UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
CURSO DE GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Gustavo Voltolini Feller

Jogos de opções reais: Um instrumento de avaliação de projetos de investimento

Florianópolis
2024

Gustavo Voltolini Feller

Jogos de opções reais: Um instrumento de avaliação de projetos de investimento

Trabalho de Conclusão de Curso do Curso de Graduação em Matemática do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do título de Licenciado em Matemática.
Orientador: Prof. Vinicius Viana Luiz Albani, Dr.

Florianópolis
2024

Ficha catalográfica gerada por meio de sistema automatizado gerenciado pela BU/UFSC.
Dados inseridos pelo próprio autor.

Feller, Gustavo Voltolini
Jogos de opções reais: Um instrumento de avaliação de projetos de investimento / Gustavo Voltolini Feller ; orientador, Vinícius Viana Luiz Albani, 2024.
66 p.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Graduação em Matemática - Licenciatura, Florianópolis, 2024.

Inclui referências.

1. Matemática - Licenciatura. 2. Jogos de opções reais. 3. Projetos de investimento. 4. Teoria dos jogos. I. Albani, Vinícius Viana Luiz. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Graduação em Matemática - Licenciatura. III. Título.

Gustavo Voltolini Feller

Jogos de opções reais: Um instrumento de avaliação de projetos de investimento

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi julgado adequado para obtenção do Título de “Licenciado em Matemática” e aprovado em sua forma final pelo Curso de Graduação em Matemática.

Florianópolis, 18 de julho de 2024.

Prof. Felipe Lopes Castro, Dr.
Coordenador do Curso

Banca Examinadora:

Prof. Vinicius Viana Luiz Albani, Dr.
Orientador

Paula Savana E. Moreira, Dra.
Avaliadora
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Edson Cilos Vargas Júnior, Dr.
Avaliador
Universidade Federal de Santa Catarina

RESUMO

Um jogo de opções reais é um instrumento de avaliação voltado para analisar a viabilidade de um projeto de investimento geralmente de alguma empresa do ramo corporativo. Desenvolvido por meio de duas teorias, sendo elas a teoria das opções reais e a teoria dos jogos, tem como objetivo apresentar o valor da flexibilidade nos momentos de decisões gerenciais, assim como incorporar estratégias na resolução de conflitos geradas dentro dos oligopólios que as empresas estão inseridas. O diferencial dessa ferramenta para com relação a outras, é justamente tentar trazer a melhor análise de projeto por um viés interno com as opções reais, mas também utilizar da teoria dos jogos para entender a posição externa no mercado que o projeto de investimento será inserido.

Palavras-chave:Jogo de Opções Reais. Projeto de Investimento. Teoria dos Jogos.

ABSTRACT

A real options game is an evaluation instrument aimed at analyzing the feasibility of an investment project, typically for a corporate entity. Developed through two theories, namely the real option theory and the game theory, its objective is to present the value of flexibility in managerial decision-making, as well as to incorporate strategies in resolving conflicts generated within the oligopolies in which the companies operate. The distinguishing feature of this tool compared to others is precisely its attempt to provide the best project analysis through an internal perspective with real options, while also utilizing game theory to understand the external market position in which the investment project will be placed.

Keywords:Real Options Game. Investment Project. Game Theory.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Esse projeto pretende apresentar a relação que se extrai entre a teoria dos jogos e a teoria das opções reais, trabalhando-as em conjunto naquilo chamado de **jogos de opções reais**, um instrumento utilizado na avaliação da viabilidade de projetos de investimento dentro de empresas ao redor do mundo.

No capítulo 3 iniciaremos apresentando as opções financeiras que foram fundamentais para o desenvolvimento da teoria da opções reais. Ainda nesse capítulo são descritos os métodos de avaliação de projetos de investimento mais tradicionais, sendo eles o valor presente líquido, a taxa interna de retorno e o *payback*, assim como uma breve explicação sobre o que compõem cada um desses. Trataremos em seguida sobre o conceito de gestão de risco e algumas terminologias importantes utilizadas ao longo do trabalho. Finalizamos o capítulo identificando os principais métodos estocásticos utilizados para fundamentar as técnicas de avaliação de projetos.

O capítulo 4 consiste em trazer o tema das opções reais, explicando sobre o valor da flexibilidade nas tomadas de decisão e identificando as principais opções reais existentes nos projetos de investimento do ramo corporativo, assim como uma breve descrição de cada um deles com suas vantagens. Uma vez que a teoria das opções reais engloba valores e decisões cruciais, também foram explicitados os principais métodos de precificação das opções como equações diferenciais parciais, programação dinâmica e simulação de Monte Carlo.

Como nessa monografia trabalharemos com jogos de opções reais, faz-se necessário uma fundamentação teórica sobre a teoria dos jogos (TJ). No capítulo 5 foi feito um desenvolvimento bastante didático e com foco nos principais aspectos que englobam a teoria dos jogos. Uma vez que não serão utilizados dos conceitos mais complexos da TJ nesse trabalho, optou-se por uma explicação mais detalhada do básico através de exemplos e uma construção voltada para aquilo que seria utilizado mais adiante.

Por último, no capítulo 6 finalmente trazemos a concepção dos jogos de opções reais como ferramenta de avaliação de projetos de investimento. Aqui são elencadas as motivações e os principais pontos que fazem desse conjunção uma metodologia válida. Foram apresentados trechos de uma entrevista com Marcos A. G. Dias, gestor da Petrobras, como parte da fundamentação na implementação dos jogos de opções reais na corporação. Finalizamos apresentando um exemplo hipotético na indústria mineradora, nesse exemplo buscou-se sintetizar utilidades de ambas as teorias apresentadas, assim como trazer para a realidade uma possível aplicação de jogos de opções reais.

2 METODOLOGIA E JUSTIFICATIVA DO TRABALHO

Esse trabalho consiste em uma longa pesquisa bibliográfica acerca de referenciais teóricos já publicados sobre a teoria dos jogos como ferramenta na tomada de decisão nos mais diversos âmbitos cabíveis e sobre a teoria das opções reais como um instrumento para auxiliar nas decisões em projetos de investimento do meio corporativo.

A partir de um estudo da teoria e com exemplos teóricos baseados em fatos já consolidados, essa monografia utiliza de uma corrente indutiva positivista, analisando padrões e criando inferências, sendo crucial para o desenvolvimento do método científico que conhecemos hoje. Curiosamente estamos tratando de matemática, uma ciência precisa e que não permite lacunas para achismos, mas fazemos isso dentro de um viés micro e macroeconômico, que pode ser bastante interpretativo com um caráter social muito presente, inclusive sendo essa uma das críticas feitas ao positivismo, justamente sobre sua empregabilidade ser exclusiva às ciências exatas. (RICHARDSON, 2007).

De acordo com (MEIRELLES, 2004) a teoria econômica destaca a importância dos investimentos em um cenário de macroeconomia, sendo responsável pelo crescimento e consolidação da economia longo prazo. Inclusive índices de investimento corporativos na sociedade têm influência direta em questões sociais como taxa de empregabilidade e renda. Ainda se olharmos por um viés de microeconomia, as decisões dentro de uma empresa, independente do porte da mesma, devem ser tomadas com a maior racionalidade possível, baseadas na maior quantidade de informação disponível e fazendo a leitura correta dos dados, para que as possibilidades de equívoco sejam matematicamente reduzidas e as chances de prosperidade cada vez maiores.

3 OPÇÕES

3.1 OPÇÕES FINANCEIRAS

Para quem gosta do mundos dos investimentos e já estudou um pouco sobre, deve ter ao menos ouvido falar sobre opções financeiras. Dentro do mercado de investimentos e suas bolsas de valores, um ramo a se destacar é o de derivativos, ativos negociados que não tem valor inerente por si próprios, todavia seu preço pode estar atrelado a uma série de outros ativos como: ações, índices de ações, *commodities*, taxas de câmbio e de juros. Dentro do mercado de derivativos temos divisões em quatro principais grupos: contratos futuros, contratos a termo, *swap* e opções. (MASTRE *et al.*, 2022).

Nesse trabalho não daremos foco diretamente nas opções financeiras, mas as opções reais são fruto dessas, então vamos entender um pouco melhor sobre o que se trata. Opções são ativos subjacentes negociados em bolsas financeiras e no mercado a balcão e existem dois tipos de opções. Uma opção de compra, também chamada de *call* fornece ao titular o direito de comprar o ativo referente a opção em um prazo pré determinado por um preço previamente especificado. Analogamente, a opção de venda *put* dá ao titular da mesma o direito de vender o ativo subjacente referente a opção em um prazo pré determinado por um preço previamente determinado. A nomenclatura utilizada no meio financeiro para o preço da opção no contrato é chamado de **preço do exercício**, enquanto a data que delimita o fim do prazo estabelecido é chamada de **prazo de vencimento**. Naturalmente existe um custo para comprar uma opção, a esse valor é dado o nome de **prêmio**.(HULL, 2016).

O mais importante sobre as opções no que diz respeito a esse trabalho é que elas concedem ao seu titular o direito, mas não a obrigação de exercer a compra/venda do ativo. Caso a opção não seja exercida, o titular tem prejuízo equivalente ao valor do prêmio. Vale ressaltar que existem dois tipos de opção:

- Opções europeias onde o ato da compra na caso de uma *call* ou da venda no caso de uma *put* do ativo subjacente pode ocorrer somente na data de vencimento.
- Opções americanas onde tanto a compra ou venda podem ocorrer a qualquer momento dentro do tempo pré estabelecido. Essas são ampla maioria no mercado.

Ainda de acordo com (HULL, 2016), vejamos um exemplo de como isso funciona na prática com ações

Exemplo 3.1.1 *Os dados desse exemplo foram retirados da Chicago Board Options Exchange (CBOE) e representam dados reais da empresa de tecnologia Google. No* *dia em questão o preço de compra dessas ações era de $871,23 e de venda de $871,37. Na tabela abaixo vemos os prazos que representam o tempo pré determinado para respectivamente os dias 22 de junho e 23 de setembro.*

Preço do exercício ($)	Junho de 2013		Setembro de 2013	
	Oferta de compra	Oferta de venda	Oferta de compra	Oferta de venda
820	56,00	57,50	76,00	77,80
840	39,50	40,70	62,90	63,90
860	25,70	26,50	51,20	52,30
880	15,00	15,60	41,00	41,60
900	7,90	8,40	32,10	32,80

Tabela 1 – Preço de opções Google em 8 de maio de 2013. Valores fornecidos pela CBOE; Preço da ação: compra $871,23; venda $871,37

Vamos supor que um investidor deseja comprar um contrato de opção de compra de ações da Google para o mês de setembro no valor de $880. Como normalmente nos EUA os contratos de opções são feitos para lotes de 100 ações, para realizar esse investimento pensando no futuro, no dia 08 de maio de 2013 ele fez uma transferência para a corretora no valor de $\$4160 = 100 \times \$41,60$*, que é o preço do prêmio a se pagar para ter o direito de comprar as ações da Google por $880 em 23 de setembro de 2013.*

Podemos dizer que esse investimento faz sentido apenas se o titular da opção de compra acredita que a ação está em uma crescente e terá seu preço superior ao preço do exercício estipulado previamente. Em um cenário hipotético, digamos que na data de vencimento o preço das ações da Google atingiram $1000, isso significa que ao invés de pagar esse preço pelas ações, o investidor pode comprá-las por $880, gerando assim um lucro de $\$78,40 = \$120 - \$41,60$ *(preço do prêmio) por ação, no lote de 100 ações em questão, geraria um lucro total de $7840.*

Como o mundo não é só feito de flores, devemos considerar a possibilidade de que as ações da Google tenham seu preço reduzido. Em outra situação hipotética, digamos que as ações atinjam o preço de $800 no dia 23 de setembro de 2013, nesse caso não faria sentido exercer a opção de compra sobre as mesmas, afinal o investidor estaria pagando mais caro do que o mercado estipulou para aquelas ações, gerando assim um prejuízo de $4160 referente ao prêmio já pago. Vale ressaltar que as opções desse exemplo são opções americanas e diariamente tem alterações no seu valor podendo ser exercidas ou não antes do vencimento, apenas consideramos as datas de vencimento por questões de sucintez.

3.2 MÉTODOS DE ANÁLISE DE PROJETOS

Vimos na seção anterior um pouco sobre o que são as opções financeiras do mercado de investimento mundial, mas exatamente qual a relação que elas têm com um dos objetos de estudo dessa monografia que são as opções reais?

O nome **Teoria das Opções Reais** (TOR) foi formalizado por Stewart C. Myers em 1977, e é proveniente das opções financeiras justamente pelo viés de existir o direito, mas não a obrigação de tomar uma certa decisão após um período de tempo (MYERS, 1977). A TOR funciona como um método de avaliação em decisões empresariais no ramo corporativo, visando determinar qual é a melhor opção dentro de uma gama de possibilidades. Diariamente no meio corporativo, milhares ou talvez milhões de decisões são tomadas em empresas ao redor do mundo, naturalmente nos atentaremos as de maior impacto, como por exemplo: Investir em pesquisa e desenvolvimento, construir uma nova fábrica, retrair os investimentos, aumentar a produção de determinado produto ou até mesmo comprar empresas concorrentes.

Todos exemplos anteriores retratam decisões importantes que podem mudar drasticamente o futuro de uma empresa, seja por um caminho positivo ou não. Dessa forma ao longo do tempo foram desenvolvidos métodos de avaliação de projetos que buscam estimar qual a melhor escolha a ser tomada quando surgem dúvidas, afinal olhando para grandes corporações do mundo dos mais diversos setores como Apple, Amazon, Volkswagen, Walmart, Petrobras, é bastante difícil acreditar que elas alcançaram esse patamar com líderes tomando decisões apenas baseado em intuição e sorte.

Antes de darmos ênfase na utilização de opções reais e nos motivos por escolhermos esse tema para a monografia, é importante ressaltarmos alguns pontos sobre outros métodos de análise de projetos. De acordo um estudo feito na Espanha em 2015 com 140 empresas fora do ramo financeiro, as técnicas mais utilizadas pelos diretores financeiros são respectivamente: *payback*, Taxa Interna de Retorno (TIR), Valor Presente Líquido (VPL) e por último opções reais (DE ANDRÉS *et al.*, 2015). Ainda presentes na literatura podemos pontuar métodos como Valor Econômico Adicionado (VEA) e Retorno Sobre Investimento (RSI). Não há um consenso ou pesquisa do meio acadêmico que consiga elencar de fato quais são as técnicas mais utilizadas no mundo dos negócios, por ser uma informação particularmente valiosa e por muitas vezes elas serem utilizadas de forma combinada entre si, entretanto avaliando diversos materiais, estima-se que as mais recorrentes sejam VPL, TIR e *payback*, portanto vamos olhar um pouco melhor para essas

- **Valor Presente Líquido (VPL)**: É uma fórmula econômico-financeira que busca determinar o valor presente de pagamentos futuros atrelados a uma taxa de juros estimada e descontado do valor de investimento inicial. Sendo

- FC_t = Fluxo de caixa no período t;
- **t** = É o enésimo período no tempo em que o dinheiro será investido no projeto;
- **n** = O número de períodos t;
- **k** = Taxa de desconto
- **II** = Investimento inicial

A fórmula para cálculo do VPL é:

$$VPL = \sum_{t=1}^{n} \frac{FC_t}{(1+k)^t} - II$$

Caso o resultado da fórmula for VPL>0, isso significa que o projeto é viável e vale a pena ser executado, caso VPL $\leq$ 0, a execução do projeto não é viável de acordo com o método.

- **Taxa Interna de Retorno (TIR)**: Associada ao VPL, a Taxa Interna de Retorno calcula a taxa de desconto que um fluxo de caixa deve ter para igualar o VPL a zero, visando novamente medir a atratividade de um projeto por meio de uma taxa mínima de atratividade pré estabelecida. O cálculo da TIR é feito por uma fórmula bastante semelhante a anterior:

  - F_t = Entrada de capital no período t;
  - **t** = É o enésimo período no tempo em que o dinheiro será investido no projeto;
  - **n** = O número de períodos t;
  - **TIR** = Taxa Interna de Retorno
  - **II** = Investimento inicial

  A fórmula para cálculo da TIR é:

  $$VPL = 0 = \sum_{t=1}^{n} \frac{F_t}{(1+TIR)^t} - II$$

  O resultado trará um valor em percentual que deve ser analisado pelos gestores do projeto juntamente com a taxa mínima de atratividade estabelecido pela empresa (para essa não há fórmula).

- ***Payback (Tempo de Retorno)***: Talvez o mais simples dos três, o *payback* basicamente busca calcular o tempo de retorno de um investimento utilizando a projeção de fluxos de caixa futuros acumulados até superar o valor do investimento inicial. Se o período de recuperação do capital aplicado no projeto for menor que o tempo aceitável estipulado pelos gestores, aceita-se o mesmo, caso contrário, a ideia é descartada.

Naturalmente trouxe uma breve explicação sobre esses métodos de avaliação de projetos que são os mais utilizados, mas ainda teríamos muito a falar sobre eles. Hoje com o avanço da tecnologia e sua mais ampla acessibilidade, são usadas simulações de Monte Carlo para auxiliar nessas técnicas por exemplo buscando melhorar a precisão na projeção de fluxos de caixa futuros. Posso ressaltar o Modelo de Precificação de Ativos de Capital (MPAC), que busca encontrar qual seria uma taxa mínima de atratividade de um projeto para utilizarmos como base referente a TIR. De toda forma há motivos e explicações para utilização dessas metodologias na avaliação de projetos, afinal são as mais difundidas, todavia não devemos deixar de lado o ônus da utilização desses métodos.

Como vimos de acordo com as fórmulas e descrições apresentadas anteriormente sobre os métodos de avaliação mais tradicionais, suas aplicações são intimamente correlacionadas com previsões de fluxos de caixa futuros, dessa forma há um peso muito grande nessa variável, sendo responsável direta pela qualidade da aplicação dos métodos citados.

