UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA PURA E APLICADA

Elizangela Mendes Pereira

Propriedades assintóticas para um modelo magneto-termo-elástico em $\mathbb{R}^3$

Florianópolis
2023

Elizangela Mendes Pereira

Propriedades assintóticas para um modelo magneto-termo-elástico em $\mathbb{R}^3$

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do título de Doutor em Matemática, com Área de Concentração em EDP.
Orientador: Prof. Dr. Cleverson Roberto da Luz
Coorientador: Prof. Dr. Jáuber Cavalcante de Oliveira

Florianópolis
2023

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Pereira, Elizangela Mendes
Propriedades assintóticas para um modelo magneto-termo elástico em R^3 / Elizangela Mendes Pereira ; orientador, Cleverson Roberto da Luz, coorientador, Jáuber Cavalcante de Oliveira, 2023.
108 p.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada, Florianópolis, 2023.

Inclui referências.

1. Matemática Pura e Aplicada. 2. Equações diferenciais parciais. 3. Existência de solução global. 4. Propriedades assintóticas. 5. Taxas de decaimento. I. Luz, Cleverson Roberto da. II. Oliveira, Jáuber Cavalcante de. III. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós Graduação em Matemática Pura e Aplicada. IV. Título.

Elizangela Mendes Pereira

Propriedades assintóticas para um modelo magneto-termo-elástico em $\mathbb{R}^3$

O presente trabalho em nível de doutorado foi avaliado e aprovado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. Dr. Cleverson Roberto da Luz
Orientador: Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Dr. Jáuber Cavalcante de Oliveira
Coorientador: Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Dr. Marcio Antonio Jorge da Silva
Universidade Estadual de Londrina

Prof. Dr. Matheus Cheque Bortolan
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Dr. Ruy Coimbra Charão
Universidade Federal de Santa Catarina

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de Doutor em Matemática, com Área de Concentração em EDP.

ICP-Edu
Documento assinado digitalmente
Daniel Goncalves
Data: 05/05/2023 10:10:20-0300
CPF: ***.022.459-**
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Coordenação do Programa de
Pós-Graduação

ICP-Edu
Documento assinado digitalmente
Cleverson Roberto da Luz
Data: 05/05/2023 13:33:43-0300
CPF: ***.967.469-**
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Prof. Dr. Cleverson Roberto da Luz
Orientador

Florianópolis, 2023.

Dedico este trabalho a minha família.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a Deus, minha grandiosa fortaleza, pela vida maravilhosa que me deste.

À minha mãe, um exemplo de mulher guerreira, pelo incentivo, por sempre acreditar em mim, pelo seu apoio e por seus ensinamentos, pois graças a eles eu pude chegar onde cheguei e tenho certeza que irei ainda mais longe.

Ao meu esposo Robson que sempre esteve ao meu lado e, com incentivo, amor e compreensão, me ajudou a superar as dificuldades ao longo de todo o doutorado.

À minha família e amigos, por fazerem parte de minha vida, por me apoiarem e por sempre estarem ao meu lado.

Ao professor Cleverson Roberto da Luz pela orientação e reflexões que me direcionaram durante a realização deste trabalho e, principalmente, por sua paciência.

Ao professor Jáuber Cavalcante de Oliveira pela disponibilidade em colaborar com este trabalho.

À todos os professores do ensino básico, graduação, mestrado e doutorado que contribuíram para minha formação. Em especial destaco: o professor Luiz Baldissera que hoje não está entre nós, mas lá no ensino médio me motivou a estudar matemática com seu entusiasmo e simplicidade; os professores Sandro Marcos Guzzo e André Vicente que na graduação me incentivaram a dar os primeiros passos no estudo científico; o professor Paulo Antonio Liboni Filho que me orientou no mestrado e me incentivou na busca pelo doutorado.

À minha querida amiga de doutorado Alessandra, com a qual compartilhei momentos de desespero e de alegria. Juntas vencemos as disciplinas e os temidos exames de qualificação.

Às bancas, tanto de qualificação quanto de defesa, pela leitura deste texto.

Finalmente, agradeço a FAPESC pelo apoio financeiro.

RESUMO

Neste trabalho consideramos o problema de Cauchy para um modelo magneto-termo-elástico semilinear em $\mathbb{R}^3$ com apenas dois termos dissipativos. Os principais objetivos são obter taxas de decaimento para a energia total associada ao problema linear sobre diferentes hipóteses nos dados iniciais e provar a existência de solução global para o problema semilinear. O método desenvolvido neste trabalho para tratar o problema linear é baseado em ideias de Charão, da Luz e Ikehata (2013), porém por considerarmos somente duas dissipações, foi necessário usar algumas técnicas do artigo de Rivera e Racke (2001) trabalhando com o sistema no espaço de Fourier em termo de suas componentes e utilizando multiplicadores adequados. Os resultados obtidos para o problema linear melhoram resultados conhecidos na literatura. No último capítulo do trabalho, provamos a existência de solução global e taxas de decaimento para o problema semilinear com uma não linearidade do tipo $|u|^{p-1}u$. Ao que parece, resultados para esse tipo de problema não eram conhecidos na literatura.

Palavras-chave: Sistema magneto-termo-elástico. Problema linear e semilinear. Existência de solução global. Taxas de decaimento.

ABSTRACT

In this work we consider the Cauchy problem for a semilinear magneto-thermo-elastic model in $\mathbb{R}^3$ with only two dissipative terms. Our main goals are to obtain decay rates for the total energy associated with the linear problem under different hypotheses on the initial data and to prove the existence of global solutions for the semilinear problem. The method developed in this work to deal with the linear problem is based on the ideas of Charão, da Luz and Ikehata (2013), but because we consider only two dissipations, it was necessary to use some techniques from the article by Rivera and Racke (2001) working with the system in space of Fourier in terms of its components and using appropriate multipliers. The results obtained for the linear problem improve results already known in the literature. In the last chapter of the work, we prove the existence of a global solution and decay rates for the semilinear problem with a nonlinearity of the type $|u|^{p-1}u$. As it seems, results for this type of problem were not known in the literature.

Keywords: Magneto-thermo-elastic system. Linear and semilinear problem. Existence of global solution. Decay rates.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A teoria de magneto-elasticidade, resumidamente, se preocupa com os efeitos das interações entre campos elásticos e magnéticos que contribuem para deformação de materiais não ferrosos. Para esses materiais, os efeitos de carga, corrente de deslocamento e polarização podem ser desprezados. Ao considerarmos também a presença de um campo térmico, surge o fenômeno de magneto-termo-elasticidade. Em Erigen-Maugin [18] encontra-se uma dedução completa de equações de magneto-elasticidade e magneto-termo-elasticidade lineares e não lineares.

Neste trabalho, consideremos o seguinte problema de Cauchy para um sistema semilinear descrevendo um fenômeno magneto-termo-elástico em $\mathbb{R}^3$:

$$u_{tt} - \mu\Delta u - (\lambda+\mu)\nabla \operatorname{div} u + \gamma\nabla\theta = \mu_0 \operatorname{curl} h \times H + |u|^{p-1}u, \quad (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3 \tag{1.1}$$

$$h_t + \nu_1 \operatorname{curl}\operatorname{curl} h = \mu_0 \operatorname{curl}(u_t \times H), \quad (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3 \tag{1.2}$$

$$\theta_t - \kappa\Delta\theta + \gamma \operatorname{div} u_t = 0, \quad (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3 \tag{1.3}$$

$$\operatorname{div} h = 0, \quad (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3 \tag{1.4}$$

$$u(0,x) = u_0(x), \quad u_t(0,x) = u_1(x), \quad x \in \mathbb{R}^3 \tag{1.5}$$

$$h(0,x) = h_0(x), \quad \theta(0,x) = \theta_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^3, \tag{1.6}$$

onde $u = (u^1, u^2, u^3)$ denota o vetor deslocamento, $h = (h^1, h^2, h^3)$ a indução magnética e θ a diferença de temperatura em relação a uma temperatura de referência fixa. As constantes de acoplamento μ_0 (permeabilidade magnética) e γ são positivas e $H = (0,0,1) = e_3$ denota o campo magnético externo constante. A constante $\kappa > 0$ é a difusibilidade térmica do material, $\nu_1 = \frac{1}{\sigma\mu_0}$, onde $\sigma > 0$ é a condutividade do material e λ, μ são as constantes de Lamé da teoria de elasticidade com $\mu > 0$ e $\lambda + \mu > 0$. Por fim, $u_t = \left(\frac{\partial u^1}{\partial t}, \frac{\partial u^2}{\partial t}, \frac{\partial u^3}{\partial t}\right)$, $\Delta u = (\Delta u^1, \Delta u^2, \Delta u^3)$, Δ denota o operador Laplaciano, ∇ o operador gradiente, div o operador divergente, curl o operador rotacional e $\times$ o produto vetorial usual.

A energia total associada a solução do sistema (1.1)-(1.6) é definida, para $t \geq 0$, por

$$\mathcal{E}(t) := \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} \left(|u_t(t)|^2 + \mu \sum_{j=1}^{3} |\nabla u^j(t)|^2 + (\lambda+\mu)|\operatorname{div} u(t)|^2 + |h(t)|^2 + |\theta(t)|^2 \right) dx, \tag{1.7}$$

em que $|u_t|^2 = \sum_{k=1}^3 |u_t^k|^2$ e $|h|^2 = \sum_{k=1}^3 |h^k|^2$.

Neste trabalho temos dois objetivos principais. O primeiro deles consiste em estudar o comportamento assintótico da energia total, definida em (1.7), associada à solução do problema linear

$$u_{tt} - \mu\Delta u - (\lambda+\mu)\nabla \operatorname{div} u + \gamma\nabla\theta = \mu_0 \operatorname{curl} h \times H, \quad (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3 \tag{1.8}$$

$$h_t + \nu_1 \operatorname{curl}\operatorname{curl} h = \mu_0 \operatorname{curl}(u_t \times H), \quad (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3 \tag{1.9}$$

$$\theta_t - \kappa\Delta\theta + \gamma \operatorname{div} u_t = 0, \quad (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3 \tag{1.10}$$

$$\operatorname{div} h = 0, \quad (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3 \tag{1.11}$$

$$u(0,x) = u_0(x), \quad u_t(0,x) = u_1(x), \quad x \in \mathbb{R}^3 \tag{1.12}$$

$$h(0,x) = h_0(x), \quad \theta(0,x) = \theta_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^3. \tag{1.13}$$

Obtemos diferentes resultados para a energia assumindo diferentes hipóteses sobre os dados iniciais. Além disso, provamos taxas de decaimento para a norma L^2 de u com o intuito de usá-las no estudo do problema semilinear (1.1)-(1.6).

Nosso segundo objetivo é provar a existência de solução global no tempo e taxas de decaimento para o sistema (1.1)-(1.6), obtendo para a energia total associada a solução do problema semilinear as mesmas taxas de decaimento obtidas no problema linear. Fazemos isso usando as estimativas de decaimento obtidas para o problema linear juntamente com o problema semilinear pelo Princípio de Duhamel escrito na forma

$$U(t) = S(t)U_0 + \int_0^t S(t-s)F(U(s))ds,$$

onde $U(t) = (u(t), u_t(t), h(t), \theta(t))^T$, $U_0 = (u_0, u_1, h_0, \theta_0)^T$, $F(u(t)) = (0, |u(t)|^{p-1}u(t), 0, 0)^T$ e $S(t)$ o semigrupo associado ao sistema linear (1.8)-(1.13). Assim, com base no trabalho de Nakao [29], para a equação da onda é suficiente provar estimativas a priori para a energia total, $\mathcal{E}(t)$, e a norma L^2 da solução, no intervalo de existência. Alguns trabalhos que usaram deste mesmo argumento para provar a existência de solução global são, por exemplo, [14], [22] e [23].

Para o estudo do comportamento assintótico da energia associada ao sistema linear (1.8)-(1.13), o método desenvolvido neste trabalho é baseado no método de energia no espaço de Fourier combinado com o Lema de Haraux-Komornik, a monotonicidade da energia local e total no espaço de Fourier e a propriedade de integrabilidade de certas singularidades em torno da origem. Tal método foi desenvolvido por Charão, da Luz e Ikehata em [7] no estudo de equações de onda com dissipação fracionária e em [8] no estudo da equação de placas com inércia rotacional. Porém por considerarmos somente duas dissipações, necessitamos usar algumas técnicas do artigo de Rivera e Racke [33] trabalhando com o sistema no espaço de Fourier em termos de suas componentes e utilizando multiplicadores adequados. Além disso, diferente do que foi feito em trabalhos anteriores (ver por exemplo [7] ou [15]), nos quais os autores dividem $\mathbb{R}^n$ nas regiões dentro e fora de uma bola, por questões técnicas, neste trabalho dividimos $\mathbb{R}^3$ nas regiões fora e dentro de um cubo de aresta 2. Isso nos possibilitou considerar dados iniciais em L^q, $1 \leq q < 2$ (hipótese adequada para estudar o decaimento), e uma hipótese mais adequada sobre os dados iniciais no espaço de Fourier na região de alta frequência. Dessa forma, provamos que a energia total decai com taxa $t^{-\frac{1}{\beta}}$ com $\beta > \frac{2q}{2-q}$.

Ainda, em relação ao estudo do sistema linear (1.8)-(1.13), melhoramos dois trabalhos existentes na literatura: um deles se deve a Rivera e Racke [33], onde os autores trabalharam com o sistema no espaço de Fourier em termos de suas componentes e usando multiplicadores adequados construíram um funcional de Lyapunov equivalente ao funcional de energia. Assim, assumindo que os dados iniciais satisfazem

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{1+|\xi|^2}{|\xi|^2} \mathcal{A}^2 \right)^{m+1} \mathcal{E}(0,\xi) d\xi < +\infty,$$

onde

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}(\xi) = |\xi|^2 \left(\frac{1}{\xi_1^2} + \frac{1}{\xi_3^2} \right)$$

e

$$\mathcal{E}(t,\xi) = \frac{1}{2} \left(|\hat{u}_t(t)|^2 + \mu|\xi|^2|\hat{u}(t)|^2 + (\lambda+\mu)|(\xi \cdot \hat{u}(t))|^2 + |\hat{h}(t)|^2 + |\hat{\theta}(t)|^2 \right),$$

eles obtiveram que a energia total decai com taxa polinomial $t^{-(m+1)}$ com $m \in \mathbb{N}_0$. Um dos nossos resultados melhora o resultado obtido em [33], pois obtemos as mesmas taxas de decaimento com hipóteses mais fracas (veja Capítulo 4, Seção 4.3).

Em outro trabalho, Da Luz e Oliveira [15] estudaram o sistema magneto-termo-elástico (1.8)-(1.13) com o acréscimo do termo u_t na equação (1.8), isto é, com a ação de três termos dissipativos. Eles provaram o decaimento assintótico da energia total de ordem α, $\alpha \geq -2$, com uma taxa de decaimento polinomial. Para isso, os autores se basearam no método desenvolvido em [7] e [8], além de obterem estimativas que forneceram melhores taxas de decaimento com algumas hipóteses adicionais sobre os dados iniciais. As hipóteses adicionais e respectivas taxas são as seguintes:

(i) Se $p = -2$ e $u_0, u_1, h_0 \in [L^1(\mathbb{R}^3)]^3$ e $\theta_0 \in L^1(\mathbb{R}^3)$, então $\mathcal{E}(t) = \mathcal{O}(t^{-\frac{3}{2}+\delta})$ e $\|u(t)\|_{L^2}^2 = \mathcal{O}(t^{-\frac{1}{2}+\delta})$ $(t \to +\infty)$;

(ii) Se $-2 < p \leq 0$ e $u_0, u_1 \in [L^1(\mathbb{R}^3)]^3$, $h_0 \in [\dot{W}^{-1-\frac{p}{2},1}(\mathbb{R}^3)]^3$ e $\theta_0 \in \dot{W}^{-1-\frac{p}{2},1}(\mathbb{R}^3)$, então $\mathcal{E}(t) = \mathcal{O}(t^{-\frac{5+p}{2}+\delta})$ e $\|u(t)\|_{L^2}^2 = \mathcal{O}(t^{-\frac{3+p}{2}+\delta})$ $(t \to +\infty)$;

(iii) Se $p > 0$ e $u_0, u_1 \in [\dot{W}^{-\frac{p}{2},1}(\mathbb{R}^3)]^3$, $h_0 \in [\dot{W}^{-1-\frac{p}{2},1}(\mathbb{R}^3)]^3$ e $\theta_0 \in \dot{W}^{-1-\frac{p}{2},1}(\mathbb{R}^3)$, então $\mathcal{E}(t) = \mathcal{O}(t^{-\frac{5+p}{2}+\delta})$ e $\|u(t)\|_{L^2}^2 = \mathcal{O}(t^{-\frac{3+p}{2}+\delta})$ $(t \to +\infty)$,

para qualquer $\delta > 0$, onde $\mathcal{E}(t)$ denota a energia total associada ao sistema. Assim, em cada um dos itens é possível escolher um $\delta > 0$ de forma que em alguns casos as taxas são melhores que as obtidas em [33]. Veja que p está relacionado com a regularidade dos dados iniciais e as taxas de decaimento. Observe que no item (ii) tem-se dados iniciais mais regulares para θ_0 e h_0, quando comparado ao item (i), e com isso tem-se taxas de decaimento mais rápidas. Também, na hipótese (iii) tem-se mais regularidade nos dados iniciais u_0, u_1, h_0 e θ_0 com taxas de decaimento mais rápidas em relação ao item (ii).

Outro tipo de resultado obtido em [15] é o seguinte: assumindo que os dados iniciais no espaço de Fourier satisfaçam, para $m > 0$,

$$I_0 = \int_{|\xi|\leq 1} |\xi|^{-2m} \left(|\xi|^2|\hat{u_0}|^2 + |\hat{u_1}|^2 + |\hat{h_0}|^2 + |\hat{\theta_0}|^2\right) d\xi < +\infty$$

(hipótese esta mais fraca do que a considerada em [33]), tem-se que a energia total do sistema decai com taxa polinomial t^{-m}. Nossos resultados melhoram o trabalho em [15] no sentido de estarmos considerando aqui duas dissipações apenas.

Além dos trabalhos em [33] e [15] já citados, temos o trabalho de Andreou e Dassios [1], que parece ser um dos primeiros trabalhos, na literatura, relacionado ao problema de Cauchy de um modelo magneto-elástico linear, sem considerar os efeitos térmicos. Os autores consideraram a propagação de ondas magneto-elásticas em um meio elástico homogêneo e isotrópico com condutividade elétrica finita. Aplicando a transformada de Fourier no problema de Cauchy, estudaram um PVI para equações magneto-elásticas espectrais. Métodos de perturbação regular e singular e teoria dos resíduos complexos são utilizadas. Essas técnicas juntamente com os métodos do problema termoelástico em [16] e assumindo dados iniciais suficientemente suaves, forneceram taxa de decaimento polinomial $t^{-(m+\frac{3}{2})}$, quando $t \to +\infty$, para a energia cinética, de deformação e magnética. Ainda, a taxa obtida coincide com a taxa correspondente para ondas termoelásticas. A constante $m \in \mathbb{N}_0$ é dada por $m = \min\{v_0 + 1, v_1, v_h\}$, em que v_0, v_1 e v_h representam a ordem do menor momento de não anulação do deslocamento inicial, a velocidade inicial e o campo magnético inicial, respectivamente.

A seguir, citamos outros trabalhos anteriores importantes para a teoria do sistema magneto-termo-elástico. Um primeiro estudo sobre o decaimento da energia total em domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ limitado é devido a Menzala e Zuazua [26]. Eles estudaram o PVIF relacionado ao sistema magneto-elástico linear, composto pelas equações (1.8), (1.9) e (1.11), sem os efeitos térmicos, com condições iniciais e de fronteira

$$\begin{gathered} u(0,x) = u_0(x), \quad u_t(0,x) = u_1(x), \quad h(0,x) = h_0(x) \ \text{ em } \ \Omega \\ u = 0, \quad h \cdot \eta = 0, \quad \operatorname{curl}(h) \times \eta = 0 \ \text{ sobre } \ (0,\infty) \times \partial\Omega, \end{gathered}$$

onde $\eta = \eta(x)$ denota a normal exterior em $x \in \partial\Omega$. Usando o Princípio da Invariância de La Salle, provaram que a energia do sistema decai a zero sem apresentar taxas de decaimento. Além disso, mostraram que seus resultados se estendem ao sistema magneto-termo-elástico linear. Posteriormente, Rivera e Santos [35] estudaram o mesmo problema numa região Ω sendo um domínio aberto, limitado e conexo, com fronteira suave. Eles obtiveram taxa de decaimento polinomial para a energia total, quando $t \to +\infty$, para dados iniciais suaves e com Ω satisfazendo algumas condições.

Dessa forma, observa-se que a dificuldade gerada por trabalharmos sem a dissipação na equação de ondas elásticas é também um problema para o sistema magneto-elástico linear em domínio limitado. Por exemplo, em [26] os autores mostraram apenas decaimento sem taxa. Em [35] só é possível obter taxa de decaimento desde que o domínio limitado tenha certas propriedades, e isso mesmo em domínios limitados de $\mathbb{R}^2$ como pode ser visto em [34].

Anteriormente ao trabalho em [35], Rivera e Racke [33] estudaram o PVIF relacionado ao sistema magneto-termo-elástico linear, porém, com condições de fronteira do tipo memória sobre a função deslocamento u. Eles apresentaram um primeiro resultado descrevendo o comportamento assintótico em termos de taxa de decaimento, quando o tempo tende ao infinito. A condição de fronteira do tipo memória satisfaz

$$\partial_\nu u = -\frac{1}{r(0)} u_t - \frac{1}{r(0)} g * \partial_\nu u,$$

onde $\partial_\nu u$ é o operador de fronteira natural do tipo Neumann para as equações (1.8). Sob certas condições em g, os autores provaram que a energia associada a solução do PVIF decai exponencialmente e também polinomialmente.

Charão, Oliveira e Menzala [11] abordaram o sistema magneto-elástico, estudado em [35], em uma região Ω limitada e simplesmente conexa de $\mathbb{R}^3$, com fronteira de classe C^2, com o acréscimo de uma não linearidade mais simples $\rho(x, u_t)$, na equação de ondas elásticas, que representa uma dissipação efetiva apenas em uma pequena parte de Ω. Os autores obtiveram decaimento uniforme para energia, quando $t \to +\infty$, com $\rho(x, u_t)$ satisfazendo condições adequadas. O decaimento foi exponencial se ρ for "quase" linear em u_t, e polinomial se ρ tiver um crescimento "quase" polinomial. Em [12], os mesmos autores estudaram o sistema no exterior de um subconjunto compacto do $\mathbb{R}^3$ substituindo $\rho(x, u_t)$ por uma dissipação localizada "perto do infinito" e provaram que a energia decai com taxa polinomial t^{-1}.

Em relação a problemas não lineares, Botsenyuk [3] provou a existência de solução fraca e propriedades assintóticas da solução do seguinte sistema magneto-elástico semilinear afetado pela ação de um campo magnético, $B_0(x)$, invariante no tempo:

$$\rho u_{tt} - \mu \Delta u - (\lambda + \mu) \nabla \operatorname{div} u - \frac{1}{\mu_0} [\operatorname{curl} b \times (B_0 + b)] = f, \quad \text{em }]0, T[\times \Omega, \tag{1.14}$$

$$b_t - \frac{1}{\sigma \mu_0} \Delta b - \operatorname{curl} [u_t \times (B_0 + b)] = 0, \quad \text{em }]0, T[\times \Omega, \tag{1.15}$$

$$\operatorname{div} b = 0, \quad \operatorname{div} B_0 = 0, \quad \operatorname{curl} B_0 = 0, \quad \text{em }]0, T[\times \Omega, \tag{1.16}$$

com condições iniciais e de fronteiras dadas por

$$u(0, x) = u_0(x), \quad u_t(0, x) = u_1(x), \quad b(0, x) = b_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{1.17}$$

$$u = 0, \quad n \cdot b = 0, \quad n \times \operatorname{curl} b = 0, \quad \text{em }]0, T[\times \Gamma, \tag{1.18}$$

onde n é um vetor unitário normal à fronteira Γ, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é considerada uma região limitada e com fronteira Γ suave e f é uma força externa específica. Em [4], o mesmo autor prova a existência e unicidade de solução forte global, do sistema (1.14)-(1.18), para dados iniciais suficientemente pequenos.

Mohebbi-Oliveira [28] estudaram o sistema investigado por Botsenyuk em [3] e [4] com as seguintes modificações: considerando um campo magnético constante $\tilde{H}$ no lugar de $B_0(x)$ e, ainda, sob o efeito de uma dissipação mecânica não linear $\rho(u_t)$, como $|u_t|^p u_t$ com $p \in [3, 4]$, e uma função forçante periódica $f(t, x)$. Os autores estudaram a existência de soluções fracas periódicas no tempo. Num trabalho posterior, Oliveira [30] mostra a regularidade e estabilidade das soluções periódicas no tempo do sistema semilinear (não linearmente acoplado) sob efeito de uma dissipação linear $\rho(u_t) = \alpha u_t$ ou uma dissipação não linear satisfazendo certas condições restritivas, e uma função forçante periódica. Ainda em [30], o autor também estuda o sistema semilinear em dimensão dois somente com a dissipação natural na equação do campo magnético. Nesse caso, somente foi possível obter decaimento (sem taxa) assumindo uma certa propriedade para o domínio.

Estimativas de decaimento para a solução do problema (1.14)-(1.18) em domínio exterior, sem a ação do campo magnético $B_0(x)$ e da força externa f, são estudadas em [5]. Em nosso trabalho, consideramos a não linearidade do tipo força $|u|^{p-1}u$. Encontramos alguns resultados de decaimento de solução de sistemas de ondas elásticas semilinear, [9] e [10], com a não linearidade do tipo força $|u|^{p-1}u$, mas não encontramos estudos com essa não linearidade em relação ao sistema magneto-termo-elástico.

Este trabalho está organizado do seguinte modo: no Capítulo 2 apresentamos os conceitos e resultados básicos utilizados ao longo deste trabalho e fazemos uma breve dedução das equações de magneto-termo-elasticidade. No Capítulo 3 demonstramos o teorema de existência e unicidade de solução para o problema linear (1.8)-(1.13). As estimativas do problema linear são estudadas no Capítulo 4. Na Seção 4.1, provamos o primeiro resultado obtido no estudo do comportamento assintótico da energia total associada ao sistema linear. Sob diferentes hipóteses nos dados iniciais, provamos na Seção 4.2 um segundo resultado com hipóteses mais fracas, em certo sentido, e mesma taxa quando comparado a um resultado obtido em [33]. O sentido de hipótese mais fraca é explicado na Seção 4.3. Nas Seções 4.4 e 4.5 obtemos outros resultados no estudo do comportamento assintótico da energia total, os Teorema 11 e 12. O objetivo é, mais tarde no estudo do problema semilinear, usar o Teorema 11 e estimativas envolvendo a norma L^2 da solução do problema linear, as quais são provadas nas Seções 4.6 e 4.7. No Capítulo 5, estudamos o problema de Cauchy semilinear (1.1)-(1.6) da seguinte forma: na Seção 5.1, usando a teoria de semigrupos, estudamos a existência de solução forte local no tempo e na Seção 5.2 mostraremos a existência de solução forte global e taxas de decaimento para o problema semilinear.

2 PRELIMINARES

Neste capítulo, apresentaremos algumas definições e resultados sobre os espaços L^p, espaços de Sobolev e transformada de Fourier, que foram utilizados ao longo deste trabalho. Um estudo detalhado desses tópicos pode ser encontrado, por exemplo, em [6] e [24]. As definições dos operadores diferenciais lineares gradiente, divergente e rotacional, essenciais para o estudo do sistema magneto-termo-elástico, bem como algumas de suas propriedades podem ser encontradas em [17]. Além disso, abordaremos os principais resultados da teoria de semigrupos que foram úteis para o estudo da existência e unicidade de solução dos problemas linear e semilinear. Para a teoria de semigrupos citamos, por exemplo, [20] e [32]. Por se tratarem de resultados bastante conhecidos omitiremos as demonstrações. Por fim, apresentamos uma breve dedução das equações governantes de magneto-termo-elasticidade.

2.1 ESPAÇOS DE FUNÇÕES E RESULTADOS BÁSICOS

Consideramos os seguintes espaços:

- $[L^p(\mathbb{R}^3)]^3 = L^p(\mathbb{R}^3) \times L^p(\mathbb{R}^3) \times L^p(\mathbb{R}^3)$, $1 \leq p \leq +\infty$, onde $L^p(\mathbb{R}^3)$ é o espaço de Banach das (classes de) funções mensuráveis $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tais que, no sentido de Lebesgue,

$$\int_{\mathbb{R}^3} |u(x)|^p dx < +\infty, \quad \text{se } 1 \leq p < +\infty$$

e

$$\|u\|_{L^\infty} = \inf\left\{C > 0 : \ |f(x)| \leq C \text{ quase sempre em } \mathbb{R}^3\right\}.$$

Denotaremos por $\|\cdot\|_{L^p}$ a norma usual em $L^p(\mathbb{R}^3)$ e em $[L^p(\mathbb{R}^3)]^3$. Para o produto interno em $L^2(\mathbb{R}^3)$ ou $[L^2(\mathbb{R}^3)]^3$ usaremos a notação $(\cdot,\cdot)$.

- $[W^{m,p}(\mathbb{R}^3)]^3 = W^{m,p}(\mathbb{R}^3) \times W^{m,p}(\mathbb{R}^3) \times W^{m,p}(\mathbb{R}^3)$, onde $W^{m,p}(\mathbb{R}^3)$ é o espaço de Sobolev com a norma usual. Quando $p = 2$ usamos a notação padrão $W^{m,2}(\mathbb{R}^3) = H^m(\mathbb{R}^3)$. Lembramos que o espaço $H^m(\mathbb{R}^3)$ pode ser definido como $H^m(\mathbb{R}^3) = \{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3);\ (1 + |\xi|^2)^{\frac{m}{2}}\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^3)\}$, onde $\hat{u}$ denota a transformada de Fourier da função u e $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ denota o espaço das distribuições temperadas. As normas usuais em $[W^{m,p}(\mathbb{R}^3)]^3$ e $[H^m(\mathbb{R}^3)]^3$ também são denotadas por $\|\cdot\|_{W^{m,p}}$ e $\|\cdot\|_{H^m}$.

- $[\dot{W}^{-1,1}(\mathbb{R}^3)]^3 = \dot{W}^{-1,1}(\mathbb{R}^3) \times \dot{W}^{-1,1}(\mathbb{R}^3) \times \dot{W}^{-1,1}(\mathbb{R}^3)$, onde $\dot{W}^{-1,1}(\mathbb{R}^3)$ denota o espaço de Sobolev homogêneo definido como

$$\dot{W}^{-1,1}(\mathbb{R}^3) = \{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3);\ \exists v \in L^1,\ \text{tal que } u = (-\Delta)^{\frac{1}{2}}v\}$$

com a norma
$$\|u\|_{\dot{W}^{-1,1}} = \int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{-\frac{1}{2}} u(x)| dx.$$
Também denotaremos a norma em $[\dot{W}^{-1,1}(\mathbb{R}^3)]^3$ por $\|\cdot\|_{\dot{W}^{-1,1}}$.

No Capítulo 4, como ferramenta básica para o estudo das taxas de decaimento do problema linear usaremos a transformada de Fourier.

Definição 1. *Seja $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ou $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, onde $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ denota o espaço de Schwarz. A **transformada de Fourier de** f, denotada por $\hat{f}$, é uma função definida sobre $\mathbb{R}^n$ pela fórmula*
$$\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} f(x) dx.$$

Pela densidade de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ em $L^2(\mathbb{R}^n)$, e do fato de $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \mapsto \hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ser isometria, podemos estender a transformada de Fourier para uma função $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 1. ***(Plancherel)*** *Para toda função $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ tem-se que*
$$\|f\|_{L^2} = \|\hat{f}\|_{L^2}.$$

O seguinte teorema, o qual é bem conhecido, pode ser encontrado em [19].

Teorema 2. ***(Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg)*** *Sejam p, q, r números reais tais que $p, q, r \in [1, +\infty]$ e j, m números inteiros tais que $0 \leq j < m$. Se $u \in L^q(\mathbb{R}^n)$ tal que $D^m u \in L^r(\mathbb{R}^n)$ então existe uma constante $C > 0$, dependendo somente de n, m, j, q, r, θ, tal que*
$$\|D^j u\|_{L^p} \leq C \|D^m u\|_{L^r}^{\theta} \|u\|_{L^q}^{1-\theta},$$
onde
$$\frac{1}{p} = \frac{j}{n} + \theta \left(\frac{1}{r} - \frac{m}{n} \right) + (1-\theta)\frac{1}{q}$$
desde que $\theta \in \left[\frac{j}{m}, 1\right]$. Se $m - j - \frac{n}{r}$ é um inteiro não negativo então a desigualdade de Gagliardo-Nirenberg vale desde que $\theta \in \left[\frac{j}{m}, 1\right)$.

Agora, introduziremos os operadores diferenciais lineares geralmente chamados de gradiente, divergente e rotacional, os quais são necessários para o estudo do sistema magneto-termo-elástico. Tais operadores são definidos utilizando o espaço das distribuições $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$, em que $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3) = C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$.

Definição 2. *Diz-se que uma sequência de funções $(\varphi_\nu) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ converge à $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ (isto é, $\varphi_\nu \longrightarrow \varphi$ em $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$) se, e somente se, existe um subconjunto compacto $K \subset \mathbb{R}^3$ tal que* *(i)* $\operatorname{supp}(\varphi) \subset K$ *e* $\operatorname{supp}(\varphi_\nu) \subset K$ *para todo* $\nu \in \mathbb{N}$*;*

(ii) para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $D^\alpha \varphi_\nu \longrightarrow D^\alpha \varphi$ *uniformemente sobre* K.

Com essa noção de convergência, o espaço $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3) = C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ é chamado espaço das funções testes.

Definição 3. *Definimos o operador diferencial linear* ∇ *de* $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ *em* $[\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)]^3$*, chamado* ***gradiente****, por*

$$\nabla v = \left(\frac{\partial v}{\partial x_1}, \frac{\partial v}{\partial x_2}, \frac{\partial v}{\partial x_3} \right), \ \forall v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3).$$

Definição 4. *Definimos o operador diferencial linear* div *de* $[\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)]^3$ *em* $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$*, chamado* ***divergente****, por*

$$\operatorname{div} v = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial v_i}{\partial x_i}, \ \forall v = (v_1, v_2, v_3) \in [\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)]^3.$$

Definição 5. *Definimos o operador diferencial linear* curl *de* $[\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)]^3$ *em* $[\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)]^3$*, chamado* ***rotacional****, por*

$$\operatorname{curl} v = \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}, \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}, \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right), \ \forall v = (v_1, v_2, v_3) \in [\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)]^3.$$

Os operadores diferenciais lineares ∇, div e curl satisfazem as seguintes relações (ver [17], Capítulo IX, p. 202):

$$\operatorname{curl} \nabla v = 0, \ \forall v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$$
$$\operatorname{div} \operatorname{curl} v = 0, \ \forall v \in [\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)]^3.$$

Na sequência, apresentaremos definições e resultados envolvendo os operadores ∇, div e curl. Definimos

$$\mathcal{H}_\sigma := \overline{\{h \in [C_0^\infty(\mathbb{R}^3)]^3; \ \operatorname{div}(h) = 0\}}^{[L^2]^3}$$

e

$$H(\operatorname{curl}, \mathbb{R}^3) := \{h \in [L^2(\mathbb{R}^3)]^3; \ \operatorname{curl} h \in [L^2(\mathbb{R}^3)]^3\}.$$

O espaço $\mathcal{H}_\sigma$ é um espaço de Hilbert com a norma e o produto interno usuais de L^2. Além disso, é caracterizado como $\mathcal{H}_\sigma = \{h \in [L^2(\mathbb{R}^3)]^3; \ \operatorname{div}(h) = 0\}$.

O espaço $H(\operatorname{curl}, \mathbb{R}^3)$ é um espaço de Hilbert com produto interno

$$(u, v)_{H(\operatorname{curl})} = (u, v) + (\operatorname{curl} u, \operatorname{curl} v).$$

O próximo resultado trata de regularidade elíptica para funções vetoriais definidas em $\mathbb{R}^3$. Uma demonstração em domínio exterior pode ser encontrada em [13], p.128.

Teorema 3. *Seja* $u \in [H^1(\mathbb{R}^3)]^3$ *a solução fraca da equação*

$$u - \mu \Delta u - (\lambda + \mu) \nabla \operatorname{div} u = f \quad em \quad \mathbb{R}^3$$

com $f \in [L^2(\mathbb{R}^3)]^3$*. Então* $u \in [H^2(\mathbb{R}^3)]^3$.

2.2 TEOREMA DE EXISTÊNCIA: PROBLEMA LINEAR

Iniciamos esta seção com a definição de forma bilinear, contínua e coerciva e o Teorema de Lax-Milgram, cuja demonstração pode ser encontrada em [6].

Definição 6. *Seja H um espaço de Hilbert real. Uma aplicação $a : H \times H \to \mathbb{R}$ é dita ser*

(i) ***forma bilinear*** *se $a(x, \cdot)$ é linear para cada $x \in H$ e $a(\cdot, y)$ é linear para cada $y \in H$;*

(ii) ***contínua*** *se existe uma constante C tal que*

$$|a(u, v)| \leq C\|u\|_H \|v\|_H, \quad \forall u, v \in H;$$

(iii) ***coerciva*** *se existe uma constante $\alpha > 0$ tal que*

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|_H^2, \quad \forall v \in H.$$

Teorema 4. ***(Lax-Milgram)*** *Seja $a(u, v)$ uma forma bilinear, contínua e coerciva sobre um espaço de Hilbert H. Então para cada funcional linear contínuo φ em H, existe um único $v \in H$ tal que*

$$a(u, v) = \varphi(u) \quad \forall u \in H.$$

Em seguida, alguns conceitos e resultados da teoria de semigrupos lineares que podem ser encontrados com mais detalhes em [20] e [32].

Definição 7. *Seja X um espaço de Banach e $\mathcal{L}(X)$ a álgebra dos operadores lineares limitados de X. Diz-se que uma aplicação $S : \mathbb{R}^+ \to \mathcal{L}(X)$ é um* ***semigrupo de operadores lineares limitados de*** *X se:*

(i) *$S(0) = I$ onde I é o operador identidade de $\mathcal{L}(X)$.*

(ii) *$S(t + s) = S(t)S(s)$, $\forall t, s \in \mathbb{R}^+$.*

Diz-se que o semigrupo S é de classe C_0 se

(iii)

$$\lim_{t \to 0^+} \|(S(t) - I)x\|_X = 0, \ \forall x \in X.$$

Definição 8. *Dizemos que o semigrupo S de classe C_0 é* ***de contrações*** *quando $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1$ para todo $t \geq 0$.*

Definição 9. *O operador B definido por*

$$D(B) = \left\{ x \in X;\ \lim_{h\to 0} \frac{S(h)-I}{h} x \text{ existe} \right\}$$
$$Bx = \lim_{h\to 0} \frac{S(h)-I}{h} x, \quad \forall x \in D(B),$$

*é dito **gerador infinitesimal do semigrupo** S.*

Proposição 1. *O gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 é um operador linear fechado e seu domínio é um subespaço vetorial denso em X.*

Lema 1. *Seja B um operador linear e fechado em X. Para cada $x \in D(B^k)$, definimos*

$$|x|_k = \sum_{j=0}^{k} \|B^j x\|_X. \tag{2.1}$$

*O funcional $|\cdot|_k$ é uma norma em $D(B^k)$ chamada **norma do gráfico**. Além disso, $D(B^k)$ munido de tal norma é um epaço de Banach.*

Proposição 2. *Sejam S um semigrupo de classe C_0 e B o gerador infinitesimal de S. Se $x \in D(B)$, então*

(i) $S(t)x \in D(B)$ para todo $t \geq 0$ e

$$\frac{d}{dt} S(t)x = BS(t)x = S(t)Bx.$$

(ii) $S(\cdot)x \in C([0,+\infty), D(B)) \cap C^1([0,+\infty), X)$.

Antes de apresentarmos uma caracterização dos geradores infinitesimais dos semigrupos de contrações lineares de classe C_0 devida a Lumer e Phillips, definimos operador dissipativo em espaços de Hilbert.

Definição 10. *Seja H um espaço de Hilbert. Um operador linear $B : D(B) \subset H \to H$ é dito **dissipativo** quando*

$$Re\langle Bx, x\rangle \leq 0, \quad \forall x \in D(B).$$

Teorema 5. ***(Lumer-Phillips)*** *Seja B um operador linear com domínio $D(B)$ denso em um espaço de Hilbert H. Temos:*

(i) Se B é dissipativo e existe um número $\lambda_0 > 0$ tal que $Im(\lambda_0 I - B) = H$, então B é gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações em H.

(ii) Se B é gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações em H, então $Im(\lambda I - B) = H$ para todo $\lambda > 0$ e B é dissipativo.

Seja X um espaço de Banach, B um operador linear de X e consideremos, para cada $U_0 \in X$, o problema de Cauchy abstrato

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}U(t) = BU(t), \quad t > 0, \\ U(0) = U_0. \end{cases} \tag{2.2}$$

Definição 11. *Uma função U é chamada* ***solução forte*** *de (2.2) se*

$$U \in C([0,+\infty), D(B)) \cap C^1([0,+\infty), X),$$

e U satisfaz (2.2).

Teorema 6. *Seja B um gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo, $S(t)$, então para cada $U_0 \in D(B)$ o problema (2.2) tem uma única solução forte $U(t) = S(t)U_0$.*

Se $U_0 \in X$ então dizemos que $U(t) = S(t)U_0 \in C([0,+\infty), X)$ é uma ***solução fraca*** *para o problema (2.2).*

2.3 TEOREMA DE EXISTÊNCIA: PROBLEMA SEMILINEAR

Consideremos o problema de Cauchy abstrato não linear

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}U(t) = AU(t) + F(U(t)), \quad t > 0, \\ U(0) = U_0, \end{cases} \tag{2.3}$$

onde B é gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, sobre um espaço de Banach X, e $F : X \to X$ é uma função não linear.

Se o problema (2.3) tiver uma solução forte como na Definição 11, então ela satisfaz a equação integral

$$U(t) = S(t)U_0 + \int_0^t S(t-s)F(U(s))ds. \tag{2.4}$$

De fato, considerando $g(s) = S(t-s)U(s)$ e derivando, obtemos

$$g'(s) = -S(t-s)AU(s) + S(t-s)[AU(s) + F(U(s))] = S(t-s)F(U(s)).$$

Integrando-se de 0 a t tem-se (2.4).

Porém, uma solução de (2.4) nem sempre é solução forte de (2.3), pois nem sempre é diferenciável. As soluções da equação integral (2.4) são chamadas de **soluções generalizadas (ou soluções fracas)**.

A fim de obtermos existência de solução local forte para o problema semilinear, vamos trabalhar com o termo não linear $F : D(B) \to D(B)$, com $D(B)$ equipado com a norma do gráfico. Dessa forma, temos a seguinte definição:

Definição 12. *Uma função $F : D(B) \to D(B)$ é* ***Lipschitz contínua, com a norma do gráfico, sobre conjuntos limitados de*** *$D(B) \subset X$ se dada uma constante $M > 0$ existe uma constante $L_M > 0$ tal que*

$$\|F(U) - F(V)\|_X + \|B(F(U) - F(V))\|_X \leq L_M \left(\|U - V\|_X + \|B(U - V)\|_X\right),$$

para todo U e V com $\|U\|_X + \|AU\|_X \leq M$ e $\|V\|_X + \|AV\|_X \leq M$.

Para provar a existência de solução local no tempo para o problema semilinear, no Capítulo 5, precisaremos do seguinte teorema abstrato (ver [32], *p.*190):

Teorema 7. *Seja X um espaço de Banach e $B : D(B) \subset X \to X$ um gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo. Considere $F : D(B) \to D(B)$ uma função Lipschitz contínua, com a norma do gráfico, sobre conjuntos limitados e $U_0 \in D(B)$. Então existe uma única função*

$$U \in C([0, T_m); D(B)) \cap C^1([0, T_m); X)$$

solução forte do problema (2.3), que satisfaz a seguinte condição: $T_m = +\infty$ ou $T_m < +\infty$ e

$$\lim_{t \to T_m^-} \left(\|U(t)\|_X + \|B(U(t))\|_X\right) = +\infty.$$

2.4 EQUAÇÕES GOVERNANTES

Faremos uma breve derivação das equações de magneto-termo-elasticidade em sólidos isotrópicos e homogêneos, onde adotaremos a notação do trabalho de Paria [31]. A derivação completa pode ser encontrada em [18] ou em [27].

Vamos considerar o efeito magnético na deformação elástica produzida pelo aquecimento desigual de um corpo sólido, que pode ou não estar sujeito à forças mecânicas. Assim, consideramos a presença dos campos elástico, eletromagnético e térmico que contribuem para a deformação total do corpo e interagem entre si. Veremos que os campos eletromagnético e térmico influenciam o campo elástico ao entrar nas equações de tensão elástica do movimento, enquanto o campo elástico influencia os campos eletromagnético e térmico modificando, respectivamente, a lei de Ohm e a lei de condução de calor de Fourier.

Denotando por T a temperatura, a lei de Hooke modificada (lei de Hooke-Duhamel-Neumann), que leva em consideração a deformação devido à distribuição de temperatura, é dada por [31]

$$\tau_{ij} = 2\mu e_{ij} + (\lambda e - \beta T)\delta_{ij} \tag{2.5}$$

com $\beta = (3\lambda + 2\mu)\alpha$, onde α é o coeficiente de expansão térmica linear. Aqui λ e μ são as constantes elásticas de Lamé e δ_{ij} é o delta de Kronecker. Além disso, o tensor de deformação elástica e_{ij} é definido por

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \quad e = \operatorname{div} u, \tag{2.6}$$

em que $u_i's$ denotam as componentes do vetor deslocamento u.

Na presença de matéria, as equações de Maxwell que governam o campo eletromagnético são dadas por

$$\operatorname{curl} H = j + \frac{\partial D}{\partial t}, \quad \operatorname{div} B = 0 \tag{2.7}$$

$$\operatorname{curl} E = -\frac{\partial B}{\partial t}, \quad \operatorname{div} D = \rho_e \tag{2.8}$$

em unidade de sistema internacional, junto com as relações

$$D = \epsilon E, \quad B = \mu_e H, \tag{2.9}$$

onde H é o vetor campo magnético total (primário e induzido), E é o vetor do campo elétrico induzido pela aplicação do campo magnético primário, j é o vetor da densidade de corrente elétrica induzida, ϵ é a permissividade elétrica, μ_e é a permeabilidade magnética, ρ_e é a densidade de carga elétrica, D é o deslocamento elétrico e B é a indução magnética. Note que o campo elástico descrito pelas equações (2.5) e (2.6) e o campo eletromagnético determinado pelas equações (2.7)-(2.9) não contêm diretamente nenhum termo de interação.

A equação de movimento para um sólido elástico eletricamente condutor é (ver [31])

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \tau_{ik}}{\partial x_k} + (j \times B)_i + \rho_e E + F, \tag{2.10}$$

onde ρ é a massa por unidade de volume do sólido elástico e F é a força de corpo por unidade de massa.

