



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Tomaz S. de Souza Cruz

Análise de recursos quânticos na implementação do algoritmo de Grover

Florianópolis
2024

Tomaz S. de Souza Cruz

Análise de recursos quânticos na implementação do algoritmo de Grover

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do título de mestrado em Física.

Orientador: Prof. Eduardo Inacio Duzzioni, Dr.

Florianópolis
2024

Ficha catalográfica gerada por meio de sistema automatizado gerenciado pela BU/UFSC.
Dados inseridos pelo próprio autor.

Cruz, Tomaz Silva de Souza
Análise de recursos quânticos na implementação do
algoritmo de Grover / Tomaz Silva de Souza Cruz ;
orientador, Eduardo Inacio Duzzioni, 2024.
112 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa
Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas,
Programa de Pós-Graduação em Física, Florianópolis, 2024.

Inclui referências.

1. Física. 2. Computação Quântica. 3. Algoritmo de Grover.
4. Teorema adiabático. 5. Assimetria de estados quânticos.
I. Duzzioni, Eduardo Inacio. II. Universidade Federal de
Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Física. III.
Título.

Tomaz S. de Souza Cruz

Análise de recursos quânticos na implementação do algoritmo de Grover

O presente trabalho em nível de mestrado foi avaliado e aprovado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof.(a) Eduardo Inacio Duzzioni, Dr(a).
Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC)

Prof.(a) Marcelo Silva Sarandy, Dr(a).
Universidade Federal Fluminense (UFF)

Prof.(a) Alejandro Mendoza Coto, Dr(a).
Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC)

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de mestrado em Física.

Coordenação do Programa de
Pós-Graduação em Física da Universidade
Federal de Santa Catarina

Prof. Eduardo Inacio Duzzioni, Dr.
Orientador

Florianópolis, 2024.

Este trabalho é dedicado ao meu orientador, meus colegas de classe, meus queridos pais e a minha amada mulher.

AGRADECIMENTOS

A maior parte desse trabalho se dedica a estudar uma função que minimiza o custo de preparo de um estado quântico. Em uma analogia com a geometria, poderíamos pensar em algo como encontrar a menor distância entre dois pontos. A grande metáfora com a vida nisso tudo, é que nem sempre uma reta é o caminho mais curto.

Foi mais ou menos essa a minha situação no desenvolvimento dessa dissertação. Iniciar um mestrado em meio a uma pandemia, em meio ao isolamento social imposto por ela, certamente não foi a melhor experiência de mestrado do mundo, fez o meu caminho muito mais longo e fez todos nos tornarmos um pouco mais distantes.

Precisei pedir prorrogação duas vezes e em muitos momentos parecia que nada daria certo. Agradeço meu orientador pela paciência, qualquer outro em seu lugar teria desistido da orientação, mas ele me deu um voto de confiança para finalizar esse trabalho que custou a ser escrito no papel, mas eu consegui retribuir cumprindo essa tarefa.

Agradeço a minha companheira por ter sempre me acolhido enquanto eu fracassava. Poder estar junto a ela foi o meu conforto enquanto eu vivia a tensão de não conseguir terminar esse trabalho. No meio disso tudo, passamos por muitas perdas, dificuldades e transformações, sair disso tudo mais forte torna óbvio que foi a escolha certa estar ao seu lado.

Aos meus dois pais, dois doutores em física. Nem sempre consegui fazer jus aos seus nomes e seus caminhos. O meu caminho foi tortuoso, mas ao final dele pude brindar os dois dando a minha vida ao apresentar o trabalho em ocasião da minha defesa.

Louvado seja o severo, louvado seja o misericordioso. Soube fazer isso enquanto passava por esses dois momentos e por isso vi o esplendor no que eu vivia, hoje eu entendo que sua graça é eterna. Bendito é o seu nome e a glória de seu reino para todo sempre.

RESUMO

Este trabalho de mestrado tem como objetivo explorar a medida de quanticidade de Girolami (GIROLAMI, 2019), definida como uma função custo que quantifica a dificuldade de preparar estados quânticos. Aplicamos essa medida na implementação do algoritmo de Grover através de evoluções contínuas no tempo sem transição, investigando sua relação com complexidade computacional e eficiência do algoritmo.

Palavras-chave: Informação quântica. Computação quântica adiabática. Informação de Fisher. Algoritmo de Grover. Assimetria quântica. Quantum speed limit.

ABSTRACT

This master's thesis aims to explore the Girolami's quantumness measure (GIROLAMI, 2019), which is defined as a cost function quantifying the difficulty of preparing quantum states. We apply this measure in the implementation of the Grover algorithm through transitionless continuous time evolutions, investigating its relationship with computational complexity and algorithm efficiency.

Keywords: Quantum information. Adiabatic quantum computing. Fisher information. Grover's algorithm. Quantum asymmetry. Quantum speed limit

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Gráficos do logaritmo das distribuições das amostras com desvios padrões 25 (painel esquerdo) e 1 (painel direito) para diferentes valores médios.	24
---	----

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
2	QUANTICIDADE DE GIROLAMI	15
2.1	CONTRIBUIÇÃO CLÁSSICA E QUÂNTICA NA EVOLUÇÃO DE ESTADOS QUÂNTICOS	15
2.2	INFORMAÇÃO DE FISCHER	23
2.2.1	Informação Quântica de Fischer	28
2.3	QSL E QG	34
2.3.1	Computação quântica e metrologia quântica	44
2.3.2	QG e QSL	46
2.4	ASSIMETRIA	48
3	COMPUTAÇÃO QUÂNTICA CONTÍNUA NO TEMPO SEM TRANSIÇÃO ENTRE ESTADOS	51
3.1	TEOREMA ADIABÁTICO	53
3.2	ALGORITMOS ADIABÁTICOS	54
3.2.1	Algoritmo de busca de Grover	54
3.2.1.1	Computação adiabática	55
4	RESULTADOS	60
4.1	QG E ALGORITMOS ADIABÁTICOS	60
4.2	ALGORITMO DE EVOLUÇÃO SEM TRANSIÇÃO	61
4.3	QG DO ALGORITMO DE EVOLUÇÃO SEM TRANSIÇÃO	65
4.3.1	Estados puros	67
4.3.1.1	Norma l_2	67
4.3.1.2	Métrica de Bures	68
4.3.2	Estados térmicos	68
4.3.2.1	Norma l_2	70
4.3.2.2	Métrica de Bures	70
4.4	QG DO ALGORITMO DE BUSCA	71
4.4.1	Norma l_2	72
4.4.2	Métrica de Bures	77
4.4.3	Escala de tempo associada	78
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	84
	Referências	88
	APÊNDICE A – TEOREMA ADIABÁTICO	99
A.1	CASO NÃO-DEGENERADO	99
A.2	CASO DEGENERADO	103
A.3	FASE DE BERRY	104
	APÊNDICE B – ALGORITMO DE GROVER	105

APÊNDICE C – GERADOR DA DINÂMICA ADIABÁTICA	108
--	------------

1 INTRODUÇÃO

"Uma computação clássica é como uma voz solo — uma linha de tons puros sucedendo um ao outro. Uma computação quântica é como uma sinfonia — muitas linhas de tons interferindo umas com as outras." (LLOYD, S., 2007)

A citação acima traz uma interessante analogia entre computação e música. Uma melodia, um tom puro, estaria para a computação clássica como uma sinfonia estaria para a computação quântica. Essa é uma comparação possível porque assim como a mecânica quântica, a mecânica das ondas sonoras está sujeita a um mesmo princípio, o princípio da superposição. Quando duas ou mais ondas se encontram, elas se interferem e geram uma onda resultante expressa pela combinação linear das duas ondas. Da mesma forma, quando expressamos o estado de um sistema quântico, podemos denotá-lo por uma superposição de estados quânticos.

Apesar de parecer uma analogia simplista, ela é um bom ponto de partida para ilustrar essa propriedade, porque é essa propriedade que pode fornecer uma vantagem significativa frente a computação clássica: explorar a superposição de estados na quantificação, armazenamento, processamento e transmissão de informação.

No seu nível mais fundamental, a computação clássica tem uma unidade básica de informação, um bit. Uma quantidade que pode assumir somente dois valores, ou dois estados, 0 ou 1. Já a menor unidade de informação na computação quântica é o qubit, uma superposição arbitrária. Conforme o número de qubits escala, o número de bits necessários para simular tais qubits escala exponencialmente. Como parâmetro, podemos pensar que para simular n -qubits são necessários 2^n -bits (CHUANG; NIELSEN, 2000). Por sorte, não precisamos simular nada, porque a natureza do nosso mundo é regida pela mecânica quântica e encontramos sistemas desse tipo em todo lugar ao nosso redor.

A mecânica quântica, desde a sua origem há pouco mais de um século, intriga os pesquisadores, dada a sua estranheza frente ao mundo que até então se conhecia, mundo que passamos a chamar de clássico. Para além da superposição, algumas outras características estranhas ao mundo clássico que podemos citar são a quantização da energia (PLANCK, 1901), a quantização do momento angular (BOHR, 1913), e o emaranhamento quântico (EINSTEIN; PODOLSKI; ROSEN, 1935; SCHRÖDINGER, 1935). Dentre essas, destacamos o emaranhamento, um tipo de correlação entre sistemas quânticos que não tem contrapartida no mundo clássico. O emaranhamento é apenas um exemplo de correlação quântica, existindo muitas outras correlações possíveis, tais como: não-localidade de Bell (BELL, 1966), steering (WISEMAN; JONES, S.; DOHERTY, 2007), discórdia quântica (OLLIVIER; ZUREK, 2001), coerência quântica (BAUMGRATZ; CRAMER; PLENIO, 2014), entre tantas outras que podem

ser encontradas apenas em sistemas quânticos. Para uma revisão sobre correlações quânticas veja as seguintes referências (HORODECKI *et al.*, 2009; MODI *et al.*, 2012; UOLA *et al.*, 2020; ADESSO; BROMLEY; CIANCIARUSO, 2020).

A exploração de correlações quânticas, assim como a superposição, são responsáveis por algumas vantagens que o mundo quântico possui no armazenamento, processamento e transmissão de informação. Um exemplo é o algoritmo de fatoração de Shor (SHOR, 1997), que serve para encontrar os fatores primos de números inteiros em uma escala de tempo quase que exponencialmente mais rápida que o melhor algoritmo clássico conhecido. Tal algoritmo deu grande impulso para o desenvolvimento da computação quântica, por conseguir quebrar chaves criptográficas utilizadas em sistemas de transações bancárias, por exemplo. Além do ganho no processamento de informação, as memórias quânticas economizam exponencialmente mais espaço do que as suas versões clássicas (OHLSSON; KRÖLL; MOISEEV, 2003) e é possível fazer transmissão de informação 100% segura com a criptografia quântica (BROADBENT; SCHAFFNER, 2016).

Dentre todos esses elementos de distinção entre o que é clássico e o que é quântico que podemos nos valer para computação, a motivação inicial desse trabalho se deu entorno de uma questão: seria possível quantificar as contribuições de fenômenos puramente quânticos e fenômenos puramente clássicos na execução de um algoritmo quântico?

Encontramos na referência (GIROLAMI, 2019) uma resposta para essa questão. A medida de quanticidade proposta por Girolami, que denotaremos por QG, é uma função custo que quantifica a dificuldade de preparar um estado quântico em termos do quão diferente esse processo é de um processo clássico, em seguida é apresentada uma estrutura de trabalho com a qual se pode minimizar o custo de preparo de um estado quântico. Na proposta, encontram-se indícios de que essa quantidade poderia estar relacionada com limites para a eficiência de algoritmos de computação quântica, mais especificamente, para alguns tipos de preparo, a quantidade parece estar relacionada com limites para a complexidade computacional e o tempo de execução do processo.

Tendo em vista essa motivação inicial, o problema central da pesquisa passou a ser responder duas questões. A primeira é "A QG está relacionada com a complexidade computacional do processo ou com o tempo de execução de um algoritmo?", enquanto que a segunda é "Qual a interpretação da medida e suas conexões com outras medidas de correlações quânticas?"

Visando encontrar uma interpretação adequada para a função QG, inicialmente realizamos uma ampla revisão da literatura correlata a área de eficiência e tempos de execução de algoritmos e protocolos de informação quântica, onde encontramos algumas interpretações para a função QG. A primeira chave de interpretação é a

relação entre QG e a informação quântica de Fisher (PARIS, 2009), uma medida para a eficácia da estimativa de um parâmetro associado a um sistema quântico. A segunda chave de interpretação é a relação entre QG e QSL (DEFFNER; CAMPBELL, 2017), campo que investiga os limites fundamentais para o tempo mínimo de evolução entre dois estados. A terceira chave de interpretação é a função QG como uma medida de assimetria quântica (MARVIAN; SPEKKENS, 2014), uma medida informacional que quantifica o quanto um estado quântico quebra uma simetria associada a dinâmica que conduz a evolução desse estado.

Como objetivos específicos da pesquisa, partimos para o cálculo explícito da função QG para algoritmos de computação quântica a fim de fazer um estudo comparativo entre as complexidades computacionais conhecidas para algoritmos já estudados na literatura e o resultado do cálculo da QG. Com esse foco, optamos por estudar o modelo adiabático de computação quântica (ALBASH; LIDAR, 2018). Essa opção foi feita porque ao contrário do modelo circuital de computação quântica, em que sequências de portas lógicas são aplicadas a fim de implementar um algoritmo, o modelo adiabático se baseia em evoluções contínuas no tempo, nesse sentido se adequando mais a proposta da função QG. Como segundo motivo, por diferir do modelo circuital, onde as medidas de complexidade de tempo são baseadas no número de portas lógicas implementadas, a complexidade de um algoritmo adiabático é medida pelo tempo de execução baseada nas condições estabelecidas pelo teorema adiabático, o que, na prática, nem sempre é tão trivial de ser obtido. Sendo assim, seria interessante encontrar novas formas de medir a eficiência algorítmica de processos desse tipo.

Delimitamos então o escopo dessa parte da investigação ao algoritmo de busca quântica de Grover (GROVER, 1996), algoritmo que implementa uma busca por um elemento específico de uma base de dados não estruturada. Por ser um algoritmo com versão adiabática conhecido na literatura (ROLAND; CERF, 2002), com resultado analítico para o gap de energia entre o estado fundamental e os níveis excitados e com resultados compatíveis para a complexidade computacional nos dois modelos de computação, ou seja, uma complexidade da ordem de $O(\sqrt{N})$, onde N é a dimensão do sistema utilizado na implementação, o que nos fornece um bom parâmetro de comparação para o cálculo da QG do algoritmo.

A presente dissertação está estruturada da seguinte forma: no capítulo 2 abordaremos o tema principal desse trabalho, em que apresentaremos a função custo que quantifica a dificuldade de preparar um estado quântico, denominada QG. Inicialmente faremos uma revisão completa da proposta e das motivações utilizadas na construção da função QG e da estrutura de trabalho apresentada para a minimização do custo de preparo de estados quânticos, bem como discutiremos brevemente os casos particulares em que ela estabelece limites para a complexidade algorítmica. Em um segundo momento, revisaremos o conceito de informação quântica de Fisher e demonstraremos

qual a sua relação com a QG. Em um terceiro momento, revisaremos o conceito e os resultados obtidos no campo de estudo de QSL e como é possível relacionar esses resultados com os limites estabelecidos a partir da função QG. Por último, revisaremos o conceito de assimetria quântica e demonstraremos que a função QG é, na verdade, uma medida de assimetria.

No capítulo 3, faremos uma breve apresentação do desenvolvimento histórico da computação quântica até a proposição do modelo de computação quântica adiabática como um modelo universal de computação. Faremos uma revisão completa do teorema adiabático, base para o funcionamento desse paradigma de computação. Em seguida apresentaremos como funciona e se implementa a computação quântica adiabática, tomando como exemplo, o algoritmo de Grover, que será apresentado tanto na versão circuital quanto na versão adiabática. Por fim, apresentaremos resultados gerais para QG de algoritmos adiabáticos.

Apresentaremos, no capítulo 4, os resultados obtidos para o cálculo explícito da QG do algoritmo de Grover. Os cálculos foram feitos inicializando o algoritmo em um estado em equilíbrio com um reservatório térmico. Os resultados foram divididos por norma adotada no cálculo explícito da função, dividindo-se em dois casos: utilizando a norma l_2 e utilizando a norma induzida a partir da métrica de Bures. Por fim, apresentaremos os resultados obtidos para os tempos limites associados a função QG.

No capítulo 5, apresentaremos as conclusões e discussões finais sobre os resultados obtidos no desenvolvimento do trabalho, bem como as perspectivas futuras que se abrem e se fecham a partir desse estudo.

2 QUANTICIDADE DE GIROLAMI

Esse capítulo se dividirá em três seções. Na primeira será apresentada a definição e construção da função QG conforme a referência (GIROLAMI, 2019). A segunda seção será dedicada a apresentar sua relação com a informação de Fisher. Na terceira será explorada sua relação com *quantum speed limit* (QSL) e, por fim, será mostrado que a função QG é uma medida de assimetria quântica.

2.1 CONTRIBUIÇÃO CLÁSSICA E QUÂNTICA NA EVOLUÇÃO DE ESTADOS QUÂNTICOS

Considere um sistema quântico preparado em um estado inicial ρ e que se tem o objetivo de levar esse sistema para um estado alvo τ . A pergunta inicial é: Será possível separar e quantificar a contribuição de fenômenos clássicos e quânticos na evolução de um estado para outro?

Antes de responder essa pergunta, é necessário entender do que podemos nos valer para diferenciar um fenômeno clássico de um fenômeno quântico. Uma característica fundamental que distingue o que é quântico do que é clássico é a superposição de estados. Um sistema quântico pode ser descrito como uma combinação linear de estados em que uma observação, ou medida em relação a uma base pode levar a um resultado específico de acordo com uma probabilidade. Já um sistema clássico não pode ser descrito da mesma maneira, uma vez que estados clássicos permanecem sempre distinguíveis (ortogonais) entre si. Seja um estado de um sistema descrito genericamente por

$$|\psi\rangle = \sum_i a_i |i\rangle, \quad (1)$$

com $a_i \in \mathbb{C}$ e onde a probabilidade de obter um estado denotado por $|k\rangle$ em uma observação é dada por

$$P(k) = |a_k|^2. \quad (2)$$

Podemos descrever esse mesmo sistema de outra forma, utilizando o formalismo de operadores densidades. Um sistema descrito por uma superposição de estados será descrito nessa notação por uma matriz densidade com elementos não-diagonais diferentes de zero

$$|\psi\rangle = \sum_i^n a_i |i\rangle \rightarrow |\psi\rangle \langle\psi| = \sum_{i,j} a_i a_j^* |i\rangle \langle j|, \quad (3)$$

uma vez que para $i \neq j$ e para $a_i, a_j \neq 0$ temos que $a_i a_j^* \neq 0$.

Na referência (GIROLAMI, 2019), que serviu de motivação principal para esse trabalho, Girolami propôs um índice geométrico que define uma função custo associada a dificuldade em preparar um estado quântico capaz de captar essa propriedade. Em que termos essa dificuldade é quantificada? Quantificando o quão diferente de um processo clássico a evolução é, se valendo da presença de superposição no sistema.

O problema é formulado geometricamente, onde a dinâmica da evolução é descrita por uma curva $\gamma : t \rightarrow \gamma_t$ em uma variedade de estados quânticos \mathcal{M} , onde a curva é dada por $\gamma_t = \sum_i \lambda_i(t) |i(t)\rangle \langle i(t)|$, e temos que $\sum_i \lambda_i(t) = 1$, $\langle i(t) | j(t) \rangle = \delta_{ij}$, $\gamma_0 = \rho$ e $\gamma_T = \tau$ é a decomposição espectral do estado do sistema no instante inicial $t = 0$ e no instante T , o tempo final da evolução.

Sendo ρ um estado descrito por uma matriz diagonal na base de referência dada por $\{|i(t=0)\rangle\}$, a comutatividade entre entrada ρ e saída τ ocorre se a matriz que descreve o estado de saída é diagonal na mesma base.

Prova. Seja $\gamma_t = \sum_i \lambda_i(t) |i(t)\rangle \langle i(t)|$, $\sum_i \lambda_i(t) = 1$, $\langle i(t) | j(t) \rangle = \delta_{ij}$. Se $\gamma_T = \sum_i \lambda_i(T) |i(0)\rangle \langle i(0)|$ então $[\gamma_0, \gamma_T] = 0$.

$$\begin{aligned} [\gamma_0, \gamma_T] &= \\ &= \sum_{i,j} \lambda_i(0) \lambda_j(T) \left(|i(0)\rangle \langle i(0)| |j(0)\rangle \langle j(0)| - |j(0)\rangle \langle j(0)| |i(0)\rangle \langle i(0)| \right) \\ &= \sum_i \lambda_i(0) \lambda_i(T) \left(|i(0)\rangle \langle i(0)| - |i(0)\rangle \langle i(0)| \right) \\ &= 0. \end{aligned} \tag{4}$$

□

Se o estado de saída não é diagonal, o que acontece com a presença de superposição na base de referência, o comutador diferirá de zero, exceto se todos autoestados forem isoenergéticos no instante inicial.

Prova. Seja $\gamma_t = \sum_i \lambda_i(t) |i(t)\rangle \langle i(t)|$ com $\sum_i \lambda_i(t) = 1$, $\langle i(t) | j(t) \rangle = \delta_{ij}$. Se $\lambda_i(0) = \lambda_j(0)$ para $\forall i \neq j$, então $[\gamma_0, \gamma_T] = 0$.

$$\begin{aligned} \gamma_T &= \\ &= \sum_i \lambda_i(T) |i(T)\rangle \langle i(T)| \\ &= \sum_i \lambda_i(T) \left(\sum_k |k(0)\rangle \langle k(0)| \right) |i(T)\rangle \langle i(T)| \left(\sum_j |j(0)\rangle \langle j(0)| \right) \\ &= \sum_{ijk} \lambda_i(T) \langle i(T) | j(0) \rangle \langle k(0) | i(T) \rangle |k(0)\rangle \langle j(0)|. \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
[\gamma_0, \gamma_T] &= \\
&= \sum_{ijkl} \lambda_i(T) \langle i(T) | j(0) \rangle \langle k(0) | i(T) \rangle \lambda_l(0) \left(|l(0)\rangle \langle l(0)| |k(0)\rangle \langle j(0)| \right. \\
&\quad \left. - |k(0)\rangle \langle j(0)| |l(0)\rangle \langle l(0)| \right) \\
&= \sum_{ijk} \lambda_i(T) \langle i(T) | j(0) \rangle \langle k(0) | i(T) \rangle \left(\lambda_k(0) - \lambda_j(0) \right) |k(0)\rangle \langle j(0)|.
\end{aligned} \tag{6}$$

$$\lambda_j(0) = \lambda_k(0), \forall j \neq k \implies [\gamma_0, \gamma_T] = 0. \tag{7}$$

□

Mapas para os quais os estados de entrada e saída comutam podem ser escolhidos para representar processos clássicos, já que esses não podem criar superposição.

Utilizando uma abordagem da teoria de recursos quânticos e se baseando na comutatividade de entrada e alvo, é enunciado um conjunto de propriedades desejadas para uma boa medida do quão diferente esses processos são entre si.

A teoria de recursos no campo da informação quântica, inspirada em outros campos do conhecimento, como na psicologia (FOA *et al.*, 1993), refere-se a qualquer modelo de processamento de informação limitado a um conjunto restrito de operações físicas (CHITAMBAR; GOUR, 2019). Nesse contexto, as operações permitidas no processamento são chamadas de *operações gratuitas*, e os estados acessíveis mediante a implementação de operações permitidas são chamados de *estados gratuitos*. Qualquer estado não acessível mediante implementação de operações gratuitas é chamado de *recurso*.

No caso de estudo, se temos como entrada um estado $\rho = \sum_i \lambda_i(0) |i(0)\rangle \langle i(0)|$, qualquer estado diagonal na base $\{|i(0)\rangle\}$ pode ser preparado via implementação de operações gratuitas, i.e., mapas clássicos para os quais o estado do sistema será descrito em qualquer tempo por um elemento de $\mathcal{M}_0 = \{\tilde{\rho} = \sum_i \tilde{\lambda}_i(t) |i(0)\rangle \langle i(0)|\}$, para $\forall t \in [0, T]$, que será o conjunto de estados gratuitos. Procura-se por uma quantidade que reflita o custo de criar superposição no preparo de um sistema, que independa das operações gratuitas implementadas no preparo e seja sensível somente aos fenômenos de natureza quântica no processo. Quais propriedades são desejáveis nesse caso?

Deseja-se encontrar uma função dos estados de entrada e saída $\mathcal{Q}(\rho, \tau)$ que satisfaça:

- i) Custo zero no preparo de estados gratuitos: $\mathcal{Q}(\rho, \tau) = 0 \iff \tau \in \mathcal{M}_0$.
- ii) Invariância por operações gratuitas: $\mathcal{Q}(\rho, \tau) = \mathcal{Q}(\tilde{\rho}, \tau) / \forall \tilde{\rho} \in \mathcal{M}_0$.

- iii) Contractividade: $\mathcal{Q}(\rho, \tau) \geq \mathcal{Q}(\Gamma(\rho), \Gamma(\tau))$.

A primeira propriedade é compreensível tendo em vista o que esperamos que essa quantidade reflita. A segunda propriedade estabelece que não importa quais mapas clássicos sejam implementados ou por qual estado gratuito a curva passe antes do preparo de um estado quântico alvo e padroniza o custo de preparar um estado quântico específico τ , ou de criar uma correlação quântica a partir de um estado clássico qualquer.¹

Na terceira propriedade, Γ é um canal quântico completamente positivo que preserva o traço (do inglês, CPTP), uma transformação que mapeia operadores densidade de um espaço de Hilbert H_1 para outros estados de um espaço de Hilbert H_2 , preservando o traço e sendo um mapa completamente positivo (CHUANG; NIELSEN, 2000). Essa é uma propriedade desejável porque ao passar informação por um canal com ruído, que pode ser representado por um mapa CPTP, esperamos perder informação sobre o sistema conforme a desigualdade de processamento de dados (BEAUDRY; RENNER, 2011).

Considerando que o estado do sistema durante o processo, por meio de uma diagonalização, sempre pode ser decomposto como $\gamma_t = U_t \Lambda_t U_t^\dagger$, onde Λ_t é uma matriz diagonal com os autovalores do estado como elementos. A taxa de variação de γ_t no tempo fica

$$\begin{aligned}
 \dot{\gamma}_t &= U_t \dot{\Lambda}_t U_t^\dagger + \dot{U}_t \Lambda_t U_t^\dagger + U_t \Lambda_t \dot{U}_t^\dagger \\
 &= U_t \dot{\Lambda}_t U_t^\dagger + \dot{U}_t U_t^\dagger U_t \Lambda_t U_t^\dagger + U_t \Lambda_t U_t^\dagger U_t \dot{U}_t^\dagger \\
 &= U_t \dot{\Lambda}_t U_t^\dagger + \dot{U}_t U_t^\dagger \gamma_t + \gamma_t U_t \dot{U}_t^\dagger \\
 &= U_t \dot{\Lambda}_t U_t^\dagger + \dot{U}_t U_t^\dagger \gamma_t - \gamma_t \dot{U}_t U_t^\dagger \\
 &= U_t \dot{\Lambda}_t U_t^\dagger + i[\gamma_t, H_t],
 \end{aligned} \tag{8}$$

onde $H_t = i\dot{U}_t U_t^\dagger$ é o gerador da diagonalização do estado em todos os instantes e a identidade $\dot{U}_t U_t^\dagger = -U_t \dot{U}_t^\dagger$ foi utilizada.

Para mapas clássicos, onde a qualquer instante o estado do sistema será descrito por uma matriz diagonal em uma base de referência $\{|i(0)\rangle\rangle\}$, imóvel, sempre podemos optar por decompor o estado de forma que $\gamma_t = \Lambda_t$, onde $U_t = \mathbb{1}$, logo somente o primeiro termo da equação (8) sobrevive, $\dot{U}_t = 0$. Por exemplo, o canal quântico de amortecimento de fase (do inglês, phase damping channel), $\varepsilon(\lambda_0) = \sum_k E_k \lambda_0 E_k^\dagger$, com conjunto de operadores de Kraus dado por $\{E_1, E_2\}$, dado por

$$E_0 = \sqrt{\alpha} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{9}$$

e

¹ Por exemplo, ao preparar um estado de Bell, criamos emaranhamento.

$$E_1 = \sqrt{1-\alpha} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Mapas quânticos são aqueles em que somente o segundo termo da equação (8) sobrevive. Como exemplo temos as transformações unitárias, do tipo $\gamma_t = U_t \Lambda_0 U_t^\dagger$, que tipicamente descrevem a evolução de estados de um sistema associado a um hamiltoniano independente do tempo, alteram a base de autoestados enquanto o espectro não é alterado, logo o primeiro termo da equação (8) é anulado, $\dot{\Lambda}_0 = 0$.

Em uma curva correspondente a um mapa CPTP genérico, ambos termos devem coexistir. Considere agora a energia da curva² com extremidades fixadas, $\gamma_0 = \rho$ e $\gamma_T = \tau$, dada por

$$E^{\gamma_t} = \int_0^T \|\dot{\gamma}_t\|^2 dt, \quad (11)$$

em que a norma será induzida de uma métrica Fisher-Riemanniana, única métrica contractiva sob mapas com ruídos (PETZ, 1996; MOROZOVA; CHENTSOV, 1991; LUO, 2003), para que a propriedade de contractividade seja satisfeita. Independente da métrica utilizada, pode-se tomar vantagem do fato de que o espaço tangente da variedade \mathcal{M} tem estrutura de soma direta (BENGTSSON; ZYCZKOWSKI, 2007; AMARI; NAGAOKA, 2007):

$$\|\dot{\gamma}_t\|^2 = \left\| U_t \dot{\Lambda}_t U_t^\dagger \right\|^2 + \|i[\gamma_t, H_t]\|^2, \quad (12)$$

a partir disso, a energia da curva pode ser separada em dois termos:

$$E_c^{\gamma_t} = \int_0^T \left\| U_t \dot{\Lambda}_t U_t^\dagger \right\|^2 dt, \quad (13)$$

$$E_q^{\gamma_t} = \int_0^T \|i[\gamma_t, H_t]\|^2 dt. \quad (14)$$

O primeiro termo é anulado quando mapas clássicos são implementados, sobrando somente a contribuição quântica para a energia da curva, e o outro termo é anulado para evoluções unitárias, sobrando somente uma contribuição puramente clássica.

Tomemos a métrica de Bures como exemplo (DEFFNER; CAMPBELL, 2017). Para $\gamma_t = \sum_j \lambda_j(t) |i(t)\rangle \langle i(t)|$, ela pode ser escrita como

² Em geometria Riemanniana, a energia de uma curva $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{M}$ em uma variedade \mathcal{M} pode ser definida como $\int_a^b \|\dot{\gamma}_t\|^2 dt$.

$$\begin{aligned}
D_B(\gamma_t, \gamma_t + d\gamma_t) &= \frac{1}{2} \sum_{j,k} \frac{|\langle j(t) | d\gamma_t | k(t) \rangle|^2}{\lambda_j(t) + \lambda_k(t)} \\
&= \frac{dt^2}{2} \sum_{j,k} \frac{|\langle j(t) | U_t \dot{\lambda}_t U_t^\dagger | k(t) \rangle|^2}{\lambda_j(t) + \lambda_k(t)} + \frac{dt^2}{2} \sum_{j,k} \frac{|\langle j(t) | i[\gamma_t, H_t] | k(t) \rangle|^2}{\lambda_j(t) + \lambda_k(t)} \\
&= \frac{dt^2}{2} \sum_{j,k} \frac{|\langle j(t) | U_t^\dagger U_t \dot{\lambda}_t | k(t) \rangle|^2}{\lambda_j(t) + \lambda_k(t)} + \frac{dt^2}{2} \sum_{j,k} \frac{|\langle j(t) | i[\lambda_j(t) - \lambda_k(t)] H_t | k(t) \rangle|^2}{\lambda_j(t) + \lambda_k(t)} \\
&= \frac{dt^2}{2} \sum_{j,k} \frac{|\langle j(t) | \dot{\lambda}_t | k(t) \rangle|^2}{\lambda_j(t) + \lambda_k(t)} + \frac{dt^2}{2} \sum_{j \neq k} \frac{|\langle j(t) | i[\lambda_j(t) - \lambda_k(t)] H_t | k(t) \rangle|^2}{\lambda_j(t) + \lambda_k(t)} \\
&= \frac{dt^2}{4} \sum_j \frac{\dot{\lambda}_j^2(t)}{\lambda_j(t)} + \frac{dt^2}{2} \sum_{j \neq k} \frac{(\lambda_j(t) - \lambda_k(t))^2}{\lambda_j(t) + \lambda_k(t)} |\langle j(t) | H_t | k(t) \rangle|^2.
\end{aligned} \tag{15}$$

No primeiro termo da terceira linha da equação acima foi utilizado que $\sum_{jk} \frac{|[AB]_{jk}|^2}{c_j + c_k} = \sum_{jk} \frac{|[BA]_{jk}|^2}{c_j + c_k}$. Por fim, obtemos a separação em dois termos:

$$\|\dot{\gamma}_t\|^2 = \sum_i \frac{\dot{\lambda}_i^2(t)}{4\lambda_i(t)} + \sum_{i < j} \frac{|\langle i(t) | i[\gamma_t, H_t] | j(t) \rangle|^2}{\lambda_i(t) + \lambda_j(t)}. \tag{16}$$

O primeiro termo está relacionado com a informação clássica de Fischer e o segundo termo relacionado à informação quântica de Fischer, que será apresentada na seção posterior. A equação (14) satisfaz todas as propriedades desejadas por construção e define uma função custo para a contribuição quântica na evolução do sistema, ou em outras palavras, o custo de preparar coerência em um sistema.