De acordo com Frank H. Knight, economista e autointitulado como primeiro autor a destacar a diferença entre risco e incerteza, no seu livro "Risco, Incerteza e Lucro"enquanto critica a subjetividade da economia em comparação com ciências como a física e a matemática, Knight destaca risco como uma probabilidade mensurável, enquanto incerteza enquadra-se como uma probabilidade numericamente imensurável. Para diferenciar as situações, Knight, um dos fundadores da escola econômica de Chicago, utiliza três terminologias diferentes:

- Probabilidade *a priori*: Sendo aquela mais comumente conhecida como as probabilidades em jogos de azar, por exemplo dados, roletas, moedas.
- Probabilidade estatística: Atrelada ao método indutivo, é baseada em questões empíricas, ou seja, valores atribuídos a resultados passados, nas palavras dele "avaliação empírica da frequência de associação entre predicados"(KNIGHT, 1921).
- Estimativa: Sendo essa referente ao caso de probabilidade numericamente imensurável, é um julgamento baseado em intuição, não em evidências.

As duas primeiras configuram casos de classificação absolutamente homogêneas, já a terceira é conhecida como incerteza verdadeira. (ANDRADE, 2011)

Dessa forma, podemos dizer que ao utilizar métodos mais tradicionais como o VPL, o risco acerca da previsão dos fluxos de caixa, ou seja, da ocorrência de uma incongruência real perante aquilo que foi estimado existe e deve ser levado em conta nos cálculos. Portanto duas estratégias seriam possíveis, atrelar esse risco a taxa de desconto na fórmula ou então pressupor apenas valores com 100% de garantia para o fluxo de caixa futuro. (MEIRELLES, 2004).

Uma vez que o futuro é incerto, é fácil pensarmos em *n* motivos que podem levar a imprevistos que não estavam sendo considerados no início de um projeto de investimento. O mundo inteiro está praticamente interligado por meio da internet e informações de vários graus de importância acontecem a todo momento, como exemplo, podemos citar o aumento do preço de um barril de petróleo em mais de 25% do 2º para o 3º trimestre de 2022 devido aos conflitos entre Rússia e Ucrânia (SOUSA *et al.*, 2023) e poderíamos elencar outros muitos impactos econômicos inesperados gerados pela recente pandemia do COVID-19.

De acordo com (SMIT; TRIGEORGIS, 2004), ao fazer uma análise padrão de valor presente líquido, não conseguimos captar o total valor de um projeto de investimento por não levarmos em conta as imprevisibilidades e intercorrências ao longo do tempo, esse fator fica ainda mais marcado se considerarmos um investimento de longo prazo. Dessa forma, a característica de tratar uma decisão como "agora ou nunca "apresenta uma desvantagem muito grande comparada ao atributo de "esperar para ver "fornecido pelas opções reais. Destaca-se como outro ponto negativo do VPL, sua inflexibilidade na avaliação de projetos interdependentes ou de pesquisa e desenvolvimento por exemplo, que naturalmente tendem a apresentar VPL muito baixos ou até negativos em um primeiro momento, ou seja, considerados inviáveis, mas que tem seu valor subjugado, pois podem originar investimentos lucrativos no futuro.(TRIGEORGIS, 1996)

Segundo (COPELAND; ANTIKAROV, 2001), o VPL é a técnica mais utilizada e surgiu para substituir o *payback*, mas esse processo demorou mais de 20 anos para ser difundido, isto é, talvez a teoria das opções reais, ainda esteja passando por essa fase, mas discutiremos sobre isso mais tarde. Ainda é necessário ressaltar que existem defensores da utilização dos métodos mais tradicionais, suas vantagens como fácil aplicação e compreensão quando comparadas a alternativas mais revolucionárias são rapidamente percebidas ao analisar exemplos na literatura.

3.3 GESTÃO DE RISCO

Ainda dentro do tema tratado há pouco, foi apresentada a versão e definição imposta por Knight em seus livros e artigos. Outro contribuinte muito pertinente para o assunto, foi o economista John M. Keynes, esse tinha uma linha de pensamento bastante similar a de seu contemporâneo que citamos aqui, mas para concatenar esse corrente de pensamento Knight-Keynes no que diz respeito a risco e incerteza, trarei a visão de George Shackle.

"Onde há conhecimento, não há incerteza"(SHACKLE, 1983). Dessa forma fica explícito que para Shackle, conhecimento e incerteza são termos antônimos que não devem coexistir. Continuando a citação anterior: "Desconhecimento, incerteza, é isso que confronta o decisor quando sua decisão é do tipo agora ou nunca, quando ao tomar aquela escolha, destrói-se a possibilidade de tomar aquela decisão novamente"(SHACKLE, 1983). O nome da presente seção provém justamente dessas ideias, não é possível gerir de maneira racional aquilo que é desconhecido, partindo desse pressuposto, devemos voltar nossos esforços para o que pode ser manejado.

Para avaliar um projeto de investimento, é necessário entender que há uma correlação direta entre o custo médio ponderado de capital (CMPC) da empresa e os riscos do mesmo. O CMPC é utilizado para fundamentar a taxa de desconto associada ao valor econômico de um projeto, dessa maneira há de se pensar que coexistem custos de capital próprio como o pagamento de acionistas da empresa dentre outros custos de funcionamento básicos e custos de capital para terceiros como os juros de endividamento para execução de um investimento. Trata-se de uma decisão estratégica, afinal quanto maior o valor da dívida para execução do projeto, maior pode ser o abatimento em aspectos fiscais tal qual imposto de renda, todavia valores maiores podem representar taxas de juros de maior impacto na saúde financeira da empresa (COSTA *et al.*, 2014).

Retomando um modelo já citado aqui, podemos destacar o Modelo de Precificação de Ativos de Capital (MPAC) como um dos meios de estimar os custos de capital próprio quando buscamos encontrar a Taxa de Desconto Ajustada ao Risco (TDAR) de um projeto. Levando em conta a existência de riscos denominados **diversificáveis** e **não diversificáveis**, sendo o primeiro tipo aqueles que podem ser eliminados por meio da diversificação de ativos, por exemplo tendo uma carteira de investimentos baseada em empresas de variados segmentos, enquanto que os riscos não diversificáveis são resultantes de uma série de fatores que afetam grande parte dos ativos em graus de maior e menor intensidade de acordo com a situação (MEIRELLES, 2004).

O MPAC naturalmente é um modelo voltado para tratar de ativos negociados no mercado financeiro, mas seguindo (GITMAN *et al.*, 2010), é possível adaptar a fórmula para o meio corporativo, fazemos isso utilizando alguns valores na forma:

$$E(r_i) = r_f + \beta_i[E(r_M) - r_f]$$

Onde

- $E(r_i)$ = Retorno esperado ajustado ao risco sistemático.
- r_f = Taxa de juros livre de risco, usualmente medido com base em uma Letra do Tesouro dos Estados Unidos de três meses (praticamente livre de riscos de inadimplência).

- β_i = Coeficiente mensurador do grau do risco não diversificável . "É um indicador do grau de variação do retorno de um ativo em resposta a uma variação no retorno de mercado"(GITMAN *et al.*, 2010). Seu cálculo é feito baseado em um compilação de dados apresentados no passado e o *beta* considerado base de mercado é $\beta = 1$

- $E(r_M)$ = Valor esperado do retorno do índice representativo da carteira de mercado.

Agora olhando sob uma ótica empresarial, podemos pensar que os equipamentos de uma empresa sejam ativos do mercado financeiro, dessa maneira a fórmula poderia ser descrita como

$$E(r_{projeto}) = r_f + \beta_{projeto}[E(r_M) - r_f]$$

Para uma melhor compreensão, temos aquilo que é chamado de Linha do Mercado de Títulos (LMT), que traduz de maneira gráfica e mais visual, quais oportunidades devem ser aproveitadas segundo a MPAC

(LUEHRMAN, 1997) destaca que modelos mais tradicionais como os apresentados até aqui, possuem uma série de limitações, principalmente pela falta de dinamismo ao considerar as previsões de fluxo de caixa futuros. Isso quer dizer que em empresas estruturadas de maneira mais estática, pode até funcionar bem, mas na maioria das situações reais, onde há uma maior instabilidade tanto macro quanto microeconômica, não apresentará conclusões de alto grau de confiabilidade.

Além do MPAC, existem outros métodos utilizados para determinar a taxa de desconto ajustada ao risco. Vale a menção para a teoria de precificação por arbitragem (TPA), que é de fato menos comum que o método apresentado anteriormente, entretanto considera a possibilidade de uma gama maior de riscos não diversificáveis, fator esse que é diretamente proporcional a instabilidade do cenário macroeconômico situado, dessa forma, em casos mais caóticos é recomendada a utilização de um modelo de múltiplos índices como a TPA.

Ambas abordagens citadas trabalham voltadas ao objetivo de encontrar a taxa de desconto ajustada ao risco, naturalmente esse valor é íntimo a taxa mínima de atratividade para um projeto de investimento, uma vez que os riscos devem ser levados em conta para determinar quão válido é aquele investimento. Dessa forma, mais uma vez vemos que os métodos e técnicas de avaliação podem (e geralmente são) aplicados de maneira combinada em busca de uma maior assertividade nas decisões.

3.4 MÉTODOS ESTOCÁSTICOS

Podemos definir um processo estocástico como um agrupamento de variáveis aleatórias de cunho semelhante ordenadas ao longo do tempo. O conjunto de todas as possibilidades determinadas por essas variáveis é chamado de espaço de estado (ou abordagem no domínio do tempo). Esse agrupamento pode ser de duas formas, quando temos $\{X_{(t)}, 0 \leq t\}$ dizemos que trata-se de um processo estocástico em tempo contínuo, já quando temos o agrupamento da forma $X_1, X_2, \cdots X_n$ temos um processo estocástico em tempo discreto (LAW *et al.*, 2007).

Naturalmente quanto mais complexo for o sistema que desejamos abordar, mais difícil será utilizar uma modelagem para realizar simulações acerca do tema. Frequentemente em situações reais, métodos estocásticos não conseguirão traduzir perfeitamente a realidade e nem fornecer previsões com 100% de segurança, mas é possível atingir um certo grau de confiabilidade e a partir de um consenso humano decidir se os resultados devem ser levados em consideração em um processo de tomada de decisão ou não. Vejamos agora alguns dos mais comuns e utilizados, sejam com objetivo de ilustrar mais didaticamente o processo ou até para fundamentar matematicamente as opções possíveis.

3.4.1 Árvore de Decisão

Utilizada em análises de tempo discreto, a análise por árvore de decisões (AAD) é um excelente método para visualizar de maneira ampla os caminhos a serem tomados e as consequências que as escolhas tendem a levar. Para (MAGEE, 1964) as escolhas a serem feitas no futuro são diretamente influenciadas pelas decisões de hoje, e estas devem ser estar sob clareza. Ainda para o autor, a árvore de decisões é um artifício exclusivo bastante maleável, podendo ser utilizado pelas diretorias em combinação com as técnicas de avaliação de projetos de investimento, formando assim uma conjunção bastante útil entre uma visualização geral das etapas de investimento e uma visão analítica do projeto.

Uma árvore de decisões por menos intuitivo que pareça, pode ser apresentada de diversas maneiras, com isso quero dizer que podemos acrescentar informações até o ponto em que acharmos válido para a análise, incluindo probabilidades para os nós, vários estágios . Naturalmente ela apresenta suas desvantagens, por exemplo (CHEVALIER-ROIGNANT; TRIGEORGIS, 2011) destaca que a AAD não utiliza apropriadamente as taxas de desconto nos períodos e não fornece a taxa de retorno.

Muito utilizada na literatura de apoio dessa monografia, principalmente em conjunto com opções reais, a análise por árvore de decisão estará presente em grande parte do trabalho. Embasado pelo lado didático providenciado pelo método, o presente autor acredita na importância da clareza dos caminhos a serem seguidos e a AAD nos mune disso.

3.4.2 Análise de Sensibilidade

Consiste de uma avaliação estruturada da situação visando descobrir quais são as variáveis correlacionadas aos riscos mais relevantes no projeto. Uma vez destacados os principais parâmetros que podem afetar na oscilação do valor presente líquido de um projeto de investimento, a análise de sensibilidade busca quantificar a flutuação dos valores encontrados pelas técnicas de avaliação quando atribuídos a instabilidades não previstas.

De acordo com (COSTA *et al.*, 2014), as principais variáveis-chave que afetam o VPL de um projeto e que são levadas em consideração na análise de sensibilidade são os custos, as taxas de desconto e o tempo demandado nos processos produtivos. Naturalmente variáveis de caráter positivo também devem ser levados em conta como o preço de venda dos produtos e a procura de mercado pelos mesmos. Dessa maneira, a análise de sensibilidade fornece uma breve previsão não dos possíveis cenários e acontecimentos, mas de uma possível margem de variação ocasionada como decorrência de imprevistos.

Apesar de trabalhar com métodos probabilísticos para tentar prever uma distribuição dos fluxos de caixa futuros, a análise de sensibilidade deixa a desejar quando buscamos associar duas ou mais variáveis-chave na parametrização do risco. Também trata-se de um método limitado quando pensamos na adição de novas informações em um projeto de expansão, por exemplo. Apesar disso é bastante difundido e sua utilização é relativamente comum entre os gestores de projeto.

3.4.3 Simulação de Monte Carlo

Mais conhecida entre os matemáticos, a técnica de simulação de Monte Carlo foi desenvolvida durante a segunda guerra mundial na obra conhecida como projeto Manhattan, os principais responsáveis são Stalislav Ulam em parceria com John Von Neumann (guarde esse segundo nome pois será citado adiante nesse trabalho).

O nome do método provém dos cassinos de Monte Carlo, pois baseia-se na randomicidade de um número de eventos para assim aferir algo sobre os resultados. Perceba, ao jogarmos uma moeda para cima, sabemos que em média ela cairá 50% das vezes com a face da cara virada pra cima e 50% das vezes coroa, mas não é viável que lancemos essa moeda um milhão de vezes para concluirmos isso. Esse é um caso simples onde não precisamos realizar o experimento para encontrar as probabilidades de cada caso, todavia em projetos de investimento muitas vezes teremos situações mais complexas onde simular os resultados e encontrar uma distribuição de probabilidade pode ser fundamental para auxiliar na tomada de decisão. (COSTA *et al.*, 2014)

Do mesmo modo que os outros métodos estocásticos, a simulação de Monte Carlo pode ser melhor aproveitada quando associada a outras técnicas. A partir de uma modelagem criada com equações diferencias e munidos de uma programa computacional adequado para a tarefa, podemos inserir os dados disponíveis e realizar o número de simulações desejadas/possíveis (de acordo com o custo computacional disponível). Naturalmente na criação da modelagem quanto mais informações e complexidade atrelarmos mais precisos serão os resultados, dessa forma uma análise de sensibilidade anterior pode ser útil para determinar quais variáveis devem ter um peso maior nas simulações (MEIRELLES, 2004).

Um fator determinante do método é a capacidade de trabalhar com margens de erro, por exemplo, a expectativa de venda de um produto que é determinante na construção dos fluxos de caixa é de dez mil unidades por mês, podemos inserir uma margem de erro de 10% para os casos em que sejam vendidas nove mil ou onze mil unidades por mês, dessa forma podemos trabalhar com distribuições de probabilidade associadas a uma curva normal, destacando assim que as simulações de Monte Carlo podem ser atreladas a técnicas como valor presente líquido e taxa interna de retorno, aferindo a elas margens de segurança.

Assim como os outros métodos apresentados até aqui, é pertinente comentar que também apresenta seus ônus na utilização, com o aumento no número de variáveis a se considerar, podem haver problemas na criação da modelagem tal qual na execução dos programas computacionais. Além disso o método não fornece como resultado final um caminho claro a ser seguido, de acordo com (BOYLE, 1977), a melhor utilização para as simulações de Monte Carlo são em casos onde é muito difícil, ou até impossível seguir por um caminho que retorne resultados mais precisos, dessa forma sendo um ótimo balizador para aproximações, mas não como recurso final que determina as decisões a serem tomadas.

3.4.4 Movimento Browniano Geométrico

Ao observar em seu microscópio o movimento de dispersão de partículas de pólen na água, em 1827 o botânico Robert Brow identificou um fenômeno físico que leva seu nome até hoje. Contribuições de Einstein e Wiener foram importantes definindo esse movimento com leis físicas e definindo matematicamente o que é um movimento browniano (MASTRE *et al.*, 2022).

Para definirmos o que é movimento browniano geométrico (MBG) precisamos pontuar antes alguns pontos importantes de um movimento browniano:

- Trata-se de um processo de Markov, sucintamente isso quer dizer que a distribuição de probabilidade futuras depende unicamente do estado atual, em outras palavras, o momento T_{n+1} apenas é influenciado pelas condições impostas em

T_n, sem influência do passado.

- Os incrementos são independentes, ou seja, temos variáveis aleatórias em que a distribuição de probabilidades perante mudança de variável em qualquer intervalo de tempo é independente de outros intervalos de tempo.

- A variância cresce linearmente em qualquer intervalo de tempo e mudanças no processo são normalmente atribuídas em qualquer intervalo finito.

A equação que define o comportamento de uma variável aleatória $z(t)$ dentro de um movimento browniano é dada por

$$dz = \epsilon_t \sqrt{dt}$$

Onde ϵ_t é uma variável que segue uma distribuição normal e independente de outros fatores. O valor esperado $E[\epsilon_t] = 0$ e a variância $Var[dz] = dt$. Podemos perceber que dessa forma, a variância de dz cresce de forma linear ao passar do tempo, além disso, como Δz é proporcional a $\sqrt{\Delta t}$ isso torna os parâmetros de média e variância independentes de tempos específicos quando falamos da variação do preço da opção ao longo do tempo. (MELIN, 2008)

Agora que delimitamos o que configura um movimento browniano, vejamos o que é um movimento browniano geométrico.

O MBG é o método estocástico mais utilizado na modelagem de variáveis econômicas atreladas ao preço de ações, *commodities*, taxas de juros, dentre outras do segmento.

