizada por sua forma de sino e é definida por dois parâmetros: a média (o pico da curva) e o desvio padrão (que determina a largura da curva). A maioria dos dados em uma distribuição Gaussiana cai dentro de três desvios padrão da média. Esta distribuição é frequentemente usada quando uma grande quantidade de dados é coletada e os valores tendem a se agrupar em torno de uma média (BEVINGTON; ROBINSON, 2003).

Por outro lado, a distribuição Retangular ou Uniforme é caracterizada por uma probabilidade constante. Isso significa que todos os valores dentro de um determinado intervalo têm a mesma probabilidade de ocorrer. A distribuição Retangular é definida por seus limites inferior e superior, e a probabilidade é zero fora desses limites. Esta distribuição é frequentemente usada quando há incerteza igual sobre a faixa de valores que uma variável pode assumir, e cada valor é igualmente provável (ROSS, 2006).

Ambas as distribuições podem ser úteis ao calcular incertezas, dependendo do contexto e da natureza dos dados. A escolha da distribuição correta é crucial para obter estimativas precisas de incerteza (HUGHES; HASE, 2010).

A Lei de Propagação de Incertezas é um princípio fundamental na análise de dados e medições experimentais, especialmente em campos como a física, engenharia e estatística. Esta lei é essencial para estimar a incerteza total ou erro em uma medida que depende de várias outras medidas, cada uma com sua própria incerteza (Instituto Nacional de Metrologia, Qualidade e Tecnologia - INMETRO, 2012).

Quando realizamos medições experimentais, raramente obtemos um valor exato. Em vez disso, obtemos um valor aproximado com algum grau de incerteza (KU, 1966). Quando essas medições são usadas para calcular outros parâmetros, as incertezas se propagam através dos cálculos, afetando o resultado final.

A importância da Lei de Propagação de Incertezas reside em sua capacidade de fornecer uma estimativa quantitativa dessa incerteza resultante. Isso é crucial para entender a confiabilidade dos resultados experimentais e para tomar decisões baseadas nesses resultados (VUOLO, 1996).

Neste contexto, se temos uma função ω que depende de várias variáveis x , y , z , etc., cada uma com sua própria incerteza padrão (σ_x , σ_y , σ_z , etc.), a incerteza padrão combinada em ω pode ser calculada usando a seguinte equação:

$$\sigma^2\omega = \left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)^2 \sigma^2x + \left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)^2 \sigma^2y + \left(\frac{\partial\omega}{\partial z}\right)^2 \sigma^2z \quad (14)$$

Em que, $\partial\omega/\partial x$, $\partial\omega/\partial y$ e $\partial\omega/\partial z$ representam as derivadas parciais de ω em relação a x , y e z , respectivamente. Esses termos indicam o quanto ω muda quando x , y ou z mudam. Os quadrados desses termos são então multiplicados pelos quadrados das respectivas incertezas padrão e todos esses produtos são somados para obter o quadrado da incerteza padrão combinada em ω .

3 METODOLOGIA

Dada a natureza de seu conteúdo, este trabalho segue uma metodologia inicialmente experimental, caracterizada pela construção de modelos físicos que, então, são medidos segundo um procedimento específico, seguida pela determinação de parâmetros de interesse para subseqüentes análises hidrostáticas e hidrodinâmicas de corpos flutuantes, as quais se baseiam nos subsídios do Capítulo 2.

Com relação à abordagem experimental, prática, destaca-se a construção dos modelos físicos, realizados com ajuda de discentes de uma turma de graduação em Engenharia Naval, do Centro Tecnológico de Joinville, da Universidade Federal de Santa Catarina, pensada de maneira a agregar os seguintes aspectos de efeito didático/motivador:

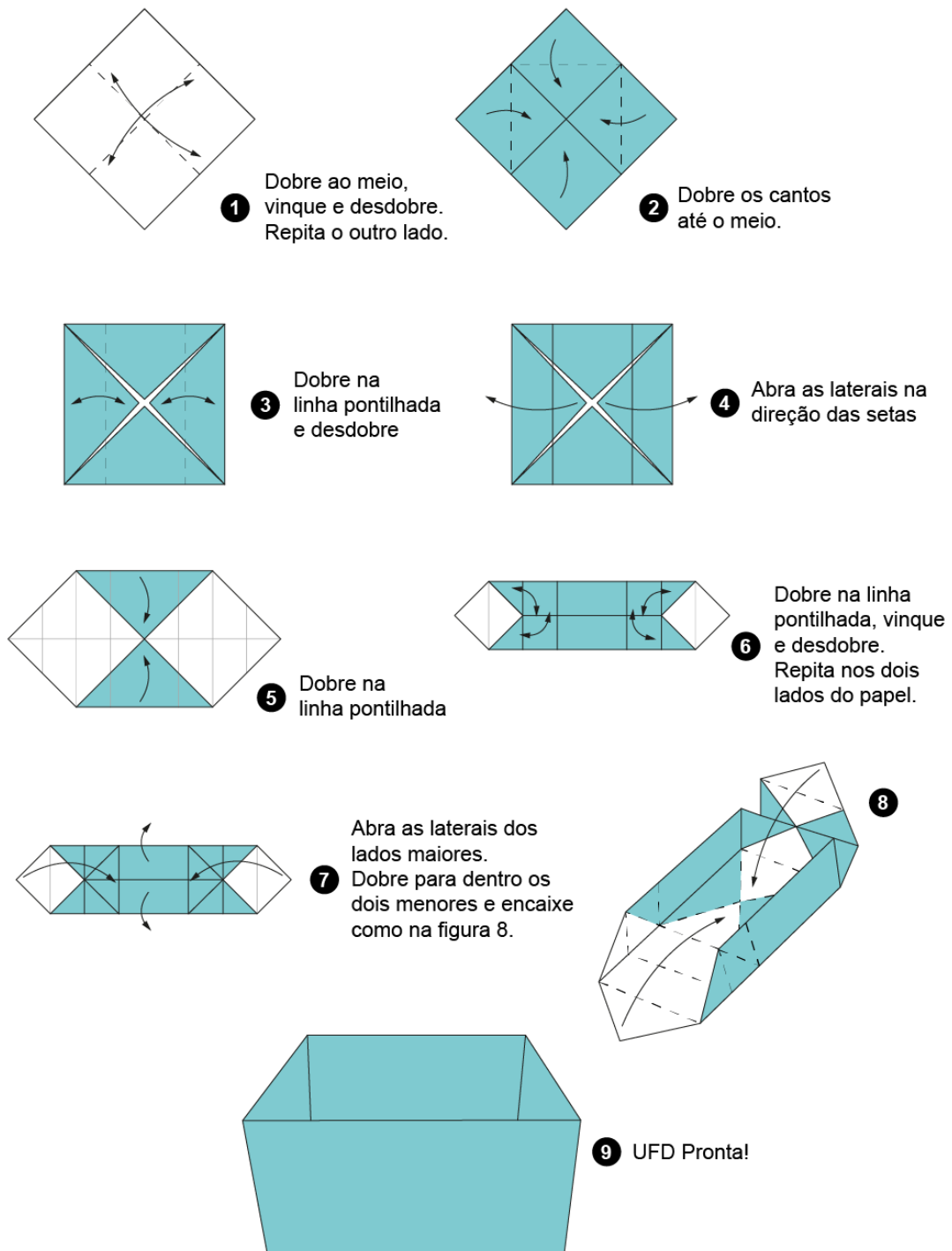
- 1º) Utilização de uma forma geométrica simples, que facilite a medição e o tratamento analítico quanto à determinação de parâmetros hidrostáticos e hidrodinâmicos mencionados;
- 2º) Uso de um material que seja facilmente encontrado pelos discentes e que, baseado na prática salutar do reuso, resulte em um custo baixíssimo de construção;
- 3º) Adoção de método construtivo fácil, que estimule o envolvimento do discente desde a própria obtenção dos modelos físicos de trabalho; e
- 4º) Condição intrínseca de propiciar uma variabilidade dimensional controlada dos modelos físicos, o que favorece o ensinamento e o uso das incertezas no processo de sua caracterização.

Nas próximas seções, são apresentados detalhes que demonstram esses aspectos.

3.1 MODELO FÍSICO DE TRABALHO – A UFD

Para as atividades práticas deste trabalho, são necessários modelos físicos que foram denominados Unidades Flutuantes Didáticas (UFDs). Com base nos aspectos mencionados anteriormente, cada UFD pode ser facilmente construída pelos próprios discentes, seguindo uma sequência de oito (8) passos de dobraduras ilustrada na Figura 3.

Figura 3 – Sequência de passos para a obtenção da UFD



Fonte: Adaptado de (FERREIRA, 2017).

As folhas de papel cartão aluminizado devem ter as dimensões de 210 mm × 210 mm (largura × altura). Essa matéria-prima pode ser conseguida com o desmonte e

o corte de embalagens para acondicionamento de leite ou sucos. É importante destacar que o dimensional acima só é conseguido com aquelas embalagens mais altas, de um litro.

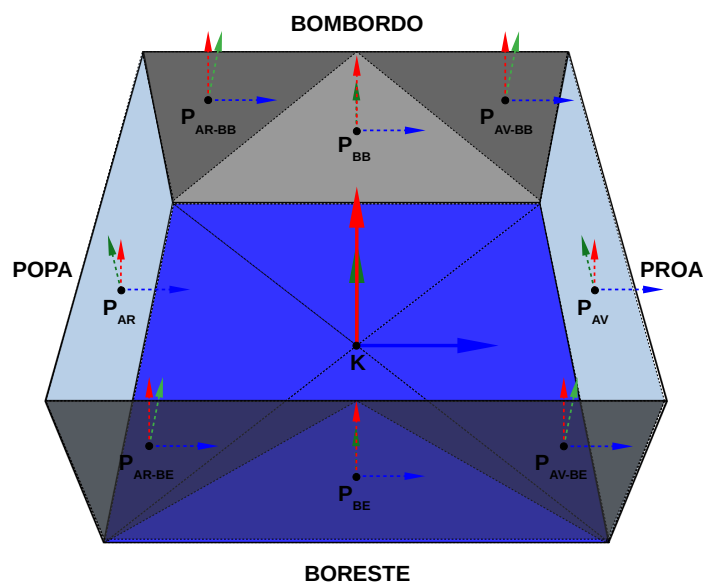
Para a realização da caracterização geométrica das UFDs, os discentes utilizaram escalas milimetradas ou paquímetros de baixo custo para medir as dimensões das UFDs e, para pesar, usaram balanças analógicas ou digitais.