Do ponto vista operacional, pode-se trabalhar com a ideia de otimização no preparo de um estado. Suponha que estejamos limitados a implementação de mapas clássicos e transformações unitárias, i.e., preparações separadas em uma mudança no espectro e uma mudança de base:

$$\rho = \sum_i \lambda_i(0) |i(0)\rangle \langle i(0)| \rightarrow \rho^U = \sum_i \lambda_i(T) |i(0)\rangle \langle i(0)| \rightarrow \tau = \sum_i \lambda_i(T) |i(T)\rangle \langle i(T)|. \tag{17}$$

A componente quântica da energia da curva mínima necessária para levar o estado de entrada para o estado alvo pode ser encontrada realizando uma dupla minimização da função custo sobre todos os estados de entrada ρ^U isoespectrais ao estado alvo τ e sobre todas as curvas $\gamma_t^U : \rho^U \rightarrow \tau$ que levam de um ao outro,

$$Q_\rho(\tau) = \min_{\rho^u, \gamma_t^u} E_q^{\gamma_t^u}(\rho^u \rightarrow \tau), \quad (18)$$

essa quantidade é definida como a quanticidade de Girolami (QG) da preparação de um estado quântico.

Suponha que o estado alvo τ seja d -dimensional e seus autovalores tenham multiplicidade m , logo estados isoespectrais podem ser atingidos com $d!/(\prod_i m_i!)$ permutações P , ou seja, $\rho_P^u = P\rho^u P^\dagger$. Sendo assim, o problema de minimização nessa etapa se torna encontrar P tal que a QG seja minimizada.

E quanto ao melhor caminho γ_t^u para levar de um estado isoespectral até o estado alvo?

A curva entre dois estados que minimiza a energia da curva $E^{\gamma_t}(\rho \rightarrow \tau)$ equivale a encontrar a curva que minimiza a distância $\int_0^T \|\dot{\gamma}_t\| dt$ a velocidade constante (PETERSEN, 1998). Uma função distância relacionada a métrica de Bures é o ângulo de Bures: $d_B(\rho, \tau) = \arccos(\text{Tr}\{|\sqrt{\rho}\sqrt{\tau}\}|)$. Para estados puros $\rho^u = |\psi_{\rho^u}\rangle\langle\psi_{\rho^u}|$ e $\tau = |\psi_\tau\rangle\langle\psi_\tau|$ o ângulo de Bures se torna a distância de Fubini-Study, dada por:

$$D_{FS}(\rho^u, \tau) = \arccos \left| \langle \psi_{\rho^u} | \psi_\tau \rangle \right|. \quad (19)$$

O estado $\bar{\rho}^u$ mais próximo ao alvo é o que apresentar a maior superposição com este. A curva geodésica nesse caso é dada por (UHLMANN, 1976; BARNUM, 1998):

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}_t^u &= |\psi_{\bar{\gamma}_t^u}\rangle\langle\psi_{\bar{\gamma}_t^u}|, \\ |\psi_{\bar{\gamma}_t^u}\rangle &= (\cos \theta - \sin \theta / \tan d) |\psi_{\bar{\rho}^u}\rangle + \sin \theta / \sin d |\psi_\tau\rangle, \end{aligned} \quad (20)$$

onde $\theta = dt/T$ é uma parametrização para o tempo e $d = D_{FS}(\bar{\rho}^u, \tau)$ é a distância de Fubini-Study entre o estado e o alvo.

Para estados mistos podemos trabalhar de forma análoga ao trabalharmos com suas respectivas purificações.

O estado misto isoespectral mais próximos a um estado alvo, também misto, é o estado com a purificação mais próxima à purificação do estado alvo. As expressões compactas para as purificações mais próximas são (BARNUM, 1998):

$$\begin{aligned} |\psi_{\bar{\rho}^u}^{purif}\rangle &= \sum_i \sqrt{\bar{\rho}^u} |i(0)\rangle \otimes |i(0)\rangle \\ |\psi_\tau^{purif}\rangle &= \sum_i (\bar{\rho}^u)^{-1/2} \sqrt{(\bar{\rho}^u)^{1/2} \tau (\bar{\rho}^u)^{1/2}} |i(0)\rangle \otimes |i(0)\rangle. \end{aligned} \quad (21)$$

O caminho que minimiza a energia da curva ou a distância entre dois estados mistos pode ser encontrada tomando o traço parcial ao longo da geodésica que liga os

estados purificados. Por construção, essa quantidade também satisfaz todas as três propriedades desejadas enunciadas anteriormente e estabelecem um limite inferior para a QG desse processo,

$$Q_\rho(\tau) \geq Q_{\psi_{\rho^u}^{\text{purif}}(\psi_\tau^{\text{purif}})}. \quad (22)$$

Na prática, o que esse índice reflete?

Por exemplo, seja a evolução de um estado descrita por uma unitária sem dependência temporal no hamiltoniano, $U_t = e^{iHt}$, um mapa tipicamente quântico, ou seja, a QG equivale à energia da curva. Nesse caso a equação (16) é limitada superiormente pela variância do hamiltoniano vezes o tempo total de evolução.

$$Q_\rho(\tau) \leq V_\rho(H)T, \quad (23)$$

onde $V_\rho(H) = \text{Tr}\{\rho H^2\} - \text{Tr}\{\rho H\}^2$. A desigualdade acima é um tipo de relação de Mandelstam-Tamm (DÉFFNER; CAMPBELL, 2017), que será apresentada posteriormente e nos fornece uma relação entre a grandeza e o intervalo de tempo necessário para levar o estado até um alvo.

Em outro exemplo discutido na proposta (GIROLAMI, 2019), a QG também limita o número de portas lógicas necessárias para o preparo de um estado. Seja um mapa unitário $\gamma_t^u : \rho^u \rightarrow \tau$ sintetizado por N operadores que comutam entre si, ou seja, portas lógicas, onde $\gamma_t^u = U_t \rho^u U_t^\dagger$, $U_t = e^{iHt}$, $H = \sum_{i=1}^N H_i$, $[H_i, H_j] = 0, \forall i, j$. Um exemplo de um processo assim é o preparo de estados simétricos com alto grau de emaranhamento, $(a|0\rangle + b|1\rangle) \otimes |0\rangle^{\otimes N} \rightarrow a|0\rangle^{\otimes N+1} + b|1\rangle^{\otimes N+1}$, onde $a, b \in \mathbb{C}$, com portas controladas entre o primeiro e o $l+1$ -ésimo qubit. Considere que a semi-norma³ de cada hamiltoniano seja $\|H_i\| = h_{i,M} - h_{i,m}$, a diferença entre o seu maior e o seu menor autovalor, ela serve como uma medida para a complexidade do hamiltoniano uma vez que dependerá do número de portas lógicas necessárias para implementá-lo e do tamanho das correlações que ele cria (BOIXO *et al.*, 2007; ZWIERZ; PÉ REZ-DELGADO; KOK, 2010). Para a variância desse hamiltoniano, vale que $4V_\rho(H) \leq \|H\|^2$. Tomando a média quadrática da semi-norma sobre todos os hamiltonianos H_i temos que:

$$4V_\rho(H) \leq N^2 \overline{\|H\|^2}. \quad (24)$$

Se assumirmos que cada hamiltoniano tem a mesma semi-norma $\|H_i\| = h, \forall i$, da equação (23) podemos concluir que o número de portas lógicas necessárias para implementação do hamiltoniano é limitado inferiormente por

³ Uma seminorma é uma norma de espaço vetorial que não necessariamente precisa ser positiva definida.

$$N \geq \frac{2}{\hbar} \sqrt{\frac{Q_p^u(\tau)}{T}}, \quad (25)$$

o que nos fornece uma relação entre a QG e a complexidade de portas lógicas para esse tipo de preparo.

Isso parece mostrar que esse índice geométrico além de fornecer uma quantificação para a contribuição de fenômenos quânticos no preparo de um estado quântico, também fornece uma estratégia que permite *encurtar* esse processo ao trabalharmos com a minimização da componente da energia da curva associada a essa contribuição. Isso poderia ter impactos no estudo de algoritmos de computação quântica, servindo como uma medida de desempenho ou para estabelecer limites fundamentais no processamento de informação quântica.

Com isso em mente, no presente trabalho visamos investigar se o uso da QG pode trazer ganhos de performance ou novas informações no estudo de algoritmos quânticos. Inicialmente, a opção de estudar o modelo de computação quântica adiabática foi feita, pois a análise de complexidade e de performance em algoritmos nesse modelo não pode ser feita de forma tão direta como no modelo circuital de computação quântica, dependendo principalmente da aproximação estabelecida pelo teorema adiabático. Porém, os resultados terminaram por apontar que o uso da função QG é mais adequado no caso da implementação de atalhos para a adiabaticidade. Fizemos a opção de delimitar a análise a um algoritmo que já possui versão de implementação adiabática conhecida, optando pelo algoritmo de busca quântica, ou algoritmo de Grover. Os resultados foram obtidos utilizando atalhos para a adiabaticidade na implementação dessa versão do algoritmo. Mais discussões sobre esse modelo de computação, atalhos para adiabaticidade, o teorema adiabático e o algoritmo de Grover serão apresentadas nas seções posteriores.

2.2 INFORMAÇÃO DE FISCHER

Aqui serão apresentados brevemente aspectos da teoria da estimativa (DEVORE, 1994) visando abordar o conceito de informação de Fisher.

A teoria da estimativa é uma área da estatística com o objetivo de estimar com boa aproximação um parâmetro de interesse dado uma amostra de uma distribuição estatística. Podemos pensar como exemplo de um parâmetro a ser estimado a média ou o desvio padrão da distribuição.

O objetivo é que o resultado obtido a partir da amostra seja o mais próximo possível do valor real do parâmetro que descreve a distribuição. Denotaremos o parâmetro a ser estimado por θ , e o resultado obtido a partir da amostra de $\hat{\theta}$. Em geral, têm-se que

$$\hat{\theta} = \theta + \text{erro.} \tag{26}$$

Pode-se perguntar: considerando uma função densidade de probabilidade $p(x|\theta)$, onde x denota uma variável aleatória, e θ um parâmetro desconhecido, o quão precisa pode ser uma estimativa desse parâmetro a partir de uma amostragem X da distribuição?

Para fornecer uma resposta para essa pergunta, tentemos intuir sobre o que se quer dizer por precisão. Considere a distribuição normal como exemplo,

$$p(x, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}. \tag{27}$$

Suponha que tenhamos amostras da variável aleatória x , com desvio padrão σ conhecido, porém, com valor médio μ desconhecido e seja esse o parâmetro θ que se deseja estimar.

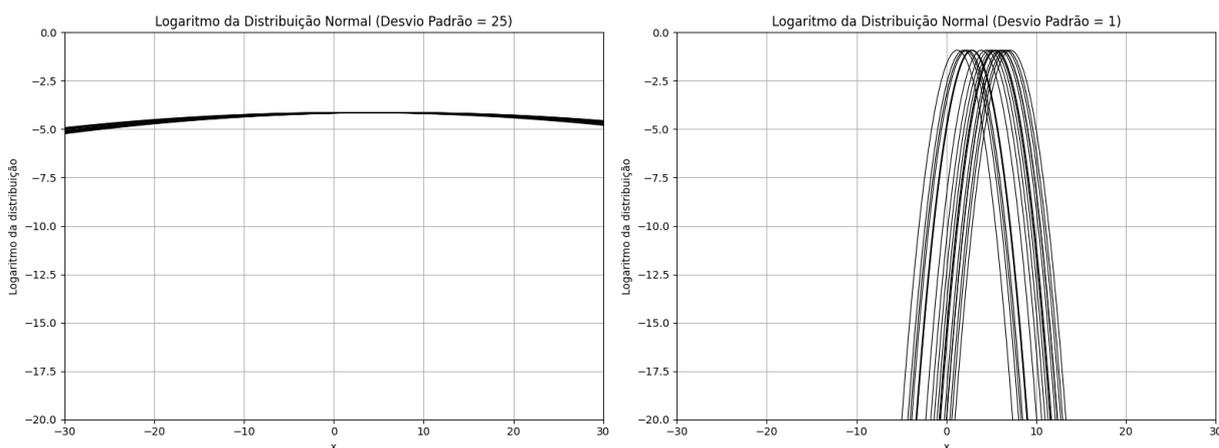


Figura 1 – Gráficos do logaritmo das distribuições das amostras com desvios padrões 25 (painel esquerdo) e 1 (painel direito) para diferentes valores médios.

Os gráficos acima mostram o logaritmo das distribuições das duas amostras. Note que no gráfico da direita os valores estão distribuídos em um intervalo mais estreito no eixo horizontal. A partir disso poderíamos intuir que seria mais fácil estimar o valor médio para as amostras do gráfico da direita, onde teríamos uma margem menor de erro para um chute. Quanto menor o desvio padrão, mais estreita a distribuição no eixo horizontal. Mas como essa estreiteza pode ser traduzida em informação sobre a estimativa de um valor médio?

Definamos uma variável aleatória U como

$$U = \frac{\partial}{\partial \theta} \ln [p(X|\theta)]. \tag{28}$$

Ela nos dá a taxa com que o logaritmo da distribuição varia em relação ao parâmetro que desejamos estimar, informando-nos sobre o comportamento da amostra em relação ao parâmetro de interesse. Para a distribuição normal essa variável será

$$U = \frac{x - \mu}{\sigma^2}. \quad (29)$$

Tomemos agora o desvio padrão da variável definida acima,

$$V[U] = \int_{-\infty}^{\infty} p(x|\mu) U(x,\mu)^2 dx - \left[\int_{-\infty}^{\infty} p(x|\mu) U(x,\mu) dx \right]^2 = \frac{1}{\sigma^2}. \quad (30)$$

Obtivemos uma quantidade que é inversamente proporcional ao quadrado do desvio padrão da amostra. Ou seja, da mesma forma que a *estreiteza* dos gráficos acima era maior quanto menor fosse o desvio padrão da amostra, o mesmo vale para essa quantidade. Ou seja, podemos intuir que quanto maior essa quantidade, mais fácil é estimar o parâmetro de interesse.

Ou seja, quanto maior a dispersão da variável que nos informa sobre o comportamento da distribuição em relação ao parâmetro de interesse, mais fácil é estimá-lo, ou em outras palavras, mais informação se tem sobre este comportamento.

Essa quantidade é chamada de informação de Fischer $F(\theta)$. Em uma única observação (ou amostragem) de uma função de densidade de probabilidade $p(X|\theta)$, ela é definida como a variância da variável aleatória U ,

$$F(\theta) = V \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \ln [p(X|\theta)] \right]. \quad (31)$$

Podemos trabalhar tanto com variáveis discretas quanto com variáveis contínuas, como o caso do exemplo discutido. Para variáveis discretas,

$$\begin{aligned} F(\theta) &= \sum_x p(x|\theta) \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \ln [p(x|\theta)] \right]^2 - \left[\sum_x p(x|\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} \ln [p(x|\theta)] \right]^2 \\ &= \sum_x p(x|\theta) \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \ln [p(x|\theta)] \right]^2 - \left[\sum_x p(x|\theta) \frac{1}{p(x|\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} p(x|\theta) \right]^2 \\ &= \sum_x p(x|\theta) \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \ln [p(x|\theta)] \right]^2 - \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \sum_x p(x|\theta) \right]^2 \\ &= \sum_x p(x|\theta) \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \ln [p(x|\theta)] \right]^2 - \left[\frac{\partial}{\partial \theta} 1 \right]^2 \\ &= \sum_x p(x|\theta) \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \ln [p(x|\theta)] \right]^2, \end{aligned} \quad (32)$$

para variáveis contínuas o resultado é análogo,

$$\begin{aligned}
 F(\theta) &= \int_{-\infty}^{\infty} p(x|\theta) \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \ln [p(x|\theta)] \right]^2 dx - \left[\int_{-\infty}^{\infty} p(x|\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} \ln [p(x|\theta)] dx \right]^2 \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} p(x|\theta) \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \ln [p(x|\theta)] \right]^2 dx - \left[\int_{-\infty}^{\infty} p(x|\theta) \frac{1}{p(x|\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} p(x|\theta) dx \right]^2 \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} p(x|\theta) \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \ln [p(x|\theta)] \right]^2 dx - \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \int_{-\infty}^{\infty} p(x|\theta) dx \right]^2 \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} p(x|\theta) \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \ln [p(x|\theta)] \right]^2 dx - \left[\frac{\partial}{\partial \theta} 1 \right]^2 \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} p(x|\theta) \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \ln [p(x|\theta)] \right]^2 dx.
 \end{aligned} \tag{33}$$

No caso de várias amostras tomadas de forma aleatória e independente $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ vale que

$$p(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n | \theta) = p(X_1 | \theta) p(X_2 | \theta) p(X_3 | \theta) \dots p(X_n | \theta). \tag{34}$$

A variável U nesse caso será

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{\partial}{\partial \theta} \ln [p(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n | \theta)] \\
 &= \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\ln [p(X_1 | \theta) p(X_2 | \theta) p(X_3 | \theta) \dots p(X_n | \theta)] \right] \\
 &= \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\ln [p(X_1 | \theta)] + \ln [p(X_2 | \theta)] + \ln [p(X_3 | \theta)] + \dots \ln [p(X_n | \theta)] \right].
 \end{aligned} \tag{35}$$

Ao tomar a variância da soma de duas variáveis A, B , em geral, têm-se que

$$V[A + B] = V[A] + V[B] + Cov[A, B], \tag{36}$$

onde o último termo corresponde à covariância das duas variáveis. No entanto, como partimos do pressuposto de que as amostras foram tomadas de forma independente, a covariância das amostras é zero, valendo a aditividade das variâncias. Logo a informação de Fischer dessas amostras é

$$\begin{aligned}
F_n(\theta) &= V \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \ln [p(X_1, X_2, \dots, X_n | \theta)] \right] \\
&= V \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left[\ln [p(X_1 | \theta)] + \ln [p(X_2 | \theta)] + \ln [p(X_3 | \theta)] + \dots + \ln [p(X_n | \theta)] \right] \right] \\
&= V \left[\ln [p(X_1 | \theta)] \right] + V \left[\ln [p(X_2 | \theta)] \right] + V \left[\ln [p(X_3 | \theta)] \right] + \dots + V \left[\ln [p(X_n | \theta)] \right] \\
&= nF_1(\theta),
\end{aligned} \tag{37}$$

ou seja, a informação de Fischer de n amostras é igual a n vezes a informação de Fischer de uma única amostragem. Pode-se entender isso pensando que ao tomar duas amostras de uma distribuição estatística você tem duas vezes mais informação.

Uma última propriedade a ser citada é a desigualdade de Cramer-Rao. Na equação (26) escrevemos o resultado da estimativa como função do parâmetro θ . Em estatística, podemos ter estimadores enviesados e não-enviesados. O desvio padrão do erro da estimativa é dado por

$$\begin{aligned}
V[\hat{\theta} - \theta] &= E[(\hat{\theta} - \theta)^2] - E^2[(\hat{\theta} - \theta)] \\
&= E[(\hat{\theta} - \theta)^2] - \underbrace{(E[\hat{\theta}] - \theta)^2},
\end{aligned} \tag{38}$$

o segundo termo da equação acima é definido como o viés do estimador. Quando ele é zero dizemos ser uma estimativa não-enviesada, caso contrário, é chamada de estimativa enviesada.

Definamos agora um estimador de $\hat{\theta}$. Um estimador T não-enviesado de $\hat{\theta}$ é aquele tal que seu valor esperado é

$$E[T] = \int dx T p(x|\theta) = \theta. \tag{39}$$

Tomando a derivada da equação acima em relação ao parâmetro θ , obtemos que

$$\begin{aligned}
1 &= \int dx T \frac{\partial}{\partial \theta} p(x|\theta) \\
&= \int dx T p(x|\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} \ln p(x|\theta) \\
&= E \left[T \frac{\partial}{\partial \theta} \ln p(x|\theta) \right].
\end{aligned} \tag{40}$$

Podemos utilizar agora a fórmula para a covariância de duas variáveis,

$$\text{cov}(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y]. \tag{41}$$

Sabendo que o valor esperado da variável U é zero, temos

$$\text{cov} \left[T, \frac{\partial}{\partial \theta} \ln p(x|\theta) \right] = E \left[T \frac{\partial}{\partial \theta} \ln p(x|\theta) \right]. \quad (42)$$

Utilizando a desigualdade abaixo para a covariância,

$$\text{cov}(X, Y)^2 \leq V[X]V[Y], \quad (43)$$

chegamos em

$$V[T]V \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \ln p(x|\theta) \right] \geq 1. \quad (44)$$

Utilizando a definição da informação de Fisher, finalmente chegamos no resultado conhecido como a desigualdade de Cramer-Rao,

$$V[T] \geq \frac{1}{F(\theta)}. \quad (45)$$

O limite inferior da desigualdade pode ser entendido como a eficiência do estimador. Se a variância do estimador de $\hat{\theta}$ for igual ao limite inferior, ele é tido como um estimador eficiente de θ .

2.2.1 Informação Quântica de Fischer

Nessa seção, será apresentada a informação quântica de Fischer com base na referência (PARIS, 2009).

O que seria uma versão quântica da informação de Fischer? Em informação quântica existem muitas quantidades que se tem interesse em medir, porém, não correspondem a um observável físico. Para isso é possível recorrer à estimativa de parâmetros realizando medidas de um observável físico válido $\hat{O}(\theta)$, que serve como um estimador quântico. Logo, o estimador $\hat{O}(\theta)$ de um parâmetro θ , deve ser um operador hermitiano.

Seja ρ_θ o operador densidade parametrizado pela quantidade que queremos estimar. Conforme a regra de Born, a função densidade de probabilidade é dada por

$$p(x|\theta) = \text{Tr} \{ \Pi_x \rho_\theta \}, \quad (46)$$

onde Π_x são os elementos de uma medida com operador positivo valorado (do inglês, POVM), i.e., um conjunto de matrizes definidas semi-positivas que somadas resultam no operador identidade,

$$\int dx \Pi_x = \mathbb{1}. \quad (47)$$

A informação de Fischer de uma distribuição de probabilidade contínua pode ser escrita como

$$F(\theta) = \int dx p(x|\theta) \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \ln [p(x|\theta)] \right]^2 = \int dx \frac{1}{p(x|\theta)} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} p(x|\theta) \right]^2. \quad (48)$$

Aqui é necessário introduzir o operador autoadjunto L_θ , chamado derivada simétrica logarítmica, que satisfaz a equação

$$\frac{\partial \rho_\theta}{\partial \theta} = \frac{L_\theta \rho_\theta + \rho_\theta L_\theta}{2}. \quad (49)$$

A equação que define o operador é uma equação de Lyapunov. A solução geral é descrita por

$$L_\theta = 2 \int_0^\infty dt \exp\{-\rho_\theta t\} (\partial_\theta \rho_\theta) \exp\{-\rho_\theta t\}. \quad (50)$$

Utilizando o operador L_θ , é possível escrever a derivada da regra de Born como

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} p(x|\theta) &= \partial_\theta \text{Tr}\{\Pi_x \rho_\theta\} \\ &= \text{Tr}\{\Pi_x \partial_\theta \rho_\theta\} \\ &= \text{Tr}\left\{\Pi_x \frac{L_\theta \rho_\theta + \rho_\theta L_\theta}{2}\right\} \\ &= \frac{1}{2} \text{Tr}\{\Pi_x L_\theta \rho_\theta\} + \frac{1}{2} \text{Tr}\{\Pi_x \rho_\theta L_\theta\} \\ &= \frac{1}{2} \text{Tr}\{\Pi_x L_\theta \rho_\theta\} + \frac{1}{2} \text{Tr}\{(\Pi_x \rho_\theta L_\theta)^\dagger\}^* \\ &= \frac{1}{2} \text{Tr}\{\Pi_x L_\theta \rho_\theta\} + \frac{1}{2} \text{Tr}\{L_\theta \rho_\theta \Pi_x\}^* \\ &= \frac{1}{2} \text{Tr}\{\Pi_x L_\theta \rho_\theta\} + \frac{1}{2} \text{Tr}\{\Pi_x L_\theta \rho_\theta\}^* \\ &= \text{Re}\{\text{Tr}\{\Pi_x L_\theta \rho_\theta\}\}, \end{aligned} \quad (51)$$

substituindo na equação (48), temos

$$F(\theta) = \int dx \frac{\text{Re}\{\text{Tr}\{\Pi_x L_\theta \rho_\theta\}\}^2}{\text{Tr}\{\Pi_x \rho_\theta\}}. \quad (52)$$

Com isso encontramos um quantitativo para a precisão de uma medição quântica representada por Π_x . Porém, será possível encontrar limites para essa precisão que reflitam a natureza quântica desse tipo de medida?

Utilizando que $\text{Re}\{a\}^2 \leq |a|^2$, para $a \in \mathbb{C}$ temos

$$\begin{aligned}
F(\theta) &\leq \int dx \frac{|\text{Tr}\{\Pi_x L_\theta \rho_\theta\}|^2}{\text{Tr}\{\Pi_x \rho_\theta\}} \\
&= \int dx \frac{|\text{Tr}\{(\sqrt{\rho_\theta} \sqrt{\Pi_x})(\sqrt{\Pi_x} L_\theta \sqrt{\rho_\theta})\}|^2}{\text{Tr}\{\Pi_x \rho_\theta\}}.
\end{aligned} \tag{53}$$

A partir da desigualdade de Schwartz,

$$|\text{Tr}\{A^\dagger B\}|^2 \leq \text{Tr}\{A^\dagger A\} \text{Tr}\{B^\dagger B\}, \tag{54}$$

utilizando que $\rho_\theta, L_\theta, \Pi_x$ são operadores hermitianos, podemos escrevê-la

$$|\text{Tr}\{(\sqrt{\rho_\theta} \sqrt{\Pi_x})(\sqrt{\Pi_x} L_\theta \sqrt{\rho_\theta})\}|^2 \leq \text{Tr}\{\rho_\theta \Pi_x\} \text{Tr}\{\Pi_x L_\theta \rho_\theta L_\theta\}. \tag{55}$$

Substituindo a equação (55) na equação (53), obtém-se

$$\begin{aligned}
F(\theta) &\leq \int dx \text{Tr}\{\Pi_x L_\theta \rho_\theta L_\theta\} \\
&= \text{Tr}\left\{\left(\int dx \Pi_x\right) L_\theta \rho_\theta L_\theta\right\} \\
&= \text{Tr}\{L_\theta \rho_\theta L_\theta\}.
\end{aligned} \tag{56}$$

Chegamos no resultado que a informação de Fischer é limitada superiormente pelo valor esperado da derivada simétrica logarítmica ao quadrado,

$$F(\theta) \leq \text{Tr}\{\rho_\theta L_\theta^2\} = \langle L_\theta^2 \rangle_{\rho_\theta}. \tag{57}$$

Essa quantidade é definida como a Informação Quântica de Fischer $H(\theta)$, podemos escrevê-la equivalentemente como

$$H(\theta) = \text{Tr}\{\rho_\theta L_\theta^2\} = \text{Tr}\{(\partial_\theta \rho_\theta) L_\theta\}. \tag{58}$$

Escrevendo o operador densidade ρ_θ na base de seus autoestados, i.e., $\rho_\theta = \sum_n c_n |\psi_n\rangle \langle \psi_n|$ e usando a equação (50):

$$\begin{aligned}
L_\theta &= 2 \int_0^\infty dt \exp\{-\rho_\theta t\} \text{Proj}(\partial_\theta \rho_\theta) \exp\{-\rho_\theta t\} \\
&= 2 \int_0^\infty dt \sum_{n,m} \exp\{-c_n t\} |\psi_n\rangle \langle \psi_n| (\partial_\theta \rho_\theta) \exp\{-c_m t\} |\psi_m\rangle \langle \psi_m| \\
&= 2 \sum_{n,m} \langle \psi_n | (\partial_\theta \rho_\theta) | \psi_m \rangle |\psi_n\rangle \langle \psi_m| \int_0^\infty dt \exp\{-(c_n + c_m)t\} \\
&= 2 \sum_{n,m} \frac{\langle \psi_n | \partial_\theta \rho_\theta | \psi_m \rangle}{c_n + c_m} |\psi_n\rangle \langle \psi_m|.
\end{aligned} \tag{59}$$

A informação quântica de Fischer pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
H(\theta) &= \text{Tr} \left[(\partial_\theta \rho_\theta) \left(2 \sum_{n,m} \frac{\langle \psi_n | \partial_\theta \rho_\theta | \psi_m \rangle}{c_n + c_m} |\psi_n\rangle \langle \psi_m| \right) \right] \\
&= 2 \sum_{n,m} \frac{\langle \psi_n | \partial_\theta \rho_\theta | \psi_m \rangle}{c_n + c_m} \text{Tr} [(\partial_\theta \rho_\theta) |\psi_n\rangle \langle \psi_m|] \\
&= 2 \sum_{n,m} \frac{\langle \psi_n | \partial_\theta \rho_\theta | \psi_m \rangle}{c_n + c_m} \langle \psi_m | \partial_\theta \rho_\theta | \psi_n \rangle \\
&= 2 \sum_{n,m} \frac{|\langle \psi_n | \partial_\theta \rho_\theta | \psi_m \rangle|^2}{c_n + c_m}.
\end{aligned} \tag{60}$$

Ao escrever $\partial_\theta \rho_\theta$ em termos da base de autoestados de ρ_θ ,

$$\begin{aligned}
\partial_\theta \rho_\theta &= \partial_\theta \left(\sum_I c_I |\psi_I\rangle \langle \psi_I| \right) \\
&= \sum_I \left[(\partial_\theta c_I) |\psi_I\rangle \langle \psi_I| + c_I |\partial_\theta \psi_I\rangle \langle \psi_I| + c_I |\psi_I\rangle \langle \partial_\theta \psi_I| \right],
\end{aligned} \tag{61}$$

calculando $\langle \psi_n | \partial_\theta \rho_\theta | \psi_m \rangle$,

$$\begin{aligned}
\langle \psi_n | \partial_\theta \rho_\theta | \psi_m \rangle &= \\
&= \sum_I \left[(\partial_\theta c_I) \langle \psi_n | \psi_I \rangle \langle \psi_I | \psi_m \rangle + c_I \langle \psi_n | \partial_\theta \psi_I \rangle \langle \psi_I | \psi_m \rangle + c_I \langle \psi_n | \psi_I \rangle \langle \partial_\theta \psi_I | \psi_m \rangle \right] \\
&= \delta_{mn} \partial_\theta c_n + c_m \langle \psi_n | \partial_\theta \psi_m \rangle + c_n \langle \partial_\theta \psi_n | \psi_m \rangle \\
&= \delta_{mn} \partial_\theta c_n + (c_m - c_n) \langle \psi_n | \partial_\theta \psi_m \rangle,
\end{aligned} \tag{62}$$

onde a identidade $\langle \psi_n | \partial_\theta \psi_m \rangle = -\langle \partial_\theta \psi_n | \psi_m \rangle$ foi utilizada. O operador L_θ pode ser escrito da forma

$$\begin{aligned}
L_\theta &= 2 \sum_{n,m} \frac{\delta_{mn} \partial_\theta c_n + (c_m - c_n) \langle \psi_n | \partial_\theta \psi_m \rangle}{c_n + c_m} |\psi_n\rangle \langle \psi_m| \\
&= \sum_n \frac{\partial_\theta c_n}{c_n} |\psi_n\rangle \langle \psi_n| + 2 \sum_{n \neq m} \frac{c_m - c_n}{c_n + c_m} \langle \psi_n | \partial_\theta \psi_m \rangle |\psi_n\rangle \langle \psi_m|.
\end{aligned} \tag{63}$$

Tomando o quadrado da expressão acima,

$$\begin{aligned}
L_\theta^2 &= \left(\sum_n \frac{\partial_\theta c_n}{c_n} |\psi_n\rangle \langle \psi_n| + 2 \sum_{n \neq m} \frac{c_m - c_n}{c_n + c_m} \langle \psi_n | \partial_\theta \psi_m \rangle |\psi_n\rangle \langle \psi_m| \right) \\
&\times \left(\sum_k \frac{\partial_\theta c_k}{c_k} |\psi_k\rangle \langle \psi_k| + 2 \sum_{k \neq l} \frac{c_l - c_k}{c_k + c_l} \langle \psi_k | \partial_\theta \psi_l \rangle |\psi_k\rangle \langle \psi_l| \right) \\
&= \sum_n \left(\frac{\partial_\theta c_n}{c_n} \right)^2 |\psi_n\rangle \langle \psi_n| + 2 \sum_{n \neq l} \frac{\partial_\theta c_n}{c_n} \left(\frac{c_l - c_n}{c_n + c_l} \right) \langle \psi_n | \partial_\theta \psi_l \rangle |\psi_n\rangle \langle \psi_l| \quad (64) \\
&+ 2 \sum_{n \neq m} \frac{\partial_\theta c_n}{c_n} \left(\frac{c_m - c_n}{c_n + c_m} \right) \langle \psi_n | \partial_\theta \psi_m \rangle |\psi_n\rangle \langle \psi_m| \\
&+ 4 \sum_{n \neq m \neq l} \left(\frac{c_m - c_n}{c_n + c_m} \right) \left(\frac{c_l - c_m}{c_m + c_l} \right) \langle \psi_n | \partial_\theta \psi_m \rangle \langle \psi_m | \partial_\theta \psi_l \rangle |\psi_n\rangle \langle \psi_l|.
\end{aligned}$$

Calculando o valor de $\langle \psi_n | L_\theta^2 | \psi_n \rangle$, notando que o segundo e o terceiro termo acima serão anulados:

$$\begin{aligned}
\langle \psi_n | L_\theta^2 | \psi_n \rangle &= \left(\frac{\partial_\theta c_n}{c_n} \right)^2 - 4 \sum_{n \neq m} \left(\frac{c_m - c_n}{c_n + c_m} \right)^2 \langle \psi_n | \partial_\theta \psi_m \rangle \langle \psi_m | \partial_\theta \psi_n \rangle \\
&= \left(\frac{\partial_\theta c_n}{c_n} \right)^2 + 4 \sum_{n \neq m} \left(\frac{c_m - c_n}{c_n + c_m} \right)^2 |\langle \psi_n | \partial_\theta \psi_m \rangle|^2, \quad (65)
\end{aligned}$$

enfim, podemos escrever a informação quântica de Fisher separada em dois termos,

$$\begin{aligned}
H(\theta) &= \text{Tr} \{ \rho_\theta L_\theta^2 \} \\
&= \text{Tr} \left\{ \left(\sum_n c_n |\psi_n\rangle \langle \psi_n| \right) L_\theta^2 \right\} \\
&= \sum_n c_n \text{Tr} \{ |\psi_n\rangle \langle \psi_n | L_\theta^2 \} \\
&= \sum_n c_n \langle \psi_n | L_\theta^2 | \psi_n \rangle \\
&= \sum_n \frac{(\partial_\theta c_n)^2}{c_n} + 2 \sum_{n \neq m} \sigma_{nm} |\langle \psi_n | \partial_\theta \psi_m \rangle|^2, \quad (66)
\end{aligned}$$

com $\sigma_{nm} = 2c_n[(c_m - c_n)/(c_m + c_n)]^2 +$ termo anti-simétrico, uma vez que o somatório para qualquer termo anti-simétrico é nulo.

