

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO TECNOLÓGICO DE JOINVILLE
CURSO DE ENGENHARIA AUTOMOTIVA

GUSTAVO CISZ REINERT

MODELO DO COMPORTAMENTO DE MOTOCICLETAS EM CURVA EM REGIME
PERMANENTE

Joinville

2024

GUSTAVO CISZ REINERT

MODELO DO COMPORTAMENTO DE MOTOCICLETAS EM CURVA EM REGIME
PERMANENTE

Trabalho apresentado como requisito para obtenção do título de bacharel em Engenharia Automotiva, no Centro Tecnológico de Joinville, da Universidade Federal de Santa Catarina.

Orientador: Prof. Dr. Andrea Piga Carboni

Joinville

2024

GUSTAVO CISZ REINERT

MODELO DO COMPORTAMENTO DE MOTOCICLETAS EM CURVA EM REGIME
PERMANENTE

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi julgado adequado para obtenção do título de bacharel em Engenharia Automotiva, no Centro Tecnológico de Joinville, da Universidade Federal de Santa Catarina.

Joinville (SC), 01 de julho de 2024.

Banca Examinadora:

Prof. Andrea Piga Carboni, Dr. Eng.
Orientador/Presidente

Prof. Marcos Alves Rabelo, Dr. Eng.
Membro

Prof. Sérgio Junichi Idehara, Dr. Eng.
Membro

AGRADECIMENTOS

A trajetória pela graduação pode parecer um esforço individual, afinal, são tantas provas, trabalhos, horas de estudo. Mas, chegando ao final dessa jornada (agora estando tão perto do diploma de engenheiro), percebo que só foi possível com o apoio de inúmeras pessoas, que não podem ser citadas em apenas uma página de agradecimentos. Mesmo assim, vou tentar dedicar esse trabalho a todas aquelas que fizeram parte da minha vida nesse período e que foram fundamentais para chegar aonde estou.

Agradeço à minha família, especialmente aos meus pais, que sempre estiveram ao meu lado, me dando o suporte necessário para superar os desafios (que foram muitos) durante a faculdade e continuar lutando por meus objetivos.

Ao Professor Dr. Andrea Piga Carboni, tão importante em minha graduação, não apenas como um orientador, mas como um modelo de profissional e pessoa que quero ser no futuro, com um conhecimento vasto e atitude para ajudar as pessoas que são realmente raras de encontrar.

Agradeço aos Professores Dr. Marcos Alves Rabelo e Dr. Sérgio Junichi Idehara, que não hesitaram em fazer parte da banca deste TCC, além de serem mentores exemplares em suas disciplinas, que realmente buscam não só passar o conteúdo didático, mas *that will go the extra mile* (por falta de uma expressão adequada em português neste momento) para formarem os seus alunos.

Também aos meus colegas de faculdade, especialmente aos que participaram comigo na equipe Fórmula CEM, que certamente foram primordiais na minha permanência na faculdade e no aprofundamento dos estudos sobre dinâmica veicular, sem o qual não teria conseguido realizar esse trabalho. Por todas as aprendizagens, experiências, histórias e risadas, obrigado.

RESUMO

Apresenta-se neste trabalho o desenvolvimento de um sistema de equações para modelar o estado de uma motocicleta realizando uma manobra de curva em regime permanente. Inicialmente, uma revisão do modelo de bicicleta, comumente utilizado nesse tipo de simulação de dinâmica veicular, é realizada. Depois, as características relacionadas à dinâmica de motocicletas são investigadas. Um novo sistema de equações é formulado com base no modelo de bicicleta, com as alterações necessárias, e foco no equilíbrio do momento de guinada. Esse sistema é simulado em diferentes cenários de manobras de curvas para uma motocicleta hipotética, com parâmetros obtidos na literatura. Seus resultados são analisados, não sendo observadas incoerências nos valores obtidos, reproduzindo o comportamento que seria esperado de uma motocicleta real.

Palavras-chave: Dinâmica veicular, Motocicleta; Curva; Regime permanente.

ABSTRACT

In this graduation thesis, the development of a system of equations to model a motorcycle cornering at steady-state is presented. To start with, the bicycle model, commonly used in vehicle dynamics simulation, is reviewed. Then, the properties related to motorcycle dynamics is explored. A new system of equations is created based on the bicycle model, including the necessary modifications and a focus on the yaw moment equilibrium. The system is simulated at different cornering scenarios for a hypothetical motorcycle, with parameters obtained from the literature. The results are analyzed, which do not present any unexpected values, successfully reproducing the behavior that would be expected from a real motorcycle.

Keywords: Vehicle dynamics; motorcycle; cornering; steady-state.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Sistema de coordenadas com origem fixa no veículo.....	17
Figura 2 – Representação do ângulo de guinada de um veículo.....	18
Figura 3 – Representação do modelo de bicicleta.....	19
Figura 4 – Representação da força lateral gerada pelo pneu.....	21
Figura 5 – Gráfico da força lateral (F_y) e momento de auto alinhamento (M_z).....	21
Figura 6 – Gráfico da força lateral para diferentes valores da força longitudinal.....	22
Figura 7 – Representação da força lateral do pneu gerada no contato pneu-solo.....	23
Figura 8 – Representação da força lateral e momento de auto alinhamento gerados pelo pneu.....	24
Figura 9 – Curva obtida utilizando a Magic Formula.....	25
Figura 10 – Representação do veículo durante diferentes estados de uma curva.....	26
Figura 11 – Momento de guinada resultante na entrada de curva.....	28
Figura 12 – Veículo percorrendo um skid pad de raio R.....	29
Figura 13 – Ilustração do modelo para motocicletas.....	30
Figura 14 – Representação do ângulo de esterçamento cinemático.....	31
Figura 15 – Variação do ângulo de esterçamento cinemático (linha sólida) em função do ângulo de rolagem, para diferentes valores de esterçamento.....	32
Figura 16 – Ilustração do ângulo de cambagem dos pneus de uma motocicleta.....	33
Figura 17 – Variação do ângulo de cambagem do pneu dianteiro para diferentes esterçamentos.....	34
Figura 18 – Momento giroscópio gerado pela velocidade rotacional das rodas de uma motocicleta em uma curva.....	35
Figura 19 – Dados experimentais da força lateral para diferentes ângulos de cambagem.....	37
Figura 20 – Dados experimentais do momento de auto alinhamento para diferentes ângulos de cambagem.....	37
Figura 21 – Ponto de aplicação da carga normal do pneu de uma motocicleta para um ângulo de cambagem γ	38
Figura 22 – Ponto de aplicação da força longitudinal do pneu de uma motocicleta para um ângulo de cambagem γ	39

Figura 23 – Variáveis relevantes para descrever as forças e acelerações resultantes no modelo de bicicleta.....	40
Figura 24 – Representação do ângulo de deriva do pneu dianteiro.....	43
Figura 25 – Representação do ângulo de deriva do pneu traseiro.....	44
Figura 26 - Convenção <i>adapted SAE</i>	44
Figura 27 – Componentes que contribuem para o cálculo do momento de guinada de uma motocicleta.....	46
Figura 28 – Componentes que contribuem para o cálculo do equilíbrio dos momentos em relação ao eixo longitudinal de uma motocicleta.....	47
Figura 29 – Vista lateral da BMW R 1250 RS, $w = 1530$ mm, $m = 243$ kg, $\varepsilon = 27,7^\circ$...	50
Figura 30 – Diagrama do código desenvolvido.....	51
Figura 31 – Força lateral gerada pelos pneus dianteiro (superior, $F_z = 1732$ N) e traseiro (inferior, $F_z = 2094$ N) para diferentes valores de cambagem.....	54
Figura 32 – Momento de auto alinhamento gerado pelos pneus dianteiro (superior) e traseiro (inferior).....	55
Figura 33 – Resultados do modelo para uma motocicleta percorrendo uma curva em regime permanente.....	56
Figura 34 – Ângulo de rolagem em função da curvatura ($1/R$) para diferentes velocidades.....	57
Figura 35 – Aceleração lateral em função da curvatura ($1/R$) para diferentes velocidades.....	58
Figura 36 – Força lateral gerada pelos pneus dianteiro (linha sólida) e traseiro (linha tracejada) em manobra de curva.....	59
Figura 37 – Contribuições ao somatório de momentos em relação ao eixo z para uma curva de 100 m de raio a 20 m/s.....	60
Figura 38 – Contribuições ao somatório de momentos em relação ao eixo z para uma curva de 175 m de raio a 40 m/s.....	60
Figura 39 – Ângulo de deriva para os pneus dianteiro (linha sólida) e traseiro (linha pontilhada) para manobras de curva a 15 m/s.....	61
Figura 40 – Gráficos apresentando valores para a aceleração lateral em G e tangente do ângulo de rolagem, para diferentes condições do modelo.....	62

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Parâmetros da motocicleta para simulação.....	50
Tabela 2 – Coeficientes da <i>Magic Formula</i> para o pneu dianteiro	68
Tabela 3 – Coeficientes da <i>Magic Formula</i> para o pneu traseiro	68

LISTA DE SIGLAS E ABREVIACOES

G – Aceleração da gravidade

CG – Centro de gravidade

SAE – *Society of Automotive Engineers*

LISTA DE SÍMBOLOS

- a – Distância do centro de gravidade ao ponto de contato do pneu dianteiro [m]
- \hat{a}_x – Aceleração longitudinal do CG do veículo [m/s^2]
- a_y – Aceleração lateral do veículo [m/s^2]
- \hat{a}_y – Aceleração lateral do CG do veículo [m/s^2]
- B – Coeficiente da *Magic Formula*
- b – Distância do centro de gravidade ao ponto de contato do pneu traseiro [m]
- C – Coeficiente da *Magic Formula*
- $C_{F\alpha}$ – *Cornering stiffness* [N/rad]
- $C_{M\alpha}$ – *Aligning stiffness* [N/rad]
- D – Coeficiente da *Magic Formula*
- E – Coeficiente da *Magic Formula*
- F_{fy} – Força lateral gerada pelo pneu dianteiro [N]
- F_{fz} – Carga normal do pneu dianteiro [N]
- F_{ry} – Força lateral gerada pelo pneu traseiro [N]
- F_{rz} – Carga normal do pneu traseiro [N]
- F_{rx} – Força longitudinal gerada pelo pneu traseiro [N]
- $F_{y,total}$ – Força lateral gerada pelos pneus
- g – Aceleração da gravidade [m/s^2]
- h – Altura do centro de gravidade [m]
- $I_{w,f}$ – Momento de inércia da roda dianteira [$kg.m^2$]
- $I_{w,r}$ – Momento de inércia da roda traseira [$kg.m^2$]
- I_{zz} – Momento de inércia do veículo em relação ao eixo z [$kg.m^2$]
- \mathbf{i} – Versor do eixo x
- \mathbf{j} – Versor do eixo y
- M_{gyro} – Momento gerado pelo efeito giroscópico [Nm]
- M_{fz} – Momento de auto alinhamento gerado pelo pneu dianteiro [Nm]
- M_{rz} – Momento de auto alinhamento gerado pelo pneu traseiro [Nm]
- M_{fx} – Overturning couple gerado pelo pneu dianteiro [Nm]
- M_{rx} – Overturning couple gerado pelo pneu traseiro [Nm]
- m – Massa do veículo [kg]
- N – Momento de guinada [Nm]

R – Raio de curvatura [m]
 $r_{c,f}$ – Raio da seção transversal do pneu dianteiro [m]
 $r_{c,r}$ – Raio da seção transversal do pneu traseiro [m]
 r_f – Raio do pneu dianteiro [m]
 r_r – Raio do pneu traseiro [m]
 S_h – Deslocamento em relação ao eixo vertical para a *Magic Formula*
 S_v – Deslocamento em relação ao eixo vertical para a *Magic Formula*
 t – *Pneumatic trail* [m]
 u – Componente longitudinal da velocidade [m/s]
 V – Velocidade [m/s]
 v – Componente lateral da velocidade [m/s]
 w – Distância entre eixos [m]
 α_f – Ângulo de deriva do pneu dianteiro [rad]
 α_r – Ângulo de deriva do pneu traseiro [rad]
 β – Ângulo de deriva do veículo [rad]
 δ – Ângulo de esterçamento [rad]
 δ' – Ângulo de esterçamento cinemático [rad]
 ε – Ângulo de caster [rad]
 ψ – Ângulo de guinada do veículo [rad]
 φ – Ângulo de rolagem da motocicleta [rad]
 θ – Ângulo entre dois vetores [rad]
 ω – Velocidade de guinada do veículo [rad/s]
 γ_f – Ângulo de cambagem do pneu dianteiro [rad]
 γ_r – Ângulo de cambagem do pneu traseiro [rad]

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	14
1.1. OBJETIVOS	15
1.1.1. Objetivo Geral	15
1.1.2. Objetivos Específicos	15
2. FUNDAMENTAÇÃO	16
2.1. SISTEMA DE COORDENADAS PARA VEÍCULOS	16
2.2. MODELO DE BICICLETA	18
2.3. MODELO DE PNEU	20
2.3.1. Força lateral	20
2.3.2. Momento de auto alinhamento	23
2.3.3. Modelagem do pneu utilizando a <i>Magic Formula</i>	24
2.4. MANOBRA DE CURVA	25
2.5. CARACTERÍSTICAS DA MODELAGEM DE MOTOCICLETAS	30
2.5.1. Ângulo de esterçamento cinemático	31
2.5.2. Ângulo de cambagem nos pneus dianteiro e traseiro	33
2.5.3. Efeito giroscópio dos pneus para o equilíbrio da motocicleta	34
2.6. CARACTERÍSTICAS DA MODELAGEM DE PNEUS DE MOTOCICLETAS	36
2.6.1. Força lateral devido ao ângulo de cambagem	36
2.6.2. <i>Overturning couple</i>	38
2.6.3. Momento de auto alinhamento devido ao ângulo de cambagem	39
3. METODOLOGIA	40
3.1. EQUAÇÕES DO MOVIMENTO PARA O MODELO DE BICICLETA	40
3.1.1. Ângulo de deriva dos pneus dianteiro e traseiro	43
3.1.2. Convenção de sinal para ângulos, forças e momentos do pneu	44
3.2. EQUAÇÕES DE MOVIMENTO PARA O MODELO DE MOTOCICLETA EM CURVA EM REGIME PERMANENTE	45
3.2.1. Ângulo de deriva dos pneus dianteiro e traseiro para motocicleta	47
3.2.2. Modelo de pneu para uma motocicleta	47
3.3. MÉTODO PARA RESOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE MOVIMENTO	48
3.4. PARÂMETROS DA MOTOCICLETA	50

3.5. FLUXOGRAMA DO CÁLCULO DO ESTADO DA MOTOCICLETA EXECUTANDO UMA CURVA EM REGIME PERMANENTE.....	51
4. RESULTADOS E ANÁLISES	53
5. CONCLUSÃO	64
REFERÊNCIAS.....	65
APÊNDICE A – EQUAÇÕES E PARÂMETROS DA <i>MAGIC FORMULA</i>	66
APÊNDICE B – CÓDIGO DESENVOLVIDO EM <i>PYTHON</i>	69

1. INTRODUÇÃO

A dinâmica veicular pode ser simplificada descrita como o estudo das forças e momentos que influenciam o movimento de veículos (SMITH, 1978). Esse assunto pode ainda ser dividido em algumas áreas: dinâmica longitudinal, lateral e vertical.

A dinâmica lateral está interessada em analisar o comportamento do veículo executando manobras de curvas, sendo governada por uma longa lista de parâmetros (como altura do centro de gravidade, pressão dos pneus, rigidez das molas). Para efeitos de comparação, são definidas métricas, como estabilidade ou aceleração lateral máxima, para comparar diferentes veículos ou avaliar modificações para melhorar seu desempenho nessa área (ROUELLE, 2018).

Com o avanço de recursos computacionais, programas para auxiliar engenheiros encarregados de encontrar qual o conjunto de variáveis ideais para otimizar o comportamento de seu veículo se tornaram populares. Porém, devido à complexidade desse tema, muitas vezes a busca de ganhos de desempenho torna-se um longo exercício de tentativa e erro (ROUELLE, 2018).

Isso acontece devido à falta de uma base de conhecimento sólida sobre o assunto. Para veículos de quatro rodas, o modelo de bicicleta é comumente utilizado para realizar simulações de dinâmica lateral e demonstrar os conceitos fundamentais sobre o tema, como a relação entre o momento de guinada e aceleração lateral durante uma manobra de curva.

Apesar do nome, o modelo de bicicleta não é adequado para simular o comportamento de motocicletas. Portanto, neste trabalho, um novo sistema de equações será formulado para simular sua dinâmica lateral, baseado no modelo de bicicleta com as alterações necessárias, com foco no equilíbrio do momento de guinada necessário para uma motocicleta atingir um estado de regime permanente em curva.

Embora possua apenas duas rodas, sua análise é mais complexa quando comparado à de automóveis (PACEJKA, 2012). Existem diversas particularidades que devem ser identificadas e incorporadas a esse novo modelo proposto.

Assim, ao final deste trabalho, os resultados obtidos a partir desse novo modelo deverão ser analisados para verificar se os conceitos fundamentais relacionados à dinâmica de motocicletas foram corretamente representados.

1.1. OBJETIVOS

Para desenvolver um modelo que seja capaz de simular os conceitos fundamentais da dinâmica lateral de motocicletas em curva em regime permanente, propõe-se neste trabalho os seguintes objetivos.

1.1.1. Objetivo Geral

Modelar o comportamento de motocicletas em curva sob a perspectiva do equilíbrio dos momentos de guinada e de rolagem.

1.1.2. Objetivos Específicos

- Descrever o modelo de bicicleta utilizado em simulações de dinâmica veicular para veículos de quatro rodas;
- Revisar a literatura relacionada à dinâmica de motocicletas e de seus pneus;
- Formular um sistema de equações para análise da dinâmica lateral de motocicletas baseado no equilíbrio do momento de guinada;
- Avaliar a coerência dos resultados obtidos com informações disponíveis na literatura.

2. FUNDAMENTAÇÃO

Antes de propor um sistema de equações para simulação de motocicletas em manobras de curva em regime permanente, o modelo de bicicleta será apresentado neste capítulo. Esse modelo é amplamente utilizado em simulações e, apesar de sua baixa complexidade, pode ser usado para demonstrar as propriedades fundamentais da dinâmica veicular de automóveis (LIMEBEER; MASSARO, 2018).

Na sequência, as particularidades relativas ao estudo de motocicletas serão apresentadas. Desse modo, espera-se destacar quais alterações deverão ser implementadas ao modelo para que possa ser utilizado para simular o comportamento de motocicletas.

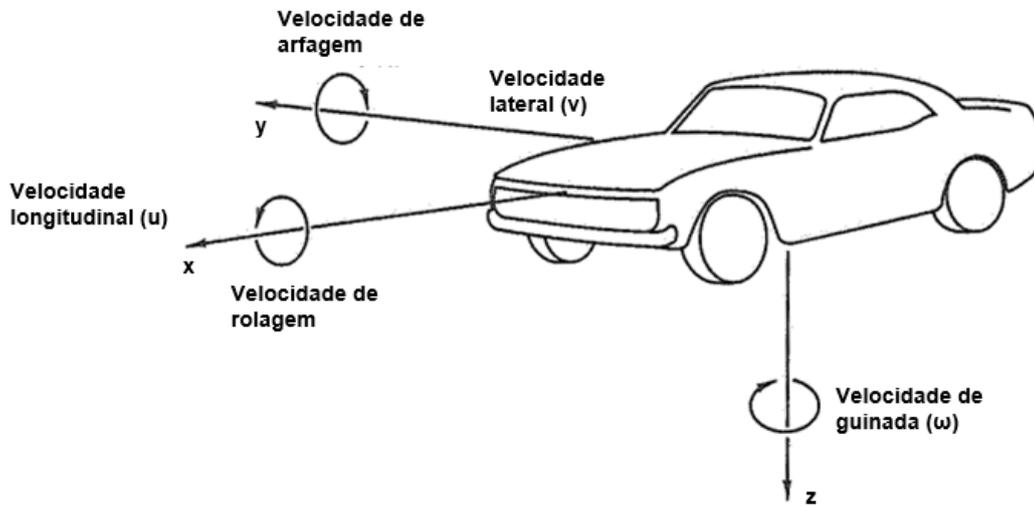
2.1. SISTEMA DE COORDENADAS PARA VEÍCULOS

Para que as acelerações e velocidades de um veículo executando qualquer manobra sejam analisadas é necessário definir um sistema de coordenadas em que as forças e momentos possam ser referenciadas (MILLIKEN; MILLIKEN, 1995). Será utilizado um sistema de coordenadas ortogonais tridimensional, descrito abaixo, para isso.

Os sistemas utilizados para análises de dinâmica veicular foram definidos pela *Society of Automotive Engineers* (SAE) e são de dois tipos, com uma principal diferença entre eles: a localização da origem. Um dos sistemas define como sua origem um ponto fixo, imóvel, sendo utilizado geralmente para analisar a trajetória do veículo. O outro define sua origem em um ponto fixo do veículo, movimentando-se com ele, dessa maneira, com origem móvel (MILLIKEN; MILLIKEN, 1995).

Neste trabalho será utilizado, principalmente, o sistema com origem móvel, como representado na Figura 1. O eixo x descreve os movimentos longitudinais do veículo, com sentido positivo apontando para frente. O eixo y está associado à dinâmica lateral do veículo, com sentido positivo para a direita do veículo, e o eixo z, à dinâmica vertical, com sentido positivo para baixo.

Figura 1 – Sistema de coordenadas com origem fixa no veículo



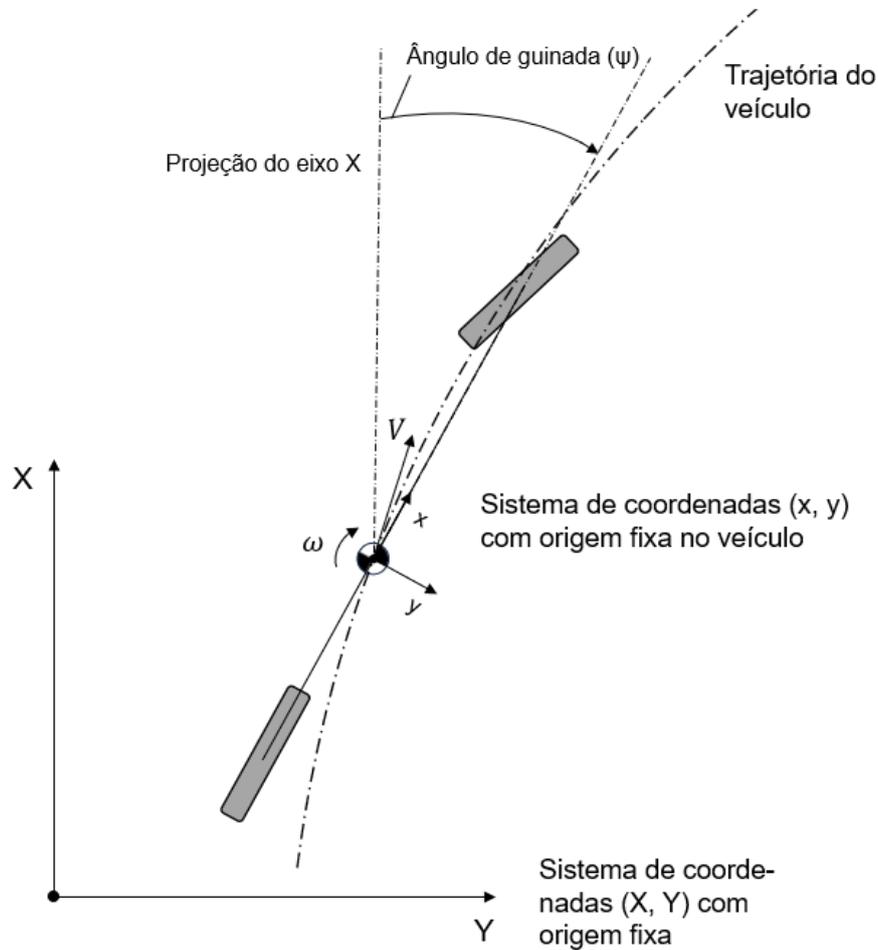
Fonte: Adaptado de Milliken e Milliken (1995)

Ainda é necessário definir as componentes da velocidade e aceleração do veículo em relação ao sistema de coordenadas definido anteriormente. Conforme a Figura 1, a velocidade possui duas componentes: longitudinal (u) e lateral (v). Além do movimento translacional, o veículo rotaciona em relação aos eixos x , y e z . Esses movimentos rotacionais são mensurados por meio dos ângulos de rolagem (rotação em relação ao eixo longitudinal), de arfagem (em relação ao eixo lateral) e de guinada (em relação ao eixo vertical).