3.2 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO NO ÂMBITO DA TURMA

A fim de conseguir uma quantidade de dados significativa para a realização das análises de incerteza da UFD, foi solicitado que cada discente montasse oito unidades flutuantes. Após a montagem, foi estabelecida uma referência nas UFDs, na qual as bordas mais grossas da caixa seriam o costado. Dessa maneira, foi possível identificar a popa e a proa da UFD e, conseqüentemente, identificar como medir o comprimento (L), a boca (B) e o pontal (T).

Para a realização das medições, cada discente dividiu o comprimento e a boca em quatro segmentos, sendo dois deles as extremidades da unidade flutuante e os outros dois, intermediários entre as extremidades. Além disso, o pontal foi medido nas quatro arestas verticais da UFD, conforme a Figura 4.

Figura 4 – Modelo físico esquematizado da UFD



Fonte: Elaborada pelo Prof. Dr. André Luís Condino Fajarra (2022).

Dessa forma, os discentes mediram, com os instrumentos mencionados na seção anterior, o comprimento, a boca e o pontal quatro vezes em locais diferentes para cada UFD. Além disso, foi solicitado que os discentes pesassem cada unidade flutuante. Todos os dados foram anotados em tabelas e, posteriormente, agrupados para as análises de incerteza que serão utilizadas para a caracterização das UFDs.

Outro ponto importante foi a necessidade de lastro para as UFDs. Como a densidade relativa da UFD (a massa da UFD dividida por seu volume) é menor em relação à densidade da água, a UFD flutuaria na superfície da água, dificultando a caracterização, já que o calado (H) seria praticamente zero.

Para este trabalho, não é necessário o lastreamento de todas as UFDs; pode-se usar uma amostra das UFDs feitas pela turma. O material usado para lastrear pode variar, mas precisa ser um material que consiga se moldar à UFD para facilitar a caracterização; nesse caso, foi utilizada argamassa.

Além disso, um parâmetro importante relacionado ao lastro é a sua densidade. Apesar de ser possível a obtenção de um valor aproximado da densidade da argamassa por meio de materiais de informação dos fabricantes da argamassa usada, a densidade da argamassa pode variar dependendo da sua composição, da porcentagem de ar dentro da mistura e da retenção de água, e, por isso, optou-se por calculá-la de forma direta.

Para determinar a densidade do lastro, um recipiente cilíndrico de plástico foi impresso em 3D para facilitar a medição de suas dimensões, como mostra a Figura 5. Após a medição, o recipiente foi pesado e as informações foram anotadas para calcular a densidade.

Figura 5 – Recipiente usado para a medição da densidade do lastro



Fonte: Autor (2023).

Em seguida, o recipiente foi preenchido com argamassa e pesado, como mostra a Figura 6. Dessa maneira, foi possível obter o valor da densidade, subtraindo-se o peso do recipiente do peso do recipiente com a argamassa e realizando-se o mesmo procedimento para obter o volume.

Figura 6 – Recipiente com a argamassa



Fonte: Autor (2023).

Obtendo assim, o valor da densidade da argamassa usada para lastrear a amostra de UFDs

$$\rho_t = 1478,24 \quad [\text{kg/m}^3] \quad (15)$$

Porém, como foi comentado, existem varios fatores que podem variar esse valor, dessa maneira, baseado em artigos como (BARROSO, 2012), foi adotado um desvio padrão da densidade de lastro de 25%.

$$\sigma_{\rho_t} = 369,56 \quad [\text{kg/m}^3] \quad (16)$$

3.3 GRANDEZAS ASSOCIADAS AS UFDs

No Capítulo 2, foram discutidos alguns parâmetros fundamentais para a caracterização das UFDs:

1. Deslocamento (Δ) e volume deslocado (∇);
2. Inércia de área de linha d'água (I_t);
3. Raio metacêntrico (\overline{BM});
4. Altura do centro de carena (\overline{KB});
5. Altura do centro de gravidade (\overline{KG});
6. Altura metacêntrica (\overline{GM});
7. Raio de giração em torno do eixo x (R_{44});
8. Período natural em *roll* (T_{n4}).

Esses parâmetros serão discutidos e trabalhados para caracterizar as UFDs, assim como as formas de obter as incertezas, que é um dos objetivos deste trabalho. Para isso, é necessário fazer com que esses parâmetros dependam, única e exclusivamente, das dimensões medidas pelos discentes.

3.3.1 Deslocamento e volume deslocado

O deslocamento, como mencionado na equação (6), nada mais é do que a massa total do sistema, nesse caso, a massa total da UFD é dado por:

$$\Delta = M_c + M_l, \quad (17)$$

em que M_c é a massa do casco, ou da UFD sem lastro, e M_l é a massa do lastro.

Já em relação ao volume deslocado, tendo também como base a equação (6), pode-se obter a seguinte expressão:

$$\nabla = \frac{\Delta}{\rho_a}, \quad (18)$$

sendo ρ_a é a densidade da água.

3.3.2 Inércia de área de linha d'água

A inércia de área de linha d'água (equação (19)) é a inércia da área que a linha d'água delimita. Como a UFD é uma caixa, essa área é aproximadamente um retângulo; dessa maneira, pode-se utilizar a equação da inércia de área de um retângulo, onde um dos lados é a boca (B) e o outro lado, o comprimento (L).

$$I_t = \frac{LB^3}{12} \quad (19)$$

3.3.3 Altura do centro de carena

\overline{KB} é a distância do ponto do casco mais distante da superfície livre até o centro de flutuação. Como a UFD tem uma geometria simples, pode-se aproximar essa distância como sendo a metade do calado:

$$\overline{KB} = \frac{H}{2}, \quad (20)$$

sendo H a altura do calado, e com base nas equações (6) e (17), H é definido por:

$$H = \frac{M_c + M_l}{LB\rho_a}, \quad (21)$$

substituindo (21) em (20), encontra-se a altura de carena:

$$\overline{KB} = \frac{M_c + M_l}{2LB\rho_a}. \quad (22)$$

3.3.4 Altura do centro de gravidade

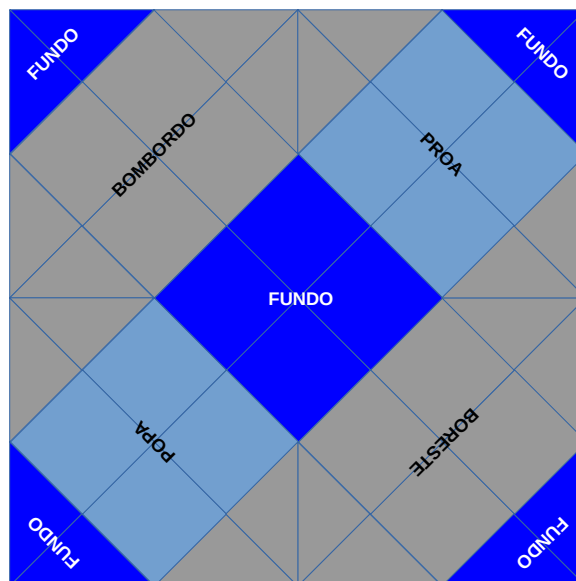
Para altura do centro de gravidade \overline{KG} , pode-se aproximar pela média ponderada dos pesos presentes na UFD, ou seja,

$$\overline{KG} = \frac{Z_l M_l + Z_c M_c}{M_c + M_l}, \quad (23)$$

sendo M_c a massa do casco (a UFD sem lastro), M_l a massa do lastro, Z_c a altura do centro de gravidade do casco e Z_l a altura do centro de gravidade do lastro, o cálculo de \overline{KG} consiste basicamente na média ponderada dos pesos dos componentes da UFD em relação aos seus centros de gravidade. Nesse caso, os componentes serão o lastro e o casco.

Para calcular Z_c , será necessário analisar o casco e, tendo como parâmetro o método de montagem e a UFD desmontada, como mostra a Figura 7, é possível separá-lo em cinco partes.

Figura 7 – Vista da caixa usada para a fabricação da UFD



Fonte: Elaborada pelo Prof. Dr. André Luís Condino Fajarra (2022).

Como mencionado anteriormente, as partes mais grossas são os costados e o fundo, enquanto as partes mais finas são a proa e a popa. Observando a dobradura da caixa, pode-se identificar que as partes mais grossas ficaram com o dobro de material em relação às partes mais finas. Dessa maneira, pode-se estabelecer uma proporção para o peso de cada parte do casco, e, como as partes do casco são simétricas, a determinação da altura do centro de massa fica mais fácil, sendo a metade do pontal (T) para os costados, a proa e a popa, e zero para o fundo. Com isso, pode-se obter Z_c , que também é uma média ponderada das partes da UFD:

$$Z_c = \frac{3T}{8}. \quad (24)$$

Para obter a altura do centro de massa do lastro (Z_l , equação (25)), foi medida a densidade do produto utilizado para lastrear as UFDs, nesse caso, argamassa. Com a densidade do produto, a massa do lastro e as dimensões da área do fundo da UFD, pode-se obter a altura do lastro e, como a caixa é simétrica, a altura do centro de massa do lastro é a metade da altura do lastro.

