UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA PURA E APLICADA

Daniel José Kmita

Equações de Navier-Stokes: Explorando Derivadas Fracionárias da Solução Fraca

Florianópolis
2024

Daniel José Kmita

Equações de Navier-Stokes: Explorando Derivadas Fracionárias da Solução Fraca

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada da Universidade Federal de Santa Catarina, para a obtenção do título de Mestre em Matemática.
Orientador: Prof. Dr. Paulo Mendes de Carvalho Neto.

Florianópolis
2024

Ficha catalográfica gerada por meio de sistema automatizado gerenciado pela BU/UFSC.
Dados inseridos pelo próprio autor.

Kmita, Daniel José
Equações de Navier-Stokes: Explorando Derivadas Fracionárias da Solução Fraca / Daniel José Kmita ; orientador, Paulo Mendes de Carvalho Neto, 2024.
118 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada, Florianópolis, 2024.

Inclui referências.

1. Matemática Pura e Aplicada. 2. Equações de Navier Stokes. 3. Método de Faedo-Galerkin. 4. Derivada Fracionária. I. Neto, Paulo Mendes de Carvalho. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós Graduação em Matemática Pura e Aplicada. III. Título.

Daniel José Kmita

Equações de Navier-Stokes: Explorando Derivadas Fracionárias da Solução Fraca

O presente trabalho em nível de mestrado foi avaliado e aprovado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. Alexandre do Nascimento Oliveira Souza, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Arlúcio da Cruz Viana, Dr.
Universidade Federal de Sergipe

Prof. Paulo Mendes de Carvalho Neto, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de mestre em Matemática Pura, com área de concentração em análise.

ICP-Edu
Documento assinado digitalmente
Douglas Soares Goncalves
Data: 17/05/2024 11:56:50-0300
CPF: ***.566.318-**
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Prof. Dr. Douglas Soares Gonçalves
Coordenador do Programa de Pós-Graduação

ICP-Edu
Documento assinado digitalmente
Paulo Mendes de Carvalho Neto
Data: 17/05/2024 10:43:46-0300
CPF: ***.211.858-**
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Prof. Dr. Paulo Mendes de Carvalho Neto
Orientador

Florianópolis, 15 de fevereiro de 2024

AGRADECIMENTO

Quando nos propomos a trilhar uma caminhada complexa como esta a ajuda de pessoas que apreciamos é de fundamental importância, pois cada queda faz com que seja mais difícil pôr-se em pé novamente. Seria um ato de egoísmo enorme não agradecer as pessoas que me incentivaram, apoiaram e ajudaram das mais diversas formas durante estes anos, e é por isso que quero dedicar essas próximas linhas a algumas pessoas que foram tão importantes nesta jornada.

Aos meus pais, Rosa Aparecida Ramos Kmita e Mário Kmita, pela preocupação, compreensão, apoio e amor ao longo de todos estes anos.

Ao meu orientador Paulo Mendes de Carvalho Neto, por todos os ensinamentos, tempo e paciência dedicados a elaboração deste trabalho.

À minha irmã Cristiane Kmita, por todo o apoio durante a mudança de cidade, compreensão e preocupação ao longo do mestrado.

À minha família, com qual eu sempre pude contar nas mais diversas horas e em todos os momentos de necessidade, meu muito obrigado.

Aos meus amigos, Luciano Bento da Silva Júnior, Juan Carlos Oyola Ballesteros, Fabiane Ferraz Wisniewski e Rosângela Maria Kowalek por todo o apoio em problemas matemáticos e pessoais, e sem os quais não estaria aqui.

À CAPES, pelo suporte financeiro ao decorrer do mestrado.

Enfim, a todos que de alguma forma contribuiram para a realização deste, muito obrigado.

RESUMO

Neste trabalho demonstramos a existência de solução fraca para as equações de Navier-Stokes através de duas abordagens distintas. Em um primeiro momento, utilizando o método de Faedo-Galerkin, provamos a existência de solução fraca para Navier-Stokes em dimensão menor ou igual a quatro, em domínios limitados. Neste método, criamos um problema aproximado em um espaço vetorial de dimensão finita, e mostramos a existência de solução para este problema. Então, utilizando a técnica de passagem ao limite, recuperamos o espaço original do problema e provamos a existência de solução fraca. A unicidade desta também é provada quando a dimensão do espaço é dois, um resultado clássico na teoria. Em um segundo momento, através de uma discretização no tempo, demonstramos a existência de solução para domínios ilimitados no $\mathbb{R}^n$. Por fim, é provado que a solução em questão possui derivada fracionária de ordem $0 < \alpha < 1/2$, e apresentamos uma regularidade para tal derivada, além de uma estimativa.

Palavras-chave: Equações de Navier-Stokes; Método de Faedo-Galerkin; Derivada Fracionária.

ABSTRACT

In this work, we demonstrate the existence of a weak solution for the Navier-Stokes equations through two distinct approaches. Initially, using the Faedo-Galerkin method, we prove the existence of a weak solution for Navier-Stokes in dimensions less than or equal to four, in bounded domains. In this method, we formulate an approximate problem in a finite-dimensional vector space and establish the existence of a solution for this problem. Subsequently, employing the method of passing to the limit, we recover the original vector space and prove the existence of the weak solution to the original problem. The uniqueness of this solution is also demonstrated when the dimension of the space is two, a classical result in the theory. In a second step, through a time discretization, we demonstrate the existence of a solution for unbounded domains in $\mathbb{R}^n$. Finally, it is proven that the aforementioned solution possesses a fractional derivative of order $0 < \alpha < 1/2$, and we provide regularity for such a derivative along with an estimate.

Keywords: Navier-Stokes Equations; Faedo-Galerkin Method; Fractional Derivative.

Sumário

1 Introdução

As equações de Navier-Stokes são um conjunto de equações diferenciais parciais que descrevem o movimento de fluidos, como gases ou líquidos. De fato, a primeira tentativa de modelar o comportamento de fluidos foi feita por Leonard Euler (1707-1783) em seu famoso artigo "Princípios Gerais do Movimento dos Fluídos" (ver [8]), em 1757, no qual introduziu a equação de Euler, que considerava apenas o caso de fluidos invíscidos (isto é, que não apresentam viscosidade).

Posteriormente, F. L. M. H. Navier (1785-1836) e G. G. Stokes (1819-1903) desenvolveram independentemente as equações que hoje são conhecidas como equaçoes de Navier-Stokes, e que incluem em sua dedução o termo de fricção entre as partículas, ou seja, considera fluidos com viscosidade não nula, e portanto são mais adequadas a condições reais. Essas equações foram apresentadas por Navier no trabalho "Mémoire sur les lois du Mouvement des Fluides" (ver [17]) em 1823, apesar de haver grandes falhas teóricas em sua dedução, falhas estas que foram reparadas no trabalho de Stokes em 1845 (ver [24]), o que justifica o nome que as equações levam até hoje.

Em sua forma clássica as equações de Navier-Stokes apresentam a seguinte formulação: Assuma que $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ é um domínio limitado com fronteira suficientemente regular preenchido por um fluido newtoniano. Seja $T > 0$ e $u(x,t)$ o campo de velocidade do fluido, $p(x,t)$ a pressão e $f(x,t)$ a densidade de força por unidade de volume a que o fluido está submetido, em um ponto $(x,t) \in \Omega \times (0,T)$. Então,

$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u - \nu \Delta u + \nabla p = f \quad \text{em} \quad \partial\Omega \times (0,T) \\ Div(u) = 0 \\ u = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega \times (0,T) \\ u(x,0) = u_0(x) \quad \text{em} \quad \Omega,\end{gathered}$$

onde $\nu > 0$ é a viscosidade cinemática do fluido e $u_0(x)$ é uma função dada. Aqui, a condição $Div(u) = 0$ indica que o fluido é incompresível, ou ainda, que a densidade é contante. A importância destas equações se comprova nas mais diversas áreas da ciência, como mecânica dos fluidos, metereologia e magnetohidrodinâmica, e portanto são largamente estudadas em matemática, física e engenharia.

De fato, grande esforço foi colocado na tentativa de demonstrar que as equações de Navier-Stokes em domínios limitados do $\mathbb{R}^3$ admitem uma única solução, problema que ainda encontra-se em aberto. Motivados pela beleza deste problema buscamos demonstrar neste trabalho a existência de solução fraca para as equações de Navier-Stokes seguindo duas abordagens distintas, e para tanto dividimos o trabalho do seguinte modo:

No primeiro capítulo, introduzimos alguns conceitos matemáticos fundamentais que precedem a teoria de Navier-Stokes, abrangendo resultados de análise funcional, teoria da medida, espaços de Sobolev, distribuições, e informações relevantes sobre o operador trilinear b, amplamente reconhecido na teoria. Além disso, fornecemos demonstrações completas dos resultados mais significativos.

No capítulo dois, partindo da formulação clássica de Navier-Stokes deduzimos sua formulação fraca, e então, admitindo que Ω é um conjunto aberto e limitado de $\mathbb{R}^n$ (com $n \leq 4$), com fronteira suficientemente regular, utilizamos o método de Faedo-Galerkin para provar a existência de solução fraca para Navier-Stokes. Como é costumeiro neste método, a prova segue criando inicialmente um problema aproximado do original em um espaço de dimensão finita. Após a demonstração de que o problema aproximado possui uma solução são feitas algumas estimativas, estas que serão usadas adiante na passagem ao limite, onde recuperamos o espaço original e demonstramos o teorema central deste capítulo. Ainda, apresentamos a prova da unicidade da solução quando a dimensão do espaço é dois, resultado clássico na teoria.

No capítulo três, baseados no artigo "Fractional Derivatives of Solutions of the Navier-Stokes Equations" (ver [23]), apresentamos a prova da existência de solução fraca para as equações de Navier-Stokes no caso em que $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ é um domínio (limitado ou não), com fronteira suficientemente regular. A demonstração inicia com uma discretização no tempo, que leva ao que o autor chama de equação de Navier-Stokes quantizada. A prova da existência de solução para esta equação é feita em seguida, e novamente, utilizando um argumento de passagem ao limite prova-se que as equações de Navier-Stokes admitem solução. Por fim, é provado que a solução em questão possui derivada fracionária de ordem $0 < \alpha < 1/2$, apresentado uma regularidade para esta derivada e finalmente, provamos uma estimativa.

2 Resultados Preliminares

Neste primeiro capítulo estaremos interessados em estudar os principais aspectos da teoria precedente as equações de Navier-Stokes, como alguns resultados de análise funcional, espaços de Sobolev, distribuições, espaços $L^p(0,T;X)$ e teoremas a respeito do operador trilinear b, amplamente conhecido na teoria. Claramente, não será possível realizar todas as demonstrações, e portanto o leitor será referido a bibliografia para mais detalhes.

2.1 Uma Breve Introdução à Análise Funcional

A menos de menção em contrário nos referiremos sempre a espaços vetoriais sobre o corpo dos números reais, para os quais todos os resultados a seguir são válidos. As principais referências utilizadas nesta subseção são [3], [13] e [21].

Definição 1. *Seja X um espaço vetorial com norma $\|\cdot\|_X$. Dizemos que X é Banach se for completo com a norma $\|\cdot\|_X$. Ainda, se H é um espaço vetorial com produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle_H$ e é completo com a norma induzida por este produto interno, dizemos que H é um espaço de Hilbert.*

Definição 2. *Dado um espaço vetorial normado X, definimos seu espaço dual como o conjunto de todos os funcionais lineares limitados de X, e o denotaremos por X^*. Ainda, X^* é um espaço vetorial normado com a norma,*

$$\|f\|_{X^*} = \sup_{\|x\|_X \leq 1} |f(x)|.$$

Proposição 2.1. *O espaço dual X^* de um espaço vetorial normado X é Banach, mesmo que X não o seja.*

Demonstração. Ver [21], páginas 92-93. ∎

Teorema 2.1 (Representação de Riesz)**.** *Seja H um espaço de Hilbert com produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle_H$. Para cada $f \in H^*$ existe um unico $u \in H$ (dependendo de f) tal que,*

$$\langle u,v\rangle_H = f(v), \quad \forall \; v \in H.$$

Além disso, $\|f\|_{H^*} = \|u\|_H$.

Demonstração. Ver [13], páginas 188-189. ∎

Definição 3. *Seja X um espaço normado. Definimos o espaço bidual de X como o espaço dual de X^*, e o denotamos por X^{**}.*

Definição 4. *Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$, com X um espaço de Banach. Dizemos que x_n converge fracamente (ou fraco) para $x \in X$, e denotamos $x_n \rightharpoonup x$, quando $f(x_n) \to f(x)$, para todo $f \in X^*$.*

Proposição 2.2. *Sejam X um espaço de Banach e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$. Então,*

1. *Se $x_n \rightharpoonup x \in X$, então x é único.*

2. *Se $x_n \rightharpoonup x$, então toda subsequência de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fracamente para x.*

3. *Se $x_n \rightharpoonup x$, então $(\|x_n\|_X)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada, e,*

$$\|x\|_X \leq \liminf_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|_X.$$

4. *Se $x_n \to x$ então $x_n \rightharpoonup x$.*

5. *Se X tem dimensão finita, convergência fraca implica convergência forte.*

6. *Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X^*$. Se $x_n \rightharpoonup x$ e $f_n \to f \in X^*$, então $f_n(x_n) \to f(x)$.*

7. *Se X é um espaço de Hilbert então, $x_n \rightharpoonup x$ se, e somente se, $\langle x_n, v\rangle_X \to \langle x, v\rangle_X$, para todo $v \in X$.*

Demonstração. Ver [13], páginas 258-260. ■

A partir de agora denotaremos $f(x) = (f, x)$, para $f \in X^*$ e $x \in X$. Tal notação se justificará mais adiante no texto, pois simplificará a escrita de várias equações.

Seja agora X um espaço de Banach e considere a função $J : X \to X^{**}$ tal que,

$$(f, x) = (J(x), f), \quad \forall\ f \in X^*, \ \forall\ x \in X.$$

Pode ser mostrado que J é linear, injetor e $\|J(x)\|_{X^{**}} = \|x\|_X$ para todo $x \in X$, de modo que é uma isometria sobre sua imagem $J(X)$.

Definição 5. *Quando o operador J é sobrejetor, isto é, $J(X) = X^{**}$, dizemos que X é reflexivo.*

Teorema 2.2. *Seja X um espaço de Banach reflexivo. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ uma sequência limitada. Então existe uma subsequência $(x_{n_j})_{j\in\mathbb{N}} \subseteq (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e um elemento $x \in X$ tal que $x_n \rightharpoonup x$. Em outras palavras, toda sequência limitada em um espaço de Banach reflexivo possui uma subsequência fracamente convergente.*

Demonstração. Ver [3], página 69. ■

Um resultado conhecido na análise funcional é o fato de que todo espaço de Hilbert é reflexivo, e portanto, toda sequência limitada em um espaço de Hilbert possui uma subsequência que converge fraco.

Definição 6. *Um espaço métrico M é dito ser separável se possui um subconjunto $D \subseteq M$, enumerável e denso em M.*

Definição 7. *Sejam X um espaço de Banach e $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X^*$. Dizemos que f_n converge fraco estrela (ou fraco*) para $f \in X^*$ se $(f_n, x) \to (f, x)$ para todo $x \in X$. Denotaremos tal convergência por $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$.*

Proposição 2.3. *Sejam X um espaço de Banach, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ e $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X^*$. Então,*

1. *Se $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ então $(\|f_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada.*

2. *Se $f_n \to f$ então $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$.*

3. *Se $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ e $x_n \to x$ em X, então $(f_n, x_n) \to (f, x)$.*

Demonstração. Ver [3], página 63. ∎

Um resultado de grande importância na análise funcional é o Teorema de Banach-Alaoglu, que estabelece que a bola unitária fechada em X^* é compacta na topologia fraca estrela. Uma versão equivalente deste teorema que será útil adiante é o seguinte.

Teorema 2.3. *Seja X um espaço de Banach separável. Então toda sequência limitada em X^* tem uma subsequência que converge fraco estrela.*

Demonstração. Ver [3], página 76. ∎

Definição 8. *Sejam X, Y espaços normados. Dizemos que Y está imerso em X, e denotamos $Y \hookrightarrow X$ se Y é um subespaço vetorial de X. Dizemos ainda que a imersão de Y em X é,*

1. *Contínua, se existir $c > 0$ tal que,*

$$\|x\|_X \leq c\|x\|_Y, \quad \forall\ x \in Y.$$

2. *Compacta, que é denotada por $Y \overset{c}{\hookrightarrow} X$ se, para toda sequência $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq Y$ limitada, existe uma subsequência $(u_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ que converge na topologia forte de X, isto é, converge na norma de X.*

2.2 Uma Breve Introdução aos Espaços de Sobolev

Para a elaboração desta subseção as principais referências utilizadas foram [3] e [9]. Ainda, ao longo desta, consideraremos $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto. Iniciaremos com a seguinte definição.

Definição 9. *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um conjunto Lebesgue mensurável e $1 \leq p < \infty$. Denotamos,*

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \quad : \quad u \text{ é Lebesgue mensurável e } \int_\Omega |u(x)|^p dx < \infty \right\},$$

e para $p = \infty$ denotamos,

$$L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} \quad : \quad u \text{ é Lebesgue mensurável e existe } C > 0 \text{ tal que } \ |u(x)| \leq C \ \ q.t.p.\}.$$

É importante lembrar que os espaços L^p são, na realidade, conjuntos de classes de equivalência de funções mensuráveis cujo módulo elevado à p é integrável, mas assim como é comum na teoria da medida, abusaremos da notação e diremos apenas que os elementos de L^p são funções. Nos espaços $L^p(\Omega)$ definimos a norma,

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \begin{cases} \left[\int_\Omega |u(x)|^p dx \right]^{1/p}, & \text{se } \ 1 \leq p < \infty \\ \text{ess sup}_\Omega |u(x)|, & \text{se } \ p = \infty \end{cases},$$

de modo que,

$$\text{ess sup}_\Omega |u(x)| = \inf\{c \quad : \quad |u(x)| \leq c \ \ q.t.p. \ \text{ em } \ \Omega\}.$$

É um fato conhecido da teoria da medida que os espaços $L^p(\Omega)$ equipados com essa norma são Banach, de modo que assumiremos isto sem mais comentários. Ainda, durante o que segue estaremos particulamente interessados no caso $p = 2$, isto é, $L^2(\Omega)$. Neste espaço adotamos o produto interno e a norma,

$$\langle u, v\rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u(x)v(x)dx \quad \text{e} \quad \|u\|_{L^2(\Omega)} = \sqrt{\langle u, u\rangle_{L^2(\Omega)}},$$

e também é um resultado conhecido que este espaço é Hilbert com a norma $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$.

Introduziremos agora uma sequência de desigualdades elementares, que serão muito úteis na teoria de Navier-Stokes.

Teorema 2.4 (Desigualdade de Young)**.** *Sejam $1 < p$ e $q < \infty$ tais que $1/p + 1/q = 1$. Dados $a, b \geq 0$, então,*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Demonstração. Ver [3], página 92. ■

Teorema 2.5 (Desigualdade de Hölder Geralizada)**.** *Sejam $1 \leq p_i \leq \infty$ com $i \in \{1, \ldots, k\}$, tais* *que* $1/p_1+\ldots+1/p_k=1$. *Se* $u_i \in L^{p_i}(\Omega)$ *para todo* $i=1,\ldots,k$, *então* $u_1\cdot\ldots\cdot u_k \in L^1(\Omega)$, *e,*

$$\int_\Omega |u_1\cdot\ldots\cdot u_k|dx \leq \|u_1\|_{L^{p_1}(\Omega)}\cdot\ldots\cdot\|u_k\|_{L^{p_k}(\Omega)}.$$

Demonstração. Ver [3], página 93. ■

No caso em que $k=2$ temos a desigualdade de Hölder, isto é,

$$\int_\Omega |u_1u_2|dx \leq \|u_1\|_{L^p(\Omega)}\|u_2\|_{L^q(\Omega)}.$$

Teorema 2.6 (Desigualdade de Minkowski)**.** *Sejam* $u,v\in L^p(\Omega)$ *com* $1\leq p\leq\infty$. *Então,*

$$\|u+v\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)}+\|v\|_{L^p(\Omega)}.$$

Demonstração. Ver [3], página 93. ■

Definição 10. *Uma função* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *é dita ser absolutamente contínua se, para cada* $\varepsilon>0$ *existe* $\delta>0$ *tal que, para cada coleção finita disjunta* $\{(a_i,b_i)\}_{i=1}^k$ *de intervalos abertos em* (a,b) *temos,*

$$\sum_{i=1}^k (b_i-a_i)<\delta \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^k |f(b_i)-f(a_i)|<\varepsilon.$$

Toda função absolutamente contínua é claramente contínua. Contudo, como o domínio é compacto, podemos concluir que toda função absolutamente contínua é uniformemente contínua. A afirmação oposta, entretanto, não é verdadeira de modo geral. Alguns exemplos podem ser construídos, como a função de Cantor, mas não abordaremos tais exemplos aqui (ver por exemplo, [7], página 3).

Teorema 2.7 (Desigualdade de Gronwall - Forma Diferencial)**.** *Seja* $\eta:[0,T]\to\mathbb{R}$ *uma função absolutamente contínua e não negativa, que satisfaz,*

$$\eta'(t)\leq\varphi(t)\eta(t)+\psi(t), \quad q.t.p. \text{ em } [0,T];$$

onde $\varphi,\psi:[0,T]\to\mathbb{R}$ *são funções integráveis e não negativas.*

1. *Então,*

$$\eta(t)\leq e^{\int_0^t\varphi(s)ds}\left[\eta(0)+\int_0^t\psi(s)ds\right], \quad \forall\ t\in[0,T].$$

2. *Em particular, se* $\eta'(t) \leq \varphi(t)\eta(t)$ *em* $[0,T]$ *e* $\eta(0) = 0$*, então,*

$$\eta = 0 \quad \text{em} \quad [0,T].$$

Demonstração. Ver [9], páginas 224-225. ■

Definição 11. *Seja* $1 \leq p \leq \infty$*. Denotaremos o conjunto das funções de* Ω *em* $\mathbb{R}$ *que são localmente p-integráveis por,*

$$L^p_{loc}(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} \ \ : \ \ u \in L^p(K) \ \ \forall \ \ K \subseteq \Omega \ \ \text{compacto}\}.$$

É fácil notar que $L^p(\Omega) \subseteq L^p_{loc}(\Omega)$, pois se uma função é integrável sobre todo o Ω, então é integrável sobre qualquer compacto contido neste. Ainda, é um resultado conhecido na teoria da medida que, se Ω é limitado então $L^p(\Omega) \subseteq L^r(\Omega)$ para todo $1 \leq r \leq p \leq \infty$. Assim obtemos que $L^p(\Omega) \subseteq L^1_{loc}(\Omega)$ para todo $1 \leq p \leq \infty$, quando $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ é limitado. Quando Ω é ilimitado, basta notar que $L^p_{loc}(\Omega) \subseteq L^r_{loc}(\Omega)$ para todo $1 \leq r \leq p \leq \infty$, e portanto obtemos novamente $L^p(\Omega) \subseteq L^1_{loc}(\Omega)$.

A partir de agora, durante toda esta subseção, assumiremos sempre que $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ é aberto.

Definição 12. *Seja* $\phi : \Omega \to \mathbb{R}$ *contínua. O suporte de* ϕ *é o conjunto,*

$$\text{supp}(\phi) = \overline{\{x \in \Omega \ \ : \ \ \phi(x) \neq 0\}}.$$

Note que $\text{supp}(\phi)$ é um conjunto fechado por definição, e quando for compacto, diremos que ϕ possui suporte compacto.

Definição 13. *Denotaremos o conjunto das funções infinitamente diferenciáveis com suporte compacto em* Ω *por* $C^\infty_c(\Omega)$*. Por vezes nos referiremos a funções* $\phi \in C^\infty_c(\Omega)$ *como funções teste.*

Teorema 2.8. *Seja* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *um conjunto aberto. Então* $C^\infty_c(\Omega)$ *é denso em* $L^p(\Omega)$*, para todo* $1 \leq p < \infty$*.*

Demonstração. Ver [3], páginas 109-110. ■

Agora, uma n-upla $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ de inteiros positivos é dita ser um multí-indice de ordem $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$. Assim, podemos definir a derivada fraca de uma função $u \in L^1_{loc}(\Omega)$.

Definição 14. *Sejam* $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$ *e* α *um multi-índice. Nós dizemos que* v *é a* α*-ésima derivada fraca de* u*, e denotamos* $v = D^\alpha u$ *se,*

$$\int_\Omega u(x) D^\alpha \phi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v(x)\phi(x) dx, \quad \forall \ \ \phi \in C^\infty_c(\Omega),$$

dado que,

$$D^\alpha \phi = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} \phi.$$

Lema 2.9. *A α-ésima derivada fraca de uma função $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, se existe, é única a menos de um conjunto de medida nula.*

Demonstração. Ver [9], página 243. ∎

Definição 15. *Seja $1 \leq p \leq \infty$ e k um inteiro não negativo. Definimos o espaço de Sobolev,*

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \ : \ D^\alpha u \in L^p(\Omega) \ \text{ para todo } \ |\alpha| \leq k\}.$$

Definição 16. *No espaço de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ definimos a norma,*

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left[\displaystyle\sum_{|\alpha| \leq k} \int_\Omega |D^\alpha u|^p \right]^{1/p}, & \text{se } \ 1 \leq p < \infty \\ \displaystyle\sum_{|\alpha| \leq k} \text{ess sup}_\Omega |D^\alpha u|, & \text{se } \ p = \infty \end{cases}. \tag{2.2.1}$$

Uma propriedade fundamental dos espaços de Sobolev é que estes são Banach, com a norma introduzida em (2.2.1) (ver por exemplo, [9], página 249).

Definição 17. *Quando $p = 2$ denotamos $W^{k,2}(\Omega) = H^k(\Omega)$. E em $H^k(\Omega)$ definimos o produto interno,*

$$\langle u, v \rangle_{H^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \langle D^\alpha u, D^\alpha v \rangle_{L^2(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_\Omega D^\alpha u(x) D^\alpha v(x) dx. \tag{2.2.2}$$

Note que a definição acima é de fato um produto interno, pois é a soma de produtos internos de $L^2(\Omega)$. Ainda, observe que a Desigualdade de Hölder garante que o produto interno está bem definido.

Proposição 2.4. *Para todo $k = 1, 2, \ldots$, temos que $H^k(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com a norma induzida pelo produto interno definido em (2.2.2).*

Demonstração. Basta notar que,

$$\|u\|_{H^k(\Omega)} = \sqrt{\langle u, u \rangle_{H^k(\Omega)}} = \left[\sum_{|\alpha| \leq k} \int_\Omega (D^\alpha u(x))^2 dx \right]^{1/2} = \|u\|_{W^{k,2}(\Omega)},$$

e que $W^{k,2}(\Omega)$ é Banach com a norma introduzida na Definição 16. ∎

Note que $H^k(\Omega)$ ser Hilbert para todo $k = 1,2,\ldots$ justifica a notação com a letra "H".

Definição 18. *Denotamos por $W_0^{k,p}(\Omega)$ e $H_0^k(\Omega)$ o fecho de $C_c^\infty(\Omega)$ em $W^{k,p}(\Omega)$ e $H^k(\Omega)$ respectivamente, isto é,*

$$W_0^{k,p}(\Omega) = \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{W^{k,p}(\Omega)} \quad \text{e} \quad H_0^k(\Omega) = \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{H^k(\Omega)}.$$

Por definição, isto significa que, dado $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$ existe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C_c^\infty(\Omega)$ tal que $u_n \to u$ em $W^{k,p}(\Omega)$. No espaço $W_0^{k,p}(\Omega)$ usamos a norma $\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}$, e em $H_0^k(\Omega)$ usamos a norma $\|\cdot\|_{H^k(\Omega)}$.

Ainda, como $W_0^{k,p}(\Omega)$ é subespaço fechado do espaço de Banach $W^{k,p}(\Omega)$ com a norma induzida, obtemos que esse espaço é também Banach. De forma análoga vemos que $H_0^k(\Omega)$ é Hilbert.

Se Ω é um conjunto limitado com fronteira suficientemente regular, intuitivamente, podemos pensar que $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$ quando ocorrer de $u \in W^{k,p}(\Omega)$ e ainda $D^\alpha u = 0$ em $\partial\Omega$ para todo $|\alpha| \leq k-1$, em algum certo sentido; discutiremos isto melhor mais a frente.

Teorema 2.10. *Seja $1 \leq p < \infty$ e k um inteiro não negativo. Então,*

$$W^{k,p}(\mathbb{R}^n) = W_0^{k,p}(\mathbb{R}^n),$$

e em particular, $H_0^k(\mathbb{R}^n) = H^k(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. Ver [12], páginas 55-56. ∎

Introduziremos agora algumas noções relativas a teoria de distribuições, que será de grande importância no estudo das equações de Navier Stokes.

2.3 Uma Breve Introdução à Teoria de Distribuições

As principais referências utilizadas na elaboração desta subseção foram [9] e [19]. Novamente, ao longo desta, consideraremos $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto.

Definição 19. *Seja $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C_c^\infty(\Omega)$. Dizemos que ϕ_n converge para zero, e denotamos $\phi_n \to 0$ se,*

1. *Para todo multi-índice α, a sequência $(D^\alpha \phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente (em relação a x) para 0.*

2. *Existe $K \subseteq \Omega$ compacto e independente de n tal que $\operatorname{supp}(\phi_n) \subseteq K$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Deste modo, dizemos que ϕ_n converge para $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ se $(\phi_n - \phi) \to 0$.

Definição 20. *Uma distribuição T é uma função do conjunto das funções teste em $\mathbb{R}$ tal que,*

1. $\langle T, \lambda_1\phi_1 + \lambda_2\phi_2\rangle = \lambda_1\langle T, \phi_1\rangle + \lambda_2\langle T, \phi_2\rangle$ *para todo* $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ *e para toda* $\phi_1, \phi_2 \in C_c^\infty(\Omega)$.

2. *Se* $\phi_n \to 0$, *então* $\langle T, \phi_n\rangle \to 0$.

Aqui, $\langle T, \phi\rangle$ *denota a avaliação da distribuição* T *na função teste* ϕ. *Ao decorrer do texto usaremos tal notação quando estivermos fazendo referência a distribuições. Ainda, usaremos a notação* $C_c^\infty(\Omega)^*$ *para denotar o conjunto de todas as distribuições sobre* $C_c^\infty(\Omega)$.

Um fato importante a respeito de distribuições é que toda função localmente integrável, isto é, toda $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, define uma distribuição T_f da seguinte forma,

$$\langle T_f, \phi\rangle = \int_\Omega f(x)\phi(x)dx.$$

Porém, nem toda distribuição é proveniente de uma função localmente integrável. Um contra exemplo importante é a distribuição delta de Dirac centrada em $x_0 \in \Omega$ e definida por,

$$\langle \delta_{x_0}, \phi\rangle = \phi(x_0), \quad \forall \ \phi \in C_c^\infty(\Omega).$$

A demonstração de que a distribuição δ_{x_0} não pode ser gerada por uma função localmente integrável pode ser encontrada em [12], página 7. Além disso, toda distribuição possui infinitas derivadas, e todas estas são distribuições, como veremos a seguir.

Definição 21. *Seja* $T \in C_c^\infty(\Omega)^*$ *uma distribuição e* α *um multí-indice. Definimos a* α*-ésima derivada distribucional de* T *por,*

$$\langle D^\alpha T, \phi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T, D^\alpha\phi\rangle, \quad \forall \ \phi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Vejamos que $D^\alpha T$ é uma distribuição. A linearidade segue diretamente da linearidade da derivada fraca. Agora, se $\phi_n \to 0$ então $D^\beta\phi_n \to 0$ uniformemente, para todo multi-índice β, e é fácil notar que $\text{supp}(D^\alpha\phi_n) \subseteq K$, para todo α e para todo $n \in \mathbb{N}$, onde K é o compacto tal que $\text{supp}(\phi_n) \subseteq K$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Então $D^\alpha\phi_n \to 0$, e como,

$$\langle D^\alpha T, \phi_n\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T, D^\alpha\phi_n\rangle \to 0,$$

obtemos que $D^\alpha T$ é uma distribuição, para todo α.

Outra ferramenta muito utilizada ao trabalhar com as equações de Navier-Stokes é o Teorema de Green, mas para introduzi-lo precisaremos primeiramente apresentar algumas definições. Comecemos introduzindo a seguinte notação,

$$C^k(\overline{\Omega}) = \{u \in C^k(\Omega) \ : \ D^\alpha u \ \text{ admite uma extensão contínua para } \overline{\Omega}, \ \forall \ |\alpha| \leq k\},$$

com $C^0(\overline{\Omega}) = C(\overline{\Omega})$ e $C^\infty(\overline{\Omega}) = \cap_{k\in\mathbb{N}} C^k(\overline{\Omega})$.

Definição 22. *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto e limitado e $k \in \{1,2,\ldots\}$. Dizemos que a fronteira de Ω (denotada por $\partial\Omega$) é de classe C^k (ou simplemente, C^k) se para cada ponto $x_0 \in \partial\Omega$ existe $r > 0$ e uma função $\gamma : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ de classe C^k tal que, a menos de uma reordenação e renomeação, se necessário, temos,*

$$\Omega \cap B_r(x_0) = \{x \in B_r(x_0) \ \ : \ \ x_n > \gamma(x_1,\ldots,x_{n-1})\}.$$

Dizemos ainda que $\partial\Omega$ é C^∞ se é C^k para todo $k \in \{1,2,\ldots\}$.

Definição 23. *Nas condições da definição anterior, defina,*

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ (x_1,\ldots,x_n) &\mapsto x_n - \gamma(x_1,\ldots,x_{n-1}) \end{aligned}$$

e portanto, para cada $p \in \partial\Omega$ definimos o vetor unitário normal apontando para fora como,

$$\begin{aligned} \nu : \partial\Omega &\to \mathbb{R}^n \\ p &\mapsto -\frac{1}{|F(p)|}\nabla F(p) \end{aligned}$$

Frequentemente usaremos a notação $\nu = (\nu^1,\ldots,\nu^n)$. Por fim, para cada $u \in C^1(\overline{\Omega})$ definimos,

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \nu \cdot \nabla u = \sum_{i=1}^{n} \nu^i \frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

Teorema 2.11 (Integração por Partes)**.** *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto, limitado e com $\partial\Omega$ de classe C^1. Sejam $u, v \in C^1(\overline{\Omega})$. Então,*

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = -\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_{\partial\Omega} uv\nu^i dS, \quad \forall \ \ i = 1,2,\ldots,n. \tag{2.3.1}$$

Demonstração. Ver [9], página 628. ■

Observação: Por um argumento de densidade pode-se mostrar que a fórmula de integração por partes é válida para todos $u, v \in H^1(\Omega)$. Neste caso, é importante notar que as derivadas são no sentido fraco, e a integral é sobre o espaço $L^2(\Omega)$. Usaremos tal fato sempre que necessário, e para mais detalhes o leitor pode consultar [3].

Teorema 2.12 (Fórmula de Green)**.** *Seja Ω como nas hipóteses do teorema anterior, $u \in C^1(\overline{\Omega})$*

e $v \in C^2(\overline{\Omega})$*. Então,*

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx = -\int_\Omega u \Delta v dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial \nu} u dS,$$

Demonstração. Como $v \in C^2(\overline{\Omega})$ então $\partial v/\partial x_i \in C^1(\overline{\Omega})$, e usando (2.3.1) temos,

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i} dx = -\int_\Omega u \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} dx + \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} \nu^i dS, \quad \forall \ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Somando sobre $i \in \{1 \ldots, n\}$ temos,

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i} dx = -\int_\Omega u \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} dx + \int_{\partial\Omega} u \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} \nu^i dS,$$

isto é,

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx = -\int_\Omega u \Delta v dx + \int_{\partial\Omega} u \nabla v \cdot \nu dS,$$

ou seja,

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx = -\int_\Omega u \Delta v dx + \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \nu} dS,$$

como queríamos demonstrar. ∎

Observação: Como anteriormente, mostra-se que a fórmula de Green é válida para funções $u, v \in H^2(\Omega)$, e o leitor é convidado a consultar a bibliografia para mais detalhes.

O último resultado apresentado aqui será as imersões de Sobolev, que desempenham papel fundamental em várias desigualdades que usaremos no decorrer do trabalho. De fato, ela não foi colocada na seção anterior pois dependia do conceito de regularidade da fronteira.

Teorema 2.13. *Seja* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *um aberto limitado com fronteira de classe* C^1 *e* $1 \le p \le \infty$*. Então vale,*

1. *Se* $p < n$ *temos,*

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p'}(\Omega), \quad \text{onde} \quad \frac{1}{p'} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}.$$

2. *Se* $p = n$ *temos,*

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad \forall \ q \in [p, \infty).$$

3. *Se $p > n$ temos,*

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega).$$

Além disso, todas essas imersões são contínuas.

Demonstração. Ver [3], páginas 284-285. ■

2.4 Alguns Espaços Específicos do Problema

No estudo das equações de Navier-Stokes trabalharemos com funções vetoriais, como por exemplo a função velocidade $u : \Omega \times [0,T] \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$, de modo que faz-se importante estender o conceito de espaços L^p e alguns espaços de Sobolev para o caso de funções vetoriais. Tais ideias são tratadas a seguir, e a principal referência desta subseção é [25]. Novamente assumiremos que $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ é um conjunto aberto.