A velocidade de guinada, simbolizada por ω e ilustrada na Figura 1, requer uma descrição mais aprofundada. Ela representa a taxa de variação temporal do ângulo de guinada do veículo, ψ , sendo esse ângulo medido pela diferença angular entre o eixo X , do sistema de coordenadas com origem fixa, e o eixo longitudinal do veículo (ROUELLE, 2018). A velocidade de guinada é calculada segundo a equação 1. O ângulo de guinada é ilustrado na Figura 2:

$$\omega = \frac{d\psi}{dt} \quad (1)$$

Figura 2 – Representação do ângulo de guinada de um veículo



Fonte: Adaptado de Milliken e Milliken (1995)

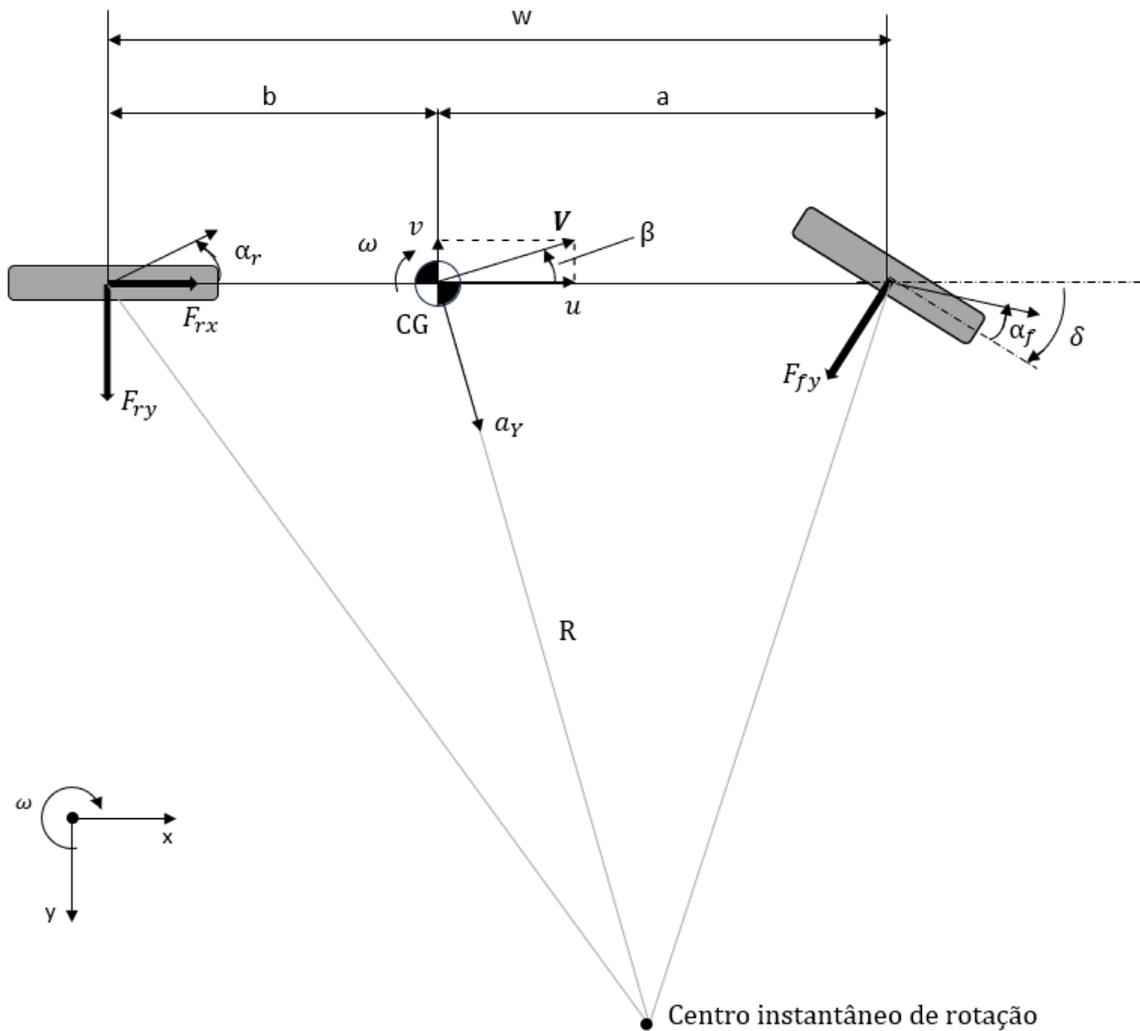
2.2. MODELO DE BICICLETA

Segundo Milliken e Milliken (1995), o modelo de bicicleta faz uso das seguintes simplificações na representação de um veículo de quatro rodas:

- Não há transferência de carga longitudinal;
- Não há transferência de carga lateral;
- Não há movimentos de arfagem ou rolagem;
- Velocidade (longitudinal) constante;
- Pneus trabalhando na faixa linear de operação;
- Efeitos devido à movimentação da suspensão ou deformação de seus membros ou do chassi são desprezados;

Essas simplificações tornam esse modelo válido para representar o comportamento de um veículo em curva considerando acelerações laterais baixas, menores do que 0,4 G (MILLIKEN; MILLIKEN, 1995). Abaixo, está disponível uma representação desse modelo:

Figura 3 – Representação do modelo de bicicleta



Fonte: Adaptado de Limebeer e Massaro (2018)

A Figura 3 mostra os parâmetros e variáveis que descrevem o modelo de bicicleta e seu estado. A distância entre eixos é representada por w , a representa a distância do centro de gravidade (CG) do veículo até o ponto de contato do pneu dianteiro, b representa a distância até o ponto de contato do pneu traseiro. A velocidade do centro de gravidade do veículo é dada pelo vetor \mathbf{V} , sendo que u e v determinam as componentes longitudinais e laterais, respectivamente. O ângulo de

deriva do veículo, ângulo entre o vetor \mathbf{V} e o eixo longitudinal do veículo, é representado por β . O ângulo δ representa o esterçamento, já os ângulos de deriva dos pneus são simbolizados por α_i (o subscrito f indica essa variável para o pneu dianteiro e r para o pneu traseiro). As forças laterais geradas pelos pneus são representadas por F_{iy} , e a força longitudinal por F_{ix} . A carga normal, pressionando o pneu contra o solo, é representada por F_{iz} . A aceleração lateral do centro de gravidade do veículo é dada por a_y , R representa o raio de curvatura, definido como a distância entre o CG e o centro instantâneo de rotação. Por último, ω representa a velocidade de guinada do veículo (LIMEBEER; MASSARO, 2018).

2.3. MODELO DE PNEU

O pneu suporta a massa do veículo, sendo seu único meio de contato com o solo. É nesse contato entre pneu e solo que surge a principal fonte de forças e momentos que controlam o movimento do veículo (GILLESPIE, 1992). Assim, é evidente que o entendimento do comportamento do pneu possui importância fundamental no estudo da dinâmica veicular.

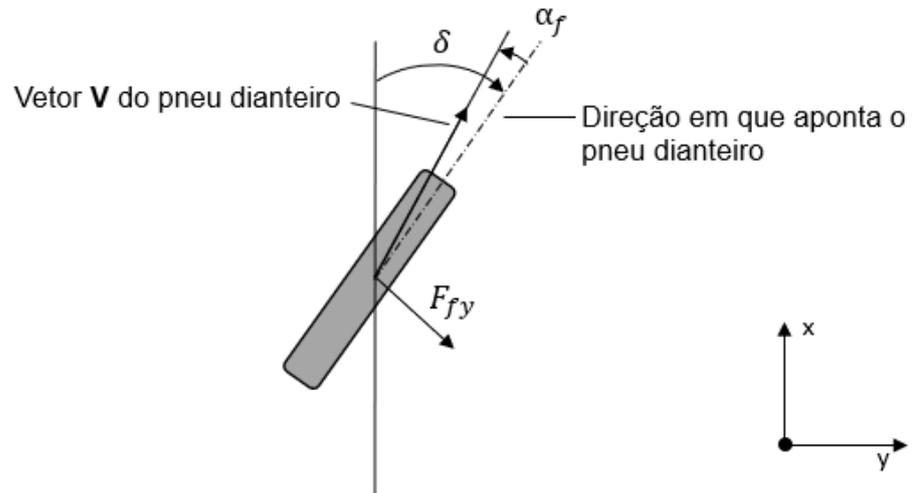
Vários modelos existem para representar as forças e momentos gerados pelos pneus, adequados para diferentes objetivos. Sua complexidade determina o quão próximo os resultados do modelo virtual estarão do desempenho do veículo real (PACEJKA, 2012).

2.3.1. Força lateral

Para que um veículo resista à força centrífuga proporcional a aceleração lateral na curva que percorre é necessário que seus pneus gerem forças laterais. O ponto de contato entre pneu e solo apresenta uma velocidade absoluta diferente de zero, estando sujeito à condição de deslizamento lateral em relação à superfície, representado pelo ângulo de deriva, responsável pela geração de forças laterais (LIMEBEER; MASSARO, 2018).

A força lateral pode ser definida como uma força que tem origem no centro da porção do pneu que está em contato com o solo, está contida no plano xy, que representa a superfície que o veículo tem contato com, e tem direção perpendicular ao eixo longitudinal do pneu (MILLIKEN; MILLIKEN, 1995), conforme Figura 4.

Figura 4 – Representação da força lateral (F_y) gerada pelo pneu

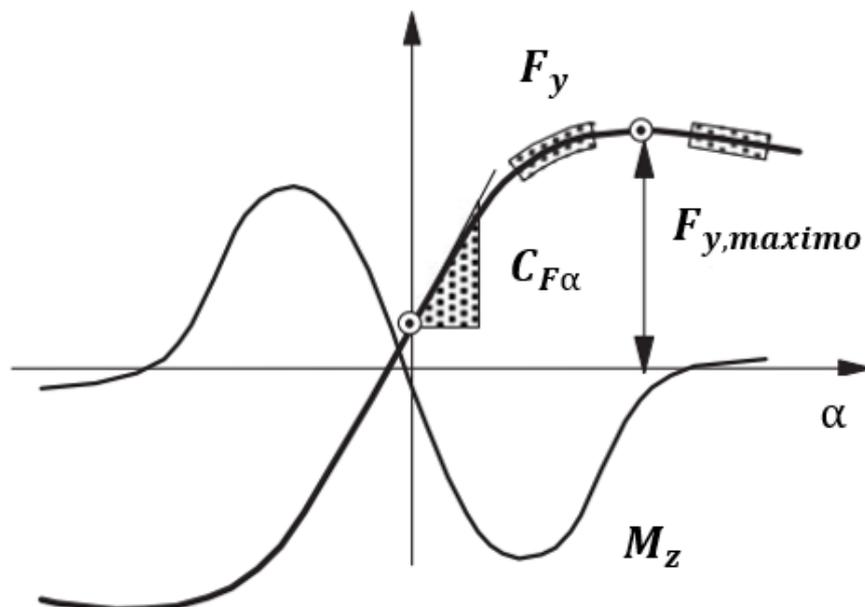


Fonte: Autor (2024)

O ângulo de deriva pode ser definido como a diferença angular entre a direção do vetor de velocidade do pneu \mathbf{V} e a direção de seu eixo longitudinal (LIMEBEER; MASSARO, 2018), conforme Figura 4.

O comportamento da força lateral gerada por um pneu em função do ângulo de deriva é semelhante à curva apresentada na Figura 5:

Figura 5 – Gráfico da força lateral (F_y) e momento de auto alinhamento (M_z)



Fonte: Adaptado de Pacejka (2012)

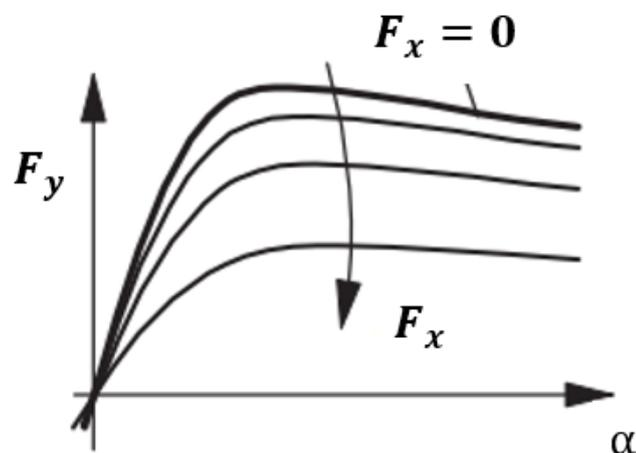
A magnitude da força lateral cresce de uma maneira praticamente linear para valores baixos do ângulo de deriva. A inclinação da curva nessa faixa linear de comportamento do pneu define o parâmetro de *cornering stiffness* do pneu, representado por $C_{F\alpha}$ (MILLIKEN; MILLIKEN, 1995).

Depois dessa faixa linear, a força gerada pelo pneu continua a aumentar, porém, a uma taxa decrescente até atingir um valor máximo para determinado valor de α (MILLIKEN; MILLIKEN, 1995). A partir desse ponto, caso o ângulo de deriva aumente, a força lateral gerada decresce, pois o pneu passa a trabalhar em uma faixa de escorregamento generalizado.

Essas duas faixas de operação do pneu, uma linear e outra não linear, são utilizadas para analisar o comportamento de veículos em diferentes condições de operação. O valor da propriedade de *cornering stiffness* do pneu governa o controle e estabilidade do veículo em baixas acelerações laterais, já a porção não linear da curva determina a dirigibilidade e comportamento do veículo quando sujeito à elevadas acelerações (PACEJKA, 2012).

Por último, é observado que a capacidade do pneu em gerar forças laterais é reduzida quando este está também gerando forças longitudinais, que aceleram ou freiam o veículo. Essa redução da força lateral gerada é explicada analisando a força resultante gerada pelo pneu, que não pode exceder um valor máximo, determinada pelo coeficiente de atrito da superfície e carga normal, pressionando o pneu contra o solo (PACEJKA, 2012), conforme mostrado pela Figura 6.

Figura 6 – Gráfico da força lateral para diferentes valores da força longitudinal

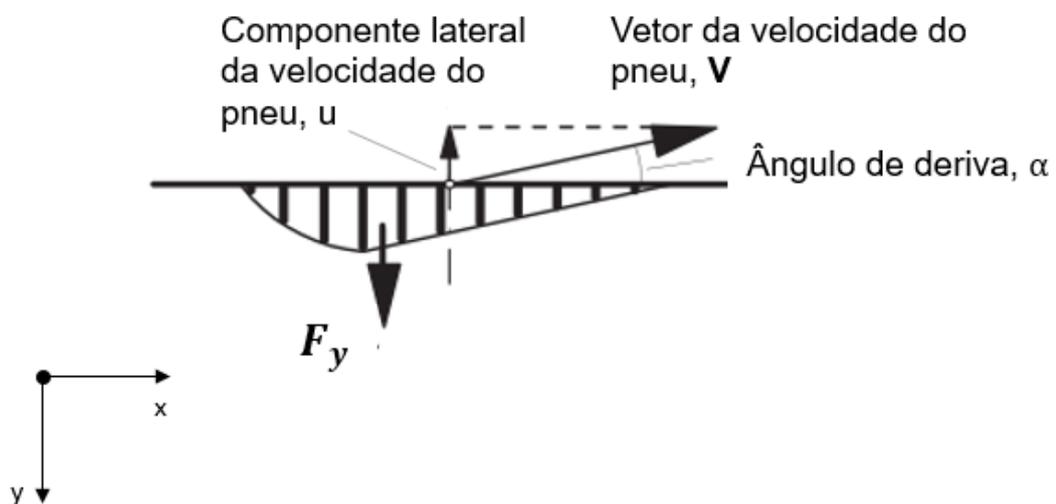


Fonte: Adaptado de Pacejka (2012)

2.3.2. Momento de auto alinhamento

O momento (ou torque) de auto alinhamento do pneu, representado pela variável M_z , representa a tendência do pneu em corrigir sua orientação para reduzir o ângulo de deriva (MILLIKEN; MILLIKEN, 1995). A Figura 7 busca apresentar a distribuição da força lateral que surge devido ao ângulo de deriva do pneu:

Figura 7 – Representação da força lateral do pneu gerada no contato pneu-solo



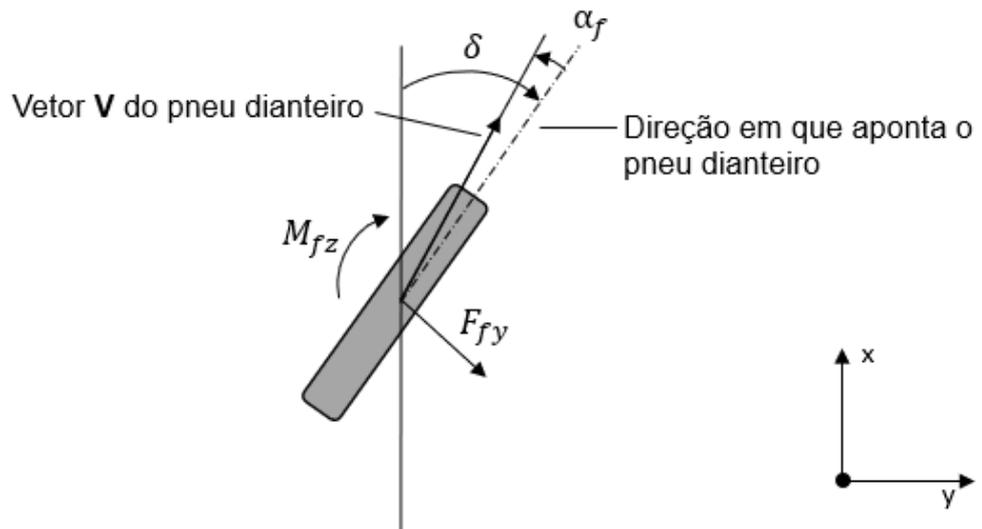
Fonte: Adaptado de Pacejka (2012)

Como pode ser observado, a distribuição não uniforme da força lateral gera um momento (o momento de auto alinhamento) em relação ao centro do pneu, igual à resultante da força lateral multiplicada pela sua distância ao centro (MILLIKEN; MILLIKEN, 1995). Esse momento tende a corrigir a orientação do pneu para coincidir com a direção do vetor de velocidade \mathbf{V} .

A Figura 5 mostra também como o momento M_z varia com o ângulo de deriva. Assim, como para a força lateral, seu valor cresce de uma maneira praticamente linear para valores baixos desse ângulo. A inclinação da curva nessa faixa define o parâmetro de *aligning stiffness*, representado por $C_{M\alpha}$ (PACEJKA, 2012).

A força lateral foi apresentada simplificada na seção anterior. Uma representação mais completa é mostrada na Figura 8, incluindo a força lateral e o momento de auto alinhamento que surge simultaneamente a ela.

Figura 8 – Representação da força lateral e momento de auto alinhamento gerados pelo pneu



Fonte: Autor (2024)

2.3.3. Modelagem do pneu utilizando a *Magic Formula*

Curvas que exibem o formato como as apresentadas para a força lateral e momento de auto alinhamento na Figura 5 podem ser representadas pela *Magic Formula* (PACEJKA, 2012). A modelagem utilizando essa fórmula emprega uma abordagem empírica, onde, a partir de dados sobre as forças e momentos gerados pelos pneus obtidos em testes, coeficientes são encontrados para que os valores calculados pela equação se aproximem do comportamento real do pneu.

A *Magic Formula* é apresentada a seguir (junto às duas equações auxiliares):

$$y(x) = D \operatorname{sen}\{C \arctan[Bx - E(Bx - \arctan Bx)]\} \quad (2)$$

$$Y(x) = y(x) + S_v \quad (3)$$

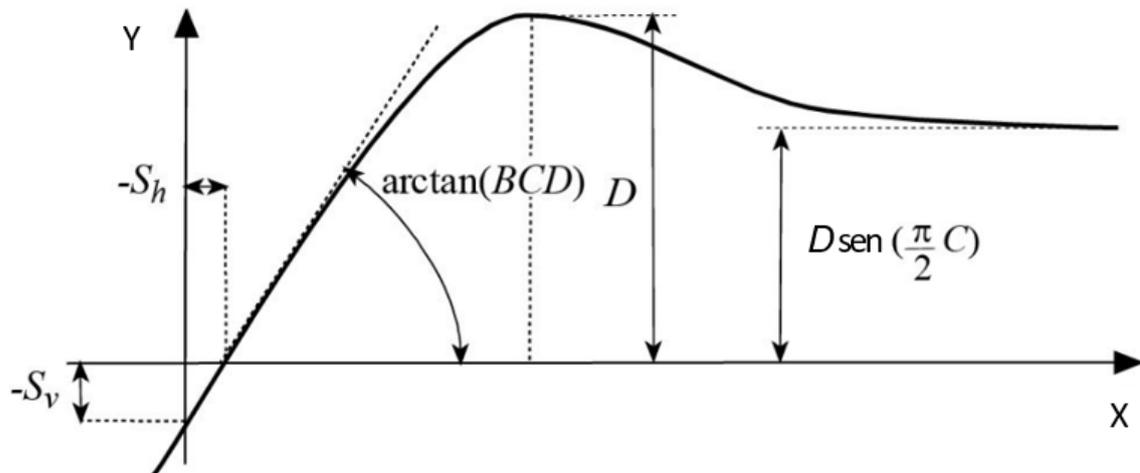
$$X = x + S_h \quad (4)$$

Em que B , C , D e E são quatro coeficientes, S_v e S_h representam deslocamentos em relação ao eixo vertical e horizontal, respectivamente, que correspondem a, por exemplo, irregularidades na construção do pneu ou à resistência

ao rolamento. A variável y pode representar a força lateral e x o ângulo de deriva, Y e X representam essas mesmas grandezas, após o deslocamento vertical e horizontal, respectivamente. (COSSALTER, 2006).

Na Figura 9, um gráfico gerado utilizando a *Magic Formula* é apresentado:

Figura 9 – Curva obtida utilizando a *Magic Formula*



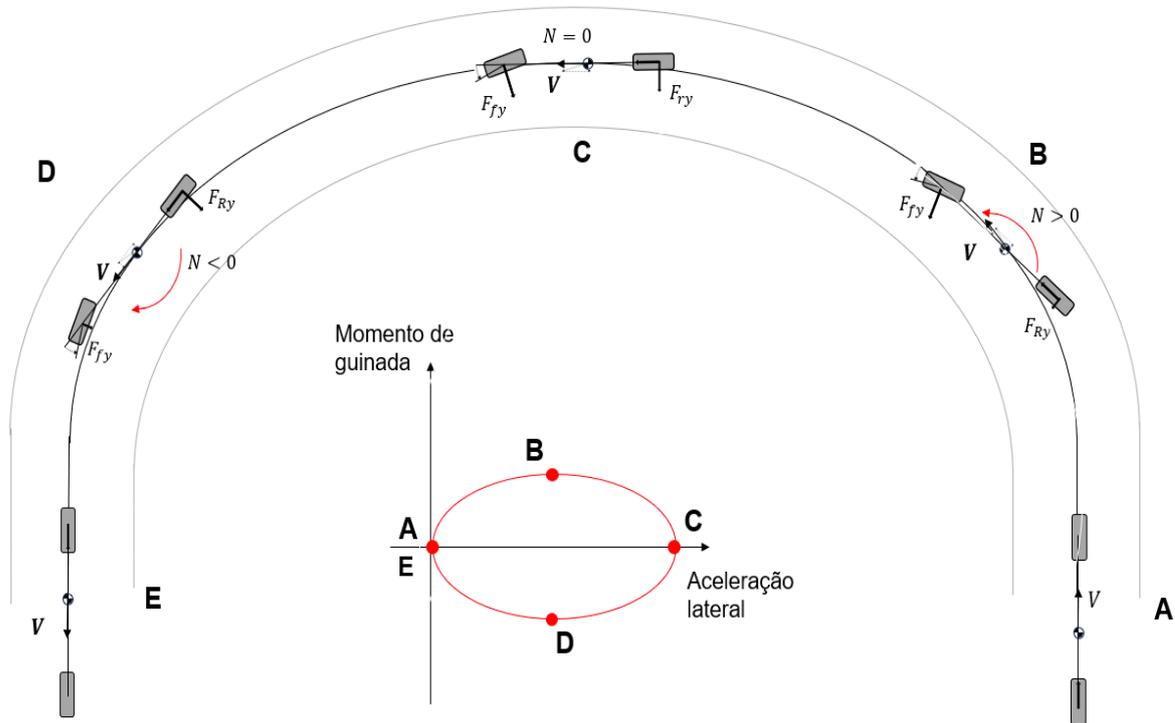
Fonte: Adaptado de Cossalter (2006)

2.4. MANOBRA DE CURVA

Como a modelagem de um veículo executando uma curva será o objetivo principal deste trabalho, é necessário analisar com mais detalhes essa manobra. Rouelle (2018) e Milliken e Milliken (1995) a separam em três fases, descritas a seguir.

