

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
CENTRO TECNOLÓGICO DE JOINVILLE  
CURSO DE ENGENHARIA AEROESPACIAL

JOSÉ RIAN VIANA VASCONCELOS

APLICAÇÃO DA IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS PARA ESTIMAÇÃO DAS DERIVADAS  
DE ESTABILIDADE E CONTROLE DE AERONAVES DE ASA FIXA

Joinville  
2024

JOSÉ RIAN VIANA VASCONCELOS

APLICAÇÃO DA IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS PARA ESTIMAÇÃO DAS DERIVADAS  
DE ESTABILIDADE E CONTROLE DE AERONAVES DE ASA FIXA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito para a obtenção de título de Bacharel em Engenharia Aeroespacial, no Centro Tecnológico de Joinville, da Universidade Federal de Santa Catarina.

Orientador: Prof. Dr. Gian Ricardo Berkenbrock

Joinville

2024

JOSÉ RIAN VIANA VASCONCELOS

APLICAÇÃO DA IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS PARA ESTIMAÇÃO DAS DERIVADAS  
DE ESTABILIDADE E CONTROLE DE AERONAVES DE ASA FIXA

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi julgado adequado para obtenção do título de Bacharel em Engenharia Aeroespacial, no Centro Tecnológico de Joinville, da Universidade Federal de Santa Catarina.

Joinville, 05 de julho de 2024.

---

Prof. Dr. Gian Ricardo Berkenbrock  
Orientador  
Presidente

---

Prof. Dr. Alexandro Garro Brito  
Membro da banca  
Universidade Federal de Santa Catarina

---

Prof. Dr. Antônio Otaviano Dourado  
Membro da banca  
Universidade Federal de Santa Catarina

*Este trabalho é dedicado à minha mãe, Maria Edilene Vasconcelos.*

## AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha mãe Edilene que desde o início da minha jornada tem feito tudo o que pode para que eu alcance o meu sonho. Obrigado por ser minha referência de amor, bondade, dedicação e temor à Deus. A todos os teus plantões cansativos para me manter aqui, dedico este trabalho. Agradeço também à meu irmão, Heberth, por ser o amigo e conselheiro de todas as horas. A minha avó Maria e tia Nevinha, agradeço por serem exemplo de força e virtude. Ao tempo longe de vocês, dedico este trabalho.

A minha família catarinense, Cris, Val e Sara, agradeço por terem me tido por filho e por serem fonte de bençãos sobre minha vida. Nunca esquecerei de tudo que fizeram por mim em Joinville.

Agradeço à Equipe Nisus por ter sido o meu primeiro contato real com a engenharia, por me ajudar a discernir qual caminho técnico seguir e por me mostrar que por trás de todo grande projeto, existem pessoas incríveis.

Agradeço ao professor Gian Ricardo Berkenbrock, por ter me orientado em grande parte da minha graduação e por sempre buscar o sucesso dos seus alunos. Aos meus amigos do LSE, obrigado.

Agradeço aos meus amigos de turma, João pedro e João Vitor, por terem me acompanhado nessa jornada, vocês tornaram minha graduação em uma rodada de RPG.

Agradeço aos meus amigos do GP, viver igreja com vocês foi incrível. Vocês me acolheram em Joinville e fizeram dessa cidade minha segunda casa.

Aos meus amigos do Devocional UFSC, muito obrigado por todos os momentos precioso de louvor e estudo da Palavra.

Por fim, agradeço ao Senhor, por me permitir viver a Sua graça todos os dias. Obrigado por me conceder esse sonho e por ter me provido em todos os instantes. Que toda honra e glória seja dada somente a Ti.

*“George Wyndham me disse outrora que viu um dos  
primeiros aviões em seu vôo inaugural e achou  
maravilhoso, mas não tanto um cavalo  
domesticado por seu cavaleiro.”  
(G. K. Chesterton - O Homem Eterno)*

## RESUMO

Dentre as etapas do ciclo de vida de um projeto aeronáutico, um dos principais desafios diz respeito à validação da dinâmica de voo da aeronave. A identificação de sistemas surge como uma ferramenta para determinar um modelo matemático que abstraia com fidelidade as forças e momentos aerodinâmicos que agem em uma aeronave, a partir da análise de dados de voo. Os resultados obtidos pela identificação do modelo dinâmico da aeronave podem ser amplamente aplicados no desenvolvimento de sistemas de controle adaptativo, identificação automática de falhas em voo, aprendizado de máquina informado por física e a geração de gêmeos digitais. Este trabalho aplica a identificação de sistemas como ferramenta de validação ao nível de sistema e subsistemas de uma aeronave de asa fixa, extraíndo as derivadas de estabilidade e controle dos dados de voo analisados, usando como método de estimação de parâmetros os mínimos quadrados. Os modelos longitudinal e látero-direcional estimados são posteriormente validados em um simulador de voo com seis graus de liberdade, utilizado para reconstruir a trajetória da aeronave.

**Palavras-chaves:** Identificação de sistemas; Mínimos quadrados; Modelo dinâmico; Simulador de voo.

## ABSTRACT

Among the stages of the lifecycle of an aeronautical project, one of the main challenges concerns the validation of the aircraft's flight dynamics. System identification emerges as a tool to determine a mathematical model that abstracts the aerodynamic forces and moments acting on an aircraft, based on the analysis of flight data. The results obtained from the identification of the aircraft's dynamic model can be widely applied in the development of adaptive control systems, automatic fault identification in flight, physics-informed machine learning, and the generation of digital twins. This work applies system identification as a validation tool at the system and subsystem levels of a fixed-wing aircraft, extracting the stability and control derivatives from the analyzed flight data, using the least squares method for parameter estimation. The estimated longitudinal and lateral-directional models are subsequently validated in a six-degree-of-freedom flight simulator, used to reconstruct the aircraft's trajectory.

**Keywords:** System identification; Least square; Dynamic model; Flight simulator.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Níveis hierárquicos do conceito de sistema de sistemas. . . . .	20
Figura 2 – Conceito de sistema de sistemas. . . . .	21
Figura 3 – Ciclo de vida de um projeto aeronáutico. . . . .	22
Figura 4 – Relação entre 4 principais atividades de projeto. . . . .	23
Figura 5 – Níveis de definição e integração de uma aeronave. . . . .	23
Figura 6 – Modelo V de um projeto aeronáutico . . . . .	24
Figura 7 – Modelo genérico de um sistema dinâmico . . . . .	25
Figura 8 – Abstração da dinâmica de uma aeronave . . . . .	26
Figura 9 – Modelo quadrangular de forças . . . . .	28
Figura 10 – Sistema de referência fixo à Terra ( $S_E$ ) . . . . .	30
Figura 11 – Sistema de referência do corpo ( $S_B$ ) . . . . .	30
Figura 12 – Ângulos aerodinâmicos. a) Vetor velocidade. b) Ângulo de ataque. c) Ângulo de deslizamento. . . . .	31
Figura 13 – Relações entre o sistema do corpo e o sistema aerodinâmico . . . . .	32
Figura 14 – Sistema de coordenadas NED . . . . .	33
Figura 15 – Rotações de Euler . . . . .	34
Figura 16 – Convenção de sinais das entradas de controle . . . . .	39
Figura 17 – Diagrama de blocos das equações de movimento da aeronave . . . . .	40
Figura 18 – Sistema de coordenadas de estabilidade . . . . .	41
Figura 19 – Mapa de polos do movimento longitudinal . . . . .	48
Figura 20 – Mapa de polos do movimento látero-direcional . . . . .	48
Figura 21 – Visão geral da instrumentação . . . . .	61
Figura 22 – Impulso genérico . . . . .	65
Figura 23 – Exemplo de varredura de frequência . . . . .	65
Figura 24 – Doublet genérico . . . . .	67
Figura 25 – Exemplo de entrada 3-2-1-1 . . . . .	67
Figura 26 – Visão geral da identificação paramétrica de aeronaves . . . . .	69
Figura 27 – Aeronave monomotor Navion . . . . .	70
Figura 28 – Entradas de controle medidas - ensaio longitudinal . . . . .	71
Figura 29 – Variáveis de saída medidas - ensaio longitudinal . . . . .	71
Figura 30 – Entradas de controle medidas - ensaio lateral . . . . .	72
Figura 31 – Variáveis de saída medidas - ensaio lateral . . . . .	72
Figura 32 – Entradas de controle medidas - ensaio direcional . . . . .	73
Figura 33 – Variáveis de saída medidas - ensaio direcional . . . . .	73
Figura 34 – Derivada simulada . . . . .	74
Figura 35 – Simulação de derivada de sinal ruidoso . . . . .	75

Figura 36 – Comparação entre métodos de suavização dos dados . . . . .	76
Figura 37 – Varredura - filtro média móvel e passa-baixas . . . . .	76
Figura 38 – Comparação entre métodos de suavização dos dados - ponto ótimo . . . . .	77
Figura 39 – Derivação após suavização de $f(t)$ . . . . .	78
Figura 40 – Derivação após suavização de $df(t)/dt$ . . . . .	79
Figura 41 – Cálculo das variáveis dependentes . . . . .	80
Figura 42 – Variáveis dependentes - ensaio longitudinal . . . . .	80
Figura 43 – Variáveis dependentes - ensaio lateral . . . . .	81
Figura 44 – Variáveis dependentes - ensaio direcional . . . . .	81
Figura 45 – Procedimento da aplicação de mínimos quadrados . . . . .	82
Figura 46 – Simulador - visão geral . . . . .	83
Figura 47 – Simulador - Implementação em MATLAB . . . . .	84
Figura 48 – Aeronave modelada no XFLR5 . . . . .	86
Figura 49 – Filtragem dos dados - entradas do ensaio longitudinal . . . . .	87
Figura 50 – Filtragem dos dados - saídas do ensaio longitudinal . . . . .	88
Figura 51 – Derivação numérica - ensaio longitudinal . . . . .	88
Figura 52 – Variáveis dependentes - ensaio longitudinal . . . . .	89
Figura 53 – Filtragem dos dados - entradas do ensaio lateral . . . . .	90
Figura 54 – Filtragem dos dados - saídas do ensaio lateral . . . . .	90
Figura 55 – Derivação numérica - ensaio lateral . . . . .	91
Figura 56 – Variáveis dependentes - ensaio lateral . . . . .	91
Figura 57 – Filtragem dos dados - entradas do ensaio direcional . . . . .	92
Figura 58 – Filtragem dos dados - saídas do ensaio direcional . . . . .	93
Figura 59 – Derivação numérica - ensaio direcional . . . . .	93
Figura 60 – Variáveis dependentes - ensaio direcional . . . . .	94
Figura 61 – Variáveis dependentes do ensaio longitudinal- 1ª iteração . . . . .	95
Figura 62 – Resposta longitudinal - 1ª iteração . . . . .	96
Figura 63 – Mapa de polos do modelo longitudinal - 1ª iteração . . . . .	96
Figura 64 – Contribuição dos regressores . . . . .	97
Figura 65 – Variáveis dependentes - 2ª iteração . . . . .	99
Figura 66 – Resposta longitudinal - 2ª iteração . . . . .	100
Figura 67 – Mapa de polos do modelo longitudinal - 2ª iteração . . . . .	100
Figura 68 – Reconstrução da trajetória - ensaio longitudinal . . . . .	101
Figura 69 – Reconstrução das variáveis dependentes - ensaio lateral . . . . .	102
Figura 70 – Resposta simulada látero-direcional - ensaio lateral . . . . .	103
Figura 71 – Reconstrução das variáveis dependentes - ensaio direcional . . . . .	104
Figura 72 – Resposta simulada látero-direcional - ensaio direcional . . . . .	105
Figura 73 – Resposta simulada látero-direcional final - ensaio lateral . . . . .	106
Figura 74 – Resposta simulada látero-direcional final - ensaio direcional . . . . .	107

Figura 75 – Mapa de polos do modelo látero-direcional . . . . .	108
Figura 76 – Reconstrução da trajetória - ensaios látero-direcional . . . . .	109
Figura 77 – Três vistas da aeronave Navion . . . . .	113

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Derivadas aerodinâmicas longitudinais do Navion. . . . .	70
Tabela 2 – Análise do erro - derivação passo a frente e passo central . . . . .	74
Tabela 3 – Análise do erro do sinal com ruído - derivação passo a frente e passo central	75
Tabela 4 – Análise do erro - métodos de suavização . . . . .	75
Tabela 5 – Análise do erro - média móvel e passa baixas . . . . .	77
Tabela 6 – Análise do erro - após suavização de $f(t)$ . . . . .	77
Tabela 7 – Análise do erro - após suavização de $df(t)/dt$ . . . . .	78
Tabela 8 – Comparativo das derivadas de estabilidade e controle - movimento longitudinal	85
Tabela 9 – Comparativo das derivadas de estabilidade e controle - movimento látero- direcional . . . . .	86
Tabela 10 – Filtro passa baixas - ensaio longitudinal . . . . .	89
Tabela 11 – Filtro passa baixas - ensaio lateral . . . . .	92
Tabela 12 – Filtro passa baixas - ensaio direcional . . . . .	92
Tabela 13 – Primeira Iteração - $C_L$ , $C_D$ e $C_m$ . . . . .	94
Tabela 14 – Análise do erro de ajuste- 1ª iteração longitudinal . . . . .	95
Tabela 15 – Análise do erro da simulação - 1ª iteração longitudinal . . . . .	95
Tabela 16 – Derivadas calculadas . . . . .	97
Tabela 17 – Segunda iteração - $C_L$ , $C_D$ e $C_m$ . . . . .	98
Tabela 18 – Análise do erro de ajuste- 2ª iteração longitudinal . . . . .	99
Tabela 19 – Análise do erro da simulação - 2ª iteração longitudinal . . . . .	99
Tabela 20 – Propriedades - movimento longitudinal . . . . .	101
Tabela 21 – Análise do erro - reconstrução da trajetória . . . . .	101
Tabela 22 – Estimativas do ensaio lateral- $C_{Y_w}$ , $C_l$ e $C_n$ . . . . .	102
Tabela 23 – Análise do erro de ajuste- ensaio lateral . . . . .	102
Tabela 24 – Análise do erro da simulação - ensaio lateral . . . . .	103
Tabela 25 – Primeira iteração do ensaio direcional- $C_{Y_w}$ , $C_l$ e $C_n$ . . . . .	104
Tabela 26 – Análise do erro de ajuste- 1ª iteração lateral . . . . .	104
Tabela 27 – Análise do erro da simulação - ensaio direcional . . . . .	105
Tabela 28 – Estimativas finais- $C_{Y_w}$ , $C_l$ e $C_n$ . . . . .	106
Tabela 29 – Análise do erro da simulação - modelo látero-direcional final . . . . .	107
Tabela 30 – Propriedades - movimento látero-direcional . . . . .	107
Tabela 31 – Análise do erro - reconstrução da trajetória . . . . .	108
Tabela 32 – Propriedades geométricas e inerciais do Navion . . . . .	114

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
AVL	Athena Vortex Lattice
C	Cosseno
CFD	Computational FLuid Dynamics
CG	Centro de Gravidade
DAL	Development Assurance Level
DATCOM	Data Compendium
ES	Engenharia de Sistemas
FDAL	Functional Development Assurance Level
GPS	Global Positioning System
IDAL	Item Development Assurance Level
IMU	Inertial Measurement Unit
INCOSE	International Council on Systems Engineering
MBSE	Model Based Systems Engineering
NASA	National Administration of Space and Aeronautics
NED	North-East-Down
RMSE	Root Mean Square Error
S	Seno
SI	Sistema de Interesse
SS	Sistema de Sistemas
V&V	Verificação e Validação

## LISTA DE SÍMBOLOS

$a_x$	Aceleração linear em x [ $m/s^2$ ]
$a_y$	Aceleração linear em y [ $m/s^2$ ]
$a_z$	Aceleração linear em z [ $m/s^2$ ]
$b$	Envergadura da asa [ $m$ ]
$c$	Corda média da asa [ $m$ ]
$g$	Aceleração da gravidade [ $m/s^2$ ]
$S$	Área da asa [ $m^2$ ]
$Q$	Pressão dinâmica [ $kg/m^2$ ]
$\rho$	Densidade do ar [ $kg/m^3$ ]
$m$	Massa da aeronave [ $kg$ ]
$T$	Tração do motor [ $N$ ]
$I_x$	Momento de inércia em torno de x [ $kg/m^2$ ]
$I_y$	Momento de inércia em torno de y [ $kg/m^2$ ]
$I_z$	Momento de inércia em torno de z [ $kg/m^2$ ]
$I_{yz}$	Produto de inércia no eixo x [ $kg/m^2$ ]
$I_{xz}$	Produto de inércia no eixo y [ $kg/m^2$ ]
$I_{xy}$	Produto de inércia no eixo z [ $kg/m^2$ ]
$X$	Somatório de forças no eixo x [ $N$ ]
$Y$	Somatório de forças no eixo y [ $N$ ]
$Z$	Somatório de forças no eixo z [ $N$ ]
$L$	Somatório de momentos em torno de x [ $Nm$ ]
$M$	Somatório de momentos em torno de y [ $Nm$ ]
$N$	Somatório de momentos em torno de z [ $Nm$ ]
$u$	Velocidade no eixo x [ $m/s$ ]

$v$	Velocidade no eixo y [ $m/s$ ]
$w$	Velocidade no eixo z [ $m/s$ ]
$p$	Velocidade angular em torno do eixo x [ $rad/s$ ]
$q$	Velocidade angular em torno do eixo y [ $rad/s$ ]
$r$	Velocidade angular em torno do eixo z [ $rad/s$ ]
$x$	Posição inercial no eixo x [ $m$ ]
$y$	Posição inercial no eixo y [ $m$ ]
$z$	Posição inercial no eixo z [ $m$ ]
$\dot{x}$	Velocidade inercial no eixo x [ $m/s$ ]
$\dot{y}$	Velocidade inercial no eixo y [ $m/s$ ]
$\dot{z}$	Velocidade inercial no eixo z [ $m/s$ ]
$V$	Velocidade do CG em relação ao escoamento [ $m/s$ ]
$W$	Velocidade da rajada de vento [ $m/s$ ]
$C_X$	Coefficiente de força em x
$C_Y$	Coefficiente de força em y
$C_Z$	Coefficiente de força em z
$C_l$	Coefficiente de momento em torno de x
$C_m$	Coefficiente de momento em torno de y
$C_n$	Coefficiente de momento em torno de z
$C_D$	Coefficiente de arrasto
$C_{Y_w}$	Coefficiente de força lateral no referencial aerodinâmico
$C_L$	Coefficiente de sustentação
$\delta_a$	Deflexão do aileron [ $rad$ ]
$\delta_e$	Deflexão do profundor [ $rad$ ]
$\delta_r$	Deflexão do leme [ $rad$ ]
$\phi$	Ângulo de rolagem [ $rad$ ]

$\phi$	Ângulo de arfagem [ <i>rad</i> ]
$\psi$	Ângulo de guinada [ <i>rad</i> ]
$\alpha$	Ângulo de ataque [ <i>rad</i> ]
$\beta$	Ângulo de deslizamento [ <i>rad</i> ]
$\omega$	velocidade angular [ <i>rad/s</i> ]
$\zeta$	Coefficiente de amortecimento
$\omega_n$	Frequência natural [ <i>rad/s</i> ]
$\varepsilon$	Regressor
$\nu$	Componente de ruído
$\lambda$	Parâmetro de filtragem

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	18
1.1	OBJETIVOS	19
1.1.1	<b>Objetivo Geral</b>	19
1.1.2	<b>Objetivos Específicos</b>	19
<b>2</b>	<b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b>	20
2.1	ENGENHARIA DE SISTEMAS APLICADA AO PROJETO AERONÁUTICO	20
2.2	IDENTIFICAÇÃO DE AERONAVES	24
2.3	ANÁLISE DOS DADOS DE VOO	28
2.3.1	<b>Derivação do modelo dinâmico do voo</b>	28
2.3.2	<b>Postulação da estrutura do modelo aerodinâmico</b>	48
2.3.3	<b>Estimação dos parâmetros do modelo</b>	54
2.4	INSTRUMENTAÇÃO E FILTRAGEM	60
2.4.1	<b>Diferenciação numérica</b>	61
2.4.2	<b>Filtragem dos dados de voo</b>	62
2.5	TÉCNICAS DE ENSAIOS EM VOO	64
<b>3</b>	<b>MATERIAIS E MÉTODOS</b>	68
3.1	AQUISIÇÃO DOS DADOS DE VOO	68
3.1.1	<b>Dados do ensaio longitudinal</b>	69
3.1.2	<b>Dados do ensaio lateral</b>	70
3.1.3	<b>Dados do ensaio direcional</b>	70
3.2	DIFERENCIAÇÃO NUMÉRICA E FILTRAGEM DOS DADOS DE VOO	73
3.3	ESTIMAÇÃO DOS PARÂMETROS	78
3.3.1	<b>Cálculo das variáveis dependentes</b>	78
3.3.2	<b>Aplicação da regressão por mínimos quadrados</b>	79
3.4	SIMULADOR DE 6 GRAUS DE LIBERDADE	82
3.5	VALIDAÇÃO DO MODELO	84
<b>4</b>	<b>RESULTADOS E DISCUSSÃO</b>	87
4.1	DERIVAÇÃO NUMÉRICA E FILTRAGEM DOS DADOS	87
4.1.1	<b>Ensaio longitudinal</b>	87
4.1.2	<b>Ensaio lateral</b>	89
4.1.3	<b>Ensaio direcional</b>	91

4.2	ESTIMAÇÃO DOS PARÂMETROS .....	94
4.2.1	<b>Modelo longitudinal</b> .....	94
4.2.2	<b>Modelo látero-direcional</b> .....	100
4.3	LIMITAÇÕES .....	105
5	<b>CONCLUSÃO</b> .....	110
	<b>REFERÊNCIAS</b> .....	111
A	<b>AERONAVES DE ESTUDO</b> .....	113
A.1	Ryan Navion .....	113

## 1 INTRODUÇÃO

As aeronaves modernas são caracterizadas, do ponto de vista da engenharia, como sistemas complexos devido a sua multidisciplinaridade. O sucesso do desenvolvimento de uma aeronave está ligado ao gerenciamento do ciclo de vida do projeto, isso é, desde a formulação, realização, validação, operação e descontinuidade do sistema de interesse (Kimberlin, 2003).

Uma das principais etapas de um projeto aeronáutico é a validação do sistema, que normalmente acontece em programas de ensaios em solo e em voo. Essa etapa costuma ser uma das que mais demandam tempo e recursos financeiros, devido à quantidade de normas e certificações que devem ser observadas a fim de garantir o desempenho e segurança da aeronave (Mulder *et al.*, 1994).

Os ensaios em solo costumam avaliar quesitos aerodinâmicos (utilizando túneis de vento), estruturais e propulsivos, no entanto, além das limitações inerentes a esses ensaios, muitos parâmetros só podem ser obtidos por testes em condições reais de operação. Por esse motivo, são executados os ensaios em voo, que visam certificar a aeronavegabilidade e estimar os parâmetros que caracterizam a dinâmica de voo da aeronave, as derivadas de estabilidade e controle. Uma das formas eficientes para obtenção dessas derivadas é a identificação paramétrica da aeronave (Mulder *et al.*, 1994).

A identificação paramétrica consiste em modelar a dinâmica de um sistema físico a partir da medição dos comandos de entrada e da saída. Quando aplicado para aeronaves, a identificação paramétrica busca obter o modelo aerodinâmico e as derivadas de estabilidade e controle que compõem esse modelo, mediante a aquisição e análise dos dados advindos de ensaios em voo (Hamel *et al.*, 1979).

Em posse de um modelo matemático capaz de mapear a dinâmica de voo da aeronave, simulações de voo podem ser executadas para várias condições do envelope operacional, servindo como ferramenta de projeto e validação para a engenharia. A simulação de voo é vantajosa para o ciclo de vida do projeto, uma vez que os custos de ensaios reais são reduzidos, riscos operacionais são mitigados e o tempo para percepção e correção de defeitos de design é menor (Hamel, 2017).

O procedimento para realizar a identificação paramétrica de uma aeronave pode ser descrito, de forma genérica, em três partes: técnicas de ensaio em voo, instrumentação e filtragem, e análise dos dados de voo (Hamel *et al.*, 1979).

As técnicas de ensaios em voo estabelecem padrões de procedimento para realização desses testes. A instrumentação e filtragem descreve o processo de aquisição dos valores das entradas (controle) e saída (estados) da aeronave durante os testes. A partir dos valores coletados, a análise dos dados de voo acontece em duas etapas: identificação do sistema (modelo) e estimação dos parâmetros governantes (coeficientes) (Hamel *et al.*, 1979).

Embora as três etapas sejam fundamentais para a validade do resultado, as maiores fontes de incerteza estão presentes na aquisição e filtragem dos dados, já que erros advindos do

sistema de aquisição, das condições de voo e execução dos testes são comumente adicionados às medições. Sendo assim, a capacidade da identificação paramétrica em obter um modelo que abstraí com fidelidade as características dinâmicas da aeronave é diretamente afetada pela qualidade das medições (Kimberlin, 2003).

Dessa forma, este trabalho procura aplicar a técnica de identificação sistemas para estimar os parâmetros que compõem o modelo aerodinâmico de uma aeronave de asa fixa.

## 1.1 OBJETIVOS

### 1.1.1 Objetivo Geral

Estimar as derivadas de estabilidade de uma aeronave de asa fixa a partir da aplicação da técnica de identificação paramétrica.

### 1.1.2 Objetivos Específicos

- Realizar a modelagem matemática de uma aeronave de asa fixa;
- Definir a estrutura dos modelos aerodinâmicos;
- Estimar parâmetros do modelo aerodinâmico a partir de dados advindos de ensaios em voo;
- Validar o modelo estimado;

## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

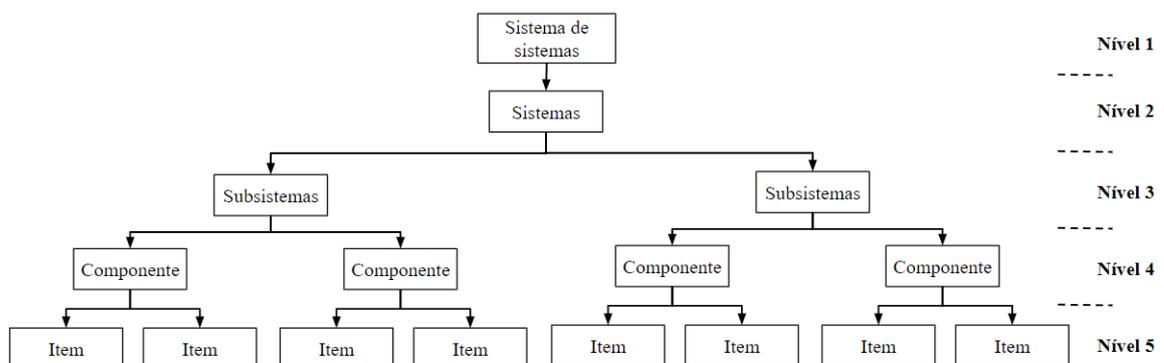
Este capítulo inicia com uma breve introdução à Engenharia de Sistemas aplicada ao projeto aeronáutico. Em seguida, os principais conceitos da identificação de aeronaves são apresentados, entrando em detalhes em cada uma das etapas do processo de identificação, isto é: técnicas de ensaios em voo, filtragem e análise dos dados de voo.

### 2.1 ENGENHARIA DE SISTEMAS APLICADA AO PROJETO AERONÁUTICO

A Engenharia de Sistemas (ES) surge como uma abordagem multidisciplinar e integradora para o design, realização, gerenciamento técnico, operação e descontinuidade de um sistema, sendo amplamente aplicada para o desenvolvimento de aeronaves. A ES procura atender os requisitos do projeto, isto é, requisitos funcionais, físicos, operacionais e de desempenho, levando em consideração o ciclo de vida do sistema, seu orçamento, cronograma e restrições (NASA, 2019). Assim, a engenharia de sistemas é uma abordagem multidisciplinar que busca desenvolver sistemas bem sucedidos (INCOSE, 2006).

Inicialmente, antes de compreender a aplicação da ES ao projeto de uma aeronave, é conveniente descrever o conceito de sistema. De acordo com ABNT (2009), um sistema é um conjunto de elementos que, através de sua integração, alcança resultados que os elementos de forma individual não poderiam alcançar. Usualmente as normas tratam de sistemas artificiais, isto é, feitos pelo homem.

Dois conceitos fundamentais são os de Sistema de Interesse (SI) e Sistema de Sistemas (SS). O primeiro conceito diz respeito ao sistema cujo ciclo de vida está sendo analisado. Contudo, em sistemas complexos o sistema de interesse de certa análise pode estar contido em outro sistema, por conta dessa hierarquia que se definiu o conceito de SS (ABNT, 2009). A Figura 1 ilustra a definição de níveis hierárquicos do conceito de SS.

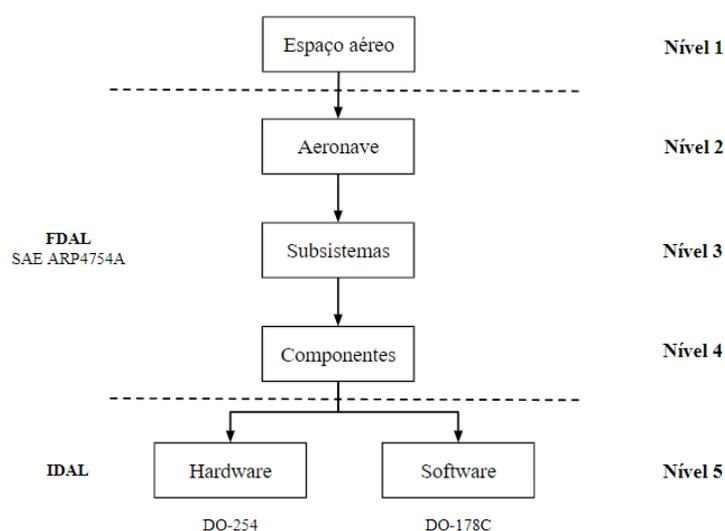


Para um projeto aeroespacial, de acordo com Sadraey (2013), os níveis hierárquicos do conceito de sistema de sistemas pode ser classificado da seguinte maneira:

- a) Nível 1 - Sistema de sistemas: sistema de gerenciamento de transporte/defesa de aeronaves, mísseis, satélites, estações de controle terrestre, aeroportos, entre outros;
- b) Nível 2 - Sistema de interesse: a aeronave, míssil ou espaçonave em questão;
- c) Nível 3 - Subsistema: principais subsistemas da aeronave, como subsistema propulsivo, aviônico, estrutural, hidráulico, entre outros;
- d) Nível 4 - Componente: componentes dos principais subsistemas da aeronave, como a asa, fuselagem, trem de pouso, superfícies de controle, nacelles, entre outros;
- e) Nível 5 - Item: itens que compõem os componentes, como: nervuras, parafusos, eixos, engrenagens, conexões, tubulações, entre outros.

A Figura 2 ilustra a hierarquia do conceito de SS para o âmbito aeronáutico, onde o SI é a aeronave. O projeto de aeronaves abrange os níveis 2, 3, 4 e 5, compondo o chamado nível de garantia de desenvolvimento (do inglês, Development Assurance Level - DAL). O DAL pode ser dividido em duas categorias, o nível de garantia de desenvolvimento de funções (do inglês, Function Development Assurance Level - FDAL) e o nível de garantia de desenvolvimento de itens (do inglês, Item Development Assurance Level - IDAL) (Hilderman, 2021).

Figura 2 – Conceito de sistema de sistemas.



Fonte: Adaptado de Hilderman (2021)

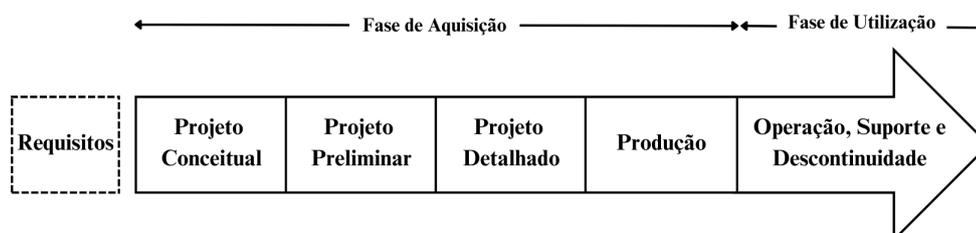
Os níveis 2,3 e 4, que se encontram no FDAL, são regulamentados pela SAE ARP4754A, que descreve o desenvolvimento de aeronaves e sistemas aeronáuticos. Já o nível 5 pertence ao IDAL, regulamentado pelas normas DO-254 e DO-178C para o desenvolvimento de hardware e software, respectivamente (Hilderman, 2021).

De acordo com (Sadraey, 2013), o ciclo de vida de uma aeronave é comumente dividido em: desenvolvimento, produção, operação, suporte e descontinuidade. A etapa de desenvolvimento é dividida em três fases:

1. Projeto conceitual: é a fase inicial do projeto e abrange decisões de alto nível do ciclo de vida, visando predeterminar a função, forma, custo e cronograma de desenvolvimento do sistema desejado. O resultado da fase de design conceitual é um conceito ou configuração inicial da aeronave (Sadraey, 2013).
2. Projeto preliminar: visa determinar as características dos componentes/subsistemas básicos. Alguns produtos do projeto preliminar incluem: dados técnicos principais, estudos de trade-off de design e operação, especificações de interface, modelo do sistema e planos para verificação e testes de verificação (Sadraey, 2013).
3. Projeto detalhado: nessa fase, a análise funcional e o estudo de trade-offs devem ser estendidos do nível do sistema até o subsistema e níveis inferiores (Sadraey, 2013).

A combinação das três etapas de desenvolvimento e a etapa de produção resulta na fase denominada de aquisição. Enquanto que a combinação das etapas de operação, suporte e descontinuidade fazem parte da fase de utilização (Sadraey, 2013). A Figura 3 representa as etapas em ordem cronológica.

Figura 3 – Ciclo de vida de um projeto aeronáutico.



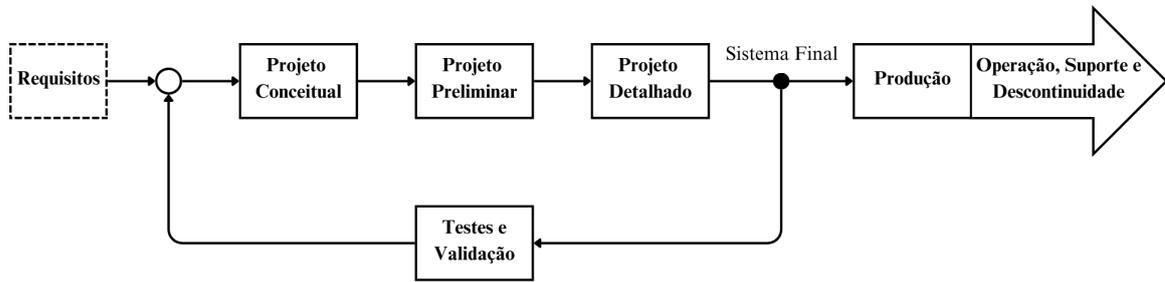
Fonte: Adaptado de Sadraey (2013)

De acordo com INCOSE (2006), a ES atua através de processos iterativos, fomentando o aprendizado e melhoria contínua. Processos iterativos são comuns em sistemas complexos, uma vez que nem todos os requisitos e propriedades do sistema estão claros no início do projeto, sendo revelados ao longo do seu desenvolvimento.

Sendo assim, a iteratividade deve ser aplicada ao processo clássico de desenvolvimento de aeronaves, onde, a partir de baterias de testes, os requisitos devem ser confrontados e o design, se necessário, revisto (Figura 4).

Durante o desenvolvimento de uma aeronave, a definição e decomposição do projeto acontece de cima para baixo nos níveis hierárquicos, isto é, inicia-se especificando a aeronave até chegar ao nível dos itens. Já a integração do sistema acontece de baixo para cima, iniciando

Figura 4 – Relação entre 4 principais atividades de projeto.

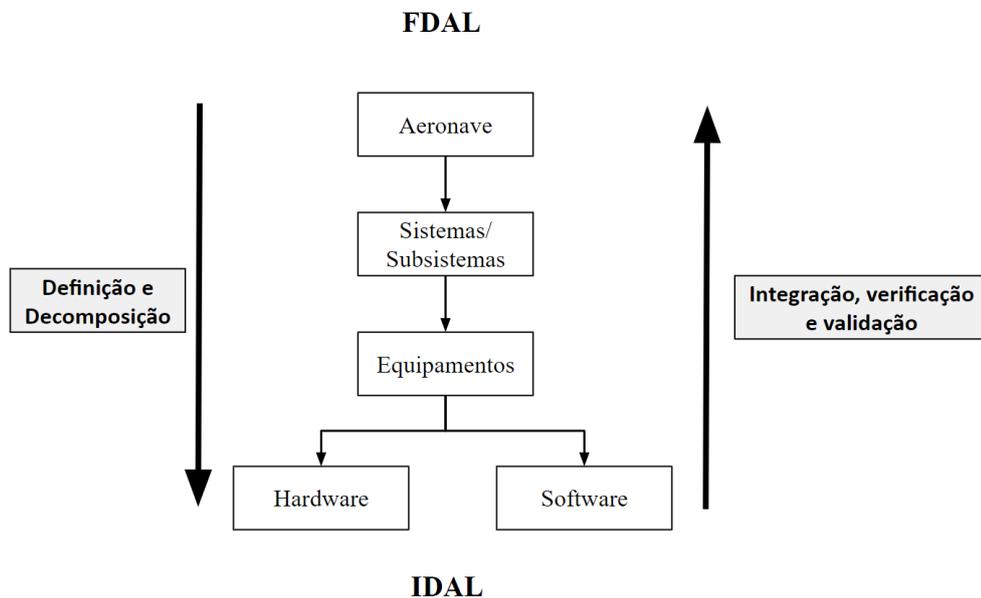


Fonte: Sadraey (2013)

em testes unitários dos itens e indo até testes integrados da aeronave como um todo, conforme o representado na Figura 5 (Pratt, 2000).

A Figura 5 ilustra o projeto de uma aeronave em uma visão vertical. Contudo, quando colocado em uma linha do tempo, o projeto é comumente representado no modelo V, que representa as sucessões e iterações das etapas do projeto, conforme a Figura 6 (Hilderman, 2021).

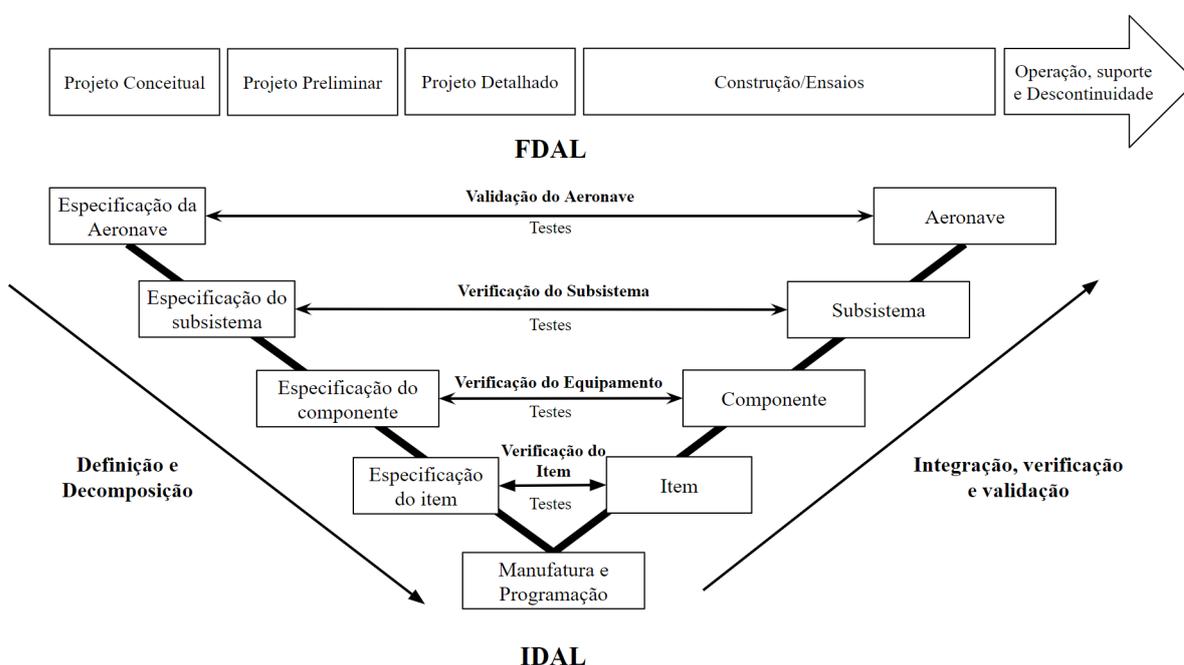
Figura 5 – Níveis de definição e integração de uma aeronave.



Fonte: Autor (2024)

Ao avançar as fases de desenvolvimento, a incorporação de qualquer mudança será mais custosa, uma vez que as alterações terão grande influência em outras áreas do projeto. Sendo assim, desenvolver meios de realizar a verificação e validação (*V&V*) da aeronave de forma

Figura 6 – Modelo V de um projeto aeronáutico



Fonte: Autor (2024).

rápida, com baixo custo e com fidelidade ao modelo real é algo necessário para o projeto de aeronaves (Sadraey, 2013).

