



Universidade Federal de Santa Catarina

Centro Tecnológico (CTC)

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica

Avaliação da contribuição do escoamento intersticial na resposta mecânica de tecidos tendinosos sob compressão semiconfinada transversal às fibras de colágeno

por Jonas Zin Lanzendorf

Florianópolis, SC

2024

Jonas Zin Lanzendorf

**Avaliação da contribuição do escoamento intersticial na
resposta mecânica de tecidos tendinosos sob compressão
semiconfinada transversal às fibras de colágeno**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do título de mestre em Engenharia Mecânica na área de Análise e Projeto Mecânico.

Orientador: Prof. Dr. Eduardo Alberto Fancello

Coorientadores: Prof. Dr. Thiago André Carniel
e Prof. Dr. Bruno Klahr

Florianópolis, SC

2024

Ficha catalográfica gerada por meio de sistema automatizado gerenciado pela BU/UFSC.
Dados inseridos pelo próprio autor.

Zin Lanzendorf, Jonas

Avaliação da contribuição do escoamento intersticial na resposta mecânica de tecidos tendinosos sob compressão semiconfinada transversal às fibras de colágeno / Jonas Zin Lanzendorf ; orientador, Eduardo Alberto Fancello, coorientador, Thiago André Carniel, coorientador, Bruno Klahr, 2024.

86 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Florianópolis, 2024.

Inclui referências.

1. Engenharia Mecânica. 2. Tendão. 3. Escoamento intersticial. 4. Poroviscoelasticidade. 5. Elementos finitos. I. Alberto Fancello, Eduardo. II. André Carniel, Thiago. III. Klahr, Bruno IV. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica. V. Título.

Jonas Zin Lanzendorf

Avaliação da contribuição do escoamento intersticial na resposta mecânica de tecidos tendinosos sob compressão semiconfinada transversal às fibras de colágeno

O presente trabalho em nível de mestrado foi avaliado e aprovado, em 04 de março de 2024, pela banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. Jakson Manfreini Vassoler, Ph.D.
Universidade Federal do Rio Grande do Sul - UFRGS

Prof. Miguel Vaz Júnior, Ph.D.
Universidade do Estado de Santa Catarina - UDESC

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Prof. Henrique Simas, Dr.
Coordenação do Programa de
Pós-Graduação

Prof. Dr. Eduardo Alberto Fancello
Orientador

Florianópolis, SC
2024

À minha família.

Agradecimentos

Em primeiro lugar, gostaria de agradecer a Deus pela vida e por ter-me dado forças para chegar até aqui.

Gostaria de agradecer à minha família: meu pai, Gilberto; minha mãe, Cibele; e meus irmãos, Alberto e Douglas, pelo apoio e amor incondicional. Amo vocês!

Agradeço aos meus orientadores, Prof. Dr. Eduardo Alberto Fancello, Prof. Dr. Thiago André Carniel e Prof. Dr. Bruno Klahr, pelo suporte técnico e pessoal fornecido ao longo desta pesquisa e, principalmente, pela paciência que tiveram comigo.

Estendo meus agradecimentos aos professores e à secretaria do programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da UFSC - POSMEC, assim como aos colegas do grupo de Análise e Projetos Mecânicos - GRANTE, em especial: Rafael Geronimo, Bruno Klahr, José Luís Medeiros Thiesen e Otávio Teixeira Pinto, por suas contribuições valiosas para o desenvolvimento deste trabalho e pela amizade.

Gostaria também de expressar minha gratidão aos meus amigos Vitor e Cristiane, aos meus primos Yago e Yan e, novamente, aos meus irmãos Alberto e Douglas, pelas conversas e descontrações tão necessárias durante a pandemia da COVID-19, especialmente aquelas vivenciadas na praia de Itapirubá.

“Há um valor intrínseco em criar algo pelo simples fato de criá-lo.”
(Rodney Mullen)

Resumo

O estudo do comportamento mecânico de tecidos biológicos moles através de simulação computacional tem sido amplamente utilizado em pesquisas de engenharia. Grande parte destes tecidos possuem quantidades expressivas de água em sua composição, provocando um comportamento mecânico dependente da interação do fluido com a matriz tecidual que o contém. Esse é o caso de diferentes tecidos conectivos como cartilagens, discos intervertebrais, tendões e ligamentos, frequentemente modelados mediante formulações poroelásticas e poroviscoelásticas. Em particular, o tecido conectivo tendinoso possui uma organização estrutural hierárquica de fibras colágenas, as quais são essencialmente dispostas na direção axial dos tendões, que se encontram submersas em uma mistura complexa chamada de substância fundamental. Esse arranjo confere ao tecido tendinoso comportamentos mecânicos específicos, como não linearidade na relação tensão-deformação, anisotropia e viscoelasticidade. Além disso, quando submetidos à tração ou compressão, os tendões podem variar consideravelmente de volume em função do fluxo de fluido que permeia suas fronteiras, adicionando dificuldades na caracterização do seu comportamento mecânico por meio dos modelos constitutivos clássicos aplicados a tecidos biológicos moles. Diante disso, o presente trabalho tem como objetivo verificar e comparar três modelos constitutivos clássicos (viscoelástico, poroelástico e poroviscoelástico) na caracterização de curvas experimentais (força de reação e volume) de ensaios de compressão semi-confinados de tendões bovinos, bem como explorar a física do modelo que melhor representa os resultados experimentais. A caracterização do tecido foi realizada através de um procedimento de identificação de parâmetros constitutivos. Uma abordagem híbrida foi adotada para a solução do problema de otimização, sendo utilizado o *Particle Swarm Optimization* (PSO) na varredura inicial do espaço de busca e o método de Nelder-Mead para a exploração local do potencial ponto de mínimo. Em vista da contabilização simultânea das respostas experimentais de força de reação e volume, foi empregado uma estratégia de solução de otimização multiobjetivo, a qual emprega o método das somas ponderadas (*Weighted Sum Method*) e funções erro baseadas no método dos mínimos quadrados. Essas tarefas foram realizadas através dos programas MATLAB e FEBio. Os resultados mostram que o modelo poroviscoelástico é o que melhor representa os resultados experimentais, sendo o único que consegue capturar as curvas de força de reação e volume simultaneamente. Além disso, indicam que o comportamento transversal dos tendões sob compressão é governado tanto pela fase sólida quanto pela fase fluida.

Palavras-chave: Tecidos biológicos moles, tendão, fluido intersticial, poroviscoelasticidade, método de elementos finitos.