Aproximando a área do lastro dentro da UFD como a área da base da UFD, pode-se obter a altura do lastro por meio da densidade do lastro, a qual foi obtida no momento do lastreamento e é mostrada na Seção 3.2.

$$Z_l = \frac{M_l}{2BL\rho_l} \quad (25)$$

Com isso, pode-se obter uma equação para \overline{KG} apenas dependente de parâmetros medidos diretamente, conforme a expressão:

$$\overline{KG} = \frac{6M_c\rho_lLBT + 8M_l^2}{16\rho_lBL(M_c + M_l)}. \quad (26)$$

3.3.5 Raio metacêntrico

O raio metacêntrico (\overline{BM}) obedece à equação (3), e, com a geometria simples da UFD, pode-se obter a distância \overline{BM} da seguinte forma:

$$\overline{BM} = \frac{LB^3\rho_a}{12(M_c + M_l)}. \quad (27)$$

3.3.6 Altura metacêntrica

A altura metacêntrica depende das distâncias \overline{KG} , \overline{KB} e \overline{BM} , como demonstrado na Seção 2.1, na qual foi apresentada a equação (1). Dessa forma, pode-se obter a seguinte equação para \overline{GM} :

$$\overline{GM} = \frac{\Delta}{2LB\rho_a} + \frac{LB^3\rho_a}{12\Delta} - \frac{Z_lM_l + Z_cM_c}{\Delta}. \quad (28)$$

Realizando as substituições dos parâmetros já definidos anteriormente (equações (17), (24), (25)), pode-se obter a seguinte equação, após manipulações algébricas:

$$\overline{GM} = \frac{12\rho_l(M_c + M_l)^2 + 4L^2B^4\rho_a^2\rho_l - 9M_c\rho_a\rho_lBLT + 12\rho_aM_l^2}{24LB\rho_a\rho_l(M_c + M_l)}. \quad (29)$$

Dessa maneira, o valor de \overline{GM} fica dependente apenas dos parâmetros medidos diretamente.

3.3.7 Raio de giração em torno do eixo x

Para o raio de giração, que depende da inércia de massa da UFD, será considerada apenas a massa do lastro, pois a parcela da inércia de massa da UFD sem lastro é de uma ordem de grandeza muito inferior e pode ser desconsiderada. Dessa maneira, levando em consideração a equação (8), temos:

$$J_{44} = \frac{M_l[(2Z_l)^2 + B^2]}{12}. \quad (30)$$

Nessa diretriz, seguindo a equação (9), temos:

$$R_{44} = \sqrt{\frac{4Z_l^2 + B^2}{12}}. \quad (31)$$

Mantendo a equação de R_{44} em função dos parâmetros medidos diretamente (combinado com a equação (25)), temos:

$$R_{44} = \frac{1}{2BL\rho_l} \sqrt{\frac{M_l^2 + B^4 L^2 \rho_l^2}{3}}. \quad (32)$$

3.3.8 Período natural em *roll*

A equação para o período natural de *roll* (T_{n4}) é derivada da física das oscilações, como comentado na Subseção 2.1.4, cuja equação (13) será usada como base.

Para uma embarcação ou objeto flutuante como a UFD, a força restauradora é fornecida pela flutuabilidade. A força de flutuabilidade é proporcional à altura metacêntrica (\overline{GM}), à aceleração da gravidade (g) e ao deslocamento (PAPANIKOLAOU; BOULOUGOURIS; SPANOS, 1997). Portanto, podemos escrever $\tau = \overline{GM}g\Delta$.

O momento de inércia (I) de um objeto em rotação é dado pela massa do objeto multiplicada pelo quadrado do raio de giração (R_{44}). No entanto, no caso de um objeto flutuante, também precisamos levar em conta a inércia adicional devido ao movimento do fluido circundante. Isso é representado por uma parcela da inércia do casco ($1 + \delta^2$), onde δ é a inércia adicional de massa. Portanto, podemos escrever $I = (1 + \delta^2)R_{44}^2\Delta$.

Substituindo as expressões da inércia (I) e da força restauradora (τ) na equação original para o período natural, obtemos:

$$T_{n4} = 2\pi R_{44} \sqrt{\frac{(1 + \delta^2)}{\overline{GM}g}}. \quad (33)$$

Esta é a equação para o período natural de *roll* de uma UFD, levando em conta a inércia adicional de massa. Além disso, vale comentar que, para este caso, a

equação não ficará dependente apenas das medidas diretas, pois isso a tornaria muito complexa no momento de calcular sua incerteza.

3.4 TRATAMENTO DOS DADOS E A APLICAÇÃO DA LEI DE PROPAGAÇÃO DE INCERTEZAS

Durante o segundo semestre do ano letivo de 2022, 29 (vinte e nove) discentes da referida disciplina EMB5734 - Arquitetura Naval II (UFSC, 2016), ministrada pelo Prof. Dr. André Luís Condino Fugarra no curso de graduação em Engenharia Naval, na Universidade Federal de Santa Catarina, construíram Unidades Flutuantes Didáticas (UFDs) como parte das atividades da disciplina. Cada discente construiu 8 (oito) UFDs, totalizando 232 (duzentos e trinta e dois) UFDs. Após a construção, os discentes realizaram medições de comprimento (L), boca (B) e pontal (T) de cada UFD, obtendo quatro medidas para cada dimensão, totalizando 928 (novecentos e vinte e oito) medições por dimensão. As UFDs foram também pesadas sem lastro para determinar a massa, gerando 232 (duzentos e trinta e dois) medidas. Todas as medições foram inicialmente registradas pelos discentes em planilhas do Excel e posteriormente organizadas em um banco de dados colaborativo no Google Sheets.

A partir dos dados coletados, procedeu-se a uma análise de incertezas considerando tanto as medidas diretas (L , B , T e Δ) quanto parâmetros estimados como a densidade da água (considerando a variação em função da temperatura), a massa do lastro (cuja obtenção será detalhada nas próximas seções), a inércia adicional (adotando-se uma faixa de valores em relação à inércia de massa total devido à dificuldade de determinação) e a aceleração da gravidade (considerando sua variação conforme dados da literatura).

Para as medidas diretas, foram calculadas as médias e os desvios padrão, considerando suas respectivas distribuições estatísticas. Conforme discutido na Seção 2.2, o desvio padrão pode ser considerado como a incerteza para as medidas diretas. Entretanto, para parâmetros que são calculados a partir de medidas diretas, utilizando funções, a incerteza é determinada pela lei de propagação de incertezas. Nesse contexto, o Prof. Dr. Alexandre Mikowski desenvolveu modelos matemáticos que aplicam a lei de propagação de incertezas aos parâmetros apresentados na seção 3.3. Com base nesses modelos, foi possível calcular as incertezas desses parâmetros, considerando as incertezas das medidas diretas e a variabilidade dos parâmetros estimados. O desenvolvimento detalhado de cada modelo matemático encontra-se no Apêndice, disponibilizado pelo Prof. Mikowski e revisado pelo Prof. Dr. André Luís Condino Fugarra e por este autor (MIKOWSKI; CARDOSO; FUJARRA, não publicado).

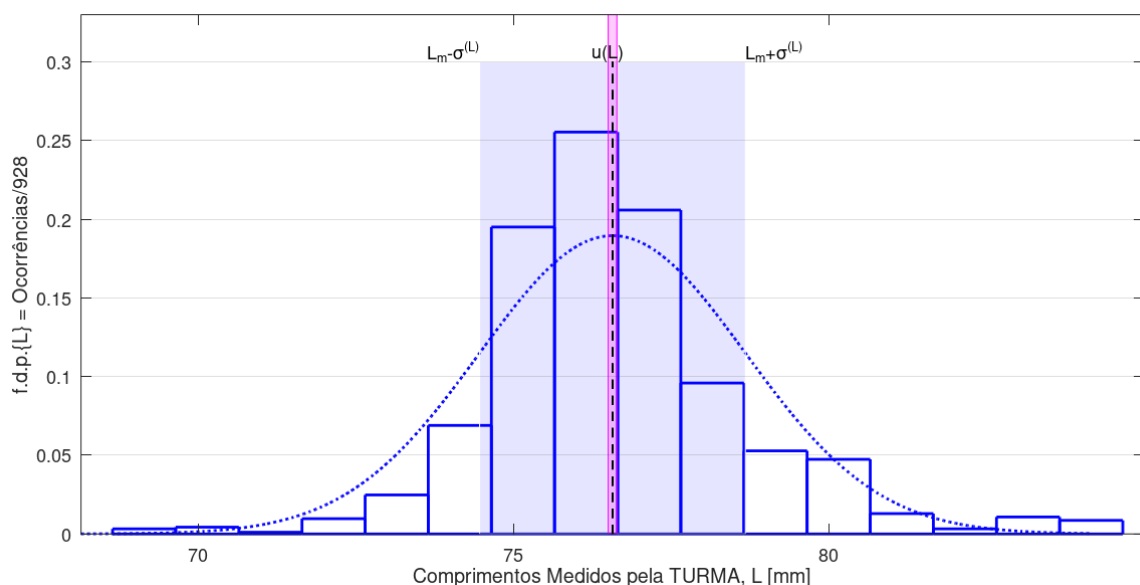
4 RESULTADOS

Os resultados numéricos das análises de incertezas, aplicadas às medições realizadas pelos 29 (vinte e nove) discentes da disciplina EMB5734 - Arquitetura Naval II (UFSC, 2016) do curso de graduação em Engenharia Naval, constituem a essência deste capítulo e serão explorados nas seções subsequentes. As análises abrangem tanto as medidas diretas, relacionadas às características geométricas das UFDs, como comprimento, boca e pontal, quanto os parâmetros calculados, que expressam as características inerciais, restauradoras e dinâmicas, conforme detalhado no Capítulo 2. A análise rigorosa das incertezas, englobando desde as medições básicas até os parâmetros calculados, permitirá uma avaliação crítica da confiabilidade dos resultados obtidos e uma compreensão aprofundada da precisão dos modelos utilizados.