Inicialmente, um veículo com velocidade V , aproximando-se de uma curva, como na representação indicada pela letra A da Figura 10, requer que uma determinada quantidade de esterçamento (δ) seja aplicada para mudar sua trajetória.

Figura 10 – Representação do veículo durante diferentes estados de uma curva



Fonte: Adaptado de Rouelle (2018)

A aceleração lateral do veículo (a_y) percorrendo essa nova trajetória pode ser calculada pela seguinte equação (ROUELLE, 2018):

$$a_y = V^2/R \quad (5)$$

Em que a velocidade V do veículo é tangente à trajetória sendo percorrida, de raio (instantâneo) R . A relação entre a velocidade V e ω (velocidade de guinada) do veículo é descrita pela próxima equação:

$$\omega = V/R \quad (6)$$

É possível reorganizar os termos das equações 5 e 6 para obter a seguinte relação:

$$\omega = a_y/V \quad (7)$$

Com base nas equações 5, 6 e 7, pode-se concluir que o veículo que percorria uma trajetória reta precisou de uma aceleração angular para aumentar sua velocidade de guinada, nula quando percorrendo uma reta, para àquela referente ao raio R da nova trajetória sendo percorrida.

O momento resultante responsável pela aceleração angular é denominado momento de guinada, representado pela letra N. A relação entre momento e aceleração angular é a seguinte:

$$N = I_{zz} \frac{d^2\psi}{dt^2} = I_{zz} \frac{d\omega}{dt} \quad (8)$$

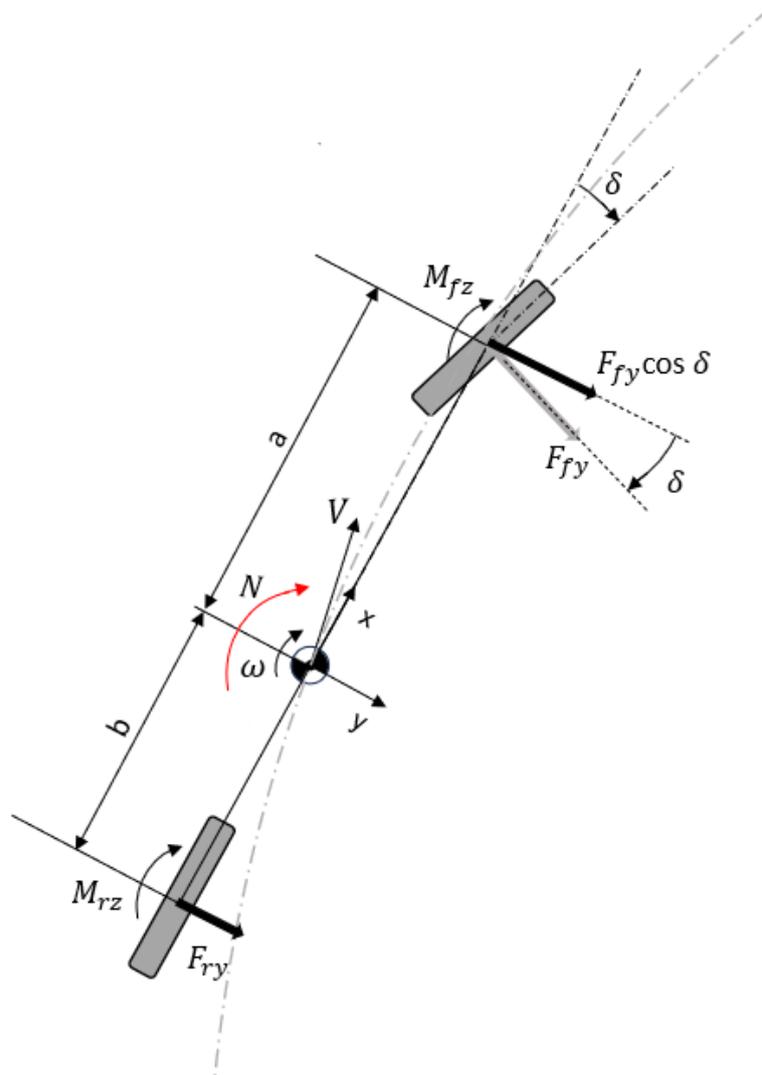
Onde I_{zz} representa o momento de inércia do veículo em relação ao eixo z e ψ a variável utilizada para representar o ângulo de guinada do veículo.

Retornando à análise da entrada da curva, o ângulo de esterçamento aplicado provoca um desbalanceamento do momento gerado pelas forças dos pneus do eixo dianteiro em relação ao eixo traseiro. Um momento resultante (N) surge em relação ao eixo z do veículo, que pode ser calculado pela fórmula apresentada abaixo.

$$N = a(F_{fy} \cos \delta) - bF_{ry} + M_{fz} + M_{rz} \quad (9)$$

Em que a representa a distância do CG do veículo até o ponto de contato do pneu dianteiro, b representa a distância até o ponto de contato do pneu traseiro, δ indica o ângulo de esterçamento, as forças laterais geradas pelos pneus são representadas por F_{iy} e o momento de auto alinhamento por M_{iz} , em que o subscrito i é utilizado para representar o pneu dianteiro, utilizando a letra f , ou traseiro, utilizando r . A Figura 11 destaca as componentes que contribuem para o momento de guinada conforme equação anterior:

Figura 11 – Momento de guinada resultante na entrada de curva



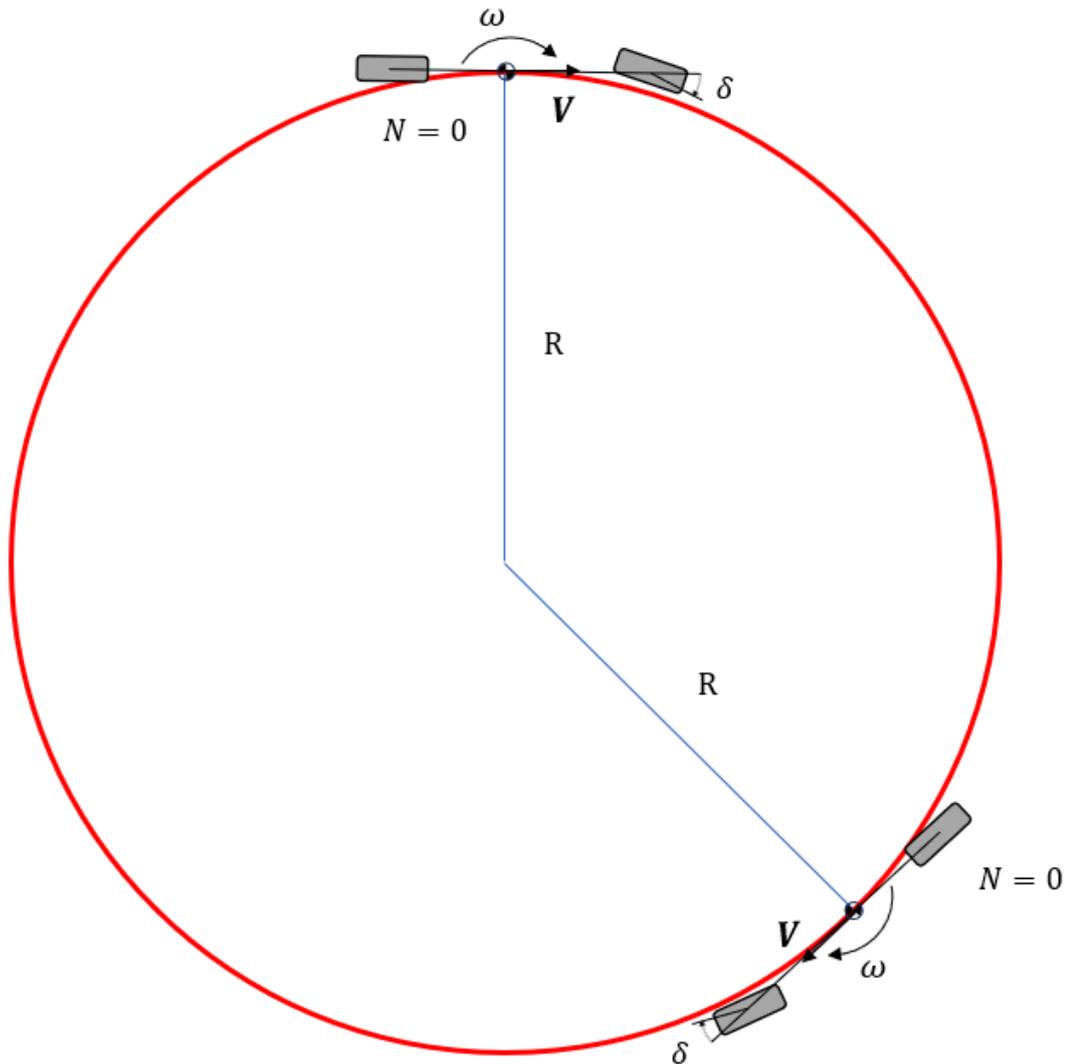
Fonte: Autor (2024)

Durante a fase inicial da entrada da curva, ilustrada pela letra B na Figura 10, os valores da velocidade de guinada e aceleração lateral mudam até atingirem seus valores para o regime permanente (MILLIKEN; MILLIKEN, 1995).

O veículo passa a fase de regime permanente de uma curva quando o momento de guinada volta a ser nulo e os valores das variáveis que representam o seu estado deixam de variar, assim passando a percorrer uma trajetória de raio R constante (MILLIKEN; MILLIKEN, 1995), estado indicado pela letra C na Figura 10.

Caso não haja perturbações ao veículo, ele continuará percorrendo a trajetória de raio R , como em um *skid pad* exemplificado na Figura 12. É necessário um momento de guinada negativo para tirá-lo dessa trajetória, representando a terceira fase de uma curva, a saída da curva, indicada pela letra D na Figura 10.

Figura 12 – Veículo percorrendo um *skid pad* de raio R



Fonte: Adaptado de Rouelle (2018)

Durante essa etapa, o comportamento do veículo é inverso à primeira: o ângulo de esterçamento deve ser reduzido e, novamente, surge um desequilíbrio entre os momentos gerados pelas forças laterais do eixo dianteiro em relação ao traseiro. Dessa vez, o momento de guinada possui valor negativo, responsável por retornar o veículo a sua trajetória retilínea, como representado pela letra E na Figura 10.

Durante esse estágio, os valores das velocidades lateral e de guinada retornam a seus valores iniciais nulos (MILLIKEN; MILLIKEN, 1995).

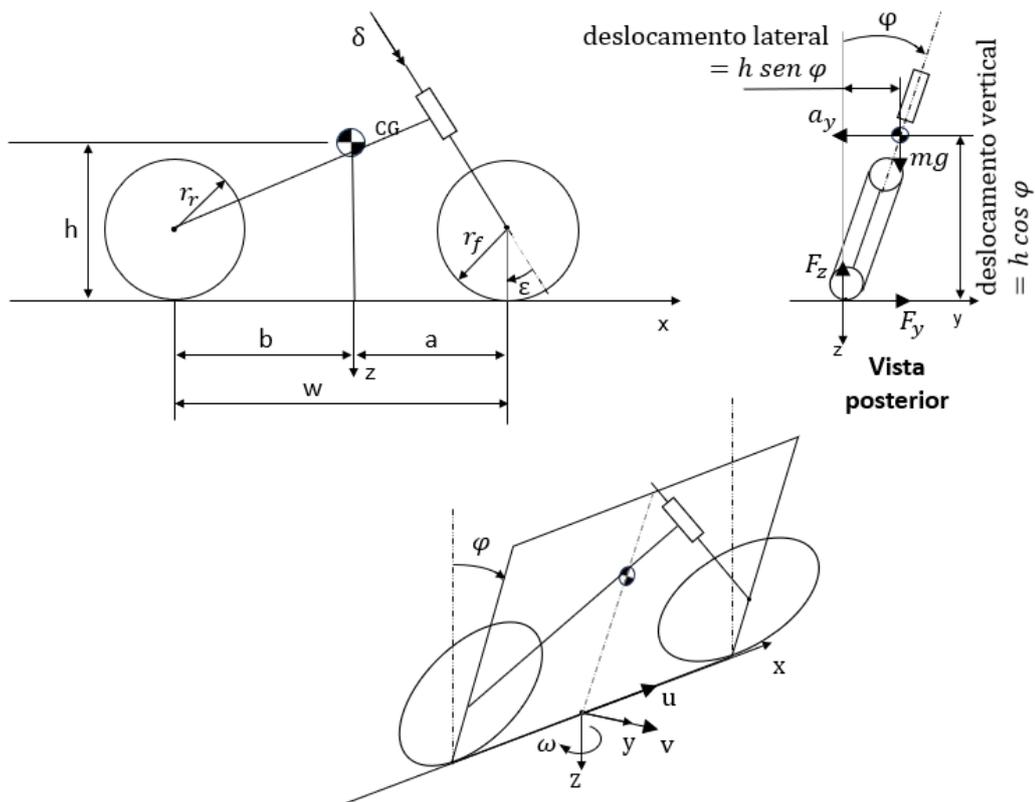
2.5. CARACTERÍSTICAS DA MODELAGEM DE MOTOCICLETAS

A modelagem do comportamento de motocicletas apresenta desafios adicionais quando comparada à de veículos de quatro rodas (PACEJKA, 2012). A principal diferença para motocicletas envolve o ângulo de rolagem, essencial para análise de suas manobras (por exemplo, em uma curva).

A adição desse grau de liberdade, tem significativa influência na variação de outras variáveis da motocicleta. O ângulo de esterçamento e o ângulo de cambagem são os principais afetados, que conseqüentemente influenciam nas forças e momentos gerados pelos pneus.

A Figura 13 traz uma representação do modelo que será utilizado para motocicletas.

Figura 13 – Ilustração do modelo para motocicletas



Fonte: Autor (2024)

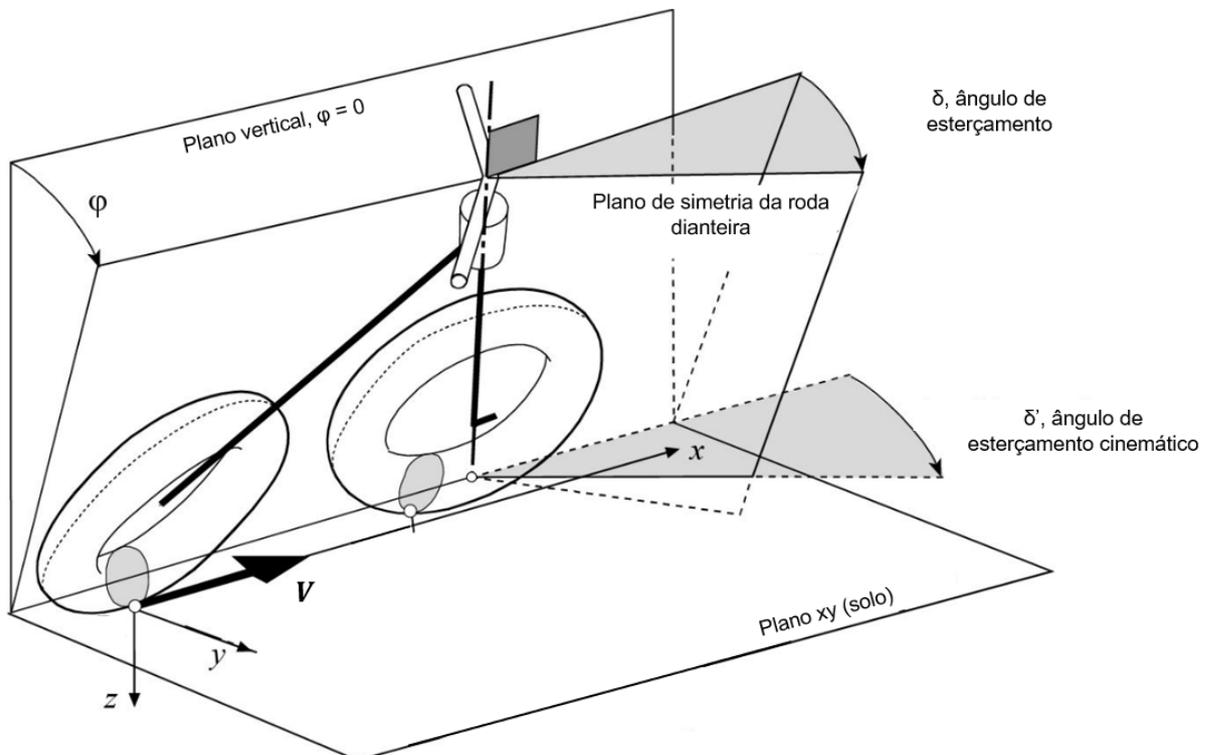
As variáveis apresentadas na seção 2.2 continuam válidas e apresentam o mesmo significado. Como pode ser observado na figura anterior, a motocicleta foi

representada com um ângulo de rolagem, igual à diferença angular entre seu plano de simetria e o plano perpendicular ao plano xy e coincidente com o eixo longitudinal x (PACEJKA, 2012), simbolizado pela variável φ . Foram adicionadas também as variáveis: ε , para indicar o ângulo de caster, que representa a inclinação do eixo de esterçamento em relação a uma linha vertical, com a motocicleta em posição vertical ($\varphi = 0$); γ_i indica o ângulo de cambagem dos pneus (com subscritos f e r para representar os eixos dianteiro e traseiro, respectivamente); r_i indica o raio dos pneus.

2.5.1. Ângulo de esterçamento cinemático

O ângulo de esterçamento cinemático representa a interseção do ângulo de esterçamento com o plano xy (COSSALTER, 2006), como pode ser observado na Figura 14. Devido à inclinação do eixo de esterçamento (representado pelo ângulo de caster) e ao ângulo de rolagem da motocicleta, esse ângulo tende a assumir valores diferentes do ângulo de esterçamento aplicados pelo condutor:

Figura 14 – Representação do ângulo de esterçamento cinemático



Fonte: Cossalter (2006)

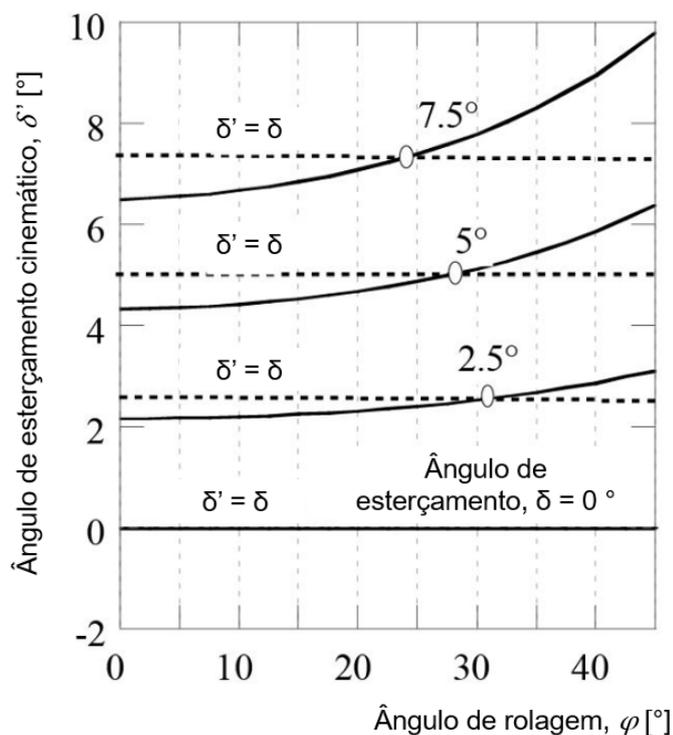
O ângulo de esterçamento cinemático será representado pela variável δ' e calculado com base na equação apresentada por Pacejka (2012), sendo uma função do ângulo de esterçamento δ , ângulo de caster ε e do ângulo de rolagem da motocicleta φ .

$$\delta' = \arctan \left[\frac{\delta \cos(\varepsilon)}{\cos(\varphi) - \delta \sin(\varphi) \sin(\varepsilon)} \right] \quad (10)$$

Essa fórmula é válida considerado que o ângulo de esterçamento assumirá apenas valores baixos, de modo que a seguinte simplificação seja válida: o seno do ângulo δ é igual a ele mesmo e seu cosseno igual a 1.

A Figura 15 mostra a variação do ângulo de esterçamento cinemático em função do ângulo de rolagem, para quatro valores de esterçamento. Pode ser observado que existe um comportamento oposto, dependendo do ângulo de rolagem: para valores baixos de φ , o esterçamento da motocicleta é atenuado ($\delta' < \delta$); para valores altos, o esterçamento é amplificado ($\delta' > \delta$) (COSSALTER, 2006).

Figura 15 – Variação do ângulo de esterçamento cinemático (linha sólida) em função do ângulo de rolagem, para diferentes valores de esterçamento



Fonte: Adaptado de Cossalter (2006)

2.5.2. Ângulo de cambagem nos pneus dianteiro e traseiro

O ângulo de cambagem representa a inclinação do pneu em relação a um plano normal ao solo. A força lateral é significativamente influenciada por esse ângulo do pneu, como será mostrado na seção 2.6.1.

O ângulo de cambagem do pneu traseiro, indicado pela variável γ_r , será igual ao próprio ângulo de rolagem da motocicleta:

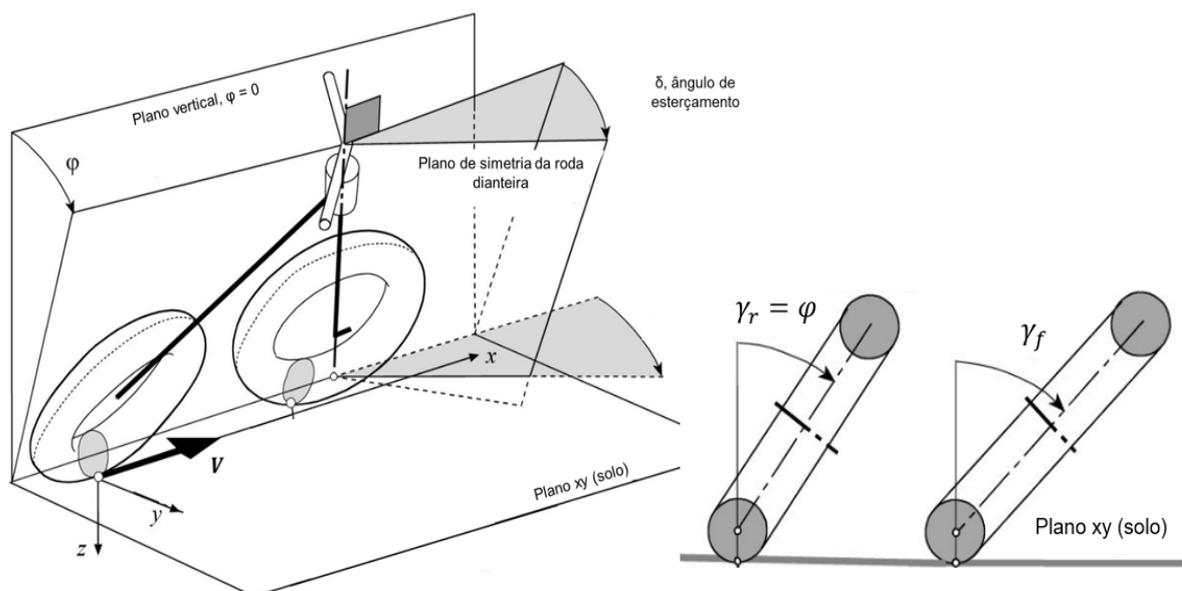
$$\gamma_r = \varphi \quad (11)$$

O ângulo de cambagem do pneu dianteiro, representado pela variável γ_f , será diferente do ângulo de rolagem para qualquer valor de δ diferente de zero (COSSALTER, 2006).