Na equação que define o comportamento de um MBG temos α que é chamado de taxa de *drift* e σ chamado de taxa de variância, que nesse caso são constantes para fins de um melhor manejo e estabilidade na modelagem, além de ser condizente com a hipótese do um mercado eficiente, que sugere que não há uma mudança sistemática da variância e dos retornos esperados com o tempo, de forma que as mudanças nos preços seguem uma caminhada aleatória com drift.

$$dx = \alpha x dt + \sigma x dz$$

Um fator determinante para a popularidade do movimento browniano geométrico é o fato dele seguir uma distribuição lognormal. O incremento de *lnx* segue um movimento browniano simples e dessa maneira a variação absoluta da variável x, que no caso é Δx, seguirá uma distribuição lognormal que é muito útil pois as variáveis econômicas que queremos modelar não assumem valores negativos.

A inserção de *lnx* está garantida pela aplicação do lema de Ito, mas não entraremos em detalhes por ser extensa e fugir do escopo do trabalho.

No próximo capítulo vamos finalmente entender um pouco melhor sobre as opções reais e sua utilização não só na avaliação da viabilidade de dar início a um projeto, mas em como essa técnica pode ser útil durante toda a vida de um investimento a longo prazo.

4 OPÇÕES REAIS

No início desse trabalho foi definido e apresentado brevemente sobre as opções financeiras, afinal boa parte dessa monografia é fruto desse ramo do mercado de investimentos, entretanto mesmo as opções reais sendo derivadas dessas, existem diversas diferenças entre elas, e por muitas vezes a maior dificuldade na utilização da TOR como metodologia de análise da viabilidade de um projeto de investimento passará pelas discrepâncias apresentadas entre os dois objetos. Na tentativa de traçar um paralelo pode haver a intercorrência de equívocos sutis, mas determinantes quando tratamos de tomadas de decisão em níveis mais elevados economicamente falando.

Destacadas semelhanças entre os termos que compartilham do nome de "opção", algumas diferenças importantes entre opções financeiras e opções reais merecem atenção. Segundo (MINARDI, 2000) a vida útil de uma opção financeira geralmente é menor que a de uma opção real, podendo a segunda ser até perpétua. Outro ponto é que opções reais não são atreladas a ativos negociados em mercado, usualmente serão projetos de investimento ou unidades de negócio, podendo assim assumir valores negativos em vários casos, diferente dos ativos-objeto atrelados as opções financeiras. uma das principais diferenças para (COPELAND; ANTIKAROV, 2001) é o fato de que opções financeiras raramente são negociadas pelos agentes detentores do ativo-objeto atrelado, mas sim por agentes secundários, enquanto que em opções reais temos influência direta dos agentes tomadores de decisão no valor da opção.

Opções reais buscam responder as perguntas de "como "e "se "vale a pena um determinado projeto de investimento no meio corporativo, inclusive um projeto pode consistir em várias opções reais. A utilização da teoria das opções reais tem como objetivo auxiliar os agentes da diretoria que tomam as decisões em alguns principais casos: **adiar o investimento**, **alterar a escala de produção** (expandir, contrair, parar temporariamente e reiniciar), **abandonar**, **alterar usos** (entradas e saídas) e (SMIT; TRIGEORGIS, 2004) (TRIGEORGIS, 1996).

Talvez a palavra mais importante em todo os âmbito na utilização da TOR seja flexibilidade. Avaliando os principais casos destacados no parágrafo anterior, podemos perceber que muitos deles são baseados nos princípios da incerteza que apresentamos anteriormente. Caso conhecêssemos exatamente os fluxos de caixa da empresa para os próximos dez anos, tivéssemos a garantia que nenhum fator externo interferiria na produção, a garantia que nenhuma empresa concorrente envolvida no mesmo mercado irá se destacar e intervir na clientela, ou seja, se essa fosse a realidade, utilizar a margem de flexibilidade que as opções reais fornecem não faria sentido algum, e os métodos tradicionais já instaurados no mercado preenchem perfeitamente o papel de instrumento avaliador.

Na imagem abaixo temos descrito alguns cenários de projeto de investimento com suas particularidades e assim

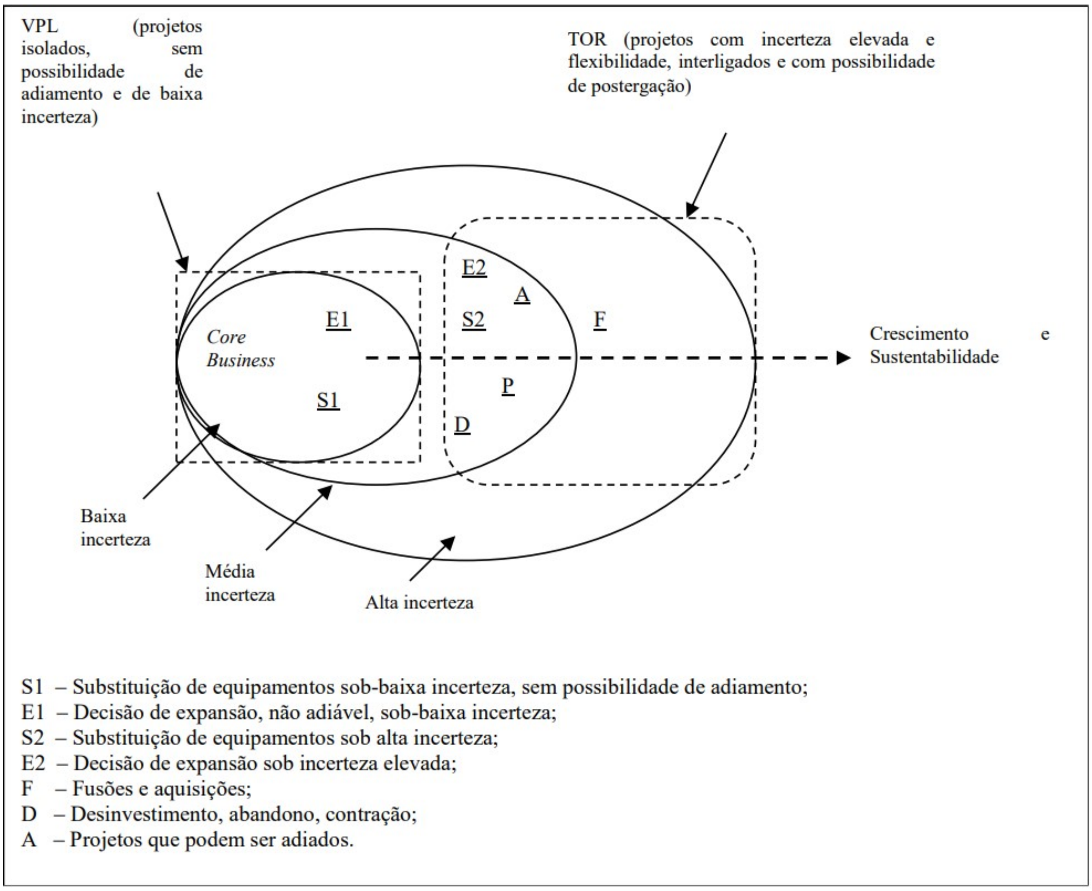

Figura 1 – Relação entre tipo de projeto, incerteza e tipo de análise.

Fonte: (COPELAND; ANTIKAROV, 2001).

Assim como os métodos mais tradicionais frequentemente são utilizados de maneira combinada em busca de uma maior segurança e assertividade nos momentos de decisão, o método das opções reais não necessariamente busca substituir as técnicas já instauradas no setor de investimentos. Como citado anteriormente, os modelos de avaliação de viabilidade de projetos são utilizados por diversos motivos, muitos deles são atrelados a clareza e agilidade para determinar a valia de uma ideia, dessa forma a TOR traz a flexibilidade de opções como aguardar para que com o tempo mais informações sejam reveladas (por exemplo, sobre os fluxos de caixa futuros) e portanto diminuir os riscos. A imagem abaixo mostra o que seria um gráfico de uma análise padrão via VPL e também mostra como pode-se acrescentar valor através da flexibilidade via opções reais.

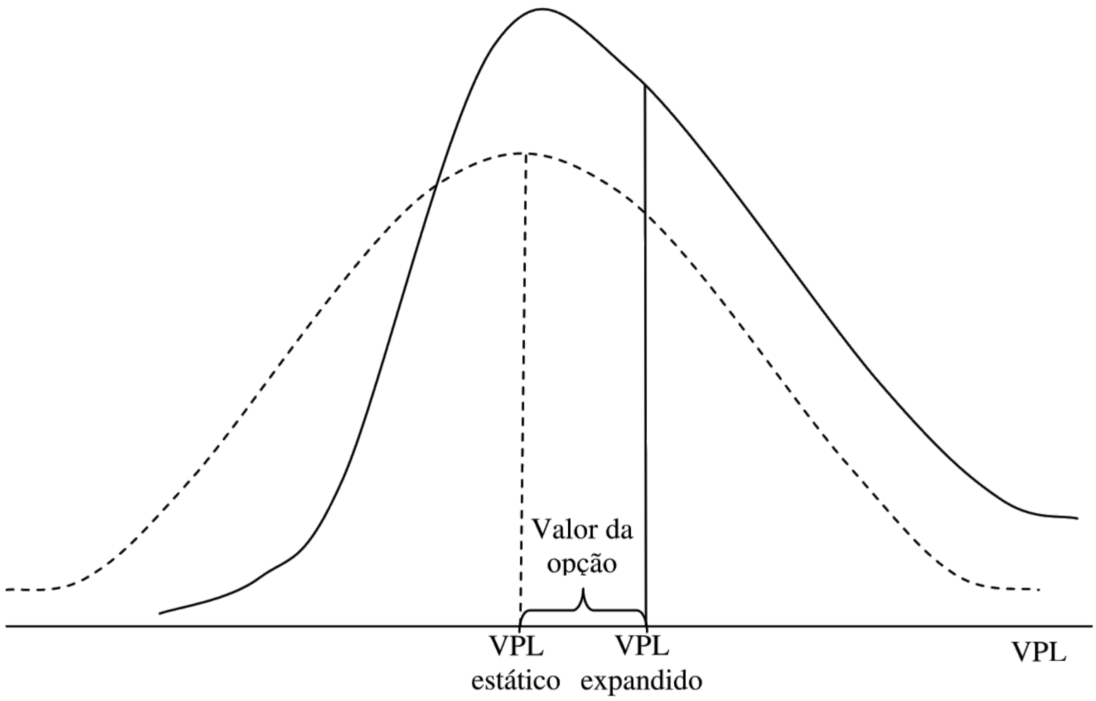

Figura 2 – VPL expandido = VPL estático + Valor da Opção.

Fonte: (TRIGEORGIS, 1996).

4.1 PRINCIPAIS OPÇÕES REAIS

Cada um dos principais casos de aplicação das opções reais destacados podem ser aplicados individualmente ou então em conjunto no que nomeamos de opção composta. A seguir uma descrição mais detalhada das situações elencadas segundo (COSTA *et al.*, 2014).

- **Adiar o investimento:** Sendo esse um dos primeiros alvos de estudo no tema opções reais, a possibilidade de avaliar um projeto de investimento e acrescentar a ele a flexibilidade de aguardar para em um momento futuro estar em posse de mais informações pode ser extremamente valiosa.

  Um projeto avaliado com VPL positivo pode ser postergado quando há um grau de incerteza mais elevado e os fluxos de caixa iniciais sejam pequenos ou pouco significativos. O mesmo serve para projetos que apresentem VPL negativo em primeira instância, esses devem ser monitorados sob a perspectiva de melhora de valor de acordo com oscilações de mercado.

  Especificamente em alguns setores a opção de adiar o investimento torna-se ainda mais atrativa, podemos frisar os setores imobiliários e de extração de recursos naturais.

- **Alterar a escala de produção**

  - **Expansão:** Por vezes durante um projeto o mercado pode apresentar um comportamento substancialmente favorável às condições de um projeto e uma opção de expansão torna-se excepcional. Aqui falamos em escala de produção que naturalmente pode ser aumentada, mas ainda podemos pensar em expansão em casos do projeto ainda não estar pronto e acelerarmos as instalações para executá-lo com antecedência ou no deslocamento de funcionários para uma área que está fornecendo um maior retorno para a empresa e também em acrescentar pequenos investimentos mediante acompanhamento das tendências de mercado afim de verificar a solidez e duração dessa natureza favorável.

    O potencial de resultados além do esperado sempre devem ser levados em conta na avaliação de projetos. Por vezes o investimento opera de maneira sequencial e cadenciada, então uma primeira etapa de pesquisa e desenvolvimento (P&D) pode apresentar um VPL negativo, o que em casos de uma avaliação unicamente tradicional exterminaria com a execução do mesmo, entretanto após essa etapa há de se considerar que pode haver muito potencial caso resultados positivos sejam obtidos, gerando assim uma cadeia de novos projetos.

  - **Contração:** Sob condições de incerteza elevada e um mercado desfavorável, a existência da flexibilidade de contrair os investimentos pode ser crucial. Reduzir a escala de produção quando as expectativas iniciais de venda de um produto não forem atingidas tende a ser uma excelente maneira de redução de custos operacionais momentâneo enquanto a gerência do projeto busca entender quais fatores afetaram as projeções originais e principalmente de qual maneira contornar a situação.

  - **Mudança** (parar temporariamente e reiniciar): A flexibilidade existente em não precisar operar um projeto ininterruptamente tem grande valor. Fatores externos podem naturalmente inviabilizar de forma provisória a lucratividade e por vezes quando há essa possibilidade, suspender temporariamente um projeto pode ser a melhor opção, principalmente em momentos em que a receita não supera as despesas. Questões como os custos de parada e depois de retomada devem ser levados em conta pelos gestores na tomada de decisão.

- **Abandonar:** Essa opção está intimamente ligada a forma de investimento inicial do projeto e isso deve ser pensado previamente a execução de qualquer outra opção. Não é sobre ser pessimista ou dar início a um projeto em que se espera fracassar, mas uma vez que a capitalização seja fracionada por etapas, em caso de problemas irreversíveis não ocorre uma perda completa do investimento destinado àquela ideia.

A possibilidade de revenda daquilo que não será mais aproveitado também deve ser levado em consideração, seja matéria prima bruta, produtos mais refinados frutos de longos processos ou equipamentos utilizados no projeto, os ativos que tiverem maior utilidade geral serão comercializados mais facilmente seguindo a lei de oferta e demanda.

Para negócios de capital mais expressivo essa opção tem maior destaque, sendo um indicativo de se o negócio deve ser abandonado em algum momento, mas principalmente quando esse abandono deve ser realizado, podemos grifar os setores ferroviário e aeronáutico. Conforme apresentado na figura 1, o abandono está em uma área de incerteza média para alta e baixo crescimento, sendo propício à uma análise pela teoria das opções reais.

- **Alterar usos (entradas e saídas):** Por vezes a flexibilidade de forma qualitativa da produção pode ser tão ou mais importante quanto a quantidade conforme já apresentado na opção de alteração da escala de produção. Quando há incertezas sobre a oferta de entradas e a demanda de saídas, ter a possibilidade de manejar os recursos necessários para produção e de diversificar os produtos finais tem altíssimo valor.

  Anteriormente foi apresentado aqui um dado sobre a oscilação do preço do barril de petróleo, uma empresa que tenha 100% de dependência de algum derivado do petróleo como a gasolina para sua operação, fica muito suscetível às mudanças externas de mercado, dessa forma deve ser considerado a possibilidade de um maior investimento inicial para flexibilizar a fonte energética necessária para produção, como a instalação de painéis solares por exemplo.

  O mesmo vale para as saídas, uma capitalização inicial mais elevada pode capacitar o projeto para uma maior gama de produtos finais a serem produzidos, dessa maneira variações na demanda do mercado podem ser contornadas com mais facilidade, como nos casos da produção de eletrônicos, peças para maquinário ou até em um processo de refinamento de matéria prima, quando ao qualquer momento pode surgir uma nova tecnologia que torne obsoleta a atual metologia de execução do projeto.

  Em outras palavras, a possibilidade de poder não colocar todos os ovos na mesma cesta e alterar entre elas conforme as pedras forem aparecendo no caminho, diminui o risco de queda e de desastres irreversíveis.

Existem outras opções menos descritas na literatura, mas que valem a menção, como opções de barreira, opções asiáticas e talvez a mais importante dessas que são as opções compostas, que basicamente é o caso onde aplica-se mais de uma das principais opções já descritas, como mencionamos, muitas vezes um projeto consistirá de diversas etapas e naturalmente haverá interação entre opções em alguns dos processos.

4.2 MÉTODOS DE PRECIFICAÇÃO DE OPÇÕES REAIS

Quantificar o valor de uma opção está longe de ser um trabalho simples. Talvez seja o segmento onde há maior divergência de opiniões por parte dos especialistas, afinal a maior parte do que trouxemos até aqui está relacionada a valores e crescimento do valor de mercado da empresa, mas diferente dos métodos de avaliação de projeto mais tradicionais que possuem formatos definidos com fórmulas já estabelecidas e consolidadas, precificar o valor de uma opção real é um pouco (ou muito) mais complexo.

Antes de apresentar os métodos de precificação de opções reais é importante ressaltar que alguns autores defendem que a melhor maneira de realizar essa prática é encontrando algum ativo negociado no mercado financeiro que seja intimamente correlacionado ao projeto de investimento. Dessa maneira podemos utilizar técnicas já desenvolvidas de avaliação como as equações de Black e Scholes, feitas para opções financeiras, todavia essa não é uma tarefa tão simples, por conta disso muitos projetos de investimento que optam por utilizar a TOR como metodologia são de segmentos associados a *commodities*, como petróleo, ferro e soja, uma vez que temos muita informação atrelada a esses ativos no mercado financeiro.