Observa-se que o primeiro termo da soma tem a mesma forma da expressão para a informação clássica de Fisher. Reparando nisso, pode-se entender o segundo termo como a contribuição puramente quântica para a informação quântica de Fisher.

Da mesma forma que a desigualdade de Cramer-Rao estabelece um limite para a informação de Fisher, também vale uma relação análoga para informação quântica de Fisher, nomeada de desigualdade de Cramer-Rao quântica,

$$V[\hat{O}(\theta)] \geq \frac{1}{H(\theta)}. \quad (67)$$

A informação quântica de Fisher guarda uma relação direta com a métrica de Bures. A métrica de Bures define a distância infinitesimal entre dois estados quânticos no espaço de operadores matriz densidade. Seja o estado descrito na sua decomposição espectral $\rho = \sum_k \lambda_k |k\rangle\langle k|$, a métrica de Bures é dada por

$$d[\rho, \rho + d\rho]^2 = \frac{1}{2} \sum_{j,k} \frac{|\langle j| d\rho |k\rangle|^2}{\lambda_j + \lambda_k}. \quad (68)$$

A relação entre as duas é que a informação quântica de Fischer é quatro vezes a métrica de Bures e no lugar do infinitésimo $d\rho$ temos a derivada parcial do estado em relação ao parâmetro θ que desejamos estimar.

Aqui cabem algumas pontuações de interesse para o desenvolvimento do trabalho. Podemos nos valer da intuição adquirida ao discutir sobre a informação clássica de Fisher de que essa é uma grandeza que nos dá a quantidade de informação que temos sobre um parâmetro θ de uma distribuição estatística que deseja-se estimar ao coletar uma ou mais amostras. Para aplicar esse conceito no contexto de mecânica quântica, ao invés de trabalharmos com uma função de densidade de probabilidade de uma distribuição, trabalhamos com o operador matriz densidade que representa o estado de um sistema quântico, cujas probabilidades podem ser deduzidas a partir da regra de Born. Em primeiro momento, não foi especificado o parâmetro θ o qual gostaríamos de estimar.

No contexto da função QG apresentada anteriormente, quando foi escolhida a métrica de Bures nota-se que o integrando da função que define essa grandeza está associado componente puramente quântica da informação quântica de Fisher,

$$\begin{aligned} Q_\rho(\tau) &= \int_0^T dt \|i[\gamma_t, H_t]\|_{Bures}^2 \\ &= \int_0^T dt \sum_{i < j} \frac{|\langle i(t) | i[\gamma_t, H_t] | j(t) \rangle|^2}{\lambda_i(t) + \lambda_j(t)}. \end{aligned} \quad (69)$$

A primeira observação a ser feita é que sendo o integrando associado a informação de Fisher, o parâmetro θ a qual a informação se refere nesse caso corresponderia ao intervalo de tempo t da condução de um estado entrada a um estado alvo, o que aparentemente fortalece a hipótese de que para o estudo de algoritmos de computação quântica a função poderia estar associada ao tempo de execução ou a complexidade do algoritmo, ou ao tempo de preparo de estados quânticos, se este for o caso (GIROLAMI, 2019).

No entanto, uma problemática surge com a observação acima. Para estimar um parâmetro θ precisaríamos de um estimador quântico $\hat{O}(\theta)$ correspondente a um

observável físico. Qual observável físico que poderia ser utilizado como um estimador quântico para o tempo de preparo de um estado ou de execução de um algoritmo? Na verdade, não existe tal observável (HILGEEVOORD, 1996, 1998, 2002).

Uma segunda observação surge ao confrontar a interpretação da QG com a interpretação da informação de Fisher. Em princípio, a chave interpretativa é de que quanto maior a informação de Fisher associada a um parâmetro, mais informação se tem sobre este. Para encontrar sua versão quântica, procurou-se um limite superior para a informação associada ao estado de um sistema quântico e foi possível separar esse limite superior em dois termos correspondentes a uma parte clássica e uma parte puramente quântica. No caso da função QG, foi proposto uma estrutura de trabalho na qual a componente quântica da energia da curva associada ao caminho que leva o estado de entrada a um alvo é minimizada. Ou seja, em um caso buscamos um limite superior para uma medida de informação e no outro buscamos um limite inferior para uma medida de informação.

Com o objetivo de investigar essas perguntas, o desenvolvimento do trabalho prosseguiu em duas frentes, estudando como a QG se relaciona com o tempo de evolução a partir do conceito de QSL, que será o tópico da próxima seção, e calculando explicitamente seu resultado para o algoritmo de Grover quando implementado via atalhos para a adiabaticidade, buscando observar como eles se relacionam com os resultados conhecidos para seus respectivos tempos de execução.

2.3 QSL E QG

Nessa seção será apresentada o conceito de QSL, o seu desenvolvimento histórico, partindo da relação de incerteza de Heisenberg, para os trabalhos de Mandelstam-Tamm, Margolus e Levitin até chegar na relação de incerteza de Mandelstam-Tamm para estados quânticos mistos e uma dinâmica arbitrária e discutindo como é possível relacionar QSL com a função QG.

Uma propriedade fundamental da mecânica quântica é a incerteza inerente à natureza do comportamento de objetos muito pequenos. A precisão de uma medida feita sob um sistema quântico esbarra em limites impostos não por dificuldades técnicas, mas pela própria natureza em si.

Um resultado notório que reflete essa propriedade é a relação de incerteza,

$$\Delta x \Delta p \gtrsim \hbar, \quad (70)$$

enunciado pela primeira vez por Heisenberg (HEISENBERG, 1927), sua dedução era motivada pelo argumento físico de que ao analisar a trajetória de um elétron utilizando um microscópio de raios gama, devido ao efeito Compton, a incerteza na posição e momento seriam aproximadamente $\Delta p \Delta x \approx \hbar$, partindo então para derivar esse

resultado a partir da relação de comutação canônica,

$$[x,p] = i\hbar. \quad (71)$$

Em livros introdutórios de mecânica quântica essa relação é apresentada através da mecânica ondulatória (MESSIAH, 2014), analisando pacotes de onda e constatando que a função de onda no espaço de posição e no espaço de momento são transformadas de Fourier uma da outra, o que permite derivar uma relação de incerteza adicional para a energia e o tempo, uma vez que

$$\begin{aligned} \Delta t &= \frac{\Delta x}{v}, \\ \Delta E &= \frac{\partial E}{\partial p} \Delta p = v \Delta p, \end{aligned} \quad (72)$$

o que nos leva ao resultado que $\Delta E \Delta t \approx \hbar$, onde v é velocidade de grupo do pacote de ondas. Acontece que essa argumentação é insatisfatória uma vez que é conhecido que a relação de incerteza é consequência da relação de comutação canônica de posição e momento, e em verdade, foi demonstrado por Robertson (ROBERTSON, 1929) utilizando uma desigualdade de Cauchy-Schwartz que para quaisquer operadores A e B vale que

$$\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2} |\langle [A,B] \rangle|, \quad (73)$$

onde $\Delta O = \sqrt{\langle O^2 \rangle - \langle O \rangle^2}$ e $\langle O \rangle = \langle \psi | O | \psi \rangle$. A relação acima nos diz que se dois observáveis A, B forem medidos em um sistema físico, existe um limite máximo que pode ser alcançado para o produto dos desvios padrões de A e B . Uma vez que o tempo não pode ser expresso por um operador Hermitiano (HILGEVOORD, 1996, 1998, 2002), não se pode derivar a relação de incerteza para a energia e o tempo, eis o porquê da argumentação acima ser insuficiente.

A relação de incerteza para a energia e tempo só foi colocada em termos de uma argumentação física mais robusta cerca de vinte anos depois por dois cientistas soviéticos, Mandelstam e Tamm (MANDELSTAM; TAMM, 1945).

Sua análise reside no fato de que para sistemas quânticos sob uma dinâmica dada pela equação de Schrödinger, a evolução de um observável qualquer A é dada pela equação de Liouville-Von-Neumann,

$$\frac{\partial}{\partial t} A = \frac{i}{\hbar} [H, A], \quad (74)$$

onde H é o hamiltoniano do sistema. Logo, a relação de incerteza geral para dois observáveis implica que

$$\Delta H \Delta A \geq \frac{\hbar}{2} \left| \left\langle \frac{\partial}{\partial t} A \right\rangle \right|. \quad (75)$$

Se escolhermos o observável A como o projetor no estado inicial do sistema $|\psi(0)\rangle\langle\psi(0)|$, temos que $\langle A \rangle_{t=0} = 1$ e a variância do observável será dada por

$$\Delta A = \sqrt{\langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2} = \sqrt{\langle A \rangle - \langle A \rangle^2}. \quad (76)$$

Substituindo na relação de incerteza para H e A , obtemos

$$\begin{aligned} \Delta H \sqrt{\langle A \rangle - \langle A \rangle^2} &\geq \frac{\hbar}{2} \left| \left\langle \frac{\partial}{\partial t} A \right\rangle \right| \\ \Rightarrow \frac{2\Delta H}{\hbar} &\geq \frac{1}{\sqrt{\langle A \rangle - \langle A \rangle^2}} \left| \left\langle \frac{\partial}{\partial t} A \right\rangle \right|. \end{aligned} \quad (77)$$

Integrando a desigualdade em ambos os lados e utilizando a parametrização $\langle A \rangle = \sin \theta$ e lembrando que $\langle A \rangle_0 = 1$, obtemos

$$\frac{2\Delta H}{\hbar} t \geq \int_1^{\langle A \rangle_t} \frac{\langle \partial A \rangle}{\sqrt{\langle A \rangle - \langle A \rangle^2}} = 2 \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \sqrt{\langle A \rangle_t} \right). \quad (78)$$

Se considerarmos apenas processos nos quais o estado final é ortogonal ao estado inicial, i.e., $\langle A \rangle_t = 0$, temos que o tempo mínimo de evolução entre dois estados ortogonais é dado por

$$\tau \geq \tau_{QSL} := \frac{\pi \hbar}{2 \Delta H}. \quad (79)$$

Com isso, não só se estabeleceu uma argumentação coerente para a desigualdade de tempo e energia, mas também uma primeira noção de QSL (rapidez quântica limite), i.e., um tempo mínimo para uma evolução quântica, interpretação formalizada mais tarde por Aharonov e Bohm (AHARONOV, Y.; BOHM, 1961). Importante salientar que não se trata de uma incerteza na duração de uma medida e na energia transferida ao sistema, mas sim de uma escala de tempo intrínseca de uma evolução quântica.

Esse resultado foi re-derivado em muitos trabalhos posteriores (FLEMING, 1973; BHATTACHARYYA, 1983; ANANDAN; AHARONOV, Y., 1990; VAIDMAN, 1992), no entanto, Uffink demonstra em seu trabalho (UFFINK, 1993) que existem situações onde ΔH dá resultados irrealísticos para a velocidade de uma evolução quântica, uma vez que o limite inferior dado na equação acima pode ser arbitrariamente pequeno em casos que a variância do hamiltoniano diverge (MARGOLUS; LEVITIN, L. B., 1998).

Foram Margolous e Levitin que propuseram um resultado alternativo para o QSL (MARGOLUS; LEVITIN, L. B., 1998). Expandindo o estado inicial do sistema na base de autoestados do hamiltoniano que governa a evolução,

$$|\psi(0)\rangle = \sum_n c_n |E_n\rangle, \quad (80)$$

a solução da equação de Schrödinger com hamiltoniano independente do tempo é descrita por

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n c_n \exp\{-iE_n t/\hbar\} |E_n\rangle. \quad (81)$$

A superposição deste com o estado inicial em qualquer instante é dada por

$$S(t) = \langle\psi(0)|\psi(t)\rangle = \sum_n |c_n|^2 \exp\{-iE_n t/\hbar\}. \quad (82)$$

O novo QSL é obtido tomando a parte real da superposição,

$$\begin{aligned} \text{Re}\{S(t)\} &= \sum_n |c_n|^2 \cos(E_n t/\hbar) \\ &\geq \sum_n |c_n|^2 \left[1 - \frac{2}{\pi} \left(\frac{E_n t}{\hbar} + \sin\left(\frac{E_n t}{\hbar}\right) \right) \right] \\ &= 1 - \frac{2}{\pi} \frac{\langle H \rangle t}{\hbar} + \text{Im}\{S(t)\}, \end{aligned} \quad (83)$$

onde a desigualdade trigonométrica $\cos x \geq 1 - 2/\pi(x + \sin x)$, $\forall x \geq 0$ foi utilizada e se assumiu que a energia média $\langle H \rangle$ é não negativa.

Novamente limitando a desigualdade para processos em que o estado inicial e o estado final são ortogonais, temos que $S(\tau) = 0$ e concluímos que o tempo de QSL é

$$\begin{aligned} 0 &= 1 - \frac{2}{\pi} \frac{\langle H \rangle \tau}{\hbar} \\ \implies \tau &\geq \tau_{QSL} := \frac{\pi}{2} \frac{\hbar}{\langle H \rangle}. \end{aligned} \quad (84)$$

A desigualdade acima define o limite de Margulus-Levitin, que apresenta uma vantagem sobre o limite anterior, ela não depende da variância de um observável físico. Porém, surge um novo problema, existem agora dois tempos limites independentes advindos de duas propriedades diferentes de um mesmo sistema quântico. O fato dos dois tempos limites serem verdadeiros, foi demonstrado em alguns trabalhos posteriores (UFFINK, 1993; BRODY, 2003; ANDRECUT; ALI, 2004; KOSIŃSKI; ZYCH, 2006; GIOVANNETTI; LLOYD; MACCONE, 2003; ZANDER; PLASTINO; CASAS, 2007; LEVITIN, L. B.; TOFFOLI; WALTON, 2003).

Para contornar essa ambiguidade e os cenários onde o tempo de evolução é arbitrariamente pequeno, passou-se a assumir o valor máximo entre os dois limites como o tempo de QSL para a evolução entre estados ortogonais,

$$\tau_{QSL} = \max \left\{ \frac{\pi}{2} \frac{\hbar}{\Delta H}, \frac{\pi}{2} \frac{\hbar}{\langle H \rangle} \right\} = \frac{\pi \hbar}{(\Delta H + \langle H \rangle - |\Delta H - \langle H \rangle|)}. \quad (85)$$

No entanto, Levitin e Toffoli (LEVITIN, L.; TOFFOLI, 2009) demonstraram que só existe uma família de estados para as quais o limite é unificado.

Teorema 1. Reescalando a energia do estado fundamental de um sistema quântico para zero,

1. O único estado que atinge o limite dado pela equação (79) é:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi_0\rangle + |\psi_1\rangle), \quad (86)$$

onde $H|\psi_k\rangle = kE_k|\psi_k\rangle$ para $k = 0, 1$.

2. O único estado que atinge o limite dado pela equação (84) é o estado dado pela equação (86). O estado (86) é único por fatores de fase arbitrários para $|\psi_0\rangle$ e $|\psi_1\rangle$.

Demonstração. 1. Seja o estado inicial dado na base de autoestados do hamiltoniano:

$$|\psi(0)\rangle = \sum_n c_n |E_n\rangle, \quad (87)$$

com $\sum_n |c_n|^2 = 1$. O estado do sistema a qualquer instante será descrito por

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n c_n \exp\{-iE_n t/\hbar\} |E_n\rangle, \quad (88)$$

logo, o módulo ao quadrado da superposição $S(t) = \langle\psi(0)|\psi(t)\rangle$ com o estado inicial é

$$\begin{aligned} |S(t)|^2 &= \sum_{n,m} |c_n|^2 |c_m|^2 \exp\left[-i\frac{(E_n - E_m)t}{\hbar}\right] \\ &= |c_0|^4 + |c_1|^4 + |c_0|^2 |c_1|^2 \left[\exp\left(i\frac{E_1 t}{\hbar}\right) + \exp\left(-i\frac{E_1 t}{\hbar}\right) \right] \\ &= |c_0|^4 + |c_1|^4 + 2|c_0|^2 |c_1|^2 \left[\cos\left(i\frac{E_1 t}{\hbar}\right) \right] \\ &= \sum_{n,m} |c_n|^2 |c_m|^2 \cos\left[\frac{(E_n - E_m)t}{\hbar}\right]. \end{aligned} \quad (89)$$

Utilizando a desigualdade abaixo e observando que ela satura para $x = 0$ e $x = \pm\pi$,

$$\cos x \geq 1 - \frac{4}{\pi^2} x \sin x - \frac{2}{\pi^2} x^2, \quad (90)$$

temos que

$$\begin{aligned}
|S(t)|^2 &\geq \sum_{n,m} |c_n|^2 |c_m|^2 - \sum_{n,m} |c_n|^2 |c_m|^2 \frac{4}{\pi^2} \frac{(E_n - E_m)t}{\hbar} \sin \frac{(E_n - E_m)t}{\hbar} \\
&\quad - \sum_{n,m} |c_n|^2 |c_m|^2 \frac{2}{\pi^2} \left(\frac{(E_n - E_m)t}{\hbar} \right)^2.
\end{aligned} \tag{91}$$

Note que,

$$\begin{aligned}
\sum_{n,m} |c_n|^2 |c_m|^2 \frac{2}{\pi^2} \left(\frac{(E_n - E_m)t}{\hbar} \right)^2 &= \frac{2t^2}{\pi^2 \hbar^2} \sum_{n,m} |c_n|^2 |c_m|^2 (E_n^2 - 2E_n E_m + E_m^2) \\
&= \frac{2t^2}{\pi^2 \hbar^2} \left(\sum_m |c_m|^2 \langle E^2 \rangle - 2 \langle E \rangle^2 + \sum_n |c_n|^2 \langle E^2 \rangle \right) \\
&= \frac{2t^2}{\pi^2 \hbar^2} (2 \langle E^2 \rangle - 2 \langle E \rangle^2) \\
&= \frac{4t^2}{\pi^2 \hbar^2} \Delta E^2.
\end{aligned} \tag{92}$$

Fazendo essa substituição em (91), obtemos

$$|S(t)|^2 \geq 1 + \frac{4t}{\pi^2} \frac{d}{dt} |S(t)|^2 - \frac{4t^2}{\pi^2 \hbar^2} \Delta E^2. \tag{93}$$

Sempre que $S(t) = 0$, segue como consequência que $\frac{d|S(t)|^2}{dt}$ também é zero. Para um tempo τ tal que $S(\tau) = 0$, para que a desigualdade acima permaneça válida, é necessário que:

$$0 \geq 1 - \frac{4\tau^2}{\pi^2 \hbar^2} \Delta E^2. \tag{94}$$

O que equivale ao limite de Mandelstam-Tamm. Porém, para a desigualdade ser saturada é necessário que

$$\frac{(E_n - E_m)\tau}{\hbar} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{(E_n - E_m)\tau}{\hbar} = \pm\pi, \tag{95}$$

para qualquer m, n tal que $c_n \neq 0$, $c_m \neq 0$.

Como se assumiu que a energia do estado fundamental é zero, não pode ocorrer que $E_n = E_m$ para qualquer m e n , nesse caso, todas as energias do sistema se anulariam e o mesmo se daria com a variância da energia, o que entraria em contradição com a desigualdade (94), logo, concluímos que só pode haver dois

níveis de energia, $E_0 = 0$ e $E_1 = \pi\hbar/\tau$, sem degenerescência do nível excitado de energia.

Calculando a variância da energia,

$$\begin{aligned}\Delta E^2 &= |c_0|^2 E_0^2 + |c_1|^2 E_1^2 - \left(|c_0|^2 E_0 + |c_1|^2 E_1 \right)^2 \\ &= |c_1|^2 \left(\frac{\pi\hbar}{\tau} \right)^2 - |c_1|^4 \left(\frac{\pi\hbar}{\tau} \right)^2 \\ &= (|c_1|^2 - |c_1|^4) \left(\frac{\pi\hbar}{\tau} \right)^2.\end{aligned}\tag{96}$$

Sabendo que a desigualdade (94) é saturada, podemos realizar uma substituição para calcular o valor de $|c_1|$,

$$0 = 1 - 4(|c_1|^2 - |c_1|^4) \implies |c_1| = 1/\sqrt{2}.\tag{97}$$

Pela normalização do estado, obtemos que $|c_0|^2 = 1/2$ e concluímos que a forma do estado para que o limite dado por (79) seja atingido tem que ser

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi_0\rangle + |\psi_1\rangle),\tag{98}$$

podendo ocorrer a presença de fatores de fase arbitrários para $|\psi_0\rangle$ e $|\psi_1\rangle$.

2. Na dedução de limite de Margulus-Levitin, utilizamos a desigualdade

$$\cos x \geq 1 - \frac{2}{\pi}(x + \sin x).\tag{99}$$

A desigualdade é saturada para $x = 0$ e $x = \pi$. Ou seja, no instante τ em que a superposição $S(t)$ é zero, para a desigualdade (83) ser saturada existem dois valores possíveis,

$$\frac{E_n\tau}{\hbar} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{E_n\tau}{\hbar} = \pi,\tag{100}$$

ou seja, existem dois níveis de energia possíveis, um nível de energia zero, que no enunciado do teorema foi dito ser correspondente ao estado fundamental e um nível de energia excitado. Quando saturado, o limite de Margulus-Levitin nos fornece a equação

$$\begin{aligned}1 &= \frac{2\tau}{\pi\hbar} \langle H \rangle \\ &= \frac{2\tau}{\pi\hbar} \sum_n |c_n|^2 E_n,\end{aligned}\tag{101}$$

podemos então desprezar a contribuição do estado fundamental e obter

$$1 = \frac{2\tau}{\pi\hbar} \sum_{n \neq 0} |c_n|^2 \left(\frac{\pi\hbar}{\tau} \right) \implies \sum_{n \neq 0} |c_n|^2 = \frac{1}{2}. \quad (102)$$

Pela normalização do estado obtemos que $|c_0|^2 = 1/2$ e o estado para o qual o limite de Margulus-Levitin é atingido necessariamente deve ser

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi_0\rangle + |\psi_1\rangle), \quad (103)$$

onde o estado excitado pode ser degenerado e pode ocorrer a presença de fatores de fase arbitrários para $|\psi_0\rangle$ e $|\psi_1\rangle$.

□

No mesmo trabalho, Levitin e Toffoli demonstraram também que nenhum estado misto pode ter mais rapidez que o limite dado por (85), ou seja, ela estabelece o limite fundamental para a evolução entre estados ortogonais e hamiltoniano independente do tempo.

A próxima questão que naturalmente surge é generalizar esse resultado para estados com ângulos arbitrários e dinâmica *conduzida*. Por *conduzida*, queremos dizer uma dinâmica governada por um hamiltoniano parametricamente variando com o tempo.

Para estados puros, encontrar o ângulo pelos quais esses são separados é algo trivial,

$$\mathcal{L}(|\psi(0)\rangle, |\psi(\tau)\rangle) = \arccos(\langle\psi(0)|\psi(\tau)\rangle), \quad (104)$$

onde \mathcal{L} mede a menor distância entre dois estados puros, em outras palavras, é a curva geodésica.

Para estados mistos, é necessário generalizar a noção de superposição de estados. Foi Uhlmann (UHLMANN, 1976), quem mostrou uma generalização apropriada para a superposição de estados quânticos é dada pela fidelidade quântica,

$$F(\rho_0, \rho_\tau) = \left[\text{Tr} \left\{ \sqrt{\sqrt{\rho_0} \rho_\tau \sqrt{\rho_0}} \right\} \right]^2. \quad (105)$$

Josza (JOZSA, 1994) mostrou que essa, na verdade, é a única escolha correta. Logo, a generalização para o ângulo entre dois estados quânticos arbitrários é dado pelo, já citado anteriormente, ângulo de Bures (BURES, 1969; KAKUTANI, 1948),

$$\mathcal{L}(\rho_0, \rho_\tau) = \arccos(F(\rho_0, \rho_\tau)). \quad (106)$$

Com esse resultado, Uhlmann (UHLMANN, 1992) conseguiu generalizar o limite de Mandelstam-Tamm para estados mistos e dinâmica conduzida. O limite também foi

re-derivado alternativamente por Deffner e Lutz (DEFFNER; LUTZ, 2013a) posteriormente. Por simplicidade, será apresentada essa versão.

Braunstein e Caves (BRAUNSTEIN; CAVES, Carlton M., 1994), mostraram que o ângulo de Bures infinitesimal entre dois operadores densidade ρ e $\rho + d\rho$ pode ser escrito como

$$d\mathcal{L}^2 = \text{Tr} \left\{ d\rho \mathcal{R}_\rho^{-1}(d\rho) \right\}, \quad (107)$$

onde o super operador $\mathcal{R}_\rho^{-1}(O)$ aqui é escrito em termos dos autovalores p_i de ρ , com $\rho = \sum_i p_i |i\rangle \langle i|$,

$$\mathcal{R}_\rho^{-1}(O) = \frac{1}{2} \sum_{j,k} \frac{\langle j|O|k\rangle}{p_j + p_k} |j\rangle \langle k|. \quad (108)$$

A dinâmica que descreve a evolução do operador densidade será dada por uma equação de von Neumann. Re-escrevendo ela da seguinte forma,

$$i\hbar \frac{d\rho_t}{dt} = [H_t, \rho_t] = [H_t - \langle H_t \rangle, \rho_t] = [\delta H_t, \rho_t], \quad (109)$$

em que $\langle H_t \rangle$ é o valor esperado do hamiltoniano e por ser um número real, não altera o valor do comutador. Combinado as equações (107)-(109), temos

⁴ A definição do super operador $\mathcal{R}_\rho^{-1}(O)$ utilizada aqui difere por um fator 4 da definição utilizada na referência.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d\mathcal{L}}{dt}\right)^2 &= \text{Tr} \left\{ \frac{d\rho_t}{dt} R \left(\frac{d\rho_t}{dt} \right) \right\} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{j,k} \frac{\langle j | (-i/\hbar) [\delta H_t, \rho_t] | k \rangle}{\rho_j + \rho_k} \langle k | (-i/\hbar) [\delta H_t, \rho_t] | j \rangle \\
&= \frac{-1}{2\hbar^2} \sum_{j,k} \frac{(\rho_k - \rho_j) \langle j | \delta H_t | k \rangle}{\rho_j + \rho_k} (\rho_j - \rho_k) \langle k | \delta H_t | j \rangle \\
&= \frac{1}{2\hbar^2} \sum_{j,k} \frac{(\rho_j - \rho_k)^2}{\rho_j + \rho_k} |\langle j | \delta H_t | k \rangle|^2 \\
&\leq \frac{1}{2\hbar^2} \sum_{j,k} (\rho_j + \rho_k) |\langle j | \delta H_t | k \rangle|^2 \tag{110} \\
&= \frac{1}{2\hbar^2} \sum_{j,k} (\rho_j + \rho_k) \langle j | \delta H_t | k \rangle \langle k | \delta H_t | j \rangle \\
&= \frac{1}{2\hbar^2} \sum_{j,k} \rho_j \langle j | \delta H_t | k \rangle \langle k | \delta H_t | j \rangle + \rho_k \langle k | \delta H_t | j \rangle \langle j | \delta H_t | k \rangle \\
&= \frac{1}{2\hbar^2} \sum_j 2\rho_j \langle j | \delta H_t^2 | j \rangle \\
&= \frac{\Delta H_t^2}{\hbar^2},
\end{aligned}$$

onde foi utilizada uma desigualdade triangular na quinta linha. Agora tomando a raiz positiva da equação, com a desigualdade

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} \leq \left| \frac{d\mathcal{L}}{dt} \right| \leq \frac{\Delta H_t}{\hbar}, \tag{111}$$

integrando dos dois lados sob todo intervalo de tempo τ , temos

$$\int_0^{\mathcal{L}(\rho_0, \rho_\tau)} d\mathcal{L} \leq \frac{1}{\hbar} \int_0^\tau dt \Delta H_t. \tag{112}$$

Podemos aplicar o teorema do valor médio do lado direito da desigualdade e teremos que

$$\mathcal{L}(\rho_0, \rho_\tau) \leq \frac{\overline{\Delta H_t}_\tau}{\hbar}, \tag{113}$$

onde $\overline{\Delta H_t}$ é a média temporal da variância do hamiltoniano,

$$\overline{\Delta H_t} = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \sqrt{\langle H_t^2 \rangle - \langle H_t \rangle^2}. \tag{114}$$

Por fim, o limite de Mandelstam-Tamm generalizado para estados mistos arbitrários e dinâmica conduzida arbitrária tem forma

$$\tau \geq \tau_{QSL} := \frac{\hbar}{\Delta H_t} \mathcal{L}(\rho_0, \rho_\tau). \quad (115)$$

Em analogia com a cinemática, o menor tempo que se pode gastar para evoluir de um estado para o outro é a menor distância entre eles dividida pela rapidez média com que a evolução ocorre, no caso a média temporal da variância do hamiltoniano. Resultados similares foram encontrados por Braunstein e Milburn (BRAUNSTEIN; MILBURN, G. J., 1995) e compilados por Braustein et al. em (BRAUNSTEIN; CAVES, C. M.; MILBURN, G., 1996).

Uma generalização para o limite de Margolus-Levitin ao estilo do que foi feito acima se mostrou muito mais difícil de ser encontrada. Para hamiltonianos independentes do tempo, Giovanetti, Lloyd e Maccone (GIOVANNETTI, V.; LLOYD, S.; MACCONE, L., 2002, 2003, 2004) obtiveram numericamente que o QSL deve ser dado por

$$\tau_{QSL} = \max \left\{ \frac{\hbar}{\Delta H} \mathcal{L}(\rho_0, \rho_\tau), \frac{2\hbar}{\pi \langle H \rangle} \mathcal{L}^2(\rho_0, \rho_\tau) \right\}. \quad (116)$$

Esse resultado está em concordância com a generalização do limite de Mandelstam-Tamm obtida por Uhlmann e pelo tratamento de Deffner e Lutz, porém, também fica claro que o limite de Margolus-Levitin não é generalizado como se esperaria, ao estilo de um resultado análogo ao limite para estados ortogonais e hamiltoniano independente do tempo.

Posteriormente houve tentativas de generalizar o limite por Jones e Kok (JONES, P. J.; KOK, 2010), Zwierz (ZWIERZ, 2012) e novamente por Deffner e Lutz (DEFFNER; LUTZ, 2013a).

2.3.1 Computação quântica e metrologia quântica

A questão de quão rápido um estado quântico pode evoluir atraiu muito interesse tendo em vista o paralelo que surge com as áreas da metrologia e o processamento de informação quântica. A evolução entre estados ortogonais, uma vez que somente esses podem ser distinguidos sem ambiguidade, pode ser entendido como um processo elementar da computação quântica, uma vez que ele poderia representar a versão quântica da operação bit-flip (CHUANG; NIELSEN, 2000).

Bremmermann esteve entre os primeiros a utilizar a relação de incerteza para energia e tempo para discutir possíveis limitações computacionais que ela poderia acarretar (BREMERMANN, 1967). Lloyd (LLOYD, S., 2000) melhorou essa abordagem analisando a questão partindo de outro pressuposto. Suponha que se dispõe de uma quantidade de energia prévia para realizar uma operação computacional, denotada por $\langle H \rangle$, se Δt_l denota o intervalo de tempo que a porta lógica l leva para executar uma operação lógica e cada operação demanda uma quantidade E_l de energia para

ser implementada, pode-se estimar o número total de operações lógicas por segundo como

$$\sum_l \frac{1}{\Delta t_l} = \sum_l \frac{2E_l}{\pi\hbar}. \quad (117)$$

Sabendo que só dispomos de uma quantidade de energia $\langle H \rangle$ para executar todas as operações, temos que limitar o número total de operações lógicas por segundo por

$$\sum_l \frac{1}{\Delta t_l} \leq \frac{2\langle H \rangle}{\pi\hbar}. \quad (118)$$

Lloyd ainda utiliza a equivalência de massa e energia $E = mc^2$ para estimar que um computador com um quilograma poderia executar um máximo de 5.4258×10^{50} operações por segundo.

Nessa estimativa, duas ideias importantes para o desenvolvimento da investigação aqui apresentada ficam patentes. A primeira é que ao invés de estar relacionado com um tempo de evolução, aqui o tempo aparece como uma escala intrínseca de um sistema quântico utilizado para realizar uma computação. A segunda é que o quão rápido uma operação pode ser implementada está relacionada, na verdade, com a quantidade de energia investida na sua implementação, podendo ser acelerada conforme maior for a quantidade de energia a disposição. Essa segunda ideia aparece de forma mais explícita por Santos e Sarandy (SANTOS; SARANDY, 2015), onde utilizando atalhos para a adiabaticidade para implementar portas lógicas eles demonstraram que essas operações podem ser implementadas com maior velocidade conforme forem acompanhadas de um aumento no custo energético de sua implementação. Os atalhos para a adiabaticidade serão discutidos em maior detalhe em seções posteriores.

O outro paralelo que naturalmente surge é com a metrologia quântica. Por exemplo, ao se perceber que a relação de incerteza para dois operadores A e B dada na equação (73) é um tipo de desigualdade de Cramer-Rao, e sendo o objeto principal de estudo dessa área alcançar a melhor precisão possível ao estimar um parâmetro de interesse, a relação fica mais aparente.