O campo térmico é determinado pela lei de condução do calor de Fourier em sua forma modificada (ver [31])

$$k\Delta T + Q = \rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} + \beta T_0 \frac{\partial e}{\partial t} + \pi_0 \operatorname{div} j, \tag{2.11}$$

onde Q representa a intensidade da fonte de calor, k é a condutividade térmica, c_v é o calor específico em deformação constante, T_0 é uma certa temperatura de referência sobre a qual a temperatura perturbada é T, e π_0 é o coeficiente que conecta a densidade de corrente com a densidade de fluxo de calor.

A corrente é determinada pela lei de Ohm modificada (ver [31])

$$j = \sigma \left[E + \left(\frac{\partial u}{\partial t} \times B \right) \right] + \rho_e \frac{\partial u}{\partial t} - k_0 \nabla T, \tag{2.12}$$

onde σ é a condutividade elétrica e k_0 é uma constante.

A interação entre os campos elástico, eletromagnético e térmico é expressa por meio das equações (2.10), (2.11) e (2.12). As equações (2.5)-(2.12) formam a base da magneto-termo-elasticidade.

Neste trabalho, consideramos um modelo matemático do sistema de magneto-termo-elasticidade linear em $\mathbb{R}^3$. Simplificações matemáticas podem ser obtidas desprezando a corrente de deslocamento D e a densidade de carga elétrica ρ_e. Nesse sentido, as equações de Maxwell (2.7)-(2.9) são reduzidas a

$$\operatorname{curl} H = j, \tag{2.13}$$

$$\operatorname{curl} E = -\frac{\partial B}{\partial t}, \tag{2.14}$$

$$\operatorname{div} B = 0 \tag{2.15}$$

e a relação

$$B = \mu_e H. \tag{2.16}$$

Além disso, se o pequeno efeito do gradiente de temperatura na corrente for desprezado, a lei de Ohm (2.12) toma a forma

$$j = \sigma \left[E + \left(\frac{\partial u}{\partial t} \times B \right) \right]. \tag{2.17}$$

Aplicando o rotacional em ambos os lados de (2.17) temos

$$\operatorname{curl} j = \sigma \operatorname{curl} E + \sigma \operatorname{curl} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \times B \right). \tag{2.18}$$

Da equação (2.13) em (2.18) vem

$$\operatorname{curl}\operatorname{curl} H = \sigma \operatorname{curl} E + \sigma \operatorname{curl} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \times B \right). \tag{2.19}$$

Pela equação (2.14) juntamente com a equação (2.16) segue

$$\operatorname{curl} E = -\frac{\partial B}{\partial t} = -\mu_e \frac{\partial H}{\partial t}. \tag{2.20}$$

Usando (2.20) e (2.16) em (2.19) obtemos

$$\operatorname{curl}\operatorname{curl} H = -\sigma\mu_e \frac{\partial H}{\partial t} + \sigma\mu_e \operatorname{curl} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \times H \right).$$

Multiplicando por $\frac{1}{\sigma\mu_e}$, considerando $\sigma, \mu_e \neq 0$, chegamos a

$$\frac{1}{\sigma\mu_e} \operatorname{curl}\operatorname{curl} H + \frac{\partial H}{\partial t} = \operatorname{curl} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \times H \right). \tag{2.21}$$

Agora a equação de movimento (2.10), na ausência das forças de corpo, reduz-se a (ver [31])

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \tau_{ik}}{\partial x_k} + (j \times B)_i. \tag{2.22}$$

Usando (2.5) e (2.6) em (2.22) temos

$$
\begin{aligned}
\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} &= \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k}\left[2\mu e_{ik} + (\lambda e - \beta T)\delta_{ik}\right] + (j \times B)_i \\
&= \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k}\left[\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right) + (\lambda e - \beta T)\delta_{ik}\right] + (j \times B)_i \\
&= \mu\Delta u_i + (\lambda + \mu)\frac{\partial}{\partial x_i}(\operatorname{div} u) - \beta\frac{\partial T}{\partial x_i} + (j \times B)_i,
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \mu\Delta u + (\lambda + \mu)\nabla \operatorname{div} u - \beta\nabla T + (j \times B).$$

Ainda, usando (2.13) e (2.16) podemos escrever

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \mu\Delta u - (\lambda + \mu)\nabla \operatorname{div} u + \beta\nabla T - \mu_e \operatorname{curl} H \times H = 0. \tag{2.23}$$

A lei de condução de calor de Fourier (2.11), omitindo-se o efeito da corrente elétrica sobre a temperatura e sem fonte de calor, torna-se

$$k\Delta T = \rho c_v\frac{\partial T}{\partial t} + \beta T_0\frac{\partial e}{\partial t}. \tag{2.24}$$

Por fim as equações (2.15) e (2.16) implicam em

$$\operatorname{div} H = 0. \tag{2.25}$$

Portanto, das equações (2.21), (2.23), (2.24) e (2.25) obtemos

$$
\begin{aligned}
&\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \mu\Delta u - (\lambda + \mu)\nabla \operatorname{div} u + \beta\nabla T - \mu_e \operatorname{curl} H \times H = 0, \\
&\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{\sigma\mu_e}\operatorname{curl}\operatorname{curl} H = \operatorname{curl}\left(\frac{\partial u}{\partial t} \times H\right), \\
&\rho c_v\frac{\partial T}{\partial t} - k\Delta T + \beta T_0\frac{\partial(\operatorname{div} u)}{\partial t} = 0, \\
&\operatorname{div} H = 0,
\end{aligned}
$$

cuja solução determina o estado de um meio condutor, não ferromagnético, isotrópico e homogêneo.

Observe que as duas primeiras equações do sistema anterior são não lineares. Assim, consideramos H_0 um campo primário constante. Os termos não lineares podem ser linearizados fazendo $H = H_0 + h$, em que o campo magnético induzido $h = h(t, x)$ é tão pequeno, em comparação com o campo primário aplicado, que os produtos de h e u e suas derivadas podem ser negligenciados. Dessa forma, obtém-se o sistema de equações magneto-termo-elástico linear

$$
\begin{aligned}
&\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \mu\Delta u - (\lambda+\mu)\nabla \operatorname{div} u + \beta\nabla T = \mu_e \operatorname{curl} h \times H_0,\\
&\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{\sigma\mu_e}\operatorname{curl}\operatorname{curl} h = \operatorname{curl}\left(\frac{\partial u}{\partial t} \times H_0\right),\\
&\rho c_\upsilon \frac{\partial T}{\partial t} - k\Delta T + \beta T_0 \frac{\partial \operatorname{div} u}{\partial t} = 0,\\
&\operatorname{div} h = 0.
\end{aligned}
$$

3 EXISTÊNCIA E UNICIDADE DE SOLUÇÃO DO PROBLEMA LINEAR

Neste capítulo, apresentaremos uma demonstração do resultado de existência e unicidade de solução para o seguinte problema de Cauchy envolvendo o sistema magneto-termo-elástico linear

$$u_{tt} - \mu\Delta u - (\lambda+\mu)\nabla \operatorname{div} u + \gamma\nabla\theta = \mu_0 \operatorname{curl} h \times H, \quad (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3 \tag{3.1}$$

$$h_t + \nu_1 \operatorname{curl}\operatorname{curl} h = \mu_0 \operatorname{curl}(u_t \times H), \quad (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3 \tag{3.2}$$

$$\theta_t - \kappa\Delta\theta + \gamma \operatorname{div} u_t = 0, \quad (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3 \tag{3.3}$$

$$\operatorname{div} h = 0, \quad (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3 \tag{3.4}$$

$$u(0,x) = u_0(x), \quad u_t(0,x) = u_1(x), \quad x \in \mathbb{R}^3 \tag{3.5}$$

$$h(0,x) = h_0(x), \quad \theta(0,x) = \theta_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^3. \tag{3.6}$$

A fim de usar a teoria de semigrupos lineares para provar a existência e unicidade de solução, primeiramente escrevemos o problema na forma de um PVI abstrato. Seja $U = (u, v, h, \theta)^T$ com $v = u_t$. Então,

$$U_t = \begin{pmatrix} u_t \\ v_t \\ h_t \\ \theta_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ \mu\Delta u + (\lambda+\mu)\nabla \operatorname{div} u - \gamma\nabla\theta + \mu_0 \operatorname{curl} h \times H \\ -\nu_1 \operatorname{curl}\operatorname{curl} h + \mu_0 \operatorname{curl}(v \times H) \\ \kappa\Delta\theta - \gamma \operatorname{div} v \end{pmatrix} = BU$$

e

$$U(0) = (u_0, u_1, h_0, \theta_0)^T = U_0.$$

Assim,

$$\begin{cases} U_t = BU, \quad t > 0, \\ U(0) = U_0, \end{cases} \tag{3.7}$$

em que $B : D(B) \subset X \longrightarrow X$ é dado por

$$B = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ \mu\Delta + (\lambda+\mu)\nabla \operatorname{div} & 0 & \mu_0 \operatorname{curl}(\cdot) \times H & -\gamma\nabla \\ 0 & \mu_0 \operatorname{curl}(\cdot \times H) & -\nu_1 \operatorname{curl}\operatorname{curl} & 0 \\ 0 & -\gamma \operatorname{div} & 0 & \kappa\Delta \end{pmatrix}. \tag{3.8}$$

Consideremos $X = [H^1(\mathbb{R}^3)]^3 \times [L^2(\mathbb{R}^3)]^3 \times \mathcal{H}_\sigma \times L^2(\mathbb{R}^3)$ com

$$\mathcal{H}_\sigma = \overline{\{h \in [C_0^\infty(\mathbb{R}^3)]^3; \operatorname{div}(h) = 0\}}^{[L^2]^3}.$$

X é um espaço de Hilbert, com produto interno dado por

$$(U,V)_X = (u_1, v_1) + \mu(\nabla u_1, \nabla v_1) + (\lambda+\mu)(\operatorname{div} u_1, \operatorname{div} v_1) + (u_2, v_2) + (u_3, v_3) \\ + (u_4, v_4),$$

e norma $\|U\|_X^2 = (U,U)_X$, para todo $U = (u_1,u_2,u_3,u_4) \in X$ e $V = (v_1,v_2,v_3,v_4) \in X$.

O domínio do operador B é dado por

$$D(B) = [H^2(\mathbb{R}^3)]^3 \times [H^1(\mathbb{R}^3)]^3 \times (\mathcal{H}_\sigma \cap [H^2(\mathbb{R}^3)]^3) \times H^2(\mathbb{R}^3).$$

A demonstração do seguinte resultado é bem semelhante à demonstração apresentada em [26] para domínio suave e limitado, e adaptada em [12] para domínios exteriores.

Teorema 8. *Se* $(u_0,u_1,h_0,\theta_0) \in X$ *então o sistema* (3.1)-(3.6) *possui única solução fraca na classe*

$$(u,h,\theta) \in \{C(\mathbb{R}^+;[H^1(\mathbb{R}^3)]^3) \cap C^1(\mathbb{R}^+;[L^2(\mathbb{R}^3)]^3)\} \times C(\mathbb{R}^+;\mathcal{H}_\sigma) \times C(\mathbb{R}^+;L^2(\mathbb{R}^3)).$$

Além disso, se $(u_0,u_1,h_0,\theta_0) \in D(B)$ *então o sistema possui única solução forte na classe*

$$\begin{aligned} u &\in C(\mathbb{R}^+;[H^2(\mathbb{R}^3)]^3) \cap C^1(\mathbb{R}^+;[H^1(\mathbb{R}^3)]^3) \cap C^2(\mathbb{R}^+;[L^2(\mathbb{R}^3)]^3),\\ h &\in C(\mathbb{R}^+;[H^2(\mathbb{R}^3)]^3 \cap \mathcal{H}_\sigma) \cap C^1(\mathbb{R}^+;\mathcal{H}_\sigma),\\ \theta &\in C(\mathbb{R}^+;H^2(\mathbb{R}^3)) \cap C^1(\mathbb{R}^+;L^2(\mathbb{R}^3)). \end{aligned}$$

Demonstração. Pela teoria de semigrupos basta provar que B é gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo. Vamos usar o Teorema de Lumer-Phillips para mostrar que $(-I+B)$ é gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações e, dessa forma, obtém-se a prova do teorema. Então, precisamos mostrar que:

(i) $D(-I+B)$ é denso em X;

(ii) $(-I+B)$ é dissipativo em X;

(iii) $Im[I-(-I+B)] = X$.

É fácil ver que vale o item (i). Para a prova do item (ii), seja $U = (u,v,h,\theta) \in D(-I+B) = D(B)$. Então

$$\begin{aligned} ((-I+B)U,U)_X =& -(U,U)_X + (AU,U)_X\\ =& -\|u\|_{L^2}^2 - \mu\|\nabla u\|_{L^2}^2 - (\lambda+\mu)\|\operatorname{div} u\|_{L^2}^2 - \|v\|_{L^2}^2 - \|h\|_{L^2}^2 - \|\theta\|_{L^2}^2\\ &+ (v,u) + \mu(\nabla v,\nabla u) + (\lambda+\mu)(\operatorname{div} v,\operatorname{div} u) + \mu(\Delta u,v)\\ &+ (\lambda+\mu)(\nabla \operatorname{div} u,v) - \gamma(\nabla\theta,v) + \mu_0(\operatorname{curl} h \times H,v)\\ &- \nu_1(\operatorname{curl}\operatorname{curl} h,h) + \mu_0(\operatorname{curl}(v\times H),h) + \kappa(\Delta\theta,\theta) - \gamma(\operatorname{div} v,\theta). \end{aligned} \tag{3.9}$$

Pela desigualdade de Schwarz e pela desigualdade de Young

$$(v,u) \le \|v\|_{L^2}\|u\|_{L^2} \le \frac{1}{2}\|v\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\|u\|_{L^2}^2. \tag{3.10}$$

Pela primeira identidade de Green segue

$$(\Delta u, v) = -(\nabla u, \nabla v), \tag{3.11}$$

$$(\Delta\theta, \theta) = -\|\nabla\theta\|_{L^2}^2, \tag{3.12}$$

$$(\nabla \operatorname{div} u, v) = -(\operatorname{div} u, \operatorname{div} v), \tag{3.13}$$

$$(\nabla\theta, v) = -(\theta, \operatorname{div} v) \tag{3.14}$$

e

$$\begin{aligned}
(\operatorname{curl}\operatorname{curl} h, h) &= (\nabla \operatorname{div} h, h) - (\Delta h, h) \\
&= \sum_{j=1}^{3} \left[\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial}{\partial x_j} (\operatorname{div} h) h^j \, dx - \int_{\mathbb{R}^3} \Delta h^j h^j \, dx \right] \\
&= \sum_{j,k=1}^{3} \left[\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial h^k}{\partial x_j \partial x_k} h^j \, dx - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^2 h^j}{\partial x_k^2} h^j \, dx \right] \\
&= \sum_{j,k=1}^{3} \left[- \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial h^k}{\partial x_j} \frac{\partial h^j}{\partial x_k} dx + \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial h^j}{\partial x_k} \frac{\partial h^j}{\partial x_k} dx \right] \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} \left[\left(\frac{\partial h^2}{\partial x_1} - \frac{\partial h^1}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial h^3}{\partial x_2} - \frac{\partial h^2}{\partial x_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial h^1}{\partial x_3} - \frac{\partial h^3}{\partial x_1} \right)^2 \right] dx \\
&= \| \operatorname{curl} h\|_{L^2}^2.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Observe que

$$\operatorname{curl} h \times H = \left(\frac{\partial h^1}{\partial x_3} - \frac{\partial h^3}{\partial x_1}, -\frac{\partial h^3}{\partial x_2} + \frac{\partial h^2}{\partial x_3}, 0 \right) = \frac{\partial h}{\partial x_3} - \nabla h^3$$

e

$$\operatorname{curl}(v \times H) = \left(\frac{\partial v^1}{\partial x_3}, \frac{\partial v^2}{\partial x_3}, -\frac{\partial v^1}{\partial x_1} - \frac{\partial v^2}{\partial x_2} \right) = \frac{\partial v}{\partial x_3} - (\operatorname{div} v) e_3.$$

Então pelos mesmos argumentos anteriores temos

$$\begin{aligned}
(\operatorname{curl} h \times H, v) &= \left(\frac{\partial h}{\partial x_3}, v \right) - (\nabla h^3, v) \\
&= - \left(h, \frac{\partial v}{\partial x_3} \right) + (h^3, \operatorname{div} v) \\
&= - \left(h, \frac{\partial v}{\partial x_3} \right) + (h, (\operatorname{div} v) e_3) \\
&= -(\operatorname{curl}(v \times H), h).
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Usando (3.10)-(3.16) em (3.9) obtemos

$$((-I+B)U,U)_X \leq -\frac{1}{2}\|v\|_{L^2}^2 - \frac{1}{2}\|u\|_{L^2}^2 - \nu_1\|\operatorname{curl} h\|_{L^2}^2 - \kappa\|\nabla\theta\|_{L^2}^2 - \mu\|\nabla u\|_{L^2}^2$$
$$- (\lambda+\mu)\|\operatorname{div} u\|_{L^2}^2 - \|h\|_{L^2}^2 - \|\theta\|_{L^2}^2 \leq 0,$$

para qualquer $U \in D(-I+B)$, donde $-I+B$ é dissipativo em X.

Agora provaremos o item (iii). Seja $F = (f_1, f_2, f_3, f_4) \in X$. Vamos mostrar que existe $U \in D(B)$ tal que

$$[I - (-I+B)]U = F,$$

ou seja,

$$2u - v = f_1 \tag{3.17}$$
$$2v - \mu\Delta u - (\lambda+\mu)\nabla \operatorname{div} u - \mu_0 \operatorname{curl} h \times H + \gamma\nabla\theta = f_2 \tag{3.18}$$
$$2h - \mu_0 \operatorname{curl}(v \times H) + \nu_1 \operatorname{curl}\operatorname{curl} h = f_3 \tag{3.19}$$
$$2\theta + \gamma \operatorname{div} v - \kappa\Delta\theta = f_4. \tag{3.20}$$

De (3.17) temos $v = 2u - f_1$, e substituindo em (3.18), (3.19) e (3.20) obtemos

$$4u - \mu\Delta u - (\lambda+\mu)\nabla \operatorname{div} u - \mu_0 \operatorname{curl} h \times H + \gamma\nabla\theta = g_1 \tag{3.21}$$
$$2h - 2\mu_0 \operatorname{curl}(u \times H) + \nu_1 \operatorname{curl}\operatorname{curl} h = g_2 \tag{3.22}$$
$$2\theta + 2\gamma \operatorname{div} u - \kappa\Delta\theta = g_3, \tag{3.23}$$

onde $g_1 = f_2 + 2f_1$, $g_2 = f_3 - \mu_0 \operatorname{curl}(f_1 \times H)$ e $g_3 = f_4 + \gamma \operatorname{div} f_1$. Observe que $g_1 \in [L^2(\mathbb{R}^3)]^3$, pois $f_2, f_1 \in [L^2(\mathbb{R}^3)]^3$. Também $f_1 \in [H^1(\mathbb{R}^3)]^3$ o que implica $\operatorname{curl}(f_1 \times H) \in \mathcal{H}_\sigma$. Sendo também $f_3 \in \mathcal{H}_\sigma$ temos $g_2 \in \mathcal{H}_\sigma$. Por fim, $g_3 \in L^2(\mathbb{R}^3)$, pois $f_4 \in L^2(\mathbb{R}^3)$ e $f_1 \in [H^1(\mathbb{R}^3)]^3$.

Daqui em diante denotaremos $Y = [H^1(\mathbb{R}^3)]^3 \times H(\operatorname{curl}) \times H^1(\mathbb{R}^3)$, onde $H(\operatorname{curl}) = \{h \in [L^2(\mathbb{R}^3)]^3; \operatorname{curl} h \in [L^2(\mathbb{R}^3)]^3\}$ com produto interno dado por

$$(h, \tilde{h})_{H(\operatorname{curl})} = (h, \tilde{h}) + \nu_1(\operatorname{curl} h, \operatorname{curl} \tilde{h}),$$

para quaisquer $h, \tilde{h} \in H(\operatorname{curl})$.

Afirmação 1: Existe um único $(u, h, \theta) \in Y$ satisfazendo a equação variacional

$$\int_{\mathbb{R}^3} \Big[8u \cdot \tilde{u} + 2\mu\nabla u \cdot \nabla\tilde{u} + 2(\lambda+\mu) \operatorname{div} u \operatorname{div} \tilde{u} - 2\mu_0(\operatorname{curl} h \times H) \cdot \tilde{u} + 2\gamma\nabla\theta \cdot \tilde{u} + 2h \cdot \tilde{h}$$
$$- 2\mu_0 \operatorname{curl}(u \times H) \cdot \tilde{h} + \nu_1 \operatorname{curl} h \cdot \operatorname{curl} \tilde{h} + 2\theta\tilde{\theta} + 2\gamma(\operatorname{div} u)\tilde{\theta} + \kappa\nabla\theta \cdot \nabla\tilde{\theta} \Big] dx$$
$$= \int_{\mathbb{R}^3} \left[2g_1 \cdot \tilde{u} + g_2 \cdot \tilde{h} + g_3\tilde{\theta} \right] dx, \tag{3.24}$$

para qualquer $(\tilde{u}, \tilde{h}, \tilde{\theta}) \in Y$.

De fato, considere a forma bilinear $a(\cdot,\cdot) : Y \times Y \to \mathbb{R}$ dada por

$$\begin{aligned} a((u,h,\theta),(\tilde{u},\tilde{h},\tilde{\theta})) = \int_{\mathbb{R}^3} \Big[& 8u\cdot\tilde{u} + 2\mu\nabla u\cdot\nabla\tilde{u} + 2(\lambda+\mu)\operatorname{div} u \operatorname{div}\tilde{u} \\ & - 2\mu_0(\operatorname{curl} h \times H)\cdot\tilde{u} + 2\gamma\nabla\theta\cdot\tilde{u} + 2h\cdot\tilde{h} - 2\mu_0\operatorname{curl}(u\times H)\cdot\tilde{h} \\ & + \nu_1 \operatorname{curl} h\cdot\operatorname{curl}\tilde{h} + 2\theta\tilde{\theta} + 2\gamma(\operatorname{div} u)\tilde{\theta} + \kappa\nabla\theta\cdot\nabla\tilde{\theta}\Big]\,dx. \end{aligned}$$

Mostraremos que a é contínua e coerciva. Sejam $(u,h,\theta),(\tilde{u},\tilde{h},\tilde{\theta}) \in Y$. Temos

$$\begin{aligned} |a((u,h,\theta),(\tilde{u},\tilde{h},\tilde{\theta}))| \le\ & 8|(u,\tilde{u})| + 2\mu|(\nabla u,\nabla\tilde{u})| + 2(\lambda+\mu)|(\operatorname{div} u,\operatorname{div}\tilde{u})| + 2\gamma|(\nabla\theta,\tilde{u})| \\ & + 2\mu_0|(\operatorname{curl} h\times H,\tilde{u})| + 2|(h,\tilde{h})| + 2\mu_0|(\operatorname{curl}(u\times H),\tilde{h})| \\ & + \nu_1|(\operatorname{curl} h,\operatorname{curl}\tilde{h})| + 2|(\theta,\tilde{\theta})| + 2\gamma|(\operatorname{div} u,\tilde{\theta})| + \kappa|(\nabla\theta,\nabla\tilde{\theta})| \\ \le\ & 8\|u\|_{L^2}\|\tilde{u}\|_{L^2} + 2\mu\|\nabla u\|_{L^2}\|\nabla\tilde{u}\|_{L^2} + 2(\lambda+\mu)\|\operatorname{div} u\|_{L^2}\|\operatorname{div}\tilde{u}\|_{L^2} \\ & + 2\gamma\|\nabla\theta\|_{L^2}\|\tilde{u}\|_{L^2} + 2\mu_0\|\operatorname{curl} h\times H\|_{L^2}\|\tilde{u}\|_{L^2} + 2\|h\|_{L^2}\|\tilde{h}\|_{L^2} \\ & + 2\mu_0\|\operatorname{curl}(u\times H)\|_{L^2}\|\tilde{h}\|_{L^2} + \nu_1\|\operatorname{curl} h\|_{L^2}\|\operatorname{curl}\tilde{h}\|_{L^2} \\ & + 2\|\theta\|_{L^2}\|\tilde{\theta}\|_{L^2} + 2\gamma\|\operatorname{div} u\|_{L^2}\|\tilde{\theta}\|_{L^2} + \kappa\|\nabla\theta\|_{L^2}\|\nabla\tilde{\theta}\|_{L^2}. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Note que

(i)

$$\begin{aligned} \|\operatorname{div} u\|_{L^2}^2 &\le \int_{\mathbb{R}^3}\left(\left|\frac{\partial u^1}{\partial x_1}\right| + \left|\frac{\partial u^2}{\partial x_2}\right| + \left|\frac{\partial u^3}{\partial x_3}\right|\right)^2 dx \\ &\le 2\left(\int_{\mathbb{R}^3}\left|\frac{\partial u^1}{\partial x_1}\right|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^3}\left(\left|\frac{\partial u^2}{\partial x_2}\right| + \left|\frac{\partial u^3}{\partial x_3}\right|\right)^2 dx\right) \\ &\le 4\int_{\mathbb{R}^3}\left(\left|\frac{\partial u^1}{\partial x_1}\right|^2 + \left|\frac{\partial u^2}{\partial x_2}\right|^2 + \left|\frac{\partial u^3}{\partial x_3}\right|^2\right) dx \\ &\le 4\|\nabla u\|_{L^2}^2 \le 4\|u\|_{H^1}^2; \end{aligned}$$

(ii) $\|\operatorname{curl} h\|_{L^2}^2 \le \frac{1}{\nu_1}\|h\|_{H(\operatorname{curl})}^2$;

(iii)

$$\begin{aligned} \|\operatorname{curl} h\times H\|_{L^2}^2 &= \int_{\mathbb{R}^3}\left[\left(\frac{\partial h^1}{\partial x_3} - \frac{\partial h^3}{\partial x_1}\right)^2 + \left(-\frac{\partial h^3}{\partial x_2} + \frac{\partial h^2}{\partial x_3}\right)^2\right] dx \\ &\le \|\operatorname{curl} h\|_{L^2}^2 \\ &\le \frac{1}{\nu_1}\|h\|_{H(\operatorname{curl})}^2; \end{aligned}$$

(iv)

$$
\begin{aligned}
\|\operatorname{curl}(u\times H)\|_{L^2}^2 &= \int_{\mathbb{R}^3}\left[\left(\frac{\partial u^1}{\partial x_3}\right)^2+\left(\frac{\partial u^2}{\partial x_3}\right)^2+\left(-\frac{\partial u^1}{\partial x_1}-\frac{\partial u^2}{\partial x_2}\right)^2\right]dx\\
&\le 2\int_{\mathbb{R}^3}\left[\left(\frac{\partial u^1}{\partial x_3}\right)^2+\left(\frac{\partial u^2}{\partial x_3}\right)^2+\left(\frac{\partial u^1}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u^2}{\partial x_2}\right)^2\right]dx\\
&\le 2\|\nabla u\|_{L^2}^2\le 2\|u\|_{H^1}^2.
\end{aligned}
$$

Assim, (3.25) torna-se

$$
\begin{aligned}
|a((u,h,\theta),(\tilde u,\tilde h,\tilde\theta))| &\le 8\|u\|_{H^1}\|\tilde u\|_{H^1}+2\mu\|u\|_{H^1}\|\tilde u\|_{H^1}+8(\lambda+\mu)\|u\|_{H^1}\|\tilde u\|_{H^1}\\
&+2\gamma\|\theta\|_{H^1}\|\tilde u\|_{H^1}+\frac{2\mu_0}{\sqrt{\nu_1}}\|h\|_{H(\text{curl})}\|\tilde u\|_{H^1}+2\|h\|_{H(\text{curl})}\|\tilde h\|_{H(\text{curl})}\\
&+\|h\|_{H(\text{curl})}\|\tilde h\|_{H(\text{curl})}+2\sqrt{2}\mu_0\|u\|_{H^1}\|\tilde h\|_{H(\text{curl})}+2\|\theta\|_{H^1}\|\tilde\theta\|_{H^1}\\
&+4\gamma\|u\|_{H^1}\|\tilde\theta\|_{H^1}+\kappa\|\theta\|_{H^1}\|\tilde\theta\|_{H^1}\\
&\le\Bigg[(8+2\mu+8(\lambda+\mu)+2\sqrt{2}\mu_0+4\gamma)\|u\|_{H^1}\\
&+\left(\frac{2\mu_0}{\sqrt{\nu_1}}+3\right)\|h\|_{H(\text{curl})}+(2\gamma+2+\kappa)\|\theta\|_{H^1}\Bigg]\|(\tilde u,\tilde h,\tilde\theta)\|_Y\\
&\le C\|(u,h,\theta)\|_Y\|(\tilde u,\tilde h,\tilde\theta)\|_Y,
\end{aligned}
$$

onde $C=8+2\mu+8(\lambda+\mu)+2\sqrt{2}\mu_0+4\gamma+\frac{2\mu_0}{\sqrt{\nu_1}}+3+2\gamma+2+\kappa$, o que mostra que a é contínua.

Agora, dado $(u,h,\theta)\in Y$ temos

$$
\begin{aligned}
a((u,h,\theta),(u,h,\theta)) &= 8\|u\|_{L^2}^2+2\mu\|\nabla u\|_{L^2}^2+2(\lambda+\mu)\|\operatorname{div}u\|_{L^2}^2+2\|h\|_{L^2}^2\\
&+\nu_1\|\operatorname{curl}h\|_{L^2}^2+2\|\theta\|_{L^2}^2+\kappa\|\nabla\theta\|_{L^2}^2-2\mu_0(\operatorname{curl}h\times H,u)\\
&+2\gamma(\nabla\theta,u)-2\mu_0(\operatorname{curl}(u\times H),h)+2\gamma(\operatorname{div}u,\theta)\\
&\ge\|u\|_{L^2}^2+\mu\|\nabla u\|_{L^2}^2+\|h\|_{L^2}^2+\nu_1\|\operatorname{curl}h\|_{L^2}^2+\|\theta\|_{L^2}^2\\
&+\kappa\|\nabla\theta\|_{L^2}^2-2\mu_0(\operatorname{curl}h\times H,u)-2\mu_0(\operatorname{curl}(u\times H),h)\\
&\ge\min\{1,\mu,\kappa\}(\|u\|_{H^1}^2+\|h\|_{H(\text{curl})}^2+\|\theta\|_{H^1}^2)\\
&=\min\{\mu,1,\kappa\}\|(u,h,\theta)\|_Y^2,
\end{aligned}
$$

pois $2\gamma(\nabla\theta,u)+2\gamma(\operatorname{div}u,\theta)=0$ e $-2\mu_0(\operatorname{curl}h\times H,u)-2\mu_0(\operatorname{curl}(u\times H),h)=0$, donde a é coerciva.

Considere o funcional $T:Y\to\mathbb{R}$ dado por

$$
T(\tilde u,\tilde h,\tilde\theta)=\int_{\mathbb{R}^3}\left[2g_1\cdot\tilde u+g_2\cdot\tilde h+g_3\tilde\theta\right]dx,
$$

para qualquer $(\tilde{u}, \tilde{h}, \tilde{\theta}) \in Y$. Primeiramente é fácil ver que T é linear. Vejamos que T é contínuo. Seja $(\tilde{u}, \tilde{h}, \tilde{\theta}) \in Y$, então

$$\begin{aligned} |T(\tilde{u}, \tilde{h}, \tilde{\theta})| &\leq 2|(g_1, \tilde{u})| + |(g_2, \tilde{h})| + |(g_3, \tilde{\theta})| \\ &\leq 2\|g_1\|_{L^2}\|\tilde{u}\|_{L^2} + \|g_2\|_{L^2}\|\tilde{h}\|_{L^2} + \|g_3\|_{L^2}\|\tilde{\theta}\|_{L^2} \\ &\leq \tilde{C}\|(\tilde{u}, \tilde{h}, \tilde{\theta})\|_Y, \end{aligned}$$

onde $\tilde{C} = \max\{2\|g_1\|_{L^2}, \|g_2\|_{L^2}, \|g_3\|_{L^2}\}$. Portanto, T é contínuo.

Dessa forma, segue do Teorema de Lax-Milgram que existe um único $(u, h, \theta) \in Y$ tal que

$$a((u, h, \theta), (\tilde{u}, \tilde{h}, \tilde{\theta})) = T(\tilde{u}, \tilde{h}, \tilde{\theta}),$$

para qualquer $(\tilde{u}, \tilde{h}, \tilde{\theta}) \in Y$, ou seja, $(u, h, \theta) \in [H^1(\mathbb{R}^3)]^3 \times H(\text{curl}) \times H^1(\mathbb{R}^3)$ é a única solução de (3.24), o que prova a Afirmação 1.

Afirmação 2: Seja $(u, h, \theta) \in [H^1(\mathbb{R}^3)]^3 \times H(\text{curl}) \times H^1(\mathbb{R}^3)$ a solução de (3.24). Então $(u, h, \theta) \in [H^2(\mathbb{R}^3)]^3 \times ([H^2(\mathbb{R}^3)]^3 \cap \mathcal{H}_\sigma) \times H^2(\mathbb{R}^3)$ e satisfaz (3.21)-(3.23) q.s. em $\mathbb{R}^3$.

De fato, observe que (3.24) vale em particular para $\tilde{u} = \phi \in [\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)]^3 \subset [H^1(\mathbb{R}^3)]^3$ e $\tilde{h} = \tilde{\theta} = 0$. Assim,

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left[8u\cdot\phi + 2\mu\nabla u\cdot\nabla\phi + 2(\lambda+\mu)\operatorname{div} u \operatorname{div}\phi - 2\mu_0(\operatorname{curl} h \times H)\cdot\phi + 2\gamma\nabla\theta\cdot\phi\right]dx = \int_{\mathbb{R}^3} 2g_1\cdot\phi dx,$$

para qualquer $\phi \in [\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)]^3$. Ou seja,

$$\begin{aligned} &4\langle u, \phi\rangle_{\mathcal{D}'\times\mathcal{D}} + \mu\langle\nabla u, \nabla\phi\rangle_{\mathcal{D}'\times\mathcal{D}} + (\lambda+\mu)\langle\operatorname{div} u, \operatorname{div}\phi\rangle_{\mathcal{D}'\times\mathcal{D}} - \mu_0\langle\operatorname{curl} h \times H, \phi\rangle_{\mathcal{D}'\times\mathcal{D}} \\ &+ \gamma\langle\nabla\theta, \phi\rangle_{\mathcal{D}'\times\mathcal{D}} = \langle g_1, \phi\rangle_{\mathcal{D}'\times\mathcal{D}} \end{aligned}$$

para qualquer $\phi \in [\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)]^3$.

Usando a propriedade de derivada de distribuições obtemos

$$\begin{aligned} &4\langle u, \phi\rangle_{\mathcal{D}'\times\mathcal{D}} - \mu\langle\Delta u, \phi\rangle_{\mathcal{D}'\times\mathcal{D}} - (\lambda+\mu)\langle\nabla\operatorname{div} u, \phi\rangle_{\mathcal{D}'\times\mathcal{D}} - \mu_0\langle\operatorname{curl} h \times H, \phi\rangle_{\mathcal{D}'\times\mathcal{D}} \\ &+ \gamma\langle\nabla\theta, \phi\rangle_{\mathcal{D}'\times\mathcal{D}} = \langle g_1, \phi\rangle_{\mathcal{D}'\times\mathcal{D}} \end{aligned}$$

para qualquer $\phi \in [\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)]^3$, donde

$$4u - \mu\Delta u - (\lambda+\mu)\nabla\operatorname{div} u = g_1 + \mu_0\operatorname{curl} h \times H - \gamma\nabla\theta \in [L^2(\mathbb{R}^3)]^3. \tag{3.26}$$

Por regularidade elíptica $u \in [H^2(\mathbb{R}^3)]^3$ e, portanto, satisfaz (3.21) q.s. em $\mathbb{R}^3$.

Agora, (3.24) vale em particular para $\tilde{u} = \tilde{\theta} = 0$ e $\tilde{h} = \xi \in [\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)]^3 \subset H(\text{curl})$, assim,

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left[2h\cdot\xi - 2\mu_0\operatorname{curl}(u \times H)\cdot\xi + \nu_1\operatorname{curl} h\cdot\operatorname{curl}\xi\right]dx = \int_{\mathbb{R}^3} g_2\cdot\xi dx,$$

para qualquer $\xi \in [\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)]^3$. Dessa forma

$$2h - 2\mu_0 \operatorname{curl}(u \times H) + \nu_1 \operatorname{curl}\operatorname{curl} h = g_2 \quad \text{em} \quad [\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)]^3,$$

o que implica

$$\operatorname{div} h = 0 \quad \text{em} \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3), \tag{3.27}$$

pois $\operatorname{div}\operatorname{curl}(u \times H) = \operatorname{div}\operatorname{curl}\operatorname{curl} h = 0$ e, como $g_2 \in \mathcal{H}_\sigma$, $\operatorname{div} g_2 = 0$.

Lembrando que $\operatorname{curl}\operatorname{curl} h = \nabla \operatorname{div} h - \Delta h$ e como vale (3.27) temos $\operatorname{curl}\operatorname{curl} h = -\Delta h$. Logo,

$$2h - 2\mu_0 \operatorname{curl}(u \times H) - \nu_1 \Delta h = g_2 \quad \text{em} \quad [\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)]^3,$$

donde

$$2h - \nu_1 \Delta h = g_2 + 2\mu_0 \operatorname{curl}(u \times H) \in [L^2(\mathbb{R}^3)]^3. \tag{3.28}$$

Por regularidade elíptica $h \in [H^2(\mathbb{R}^3)]^3$ e, portanto, satisfaz (3.22) q.s. em $\mathbb{R}^3$. Como também vale (3.27), obtemos $h \in [H^2(\mathbb{R}^3)]^3 \cap \mathcal{H}_\sigma$.

Por fim, (3.24) vale em particular para $\tilde{\theta} = \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3) \subset [H^1(\mathbb{R}^3)]^3$ e $\tilde{u} = \tilde{h} = 0$, isto é,

$$\int_{\mathbb{R}^3} \Big[2\theta\psi + 2\gamma(\operatorname{div} u)\psi + \kappa \nabla\theta \cdot \nabla\psi \Big] dx = \int_{\mathbb{R}^3} g_3 \psi dx,$$

para qualquer $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$. Assim,

$$2\theta - \kappa \Delta \theta = g_3 - 2\gamma \operatorname{div} u \in L^2(\mathbb{R}^3). \tag{3.29}$$

Por regularidade elíptica $\theta \in H^2(\mathbb{R}^3)$ e satisfaz (3.23) q.s. em $\mathbb{R}^3$. Assim, provamos que $(u, h, \theta) \in [H^2(\mathbb{R}^3)]^3 \times ([H^2(\mathbb{R}^3)]^3 \cap \mathcal{H}_\sigma) \times H^2(\mathbb{R}^3)$ e satisfaz o sistema (3.21)-(3.23) em $[L^2(\mathbb{R}^3)]^3$, o que conclui a prova da Afirmação 2.

Logo $v = 2u - f_1 \in H^1(\mathbb{R}^3)$ e, dessa forma, encontramos $(u, v, h, \theta) \in D(B)$ satisfazendo $[I - (-I + B)]U = F$, como desejado.

Assim, provamos que $(-I + B)$ é gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações. Portanto, $B = (-I + B) + I$ é gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo $S(t)$ e:

(i) se $U_0 \in D(B)$, o problema (3.7) tem única solução forte

$$U(t) = S(t)U_0 \in C([0, \infty), D(B)) \cap C^1([0, \infty), X).$$

Consequentemente, se

$$(u_0, u_1, h_0, \theta_0) \in [H^2(\mathbb{R}^3)]^3 \times [H^1(\mathbb{R}^3)]^3 \times (\mathcal{H}_\sigma \cap [H^2(\mathbb{R}^3)]^3) \times H^2(\mathbb{R}^3),$$

o sistema (3.1)-(3.6) possui única solução forte na classe

$$\begin{aligned} u \in C(\mathbb{R}^+; [H^2(\mathbb{R}^3)]^3) \cap C^1(\mathbb{R}^+; [H^1(\mathbb{R}^3)]^3) \cap C^2(\mathbb{R}^+; [L^2(\mathbb{R}^3)]^3), \\ h \in C(\mathbb{R}^+; [H^2(\mathbb{R}^3)]^3 \cap \mathcal{H}_\sigma) \cap C^1(\mathbb{R}^+; \mathcal{H}_\sigma), \\ \theta \in C(\mathbb{R}^+; H^2(\mathbb{R}^3)) \cap C^1(\mathbb{R}^+; L^2(\mathbb{R}^3)). \end{aligned}$$

(ii) se $U_0 \in X$, o problema (3.7) tem única solução fraca $U(t) = S(t)U_0 \in C([0,\infty), X)$. Consequentemente, se

$$(u_0, u_1, h_0, \theta_0) \in [H^1(\mathbb{R}^3)]^3 \times [L^2(\mathbb{R}^3)]^3 \times \mathcal{H}_\sigma \times L^2(\mathbb{R}^3),$$

o sistema (3.1)-(3.6) possui única solução fraca na classe

$$(u, h, \theta) \in \{C(\mathbb{R}^+; [H^1(\mathbb{R}^3)]^3) \cap C^1(\mathbb{R}^+; [L^2(\mathbb{R}^3)]^3)\} \times C(\mathbb{R}^+; \mathcal{H}_\sigma) \times C(\mathbb{R}^+; L^2(\mathbb{R}^3)).$$

$\square$

4 ESTIMATIVAS E TAXAS DE DECAIMENTO PARA O PROBLEMA LINEAR

Neste capítulo, estudaremos o comportamento assintótico para a energia total $\mathcal{E}(t)$ associada a solução do sistema linear (3.1)-(3.6), a qual é definida por

$$\mathcal{E}(t) := \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}\left(|u_t(t)|^2 + \mu\sum_{j=1}^{3}|\nabla u^j(t)|^2 + (\lambda+\mu)|\operatorname{div} u(t)|^2 + |h(t)|^2 + |\theta(t)|^2\right)dx, \tag{4.1}$$

em que $|u_t|^2 = \sum_{k=1}^3 |u_t^k|^2$ e $|h|^2 = \sum_{k=1}^3 |h^k|^2$.

Formalmente, tomamos o produto interno em $\mathbb{R}^3$ de (3.1) por u_t, o produto interno em $\mathbb{R}^3$ de (3.2) por h e multiplicamos (3.3) por θ. Integrando em $\mathbb{R}^3$ cada equação, usando integração por partes e somando as equações resultantes obtemos a seguinte identidade

$$\mathcal{E}(t) + \nu_1\int_0^t \|\operatorname{curl} h(s)\|_{L^2}^2 ds + \kappa\int_0^t \|\nabla\theta(t)\|_{L^2}^2 ds = \mathcal{E}(0),$$

para todo $t \geq 0$. Dessa forma, $t \mapsto \mathcal{E}(t)$ é monótona não crescente.

Para obter taxas de decaimento para a energia total $\mathcal{E}(t)$, trabalharemos com o sistema (3.1)-(3.6) no espaço de Fourier. Assim, aplicando para cada $t > 0$ fixado a transformada de Fourier com relação a x, obtemos

$$\hat{u}_{tt} + \mu|\xi|^2\hat{u} + (\lambda+\mu)(\xi\cdot\hat{u})\xi + i\gamma\xi\hat{\theta} = i\mu_0\xi_3\hat{h} - i\mu_0\hat{h^3}\xi, \quad \xi\in\mathbb{R}^3,\ t>0, \tag{4.2}$$

$$\hat{h}_t + \nu_1|\xi|^2\hat{h} = i\mu_0\xi_3\hat{u}_t - i\mu_0(\xi\cdot\hat{u}_t)e_3, \quad \xi\in\mathbb{R}^3,\ t>0, \tag{4.3}$$

$$\hat{\theta}_t + \kappa|\xi|^2\hat{\theta} + i\gamma(\xi\cdot\hat{u}_t) = 0, \quad \xi\in\mathbb{R}^3,\ t>0, \tag{4.4}$$

$$i\xi\cdot\hat{h} = 0, \quad \xi\in\mathbb{R}^3,\ t>0. \tag{4.5}$$

Os dados iniciais no espaço de Fourier são dados por

$$\hat{u}(0,\xi) = \hat{u}_0(\xi), \quad \hat{u}_t(0,\xi) = \hat{u}_1(\xi) \tag{4.6}$$

$$\hat{h}(0,\xi) = \hat{h}_0(\xi), \quad \hat{\theta}(0,\xi) = \hat{\theta}_0(\xi) \tag{4.7}$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^3$.

Tomemos o produto interno de (4.2) por $\overline{\hat{u}_t}$, de (4.3) por $\overline{\hat{h}}$ e multipliquemos (4.4) por $\overline{\hat{\theta}}$. Então, tomando a parte real e somando as equações resultantes, obtemos a seguinte identidade

$$\frac{d}{dt}(\mathcal{E}(t,\xi)) + \nu_1|\xi|^2|\hat{h}|^2 + \kappa|\xi|^2|\hat{\theta}|^2 = 0, \quad \xi\in\mathbb{R}^3 \text{ e } t>0, \tag{4.8}$$

em que

$$\mathcal{E}(t,\xi) = \frac{1}{2}\left\{|\hat{u}_t|^2 + \mu|\xi|^2|\hat{u}|^2 + (\lambda+\mu)|(\xi\cdot\hat{u})|^2 + |\hat{h}|^2 + |\hat{\theta}|^2\right\}. \tag{4.9}$$

Definimos a energia total do sistema, no espaço de Fourier, por

$$E(t) := \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}(|\hat{u}_t(t)|^2 + \mu|\xi|^2|\hat{u}(t)|^2 + (\lambda+\mu)|(\xi\cdot\hat{u}(t))|^2 + |\hat{h}(t)|^2 + |\hat{\theta}(t)|^2)d\xi, \tag{4.10}$$

para todo $t \geq 0$.

Ao longo deste capítulo A denotará um cubo de aresta 2, isto é, definimos $A = \{\xi \in \mathbb{R}^3; |\xi_1| \leq 1, |\xi_2| \leq 1 \text{ e } |\xi_3| \leq 1\}$.

4.1 TAXAS DE DECAIMENTO PARA A ENERGIA TOTAL: TEOREMA 9

Nesta seção, vamos provar o seguinte resultado para a energia total, $\mathcal{E}(t)$, associada à solução do sistema (3.1)-(3.6).