Assim como o ângulo de esterçamento cinemático, ele será uma função do ângulo de esterçamento δ , ângulo de caster ε , e do ângulo de rolagem da motocicleta φ . Novamente, foi assumido que o ângulo de esterçamento assumirá apenas valores baixos para simplificação dos termos da equação:

$$\gamma_f = \arcsen[\sin \varphi + \cos \varphi (\delta \text{ sen } \varepsilon)] \quad (12)$$

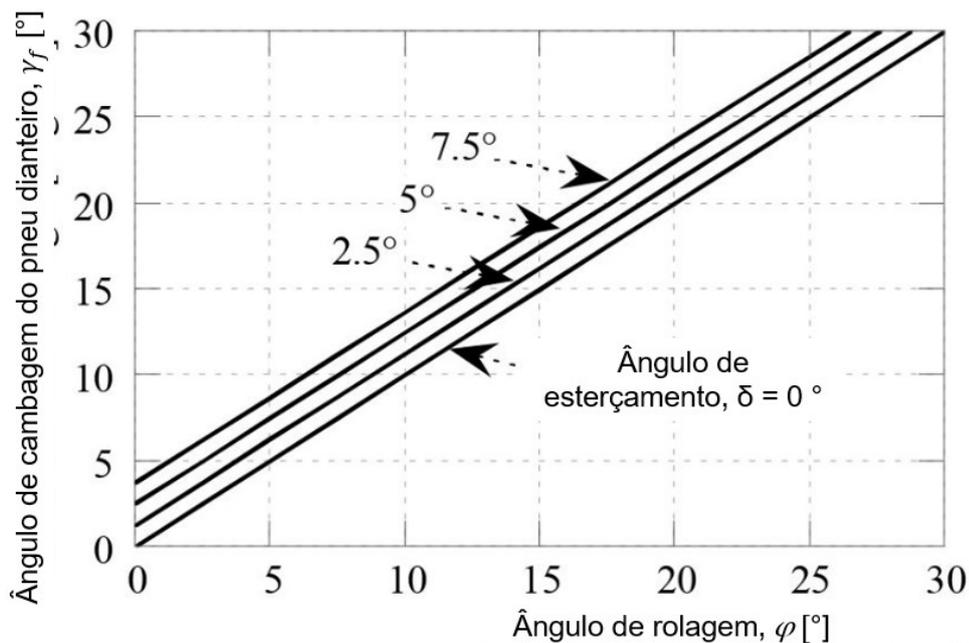
Figura 16 – Ilustração do ângulo de cambagem de uma motocicleta



Fonte: Adaptado de Cossalter (2006)

Conforme observado na Figura 16 e representado pelo segundo termo da função arco seno presente na equação 12, o ângulo de cambagem do pneu dianteiro será sempre maior que o ângulo de rolagem, para esterçamentos diferente de zero. Essa diferença aumenta com o incremento de δ (COSSALTER, 2006).

Figura 17 – Variação do ângulo de cambagem do pneu dianteiro, para diferentes esterçamentos



Fonte: Adaptado de Cossalter (2006)

2.5.3. Efeito giroscópico dos pneus para o equilíbrio da motocicleta

O efeito giroscópico é gerado por um corpo rígido rotacionando ao redor de um eixo I, que, por sua vez, está rotacionando ao redor de um segundo eixo II, não paralelo ao primeiro. Esse efeito surge como um momento (M_{gyro}) sobre um eixo perpendicular a ambos os eixos I e II. O valor desse momento será igual ao produto vetorial do momento angular (do corpo ao redor do eixo I) com a velocidade angular (do corpo ao redor do eixo II) (COSSALTER, 2006), conforme equação seguinte:

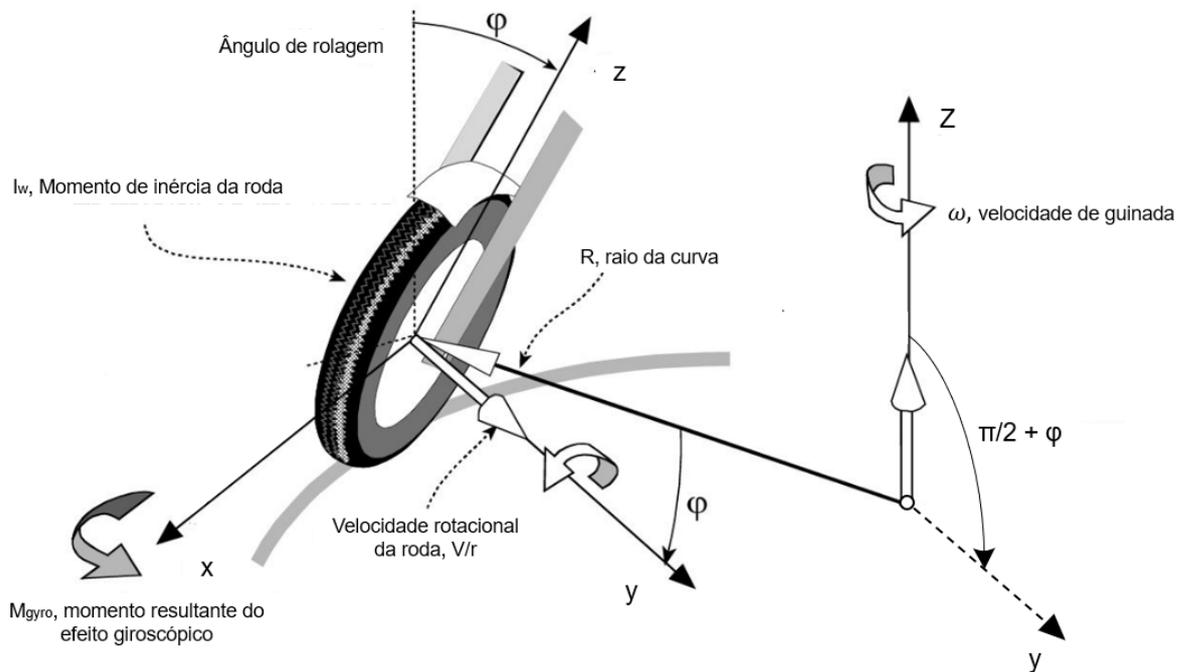
$$M_{gyro} = |I\vec{\omega}_I \times \vec{\omega}_{II}| = |I\vec{\omega}_I||\vec{\omega}_{II}| \sin \vartheta \quad (13)$$

Onde I é o momento de massa em relação ao eixo I e ω_1 a velocidade rotacional do corpo em relação ao eixo I , ω_2 a velocidade rotacional em relação ao eixo II e θ o ângulo entre esses os dois eixos de rotação (sendo esse ângulo limitado à $0 \leq \theta \leq \pi$).

Existem vários efeitos giroscópios que surgem em manobras com motocicletas (COSSALTER, 2006), mas será analisado e incorporado ao modelo o efeito que gera um momento que tende a diminuir o ângulo de rolagem da motocicleta, retornado ao seu estado inicial.

Abordando o efeito da rotação das rodas de uma motocicleta, enquanto realiza uma curva em regime permanente, desse modo, rotacionando ao redor de um eixo paralelo à z (com origem no centro da curva) com velocidade angular constante, ω . O efeito giroscópio gerará um momento ao redor do eixo longitudinal, x , que tende a diminuir o ângulo de rolagem, ϕ (COSSALTER, 2006), conforme Figura 18.

Figura 18 – Momento giroscópio gerado pela velocidade rotacional das rodas de uma motocicleta em uma curva



Fonte: Adaptado de Cossalter (2006)

Desprezando o fato de que as rodas dianteira e traseira possuem ângulos de cambagem e direções levemente divergentes enquanto percorrem uma trajetória

curvilínea, o valor do momento devido ao efeito giroscópico para uma motocicleta será representado segundo a equação seguinte:

$$M_{\text{gyro}} = - \left(I_{w,f} \frac{V}{r_f} + I_{w,r} \frac{V}{r_r} \right) \omega \sin \left(\frac{\pi}{2} + \varphi \right) = - \left(I_{w,f} \frac{V}{r_f} + I_{w,r} \frac{V}{r_r} \right) \omega \cos(\varphi) \quad (14)$$

Em que $I_{w,i}$ representa o momento de inércia da roda (os subscritos f e r representam a roda dianteira e traseira, respectivamente). A velocidade rotacional das rodas foi calculada pela razão entre a velocidade da motocicleta e o raio da roda r_i (o subscrito i indica a roda dianteira, f , ou traseira, r). O sinal negativo foi utilizado para representar a tendência desse momento em reduzir o ângulo de rolagem.

2.6. CARACTERÍSTICAS DA MODELAGEM DE PNEUS DE MOTOCICLETAS

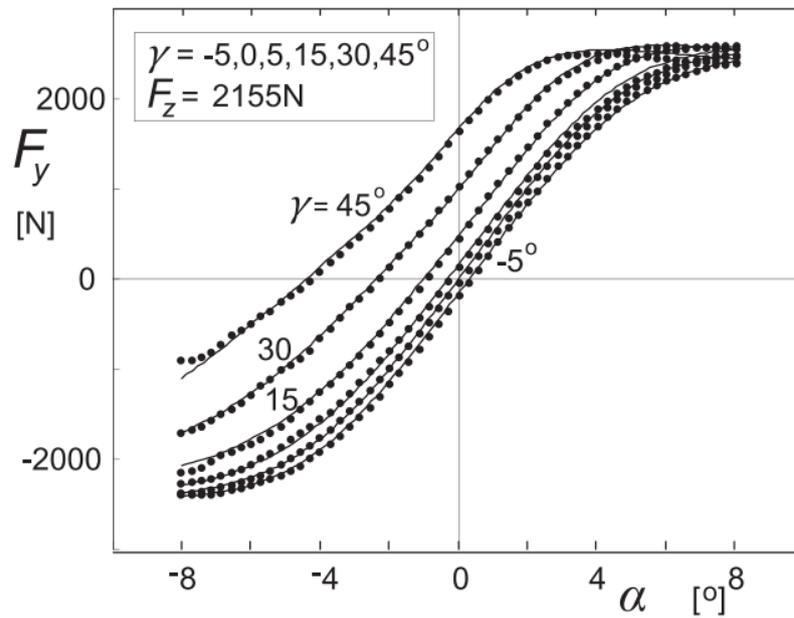
Os pneus são um dos componentes mais importantes das motocicletas, visto que seu equilíbrio, estabilidade e controle são diretamente dependentes das forças e momentos gerados por eles (COSSALTER, 2006). É fundamental que o modelo utilizado para representá-los seja capaz de simular suas particularidades geométricas e seu comportamento nas condições reais em que são utilizados, por exemplo, com elevados valores de ângulo de cambagem.

2.6.1. Força lateral devido ao ângulo de cambagem

A força lateral desenvolvida pelo pneu é função do ângulo de deriva e do ângulo de cambagem do pneu (COSSALTER, 2006). Para veículos de quatro rodas, a contribuição à força lateral gerada devido ao ângulo de cambagem é, na maioria dos casos, insignificante, porém esse efeito não pode ser desprezado para estudos envolvendo motocicletas (PACEJKA, 2012).

A Figura 19 mostra os resultados de um teste em que foi avaliado a variação da força lateral (F_y) para diferentes ângulos de cambagem de um pneu de motocicleta. Pode ser observado que há um aumento significativo da força lateral gerada com o aumento do ângulo de cambagem.

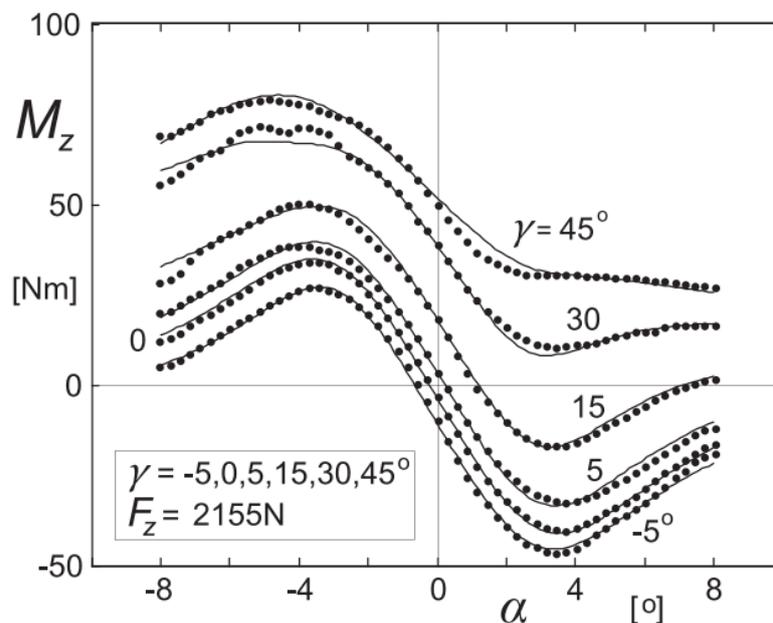
Figura 19 – Dados experimentais da força lateral para diferentes ângulos de cambagem



Fonte: Pacejka (2012)

Para efeito informativo, as curvas representando o momento de auto alinhamento gerado pelo pneu de uma motocicleta para diferentes ângulos de cambagem é apresentado na Figura 20:

Figura 20 – Dados experimentais do momento de auto alinhamento para diferentes ângulos de cambagem

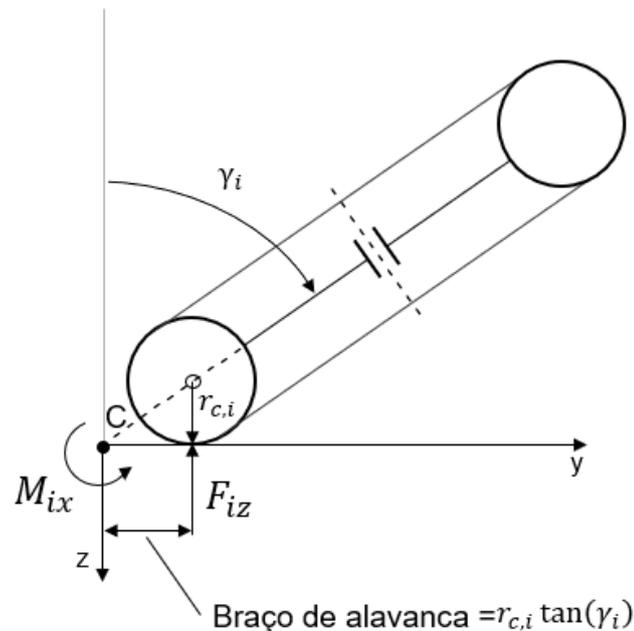


Fonte: Pacejka (2012)

2.6.2. *Overtuning couple*

O *overtuning couple* é outra característica particular na análise de motocicletas em manobras de curva que não pode ser desprezada (PACEJKA, 2012), devido aos altos valores de cambagem em que os pneus são utilizados. Esse momento surge devido a geometria do pneu, que pode ser representada simplificada como possuindo um formato toroidal de seção transversal circular, conforme Figura 21.

Figura 21 – Ponto de aplicação da carga normal do pneu de uma motocicleta para um ângulo de cambagem γ



Fonte: Adaptado de PACEJKA (2012)

Dado um valor γ_i não nulo para o ângulo de cambagem do pneu, pode ser observado que o ponto de aplicação da carga normal F_{iz} se encontra deslocado do ponto de intersecção do plano longitudinal de simetria do pneu com o solo, o que efetivamente cria um braço de alavanca responsável por gerar um momento, calculado segundo a equação seguinte:

$$M_{ix} = -r_{c,i} \tan(\gamma_i) F_{iz} \quad (15)$$

Em que M_{ix} simboliza o *overturning couple* (com subscritos f e r para representar os pneus dianteiro e traseiro, respectivamente) e $r_{c,i}$ o raio da seção transversal do pneu. Assim como o efeito giroscópico das rodas, o *overturning couple* atua no sentido de diminuir o ângulo de rolagem da motocicleta.

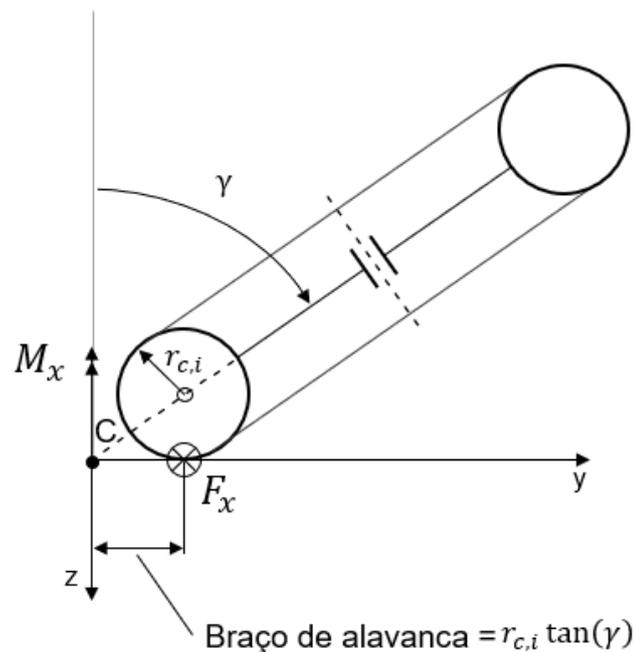
2.6.3. Momento de auto alinhamento devido ao ângulo de cambagem

Outro efeito que surge em elevados valores de cambagem do pneu é uma contribuição ao momento de auto alinhamento devido à força longitudinal, F_{ix} . Semelhantemente à origem do *overturning couple*, essa parcela surge devido ao desalinhamento entre a origem da força e o centro do pneu. O valor do braço de alavanca será o mesmo que para o caso anterior, como ilustrado na Figura 22.

Essa contribuição ao momento de auto alinhamento (M_{iz}) é calculada segundo a fórmula abaixo:

$$M_{iz} = -r_{c,i} \tan(\gamma_i) F_{ix} \quad (16)$$

Figura 22 – Ponto de aplicação da força longitudinal do pneu de uma motocicleta para um ângulo de cambagem γ



Fonte: Adaptado de PACEJKA (2012)

3. METODOLOGIA

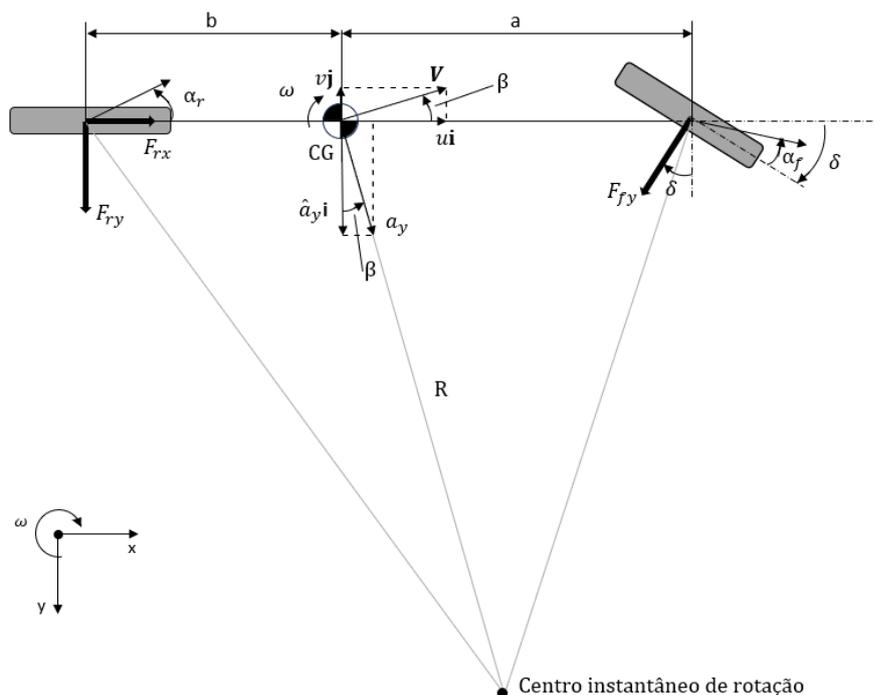
Para que seja desenvolvido um sistema de equações que possa ser utilizado para simular uma motocicleta executando uma manobra de curva em regime permanente, primeiramente serão analisadas essas equações para o modelo de bicicleta.

Após, as particularidades envolvendo a dinâmica de motocicletas serão incorporadas às equações, dessa maneira, alcançando o objetivo deste trabalho.

3.1. EQUAÇÕES DO MOVIMENTO PARA O MODELO DE BICICLETA

Antes de apresentar as equações do movimento que governam o comportamento do modelo de bicicleta em curva, é necessário descrever algumas simplificações utilizadas na abordagem, conforme apresentado por Limebeer e Massaro (2018). A Figura 23 ilustra as variáveis relevantes para auxiliar nessa descrição.

Figura 23 – Variáveis relevantes para descrever as forças e acelerações resultantes no modelo de bicicleta



Fonte: Autor (2024)

Em que a representa a distância do CG do veículo até o ponto de contato do pneu dianteiro, b representa a distância até o ponto de contato do pneu traseiro, δ indica o ângulo de esterçamento, a força lateral gerada pelo pneu dianteiro é representada por F_{fy} e as forças lateral e longitudinal geradas pelo pneu traseiro são representadas por F_{ry} e F_{rx} , respectivamente.

A velocidade no CG do veículo (\mathbf{V}) é composta pela componente longitudinal u e lateral v , sendo o vetor velocidade representado por:

$$\mathbf{V} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} \quad (17)$$

Já a aceleração do CG do veículo ($\hat{\mathbf{a}}$) será dada pela derivada temporal da velocidade, sendo composta também por duas componentes:

$$d\mathbf{V}/dt = \hat{a}_x\mathbf{i} + \hat{a}_y\mathbf{j} \quad (18)$$

Devido ao movimento rotacional do veículo, expresso pela velocidade de guinada (ω), essas duas componentes da aceleração do CG do veículo são calculadas segundo as equações abaixo:

$$\hat{a}_x = \dot{u} - \omega v \quad (19)$$

$$\hat{a}_y = \dot{v} + \omega u \quad (20)$$

A aceleração lateral a_y , ilustrada na Figura 23, cuja direção aponta para o centro da curva, perpendicular ao vetor da velocidade do veículo (\mathbf{V}) (enquanto \hat{a}_y é perpendicular ao eixo longitudinal do veículo), é obtida por meio da seguinte equação:

$$a_y = (\omega + \dot{\beta})V \quad (21)$$

Em que $\dot{\beta}$ simboliza a derivada em relação ao tempo do ângulo de deriva do veículo. Considerando manobras de curva em regime permanente, em que as variáveis v e β não variam com o tempo, e assumindo que o ângulo de deriva do veículo se mantém baixo nessas manobras, a aceleração lateral pode ser reduzida à:

$$u = V \cos \beta \approx V \quad (22)$$

$$\hat{a}_y \approx a_y = V\omega \quad (23)$$

Por último, o valor do raio da curva (R) é calculado utilizando a relação:

$$R = \frac{V}{\omega} \quad (24)$$

Agora, as equações do movimento para uma manobra de curva para o modelo de bicicleta podem ser obtidas, conforme as equações abaixo, considerando o equilíbrio das forças e acelerações em relação ao eixo x (equação 25), y (equação 26) e somatória dos momentos em relação ao eixo z (equação 27):

$$m\hat{a}_x = m(\dot{u} - \omega v) = -F_{fy} \text{sen} \delta + F_{rx} \quad (25)$$

$$m\hat{a}_y = m(\dot{v} + \omega u) = F_{fy} \text{cos} \delta + F_{ry} \quad (26)$$

$$I_{zz} \dot{\omega} = aF_{fy} \text{cos} \delta - bF_{ry} \quad (27)$$

Onde I_{zz} representa o momento de inércia do veículo em relação ao eixo z.