A desigualdade de Cramer-Rao quântica para um parâmetro μ é dada por

$$V[\hat{\mu}] \geq \frac{1}{H(\mu)}, \quad (119)$$

onde $H(\mu)$ é a informação quântica de Fisher. Suponha que o parâmetro que desejamos estimar é o intervalo de tempo que uma evolução governada por um hamiltoniano independente do tempo H . Sabemos que a informação quântica de Fisher é quatro vezes a distância infinitesimal de Bures com a derivada em relação ao tempo de um estado ρ no lugar do infinitésimo $d\rho$. Ou seja, simplesmente multiplicando a equação

(110) por 4 obtemos que a informação quântica de Fisher F_Q , para evitar problemas de notação, é a convexificação da variância do hamiltoniano, (Y., 2013; TÓTH; PETZ, 2013)

$$F_Q \leq 4 \frac{\Delta H^2}{\hbar^2}. \quad (120)$$

Rearranjando a expressão para

$$\Delta H \geq \frac{\hbar \sqrt{F_Q}}{2}, \quad (121)$$

se tomarmos a variância do hamiltoniano por seu extremo dado pela desigualdade acima e substituirmos no limite de Mandelstam-Tamm para estados ortogonais, concluímos que o QSL pode ser escrito em termos da informação de Fisher como

$$\tau \geq \tau_{QSL} := \frac{\pi}{\sqrt{F_Q}}. \quad (122)$$

Para estados puros essa relação equivale exatamente ao limite de Mandelstam-Tamm e por trabalhar com o extremo da variância acaba sendo mais precisa, ou “apertada”, que esse em casos gerais.

A referência (FRÖWIS, 2012) aponta que a similaridade entre essa desigualdade e a desigualdade de Cramer-Rao vem da conexão entre a metrologia quântica e o estudo de QSL é fundamentalmente oriunda da distinguibilidade dos estados iniciais e finais. O leitor pode encontrar mais discussões sobre essa relação nas referências (GIOVANNETTI, V.; LLOYD, S.; MACCONE, L., 2011; TADDEI *et al.*, 2013; JONES, P. J.; KOK, 2010; ZWIERZ, 2012; GIOVANNETTI, V.; LLOYD, S.; MACCONE, L., 2006; ZWIERZ; PÉ REZ-DELGADO; KOK, 2010; ZHANG *et al.*, 2017; BEAU; CAMPO, 2017).

2.3.2 QG e QSL

Assim como existe uma associação entre informação quântica de Fisher e a função QG, é inevitável fazer uma associação entre QG e QSL.

Quando é escolhida a métrica de Bures para o cálculo da QG, percebe-se que seu integrando corresponde ao termo puramente quântico da informação de Fisher quando o parâmetro a ser estimado é uma escala de tempo associada a evolução de um estado quântico. Existe correspondência entre os dois se a evolução em questão for uma transformação unitária, como discutido no primeiro capítulo.

Em se tratando de QSL, quando o objetivo era generalizar o limite de Mandelstam-Tamm para estados mistos iniciais e finais arbitrários e ângulos arbitrários, a métrica de Bures aparece porque ela define a distância infinitesimal no espaço de operadores densidade. Para descrever a evolução entre esses estados foi utilizada a equação de von Neumann,

$$i \frac{d}{dt} \rho_t = [H_t, \rho_t], \quad (123)$$

onde ρ_t é o operador densidade que descreve o estado do sistema a qualquer instante e H_t é um hamiltoniano dependente do tempo. Para fins de comparação, $\hbar \equiv 1$.

Na construção da função QG, o operador densidade ρ_t , que descreve o estado, foi decomposto em um processo de diagonalização,

$$\rho_t = U_t \Lambda_t U_t^\dagger \implies \frac{d}{dt} \rho_t = U_t \dot{\Lambda}_t U_t^\dagger + i [\rho_t, \tilde{H}_t], \quad (124)$$

onde $\tilde{H}_t = i \dot{U}_t U_t^\dagger$ é gerador de U_t . Apesar de coincidirem no caso de transformações unitárias, em casos gerais ele não corresponde ao hamiltoniano que descreve a evolução do estado. Logo, o ponto de partida para descrever o caminho entre início e fim difere nos dois casos.

No entanto, é possível fazer um paralelo entre os dois se utilizarmos como motivação a forma de obtenção do limite de Mandelstam-Tamm. É possível obter uma desigualdade que define uma escala de tempo associada a função QG. Para a métrica de Bures,

$$\begin{aligned} Q_\rho(\tau) &= \min_{\rho^u, \gamma_t^u} \int_0^T dt \sum_{i < j} \frac{|\langle i(t) | i [\rho_t, \tilde{H}_t] | j(t) \rangle|^2}{p_i(t) + p_j(t)} \\ &= \min_{\rho^u, \gamma_t^u} \int_0^T dt \sum_{i < j} \frac{|\langle i(t) | i [\rho_t, \delta \tilde{H}_t] | j(t) \rangle|^2}{p_i(t) + p_j(t)} \\ &= \min_{\rho^u, \gamma_t^u} \int_0^T dt \sum_{i < j} \frac{(p_i(t) - p_j(t))^2}{p_i(t) + p_j(t)} |\langle i(t) | \delta \tilde{H}_t | j(t) \rangle|^2 \\ &= \min_{\rho^u, \gamma_t^u} \frac{1}{2} \int_0^T dt \sum_{i, j} \frac{(p_i(t) - p_j(t))^2}{p_i(t) + p_j(t)} |\langle i(t) | \delta \tilde{H}_t | j(t) \rangle|^2 \\ &\leq \min_{\rho^u, \gamma_t^u} \frac{1}{2} \int_0^T dt \sum_{i, j} (p_i(t) + p_j(t)) |\langle i(t) | \delta \tilde{H}_t | j(t) \rangle|^2 \\ &= \min_{\rho^u, \gamma_t^u} \int_0^T dt \Delta \tilde{H}_t^2, \end{aligned} \quad (125)$$

onde de forma análoga foi definido $\delta \tilde{H}_t \equiv \tilde{H}_t - \langle \tilde{H}_t \rangle$. Agora podemos utilizar o teorema do valor médio para integrais e definir a quantidade $M(\tilde{H}_t)$ como a média temporal do quadrado da variância do gerador associado a função QG,

$$M(\tilde{H}_t) = \frac{1}{T} \min_{\rho^u, \gamma_t^u} \int_0^T dt \Delta \tilde{H}_t^2. \quad (126)$$

Por fim, obter uma desigualdade que nos dá uma escala de tempo associada ao custo quântico de preparo de um estado,

$$T \geq \frac{Q_\rho(\tau)}{M(\tilde{H}_t)}. \quad (127)$$

Se lembrarmos que a QG é uma parte da energia da curva entre o estado inicial e final, pode-se obter a cadeia de desigualdades

$$Q_\rho(\tau) \leq \int_0^T dt \left(\frac{d\mathcal{L}}{dt} \right)^2 \leq \int_0^T dt \Delta H_t^2, \quad (128)$$

ou seja, obtêm-se um limite menos *apertado* para a QG trabalhando com o hamiltoniano do sistema, e os limites coincidiriam caso se tratasse de uma evolução unitária.

Porém, essa escala de tempo associado a QG tem realmente significado físico ou relevância na implementação de protocolos de informação quântica, ou na eficiência de algoritmos? A essa altura do desenvolvimento do trabalho, a única opção viável para responder essas perguntas é estudar na prática o comportamento da função QG em algoritmos conhecidos da computação quântica.

2.4 ASSIMETRIA

A QG está relacionada a propriedade de assimetria de estados quânticos (GIROLAMI, 2019). Uma evolução simétrica é uma evolução temporal que comuta com a ação do grupo de simetria. Por exemplo, uma dinâmica invariante por rotação é uma evolução temporal tal que a rotação do estado antes da evolução tem o mesmo efeito de rotacionar o estado após a evolução. Uma medida de assimetria quantifica o quanto a simetria em questão é quebrada por um estado quântico dado. Em seguida apresentamos as definições e motivações para medidas de assimetria com base em medidas de informação conforme a referência (MARVIAN; SPEKKENS, 2014).

Definição. Uma função f levando de estados quânticos para o conjunto dos reais é uma medida de assimetria se a existência de uma dinâmica simétrica levando do estado ρ para o estado τ implica que $f(\rho) \geq f(\tau)$ (BARTLETT *et al.*, 2006; VACCARO *et al.*, 2008; GOUR; SPEKKENS, 2008).

Por exemplo, uma medida de assimetria rotacional é uma função sobre estados quânticos não-crescente sobre uma dinâmica invariante por rotação.

Pode-se especificar uma simetria de interesse escolhendo um grupo G de transformações sobre estados quânticos e sua representação apropriada. Para uma simetria genérica descrita por um grupo G , a transformação de simetria do elemento g do grupo é dada por um mapa $\rho \rightarrow \mathcal{U}_g(\rho)$, onde $\mathcal{U}_g(\rho) := U(g)\rho U^\dagger(g)$ e U_g é um operador unitário. No caso de uma rotação sobre um eixo \hat{n} por um ângulo θ , um operador

densidade descrevendo um sistema será transformado por $\rho \rightarrow e^{-i\theta\vec{J}\cdot\hat{n}}\rho e^{i\theta\vec{J}\cdot\hat{n}}$, onde $\vec{J} = (J_x, J_y, J_z)$ é o vetor do operador momento angular. Um estado ρ não quebra a simetria G , ou é simétrico relativo ao grupo G , se para qualquer elemento $g \in G$ vale que $\mathcal{U}_g(\rho) = \rho$.

Uma evolução temporal ε em geral é uma transformação linear do espaço de operadores densidade para ele mesmo, $\rho \rightarrow \varepsilon(\rho)$. A transformação ε é simétrica em relação ao grupo G se ela comuta com a transformação de simetria $\rho \rightarrow \mathcal{U}_g(\rho)$ para todos os elementos g do grupo G .

Marvian e Spekkens (MARVIAN; SPEKKENS, 2014) propuseram uma forma geral de construir uma medida de assimetria de estados quânticos. Se é possível realizar uma transformação $\rho \rightarrow \tau$ por uma dinâmica simétrica, por definição, qualquer estado da órbita do grupo de ρ leva para um estado correspondente da órbita do grupo de τ , i.e., $\mathcal{U}_g(\rho) \rightarrow \mathcal{U}_g(\tau)$ para qualquer $g \in G$. O conjunto de estados $\{\mathcal{U}_g(\rho) : g \in G\}$ pode ser entendido como uma codificação quântica do elemento do grupo g e a dinâmica que leva de $\mathcal{U}_g(\rho) \rightarrow \mathcal{U}_g(\tau)$ como um tipo de processamento de informação. Por argumentos de simetria, podemos concluir que a codificação τ não pode ter mais informação sobre g do que a codificação ρ .

Da teoria da informação vem o conceito da desigualdade de processamento de dados, que diz que qualquer medida da quantidade de informação contida em uma codificação é uma função das codificações para o conjunto dos números reais que não cresce sobre processamento de informação (BEAUDRY; RENNER, 2011). Na informação quântica, I é uma medida de informação se para dois estados quânticos diferentes que codificam uma variável clássica aleatória $x \in X$, $\{\rho_x : x \in X\}$ e $\{\tau_x : x \in X\}$, a existência de uma dinâmica que leva de ρ_x para τ_x para todo $x \in X$ implica que $I(\{\rho_x : x \in X\}) \geq I(\{\tau_x : x \in X\})$.

Segue que se definirmos uma função f tal que o seu valor sobre um estado é uma medida de informação sobre a órbita de grupo do estado, ou seja, $f(\rho) \equiv I\{\mathcal{U}_g(\rho) : g \in G\}$, então f é uma medida de assimetria. A prova é que se existe uma dinâmica simétrica que mapeia ρ para τ , logo para todo $g \in G$, o estado $\mathcal{U}_g(\rho)$ é mapeado para $\mathcal{U}_g(\tau)$ por essa dinâmica, logo, tem-se que $I\{\mathcal{U}_g(\rho) : g \in G\} \geq I\{\mathcal{U}_g(\tau) : g \in G\}$, o que implica que $f(\rho) \geq f(\tau)$.

Uma classe de medidas de quantidade de informação de um conjunto de estados são medidas de distinguibilidade entre um par de estados no conjunto. Para um par de estados ρ_1 e ρ_2 , uma medida de distinguibilidade é definido como uma função D do par de estados para o conjunto dos números reais, tal que para qualquer mapa quântico ε , vale que

$$D(\rho_1, \rho_2) \geq D(\varepsilon(\rho_1), \varepsilon(\rho_2)). \quad (129)$$

Em nosso caso de estudo, a medida de distinguibilidade se dará entre dois

estados pertencentes ao conjunto da órbita de grupo do estado ρ . Sem perda de generalidade, podemos escolher o par de estados como ρ e $\mathcal{U}_g(\rho)$ para algum $g \in G$.

Considere G sendo um grupo de Lie e tomemos como medida de distinguibilidade a distância na norma traço (HELSTROM, 1969), ou norma l_1 ,

$$D(\rho_1, \rho_2) = \|\rho_1 - \rho_2\|_{l_1}, \quad (130)$$

onde $\|X\|_{l_1} \equiv \text{Tr}\{\sqrt{XX^\dagger}\}$. Podemos definir uma função não-crescente dada por

$$F_g(\rho) = \|\rho - \mathcal{U}_g(\rho)\|_{l_1}. \quad (131)$$

Utilizando que G é um grupo de Lie, podemos considerar um par de estados ρ e $\mathcal{U}_g(\rho)$ onde g é infinitamente próximo ao elemento identidade do grupo. Especificamente, sempre é possível escrever $U(g) = e^{i\theta L}$ para algum gerador L e fase θ e no limite em que $\theta \rightarrow 0$ temos

$$\mathcal{U}_g(\rho) = U(g)\rho U^\dagger(g) \approx (1 + i\theta L)\rho(1 - i\theta L) = \rho - i\theta[\rho, L] + \mathcal{O}(\theta^2). \quad (132)$$

Logo concluímos que para qualquer gerador L do grupo G a função

$$F_L(\rho) = \|[\rho, L]\|_{l_1} \quad (133)$$

é uma medida de assimetria.

Qualquer estado simétrico sobre a ação do grupo comuta necessariamente com todos os geradores do grupo, ou seja, para tais estados $F_L(\rho) = 0$. Isso significa que um estado é assimétrico relativo a um grupo associado a um gerador L se houver coerência no espaço de autoestados de L , ou seja, se $[\rho, L] \neq 0$. Com isso, espera-se que alguma norma do comutador $[\rho, L]$ seja uma medida de assimetria e o resultado acima demonstra que a norma l_1 funciona por ser derivada de uma medida de distinguibilidade.

Como mencionado anteriormente, na referência (GIROLAMI, 2019), para evoluções unitárias a QG é uma medida de assimetria, dada por

$$E_q^{\gamma_t} = \int_0^T \|i[\gamma_t, H_t]\|^2 dt, \quad (134)$$

onde γ_t descreve o estado em evolução no tempo e H_t é o gerador da transformação que diagonaliza o estado na base de referência a todo instante. Por construção, a norma adotada tem que ser contractiva sobre mapas CPTP, portanto, ela satisfaz a propriedade de ser uma função não-crescente sobre processamento de informação. Uma vez que ela é contractiva por definição, a operação de integração também não afeta essa propriedade. Ou seja, estamos somando as assimetrias em relação ao grupo que diagonaliza o estado a cada instante da evolução, resultando em uma medida de assimetria total do processo.

3 COMPUTAÇÃO QUÂNTICA CONTÍNUA NO TEMPO SEM TRANSIÇÃO ENTRE ESTADOS

A ideia de computação quântica surgiu no início da década de 1980, com as propostas de Benioff de máquinas de Turing quânticas (BENIOFF, 1982, 1980) e com as ideias de Feynman (FEYNMAN, 1982) para contornar as dificuldades de simular sistemas de mecânica quântica com computadores clássicos, culminando no trabalho de Deutsch, onde ele propõe um modelo de computação quântica universal, o modelo circuitual de computação quântica ou o modelo de portas lógicas quânticas (DEUTSCH; PENROSE, 1989).

Nesse modelo, é possível simular qualquer computação feita por uma máquina de Turing com a promessa de que o custo computacional para sua implementação será no máximo dado por uma função polinomial do tempo. Como exemplo do potencial desse novo modelo de computação, foi proposto o primeiro algoritmo quântico, o algoritmo de Deutsch (DEUTSCH, 1985). O seu objetivo é verificar se uma função booleana de um bit $f : \{0,1\} \rightarrow \{0,1\}$ é constante, i.e., se $f(0) = f(1)$, ou se ela é balanceada $f(0) \neq f(1)$. Posteriormente generalizado para n -bits no algoritmo de Deutsch-Jozsa (DEUTSCH; JOZSA, 1992), esse algoritmo ilustra a vantagem potencial dos computadores quânticos, uma tarefa que para um computador clássico poderia ter um custo computacional de até $O(2^n)$ consultas ao oráculo é feita com apenas uma consulta por um computador quântico.

Outro modelo de computação quântica que surge como uma alternativa ao modelo circuitual é o modelo de computação quântica adiabática. Enquanto no modelo circuitual, em princípio, a computação está codificada em portas lógicas quânticas representadas por transformações unitárias, no modelo adiabático, a computação parte de um hamiltoniano inicial cujo estado fundamental é fácil de preparar e é conduzida para um hamiltoniano final cujo o estado fundamental codifica a solução para um problema computacional. O teorema adiabático, ou a condição para adiabaticidade, garante que o sistema permanecerá no estado fundamental a todo instante da evolução, uma vez que o hamiltoniano passará por uma variação suficientemente lenta (BORN; FOCK, 1928).

A ideia de codificar a solução para um problema computacional no estado fundamental de um hamiltoniano descrevendo a dinâmica de um sistema quântico aparece no trabalho de Apolloni et al. (APOLLONI; CARVALHO; DE FALCO, 1989), onde o objeto de estudo eram problemas de otimização combinatória e o processo foi chamado de otimização quântica estocástica.

Por inspiração na técnica de Simulated Annealing¹ (KIRKPATRICK; GELATT JR.;

¹ Método para resolver problemas de otimização por meio de flutuações térmicas, encontrando o mínimo (ou máximo) global de uma função, emulada por um potencial termodinâmico que descreve o sistema físico simulado.

VECCHI, 1983), em trabalhos posteriores (APOLLONI; CESA-BIANCHI; FALCO, 1990) a técnica de otimização quântica estocástica foi nomeada de Quantum Annealing, um algoritmo que utiliza simulações de flutuações quânticas e tunelamento quântico para resolver problemas de otimização, com potencial para ser mais eficiente que sua contraparte clássica.

Motivada pela implementação experimental de Quantum Annealing em um ferromagneto quântico desordenado (BROOKE *et al.*, 1999; BROOKE; ROSENBAUM; AEPPLI, 2001), surge a ideia de pensar nesse algoritmo na perspectiva da computação quântica, i.e., desenvolver um aparato físico que solucione problemas de otimização via uma evolução quântica. Assim é levantado o conceito de algoritmo quântico adiabático (FARHI *et al.*, 2001, 2000), onde um computador físico resolve um problema de otimização combinatória ao evoluir adiabaticamente em seu estado fundamental. A terminologia computação quântica adiabática foi introduzida em van Dam et al (DAM; MOSCA; VAZIRANI, 2001).

No trabalho de Aharonov et al. (AHARONOV, D. *et al.*, 2007) é que a universalidade da computação quântica adiabática e a sua equivalência com o modelo circuital de computação é demonstrada e onde se pode encontrar uma definição formal de um computador quântico adiabático. Em sua definição, ele utiliza o conceito de Hamiltoniana k -local, uma matriz hermitiana H agindo no espaço d -dimensional de partículas que pode ser escrito como $H = \sum_{i=1}^r H_i$ onde cada H_i age em até k partículas, i.e., $H_i = h_i \otimes \mathbb{1}$, onde h_i é o hamiltoniano que age em k partículas e $\mathbb{1}$ é o operador identidade.

Definição (Computação quântica adiabática). A computação quântica adiabática k -local é especificada por duas hamiltonianas k -locais, H_0 e H_1 , agindo em um espaço d -dimensional de n partículas, com $d \geq 2$. O estado fundamental de ambas hamiltonianas é único e é um estado produto. A saída do processo é um estado que é ε -próximo na norma l_2 ao estado fundamental de H_1 . Seja $s(t) : [0, T] \rightarrow [0, 1]$ e seja T o tempo mínimo para que o estado final de uma evolução adiabática gerada por $H(s) = (1 - s)H_0 + sH_1$ para o tempo T seja ε -próxima na norma l_2 ao estado fundamental de H_1 . O tempo de execução da computação adiabática é definido como $T \cdot \max_s \|H(s)\|_{l_2}$.

Ao comentar essa proposta de definição, Albash e Lidar (ALBASH; LIDAR, 2018) tecem alguns comentários. Primeiro, a unicidade do estado fundamental de H_1 não é necessária, por exemplo, em problemas de otimização clássica, múltiplos estados fundamentais não são um empecilho, uma vez que qualquer um dos estados finais será uma solução ótima. Segundo, para algumas tarefas desempenhadas por um computador quântico adiabático a evolução pode ocorrer em estados excitados. Terceiro, como já apontado por Aharonov et al. (AHARONOV, D. *et al.*, 2007), pode-se introduzir

mais um hamiltoniano intermediária que se anula para $s = 0$ ou 1 , funcionando como uma catalisadora da evolução.

Outra questão fundamental é sobre o tempo de execução, ou o custo de execução de um algoritmo adiabático. No modelo circuital o custo equivale ao número de portas lógicas implementadas. Sendo os dois modelos equivalentes, uma opção seria contar o número de portas lógicas necessárias para implementar o análogo circuital do algoritmo adiabático. Outra opção seria utilizar o tempo da evolução T dado pelo teorema adiabático, porém, para ter alguma significância física seria necessário definir uma escala apropriada de energia, o que é considerado na definição acima, do contrário, o tempo poderia ser arbitrariamente pequeno por meio de mudanças na unidade de tempo ou por escala de energia, multiplicando o hamiltoniano por algum fator dependente da dimensão do sistema utilizado. Para uma análise adequada do tempo de execução de um algoritmo adiabático é sempre necessário realizar a comparação com a profundidade da sua versão no modelo circuital. Faremos essa comparação para o algoritmo estudado nesse trabalho em seções posteriores.

3.1 TEOREMA ADIABÁTICO

Foi explorado até então o modelo adiabático de computação quântica, mas o que seria a condição para a adiabaticidade desse tipo de computação?

A palavra tem origem grega, $\alpha\delta\iota\beta\alpha\tau\omicron\varsigma$, sua romanização é “adiabatos”. O prefixo α , que significa “não”, negação, $\delta\iota\alpha$, que significa “através”, ou “entre”, $\beta\alpha\tau\omicron\varsigma$ que significa “passável”, de $\beta\alpha\iota\nu\iota\nu$, “passar”. Pode ser traduzida como “impenetrável”. Em física, o termo adiabático foi utilizado pela primeira vez no desenvolvimento de termodinâmica por W. J. M. Rankine (RANKINE, 1859) para se referir a um sistema isolado de quaisquer trocas de calor, entretanto o conceito de processo adiabático já havia sido explorado no livro de memórias de S. Carnot de 1824 (CARNOT, 1824) e no tratamento formal do ciclo de Carnot feito por Clapeyron (CLAPEYRON, 1834) composto de duas transformações isotérmicas e duas transformações adiabáticas.

As origens da condição para a adiabaticidade na mecânica quântica tem inspiração na *Adiabatenhypothese* de Einstein (EINSTEIN, 1914): “Se um sistema for afetado de maneira reversível e adiabática, movimentos permitidos são transformados em movimentos permitidos”. Ou seja, após uma perturbação adiabática em um sistema, existem quantidades invariantes, que preservam seu valor. Ehrenfest utilizou o conceito de invariantes adiabáticos e previu, antes da teoria quântica estar completamente estabelecida, que as leis da mecânica quântica somente permitiriam classes de movimento invariantes sob transformações adiabáticas (EHRENFEST, 1916). Em 1928, Born e Fock (BORN; FOCK, 1928) apresentaram a primeira versão da aproximação adiabática e algumas décadas depois Kato (KATO, 1950) colocou essa aproximação em uma base matemática mais sólida e provou provavelmente o primeiro teorema

adiabático. No apêndice A é apresentada uma versão do teorema adiabático com base em (SARANDY; WU, L.-A.; LIDAR, 2004; GUARIENTI, 2016).

O cerne da aproximação adiabática pode ser resumido da seguinte forma, se um sistema quântico descrito por um hamiltoniano dependente do tempo $H(t)$ não degenerado estiver inicialmente no n -ésimo autoestado $n(t=0)$ de $H(t=0)$, e se $H(t)$ evoluir de forma suficientemente lenta, então o estado do sistema no tempo T permanecerá no n -ésimo autoestados de $H(T)$ (MESSIAH, 2014). O teorema adiabático nos dá que a condição necessária para o tempo de evolução T é

$$\hbar \frac{\max |\langle k(s) | \partial_s H(s) | n(s) \rangle|}{\min \Delta_{nk}^2(s)} \ll T, \quad (135)$$

onde $s = t/T$ é uma parametrização do tempo, $\Delta_{nk}(s)$ é o gap entre os níveis de energia $E_n(s)$ e $E_k(s)$, $\Delta_{nk}(s) = E_n(s) - E_k(s)$. No denominador é tomado o valor mínimo do gap e no numerador o valor máximo do elemento da matriz $\partial_s H(s)$ durante o intervalo de tempo da evolução. A interpretação da condição de adiabaticidade (135) é que para o par de níveis de energia o valor esperado da taxa de variação temporal do hamiltoniano deve ser pequeno em comparação com o gap de energia.

3.2 ALGORITMOS ADIABÁTICOS

Nessa seção será apresentado a versão adiabática do algoritmo de busca de Grover. Pode-se sintetizar um algoritmo adiabático da seguinte forma:

- Solução do problema é codificada no estado fundamental de $H(T)$, onde T é indica o instante final de execução do algoritmo.
- O estado no instante inicial é o estado fundamental de $H(0)$ e é um estado de fácil preparo.
- O hamiltoniano do sistema é resultado da interpolação dos dois hamiltonianos, sendo descrito por

$$H(s) = (1 - s)H(0) + sH(t), \quad (136)$$

onde geralmente $s = t/T$, podendo assumir outra forma de parametrização.

- O teorema adiabático fornece a condição para o sistema evoluir do estado fundamental de $H(0)$ para o estado fundamental de $H(t)$, sem que haja transição para estados excitados, garantindo que após o tempo T o estado final codificará a solução do problema desejado.

3.2.1 Algoritmo de busca de Grover

Nessa seção será apresentado o algoritmo de busca de Grover, um algoritmo que tem implementação conhecida tanto no modelo circuitual quanto adiabático com

resultados compatíveis para a complexidade de tempo nos dois modelos. A sua formulação na computação circuital pode ser encontrada no apêndice B. Aqui será apresentada a sua versão adiabática, com base no trabalho de Roland e Cerf (ROLAND; CERF, 2002) e a discussão sobre o speed-up quadrático relatado.

Imagine uma lista de telefones contendo N nomes arranjados em ordem completamente aleatória, ou uma base de dados não estruturada, e que a tarefa seja encontrar um nome específico. Um algoritmo clássico, seja ele determinístico ou probabilístico, precisa, em média, consultar $N/2$ nomes para encontrar o nome específico. Um algoritmo quântico explora a superposição para fazer consultas em uma espécie de paralelização, só que de natureza quântica (CHUANG; NIELSEN, 2000), e com ajustes apropriados de fase nas operações, o número de telefone desejado pode ser encontrado utilizando $O(\sqrt{N})$ passos. Essa é a tarefa do Algoritmo de Grover (GROVER, 1996).

3.2.1.1 Computação adiabática

Na versão adiabática, o oráculo será definido em termos do hamiltoniano final $H(T) = \hbar\omega(\mathbb{1} - |m\rangle\langle m|)$, onde $|m\rangle$ é o estado solução. No procedimento da apresentação utilizaremos sempre que $\hbar\omega = 1$, uma vez que do teorema adiabático sabemos que é mais determinante que o gap entre os níveis de energia seja grande o suficiente do que o valor absoluto da energia em si.

Nessa representação, a base computacional é constituída pelos autoestados de σ_z , i.e., $\sigma_z |0\rangle = 1 |0\rangle$ e $\sigma_z |1\rangle = -1 |1\rangle$. O estado solução é o estado fundamental de $H(T)$, que denotaremos por $H(1)$, hamiltoniana n -local, com estado fundamental com energia 0 e todos os outros estados da base computacional tem energia 1.

O hamiltoniano inicial é dado por $H(0) = \mathbb{1} - |\varphi\rangle\langle\varphi|$, onde $|\varphi\rangle$ é uma superposição uniforme,

$$|\varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=0}^{N-1} |i\rangle = |+\rangle^{\otimes N}, \quad (137)$$

e $|\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \pm |1\rangle)$. Toma-se o hamiltoniano dependente do tempo como uma interpolação,

$$\begin{aligned} H[s(t)] &= (1 - s(t))H(0) + s(t)H(1) \\ &= (1 - s(t))(\mathbb{1} - |\varphi\rangle\langle\varphi|) + s(t)(\mathbb{1} - |m\rangle\langle m|) \\ &= \mathbb{1} - (\mathbb{1} - s(t))|\varphi\rangle\langle\varphi| - s(t)|m\rangle\langle m|, \end{aligned} \quad (138)$$

em que $s(t) = t/T \in [0,1]$ é a parametrização linear do tempo e T é o tempo total de computação. É possível definir uma função $A(s)$ para ser utilizada no lugar de $s(t)$, chamada de *schedule* que pode ser otimizada, como veremos posteriormente.

Se o estado de entrada do algoritmo é inicializado no estado fundamental de $H(0)$, i.e., $|\psi(0)\rangle = |\varphi\rangle$, então a evolução do sistema está restrita a um subespaço bidimensional, definido pela base $\{|m\rangle, |m^\perp\rangle\}$, onde $|m^\perp\rangle = \frac{1}{\sqrt{N-1}} \sum_{i \neq m}^{N-1} |i\rangle$ é a superposição de todos os estados da base perpendiculares a $|m\rangle$.

Na base de estados $\{|m\rangle, |m^\perp\rangle\}$, o hamiltoniano pode ser escrito como

$$H(s) = \begin{pmatrix} (1-s)(1 - \frac{1}{N}) & -(1-s)\frac{\sqrt{N-1}}{N} \\ -(1-s)\frac{\sqrt{N-1}}{N} & 1 - (1-s)(1 - \frac{1}{N}) \end{pmatrix}. \quad (139)$$

Calculando as autoenergias do hamiltoniano temos que:

$$\begin{aligned} E_0 &= \frac{1}{2}(1 - \Delta(s)), \\ E_1 &= \frac{1}{2}(1 + \Delta(s)), \end{aligned} \quad (140)$$

onde o gap entre os dois níveis de energia é dado por

$$\Delta(s) = \sqrt{(1-2s)^2 + \frac{4}{N}s(1-s)}. \quad (141)$$

Podemos reescrever o hamiltoniano da seguinte forma,

$$H(s) = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/2 - (1-s)(1 - \frac{1}{N}) & (1-s)\frac{\sqrt{N-1}}{N} \\ (1-s)\frac{\sqrt{N-1}}{N} & -1/2 + (1-s)(1 - \frac{1}{N}) \end{pmatrix}. \quad (142)$$

Notando que

$$\left[1/2 - (1-s)\left(1 - \frac{1}{N}\right) \right]^2 + \left[(1-s)\frac{\sqrt{N-1}}{N} \right]^2 = \left[\frac{\Delta(s)}{2} \right]^2, \quad (143)$$

podemos reescrever o hamiltoniano em termos de uma rotação por um ângulo $\theta(s)$ dependente do tempo parametrizado, similarmente a ação da iteração de Grover sobre o estado inicial na versão circuital:

$$H(s) = \frac{1}{2} \left[\mathbb{1} - \Delta(s) \begin{pmatrix} \cos \theta(s) & \sin \theta(s) \\ \sin \theta(s) & -\cos \theta(s) \end{pmatrix} \right], \quad (144)$$

onde

$$\sin \theta(s) = \frac{2}{\Delta(s)} (1-s) \frac{\sqrt{N-1}}{N}, \quad (145)$$

$$\cos \theta(s) = \frac{1}{\Delta(s)} \left(1 - 2(1-s)\left(1 - \frac{1}{N}\right) \right), \quad (146)$$

e os autoestados do hamiltoniano são

$$|0(s)\rangle = \cos \frac{\theta(s)}{2} |m\rangle + \sin \frac{\theta(s)}{2} |m^\perp\rangle, \quad (147)$$

$$|1(s)\rangle = -\sin \frac{\theta(s)}{2} |m\rangle + \cos \frac{\theta(s)}{2} |m^\perp\rangle. \quad (148)$$

Um resultado que será útil posteriormente, é que esses autoestados obedecem

$$\langle k(s) | \dot{l}(s) \rangle = \frac{\dot{\theta}(s)^2}{4} \delta_{kl}, \quad (149)$$

$$\langle k(s) | \dot{l}(s) \rangle = \begin{cases} 0, & \text{se } k = l \\ (-1)^l \dot{\theta}(s)/2 & \text{se } k \neq l. \end{cases} \quad (150)$$

Se aplicarmos a condição para a adiabaticidade da evolução do sistema implementado no algoritmo, nos deparamos com um problema. Calculando o valor mínimo do gap entre as energias, obtemos que ele acontece no instante $s = 1/2$,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{ds} \Delta(s) \\ &= 2 \left(1 - \frac{1}{N}\right) \frac{(2s-1)}{\Delta(s)} \end{aligned} \quad (151)$$

$$\implies s = 1/2,$$

e que nesse instante o gap vale

$$\Delta(s = 1/2) = \frac{1}{\sqrt{N}} = \Delta_{min}. \quad (152)$$

Calculando a derivada do hamiltoniano em relação a s , obtemos

$$\partial_s H(s) = |\varphi\rangle\langle\varphi| - |m\rangle\langle m|. \quad (153)$$

Calculando os elementos da matriz na base das autoenergias do hamiltoniano utilizados na aproximação adiabática,

$$\langle 0(s) | \partial_s H(s) | 1(s) \rangle = \langle 1(s) | \partial_s H(s) | 0(s) \rangle = \frac{\sqrt{N-1}}{N} \cos \theta(s) + \frac{N-1}{N} \sin \theta(s). \quad (154)$$

Utilizando as equações (145) e (146), temos que

$$[\partial_s H(s)]_{0,1} = \frac{1}{\Delta(s)} \frac{\sqrt{N-1}}{N}. \quad (155)$$

Podemos encontrar o valor máximo da equação acima substituindo o gap pelo valor mínimo obtido na equação (152)

$$\max_{s \in [0,1]} [\partial_s H(s)]_{0,1} = \sqrt{\frac{N-1}{N}}. \quad (156)$$

Tomando $N \gg 1$, percebe-se que o valor está limitado superiormente por

$$\max_{s \in [0,1]} [\partial_s H(s)]_{0,1} \leq 1. \quad (157)$$

Aplicando a condição para a adiabaticidade dado na equação (135), obtemos que

$$T \gg N, \quad (158)$$

onde utilizamos $\hbar = 1$.