Abstract

The study of the mechanical behavior of soft biological tissues through numerical simulation has been widely used in engineering research. Most of these tissues have significant amounts of water in their composition, causing mechanical behavior dependent on the interaction of the fluid with the tissue matrix that contains it. This is the case of different connective tissues such as cartilage, intervertebral discs, tendons and ligaments, which are often modeled using poroelastic and poroviscoelastic formulations. In particular, the tendon connective tissue has a hierarchical structural organization of collagen fibers, which are essentially arranged in the axial direction of the tendons, submerged in a complex mixture called ground substance. This arrangement gives the tendon tissue specific mechanical behaviors, such as nonlinearity in the stress-strain relationship, anisotropy and viscoelasticity. Also, when subjected to traction or compression, tendons can vary considerably in volume due to the fluid flow permeating their boundary, adding difficulties to characterize their mechanical behavior due to geometric dependence. Therefore, the present work aims to verify and compare three classic constitutive models (viscoelastic, poroelastic and poroviscoelastic) on the characterization of experimental curves (reaction force and volume) of semi-confined compression tests of bovine tendons, as well as explore the physics of the model that best represents the experimental results. The characterization was performed using a constitutive parameter identification procedure. A hybrid approach was adopted to solve the optimization problem, with *Particle Swarm Optimization* (PSO) being used for global search in the feasible space and the Nelder-Mead method for the local exploration of the potential minimum point. In view of the simultaneous accounting of the experimental responses of reaction force and volume, a multi-objective optimization solution strategy was used, which employs the Weighted Sum Method and error functions based on least squares method. These tasks were performed using MATLAB and FEBio programs. The results show that the poroviscoelastic model best represents the experimental results, which was able to capture the reaction force and volume curves simultaneously. Furthermore, they indicate that the transverse behavior of tendons under compression is governed by both the solid and fluid phases.

Keywords: Soft biological tissues, tendon, interstitial fluid, poroviscoelasticity, finite element method.

Lista de figuras

Figura 1 – Estrutura hierárquica dos tendões.	29
Figura 2 – Em (a) é apresentada uma curva tensão-deformação típica de um ensaio de tração uniaxial de um tendão, sendo destacadas as três principais regiões: não linear (<i>toe region</i>), linear e ruptura. Em (b), (c) e (d), ilustra-se os fenômenos de fluência, relaxação de tensão e histerese, respectivamente.	30
Figura 3 – Cinemática de um material bifásico. As regiões materiais, Ω_0^s e Ω_0^f , não necessariamente coincidem em $t = 0$. Através dos mapeamentos χ^s e χ^f obtém-se a região espacial ocupada por ambos os constituintes simultaneamente, Ω_t , em $t \neq 0$	34
Figura 4 – Operações do método de Nelder-Mead.	49
Figura 5 – Representação esquemática do ensaio mecânico. (a) amostra com 10mm de comprimento obtida da porção média do tendão bovino flexor digital profundo. (b) detalhes do aparato experimental de compressão semi-confinada. (c) corte no plano $e_3 - e_2$ mostrando detalhes da restrição do movimento da amostra na direção e_3 pelas placas frontal e posterior. (d) corte no plano $e_1 - e_2$ mostrando detalhes do contato da amostra com o banho.	52
Figura 6 – Características do modelo numérico. (a) domínio da amostra e posição do sistema de coordenadas. (b) curva de deslocamento prescrito do punção. (c) dimensões da geometria CAD, malha de elementos finitos e condições de contorno.	54
Figura 7 – Fluxograma do procedimento de identificação de parâmetros (ajuste de curvas).	61
Figura 8 – Resultados experimentais: (a) curva de força de reação e (b) curva de mudança de volume. As curvas vermelhas indicam o valor médio, enquanto a área cinza representa o desvio padrão.	63
Figura 9 – Comparação simultânea: curvas ajustadas dos modelos viscoelástico, poroelástico e poroviscoelástico sobre as curvas experimentais de força e volume.	64
Figura 10 – Comparação individual: curvas numéricas ajustadas sobre as curvas experimentais de força e volume; (a) e (b) modelo viscoelástico em (a) e (b), modelo poroelástico em (c) e (d) e modelo poroviscoelástico em (e) e (f).	65
Figura 11 – Comparação do comportamento lateral da amostra para os diferentes modelos.	67

Figura 12 – Campo da norma da velocidade relativa do fluido \boldsymbol{w} sobre o domínio da amostra em diferentes instantes de tempo t	68
Figura 13 – Campos de deformação: Jacobiano de transformação volumétrica J e deformação equivalente de Hencky à esquerda ε_{eq} em diferentes instantes de tempo t	69
Figura 14 – Campos de tensão: tensão equivalente no esqueleto sólido $\boldsymbol{\sigma}_{\text{eq}}^s$ e pressão de poro p^f em diferentes instantes de tempo t	70
Figura 15 – Força de reação total f_2 e suas parcelas correspondentes às fases sólida f_2^s e fluida f_2^f . Os valores de força foram normalizados pelo valor máximo da força de reação total. As linhas tracejadas mostram a contribuição de cada fase sobre a força de reação total.	71
Figura 16 – Evolução da permeabilidade hidráulica efetiva k no tempo em três locais diferentes na seção média da amostra, partindo do centro para a superfície externa.	74
Figura 17 – Vetor de força total \boldsymbol{f} atuando na superfície A com normal \boldsymbol{n}	85

Lista de tabelas

Tabela 1 – Limites inferior e superior dos parâmetros materiais.	59
Tabela 2 – Parâmetros identificados para os modelos poroelástico, viscoelástico e poroviscoelástico.	64
Tabela 3 – Pesos w_F e w_V utilizados para os modelos poroelástico, viscoelástico e poroviscoelástico.	66

Lista de abreviaturas e siglas

MEF	Método dos Elementos Finitos
EVR	Elemento de Volume Representativo

Sumário

1	INTRODUÇÃO	23
1.1	Contexto e motivação	23
1.2	Objetivos	24
1.3	Organização do texto	25
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	27
2.1	Tecido tendinoso	27
2.1.1	Morfologia e hierarquia estrutural	27
2.1.2	Comportamento mecânico e escoamento intersticial	28
2.2	Modelos bifásicos	32
2.2.1	Hipóteses do modelo	34
2.2.2	Equações de governo	35
2.2.2.1	Conservação de massa	35
2.2.2.2	Conservação da quantidade de movimento linear	37
2.2.2.3	Conservação da quantidade de movimento angular	37
2.2.3	Forma fraca das equações de governo	39
2.2.4	Modelos de permeabilidade hidráulica	41
2.2.4.1	Lei de transporte	41
2.2.4.2	Restrições adicionais	42
2.2.4.3	Exemplos de modelos de permeabilidade hidráulica	42
2.3	Identificação de parâmetros constitutivos	44
2.3.1	O problema de otimização	44
2.3.2	Métodos de solução	45
2.3.2.1	Particle Swarm Optimization	46
2.3.2.2	Método de Nelder-Mead	47
3	MATERIAL E MÉTODOS	51
3.1	Ensaio experimentais	51
3.1.1	Preparação das amostras	51
3.1.2	Preparação do ensaio mecânico	51
3.1.3	Protocolo do ensaio e medições	53
3.2	Modelo de elementos finitos	53
3.2.1	Modelos constitutivos	55
3.2.1.1	Modelo viscoelástico	55
3.2.1.2	Modelo poroelástico	57
3.2.1.3	Modelo poroviscoelástico	58
3.3	Estratégia de ajuste de curvas	58