Para utilização das técnicas de precificação é necessário sabermos a volatilidade do ativo subjacente atrelado a opção. Para autores como (COPELAND; ANTIKAROV, 2001), ao invés de buscar um ativo do mercado financeiro, o ideal é utilizar o próprio valor do projeto sem considerar a flexibilidade como ativo subjacente sujeito ao risco. Na grande maioria das vezes esse valor é estimado com o método do VPL tradicional, dessa maneira não ficamos presos a utilizar opções reais apenas para avaliar projetos atrelados a *commodities*, mas sim quaisquer projetos. Há um preço a se pagar por isso que é uma maior dificuldade na verificação dessa volatilidade, métodos estocásticos como simulação de Monte Carlo podem ser utilizados para encontrar distribuições de probabilidade condicionadas aos fatores que geram as oscilações procuradas.

(AMRAM; KULATILAKA, 1998) cita três principais métodos de apreçamento para as opções reais: Equações diferencias parciais (EDPs), programação dinâmica e simulação. Cada um desses está atrelado a conceitos matemáticos, descreveremos abaixo o modo de operação utilizando cada uma das técnicas segundo (MELIN, 2008).

- **Equações Diferenciais Parciais (EDPs):** Consistindo em duas técnicas mais usadas nesse caso, podemos atrelar as EDPs a resolução analíticas ou a utilização do método das diferenças finitas. Nesse caso, o método sugere que o valor da opção seja associado a uma equação diferencial parcial sujeito a valores de contorno, onde esses valores seriam as variações observáveis em ativos-objeto do mercado financeiro. As condições de contorno retornam os pontos extremos de valor da opção, assim como as tendências a oscilação ao longo do tempo.

Quando há um número menor de variáveis atreladas a incerteza, estamos mais suscetíveis a utilização de aproximações analíticas para a resolução do nosso problema, todavia quando buscamos utilizar EDPs para um problema mais complexo, ou seja, com mais nuances envolvidas, o método das diferenças finitas se mostrou mais eficiente. Buscando aproximar o valor da equação por meio de outras várias equações diferenciais limitadas a um pequeno intervalo de proximidade, conseguimos encontrar o valor na data de vencimento da opção e aplicar um processo recursivo para o valor real procurado.

- **Soluções/Aproximações Analíticas:** Nesse caso entram os modelos mais conhecidos de apreçamento de opções financeiras do tipo europeias. Fornecendo resultados mais rápidos e simples, o método é limitado com relação as premissas e fica distante da realidade quando trazemos para o âmbito de opções reais. A equação é formulada diretamente a partir das entradas fornecidas no problema (AMRAM; KULATILAKA, 1998).

  Destaque para as principais soluções que seguem esse modelo segundo (MILLER; PARK, 2002):

  * Equação de Black e Scholes: A mais conhecida dentre todas, foi desenvolvida para avaliar compra e venda de opções europeias (aquelas que só podem ser exercidas na data de vencimento). Preço do exercício é considerado uma variável estocástica.
  * Equação de Margrabe: Criada para avaliar a troca de ativos, aqui diferente da equação de Black e Scholes, o preço de exercício é determinístico.
  * Equação de Geske: Voltada para opções compostas, também considera o preço do exercício como determinístico e é voltada para decisões sequenciais.
  * Equação de Carr: Avalia opções compostas que consideram o preço de exercício como uma variável estocástica.

- **Método das Diferenças Finitas:** O método prevê aproximar as equações diferenciais que descrevem dinâmica de valor da opção através de um conjunto de outras equações em intervalos menores para que possamos além de inserir mais variáveis na análise, obter uma maior assertividade na valoração. Como dito anteriormente, partimos do valor final encontrado e por meio de um processo regressivo encontramos o valor da opção no momento inicial.

É criado uma malha de espaço de estados, semelhante a um plano cartesiano, onde os eixos representam o valor da opção e o tempo. Sendo T a data de vencimento da opção, dividimos T em N intervalos iguais de comprimento ΔT e sendo S_{max} um valor razoável para o valor máximo da opção, dividimos o outro eixo em intervalos iguais de comprimento ΔS.

Partindo do fato que estamos tratando de um movimento regressivo, o método trabalha analisando os valores possíveis da opção no momento ΔT_i enquanto estamos no momento ΔT_j (sendo $i < j$). Esse processo ocorre utilizando condições de contorno com limites inferiores e superiores para os valores que a opção poderia assumir uma vez que delimitamos o tamanho dos intervalos da maneira que desejamos. Assim por meio da solução de diversos sistemas de equações utilizando técnicas de solução para EDPs podemos encontrar o valor da opção no momento T_0.

- **Programação Dinâmica:** Na programação dinâmica a técnica matemática mais comumente aplicada é a de árvore multinomial, inclusive bastante semelhante em termos estéticos com a árvore de decisões que apresentamos anteriormente, mas com nuances relevantes.

  Aqui o processo estocástico de tempo contínuo atrelado ao ativo-objeto é aproximado por processo de tempo discreto de caráter multinomial multiplicativo, criando um esquema semelhante a uma árvore com nós representando os períodos de tempo. Assim como nos métodos que utilizam de EDPs, o valor da opção é encontrado por meio de uma recursão, indo dos valores obtidos ao final da árvore até o valor inicial.

  Existem diversos modelos que operam dessa forma e que inclusive podem agregar maior complexidade analisando opções compostas e mais fontes de incerteza simultaneamente, todavia o modelo binomial desenvolvido em 1979 por Cox, Ross e Rubinstein apesar de mais simples, ainda é o mais empregado.

  Seguindo o modelo da árvore binomial, há uma substituição do processo estocástico contínuo que segue um MBG para um processo discreto, para isso algumas adaptações matemáticas são necessárias e iremos conferir a seguir junto com uma imagem descritiva de como o processo funciona

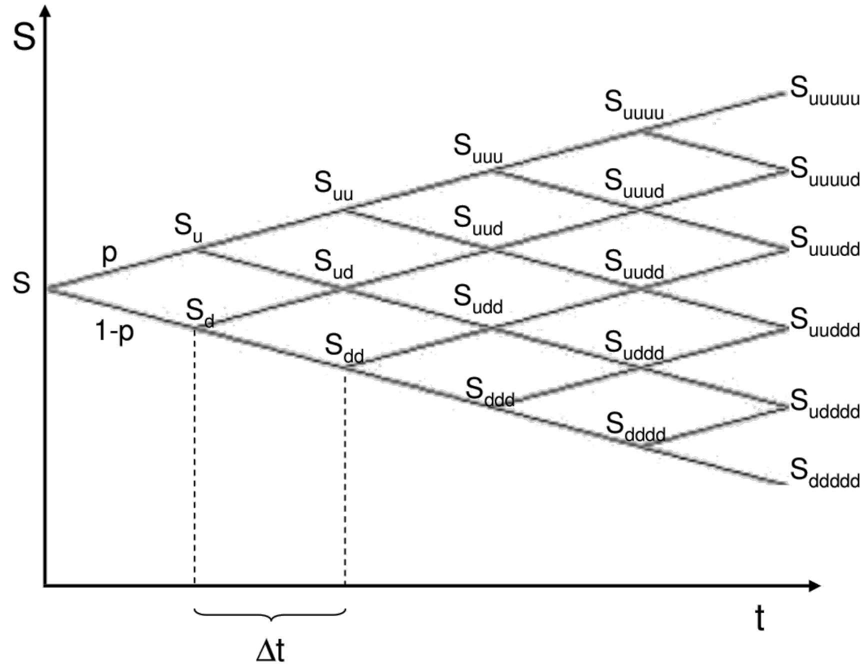

Figura 3 – Representação de árvore binomial.

Fonte: (MELIN, 2008).

Veja que a cada nó há dois caminhos a serem seguidos por isso o fator dicotômico envolvido. Considerando uma probabilidade neutra de risco baseada em uma carteira diversificada dinâmica em cada período, o valor do ativo-objeto dá saltos para cima segundo um fator u (*up*) ou para baixo segundo um fator d (*down)*, com probabilidades respectivamente p e $1 - p$. Isso ocorre a cada Δt espaço de tempo.

É importante ressaltar que segundo os autores do modelo, (COPELAND; ANTIKAROV, 2001) e outros mais, a árvore binomial mostrou-se muito flexível, principalmente quando há um número maior de nós no modelo, fazendo com que o valor convirja para o mesmo resultado proposto por Black e Scholes.

- **Simulação:** Sem dúvidas a técnica mais comum de simulação continua sendo a de Monte Carlo, mas não é o único utilizado para precificação de opções reais. Do mesmo modo que na programação dinâmica, o método aproxima um processo estocástico contínuo para um processo discreto, inclusive os dois métodos podem ser combinados conforme sugerem alguns autores.

  Nesse caso o ativo-objeto não segue um MBG, mas sim um processo estocástico, pois a cada período de tempo estipulado até o vencimento da opção é gerado um número aleatório que é implementado na equação, fornecendo o resultado do valor simulado da variável estocástica. Dessa forma, a cada rodada da simulação, temos como resultado um caminho seguido pela variável estocástica, que nos resultará no valor da mesma e também no valor da opção na data de maturidade. Aqui o processo é progressivo e não regressivo como nos casos de programação dinâmica e no método das diferenças finitas(TRIGEORGIS, 1996).

Após um número suficientemente grande de simulações, geralmente acima de 1000, temos que cada uma delas representa um caminho, formando uma distribuição de valores terminais.

Uma vez que o desvio padrão da estimativa de valor da opção C é dado por $\frac{s}{\sqrt{n}}$ onde s é o desvio padrão dos valores da opção calculado nas rodadas de simulação e n é o número de simulações realizadas, dessa maneira, a precisão do modelo aumenta conforme simulações são realizadas (BOYLE, 1977).

Como a simulação de Monte Carlo não está baseada em um processo regressivo a partir do valor final ela não é ideal para opções americanas como os outros citados que seguem essa ideia, todavia os métodos de simulação são capazes de englobar múltiplas variáveis condicionais simultaneamente, dessa forma para suprir essa necessidade, surgiram métodos de simulação mais complexos para avaliar também opções americanas, não entraremos em detalhes a respeito deles, mas vale a menção para o método de partição do espaço de estados, árvore aleatória e aproximações paramétricas.

5 A TEORIA DOS JOGOS

A teoria dos jogos (TJ) surgiu mais formalmente no início do século XX e desde lá tem se mostrado como um ramo da matemática que busca otimizar e racionalizar tomada de decisões nas mais diversas áreas do conhecimento, mas principalmente naquilo que consiste em resolução de conflitos. O nome da teoria é proveniente da sua estrutura, a mesma consiste em regras, participantes e perdas/ganhos de acordo com a estratégia tomada pelos jogadores. Pela sua flexibilidade na aplicação e com o avanço da tecnologia, cada vez mais aumentou o interesse em aplicar essa modelagem em variadas situações, uma dessas é no ambiente corporativo/empresarial.

A teoria dos jogos visa maximizar os ganhos ou diminuir as perdas em um jogo. Se pudermos modelar uma situação de acordo com as regras de um jogo, então estaremos aptos a nos valermos dos benefícios da matemática por trás das melhores decisões a serem tomadas.

No tempo presente a teoria dos jogos é aplicada em inúmeras áreas do conhecimento e do meio acadêmico, por tratar-se de uma modelagem matemática que busca identificar qual a melhor estratégia a ser seguida pelos participantes, mas nem sempre foi dessa forma. Inicialmente veio aos palcos acadêmicos em 1944, por meio do livro Teoria dos Jogos e Comportamento Econômico do economista austríaco Oskar Morgenstern e do matemático húngaro John Von Neumann, esse segundo conhecido como pai da teoria dos jogos. Nesse trabalho os autores buscaram mostrar como a economia poderia ser tratada com um maior grau matemático e científico visando obter melhores resultados. Todo conhecimento produzido acerca do tema que foi subsequente a esse livro, embasou-se fortemente nas ideias ali presentes.

Von Neumann foi responsável por propor e demonstrar o teorema MiniMax, que é um dos pilares do estudo da teoria de decisões. O primeiro registro que temos de algo que remonte a esse teorema data do século XVIII, em uma troca de cartas entre James Waldegrave e Nicolas Bernoulli eles analisavam um jogo de cartas francês chamado "Le her", ali encontraram uma solução de equilíbrio em estratégias mistas, mas nada que generalizasse esse resultado.

Tempos se passaram e tivemos contribuições de August Cornout no início do século XIX com os modelos de duopólios e oligopólios. Atrelado a lei da oferta e demanda, Cournot desenvolveu uma modelagem baseada na relação entre a produção de algum produto e o preço a ser cobrado por ele em uma empresa X, isso concomitantemente à disputa de mercado com outras empresas. Além desse caso ele também estendeu o raciocínio para a situação de cartel entre os jogadores, no caso as empresas. A título de curiosidade muito antes de Nash nascer, a solução para o duopólio de Cornout já era um equilíbrio de Nash, apenas não tinha essa nomenclatura (por motivos óbvios). (ALEIXO, 2006)

Ernst Zermelo, matemático e filósofo muito conhecido pelos seus trabalhos no campo da teoria dos conjuntos, principalmente pelo axioma da escolha, publicaria em 1913 aquele que seria oficialmente o primeiro teorema em teoria dos jogos, este veio em um artigo traduzido como "Uma aplicação da teoria dos conjuntos na teoria do jogo xadrez". Tratava-se de uma análise sobre um jogo de tabuleiro com tamanho finito, de jogadas alternadas entre dois jogadores, com informação perfeita e sem fatores randômicos envolvidos. Apesar do nome da publicação, pela descrição podemos ver que o teorema a seguir estende-se para jogos além do xadrez, desde que respeitem as hipóteses.

Teorema 5.0.1 *No xadrez, tanto as brancas podem forçar uma vitória, como as pretas podem forçar uma vitória, ou ambas podem forçar pelo menos um empate. (ZERMELO; BOREL, 1913).*

Não faremos a prova do teorema aqui, que apesar de ser sucinta, foge ao escopo do trabalho. A citação do teorema se dá pela posição de precursor na formalização do tema.

Creio que esses dois últimos parágrafos elucidam bem como a teoria dos jogos é flexível em sua utilização, seja um conflito de interesses econômicos/políticos ou literalmente em um jogo de tabuleiro podemos nos valer de suas propriedades.

Para finalizar o lado histórico da apresentação, a contribuição do matemático húngaro John Von Neumann é sem dúvidas mais lembrada quando o assunto é teoria dos jogos, afinal mesmo que de maneiras muito distintas do princípio, a modelagem matemática na tomada de decisões é indubitavelmente relevante hoje, todavia no âmbito da economia, na época que o livro foi lançado (vide contexto de 2ª guerra mundial e considerando que Neumann era judeu), houveram inúmeras ressalvas quanto a essa busca por tornar o meio econômico mais “científico”, com vários envolvidos do meio alegando que por conta das idiossincrasias dos economistas, não poderia-se tratar de uma ciência social como se fosse exata, muitas dessas seguem até hoje. Para completar é importante ressaltar que as colaborações de Neumann na ciência formam uma lista extensa, sendo as mais famosas nas áreas da computação e da hidrodinâmica das explosões, inclusive tendo contribuição direta na criação das bombas atômicas de hidrogênio.

5.1 O JOGO

Como dito previamente, um jogo consiste basicamente em seus jogadores e um conjunto de regras a serem estritamente seguidas, sem trapaças, entretanto existem diversas nuances que não necessariamente trabalharemos todas aqui e ainda valem a menção para entendermos como a modelagem matemática pode ser feita a partir da teoria dos jogos.

Há diversas maneiras de categorizar um jogo, baseado em certos critérios podemos destacar:

- **Quantidade de jogadores**. Em geral jogos com apenas um participante não são considerados, apesar de que você pode jogar roleta sozinho contra o cassino (que não conta como um jogador já que não toma decisões).
- **Simultâneo** ou **sequencial**. Um jogo simultâneo é aquele onde as decisões dos jogadores são tomadas ao mesmo tempo, como pedra, papel ou tesoura, já um exemplo sequencial seria uma partida de xadrez, onde ocorre um movimento de cada vez.
- **Informação completa**. São aqueles onde todos os participantes tem conhecimento sobre todas as informações envolvendo a estrutura do jogo, tais como payoffs e os movimentos dos outros jogadores. Raramente na vida real esse é o caso, mas modelamos para esse formato para uma melhor análise do evento.
- **Cooperativo** ou **não cooperativo**. Um jogo cooperativo é aquele onde uma estratégia pode ser negociada entre os participantes e efetivamente aplicada, há casos onde cooperar não faz sentido para a estrutura do jogo ou então não pode ser aplicado seguindo as regras determinadas.

Essas são as principais questões utilizadas para anunciar a estrutura de um jogo sem ter uma necessidade prévia de apontar todos os detalhes. Vamos agora para alguns termos técnicos que utilizaremos no decorrer desse trabalho.

Utilizando (SARTINI *et al.*, 2004) definiremos o conjunto dos jogadores como $P = p_1, p_2, ..., p_n$ cada um dos $p_i \in P$ jogadores tem um conjunto finito $S_i = s_{i1}, s_{i2}, ..., s_{imi}$ de estratégias como opções a serem seguidas, essas são as estratégias puras do jogador p_i sendo $(m_i \leq 2)$. Temos que um vetor $\mathbf{s} = (s_{1j1}, s_{2j2}, ..., s_{njn})$, onde s_{iji} trata-se de uma estratégia pura do jogador $p_i \in P$, chamado de perfil de estratégia pura. O conjunto que define todos os perfis de estratégia pura é chamado de espaço de estratégia pura e define-se pelo produto cartesiano entre todos S_i

$$S = \prod_{i=1}^{n} S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n$$

Por último antes de um exemplo, definiremos que para cada jogador p_i existe uma função utilidade

$$u_i : S \to \mathbb{R}$$
$$\mathbf{s} \to u_i(\mathbf{s})$$

que associa o ganho (payoff) $u_i(\mathbf{s})$ do jogador p_i a cada um dos perfis de estratégia pura $\mathbf{s} \in S$

5.2 O DILEMA DO PRISIONEIRO

Traremos aqui o exemplo mais clássico da teoria dos jogos que apesar da sua simplicidade em princípio, faz jus a etimologia da palavra dilema, que significa duas premissas. Albert W. Tucker, matemático, no ano de 1950 formalizou e apresentou o dilema do prisioneiro em um seminário para psicólogos na Universidade de Stanford.