Eis o problema. De acordo com esse resultado (ROLAND; CERF, 2002), o tempo de execução da versão adiabática do algoritmo de Grover escalaria com a dimensão do sistema da mesma forma que um computador clássico escalaria.

No entanto, Roland e Cerf (ROLAND; CERF, 2002) perceberam que ao aplicar a condição para a adiabaticidade globalmente, i.e., durante todo intervalo de tempo T de execução do algoritmo, a taxa de evolução é restringida durante toda computação enquanto o gap entre os níveis de energia só fica pequeno o suficiente ao redor de $s = 1/2$. Inspirando-se na técnica de passagem adiabática rápida, com longo histórico de uso na área de ressonância magnética nuclear (POWLES, 1958), ao invés de impor uma condição para a adiabaticidade globalmente, escolheram uma função *schedule* na qual a adiabaticidade seja imposta localmente a cada instante para aumentar a velocidade da evolução continuamente no tempo.

Para escolher a função *schedule* adequada, é preciso encontrar uma nova função $s(t)$ que ainda respeite as condições $s(0) = 1$ e $s(T) = 1$. Para esse fim, é utilizada uma versão ligeiramente diferente da condição para adiabaticidade dada na equação (300). É definido um parâmetro adimensional ε tal que $\varepsilon \ll 1$. Sem tomar os valores máximos e mínimos globais, a condição é reescrita como,

$$\frac{ds}{dt} \frac{[\partial_s H(s)]_{0,1}}{\Delta^2(s)} \leq \varepsilon \implies \frac{ds}{dt} \leq \varepsilon \frac{\Delta^2(s)}{[\partial_s H(s)]_{0,1}}. \quad (159)$$

Utilizando que $[\partial_s H(s)]_{0,1}$ é limitada superiormente por 1, obtemos um limite mais apertado,

$$\frac{ds}{dt} \leq \varepsilon \Delta^2(s). \quad (160)$$

Utilizando a desigualdade acima, é escolhida uma taxa de evolução, $s(t)$, que seja solução de

$$\frac{ds}{dt} = \varepsilon \Delta^2(s). \quad (161)$$

A partir dessa equação, o tempo total de execução do algoritmo é encontrado a partir da integral,

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{\varepsilon} \int_0^1 \frac{ds}{\Delta^2(s)} \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \frac{N}{\sqrt{N-1}} \arctan \sqrt{N-1}. \end{aligned} \quad (162)$$

Com isso concluímos que conforme a dimensão do sistema utilizado para implementar o algoritmo escala, i.e., com a aproximação $N \gg 1$, o tempo de execução do algoritmo é dado por

$$T = \frac{\pi}{2\varepsilon} \sqrt{N}, \quad (163)$$

o que coincide com a versão circuital do algoritmo e demonstra que com a escolha de um *schedule* adequado é possível obter um speed-up quadrático para o algoritmo.

4 RESULTADOS

4.1 QG E ALGORITMOS ADIABÁTICOS

Estamos interessados em investigar o que a função QG nos entrega de informação em relação às características quânticas da implementação de um algoritmo adiabático. Mas ao se debruçar sobre essa questão em específico, constatamos algo.

Em geral, todo algoritmo de computação quântica adiabática é inicializado e permanece durante toda execução, no estado fundamental de um hamiltoniano dependente do tempo. O estado do sistema passa por uma evolução unitária até atingir o estado final onde está codificada a solução para um problema, portanto o gerador da função QG coincide com o hamiltoniano que descreve a evolução do sistema, como discutido anteriormente.

O que decorre disso é que o comutador entre o estado do sistema e o gerador da função para qualquer algoritmo adiabático é zero, ou seja,

$$\begin{aligned}
 [\rho(t), H(t)] &= \left[|0(t)\rangle\langle 0(t)|, \sum_n E_n(t) |n(t)\rangle\langle n(t)| \right] \\
 &= \sum_n \delta_{n0} E_n(t) \left[|0(t)\rangle\langle n(t)| - |n(t)\rangle\langle 0(t)| \right] \\
 &= E_0(t) \left[|0(t)\rangle\langle 0(t)| - |0(t)\rangle\langle 0(t)| \right] \\
 &= 0,
 \end{aligned} \tag{164}$$

o que implica que a QG também é nula. A obtenção do gerador da função pode ser encontrada no apêndice C.

Isso significa não haver nada de quântico em um algoritmo de computação quântica adiabática? Certamente essa chave interpretativa não é a mais adequada. Quando pensamos em termos de comutatividade do estado inicial $|\varphi\rangle\langle\varphi|$ e do estado final $|m\rangle\langle m|$, percebemos que esses estados não comutam, ou seja, houve criação de superposição na base em que $|\varphi\rangle\langle\varphi|$ é diagonal. Mas a que se refere a função ser nula então?

Aqui cabe uma hipótese sobre a interpretação física da função QG definida em (18). Na Seção 2.4, foi citado que a QG tem todas propriedades de uma medida de assimetria. No caso, o grupo de simetria é formado pelas unitárias que diagonalizam a matriz densidade e o gerador é $H_t = i\hbar\dot{U}_t U_t^\dagger$. Se o gerador não comutar com a matriz densidade, teremos assimetria, e portanto, QG não nula. Em se tratando de uma evolução adiabática, isso só vai ocorrer se o estado inicial não comutar com o hamiltoniano, ou seja, se existir coerência inicialmente na base de autoestados de $H(0)$. Da equação (18), temos que a QG é a integral da assimetria instantânea sobre todo

intervalo de tempo da evolução, i.e., é somada a assimetria de toda evolução.

O fato é que uma evolução adiabática, na verdade, é um processo ideal, irrealístico, onde é imposta a condição de que não haverá transição entre nenhum dos níveis de energia que caracterizam o sistema, e no caso de um algoritmo de computação quântica, esse será descrito a todo momento por um estado $|n(s)\rangle\langle n(s)|$, onde n geralmente se refere ao estado fundamental.

Se em um algoritmo adiabático é garantido, aprioristicamente, que a todo instante o sistema estará no mesmo nível de energia, qual o risco de perder informação sobre a simetria do sistema, ou colocado de outra forma, qual o custo de preservar informação sobre a simetria? Não há risco ou custo algum, já que, por definição, a dinâmica de algoritmos adiabáticos é simétrica.

Se em um algoritmo adiabático a QG não é de muita serventia, não significa que, na prática, não seja. Na corrida pelas tecnologias quânticas, mais especificamente na área de controle quântico, se desenvolveu a aplicação de atalhos para a adiabaticidade. Um atalho para a adiabaticidade é um processo rápido que leva para o mesmo estado final que uma evolução adiabática levaria (GUÉ RY-ODELIN *et al.*, 2019). Muitas técnicas para aplicação de atalhos para a adiabaticidade foram desenvolvidas (WU, N.; NANDURI; RABITZ, 2015; CAMPBELL *et al.*, 2015; CAMPO; BOSHIER, 2012; MASUDA; NAKAMURA, 2010, 2011; TORRONTEGUI *et al.*, 2012b, 2012a; MASUDA; NAKAMURA; CAMPO, 2014; KIELY *et al.*, 2015; DEFFNER, 2016; DEFFNER; JARZYNSKI; CAMPO, 2014; JARZYNSKI, 2013; PATRA; JARZYNSKI, 2016; CHEN *et al.*, 2011; STEFANATOS, 2013; SABERI *et al.*, 2014; SELS; POLKOVNIKOV, 2017; XIAO; GONG, 2014; MASUDA; RICE, 2015; TORRONTEGUI; MARTÍNEZ-GARAOT; MUGA, 2014; ACCONCIA; BONANÇA; DEFFNER, 2015; MARTÍNEZ-GARAOT *et al.*, 2015; KIELY *et al.*, 2016), entre elas a técnica de condução contradiabática (DEMIRPLAK; RICE, 2003, 2005).

A condução contradiabática consiste em adicionar termos representando interações auxiliares a um hamiltoniano de referência $H_0(t)$ de forma que a dinâmica siga precisamente a evolução adiabática conduzida por $H_0(t)$ (GUÉ RY-ODELIN *et al.*, 2019), porém, não adiabática em relação ao novo hamiltoniano. Entre as técnicas de condução contradiabática, a que se destaca é o algoritmo de evolução sem transição (do inglês, Transitionless driving algorithm) (BERRY, M., 2009).

Na seção posterior, apresentaremos o algoritmo de evolução sem transição e demonstraremos para esse caso que ao adicionar um termo diabático o hamiltoniano total, a função QG deixa de ser nula.

4.2 ALGORITMO DE EVOLUÇÃO SEM TRANSIÇÃO

Formulado por Berry (BERRY, M., 2009), o algoritmo de evolução sem transição é construído em um processo de engenharia reversa.

O ponto de partida é um hamiltoniano de referência $H_0(t)$,

$$H_0(t) = \sum_n E_n(t) |n(t)\rangle \langle n(t)|. \quad (165)$$

Da aproximação adiabática sabemos que um sistema inicializado no autoestado $|n(0)\rangle$ de $H_0(0)$ irá continuar no n -ésimo autoestado se a evolução ocorrer lentamente o suficiente na forma

$$|\psi_n(t)\rangle = e^{i\gamma_n(t)} |n(t)\rangle, \quad (166)$$

onde

$$\gamma_n(t) = -1 \int_0^t E_n(t') dt' + i \int_0^t \langle n(t') | \partial_{t'} n(t') \rangle dt'. \quad (167)$$

Reversamente, ao invés de achar um estado que seja solução de um hamiltoniano, queremos achar um hamiltoniano onde o estado dado em (166) seja a solução exata da equação de Schrödinger dependente do tempo,

$$i\partial_t |\psi_n(t)\rangle = H(t) |\psi_n(t)\rangle, \quad (168)$$

onde $\hbar = 1$. Para construir esse novo hamiltoniano, utilizamos o operador de evolução unitária que notadamente agindo sobre o estado inicial $|n(0)\rangle$ o levará para o estado $|\psi_n(t)\rangle$,

$$U(t) = \sum_n e^{i\gamma_n(t)} |n(t)\rangle \langle n(0)|. \quad (169)$$

Da equação de Schrödinger, sabemos que o operador de evolução unitária obedece $i\partial_t U(t) = H(t)U(t)$, logo podemos obter o novo hamiltoniano de

$$H(t) = i(\partial_t U(t)) U^\dagger(t). \quad (170)$$

Calculando $\partial_t U(t)$:

$$\begin{aligned} \partial_t U(t) &= \sum_n e^{i\gamma_n(t)} \left((i\partial_t \gamma_n(t)) |n(t)\rangle \langle n(0)| + |\partial_t n(t)\rangle \langle n(0)| \right) \\ &= \sum_n e^{i\gamma_n(t)} \left(i(-E_n(t) + i \langle n(t) | \partial_t n(t) \rangle) |n(t)\rangle \langle n(0)| + |\partial_t n(t)\rangle \langle n(0)| \right). \end{aligned} \quad (171)$$

Calculando U_t^\dagger :

$$U_t^\dagger(t) = \sum_k e^{-i\gamma_k(t)} |k(0)\rangle \langle k(t)|. \quad (172)$$

O novo hamiltoniano é dado por

$$\begin{aligned}
H(t) &= \\
&= i \sum_{n,k} e^{i(\gamma_n(t) - \gamma_k(t))} \left[\left(i(-E_n(t) + i \langle n(t) | \partial_t n(t) \rangle) |n(t)\rangle \langle n(0)| + |\partial_t n(t)\rangle \langle n(0)| \right) \right] \\
&\times \left[|k(0)\rangle \langle k(t)| \right] \\
&= \sum_n E_n(t) |n(t)\rangle \langle n(t)| - i \langle n(t) | \partial_t n(t) \rangle |n(t)\rangle \langle n(t)| + i |\partial_t n(t)\rangle \langle n(t)|.
\end{aligned} \tag{173}$$

Note que o primeiro termo é equivalente ao hamiltoniano de referência $H_0(t)$. Ou seja, o termo contra-diabático, que denominaremos por $H_1(t)$, adicionado para criar um atalho para a adiabaticidade é dado por

$$\begin{aligned}
H_1(t) &= \sum_n -i \langle n(t) | \partial_t n(t) \rangle |n(t)\rangle \langle n(t)| + i |\partial_t n(t)\rangle \langle n(t)| \\
&= \sum_n i [|\partial_t n(t)\rangle \langle n(t)|, |n(t)\rangle \langle n(t)|],
\end{aligned} \tag{174}$$

sendo hermitiano e contendo elementos fora da diagonal na base $|n(t)\rangle$ dos autoestados de $H_0(t)$.

Agora note que se calcularmos o comutador que define a função QG, i.e., o comutador desse hamiltoniano com um autoestado da base do hamiltoniano de referência, digamos $|0(t)\rangle \langle 0(t)|$, ele não é mais nulo,

$$[[|0(t)\rangle \langle 0(t)|, H_1(t)] = i \sum_n \langle 0(t) | \partial_t n(t) \rangle |0(t)\rangle \langle n(t)| - |\partial_t 0(t)\rangle \langle 0(t)|, \tag{175}$$

logo a função QG em qualquer métrica adotada deixa de ser nula. Segundo a hipótese apresentada, isso ocorre porque com a introdução de um termo contra-diabático surge um custo associado a sua implementação. Um resultado similar já é conhecido no estudo de QSL.

Na referência (ZHENG *et al.*, 2016) foi proposta uma família de funcionais para quantificar o custo associado a implementação de $H_1(t)$. Um membro dessa família (SANTOS; SARANDY, 2015; SANTOS; SILVA; SARANDY, 2016; COULAMY *et al.*, 2016) é dado pela norma $\|\cdot\|_{l_2}$,

$$C(t) = \int_0^T dt \|H_1(t)\|_{l_2}. \tag{176}$$

A norma l_2 é dada por

$$\begin{aligned}
\partial_t C(t) &= \|H_1(t)\|_2 \\
&= \sqrt{\text{Tr}\{H_1^\dagger(t)H_1(t)\}} \\
&= \sqrt{\text{Tr}\{H_1^2(t)\}}.
\end{aligned} \tag{177}$$

Calculando $H_1^2(t)$ para o algoritmo de evolução sem transição:

$$\begin{aligned}
H_1^2(t) &= \left(i \sum_n -\langle n(t)|\partial_t n(t)\rangle |n(t)\rangle \langle n(t)| + |\partial_t n(t)\rangle \langle n(t)| \right) \\
&\quad \times \left(i \sum_m -\langle m(t)|\partial_t m(t)\rangle |m(t)\rangle \langle m(t)| + |\partial_t m(t)\rangle \langle m(t)| \right) \\
&= -\sum_{nm} \langle n(t)|\partial_t n(t)\rangle^2 |n(t)\rangle \langle n(t)| - \langle n(t)|\partial_t n(t)\rangle \langle n(t)|\partial_t m(t)\rangle |n(t)\rangle \langle m(t)| \\
&\quad - \langle n(t)|\partial_t n(t)\rangle |\partial_t n(t)\rangle \langle n(t)| + \langle n(t)|\partial_t m(t)\rangle |\partial_t n(t)\rangle \langle m(t)|.
\end{aligned} \tag{178}$$

Tomando o traço,

$$\begin{aligned}
\text{Tr}\{H_1^2(t)\} &= \sum_k \langle k(t)|H_1^2(t)|k(t)\rangle \\
&= -\sum_{kn} \langle k(t)|\partial_t k(t)\rangle^2 - \langle k(t)|\partial_t k(t)\rangle^2 - \langle k(t)|\partial_t k(t)\rangle^2 + \langle n(t)|\partial_t k(t)\rangle \langle k(t)|\partial_t n(t)\rangle \\
&= \sum_{kn} \langle k(t)|\partial_t k(t)\rangle^2 - \langle n(t)|\partial_t k(t)\rangle \langle k(t)|\partial_t n(t)\rangle \\
&= \sum_{kn} -\langle \partial_t k(t)|k(t)\rangle \langle k(t)|\partial_t k(t)\rangle + \langle \partial_t n(t)|k(t)\rangle \langle k(t)|\partial_t n(t)\rangle \\
&= \sum_n \langle \partial_t n(t)|\partial_t n(t)\rangle,
\end{aligned} \tag{179}$$

onde foi utilizado que $\langle \partial_t k(t)|k(t)\rangle = 0$, o que é verdadeiro para qualquer hamiltoniano com espectro inteiramente discreto, e que $\langle \partial_t n(t)|k(t)\rangle = -\langle n(t)|\partial_t k(t)\rangle$. Logo o custo instantâneo é dado por (CAMPBELL; DEFFNER, 2017)

$$\partial_t C(t) = \sqrt{\sum_n \langle \partial_t n(t)|\partial_t n(t)\rangle}. \tag{180}$$

Em (DEFFNER; LUTZ, 2013b), Deffner e Lutz demonstraram que a taxa máxima de variação do ângulo $\mathcal{L}_t = \arccos \langle \psi_0 | \rho_t | \psi_0 \rangle$ entre um estado inicial puro e o estado no instante t , pode ser obtida de

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L}(t) \leq \frac{d}{dt} |\mathcal{L}(t)| = \frac{|\langle \psi_0 | \partial_t \rho_t | \psi_0 \rangle|}{2 \cos \mathcal{L}(t) \sin \mathcal{L}(t)} = \frac{|\langle \psi_0 | [H_t, \rho_t] | \psi_0 \rangle|}{2 \cos \mathcal{L}(t) \sin \mathcal{L}(t)}. \tag{181}$$

Utilizando a desigualdade (BHATIA, 1997),

$$|\langle \psi_0 | [H_t, \rho_t] | \psi_0 \rangle| \leq \langle H_t \rangle, \quad (182)$$

chega-se em

$$2 \cos \mathcal{L}(t) \sin \mathcal{L}(t) \frac{d}{dt} \mathcal{L}(t) \leq \langle H_t \rangle. \quad (183)$$

Integrando dos dois lados obtemos o tempo de QSL,

$$\tau_{QSL} = \frac{\tau \sin^2 \mathcal{L}(t)}{2 \int_0^\tau dt \langle H_t \rangle}. \quad (184)$$

Substituindo o valor esperado do hamiltoniano para o algoritmo de evolução sem transição, dada por

$$\langle H(t) \rangle = \sqrt{\sum_n E_n(t)^2 + (\partial_t C(t))^2}, \quad (185)$$

chegamos na relação de troca entre velocidade e custo de implementação do atalho para a adiabaticidade. Quanto menor o tempo de evolução do sistema quântico até seu estado final, maior o custo energético de implementação do atalho.

Ou seja, a similaridade dos resultados advêm do fato de que há um acréscimo no custo em ambos os casos. No caso de QSL, há um acréscimo energético associado ao termo contra-diabático para aumentar a velocidade da evolução, e no caso da QG, a adição do termo contra-diabático ao hamiltoniano faz com que essa deixe de ser nulo.

No procedimento do trabalho, devido a esse resultado, foi feita a opção de investigar a função QG para algoritmos de computação adiabática na versão de evolução sem transição, buscando compreender qual a sua relação com a eficiência do algoritmo.

4.3 QG DO ALGORITMO DE EVOLUÇÃO SEM TRANSIÇÃO

Nessa seção calcularemos a QG para o algoritmo de evolução sem transição. A QG de um estado de entrada ρ e um estado alvo τ é definida como a minimização da componente quântica da energia de uma curva, dada por $\gamma_t = \sum_j \lambda_j(t) |i(t)\rangle \langle i(t)|$, com $\gamma(0) = \rho$ e $\gamma(T) = \tau$ e T é o tempo de evolução. A curva liga os estados da seguinte forma:

$$\rho = \sum_i \lambda_i(0) |i(0)\rangle \langle i(0)| \rightarrow \rho^U = \sum_i \lambda_i(T) |i(0)\rangle \langle i(0)| \rightarrow \tau = \sum_i \lambda_i(T) |i(T)\rangle \langle i(T)|. \quad (186)$$

A minimização é feita sobre todos os estados ρ^U diagonais na base de autoestados de ρ e isoenergéticos ao estado alvo τ e sobre todas as curvas $\gamma_t^U : \rho^U \rightarrow \tau$ que levam de um estado ao outro,

$$Q_\rho(\tau) = \min_{\rho^U, \gamma_t^U} E_q^{\gamma_t^U}(\rho^U \rightarrow \tau), \quad (187)$$

onde

$$E_q^{\gamma_t^U}(\rho^U \rightarrow \tau) = \int_0^T \|\dot{\gamma}_t^U, H_t\|^2 dt, \quad (188)$$

$H_t = i\dot{U}_t U_t^\dagger$ é o gerador da dinâmica e a norma $\|\cdot\|$ é uma métrica induzida de uma norma Fisher-Riemanniana.

No caso da evolução sem transição, o caminho que leva do estado inicial para o estado alvo já é pré-estabelecido pelo algoritmo, tornando o processo de minimização sobre todas as curvas γ_t^U e estados ρ^U desnecessário. Como a evolução sem transição é uma transformação unitária, ou seja, a componente clássica da energia da curva é nula, a energia da curva associada ao algoritmo corresponde a QG.

Para calcularmos o comutador que define a função, tomemos uma curva descrita por um estado genérico dado por

$$\rho_t = \sum_{mn} \rho_{mn}(t) |m(t)\rangle \langle n(t)|. \quad (189)$$

Por ser uma transformação unitária, o gerador associado a função QG coincide com o hamiltoniano do algoritmo. Da equação (173) temos que

$$\begin{aligned} H_t &= \sum_k \left(E_k(t) - i \langle k(t) | \partial_t k(t) \rangle \right) |k(t)\rangle \langle k(t)| + i |\partial_t k(t)\rangle \langle k(t)| \\ &= \sum_k \varphi_k(t) |k(t)\rangle \langle k(t)| + i |\partial_t k(t)\rangle \langle k(t)|, \end{aligned} \quad (190)$$

onde $\varphi_k(t) = E_k(t) - i \langle k(t) | \partial_t k(t) \rangle$. O comutador que define a QG fica

$$\begin{aligned} [\rho_t, H_t] &= \left[\sum_{mn} \rho_{mn}(t) |m(t)\rangle \langle n(t)|, \sum_k \varphi_k(t) |k(t)\rangle \langle k(t)| + i |\partial_t k(t)\rangle \langle k(t)| \right] \\ &= \sum_{mnk} \varphi_k(t) \rho_{mn}(t) [|m(t)\rangle \langle n(t)|, |k(t)\rangle \langle k(t)|] + i \rho_{mn}(t) [|m(t)\rangle \langle n(t)|, |\partial_t k(t)\rangle \langle k(t)|] \\ &= \sum_{mn} \left(\varphi_n(t) - \varphi_m(t) \right) \rho_{mn}(t) |m(t)\rangle \langle n(t)| - i \rho_{mn}(t) |\partial_t m(t)\rangle \langle n(t)| \\ &\quad + \sum_{mnk} i \rho_{mn}(t) \langle n(t) | \partial_t k(t) \rangle |m(t)\rangle \langle k(t)| \\ &= \sum_{mn} \alpha_{mn}(t) \rho_{mn}(t) |m(t)\rangle \langle n(t)| - i \rho_{mn}(t) |\partial_t m(t)\rangle \langle n(t)| + \sum_{mnk} i \rho_{mn}(t) \langle n(t) | \partial_t k(t) \rangle |m(t)\rangle \langle k(t)| \end{aligned} \quad (191)$$

em que $\alpha_{mn}(t)$ é

$$\begin{aligned}\alpha_{mn}(t) &= \varphi_n(t) - \varphi_m(t) \\ &= E_n(t) - i \langle n(t) | \partial_t n(t) \rangle - E_m(t) + i \langle m(t) | \partial_t m(t) \rangle \\ &= i \left(\langle m(t) | \partial_t m(t) \rangle - \langle n(t) | \partial_t n(t) \rangle \right) - \Delta_{mn}(t),\end{aligned}\tag{192}$$

e $\Delta_{mn}(t)$ é o gap entre as energias do termo adiabático.

4.3.1 Estados puros

Para o estado puro na base de autoestados do hamiltoniano no instante inicial, H_0 , $\rho_t = |j(t)\rangle\langle j(t)|$, na equação (189) temos

$$\rho_{mn}(t) = \delta_{mj}\delta_{nj}.\tag{193}$$

O comutador que define a QG se torna

$$\begin{aligned}[\rho_t, H_t] &= \sum_{mn} \alpha_{mn}(t) \delta_{mj} \delta_{ni} |m(t)\rangle \langle n(t)| - i \delta_{mj} \delta_{nj} |\partial_t m(t)\rangle \langle n(t)| + \sum_{mnk} i \delta_{mj} \delta_{nj} \langle n(t) | \partial_t k(t) \rangle |m(t)\rangle \langle k(t)| \\ &= i \sum_k \langle j(t) | \partial_t k(t) \rangle |j(t)\rangle \langle k(t)| - i |\partial_t j(t)\rangle \langle j(t)|.\end{aligned}\tag{194}$$

Com isso demonstramos que com a adição do termo contra-diabático a QG não é nula. Isso se deve ao fato do estado ter coerência na base de autoestados do hamiltoniano H_0 e por consequência adquire assimetria.

Para proceder com o cálculo da função é necessário escolher uma norma. Com fim de obter um resultado analítico, adotamos a norma l_2^1 e a norma induzida da métrica de Bures.

4.3.1.1 Norma l_2

A norma l_2 é dada por

$$\|A\|_{l_2} = \sqrt{\text{Tr}\{AA^\dagger\}}.\tag{195}$$

Seja o comutador denotado por $C = [\rho_t, H_t]$. Calculando CC^\dagger :

¹ Na referência (PÉREZ-GARCÍA *et al.*, 2006) é demonstrado que normas l_p são contractivas para evoluções unitais

$$\begin{aligned}
CC^\dagger &= \\
&= i \left(\sum_k \langle j(t) | \partial_t k(t) \rangle |j(t)\rangle \langle k(t)| - |\partial_t j(t)\rangle \langle j(t)| \right) \\
&\times -i \left(\sum_l \langle \partial_t l(t) | j(t) \rangle |l(t)\rangle \langle j(t)| - |\partial_t j(t)\rangle \langle j(t)| \right) \\
&= \sum_k |\langle j(t) | \partial_t k(t) \rangle|^2 |j(t)\rangle \langle j(t)| - \langle j(t) | \partial_t j(t) \rangle |j(t)\rangle \langle \partial_t j(t)| \\
&\quad - \langle \partial_t j(t) | j(t) \rangle |\partial_t j(t)\rangle \langle j(t)| + |\partial_t j(t)\rangle \langle \partial_t j(t)|.
\end{aligned} \tag{196}$$

Tomando o traço:

$$\begin{aligned}
\text{Tr}\{CC^\dagger\} &= \\
&= \sum_k |\langle j(t) | \partial_t k(t) \rangle|^2 - 2|\langle j(t) | \partial_t j(t) \rangle| + \langle \partial_t j(t) | \partial_t j(t) \rangle.
\end{aligned} \tag{197}$$

Logo concluímos que a QG é dado por

$$Q = 2 \int_0^T \left[\sum_k |\langle j(t) | \partial_t k(t) \rangle|^2 - 2|\langle j(t) | \partial_t j(t) \rangle| + \langle \partial_t j(t) | \partial_t j(t) \rangle \right] dt. \tag{198}$$

4.3.1.2 Métrica de Bures

A norma induzida da métrica de Bures, conforme a equação (15), é dada por

$$D_B(\gamma_t, \gamma_t + d\gamma_t) = \frac{1}{2} \sum_{j \neq k} \frac{|\langle j(t) | d\gamma_t | k(t) \rangle|^2}{\lambda_j(t) + \lambda_k(t)}, \tag{199}$$

onde $\gamma_t = \sum_k \lambda_k(t) |k(t)\rangle \langle k(t)|$ é a decomposição espectral do estado. Para o comutador C , o elemento $\langle m(t) | C | n(t) \rangle$ é dado por

$$\begin{aligned}
\langle m(t) | C | n(t) \rangle &= \langle m(t) | \left(i \sum_k \langle j(t) | \partial_t k(t) \rangle |j(t)\rangle \langle k(t)| - i |\partial_t j(t)\rangle \langle j(t)| \right) | n(t) \rangle \\
&= i \left(\langle j(t) | \partial_t n(t) \rangle - \langle m(t) | \partial_t j(t) \rangle \right).
\end{aligned} \tag{200}$$

A QG para essa norma fica

$$Q = \frac{1}{2} \int_0^T dt \sum_{m \neq n} |\langle j(t) | \partial_t n(t) \rangle - \langle m(t) | \partial_t j(t) \rangle|^2. \tag{201}$$

4.3.2 Estados térmicos

Além de estados puros, decidimos estudar estados térmicos. Estados térmicos descrevem sistemas quânticos em equilíbrio com um reservatório térmico e são de

especial importância para entender a dependência da temperatura no preparo de estados quânticos e implementação de algoritmos, principalmente no contexto de quantum annealing e algoritmos adiabáticos. Estudando a dependência da temperatura da função QG visamos entender o quão bem ela reflete uma eficiência algorítmica.

Para um estado térmico inicialmente descrito por

$$\begin{aligned}\rho_{term} &= \frac{e^{-\beta H_0}}{Z} \\ &= \sum_n \frac{e^{-\beta E_n(0)} |n(0)\rangle \langle n(0)|}{Z},\end{aligned}\quad (202)$$

onde $Z = \text{Tr} \{ e^{-\beta H_0} \}$ é a função de partição e $\beta = k_B T$, em que k_B é a constante de Boltzmann e T é a temperatura na escala Kelvin. Aplicando a transformação unitária associada ao algoritmo de evolução sem transição,

$$\begin{aligned}\rho_t &= U_t \rho_{term} U_t^\dagger \\ &= \left(\sum_k e^{i\gamma_k(t)} |k(t)\rangle \langle k(0)| \right) \left(\sum_n \frac{e^{-\beta E_n(0)} |n(0)\rangle \langle n(0)|}{Z} \right) \left(\sum_l e^{-i\gamma_l(t)} |l(0)\rangle \langle l(t)| \right) \\ &= \sum_n \frac{e^{-\beta E_n(0)} |n(t)\rangle \langle n(t)|}{Z}.\end{aligned}\quad (203)$$

Para esse estado o coeficiente $\rho_{mn}(t)$ da equação (189) fica

$$\begin{aligned}\rho_{mn}(t) &= \delta_{mn} \frac{e^{-\beta E_n(0)}}{Z} \\ &\equiv \delta_{mn} \rho_n(0).\end{aligned}\quad (204)$$

Substituindo na equação (191),

$$\begin{aligned}[\rho_t, H_t] &= \sum_{mn} \alpha_{mn}(t) \rho_{mn}(t) |m(t)\rangle \langle n(t)| + \sum_{mnk} i\rho_{mn}(t) \langle n(t)| \partial_t k(t) |m(t)\rangle \langle k(t)| - \sum_{mn} i\rho_{mn}(t) |\partial_t m(t)\rangle \langle n(t)| \\ &= \sum_{mn} \alpha_{mn}(t) \delta_{mn} \rho_n(0) |m(t)\rangle \langle n(t)| + \sum_{mnk} i\delta_{mn} \rho_n(0) \langle n(t)| \partial_t k(t) |m(t)\rangle \langle k(t)| \\ &\quad - \sum_{mn} i\delta_{mn} \rho_n(0) |\partial_t m(t)\rangle \langle n(t)| \\ &= \sum_n \alpha_{nn}(t) \rho_n(0) |n(t)\rangle \langle n(t)| + \sum_{nk} i\rho_n(0) \langle n(t)| \partial_t k(t) |n(t)\rangle \langle k(t)| - \sum_n i\rho_n(0) |\partial_t n(t)\rangle \langle n(t)| \\ &= \sum_{nk} i\rho_n(0) \langle n(t)| \partial_t k(t) |n(t)\rangle \langle k(t)| - \sum_n i\rho_n(0) |\partial_t n(t)\rangle \langle n(t)| \\ &= \sum_{mn} i\rho_n(0) \langle n(t)| \partial_t m(t) |n(t)\rangle \langle m(t)| - \sum_n i\rho_n(0) |\partial_t n(t)\rangle \langle n(t)|.\end{aligned}\quad (205)$$

4.3.2.1 Norma l_2

Vamos calcular a norma l_2 , dada na equação (195). Realizando a substituição $A = [\rho_t, H_t]$,

$$\begin{aligned}
([\rho_t, H_t])([\rho_t, H_t])^\dagger &= \left(\sum_{mn} ip_n(0) \langle n(t) | \partial_t m(t) \rangle |n(t)\rangle \langle m(t)| - \sum_n ip_n(0) |\partial_t n(t)\rangle \langle n(t)| \right) \\
&\times \left(\sum_{kl} -ip_k(0) \langle \partial_t l(t) | k(t) \rangle |l(t)\rangle \langle k(t)| + \sum_k ip_k(0) |k(t)\rangle \langle \partial_t k(t)| \right) \\
&= \left(\sum_{mnk} p_n(0)p_k(0) \langle n(t) | \partial_t m(t) \rangle \langle \partial_t m(t) | k(t) \rangle |n(t)\rangle \langle k(t)| \right. \\
&\quad - \sum_{mn} p_n(0)p_m(0) \langle n(t) | \partial_t m(t) \rangle |n(t)\rangle \langle \partial_t m(t)| \\
&\quad - \sum_{nk} p_n(0)p_k(0) \langle \partial_t n(t) | k(t) \rangle | \partial_t n(t) \rangle \langle k(t)| \\
&\quad \left. + \sum_n p_n^2(0) |\partial_t n(t)\rangle \langle \partial_t n(t)| \right).
\end{aligned} \tag{206}$$

Tomando o traço:

$$\begin{aligned}
\text{Tr} \left\{ ([\rho_t, H_t])([\rho_t, H_t])^\dagger \right\} &= \sum_l \langle l(t) | ([\rho_t, H_t])([\rho_t, H_t])^\dagger |l(t)\rangle \\
&= \sum_{mn} p_n^2(0) |\langle n(t) | \partial_t m(t) \rangle|^2 - \sum_{ml} p_l(0)p_m(0) |\langle l(t) | \partial_t m(t) \rangle|^2 \\
&\quad - \sum_{nl} p_n(0)p_l(0) |\langle l(t) | \partial_t n(t) \rangle|^2 + \sum_n p_n^2(0) \langle \partial_t n(t) | \partial_t n(t) \rangle \\
&= \sum_n p_n^2(0) \langle \partial_t n(t) | \partial_t n(t) \rangle + \sum_{mn} \left(p_n^2(0) - 2p_m(0)p_n(0) \right) |\langle n(t) | \partial_t m(t) \rangle|^2.
\end{aligned} \tag{207}$$

Por fim a QG fica

$$\mathcal{Q} = \int_0^T dt \left[\sum_n p_n^2(0) \langle \partial_t n(t) | \partial_t n(t) \rangle + \sum_{mn} \left(p_n^2(0) - 2p_m(0)p_n(0) \right) |\langle n(t) | \partial_t m(t) \rangle|^2 \right]. \tag{208}$$

Realizando a substituição $p_n(0) = \delta_{jn}$, em que j se refere ao estado fundamental, recuperamos o resultado para o estado puro dado na equação (198). Esse deve ser o resultado em um regime de baixas temperaturas ($\beta \gg 1$), onde só o estado fundamental passa a ser populado.