Este trabalho almeja aplicar a identificação de sistemas como ferramenta de validação ao nível de sistema (aeronave) e subsistemas. Utilizando os resultados da identificação da aeronave como parâmetro comparativo com os requisitos apresentados na especificação da aeronave e dos subsistemas, permitindo validar o projeto e, se necessário, embasar as alterações a serem feitas.

## 2.2 IDENTIFICAÇÃO DE AERONAVES

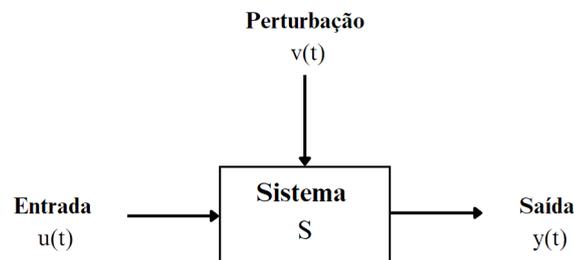
Projetos de sistemas complexos no domínio do tempo trabalham comumente com o conceito de estados de um sistema. Os estados de um sistema podem ser definidos como um conjunto de variáveis (variáveis de estado) que, juntamente com os sinais de entrada e as equações que descrevem a dinâmica do sistema, fornecem o estado futuro do sistema (Dorf; Bishop, 2008).

O processo de descrição de um sistema dinâmico por meio de leis básicas da física é chamado de modelagem. Quando parâmetros físicos do sistema são usados na descrição do modelo ele é conhecido como modelo paramétrico (Dorf; Bishop, 2008).

Um modelo genérico de um sistema dinâmico está representado na Figura 7. Por ser um sistema dinâmico, isto é, seu estado atual depende não só das entradas no instante atual, mas

também das entradas em instantes passados. As entradas, perturbações e saídas são funções do tempo. Essa afirmação possui embasamento na causalidade do sistema (Neto, 2005).

Figura 7 – Modelo genérico de um sistema dinâmico



Fonte: Autor (2024).

De acordo com Morelli e Klein (2006), dentro do estudo de sistema dinâmicos, três áreas recebem destaque:

1. Controle: dado o sistema (S) e a saída (y), determinar a entrada (u);
2. Simulação: dada a entrada (u) e o sistema (S), determinar a saída (y);
3. Identificação: dada a entrada (u) e a saída (y), determine o sistema (S).

Não há como quantificar a importância de cada uma das áreas para a engenharia moderna, no entanto, pode-se categorizá-las por níveis de pré-requisitos. Uma vez que as áreas de controle e simulação necessitam conhecer o modelo do sistema, a identificação serve como requisito para as outras áreas, mostrando sua essencialidade.

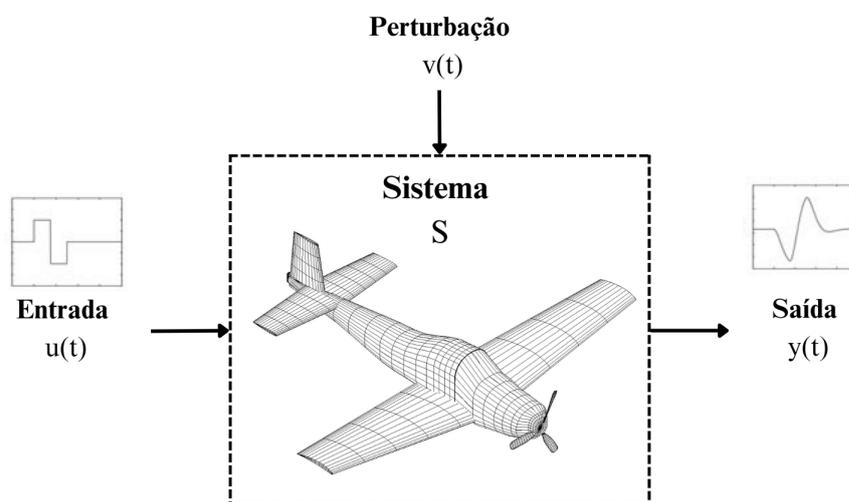
Formalmente, a identificação é definida como o processo de construir um modelo matemático capaz de abstrair a dinâmica do sistema a partir dos dados observados das entradas e saídas (Neto, 2005).

Uma vez que aeronaves são sistemas dinâmicos, as técnicas de identificação podem ser aplicadas na determinação do modelo matemático e seus respectivos parâmetros (Morelli; Klein, 2006). Hamel *et al.* (1979) descreve um procedimento de três etapas para realizar a identificação sistêmica de aeronaves:

- a) Técnicas de ensaios em voo: planejamento das etapas dos ensaios em voo, em especial das entradas de controle que devem ser aplicadas à aeronave para excitar os modos de voo de interesse;
- b) Instrumentação e filtragem: descreve todo o processo de aquisição dos dados em voo;
- c) Análise dos dados de voo: realizada em duas fases, a identificação do sistema (modelo) e estimação dos parâmetros governantes (coeficientes),

A resposta dinâmica da aeronave (saída) é descrita pelas composições de forças e momentos aerodinâmicos. As entradas de controle, por sua vez, são compostas pelas deflexões das superfícies de controle e a tração (Morelli; Klein, 2006). A Figura 8 abstrai esse conceito.

Figura 8 – Abstração da dinâmica de uma aeronave



Fonte: Autor (2024).

De acordo com Padayachee (2016), existem diversos métodos para estimar o modelo aerodinâmico para uma estrutura prescrita, os quatro principais são:

- a) Métodos empíricos: utilizam dados históricos baseados em aeronaves de geometria semelhante. A ferramenta mais utilizada no meio aeronáutico que aplica esse método é o DATCOM;
- b) Métodos analíticos de baixa ordem: incluem códigos de Vortex Lattice, como AVL ou métodos de painéis, como XFLR5. A vantagem dos métodos de baixa ordem é o baixo custo computacional, permitindo que grandes matrizes de teste sejam analisadas em curtos períodos de tempo;
- c) Métodos computacionais de ordem superior: solvers de dinâmica dos fluidos computacional (CFD), baseados nas equações de Navier-Stokes;
- d) Métodos experimentais: baterias de testes em solo, túnel de vento e testes de voo.

A escolha do método é baseada nos requisitos do modelo aerodinâmico e na fase do ciclo de design que está sendo implementada (Padayachee, 2016). Este trabalho visa estimar o modelo aerodinâmico de aeronaves em etapas de projeto detalhado, analisando dados de voo a fim de obter um modelo mais fidedigno que seja usado como ferramenta de validação ao nível de sistema de interesse e subsistemas.

Diversos tipos de identificação de sistemas de aeronaves são possíveis com base em dados de voo. Estes podem ser divididos em duas categorias: por tipo de processamento e por

tipo de modelo. A categoria que difere o tipo de processamento é dividida em análises off-line e análises on-line. Já a categoria por tipo de modelo é dividida em modelos caixa-branca e modelos caixa-preta. Cada uma dessas categorias e combinações tem méritos específicos com base nos requisitos de modelagem (Padayachee, 2016).

Análises off-line são adequadas quando conjuntos completos de dados de voo definidos por um período prescrito estão disponíveis. Essas análises podem ser tão complexas quanto necessário, pois todos os dados de modelagem estão disponíveis para um determinado período e o tempo de computação é menos prioritário do que para análises em tempo real. Esse método é ideal para caracterizar sistemas invariantes no tempo, pois faz a média do modelo em um conjunto de dados específico (Padayachee, 2016).

Análises on-line aplicam algoritmos recursivos que utilizam dados à medida que se tornam disponíveis. Devido à informação limitada, os parâmetros resultantes têm menor precisão do que os obtidos em análises off-line. A vantagem das análises recursivas é a capacidade de modelar sistemas variáveis no tempo, onde os parâmetros do modelo mudam ao longo do conjunto de dados (Padayachee, 2016).

Modelos caixa-branca, também conhecido como modelos físicos, levam em conta fenômenos reais com base na física que descreve o sistema. Os termos dentro do modelo representam, até certo ponto, as interações reais do sistema com o ambiente. Esse tipo de modelo é utilizado quando é necessário um entendimento detalhado do comportamento do sistema, como no caso de caracterizações aerodinâmicas. Um exemplo desse tipo de modelagem é o uso de derivadas de estabilidade e controle, onde cada derivada tem uma interação física vinculada à sua existência (Padayachee, 2016).

Modelos caixa preta desconsideram quaisquer interações físicas significativas, permitindo uma construção de modelo simplificada adaptada às condições de teste. A vantagem desse tipo de modelagem é que dinâmicas complexas podem ser prontamente modeladas por funções de modelo simplificadas. Um exemplo desse tipo de modelagem inclui o uso de funções de transferência de baixa ordem (Padayachee, 2016).

Sendo assim, o método experimental será aplicado, estimando o modelo a partir da identificação de sistemas. Um modelo caixa branca será considerado, já que a física relacionada a dinâmica de voo da aeronave é estudada há décadas, com uma base teórica bem definida (conforme o descrito em Nelson (1998), Etkin e Reid (2003), Yechout *et al.* (2003), entre outros autores). Um processamento off-line será adotado, pois será assumido que para a escala de tempo de análise, a aeronave é um sistema invariante no tempo.

As próximas seções procuram entrar em detalhes em cada uma das etapas da identificação de aeronaves. Inicialmente será tratado da análise de dados de voo, por dar o embasamento de quais dados devem ser mensurados nas outras etapas. Em seguida, descreve-se a instrumentação e filtragem e por fim as técnicas de ensaios em voo.

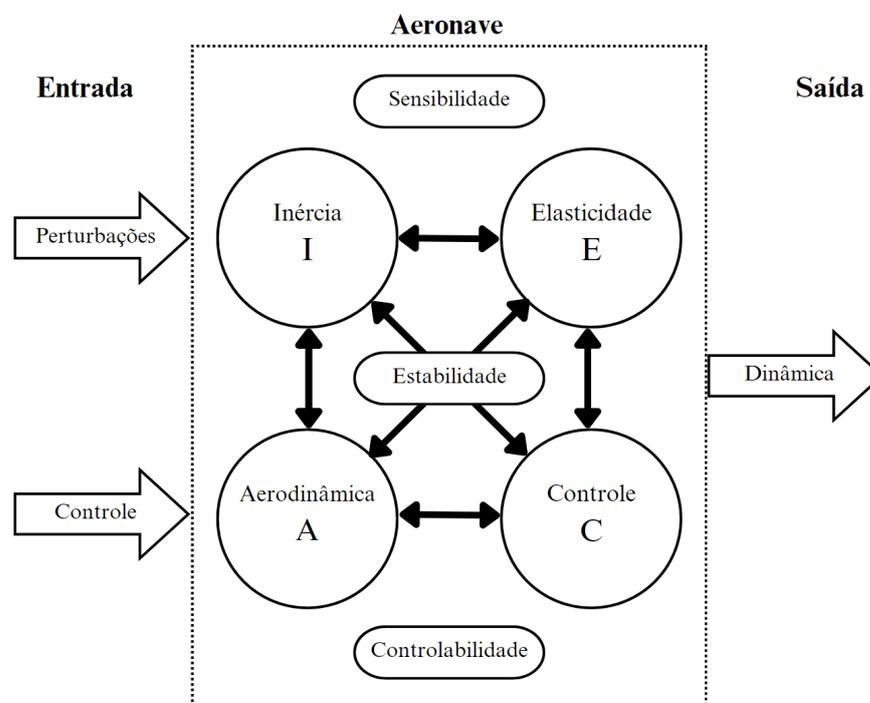
## 2.3 ANÁLISE DOS DADOS DE VOO

A análise dos dados de voo ocorre em duas etapas: identificação do sistema, onde o modelo aerodinâmico da aeronave é postulado, e a estimação dos parâmetros, onde os parâmetros do modelo aerodinâmico são estimados. A postulação do modelo aerodinâmico da aeronave é feita, inicialmente, com a derivação do modelo que descreve a dinâmica de voo. Em seguida, os modelos que descrevem as forças e momentos aerodinâmicos (modelo aerodinâmico) são descritos. A estimação dos parâmetros do modelo aplica métodos de regressão para obter os parâmetros desconhecidos (Hamel *et al.*, 1979).

### 2.3.1 Derivação do modelo dinâmico do voo

No estudo da dinâmica de voo, a base para a análise e simulação do movimento de aeronaves é o modelo matemático do veículo (Etkin; Reid, 2003). A resposta dinâmica de uma aeronave, devido às entradas de controle e perturbações, pode ser calculada como uma resultante de quatro forças: inerciais, aerodinâmicas, aeroelásticas e de controle (Hamel *et al.*, 1979). A Figura 9 apresenta uma abstração da dinâmica de voo de aeronaves considerando o modelo quadrangular de forças. Comparando a Figura 9 com a Figura 8, percebe-se que as perturbações estão sendo adotadas como uma entrada do sistema, no entanto, de caráter estocástico .

Figura 9 – Modelo quadrangular de forças



Fonte: Adaptado de Hamel *et al.* (1979)

Para realizar a dedução de um modelo matemático que descreve a movimentação de aeronaves, algumas considerações podem ser feitas para simplificar a formulação e permitir aplicar certos conceitos físicos e ferramentas matemáticas. As considerações adotadas inicialmente são as seguintes (Morelli; Klein, 2006):

- a) A aeronave é um corpo rígido com seis graus de liberdade;
- b) Para a escala do voo, a curvatura da Terra é desprezível;
- c) A Terra é considerada estacionária no espaço.

A partir dessas considerações, as equações de movimento da aeronave podem ser obtidas através da aplicação direta da segunda lei de Newton para movimento translacional e rotacional. Inicialmente, no entanto, é necessário compreender os diferentes sistemas de referência, nos quais o movimento é observado, e os sistemas de coordenadas, por meio dos quais o movimento é quantificado (Dias, 2012).

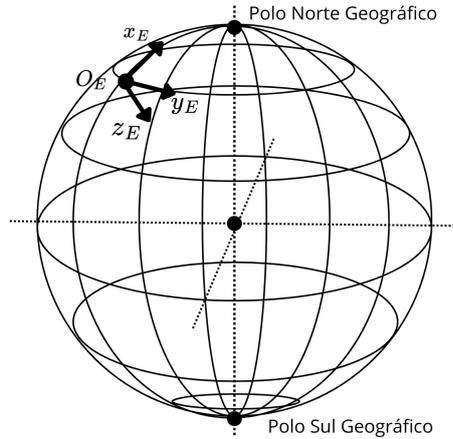
### 2.3.1.1 Sistemas de referência e sistemas de coordenadas

Inicialmente, vale destacar a convenção de notação que será adotada. Supondo uma variável  $x$  qualquer, denota-se que essa variável considera um sistema de referência  $A$  pelo sobrescrito  $x^A$ . Já a notação para o sistema de coordenadas adotado (supondo um sistema  $B$ ) é dada pelo subscrito  $x_B$ . Sendo assim, uma variável  $x$  que adota o sistema de referência  $A$  e está escrita no sistema de coordenadas  $B$ , é denotada por  $x_B^A$ .

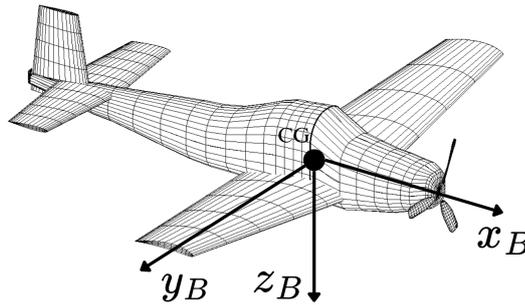
As equações-base são deduzidas da segunda lei de Newton para movimento translacional e rotacional, por esse motivo, um referencial inercial deve ser adotado. A partir da consideração que a Terra é estacionária no espaço, um sistema de referência fixo à Terra pode ser assumido como inercial. A esse sistema, dá-se o nome de fixo à Terra (do inglês, Earth-fixed) e possui notação  $S_E (O_E, x_E, y_E, z_E)$ . A origem do sistema está sob a superfície terrestre, o eixo  $O_E z_E$  aponta para baixo, em direção ao centro da Terra.  $O_E x_E$  aponta para o norte verdadeiro, localizado no polo norte geográfico. Por fim, formando um sistema ortogonal que obedece à regra da mão direita, o eixo  $O_E y_E$  aponta para o leste (Figura 10). O plano  $(O_E, x_E, y_E)$  forma um horizonte local que tangencia a superfície terrestre (Pratt, 2000).

Além do sistema de referência fixo à Terra, é necessário definir um sistema de referência para a aeronave que se mova com ela. A esse sistema, dá-se o nome de sistema do corpo (do inglês, body-system) e recebe a notação  $S_B (O_B, x_B, y_B, z_B)$ . Conforme o mostrado na Figura 11, a origem do sistema de coordenadas é posicionada no CG da aeronave, o eixo  $O_B x_B$  é paralelo à linha de referência da aeronave e aponta para a frente, o eixo  $O_B y_B$  aponta para a direita e o eixo  $O_B z_B$  para baixo (Pratt, 2000).

As forças aerodinâmicas, no entanto, dependem não da velocidade da aeronave referente à Terra, mas referente ao vento relativo, que difere da velocidade em relação à Terra para condições com presença de vento (Etkin; Reid, 2003), conforme a Equação 1.

Figura 10 – Sistema de referência fixo à Terra ( $S_E$ )

Fonte: Autor (2024).

Figura 11 – Sistema de referência do corpo ( $S_B$ )

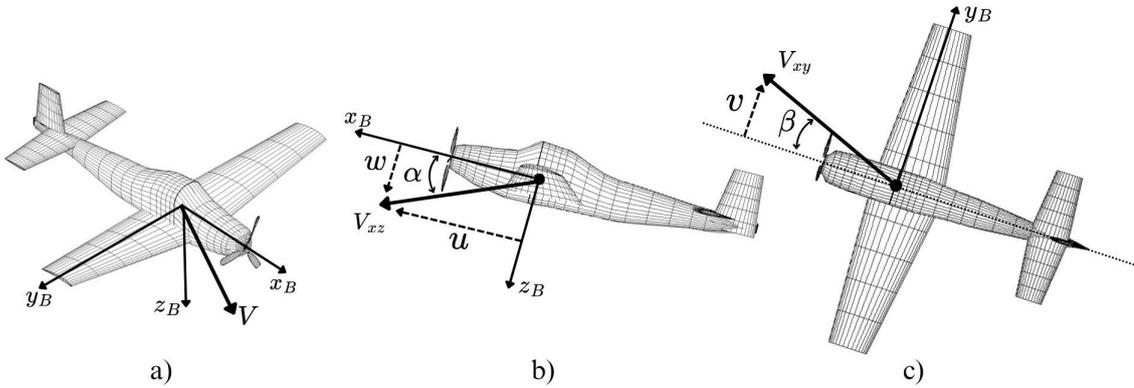
Fonte: Autor (2024).

$$\vec{V}^E = \vec{V} + \vec{W} \quad (1)$$

onde,  $\vec{V}$  é a velocidade do CG em relação ao escoamento,  $W$  é a velocidade do vento em relação à  $S_E$  e  $\vec{V}^E$  sendo a velocidade inercial. Para a maioria dos casos,  $\vec{W} = \vec{0}$ , conseqüentemente,  $\vec{V}^E = \vec{V}$ .

A orientação da aeronave em relação ao vento relativo é dada pelos ângulos de ataque ( $\alpha$ ) e ângulo de deslizamento ( $\beta$ ), conforme Figura 12. A velocidade do CG em relação ao ar ( $\vec{V}$ ) pode ser escrita no referencial do corpo a partir da projeção da magnitude de  $\vec{V}$  nas direções  $x_B$ ,  $y_b$ , e  $z_b$ , conforme a Equação 2. Com essas informações, é possível calcular  $\alpha$  e  $\beta$  a partir das Equações 3 e 4 (Etkin; Reid, 2003).

Figura 12 – Ângulos aerodinâmicos. a) Vetor velocidade. b) Ângulo de ataque. c) Ângulo de deslizamento.



Fonte: Autor (2024).

$$\vec{V}_B^E = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\alpha = \tan^{-1} \left( \frac{w}{u} \right) \quad (3)$$

$$\beta = \sin^{-1} \left( \frac{v}{V} \right) \quad (4)$$

Caso os dados de  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $V$  estejam disponíveis, ao invés de  $u$ ,  $v$  e  $w$ , é possível calcular as componentes de velocidade aplicando as Equações 5, 6 e 7 (Morelli; Klein, 2006).

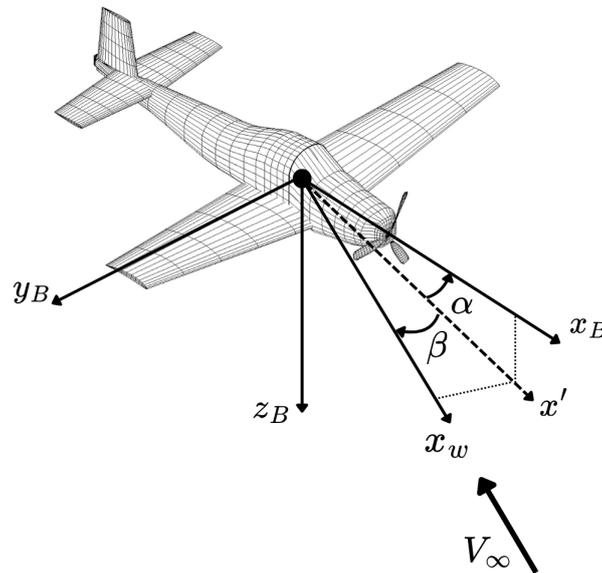
$$u = V \cos(\alpha) \cos(\beta) \quad (5)$$

$$v = V \sin(\beta) \quad (6)$$

$$w = V \sin(\alpha) \cos(\beta) \quad (7)$$

É conveniente definir um terceiro sistema de coordenadas que considera a direção do vento relativo, sendo denominado de sistema aerodinâmico e denotado por  $S_w(O_w, x_w, y_w)$ . O sistema  $S_w$  possui sua origem no CG da aeronave e pode ser derivado do sistema do corpo a partir de uma sequência de rotações pelos ângulos aerodinâmicos. Inicialmente, faz-se uma rotação em torno de  $Y_b$  de  $-\alpha$  graus. Em seguida, é feita uma rotação de  $\beta$  graus em torno do eixo  $Z_B$ , resultante da primeira rotação. Ao final de ambas as rotações, o eixo X resultante está na direção do vento (Figura 13) (Dias, 2012).

Figura 13 – Relações entre o sistema do corpo e o sistema aerodinâmico



Fonte: Autor (2024).

Por fim, um sistema de coordenadas útil para definir a orientação da aeronave em relação ao referencial da Terra é o sistema NED (do inglês, North-East-Down)  $S_{NED}$  ( $O_{NED}$ ,  $x_{NED}$ ,  $y_{NED}$ ,  $z_{NED}$ ). Esse sistema possui a mesma orientação do sistema  $S_E$ , contudo, sua origem é no CG da aeronave. A Figura 14 ilustra a orientação dos eixos nesse sistema. Esse referencial também é conhecido por referencial da terra que acompanha o veículo (Dias, 2012).

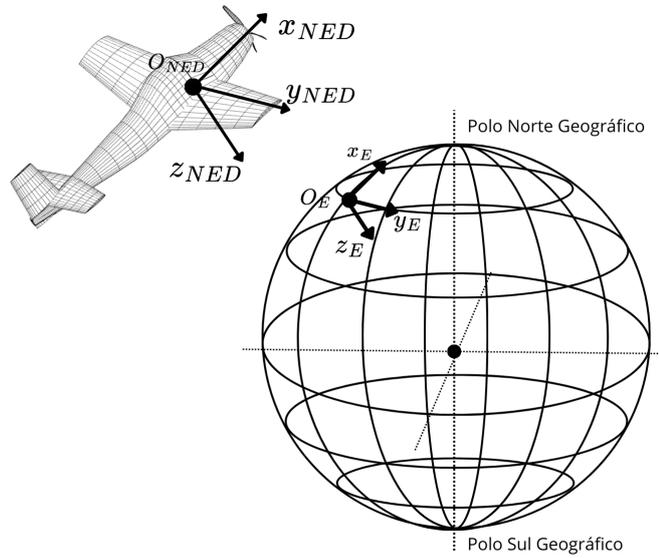
A orientação da aeronave ( $S_B$ ) em relação ao  $S_{NED}$  é dada por uma série de três rotações consecutivas, quantificadas por meio dos ângulos de Euler (Etkin; Reid, 2003). A ordem das rotações é baseada na diferença entre os sistemas  $S_B$  e  $S_{NED}$  (Figura 15), sendo:

1. Uma rotação de  $\psi$  em torno de  $O_{NED}z_{NED}$ ;
2. Uma rotação de  $\theta$  em torno de  $O_{NED}y_{NED}$ ;
3. Uma rotação de  $\phi$  em torno de  $O_{NED}x_{NED}$ ;

A definição dos ângulos de Euler é necessária, pois, em posse desses valores, é possível converter uma quantidade linear (deslocamentos, velocidades, acelerações, entre outros) de  $S_{NED}$  para  $S_B$ , e vice-versa, conforme as Equações 8 e 9 (Etkin; Reid, 2003).

$$\begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{bmatrix} = L_{BNED} \begin{bmatrix} x_{NED} \\ y_{NED} \\ z_{NED} \end{bmatrix} \quad (8)$$

Figura 14 – Sistema de coordenadas NED



Fonte: Autor (2024).

$$\begin{bmatrix} x_{NED} \\ y_{NED} \\ z_{NED} \end{bmatrix} = L_{NEDB} \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{bmatrix} \quad (9)$$

onde  $L_{BNED}$  é a matriz de transformação, descrita na Equação 10, e  $L_{NEDB} = L_{BNED}^{-1}$ . Por conveniência de notação, foi adotado que  $C(a) = \cos(a)$  e  $S(a) = \sin(a)$ , sendo "a" um dos ângulos de Euler.

$$L_{BNED} = \begin{bmatrix} C(\theta)C(\psi) & C(\theta)S(\psi) & -S(\theta) \\ S(\phi)S(\theta)C(\psi) - C(\phi)S(\psi) & S(\phi)S(\theta)S(\psi) + C(\phi)C(\psi) & S(\phi)C(\theta) \\ C(\phi)S(\theta)C(\psi) + S(\phi)S(\psi) & C(\phi)S(\theta)S(\psi) - S(\phi)C(\psi) & C(\phi)C(\theta) \end{bmatrix} \quad (10)$$

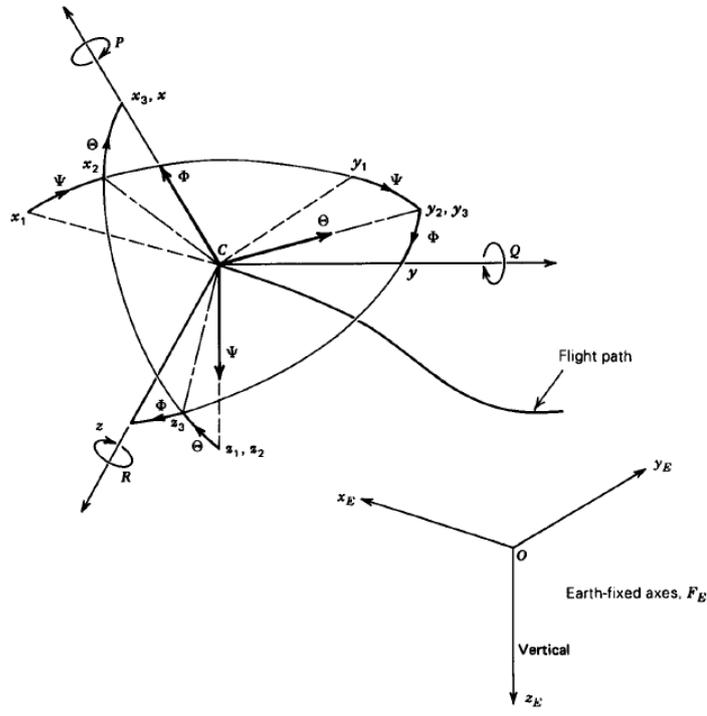
Para concretizar a definição dos ângulos de Euler e evitar ambiguidades, limites para os três ângulos são estipulados, conforme as Equações 11, 12 e 13 (Etkin; Reid, 2003).

$$-\pi \leq \psi < \pi \quad \text{ou} \quad 0 \leq \psi \leq 2\pi \quad (11)$$

$$\frac{-\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad (12)$$

$$-\pi \leq \phi < \pi \quad \text{ou} \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi \quad (13)$$

Figura 15 – Rotações de Euler



Fonte: Etkin e Reid (2003).

Finalmente, a escolha do sistema de coordenadas a ser empregado depende da equação de movimento que será deduzida. Normalmente, para equações que buscam descrever forças e momentos que estão sendo aplicados ao corpo, é conveniente usar o referencial do corpo para aproveitar os efeitos de simetria da aeronave.

### 2.3.1.2 Equações de corpo rígido

As equações-base são deduzidas da segunda lei de Newton para movimento translacional e rotacional. Como já citado na Seção 2.3.1.1, o sistema de referência  $S_E$  será adotado, enquanto as equações serão escritas no sistema de coordenadas  $S_B$ .

Para movimento translacional, entende-se que a soma de todas as forças atuando no corpo é igual à taxa de variação do momento linear do mesmo, conforme à Equação 14 (Etkin; Reid, 2003).

$$\sum \vec{F}_E^E = m \frac{d}{dt} (\vec{V}_E^E) \quad (14)$$

Uma vez que as forças estão sendo aplicadas à aeronave, é útil escrever a Equação 14 no sistema  $S_B$ . Para tal feito, a derivada de  $\vec{V}_E^E$ , expressa na Equação 14, deve levar em consideração o Teorema de Coriolis, resultando na Equação 15 (Etkin; Reid, 2003).

$$\sum \vec{F}_B^E = m(\dot{V}_B^E + \vec{\omega}_B^E \times V_B^E) \quad (15)$$

Na equação acima,  $\vec{\omega}_B^E$  é a velocidade angular da aeronave, e pode ser decomposta segunda a Equação 16, onde  $p$ ,  $q$  e  $r$  são as taxas de rolagem, arfagem e guinada, respectivamente (Etkin; Reid, 2003).

$$\vec{\omega}_B^E = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad (16)$$

A força  $\vec{F}_B^E$  é a resultante das forças aero-propulsivas e força peso, conforme Equação 17 (Etkin; Reid, 2003).

$$\vec{F}_B^E = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} + L_{BNED} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X - mg\text{sen}(\theta) \\ Y + mg\text{cos}(\theta)\text{sen}(\phi) \\ Z + mg\text{cos}(\theta)\text{cos}(\phi) \end{bmatrix} \quad (17)$$

Substituindo as Equações 2, 16 e 17 na Equação 15, obtêm-se a Equações 18, 19 e 20, que modelam o movimento translacional da aeronave (Etkin; Reid, 2003).

$$X - mg\text{sen}(\theta) = m(\dot{u} + qw - rv) \quad (18)$$

$$Y + mg\text{cos}(\theta)\text{sen}(\phi) = m(\dot{v} + ru - pw) \quad (19)$$

$$Z + mg\text{cos}(\theta)\text{cos}(\phi) = m(\dot{w} + pv - qu) \quad (20)$$

Já para o movimento de rotação, a 2ª lei diz que a soma de todos os momentos aplicados no corpo é igual à taxa de variação do momento angular do corpo, representado na Equação 21 (Etkin; Reid, 2003).

$$\sum \vec{G}_B^E = \frac{d}{dt}(\vec{H}_B^E) \quad (21)$$

De forma similar ao movimento translacional, é útil representar a equação para movimento rotacional do sistema do corpo, resultando na Equação 22, onde  $\vec{H}_B^E$  é o momento angular e pode ser calculado por meio da Equação 23 (Etkin; Reid, 2003).

$$\sum \vec{G}_B^E = \dot{\vec{H}}_B^E + \vec{\omega}_B^E \times \vec{H}_B^E \quad (22)$$

$$\vec{H}_B^E = I_B \vec{\omega}_B^E \quad (23)$$

Na equação acima,  $I_B$  é a matriz de inércia da aeronave (Equação 24). No entanto, uma vez que as equações de movimento estão sendo escritas no sistema do corpo, elimina-se a

dependência do tempo dos momentos de inércia (ou seja,  $\dot{I}_B = 0$ ) e, por conta da simetria da aeronave, os produtos de inércia  $I_{xy} = I_{yx} = I_{yz} = I_{zy} = 0$ . Sendo assim, a matriz de inércia resultante é a apresentada na Equação 25 (Etkin; Reid, 2003).

$$I_B = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_z \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$I_B = \begin{bmatrix} I_x & 0 & -I_{xz} \\ 0 & I_y & 0 \\ -I_{zx} & 0 & I_z \end{bmatrix} \quad (25)$$

O momento  $\vec{G}_B^E$  é a resultante dos momentos aero-propulsivos da aeronave, e é denotado pelas componentes da Equação 26.

$$\vec{G}_B^E = \begin{bmatrix} L \\ M \\ N \end{bmatrix} \quad (26)$$

Substituindo as Equações 16, 23, 25 e 26 na Equação 22, obtêm-se as Equações 27, 28 e 29, que modelam o movimento rotacional da aeronave (Etkin; Reid, 2003).

$$L = I_x \dot{p} - I_{zx}(\dot{r} + pq) - (I_y - I_z)qr \quad (27)$$

$$M = I_y \dot{q} - I_{zx}(r^2 - p^2) - (I_z - I_x)rp \quad (28)$$

$$N = I_z \dot{r} - I_{zx}(\dot{p} - qr) - (I_x - I_y)pq \quad (29)$$

Além das equações que descrevem o movimento translacional e rotacional da aeronave, é necessário calcular a trajetória da aeronave, isto é, determinar a posição do centro de gravidade ao longo do tempo (Etkin; Reid, 2003).

A posição do CG em relação à  $S_E$  pode ser calculada através da integração da velocidade inercial ( $V_E^E$ ). A velocidade inercial é calculada a partir da transformação da velocidade  $V_B^E$  para o sistema  $S_E$ , utilizando a matriz de transformação  $L_{NEDEB}$ , conforme a Equação 30. Realizando a conversão de sistema de coordenadas, as equações resultantes podem ser escritas conforme as Equações 31, 32 e 33.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_E \\ \dot{y}_E \\ \dot{z}_E \end{bmatrix} = L_{NEDEB} V_B^E \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_E &= u \cos(\theta) \cos(\psi) + v(\sin(\phi) \sin(\theta) \cos(\psi) - \cos(\phi) \sin(\psi)) \\ &+ w(\cos(\phi) \sin(\theta) \cos(\psi) + \sin(\phi) \sin(\psi)) \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_E = & u \cos(\theta) \operatorname{sen}(\psi) + v(\operatorname{sen}(\phi) \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\psi) + \cos(\phi) \cos(\psi)) \\ & + w(\cos(\phi) \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\psi) - \operatorname{sen}(\phi) \cos(\psi)) \end{aligned} \quad (32)$$

$$\dot{z}_E = -u \operatorname{sen}(\theta) + v \operatorname{sen}(\phi) \cos(\theta) + w \cos(\phi) \cos(\theta) \quad (33)$$

Já a orientação da aeronave pode ser calculada por meio da relação entre os ângulos de Euler  $[\phi, \theta, \psi]^T$  e as velocidades angulares  $[p, q, r]^T$ , conforme a Equação 34. A relação inversa também pode ser obtida, isto é, calcular  $[p, q, r]^T$  por meio de  $[\phi, \theta, \psi]^T$  (Equação 35) (Etkin; Reid, 2003).

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \operatorname{sen}(\phi) \tan(\theta) & \cos(\phi) \tan(\theta) \\ 0 & \cos(\phi) & -\operatorname{sen}(\phi) \\ 0 & \operatorname{sen}(\phi) \sec(\theta) & \cos(\phi) \sec(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad (34)$$

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\operatorname{sen}(\theta) \\ 0 & \cos(\phi) & \operatorname{sen}(\phi) \cos(\theta) \\ 0 & -\operatorname{sen}(\phi) & \cos(\phi) \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (35)$$

As equações de movimento para a translação e rotação da aeronave, assim como as equações de trajetória e orientação, estão sumarizadas nas Equações 36 a 50.

$$X - mg \operatorname{sen}(\theta) = m(\dot{u} + qw - rv) \quad (36)$$

$$Y + mg \cos(\theta) \operatorname{sen}(\phi) = m(\dot{v} + ru - pw) \quad (37)$$

$$Z + mg \cos(\theta) \cos(\phi) = m(\dot{w} + pv - qu) \quad (38)$$

$$L = I_x \dot{p} - I_{zx}(\dot{r} + pq) - (I_y - I_z)qr \quad (39)$$

$$M = I_y \dot{q} - I_{zx}(r^2 - p^2) - (I_z - I_x)rp \quad (40)$$

$$N = I_z \dot{r} - I_{zx}(\dot{p} - qr) - (I_x - I_y)pq \quad (41)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_E = & u \cos(\theta) \cos(\psi) + v(\operatorname{sen}(\phi) \operatorname{sen}(\theta) \cos(\psi) - \cos(\phi) \operatorname{sen}(\psi)) \\ & + w(\cos(\phi) \operatorname{sen}(\theta) \cos(\psi) + \operatorname{sen}(\phi) \operatorname{sen}(\psi)) \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_E = & u \cos(\theta) \operatorname{sen}(\psi) + v (\operatorname{sen}(\phi) \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\psi) + \cos(\phi) \cos(\psi)) \\ & + w (\cos(\phi) \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\psi) - \operatorname{sen}(\phi) \cos(\psi)) \end{aligned} \quad (43)$$

$$\dot{z}_E = -u \operatorname{sen}(\theta) + v \operatorname{sen}(\phi) \cos(\theta) + w \cos(\phi) \cos(\theta) \quad (44)$$

$$\dot{\phi} = p + q \operatorname{sen}(\phi) \tan(\theta) + r \cos(\phi) \tan(\theta) \quad (45)$$

$$\dot{\theta} = q \cos(\phi) - r \operatorname{sen}(\phi) \quad (46)$$

$$\dot{\psi} = q \operatorname{sen}(\phi) \sec(\theta) + r \cos(\phi) \sec(\theta) \quad (47)$$

$$p = \dot{\phi} - \dot{\psi} \operatorname{sen}(\theta) \quad (48)$$

$$q = \dot{\theta} \cos(\phi) + \dot{\psi} \operatorname{sen}(\phi) \cos(\theta) \quad (49)$$

$$r = -\dot{\theta} \operatorname{sen}(\phi) + \dot{\psi} \cos(\phi) \cos(\theta) \quad (50)$$

Como já citado, as equações acima foram deduzidas sob algumas hipóteses, que são principalmente:

- a) A Terra é tomada por referencial inercial e sua curvatura é dita desprezível;
- b) A aeronave é um corpo rígido;
- c) A aeronave é simétrica no plano  $x_B z_B$ ;
- d) Não há rajadas de vento.

Para levar em consideração rajadas de vento, a velocidade  $V_B^E$  deve ser acrescida com as componentes das velocidades de rajada  $W = [W_x, W_y, W_z]^T$ , conforme a Equação 51 (Etkin; Reid, 2003).

$$\begin{bmatrix} u^E \\ v^E \\ w^E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u + W_x \\ v + W_y \\ w + W_z \end{bmatrix} \quad (51)$$

As Equações 36 à 50 consistem em 15 equações diferenciais ordinárias não lineares acopladas, com a variável independente sendo o tempo ( $t$ ) (Etkin; Reid, 2003). As variáveis dependentes são:

- a) Velocidade:  $u, v, w$ ;

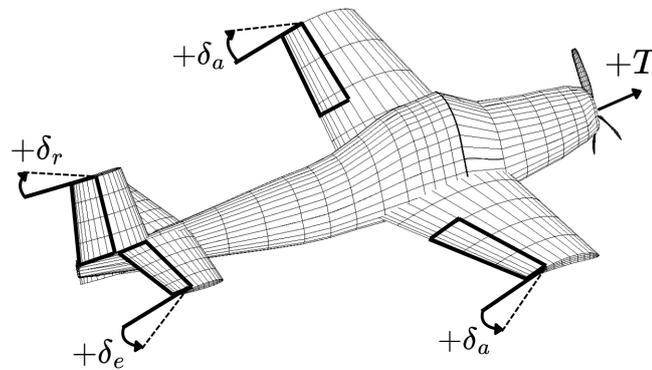
- b) Velocidades angulares:  $p, q, r$ ;
- c) Posição do CG:  $x_E, y_E, z_E$ ;
- d) Atitude:  $\psi, \theta$  e  $\phi$ .

Sendo assim, conclui-se que há 12 variáveis dependentes e 12 equações independentes (uma vez que as Equações 47, 46 e 45 não são independentes), completando assim o sistema matemático (Etkin; Reid, 2003).