A situação é a seguinte, Bob e Al são dois ladrões que foram pegos e estão sendo julgados pelo mesmo crime. Eles estão em selas separadas e não podem ter qualquer comunicação entre si, quando o delegado faz a seguinte proposta: cada um pode escolher entre confessar ou negar o crime, se ambos confessarem eles ficam presos por 5 anos, se um negar e o outro confessar, aquele que confessou sai impune e quem negou fica preso por 10 anos, e por último, se ambos negarem eles ficam presos por apenas 1 ano. Utilizando o que estabelecemos antes teremos:

$P = \{Al, Bob\}$, $S_{Al} = \{negar, confessar\}$, $S_{Bob} = \{negar, confessar\}$, $S = \{(negar, negar), (negar, confessar), (confessar, negar), (confessar, confessar)\}$.

Determinando pela função utilidade que definimos anteriormente teremos:

$$u_{Al}(confessar, confessar) = -5, \qquad u_{Al}(confessar, negar) = 0$$
$$u_{Al}(negar, confessar) = -10, \qquad u_{Al}(negar, negar) = -1$$

Representa os ganhos (payoffs) de Al

$$u_{Bob}(confessar, confessar) = -5, \qquad u_{Bob}(confessar, negar) = -10$$
$$u_{Bob}(negar, confessar) = 0, \qquad u_{Bob}(negar, negar) = -1$$

Representa os ganhos (payoffs) de Bob

Agora apresentaremos esses dados em um formato de tabela que veremos muitas vezes no estudo e aplicação da teoria dos jogos, é a chamada **matriz de payoffs**.

		Bob	
		confessar	negar
Al	confessar	(-5,-5)	(0,-10)
	negar	(-10,0)	(-1,-1)

Tabela 2 – Matriz de Payoffs - Dilema do Prisioneiro

Nesta matriz, os valores de cada célula representam, respectivamente, os payoffs de Al e Bob para as escolhas de Al e Bob correspondentes a célula.

5.3 SOLUÇÕES DE UM JOGO

Uma solução de um jogo sempre considera a racionalidade de seus participantes, além obviamente das regras a serem seguidas, então podemos definir solução como uma previsão acerca do resultado. Dentro desse conceito, há diversos tópicos relevantes que exploraremos utilizando definições e exemplos, mas dois principais que trataremos são: **dominância** e **equilíbrio de Nash**.

Vejamos o que seria uma solução para o exemplo do dilema do prisioneiro, lembrando que consideramos a racionalidade dos participantes, ou seja, nesse caso isso significa que ambos querem minimizar o seu tempo na cadeia. Esse é um jogo simultâneo mas não tem informação completa e nem pode ser cooperativo, afinal os jogadores sabem todas as consequências, mas não sabem o movimento um do outro e não podem conversar para tomarem a decisão em conjunto. Tomemos a linha de raciocínio do lado de Al em primeiro lugar:

"Há duas opções, posso confessar ou negar, se Bob confessar é melhor que eu também confesse, assim ficarei preso apenas 5 anos ao invés de 10. Agora, se Bob negar, também é melhor que eu confesse, assim sairei livre ao invés de fica preso por 1 ano."

A mesma linha de raciocínio pode ser aplicada a Bob. Assim mesmo que de maneira contraditória em um primeiro momento, a melhor decisão é confessar para ambos e a estratégia dominante será confessar/confessar, resultando num payoff de (-5,-5). A ética pode ser questionada, a matemática não.

Aqui dizemos que para ambos há uma única estratégia dominante que se sobrepõe em termos de payoffs a todas as outras e o jogo é solucionado por dominância estrita iterada ou também podemos falar que trata-se de uma estratégia de equilíbrio dominante.

5.3.1 Dominância

Considerando um perfil onde todos jogadores mantém sua estratégia e apenas o jogador $P_i \in P$ variará a sua estratégia, podemos denotar por

$$s_{-i} = (s_{1j_1}, \cdots, s_{(i-1)j_{i-1}}, s_{(i+1)j_{i+1}}, \cdots, s_{nj_n}) \in S_{-i} = S_1 \times \cdots \times S_{i-1} \times S_{i+1} \times \cdots \times S_n$$

sendo uma escolha de estratégia para todos os jogadores, exceto o jogador P_i. Assim sendo possível definir um perfil de estratégia

Definição 5.3.1 *Estratégia pura estritamente dominada: Uma estratégia pura $s_{ik} \in S_i$ do jogador $P_i \in P$ é estritamente dominada por outra estratégia $s_{ik'} \in S_i$ se*

$$u_i(s_{ik'}, s_{-i}) > u_i(s_{ik}, s_{-i}),$$

para todo $s_{-i} \in S_{-i}$.

Podemos de maneira resumida, assumir que esse conceito é utilizada para eliminar todas as estratégias que são estritamente dominadas. Fica mais fácil verificar isso analisando uma matriz de payoffs. Vejamos isso no exemplo de (SLANTCHEV, 2008) seguir:

Exemplo 5.3.1 *Em uma certa cidade existem dois bares, chamaremos de bar A e B, ambos servem uma cerveja e cobram por ela um preço que varia entre $2, $4 e $5. Diariamente 6000 turistas visitam essa cidade e cada um deles decide ir a um bar e tomar exatamente uma cerveja, o mesmo acontece com 4000 dos moradores locais. Os turistas não conhecendo a região, se dividem e vão exatamente metade para cada bar, ou seja, 3000 para o A e 3000 para o B, enquanto que os locais vão todos para o bar que estiver cobrando o menor preço na bebida, em caso de os bares estarem cobrando o mesmo preço, os moradores se dividem igualmente aos turistas. A questão aqui é: Qual preço os donos dos bares devem cobrar se tomarem a decisão simultaneamente?*

Essas configurações, onde $S_i = \{2, 4, 5\}$*, nos fornecem a seguinte matriz de payoffs (valores de faturamento de cada bar por estratégia estão descritos na casa dos milhares de dólares por questão de praticidade).*

		Bar B		
		$2	$4	$5
Bar A	$2	(10,10)	(14,12)	(14,15)
	$4	(12,14)	(20,20)	(28,15)
	$5	(15,14)	(15,28)	(25,25)

Tabela 3 – Matriz de Payoffs - Dois Bares

Veja que a estratégia 4 domina estritamente a estratégia 2, uma vez que o payoff para a primeira, é superior ao payoff da segunda em todas as situações possíveis para ambos os jogadores. Dessa forma como os donos dos bares querem aumentar seu faturamento, cobrar $2 não faz sentido e podemos eliminar essa decisão da nossa matriz de payoffs, reduzindo-a para

		Bar B	
		$4	$5
Bar A	$4	(20,20)	(28,15)
	$5	(15,28)	(25,25)

Tabela 4 – Matriz de Payoffs Reduzida - Dois Bares

Veja agora que há uma semelhança com a situação do dilema do prisioneiro, mas não devemos nos deixar enganar pelo senso comum. Fazendo a mesma análise *que anteriormente, perceba que a estratégia 4 domina estritamente a estratégia 5, concluindo assim que o jogo se define por estratégia dominante iterada onde a solução será <4,4> e ambos terão um faturamento de \$20.000,00.*

Perceba que em um primeiro momento a estratégia 4 não domina estritamente a estratégia 5, por exemplo se um dos bares resolve cobrar \$2, faz mais sentido o outro cobrar \$5 ao invés de \$4, afinal ele perderia os clientes locais em qualquer uma das duas situações, cobrando mais caro ele lucra mais em cima dos turistas. Isso quer dizer que a estratégia 4 só domina a 5, uma vez que ambos donos já descartaram que cobrar \$2 não é bom negócio pois é sempre mais vantajoso cobrar \$4.

Vimos até agora a respeito de dominância apenas o conceito de dominância estrita iterada, mas nem sempre teremos uma estratégia se sobressaindo a todas as outras, às vezes nos depararemos com um perfil de estratégia que seja "não pior"do que o outro, ou seja, ele nem sempre é melhor, mas ele nunca é pior. Esse conceito faz sentido uma vez que ao esperarmos sempre a racionalidade dos jogadores, ninguém adotará uma estratégia estritamente dominada em um jogo, então em alguns momentos podemos cair nessa situação que chamamos de **estratégia fracamente dominada**.

Definição 5.3.2 *Estratégia pura fracamente dominada: Uma estratégia pura $s_{ik} \in S_i$ do jogador $P_i \in P$ é fracamente dominada por outra estratégia $s_{ik'} \in S_i$ se*

$$u_i(s_{ik'}, s_{-i}) \geq u_i(s_{ik}, s_{-i}),$$

para todo $s_{-i} \in S_{-i}$.

Para entender melhor esse conceito, vejamos um exemplo retirado de (KOHLBERG; MERTENS, 1986):

Exemplo 5.3.2 *Considere a seguinte matriz de payoffs de um jogo onde o jogador 1 tem as opções de estratégia sendo $S_1 = \{U, M, D\}$, e o jogador 2 tem as opções $S_2 = \{L, R\}$.*

O fato de termos uma matriz não quadrada não afeta o julgamento, naturalmente em diversas situações um jogador pode ter mais opções que outros. Agora, a razão de trazermos esse exemplo, é para mostrar que por vezes uma estratégia fracamente dominante pode ser melhor do que outra estritamente dominante, além disso, no processo de eliminação das estratégias fracamente dominadas, a ordem da escolha pode alterar o resultado, tornando o processo consideravelmente mais difícil.

		Jogador 2	
		L	R
	U	3, 2	2, 2
Jogador 1	M	1, 1	0, 0
	D	0, 0	1, 1

Tabela 5 – Exemplo Kohlberg e Mertens

Fazendo uma análise das estratégias, podemos olhar primariamente que para o jogador 1, a estratégia U domina estritamente a estratégia D e fazendo o processo de eliminação teríamos uma nova matriz com as estratégias U e M para o jogador 1, e L e R para o jogador 2. Novamente analisando teríamos que L domina fracamente R, além de M sendo estritamente dominada por U, resultando em um jogo com solução <U,L>, gerando um payoff de $(3, 2)$.

		Jogador 2	
		L	R
	U	3, 2	2, 2
Jogador 1	M	1, 1	0, 0
	D	0, 0	1, 1

$\rightarrow$

		Jogador 2	
		L	R
Jogador 1	U	3, 2	2, 2
	M	1, 1	0, 0

$\rightarrow$

		Jogador 2
		L
Jogador 1	U	3, 2

Agora veja, se pensarmos de outra maneira, em outra ordem para nossas ações, encontraremos um resultado diferente. Veja que M é estritamente dominada por U, então podemos eliminá-lo do espaço de estratégias, resultando em uma nova matriz com as estratégias U e D para o jogador 1, e L e R para o jogador 2. Mais uma vez analisando. agora perceba que R domina fracamente L, além de D sendo estritamente dominado por U, resultando em um jogo com solução <U,R>, gerando um payoff de $(2, 2)$

		Jogador 2	
		L	R
	U	3, 2	2, 2
Jogador 1	M	1, 1	0, 0
	D	0, 0	1, 1

$\rightarrow$

		Jogador 2	
		L	R
Jogador 1	U	3, 2	2, 2
	D	0, 0	1, 1

$\rightarrow$

		Jogador 2
		R
Jogador 1	U	2, 2

Veja que se eliminarmos M e D simultaneamente, para o jogador 2 teremos duas estratégias que dominam fracamente uma a outra. Isso mostra que quando temos estratégias fracamente dominantes no jogo, a ordem de eliminação das decisões pode alterar a solução, situação essa que não acontece se eliminarmos apenas estratégias estritamente dominadas.

5.4 EQUILÍBRIO DE NASH

A nomenclatura dessa seção provém diretamente de um dos maiores contribuintes para o desenvolvimento da teoria dos jogos, John Forbes Nash, vencedor do prêmio Nobel de Ciências Econômicas de 1994, além de ser a inspiração do filme "Uma Mente Brilhante", que talvez seja o longa metragem mais popular a respeito da biografia de um matemático. Ele garantiu seu PH.D com uma tese sobre equilíbrios em jogos não cooperativos, citando ter colhido frutos da árvore plantada por Von Neumann e Morgenstern, mesmo que o trabalho dos mesmos fosse voltado para jogos cooperativos de soma zero.(NASH, 1951)

Definição 5.4.1 *Considere o seguinte perfil de estratégia*

$$s^* = (s_1^*, \cdots, s_{(i-1)}^*, s_i^*, s_{(i+1)}^*, \cdots, s_n) \in S$$

esse perfil será um equilíbrio de Nash se, e somente, se

$$u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(s_{ij_i}^*, s_{-i}^*),$$

$\forall i = 1, \cdots, n$ *e* $\forall j_i = 1, \cdots, m_i$, *com* $m_i \geq 2$.

Descrevendo em palavras, uma solução estratégica ou equilíbrio de Nash ocorre no momento em que os jogadores não tem incentivo para mudar sua estratégia caso ninguém mais o faça.

Vimos em exemplos anteriores situações culminando em soluções estratégicas, como no caso do dilema do prisioneiro onde o perfil de estratégia (confessar, confessar) será o único equilíbrio de Nash. No exemplo dos dois bares o perfil ($4,$4) também é um equilíbrio de Nash e será o único, mas não necessariamente teremos apenas um, podemos ter mais que um, agora a pergunta é: Podemos não ter nenhum equilíbrio de Nash? Depende!

Exemplo 5.4.1 *Esse jogo é conhecido como jogo de combinar moedas (matching pennies). As regras são simples, dois jogadores participam, cada um com uma moeda, de maneira escondida, cada um escolhe um lado da moeda e eles mostram-nas simultaneamente, se o resultado for <cara,cara> ou <coroa,coroa>, o jogador 2 dá sua moeda para o jogador 1, caso o resultado seja <cara,coroa> ou <coroa,cara> o contrário acontece, resultando na seguinte matriz de payoffs*

		Jogador 2	
		cara	coroa
Jogador 1	cara	(+1,-1)	(-1,+1)
	coroa	(-1,+1)	(+1,-1)

Tabela 6 – Matriz de Payoffs - Combinando Moedas

Podemos ver que aqui não teremos nenhum equilíbrio de Nash, mas então por que eu falei que essa existência dependia? Bom, até aqui vimos apenas estratégias puras, mas essas não são as únicas. De fato existem jogos que não possuem uma solução estratégica em estratégias puras, mas o que John Nash provou em sua tese, é que todo jogo não cooperativo terá pelo menos um ponto de equilíbrio em estratégias mistas.

Uma maneira de encarar as estratégias para jogos como o de combinar moedas citado acima, é de analisar a situação como uma distribuição de probabilidade.

Definição 5.4.2 *Um perfil de estratégia mista p_i para o jogador $j_i \in J$ é uma distribuição de probabilidade sobre o conjunto S_i de estratégias puras, dessa maneira podemos definir p_i como um elemento do conjunto Δ_{mi} tal que:*

$$\Delta_{mi} = \left\{ (x_1, \cdots, x_{mi} \in \mathbb{R}^{mi} | x_i \geq 0, \cdots, x_{mi} \geq 0 e \sum_{k=1}^{m_i} X_k = 1 \right\}$$

mais sucintamente podemos dizer cada um dos $p_{i1} \geq 0, p_{i2} \geq 0, \cdots p_{imi} \geq 0$ e $\sum_{k=1}^{m_i} p_{ik} = 1$.

Em seguida ilustraremos com imagens esse conjunto de maneira geométrica, mas podemos afirmar que cada perfil de estratégia mista Δ_{mi} trata-se de conjunto compacto e convexo. Além disso $\Delta = \Delta_{m1} \times \Delta_{m2} \times \cdots \times \Delta_{mi} \times \cdots \times \Delta_{mn}$ define o conjunto de todos os perfis de estratégias mistas e por ser definido como o produto cartesiano de n conjuntos compactos e convexos também será compacto e convexo.

Note que os vértices das imagens representam exatamente os perfis de estratégia pura $s_{i1}, s_{i2}, \cdots, s_{imi}$, onde é fácil identificar que a probabilidade será 1. De maneira canônica podemos representá-los da forma $e_1 = (1, 0, 0, \cdots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \cdots, 0), \cdots, e_{mi} = (0, 0, \cdots, 1)$.