Definição 24. *Seja $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq \infty$ e k um inteiro positivo. Definimos,*

$$\mathbb{C}_c^\infty(\Omega) = (C_c^\infty(\Omega))^n, \quad \mathbb{L}^p(\Omega) = (L^p(\Omega))^n, \quad \mathbb{H}^k(\Omega) = (H^k(\Omega))^n, \quad \mathbb{H}_0^1(\Omega) = (H_0^1(\Omega))^n,$$

e nestes espaços definimos as normas e produtos internos,

$$\|u\|_{\mathbb{L}^p(\Omega)} = \begin{cases} \left[\displaystyle\sum_{i=1}^n \|u_i\|_{L^p(\Omega)}^p\right]^{1/p}, & \text{se } 1 \leq p < \infty \\ \displaystyle\sum_{i=1}^n \|u_i\|_{L^\infty(\Omega)}, & \text{se } p = \infty \end{cases}$$

$$\|u\|_{\mathbb{H}^k(\Omega)} = \left[\sum_{i=1}^n \|u_i\|_{H^k(\Omega)}^2\right]^{1/2}, \qquad \langle u, v\rangle_{\mathbb{H}^k(\Omega)} = \sum_{i=1}^n \langle u_i, v_i\rangle_{H^k(\Omega)}$$

$$\|u\|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)} = \left[\sum_{i=1}^n \|u_i\|_{H_0^1(\Omega)}^2\right]^{1/2}, \qquad \langle u, v\rangle_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)} = \sum_{i=1}^n \langle u_i, v_i\rangle_{H_0^1(\Omega)}.$$

Segue de maneira simples que $\mathbb{H}^k(\Omega)$ e $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ são espaços de Hilbert, com o produto interno e as normas definidas acima, para todo k inteiro positivo. No caso de $p = 2$, definimos o produto interno,

$$\langle u, v\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = \sum_{i=1}^n \langle u_i, v_i\rangle_{L^2(\Omega)},$$

e portanto $\mathbb{L}^2(\Omega)$ é também um espaço de Hilbert.

Uma desigualdade de grande relevância no teoria das equações de Navier-Stokes é a desigualdade de Poincaré, que introduziremos a seguir.

Teorema 2.14 (Desigualdade de Poincaré)**.** *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto e limitado e $1 \leq p < \infty$. Então existe $C > 0$ (dependendo somente de Ω e p) tal que,*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{\mathbb{L}^p(\Omega)}, \qquad \forall \;\; u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Demonstração. Ver [3], página 290. ∎

Agora note que, se $u \in H_0^1(\Omega)$ com Ω aberto e limitado, então,

$$\begin{aligned}
\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} &= \sum_{|\alpha|\leq 1} \|D^\alpha u\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&= \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{|\alpha|=1} \|D^\alpha u\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\leq C_0\|\nabla u\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\leq C\sum_{i=1}^n \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|^2_{L^2(\Omega)},
\end{aligned}$$

e por outro lado,

$$\sum_{i=1}^n \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|^2_{L^2(\Omega)} = \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)},$$

e portanto, graças a equivalência de normas que obtivemos, podemos definir uma nova norma em $H_0^1(\Omega)$ como sendo,

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \left(\sum_{i=1}^n \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{1/2},$$

a qual é construída a partir do produto interno,

$$\langle u, v\rangle_{H_0^1(\Omega)} = \sum_{i=1}^n \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i}\right\rangle_{L^2(\Omega)}.$$

Por fim, introduziremos os espaços $\mathscr{C}_c^\infty(\Omega), V$ e H que são amplamente utilizados na teoria das equações de Navier-Stokes. Definimos então,

$$\mathscr{C}_c^\infty(\Omega) = \{u \in \mathbb{C}_c^\infty(\Omega) \;\;:\;\; Div(u) = 0\}, \quad H = \overline{\mathscr{C}_c^\infty(\Omega)}^{\mathbb{L}^2(\Omega)}, \quad V = \overline{\mathscr{C}_c^\infty(\Omega)}^{\mathbb{H}_0^1(\Omega)}, \tag{2.4.1}$$

com $Div(u)$ denotando o divergente de u, isto é,

$$Div(u) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial x_i}.$$

Em V utilizamos a norma $\|\cdot\|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)}$ e o produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)}$, que serão denotados $\|\cdot\|_V$ e $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$, respectivamente. Em H utilizamos a norma $\|\cdot\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}$ e o produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}$ que serão denotados $\|\cdot\|_H$ e $\langle\cdot,\cdot\rangle_H$, respectivamente.

É importante observar algumas caracterizações e propriedades dos espaços V e H, que serão úteis no texto. Para isso, assumiremos pelo restante desta seção que $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ é um conjunto aberto, limitado, e com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^1.

Teorema 2.15. *Os espaços V e H são Hilbert (portanto reflexivos) quando munimos V e H com as normas e produtos internos acima definidos. Disso decorre que V^* e H^* são Hilbert (portanto, também reflexivos). E temos, $V \overset{c}{\hookrightarrow} H \equiv H^* \hookrightarrow V^*$, com ambas imersões contínuas.*

Demonstração. Ver [25], página 248. ■

Como os espaços V e H são separáveis (ver por exemplo, [25] página 283), existe uma sequência $(w_j)_{j\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{C}_c^\infty(\Omega)$ de funções ortonormais em H, ortogonais em V e total em V, ou seja,

$$\langle w_j, w_i\rangle_H = \delta_{ij}, \quad \langle w_j, w_i\rangle_V = 0 \ \text{ se } \ i \neq j,$$

para todo $i, j \in \mathbb{N}$ e $\operatorname{span}(w_j)_{j\in\mathbb{N}}$ é denso em V e em H, ou seja,

$$V = \overline{\operatorname{span}(w_j)_{j\in\mathbb{N}}}^{\mathbb{H}_0^1(\Omega)} \qquad \text{e} \qquad H = \overline{\operatorname{span}(w_j)_{j\in\mathbb{N}}}^{\mathbb{L}^2(\Omega)}.$$

Como V e H são Hilbert isso implica também que V^* e H^* são separáveis.

Teorema 2.16. *Os espaços V e H podem ser caracterizados como,*

$$V = \{u \in \mathbb{H}_0^1(\Omega) \ : \ Div(u) = 0\}, \quad H = \{u \in \mathbb{L}^2(\Omega) \ : \ Div(u) = 0 \ \text{ e } \ u\cdot\nu = 0 \ \text{ sobre } \ \partial\Omega\}.$$

Demonstração. Ver [25], Teoremas 1.4 e 1.6. ■

2.5 Sobre os Espaços Bochner-Lebesgue $L^p(0,T;X)$

Nesta subseção estenderemos os resultados da Teoria de Medida para funções cujo contradomínio é um espaço de Banach, e a principal referência utilizada para a elaboração desta é [6].

Definição 25. *Seja X um espaço de Banach. Denotamos por $C(0,T;X)$ o espaço das funções $u:[0,T]\to X$ contínuas, e munimos este espaço com a norma,*

$$\|u\|_{C(0,T;X)} = \sup_{t\in[0,T]} \|u(t)\|_X.$$

É um resultado conhecido da Análise que $C(0,T;X)$ munido com a norma $\|\cdot\|_{C(0,T;X)}$ é Banach, e portanto assumiremos este fato sem mais comentários.

Definição 26. *Sejam X um espaço de Banach, $T>0$ e $1\leq p\leq\infty$. Definimos $L^p(0,T;X)$ como o espaço de todas as funções $u:[0,T]\to X$ mensuráveis (no sentido de Bochner) tais que $\|u(t)\|_X\in L^p([0,T])$. Ainda, neste espaço definimos a norma,*

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} = \begin{cases} \left[\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt\right]^{1/p}, & \text{se } 1\leq p<\infty \\ \text{ess}\sup_{[0,T]}\|u(t)\|_X, & \text{se } p=\infty \end{cases}. \tag{2.5.1}$$

Proposição 2.5. *Para $1\leq p\leq\infty$ espaço $L^p(0,T;X)$ é de Banach com a norma definida em* (2.5.1).

Demonstração. Ver [6], página 18. ∎

Observação 1: A mensurabilidade no sentido de Bochner é uma extensão do conceito de mensurabilidade da teoria da medida, para funções cujo contradomínio é um espaço de Banach. Tal extensão foge ao escopo deste trabalho, e portanto o leitor é convidado a consultar [6] ou [27] para mais detalhes.

Observação 2: Seja $1\leq r\leq p\leq\infty$. Note que, se $u\in L^p(0,T;X)$, então $\|u(t)\|_X\in L^p([0,T])$, e da teoria da medida temos $\|u(t)\|_X\in L^r([0,T])$, portanto $u\in L^r(0,T;X)$. Em símbolos temos,

$$L^p(0,T;X)\subseteq L^r(0,T;X), \quad \forall\ 1\leq r\leq p\leq\infty,$$

e ainda da teoria da medida sabemos que $\|\|u(t)\|_X\|_{L^r([0,T])}\leq k\|\|u(t)\|_X\|_{L^p([0,T])}$, de modo que,

$$\|u\|_{L^r(0,T;X)}\leq K\|u\|_{L^p(0,T;X)}, \quad \forall\ u\in L^p(0,T;X),\ \forall\ 1\leq r\leq p\leq\infty.$$

Teorema 2.17. *Seja X um espaço de Banach e $1<p<\infty$ tal que $1/p+1/q=1$. Então $[L^p(0,T;X)]^*$ é isométrico a $L^q(0,T;X^*)$. Para o caso $p=\infty$ temos $L^\infty(0,T;X^*)$ isométrico a $[L^1(0,T;X)]^*$.*

Demonstração. Ver [6], páginas 27-29. ∎

Teorema 2.18. *Se X é um espaço de Banach reflexivo e separável, então $L^p(0,T;X)$ é reflexivo para $1<p<\infty$. Ainda, temos $L^1(0,T;X)$ separável.*

Demonstração. Ver [6], páginas 34-35. ■

Teorema 2.19. *Se Y é um espaço de Hilbert então,*

$$L^p(0,T;Y) \equiv L^p(0,T;Y^*) \equiv L^p(0,T;Y^{**}), \quad \forall \ 1 \leq p \leq \infty,$$

onde o símbolo "$\equiv$" indica uma isometria.

Demonstração. Basta definir o operador,

$$\begin{aligned} I : L^p(0,T;Y) &\to L^p(0,T;Y^*) \\ u &\mapsto Pu \end{aligned}$$

e não é difícil checar que este é uma isometria, onde P é a isometria entre Y e Y^*.

■

Note ainda que se $u \in L^p(0,T;V)$ então, $u(t) \in V$ e como $V \hookrightarrow H$ continuamente, existe $L>0$ tal que $\|u(t)\|_H \leq L\|u(t)\|_V$, para todo $t \in [0,T]$, e portanto,

$$\|u\|^p_{L^p(0,T;H)} = \int_0^T \|u(t)\|^p_H dt \leq L \int_0^T \|u(t)\|^p_V dt = \|u\|^p_{L^p(0,T;V)},$$

ou seja, $L^p(0,T;V) \hookrightarrow L^p(0,T;H)$, para todo $1 \leq p \leq \infty$ (a demonstração quando $p=\infty$ é análoga), com a imersão sendo contínua. Analogamente temos $L^p(0,T;H^*) \hookrightarrow L^p(0,T;V^*)$ continuamente para $1 \leq p \leq \infty$, pois $H^* \hookrightarrow V^*$ continuamente.

Agora, quando $p=2$, se Y é Hilbert então $L^2(0,T;Y)$ é Hilbert. Para ver isso defina o produto interno,

$$\begin{aligned} \langle \cdot,\cdot \rangle_{L^2(0,T;Y)} : L^2(0,T;Y) \times L^2(0,T;Y) &\to \mathbb{R} \\ (u,v) &\mapsto \int_0^T \langle u(t),v(t) \rangle_Y dt \end{aligned}$$

e note que esse produto interno induz a norma $\|\cdot\|_{L^2(0,T;Y)}$.

Assim como no caso dos espaços L^p, temos,

$$L^p(0,T;X) \subseteq L^1_{loc}(0,T;X), \quad \forall \ 1 \leq p \leq \infty,$$

para todo espaço de Banach X, onde,

$$L^p_{loc}(0,T;X) = \{u : [0,T] \to X \ \ : \ \ u \in L^p(K,X) \ \ \forall \ \ K \subseteq [0,T] \ \text{ compacto}\}.$$

Deste modo, para toda função $u \in L^1_{loc}(0,T;X)$ definimos sua distribuição T_u como,

$$\langle T_u, \phi \rangle = \int_0^T u(t)\phi(t)dt, \quad \forall \ \ \phi \in C_c^\infty((0,T)),$$

e sua derivada por,

$$\langle T_u', \phi \rangle = -\langle T_u, \phi' \rangle, \quad \forall \ \ \phi \in C_c^\infty((0,T)),$$

de modo que obtemos novamente que toda distribuição a valores vetoriais é suave (isto é, C^∞).

2.6 Transformada de Fourier e a Derivada Fracionária de Riesz

Nesta subseção apresentaremos alguns resultados sobre a transformada de Fourier, porém, para funções cujo contradomínio é um espaço de Banach (ou Hilbert). Como principais referência citamos [25] e [26]. Seja então W um espaço de Hilbert. Definimos $L^p(\mathbb{R},W)$ como,

$$L^p(\mathbb{R},W) = \left\{ v : \mathbb{R} \to W \quad : \quad v \ \text{ é Bochner mensurável e } \ \int_{\mathbb{R}} \|v(t)\|_W^p dt < \infty \right\},$$

e para $v \in L^1(\mathbb{R},W)$ definimos sua transformada de Fourier como,

$$\hat{v}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi ty} v(t)dt.$$

É um resultado conhecido da teoria de análise em espaços de Banach que $\hat{v} \in C_0(\mathbb{R},W)$ (ver por exemplo [26], página 106), isto é, $\hat{v}$ é contínua e tende a zero quando y tendo a $\pm\infty$. Além disso, temos o seguinte resultado:

Teorema 2.20 (Plancherel). *Seja W um espaço de Hilbert e $v \in L^2(\mathbb{R},W) \cap L^1(\mathbb{R},W)$. Então $\hat{v} \in L^2(\mathbb{R},W)$ e $\|v\|_{L^2(\mathbb{R},W)} = \|\hat{v}\|_{L^2(\mathbb{R},W)}$.*

Demonstração. Ver [26], página 109. ■

Com isso podemos definir a derivada fracionária de Riesz, de ordem $\gamma > 0$, como,

$$\widehat{D_t^\gamma v}(y) = (2\pi i y)^\gamma \hat{v}(y), \quad \forall \ \ v \in L^1(\mathbb{R},W),$$

e introduzimos o espaço,

$$\mathscr{H}^\gamma(\mathbb{R},V,H) = \{ v \in L^2(\mathbb{R},V) \quad : \quad D_t^\gamma v \in L^2(\mathbb{R},H) \},$$

que com a norma,

$$\|v\|_{\mathscr{H}^\gamma(\mathbb{R},V,H)} = [\|v\|^2_{L^2(\mathbb{R},V)} + \||y|^\gamma \hat{v}\|^2_{L^2(\mathbb{R},H)}]^{1/2},$$

é um espaço de Hilbert (ver [25], páginas 273-274). Além disso, se $K \subseteq \mathbb{R}$ é compacto, definimos,

$$\mathscr{H}^\gamma_K(\mathbb{R},V,H) = \{v \in \mathscr{H}^\gamma(\mathbb{R},V,H) \quad : \quad \mathrm{supp}(v) \subseteq K\}.$$

Teorema 2.21. *Para todo $K \subseteq \mathbb{R}$ compacto e qualquer $\gamma > 0$ temos,*

$$\mathscr{H}^\gamma_K(\mathbb{R},V,H) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R},H),$$

com imersão compacta.

Demonstração. Ver [25], página 274. ■

Dois últimos lemas que serão importantes durante o capítulo seguinte são apresentados a seguir.

Lema 2.22. *Se $u \in L^2(0,T;V)$ e $u' \in L^2(0,T;V^*)$, então u é igual (a menos de um conjunto de medida nula) a uma função em $C(0,T;H)$ e vale,*

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2_H = 2(u'(t),u(t)),$$

no sentido das distribuições escalares (isto é, cada termo da igualdade define uma distribuição escalar). Além disso, a função $[0,T] \ni t \mapsto \|u(t)\|^2_H \in \mathbb{R}$ é absolutamente contínua.

Demonstração. Ver [25], páginas 261-264. ■

Lema 2.23. *Seja X um espaço de Banach e $u,g \in L^1(0,T;X)$. As condições abaixo são equivalentes.*

1. *A função u é, a menos de um conjunto de medida nula, igual a função primitiva de g, isto é,*

$$u(t) = \lambda + \int_0^t g(s)ds, \quad q.t.p. \text{ em } [0,T],$$

   e $\lambda \in X$.

2. *Para toda $\phi \in C^\infty_c([0,T])$ temos,*

$$\int_0^T u(t)\phi'(t)dt = -\int_0^T g(t)\phi(t)dt.$$

3. *Para todo $\eta \in X^*$ temos,*

$$\frac{d}{dt}(\eta, u(t)) = (\eta, g(t)),$$

no sentido das distribuições escalares (isto é, cada termo da igualdade define uma distribuição).

Se qualquer uma das condições acima é satisfeita (e portanto todas são) temos u igual, a menos de um conjunto de medida nula, a uma função contínua de $[0,T]$ em X.

Demonstração. Ver [25], páginas 250-252. ∎

2.7 Alguns Resultados Importantes

Nesta subseção apresentaremos uma série de desigualdades que serão de grande importância no que seguirá. Ainda, abordaremos diversos resultados a respeito do operador trilinear b, que é fundamental no estudo das equações de Navier-Stokes. Como a relevância destes resultados não pode ser ignorada, faremos suas demonstrações na íntegra. As principais referências utilizadas são [1] e [25].

Lema 2.24 (Desigualdade de Ladyzhenskaya)**.** *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ $(n = 2)$ um aberto. Então vale,*

$$\|u\|_{L^4(\Omega)} \leq 2^{1/4} \|u\|^{1/2}_{L^2(\Omega)} \|\nabla u\|^{1/2}_{\mathbb{L}^2(\Omega)}, \quad \forall \ u \in H^1_0(\Omega). \tag{2.7.1}$$

Demonstração. Fixe $\phi \in C^\infty_c(\Omega)$. Defina a extensão por zero de ϕ,

$$\begin{aligned} \overline{\phi} : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} \phi(x), & \text{se } \ x \in \Omega \\ 0, & \text{se } \ x \in \mathbb{R}^2 \backslash \Omega \end{cases} \end{aligned}$$

Note que $\overline{\phi}$ é contínua, pois $\phi \equiv 0$ em $\Omega \backslash \text{supp}(\phi)$. Escrevendo $x = (x_1, x_2)$ temos,

$$[\overline{\phi}(x)]^2 = \int_{-\infty}^{x_1} \frac{\partial}{\partial s} [\overline{\phi}(s, x_2)]^2 ds = 2 \int_{-\infty}^{x_1} \overline{\phi}(s, x_2) \frac{\partial}{\partial s} \overline{\phi}(s, x_2) ds,$$

mas definindo,

$$\overline{\phi}_1(x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} |\overline{\phi}(s, x_2)| \left| \frac{\partial}{\partial s} \overline{\phi}(s, x_2) \right| ds,$$

temos,

$$[\overline{\phi}(x)]^2 \leq 2 \overline{\phi}_1(x_2). \tag{2.7.2}$$

De forma análoga, definindo,

$$\overline{\phi}_2(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} |\overline{\phi}(x_1,t)| \left| \frac{\partial}{\partial t}\overline{\phi}(x_1,t)\right| dt,$$

temos,

$$[\overline{\phi}(x)]^2 \leq 2\overline{\phi}_2(x_1). \tag{2.7.3}$$

Multiplicando (2.7.2) e (2.7.3) e integrando temos,

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^2} [\overline{\phi}(x)]^4 dx \leq 4 \int_{\mathbb{R}^2} \overline{\phi}_2(x_1)\overline{\phi}_1(x_2) dx_1 dx_2 \\
&= 4\left(\int_{\mathbb{R}} \overline{\phi}_2(x_1)dx_1\right)\left(\int_{\mathbb{R}} \overline{\phi}_1(x_2)dx_2\right) \\
&= 4\left(\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |\overline{\phi}(x_1,t)| \left|\frac{\partial}{\partial t}\overline{\phi}(x_1,t)\right| dt dx_1\right)\left(\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |\overline{\phi}(s,x_2)| \left|\frac{\partial}{\partial s}\overline{\phi}(s,x_2)\right| ds dx_2\right) \\
&= 4\left(\int_{\mathbb{R}^2} |\overline{\phi}(x)| \left|\frac{\partial}{\partial x_2}\overline{\phi}(x)\right| dx\right)\left(\int_{\mathbb{R}^2} |\overline{\phi}(x)| \left|\frac{\partial}{\partial x_1}\overline{\phi}(x)\right| dx\right).
\end{aligned}$$

Daí, usando a Desigualdade de Hölder temos,

$$\int_{\mathbb{R}^2} [\overline{\phi}(x)]^4 dx \leq 4\|\overline{\phi}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \left\|\frac{\partial\overline{\phi}}{\partial x_1}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \|\overline{\phi}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \left\|\frac{\partial\overline{\phi}}{\partial x_2}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^2)},$$

e da Desigualdade de Young,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} [\overline{\phi}(x)]^4 dx &\leq 2\|\overline{\phi}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} \left(\left\|\frac{\partial\overline{\phi}}{\partial x_1}\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \left\|\frac{\partial\overline{\phi}}{\partial x_2}\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} \right) \\
&\leq 2\|\overline{\phi}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} \|\nabla\overline{\phi}\|^2_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^2)},
\end{aligned}$$

e portanto,

$$\|\overline{\phi}\|_{L^4(\mathbb{R}^2)} \leq 2^{1/4}(\|\overline{\phi}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\|\nabla\overline{\phi}\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^2)})^{1/2},$$

mas como $\overline{\phi} = 0$ em $\mathbb{R}^2 \backslash \Omega$ temos,

$$\|\phi\|_{L^4(\Omega)} \leq 2^{1/4}(\|\phi\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla\phi\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)})^{1/2}, \quad \forall \;\; \phi \in C_c^{\infty}(\Omega).$$

Agora, dado $u \in H_0^1(\Omega)$, existe $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\|\phi_n - u\|_{H^1(\Omega)} \to 0$, e é claro,

$$\|\phi_n\|_{L^4(\Omega)} \leq 2^{1/4}(\|\phi_n\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla\phi_n\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)})^{1/2}, \tag{2.7.4}$$

para todo $n = 1, \ldots$. Como pelo Teorema 2.13 temos que $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$, então

$$|\|\phi_n\|_{L^4(\Omega)} - \|u\|_{L^4(\Omega)}| \leq \|\phi_n - u\|_{L^4(\Omega)} \leq C\|\phi_n - u\|_{H^1(\Omega)},$$

e portanto,

$$\|\phi_n\|_{L^4(\Omega)} \to \|u\|_{L^4(\Omega)} \quad \text{quando} \;\; n \to \infty.$$

Ainda do Teorema 2.13 temos $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, de onde obtemos,

$$\|\phi_n\|_{L^2(\Omega)} \to \|u\|_{L^2(\Omega)} \quad \text{quando} \;\; n \to \infty,$$

e por fim,

$$\|\nabla\phi_n - \nabla u\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = \sum_{i=1}^n \left\|\frac{\partial}{\partial x_i}(\phi_n - u)\right\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \|\phi_n - u\|^2_{H^1(\Omega)},$$

de modo que,

$$\|\nabla\phi_n\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \to \|\nabla u\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \quad \text{quando} \;\; n \to \infty.$$

Todas essas convergências permitem aplicar o limite em (2.7.4) de modo que,

$$\|u\|_{L^4(\Omega)} \leq 2^{1/4}(\|u\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla u\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)})^{1/2},$$

como queríamos demonstrar. ■

Lema 2.25. *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto limitado com fronteira de classe C^1, para $n \leq 4$. Defina,*

$$\begin{aligned} b : V \times V \times V &\to \mathbb{R} \\ (u, v, w) &\mapsto \int_\Omega [(u \cdot \nabla)v] \cdot w dx \end{aligned}$$

Então b é trilinear, contínua e vale,

$$b(u, v, v) = 0, \quad b(u, v, w) = -b(u, w, v), \quad \forall \;\; u, v, w \in V.$$

Demonstração. Note que,

$$b(u,v,w) = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} u_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} w_j dx,$$

e da linearidade do somatório juntamente com a linearidade da integral, concluímos que b é trilinear. Dividiremos o restante da prova em uma série de afirmações.

Afirmação 1: b é contínua.

Demonstração. Como $u,v,w \in V$ então $u,v,w \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$, e portanto, $u_i, v_j, w_j \in H_0^1(\Omega)$ para $i,j \in \{1,2,3,4\}$. Mas então $Dv_j \in L^2(\Omega)$, ou seja, $\partial v_j/\partial x_i \in L^2(\Omega)$ para $i,j \in \{1,2,3,4\}$. Como $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$ (segue diretamente do Teorema 2.13) e da Desigualdade de Hölder Generalizada temos,

$$\begin{aligned} \int_\Omega \left| u_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} w_j \right| dx &\leq \|u_i\|_{L^4(\Omega)} \left\| \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)} \|w_j\|_{L^4(\Omega)} \\ &\leq K \|u_i\|_{H_0^1(\Omega)} \left\| \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)} \|w_j\|_{H_0^1(\Omega)}, \end{aligned} \tag{2.7.5}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} |b(u,v,w)| &= \left| \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega u_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} w_j dx \right| \\ &\leq \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \left| u_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} w_j \right| dx \\ &\leq K \sum_{i,j=1}^{n} \|u_i\|_{H_0^1(\Omega)} \left\| \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)} \|w_j\|_{H_0^1(\Omega)} \\ &= K \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \|u_i\|_{H_0^1(\Omega)} \left\| \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)} \right) \|w_j\|_{H_0^1(\Omega)} \\ &\leq K \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \|u_i\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \|w_j\|_{H_0^1(\Omega)} \\ &= K \|u\|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)} \sum_{j=1}^{n} \|v_j\|_{H_0^1(\Omega)} \|w_j\|_{H_0^1(\Omega)} \\ &\leq K \|u\|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)} \left(\sum_{j=1}^{n} \|v_j\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^{n} \|w_j\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \\ &= K \|u\|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)} \|v\|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)} \|w\|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)} \\ &= K \|u\|_V \|v\|_V \|w\|_V, \end{aligned}$$

e concluímos que b é contínua. □

Afirmação 2: Para todo $u, v \in V$ vale $b(u,v,v) = 0$.

Demonstração. Fixe $\phi, \psi \in \mathscr{C}_c^\infty(\Omega)$. Então, usando a fórmula de integração por partes (2.3.1) temos,

$$
\begin{aligned}
b(\phi,\psi,\psi) &= \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \phi_i \frac{\partial \psi_j}{\partial x_i} \psi_j dx \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \phi_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\psi_j^2}{2}\right] dx \\
&= -\sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial \phi_i}{\partial x_i} \left[\frac{\psi_j^2}{2}\right] dx + \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\partial\Omega} \phi_i \left[\frac{\psi_j^2}{2}\right] \nu_i dS \\
&= -\frac{1}{2} \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial \phi_i}{\partial x_i} \psi_j^2 dx \\
&= -\frac{1}{2} \int_\Omega Div(\phi) \sum_{j=1}^{n} \psi_j^2 dx \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Agora, dado $u, v \in V$, por definição, existem sequências $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}, (\psi_m)_{m\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{C}_c^\infty(\Omega)$ tal que $\phi_n \to u$ e $\psi_m \to v$ em $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$. Como b é contínua temos,

$$
b(\phi_n,\psi_n,\psi_n) \to b(u,v,v), \quad \text{quando } \; n \to \infty,
$$

ou seja, $b(u,v,v) = 0$, como queríamos demonstrar. □

Afirmação 3: Para todo $u, v, w \in V$ temos $b(u,v,w) = -b(u,w,v)$.

Demonstração. Basta notar que,

$$
\begin{aligned}
0 &= b(u, v-w, v-w) \\
&= b(u,v,v) - b(u,v,w) - b(u,w,v) + b(u,w,w),
\end{aligned}
$$

isto é, $b(u,v,w) = -b(u,w,v)$, para todo $u, v, w \in V$. Isso finaliza a demonstração. □

Com essas afirmações demonstradas, completamos a prova do lema. ■

Agora, vamos definir o operador,

$$
\begin{aligned}
B : V \times V &\to V^* \\
(u,v) &\mapsto B(u,v) : V \to \mathbb{R} \\
&\qquad\qquad w \mapsto b(u,v,w)
\end{aligned}
$$

Que B é de fato bilinear e contínuo segue da trilinearidade e continuidade de b. Denotemos ainda $Bu = B(u,u)$, de modo que temos,

$$
\begin{aligned}
\|Bu\|_{V^*} &= \|B(u,u)\|_{V^*} \\
&= \sup_{\|w\|_V \leq 1} |(B(u,u),w)| \\
&= \sup_{\|w\|_V \leq 1} |b(u,u,w)| \\
&\leq K \sup_{\|w\|_V \leq 1} \|u\|_V^2 \|w\|_V \\
&= K\|u\|_V^2,
\end{aligned}
\tag{2.7.6}
$$

e para o operador B temos o seguinte resultado.

Lema 2.26. *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto limitado com fronteira de classe C^1. Então,*

1. *Se $n \leq 4$ e $u \in L^2(0,T;V)$, temos $Bu \in L^1(0,T;V^*)$, de modo que*

$$(Bu(t),v) = b(u(t),u(t),v), \quad q.t.p. \text{ em } [0,T].$$

2. *Se $n = 2$ temos,*

$$|b(u,v,w)| \leq (2\|u\|_H \|u\|_V \|v\|_V^2 \|w\|_V \|w\|_H)^{1/2}, \quad \forall \; u,v,w \in V.$$

3. *Se $n = 2$ e $u \in L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H)$ então $Bu \in L^2(0,T;V^*)$, e,*

$$\|Bu\|_{L^2(0,T;V^*)} \leq 2^{1/2} \|u\|_{L^\infty(0,T;H)} \|u\|_{L^2(0,T;V)}.$$

Demonstração. Faremos a demonstração dos três itens.

1. Note que,

$$\|Bu(t)\|_{V^*} = \sup_{\|v\|_V \leq 1} |b(u(t),u(t),v)| \leq \sup_{\|v\|_V \leq 1} C\|u(t)\|_V^2 \|v\|_V = C\|u(t)\|_V^2,$$

e portanto,

$$\|Bu\|_{L^1(0,T;V^*)} = \int_0^T \|Bu(t)\|_{V^*} dt \leq C \int_0^T \|u(t)\|_V^2 dt = C\|u\|_{L^2(0,T;V)}^2 < \infty,$$

ou seja, $Bu \in L^1(0,T;V^*)$.

2. Fixe $u, v, w \in V$. Então, de (2.7.5) e da desigualdade de Cauchy-Schwarz temos,

$$\begin{aligned}
|b(u,v,w)| &\leq \sum_{i,j=1}^{2} \|u_i\|_{L^4(\Omega)} \left\| \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)} \|w_j\|_{L^4(\Omega)} \\
&= \sum_{i=1}^{2} \left[\|u_i\|_{L^4(\Omega)} \right] \left[\sum_{j=1}^{2} \left\| \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)} \|w_j\|_{L^4(\Omega)} \right] \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^{2} \|u_i\|_{L^4(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{2} \left[\sum_{j=1}^{2} \left\| \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)} \|w_j\|_{L^4(\Omega)} \right]^2 \right)^{1/2} \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^{2} \|u_i\|_{L^4(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{2} \left[\left(\sum_{j=1}^{2} \left\| \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^{2} \|w_j\|_{L^4(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \right]^2 \right)^{1/2} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{2} \|u_i\|_{L^4(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i,j=1}^{2} \left\| \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^{2} \|w_j\|_{L^4(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{2} \|u_i\|_{L^4(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^{2} \|v_j\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^{2} \|w_j\|_{L^4(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \\
&= \|v\|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)} \left(\sum_{i=1}^{2} \|u_i\|_{L^4(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^{2} \|w_j\|_{L^4(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \\
&= \|v\|_V \left(\sum_{i=1}^{2} \|u_i\|_{L^4(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^{2} \|w_j\|_{L^4(\Omega)}^2 \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Mas agora, da desigualdade de Ladyzhenskaya (2.7.1) temos,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{2}\|u_i\|_{L^4(\Omega)}^2 &\leq \sqrt{2}\sum_{i=1}^{2}\|u_i\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla u_i\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \\
&\leq \sqrt{2}\left(\sum_{i=1}^{2}\|u_i\|_{L^2(\Omega)}^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^{2}\|\nabla u_i\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^2\right)^{1/2} \\
&= \sqrt{2}\|u\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\left(\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\left\|\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right\|_{L^2(\Omega)}^2\right)^{1/2} \\
&= \sqrt{2}\|u\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\left(\sum_{i=1}^{2}\|u_i\|_{H_0^1(\Omega)}^2\right)^{1/2} \\
&= \sqrt{2}\|u\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\|u\|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)} \\
&= \sqrt{2}\|u\|_H\|u\|_V,
\end{aligned}$$

e de forma análoga temos,

$$\sum_{j=1}^{2}\|w_j\|_{L^4(\Omega)}^2 \leq \sqrt{2}\|w\|_H\|w\|_V,$$

de onde concluímos que,

$$|b(u,v,w)| \leq \|v\|_V(2\|u\|_H\|u\|_V\|w\|_H\|w\|_V)^{1/2},$$

como queríamos demonstrar.

3. Para $u,v,w \in V$ temos $b(u,v,w) = -b(u,w,v)$, e portanto,

$$|b(u,v,w)| = |b(u,w,v)| \leq \|w\|_V(2\|u\|_H\|u\|_V\|v\|_H\|v\|_V)^{1/2},$$

de modo que,

$$|b(u,u,v)| \leq 2^{1/2}\|v\|_V\|u\|_H\|u\|_V, \quad \forall \ u,v \in V,$$

e assim,

$$\|Bu\|_{V^*} = \sup_{\|v\|_V \leq 1}|b(u,u,v)| \leq 2^{1/2}\sup_{\|v\|_V \leq 1}\|v\|_V\|u\|_H\|u\|_V = 2^{1/2}\|u\|_H\|u\|_V, \quad \forall \ u \in V.$$

Agora, se $u \in L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H)$, do item (1) temos $Bu(t) \in V^*$, e portanto,

$$\|Bu(t)\|_{V^*} \leq 2^{1/2}\|u(t)\|_H\|u(t)\|_V, \quad q.t.p. \text{ em } 0,T;$$

de modo que,

$$\begin{aligned}\int_0^T \|Bu(t)\|_{V^*}^2 dt &\leq 2\int_0^T \|u(t)\|_H^2\|u(t)\|_V^2 dt \\ &\leq 2\int_0^T (\text{ess sup}_{[0,T]}\|u(t)\|_H)^2\|u(t)\|_V^2 dt \\ &= 2\|u\|_{L^\infty(0,T;H)}^2\int_0^T \|u(t)\|_V^2 dt \\ &= 2\|u\|_{L^\infty(0,T;H)}^2\|u\|_{L^2(0,T;V)}^2,\end{aligned}$$

isto é,

$$\|Bu\|_{L^2(0,T;V^*)} \leq 2^{1/2}\|u\|_{L^\infty(0,T;H)}\|u\|_{L^2(0,T;V)},$$

de modo que $Bu \in L^2(0,T;V^*)$.

Com isto finalizamos a demonstração. ■

Uma convergência que será fundamental na passagem ao limite, durante o método de Faedo-Galerkin, que desenvolveremos no próximo capítulo, é a seguinte.

Lema 2.27. *Se $u_k \rightharpoonup u$ em $L^2(0,T;V)$ e $u_k \to u$ em $L^2(0,T;H)$ então, para toda função w tal que $w \in C_c^1((0,T),\mathscr{C}_c^\infty(\Omega))$ temos,*

$$\int_0^T b(u_k(t),u_k(t),w(t))dt \to \int_0^T b(u(t),u(t),w(t))dt, \quad k \to \infty.$$

Demonstração. É fácil ver que,

$$C_c^1((0,T),\mathscr{C}_c^\infty(\Omega)) \subseteq L^\infty(0,T;V), L^\infty(0,T;\mathbb{L}^\infty(\Omega)).$$

Agora note que,

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^T b(u_k(t),u_k(t),w(t))dt - \int_0^T b(u(t),u(t),w(t))dt\right| \\
&\qquad \leq \left|\int_0^T b(u_k(t),u_k(t),w(t))dt - \int_0^T b(u(t),u_k(t),w(t))dt\right| \\
&\qquad\quad + \left|\int_0^T b(u(t),u_k(t),w(t))dt - \int_0^T b(u(t),u(t),w(t))dt\right| \\
&\qquad = \left|\int_0^T b(u_k(t)-u(t),u_k(t),w(t))dt\right| + \left|\int_0^T b(u(t),u_k(t)-u(t),w(t))dt\right|,
\end{aligned} \tag{2.7.7}$$

e vamos mostrar que ambos os termos convergem para zero quando $k \to \infty$.

Para o segundo termo defina,

$$\begin{aligned}
T : L^2(0,T;V) &\to \mathbb{R} \\
v &\to \int_0^T b(u(t),v(t),w(t))dt
\end{aligned}$$

Note que,

$$\begin{aligned}
|T(v)| &= \left|\int_0^T b(u(t),v(t),w(t))dt\right| \\
&\leq \int_0^T \|u(t)\|_V \|v(t)\|_V \|w(t)\|_V dt \\
&\leq \sup \mathrm{ess}_{[0,T]} \|w(t)\|_V \int_0^T \|u(t)\|_V \|v(t)\|_V dt \\
&\leq \|w\|_{L^\infty(0,T;V)} \|u\|_{L^2(0,T;V)} \|v\|_{L^2(0,T;V)},
\end{aligned}$$

o que mostra que T está bem definido e é limitado. Ora, a linearidade segue diretamente da linearidade do operador b e da integral, de modo que $T \in (L^2(0,T;V))^*$. Como $u_k \rightharpoonup u$ em $L^2(0,T;V)$ temos $T(u_k) \to T(u)$, ou ainda,

$$\int_0^T b(u(t),u_k(t),w(t))dt \to \int_0^T b(u(t),u(t),w(t))dt, \quad \text{quando } k \to \infty,$$

isto é,

$$\left|\int_0^T b(u(t),u_k(t)-u(t),w(t))dt\right| \to 0, \quad \text{quando } k \to \infty,$$

e obtemos a convergência do segundo termo de (2.7.7).