4.1 RESULTADOS DA CARACTERIZAÇÃO GEOMÉTRICA

A partir da base de dados foi possível a construção de uma Função de Densidade de Probabilidade (FDP) para a avaliação da distribuição dos dados obtidos pelos discentes. Como não foi imposto uma padronização nos instrumentos de medição (paquímetro ou régua milimetrada, por exemplo), dentro da base de dados se encontram dados mais precisos do que outros, o que acarreta o acréscimo das fontes de incerteza, apesar da variação de instrumentos de medição utilizados pelos discentes. Pode-se verificar uma distribuição normal, como mostra a FDP, Figura 8.

Figura 8 – Gráfico da função de densidade de probabilidade em função das medidas de comprimento



Fonte: Autor (2024).

Nesta diretriz, prosseguem-se com os resultados da média aritmética simples dos parâmetros geométricos diretos (medidas diretas) com suas respectivas incertezas, aqui sendo consideradas igual ao desvio padrão de cada parâmetro,

$$B = 78,00 \pm 2,70 \quad [\text{mm}]; \quad (34)$$

$$L = 76,35 \pm 1,92 \quad [\text{mm}]; \quad (35)$$

$$T = 37,50 \pm 1,24 \quad [\text{mm}]. \quad (36)$$

Pode-se observar que nesse caso, a boca ficou com um valor médio maior que o comprimento, devido a abordagem de selecionar as bordas mais grossas da UFD como o costado e as bordas mais finas como popa e proa.

4.2 RESULTADOS DOS PARÂMETROS ESTIMADOS

A densidade da água foi obtida a partir de uma tabela em (HAYNES, 2014), que apresenta valores em função da temperatura, variando de 0,1 °C a 40 °C com incrementos de 0,1 °C. A partir desses dados, calculou-se a média aritmética simples das densidades e seu desvio padrão:

$$\rho_a = 997,53 \pm 1,33 \quad [\text{kg/m}^3]. \quad (37)$$

Para determinar a massa do lastro (M_l), foram lastreadas e pesadas 8 (oito) UFDs. A partir da média da massa total das UFDs lastreadas ($\overline{\Delta_8}$) e da massa do casco de cada UFD (M_c), obtida diretamente, utilizou-se a seguinte equação:

$$M_l = \overline{\Delta_8} - M_c. \quad (38)$$

A incerteza de M_l foi calculada pela lei de propagação de incertezas, encontrando-se:

$$\sigma_{M_l} = M_l \sqrt{\left(\frac{\sigma_{M_c}}{M_c}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\Delta_8}}{\overline{\Delta_8}}\right)^2}, \quad (39)$$

onde o desvio padrão da massa das UFDs lastreadas foi calculado com a distribuição retangular e o desvio padrão da massa do casco com a distribuição normal. O resultado obtido foi:

$$M_l = 72,53 \pm 3,47 \quad [\text{g}]. \quad (40)$$

A inércia adicional de massa (δ), adimensional e relacionada à viscosidade da água em torno da embarcação durante o movimento de roll, foi estimada a partir da

literatura. Considerando que essa inércia representa uma porcentagem da inércia total, adotou-se uma faixa de valores entre 0,3 e 0,5, com incrementos de 0,01 (PEACH; BROOK, 1987). A incerteza associada a δ foi definida como o desvio padrão de uma distribuição retangular, resultando em:

$$\delta = 0,40 \pm 0,057. \quad (41)$$

Por fim, a aceleração da gravidade (g) foi considerada com sua respectiva incerteza, utilizando valores da literatura (ROSSINI et al., 2023):

$$g = 9,7873 \pm 0,0012 \quad [\text{m/s}^2]. \quad (42)$$

4.3 RESULTADOS INERCIAIS

Nessa seção será discutida os parâmetros relacionados ao aspecto inercial da UFD, em que um dos principais parâmetros é a massa, sendo esta dividida em duas parcelas, a massa do casco e a massa do lastro. A parcela obtida de forma direta foi a massa do casco (M_c), dessa maneira, segue o resultado da média aritmética simples dos valores obtidos de M_c e sua incerteza, aqui também sendo considerada o desvio padrão.

$$M_c = 15,97 \pm 0,69 \quad [\text{g}]. \quad (43)$$

E a parcela obtida de forma estimada foi a massa de lastro (M_l), comentada e que seu valor foi apresentado na seção anterior. Porém, existem outros parâmetros inerciais, como o volume deslocado, a inércia de área de linha d'água e o raio de giração (derivado da inércia de massa em torno do eixo x) que serão apresentados a seguir.

4.3.1 Deslocamento e volume deslocado

Como relatado nas seções anteriores, o deslocamento e o volume deslocado tiveram suas equações deduzidas e discutidas na seção 3.3.1, em que essas funções dependem da massa do casco (M_c), da massa de lastro (M_l) e da densidade da água (ρ_a). Dessa maneira, vale ressaltar que como a parcela da incerteza da densidade da água tem uma ordem de grandeza menor, comparada com os outros parâmetros, terá menor impacto na incerteza do volume deslocado.

Além disso, o deslocamento nada mais é que a massa total da UFD, em que sua incerteza passa a ser calculada aplicando a lei de propagação de incertezas na equação (17), cujo o resultado é dado por:

$$\sigma_{\Delta} = \Delta \sqrt{\left(\frac{\sigma_{M_c}}{M_c}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{M_l}}{M_l}\right)^2}. \quad (44)$$

Para o volume deslocado sua incerteza é calculada conforme a equação (58), conforme apresentado no Apêndice A (MIKOWSKI; CARDOSO; FUJARRA, não publicado), com isso, segue os resultados do deslocamento e do volume deslocado, sendo as médias aritméticas simples dos parâmetros juntamente com suas respectivas incertezas calculadas:

$$\Delta = 88,5 \pm 3,96 \quad [\text{g}]; \quad (45)$$

$$\nabla = 88719,23 \pm 998,42 \quad [\text{mm}^3]. \quad (46)$$

4.3.2 Inércia de área de linha d'água

O parâmetro de inércia de linha d'água, crucial para determinar outros parâmetros de estabilidade da UFD, foi discutido e sua função definida na seção 3.3.2.

É importante destacar que, dentro da função da inércia de área de linha d'água, a boca (B) é elevada ao cubo, conferindo a essa dimensão maior relevância no valor final do parâmetro e, conseqüentemente, em sua incerteza. Além disso, sua incerteza é calculada pela equação (62) conforme apresentado no hyperref[apd:Inercia]Apêndice B (MIKOWSKI; CARDOSO; FUJARRA, não publicado). Segue o resultado da média aritmética simples da inercia de linha d'água junto com sua incerteza:

$$I_t = 2864622,03 \pm 351922,95 \quad [\text{mm}^4]. \quad (47)$$

4.3.3 Raio de giração em torno do eixo x

O raio de giração, cujo cálculo foi apresentado na subseção 3.3.7, consiste em um importante parâmetro para avaliar a resistência da UFD as mudanças em seu estado de movimento. Esse parâmetro também será fundamental na determinação do período natural de roll.

Sua incerteza é calculada pela a equação (88) conforme Apêndice G (MIKOWSKI; CARDOSO; FUJARRA, não publicado), com isso, segue o resultado da média aritmética simples do raio de giração e sua incerteza calculada:

$$R_{44} = 22,64 \pm 7,61 \quad [\text{mm}]. \quad (48)$$

4.4 RESULTADOS DA RESTAURAÇÃO

Esta seção apresenta os resultados obtidos para os principais parâmetros relacionados à restauração e estabilidade de embarcações: altura do centro de gravidade, altura do centro de carena, raio metacêntrico e altura metacêntrica. É importante ressaltar que todos esses parâmetros representam distâncias relativas a pontos específicos de um corpo flutuante, nos quais as forças atuantes são aplicadas para manter o equilíbrio.

4.4.1 Altura do centro de gravidade

A altura do centro de gravidade (\overline{KG}) é discutida em detalhes na seção 3.3.4, onde também são apresentadas as funções para o seu cálculo. A incerteza para o parâmetro \overline{KG} é calculada pela equação (82), conforme Apêndice F (MIKOWSKI; CARDOSO; FUJARRA, não publicado) e seu resultado é apresentado a seguir, sendo a média aritmética simples do parâmetro e sua incerteza calculada:

$$\overline{KG} = 5,93 \pm 0,17 \quad [\text{mm}]. \quad (49)$$

4.4.2 Altura do centro de carena

A seção 3.3.3 é dedicada à discussão da altura do centro de carena (\overline{KB}). A aplicação da lei de propagação de incertezas para o parâmetro \overline{KB} foi realizada e é calculada pela equação (72), conforme Apêndice D (MIKOWSKI; CARDOSO; FUJARRA, não publicado). Assim é apresentado o resultado, sendo a média aritmética simples junto com a sua incerteza calculada:

$$\overline{KB} = 7,47 \pm 0,43 \quad [\text{mm}]. \quad (50)$$

4.4.3 Raio metacêntrico

O raio metacêntrico (\overline{BM}) é abordado na seção 3.3.5. Por meio da equação (77) desenvolvida conforme o Apêndice E (MIKOWSKI; CARDOSO; FUJARRA, não publicado), apresenta-se o valor numérico da propagação de incerteza para o parâmetro \overline{BM} , sendo a média aritmética simples do parâmetro junto com sua incerteza calculada:

$$\overline{BM} = 0,26 \pm 0,03 \quad [\text{mm}]. \quad (51)$$

4.4.4 Altura metacêntrica

A altura metacêntrica (\overline{GM}) é um parâmetro crucial para determinar a estabilidade de um corpo flutuante. A seção 2.1.3 discorre sobre a importância do \overline{GM}

na estabilidade, enquanto a seção 3.3.6 apresenta a equação para o cálculo deste parâmetro. É importante ressaltar que \overline{GM} depende de outros três parâmetros: \overline{KG} , \overline{KB} e \overline{BM} . O cálculo da propagação de incertezas para o \overline{GM} é dado pela equação (67) conforme Apêndice C (MIKOWSKI; CARDOSO; FUJARRA, não publicado). Devido à complexidade da equação (28), a lei de propagação de incertezas foi aplicada em relação à equação (1), considerando que os outros parâmetros que influenciam o \overline{GM} já foram calculados, dessa maneira, é apresentado a seguir o resultado, sendo composto pela média aritmética simples do parâmetro junto com sua incerteza calculada:

$$\overline{GM} = 1,80 \pm 0,47 \quad [\text{mm}]. \quad (52)$$

Vale ressaltar o valor positivo de \overline{GM} , o que indica um corpo flutuante estável e dentro do esperado.