Podemos definir cada perfil de estratégia mista $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \cdots, p_n) \in \Delta$ como um vetor nesse espaço, onde cada vetor representa um payoff esperado referente àquela distribuição de probabilidade. De maneira mais clara e tentando não poluir a notação, temos:

$$\mathbf{p} = (p_1, p_2, \cdots, p_n), \text{ onde cada um desses } p_n \text{ será da forma:}$$
$$\begin{aligned} p_1 &= (p_{11}, p_{12}, \cdots, p_{1mi}), \\ p_2 &= (p_{21}, p_{22}, \cdots, p_{2mi}), \\ &\vdots \\ p_n &= (p_{n1}, p_{n2}, \cdots, p_{nmi}). \end{aligned}$$

Agora que conhecemos um pouco mais sobre perfis de estratégia mista podemos utilizar desse novo conceito para calcularmos payoffs de algum exemplo que apresentamos aqui. Vale a pena ressaltar que por estarmos trabalhando sobre uma

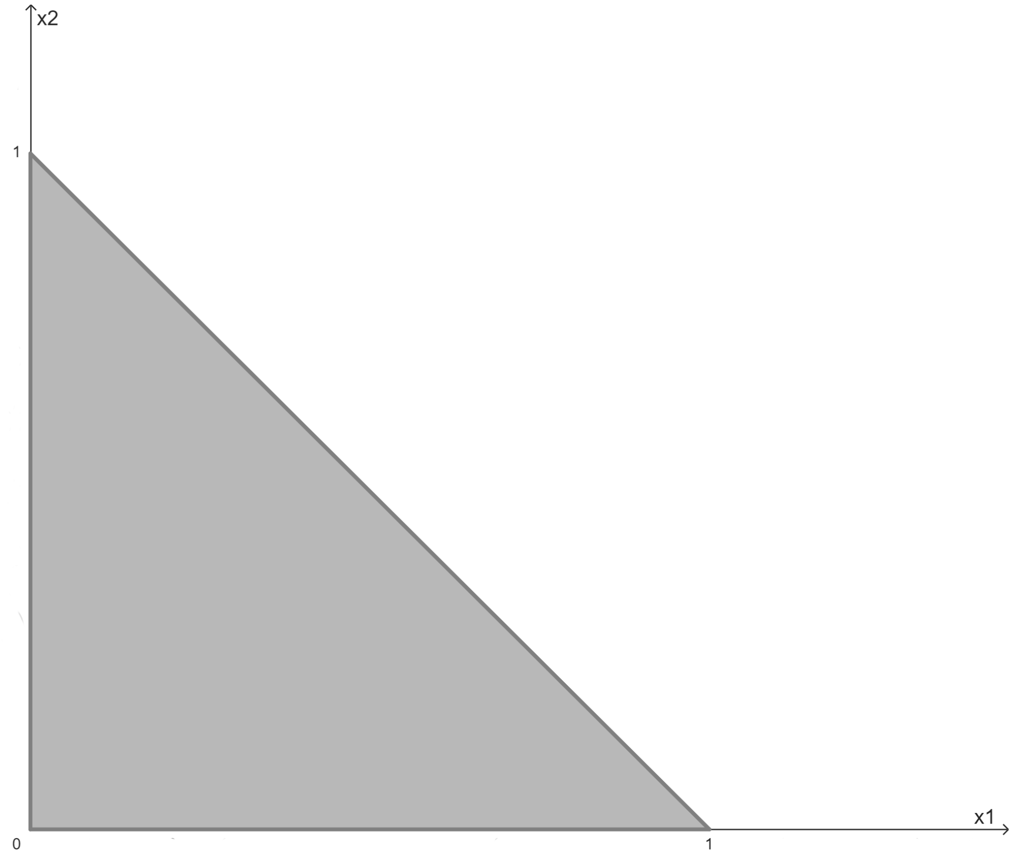

Figura 4 – $\Delta_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_1 \leq 0, x_2 \leq 0 \text{ e } x_1 + x_2 = 1\}$

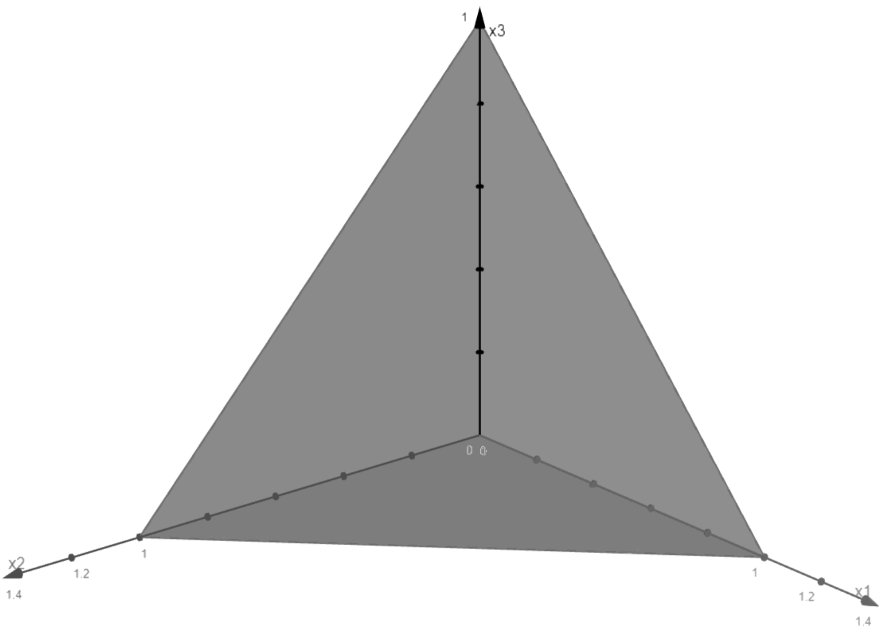

Figura 5 – $\Delta_3 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3 | x_1 \leq 0, x_2 \leq 0, x_3 \leq 0 \text{ e } x_1 + x_2 + x_3 = 1\}$

distribuição de probabilidades com números reais, existem infinitas possibilidades/perfis de estratégia mista a serem escolhidas e em todas conseguimos encontrar seus payoffs. Retomando a função utilidade que definimos anteriormente, agora podemos aplicá-la da seguinte maneira:

$$u_i(\mathbf{p}) = \sum_{j_1=1}^{m_1}\sum_{j_2=1}^{m_2}\cdots\sum_{j_n=1}^{m_n}\left(\prod_{k=1}^{n} p_{kj_k} u_i(s_{1j_1}, s_{2j_2}, \cdots, s_{nj_n})\right)$$

Exemplo 5.4.2 *Vamos considerar o jogo de combinar moedas citado anteriormente, suponha que o jogador 1 tome sua decisão com uma distribuição de probabilidade* $p_1 = (1/4, 3/4)$ *e que o jogador 2 escolha a distribuição* $p_2 = (1/3, 2/3)$*, dessa maneira podemos calcular o payoff esperado para o perfil de estratégia mista* $p = (p_1, p_2)$

$$u_1(\boldsymbol{p}) = \sum_{j_1=1}^{2}\sum_{j_2=1}^{2}\left(\prod_{k=1}^{2} p_{kj_k} u_i(s_{1j_1}, s_{2j_2})\right)$$

$$= p_{11}\left(p_{21}u_1(s_{11}, s_{21}) + p_{22}u_1(s_{11}, s_{22})\right) + p_{12}\left(p_{21}u_1(s_{12}, s_{21}) + p_{22}u_1(s_{12}, s_{22})\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\cdot(+1) + \frac{2}{3}\cdot(-1)\right) + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}\cdot(-1) + \frac{2}{3}\cdot(+1)\right) = +\left(\frac{1}{6}\right)$$

Analogamente é possível calcular $u_2(\boldsymbol{p})$*, mas por se tratar de um jogo de soma zero, naturalmente teremos* $u_2(\boldsymbol{p}) = -\left(\frac{1}{6}\right)$ *(SARTINI* et al.*, 2004)*

Esse foi apenas um exemplo de como jogos com estratégias mistas são enxergados na forma de distribuição de probabilidade, as aplicações da teoria dos jogos nos dias atuais são muito olhadas sob uma ótica de otimização, então uma vez que há infinitas possibilidades para os jogadores escolherem suas estratégia, naturalmente existirá a busca pelo melhor resultado, é onde entra o **Teorema Minimax** de Von Neumann. Não entraremos em detalhes a respeito do teorema por se fazer necessário uma longa gama de definições e conceitos que fogem ao propósito desse trabalho, mas todos os detalhes podem ser encontrados em (KARLIN; PERES, 2017).

Anteriormente falamos que todos jogos não cooperativos apresentarão pelo menos um equilíbrio de Nash em estratégias mistas, esse é o principal teorema e a maior contribuição que o nosso ganhador do Nobel deixou. Revisitaremos um exemplo anterior, mas de maneira mais genérica, buscando encontrar esse equilíbrio.

Voltando ao jogo de combinar moedas, vimos que ele não possui nenhum perfil de equilíbrio em estratégias puras, o que de fato é natural de se imaginar, pense que em jogos como *matching pennies* ou o popular jokenpô, não haverá um perfil puro de estratégia vencedor, pois se um jogador escolher sempre a mesma estratégia, rapidamente ela será identificada e combatida pelo adversário, mas é possível encontrarmos um equilíbrio em estratégias mistas, vejamos qual será esse perfil e como podemos calculá-lo:

		Jogador B	
		cara (q)	coroa (1 - q)
Jogador A	cara (p)	$(+1, -1)$	$(-1, +1)$
	coroa (1 - p)	$(-1, +1)$	$(+1, -1)$

Tabela 7 – Matriz de Payoffs - Matching Pennies em estratégias mistas

Apresentando novamente a matriz de payoffs do jogo, mas veja que introduzi novos elementos nela, nesse caso trata-se da frequência com que o jogador A irá optar pela jogada "*cara*", essa frequência é determinada pelo valor p, consequentemente ele optará pela jogada "*coroa*" com uma frequência de $1 - p$. Analogamente para o jogador B que terá o valor q determinando o mesmo.

A utilidade esperada para o jogador A será definida por

$$u_A = [1 \cdot p \cdot q] + [(-1) \cdot p \cdot (1 - q)] + [(-1) \cdot (1 - p) \cdot q] + [1 \cdot (1 - p) \cdot (1 - q)]$$

$$u_A = pq - p + pq - q + pq + 1 - p - q + pq$$

$$u_A = 4pq - 2p - 2q + 1$$

$$u_A = 1 - 2q - 2p \cdot (1 - 2q)$$

Note que na última equação, coloquei p em evidência, pois é onde cabe a decisão do jogador A em questão para otimizar seu ganho. Entretanto, dentro do parênteses temos $(1-2q)$ que faz parte exclusivamente da decisão do jogador B. Portanto, como apresentei anteriormente, não há uma estratégia que será sempre vencedora, dessa forma na utilidade esperada de A encontramos na verdade a estratégia de B.

Por exemplo, se o jogador B escolher $q = 0,6$, rapidamente o jogador A identificará esse padrão e basta que ele contra ataque escolhendo $p = 1$, assim A ganhará em 60% das vezes. Logo, na utilidade de A, encontramos que a estratégia ideal para B é agir de modo a minimizar os danos, ou seja, $1 - 2q = 0$ e isso implica em $q = 0,5$, logo o jogador B deve randomicamente escolher entre mostrar cara ou coroa com a frequência de 50% cada. Analogamente segue o mesmo raciocínio para o jogador A.

6 JOGOS DE OPÇÕES REAIS

No último capítulo desse trabalho, traremos um exemplo de (FERREIRA *et al.*, 2009) que concatena as duas teorias apresentadas, a teoria dos jogos e a teoria das opções reais, a junção dessas teorias nos dá um instrumento de avaliação de projetos de investimento chamado de **jogo de opção real**.

Antes de apresentar o exemplo que sintetiza as ideias e conceitos trabalhados nessa monografia, vamos entender e reforçar um pouco sobre principais motivos para utilizar essa abordagem.

Um instrumento de avaliação de projeto de investimento deve englobar estratégias de precificação e componentes de flexibilidade, uma vez que esses são fatores determinantes ao valor de mercado de uma empresa inserida em um ambiente competitivo e envolto por incertezas constantes (SMIT; TRIGEORGIS, 2004).

Podemos voltar aos exemplos de empresas que citei no começo do trabalho, mesmo gigantes dos setores de tecnologia, automobilístico, petrolífero como a Apple, Volkswagen e Petrobras respectivamente, tem concorrentes diretos disputando sobre o desenvolvimento de novos *softwares*, motores elétricos ou estratégias de refinamento de matéria prima. Ou seja, desde as etapas iniciais de pesquisa e desenvolvimento, passando por muitas etapas até a entrega de um produto final, diversas decisões são tomadas em uma empresa, e com o avanço crescente da globalização, cada vez mais rapidamente essas escolhas afetam toda uma cadeia de mercado, gerando uma constante necessidade de autoavaliação para evitar seguir por caminhos não lucrativos.

Ambas TJ e TOR foram desenvolvidas para diminuir a margem de erro nas tomadas de decisão, a primeira tem foco maior na resolução de conflitos entre duas entidades, sejam elas quais forem, já a segunda apresenta um viés empresarial mais endógeno, preocupado em resolver os problemas internos. Ao mesclarmos as teorias, temos uma ferramenta capaz de aderir flexibilidade às decisões de forma microeconômica, considerando as incertezas a surgirem e simultaneamente reconhecendo o cenário macroeconômico oligopólico presente para basear suas escolhas, inserindo o fator de influência da concorrência no mercado.

As decisões corporativas devem ser feitas levando em conta a reverberação que as escolhas feitas podem causar no mercado. Utilizamos muito a terminologia de competição quando falamos sobre a teoria dos jogos e ela pode soar com caráter negativo, mas é a mesma que move o mundo, podemos citar aqui situações passadas como o lançamento do disco de vídeo feito pela Toshiba influenciou as gigantes Sony e Philips correrem atrás do prejuízo e identificarem que havia espaço para também crescerem nesse mercado digital onde todas ainda tem grande relevância. Outro caso nessa linha, porém que apresentou um desfecho diferente, foi o chip da Digital Alpha que foi motivado pelo lançamento do processador Pentium da Intel, após alguns anos a Intel acabou engolindo e em um movimento de expansão optou por comprar toda a propriedade do chip da sua até então concorrente (SMIT; TRIGEORGIS, 2004).

No presente momento que essa monografia está sendo escrita, a Nvidia, empresa estadunidense do setor de tecnologia superou a Microsoft e a Apple tornando-se atualmente a empresa com o maior valor de mercado, superando a casa dos 3,34 trilhões de dólares! Nos últimos dois anos a Nvidia teve um salto assombroso nos seus resultados, multiplicando seu valor de mercado em 9 vezes nesse período e muito disso deve-se ao fato dela ter entrado no mercado de produção de chips utilizados no treinamento de inteligências artificiais, que tiveram uma relevância crescente exponencial nos últimos meses e anos. Trago esse caso aqui por alguns motivos, um deles é a mudança de curso nos projetos de investimento da Nvidia, uma vez que a mesma tem mais de 30 anos e nunca tinha entrado no mercado de produção nessa escala, sendo detentora de mais de 80% do mercado de chips com essa finalidade, mostrando o valor da flexibilidade. Outro fator curioso é que a Microsoft que foi desbancada do posto de empresa mais valiosa do mundo, é uma das grandes compradoras dos chips produzidos, mostrando como a interação entre empresas é inegável e absolutamente relevante em diversas situações diferentes como trouxemos até aqui.

6.1 ENTREVISTA COM MARCOS A. G. DIAS, GESTOR DA PETROBRAS

Por último antes de apresentarmos um exemplo de aplicação de jogo de opção real, trago alguns trechos da entrevista cedida por Marco Días, professor da PUC do Rio de Janeiro há quase 20 anos e gestor da Petrobras há mais de 40 anos. A entrevista em questão foi feita para um dos livros textos que fazem parte das referências desse trabalho (CHEVALIER-ROIGNANT; TRIGEORGIS, 2011).

Quando questionado sobre a utilização de opções reais no Brasil e sobre o fato de após os Estados Unidos, sermos o país que mais utiliza a TOR (pelo menos na época da entrevista que ocorreu em 2010), foi perguntado quais motivos levavam a essa realidade. Sua resposta foi que o principal fator para isso é o histórico de instabilidades e incertezas ao longo de toda a história brasileira e dessa forma tanto as empresas quanto as pessoas são constantemente obrigadas a se adaptar e flexibilizar certas decisões.

O exemplo que ele cita para destacar essa necessidade de adaptação é o do carro *flex fuel*, ou seja, movido tanto a gasolina quanto a etanol. Em meados dos anos 80 começou a produção dos carros *flex fuel* no Brasil, mas diante dos baixos preços da gasolina, os produtores de cana-de-açúcar optaram por utilizar a matéria prima para produção de açúcar ao invés de etanol, aplicando assim uma opção de alteração de usos. A tecnologia se popularizou no começo dos anos 2000, com a chegada de carros populares *flex* como o gol 1.6, com o enquadramento desses modelos na mesma tributação que os demais e com a gasolina sofrendo oscilações de preço por questões externas frequentemente, a população e os produtores aderiram a ideia fortemente, dado que dessa forma há uma maior proteção mediante falta de matéria prima ou demais interferências, assim em 2009 cerca de 90% dos automóveis no país eram *flex* (LIMA, 2009).

Agora questionado sobre alguns casos de utilização da TOR na Petrobras, Marcos Dias trouxe alguns exemplos atrelados na maioria dos casos a flexibilidade na produção e captação de matéria prima para a empresa, mas também a questões governamentais da agência nacional de petróleo (ANP), podemos destacar alguns como:

- Apesar de ter sido fundada em 1953, o setor petrolífero veio a ganhar mais força no Brasil apenas no final dos anos 90. Em 1998 a ANP responsável por regular as questões sobre a fonte de energia no país, determinou que o prazo máximo de exploração de petróleo em águas profundas fosse de 5 anos. Utilizando opções reais, foi estruturado e apresentado um plano para a ANP mostrando que seria necessário em média de 8 a 10 anos para que conclusões concretas pudessem ser feitas e dessa forma houve uma extensão de prazo para que o prazo máximo por região fosse de 9 anos. Dessa forma ganhou-se mais tempo para realizar as pesquisas e encontrar novos campos de petróleo e de fato foram necessários 6 anos para as descobertas na camada do pré-sal, sendo assim o caso de absoluto sucesso na utilização da TOR.

- Outro caso ocorreu entre 2000 e 2001, quando empresas estrangeiras como a British Gas e a Enersil queriam livre acesso ao gasoduto Brasil-Bolívia para ter a flexibilidade de usá-lo ou não quando fosse viável aos mesmos, mas queriam isso pagando as mesmas taxas de tributação impostas a empresas que não tinham essa flexibilidade. Utilizando opções reais, a Petrobras apresentou para a ANP o valor agregado sobre a opção de flexibilidade que a British Gas e a Enersil estavam exigindo no seu contrato ao mesmo preço que outros não teriam. Ao final, a agência reguladora concordou com o que foi apresentado e permitiu o livre acesso solicitado pelas corporações estrangeiras, entretanto criou uma nova proposta contratual de maior valor para que isso pudesse acontecer.

- Um projeto sobre o biodiesel em 2005 também utilizou da avaliação mediante opções reais para ser aprovado pelo comitê, uma vez que a flexibilidade nas fontes energéticas para produção do mesmo eram muito relevante e constatou-se que o óleo de soja, o algodão e a mamona poderiam ser utilizadas para tal.

- Outro exemplo de variação na obtenção de matéria prima em que a TOR foi determinante ocorreu em 2003, quando estava-se avaliando a continuidade do projeto na costa oeste da África, após os estudos concluiu-se que havia valor em permanecer em alto mar na costa oeste do continente e no momento da pesquisa Marcos afirmou que aquela região era parte fundamental das operações internacionais da Petrobras.