Considerando as condições de um veículo percorrendo uma curva em regime permanente, com a somatória do momento de guinada (momento em relação ao eixo z) igual a zero e velocidade longitudinal constante, portanto, sem aceleração longitudinal, as equações apresentadas anteriormente se reduzem à:

$$0 = m\omega v - F_{fy} \text{sen} \delta + F_{rx} \quad (28)$$

$$0 = -m\omega u + F_{fy} \text{cos} \delta + F_{ry} \quad (29)$$

$$0 = aF_{fy} \text{cos} \delta - bF_{ry} \quad (30)$$

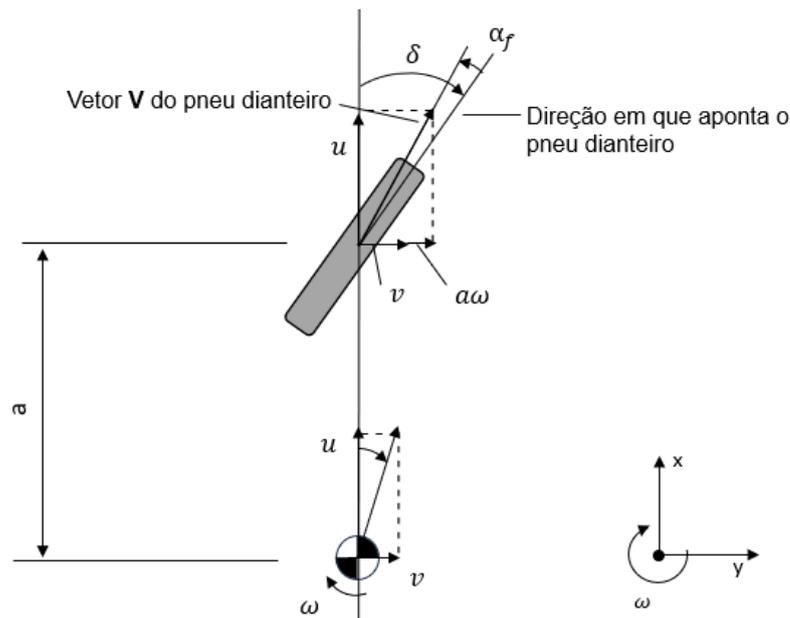
3.1.1. Ângulo de deriva dos pneus dianteiro e traseiro

Para calcular as forças laterais geradas pelos pneus, é necessário desenvolver as equações para o cálculo do seu ângulo de deriva.

Para o pneu dianteiro do veículo, o ângulo de deriva existe devido a três componentes: o ângulo de esterçamento (δ); a componente lateral da velocidade do CG (v); e a velocidade de guinada (ω) (MILLIKEN; MILLIKEN, 1995). Com auxílio da Figura 24, a fórmula para o ângulo de deriva do pneu dianteiro (α_f , em radianos) é obtida, utilizando-se a aproximação para pequenos ângulos (LIMEBEER; MASSARO, 2018):

$$\alpha_f = \delta - \arctan\left(\frac{\omega a + v}{u}\right) \cong \delta - \left(\frac{\omega a + v}{u}\right) \quad (31)$$

Figura 24 – Representação do ângulo de deriva do pneu dianteiro

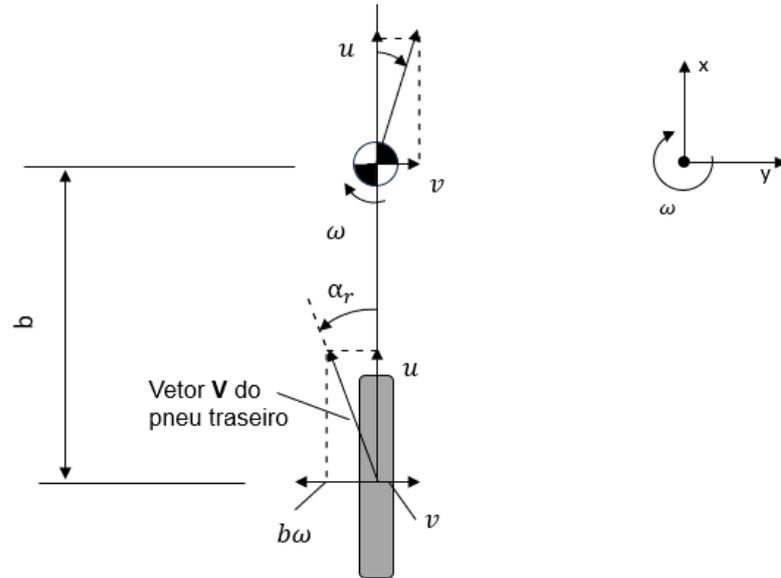


Fonte: Adaptado de Milliken e Milliken (1995)

Para o pneu traseiro, que não possui esterçamento, a equação para calcular seu ângulo de deriva (α_r , em radianos), novamente utilizando-se a aproximação para ângulos pequenos, resume-se à:

$$\alpha_r = \arctan\left(\frac{\omega b - v}{u}\right) \cong \frac{\omega b - v}{u} \quad (32)$$

Figura 25 – Representação do ângulo de deriva do pneu traseiro

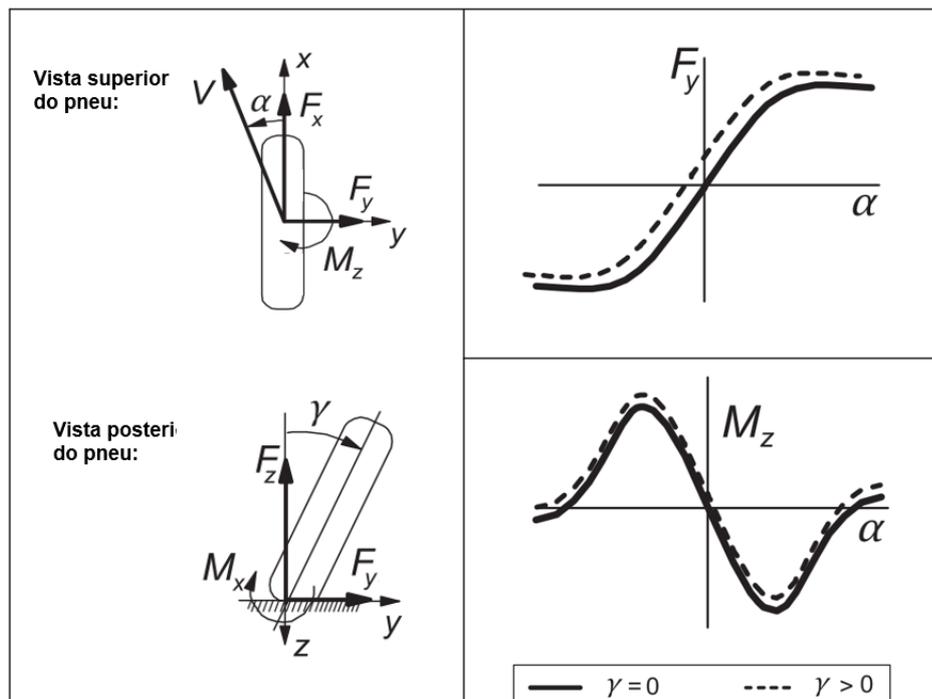


Fonte: Adaptado de Milliken e Milliken (1995)

3.1.2. Convenção de sinal para ângulos, forças e momentos do pneu

Na Figura 26 será apresentada a convenção de sinal para os ângulos, forças e momentos do pneu que será utilizada neste trabalho, denominada *adapted SAE*.

Figura 26 - Convenção *adapted SAE*



Fonte: Adaptado de Pacejka (2012)

As equações para o ângulo de deriva foram desenvolvidas anteriormente para que um ângulo de deriva positivo resulte em uma força lateral positiva. O aumento do ângulo de cambagem, causa um aumento da força lateral gerada pelo pneu.

A carga normal do pneu (F_z) será utilizada nas equações com sinal positivo. Ainda, os sinais do momento de auto alinhamento vão de encontro com o que foi discutido na seção 2.3.2: o momento de auto alinhamento tende a reduzir o ângulo de deriva do pneu.

3.2. EQUAÇÕES DE MOVIMENTO PARA O MODELO DE MOTOCICLETA EM CURVA EM REGIME PERMANENTE

Para calcular o estado de uma motocicleta executando uma curva em regime permanente são necessárias alterações às equações apresentadas na seção 3.1.

Devido ao ângulo de rolagem (φ) e de caster (ϵ) da motocicleta, as equações 28 e 29 exigem que o ângulo de esterçamento cinemático (δ') seja utilizado para calcular corretamente as componentes da força lateral gerada pelo pneu dianteiro (F_{fy}) que contribuem para o equilíbrio das forças em relação ao eixo longitudinal e lateral do veículo. As equações que devem ser utilizadas para representar o equilíbrio da motocicleta em relação ao eixo longitudinal (equação 33) e lateral (equação 34) são apresentadas abaixo:

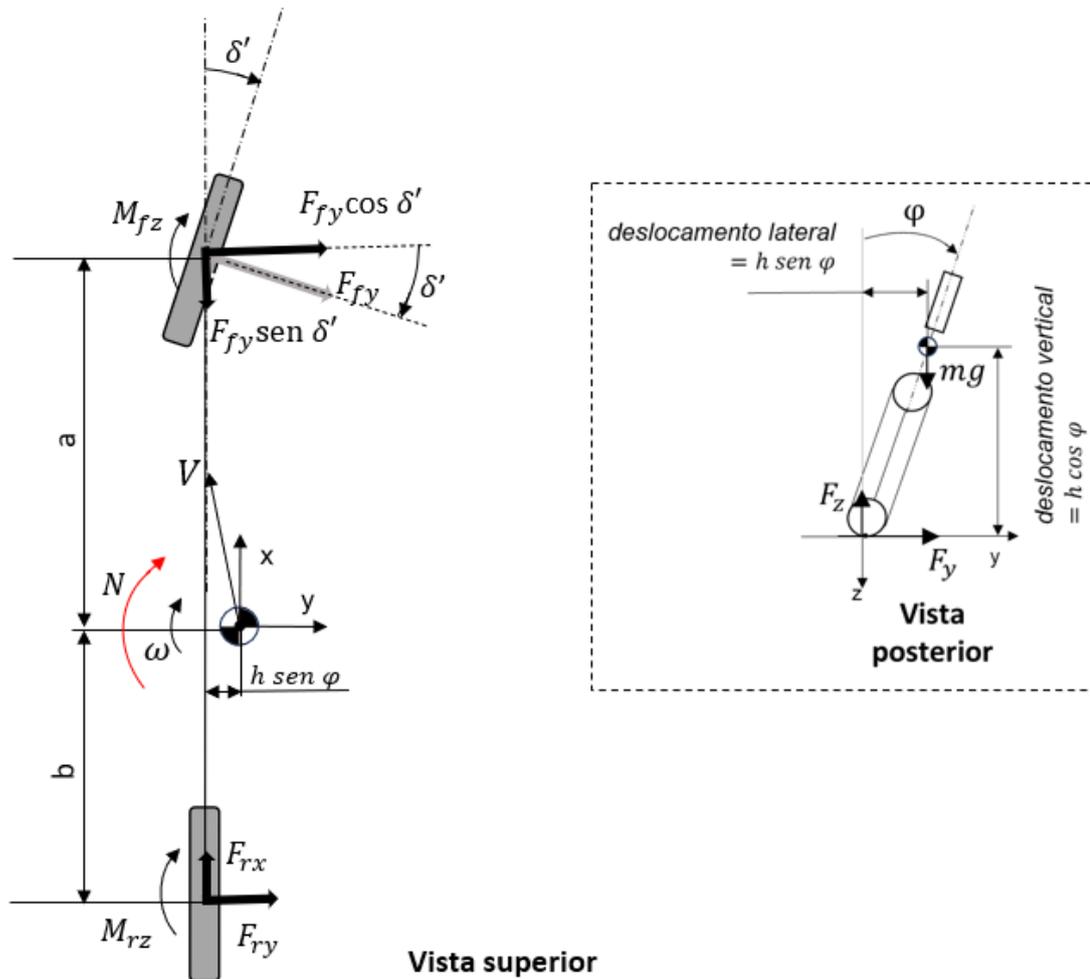
$$0 = m\omega v - F_{fy} \text{sen} \delta' + F_{rx} \quad (33)$$

$$0 = -m\omega u + F_{fy} \text{cos} \delta' + F_{ry} \quad (34)$$

O deslocamento da posição do CG da motocicleta para ângulos de rolagem (φ) não nulos, requer que novos termos sejam introduzidos à equação 30. Para uma motocicleta executando uma curva, o equilíbrio do momento de guinada será calculado segundo a equação 35, representando a somatória dos momentos em relação ao eixo z passando pelo CG do veículo. A Figura 27 busca auxiliar na exposição dos termos utilizados nessa equação.

$$0 = aF_{fy} \text{cos} \delta' - (h \text{sen} \varphi) F_{fy} \text{sen} \delta' - bF_{ry} + (h \text{sen} \varphi) F_{rx} + M_{fz} + M_{rz} \quad (35)$$

Figura 27 – Componentes que contribuem para o cálculo do momento de guinada de uma motocicleta



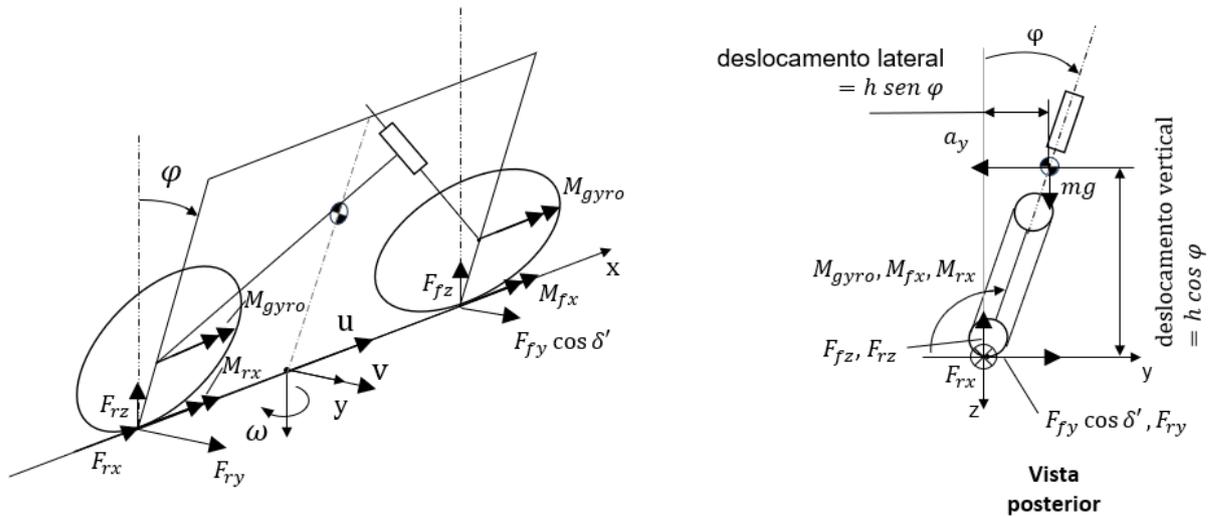
Vista superior

Fonte: Autor (2024)

Por último, a somatória dos momentos em relação a um eixo paralelo ao eixo longitudinal, passando pelo CG, deve ser igual a zero. Esse equilíbrio é governado pela equação 36. A Figura 28 busca trazer uma representação visual dos termos utilizados nessa equação.

$$0 = (h \sin \varphi)(F_{fz} + F_{rz}) - (h \cos \varphi)(F_{fy} \cos \delta' + F_{ry}) + M_{fx} + M_{rx} + M_{gyro} \quad (36)$$

Figura 28 – Componentes que contribuem para o cálculo do equilíbrio dos momentos em relação ao eixo longitudinal de uma motocicleta



Fonte: Autor (2024)

3.2.1. Ângulo de deriva dos pneus dianteiro e traseiro para motocicleta

Para calcular o ângulo de deriva do pneu dianteiro de uma motocicleta, é necessário realizar uma alteração em relação à equação 31. Ao invés do ângulo de esterçamento (δ), é necessário utilizar o ângulo de esterçamento cinemático (δ'), pois ele representa a projeção do ângulo de esterçamento no plano xy.

A equação alterada é apresentada abaixo:

$$\alpha_f = \delta' - \arctan\left(\frac{\omega a + v}{u}\right) \cong \delta' - \left(\frac{\omega a + v}{u}\right) \quad (37)$$

Para o ângulo de deriva do pneu traseiro, a equação 32 continua válida e será utilizada.

3.2.2. Modelo de pneu para uma motocicleta

Para calcular a força lateral, momento de auto alinhamento e *overturning couple* gerados pelos pneus serão utilizadas equações baseadas na *Magic Formula*, conforme apresentado por Pacejka (2012) e introduzido na seção 2.3.3.

$$F_{iy} = D \operatorname{sen}\{C \arctan[B (\alpha_{Feq} + S_H)]\} + S_V \quad (38)$$

$$M_{iz} = -t_\alpha F_{y\alpha} + M_{zr} - r_c F_{ix} \tan \gamma \quad (39)$$

$$M_{ix} = -r_{c,i} F_{iz} \tan \gamma \quad (40)$$

As equações complementares do modelo de pneu e coeficientes que serão utilizados neste trabalho foram adicionados ao Apêndice A.

3.3. MÉTODO PARA RESOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE MOVIMENTO

As equações do movimento (33 a 36) que descrevem a manobra de curva em regime permanente para motocicletas precisam ser resolvidas simultaneamente.

Dado um raio de curvatura, R , a ser percorrido em velocidade, V , os valores das variáveis (u , v , ω , δ , F_{rx} e φ) que governam a condição de equilíbrio da motocicleta precisam ser encontrados de maneira iterativa. Será utilizado um método de Newton modificado, conforme apresentado por Nocedal e Wright (2006), que utiliza a seguinte fórmula para encontrar a solução \vec{x} para um sistema de equações $\vec{f}(\vec{x})$:

$$\vec{x}_{k+1} = \vec{x}_k - s \vec{J}^{-1}(\vec{x}_k) \cdot \vec{f}(\vec{x}_k) \quad (41)$$

Onde s representa um parâmetro (passo) do método iterativo, com valor definido pelo usuário, e $\vec{J}^{-1}(\vec{x})$ a matriz inversa da matriz composta pelas derivadas parciais do sistema de equações, avaliada no ponto \vec{x} .

O vetor \vec{x} é composto pelos valores das seguintes incógnitas:

$$\vec{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6]^T = [u, v, \omega, \delta, F_{rx}, \varphi]^T \quad (42)$$

E o vetor $\vec{f}(\vec{x})$:

$$f(\vec{x}) = [f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6]^T \quad (43)$$

Como existem seis incógnitas, é necessário adicionar duas equações às quatro equações do movimento (que descrevem o estado da motocicleta em curva em regime permanente) para utilizar o método de resolução representado pela equação 41. A função f_1 e f_2 são dadas pelas equações 44 e 45, respectivamente:

$$f_1(\omega) = \omega - V/R \quad (44)$$

$$f_2(u, v) = (u^2 + v^2) - V^2 \quad (45)$$

Enquanto f_3, f_4, f_5 e f_6 são as equações 33, 34, 35 e 36, respectivamente. Para finalizar a explanação do método iterativo utilizado neste trabalho, a matriz \vec{J} é apresentada abaixo, composta pelas derivadas parciais das funções, calculadas numericamente, devido sua complexidade:

$$\vec{J} = \begin{pmatrix} \delta f_1 / \delta x_1 & \dots & \delta f_1 / \delta x_6 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta f_6 / \delta x_1 & \dots & \delta f_6 / \delta x_6 \end{pmatrix} \quad (46)$$

Após a solução do problema convergir, o estado da motocicleta percorrendo a curva é obtido, descrito por 19 variáveis: aceleração lateral em G, a_y ; componente longitudinal da velocidade, u ; componente lateral da velocidade, v ; velocidade de guinada, ω ; ângulo de esterçamento, δ ; ângulo de esterçamento cinemático, δ' ; ângulo de rolagem, φ ; ângulo de deriva dos pneus dianteiro e traseiro, α_f e α_r ; ângulo de cambagem dos pneus, γ_f e γ_r ; força lateral gerada pelos pneus, F_{fy} e F_{ry} ; overturning couple, M_{fx} e M_{rx} ; momento de auto alinhamento, M_{fz} e M_{rz} ; força longitudinal gerada pelo pneu traseiro, F_{rx} ; e momento gerado pelo efeito giroscópio da rotação dos pneus, M_{gyro} .

3.4. PARÂMETROS DA MOTOCICLETA

Os parâmetros da motocicleta sendo analisada, necessários para realizar o cálculo do seu estado percorrendo uma curva em regime permanente, são apresentados na Tabela 1.

Tabela 1 – Parâmetros da motocicleta para simulação

m	390 kg	ϵ	0,5 rad (=28,6 °)	h	0,59 m
w	1,5 m	a	0,82 m	b	0,68 m
F _{fz}	1732 N	F _{rz}	2094 N	g	9,81 m/s ²
r _f	0,3 m	r _r	0,3 m	r _{c,f}	0,08 m
I _{w,f}	1 kg.m ²	I _{w,r}	1 kg.m ²	r _{c,r}	0,1 m

Fonte: Autor (2024)

Esses valores foram obtidos de Pacejka (2012) e representam uma motocicleta pesada, com características que se assemelham a uma do tipo *touring* (COSSALTER, 2006), conforme modelo ilustrado na Figura 29:

Figura 29 – Vista lateral da BMW R 1250 RS, w = 1530 mm, m = 243 kg, $\epsilon = 27,7^\circ$

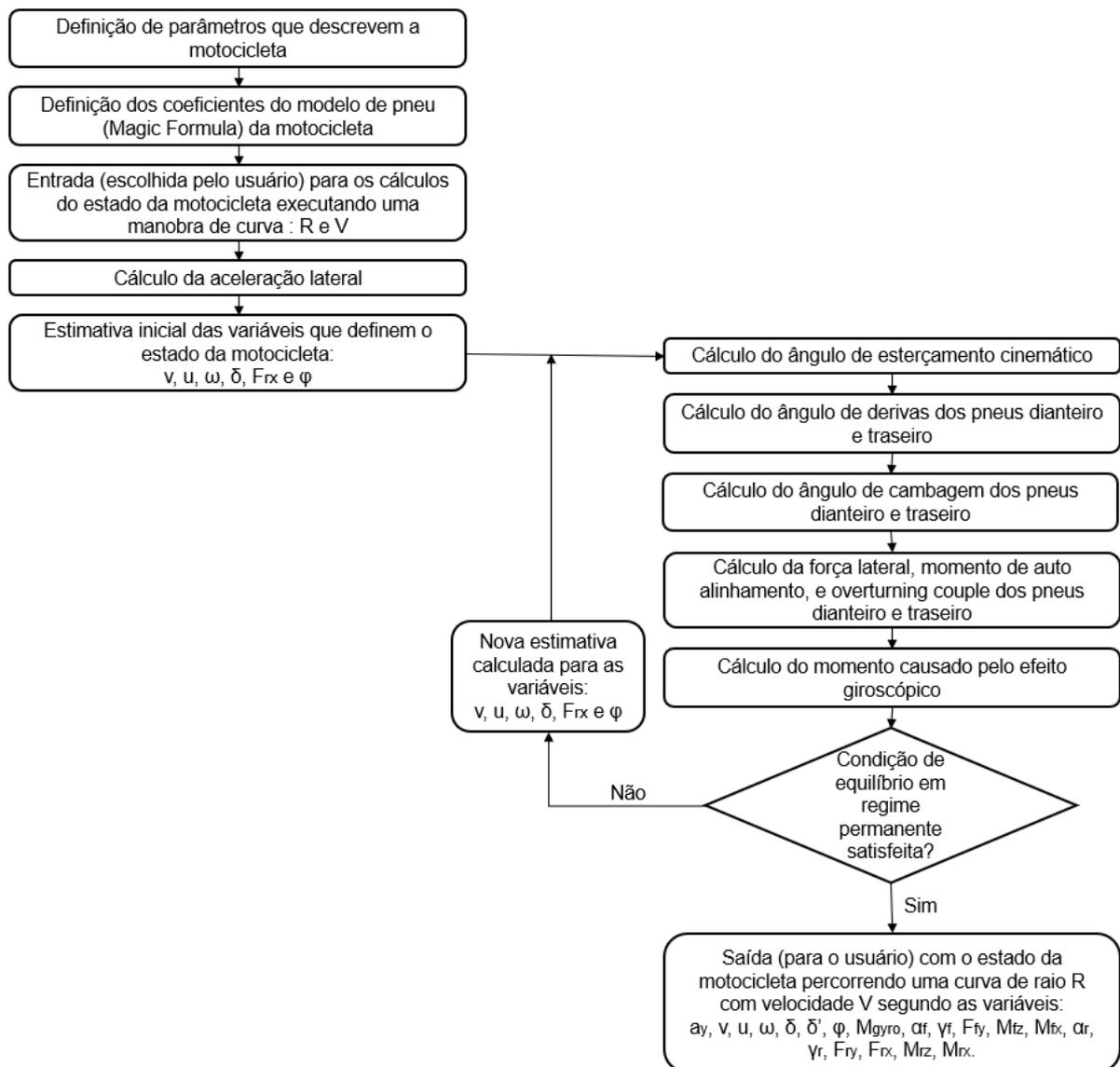


Fonte: BMW Group Press (2024)

3.5. FLUXOGRAMA DO CÁLCULO DO ESTADO DA MOTOCICLETA EXECUTANDO UMA CURVA EM REGIME PERMANENTE

Para conclusão desta seção, serão sintetizados os passos para resolução das equações do movimento, apresentadas neste trabalho, que calculam o estado de equilíbrio de uma motocicleta percorrendo uma curva em regime permanente. O diagrama apresentado na Figura 30 auxilia o entendimento dos passos descritos nos próximos parágrafos.