3.4	Casos de estudo	60
4	RESULTADOS E DISCUSSÕES	63
4.1	Resultados do ensaio mecânico	63
4.2	Resultados dos ajustes de curvas	63
4.3	Comportamentos fenomenológicos	68
5	CONCLUSÃO	75
5.1	Considerações finais	75
5.2	Sugestões para trabalhos futuros	76
	REFERÊNCIAS	77
	APÊNDICES	83
	APÊNDICE A – DECOMPOSIÇÃO DA FORÇA DE REAÇÃO TO- TAL	85

1 Introdução

1.1 Contexto e motivação

Estudos relacionados à mecânica dos tecidos biológicos têm sido cada vez mais frequentes. Tendo em vista seu caráter abrangente, a exigência por conhecimentos multidisciplinares, envolvendo várias áreas da ciência, como medicina, biologia e engenharia, tem sido fundamental para o entendimento fisiológico e fisiopatológico associado a doenças, lesões agudas e crônicas, além de tratamentos inovadores. No campo da engenharia, dentre as diversas áreas de pesquisa, pode-se destacar o estudo do comportamento mecânico de tecidos biológicos moles através de simulação computacional. Grande parte desses tecidos possuem proporções expressivas de água em sua composição, levando a um comportamento mecânico dependente da interação do fluido com a matriz tecidual que o contém. Esse é o caso de diferentes tecidos conectivos como cartilagens, discos intervertebrais, tendões e ligamentos, frequentemente modelados mediante formulações poroelásticas ou poroviscoelásticas (MOW et al., 1980a; MAK, 1986a; SPILKER; SUH, 1990; BUTLER et al., 1997).

Apesar dos tecidos citados acima pertencerem ao mesmo grupo, possuem comportamentos fenomenológicos distintos. Isso ocorre por conta das diferentes arquiteturas e interações de seus microconstituintes. Em particular, o tecido tendinoso (objeto de estudo deste trabalho) é principalmente composto por uma organização estrutural hierárquica de fibras colágenas, as quais são essencialmente dispostas na direção axial dos tendões, que se encontram submersas em uma mistura complexa chamada de substância fundamental. Esse arranjo confere ao tecido tendinoso comportamentos mecânicos específicos, como não linearidades na relação tensão-deformação, comportamentos dissipativos e anisotropia, os quais se manifestam tanto em situações de tração quanto de compressão (CARNIEL; FANCELLO, 2017; BÖL et al., 2015; FRANCHI et al., 2007; WANG, 2006).

Embora a tração seja a principal sollicitação mecânica, os tendões podem ser submetidos à cargas compressivas, especialmente quando se encontram entrelaçados em ossos. Além disso, mesmo sob cargas de tração ao longo das fibras, os microconstituintes do tendão podem estar sujeitos a complexos estados de compressão devido aos mecanismos de transferência de força entre suas diversas escalas estruturais. (CARNIEL; FANCELLO, 2017; BÖL et al., 2015). Estudos experimentais e computacionais multiescala tem sido fundamentais para a compreensão da transferência de força entre as diferentes estruturas do tendão e seus microconstituintes. No entanto, esses estudos exigem aprimoramento e precisam de informações precisas e consistentes (CARNIEL; KLAHR; FANCELLO, 2019; FANG; LAKE, 2017; FREEDMAN et al., 2017). Assim, a caracterização fenomenológica do comportamento mecânico dos tendões sob diversos tipos de carregamentos, incluindo a

compressão, desempenha um papel importante ao fornecer informações relevantes para a compreensão dos mecanismos em escalas menores [Carniel e Fanello \(2017\)](#).

A caracterização destes comportamentos em tendões saudáveis tem sido relevante para a validação de resultados cirúrgicos e de reabilitação de tendões que sofreram algum tipo de dano. Vale destacar que o emprego de técnicas conservadoras no tratamento de lesões em tendões, como protocolos de exercícios e terapia por ondas de choque, tem sido fortemente recomendado antes de intervenções cirúrgicas. Esse tipo de abordagem enfatiza a melhora da saúde do tecido tendinoso com base em estímulos mecânicos adequados, que promovem a proliferação de células e a reparação tecidual da matriz extracelular. Essa característica foi identificada em uma variedade de tecidos vivos, incluindo ossos, pele, tecido neuronal, sistema hematopoiético e sistema músculo-esquelético ([CANOSA-CARRO et al., 2022](#); [LIMA et al., 2017](#); [COOK](#); [PURDAM, 2009](#)).

A habilidade das células em interpretar sinais mecânicos e convertê-los em respostas químicas e biológicas, capazes de modificar a microestrutura e composição de um tecido vivo, é denominada mecanotransdução celular ([LIMA et al., 2017](#); [WANG, 2006](#)). Além dos mecanismos de mecanotransdução celular, os tendões contam com mecanismos intersticiais, como o fluxo de fluido intersticial, desempenhando um papel crucial não apenas no comportamento mecânico, mas também nos mecanismos biológicos relacionados à lubrificação, nutrição e eliminação de resíduos metabólicos ([MANSUR et al., 2021](#); [SAFA et al., 2020](#); [LIMA et al., 2017](#); [LAVAGNINO et al., 2008](#); [WANG, 2006](#); [ALFREDSON et al., 1998](#); [KEMPSON, 1972](#)).

A propriedade mecânica que relaciona os esforços mecânicos com o transporte de fluidos ao longo da matriz sólida porosa é denominada de permeabilidade hidráulica, também conhecida como permeabilidade de Darcy. Nos modelos poromecânicos, essa propriedade estabelece uma relação constitutiva e desempenha um papel fundamental no comportamento dissipativo desses modelos. Esse comportamento é atribuído ao atrito oriundo do movimento relativo entre as fases sólida e fluida. Além disso, outras fontes de dissipação, como as interações entre os constituintes da matriz sólida (por exemplo, fibras de colágeno e proteoglicanos), podem ser consideradas, levando a um comportamento viscoelástico intrínseco à fase sólida ([ATESHIAN; WEISS, 2010](#); [MAK, 1986a](#); [MAK, 1986b](#)).

1.2 Objetivos

Tendo em vista as diferentes formas de modelagem do comportamento mecânico de tecidos tendinosos, o objetivo principal deste trabalho foi verificar a capacidade de três modelos constitutivos clássicos: o viscoelástico, o poroelástico e o poroviscoelástico, frequentemente aplicados no estudo da biomecânica de tecidos biológicos moles, na caracterização

de curvas experimentais de ensaios de compressão semiconfinados de tendões bovinos. Considerando que os ensaios foram realizados transversalmente às fibras de colágeno, onde os tendões apresentam comportamento isotrópico (CARNIEL; FANCELLO, 2017), optamos por adotar modelos constitutivos isotrópicos, inclusive para a permeabilidade hidráulica nos modelos poromecânicos.