4.3.2.2 Métrica de Bures

Calculando o elemento $\langle j(t) | [\rho_t, H_t] |k(t)\rangle$,

$$\begin{aligned}
\langle j(t) | [\rho_t, H_t] | k(t) \rangle &= \\
&= \langle j(t) | \left(\sum_{mn} ip_n(0) \langle n(t) | \partial_t m(t) \rangle | n(t) \rangle \langle m(t) | - ip_n(0) | \partial_t n(t) \rangle \langle n(t) | \right) | k(t) \rangle \\
&= i \left(p_j(0) \langle j(t) | \partial_t k(t) \rangle - p_k(0) \langle j(t) | \partial_t k(t) \rangle \right) \\
&= i \left(p_j(0) - p_k(0) \right) \langle j(t) | \partial_t k(t) \rangle.
\end{aligned} \tag{209}$$

Note que se quisermos recuperar o resultado (200) para o estado puro $|n(t)\rangle\langle n(t)|$, basta fazer a substituição $p_j(0) = \delta_{nj}$

$$\begin{aligned}
\langle j(t) | [\rho_t, H_t] | k(t) \rangle &= i \left(\delta_{nj} - \delta_{nk} \right) \langle j(t) | \partial_t k(t) \rangle \\
&= i \left(\langle n(t) | \partial_t k(t) \rangle - \langle j(t) | \partial_t n(t) \rangle \right).
\end{aligned} \tag{210}$$

A QG nesse caso fica

$$Q = \frac{1}{2} \int_0^T dt \sum_{j \neq k} \frac{(p_j(0) - p_k(0))^2}{p_j(0) + p_k(0)} |\langle j(t) | \partial_t k(t) \rangle|^2. \tag{211}$$

4.4 QG DO ALGORITMO DE BUSCA

Nessa seção calcularemos explicitamente a QG para a versão sem transição do algoritmo de busca de Grover. Os cálculos serão feitos considerando que o algoritmo foi inicializado em um estado térmico.

Recapitulando brevemente os resultados obtidos para o algoritmo anteriormente. O estado que codifica a solução será denotado por $|m\rangle$, o oráculo será definido em termos do hamiltoniano final $H(T) = \mathbb{1} - |m\rangle\langle m|$. A base computacional é constituída pelos autoestados de σ_z , i.e., $\sigma_z |0\rangle = 1 |0\rangle$ e $\sigma_z |1\rangle = -1 |1\rangle$. O estado solução é o estado fundamental de $H(T)$, que denotaremos por $H(1)$, hamiltoniana n -local, com estado fundamental com energia 0 e todos os outros estados da base computacional, denotados pela superposição $|m^\perp\rangle$, tem nível de energia 1.

Os níveis de energia do algoritmo são dados por:

$$\begin{aligned}
E_0 &= \frac{1}{2}(1 - \Delta(s)), \\
E_1 &= \frac{1}{2}(1 + \Delta(s)),
\end{aligned} \tag{212}$$

onde o gap entre os dois níveis de energia é dado por

$$\Delta(s) = \sqrt{(1 - 2s)^2 + \frac{4}{N}s(1 - s)}. \tag{213}$$

Os autoestados do hamiltoniano são dados por

$$|0(s)\rangle = \cos \frac{\theta(s)}{2} |m\rangle + \sin \frac{\theta(s)}{2} |m^\perp\rangle, \quad (214)$$

$$|1(s)\rangle = -\sin \frac{\theta(s)}{2} |m\rangle + \cos \frac{\theta(s)}{2} |m^\perp\rangle, \quad (215)$$

em que

$$\sin \theta(s) = \frac{2}{\Delta(s)} (1-s) \frac{\sqrt{N-1}}{N}, \quad (216)$$

$$\cos \theta(s) = \frac{1}{\Delta(s)} \left(1 - 2(1-s) \left(1 - \frac{1}{N} \right) \right), \quad (217)$$

e esses autoestados obedecem

$$\langle \dot{m}(s) | \dot{n}(s) \rangle = \frac{\dot{\theta}(s)^2}{4} \delta_{mn}, \quad (218)$$

$$\langle m(s) | \dot{n}(s) \rangle = \begin{cases} 0, & \text{se } m = n, \\ (-1)^n \frac{\dot{\theta}(s)}{2} & \text{se } m \neq n. \end{cases} \quad (219)$$

Calculamos a função para duas parametrizações do tempo, para a parametrização linear usual em algoritmos adiabáticos $s = t/T$ e para o *schedule* utilizado no trabalho de Roland e Cerf (ROLAND; CERF, 2002), onde $\frac{ds}{dt} = \varepsilon \Delta^2(s)$, e $\varepsilon \ll 1$, é um parâmetro adimensional.

4.4.1 Norma l_2

Inicializando o algoritmo em um estado térmico, a QG é dado por

$$\mathcal{Q} = \int_0^T dt \left[\sum_n p_n^2(0) \langle \partial_t n(t) | \partial_t n(t) \rangle + \sum_{mn} \left(p_n^2(0) - 2p_m(0)p_n(0) \right) |\langle n(t) | \partial_t m(t) \rangle|^2 \right]. \quad (220)$$

Reparametrizando o tempo para $s = t/T$,

$$\begin{aligned} dt &= T ds \\ \partial_t f &= \frac{1}{T} \frac{\partial f}{\partial s}, \end{aligned} \quad (221)$$

e substituindo na equação obtemos

$$\begin{aligned}
Q &= \int_0^1 T ds \left[\sum_{mn} \frac{p_n^2(0)}{T^2} \langle \dot{n}(s) | \dot{n}(s) \rangle + \frac{p_n^2(0) - 2p_m(0)p_n(0)}{T^2} \langle n(s) | \dot{m}(s) \rangle^2 \right] \\
&= \frac{1}{T} \int_0^1 ds \left[\sum_n p_n^2(0) \frac{\dot{\theta}^2(s)}{4} + \sum_{m \neq n} \left(p_n^2(0) - 2p_m(0)p_n(0) \right) \frac{\dot{\theta}^2(s)}{4} \right] \\
&= \frac{1}{2T} \left[\sum_n p_n^2(0) - \sum_{m \neq n} p_m(0)p_n(0) \right] \int_0^1 ds \dot{\theta}^2(s).
\end{aligned} \tag{222}$$

Para encontrar a função $\dot{\theta}(s)$ basta derivar a equação (216),

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds} \sin \theta(s) &= \cos \theta(s) \dot{\theta}(s) \\
\frac{d}{ds} \sin \theta(s) &= -\frac{2}{\Delta(s)} \frac{\sqrt{N-1}}{N} \left((1-s) \frac{\dot{\Delta}(s)}{\Delta(s)} + 1 \right) \\
&= -\frac{2}{\Delta(s)} \frac{\sqrt{N-1}}{N} \left((1-s) \frac{(-4)(1-2s)(1-1/N)}{2\Delta^2(s)} + 1 \right) \\
&= -\frac{2}{\Delta^3(s)} \frac{\sqrt{N-1}}{N} \left(-2(1-s)(1-2s)(1-1/N) + \Delta^2(s) \right) \\
&= -\frac{2}{\Delta^3(s)} \frac{\sqrt{N-1}}{N} \left(1 - 2(1-s)(1-1/N) \right),
\end{aligned} \tag{223}$$

e dividir pela equação (217),

$$\dot{\theta}(s) = -\frac{\sqrt{N-1}}{N} \frac{2}{\Delta^2(s)}. \tag{224}$$

Integrando $\dot{\theta}(s)^2$,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 ds \dot{\theta}(s)^2 &= \frac{N-1}{N^2} \int_0^1 ds \frac{4}{\Delta^4(s)} \\
&= \frac{N-1}{N^2} \int_0^1 ds \frac{4}{\left(\sqrt{(1-2s)^2 + \frac{4}{N}s(1-s)} \right)^4} \\
&= \frac{N-1}{N^2} \int_0^1 ds \frac{4}{\left(4\frac{N-1}{N}s^2 - 4\frac{N-1}{N}s + 1 \right)^2} \\
&= \frac{1}{N-1} \int_0^1 ds \frac{4}{\left(4s^2 - 4s + \frac{N}{N-1} \right)^2}.
\end{aligned} \tag{225}$$

Realizando a substituição $c = N/(N-1)$, vamos nos valer do fato de que

$$\begin{aligned}
\int_0^1 ds \dot{\theta}(s)^2 &= \frac{4}{N-1} \int_0^1 ds \frac{\partial}{\partial c} \left[\frac{-1}{4s^2 - 4s + c} \right] \\
&= \frac{4}{N-1} \left(-\frac{\partial}{\partial c} \right) \int_0^1 ds \frac{1}{4s^2 - 4s + c} \\
&= \frac{4}{N-1} \left(-\frac{\partial}{\partial c} \right) \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{ds}{(s-1/2)^2 + (c-1)/4}.
\end{aligned} \tag{226}$$

Realizando a substituição $(s-1/2)^2 = ((c-1)/4) \tan^2 u$,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 ds \dot{\theta}(s)^2 &= \frac{4}{N-1} \left(-\frac{\partial}{\partial c} \right) \frac{1}{4} \int_{u_0}^{u_1} \frac{2}{\sqrt{c-1}} du \\
&= \frac{4}{N-1} \left(-\frac{\partial}{\partial c} \right) \left[\frac{1}{2\sqrt{c-1}} \left(\arctan \frac{1}{\sqrt{c-1}} - \arctan \frac{-1}{\sqrt{c-1}} \right) \right] \\
&= \frac{4}{N-1} \left(-\frac{\partial}{\partial c} \right) \left[\frac{1}{\sqrt{c-1}} \left(\arctan \frac{1}{\sqrt{c-1}} \right) \right] \\
&= \frac{4}{N-1} \left[\frac{1}{2\sqrt{c-1}^3} \arctan \frac{1}{\sqrt{c-1}} + \frac{1}{2(c^2-c)} \right] \\
&= 2 \left[\sqrt{N-1} \arctan \sqrt{N-1} + \frac{N-1}{N} \right].
\end{aligned} \tag{227}$$

Calculando explicitamente a dependência da temperatura,

$$\sum_n \rho_n(0)^2 - \sum_{m \neq n} \rho_m(0) \rho_n(0) = \sum_n \frac{e^{-2\beta E_n(0)}}{Z^2} - \sum_{m \neq n} \frac{e^{-\beta(E_n(0)+E_m(0))}}{Z^2}. \tag{228}$$

Da equação (212) temos que no instante inicial as energias são $E_0(0) = 0$ e $E_1(0) = 1$. Calculando a função de partição Z ,

$$\begin{aligned}
Z &= \text{Tr} \{ e^{-\beta H_0} \} \\
&= \sum_n e^{-\beta E_n(0)} \\
&= 1 + e^{-\beta}.
\end{aligned} \tag{229}$$

Substituindo na equação (228),

$$\begin{aligned}
\sum_n \rho_n(0)^2 - \sum_{m \neq n} \rho_m(0) \rho_n(0) &= \frac{(1 + e^{-2\beta} - 2e^{-\beta})}{(1 + e^{-\beta})^2} \\
&= \frac{(1 - e^{-\beta})^2}{(1 + e^{-\beta})^2} \\
&= \tanh^2 \frac{\beta}{2}.
\end{aligned} \tag{230}$$

Por fim a QG fica

$$Q = \frac{1}{T} \left[\sqrt{N-1} \arctan \sqrt{N-1} + \frac{N-1}{N} \right] \tanh^2 \frac{\beta}{2}. \quad (231)$$

Se tomarmos o limite de $N \gg 1$ para ver o comportamento conforme a escala do sistema aumenta

$$Q \rightarrow \frac{\pi\sqrt{N}}{2T} \tanh^2 \frac{\beta}{2}. \quad (232)$$

Se quisermos o resultado da QG para o estado fundamental, basta analisar seu comportamento em regimes de baixa temperatura, i.e., quando $\beta \gg 1$. Tomando esse limite, Q tende a

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} Q = \frac{1}{T} \left[\sqrt{N-1} \arctan \sqrt{N-1} + \frac{N-1}{N} \right]. \quad (233)$$

Por ser um estado puro, pelos resultados obtidos na subseção 4.3.2.1, concluímos que no regime de baixas temperaturas o comportamento da QG para estados térmicos se torna idêntico ao de um estado puro. Para o regime de altas temperaturas, i.e., quando $\beta \ll 1$, temos que

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} Q = 0, \quad (234)$$

ou seja, a QG é dissipada. Sendo ela uma medida de quantidade de informação de assimetria, o efeito de uma alta temperatura é destruir a quantidade de informação contida no estado do sistema.

O resultado (232) evidencia que apesar de existir uma dependência de \sqrt{N} como o resultado obtido por Roland e Cerf (ROLAND; CERF, 2002), a grandeza QG é inversamente proporcional ao tempo de evolução, similar a uma relação de custo ou de *trade-off* entre as duas grandezas como nos resultados obtidos para o QSL em atalhos para a adiabaticidade (CAMPBELL; DEFFNER, 2017; SANTOS; SARANDY, 2015; SANTOS; SILVA; SARANDY, 2016). Para reduzir o tempo de execução do algoritmo, é necessário aumentar a QG, ou seja, existe um custo em reduzir o tempo. Se tomássemos como parâmetro para o tempo o resultado obtido para a parametrização linear $s = t/T$ no trabalho, onde o tempo escala com N , assim como um algoritmo de busca clássico, a QG escalaria com $1/\sqrt{N}$, o que demonstra que ela não coincide com os resultados obtidos para a complexidade do algoritmo na literatura.

Utilizando o *schedule* que resulta no speed-up quadrático do algoritmo, dado por $\frac{ds}{dt} = \varepsilon \Delta^2(s)$, obtemos

$$dt = \frac{ds}{\varepsilon \Delta^2(s)} \quad (235)$$

$$\partial_t f = \varepsilon \Delta^2(s) \dot{f}.$$

Calculando a função obteremos um resultado análogo para a temperatura, a dependência continuará a mesma, alterando somente a dependência em N ,

$$Q = \int_0^1 \frac{ds}{\varepsilon \Delta^2(s)} \left[\sum_{mn} (\varepsilon \Delta^2(s))^2 p_n^2(0) \langle \dot{n}(s) | \dot{n}(s) \rangle + (\varepsilon \Delta^2(s))^2 (p_n^2(0) - 2p_m(0)p_n(0)) \langle n(s) | \dot{m}(s) \rangle^2 \right]$$

$$= \int_0^1 \varepsilon \Delta^2(s) ds \left[\sum_n p_n^2(0) \frac{\dot{\theta}^2(s)}{4} + \sum_{m \neq n} (p_n^2(0) - 2p_m(0)p_n(0)) \frac{\dot{\theta}^2(s)}{4} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\sum_n p_n^2(0) - \sum_{m \neq n} p_m(0)p_n(0) \right] \int_0^1 \varepsilon \Delta^2(s) \dot{\theta}^2(s) ds. \quad (236)$$

Fazendo a integral acima, chega-se em

$$\frac{\varepsilon}{2} \int_0^1 ds \Delta^2(s) \dot{\theta}(s)^2 =$$

$$= 2\varepsilon \frac{N-1}{N^2} \int_0^1 ds \frac{1}{\Delta^2(s)} \quad (237)$$

$$= 2\varepsilon \frac{N-1}{N^2} \frac{N}{\sqrt{N-1}} \arctan \sqrt{N-1}$$

$$= 2\varepsilon \frac{\sqrt{N-1}}{N} \arctan \sqrt{N-1}.$$

Por fim, a função QG fica

$$Q = 2\varepsilon \left[\sum_n p_n^2(0) - \sum_{m \neq n} p_m(0)p_n(0) \right] \frac{\sqrt{N-1}}{N} \arctan \sqrt{N-1} \quad (238)$$

$$= 2\varepsilon \left[\tanh^2 \frac{\beta}{2} \right] \frac{\sqrt{N-1}}{N} \arctan \sqrt{N-1}.$$

Se tomarmos o limite $N \gg 1$,

$$Q \rightarrow \frac{\pi \varepsilon}{\sqrt{N}} \tanh^2 \frac{\beta}{2}, \quad (239)$$

o que demonstra que mesmo escolhendo a parametrização do tempo resultante no speed-up quadrático do algoritmo, a função ainda não coincide com os resultados relatados para a complexidade do algoritmo.

Tomando o limite em que $\beta \gg 1$, conforme discutido anteriormente, é obtido o resultado para estado puros,

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} Q = 2\varepsilon \frac{\sqrt{N-1}}{N} \arctan \sqrt{N-1}. \quad (240)$$

Para altas temperaturas, $\beta \ll 1$, novamente, temos que a QG é anulada

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} Q = 0. \quad (241)$$

4.4.2 Métrica de Bures

Nesse caso a função será dada por

$$Q = \frac{1}{2} \sum_{j \neq k} \frac{(p_j(0) - p_k(0))^2}{p_j(0) + p_k(0)} \int_0^T dt |\langle j(t) | \partial_t k(t) \rangle|^2. \quad (242)$$

Para a parametrização $s = t/T$,

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{2T} \sum_{j \neq k} \frac{(p_j(0) - p_k(0))^2}{p_j(0) + p_k(0)} \int_0^1 ds \frac{\dot{\theta}^2(s)}{4} \\ &= \frac{1}{4T} \left[\sqrt{N-1} \arctan \sqrt{N-1} + \frac{N-1}{N} \right] \sum_{j \neq k} \frac{(p_j(0) - p_k(0))^2}{p_j(0) + p_k(0)}. \end{aligned} \quad (243)$$

Calculando a dependência da temperatura,

$$\begin{aligned} \sum_{j \neq k} \frac{(p_j(0) - p_k(0))^2}{p_j(0) + p_k(0)} &= 2 \frac{(p_0(0) - p_1(0))^2}{p_0(0) + p_1(0)} \\ &= 2 \frac{(1/Z - e^{-\beta/Z})^2}{1/Z + e^{-\beta/Z}} \\ &= 2 \frac{(1 - e^{-\beta})^2}{(1 + e^{-\beta})^2} \\ &= 2 \tanh^2 \frac{\beta}{2}. \end{aligned} \quad (244)$$

Novamente encontramos o mesmo tipo de dependência da temperatura. A QG resulta em

$$Q = \frac{1}{2T} \left[\sqrt{N-1} \arctan \sqrt{N-1} + \frac{N-1}{N} \right] \tanh^2 \frac{\beta}{2}. \quad (245)$$

O resultado obtido a partir da métrica de Bures é metade do obtido a partir da norma l_2 . O mesmo se repetirá para o *schedule* utilizado por Roland e Cerf:

$$\begin{aligned}
Q &= \frac{1}{2} \sum_{j \neq k} \frac{(p_j(0) - p_k(0))^2}{p_j(0) + p_k(0)} \int_0^1 ds \varepsilon \Delta^2(s) \frac{\dot{\theta}^2(s)}{4} \\
&= 2 \left(2 \tanh^2 \frac{\beta}{2} \right) \left(\frac{\varepsilon \sqrt{N-1}}{4N} \arctan \sqrt{N-1} \right) \\
&= \varepsilon \left[\tanh^2 \frac{\beta}{2} \right] \frac{\sqrt{N-1}}{N} \arctan \sqrt{N-1},
\end{aligned} \tag{246}$$

o resultado calculado a partir da métrica de Bures é metade do resultado calculado a partir da norma l_2 .

4.4.3 Escala de tempo associada

Anteriormente, em 2.3.2, derivamos um speed limit associado a QG quando a adotada a métrica de Bures, i.e., uma escala de tempo associada a função, dada por

$$T \geq \frac{Q}{M(\tilde{H}_t)}. \tag{247}$$

Para o caso do algoritmo de evolução sem transição, por se tratar de uma evolução unitária, temos que $\tilde{H}_t = H_t$ e a função $M(\tilde{H}_t)$ é a média temporal do gerador dada por

$$M(H_t) = \frac{1}{T} \int_0^T dt \Delta H_t^2, \tag{248}$$

que podemos interpretar como uma velocidade associada a QG do algoritmo. Para estados puros a desigualdade é saturada, como verificaremos em seguida.

Como já obtivemos a QG, basta calcular $M(H_t)$. Inicializando o algoritmo em $|0(s)\rangle\langle 0(s)|$, estado puro na base de H_0 , o termo adiabático do hamiltoniano, obtivemos que a variância de H_t é dado por

$$\Delta H_t^2 = \langle \partial_t 0(t) | \partial_t 0(t) \rangle + \langle 0(t) | \partial_t 0(t) \rangle^2. \tag{249}$$

Para a parametrização linear, a integração resulta em

$$\begin{aligned}
\frac{1}{T} \int_0^T dt \Delta H_t^2 &= \frac{1}{T} \int_0^1 T ds \frac{1}{T^2} \left(\langle \dot{0}(s) | \dot{0}(s) \rangle + \langle 0(s) | \dot{0}(s) \rangle^2 \right) \\
&= \frac{1}{T^2} \int_0^1 ds \frac{\dot{\theta}^2(s)}{4} \\
&= \frac{1}{2T^2} \left[\sqrt{N-1} \arctan \sqrt{N-1} + \frac{N-1}{N} \right].
\end{aligned} \tag{250}$$

A razão entre a QG e $M(H_t)$ resulta em

$$\frac{Q}{M(H_t)} = T. \tag{251}$$

Para o schedule $\frac{ds}{dt}$, a integração resulta

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T dt \Delta \tilde{H}_t^2 &= \frac{1}{T} \int_0^1 \frac{ds}{\varepsilon \Delta^2(s)} (\varepsilon \Delta^2(s))^2 \left(\langle \dot{0}(s) | \dot{0}(s) \rangle + \langle 0(s) | \dot{0}(s) \rangle^2 \right) \\ &= \frac{1}{T} \int_0^1 ds \varepsilon \Delta^2(s) \frac{\dot{\theta}^2(s)}{4} \\ &= \frac{\varepsilon}{T} \frac{\sqrt{N-1}}{N} \arctan \sqrt{N-1}, \end{aligned} \quad (252)$$

e novamente, a razão resulta em:

$$\frac{Q}{M(H_t)} = T. \quad (253)$$

Quando inicializamos o algoritmo em um estado térmico, denotamos ρ_t por

$$\rho_t = \sum_n p_n(0) |n(t)\rangle \langle n(t)|. \quad (254)$$

O hamiltoniano do algoritmo é

$$H_t = \sum_k \varphi_k(t) |k(t)\rangle \langle k(t)| + i |\partial_t k(t)\rangle \langle k(t)|. \quad (255)$$

Primeiro retomaremos alguns resultados para a versão sem transição do algoritmo de Grover. φ_k é dado por

$$\varphi_k = E_k(t) + i \langle k(t) | \partial_t k(t) \rangle. \quad (256)$$

Os níveis de energia do algoritmo são dados por:

$$\begin{aligned} E_0 &= \frac{1}{2}(1 - \Delta(s)), \\ E_1 &= \frac{1}{2}(1 + \Delta(s)). \end{aligned} \quad (257)$$

Os coeficientes $p_n(0)$ do estado são dados por

$$\begin{aligned} p_0 &= \frac{1}{Z}, \\ p_1 &= \frac{e^{-\beta}}{Z}. \end{aligned} \quad (258)$$

Os autoestados do algoritmo obedecem às relações

$$\langle \dot{m}(s) | \dot{n}(s) \rangle = \frac{\dot{\theta}^2(s)}{4} \delta_{mn}, \quad (259)$$

$$\langle m(s) | \dot{n}(s) \rangle = \begin{cases} 0, & \text{se } m = n \\ (-1)^n \dot{\theta}(s)/2 & \text{se } m \neq n. \end{cases} \quad (260)$$

Calculando explicitamente a variância. O valor esperado do gerador da dinâmica é

$$\begin{aligned}
\langle H_t \rangle &= \text{Tr}\{\rho H_t\} \\
&= \sum_{kmn} \langle m(t) | \left(p_n(0) |n(t)\rangle \langle n(t)| \right) \left(\varphi_k(t) |k(t)\rangle \langle k(t)| + i |\partial_t k(t)\rangle \langle k(t)| \right) |m(t)\rangle \\
&= \sum_m \langle m(t) | \left(\sum_k p_k(0) \varphi_k(t) |k(t)\rangle \langle k(t)| + \sum_{kn} i p_n(0) \langle (t) | \partial_t k(t) \rangle |n(t)\rangle \langle k(t)| \right) |m(t)\rangle \\
&= \sum_m p_m(0) \varphi_m(t) + i p_m(0) \langle m(t) | \partial_t m(t) \rangle \\
&= \frac{1}{Z} \left(\frac{1}{2} (1 - \Delta(s)) \right) + \frac{e^{-\beta}}{Z} \left(\frac{1}{2} (1 + \Delta(s)) \right) \\
&= \frac{1}{2Z} \left((e^{-\beta} + 1) + (e^{-\beta} - 1) \Delta(s) \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(1 + \Delta(s) \tanh \frac{\beta}{2} \right).
\end{aligned} \tag{261}$$

Elevando-o ao quadrado, temos

$$\langle H_t \rangle^2 = \frac{1}{4} \left[1 + 2\Delta(s) \tanh \frac{\beta}{2} + \Delta^2(s) \tanh^2 \frac{\beta}{2} \right]. \tag{262}$$

Já o valor esperado do operador ao quadrado é

$$\begin{aligned}
\langle H_t^2 \rangle &= \text{Tr} \{ \rho_t H_t^2 \} \\
&= \sum_{mn} \langle m(t) | \left(\rho_n(0) |n(t)\rangle \langle n(t)| \right) \\
&\times \left(\sum_k \varphi_k(t)^2 |k(t)\rangle \langle k(t)| + \sum_{kl} i\varphi_k(t) \langle k(t) | \partial_t l(t) \rangle |k(t)\rangle \langle l(t)| + \sum_k i\varphi_k(t) | \partial_t k(t) \rangle \langle k(t)| \right. \\
&- \left. \sum_{kl} \langle k(t) | \partial_t l(t) \rangle | \partial_t k(t) \rangle \langle l(t)| \right) |m(t)\rangle \\
&= \sum_m \langle m(t) | \left(\sum_k \rho_k(0) \varphi_k(t)^2 |k(t)\rangle \langle k(t)| + \sum_{kl} i\rho_k(0) \varphi_k(t) \langle k(t) | \partial_t l(t) \rangle |k(t)\rangle \langle l(t)| \right. \\
&+ \left. \sum_{kn} i\rho_n(0) \varphi_k(t) \langle n(t) | \partial_t k(t) \rangle |n(t)\rangle \langle k(t)| - \sum_{kln} \rho_n(0) \langle k(t) | \partial_t l(t) \rangle \langle n(t) | \partial_t k(t) \rangle |n(t)\rangle \langle l(t)| \right) |m(t)\rangle \\
&= \sum_m \rho_m(0) \varphi_m(t)^2 + 2i\rho_m(0) \varphi_m(t) \langle m(t) | \partial_t m(t) \rangle - \sum_{mk} \rho_m(0) \langle k(t) | \partial_t m(t) \rangle \langle m(t) | \partial_t k(t) \rangle \\
&= \sum_m \rho_m(0) \varphi_m(t)^2 + 2i\rho_m(0) \varphi_m(t) \langle m(t) | \partial_t m(t) \rangle + \sum_{mk} \rho_m(0) \langle k(t) | \partial_t m(t) \rangle \langle \partial_t m(t) | k(t) \rangle \\
&= \sum_m \rho_m(0) \varphi_m(t)^2 + 2i\rho_m(0) \varphi_m(t) \langle m(t) | \partial_t m(t) \rangle + \rho_m(0) \langle \partial_t m(t) | \partial_t m(t) \rangle \\
&= \frac{1}{Z} \frac{(1 - \Delta(s))^2}{4} + \frac{1}{Z} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \frac{\dot{\theta}(s)^2}{4} + \frac{e^{-\beta} (1 + \Delta(s))^2}{Z} + \frac{e^{-\beta}}{Z} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \frac{\dot{\theta}(s)^2}{4} \\
&= \frac{1}{4} \left[1 + \Delta^2(s) + 2\Delta(s) \tanh \frac{\beta}{2} + \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \dot{\theta}(s)^2 \right].
\end{aligned} \tag{263}$$

Logo, a variância do hamiltoniano do algoritmo é dada por

$$\begin{aligned}
\Delta H_t^2 &= \langle H_t^2 \rangle - \langle H_t \rangle^2 \\
&= \frac{1}{4} \left[\left(1 - \tanh^2 \frac{\beta}{2} \right) \Delta^2(s) + \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \dot{\theta}(s)^2 \right].
\end{aligned} \tag{264}$$

A média temporal da variância $M(H_t)$ será

$$\begin{aligned}
M(H_t) &= \frac{1}{T} \int_0^T dt \Delta H_t^2 \\
&= \frac{1}{T} \int_0^1 \left(\frac{dt}{ds} \right) ds \frac{1}{4} \left[\left(1 - \tanh^2 \frac{\beta}{2} \right) \Delta^2(s) + \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \dot{\theta}(s)^2 \right].
\end{aligned} \tag{265}$$

Para a parametrização linear $s = t/T$,

$$\begin{aligned}
M(H_t) &= \frac{1}{4} \int_0^1 ds \left[\left(1 - \tanh^2 \frac{\beta}{2} \right) \Delta^2(s) + \frac{1}{T^2} \dot{\theta}(s)^2 \right] \\
&= \frac{1}{4} \left[\left(1 - \tanh^2 \frac{\beta}{2} \right) \frac{N+2}{3N} + \frac{1}{2T^2} \left(\sqrt{N-1} \arctan \sqrt{N-1} + \frac{N-1}{N} \right) \right] \\
&= \left(1 - \tanh^2 \frac{\beta}{2} \right) \frac{N+2}{12N} + \frac{1}{2T^2} \left(\sqrt{N-1} \arctan \sqrt{N-1} + \frac{N-1}{N} \right).
\end{aligned} \tag{266}$$

A QG nesse caso é dada por

$$Q = \frac{1}{2T} \left[\sqrt{N-1} \arctan \sqrt{N-1} + \frac{N-1}{N} \right] \tanh^2 \frac{\beta}{2}. \quad (267)$$

A razão entre Q e $M(H_t)$ fica

$$\begin{aligned} \frac{Q}{M(H_t)} &= \frac{\frac{1}{2T} \left[\sqrt{N-1} \arctan \sqrt{N-1} + \frac{N-1}{N} \right] \tanh^2 \frac{\beta}{2}}{\left(1 - \tanh^2 \frac{\beta}{2}\right) \frac{N+2}{12N} + \frac{1}{2T^2} \left(\sqrt{N-1} \arctan \sqrt{N-1} + \frac{N-1}{N} \right)} \\ &= \left[\frac{T}{6} \left(\frac{N+2}{N\sqrt{N-1} \arctan \sqrt{N-1} + N-1} \right) \frac{1 - \tanh^2 \frac{\beta}{2}}{\tanh^2 \frac{\beta}{2}} + \frac{1}{T \tanh^2 \frac{\beta}{2}} \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (268)$$

Substituindo na desigualdade,

$$T \geq \left[\frac{T}{6} \left(\frac{N+2}{N\sqrt{N-1} \arctan \sqrt{N-1} + N-1} \right) \frac{1 - \tanh^2 \frac{\beta}{2}}{\tanh^2 \frac{\beta}{2}} + \frac{1}{T \tanh^2 \frac{\beta}{2}} \right]^{-1}, \quad (269)$$

e isolando o tempo, chegamos a

$$\begin{aligned} \frac{T^2}{6} \left(\frac{N+2}{N\sqrt{N-1} \arctan \sqrt{N-1} + N-1} \right) \frac{1 - \tanh^2 \frac{\beta}{2}}{\tanh^2 \frac{\beta}{2}} + \frac{1}{\tanh^2 \frac{\beta}{2}} &\geq 1 \\ \Rightarrow T^2 &\geq -6 \frac{N\sqrt{N-1} \arctan \sqrt{N-1} + N-1}{N+2}. \end{aligned} \quad (270)$$

Esse resultado termina por não trazer nenhuma informação nova, uma vez que o tempo necessariamente tem que ser maior que zero em uma evolução, a desigualdade acima só reflete que $T^2 > 0$, o que é algo trivial e não diz qual é a escala de tempo, apenas que ela é maior que zero.