Agora, para o primeiro termo temos,

$$\int_\Omega |[((u_k(t)-u(t))\cdot\nabla)u_k(t)]\cdot w(t)|dx \le \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega \left|(u_k(t)-u(t))_i \frac{\partial u_k(t)_j}{\partial x_i} w(t)_j\right| dx$$

$$\le \sum_{i,j=1}^n \|(u_k(t)-u(t))_i\|_{L^2(\Omega)} \left\|\frac{\partial u_k(t)_j}{\partial x_i}\right\|_{L^2(\Omega)} \|w(t)_j\|_{L^\infty(\Omega)}$$

$$\le \sum_{j=1}^n \left[\left(\sum_{i=1}^n \|(u_k(t)-u(t))_i\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n \left\|\frac{\partial u_k(t)_j}{\partial x_i}\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{1/2} \|w(t)_j\|_{L^\infty(\Omega)}\right]$$

$$= \|u_k(t)-u(t)\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \sum_{j=1}^n \|u_k(t)_j\|_{H_0^1(\Omega)} \|w(t)_j\|_{L^\infty(\Omega)}$$

$$\le \|u_k(t)-u(t)\|_H \left(\sum_{j=1}^n \|u_k(t)_j\|_{H_0^1(\Omega)}\right)\left(\sum_{j=1}^n \|w(t)_j\|_{L^\infty(\Omega)}\right)$$

$$\le \|u_k(t)-u_k(t)\|_H \|w(t)\|_{\mathbb{L}^\infty(\Omega)} \left(\sum_{j=1}^n \|u(t)_j\|^2_{H_0^1(\Omega)}\right)^{1/2} \sqrt{n}$$

$$= \sqrt{n}\|u_k(t)-u(t)\|_H \|w(t)\|_{\mathbb{L}^\infty(\Omega)} \|u_k(t)\|_V,$$

e assim,

$$\int_0^T \sqrt{n}\|u_k(t)-u(t)\|_H \|w(t)\|_{\mathbb{L}^\infty(\Omega)} \|u_k(t)\|_V dt$$

$$\le \sqrt{n}\|w\|_{L^\infty(0,T;\mathbb{L}^\infty(\Omega))} \int_0^T \|u_k(t)-u(t)\|_H \|u_k(t)\|_V dt$$

$$\le \sqrt{n}\|w\|_{L^\infty(0,T;\mathbb{L}^\infty(\Omega))} \|u_k-u\|_{L^2(0,T;H)} \|u_k\|_{L^2(0,T;V)},$$

mas como u_k converge fraco em $L^2(0,T;V)$, $(\|u_k\|_{L^2(0,T;V)})_{k\in\mathbb{N}}$ é limitada, e assim obtemos a convergência do primeiro termo de (2.7.7), o que completa a prova do lema.

Vale destacar que assumimos $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto, limitado e de classe C^1, para que todos os passos sejam válidos. ■

3 Equações de Navier-Stokes e o Método de Faedo-Galerkin

Neste capítulo estaremos interessados em estudar as equações de Navier-Stokes em $\mathbb{R}^n$, para $n \leq 4$. Para tanto, partindo da referida equação, apresentamos a dedução da sua formulação fraca, e posteriormente, utilizando o método de Faedo-Galerkin, demonstramos a existência de solução fraca para $n \leq 4$. A unicidade de solução fraca para $n = 2$ também é provada no final do capítulo.

3.1 Equações de Navier Stokes e a Formulação Clássica do Problema

Assuma por um momento que $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ é uma região do espaço preenchida por um fluido e seja $T > 0$. Considere as funções $\rho, p : \Omega \times (0,T) \to \mathbb{R}$ e $u : \Omega \times [0,T) \to \mathbb{R}^n$, onde, $\rho(x,t)$ é a densidade do fluido, $u(x,t)$ é a velocidade e $p(x,t)$ é a pressão, em um ponto $x \in \Omega$ e um tempo $t \in [0,T)$. Se o fluido é Newtoniano, as funções ρ, u e p são governadas pela equação de conservação do momento, equação da continuidade e alguma lei conectando ρ e p, isto é,

$$\rho\left[\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial u}{\partial x_i}\right] - \mu\Delta u - (3\lambda + \mu)grad(Div(u)) + grad(p) = f$$
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + Div(\rho u) = 0,$$

onde $\mu > 0$ é a viscosidade cinemática, λ uma constante física e $f : \Omega \times (0,T) \to \mathbb{R}^n$ é a força por unidade de volume a que o fluido está submetido.

Se o fluido é homogêneo e incompressível, então a densidade ρ independe de x e t, isto é, é contante. Com isso obtemos,

$$\rho\left[\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial u}{\partial x_i}\right] - \mu\Delta u + grad(p) = f$$
$$Div(u) = 0.$$

Algumas simplificações feitas usualmente são tomar $\rho = 1$, colocar $\nu = \mu$ e usar o operador diferencial gradiente,

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right),$$

para escrever,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u - \nu\Delta u + \nabla p = f$$
$$Div(u) = 0.$$

Compreendido alguns aspectos físicos das equações de Navier-Stokes e a notação utilizada, podemos enunciar a formulação clássica do problema.

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, limitado e conexo, com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^2, e $\nu, T > 0$. Sejam ainda $f : \Omega \times (0,T) \to \mathbb{R}^n$ e $u_0 : \Omega \to \mathbb{R}^n$ funções dadas. Queremos encontrar $u : \Omega \times [0,T) \to \mathbb{R}^n$ e $p : \Omega \times (0,T) \to \mathbb{R}$ tais que,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u - \nu\Delta u + \nabla p = f \qquad & \text{em } \Omega \times (0,T) \\ Div(u) = 0 \qquad & \text{em } \Omega \times (0,T) \\ u = 0 \qquad & \text{em } \partial\Omega \times (0,T) \\ u(x,0) = u_0(x) \qquad & \text{em } \Omega. \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

Como é costumeiro na teoria de EDP's, concentraremos nossos esforços na demonstração da existência e unicidade de solução para a formulação fraca das equações de Navier-Stokes, que será deduzida a seguir.

3.2 Formulação Fraca das Equações de Navier-Stokes

Nosso objetivo nesta subseção será deduzir a formulação fraca das equações de Navier-Stokes (de fato, são duas formulações fracas equivalentes), e para que todos os passos a seguir sejam válidos, assumiremos a partir de agora que $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ $(n \leq 4)$ é aberto, limitado e com fronteira de classe C^1.

Sejam u e p soluções clássicas das equações de Navier-Stokes, ou seja, u e p possuem a seguinte regularidade,

$$u \in C^2(\Omega \times [0,T), \mathbb{R}^n) \cap C^1(\overline{\Omega \times [0,T)}, \mathbb{R}^n), \quad \text{e} \quad p \in C^1(\Omega \times (0,T), \mathbb{R}),$$

e u e p satisfazem (3.1.1). Ou equivalentemente,

$$u \in C^2([0,T), C^2(\Omega, \mathbb{R}^n)) \cap C^1([0,T], C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)), \quad \text{e} \quad p \in C^1((0,T), C^1(\Omega, \mathbb{R})).$$

Vejamos agora que $u \in L^2(0,T;V)$. Como $Div(u) = 0$, basta mostrar que $u(t) \in \mathbb{H}^1_0(\Omega)$. Como $u = 0$ em $\partial\Omega$, u é limitada, e em particular, pertence a $\mathbb{L}^2(\Omega)$. Com o mesmo raciocínio notamos que $Du \in \mathbb{L}^2(\Omega)$, e portanto $u \in \mathbb{H}^1(\Omega)$. Disto e de $u = 0$ em $\partial\Omega$ temos $u \in \mathbb{H}^1_0(\Omega)$. Por fim, como u é contínua (na variável t) num compacto, é limitada, e em particular pertence a $L^2(0,T)$. Isso mostra que $u \in L^2(0,T;V)$.

Note ainda que,

$$\int_{[0,T]} \|u(t)\|_V^2 dt = \int_{(0,T)} \|u(t)\|_V^2 dt = \int_{[0,T)} \|u(t)\|_V^2 dt = \int_{(0,T]} \|u(t)\|_V^2 dt,$$

e portanto podemos definir u em qualquer um dos intervalos acima.

Como $u \in L^2(0,T;V)$, então $u(t) \in V$, logo podemos tomar $\varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(\Omega)$ e considerar o produto interno,

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial t}(t) - \nu \Delta u(t) + (u(t)\cdot\nabla)u(t) + \nabla p(t), \varphi \right\rangle_H = \langle f(t), \varphi\rangle_H, \quad q.t.p. \text{ em } (0,T),$$

isto é,

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial t}(t), \varphi \right\rangle_H - \nu\langle \Delta u(t), \varphi\rangle_H + \langle (u(t)\cdot\nabla)u(t), \varphi\rangle_H + \langle \nabla p(t), \varphi\rangle_H = \langle f(t), \varphi\rangle_H, \tag{3.2.1}$$

$q.t.p.$ em $(0,T)$. Agora note que,

$$\begin{aligned}
\langle \Delta u(t), \varphi\rangle_H &= \sum_{i=1}^n \langle \Delta u_i(t), \varphi_i\rangle_{L^2(\Omega)} \\
&= \sum_{i=1}^n \int_\Omega \Delta u_i(t)\varphi_i dx \\
&= \sum_{i=1}^n \left[-\int_\Omega \nabla u_i(t)\cdot\nabla\varphi_i dx + \int_{\partial\Omega} \varphi_i \frac{\partial u_i(t)}{\partial \nu} dS \right] \\
&= -\sum_{i=1}^n \int_\Omega \nabla u_i(t)\cdot\nabla\varphi_i dx \\
&= -\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left\langle \frac{\partial u_i(t)}{\partial x_j}, \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right\rangle_{L^2(\Omega)} \\
&= -\sum_{i=1}^n \langle u_i(t), \varphi_i\rangle_{H_0^1(\Omega)} \\
&= -\langle u(t), \varphi\rangle_V,
\end{aligned}$$

pois $\varphi_i = 0$ em $\partial\Omega$. Além disso,

$$\begin{aligned}
\langle \nabla p(t), \varphi\rangle_H &= \sum_{i=1}^n \left\langle \frac{\partial p(t)}{\partial x_i}, \varphi_i \right\rangle_{L^2(\Omega)} \\
&= \sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial p(t)}{\partial x_i}\varphi_i dx \\
&= \sum_{i=1}^n \left[-\int_\Omega p(t)\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} dx + \int_{\partial\Omega} p(t)\varphi_i \nu^i dS \right] \\
&= -\int_\Omega p(t) \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} dx \\
&= -\int_\Omega p(t) Div(\varphi) dx, \\
&= 0,
\end{aligned}$$

pois novamente $\varphi_i = 0$ em $\partial\Omega$ e $\text{Div}(\varphi) = 0$. Assim podemos reescrever (3.2.1) como,

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial t}(t), \varphi \right\rangle_H + \nu \langle u(t), \varphi \rangle_V + \langle (u(t)\cdot\nabla)u(t), \varphi \rangle_H = \langle f(t), \varphi \rangle_H, \quad q.t.p. \text{ em } (0,T).$$

Também temos que,

$$\langle (u(t)\cdot\nabla)u(t), \varphi \rangle_H = \int_\Omega [(u(t)\cdot\nabla)u(t)]\cdot\varphi dx = b(u(t), u(t), \varphi),$$

onde b é o operador introduzido no Lema 2.25. Pelo Teorema 2.15, supondo $f(t) \in V$, temos que $f(t) \in H$, o que nos permite identificar $f(t)$ com seu representante em H^*, que novamente denotaremos por $f(t)$, e usando o Teorema de representação de Riesz, deduzimos que $(f(t), \varphi) = \langle f(t), \varphi \rangle_H$, de modo que reescrevemos (3.2.1) na forma

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial t}(t), \varphi \right\rangle_H + \nu \langle u(t), \varphi \rangle_V + b(u(t), u(t), \varphi) = (f(t), \varphi), \quad q.t.p. \text{ em } (0,T).$$

Com o mesmo argumento usado para mostrar que $u \in L^2(0,T;V)$ obtemos $\partial u/\partial t \in L^2(0,T;V)$. Assim,

$$\int_0^T \left| \left\langle \frac{\partial u}{\partial t}(t), \varphi \right\rangle_H \right|^2 dt \leq \|\varphi\|_H^2 \int_0^T \left\| \frac{\partial u}{\partial t}(t) \right\|_H^2 dt \leq K\|\varphi\|_H^2 \int_0^T \left\| \frac{\partial u}{\partial t}(t) \right\|_V^2 dt < \infty,$$

e portanto a função,

$$[0,T] \ni t \mapsto \left\langle \frac{\partial u}{\partial t}(t), \varphi \right\rangle_H \in \mathbb{R},$$

é $L^2(0,T)$, para todo $\varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(\Omega)$, e portanto, define uma distribuição, de modo que para toda função teste $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ temos,

$$\begin{aligned} \left\langle \left\langle \frac{\partial u}{\partial t}(t), \varphi \right\rangle_H, \phi \right\rangle &= \int_0^T \left\langle \frac{\partial u}{\partial t}(t), \varphi \right\rangle_H \phi(t) dt \\ &= \int_0^T \left\langle \frac{\partial u}{\partial t}(t)\phi(t), \varphi \right\rangle_H dt \\ &= \left\langle \int_0^T \frac{\partial u}{\partial t}(t)\phi(t) dt, \varphi \right\rangle_H, \end{aligned}$$

onde usamos o Teorema de Fubini para comutar as integrais. Mas agora, como $u \in L^2(0,T;V)$

define também uma distribuição (a valores vetoriais), de modo que podemos escrever,

$$\begin{aligned}
\left\langle \left\langle \frac{\partial u}{\partial t}(t), \varphi \right\rangle_H, \phi \right\rangle &= \left\langle \int_0^T \frac{\partial u}{\partial t}(t)\phi(t)dt, \varphi \right\rangle_H \\
&= \left\langle -\int_0^T u(t)\frac{d}{dt}\phi(t)dt, \varphi \right\rangle_H \\
&= -\int_0^T \left\langle u(t)\frac{d}{dt}\phi(t), \varphi \right\rangle_H dt \\
&= -\int_0^T \langle u(t), \varphi\rangle_H \frac{d}{dt}\phi(t)dt,
\end{aligned}$$

e não é difícil notar que $[0,T] \ni t \mapsto \langle u(t), \varphi\rangle_H \in \mathbb{R}$ está em $L^2(0,T)$, de modo que define também uma distribuição. Portanto concluímos que

$$\begin{aligned}
\left\langle \left\langle \frac{\partial u}{\partial t}(t), \varphi \right\rangle_H, \phi \right\rangle &= -\int_0^T \langle u(t), \varphi\rangle_H \frac{d}{dt}\phi(t)dt \\
&= -\left\langle \langle u(t), \varphi\rangle_H, \frac{d}{dt}\phi \right\rangle \\
&= \left\langle \frac{d}{dt}\langle u(t), \varphi\rangle_H, \phi \right\rangle,
\end{aligned}$$

para toda $\phi \in C_c^\infty(0,T)$. Obtivemos então que,

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial t}(t), \varphi \right\rangle_H = \frac{d}{dt}\langle u(t), \varphi\rangle_H, \quad \forall \ \ \varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(\Omega),$$

mas é facilmente verificável que um argumento semelhante prova a igualdade acima para qualquer $v \in V$. Assim temos,

$$\frac{d}{dt}\langle u(t), \varphi\rangle_H + \nu\langle u(t), \varphi\rangle_V + b(u(t), u(t), \varphi) = (f(t), \varphi), \quad q.t.p. \text{ em } (0,T),$$

para todo $\varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(\Omega)$. Agora, para $v \in V$, existe $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{C}_c^\infty(\Omega)$ tal que $\varphi_n \to v$ em $\|\cdot\|_V$, e usando a Desigualdade de Cauchy-Scharwz, a continuidade do operador b e a continuidade do funcional $f(t)$ é fácil ver que,

$$\frac{d}{dt}\langle u(t), v\rangle_H + \nu\langle u(t), v\rangle_V + b(u(t), u(t), v) = (f(t), v), \quad q.t.p. \text{ em } (0,T),$$

para todo $v \in V$. Assim, podemos enunciar a seguinte formulação fraca para o problema de Navier-Stokes.

Primeira Formulação Fraca

Dado $f \in L^2(0,T;V^*)$ e $u_0 \in H$ queremos encontrar $u \in L^2(0,T;V)$ tal que,

$$\frac{d}{dt}\langle u(t),v\rangle_H + \nu\langle u(t),v\rangle_V + b(u(t),u(t),v) = (f(t),v), \quad q.t.p. \text{ em } (0,T),$$

para todo $v \in V$ e tal que $u(0) = u_0$.

Note que, como $u \in L^2(0,T;V)$, u pode assumir qualquer valor em $t = 0$ (ou mesmo não estar definido neste ponto), e portanto a condição $u(0) = u_0$, à princípio, não faz sentido.

Fixe $v \in V$ e considere o funcional,

$$\begin{aligned} Av : V &\to \mathbb{R} \\ u &\mapsto \langle u,v\rangle_V \end{aligned}$$

que é claramente linear, contínuo e satisfaz,

$$(Av,u) = \langle u,v\rangle_V, \quad \forall \ u \in V. \tag{3.2.2}$$

Além disso, note que,

$$|(Av,u)| = |\langle u,v\rangle_V| \leq \|u\|_V\|v\|_V,$$

de modo que,

$$\|Av\|_{V^*} = \sup_{\|u\|_V=1} |(Av,u)| = \sup_{\|u\|_V=1} |\langle u,v\rangle_V| \leq \sup_{\|u\|_V=1} \|u\|_V\|v\|_V = \|v\|_V, \quad \forall \ v \in V. \tag{3.2.3}$$

Assuma válida a primeira formulação fraca de Navier-Stokes. Então, usando o Lema 2.26 podemos escrever,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\langle u(t),v\rangle_H &= -\nu\langle u(t),v\rangle_V - b(u(t),u(t),v) + (f(t),v) \\ &= -\nu(Au(t),v) - (Bu(t),v) + (f(t),v) \\ &= (-\nu Au(t) - Bu(t) + f(t),v), \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

$q.t.p.$ em $[0,T]$, para todo $v \in V$. Note que $f \in L^2(0,T;V^*)$, assim como Au, pois,

$$\int_0^T \|Au(t)\|_{V^*}^2 dt \leq \int_0^T \|u(t)\|_V^2 dt < \infty,$$

de modo que (novamente usando o Lema 2.26),

$$-\nu Au - Bu + f \in L^1(0,T;V^*).$$

Mas como demonstramos anteriormente temos,

$$\frac{d}{dt}\langle u(t), v\rangle_H = \left\langle \frac{\partial u}{\partial t}(t), v \right\rangle_H = (u'(t), v). \tag{3.2.5}$$

Logo

$$u' = -\nu Au - Bu + f,$$

ou seja, $u' \in L^1(0,T;V^*)$. Seja $\eta \in V^{**}$ e denote o representante de $u(t)$ em V^* com a mesma notação. Então,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\eta, u(t)) &= (\eta, u'(t)) \\
&= \langle \eta, u'(t)\rangle_{V^*} \\
&= \langle \eta, -\nu Au(t) - Bu(t) + f(t)\rangle_{V^*} \\
&= (\eta, -\nu Au(t) - Bu(t) + f(t)),
\end{aligned}$$

e assim, pelo Lema 2.23 temos u igual, a menos de um conjunto de medida nula, a uma função em $C(0,T;V^*)$. Como H pode ser visto como um subconjunto de V^*, provamos que a condição $u(0) = u_0$ tem sentido, e assim temos a segunda formulação fraca para as equações de Navier-Stokes.

Segunda Formulação Fraca

Dado $f \in L^2(0,T;V^*)$ e $u_0 \in H$ queremos encontrar u satisfazendo,

$$u \in L^2(0,T;V), \quad \text{e} \quad u' \in L^1(0,T;V^*),$$

com,

$$u' + \nu Au + Bu = f \quad \text{em} \quad (0,T), \quad \text{e} \quad u(0) = u_0.$$

Para ver que a segunda formulação fraca é equivalente a primeira basta notar que,

$$(u'(t), v) = (-\nu Au(t) - Bu(t) + f(t), v), \quad \forall \ v \in V,$$

e o resultado segue diretamente das equações (3.2.4) e (3.2.5). Com isso obtemos que ambas formulações fracas são equivalentes.

3.3 Existência de Solução Para $\mathbb{R}^n$ ($n \leq 4$)

Teorema 3.1 (Existência de Solução Fraca)**.** *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ $(n \leq 4)$ aberto, limitado e com $\partial\Omega$ de classe C^1. Sejam $f \in L^2(0,T;V^*)$ e $u_0 \in H$. Então existe pelo menos uma função,*

$$u \in L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H),$$

tal que,

$$\frac{d}{dt}\langle u(t),v\rangle_H + \nu\langle u(t),v\rangle_V + b(u(t),u(t),v) = (f(t),v) \quad q.t.p. \text{ em } (0,T), \tag{3.3.1}$$

para todo $v \in V$ e $u(0) = u_0$.

Demonstração. A demonstração seguirá pelo método de Faedo-Galerkin, que dividimos em várias partes para facilitar a compreensão. Ainda, pelo que foi feito na subseção 3.2 está claro que demonstrar este teorema equivale a demonstrar ambas formulações fracas de Navier-Stokes. As principais referências utilizadas para a demonstração deste teorema foram [1], [4], [20] e [25].

Parte 1 - Construção da Solução Aproximada

Como vimos na subseção 2.4, existe uma sequência $(w_j)_{j\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{C}_c^\infty(\Omega)$ de funções ortonormais em H, ortogonais em V e total em V, ou seja,

$$\langle w_j, w_i\rangle_H = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}, \quad \langle w_j, w_i\rangle_V = 0 \text{ se } i \neq j,$$

para todo $i, j \in \mathbb{N}$ e $\text{span}(w_j)_{j\in\mathbb{N}}$ é denso em V, ou seja,

$$V = \overline{\text{span}(w_j)_{j\in\mathbb{N}}}^{\mathbb{H}_0^1(\Omega)}.$$

Para cada $m \in \mathbb{N}$ defina $V_m = \text{span}\{w_1, \ldots, w_m\}$ e considere o seguinte problema: *Queremos encontrar uma função,*

$$u_m : [0,T] \to V_m$$
$$t \mapsto u_m(t) = \sum_{i=1}^m \lambda_{im}(t) w_i$$

tal que, para cada $j \in \{1,\ldots,m\}$ temos,

$$\langle u_m'(t), w_j\rangle_H + \nu\langle u_m(t), w_j\rangle_V + b(u_m(t),u_m(t),w_j) = (f(t),w_j), \tag{3.3.2}$$

para $t \in [0,T]$ *e* $u_m(0) = u_{m0}$*, com,*

$$u_{m0} = \sum_{j=1}^{m} \langle u_0, w_j \rangle_H w_j, \tag{3.3.3}$$

ou seja, a projeção ortogonal de u_0 *sobre o espaço* V_m*.*

Iniciaremos com uma afirmação.

Afirmação: $u_{m0} \to u_0$ em H quando $m \to \infty$ e $\|u_{m0}\|_H \leq \|u_0\|_H$.

Demonstração. Primeiramente note que,

$$u_0 = \sum_{j=1}^{\infty} \langle u_0, w_j \rangle_H w_j,$$

e como $(w_j)_{j \in \mathbb{N}}$ é ortonormal em H a Desigualdade de Bessel é uma igualdade, de modo que,

$$\|u_0\|_H^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |\langle u_0, w_j \rangle_H|^2,$$

o que em particular implica que $|\langle u_0, w_j \rangle_H| \to 0$ quando $j \to \infty$. Ora, então,

$$\begin{aligned}
\|u_0 - u_{m0}\|_H^2 &= \left\| \sum_{j=m+1}^{\infty} \langle u_0, w_j \rangle_H w_j \right\|_H^2 \\
&= \left\langle \sum_{j=m+1}^{\infty} \langle u_0, w_j \rangle_H w_j, \sum_{i=m+1}^{\infty} \langle u_0, w_i \rangle_H w_i \right\rangle_H \\
&= \sum_{j=m+1}^{\infty} |\langle u_0, w_j \rangle_H|^2,
\end{aligned}$$

e a série converge para zero pela justificativa anterior, de modo que temos $u_{m0} \to u_0$ em H.

Para a outra parte da afirmação basta notar que,

$$\begin{aligned}
\|u_{m0}\|_H^2 &= \left\langle \sum_{j=1}^{m} \langle u_0, w_j \rangle_H w_j, \sum_{j=i}^{m} \langle u_0, w_i \rangle_H w_i \right\rangle_H \\
&= \sum_{j=1}^{m} |\langle u_0, w_j \rangle_H|^2 \\
&\leq \sum_{j=1}^{\infty} |\langle u_0, w_j \rangle_H|^2 \\
&= \|u_0\|_H^2,
\end{aligned}$$

o que finaliza a prova da afirmação. □

Agora, supondo que u_m é pelo menos diferenciável em $[0,T]$ e substituindo $u_m(t)$ em (3.3.2) temos,

$$\left\langle \sum_{i=1}^{m} \lambda'_{im}(t) w_i, w_j \right\rangle_H + \nu \left\langle \sum_{i=1}^{m} \lambda_{im}(t) w_i, w_j \right\rangle_V + b\left(\sum_{l=1}^{m} \lambda_{lm}(t) w_l, \sum_{i=1}^{m} \lambda_{im}(t) w_i, w_j \right) = (f(t), w_j),$$

isto é,

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda'_{im}(t) \langle w_i, w_j \rangle_H + \nu \sum_{i=1}^{m} \lambda_{im}(t) \langle w_i, w_j \rangle_V + \sum_{l=1}^{m} \lambda_{lm}(t) \sum_{i=1}^{m} \lambda_{im}(t) b(w_l, w_i, w_j) = (f(t), w_j),$$

e de (3.3.3) vem,

$$u_{m0} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_{im}(0) w_i = \sum_{j=1}^{m} \langle u_0, w_j \rangle_H w_j \quad \Rightarrow \quad \lambda_{im}(0) = \langle u_0, w_i \rangle_H,$$

para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$. Então obtemos as equações,

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda'_{im}(t) \langle w_i, w_j \rangle_H + \nu \sum_{i=1}^{m} \lambda_{im}(t) \langle w_i, w_j \rangle_V + \sum_{l,i=1}^{m} \lambda_{lm}(t) \lambda_{im}(t) b(w_l, w_i, w_j) = (f(t), w_j)$$

$$\lambda_{im}(0) = \langle u_0, w_i \rangle_H, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Essas equações podem ser interpretadas como um sistema de equações diferenciais ordinárias não lineares dado por,

$$\begin{cases} A_m X'_m(t) + \nu B_m X_m(t) + C_m(t) = F_m(t) \\ X_m(0) = X_{m0} \end{cases},$$

colocando,

$$A_m = \begin{bmatrix} \langle w_1, w_1 \rangle_H & \ldots & \langle w_m, w_1 \rangle_H \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle w_1, w_m \rangle_H & \ldots & \langle w_m, w_m \rangle_H \end{bmatrix}, \quad C_m(t) = \begin{bmatrix} b(u_m(t), u_m(t), w_1) \\ \vdots \\ b(u_m(t), u_m(t), w_m) \end{bmatrix}, \quad X_m(t) = \begin{bmatrix} \lambda_{1m}(t) \\ \vdots \\ \lambda_{mm}(t) \end{bmatrix}$$

$$B_m = \begin{bmatrix} \langle w_1, w_1 \rangle_V & \ldots & \langle w_m, w_1 \rangle_V \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle w_1, w_m \rangle_V & \ldots & \langle w_m, w_m \rangle_V \end{bmatrix}, \quad F_m(t) = \begin{bmatrix} (f(t), w_1) \\ \vdots \\ (f(t), w_m) \end{bmatrix}, \quad X_{m0} = \begin{bmatrix} \langle u_0, w_1 \rangle_H \\ \vdots \\ \langle u_0, w_m \rangle_H \end{bmatrix}.$$

Mas pela ortonormalidade de $(w_j)_{j\in\mathbb{N}}$ em H temos $A_m = I_m$ de modo que podemos escrever,

$$\begin{cases} X_m'(t) + \nu B_m X_m(t) + C_m(t) = F_m(t) \\ X_m(0) = X_{m0} \end{cases},$$

ou ainda,

$$\begin{cases} X_m'(t) = G_m(X_m(t),t) \\ X_m(0) = X_{m0} \end{cases}, \tag{3.3.4}$$

onde $G_m(X_m(t),t) = F_m(t) - \nu B_m X_m(t) - C_m(t)$.

Agora, podemos colocar,

$$G_m : \mathbb{R}^m \times [0,T] \to \mathbb{R}^m$$
$$(y,t) \mapsto F_m(t) - \nu B_m y - C_m(t)$$

e mostrar que G_m satisfaz as hipóteses do Teorema de Caratheodóry (ver [10], página 28). De fato, que G_m é contínua em y para cada $t \in [0,T]$ fixado, é imediato. Agora, fixe $y \in \mathbb{R}^m$. Note que f é mensurável, pois está em $L^2(0,T,V^*)$ e u_m também o é, pois é diferenciável. O operador b é mensurável pois é contínuo, de modo que obtemos a mensurabilidade de $F_m(t)$ e $C_m(t)$. Além disso, B_m é mensurável pois é constante na variável t. Assim, para $y \in \mathbb{R}^m$ fixo, $G_m(t)$ é mensurável para todo $t \in [0,T]$.

Agora, para $K \subseteq \mathbb{R}^m \times [0,T]$ compacto temos,

$$\|G_m(y,t)\| \leq \|F_m(t)\| + \|C_m(t)\| + \nu \max_{y\in K} \|B_m y\|, \quad \forall \ (y,t) \in K,$$

onde $\|\cdot\|$ denota a norma euclidiana em $\mathbb{R}^m$, e não é difícil ver que esta função é integrável.

Portanto a EDO em (3.3.4) possui pelo menos uma solução $X_m : [0,T_m) \to \mathbb{R}^m$, para algum intervalo $[0,T_m) \subseteq [0,T]$ com $X_m \in C^1([0,T_m),\mathbb{R}^m)$. Daí segue que $\lambda_{jm} \in C^1([0,T_m))$ para todo $1 \leq j \leq m$ e portanto $u_m \in C^1([0,T_m),V)$, para todo $m \in \mathbb{N}$.

Parte 2 - Estendendo o Intervalo de Solução

O objetivo nesta parte será mostrar que a solução do problema aproximado está definida em $[0,T]$. Para tanto, começamos multiplicando (3.3.2) por $\lambda_{im}(t)$ e somando sobre todos os índices $i = 1,\ldots,m$, de modo que,

$$\langle u_m'(t), u_m(t)\rangle_H + \nu\langle u_m(t), u_m(t)\rangle_V + b(u_m(t),u_m(t),u_m(t)) = (f(t),u_m(t)),$$

mas do Lema 2.25 e como,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|_H^2 = \langle u_m'(t), u_m(t)\rangle_H, \tag{3.3.5}$$

reescrevemos essa equação da seguinte forma,

$$\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|_H^2 + 2\nu\|u_m(t)\|_V^2 = 2(f(t), u_m(t)).$$

Agora note que,

$$\begin{aligned} 2(f(t), u_m(t)) &\leq 2\|f(t)\|_{V^*}\|u_m(t)\|_V \\ &= 2\frac{\sqrt{\nu}}{\sqrt{\nu}}\|f(t)\|_{V^*}\|u_m(t)\|_V \\ &\leq \nu\|u_m(t)\|_V^2 + \frac{1}{\nu}\|f(t)\|_{V^*}^2, \end{aligned}$$

e portanto temos,

$$\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|_H^2 + 2\nu\|u_m(t)\|_V^2 \leq \nu\|u_m(t)\|_V^2 + \frac{1}{\nu}\|f(t)\|_{V^*}^2,$$

isto é,

$$\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|_H^2 + \nu\|u_m(t)\|_V^2 \leq \frac{1}{\nu}\|f(t)\|_{V^*}^2. \tag{3.3.6}$$

Da equação (3.3.5), como u_m', u_m e o produto interno funções são contínuas, obtemos que $\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|_H^2$ é contínua. Agora, para $s \in [0, T_m)$ fixo (o que garante que as integrais a seguir são finitas), pelo Teorema Fundamental do Cálculo temos,

$$\int_0^s \frac{d}{dt}\|u_m(t)\|_H^2 dt + \nu\int_0^s \|u_m(t)\|_V^2 dt \leq \frac{1}{\nu}\int_0^s \|f(t)\|_{V^*}^2 dt,$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \|u_m(s)\|_H^2 &\leq \|u_m(0)\|_H^2 + \frac{1}{\nu}\int_0^s \|f(t)\|_{V^*}^2 dt \\ &\leq \|u_0\|_H^2 + \frac{1}{\nu}\int_0^T \|f(t)\|_{V^*}^2 dt \\ &= \|u_0\|_H^2 + \frac{1}{\nu}\|f\|_{L^2(0,T;V^*)}^2, \end{aligned}$$

e portanto,

$$\sup_{s\in[0,T_m)} \|u_m(s)\|_H \leq \left(\|u_0\|_H^2 + \frac{1}{\nu}\|f\|^2_{L^2(0,T;V^*)}\right)^{1/2} = C, \quad \forall \ m \in \mathbb{N},$$

de modo que $\lim\limits_{s\to T_m} \|u_m(s)\|_H \leq C$, para todo $m \in \mathbb{N}$.

Agora,

$$\|u_m(t)\|_H^2 = \left\langle \sum_{i=1}^m \lambda_{im}(t)w_i, \sum_{j=1}^m \lambda_{im}(t)w_j \right\rangle_H = \sum_{i=1}^m |\lambda_{im}(t)|^2 = \|X_m(t)\|^2, \quad \forall \ t \in [0,T],$$

e portanto,

$$\lim_{s\to T_m} \|X_m(t)\| \leq C,$$

de modo que, da teoria de EDOs, podemos estender a solução X_m para o intervalo $[0,T]$, e consequentemente estendemos u_m. Em particular temos,

$$\sup_{t\in[0,T]} \|u_m(t)\|_H \leq C, \quad \forall \ m \in \mathbb{N},$$

e portanto $\|u_m\|_{L^\infty(0,T;H)} \leq C$, para todo $m \in \mathbb{N}$, ou seja, a sequência $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ está contida em um conjunto limitado de $L^\infty(0,T;H)$.

Agora, podemos integrar (3.3.6) de 0 à T, de modo que,

$$\int_0^T \frac{d}{dt}\|u_m(t)\|_H^2 dt + \nu \int_0^T \|u_m(t)\|_V^2 dt \leq \frac{1}{\nu}\int_0^T \|f(t)\|_{V^*}^2 dt,$$

ou seja,

$$\|u_m(T)\|_H^2 + \nu \int_0^T \|u_m(t)\|_V^2 dt \leq \|u_{m0}\|_H^2 + \frac{1}{\nu}\|f\|^2_{L^2(0,T;V^*)}, \tag{3.3.7}$$

de modo que,

$$\nu\|u_m\|^2_{L^2(0,T;V)} \leq \|u_{m0}\|_H^2 + \frac{1}{\nu}\|f\|^2_{L^2(0,T;V^*)},$$

e portanto,

$$\|u_m\|_{L^2(0,T;V)} \leq \left(\frac{1}{\nu}\|u_0\|_H^2 + \frac{1}{\nu^2}\|f\|^2_{L^2(0,T;V^*)}\right)^{1/2},$$

para todo $m \in \mathbb{N}$. Assim, $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ está contida em um subconjunto limitado de $L^2(0,T;V)$.

Passo 3 - Limitação da Sequência $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$

Começamos esta parte da prova definindo a extensão por zero de u_m, ou seja, consideramos $\overline{u_m} : \mathbb{R} \to V$ dado por

$$\overline{u_m}(t) = \begin{cases} u_m(t), & \text{se } t \in [0,T] \\ 0_V, & \text{se } t \in \mathbb{R}\backslash[0,T] \end{cases} .$$

Nosso objetivo neste passo será mostrar que a sequência $(\overline{u_m})_{m\in\mathbb{N}}$ está contida em um subconjunto limitado de $\mathscr{H}^{\gamma}_{[0,T]}(\mathbb{R},V,H)$ (relembre-se que este espaço já foi introduzido e discutido na Seção 2.6).