Por fim, Etkin e Reid (2003) é necessário destacar que as forças e momentos aerodinâmicos ( $X, Y, Z, L, M$  e  $N$ ) também dependem dos comandos de controle que serão dados aos atuadores que, para uma aeronave convencional, são descritos pela Equação 52. A Figura 16 ilustra cada uma das entradas e suas respectivas convenções de sinais.

$$\begin{bmatrix} \delta_a \\ \delta_e \\ \delta_r \\ \delta_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Deflexão do aileron} \\ \text{Deflexão do profundor} \\ \text{Deflexão do leme} \\ \text{Tração do motor} \end{bmatrix} \quad (52)$$

Figura 16 – Convenção de sinais das entradas de controle



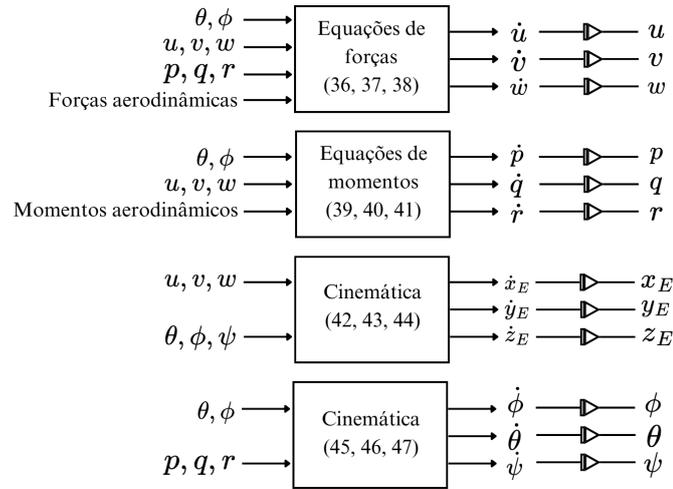
Fonte: Autor (2024).

Uma forma de visualizar as equações de movimento da aeronave é dada pelo diagrama de blocos da Figura 17, onde cada bloco representa um conjunto de equações com suas variáveis de entrada e saída (Etkin; Reid, 2003).

### 2.3.1.3 Linearização das equações de movimento

Analisando as equações de movimento da aeronave, identifica-se que as equações são não lineares e, portanto, de maior complexidade de se avaliar analiticamente. A fim de simplificar

Figura 17 – Diagrama de blocos das equações de movimento da aeronave



Fonte: Adaptado de Etkin e Reid (2003).

as análises feitas, as equações de movimento são linearizadas aplicando a teoria de pequenas perturbações, que considera que o movimento da aeronave consiste em pequenos desvios em torno das condições operacionais (Etkin; Reid, 2003).

Dessa forma, todas as variáveis das equações de movimento serão substituídas por um valor de referência ( $\rho_0$ ) constante, logo  $d\rho_0/dt = 0$ , mais uma perturbação ( $\Delta\rho$ ), conforme o conjunto de Equações 53 (Etkin; Reid, 2003).

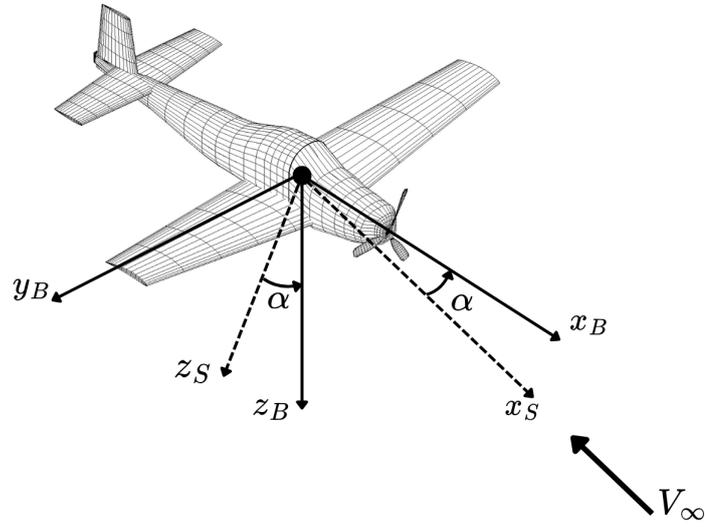
$$\begin{aligned}
 u &= u_0 + \Delta u & v &= v_0 + \Delta v & w &= w_0 + \Delta w \\
 p &= p_0 + \Delta p & q &= q_0 + \Delta q & r &= r_0 + \Delta r \\
 X &= X_0 + \Delta X & Y &= Y_0 + \Delta Y & Z &= Z_0 + \Delta Z \\
 M &= M_0 + \Delta M & N &= N_0 + \Delta N & L &= L_0 + \Delta L \\
 \delta &= \delta_0 + \Delta\delta
 \end{aligned} \tag{53}$$

A condição operacional que será empregada na linearização das equações de movimento é para um voo nivelado em regime permanente, isto é,  $v_0 = p_0 = q_0 = r_0 = \phi_0 = 0$  (Etkin; Reid, 2003).

A fim de estabelecer  $w_0 = 0$ , será considerado um novo sistema de coordenadas onde o eixo X esteja alinhado com o vento relativo. A este sistema, dá-se o nome de sistema de estabilidade  $S_S(O_S, x_S, y, S, Z_S)$ , que possui origem no CG, o eixo  $O_S y_S$  é coincidente com  $O_{B y_B}$ . Os eixos  $O_S x_S$  e  $O_S z_S$  estão rotacionados em relação à  $O_B x_B$  e  $O_B z_V$  por  $\alpha$ , conforme a Figura 18 (Yechout *et al.*, 2003).

Aplicando a teoria das pequenas perturbações para funções trigonométricas, utilizam-se as seguintes relações:

Figura 18 – Sistema de coordenadas de estabilidade



Fonte: Autor (2024).

$$\begin{aligned} \text{sen}(\theta_0 + \Delta\theta) &\approx \text{sen}(\theta_0) + \Delta\theta \cos(\theta_0) \\ \text{cos}(\theta_0 + \Delta\theta) &\approx \text{cos}(\theta_0) - \Delta\theta \text{sen}(\theta_0) \end{aligned} \quad (54)$$

Por fim,  $u_0$  é igual à velocidade de voo e  $\theta_0$  é igual ao ângulo de referência de voo. Substituindo essas informações nas Equações 36 a 47 e desprezando os produtos de perturbações, se obtm as equações de movimento linearizadas (Equações 55 à 67) (Etkin; Reid, 2003).

$$X_0 + \Delta X - mg(\text{sen}(\theta_0) + \Delta\theta \cos(\theta_0)) = m\Delta\dot{u} \quad (55)$$

$$Y_0 + \Delta Y + mg\text{cos}(\theta_0)\phi = m(\dot{v} + u_0 r) \quad (56)$$

$$Z_0 + \Delta Z + mg(\text{cos}(\theta_0) - \Delta\theta \text{sen}(\theta_0)) = m(\dot{w} - u_0 q) \quad (57)$$

$$L_0 + \Delta L = I_x \dot{p} - I_{zx} \dot{r} \quad (58)$$

$$M_0 + \Delta M = I_y \dot{q} \quad (59)$$

$$N_0 + \Delta N = I_z \dot{r} - I_{zx} \dot{p} \quad (60)$$

$$\dot{x}_E = (u_0 + \Delta u)\text{cos}(\theta_0) - u_0 \Delta\theta \text{sen}(\theta_0) + w \text{sen}(\theta_0) \quad (61)$$

$$\dot{y}_E = u_0 \psi \cos(\theta_0) + v \quad (62)$$

$$\dot{z}_E = -(u_0 + \Delta u) \operatorname{sen}(\theta_0) - u_0 \Delta \theta \cos(\theta_0) + w \cos(\theta_0) \quad (63)$$

$$\dot{\phi} = p + r \tan(\theta_0) \quad (64)$$

$$\dot{\theta} = q \quad (65)$$

$$\dot{\psi} = r \sec(\theta_0) \quad (66)$$

$$p = \dot{\phi} - \dot{\psi} \operatorname{sen}(\theta_0) \quad (67)$$

Para solucionar tais equações, faz-se necessário determinar o estado de referência em regime permanente do voo. Para tal, todas as perturbações são consideradas igual à zero. Para essa condição, obtêm-se as Equações 68 a 76 para condições de referência (Etkin; Reid, 2003).

$$X_0 - mg \operatorname{sen}(\theta_0) = 0 \quad (68)$$

$$Y_0 = 0 \quad (69)$$

$$Z_0 + mg \cos(\theta_0) = 0 \quad (70)$$

$$L_0 = 0 \quad (71)$$

$$M_0 = 0 \quad (72)$$

$$N_0 = 0 \quad (73)$$

$$\dot{x}_E = u_0 \cos(\theta_0) \quad (74)$$

$$\dot{y}_E = 0 \quad (75)$$

$$\dot{z}_E = -u_0 \operatorname{sen}(\theta_0) \quad (76)$$

Substituindo as Equações 68 a 76 nas Equações 55 à 67 e rearranjando-as a fim de deixar as derivadas de primeira ordem no lado esquerdo das equações, obtêm-se as Equações 77 a 88.

$$\Delta \dot{u} = \frac{\Delta X}{m} - g \Delta \theta \cos(\theta_0) \quad (77)$$

$$\dot{v} = \frac{\Delta Y}{m} + g \phi \cos(\theta_0) - u_0 r \quad (78)$$

$$\dot{w} = \frac{\Delta Z}{m} - g \Delta \theta \sin(\theta_0) + u_0 q \quad (79)$$

$$\dot{p} = (I_x I_z - I_{xz}^2)^{-1} (I_z \Delta L + I_{xz} \Delta N) \quad (80)$$

$$\dot{q} = \frac{\Delta M}{I_y} \quad (81)$$

$$\dot{r} = (I_x I_z - I_{zx}^2)^{-1} (I_{zx} \Delta L + I_x \Delta N) \quad (82)$$

$$\dot{x}_E = \Delta u \cos(\theta_0) - u_0 \Delta \theta \sin(\theta_0) + w \sin(\theta_0) \quad (83)$$

$$\dot{y}_E = u_0 \psi \cos(\theta_0) + v \quad (84)$$

$$\dot{z}_E = -\Delta u \sin(\theta_0) - u_0 \Delta \theta \cos(\theta_0) + w \cos(\theta_0) \quad (85)$$

$$\dot{\phi} = p + r \tan(\theta_0) \quad (86)$$

$$\Delta \dot{\theta} = q \quad (87)$$

$$\dot{\psi} = r \sec(\theta_0) \quad (88)$$

Considerando que a maioria das aeronaves são simétricas em torno do plano X-Z, voam a pequenos ângulos de deslizamento e estão em condições de pequenas perturbações em torno do ponto de trimagem, é possível separar as equações de movimento em duas categorias independentes: movimento longitudinal e movimento látero-direcional (Maine; Iliff, 1986).

As equações do movimento longitudinal descrevem a translação nas direções  $x_b$  e  $z_b$  e a rotação em torno de  $y_B$  e (Equações 77, 79 e 81, respectivamente). Já para o movimento látero-direcional, consideram-se as equações que descrevem a translação na direção  $y_b$  e as rotações em torno dos eixos  $x_b$  e  $z_b$  (Equações 78, 80 e 82, respectivamente)(Maine; Iliff, 1986).

Segundo Nelson (1998), as variações de força em x, y e z ( $\Delta X, \Delta Y$  e  $\Delta Z$ ) podem ser escritas em função das variáveis de perturbação ( $u, v, w, p, q, r, \delta$ ) através da série de Taylor (Equações 89 a 91).

$$\Delta X = \frac{\delta X}{\delta u} \Delta u + \frac{\delta X}{\delta w} w + \frac{\delta X}{\delta \delta_e} \Delta \delta_e \quad (89)$$

$$\Delta Y = \frac{\delta Y}{\delta v} v + \frac{\delta Y}{\delta p} p + \frac{\delta Y}{\delta r} r + \frac{\delta Y}{\delta \delta_r} \Delta \delta_r \quad (90)$$

$$\Delta Z = \frac{\delta Z}{\delta u} \Delta u + \frac{\delta Z}{\delta w} w + \frac{\delta Z}{\delta \dot{w}} \dot{w} + \frac{\delta Z}{\delta q} q + \frac{\delta Z}{\delta \delta_e} \Delta \delta_e \quad (91)$$

De forma similar às equações de força, as variações de momento em torno de x, y e z ( $\Delta L, \Delta M$  e  $\Delta N$ ) também podem ser escritas em função das variáveis de perturbação aplicando a série de Taylor, conforme às Equações 92 a 94 (Nelson, 1998).

$$\Delta L = \frac{\delta L}{\delta v} v + \frac{\delta L}{\delta p} p + \frac{\delta L}{\delta r} r + \frac{\delta L}{\delta \delta_r} \Delta \delta_r + \frac{\delta L}{\delta \delta_a} \Delta \delta_a \quad (92)$$

$$\Delta M = \frac{\delta M}{\delta u} \Delta u + \frac{\delta M}{\delta w} w + \frac{\delta M}{\delta \dot{w}} \dot{w} + \frac{\delta M}{\delta q} q + \frac{\delta M}{\delta \delta_e} \Delta \delta_e \quad (93)$$

$$\Delta N = \frac{\delta N}{\delta v} v + \frac{\delta N}{\delta p} p + \frac{\delta N}{\delta r} r + \frac{\delta N}{\delta \delta_r} \delta_r + \frac{\delta N}{\delta \delta_a} \Delta \delta_a \quad (94)$$

Por conveniência, a notação das derivadas das equações de movimento será alterada, conforme as Equações 95 e 96.

$$\begin{aligned} \frac{\delta X}{\delta u} \cdot \frac{1}{m} &= X_u & \frac{\delta X}{\delta w} \cdot \frac{1}{m} &= X_w & \frac{\delta X}{\delta \delta_e} \cdot \frac{1}{m} &= X_{\delta_e} \\ \frac{\delta Y}{\delta v} \cdot \frac{1}{m} &= Y_v & \frac{\delta Y}{\delta p} \cdot \frac{1}{m} &= Y_p & \frac{\delta Y}{\delta r} \cdot \frac{1}{m} &= Y_r & \frac{\delta Y}{\delta \delta_r} \cdot \frac{1}{m} &= Y_{\delta_r} \\ \frac{\delta Z}{\delta u} \cdot \frac{1}{m} &= Z_u & \frac{\delta Z}{\delta w} \cdot \frac{1}{m} &= Z_w & \frac{\delta Z}{\delta \dot{w}} \cdot \frac{1}{m} &= Z_{\dot{w}} & \frac{\delta Z}{\delta q} \cdot \frac{1}{m} &= Z_q & \frac{\delta Z}{\delta \delta_e} \cdot \frac{1}{m} &= Z_{\delta_e} \end{aligned} \quad (95)$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta L}{\delta v} &= L_v & \frac{\delta L}{\delta p} &= L_p & \frac{\delta L}{\delta r} &= L_r & \frac{\delta L}{\delta \delta_r} &= L_{\delta_r} & \frac{\delta L}{\delta \delta_a} &= L_{\delta_a} \\ \frac{\delta M}{\delta u} \cdot \frac{1}{I_y} &= M_u & \frac{\delta M}{\delta w} \cdot \frac{1}{I_y} &= M_w & \frac{\delta M}{\delta \dot{w}} \cdot \frac{1}{I_y} &= M_{\dot{w}} & \frac{\delta M}{\delta q} \cdot \frac{1}{I_y} &= M_q & \frac{\delta M}{\delta \delta_e} \cdot \frac{1}{I_y} &= M_{\delta_e} \\ \frac{\delta N}{\delta v} &= N_v & \frac{\delta N}{\delta p} &= N_p & \frac{\delta N}{\delta r} &= N_r & \frac{\delta N}{\delta \delta_r} &= N_{\delta_r} & \frac{\delta N}{\delta \delta_a} &= N_{\delta_a} \end{aligned} \quad (96)$$

Além disso, as razões de momentos de inércia, presentes nas Equações 80 e 82, serão denotadas conforme o conjunto de Equações 97.

$$I'_z = \frac{I_z}{I_x I_z - I_{xz}^2} \quad I'_{xz} = \frac{I_{xz}}{I_x I_z - I_{xz}^2} \quad I'_{zx} = \frac{I_{xz}}{I_x I_z - I_{xz}^2} \quad I'_x = \frac{I_{xz}}{I_x I_z - I_{xz}^2} \quad (97)$$

Substituindo os resultados acima (Equações 89-97) nas Equações 77 a 82, e segregando-as conforme a categoria de movimento, obtêm-se as equações de movimento longitudinal (Equações 98 a 101) e látero-direcional (Equações 102 e 105) linearizadas (Nelson, 1998).

$$\Delta \dot{u} = X_u \Delta u + X_w w + X_{\delta_e} \Delta \delta_e - g \Delta \theta \cos(\theta_0) \quad (98)$$

$$\dot{w} = Z_u \Delta u + Z_w w + Z_{\dot{w}} \dot{w} + Z_q q + Z_{\delta_e} \Delta \delta_e - g \Delta \theta \sin(\theta_0) + u_0 q \quad (99)$$

$$\dot{q} = M_u \Delta u + M_w w + M_{\dot{w}} \dot{w} + M_q q + M_{\delta_e} \Delta \delta_e \quad (100)$$

$$\Delta \dot{\theta} = q \quad (101)$$

$$\dot{v} = Y_v v + Y_p p + Y_r r + Y_{\delta_r} \Delta \delta_r + g \phi \cos(\theta_0) - u_0 r \quad (102)$$

$$\dot{p} = I'_z (L_v v + L_p p + L_r r + L_{\delta_r} \Delta \delta_r + L_{\delta_a} \Delta \delta_a) + I'_{xz} (N_v v + N_p p + N_r r + N_{\delta_r} \Delta \delta_r + N_{\delta_a} \Delta \delta_a) \quad (103)$$

$$\dot{r} = I'_{zx} (L_v v + L_p p + L_r r + L_{\delta_r} \Delta \delta_r + L_{\delta_a} \Delta \delta_a) + I'_x (N_v v + N_p p + N_r r + N_{\delta_r} \Delta \delta_r + N_{\delta_a} \Delta \delta_a) \quad (104)$$

$$\dot{\phi} = p + r \tan(\theta_0) \quad (105)$$

Com as equações linearizadas, é conveniente escrevê-las em notações de espaço de estados (Equação 106), onde  $x$  é o vetor de estados,  $u$  é o vetor de controle,  $A$  é a matriz de estados e  $B$  a matriz de controle (Dorf; Bishop, 2008).

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (106)$$

As equações longitudinais, escritas em notação em espaço de estados está representada na Equação 107. Para simplificar as manipulações matemáticas, foi considerado que  $Z_{\dot{w}} \approx 0$ . De forma similar, deduzem-se as equações látero-direcionais na notação de espaço de estados (Equação 108) (Nelson, 1998).

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{u} \\ \dot{w} \\ \dot{q} \\ \Delta \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_u & X_w & 0 & -g \cos(\theta_0) \\ Z_u & Z_w & Z_q + u_0 & -g \sin(\theta_0) \\ M_u + M_{\dot{w}}Z_u & M_w + M_{\dot{w}}Z_w & M_q + M_{\dot{w}}u_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u \\ w \\ q \\ \Delta \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_{\delta_e} \\ Z_{\delta_e} \\ M_{\delta_e} + M_{\dot{w}}Z_{\delta_e} \\ 0 \end{bmatrix} \delta_e \quad (107)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{p} \\ \dot{r} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_v & Y_p & Y_r - u_0 & g \cos(\theta_0) \\ I'_z L_v + I'_{xz} N_v & I'_z L_p + I'_{xz} N_p & I'_z L_r + I'_{xz} N_r & 0 \\ I'_{zx} L_v + I'_x N_v & I'_{zx} L_p + I'_x N_p & I'_{zx} L_r + I'_x N_r & 0 \\ 0 & 1 & \tan(\theta_0) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ p \\ r \\ \phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & Y_{\delta_r} \\ I'_z L_{\delta_a} + I'_{xz} N_{\delta_a} & I'_z L_{\delta_r} + I'_{xz} N_{\delta_r} \\ I'_{zx} L_{\delta_a} + I'_x N_{\delta_a} & I'_{zx} L_{\delta_r} + I'_x N_{\delta_r} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_a \\ \delta_r \end{bmatrix} \quad (108)$$

As variáveis que compõem as matrizes de estado (A) e controle (B) dos modelos lineares longitudinal e látero-direcional são conhecidas como derivadas de estabilidade dimensionais. Essas derivadas são resultado da condição de voo no ponto operacional (trimagem) e as propriedades geométricas e inerciais da aeronave. É útil, no entanto, caracterizar as aeronaves a partir de valores adimensionais, o que permite comparar aeronaves distintas a partir de parâmetros de mesma grandeza (Nelson, 1998).

As derivadas dimensionais podem ser calculadas a partir das derivadas adimensionais, aplicando as Equações 109 a 111 (Nelson, 1998).

$$X_u = \frac{-(C_{D_u} + 2C_{D_0})QS}{m u_0} \quad X_w = \frac{-(C_{D_\alpha} - C_{L_0})QS}{m u_0} \quad X_{\delta_e} = \frac{C_{X_{\delta_e}}QS}{m u_0} \quad (109)$$

$$Z_u = \frac{-(C_{L_u} + 2C_{L_0})QS}{m u_0} \quad Z_w = \frac{-(C_{L_\alpha} + C_{D_0})QS}{m u_0} \quad (110)$$

$$Z_q = \frac{C_{Z_q} \bar{c} QS}{m 2 u_0} \quad Z_{\delta_e} = \frac{C_{Z_{\delta_e}} QS}{m}$$

$$M_u = \frac{C_{m_u} \bar{c} QS}{I_y u_0} \quad M_w = \frac{C_{m_\alpha} \bar{c} QS}{I_y u_0} \quad M_{\dot{w}} = \frac{C_{m_\alpha} \bar{c}^2 QS}{I_y 2 u_0^2} \quad (111)$$

$$M_q = \frac{C_{m_q} \bar{c}^2 QS}{I_y 2 u_0} \quad M_{\delta_e} = \frac{C_{m_{\delta_e}} \bar{c} QS}{I_y}$$

$$Y_\beta = \frac{C_{y_\beta} QS}{m} \quad Y_p = \frac{C_{y_p} Q S b}{2m u_0} \quad Y_r = \frac{C_{y_r} Q S b}{2m u_0} \quad Y_{\delta_a} = \frac{C_{y_{\delta_a}} QS}{m} \quad Y_{\delta_r} = \frac{C_{y_{\delta_r}} QS}{m} \quad (112)$$

$$L_\beta = \frac{C_{l_\beta} Q S b}{I_x} \quad L_p = \frac{C_{l_p} Q S b^2}{2I_x u_0} \quad L_r = \frac{C_{l_r} Q S b^2}{2I_x u_0} \quad L_{\delta_a} = \frac{C_{l_{\delta_a}} Q S b}{I_x} \quad L_{\delta_r} = \frac{C_{l_{\delta_r}} Q S b}{I_x} \quad (113)$$

$$\begin{aligned} N_\beta &= \frac{C_{n_\beta} Q S b}{I_z} & N_p &= \frac{C_{n_p} Q S b^2}{2I_z u_0} & N_r &= \frac{C_{n_r} Q S b^2}{2I_z u_0} \\ N_{\delta_a} &= \frac{C_{n_{\delta_a}} Q S b}{I_z} & N_{\delta_r} &= \frac{C_{n_{\delta_r}} Q S b}{I_z} \end{aligned} \quad (114)$$

Com o modelo linear que descreve os movimentos longitudinal e látero-direcional da aeronave, análises de estabilidade estática e dinâmica da aeronave podem ser conduzidas. Além disso, o modelo deduzido é amplamente aplicado ao projeto de leis de controle e ferramentas de simulação.

Observando os modelos lineares longitudinal (Equação 107) e látero-direcional (Equação 108), percebe-se que ambos descrevem sistemas de quarta ordem (Nelson, 1998). O movimento longitudinal é composto por dois movimento de segunda ordem, que são conhecidos como:

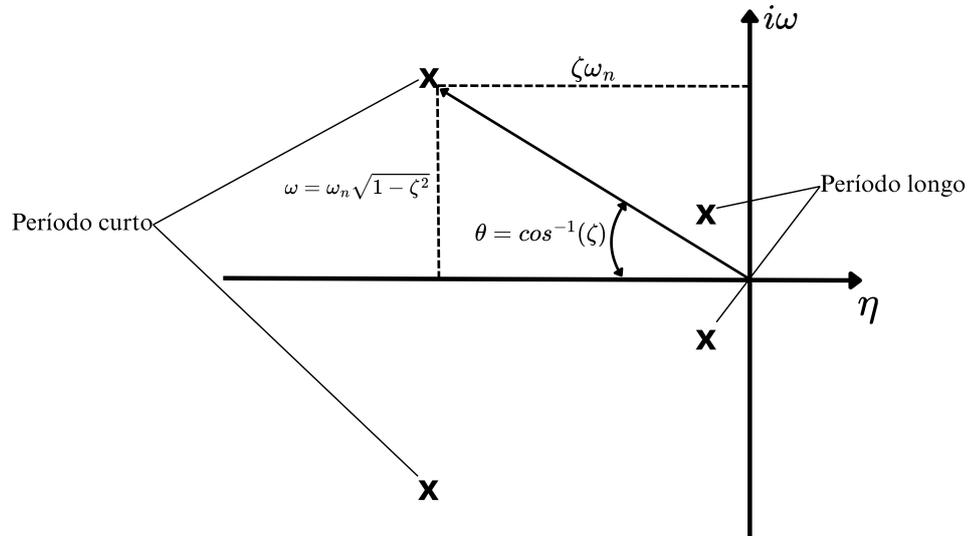
- a) Período longo: sistema de segunda ordem que representa a conversão de energia cinética em energia potencial gravitacional em relação ao ponto de trimagem (equilíbrio). Apresenta mudança de velocidade ( $u$ ), altitude e atitude da aeronave ( $\theta$ ), para um ângulo de ataque aproximadamente constante. Sistema com baixa frequência natural e baixo amortecimento;
- b) Período curto: sistema de segunda ordem para movimento a velocidade constante e com variação do ângulo de ataque ( $\alpha$ ) e taxa de arfagem ( $q$ ). Sistema com alta frequência natural e alto amortecimento.

De acordo com Nelson (1998), o movimento látero-direcional é descrito por um movimento de segunda ordem e dois movimento de primeira ordem, sendo eles:

- a) Rolagem: sistema de primeira ordem, que descreve o amortecimento de rolagem. A variável predominante é a taxa de rolagem ( $p$ );
- b) Rolagem holandesa: sistema de segunda ordem que combina os movimentos de deslizamento e guinada, negligenciando a rolagem. As variáveis dominantes são o ângulo de deslizamento ( $\beta$ ) e taxa de guinada ( $r$ );
- c) Espiral: sistema de primeira ordem que descreve as mudanças nos ângulos de rolagem ( $\phi$ ) e orientação ( $\psi$ ).

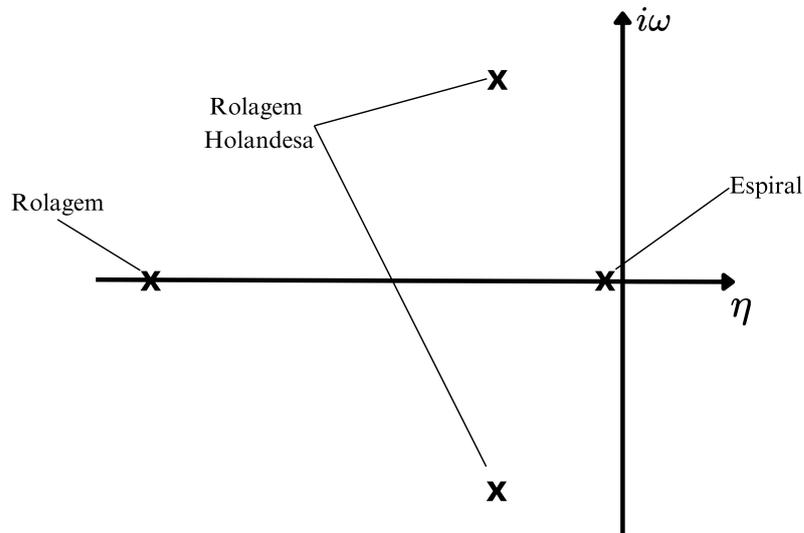
A partir da análise dos mapas de polos, é possível avaliar a estabilidade do sistema conforme a teoria clássica do controle, isto é, se os polos possuírem parte real negativa o sistema é considerado estável. Caso contrário, com a parte real dos polos sendo positiva, o sistema é dito instável (Dorf; Bishop, 2008).

Figura 19 – Mapa de polos do movimento longitudinal



Fonte: Autor (2024).

Figura 20 – Mapa de polos do movimento látero-direcional



Fonte: Autor (2024).

### 2.3.2 Postulação da estrutura do modelo aerodinâmico

As forças e momentos aerodinâmicos atuando na aeronave são resultados da velocidade relativa do escoamento. Para tornar a análise da resposta mais genérica, costuma-se denotar as componentes de forças e momentos em função de coeficientes adimensionais (Equações 115 a 116) (Morelli; Klein, 2006).

$$F_A = QS \begin{bmatrix} C_X \\ C_Y \\ C_Z \end{bmatrix} \quad (115)$$

$$M_A = QS \begin{bmatrix} bC_l \\ \bar{c}C_m \\ bC_n \end{bmatrix} \quad (116)$$

onde  $Q = (1/2)\rho V^2$  é a pressão dinâmica,  $b$  é a envergadura da asa,  $\bar{c}$  a corda média e  $S$  a área de referência (Morelli; Klein, 2006).

Quanto a força propulsiva, assume-se que ela atua ao longo do eixo  $x_B$ , a uma altura  $z_{TCG}$  da linha do CG, resultando nas Equações 117 a 118 para a força e momento, respectivamente (Morelli; Klein, 2006).

$$F_T = \begin{bmatrix} T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (117)$$

$$M_A = QS \begin{bmatrix} 0 \\ z_{TCG}T \\ 0 \end{bmatrix} \quad (118)$$

Conforme descrito na Seção 2.3.1.2 pela Equação 17, a força  $\vec{F}_B^E$  é a resultante entre as forças aero-propulsivas e a força peso, sendo assim, as componentes  $X, Y$  e  $Z$  são iguais as forças aero-propulsivas (Equação 119). De forma similar, pode-se deduzir a Equação 120 para o momento aero-propulsivo (Morelli; Klein, 2006).

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} QSC_X + T \\ QSC_Y \\ QSC_Z \end{bmatrix} \quad (119)$$

$$\begin{bmatrix} L \\ M \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} QSbC_l \\ QS\bar{c}C_m + z_{TCG}T \\ QSbC_n \end{bmatrix} \quad (120)$$

Aplicando a definição de aceleração linear (Equação 121) na Equação 115 e isolando os coeficientes, obtém-se a Equação 122 (Dias, 2012).

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X/m \\ Y/m \\ Z/m \end{bmatrix} \quad (121)$$

$$\begin{bmatrix} C_X \\ C_Y \\ C_Z \end{bmatrix} = \frac{1}{QS} \begin{bmatrix} ma_x - T \\ ma_y \\ ma_z \end{bmatrix} \quad (122)$$

Substituindo as Equações 39, 40 e 41 na Equação 120 e isolando os coeficientes adimensionais, obtém-se a Equação 123 (Dias, 2012).

$$\begin{bmatrix} C_l \\ C_m \\ C_n \end{bmatrix} = \frac{1}{QS} \begin{bmatrix} (I_x \dot{p} - I_{zx}(\dot{r} + pq) - (I_y - I_z)qr)/b \\ (I_y \dot{q} - I_{zx}(r^2 - p^2) - (I_z - I_x)rp - z_{TCG}T)/\bar{c} \\ (I_z \dot{r} - I_{zx}(\dot{p} - qr) - (I_x - I_y)pq)/b \end{bmatrix} \quad (123)$$

Além das forças no referencial do corpo, é de interesse de análises aerodinâmicas expressar as componentes no referencial do vento relativo ( $S_w$ ). A conversão pode ser feita a partir da matriz presente na Equação 124 (Dias, 2012).

$$\begin{bmatrix} -C_D \\ -C_{Y_w} \\ -C_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_X \\ C_Y \\ C_Z \end{bmatrix}_w = \begin{bmatrix} \cos(\alpha)\cos(\beta) & \sin(\beta) & \sin(\alpha)\cos(\beta) \\ -\cos(\alpha)\sin(\beta) & \cos(\beta) & -\sin(\alpha)\sin(\beta) \\ -\sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_X \\ C_Y \\ C_Z \end{bmatrix}_B \quad (124)$$

Os coeficientes aerodinâmicos adimensionais das forças e momentos são usados como variáveis dependentes na regressão linear, com uma equação de regressão (Equação 153) para cada coeficiente. Uma vez que os coeficientes aerodinâmicos não podem ser medidos diretamente durante o voo, eles devem ser calculados a partir das Equações 122 e 124 (Morelli; Klein, 2006). Para o cálculo dos coeficientes, os seguintes dados são necessários:

- Aceleração linear:  $\vec{a} = [a_x, a_y, a_z]^T$ ;
- Tração:  $T$ ;
- Velocidade angular:  $\vec{w} = [p, q, r]^T$ ;
- Aceleração angular:  $\vec{\dot{w}} = [\dot{p}, \dot{q}, \dot{r}]^T$ ;
- Velocidade relativa:  $V$ ;
- Ângulos aerodinâmicos:  $\alpha$  e  $\beta$ ;
- Propriedades inerciais:  $m, I_x, I_y, I_z, I_{xz}$ ;
- Propriedades geométricas:  $S, b, c, z_{TCG}$ ;
- Propriedades atmosféricas:  $\rho$ .

De acordo com Morelli e Klein (2006), erros de medição terão grande impacto nas variáveis dependentes, sendo assim, as seguintes considerações devem ser tomadas:

- Os sensores estão calibrados e o desvio é conhecido;
- As medições são corrigidas para a posição do CG;
- A dinâmica dos sensores é negligível.

Aplicando análise dimensional, os coeficientes adimensionais das forças e momentos aerodinâmicos (Equações 122 e 123) são caracterizados em função de regressores adimensionais, como está descrito na Equação 125 (Morelli; Klein, 2006).

$$C_i = f \left( \alpha, \beta, \delta, \frac{\Omega l}{V}, \frac{\dot{\Omega} l^2}{V^2}, \frac{\dot{V} l}{V^2}, \frac{\omega l}{V}, \frac{\rho V l}{\mu}, \frac{V^2}{lg}, \frac{V}{a}, \frac{m}{\rho l^3}, \frac{I}{\rho l^5}, \frac{tV}{l} \right) \quad (125)$$

para  $i = D, Y, L, l, m, n$ . Onde:

- $\delta$  = deflexão das superfícies de controle [ $rad$ ];
- $\Omega$  = taxa de rotação do eixo de estabilidade [ $rad/s$ ];
- $l$  = comprimento característico [ $m$ ];
- $\omega$  = frequência de oscilação [ $rad/s$ ];
- $a$  = velocidade do som [ $m/s$ ];
- $t$  = tempo [ $s$ ];
- $\omega l/V \equiv Str$  = número de Strouhal;
- $\rho V l/\mu \equiv Re$  = Número de Reynolds;
- $\mu/\rho \equiv \nu$  = viscosidade cinemática [ $m^2/s$ ];
- $V^2/lg \equiv Fr$  = número de Froude;
- $V/a$  = número de Mach.

A fim de simplificar o modelo, algumas considerações são feitas, como: a inércia da aeronave é substancialmente maior que a inércia do ar em torno da aeronave, as propriedades do fluido mudam lentamente, os efeitos do número de Froude são pequenos, o fluido é assumido ser quasi-permanente e em condições de baixo número de Mach. Além disso, para uma aeronave em escala real, os efeitos do número de Reynolds são desconsiderados. Já em relação aos efeitos do movimento angular e oscilação forçada, eles são usualmente modelados como função das velocidades e acelerações angulares e ângulos aerodinâmicos. Com essas considerações, a estrutura convencional de um modelo aerodinâmico assume a forma da Equação 126 (Morelli; Klein, 2006).

$$C_i = f \left( \alpha, \beta, \delta, \frac{V}{V_0}, \frac{pb}{2V}, \frac{q\bar{c}}{2V}, \frac{rb}{2V}, \frac{\dot{\alpha}\bar{c}}{2V}, \frac{\dot{\beta}b}{2V} \right) \quad (126)$$

onde  $i = D, Y, L, l, m, n$ ,  $V_0$  é a velocidade relativa no ponto operacional e  $\delta$  são todas as entradas de controle da aeronave (Morelli; Klein, 2006).

A decomposição das variáveis dependentes em uma função de regressores leva em consideração os conceitos de separabilidade e superposição, comumente adotados para modelos lineares desacoplados (Morelli; Klein, 2006).

Observando as equações linearizadas para as componentes de força e momento aeropropulsivas (Equações 89 a 94), determina-se os regressores para cada variável dependente (Equações 127 a 132) (Morelli; Klein, 2006).

$$C_X = f(\Delta u, w, \Delta \delta_e) + C_{X_0} \quad (127)$$

$$C_Y = f(v, p, r, \Delta \delta_r) + C_{Y_0} \quad (128)$$

$$C_Z = f(\Delta u, w, \dot{w}, q, \Delta \delta_e) + C_{Z_0} \quad (129)$$

$$C_l = f(v, p, r, \Delta \delta_r, \Delta \delta_a) + C_{l_0} \quad (130)$$

$$C_m = f(\Delta u, w, \dot{w}, q, \Delta \delta_e) + C_{m_0} \quad (131)$$

$$C_n = f(v, p, r, \Delta \delta_r, \Delta \delta_a) + C_{n_0} \quad (132)$$

Além disso, os coeficientes de força e momentos expressos no referencial aerodinâmico podem ser decompostos nos regressores das Equações 133, 134, 135 e 131.

$$C_D = f(V, \Delta \alpha, q, \Delta \delta_e) + C_{D_0} \quad (133)$$

$$C_{Y_w} = f(v, p, r, \Delta \delta_r) + C_{Y_0} \quad (134)$$

$$C_L = f(V, \Delta \alpha, \dot{\alpha} q, \Delta \delta_e) + C_{L_0} \quad (135)$$

$$C_m = f(V, \Delta \alpha, \dot{\alpha} q, \Delta \delta_e) + C_{m_0} \quad (136)$$

Escrevendo as equações dos modelos lineares no referencial do corpo e no referencial aerodinâmico, assumindo os conceitos de linearidade e superposição, resulta-se nas Equações 137 a 144.

$$C_X = C_{X_0} + C_{X_u} \frac{\Delta u}{u_0} + C_{X_w} \frac{w}{u_0} + C_{X_q} \frac{q\bar{c}}{2u_0} + C_{X_{\delta_e}} \Delta \delta_e \quad (137)$$

$$C_Y = C_{Y_0} + C_{Y_\beta} \Delta \beta + C_{Y_p} \frac{pb}{2V_0} + C_{Y_r} \frac{rb}{2V_0} + C_{Y_{\delta_r}} \Delta \delta_r \quad (138)$$

$$C_Z = C_{Z_0} + C_{Z_u} \frac{\Delta u}{u_0} + C_{Z_w} \frac{w}{u_0} + C_{Z_{\dot{w}}} \frac{\dot{w}\bar{c}}{2u_0^2} + C_{Z_q} \frac{q\bar{c}}{2u_0} + C_{Z_{\delta_e}} \Delta\delta_e \quad (139)$$

$$C_D = C_{D_0} + C_{D_u} \frac{\Delta u}{u_0} + C_{D_w} \frac{w}{u_0} + C_{D_{\dot{w}}} \frac{\dot{w}\bar{c}}{2u_0^2} + C_{D_q} \frac{q\bar{c}}{2V_0} + C_{D_{\delta_e}} \Delta\delta_e \quad (140)$$

$$C_L = C_{L_0} + C_{L_u} \frac{\Delta u}{u_0} + C_{L_w} \frac{w}{u_0} + C_{L_{\dot{w}}} \frac{\dot{w}\bar{c}}{2u_0^2} + C_{L_q} \frac{q\bar{c}}{2V_0} + C_{L_{\delta_e}} \Delta\delta_e \quad (141)$$

$$C_l = C_{l_0} + C_{l_\beta} \Delta\beta + C_{l_p} \frac{pb}{2V_0} + C_{l_r} \frac{rb}{2V_0} + C_{l_{\delta_r}} \Delta\delta_r + C_{l_{\delta_a}} \Delta\delta_a \quad (142)$$

$$C_m = C_{m_0} + C_{m_u} \frac{\Delta u}{u_0} + C_{m_w} \frac{w}{u_0} + C_{m_{\dot{w}}} \frac{\dot{w}\bar{c}}{2u_0^2} + C_{m_q} \frac{q\bar{c}}{2u_0} + C_{m_{\delta_e}} \Delta\delta_e \quad (143)$$

$$C_n = C_{n_0} + C_{n_\beta} \Delta\beta + C_{n_p} \frac{pb}{2V_0} + C_{n_r} \frac{rb}{2V_0} + C_{n_{\delta_r}} \Delta\delta_r + C_{n_{\delta_a}} \Delta\delta_a \quad (144)$$

Avaliando as Equações 5, 6 e 7 a partir da teoria das pequenas perturbações, considere-se que  $u \approx V$  e  $w/u \approx \alpha$ . Sendo assim, as Equações 140, 141 e 143 podem ser rescritas no formato das Equações 146, 145 e 147. Esta notação é mais comum entre a bibliografia, sendo assim, será a adotada neste trabalho.

$$C_D = C_{D_0} + C_{D_V} \frac{\Delta V}{V_0} + C_{D_\alpha} \Delta\alpha + C_{D_{\dot{\alpha}}} \frac{\dot{\alpha}\bar{c}}{2V_0} + C_{D_q} \frac{q\bar{c}}{2V_0} + C_{D_{\delta_e}} \Delta\delta_e \quad (145)$$

$$C_L = C_{L_0} + C_{L_V} \frac{\Delta V}{V_0} + C_{L_\alpha} \Delta\alpha + C_{L_{\dot{\alpha}}} \frac{\dot{\alpha}\bar{c}}{2V_0} + C_{L_q} \frac{q\bar{c}}{2V_0} + C_{L_{\delta_e}} \Delta\delta_e \quad (146)$$

$$C_m = C_{m_0} + C_{m_V} \frac{\Delta V}{V_0} + C_{m_\alpha} \Delta\alpha + C_{m_{\dot{\alpha}}} \frac{\dot{\alpha}\bar{c}}{2V_0} + C_{m_q} \frac{q\bar{c}}{2V_0} + C_{m_{\delta_e}} \Delta\delta_e \quad (147)$$

Os parâmetros multiplicando os regressores das Equações 137 a 147 são denominados de derivadas de estabilidade e derivadas de controle. As derivadas de estabilidade envolvem derivadas parciais em relação aos estados da aeronave, enquanto que as derivadas de controle são derivadas parciais em relação aos comandos de controle (Morelli; Klein, 2006).