Os dados experimentais utilizados neste trabalho são oriundos de um projeto em parceria com a Escola Politécnica da Universidade Comunitária da Região de Chapecó (Unochapecó), sob coordenação do Prof. Thiago André Carniel, coorientador deste trabalho. É relevante ressaltar que a avaliação da capacidade dos modelos em descrever as respostas experimentais foi conduzida através de um processo de ajuste de curvas numérico-experimental, utilizando os programas MATLAB e FEBio. O MATLAB foi utilizado para o procedimento de ajuste de curvas e comunicação entre os programas, enquanto o FEBio foi empregado na simulação computacional.

Como objetivos secundários pretende-se avaliar a física do modelo que melhor ajusta as curvas experimentais. Sendo assim, os objetivos específicos são:

- realizar o ajuste das curvas numérico-experimental dos modelos constitutivos propostos: viscoelástico, poroelástico e poroviscoelástico, por meio de um procedimento de identificação de parâmetros baseado em uma estratégia de otimização multiobjetivo híbrida;
- verificar e comparar a capacidade dos modelos constitutivos propostos na caracterização de curvas experimentais de força de reação e mudança de volume, provenientes de ensaios de compressão semi-confinados transversais às fibras de colágeno de tendões bovinos;
- explorar comportamentos fenomenológicos do modelo constitutivo que melhor se ajustou as respostas experimentais.

1.3 Organização do texto

Apresentam-se a seguir os assuntos abordados em cada capítulo deste documento:

- a Seção 1 apresenta uma breve introdução à biomecânica dos tecidos biológicos moles, enfatizando aspectos sobre caracterização de comportamento mecânico de tendões e as relações de estímulos mecânicos como meio de ativação de mecanismos biológicos;
- a Seção 2 refere-se à revisão bibliográfica, no qual é abordado aspectos sobre: morfologia e comportamento mecânico de tendões, modelos bifásicos e identificação de parâmetros constitutivos;

- a Seção 3 descreve os materiais e métodos empregados. Apresenta-se inicialmente o ensaio experimental realizado na Unochapecó. Em seguida, é exposta a abordagem numérica adotada para a solução do problema de identificação de parâmetros constitutivos, *i.e.*, descreve-se o modelo de elementos finitos e a técnica de otimização híbrida;
- a Seção 4 apresenta os resultados do procedimento de identificação de parâmetros como o conjunto de parâmetros materiais e o ajuste de curvas de cada modelo proposto, bem como comportamentos fenomenológicos (exploração da física) do modelo com o melhor ajuste de curvas;
- a Seção 5 apresenta as considerações finais, destacando os principais resultados obtidos, limitações do trabalho e sugestões para trabalhos futuros;
- após a última seção, são mostradas as Referências e o Apêndice.

2 Revisão Bibliográfica

2.1 Tecido tendinoso

Os tecidos conectivos ou conjuntivos são encontrados em animais e desempenham funções estruturais como sustentação e preenchimento. Estão envolvidos no transporte de nutrientes e catabólicos, no armazenamento de íons e na defesa do organismo. Apesar da notável variedade em características morfológicas, tais tecidos são em grande parte compostos por uma matriz extracelular (MEC) e células. A MEC é composta de fibras de colágeno e elastina, envolvidas em uma substância amorfa, também conhecida como substância fundamental, a qual contém glicosaminoglicanos, proteoglicanos e água. Dentre os tecidos conectivos, aqueles que não apresentam calcificação da MEC (*e.g.*, ossos) são chamados de tecidos conectivos moles. Esses tecidos possuem menor quantidade de células quando comparados aos demais (epitelial, muscular e nervoso), tornando a MEC o principal componente (JUNQUEIRA; CARNEIRO, 2013; WANG, 2006; MATHEWS, 1975).

Os tecidos conectivos frouxo e denso representam dois dos vários tipos de tecidos conectivos. O tecido frouxo é caracterizado pela dispersão das fibras colágenas e pela relativa alta quantidade de células. Em contrapartida, o tecido conectivo denso contém poucas células e um alto teor de fibras. Os tecidos conectivos densos podem ser classificados ainda como irregulares ou regulares. Os irregulares possuem fibras de colágeno orientadas em diferentes direções (*e.g.*, derme), e os regulares possuem fibras alinhadas em uma direção particular (*e.g.*, tendões e ligamentos) (JUNQUEIRA; CARNEIRO, 2013; ROSS; PAWLINA; BARNASH, 2012).

Dentre os tecidos conectivos densos regulares, o tecido tendinoso é o objeto de trabalho considerado neste estudo. Os tendões são estruturas cujas funções são unir e transmitir esforços de músculos aos ossos, possibilitando o movimento das articulações ou a manutenção da postura do corpo (NORDIN; FRENKEL, 2012). Podem ser encontrados em diversos formatos, como cilíndricos, largos e achatados ou em forma de fita (KANNUS, 2000). Quando submetidos às solicitações mecânicas, apresentam comportamentos não lineares, dissipativos e anisotrópicos. (FANG; LAKE, 2016; WANG, 2006). Além disso, quando submetidos à tração ou compressão, os tendões podem variar consideravelmente de volume em função do fluxo de fluido que permeia suas fronteiras (BöL et al., 2015).

2.1.1 Morfologia e hierarquia estrutural

Os tendões são compostos principalmente por fibras e células submersas em uma substância fundamental, o qual possui cerca de 55-70% de água em sua composição. As fibras de colágeno são as mais abundantes e contabilizam cerca de 60-80% da massa seca do tendão. Em menor quantidade, as fibras de elastina representam cerca de 1-2% da massa

seca. O colágeno do tipo I representa 95% do total de colágeno, sendo o restante composto, basicamente, pelos tipos II, III e V (WANG, 2006; KANNUS, 2000; ARO; B.C.; E.R., 2012). As principais células dos tendões são os fibroblastos, totalizando 90-95% dos elementos celulares. As demais células são notadas em determinadas condições, como os condrócitos em regiões comprimidas ou macrófagos em situações patológicas. A substância fundamental, que envolve as fibras e células é um mistura complexa e altamente hidratada composta por proteoglicanos (PGs), glicosaminoglicanos (GAGs) e glicoproteínas multiadesivas. Ainda assim, outras moléculas podem ser encontradas na MEC, como carboidratos, sais e outras pequenas moléculas solúveis (KANNUS, 2000).