Para o *schedule* alternativo, os resultados apontam na mesma direção, diferindo apenas por serem referentes ao parâmetro $\varepsilon \ll 1$. Em (ROLAND; CERF, 2002), ε^2 é definido como a probabilidade de erro do algoritmo.

$$\begin{aligned} M(H_t) &= \frac{1}{T} \int_0^1 \frac{ds}{\varepsilon \Delta^2(s)} \frac{1}{4} \left[\left(1 - \tanh^2 \frac{\beta}{2}\right) \Delta^2(s) + \left(\varepsilon \Delta^2(s)\right)^2 \dot{\theta}^2(s) \right] \\ &= \frac{1}{4\varepsilon T} \left(1 - \tanh^2 \frac{\beta}{2}\right) + \varepsilon \frac{\sqrt{N-1}}{N} \arctan \sqrt{N-1}. \end{aligned} \quad (271)$$

A razão entre Q e $M(H_t)$ é

$$\begin{aligned}
\frac{Q}{M(H_t)} &= \frac{\varepsilon \left[\tanh^2 \frac{\beta}{2} \right] \frac{\sqrt{N-1}}{N} \arctan \sqrt{N-1}}{\frac{1}{4\varepsilon T} \left(1 - \tanh^2 \frac{\beta}{2} \right) + \frac{\varepsilon}{T} \frac{\sqrt{N-1}}{N} \arctan \sqrt{N-1}} \\
&= T \frac{\varepsilon \left[\tanh^2 \frac{\beta}{2} \right] \frac{\sqrt{N-1}}{N} \arctan \sqrt{N-1}}{\frac{1}{4\varepsilon} \left(1 - \tanh^2 \frac{\beta}{2} \right) + \frac{\varepsilon}{T} \frac{\sqrt{N-1}}{N} \arctan \sqrt{N-1}}.
\end{aligned} \tag{272}$$

A desigualdade resulta em

$$\begin{aligned}
1 &\geq \frac{\varepsilon \left[\tanh^2 \frac{\beta}{2} \right] \frac{\sqrt{N-1}}{N} \arctan \sqrt{N-1}}{\frac{1}{4\varepsilon} \left(1 - \tanh^2 \frac{\beta}{2} \right) + \varepsilon \frac{\sqrt{N-1}}{N} \arctan \sqrt{N-1}} \\
\Rightarrow \frac{1}{4\varepsilon} \left(1 - \tanh^2 \frac{\beta}{2} \right) &\geq \varepsilon \left[\tanh^2 \frac{\beta}{2} - 1 \right] \frac{\sqrt{N-1}}{N} \arctan \sqrt{N-1} \\
\Rightarrow \varepsilon^2 &\geq \frac{-N}{4\sqrt{N-1} \arctan \sqrt{N-1}}.
\end{aligned} \tag{273}$$

Novamente temos uma desigualdade que só reflete que $\varepsilon^2 > 0$, que significa que a probabilidade de erro na execução do algoritmo existe, o que é bastante trivial.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nessa dissertação investigamos se uma nova função de custo de preparo de estados quânticos apresentada por Girolami na referência (GIROLAMI, 2019), denominada de quanticidade de Girolami (QG), seria uma medida de eficiência para algoritmos de computação quântica ou se poderia trazer resultados relativos a novos limites de eficiência algorítmica ainda não obtidos. A função QG é um índice geométrico que quantifica esse custo em termos de quão diferente o processo de preparo é de um processo clássico, utilizando a coerência, a habilidade de um estado quântico preservar a superposição diante de interações externas (KONIK, 2021), como uma característica fundamental de diferenciação entre o que é clássico e o que é quântico.

Mais especificamente, procedemos à investigação tentando entender se a QG estaria relacionada com o tempo de execução de um algoritmo e com a complexidade computacional do processo. Isso foi motivado por encontrarmos na proposta demonstrações de que para tipos específicos de preparo, a quantidade aparecia tanto como um limite para quantidade de portas lógicas necessárias para a implementação, bem como um limite para o tempo de execução desse algoritmo. Outra motivação se deu por essas quantidades serem o principal objeto de pesquisa para se demonstrar a superioridade da computação quântica frente a sua contraparte clássica.

Em nossa abordagem, visamos investigar a QG por meio de três chaves interpretativas, sua relação com a informação quântica de Fisher, sua relação com QSL e a interpretando como uma medida de assimetria quântica. Ao investigar sua relação com a informação quântica de Fisher, averiguamos que a QG, quando calculada a partir da métrica de Bures, corresponde a integral do termo puramente quântico da informação de Fisher sob todo intervalo de tempo em que se dá a evolução,

$$Q = \int_0^T F_Q(t) dt, \quad (274)$$

onde denotamos a componente quântica da informação de Fisher por F_Q . Por ser uma medida da quantidade de informação sobre um parâmetro a ser estimado, identificamos que nesse caso o parâmetro seria o tempo, que daria margem para interpretar a função como uma quantidade de informação total sobre o tempo de execução do algoritmo. No entanto, verificamos que tal interpretação não é satisfatória porque uma estimativa precisa ser baseada em uma medida de um observável físico, e como o tempo não pode ser expresso por um operador hermitiano (HILGEVOORD, 1996, 1998, 2002), esse caminho não se demonstrou viável.

Quanto a segunda chave interpretativa, na proposta original (GIROLAMI, 2019) foi demonstrado que para a métrica de Bures, no caso de evoluções unitárias independentes do tempo, é possível relacionar tempo de execução com a QG por meio de uma desigualdade de Mandelstam-Tamm (MANDELSTAM; TAMM, 1945). Por essa

ser uma relação que originou todo um campo de pesquisa em QSL, investigamos se poderíamos usar QSL para obter uma relação entre QG e tempo de evolução. Usando como motivação a generalização de desigualdade de Mandelstam-Tamm obtida por Uhlmann (UHLMANN, 1992), conseguimos um time limit associado a QG, i.e., uma escala de tempo limitada inferiormente por

$$T \geq \frac{Q}{M(\tilde{H}_t)}, \quad (275)$$

onde $M(\tilde{H}_t)$ é uma função do gerador \tilde{H}_t associado a função QG dada por

$$M(\tilde{H}_t) = \frac{1}{T} \int_0^T dt \Delta \tilde{H}_t^2. \quad (276)$$

Como medida de quantidade de informação, concluímos no procedimento do trabalho que a abordagem mais viável para a interpretação da função é como medida de assimetria de estados quânticos, i.e., uma medida que quantifica o quanto uma simetria é quebrada por um estado quântico. Verificamos que a QG satisfaz todas as propriedades necessárias para ser uma medida de assimetria, e que ela mede o quanto o estado ρ_t durante uma evolução é assimétrico em relação à transformação de simetria do gerador \tilde{H}_t associado a QG. Através dessa abordagem conseguimos interpretar a relação da função com a coerência instantânea, uma vez que o estado ρ_t é assimétrico em relação ao gerador \tilde{H}_t se houver coerência na base de autoestados de \tilde{H}_t , ou seja, se $[\rho_t, \tilde{H}_t] \neq 0$, o que significa que podemos pensar na função como uma quantificação da assimetria.

Ainda restava verificar quais resultado obteríamos através de uma implementação prática destas novas informações. Visando isso, decidimos calcular explicitamente a função QG no contexto do modelo de computação quântica adiabática. Essa escolha se deu porque a análise de complexidade nesse modelo de computação funciona diferente da versão circuital de computação quântica, onde geralmente a complexidade é medida em termos do número de portas lógicas implementadas em um algoritmo ou no número de consultas a um oráculo. Em geral, a análise da complexidade no modelo adiabático se dá em termos do tempo de execução do algoritmo e depende das condições dadas pelo teorema adiabático. Com isso esperávamos um resultado que nos fornecesse um direcionamento nesse sentido. Com esse objetivo, decidimos calcular a QG para o algoritmo de busca de Grover, cujos resultados para a complexidade computacional são conhecidos e compatíveis tanto para o modelo circuital quanto para o modelo adiabático e serviriam como parâmetro de comparação para o resultado obtido.

No entanto, ao realizar os cálculos percebemos que para todo algoritmo adiabático a QG é nula. Isso se dá pela dinâmica adiabática ser simétrica em relação ao nível de energia, se inicializamos o algoritmo no estado fundamental do hamiltoniano, após

aplicar uma evolução conduzida por uma dinâmica adiabática, o estado permanecerá no estado fundamental, ou seja, a simetria não é quebrada. Para contornar o problema, decidimos calcular a QG para algo similar a um algoritmo adiabático. Utilizando o algoritmo de evolução sem transição (BERRY, M., 2009), um tipo de algoritmo que se utiliza do método de atalhos para a adiabaticidade, realizamos os cálculos para o algoritmo de Grover para essa implementação. Como nessa versão, um termo contra-adiabático é adicionado ao hamiltoniano, a simetria é quebrada e a QG deixa de ser nula.

Realizamos os cálculos explícitos adotando duas normas, a norma l_2 e a norma induzida da métrica de Bures, onde constatamos que os resultados para as duas são idênticos a menos de um fator numérico multiplicativo. A QG calculada a partir da métrica de Bures em todos os casos é metade do resultado obtido para a norma l_2 .

Os resultados foram obtidos inicializando o algoritmo com estados térmicos a fim de investigar a dependência da QG com a temperatura. Verificamos que o comportamento da função no regime de baixas temperaturas, $\beta \gg 1$ se torna idêntico ao de estados puros. Para o regime de altas temperaturas a QG se anula, que interpretamos como uma dissipação de informação sobre a assimetria do sistema.

Na implementação do algoritmo, utilizamos duas parametrizações para o tempo, a parametrização linear e o *schedule* utilizado no trabalho de Roland e Cerf. Como resultado, obtivemos duas dependências diferentes para a QG em relação à dimensão N do sistema. Para a parametrização linear, obtivemos que a QG escala com \sqrt{N} . Apesar desse resultado bater com a complexidade computacional do algoritmo de Grover relatada tanto na versão circuital, quanto na versão adiabática, seria imprudente fazer essa associação, porque em relação ao tempo total de execução do algoritmo a QG é inversamente proporcional, o que é muito mais similar as relações de *trade-off* entre tempo e energia relatadas no estudo de QSL em atalhos para a adiabaticidade (SANTOS; SARANDY, 2015; ZHENG *et al.*, 2016; CAMPBELL; DEFFNER, 2017). Ou seja, sendo a QG definida como uma função custo, isso implica que para reduzir o tempo de implementação do algoritmo, maior necessita ser a QG, ou em outras palavras, maior o custo. Quando aplicamos o *schedule* de Roland e Cerf, que foi a parametrização que permitiu atingir o *speed-up* quadrático na versão adiabática do algoritmo de Grover, i.e., o tempo de execução do algoritmo escalando com \sqrt{N} , obtivemos um resultado diferente. Nesse caso, conforme a dimensão do sistema escala, a QG escala com $1/\sqrt{N}$ e não existe dependência do tempo T .

Por fim, utilizamos o tempo limite derivado nesse trabalho para a QG quando adotada a métrica de Bures. Mas obtivemos resultados menos conclusivos ainda. Para estados puros, apesar de a desigualdade ser saturada, ele não chega em resultados explícitos para o tempo. Quando aplicamos a desigualdade para estados térmicos obtemos que, no caso da parametrização linear do tempo, o tempo de execução deve ser maior que zero, e na parametrização alternativa, que o parâmetro adimensional

$\varepsilon \ll 1$, que na formulação de Roland e Cerf se trata da probabilidade de erro do algoritmo, também deve ser maior que zero. Tais resultados, além de triviais, são inconclusivos.

Como perspectivas para o desenvolvimento posterior dessa pesquisa, esperamos calcular explicitamente a função QG para outros algoritmos de computação quântica que tenham complexidade computacional e implementação conhecidas na literatura para melhor interpretação da função. Também esperamos investigar a relação obtida para o tempo limite associado a função a QG e se ele pode trazer resultados.

REFERÊNCIAS

- ACCONCIA, T. V.; BONANÇA, M. V. S.; DEFFNER, S. Shortcuts to adiabaticity from linear response theory. **Phys. Rev. E**, v. 92, p. 042148, 2015.
- ADESSO, G.; BROMLEY, T. R.; CIANCIARUSO, M. Measures and applications of quantum correlations. **J. Phys. A: Math. Theor.**, v. 49, n. 47, p. 473001, 2020.
- AHARONOV, D.; DAM, W. v.; KEMPE, J.; LANDAU, Z.; LLOYD, S.; REGEV, O. Adiabatic Quantum Computation is Equivalent to Standard Quantum Computation. **SIAM Journal on Computing**, v. 37, n. 1, p. 166–194, 2007.
- AHARONOV, Y.; BOHM, D. Time in the Quantum Theory and the Uncertainty Relation for Time and Energy. **Phys. Rev.**, American Physical Society, v. 122, p. 1649–1658, 5 jun. 1961.
- ALBASH, T.; LIDAR, D. A. Adiabatic quantum computation. **Reviews of Modern Physics**, American Physical Society (APS), v. 90, n. 1, jan. 2018.
- AMARI, S.; NAGAOKA, H. **Methods of Information Geometry**. [S./]: American Mathematical Society, 2007.
- ANANDAN, J.; AHARONOV, Y. Geometry of quantum evolution. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 65, p. 1697–1700, 14 out. 1990.
- ANDRECUT, M.; ALI, M. Maximum Speed of Quantum Evolution. **International Journal of Theoretical Physics**, v. 43, p. 969–974, abr. 2004.
- APOLLONI, B.; CARVALHO, C.; DE FALCO, D. Quantum stochastic optimization. **Stochastic Processes and their Applications**, v. 33, n. 2, p. 233–244, 1989. ISSN 0304-4149.
- APOLLONI, B.; CESA-BIANCHI, N.; FALCO, D. de. A numerical implementation of Quantum Annealing. *In*: ALBEVERIO, S.; AL., et (Ed.). **Stochastic Processes, Physics and Geometry, Proceedings of the Ascona/Locarno Conference, 4-9 July 1988**. [S./]: World Scientific, 1990. p. 97–111.
- BARNUM, H. N. **Quantum Information Theory**. 1998. Tese (Doutorado) – University of New Mexico.
- BARTLETT, S. D.; RUDOLPH, T.; SPEKKENS, R. W.; TURNER, P. S. Degradation of a quantum reference frame. **New Journal of Physics**, IOP Publishing, v. 8, n. 4, p. 58–58, abr. 2006.
- BAUMGRATZ, T.; CRAMER, M.; PLENIO, M. B. Quantifying Coherence. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 113, p. 140401, 14 set. 2014.

BEAU, M.; CAMPO, A. d. Nonlinear Quantum Metrology of Many-Body Open Systems. **Physical Review Letters**, American Physical Society (APS), v. 119, n. 1, jul. 2017.

BEAUDRY, Normand J.; RENNER, R. An intuitive proof of the data processing inequality. **Quantum Inf. Comput.**, v. 12, p. 432–441, 2011.

BELL, J. S. On the Problem of Hidden Variables in Quantum Mechanics. **Rev. Mod. Phys.**, v. 38, n. 3, p. 447, 1966.

BENGTSSON, I.; ZYCZKOWSKI, K. **Geometry of Quantum States**. 1. ed. [S.l.]: Cambridge University Press, 2007.

BENIOFF, P. Quantum Mechanical Models of Turing Machines That Dissipate No Energy. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 48, p. 1581–1585, 23 jun. 1982.

BENIOFF, P. The computer as a physical system: A microscopic quantum mechanical Hamiltonian model of computers as represented by Turing machines. **Journal of Statistical Physics**, v. 22, n. 5, p. 563–591, 1980. ISSN 1572-9613.

BERRY, M. Transitionless quantum driving. **J. Phys. A: Math. Theor.**, v. 42, p. 365303, 2009.

BERRY, M. V. Quantal Phase Factors Accompanying Adiabatic Changes. **Proceedings of the Royal Society of London Series A**, v. 392, n. 1802, p. 45–57, mar. 1984.

BHATIA, R. **Matrix Analysis**. Berlin: Springer, 1997.

BHATTACHARYYA, K. Quantum decay and the Mandelstam-Tamm-energy inequality. **Journal of Physics A: Mathematical and General**, v. 16, n. 13, p. 2993, set. 1983.

BOHR, N. On the Constitutions of Atoms and Molecules. Pt. I. **Philosophical Magazine**, v. 26, p. 1–25, dez. 1913.

BOIXO, S.; FLAMMIA, S. T.; CAVES, C. M.; GEREMIA, JM. Generalized Limits for Single-Parameter Quantum Estimation. **Physical Review Letters**, American Physical Society (APS), v. 98, n. 9, fev. 2007.

BORN, M.; FOCK, V. Beweis des Adiabatenatzes. **Zeitschrift fur Physik**, v. 51, n. 3-4, p. 165–180, mar. 1928.

BRAUNSTEIN, S. L.; CAVES, C. M.; MILBURN, G.J. Generalized Uncertainty Relations: Theory, Examples, and Lorentz Invariance. **Annals of Physics**, v. 247, n. 1, p. 135–173, 1996. ISSN 0003-4916.

BRAUNSTEIN, S. L.; CAVES, Carlton M. Statistical distance and the geometry of quantum states. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 72, p. 3439–3443, 22 mai. 1994.

BRAUNSTEIN, S. L.; MILBURN, G. J. Dynamics of statistical distance: Quantum limits for two-level clocks. **Phys. Rev. A**, American Physical Society, v. 51, p. 1820–1826, 3 mar. 1995.

BREMERMANN, H. J. Quantum noise and information. *In*: PROCEEDINGS of the Fifth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Volume 4: Biology and Problems of Health. Berkeley, Calif.: University of California Press, 1967. p. 15–20.

BROADBENT, A.; SCHAFFNER, C. Quantum cryptography beyond quantum key distribution. **Designs, Codes and Cryptography**, v. 78, p. 351–382, 2016.

BRODY, D. C. Elementary derivation for passage times. **Journal of Physics A: Mathematical and General**, IOP Publishing, v. 36, n. 20, p. 5587–5593, mai. 2003.

BROOKE, J.; BITKO, D.; F., T.; NULL; AEPPLI, G. Quantum Annealing of a Disordered Magnet. **Science**, v. 284, n. 5415, p. 779–781, 1999.

BROOKE, J.; ROSENBAUM, T. F.; AEPPLI, G. Tunable quantum tunnelling of magnetic domain walls. **Nature**, v. 413, n. 6856, p. 610–613, 2001. ISSN 1476-4687.

BURES, D. An extension of Kakutani's theorem on infinite product measures to the tensor product of semifinite w^* -algebras. **Trans. Am. Math. Soc.**, v. 135, p. 199, 1969.

CAMPBELL, S.; CHIARA, G. de; PATERNOSTRO, M.; PALMA, G. M.; FAZIO, R. Shortcut to adiabaticity in the Lipkin-Meshkov-Glick model. **Phys. Rev. Lett.**, v. 114, p. 177206, 2015.

CAMPBELL, S.; DEFFNER, S. Trade-off between speed and cost in shortcuts to adiabaticity. **Phys. Rev. Lett.**, v. 118, p. 100601, 2017.

CAMPO, A. d.; BOSHIER, M. G. Shortcuts to adiabaticity in a time-dependent box. **Sci. Rep.**, v. 2, p. 648, 2012.

CARNOT, S. **Réflexions sur la Puissance Motrice du Feu**. [S./]: Bachelier, 1824.

CHEN, X.; TORRONTAGUI, E.; STEFANATOS, D.; LI, J.; MUGA, J. G. Optimal trajectories for efficient atomic transport without final excitation. **Phys. Rev. A**, v. 84, p. 043415, 2011.

CHITAMBAR, E.; GOUR, G. Quantum resource theories. **Reviews of Modern Physics**, American Physical Society (APS), v. 91, p. 025001, 2 2019.

CHUANG, I.; NIELSEN, M. **Quantum Computation and Quantum Information**. Cambridge: Cambridge University Press, 2000. ISBN 978-0521635035.

CLAPEYRON, E. Mémoire sur la Puissance Motrice de la Chaleur. French. **Journal de l'École Royale Polytechnique**, De l'Imprimerie Royale, Paris, v. XIV, Vingt-troisième cahier, p. 153–190, 1834.

COULAMY, I. B.; SANTOS, A. C.; HEN, I.; SARANDY, M. S. Energetic cost of superadiabatic quantum computation. **Front. ICT**, v. 3, p. 19, 2016.

DAM, W. v.; MOSCA, M.; VAZIRANI, U. How powerful is adiabatic quantum computation? *In*: PROCEEDINGS 42nd IEEE Symposium on Foundations of Computer Science. [S.l.: s.n.], 2001. p. 279–287.

DEFFNER, S. Shortcuts to adiabaticity: suppression of pair production in driven Dirac dynamics. **New J. Phys.**, v. 18, p. 012001, 2016.

DEFFNER, S.; CAMPBELL, S. Quantum speed limits: from Heisenberg's uncertainty principle to optimal quantum control. **Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical**, IOP Publishing, v. 50, n. 45, p. 453001, out. 2017.

DEFFNER, S.; JARZYNSKI, C.; CAMPO, A. d. Classical and quantum shortcuts to adiabaticity for scale-invariant driving. **Phys. Rev. X**, v. 4, p. 021013, 2014.

DEFFNER, S.; LUTZ, E. Energy–time uncertainty relation for driven quantum systems. **Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical**, IOP Publishing, v. 46, n. 33, p. 335302, jul. 2013.

DEFFNER, S.; LUTZ, E. Quantum Speed Limit for Non-Markovian Dynamics. **Physical Review Letters**, American Physical Society (APS), v. 111, n. 1, jul. 2013.

DEMIRPLAK, M.; RICE, S. A. Adiabatic population transfer with control fields. **J. Chem. Phys. A**, v. 107, p. 9937, 2003.

DEMIRPLAK, M.; RICE, S. A. Assisted adiabatic passage revisited. **J. Phys. Chem. B**, v. 109, p. 6838, 2005.

DEUTSCH, D. Quantum theory, the Church-Turing principle and the universal quantum computer. **Proceedings of the Royal Society of London Series A**, v. 400, n. 1818, p. 97–117, jul. 1985.

DEUTSCH, D.; JOZSA, R. Rapid Solution of Problems by Quantum Computation. **Proceedings of the Royal Society of London Series A**, v. 439, n. 1907, p. 553–558, dez. 1992.

DEUTSCH, D.; PENROSE, R. Quantum computational networks. **Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences**, v. 425, n. 1868, p. 73–90, 1989.

DEVORE, J. L. **Probability and Statistics for Engineering and the Sciences**. 8. ed. [S.l.]: Brooks/Cole, 1994.

EHRENFEST, P. Over adiabatiscbe veranderingen van een stelsel in verband met de theorie der quanta. **Verslagen van de Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam**, v. 25, p. 412, 1916.

EINSTEIN, A. Beiträge zur Quantentheorie. **Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft**, v. 16, p. 826, 1914.

EINSTEIN, A.; PODOLSKI, B.; ROSEN, N. Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete? **Phys. Rev.**, v. 47, n. 10, p. 777–780, 1935.

FARHI, E.; GOLDSTONE, J.; GUTMANN, S.; LAPAN, J.; LUNDGREN, A.; PREDA, D. A Quantum Adiabatic Evolution Algorithm Applied to Random Instances of an NP-Complete Problem. **Science**, v. 292, n. 5516, p. 472–475, 2001.

FARHI, E.; GOLDSTONE, J.; GUTMANN, S.; SIPSER, M. **Quantum Computation by Adiabatic Evolution**. [S.l.: s.n.], 2000.

FEYNMAN, R. P. Simulating physics with computers. **International Journal of Theoretical Physics**, v. 21, n. 6, p. 467–488, 1982. ISSN 1572-9575.

FLEMING, G. N. A unitarity bound on the evolution of nonstationary states. **Il Nuovo Cimento A (1965-1970)**, v. 16, p. 232, 1973.

FOA, U. G.; CONVERSE JR, John; TÖRNBLOM, K. Y.; FOA, E. B. (Ed.). **Resource Theory: Explorations and Applications**. San Diego, CA: Academic Press, 1993.

FRÖWIS, F. Kind of entanglement that speeds up quantum evolution. **Physical Review A**, American Physical Society (APS), v. 85, n. 5, mai. 2012.

GIOVANNETTI, V; LLOYD, S; MACCONE, L. The role of entanglement in dynamical evolution. **Europhysics Letters (EPL)**, IOP Publishing, v. 62, n. 5, p. 615–621, jun. 2003.

GIOVANNETTI, V.; LLOYD, S.; MACCONE, L. Advances in quantum metrology. **Nature Photonics**, Springer Science e Business Media LLC, v. 5, n. 4, p. 222–229, mar. 2011.

GIOVANNETTI, V.; LLOYD, S.; MACCONE, L. Quantum limits to dynamical evolution. **Physical Review A**, v. 67, out. 2002.

GIOVANNETTI, V.; LLOYD, S.; MACCONE, L. Quantum Metrology. **Physical Review Letters**, American Physical Society (APS), v. 96, n. 1, jan. 2006.

GIOVANNETTI, V.; LLOYD, S.; MACCONE, L. The speed limit of quantum unitary evolution. **Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics**, v. 6, n. 8, s807, jul. 2004.

GIROLAMI, D. How Difficult is it to Prepare a Quantum State? **Phys. Rev. Lett.**, v. 122, n. 1, p. 010505, 2019.

GOUR, G.; SPEKKENS, R. W. The resource theory of quantum reference frames: manipulations and monotones. **New Journal of Physics**, IOP Publishing, v. 10, n. 3, p. 033023, mar. 2008.

GROVER, L. K. **A fast quantum mechanical algorithm for database search.** [S.l.: s.n.], 1996.

GUARIENTI, V. P. **Computação Quântica Adiabática em Sistemas Relativísticos.** 2016. Dissertação de Mestrado – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, Santa Catarina, Brasil.

GUÉRY-ODELIN, D.; RUSCHHAUPT, A.; KIELY, A.; TORRONTÉGUI, E.; MARTÍNEZ-GARAOT, S.; MUGA, J. G. Shortcuts to adiabaticity: Concepts, methods, and applications. **Reviews of Modern Physics**, American Physical Society (APS), v. 91, n. 4, out. 2019.

HEISENBERG, W. Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik. **Zeitschrift für Physik**, v. 43, n. 3-4, p. 172–198, mar. 1927.

HELSTROM, C. W. Quantum detection and estimation theory. **Journal of Statistical Physics**, v. 1, n. 2, p. 231–252, 1969. ISSN 1572-9613.

HILGEVOORD, J. The uncertainty principle for energy and time. **American Journal of Physics**, v. 64, n. 12, p. 1451–1456, dez. 1996. ISSN 0002-9505.

HILGEVOORD, J. The uncertainty principle for energy and time. II. **American Journal of Physics**, v. 66, n. 5, p. 396–402, mai. 1998. ISSN 0002-9505.

HILGEVOORD, J. Time in quantum mechanics. **American Journal of Physics**, v. 70, n. 3, p. 301–306, mar. 2002. ISSN 0002-9505.

HORODECKI, R.; HORODECKI, P.; HORODECKI, M.; HORODECKI, K. Quantum entanglement. **Rev. Mod. Phys.**, v. 81, n. 2, p. 865, 2009.

JARZYNSKI, C. Generating shortcuts to adiabaticity in quantum and classical dynamics. **Phys. Rev. A**, v. 88, p. 040101, 2013.

JONES, P. J.; KOK, P. Geometric derivation of the quantum speed limit. **Physical Review A**, American Physical Society (APS), v. 82, n. 2, ago. 2010.

JOZSA, R. Fidelity for Mixed Quantum States. **Journal of Modern Optics**, Taylor Francis, v. 41, n. 12, p. 2315–2323, 1994.

KAKUTANI, S. On equivalence of infinite product measures. **Ann. Math.**, v. 49, p. 214, 1948.

KATO, T. On the Adiabatic Theorem of Quantum Mechanics. **Journal of the Physical Society of Japan**, v. 5, n. 6, p. 435–439, 1950.

KIELY, A.; BENSENY, A.; BUSCH, T.; RUSCHHAUPT, A. Shaken not stirred: creating exotic angular momentum states by shaking an optical lattice. **J. Phys B: At., Mol. Opt. Phys.**, v. 49, p. 215003, 2016.

KIELY, A.; MCGUINNESS, J. P. L.; MUGA, J. G.; RUSCHHAUPT, A. Fast and stable manipulation of a charged particle in a penning trap. **J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.**, v. 48, p. 075503, 2015.

KIRKPATRICK, S.; GELATT JR., C. D.; VECCHI, M. P. Optimization by simulated annealing. **Science**, v. 220, p. 671–680, 1983.

KONIK, R. Quantum coherence confined. **Nature Physics**, v. 17, n. 6, p. 669–670, 2021.

KOSIŃSKI, P.; ZYCH, M. Elementary proof of the bound on the speed of quantum evolution. **Physical Review A**, American Physical Society (APS), v. 73, n. 2, fev. 2006.

LEVITIN, L.; TOFFOLI, T. Fundamental Limit on the Rate of Quantum Dynamics: The Unified Bound Is Tight. **Physical review letters**, v. 103, p. 160502, out. 2009.

LEVITIN, L. B.; TOFFOLI, T.; WALTON, Z. **Maximum speed of quantum gate operation**. [S.l.: s.n.], 2003.

LLOYD, S. **Programming the Universe: A Quantum Computer Scientist Takes on the Cosmos**. [S.l.]: Vintage Books USA, 2007. ISBN 978-0099455370.

LLOYD, S. Ultimate physical limits to computation. **Nature**, Springer Science e Business Media LLC, v. 406, n. 6799, p. 1047–1054, ago. 2000.

LUO, S. Wigner-Yanase skew information and uncertainty relations. *Phys. Rev. Lett.* 91, 180403. **Physical review letters**, v. 91, p. 180403, nov. 2003.

MANDELSTAM, L. I.; TAMM, I. E. The uncertainty relation between energy and time in nonrelativistic quantum mechanics. **J. Phys. (USSR)**, v. 9, p. 249–254, 1945. [English version].

MARGOLUS, N.; LEVITIN, L. B. The maximum speed of dynamical evolution. **Physica D: Nonlinear Phenomena**, Elsevier BV, v. 120, n. 1-2, p. 188–195, set. 1998.

MARTÍNEZ-GARAOT, S.; RUSCHHAUPT, A.; GILLET, J.; BUSCH, T.; MUGA, J. G. Fast quasiadiabatic dynamics. **Phys. Rev. A**, v. 92, p. 043406, 2015.

MARVIAN, I.; SPEKKENS, R. W. Extending Noether's theorem by quantifying the asymmetry of quantum states. **Nature Communications**, Springer Science e Business Media LLC, v. 5, n. 1, mai. 2014.

MASUDA, S.; NAKAMURA, K. Acceleration of adiabatic quantum dynamics in electromagnetic fields. **Phys. Rev. A**, v. 84, p. 043434, 2011.

MASUDA, S.; NAKAMURA, K. Fast-forward of adiabatic dynamics in quantum mechanics. **Proc. R. Soc. A**, v. 466, p. 1135, 2010.

MASUDA, S.; NAKAMURA, K.; CAMPO, A. d. High-fidelity rapid ground-state loading of an ultracold gas into an optical lattice. **Phys. Rev. Lett.**, v. 113, p. 063003, 2014.

MASUDA, S.; RICE, S. A. Fast-Forward Assisted STIRAP. **J. Phys. Chem. A**, v. 119, p. 3479, 2015.

MESSIAH, A. **Quantum mechanics**. [S./]: Dover Publications, 2014. ISBN 9780486409245.

MODI, K.; BRODUTCH, A.; CABLE, H.; PATEREK, T.; VEDRAL, V. The classical-quantum boundary for correlations: Discord and related measures. **Rev. Mod. Phys.**, v. 84, n. 4, p. 1655, 2012.

MOROZOVA, E. A.; CHENTSOV, N. N. Markov Invariant Geometry on Manifolds of States. **Journal of Mathematical Sciences**, v. 56, p. 2648–2669, 1991.

OHLSSON, N.; KRÖLL, S.; MOISEEV, S. A. Delayed single-photon self-interference — A double slit experiment in the time domain. **Coherence and Quantum Optics VIII**. Springer, US, p. 383–384, 2003.

- OLLIVIER, H.; ZUREK, W. H. Quantum Discord: A Measure of the Quantumness of Correlations. **Phys. Rev. Lett.**, v. 88, n. 1, p. 017901, 2001.
- PARIS, M. G. A. Quantum estimation for quantum technology. **International Journal of Quantum Information**, v. 07, p. 125–137, 2009.
- PATRA, A.; JARZYNSKI, C. Classical and quantum shortcuts to adiabaticity in a tilted piston. **J. Phys. Chem. B**, v. 121, p. 3403, 2016.
- PÉREZ-GARCÍA, D.; WOLF, M. M.; PETZ, D.; RUSKAI, M. B. Contractivity of positive and trace-preserving maps under L_p norms. **Journal of Mathematical Physics**, AIP Publishing, v. 47, n. 8, ago. 2006. ISSN 1089-7658.
- PETERSEN, P. **Riemannian Geometry**. 1. ed. [S.l.]: Springer New York, NY, 1998. p. x, 198. (Graduate Texts in Mathematics).
- PETZ, D. Monotone metrics on matrix spaces. **Linear Algebra and its Applications**, v. 244, p. 81–96, 1996. ISSN 0024-3795.
- PLANCK, M. Ueber das Gesetz der Energieverteilung im Normalspectrum. **Annalen der Physik**, v. 309, n. 3, p. 553–563, jan. 1901.
- POWLES, J G. The Adiabatic Fast Passage Experiment in Magnetic Resonance. **Proceedings of the Physical Society**, v. 71, n. 3, p. 497, mar. 1958.
- RANKINE, W. J. **A Manual of Applied Mechanics**. [S.l.]: London e Glasgow, 1859.
- ROBERTSON, H. P. The Uncertainty Principle. **Phys. Rev.**, American Physical Society, v. 34, p. 163–164, 1 jul. 1929.
- ROLAND, J.; CERF, N. J. Quantum search by local adiabatic evolution. **Physical Review A**, American Physical Society (APS), v. 65, n. 4, mar. 2002.
- SABERI, H.; OPATRNY, T.; MØLMER, K.; CAMPO, A. d. Adiabatic tracking of quantum many-body dynamics. **Phys. Rev. A**, v. 90, p. 060301, 2014.
- SANTOS, A. C.; SARANDY, M. S. Superadiabatic Controlled Evolutions and Universal Quantum Computation. **Scientific Reports**, Springer Science e Business Media LLC, v. 5, n. 1, out. 2015.
- SANTOS, A. C.; SILVA, R. D.; SARANDY, M. S. Shortcut to adiabatic gate teleportation. **Phys. Rev. A**, v. 93, p. 012311, 2016.
- SARANDY, M. S.; WU, L.-A.; LIDAR, D. A. Consistency of the Adiabatic Theorem. **Quantum Information Processing**, v. 3, n. 6, p. 331–349, dez. 2004.