4.5 RESULTADOS DINÂMICOS

Esta seção apresenta o resultado referente ao aspecto dinâmico do sistema analisado: o período natural de roll. Este parâmetro, que representa o tempo de oscilação da UFD após uma perturbação, é crucial para avaliar tanto a estabilidade dinâmica da embarcação quanto o conforto a bordo, influenciando diretamente o nível de enjoo.

4.5.1 Período natural em roll

Com os valores de \overline{GM} , R_{44} e suas respectivas incertezas determinadas, juntamente com as estimativas para o coeficiente de inércia adicional e aceleração da gravidade, foi possível calcular o período natural de roll (T_{n4}), conforme descrito na seção 3.3.8.

O valor numérico da propagação de incerteza para T_{n4} foi realizada utilizando a equação (94) conforme no Apêndice H (MIKOWSKI; CARDOSO; FUJARRA, não publicado) e assim segue o resultado do parâmetro, dado pela média aritmética simples junto com sua incerteza calculada:

$$T_{n4} = 1,15 \pm 0,23 \quad [\text{s}]. \quad (53)$$

4.6 SÍNTESE INTEGRADORA DOS RESULTADOS

Esta seção apresenta uma síntese integradora dos resultados obtidos nas análises de incertezas das medições realizadas nas UFDs. As Tabelas 1 a 5 consolidam os valores das médias aritméticas simples e suas respectivas incertezas para todos os parâmetros analisados, abrangendo as características geométricas (Tabela 1), os

parâmetros estimados (Tabela 2), os parâmetros inerciais (Tabela 3), os parâmetros restauradores (Tabela 4) e o parâmetro dinâmico (Tabela 5).

Tabela 1 – Resultados das análises de incertezas - Parâmetros Geométricos

Parâmetro	Média	Incerteza	Unidade de medida
Comprimento (L)	76,35	± 1,92	mm
Boca (B)	78,00	± 2,70	mm
Pontal (T)	37,50	± 1,24	mm

Fonte: Autor (2024).

Tabela 2 – Resultados das análises de incertezas - Parâmetros Estimados

Parâmetro	Média	Incerteza	Unidade de medida
Massa do lastro (M_l)	72,53	± 3,47	g
Densidade da água (ρ_a)	997,53	± 1,33	kg/m ³
Aceleração da gravidade (g)	9,7873	± 0,0012	m/s ²
Inércia adicional (δ)	0,40	± 0,057	-

Fonte: Autor (2024).

Tabela 3 – Resultados das análises de incertezas - Parâmetros Inerciais

Parâmetro	Média	Incerteza	Unidade de medida
Massa do casco (M_c)	15,97	± 0,69	g
Deslocamento (Δ)	88,5	± 3,96	g
Volume deslocado (∇)	88719,23	± 998,42	mm ³
Inércia de área de linha d'água (I_t)	2864622,03	± 351922,95	mm ⁴
Raio de giração em torno do eixo x (R_{44})	22,64	± 7,61	mm

Fonte: Autor (2024).

Tabela 4 – Resultados das análises de incertezas - Parâmetros Restauradores

Parâmetro	Média	Incerteza	Unidade de medida
Altura do centro de gravidade (\overline{KG})	5,93	± 0,17	mm
Altura do centro de carena (\overline{KB})	7,47	± 0,43	mm
Raio metacêntrico (\overline{BM})	0,26	± 0,03	mm
Altura metacêntrica (\overline{GM})	1,80	± 0,47	mm

Fonte: Autor (2024).

Tabela 5 – Síntese dos resultados das análises de incertezas - Parâmetro Dinâmico

Parâmetro	Média	Incerteza	Unidade de medida
Período natural em roll (T_{n4})	1,15	± 0,23	s

Fonte: Autor (2024).

A análise das Tabelas 1 a 5 permite uma avaliação global da precisão dos resultados obtidos e da influência das incertezas de cada parâmetro. Os parâmetros geométricos, mostrados na Tabela 1, foram medidos diretamente, apresentando assim maior precisão, com exceção da boca (B). A metodologia adotada para a boca, definida pelas bordas mais grossas após a montagem da UFD, a tornou suscetível a variações por conta de eventuais amassados ou imprecisões nas dobras durante a construção.

Por outro lado, a precisão dos parâmetros estimados, como a massa do lastro (Tabela 2), a densidade da água, a inércia adicional e a aceleração da gravidade, depende diretamente da variabilidade considerada para cada um deles. A incerteza associada à esses parâmetros pode ser subestimada, visto que a simples adoção de faixas de valores da literatura, como no caso da densidade da água e da aceleração da gravidade, ou a estimativa a partir de uma amostra limitada de UFDs, como no caso da massa do lastro, podem não capturar a real variabilidade presente no sistema. É importante destacar que o período natural em roll (Tabela 5) e a altura metacêntrica (Tabela 4) foram obtidos por meio de funções que utilizavam como entrada os parâmetros calculados previamente, o que significa que a incerteza desses parâmetros é influenciada pela propagação das incertezas das etapas anteriores de cálculo.

As incertezas mais significativas, como aquelas associadas à massa do lastro, ao raio de giração e à altura metacêntrica, destacam a necessidade de atenção especial a estes parâmetros durante o processo de projeto e construção das UFDs. Adicionalmente, o valor positivo da altura metacêntrica (\overline{GM}), apresentado na Tabela 4, corrobora a estabilidade do sistema.

A análise de incertezas, portanto, desempenha um papel crucial na validação de modelos numéricos e na interpretação de resultados experimentais, fornecendo uma compreensão mais aprofundada da confiabilidade e precisão das medições e dos parâmetros calculados. A quantificação das incertezas permite identificar as principais fontes de variabilidade, direcionando esforços para aprimorar a precisão do projeto, seja pela otimização de métodos de fabricação ou pela busca por métodos de estimativa mais robustos.

A aplicação da análise de incertezas se estende a diversas áreas da engenharia naval, mostrando-se particularmente relevante em projetos desafiadores como aqueles desenvolvidos por equipes de competição universitárias, em pesquisas laboratoriais que buscam validar modelos numéricos e testar soluções inovadoras, e na formação de engenheiros mais capacitados para lidar com a variabilidade inerente a sistemas reais.

O desenvolvimento de modelos matemáticos para a propagação de incertezas assume grande relevância nesse contexto. A aplicação da lei de propagação de incertezas, materializada em modelos específicos, permite a estimativa da incerteza de parâmetros complexos a partir das incertezas dos parâmetros de entrada. A

versatilidade desses modelos possibilita sua aplicação em outros modelos em escala reduzida, contribuindo para a estimativa precisa de incertezas em diferentes cenários de projeto e pesquisa em engenharia naval. A inclusão do tema 'análise de incertezas' em disciplinas de engenharia, utilizando exemplos práticos como a construção e análise de UFDs, pode fortalecer a formação de profissionais mais capacitados para lidar com a variabilidade inerente a sistemas reais e aptos a projetar e analisar sistemas complexos de forma crítica e eficiente.

5 CONCLUSÕES

Este estudo demonstrou a importância da análise de incertezas em experimentos de hidrostática e hidrodinâmica, mesmo quando os discentes utilizam materiais padronizados para a construção das Unidades Flutuantes Didáticas (UFDs). A variabilidade inerente à construção manual, mesmo sob condições controladas, evidenciou que as incertezas podem impactar significativamente os resultados experimentais.

A comparação dos dados obtidos com as previsões teóricas, corroborada por trabalhos como o de (MATEUS, 2019), valida a aplicabilidade dos modelos teóricos, mas ressalta a necessidade de uma análise crítica dos dados, considerando as incertezas inerentes ao processo experimental.

A investigação revelou um potencial promissor na exploração de diferentes métodos de medição para aprofundar a análise comparativa entre os resultados teóricos e práticos. A comparação entre o calado (H) obtido de forma indireta, como demonstrado neste trabalho, e a medição direta, podendo ser realizada colocando a UFD em um recipiente com água e observando a altura da linha d'água, permite avaliar a precisão de cada método e os fatores que podem influenciar as medições.

Adicionalmente, a análise do período de oscilação da UFD, utilizando ferramentas como cronômetros ou aplicativos de edição de vídeo disponíveis em smartphones para maior precisão, em contraste com o período natural em roll (T_{n4}) calculado teoricamente, enriquece a análise da dinâmica do sistema e aprofunda a compreensão dos fenômenos hidrostáticos e hidrodinâmicos envolvidos.

A importância da análise de incertezas se torna evidente nos resultados obtidos, especialmente ao compararmos os valores das incertezas dos parâmetros de restauração (\overline{GM} , \overline{KB} , \overline{BM} e \overline{KG}). A extrapolação dos resultados indica a possibilidade de um \overline{GM} negativo, o que, embora não observado neste estudo, poderia levar a uma configuração instável da UFD. Essa constatação reforça a necessidade de se considerar as incertezas para uma avaliação precisa da estabilidade da UFD, mesmo em situações onde os cálculos apontam para um sistema estável.