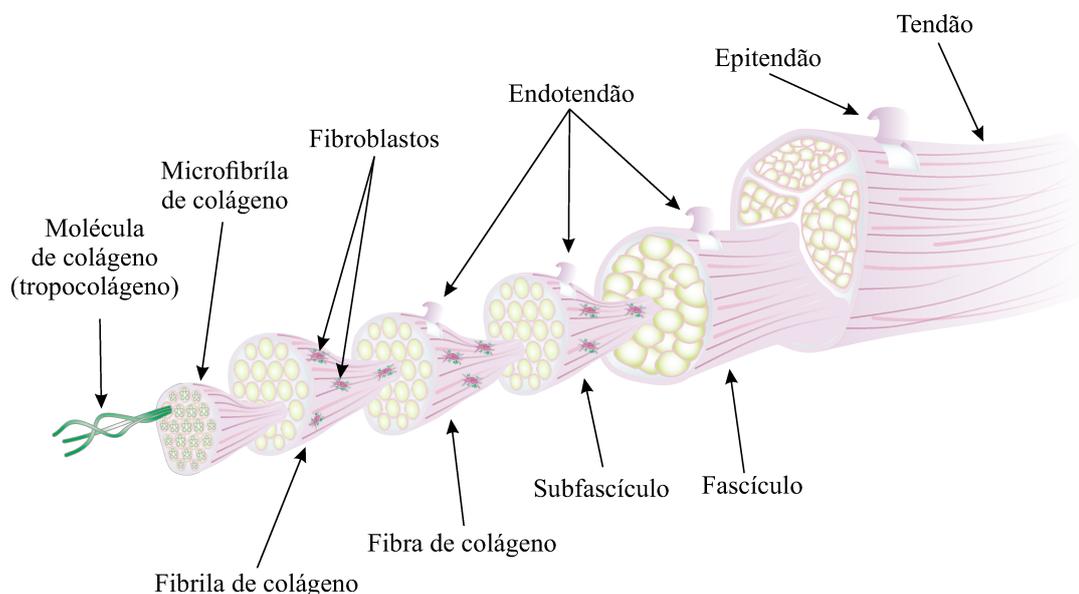
A disposição das fibras de colágeno no interior do tendão dá origem a uma complexa hierarquia estrutural, sendo observada a partir de diferentes escalas espaciais. Essa estrutura hierárquica é composta sequencialmente por moléculas de colágeno, microfibrilas, fibrilas, fibras e feixes de fibras, conforme ilustrado na Figura 1 (WANG, 2006). As fibrilas são as menores unidades estruturais, as quais são formadas por um conjunto de microfibrilas, que por sua vez, consistem de um conjunto de moléculas de colágeno. Observações experimentais através de microscopia de força atômica revelam que as fibrilas encontram-se entrelaçadas em um formato helicoidal ao longo de seu comprimento (VIDAL, 2003; BOZEC; van der Heijden; HORTON, 2007). Um grupo de fibrilas envolvidos por uma fina camada de tecido conectivo chamada de endotendão dá origem a uma fibra de colágeno, que também apresenta um formato ondulado ao longo do comprimento do tendão (VIDAL, 2003). O endotendão é uma matriz intrafascicular que conecta as fibras de colágeno e permite o deslizamento relativo entre si, além disso, contém em seu arranjo, vasos sanguíneos, linfáticos e nervos (KANNUS, 2000; THORPE; SCREEN, 2016; ZHANG et al., 2022).

O agrupamento sequencial de fibras de colágeno formam as próximas unidades estruturais, denominadas de subfascículos, fascículos e o tendão propriamente dito. Além das fibras de colágeno, o endotendão envolve os subfascículos e fascículos. O tendão propriamente dito é composto por um conjunto de fascículos coberto por uma fina camada de tecido conectivo chamada de epitendão, que assim como o endotendão, possui vasos sanguíneos, linfáticos e nervos. Sobreposto ao epitendão, encontra-se ainda uma camada de tecido conjuntivo chamada de paratendão, que atua como uma camisa elástica e facilita o deslizamento do tendão contra tecidos vizinhos. A união do endotendão e paratendão forma o tecido conectivo peritendão (WANG, 2006).

2.1.2 Comportamento mecânico e escoamento intersticial

A estrutura hierárquica descrita anteriormente se encontra alinhada com o eixo longitudinal do tendão, conferindo resistência ao tecido e comportamentos mecânicos específicos como não linearidade na relação tensão-deformação, viscoelasticidade e anisotropia (FANG; LAKE, 2016; WANG, 2006; COWIN; DOTY, 2007). Por exemplo, quando

Figura 1 – Estrutura hierárquica dos tendões.

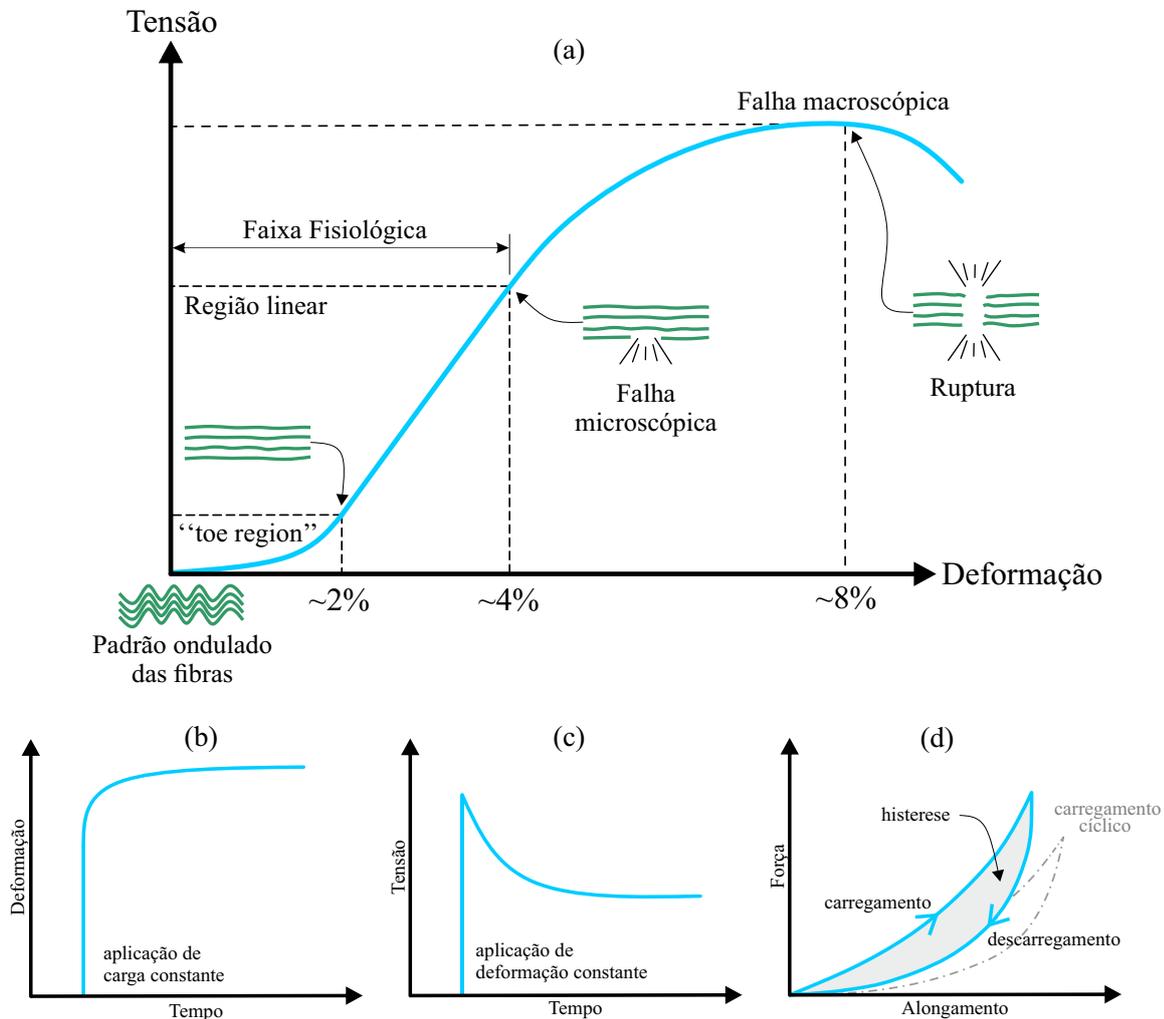


Fonte: Adaptado de Wang (2006).