Teorema 9. *Sejam $1 \leq q < 2$ e $\beta > \frac{2q}{2-q}$. Considere $(u_0, u_1, h_0, \theta_0) \in ([H^1(\mathbb{R}^3)]^3 \cap [L^q(\mathbb{R}^3)]^3) \times ([L^2(\mathbb{R}^3)]^3 \cap [L^q(\mathbb{R}^3)]^3) \times (\mathcal{H}_\sigma \cap [L^q(\mathbb{R}^3)]^3) \times (L^2(\mathbb{R}^3) \cap L^q(\mathbb{R}^3))$ satisfazendo*

$$K_{0,\beta} := \int_{\xi \in A^c} |\xi|^{\frac{2}{\beta}} |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}} \left(|\hat{u}_1|^2 + |\xi|^2 |\hat{u}_0|^2 + |\hat{h}_0|^2 + |\hat{\theta}_0|^2 \right) d\xi < +\infty. \tag{4.11}$$

Então, existe uma constante $C(\beta, q) > 0$, dependendo de β e q, tal que a energia total associada à única solução fraca $(u(t,x), h(t,x), \theta(t,x))$ do sistema (3.1)-(3.6) satisfaz

$$\mathcal{E}(t) \leq C(\beta, q) I_{0,\beta} t^{-\frac{1}{\beta}}, \quad \forall t \geq T_0,$$

em que $T_0 > 0$ é uma constante dependendo dos dados iniciais e

$$I_{0,\beta} = \left(N_{0,q}^\beta + K_{0,\beta}^\beta + M_0^\beta \right)^{\frac{1}{\beta}},$$

sendo

$$N_{0,q} = \|u_1\|_{L^q}^2 + \|u_0\|_{L^q}^2 + \|h_0\|_{L^q}^2 + \|\theta_0\|_{L^q}^2 \tag{4.12}$$

e

$$M_0 = \|u_1\|_{L^2}^2 + \|\nabla u_0\|_{L^2}^2 + \|h_0\|_{L^2}^2 + \|\theta_0\|_{L^2}^2. \tag{4.13}$$

Para a demonstração do Teorema 9, necessitamos de uma sequência de lemas técnicos que apresentaremos a seguir. Comecemos considerando $\xi_3 \neq 0$ e definindo $\rho : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ por

$$\rho(\xi) = \begin{cases} \xi_3^2, & \xi \in A, \\ \frac{\xi_3^2}{|\xi|^2}, & \xi \in A^c. \end{cases} \tag{4.14}$$

Lema 2. *Seja ρ dada por (4.14). Para todo $\epsilon > 0$ existe uma constante $C_1 = C_1(\epsilon) > 0$, tal que*

$$\int_S^T \rho(\xi) |\hat{u}_t(t)|^2 dt \leq C_1 \mathcal{E}(S, \xi) + 6\epsilon \int_S^T \rho(\xi) |\xi|^2 |\hat{u}(t)|^2 dt \tag{4.15}$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^3$ e $0 \leq S < T$, onde $\mathcal{E}(t, \xi)$ é dada por (4.9).

Demonstração. Para provar que vale a estimativa (4.15), a ideia é estimar $\int_S^T \rho(\xi)|\hat{u}_t^i(t)|^2dt$ para cada $i \in \{1,2,3\}$. Dessa forma, vamos escrever as equações (4.2) e (4.3) em termo de suas componentes. Assim,

$$\hat{u}_{tt}^1 + \mu|\xi|^2\hat{u}^1 + (\lambda+\mu)\xi_1^2\hat{u}^1 + (\lambda+\mu)\xi_2\xi_1\hat{u}^2 + (\lambda+\mu)\xi_3\xi_1\hat{u}^3 + i\gamma\xi_1\hat{\theta} - i\mu_0\xi_3\hat{h}^1 + i\mu_0\xi_1\hat{h}^3 = 0 \tag{4.16}$$

$$\hat{u}_{tt}^2 + \mu|\xi|^2\hat{u}^2 + (\lambda+\mu)\xi_2\xi_1\hat{u}^1 + (\lambda+\mu)\xi_2^2\hat{u}^2 + (\lambda+\mu)\xi_2\xi_3\hat{u}^3 + i\gamma\xi_2\hat{\theta} - i\mu_0\xi_3\hat{h}^2 + i\mu_0\xi_2\hat{h}^3 = 0 \tag{4.17}$$

$$\hat{u}_{tt}^3 + \mu|\xi|^2\hat{u}^3 + (\lambda+\mu)\xi_3\xi_1\hat{u}^1 + (\lambda+\mu)\xi_3\xi_2\hat{u}^2 + (\lambda+\mu)\xi_3^2\hat{u}^3 + i\gamma\xi_3\hat{\theta} = 0 \tag{4.18}$$

$$\hat{h}_t^1 + \nu_1|\xi|^2\hat{h}^1 - i\mu_0\xi_3\hat{u}_t^1 = 0 \tag{4.19}$$

$$\hat{h}_t^2 + \nu_1|\xi|^2\hat{h}^2 - i\mu_0\xi_3\hat{u}_t^2 = 0 \tag{4.20}$$

$$\hat{h}_t^3 + \nu_1|\xi|^2\hat{h}^3 + i\mu_0\xi_1\hat{u}_t^1 + i\mu_0\xi_2\hat{u}_t^2 = 0 \tag{4.21}$$

$$\hat{\theta}_t + \kappa|\xi|^2\hat{\theta} + i\gamma\xi_1\hat{u}_t^1 + i\gamma\xi_2\hat{u}_t^2 + i\gamma\xi_3\hat{u}_t^3 = 0, \tag{4.22}$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^3$ e $t > 0$.

Comecemos multiplicando (4.19) por $-\frac{i}{\mu_0}\frac{\rho(\xi)}{\xi_3}\overline{\hat{u}_t^1}$, para $\xi_3 \neq 0$. Temos

$$\begin{aligned}\rho(\xi)|\hat{u}_t^1|^2 &= -\frac{i}{\mu_0}\frac{\rho(\xi)}{\xi_3}\hat{h}_t^1\overline{\hat{u}_t^1} - \frac{i\nu_1}{\mu_0}\frac{\rho(\xi)|\xi|^2}{\xi_3}\hat{h}^1\overline{\hat{u}_t^1}\\ &= -\frac{d}{dt}\left(\frac{i}{\mu_0}\frac{\rho(\xi)}{\xi_3}\hat{h}^1\overline{\hat{u}_t^1}\right) + \frac{i}{\mu_0}\frac{\rho(\xi)}{\xi_3}\hat{h}^1\overline{\hat{u}_{tt}^1} - \frac{i\nu_1}{\mu_0}\frac{\rho(\xi)|\xi|^2}{\xi_3}\hat{h}^1\overline{\hat{u}_t^1}.\end{aligned}$$

Tomando a parte real e integrando em $[S,T]$, obtemos

$$\begin{aligned}\int_S^T \rho(\xi)|\hat{u}_t^1(t)|^2dt = &-Re\left(\frac{i}{\mu_0}\frac{\rho(\xi)}{\xi_3}\hat{h}^1(T)\overline{\hat{u}_t^1}(T)\right) + Re\left(\frac{i}{\mu_0}\frac{\rho(\xi)}{\xi_3}\hat{h}^1(S)\overline{\hat{u}_t^1}(S)\right)\\ &+ \int_S^T Re\left(\frac{i}{\mu_0}\frac{\rho(\xi)}{\xi_3}\hat{h}^1(t)\overline{\hat{u}_{tt}^1}(t)\right)dt - \int_S^T Re\left(\frac{i\nu_1}{\mu_0}\frac{\rho(\xi)|\xi|^2}{\xi_3}\hat{h}^1(t)\overline{\hat{u}_t^1}(t)\right)dt.\end{aligned}$$

Usando que $|Re(z)| \leq |z|$ e a desigualdade de Schwarz

$$\begin{aligned}\int_S^T \rho(\xi)|\hat{u}_t^1(t)|^2dt \leq &\frac{\rho(\xi)}{\mu_0|\xi_3|}(|\hat{h}^1(T)||\hat{u}_t^1(T)| + |\hat{h}^1(S)||\hat{u}_t^1(S)|)\\ &+ \int_S^T \frac{\rho(\xi)}{\mu_0|\xi_3|}|\hat{h}^1(t)||\hat{u}_{tt}^1(t)|dt + \int_S^T \frac{\nu_1}{\mu_0}\frac{\rho(\xi)|\xi|^2}{|\xi_3|}|\hat{h}^1(t)||\hat{u}_t^1(t)|dt.\end{aligned} \tag{4.23}$$

Pela desigualdade de Young temos

$$\frac{\nu_1}{\mu_0}\frac{\rho(\xi)|\xi|^2}{|\xi_3|}|\hat{h}^1||\hat{u}_t^1| \leq \frac{1}{2}\rho(\xi)|\hat{u}_t^1|^2 + \frac{\nu_1^2}{2\mu_0^2}\frac{\rho(\xi)|\xi|^4}{\xi_3^2}|\hat{h}|^2, \tag{4.24}$$

e por (4.16) temos

$$\begin{aligned}
\frac{\rho(\xi)}{\mu_0|\xi_3|}|\hat{h}^1||\hat{u}^1_{tt}| \leq{}& \frac{\rho(\xi)}{\mu_0|\xi_3|}|\hat{h}^1|\mu|\xi|^2|\hat{u}^1| + \frac{\rho(\xi)}{\mu_0|\xi_3|}|\hat{h}^1|(\lambda+\mu)\xi_1^2|\hat{u}^1| \\
&+ \frac{\rho(\xi)}{\mu_0|\xi_3|}|\hat{h}^1|(\lambda+\mu)|\xi_2||\xi_1||\hat{u}^2| + \frac{\rho(\xi)}{\mu_0|\xi_3|}|\hat{h}^1|(\lambda+\mu)|\xi_3||\xi_1||\hat{u}^3| \\
&+ \frac{\rho(\xi)}{\mu_0|\xi_3|}|\hat{h}^1|\gamma|\xi_1||\hat{\theta}| + \frac{\rho(\xi)}{\mu_0|\xi_3|}|\hat{h}^1|\mu_0|\xi_3||\hat{h}^1| + \frac{\rho(\xi)}{\mu_0|\xi_3|}|\hat{h}^1|\mu_0|\xi_1||\hat{h}^3| \\
\leq{}& \frac{(3\lambda+4\mu)}{\mu_0}\frac{\rho(\xi)|\xi|^2}{|\xi_3|}|\hat{u}||\hat{h}| + \frac{\gamma}{\mu_0}\frac{\rho(\xi)|\xi|}{|\xi_3|}|\hat{h}||\hat{\theta}| + 2\frac{\rho(\xi)|\xi|}{|\xi_3|}|\hat{h}|^2. \qquad (4.25)
\end{aligned}$$

Logo, (4.24) e (4.25) em (4.23) nos dá

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_S^T \rho(\xi)|\hat{u}^1_t(t)|^2dt \leq{}& \frac{\rho(\xi)}{\mu_0|\xi_3|}\left(\frac{|\hat{h}(T)|^2}{2} + \frac{|\hat{u}_t(T)|^2}{2} + \frac{|\hat{h}(S)|^2}{2} + \frac{|\hat{u}_t(S)|^2}{2}\right) \\
&+ \frac{(3\lambda+4\mu)}{\mu_0}\int_S^T \frac{\rho(\xi)|\xi|^2}{|\xi_3|}|\hat{u}(t)||\hat{h}(t)|dt + \frac{\gamma}{\mu_0}\int_S^T \frac{\rho(\xi)|\xi|}{|\xi_3|}|\hat{h}(t)||\hat{\theta}(t)|dt \\
&+ 2\int_S^T \frac{\rho(\xi)|\xi|}{|\xi_3|}|\hat{h}(t)|^2dt + \frac{\nu_1^2}{2\mu_0^2}\int_S^T \frac{\rho(\xi)|\xi|^4}{\xi_3^2}|\hat{h}(t)|^2dt, \qquad (4.26)
\end{aligned}$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^3$ com $\xi_3 \neq 0$.

Multiplicando (4.20) por $-\frac{i}{\mu_0}\frac{\rho(\xi)}{\xi_3}\overline{\hat{u}^2_t}$, obtemos de maneira análoga a (4.26)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_S^T \rho(\xi)|\hat{u}^2_t(t)|^2dt \leq{}& \frac{\rho(\xi)}{\mu_0|\xi_3|}\left(\frac{|\hat{h}(T)|^2}{2} + \frac{|\hat{u}_t(T)|^2}{2} + \frac{|\hat{h}(S)|^2}{2} + \frac{|\hat{u}_t(S)|^2}{2}\right) \\
&+ \frac{(3\lambda+4\mu)}{\mu_0}\int_S^T \frac{\rho(\xi)|\xi|^2}{|\xi_3|}|\hat{u}(t)||\hat{h}(t)|dt + \frac{\gamma}{\mu_0}\int_S^T \frac{\rho(\xi)|\xi|}{|\xi_3|}|\hat{h}(t)||\hat{\theta}(t)|dt \\
&+ 2\int_S^T \frac{\rho(\xi)|\xi|}{|\xi_3|}|\hat{h}(t)|^2dt + \frac{\nu_1^2}{2\mu_0^2}\int_S^T \frac{\rho(\xi)|\xi|^4}{\xi_3^2}|\hat{h}(t)|^2dt, \qquad (4.27)
\end{aligned}$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^3$ com $\xi_3 \neq 0$. Somando (4.26) e (4.27), temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_S^T \rho(\xi)(|\hat{u}^1_t(t)|^2 + |\hat{u}^2_t(t)|^2)dt \leq{}& \frac{2\rho(\xi)}{\mu_0|\xi_3|}\left(\frac{|\hat{h}(T)|^2}{2} + \frac{|\hat{u}_t(T)|^2}{2} + \frac{|\hat{h}(S)|^2}{2} + \frac{|\hat{u}_t(S)|^2}{2}\right) \\
&+ \frac{2(3\lambda+4\mu)}{\mu_0}\int_S^T \frac{\rho(\xi)|\xi|^2}{|\xi_3|}|\hat{u}(t)||\hat{h}(t)|dt \\
&+ \frac{2\gamma}{\mu_0}\int_S^T \frac{\rho(\xi)|\xi|}{|\xi_3|}|\hat{h}(t)||\hat{\theta}(t)|dt + 4\int_S^T \frac{\rho(\xi)|\xi|}{|\xi_3|}|\hat{h}(t)|^2dt \\
&+ \frac{\nu_1^2}{\mu_0^2}\int_S^T \frac{\rho(\xi)|\xi|^4}{\xi_3^2}|\hat{h}(t)|^2dt, \qquad (4.28)
\end{aligned}$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^3$ com $\xi_3 \neq 0$.

Observe que, dado $\epsilon > 0$ temos

$$\begin{aligned}\frac{2(3\lambda+4\mu)}{\mu_0}\int_S^T \frac{\rho(\xi)|\xi|^2}{|\xi_3|}|\hat{u}(t)||\hat{h}(t)|dt &\leq \epsilon \int_S^T \rho(\xi)|\xi|^2|\hat{u}(t)|^2 dt \\ &+ \frac{(3\lambda+4\mu)^2}{\epsilon\mu_0^2}\int_S^T \frac{\rho(\xi)|\xi|^2}{\xi_3^2}|\hat{h}(t)|^2 dt.\end{aligned}$$

Também,

$$\frac{2\gamma}{\mu_0}\int_S^T \frac{\rho(\xi)|\xi|}{|\xi_3|}|\hat{h}(t)||\hat{\theta}(t)|dt \leq \frac{\gamma}{\mu_0}\int_S^T \frac{\rho(\xi)|\xi|^2}{\xi_3^2}|\hat{h}(t)|^2 dt + \frac{\gamma}{\mu_0}\int_S^T \rho(\xi)|\hat{\theta}(t)|^2 dt.$$

Então (4.28) torna-se

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_S^T \rho(\xi)(|\hat{u}_t^1(t)|^2+|\hat{u}_t^2(t)|^2)dt &\leq \frac{2\rho(\xi)}{\mu_0|\xi_3|}\left(\frac{|\hat{h}(T)|^2}{2}+\frac{|\hat{u}_t(T)|^2}{2}+\frac{|\hat{h}(S)|^2}{2}+\frac{|\hat{u}_t(S)|^2}{2}\right) \\ &+ \left(\frac{(3\lambda+4\mu)^2}{\epsilon\mu_0^2}+\frac{\gamma}{\mu_0}\right)\int_S^T \frac{\rho(\xi)|\xi|^2}{\xi_3^2}|\hat{h}(t)|^2 dt \\ &+ \frac{\gamma}{\mu_0}\int_S^T \rho(\xi)|\hat{\theta}(t)|^2 dt + 4\int_S^T \frac{\rho(\xi)|\xi|}{|\xi_3|}|\hat{h}(t)|^2 dt \\ &+ \frac{\nu_1^2}{\mu_0^2}\int_S^T \frac{\rho(\xi)|\xi|^4}{\xi_3^2}|\hat{h}(t)|^2 dt + \epsilon\int_S^T \rho(\xi)|\xi|^2|\hat{u}(t)|^2 dt,\end{aligned} \tag{4.29}$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^3$, com $\xi_3 \neq 0$, e para todo $\epsilon > 0$.

Note que

- para $\xi \in A$, temos $\rho(\xi) = \xi_3^2 \leq |\xi_3|$, pois $|\xi_3| \leq 1$;
- para $\xi \in A^c$, temos $\rho(\xi) = \frac{\xi_3^2}{|\xi|^2} \leq |\xi_3|$ e $\rho(\xi) = \frac{\xi_3^2}{|\xi|^2} \leq \xi_3^2$, pois $|\xi| \geq 1$.

Ou seja, $\rho(\xi) \leq |\xi_3|$ e $\rho(\xi) \leq \xi_3^2$ para todo $\xi \in \mathbb{R}^3$. Também,

- para $\xi \in A$, temos $\frac{\rho(\xi)|\xi|^4}{\xi_3^2} = |\xi|^4 \leq 3|\xi|^2$, pois $|\xi|^2 \leq 3$, e $\frac{\rho(\xi)|\xi|}{|\xi_3|} = |\xi_3||\xi| \leq |\xi|^2$;
- para $\xi \in A^c$, temos $\frac{\rho(\xi)|\xi|^4}{\xi_3^2} = |\xi|^2 \leq 3|\xi|^2$ e $\frac{\rho(\xi)|\xi|}{|\xi_3|} = \frac{|\xi_3|}{|\xi|} \leq |\xi_3| \leq |\xi| \leq |\xi|^2$, pois $|\xi| \geq 1$.

Isto é, $\frac{\rho(\xi)|\xi|^4}{\xi_3^2} \leq 3|\xi|^2$ e $\frac{\rho(\xi)|\xi|}{|\xi_3|} \leq |\xi|^2$ para todo $\xi \in \mathbb{R}^3$.

Dessa forma, (4.29) torna-se

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_S^T \rho(\xi)(|\hat{u}_t^1(t)|^2 + |\hat{u}_t^2(t)|^2)dt \leq{}& \frac{2}{\mu_0}\left(\frac{|\hat{h}(T)|^2}{2} + \frac{|\hat{u}_t(T)|^2}{2} + \frac{|\hat{h}(S)|^2}{2} + \frac{|\hat{u}_t(S)|^2}{2}\right)\\ &+ \left(\frac{(3\lambda+4\mu)^2}{\epsilon\mu_0^2} + \frac{\gamma}{\mu_0}\right)\int_S^T |\xi|^2|\hat{h}(t)|^2 dt\\ &+ \frac{\gamma}{\mu_0}\int_S^T |\xi|^2|\hat{\theta}(t)|^2 dt + 4\int_S^T |\xi|^2|\hat{h}(t)|^2 dt\\ &+ \frac{3\nu_1^2}{\mu_0^2}\int_S^T |\xi|^2|\hat{h}(t)|^2 dt + \epsilon\int_S^T \rho(\xi)|\xi|^2|\hat{u}(t)|^2 dt\end{aligned}$$

e novamente por (4.8), obtemos

$$\frac{1}{2}\int_S^T \rho(\xi)(|\hat{u}_t^1(t)|^2 + |\hat{u}_t^2(t)|^2)dt \leq C_2\mathcal{E}(S,\xi) + \epsilon\int_S^T \rho(\xi)|\xi|^2|\hat{u}(t)|^2 dt \tag{4.30}$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^3$, com $\xi_3 \neq 0$, e para todo $\epsilon > 0$, onde

$$C_2 = \frac{4}{\mu_0} + \frac{(3\lambda+4\mu)^2}{\epsilon\mu_0^2\nu_1} + \frac{\gamma}{\mu_0\nu_1} + \frac{\gamma}{\mu_0\kappa} + \frac{4}{\nu_1} + \frac{3\nu_1}{\mu_0^2}.$$

Agora, vamos estimar a integral de $\rho(\xi)|\hat{u}_t^3|^2$. Voltando em (4.22) temos

$$i\gamma\xi_3\hat{u}_t^3 = -\hat{\theta}_t - \kappa|\xi|^2\hat{\theta} - i\gamma\xi_1\hat{u}_t^1 - i\gamma\xi_2\hat{u}_t^2,$$

ou seja,

$$\xi_3\hat{u}_t^3 = \frac{i}{\gamma}\hat{\theta}_t + \frac{i\kappa}{\gamma}|\xi|^2\hat{\theta} - \xi_1\hat{u}_t^1 - \xi_2\hat{u}_t^2 \tag{4.31}$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^3$ e $t > 0$. Mas por (4.21) temos

$$-\xi_1\hat{u}_t^1 - \xi_2\hat{u}_t^2 = -\frac{i}{\mu_0}\hat{h}_t^3 - \frac{i\nu_1}{\mu_0}|\xi|^2\hat{h}^3. \tag{4.32}$$

Usando (4.32) em (4.31), segue

$$\xi_3\hat{u}_t^3 = \frac{i}{\gamma}\hat{\theta}_t + \frac{i\kappa}{\gamma}|\xi|^2\hat{\theta} - \frac{i}{\mu_0}\hat{h}_t^3 - \frac{i\nu_1}{\mu_0}|\xi|^2\hat{h}^3,$$

ou ainda,

$$\hat{u}_t^3 = \frac{i}{\gamma\xi_3}\hat{\theta}_t + \frac{i\kappa}{\gamma}\frac{|\xi|^2}{\xi_3}\hat{\theta} - \frac{i}{\mu_0\xi_3}\hat{h}_t^3 - \frac{i\nu_1}{\mu_0}\frac{|\xi|^2}{\xi_3}\hat{h}^3,$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^3$, com $\xi_3 \neq 0$, e $t > 0$. Agora, multiplicando por $\rho(\xi)\overline{\hat{u}_t^3}$

$$\begin{aligned}\rho(\xi)|\hat{u}_t^3|^2 &= \frac{i}{\gamma}\frac{\rho(\xi)}{\xi_3}\hat{\theta}_t\overline{\hat{u}_t^3} + \frac{i\kappa}{\gamma}\frac{\rho(\xi)|\xi|^2}{\xi_3}\hat{\theta}\overline{\hat{u}_t^3} - \frac{i}{\mu_0}\frac{\rho(\xi)}{\xi_3}\hat{h}_t^3\overline{\hat{u}_t^3} - \frac{i\nu_1}{\mu_0}\frac{\rho(\xi)|\xi|^2}{\xi_3}\hat{h}^3\overline{\hat{u}_t^3}\\ &= \frac{d}{dt}\left(\frac{i}{\gamma}\frac{\rho(\xi)}{\xi_3}\hat{\theta}\overline{\hat{u}_t^3}\right) - \frac{i}{\gamma}\frac{\rho(\xi)}{\xi_3}\hat{\theta}\overline{\hat{u}_{tt}^3} + \frac{i\kappa}{\gamma}\frac{\rho(\xi)|\xi|^2}{\xi_3}\hat{\theta}\overline{\hat{u}_t^3} - \frac{d}{dt}\left(\frac{i}{\mu_0}\frac{\rho(\xi)}{\xi_3}\hat{h}^3\overline{\hat{u}_t^3}\right)\\ &\quad + \frac{i}{\mu_0}\frac{\rho(\xi)}{\xi_3}\hat{h}^3\overline{\hat{u}_{tt}^3} - \frac{i\nu_1}{\mu_0}\frac{\rho(\xi)|\xi|^2}{\xi_3}\hat{h}^3\overline{\hat{u}_t^3}.\end{aligned}$$

Tomando a parte real e integrando em $[S,T]$

$$\begin{aligned}\int_S^T \rho(\xi)|\hat{u}_t^3(t)|^2dt &= Re\left(\frac{i}{\gamma}\frac{\rho(\xi)}{\xi_3}\hat{\theta}(T)\overline{\hat{u}_t^3}(T)\right) - Re\left(\frac{i}{\gamma}\frac{\rho(\xi)}{\xi_3}\hat{\theta}(S)\overline{\hat{u}_t^3}(S)\right)\\ &- Re\left(\frac{i}{\mu_0}\frac{\rho(\xi)}{\xi_3}\hat{h^3}(T)\overline{\hat{u}_t^3}(T)\right) + Re\left(\frac{i}{\mu_0}\frac{\rho(\xi)}{\xi_3}\hat{h^3}(S)\overline{\hat{u}_t^3}(S)\right)\\ &- \int_S^T Re\left(\frac{i}{\gamma}\frac{\rho(\xi)}{\xi_3}\hat{\theta}(t)\overline{\hat{u}_{tt}^3}(t)\right)dt + \int_S^T Re\left(\frac{i\kappa}{\gamma}\frac{\rho(\xi)|\xi|^2}{\xi_3}\hat{\theta}(t)\overline{\hat{u}_t^3}(t)\right)dt\\ &+ \int_S^T Re\left(\frac{i}{\mu_0}\frac{\rho(\xi)}{\xi_3}\hat{h}^3(t)\overline{\hat{u}_{tt}^3}(t)\right)dt - \int_S^T Re\left(\frac{i\nu_1}{\mu_0}\frac{\rho(\xi)|\xi|^2}{\xi_3}\hat{h}^3(t)\overline{\hat{u}_t^3}(t)\right)dt,\end{aligned}$$

o que implica,

$$\begin{aligned}\int_S^T \rho(\xi)|\hat{u}_t^3(t)|^2dt &\le \frac{\rho(\xi)}{\gamma|\xi_3|}\left(|\hat{\theta}(T)||\hat{u}_t^3(T)| + |\hat{\theta}(S)||\hat{u}_t^3(S)|\right) + \int_S^T \frac{\rho(\xi)}{\gamma|\xi_3|}|\hat{\theta}(t)||\hat{u}_{tt}^3(t)|dt\\ &+ \int_S^T \frac{\rho(\xi)}{\mu_0|\xi_3|}|\hat{h}^3(t)||\hat{u}_{tt}^3(t)|dt + \frac{\rho(\xi)}{\mu_0|\xi_3|}\left(|\hat{h}^3(T)||\hat{u}_t^3(T)| + |\hat{h}^3(S)||\hat{u}_t^3(S)|\right)\\ &+ \int_S^T \frac{\kappa}{\gamma}\frac{\rho(\xi)|\xi|^2}{|\xi_3|}|\hat{\theta}(t)||\hat{u}_t^3(t)|dt + \int_S^T \frac{\nu_1}{\mu_0}\frac{\rho(\xi)|\xi|^2}{|\xi_3|}|\hat{h}^3(t)||\hat{u}_t^3(t)|dt,\end{aligned} \tag{4.33}$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^3$ com $\xi_3 \neq 0$.

Vamos, agora, estimar as quatro integrais que aparecem no lado direito de (4.33). Observe que por (4.18) temos

$$|\hat{u}_{tt}^3| \le \mu|\xi|^2|\hat{u}^3| + (\lambda+\mu)|\xi_3||\xi_1||\hat{u}^1| + (\lambda+\mu)|\xi_3||\xi_2||\hat{u}^2| + (\lambda+\mu)\xi_3^2|\hat{u}^3| + \gamma|\xi_3||\hat{\theta}|$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^3$ e $t>0$. Assim,

$$\begin{aligned}\frac{\rho(\xi)}{\gamma|\xi_3|}|\hat{\theta}||\hat{u}_{tt}^3| &\le \frac{\rho(\xi)}{\gamma|\xi_3|}|\hat{\theta}|\mu|\xi|^2|\hat{u}^3| + \frac{\rho(\xi)}{\gamma|\xi_3|}|\hat{\theta}|(\lambda+\mu)|\xi_3||\xi_1||\hat{u}^1| + \frac{\rho(\xi)}{\gamma|\xi_3|}|\hat{\theta}|(\lambda+\mu)|\xi_3||\xi_2||\hat{u}^2|\\ &+ \frac{\rho(\xi)}{\gamma|\xi_3|}|\hat{\theta}|(\lambda+\mu)|\xi_3|^2|\hat{u}^3| + \frac{\rho(\xi)}{\gamma|\xi_3|}|\hat{\theta}|\gamma|\xi_3||\hat{\theta}|\\ &\le \frac{(3\lambda+4\mu)}{\gamma}\frac{\rho(\xi)|\xi|^2}{|\xi_3|}|\hat{\theta}||\hat{u}| + \rho(\xi)|\hat{\theta}|^2,\end{aligned}$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^3$, com $\xi_3 \neq 0$, e $t>0$. Analogamente,

$$\frac{\rho(\xi)}{\mu_0|\xi_3|}|\hat{h^3}||\hat{u}_{tt}^3| \le \frac{(3\lambda+4\mu)}{\mu_0}\frac{\rho(\xi)|\xi|^2}{|\xi_3|}|\hat{h}||\hat{u}| + \frac{\gamma}{\mu_0}\frac{\rho(\xi)|\xi|}{|\xi_3|}|\hat{h}||\hat{\theta}|$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^3$, com $\xi_3 \neq 0$, e $t>0$.

Dessa forma,

$$\begin{aligned}\int_S^T \frac{\rho(\xi)}{\gamma|\xi_3|}|\hat{\theta}(t)||\hat{u}_{tt}^3(t)|dt &\le \frac{(3\lambda+4\mu)}{\gamma}\int_S^T \frac{\rho(\xi)|\xi|^2}{|\xi_3|}|\hat{\theta}(t)||\hat{u}(t)|dt + \int_S^T \rho(\xi)|\hat{\theta}(t)|^2dt\\ &\le \epsilon\int_S^T \rho(\xi)|\xi|^2|\hat{u}(t)|^2dt + \frac{(3\lambda+4\mu)^2}{4\epsilon\gamma^2}\int_S^T \frac{\rho(\xi)|\xi|^2}{\xi_3^2}|\hat{\theta}(t)|^2dt\\ &+ \int_S^T \rho(\xi)|\hat{\theta}(t)|^2dt\end{aligned} \tag{4.34}$$

e

$$
\begin{aligned}
\int_S^T \frac{\rho(\xi)}{\mu_0|\xi_3|}|\hat{h}^3(t)||\hat{u}^3_{tt}(t)|dt &\leq \frac{(3\lambda+4\mu)}{\mu_0}\int_S^T \frac{\rho(\xi)|\xi|^2}{|\xi_3|}|\hat{h}(t)||\hat{u}(t)|dt \\
&+ \frac{\gamma}{\mu_0}\int_S^T \frac{\rho(\xi)|\xi|}{|\xi_3|}|\hat{h}(t)||\hat{\theta}(t)|dt \\
&\leq \epsilon\int_S^T \rho(\xi)|\xi|^2|\hat{u}(t)|^2dt + \frac{(3\lambda+4\mu)^2}{4\epsilon\mu_0^2}\int_S^T \frac{\rho(\xi)|\xi|^2}{\xi_3^2}|\hat{h}(t)|^2dt \\
&+ \frac{\gamma}{2\mu_0}\int_S^T \rho(\xi)|\hat{\theta}(t)|^2dt + \frac{\gamma}{2\mu_0}\int_S^T \frac{\rho(\xi)|\xi|^2}{\xi_3^2}|\hat{h}(t)|^2dt \\
&\leq \epsilon\int_S^T \rho(\xi)|\xi|^2|\hat{u}(t)|^2dt + \frac{\gamma}{2\mu_0}\int_S^T \rho(\xi)|\hat{\theta}(t)|^2dt \\
&+ \left(\frac{(3\lambda+4\mu)^2}{4\epsilon\mu_0^2} + \frac{\gamma}{2\mu_0}\right)\int_S^T \frac{\rho(\xi)|\xi|^2}{\xi_3^2}|\hat{h}(t)|^2dt,
\end{aligned} \tag{4.35}
$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^3$, com $\xi_3 \neq 0$, e para todo $\epsilon > 0$.

As duas últimas integrais, no lado direito de (4.33), podem ser estimadas usando a desigualdade de Young com $\epsilon = \frac{1}{4}$ da seguinte forma

$$
\int_S^T \frac{\kappa}{\gamma}\frac{\rho(\xi)|\xi|^2}{|\xi_3|}|\hat{\theta}(t)||\hat{u}^3_t(t)|dt \leq \frac{1}{4}\int_S^T \rho(\xi)|\hat{u}^3_t(t)|^2dt + \frac{\kappa^2}{\gamma^2}\int_S^T \frac{\rho(\xi)|\xi|^4}{\xi_3^2}|\hat{\theta}(t)|^2dt \tag{4.36}
$$

e

$$
\int_S^T \frac{\nu_1}{\mu_0}\frac{\rho(\xi)|\xi|^2}{|\xi_3|}|\hat{h}^3(t)||\hat{u}^3_t(t)|dt \leq \frac{1}{4}\int_S^T \rho(\xi)|\hat{u}^3_t(t)|^2dt + \frac{\nu_1^2}{\mu_0^2}\int_S^T \frac{\rho(\xi)|\xi|^4}{\xi_3^2}|\hat{h}(t)|^2dt. \tag{4.37}
$$

Portanto, (4.34)-(4.37) em (4.33) nos dá

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_S^T \rho(\xi)|\hat{u}^3_t(t)|^2dt &\leq \frac{\rho(\xi)}{\gamma|\xi_3|}\left(\frac{|\hat{\theta}(T)|^2}{2} + \frac{|\hat{u}_t(T)|^2}{2} + \frac{|\hat{\theta}(S)|^2}{2} + \frac{|\hat{u}_t(S)|^2}{2}\right) \\
&+ \frac{\rho(\xi)}{\mu_0|\xi_3|}\left(\frac{|\hat{h}(T)|^2}{2} + \frac{|\hat{u}_t(T)|^2}{2} + \frac{|\hat{h}(S)|^2}{2} + \frac{|\hat{u}_t(S)|^2}{2}\right) \\
&+ 2\epsilon\int_S^T \rho(\xi)|\xi|^2|\hat{u}(t)|^2dt + \frac{(3\lambda+4\mu)^2}{4\epsilon\gamma^2}\int_S^T \frac{\rho(\xi)|\xi|^2}{\xi_3^2}|\hat{\theta}(t)|^2dt \\
&+ \left(1+\frac{\gamma}{2\mu_0}\right)\int_S^T \rho(\xi)|\hat{\theta}(t)|^2dt + \frac{\kappa^2}{\gamma^2}\int_S^T \frac{\rho(\xi)|\xi|^4}{\xi_3^2}|\hat{\theta}(t)|^2dt \\
&+ \left(\frac{(3\lambda+4\mu)^2}{4\epsilon\mu_0^2} + \frac{\gamma}{2\mu_0}\right)\int_S^T \frac{\rho(\xi)|\xi|^2}{\xi_3^2}|\hat{h}(t)|^2dt \\
&+ \frac{\nu_1^2}{\mu_0^2}\int_S^T \frac{\rho(\xi)|\xi|^4}{\xi_3^2}|\hat{h}(t)|^2dt,
\end{aligned}
$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^3$ com $\xi_3 \neq 0$. Pelo fato de $\rho(\xi) \leq |\xi_3|$, $\rho(\xi) \leq \xi_3^2$, $\rho(\xi) \leq |\xi|^2$ e $\frac{\rho(\xi)|\xi|^4}{\xi_3^2} \leq 3|\xi|^2$, para todo $\xi \in \mathbb{R}^3$, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_S^T \rho(\xi)|\hat{u}_t^3(t)|^2 dt \leq{}& \frac{1}{\gamma}\left(\frac{|\hat{\theta}(T)|^2}{2} + \frac{|\hat{u}_t(T)|^2}{2} + \frac{|\hat{\theta}(S)|^2}{2} + \frac{|\hat{u}_t(S)|^2}{2}\right) \\
&+ \frac{1}{\mu_0}\left(\frac{|\hat{h}(T)|^2}{2} + \frac{|\hat{u}_t(T)|^2}{2} + \frac{|\hat{h}(S)|^2}{2} + \frac{|\hat{u}_t(S)|^2}{2}\right) \\
&+ 2\epsilon\int_S^T \rho(\xi)|\xi|^2|\hat{u}(t)|^2 dt + \frac{(3\lambda+4\mu)^2}{4\epsilon\gamma^2}\int_S^T |\xi|^2|\hat{\theta}(t)|^2 dt \\
&+ \left(1 + \frac{\gamma}{2\mu_0}\right)\int_S^T |\xi|^2|\hat{\theta}(t)|^2 dt + \left(\frac{(3\lambda+4\mu)^2}{4\epsilon\mu_0^2} + \frac{\gamma}{2\mu_0}\right)\int_S^T |\xi|^2|\hat{h}(t)|^2 dt \\
&+ \frac{3\kappa^2}{\gamma^2}\int_S^T |\xi|^2|\hat{\theta}(t)|^2 dt + \frac{3\nu_1^2}{\mu_0^2}\int_S^T |\xi|^2|\hat{h}(t)|^2 dt,
\end{aligned}$$

e usando (4.8), segue

$$\frac{1}{2}\int_S^T \rho(\xi)|\hat{u}_t^3(t)|^2 dt \leq C_3\mathcal{E}(S,\xi) + 2\epsilon\int_S^T \rho(\xi)|\xi|^2|\hat{u}(t)|^2 dt, \tag{4.38}$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^3$ com $\xi_3 \neq 0$, onde

$$C_3 = \frac{2}{\gamma} + \frac{2}{\mu_0} + \frac{(3\lambda+4\mu)^2}{4\epsilon\gamma^2\kappa} + \frac{1}{\kappa} + \frac{\gamma}{2\mu_0\kappa} + \frac{(3\lambda+4\mu)^2}{4\epsilon\mu_0^2\nu_1} + \frac{\gamma}{2\mu_0\nu_1} + \frac{3\kappa}{\gamma^2} + \frac{3\nu_1}{\mu_0^2}.$$

Somando (4.30) e (4.38) resulta

$$\int_S^T \rho(\xi)|\hat{u}_t(t)|^2 dt \leq C_1\mathcal{E}(S,\xi) + 6\epsilon\int_S^T \rho(\xi)|\xi|^2|\hat{u}(t)|^2 dt$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^3$, com $\xi_3 \neq 0$, e para todo $\epsilon > 0$, em que $C_1 = 2C_2 + 2C_3$. □

Usando o lema anterior provaremos o próximo lema.

Lema 3. *Seja ρ dada por (4.14). Existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\int_S^T (\rho(\xi)|\hat{u}_t(t)|^2 + \rho(\xi)|\xi|^2|\hat{u}(t)|^2 + |\xi|^2|\hat{h}(t)|^2 + |\xi|^2|\hat{\theta}(t)|^2) dt \leq C\mathcal{E}(S,\xi), \tag{4.39}$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^3$ e $0 \leq S < T$, onde $\mathcal{E}(t,\xi)$ é dada por (4.9).

Demonstração. Comecemos integrando (4.8) em $[S,T]$. Assim

$$\mathcal{E}(T,\xi) + \nu_1\int_S^T |\xi|^2|\hat{h}(t)|^2 dt + \kappa\int_S^T |\xi|^2|\hat{\theta}(t)|^2 dt = \mathcal{E}(S,\xi), \tag{4.40}$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^3$.

Agora, tomando o produto interno de (4.2) por $\rho(\xi)\overline{\hat{u}}$ segue

$$\rho(\xi)\frac{d}{dt}(\hat{u}_t\cdot\overline{\hat{u}}) - \rho(\xi)|\hat{u}_t|^2 + \mu\rho(\xi)|\xi|^2|\hat{u}|^2 + (\lambda+\mu)\rho(\xi)|(\xi\cdot\hat{u})|^2 + i\gamma\rho(\xi)\hat{\theta}\xi\cdot\overline{\hat{u}}$$
$$= i\mu_0\rho(\xi)\xi_3\hat{h}\cdot\overline{\hat{u}} - i\mu_0\rho(\xi)\hat{h}^3\xi\cdot\overline{\hat{u}}.$$

Tomando a parte real e integrando em $[S,T]$, obtemos

$$\rho(\xi)Re(\hat{u}_t(T)\cdot\overline{\hat{u}}(T)) - \rho(\xi)Re(\hat{u}_t(S)\cdot\overline{\hat{u}}(S)) - \int_S^T \rho(\xi)|\hat{u}_t(t)|^2dt + \mu\int_S^T \rho(\xi)|\xi|^2|\hat{u}(t)|^2dt$$
$$+ (\lambda+\mu)\int_S^T \rho(\xi)|(\xi\cdot\hat{u}(t))|^2dt + \gamma\int_S^T \rho(\xi)Re(i\hat{\theta}(t)\xi\cdot\overline{\hat{u}}(t))dt$$
$$= \mu_0\int_S^T \rho(\xi)Re(i\xi_3\hat{h}(t)\cdot\overline{\hat{u}}(t))dt - \mu_0\int_S^T \rho(\xi)Re(i\hat{h}^3(t)\xi\cdot\overline{\hat{u}}(t))dt.$$

Reordenando os termos da igualdade acima, temos

$$\mu\int_S^T \rho(\xi)|\xi|^2|\hat{u}(t)|^2dt + (\lambda+\mu)\int_S^T \rho(\xi)|(\xi\cdot\hat{u}(t))|^2dt$$
$$= \mu_0\int_S^T \rho(\xi)Re(i\xi_3\hat{h}(t)\cdot\overline{\hat{u}}(t))dt - \mu_0\int_S^T \rho(\xi)Re(i\hat{h}^3(t)\xi\cdot\overline{\hat{u}}(t))dt$$
$$- \rho(\xi)Re(\hat{u}_t(T)\cdot\overline{\hat{u}}(T)) + \rho(\xi)Re(\hat{u}_t(S)\cdot\overline{\hat{u}}(S)) + \int_S^T \rho(\xi)|\hat{u}_t(t)|^2dt$$
$$- \gamma\int_S^T \rho(\xi)Re(i\hat{\theta}(t)\xi\cdot\overline{\hat{u}}(t))dt.$$

Usando que $|Re(z)| \le |z|$, para todo $z\in\mathbb{C}$, e a desigualdade de Schwarz

$$\mu\int_S^T \rho(\xi)|\xi|^2|\hat{u}(t)|^2dt + (\lambda+\mu)\int_S^T \rho(\xi)|(\xi\cdot\hat{u}(t))|^2dt$$
$$\le 2\mu_0\int_S^T \rho(\xi)|\xi||\hat{h}(t)||\hat{u}(t)|dt + \rho(\xi)|\hat{u}_t(T)||\hat{u}(T)| + \rho(\xi)|\hat{u}_t(S)||\hat{u}(S)|$$
$$+ \int_S^T \rho(\xi)|\hat{u}_t(t)|^2dt + \gamma\int_S^T \rho(\xi)|\hat{\theta}(t)||\xi||\hat{u}(t)|dt. \tag{4.41}$$

Pela desigualdade de Young, $ab \le \epsilon a^2 + \frac{1}{4\epsilon}b^2$, $a,b\ge 0$ e $\epsilon > 0$, temos

$$2\mu_0\int_S^T \rho(\xi)|\xi||\hat{h}(t)||\hat{u}(t)|dt \le \frac{\mu}{4}\int_S^T \rho(\xi)|\xi|^2|\hat{u}(t)|^2dt + \frac{4\mu_0^2}{\mu}\int_S^T \rho(\xi)|\hat{h}(t)|^2dt$$

onde consideramos $\epsilon = \frac{\mu}{4}$, $a = |\xi||\hat{u}(t)|$ e $b = 2\mu_0|\hat{h}(t)|$. Também

$$\gamma\int_S^T \rho(\xi)|\hat{\theta}(t)||\xi||\hat{u}(t)|dt \le \frac{\mu}{4}\int_S^T \rho(\xi)|\xi|^2|\hat{u}(t)|^2dt + \frac{\gamma^2}{\mu}\int_S^T \rho(\xi)|\hat{\theta}(t)|^2dt$$

onde consideramos $\epsilon = \frac{\mu}{4}$, $a = |\xi||\hat{u}(t)|$ e $b = \gamma|\hat{\theta}(t)|$. Assim, (4.41) torna-se

$$\begin{aligned}
&\mu \int_S^T \rho(\xi)|\xi|^2|\hat{u}(t)|^2 dt + (\lambda+\mu)\int_S^T \rho(\xi)|(\xi\cdot\hat{u}(t))|^2 dt \\
&\leq \frac{\mu}{4}\int_S^T \rho(\xi)|\xi|^2|\hat{u}(t)|^2 dt + \frac{4\mu_0^2}{\mu}\int_S^T \rho(\xi)|\hat{h}(t)|^2 dt + \frac{|\hat{u}_t(T)|^2}{2} + \rho(\xi)^2\frac{|\hat{u}(T)|^2}{2} \\
&+ \frac{|\hat{u}_t(S)|^2}{2} + \rho(\xi)^2\frac{|\hat{u}(S)|^2}{2} + \frac{\mu}{4}\int_S^T \rho(\xi)|\xi|^2|\hat{u}(t)|^2 dt + \frac{\gamma^2}{\mu}\int_S^T \rho(\xi)|\hat{\theta}(t)|^2 dt \\
&+ \int_S^T \rho(\xi)|\hat{u}_t(t)|^2 dt,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
&\frac{\mu}{2}\int_S^T \rho(\xi)|\xi|^2|\hat{u}(t)|^2 dt + (\lambda+\mu)\int_S^T \rho(\xi)|(\xi\cdot\hat{u}(t))|^2 dt \\
&\leq \frac{|\hat{u}_t(T)|^2}{2} + \rho(\xi)^2\frac{|\hat{u}(T)|^2}{2} + \frac{|\hat{u}_t(S)|^2}{2} + \rho(\xi)^2\frac{|\hat{u}(S)|^2}{2} + \frac{4\mu_0^2}{\mu}\int_S^T \rho(\xi)|\hat{h}(t)|^2 dt \\
&+ \frac{\gamma^2}{\mu}\int_S^T \rho(\xi)|\hat{\theta}(t)|^2 dt + \int_S^T \rho(\xi)|\hat{u}_t(t)|^2 dt,
\end{aligned} \tag{4.42}$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^3$.

Note que

- para $\xi \in A$, temos $\rho(\xi) = \xi_3^2 \leq |\xi_3| \leq |\xi|$, pois $|\xi_3| \leq 1$, e $\rho(\xi) = \xi_3^2 \leq |\xi|^2$;
- para $\xi \in A^c$, temos $\rho(\xi) = \frac{\xi_3^2}{|\xi|^2} \leq |\xi_3| \leq |\xi| \leq |\xi|^2$, pois $|\xi| \geq 1$.

Ou seja, $\rho(\xi) \leq |\xi|$ e $\rho(\xi) \leq |\xi|^2$ para todo $\xi \in \mathbb{R}^3$. Disso e de (4.40) em (4.42), obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{\mu}{2}\int_S^T \rho(\xi)|\xi|^2|\hat{u}(t)|^2 dt + (\lambda+\mu)\int_S^T \rho(\xi)|\xi\cdot\hat{u}(t)|^2 dt \\
&\leq \frac{|\hat{u}_t(T)|^2}{2} + |\xi|^2\frac{|\hat{u}(T)|^2}{2} + \frac{|\hat{u}_t(S)|^2}{2} + |\xi|^2\frac{|\hat{u}(S)|^2}{2} + \frac{4\mu_0^2}{\mu}\int_S^T |\xi|^2|\hat{h}(t)|^2 dt \\
&+ \frac{\gamma^2}{\mu}\int_S^T |\xi|^2|\hat{\theta}(t)|^2 dt + \int_S^T \rho(\xi)|\hat{u}_t(t)|^2 dt \\
&\leq \mathcal{E}(S,\xi) + \frac{1}{\mu}\mathcal{E}(S,\xi) + \mathcal{E}(S,\xi) + \frac{1}{\mu}\mathcal{E}(S,\xi) + \frac{4\mu_0^2}{\mu\nu_1}\mathcal{E}(S,\xi) + \frac{\gamma^2}{\mu\kappa}\mathcal{E}(S,\xi) \\
&+ \int_S^T \rho(\xi)|\hat{u}_t(t)|^2 dt \\
&\leq C_4\mathcal{E}(S,\xi) + \int_S^T \rho(\xi)|\hat{u}_t(t)|^2 dt,
\end{aligned}$$

com $C_4 = 2 + \frac{2}{\mu} + \frac{4\mu_0^2}{\mu\nu_1} + \frac{\gamma^2}{\mu\kappa}$, para todo $\xi \in \mathbb{R}^3$. Assim,

$$\frac{\mu}{2}\int_S^T \rho(\xi)|\xi|^2|\hat{u}(t)|^2 dt + (\lambda+\mu)\int_S^T \rho(\xi)|\xi\cdot\hat{u}(t)|^2 dt \leq C_4\mathcal{E}(S,\xi) + \int_S^T \rho(\xi)|\hat{u}_t(t)|^2 dt, \tag{4.43}$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^3$.