Como $u_m \in L^2(0,T;V) \cap L^1(0,T;V)$ temos $\overline{u_m} \in L^2(\mathbb{R},V) \cap L^1(\mathbb{R},V)$, e portanto colocamos $\widehat{u_m}$ como sendo a transformada de Fourier de $\overline{u_m}$, isto é,

$$\widehat{u_m}(y) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i t y}\overline{u_m}(t)dt,$$

com $\widehat{u_m} \in L^2(\mathbb{R},V)$. Mostraremos agora que,

$$\int_{\mathbb{R}} |y|^{2\gamma}\|\widehat{u_m}(y)\|^2_H dy \leq C, \quad \text{para} \quad 0 < \gamma < \frac{1}{4}.$$

Como $\overline{u_m} \in L^2(\mathbb{R},V) \subseteq L^1_{loc}(\mathbb{R},V)$ define uma distribuição, então possui derivada distribucional. Assim, para $\varphi \in C^\infty_c(\mathbb{R})$ temos,

$$\begin{aligned}
\langle \overline{u_m}', \varphi\rangle &= -\langle \overline{u_m}, \varphi'\rangle \\
&= -\int_{\mathbb{R}} \overline{u_m}(t)\varphi'(t)dt \\
&= -\int_{[0,T]} u_m(t)\varphi'(t)dt \\
&= -u_m(T)\varphi(T) + u_m(0)\varphi(0) + \int_{[0,T]} u'_m(t)\varphi(t)dt \\
&= -u_m(T)\varphi(T) + u_m(0)\varphi(0) + \int_{\mathbb{R}} \overline{u'_m}(t)\varphi(t)dt \\
&= -u_m(T)\langle \delta_T, \varphi\rangle + u_m(0)\langle \delta_0, \varphi\rangle + \langle \overline{u'_m}, \varphi\rangle \\
&= \langle -u_m(T)\delta_T, \varphi\rangle + \langle u_{m0}\delta_0, \varphi\rangle + \langle \overline{u'_m}, \varphi\rangle \\
&= \langle -u_m(T)\delta_T + u_{m0}\delta_0 + \overline{u'_m}, \varphi\rangle,
\end{aligned}$$

ou seja, obtivemos que,

$$\overline{u_m}' = -u_m(T)\delta_T + u_{m0}\delta_0 + \overline{u'_m},$$

cujas derivadas são no sentido distribucional. Denote então $f_m = f - Au_m - Bu_m$ e seja $\overline{f_m}$ a extensão por zero de f_m. Vale notar que, da definição de f, de A e do Lema 2.26 temos que $f_m \in L^1(0,T;V^*)$, e consequentemente $\overline{f_m} \in L^1(\mathbb{R},V^*)$, o que permite-nos calcular sua transformada de Fourier.

Agora, para todo $j \in \{1,\ldots,m\}$ vale,

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\langle \overline{u_m}(t), w_j\rangle_H &= \left\langle \frac{d}{dt}\overline{u_m}(t), w_j \right\rangle_H \\
&= \langle -u_m(T)\delta_T + u_{m0}\delta_0 + \overline{u_m'}(t), w_j\rangle_H \\
&= \langle -u_m(T)\delta_T, w_j\rangle_H + \langle u_{m0}\delta_0, w_j\rangle_H + \langle \overline{u_m'}(t), w_j\rangle_H \\
&= \langle -u_m(T), w_j\rangle_H \delta_T + \langle u_{m0}, w_j\rangle_H \delta_0 + \langle \overline{u_m'}(t), w_j\rangle_H,
\end{aligned}
$$

mas da equação (3.3.2) e da definição dos operadores A e B temos,

$$
\begin{aligned}
\langle \overline{u_m'}(t), w_j\rangle_H &= (\overline{f}(t), w_j) - \nu\langle \overline{u_m}(t), w_j\rangle_V - b(\overline{u_m}(t), \overline{u_m}(t), w_j) \\
&= (\overline{f}(t), w_j) - \nu(A\overline{u_m}(t), w_j) - (B\overline{u_m}(t), w_j) \\
&= (\overline{f}(t) - \nu A\overline{u_m}(t) - B\overline{u_m}(t), w_j) \\
&= (\overline{f_m}(t), w_j),
\end{aligned}
$$

e portanto,

$$
\frac{d}{dt}\langle \overline{u_m}(t), w_j\rangle_H = \langle -u_m(T), w_j\rangle_H \delta_T + \langle u_{m0}, w_j\rangle_H \delta_0 + (\overline{f_m}(t), w_j).
$$

Podemos aplicar a Transformada de Fourier em ambos os lados dessa equação. Notando que,

$$
\int_{\mathbb{R}} (\overline{f_m}(t), w_j) e^{-2\pi i t y} dt = \left(\int_{\mathbb{R}} \overline{f_m}(t) e^{-2\pi i t y} dt, w_j \right) = (\hat{f}_m(y), w_j),
$$

e integrando por partes o termo do lado esquerdo,

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \frac{d}{dt}\langle \overline{u_m}(t), w_j\rangle_H e^{-2\pi i t y} dt &= \langle \overline{u_m}(t), w_j\rangle_H e^{-2\pi i t y}\Big|_{-\infty}^{\infty} + 2\pi i y \int_{\mathbb{R}} \langle \overline{u_m}(t), w_j\rangle_H e^{-2\pi i t y} dt \\
&= 2\pi i y \left\langle \int_{\mathbb{R}} \overline{u_m}(t) e^{-2\pi i t y} dt, w_j \right\rangle_H \\
&= 2\pi i y \langle \widehat{u_m}(y), w_j\rangle_H.
\end{aligned}
$$

Para as funções delta de Dirac usamos que $\widehat{\delta_0} = 1$ e $\widehat{\delta_T} = e^{-2\pi i T y}$ de modo que para todo $j = 1,\ldots,m$ temos,

$$
2\pi i y \langle \widehat{u_m}(y), w_j\rangle_H = (\widehat{f_m}(y), w_j) + \langle u_{m0}, w_j\rangle_H - \langle u_m(T), w_j\rangle_H e^{-2\pi i T y}.
$$

Defina $\overline{\lambda_{jm}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por,

$$\overline{\lambda_{jm}}(t) = \begin{cases} \lambda_{jm}(t), & \text{se } \ t \in [0,T] \\ 0, & \text{se } \ t \in \mathbb{R} \backslash [0,T] \end{cases} \quad ,$$

e note que, como $\lambda_{jm} \in L^2(0,T)$, então $\overline{\lambda_{jm}} \in L^2(\mathbb{R})$, e podemos calcular sua transformada de Fourier, que será denotada por $\widehat{\lambda_{jm}}(y)$. Assim,

$$\begin{aligned} 2\pi iy\langle \widehat{u_m}(y), \widehat{\lambda_{jm}}(y)w_j\rangle_H = (\widehat{f_m}(y), \widehat{\lambda_{jm}}(y)w_j) + \langle u_{0m}, \widehat{\lambda_{jm}}(y)w_j\rangle_H \\ - \langle u_m(T), \widehat{\lambda_{jm}}(y)w_j\rangle_H e^{-2\pi iTy}, \end{aligned}$$

e agora podemos somar sobre todo $j = 1, \ldots, m$, e tendo em vista que a transformada de Fourier é linear obtemos,

$$2\pi iy\langle \widehat{u_m}(y), \widehat{u_m}(y)\rangle_H = (\widehat{f_m}(y), \widehat{u_m}(y)) + \langle u_{0m}, \widehat{u_m}(y)\rangle_H - \langle u_m(T), \widehat{u_m}(y)\rangle_H e^{-2\pi iTy},$$

isto é,

$$2\pi iy\|\widehat{u_m}(y)\|_H^2 = (\widehat{f_m}(y), \widehat{u_m}(y)) + \langle u_{m0}, \widehat{u_m}(y)\rangle_H - \langle u_m(T), \widehat{u_m}(y)\rangle_H e^{-2\pi iTy}.$$

Tomando o módulo em ambos os lados dessa igualdade,

$$\begin{aligned} |y|\|\widehat{u_m}(y)\|_H^2 &\leq \frac{1}{2\pi}\left[|(\widehat{f_m}(y), \widehat{u_m}(y))| + |\langle u_{m0}, \widehat{u_m}(y)\rangle_H| + |\langle u_m(T), \widehat{u_m}(y)\rangle_H|\right] \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\left[\|\widehat{f_m}(y)\|_{V^*}\|\widehat{u_m}(y)\|_V + \|u_{m0}\|_H\|\widehat{u_m}(y)\|_H + \|u_m(T)\|_H\|\widehat{u_m}(y)\|_H\right]. \end{aligned}$$

Como a imersão $V \hookrightarrow H$ é contínua, existe $C_0 > 0$ tal que $\|\widehat{u_m}(y)\|_H \leq C_0\|\widehat{u_m}(y)\|_V$. Além disso, $\|u_{m0}\|_H \leq \|u_0\|_H$ e de (3.3.7) concluímos que $\|u_m(T)\|_H \leq C_1$. Assim, podemos escrever,

$$|y|\|\widehat{u_m}(y)\|_H^2 \leq \frac{1}{2\pi}\|\widehat{u_m}(y)\|_V\left(\|\widehat{f_m}(y)\|_{V^*} + K_1\right), \quad \forall \ y \in \mathbb{R}. \tag{3.3.8}$$

Afirmação: Afirmamos que,

$$\|\widehat{f_m}(y)\|_{V^*} \leq C_2, \quad \forall \ y \in \mathbb{R}.$$

Demonstração. Note que,

$$\begin{aligned}
\|\widehat{f_m}(y)\|_{V^*} &= \left\| \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i y t}\overline{f_m}(t)dt \right\|_{V^*} \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} \|\overline{f_m}(t)\|_{V^*}dt \\
&= \int_0^T \|f_m(t)\|_{V^*}dt \\
&= \int_0^T \|f(t) - \nu A u_m(t) - B u_m(t)\|_{V^*}dt \\
&\leq \int_0^T \|f(t)\|_{V^*} + \nu\|Au_m(t)\|_{V^*} + \|Bu_m(t)\|_{V^*}dt,
\end{aligned}$$

e usando as equações (2.7.6) e (3.2.3),

$$\begin{aligned}
\|\widehat{f_m}(y)\|_{V^*} &\leq \int_0^T \|f(t)\|_{V^*} + \nu\|u_m(t)\|_V + K\|u_m(t)\|_V^2 dt \\
&= \|f\|_{L^1(0,T;V^*)} + \nu\|u_m\|_{L^1(0,T;V)} + K\|u_m\|_{L^2(0,T;V)} \\
&\leq C_3\|f\|_{L^2(0,T;V^*)} + \nu C_4\|u_m\|_{L^2(0,T;V)} + K\|u_m\|_{L^2(0,T;V)} \\
&\leq C_2,
\end{aligned}$$

para todo $m \in \mathbb{N}$, pois $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ é limitada em $L^2(0,T;V)$. Como $y \in \mathbb{R}$ foi arbitrário temos,

$$\sup_{y\in\mathbb{R}} \|\widehat{f_m}(y)\|_{V^*} \leq C_2,$$

o que conclui a demonstração da afirmação. $\square$

Desse modo obtemos de (3.3.8) que

$$|y|\|\widehat{u_m}(y)\|_H^2 \leq L\|\widehat{u_m}(y)\|_V, \quad \forall \; y \in \mathbb{R}, \tag{3.3.9}$$

para algum $L \geq 0$.

Afirmação: Se $0 < \gamma < 1/4$ então existe C (dependendo apenas de γ) tal que,

$$|x|^{2\gamma} \leq C\frac{1+|x|}{1+|x|^{1-2\gamma}}, \quad \forall \; x \in \mathbb{R}.$$

É relevante ressaltar que a validade dessa desigualdade estaria assegurada mesmo se tivéssemos apenas que $0 < \gamma < 1/2$, contudo, ao longo do restante do texto, é imprescindível impor a restrição mais rigorosa de $0 < \gamma < 1/4$.

Demonstração. Defina,

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{|x|^{2\gamma}(1+|x|^{1-2\gamma})}{1+|x|} \end{aligned}$$

Note que f é contínua e,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty} \frac{|x|^{2\gamma}(1+|x|^{1-2\gamma})}{1+|x|} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{|x|^{2\gamma}+|x|}{1+|x|} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{|x|^{2\gamma-1}+1}{\frac{1}{|x|}+1} \\ &= 1, \end{aligned}$$

pois $2\gamma-1<0$. De modo análogo concluímos que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$. Assim, f é limitada, ou seja, existe $C \geq 0$ tal que,

$$\frac{|x|^{2\gamma}(1+|x|^{1-2\gamma})}{1+|x|} \leq C \quad \Rightarrow \quad |x|^{2\gamma} \leq C\frac{1+|x|}{1+|x|^{1-2\gamma}}, \quad \forall \ x \in \mathbb{R},$$

como queríamos demonstrar. □

Da afirmação acima e de (3.3.9), se $0<\gamma<1/4$ temos,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |y|^{2\gamma} \|\widehat{u_m}(y)\|_H^2 dy &\leq C \int_{\mathbb{R}} \frac{1+|y|}{1+|y|^{1-2\gamma}} \|\widehat{u_m}(y)\|_H^2 dy \\ &= C\left[\int_{\mathbb{R}} \frac{\|\widehat{u_m}(y)\|_H^2}{1+|y|^{1-2\gamma}} dy + \int_{\mathbb{R}} \frac{|y|\|\widehat{u_m}(y)\|_H^2}{1+|y|^{1-2\gamma}} dy\right] \\ &\leq C\left[\int_{\mathbb{R}} \|\widehat{u_m}(y)\|_H^2 dy + \int_{\mathbb{R}} \frac{|y|\|\widehat{u_m}(y)\|_H^2}{1+|y|^{1-2\gamma}} dy\right] \\ &\leq K_0\left[\int_{\mathbb{R}} \|\widehat{u_m}(y)\|_V^2 dy + \int_{\mathbb{R}} \frac{\|\widehat{u_m}(y)\|_V}{1+|y|^{1-2\gamma}} dy\right]. \end{aligned}$$

Vamos mostrar que o lado direito desta igualdade é finito. Do Teorema 2.20 temos,

$$\int_{\mathbb{R}} \|\widehat{u_m}(y)\|_V^2 dy = \int_{\mathbb{R}} \|\overline{u_m}(t)\|_V^2 dt = \int_0^T \|u_m(t)\|_V^2 dt < \infty,$$

e para a segunda integral utilizamos a desigualdade de Hölder, de modo que,

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \frac{\|\widehat{u_m}(y)\|_V}{1+|y|^{1-2\gamma}} dy &\leq \left[\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+|y|^{1-2\gamma})^2} dy\right]^{1/2} \left[\int_{\mathbb{R}} \|\widehat{u_m}(y)\|_V^2 dy\right]^{1/2} \\
&\leq M \left[\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+|y|^{1-2\gamma})^2} dy\right]^{1/2}.
\end{aligned}
$$

Afirmação: Temos que,

$$
\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+|y|^{1-2\gamma})^2} dy < \infty.
$$

Demonstração. É fácil ver que a função que está sendo integrada é par, portanto,

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+|y|^{1-2\gamma})^2} dy &= 2\int_0^\infty \frac{1}{(1+y^{1-2\gamma})^2} dy \\
&= 2\left[\int_0^1 \frac{1}{(1+y^{1-2\gamma})^2} dy + \int_1^\infty \frac{1}{(1+y^{1-2\gamma})^2} dy\right],
\end{aligned}
$$

mas note que, se $0 < \gamma < 1/4$ então $0 < 2\gamma < 1/2$ e como $0 < y < 1$ temos $0 < y^{2\gamma} < 1$, e portanto $y < y^{1-2\gamma}$, de modo que,

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+|y|^{1-2\gamma})^2} dy &\leq 2\left[\int_0^1 \frac{1}{(1+y)^2} dy + \int_1^\infty \frac{1}{(1+y^{1-2\gamma})^2} dy\right] \\
&= 1 + 2\int_1^\infty \frac{1}{(1+y^{1-2\gamma})^2} dy.
\end{aligned}
$$

Agora, como para $y > 1$ temos que $y^{2-4\gamma} < (1+y^{1-2\gamma})^2$, deduzimos que

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+|y|^{1-2\gamma})^2} dy &\leq 1 + 2\int_1^\infty \frac{1}{y^{2-4\gamma}} dy \\
&= 1 + 2\lim_{a\to\infty} \int_1^a \frac{1}{y^{2-4\gamma}} dy \\
&= 1 + 2\lim_{a\to\infty} \left(\left.\frac{y^{4\gamma-1}}{4\gamma-1}\right|_1^a \right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= 1 + \frac{2}{4\gamma-1} \lim_{a\to\infty} (a^{4\gamma-1} - 1) \\
&= 1 - \frac{2}{4\gamma-1},
\end{aligned}
$$

pois $0 < \gamma < 1/4$, e isso conclui a prova da afirmação. □

Assim obtivemos que,

$$\| |y|^{\gamma} \widehat{u_m} \|^2_{L^2(\mathbb{R},H)} = \int_{\mathbb{R}} |y|^{2\gamma} \| \widehat{u_m}(y) \|^2_H dy < \infty, \quad \forall \ m \in \mathbb{N}.$$

Agora, como $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ está contida em um subconjunto limitado de $L^2(0,T;V)$, temos que $(\overline{u_m})_{m\in\mathbb{N}}$ está contida em um conjunto limitado de $L^2(\mathbb{R},V)$, e portanto,

$$\|\overline{u_m}\|^2_{\mathscr{H}^{\gamma}(\mathbb{R},V,H)} = \|\overline{u_m}\|^2_{L^2(\mathbb{R},V)} + \| |y|^{\gamma} \widehat{u_m} \|^2_{L^2(\mathbb{R},H)} < \infty, \quad \forall \ m \in \mathbb{N},$$

ou seja, $(\overline{u_m})_{m\in\mathbb{N}}$ está contida em um subconjunto limitado de $\mathscr{H}^{\gamma}(\mathbb{R},V,H)$. Mas $[0,T]$ é compacto, e portanto, $(\overline{u_m})_{m\in\mathbb{N}}$ está contida em um subconjunto limitado de $\mathscr{H}^{\gamma}_{[0,T]}(\mathbb{R},V,H)$.

Assim, temos,

1. $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ contida em um subconjunto limitado de $L^{\infty}(0,T;H)$.
2. $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ contida em um subconjunto limitado de $L^2(0,T;V)$.
3. $(\overline{u_m})_{m\in\mathbb{N}}$ contida em um subconjunto limitado de $\mathscr{H}^{\gamma}_{[0,T]}(\mathbb{R},V,H)$.

Passo 4 - Passagem ao Limite

Do Teorema 2.21 temos a imersão $\mathscr{H}^{\gamma}_{[0,T]}(\mathbb{R},V,H) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R},H)$ compacta, ou seja, existe uma subsequência $(\overline{u_{m_j}})_{j\in\mathbb{N}} \subseteq (\overline{u_m})_{m\in\mathbb{N}}$ que converge na topologia forte de $L^2(\mathbb{R},H)$. Mas então $(u_{m_j})_{j\in\mathbb{N}}$ converge na topologia forte de $L^2(0,T;H)$, ou seja, existe $u \in L^2(0,T;H)$ tal que,

$$u_{m_j} \to u \quad \text{em} \ \ L^2(0,T;H).$$

Agora note que $(u_{m_j})_{j\in\mathbb{N}}$ é limitada em $L^2(0,T;V)$ e portanto, pelo Teorema 2.2, existe uma subsequência $(u_{m_{j_l}})_{l\in\mathbb{N}} \subseteq (u_{m_j})_{j\in\mathbb{N}}$ e $u_{\star} \in L^2(0,T;V)$ tal que,

$$u_{m_{j_l}} \rightharpoonup u_{\star} \quad \text{em} \ \ L^2(0,T;V).$$

Renomeando a sequência $(u_{m_{j_l}})_{l\in\mathbb{N}}$ como $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ temos,

$$u_k \to u \quad \text{em} \ \ L^2(0,T;H), \quad \text{e} \quad u_k \rightharpoonup u_{\star} \quad \text{em} \ \ L^2(0,T;V).$$

Afirmação: Temos $u = u_{\star}$.

Demonstração. Seja $f \in (L^2(0,T;H))^*$. Da convergência forte temos que $f(u_k) \to f(u)$, e da convergência fraca que $f(u_k) \to f(u_{\star})$, uma vez que f pode ser encarado como um elemento de

$(L^2(0,T;V))^*$. Daí, da unicidade do limite, temos que $f(u) = f(u_\star)$. Mas então $f(u-u_\star) = 0$, para todo $f \in (L^2(0,T;H))^*$. Disto decorre que $u = u_\star$, como queríamos demonstrar. □

Agora note que,

$$L^\infty(0,T;H) \equiv L^\infty(0,T;H^*) \equiv (L^1(0,T;H))^*,$$

onde o símbolo "≡" indica uma isometria. Daí, como $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é limitada em $L^\infty(0,T;H)$ então $(u_k^*)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq (L^1(0,T;H))^*$ é limitada (aqui usamos o símbolo u_k^* para denotar o representante em $(L^1(0,T;H))^*$ do elemento u_k). Como $L^1(0,T;H)$ é separável, do Teorema 2.3 existe uma subsequência $(u_{k_j}^*)_{j\in\mathbb{N}}$ de $(u_k^*)_{k\in\mathbb{N}}$ e $u_0^* \in (L^1(0,T;H))^*$ tal que $u_{k_j}^* \overset{*}{\rightharpoonup} u_0^*$ em $(L^1(0,T;H))^*$.

Afirmação: $u = u_0$ e $u \in L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H)$.

Demonstração. Como $u_{k_j}^* \overset{*}{\rightharpoonup} u_0^*$ em $(L^1(0,T;H))^*$ temos,

$$u_{k_j}^*(v) \to u_0^*(v), \quad \forall \ v \in L^1(0,T;H),$$

mas por definição isto é,

$$u_{k_j}^*(v) = \int_0^T \langle u_{k_j}(t), v(t)\rangle_H dt \to \int_0^T \langle u_0(t), v(t)\rangle_H dt, \quad \forall \ v \in L^1(0,T;H). \tag{3.3.10}$$

Por outro lado temos $u_{k_j} \rightharpoonup u$ em $L^2(0,T;H)$, ou seja,

$$f(u_{k_j}) \to f(u), \quad \forall \ f \in (L^2(0,T;H))^*,$$

e pelo Teorema de Representação de Riesz isto é,

$$\int_0^T \langle u_{k_j}(t), w(t)\rangle_H dt \to \int_0^T \langle u(t), w(t)\rangle_H dt, \quad \forall \ w \in L^2(0,T;H). \tag{3.3.11}$$

Comparando (3.3.10) e (3.3.11) vemos facilmente que,

$$\int_0^T \langle u_0(t), w(t)\rangle_H dt = \int_0^T \langle u(t), w(t)\rangle_H dt \quad \forall \ w \in L^2(0,T;H),$$

ou seja, $u = u_0$, como queríamos demonstrar. □

Podemos então, afim de simplificar a notação, denotar $(u_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ por $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Assim obtivemos,

$$\begin{aligned} u_k &\to u \quad \text{em} \;\; L^2(0,T;H) \\ u_k &\rightharpoonup u \quad \text{em} \;\; L^2(0,T;V) \\ u_k &\overset{*}{\rightharpoonup} u \quad \text{em} \;\; L^\infty(0,T;H), \end{aligned}$$

com a última convergência sendo a menos de uma isometria.

Agora, da equação (3.3.2) e para $j \leq k$ fixo, temos,

$$\langle u_k'(t), w_j\rangle_H + \nu\langle u_k(t), w_j\rangle_V + b(u_k(t), u_k(t), w_j) = (f(t), w_j).$$

Seja agora $\phi(t) \in C^\infty([0,T])$ tal que $\phi(T) = 0$, de modo que multiplicando a equação anterior por $\phi(t)$ e integrando de 0 à T temos,

$$\int_0^T \langle u_k'(t), w_j\rangle_H \phi(t)dt + \nu \int_0^T \langle u_k(t), w_j\rangle_V \phi(t)dt \\ + \int_0^T b(u_k(t), u_k(t), w_j)\phi(t)dt = \int_0^T (f(t), w_j)\phi(t)dt,$$

isto é,

$$\int_0^T \langle u_k'(t), \phi(t)w_j\rangle_H dt + \nu \int_0^T \langle u_k(t), \phi(t)w_j\rangle_V dt \\ + \int_0^T b(u_k(t), u_k(t), \phi(t)w_j)dt = \int_0^T (f(t), \phi(t)w_j)dt.$$

Integrando o primeito termo por partes, vem,

$$\int_0^T \langle u_k'(t), \phi(t)w_j\rangle_H dt = -\int_0^T \langle u_k(t), \phi'(t)w_j\rangle_H dt - \langle u_k(0), \phi(0)w_j\rangle_H,$$

e portanto temos,

$$-\int_0^T \langle u_k(t), \phi'(t)w_j\rangle_H dt + \nu\int_0^T \langle u_k(t), \phi(t)w_j\rangle_V dt + \int_0^T b(u_k(t), u_k(t), \phi(t)w_j)dt \\ = \int_0^T (f(t), \phi(t)w_j)dt + \langle u_{k0}, \phi(0)w_j\rangle_H. \tag{3.3.12}$$

Nosso objetivo agora será usar as convergências da sequência $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ em seus respectivos espaços para mostrar a convergência de cada um destes termos. A convergência da integral do operador b segue diretamente do Lema 2.27, isto é,

$$\int_0^T b(u_k(t), u_k(t), \phi(t)w_j)dt \to \int_0^T b(u(t), u(t), \phi(t)w_j)dt.$$

Note que $\phi w_j \in C^\infty([0,T];V) \subseteq L^2(0,T;V)$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Assim, para o primeiro termo temos,

$$\begin{aligned}\left|\int_0^T \langle u_k(t), \phi'(t)w_j\rangle_H dt - \int_0^T \langle u(t), \phi'(t)w_j\rangle_H dt\right| &= |\langle u_k, \phi' w_j\rangle_{L^2(0,T;H)} - \langle u, \phi' w_j\rangle_{L^2(0,T;H)}| \\ &= |\langle u_k - u, \phi' w_j\rangle_{L^2(0,T;H)}| \\ &\leq \|u_k - u\|_{L^2(0,T;H)} \|\phi' w_j\|_{L^2(0,T;H)},\end{aligned}$$

e da convergência forte de $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ em $L^2(0,T;H)$ obtemos a covergência do primeiro termo.

Para o segundo termo temos $u_k \rightharpoonup u$ em $L^2(0,T;V)$, e como $\phi w_j \in L^2(0,T;V)$ obtemos diretamente,

$$\langle u_k, \phi w_j\rangle_{L^2(0,T;V)} \to \langle u, \phi w_j\rangle_{L^2(0,T;V)}.$$

Ora, para o último termo é facilmente verificável que,

$$|\langle u_{k0}, \phi(0)w_j\rangle_H - \langle u_0, \phi(0)w_j\rangle_H| \leq \|u_{k0} - u_0\|_H \|\phi(0)w_j\|_H \to 0$$

quando $k \to \infty$. Assim, a equação (3.3.12) após a passagem ao limite escreve-se,

$$\begin{aligned}-\int_0^T \langle u(t), \phi'(t)w_j\rangle_H dt + \nu\int_0^T \langle u(t), \phi(t)w_j\rangle_V dt + \int_0^T b(u(t), u(t), \phi(t)w_j)dt \\ = \int_0^T (f(t), \phi(t)w_j)dt + \langle u_0, \phi(0)w_j\rangle_H.\end{aligned}$$

Ora, da linearidade da integral, do produto interno e do funcional $f(t)$, segue que esta igualdade vale para todo elemento de $\operatorname{span}(w_j)_{j\in\mathbb{N}}$, isto é, para toda $\varphi \in \operatorname{span}(w_j)_{j\in\mathbb{N}}$ vale,

$$\begin{aligned}-\int_0^T \langle u(t), \phi'(t)\varphi\rangle_H dt + \nu\int_0^T \langle u(t), \phi(t)\varphi\rangle_V dt + \int_0^T b(u(t), u(t), \phi(t)\varphi)dt \\ = \int_0^T (f(t), \phi(t)\varphi)dt + \langle u_0, \phi(0)\varphi\rangle_H.\end{aligned}$$

Por densidade mostraremos a validade desta equação para todo elemento de V. Seja então $v \in V$ e $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \operatorname{span}(w_j)_{j\in\mathbb{N}}$ tal que $\varphi_n \to v$ na norma $\|\cdot\|_V$. Faremos apenas para o primeiro termo, pois os demais são análogos. De fato,

$$\begin{aligned}\left|\int_0^T \langle u(t), \phi'(t)\varphi_n\rangle_H dt - \int_0^T \langle u(t), \phi'(t)v\rangle_H dt\right| &\leq \int_0^T |\langle u(t), \phi'(t)(\varphi_n - v)\rangle_H| dt \\ &\leq \|\varphi_n - v\|_H \int_0^T \|u(t)\|_H |\phi'(t)| dt \\ &\leq K\|\varphi_n - v\|_V \int_0^T \|u(t)\|_H |\phi'(t)| dt,\end{aligned}$$

que converge para zero quando $n \to \infty$. Assim obtivemos,

$$\begin{aligned} -\int_0^T \langle u(t), \phi'(t)v\rangle_H dt + \nu \int_0^T \langle u(t), \phi(t)v\rangle_V dt + \int_0^T b(u(t), u(t), \phi(t)v)dt \\ = \int_0^T (f(t), \phi(t)v)dt + \langle u_0, \phi(0)v\rangle_H, \end{aligned} \tag{3.3.13}$$

para todo $v \in V$. Agora, se $\phi \in C_c^\infty((0,T))$ a equação (3.3.13) é escrita como,

$$\begin{aligned} -\int_0^T \langle u(t), v\rangle_H \phi'(t)dt + \nu \int_0^T \langle u(t), v\rangle_V \phi(t)dt \\ + \int_0^T b(u(t), u(t), v)\phi(t)dt = \int_0^T (f(t), v)\phi(t)dt, \end{aligned}$$

e não é difícil notar que as funções,

$$[0,T] \ni t \mapsto \langle u(t), v\rangle_H, \langle u(t), v\rangle_V, b(u(t), u(t), v), (f(t), v) \in \mathbb{R},$$

definem distribuições, de modo que podemos escrever,

$$\left\langle \frac{d}{dt}\langle u(t), v\rangle_H, \phi \right\rangle + \nu\langle\langle u(t), v\rangle_V, \phi\rangle + \langle b(u(t), u(t), v), \phi\rangle = \langle (f(t), v), \phi\rangle,$$

ou ainda,

$$\left\langle \frac{d}{dt}\langle u(t), v\rangle_H + \nu\langle u(t), v\rangle_V + b(u(t), u(t), v), \phi \right\rangle = \langle (f(t), v), \phi\rangle, \quad \forall \;\; \phi \in C_c^\infty(0,T),$$

e para todo $v \in V$, o que demonstra a equação (3.3.1).

Passo 5 - Condição Inicial

Nosso objetivo neste passo será mostrar que $u(0) = u_0$ em H. Para tando começamos notando que se $\phi \in C^\infty((0,T))$ é tal que $\phi(0) = 1$ e $\phi(T) = 0$, da equação (3.3.12) temos,

$$\begin{aligned} -\int_0^T \langle u_k(t), \phi'(t)w_j\rangle_H dt + \nu \int_0^T \langle u_k(t), \phi(t)w_j\rangle_V dt + \int_0^T b(u_k(t), u_k(t), \phi(t)w_j)dt \\ = \int_0^T (f(t), \phi(t)w_j)dt + \langle u_{k0}, w_j\rangle_H. \end{aligned}$$

Usando as convergências da sequência $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ como fizemos no passo anterior obtemos,

$$\begin{aligned} -\int_0^T \langle u(t), \phi'(t)w_j\rangle_H dt + \nu \int_0^T \langle u(t), \phi(t)w_j\rangle_V dt + \int_0^T b(u(t), u(t), \phi(t)w_j)dt \\ = \int_0^T (f(t), \phi(t)w_j)dt + \langle u_0, w_j\rangle_H. \end{aligned} \tag{3.3.14}$$

Agora, como sabemos que,

$$\frac{d}{dt}\langle u(t),w_j\rangle_H+\nu\langle u(t),w_j\rangle_V+b(u(t),u(t),w_j)=(f(t),w_j), \tag{3.3.15}$$

escolhendo, como acima, $\phi\in C^\infty((0,T))$ tal que $\phi(0)=1$ e $\phi(T)=0$, multiplicando (3.3.15) e integrando obtemos,

$$\int_0^T \frac{d}{dt}\langle u(t),w_j\rangle_H\phi(t)dt+\nu\int_0^T\langle u(t),w_j\rangle_V\phi(t)dt+\int_0^T b(u(t),u(t),w_j)\phi(t)dt = \int_0^T (f(t),w_j)\phi(t)dt,$$

e notando que a função $[0,T]\ni t\mapsto\langle u(t),w_j\rangle_H$ é $L^1([0,T])$ e a derivada no primeiro termo é no sentido fraco, podemos integrar o primeiro termo por partes e obter,

$$-\int_0^T\langle u(t),w_j\rangle_H\phi'(t)dt+\nu\int_0^T\langle u(t),w_j\rangle_V\phi(t)dt+\int_0^T b(u(t),u(t),w_j)\phi(t)dt = \int_0^T (f(t),w_j)\phi(t)dt+\langle u(0),w_j\rangle_H. \tag{3.3.16}$$

Comparando as equações (3.3.14) e (3.3.16) temos diretamente $u(0)=u_0$, como queríamos demonstrar. ■

3.4 Unicidade da Solução para $\mathbb{R}^n$ ($n=2$)

Como é conhecido na teoria de Navier-Stokes, a unicidade de solução fraca existe apenas no caso $n=2$, sendo este o resultado que apresentamos a seguir. Além da unicidade, conseguimos mais alguns resultados relativos a regularidade da solução.

Teorema 3.2. *Sob as mesmas hipóteses do Teorema 3.1 com $n=2$, a função u é única. Além disso, u é igual q.t.p. a uma função em $C(0,T;H)$.*

Demonstração. Demonstremos primeiramente o resultado relativo a regularidade. Como u é solução fraca de Navier-Stokes, então da segunda formulação fraca temos,

$$u'=f-\nu Au-Bu \quad \text{em} \quad (0,T),$$

mas note que cada termo do lado direito está em $L^2(0,T,V^*)$. De fato, f por hipótese, Au por definição e Bu pelo item (3) do Lema 2.26 (onde usamos fortemente a hipótese $n=2$). Disto segue que $u'\in L^2(0,T;V^*)$, e portanto, do Lema 2.22 temos u igual, a menos de um conjunto de medida nula, a uma função em $C(0,T;H)$.

Agora para a unicidade, suponha que u_1 e u_2 sejam duas soluções fracas satisfazendo o Teorema 3.1. Defina $u=u_1-u_2$. Ainda, da segunda formulação fraca temos $u\in L^2(0,T;V)$,

$u' \in L^2(0,T;V^*)$ e,

$$u' + \nu Au + Bu = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u' + \nu Au = -Bu_1 + Bu_2,$$

com $u(0) = 0$. Ora, então podemos escrever,

$$(u'(t), u(t)) + \nu(Au(t), u(t)) = -(Bu_1(t), u(t)) + (Bu_2(t), u(t)),$$

e usando os Lemas 2.22, 2.26 e a equação (3.2.2) temos,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|_H^2 + \nu\|u(t)\|_V^2 = -b(u_1(t), u_1(t), u(t)) + b(u_2(t), u_2(t), u(t)),$$

ou ainda,

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|_H^2 + 2\nu\|u(t)\|_V^2 = -2b(u_1(t), u_1(t), u(t)) + 2b(u_2(t), u_2(t), u(t)).$$

Mas note que (cf. Afirmação 2 do Lema 2.25),

$$\begin{aligned}
-2b(u_1(t), u_1(t), u(t)) &+ 2b(u_2(t), u_2(t), u(t)) \\
&= -2b(u_1(t), u_1(t), u(t)) + 2b(u_1(t), u_2(t), u(t)) \\
&\qquad - 2b(u_1(t), u_2(t), u(t)) + 2b(u_2(t), u_2(t), u(t)) \\
&= -2b(u_1(t), u_1(t) - u_2(t), u(t)) - 2b(u_1(t) - u_2(t), u_2(t), u(t)) \\
&= -2b(u_1(t), u(t), u(t)) - 2b(u(t), u_2(t), u(t)) \\
&= -2b(u(t), u_2(t), u(t)),
\end{aligned}$$

e usando o Lema 2.26 temos,

$$\begin{aligned}
|2b(u(t), u_2(t), u(t))| &\leq 2^{3/2}\|u(t)\|_H\|u(t)\|_V\|u_2(t)\|_V \\
&= 2\sqrt{\nu}\|u(t)\|_V\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\nu}}\|u(t)\|_H\|u_2(t)\|_V \\
&\leq 2\nu\|u(t)\|_V^2 + \frac{1}{\nu}\|u(t)\|_H^2\|u_2(t)\|_V^2,
\end{aligned}$$

de modo que,

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|_H^2 + 2\nu\|u(t)\|_V^2 \leq 2\nu\|u(t)\|_V^2 + \frac{1}{\nu}\|u(t)\|_H^2\|u_2(t)\|_V^2,$$

isto é,

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|_H^2 \leq \frac{1}{\nu}\|u(t)\|_H^2\|u_2(t)\|_V^2.$$

Como $\|u(t)\|_H^2$ é absolutamente contínua (cf. Lema 2.22), e $\|u(t)\|_H^2, \|u_2(t)\|_V^2$ são integráveis (pois $u, u_2 \in L^2(0,T;V)$), usando a Desigualdade de Gronwall (cf. Teorema 2.7) obtemos diretamente,

$$\|u(t)\|_H^2 = 0,$$

e portanto $u_1(t) = u_2(t)$, como queríamos demonstrar. ∎

Vejamos agora por que não conseguimos demonstrar a unicidade de solução quando a dimensão do espaço é igual a três. Note que na demonstração do segundo item do Lema 2.26 utilizamos a Desigualdade de Ladyzhenskaya (ver 2.7.1), onde assumimos a hipótese $n = 2$. De fato, se $n = 3$ a desigualdade de Ladyzhenskaya torna-se,

$$\|u\|_{L^4(\Omega)} \leq 2^{1/2}\|u\|_{L^2(\Omega)}^{1/2}\|\nabla u\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^{3/4}, \quad \forall \ u \in H_0^1(\Omega),$$

válida para qualquer aberto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ (ver por exemplo, [25], página 296). Assim, seguindo a demonstrançõo do item dois do Lema 2.26 obtemos,

$$|b(u,v,w)| \leq K\|v\|_V\|u\|_H^{1/2}\|u\|_V^{3/4}\|w\|_H^{1/2}\|w\|_V^{3/4}, \quad \forall \ u,v,w \in V,$$

e alguma constante $K > 0$. Usando a propriedade que $b(u,v,w) = -b(u,w,v)$ temos,

$$\|Bu\|_{V^*} \leq K\|u\|_H\|u\|_V^{3/2}, \quad \forall \ u \in V.$$

Agora se $u \in L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H)$ então,

$$\|Bu(t)\|_{V^*} \leq K\|u(t)\|_H\|u(t)\|_V^{3/2}, \quad q.t.p. \ \text{em} \ (0,T),$$

e portanto,

$$\int_0^T \|Bu(t)\|_{V^*}^{4/3}dt \leq K\int_0^T \|u(t)\|_H^{4/3}\|u(t)\|_V^2 dt \leq K\|u\|_{L^\infty(0,T;H)}^{4/3}\|u\|_{L^2(0,T;V)}^2,$$

ou seja, $Bu \in L^{4/3}(0,T;V^*)$, e seguindo a demonstração do teorema 3.2 obtemos $u' \in L^{4/3}(0,T;V^*)$, de modo que não podemos utilizar o Lema 2.22, e portanto não podemos concluir a unicidade de solução.