Por último, no que diz respeito sobre a utilização da teoria dos jogos, Marcos afirmou que ela vem sendo utilizada na Petrobras desde 2007 e estava bem instaurada na mentalidade dos gestores e nos projetos da empresa. No presente momento da entrevista, o gestor citou que via com excelentes olhos a usabilidade de jogos de opções reais e que estavam sendo desenvolvidos três projetos usando o devido instrumento de avaliação. Infelizmente não encontrei mais informações sobre a situação atual, mas Marcos ainda é um dos responsáveis na alta cúpula da empresa e acredito firmemente que o pensamento acerca da flexibilidade de escolhas ainda represente grande valor para ele.

6.2 UMA APLICAÇÃO NA INDÚSTRIA MINERADORA

Esse exemplos foi retirado de (FERREIRA *et al.*, 2009). Serão utilizadas opções reais baseadas em opções financeiras americanas, conceitos de teoria dos jogos, o modelo de árvore binomial e soluções regressivas de análise numérica.

Dificuldades ao se tomar decisões diante das respostas do mercado e dos concorrentes são encontradas em todos os tipos de indústria. Aqui temos um caso na indústria mineradora, que entre os anos de 1995 até 2001 nos Estados Unidos teve suas receitas anuais caindo de 20 bilhões de dólares para 12 bilhões de dólares, assim como os lucros médios das empresas do ramo decaiam anualmente na casa dos 26%. Isso tudo representava um grande desastre econômico para o setor, que de fato estava inserido em um ambiente macroeconômico pouco próspero naquele momento, todavia não foram apenas fatores externos que levaram as empresas do ramo até aquela situação, uma série de decisões ruins generalizadas culminaram àquele ponto e isso é bastante comum independente do setor.

Se por um lado temos empresas que já são detentoras de grande fatia do mercado, por outro lado temos empresas concorrentes que estão constantemente tentando tomar aquela posição. Aqueles que são detentores da maior parte dos negócios não estão blindados do fracasso e enfrentam de maneira frequente um dilema sobre continuar investindo para preservar a hegemonia independente da baixa valorização momentânea do mercado sobre o seu produto e ao mesmo tempo não investir em projetos de risco mais acentuado, principalmente em momentos de maior incerteza do mercado.

Uma maneira de avaliar as decisões da própria empresa em comparação com concorrentes que estão inseridas no mesmo mercado, é a partir de modelos com teoria dos jogos, criar matrizes de *payoff* que traduzam a influência das decisões entre os competidores naquele jogo de disputa pelo sucesso. Infelizmente apenas inserindo informações do presente momento em uma tabela de valores e criar matrizes de *payoff* deixamos de considerar uma série de fatores internos e externos que podem gerar instabilidades para os competidores como preço e demanda, assim uma vez que faz-se necessário para uma boa análise de viabilidade do projeto de investimento inserir a flexibilidade gerencial, podemos agregar esse conceito a partir da utilização de um modelo de árvore binomial de opções reais em conjunto com as matrizes descritas pela teoria dos jogos.

6.2.1 Minerar ou não Minerar, Eis a Questão

Imagine um cenário onde a empresa MineCo está planejando expandir os negócios e aumentar a capacidade de produção de minérios para com um mercado local. Aqui assim como em muitos locais, se a demanda for maior que a oferta local, os clientes irão importar os produtos de estrangeiros, como consequência isso afeta o preço dos minérios comercializados ali pelas empresas locais. Na dúvida sobre a expansão dos negócios, a MineCo notou que há duas grandes fontes-chave de incerteza, sendo essas a taxa de crescimento ou decrescimento da demanda local ao longo dos anos e o risco da CompCo, sua maior concorrente, investir antes em um projeto similar. Dessa forma temos condições que sugerem a utilização de jogos de opções reais na avaliação desse projeto de investimento, uma vez que existem pontos de incerteza sobre questões externas e influência de outras empresas na decisão.

No presente momento o preço da tonelada de minério está limitado superiormente em \$1.000 definido por importação, e a demanda é de 2.200.000 toneladas. Isso quer dizer que, enquanto a demanda dos consumidores for muito maior que a oferta, os clientes estarão importando o produto por \$1.000, dessa forma a MineCo e a CompCo podem vender a tonelada de minério pelo mesmo preço. Quando a demanda não for suficientemente maior que a oferta, mesmo que ainda ligeiramente maior (considerando o aumento da capacidade de produção estipulado pelos projetos de investimento), os valores que as empresas locais podem cobrar caem bastante, uma vez que o equilíbrio de preços é definido pelos custos operacionais dos produtores marginais, assim tornando os preços a serem cobrados bastante próximos dos gastos e estreitando a margem de lucro.

O projeto de investimento da MineCo envolve aumentar a capacidade de produção em 250,000 toneladas, dessa forma ao custo operacional atual de \$687 por tonelada, seriam acrescidos \$250 de custo por tonelada, esses valores considerando uma diluição ao longo de três anos. Enquanto isso a CompCo tem um projeto para aumentar sua capacidade de produção em 320.000 toneladas e seu custo operacional atual que é de \$740 por tonelada teria um acréscimo de \$150 por tonelada, também diluído em três anos. O tempo de diluição escolhido se dá por conta do investimento de ambas demorar três anos para ser concluído e assim alterar a capacidade de produção. Ambas novas minas decorrente dos projetos de investimento teriam uma vida útil de 17 anos.

Para fins de simplicidade, definimos que as duas empresas podem decidir investir no ano 0 (A0) com aumento no custo operacional nos anos A0, A1 e A2 e começar a produzir mais no ano A3 ou então investir em A3 com aumento no custo operacional nos anos A3, A4 e A5 para aumentar a produção a partir do ano A6.

Começaremos a nossa análise percebendo que há quatro cenários possíveis: Ambas investem no ano A0, MineCo investe no ano A0 e CompCo espera, CompCo investe no ano A0 e a MineCo espera e ambas esperam. Destrincharemos esses cenários em breve, mas antes há algumas informações importantes que foram captadas pelos gestores das empresas. Após uma análise criteriosa a respeito das tendências de mercado e dados históricos, notou-se que anualmente a demanda daquele mercado local tem uma variação de aproximadamente 5%, baseado nos dados também foi determinado que a taxa de risco ajustada fornece uma probabilidade neutra de risco com um fator de *up* de 30% e *down* de 70%. Com essas informações podemos computar os valores em uma árvore binomial que apresentará os valores previstos de demanda do mercado local dentro dos próximos 6 anos com as probabilidade de atingir cada nó computadas como está descrito na imagem abaixo.

Ano 0	Ano 1	Ano 2	Ano 3	Ano 4	Ano 5	Ano 6
						2970
					2825	0,1%
				2687	0,2%	**2687**
			2556	1%	**2556**	1%
		2431	3%	**2431**	2,8%	**2431**
	2313	9%	**2313**	8%	**2313**	6%
2200	30%	**2200**	19%	**2200**	13,2%	**2200**
100%	**2093**	42%	**2093**	26%	**2093**	18,5%
	70%	**1991**	44%	**1991**	30,9%	**1991**
		49%	**1894**	41%	**1894**	32,4%
			34%	**1801**	36%	**1801**
				24%	**1713**	30,3%
					16,8%	**1630**
						11,8%

Figura 6 – Evolução demanda e árvore de probabilidade.

Fonte: (FERREIRA *et al.*, 2009)

Agora vamos calcular os payoffs para ambas as empresas nos 4 cenários descritos que partem da decisão de investir agora ou esperar 3 anos para ver quais serão as condições do mercado no futuro.

6.2.2 Cenário 1: Ambas Empresas Investem Agora

Nesse caminho, tanto a MineCo quanto a CompCo optam por investir no ano A0, implicando no aumento de custos operacionais por tonelada em A0, A1 e A2 até chegar em A3 quando o aumento na produção será efetuado. Dado isso nós podemos modelar como a evolução da demanda e a capacidade de produção afetarão a dinâmica de equilíbrio de mercado e consequentemente os lucros para cada uma das empresas.

Inicialmente nós criamos uma árvore binomial que descreva a dinâmica de equilíbrio de mercado para os preços em dólares por tonelada. Perceba que como foi descrito antes, quando a demanda é maior que a oferta, temos os preços limitados superiormente por $1.000 referente ao custo de importação, agora quando há mais oferta que demanda, os preços são ajustados pela dinâmica de equilíbrio para ficarem próximos ao custo operacional. Seguindo essa descrição, chegamos a seguinte árvore que representa o equilíbrio de preços do mercado (em dólares por tonelada) de acordo com a árvore de demanda apresentada anteriormente.

Preços de equilíbrio de mercado (em US$/ton)	Ano 0	Ano 1	Ano 2	Ano 3	Ano 4	Ano 5	Ano 6
							1000
						1000	
					1000		1000
				1000		1000	
			1000		740		740
		1000		700		700	
	1000		1000		700		700
		1000		700		700	
			1000		687		687
				685		685	
					685		685
						685	
							680

Figura 7 – Valor de mercado em dólares por tonelada.

Fonte: (FERREIRA *et al.*, 2009)

Agora que temos estimado os preços em dólares por tonelada ao longo dos anos A0 até A6 nesse cenário em que ambas investem em A0, podemos estimar os lucros anuais das empresas. Por serem casos análogos, farei apenas a apresentação dos cálculos da MineCo, mas os resultados apresentados serão referentes a ambas as empresas para cada um dos casos.

Para melhor compreensão dos dados na árvore abaixo, segue a explicação de um dos casos. Veja por exemplo o nó superior do ano 5, o valor de mercado da tonelada está definido em $1.000, como o custo operacional referente ao projeto de investimento de aumento da capacidade da MineCo definiu que o custo seria de $687 por tonelada, isso implica em um lucro de $313 por tonelada, gerando assim $313 $\times$ 250.000 = $78.250.000 de lucro anual.

Por questão de padronização nesse tipo de análise de investimento, no último ano da amostragem que no nosso caso é o ano 6, terão se passado apenas 3 anos

Payoff da MineCo (em milhares de US$)	Ano 0	Ano 1	Ano 2	Ano 3	Ano 4	Ano 5	Ano 6
							852.819
						78.250	
					78.250		852.819
				78.250		78.250	
			-20.833		13.250		144.407
		-20.833		3.250		3.250	
	-20.833		-20.833		3.250		35.421
		-20.833		3.250		3.250	
			-20.833		0		0
				-500		-500	
					-500		-5.449
						-500	
							-19.073

Figura 8 – Payoffs MineCo em milhares de dólares.

Fonte: (FERREIRA *et al.*, 2009)

de vida útil da mina, então temos mais 14 anos de operações ali. Para fins de análise, no ano 6 temos o que chamamos de valor terminal, esse valor é determinado supondo que os preços e as demandas se mantenham constantes, então é aplicado a fórmula de desconto padrão para cálculo do valor terminal, sendo essa

$$ValorTerminal = \frac{FC \cdot (1 - (1 + r)^{-n})}{r}$$

Onde

- FC é o fluxo de caixa anual esperado.
- r é a taxa de desconto, nesse caso 5%.
- n é o número de anos restantes, nesse caso 14.

Dessa forma, olhando para o nó superior no ano 6 por exemplo, o valor terminal calculado pela fórmula apresentada acima foi de $774.569.000, agora somado com o lucros do ano 6, em questão $78.250.000, isso dá um valor de $852.819.000, que é o lucro a ser obtido até o final da vida útil do projeto caso as condições se mantenham constantes como no momento em que o exercício foi calculado. Conforme dito anteriormente, os cálculos para os payoffs da CompCo são feitos da mesma forma e não serão apresentados aqui.

Por último, para encontrarmos os valores finais referentes a cada projeto de investimento e analisar a viabilidade do mesmo, devemos ajustar cada valor encontrada na árvore de payoffs de acordo com a probabilidade associada ao mesmo (as probabilidades estão descritas na árvore de evolução de demanda), após isso, descontamos esses valores já ajustados utilizando a taxa de desconto de 5% ao ano.

A fórmula de desconto é dada por

$$ValorPresente = \frac{ValorFuturo}{(1 + r)^n}$$

onde *n* é o número de anos até o nó e *r* é a taxa de desconto.

Vejamos um exemplo de ajuste ao risco e desconto ao valor presente. No ano A4, no nó superior temos o valor de \$78.250.000. De acordo com a árvore de demanda, a probabilidade de atingir essa situação é de 1%, logo ajustamos \$78.250.000 $\times$ 1% = \$782.500. Aplicando a fórmula de desconto considerando que passaram 4 anos de A0 até A4

$$ValorPresente = \frac{782.500}{(1 + 0,05)^4} \approx \$643.764$$

Finalmente, somados todos os valores da árvore já ajustados pelo risco e descontados ao valor presente temos a soma total dos payoffs esperados, agora basta descontar dessa soma o valor presente dos investimentos de capital feitos nos anos A0, A1 e A2 para o aumento da capacidade de produção.

Feito isso para ambas as empresas, chegamos nos respectivos payoffs de -\$36 milhões para a MineCo e -\$195 milhões para a CompCo. Dessa forma fica explícito que se as duas optarem por investir no ano A0, ambas perderão dinheiro! Mas vamos manter a calma, não tivemos todo esse trabalho para nada, esse é apenas o primeiro dos 4 cenários possíveis, vamos avaliar os outros cenários que compõem o nosso jogo.

6.2.3 Cenário 2: MineCo investe agora e CompCo espera

Nesse cenário temos uma situação um pouco diferente que é gerada pelo valor da opção real de espera da CompCo. Naturalmente as coisas caminham de outra maneira em comparação com o cenário anterior, uma vez que o tempo de construção da estrutura referente ao projeto de investimento demora 3 anos para ser concluída, a MineCo investindo no ano A0 e a CompCo esperando para ver a evolução da demanda nos primeiros três anos, temos que caso a concorrente opte por investir em A3, a MineCo tem de A3 até A6 uma maior produção para suprir a demanda do mercado local, ao mesmo tempo que caso o demanda do mercado não seja suficientemente positiva, a CompCo tem a flexibilidade de simplesmente não investir no projeto. Vejamos como as coisas funcionam nesse cenário.

Inicialmente apenas a MineCo investe no ano A0, então somente ela terá os custos de investimento de capital nos três primeiros ano, com a capacidade adicional iniciando operações em A3. A estratégia de esperar para ver da CompCo tem grande valor em termos de flexibilidade, pois como vimos na árvore de evolução da demanda, em A3 que é quando a CompCo irá reavaliar sua decisão de investir ou não, podemos ter quatro cenários possíveis relacionados a demanda local de minério.

Ao atingir o ano A3, realizamos o mesmo procedimento feito no cenário 1 para encontrar os payoffs associados a cada situação de demanda, isso quer dizer que foram efetuados os cálculos de ajuste pelo risco, descontos ao valor presente e subtraídos os custos de investimento de capital, mas além disso, para cada um dos 4 casos de demanda, foram feitas pequenas árvores binomiais dos anos A4, A5 e A6, para que assim possamos calcular de fato os payoffs esperados de ambas as empresas na situação em que a CompCo investe em A3.

O valor da flexibilidade gerencial existente na opção real de esperar para ver da CompCo se mostra destacado na imagem abaixo. Uma vez que no nosso jogo supomos que os jogadores (aqui as empresas) são racionais, caso a CompCo conclua que em determinado cenário ela terá como payoff um valor negativo, naturalmente ela não investirá, gerando assim um payoff de zero, pois não houve custo nenhum já que o projeto não foi realizado.

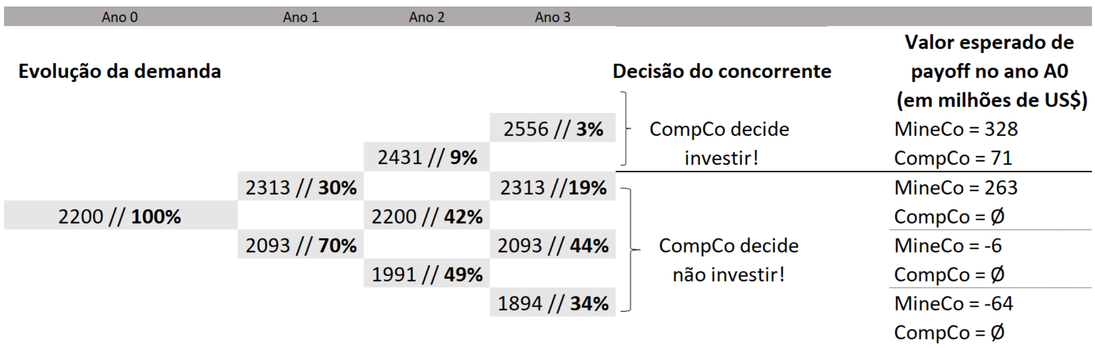

Figura 9 – MineCo investe e CompCo espera.

Fonte: (FERREIRA *et al.*, 2009)

Conforme a imagem destaca, a CompCo apenas investirá no cenário em que a demanda seja a mais alta possível após os três anos iniciais se passarem. Os cálculos foram realizados da forma descrita acima e chegamos que respectivamente os payoffs para a CompCo foram de $71 milhões para o nó superior e -$114 milhões, -$169 milhões e -$185 milhões para os outros três nós, como foi dito, pela racionalidade dos gestores da CompCo a empresa irá aderir ao projeto de investimento apenas no caso de mais alta demanda esperada.

Para realização dos cálculos de payoff da MineCo foi realizado o mesmo procedimento ajustando os descontos para o ano A0, é importante que devemos levar em conta que os preços de equilíbrio de mercado são influenciados pela execução ou não do projeto de investimento da CompCo.

Os valores apresentados na última coluna da imagem, ainda devem ser multiplicados pelas probabilidades atreladas ao risco para cada um dos casos, dessa forma o valor esperado de payoff para a MineCo é calculado por:

$$(\$328m \times 3\%) + (\$263m \times 19\%) + (-\$6m \times 44\%) + (-\$64m \times 34\%) \approx \$35 milh\tilde{o}es$$

Para a CompCo o valor esperado de payoff é calculado por:

$$(\$71m \times 3\%) + (\$0 \times 19\%) + (\$0 \times 44\%) + (\$0 \times 34\%) \approx \$2milh\tilde{o}es$$

Dessa forma, os payoffs esperados para o cenário 2, onde a MineCo investe em A0 e a CompCo espera, são de respectivamente \$35 milhões e \$2 milhões.