Figura 30 – Diagrama do código desenvolvido



Fonte: Autor (2024)

Primeiramente, deve-se ser realizada a descrição da motocicleta segundo os parâmetros utilizados para representá-la, além da entrada dos coeficientes que representam os seus pneus, que serão utilizadas pelas equações da *Magic Formula*. Depois, os valores do raio da curva (R) a ser percorrida a uma velocidade (V) devem ser escolhidos para início dos cálculos do estado da motocicleta em regime permanente.

A aceleração lateral é diretamente calculada, função apenas da velocidade e raio da curva. Porém, a resolução das equações do movimento precisa ser realizada de forma simultânea, por um processo iterativo, para encontrar os valores das seis variáveis que governam o estado da motocicleta (as componentes longitudinais e laterais da velocidade, u e v , respectivamente, a velocidade de guinada, ω , o ângulo de esterçamento, δ , a força longitudinal gerada pelo pneu traseiro, F_{rx} , e o ângulo de rolagem da motocicleta, φ).

Uma estimativa inicial é feita, de maneira arbitrária, para os valores dessas seis variáveis, que permitem calcular: o valor do ângulo de esterçamento cinemático δ' ; os ângulos de deriva dos pneus, α_f e α_r ; os ângulos de cambagem, γ_f e γ_r ; através das equações da *Magic Formula*, a força lateral, F_y , momento de auto alinhamento, M_z , e *overturning couple*, M_x , gerados pelos pneus; e, por último, o momento causado pelo efeito giroscópico devido à velocidade rotacional dos pneus, M_{gyro} .

Depois desses cálculos auxiliares, é possível verificar se a condição de equilíbrio para a manobra de curva foi satisfeita ou não: caso tenha sido, o código retorna o estado da motocicleta; caso não tenha sido satisfeita, é necessário realizar uma nova estimativa para as seis variáveis que governam o equilíbrio da motocicleta. A nova estimativa é realizada pelo método apresentado na seção 3.3.

Esse processo será repetido até que sejam encontrados os valores para as variáveis que satisfaçam a condição de equilíbrio da motocicleta.

4. RESULTADOS E ANÁLISES

Após desenvolvimento do código (transcrito no Apêndice B) para realizar os cálculos do modelo descrito na seção anterior para uma motocicleta executando uma curva em regime permanente, os resultados obtidos foram extraídos na forma de gráficos, para discussão e análise com base no conteúdo encontrado na literatura sobre dinâmica de motocicletas.

Primeiramente, será dada a devida atenção aos resultados do modelo de pneu, cuja acurácia com os dados reais (extraídos de testes) é fundamental para representar corretamente o comportamento de uma motocicleta. Após, serão discutidas como as variáveis que definem o estado de uma motocicleta realizando uma curva variam para diferentes valores de curvatura e velocidade.

4.1. RESULTADOS DO MODELO DE PNEU

A capacidade da *Magic Formula* em representar as curvas da força lateral e momento de auto alinhamento gerados pelo pneu são mostradas nas próximas figuras dessa seção.

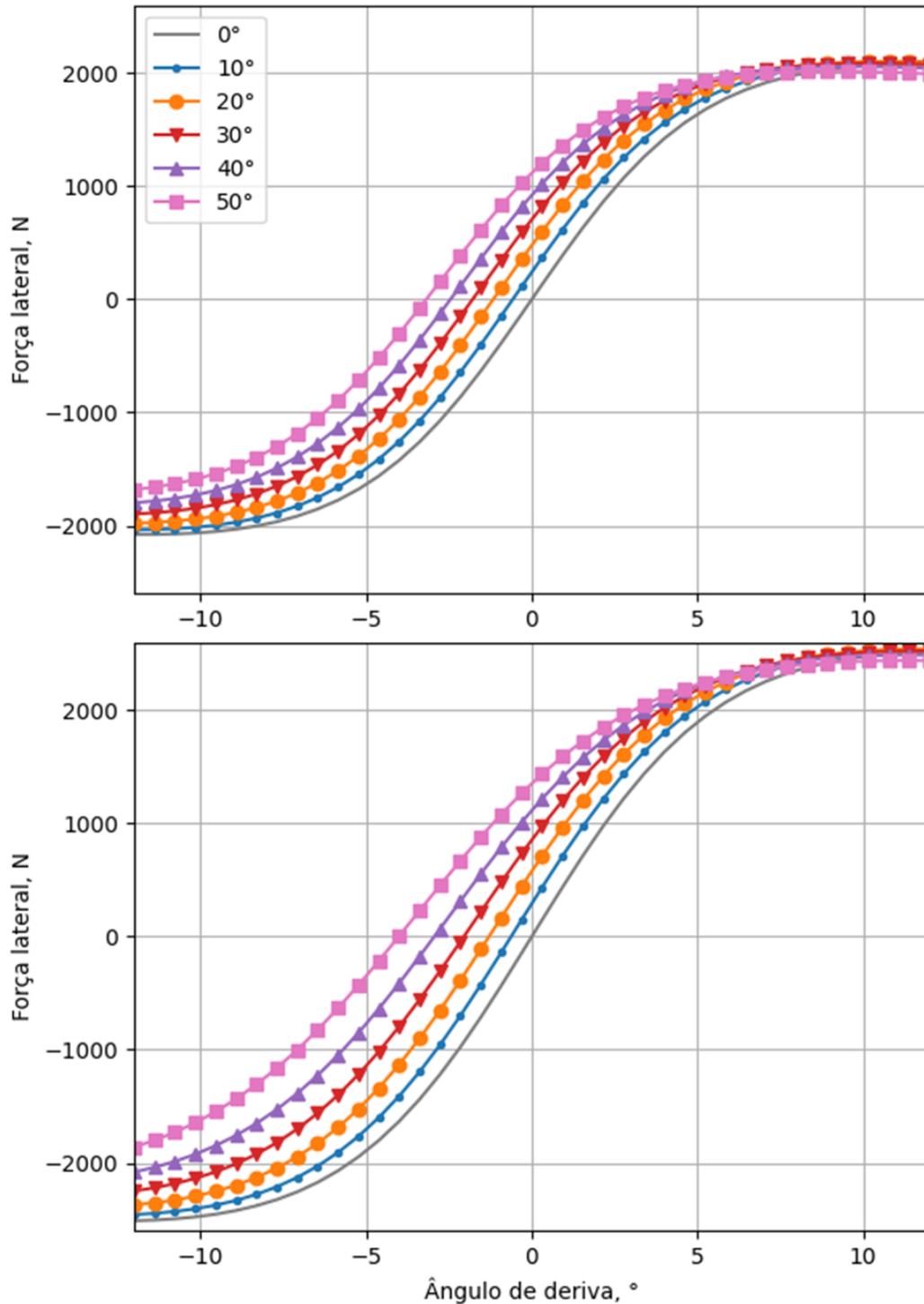
Comparando os gráficos da Figura 31, obtidos com o auxílio desse modelo empírico, com a Figura 19, apresentada na seção 2.6.1, pode-se observar que o formato da curva é muito próximo ao real.

Para valores baixos de ângulo de deriva, a força lateral cresce a uma taxa praticamente constante, simbolizando a faixa linear de operação do pneu. Porém, com o aumento desse ângulo, a força lateral aumenta à uma taxa decrescente, comparada a faixa linear de operação.

A influência do ângulo de cambagem também é representada pela *Magic Formula*. Analisando os gráficos da Figura 31, um aumento do ângulo de cambagem resultará em um aumento da força lateral, para o mesmo valor de α .

Vale ressaltar a importância desse efeito para as forças laterais geradas pelos pneus de motocicletas: mesmo com um ângulo de deriva nulo, o pneu dianteiro inclinado em 40° é capaz de produzir uma força de aproximadamente 1000 N.

Figura 31 – Força lateral gerada pelos pneus dianteiro (superior, $F_z = 1732$ N) e traseiro (inferior, $F_z = 2094$ N) para diferentes valores de cambagem

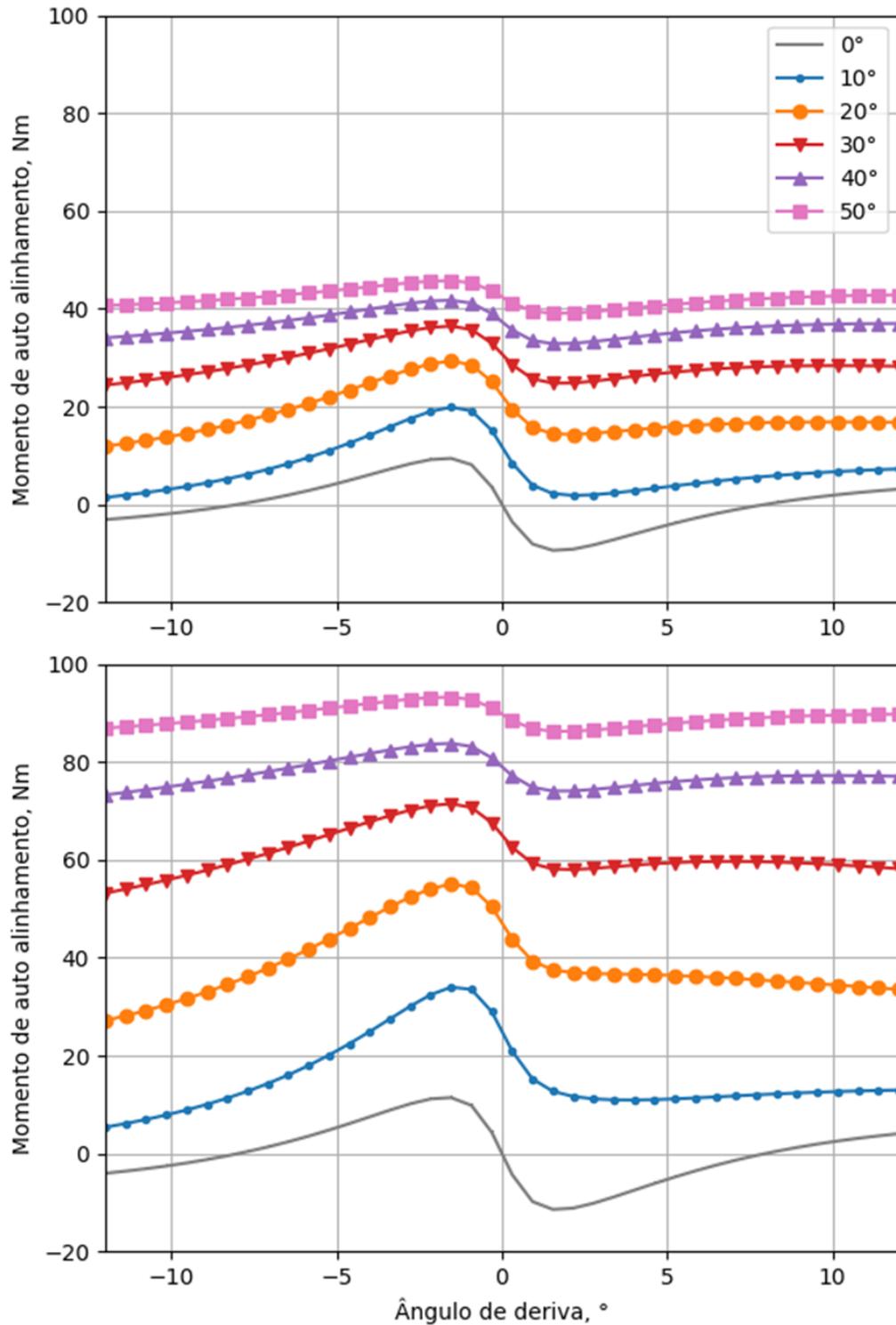


Fonte: Autor (2024)

O momento de auto alinhamento também apresenta boa similaridade com os resultados reais de um pneu de motocicleta. Comparando a Figura 32 com a Figura 20, apresentada na seção 2.6.1, o formato das curvas obtidas com o modelo da *Magic*

Formula se aproxima de maneira satisfatória ao real, especialmente para baixos valores do ângulo de cambagem.

Figura 32 – Momento de auto alinhamento gerado pelos pneus dianteiro (gráfico superior) e traseiro (inferior)



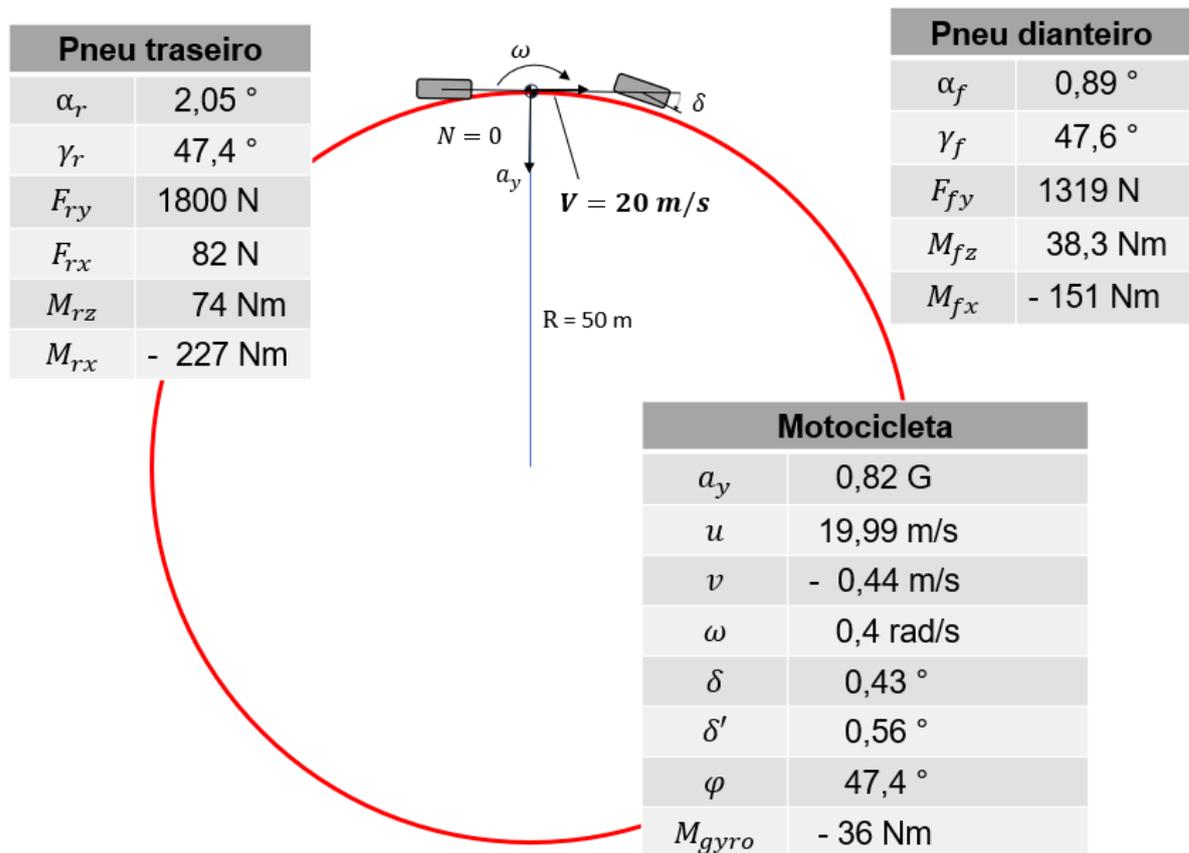
Fonte: Autor (2024)

4.2. RESULTADOS DO MODELO DE MOTOCICLETA EM CURVA EM REGIME PERMANENTE

Foram realizadas simulações para avaliar o estado de uma motocicleta, descrita conforme os parâmetros apresentados na Tabela 1 na seção 3.4., realizando uma manobra de curva em regime permanente (semelhante a um skid pad) para diferentes velocidades (variando de 10 a 40 m/s, 36 a 144 km/h, respectivamente).

A Figura 33 exemplifica os valores das variáveis representando o estado da motocicleta percorrendo uma curva de raio de 50 m a 20 m/s:

Figura 33 – Resultados do modelo para uma motocicleta percorrendo uma curva em regime permanente

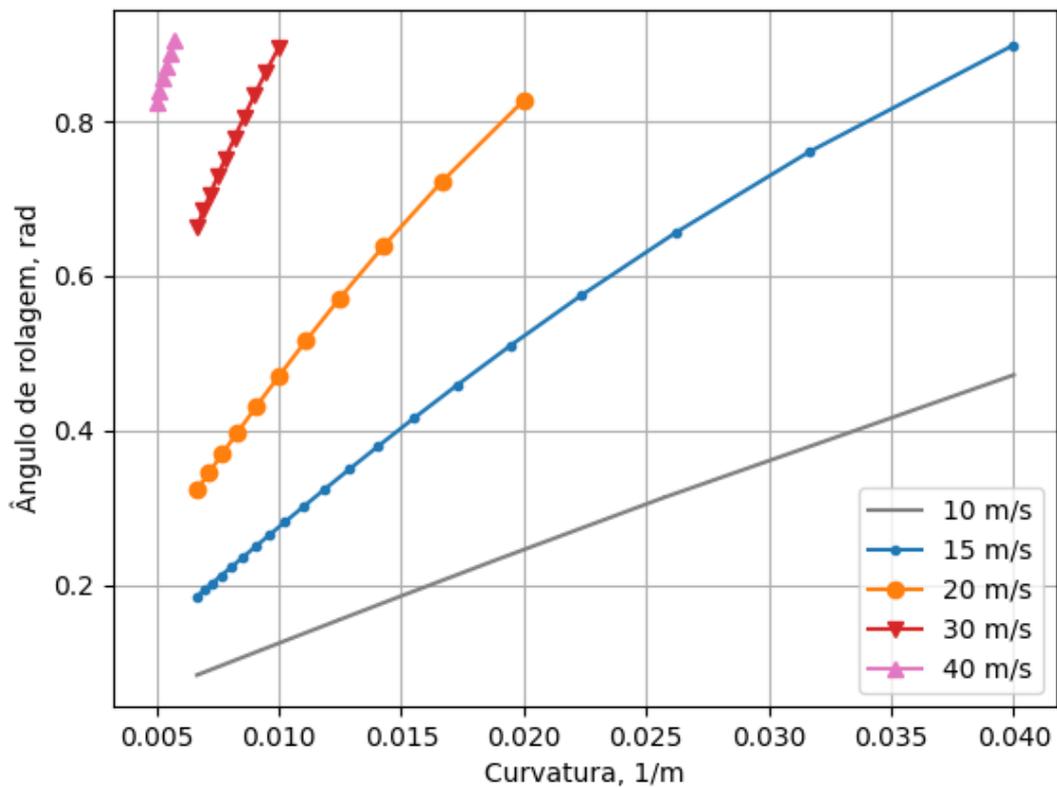


Fonte: Autor (2024)

Passando à análise geral dos resultados, a Figura 34 mostra a variação do ângulo de rolamento em função da curvatura (igual ao inverso do raio da curva realizada). Em baixas velocidades, como 10 e 15 m/s, a motocicleta mostra-se capaz

de realizar curvas com elevada curvatura (por exemplo, correspondente a uma curva de 25 m de raio).

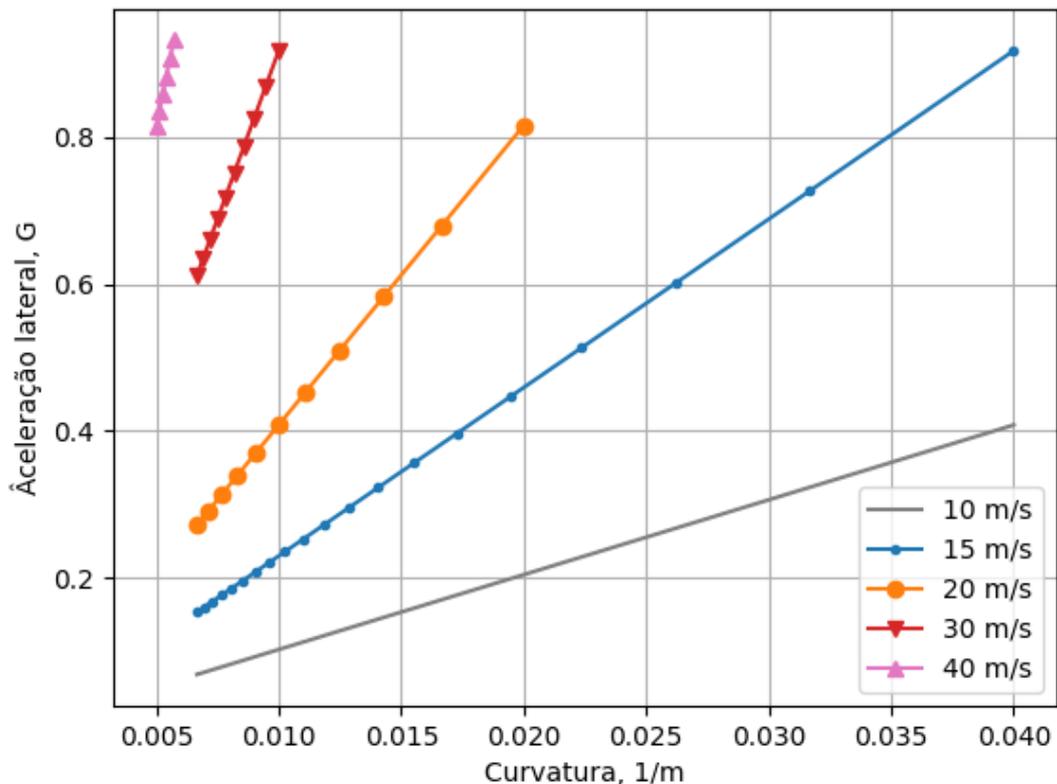
Figura 34 – Ângulo de rolagem em função da curvatura ($1/R$) para diferentes velocidades



Fonte: Autor (2024)

Com o aumento da velocidade da motocicleta, a necessidade da aceleração lateral também aumentará, conforme demonstrado pela equação 5, apresentada na seção 2.4. Dessa maneira, os pneus precisarão desenvolver maiores forças laterais para reagir à força centrípeta associada à curva (conforme mostra a Figura 35) e alcançar um estado de equilíbrio do momento de guinada enquanto executa uma manobra de curva. As acelerações laterais máximas encontradas estão em torno de 0,9 G.

Figura 35 – Aceleração lateral em função da curvatura ($1/R$) para diferentes velocidades



Fonte: Autor (2024)

Observando as forças laterais desenvolvidas pelos pneus dianteiro e traseiro, apresentadas na Figura 36, percebe-se que o pneu traseiro está operando próximo ao seu limite. A força lateral máxima gerada por ele será de, aproximadamente, 2500 N, e em elevadas acelerações laterais, precisa também produzir uma força longitudinal para vencer a resistência devido à componente longitudinal da força lateral do pneu dianteiro que surge devido ao ângulo de esterçamento cinemático, o que diminui sua capacidade de gerar forças laterais.