4 Derivada Fracionária nas Equações de Navier-Stokes

Neste capítulo, discutiremos o notável artigo *M. Shinbrot, Fractional derivatives of solutions of the Navier-Stokes equations, Archive for Rational Mechanics and Analysis, 40(2):139–154, 1971*. O foco desse artigo era aprimorar a resposta a uma questão intrigante inicialmente levantada em 1959 por Jacques-Louis Lions sobre a regularidade de soluções fracas das equações de Navier-Stokes. Lions, influenciado pela derivada fracionária de Riemann-Liouville, conjecturava que uma solução fraca dessas equações poderia eventualmente exibir alguma regularidade além daquela garantida pelas técnicas de Faedo-Galerkin. Com base nessa questão, Lions demonstrou em [16] que, se a dimensão fosse $n \leq 4$, então, para quaisquer dados iniciais, existiria uma solução fraca com derivada temporal fracionária de Riemann-Liouville com ordem $\alpha \in (0,1/4)$ em $L^2((0,\infty);H)$.

Shinbrot menciona em seu trabalho que alguns anos após o artigo de Lions, ele próprio conseguiu provar, quando $n = 3$, a existência de soluções fracas com derivadas temporais fracionárias de Riemann-Liouville com ordem $\alpha \in (0,1/3)$, e posteriormente Lions aprimorou para $\alpha \in (0,2/5)$. Surpreendentemente, nenhum deles publicou esses resultados.

De qualquer forma, ambos conjecturavam que soluções fracas deveriam ter derivadas fracionárias de Riemann-Liouville regulares de ordem no máximo $\alpha = 1/2$, embora nenhum deles conseguisse provar essa hipótese. Com base nessas indagações, Shinbrot, em seu trabalho [23], demonstra que, para quaisquer dados iniciais, existe uma solução fraca com uma derivada fracionária de qualquer ordem $\alpha \in (0,1/2)$ em $L^2((0,\infty);H)$. É importante observar que Shinbrot conseguiu uma demonstração que vale para qualquer dimensão, superando as restrições anteriormente impostas pelos estudos prévios.

Endereçando agora o artigo [23] propriamente dito, podemos resumidamente dizer que o autor inicia seu estudo com a discretização do tempo e a definição das "equações de Navier-Stokes quantizadas". Em seguida, ele demonstra a existência de solução para essas equações, utilizando o método de passagem ao limite para estabelecer a existência de uma solução fraca para as equações de Navier-Stokes. Por fim, o autor prova que, sob condições específicas, a solução fraca encontrada possui derivada temporal fracionária de Riemann-Liouville de ordem $\alpha \in (0,1/2)$, apresenta uma estimativa e prova também que ela está em $L^2((0,\infty);H)$.

Durante toda esta seção, onde desenvolveremos os cálculos realizados no artigo, assumiremos que $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ é um domínio (aberto, conexo, e com fronteira suficientemente regular), limitado ou não.

Seja $\mathscr{C}_c^\infty(\Omega)$ como anteriormente (relembre mais detalhes em (2.4.1)). Dai, denote por $\mathscr{L}^2(\Omega)$ o completamento de $\mathscr{C}_c^\infty(\Omega)$ quando imbuido da norma de $\mathbb{L}^2(\Omega)$. Agora, observando que

$$\|u\|_{\mathscr{H}_0^1(\Omega)} := \left[\sum_{i=1}^{n} \|\nabla u_i\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\right]^{1/2},$$

define uma norma em $\mathscr{C}_c^\infty(\Omega)$, graças a compacidade do suporte das funções testes e a Desigualdade de Poincaré (2.14), podemos denotar por $\mathscr{H}_0^1(\Omega)$ o completamento de $\mathscr{C}_c^\infty(\Omega)$ quando o imbuímos da norma $\|\cdot\|_{\mathscr{H}_0^1(\Omega)}$. Como Ω pode ser um conjunto ilimitado, não temos necessariamente a inclusão $\mathscr{H}_0^1(\Omega) \subseteq \mathscr{L}^2(\Omega)$. Deste modo, podemos considerar o espaço,

$$\mathscr{L}^2(\Omega) \cap \mathscr{H}_0^1(\Omega),$$

com a norma,

$$\|v\|_{\mathscr{L}^2 \cap \mathscr{H}_0^1} = \left[\|v\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \|v\|^2_{\mathscr{H}_0^1(\Omega)}\right]^{1/2}.$$

Além disso, é possível demonstrar por meio de equivalências, as quais são omitidas, uma vez que não compõem o cerne deste capítulo, que

$$\mathscr{L}^2(\Omega) = \overline{\mathscr{C}_c^\infty(\Omega)}^{\mathbb{L}^2(\Omega)}, \quad \mathscr{H}_0^1(\Omega) = \overline{\mathscr{C}_c^\infty(\Omega)}^{\mathscr{H}_0^1(\Omega)},$$

$$\overline{\mathscr{C}_c^\infty(\Omega)}^{\mathscr{L}^2(\Omega)\cap\mathscr{H}_0^1(\Omega)} = \mathscr{L}^2(\Omega) \cap \mathscr{H}_0^1(\Omega),$$

e detalhes mais finos sobre estes espaços podem se encontrados em [2, 5, 15].

Assim temos a seguinte decomposição clássica (ver [14], página 27),

$$\mathbb{L}^2(\Omega) = G(\Omega) \oplus \mathscr{L}^2(\Omega),$$

onde $G(\Omega)$ denota o conjunto de todos os gradientes, isto é,

$$G(\Omega) = \{\nabla\phi \;\;:\;\; \phi \in L^2_{loc}(\Omega) \;\text{ e }\; D\phi \in L^2(\Omega)\},$$

e podemos então considerar $P : \mathbb{L}^2(\Omega) \to \mathbb{L}^2(\Omega)$ a Projeção (de Leray) ortogonal de $\mathbb{L}^2(\Omega)$ em $\mathscr{L}^2(\Omega)$. É resultado conhecido que P é linear, limitado, $P^2 = P$ e,

$$\langle P(u), v\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = \langle u, P(v)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}, \quad \forall \;\; u, v \in \mathbb{L}^2(\Omega).$$

4.1 As Equações de Navier-Stokes Quantizadas

Se considerarmos a densidade do fluido constante e igual a um, bem como sua viscosidade cinemática, e supormos que não existem forças externas agindo sobre o fluido, as equações de Navier-Stokes tomam a forma,

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + (u\cdot\nabla)u = -\nabla p \tag{4.1.1}$$

$$\mathrm{Div}(u) = 0 \tag{4.1.2}$$

$$u(x,t) = 0, \quad \forall\ x \in \partial\Omega \tag{4.1.3}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \tag{4.1.4}$$

onde $u_0 : \Omega \to \mathbb{R}^n$ é dada. Uma solução é uma função vetorial $u : \Omega\times[0,\infty) \to \mathbb{R}^n$ e uma função escalar $p : \Omega\times[0,\infty) \to \mathbb{R}$ que satisfaçam (4.1.1)-(4.1.4). Agora, por causa de (4.1.2), do fato de Ω ser aberto e de (4.1.3), uma solução das equações de Navier-Stokes deve ser uma função que, para cada t fixo, pertence a $\mathscr{L}^2(\Omega)$, e que para cada x associa uma função no domínio do Laplaciano. Em símbolos,

$$\begin{aligned} u : (0,\infty) &\to \mathscr{L}^2(\Omega) \\ t &\mapsto u(\cdot,t) \to D(\Delta) \\ &\qquad\qquad x \mapsto u(x,t) \end{aligned}$$

De acordo com isto, reescrevemos (4.1.1) como,

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t) - \Delta u(t) + (u(t)\cdot\nabla)u(t) = -\nabla p(t),$$

e podemos aplicar a projeção ortogonal P nesta equação de modo que, assumindo algumas hipóteses sobre $p(t)$ (a saber, $p(t) \in L^2_{loc}(\Omega)$ e $D_x p(t) \in L^2(\Omega)$) temos,

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t) - P[\Delta u(t)] + P[(u(t)\cdot\nabla)u(t)] = 0. \tag{4.1.5}$$

Agora, substituímos $\partial u(t)/\partial t$ em (4.1.5) pela aproximação,

$$\frac{u(t)-u(t-h)}{h},$$

e um dos $u(t)$ do penúltimo termo da equação (4.1.5) por $u(t-h)$, obtendo assim,

$$u(t) - u(t-h) - hP[\Delta u(t)] + hP[(u(t-h)\cdot\nabla)u(t)] = 0. \tag{4.1.6}$$

Faremos agora uma discretização do tempo, da seguinte forma. Se temos uma condição inicial $u(t_0) = u_0$ dada, colocamos $t = t_0 + hk$ com $k \in \mathbb{N}$, de modo que $u(t_0 + hk) = u_k$ e portanto,

$$u_k - u_{k-1} - hP[\Delta u_k] + hP[(u_{k-1} \cdot \nabla) u_k] = 0, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{4.1.7}$$

e chamaremos (4.1.7) de Equações de Navier-Stokes Quantizadas. É importante notar que, se atribuímos um valor a u_{k-1}, a equação (4.1.7) torna-se linear em relação a u_k, sendo esta a principal justificativa para as substituições realizadas a fim de obtermos (4.1.7) a partir de (4.1.6).

Baseados nas observações e construções acima, podemos obter as seguintes consequências.

Definição 27. *Sejam $h > 0$ e $v \in \mathscr{L}^2(\Omega)$. Dizemos que w é uma solução fraca do problema,*

$$w - hP[\Delta w] + h(v \cdot \nabla) w = v, \tag{4.1.8}$$

se $w \in \mathscr{L}^2(\Omega) \cap \mathscr{H}_0^1(\Omega)$ e satisfaz,

$$\langle w, \varphi \rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + h \langle w, \varphi \rangle_{\mathscr{H}_0^1(\Omega)} + h \langle (v \cdot \nabla) w, \varphi \rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = \langle v, \varphi \rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)},$$

para todo $\varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(\Omega)$.

Lema 4.1. *Seja $h > 0$. Então (4.1.8) tem ao menos uma solução fraca para todo $v \in \mathscr{L}^2(\Omega)$.*

Demonstração. Fixe $v \in \mathscr{C}_c^\infty(\Omega)$ e para cada $w \in \mathscr{L}^2(\Omega) \cap \mathscr{H}_0^1(\Omega)$ defina o funcional,

$$\begin{aligned} F_w : \mathscr{L}^2(\Omega) \cap \mathscr{H}_0^1(\Omega) &\to \mathbb{R} \\ \varphi &\mapsto \langle w, \varphi \rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + h \langle w, \varphi \rangle_{\mathscr{H}_0^1(\Omega)} + h \langle (v \cdot \nabla) w, \varphi \rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \end{aligned}$$

Que F_w é linear segue da linearidade dos produtos internos. Agora note que,

$$\begin{aligned} |F_w(\varphi)| &\le |\langle w, \varphi \rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}| + h |\langle w, \varphi \rangle_{\mathscr{H}_0^1(\Omega)}| + h |\langle (v \cdot \nabla) w, \varphi \rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}| \\ &\le \|w\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \|\varphi\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + h \|w\|_{\mathscr{H}_0^1(\Omega)} \|\varphi\|_{\mathscr{H}_0^1(\Omega)} + h \|(v \cdot \nabla) w\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \|\varphi\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \\ &\le \|w\|_{\mathscr{L}^2 \cap \mathscr{H}_0^1} \|\varphi\|_{\mathscr{L}^2 \cap \mathscr{H}_0^1} + h \|w\|_{\mathscr{L}^2 \cap \mathscr{H}_0^1} \|\varphi\|_{\mathscr{L}^2 \cap \mathscr{H}_0^1} + h \|(v \cdot \nabla) w\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \|\varphi\|_{\mathscr{L}^2 \cap \mathscr{H}_0^1}, \end{aligned}$$

e como ainda temos,

$$\begin{aligned} \|(v \cdot \nabla) w\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^2 &= \int_\Omega |(v \cdot \nabla) w|^2 dx \\ &= \int_\Omega \left| \left(\sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) w \right|^2 dx \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_\Omega \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \right)^2 dx \\
&\leq \int_\Omega \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n v_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial w_j}{\partial x_i} \right)^2 \right) dx \\
&= \int_\Omega |v|^2 \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial w_j}{\partial x_i} \right)^2 dx \\
&\leq \max_{x\in\Omega} |v(x)|^2 \int_\Omega \sum_{j=1}^n \nabla w_j \cdot \nabla w_j dx \\
&= \left(\max_{x\in\Omega} |v(x)| \right)^2 \|w\|^2_{\mathscr{H}_0^1(\Omega)} \\
&\leq \left(\max_{x\in\Omega} |v(x)| \right)^2 \|w\|^2_{\mathscr{L}^2\cap\mathscr{H}_0^1},
\end{aligned}
$$

obtemos que,

$$
\begin{aligned}
|F_w(\varphi)| &\leq \|w\|_{\mathscr{L}^2\cap\mathscr{H}_0^1} \|\varphi\|_{\mathscr{L}^2\cap\mathscr{H}_0^1} + h\|w\|_{\mathscr{L}^2\cap\mathscr{H}_0^1} \|\varphi\|_{\mathscr{L}^2\cap\mathscr{H}_0^1} + h \max_{x\in\Omega} |v(x)| \|w\|_{\mathscr{L}^2\cap\mathscr{H}_0^1} \|\varphi\|_{\mathscr{L}^2\cap\mathscr{H}_0^1} \\
&= \left(1 + h + h \max_{x\in\Omega} |v(x)| \right) \|w\|_{\mathscr{L}^2\cap\mathscr{H}_0^1} \|\varphi\|_{\mathscr{L}^2\cap\mathscr{H}_0^1} \\
&= c_h \|w\|_{\mathscr{L}^2\cap\mathscr{H}_0^1} \|\varphi\|_{\mathscr{L}^2\cap\mathscr{H}_0^1},
\end{aligned}
\tag{4.1.9}
$$

e portanto F_w é limitado em $\mathscr{L}^2(\Omega) \cap \mathscr{H}_0^1(\Omega)$, ou seja, $F_w \in [\mathscr{L}^2(\Omega) \cap \mathscr{H}_0^1(\Omega)]^*$ (note que $h > 0$ está fixo). Assim, pelo Teorema da Representação de Riesz, existe um único elemento, que denotaremos $Aw \in \mathscr{L}^2(\Omega) \cap \mathscr{H}_0^1(\Omega)$ tal que,

$$
F_w(\varphi) = \langle Aw, \varphi \rangle_{\mathscr{L}^2\cap\mathscr{H}_0^1}, \quad \forall\ \varphi \in \mathscr{L}^2(\Omega) \cap \mathscr{H}_0^1(\Omega). \tag{4.1.10}
$$

Vejamos que o operador A é linear e limitado. De fato, se $w, u \in \mathscr{L}^2(\Omega) \cap \mathscr{H}_0^1(\Omega)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ então $F_{w+\lambda u} \in [\mathscr{L}^2(\Omega) \cap \mathscr{H}_0^1(\Omega)]^*$ e portanto existe um único $A(w + \lambda u) \in \mathscr{L}^2(\Omega) \cap \mathscr{H}_0^1(\Omega)$ tal que,

$$
F_{w+\lambda u}(\varphi) = \langle A(w + \lambda u), \varphi \rangle_{\mathscr{L}^2\cap\mathscr{H}_0^1}, \quad \forall\ \varphi \in \mathscr{L}^2(\Omega) \cap \mathscr{H}_0^1(\Omega).
$$

Mas ora,

$$
\begin{aligned}
\langle A(w + \lambda u), \varphi \rangle_{\mathscr{L}^2\cap\mathscr{H}_0^1} &= F_{w+\lambda u}(\varphi) \\
&= \langle w + \lambda u, \varphi \rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + h \langle w + \lambda u, \varphi \rangle_{\mathscr{H}_0^1(\Omega)} + h \langle (v \cdot \nabla)[w + \lambda u], \varphi \rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \\
&= F_w(\varphi) + \lambda F_u(\varphi)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \langle Aw, \varphi \rangle_{\mathscr{L}^2 \cap \mathscr{H}_0^1} + \lambda \langle Au, \varphi \rangle_{\mathscr{L}^2 \cap \mathscr{H}_0^1} \\
&= \langle Aw + \lambda Au, \varphi \rangle_{\mathscr{L}^2 \cap \mathscr{H}_0^1},
\end{aligned}
$$

para toda $\varphi \in \mathscr{L}^2(\Omega) \cap \mathscr{H}_0^1(\Omega)$, ou seja, A é linear. Agora, quando $\varphi = Aw$ de (4.1.9) e (4.1.10) temos

$$
F_w(Aw) = \langle Aw, Aw \rangle_{\mathscr{L}^2 \cap \mathscr{H}_0^1} = \|Aw\|^2_{\mathscr{L}^2 \cap \mathscr{H}_0^1} \leq c_h \|w\|_{\mathscr{L}^2 \cap \mathscr{H}_0^1} \|Aw\|_{\mathscr{L}^2 \cap \mathscr{H}_0^1},
$$

e portanto,

$$
\|Aw\|_{\mathscr{L}^2 \cap \mathscr{H}_0^1} \leq c_h \|w\|_{\mathscr{L}^2 \cap \mathscr{H}_0^1}, \quad \forall \ w \in \mathscr{L}^2(\Omega) \cap \mathscr{H}_0^1(\Omega),
$$

ou seja, A é limitado.

Afirmação: Para todo $w \in \mathscr{L}^2(\Omega) \cap \mathscr{H}_0^1(\Omega)$ e $v \in \mathscr{C}_c^\infty(\Omega)$ temos $\langle (v \cdot \nabla) w, w \rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = 0$.

Demonstração. Note que esse resultado não decorre diretamente da afirmação dois do Lema 2.25, pois não assumimos $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ limitado e não impomos restrição sobre a dimensão do espaço, de modo que faremos sua demonstração na íntegra. Começaremos mostrando que para $\psi \in \mathscr{C}_c^\infty(\Omega)$ temos,

$$
\langle (v \cdot \nabla) \psi, \psi \rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = 0.
$$

De fato, pelo Teorema de Green,

$$
\begin{aligned}
\langle (v \cdot \nabla) \psi, \psi \rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} &= \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega v_i \frac{\partial \psi_j}{\partial x_i} \psi_j dx \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega v_i \frac{\partial \psi_j^2}{\partial x_i} \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \psi_j^2 \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \int_\Omega Div(v) \psi_j^2 \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Agora, como $w \in \mathscr{H}_0^1(\Omega) \cap \mathscr{L}^2(\Omega)$, seja $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathscr{C}_c^\infty(\Omega)$ tal que $\psi_n \to w$ na norma de $\mathscr{L}^2(\Omega) \cap \mathscr{H}_0^1(\Omega)$. Então,

$$
\begin{aligned}
|\langle (v \cdot \nabla) \psi_n, \psi_n \rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} - \langle (v \cdot \nabla) w, w \rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}| \leq{} & |\langle (v \cdot \nabla) \psi_n, \psi_n - w \rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}| \\
&+ |\langle (v \cdot \nabla)(w - \psi_n), w \rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}|,
\end{aligned}
$$

e está claro que mostrar a convergência de ambos os termos para zero prova a afirmação. Ora,

$$\begin{aligned}
&|\langle (v\cdot\nabla)\psi_n,\psi_n\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}-\langle (v\cdot\nabla)w,w\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}|\\
&\leq |\langle (v\cdot\nabla)\psi_n,\psi_n-w\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}|+|\langle (v\cdot\nabla)(w-\psi_n),w\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}|\\
&\leq C_1\|v\|_{\mathbb{L}^\infty(\Omega)}\|\psi_n\|_{\mathscr{H}_0^1(\Omega)}\|\psi_n-w\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}+C_2\|v\|_{\mathbb{L}^\infty(\Omega)}\|\psi_n-w\|_{\mathscr{H}_0^1(\Omega)}\|w\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\\
&\leq C_1\|v\|_{\mathbb{L}^\infty(\Omega)}\|\psi_n\|_{\mathscr{H}_0^1\cap\mathscr{L}^2}\|\psi_n-w\|_{\mathscr{H}_0^1\cap\mathscr{L}^2}+C_2\|v\|_{\mathbb{L}^\infty(\Omega)}\|\psi_n-w\|_{\mathscr{H}_0^1\cap\mathscr{L}^2}\|w\|_{\mathscr{H}_0^1\cap\mathscr{L}^2},
\end{aligned}$$

o que demonstra a convergência e finaliza a prova. □

Assim temos,

$$\begin{aligned}
\|Aw\|_{\mathscr{L}^2\cap\mathscr{H}_0^1}\|w\|_{\mathscr{L}^2\cap\mathscr{H}_0^1} &\geq \langle Aw,w\rangle_{\mathscr{L}^2\cap\mathscr{H}_0^1}\\
&=F_w(w)\\
&=\|w\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}+h\|w\|^2_{\mathscr{H}_0^1(\Omega)}\\
&\geq \min\{1,h\}\|w\|^2_{\mathscr{L}^2\cap\mathscr{H}_0^1},
\end{aligned}$$

portanto,

$$\|Aw\|_{\mathscr{L}^2\cap\mathscr{H}_0^1}\geq \min\{1,h\}\|w\|_{\mathscr{L}^2\cap\mathscr{H}_0^1}, \tag{4.1.11}$$

e consequentemente,

$$\|A^*w\|_{\mathscr{L}^2\cap\mathscr{H}_0^1}\geq \min\{1,h\}\|w\|_{\mathscr{L}^2\cap\mathscr{H}_0^1}, \tag{4.1.12}$$

pois $\|A^*w\|_{\mathscr{L}^2\cap\mathscr{H}_0^1}=\|Aw\|_{\mathscr{L}^2\cap\mathscr{H}_0^1}$ (visto que A é limitado), onde A^* é o operador adjunto de A, isto é, o único operador em $\mathscr{L}^2(\Omega)\cap\mathscr{H}_0^1(\Omega)$ tal que,

$$\langle Aw,v\rangle_{\mathscr{L}^2\cap\mathscr{H}_0^1}=\langle w,A^*v\rangle_{\mathscr{L}^2\cap\mathscr{H}_0^1},\quad \forall\ \ w,v\in\mathscr{L}^2(\Omega)\cap\mathscr{H}_0^1(\Omega).$$

Continuaremos com a demonstração ao apresentar as seguintes duas afirmações fundamentais.

Afirmação: (4.1.12) implica $\mathrm{Ker}(A^*)=\{0\}$ e portanto, $\mathrm{Im}(A)$ é densa em $\mathscr{L}^2(\Omega)\cap\mathscr{H}_0^1(\Omega)$.

Demonstração. Seja $w\in\mathscr{L}^2(\Omega)\cap\mathscr{H}_0^1(\Omega)$ tal que $A^*w=0$. De (4.1.12) temos $\|w\|_{\mathscr{L}^2\cap\mathscr{H}_0^1}=0$, ou seja, $w=0$, isto é, $\mathrm{Ker}(A^*)=\{0\}$. De um resultado conhecido da análise funcional (ver [21], página 99) temos $\mathrm{Ker}(A^*)=(\mathrm{Im}(A))^\perp$, e não é difícil mostrar que,

$$(\mathrm{Im}(A))^\perp=\overline{\mathrm{Im}(A)}^\perp.$$

Assim, temos a seguinte decomposição (ver [13], páginas 146-147),

$$\mathscr{L}^2(\Omega)\cap\mathscr{H}_0^1(\Omega)=\overline{\mathrm{Im}(A)}\oplus\overline{\mathrm{Im}(A)}^{\perp}=\overline{\mathrm{Im}(A)}\oplus\mathrm{Ker}(A^*)=\overline{\mathrm{Im}(A)},$$

como queríamos demonstrar. □

Afirmação: (4.1.11) implica que $\mathrm{Im}(A)$ é fechada.

Demonstração. Seja $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\mathrm{Im}(A)$ uma sequência convergente na norma $\|\cdot\|_{\mathscr{L}^2\cap\mathscr{H}_0^1}$. Então para todo $n\in\mathbb{N}$ existe $x_n\in\mathscr{L}^2(\Omega)\cap\mathscr{H}_0^1(\Omega)$ tal que $Ax_n=y_n$. Assim,

$$\|y_n-y_m\|_{\mathscr{L}^2\cap\mathscr{H}_0^1}=\|Ax_n-Ax_m\|_{\mathscr{L}^2\cap\mathscr{H}_0^1}\geq\min\{1,h\}\|x_n-x_m\|_{\mathscr{L}^2\cap\mathscr{H}_0^1},$$

e portanto a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy, logo, convergente. Seja x o limite da sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e y o limite da sequência $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Como A é limitado,

$$\|Ax_n-Ax\|_{\mathscr{L}^2\cap\mathscr{H}_0^1}\leq\|A\|\|x_n-x\|_{\mathscr{L}^2\cap\mathscr{H}_0^1},$$

e portanto $Ax_n\to Ax$. Da unicidade do limite temos $Ax=y$, ou seja, $y\in\mathrm{Im}(A)$, e portanto $\mathrm{Im}(A)$ é fechada. □

Das afirmações provadas acima obtemos que,

$$\mathscr{L}^2(\Omega)\cap\mathscr{H}_0^1(\Omega)=\overline{\mathrm{Im}(A)}=\mathrm{Im}(A),$$

ou seja, A é sobrejetivo. Defina agora o funcional linear,

$$\begin{aligned} G:\mathscr{L}^2(\Omega)\cap\mathscr{H}_0^1(\Omega)&\to\mathbb{R},\\ \varphi&\mapsto\langle v,\varphi\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

Que G é linear e limitado é fácil ver. Então, pelo Teorema da Representação de Riesz, existe um único $v_1\in\mathscr{L}^2(\Omega)\cap\mathscr{H}_0^1(\Omega)$ tal que,

$$\langle v,\varphi\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}=G(\varphi)=\langle v_1,\varphi\rangle_{\mathscr{L}^2\cap\mathscr{H}_0^1},\quad\forall\ \varphi\in\mathscr{L}^2(\Omega)\cap\mathscr{H}_0^1(\Omega).$$

Como A é sobrejetivo, existe $w \in \mathscr{L}^2(\Omega) \cap \mathscr{H}_0^1(\Omega)$ tal que $Aw = v_1$ e portanto,

$$\begin{aligned}
\langle v, \varphi \rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} &= \langle v_1, \varphi \rangle_{\mathscr{L}^2 \cap \mathscr{H}_0^1} \\
&= \langle Aw, \varphi \rangle_{\mathscr{L}^2 \cap \mathscr{H}_0^1} \\
&= \langle w, \varphi \rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + h \langle w, \varphi \rangle_{\mathscr{L}^2 \cap \mathscr{H}_0^1} + h \langle (v \cdot \nabla) w, \varphi \rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)},
\end{aligned}$$

para toda $\varphi \in \mathscr{L}^2(\Omega) \cap \mathscr{H}_0^1(\Omega)$, ou seja, w é uma solução de (4.1.8) para todo $v \in \mathscr{C}_c^\infty(\Omega)$.

Agora, para $v \in \mathscr{L}^2(\Omega)$, seja $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathscr{C}_c^\infty(\Omega)$ tal que $v_n \to v$ na norma $\| \cdot \|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}$. Seja $(w_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathscr{L}^2(\Omega) \cap \mathscr{H}_0^1(\Omega)$ a sequência de soluções de (4.1.8) que, como acabamos de demonstrar, existe. Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$ temos,

$$\langle v_n, \varphi \rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = \langle w_n, \varphi \rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + h \langle w_n, \varphi \rangle_{\mathscr{H}_0^1(\Omega)} + h \langle (v_n \cdot \nabla) w_n, \varphi \rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}, \tag{4.1.13}$$

para toda $\varphi \in \mathscr{L}^2(\Omega) \cap \mathscr{H}_0^1(\Omega)$. Colocando $\varphi = w_n$ temos,

$$\langle v_n, w_n \rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = \langle w_n, w_n \rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + h \langle w_n, w_n \rangle_{\mathscr{H}_0^1(\Omega)} + h \langle (v_n \cdot \nabla) w_n, w_n \rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)},$$

isto é,

$$\langle v_n, w_n \rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = \|w_n\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^2 + h \|w_n\|_{\mathscr{H}_0^1(\Omega)}^2. \tag{4.1.14}$$

Agora note que,

$$\langle w_n, w_n \rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + 2h \|w_n\|_{\mathscr{H}_0^1(\Omega)}^2 = \|w_n\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^2 + 2h \|w_n\|_{\mathscr{H}_0^1(\Omega)}^2 = \langle v_n, w_n \rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + h \|w_n\|_{\mathscr{H}_0^1(\Omega)}^2,$$

e portanto,

$$\langle v_n - w_n, w_n \rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = h \|w_n\|_{\mathscr{H}_0^1(\Omega)}^2.$$

Como $\langle v_n - w_n, v_n - w_n \rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \geq 0$ temos,

$$\langle v_n, v_n - w_n \rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \geq \langle w_n, v_n - w_n \rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = h \|w_n\|_{\mathscr{H}_0^1(\Omega)}^2,$$

ou seja,

$$\langle v_n, v_n \rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \geq h \|w_n\|_{\mathscr{H}_0^1(\Omega)}^2 + \langle v_n, w_n \rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}. \tag{4.1.15}$$

De (4.1.14) e (4.1.15) obtemos,

$$\|w_n\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + 2h\|w_n\|^2_{\mathscr{H}_0^1(\Omega)} = \langle v_n, w_n\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + h\|w_n\|^2_{\mathscr{H}_0^1(\Omega)} \leq \langle v_n, v_n\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = \|v_n\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}, \tag{4.1.16}$$

e portanto,

$$\min\{1, 2h\}\|w_n\|^2_{\mathscr{L}^2\cap\mathscr{H}_0^1} \leq \|w_n\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + 2h\|w_n\|^2_{\mathscr{H}_0^1(\Omega)} \leq \|v_n\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}, \quad \forall\ n \in \mathbb{N},$$

ou seja, a sequência $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em $\mathscr{L}^2(\Omega)\cap\mathscr{H}_0^1(\Omega)$ (note que h está fixo), pois a sequência $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente na norma de $\mathbb{L}^2(\Omega)$. Como $\mathscr{L}^2(\Omega)\cap\mathscr{H}_0^1(\Omega)$ é Hilbert, existe uma subsequência $(w_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ que converge fracamente, digamos, para $w \in \mathscr{L}^2(\Omega)\cap\mathscr{H}_0^1(\Omega)$.

De (4.1.13) para $\varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(\Omega)$ temos,

$$\langle v_{n_j}, \varphi\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = \langle w_{n_j}, \varphi\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + h\langle w_{n_j}, \varphi\rangle_{\mathscr{H}_0^1(\Omega)} + h\langle (v_{n_j}\cdot\nabla)w_{n_j}, \varphi\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}, \quad \forall\ j \in \mathbb{N}. \tag{4.1.17}$$

Vamos mostrar agora as convergências para cada termo de (4.1.17). Note que,

$$|\langle v_{n_j}, \varphi\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} - \langle v, \varphi\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}| \leq \|v_{n_j} - v\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\|\varphi\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \to 0,$$

pois $v_{n_j} \to v$ na norma $\|\cdot\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}$. Defina os funcionais,

$$\begin{aligned}\langle\cdot,\varphi\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} : \mathscr{L}^2(\Omega)\cap\mathscr{H}_0^1(\Omega) &\to \mathbb{R} \\ u &\mapsto \langle u, \varphi\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\end{aligned} \qquad \begin{aligned}\langle\cdot,\varphi\rangle_{\mathscr{H}_0^1(\Omega)} : \mathscr{L}^2(\Omega)\cap\mathscr{H}_0^1(\Omega) &\to \mathbb{R} \\ v &\mapsto \langle v, \varphi\rangle_{\mathscr{H}_0^1(\Omega)}\end{aligned}$$

É fácil ver que esses funcionais são lineares e limitados em $\mathscr{L}^2(\Omega)\cap\mathscr{H}_0^1(\Omega)$, e portanto, da definição de convergência fraca temos,

$$\langle w_{n_j}, \varphi\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \to \langle w, \varphi\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}, \quad \text{e} \quad h\langle w_{n_j}, \varphi\rangle_{\mathscr{H}_0^1(\Omega)} \to h\langle w, \varphi\rangle_{\mathscr{H}_0^1(\Omega)},$$

e portanto, resta mostrar a convergência do último termo de (4.1.17).

Afirmação: $((v_{n_j}\cdot\nabla)w_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ converge fracamente para $(v\cdot\nabla)w$ em $\mathbb{L}^1(\Omega)$.

Demonstração. Apenas para facilitar a notação denotemos,

$$((v_{n_j}\cdot\nabla)w_{n_j})_{j\in\mathbb{N}} = ((v_k\cdot\nabla)w_k)_{k\in\mathbb{N}}$$

Usando a Desigualdade de Hölder não é difícil ver que,

$$(v_k \cdot \nabla)w_k \text{ e } (v \cdot \nabla)w \in \mathbb{L}^1(\Omega), \quad \forall \;\; k \in \mathbb{N}.$$

Agora seja $\varphi^* \in (\mathbb{L}^1(\Omega))^*$. Vamos mostrar que,

$$\varphi^*((v_k \cdot \nabla)w_k) \to \varphi^*((v \cdot \nabla)w).$$

Como $\varphi^* \in (\mathbb{L}^1(\Omega))^*$ então podemos dizer que existe $\varphi \in \mathbb{L}^\infty(\Omega)$ tal que,

$$\varphi^*((v_k \cdot \nabla)w_k) = \int_\Omega [(v_k \cdot \nabla)w_k] \cdot \varphi dx,$$

e portanto basta mostrar que,

$$\int_\Omega [(v_k \cdot \nabla)w_k] \cdot \varphi dx \to \int_\Omega [(v \cdot \nabla)w] \cdot \varphi dx.$$

Para tanto, note que,

$$\begin{aligned}
\left| \int_\Omega [(v_k \cdot \nabla)w_k] \cdot \varphi dx - \int_\Omega [(v \cdot \nabla)w] \cdot \varphi dx \right| &\leq \int_\Omega |[(v_k \cdot \nabla)w_k - (v \cdot \nabla)w] \cdot \varphi| dx \\
&\leq \int_\Omega |[(v_k \cdot \nabla)w_k - (v \cdot \nabla)w_k] \cdot \varphi| dx + \int_\Omega |[(v \cdot \nabla)w_k - (v \cdot \nabla)w] \cdot \varphi| dx \\
&= \int_\Omega |[((v_k - v) \cdot \nabla)w_k] \cdot \varphi| dx + \int_\Omega |[(v \cdot \nabla)(w_k - w)] \cdot \varphi| dx,
\end{aligned}$$

e vejamos a convergência de cada um dos termos. Para o primeiro, usando a Desigualdade de Hölder Generalizada temos,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |[((v_k - v) \cdot \nabla)w_k] \cdot \varphi| dx &\leq \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega \left| (v_k - v)_i \frac{\partial (w_k)_j}{\partial x_i} \varphi_j \right| dx \\
&\leq \sum_{i,j=1}^n \|(v_k - v)_i\|_{L^2(\Omega)} \left\| \frac{\partial (w_k)_j}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)} \|\varphi_j\|_{L^\infty(\Omega)} \\
&\leq \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \|(v_k - v)_i\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial (w_k)_j}{\partial x_i} \right\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{1/2} \|\varphi_j\|_{L^\infty(\Omega)} \\
&\leq C \|v_k - v\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \left(\sum_{i,j=1}^n \left\| \frac{\partial (w_k)_j}{\partial x_i} \right\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^n \|\varphi_j\|_{L^\infty(\Omega)} \right) \\
&= C \|v_k - v\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \|\varphi\|_{\mathbb{L}^\infty(\Omega)} \|w_k\|_{\mathscr{H}_0^1(\Omega)},
\end{aligned}$$

que converge para zero, pois $(w_k)_{k \in \mathbb{N}}$ é limitada em $\mathscr{L}^2(\Omega) \cap \mathscr{H}_0^1(\Omega)$, e portanto limitada em

$\mathscr{H}_0^1(\Omega)$. Para o segundo termo, definimos,

$$\begin{aligned} T : \mathscr{L}^2(\Omega) \cap \mathscr{H}_0^1(\Omega) &\to \mathbb{R} \\ w &\mapsto \int_\Omega [(v \cdot \nabla) w] \cdot \varphi dx \end{aligned}$$

Como $w_k \rightharpoonup w$ em $\mathscr{L}^2(\Omega) \cap \mathscr{H}_0^1(\Omega)$, basta mostrar que $T \in [\mathscr{L}^2(\Omega) \cap \mathscr{H}_0^1(\Omega)]^*$. Ora, a linearidade é facilmente verificada. Para a limitação note que,

$$\begin{aligned} |T(w)| &= \left| \int_\Omega [(v \cdot \nabla) w] \cdot \varphi dx \right| \\ &\leq \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega \left| v_i \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \varphi_j \right| dx \\ &\leq \sum_{i,j=1}^n \|v_i\|_{L^2(\Omega)} \left\| \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)} \|\varphi_j\|_{L^\infty(\Omega)} \\ &\leq \|v\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \|w\|_{\mathscr{H}_0^1(\Omega)} \|\varphi\|_{\mathbb{L}^\infty(\Omega)} \\ &\leq \|v\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \|w\|_{\mathscr{L}^2 \cap \mathscr{H}_0^1} \|\varphi\|_{\mathbb{L}^\infty(\Omega)}, \end{aligned}$$

e isso conclui a prova da afirmação. □

Agora note que $\varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(\Omega) \subseteq \mathbb{L}^\infty(\Omega)$, e como $\mathbb{L}^\infty(\Omega) \simeq (\mathbb{L}^1(\Omega))^*$, existe uma única função $\varphi^* \in (\mathbb{L}^1(\Omega))^*$ tal que,

$$\varphi^*(u) = \int_\Omega \varphi \cdot u dx, \quad \forall \ u \in \mathbb{L}^1(\Omega).$$

Da afirmação acima temos,

$$\varphi^*((v_{n_j} \cdot \nabla) w_{n_j}) \to \varphi^*((v \cdot \nabla) w),$$

isto é,

$$\int_\Omega [(v_{n_j} \cdot \nabla) w_{n_j}] \cdot \varphi dx \to \int_\Omega [(v \cdot \nabla) w] \cdot \varphi dx,$$

ou ainda,

$$\langle (v_{n_j} \cdot \nabla) w_{n_j}, \varphi \rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \to \langle (v \cdot \nabla) w, \varphi \rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)},$$

e portanto temos a convergência do último termo de (4.1.17).