As derivadas de estabilidade são, em seguida, categorizadas em: derivadas de estabilidade estática ( $u, v, w, V, \alpha$  e  $\beta$ ), derivadas de estabilidade dinâmica ( $p, q$  e  $r$ ) e derivadas de regime transiente ( $\dot{w}$  e  $\dot{\alpha}$ ).

Aplicando os métodos de regressão da Seção 2.3.3, é possível estimar as derivadas de estabilidade e controle de aeronaves de asa fixa, a partir da observação dos comandos de entrada e da resposta dinâmica da aeronave.

Uma vez estimadas as derivadas adimensionais, é possível substituí-las nas Equações 109 e 111 para calcular as derivadas dimensionais e, finalmente, obter os modelos longitudinal e látero-direcional da aeronave.

### 2.3.3 Estimação dos parâmetros do modelo

Considerando que a saída de um processo genérico é denotado por uma variável dependente  $y$ , que depende de  $n$  variáveis independentes, denotadas por  $X_1, \dots, X_n$ , assume-se que a resposta de  $y$  pode ser modelada pela Equação 148.

$$y = f(\xi_1, \dots, \xi_n, \theta_1, \dots, \theta_n) \quad (148)$$

onde os termos  $\xi_i$  são funções das variáveis independentes (Equação 149), sendo denominados de regressores. É possível que alguns regressores sejam iguais as variáveis independentes (Morelli; Klein, 2006).

$$\xi_i = f(X_i) \quad (149)$$

A Equação 148 é assumida como bem definida e  $\theta_1, \dots, \theta_n$  são os parâmetros que ponderam a influência de cada variável independente  $X_1, \dots, X_N$  na resposta  $y$  (Rao *et al.*, 2008).

No entanto, devido a natureza estocástica entre a variável dependente e as variáveis independentes, isto é, uma relação não é exata, uma componente de erro ( $\nu$ ) deve ser adicionada à Equação 148, resultando na Equação 150 (Rao *et al.*, 2008).

$$z = f(\xi_1, \dots, \xi_n, \theta_1, \dots, \theta_n) + \nu \quad (150)$$

onde  $z$  representa a saída observada, corrompida pelo fator de erro  $\nu$  advindo da modelagem ou da medição (Morelli; Klein, 2006).

Para o caso onde  $\nu = 0$ , a relação entre a variável dependente e independente se dá por meio de um modelo matemático, contudo, quando  $\nu \neq 0$ , a relação se dá por meio de um modelo estatístico (Rao *et al.*, 2008).

O modelo descrito pela Equação 150 é dito linear se a derivada parcial de  $z$  em relação a cada um dos parâmetros  $\theta_1, \dots, \theta_n$  é independente do respectivo parâmetro, caso contrário, é não linear (Rao *et al.*, 2008).

De modo geral, para um modelo linear, a Equação 148 é expressa conforme a Equação 151.

$$z = \theta_1 \xi_1 + \dots + \theta_n \xi_n + \nu \quad (151)$$

onde  $f(\xi_1, \dots, \xi_n, \theta_1, \dots, \theta_n) = \theta_1 \xi_1 + \dots + \theta_n \xi_n$ .

Além do erro de medição ( $\nu$ ), um termo que modela o desvio (bias) da variável dependente ( $\theta_0$ ) é adicionado à Equação 151, resultando na Equação 152 (Morelli; Klein, 2006).

$$z = \theta_0 + \theta_1 \xi_1 + \dots + \theta_n \xi_n + \nu \quad (152)$$

Quando há apenas uma variável independente no modelo linear de regressão, ele é denominado de simples. Quando mais de uma variável independente está presente, então o

modelo linear de regressão é reconhecido como de multivariável (Rao *et al.*, 2008). Para o caso de multivariável, é conveniente escrever a Equação 151 no formato matricial (Equação 153).

$$z = X\theta + \nu \quad (153)$$

Para uma quantidade  $N$  de medições, à Equação 153 assume o formato matricial conforme a Equação 154.

$$\begin{bmatrix} z(1) \\ \vdots \\ z(N) \end{bmatrix}_{N \times 1} = \begin{bmatrix} 1 & \xi_1(1) & \dots & \xi_n(1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \xi_1(N) & \dots & \xi_n(N) \end{bmatrix}_{N \times n_p} \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_n \end{bmatrix}_{n_p \times 1} + \begin{bmatrix} \nu(1) \\ \vdots \\ \nu(N) \end{bmatrix}_{N \times 1} \quad (154)$$

onde,

- $z$  é o vetor de medições da saída de ordem  $N \times 1$ ;
- $\theta$  é o vetor de parâmetros desconhecidos de ordem  $n_p \times 1$ , onde  $n_p = n + 1$ ;
- $X$  é a matriz de regressores de ordem  $N \times n_p$ ;
- $\nu$  é o vetor com os erros de medição de ordem  $N \times 1$ .

O erro de medição ( $\nu$ ) é assumido como aleatório e não-correlacionado com as variáveis independentes. Além disso, é tido como ruído branco, isto é, de média nula e variância igual a  $\sigma^2$  (Equação) (Neto, 2005).

$$\begin{aligned} E(\nu) &= 0 \\ Var(\nu) &= \sigma^2 I \end{aligned} \quad (155)$$

Dessa forma, o resíduo para  $n$  amostras é dado por:

$$\nu = z - X\theta \quad (156)$$

Como as variáveis independentes são pré-determinadas (ou medidas) e a saída  $z$  também é considerada mensurável, a resposta do modelo depende apenas da determinação dos parâmetros  $\theta_1, \dots, \theta_N$  (Rao *et al.*, 2008).

Sendo assim, a modelagem estatística procura desenvolver métodos para determinar os parâmetros  $\theta_1, \dots, \theta_N$  a partir da observação de  $y$  e  $X_1, \dots, X_N$ . Diferentes métodos de estimação podem ser usados, entre eles estão os mínimos quadrados e máxima verossimilhança (Rao *et al.*, 2008).

Comparando as Equações 137 a 147 com a Equação 153, é possível reescrevê-las usando a notação das equações de regressão em notação matricial, mas apenas as Equações no

referencial aerodinâmico serão consideradas, isto é, Equações 138, 142, 144, 145, 146 e 147. O resultado são as Equações 157 a 162.

$$\begin{bmatrix} C_D(1) \\ \vdots \\ C_D(N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\Delta V(1)}{V_0} & \Delta\alpha(1) & \frac{\dot{\alpha}(1)\bar{c}}{2V_0} & \frac{q(1)\bar{c}}{2u_0} & \Delta\delta_e(1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \frac{\Delta V(N)}{V_0} & \Delta\alpha(N) & \frac{\dot{\alpha}(N)\bar{c}}{2V_0} & \frac{q(N)\bar{c}}{2u_0} & \Delta\delta_e(N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{D_0} \\ C_{D_V} \\ C_{D_\alpha} \\ C_{D_{\dot{\alpha}}} \\ C_{D_q} \\ C_{D_{\delta_e}} \end{bmatrix} \quad (157)$$

$$\begin{bmatrix} C_L(1) \\ \vdots \\ C_L(N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\Delta V(1)}{V_0} & \Delta\alpha(1) & \frac{\dot{\alpha}(1)\bar{c}}{2V_0} & \frac{q(1)\bar{c}}{2u_0} & \Delta\delta_e(1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \frac{\Delta V(N)}{V_0} & \Delta\alpha(N) & \frac{\dot{\alpha}(N)\bar{c}}{2V_0} & \frac{q(N)\bar{c}}{2u_0} & \Delta\delta_e(N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{L_0} \\ C_{L_V} \\ C_{L_\alpha} \\ C_{L_{\dot{\alpha}}} \\ C_{L_q} \\ C_{L_{\delta_e}} \end{bmatrix} \quad (158)$$

$$\begin{bmatrix} C_m(1) \\ \vdots \\ C_m(N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\Delta V(1)}{V_0} & \Delta\alpha(1) & \frac{\dot{\alpha}(1)\bar{c}}{2V_0} & \frac{q(1)\bar{c}}{2u_0} & \Delta\delta_e(1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \frac{\Delta V(N)}{V_0} & \Delta\alpha(N) & \frac{\dot{\alpha}(N)\bar{c}}{2V_0} & \frac{q(N)\bar{c}}{2u_0} & \Delta\delta_e(N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{m_0} \\ C_{m_V} \\ C_{m_\alpha} \\ C_{m_{\dot{\alpha}}} \\ C_{m_q} \\ C_{m_{\delta_e}} \end{bmatrix} \quad (159)$$

$$\begin{bmatrix} C_Y(1) \\ \vdots \\ C_Y(N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta\beta(1) & \frac{p(1)b}{2V_0} & \frac{r(1)b}{2V_0} & \Delta\delta_r(1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \Delta\beta(N) & \frac{p(N)b}{2V_0} & \frac{r(N)b}{2V_0} & \Delta\delta_r(N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{Y_0} \\ C_{Y_\beta} \\ C_{Y_p} \\ C_{Y_r} \\ C_{Y_{\delta_r}} \end{bmatrix} \quad (160)$$

$$\begin{bmatrix} C_l(1) \\ \vdots \\ C_l(N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta\beta(1) & \frac{p(1)b}{2V_0} & \frac{r(1)b}{2V_0} & \Delta\delta_r(1) & \Delta\delta_a(1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \Delta\beta(N) & \frac{p(N)b}{2V_0} & \frac{r(N)b}{2V_0} & \Delta\delta_r(N) & \Delta\delta_a(N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{l_0} \\ C_{l_\beta} \\ C_{l_p} \\ C_{l_r} \\ C_{l_{\delta_r}} \\ C_{l_{\delta_a}} \end{bmatrix} \quad (161)$$

$$\begin{bmatrix} C_n(1) \\ \vdots \\ C_n(N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta\beta(1) & \frac{p(1)b}{2V_0} & \frac{r(1)b}{2V_0} & \Delta\delta_r(1) & \Delta\delta_a(1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \Delta\beta(N) & \frac{p(N)b}{2V_0} & \frac{r(N)b}{2V_0} & \Delta\delta_r(N) & \Delta\delta_a(N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{n_0} \\ C_{n_\beta} \\ C_{n_p} \\ C_{n_r} \\ C_{n_{\delta_r}} \\ C_{n_{\delta_a}} \end{bmatrix} \quad (162)$$

### 2.3.3.1 O problema clássico de mínimos quadrados

Avaliando a Equação 153, e considerando  $\Theta$  como o conjunto de todos os possíveis valores de  $\theta$ , onde  $\Theta = \mathfrak{R}^N$  é um espaço real Euclidiano, o objetivo de aplicar a regressão por mínimos quadrados é encontrar o vetor  $\hat{\theta}$ , pertencente à  $\Theta$ , que minimize a soma do quadrado dos resíduos (Equação 156), conforme a Equação 163 (Rao *et al.*, 2008).

$$J(\theta) = \sum_{i=1}^N \nu_i^2 = \nu^T \nu = (z - X\theta)^T (z - X\theta) \quad (163)$$

Na Equação 163 sempre haverá mínimo, uma vez que é uma função real, convexa e diferenciável. Rearranjando os termos da Equação 163 obtém-se a Equação 164 (Rao *et al.*, 2008).

$$J(\theta) = z^T z + \theta^T X^T X \theta - 2\theta^T X^T z \quad (164)$$

A fim de encontrar o mínimo da Equação 164, é necessário encontrar a primeira e segunda derivada, Equações 165 e 166, respectivamente (Rao *et al.*, 2008).

$$\frac{\partial J(\theta)}{\partial \theta} = 2X^T X \theta - 2X^T z \quad (165)$$

$$\frac{\partial^2 J(\theta)}{\partial \theta^2} = 2X^T X \quad (166)$$

Igualando a primeira derivada à 0, a fim de encontrar o mínimo da função, obtém-se a Equação 167, também denominada de equação normal (Rao *et al.*, 2008).

$$X^T X \hat{\theta} = X^T z \quad (167)$$

Se  $X$  for uma matriz de posto completo, então  $X^T X$  é positivamente definida, logo  $(X^T X)^{-1}$  existe. Sendo assim, a solução para Equação 167 é dada pela Equação 168 e a saída estimada é calculada pela Equação 169 (Rao *et al.*, 2008).

$$\hat{\theta} = (X^T X)^{-1} X^T z \quad (168)$$

$$\hat{y} = X \hat{\theta} \quad (169)$$

O estimador de mínimos quadrados foi deduzido a partir das hipóteses de que o modelo possui parâmetros lineares, os regressores são determinísticos e o ruído branco de medição possui variância contante.

### 2.3.3.2 Cálculo do erro de ajuste do modelo

A matriz de covariância dos parâmetros estimados  $\hat{\theta}$  é descrita pela Equação 170, considerando que  $\theta = (X^T X)^{-1} X^T y$  (Morelli; Klein, 2006).

$$\begin{aligned} Cov(\hat{\theta}) &\equiv E[(\hat{\theta} - \theta)(\hat{\theta} - \theta)^T] \\ &= E\{(X^T X)^{-1} X^T (z - y)(z - y)^T X (X^T X)^{-1}\} \\ &= (X^T X)^{-1} X^T Var(\nu) X (X^T X)^{-1} \end{aligned} \quad (170)$$

Manipulando a Equação 170 e substituindo o resultado da Equação 155, encontra-se a matriz  $Cov(\hat{\theta})$  conforme descrito na Equação 171.

$$Cov(\hat{\theta}) = \sigma^2 (X^T X)^{-1} \quad (171)$$

Para o cálculo de  $Cov(\hat{\theta})$  se faz necessário conhecer o valor da variância do erro ( $\sigma^2$ ), no entanto, esse valor é normalmente desconhecido, sendo preciso estimá-lo a partir dos dados medidos aplicando à Equação 172. O valor de  $s^2$  é comumente chamado de erro de ajuste (Morelli; Klein, 2006).

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N [z(i) - \bar{z}]^2 \equiv s^2 \quad (172)$$

onde  $\bar{z}$  é o valor médio das medições  $z$ .

$$\bar{z} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N z(i) \quad (173)$$

É necessário destacar que uma vez que  $s^2$  esta substituindo  $\sigma^2$  nos cálculos, a distribuição de  $\nu$ , até então sendo considerada normal, passa a ser uma distribuição do tipo T (Morelli; Klein, 2006).

Outra métrica importante para quantificar a qualidade do ajuste de  $\hat{y}$  em relação à  $z$  é o coeficiente de determinação  $R^2$ . Esse parâmetro consiste na segregação em três parâmetros do erro: soma dos quadrados total ( $SS_T$ ), soma dos quadrados da regressão ( $SS_R$ ) e a soma dos quadrados dos resíduos ( $SS_E$ ). Essas somas são definidas pelas Equações 174, 175 e 176, respectivamente (Morelli; Klein, 2006).

$$SS_T = \sum_{i=1}^N [z(i) - \bar{z}]^2 = z^T z - N \bar{z}^2 \quad (174)$$

$$SS_R = \sum_{i=1}^N [\hat{y}(i) - \bar{z}]^2 \quad (175)$$

$$SS_E = \sum_{i=1}^N [z(i) - \hat{y}(i)]^2 = z^T z - \hat{\theta}^T X^T z \quad (176)$$

Os três parâmetros se relacionam pela Equação 177, que mostra que a soma total dos quadrados dos erros em torno da média, pode ser dividida na soma dos quadrados do erro do modelo em torno da média e na soma dos quadrados do erro das medições em relação ao modelo (Morelli; Klein, 2006).

$$SS_T = SS_R + SS_E \quad (177)$$

Por fim, o parâmetro  $R^2$  pode ser calculado pela Equação 178. Os valores de  $R^2$  variam entre 0 e 1, com 1 sendo um ajuste perfeito do modelo (Morelli; Klein, 2006). Esse parâmetro também pode ser expresso em porcentagem, notação que será utilizada neste trabalho.

$$R^2 = \frac{SS_R}{SS_T} = 1 - \frac{SS_E}{SS_T} = \frac{\hat{\theta}^T X^T z - N\bar{z}^2}{z^T z - N\bar{z}^2} \quad (178)$$

Além de avaliar o ajuste do modelo, é necessário avaliar a qualidade das estimativas dos parâmetros do modelo linear. Essa análise é comumente feita por meio de intervalos de confiança (Morelli; Klein, 2006).

Inicialmente, é necessário assumir que erros de medição ( $\nu$ ) possuem distribuição normal  $N(0, \sigma^2 I)$ . Por conta da linearidade do método, as relações estabelecidas pela Equação 179 podem ser feitas (Morelli; Klein, 2006).

$$\begin{aligned} \hat{\theta} &\text{ é } N(\theta, \sigma^2 (X^T X)^{-1}) \\ \hat{y} &\text{ é } N(X\theta, \sigma^2 X (X^T X)^{-1} X^T) \end{aligned} \quad (179)$$

O intervalo de confiança para os parâmetros estimados pode ser calculado a partir da Equação 180, onde  $t(\alpha/2, N - n_p)$  representa a distribuição t. Será considerado um nível de confiança de 95% e  $N - n_p > 100$ , resultando em  $t(\alpha/2, N - n_p) \approx 1,96$ , resultando na Equação (Morelli; Klein, 2006).

$$\hat{\theta}_j - t(\alpha/2, N - n_p)s(\hat{\theta}_j) \leq \theta_j \leq \hat{\theta}_j + t(\alpha/2, N - n_p)s(\hat{\theta}_j) \quad (180)$$

$$\theta_j = \hat{\theta}_j \pm 1,96s(\hat{\theta}_j) \quad j = 1, 2, \dots, n_p \quad (181)$$

Sendo assim, com o resultado acima, estima-se que o valor verdadeiro do parâmetro  $\theta_j$  esteja dentro do intervalo  $[\hat{\theta}_j - 1,96s(\hat{\theta}_j), \hat{\theta}_j + 1,96s(\hat{\theta}_j)]$ . De forma similar, o intervalo de confiança para a saída estimada  $\hat{y}$  é descrito pela Equação 182 (Morelli; Klein, 2006).

$$y(i) = \hat{y}(i) \pm t(\alpha/2, N - n_p)s(\hat{\theta}_j)s[y(\hat{i})] = \hat{y}(i) \pm 1,96s \quad (182)$$

## 2.4 INSTRUMENTAÇÃO E FILTRAGEM

A instrumentação da aeronave visa descrever os sensores utilizados para observar as entradas de controle e a resposta dinâmica.

As entradas de controle, já apresentadas na Equação 52 e Figura 16, são divididas em duas categorias: deflexões das superfícies de controle e tração. As deflexões das superfícies de controle são medidas por um potenciômetro ligado a cada superfície de controle, responsável por gerar um sinal de tensão proporcional a deflexão angular (Morelli; Klein, 2006).

A tração, por sua vez, não é medida diretamente em voo, ao invés disso, ensaios em solo são feitos acoplando o conjunto motopropulsor a uma célula de carga, obtendo a tração para uma velocidade relativa estática. Medindo os comandos de atuação do motor, seja de abertura do carburador para motores a combustão ou a corrente drenada para motores elétricos, e a velocidade relativa é possível realizar uma regressão múltipla e relacionar esses fatores à tração medida pela célula de carga. Em voo, esses mesmos parâmetros são medidos e então aplicados no modelo estimado de tração.

A resposta dinâmica, já descrita na Seção 2.3.2, pode ser quantificada pela observação da velocidade relativa, velocidade angular, aceleração linear e ângulos aerodinâmicos.

A velocidade relativa ( $V$ ) do ar é medida por meio de sensores de pressão diferencial, que para essa aplicação são conhecidos como tubo de pitot. Esses sensores devem sermeticulosamente calibrados em túnel de vento. Além disso, caso o tubo de pitot esteja deslocado em relação ao centro de gravidade da aeronave, correções devem ser feitas (Morelli; Klein, 2006).

As velocidades angulares ( $p$ ,  $q$  e  $r$ ) são medidas usando giroscópios alinhados com os eixos do sistema  $S_B$ , com um giroscópio para cada eixo. Em teoria, os giroscópios não necessitam estar alinhados com os eixos do corpo, uma vez que a velocidade angular é a mesma para todos os pontos de um corpo rígido. No entanto, na prática, a aeronave possui graus de liberdade estrutural (elasticidade), sendo assim, é necessário alinhá-los com os eixos e posicioná-los sobre o CG (Morelli; Klein, 2006).

As acelerações lineares ( $a_x$ ,  $a_y$  e  $a_z$ ) são medidas por meio de acelerômetros que, normalmente, estão integrados em um único módulo com os giroscópios, formando uma unidade de medição inercial (Inertial Measurement Unit - IMU). De forma similar aos giroscópios, os acelerômetros devem estar posicionados no CG e alinhados com os eixos do sistema  $S_B$ , tendo um acelerômetro para cada eixo. Os acelerômetros, no entanto, costumam ter seus dados contaminados por ruídos de processo (como a vibração do motor e estrutural) e de medição (qualidade dos sensores), necessitando ser submetido a filtragem (Morelli; Klein, 2006).

Por fim, os ângulos aerodinâmicos são medidos usando *wind-vanes*, que nada mais são do que potenciômetros conectados a uma aleta aerodinâmica que se mantém alinhada ao escoamento relativo, sendo necessário um sensor para medir o ângulo de ataque ( $\alpha$ ) e outro para o ângulo de deslizamento ( $\beta$ ) (Morelli; Klein, 2006).

Outras propriedades que não são obrigatórias para identificação da aeronave, mas são úteis para validação do modelo são: a posição inercial da aeronave ( $x_E, y_E, z_E$ ) e a pressão

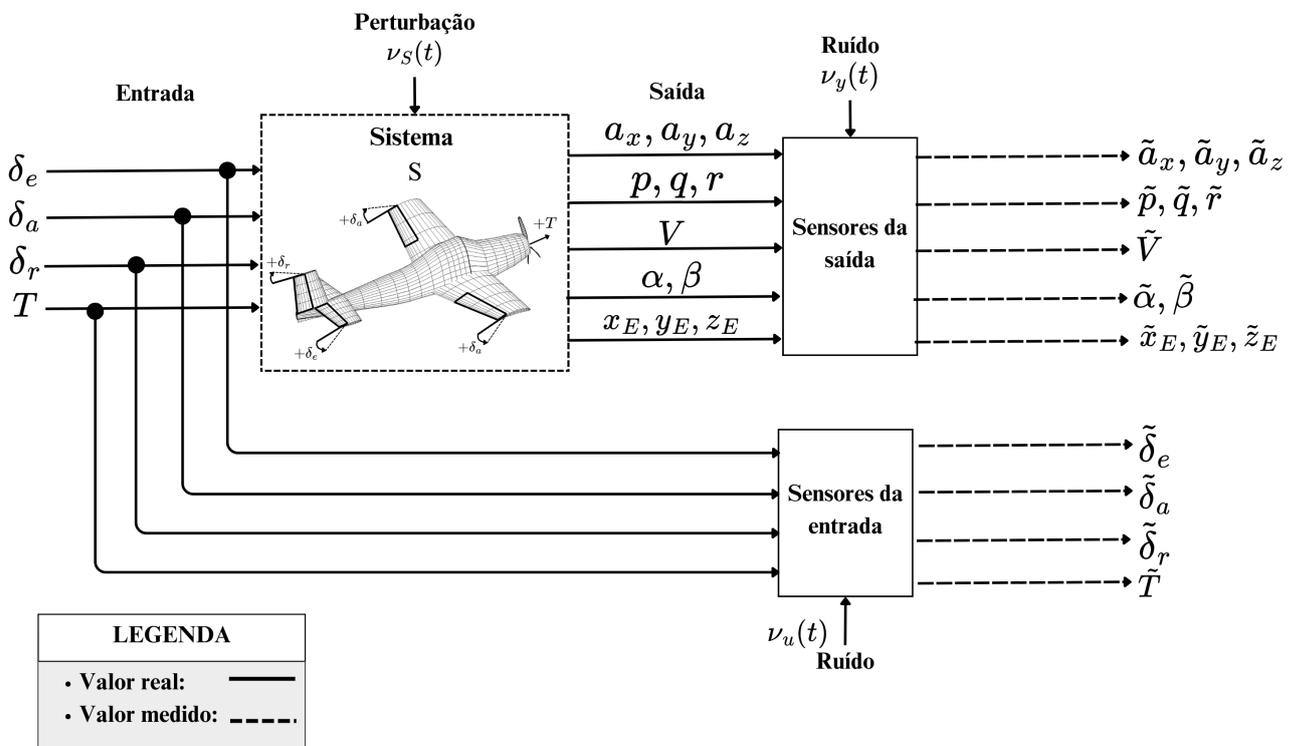
atmosférica. A posição inercial da aeronave pode ser medida usando um GPS, enquanto a pressão atmosférica pode ser medida usando um barômetro.

Todas as variáveis, no entanto, estão submetidas a ruídos, seja por conta de perturbações no processo ou por qualidade da medição. A Equação 183 demonstra a contaminação por ruído ( $\nu$ ) de uma variável genérica ( $\gamma$ ) (Morelli; Klein, 2006).

$$\bar{\gamma} = \gamma + \nu \quad (183)$$

A Figura 21 apresenta uma visão geral da instrumentação de uma aeronave para aplicação das técnicas de identificação.

Figura 21 – Visão geral da instrumentação



Fonte: Autor (2024).

### 2.4.1 Diferenciação numérica

Além dos valores observados a partir dos sensores durante os ensaios em voo, algumas propriedades são necessárias para a estimação paramétrica, mas não são medidas diretamente, como é o caso das variáveis  $\dot{p}$ ,  $\dot{q}$  e  $\dot{r}$ , utilizadas na Equação 123, de  $\dot{w}$ , utilizado nas Equações 139 e 143, e  $\dot{\alpha}$ , empregado nas Equações 146 e 147.

Para a obtenção desses dados, foi aplicada o método das diferenças finitas para as variáveis observáveis  $p$ ,  $q$ ,  $r$ ,  $w$  e  $\alpha$ , respectivamente. De acordo com Machado (2022), o método

das diferenças finitas é um dos mais utilizados na derivação numérica de variáveis devido a sua simplicidade, sendo baseado no teorema de Taylor.

O método das diferenças finitas é descrito como uma perturbação pequena e finita da função a ser derivada, em relação a um ponto operacional (ponto de referência). A definição da derivada da função  $f(x_0)$  em torno de  $x_0$  é dada pelo limite expresso na Equação 184 (Machado, 2022).

$$\frac{\delta f(x_0)}{\delta x_i} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \delta l_i) - f(x_0)}{\delta l_i} \quad (184)$$

onde  $\delta l_i$  é o incremento que causa a pequena perturbação na função.

O método das diferenças finitas possui algumas variações, a depender da perturbação inserida na Equação 184. Entre as principais variações estão a diferenciação por passo à frente e por passo central (Machado, 2022).

A diferenciação com passo à frente, avalia o gradiente de uma função  $\nabla f$  no ponto  $x = x_0$  em relação a um ponto  $x = x_i$ , imediatamente a frente de  $x_0$ . Para que a diferenciação seja possível, a função  $f$  deve ser diferenciável no ponto  $x = x_0$ . A Equação 185 apresenta a diferenciação finita por passo à frente (Machado, 2022).

$$\frac{\delta f(x_0)}{\delta x_i} \approx \frac{f(x_0 + \varepsilon l_i) - f(x_0)}{\varepsilon l_i} \quad (185)$$

onde  $\varepsilon$  é a perturbação, tal que  $\varepsilon > 0$ , e  $l_i$  é um vetor unitário que possui valor nulo para todo  $l \neq l_i$ .

A diferenciação central, por sua vez, aplica a diferença finita considerando valores imediatamente à frente e atrás do valor de referência  $x_0$ , conforme a Equação 186 (Machado, 2022).

$$\frac{\delta f(x_0)}{\delta x_i} \approx \frac{f(x_0 + \varepsilon l_i) - f(x_0 - \varepsilon l_i)}{2\varepsilon l_i} \quad (186)$$

## 2.4.2 Filtragem dos dados de voo

A fim de minimizar a razão sinal/ruído, alguns métodos de suavização de dados podem ser aplicados, permitindo extrair mais informação útil dos dados de voo. Alguns métodos de suavização dos dados são:

- Filtro de média;
- Filtro média móvel;
- Filtro passa-baixas.

O filtro de média visa suavizar os dados a partir do cálculo da média do conjunto de dados (Equação 187).

$$\bar{x}_k = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_k}{k} \quad (187)$$

Conforme o tamanho do conjunto de dados aumenta, calcular a média por meio da Equação 187 se torna um processo custoso computacionalmente, por isso, a expressão recursiva da Equação 187 é deduzida (Equação 188).

$$\bar{x}_k = \lambda \bar{x}_{k-1} + (1 - \lambda)x_k \quad (188)$$

onde  $\lambda = \frac{k-1}{k}$ .

A vantagem de aplicar uma equação no formato recursivo é que ela aproveita do resultado da iteração anterior ( $\bar{x}_{k-1}$ ) e apenas adiciona a influência dos novos dados ( $x_k$ ) (Kim, 2011).

Observando a Equação 188, percebe-se que ela pondera a influência do valor da média na iteração anterior e do novo conjunto de dados por meio do fator  $\lambda$ . Contudo, conforme o tamanho do conjunto de dados cresce ao longo do tempo ( $k \rightarrow \infty$ ) o valor de  $\lambda$  tende a 1. Isso significa que o novo conjunto de dados terá pouca influência no cálculo da média (Kim, 2011). Essa característica do filtro de média resulta em uma dificuldade do filtro em acompanhar a dinâmica do sistema (Kim, 2011).

A fim de conseguir captar a dinâmica do sistema e suavizar os dados, aplica-se a média móvel que, diferentemente do filtro de média, não realiza a média de todo o conjunto de dados, mas seleciona uma janela de dados e calcula a média aritmética para esse intervalo. Dessa forma, dados antigos são descartados conforme novos dados são adicionados ao conjunto (Kim, 2011).

A média móvel é calculada por meio da Equação 189, onde  $n$  é o tamanho da janela de dados a ser calculada.

$$\bar{x}_k = \bar{x}_{k-1} + \frac{x_k - x_{k-n}}{n} \quad (189)$$

Para uma janela de dados grande ( $n \rightarrow \infty$ ), o valor da média na iteração atual tende para o valor na iteração passada. Já para o caso contrário ( $n \rightarrow 1$ ), a influência dos novos dados é amplificada. Sendo assim, regulando o tamanho da janela de dados é possível ponderar a influência dos novos dados no cálculo da média e, conseqüentemente, na qualidade da suavização dos dados (Kim, 2011).

Contudo, analisando a Equação 189, percebe-se que todas as amostras possuem peso ( $1/n$ ), ou seja, amostras antigas possuem a mesma contribuição de amostras mais recentes, isso significa que quanto maior a quantidade de amostras, melhor será suavização do ruído, mas o atraso de tempo entre o medido e o calculado será maior.

A fim de solucionar o problema da média móvel, isto é, aplicar pesos iguais para todas as amostras, o filtro passa-baixas busca dar um peso maior para amostras mais recentes. A forma de aplicar o filtro passa-baixas pode ser vista na Equação 190.

$$\bar{x}_k = \lambda \bar{x}_{k-1} + (1 - \lambda)x_k \quad (190)$$

onde  $0 < \lambda < 1$ .

Ao variar o peso com a idade da amostra, o filtro passa-baixas consegue minimizar o ruído e rastrear a dinâmica do movimento de forma mais eficiente que o filtro de média móvel (Kim, 2011).

## 2.5 TÉCNICAS DE ENSAIOS EM VOO

Conforme descrito na Seção 2.2, a identificação da aeronave depende não só do conhecimento da resposta dinâmica, mas também das entradas de controle que serão empregadas sob a aeronave, comumente conhecidas como manobras. As manobras executadas têm o intuito de excitar os modos longitudinal e látero-direcional a fim de agregar informação ao conjunto de dados adquiridos em voo, suficiente para a modelagem da aeronave (Dias, 2012).

Por conta da importância das manobras para o sucesso da identificação da aeronave, uma etapa de planejamento deve ser executada a fim de definir os principais parâmetros das manobras, isto é:

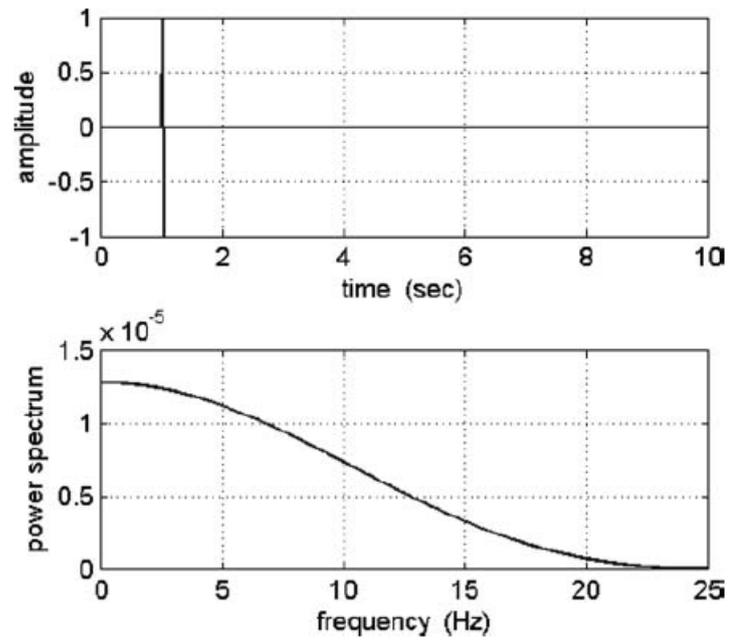
- Condições de voo: altitude, ângulo de ataque de trimagem, número de Mach e potência disponível.
- Tempo de execução da manobra: a manobra deve acontecer por tempo suficiente para detecção do movimento;
- Entradas de controle: deflexão das superfícies de controle e tração;
- Forma das entradas de controle: amplitude e formato da entrada de controle.

A definição dos parâmetros acima é crucial, pois a partir deles se determina qual faixa do espectro de frequência será excitado. As entradas de controle são projetadas como perturbações em torno da condição de trimagem, a fim de manter a condição de voo praticamente constante ao longo da manobra. As principais entradas de controle são: impulso, varredura de frequência, multisenoidal, doublet e multidegrau (Morelli; Klein, 2006).

A entrada mais simples é o impulso, já que é apenas um pulso repentino. Na maioria das vezes, o impulso ocorre para ambos os lados, a fim de retornar a aeronave para condição inicial. A Figura 22 apresenta um exemplo de impulso no domínio do tempo e da frequência (Morelli; Klein, 2006).

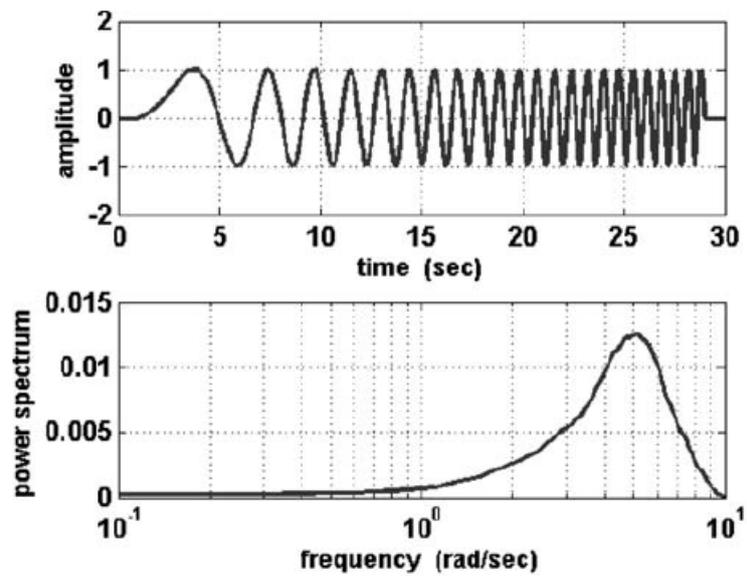
A varredura de frequência é útil quando há pouca ou nenhuma informação prévia sobre o sistema. A varredura procura aplicar uma senoide contínua com a frequência aumentando ao longo do tempo a fim de excitar uma faixa de frequência de interesse. A Figura 23 apresenta um exemplo genérico de uma varredura de frequência, juntamente com o espectro e frequência (Morelli; Klein, 2006).

Figura 22 – Impulso genérico



Fonte: Morelli e Klein (2006).

Figura 23 – Exemplo de varredura de frequência



Fonte: Morelli e Klein (2006).

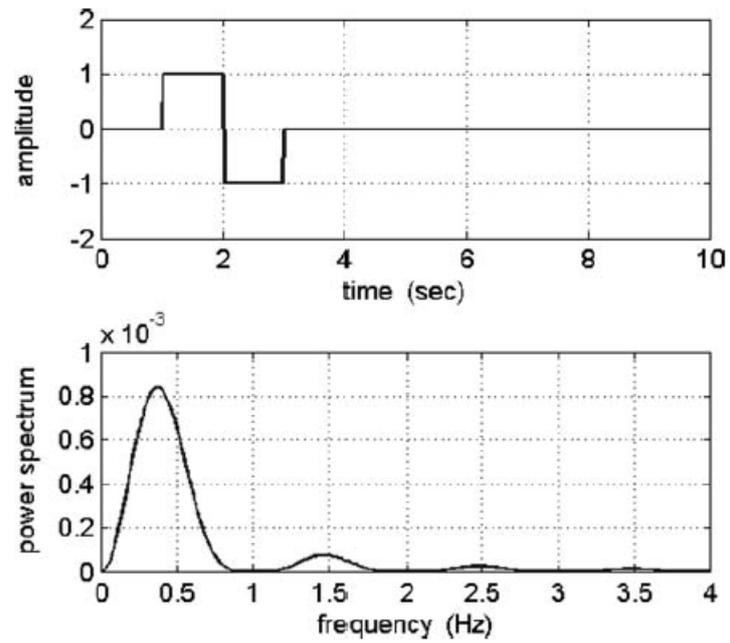
As entradas multisenoidais são compostas por uma somatória de senoides variando a frequência, amplitude e ângulos de fase que, de forma similar à varredura de frequências, procura cobrir uma faixa de frequências de interesse (Morelli; Klein, 2006).

As entradas doublets são pulsos duplicados, podendo ser entendido como uma aproximação de uma senoide, mas usando ondas quadradas. O tempo de duração do doublet deve ser selecionado de modo que a frequência dominante excitada seja similar à frequência natural do sistema dinâmico. A Figura 24 apresenta um exemplo genérico de doublet, onde a frequência dominante seria o  $0,5 \text{ Hz}$ . A Amplitude do doublet deve ser selecionada de modo que a razão sinal/ruído seja grande o suficiente para extrair as informações do movimento dinâmico (Morelli; Klein, 2006).

Reverendo a analogia de aplicar ondas quadradas para simular ondas senoidais, como no caso do doublet, uma das entradas comumente aplicadas em ensaios em voo são as multidegraus, que sobrepõem pulsos de múltiplas larguras. O caso mais apresentado na bibliografia é o 3-2-1-1, que alterna degraus com larguras de razão 3-2-1-1. O pulso de razão 2 é selecionado para corresponder a metade do período da frequência natural de interesse do modo dinâmico. Os pulsos de razão 3 e 1 limitam o espectro de frequência, gerando um pulso de maior banda do que o doublet. A Figura 25 apresenta um exemplo de manobra 3-2-1-1 no domínio do tempo e da frequência (Morelli; Klein, 2006).

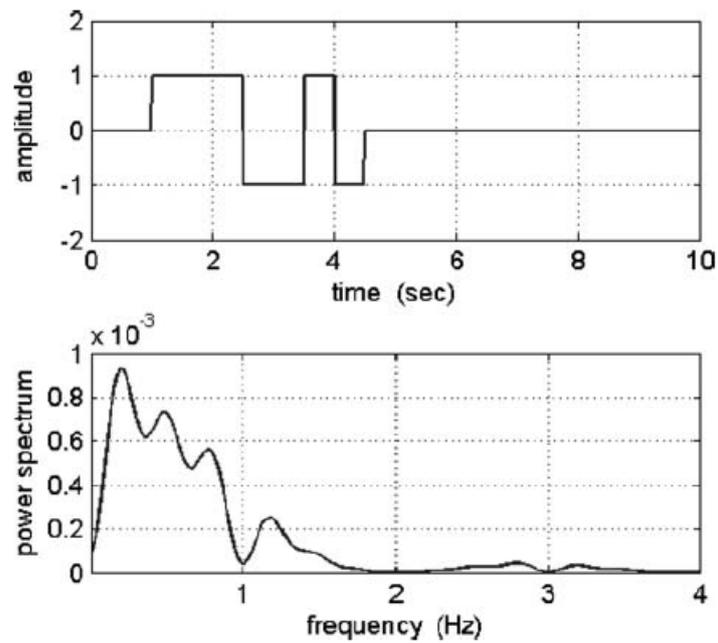
As entradas de controle podem ser feitas de forma manual, sendo dependente de um piloto treinado, ou serem pré-programada, tendo a dependência de um sistema de controle de voo a bordo.