Usando a estimativa (4.15) do Lema 2 com $\epsilon = \frac{\mu}{24}$ temos

$$\int_S^T \rho(\xi)|\hat{u}_t(t)|^2 dt \leq C_1 \mathcal{E}(S,\xi) + \frac{\mu}{4}\int_S^T \rho(\xi)|\xi|^2|\hat{u}(t)|^2 dt. \tag{4.44}$$

Considerando (4.44) em (4.43) obtemos

$$\frac{\mu}{4}\int_S^T \rho(\xi)|\xi|^2|\hat{u}(t)|^2 dt + (\lambda+\mu)\int_S^T \rho(\xi)|\xi\cdot\hat{u}(t)|^2 dt \leq (C_4 + C_1)\mathcal{E}(S,\xi), \tag{4.45}$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^3$ com $\xi_3 \neq 0$.

Agora, (4.45) em (4.44) nos fornece

$$\int_S^T \rho(\xi)|\hat{u}_t(t)|^2 dt \leq (2C_1 + C_4)\mathcal{E}(S,\xi), \tag{4.46}$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^3$ com $\xi_3 \neq 0$.

Portanto, de (4.40), (4.45) e (4.46), temos

$$\int_S^T (\rho(\xi)|\hat{u}_t(t)|^2 + \rho(\xi)|\xi|^2|\hat{u}(t)|^2 + |\xi|^2|\hat{h}(t)|^2 + |\xi|^2|\hat{\theta}(t)|^2)dt \leq C\mathcal{E}(S,\xi)$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^3$, com $\xi_3 \neq 0$, e $0 \leq S < T$, onde $C = 2C_1 + C_4 + \frac{4}{\mu}(C_4 + C_1) + \frac{1}{\nu_1} + \frac{1}{\kappa}$. □

Lema 4. *Assumindo as hipóteses do Teorema 9, existe uma constante $\overline{C}(\beta,q) > 0$ dependendo de β e q, tal que*

$$[E(t)]^{1+\beta} \leq \overline{C}(\beta,q)[(N_{0,q})^\beta + (K_{0,\beta})^\beta + (M_0)^\beta]F(t)$$

para todo $t \geq 0$, onde $E(t)$ é a energia total no espaço de Fourier definida em (4.10) e $F(t)$ é definida por

$$F(t) = \int_{\mathbb{R}^3}(\rho(\xi)|\hat{u}_t(t)|^2 + \rho(\xi)|\xi|^2|\hat{u}(t)|^2 + |\xi|^2|\hat{h}(t)|^2 + |\xi|^2|\hat{\theta}(t)|^2)d\xi. \tag{4.47}$$

Demonstração. Temos

$$\begin{aligned}
[E(t)]^{1+\beta} &= \left(\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}\{|\hat{u}_t(t)|^2 + \mu|\xi|^2|\hat{u}(t)|^2 + (\lambda+\mu)|(\xi\cdot\hat{u}(t))|^2 + |\hat{h}(t)|^2 + |\hat{\theta}(t)|^2\}d\xi\right)^{1+\beta} \\
&\leq C_1(\beta)\left(\int_{\mathbb{R}^3}|\hat{u}_t(t)|^2 d\xi\right)^{1+\beta} + C_1(\beta)\left(\int_{\mathbb{R}^3}|\xi|^2|\hat{u}(t)|^2 d\xi\right)^{1+\beta} \\
&\quad + C_1(\beta)\left(\int_{\mathbb{R}^3}|\hat{h}(t)|^2 d\xi\right)^{1+\beta} + C_1(\beta)\left(\int_{\mathbb{R}^3}|\hat{\theta}(t)|^2 d\xi\right)^{1+\beta},
\end{aligned} \tag{4.48}$$

para todo $t \geq 0$. Denotando

$$\begin{aligned}
I_1(t) = \left(\int_{\mathbb{R}^3}|\hat{u}_t(t)|^2 d\xi\right)^{1+\beta}, \quad I_2(t) = \left(\int_{\mathbb{R}^3}|\xi|^2|\hat{u}(t)|^2 d\xi\right)^{1+\beta}, \\
I_3(t) = \left(\int_{\mathbb{R}^3}|\hat{h}(t)|^2 d\xi\right)^{1+\beta} \quad \text{e} \quad I_4(t) = \left(\int_{\mathbb{R}^3}|\hat{\theta}(t)|^2 d\xi\right)^{1+\beta},
\end{aligned}$$

vamos estimar cada uma dessas integrais usando a desigualdade de Hölder com $L^{1+\beta}$ e $L^{\frac{1+\beta}{\beta}}$.

(i)

$$
\begin{aligned}
I_1(t) = \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\hat{u}_t(t)|^2 d\xi\right)^{1+\beta} &= \left(\int_{\mathbb{R}^3} \rho(\xi)^{-\frac{1}{1+\beta}} \rho(\xi)^{\frac{1}{1+\beta}} |\hat{u}_t(t)|^{2-\frac{2}{1+\beta}} |\hat{u}_t(t)|^{\frac{2}{1+\beta}} d\xi\right)^{1+\beta} \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^3} \rho(\xi)^{-\frac{1}{\beta}} |\hat{u}_t(t)|^2 d\xi\right)^{\beta} \int_{\mathbb{R}^3} \rho(\xi) |\hat{u}_t(t)|^2 d\xi \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^3} \rho(\xi)^{-\frac{1}{\beta}} |\hat{u}_t(t)|^2 d\xi\right)^{\beta} F(t); \qquad (4.49)
\end{aligned}
$$

(ii)

$$
\begin{aligned}
I_2(t) &= \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^2 |\hat{u}(t)|^2 d\xi\right)^{1+\beta} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^3} \rho(\xi)^{-\frac{1}{1+\beta}} \rho(\xi)^{\frac{1}{1+\beta}} |\xi|^{2-\frac{2}{1+\beta}} |\xi|^{\frac{2}{1+\beta}} |\hat{u}(t)|^{2-\frac{2}{1+\beta}} |\hat{u}(t)|^{\frac{2}{1+\beta}} d\xi\right)^{1+\beta} \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^3} \rho(\xi)^{-\frac{1}{\beta}} |\xi|^2 |\hat{u}(t)|^2 d\xi\right)^{\beta} \int_{\mathbb{R}^3} \rho(\xi) |\xi|^2 |\hat{u}(t)|^2 d\xi \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^3} \rho(\xi)^{-\frac{1}{\beta}} |\xi|^2 |\hat{u}(t)|^2 d\xi\right)^{\beta} F(t); \qquad (4.50)
\end{aligned}
$$

(iii)

$$
\begin{aligned}
I_3(t) = \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\hat{h}(t)|^2 d\xi\right)^{1+\beta} &= \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{-\frac{2}{1+\beta}} |\xi|^{\frac{2}{1+\beta}} |\hat{h}(t)|^{2-\frac{2}{1+\beta}} |\hat{h}(t)|^{\frac{2}{1+\beta}} d\xi\right)^{1+\beta} \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{-\frac{2}{\beta}} |\hat{h}(t)|^2 d\xi\right)^{\beta} \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^2 |\hat{h}(t)|^2 d\xi \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{-\frac{2}{\beta}} |\hat{h}(t)|^2 d\xi\right)^{\beta} F(t); \qquad (4.51)
\end{aligned}
$$

(iv)

$$
\begin{aligned}
I_4(t) = \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\hat{\theta}(t)|^2 d\xi\right)^{1+\beta} &= \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{-\frac{2}{1+\beta}} |\xi|^{\frac{2}{1+\beta}} |\hat{\theta}(t)|^{2-\frac{2}{1+\beta}} |\hat{\theta}(t)|^{\frac{2}{1+\beta}} d\xi\right)^{1+\beta} \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{-\frac{2}{\beta}} |\hat{\theta}(t)|^2 d\xi\right)^{\beta} \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^2 |\hat{\theta}(t)|^2 d\xi \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{-\frac{2}{\beta}} |\hat{\theta}(t)|^2 d\xi\right)^{\beta} F(t). \qquad (4.52)
\end{aligned}
$$

De (4.49)-(4.52) em (4.48), obtemos

$$
\begin{aligned}
[E(t)]^{1+\beta} \leq C_1(\beta) \Bigg\{ &\left(\int_{\mathbb{R}^3} \rho(\xi)^{-\frac{1}{\beta}} |\hat{u}_t(t)|^2 d\xi\right)^{\beta} + \left(\int_{\mathbb{R}^3} \rho(\xi)^{-\frac{1}{\beta}} |\xi|^2 |\hat{u}(t)|^2 d\xi\right)^{\beta} \\
&+ \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{-\frac{2}{\beta}} |\hat{h}(t)|^2 d\xi\right)^{\beta} + \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{-\frac{2}{\beta}} |\hat{\theta}(t)|^2 d\xi\right)^{\beta} \Bigg\} F(t), \qquad (4.53)
\end{aligned}
$$

para todo $t \geq 0$.

Resta provar que cada uma das integrais, que aparecem no lado direito de (4.53), é limitada por uma constante que depende dos dados iniciais. Para isso, iremos dividir cada integral em duas regiões: região dentro do cubo A ($\xi \in A$) e região fora do cubo A ($\xi \in A^c$).

Primeiramente, estimaremos as duas primeiras integrais que aparecem no lado direito de (4.53). Integrando a identidade (4.8) em $[0,t]$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left\{|\hat{u}_t(t)|^2+\mu|\xi|^2|\hat{u}(t)|^2+(\lambda+\mu)|(\xi\cdot\hat{u}(t))|^2+|\hat{h}(t)|^2+|\hat{\theta}(t)|^2\right\}\\
&+\nu_1\int_0^t|\xi|^2|\hat{h}(s)|^2ds+\kappa\int_0^t|\xi|^2|\hat{\theta}(s)|^2ds\\
&=\frac{1}{2}\left\{|\hat{u}_1|^2+\mu|\xi|^2|\hat{u}_0|^2+(\lambda+\mu)|(\xi\cdot\hat{u}_0)|^2+|\hat{h}_0|^2+|\hat{\theta}_0|^2\right\}. \qquad (4.54)
\end{aligned}$$

Assim,

$$|\hat{u}_t(t)|^2+|\xi|^2|\hat{u}(t)|^2\leq C|\hat{u}_1|^2+C|\xi|^2|\hat{u}_0|^2+C|\hat{h}_0|^2+C|\hat{\theta}_0|^2, \qquad (4.55)$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^3$ e $t \geq 0$. Na região dentro do cubo A tem-se $\rho(\xi)=\xi_3^2$. Logo, multiplicando (4.55) por $|\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}}$ e integrando sobre $\{\xi\in\mathbb{R}^3;\xi\in A\}$, obtemos

$$\begin{aligned}
&\int_{\xi\in A}|\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}}|\hat{u}_t(t)|^2d\xi+\int_{\xi\in A}|\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}}|\xi|^2|\hat{u}(t)|^2d\xi\\
&\leq C\int_{\xi\in A}|\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}}|\hat{u}_1|^2d\xi+C\int_{\xi\in A}|\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}}|\xi|^2|\hat{u}_0|^2d\xi+C\int_{\xi\in A}|\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}}|\hat{h}_0|^2d\xi\\
&+C\int_{\xi\in A}|\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}}|\hat{\theta}_0|^2d\xi, \qquad (4.56)
\end{aligned}$$

para todo $t \geq 0$.

Como para $\xi \in A$ temos $|\xi|^2 \leq 3$, então

$$\begin{aligned}
&\int_{\xi\in A}|\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}}|\hat{u}_t(t)|^2d\xi+\int_{\xi\in A}|\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}}|\xi|^2|\hat{u}(t)|^2d\xi\\
&\leq C\int_{\xi\in A}|\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}}|\hat{u}_1|^2d\xi+3C\int_{\xi\in A}|\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}}|\hat{u}_0|^2d\xi+C\int_{\xi\in A}|\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}}|\hat{h}_0|^2d\xi\\
&+C\int_{\xi\in A}|\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}}|\hat{\theta}_0|^2d\xi, \qquad (4.57)
\end{aligned}$$

para todo $t \geq 0$.

Como $u_1 \in [L^q(\mathbb{R}^3)]^3$, com $1 \leq q < 2$, e usando a desigualdade de Hölder com $L^{\frac{q}{2(q-1)}}$ e $L^{\frac{q}{2-q}}$ na primeira integral que aparece no lado direito de (4.57), temos

$$\begin{aligned}
\int_{\xi\in A}|\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}}|\hat{u}_1|^2d\xi&\leq\left(\int_{\xi\in A}|\xi_3|^{-\frac{2q}{\beta(2-q)}}d\xi\right)^{\frac{2-q}{q}}\left(\int_{\xi\in A}|\hat{u}_1|^{\frac{2q}{2(q-1)}}d\xi\right)^{\frac{2(q-1)}{q}}\\
&\leq\left(\int_{\xi\in A}|\xi_3|^{-\frac{2q}{\beta(2-q)}}d\xi\right)^{\frac{2-q}{q}}\|\hat{u}_1\|^2_{L^{\frac{q}{q-1}}}. \qquad (4.58)
\end{aligned}$$

Agora, observe que

$$\begin{aligned}\int_{\xi\in A}|\xi_3|^{-\frac{2q}{\beta(2-q)}}d\xi &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}|\xi_3|^{-\frac{2q}{\beta(2-q)}}d\xi_3 d\xi_2 d\xi_1\\ &= 2\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1}\xi_3^{-\frac{2q}{\beta(2-q)}}d\xi_3 d\xi_2 d\xi_1\\ &= 2\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left\{\frac{1}{1-\frac{2q}{\beta(2-q)}}\right\}d\xi_2 d\xi_1 = \frac{8}{1-\frac{2q}{\beta(2-q)}} < +\infty,\end{aligned}$$

pois $\beta > \frac{2q}{2-q}$.

Também, sabemos que a transformada de Fourier é um operador linear limitado de $L^1(\mathbb{R}^3)$ em $L^\infty(\mathbb{R}^3)$, isto é, existe uma constante $\tilde{C} > 0$ tal que

$$\|\hat{f}\|_{L^\infty} \leq \tilde{C}\|f\|_{L^1}$$

para toda $f \in L^1(\mathbb{R}^3)$. Para $1 < q < 2$ segue, da desigualdade de Hausdorff-Young (veja [2]), que a transformada de Fourier se estende como um operador linear limitado de $L^q(\mathbb{R}^3)$ em $L^{\frac{q}{q-1}}(\mathbb{R}^3)$, ou seja, existe uma constante $\tilde{C}_q = \tilde{C}(q) > 0$ tal que

$$\|\hat{f}\|_{L^{\frac{q}{q-1}}} \leq \tilde{C}_q\|f\|_{L^q},$$

para toda $f \in L^q(\mathbb{R}^3)$. Tomando $C(q) = \max\{\tilde{C}, \tilde{C}_q\}$, temos

$$\|\hat{f}\|_{L^{\frac{q}{q-1}}} \leq C(q)\|f\|_{L^q},$$

para toda $f \in L^q(\mathbb{R}^3)$, com $1 \leq q < 2$. Assim, vale

$$\|\hat{u}_1\|^2_{L^{\frac{q}{q-1}}} \leq C(q)^2\|u_1\|^2_{L^q},$$

para $1 \leq q < 2$.

Logo, (4.58) torna-se

$$\int_{\xi\in A}|\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}}|\hat{u}_1|^2 d\xi \leq C_{\beta,q}C(q)^2\|u_1\|^2_{L^q}, \tag{4.59}$$

onde

$$C_{\beta,q} := \left(\int_{\xi\in A}|\xi_3|^{-\frac{2q}{\beta(2-q)}}d\xi\right)^{\frac{2-q}{q}} < +\infty.$$

De maneira análoga, como $u_0, h_0 \in [L^q(\mathbb{R}^3)]^3$ e $\theta_0 \in L^q(\mathbb{R}^3)$, com $1 \leq q < 2$, estima-se as demais integrais que aparecem no lado direito de (4.57) obtendo

$$\int_{\xi\in A}|\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}}|\hat{u}_0|^2 d\xi \leq C_{\beta,q}C(q)^2\|u_0\|^2_{L^q}, \tag{4.60}$$

$$\int_{\xi\in A}|\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}}|\hat{h}_0|^2 d\xi \leq C_{\beta,q}C(q)^2\|h_0\|^2_{L^q}, \tag{4.61}$$

e

$$\int_{\xi\in A} |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}} |\hat{\theta}_0|^2 d\xi \leq C_{\beta,q} C(q)^2 \|\theta_0\|_{L^q}^2. \tag{4.62}$$

Usando (4.59)-(4.62) em (4.57), obtemos

$$\begin{aligned}&\int_{\xi\in A} |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}} |\hat{u}_t(t)|^2 d\xi + \int_{\xi\in A} |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}} |\xi|^2 |\hat{u}(t)|^2 d\xi \\ &\leq 3CC_{\beta,q} C(q)^2 \left(\|u_1\|_{L^q}^2 + \|u_0\|_{L^q}^2 + \|h_0\|_{L^q}^2 + \|\theta_0\|_{L^q}^2 \right),\end{aligned} \tag{4.63}$$

para todo $t \geq 0$.

Por outro lado, na região fora do cubo A temos $\rho(\xi) = \frac{\xi_3^2}{|\xi|^2}$. Então, multiplicando (4.55) por $|\xi|^{\frac{2}{\beta}} |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}}$ e integrando sobre $\{\xi \in \mathbb{R}^3; \xi \in A^c\}$, obtemos

$$\begin{aligned}&\int_{\xi\in A^c} |\xi|^{\frac{2}{\beta}} |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}} |\hat{u}_t(t)|^2 d\xi + \int_{\xi\in A^c} |\xi|^{\frac{2}{\beta}+2} |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}} |\hat{u}(t)|^2 d\xi \\ &\leq C \int_{\xi\in A^c} |\xi|^{\frac{2}{\beta}} |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}} |\hat{u}_1|^2 d\xi + C \int_{\xi\in A^c} |\xi|^{\frac{2}{\beta}+2} |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}} |\hat{u}_0|^2 d\xi \\ &+ C \int_{\xi\in A^c} |\xi|^{\frac{2}{\beta}} |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}} |\hat{h}_0|^2 d\xi + C \int_{\xi\in A^c} |\xi|^{\frac{2}{\beta}} |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}} |\hat{\theta}_0|^2 d\xi \\ &= C \int_{\xi\in A^c} |\xi|^{\frac{2}{\beta}} |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}} \left(|\hat{u}_1|^2 + |\xi|^2 |\hat{u}_0|^2 + |\hat{h}_0|^2 + |\hat{\theta}_0|^2 \right) d\xi = CK_{0,\beta} < +\infty\end{aligned} \tag{4.64}$$

para todo $t \geq 0$, onde usamos a condição (4.11) dada na hipótese.

Portanto, segue de (4.63) e (4.64)

$$\begin{aligned}&\left(\int_{\mathbb{R}^3} \rho(\xi)^{-\frac{1}{\beta}} |\hat{u}_t(t)|^2 d\xi \right)^{\beta} + \left(\int_{\mathbb{R}^3} \rho(\xi)^{-\frac{1}{\beta}} |\xi|^2 |\hat{u}(t)|^2 d\xi \right)^{\beta} \\ &\leq 2^{\beta-1} \left(\int_{\xi\in A} |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}} |\hat{u}_t(t)|^2 d\xi \right)^{\beta} + 2^{\beta-1} \left(\int_{\xi\in A^c} |\xi|^{\frac{2}{\beta}} |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}} |\hat{u}_t(t)|^2 d\xi \right)^{\beta} \\ &+ 2^{\beta-1} \left(\int_{\xi\in A} |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}} |\xi|^2 |\hat{u}(t)|^2 d\xi \right)^{\beta} + 2^{\beta-1} \left(\int_{\xi\in A^c} |\xi|^{\frac{2}{\beta}+2} |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}} |\hat{u}(t)|^2 d\xi \right)^{\beta} \\ &\leq (2C)^{\beta} \left\{ [3C_{\beta,q} C(q)^2]^{\beta} \left(\|u_1\|_{L^q}^2 + \|u_0\|_{L^q}^2 + \|h_0\|_{L^q}^2 + \|\theta_0\|_{L^q}^2 \right)^{\beta} + (K_{0,\beta})^{\beta} \right\}\end{aligned} \tag{4.65}$$

para todo $t \geq 0$.

Agora, vamos estimar as duas últimas integrais que aparecem no lado direito de (4.53). Por (4.54), também temos

$$|\hat{h}(t)|^2 + |\hat{\theta}(t)|^2 \leq C|\hat{u}_1|^2 + C|\xi|^2 |\hat{u}_0|^2 + C|\hat{h}_0|^2 + C|\hat{\theta}_0|^2, \tag{4.66}$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^3$ e $t \geq 0$. Multiplicando (4.66) por $|\xi|^{-\frac{2}{\beta}}$ e integrando sobre $\{\xi \in \mathbb{R}^3; \xi \in$

$A\}$, obtemos

$$\begin{aligned}
&\int_{\xi\in A}|\xi|^{-\frac{2}{\beta}}|\hat{h}(t)|^2d\xi+\int_{\xi\in A}|\xi|^{-\frac{2}{\beta}}|\hat{\theta}(t)|^2d\xi\\
&\leq C\int_{\xi\in A}|\xi|^{-\frac{2}{\beta}}|\hat{u}_1|^2d\xi+C\int_{\xi\in A}|\xi|^{-\frac{2}{\beta}}|\xi|^2|\hat{u}_0|^2d\xi+C\int_{\xi\in A}|\xi|^{-\frac{2}{\beta}}|\hat{h}_0|^2d\xi\\
&+C\int_{\xi\in A}|\xi|^{-\frac{2}{\beta}}|\hat{\theta}_0|^2d\xi
\end{aligned}$$

para todo $t\geq 0$. Como $|\xi_3|\leq|\xi|$, para todo $\xi\in\mathbb{R}^3$, então $|\xi|^{-\frac{2}{\beta}}\leq|\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}}$, para todo $\xi\in\mathbb{R}^3$ com $\xi_3\neq 0$. Assim,

$$\begin{aligned}
&\int_{\xi\in A}|\xi|^{-\frac{2}{\beta}}|\hat{h}(t)|^2d\xi+\int_{\xi\in A}|\xi|^{-\frac{2}{\beta}}|\hat{\theta}(t)|^2d\xi\\
&\leq C\int_{\xi\in A}|\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}}|\hat{u}_1|^2d\xi+C\int_{\xi\in A}|\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}}|\xi|^2|\hat{u}_0|^2d\xi+C\int_{\xi\in A}|\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}}|\hat{h}_0|^2d\xi\\
&+C\int_{\xi\in A}|\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}}|\hat{\theta}_0|^2d\xi, \qquad (4.67)
\end{aligned}$$

e da mesma forma que estimamos (4.56) obtemos

$$\begin{aligned}
&\int_{\xi\in A}|\xi|^{-\frac{2}{\beta}}|\hat{h}(t)|^2d\xi+\int_{\xi\in A}|\xi|^{-\frac{2}{\beta}}|\hat{\theta}(t)|^2d\xi\\
&\leq 3CC_{\beta,q}C(q)^2(\|u_1\|_{L^q}^2+\|u_0\|_{L^q}^2+\|h_0\|_{L^q}^2+\|\theta_0\|_{L^q}^2), \qquad (4.68)
\end{aligned}$$

para todo $t\geq 0$.

Por outro lado, multiplicando (4.66) por $|\xi|^{-\frac{2}{\beta}}$ e integrando sobre $\{\xi\in\mathbb{R}^3;\xi\in A^c\}$, temos

$$\begin{aligned}
&\int_{\xi\in A^c}|\xi|^{-\frac{2}{\beta}}|\hat{h}(t)|^2d\xi+\int_{\xi\in A^c}|\xi|^{-\frac{2}{\beta}}|\hat{\theta}(t)|^2d\xi\\
&\leq C\Big(\int_{\xi\in A^c}|\xi|^{-\frac{2}{\beta}}|\hat{u}_1|^2d\xi+\int_{\xi\in A^c}|\xi|^{-\frac{2}{\beta}+2}|\hat{u}_0|^2d\xi+\int_{\xi\in A^c}|\xi|^{-\frac{2}{\beta}}|\hat{h}_0|^2d\xi\\
&+\int_{\xi\in A^c}|\xi|^{-\frac{2}{\beta}}|\hat{\theta}_0|^2d\xi\Big)\\
&\leq C\left(\int_{\xi\in A^c}|\hat{u}_1|^2d\xi+\int_{\xi\in A^c}|\xi|^2|\hat{u}_0|^2d\xi+\int_{\xi\in A^c}|\hat{h}_0|^2d\xi+\int_{\xi\in A^c}|\hat{\theta}_0|^2d\xi\right)\\
&\leq C(\|u_1\|_{L^2}^2+\|\nabla u_0\|_{L^2}^2+\|h_0\|_{L^2}^2+\|\theta_0\|_{L^2}^2), \qquad (4.69)
\end{aligned}$$

para todo $t\geq 0$, pois para $\xi\in A^c$ temos $|\xi|\geq 1$.

Logo, (4.68) e (4.69) nos fornece

$$\begin{aligned}
&\left(\int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{-\frac{2}{\beta}} |\hat{h}(t)|^2 d\xi\right)^{\beta} + \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{-\frac{2}{\beta}} |\hat{\theta}(t)|^2 d\xi\right)^{\beta} \\
&\leq 2^{\beta-1} \left(\int_{\xi\in A} |\xi|^{-\frac{2}{\beta}} |\hat{h}(t)|^2 d\xi\right)^{\beta} + 2^{\beta-1} \left(\int_{\xi\in A^c} |\xi|^{-\frac{2}{\beta}} |\hat{h}(t)|^2 d\xi\right)^{\beta} \\
&+ 2^{\beta-1} \left(\int_{\xi\in A} |\xi|^{-\frac{2}{\beta}} |\hat{\theta}(t)|^2 d\xi\right)^{\beta} + 2^{\beta-1} \left(\int_{\xi\in A^c} |\xi|^{-\frac{2}{\beta}} |\hat{\theta}(t)|^2 d\xi\right)^{\beta} \\
&\leq (2C)^{\beta} \Big\{ [3C_{\beta,q} C(q)^2]^{\beta} (\|u_1\|_{L^q}^2 + \|u_0\|_{L^q}^2 + \|h_0\|_{L^q}^2 + \|\theta_0\|_{L^q}^2)^{\beta} \\
&+ (\|u_1\|_{L^2}^2 + \|\nabla u_0\|_{L^2}^2 + \|h_0\|_{L^2}^2 + \|\theta_0\|_{L^2}^2)^{\beta} \Big\},
\end{aligned} \tag{4.70}$$

para todo $t \geq 0$.

Usando (4.65) e (4.70) em (4.53) chegamos a

$$[E(t)]^{1+\beta} \leq C_1(\beta)(2C)^{\beta} \left\{ 2[3C_{\beta,q}C(q)^2]^{\beta} \left(N_{0,q}\right)^{\beta} + (K_{0,\beta})^{\beta} + (M_0)^{\beta} \right\} F(t),$$

ou ainda,

$$[E(t)]^{1+\beta} \leq \overline{C}(\beta, q) \left\{ \left(N_{0,q}\right)^{\beta} + (K_{0,\beta})^{\beta} + (M_0)^{\beta} \right\} F(t),$$

para todo $t \geq 0$, onde $\overline{C}(\beta, q) = C_1(\beta)(2C)^{\beta} \max\{2[3C_{\beta,q}C(q)^2]^{\beta}, 1\}$. □

Agora podemos provar o Teorema 9. Para tanto, usaremos o lema de Haraux-Komornik [21, 25], enunciado em seguida, combinado com as estimativas dos Lemas 3 e 4.

Lema 5. *Seja $G : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ uma função não-crescente e sejam $\beta > 0$, $T_0 > 0$ constantes tais que*

$$\int_S^{\infty} [G(s)]^{1+\beta} ds \leq T_0 [G(0)]^{\beta} G(S), \quad \forall\ S \geq 0. \tag{4.71}$$

Então,

$$G(t) \leq G(0) T_0^{\frac{1}{\beta}} \left(1 + \frac{1}{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}} t^{-\frac{1}{\beta}}, \quad \forall\ t \geq T_0.$$

Demonstração do Teorema 9. Primeiramente, observe que por Plancherel temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(t) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \left(|u_t(t)|^2 + \mu \sum_{j=1}^{3} |\nabla u^j(t)|^2 + (\lambda + \mu) |\operatorname{div} u(t)|^2 + |h(t)|^2 + |\theta(t)|^2 \right) dx \\
&= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} (|\hat{u}_t(t)|^2 + \mu |\xi|^2 |\hat{u}(t)|^2 + (\lambda + \mu) |(\xi \cdot \hat{u}(t))|^2 + |\hat{h}(t)|^2 + |\hat{\theta}(t)|^2) d\xi \\
&= E(t),
\end{aligned}$$

para todo $t \geq 0$. Por isso, basta provar o resultado para $E(t)$. Pelo Lema 3 segue

$$\int_S^T F(t)dt \leq CE(S)$$

para todo $0 \leq S < T < +\infty$.

Além disso, do Lema 4 temos

$$[E(t)]^{1+\beta} \leq \overline{C}(\beta, p)[(N_{0,q})^\beta + (K_{0,\beta})^\beta + (M_0)^\beta]F(t)$$

para todo $t \geq 0$.

Dessa forma,

$$\int_S^T [E(t)]^{1+\beta}dt \leq \overline{C}(\beta, q)C[(N_{0,q})^\beta + (K_{0,\beta})^\beta + (M_0)^\beta]E(S) \tag{4.72}$$

para todo $0 \leq S < T < +\infty$.

Também, integrando em $\mathbb{R}^3$ a identidade (4.8) segue que a função $t \mapsto E(t)$ é monótona não crescente.

Assim, considerando $T_0 > 0$ tal que $T_0[E(0)]^\beta = \overline{C}(\beta, q)C[(N_{0,q})^\beta + (K_{0,\beta})^\beta + (M_0)^\beta]$, fazendo $T \to +\infty$ em (4.72) e usando o Lema 5 (Haraux-Komornik), obtemos

$$E(t) \leq (\overline{C}(\beta, q)C)^{\frac{1}{\beta}}[(N_{0,q})^\beta + (K_{0,\beta})^\beta + (M_0)^\beta]^{\frac{1}{\beta}} \left(1 + \frac{1}{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}} t^{-\frac{1}{\beta}} = C(\beta, q)I_{0,\beta}t^{-\frac{1}{\beta}},$$

para todo $t \geq T_0$, onde

$$C(\beta, q) = (\overline{C}(\beta, q)C)^{\frac{1}{\beta}} \left(1 + \frac{1}{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}}.$$

□

4.2 TAXAS DE DECAIMENTO PARA A ENERGIA TOTAL: TEOREMA 10

Nesta seção, enunciaremos e provaremos um resultado que melhora o resultado obtido por Rivera e Racke em [33], pois aqui obtém-se mesma taxa de decaimento com hipóteses mais fracas (veja a próxima seção).

Teorema 10. *Sejam $\beta, \alpha > 0$ e $(u_0, u_1, h_0, \theta_0) \in [H^1(\mathbb{R}^3)]^3 \times [L^2(\mathbb{R}^3)]^3 \times \mathcal{H}_\sigma \times L^2(\mathbb{R}^3)$ satisfazendo*

$$Q_{0,\beta} = \int_{\xi \in A} |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}}(|\hat{u}_1|^2 + |\xi|^2|\hat{u}_0|^2 + |\hat{h}_0|^2 + |\hat{\theta}_0|^2)d\xi < +\infty \tag{4.73}$$

e

$$K_{0,\alpha} = \int_{\xi \in A^c} |\xi|^{\frac{2}{\alpha}}|\xi_3|^{-\frac{2}{\alpha}} \left(|\hat{u}_1|^2 + |\xi|^2|\hat{u}_0|^2 + |\hat{h}_0|^2 + |\hat{\theta}_0|^2\right) d\xi < +\infty, \tag{4.74}$$

onde $A = \{\xi \in \mathbb{R}^3; |\xi_1| \leq 1, |\xi_2| \leq 1$ e $|\xi_3| \leq 1\}$. Então, a energia total associada a solução $(u(t,x), h(t,x), \theta(t,x))$ do sistema (3.1)-(3.6) satisfaz

$$\mathcal{E}(t) \leq C_\beta Q_{0,\beta}t^{-\frac{1}{\beta}} + C_\alpha \left((K_{0,\alpha})^\alpha + M_0^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}} t^{-\frac{1}{\alpha}},$$

para todo $t \geq T_0$.

Assim como na Seção 4.1, as estimativas são feitas no espaço de Fourier, mas a ideia é dividir a energia total no espaço de Fourier em duas regiões: região dentro do cubo A ($\xi \in A$) e região fora do cubo A ($\xi \in A^c$). Denotaremos

$$E_A(t) = \int_{\xi \in A} \mathcal{E}(t,\xi) d\xi \tag{4.75}$$

e

$$E_{A^c}(t) = \int_{\xi \in A^c} \mathcal{E}(t,\xi) d\xi, \tag{4.76}$$

para todo $t \geq 0$. Aqui faremos uso do Lema 5 (Haraux-Komornik) para estimar E_A e E_{A^c} separadamente. Segue da identidade (4.8) que as funções dadas por (4.75) e (4.76) são monótonas não crescentes.

Iremos primeiro obter um resultado para a energia sobre toda região dentro do cubo A. Dessa forma, motivados pela estimativa (4.39) provada no Lema 3, definimos o funcional

$$F_A(t) := \int_{\xi \in A} (\xi_3^2 |\hat{u}_t(t)|^2 + \xi_3^2 |\xi|^2 |\hat{u}(t)|^2 + |\xi|^2 |\hat{h}(t)|^2 + |\xi|^2 |\hat{\theta}(t)|^2) d\xi, \quad t \geq 0, \tag{4.77}$$

o qual será útil na demonstração do seguinte resultado.

Proposição 3. *Seja $\beta > 0$ e considere $(u_0, u_1, h_0, \theta_0) \in [H^1(\mathbb{R}^3)]^3 \times [L^2(\mathbb{R}^3)]^3 \times \mathcal{H}_\sigma \times L^2(\mathbb{R}^3)$ satisfazendo*

$$Q_{0,\beta} = \int_{\xi \in A} |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}} (|\hat{u}_1|^2 + |\xi|^2 |\hat{u}_0|^2 + |\hat{h}_0|^2 + |\hat{\theta}_0|^2) d\xi < +\infty. \tag{4.78}$$

Então, existe uma constante $C_\beta > 0$ dependendo de β tal que

$$E_A(t) \leq C_\beta Q_{0,\beta} t^{-\frac{1}{\beta}}, \quad \forall t \geq T_1,$$

onde $T_1 > 0$ é uma constante dependendo dos dados iniciais.

Demonstração. Vamos provar inicialmente que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$[E_A(t)]^{1+\beta} \leq C F_A(t),$$

para todo $t \geq 0$, onde F_A é dado por (4.77). Seja $\beta > 0$. Usando a desigualdade (4.53) com as integrais sobre a região dentro do cubo A, ao invés de integrais em todo espaço $\mathbb{R}^3$, e lembrando que nessa região $\rho(\xi) = \xi_3^2$ temos

$$\begin{aligned} [E_A(t)]^{1+\beta} \leq C_1(\beta) \Bigg\{ & \left(\int_{\xi \in A} |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}} |\hat{u}_t(t)|^2 d\xi \right)^\beta + \left(\int_{\xi \in A} |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}} |\xi|^2 |\hat{u}(t)|^2 d\xi \right)^\beta \\ & + \left(\int_{\xi \in A} |\xi|^{-\frac{2}{\beta}} |\hat{h}(t)|^2 d\xi \right)^\beta + \left(\int_{\xi \in A} |\xi|^{-\frac{2}{\beta}} |\hat{\theta}(t)|^2 d\xi \right)^\beta \Bigg\} F_A(t), \end{aligned} \tag{4.79}$$

para todo $t \geq 0$.

Pelas estimativas (4.56) e (4.67), da Seção 4.1, e assumindo que vale a condição (4.78) sobre os dados iniciais no espaço de Fourier segue

$$\int_{\xi\in A}|\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}}|\hat{u}_t(t)|^2d\xi+\int_{\xi\in A}|\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}}|\xi|^2|\hat{u}(t)|^2d\xi\leq CQ_{0,\beta}<+\infty \tag{4.80}$$

e

$$\int_{\xi\in A}|\xi|^{-\frac{2}{\beta}}|\hat{h}(t)|^2d\xi+\int_{\xi\in A}|\xi|^{-\frac{2}{\beta}}|\hat{\theta}(t)|^2d\xi\leq CQ_{0,\beta}<+\infty, \tag{4.81}$$

para todo $t\geq 0$.

Logo, (4.80) e (4.81) em (4.79) implicam

$$[E_A(t)]^{1+\beta}\leq 4C_1(\beta)C^{\beta}(Q_{0,\beta})^{\beta}F_A(t) \tag{4.82}$$

para todo $t\geq 0$.

Agora, integrando (4.39) sobre $\{\xi\in\mathbb{R}^3;\xi\in A\}$ e pelas definições de E_A e F_A dadas por (4.75) e (4.77), respectivamente, segue

$$\int_S^T F_A(t)dt\leq CE_A(S) \tag{4.83}$$

para todo $0\leq S<T<+\infty$.

Integrando (4.82) sobre $[S,T]$ e usando (4.83) obtemos

$$\int_S^T[E_A(t)]^{1+\beta}dt\leq 4C_1(\beta)C^{\beta}(Q_{0,\beta})^{\beta}CE_A(S) \tag{4.84}$$

para todo $0\leq S<T<+\infty$.

Considere $T_1>0$ tal que $T_1[E_A(0)]^{\beta}=4C_1(\beta)C^{\beta}(Q_{0,\beta})^{\beta}C$. Fazendo $T\to+\infty$ em (4.84) e usando o Lema 5 (Haraux-Komornik), obtemos

$$E_A(t)\leq 4^{\frac{1}{\beta}}C_1(\beta)^{\frac{1}{\beta}}CQ_{0,\beta}C^{\frac{1}{\beta}}\left(1+\frac{1}{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}}t^{-\frac{1}{\beta}}=C_{\beta}Q_{0,\beta}t^{-\frac{1}{\beta}},$$

para todo $t\geq T_1$. □

Agora, vamos obter um resultado para a energia sobre toda região fora do cubo A. Então, motivados por (4.39) definimos o funcional

$$F_{A^c}(t)=\int_{\xi\in A^c}\left(\frac{\xi_3^2}{|\xi|^2}|\hat{u}_t(t)|^2+\xi_3^2|\hat{u}(t)|^2+|\xi|^2|\hat{h}(t)|^2+|\xi|^2|\hat{\theta}(t)|^2\right)d\xi,\quad t\geq 0, \tag{4.85}$$

que será útil na demonstração da seguinte proposição.

Proposição 4. *Seja $\alpha>0$ e considere $(u_0,u_1,h_0,\theta_0)\in[H^1(\mathbb{R}^3)]^3\times[L^2(\mathbb{R}^3)]^3\times\mathcal{H}_{\sigma}\times L^2(\mathbb{R}^3)$ satisfazendo*

$$K_{0,\alpha}=\int_{\xi\in A^c}|\xi|^{\frac{2}{\alpha}}|\xi_3|^{-\frac{2}{\alpha}}\left(|\hat{u}_1|^2+|\xi|^2|\hat{u}_0|^2+|\hat{h_0}|^2+|\hat{\theta_0}|^2\right)d\xi<+\infty. \tag{4.86}$$

Então, existe uma constante $C_{\alpha}>0$ dependendo de α tal que

$$E_{A^c}(t)\leq C_{\alpha}\left((K_{0,\alpha})^{\alpha}+M_0^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}t^{-\frac{1}{\alpha}},\quad\forall t\geq T_2,$$

onde $T_2>0$ é uma constante dependendo dos dados iniciais e M_0 é dada por (4.13).

Demonstração. Inicialmente, usando a desigualdade (4.53) com as integrais sobre a região fora do cubo A, ao invés de integrais em todo espaço $\mathbb{R}^3$, e lembrando que nessa região $\rho(\xi) = \frac{\xi_3^2}{|\xi|^2}$ sabemos que

$$[E_{A^c}(t)]^{1+\alpha} \leq C_1(\alpha)\Bigg\{ \left(\int_{\xi\in A^c} |\xi|^{\frac{2}{\alpha}}|\xi_3|^{-\frac{2}{\alpha}}|\hat{u}_t(t)|^2 d\xi\right)^{\alpha} + \left(\int_{\xi\in A^c} |\xi|^{\frac{2}{\alpha}+2}|\xi_3|^{-\frac{2}{\alpha}}|\hat{u}(t)|^2 d\xi\right)^{\alpha}$$
$$+ \left(\int_{\xi\in A^c} |\xi|^{-\frac{2}{\alpha}}|\hat{h}(t)|^2 d\xi\right)^{\alpha} + \left(\int_{\xi\in A^c} |\xi|^{-\frac{2}{\alpha}}|\hat{\theta}(t)|^2 d\xi\right)^{\alpha} \Bigg\} F_{A^c}(t), \tag{4.87}$$

para todo $t \geq 0$ e $\alpha > 0$.

Para a estimativa das quatro integrais aparecendo no lado direito de (4.87), procedemos de forma inteiramente análoga ao feito na Seção 4.1 para obter as estimativas (4.64) e (4.69). Assim sendo

$$\int_{\xi\in A^c} |\xi|^{\frac{2}{\alpha}}|\xi_3|^{-\frac{2}{\alpha}}|\hat{u}_t(t)|^2 d\xi + \int_{\xi\in A^c} |\xi|^{\frac{2}{\alpha}+2}|\xi_3|^{-\frac{2}{\alpha}}|\hat{u}(t)|^2 d\xi \leq CK_{0,\alpha} \tag{4.88}$$

e

$$\int_{\xi\in A^c} |\xi|^{-\frac{2}{\alpha}}|\hat{h}(t)|^2 d\xi + \int_{\xi\in A^c} |\xi|^{-\frac{2}{\alpha}}|\hat{\theta}(t)|^2 d\xi \leq CM_0, \tag{4.89}$$

para todo $t \geq 0$.

De (4.88) e (4.89) em (4.87) obtemos

$$[E_{A^c}(t)]^{1+\alpha} \leq 2C_1(\alpha)C^{\alpha}\left((K_{0,\alpha})^{\alpha} + M_0^{\alpha}\right) F_{A^c}(t), \tag{4.90}$$

para todo $t \geq 0$ e $\alpha > 0$.

Agora, integrando (4.39) sobre $\{\xi \in \mathbb{R}^3; \xi \in A^c\}$ e pelas definições de E_{A^c} e F_{A^c} dadas por (4.76) e (4.85), respectivamente, segue

$$\int_S^T F_{A^c}(t)dt \leq CE_{A^c}(S) \tag{4.91}$$

para todo $0 \leq S < T < +\infty$.

Integrando (4.90) sobre $[S, T]$ e usando (4.91) obtemos

$$\int_S^T [E_{A^c}(t)]^{1+\alpha} dt \leq 2C_1(\alpha)C^{\alpha}\left((K_{0,\alpha})^{\alpha} + M_0^{\alpha}\right) CE_{A^c}(S) \tag{4.92}$$

para todo $0 \leq S < T < +\infty$.

Considere $T_2 > 0$ tal que $T_2[E_{A^c}(0)]^{\alpha} = 2C_1(\alpha)C^{\alpha}\left((K_{0,\alpha})^{\alpha} + M_0^{\alpha}\right) C$. Fazendo $T \to +\infty$ em (4.92) e usando o Lema 5 (Haraux-Komornik), obtemos

$$E_{A^c}(t) \leq (2C_1(\alpha)C)^{\frac{1}{\alpha}} C\left((K_{0,\alpha})^{\alpha} + M_0^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}} t^{-\frac{1}{\alpha}} = C_{\alpha}\left((K_{0,\alpha})^{\alpha} + M_0^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}} t^{-\frac{1}{\alpha}},$$

para todo $t \geq T_2$. □

Demonstração do Teorema 10. Considerando $T_0 > 0$ tal que $T_0 = \max\{T_1, T_2\}$ o Teorema 10 fica provado. □

4.3 COMPARAÇÃO COM O RESULTADO OBTIDO EM [33]

Considerando $\frac{1}{\beta} = m+1$ e $\frac{1}{\alpha} = 2(m+1)$, com $m \geq 0$, no Teorema 10 obtemos taxa de decaimento $\mathcal{E}(t) = \mathcal{O}(t^{-(m+1)})$ que é a mesma obtida por Rivera-Racke [33].