Assim, obtemos que $w \in \mathscr{L}^2(\Omega) \cap \mathscr{H}_0^1(\Omega)$ é a solução fraca de (4.1.8). ■

Lema 4.2. *Para $h > 0$ e $v \in \mathscr{L}^2(\Omega)$, tome $w \in \mathscr{L}^2(\Omega) \cap \mathscr{H}_0^1(\Omega)$ como sendo a solução fraca de (4.1.8) cuja a existência é garantida pelo Lema 4.1. Então vale,*

$$\|w\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + 2h\|w\|^2_{\mathscr{H}_0^1(\Omega)} \leq \|v\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \quad \text{e} \quad \|w\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \|w-v\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + 2h\|w\|^2_{\mathscr{H}_0^1(\Omega)} \leq \|v\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}.$$

Demonstração. Como vimos na prova do lema anterior, existe uma sequência $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{C}_c^\infty(\Omega)$ convergindo fortemente para v em $\mathbb{L}^2(\Omega)$ e uma sequência $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{L}^2(\Omega) \cap \mathscr{H}_0^1(\Omega)$ das correspondentes soluções de (4.1.8), convergindo fracamente para w em $\mathscr{L}^2(\Omega) \cap \mathscr{H}_0^1(\Omega)$.

Ainda da prova do lema anterior, temos de (4.1.14) e (4.1.16) que

$$\langle v_n, w_n\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = \|w_n\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + h\|w_n\|^2_{\mathscr{H}_0^1(\Omega)} \quad \text{e} \quad \|w_n\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + 2h\|w_n\|^2_{\mathscr{H}_0^1(\Omega)} \leq \|v_n\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Note que,

$$\begin{aligned}
\left|\|v_n\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} - \|v\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\right| &= \left|(\|v_n\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \|v\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)})(\|v_n\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} - \|v\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)})\right| \\
&\leq C|\|v_n\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} - \|v\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}| \\
&\leq C\|v_n - v\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)},
\end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, e portanto $\|v_n\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}$ converge para $\|v\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}$. Assim,

$$\lim_{n\to\infty}[\|w_n\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + 2h\|w_n\|^2_{\mathscr{H}_0^1(\Omega)}] \leq \lim_{n\to\infty}\|v_n\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = \|v\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}. \tag{4.1.18}$$

Agora, como w_n converge fraco para w em $\mathscr{L}^2(\Omega) \cap \mathscr{H}_0^1(\Omega)$, temos $f(w_n) \to f(w)$, para todo $f \in [\mathscr{L}^2(\Omega) \cap \mathscr{H}_0^1(\Omega)]^*$. Seja $g \in [\mathbb{L}^2(\Omega)]^*$ e deixe g' denotar a restrição de g para $\mathscr{L}^2(\Omega) \cap \mathscr{H}_0^1(\Omega)$, de modo que $g'(w_n) \to g'(w)$. Como $g(w_n) = g'(w_n)$ e $g(w) = g'(w)$ temos $w_n \rightharpoonup w$ em $\mathbb{L}^2(\Omega)$. Da proposição 2.2 segue que,

$$\|w\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \leq \liminf_{n\in\mathbb{N}} \|w_n\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}, \tag{4.1.19}$$

mas por propriedade do limite inferior temos,

$$\|w\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \leq \left(\liminf_{n\in\mathbb{N}} \|w_n\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\right)^2 = \liminf_{n\in\mathbb{N}} \|w_n\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \leq \lim_{n\to\infty} \|w_n\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}. \tag{4.1.20}$$

Analogamente concluímos que $w_n \rightharpoonup w$ em $\mathscr{H}_0^1(\Omega)$ e portanto temos,

$$\|w\|^2_{\mathscr{H}_0^1(\Omega)} \leq \liminf_{n\in\mathbb{N}} \|w_n\|^2_{\mathscr{H}_0^1(\Omega)} \leq \lim_{n\to\infty} \|w_n\|^2_{\mathscr{H}_0^1(\Omega)},$$

e de (4.1.18) segue que,

$$\|w\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + 2h\|w\|^2_{\mathscr{H}_0^1(\Omega)} \leq \|v\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)},$$

o que prova a primeira equação.

Para provar a segunda equação, primeiro reescrevemos (4.1.14) como,

$$\langle w_n - v_n, w_n\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + h\|w_n\|^2_{\mathscr{H}_0^1(\Omega)} = 0,$$

e note que,

$$\begin{aligned}
\|w_n - v_n\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + h\|w_n\|^2_{\mathscr{H}_0^1(\Omega)} &= \langle w_n - v_n, w_n - v_n\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + h\|w_n\|^2_{\mathscr{H}_0^1(\Omega)} \\
&= \langle w_n - v_n, w_n\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} - \langle w_n - v_n, v_n\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + h\|w_n\|^2_{\mathscr{H}_0^1(\Omega)} \\
&= -\langle w_n - v_n, v_n\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \\
&= -\langle w_n, v_n\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \|v_n\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \\
&= \|v_n\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} - \|w_n\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} - h\|w_n\|^2_{\mathscr{H}_0^1(\Omega)},
\end{aligned}$$

sendo que na passagem para a última linha usamos novamente a identidade (4.1.14). Mas então

$$\|w_n - v_n\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + 2h\|w_n\|^2_{\mathscr{H}_0^1(\Omega)} + \|w_n\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = \|v_n\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}, \quad \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

Note agora que, como $w_n \rightharpoonup w$ e $v_n \rightharpoonup v$ em $\mathbb{L}^2(\Omega)$ para todo $f \in [\mathbb{L}^2(\Omega)]^*$ temos,

$$f(w_n - v_n) = f(w_n) - f(v_n) \to f(w) - f(v) = f(w - v),$$

e portanto $(w_n - v_n) \rightharpoonup (w - v)$ em $\mathbb{L}^2(\Omega)$, de modo que,

$$\|w - v\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \leq \liminf_{n\in\mathbb{N}} \|w_n - v_n\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)},$$

o que implica,

$$\|w - v\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \leq \liminf_{n\in\mathbb{N}} \|w_n - v_n\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \leq \lim_{n\to\infty} \|w_n - v_n\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}, \tag{4.1.21}$$

e assim, usando novamente que $\|v_n\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}$ converge para $\|v\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}$, e as desigualdades (4.1.19), (4.1.20) e (4.1.21), concluímos que

$$\|w\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \|w - v\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + 2h\|w\|^2_{\mathscr{H}_0^1(\Omega)} \leq \|v\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)},$$

como queríamos demonstrar. ■

Teorema 4.3. *Seja $h > 0$. Se $u_0 \in \mathscr{L}^2(\Omega)$ as equações de Navier-Stokes quantizadas (4.1.7) tem uma sequência $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{L}^2(\Omega) \cap \mathscr{H}_0^1(\Omega)$ de soluções fracas, isto é,*

$$\langle u_k, \varphi\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} - h\langle P[\Delta u_k], \varphi\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + h\langle (u_{k-1}\cdot\nabla)u_k, \varphi\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = \langle u_{k-1}, \varphi\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)},$$

$\forall\ \varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(\Omega)$ *e* $\forall\ k \in \mathbb{N}$. *Mais ainda, a sequência $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ satisfaz*

$$\|u_k\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + 2h\|u_k\|^2_{\mathscr{H}_0^1(\Omega)} \leq \|u_0\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}, \quad \forall\ k \in \mathbb{N}, \tag{4.1.22}$$

e,

$$\sum_{k=1}^\infty \|u_k - u_{k-1}\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + 2h\sum_{k=1}^\infty \|u_k\|^2_{\mathscr{H}_0^1(\Omega)} \leq \|u_0\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}. \tag{4.1.23}$$

Demonstração. A sequência $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é construída da seguinte forma. Como $u_0 \in \mathscr{L}^2(\Omega)$, tomando $v = u_0$ no Lema 4.1, existe ao menos uma solução fraca $w_1 \in \mathscr{L}^2(\Omega) \cap \mathscr{H}_0^1(\Omega)$ das equações de Navier-Stokes quantizadas. Claramente w_1 depende de h. Coloque $w_1 = u_1$, de modo que, para o mesmo h temos uma solução fraca w_2 das equações de Navier-Stokes quantizadas. Coloque $w_2 = u_2$ e continue repetindo este processo.

Indutivamente obtemos uma sequência $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{L}^2(\Omega) \cap \mathscr{H}_0^1(\Omega)$ de soluções fracas de (4.1.8), com u_k sendo solução fraca para $v = u_{k-1}$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Isto é,

$$\langle u_k, \varphi\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} - h\langle P[\Delta u_k], \varphi\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + h\langle (u_{k-1}\cdot\nabla)u_k, \varphi\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = \langle u_{k-1}, \varphi\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}, \quad \forall\ \varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(\Omega),$$

ou ainda,

$$\langle u_k - hP[\Delta u_k] + hP[(u_{k-1}\cdot\nabla)u_k] - u_{k-1}, \varphi\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = 0, \quad \forall\ \varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(\Omega),$$

de modo que obtemos a igualdade,

$$u_k - hP[\Delta u_k] + hP[(u_{k-1}\cdot\nabla)u_k] - u_{k-1} = 0, \quad \forall\ k \in \mathbb{N},$$

o que nos leva novamente as equações de Navier-Stokes quantizadas.

Agora, do Lema 4.2 temos,

$$\|u_k\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + 2h\|u_k\|^2_{\mathscr{H}_0^1(\Omega)} \leq \|u_{k-1}\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \quad \Rightarrow \quad \|u_k\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \leq \|u_{k-1}\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}, \tag{4.1.24}$$

de onde é fácil deduzir que $\|u_k\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \leq \|u_0\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}$ para todo $k \in \mathbb{N}$, e portanto obtemos,

$$\|u_k\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + 2h\|u_k\|^2_{\mathscr{H}^1_0(\Omega)} \leq \|u_0\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}, \quad \forall \ k \in \mathbb{N}.$$

Ainda do Lema 4.2 temos,

$$\|u_k\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \|u_k - u_{k-1}\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + 2h\|u_k\|^2_{\mathscr{H}^1_0(\Omega)} \leq \|u_{k-1}\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)},$$

e somando sobre k até um valor $M \in \mathbb{N}$ qualquer, ficamos com

$$\sum_{k=1}^{M} \left[\|u_k\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \|u_k - u_{k-1}\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + 2h\|u_k\|^2_{\mathscr{H}^1_0(\Omega)} \right] \leq \sum_{k=1}^{M} \|u_{k-1}\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)},$$

ou ainda

$$\sum_{k=1}^{M} \left[\|u_k - u_{k-1}\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + 2h\|u_k\|^2_{\mathscr{H}^1_0(\Omega)} \right] \leq \|u_0\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} - \|u_M\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \leq \|u_0\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)},$$

de modo que,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|u_k - u_{k-1}\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + 2h \sum_{k=1}^{\infty} \|u_k\|^2_{\mathscr{H}^1_0(\Omega)} \leq \|u_0\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)},$$

como queríamos demonstrar. ■

4.2 As Equações de Navier-Stokes

Como vimos na seção anterior, as equações de Navier-Stokes podem ser reduzidas a,

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t) - P[\Delta u(t)] + P[(u(t) \cdot \nabla) u(t)] = 0, \tag{4.2.1}$$

e procuramos por uma solução satisfazendo $u(0) = u_0 \in \mathscr{L}^2(\Omega)$.

Definição 28. *Uma função u é uma solução fraca das equações de Navier-Stokes se,*

$$u \in L^\infty([0,\infty), \mathscr{L}^2(\Omega)) \cap L^2((0,\infty), \mathscr{H}^1_0(\Omega)),$$

e ainda satisfaz,

$$\int_0^\infty \langle u(t), \psi'(t)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \langle u(t), \Delta\psi(t)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \langle (u(t)\cdot\nabla)\psi(t), u(t)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} dt = -\langle u_0, \psi(0)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}, \tag{4.2.2}$$

para toda $\psi \in C_c^\infty([0,\infty), \mathscr{C}_c^\infty(\Omega))$.

Vejamos como podemos obter (4.2.2) a partir de (4.2.1). Seja $\psi \in C_c^\infty([0,\infty), \mathscr{C}_c^\infty(\Omega))$. Analogamente a discussões que já fizemos no decorrer deste trabalho, na equação (4.2.1) podemos assumir que o termo do lado esquerdo pertence a $\mathbb{L}^2(\Omega)$, e daí podemos tomar o produto interno,

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial t}(t) - P[\Delta u(t)] + P[(u(t)\cdot\nabla)u(t)], \psi(t) \right\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = 0,$$

isto é,

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial t}(t), \psi(t) \right\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} - \langle P[\Delta u(t)], \psi(t)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \langle P[(u(t)\cdot\nabla)u(t)], \psi(t)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = 0.$$

e pela propriedade da projeção ortogonal,

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial t}(t), \psi(t) \right\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} - \langle \Delta u(t), \psi(t)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \langle (u(t)\cdot\nabla)u(t), \psi(t)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = 0.$$

Supondo que u é suficientemente regular, podemos integrar ambos os lados dessa equação e usar a integração por partes no primeiro termo, de modo que,

$$\begin{aligned} -\langle u(0), \psi(0)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} - \int_0^\infty \langle u(t), \psi'(t)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \langle \Delta u(t), \psi(t)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} - \langle (u(t)\cdot\nabla)u(t), \psi(t)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} dt \\ = 0, \end{aligned}$$

pois é claro, $\psi(t) = 0$ para t grande. Para o segundo termo usamos a fórmula de Green duas vezes, de modo que,

$$\begin{aligned} \langle \Delta u(t), \psi(t)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} &= \int_\Omega \Delta u(t)\cdot\psi(t)dx \\ &= -\sum_{i=1}^n \int_\Omega \nabla u(t)_i \cdot \nabla\psi(t)_i dx \\ &= \int_\Omega u(t)\cdot\Delta\psi(t)dx \\ &= \langle u(t), \Delta\psi(t)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Para o terceiro termo note que $u(t) \in \mathscr{L}^2(\Omega)\cap\mathscr{H}_0^1(\Omega)$. Então temos a afirmação.

Afirmação: Para todo $u, v \in \mathscr{L}^2(\Omega)\cap\mathscr{H}_0^1(\Omega)$ e $\varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(\Omega)$ temos,

$$\langle (u\cdot\nabla)v, \varphi\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = -\langle (u\cdot\nabla)\varphi, v\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}. \tag{4.2.3}$$

Demonstração. Como vimos anteriormente, se $\varphi, \eta \in \mathscr{C}_c^\infty(\Omega)$, temos

$$\langle(\eta \cdot \nabla)\varphi, \varphi\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = 0,$$

mas então, se $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{C}_c^\infty(\Omega)$ é tal que $\eta_n \to u$ em $\|\cdot\|_{\mathscr{L}^2\cap\mathscr{H}_0^1}$ temos,

$$\begin{aligned}|\langle(\eta_n \cdot \nabla)\varphi, \varphi\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} - \langle(u \cdot \nabla)\varphi, \varphi\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}| &= |\langle((\eta_n - u)\cdot\nabla)\varphi, \varphi\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}| \\ &\leq K_1\|\eta_n - u\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\|\varphi\|_{\mathscr{H}_0^1(\Omega)}\|\varphi\|_{\mathbb{L}^\infty(\Omega)}\end{aligned}$$

$$\leq K_1\|\eta_n - u\|_{\mathscr{L}^2\cap\mathscr{H}_0^1}\|\varphi\|_{\mathscr{H}_0^1(\Omega)}\|\varphi\|_{\mathbb{L}^\infty(\Omega)},$$

de modo que temos,

$$\langle(u\cdot\nabla)\varphi, \varphi\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = 0, \quad \forall\ u \in \mathscr{L}^2(\Omega)\cap\mathscr{H}_0^1(\Omega), \quad \forall\ \varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(\Omega).$$

Agora, para $\varphi, \psi \in \mathscr{C}_c^\infty(\Omega)$ e $u \in \mathscr{L}^2(\Omega)\cap\mathscr{H}_0^1(\Omega)$ então,

$$\begin{aligned}0 &= \langle(u\cdot\nabla)(\varphi+\psi), (\varphi+\psi)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \\ &= \langle(u\cdot\nabla)\varphi, \psi\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \langle(u\cdot\nabla)\psi, \varphi\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)},\end{aligned}$$

de modo que,

$$\langle(u\cdot\nabla)\varphi, \psi\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = -\langle(u\cdot\nabla)\psi, \varphi\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}.$$

Seja então $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{C}_c^\infty(\Omega)$ tal que $\psi_n \to v$ em $\|\cdot\|_{\mathscr{L}^2\cap\mathscr{H}_0^1}$. Logo,

$$\begin{aligned}|\langle(u\cdot\nabla)\varphi, \psi_n\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} - \langle(u\cdot\nabla)\varphi, v\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}| &= |\langle(u\cdot\nabla)\varphi, \psi_n - v\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}| \\ &\leq K_2\|u\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\sum_{j=1}^n\|\nabla\varphi_j\|_{\mathbb{L}^\infty(\Omega)}\|\psi_n - v\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \\ &\leq K_2\|u\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\sum_{j=1}^n\|\nabla\varphi_j\|_{\mathbb{L}^\infty(\Omega)}\|\psi_n - v\|_{\mathscr{L}^2\cap\mathscr{H}_0^1},\end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned}|\langle(u\cdot\nabla)\psi_n, \varphi\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} - \langle(u\cdot\nabla)v, \varphi\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}| &= |\langle(u\cdot\nabla)(\psi_n - v), \varphi\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}| \\ &\leq K_3\|u\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\|\psi_n - v\|_{\mathscr{H}_0^1(\Omega)}\|\varphi\|_{\mathbb{L}^\infty(\Omega)} \\ &\leq K_3\|u\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\|\psi_n - v\|_{\mathscr{L}^2\cap\mathscr{H}_0^1}\|\varphi\|_{\mathbb{L}^\infty(\Omega)},\end{aligned}$$

o que demonstra a convergência dos dois termos, e portanto,

$$\langle (u\cdot\nabla)\varphi, v\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = -\langle (u\cdot\nabla)v, \varphi\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)},$$

como queríamos demonstrar. □

Assim, podemos escrever o terceiro termo da equação como,

$$\langle (u(t)\cdot\nabla)u(t), \psi(t)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = -\langle (u(t)\cdot\nabla)\psi(t), u(t)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)},$$

e portanto obtemos,

$$\langle u(0), \psi(0)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \int_0^\infty \langle u(t), \psi'(t)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \langle u(t), \Delta\psi(t)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \langle (u(t)\cdot\nabla)\psi(t), u(t)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} dt = 0,$$

que é precisamente (4.2.2).

Sejam agora $h>0$, $u_0 \in \mathscr{L}^2(\Omega)$ e $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{L}^2(\Omega)\cap\mathscr{H}_0^1(\Omega)$ a sequência de soluções fracas das equações de Navier-Stokes quantizada obtidas graças ao Teorema 4.3. Do que foi feito anteriormente, sabemos que u_k depende de h. Fixe $h>0$ e defina,

$$\begin{aligned} u_h : [0,\infty) &\to \mathscr{L}^2(\Omega)\cap\mathscr{H}_0^1(\Omega), \\ t &\mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \chi_{[hk,h(k+1))}(t)u_k, \end{aligned} \tag{4.2.4}$$

com $\chi_{[hk,h(k+1))}$ representando a função característica do intervalo $[hk, h(k+1))$.

Nosso objetivo agora será mostrar que uma solução fraca de (4.2.1) pode ser construída a partir das funções u_h.

Lema 4.4. *Sejam $h>0$ e $u_0 \in \mathscr{L}^2(\Omega)$. Então a função u_h definida acima satisfaz,*

$$\|u_h(t)\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + 2h\|u_h(t)\|^2_{\mathscr{H}_0^1(\Omega)} \leq \|u_0\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}, \quad \forall\ t \geq h, \tag{4.2.5}$$

e,

$$\frac{1}{h}\int_h^\infty \|u_h(t)-u_h(t-h)\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}dt + 2\int_h^\infty \|u_h(t)\|^2_{\mathscr{H}_0^1(\Omega)}dt \leq \|u_0\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}. \tag{4.2.6}$$

Mais ainda, se $\psi \in C_c^\infty([0,\infty),\mathscr{C}_c^\infty(\Omega))$, então,

$$\int_0^\infty \langle u_h(t),\psi'(t)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}+\langle u_h(t),\Delta\psi(t)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}+\langle (u_h(t)\cdot\nabla)\psi(t),u_h(t)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}dt \\ = -\langle u_0,\psi(0)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}+o(h^{1/2}).$$

Demonstração. Ora, reescrevendo (4.1.22) em termos de u_h temos,

$$\|u_h(t)\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}+2h\|u_h(t)\|^2_{\mathscr{H}_0^1(\Omega)} \le \|u_0\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)},$$

mas quando $k=0$ temos $u_h=u_0$, de modo que a desigualdade acima só é satisfeita para $k\ge 1$, ou seja, para $t\ge h$. Para a segunda desigualdade note que de (4.1.23) temos,

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}\int_h^\infty \|u_h(t)-u_h(t-h)\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}dt+2\int_h^\infty \|u_h(t)\|^2_{\mathscr{H}_0^1(\Omega)}dt \\ &= \frac{1}{h}\sum_{k=1}^\infty\int_{hk}^{h(k+1)}\|u_k-u_{k-1}\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}dt+2\sum_{k=1}^\infty\int_{hk}^{h(k+1)}\|u_k\|^2_{\mathscr{H}_0^1(\Omega)}dt \\ &= \sum_{k=1}^\infty\left(\|u_k-u_{k-1}\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\frac{1}{h}\int_{hk}^{h(k+1)}dt\right)+2\sum_{k=1}^\infty\left(\|u_k\|^2_{\mathscr{H}_0^1(\Omega)}\int_{hk}^{h(k+1)}dt\right) \\ &= \sum_{k=1}^\infty\|u_k-u_{k-1}\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}+2h\sum_{k=1}^\infty\|u_k\|^2_{\mathscr{H}_0^1(\Omega)} \\ &\le \|u_0\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

Agora, como vimos no Teorema 4.3, $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}\subseteq \mathscr{L}^2(\Omega)\cap\mathscr{H}_0^1(\Omega)$ é uma sequência de soluções de (4.1.8), e portanto, para toda $\varphi\in\mathscr{C}_c^\infty(\Omega)$ temos,

$$\langle u_k,\varphi\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}+h\langle u_k,\varphi\rangle_{\mathscr{H}_0^1(\Omega)}+h\langle (u_{k-1}\cdot\nabla)u_k,\varphi\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}=\langle u_{k-1},\varphi\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)},$$

ou ainda,

$$\langle u_k-u_{k-1},\varphi\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}+h\langle u_k,\varphi\rangle_{\mathscr{H}_0^1(\Omega)}+h\langle (u_{k-1}\cdot\nabla)u_k,\varphi\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}=0. \tag{4.2.7}$$

Para o segundo termo, usando a fórmula de Green, obtemos

$$\begin{aligned}
\langle u_k, \varphi\rangle_{\mathscr{H}_0^1(\Omega)} &= \sum_{j=1}^{n}\int_\Omega \nabla(u_k)_j\cdot\nabla\varphi_j dx\\
&= -\sum_{j=1}^{n}\int_\Omega (u_k)_j\Delta\varphi_j dx\\
&= -\sum_{j=1}^{n}\langle (u_k)_j, \Delta\varphi_j\rangle_{L^2(\Omega)}\\
&= -\sum_{j=1}^{n}\langle (u_k)_j, (\Delta\varphi)_j\rangle_{L^2(\Omega)}\\
&= -\langle u_k, \Delta\varphi\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Para o terceiro termo usamos (4.2.3), de modo que,

$$\langle (u_{k-1}\cdot\nabla)u_k, \varphi\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = -\langle (u_{k-1}\cdot\nabla)\varphi, u_k\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)},$$

e assim reescrevemos (4.2.7) como,

$$\langle u_k - u_{k-1}, \varphi\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} - h\langle u_k, \Delta\varphi\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} - h\langle (u_{k-1}\cdot\nabla)\varphi, u_k\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = 0.$$

Mas então, usando a definição de u_h temos,

$$\langle u_h(t) - u_h(t-h), \varphi\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} - h\langle u_h(t), \Delta\varphi\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} - h\langle (u_h(t-h)\cdot\nabla)\varphi, u_h(t)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = 0, \quad (4.2.8)$$

se $t \geq h$, já que quando $k = 0$ obtemos $u_h(t) = u_0$ para $0 \leq t < h$ de modo que $t - h < 0$, o que não está definido. Assim a equação acima é válida apenas para $k \geq 1$, ou seja, $t \geq h$.

Agora, se $\psi \in C_c^\infty([0,\infty), \mathscr{C}_c^\infty(\Omega))$ podemos reescrever (4.2.8), como

$$\langle u_h(t) - u_h(t-h), \psi(t)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} - h\langle u_h(t), \Delta\psi(t)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} - h\langle (u_h(t-h)\cdot\nabla)\psi(t), u_h(t)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = 0,$$

para todo $t \geq h$, ou ainda,

$$\left\langle \frac{u_h(t-h) - u_h(t)}{h}, \psi(t)\right\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \langle u_h(t), \Delta\psi(t)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \langle (u_h(t-h)\cdot\nabla)\psi(t), u_h(t)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = 0,$$

para todo $t \geq h$. Integrando esta equação temos,

$$\int_h^\infty \left\langle \frac{u_h(t-h) - u_h(t)}{h}, \psi(t)\right\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \langle u_h(t), \Delta\psi(t)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}$$

$$+\langle (u_h(t-h)\cdot\nabla)\psi(t),u_h(t)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}dt=0.$$

Note que da igualdade acima deduzimos que

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \langle u_h(t),\Delta\psi(t)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}dt &= \int_0^h \langle u_h(t),\Delta\psi(t)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}dt+\int_h^\infty \langle u_h(t),\Delta\psi(t)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}dt\\ &= \int_0^h \langle u_h(t),\Delta\psi(t)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}dt-\int_h^\infty \left\langle \frac{u_h(t-h)-u_h(t)}{h},\psi(t)\right\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}dt\\ &\quad -\int_h^\infty \langle (u_h(t-h)\cdot\nabla)\psi(t),u_h(t)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}dt\\ &= \int_0^h \langle u_h(t),\Delta\psi(t)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}dt-\frac{1}{h}\int_h^\infty \langle u_h(t-h),\psi(t)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}dt+\frac{1}{h}\int_h^\infty \langle u_h(t),\psi(t)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}dt\\ &\quad -\int_h^\infty \langle (u_h(t-h)\cdot\nabla)\psi(t),u_h(t)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}dt,\end{aligned}$$

e na segunda integral da última igualdade fazemos a substituição $y=t-h$, de modo que obtemos (renomeando y igual a t),

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \langle u_h(t),\Delta\psi(t)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}dt &= \int_0^h \langle u_h(t),\Delta\psi(t)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}dt-\frac{1}{h}\int_0^\infty \langle u_h(t),\psi(t+h)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}dt\\ &\quad +\frac{1}{h}\int_h^\infty \langle u_h(t),\psi(t)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}dt \quad -\int_h^\infty \langle (u_h(t-h)\cdot\nabla)\psi(t),u_h(t)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}dt.\end{aligned} \tag{4.2.9}$$

Agora, podemos computar que,

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty \langle u_h(t),\psi'(t)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}+\langle u_h(t),\Delta\psi(t)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}+\langle (u_h(t)\cdot\nabla)\psi(t),u_h(t)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}dt\\ &\quad= \int_0^h \langle u_h(t),\psi'(t)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}+\langle (u_h(t)\cdot\nabla)\psi(t),u_h(t)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}dt\\ &\quad\quad+\int_h^\infty \langle u_h(t),\psi'(t)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}+\langle (u_h(t)\cdot\nabla)\psi(t),u_h(t)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}dt+\int_0^\infty \langle u_h(t),\Delta\psi(t)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}dt,\end{aligned}$$

e substituindo (4.2.9) na expressão acima ficamos com,

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty \langle u_h(t),\psi'(t)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}+\langle u_h(t),\Delta\psi(t)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}+\langle (u_h(t)\cdot\nabla)\psi(t),u_h(t)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}dt\\ &\quad= \int_0^h \langle u_h(t),\psi'(t)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}+\langle (u_h(t)\cdot\nabla)\psi(t),u_h(t)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}dt\\ &\quad\quad+\int_h^\infty \langle u_h(t),\psi'(t)\rangle_h+\langle (u_h(t)\cdot\nabla)\psi(t),u_h(t)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}dt\\ &\quad\quad+\int_0^h \langle u_h(t),\Delta\psi(t)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}dt-\frac{1}{h}\int_0^\infty \langle u_h(t),\psi(t+h)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}dt\\ &\quad\quad+\frac{1}{h}\int_h^\infty \langle u_h(t),\psi(t)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}dt \quad -\int_h^\infty \langle (u_h(t-h)\cdot\nabla)\psi(t),u_h(t)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}dt\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^h \langle u_h(t), \psi'(t)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \langle (u_h(t)\cdot\nabla)\psi(t), u_h(t)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \langle u_h(t), \Delta\psi(t)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} dt \\
&\quad + \int_h^\infty \left\langle u_h(t), \psi'(t) + \frac{\psi(t)-\psi(t+h)}{h} \right\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} - \frac{1}{h}\int_0^h \langle u_h(t), \psi(t+h)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} dt \\
&\quad + \int_h^\infty \langle ((u_h(t)-u_h(t-h))\cdot\nabla)\psi(t), u_h(t)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} dt,
\end{aligned}
$$

e somando $\langle u_0, \psi(0)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}$ de ambos os lados desta igualdade e reordenando-a obtemos,

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\infty \langle u_h(t), \psi'(t)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \langle u_h(t), \Delta\psi(t)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \langle (u_h(t)\cdot\nabla)\psi(t), u_h(t)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} dt + \langle u_0, \psi(0)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}, \\
&\quad = \left[\langle u_0, \psi(0)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} - \frac{1}{h}\int_0^h \langle u_h(t), \psi(t+h)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} dt \right] \\
&\quad + \int_0^h \langle u_h(t), \psi'(t)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \langle (u_h(t)\cdot\nabla)\psi(t), u_h(t)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \langle u_h(t), \Delta\psi(t)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} dt \\
&\quad + \int_h^\infty \left\langle u_h(t), \psi'(t) + \frac{\psi(t)-\psi(t+h)}{h} \right\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} dt \\
&\quad + \int_h^\infty \langle ((u_h(t)-u_h(t-h))\cdot\nabla)\psi(t), u_h(t)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} dt.
\end{aligned}
$$

Nosso objetivo agora será mostrar que cada um destes termos do lado direito da igualdade acima converge para zero quando h converge para zero. Para facilitar o entendimento dividiremos a prova em quatro afirmações, sendo cada uma correspondente a cada linha do lado direito da equação. Além disso, está claro que demonstrar tais afirmações completa a prova deste lema.

Afirmação 1: Vale,

$$
\langle u_0, \psi(0)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} - \frac{1}{h}\int_0^h \langle u_h(t), \psi(t+h)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} dt \to 0 \quad \text{quando} \quad h \to 0.
$$

Demonstração. Basta notar que,

$$
\begin{aligned}
\left| \langle u_0, \psi(0)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} - \frac{1}{h}\int_0^h \langle u_h(t), \psi(t+h)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} dt \right| &= \left| \langle u_0, \psi(0)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} - \frac{1}{h}\int_0^h \langle u_0, \psi(t+h)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} dt \right| \\
&= \left| \frac{1}{h}\int_0^h \langle u_0, \psi(0)-\psi(t+h)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} dt \right| \\
&\le \frac{1}{h}\int_0^h \|u_0\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \|\psi(0)-\psi(t+h)\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} dt \\
&\le \|u_0\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \max_{t\in[0,h]} \|\psi(0)-\psi(t+h)\| \frac{1}{h}\int_0^h dt \\
&= \|u_0\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \max_{t\in[0,h]} \|\psi(0)-\psi(t+h)\| \\
&= o(h),
\end{aligned}
$$

pois ψ é suave com suporte compacto na variável t. □

Afirmação 2: Vale,

$$\int_0^h \langle u_h(t), \psi'(t)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \langle (u_h(t)\cdot\nabla)\psi(t), u_h(t)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \langle u_h(t), \Delta\psi(t)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} dt \to 0,$$

quando h converge para zero.

Demonstração. Note que,

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^h \langle u_h(t), \psi'(t)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \langle (u_h(t)\cdot\nabla)\psi(t), u_h(t)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \langle u_h(t), \Delta\psi(t)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} dt\right| \\
&\qquad = \left|\int_0^h \langle u_h(t), \psi'(t) + (u_h(t)\cdot\nabla)\psi(t) + \Delta\psi(t)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} dt\right| \\
&\qquad = \left|\int_0^h \langle u_0, \psi'(t) + (u_0\cdot\nabla)\psi(t) + \Delta\psi(t)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} dt\right| \\
&\qquad \leq \int_0^h \|u_0\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \|\psi'(t) + (u_0\cdot\nabla)\psi(t) + \Delta\psi(t)\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} dt \\
&\qquad \leq h\|u_0\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \max_{t\in[0,h]} \|\psi'(t) + (u_0\cdot\nabla)\psi(t) + \Delta\psi(t)\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \\
&\qquad \leq h\|u_0\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \max_{t\in[0,\infty)} \|\psi'(t) + (u_0\cdot\nabla)\psi(t) + \Delta\psi(t)\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \\
&\qquad = o(h),
\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. □

Afirmação 3: Vale,

$$\int_h^\infty \left\langle u_h(t), \psi'(t) + \frac{\psi(t)-\psi(t+h)}{h}\right\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} dt \to 0, \quad \text{quando} \quad h \to 0.$$

Demonstração. Como ψ tem suporte compacto, seja $a > 0$ tal que $\psi(t) = 0$ para todo $t > a$. Então,

$$\begin{aligned}
&\left|\int_h^\infty \left\langle u_h(t), \psi'(t) + \frac{\psi(t)-\psi(t+h)}{h}\right\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} dt\right| \\
&\qquad \leq \int_h^\infty \|u_h(t)\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \left\|\psi'(t) + \frac{\psi(t)-\psi(t+h)}{h}\right\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} dt \\
&\qquad = \int_h^a \|u_h(t)\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \left\|\psi'(t) + \frac{\psi(t)-\psi(t+h)}{h}\right\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} dt,
\end{aligned}$$

mas de (4.2.5) temos $\|u_h(t)\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \leq \|u_0\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}$ para todo $t \geq h$, e quando $0 \leq t < h$ temos $u_h(t) = u_0$, de modo que,

$$\begin{aligned}
&\left|\int_h^\infty \left\langle u_h(t), \psi'(t) + \frac{\psi(t)-\psi(t+h)}{h}\right\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} dt\right| \\
&\qquad \leq (a-h)\|u_0\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \max_{t\in[h,a]} \left\|\psi'(t) + \frac{\psi(t)-\psi(t+h)}{h}\right\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \\
&\qquad \leq a\|u_0\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \max_{t\in[h,a]} \left\|\psi'(t) - \frac{\psi(t+h)-\psi(t)}{h}\right\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \\
&\qquad = o(h),
\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. $\square$

Afirmação 4: Vale,

$$\int_h^\infty \langle((u_h(t)-u_h(t-h))\cdot\nabla)\varphi(t), u_h(t)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} dt \to 0 \quad \text{quando} \quad h \to 0.$$

Demonstração. Como vimos no início da demonstração deste lema podemos comutar os dois últimos vetores no produto interno, de modo que,

$$\begin{aligned}
&\left|\int_h^\infty \langle((u_h(t)-u_h(t-h))\cdot\nabla)\varphi(t), u_h(t)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} dt\right| \\
&\qquad = \left|\int_h^\infty \langle((u_h(t)-u_h(t-h))\cdot\nabla)u_h(t), \varphi(t)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} dt\right| \\
&\qquad = \left|\sum_{k=1}^\infty \int_{hk}^{h(k+1)} \langle(u_k-u_{k-1})\cdot\nabla)u_k, \varphi(t)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} dt\right| \\
&\qquad \leq \sum_{k=1}^\infty \int_{hk}^{h(k+1)} \int_\Omega |[(u_k-u_{k-1})\cdot\nabla)u_k]\cdot\varphi(t)| dx dt \\
&\qquad \leq \sum_{k=1}^\infty \int_{hk}^{h(k+1)} \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega \left|(u_k-u_{k-1})_i \frac{\partial(u_k)_j}{\partial x_i}\varphi(t)_j\right| dx dt \\
&\qquad \leq \sum_{k=1}^\infty \int_{hk}^{h(k+1)} \sum_{i,j=1}^n \left\|(u_k-u_{k-1})_i \frac{\partial(u_k)_j}{\partial x_i}\right\|_{L^1(\Omega)} \|\varphi(t)_j\|_{L^\infty(\Omega)} \\
&\qquad \leq \sum_{k=1}^\infty \int_{hk}^{h(k+1)} \|\varphi(t)\|_{\mathbb{L}^\infty(\Omega)} \sum_{i,j=1}^n \|(u_k-u_{k-1})_i\|_{L^2(\Omega)} \left\|\frac{\partial(u_k)_j}{\partial x_i}\right\|_{L^2(\Omega)} dt \\
&\qquad \leq C\sum_{k=1}^\infty \int_{hk}^{h(k+1)} \|\varphi(t)\|_{\mathbb{L}^\infty(\Omega)} \|u_k-u_{k-1}\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \|u_k\|_{\mathscr{H}_0^1(\Omega)} dt
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq Ch \sum_{k=1}^{\infty} \max_{t \in [hk, h(k+1)]} \|\varphi(t)\|_{\mathbb{L}^\infty(\Omega)} \|u_k - u_{k-1}\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \|u_k\|_{\mathscr{H}_0^1(\Omega)} \\
&\leq Ch \max_{t \in [0,\infty)} \|\varphi(t)\|_{\mathbb{L}^\infty(\Omega)} \sum_{k=1}^{\infty} \|u_k - u_{k-1}\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \|u_k\|_{\mathscr{H}_0^1(\Omega)},
\end{aligned}
$$

e usando a Desigualdade de Young com $p = q = 2$ e $\varepsilon = h^{-1/2}/2$, temos,

$$
\begin{aligned}
&\left| \int_h^{\infty} \langle ((u_h(t) - u_h(t-h)) \cdot \nabla)\varphi(t), u_h(t) \rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} dt \right| \\
&\qquad \leq C \frac{1}{2} h^{1/2} \max_{t \in [0,\infty)} \|\varphi(t)\|_{\mathbb{L}^\infty(\Omega)} \sum_{k=1}^{\infty} [\|u_k - u_{k-1}\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + h\|u_k\|^2_{\mathscr{H}_0^1(\Omega)}] \\
&\qquad \leq C \frac{1}{2} h^{1/2} \max_{t \in [0,\infty)} \|\varphi(t)\|_{\mathbb{L}^\infty(\Omega)} \|u_0\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \\
&\qquad = o(h^{1/2}),
\end{aligned}
$$

sendo que para a última desigualdade usamos (4.1.23). Isso completa a prova da última afirmação.