Figura 24 – Doublet genérico



Fonte: Morelli e Klein (2006).

Figura 25 – Exemplo de entrada 3-2-1-1



Fonte: Morelli e Klein (2006).

### 3 MATERIAIS E MÉTODOS

A Figura 26 apresenta o fluxo de procedimentos da aplicação da identificação paramétrica de aeronaves descrito na Seção 2.2. No entanto, considerando os recursos disponíveis para realização dos ensaios em voo, foi desconsiderada a opção de desenvolver uma aeronave remotamente controlada para ser usada como plataforma de análise, necessitando de uma outra alternativa para adquirir dados de voo para validar o método.

Sendo assim, partiu-se para abordagem de usar dados de voo disponíveis de outros trabalhos a fim de validar o software de estimação dos parâmetros e o simulador de seis graus de liberdade.

Nas próximas seções, serão apresentados os dados de voo utilizados para validação, os processamentos que foram aplicados a esses dados a fim de reduzir a influência de ruído de medição, e, por fim, a aplicação da estimação de parâmetros. Com os parâmetros estimados, as matrizes de estado e controle da aeronave foram calculadas e uma simulação de seis graus de liberdade foi executada a fim de validar os resultados obtidos.

#### 3.1 AQUISIÇÃO DOS DADOS DE VOO

Os dados de voo usados para validar o software de identificação foram retirados de (Suit, 1972). Os ensaios foram conduzidos em 1972 pelo Laboratório de Aeronáutica da Universidade de Princeton. Os dados obtidos foram processados pelo Instituto de Pesquisa Langley para estimação paramétrica.

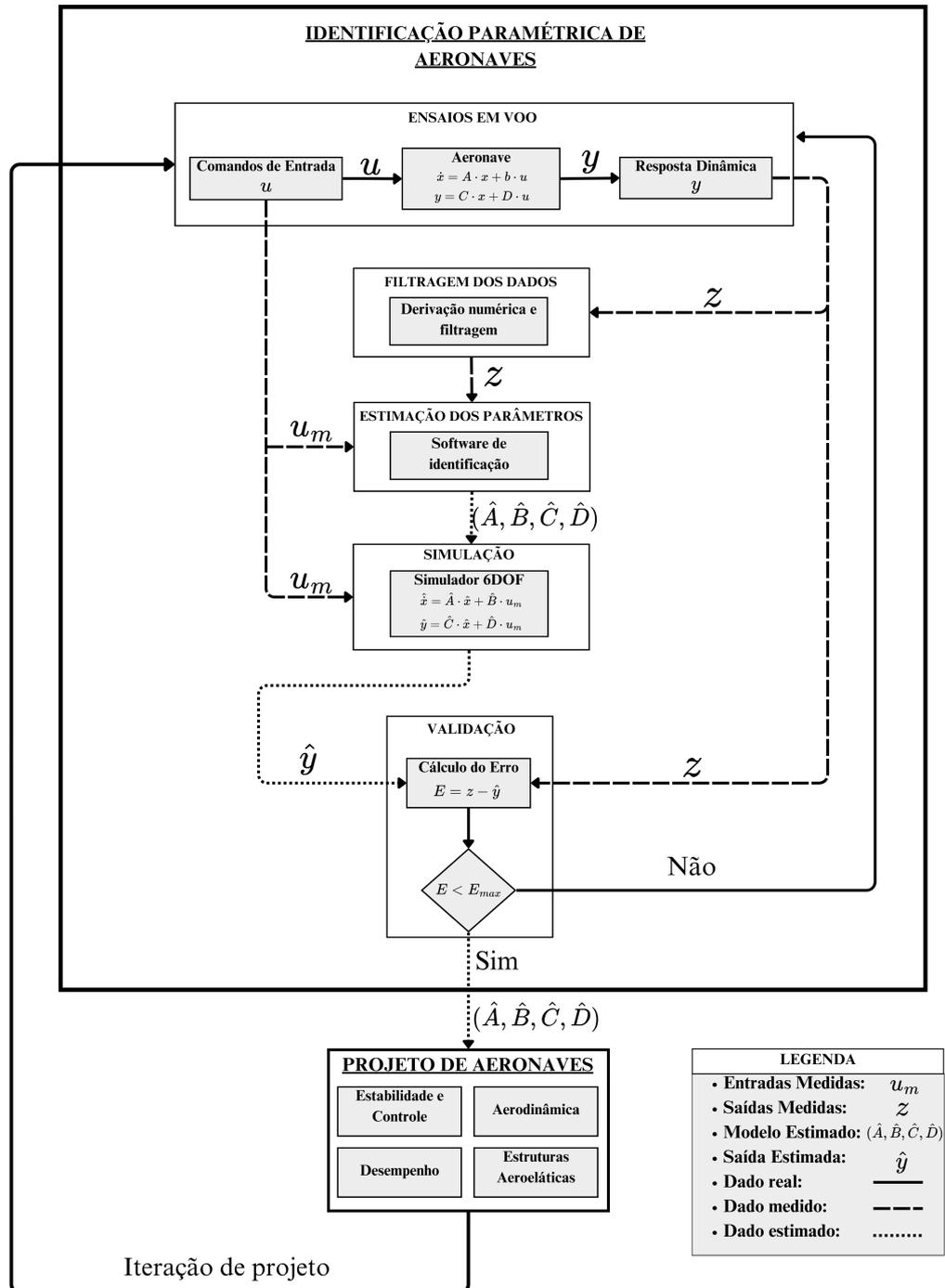
A aeronave utilizada nos ensaios foi o Navion, uma aeronave monomotor, não pressurizada, de trem retrátil e para quatro passageiros, produzida pela fabricante americana *Ryan Aeronautical Company*. As propriedades geométricas e inerciais da aeronave utilizada estão descritas na Tabela 32 da Seção A.1 (Apêndice A).

Os dados medidos durante os ensaios em voo incluíam: aceleração linear ( $a_x, a_y, a_z$ ), taxa de rolagem ( $p$ ), taxa de arfagem ( $q$ ), taxa de guinada ( $r$ ), ângulos aerodinâmicos ( $\alpha, \beta$ ), altitude ( $h$ ), velocidade indicada ( $V$ ), posição da superfície de controle ( $\delta_e, \delta_a, \delta_r$ ) (Suit, 1972). A Tabela 1 descreve a precisão e a taxa de amostragem de cada um dos sensores utilizados para medir os dados de voo.

Uma vez que os sensores utilizados possuem taxas de amostragem diferentes, é necessário realizar uma interpolação para os dados medidos, a fim de estabelecer uma mesma frequência de amostragem (Suit, 1972). Após aplicar a interpolação, uma nova frequência de amostragem pode ser aplicada nos dados. Para este trabalho, uma frequência de 50 Hz foi adotada.

Os ensaios em voo foram realizados em três fases, conforme o descrito na Seção 2.5: longitudinal, lateral e direcional.

Figura 26 – Visão geral da identificação paramétrica de aeronaves



Fonte: Autor (2024).

### 3.1.1 Dados do ensaio longitudinal

O ensaio de voo longitudinal, executado por Suit (1972), aplica um doublet como entrada no profundor, buscando manter os ailerons e leme estáticos. A Figura 28 apresenta os valores medidos das entradas de comando nas superfícies de controle. Dentre as variáveis de

Figura 27 – Aeronave monomotor Navion



Fonte: USAF (2023).

Tabela 1 – Derivadas aerodinâmicas longitudinais do Navion

Propriedade	Precisão	Taxa de amostragem
Aceleração linear [ $g$ ]	$\pm 0,010$	2 [ $Hz$ ]
Taxa de rotação [ $rad/s$ ]	$\pm 0,044$	2 [ $Hz$ ]
Taxa de arfagem [ $rad/s$ ]	$\pm 0,024$	2 [ $Hz$ ]
Taxa de guinada [ $rad/s$ ]	$\pm 0,010$	2 [ $Hz$ ]
Ângulo de ataque [ $deg$ ]	$\pm 0,800$	4 [ $Hz$ ]
Altitude [ $m$ ]	$\pm 30,480$	2 [ $Hz$ ]
Velocidade indicada [ $m/s$ ]	$\pm 1,030$	2 [ $Hz$ ]
Posição da superfície de controle [%]	$\pm 1,000$	2 [ $Hz$ ]

Fonte: Suit (1972).

saída observadas (Figura 21), o ensaio longitudinal irá ter maior impacto nos valores de  $a_z$ ,  $q$ ,  $V$  e  $\alpha$ , uma vez que são as propriedades excitadas pelos modos longitudinais fugóide e período curto. A Figura 29 apresenta as variáveis de saída medidas no ensaio em voo.

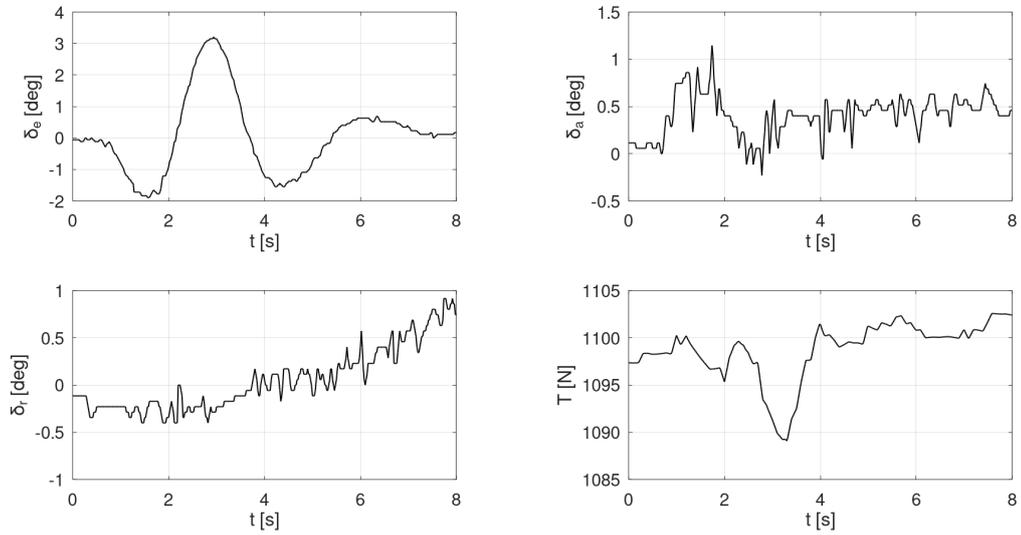
### 3.1.2 Dados do ensaio lateral

De forma similar ao ensaio longitudinal, o ensaio lateral consiste em aplicar um doublet à entrada dos ailerons, mantendo o leme e o profundor estáticos (Figura 30). As variáveis de saída que são excitadas pelo doublet no aileron são  $p$ ,  $r$ ,  $V$  e  $\beta$ . Os valores obtidos no ensaio em voo descrito em (Suit, 1972) estão apresentados na Figura 31.

### 3.1.3 Dados do ensaio direcional

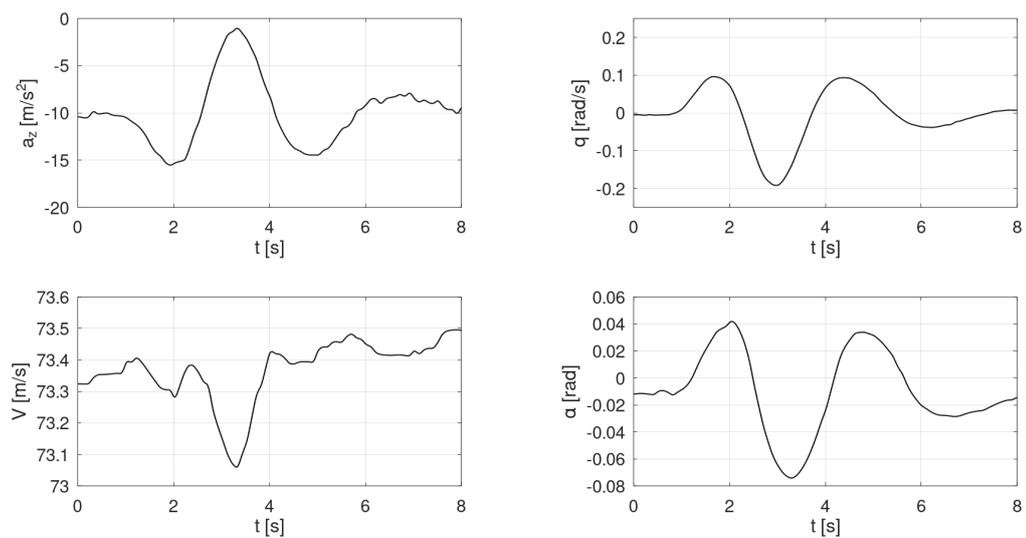
Por fim, o ensaio direcional consiste em aplicar um degrau à entrada do leme, mantendo os ailerons e o profundor estáticos (Figura 32). Assim como para o ensaio lateral, as variáveis de saída que são excitadas pelo degrau no leme são  $p$ ,  $r$ ,  $V$  e  $\beta$ . Os valores obtidos no ensaio em voo descrito em (Suit, 1972) estão apresentados na Figura 33.

Figura 28 – Entradas de controle medidas - ensaio longitudinal



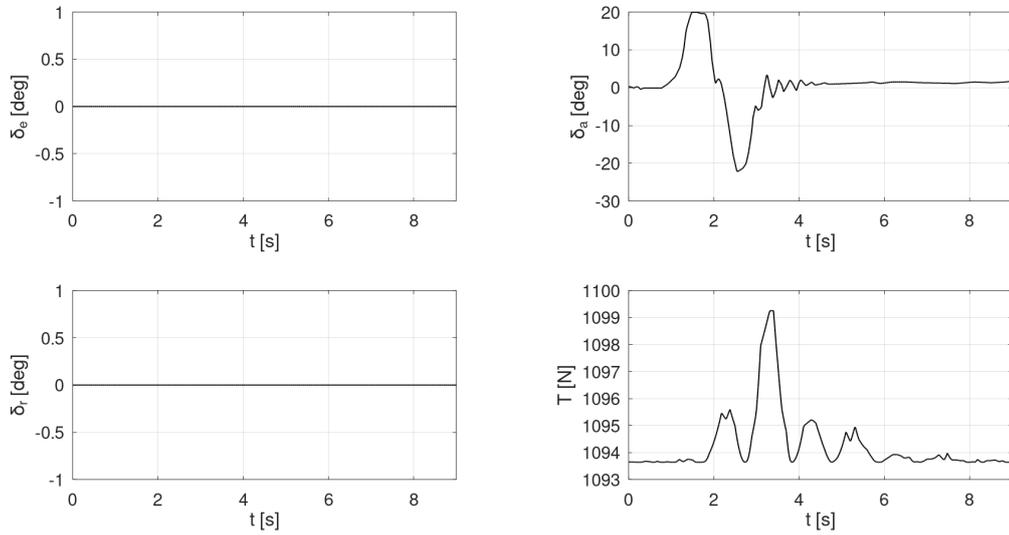
Fonte: Adaptado de Suit (1972).

Figura 29 – Variáveis de saída medidas - ensaio longitudinal



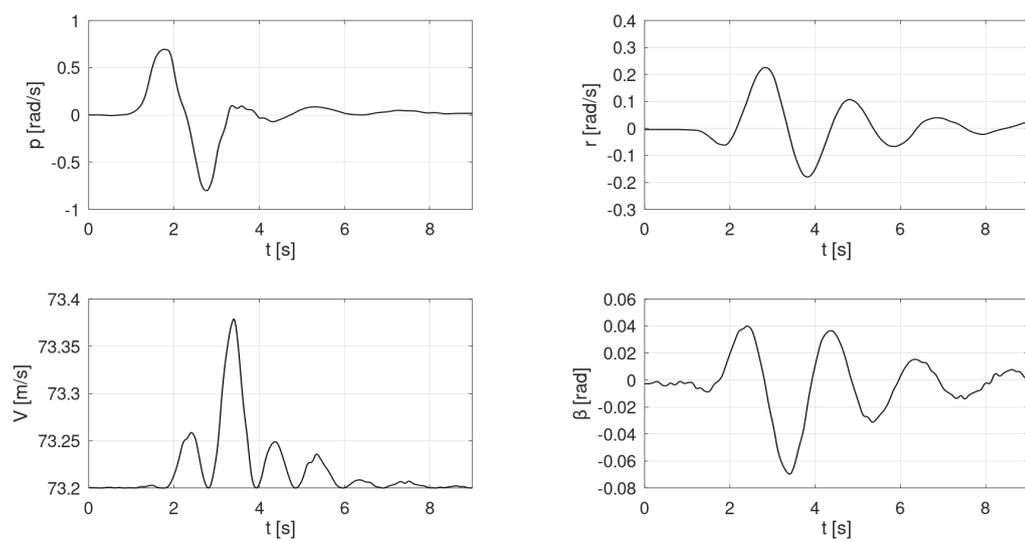
Fonte: Adaptado de Suit (1972).

Figura 30 – Entradas de controle medidas - ensaio lateral



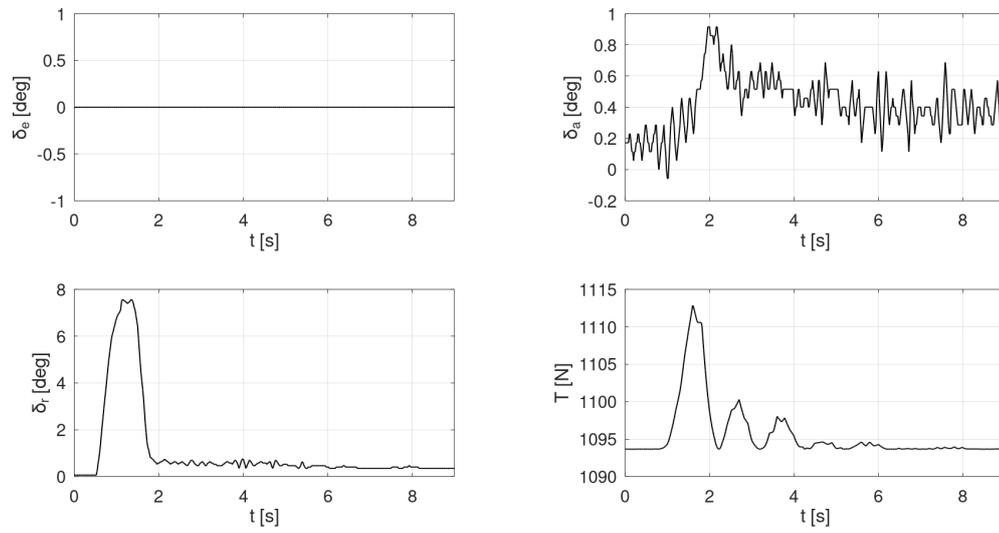
Fonte: Adaptado de Suit (1972).

Figura 31 – Variáveis de saída medidas - ensaio lateral



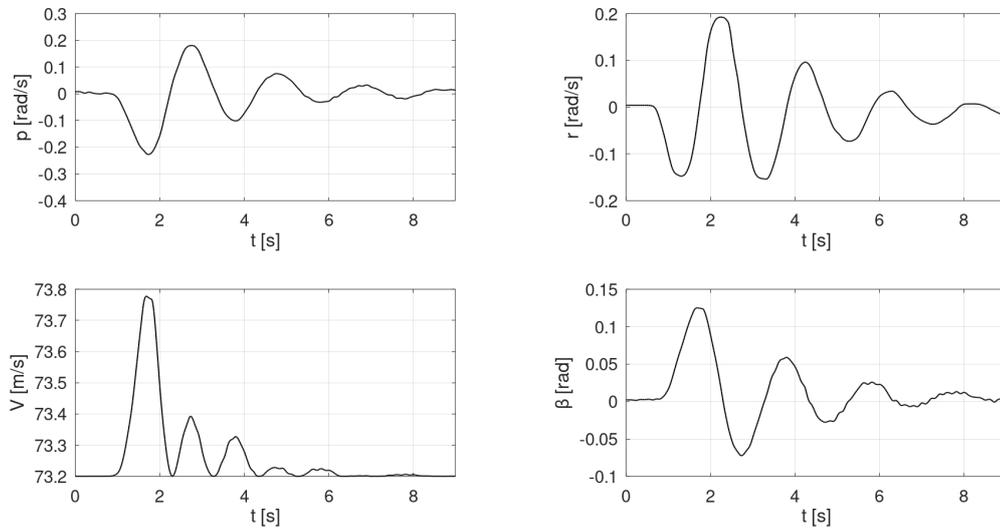
Fonte: Adaptado de Suit (1972).

Figura 32 – Entradas de controle medidas - ensaio direcional



Fonte: Adaptado de Suit (1972).

Figura 33 – Variáveis de saída medidas - ensaio direcional



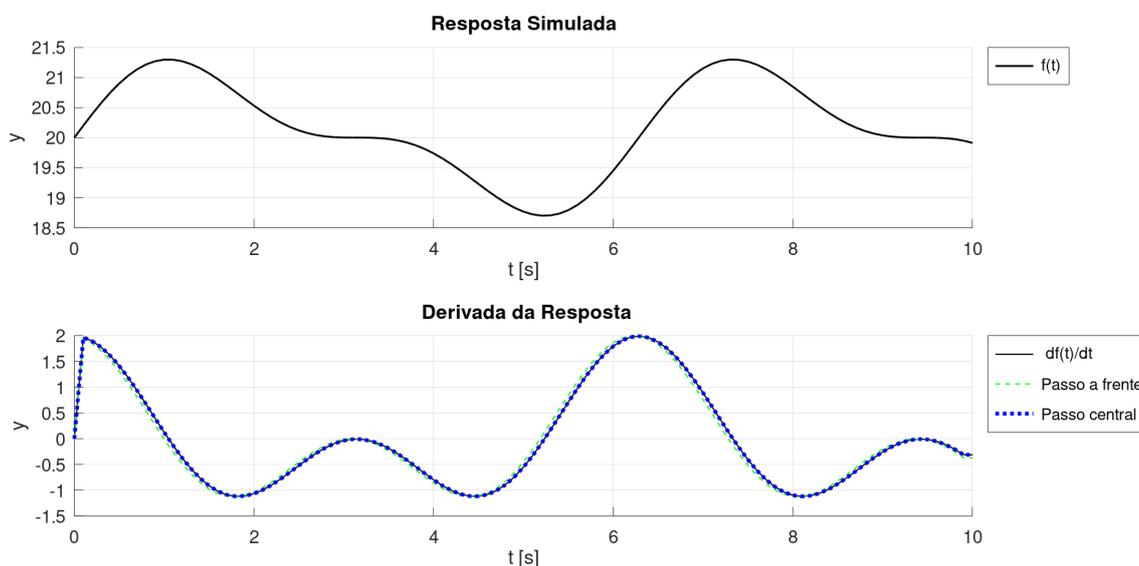
Fonte: Adaptado de Suit (1972).

### 3.2 DIFERENCIAÇÃO NUMÉRICA E FILTRAGEM DOS DADOS DE VOO

A fim de decidir qual método de diferenciação finita usar, algumas simulações foram feitas. Inicialmente, uma simples derivação de uma senoide foi feita e comparada com o resultado analítico (Figura 34). A análise do erro foi feita considerando a raiz do erro quadrado médio (do inglês, root mean square error - RMSE) e os resultados do erro de ambos os métodos estão

descritos na Tabela 2. A partir dessa simulação, percebe-se que a derivada por passo central se ajusta melhor a solução analítica do que a diferenciação por passo à frente.

Figura 34 – Derivada simulada



Fonte: Autor (2024).

Tabela 2 – Análise do erro - derivação passo a frente e passo central

Método	RMSE
Passo à frente	0,077
Passo central	0,000

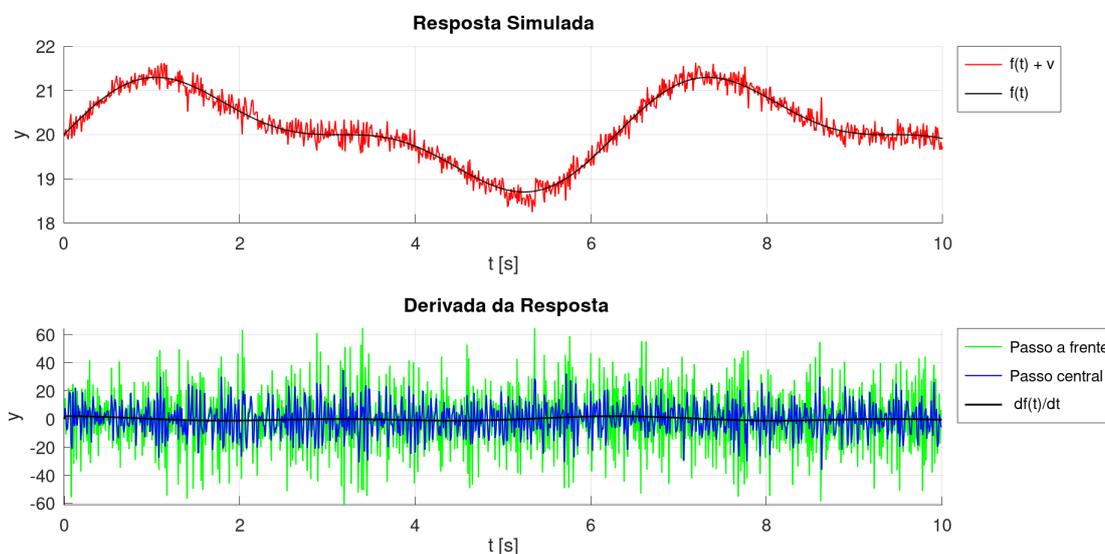
Fonte: Autor (2024).

Além disso, um dos maiores problemas da diferenciação finita diz respeito a dados contaminados com ruído, uma vez que descontinuidades serão inseridas no cálculo da Equação 184.

Novamente uma simulação com uma senoide foi feita onde um ruído branco foi adicionado ao valor verdadeiro a fim de avaliar a sensibilidade da derivação por passo à frente e derivação central ao ruído presente na variável dependente. A Figura 35 apresenta o resultado da simulação e a Tabela 3 apresenta os valores da raiz do erro médio quadrado (do inglês, root mean square error - RMSE).

Mesmo com a derivada por passo central se mostrar menos sensível ao ruído, é notório que o erro entre a derivada e a solução analítica está em condições inaceitáveis. Sendo assim, métodos de suavização dos dados (do inglês, data smoothing) devem ser empregados a fim de filtrar o ruído da variável dependente.

Figura 35 – Simulação de derivada de sinal ruidoso



Fonte: Autor (2024).

Tabela 3 – Análise do erro do sinal com ruído - derivação passo a frente e passo central

Método	RMSE
Passo à frente	23,112
Passo central	11,122

Fonte: Autor (2024).

Aplicando os três métodos de suavização ao mesmo sinal simulado da Figura 34, é possível ter uma primeira impressão dos seus desempenhos. Para essa simulação, foram selecionados valores arbitrários de  $n = 15$  e  $\lambda = 0,75$  para os filtros média móvel e passa baixas, respectivamente. A Figura 36 apresenta os resultados obtidos.

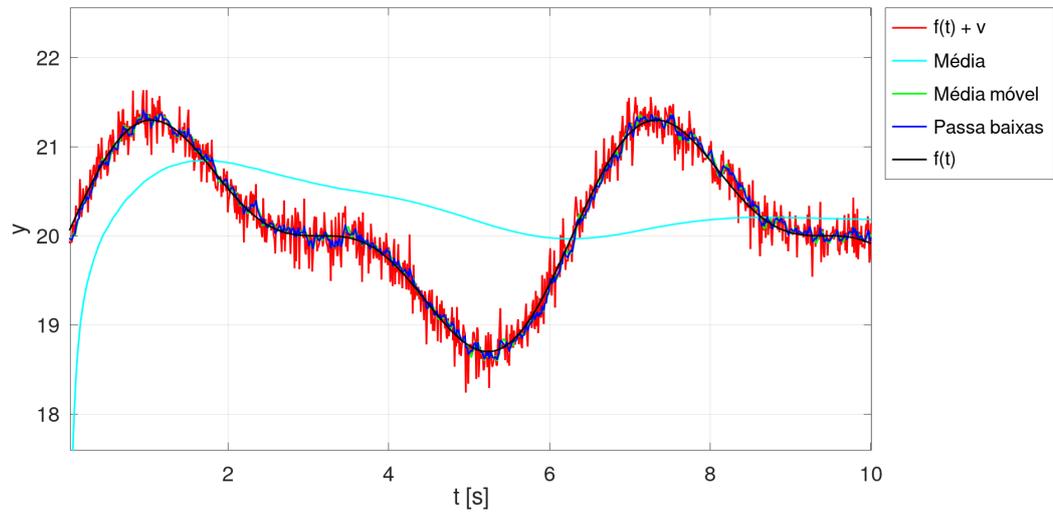
A partir da análise do erro (Tabela 4), a primeira conclusão tomada é que o filtro de média não é capaz de acompanhar a dinâmica da curva, algo predito por Kim (2011). Os filtros média móvel e passa baixas, no entanto, tiveram resultados semelhantes e foram efetivas na redução do ruído. A fim de avaliar qual dos filtros possui o melhor resultado, foi aplicado uma varredura para encontrar valores ótimos de  $n$  e  $\lambda$  e então avaliar o erro de ambas as soluções.

Tabela 4 – Análise do erro - métodos de suavização

Método	RMSE
$f(t) + v$	0,1659
Média	1,1030
Média Móvel	0,0795
Passa Baixas	0,0687

Fonte: Autor (2024).

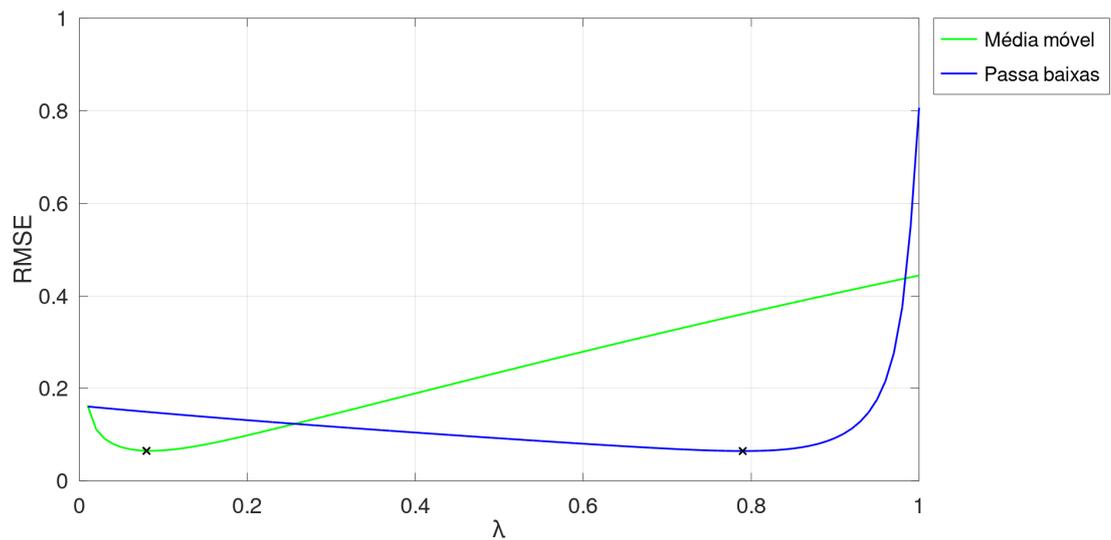
Figura 36 – Comparação entre métodos de suavização dos dados



Fonte: Autor (2024).

Para a função simulada da Figura 36, realizando a varredura para os valores de  $n$  e  $\lambda$  e avaliando o RMSE agregado aos resultados dos filtros de média móvel e passa baixas, obteve-se os resultados da Figura 37, onde  $n = 100 \cdot \lambda$ .

Figura 37 – Varredura - filtro média móvel e passa-baixas



Fonte: Autor (2024).

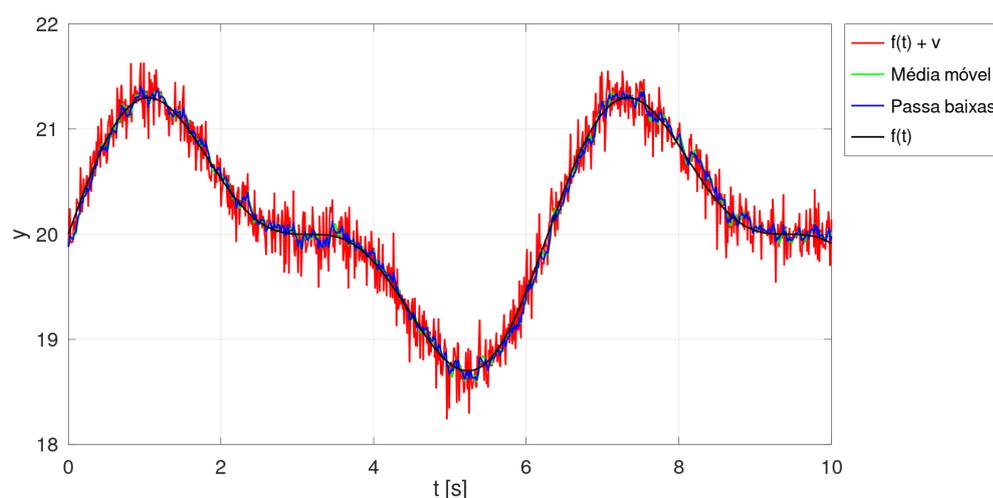
Os valores ótimos de  $n$  e  $\lambda$  encontrados foram  $n = 9$  e  $\lambda = 0,80$ . Para esses parâmetros, os erros agregados a cada um dos métodos estão apresentados na Tabela 5 e a resposta simulada na Figura 38.

Tabela 5 – Análise do erro - média móvel e passa baixas

Método	RMSE
$f(t) + \nu$	0,1659
Média Móvel	0,0672
Passa Baixas	0,0668

Fonte: Autor (2024).

Figura 38 – Comparação entre métodos de suavização dos dados - ponto ótimo



Fonte: Autor (2024).

A partir dos resultados obtidos, o filtro passa baixas se mostrou mais efetivo na suavização dos dados, sendo o método selecionado para este trabalho.

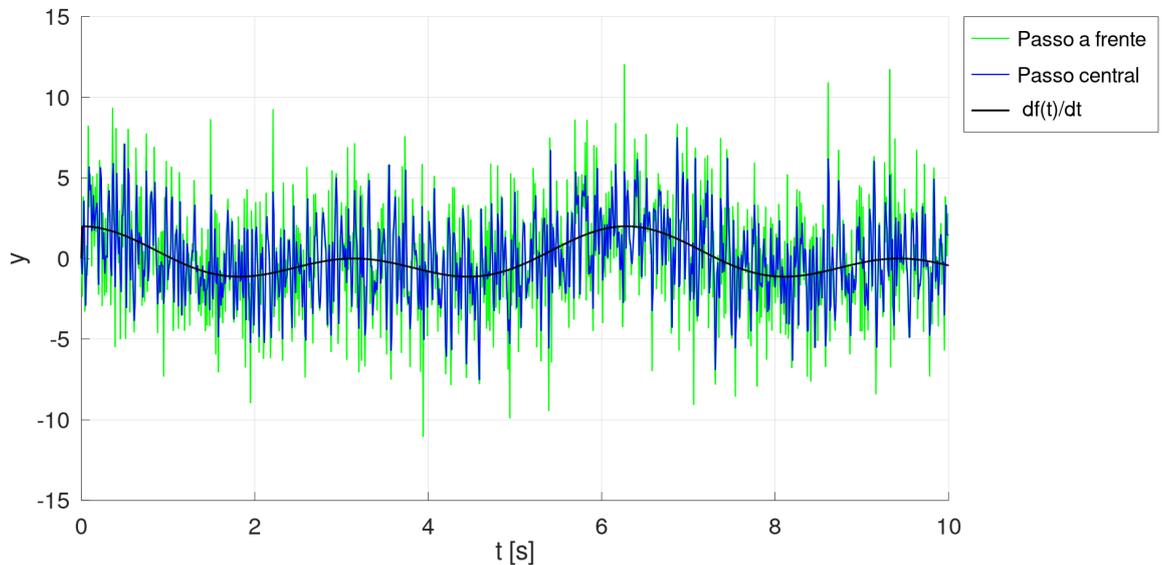
Retornando para a análise das derivadas, pode-se submeter a resposta processada pelo filtro passa baixas novamente às derivações por passo central e passo à frente. Os resultados obtidos estão apresentados na Figura 39 e Tabela 6.

Tabela 6 – Análise do erro - após suavização de  $f(t)$ 

Método	RMSE
Passo a frente	3,4243
Passo central	2,2867

Fonte: Autor (2024).

Os resultados comprovam que a derivada por passo central apresenta um erro inferior à derivada por passo à frente, sendo a mais adequada. No entanto, o valor absoluto do erro ainda está em condições inadequadas. Essa condição pode ser melhorada, aplicando a suavização dos dados da derivada por passo central ao filtro passa baixas, de forma similar ao que foi feito à função antes da derivação. A Figura 40 apresenta a evolução da suavização do cálculo da derivada e a Tabela 7 apresenta os resultados do RMSE.

Figura 39 – Derivação após suavização de  $f(t)$ 

Fonte: Autor (2024).

Tabela 7 – Análise do erro - após suavização de  $df(t)/dt$ 

Método	RMSE
Passo central - antes de filtrar $f(t)$	11,1220
Passo central - após filtrar $f(t)$	2,2867
Passo central - antes de filtrar $df(t)/dt$	0,5161

Fonte: Autor (2024).

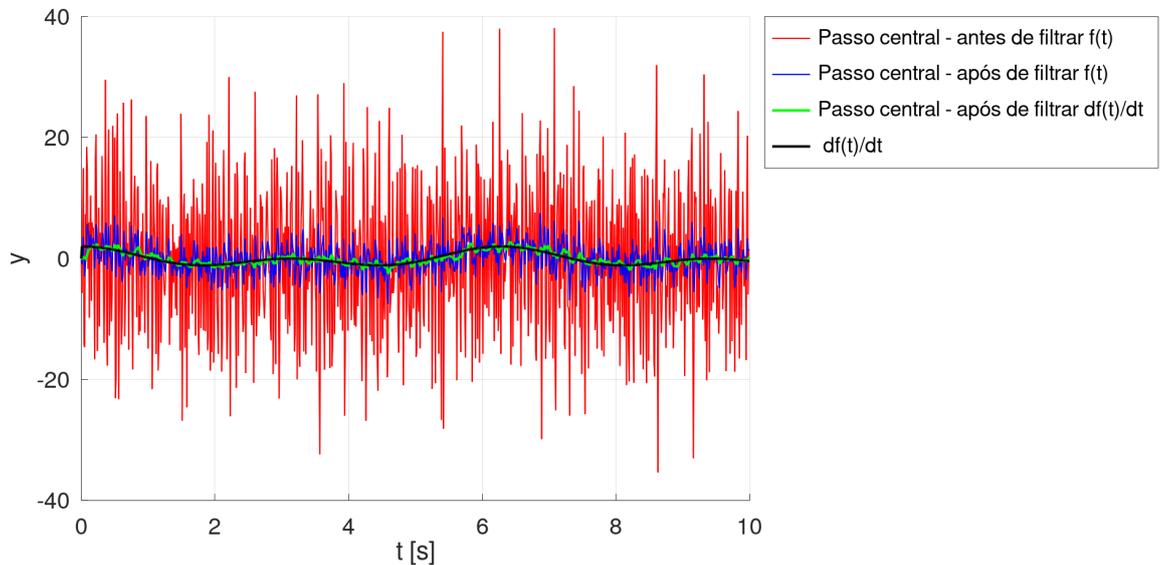
Sendo assim, a partir das simulações descritas, foi selecionado o método de derivação por passo central para realizar a diferenciação finita das variáveis  $p$ ,  $q$ ,  $r$ ,  $w$  e  $\alpha$ , uma vez que esse método possui menor sensibilidade à frequência de amostragem e menor sensibilidade ao ruído presente na variável dependente. Além disso, o filtro passa baixas será usado como método de suavização.

### 3.3 ESTIMAÇÃO DOS PARÂMETROS

Após a aquisição e filtragem dos dados de voo, é possível iniciar o processo de análise dos dados de voo, que almeja estimar as derivadas de estabilidade da aeronave, conforme o descrito na Subseção 2.3.2.

#### 3.3.1 Cálculo das variáveis dependentes

Inicialmente, devem ser calculadas as variáveis dependentes das equações de regressão, isto é, os coeficientes  $C_X$ ,  $C_Y$ ,  $C_Z$ ,  $C_l$ ,  $C_m$ ,  $C_n$ . O cálculo das variáveis dependentes é feito a

Figura 40 – Derivação após suavização de  $df(t)/dt$ 

Fonte: Autor (2024).

partir da aplicação da Equação 122, para os coeficientes de força no sistema  $S_B$  e Equação 123 para os coeficientes de momento.

Após calcular os coeficientes de força no sistema do corpo ( $S_B$ ), é possível calcular os coeficientes de força no sistema aerodinâmico ( $S_w$ ),  $C_D$ ,  $C_{Y_w}$  e  $C_L$ , aplicando a Equação 124. O procedimento de cálculo das variáveis dependentes está descrito na Figura 41 em formato de diagrama de blocos.