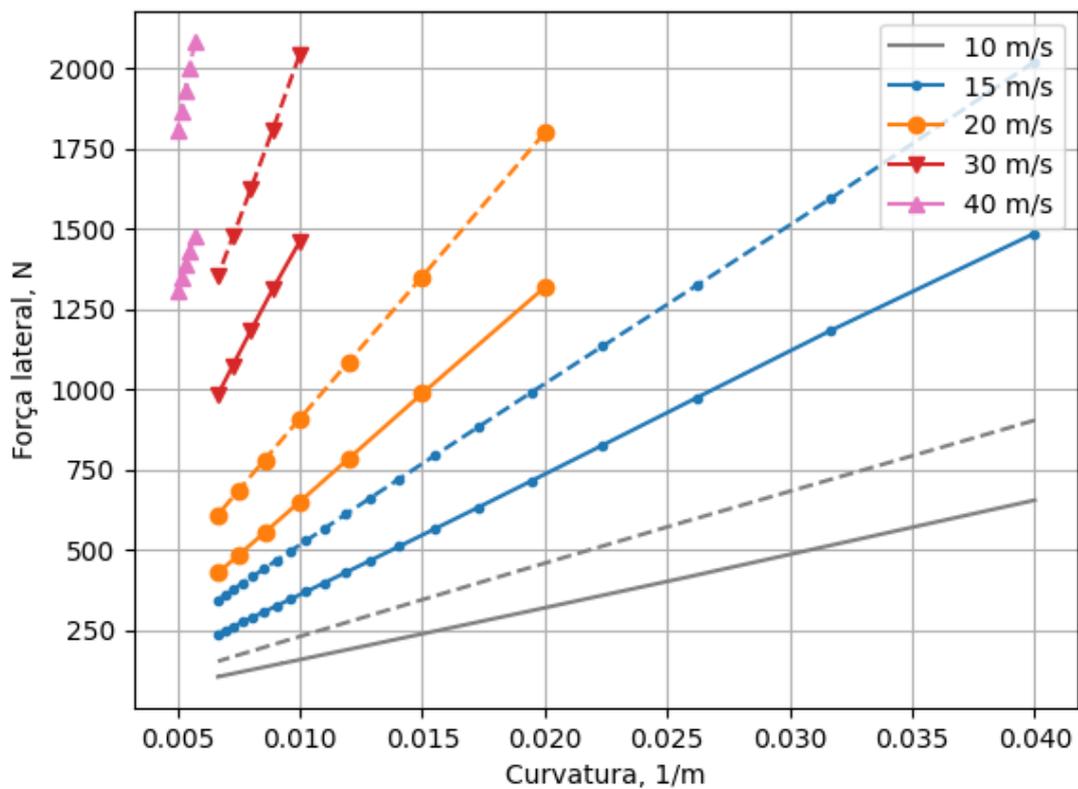
Esse desbalanceamento entre as forças geradas pelos pneus deve-se, principalmente, à diferença entre a distribuição de massa entre os dois eixos (aproximadamente 55 % da massa está distribuída na traseira): como o CG está mais próximo ao pneu traseiro, para atingir um estado de equilíbrio em relação ao momento de guinada, o pneu desse eixo deve gerar forças laterais maiores.

Aprofundando a análise do equilíbrio em relação ao momento de guinada da motocicleta, conforme equação 35 apresentada na seção 3.2 e retomada abaixo, a

contribuição de cada termo dessa equação é mostrada em um gráfico de barras, nas Figuras 37 e 38, para duas velocidades e raios de curvas diferentes.

$$0 = aF_{fy}\cos\delta' - (h \operatorname{sen}\varphi)F_{fy}\operatorname{sen}\delta' - bF_{ry} + (h \operatorname{sen}\varphi)F_{rx} + M_{fz} + M_{rz} \quad (35)$$

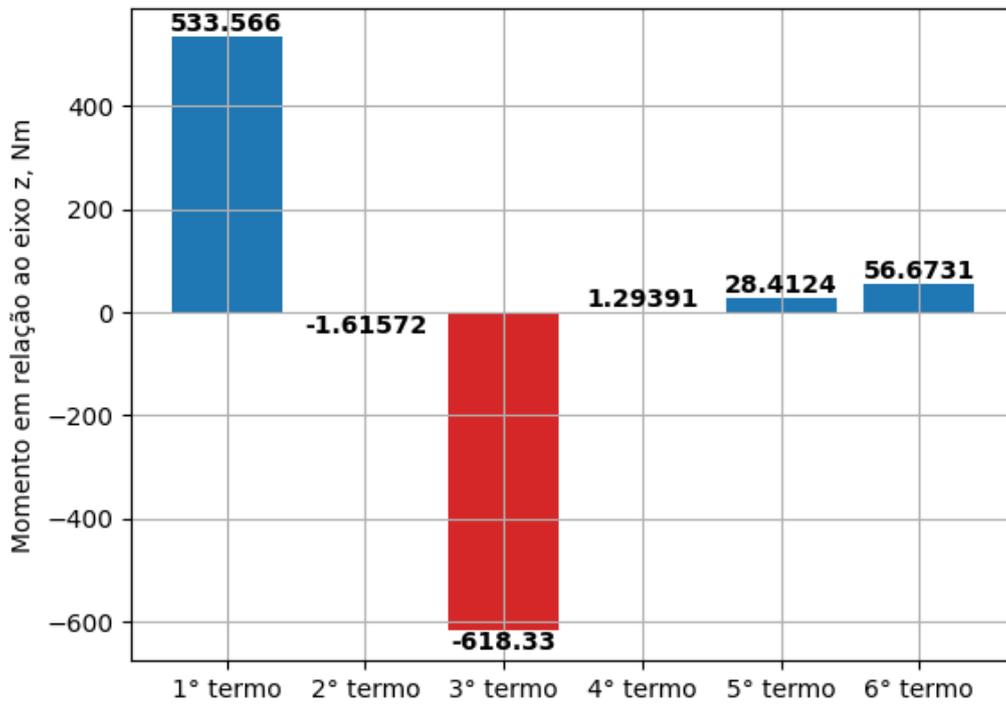
Figura 36 – Força lateral gerada pelos pneus dianteiro (linha sólida) e traseiro (linha tracejada) em manobra de curva



Fonte: Autor (2024)

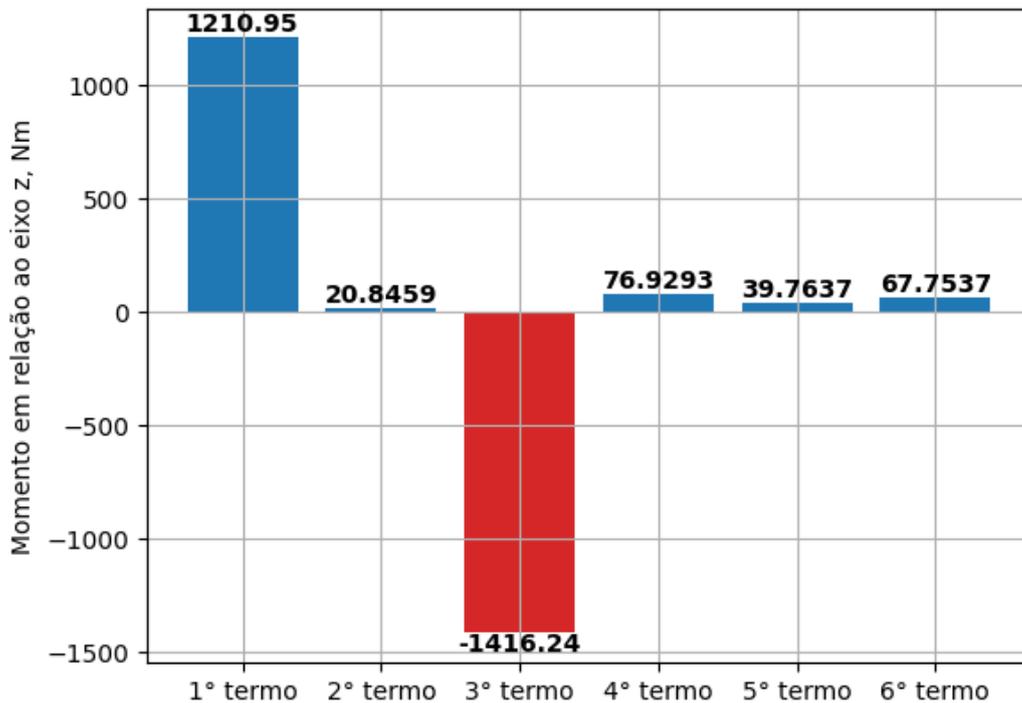
Em ambos os casos, apesar da magnitude dos momentos gerados serem diferentes, está claro que os termos que são calculados pela multiplicação da força lateral gerada e a distância ao CG do veículo são predominantes para garantir a condição de equilíbrio do veículo em regime permanente.

Figura 37 – Contribuições ao somatório de momentos em relação ao eixo z para uma curva de 100 m de raio a 20 m/s



Fonte: Autor (2024)

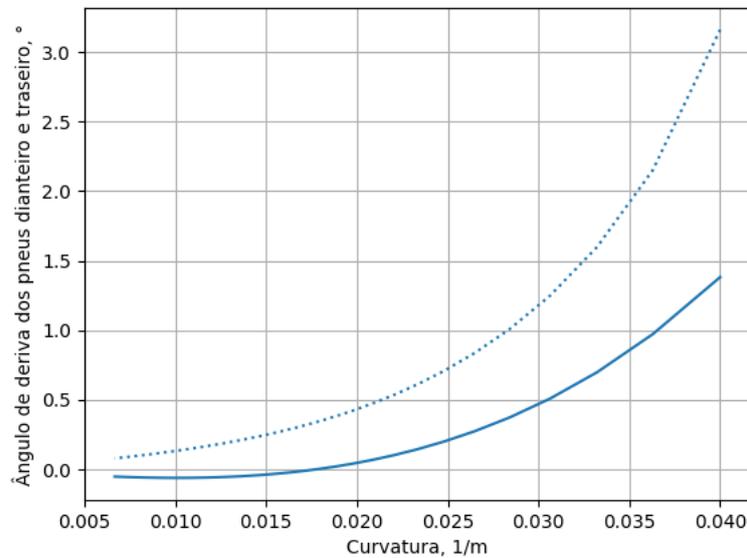
Figura 38 – Contribuições ao somatório de momentos em relação ao eixo z para uma curva de 175 m de raio a 40 m/s



Fonte: Autor (2024)

Um ponto negativo do desbalanceamento das forças geradas pelos pneus está relacionado ao ângulo de deriva necessário para gerar as forças laterais. Observando a Figura 39, o pneu traseiro sempre está trabalhando em um ângulo maior do que o pneu dianteiro. Isso causa um desgaste mais acentuado nesse pneu com o passar do tempo.

Figura 39 – Ângulo de deriva para os pneus dianteiro (linha sólida) e traseiro (linha pontilhada) para manobras de curva a 15 m/s



Fonte: Autor (2024)

Outro comportamento reproduzido pelo modelo pode ser observado na porção da curva, da Figura 39, para o pneu dianteiro em manobras de raios elevados (baixa curvatura). A força lateral desenvolvida pelo pneu simplesmente em função de seu ângulo de cambagem já é capaz de gerar uma força lateral superior à necessária para percorrer a trajetória da curva, dessa maneira, o pneu desenvolve um ângulo de deriva negativo, efetivamente reduzindo a força lateral gerada pelo pneu.

Por último, é válido analisar a condição de equilíbrio da motocicleta em relação ao eixo longitudinal, conforme descrito pela equação 36 apresentada na seção 3.2. O gráfico presente no canto superior esquerdo da Figura 40 mostra os valores para a aceleração lateral da motocicleta (em G, ilustrado pela linha pontilhada) e para a tangente do ângulo de rolagem (ilustrado pela linha sólida) em função da curvatura.

Retornando à equação 36, mas desprezando os termos que representam o *overturning couple* e o momento gerado pelo efeito giroscópico da velocidade rotacional dos pneus, obtêm-se a seguinte equação:

$$0 = (h \operatorname{sen}\varphi)(F_{fz} + F_{rz}) - (h \operatorname{cos}\varphi)(F_{fy}\operatorname{cos}\delta' + F_{ry}) \quad (47)$$

Onde parte do primeiro termo da equação 47 é composto pela força peso do veículo:

$$(F_{fz} + F_{rz}) = mg \quad (48)$$

E parte do segundo termo, das forças laterais geradas pelos pneus ($F_{y,total}$, desenvolvida a partir da equação 34):

$$m\omega u \approx m\omega V = ma_y = (F_{fy}\operatorname{cos}\delta' + F_{ry}) = F_{y,total} \quad (49)$$

Rearranjando os termos da equação 47, obtêm-se a seguinte relação:

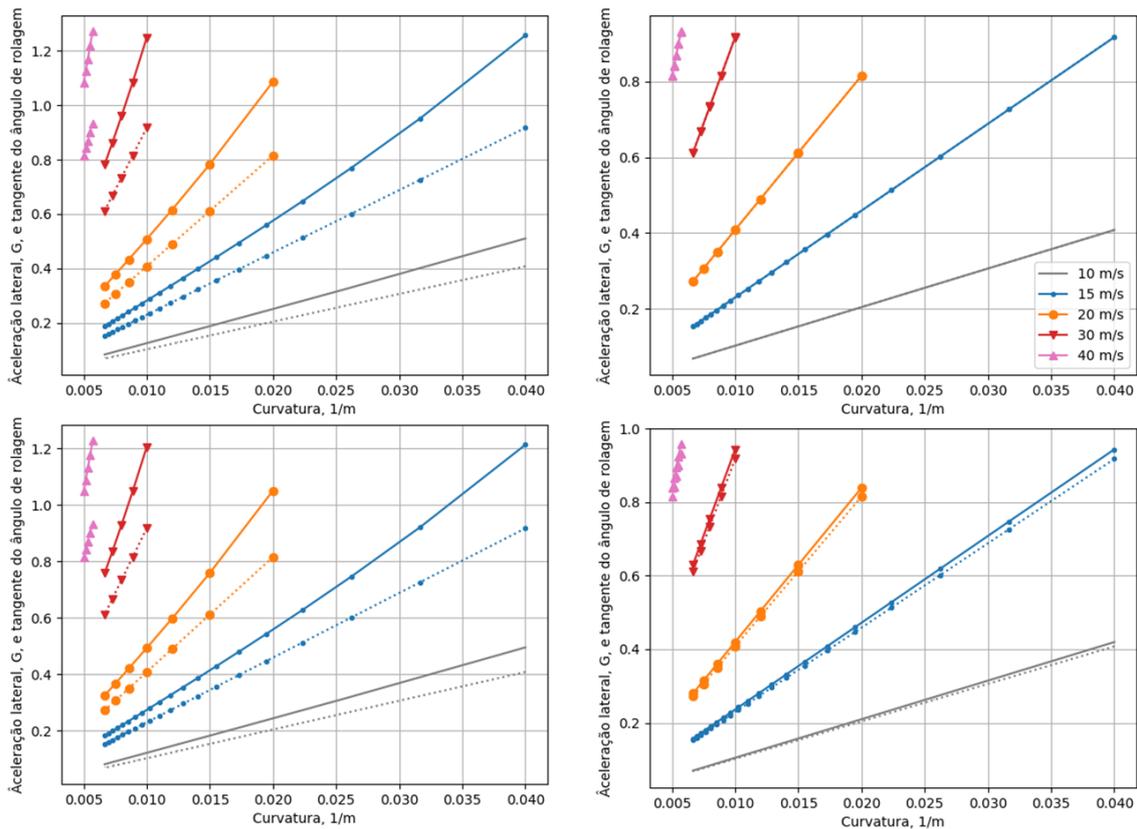
$$\frac{F_{y,total}}{mg} = \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{cos}\varphi} = \tan\varphi \quad (50)$$

Onde o termo mais à esquerda representa a aceleração lateral do veículo, em G. Esse é um resultado teórico (COSSALTER, 2006), ilustrado no gráfico do canto superior direito da Figura 40, onde a curva da tangente do ângulo de rolagem da motocicleta é coincidente com a da sua aceleração lateral.

A adição ao modelo do momento gerado pelo efeito giroscópico e *overturning couple* mostra que uma motocicleta percorrendo uma curva em regime permanente precisa estar em um estado com um valor do ângulo de rolagem superior àquele calculado apenas considerando o equilíbrio entre a força peso e as forças laterais geradas pelos pneus (conforme equação 36). A exclusão desses momentos do modelo irá provocar erro no cálculo do ângulo de rolagem para a motocicleta realizando uma curva.

O gráfico do canto inferior esquerdo na Figura 40 mostra as curvas para as variáveis discutidas anteriormente, porém, desconsiderando o momento gerado pelo efeito giroscópico. O gráfico no canto inferior direito, por sua vez, desconsidera o *overturning couple* nos cálculos.

Figura 40 – Gráficos apresentando valores para a aceleração lateral em G e tangente do ângulo de rolagem, para diferentes condições do modelo



Fonte: Autor (2024)

É o *overturning couple* que tem efeito significativo no equilíbrio dos momentos em relação do eixo longitudinal da motocicleta executando uma curva em regime permanente. Sua influência é ainda maior para maiores acelerações laterais, associadas à elevados ângulos de rolagem.

5. CONCLUSÃO

Após revisão inicial do modelo de bicicleta (apresentando o sistema de coordenadas geralmente utilizados em simulações de dinâmica veicular, descrevendo as variáveis do modelo do veículo e do pneu, e detalhando as etapas de uma manobra de curva) foi investigado as características de motocicletas e de seus pneus, destacando as principais diferenças com veículos de quatro rodas.

As modificações às equações do modelo de bicicleta com base nas características levantadas para simular o comportamento de motocicletas em curva em regime permanente foram realizadas, obtendo-se um novo sistema de equações. Esse sistema de equações foi utilizado para gerar resultados sobre uma motocicleta hipotética, semelhante a motocicletas do tipo *touring*.

A partir desses resultados, gráficos foram gerados para apresentar o comportamento do modelo e comparar com o esperado para uma motocicleta real. O modelo não apresentou incoerências em seus resultados, com base no comportamento de motocicletas em curva apresentado por Cossalter (2006) e Pacejka (2012), apesar de que seria extremamente relevante ao trabalho comparar os resultados obtidos com dados reais. Essa seria a principal sugestão para trabalhos futuros.

Ademais, outros tópicos poderiam ser explorados para aumentar a fidelidade do modelo:

- Incorporar variação do posicionamento do piloto em manobras de curva, pois, no modelo formulado neste trabalho, ele é rígido, se movimentando junto a motocicleta;
- Adicionar a elasticidade do pneu para calcular efeitos como o *overturning couple*, de maneira que a deformação dele afete a magnitude do momento gerado;
- Analisar efeitos aerodinâmicos, como força de arrasto e momento de arfagem (devido à força de arrasto) que afetam o equilíbrio das forças e momentos da motocicleta, especialmente em altas velocidades.

REFERÊNCIAS

BMW GROUP PRESS. **The new BMW R 1250**. Disponível em: <<https://www.press.bmwgroup.com/global/article/detail/T0405325EN/the-new-bmw-r-1250-rs>>. Acesso em: 16 jun. 2024.

COSSALTER, V. **Motorcycle dynamics**. 2. ed. Lulu.com, 2006.

GILLESPIE, T. D. **Fundamentals of vehicle dynamics**. Warrendale: Society of Automotive Engineers, 1992.

LIMEBEER, D. J. N.; MASSARO, M. **Dynamics and optimal control of road vehicles**. Oxford: Oxford University Press, 2018.

MILLIKEN, W. F.; MILLIKEN, D. L. **Race car vehicle dynamics**. Warrendale: Society of Automotive Engineers, 1995.

NOCEDAL, J.; WRIGHT, S. **Numerical optimization**. 2. ed. New York: Springer, 2006.

PACEJKA, H. B. **Tire and vehicle dynamics**. 3. ed. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2012.

ROUELLE, C. Advanced vehicle dynamics applied to race car design and development. In: APPLIED VEHICLE DYNAMICS SEMINAR, 2018, Piracicaba.

SMITH, C. **Tune to win**. Fallbrook: Aero Publishers, 1978.

APÊNDICE A – EQUAÇÕES E PARÂMETROS DA *MAGIC FORMULA*

As equações completas do modelo de pneu de motocicletas conforme apresentadas por Pacejka (2012) e que foram utilizadas neste trabalho estão transcritas abaixo. Primeiramente, são expostas as equações necessárias ao cálculo da força lateral (F_y):

$$C_{F\alpha o} = d_1 F_{z0} + d_2 (F_z - F_{z0}) \quad (\text{A.1})$$

$$C_{F\alpha} = \frac{C_{F\alpha o}}{1 + d_5 \gamma^2} \quad (\text{A.2})$$

$$C_{F\gamma} = d_3 F_z \quad (\text{A.3})$$

$$C = d_8 \quad (\text{A.4})$$

$$K = C_{F\alpha} \quad (\text{A.5})$$

$$D_0 = \frac{d_4 F_z}{1 + d_7 \gamma^2} \quad (\text{A.6})$$

$$B = \frac{K}{C D_0} \quad (\text{A.7})$$

$$D = \sqrt{D_0^2 - F_x^2} \quad (\text{A.8})$$

$$S_{Hf} = \frac{C_{F\gamma} \gamma}{C_{F\alpha}} \quad (\text{A.9})$$

$$S_V = \frac{d_6 F_z \gamma D}{D_0} \quad (\text{A.10})$$

$$S_H = S_{Hf} - \frac{S_V}{C_{F\alpha}} \quad (\text{A.11})$$

$$\alpha_{Feq} = (D_0/D)(\alpha + S_{Hf}) - S_{Hf} \quad (\text{A.12})$$

$$F_y = D \text{sen}\{C \arctan[B(\alpha_{Feq} + S_H)]\} + S_V \quad (\text{A.13})$$

Para o cálculo do momento de auto alinhamento (M_z):

$$\alpha_{eq0} = (D_0/D)\alpha \quad (\text{A.14})$$

$$F_{y\alpha} = D \text{sen}[C \arctan(B\alpha_{eq0})] \quad (\text{A.15})$$

$$B_t = e_7 \quad (\text{A.16})$$

$$C_t = e_8 \quad (\text{A.17})$$

$$B_r = \frac{e_9}{(1 + e_4\gamma^2)} \quad (\text{A.18})$$

$$C_r = \frac{e_{10}}{(1 + e_5\gamma^2)} \quad (\text{A.19})$$

$$C_{M\alpha} = e_1 F_z \quad (\text{A.20})$$

$$C_{M\gamma} = e_2 F_z \quad (\text{A.21})$$

$$t_{\alpha o} = \frac{C_{M\alpha}}{C_{F\alpha o}} \quad (\text{A.22})$$

$$t_\alpha = \frac{t_{\alpha o} \cos[C_t \arctan(B_t \alpha_{eq0})]}{(1 + e_5\gamma^2)} \quad (\text{A.23})$$

$$M_{zr0} = \frac{C_{M\gamma} \arctan(e_6\gamma)}{e_6} \quad (\text{A.24})$$

$$M_{zr} = M_{zr0} \cos[C_r \arctan(B_r a_{eq0})] \quad (\text{A.25})$$

$$M_z = -t_\alpha F_{y\alpha} + M_{zr} - r_c F_x \tan \gamma \quad (\text{A.26})$$

E para o *overturning couple*:

$$M_{ix} = -r_{c,i} F_{iz} \tan \gamma \quad (\text{A.27})$$

Os parâmetros que representam os pneus dianteiro e traseiro da motocicleta utilizados neste trabalho são apresentados na Tabela 2 e 3, abaixo. Esse coeficientes foram obtidos por meio de métodos de regressão numérica (PACEJKA, 2012) para adaptar-se aos dados reais de forças e momentos gerados pelos pneus, obtidos em testes:

Tabela 2 – Coeficientes da *Magic Formula* para o pneu dianteiro

d ₁	14	d ₂	9	d ₃	0,8	d ₄	1,2
d ₅	0,15	d ₆	0,1	d ₇	0,15	d ₈	1,6
e ₁	0,4	e ₂	0,04	e ₃ (= r _{c,f})	0,08	e ₄	10
e ₅	2	e ₆	1,5	e ₇	50	e ₈	1,1
e ₉	20	e ₁₀	1	f ₁	0,00015	f ₂	0,0001

Fonte: Pacejka (2012)