□

Tendo demonstrado as quatro afirmações a prova do lema está completa. ■

Lema 4.5. *Seja $u_0 \in \mathscr{L}^2(\Omega)$ e $\varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(\Omega)$. Então, a função u_h definida em (4.2.4) satisfaz,*

$$
|\langle u_h(t) - u_h(s), \varphi \rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}| \leq C(|t-s| + h), \quad \forall\ t, s \geq 0,
$$

para alguma constante $C \geq 0$ dependendo apenas de u_0 e φ.

Demonstração. Ora, se $t = s$ o produto interno fica igual a zero e não há o que demonstrar. Assuma então, sem perda de generalidade, que $t > s \geq 0$. Sejam $k, j \in \mathbb{N}$ tais que,

$$
hk \leq t \leq h(k+1) \quad \text{e} \quad hj \leq s \leq h(j+1). \tag{4.2.10}
$$

Se $k = j$ então $u_h(t) = u_h(s) = u_k$ e novamente não há o que demonstrar. Assuma então, sem perda de generalidade, que $k \geq j+1$.

Da prova do lema anterior temos que,

$$
\langle u_n - u_{n-1}, \varphi \rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = h\langle u_n, \Delta\varphi \rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + h\langle (u_{n-1} \cdot \nabla)\varphi, u_n \rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}, \quad \forall\ n \in \mathbb{N},
$$

e portanto,

$$
\sum_{n=j+1}^{k} \langle u_n - u_{n-1}, \varphi \rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = \sum_{n=j+1}^{k} \left[h\langle u_n, \Delta\varphi \rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + h\langle (u_{n-1} \cdot \nabla)\varphi, u_n \rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \right],
$$

mas note que,

$$\begin{aligned}\sum_{n=j+1}^{k}&\langle u_n-u_{n-1},\varphi\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\\&=\langle u_{j+1}-u_j,\varphi\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}+\langle u_{j+2}-u_{j+1},\varphi\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}+\ldots+\langle u_k-u_{k-1},\varphi\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\\&=\langle u_k-u_j,\varphi\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)},\end{aligned}$$

de modo que temos,

$$\begin{aligned}\langle u_h(t)-u_h(s),\varphi\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}&=\langle u_k-u_j,\varphi\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\\&=\sum_{n=j+1}^{k}[h\langle u_n,\Delta\varphi\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}+h\langle(u_{n-1}\cdot\nabla)\varphi,u_n\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}]\\&=h\sum_{n=j+1}^{k}[\langle u_n,\Delta\varphi\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}+\langle(u_{n-1}\cdot\nabla)\varphi,u_n\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}].\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}&\left|\langle u_h(t)-u_h(s),\varphi\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\right|\le h\sum_{n=j+1}^{k}\left[|\langle u_n,\Delta\varphi\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}|+|\langle(u_{n-1}\cdot\nabla)\varphi,u_n\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}|\right]\\&\le h\sum_{n=j+1}^{k}\left[\|u_n\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\|\Delta\varphi\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}+K\|u_{n-1}\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\sum_{i=1}^{m}\|\nabla\varphi_i\|_{\mathbb{L}^\infty(\Omega)}\|u_n\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\right]\\&\le h\left(\|\Delta\varphi\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}+K\sum_{i=1}^{m}\|\nabla\varphi_i\|_{\mathbb{L}^\infty(\Omega)}\right)\sum_{n=j+1}^{k}(\|u_n\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}+\|u_{n-1}\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\|u_n\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}),\end{aligned}$$

mas então, usando (4.1.22) temos,

$$\begin{aligned}|\langle u_h(t)-u_h(s),\varphi\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}|&\le h\left(\|\Delta\varphi\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}+K\sum_{i=1}^{m}\|\nabla\varphi_i\|_{\mathbb{L}^\infty(\Omega)}\right)\sum_{n=j+1}^{k}(\|u_0\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}+\|u_0\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)})\\&=h\left(\|\Delta\varphi\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}+K\sum_{i=1}^{m}\|\nabla\varphi_i\|_{\mathbb{L}^\infty(\Omega)}\right)(\|u_0\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}+\|u_0\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)})(k-j)\\&=C(hk-hj),\end{aligned}$$

onde,

$$C=\left(\|\Delta\varphi\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}+K\sum_{i=1}^{m}\|\nabla\varphi_i\|_{\mathbb{L}^\infty(\Omega)}\right)(\|u_0\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}+\|u_0\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}).$$

De (4.2.10) temos,

$$t\ge hk \quad \text{e} \quad -s\ge -hj-h,$$

e somando ambas as equações obtemos $t-s+h \geq hk-hj$, de modo que,

$$|\langle u_h(t)-u_h(s),\varphi\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}| \leq C(hk-hj) \leq C(t-s+h) \leq C(|t-s|+h),$$

como queríamos demonstrar. ∎

Tendo demonstrado todos esses resultados podemos provar agora a existência de solução fraca para as equações de Navier-Stokes.

Teorema 4.6. *Seja $u_0 \in \mathscr{L}^2(\Omega)$. Então, as equações de Navier-Stokes (4.2.1) possuem pelo menos uma solução fraca com u_0 sendo a condição inicial.*

Demonstração. Suponha inicialmente que Ω é limitado. Nosso primeiro objetivo será mostrar que existe uma sequência $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^+$ tal que $h_n \to 0$ e $u_{h_n}(t)$ converge fraco em $\mathscr{L}^2(\Omega)$, para todo $t \geq 0$.

Ora, do Lema 4.4 temos, para todo $h>0$,

$$\|u_h(t)\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \leq \|u_0\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}, \quad \forall\ t \geq 0, \tag{4.2.11}$$

pois se $0 \leq t < h$, temos $u_h(t) = u_0$. Seja $\{t_1,t_2,t_3,\ldots\}$ uma enumeração dos racionais. Escolha uma sequência $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq (0,\infty)$ tal que $h_n \to 0$. De (4.2.11) temos que $(u_{h_n}(t_1))_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em $\mathscr{L}^2(\Omega)$, e como $\mathscr{L}^2(\Omega)$ é Hilbert, existe uma subsequência $(h_{n_{1,j}})_{j\in\mathbb{N}}$ tal que $u_{h_{n_{1,j}}}(t_1)$ converge fraco em $\mathscr{L}^2(\Omega)$. Mas então, de (4.2.11) temos $(u_{h_{n_{1,j}}}(t_2))_{j\in\mathbb{N}}$ limitada em $\mathscr{L}^2(\Omega)$, e assim existe uma subsequência $(h_{n_{2,j}})_{j\in\mathbb{N}} \subseteq (h_{n_{1,j}})_{j\in\mathbb{N}}$ tal que $u_{h_{n_{2,j}}}(t_2)$ converge fraco em $\mathscr{L}^2(\Omega)$. Além disso, note que, $u_{h_{n_{2,j}}}(t_1)$ converge fraco em $\mathscr{L}^2(\Omega)$, pois $(h_{n_{2,j}})_{j\in\mathbb{N}}$ é subsequência de $(h_{n_{1,j}})_{j\in\mathbb{N}}$.

Podemos então prosseguir com estes passos indutivamente e através do argumento da diagonal de Cantor, considerar a sequência $(h_{n_{j,j}})_{j\in\mathbb{N}}$ que é tal que $u_{h_{n_{j,j}}}(t_i)$ converge fraco em $\mathscr{L}^2(\Omega)$ para todo t_i racional. A fim de não carregar a notação denotemos essa sequência por $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ou seja, $u_{h_n}(t_i)$ converge fraco em $\mathscr{L}^2(\Omega)$ para todo t_i racional quando $n\to\infty$, e $h_n \to 0$.

Vejamos agora que $u_{h_n}(t)$ converge fraco em $\mathscr{L}^2(\Omega)$ para todo t real. Fixe $t \geq 0$ qualquer. Seja $\varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(\Omega)$ e s um racional não negativo. Note que graças ao Lema 4.5 temos,

$$\begin{aligned}
|\langle u_{h_m}(t),\varphi\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}-\langle u_{h_n}(t),\varphi\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}| &\leq |\langle u_{h_m}(t),\varphi\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}-\langle u_{h_m}(s),\varphi\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}| \\
&\quad + |\langle u_{h_m}(s),\varphi\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}-\langle u_{h_n}(s),\varphi\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}| + |\langle u_{h_n}(s),\varphi\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}-\langle u_{h_n}(t),\varphi\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}| \\
&\leq C(|t-s|+h_m) + |\langle u_{h_m}(s),\varphi\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}-\langle u_{h_n}(s),\varphi\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}| \\
&\qquad + C(|t-s|+h_n) \\
&= C(|t-s|+h_m+h_n) + |\langle u_{h_m}(s),\varphi\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}-\langle u_{h_n}(s),\varphi\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}|,
\end{aligned}$$

mas como s foi arbitrário, escolhendo-o apropriadamente fazemos o termo $|t-s|$ ficar tão pequeno quanto desejarmos. Ora, como $h_n \to 0$, escolhendo m e n grande o suficiente temos $h_m + h_n$ tão próximo de zero quanto desejarmos, e para o último termo basta notar que, como s é racional, $u_{h_n}(s)$ converge fraco em $\mathscr{L}^2(\Omega)$, de modo que $\langle u_{h_n}(s), \varphi\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}$ converge em $\mathscr{L}^2(\Omega)$, e portanto é de Cauchy. Assim, escolhendo m e n grandes o suficientes o último termo também fico tão pequeno quanto desejarmos.

Com isso obtemos que $(\langle u_{h_n}(t), \varphi\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)})_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy para todo $t \geq 0$ e para toda função $\varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(\Omega)$. Seja agora $v \in \mathscr{L}^2(\Omega)$ e $(\varphi_l)_{l\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{C}_c^\infty(\Omega)$ tal que $\varphi_l \to v$ na norma $\|\cdot\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}$. Note que,

$$
\begin{aligned}
|\langle u_{h_m}(t), v\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} - \langle u_{h_n}(t), v\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}| &\leq |\langle u_{h_m}(t), v\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} - \langle u_{h_m}(t), \varphi_l\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}| \\
&\quad + |\langle u_{h_m}(t), \varphi_l\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} - \langle u_{h_n}(t), \varphi_l\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}| \\
&\qquad + |\langle u_{h_n}(t), \varphi_l\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} - \langle u_{h_n}(t), v\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}| \\
&\leq \|u_{h_m}(t)\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \|v - \varphi_l\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + |\langle u_{h_m}(t), \varphi_l\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} - \langle u_{h_n}(t), \varphi_l\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}| \\
&\qquad + \|u_{h_n}(t)\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \|\varphi_l - v\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)},
\end{aligned}
$$

e da limitação de $u_{h_n}(t)$ em $\mathscr{L}^2(\Omega)$ e do resultado anterior, obtemos que $(\langle u_{h_n}(t), v\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)})_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy para todo $v \in \mathscr{L}^2(\Omega)$, e todo $t \geq 0$.

Como todo espaço de Hilbert é fracamente completo, existe $u(t) \in \mathscr{L}^2(\Omega)$ tal que $\langle u_{h_n}(t), v\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}$ converge para $\langle u(t), v\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}$, para todo $v \in \mathscr{L}^2(\Omega)$ e para todo $t \geq 0$, ou seja, $u_{h_n}(t)$ converge fraco em $\mathscr{L}^2(\Omega)$, para $u(t)$, para todo $t \geq 0$. Assim,

$$
\|u(t)\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \leq \liminf_{n\in\mathbb{N}} \|u_{h_n}(t)\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \leq \liminf_{n\in\mathbb{N}} \|u_0(t)\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = \|u_0\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}, \quad \forall\ t \geq 0. \tag{4.2.12}
$$

Seja $T > 0$ fixo. Então para todo $n \in \mathbb{N}$ vale,

$$
\int_0^T \|u_{h_n}(t)\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} dt \leq \int_0^T \|u_0\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} dt = T\|u_0\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)},
$$

e de (4.2.6),

$$
2\int_{h_n}^T \|u_{h_n}(t)\|^2_{\mathscr{H}_0^1(\Omega)} dt \leq 2\int_{h_n}^\infty \|u_{h_n}(t)\|^2_{\mathscr{H}_0^1(\Omega)} dt \leq \|u_0\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}, \tag{4.2.13}
$$

de modo que somando ambas desigualdades obtemos,

$$
\int_0^T \|u_{h_n}(t)\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} dt + \int_{h_n}^T \|u_{h_n}(t)\|^2_{\mathscr{H}_0^1(\Omega)} dt \leq \left(T + \frac{1}{2}\right) \|u_0\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}, \quad \forall\ n \in \mathbb{N},
$$

ou seja,

$$(u_{h_n})_{n\in\mathbb{N}} \text{ é limitada em } L^2(0,T;\mathscr{L}^2(\Omega)) \text{ e em } L^2(\delta,T;\mathscr{H}_0^1(\Omega)),$$

para todo $0 < \delta \leq T < \infty$.

Seja então a subsequência $(u_{h_{n_j}})_{j\in\mathbb{N}}$ que converge fraco em $L^2(0,T;\mathscr{L}^2(\Omega))$, e seja u_1 seu limite. Ora, essa sequência (claramente, a menos de uma restrição no domínio) ainda é limitada em $L^2(\delta,T;\mathscr{H}_0^1(\Omega))$, e portanto possui uma subsequência $(u_{h_{n_{j_l}}})_{l\in\mathbb{N}}$ que converge fraco em $L^2(\delta,T;\mathscr{H}_0^1(\Omega))$, digamos, para u_2. Renomeando esta última sequência para u_{h_n} novamente temos,

$$u_{h_n} \rightharpoonup u_1 \quad \text{em } L^2(0,T;\mathscr{L}^2(\Omega)) \quad \text{e} \quad u_{h_n} \rightharpoonup u_2 \quad \text{em } L^2(\delta,T;\mathscr{H}_0^1(\Omega)).$$

Afirmação: $u_1 = u_2 = u$, onde u é a função construída na afirmação anterior.

Demonstração. Seja $f^* \in (L^2(\delta,T;\mathscr{L}^2(\Omega)))^*$. Como (a menos de uma restrição do domínio das funções),

$$L^2(\delta,T;\mathscr{H}_0^1(\Omega)) \subseteq L^2(\delta,T;\mathscr{L}^2(\Omega)), \quad \text{e} \quad L^2(0,T;\mathscr{L}^2(\Omega)) \subseteq L^2(\delta,T;\mathscr{L}^2(\Omega))$$

podemos considerar a restrição f' de f^* para o espaço $L^2(\delta,T;\mathscr{H}_0^1(\Omega))$, e f a restrição de f^* para $L^2(0,T;\mathscr{L}^2(\Omega))$, de modo que temos,

$$f(u_{h_n}) \to f(u_1) \quad \text{e} \quad f'(u_{h_n}) \to f'(u_2)$$

Mas note que $f(u_{h_n}) = f'(u_{h_n})$ para todo $n \in \mathbb{N}$, e portanto,

$$f^*(u_1) = f(u_1) = f'(u_2) = f^*(u_2), \quad \forall\ f^* \in (L^2(\delta,T;\mathscr{L}^2(\Omega)))^*,$$

ou seja $u_1 = u_2$.

Agora, seja $v \in L^2(0,T;\mathscr{L}^2(\Omega))$. Então sabemos que,

$$\langle u_{h_n}(t), v(t)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \to \langle u(t), v(t)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}, \quad \forall\ t \geq 0,$$

mas note que,

$$|\langle u_{h_n}(t), v(t)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}| \leq \|u_0\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \|v(t)\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}, \quad \forall\ t \geq 0,$$

e portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada temos,

$$\int_0^T \langle u_{h_n}(t), v(t)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} dt \to \int_0^T \langle u(t), v(t)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} dt,$$

isto é, $u_{h_n} \rightharpoonup u$ em $L^2(0,T;\mathscr{L}^2(\Omega))$. Da unicidade da convergência fraca obtemos $u_1 = u$, e a prova da afirmação está completa. □

Nosso próximo objetivo é mostrar que u_{h_n} converge forte para u em $L^2(0,T;\mathscr{L}^2(\Omega))$. Para isso começamos com a afirmação.

Afirmação: Existe $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{C}_c^\infty(\Omega)$ tal que para todo $\varepsilon > 0$ e todo $v \in \mathscr{H}_0^1(\Omega)$ existe N_ε tal que,

$$\|v\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \leq \sum_{j=1}^{N_\varepsilon} |\langle v, \varphi_j\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}|^2 + \varepsilon \|v\|^2_{\mathscr{H}_0^1(\Omega)},$$

para todo $v \in \mathscr{H}_0^1(\Omega)$.

Demonstração. Este resultado é notoriamente complexo e requer um entendimento mais aprofundado do Lema de Friedrich's, cujos detalhes escapam ao escopo da discussão que estamos conduzindo nesta dissertação. Para obter informações mais detalhadas sobre esses pré-requisitos, recomendamos consultar a literatura [11]. Dessa maneira, optamos por omitir a apresentação desta demonstração. □

Assim temos,

$$\begin{aligned}
\int_0^T \|u_{h_n}(t)-u(t)\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} dt &= \int_0^\delta \|u_{h_n}(t)-u(t)\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} dt + \int_\delta^T \|u_{h_n}(t)-u(t)\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} dt \\
&\leq \int_0^\delta \|u_{h_n}(t)-u(t)\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} dt \\
&\qquad + \int_\delta^T \left[\sum_{j=1}^{N_\varepsilon} |\langle u_{h_n}(t)-u(t), \varphi_j\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}|^2 + \varepsilon \|u_{h_n}(t)-u(t)\|^2_{\mathscr{H}_0^1(\Omega)}\right] dt \\
&= \int_0^\delta \|u_{h_n}(t)-u(t)\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} dt + \varepsilon \int_\delta^T \|u_{h_n}(t)-u(t)\|^2_{\mathscr{H}_0^1(\Omega)} dt \\
&\qquad + \int_\delta^T \sum_{j=1}^{N_\varepsilon} |\langle u_{h_n}(t)-u(t), \varphi_j\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}|^2 dt \\
&\leq \int_0^\delta (2\|u_0\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)})^2 dt + 2\varepsilon \int_\delta^T [\|u_{h_n}(t)\|^2_{\mathscr{H}_0^1(\Omega)} + \|u(t)\|^2_{\mathscr{H}_0^1(\Omega)}] dt \\
&\qquad + \int_\delta^T \sum_{j=1}^{N_\varepsilon} |\langle u_{h_n}(t)-u(t), \varphi_j\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}|^2 dt
\end{aligned}$$

$$\leq 4\|u_0\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\delta + 4\varepsilon\left(T+\frac{1}{2}\right)\|u_0\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \int_\delta^T \sum_{j=1}^{N_\varepsilon} |\langle u_{h_n}(t)-u(t),\varphi_j\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}|^2 dt,$$

pois (u_{h_n}) é limitada em $L^2(\delta,T;\mathscr{H}_0^1(\Omega))$.

Está claro que escolhendo ε e δ pequenos, os dois primeiros termos ficam tão pequenos quanto se queira. Para o terceiro termo basta notar que $u_{h_n}(t)$ converge fraco para $u(t)$ em $\mathscr{L}^2(\Omega)$, e que N_ε depende apenas de ε (assim a soma dentro da integral não possui mais termos quando variamos n, para um $\varepsilon>0$ fixo). Isso mostra que $u_{h_n}\to u$ em $L^2(0,T;\mathscr{L}^2(\Omega))$.

Agora vamos mostrar agora que $u(t)$ é solução fraca das equações de Navier-Stokes. Fixe $\psi\in C_c^\infty([0,\infty),\mathscr{C}_c^\infty(\Omega))$ e escolha $T>0$ tal que $\psi(t)=0$ para todo $t\geq T$. Então, do Lema 4.4 temos,

$$\int_0^T \langle u_h(t),\psi'(t)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \langle u_h(t),\Delta\psi(t)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \langle (u_h(t)\cdot\nabla)\psi(t),u_h(t)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}dt$$
$$= -\langle u_0,\psi(0)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + o(h^{1/2}),$$

ou ainda,

$$\int_0^T \langle u_{h_n}(t),\psi'(t)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}dt + \int_0^T \langle u_{h_n}(t),\Delta\psi(t)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}dt + \int_0^T \langle (u_{h_n}(t)\cdot\nabla)\psi(t),u_{h_n}(t)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}dt$$
$$= -\langle u_0,\psi(0)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + o({h_n}^{1/2}),$$

e a convergência do primeiro e segundo termo segue diretamente do fato que $u_{h_n}\rightharpoonup u$ em $L^2(0,T;\mathscr{L}^2(\Omega))$. A convergência do termo a direita da igualdade para,

$$-\langle u_0,\psi(0)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)},$$

é imediato, já que é constante, de modo que basta mostrar que,

$$\langle (u_{h_n}\cdot\nabla)\varphi,u_{h_n}\rangle_{L^2(0,T;\mathscr{L}^2(\Omega))} \to \langle (u\cdot\nabla)\varphi,u\rangle_{L^2(0,T;\mathscr{L}^2(\Omega))}.$$

De fato, note que,

$$\begin{aligned}
&|\langle (u_{h_n}\cdot\nabla)\varphi,u_{h_n}\rangle_{L^2(0,T;\mathscr{L}^2(\Omega))} - \langle (u\cdot\nabla)\varphi,u\rangle_{L^2(0,T;\mathscr{L}^2(\Omega))}| \\
&\quad\leq |\langle (u_{h_n}\cdot\nabla)\varphi,u_{h_n}\rangle_{L^2(0,T;\mathscr{L}^2(\Omega))} - \langle (u\cdot\nabla)\varphi,u_{h_n}\rangle_{L^2(0,T;\mathscr{L}^2(\Omega))}| \\
&\qquad + |\langle (u\cdot\nabla)\varphi,u_{h_n}\rangle_{L^2(0,T;\mathscr{L}^2(\Omega))} - \langle (u\cdot\nabla)\varphi,u\rangle_{L^2(0,T;\mathscr{L}^2(\Omega))}| \\
&\quad= |\langle [(u_{h_n}-u)\cdot\nabla]\varphi,u_{h_n}\rangle_{L^2(0,T;\mathscr{L}^2(\Omega))}| + |\langle (u\cdot\nabla)\varphi,u-u_{h_n}\rangle_{L^2(0,T;\mathscr{L}^2(\Omega))}|,
\end{aligned}$$

e mostraremos apenas a convergência para o primeiro termo, pois para o segundo a demonstração é análoga.

Veja que,

$$\begin{aligned}|\langle[(u_{h_n}-u)\cdot\nabla]\varphi,u_{h_n}\rangle_{L^2(0,T;\mathscr{L}^2(\Omega))}| &\leq \int_0^T |\langle[(u_{h_n}(t)-u(t))\cdot\nabla]\varphi(t),u_{h_n}(t)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}|dt\\ &\leq K\int_0^T \|u_{h_n}(t)-u(t)\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\sum_{j=1}^m \|\nabla\varphi(t)_j\|_{\mathbb{L}^\infty(\Omega)}\|u_{h_n}(t)\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}dt\\ &\leq K\max_{t\in[0,T]}\sum_{j=1}^m \|\nabla\varphi(t)_j\|_{\mathbb{L}^\infty(\Omega)}\|u_{h_n}-u\|_{L^2(0,T;\mathscr{L}^2(\Omega))}\|u_{h_n}\|_{L^2(0,T;\mathscr{L}^2(\Omega))},\end{aligned}$$

com m sendo a dimensão do espaço, que claramente está fixa, e a convergência vem do fato que $u_{h_n}\to u$ em $L^2(0,T;\mathscr{L}^2(\Omega))$.

De (4.2.12) temos $u\in L^\infty((0,\infty);\mathscr{L}^2(\Omega))$ e como $u_{h_n}\rightharpoonup u$ em $L^2(\delta,T;\mathscr{H}_0^1(\Omega))$ e ainda vale (4.2.13), temos que

$$\int_\delta^T \|u(t)\|^2_{\mathscr{H}_0^1(\Omega)}dt \leq \liminf_{n\in\mathbb{N}}\int_\delta^T \|u_{h_n}(t)\|^2_{\mathscr{H}_0^1(\Omega)}dt \leq \liminf_{n\in\mathbb{N}}\frac{\|u_0\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}}{2} = \frac{1}{2}\|u_0\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}.$$

Como $\delta>0$ e $T>0$ foram arbitrários, podemos fazer $\delta\to 0$ e $T\to\infty$, de modo que obtemos $u\in L^2((0,\infty);\mathscr{H}_0^1(\Omega))$, e isso mostra que u é solução fraca das equações de Navier-Stokes, quando Ω é limitado.

Quando Ω não é limitado seja $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de domínios limitados tais que,

$$\Omega_n\subseteq\Omega_{n+1} \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty}\Omega_n=\Omega.$$

Pelo que acabamos de provar, existe uma sequência de soluções fracas $(u_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ das equações de Navier-Stokes, que como anteriormente satisfazem,

$$\|u_n(t)\|_{\mathbb{L}^2(\Omega_n)}\leq\|u_0\|_{\mathbb{L}^2(\Omega_n)}\leq\|u_0\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}, \quad \forall\ t\geq 0,$$

e,

$$\int_0^\infty \|u_n(t)\|^2_{\mathscr{H}_0^1(\Omega_n)}dt\leq\frac{1}{2}\|u_0\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_n)}\leq\frac{1}{2}\|u_0\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)},$$

ou seja, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em $L^\infty((0,\infty);\mathscr{L}^2(\Omega_n))$ e em $L^2((0,\infty);\mathscr{H}_0^1(\Omega_n))$ e portanto existe uma subsequência $(u_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}\subseteq L^2((0,\infty);\mathscr{H}_0^1(\Omega_{n_j}))$ tal que $u_{n_j}\rightharpoonup u$. Vejamos que u é solução fraca das equações de Navier-Stokes.

Que $u\in L^2((0,\infty);\mathscr{H}_0^1(\Omega))$ é imediato. Para ver que $u\in L^\infty((0,\infty);\mathscr{L}^2(\Omega))$ note que u_{n_j} converge fraco para u em $L^2(0,T;\mathscr{H}_0^1(\Omega_{n_j}))$, para todo $T>0$. Como Ω_{n_j} é limitado, temos a imersão contínua,

$$L^2(0,T;\mathscr{H}_0^1(\Omega_{n_j})) \subseteq L^2(0,T;\mathscr{L}^2(\Omega_{n_j})),$$

e portanto $u_{n_j} \rightharpoonup u$ em $L^2(0,T;\mathscr{L}^2(\Omega_{n_j}))$. Com o argumento análogo que utilizamos na passagem ao limite, durante o método de Faedo-Galerkin, obtemos que $u \in L^\infty(0,T;\mathscr{L}^2(\Omega))$. Como $T > 0$ foi arbitrário, temos $u \in L^\infty((0,\infty);\mathscr{L}^2(\Omega))$.

Agora, note que u_{n_j} satisfaz (4.2.2) em Ω_{n_j}. Assim, dada $\psi \in C_c^\infty([0,\infty),\mathscr{C}_c^\infty(\Omega))$ existe $j \in \mathbb{N}$ tal que,

$$\operatorname{supp}(\psi(t)) \subseteq \Omega_{n_j} \subseteq \Omega,$$

e portanto u satisfaz (4.2.2) em Ω_{n_m} para todo $m \geq j$, de onde segue que satisfaz (4.2.2) em Ω. ■

4.3 Derivada Fracionária de Riemann-Liouville de Ordem α

Nosso objetivo inicial nesta subseção é mostrar que, para cada condição inicial $u_0 \in \mathscr{L}^2(\Omega)$, existe uma solução fraca das equações de Navier-Stokes que tem derivada fracionária de Riemann-Liouville de ordem $\alpha \in (0,1/2)$. Daí, obteremos uma certa regularidade desta derivada fracionária e ainda mostraremos que vale uma estimativa. Para tanto, começaremos definindo esta noção de derivação.

Definição 29. *Seja X um espaço de Banach, $\alpha \in (0,1)$, $f \in L^1(0,T;X)$ e considere a função $g_\alpha \in L^1(0,T;\mathbb{R})$ dada por: $g_\alpha(t) = t^{\alpha-1}/\Gamma(\alpha)$ para $t \in (0,T)$ e identicamente nula caso contrário. Se $f * g_{1-\alpha}$ e $(d/dt)(f * g_{1-\alpha})$ estão em $L^1(0,T;X)$, podemos definir a derivada fracionária de Riemann-Liouville de ordem α de f por*

$$D_t^\alpha f(t) = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t (t-s)^{-\alpha} f(s)ds\right] = \frac{d}{dt}\left[(f * g_{1-\alpha})(t)\right],$$

com (d/dt) denotando a derivada no sentido fraco.

Observação 1. *Para simplificar os cálculos e também para seguir a notação utilizada por M. Shinbrot na época, a partir deste ponto, utilizaremos o símbolo $D_t^\alpha f(t)$ para denotar a expressão:*

$$\frac{d}{dt}\left[\int_0^t (t-s)^{-\alpha} f(s)ds\right].$$

Essa simplificação é adotada sem prejuízo, uma vez que a omissão da função gama não impactará negativamente nossas estimativas. Pelo contrário, essa abordagem garantirá que nossas *estimativas permaneçam idênticas ao texto original, proporcionando maior clareza e evitando confusões desnecessárias.*

Lema 4.7. *Sejam $\varphi, D_t^\alpha \varphi \in L^2(0,T;\mathscr{L}^2(\Omega))$ com $0 \leq \alpha < 1$. Então,*

$$\int_0^T \|D_t^{\alpha/2}\varphi(t)\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} dt \leq \sec\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\int_0^T \langle D_t^\alpha \varphi(t), \varphi(t)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} dt.$$

Demonstração. Assuma inicialmente que $T = \infty$ e complete φ e $D_t^\alpha \varphi$ por zero quando $t \notin [0,\infty)$. Seguindo cálculos clássicos (mais detalhes podem ser vistos em [18, Section 2.9.2]) temos que $\widehat{D_t^\alpha \varphi(t)} = (-it)^\alpha \hat{\varphi}(t)$, e portanto pela identidade de Plancherel,

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \langle D_t^\alpha \varphi(t), \varphi(t)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} dt &= \int_{-\infty}^\infty \langle D_t^\alpha \varphi(t), \varphi(t)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \langle \widehat{D_t^\alpha \varphi}(t), \hat{\varphi}(t)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \langle (-it)^\alpha \hat{\varphi}(t), \hat{\varphi}(t)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty (-it)^\alpha \|\hat{\varphi}(t)\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)},
\end{aligned}$$

onde a segunda igualdade é válida pois a Transformada de Fourier preserva produto interno. Agora, como $\varphi(t)$ é uma função com componentes reais temos,

$$\overline{\hat{\varphi}(-t)} = \overline{\int_{-\infty}^\infty e^{-itx}\varphi(x)dx} = \int_{-\infty}^\infty e^{itx}\varphi(x)dx = \hat{\varphi}(t),$$

onde a barra denota o conjugado complexo. Portanto,

$$\begin{aligned}
\|\hat{\varphi}(t)\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} &= \langle \hat{\varphi}(t), \hat{\varphi}(t)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \\
&= \langle \overline{\hat{\varphi}(-t)}, \overline{\hat{\varphi}(-t)}\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \\
&= \overline{\langle \hat{\varphi}(-t), \hat{\varphi}(-t)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}} \\
&= \langle \hat{\varphi}(-t), \hat{\varphi}(-t)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \\
&= \|\hat{\varphi}(-t)\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)},
\end{aligned}$$

ou seja, a função $\|\hat{\varphi}(t)\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}$ é par. Assim,

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^\infty (-it)^\alpha \|\hat{\varphi}(t)\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} dt &= \int_{-\infty}^0 (-it)^\alpha \|\hat{\varphi}(t)\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} dt + \int_0^\infty (-it)^\alpha \|\hat{\varphi}(t)\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} dt \\
&= \int_0^\infty (it)^\alpha \|\hat{\varphi}(t)\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} dt + \int_{-\infty}^0 (it)^\alpha \|\hat{\varphi}(t)\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} dt \\
&= \int_{-\infty}^\infty (it)^\alpha \|\hat{\varphi}(t)\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} dt,
\end{aligned}$$

de modo que,

$$\int_0^\infty \langle D_t^\alpha \varphi(t), \varphi(t)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{(-it)^\alpha + (it)^\alpha}{2} \|\hat{\varphi}(t)\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}.$$

Mas como,

$$\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)|t|^\alpha = \frac{1}{2}[e^{i(\pi/2)\alpha} + e^{-i(\pi/2)\alpha}]|t|^\alpha = \frac{1}{2}[(e^{i\pi/2}|t|)^\alpha + (e^{-i\pi/2}|t|)^\alpha] = \frac{(it)^\alpha + (-it)^\alpha}{2},$$

obtemos,

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \langle D_t^\alpha \varphi(t), \varphi(t)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} dt &= \frac{1}{2\pi}\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\int_{-\infty}^\infty |t|^\alpha \|\hat{\varphi}(t)\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\int_{-\infty}^\infty \|(-it)^{\alpha/2}\hat{\varphi}(t)\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\int_{-\infty}^\infty \|\widehat{D_t^{\alpha/2}\varphi}(t)\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} dt \\
&= \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\int_{-\infty}^\infty \|D_t^{\alpha/2}\varphi(t)\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} dt \\
&= \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\int_0^\infty \|D_t^{\alpha/2}\varphi(t)\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} dt,
\end{aligned}$$

e o resultado é uma igualdade quando $T = \infty$. Agora, se $T < \infty$ defina a extensão por zero de φ,

$$\varphi_T(t) = \begin{cases} \varphi(t), & 0 \le t \le T \\ 0, & t > T \end{cases},$$

de modo que,

$$\begin{aligned}
\int_0^T \langle D_t^\alpha \varphi(t), \varphi(t)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} dt &= \int_0^\infty \langle D_t^\alpha \varphi_T(t), \varphi_T(t)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} dt \\
&= \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\int_0^\infty \|D_t^{\alpha/2}\varphi_T(t)\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} dt \\
&= \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\left[\int_0^T \|D_t^{\alpha/2}\varphi_T(t)\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} dt + \int_T^\infty \|D_t^{\alpha/2}\varphi_T(t)\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} dt\right],
\end{aligned}$$

mas para $t > T$ temos,

$$\begin{aligned}
\|D_t^{\alpha/2}\varphi_T(t)\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} &= \left\| \frac{d}{dt}\int_0^t \frac{\varphi_T(s)}{(t-s)^{\alpha/2}}ds \right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \\
&= \left\| \frac{d}{dt}\left[\int_0^T \frac{\varphi_T(s)}{(t-s)^{\alpha/2}}ds + \int_T^t \frac{\varphi_T(s)}{(t-s)^{\alpha/2}}ds\right] \right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \\
&= \left\| \frac{d}{dt}\int_0^T \frac{\varphi(s)}{(t-s)^{\alpha/2}}ds \right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \\
&\geq 0,
\end{aligned}$$

e portanto,

$$\begin{aligned}
\int_0^T \langle D_t^\alpha \varphi(t), \varphi(t)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}dt &\geq \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\int_0^T \|D_t^{\alpha/2}\varphi_T(t)\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}dt \\
&= \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\int_0^T \|D_t^{\alpha/2}\varphi(t)\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}dt,
\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. ■

Agora, a função $u_h(t)$ definida em (4.2.4) tem derivada fracionária de ordem $\alpha \in (0,1)$. De fato, para $nh \leq t < (n+1)h$ temos,

$$\begin{aligned}
D_t^\alpha u_h(t) &= \frac{d}{dt}\int_0^t \frac{u_h(s)}{(t-s)^\alpha}ds \\
&= \frac{d}{dt}\left[\sum_{k=0}^{n-1}\int_{hk}^{h(k+1)} \frac{u_k}{(t-s)^\alpha}ds + \int_{hn}^t \frac{u_n}{(t-s)^\alpha}ds\right] \\
&= \frac{d}{dt}\left[\sum_{k=0}^{n-1} u_k\int_{hk}^{h(k+1)} (t-s)^{-\alpha}ds + u_n\int_{hn}^t (t-s)^{-\alpha}ds\right] \\
&= \frac{d}{dt}\left[\sum_{k=0}^{n-1} u_k\frac{(t-h(k+1))^{1-\alpha}-(t-hk)^{1-\alpha}}{\alpha-1} - u_n\frac{(t-hn)^{1-\alpha}}{\alpha-1}\right] \\
&= \frac{1}{\alpha-1}\left(\sum_{k=0}^{n-1} u_k[(1-\alpha)(t-h(k+1))^{-\alpha}-(1-\alpha)(t-hk)^{-\alpha}] - u_n(1-\alpha)(t-hn)^{-\alpha}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} u_k[(t-hk)^{-\alpha}-(t-h(k+1))^{-\alpha}] + u_n(t-hn)^{-\alpha},
\end{aligned} \tag{4.3.1}$$

para todo $n \in N$. Agora, para $T > 0$ fixo, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $mh \leq T < (m+1)h$. Então,

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T \|D_t^\alpha u_h(t)\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} dt \leq \int_0^{(m+1)h} \|D_t^\alpha u_h(t)\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} dt \\
&= \sum_{k=0}^m \int_{hk}^{h(k+1)} \|D_t^\alpha u_h(t)\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} dt \\
&\leq \sum_{k=0}^m \int_{hk}^{h(k+1)} \left(\sum_{j=0}^{k-1} \|u_j\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} |(t-hj)^{-\alpha} - (t-h(j+1))^{-\alpha}| + \|u_k\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} |(t-hk)^{-\alpha}| dt \right)^2 \\
&\leq C \sum_{k=0}^m \sum_{j=0}^{k-1} \|u_j\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \int_{hk}^{h(k+1)} |(t-hj)^{-\alpha} - (t-h(j+1))^{-\alpha}|^2 dt \\
&\qquad + C \sum_{k=0}^m \|u_k\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \int_{hk}^{h(k+1)} |(t-hk)^{-\alpha}|^2 dt,
\end{aligned}
$$

e não é difícil ver que quando $k = 0$ as integrais convergem apenas se $\alpha < 1/2$, e portanto $D_t^{\alpha/2} u_h \in L^2(0,T;\mathscr{L}^2(\Omega))$ para todo $0 \leq \alpha < 1$.