Por outro lado, em [33] os autores assumiram a seguinte condição sobre os dados iniciais:

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{1+|\xi|^2}{|\xi|^2} \mathcal{A}^2 \right)^{m+1} \mathcal{E}(0,\xi) d\xi < +\infty,$$

onde

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}(\xi) = |\xi|^2 \left(\frac{1}{\xi_1^2} + \frac{1}{\xi_3^2} \right)$$

e

$$\mathcal{E}(t,\xi) = \frac{1}{2}(|\hat{u}_t(t)|^2 + \mu|\xi|^2|\hat{u}(t)|^2 + (\lambda+\mu)|(\xi \cdot \hat{u}(t))|^2 + |\hat{h}(t)|^2 + |\hat{\theta}(t)|^2).$$

Uma das hipóteses assumidas no Teorema 10 com $\frac{1}{\beta} = m+1$ é a dada por (4.73). Mas,

$$\int_{\xi \in A} |\xi_3|^{-2(m+1)} (|\hat{u}_1|^2 + |\xi|^2|\hat{u}_0|^2 + |\hat{h}_0|^2 + |\hat{\theta}_0|^2) d\xi \leq C \int_{\xi \in A} |\xi_3|^{-2(m+1)} \mathcal{E}(0,\xi) d\xi.$$

Note que para $\xi \in \mathbb{R}^3$, com $\xi_1, \xi_3 \neq 0$, temos

$$\frac{1}{\xi_3^2} \leq (\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2) \left(\frac{1}{\xi_1^4} + \frac{2}{\xi_1^2 \xi_3^2} + \frac{1}{\xi_3^4} \right) \leq \frac{1+|\xi|^2}{|\xi|^2} |\xi|^4 \left(\frac{1}{\xi_1^2} + \frac{1}{\xi_3^2} \right)^2 = \frac{1+|\xi|^2}{|\xi|^2} \mathcal{A}^2,$$

então

$$\begin{aligned} \int_{\xi \in A} |\xi_3|^{-2(m+1)} \mathcal{E}(0,\xi) d\xi &\leq \int_{\xi \in A} \left(\frac{1+|\xi|^2}{|\xi|^2} \mathcal{A}^2 \right)^{m+1} \mathcal{E}(0,\xi) d\xi \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{1+|\xi|^2}{|\xi|^2} \mathcal{A}^2 \right)^{m+1} \mathcal{E}(0,\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Logo,

$$\int_{\xi \in A} |\xi_3|^{-2(m+1)} (|\hat{u}_1|^2 + |\xi|^2|\hat{u}_0|^2 + |\hat{h}_0|^2 + |\hat{\theta}_0|^2) d\xi \leq C \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{1+|\xi|^2}{|\xi|^2} \mathcal{A}^2 \right)^{m+1} \mathcal{E}(0,\xi) d\xi.$$

Além disso, a outra hipótese assumida no Teorema 10 com $\frac{1}{\alpha} = 2(m+1)$ é a dada por (4.74). Mas

$$\begin{aligned} &\int_{\xi \in A^c} |\xi|^{4(m+1)} |\xi_3|^{-4(m+1)} \left(|\hat{u}_1|^2 + |\xi|^2|\hat{u}_0|^2 + |\hat{h}_0|^2 + |\hat{\theta}_0|^2 \right) d\xi \\ &\leq C \int_{\xi \in A^c} |\xi|^{4(m+1)} |\xi_3|^{-4(m+1)} \mathcal{E}(0,\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}\int_{\xi\in A^c}|\xi|^{4(m+1)}|\xi_3|^{-4(m+1)}\mathcal{E}(0,\xi)d\xi &= \int_{\xi\in A^c}\left(\frac{|\xi|^2}{\xi_3^2}\right)^{2(m+1)}\mathcal{E}(0,\xi)d\xi\\ &\leq \int_{\xi\in A^c}\mathcal{A}^{2(m+1)}\mathcal{E}(0,\xi)d\xi\\ &\leq \int_{\xi\in A^c}\left(\frac{1+|\xi|^2}{|\xi|^2}\mathcal{A}^2\right)^{m+1}\mathcal{E}(0,\xi)d\xi\\ &\leq \int_{\mathbb{R}^3}\left(\frac{1+|\xi|^2}{|\xi|^2}\mathcal{A}^2\right)^{m+1}\mathcal{E}(0,\xi)d\xi,\end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned}&\int_{\xi\in A^c}|\xi|^{4(m+1)}|\xi_3|^{-4(m+1)}\left(|\hat{u}_1|^2+|\xi|^2|\hat{u}_0|^2+|\hat{h}_0|^2+|\hat{\theta}_0|^2\right)d\xi\\ &\leq C\int_{\mathbb{R}^3}\left(\frac{1+|\xi|^2}{|\xi|^2}\mathcal{A}^2\right)^{m+1}\mathcal{E}(0,\xi)d\xi.\end{aligned}$$

Portanto, as hipóteses assumidas no Teorema 10 são mais fracas quando comparadas à hipótese do Teorema 2.4 em [33].

4.4 TAXAS DE DECAIMENTO PARA A ENERGIA TOTAL: TEOREMA 11

Nesta seção, vamos provar outro resultado para a energia total, $\mathcal{E}(t)$, associada a solução do sistema (3.1)-(3.6): o Teorema 11. Tal resultado não necessita da hipótese adicional no espaço de Fourier, a qual aparece no Teorema 9 da Seção 4.1. Em contrapartida, é necessário exigir mais regularidade nos dados iniciais. Além disso, quando comparamos a taxa obtida no Teorema 9, no caso em que $q = 1$, com a taxa obtida no Teorema 11 vemos que este último resultado nos fornece uma taxa de decaimento mais lenta.

Teorema 11. *Seja $\beta > 5$. Considere $(u_0, u_1, h_0, \theta_0) \in ([H^2(\mathbb{R}^3)]^3 \cap [L^1(\mathbb{R}^3)]^3) \times ([H^1(\mathbb{R}^3)]^3 \cap [L^1(\mathbb{R}^3)]^3) \times (\mathcal{H}_\sigma \cap [H^1(\mathbb{R}^3)]^3 \cap [L^1(\mathbb{R}^3)]^3) \times (H^1(\mathbb{R}^3) \cap L^1(\mathbb{R}^3))$. Então, existe uma constante $C(\beta) > 0$, dependendo de β, tal que a energia total associada a única solução $(u(t,x), h(t,x), \theta(t,x))$ do sistema (3.1)-(3.6) satisfaz:*

$$\mathcal{E}(t) \leq C(\beta) I_{4,\beta} t^{-\frac{1}{\beta}}, \quad \forall t \geq T_0, \tag{4.93}$$

em que $T_0 > 0$ é uma constante dependendo dos dados iniciais e

$$I_{4,\beta} = \left(N_{0,1}^\beta + P_0^\beta + Q_0^\beta + M_0^\beta\right)^{\frac{1}{\beta}},$$

sendo

$$P_0 = \|\nabla u_1\|_{L^2}^2 + \|\Delta u_0\|_{L^2}^2 + \|\nabla h_0\|_{L^2}^2 + \|\nabla \theta_0\|_{L^2}^2, \tag{4.94}$$

$$Q_0 = \|u_1\|_{L^1}^{\frac{4}{3}}\|\nabla u_1\|_{L^2}^{\frac{2}{3}} + \|u_0\|_{L^1}^{\frac{4}{5}}\|\Delta u_0\|_{L^2}^{\frac{6}{5}} + \|h_0\|_{L^1}^{\frac{4}{3}}\|\nabla h_0\|_{L^2}^{\frac{2}{3}} + \|\theta_0\|_{L^1}^{\frac{4}{3}}\|\nabla \theta_0\|_{L^2}^{\frac{2}{3}}, \tag{4.95}$$

$$N_{0,1} = \|u_1\|_{L^1}^2 + \|u_0\|_{L^1}^2 + \|h_0\|_{L^1}^2 + \|\theta_0\|_{L^1}^2 \tag{4.96}$$

e

$$M_0 = \|u_1\|_{L^2}^2 + \|\nabla u_0\|_{L^2}^2 + \|h_0\|_{L^2}^2 + \|\theta_0\|_{L^2}^2. \tag{4.97}$$

Para demonstrar o Teorema 11 precisaremos do seguinte lema técnico.

Lema 6. *Assumindo as hipóteses do Teorema 11, existe uma constante $\overline{C}(\beta) > 0$ dependendo de β, tal que*

$$[E(t)]^{1+\beta} \leq \overline{C}(\beta) \left\{ N_{0,1}^\beta + P_0^\beta + Q_0^\beta + M_0^\beta \right\} F(t)$$

para todo $t \geq 0$, onde $E(t)$ é a energia total no espaço de Fourier definida por (4.10) e $F(t)$ é definida por (4.47).

Demonstração. Por (4.53) tem-se que

$$\begin{aligned}[E(t)]^{1+\beta} \leq C_1(\beta) \Bigg\{ & \left(\int_{\mathbb{R}^3} \rho(\xi)^{-\frac{1}{\beta}} |\hat{u}_t(t)|^2 d\xi \right)^\beta + \left(\int_{\mathbb{R}^3} \rho(\xi)^{-\frac{1}{\beta}} |\xi|^2 |\hat{u}(t)|^2 d\xi \right)^\beta \\ & + \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{-\frac{2}{\beta}} |\hat{h}(t)|^2 d\xi \right)^\beta + \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{-\frac{2}{\beta}} |\hat{\theta}(t)|^2 d\xi \right)^\beta \Bigg\} F(t),\end{aligned} \tag{4.98}$$

para todo $t \geq 0$.

Na região dentro do cubo A tem-se por (4.63) a seguinte estimativa

$$\begin{aligned}&\int_{\xi \in A} |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}} |\hat{u}_t(t)|^2 d\xi + \int_{\xi \in A} |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}} |\xi|^2 |\hat{u}(t)|^2 d\xi \\ &\leq 3CC_{\beta,1} C(1)^2 \left(\|u_1\|_{L^1}^2 + \|u_0\|_{L^1}^2 + \|h_0\|_{L^1}^2 + \|\theta_0\|_{L^1}^2 \right),\end{aligned} \tag{4.99}$$

para todo $t \geq 0$.

Por outro lado, na região fora do cubo A temos $\rho(\xi) = \frac{\xi_3^2}{|\xi|^2}$. Então, multiplicando (4.55) por $|\xi|^{\frac{2}{\beta}} |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}}$ e integrando sobre $\{\xi \in \mathbb{R}^3; \xi \in A^c\}$, obtemos

$$\begin{aligned}&\int_{\xi \in A^c} |\xi|^{\frac{2}{\beta}} |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}} |\hat{u}_t(t)|^2 d\xi + \int_{\xi \in A^c} |\xi|^{\frac{2}{\beta}+2} |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}} |\hat{u}(t)|^2 d\xi \\ &\leq C \int_{\xi \in A^c} |\xi|^{\frac{2}{\beta}} |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}} |\hat{u}_1|^2 d\xi + C \int_{\xi \in A^c} |\xi|^{\frac{2}{\beta}+2} |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}} |\hat{u}_0|^2 d\xi \\ &+ C \int_{\xi \in A^c} |\xi|^{\frac{2}{\beta}} |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}} |\hat{h}_0|^2 d\xi + C \int_{\xi \in A^c} |\xi|^{\frac{2}{\beta}} |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}} |\hat{\theta}_0|^2 d\xi\end{aligned} \tag{4.100}$$

para todo $t \geq 0$.

Agora, estimaremos a primeira integral que aparece no lado direto de (4.100). Observe que a terceira e quarta integrais são estimadas de maneira inteiramente análoga.

Começamos separando a integral em duas integrais da seguinte forma

$$\begin{aligned}\int_{\xi\in A^c}|\xi|^{\frac{2}{\beta}}|\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}}|\hat{u}_1|^2d\xi &\leq \int_{\{\xi\in A^c\}\cap\{|\xi_3|\leq 1\}}|\xi|^{\frac{2}{\beta}}|\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}}|\hat{u}_1|^2d\xi\\ &+\int_{\{\xi\in A^c\}\cap\{|\xi_3|\geq 1\}}|\xi|^{\frac{2}{\beta}}|\hat{u}_1|^2d\xi\\ &= J_1+J_2.\end{aligned}$$

Estimativa para J_2: Como $\beta>5>1$, então $|\xi|^{\frac{2}{\beta}}\leq|\xi|^2$ para $|\xi|\geq 1$. Assim,

$$J_2\leq\int_{\{\xi\in A^c\}\cap\{|\xi_3|\geq 1\}}|\xi|^2|\hat{u}_1|^2d\xi\leq\|\nabla u_1\|_{L^2}^2.$$

Estimativa para J_1: Usando a desigualdade de Hölder com $L^{\frac{3}{2}}$ e L^3 temos

$$J_1\leq\left(\int_{|\xi_3|\leq 1}|\xi_3|^{-\frac{3}{\beta}}d\xi_3\right)^{\frac{2}{3}}\left(\int_{\{\xi\in A^c\}\cap\{|\xi_3|\leq 1\}}|\xi|^{\frac{6}{\beta}}|\hat{u_1}|^6d\xi\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Como $\beta>5>3$ então $\left(\int_{|\xi_3|\leq 1}|\xi_3|^{-\frac{3}{\beta}}d\xi_3\right)^{\frac{2}{3}}=C_\beta^2<+\infty$. Também $|\xi|^{\frac{6}{\beta}}\leq|\xi|^2$, para $|\xi|\geq 1$. Assim,

$$J_1\leq C_\beta^2\left(\int_{\{\xi\in A^c\}\cap\{|\xi_3|\leq 1\}}|\xi|^2|\hat{u}_1|^6d\xi\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Sendo $u_1\in[L^1(\mathbb{R}^3)]^3$ então

$$J_1\leq C_\beta^2\|\hat{u}_1\|_{L^\infty}^{\frac{4}{3}}\left(\int_{\{\xi\in A^c\}\cap\{|\xi_3|\leq 1\}}|\xi|^2|\hat{u}_1|^2d\xi\right)^{\frac{1}{3}}\leq C_\beta^2\|\hat{u}_1\|_{L^\infty}^{\frac{4}{3}}\|\nabla u_1\|_{L^2}^{\frac{2}{3}}.$$

Como a transformada de Fourier é um operador linear limitado de L^1 em L^∞, existe $\tilde{C}>0$ tal que

$$J_1\leq C_\beta^2\tilde{C}^{\frac{4}{3}}\|u_1\|_{L^1}^{\frac{4}{3}}\|\nabla u_1\|_{L^2}^{\frac{2}{3}}.$$

Pelas estimativas obtidas para J_1 e J_2 segue

$$\int_{\xi\in A^c}|\xi|^{\frac{2}{\beta}}|\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}}|\hat{u}_1|^2d\xi\leq\|\nabla u_1\|_{L^2}^2+C_\beta^2\tilde{C}^{\frac{4}{3}}\|u_1\|_{L^1}^{\frac{4}{3}}\|\nabla u_1\|_{L^2}^{\frac{2}{3}},\tag{4.101}$$

$$\int_{\xi\in A^c}|\xi|^{\frac{2}{\beta}}|\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}}|\hat{h}_0|^2d\xi\leq\|\nabla h_0\|_{L^2}^2+C_\beta^2\tilde{C}^{\frac{4}{3}}\|h_0\|_{L^1}^{\frac{4}{3}}\|\nabla h_0\|_{L^2}^{\frac{2}{3}}\tag{4.102}$$

e

$$\int_{\xi\in A^c}|\xi|^{\frac{2}{\beta}}|\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}}|\hat{\theta}_0|^2d\xi\leq\|\nabla\theta_0\|_{L^2}^2+C_\beta^2\tilde{C}^{\frac{4}{3}}\|\theta_0\|_{L^1}^{\frac{4}{3}}\|\nabla\theta_0\|_{L^2}^{\frac{2}{3}}.\tag{4.103}$$

Agora, estimaremos a segunda integral que aparece no lado direito de (4.100). Começamos separando a integral em duas integrais da seguinte forma

$$\begin{aligned}\int_{\xi\in A^c}|\xi|^{\frac{2}{\beta}+2}|\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}}|\hat{u}_0|^2d\xi &\leq \int_{\{\xi\in A^c\}\cap\{|\xi_3|\leq 1\}}|\xi|^{\frac{2}{\beta}+2}|\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}}|\hat{u}_0|^2d\xi\\ &+\int_{\{\xi\in A^c\}\cap\{|\xi_3|\geq 1\}}|\xi|^{\frac{2}{\beta}+2}|\hat{u}_0|^2d\xi\\ &= K_1+K_2.\end{aligned}$$

Estimativa para K_2: Como $\beta>5>1$, então $|\xi|^{\frac{2}{\beta}+2}\leq|\xi|^4$ para $|\xi|\geq 1$. Assim,

$$K_2\leq\int_{\{\xi\in A^c\}\cap\{|\xi_3|\geq 1\}}|\xi|^4|\hat{u}_0|^2d\xi\leq\|\Delta u_0\|^2_{L^2}.$$

Estimativa para K_1: Usando a desigualdade de Hölder com $L^{\frac{5}{2}}$ e $L^{\frac{5}{3}}$ obtemos

$$K_1\leq\left(\int_{|\xi_3|\leq 1}|\xi_3|^{-\frac{5}{\beta}}d\xi\right)^{\frac{2}{5}}\left(\int_{\{\xi\in A^c\}\cap\{|\xi_3|\leq 1\}}|\xi|^{\frac{10+10\beta}{3\beta}}|\hat{u_0}|^{\frac{10}{3}}d\xi\right)^{\frac{3}{5}}.$$

Como $\beta>5$ então $\left(\int_{|\xi_3|\leq 1}|\xi_3|^{-\frac{5}{\beta}}d\xi_3\right)^{\frac{2}{5}}=C_\beta^3<+\infty$. Também $|\xi|^{\frac{10+10\beta}{3\beta}}\leq|\xi|^4$, para $|\xi|\geq 1$. Assim,

$$\begin{aligned}K_1\leq C_\beta^3\left(\int_{\xi\in A^c}|\xi|^4|\hat{u}_0|^{\frac{10}{3}}d\xi\right)^{\frac{3}{5}}&\leq C_\beta^3\|\hat{u}_0\|^{\frac{4}{5}}_{L^\infty}\left(\int_{\xi\in A^c}|\xi|^4|\hat{u}_0|^2d\xi\right)^{\frac{3}{5}}\\ &\leq C_\beta^3\tilde{C}^{\frac{4}{5}}\|u_0\|^{\frac{4}{5}}_{L^1}\|\Delta u_0\|^{\frac{6}{5}}_{L^2}.\end{aligned}$$

Pelas estimativas obtidas para K_1 e K_2 segue

$$\int_{\xi\in A^c}|\xi|^{\frac{2}{\beta}+2}|\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}}|\hat{u}_0|^2d\xi\leq\|\Delta u_0\|^2_{L^2}+C_\beta^3\tilde{C}^{\frac{4}{5}}\|u_0\|^{\frac{4}{5}}_{L^1}\|\Delta u_0\|^{\frac{6}{5}}_{L^2}. \tag{4.104}$$

As estimativas (4.101)-(4.104) em (4.100) nos fornece

$$\begin{aligned}&\int_{\xi\in A^c}|\xi|^{\frac{2}{\beta}}|\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}}|\hat{u}_t(t)|^2d\xi+\int_{\xi\in A^c}|\xi|^{\frac{2}{\beta}+2}|\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}}|\hat{u}(t)|^2d\xi\\ &\leq C\left(\|\nabla u_1\|^2_{L^2}+\|\Delta u_0\|^2_{L^2}+\|\nabla h_0\|^2_{L^2}+\|\nabla\theta_0\|^2_{L^2}\right)\\ &+CC_\beta^4\left(\|u_1\|^{\frac{4}{3}}_{L^1}\|\nabla u_1\|^{\frac{2}{3}}_{L^2}+\|u_0\|^{\frac{4}{5}}_{L^1}\|\Delta u_0\|^{\frac{6}{5}}_{L^2}+\|h_0\|^{\frac{4}{3}}_{L^1}\|\nabla h_0\|^{\frac{2}{3}}_{L^2}+\|\theta_0\|^{\frac{4}{3}}_{L^1}\|\nabla\theta_0\|^{\frac{2}{3}}_{L^2}\right)\end{aligned} \tag{4.105}$$

para todo $t\geq 0$, onde $C_\beta^4=\max\{C_\beta^2\tilde{C}^{\frac{4}{3}},C_\beta^3\tilde{C}^{\frac{4}{5}}\}$.

Portanto, segue de (4.99) e (4.105)

$$
\begin{aligned}
&\left(\int_{\mathbb{R}^3} \rho(\xi)^{-\frac{1}{\beta}} |\hat{u}_t(t)|^2 d\xi\right)^\beta + \left(\int_{\mathbb{R}^3} \rho(\xi)^{-\frac{1}{\beta}} |\xi|^2 |\hat{u}(t)|^2 d\xi\right)^\beta \\
&\leq 2^{\beta-1} \left(\int_{\xi\in A} |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}} |\hat{u}_t(t)|^2 d\xi\right)^\beta + 2^{\beta-1} \left(\int_{\xi\in A^c} |\xi|^{\frac{2}{\beta}} |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}} |\hat{u}_t(t)|^2 d\xi\right)^\beta \\
&+ 2^{\beta-1} \left(\int_{\xi\in A} |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}} |\xi|^2 |\hat{u}(t)|^2 d\xi\right)^\beta + 2^{\beta-1} \left(\int_{\xi\in A^c} |\xi|^{\frac{2}{\beta}+2} |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}} |\hat{u}(t)|^2 d\xi\right)^\beta \\
&\leq (2C)^\beta \Big\{ [3C_{\beta,1}C(1)^2]^\beta \left(\|u_1\|_{L^1}^2 + \|u_0\|_{L^1}^2 + \|h_0\|_{L^1}^2 + \|\theta_0\|_{L^1}^2\right)^\beta \\
&+ 2^{\beta-1} \left(\|\nabla u_1\|_{L^2}^2 + \|\Delta u_0\|_{L^2}^2 + \|\nabla h_0\|_{L^2}^2 + \|\nabla\theta_0\|_{L^2}^2\right)^\beta \\
&+ 2^{\beta-1}(C_\beta^4)^\beta \left(\|u_1\|_{L^1}^{\frac{4}{3}} \|\nabla u_1\|_{L^2}^{\frac{2}{3}} + \|u_0\|_{L^1}^{\frac{4}{5}} \|\Delta u_0\|_{L^2}^{\frac{6}{5}} + \|h_0\|_{L^1}^{\frac{4}{3}} \|\nabla h_0\|_{L^2}^{\frac{2}{3}} + \|\theta_0\|_{L^1}^{\frac{4}{3}} \|\nabla\theta_0\|_{L^2}^{\frac{2}{3}}\right)^\beta \Big\}
\end{aligned}
\tag{4.106}
$$

para todo $t \geq 0$.

As duas últimas integrais que aparecem no lado direito de (4.98) são estimadas por (4.70)

$$
\begin{aligned}
&\left(\int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{-\frac{2}{\beta}} |\hat{h}(t)|^2 d\xi\right)^\beta + \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{-\frac{2}{\beta}} |\hat{\theta}(t)|^2 d\xi\right)^\beta \\
&\leq (2C)^\beta \Big\{ [3C_{\beta,1}C(1)^2]^\beta (\|u_1\|_{L^1}^2 + \|u_0\|_{L^1}^2 + \|h_0\|_{L^1}^2 + \|\theta_0\|_{L^1}^2)^\beta \\
&+ (\|u_1\|_{L^2}^2 + \|\nabla u_0\|_{L^2}^2 + \|h_0\|_{L^2}^2 + \|\theta_0\|_{L^2}^2)^\beta \Big\},
\end{aligned}
\tag{4.107}
$$

para todo $t \geq 0$.

Usando (4.106) e (4.107) em (4.98) obtemos

$$
[E(t)]^{1+\beta} \leq C_1(\beta)(2C)^\beta \Big\{ 2[3C_{\beta,1}C(1)^2]^\beta N_{0,1}^\beta + 2^{\beta-1} P_0^\beta + 2^{\beta-1}(C_\beta^4)^\beta Q_0^\beta + M_0^\beta \Big\} F(t),
$$

ou ainda,

$$
[E(t)]^{1+\beta} \leq \overline{C}(\beta) \left\{ N_{0,1}^\beta + P_0^\beta + Q_0^\beta + M_0^\beta \right\} F(t),
$$

para todo $t \geq 0$, onde $\overline{C}(\beta) = C_1(\beta)(2C)^\beta \max\{2[3C_{\beta,1}C(1)^2]^\beta, 2^{\beta-1}, 2^{\beta-1}(C_\beta^4)^\beta, 1\}$. □

Demonstração do Teorema 11. A prova de (4.93) é semelhante a demonstração do Teorema 9, usando o Lema 6 no lugar do Lema 4. □

4.5 TAXAS DE DECAIMENTO PARA A ENERGIA TOTAL: TEOREMA 12

Nesta seção, vamos provar outro resultado para a energia total, $\mathcal{E}(t)$, associada a solução do sistema (3.1)-(3.6): o Teorema 12. Tal resultado apresenta taxas de decaimento mais rápidas quando comparada com as taxas obtidas no Teorema 11 da Seção 4.4, mas aqui precisamos exigir outra hipótese sobre os dados iniciais. As taxas obtidas no Teorema 9 (caso q=1) e no Teorema 12 são as mesmas, sendo que a diferença é a hipótese adicional sobre os dados iniciais além da regularidade dos mesmos.

Teorema 12. *Seja $\beta > 2$. Considere $(u_0, u_1, h_0, \theta_0) \in ([H^2(\mathbb{R}^3)]^3 \cap [W^{2,1}(\mathbb{R}^3)]^3) \times ([H^1(\mathbb{R}^3)]^3 \cap [W^{1,1}(\mathbb{R}^3)]^3) \times (\mathcal{H}_\sigma \cap [H^1(\mathbb{R}^3)]^3 \cap [W^{1,1}(\mathbb{R}^3)]^3) \times (H^1(\mathbb{R}^3) \cap W^{1,1}(\mathbb{R}^3))$. Então, existe uma constante $C(\beta) > 0$, dependendo de β, tal que a energia total associada a única solução $(u(t,x), h(t,x), \theta(t,x))$ do sistema (3.1)-(3.6) satisfaz*

$$\mathcal{E}(t) \leq C(\beta) I_{6,\beta} t^{-\frac{1}{\beta}}, \quad \forall t \geq T_0, \tag{4.108}$$

em que $T_0 > 0$ é uma constante dependendo dos dados iniciais e

$$I_{6,\beta} = \left(N_{0,1}^\beta + P_0^\beta + V_0^\beta + M_0^\beta \right)^{\frac{1}{\beta}},$$

sendo

$$P_0 = \|\nabla u_1\|_{L^2}^2 + \|\Delta u_0\|_{L^2}^2 + \|\nabla h_0\|_{L^2}^2 + \|\nabla \theta_0\|_{L^2}^2, \tag{4.109}$$

$$V_0 = \|\nabla u_1\|_{L^1}^2 + \|\Delta u_0\|_{L^1}^2 + \|\nabla h_0\|_{L^1}^2 + \|\nabla \theta_0\|_{L^1}^2, \tag{4.110}$$

$$N_{0,1} = \|u_1\|_{L^1}^2 + \|u_0\|_{L^1}^2 + \|h_0\|_{L^1}^2 + \|\theta_0\|_{L^1}^2 \tag{4.111}$$

e

$$M_0 = \|u_1\|_{L^2}^2 + \|\nabla u_0\|_{L^2}^2 + \|h_0\|_{L^2}^2 + \|\theta_0\|_{L^2}^2. \tag{4.112}$$

Analogamente a demonstração do Teorema 11, precisamos estimar as integrais que aparecem no lado direito de (4.98) na região fora do cubo A. Multiplicando (4.55) por $|\xi|^{\frac{2}{\beta}} |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}}$ e integrando sobre $\{\xi \in \mathbb{R}^3; \xi \in A^c\}$, obtemos

$$\begin{aligned} &\int_{\xi \in A^c} |\xi|^{\frac{2}{\beta}} |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}} |\hat{u}_t(t)|^2 d\xi + \int_{\xi \in A^c} |\xi|^{\frac{2}{\beta}+2} |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}} |\hat{u}(t)|^2 d\xi \\ &\leq C \int_{\xi \in A^c} |\xi|^{\frac{2}{\beta}} |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}} |\hat{u}_1|^2 d\xi + C \int_{\xi \in A^c} |\xi|^{\frac{2}{\beta}+2} |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}} |\hat{u}_0|^2 d\xi \\ &+ C \int_{\xi \in A^c} |\xi|^{\frac{2}{\beta}} |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}} |\hat{h}_0|^2 d\xi + C \int_{\xi \in A^c} |\xi|^{\frac{2}{\beta}} |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}} |\hat{\theta}_0|^2 d\xi \end{aligned} \tag{4.113}$$

para todo $t \geq 0$.

Agora, estimaremos a primeira integral que aparece no lado direto de (4.113). Observe que a terceira e quarta integrais são estimadas de maneira inteiramente análoga. Começamos separando a integral em duas integrais da seguinte forma

$$\begin{aligned} \int_{\xi \in A^c} |\xi|^{\frac{2}{\beta}} |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}} |\hat{u}_1|^2 d\xi &\leq \int_{\{\xi \in A^c\} \cap \{|\xi_3| \leq 1\}} |\xi|^{\frac{2}{\beta}} |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}} |\hat{u}_1|^2 d\xi \\ &+ \int_{\{\xi \in A^c\} \cap \{|\xi_3| \geq 1\}} |\xi|^{\frac{2}{\beta}} |\hat{u}_1|^2 d\xi \\ &= J_1 + J_2. \end{aligned}$$

Estimativa para J_2**:** Como $\beta > 2 > 1$, então $|\xi|^{\frac{2}{\beta}} \le |\xi|^2$ para $|\xi| \ge 1$. Assim,

$$J_2 \le \int_{\{\xi \in A^c\} \cap \{|\xi_3| \ge 1\}} |\xi|^2 |\hat{u}_1|^2 d\xi \le \|\nabla u_1\|_{L^2}^2.$$

Estimativa para J_1**:** Como $\beta > 2$ e $\nabla u_1 \in L^1$ temos

$$\begin{aligned} J_1 &\le \int_{\{\xi \in A^c\} \cap \{|\xi_3| \le 1\}} |\xi|^2 |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}} |\hat{u}_1|^2 d\xi \\ &\le \|\widehat{\nabla u_1}\|_{L^\infty}^2 \int_{|\xi_3| \le 1} |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}} d\xi_3 \\ &\le C_\beta^5 \|\widehat{\nabla u_1}\|_{L^\infty}^2, \end{aligned}$$

onde $C_\beta^5 = \int_{|\xi_3| \le 1} |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}} d\xi_3 < +\infty$.

Como a transformada de Fourier é um operador linear limitado de L^1 em L^∞, existe $\tilde{C} > 0$ tal que

$$J_1 \le C_\beta^5 \tilde{C}^2 \|\nabla u_1\|_{L^1}^2.$$

Pelas estimativas obtidas para J_1 e J_2 segue

$$\int_{\xi \in A^c} |\xi|^{\frac{2}{\beta}} |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}} |\hat{u}_1|^2 d\xi \le \|\nabla u_1\|_{L^2}^2 + C_\beta^5 \tilde{C}^2 \|\nabla u_1\|_{L^1}^2, \tag{4.114}$$

$$\int_{\xi \in A^c} |\xi|^{\frac{2}{\beta}} |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}} |\hat{h}_0|^2 d\xi \le \|\nabla h_0\|_{L^2}^2 + C_\beta^5 \tilde{C}^2 \|\nabla h_0\|_{L^1}^2 \tag{4.115}$$

e

$$\int_{\xi \in A^c} |\xi|^{\frac{2}{\beta}} |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}} |\hat{\theta}_0|^2 d\xi \le \|\nabla \theta_0\|_{L^2}^2 + C_\beta^5 \tilde{C}^2 \|\nabla \theta_0\|_{L^1}^2. \tag{4.116}$$

Agora, estimaremos a segunda integral que aparece no lado direito de (4.113). Começamos separando a integral em duas integrais da seguinte forma

$$\begin{aligned} \int_{\xi \in A^c} |\xi|^{\frac{2}{\beta}+2} |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}} |\hat{u}_0|^2 d\xi &\le \int_{\{\xi \in A^c\} \cap \{|\xi_3| \le 1\}} |\xi|^{\frac{2}{\beta}+2} |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}} |\hat{u}_0|^2 d\xi \\ &\quad + \int_{\{\xi \in A^c\} \cap \{|\xi_3| \ge 1\}} |\xi|^{\frac{2}{\beta}+2} |\hat{u}_0|^2 d\xi \\ &= K_1 + K_2. \end{aligned}$$

Estimativa para K_2**:** Como $\beta > 2 > 1$, então $|\xi|^{\frac{2}{\beta}+2} \le |\xi|^4$ para $|\xi| \ge 1$. Assim,

$$K_2 \le \int_{\{\xi \in A^c\} \cap \{|\xi_3| \ge 1\}} |\xi|^4 |\hat{u}_0|^2 d\xi \le \|\Delta u_0\|_{L^2}^2.$$

Estimativa para K_1: Como $\beta > 2 > 1$ e $\Delta u_0 \in L^1$ então

$$\begin{aligned} K_1 &\leq \int_{\{\xi \in A^c\}\cap\{|\xi_3|\leq 1\}} |\xi|^4 |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}} |\hat{u}_0|^2 d\xi \\ &\leq \|\widehat{\Delta u_0}\|_{L^\infty}^2 \int_{|\xi_3|\leq 1} |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}} d\xi_3 \\ &= C_\beta^5 \|\widehat{\Delta u_0}\|_{L^\infty}^2, \end{aligned}$$

onde $C_\beta^5 = \int_{|\xi_3|\leq 1} |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}} d\xi_3$.

Como a transformada de Fourier é um operador linear limitado de L^1 em L^∞, existe $\tilde{C} > 0$ tal que

$$K_1 \leq C_\beta^5 \tilde{C}^2 \|\Delta u_0\|_{L^1}^2.$$

Pelas estimativas obtidas para K_1 e K_2 segue

$$\int_{\xi\in A^c} |\xi|^{\frac{2}{\beta}+2} |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}} |\hat{u}_0|^2 d\xi \leq \|\Delta u_0\|_{L^2}^2 + C_\beta^5 \tilde{C}^2 \|\Delta u_0\|_{L^1}^2. \tag{4.117}$$

As estimativas (4.114)-(4.117) em (4.113) nos fornece

$$\begin{aligned} &\int_{\xi\in A^c} |\xi|^{\frac{2}{\beta}} |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}} |\hat{u}_t(t)|^2 d\xi + \int_{\xi\in A^c} |\xi|^{\frac{2}{\beta}+2} |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}} |\hat{u}(t)|^2 d\xi \\ &\leq C\left(\|\nabla u_1\|_{L^2}^2 + \|\Delta u_0\|_{L^2}^2 + \|\nabla h_0\|_{L^2}^2 + \|\nabla \theta_0\|_{L^2}^2\right) \\ &+ C C_\beta^5 \tilde{C}^2 \left(\|\nabla u_1\|_{L^1}^2 + \|\Delta u_0\|_{L^1}^2 + \|\nabla h_0\|_{L^1}^2 + \|\nabla \theta_0\|_{L^1}^2\right) \end{aligned} \tag{4.118}$$

para todo $t \geq 0$.

A demonstração do Teorema 12 segue da mesma forma que a demonstração do Teorema 11.

4.6 TAXAS DE DECAIMENTO PARA A NORMA L^2 DA SOLUÇÃO: TEOREMA 13

Nesta seção, provaremos o Teorema 13 que nos fornece uma taxa de decaimento para a norma L^2 da solução u do sistema (3.1)-(3.6). Além disso, provamos que as normas $\|\Delta u\|_{L^2}$ e $\|\nabla u_t\|$ são limitadas por uma constante que depende dos dados iniciais. Tais estimativas serão usadas, no Capítulo 5, no estudo do comportamento assintótico da energia total associada ao problema semilinear (1.1)-(1.6).

Teorema 13. *Seja $\beta > 6$. Considere $(u_0, u_1, h_0, \theta_0) \in ([H^1(\mathbb{R}^3)]^3 \cap [L^1(\mathbb{R}^3)]^3) \times ([L^2(\mathbb{R}^3)]^3 \cap [L^1(\mathbb{R}^3)]^3) \times (\mathcal{H}_\sigma \cap [L^1(\mathbb{R}^3)]^3) \times (L^2(\mathbb{R}^3) \cap L^1(\mathbb{R}^3))$. Então, existe uma constante $C(\beta) > 0$ dependendo de β tal que*

$$\|u(t)\|_{L^2}^2 \leq \frac{2}{\mu} C(\beta) J_{0,\beta} t^{-\frac{1}{\beta}}, \quad \forall t \geq T_0,$$

em que $T_0 > 0$ é uma constante dependendo dos dados iniciais e

$$J_{0,\beta} = \left(N_{0,1}^{\beta} + M_0^{\beta} + R_0^{\beta} + S_0^{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}},$$

sendo

$$M_0 = \|u_1\|_{L^2}^2 + \|\nabla u_0\|_{L^2}^2 + \|h_0\|_{L^2}^2 + \|\theta_0\|_{L^2}^2, \tag{4.119}$$

$$R_0 = \|u_1\|_{L^1}^2 + \|u_0\|_{L^1}^{\frac{4}{3}}\|\nabla u_0\|_{L^2}^{\frac{2}{3}} + \|h_0\|_{L^1}^2 + \|\theta_0\|_{L^1}^2, \tag{4.120}$$

$$N_{0,1} = \|u_1\|_{L^1}^2 + \|u_0\|_{L^1}^2 + \|h_0\|_{L^1}^2 + \|\theta_0\|_{L^1}^2 \tag{4.121}$$

e

$$S_0 = \|u_1\|_{L^2}^2 + \|u_0\|_{L^2}^2 + \|h_0\|_{L^2}^2 + \|\theta_0\|_{L^2}^2. \tag{4.122}$$

Além disso, para $(u_0, u_1, h_0, \theta_0) \in [H^2(\mathbb{R}^3)]^3 \times [H^1(\mathbb{R}^3)]^3 \times (\mathcal{H}_\sigma \cap [H^1(\mathbb{R}^3)]^3) \times H^1(\mathbb{R}^3)$ temos

$$\|\nabla u_t(t)\|_{L^2}^2 + \|\Delta u(t)\|_{L^2}^2 \leq C\left(\|\nabla u_1\|_{L^2}^2 + \|\Delta u_0\|_{L^2}^2 + \|\nabla h_0\|_{L^2}^2 + \|\nabla\theta_0\|_{L^2}^2\right), \tag{4.123}$$

para todo $t \geq 0$.

Lema 7. *Assumindo as hipóteses do Teorema 13, existe uma constante $\overline{C}(\beta) > 0$ dependendo de β tal que*

$$[\tilde{E}(t)]^{1+\beta} \leq \overline{C}(\beta)\left\{N_{0,1}^{\beta} + M_0^{\beta} + R_0^{\beta} + S_0^{\beta}\right\}\tilde{F}(t),$$

para todo $t \geq 0$, onde $\tilde{E}(t)$ é definida por

$$\tilde{E}(t) := \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}(|\xi|^{-2}|\hat{u}_t(t)|^2 + \mu|\hat{u}(t)|^2 + (\lambda+\mu)|\xi|^{-2}|(\xi\cdot\hat{u}(t))|^2 + |\xi|^{-2}|\hat{h}(t)|^2 + |\xi|^{-2}|\hat{\theta}(t)|^2)d\xi$$

e $\tilde{F}(t)$ é definida por

$$\tilde{F}(t) := \int_{\mathbb{R}^3}(\rho(\xi)|\xi|^{-2}|\hat{u}_t(t)|^2 + \rho(\xi)|\hat{u}(t)|^2 + |\hat{h}(t)|^2 + |\hat{\theta}(t)|^2)d\xi.$$

Demonstração. Temos

$$\begin{aligned}
[\tilde{E}(t)]^{1+\beta} &= \left(\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}\{|\xi|^{-2}|\hat{u}_t(t)|^2 + \mu|\hat{u}(t)|^2 + (\lambda+\mu)|\xi|^{-2}|(\xi\cdot\hat{u}(t))|^2 + |\xi|^{-2}|\hat{h}(t)|^2\right.\\
&\quad \left. + |\xi|^{-2}|\hat{\theta}(t)|^2\}d\xi\right)^{1+\beta}\\
&\leq C_1(\beta)\left(\int_{\mathbb{R}^3}|\xi|^{-2}|\hat{u}_t(t)|^2 d\xi\right)^{1+\beta} + C_1(\beta)\left(\int_{\mathbb{R}^3}|\hat{u}(t)|^2 d\xi\right)^{1+\beta}\\
&\quad + C_1(\beta)\left(\int_{\mathbb{R}^3}|\xi|^{-2}|\hat{h}(t)|^2 d\xi\right)^{1+\beta} + C_1(\beta)\left(\int_{\mathbb{R}^3}|\xi|^{-2}|\hat{\theta}(t)|^2 d\xi\right)^{1+\beta},
\end{aligned} \tag{4.124}$$

para todo $t \geq 0$. Denotando

$$I_1(t) = \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{-2}|\hat{u}_t(t)|^2 d\xi\right)^{1+\beta}, \quad I_2(t) = \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\hat{u}(t)|^2 d\xi\right)^{1+\beta},$$
$$I_3(t) = \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{-2}|\hat{h}(t)|^2 d\xi\right)^{1+\beta} \text{ e } I_4(t) = \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{-2}|\hat{\theta}(t)|^2 d\xi\right)^{1+\beta},$$

vamos estimar cada uma dessas integrais usando a desigualdade de Hölder com $L^{1+\beta}$ e $L^{\frac{1+\beta}{\beta}}$.

(i)

$$\begin{aligned}
I_1(t) &= \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{-2}|\hat{u}_t(t)|^2 d\xi\right)^{1+\beta}\\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^3} \rho(\xi)^{-\frac{1}{1+\beta}}\rho(\xi)^{\frac{1}{1+\beta}}|\xi|^{-2+\frac{2}{1+\beta}}|\xi|^{-\frac{2}{1+\beta}}|\hat{u}_t(t)|^{2-\frac{2}{1+\beta}}|\hat{u}_t(t)|^{\frac{2}{1+\beta}} d\xi\right)^{1+\beta}\\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^3} \rho(\xi)^{-\frac{1}{\beta}}|\xi|^{-2}|\hat{u}_t(t)|^2 d\xi\right)^{\beta}\int_{\mathbb{R}^3} \rho(\xi)|\xi|^{-2}|\hat{u}_t(t)|^2 d\xi\\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^3} \rho(\xi)^{-\frac{1}{\beta}}|\xi|^{-2}|\hat{u}_t(t)|^2 d\xi\right)^{\beta}\tilde{F}(t);
\end{aligned} \tag{4.125}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
I_2(t) &= \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\hat{u}(t)|^2 d\xi\right)^{1+\beta}\\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^3} \rho(\xi)^{-\frac{1}{1+\beta}}\rho(\xi)^{\frac{1}{1+\beta}}|\hat{u}(t)|^{2-\frac{2}{1+\beta}}|\hat{u}(t)|^{\frac{2}{1+\beta}} d\xi\right)^{1+\beta}\\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^3} \rho(\xi)^{-\frac{1}{\beta}}|\hat{u}(t)|^2 d\xi\right)^{\beta}\int_{\mathbb{R}^3} \rho(\xi)|\hat{u}(t)|^2 d\xi\\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^3} \rho(\xi)^{-\frac{1}{\beta}}|\hat{u}(t)|^2 d\xi\right)^{\beta}\tilde{F}(t);
\end{aligned} \tag{4.126}$$

(iii)

$$\begin{aligned}
I_3(t) &= \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{-2}|\hat{h}(t)|^2 d\xi\right)^{1+\beta} = \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{-2}|\hat{h}(t)|^{2-\frac{2}{1+\beta}}|\hat{h}(t)|^{\frac{2}{1+\beta}} d\xi\right)^{1+\beta}\\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{-\frac{2}{\beta}-2}|\hat{h}(t)|^2 d\xi\right)^{\beta}\int_{\mathbb{R}^3} |\hat{h}(t)|^2 d\xi\\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{-\frac{2}{\beta}-2}|\hat{h}(t)|^2 d\xi\right)^{\beta}\tilde{F}(t);
\end{aligned} \tag{4.127}$$

(iv)

$$
\begin{aligned}
I_4(t) = \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{-2} |\hat{\theta}(t)|^2 d\xi \right)^{1+\beta} &= \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{-2} |\hat{\theta}(t)|^{2-\frac{2}{1+\beta}} |\hat{\theta}(t)|^{\frac{2}{1+\beta}} d\xi \right)^{1+\beta} \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{-\frac{2}{\beta}-2} |\hat{\theta}(t)|^2 d\xi \right)^{\beta} \int_{\mathbb{R}^3} |\hat{\theta}(t)|^2 d\xi \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{-\frac{2}{\beta}-2} |\hat{\theta}(t)|^2 d\xi \right)^{\beta} \tilde{F}(t). \qquad (4.128)
\end{aligned}
$$

De (4.125)-(4.128) em (4.124), obtemos

$$
\begin{aligned}
[\tilde{E}(t)]^{1+\beta} \leq C_1(\beta) \Bigg\{ &\left(\int_{\mathbb{R}^3} \rho(\xi)^{-\frac{1}{\beta}} |\xi|^{-2} |\hat{u}_t(t)|^2 d\xi \right)^{\beta} + \left(\int_{\mathbb{R}^3} \rho(\xi)^{-\frac{1}{\beta}} |\hat{u}(t)|^2 d\xi \right)^{\beta} \\
&+ \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{-\frac{2}{\beta}-2} |\hat{h}(t)|^2 d\xi \right)^{\beta} + \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{-\frac{2}{\beta}-2} |\hat{\theta}(t)|^2 d\xi \right)^{\beta} \Bigg\} \tilde{F}(t), \qquad (4.129)
\end{aligned}
$$

para todo $t \geq 0$.

Resta provar que cada uma das integrais, que aparecem no lado direito de (4.129), é limitada por constante que depende dos dados iniciais. Para isso, iremos dividir cada integral em duas regiões: região dentro do cubo A ($\xi \in A$) e região fora do cubo A ($\xi \in A^c$).

Primeiramente, estimaremos as duas primeiras integrais aparecendo no lado direito de (4.129). Multiplicando por $|\xi|^{-2}$ a estimativa (4.55) que aparece na demonstração do Lema 4 na Seção 4.1, segue

$$
|\xi|^{-2} |\hat{u}_t(t)|^2 + |\hat{u}(t)|^2 \leq C|\xi|^{-2} |\hat{u}_1|^2 + C|\hat{u}_0|^2 + C|\xi|^{-2} |\hat{h}_0|^2 + C|\xi|^{-2} |\hat{\theta}_0|^2, \qquad (4.130)
$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^3$, $\xi \neq 0$ e $t \geq 0$. Na região dentro do cubo A tem-se $\rho(\xi) = \xi_3^2$. Logo, multiplicando (4.130) por $|\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}}$ e integrando sobre $\{\xi \in \mathbb{R}^3; \xi \in A\}$, obtemos

$$
\begin{aligned}
&\int_{\xi \in A} |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}} |\xi|^{-2} |\hat{u}_t(t)|^2 d\xi + \int_{\xi \in A} |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}} |\hat{u}(t)|^2 d\xi \\
&\leq C \int_{\xi \in A} |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}} |\xi|^{-2} |\hat{u}_1|^2 d\xi + C \int_{\xi \in A} |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}} |\hat{u}_0|^2 d\xi + C \int_{\xi \in A} |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}} |\xi|^{-2} |\hat{h}_0|^2 d\xi \\
&+ C \int_{\xi \in A} |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}} |\xi|^{-2} |\hat{\theta}_0|^2 d\xi \qquad (4.131)
\end{aligned}
$$

para todo $t \geq 0$.

Vamos agora estimar a primeira integral que aparece no lado direito de (4.131). Para isso escrevemos

$$
\begin{aligned}
\int_{\xi \in A} |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}} |\xi|^{-2} |\hat{u}_1|^2 d\xi &\leq \int_{\{\xi \in A\} \cap \{|\xi| \leq 1\}} |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}} |\xi|^{-2} |\hat{u}_1|^2 d\xi \\
&+ \int_{\{\xi \in A\} \cap \{1 \leq |\xi| \leq \sqrt{3}\}} |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}} |\hat{u}_1|^2 d\xi \\
&= I_1 + I_2.
\end{aligned}
$$

Estimativa para I_2: Como $u_1 \in [L^1(\mathbb{R}^3)]^3$ e $\beta > 6 > 2$ temos

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int_{\{\xi \in A\} \cap \{1 \leq |\xi| \leq \sqrt{3}\}} |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}} |\hat{u}_1|^2 d\xi \\
&\leq \|\hat{u}_1\|_{L^\infty}^2 \int_{\xi \in A} |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}} d\xi \\
&\leq \tilde{C} C_\beta^1 \|u_1\|_{L^1}^2,
\end{aligned}
$$

em que na última desigualdade usamos o fato de a transformada de Fourier ser um operador linear limitado de $L^1(\mathbb{R}^3)$ em $L^\infty(\mathbb{R}^3)$.