As variáveis dependentes excitadas no ensaio de voo longitudinal são  $C_X$ ,  $C_Z$  e  $C_m$ , no sistema  $S_B$  e  $C_D$  e  $C_L$  no sistema  $S_w$ . Os valores obtidos a partir do ensaio de voo, descritos na Seção 3.1.1 estão apresentados na Figura 42.

Para os ensaios em voo lateral e direcional, as variáveis dependentes que são analisadas são  $C_l$  e  $C_n$ , no sistema  $S_B$  e  $C_{Y_w}$  no sistema  $S_w$ .

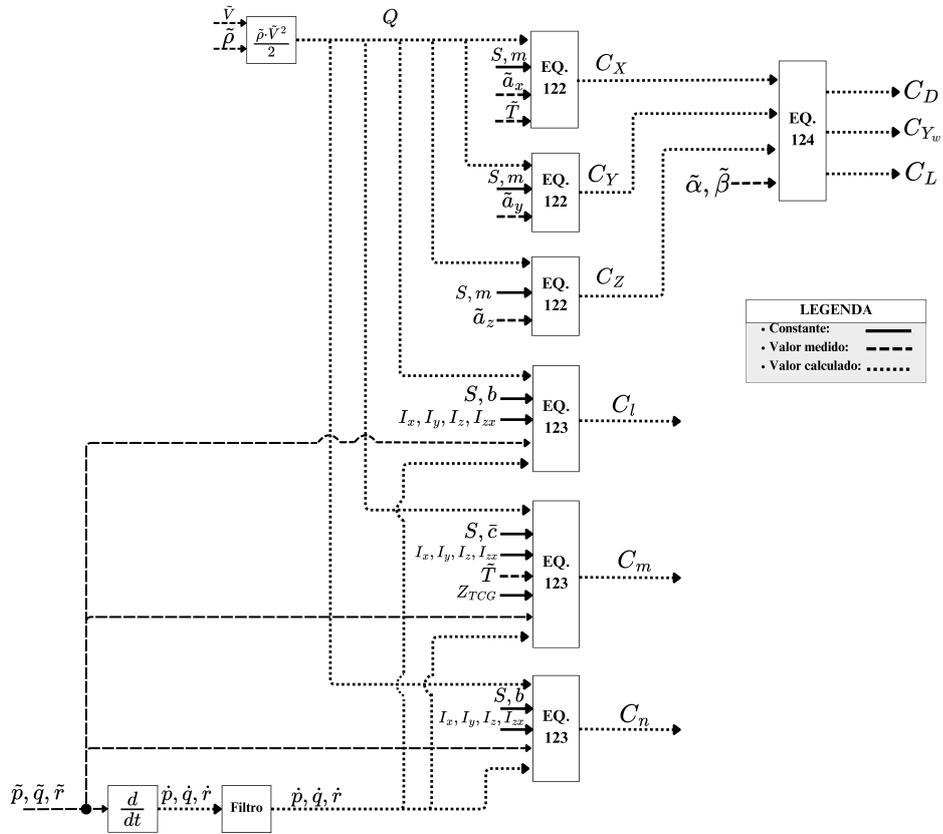
Para o ensaio em voo lateral, descrito na Seção 3.1.2, as variáveis dependentes calculadas estão apresentados na Figura 43. Já para o ensaio em voo direcional, descrito na Seção 3.1.3, as variáveis dependentes calculadas estão apresentados na Figura 44.

### 3.3.2 Aplicação da regressão por mínimos quadrados

Calculadas as variáveis dependentes, inicia-se o processo de regressão por mínimos quadrados. Para esta etapa, o vetor com os regressores ( $X$ ) deve ser gerado e aplicado juntamente com a respectiva variável dependente na Equação 168 para obter os parâmetros estimados ( $\theta$ ).

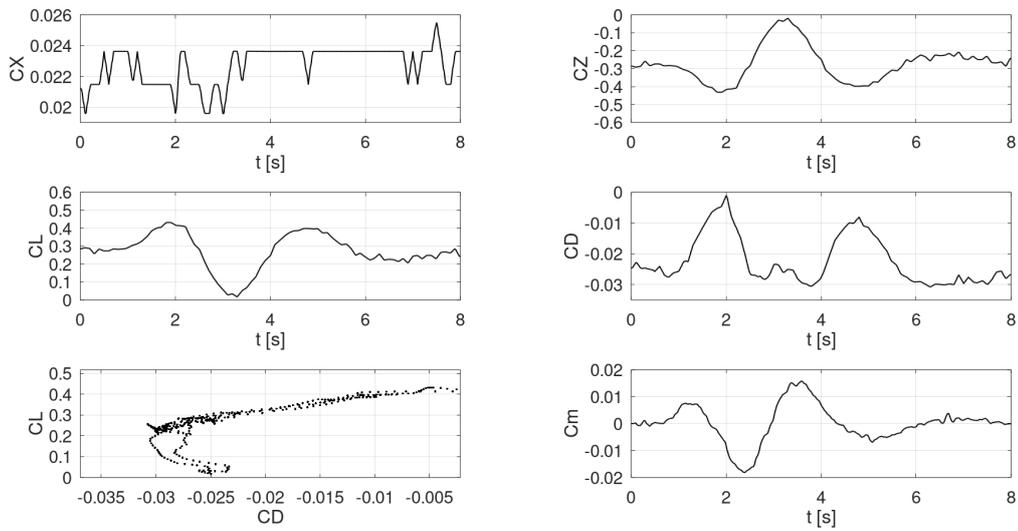
Iniciando pelo movimento longitudinal, a matriz de regressores ( $X_{longitudinal}$ ), apresentado nas Equações 157, 158 e 159 é calculada. Em posse das variáveis dependentes  $C_D$ ,  $C_L$

Figura 41 – Cálculo das variáveis dependentes



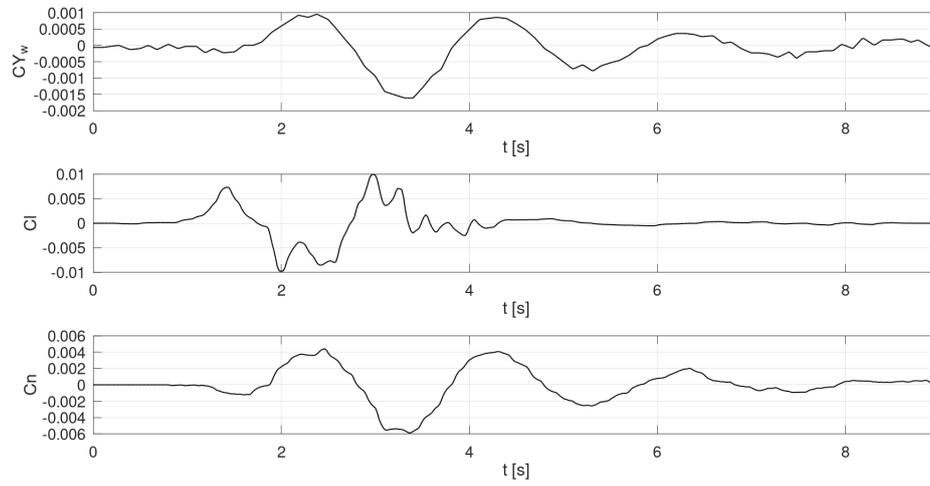
Fonte: Autor (2024).

Figura 42 – Variáveis dependentes - ensaio longitudinal



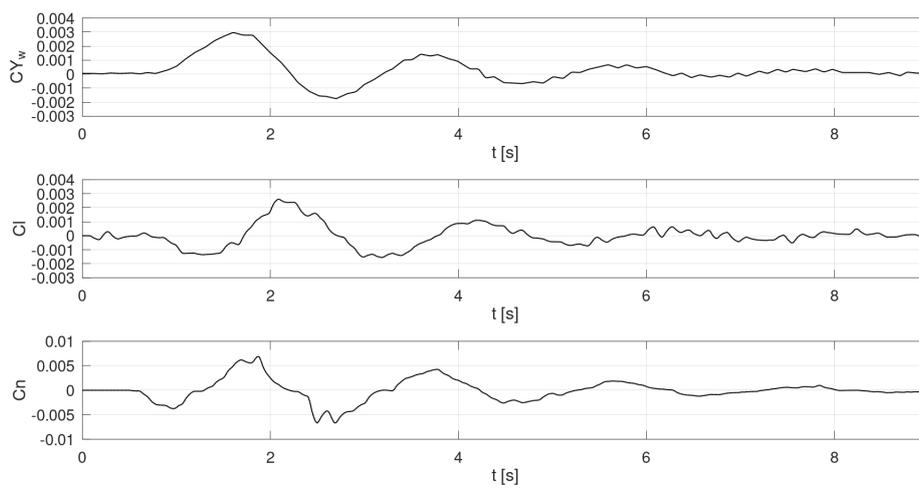
Fonte: Autor (2024).

Figura 43 – Variáveis dependentes - ensaio lateral



Fonte: Autor (2024).

Figura 44 – Variáveis dependentes - ensaio direcional

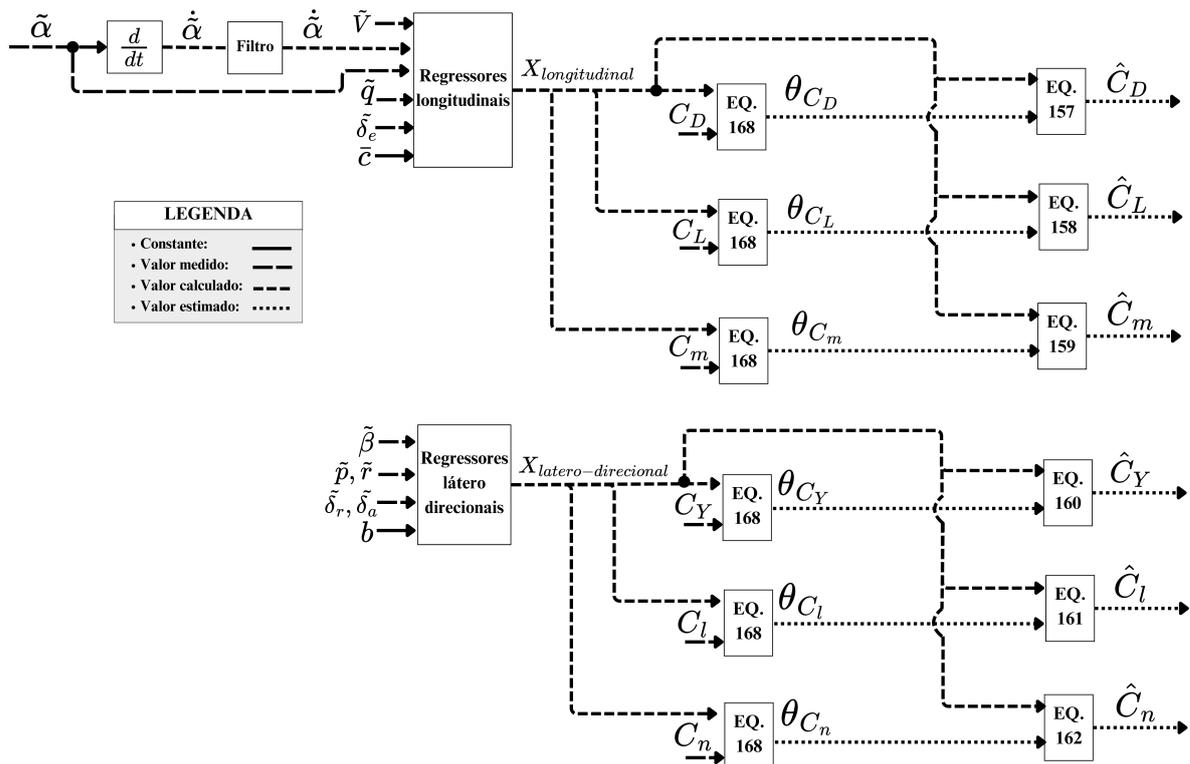


Fonte: Autor (2024).

e  $C_m$ , os parâmetros podem ser estimados diretamente pela aplicação da Equação 168. De forma similar para o movimento látero-direcional, calcula-se a matriz  $X_{\text{látero-direcional}}$ , apresentada nas Equações 160, 161 e 162. Em seguida, aplica-se a Equação 168 para se estimar os parâmetros.

Estimados os parâmetros do modelo ( $\theta$ ), é possível realimentá-los nas Equações 157 a 162 e estimar as variáveis dependentes a fim de comparar os resultados com o valor medido em voo. A Figura 45 descreve o fluxo de cálculo.

Figura 45 – Procedimento da aplicação de mínimos quadrados



Fonte: Autor (2024).

Com a estimação das variáveis de estabilidade e controle ( $\theta$ ) é possível aplicar as Equações 109 a 114 para obtenção das derivadas dimensionais.

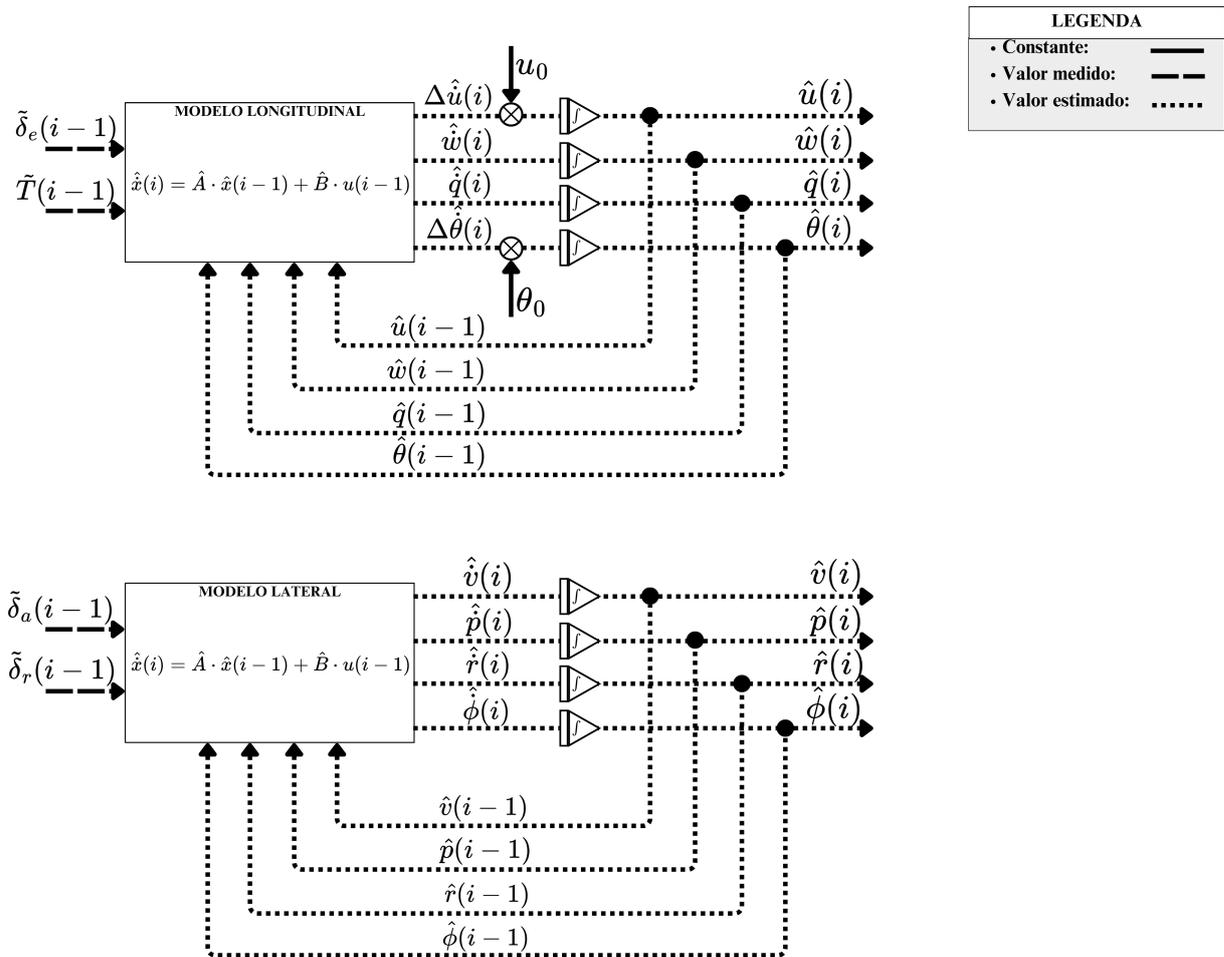
Finalmente, em posse das derivadas dimensionais, as matrizes de estado e controle dos modos longitudinal e látero-direcional podem ser calculadas aplicando as Equações 107 e 108, respectivamente.

### 3.4 SIMULADOR DE 6 GRAUS DE LIBERDADE

De forma simplificada, o processo de simulação numérica consistiu em aplicar uma entrada no modelo em espaço de estados da aeronave e calcular a derivada dos estados. Integrando numericamente as derivadas dos estados, é possível obter a resposta temporal dos estados da aeronave.

Conforme o descrito na Subseção 2.3.1.3, o movimento da aeronave foi dividido em duas categorias, longitudinal e látero-direcional. O simulador, por sua vez, unifica ambos os modelos para descrever a dinâmica do voo da aeronave em 6 graus de liberdade (do inglês, 6 degrees of freedom - 6DOF), isto é, 3 graus de translação e 3 graus de rotação. Por ser uma simulação digital, o simulador acontece de forma iterativa para uma certa frequência de amostragem. A iteração acontece conforme a fluxo da Figura 46.

Figura 46 – Simulador - visão geral



Fonte: Autor (2024).

Os comandos de entrada, inseridos no modelo, podem ser de fonte simuladas ou medida. Fontes simuladas dizem respeito a sinais genéricos aplicados para avaliar a resposta dinâmica, como entradas em pulso, degrau, rampa, entre outros. Entradas medidas, por sua vez, tratam de medições dos comandos de entrada do piloto, seja a partir da leitura de um joystick ou pela leitura dos atuadores.

Para este trabalho, a validação do modelo será feita aplicando os valores de deflexão das superfícies de controle e a tração do motor, medidos nos ensaios em voo descritos por (Suit,

1972).

A integração numérica é calculada conforme a Equação 191. Esse processo é feito para cada um dos estados da aeronave.

$$x(i) = x(i - 1) + \dot{x}(i) \cdot dt \quad (191)$$

onde  $dt$  é o passo de tempo, que pode ser calculado como o inverso da frequência de amostragem. Conforme o citado na Seção 3.1, a frequência de amostragem utilizada foi de  $50 \text{ Hz}$ , logo,  $dt = 0,02 \text{ s}$ .

Com a obtenção dos estados longitudinais e látero-direcionais da aeronave a partir da integração numérica, as Equações 83, 84 e 85 podem ser utilizadas para calcular a trajetória da aeronave ( $x_E, y_E$  e  $z_E$ ) ao longo do tempo. Por fim, a Equação 88 pode ser utilizada para calcular o ângulo de guinada da aeronave.

Ao final desse processo, os dados de trajetória, orientação, velocidade linear e velocidade angular da aeronave estão calculados, sendo possível reconstruir o voo.

O simulador foi implementado no software MATLAB, permitindo visualizar um modelo tri-dimensional da aeronave e alguns instrumentos de voo, conforme o apresentado na Figura 47.

Figura 47 – Simulador - Implementação em MATLAB



Fonte: Autor (2024).

### 3.5 VALIDAÇÃO DO MODELO

A fim de validar os resultados obtidos, trabalhos relacionados que modelaram a aeronave Ryam Navion foram utilizados como referência. Além disso, utilizando as propriedades

geométricas e inerciais da aeronave descritas no Apêndice A, um modelo analítico de baixa ordem utilizando o software XFLR5, desenvolvido por Deperrois (2024).

Para o movimento longitudinal, 3 bases comparativas foram tomadas além do XFLR5, sendo elas os trabalhos de Nelson (1998), Stengel e Nixon (1980) e Suit (1972). As derivadas utilizadas estão apresentadas na Tabela 8.

O movimento látero-direcional possui apenas 2 bases comparativas foram tomadas além do XFLR5, já que Stengel e Nixon (1980) realiza apenas a análise longitudinal. As referências Nelson (1998) e Suit (1972), no entanto, foram usadas como base. As derivadas utilizadas estão apresentadas na Tabela 9.

Tabela 8 – Comparativo das derivadas de estabilidade e controle - movimento longitudinal

Derivada	Ref. [16]	Ref. [23]	Ref. [24]	XFLR5
$C_{L_0}$	0,4100	0,1060	0,0200	0,3560
$C_{L_V}$	4,4400	0,0000	0,0000	0,0125
$C_{L_\alpha}$	0,0000	5,1566	5,2300	4,6299
$C_{L_{\dot{\alpha}}}$	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
$C_{L_q}$	0,0000	0,0000	0,0000	9,1758
$C_{L_{\delta_e}}$	0,3550	0,0000	0,0000	0,0000
$C_{D_0}$	0,0500	0,1890	0,0015	0,0091
$C_{D_V}$	0,0000	0,0000	0,0000	0,1564
$C_{D_\alpha}$	0,3300	0,4297	0,4297	0,4297
$C_{D_{\dot{\alpha}}}$	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
$C_{D_q}$	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
$C_{D_{\delta_e}}$	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
$C_{m_0}$	0,0537	0,2680	0,0000	0,144
$C_{m_V}$	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
$C_{m_\alpha}$	-0,6830	-1,0030	-1,2600	-0,7142
$C_{m_{\dot{\alpha}}}$	-4,3600	-6,5000	-6,5000	0,0000
$C_{m_q}$	-9,9600	-18,1000	-13,0000	-12,2985
$C_{m_{\delta_e}}$	-0,9230	-1,4200	-1,4000	-1,2250

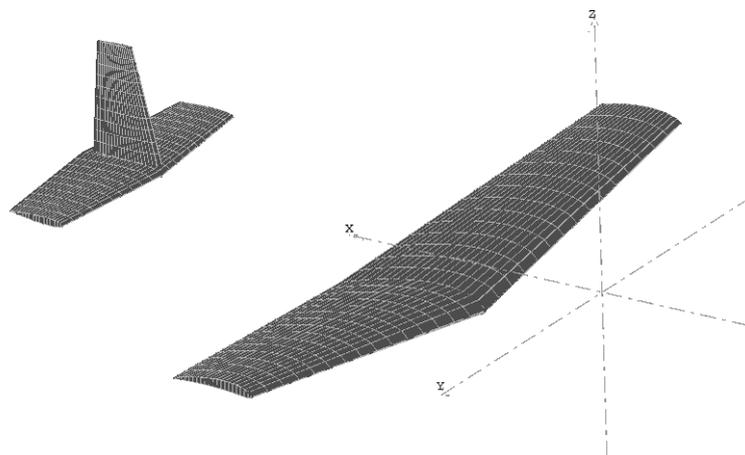
Fonte: Autor (2024).

Tabela 9 – Comparativo das derivadas de estabilidade e controle - movimento látero-direcional

Derivada	Ref. [16]	Ref. [24]	XFLR5
$C_{Y_0}$	0,0000	0,0000	0,0000
$C_{Y_\beta}$	-0,6000	-0,3500	-0,2336
$C_{Y_p}$	0,0000	-0,3000	-0,2255
$C_{Y_r}$	0,0000	0,5000	0,3345
$C_{Y_{\delta_r}}$	0,3300	0,0800	0,0800
$C_{l_0}$	0,0000	0,0000	0,0000
$C_{l_\beta}$	-0,0700	-0,0600	-0,0899
$C_{l_p}$	-0,4900	-0,4500	-0,4163
$C_{l_r}$	0,1100	0,0400	0,2890
$C_{l_{\delta_r}}$	0,1540	0,1500	0,1500
$C_{l_{\delta_a}}$	0,0260	0,3000	0,3000
$C_{n_0}$	0,0000	0,0000	0,0000
$C_{n_\beta}$	0,0730	0,0490	0,04763
$C_{n_p}$	-0,0400	-0,0240	-0,1697
$C_{n_r}$	-0,0900	-0,0820	-0,0825
$C_{n_{\delta_r}}$	-0,0040	-0,0050	-0,005
$C_{n_{\delta_a}}$	-0,0630	-0,0800	-0,08

Fonte: Autor (2024).

Figura 48 – Aeronave modelada no XFLR5



Fonte: Autor (2024).

## 4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Inicialmente serão discutidos os resultados das derivações numéricas e filtragem dos dados de voo. Em seguida, as variáveis dependentes serão calculadas para serem usadas na próxima etapa, a estimação das derivadas de estabilidade e controle. Com as derivadas adimensionais, foram calculadas as matrizes de estado e aplicadas no simulador de 6 graus de liberdade a fim de validar os resultados.

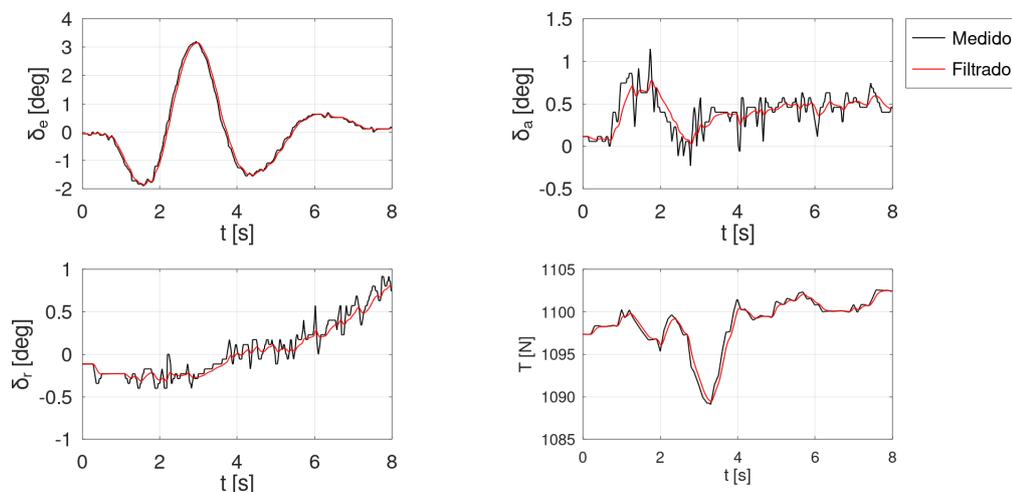
### 4.1 DERIVAÇÃO NUMÉRICA E FILTRAGEM DOS DADOS

Os dados medidos por (Suit, 1972) foram submetidos ao filtro passa-baixas a fim de reduzir os ruídos de medição e melhorar a qualidade da estimativa das derivadas de estabilidade e controle. A regulagem do filtro foi feita de forma específica para cada bateria de ensaios, conforme o descrito nas próximas seções.

#### 4.1.1 Ensaio longitudinal

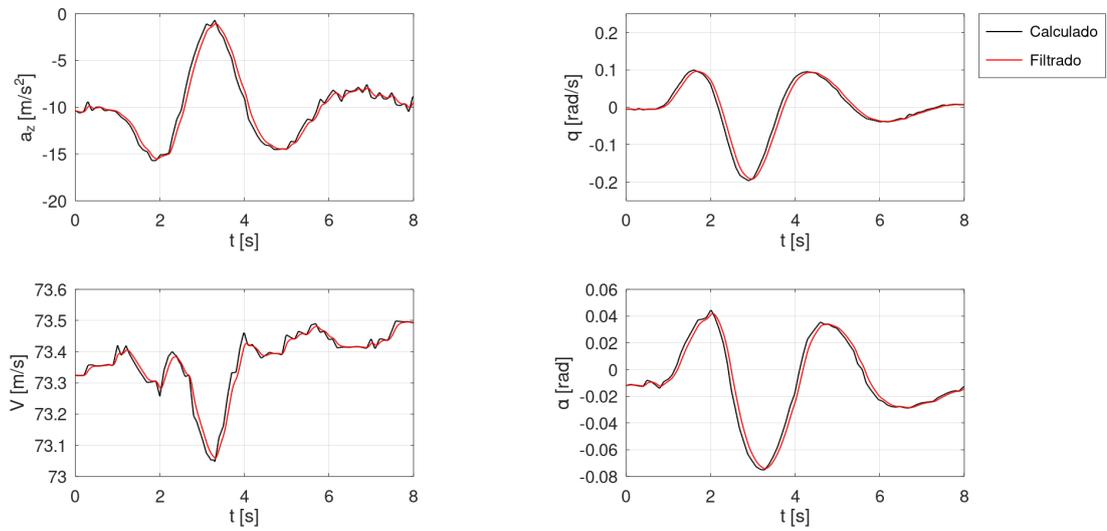
As entradas mais relevantes para o ensaio longitudinal são a entrada no profundor e a tração. As entradas no aileron e leme são resultantes de imperfeições do ensaio, sendo assim, será empregado um valor mais alto de  $\lambda = 0,90$ . A entrada no profundor, por sua vez, apresentou pouco ruído de medição, sendo submetida a um  $\lambda = 0,70$ , inferior que o das outras variáveis, a fim de minimizar o atraso temporal (Figura 49). Todas as outras variáveis foram submetidas a um  $\lambda = 0,80$  (Figura 50).

Figura 49 – Filtragem dos dados - entradas do ensaio longitudinal



Fonte: Autor (2024).

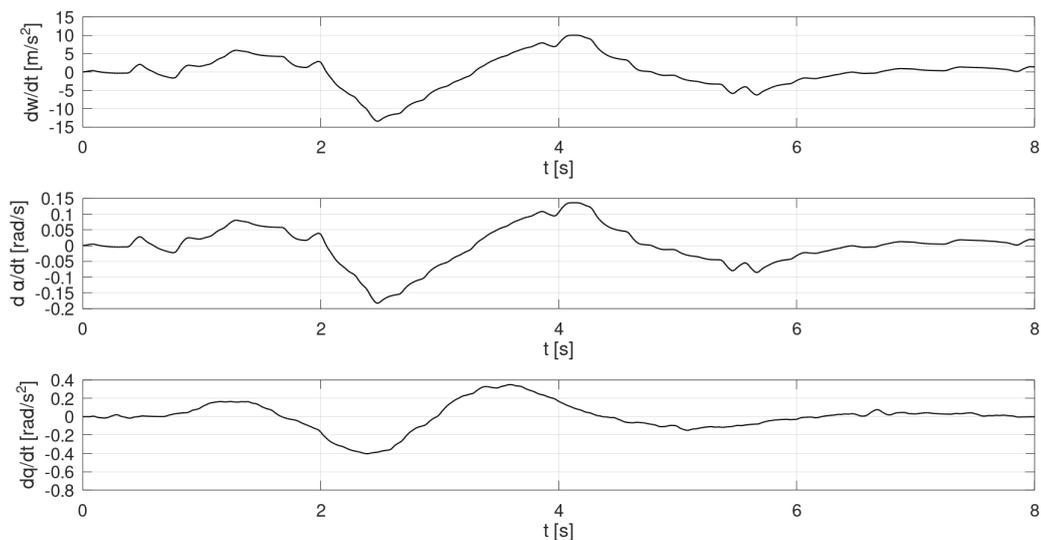
Figura 50 – Filtragem dos dados - saídas do ensaio longitudinal



Fonte: Autor (2024).

Por fim, foram calculadas as derivadas que serão empregadas para o cálculo das variáveis dependentes ( $C_L$ ,  $C_D$  e  $C_m$ ), sendo as mais relevantes para o ensaio longitudinal:  $\dot{w}$ ,  $\dot{\alpha}$  e  $\dot{q}$ , uma vez que as variáveis  $w$ ,  $\alpha$  e  $q$  já foram filtradas, as derivadas apresentaram pouco ruído, sendo desnecessário aplicar o filtro passa baixas (Figura 51).

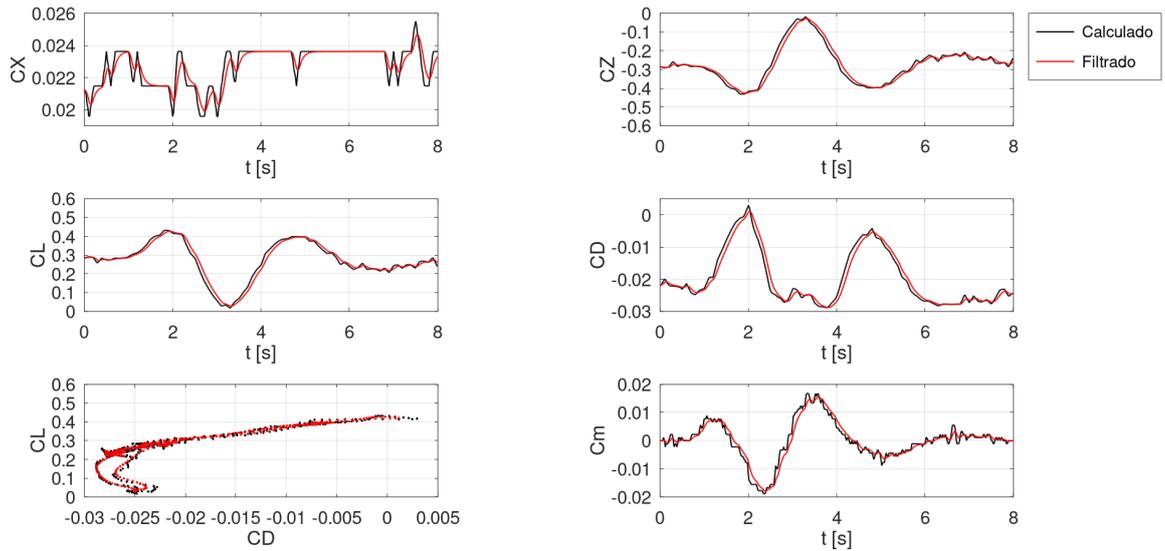
Figura 51 – Derivação numérica - ensaio longitudinal



Fonte: Autor (2024).

Com as variáveis filtradas, foram calculadas as variáveis dependentes do movimento longitudinal (Figura 52). A Tabela 10 sumariza os valores de  $\lambda$  de filtragem aplicados a cada variável.

Figura 52 – Variáveis dependentes - ensaio longitudinal



Fonte: Autor (2024).

Tabela 10 – Filtro passa baixas - ensaio longitudinal

Variável	$\lambda$	Variável	$\lambda$	Variável	$\lambda$
$\delta_e$	0,70	$\delta_a$	0,90	$\delta_r$	0,90
$a_x$	0,80	$a_y$	0,80	$a_z$	0,80
$u$	0,80	$v$	0,80	$w$	0,80
$p$	0,80	$q$	0,80	$r$	0,80
$\dot{w}$	0,80	$\dot{q}$	0,80	$\dot{\alpha}$	0,80

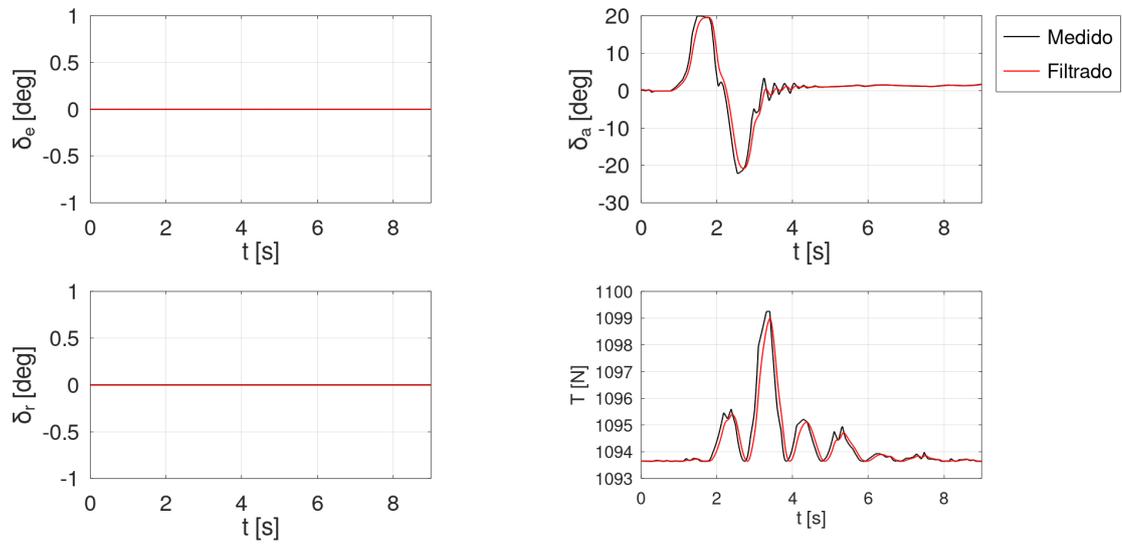
Fonte: Autor (2024).

#### 4.1.2 Ensaio lateral

As entradas mais relevantes para o ensaio lateral são a entrada de aileron e tração, para ambas as variáveis foi utilizado  $\lambda$  de 0,80. Para as entradas no profundor e leme um  $\lambda$  de 0,80 será usado (Figura 53). Para as variáveis de saída, isto é,  $p$ ,  $r$ ,  $v$  e  $\beta$ , um  $\lambda$  de 0,80 foi utilizado. A Figura 54 apresenta a comparação entre os valores medidos e filtrados das variáveis de saída do ensaio lateral.

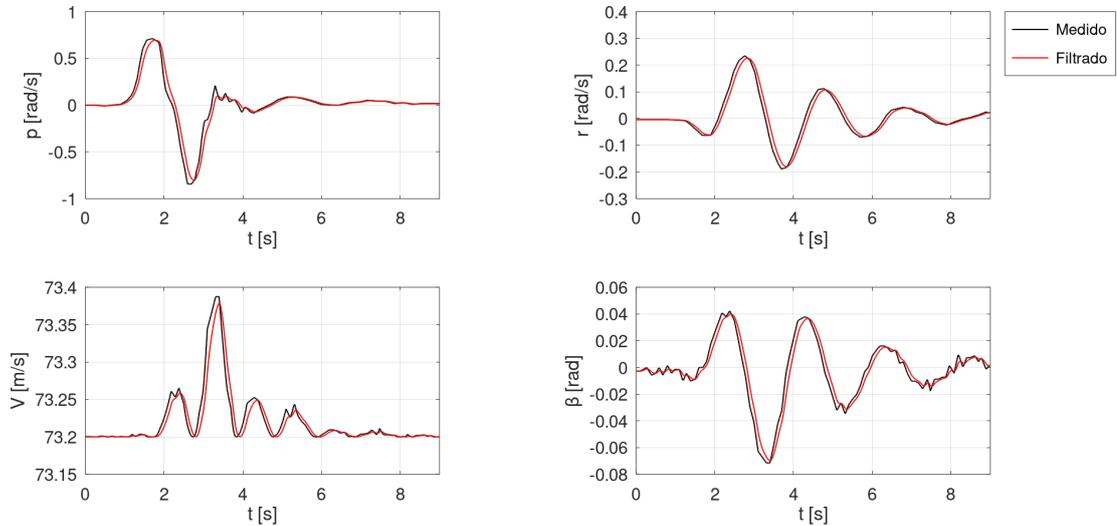
Em seguida, as derivadas  $\dot{v}$ ,  $\dot{\beta}$ ,  $\dot{p}$  e  $\dot{r}$  foram calculadas, necessárias para o cálculo de  $C_{Y_w}$ ,  $C_l$  e  $C_n$ . Diferentemente do ensaio longitudinal, a derivação no ensaio lateral apresentou

Figura 53 – Filtragem dos dados - entradas do ensaio lateral



Fonte: Autor (2024).

Figura 54 – Filtragem dos dados - saídas do ensaio lateral

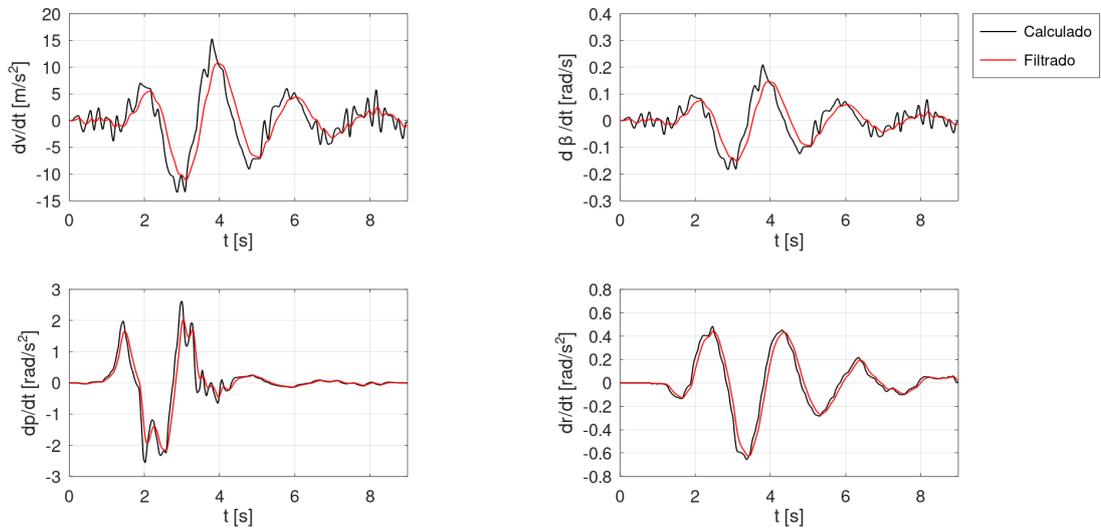


Fonte: Autor (2024).

ruído, sendo necessário aplicar o filtro passa baixas sobre as derivadas. Para as variáveis  $\dot{p}$  e  $\dot{r}$ , um  $\lambda$  de 0,80 foi aplicado. Já para as variáveis  $\dot{v}$  e  $\dot{\beta}$  foi utilizado um  $\lambda$  de 0,90 (Figura 55). A Tabela 11 sumariza os valores de  $\lambda$ .