Este estudo abre caminho para futuras pesquisas que investiguem a influência de diferentes métodos de construção e a quantificação do impacto de cada etapa na incerteza final dos experimentos, vale ressaltar os pontos de melhoria dentro das análises feitas nesse trabalho, como aumentar a variabilidade da densidade do lastro, medindo em recipientes diferentes ou, até mesmo, realizar a medição da densidade do lastro em escala, criando assim variabilidade. Além disso, analisar como a aplicação prática influencia a capacidade dos discentes de lidar com incertezas em cenários reais é crucial para o desenvolvimento de estratégias de ensino mais eficazes.

Conclui-se que a análise rigorosa de incertezas é fundamental para a interpretação precisa de resultados experimentais em hidrostática e hidrodinâmica. A busca por técnicas que minimizem as incertezas e a exploração de diferentes cenários experimentais são pilares para o avanço do conhecimento nestas áreas, preparando os discentes para enfrentar os desafios da experimentação em cenários reais.

REFERÊNCIAS

- BARROSO, L. B. Avaliação da densidade de massa no estado endurecido de argamassas produzidas com vidro moído. In: **3º Congresso Internacional de Tecnologias para o Meio Ambiente**. Bento Gonçalves, RS: [s.n.], 2012.
- BERTRAM, V. **Practical Ship Hydrodynamics**. 2. ed.. ed. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2012. 382 p.
- BEVINGTON, P. R.; ROBINSON, D. K. **Data Reduction and Error Analysis for the Physical Sciences**. Nova Iorque: McGraw-Hill, 2003.
- CHAKRABARTI, S. K. **Offshore Structure Modeling**. Singapura: World Scientific, 1994. v. 9. 470 p. (Advanced Series on Ocean Engineering, v. 9).
- CRAIG, R. R. **Structural Dynamics: An Introduction to Computer Methods**. Nova Iorque: John Wiley & Sons, 1981.
- FALTINSEN, O. M. **Sea Loads on Ships and Offshore Structures**. Cambridge: Cambridge University Press, 1990.
- FERREIRA, A. **20 Ideias de Como Fazer Caixinha de Papel**. 2017. Acesso em: 24 ago. 2023. Disponível em: <https://www.artesanatopassoapassoja.com.br/como-fazer-caixinha-de-papel/>.
- FOSSSEN, T. I. **Handbook of Marine Craft Hydrodynamics and Motion Control**. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2011.
- FOX, R. W.; MCDONALD, A. T.; PRITCHARD, P. J. **Introdução à Mecânica dos Fluidos**. 9. ed.. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2018.
- HAYNES, W. M. (Ed.). **CRC Handbook of Chemistry and Physics**. 95. ed.. ed. Boca Raton, FL: CRC Press, 2014.
- HOLTHUIJSEN, L. H. **The Ship Resistance and Propulsion Reader**. Delft: Delft University of Technology, 2003.
- HUGHES, I. G.; HASE, T. P. A. **Measurements and their Uncertainties: A Practical Guide to Modern Error Analysis**. Oxford: Oxford University Press, 2010.
- Instituto Nacional de Metrologia, Qualidade e Tecnologia - INMETRO. **Avaliação de dados de medição: Guia para a expressão da incerteza de medição – GUM 2008**. Brasília, 2012.
- Joint Committee for Guides in Metrology - JCGM. **Evaluation of measurement data – Guide to the expression of uncertainty in measurement**. Sèvres, 2008.
- KU, H. Notes on the use of propagation of error formulas. **Journal of Research of the National Bureau of Standards - C. Engineering and Instrumentation**, v. 70C, n. 4, p. 263–273, 1966.

LEWIS, E. V. **Principles of Naval Architecture: Volume II Resistance, Propulsion and Vibration**. Jersey City, NJ: Society of Naval Architects and Marine Engineers, 1988. v. 2.

LEWIS, E. V. **Principles of Naval Architecture: Volume III Motions in Waves and Controllability**. Jersey City, NJ: Society of Naval Architects and Marine Engineers, 1989. v. 3.

MANDEL, P. **Ship Construction Structural Design**. Anapolis: Naval Institute Press, 1993. v. 1.

MATEUS, V. **Estudo Analítico-Experimental da Estabilidade Transversal de um Casco Didático**. Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Engenharia Naval), Joinville, 2019.

MEIROVITCH, L. **Fundamentals of Vibrations**. Long Grove, IL: Waveland Press, 2001.

MIKOWSKI, A.; CARDOSO, R.; FUJARRA, A. **Análise de incertezas em experimentos hidrostáticos e hidrodinâmicos**. não publicado. Modelos matemáticos da propagação de incerteza: Apêndice A - Volume de deslocamento, Apêndice B - Inércia de linha d'água, Apêndice C - Altura metacêntrica, Apêndice D - Altura do centro de carena, Apêndice E - Raio metacêntrico, Apêndice F - Altura do centro de gravidade, Apêndice G - Raio de giração e Apêndice H - Período natural em roll.

MOORE, C. S. **The Principles of Naval Architecture Series: Intact Stability**. [S.l.]: The Society of Naval Architects and Marine Engineers SNAME, 2010. 82 p.

NEWLAND, D. E. **An Introduction to Random Vibrations, Spectral & Wavelet Analysis**. Mineola, NY: Dover Publications, 1993.

NEWMAN, J. N. **Marine Hydrodynamics**. Cambridge, MA: MIT Press, 1977.

PAPANIKOLAOU, A.; BOULOUGOURIS, E.; SPANOS, D. On the roll radius of gyration of ro-ro passenger ships. In: INTERNATIONAL SOCIETY OF OFFSHORE AND POLAR ENGINEERS (ISOPE). **Proceedings of the 7th International Offshore and Polar Engineering Conference - ISOPE**. Honolulu, HI, 1997. p. To be presented. Presented at the 7th International Offshore and Polar Engineering Conference - ISOPE, Honolulu, Hawaii, May 25-30, 1997.

PAULLING, J.; ROSENBERG, R. On the motions of ships in confused seas. **Transactions of the Society of Naval Architects and Marine Engineers**, 1983.

PAULLING, J.; WEBSTER, W. Theoretical predictions of the heave and pitch motion of a barge moving in waves. **Transactions of the Society of Naval Architects and Marine Engineers**, 1975.

PEACH, R. W.; BROOK, A. K. The radii of gyration of merchant ships. **North East Coast Institution of Engineers and Shipbuilders Transactions**, June 1987. TECHNISCHE UNIVERSITEIT Laboratorium vooc Scheepshydronechanlcs Archief.

Promilitares. **Hidrostática: Empuxo e densidade**. 2020. Acesso em: 18 jun. 2023. Disponível em: <https://promilitares.com.br/concursos-militares/conteudo/hidrostatica-empuxo-e-densidade/>.

ROSS, S. M. **Simulation**. Burlington, MA: Elsevier, 2006.

ROSSINI, M. R. et al. Análise gravimétrica por meio de smartphones e aprimoramentos nas equações do experimento do pêndulo simples como subterfúgio para o ensino de física clássica. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, 2023. Submetido em 27 out. 2023. Aceito em 18 dez. 2023.

Society of Naval Architects and Marine Engineers - SNAME. **Nomenclature for treating the motion of a submerged body through a fluid**. [S.l.], 1950. (Technical and Research Bulletin, 1-5).

TAYLOR, J. R. **An Introduction to Error Analysis: The Study of Uncertainties in Physical Measurements**. Sausalito, CA: University Science Books, 1997.

UFSC. **Projeto Pedagógico do Curso (PPC): Bacharelado em Engenharia Naval. Grade 2016/1**. Joinville: Universidade Federal de Santa Catarina, 2016. 37 p. Acesso em: 09 de Julho de 2024. Disponível em: https://naval.ufsc.br/files/2016/04/PPC-Naval_2016_01_v10_15_03_2017.pdf.

VUOLO, J. H. **Fundamentos da Teoria de Erros**. 2. ed.. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

APÊNDICE A - MODELO MATEMÁTICO DA PROPAGAÇÃO DE INCERTEZA PARA O VOLUME DESLOCADO

O volume deslocado é definido matematicamente como uma função de três variáveis, dado por:

$$\nabla = \frac{M_c + M_l}{\rho_a}; \quad \nabla = f(M_c, M_l, \rho_a). \quad (54)$$

Aplicando a lei de propagação de incertezas, ou seja, a equação (14) para a equação (54), tem-se:

$$\sigma_{\nabla}^2 = \left(\frac{\partial \nabla}{\partial M_c} \right)^2 \sigma_{M_c}^2 + \left(\frac{\partial \nabla}{\partial M_l} \right)^2 \sigma_{M_l}^2 + \left(\frac{\partial \nabla}{\partial \rho_a} \right)^2 \sigma_{\rho_a}^2 \quad (55)$$

As derivadas parciais, são dadas por:

$$\frac{\partial \nabla}{\partial M_c} = \frac{1}{\rho_a}; \quad \frac{\partial \nabla}{\partial M_l} = \frac{1}{\rho_a}; \quad \frac{\partial \nabla}{\partial \rho_a} = \frac{-(M_c + M_l)}{\rho_a^2}. \quad (56)$$

Substituindo as derivadas parciais na equação (55), após manipulações matemáticas, encontra-se o modelo de incerteza para o volume deslocado:

$$\sigma_{\nabla} = \nabla \sqrt{K_{\nabla,1}^2 \left(\frac{\sigma_{M_c}}{M_c} \right)^2 + K_{\nabla,2}^2 \left(\frac{\sigma_{M_l}}{M_l} \right)^2 + K_{\nabla,3}^2 \left(\frac{\sigma_{\rho_a}}{\rho_a} \right)^2}, \quad (57)$$

em que as constantes são dadas por:

$$K_{\nabla,1} = \frac{M_c}{M_c + M_l}; \quad K_{\nabla,2} = \frac{M_l}{M_c + M_l}; \quad K_{\nabla,3} = 1. \quad (58)$$