Estimativa para I_1: Como $u_1 \in [L^1(\mathbb{R}^3)]^3$ e usando a desigualdade de Hölder com $L^{\frac{(6+\beta)}{4}}$ e $L^{\frac{(6+\beta)}{(2+\beta)}}$, obtemos

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_{\{\xi \in A\} \cap \{|\xi| \leq 1\}} |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}} |\xi|^{-2} |\hat{u}_1|^2 d\xi \\
&\leq \|\hat{u}_1\|_{L^\infty}^2 \left(\int_{\xi \in A} |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}\frac{(6+\beta)}{4}} d\xi \right)^{\frac{4}{(6+\beta)}} \left(\int_{|\xi| \leq 1} |\xi|^{-2\frac{(6+\beta)}{(2+\beta)}} d\xi \right)^{\frac{(2+\beta)}{(6+\beta)}}.
\end{aligned}
$$

Note que

$$
\left(\int_{|\xi| \leq 1} |\xi|^{-2\frac{(6+\beta)}{(2+\beta)}} d\xi \right)^{\frac{(2+\beta)}{(6+\beta)}} = C_\beta^2 < +\infty,
$$

pois $-2\frac{(6+\beta)}{(2+\beta)} + 3 = \frac{\beta-6}{2+\beta} > 0$, e

$$
\left(\int_{\xi \in A} |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}\frac{(6+\beta)}{4}} d\xi \right)^{\frac{4}{(6+\beta)}} = \left(\frac{8}{1 - \frac{2}{\beta}\frac{(6+\beta)}{4}} \right)^{\frac{4}{(6+\beta)}} = C_\beta^3 < +\infty
$$

pois $\frac{(6+\beta)}{2\beta} < 1$, ou seja, $\beta > 6$.

Então

$$
I_1 \leq C_\beta^2 C_\beta^3 \|\hat{u}_1\|_{L^\infty}^2.
$$

Além disso, como $u_1 \in [L^1(\mathbb{R}^3)]^3$

$$
I_1 \leq C_\beta^2 C_\beta^3 \tilde{C} \|u_1\|_{L^1}^2.
$$

Portanto, com as estimativas de I_1 e I_2 obtemos

$$
\int_{\xi \in A} |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}} |\xi|^{-2} |\hat{u}_1|^2 d\xi \leq C_\beta^2 C_\beta^3 \tilde{C} \|u_1\|_{L^1}^2 + \tilde{C} C_\beta^1 \|u_1\|_{L^1}^2 = \tilde{C}(C_\beta^2 C_\beta^3 + C_\beta^1) \|u_1\|_{L^1}^2. \tag{4.132}
$$

Analogamente, como $h_0 \in [L^1(\mathbb{R}^3)]^3$ e $\theta_0 \in L^1(\mathbb{R}^3)$, temos que a terceira e quarta integrais que aparecem no lado direito de (4.131) são estimadas da seguinte forma

$$\int_{\xi \in A} |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}} |\xi|^{-2} |\hat{h}_0|^2 d\xi \leq \tilde{C}(C_\beta^2 C_\beta^3 + C_\beta^1) \|h_0\|_{L^1}^2 \tag{4.133}$$

e

$$\int_{\xi \in A} |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}} |\xi|^{-2} |\hat{\theta}_0|^2 d\xi \leq \tilde{C}(C_\beta^2 C_\beta^3 + C_\beta^1) \|\theta_0\|_{L^1}^2. \tag{4.134}$$

Por último, como $u_0 \in [L^1(\mathbb{R}^3)]^3$, a segunda integral que aparece no lado direito de (4.131) é estimada de maneira análoga a estimativa para I_2. Assim

$$\int_{\xi \in A} |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}} |\hat{u}_0|^2 d\xi \leq \tilde{C} C_\beta^1 \|u_0\|_{L^1}^2, \tag{4.135}$$

pois $\beta > 6 > 2$.

Agora, usando as estimativas (4.132)-(4.135) em (4.131) segue que

$$\begin{aligned}
&\int_{\xi \in A} |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}} |\xi|^{-2} |\hat{u}_t(t)|^2 d\xi + \int_{\xi \in A} |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}} |\hat{u}(t)|^2 d\xi \\
&\leq C\tilde{C}(C_\beta^2 C_\beta^3 + C_\beta^1)(\|u_1\|_{L^1}^2 + \|h_0\|_{L^1}^2 + \|\theta_0\|_{L^1}^2) + C\tilde{C} C_\beta^1 \|u_0\|_{L^1}^2 \\
&\leq C\tilde{C}(C_\beta^2 C_\beta^3 + C_\beta^1)(\|u_1\|_{L^1}^2 + \|h_0\|_{L^1}^2 + \|\theta_0\|_{L^1}^2 + \|u_0\|_{L^1}^2)
\end{aligned} \tag{4.136}$$

para todo $t \geq 0$.

Por outro lado, na região fora do cubo A temos $\rho(\xi) = \frac{\xi_3^2}{|\xi|^2}$. Então, multiplicando (4.130) por $|\xi|^{\frac{2}{\beta}} |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}}$ e integrando sobre $\{\xi \in \mathbb{R}^3; \xi \in A^c\}$, obtemos

$$\begin{aligned}
&\int_{\xi \in A^c} |\xi|^{\frac{2}{\beta}-2} |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}} |\hat{u}_t(t)|^2 d\xi + \int_{\xi \in A^c} |\xi|^{\frac{2}{\beta}} |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}} |\hat{u}(t)|^2 d\xi \\
&\leq C \int_{\xi \in A^c} |\xi|^{\frac{2}{\beta}-2} |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}} |\hat{u}_1|^2 d\xi + C \int_{\xi \in A^c} |\xi|^{\frac{2}{\beta}} |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}} |\hat{u}_0|^2 d\xi \\
&+ C \int_{\xi \in A^c} |\xi|^{\frac{2}{\beta}-2} |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}} |\hat{h}_0|^2 d\xi + C \int_{\xi \in A^c} |\xi|^{\frac{2}{\beta}-2} |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}} |\hat{\theta}_0|^2 d\xi \\
&\leq C \int_{\xi \in A^c} |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}} |\hat{u}_1|^2 d\xi + C \int_{\xi \in A^c} |\xi|^{\frac{2}{\beta}} |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}} |\hat{u}_0|^2 d\xi + C \int_{\xi \in A^c} |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}} |\hat{h}_0|^2 d\xi \\
&+ C \int_{\xi \in A^c} |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}} |\hat{\theta}_0|^2 d\xi
\end{aligned} \tag{4.137}$$

para todo $t \geq 0$, em que na última desigualdade usamos o fato de $|\xi| \geq 1$ e $\beta > 6 > 1$.

Agora, estimaremos a primeira integral que aparace no lado direito de (4.137), as terceira e quarta integrais são estimadas de maneira análoga. Como $u_1 \in [L^1(\mathbb{R}^3)]^3 \cap [L^2(\mathbb{R}^3)]^3$ temos

$$\begin{aligned}
\int_{\xi \in A^c} |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}} |\hat{u}_1|^2 d\xi &\leq \int_{\{\xi \in A^c\} \cap \{|\xi_3| \leq 1\}} |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}} |\hat{u}_1|^2 d\xi + \int_{\{\xi \in A^c\} \cap \{|\xi_3| \geq 1\}} |\hat{u}_1|^2 d\xi \\
&\leq \|\hat{u}_1\|_{L^\infty}^2 \int_{|\xi_3| \leq 1} |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}} d\xi_3 + \|u_1\|_{L^2}^2 \\
&\leq \tilde{C}^2 C_\beta^5 \|u_1\|_{L^1}^2 + \|u_1\|_{L^2}^2
\end{aligned} \tag{4.138}$$

onde $C_\beta^5 = \int_{|\xi_3|\leq 1} |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}} d\xi_3$.

Sendo $h_0 \in [L^1(\mathbb{R}^3)]^3 \cap [L^2(\mathbb{R}^3)]^3$ e $\theta_0 \in L^1(\mathbb{R}^3) \cap L^2(\mathbb{R}^3)$ temos

$$\int_{\xi\in A^c} |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}} |\hat{h}_0|^2 d\xi \leq \tilde{C}^2 C_\beta^5 \|h_0\|_{L^1}^2 + \|h_0\|_{L^2}^2 \tag{4.139}$$

e

$$\int_{\xi\in A^c} |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}} |\hat{\theta}_0|^2 d\xi \leq \tilde{C}^2 C_\beta^5 \|\theta_0\|_{L^1}^2 + \|\theta_0\|_{L^2}^2. \tag{4.140}$$

Seguindo como em (4.101) obtemos a seguinte estimativa para a segunda integral que aparece no lado direto de (4.137)

$$\int_{\xi\in A^c} |\xi|^{\frac{2}{\beta}} |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}} |\hat{u}_0|^2 d\xi \leq \|\nabla u_0\|_{L^2}^2 + C_\beta^2 \tilde{C}^{\frac{4}{3}} \|u_0\|_{L^1}^{\frac{4}{3}} \|\nabla u_0\|_{L^2}^{\frac{2}{3}}. \tag{4.141}$$

As estimativas (4.138)-(4.141) em (4.137) nos fornece

$$\begin{aligned}
&\int_{\xi\in A^c} |\xi|^{\frac{2}{\beta}-2} |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}} |\hat{u}_t(t)|^2 d\xi + \int_{\xi\in A^c} |\xi|^{\frac{2}{\beta}} |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}} |\hat{u}(t)|^2 d\xi \\
&\leq C(\|u_1\|_{L^2}^2 + \|\nabla u_0\|_{L^2}^2 + \|h_0\|_{L^2}^2 + \|\theta_0\|_{L^2}^2) \\
&+ CC_1(\|u_1\|_{L^1}^2 + \|u_0\|_{L^1}^{\frac{4}{3}} \|\nabla u_0\|_{L^2}^{\frac{2}{3}} + \|h_0\|_{L^1}^2 + \|\theta_0\|_{L^1}^2)
\end{aligned} \tag{4.142}$$

para todo $t \geq 0$, onde $C_1 = \max\{C_\beta^5 \tilde{C}^2, C_\beta^2 \tilde{C}^{\frac{4}{3}}\}$

Portanto, segue de (4.136) e (4.142)

$$\begin{aligned}
&\left(\int_{\mathbb{R}^3} \rho(\xi)^{-\frac{1}{\beta}} |\xi|^{-2} |\hat{u}_t(t)|^2 d\xi\right)^\beta + \left(\int_{\mathbb{R}^3} \rho(\xi)^{-\frac{1}{\beta}} |\hat{u}(t)|^2 d\xi\right)^\beta \\
&\leq 2^{\beta-1} \left(\int_{\xi\in A} |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}} |\xi|^{-2} |\hat{u}_t(t)|^2 d\xi\right)^\beta + 2^{\beta-1} \left(\int_{\xi\in A^c} |\xi|^{\frac{2}{\beta}-2} |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}} |\hat{u}_t(t)|^2 d\xi\right)^\beta \\
&+ 2^{\beta-1} \left(\int_{\xi\in A} |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}} |\hat{u}(t)|^2 d\xi\right)^\beta + 2^{\beta-1} \left(\int_{\xi\in A^c} |\xi|^{\frac{2}{\beta}} |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}} |\hat{u}(t)|^2 d\xi\right)^\beta \\
&\leq (2C)^\beta \Big\{ \tilde{C}^\beta (C_\beta^2 C_\beta^3 + C_\beta^1)^\beta \left(\|u_1\|_{L^1}^2 + \|h_0\|_{L^1}^2 + \|\theta_0\|_{L^1}^2 + \|u_0\|_{L^1}^2\right)^\beta \\
&+ (\|u_1\|_{L^2}^2 + \|\nabla u_0\|_{L^2}^2 + \|h_0\|_{L^2}^2 + \|\theta_0\|_{L^2}^2)^\beta \\
&+ (C_1)^\beta (\|u_1\|_{L^1}^2 + \|u_0\|_{L^1}^{\frac{4}{3}} \|\nabla u_0\|_{L^2}^{\frac{2}{3}} + \|h_0\|_{L^1}^2 + \|\theta_0\|_{L^1}^2)^\beta \Big\}
\end{aligned} \tag{4.143}$$

para todo $t \geq 0$.

Agora, vamos estimar as duas últimas integrais que aparecem no lado direito de (4.129). Pela estimativa (4.54) que aparece na demonstração do Teorema 9 também temos

$$|\hat{h}(t)|^2 + |\hat{\theta}(t)|^2 \leq C|\hat{u}_1|^2 + C|\xi|^2 |\hat{u}_0|^2 + C|\hat{h}_0|^2 + C|\hat{\theta}_0|^2, \tag{4.144}$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^3$ e $t \geq 0$. Multiplicando (4.144) por $|\xi|^{-\frac{2}{\beta}-2}$ e integrando sobre $\{\xi \in \mathbb{R}^3; \xi \in A\}$, obtemos

$$\begin{aligned}
&\int_{\xi\in A} |\xi|^{-\frac{2}{\beta}-2}|\hat{h}(t)|^2 d\xi + \int_{\xi\in A} |\xi|^{-\frac{2}{\beta}-2}|\hat{\theta}(t)|^2 d\xi \\
&\leq C\int_{\xi\in A} |\xi|^{-\frac{2}{\beta}-2}|\hat{u}_1|^2 d\xi + C\int_{\xi\in A} |\xi|^{-\frac{2}{\beta}}|\hat{u}_0|^2 d\xi + C\int_{\xi\in A} |\xi|^{-\frac{2}{\beta}-2}|\hat{h}_0|^2 d\xi \\
&+ C\int_{\xi\in A} |\xi|^{-\frac{2}{\beta}-2}|\hat{\theta}_0|^2 d\xi \\
&\leq C\int_{\xi\in A} |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}}|\xi|^{-2}|\hat{u}_1|^2 d\xi + C\int_{\xi\in A} |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}}|\hat{u}_0|^2 d\xi + C\int_{\xi\in A} |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}}|\xi|^{-2}|\hat{h}_0|^2 d\xi \\
&+ C\int_{\xi\in A} |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}}|\xi|^{-2}|\hat{\theta}_0|^2 d\xi
\end{aligned} \tag{4.145}$$

para todo $t \geq 0$.

Da mesma forma que estimamos (4.131) obtemos

$$\begin{aligned}
&\int_{\xi\in A} |\xi|^{-\frac{2}{\beta}-2}|\hat{h}(t)|^2 d\xi + \int_{\xi\in A} |\xi|^{-\frac{2}{\beta}-2}|\hat{\theta}(t)|^2 d\xi \\
&\leq C\tilde{C}(C_\beta^2 C_\beta^3 + C_\beta^1)(\|u_1\|_{L^1}^2 + \|h_0\|_{L^1}^2 + \|\theta_0\|_{L^1}^2 + \|u_0\|_{L^1}^2)
\end{aligned} \tag{4.146}$$

para todo $t \geq 0$.

Por outro lado, multiplicando (4.144) por $|\xi|^{-\frac{2}{\beta}-2}$ e integrando sobre $\{\xi \in \mathbb{R}^3; \xi \in A^c\}$, temos

$$\begin{aligned}
&\int_{\xi\in A^c} |\xi|^{-\frac{2}{\beta}-2}|\hat{h}(t)|^2 d\xi + \int_{\xi\in A^c} |\xi|^{-\frac{2}{\beta}-2}|\hat{\theta}(t)|^2 d\xi \\
&\leq C\Big(\int_{\xi\in A^c} |\xi|^{-\frac{2}{\beta}-2}|\hat{u}_1|^2 d\xi + \int_{\xi\in A^c} |\xi|^{-\frac{2}{\beta}}|\hat{u}_0|^2 d\xi + \int_{\xi\in A^c} |\xi|^{-\frac{2}{\beta}-2}|\hat{h}_0|^2 d\xi \\
&+ \int_{\xi\in A^c} |\xi|^{-\frac{2}{\beta}-2}|\hat{\theta}_0|^2 d\xi\Big) \\
&\leq C\left(\int_{\xi\in A^c} |\hat{u}_1|^2 d\xi + \int_{\xi\in A^c} |\hat{u}_0|^2 d\xi + \int_{\xi\in A^c} |\hat{h}_0|^2 d\xi + \int_{\xi\in A^c} |\hat{\theta}_0|^2 d\xi\right) \\
&\leq C(\|u_1\|_{L^2}^2 + \|u_0\|_{L^2}^2 + \|h_0\|_{L^2}^2 + \|\theta_0\|_{L^2}^2),
\end{aligned} \tag{4.147}$$

para todo $t \geq 0$, pois para $\xi \in A^c$ temos $|\xi| \geq 1$.

Logo, (4.146) e (4.147) nos fornece

$$
\begin{aligned}
&\left(\int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{-\frac{2}{\beta}-2}|\hat{h}(t)|^2 d\xi\right)^{\beta} + \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{-\frac{2}{\beta}-2}|\hat{\theta}(t)|^2 d\xi\right)^{\beta} \\
&\leq 2^{\beta-1}\left(\int_{\xi\in A} |\xi|^{-\frac{2}{\beta}-2}|\hat{h}(t)|^2 d\xi\right)^{\beta} + 2^{\beta-1}\left(\int_{\xi\in A^c} |\xi|^{-\frac{2}{\beta}-2}|\hat{h}(t)|^2 d\xi\right)^{\beta} \\
&+ 2^{\beta-1}\left(\int_{\xi\in A} |\xi|^{-\frac{2}{\beta}-2}|\hat{\theta}(t)|^2 d\xi\right)^{\beta} + 2^{\beta-1}\left(\int_{\xi\in A^c} |\xi|^{-\frac{2}{\beta}-2}|\hat{\theta}(t)|^2 d\xi\right)^{\beta} \\
&\leq (2C)^{\beta}\Big\{\tilde{C}^{\beta}(C_{\beta}^2 C_{\beta}^3 + C_{\beta}^1)^{\beta}(\|u_1\|_{L^1}^2 + \|u_0\|_{L^1}^2 + \|h_0\|_{L^1}^2 + \|\theta_0\|_{L^1}^2)^{\beta} \\
&+ (\|u_1\|_{L^2}^2 + \|u_0\|_{L^2}^2 + \|h_0\|_{L^2}^2 + \|\theta_0\|_{L^2}^2)^{\beta}\Big\}, \qquad (4.148)
\end{aligned}
$$

para todo $t \geq 0$.

Usando (4.143) e (4.148) em (4.129) chegamos a

$$[\tilde{E}(t)]^{1+\beta} \leq C_1(\beta)(2C)^{\beta}\Big\{2\tilde{C}^{\beta}(C_{\beta}^2 C_{\beta}^3 + C_{\beta}^1)^{\beta} N_{0,1}^{\beta} + M_0^{\beta} + (C_1)^{\beta} R_0^{\beta} + S_0^{\beta}\Big\}\tilde{F}(t),$$

ou ainda,

$$[\tilde{E}(t)]^{1+\beta} \leq \overline{C}(\beta)\left\{N_{0,1}^{\beta} + M_0^{\beta} + R_0^{\beta} + S_0^{\beta}\right\}\tilde{F}(t),$$

para todo $t \geq 0$, onde $\overline{C}(\beta) = C_1(\beta)(2C)^{\beta}\max\{2\tilde{C}^{\beta}(C_{\beta}^2 C_{\beta}^3 + C_{\beta}^1)^{\beta}, (C_1)^{\beta}, 1\}$. □

Demonstração do Teorema 13. Primeiramente, observe que por Plancherel temos

$$
\begin{aligned}
\|u(t)\|_{L^2}^2 &= \|\hat{u}(t)\|_{L^2}^2 \\
&\leq \frac{2}{2\mu}\int_{\mathbb{R}^3}(|\xi|^{-2}|\hat{u}_t(t)|^2 + \mu|\hat{u}(t)|^2 + (\lambda+\mu)|\xi|^{-2}|(\xi\cdot\hat{u}(t))|^2 + |\xi|^{-2}|\hat{h}(t)|^2 \\
&+ |\xi|^{-2}|\hat{\theta}(t)|^2)d\xi \\
&= \frac{2}{\mu}\tilde{E}(t),
\end{aligned}
$$

para todo $t \geq 0$. Por isso, basta provar o resultado para $\tilde{E}(t)$. Multiplicando a estimativa (4.39), que aparece no Lema 3, por $|\xi|^{-2}$ e integrando em $\mathbb{R}^3$ segue que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\int_S^T \tilde{F}(t)dt \leq C\tilde{E}(S),$$

para todo $0 \leq S < T$.

Agora, pelo Lema 7 temos

$$[\tilde{E}(t)]^{1+\beta} \leq \overline{C}(\beta)\left\{N_{0,1}^{\beta} + M_0^{\beta} + R_0^{\beta} + S_0^{\beta}\right\}\tilde{F}(t),$$

para todo $t \geq 0$.

Dessa forma,

$$\int_S^T [\tilde{E}(t)]^{1+\beta} dt \leq \overline{C}(\beta) C \left\{ N_{0,1}^\beta + M_0^\beta + R_0^\beta + S_0^\beta \right\} \tilde{E}(S) \tag{4.149}$$

para todo $0 \leq S < T < +\infty$.

Também, devido a identidade (4.8), que vale no espaço de Fourier, segue que a função $t \mapsto \tilde{E}(t)$ é monótona não crescente.

Assim, considerando $T_0 > 0$ tal que $T_0[E(0)]^\beta = \overline{C}(\beta) C \left\{ N_{0,1}^\beta + M_0^\beta + R_0^\beta + S_0^\beta \right\}$, fazendo $T \to +\infty$ em (4.149) e usando o Lema 5 (Haraux-Komornik), obtemos

$$\tilde{E}(t) \leq (\overline{C}(\beta) C)^{\frac{1}{\beta}} \left\{ N_{0,1}^\beta + M_0^\beta + R_0^\beta + S_0^\beta \right\}^{\frac{1}{\beta}} \left(1 + \frac{1}{\beta} \right)^{\frac{1}{\beta}} t^{-\frac{1}{\beta}} = C(\beta) J_{0,\beta} t^{-\frac{1}{\beta}},$$

para todo $t \geq T_0$, onde

$$C(\beta) = (\overline{C}(\beta) C)^{\frac{1}{\beta}} \left(1 + \frac{1}{\beta} \right)^{\frac{1}{\beta}}.$$

Para demonstrar a estimativa (4.123), multipliquemos por $|\xi|^2$ a estimativa (4.55) obtendo

$$|\xi|^2 |\hat{u}_t(t)|^2 + |\xi|^4 |\hat{u}(t)|^2 \leq C|\xi|^2 |\hat{u}_1|^2 + C|\xi|^4 |\hat{u}_0|^2 + C|\xi|^2 |\hat{h}_0|^2 + C|\xi|^2 |\hat{\theta}_0|^2. \tag{4.150}$$

Integrando em $\mathbb{R}^3$ e usando Plancherel segue o desejado. □

4.7 TAXAS DE DECAIMENTO PARA A NORMA L^2 DA SOLUÇÃO: TEOREMA 14

Nesta seção, provaremos outro resultado que nos fornece uma taxa de decaimento para a norma L^2 da solução u do sistema (3.1)-(3.6): o Teorema 14. Tal resultado fornece taxas de decaimento mais rápidas quando comparado com as taxas obtidas no Teorema 13 da seção anterior. Em contrapartida, além da hipótese de dados iniciais em L^1 é necessário exigir outra hipótese adicional sobre os dados u_1, h_0, θ_0.

Teorema 14. *Seja $\beta > 2$. Considere $(u_0, u_1, h_0, \theta_0) \in ([H^1(\mathbb{R}^3)]^3 \cap [L^1(\mathbb{R}^3)]^3) \times ([L^2(\mathbb{R}^3)]^3 \cap [\dot{W}^{-1,1}(\mathbb{R}^3)]^3 \cap [L^1(\mathbb{R}^3)]^3) \times (\mathcal{H}_\sigma \cap [\dot{W}^{-1,1}(\mathbb{R}^3)]^3 \cap [L^1(\mathbb{R}^3)]^3) \times (L^2(\mathbb{R}^3) \cap \dot{W}^{-1,1}(\mathbb{R}^3) \cap L^1(\mathbb{R}^3))$. Então, existe uma constante $C(\beta) > 0$, dependendo de β, tal que*

$$\|u(t)\|_{L^2}^2 \leq \frac{2}{\mu} C(\beta) J_{7,\beta} t^{-\frac{1}{\beta}}, \quad \forall t \geq T_0,$$

em que $T_0 > 0$ é uma constante dependendo dos dados iniciais e

$$J_{7,\beta} = \left(\tilde{R}_0^\beta + M_0^\beta + R_0^\beta + S_0^\beta \right)^{\frac{1}{\beta}},$$

sendo $M_0 > 0$ e $R_0 > 0$, dadas em (4.119) e (4.120),

$$\tilde{R}_0 = \|u_1\|_{\dot{W}^{-1,1}}^2 + \|u_0\|_{L^1}^2 + \|h_0\|_{\dot{W}^{-1,1}}^2 + \|\theta_0\|_{\dot{W}^{-1,1}}^2 \tag{4.151}$$

e

$$S_0 = \|u_1\|_{L^2}^2 + \|u_0\|_{L^2}^2 + \|h_0\|_{L^2}^2 + \|\theta_0\|_{L^2}^2. \tag{4.152}$$

Para provar o Teorema 14 precisamos do seguinte lema.

Lema 8. *Assumindo as hipóteses do Teorema 14, existe uma constante $C_2(\beta) > 0$ dependendo de β tal que*

$$[\tilde{E}(t)]^{1+\beta} \leq C_2(\beta)\left\{ \tilde{R}_0^\beta + (\tilde{K}_{0,\beta})^\beta + S_0^\beta \right\}\tilde{F}(t),$$

para todo $t \geq 0$, onde $\tilde{E}(t)$ é definida por

$$\tilde{E}(t) := \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}(|\xi|^{-2}|\hat{u}_t(t)|^2+\mu|\hat{u}(t)|^2+(\lambda+\mu)|\xi|^{-2}|(\xi\cdot\hat{u}(t))|^2+|\xi|^{-2}|\hat{h}(t)|^2+|\xi|^{-2}|\hat{\theta}(t)|^2)d\xi$$

e $\tilde{F}(t)$ é definida por

$$\tilde{F}(t) := \int_{\mathbb{R}^3}(\rho(\xi)|\xi|^{-2}|\hat{u}_t(t)|^2 + \rho(\xi)|\hat{u}(t)|^2 + |\hat{h}(t)|^2 + |\hat{\theta}(t)|^2)d\xi.$$

Demonstração. Da mesma forma que em (4.129) tem-se que

$$\begin{aligned}[\tilde{E}(t)]^{1+\beta} \leq C_1(\beta)\Bigg\{ &\left(\int_{\mathbb{R}^3}\rho(\xi)^{-\frac{1}{\beta}}|\xi|^{-2}|\hat{u}_t(t)|^2 d\xi\right)^\beta + \left(\int_{\mathbb{R}^3}\rho(\xi)^{-\frac{1}{\beta}}|\hat{u}(t)|^2 d\xi\right)^\beta \\ &+ \left(\int_{\mathbb{R}^3}|\xi|^{-\frac{2}{\beta}-2}|\hat{h}(t)|^2 d\xi\right)^\beta + \left(\int_{\mathbb{R}^3}|\xi|^{-\frac{2}{\beta}-2}|\hat{\theta}(t)|^2 d\xi\right)^\beta \Bigg\}\tilde{F}(t), \qquad (4.153)\end{aligned}$$

para todo $t \geq 0$.

Resta provar que cada uma das integrais, que aparecem no lado direito de (4.153), é limitada por constante que depende dos dados iniciais. Para isso, iremos dividir cada integral em duas regiões: região dentro do cubo A ($\xi \in A$) e região fora do cubo A ($\xi \in A^c$).

Primeiramente, estimaremos as duas primeiras integrais aparecendo no lado direito de (4.153). Multiplicando por $|\xi|^{-2}$ a estimativa (4.55) que aparece na demonstração do Teorema 9 segue

$$|\xi|^{-2}|\hat{u}_t(t)|^2 + |\hat{u}(t)|^2 \leq C|\xi|^{-2}|\hat{u}_1|^2 + C|\hat{u}_0|^2 + C|\xi|^{-2}|\hat{h}_0|^2 + C|\xi|^{-2}|\hat{\theta}_0|^2, \qquad (4.154)$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^3$, $\xi \neq 0$, e $t \geq 0$. Na região dentro do cubo A tem-se $\rho(\xi) = \xi_3^2$. Logo, multiplicando (4.154) por $|\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}}$ e integrando sobre $\{\xi \in \mathbb{R}^3; \xi \in A\}$, obtemos

$$\begin{aligned}&\int_{\xi\in A}|\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}}|\xi|^{-2}|\hat{u}_t(t)|^2 d\xi + \int_{\xi\in A}|\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}}|\hat{u}(t)|^2 d\xi \\ &\leq C\int_{\xi\in A}|\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}}|\xi|^{-2}|\hat{u}_1|^2 d\xi + C\int_{\xi\in A}|\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}}|\hat{u}_0|^2 d\xi + C\int_{\xi\in A}|\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}}|\xi|^{-2}|\hat{h}_0|^2 d\xi \\ &+ C\int_{\xi\in A}|\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}}|\xi|^{-2}|\hat{\theta}_0|^2 d\xi \qquad (4.155)\end{aligned}$$

para todo $t \geq 0$.

Como $u_1, h_0 \in [\dot{W}^{-1,1}(\mathbb{R}^3)]^3$ e $\theta_0 \in \dot{W}^{-1,1}(\mathbb{R}^3)$, existem $\psi_1, \psi_2 \in [L^1(\mathbb{R}^3)]^3$ e $\psi_3 \in L^1(\mathbb{R}^3)$ tais que

$$u_1 = (-\Delta)^{\frac{1}{2}}\psi_1, \quad h_0 = (-\Delta)^{\frac{1}{2}}\psi_2 \;\text{ e }\; \theta_0 = (-\Delta)^{\frac{1}{2}}\psi_3.$$

Aplicando a transformada de Fourier temos

$$\hat{u_1} = |\xi|\hat{\psi_1}, \quad \hat{h_0} = |\xi|\hat{\psi_2} \ \text{ e } \ \hat{\theta_1} = |\xi|\hat{\psi_3}.$$

Assim, $|\xi|^{-1}\hat{u}_1 \in [L^\infty(\mathbb{R}^3)]^3$, $|\xi|^{-1}\hat{h}_0 \in [L^\infty(\mathbb{R}^3)]^3$ e $|\xi|^{-1}\hat{\theta}_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$. Além disso, $\hat{u}_0 \in [L^\infty(\mathbb{R}^3)]^3$ pois $u_0 \in [L^1(\mathbb{R}^3)]^3$. Então temos as seguintes estimativas para as integrais que aparecem no lado direito de (4.155)

$$\begin{aligned}
&\int_{\xi\in A} |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}}|\xi|^{-2}|\hat{u}_1|^2 d\xi + \int_{\xi\in A} |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}}|\xi|^{-2}|\hat{h}_0|^2 d\xi + \int_{\xi\in A} |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}}|\xi|^{-2}|\hat{\theta}_0|^2 d\xi \\
&\leq \left(\||\cdot|^{-1}\hat{u}_1\|^2_{L^\infty} + \||\cdot|^{-1}\hat{h}_0\|^2_{L^\infty} + \||\cdot|^{-1}\hat{\theta}_0\|^2_{L^\infty}\right) \int_{\xi\in A} |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}} d\xi
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\int_{\xi\in A} |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}}|\hat{u}_0|^2 d\xi &\leq \|\hat{u}_0\|^2_{L^\infty} \int_{\xi\in A} |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}} d\xi \\
&\leq \tilde{C}\|u_0\|^2_{L^1} \int_{\xi\in A} |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}} d\xi.
\end{aligned}$$

Sabemos que a transformada de Fourier é um operador linear limitado de $L^1(\mathbb{R}^3)$ em $L^\infty(\mathbb{R}^3)$, isto é, existe uma constante $\tilde{C} > 0$ tal que

$$\|\hat{f}\|_{L^\infty} \leq \tilde{C}\|f\|_{L^1}$$

para toda $f \in L^1(\mathbb{R}^3)$. Assim,

$$\begin{aligned}
&\int_{\xi\in A} |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}}|\xi|^{-2}|\hat{u}_1|^2 d\xi + \int_{\xi\in A} |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}}|\hat{u}_0|^2 d\xi + \int_{\xi\in A} |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}}|\xi|^{-2}|\hat{h}_0|^2 d\xi \\
&+ \int_{\xi\in A} |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}}|\xi|^{-2}|\hat{\theta}_0|^2 d\xi \\
&\leq \tilde{C}\left(\|(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}u_1\|^2_{L^1} + \|u_0\|^2_{L^1} + \|(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}h_0\|^2_{L^1} + \|(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}\theta_0\|^2_{L^1}\right) \int_{\xi\in A} |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}} d\xi \\
&= \tilde{C}\left(\|u_1\|^2_{\dot{W}^{-1,1}} + \|u_0\|^2_{L^1} + \|h_0\|^2_{\dot{W}^{-1,1}} + \|\theta_0\|^2_{\dot{W}^{-1,1}}\right) \int_{\xi\in A} |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}} d\xi.
\end{aligned}$$

Agora, observe que

$$\begin{aligned}
\int_{\xi\in A} |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}} d\xi &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}} d\xi_3 d\xi_2 d\xi_1 = 2\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1} \xi_3^{-\frac{2}{\beta}} d\xi_3 d\xi_2 d\xi_1 \\
&= 2\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \left\{\frac{1}{1-\frac{2}{\beta}}\right\} d\xi_2 d\xi_1 = \frac{8}{1-\frac{2}{\beta}} < +\infty,
\end{aligned}$$

pois $\beta > 2$.

Logo, (4.155) torna-se

$$\begin{aligned}
&\int_{\xi\in A} |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}}|\xi|^{-2}|\hat{u}_t(t)|^2 d\xi + \int_{\xi\in A} |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}}|\hat{u}(t)|^2 d\xi \\
&\leq C\tilde{C}C_\beta\left(\|u_1\|^2_{\dot{W}^{-1,1}} + \|u_0\|^2_{L^1} + \|h_0\|^2_{\dot{W}^{-1,1}} + \|\theta_0\|^2_{\dot{W}^{-1,1}}\right)
\end{aligned} \tag{4.156}$$

para todo $t \geq 0$, onde
$$C_\beta := \int_{\xi \in A} |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}} d\xi < +\infty.$$

Por outro lado, na região fora do cubo A, seguindo como em (4.142) temos

$$\begin{aligned}
&\int_{\xi \in A^c} |\xi|^{\frac{2}{\beta}-2} |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}} |\hat{u}_t(t)|^2 d\xi + \int_{\xi \in A^c} |\xi|^{\frac{2}{\beta}} |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}} |\hat{u}(t)|^2 d\xi \\
&\leq C(\|u_1\|_{L^2}^2 + \|\nabla u_0\|_{L^2}^2 + \|h_0\|_{L^2}^2 + \|\theta_0\|_{L^2}^2) \\
&+ CC_1(\|u_1\|_{L^1}^2 + \|u_0\|_{L^1}^{\frac{4}{3}} \|\nabla u_0\|_{L^2}^{\frac{2}{3}} + \|h_0\|_{L^1}^2 + \|\theta_0\|_{L^1}^2). \qquad (4.157)
\end{aligned}$$

Portanto, segue de (4.156) e (4.157)

$$\begin{aligned}
&\left(\int_{\mathbb{R}^3} \rho(\xi)^{-\frac{1}{\beta}} |\xi|^{-2} |\hat{u}_t(t)|^2 d\xi \right)^\beta + \left(\int_{\mathbb{R}^3} \rho(\xi)^{-\frac{1}{\beta}} |\hat{u}(t)|^2 d\xi \right)^\beta \\
&\leq 2^{\beta-1} \left(\int_{\xi \in A} |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}} |\xi|^{-2} |\hat{u}_t(t)|^2 d\xi \right)^\beta + 2^{\beta-1} \left(\int_{\xi \in A^c} |\xi|^{\frac{2}{\beta}} |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}} |\xi|^{-2} |\hat{u}_t(t)|^2 d\xi \right)^\beta \\
&+ 2^{\beta-1} \left(\int_{\xi \in A} |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}} |\hat{u}(t)|^2 d\xi \right)^\beta + 2^{\beta-1} \left(\int_{\xi \in A^c} |\xi|^{\frac{2}{\beta}} |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}} |\hat{u}(t)|^2 d\xi \right)^\beta \\
&\leq (2C)^\beta \Big\{ (\tilde{C} C_\beta)^\beta \left(\|u_1\|_{\dot{W}^{-1,1}}^2 + \|u_0\|_{L^1}^2 + \|h_0\|_{\dot{W}^{-1,1}}^2 + \|\theta_0\|_{\dot{W}^{-1,1}}^2 \right)^\beta \\
&+ (\|u_1\|_{L^2}^2 + \|\nabla u_0\|_{L^2}^2 + \|h_0\|_{L^2}^2 + \|\theta_0\|_{L^2}^2)^\beta \\
&+ (C_1)^\beta (\|u_1\|_{L^1}^2 + \|u_0\|_{L^1}^{\frac{4}{3}} \|\nabla u_0\|_{L^2}^{\frac{2}{3}} + \|h_0\|_{L^1}^2 + \|\theta_0\|_{L^1}^2)^\beta \Big\} \qquad (4.158)
\end{aligned}$$

para todo $t \geq 0$.

Agora, vamos estimar as duas últimas integrais que aparecem no lado direito de (4.153). Da mesma forma como em (4.145) tem-se que

$$\begin{aligned}
&\int_{\xi \in A} |\xi|^{-\frac{2}{\beta}-2} |\hat{h}(t)|^2 d\xi + \int_{\xi \in A} |\xi|^{-\frac{2}{\beta}-2} |\hat{\theta}(t)|^2 d\xi \\
&\leq C \int_{\xi \in A} |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}} |\xi|^{-2} |\hat{u}_1|^2 d\xi + C \int_{\xi \in A} |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}} |\hat{u}_0|^2 d\xi + C \int_{\xi \in A} |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}} |\xi|^{-2} |\hat{h}_0|^2 d\xi \\
&+ C \int_{\xi \in A} |\xi_3|^{-\frac{2}{\beta}} |\xi|^{-2} |\hat{\theta}_0|^2 d\xi
\end{aligned}$$

para todo $t \geq 0$. Analogamente ao feito para estimar (4.155) obtemos

$$\begin{aligned}
&\int_{\xi \in A} |\xi|^{-\frac{2}{\beta}-2} |\hat{h}(t)|^2 d\xi + \int_{\xi \in A} |\xi|^{-\frac{2}{\beta}-2} |\hat{\theta}(t)|^2 d\xi \\
&\leq C \tilde{C} C_\beta \left(\|u_1\|_{\dot{W}^{-1,1}}^2 + \|u_0\|_{L^1}^2 + \|h_0\|_{\dot{W}^{-1,1}}^2 + \|\theta_0\|_{\dot{W}^{-1,1}}^2 \right) \qquad (4.159)
\end{aligned}$$

para todo $t \geq 0$.

Por outro lado, multiplicando (4.144) por $|\xi|^{-\frac{2}{\beta}-2}$ e integrando sobre $\{\xi \in \mathbb{R}^3; \xi \in A^c\}$, temos

$$\begin{aligned}
&\int_{\xi\in A^c} |\xi|^{-\frac{2}{\beta}-2}|\hat{h}(t)|^2 d\xi + \int_{\xi\in A^c} |\xi|^{-\frac{2}{\beta}-2}|\hat{\theta}(t)|^2 d\xi \\
&\leq C\Big(\int_{\xi\in A^c} |\xi|^{-\frac{2}{\beta}-2}|\hat{u}_1|^2 d\xi + \int_{\xi\in A^c} |\xi|^{-\frac{2}{\beta}}|\hat{u}_0|^2 d\xi + \int_{\xi\in A^c} |\xi|^{-\frac{2}{\beta}-2}|\hat{h}_0|^2 d\xi \\
&+ \int_{\xi\in A^c} |\xi|^{-\frac{2}{\beta}-2}|\hat{\theta}_0|^2 d\xi\Big) \\
&\leq C\left(\int_{\xi\in A^c} |\hat{u}_1|^2 d\xi + \int_{\xi\in A^c} |\hat{u}_0|^2 d\xi + \int_{\xi\in A^c} |\hat{h}_0|^2 d\xi + \int_{\xi\in A^c} |\hat{\theta}_0|^2 d\xi\right) \\
&\leq C(\|u_1\|_{L^2}^2 + \|u_0\|_{L^2}^2 + \|h_0\|_{L^2}^2 + \|\theta_0\|_{L^2}^2),
\end{aligned} \tag{4.160}$$

para todo $t \geq 0$, pois para $\xi \in A^c$ temos $|\xi| \geq 1$.

Logo, (4.159) e (4.160) nos fornece

$$\begin{aligned}
&\left(\int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{-\frac{2}{\beta}-2}|\hat{h}(t)|^2 d\xi\right)^\beta + \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{-\frac{2}{\beta}-2}|\hat{\theta}(t)|^2 d\xi\right)^\beta \\
&\leq 2^{\beta-1}\left(\int_{\xi\in A} |\xi|^{-\frac{2}{\beta}-2}|\hat{h}(t)|^2 d\xi\right)^\beta + 2^{\beta-1}\left(\int_{\xi\in A^c} |\xi|^{-\frac{2}{\beta}-2}|\hat{h}(t)|^2 d\xi\right)^\beta \\
&+ 2^{\beta-1}\left(\int_{\xi\in A} |\xi|^{-\frac{2}{\beta}-2}|\hat{\theta}(t)|^2 d\xi\right)^\beta + 2^{\beta-1}\left(\int_{\xi\in A^c} |\xi|^{-\frac{2}{\beta}-2}|\hat{\theta}(t)|^2 d\xi\right)^\beta \\
&\leq (2C)^\beta\Big\{(\tilde{C}C_\beta)^\beta\left(\|u_1\|_{\dot{W}^{-1,1}}^2 + \|u_0\|_{L^1}^2 + \|h_0\|_{\dot{W}^{-1,1}}^2 + \|\theta_0\|_{\dot{W}^{-1,1}}^2\right)^\beta \\
&+ (\|u_1\|_{L^2}^2 + \|u_0\|_{L^2}^2 + \|h_0\|_{L^2}^2 + \|\theta_0\|_{L^2}^2)^\beta\Big\},
\end{aligned} \tag{4.161}$$

para todo $t \geq 0$.

Usando (4.158) e (4.161) em (4.153) chegamos a

$$[\tilde{E}(t)]^{1+\beta} \leq C_2(\beta)\Big\{\tilde{R}_0^\beta + M_0^\beta + R_0^\beta + S_0^\beta\Big\}\tilde{F}(t),$$

para todo $t \geq 0$, onde $C_2(\beta) = C_1(\beta)(2C)^\beta \max\{2(\tilde{C}C_\beta)^\beta, (C_1)^\beta, 1\}$. □

Demonstração do Teorema 14. A prova é semelhante a do Teorema 13, usando o Lema 8 no lugar do Lema 7. □

5 PROBLEMA SEMILINEAR

Neste capítulo estudaremos a existência de solução local e global para o problema de Cauchy semilinear

$$u_{tt} - \mu\Delta u - (\lambda+\mu)\nabla \operatorname{div} u + \gamma\nabla\theta = \mu_0 \operatorname{curl} h \times H + |u|^{p-1}u, \quad (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3 \tag{5.1}$$

$$h_t + \nu_1 \operatorname{curl}\operatorname{curl} h = \mu_0 \operatorname{curl}(u_t \times H), \quad (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3 \tag{5.2}$$

$$\theta_t - \kappa\Delta\theta + \gamma \operatorname{div} u_t = 0, \quad (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3 \tag{5.3}$$

$$\operatorname{div} h = 0, \quad (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3 \tag{5.4}$$

$$u(0,x) = u_0(x), \quad u_t(0,x) = u_1(x), \quad x \in \mathbb{R}^3 \tag{5.5}$$

$$h(0,x) = h_0(x), \quad \theta(0,x) = \theta_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^3. \tag{5.6}$$

Para tal fim, usamos as taxas de decaimento obtidas no problema linear mostrando existência de solução global forte sob a hipótese $p > 5\beta - \frac{9}{8}$ inteiro, em que $\beta > 6$.

5.1 EXISTÊNCIA DE SOLUÇÃO LOCAL FORTE

Iniciamos a seção enunciando o resultado de existência de solução local no tempo para o sistema (5.1)-(5.6).

Teorema 15. *Seja $p \geq 3$. Então para $(u_0, u_1, h_0, \theta_0) \in D(B)$ existe $T_m > 0$ e uma única terna $(u(t,x), h(t,x), \theta(t,x))$ solução do problema (5.1)-(5.6), na classe*

$$u \in C([0,T_m); [H^2(\mathbb{R}^3)]^3) \cap C^1([0,T_m); [H^1(\mathbb{R}^3)]^3) \cap C^2([0,T_m); [L^2(\mathbb{R}^3)]^3),$$
$$h \in C([0,T_m); [H^2(\mathbb{R}^3)]^3 \cap \mathcal{H}_\sigma) \cap C^1([0,T_m); \mathcal{H}_\sigma),$$
$$\theta \in C([0,T_m); H^2(\mathbb{R}^3)) \cap C^1([0,T_m); L^2(\mathbb{R}^3)).$$

Além disso, $T_m = +\infty$ ou $T_m < +\infty$ e

$$\lim_{t \to T_m} \|(u(t), u_t(t), h(t), \theta(t))\|_{D(B)} = +\infty.$$

A seguir, alguns lemas técnicos que serão úteis na demonstração do resultado de existência de solução local forte.

Lema 9. *Seja $U \in D(B)$. Então*

$$\|U\|_{D(B)} \approx \|U\|_X + \|BU\|_X,$$

ou seja, existem constantes $C_1 > 0$ e $C_2 > 0$ tais que

$$C_1(\|U\|_X + \|BU\|_X) \leq \|U\|_{D(B)} \leq C_2(\|U\|_X + \|BU\|_X).$$

Demonstração. Seja $U = (u, v, h, \theta) \in D(B)$. Então $u, \theta \in H^2$, $v \in H^1$ e $h \in H^2 \cap \mathcal{H}_\sigma$. Observe que:

(i)

$$
\begin{aligned}
&\|\mu\Delta u + (\mu+\lambda)\nabla \operatorname{div} u - \gamma\nabla\theta + \mu_0 \operatorname{curl} h \times H\|_{L^2}^2 \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} |-\mu|\xi|^2\hat{u} - (\mu+\lambda)(\xi\cdot\hat{u})\xi - i\gamma\xi\hat{\theta} + i\mu_0\xi_3\hat{h} - i\mu_0\hat{h}^3\xi|^2 d\xi \\
&\leq C\left([\mu^2 + (\mu+\lambda)^2]\|u\|_{H^2}^2 + \gamma^2\|\theta\|_{H^1}^2 + 2\mu_0^2\|h\|_{H^1}^2\right)
\end{aligned}
$$

assim,

$$\|\mu\Delta u + (\mu+\lambda)\nabla \operatorname{div} u - \gamma\nabla\theta + \mu_0 \operatorname{curl} h \times H\|_{L^2} \leq C(\|u\|_{H^2} + \|\theta\|_{H^1} + \|h\|_{H^1}),$$

onde a constante $C > 0$ depende de μ, λ, γ e μ_0.