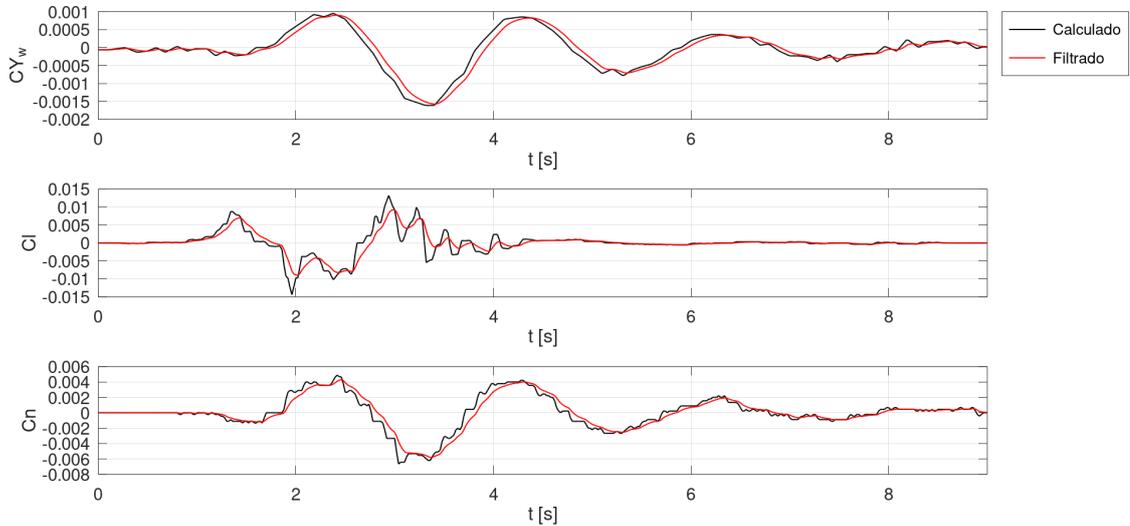
As variáveis dependentes do movimento lateral estão apresentadas na Figura 56. A Tabela 11 sumariza os valores de  $\lambda$  de filtragem aplicados a cada variável.

Figura 55 – Derivação numérica - ensaio lateral



Fonte: Autor (2024).

Figura 56 – Variáveis dependentes - ensaio lateral



Fonte: Autor (2024).

#### 4.1.3 Ensaio direcional

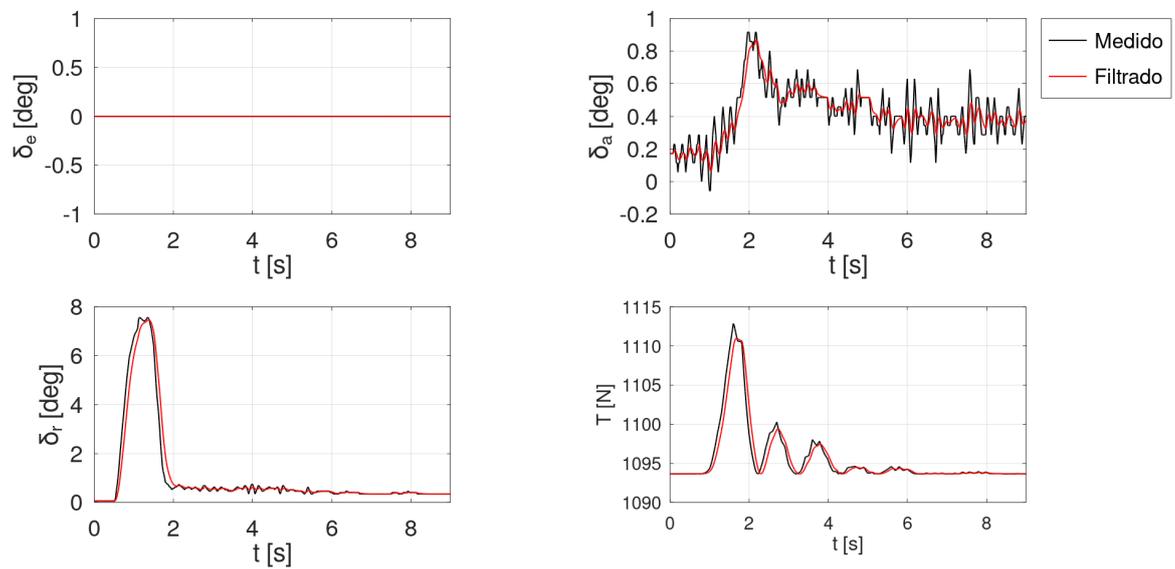
Para o ensaio direcional, as entradas mais relevantes são a entrada no leme e tração. Um  $\lambda$  de 0, 90 foi utilizado para o leme e  $\lambda = 0, 80$  para a tração. Para as demais entradas, um  $\lambda$  de 0, 80 foi utilizado (Figura 57). De forma similar ao ensaio lateral, para as variáveis de saída um  $\lambda$  de 0, 80 foi utilizado (Figura 58).

Tabela 11 – Filtro passa baixas - ensaio lateral

Variável	$\alpha$	Variável	$\alpha$	Variável	$\alpha$
$\delta_e$	0,80	$\delta_a$	0,80	$\delta_r$	0,80
$a_x$	0,80	$a_y$	0,80	$a_z$	0,80
$u$	0,80	$v$	0,80	$w$	0,80
$p$	0,80	$q$	0,80	$r$	0,80
$\dot{p}$	0,80	$\dot{r}$	0,80	$\dot{v}$	0,90
$\dot{\beta}$	0,90				

Fonte: Autor (2024).

Figura 57 – Filtragem dos dados - entradas do ensaio direcional



Fonte: Autor (2024).

Por fim, as derivadas  $\dot{v}$ ,  $\dot{\beta}$ ,  $\dot{p}$  e  $\dot{r}$  foram calculadas e filtradas com um  $\lambda = 0,90$  para as duas primeiras e  $\lambda = 0,80$  para as duas últimas (Figura 59). A Tabela 12 sumariza os valores de  $\lambda$  de filtragem aplicados a cada variável.

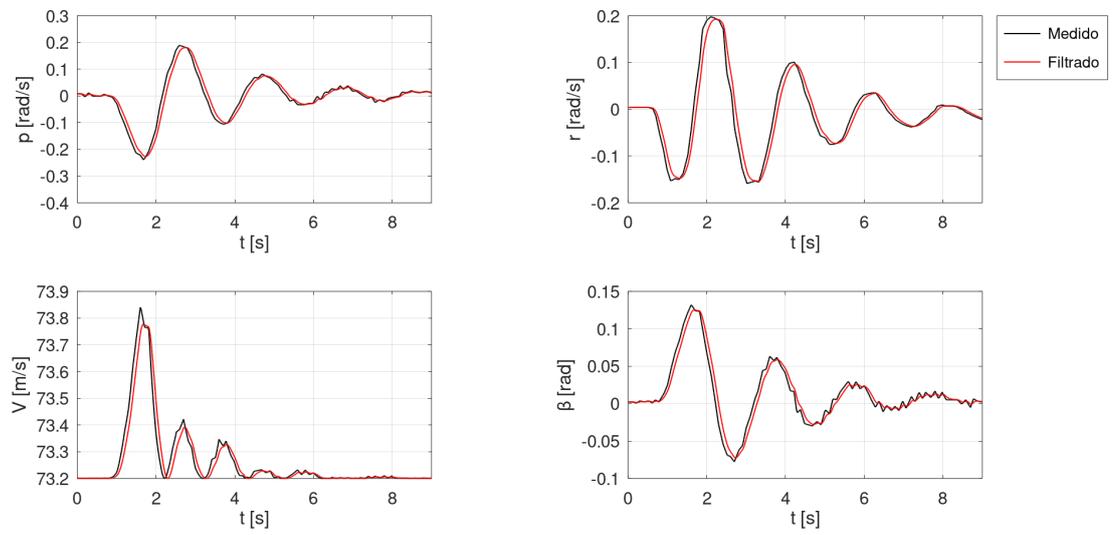
Tabela 12 – Filtro passa baixas - ensaio direcional

Variável	$\alpha$	Variável	$\alpha$	Variável	$\alpha$
$\delta_e$	0,80	$\delta_a$	0,80	$\delta_r$	0,90
$a_x$	0,80	$a_y$	0,80	$a_z$	0,80
$u$	0,80	$v$	0,80	$w$	0,80
$p$	0,80	$q$	0,80	$r$	0,80
$\dot{v}$	0,90	$\dot{\beta}$	0,90	$\dot{p}$	0,80
$\dot{r}$	0,80				

Fonte: Autor (2024).

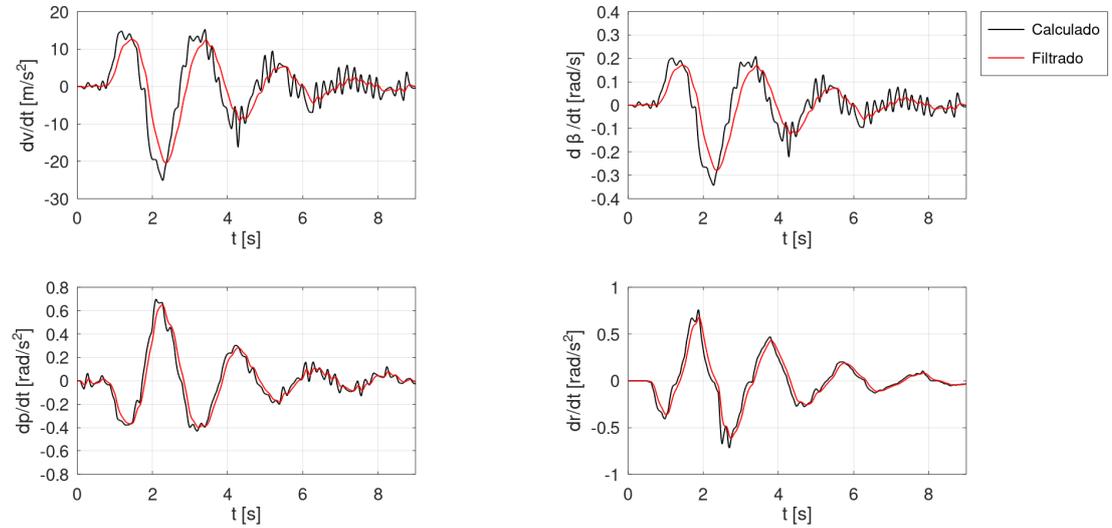
As variáveis dependentes do movimento direcional estão apresentadas na Figura 60. A

Figura 58 – Filtragem dos dados - saídas do ensaio direcional



Fonte: Autor (2024).

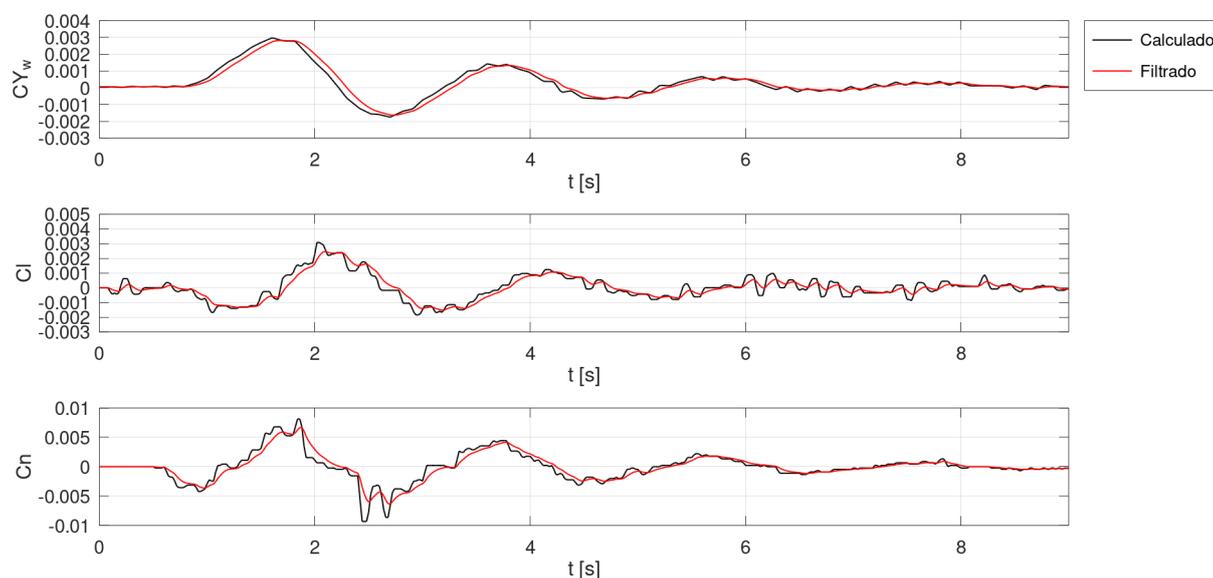
Figura 59 – Derivação numérica - ensaio direcional



Fonte: Autor (2024).

Tabela 12 sumariza os valores de  $\lambda$  de filtragem aplicados a cada variável. Concluindo-se assim a filtragem dos dados, e passando para a estimação das derivadas de estabilidade e controle.

Figura 60 – Variáveis dependentes - ensaio direcional



Fonte: Autor (2024).

## 4.2 ESTIMAÇÃO DOS PARÂMETROS

### 4.2.1 Modelo longitudinal

A primeira iteração da regressão múltipla foi aplicada a todos os regressores das Equações 145, 146 e 147, considerando as variáveis  $V$ ,  $\alpha$ ,  $\dot{\alpha}$ ,  $q$  e  $\delta_e$ . Resultando nas estimativas apresentadas na Tabela 17.

Tabela 13 – Primeira Iteração -  $C_L$ ,  $C_D$  e  $C_m$

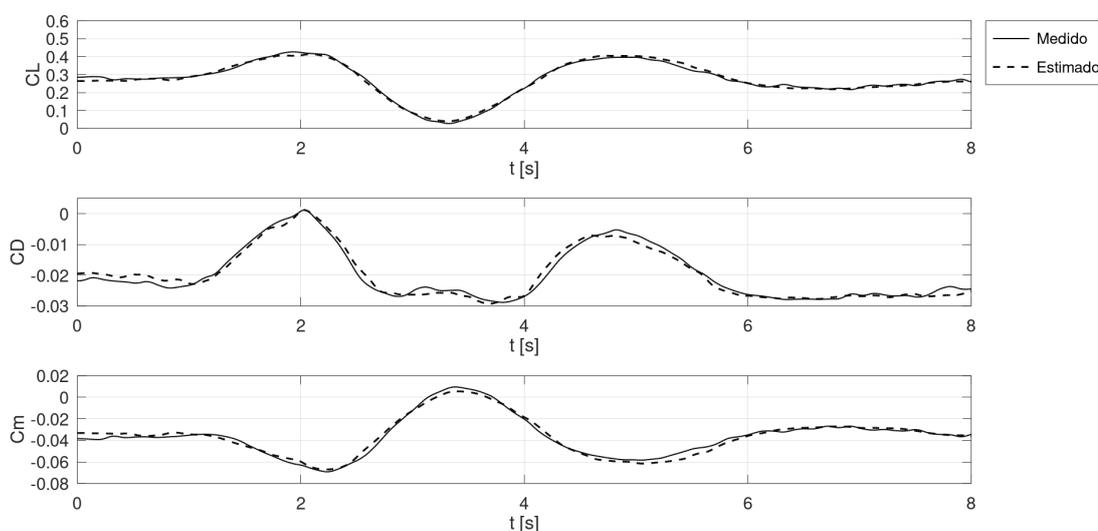
Derivada	Valor	Derivada	Valor	Derivada	Valor
$C_{L_0}$	0,2673	$C_{D_0}$	-0,0180	$C_{m_0}$	-0,0346
$C_{L_V}$	8,0965	$C_{D_V}$	-3,0335	$C_{m_V}$	-2,3071
$C_{L_\alpha}$	2,8134	$C_{D_\alpha}$	0,3755	$C_{m_\alpha}$	-0,6822
$C_{L_{\dot{\alpha}}}$	-10,1961	$C_{D_{\dot{\alpha}}}$	1,6579	$C_{m_{\dot{\alpha}}}$	2,4102
$C_{L_q}$	-29,6284	$C_{D_q}$	4,9148	$C_{m_q}$	4,4028
$C_{L_{\delta_e}}$	-1,5291	$C_{D_{\delta_e}}$	0,3223	$C_{m_{\delta_e}}$	-0,1596

Fonte: Autor (2024).

Os resultados dos parâmetros estimados podem ser avaliados, inicialmente, a partir do erro de ajuste entre as variáveis dependentes ( $C_L$ ,  $C_D$  e  $C_m$ ) medidas e entre o resultante dos parâmetros estimados. A Figura 61 apresenta graficamente o ajuste entre as curvas e a Tabela 14 apresenta os resultados obtidos.

Em seguida, empregando as derivadas de estabilidade estimadas nas Equações 109, 110 e 111 e calculando a matriz de estado 107, é possível submeter o modelo linear estimado

Figura 61 – Variáveis dependentes do ensaio longitudinal- 1ª iteração



Fonte: Autor (2024).

Tabela 14 – Análise do erro de ajuste - 1ª iteração longitudinal

Coeficiente	$R^2$	RMSE
$C_L$	0,9897	0,0099
$C_D$	0,9714	0,0014
$C_m$	0,9759	0,0028

Fonte: Autor (2024).

às entradas medidas e estimar a resposta dinâmica do movimento longitudinal ( $u$ ,  $w$ ,  $q$  e  $\theta$ ), conforme o descrito no processo de simulação da Seção 3.4. O resultado da simulação está apresentado graficamente na Figura 62 e os valores de ajuste das curvas na Tabela 15.

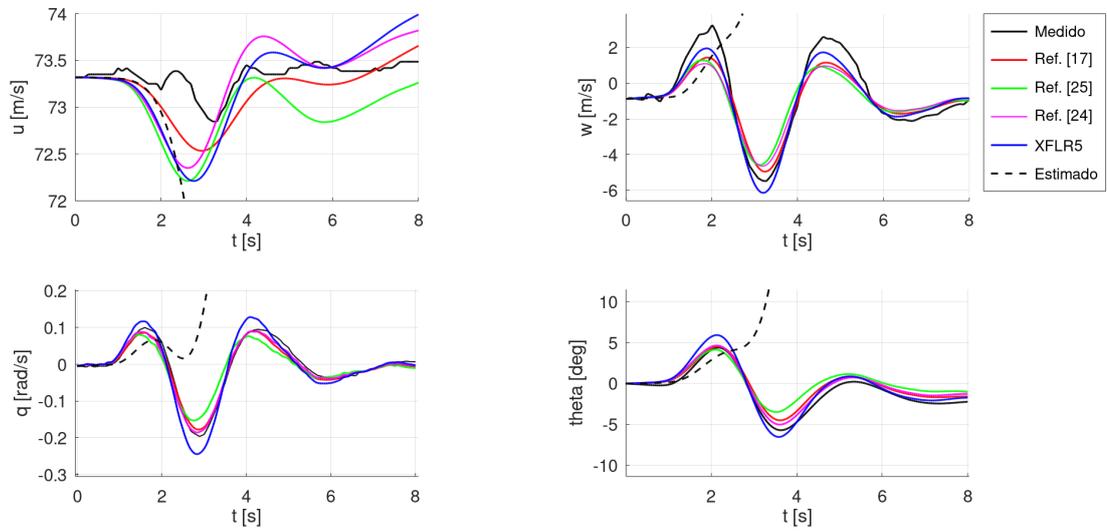
Tabela 15 – Análise do erro da simulação - 1ª iteração longitudinal

Estado	Parâmetro	Ref. [17]	Ref. [25]	Ref. [24]	XFLR5	Estimado
$u$	$R^2$	0,6290	0,5240	0,5921	0,6066	0,5000
	RMSE	0,2521	0,4518	0,3475	0,3818	5650,7
$w$	$R^2$	0,8137	0,6937	0,7153	0,9263	0,4999
	RMSE	0,7698	0,9707	0,9268	0,5736	19033
$q$	$R^2$	0,9715	0,8468	0,9771	0,9411	0,5000
	RMSE	0,0113	0,0241	0,0105	0,0225	443,5
$\theta$	$R^2$	0,8868	0,8493	0,9088	0,8675	0,5000
	RMSE	0,0138	0,0132	0,0130	0,0205	235,5

Fonte: Autor (2024).

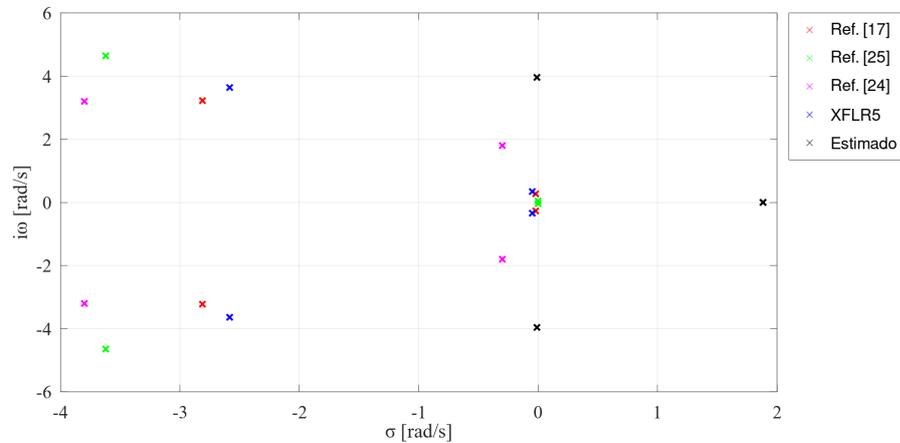
Avaliando a resposta dinâmica, percebe-se que o movimento se tornou instável. Esse resultado pode ser comprovado observando o mapa de polos do modelo longitudinal (Figura 63), onde se avalia que o período longo está em condições instáveis.

Figura 62 – Resposta longitudinal - 1ª iteração



Fonte: Autor (2024).

Figura 63 – Mapa de polos do modelo longitudinal - 1ª iteração

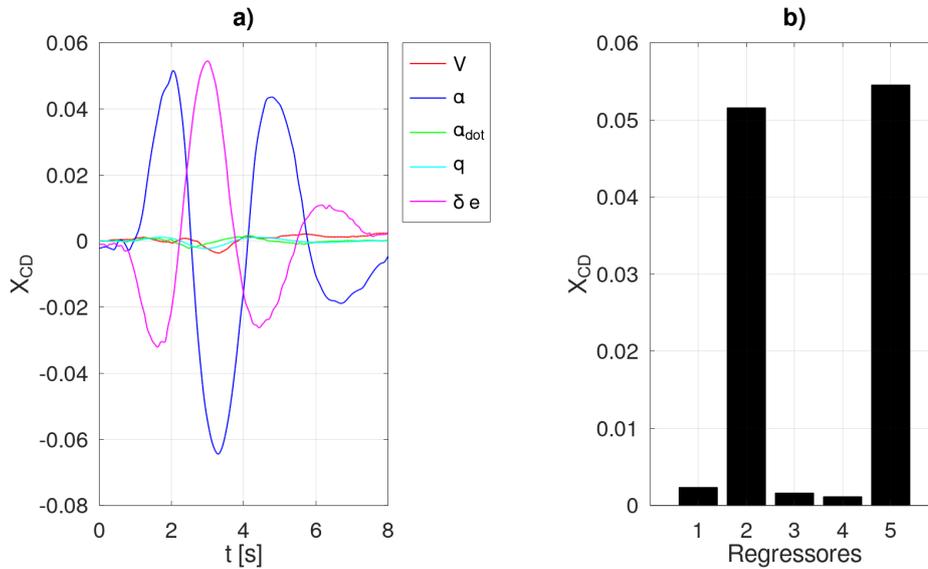


Fonte: Autor (2024).

A instabilidade é resultado majoritário das derivadas dimensionais  $Z_u$  e  $X_u$ , que são compostas das derivadas adimensionais  $C_{D_0}$ ,  $C_{D_V}$ ,  $C_{L_0}$  e  $C_{L_V}$ , que foram mal estimadas por conta da colinearidade dos regressores. De acordo com Suit (1972), os pares de derivadas  $C_{m_q}$  e  $C_{m_{\dot{\alpha}}}$ ,  $C_{m_q}$  e  $C_{m_{\delta_e}}$ , e  $C_{m_{\alpha}}$  e  $C_{m_{\dot{\alpha}}}$  possuem correlação.

Para evitar o problema da correlação entre os parâmetros, o vetor de regressores deve ser reduzido, considerando apenas os regressores com mais influência nas variáveis dependentes e que não possuam relação entre si. A Figura 64 apresenta a contribuição de cada regressor para as variáveis dependentes a partir da sua magnitude.

Figura 64 – Contribuição dos regressores



Fonte: Autor (2024).

Avaliando a Figura 64 b), compreende-se que os regressores que possuem maior influência nas variáveis dependentes são os regidos pelas variáveis  $\delta_e$  e  $\alpha$ , seguidos por  $V$ ,  $\dot{\alpha}$  e  $q$ . De acordo com Suit (1972), no entanto, a variável  $q$  é de grande valor para os modelos longitudinais pela sua composição no período curto.

Avaliando esses resultados, optou-se por selecionar os regressores  $\alpha$  e  $q$ . Ambas as variáveis são responsáveis por descrever o período curto. Logo, entende-se que a manobra utilizada no movimento longitudinal não foi capaz de excitar o período longo, apenas o curto.

Os outros parâmetros do modelo foram estimados a partir dos métodos descritos por Roskam (1979). Os valores calculados estão apresentados na Tabela 16

Tabela 16 – Derivadas calculadas

Derivada	Valor	Derivada	Valor	Derivada	Valor
$C_{LV}$	0,0150	$C_{DV}$	0,0000	$C_{mV}$	-0,0007
$C_{L\dot{\alpha}}$	-4,6612	$C_{D\dot{\alpha}}$	0,0000	$C_{m\dot{\alpha}}$	-4,5533
$C_{L\delta_e}$	0,4344	$C_{D\delta_e}$	0,0000	$C_{m\delta_e}$	-1,2253

Fonte: Autor (2024).

No entanto, o regressor dependente de  $\delta_e$  possui grande influência nas variáveis dependentes, especialmente  $C_{m\delta_e}$ . Sendo assim, para ser possível aplicar as Equações de regressão é necessário descontar o efeito desses regressores nas variáveis dependentes. Essa etapa pode ser feito conforme as Equações 192, onde a barra sobre as variáveis representa a sua correção.

$$\begin{aligned}
\bar{C}_L &= C_L - C_{L\delta_e} \cdot \delta_e \\
\bar{C}_D &= C_D - C_{D\delta_e} \cdot \delta_e \\
\bar{C}_m &= C_m - C_{m\delta_e} \cdot \delta_e
\end{aligned} \tag{192}$$

Removendo a contribuição do regressor  $\delta_e$  e aplicando apenas os regressores  $\alpha$  e  $q$ , as Equação de regressão 157, 158 e 159, podem ser reescritas no formato das Equações 193, 194 e 195.

$$\begin{bmatrix} \bar{C}_D(1) \\ \vdots \\ \bar{C}_D(N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta\alpha(1) & \frac{q(1)\bar{c}}{2u_0} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \Delta\alpha(N) & \frac{q(N)\bar{c}}{2u_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{D_0} \\ C_{D_\alpha} \\ C_{D_q} \end{bmatrix} \tag{193}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{C}_L(1) \\ \vdots \\ \bar{C}_L(N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta\alpha(1) & \frac{q(1)\bar{c}}{2u_0} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \Delta\alpha(N) & \frac{q(N)\bar{c}}{2u_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{L_0} \\ C_{L_\alpha} \\ C_{L_q} \end{bmatrix} \tag{194}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{C}_m(1) \\ \vdots \\ \bar{C}_m(N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta\alpha(1) & \frac{q(1)\bar{c}}{2u_0} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \Delta\alpha(N) & \frac{q(N)\bar{c}}{2u_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{m_0} \\ C_{m_\alpha} \\ C_{m_q} \end{bmatrix} \tag{195}$$

Aplicando o método de mínimos quadrados para as equações de regressão descritas acima, é possível estimar os parâmetros restantes.

Tabela 17 – Segunda iteração -  $CL$ ,  $CD$  e  $Cm$

Derivada	Valor	Derivada	Valor	Derivada	Valor
$C_{L_0}$	0,2967	$C_{D_0}$	-0,0199	$C_{m_0}$	0,027894
$C_{L_\alpha}$	3,2268	$C_{D_\alpha}$	0,2821	$C_{m_\alpha}$	-0,8248
$C_{L_q}$	-13,5470	$C_{D_q}$	-2,0959	$C_{m_q}$	-18,8080

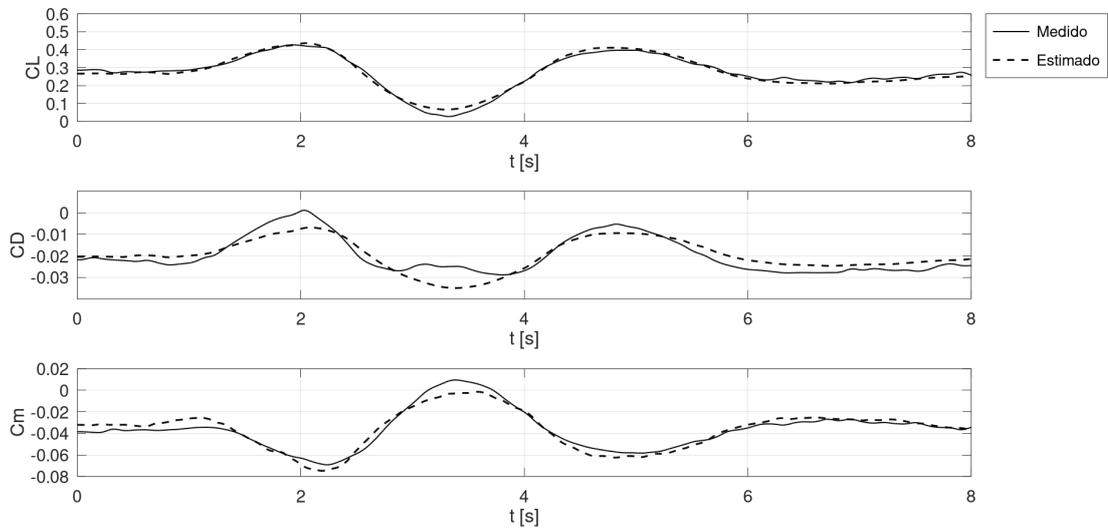
Fonte: Autor (2024).

A última tratativa a ser feita diz respeito aos regressores envolvendo  $q$  e  $\hat{\alpha}$ , já que eles possuem magnitudes similares e são normalizados da mesma forma, ao utilizar apenas  $q$  como regressor ele estará englobando os efeitos de  $\hat{\alpha}$ . Para corrigir esse ponto, deve-se subtrair o valor calculado de  $C_{m_\alpha}$  do valor estimado de  $C_{m_q}$ , resultando em  $C_{m_q} = -14,2580$ .

Estimados os parâmetros restantes, é possível reavaliar o ajuste da estimativa para as variáveis dependentes. A Figura 65 apresenta o resultado graficamente e a Tabela 18 apresenta os resultados do erro.

Em seguida, reaplicando as variáveis adimensionais nas Equações 109, 110 e 111, calculando a matriz de estado 107, e simulando o movimento longitudinal, é possível avaliar a resposta dinâmica. O resultado da simulação está apresentado graficamente na Figura 66 e os valores de ajuste das curvas na Tabela 19.

Figura 65 – Variáveis dependentes - 2ª iteração



Fonte: Autor (2024).

Tabela 18 – Análise do erro de ajuste - 2ª iteração longitudinal

Coefficiente	$R^2$	RMSE
$C_L$	0,9771	0,0148
$C_D$	0,7690	0,0040
$C_m$	0,9298	0,0049

Fonte: Autor (2024).

Tabela 19 – Análise do erro da simulação - 2ª iteração longitudinal

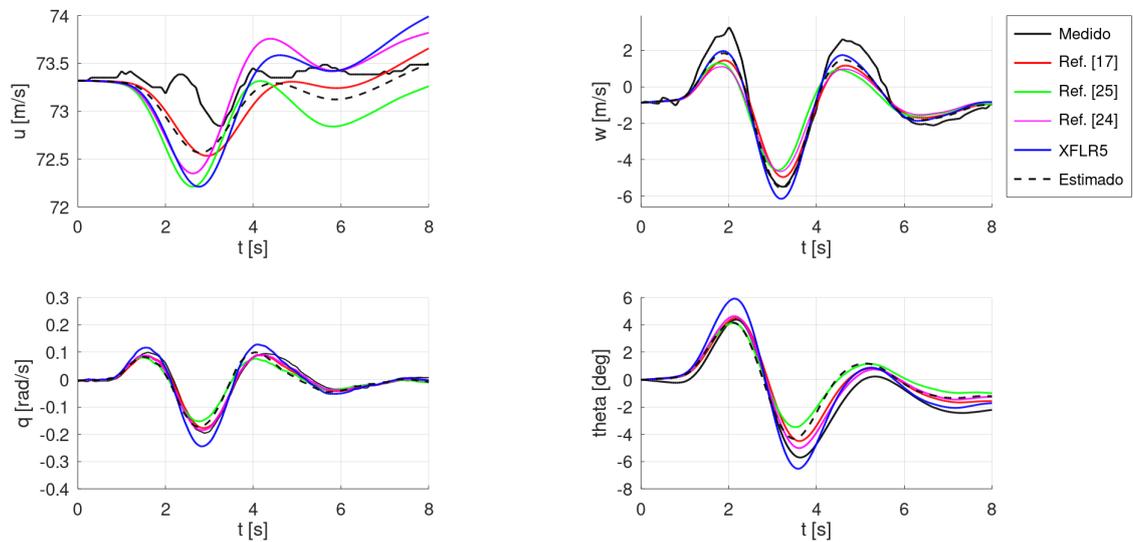
Estado	Parâmetro	Ref. [17]	Ref. [25]	Ref. [24]	XFLR5	Estimado
$u$	$R^2$	0,6290	0,5240	0,5921	0,6066	0,5853
	RMSE	0,2521	0,4518	0,3475	0,3818	0,2604
$w$	$R^2$	0,8137	0,6937	0,7153	0,9263	0,9076
	RMSE	0,7698	0,9707	0,9268	0,5736	0,5913
$q$	$R^2$	0,9715	0,8468	0,9771	0,9411	0,8780
	RMSE	0,0113	0,0241	0,0105	0,0225	0,0239
$\theta$	$R^2$	0,8999	0,7176	0,9288	0,9432	0,7974
	RMSE	0,0131	0,0224	0,0114	0,0127	0,0188

Fonte: Autor (2024).

Por fim, reavaliando a estabilidade do sistema a partir do mapa de polos (Figura 67), percebe-se que ambos os modos, período curto e longo, estão estáveis. A Tabela 20 apresenta os resultados em termos da frequência natural, amortecimento e constante de tempo dos modos longitudinais em comparação com os resultados obtidos por Stengel e Nixon (1980).

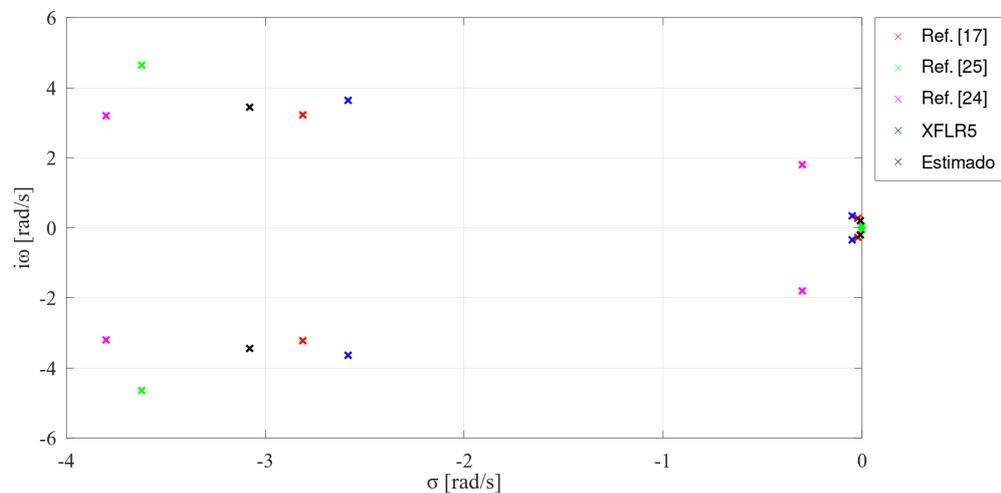
Uma vez obtidos os estados longitudinais simulados, foram aplicadas as Equações 83, 84 e 85 para reconstruir a trajetória da aeronave. A Figura 68 apresenta a trajetória em três dimensões para o ensaio longitudinal. A Tabela 21 apresenta a qualidade do ajuste do modelo.

Figura 66 – Resposta longitudinal - 2ª iteração



Fonte: Autor (2024).

Figura 67 – Mapa de polos do modelo longitudinal - 2ª iteração



Fonte: Autor (2024).

#### 4.2.2 Modelo látero-direcional

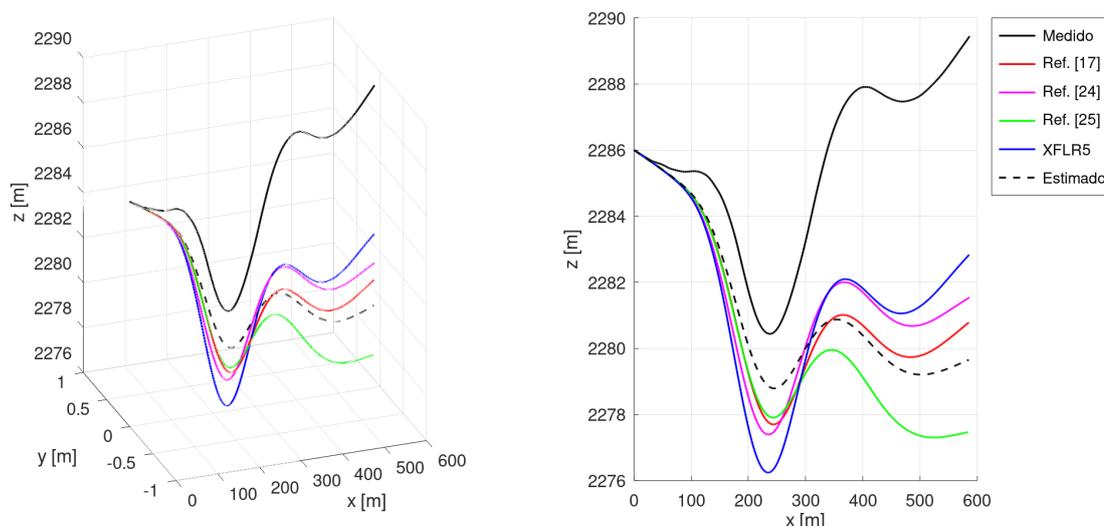
De forma similar ao modelo longitudinal, a primeira iteração da regressão deveria utilizar o vetor completo de regressores apresentado nas Equações 160 a 162, isto é:  $\beta$ ,  $p$ ,  $r$ ,  $\delta_r$  e  $\delta_a$ . Contudo, a partir dos aprendizados relacionados a correlação dos regressores e dos resultados apresentados por Suit (1972), o vetor de regressores foi adaptado para cada um dos ensaios

Tabela 20 – Propriedades - movimento longitudinal

Caso	Modo	Polos	$\omega_n$	$\zeta$	$\tau$
Estimado	Período longo	$-0,008 \pm 0,203i$	0,203	0,039	127,0
	Período curto	$-3,080 \pm 3,440i$	4,620	0,665	0,325
Ref. [24]	Período longo	$-0,300 \pm 1,800i$	0,181	0,170	32,5
	Período curto	$-3,800 \pm 3,300i$	5,020	0,760	0,262

Fonte: Autor (2024).

Figura 68 – Reconstrução da trajetória - ensaio longitudinal



Fonte: Autor (2024).

Tabela 21 – Análise do erro - reconstrução da trajetória

Estado	Parâmetro	Ref. [17]	Ref. [25]	Ref. [24]	XFLR5	Estimado
$x_E$	$R^2$	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
	RMSE	1,0066	1,6494	0,7542	1,1054	0,9289
$z_E$	$R^2$	0,4737	0,4340	0,4983	0,5136	0,4514
	RMSE	5,2601	6,6078	4,7063	4,6002	5,4750

Fonte: Autor (2024).

(lateral e direcional). Para o ensaio lateral, o regressor  $\delta_r$  foi removido, uma vez que  $\delta_a$  é predominante. Para o ensaio direcional foi feito o oposto, ou seja, removeu-se a influência de  $\delta_a$ .

Realizando a regressão para ambos os ensaios, estimativas das derivadas de estabilidade das Equações 160, 161 e 162, foram obtidas como resultados de ambos os ensaios. O modelo látero-direcional é composto da seleção das melhores estimativas de ambos os ensaios.