SCHRÖDINGER, E. Discussion of Probability Relations between Separated Systems. **Proc. Camb. Phils. Soc.**, v. 31, n. 4, p. 555–563, 1935.

SELS, D.; POLKOVNIKOV, A. Minimizing irreversible losses in quantum systems by local counterdiabatic driving. **PNAS**, v. 114, p. 20, 2017.

SHOR, P. W. Polynomial-Time Algorithms for Prime Factorization and Discrete Logarithms on a Quantum Computer. **SIAM J.Sci.Statist.Comput.**, v. 26, n. 5, p. 1484–1509, 1997.

STEFANATOS, D. Optimal shortcuts to adiabaticity for a quantum piston. **Automatica**, v. 49, p. 3079, 2013.

TADDEI, M. M.; ESCHER, B. M.; DAVIDOVICH, L.; MATOS FILHO, R. L. de. Quantum Speed Limit for Physical Processes. **Physical Review Letters**, American Physical Society (APS), v. 110, n. 5, jan. 2013.

TORRONTEGUI, E.; CHEN, X.; MODUGNO, M.; SCHMIDT, S.; RUSCHHAUPT, A.; MUGA, J. G. Fast transport of Bose-Einstein condensates. **New J. Phys.**, v. 14, p. 013031, 2012.

TORRONTEGUI, E.; MARTÍNEZ-GARAOT, S.; MUGA, J. G. Hamiltonian engineering via invariants and dynamical algebra. **Phys. Rev. A**, v. 89, p. 043408, 2014.

TORRONTEGUI, E.; MARTÍNEZ-GARAOT, S.; RUSCHHAUPT, A.; MUGA, J. G. Shortcuts to adiabaticity: Fast-forward approach. **Phys. Rev. A**, v. 86, p. 013601, 2012.

TÓTH, G.; PETZ, D. Extremal properties of the variance and the quantum Fisher information. **Physical Review A**, American Physical Society (APS), v. 87, n. 3, mar. 2013.

UFFINK, J. The rate of evolution of a quantum state. **American Journal of Physics**, v. 61, n. 10, p. 935–936, out. 1993. ISSN 0002-9505.

UHLMANN, A. An energy dispersion estimate. **Physics Letters A**, v. 161, n. 4, p. 329–331, 1992. ISSN 0375-9601.

UHLMANN, A. The “transition probability” in the state space of a \ast -algebra. **Reports on Mathematical Physics**, v. 9, n. 2, p. 273–279, 1976. ISSN 0034-4877.

UOLA, R.; COSTA, A. C. S.; NGUYEN, H. C.; GÜHNE, O. Quantum steering. **Rev. Mod. Phys.**, v. 92, n. 1, p. 015001, 2020.

VACCARO, J. A.; ANSELMINI, F.; WISEMAN, H. M.; JACOBS, K. Tradeoff between extractable mechanical work, accessible entanglement, and ability to act as a

reference system, under arbitrary superselection rules. **Phys. Rev. A**, American Physical Society, v. 77, p. 032114, 3 mar. 2008.

VAIDMAN, L. Minimum time for the evolution to an orthogonal quantum state. **American Journal of Physics**, v. 60, n. 2, p. 182–183, fev. 1992. ISSN 0002-9505.

WISEMAN, H. M.; JONES, S.J.; DOHERTY, A. C. Steering, Entanglement, Nonlocality, and the Einstein-Podolsky-Rosen Paradox. **Phys. Rev. Lett.**, v. 98, n. 14, p. 140402, 2007.

WU, N.; NANDURI, A.; RABITZ, H. Optimal suppression of defect generation during a passage across a quantum critical point. **Phys. Rev. B**, v. 91, p. 041115, 2015.

XIAO, G.; GONG, J. Suppression of work fluctuations by optimal control: An approach based on Jarzynski's equality. **Phys. Rev. E**, v. 90, p. 052132, 2014.

Y., Sixia. **Quantum Fisher Information as the Convex Roof of Variance**. [*S.l.: s.n.*], 2013.

ZANDER, C.; PLASTINO, A.R.; CASAS, Mirley. Entanglement and the speed of evolution of multi-partite quantum systems. **Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical**, v. 40, p. 2861, fev. 2007.

ZHANG, C. *et al.* Detecting metrologically useful asymmetry and entanglement by a few local measurements. **Physical Review A**, American Physical Society (APS), v. 96, n. 4, out. 2017.

ZHENG, Y.; CAMPBELL, S.; DE CHIARA, G.; POLETTI, D. Cost of counterdiabatic driving and work output. **Phys. Rev. A**, v. 94, p. 042132, 2016.

ZWIERZ, M. Comment on "Geometric derivation of the quantum speed limit". **Physical Review A**, v. 86, p. 016101, 2012.

ZWIERZ, M.; PÉ REZ-DELGADO, C. A.; KOK, P. General Optimality of the Heisenberg Limit for Quantum Metrology. **Physical Review Letters**, American Physical Society (APS), v. 105, n. 18, out. 2010.

APÊNDICE A – TEOREMA ADIABÁTICO

A.1 CASO NÃO-DEGENERADO

Considere um sistema cuja evolução é governada pela equação de Schrödinger dependente do tempo,

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H(t) |\psi(t)\rangle, \quad (277)$$

onde $H(t)$ é o hamiltoniano e $|\psi(t)\rangle \in \mathcal{H}^D$ é um estado quântico do sistema que pertence a um espaço de Hilbert D-dimensional.

Assumindo que o espectro de $H(t)$ seja discreto e não degenerado, a base instantânea de autoestados pode ser expressa como

$$H(t) |n(t)\rangle = E_n(t) |n(t)\rangle, \quad (278)$$

onde $\langle k(t)|n(t)\rangle = \delta_{kn}$, $k, n = 0, 1, 2, \dots, D$ e $E_n(t)$ são autoenergias instantâneas.

Expandindo $|\psi(t)\rangle$ em termos da base de autoenergias de $H(t)$,

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{n=1}^D a_n(t) e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' E_n(t')} |n(t)\rangle, \quad (279)$$

onde $a_n(t)$ é uma função complexa do tempo tal que $\sum_{n=1}^D |a_n(t)|^2 = 1$. Substituindo a equação (279) em (277), temos

$$H(t) \left(\sum_{n=1}^D a_n(t) e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' E_n(t')} |n(t)\rangle \right) = i\hbar \frac{d}{dt} \left(\sum_{n=1}^D a_n(t) e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' E_n(t')} |n(t)\rangle \right) \quad (280)$$

$$\underbrace{\sum_{n=1}^D a_n(t) e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' E_n(t')} E_n(t) |n(t)\rangle}_{\text{Termo 1}} = i\hbar \left(\sum_{n=1}^D \dot{a}_n(t) e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' E_n(t')} |n(t)\rangle \right. \\ \left. + \underbrace{\sum_{n=1}^D a_n(t) \frac{-i}{\hbar} E_n(t) e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' E_n(t')} |n(t)\rangle}_{\text{Termo 2}} \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^D a_n(t) e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' E_n(t')} |\dot{n}(t)\rangle \right). \quad (281)$$

Observando que os dois termos sublinhados se anulam, chegamos em

$$\sum_{n=1}^D \dot{a}_n(t) e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' E_n(t')} |n(t)\rangle = - \sum_{n=1}^D a_n(t) e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' E_n(t')} |\dot{n}(t)\rangle. \quad (282)$$

Multiplicando a equação acima por $\langle k(t)|$,

$$\begin{aligned} \dot{a}_k(t) e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' E_k(t')} &= - \sum_{n=1}^D a_n(t) e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' E_n(t')} \langle k(t)|\dot{n}(t)\rangle \\ \implies \dot{a}_k(t) &= - \sum_{n=1}^D a_n(t) e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' \Delta_{nk}(t')} \langle k(t)|\dot{n}(t)\rangle, \end{aligned} \quad (283)$$

onde definiremos $\Delta_{nk}(t) \equiv E_n(t) - E_k(t)$ como o gap entre as autoenergias do sistema.

É possível reescrever $\langle k(t)|\dot{n}(t)\rangle$ derivando a equação (278) e multiplicando por $\langle k(t)|$,

$$\begin{aligned} \langle k(t)| \left(\dot{H}(t) |n(t)\rangle + H(t) |\dot{n}(t)\rangle \right) &= \langle k(t)| \left(\dot{E}_n(t) |n(t)\rangle + E_n(t) |\dot{n}(t)\rangle \right) \\ \langle k(t)| \dot{H}(t) |n(t)\rangle + \langle k(t)| H(t) |\dot{n}(t)\rangle &= \dot{E}_n(t) \langle k(t)|n(t)\rangle + E_n(t) \langle k(t)|\dot{n}(t)\rangle \\ \langle k(t)| \dot{H}(t) |n(t)\rangle + E_k(t) \langle k(t)|\dot{n}(t)\rangle &= \dot{E}_n(t) \delta_{kn} + E_n(t) \langle k(t)|\dot{n}(t)\rangle \\ \langle k(t)| \dot{H}(t) |n(t)\rangle &= \dot{E}_n(t) \delta_{kn} + \Delta_{nk}(t) \langle k(t)|\dot{n}(t)\rangle. \end{aligned} \quad (284)$$

Da equação acima podemos concluir que para $n = k$,

$$\langle n(t)| \dot{H}(t) |n(t)\rangle = \dot{E}_n(t), \quad (285)$$

e para $n \neq k$,

$$\langle k(t)| \dot{H}(t) |n(t)\rangle = \Delta_{nk}(t) \langle k(t)|\dot{n}(t)\rangle. \quad (286)$$

Isolando $\langle k(t)|\dot{n}(t)\rangle$ da equação acima, obtemos

$$\langle k(t)|\dot{n}(t)\rangle = \frac{\langle k(t)| \dot{H}(t) |n(t)\rangle}{\Delta_{nk}(t)}. \quad (287)$$

Substituindo na equação (283) e separando o termo $n = k$, chegamos à seguinte expressão

$$\dot{a}_k(t) = -a_k(t) \langle k(t)|\dot{k}(t)\rangle - \sum_{n \neq k}^D a_n(t) \frac{\langle k(t)| \dot{H}(t) |n(t)\rangle}{\Delta_{nk}(t)} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' \Delta_{nk}(t')}. \quad (288)$$

A equação acima descreve a evolução temporal de cada coeficiente $a_k(t)$.

Manipulemos a equação (288) para obter uma forma mais adequada para a aproximação.

Primeiro, multipliquemos por um fator de fase $e^{-i\gamma_k(t)}$, onde $\gamma_k(t) = \int_0^t dt' \langle k(t)|\dot{k}(t)\rangle$,

$$\dot{a}_k(t) e^{-i\gamma_k(t)} = -a_k(t) \langle k(t)|\dot{k}(t)\rangle e^{-i\gamma_k(t)} - \sum_{n \neq k}^D a_n(t) \frac{\langle k(t)| \dot{H}(t) |n(t)\rangle}{\Delta_{nk}(t)} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' \Delta_{nk}(t')} e^{-i\gamma_k(t)}, \quad (289)$$

observemos que

$$\frac{d}{dt} \left(a_k(t) e^{-i\gamma_k(t)} \right) = \dot{a}_k(t) e^{-i\gamma_k(t)} + a_k(t) \langle k(t) | \dot{k}(t) \rangle e^{-i\gamma_k(t)}, \quad (290)$$

e façamos a substituição na equação (289), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(a_k(t) e^{-i\gamma_k(t)} \right) &= - \sum_{n \neq k}^D a_n(t) \frac{\langle k(t) | \dot{H}(t) | n(t) \rangle}{\Delta_{nk}(t)} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' \Delta_{nk}(t')} e^{-i\gamma_k(t)} \\ &= - \sum_{n \neq k}^D a_n(t) \frac{F_{nk}(t)}{\Delta_{nk}(t)} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' \Delta_{nk}(t')}, \end{aligned} \quad (291)$$

em que definimos $F_{nk}(t) = a_n(t) \langle k(t) | \dot{H}(t) | n(t) \rangle e^{-i\gamma_k(t)}$.

Tomando a integral de ambos lados da equação de 0 até T , onde T é o tempo total da evolução,

$$\int_0^T dt \frac{d}{dt} \left(a_k(t) e^{-i\gamma_k(t)} \right) = - \int_0^T dt \sum_{n \neq k}^D \frac{F_{nk}(t)}{\Delta_{nk}(t)} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' \Delta_{nk}(t')} \quad (292)$$

$$\begin{aligned} \implies a_k(T) e^{-i\gamma_k(T)} &= a_k(0) - i\hbar \sum_{n \neq k}^D \int_0^T dt \frac{F_{nk}(t)}{\Delta_{nk}^2(t)} \frac{d}{dt} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' \Delta_{nk}(t')} \\ &= a_k(0) - i\hbar \sum_{n \neq k}^D \int_0^T dt \frac{d}{dt} \left(\frac{F_{nk}(t)}{\Delta_{nk}^2(t)} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' \Delta_{nk}(t')} \right) \\ &\quad + i\hbar \sum_{n \neq k}^D \int_0^T dt \left(\frac{d}{dt} \frac{F_{nk}(t)}{\Delta_{nk}^2(t)} \right) e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' \Delta_{nk}(t')}. \end{aligned} \quad (293)$$

A integral do segundo termo do lado direito da equação é trivial,

$$\int_0^T dt \frac{d}{dt} \left(\frac{F_{nk}(t)}{\Delta_{nk}^2(t)} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' \Delta_{nk}(t')} \right) = \frac{F_{nk}(T)}{\Delta_{nk}^2(T)} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^T dt' \Delta_{nk}(t')} - \frac{F_{nk}(0)}{\Delta_{nk}^2(0)}. \quad (294)$$

Para calcular a integral do terceiro termo do lado direito, realizamos uma troca de variáveis dada por $t = sT$, com $0 \leq s \leq 1$,

$$\int_0^T dt \left(\frac{d}{dt} \frac{F_{nk}(t)}{\Delta_{nk}^2(t)} \right) e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' \Delta_{nk}(t')} = \int_0^1 ds \left(\frac{d}{ds} \frac{F_{nk}(s)}{\Delta_{nk}^2(s)} \right) e^{-\frac{iT}{\hbar} \int_0^s ds' \Delta_{nk}(s')}. \quad (295)$$

Assumindo que a função $\frac{d}{ds} \frac{F_{nk}(s)}{\Delta_{nk}^2(s)}$ é integrável, conforme o lema de Riemann-Leguesbe a integral se anula no limite em que $T \rightarrow \infty$ devido a oscilações muito rápidas do integrando,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^1 ds \left(\frac{d F_{nk}(s)}{ds \Delta_{nk}^2(s)} \right) e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^s ds' \Delta_{nk}(s')} = 0. \quad (296)$$

Substituindo os resultados das integrais na equação (293) e isolando $a_k(T)$,

$$a_k(T) = a_k(0) e^{i\gamma_k(T)} - i\hbar \sum_{n \neq k}^D \left[\frac{F_{nk}(T)}{\Delta_{nk}^2(T)} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^T dt' \Delta_{nk}(t')} - \frac{F_{nk}(0)}{\Delta_{nk}^2(0)} \right] e^{i\gamma_k(T)}. \quad (297)$$

Uma aproximação que anule ou torne muito pequena a probabilidade de haver uma transição do k -ésimo autoestado para qualquer outro estado é necessária, o que significa que os coeficientes precisam evoluir de forma independente um do outro, precisamos que o segundo termo do lado direito da equação desapareça. Para isso acontecer, necessariamente não podemos ter cruzamento dos níveis de energia em nenhum momento da evolução, i.e., $\Delta_{nk}(t) \neq 0, \forall t \in [0, T]$. Ou seja, para uma dinâmica ser considerada adiabática essa é uma condição necessária (SARANDY; WU, L.-A.; LIDAR, 2004).

Na equação acima, ainda existe acoplamento do k -ésimo autoestado com os outros autoestados do hamiltoniano. Precisamos impor uma condição que desacople os autoestados do sistema. Reescrevendo a função $F_{nk}(t)$ como $a_n(t) \langle k(t) | \dot{H}(t) | n(t) \rangle e^{-i\gamma_k(t)}$,

$$a_k(T) = a_k(0) e^{i\gamma_k(T)} - i\hbar \sum_{n \neq k}^D \left[\frac{a_n(T) \langle k(T) | \dot{H}(T) | n(T) \rangle}{\Delta_{nk}^2(T)} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^T dt' \Delta_{nk}(t')} - \frac{a_n(0) \langle k(0) | \dot{H}(0) | n(0) \rangle}{\Delta_{nk}^2(0)} e^{i\gamma_k(T)} \right], \quad (298)$$

uma condição suficiente para que os dois últimos termos do lado direito da equação sejam anulados é impor que para qualquer instante da evolução $\forall t \in [0, T]$ tenhamos que

$$\hbar \frac{|\langle k(t) | \dot{H}(t) | n(t) \rangle|}{\Delta_{nk}^2(t)} \ll 1, \quad (299)$$

uma vez que $e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^T dt' \Delta_{nk}(t')}$ é um termo oscilatório e, portanto, limitado. Como medida de precaução ainda maior, pode-se tomar o caso mais crítico dessa condição como garantia de que ela sempre valerá,

$$\hbar \frac{\max |\langle k(t) | \dot{H}(t) | n(t) \rangle|}{\min \Delta_{nk}^2(t)} \ll 1, \quad (300)$$

ou seja, estamos tomando o valor máximo que $\max |\langle k(t) | \dot{H}(t) | n(t) \rangle|$ assume durante toda evolução, e tomando o valor mínimo que o gap entre as energias assume durante

toda evolução, para garantir que os autoestados do hamiltoniano sejam desacoplados. Ou seja, duas considerações foram feitas para garantir que a evolução seja adiabática, um tempo de evolução grande o suficiente e a condição dada por (300). Podemos agregar essas duas considerações fazendo a substituição de variáveis dada por $t = sT$ com $s \in [0,1]$, chegando no seguinte resultado,

$$\hbar \frac{\max |\langle k(s) | \partial_s H(s) | n(s) \rangle|}{\min \Delta_{nk}^2(s)} \ll T, \quad (301)$$

o que nos fornece um parâmetro de comparação para saber quão longo o intervalo de tempo T deve ser.

A.2 CASO DEGENERADO

O caso degenerado é análogo ao não degenerado. A generalização da aproximação adiabática para esse caso vem do fato de que ao invés de termos autoestados individuais evoluindo sem acoplamento com nenhum outro autoestado do hamiltoniano $H(t)$, teremos autoespaços degenerados de $H(t)$ evoluindo independentemente.

Para chegar a esse resultado basta definir uma base instantânea de autoenergias como:

$$H(t) |n(t), i\rangle = E_n(t) |n(t), i\rangle. \quad (302)$$

Cada autoespaço fica definido como $\{|n(t), i\rangle\}$ com $i = 0, 1, \dots, g_n$ e onde g_n será o grau de degenerescência do autoespaço e valerá que $\langle k(t), j | n(t), i \rangle = \delta_{kn} \delta_{ji}$. A expansão de um estado $|\psi(t)\rangle$ será

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{n=1}^D \sum_{i=1}^{g_n} a_{ni}(t) e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' E_n(t')} |n(t), i\rangle, \quad (303)$$

onde $a_{ni}(t)$ é uma função complexa dependente do tempo tal que

$$\sum_{n=1}^D \sum_{i=1}^{g_n} |a_{ni}(t)|^2 = 1. \quad (304)$$

O fator de fase utilizado em (289) nesse caso será dado por $e^{-i\gamma_{ijk}(t)}$, onde

$$\gamma_{ijk}(t) = \int_0^t dt' \langle k(t'), j | \partial_{t'} | k(t'), i \rangle. \quad (305)$$

O restante do procedimento segue similarmente, culminando na condição para a adiabaticidade dada por

$$\hbar \frac{\max |\langle k(t), j | \dot{H}(t) | n(t), i \rangle|}{\min \Delta_{nk}^2(t)} \ll 1. \quad (306)$$

A interpretação da condição segue a mesma com a diferença de que ao invés da restrição $n \neq k$, a restrição deve ser $E_n(t) \neq E_k(t)$.

Note que a condição para o tempo de evolução é análoga,

$$\frac{\max |\langle k(s), j | \partial_s H(s) | n(s), i \rangle|}{\min \Delta_{nk}^2(s)} \ll T, \quad (307)$$

sendo a largura do gap determinante para determinar o quão rápido o sistema se torna adiabático.

A.3 FASE DE BERRY

Acima utilizou-se a equação de Schrödinger dependente do tempo (277) para descrever a evolução do estado do sistema, e utilizando a equação (278), expressamos o estado que descreve o sistema expandindo na base de autoenergias do hamiltoniano,

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{n=1}^D a_n(t) e^{i\theta_n(t)} |n(t)\rangle, \quad (308)$$

em que

$$\theta_n(t) := \frac{-1}{\hbar} \int_0^t dt' E_n(t') \quad (309)$$

é denominada fase dinâmica do sistema.

Na equação (298), quando foi imposto a condição adiabática para que somente o primeiro termo sobreviva, um novo fator de fase, também dependente do tempo, aparece na equação $a_k(t) = a_k(0) e^{i\gamma_k(t)}$, onde

$$\gamma_k(t) = i \int_0^t dt' \langle n(t') | \frac{d}{dt} | n(t') \rangle. \quad (310)$$

Esse fator de fase é chamado de fase de Berry e aparece sempre que o hamiltoniano depende de um parâmetro real multidimensional $\vec{R}(t)$ que parametriza uma curva, no caso um processo adiabático e cíclico. Generalizando, podemos escrever a fase de Berry como

$$\gamma_n(C) = i \oint_C \langle n(\vec{R}) | \vec{\nabla}_{\vec{R}} \cdot | n(\vec{R}) \rangle d\vec{R}, \quad (311)$$

onde C é a curva que delimita uma região e corresponde ao ciclo (BERRY, M. V., 1984).

APÊNDICE B – ALGORITMO DE GROVER

Suponha uma função Booleana de n -bits $f : \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$, onde o domínio da função representa os índices de uma lista não estruturada e $f(x) = 1$ se e somente se o índice x corresponde a um item da lista que desejamos encontrar.

Podemos obter o resultado de $f(x)$ aplicando um oráculo quântico, um operador unitário O que quando age sobre os estados da base computacional tem o seguinte resultado,

$$|x\rangle \rightarrow (-1)^{f(x)} |x\rangle, \quad (312)$$

ou seja, o estado ganha um sinal negativo se corresponder ao item procurado e permanece igual caso contrário.

Algoritmo. *Algoritmo de busca de Grover:*

1. *Inicialize o sistema em $|\psi_0\rangle = |0\rangle^{\otimes n}$.*

2. *Aplique a transformada de Hadamard:*

$$|\psi_1\rangle = H^{\otimes n} |\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{x=0}^{N-1} |x\rangle = |s\rangle, \quad (313)$$

o resultado é uma superposição uniforme.

3. *Aplique o oráculo:*

$$|\psi_2\rangle = O |\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{x=0}^{N-1} (-1)^{f(x)} |x\rangle. \quad (314)$$

4. *Aplique a transformada da Hadamard:*

$$|\psi_3\rangle = H^{\otimes n} |\psi_2\rangle = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} (-1)^{f(x)} (-1)^{x \cdot y} |y\rangle, \quad (315)$$

onde $x \cdot y$ é um produto escalar bit a bit.

5. *Aplique uma reflexão sobre $|0\rangle^{\otimes n}$ no plano formado por $|\psi_3\rangle$ e $|0\rangle^{\otimes n}$:*

$$|\psi_4\rangle = (2|0^{\otimes n}\rangle\langle 0^{\otimes n}| - \mathbb{1}) |\psi_3\rangle = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} (-1)^{f(x)} (-1)^{x \cdot y} (-1)^{\delta_{y,0^{\otimes n}}} |y\rangle. \quad (316)$$

6. *Aplique a transformada de Hadamard:*

$$|\psi_5\rangle = H^{\otimes n} |\psi_4\rangle = \frac{1}{N^{3/2}} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} \sum_{z=0}^{N-1} (-1)^{f(x)} (-1)^{x \cdot y} (-1)^{\delta_{y,0^{\otimes n}}} (-1)^{y \cdot z} |z\rangle. \quad (317)$$

7. Repita os passos 3 a 6 na ordem de $\frac{\pi}{4}\sqrt{N}$ vezes.
8. Meça o estado resultante na base computacional.

Os passos 3 a 6 do algoritmo são chamados de iteração de Grover G . Uma maneira alternativa de enxergar sua ação é a interpretando por meio de uma visualização geométrica. Note que

$$\begin{aligned} G &= H^{\otimes n}(|0^{\otimes n}\rangle\langle 0^{\otimes n}| - \mathbb{1})H^{\otimes n}O \\ &= (|s\rangle\langle s| - \mathbb{1})O, \end{aligned} \quad (318)$$

onde $|s\rangle$ é a superposição uniforme de todos os estados da base. Suponhamos agora que na lista não estruturada na qual a busca é realizada existam M soluções possíveis. Antes da iteração de Grover ser aplicada, o estado se encontra no estado $|s\rangle$, podemos expressar esse estado em termos de uma superposição uniforme de estados que não são soluções $|\alpha\rangle$ e uma superposição uniforme de estados que são soluções $|\beta\rangle$. Adotemos a convenção da referência (CHUANG; NIELSEN, 2000) de um somatório \sum' indicando soma sobre todos $|x\rangle$ que correspondem a uma solução e um somatório \sum'' indicando soma sobre todos $|x\rangle$ que não correspondem a uma solução:

$$|\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{N-M}} \sum'' |x\rangle, \quad (319)$$

$$|\beta\rangle = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum' |x\rangle. \quad (320)$$

Com a normalização adequada podemos expressar $|s\rangle$ como

$$|s\rangle = \sqrt{\frac{N-M}{N}} |\alpha\rangle + \sqrt{\frac{M}{N}} |\beta\rangle. \quad (321)$$

A ação de O no estado $|s\rangle$ gera uma reflexão sobre $|\alpha\rangle$ no plano formado por $|\alpha\rangle$ e $|\beta\rangle$, i.e., $O(a|\alpha\rangle + b|\beta\rangle) = a|\alpha\rangle - b|\beta\rangle$. De forma análoga, a ação de $(|s\rangle\langle s| - \mathbb{1})$ gera uma reflexão no mesmo plano, só que dessa vez sobre o vetor $|s\rangle$. Como resultado, temos que a ação do operador G na verdade é uma rotação, que não importa quantas vezes seja aplicada, a todo tempo mantém o estado do sistema no plano formado por $|\alpha\rangle$ e $|\beta\rangle$. É conveniente escrevermos $|s\rangle$ da seguinte forma

$$|s\rangle = \cos \theta |\alpha\rangle + \sin \theta |\beta\rangle. \quad (322)$$

Após a aplicação do oráculo, nota-se que o estado foi girado em um ângulo de -2θ radianos,

$$\begin{aligned} O|s\rangle &= \cos \theta |\alpha\rangle - \sin \theta |\beta\rangle \\ &= \cos(\theta - 2\theta) |\alpha\rangle + \sin(\theta - 2\theta) |\beta\rangle \\ &= \cos(-\theta) |\alpha\rangle + \sin(-\theta) |\beta\rangle. \end{aligned} \quad (323)$$

Se agora o estado se encontra a um ângulo de -2θ radianos, após a reflexão sobre $|s\rangle$ o que acontecerá é que ele estará a um ângulo de 2θ radianos do estado inicial, i.e., $|s\rangle$. Ou seja, concluímos que a ação da iteração de Grover gira o estado em um ângulo de 2θ toda vez que é aplicada. o que significa para um número R de repetições da iteração,

$$O^R |s\rangle = \cos [(2R + 1)\theta] |\alpha\rangle + \sin [(2R + 1)\theta] |\beta\rangle. \quad (324)$$

Da equação (322) notamos que o estado $|s\rangle$ está a um ângulo de $\pi/2 - \theta$ radianos do espaço das soluções $|\beta\rangle$. O que significa que após um número inteiro R de aplicações da iteração, desejamos girar o estado inicial nesse ângulo,

$$\frac{\pi}{2} - \theta = R \cdot 2\theta. \quad (325)$$

Utilizando que $\sin \theta = \sqrt{M/N}$, se assumirmos que $N \gg M$, que equivale a fazer uma busca por poucas soluções em uma estrutura muito grande de dados, podemos nos valer da aproximação

$$\theta \approx \sqrt{\frac{M}{N}}, \quad (326)$$

e substituindo na penúltima equação, temos

$$\frac{\pi}{2} - \sqrt{\frac{M}{N}} = 2R\sqrt{\frac{M}{N}} \implies R = \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{N}{M}} - \frac{1}{2}, \quad (327)$$

o que equivale ao resultado apresentado no passo 7 do algoritmo para $M = 1$,

$$R \approx \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{N}{M}}. \quad (328)$$

A probabilidade de medir o resultado correto segundo a equação (324) será dada por $\sin^2 [(2R + 1)\theta]$. Utilizando as equações (326) e (328), temos que a probabilidade é muita próxima de 1.

$$\sin^2 [(2R + 1)\theta] = \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} + \sqrt{\frac{M}{N}} \right) \approx 1. \quad (329)$$

APÊNDICE C – GERADOR DA DINÂMICA ADIABÁTICA

Em uma evolução adiabática, um autoestado do hamiltoniano inicialmente em $|n(0)\rangle$ evolui por

$$|\psi(t)\rangle = e^{i(\varphi_n^D(t)+\varphi_n^G(t))} |n(t)\rangle, \quad (330)$$

onde $\varphi_n^D(t)$ é a fase dinâmica e $\varphi_n^G(t)$ é o fator de fase geométrica. Podemos escrever o operador da evolução como

$$U_{ad}(t) = \sum_n e^{i(\varphi_n^D(t)+\varphi_n^G(t))} |n(t)\rangle \langle n(0)|. \quad (331)$$

Se $|\psi(0)\rangle = |n(0)\rangle$, então

$$\rho(t) = |n(t)\rangle \langle n(t)|, \quad (332)$$

onde as fases se cancelam. Note que a generalização para um estado misto é imediata. Portanto,

$$\rho(t) = U_{ad}(t)|n(0)\rangle \langle n(0)| U_{ad}^\dagger(t), \quad (333)$$

e o gerador da dinâmica será

$$\tilde{H}(t) = i\hbar \dot{U}(t) U^\dagger(t). \quad (334)$$

Mostraremos que o gerador $\tilde{H}(t)$ coincide com o hamiltoniano $H(t)$,

$$\tilde{H}(t) = i\hbar \dot{U}(t) U^\dagger(t) = H(t). \quad (335)$$

A derivada de $U_{ad}(t)$ é dada por:

$$\dot{U}(t) = \sum_n \left[i(\dot{\varphi}_n^D(t) + \dot{\varphi}_n^G(t)) |n(t)\rangle \langle n(0)| e^{i(\varphi_n^D(t)+\varphi_n^G(t))} + |\dot{n}(t)\rangle \langle n(0)| e^{i(\varphi_n^D(t)+\varphi_n^G(t))} \right], \quad (336)$$

e $U_{ad}^\dagger(t)$ fica

$$U_{ad}^\dagger(t) = \sum_n e^{-i(\varphi_n^D(t)+\varphi_n^G(t))} |n(0)\rangle \langle n(t)|. \quad (337)$$

Substituindo na equação (334):

$$\tilde{H}(t) = i\hbar \sum_n \left[i(\dot{\varphi}_n^D(t) + \dot{\varphi}_n^G(t)) |n(t)\rangle \langle n(t)| + |\dot{n}(t)\rangle \langle n(t)| \right]. \quad (338)$$

Como $|\psi(t)\rangle$ é solução da equação de Schrödinger, decorre que:

$$\begin{aligned}
i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \left[e^{i(\varphi_n^D(t) + \varphi_n^G(t))} |n(t)\rangle \right] &= H(t) e^{i(\varphi_n^D(t) + \varphi_n^G(t))} |n(t)\rangle \\
i\hbar \left[i(\dot{\varphi}_n^D(t) + \dot{\varphi}_n^G(t)) |n(t)\rangle + |\dot{n}(t)\rangle \right] e^{i(\varphi_n^D(t) + \varphi_n^G(t))} &= H(t) e^{i(\varphi_n^D(t) + \varphi_n^G(t))} |n(t)\rangle.
\end{aligned} \tag{339}$$

Da equação acima decorre que

$$i(\dot{\varphi}_n^D(t) + \dot{\varphi}_n^G(t)) |n(t)\rangle + |\dot{n}(t)\rangle = \frac{E_n(t)}{i\hbar} |n(t)\rangle. \tag{340}$$

Substituindo em (338), concluímos que

$$\begin{aligned}
\tilde{H}(t) &= i\hbar \sum_n \left[i(\dot{\varphi}_n^D(t) + \dot{\varphi}_n^G(t)) |n(t)\rangle + |\dot{n}(t)\rangle \right] \langle n(t)| \\
&= i\hbar \sum_n \frac{E_n(t)}{i\hbar} |n(t)\rangle \langle n(t)| \\
&= \sum_n E_n(t) |n(t)\rangle \langle n(t)|.
\end{aligned} \tag{341}$$

Como queríamos demonstrar.