Lema 4.8. *Seja $u_0 \in \mathscr{L}^2(\Omega)$. Se $0 \leq \alpha < 1$, então $D_t^{\alpha/2} u_h \in L^2(0,T;\mathscr{L}^2(\Omega))$, para todo $T < \infty$. Além disso,*

$$
\int_0^T \|D_t^{\alpha/2} u_h(t)\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} dt \leq \frac{5\|u_0\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}}{(1-\alpha)\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)} (T+h)^{1-\alpha}.
$$

Demonstração. De fato, basta apenas provar a estimativa. Para $nh \leq t < (n+1)h$ sabemos que

$$
D_t^\alpha u_h(t) = \sum_{k=0}^{n-1} u_k [(t-hk)^{-\alpha} - (t-h(k+1))^{-\alpha}] + u_n (t-hn)^{-\alpha},
$$

mas por definição $u_h(t) = u_n$ neste intervalo, e portanto,

$$
\begin{aligned}
\langle D_t^\alpha u_h(t), u_h(t) \rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} &= \langle D_t^\alpha u_h(t), u_n \rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \langle u_k, u_n \rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} [(t-hk)^{-\alpha} - (t-h(k+1))^{-\alpha}] + \langle u_n, u_n \rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} (t-hn)^{-\alpha} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \langle u_k, u_n \rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} [(t-hk)^{-\alpha} - (t-h(k+1))^{-\alpha}] + \langle u_n, u_n \rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} (t-hn)^{-\alpha} \\
&\quad - \langle u_n, u_n \rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \sum_{k=0}^{n-1} [(t-hk)^{-\alpha} - (t-h(k+1))^{-\alpha}] \\
&\quad + \langle u_n, u_n \rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \sum_{k=0}^{n-1} [(t-hk)^{-\alpha} - (t-h(k+1))^{-\alpha}] \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \langle u_k - u_n, u_n \rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} [(t-hk)^{-\alpha} - (t-h(k+1))^{-\alpha}] + \|u_n\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} t^{-\alpha}.
\end{aligned}
$$

Tomando o módulo e integrando sobre o intervalo $[nh, n(h+1))$ temos,

$$\int_{nh}^{h(n+1)} |\langle D_t^\alpha u_h(t), u_h(t)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}| dt$$
$$\leq \sum_{k=0}^{n-1} |\langle u_k - u_n, u_n\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}| \int_{nh}^{h(n+1)} |(t-hk)^{-\alpha} - (t-h(k+1))^{-\alpha}| dt + \|u_n\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \int_{nh}^{h(n+1)} t^{-\alpha} dt,$$

mas note que $t - hk \geq t - h(k+1)$, e portanto $(t-h(k+1))^{-\alpha} \geq (t-hk)^{-\alpha}$, ou seja, o integrando na primeira integral é negativo, de modo que,

$$\int_{nh}^{h(n+1)} |\langle D_t^\alpha u_h(t), u_h(t)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}| dt$$
$$\leq \sum_{k=0}^{n-1} |\langle u_k - u_n, u_n\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}| \int_{nh}^{h(n+1)} |(t-hk)^{-\alpha} - (t-h(k+1))^{-\alpha}| dt + \|u_n\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \int_{nh}^{h(n+1)} t^{-\alpha} dt$$
$$= -\sum_{k=0}^{n-1} |\langle u_k - u_n, u_n\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}| \int_{nh}^{h(n+1)} (t-h(k+1))^{-\alpha} - (t-hk)^{-\alpha} dt + \|u_n\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \int_{nh}^{h(n+1)} t^{-\alpha} dt$$
$$= -\frac{h^{1-\alpha}}{1-\alpha} \sum_{k=0}^{n-1} |\langle u_k - u_n, u_n\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}| [2(n-k)^{1-\alpha} - (n-k+1)^{1-\alpha} - (n-k-1)^{1-\alpha}]$$
$$+ \|u_n\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \frac{h^{1-\alpha}}{1-\alpha} [(n+1)^{-\alpha} - n^{1-\alpha}]$$
$$= \frac{h^{1-\alpha}}{1-\alpha} \sum_{k=0}^{n-1} |\langle u_k - u_n, u_n\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}| [(n-k+1)^{1-\alpha} - 2(n-k)^{1-\alpha} + (n-k-1)^{1-\alpha}]$$
$$+ \|u_n\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \frac{h^{1-\alpha}}{1-\alpha} [(n+1)^{-\alpha} - n^{1-\alpha}].$$

Agora, escolhendo $T > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $hN \leq T < h(N+1)$, de modo que,

$$\left| \int_0^T \langle D_t^\alpha u_h(t), u_h(t)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} dt \right|$$
$$\leq \int_0^T |\langle D_t^\alpha u_h(t), u_h(t)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}| dt$$
$$\leq \int_0^{h(N+1)} |\langle D_t^\alpha u_h(t), u_h(t)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}| dt$$
$$= \sum_{n=0}^{N} \int_{nh}^{h(n+1)} |\langle D_t^\alpha u_h(t), u_h(t)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}| dt$$
$$= \frac{h^{1-\alpha}}{1-\alpha} \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=0}^{n-1} |\langle u_k - u_n, u_n\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}| [(n-k+1)^{1-\alpha} - 2(n-k)^{1-\alpha} + (n-k-1)^{1-\alpha}]$$
$$+ \frac{h^{1-\alpha}}{1-\alpha} \sum_{n=0}^{N} \|u_n\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} [(n+1)^{-\alpha} - n^{1-\alpha}],$$

pois é claro, $k \geq 0$. Nosso objetivo agora será estimar os dois termos nesta soma. Começamos com o segundo,

$$\sum_{n=0}^{N} \|u_n\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}[(n+1)^{-\alpha} - n^{1-\alpha}] \leq \|u_0\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \sum_{n=0}^{N}[(n+1)^{-\alpha} - n^{1-\alpha}] = \|u_0\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}(N+1)^{1-\alpha}. \tag{4.3.2}$$

Para o primeiro, observamos que $k \leq n-1$, isto é, $n-k \geq 1$. Mostraremos então que,

$$0 \leq 2(n-k)^{1-\alpha} - (n-k+1)^{1-\alpha} - (n-k-1)^{1-\alpha} \leq \frac{2^{1-\alpha}(2^\alpha - 1)}{(n-k)^{1+\alpha}},$$

mas para $\alpha = 0$, $\alpha = 1$ ou $n-k = 1$ o resultado é imediato, de modo que podemos assumir $0 < \alpha < 1$ e $n-k \geq 2$. Defina $x = n-k$.

Afirmação: Para $0 < \alpha < 1$ e $x \in [2, \infty)$ temos,

$$0 \leq 2x^{1-\alpha} - (x+1)^{1-\alpha} - (x-1)^{1-\alpha} \leq \frac{2^{1-\alpha}(2^\alpha - 1)}{x^{1+\alpha}}.$$

Demonstração. Começaremos provando a primeira desigualdade. De fato, como a prova é mais fácil, mostraremos que a desigualdade é válida para todo $x \geq 1$. Fixe $0 < \alpha < 1$ e defina,

$$\begin{aligned} f : [1, \infty) &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto 2x^{1-\alpha} - (x+1)^{1-\alpha} - (x-1)^{1-\alpha} \end{aligned}$$

É fácil ver que $f(1) = 2 - 2^{1-\alpha} > 0$. Agora,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(1-\alpha)x^{\alpha} - (1-\alpha)(x+1)^{-\alpha} - (1-\alpha)(x-1)^{-\alpha} \\ &= (1-\alpha)x^{-\alpha}\left[2 - \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{-\alpha} - \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{-\alpha}\right] \end{aligned}$$

mas é claro que $(1-\alpha)x^{-\alpha} > 0$ para todo $x \in [1, \infty)$. Coloque $s = 1/x$ de modo que $s \in (0, 1]$ e defina,

$$\begin{aligned} g : (0, 1] &\to \mathbb{R} \\ s &\mapsto 2 - (1+s)^{-\alpha} - (1-s)^{-\alpha} \end{aligned}$$

Note que $\lim\limits_{s\to 1} g(s) = -\infty$ e $\lim\limits_{s\to 0} g(s) = 0$. Além disso,

$$g'(s) = \alpha(1+s)^{-\alpha-1} - \alpha(1-s)^{1-\alpha},$$

mas,

$$1+s > 1-s \quad \Rightarrow \quad (1+s)^{-\alpha-1} < (1-s)^{1-\alpha},$$

de modo que $g'(s) < 0$, ou seja, $g(s)$ é decrescente, e disto concluímos que $g(s) < 0$ para todo $s \in (0,1]$. Assim $f'(x) < 0$ para todo $x \in [1,\infty)$, ou seja, f é decrescente. Mostraremos agora que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, e isso conclui a prova da primeira desigualdade.

De fato,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty} 2x^{1-\alpha} - (x+1)^{1-\alpha} - (x-1)^{1-\alpha} \\ &= \lim_{x\to\infty} x^{1-\alpha}\left[2 - \left(1+\frac{1}{x}\right)^{1-\alpha} - \left(1-\frac{1}{x}\right)^{1-\alpha}\right],\end{aligned}$$

e por l'Hôpital temos,

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^{\alpha-1}}\left[2 - \left(1+\frac{1}{x}\right)^{1-\alpha} - \left(1-\frac{1}{x}\right)^{1-\alpha}\right] \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{1-\alpha}{(\alpha-1)x^{\alpha-2}}\left[x^{-2}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-\alpha} - x^{-2}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-\alpha}\right] \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}\left[\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-\alpha} - \left(1+\frac{1}{x}\right)^{-\alpha}\right] \\ &= 0.\end{aligned}$$

Para a segunda desigualdade note que,

$$\begin{aligned}&\frac{2^{1-\alpha}(2^{\alpha}-1)}{x^{1+\alpha}} + (x+1)^{1-\alpha} + (x-1)^{1-\alpha} - 2x^{1-\alpha} \\ &\qquad = x^{1-\alpha}\left[2^{1-\alpha}(2^{\alpha}-1)x^{-2} + \left(1+\frac{1}{x}\right)^{1-\alpha} + \left(1-\frac{1}{x}\right)^{1-\alpha} - 2\right],\end{aligned}$$

mas é fácil ver que $x^{1-\alpha} \geq 0$. Coloque $s = 1/x$, de modo que $s \in (0, 1/2]$. Defina,

$$\begin{aligned}h : &\left(0, \frac{1}{2}\right] \to \mathbb{R} \\ &s \mapsto 2^{1-\alpha}(2^{\alpha}-1)s^2 + (1+s)^{1-\alpha} + (1-s)^{1-\alpha} - 2\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
h'(s) &= 2^{2-\alpha}(2^\alpha - 1)s + (1-\alpha)[(1+s)^{-\alpha} - (1-s)^{-\alpha}] \\
h''(s) &= 2^{2-\alpha}(2^\alpha - 1) - \alpha(1-\alpha)[(1+s)^{-\alpha-1} + (1-s)^{-\alpha-1}] \\
h'''(s) &= \alpha(1-\alpha)(1+\alpha)[(1+s)^{-\alpha-2} - (1-s)^{-\alpha-2}],
\end{aligned}$$

mas como $1+s > 1-s$ temos,

$$(1+s)^{-\alpha-2} < (1-s)^{-\alpha-2},$$

e portanto $h'''(s) < 0$ para todo $s \in (0, 1/2]$. Segue que $h''(s)$ é decrescente neste intervalo.

Afirmamos agora que $h''(1/2) > 0$ para todo $0 < \alpha < 1$, e portanto $h''(s) \geq 0$ para todo $s \in (0, 1/2]$.

De fato, note que,

$$\begin{aligned}
h''\left(\frac{1}{2}\right) &= 2^{2-\alpha}(2^\alpha - 1) - \alpha(1-\alpha)\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{-\alpha-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-\alpha-1}\right] \\
&= 2\left(2^{1-\alpha}(2^\alpha - 1) - \alpha(1-\alpha)2^\alpha[1 + 3^{-1-\alpha}]\right),
\end{aligned}$$

e mostraremos que,

$$\frac{2^{1-\alpha}(2^\alpha - 1)}{\alpha(1-\alpha)2^\alpha} > \frac{4}{3} > 1 + 3^{-1-\alpha}, \quad \forall\ 0 < \alpha < 1,$$

o que prova a afirmação. Ora, a segunda desigualdade é facilmente verificável analisando o sinal da derivada e avaliando a função em $\alpha = 0$. Para a primeira desigualdade vamos mostrar que,

$$2^{1-\alpha}(2^\alpha - 1) - \frac{4}{3}\alpha(1-\alpha)2^\alpha \geq 0, \quad \forall\ 0 < \alpha < 1.$$

Note que,

$$2^{1-\alpha}(2^\alpha - 1) - \frac{4}{3}\alpha(1-\alpha)2^\alpha = 2^\alpha\left[2^{1-\alpha}(1 - 2^{-\alpha}) - \frac{4}{3}\alpha(1-\alpha)\right],$$

e é claro, $2^\alpha > 0$. Defina,

$$\begin{aligned}
g : (0,1) &\to \mathbb{R} \\
\alpha &\mapsto 2^{1-\alpha}(1 - 2^{-\alpha}) - \frac{4}{3}\alpha(1-\alpha)
\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} g'(\alpha) &= \frac{8}{3}\alpha + 2^{2-2\alpha}\ln(2) - 2^{1-\alpha}\ln(2) - \frac{4}{3} \\ g''(\alpha) &= 2^{1-2\alpha}(2^{\alpha}-4)\ln^2(2) + \frac{8}{3}, \end{aligned}$$

mas colocando $2^{-\alpha} = y$ e fazendo $g''(\alpha) = 0$ temos,

$$4y^2 - y = \frac{4}{3\ln^2(2)},$$

de onde obtemos,

$$y = \frac{\ln(8) \pm \sqrt{192 + 9\ln^2(2)}}{24\ln(2)},$$

e portanto,

$$\alpha_\star = -\log_2\left(\frac{\ln(8) + \sqrt{192 + 9\ln^2(2)}}{24\ln(2)}\right) \in (0,1),$$

e assim $g'(\alpha_\star) > 0$, ou seja, g' tem um ponto de mínimo no intervalo $(0,1)$, e portanto temos $g'(\alpha) > 0$ para todo $\alpha \in (0,1)$. Daí temos que g é crescente, mas como $g(0) = 0$ temos $g(\alpha) > 0$ para todo $\alpha \in (0,1)$, o que prova que $h''(1/2) > 0$.

Assim, $h''(s) > 0$ para todo $s \in (0,1/2]$, de modo que $h'(s)$ é crescente neste intervalo. Como $\lim\limits_{s\to 0} h'(s) = 0$ temos $h'(s) > 0$ para todo $s \in (0,1/2]$. Assim $h(s)$ é crescente, e novamente $\lim\limits_{s\to 0} h(s) = 0$, de modo que $h(s) > 0$ para todo $s \in (0,1/2]$, o que conclui a prova da afirmação. $\square$

Da equação (4.1.24) temos $\|u_n\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \leq \|u_k\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}$ para todo $k \leq n$ e portanto,

$$|\langle u_k - u_n, u_n \rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}| \leq 2\|u_k\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\|u_n\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)},$$

de modo que para o primeiro termo temos,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=0}^{n-1}|\langle u_k-u_n,u_n\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}|[(n-k+1)^{1-\alpha}-2(n-k)^{1-\alpha}+(n-k-1)^{1-\alpha}]&\\
\leq 2\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=0}^{n-1}\|u_k\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\|u_n\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\frac{2^{1-\alpha}(2^\alpha-1)}{(n-k)^{1+\alpha}}&\\
=2^{2-\alpha}(2^\alpha-1)\sum_{n=1}^{N}\|u_n\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\|u_k\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}}{(n-k)^{1+\alpha}}&\\
\leq 4\sum_{n=1}^{N}\|u_n\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\|u_k\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}}{(n-k)^{1+\alpha}}&\\
\leq 4\left[\sum_{n=1}^{N}\|u_n\|^p_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\right]^{1/p}\left[\sum_{n=1}^{N}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\|u_k\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}}{(n-k)^{1+\alpha}}\right)^{p'}\right]^{1/p'}&,
\end{aligned}$$

onde usamos que $2^{2-\alpha}(2^\alpha-1)\leq 4$ (facilmente verificável), e Hölder para a última desigualdade, onde é claro,

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1.$$

Afirmação: Afirmamos que,

$$\left[\sum_{n=1}^{N}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\|u_k\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}}{(n-k)^{1+\alpha}}\right)^{p'}\right]^{1/p'}\leq\left[\sum_{n=1}^{N}\|u_n\|^p_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\right]^{1/p}\left[\sum_{k=1}^{N}k^{-\frac{(1+\alpha)p'}{2}}\right]^{2/p'}.$$

Demonstração. Defina as sequências $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ por,

$$a_n=\begin{cases}\|u_n\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}, & \text{se } 1\leq n\leq N\\ 0, & \text{se } n>N\end{cases},\qquad b_n=\begin{cases}n^{-(1+\alpha)}, & \text{se } 1\leq n\leq N\\ 0, & \text{se } n>N\end{cases}.$$

A convolução destas sequências é dada por,

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}*(b_n)_{n\in\mathbb{N}}=\left(\sum_{k=0}^{n-1}a_kb_{n-k}\right)_{n\in\mathbb{N}}=\begin{cases}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\|u_k\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}}{(n-k)^{1+\alpha}}, & \text{se } 1\leq n\leq N\\ 0, & \text{se } n>N\end{cases},$$

e não é díficil ver que,

$$\frac{1}{p'}+1=\frac{1}{p}+\frac{1}{p'/2},$$

de modo que usando a Desigualdade de Young para convoluções temos,

$$\|(a_n)_{n\in\mathbb{N}}*(b_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_{p'}\leq\|(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_p\|(b_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_{p'/2},$$

isto é,

$$\begin{aligned}\|(a_n)_{n\in\mathbb{N}}*(b_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_{p'}&=\left[\sum_{n=1}^{N}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\|u_k\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}}{(n-k)^{1+\alpha}}\right)^{p'}\right]^{1/p'}\\&\leq\left[\sum_{n=1}^{N}\|u_n\|^p_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\right]^{1/p}\left[\sum_{n=1}^{N}n^{-\frac{(1+\alpha)p'}{2}}\right]^{2/p'},\end{aligned}$$

que (a menos de uma renoameção de índice na segunda soma) demostra a afirmação. □

Ora, com o resultado da afirmação obtemos,

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=0}^{n-1}|\langle u_k-u_n,u_n\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}|[(n-k+1)^{1-\alpha}-2(n-k)^{1-\alpha}+(n-k-1)^{1-\alpha}]\\&\qquad\leq 4\left[\sum_{n=1}^{N}\|u_n\|^p_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\right]^{2/p}\left[\sum_{k=1}^{N}k^{-\frac{(1+\alpha)p'}{2}}\right]^{2/p'},\end{aligned}$$

mas é fácil ver que,

$$\sum_{k=1}^{N}k^{-\frac{(1+\alpha)p'}{2}}\leq\int_0^N x^{-\frac{(1+\alpha)p'}{2}}dx=\frac{2N^{1-\frac{(1+\alpha)p'}{2}}}{2-(1+\alpha)p'}\leq\frac{2N^{1-\frac{(1+\alpha)p'}{2}}}{(1+\alpha)p'},$$

se $(1+\alpha)p'<2$ (o que garante que a integral é finita e também a última desigualdade). Usando isto e a equação (4.1.22) temos,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=0}^{n-1}&|\langle u_k-u_n,u_n\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}|[(n-k+1)^{1-\alpha}-2(n-k)^{1-\alpha}+(n-k-1)^{1-\alpha}]\\
&\leq 4\left[\sum_{n=1}^{N}\|u_0\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^{p}\right]^{2/p}\left[\frac{2N^{1-\frac{(1+\alpha)p'}{2}}}{(1+\alpha)p'}\right]^{2/p'}\\
&\leq 4\|u_0\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^{2}N^{\frac{2}{p}}\left(\frac{2}{(1+\alpha)p'}\right)^{2/p'}N^{\frac{2}{p'}-(1+\alpha)}\\
&=4\|u_0\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^{2}\left(\frac{2}{(1+\alpha)p'}\right)^{2/p'}N^{1-\alpha},
\end{aligned}$$

para todo $1\leq p'<2/(1+\alpha)$. Então,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=0}^{n-1}&|\langle u_k-u_n,u_n\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}|[(n-k+1)^{1-\alpha}-2(n-k)^{1-\alpha}+(n-k-1)^{1-\alpha}]\\
&\leq \lim_{p'\to\frac{2}{1+\alpha}}4\|u_0\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^{2}\left(\frac{2}{(1+\alpha)p'}\right)^{2/p'}N^{1-\alpha}\\
&=4\|u_0\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^{2}N^{1-\alpha}.
\end{aligned}\tag{4.3.3}$$

Agora, usando as equações (4.3.2) e (4.3.3) temos,

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^T\langle D_t^{\alpha}u_h(t),u_h(t)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}dt\right| &\leq \frac{h^{1-\alpha}}{1-\alpha}\left(\|u_0\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^{2}(N+1)^{1-\alpha}+4\|u_0\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^{2}N^{1-\alpha}\right)\\
&=\frac{\|u_0\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^{2}}{1-\alpha}((h(N+1))^{1-\alpha}+4(Nh)^{1-\alpha})\\
&\leq\frac{\|u_0\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^{2}}{1-\alpha}5(h(N+1))^{1-\alpha}\\
&\leq\frac{5\|u_0\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^{2}}{1-\alpha}(T+h)^{1-\alpha},
\end{aligned}$$

pois $Nh\leq T<(N+1)h$. Do Lema 4.7 temos,

$$\begin{aligned}
\int_0^T\|D_t^{\alpha/2}u_h(t)\|_H^2dt &\leq \sec\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\left|\int_0^T\langle D_t^{\alpha}u_h(t),u_h(t)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}dt\right|\\
&\leq \sec\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\frac{5\|u_0\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^{2}}{1-\alpha}(T+h)^{1-\alpha},
\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. ■

Tendo demonstrado estes dois resultados, podemos provar agora o teorema central desta subseção.

Teorema 4.9. *Seja $u_0 \in \mathscr{L}^2(\Omega)$. Então, existe uma solução fraca das equações de Navier-Stokes com condição inicial u_0 e tendo derivada fracionária de ordem $0 < \alpha < 1/2$. Esta derivada fracionária está em $L^2(0,T;\mathscr{L}^2(\Omega))$ e satisfaz,*

$$\int_0^T \|D_t^\alpha u(t)\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} dt \leq \frac{5\|u_0\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}}{(1-2\alpha)\cos(\pi\alpha)} T^{1-2\alpha}. \tag{4.3.4}$$

Demonstração. Do Teorema 4.6 existe uma sequência $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (0,\infty)$ convergindo para zero tal que $u_{h_n}(t)$ converge fraco para $u(t)$ em $\mathscr{L}^2(\Omega)$, para todo $t \geq 0$. Da equação (4.2.11) temos que $u_{h_n} \in L^\infty(0,T;\mathscr{L}^2(\Omega))$. Fixe $1 \leq p < \infty$ e seja $g^* \in (L^p(0,T;\mathscr{L}^2(\Omega)))^*$. Como,

$$(L^p(0,T;\mathscr{L}^2(\Omega)))^* \equiv L^q(0,T;[\mathscr{L}^2(\Omega)]^*), \quad \text{onde} \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,$$

temos $g \in L^q(0,T;[\mathscr{L}^2(\Omega)]^*)$, e portanto,

$$(g(t),u_{h_n}(t)) \to (g(t),u(t)), \quad \forall \ t \in [0,T].$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada temos,

$$\int_0^T (g(t),u_{h_n}(t))dt \to \int_0^T (g(t),u(t))dt,$$

mas isto por definição é,

$$g^*(u_{h_n}) = \int_0^T (g(t),u_{h_n}(t))dt \to \int_0^T (g(t),u(t))dt = g^*(u),$$

ou seja, $u_{h_n} \rightharpoonup u$ em $L^p(0,T;\mathscr{L}^2(\Omega))$, para todo $1 \leq p < \infty$.

Agora, do Lema 4.8 e notando que a sequência $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada, temos $(D_t^\alpha u_{h_n})_{n\in\mathbb{N}}$ limitada em $L^2(0,T;\mathscr{L}^2(\Omega))$ para todo $0 < \alpha < 1/2$. Portanto, possui uma subsequência convergindo fraco, que chamaremos $(D_t^\alpha u_{h_n})_{n\in\mathbb{N}}$ novamente e v seu limite fraco. Nosso objetivo agora será mostrar que v é a derivada fraca de u.

Vejamos como podemos recuperar a função $u_{h_n}(t)$ a partir de sua derivada fracionária. Fixe $t \in [0,T]$. Um cálculo simples utilizando a Desigualdade de Hölder mostra que a função,

$$[0,T] \ni s \mapsto \frac{u_{h_n(s)}}{(t-s)^\alpha} \in \mathscr{L}^2(\Omega),$$

é integrável no intervalo $[0,T]$, de modo que a função,

$$[0,T] \ni t \mapsto \int_0^t \frac{u_{h_n(s)}}{(t-s)^\alpha} ds \in \mathscr{L}^2(\Omega),$$

é absolutamente contínua. Além disso,

$$\begin{aligned}\left\|\int_0^t \frac{u_{h_n(s)}}{(t-s)^\alpha}ds\right\| &\leq \|u_{h_n}\|^2_{L^2(0,t;\mathscr{L}^2(\Omega))}\int_0^t (t-s)^{-2\alpha}ds\\ &= \|u_{h_n}\|^2_{L^2(0,t;\mathscr{L}^2(\Omega))}\frac{t^{1-2\alpha}}{2\alpha-1}\\ &\leq \|u_{h_n}\|^2_{L^2(0,T;\mathscr{L}^2(\Omega))}\frac{t^{1-2\alpha}}{2\alpha-1},\end{aligned}$$

que claramente converge para zero quando $t\to 0$, visto que $0<\alpha<1/2$. Assim, pelos Teoremas 2.3 e 2.4 de [22] (páginas 43-45) obtemos,

$$u_{h_n}(t) = \int_0^t \frac{D_s^\alpha u_{h_n}(s)}{(t-s)^{1-\alpha}}ds. \tag{4.3.5}$$

Defina então o operador,

$$\begin{aligned}J : L^2(0,T;\mathscr{L}^2(\Omega)) &\to L^p(0,T;\mathscr{L}^2(\Omega))\\ w &\mapsto \int_0^t \frac{w(s)}{(t-s)^{1-\alpha}}ds\end{aligned}$$

e vamos mostrar que J é limitado sempre que $(1-2\alpha)p<2$. Ora, que J é linear é imediato. Agora, note que,

$$\begin{aligned}\|J(w)\|_{L^p(0,T;\mathscr{L}^2(\Omega))} &= \left\|\int_0^t \frac{w(s)}{(t-s)^{1-\alpha}}ds\right\|_{L^p(0,T;\mathscr{L}^2(\Omega))}\\ &\leq \|w\|_{L^2(0,T;\mathscr{L}^2(\Omega))}\|t^{\alpha-1}\cdot 1_{\mathscr{L}^2(\Omega)}\|_{L^q(0,T;\mathscr{L}^2(\Omega))}\\ &= \|1_{\mathscr{L}^2(\Omega)}\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\|w\|_{L^2(0,T;\mathscr{L}^2(\Omega))}\left(\int_0^T |t^{\alpha-1}|^q dt\right)^{1/q},\end{aligned}$$

onde,

$$1+\frac{1}{p} = \frac{1}{2}+\frac{1}{q},$$

pela Desigualdade de Young para convoluções, e $1_{\mathscr{L}^2(\Omega)}$ denota o elemento neutro de $\mathscr{L}^2(\Omega)$. Mas é claro que a integral é finita apenas quando $(1-\alpha)q<1$, ou seja,

$$1-\alpha < \frac{1}{q} = \frac{1}{2}+\frac{1}{p},$$

de onde segue que $(1-2\alpha)p<2$, e portanto J é limitado.

Agora, se $f \in (L^p(0,T;\mathscr{L}^2(\Omega)))^*$ temos $f \circ J \in (L^2(0,T;\mathscr{L}^2(\Omega)))^*$, e portanto,

$$(f \circ J)(D_t^\alpha u_{h_n}) \to (f \circ J)(v),$$

ou seja, $J(D_t^\alpha u_{h_n}) \rightharpoonup J(v)$ em $L^p(0,T;\mathscr{L}^2(\Omega))$, isto é,

$$\int_0^t \frac{D_t^\alpha u_{h_n}(s)}{(t-s)^{1-\alpha}} ds \rightharpoonup \int_0^t \frac{v(s)}{(t-s)^{1-\alpha}} ds.$$

Disto, da equação (4.3.5) e de $u_{h_n} \rightharpoonup u$ em $L^p(0,T;\mathscr{L}^2(\Omega))$ temos,

$$u(t) = \int_0^t \frac{v(s)}{(t-s)^{1-\alpha}} ds, \quad \forall \; t \in [0,T].$$

Convolucionando ambos os lados dessa equação com $t^{-\alpha}$ temos (como $0 < t < T$, a convolução está bem definida),

$$\begin{aligned}\int_0^t \frac{u(s)}{(t-s)^\alpha} ds &= \int_0^t \frac{1}{(t-s)^\alpha} \left(\int_0^s \frac{v(r)}{(s-r)^{1-\alpha}} dr \right) ds \\ &= \int_0^t \int_0^s \frac{v(r)}{(t-s)^\alpha (s-r)^{1-\alpha}} drds,\end{aligned}$$

e usando a fórmula de Dirichlet (ver [22], página 9), após a substituição $s = r$ temos,

$$\int_0^t \frac{u(s)}{(t-s)^\alpha} ds = \int_0^t v(s) \int_s^t \frac{dr}{(t-r)^\alpha (r-s)^{1-\alpha}} ds,$$

e substituindo $r = s + \tau(t-s)$ temos,

$$\begin{aligned}\int_0^t \frac{u(s)}{(t-s)^\alpha} ds &= \int_0^t v(s) \int_0^1 \frac{d\tau}{\tau^{1-\alpha}(1-\tau)^\alpha} ds \\ &= \int_0^t v(s) ds,\end{aligned}$$

e para a segunda igualdade ver [22], página 29 (lembre-se que estamos assumindo a função Gamma constante e igual a um). Assim,

$$\int_0^t \frac{u(s)}{(t-s)^\alpha} ds = \int_0^t v(s) ds,$$

e derivando ambos os lados dessa equação e usando a fórmula de Leibniz temos,

$$D_t^\alpha u(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{u(s)}{(t-s)^\alpha} ds = v(t),$$

ou seja, u tem derivada fracionária em $L^2(0,T;\mathscr{L}^2(\Omega))$ e $D_t^\alpha u(t) = v(t)$. A estimativa (4.3.4) segue diretamente do Lema 4.8 com 2α no lugar de α. ■

Referências

[1] J. G. S. Antunes. As equações de Navier-Stokes 2D sobre alguns domínios ilimitados: Existência, unicidade e estudo do atrator global. Master's thesis, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2019.

[2] M. Brelot. Étude et extensions du principe de Dirichlet. *Ann. Inst. Fourier Grenoble*, 5: 371–419, 1953-1954.

[3] H. Brezis. *Functional Analisys, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer, London, 2011th edition, 2010.

[4] P. M. Carvalho-Neto. Equações de Navier-Stokes com condições de fronteira tipo Navier de fricção. Master's thesis, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2009.

[5] J. Deny and J.-L. Lions. Les espaces du type de Beppo Levi. *Ann. Inst. Fourier Grenoble*, 5:305–370, 1953-1954.

[6] I. D. Dinov. *Bochner Integrals and Vector Measures*. Michigan Technological University, 1993.

[7] O. Dovgoshey, O. Martio, V. Ryazanov, and M. Vuorinen. The cantor function. *Expositiones Mathematicae*, 24:1–37, 2006.

[8] L. Euler. Principes généraux du mouvement des fluides. *Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin*, pages 274–315, 1757.

[9] L. C. Evans. *Partial Differential Equations*, volume 19. Amer Mathematical Society, first edition edition, 1998.

[10] J. K. Hale. *Ordinary Differential Equations*, volume 21. Krieger Publishing Company, 2nd edition, 1980.

[11] J. Hounie and J. R. dos Santos Filho. A fractional friedrich's lemma for holder norms and applications. *Nonlinear Analysis-theory Methods & Applications*, 28:1063–1077, 1997.

[12] S. Kevasan. *Topics in Functional Analisys and Applications*. 1989.

[13] E. Kreyszig. *Introductory Functional Analysis with Applications*. Wiley, 1st edition, 1989.

[14] O. Ladyzhenskaya. *The Mathematical Theory of Viscous Imcompressible Flow*, volume 2. Gordon and Breach, 2nd edition, 1963.

[15] J.-L. Lions. Quelques résultats d'existence dans des équations aux dérivées partielles non linéaires. *Bulletin de la S. M. F.*, 87:245–273, 1959.

[16] J.-L. Lions. Sur l'existence de solutions des equations de Navier-Stokes. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 248:2847–2849, 1959.

[17] F. L. M. H. Navier. Mémoire sur les lois du mouvement des fluides. *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de l'Institut de France*, pages 389–440, 1823.

[18] I. Podlubny. *An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of Their Solution and Some of Their Applications*, volume 198. Academic Press, 1998.

[19] I. Richards and H. Youn. *Theory of Distributions: A non-technical introduction*. Cambridge University Press, 1990.

[20] J. C. Robinson, J. L. Rodrigo, and W. Sadowski. *The Three-Dimensional Navier-Stokes Equations*. Cambridge University Press, United Kingdom, 1th edition, 2016.

[21] W. Rudin. *Functional Analysis*. McGraw-Hill Science/Engineering/Math, 2nd edition, 1991.

[22] S. G. Samko, A. A. Kilbas, and O. I. Marichev. *Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications*. Gordon and Breach Science, 1993.

[23] M. Shinbrot. Fractional derivatives of solutions of the Navier-Stokes equations. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 40(2):139–154, 1971.

[24] G. G. Stokes. On the theories of the internal friction of fluids in motion and of the equilibrium and motion of elastic solids. *Trans. Cambridge Philos. Soc.*, pages 287–319, 1845.

[25] R. Temam. *Navier-Stokes Equations: Theory and Numerical Analisys*, volume 2. North-Holland Publishing Company, Amsterdan, revised edition edition, 1979.

[26] M. Veraar, T. Hytonen, J. v. Neerven, and L. Weis. *Analysis in Banach Spaces - Volume I: Martingales and Littlewood-Paley Theory*, volume 63. Springer, 2016.

[27] K. Yosida. *Functional Analysis*. Springer, 6th edition, 1980.