APÊNDICE B - MODELO MATEMÁTICO DA PROPAGAÇÃO DE INCERTEZA PARA A INÉRCIA DE LINHA D'ÁGUA

A inércia de linha d'água é definida matematicamente como uma função de duas variáveis, dado por:

$$I_t = \frac{LB^3}{12}; \quad I_t = f(L, B). \quad (59)$$

Aplicando a lei de propagação de incertezas, ou seja, a equação (14) para a equação (59), tem-se:

$$\sigma_{I_t}^2 = \left(\frac{\partial I_t}{\partial L}\right)^2 \sigma_L^2 + \left(\frac{\partial I_t}{\partial B}\right)^2 \sigma_B^2 \quad (60)$$

As derivadas parciais, são dadas por:

$$\frac{\partial I_t}{\partial L} = \frac{B^3}{12}; \quad \frac{\partial I_t}{\partial B} = \frac{LB^2}{4}. \quad (61)$$

Substituindo as derivadas parciais na equação (60), após manipulações matemáticas, encontra-se o modelo de incerteza para a inércia de linha d'água:

$$\sigma_{I_t} = I_t \sqrt{K_{I_t,1}^2 \left(\frac{\sigma_L}{L}\right)^2 + K_{I_t,2}^2 \left(\frac{\sigma_B}{B}\right)^2}, \quad (62)$$

em que as constantes são dadas por:

$$K_{I_t,1} = 1; \quad K_{I_t,2} = 3. \quad (63)$$

APÊNDICE C - MODELO MATEMÁTICO DA PROPAGAÇÃO DE INCERTEZA PARA A ALTURA METACÊNTRICA

A altura metacêntrica é definida matematicamente como uma função de três variáveis, dado por:

$$\overline{GM} = \overline{KB} + \overline{BM} - \overline{KG}; \quad \overline{GM} = f(\overline{KB}, \overline{BM}, \overline{KG}). \quad (64)$$

Aplicando a lei de propagação de incertezas, ou seja, a equação (14) para a equação (64), tem-se:

$$\sigma_{GM}^2 = \left(\frac{\partial \overline{GM}}{\partial \overline{KB}} \right)^2 \sigma_{KB}^2 + \left(\frac{\partial \overline{GM}}{\partial \overline{BM}} \right)^2 \sigma_{BM}^2 + \left(\frac{\partial \overline{GM}}{\partial \overline{KG}} \right)^2 \sigma_{KG}^2 \quad (65)$$

As derivadas parciais, são dadas por:

$$\frac{\partial \overline{GM}}{\partial \overline{KB}} = 1; \quad \frac{\partial \overline{GM}}{\partial \overline{BM}} = 1; \quad \frac{\partial \overline{GM}}{\partial \overline{KG}} = -1. \quad (66)$$

Substituindo as derivadas parciais na equação (65), após manipulações matemáticas, encontra-se o modelo de incerteza para a altura metacêntrica:

$$\sigma_{GM} = \overline{GM} \sqrt{K_{GM,1}^2 \left(\frac{\sigma_{KB}}{\overline{KB}} \right)^2 + K_{GM,2}^2 \left(\frac{\sigma_{BM}}{\overline{BM}} \right)^2 + K_{GM,3}^2 \left(\frac{\sigma_{KG}}{\overline{KG}} \right)^2}, \quad (67)$$

em que as constantes são dadas por:

$$K_{GM,1} = \frac{\overline{KB}}{\overline{GM}}; \quad K_{GM,2} = \frac{\overline{BM}}{\overline{GM}}; \quad K_{GM,3} = \frac{\overline{KG}}{\overline{GM}}. \quad (68)$$

APÊNDICE D - MODELO MATEMÁTICO DA PROPAGAÇÃO DE INCERTEZA PARA A ALTURA DO CENTRO DE CARENA

A altura centro de carena é definida matematicamente como uma função de cinco variáveis, dado por:

$$\overline{KB} = \frac{M_c + M_l}{2\rho_a LB}; \quad \overline{KB} = f(M_c, M_l, \rho_a, L, B). \quad (69)$$

Aplicando a lei de propagação de incertezas, ou seja, a equação (14) para a equação (69), tem-se:

$$\sigma_{\overline{KB}}^2 = \left(\frac{\partial \overline{KB}}{\partial M_c}\right)^2 \sigma_{M_c}^2 + \left(\frac{\partial \overline{KB}}{\partial M_l}\right)^2 \sigma_{M_l}^2 + \left(\frac{\partial \overline{KB}}{\partial \rho_a}\right)^2 \sigma_{\rho_a}^2 + \left(\frac{\partial \overline{KB}}{\partial B}\right)^2 \sigma_B^2 + \left(\frac{\partial \overline{KB}}{\partial L}\right)^2 \sigma_L^2 \quad (70)$$

As derivadas parciais, são dadas por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{KB}}{\partial M_c} &= \frac{1}{2LB\rho_a}; \\ \frac{\partial \overline{KB}}{\partial M_l} &= \frac{1}{2LB\rho_a}; \\ \frac{\partial \overline{KB}}{\partial \rho_a} &= \frac{-(M_c + M_l)}{2LB\rho_a^2}; \\ \frac{\partial \overline{KB}}{\partial L} &= \frac{-(M_c + M_l)}{2L^2B\rho_a}; \\ \frac{\partial \overline{KB}}{\partial B} &= \frac{-(M_c + M_l)}{2LB^2\rho_a}. \end{aligned} \quad (71)$$

Substituindo as derivadas parciais na equação (70), após manipulações matemáticas, encontra-se o modelo de incerteza para a altura centro de carena:

$$\sigma_{\overline{KB}} = \overline{KB} \left[K_{\overline{KB},1}^2 \left(\frac{\sigma_{M_c}}{M_c}\right)^2 + K_{\overline{KB},2}^2 \left(\frac{\sigma_{M_l}}{M_l}\right)^2 + K_{\overline{KB},3}^2 \left(\frac{\sigma_{\rho_a}}{\rho_a}\right)^2 + K_{\overline{KB},4}^2 \left(\frac{\sigma_L}{L}\right)^2 + K_{\overline{KB},5}^2 \left(\frac{\sigma_B}{B}\right)^2 \right]^{1/2}, \quad (72)$$

em que as constantes são dadas por:

$$K_{\overline{KB},1} = \frac{M_c}{M_c + M_l}; \quad K_{\overline{KB},2} = \frac{M_l}{M_c + M_l}; \quad K_{\overline{KB},3} = K_{\overline{KB},4} = K_{\overline{KB},5} = 1. \quad (73)$$

APÊNDICE E - MODELO MATEMÁTICO DA PROPAGAÇÃO DE INCERTEZA PARA O RAIOS METACÊNTRICO

O raio metacêntrico é definido matematicamente como uma função de cinco variáveis, dado por:

$$\overline{BM} = \frac{LB^3\rho_a}{12(M_c + M_l)}; \quad \overline{BM} = f(L, B, \rho_a, M_c, M_l) \quad (74)$$

Aplicando a lei de propagação de incertezas, ou seja, a equação (14) para a equação (74), tem-se:

$$\sigma_{\overline{BM}}^2 = \left(\frac{\partial\overline{BM}}{\partial L}\right)^2 \sigma_L^2 + \left(\frac{\partial\overline{BM}}{\partial B}\right)^2 \sigma_B^2 + \left(\frac{\partial\overline{BM}}{\partial\rho_a}\right)^2 \sigma_{\rho_a}^2 + \left(\frac{\partial\overline{BM}}{\partial M_c}\right)^2 \sigma_{M_c}^2 + \left(\frac{\partial\overline{BM}}{\partial M_l}\right)^2 \sigma_{M_l}^2. \quad (75)$$

As derivadas parciais, são dadas por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\overline{BM}}{\partial L} &= \frac{B^3\rho_a}{12(M_c + M_l)}; \\ \frac{\partial\overline{BM}}{\partial B} &= \frac{LB^2\rho_a}{4(M_c + M_l)}; \\ \frac{\partial\overline{BM}}{\partial\rho_a} &= \frac{LB^3}{12(M_c + M_l)}; \\ \frac{\partial\overline{BM}}{\partial M_c} &= \frac{-LB^3\rho_a}{12(M_c + M_l)^2}; \\ \frac{\partial\overline{BM}}{\partial M_l} &= \frac{-LB^3\rho_a}{12(M_c + M_l)^2}. \end{aligned} \quad (76)$$

Substituindo as derivadas parciais na equação (75), após manipulações matemáticas, encontra-se o modelo de incerteza para o raio metacêntrico:

$$\sigma_{\overline{BM}} = \overline{BM} \left[K_{\overline{BM},1}^2 \left(\frac{\sigma_L}{L}\right)^2 + K_{\overline{BM},2}^2 \left(\frac{\sigma_B}{B}\right)^2 + K_{\overline{BM},3}^2 \left(\frac{\sigma_{\rho_a}}{\rho_a}\right)^2 + K_{\overline{BM},4}^2 \left(\frac{\sigma_{M_c}}{M_c}\right)^2 + K_{\overline{BM},5}^2 \left(\frac{\sigma_{M_l}}{M_l}\right)^2 \right]^{1/2}, \quad (77)$$

em que as constantes são dadas por:

$$\begin{aligned} K_{\overline{BM},1} &= K_{\overline{BM},3} = 1; & K_{\overline{BM},2} &= 3; \\ K_{\overline{BM},4} &= \frac{M_c}{(M_c + M_l)}; & K_{\overline{BM},5} &= \frac{M_l}{(M_c + M_l)}. \end{aligned} \quad (78)$$

APÊNDICE F - MODELO MATEMÁTICO DA PROPAGAÇÃO DE INCERTEZA PARA A ALTURA DO CENTRO DE GRAVIDADE

A altura do centro de gravidade é definida matematicamente como uma função de seis variáveis, dado por:

$$\overline{KG} = \frac{6M_c\rho_lBLT + 8M_l^2}{16\rho_lBL(M_c + M_l)}; \quad \overline{KG} = f(B, L, T, \rho_l, M_c, M_l). \quad (79)$$