tracionados na direção das fibras, os tendões apresentam o comportamento ilustrado na Figura 2a. No início da curva, a região não linear (*toe region*) engloba deformações de até 2%. Nessa faixa de deformação, observa-se o esticamento do padrão ondulado das fibras a medida que a carga progride. Apesar disso, o padrão ondulado pode voltar ao seu estado natural se o carregamento for removido. Entretanto, se a aplicação da carga for continuada, o esticamento gradativo das fibras confere ao tendão mais rigidez e, portanto, tornam-se mais resistentes e menos flexíveis. Por conseguinte, é observada uma região linear na relação tensão-deformação para faixas entre 2-4% de deformação, que compreende o regime fisiológico dos tendões (FRANCHI et al., 2007). Para deformações além do regime fisiológico, é observado danos na microestrutura como a ruptura de fibras de colágeno e, para níveis de deformação acima de 8-10%, verifica-se a ruptura macroscópica do tendão (WANG, 2006; COWIN; DOTY, 2007). Ainda assim, o nível de deformação para a ruptura de um tendão pode depender de diferentes fatores como a região em que o tecido se encontra no corpo. Por exemplo, ensaios de tração realizados em tendões de aquiles e patelar de humanos indicam níveis de deformação na falha em torno de 20% e 14%, respectivamente (SHAW; LEWIS, 1997; JOHNSON et al., 1994).

Como já mencionado, os tendões apresentam comportamento viscoelástico e, portanto, exibem fenômenos como fluência, relaxação de tensão e histerese, os quais são ilustrados nas Figuras 2b, 2c e 2d, respectivamente. O fenômeno de fluência é caracterizado pelo escoamento lento do material em virtude de uma tensão constante. Por outro lado, a relaxação de tensão é definida pela diminuição da tensão ao longo do tempo sob uma deformação permanente (DUENWALD S.E., 2009; MAGANARIS; NARICI, 2005). Sob

Figura 2 – Em (a) é apresentada uma curva tensão-deformação típica de um ensaio de tração uniaxial de um tendão, sendo destacadas as três principais regiões: não linear (*toe region*), linear e ruptura. Em (b), (c) e (d), ilustra-se os fenômenos de fluência, relaxação de tensão e histerese, respectivamente.



Fonte: Adaptado de Wang (2006).

carregamento cíclico, além da dissipação de energia associada ao processo de carregamento e descarregamento, *i.e.*, histerese, os tendões apresentam uma diminuição da rigidez e maior dissipação de energia ao longo dos ciclos (FIRMINGER; EDWARDS, 2021). Os tendões também apresentam sensibilidade a taxa de deformação, ou seja, em baixas taxas de deformação se tornam mais deformáveis e absorvem mais energia, mas são menos eficientes na transmissão de forças. Já em altas taxas de deformação, ficam mais rígidos e eficientes na transferência de forças (DUENWALD S.E., 2009; WANG, 2006).

Um aspecto importante sobre o comportamento viscoelástico dos tendões está na influência das interações do fluido intersticial com a matriz sólida que o contém. A matriz sólida (ou esqueleto sólido) pode ser considerada como um material poroso permeável,

deformável e reforçado por fibras, que inclusive pode apresentar comportamento viscoelástico intrínseco. Assim sendo, o atrito resultante da permeação do fluido através dos poros e fronteiras da matriz sólida desempenha um papel fundamental no comportamento viscoelástico dos tendões. Dessa forma, a viscoelasticidade do tendão pode ser atribuída tanto a mecanismos dissipativos intrínsecos à matriz sólida quanto a mecanismos dissipativos dependentes do fluxo de fluido relativo à matriz sólida (SAFA et al., 2020). Em vista dessas características, o fluxo de fluido no interior da matriz sólida pode ser dirigido através do processo de deformação. Neste caso, o fluxo ocorre devido à mudança volumétrica da matriz sólida porosa que produz um gradiente de pressão no fluido intersticial. Por exemplo, esse processo é semelhante a comprimir uma esponja molhada para retirar o fluido do seu interior. Embora esse mecanismo possa promover o deslocamento de fluido, o processo de deformação pode também oferecer resistência adicional ao fluxo através da compactação do arranjo estrutural do tecido. Deste modo, a restrição do fluxo de fluido implica no aumento da pressão do fluido intersticial que, por sua vez, dificulta o processo de deformação da matriz sólida. Estes aspectos são considerados os principais fatores no governo das propriedades viscoelásticas dos tecidos moles sob compressão (KEMPSON, 1972; MOW et al., 1980b; ATESHIAN; WEISS, 2010).

Além da relevância sobre o comportamento mecânico dos tendões, o escoamento intersticial tem papel fundamental sobre diversos processos biológicos como nutrição, rejeito de toxinas metabólicas e mecanotransdução (CHEN; MALKUS; JR, 1998; WEISS; MAAKESTAD, 2006). Em particular, os mecanismos de mecanotransdução descrevem a habilidade das células de detectar e converter estímulos mecânicos em processos químicos e biológicos, que resultam na remodelagem da microestrutura do tecido (PRINGELS et al., 2023). De acordo com Yang, Crawford e Wang (2004) e Magnusson e Kjaer (2019), as células do tendão, quando submetidas a carregamentos cíclicos de tração, promovem a síntese de colágeno tipo I, bem como fatores de crescimento que orientam outras células para a produção dessa proteína. Apesar de apresentarem uma estrutura capaz de resistir elevadas cargas de tração, muitos tendões estão sujeitos à carregamentos de compressão, principalmente em regiões que envolvem ossos (WREN; BEAUPRÉ; CARTER, 2000). Nessas regiões específicas, os tendões podem apresentar uma microestrutura fibrocartilaginosa, semelhante as encontradas em cartilagens (PRINGELS et al., 2023; COOK; PURDAM, 2012). As células predominantes na fibrocartilagem são os condrócitos, que possuem um formato mais arredondado, e alguns autores sugerem que esse formato é modelado por tensões hidrostáticas compressivas cíclicas (WREN; BEAUPRÉ; CARTER, 2000; COOK; PURDAM, 2012). Em resposta a esse estímulo mecânico, essas células produzem proteoglicanos, glicosaminoglicanos e colágeno do tipo II, os quais podem ser responsáveis pela restrição do escoamento intersticial por meio da redução da permeabilidade hidráulica local, permitindo o suporte de elevadas cargas de compressão sem causar danos excessivos à matriz extracelular (WREN; BEAUPRÉ; CARTER, 2000).