Tabela 3 – Coeficientes da *Magic Formula* para o pneu traseiro

d ₁	13	d ₂	4	d ₃	0,8	d ₄	1,2
d ₅	0,4	d ₆	0,1	d ₇	0,15	d ₈	1,6
e ₁	0,4	e ₂	0,07	e ₃ (= r _{c,r})	0,1	e ₄	10
e ₅	2	e ₆	1,5	e ₇	50	e ₈	1,1
e ₉	20	e ₁₀	1	f ₁	0,00015	f ₂	0,0001

Fonte: Pacejka (2012)

APÊNDICE B – CÓDIGO DESENVOLVIDO EM *PYTHON*

O código, desenvolvido na linguagem de programação *python*, foi transcrito abaixo para efeito de consulta e para auxílio em futuros trabalhos:

```

from math import sin
from math import cos
import math
import numpy as np

# Constants
g = 9.81

# Motorcycle parameters (invariable)
wh = 1.5 # wheelbase, m
a = 0.82
b = wh - a
m = 390. # total mass, kg
h = 0.59 # CG height, m
F_z1 = 1732. # Front tire normal load, N
F_z2 = 2094. # Rear tire normal load, N
r_f = 0.3 # front tire radius, m
r_r = 0.3 # rear tire radius, m
I_wf = 1.0 # kgm^2
I_wr = 1.0
epsilon = 0.5 # caster angle, rad

def tire_model_f(alpha, gamma, F_x = 0.):
    # Front tire parameters (_1)
    F_zo1 = 1732.
    d1_1 = 14.
    d2_1 = 9.
    d3_1 = 0.8
    e1_1 = 0.4
    e2_1 = 0.04
    e3_1 = 0.08 # equal to tire crown radius
    d4_1 = 1.2
    d5_1 = 0.15
    d6_1 = 0.1
    d7_1 = 0.15
    d8 = 1.6
    e4 = 10.
    e5 = 2.
    e6 = 1.5

```

```

e7 = 50.
e8 = 1.1
e9 = 20.
e10 = 1.

C_Falphao = d1_1*F_zo1 + d2_1*(F_z1 - F_zo1)
C_Falpha = C_Falphao/(1. + d5_1*gamma**2)
C_Fgamma = d3_1*F_z1
C = d8
K = C_Falpha
D_0 = d4_1*F_z1/(1. + d7_1*gamma**2)
B = K/(C*D_0)
D = math.sqrt(D_0**2 - F_x**2)
S_Hf = C_Fgamma*gamma/C_Falpha
S_V = d6_1*F_z1*gamma*D/D_0
S_H = S_Hf - S_V/C_Falpha
alpha_Feq = (D_0/D)*(alpha + S_Hf) - S_Hf
F_y = D*sin(C*math.atan(B*(alpha_Feq + S_H))) + S_V
alpha_eq0 = (D_0/D)*alpha
F_yalpha = D*sin(C*math.atan(B*alpha_eq0))
B_t = e7
C_t = e8
B_r = e9/(1. + e4*gamma**2)
C_r = e10/(1. + e5*gamma**2)
C_Malpha = e1_1*F_z1
C_Mgamma = e2_1*F_z1
t_alphao = C_Malpha/C_Falphao
t_alpha = t_alphao*cos(C_t*math.atan(B_t*alpha_eq0))/(1. + e5*gamma**2)
M_zro = C_Mgamma*math.atan(e6*gamma)/e6
M_zr = M_zro*cos(C_r*math.atan(B_r*alpha_eq0))
M_z = - t_alpha*F_yalpha + M_zr - e3_1*F_x*math.tan(gamma)
M_x = - e3_1*F_z1*math.tan(gamma)
return [F_y, M_z, M_x]

```

```

def tire_model_r(alpha, gamma, F_x):
    # Rear tire parameters (_2)
    F_zo2 = 2094.
    d1_2 = 13.
    d2_2 = 4.
    d3_2 = 0.8
    e1_2 = 0.4
    e2_2 = 0.07
    e3_2 = 0.1
    d4_2 = 1.2
    d5_2 = 0.4
    d6_2 = 0.1
    d7_2 = 0.15
    d8 = 1.6
    e4 = 10.

```

```

e5 = 2.
e6 = 1.5
e7 = 50.
e8 = 1.1
e9 = 20.
e10 = 1.

```

```

C_Falphao = d1_2 * F_zo2 + d2_2 * (F_z2 - F_zo2)
C_Falpha = C_Falphao / (1. + d5_2 * gamma ** 2)
C_Fgamma = d3_2 * F_z2
C = d8
K = C_Falpha
D_0 = d4_2 * F_z2 / (1. + d7_2 * gamma ** 2)
B = K / (C * D_0)
D = math.sqrt(D_0 ** 2 - F_x ** 2)
S_Hf = C_Fgamma * gamma / C_Falpha
S_V = d6_2 * F_z2 * gamma * D / D_0
S_H = S_Hf - S_V / C_Falpha
alpha_Feq = (D_0 / D) * (alpha + S_Hf) - S_Hf
F_y = D * sin(C * math.atan(B * (alpha_Feq + S_H))) + S_V
alpha_eq0 = (D_0 / D) * alpha
F_yalpha = D * sin(C * math.atan(B * alpha_eq0))
B_t = e7
C_t = e8
B_r = e9 / (1. + e4 * gamma ** 2)
C_r = e10 / (1. + e5 * gamma ** 2)
C_Malpha = e1_2 * F_z2
C_Mgamma = e2_2 * F_z2
t_alphao = C_Malpha / C_Falphao
t_alpha = t_alphao * cos(C_t * math.atan(B_t * alpha_eq0)) / (1. + e5 * gamma ** 2)
M_zro = C_Mgamma * math.atan(e6 * gamma) / e6
M_zr = M_zro * cos(C_r * math.atan(B_r * alpha_eq0))
M_z = - t_alpha * F_yalpha + M_zr - e3_2 * F_x * math.tan(gamma)
M_x = - e3_2 * F_z2 * math.tan(gamma)
return [F_y, M_z, M_x]

```

```

def ss_ay(V_i, R_i):
    return (V_i ** 2) / R_i / g

```

```

def kinematic_delta(delta_i, phi_i):
    return math.atan(delta_i * cos(epsilon) / (cos(phi_i) - delta_i * sin(phi_i) *
sin(epsilon)))

```

```

def front_wheel_camber(delta_i, phi_i):
    return math.asin(sin(phi_i) + cos(phi_i) * (delta_i * sin(epsilon)))

```

```

def front_slip_angle(u_i, v_i, w_i, kin_delta_i):
    return kin_delta_i - (w_i * a + v_i) / u_i

def rear_slip_angle(u_i, v_i, w_i):
    return (w_i * b - v_i) / u_i

def gyro_moment (V_i, w_i, phi_i):
    return - (l_wf / r_f + l_wr / r_r) * V_i * w_i * cos(phi_i)

def f1(w_i, V_i, R_i):
    return w_i - V_i/R_i

def f2(u_i, v_i, V_i):
    return (u_i**2 + v_i**2) - V_i**2

def f3(v_i, w_i, Frxi, kin_delta_i, F_fyi):
    return m*w_i*v_i - F_fyi*sin(kin_delta_i) + Frxi

def f4(u_i, w_i, kin_delta_i, F_fyi, F_ryi):
    return - m*w_i*u_i + F_fyi*cos(kin_delta_i) + F_ryi

def f5(Frxi, phi_i, kin_delta_i, F_fyi, F_ryi, M_fzi, M_rzi):
    return a*F_fyi*cos(kin_delta_i) - h*sin(phi_i)*F_fyi*sin(kin_delta_i) - F_ryi*b +
h*sin(phi_i)*Frxi + M_fzi + M_rzi

def f6(V_i, w_i, phi_i, kin_delta_i, F_fyi, F_ryi, M_fxi, M_rxi, M_gyroi):
    return m*g*h*sin(phi_i) - (F_fyi * cos(kin_delta_i) + F_ryi)*h*cos(phi_i) + M_fxi +
M_rxi + M_gyroi

def motorcycle_output(V, R): # Maneuver inputs, speed and turn radius
    ay_ss = np.empty([np.size(V), np.size(R)])
    i = 0
    j = 0
    while i < np.size(V):
        while j < np.size(R):
            ay_ss[i, j] = ss_ay(V[i], R[j])
            j = j + 1
        i = i + 1
        j = 0

    # Motorcycle state (unique for each maneuver, V & R)

```

```

u_o_matrix = np.empty([np.size(V), np.size(R)])
v_o_matrix = np.zeros([np.size(V), np.size(R)])
w_o_matrix = np.zeros([np.size(V), np.size(R)])
delta_o_matrix = np.empty([np.size(V), np.size(R)])
kinematic_delta_matrix = np.empty([np.size(V), np.size(R)])
Frx_o_matrix = np.empty([np.size(V), np.size(R)])
phi_o_matrix = np.empty([np.size(V), np.size(R)])
alphaf_o_matrix = np.empty([np.size(V), np.size(R)])
alphan_o_matrix = np.empty([np.size(V), np.size(R)])
gammaf_o_matrix = np.empty([np.size(V), np.size(R)])
gammar_o_matrix = np.empty([np.size(V), np.size(R)])
Ffy_matrix = np.empty([np.size(V), np.size(R)])
Fry_matrix = np.empty([np.size(V), np.size(R)])
Mfz_matrix = np.empty([np.size(V), np.size(R)])
Mrz_matrix = np.empty([np.size(V), np.size(R)])
Mfx_matrix = np.empty([np.size(V), np.size(R)])
Mrx_matrix = np.empty([np.size(V), np.size(R)])
M_gyro_matrix = np.empty([np.size(V), np.size(R)])

```

```

i = 0
while i < np.size(V):
    while j < np.size(R): # initial guesses
        u_o_matrix[i, j] = V[i]
        delta_o_matrix[i, j] = wh / R[j]
        Frx_o_matrix[i, j] = 20
        phi_o_matrix[i, j] = 0.04
        j = j + 1
    i = i + 1
    j = 0

```

```
# Solution method parameters
```

```

step = 1.
dx1 = 0.001
dx2 = 0.0005
dx3 = 0.0005
dx4 = 0.00005
dx5 = .0010
dx6 = 0.0005
tolerance = math.pow(10, -6)
error = 1.0
iterations = 0

```

```

i = 0
while i < np.size(V):
    while j < np.size(R):
        u_o = float(u_o_matrix[i, j])
        v_o = float(v_o_matrix[i, j])
        w_o = float(w_o_matrix[i, j])
        delta_o = float(delta_o_matrix[i, j])
        Frx_o = float(Frx_o_matrix[i, j])

```

```

phi_o = float(phi_o_matrix[i, j])
while error > tolerance:
    kin_delta_o = kinematic_delta(delta_o, phi_o)
    alpha_fo = front_slip_angle(u_o, v_o, w_o, kin_delta_o)
    alpha_ro = rear_slip_angle(u_o, v_o, w_o)
    gamma_fo = front_wheel_camber(delta_o, phi_o)
    gamma_ro = phi_o
    [F_fyo, M_fzo, M_fxo] = tire_model_f(alpha_fo, gamma_fo)
    [F_ryo, M_rzo, M_rxo] = tire_model_r(alpha_ro, gamma_ro, Frx_o)
    M_gyro_o = gyro_moment(V[i], w_o, phi_o)

    f1_o = f1(w_o, V[i], R[j])
    f2_o = f2(u_o, v_o, V[i])
    f3_o = f3(v_o, w_o, Frx_o, kin_delta_o, F_fyo)
    f4_o = f4(u_o, w_o, kin_delta_o, F_fyo, F_ryo)
    f5_o = f5(Frx_o, phi_o, kin_delta_o, F_fyo, F_ryo, M_fzo, M_rzo)
    f6_o = f6(V[i], w_o, phi_o, kin_delta_o, F_fyo, F_ryo, M_fxo, M_rxo,
M_gyro_o)

    error_array = np.array([[f1_o],
                            [f2_o],
                            [f3_o],
                            [f4_o],
                            [f5_o],
                            [f6_o]])

    if np.amax(np.abs(error_array)) < tolerance:
        # Output motorcycle state
        u_o_matrix[i, j] = u_o
        v_o_matrix[i, j] = v_o
        w_o_matrix[i, j] = w_o
        delta_o_matrix[i, j] = delta_o
        kinematic_delta_matrix [i, j] = kin_delta_o
        Frx_o_matrix[i, j] = Frx_o
        phi_o_matrix[i, j] = phi_o
        alphaf_o_matrix[i, j] = alpha_fo
        alphas_o_matrix[i, j] = alpha_ro
        gammaf_o_matrix[i, j] = gamma_fo
        gammas_o_matrix[i, j] = gamma_ro
        Ffy_matrix[i, j] = F_fyo
        Fry_matrix[i, j] = F_ryo
        Mfz_matrix[i, j] = M_fzo
        Mrz_matrix[i, j] = M_rzo
        Mfx_matrix[i, j] = M_fxo
        Mrx_matrix[i, j] = M_rxo
        M_gyro_matrix[i, j] = M_gyro_o
        print('Result converged for radius', R[j], ' m and speed ', V[i], ' m/s after ',
iterations,
            ' iterations')
        break

```

```

# x1 is the long. velocity variable
kin_delta_x1 = kinematic_delta(delta_o, phi_o)
alpha_fx1 = front_slip_angle(u_o + dx1, v_o, w_o, kin_delta_x1)
alpha_rx1 = rear_slip_angle(u_o + dx1, v_o, w_o)
gamma_fx1 = front_wheel_camber(delta_o, phi_o)
gamma_rx1 = phi_o
[F_fyx1, M_fzx1, M_fxx1] = tire_model_f(alpha_fx1, gamma_fx1)
[F_ryx1, M_rzx1, M_rxx1] = tire_model_r(alpha_rx1, gamma_rx1, Frx_o)
M_gyro_x1 = gyro_moment(V[i], w_o, phi_o)

f3_x1 = f3(v_o, w_o, Frx_o, kin_delta_x1, F_fyx1)
f4_x1 = f4(u_o + dx1, w_o, kin_delta_x1, F_fyx1, F_ryx1)
f5_x1 = f5(Frx_o, phi_o, kin_delta_x1, F_fyx1, F_ryx1, M_fzx1, M_rzx1)
f6_x1 = f6(V[i], w_o, phi_o, kin_delta_x1, F_fyx1, F_ryx1, M_fxx1, M_rxx1,
M_gyro_x1)

df1_dx1 = 0.
df2_dx1 = 2*u_o
df3_dx1 = (f3_x1 - f3_o)/dx1
df4_dx1 = (f4_x1 - f4_o)/dx1
df5_dx1 = (f5_x1 - f5_o)/dx1
df6_dx1 = (f6_x1 - f6_o)/dx1

# x2 is the lat. velocity variable
kin_delta_x2 = kinematic_delta(delta_o, phi_o)
alpha_fx2 = front_slip_angle(u_o, v_o + dx2, w_o, kin_delta_x2)
alpha_rx2 = rear_slip_angle(u_o, v_o + dx2, w_o)
gamma_fx2 = front_wheel_camber(delta_o, phi_o)
gamma_rx2 = phi_o
[F_fyx2, M_fzx2, M_fxx2] = tire_model_f(alpha_fx2, gamma_fx2)
[F_ryx2, M_rzx2, M_rxx2] = tire_model_r(alpha_rx2, gamma_rx2, Frx_o)
M_gyro_x2 = gyro_moment(V[i], w_o, phi_o)

f3_x2 = f3(v_o + dx2, w_o, Frx_o, kin_delta_x2, F_fyx2)
f4_x2 = f4(u_o, w_o, kin_delta_x2, F_fyx2, F_ryx2)
f5_x2 = f5(Frx_o, phi_o, kin_delta_x2, F_fyx2, F_ryx2, M_fzx2, M_rzx2)
f6_x2 = f6(V[i], w_o, phi_o, kin_delta_x2, F_fyx2, F_ryx2, M_fxx2, M_rxx2,
M_gyro_x2)

df1_dx2 = 0.
df2_dx2 = 2*v_o
df3_dx2 = (f3_x2 - f3_o)/dx2
df4_dx2 = (f4_x2 - f4_o)/dx2
df5_dx2 = (f5_x2 - f5_o)/dx2
df6_dx2 = (f6_x2 - f6_o)/dx2

# x3 is the yaw rate
kin_delta_x3 = kinematic_delta(delta_o, phi_o)
alpha_fx3 = front_slip_angle(u_o, v_o, w_o + dx3, kin_delta_x3)

```

```

alpha_rx3 = rear_slip_angle(u_o, v_o, w_o + dx3)
gamma_fx3 = front_wheel_camber(delta_o, phi_o)
gamma_rx3 = phi_o
[F_fyx3, M_fzx3, M_fxx3] = tire_model_f(alpha_fx3, gamma_fx3)
[F_ryx3, M_rzx3, M_rxx3] = tire_model_r(alpha_rx3, gamma_rx3, Frx_o)
M_gyro_x3 = gyro_moment(V[i], w_o + dx3, phi_o)

```

```

f3_x3 = f3(v_o, w_o + dx3, Frx_o, kin_delta_x3, F_fyx3)
f4_x3 = f4(u_o, w_o + dx3, kin_delta_x3, F_fyx3, F_ryx3)
f5_x3 = f5(Frx_o, phi_o, kin_delta_x3, F_fyx3, F_ryx3, M_fzx3, M_rzx3)
f6_x3 = f6(V[i], w_o + dx3, phi_o, kin_delta_x3, F_fyx3, F_ryx3, M_fxx3,
M_rxx3, M_gyro_x3)

```

```

df1_dx3 = 1.
df2_dx3 = 0.
df3_dx3 = (f3_x3 - f3_o)/dx3
df4_dx3 = (f4_x3 - f4_o)/dx3
df5_dx3 = (f5_x3 - f5_o)/dx3
df6_dx3 = (f6_x3 - f6_o)/dx3

```

x4 is the steering angle

```

kin_delta_x4 = kinematic_delta(delta_o + dx4, phi_o)
alpha_fx4 = front_slip_angle(u_o, v_o, w_o, kin_delta_x4)
alpha_rx4 = rear_slip_angle(u_o, v_o, w_o)
gamma_fx4 = front_wheel_camber(delta_o + dx4, phi_o)
gamma_rx4 = phi_o
[F_fyx4, M_fzx4, M_fxx4] = tire_model_f(alpha_fx4, gamma_fx4)
[F_ryx4, M_rzx4, M_rxx4] = tire_model_r(alpha_rx4, gamma_rx4, Frx_o)
M_gyro_x4 = gyro_moment(V[i], w_o, phi_o)

```

```

f3_x4 = f3(v_o, w_o, Frx_o, kin_delta_x4, F_fyx4)
f4_x4 = f4(u_o, w_o, kin_delta_x4, F_fyx4, F_ryx4)
f5_x4 = f5(Frx_o, phi_o, kin_delta_x4, F_fyx4, F_ryx4, M_fzx4, M_rzx4)
f6_x4 = f6(V[i], w_o, phi_o, kin_delta_x4, F_fyx4, F_ryx4, M_fxx4, M_rxx4,
M_gyro_x4)

```

```

df1_dx4 = 0.
df2_dx4 = 0.
df3_dx4 = (f3_x4 - f3_o)/dx4
df4_dx4 = (f4_x4 - f4_o)/dx4
df5_dx4 = (f5_x4 - f5_o)/dx4
df6_dx4 = (f6_x4 - f6_o)/dx4

```

x5 is the rear tire long. force

```

kin_delta_x5 = kinematic_delta(delta_o, phi_o)
alpha_fx5 = front_slip_angle(u_o, v_o, w_o, kin_delta_x5)
alpha_rx5 = rear_slip_angle(u_o, v_o, w_o)
gamma_fx5 = front_wheel_camber(delta_o, phi_o)
gamma_rx5 = phi_o
[F_fyx5, M_fzx5, M_fxx5] = tire_model_f(alpha_fx5, gamma_fx5)

```

```

dx5) [F_ryx5, M_rzx5, M_rxx5] = tire_model_r(alpha_rx5, gamma_rx5, Frx_o +
M_gyro_x5 = gyro_moment(V[i], w_o, phi_o)

f3_x5 = f3(v_o, w_o, Frx_o + dx5, kin_delta_x5, F_fyx5)
f4_x5 = f4(u_o, w_o, kin_delta_x5, F_fyx5, F_ryx5)
f5_x5 = f5(Frx_o + dx5, phi_o, kin_delta_x5, F_fyx5, F_ryx5, M_fzx5,
M_rzx5)
f6_x5 = f6(V[i], w_o, phi_o, kin_delta_x5, F_fyx5, F_ryx5, M_fxx5, M_rxx5,
M_gyro_x5)

df1_dx5 = 0.
df2_dx5 = 0.
df3_dx5 = 1.
df4_dx5 = (f4_o - f4_x5)/dx5
df5_dx5 = (f5_o - f5_x5)/dx5
df6_dx5 = (f6_o - f6_x5)/dx5

# x6 is the motorcycle roll angle
kin_delta_x6 = kinematic_delta(delta_o, phi_o + dx6)
alpha_fx6 = front_slip_angle(u_o, v_o, w_o, kin_delta_x6)
alpha_rx6 = rear_slip_angle(u_o, v_o, w_o)
gamma_fx6 = front_wheel_camber(delta_o, phi_o + dx6)
gamma_rx6 = phi_o + dx6
[F_fyx6, M_fzx6, M_fxx6] = tire_model_f(alpha_fx6, gamma_fx6)
[F_ryx6, M_rzx6, M_rxx6] = tire_model_r(alpha_rx6, gamma_rx6, Frx_o)
M_gyro_x6 = gyro_moment(V[i], w_o, phi_o + dx6)

f3_x6 = f3(v_o, w_o, Frx_o, kin_delta_x6, F_fyx6)
f4_x6 = f4(u_o, w_o, kin_delta_x6, F_fyx6, F_ryx6)
f5_x6 = f5(Frx_o, phi_o + dx6, kin_delta_x6, F_fyx6, F_ryx6, M_fzx6,
M_rzx6)
f6_x6 = f6(V[i], w_o, phi_o + dx6, kin_delta_x6, F_fyx6, F_ryx6, M_fxx6,
M_rxx6, M_gyro_x6)

df1_dx6 = 0.
df2_dx6 = 0.
df3_dx6 = (f3_x6 - f3_o)/dx6
df4_dx6 = (f4_x6 - f4_o)/dx6
df5_dx6 = (f5_x6 - f5_o)/dx6
df6_dx6 = (f6_x6 - f6_o)/dx6

J = np.array([[df1_dx1, df1_dx2, df1_dx3, df1_dx4, df1_dx5, df1_dx6],
              [df2_dx1, df2_dx2, df2_dx3, df2_dx4, df2_dx5, df2_dx6],
              [df3_dx1, df3_dx2, df3_dx3, df3_dx4, df3_dx5, df3_dx6],
              [df4_dx1, df4_dx2, df4_dx3, df4_dx4, df4_dx5, df4_dx6],
              [df5_dx1, df5_dx2, df5_dx3, df5_dx4, df5_dx5, df5_dx6],
              [df6_dx1, df6_dx2, df6_dx3, df6_dx4, df6_dx5, df6_dx6]])

# Inverse J Matrix

```

```

inv_J = np.linalg.inv(J)

# Calculate next point
iterations = iterations + 1
Aux_matrix = inv_J.dot(error_array)

u_o = u_o - step * float(Aux_matrix[0, 0])
v_o = float(v_o - step*Aux_matrix[1, 0])
w_o = float(w_o - step*Aux_matrix[2, 0])
delta_o = float(delta_o - step*Aux_matrix[3, 0])
Frx_o = float(Frx_o - step * Aux_matrix[4, 0])
phi_o = float(phi_o - step*Aux_matrix[5, 0])
j = j + 1
i = i + 1
j = 0
return [ay_ss, u_o_matrix, v_o_matrix, w_o_matrix, delta_o_matrix,
kinematic_delta_matrix, Frx_o_matrix,
phi_o_matrix, alphaf_o_matrix, alphas_o_matrix, gammaf_o_matrix,
gammar_o_matrix, Ffy_matrix,
Fry_matrix, Mfz_matrix, Mrz_matrix, Mfx_matrix, Mrx_matrix,
M_gyro_matrix]

V_input = np.array([10.]) # Lines
R_input = np.linspace(25, 150, 10) # Columns

[ay_ss, u, v, w, delta, kin_delta, Frx, phi, alphaf, alphas, gammaf, gammar, Ffy, Fry,
Mfz, Mrz, Mfx, Mrx, M_gyro] \
= motorcycle_output(V_input, R_input)

```