Aplicando a lei de propagação de incertezas, ou seja, a equação (14) para a equação (79), tem-se:

$$\begin{aligned} \sigma_{\overline{KG}}^2 = & \left(\frac{\partial \overline{KG}}{\partial B} \right)^2 \sigma_B^2 + \left(\frac{\partial \overline{KG}}{\partial L} \right)^2 \sigma_L^2 + \left(\frac{\partial \overline{KG}}{\partial T} \right)^2 \sigma_T^2 \\ & + \sigma_{M_l}^2 \left(\frac{\partial \overline{KG}}{\partial \rho_l} \right)^2 \sigma_{\rho_l}^2 + \left(\frac{\partial \overline{KG}}{\partial M_c} \right)^2 \sigma_{M_c}^2 + \left(\frac{\partial \overline{KG}}{\partial M_l} \right)^2 \end{aligned} \quad (80)$$

As derivadas parciais, são dadas por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{KG}}{\partial B} &= \frac{-M_l^2}{2\rho_l B^2 L (M_c + M_l)}; \\ \frac{\partial \overline{KG}}{\partial L} &= \frac{-M_l^2}{2\rho_l B L^2 (M_c + M_l)}; \\ \frac{\partial \overline{KG}}{\partial T} &= \frac{3M_c}{8(M_c + M_l)}; \\ \frac{\partial \overline{KG}}{\partial \rho_l} &= \frac{-M_l^2}{2\rho_l^2 B L (M_c + M_l)}; \\ \frac{\partial \overline{KG}}{\partial M_c} &= \frac{M_l(3\rho_l B L T - 4M_l)}{8\rho_l B L (M_c + M_l)^2}; \\ \frac{\partial \overline{KG}}{\partial M_l} &= \frac{8M_l M_c + 8M_l^2 - 3M_c \rho_l B L T - 4M_l^2}{8\rho_l B L (M_c + M_l)^2}. \end{aligned} \quad (81)$$

Substituindo as derivadas parciais na equação (80), após manipulações matemáticas, encontra-se o modelo de incerteza para a altura do centro de gravidade:

$$\begin{aligned} \sigma_{\overline{KG}} = & \overline{KG} \left[K_{\overline{KG},1}^2 \left(\frac{\sigma_B}{B} \right)^2 + K_{\overline{KG},2}^2 \left(\frac{\sigma_L}{L} \right)^2 + K_{\overline{KG},3}^2 \left(\frac{\sigma_T}{T} \right)^2 + \right. \\ & \left. K_{\overline{KG},4}^2 \left(\frac{\sigma_{\rho_l}}{\rho_l} \right)^2 + K_{\overline{KG},5}^2 \left(\frac{\sigma_{M_c}}{M_c} \right)^2 + K_{\overline{KG},6}^2 \left(\frac{\sigma_{M_l}}{M_l} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad (82) \end{aligned}$$

em que as constantes são dadas por:

$$\begin{aligned}
 K_{\overline{KG},1} &= K_{\overline{KG},2} = K_{\overline{KG},4} = \frac{1}{8+j}; \\
 K_{\overline{KG},3} &= \frac{1}{1+8j^{-1}}; \\
 K_{\overline{KG},5} &= \frac{j-8M_{c,l}}{8+8M_{c,l}+j+jM_{c,l}}; \\
 K_{\overline{KG},6} &= \frac{8+16M_{c,l}-j}{8+8M_{c,l}+j+jM_{c,l}},
 \end{aligned} \tag{83}$$

na qual dependem de:

$$M_{c,l} = \frac{M_c}{M_l}; \quad j = \frac{6M_c\rho_l BLT}{M_l^2}. \tag{84}$$

APÊNDICE G - MODELO MATEMÁTICO DA PROPAGAÇÃO DE INCERTEZA PARA O RAIOS DE GIRAÇÃO

O raio de giração é definido matematicamente como uma função de quatro variáveis, dado por:

$$R_{44} = \frac{1}{2BL\rho_l} \sqrt{\frac{M_l^2 + \rho_l^2 B^4 L^2}{3}}; \quad R_{44} = f(M_l, \rho_l, B, L). \quad (85)$$

Aplicando a lei de propagação de incertezas, ou seja, a equação (14) para a equação (85), tem-se:

$$\sigma_{R_{44}}^2 = \left(\frac{\partial R_{44}}{\partial M_l} \right)^2 \sigma_{M_l}^2 + \left(\frac{\partial R_{44}}{\partial \rho_l} \right)^2 \sigma_{\rho_l}^2 + \left(\frac{\partial R_{44}}{\partial B} \right)^2 \sigma_B^2 + \left(\frac{\partial R_{44}}{\partial L} \right)^2 \sigma_L^2 \quad (86)$$

As derivadas parciais, são dadas por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_{44}}{\partial M_l} &= \frac{M_l}{12(\rho_l BL)^2} \left[\frac{M_l^2 + (\rho_l B^2 L)^2}{12(\rho_l BL)^2} \right]^{-1/2}; \\ \frac{\partial R_{44}}{\partial \rho_l} &= \frac{12\rho_l(M_l BL)^2}{[12(\rho_l BL)^2]^2} \left[\frac{M_l^2 + (\rho_l B^2 L)^2}{12(\rho_l BL)^2} \right]^{-1/2}; \\ \frac{\partial R_{44}}{\partial B} &= \frac{12B(\rho_l L)^2[(\rho_l B^2 L)^2 - M_l^2]}{[12(\rho_l BL)^2]^2} \left[\frac{M_l^2 + (\rho_l B^2 L)^2}{12(\rho_l BL)^2} \right]^{-1/2}; \\ \frac{\partial R_{44}}{\partial L} &= \frac{-12L(M_l \rho_l B)^2}{[12(\rho_l BL)^2]^2} \left[\frac{M_l^2 + (\rho_l B^2 L)^2}{12(\rho_l BL)^2} \right]^{-1/2}. \end{aligned} \quad (87)$$

Substituindo as derivadas parciais na equação (86), após manipulações matemáticas, encontra-se o modelo de incerteza para o raio de giração:

$$\sigma_{R_{44}} = R_{44} \sqrt{K_{R_{44},1}^2 \left(\frac{\sigma_{M_l}}{M_l} \right)^2 + K_{R_{44},2}^2 \left(\frac{\sigma_{\rho_l}}{\rho_l} \right)^2 + K_{R_{44},3}^2 \left(\frac{\sigma_B}{B} \right)^2 + K_{R_{44},4}^2 \left(\frac{\sigma_L}{L} \right)^2}, \quad (88)$$

em que as constantes são dadas por:

$$\begin{aligned} K_{R_{44},1} &= K_{R_{44},2} = K_{R_{44},4} = \frac{1}{1+k^2}; \\ K_{R_{44},3} &= \frac{k^2 - 1}{1+k}, \end{aligned} \quad (89)$$

na qual dependem de:

$$k = \frac{\rho_t B^2 L}{M_t} \quad (90)$$

APÊNDICE H - MODELO MATEMÁTICO DA PROPAGAÇÃO DE INCERTEZA PARA O PERÍODO NATURAL EM ROLL

O período natural em roll é definido matematicamente como uma função de quatro variáveis, dado por:

$$T_{n4} = 2\pi R_{44} \sqrt{\frac{1 + \delta^2}{g \overline{GM}}}; \quad T_{n4} = f(R_{44}, \delta, g, \overline{GM}). \quad (91)$$

Aplicando a lei de propagação de incertezas, ou seja, a equação (14) para a equação (91), tem-se:

$$\sigma_{T_{n4}}^2 = \left(\frac{\partial T_{n4}}{\partial R_{44}} \right)^2 \sigma_{R_{44}}^2 + \left(\frac{\partial T_{n4}}{\partial \delta} \right)^2 \sigma_{\delta}^2 + \left(\frac{\partial T_{n4}}{\partial g} \right)^2 \sigma_g^2 + \left(\frac{\partial T_{n4}}{\partial \overline{GM}} \right)^2 \sigma_{\overline{GM}}^2. \quad (92)$$

As derivadas parciais, são dadas por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{n4}}{\partial R_{44}} &= 2\pi \sqrt{\frac{1 + \delta^2}{\overline{GM}g}}; \\ \frac{\partial T_{n4}}{\partial \delta} &= \frac{2\pi R_{44} \delta}{\overline{GM}g} \left[\frac{1 + \delta^2}{\overline{GM}g} \right]; \\ \frac{\partial T_{n4}}{\partial g} &= \frac{-\pi R_{44}}{g} \sqrt{\frac{1 + \delta^2}{\overline{GM}g}} \\ \frac{\partial T_{n4}}{\partial \overline{GM}} &= \frac{-\pi R_{44}}{\overline{GM}} \left[\frac{1 + \delta^2}{\overline{GM}g} \right]^{-1/2}. \end{aligned} \quad (93)$$

Substituindo as derivadas parciais na equação (92), após manipulações matemáticas, encontra-se o modelo de incerteza para o período natural em roll:

$$\sigma_{T_{n4}} = T_{n4} \sqrt{K_{T_{n4},1}^2 \left(\frac{\sigma_{R_{44}}}{R_{44}} \right)^2 + K_{T_{n4},2}^2 \left(\frac{\sigma_{\delta}}{\delta} \right)^2 + K_{T_{n4},3}^2 \left(\frac{\sigma_g}{g} \right)^2 + K_{T_{n4},4}^2 \left(\frac{\sigma_{\overline{GM}}}{\overline{GM}} \right)^2}, \quad (94)$$

em que as constantes são dadas por:

$$K_{T_{n4},1} = 1; \quad K_{T_{n4},2} = \frac{\delta^2}{1 + \delta^2}; \quad K_{T_{n4},3} = K_{T_{n4},4} = \frac{1}{2}. \quad (95)$$