Na modelagem de tecidos hidratados usando teorias poromecânicas, a permeabilidade hidráulica representa uma propriedade essencial no controle do fluxo de fluido intersticial. A permeabilidade hidráulica é definida por meio de relações constitutivas e pode depender de diferentes fatores, incluindo temperatura, conteúdo de água e estado de deformação volumétrica da matriz sólida. Além disso, dependendo do arranjo microestrutural do tecido (*e.g.*, organização das fibras de colágeno), o fluxo de fluido pode apresentar anisotropia (CARNIEL; FANCELLO, 2017; ATESHIAN; WEISS, 2010; GU *et al.*, 1999). Em tecidos sujeitos a grandes deformações, os experimentos de permeação unidimensional e o ajuste de curvas do tipo força-tempo, emergem como as principais técnicas empregadas na estimativa de parâmetros relacionados à permeabilidade hidráulica. (ATESHIAN; WEISS, 2010). Por exemplo, a partir de ensaios de tração sob carregamento osmótico, configurados para um intervalo de deformação volumétrica de $-20\% < \epsilon_{vol} < 0$, Safa *et al.* (2020) determinaram a permeabilidade hidráulica transversal de tendões de ratos utilizando técnicas de ajuste de curvas. Os resultados revelaram valores na ordem de magnitude de $\sim 10^{-6}$ e $\sim 10^{-5}$ mm⁴/Ns, destacando, ainda, a diminuição da permeabilidade hidráulica em função da deformação volumétrica. Os valores de permeabilidade hidráulica reportados na literatura de tendões variam entre $\sim 10^{-6}$ e $\sim \times 10^{-1}$ mm⁴/Ns (SAFA *et al.*, 2020; OFTADEH *et al.*, 2018; LAVAGNINO *et al.*, 2008). Essa ampla faixa de valores pode estar relacionada aos diferentes fatores que influenciam essa propriedade, tais como diferentes tendões de diferentes animais e os protocolos de ensaios empregados.

2.2 Modelos bifásicos

Nesta seção é apresentada uma formulação bifásica fundamentada na Teoria das Misturas e em trabalhos científicos dedicados a biomecânica computacional de tecidos moles (HOLZAPFEL; OGDEN, 2017; MOW *et al.*, 1980b; SPILKER; SUH, 1990; LEVENSTON; FRANK; GRODZINSKY, 1998).

Considera-se um corpo $\bar{\mathcal{B}}_0$ constituído por duas fases $\alpha = \{s, f\}$ (fases sólida e fluida), ocupando as regiões Ω_0^α e fronteiras regulares Γ_0^α num espaço físico tridimensional \mathcal{E} , no instante de tempo $t = 0$. O corpo $\bar{\mathcal{B}}_0$ é denominado de configuração material ou Lagrangeana, no qual cada partícula α é identificada por um vetor posição \mathbf{X}^α . Na configuração espacial ou Euleriana do corpo, $\bar{\mathcal{B}}_t = \Omega_t^\alpha \cup \Gamma_t^\alpha$, a posição de uma partícula é dada por

$$\mathbf{x}(\mathbf{X}^\alpha, t) = \boldsymbol{\chi}^\alpha(\mathbf{X}^\alpha, t) = \mathbf{X}^\alpha + \mathbf{u}^\alpha(\mathbf{X}^\alpha, t), \quad (2.1)$$

onde $\boldsymbol{\chi}^\alpha$ é o mapeamento do corpo $\bar{\mathcal{B}}_0$ para o corpo $\bar{\mathcal{B}}_t$ e \mathbf{u}^α é o vetor deslocamento do constituinte α . Embora cada constituinte tenha mapeamento $\boldsymbol{\chi}^\alpha$ independente, a posição espacial de uma partícula $\mathbf{x}(\mathbf{X}^\alpha, t)$ contém simultaneamente ambos os constituintes α . Entretanto, não é necessário que os constituintes sejam coincidentes na configuração material. Na descrição Euleriana, a velocidade \mathbf{v}^α e a aceleração \mathbf{a}^α do constituinte α são

definidas por

$$\mathbf{v}^\alpha = \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{X}^\alpha, t)}{\partial t} \quad \text{e} \quad \mathbf{a}^\alpha = \frac{\partial^2 \mathbf{x}(\mathbf{X}^\alpha, t)}{\partial t^2}. \quad (2.2)$$

Visto que a partícula \mathbf{x} incorpora todos os constituintes α de maneira simultânea, introduz-se um Elemento de Volume Representativo (EVR) para caracterizar a microestrutura da mistura (ver Figura 3). As considerações microestruturais são feitas por meio da definição das densidades real ρ_μ^α e aparente ρ^α como

$$\rho_\mu^\alpha = \frac{dm^\alpha}{dv^\alpha} \quad \text{e} \quad \rho^\alpha = \frac{dm^\alpha}{dv}, \quad (2.3)$$

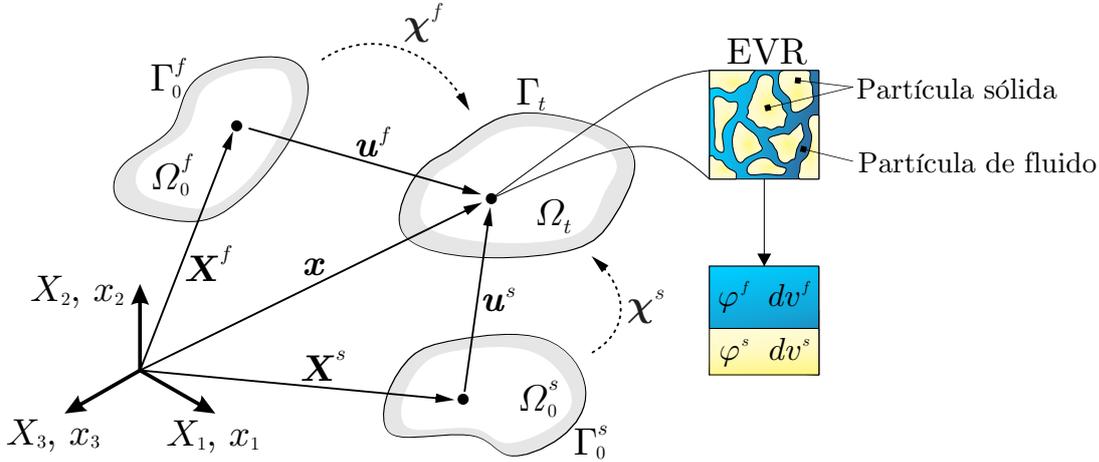
sendo dm^α e dv^α elementos diferenciais de massa e volume, referentes à fase α , respectivamente, e dv é o volume diferencial da mistura. Outra quantidade relevante considerada é a fração volumétrica de cada constituinte α , definidas por

$$\varphi^\alpha = \frac{dv^\alpha}{dv}, \quad (2.4)$$

onde φ^s e φ^f são denominados de solidez e porosidade, respectivamente. Por meio das frações volumétricas, as densidades reais e aparentes podem ser relacionadas por