6.2.4 Cenário 3: CompCo investe agora e MineCo espera

Análogo ao cenário 2, apresenta valores distintos por conta das diferenças de investimento de capital e lucro por tonelada entre as duas empresas.

Payoffs para esse cenário são de \$4 milhões para a MineCo e -\$83 milhões para a CompCo.

6.2.5 Cenário 4: Ambas esperam para decidir

Aqui as coisas funcionam de maneira um pouco diferente do que já foi apresentado, pois não teremos custos de investimento de capital no ano A0 por nenhum dos lados, apenas em A3, após analisar a árvore de demanda local que as empresas tomarão sua decisão sobre executar ou não o projeto de investimento para aumentar a capacidade de produção.

Ao atingir o ano 3, já vimos que existem 4 situações possíveis de acordo com a demanda, agora devemos considerar que para cada uma dessas 4, existem mais 4 subcenários que é onde ambas investem, uma investe e a outra não e ambas não investem. Aqui teremos uma maior participação da teoria dos jogos, uma vez que já vimos que a influência do competidor é determinante na tomada de decisão por parte da gerência da empresa. A imagem abaixo ilustra de maneira didática os casos possíveis e em seguida explicaremos com detalhes

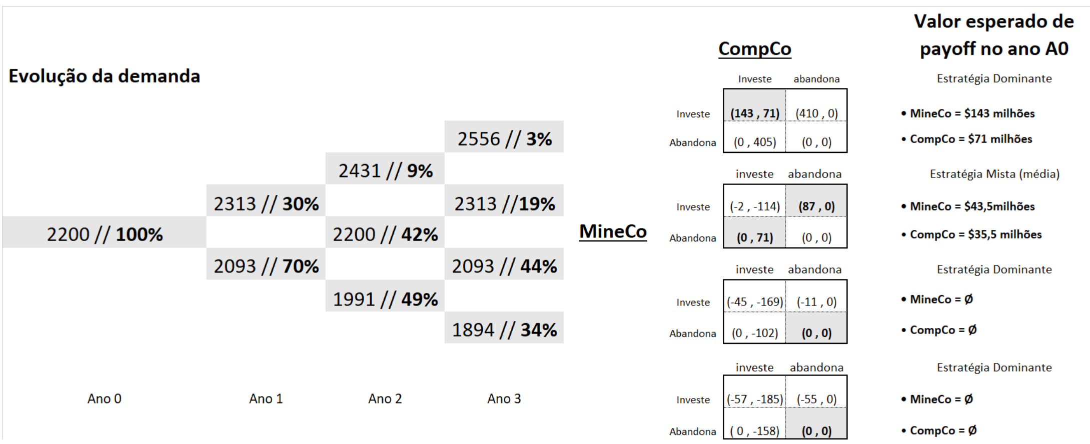

Figura 10 – Evolução da demanda e subcenários

Fonte: (FERREIRA *et al.*, 2009)

Novamente o método de calcular os payoffs é baseado na criação de uma árvore de evolução de demanda e equilíbrio de preço para cada um dos casos, indo do ano A4 até A6, uma vez que os valores são atrelados as decisões corporativas tomadas em A3.

Conforme a imagem destaca, em cada um dos nós teremos um pequeno jogo, onde os payoffs estão explícitos e a partir disso, cada empresa individualmente tomará a sua decisão naquilo que é melhor para si, vejamos por exemplo o nó superior em A3 que representa a situação de máxima demanda. Ao fazer a avaliação dos payoffs para cada um dos quatro subcenários dentro desse caso, chegamos a matriz de payoffs que está elencada na parte de cima da imagem, ali existe uma única estratégia dominante que é (Investir,Investir), dessa forma, ao calcularmos os payoffs finais associados a esse subcenário, o payoff a ser levado em conta nessa situação é esse de \$143 milhões para a MineCo e \$71 milhões para a CompCo, claro que ainda iremos multiplicar pela probabilidade de atingir o nó, mas faremos isso mais adiante.

Veja que os dois nós inferiores em A3 também são definidos por estratégias dominantes, que nesse caso são referentes as opções de (abandonar, abandonar) em ambos os casos, pois as opções de investir apresentam payoffs negativos em todos os aspectos dessas situações. Em outras palavras, considerando as probabilidades de evolução de demanda, em 78% dos casos quando ambas empresas não investem em A0, elas também não investirão em A3.

Agora o caso que se destaca é o segundo nó mais alto, que por não ter um equilíbrio de Nash em estratégias puras, será tratado como a média dos payoffs definidos pelos dois equilíbrios de Nash em estratégias mistas, gerando assim um valor esperado de \$43,5 milhões para a MineCo e \$35,5 milhões para a CompCo (naturalmente ainda devemos multiplicar pela probabilidade de atingir esse nó). É válido citar que existem estudos para avaliar melhor essa distribuição de 50% para estratégias mistas entre empresas, levando em conta o tamanho de cada instituição, dentre outros fatores, mas como não temos acesso a essas informações, partimos de um pressuposto de igualdade e optou-se por uma divisão igualitária.

Finalmente, associando os payoffs encontrados a partir do resultado dos jogos nos quatro subcenários encontrados no ano A3, chegamos que os payoffs esperados para o cenário em que ambas esperam para investir serão

$$(\$143m \times 3\%) + (\$43,5m \times 19\%) + (0 \times 44\%) + (0 \times 34\%) \approx \$12milh\tilde{o}es$$

Para a CompCo o valor esperado de payoff é calculado por:

$$(\$71m \times 3\%) + (\$35,5 \times 19\%) + (\$0 \times 44\%) + (\$0 \times 34\%) \approx \$8milh\tilde{o}es$$

6.2.6 Resultado final e considerações

Agora que temos os payoffs esperados dos quatro cenários, sintetizamos esse valores numa matriz de payoffs (considerando o ano A0) para fazer a análise via teoria dos jogos e finalmente concluir o exercício

CompCo

MineCo	Investe	Espera
Investe	(-$36 , -$195)	($35 , $2)
Espera	($4 , -$83)	($12 , $8)

Figura 11 – Matriz de payoffs dos 4 cenários (em milhões de US$)

Fonte: (FERREIRA *et al.*, 2009)

Dado tudo que apresentamos, a situação se desenvolveu e ao final temos um único equilíbrio de Nash (onde um jogador não altera sua estratégia se o outro não o fizer também). Podemos ressaltar que a MineCo não alterará sua estratégia uma vez que se optar por esperar sairia de um payoff de $35 milhões para $12 milhões, enquanto a CompCo tampouco tem interesse em mudar de estratégia para investir pois assim não teria um lucro esperado de $2 milhões, mas sim um prejuízo de $195 milhões. Dessa forma, o equilíbrio de Nash e portanto o resultado esperado para esse jogo de opções reais é que a MineCo invista em A0 e a CompCo espere até A3, resultando num payoff esperado de respectivamente $35 milhões de dólares e $2 milhões de dólares.

O exercício já foi concluído, mas agora para os curiosos, vamos analisar uma questão interessante a respeito da volatilidade descrita no exemplo, afinal toda a construção foi baseada em um cenário onde a volatilidade era de 5% a cada ano, todavia poderíamos ter outros resultados caso a volatilidade fosse diferente, vejamos a seguir:

- **Volatilidade abaixo dos 15%:** Com a volatilidade abaixo dos 15% repete-se o caso que foi apresentado nesse capítulo, a MineCo está melhor investindo no ano A0, pois não há valor o suficiente na flexibilidade dado a baixa incerteza do mercado.

- **Volatilidade entre 15% e 35%:** Aqui a volatilidade já torna-se alta o suficiente para que o cenários de baixa demanda sejam mais prováveis, aumentando o valor da flexibilidade e nesse cenário a MineCo assim como a CompCo estão melhores esperando para ver o que acontecerá.

- **Volatilidade entre 35% e 55%:** Diferente do que pode-se pensar em um primeiro momento, aqui o compromisso de investir logo volta a ser predominante. Isso acontece pois a partir de 35% a CompCo poderá se beneficiar muito de um investimento antecipado a sua concorrente, dessa maneira a capacidade adicional mudará a estrutura do mercado local sendo favorável a quem investir primeiro, logo há valor em se esperar, mas há um valor maior em antecipar a concorrência.

- **Volatilidade acima dos 55%:** Aqui retornarmos para o cenário onde há maior valor para ambas em esperar para ver como o mercado se comportará, dado que as oscilações tem um alto grau de volatilidade o risco de cair em um mercado de demanda muito baixa é significativo o suficiente para que a melhor estratégia seja esperar para ambas as empresas.

7 CONCLUSÃO

Nesse trabalha vimos um pouco sobre diversos temas, passando desde os vários métodos de avaliação de projetos mais tradicionais e já instaurados como valor presente líquido até o objeto de foco de estudo que são os jogos de opções reais.

Quando falamos sobre opções reais, o tópico em destaque sempre deve ser o valor gerado pela flexibilidade das opções. Citamos diversos casos onde a influência externa pode ser desastrosa para a empresa e causar inúmeros problemas para a gerência, sendo assim a diversidade e uma maior gama de opções uma forma válida de se proteger das instabilidades causadas pelo cenário interno e externo.

Além disso, saímos um pouco do âmbito de avaliação de projetos de maneira endógena, para uma visão mais ampla e que considera a influência do mercado onde a empresa está inserida, isso pode ser feito a partir da teoria dos jogos. Com as técnicas de modelagem matemática associadas a conceitos de competição, vimos que por várias vezes o senso comum não é a resposta mais eficiente e quando elevamos isso para níveis mais altos em empresas de alto escalão internacional, como a Petrobras, pequenos detalhes podem ser determinantes para o sucesso.

Por último, foram apresentados os jogos de opções reais, que mesclam a flexibilidade gerencial das opções reais com o olhar analítico de posição de mercado que a corporação participa levando em consideração também a decisões da concorrência para uma análise mais crítica do cenário.

Tanto somente as opções reais quanto os jogos de opções reais, ainda não apresentam uma posição consolidada no ramo das técnicas de análise de investimento, então por muitas vezes são desconhecidas e deixadas de lado. Um comentário comumente ouvido quando o tema é mencionado para aqueles que conhecem, é que trata-se de processo de difícil compreensão, o que é inegável, afinal comparado aos métodos mais tradicionais apresentados, vimos através de um exemplo teórico que os jogos de opções reais, além de exigirem um conhecimento de duas teorias matemáticas e econômicas simultaneamente ainda apresenta muitas nuances na sua execução.

Particularmente concordo com os gestores que apontam as dificuldades na utilização de jogos de opções reais para basear suas decisões, todavia as teorias são bem consolidadas e apesar de apresentarem uma maior dificuldade na execução da modelagem para análise posterior, uma vez que bem estruturada trata-se de uma ferramenta extremamente sólida para servir como bússola nos momentos de tomada de decisão, pois além de um viés matemático quantitativo, as opções reais representam uma forma de pensar que pondera o valor da proteção através da flexibilidade de caminhos a serem seguidos, é também sobre enxergar tons de cinza para além do branco e preto.

Ao longo do estudo acerca dos jogos de opções reais, pude concluir que gestores altamente qualificados com posições em empresas bem sucedidas e estruturadas, viam um maior valor na teoria, isso me faz acreditar ainda mais que a implementação dessa metodologia para analisar a viabilidade de projetos de investimento está altamente atrelada a disponibilidade da empresa de fornecer um grupo de pessoas especializadas em análise de dados e tomada de decisão, para usufruir o máximo possível dos benefícios que a combinação dessas teorias pode fornecer. Uma vez que a curva de crescimento do uso de inteligências artificiais está aumentando exponencialmente, jogos de opções reais sempre devem ser pelo menos considerados, afinal se o maior problema está na execução dos cálculos e compreensão da matemática por detrás da modelagem, utilizar máquinas para facilitar nesse processo pode ser um grande passo para o ramo.

REFERÊNCIAS

ALEIXO, R. Os modelos de Cournot para duopólio e cartéis: uma revisão. Instituto de Matématica, Estatística e Computação Científica, Universidade . . ., 2006.

AMRAM, Martha; KULATILAKA, Nalin. Real options:: Managing strategic investment in an uncertain world. **OUP Catalogue**, Oxford University Press, 1998.

ANDRADE, Rogerio P de. A construção do conceito de incerteza: uma comparação das contribuições de Knight, Keynes, Shackle e Davidson. **Nova Economia**, SciELO Brasil, v. 21, p. 171–195, 2011.

BOYLE, Phelim P. Options: A monte carlo approach. **Journal of financial economics**, Elsevier, v. 4, n. 3, p. 323–338, 1977.

CHEVALIER-ROIGNANT, Benoıt; TRIGEORGIS, Lenos. **Competitive strategy: Options and games**. [*S.l.*]: MIT press, 2011.

COPELAND, Tom; ANTIKAROV, Vladimir. **Real options**. [*S.l.*]: Texere New York, 2001.

COSTA, Brener Elias da *et al.* Estudo bibliométrico sobre opções reais no Brasil. Universidade Federal de Uberlândia, 2014.

DE ANDRÉS, Pablo; DE FUENTE, Gabriel; MARTÍN, Pablo San. Capital budgeting practices in Spain. **BRQ Business Research Quarterly**, SAGE Publications Sage UK: London, England, v. 18, n. 1, p. 37–56, 2015.

FERREIRA, Nelson; KAR, Jayanti; TRIGEORGIS, Lenos. Option Games The Key to Competing in Capital-Intensive Industries. **Harvard Business Review**, Harvard Business Review, v. 87, n. 3, p. 101–107, 2009.

GITMAN, Lawrence J *et al.* Princípios de administração financeira. Pearson Education do Brasil, 2010.

HULL, John C. **Opções, futuros e outros derivativos**. [*S.l.*]: Bookman Editora, 2016.

KARLIN, Anna R; PERES, Yuval. **Game theory, alive**. [*S.l.*]: American Mathematical Soc., 2017. v. 101.

KNIGHT, Frank Hyneman. **Risk, uncertainty and profit**. [*S.l.*]: Houghton Mifflin, 1921. v. 31.

KOHLBERG, Elon; MERTENS, Jean-Francois. On the strategic stability of equilibria. **Econometrica: Journal of the Econometric Society**, JSTOR, p. 1003–1037, 1986.

LAW, Averill M; KELTON, W David; KELTON, W David. **Simulation modeling and analysis**. [*S.l.*]: Mcgraw-hill New York, 2007. v. 3.

LIMA, Paulo César Ribeiro. Os carros flex fuel no Brasil. **Brasília, DF: Câmara dos Deputados**, 2009.

LUEHRMAN, Timothy A. What's it worth? A general manager's guide to valuation. **Harvard business review**, Harvard Business School Press, v. 75, n. 3, p. 132–132, 1997.

MAGEE, John F. **Decision trees for decision making**. [*S.l.*]: Harvard Business Review Brighton, MA, USA, 1964.

MASTRE, Lívia Tudela Del *et al.* Mercado de opções: compreensão de modelo Black & Scholes para precificação de ativos. Florianópolis, SC., 2022.

MEIRELLES, Jorge Luís Faria. **A teoria de opções reais como instrumento de avaliação de projetos de investimento**. 2004. Tese (Doutorado) – Universidade de São Paulo.

MELIN, Bruno Batista. Analise das Opões reais de um empreendimento de mineração utilizando simulação de Monte carlo. Universidade Federal de Minas Gerais, 2008.

MILLER, Luke T; PARK, Chan S. Decision making under uncertainty—real options to the rescue? **The engineering economist**, Taylor & Francis, v. 47, n. 2, p. 105–150, 2002.

MINARDI, Andrea Maria Accioly Fonseca. Teoria de opções aplicada a projetos de investimento. **Revista de Administração de Empresas**, SciELO Brasil, v. 40, p. 74–79, 2000.

MYERS, Stewart C. Determinants of corporate borrowing. **Journal of financial economics**, Elsevier, v. 5, n. 2, p. 147–175, 1977.

NASH, John. Non-cooperative games. **Annals of mathematics**, JSTOR, p. 286–295, 1951.

RICHARDSON, Roberto Jarry. colaboradores PERES, José Augusto de Souza et all. **Pesquisa social: métodos e técnicas. 3ª ed. São Paulo: Atlas**, 2007.

SARTINI, Brígida Alexandre; GARBUGIO, Gilmar; BORTOLOSSI, Humberto José; SANTOS, Polyane Alves; BARRETO, Larissa Santana. Uma introdução à teoria dos jogos. **Anais da II Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática**, UFBa Salvador, p. 25–29, 2004.

SHACKLE, George LS. A student's pilgrimage. **PSL Quarterly Review**, v. 36, n. 145, 1983.

SLANTCHEV, Branislav L. Game theory: Dominance, Nash equilibrium, symmetry. **Department of Political Science, University of California–San Diego**, 2008.

SMIT, Han TJ; TRIGEORGIS, Lenos. **Strategic investment: Real options and games**. [*S.l.*]: Princeton University Press, 2004.

SOUSA, Ícaro Viterbre Debique; SOUSA, Heron Viterbre Debique; SILVA, Alessandro Leonardo da; GONTIJO, Marcelo Robert; SILVA, Thaís Prado Vasconcelos; VASCONCELOS, Ivana Prado; RODRIGUES, Artur Saturnino; MOREIRA, Bruno Martins. Impactos da guerra na Ucrânia sobre o combustível. **Revista de Gestão e Secretariado**, v. 14, n. 8, p. 14169–14183, 2023.

TRIGEORGIS, Lenos. **Real options: Managerial flexibility and strategy in resource allocation**. [*S.l.*: *s.n.*], 1996.

ZERMELO, Ernst; BOREL, E. On an application of set theory to the theory of the game of chess. *In:* CUP. CONGRESS of Mathematicians. [*S.l.*: *s.n.*], 1913. P. 501–504.