(ii) Como $h \in \mathcal{H}_\sigma$ então $\operatorname{div} h = 0$, o que implica $\operatorname{curl}\operatorname{curl} h = -\Delta h$. Assim,

$$
\begin{aligned}
\|-\nu_1 \operatorname{curl}\operatorname{curl} h + \mu_0 \operatorname{curl}(v\times H)\|_{L^2}^2 &= \int_{\mathbb{R}^3} |\nu_1|\xi|^2\hat{h} + i\mu_0\xi_3 v - i\mu_0(\xi\cdot v)e_3|^2 d\xi \\
&\leq C\left(\nu_1^2\int_{\mathbb{R}^3}|\xi|^4|\hat{h}|^2 d\xi + 2\mu_0^2\int_{\mathbb{R}^3}|\xi|^2|v|^2 d\xi\right) \\
&\leq C(\nu_1^2\|h\|_{H^2}^2 + 2\mu_0^2\|v\|_{H^1}^2),
\end{aligned}
$$

donde

$$\|-\nu_1 \operatorname{curl}\operatorname{curl} h + \mu_0 \operatorname{curl}(v\times H)\|_{L^2} \leq C(\|h\|_{H^2} + \|v\|_{H^1}),$$

com $C > 0$ dependendo de ν_1 e μ_0.

(iii)

$$
\begin{aligned}
\|\kappa\Delta\theta - \gamma\operatorname{div} v\|_{L^2}^2 &= \int_{\mathbb{R}^3} |-\kappa|\xi|^2\hat{\theta} - i\gamma(\xi\cdot\hat{v})|^2 d\xi \\
&\leq C\left(\kappa^2\int_{\mathbb{R}^3}|\xi|^4|\hat{\theta}|^2 d\xi + \gamma^2\int_{\mathbb{R}^3}|\xi|^2|\hat{v}|^2 d\xi\right) \\
&\leq C(\kappa^2\|\theta\|_{H^2}^2 + \gamma^2\|v\|_{H^1}^2).
\end{aligned}
$$

Logo,

$$\|\kappa\Delta\theta - \gamma\operatorname{div} v\|_{L^2} \leq C(\|\theta\|_{H^2} + \|v\|_{H^1}),$$

em que $C > 0$ depende de κ e γ.

Segue dos itens (i), (ii) e (iii)

$$
\begin{aligned}
\|U\|_X + \|AU\|_X \leq\ & K\|u\|_{H^1} + \|v\|_{L^2} + \|h\|_{L^2} + \|\theta\|_{L^2} + K\|v\|_{H^1} \\
& + \|\mu\Delta u + (\mu+\lambda)\nabla\operatorname{div} u - \gamma\nabla\theta + \mu_0\operatorname{curl} h\times H\|_{L^2} \\
& + \|-\nu_1\operatorname{curl}\operatorname{curl} h + \mu_0\operatorname{curl}(v\times H)\|_{L^2} + \|\kappa\Delta\theta - \gamma\operatorname{div} v\|_{L^2} \\
\leq\ & K\|u\|_{H^2} + (1+K)\|v\|_{H^1} + \|h\|_{H^2} + \|\theta\|_{H^2} \\
& + C(\|u\|_{H^2} + \|\theta\|_{H^1} + \|h\|_{H^1}) \\
& + C(\|h\|_{H^2} + \|v\|_{H^1}) + C(\|\theta\|_{H^2} + \|v\|_{H^1}) \\
\leq\ & \tilde{C}\|U\|_{D(B)}.
\end{aligned}
$$

Por outro lado, vamos usar a seguinte norma equivalente a norma usual em H^2

$$\|u\|_{H^2}^2 \approx \|u\|_{L^2}^2 + \mu^2\|\Delta u\|_{L^2}^2 + (\lambda+\mu)^2\|\nabla \operatorname{div} u\|_{L^2}^2$$

para provar que

$$\|U\|_{D(B)} \leq C_2(\|U\|_X + \|BU\|_X).$$

Primeiramente, note que pela identidade de Plancherel

$$\mu^2\|\Delta u\|_{L^2}^2 + (\lambda+\mu)^2\|\nabla \operatorname{div} u\|_{L^2}^2 = \mu^2\int_{\mathbb{R}^3}|\xi|^4|\hat{u}|^2dx + (\lambda+\mu)^2\int_{\mathbb{R}^3}|\xi\cdot\hat{u}|^2|\xi|^2d\xi.$$

Como $2\mu(\lambda+\mu)|\xi|^2(\xi\cdot\hat{u})(\xi\cdot\overline{\hat{u}}) = 2\mu(\lambda+\mu)|\xi|^2|\xi\cdot\hat{u}|^2 \geq 0$ então

$$\begin{aligned}\mu^2\int_{\mathbb{R}^3}|\xi|^4|\hat{u}|^2dx + (\lambda+\mu)^2\int_{\mathbb{R}^3}|\xi\cdot\hat{u}|^2|\xi|^2d\xi &\leq \int_{\mathbb{R}^3}|\mu|\xi|^2\hat{u} + (\lambda+\mu)(\xi\cdot\hat{u})\xi|^2d\xi \\ &= \|\mu\Delta u + (\lambda+\mu)\nabla \operatorname{div} u\|_{L^2}^2.\end{aligned}$$

Logo

$$\|u\|_{H^2}^2 \leq C\left(\|u\|_{L^2}^2 + \|\mu\Delta u + (\lambda+\mu)\nabla \operatorname{div} u\|_{L^2}^2\right).$$

Agora,

$$\begin{aligned}&\|\mu\Delta u + (\lambda+\mu)\nabla \operatorname{div} u\|_{L^2}^2 \\ &= \int_{\mathbb{R}^3}|\mu\Delta u + (\lambda+\mu)\nabla \operatorname{div} u - \gamma\nabla\theta + \mu_0 \operatorname{curl} h\times H + \gamma\nabla\theta - \mu_0 \operatorname{curl} h\times H|^2dx \\ &\leq 2\int_{\mathbb{R}^3}|\mu\Delta u + (\lambda+\mu)\nabla \operatorname{div} u - \gamma\nabla\theta + \mu_0 \operatorname{curl} h\times H|^2dx \\ &+ 2\int_{\mathbb{R}^3}|\gamma\nabla\theta - \mu_0 \operatorname{curl} h\times H|^2dx \\ &\leq 2\|\mu\Delta u + (\lambda+\mu)\nabla \operatorname{div} u - \gamma\nabla\theta + \mu_0 \operatorname{curl} h\times H\|_{L^2}^2 + 4\gamma^2\|\theta\|_{H^2}^2 + 4\mu_0^2\|h\|_{H^2}^2 \\ &\leq 2(\|U\|_X + \|AU\|_X)^2 + 4\gamma^2\|\theta\|_{H^2}^2 + 4\mu_0^2\|h\|_{H^2}^2\end{aligned}$$

então

$$\|u\|_{H^2}^2 \leq 3C(\|U\|_X + \|AU\|_X)^2 + 4C\gamma^2\|\theta\|_{H^2}^2 + 4C\mu_0^2\|h\|_{H^2}^2.$$

Dessa forma, temos

$$\begin{aligned}\|U\|_{D(B)} &= \|u\|_{H^2} + \|v\|_{H^1} + \|h\|_{H^2} + \|\theta\|_{H^2} \\ &\leq C(\|U\|_X + \|BU\|_X + \|\theta\|_{H^2} + \|h\|_{H^2}),\end{aligned}$$

com $C > 0$ dependendo de λ, μ, γ e μ_0. Resta mostrar que $\|\theta\|_{H^2} \leq C(\|U\|_X + \|AU\|_X)$ e que $\|h\|_{H^2} \leq C(\|U\|_X + \|AU\|_X)$. Temos

$$\begin{aligned}
\|\theta\|_{H^2}^2 &= \|\theta\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\kappa^2}\|\kappa\Delta\theta\|_{L^2}^2 \\
&= \|\theta\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\kappa^2}\int_{\mathbb{R}^3} |\kappa\Delta\theta - \gamma \operatorname{div} v + \gamma \operatorname{div} v|^2 dx \\
&\leq \|\theta\|_{L^2}^2 + \frac{2}{\kappa^2}\int_{\mathbb{R}^3} |\kappa\Delta\theta - \gamma \operatorname{div} v|^2 dx + \frac{2\gamma^2}{\kappa^2}\int_{\mathbb{R}^3} |\operatorname{div} v|^2 dx \\
&\leq \|\theta\|_{L^2}^2 + \frac{2}{\kappa^2}\|\kappa\Delta\theta - \gamma \operatorname{div} v\|_{L^2}^2 + \frac{2\gamma^2}{\kappa^2}\|v\|_{H^1}^2 \\
&\leq C(\|U\|_X + \|BU\|_X)^2.
\end{aligned}$$

Também,

$$\begin{aligned}
\|h\|_{H^2}^2 &= \|h\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\nu_1^2}\|\nu_1\Delta h\|_{L^2}^2 \\
&= \|h\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\nu_1^2}\|-\nu_1 \operatorname{curl}\operatorname{curl} h\|_{L^2}^2 \\
&= \|h\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\nu_1^2}\int_{\mathbb{R}^3} |-\nu_1 \operatorname{curl}\operatorname{curl} h + \mu_0 \operatorname{curl}(v \times H) - \mu_0 \operatorname{curl}(v \times H)|^2 dx \\
&\leq \|h\|_{L^2}^2 + \frac{2}{\nu_1^2}\|-\nu_1 \operatorname{curl}\operatorname{curl} h + \mu_0 \operatorname{curl}(v \times H)\|_{L^2}^2 + \frac{2\mu_0^2}{\nu_1^2}\|\operatorname{curl}(v \times H)\|_{L^2}^2 \\
&\leq \|h\|_{L^2}^2 + \frac{2}{\nu_1^2}\|-\nu_1 \operatorname{curl}\operatorname{curl} h + \mu_0 \operatorname{curl}(v \times H)\|_{L^2}^2 + \frac{4\mu_0^2}{\nu_1^2}\|v\|_{H^1}^2 \\
&\leq C(\|U\|_X + \|BU\|_X)^2.
\end{aligned}$$

Portanto

$$\|U\|_{D(B)} \leq C_2(\|U\|_X + \|BU\|_X),$$

em que $C_2 > 0$ é uma contante dependendo de λ, μ, γ, μ_0, ν_1 e κ. $\square$

Lema 10. *Sejam $w_1 \in [H^2(\mathbb{R}^3)]^3$, $w_2 \in [H^2(\mathbb{R}^3)]^3$ e $p \geq 3$. Então existe uma constante $C_1 > 0$, dependendo de p, tal que*

$$\||w_1|^{p-1}w_1 - |w_2|^{p-1}w_2\|_{L^2}^2 \leq C_1\left(\|w_1\|_{H^2}^{2(p-1)} + \|w_2\|_{H^2}^{2(p-1)}\right)\|w_1 - w_2\|_{L^2}^2.$$

Demonstração. Para obter a estimativa, vamos estimar $\||w_1|^{p-1}w_1^j - |w_2|^{p-1}w_2^j\|_{L^2}$. Então, seja $f^j : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $f^j(a) = |a|^{p-1}a^j$, $a = (a^1, a^2, a^3)$, $j = 1, 2, 3$. Assim, f^j é contínua e diferenciável em $\mathbb{R}^3$. Para $a, b \in \mathbb{R}^3$ quaisquer, defina $\phi : [0,1] \to \mathbb{R}$ por $\phi(t) = f^j(tb + (1-t)a) = |tb + (1-t)a|^{p-1}(tb^j + (1-t)a^j)$. Temos que ϕ é contínua em $[0,1]$ e diferenciável em $(0,1)$ com

$$\begin{aligned}
\phi'(t) = (p-1)&|tb + (1-t)a|^{p-3}\langle(tb + (1-t)a), (b-a)\rangle(tb^j + (1-t)a^j) \\
&+ |tb + (1-t)a|^{p-1}(b^j - a^j).
\end{aligned}$$

Então pelo teorema do valor médio, existe $t_0 \in (0,1)$ tal que

$$\phi(1) - \phi(0) = \phi'(t_0),$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
|f^j(b) - f^j(a)| &\le (p-1)|t_0 b + (1-t_0)a|^{p-3}|b-a||t_0 b + (1-t_0)a|^2 \\
&\quad + |t_0 b + (1-t_0)a|^{p-1}|b^j - a^j| \\
&\le p|t_0 b + (1-t_0)a|^{p-1}|b-a| \\
&\le p(|a| + |b|)^{p-1}|b-a| \\
&\le pC(p)(|a|^{p-1} + |b|^{p-1})|b-a|,
\end{aligned}$$

para todo $a, b \in \mathbb{R}^3$.

Logo, para $w_1(x), w_2(x) \in \mathbb{R}^3$ temos

$$\begin{aligned}
||w_1|^{p-1}w_1^j - |w_2|^{p-1}w_2^j|^2 &\le p^2C(p)^2(|w_2|^{p-1} + |w_1|^{p-1})^2|w_1 - w_2|^2 \\
&\le 2p^2C(p)^2(|w_2|^{2(p-1)} + |w_1|^{2(p-1)})|w_1 - w_2|^2.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
&\||w_1|^{p-1}w_1^j - |w_2|^{p-1}w_2^j\|_{L^2}^2 \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} ||w_1|^{p-1}w_1^j - |w_2|^{p-1}w_2^j|^2 dx \\
&\le 2p^2C(p)^2 \int_{\mathbb{R}^3} (|w_2|^{2(p-1)} + |w_1|^{2(p-1)})|w_1 - w_2|^2 dx \\
&\le 2p^2C(p)^2 \left(\|w_2\|_{L^\infty}^{2(p-1)} + \|w_1\|_{L^\infty}^{2(p-1)}\right) \int_{\mathbb{R}^3} |w_1 - w_2|^2 dx \\
&\le 2p^2C(p)^2C_s^{2(p-1)} \left(\|w_2\|_{H^2}^{2(p-1)} + \|w_1\|_{H^2}^{2(p-1)}\right) \|w_1 - w_2\|_{L^2}^2
\end{aligned}$$

em que, na última desigualdade, usamos a imersão de Sobolev $[H^2(\mathbb{R}^3)]^3 \hookrightarrow [L^\infty(\mathbb{R}^3)]^3$. Tomando $C_1 = 6p^2C(p)^2C_s^{2(p-1)} > 0$ o lema está provado. $\square$

Lema 11. *Sejam $w_1 \in [H^2(\mathbb{R}^3)]^3$, $w_2 \in [H^2(\mathbb{R}^3)]^3$ e $p > 2$. Então existe uma constante $C_2 > 0$, dependendo de p, tal que*

$$\left\|\nabla\left[|w_1|^{p-1}(w_1 - w_2)\right]\right\|_{L^2}^2 \le C_2\|w_1\|_{H^2}^{2(p-1)}\|w_1 - w_2\|_{H^2}^2.$$

Demonstração. Observe que

$$\begin{aligned}
\left\|\nabla\left[|w_1|^{p-1}(w_1 - w_2)\right]\right\|_{L^2}^2 &= \sum_{j=1}^{3} \left\|\nabla\left[|w_1|^{p-1}(w_1^j - w_2^j)\right]\right\|_{L^2}^2 \\
&\le 2\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla|w_1|^{(p-1)}|^2|w_1 - w_2|^2 dx \\
&\quad + 2\sum_{j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3} |w_1|^{2(p-1)}|\nabla(w_1^j - w_2^j)|^2 dx \\
&:= I_1 + I_2. \qquad (5.7)
\end{aligned}$$

Estimativa para I_1: Vamos provar que

$$I_1 \leq 2(p-1)^2 C_s^{2(p-1)} \|w_1\|_{H^2}^{2(p-1)} \|w_1 - w_2\|_{H^2}^2.$$

Temos

$$\frac{\partial}{\partial x_k}|w_1|^{(p-1)} = (p-1)|w_1|^{p-2}\frac{1}{|w_1|}\langle w_1, \frac{\partial}{\partial x_k}w_1\rangle,$$

para $k \in \{1,2,3\}$. Assim,

$$\begin{aligned}
|\nabla |w_1|^{(p-1)}|^2 &= \sum_{k=1}^{3}\left|(p-1)|w_1|^{p-2}\frac{1}{|w_1|}\langle w_1, \frac{\partial}{\partial x_k}w_1\rangle\right|^2 \\
&\leq (p-1)^2 \sum_{k=1}^{3} |w_1|^{2(p-2)}\left|\frac{\partial}{\partial x_k}w_1\right|^2,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$I_1 \leq 2(p-1)^2 \sum_{k=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3} |w_1|^{2(p-2)}\left|\frac{\partial}{\partial x_k}w_1\right|^2 |w_1 - w_2|^2 dx.$$

Como $p > 2$ e $[H^2(\mathbb{R}^3)]^3 \hookrightarrow [L^\infty(\mathbb{R}^3)]^3$ então

$$\begin{aligned}
I_1 &\leq 2(p-1)^2 \|w_1\|_{L^\infty}^{2(p-2)} \|w_1 - w_2\|_{L^\infty}^2 \sum_{k=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}\left|\frac{\partial}{\partial x_k}w_1\right|^2 dx \\
&\leq 2(p-1)^2 C_s^{2(p-2)} \|w_1\|_{H^2}^{2(p-2)} C_s^2 \|w_1 - w_2\|_{H^2}^2 \|\nabla w_1\|_{L^2}^2 \\
&\leq 2(p-1)^2 C_s^{2(p-1)} \|w_1\|_{H^2}^{2(p-2)} \|w_1 - w_2\|_{H^2}^2 \|w_1\|_{H^1}^2 \\
&\leq 2(p-1)^2 C_s^{2(p-1)} \|w_1\|_{H^2}^{2(p-1)} \|w_1 - w_2\|_{H^2}^2. \qquad (5.8)
\end{aligned}$$

Estimativa para I_2: Vamos provar que

$$I_2 = 2\sum_{j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}|w_1|^{2(p-1)}|\nabla(w_1^j - w_2^j)|^2 dx \leq 2C_s^{2(p-1)}\|w_1\|_{H^2}^{2(p-1)}\|w_1 - w_2\|_{H^2}^2.$$

Como $p > 2 > 1$ e $[H^2(\mathbb{R}^3)]^3 \hookrightarrow [L^\infty(\mathbb{R}^3)]^3$ então

$$\begin{aligned}
I_2 &\leq 2\|w_1\|_{L^\infty}^{2(p-1)} \sum_{j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla(w_1^j - w_2^j)|^2 dx \\
&\leq 2C_s^{2(p-1)}\|w_1\|_{H^2}^{2(p-1)} \sum_{j=1}^{3}\|\nabla(w_1^j - w_2^j)\|_{L^2}^2 \\
&\leq 2C_s^{2(p-1)}\|w_1\|_{H^2}^{2(p-1)}\|\nabla(w_1 - w_2)\|_{L^2}^2 \\
&\leq 2C_s^{2(p-1)}\|w_1\|_{H^2}^{2(p-1)}\|w_1 - w_2\|_{H^2}^2.
\end{aligned}$$

Usando as estimativas para I_1 e I_2 em (5.7) e tomando $C_2 = 2(p-1)^2 C_s^{2(p-1)} + 2C_s^{2(p-1)}$ segue o desejado. □

Lema 12. *Sejam $w_1 \in [H^2(\mathbb{R}^3)]^3$, $w_2 \in [H^2(\mathbb{R}^3)]^3$ e $p \geq 3$. Então existe uma constante $C_3 > 0$, dependendo de p, tal que*

$$\left\|\nabla\left[(|w_1|^{p-1}-|w_2|^{p-1})w_2\right]\right\|_{L^2}^2 \leq C_3\|w_2\|_{H^2}^2\Big(\|w_1\|_{H^2}^{2(p-2)} + \|w_2\|_{H^2}^{2(p-2)}$$
$$+ \max\{\|w_1\|_{H^2}^{p-3}, \|w_2\|_{H^2}^{p-3}\}^2\|w_2\|_{H^2}^2\Big)\|w_1 - w_2\|_{H^2}^2.$$

Demonstração. Observe que

$$\begin{aligned}\left\|\nabla\left[(|w_1|^{p-1} - |w_2|^{p-1})w_2\right]\right\|_{L^2}^2 &= \sum_{j=1}^{3}\left\|\nabla\left[(|w_1|^{p-1} - |w_2|^{p-1})w_2^j\right]\right\|_{L^2}^2 \\ &\leq 2\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla(|w_1|^{p-1} - |w_2|^{p-1})|^2|w_2|^2dx \\ &+ 2\sum_{j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}|(|w_1|^{p-1} - |w_2|^{p-1})|^2|\nabla w_2^j|^2dx \\ &:= I_3 + I_4. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Estimativa para I_3: Vamos provar que

$$I_3 \leq 4(p-1)^2C_s^{2(p-1)}\|w_2\|_{H^2}^2\Big(\|w_1\|_{H^2}^{2(p-2)}$$
$$+ \max\{\|w_1\|_{H^2}^{p-3}, \|w_2\|_{H^2}^{p-3}\}^2\|w_2\|_{H^2}^2\Big)\cdot\|w_1 - w_2\|_{H^2}^2.$$

Primeiramente, como $[H^2(\mathbb{R}^3)]^3 \hookrightarrow [L^\infty(\mathbb{R}^3)]^3$ então

$$\begin{aligned} I_3 &\leq 2\|w_2\|_{L^\infty}^2\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla(|w_1|^{p-1} - |w_2|^{p-1})|^2dx \\ &\leq 2C_s^2\|w_2\|_{H^2}^2\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla(|w_1|^{p-1} - |w_2|^{p-1})|^2dx. \end{aligned} \tag{5.10}$$

Agora, para $j \in \{1, 2, 3\}$ temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_j}(|w_1|^{p-1} - |w_2|^{p-1}) &= (p-1)|w_1|^{p-3}\langle w_1, \frac{\partial w_1}{\partial x_j}\rangle - (p-1)|w_2|^{p-3}\langle w_2, \frac{\partial w_2}{\partial x_j}\rangle \\ &= (p-1)|w_1|^{p-3}\langle w_1, \frac{\partial w_1}{\partial x_j}\rangle - (p-1)|w_1|^{p-3}\langle w_2, \frac{\partial w_1}{\partial x_j}\rangle \\ &+ (p-1)|w_1|^{p-3}\langle w_2, \frac{\partial w_1}{\partial x_j}\rangle - (p-1)|w_2|^{p-3}\langle w_2, \frac{\partial w_2}{\partial x_j}\rangle \\ &\leq (p-1)|w_1|^{p-3}\langle w_1 - w_2, \frac{\partial w_1}{\partial x_j}\rangle \\ &+ (p-1)\max\{|w_1|^{p-3}, |w_2|^{p-3}\}\left|\langle w_2, \frac{\partial}{\partial x_j}(w_1 - w_2)\rangle\right|.\end{aligned}$$

Assim,

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla(|w_1|^{p-1} - |w_2|^{p-1})|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{j=1}^{3} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_j}(|w_1|^{p-1} - |w_2|^{p-1}) \right\}^2 dx$$
$$\leq 2 \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{j=1}^{3} (p-1)^2 |w_1|^{2(p-3)} |w_1 - w_2|^2 \left| \frac{\partial w_1}{\partial x_j} \right|^2 dx$$
$$+ 2 \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{j=1}^{3} (p-1)^2 \max\{|w_1|^{p-3}, |w_2|^{p-3}\}^2 |w_2|^2 \left| \frac{\partial}{\partial x_j}(w_1 - w_2) \right|^2 dx.$$

Usando novamente a imersão $[H^2(\mathbb{R}^3)]^3 \hookrightarrow [L^\infty(\mathbb{R}^3)]^3$ obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla(|w_1|^{p-1} - |w_2|^{p-1})|^2 dx \leq 2(p-1)^2 \|w_1\|_{L^\infty}^{2(p-3)} \|w_1 - w_2\|_{L^\infty}^2 \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{j=1}^{3} \left| \frac{\partial w_1}{\partial x_j} \right|^2 dx$$
$$+ 2(p-1)^2 \max\{\|w_1\|_{L^\infty}^{p-3}, \|w_2\|_{L^\infty}^{p-3}\}^2 \|w_2\|_{L^\infty}^2 \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{j=1}^{3} \left| \frac{\partial}{\partial x_j}(w_1 - w_2) \right|^2 dx$$
$$\leq 2(p-1)^2 C_s^{2(p-3)} \|w_1\|_{H^2}^{2(p-3)} C_s^2 \|w_1 - w_2\|_{H^2}^2 \|\nabla w_1\|_{L^2}^2$$
$$+ 2(p-1)^2 C_s^{2(p-3)} \max\{\|w_1\|_{H^2}^{p-3}, \|w_2\|_{H^2}^{p-3}\}^2 C_s^2 \|w_2\|_{H^2}^2 \|\nabla(w_1 - w_2)\|_{L^2}^2$$
$$\leq 2(p-1)^2 C_s^{2(p-2)} \left(\|w_1\|_{H^2}^{2(p-2)} + \max\{\|w_1\|_{H^2}^{p-3}, \|w_2\|_{H^2}^{p-3}\}^2 \|w_2\|_{H^2}^2 \right) \|w_1 - w_2\|_{H^2}^2. \tag{5.11}$$

Portanto, (5.11) em (5.10) nos dá

$$I_3 \leq 4(p-1)^2 C_s^{2(p-1)} \|w_2\|_{H^2}^2 \Big(\|w_1\|_{H^2}^{2(p-2)}$$
$$+ \max\{\|w_1\|_{H^2}^{p-3}, \|w_2\|_{H^2}^{p-3}\}^2 \|w_2\|_{H^2}^2 \Big) \cdot \|w_1 - w_2\|_{H^2}^2.$$

Estimativa para I_4: Vamos provar que

$$I_4 = 2 \sum_{j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} |(|w_1|^{p-1} - |w_2|^{p-1})|^2 |\nabla w_2^j|^2 dx$$
$$\leq 4(p-1)^2 C_{s'}^4 C_s^{2(p-2)} \|w_2\|_{H^2}^2 \Big\{ C(p)^2 (\|w_1\|_{H^2}^{2(p-2)} + \|w_2\|_{H^2}^{2(p-2)})$$
$$+ \|w_1\|_{H^2}^{2(p-2)} + \max\{\|w_1\|_{H^2}^{p-3}, \|w_2\|_{H^2}^{p-3}\}^2 \|w_2\|_{H^2}^2 \Big\} \|w_1 - w_2\|_{H^2}^2.$$

Como $H^1 \hookrightarrow L^4$ temos

$$
\begin{aligned}
I_4 &= 2\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3} |(|w_1|^{p-1} - |w_2|^{p-1})|^2 \left|\frac{\partial}{\partial x_k} w_2^j\right|^2 dx \\
&\leq 2\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} \||w_1|^{p-1} - |w_2|^{p-1}\|_{L^4}^2 \left\|\frac{\partial}{\partial x_k} w_2^j\right\|_{L^4}^2 \\
&\leq 2\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} C_{s'}^2 \||w_1|^{p-1} - |w_2|^{p-1}\|_{H^1}^2 C_{s'}^2 \left\|\frac{\partial}{\partial x_k} w_2^j\right\|_{H^1}^2 \\
&\leq 2C_{s'}^4 \|w_2\|_{H^2}^2 \||w_1|^{p-1} - |w_2|^{p-1}\|_{H^1}^2.
\end{aligned} \tag{5.12}
$$

Para estimar $\||w_1|^{p-1} - |w_2|^{p-1}\|_{H^1}^2$, resta estimar $\||w_1|^{p-1} - |w_2|^{p-1}\|_{L^2}^2$, pois (5.11) nos fornece uma estimativa para $\|\nabla(|w_1|^{p-1} - |w_2|^{p-1})\|_{L^2}^2$.

Pelo teorema do valor médio temos

$$
||w_1|^{p-1} - |w_2|^{p-1}| \leq (p-1)C(p)(|w_1|^{p-2} + |w_2|^{p-2})|w_1 - w_2|.
$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^3} ||w_1|^{p-1} - |w_2|^{p-1}|^2 dx &\leq (p-1)^2 C(p)^2 \int_{\mathbb{R}^3} (|w_1|^{p-2} + |w_2|^{p-2})^2 |w_1 - w_2|^2 dx \\
&\leq 2(p-1)^2 C(p)^2 \int_{\mathbb{R}^3} (|w_1|^{2(p-2)} + |w_2|^{2(p-2)})|w_1 - w_2|^2 dx \\
&\leq 2(p-1)^2 C(p)^2 (\|w_1\|_{L^\infty}^{2(p-2)} + \|w_2\|_{L^\infty}^{2(p-2)}) \int_{\mathbb{R}^3} |w_1 - w_2|^2 dx \\
&\leq 2(p-1)^2 C(p)^2 C_s^{2(p-2)} (\|w_1\|_{H^2}^{2(p-2)} + \|w_2\|_{H^2}^{2(p-2)}) \int_{\mathbb{R}^3} |w_1 - w_2|^2 dx,
\end{aligned} \tag{5.13}
$$

em que na última desigualdade usamos a imersão $[H^2(\mathbb{R}^3)]^3 \hookrightarrow [L^\infty(\mathbb{R}^3)]^3$.

Usando (5.11) e (5.13) em (5.12) concluímos que

$$
\begin{aligned}
I_4 \leq 4(p-1)^2 C_{s'}^4 C_s^{2(p-2)} \|w_2\|_{H^2}^2 \Big\{ & C(p)^2 (\|w_1\|_{H^2}^{2(p-2)} + \|w_2\|_{H^2}^{2(p-2)}) \\
&+ \|w_1\|_{H^2}^{2(p-2)} + \max\{\|w_1\|_{H^2}^{p-3}, \|w_2\|_{H^2}^{p-3}\}^2 \|w_2\|_{H^2}^2 \Big\} \|w_1 - w_2\|_{H^2}^2.
\end{aligned}
$$

Considerando as estimativas para I_3 e I_4 em (5.9) e tomando $C_3 = \max\{4(p-1)^2 C_s^{2(p-1)}, 8(p-1)^2 C_{s'}^4 C_s^{2(p-2)}(C(p)^2 + 1)\}$ segue o desejado. □

Nosso problema semilinear é equivalente ao problema de Cauchy abstrato

$$
\begin{cases}
U_t = BU + FU, \quad t > 0, \\
U(0) = U_0,
\end{cases} \tag{5.14}
$$

onde $B : D(B) \subset X \to X$ é o operador definido no Capítulo 3 em (3.8), $F : D(B) \to D(B)$ é o operador dado por

$$FU = \begin{pmatrix} 0 \\ |u|^{p-1}u \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{5.15}$$

$U_0 = (u_0, u_1, h_0, \theta_0)^T$, $X = [H^1(\mathbb{R}^3)]^3 \times [L^2(\mathbb{R}^3)]^3 \times \mathcal{H}_\sigma \times L^2(\mathbb{R}^3)$ e

$$D(B) = [H^2(\mathbb{R}^3)]^3 \times [H^1(\mathbb{R}^3)]^3 \times (\mathcal{H}_\sigma \cap [H^2(\mathbb{R}^3)]^3) \times H^2(\mathbb{R}^3).$$

Demonstração do Teorema 15: A ideia é provar que valem as hipóteses do Teorema 7 do Capítulo 2. Então, seja $U_0 \in D(B)$. Pelo estudo do problema linear já sabemos que B é gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo. Assim, basta provar que $F : D(B) \to D(B)$ dado por (5.15) está bem definido e é Lipschitz contínua, com a norma do gráfico, sobre conjuntos limitados.

(i) $F : D(B) \to D(B)$ está bem definido.

De fato, seja $(u, v, h, \theta) \in D(B)$, isto é, $u \in [H^2(\mathbb{R}^3)]^3$. Fixado $i \in \{1, 2, 3\}$, vamos mostrar que $|u|^{p-1}u^i \in L^2(\mathbb{R}^3)$. Como $[H^2(\mathbb{R}^3)]^3 \hookrightarrow [L^\infty(\mathbb{R}^3)]^3$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^3} ||u|^{p-1}u^i|^2 dx &= \int_{\mathbb{R}^3} |u|^{2(p-1)}|u^i|^2 dx \\
&\le \|u\|_{L^\infty}^{2(p-1)} \int_{\mathbb{R}^3} |u^i|^2 dx \\
&= \|u\|_{L^\infty}^{2(p-1)} \|u^i\|_{L^2}^2 \\
&\le C_s^{2(p-1)} \|u\|_{H^2}^{2(p-1)} \|u^i\|_{L^2}^2 < +\infty.
\end{aligned}$$

Logo, $|u|^{p-1}u_i \in L^2(\mathbb{R}^3)$ para cada $i \in \{1, 2, 3\}$.

Agora mostraremos que

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(|u|^{p-1}u^i) \in L^2(\mathbb{R}^3), \ \forall j \in \{1, 2, 3\}.$$

Temos

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(|u|^{p-1}u^i) = (p-1)|u|^{p-2}\frac{1}{|u|}\langle u, \frac{\partial}{\partial x_j}u\rangle u^i + |u|^{p-1}\frac{\partial}{\partial x_j}u^i.$$

Então

$$\begin{aligned}
\left|(p-1)|u|^{p-2}\frac{1}{|u|}\langle u, \frac{\partial}{\partial x_j}u\rangle u^i\right|^2 &\le (p-1)^2|u|^{2p-4}\frac{1}{|u|^2}|u|^2\left|\frac{\partial}{\partial x_j}u\right|^2 (u^i)^2 \\
&\le (p-1)^2|u|^{2p-2}\left|\frac{\partial}{\partial x_j}u\right|^2
\end{aligned}$$

e
$$\left| |u|^{p-1} \frac{\partial}{\partial x_j} u^i \right|^2 = |u|^{2p-2} \left| \frac{\partial}{\partial x_j} u^i \right|^2 \leq |u|^{2p-2} \left| \frac{\partial}{\partial x_j} u \right|^2 .$$
Assim,
$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^3} \left| \frac{\partial}{\partial x_j} (|u|^{p-1} u^i) \right|^2 dx &\leq 2 \int_{\mathbb{R}^3} \left| (p-1)|u|^{p-2} \frac{1}{|u|} \langle u, \frac{\partial}{\partial x_j} u \rangle u^i \right|^2 dx \\
&+ 2 \int_{\mathbb{R}^3} \left| |u|^{p-1} \frac{\partial}{\partial x_j} u^i \right|^2 dx \\
&\leq [2(p-1)^2 + 2] \int_{\mathbb{R}^3} |u|^{2(p-1)} \left| \frac{\partial}{\partial x_j} u \right|^2 dx \\
&\leq [2(p-1)^2 + 2] \|u\|_{L^\infty}^{2(p-1)} \int_{\mathbb{R}^3} \left| \frac{\partial}{\partial x_j} u \right|^2 dx < +\infty,
\end{aligned}$$
como queríamos.

Dessa forma, obtemos $|u|^{p-1} u^i \in H^1(\mathbb{R}^3)$ para $i \in \{1, 2, 3\}$, o que implica $|u|^{p-1} u \in [H^1(\mathbb{R}^3)]^3$. Portanto, $F : D(B) \to D(B)$ está bem definida.

(ii) $F : D(B) \to D(B)$ é Lipschitz contínuo, com a norma do gráfico, sobre conjuntos limitados.

Sejam $M > 0$, $U_1 = (u_1, v_1, h_1, \theta_1) \in D(B)$ e $U_2 = (u_2, v_2, h_2, \theta_2) \in D(B)$ tais que $\|U_1\|_X + \|BU_1\|_X \leq M$ e $\|U_2\|_X + \|BU_2\|_X \leq M$. Vamos provar que existe $L_M > 0$ tal que
$$\|F(U_1) - F(U_2)\|_X + \|B(F(U_1) - F(U_2))\|_X \leq L_M (\|U_1 - U_2\|_X + \|B(U_1 - U_2)\|_X).$$

Temos
$$F(U_1) - F(U_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ |u_1|^{p-1} u_1 - |u_2|^{p-1} u_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
e
$$B(F(U_1) - F(U_2)) = \begin{pmatrix} |u_1|^{p-1} u_1 - |u_2|^{p-1} u_2 \\ 0 \\ \mu_0 \operatorname{curl}[(|u_1|^{p-1} u_1 - |u_2|^{p-1} u_2) \times H] \\ -\gamma \operatorname{div}(|u_1|^{p-1} u_1 - |u_2|^{p-1} u_2) \end{pmatrix}.$$
Então
$$\begin{aligned}
\|F(U_1) - F(U_2)\|_X + \|B(F(U_1) - F(U_2))\|_X &= \| |u_1|^{p-1} u_1 - |u_2|^{p-1} u_2 \|_{L^2} \\
&+ \| |u_1|^{p-1} u_1 - |u_2|^{p-1} u_2 \|_{H^1} \\
&+ \| \mu_0 \operatorname{curl}[(|u_1|^{p-1} u_1 - |u_2|^{p-1} u_2) \times H] \|_{L^2} \\
&+ \| -\gamma \operatorname{div}(|u_1|^{p-1} u_1 - |u_2|^{p-1} u_2) \|_{L^2}.
\end{aligned}$$

Como $\|\operatorname{curl}(u \times H)\|_{L^2} \leq 2\|u\|_{H^1}$ e $\|\operatorname{div} u\|_{L^2} \leq \|u\|_{H^1}$ temos

$$\begin{aligned}
&\|F(U_1) - F(U_2)\|_X + \|B(F(U_1) - F(U_2))\|_X \\
&\leq \||u_1|^{p-1}u_1 - |u_2|^{p-1}u_2\|_{H^1} + \||u_1|^{p-1}u_1 - |u_2|^{p-1}u_2\|_{H^1} \\
&+ 2\mu_0\||u_1|^{p-1}u_1 - |u_2|^{p-1}u_2\|_{H^1} + \gamma\||u_1|^{p-1}u_1 - |u_2|^{p-1}u_2\|_{H^1} \\
&= (2 + 2\mu_0 + \gamma)\||u_1|^{p-1}u_1 - |u_2|^{p-1}u_2\|_{H^1}
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
&\|F(U_1) - F(U_2)\|_X + \|B(F(U_1) - F(U_2))\|_X \\
&\leq (2 + 2\mu_0 + \gamma)\||u_1|^{p-1}u_1 - |u_2|^{p-1}u_2\|_{L^2} \\
&+ (2 + 2\mu_0 + \gamma)\|\nabla(|u_1|^{p-1}u_1 - |u_2|^{p-1}u_2)\|_{L^2}.
\end{aligned} \tag{5.16}$$

Para estimar a primeira norma que aparece do lado direito de (5.16) usamos o Lema 10. Assim,

$$\||u_1|^{p-1}u_1 - |u_2|^{p-1}u_2\|^2_{L^2} \leq C_1\left(\|u_1\|^{2(p-1)}_{H^2} + \|u_2\|^{2(p-1)}_{H^2}\right)\|u_1 - u_2\|^2_{L^2}. \tag{5.17}$$

Agora, note que a segunda norma que aparace no lado direito de (5.16) pode ser escrita da seguinte forma

$$\begin{aligned}
&\|\nabla(|u_1|^{p-1}u_1 - |u_2|^{p-1}u_2)\|^2_{L^2} \\
&\leq C\left(\left\|\nabla\left[|u_1|^{p-1}(u_1 - u_2)\right]\right\|^2_{L^2} + \left\|\nabla\left[(|u_1|^{p-1} - |u_2|^{p-1})u_2\right]\right\|^2_{L^2}\right),
\end{aligned}$$

e pelos Lemas 11 e 12 segue

$$\begin{aligned}
&\|\nabla(|u_1|^{p-1}u_1 - |u_2|^{p-1}u_2)\|^2_{L^2} \leq C_2\|u_1\|^{2(p-1)}_{H^2}\|u_1 - u_2\|^2_{H^2} \\
&+ C_3\|u_2\|^2_{H^2}\left(\|u_1\|^{2(p-2)}_{H^2} + \|u_2\|^{2(p-2)}_{H^2} + \max\{\|u_1\|^{p-3}_{H^2}, \|u_2\|^{p-3}_{H^2}\}^2\|u_2\|^2_{H^2}\right)\|u_1 - u_2\|^2_{H^2} \\
&\leq C_4\Bigg[\|u_1\|^{2(p-1)}_{H^2} + \|u_2\|^2_{H^2}\Bigg(\|u_1\|^{2(p-2)}_{H^2} + \|u_2\|^{2(p-2)}_{H^2} \\
&+ \max\{\|u_1\|^{p-3}_{H^2}, \|u_2\|^{p-3}_{H^2}\}^2\|u_2\|^2_{H^2}\Bigg)\Bigg]\|u_1 - u_2\|^2_{H^2},
\end{aligned} \tag{5.18}$$

onde $C_4 = C_2 + C_3$.

Além disso, por hipótese temos

$$\|u_1\|_{H^2} \leq \|U_1\|_{D(B)} \leq C_2(\|U_1\|_X + \|BU_1\|_X) \leq C_2M,$$

$$\|u_2\|_{H^2} \leq \|U_2\|_{D(B)} \leq C_2(\|U_2\|_X + \|BU_2\|_X) \leq C_2M.$$

Então as estimativas (5.17) e (5.18) tornam-se

$$\||u_1|^{p-1}u_1 - |u_2|^{p-1}u_2\|^2_{L^2} \leq 2C_1C_2^{2(p-1)}M^{2(p-1)}\|u_1 - u_2\|^2_{H^2} \tag{5.19}$$

e

$$\|\nabla(|u_1|^{p-1}u_1 - |u_2|^{p-1}u_2)\|_{L^2}^2 \leq 4C_4C_2^{2(p-1)}M^{2(p-1)}\|u_1 - u_2\|_{H^2}^2, \tag{5.20}$$

respectivamente. Usando (5.19) e (5.20) em (5.16) vem

$$\|F(U_1) - F(U_2)\|_X + \|B(F(U_1) - F(U_2))\|_X \leq L_M\|u_1 - u_2\|_{H^2}, \tag{5.21}$$

onde $L_M = (2 + 2\mu_0 + \gamma)[(2C_1)^{\frac{1}{2}} + 2(C_4)^{\frac{1}{2}}](C_2M)^{p-1}$. Como

$$\|u_1 - u_2\|_{H^2} \leq \|U_1 - U_2\|_{D(B)} \approx \|U_1 - U_2\|_X + \|B(U_1 - U_2)\|_X$$

segue

$$\|F(U_1) - F(U_2)\|_X + \|B(F(U_1) - F(U_2))\|_X \leq L_M(\|U_1 - U_2\|_X + \|B(U_1 - U_2)\|_X) \tag{5.22}$$

o que prova o item (ii) e, consequentemente, a prova do teorema está concluída.

□

5.2 EXISTÊNCIA DE SOLUÇÃO GLOBAL FORTE E TAXAS DE DECAIMENTO

Nesta seção vamos usar taxas de decaimento obtidas para o problema linear, mais precisamente, os Teoremas 11 e 13, para provar a existência de solução global do problema semilinear. Iniciamos a seção apresentando o resultado de existência de solução global forte e taxas de decaimento para o problema semilinear (5.14), ou seja, para o problema (5.1)-(5.6).

Teorema 16. *Sejam $\beta > 6$ e $p > 5\beta - \frac{9}{8}$. Considere $(u_0, u_1, h_0, \theta_0) \in ([H^2(\mathbb{R}^3)]^3 \cap [L^1(\mathbb{R}^3)]^3) \times ([H^1(\mathbb{R}^3)]^3 \cap [L^1(\mathbb{R}^3)]^3) \times (\mathcal{H}_\sigma \cap [H^2(\mathbb{R}^3)]^3 \cap [L^1(\mathbb{R}^3)]^3) \times (H^2(\mathbb{R}^3) \cap L^1(\mathbb{R}^3))$ e suponha que $\|\Delta h(t)\|_{L^2} \leq C$ e $\|\Delta\theta(t)\|_{L^2} \leq C$ para todo $t \in [0, T_m)$, com T_m dado no Teorema 15. Então existe um número real $\delta > 0$ tal que se $I_{0,\beta,p} < \delta$, $I'_{0,\beta,p} < \delta$ e $I''_{0,\beta,p} < \delta$, em que*

$$\begin{aligned} I_{0,\beta,p} = \Big(& P_0^{\frac{3(p-4)}{10}} I_{4,\beta}^{\frac{3p+8}{20}} J_{0,\beta}^{\frac{p+6}{20}} + P_0^{\frac{3(p-2)}{10}} I_{4,\beta}^{\frac{3p-1}{20}} J_{0,\beta}^{\frac{p+3}{20}} + P_0^{\frac{3(4p-3)}{40}} I_{4,\beta}^{\frac{3p-6}{20}} J_{0,\beta}^{\frac{2p+1}{40}} \\ & + P_0^{\frac{12p-35}{40}} I_{4,\beta}^{\frac{9p+10}{60}} J_{0,\beta}^{\frac{6p+25}{120}} \Big), \end{aligned}$$

$$I'_{0,\beta,p} = P_0^{\frac{3(p-4)}{10}} I_{4,\beta}^{\frac{3(p+6)}{20}} J_{0,\beta}^{\frac{p-4}{20}} + P_0^{\frac{3(p-2)}{10}} I_{4,\beta}^{\frac{3(p+3)}{20}} J_{0,\beta}^{\frac{p-7}{20}}$$

e

$$I''_{0,\beta,p} = P_0^{\frac{12p-29}{40}} I_{4,\beta}^{\frac{3p+4}{20}} J_{0,\beta}^{\frac{2p+1}{40}},$$

o problema semilinear (5.1)-(5.6) *admite única solução global*

$$u \in C([0,+\infty);[H^2(\mathbb{R}^3)]^3) \cap C^1([0,+\infty);[H^1(\mathbb{R}^3)]^3) \cap C^2([0,+\infty);[L^2(\mathbb{R}^3)]^3),$$
$$h \in C([0,+\infty);[H^2(\mathbb{R}^3)]^3 \cap \mathcal{H}_\sigma) \cap C^1([0,+\infty);\mathcal{H}_\sigma),$$
$$\theta \in C([0,+\infty);H^2(\mathbb{R}^3)) \cap C^1([0,+\infty);L^2(\mathbb{R}^3)).$$

Além disso, a solução do sistema semilinear (5.1)-(5.6) *satisfaz*

$$\mathcal{E}(t) \leq C I_{4,\beta}(1+t)^{-\frac{1}{\beta}}, \quad \forall t \in [0,+\infty),$$

$$\|u\|_{L^2}^2 \leq C J_{0,\beta}(1+t)^{-\frac{1}{\beta}},$$

e

$$\|\Delta u\|_{L^2}^2 + \|\nabla u_t\|_{L^2}^2 \leq C P_0,$$

onde $I_{4,\beta} > 0$*,* $P_0 > 0$ *e* $J_{0,\beta} > 0$ *são constantes que dependem dos dados iniciais, sendo as duas primeiras definidas no Teorema 11 e a última no Teorema 13.*

No próximo lema, provamos estimativas importantes para o estudo do problema semilinear.

Lema 13. *Sejam* $p > 4$ *e* $u(s) \in [H^2(\mathbb{R}^3)]^3$*. Então existem constantes positivas* C_p*,* C'_p *e* C''_p*, dependendo de* p*, tais que*

(i)

$$\||u(s)|^{p-1}u(s)\|_{L^1} \leq C_p \|\Delta u(s)\|_{L^2}^{\theta_1 p} \|\nabla u(s)\|_{L^2}^{\frac{3(1-\theta_1)p}{4}} \|u(s)\|_{L^2}^{\frac{(1-\theta_1)p}{4}}, \tag{5.23}$$

com $\frac{1}{p} = -\frac{5\theta_1}{12} + \frac{1}{4}$.