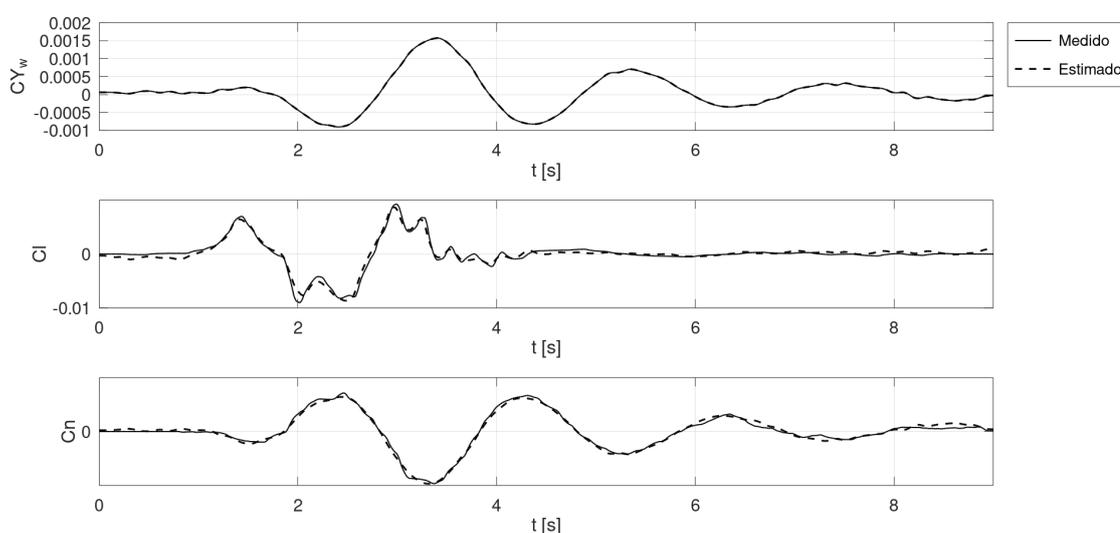
Iniciando pelo ensaio lateral, as derivas estimadas estão apresentadas na Tabela 22. Reconstruindo as variáveis dependentes do movimento látero-direcional ( $C_{Y_w}$ ,  $C_l$  e  $C_n$ ) e comparando com os valores medidos, obtém-se os resultados apresentados na Figura 69 e na Tabela 23.

Tabela 22 – Estimativas do ensaio lateral-  $C_{Y_w}$ ,  $C_l$  e  $C_n$ 

Derivada	Valor	Derivada	Valor	Derivada	Valor
$C_{Y_0}$	0,0000	$C_{l_0}$	0,0000	$C_{n_0}$	0,0003
$C_{Y_\beta}$	-0,0225	$C_{l_\beta}$	-0,0904	$C_{n_\beta}$	0,0885
$C_{Y_p}$	0,0000	$C_{l_p}$	-0,6240	$C_{n_r}$	-0,0045
$C_{Y_L}$	0,0000	$C_{l_r}$	0,1093	$C_{n_p}$	-0,0968
$C_{Y_{\delta_r}}$	—	$C_{l_{\delta_r}}$	—	$C_{n_{\delta_r}}$	—
$C_{Y_{\delta_a}}$	0,0000	$C_{l_{\delta_a}}$	0,0939	$C_{n_{\delta_a}}$	0,0034

Fonte: Autor (2024).

Figura 69 – Reconstrução das variáveis dependentes - ensaio lateral



Fonte: Autor (2024).

Tabela 23 – Análise do erro de ajuste - ensaio lateral

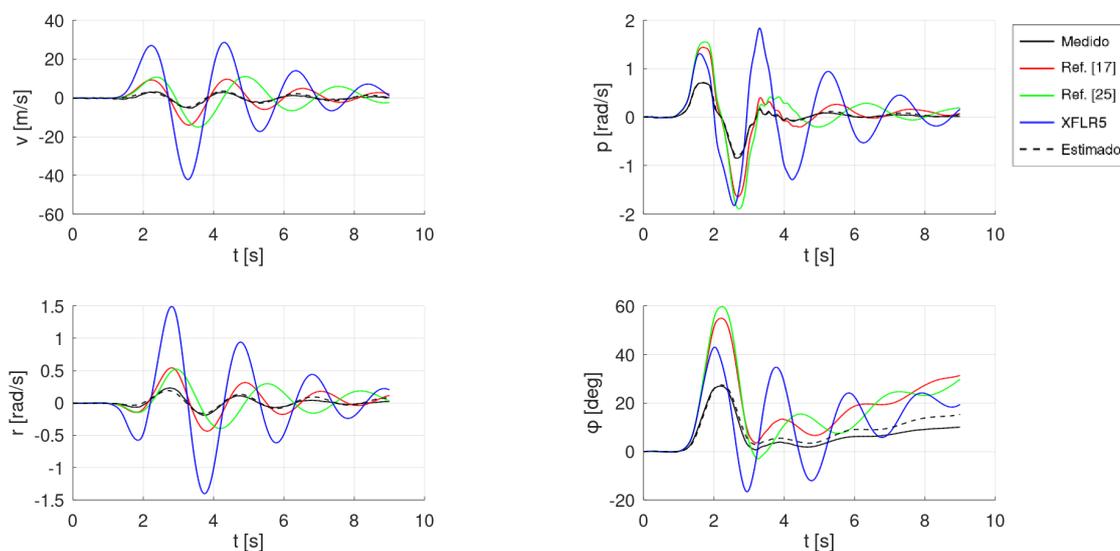
Coefficiente	$R^2$	RMSE
$C_{Y_w}$	1,0000	$1,3e - 7$
$C_l$	0,9595	0,0005
$C_n$	0,9855	0,0002

Fonte: Autor (2024).

Com as estimativas das derivadas de estabilidade e controle, advindas da análise do ensaio lateral, foi calculada a matriz de estado da Equação 108. Com o sistema em espaço de estados, uma simulação foi feita para validar os resultados, aplicando as entradas de controle medidas em voo. A Figura 70 apresenta a resposta temporal para cada um dos estados. A Tabela 23 apresenta a qualidade do ajuste do modelo obtido.

O mesmo procedimento foi aplicado para os dados do ensaio em voo direcional, obtendo as derivas apresentadas na Tabela 25. A reconstrução das variáveis dependentes está apresentada na Figura 71 e o erro de ajuste na Tabela 26.

Figura 70 – Resposta simulada látero-direcional - ensaio lateral



Fonte: Autor (2024).

Tabela 24 – Análise do erro da simulação - ensaio lateral

Estado	Parâmetro	Ref. [17]	Ref. [25]	XFLR5	Estimado
$v$	$R^2$	0,6745	0,5348	0,5590	0,91641
	RMSE	3,6564	5,9212	13,5420	0,5717
$p$	$R^2$	0,7881	0,7309	0,6008	0,9918
	RMSE	0,2643	0,3526	0,6028	0,0224
$r$	$R^2$	0,7132	0,5443	0,5723	0,8980
	RMSE	0,1274	0,1881	0,5038	0,0262
$\phi$	$R^2$	0,6363	0,6425	0,5962	0,8841
	RMSE	0,2324	0,2373	0,2163	0,0453

Fonte: Autor (2024).

Mais uma vez, calculando a matriz de estado da Equação 108 com as derivadas da Tabela 25, uma simulação foi feita para validar os resultados, aplicando as entradas de controle medidas em voo. A Figura 72 apresenta a resposta temporal para cada um dos estados. A Tabela 23 apresenta a qualidade do ajuste do modelo obtido.

A partir da análise das Tabelas 23, 24, 26 e 27, percebe-se que os resultados obtidos a partir do ensaio em voo lateral tiveram um menor erro, sendo assim, as variáveis adotadas para o modelo final serão as da Tabela 22, com exceção das derivadas  $C_{Y_{\delta_r}}$ ,  $C_{l_{\delta_r}}$  e  $C_{n_{\delta_r}}$ , que serão adotadas as estimadas pelo ensaio em voo direcional. O conjunto final das derivadas de estabilidade e controle para o modelo látero direcional estão apresentadas na Tabela 28.

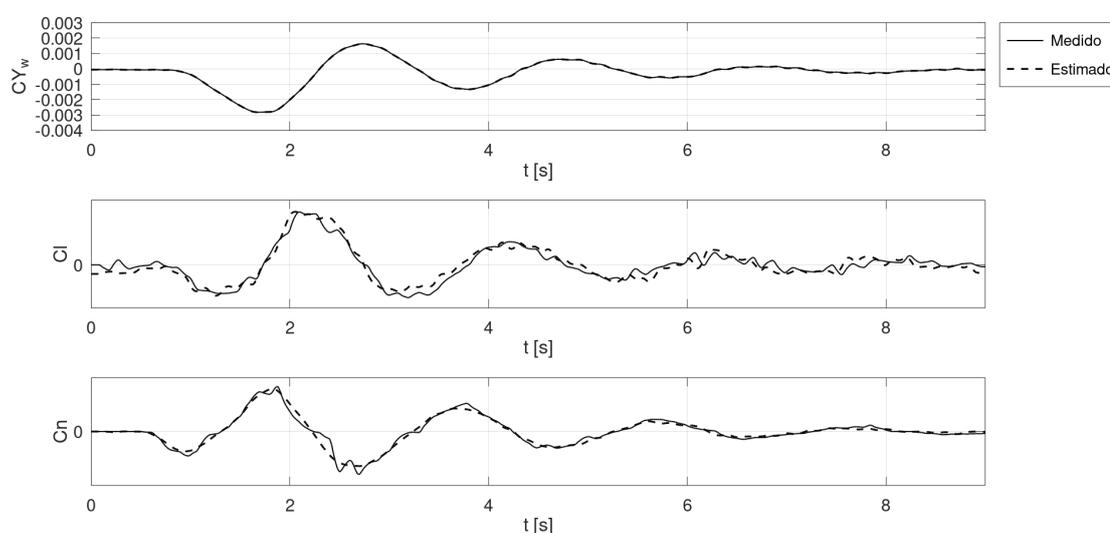
Simulando o modelo final obtido com as entradas de ambos os ensaios, chegou-se aos resultados apresentados nas Figuras 73 e 74. O erro de ajuste para cada um dos estados está apresentado na Tabela 29, mostrando uma melhora do modelo final em relação aos modelos

Tabela 25 – Primeira iteração do ensaio direcional-  $C_{Y_w}$ ,  $C_l$  e  $C_n$ 

Derivada	Valor	Derivada	Valor	Derivada	Valor
$C_{Y_0}$	0,0000	$C_{l_0}$	0,0000	$C_{n_0}$	-0,0001
$C_{Y_\beta}$	-0,0224	$C_{l_\beta}$	-0,0585	$C_{n_\beta}$	0,0776
$C_{Y_p}$	0,0004	$C_{l_p}$	-0,4066	$C_{n_p}$	0,0958
$C_{Y_L}$	0,0000	$C_{l_r}$	0,1288	$C_{n_r}$	-0,0843
$C_{Y_{\delta_r}}$	0,0000	$C_{l_{\delta_r}}$	0,0073	$C_{n_{\delta_r}}$	-0,0425
$C_{Y_{\delta_a}}$	—	$C_{l_{\delta_a}}$	—	$C_{n_{\delta_a}}$	—

Fonte: Autor (2024).

Figura 71 – Reconstrução das variáveis dependentes - ensaio direcional



Fonte: Autor (2024).

Tabela 26 – Análise do erro de ajuste - 1ª iteração lateral

Coefficiente	$R^2$	RMSE
$C_{Y_w}$	1,0000	0,0000
$C_l$	0,9127	0,0002
$C_n$	0,9518	0,0004

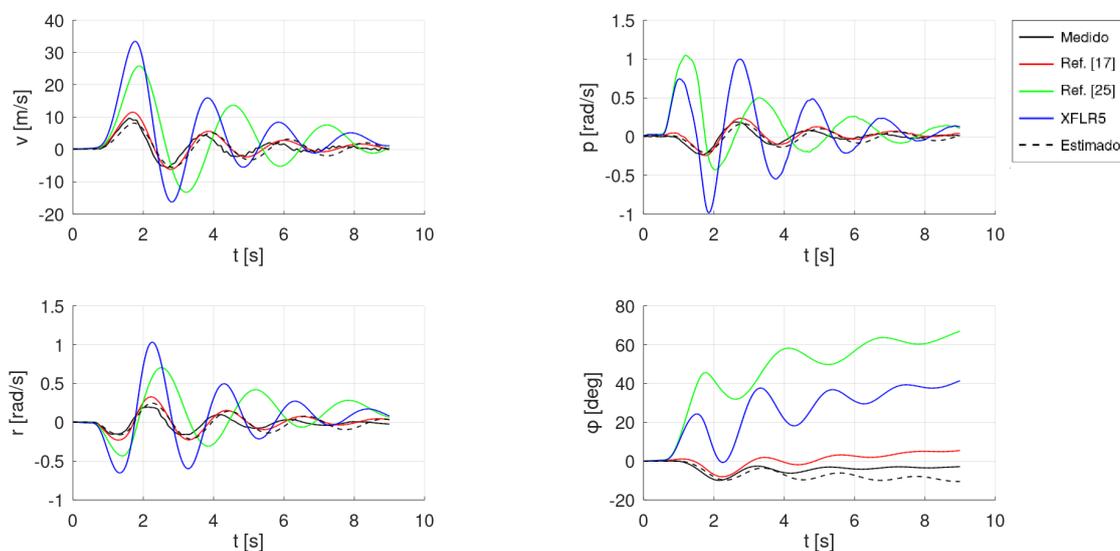
Fonte: Autor (2024).

individuais de cada ensaio.

Avaliando a estabilidade do sistema a partir do mapa de polos (Figura 75), nota-se que o único modo instável é o espiral, algo comum entre aeronaves de aviação geral e apontado pela bibliografia como um modo lento e fácil de ser corrigido pelo piloto (Nelson, 1998). A Tabela 30 apresenta os resultados em termos da frequência natural, amortecimento e constante de tempo dos modos látero-direcionais.

Finalmente, os estados látero-direcionais simulados, foram aplicadas as Equações 83, 84 e 85 para reconstruir a trajetória da aeronave. A Figura 76 apresenta a trajetória em três

Figura 72 – Resposta simulada látero-direcional - ensaio direcional



Fonte: Autor (2024).

Tabela 27 – Análise do erro da simulação - ensaio direcional

Estado	Parâmetro	Ref. [17]	Ref. [25]	XFLR5	Estimado
$v$	$R^2$	0,8649	0,5298	0,6274	0,7451
	RMSE	1,4307	8,6662	8,1451	1,777
$p$	$R^2$	0,8107	0,4498	0,5667	0,7295
	RMSE	0,0463	0,3745	0,3496	0,0509
$r$	$R^2$	0,7970	0,5100	0,6067	0,7273
	RMSE	0,0620	0,2857	0,2923	0,0652
$\phi$	$R^2$	0,5276	0,4964	0,5002	0,5604
	RMSE	0,0923	0,9370	0,5589	0,0667

Fonte: Autor (2024).

dimensões para o ensaio lateral (a.1 e a.2) e direcional (b.1 e b.2). A Tabela 31 apresenta a qualidade do ajuste do modelo.

### 4.3 LIMITAÇÕES

As limitações deste trabalho podem ser classificadas em duas naturezas: teórica e de aplicação. As limitações teóricas dizem respeito, principalmente, às hipóteses adotadas na dedução do modelo dinâmico e as imperfeições do método de mínimos quadrados. Quanto à aplicação, as limitações estão na qualidade e disponibilidade dos dados de voo.

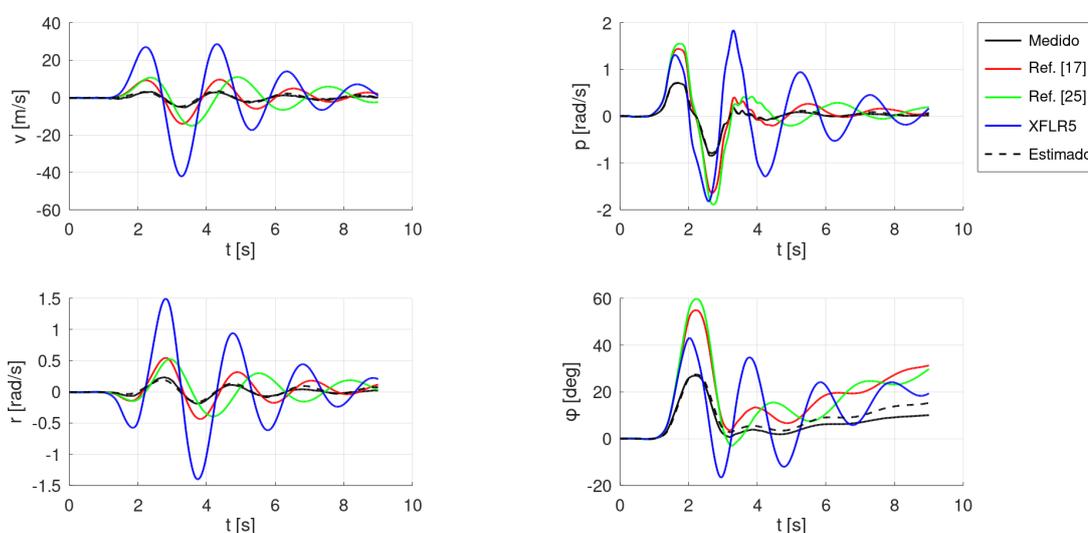
Do ponto de vista teórico, tomar a Terra por referencial inercial e com curvatura desprezível começa a apresentar discrepâncias para aeronaves que voam acima do regime transônico e a altas altitudes. Considerar a aeronave como corpo rígido terá impacto na definição

Tabela 28 – Estimativas do ensaio finais -  $C_{Y_w}$ ,  $C_l$  e  $C_n$ 

Derivada	Valor	Derivada	Valor	Derivada	Valor
$C_{Y_0}$	0,0000	$C_{l_0}$	0,0014	$C_{n_0}$	0,0003
$C_{Y_\beta}$	-0,0225	$C_{l_\beta}$	-0,0904	$C_{n_\beta}$	0,0885
$C_{Y_p}$	0,0000	$C_{l_p}$	-0,6240	$C_{n_r}$	-0,0045
$C_{Y_L}$	0,0000	$C_{l_r}$	0,1093	$C_{n_p}$	-0,0968
$C_{Y_{\delta_r}}$	0,0000	$C_{l_{\delta_r}}$	0,0073	$C_{n_{\delta_r}}$	-0,0425
$C_{Y_{\delta_a}}$	0,0000	$C_{l_{\delta_a}}$	0,0939	$C_{n_{\delta_a}}$	0,0034

Fonte: Autor (2024).

Figura 73 – Resposta simulada látero-direcional final - ensaio lateral



Fonte: Autor (2024).

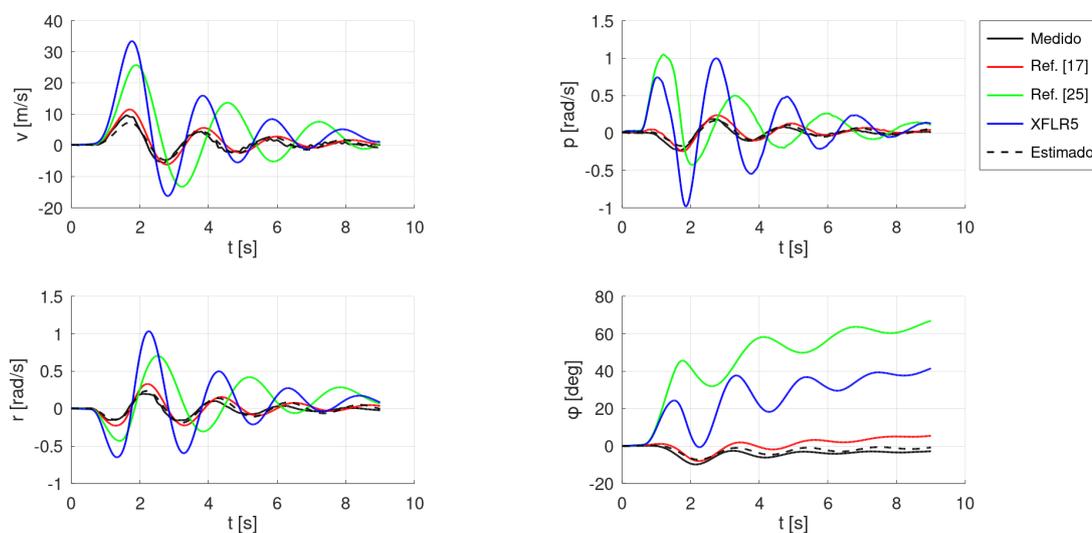
do sistema  $S_B$ , uma vez que os eixos, até então considerados fixos e ortogonais, começarão a apresentar movimento relativo. Além disso, do ponto de vista da instrumentação, graus de liberdade estruturais podem induzir ruídos aos sensores inerciais.

Ainda a respeito das hipóteses tomadas na dedução do modelo dinâmico, linearizar o sistema com base na teoria das pequenas perturbações limita a dedução para manobras de pequenas amplitudes, inviabilizando a análise de movimentos de grandes perturbações, como condição de *stall*. Além disso, assumir os movimentos longitudinal e látero-direcional como independentes e suscetíveis à sobreposição desconsidera o acoplamento inercial e as interações aerodinâmicas de um movimento sobre o outro.

Quanto às limitações do método de mínimos quadrados pode-se discutir, novamente, às hipóteses adotadas. Por tratar de modelos lineares, o método apresenta dificuldades em estimar os parâmetros do modelo sob condições de descontinuidades (ruído) e não linearidades (tomando novamente o exemplo da condição de *stall*).

Do ponto de vista de aplicação, os ensaios em voo apresentados por Suit (1972) foram

Figura 74 – Resposta simulada látero-direcional final - ensaio direcional



Fonte: Autor (2024).

Tabela 29 – Análise do erro da simulação - modelo látero-direcional final

Estado	Parâmetro	Ensaio lateral	Ensaio direcional
$v$	$R^2$	0,9164	0,8780
	RMSE	0,5717	0,9632
$p$	$R^2$	0,9918	0,8609
	RMSE	0,0239	0,0299
$r$	$R^2$	0,8980	0,8969
	RMSE	0,0262	0,0323
$\phi$	$R^2$	0,8841	0,6696
	RMSE	0,0454	0,0302

Fonte: Autor (2024).

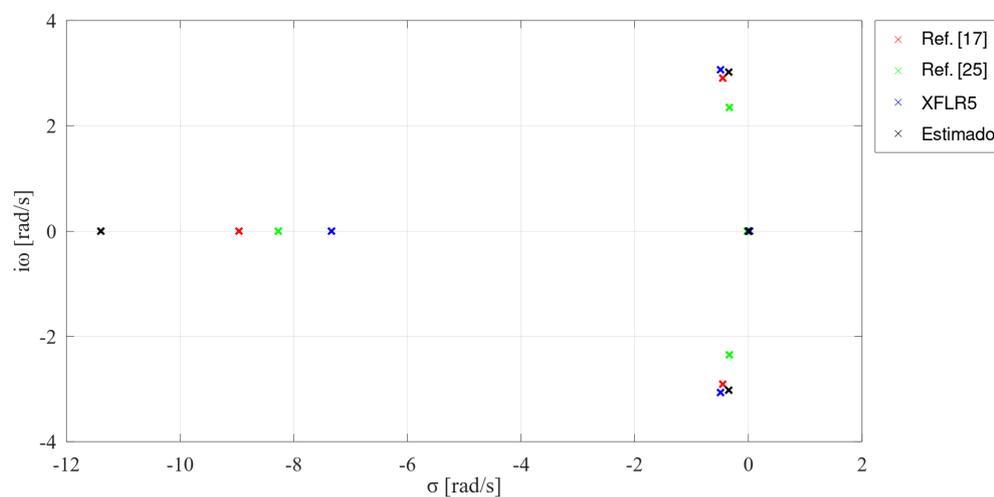
Tabela 30 – Propriedades - movimento látero-direcional

Modo	Polos	$\omega_n$ [rad/s]	$\zeta$	$\tau$ [s]
Rolagem	-11,4000	11,4000	1,0000	0,0878
Rolagem holandesa	$-0,3440 \pm 3,0200i$	3,0400	0,1130	2,9100
Espiral	0,0014	0,0014	—	—

Fonte: Autor (2024).

conduzidos por pilotos treinados e os dados foram adquiridos com equipamentos de ponta para sua época. Além disso, os dados já haviam sido pré-processados para redução de ruídos de medição. Logo, considerando um cenário de aquisição de dados com os recursos disponíveis na universidade, os dados adquiridos em voo certamente apresentariam maior influência de ruído, resultando em uma maior dificuldade de estimação das derivadas de estabilidade e controle.

Figura 75 – Mapa de polos do modelo látero-direcional



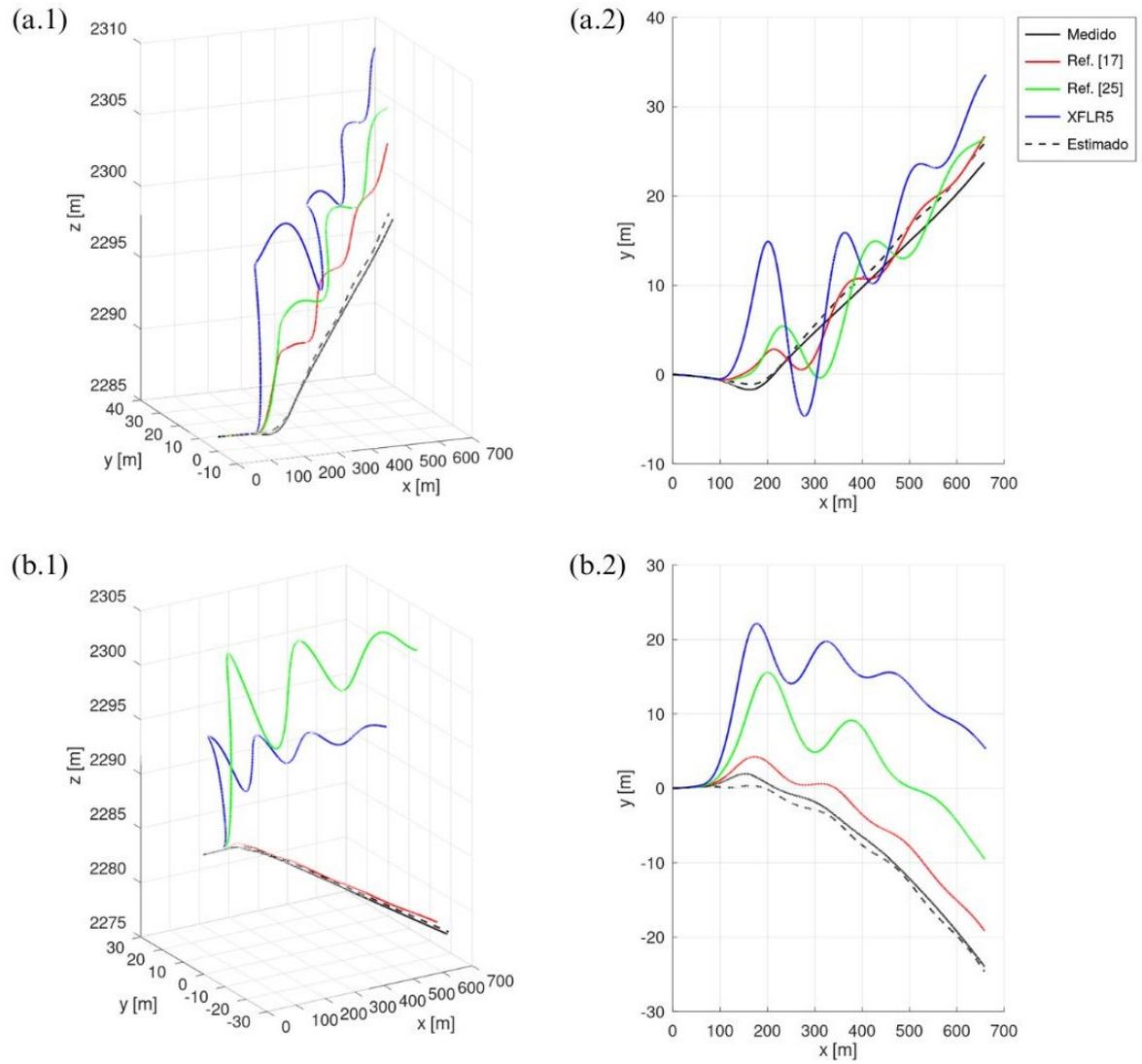
Fonte: Autor (2024).

Tabela 31 – Análise do erro - reconstrução da trajetória

Ensaio	Estado	Parâmetro	Ref. [17]	Ref. [25]	XFLR5	Estimado
Lateral	$x_E$	$R^2$	0,9999	1,0000	0,9998	1,0000
		RMSE	0,5926	0,3122	2,5046	0,0289
	$y_E$	$R^2$	0,9561	0,8947	0,6509	0,9818
		RMSE	1,7265	2,7626	6,5236	1,0969
	$z_E$	$R^2$	0,6553	0,5440	4,9413	0,9996
		RMSE	3,5729	5,7046	8,4400	0,0752
Direcional	$x_E$	$R^2$	1,0000	1,0000	0,9999	1,0000
		RMSE	0,1903	0,3730	1,7810	0,1189
	$y_E$	$R^2$	0,8768	0,5544	0,4836	0,9870
		RMSE	3,0191	11,1500	20,5130	0,8787
	$z_E$	$R^2$	0,9902	0,4430	0,4559	0,9940
		RMSE	0,2783	16,6050	9,5748	0,2161

Fonte: Autor (2024).

Figura 76 – Reconstrução da trajetória - ensaios látero-direcional



Fonte: Autor (2024).

## 5 CONCLUSÃO

Nesse trabalho buscou-se estimar as derivadas de estabilidade de uma aeronave de asa fixa. Essa abordagem pode ser empregada tanto em tempo de projeto quanto no processo de validação. A técnica de identificação de sistemas foi aplicada, usando como método de estimação de parâmetros os mínimos quadrados.

Partindo dos fundamentos da mecânica newtoniana, a modelagem da dinâmica de voo da aeronave foi feita, permitindo escrever as equações de movimento no formato de espaço de estados, notação amplamente usada nas áreas de controle e simulação.

Observando a premissa de que o movimento da aeronave se comporta de forma linear para condições próximas ao ponto operacional. Os modelos aerodinâmicos para cada uma das variáveis dependentes foram descritos, destacando as variáveis de influência que, em seguida, foram usadas como regressores pelo método dos mínimos quadrados.

Utilizando os dados de voo disponibilizados por Suit (1972), foi possível estimar 22 das 35 derivadas de estabilidade e controle da aeronave Ryan Navion, alvo de análise deste trabalho. As derivadas remanescentes foram estimadas usando os métodos propostos por Roskam (1979).

Com as matrizes de estado e controle que abstraem os movimentos longitudinal e latero-direcional da aeronave de estudo, a reconstrução das condições de voo foi feita, validando os resultados obtidos não só com os dados de referência, mas também com modelos derivados por outros autores. Em posse dos resultados obtidos, e compreendendo as limitações dos métodos utilizados, conclui-se que a técnica de identificação de sistemas é uma ferramenta eficaz na estimação das derivadas de estabilidade e controle de uma aeronave de asa fixa.

Visando otimizar a execução dos ensaios, propõe-se que o método de estimação paramétrica utilizando mínimos quadrados seja complementado pela utilização de métodos analíticos de baixa ordem, dessa forma, uma primeira estimativa das frequências naturais dos modos dinâmicos pode ser obtida e utilizada na definição das manobras de voo. Além disso, para o movimento longitudinal, aconselha-se realizar dois ensaios, um aplicando o doublet e outro a manobra 3-2-1-1, visando melhorar a identificação do período longo.

Quanto à instrumentação, testes em solo devem ser executados para calibrar os sensores. Os sensores de ângulos aerodinâmicos também devem passar por processos detalhados de calibração, uma vez que a conversão do sistema  $S_B$  para  $S_w$  é feita por esses ângulos, impactados por erros nessas variáveis.

Uma vez compreendido todo o processo de identificação de sistemas, desde os ensaios até à estimação dos parâmetros, essa ferramenta pode ser aplicada em outras áreas de pesquisa, como o desenvolvimento de controle adaptativo e a identificação automática de falhas em voo. Além disso, áreas que estão na vanguarda da pesquisa científica como o aprendizado de máquina informado por física e o desenvolvimento de gêmeos digitais também podem ser aprimorados pelo uso da identificação paramétrica.

## REFERÊNCIAS

- ABNT. **NBR ISO/IEC 15288 - Engenharia de sistemas e software — Processos de ciclo de vida de sistema**. 1st. ed. Rio de Janeiro, 2009.
- DEPERROIS, A. **XFLR5**. 2024. Disponível em: <<https://www.xflr5.tech/xflr5.htm>>. Acesso em: 24 jun. 2024.
- DIAS, J. N. **Estimação de derivadas de estabilidade de uma aeronave não tripulada através de mínimos quadrados ortogonais**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Aeronáutica e Mecânica) — Instituto de Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos, 2012.
- DORF, R. C.; BISHOP, R. H. **Modern Control Systems**. 11. ed. Upper Saddle River: Pearson, 2008.
- ETKIN, B.; REID, L. D. **Dynamics of flight: Stability and control**. 3. ed. Blacksburg: Jhon Wiley and Sons, 2003.
- HAMEL, P. G. **In-flight simulators and fly-by-wire/light demonstrators: A historical account of international aeronautical research**. Cham: Springer, 2017.
- HAMEL, P. G. *et al.* **Parameter Identification**. Neuilly-sur-Seine: Advisory Group for Aerospace Research and Development - AGARD, 1979.
- HILDERMAN, V. **The Aviation Development Ecosystem: Applying do-178c, arp4754a, do-254 and related guidelines**. 1. ed. Los Angeles: Aviation Press International, 2021.
- INCOSE. **Systems Engineering Handbook - A guide for system life cycle processes and activities**. 3rd. ed. San Diego, USA: Jhon Wiley & Sons, 2006.
- KIM, P. **Kalman Filter for Beginners: with matlab examples**. 1. ed. Coreia do Sul: A-JIN Publishing Company, 2011.
- KIMBERLIN, R. D. **Flight Testing of Fixed Wing Aircraft**. Blacksburg: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2003.
- MACHADO, C. P. dos S. **Técnicas de cálculo de derivadas para identificação de sistemas aplicado em estabilidade de aeronaves**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) — Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2022.
- MAINE, R. E.; ILIFF, K. W. **Application of parameter estimation to aircraft stability and control**. Edwards: National Aeronautics and Space Administration, 1986.
- MORELLI, E. A.; KLEIN, V. **Aircraft System Identification: Theory and practice**. Blacksburg: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2006.
- MULDER, J. A.; SRIDHAR, J. K.; BREEMAN, J. H. **Identification of Dynamic Systems - Applications to Aircraft Part 2: Nonlinear analysis and manoeuvre design**. Neuilly-sur-Seine: Advisory Group for Aerospace Research and Development, 1994.
- NASA. **Nasa Systems Engineering Handbook**. 2nd. ed. Washington, USA: Nasa, 2019.

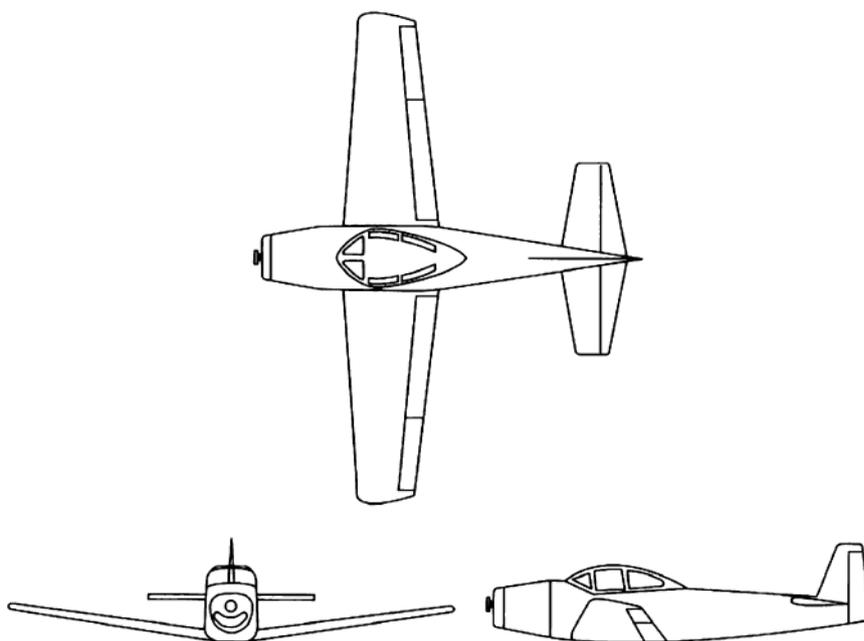
- NELSON, D. R. C. **Flight Stability and Automatic Control**. 2. ed. Boston: McGraw-Hill, 1998.
- NETO, C. J. M. M. **Identificação de modelos dinâmicos no domínio da frequência aplicados a sistemas aeronáuticos**. Dissertação (Mestrado em Ciência da Engenharia) — Instituto Militar de Engenharia, Rio de Janeiro, 2005.
- PADAYACHEE, K. **Aerodynamic parameter identification for an unmanned aerial vehicle**. Dissertação (Mestrado em Ciência da Engenharia) — Universidade de Witwatersrand, Johannesburg, 2016.
- PRATT, R. W. **Flight Control System practical issues in design and implementation**. Reston: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2000.
- RAO, C. R.; SHALABH, H. T.; HEUMANN, C. **Linear Models and Generalizations: Least squares and alternatives**. 3rd. ed. New York: Springer, 2008.
- ROSKAM, J. **Airplane flight dynamics and flight controls: Part i**. Lawrence: Roskam Aviation and Engineering Corporation, 1979.
- SADRAEY, M. H. **Aircraft Design: A systems engineering approach**. 1. ed. New Hampshire: Jhon Wiley and Sons, 2013.
- STENGEL, R. F.; NIXON, W. B. **Investigation of the stalling characteristics of a general aviation aircraft**. Princeton: Princeton University, 1980.
- SUIT, W. T. **Aerodynamic Parameters of The Navion Airplane Extracted from Flight Data**. Washington: National Aeronautics and Space Administration, 1972.
- USAF, N. M. of the. **North American L-17A Navion**. 2023. Disponível em: <<https://www.nationalmuseum.af.mil/Visit/Museum-Exhibits/Fact-Sheets/Display/Article/196106/north-american-l-17a-navion/>>. Acesso em: 25 nov. 2023.
- YECHOUT, T. R. *et al.* **Introduction to Aircraft Flight Mechanics: Performance, static stability, dynamic stability, and classical feedback control**. Blacksburg: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2003.

## APÊNDICE A – Aeronaves de estudo

### A.1 Ryan Navion

As três vistas da aeronave estão apresentadas na Figura 77. As propriedades geométricas e inerciais da aeronave estão descritas na Tabela 32.

Figura 77 – Três vistas da aeronave Navion



Fonte: adaptado de Nelson (1998, p. 132).

Tabela 32 – Propriedades geométricas e inerciais do Navion

	Variável	Símbolo	Valor	Unidade
Asa	Envergadura	$b_w$	10,166	$m$
	Corda média	$\bar{c}_w$	1,740	$m$
	Área	$S_w$	17,112	$m^2$
	Razão de aspecto	$AR_w$	6,040	–
	Enflechamento (bordo de ataque)	$\Lambda$	2,996	$deg$
	Afilamento	$\lambda_w$	0,540	–
	Diedro	$\Gamma_w$	7,500	$deg$
	Incidência (raiz)	$i_{wr}$	2,000	$deg$
	Incidência (ponta)	$i_{wt}$	-1,000	$deg$
	Aerofólio (raiz)	-	NACA 4415 R	–
	Aerofólio (ponta)	-	NACA 6410 R	–
EH	Envergadura	$b_{eh}$	4,000	$m$
	Corda média	$\bar{c}_{eh}$	1,000	$m$
	Área	$S_{eh}$	4,000	$m^2$
	Razão de aspecto	$AR_{eh}$	4,000	–
	Enflechamento (bordo de ataque)	$\Lambda_{eh}$	6,000	$deg$
	Afilamento	$\lambda_{eh}$	0,670	–
	Diedro	$\Gamma_{eh}$	0,000	$deg$
	Incidência (raiz)	$i_{eh}$	-3,000	$deg$
	Aerofólio	-	NACA 0012	–
EV	Envergadura	$b_{eh}$	1,650	$m$
	Corda média	$\bar{c}_{eh}$	0,705	$m$
	Área	$S_{eh}$	1.163	$m^2$
	Razão de aspecto	$AR_{eh}$	2,341	–
	Enflechamento (bordo de ataque)	$\Lambda_{eh}$	-	$deg$
	Afilamento	$\lambda_{eh}$	-	–
	Offset	$\kappa_{eh}$	2,000	$deg$
	Aerofólio (raiz)	-	NACA 0013.2	–
Aerofólio (ponta)	-	NACA 0012.04	–	
SC	Área aileron	$S_a$	0,502	$m^2$
	Área leme	$S_r$	0,558	$m^2$
	Área profundor	$S_e$	1,310	$m^2$
	Área flap	$S_f$	7,775	$m^2$
	Deflexão aileron	$\delta_a$	$\pm 20$	$deg$
	Deflexão leme	$\delta_r$	$\pm 15$	$deg$
	Deflexão profundor	$\delta_e$	-30, +20	$deg$
Deflexão flap	$\delta_f$	+40	$deg$	
Inércia	Massa da aeronave abastecida	$m$	1335,760	$kg$
	CG em relação a corda média	CG	25	%
	Momento de inércia em torno de x	$I_x$	1742,330	$kg.m^2$
	Momento de inércia em torno de y	$I_y$	3762,400	$kg.m^2$
	Momento de inércia em torno de z	$I_z$	4389,100	$kg.m^2$

Fonte: Suit (1972).