(ii)

$$\||u(s)|^{p-1}u(s)\|_{L^2} \leq C'_p \|\Delta u(s)\|_{L^2}^{\theta_2 p} \|\nabla u(s)\|_{L^2}^{\frac{3(1-\theta_2)p}{4}} \|u(s)\|_{L^2}^{\frac{(1-\theta_2)p}{4}}, \tag{5.24}$$

com $\frac{1}{2p} = -\frac{5\theta_2}{12} + \frac{1}{4}$.

(iii)

$$\|\nabla(|u(s)|^{p-1}u(s))\|_{L^2} \leq C''_p \|\Delta u(s)\|_{L^2}^{(p-1)\theta_3+\frac{3}{4}} \|\nabla u(s)\|_{L^2}^{\frac{3(1-\theta_3)(p-1)+1}{4}} \|u(s)\|_{L^2}^{\frac{(1-\theta_3)(p-1)}{4}}, \tag{5.25}$$

com $\frac{1}{4(p-1)} = -\frac{5\theta_3}{12} + \frac{1}{4}$.

Demonstração. **Prova do item** (i)**:** Observe que

$$\begin{aligned}
\||u(s)|^{p-1}u(s)\|_{L^1} = \sum_{i=1}^{3} \||u(s)|^{p-1}u^i(s)\|_{L^1} &= \sum_{i=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} ||u(s)|^{p-1}u^i(s)|dx \\
&\approx \int_{\mathbb{R}^3} |u(s)|^{p-1}|u(s)|dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} |u(s)|^{p}dx \\
&\approx \|u(s)\|^p_{L^p}. \qquad (5.26)
\end{aligned}$$

Como $p > 4$ e $u(s) \in [H^2(\mathbb{R}^3)]^3$, pela desigualdade de Gagliardo-Nirenberg, temos

$$\|u(s)\|_{L^p} \leq C\|\Delta u(s)\|^{\theta_1}_{L^2}\|u(s)\|^{1-\theta_1}_{L^4},$$

onde $\frac{1}{p} = -\frac{5\theta_1}{12} + \frac{1}{4}$.

Novamente, pela desigualdade de Gagliardo-Nirenberg temos

$$\|u(s)\|_{L^p} \leq CC_1^{1-\theta_1}\|\Delta u(s)\|^{\theta_1}_{L^2}\|\nabla u(s)\|^{\frac{3(1-\theta_1)}{4}}_{L^2}\|u(s)\|^{\frac{1-\theta_1}{4}}_{L^2}, \qquad (5.27)$$

onde $\frac{1}{p} = -\frac{5\theta_1}{12} + \frac{1}{4}$.

Então, de (5.27) em (5.26)

$$\||u(s)|^{p-1}u(s)\|_{L^1} \leq C_2C^pC_1^{(1-\theta_1)p}\|\Delta u(s)\|^{\theta_1 p}_{L^2}\|\nabla u(s)\|^{\frac{3(1-\theta_1)p}{4}}_{L^2}\|u(s)\|^{\frac{(1-\theta_1)p}{4}}_{L^2}, \qquad (5.28)$$

onde $\frac{1}{p} = -\frac{5\theta_1}{12} + \frac{1}{4}$.

Prova do item (ii)**:** Observe que

$$\begin{aligned}
\||u(s)|^{p-1}u(s)\|^2_{L^2} \approx \sum_{i=1}^{3} \||u(s)|^{p-1}u^i(s)\|^2_{L^2} &= \sum_{i=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} ||u(s)|^{p-1}u^i(s)|^2dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} |u(s)|^{2p}dx \\
&\approx \|u(s)\|^{2p}_{L^{2p}}. \qquad (5.29)
\end{aligned}$$

Como $p > 4 > 2$ e $u(s) \in [H^2(\mathbb{R}^3)]^3$, pela desigualdade de Gagliardo-Nirenberg, temos

$$\|u(s)\|_{L^{2p}} \leq C\|\Delta u(s)\|^{\theta_2}_{L^2}\|u(s)\|^{1-\theta_2}_{L^4},$$

onde $\frac{1}{2p} = -\frac{5\theta_2}{12} + \frac{1}{4}$.

Novamente, pela desigualdade de Gagliardo-Nirenberg

$$\|u(s)\|_{L^{2p}} \leq CC_1^{1-\theta_2}\|\Delta u(s)\|^{\theta_2}_{L^2}\|\nabla u(s)\|^{\frac{3(1-\theta_2)}{4}}_{L^2}\|u(s)\|^{\frac{(1-\theta_2)}{4}}_{L^2}, \qquad (5.30)$$

onde $\frac{1}{2p} = -\frac{5\theta_2}{12} + \frac{1}{4}$.

De (5.30) em (5.29) temos

$$\||u(s)|^{p-1}u(s)\|_{L^2} \le C_2 C^p C_1^{(1-\theta_2)p} \|\Delta u(s)\|_{L^2}^{\theta_2 p} \|\nabla u(s)\|_{L^2}^{\frac{3(1-\theta_2)p}{4}} \|u(s)\|_{L^2}^{\frac{(1-\theta_2)p}{4}}, \tag{5.31}$$

onde $\frac{1}{2p} = -\frac{5\theta_2}{12} + \frac{1}{4}$.

Prova do item (iii)**:** Observe que

$$\begin{aligned}
\|\nabla(|u(s)|^{p-1}u(s))\|_{L^2}^2 &= \sum_{i=1}^{3} \|\nabla(|u(s)|^{p-1}u^i(s))\|_{L^2}^2 \\
&= \sum_{i=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} \left|\nabla(|u(s)|^{p-1}u^i(s))\right|^2 dx \\
&= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} \left|\frac{\partial}{\partial x_j}(|u(s)|^{p-1}u^i(s))\right|^2 dx.
\end{aligned} \tag{5.32}$$

Agora,

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(|u|^{p-1}u^i) = (p-1)|u|^{p-2}\frac{1}{|u|}\langle u, \frac{\partial}{\partial x_j}u\rangle u^i + |u|^{p-1}\frac{\partial}{\partial x_j}u^i.$$

Então

$$\left|(p-1)|u|^{p-2}\frac{1}{|u|}\langle u, \frac{\partial}{\partial x_j}u\rangle u^i\right|^2 \le (p-1)^2|u|^{2p-4}\frac{1}{|u|^2}|u|^2\left|\frac{\partial}{\partial x_j}u\right|^2 (u^i)^2$$

e

$$\left||u|^{p-1}\frac{\partial}{\partial x_j}u^i\right|^2 = |u|^{2p-2}\left|\frac{\partial}{\partial x_j}u^i\right|^2.$$

Assim, para cada $j \in \{1,2,3\}$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{3}\left|\frac{\partial}{\partial x_j}(|u|^{p-1}u^i)\right|^2 &\le 2(p-1)^2\sum_{i=1}^{3}|u|^{2p-4}\left|\frac{\partial}{\partial x_j}u\right|^2(u^i)^2 + 2\sum_{i=1}^{3}|u|^{2p-2}\left|\frac{\partial}{\partial x_j}u^i\right|^2 \\
&= 2[(p-1)^2+1]|u|^{2p-2}\left|\frac{\partial}{\partial x_j}u\right|^2.
\end{aligned} \tag{5.33}$$

De (5.33) em (5.32) vem

$$\|\nabla(|u(s)|^{p-1}u(s))\|_{L^2}^2 \le 2[(p-1)^2+1]\sum_{j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}|u(s)|^{2p-2}\left|\frac{\partial}{\partial x_j}u(s)\right|^2 dx. \tag{5.34}$$

Na integral que aparece no lado direito de (5.34) vamos usar a desigualdade de Cauchy-Schwarz, assim

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^3} |u(s)|^{2(p-1)} \left| \frac{\partial}{\partial x_j} u(s) \right|^2 dx &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^3} |u(s)|^{4(p-1)} dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^3} \left| \frac{\partial}{\partial x_j} u(s) \right|^4 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\approx \left(\int_{\mathbb{R}^3} \sum_{i=1}^{3} |u^i(s)|^{4(p-1)} dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^3} \sum_{k=1}^{3} \left| \frac{\partial}{\partial x_j} u^k(s) \right|^4 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{3} \|u^i(s)\|_{L^{4(p-1)}}^{4(p-1)} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{3} \left\| \frac{\partial}{\partial x_j} u^k(s) \right\|_{L^4}^4 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \sum_{i=1}^{3} \|u^i(s)\|_{L^{4(p-1)}}^{2(p-1)} \sum_{k=1}^{3} \left\| \frac{\partial}{\partial x_j} u^k(s) \right\|_{L^4}^2 \\
&\lesssim \|u(s)\|_{L^{4(p-1)}}^{2(p-1)} \left\| \frac{\partial}{\partial x_j} u(s) \right\|_{L^4}^2 . \qquad (5.35)
\end{aligned}$$

Como $p > 4 > 2$ e $u(s) \in [H^2(\mathbb{R}^3)]^3 \cap [L^4(\mathbb{R}^3)]^3$ temos, pela desigualdade de Gagliardo-Nirenberg,

$$\|u(s)\|_{L^{4(p-1)}} \leq C \|\Delta u(s)\|_{L^2}^{\theta_3} \|u(s)\|_{L^4}^{1-\theta_3},$$

onde $\frac{1}{4(p-1)} = -\frac{5\theta_3}{12} + \frac{1}{4}$.

Novamente, pela desigualdade de Gagliardo-Nirenberg

$$\|u(s)\|_{L^{4(p-1)}} \leq C C_1^{1-\theta_3} \|\Delta u(s)\|_{L^2}^{\theta_3} \|\nabla u(s)\|_{L^2}^{\frac{3(1-\theta_3)}{4}} \|u(s)\|_{L^2}^{\frac{(1-\theta_3)}{4}} . \qquad (5.36)$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{\partial}{\partial x_j} u(s) \right\|_{L^4} &\leq C \left\| \nabla \left(\frac{\partial}{\partial x_j} u(s) \right) \right\|_{L^2}^{\frac{3}{4}} \left\| \frac{\partial}{\partial x_j} u(s) \right\|_{L^2}^{\frac{1}{4}} \\
&\leq C_2 \|\Delta u(s)\|_{L^2}^{\frac{3}{4}} \|\nabla u(s)\|_{L^2}^{\frac{1}{4}} . \qquad (5.37)
\end{aligned}$$

Usando (5.36) e (5.37) em (5.35) e a estimativa resultante em (5.34) segue

$$\|\nabla(|u(s)|^{p-1} u(s))\|_{L^2} \leq C_p \|\Delta u(s)\|_{L^2}^{(p-1)\theta_3 + \frac{3}{4}} \|\nabla u(s)\|_{L^2}^{\frac{3(1-\theta_3)(p-1)+1}{4}} \|u(s)\|_{L^2}^{\frac{(1-\theta_3)(p-1)}{4}}, \qquad (5.38)$$

onde $\frac{1}{4(p-1)} = -\frac{5\theta_3}{12} + \frac{1}{4}$ e $C_p > 0$ é uma constante que depende de p. □

A demonstração do seguinte lema técnico, o qual é útil na demonstração do resultado principal, é semelhante a apresentada em Ikehata [22].

Lema 14. *Sejam $\alpha > 1$ e $\beta > \frac{1}{2}$ números reais. Então existe uma constante $C_{\alpha,\beta} > 0$ dependendo de α e β tal que*

$$\int_0^t (1 + t - s)^{-\frac{1}{2\beta}} (1 + s)^{-\alpha} ds \leq C_{\alpha,\beta} (1 + t)^{-\frac{1}{2\beta}},$$

para todo $t > 0$.

Demonstração. Para provar a estimativa separamos a integral em duas integrais da seguinte forma

$$\int_0^t (1+t-s)^{-\frac{1}{2\beta}}(1+s)^{-\alpha}ds \leq I_1(t) + I_2(t),$$

onde

$$I_1(t) = \int_0^{\frac{1+t}{2}} (1+t-s)^{-\frac{1}{2\beta}}(1+s)^{-\alpha}ds$$

e

$$I_2(t) = \int_{\frac{1+t}{2}}^{1+t} (1+t-s)^{-\frac{1}{2\beta}}(1+s)^{-\alpha}ds.$$

Estimativa para $I_1(t)$: Para $0 \leq s \leq \frac{1+t}{2}$ temos

$$(1+t-s)^{-\frac{1}{2\beta}} \leq \left[1+t-\left(\frac{1+t}{2}\right)\right]^{-\frac{1}{2\beta}}.$$

Então

$$\begin{aligned}
I_1(t) &\leq \int_0^{\frac{1+t}{2}} \left(\frac{1+t}{2}\right)^{-\frac{1}{2\beta}} (1+s)^{-\alpha}ds \\
&= 2^{\frac{1}{2\beta}}(1+t)^{-\frac{1}{2\beta}} \int_0^{\frac{1+t}{2}} (1+s)^{-\alpha}ds \\
&= 2^{\frac{1}{2\beta}}(1+t)^{-\frac{1}{2\beta}} \left[\left(1+\frac{1+t}{2}\right)^{-\alpha+1} \frac{1}{-\alpha+1} - \frac{1}{-\alpha+1}\right] \\
&\leq \frac{2^{\frac{1}{2\beta}}}{\alpha-1}(1+t)^{-\frac{1}{2\beta}},
\end{aligned}$$

em que na última desigualdade usamos o fato de $\alpha > 1$.

Estimativa para $I_2(t)$:

$$\begin{aligned}
I_2(t) &\leq \int_{\frac{1+t}{2}}^{1+t} (1+t-s)^{-\frac{1}{2\beta}} s^{-\alpha}ds \\
&\leq \int_{\frac{1+t}{2}}^{1+t} (1+t-s)^{-\frac{1}{2\beta}} \left(\frac{1+t}{2}\right)^{-\alpha} ds \\
&= 2^{\alpha}(1+t)^{-\alpha} \int_{\frac{1+t}{2}}^{1+t} (1+t-s)^{-\frac{1}{2\beta}}ds \\
&= 2^{\alpha}(1+t)^{-\alpha} \left(\frac{1+t}{2}\right)^{-\frac{1}{2\beta}+1} \frac{2\beta}{2\beta-1} \\
&= 2^{\alpha}2^{\left(\frac{1}{2\beta}-1\right)} \frac{2\beta}{2\beta-1}(1+t)^{-\alpha-\frac{1}{2\beta}+1} \\
&\leq 2^{\alpha}2^{\left(\frac{1}{2\beta}-1\right)} \frac{2\beta}{2\beta-1}(1+t)^{-\frac{1}{2\beta}}
\end{aligned}$$

em que na última desigualdade usamos o fato de $\alpha > 1$.

Das estimativas para $I_1(t)$ e $I_2(t)$, tomando $C_{\alpha,\beta} = \frac{2^{\frac{1}{2\beta}}}{\alpha-1} + 2^{\alpha}2^{\left(\frac{1}{2\beta}-1\right)}\frac{2\beta}{2\beta-1}$ segue o desejado. □

Deste ponto em diante, definimos as seguintes normas

$$\|U\|_E = \|u_t\|_{L^2} + \|\nabla u\|_{L^2} + \|\operatorname{div} u\|_{L^2} + \|h\|_{L^2} + \|\theta\|_{L^2},$$

$$\|U\|_F = \|u\|_{L^2}$$

e

$$\|U\|_G = \|\Delta u\|_{L^2} + \|\nabla u_t\|_{L^2}.$$

O seguinte lema é uma consequência direta do Teorema 11.

Lema 15. *Sejam $\beta > 5$ e $U_0 = (u_0, u_1, h_0, \theta_0) \in ([H^2(\mathbb{R}^3)]^3 \cap [L^1(\mathbb{R}^3)]^3) \times ([H^1(\mathbb{R}^3)]^3 \cap [L^1(\mathbb{R}^3)]^3) \times (\mathcal{H}_\sigma \cap [H^1(\mathbb{R}^3)]^3 \cap [L^1(\mathbb{R}^3)]^3) \times (H^1(\mathbb{R}^3) \cap L^1(\mathbb{R}^3))$. Então existe uma constante $C(\beta) > 0$, dependendo de β, tal que*

$$\|S(t)U_0\|_E \leq C(\beta) I_{4,\beta}^{\frac{1}{2}} (1+t)^{-\frac{1}{2\beta}}$$

para todo $t \geq 0$, onde $S(t)$ é o semigrupo gerado pelo operador B e $I_{4,\beta} > 0$ foi definida no Teorema 11. Em particular, a estimativa vale para $t \in [0, T_m)$ com T_m dado no Teorema 15.

Os dois próximos lemas são consequência direta do Teorema 13.

Lema 16. *Sejam $\beta > 6$ e $U_0 = (u_0, u_1, h_0, \theta_0) \in ([H^1(\mathbb{R}^3)]^3 \cap [L^1(\mathbb{R}^3)]^3) \times ([L^2(\mathbb{R}^3)]^3 \cap [L^1(\mathbb{R}^3)]^3) \times (\mathcal{H}_\sigma \cap [L^1(\mathbb{R}^3)]^3) \times (L^2(\mathbb{R}^3) \cap L^1(\mathbb{R}^3))$. Então existe uma constante $C(\beta) > 0$, dependendo de β, tal que*

$$\|S(t)U_0\|_F \leq C(\beta) J_{0,\beta}^{\frac{1}{2}} (1+t)^{-\frac{1}{2\beta}},$$

para todo $t \geq 0$, onde $S(t)$ é o semigrupo gerado pelo operador B e $J_{0,\beta} > 0$ foi definida no Teorema 13. Em particular, a estimativa vale para $t \in [0, T_m)$ com T_m dado no Teorema 15.

Lema 17. *Seja $U_0 = (u_0, u_1, h_0, \theta_0) \in [H^2(\mathbb{R}^3)]^3 \times [H^1(\mathbb{R}^3)]^3 \times (\mathcal{H}_\sigma \cap [H^1(\mathbb{R}^3)]^3) \times H^1(\mathbb{R}^3)$, então existe uma constante $C > 0$, independente dos dados iniciais, tal que*

$$\|S(t)U_0\|_G \leq C P_0^{\frac{1}{2}},$$

para todo $t \geq 0$, onde $S(t)$ é o semigrupo gerado pelo operador B e $P_0 > 0$ foi dada no Teorema 11. Em particular, a estimativa vale para $t \in [0, T_m)$ com T_m dado no Teorema 15.

Demonstração do Teorema 16: Para mostrar a existência de solução global forte e obter taxas de decaimento para o problema semilinear, a ideia é usar a solução local dada pelo Teorema 15 da Seção 5.1, as estimativas obtidas nos lemas desta seção e o princípio de Duhamel para o problema semilinear.

De acordo com o princípio de Duhamel, a solução do problema semilinear (5.14) pode ser escrita como

$$U(t) = S(t)U_0 + \int_0^t S(t-s)F(U(s))ds, \tag{5.39}$$

onde $U(t) = (u(t), u_t(t), h(t), \theta(t))^T$, $U_0 = (u_0, u_1, h_0, \theta_0)^T$, $F(U(s)) = (0, |u(s)|^{p-1}u(s), 0, 0)^T$ e $S(t)$ o semigrupo associado ao problema ao problema linear (3.1)-(3.6).

Vamos supor que $T_m < +\infty$, então pelo Teorema 15

$$\lim_{t\to T_m} \|(u(t), u_t(t), h(t), \theta(t))\|_{D(B)} = +\infty. \tag{5.40}$$

Mostraremos que existe $C > 0$ tal que

$$\|U(t)\|_{D(B)} \approx \|U(t)\|_X + \|BU(t)\|_X \leq C, \ \forall t \in [0, T_m).$$

Observe que

$$\|U(t)\|_{D(B)} \leq \|U(t)\|_E + \|U(t)\|_F + \|U(t)\|_G + \|\Delta h(t)\|_{L^2} + \|\Delta\theta(t)\|_{L^2}.$$

Assumimos por hipótese que

$$\|\Delta h(t)\|_{L^2} + \|\Delta\theta(t)\|_{L^2} \leq C, \quad \forall t \in [0, T_m). \tag{5.41}$$

Fixemos $s \in [0,t]$ com $t \in [0, T_m)$. Como $p > 5\beta - \frac{9}{8} > 3$ e $(u_0, u_1, h_0, \theta_0) \in [H^2(\mathbb{R}^3)]^3 \times [H^1(\mathbb{R}^3)]^3 \times \mathcal{H}_\sigma \cap [H^2(\mathbb{R}^3)]^3 \times H^2(\mathbb{R}^3)$ então pelo Teorema 15 tem-se que $u(s) \in [H^2(\mathbb{R}^3)]^3$. Além disso, como $p > 5\beta - \frac{9}{8} > 4$ pelo Lema 13 tem-se $|u(s)|^{p-1}u(s) \in [H^1(\mathbb{R}^3)]^3 \cap [L^1(\mathbb{R}^3)]^3$.

Comecemos definindo

$$\begin{aligned} I_{4,\beta}(s) = \Big[& \||u(s)|^{p-1}u(s)\|_{L^1}^{2\beta} + \|\nabla(|u(s)|^{p-1}u(s))\|_{L^2}^{2\beta} + \||u(s)|^{p-1}u(s)\|_{L^2}^{2\beta} \\ & + \||u(s)|^{p-1}u(s)\|_{L^1}^{\frac{4\beta}{3}} \|\nabla(|u(s)|^{p-1}u(s))\|_{L^2}^{\frac{2\beta}{3}} \Big]^{\frac{1}{\beta}}, \end{aligned}$$

$$J_{0,\beta}(s) = \left(2\||u(s)|^{p-1}u(s)\|_{L^1}^{2\beta} + 2\||u(s)|^{p-1}u(s)\|_{L^2}^{2\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}}$$

e

$$P_0(s) = \|\nabla(|u(s)|^{p-1}u(s))\|_{L^2},$$

para $s \in [0, t]$ e $t \in [0, T_m)$. Observe que

$$\begin{aligned} I_{4,\beta}(s)^{\frac{1}{2}} \leq &\||u(s)|^{p-1}u(s)\|_{L^1} + \|\nabla(|u(s)|^{p-1}u(s))\|_{L^2} + \||u(s)|^{p-1}u(s)\|_{L^2} \\ &+ \||u(s)|^{p-1}u(s)\|_{L^1}^{\frac{2}{3}} \|\nabla(|u(s)|^{p-1}u(s))\|_{L^2}^{\frac{1}{3}} \end{aligned} \tag{5.42}$$

e

$$J_{0,\beta}(s)^{\frac{1}{2}} \leq C(\||u(s)|^{p-1}u(s)\|_{L^1} + \||u(s)|^{p-1}u(s)\|_{L^2}), \tag{5.43}$$

para $s \in [0, t]$ e $t \in [0, T_m)$.

Sendo $S(t-s)F(U(s))$ solução do problema linear

$$\begin{cases} U_t(t; s) = AU(t; s), & t > s \\ U(0; s) = F(U(s)), & t = s \end{cases}$$

onde $F(U(s)) = (0, |u(s)|^{p-1}u(s), 0, 0)^T$, segue dos Lemas 15, 16 e 17, respectivamente,

$$\|S(t-s)F(U(s))\|_E \leq C(\beta) I_{4,\beta}^{\frac{1}{2}}(s)(1+t-s)^{-\frac{1}{2\beta}}, \tag{5.44}$$

$$\|S(t-s)F(U(s))\|_F \leq C(\beta) J_{0,\beta}^{\frac{1}{2}}(s)(1+t-s)^{-\frac{1}{2\beta}} \tag{5.45}$$

e

$$\|S(t-s)F(U(s))\|_G \leq CP_0(s), \tag{5.46}$$

para $s \in [0, t]$ e $t \in [0, T_m)$.

Agora, escolhendo $K = C(\beta) + C > 0$, temos

$$\|U(0)\|_E \leq C(\beta) I_{4,\beta}^{\frac{1}{2}} < K I_{4,\beta}^{\frac{1}{2}}, \tag{5.47}$$

$$\|U(0)\|_F \leq C(\beta) J_{0,\beta}^{\frac{1}{2}} < K J_{0,\beta}^{\frac{1}{2}}, \tag{5.48}$$

$$\|U(0)\|_G \leq C P_0^{\frac{1}{2}} < K P_0^{\frac{1}{2}}. \tag{5.49}$$

Supondo, por absurdo, que não ocorra

$$\begin{aligned} &(1+t)^{\frac{1}{2\beta}} \|U(t)\|_E \leq K I_{4,\beta}^{\frac{1}{2}}, \\ &(1+t)^{\frac{1}{2\beta}} \|U(t)\|_F \leq K J_{0,\beta}^{\frac{1}{2}}, \\ &\|U(t)\|_G \leq K P_0^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \tag{5.50}$$

para todo $t \in [0, T_m)$. Então uma das desigualdades em (5.50) não ocorre. Suponha que a primeira não ocorra. Assim, existe $t_K \in [0, T_m)$ tal que

$$(1+t_K)^{\frac{1}{2\beta}} \|U(t_K)\|_E > K I_{4,\beta}^{\frac{1}{2}}.$$

Usando esse fato juntamente com (5.47) e a continuidade da função $t \to (1+t)^{\frac{1}{2\beta}}\|U(t)\|_E$, concluímos que existe $T_0 \in [0, T_m)$ tal que

$$(1+t)^{\frac{1}{2\beta}}\|U(t)\|_E < KI_{4,\beta}^{\frac{1}{2}}, \quad \forall t \in [0, T_0)$$
$$(1+T_0)^{\frac{1}{2\beta}}\|U(T_0)\|_E = KI_{4,\beta}^{\frac{1}{2}}. \tag{5.51}$$

Usando a equação (5.39), a estimativa do Lema 15 e a estimativa (5.44) segue

$$\begin{aligned}\|U(t)\|_E &\leq \|S(t)U_0\|_E + \int_0^t \|S(t-s)F(U(s))\|_E ds \\ &\leq C(\beta)I_{4,\beta}^{\frac{1}{2}}(1+t)^{-\frac{1}{2\beta}} + \int_0^t C(\beta)I_{4,\beta}^{\frac{1}{2}}(s)(1+t-s)^{-\frac{1}{2\beta}}ds \end{aligned}\tag{5.52}$$

para $t \in [0, T_m)$.

De (5.42) em (5.52) temos

$$\begin{aligned}\|U(t)\|_E \leq{} & C(\beta)I_{4,\beta}^{\frac{1}{2}}(1+t)^{-\frac{1}{2\beta}} + \int_0^t C(\beta)\||u(s)|^{p-1}u(s)\|_{L^1}(1+t-s)^{-\frac{1}{2\beta}}ds \\ &+ \int_0^t C(\beta)\|\nabla(|u(s)|^{p-1}u(s))\|_{L^2}(1+t-s)^{-\frac{1}{2\beta}}ds \\ &+ \int_0^t C(\beta)\||u(s)|^{p-1}u(s)\|_{L^2}(1+t-s)^{-\frac{1}{2\beta}}ds \\ &+ \int_0^t C(\beta)\||u(s)|^{p-1}u(s)\|_{L^1}^{\frac{2}{3}}\|\nabla(|u(s)|^{p-1}u(s))\|_{L^2}^{\frac{1}{3}}(1+t-s)^{-\frac{1}{2\beta}}ds \end{aligned}\tag{5.53}$$

para $t \in [0, T_m)$.

Pelas estimativas (5.23)-(5.25) do Lema 13 e por (5.51) obtemos

$$\||u(s)|^{p-1}u(s)\|_{L^1} \leq C_pK^pP_0^{\frac{3(p-4)}{10}}I_{4,\beta}^{\frac{3(p+6)}{20}}J_{0,\beta}^{\frac{p+6}{20}}(1+s)^{-\frac{p+6}{5\beta}}, \tag{5.54}$$

$$\||u(s)|^{p-1}u(s)\|_{L^2} \leq C_p'K^pP_0^{\frac{3(p-2)}{10}}I_{4,\beta}^{\frac{3(p+3)}{20}}J_{0,\beta}^{\frac{p+3}{20}}(1+s)^{-\frac{p+3}{5\beta}}, \tag{5.55}$$

e

$$\|\nabla(|u(s)|^{p-1}u(s))\|_{L^2} \leq C_p''K^pP_0^{\frac{3(4p-3)}{40}}I_{4,\beta}^{\frac{3p+4}{20}}J_{0,\beta}^{\frac{2p+1}{40}}(1+s)^{-\frac{8p+9}{40\beta}}, \tag{5.56}$$

para $s \in [0, t]$ e $t \in [0, T_0]$.

Usando essas estimativas em (5.53) segue

$$\begin{aligned}\|U(t)\|_E \leq{} & C(\beta)I_{4,\beta}^{\frac{1}{2}}(1+t)^{-\frac{1}{2\beta}} + \tilde{C}_{p,\beta}K^pI_{4,\beta}^{\frac{1}{2}}I_{0,\beta,p}\left\{\int_0^t (1+s)^{-\frac{p+6}{5\beta}}(1+t-s)^{-\frac{1}{2\beta}}ds\right. \\ &+ \int_0^t (1+s)^{-\frac{p+3}{5\beta}}(1+t-s)^{-\frac{1}{2\beta}}ds \\ &+ \int_0^t (1+s)^{-\frac{8p+9}{40\beta}}(1+t-s)^{-\frac{1}{2\beta}}ds \\ &\left.+ \int_0^t (1+s)^{-\left[\frac{2(p+6)}{15\beta}+\frac{8p+9}{120\beta}\right]}(1+t-s)^{-\frac{1}{2\beta}}ds\right\} \end{aligned}\tag{5.57}$$

para todo $t \in [0, T_0]$, onde

$$I_{0,\beta,p} = \Bigg(P_0^{\frac{3(p-4)}{10}} I_{4,\beta}^{\frac{3p+8}{20}} J_{0,\beta}^{\frac{p+6}{20}} + P_0^{\frac{3(p-2)}{10}} I_{4,\beta}^{\frac{3p-1}{20}} J_{0,\beta}^{\frac{p+3}{20}} + P_0^{\frac{3(4p-3)}{40}} I_{4,\beta}^{\frac{3p-6}{20}} J_{0,\beta}^{\frac{2p+1}{40}} + P_0^{\frac{12p-35}{40}} I_{4,\beta}^{\frac{9p+10}{60}} J_{0,\beta}^{\frac{6p+25}{120}} \Bigg).$$

Como $\frac{p+6}{5\beta} > 1$, $\frac{p+3}{5\beta} > 1$, $\frac{8p+9}{40\beta} > 1$ e $\frac{2(p+6)}{15\beta} + \frac{8p+9}{120\beta} > \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$, pelo Lema 14 temos que (5.57) torna-se

$$\|U(t)\|_E \leq C(\beta) I_{4,\beta}^{\frac{1}{2}} (1+t)^{-\frac{1}{2\beta}} + C_{p,\beta} K^p I_{4,\beta}^{\frac{1}{2}} I_{0,\beta,p} (1+t)^{-\frac{1}{2\beta}},$$

para todo $t \in [0, T_0]$.

Definimos $Q_0(I_{4,\beta}, I_{0,\beta,p}, K) = C(\beta) + C_{p,\beta} K^p I_{0,\beta,p}$. Assim,

$$\|U(t)\|_E \leq I_{4,\beta}^{\frac{1}{2}} Q_0(I_{4,\beta}, I_{0,\beta,p}, K)(1+t)^{-\frac{1}{2\beta}},$$

para todo $t \in [0, T_0]$.

Como $K > C(\beta)$ e $I_{0,\beta,p} < \delta_1 = \left(\frac{K - C(\beta)}{C_{p,\beta} K^p} \right)$, temos

$$Q_0(I_{4,\beta}, I_{0,\beta,p}, K) = C(\beta) + C_{p,\beta} K^p I_{0,\beta,p} < K$$

o que implica

$$\|U(t)\|_E < K I_{4,\beta}^{\frac{1}{2}} (1+t)^{-\frac{1}{2\beta}}, \tag{5.58}$$

para todo $t \in [0, T_0]$.

Agora, suponha que a segunda desigualdade em (5.50) não ocorra. Segue pela continuidade da função $t \to (1+t)^{\frac{1}{2\beta}} \|U(t)\|_F$ que existe $T_0 \in [0, T_m)$ tal que

$$\begin{aligned} &(1+t)^{\frac{1}{2\beta}} \|U(t)\|_F < K J_{0,\beta}^{\frac{1}{2}}, \quad \forall t \in [0, T_0) \\ &(1+T_0)^{\frac{1}{2\beta}} \|U(T_0)\|_F = K J_{0,\beta}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{5.59}$$

Usando a equação (5.39), a estimativa do Lema 16 e a estimativa (5.45) segue

$$\begin{aligned} \|U(t)\|_F &\leq \|S(t)U_0\|_F + \int_0^t \|S(t-s)F(U(s))\|_F ds \\ &\leq C(\beta) J_{0,\beta}^{\frac{1}{2}} (1+t)^{-\frac{1}{2\beta}} + \int_0^t C(\beta) J_{0,\beta}^{\frac{1}{2}}(s)(1+t-s)^{-\frac{1}{2\beta}} ds \end{aligned} \tag{5.60}$$

para $t \in [0, T_m)$.

Considerando (5.43) em (5.60) obtemos

$$\begin{aligned} \|U(t)\|_F \leq{}& C(\beta) J_{0,\beta}^{\frac{1}{2}} (1+t)^{-\frac{1}{2\beta}} + \int_0^t C(\beta) C \| |u(s)|^{p-1} u(s) \|_{L^1} (1+t-s)^{-\frac{1}{2\beta}} ds \\ &+ \int_0^t C(\beta) C \| |u(s)|^{p-1} u(s) \|_{L^2} (1+t-s)^{-\frac{1}{2\beta}} ds \end{aligned} \tag{5.61}$$

para $t \in [0, T_m)$.

Pelas estimativas (5.54) e (5.55), pelo Lema 14 e pelo fato de $\frac{p+6}{5\beta} > 1$ e $\frac{p+3}{5\beta} > 1$ temos

$$\begin{aligned}
\|U(t)\|_F &\leq C(\beta) J_{0,\beta}^{\frac{1}{2}} (1+t)^{-\frac{1}{2\beta}} + \tilde{C}_{p,\beta} K^p J_{0,\beta}^{\frac{1}{2}} I'_{0,\beta,p} \left\{ \int_0^t (1+s)^{-\frac{p+6}{5\beta}} (1+t-s)^{-\frac{1}{2\beta}} ds \right. \\
&\quad \left. + \int_0^t (1+s)^{-\frac{p+3}{5\beta}} (1+t-s)^{-\frac{1}{2\beta}} ds \right\} \\
&\leq C(\beta) J_{0,\beta}^{\frac{1}{2}} (1+t)^{-\frac{1}{2\beta}} + C_{p,\beta} K^p J_{0,\beta}^{\frac{1}{2}} I'_{0,\beta,p} (1+t)^{-\frac{1}{2\beta}},
\end{aligned}$$

onde $I'_{0,\beta,p} = P_0^{\frac{3(p-4)}{10}} I_{4,\beta}^{\frac{3(p+6)}{20}} J_{0,\beta}^{\frac{p-4}{20}} + P_0^{\frac{3(p-2)}{10}} I_{4,\beta}^{\frac{3(p+3)}{20}} J_{0,\beta}^{\frac{p-7}{20}}$, para todo $t \in [0, T_0]$.

Definimos $Q_0(J_{0,\beta}, I'_{0,\beta,p}, K) = C(\beta) + C_{p,\beta} K^p I'_{0,\beta,p}$. Assim,

$$\|U(t)\|_F \leq J_{0,\beta}^{\frac{1}{2}} Q_0(J_{0,\beta}, I'_{0,\beta,p}, K)(1+t)^{-\frac{1}{2\beta}},$$

para todo $t \in [0, T_0]$.

Como $K > C(\beta)$ e $I'_{0,\beta,p} < \delta_2 = \left(\frac{K - C(\beta)}{C_{p,\beta} K^p}\right)$, temos

$$Q_0(J_{0,\beta}, I_{0,\beta,p}, K) = C(\beta) + C_{p,\beta} K^p I'_{0,\beta,p} < K$$

o que implica

$$\|U(t)\|_F < K J_{0,\beta}^{\frac{1}{2}} (1+t)^{-\frac{1}{2\beta}}, \tag{5.62}$$

para todo $t \in [0, T_0]$.

Por fim, suponha que a terceira desigualdade em (5.50) não ocorra. Segue pela continuidade da função $t \to \|U(t)\|_G$ que existe $T_0 \in [0, T_m)$ tal que

$$\begin{aligned}
&\|U(t)\|_G < K P_0^{\frac{1}{2}}, \quad \forall t \in [0, T_0) \\
&\|U(T_0)\|_G = K P_0^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned} \tag{5.63}$$

Usando a equação (5.39), a estimativa do Lema 17 e a estimativa (5.46) segue

$$\begin{aligned}
\|U(t)\|_G &\leq \|S(t)U_0\|_G + \int_0^t \|S(t-s)F(U(s))\|_G ds \\
&\leq C P_0^{\frac{1}{2}} + \int_0^t C \|\nabla(|u(s)|^{p-1} u(s))\|_{L^2} ds
\end{aligned}$$

para $t \in [0, T_m)$.

Agora, pela estimativa (5.56) e pelo fato de $\frac{8p+9}{40\beta} > 1$, temos

$$\begin{aligned}
\|U(t)\|_G &\leq C P_0^{\frac{1}{2}} + C_p K^p P_0^{\frac{3(4p-3)}{40}} I_{4,\beta}^{\frac{3p+4}{20}} J_{0,\beta}^{\frac{2p+1}{40}} \int_0^t (1+s)^{-\frac{8p+9}{40\beta}} ds \\
&\leq C P_0^{\frac{1}{2}} + C_{p,\beta} K^p P_0^{\frac{1}{2}} I''_{0,\beta,p},
\end{aligned} \tag{5.64}$$

onde $I''_{0,\beta,p} = P_0^{\frac{12p-29}{40}} I_{4,\beta}^{\frac{3p+4}{20}} J_{0,\beta}^{\frac{2p+1}{40}}$, para todo $t \in [0, T_0]$.

Definimos $Q_0(P_0, I''_{0,\beta,p}, K) = C + C_{p,\beta} K^p I''_{0,\beta,p}$. Assim,

$$\|U(t)\|_G \leq Q_0(P_0, I''_{0,\beta,p}, K) P_0^{\frac{1}{2}},$$

para todo $t \in [0, T_0]$.

Como $K > C$ e $I''_{0,\beta,p} < \delta_3 = \left(\frac{K-C}{C_{p,\beta} K^p}\right)$, temos

$$Q_0(P_0, I_{0,\beta,p}, K) = C + C_{p,\beta} K^p I''_{0,\beta,p} < K$$

o que implica

$$\|U(t)\|_G < K P_0^{\frac{1}{2}}, \tag{5.65}$$

para todo $t \in [0, T_0]$.

As estimativas (5.58), (5.62) e (5.65) contradizem (5.51), (5.59) e (5.63). Portanto, as estimativas em (5.50) são válidas. Além disso, observe que (5.41) juntamente com (5.50) contradizem (5.40). Logo, $T = +\infty$, ou seja, a solução existe globalmente no tempo e as estimativas em (5.50) são válidas para todo $t \in [0, +\infty)$.

$\square$

6 CONCLUSÃO

Neste trabalho estudamos o problema de Cauchy envolvendo um sistema magneto-termo-elástico semilinear em $\mathbb{R}^3$ com apenas dois termos dissipativos. O fato de considerarmos somente duas dissipações nos trouxe, no problema linear, a dificuldade em obter estimativas envolvendo u e u_t. Essa dificuldade foi superada graças a presença do termo u_t no acoplamento do sistema, o que exigiu constantes de acoplamento positivas.

Outra dificuldade, a qual ainda não foi superada, é no estudo do problema linear provar limitação, por constante que depende dos dados iniciais, das normas $\|\Delta h\|_{L^2}$ e $\|\Delta\theta\|_{L^2}$. Pelo fato das equações para h e θ envolverem no acoplamento o termo u_t, a dificuldade é obter a limitação de forma a não exigir maior regularidade, principalmente, no dado inicial u_1. O problema em obter a limitação com maior regularidade do que $[H^1(\mathbb{R}^3)]^3$ para o dado inicial u_1 é refletido no estudo do problema semilinear ao precisarmos de estimativas envolvendo o termo não linear $|u|^{p-1}u$, já que as normas para esse termo são as mesmas do dado inicial u_1. Dessa forma, como um trabalho futuro é necessário pensar em novas técnicas para obter tais limitações.

No estudo do problema linear obtemos taxas de decaimento para a energia total, além de taxas de decaimento para a norma L^2 de u. Acreditamos que as taxas obtidas não são ótimas já que tivemos que usar os termos de acoplamento para obtê-las. Assim, um próximo trabalho no estudo do problema linear é melhorar a condição sobre β.

No estudo do problema semilinear, o método utilizado além de provar a existência de solução global no tempo nos permite (desde que provemos as limitações para $\|\Delta h\|_{L^2}$ e $\|\Delta\theta\|_{L^2}$ citadas anteriormente) obter as mesmas taxas do problema linear. Até o momento, obtemos a condição $p > 5\beta - \frac{9}{8}$, com $\beta > 6$, o que nos fornece $p > 28,875$. Ou seja, a condição sobre p precisa ser melhorada visto que o comum é obter a existência de solução global a partir de um p pequeno.

REFERÊNCIAS

[1] E. Andreou, G. Dassios, Dissipation of energy for magnetoelastic waves in a conductive medium, **Quart. Appl. Math.**, 55 (1) (1997) 23-39.

[2] W. Beckner, Inequalities in Fourier analysis on $\mathbb{R}^n$, **Proc. Nat. Acad. Sci.**, USA 72 (1975), no. 2, 638-641.

[3] O. M. Botsenyuk, Solvability of an initial-boundary value problem for a system of semilinear equations in magnetoelasticity, **Ukraïn. Mat. Zh.**, 44 (9) (1992) 1181–1186.

[4] O. M. Botsenyuk, Regularity of solutions of an initial/boundary problem for a system of semilinear equations of magne-toelasticity, **J. Math. Sci.**, 81 (6) (1996) 3053–3057.

[5] O. M. Botsenyuk, Estimation of decay of the solutions of initial-boundary-value problem for the system of equations of magnetoelasticity in exterior domains, **J. Math. Sci.**, 220 (1) (2017) 38-39.

[6] H. Brezis, **Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations**, Springer New York, 1st. Edition, 2010.

[7] R. C. Charão, C. R. da Luz, R. Ikehata, Sharp decay rates for wave equations with a fractional damping via new method in the Fourier space, **J. Math. Anal. Appl.**, 408 (1) (2013) 247-255.

[8] R. C. Charão, C. R. da Luz, R. Ikehata, New decay rates for a problem of plate dynamics with frictional damping, **J.Hyperbolic Differ. Equ.**, 10 (3) (2013) 563–575.

[9] R. C. Charão, R. Ikehata, Decay of solutions for a semilinear system of elastic waves in an exterior domain with damping near infinity, **Nonlinear Analysis**, 67 (2007) 398-429.

[10] R. C. Charão, R. Ikehata, Energy decay rates of elastic waves in unbounded domain with potential type of damping, **J. Math. Anal. Appl.**, 380 (2011) 46-56.

[11] R. C. Charão, J. C. Oliveira, G. P. Menzala, Energy decay rates of magnetoelastic waves in a bounded conductive medium, **Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. A**, 25 (3) (2009) 797–821.

[12] R. C. Charão, J. C. Oliveira, G. P. Menzala, Decay rates of magnetoelastic waves in an unbounded conductive medium, **Electron. J. Differential Equations**, 127 (2011) 1-14.

[13] C. R. da Luz, **Propriedades assintóticas de sistemas eletromagnéticos/elásticos anisotrópicos**, Tese de Doutorado, UFRJ, 2009.

[14] C. R. da Luz, R. C. Charão, Asymptotic properties for a semilinear plate equation in unbounded domains, **J.Hyperbolic Differ. Equ.**, 6 (2) (2009) 269–294.

[15] C. R. da Luz, J. C. Oliveira, Asymptotic behavior of solutions for the magneto-thermo-elastic system in $\mathbb{R}^3$, **J. Math. Anal. Appl.**, 432 (2015) 1200-1215.

[16] G. Dassios, M. Grillakis, Dissipation rates and partition of energy in thermoelasticity, **Arch. Ration. Mech. Anal.**, 87 (1) (1984) 49-91.

[17] R. Dautray, J. L. Lions, **Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology**, vol. 3. Spectral Theory and Applications, Springer-Verlag, Berlin, 1990.

[18] A. C. Eringen, G. A. Maugin, **Electrodynamics of Continua I. Foundations and Solid Media**, Springer-Verlag, New York, 1990.

[19] A. Friedman, **Partial Differential Equations**, Corrected reprint of the original edition, Robert E. Krieger Publishing Co., New York, 1976.

[20] A. M. Gomes, **Semigrupos de operadores lineares e aplicações às equações de evolução**, Instituto de Matemática - UFRJ, Rio de Janeiro (1985).

[21] A. Haraux, **Semi-groupes linéaires et équations d'évolution linéaires périodiques**, Publication du Laboratoire d'Analyse Numérique, 78011 (1978) 33p.

[22] R. Ikehata, Energy decay of solutions for the semilinear dissipative wave equations in an exterior domain, **Funkcialaj Ekvacioj**, 44 (2001) 487–499.

[23] R. Ikehata, Global existence of solutions for semilinear damped wave equation in 2-D exterior domain, **J. Differential Equations**, 200 (2004) 53–68.

[24] S. Kesavan, **Topics in functional analysis and applications**, Wiley, Universidade de Michigan (1989).

[25] V. Komornik, **Exact Controllability and Stabilization: The Multiplier Method**, J. Wiley & Sons/Masson & Cie, Chichester/Paris, 1994.

[26] G. P. Menzala, E. Zuazua, Energy decay of magnetoelastic waves in a bounded conductive medium, **Asymptot. Anal.**, 18 (3-4) (1998) 349-362.

[27] M. Mohebbi, **Time-periodic solutions of magnetoelastic systems and embedding of the attractor of 2-dimensional Navier-Stokes equations into euclidean spaces**, Doctoral Thesis, University of Pittsburgh, 2013.

[28] M. Mohebbi, J. C. Oliveira, Existence of time-periodic solutions for a magnetoelastic system in bounded domains, **J. Elasticity**, 113 (1) (2013) 113–133.

[29] M. Nakao, Energy decay for the linear and semilinear wave equations in exterior domains with some localized dissipations, **Math. Z.**, 238 (2001) 781–797.

[30] J. C. Oliveira, Asymptotic stability and regularity of solutions for a magnetoelastic system in bounded domains, **Acta Math. Vietnam.**, 39 (2) (2014) 133–150.

[31] G. Paria, Magneto-elasticity and magneto-thermo-elasticity, **Adv. Appl. Mech.**, 10 (1967), 73–112.

[32] A. Pazy, **Semigroups of Linear Operator and Applications to Partial Differential Equations**, Applied Mathematical Sciences, vol. 44, Springer-Verlag.

[33] J. E. M. Rivera, R. Racke, Magneto-thermo-elasticity-large-time behavior for linear systems, **Adv. Differential Equations**, 6 (3) (2001) 359-384.

[34] J. E. M. Rivera, R. Racke, Polynomial stability in two-dimensional magneto-elasticity, **IMA J. Appl. Math.**, 66 (2001) 269-283.

[35] J. E. M. Rivera, M. L. Santos, Polynomial stability to three-dimensional magnetoelastic waves, **Acta Appl. Math.**, 76 (3) (2003) 265–281.