$$\rho^\alpha = \varphi^\alpha \rho_\mu^\alpha. \quad (2.5)$$

Figura 3 – Cinemática de um material bifásico. As regiões materiais, Ω_0^s e Ω_0^f , não necessariamente coincidem em $t = 0$. Através dos mapeamentos χ^s e χ^f obtém-se a região espacial ocupada por ambos os constituintes simultaneamente, Ω_t , em $t \neq 0$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Sendo assim, o gradiente de deformação \mathbf{F}^α e o Jacobiano de transformação volumétrica J^α , referente ao constituinte α , são definidos respectivamente por

$$\mathbf{F}^\alpha = \frac{\partial \chi^\alpha(\mathbf{X}^\alpha, t)}{\partial \mathbf{X}^\alpha} = \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{X}^\alpha, t)}{\partial \mathbf{X}^\alpha} \quad (2.6)$$

e

$$J^\alpha \equiv \det \mathbf{F}^\alpha > 0. \quad (2.7)$$

Os tensores de deformação de Green-Lagrange \mathbf{E}^α e Euler-Almansi \mathbf{e}^α são definidos, respectivamente, por

$$\mathbf{E}^\alpha = \frac{1}{2} (\mathbf{C}^\alpha - \mathbf{I}) \quad \text{e} \quad \mathbf{e}^\alpha = \frac{1}{2} (\mathbf{I} - (\mathbf{b}^\alpha)^T), \quad (2.8)$$

onde \mathbf{I} é o tensor de segunda ordem de identidade e, \mathbf{C}^α e \mathbf{b}^α são os tensores de deformação de Cauchy-Green à direita e à esquerda, respectivamente, definidos da seguinte forma:

$$\mathbf{C}^\alpha = (\mathbf{F}^\alpha)^T \mathbf{F}^\alpha \quad \text{e} \quad \mathbf{b}^\alpha = \mathbf{F}^\alpha (\mathbf{F}^\alpha)^T. \quad (2.9)$$

2.2.1 Hipóteses do modelo

Geralmente, na formulação matemática de materiais bifásicos voltados a tecidos biológicos, são admitidas hipóteses visando simplificar a modelagem. Nesta formulação, as seguintes hipóteses são consideradas.

- **Incompressibilidade dos constituintes na microescala espacial (EVR):** essa hipótese admite que as densidades reais não variam no tempo, *i.e.*:

$$\dot{\rho}_\mu^\alpha = 0. \quad (2.10)$$

- **Saturação total da mistura:** essa hipótese impõe que as frações volumétricas devem satisfazer a seguinte restrição:

$$\varphi^s + \varphi^f = 1. \quad (2.11)$$

- **Decomposição aditiva da tensão total:** essa hipótese considera que a tensão de Cauchy total pode ser obtida pela soma entre a contribuição de tensão no sólido $\boldsymbol{\sigma}^s$, e a contribuição de tensão no fluido $\boldsymbol{\sigma}^f$, ou seja,

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^s + \boldsymbol{\sigma}^f. \quad (2.12)$$

- **Contribuição da tensão no fluido é hidrostática:** essa hipótese impõe que a tensão no fluido depende somente de uma pressão hidrostática p , *i.e.*,

$$\boldsymbol{\sigma}^f = -p\mathbf{I}. \quad (2.13)$$

2.2.2 Equações de governo

2.2.2.1 Conservação de massa

Na presente formulação, considera-se que a massa m^α de cada constituinte α é uma quantidade permanente. Dessa forma, a massa dos constituintes na configuração material deve ser igual a massa dos constituintes na configuração espacial: $m^\alpha(\Omega_0^\alpha) = m^\alpha(\Omega_t) > 0$, para qualquer instante de tempo t . De forma equivalente, apresenta-se a seguir a forma integral dessa condição,

$$m^\alpha = \int_{\Omega_0^\alpha} \rho_0^\alpha dV^\alpha = \int_{\Omega_t} \rho^\alpha dv, \quad (2.14)$$

onde ρ_0^α e ρ^α são as densidades de massa e, dV e dv são elementos diferenciais de volume, referentes às configurações material e espacial, respectivamente.

Sabendo que a massa na configuração material é independente do tempo, a derivada temporal da Equação (2.14) dá origem a uma expressão em formato de taxa para a conservação da massa na configuração espacial,

$$\dot{m}^\alpha = \frac{D}{Dt} \int_{\Omega_t} \rho^\alpha dv = 0. \quad (2.15)$$

Usando o teorema de transporte de Reynolds, a Eq.(2.15) resulta em

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega_t} \rho^\alpha dv = \int_{\Omega_t} (\dot{\rho}^\alpha + \rho^\alpha \operatorname{div} \mathbf{v}^\alpha) dv = 0. \quad (2.16)$$

Por meio da relação (2.5), podemos reescrever a Eq.(2.16)₂ em termos das frações volumétricas e densidades reais,

$$\int_{\Omega_t} \left(\dot{\varphi}^\alpha \rho_\mu^\alpha + \varphi^\alpha \rho_\mu^\alpha \operatorname{div} \mathbf{v}^\alpha \right) dv = 0, \quad (2.17)$$

e aplicando a regra da cadeia, juntamente com a hipótese dada pela Equação (2.11), obtém-se

$$\int_{\Omega_t} \rho_\mu^\alpha (\dot{\varphi}^\alpha + \varphi^\alpha \operatorname{div} \mathbf{v}^\alpha) dv = 0. \quad (2.18)$$

Com base na Equação (2.18), podemos obter uma expressão local ou diferencial para a conservação da massa para cada constituinte em termos das frações volumétricas, *i.e.*,

$$\dot{\varphi}^\alpha + \varphi^\alpha \operatorname{div} \mathbf{v}^\alpha = 0. \quad (2.19)$$

Considerando que a soma das frações volumétricas é uma constante (hipótese (2.11)), a qual é válida para qualquer instante de tempo t , temos que a soma das derivadas temporais das frações volumétricas deve ser nula, ou seja, $\dot{\varphi}^s + \dot{\varphi}^f = 0$. Portanto, ao somar as equações de conservação da massa de cada constituinte α , obtemos uma expressão unificada para a conservação da massa da mistura:

$$\operatorname{div} (\varphi^s \mathbf{v}^s + \varphi^f \mathbf{v}^f) = 0. \quad (2.20)$$

Na literatura, a equação de conservação da massa da mistura é frequentemente expressa de maneira alternativa, dada por

$$\operatorname{div} (\mathbf{v}^s + \mathbf{w}) = 0, \quad (2.21)$$

onde \mathbf{w} é a velocidade relativa do fluido em relação ao sólido, definida como

$$\mathbf{w} = \varphi^f (\mathbf{v}^f - \mathbf{v}^s). \quad (2.22)$$

A velocidade relativa do fluido contabiliza o volume de fluido que passa através de uma seção transversal da mistura, perpendicular à direção do fluxo, cuja unidade de medida é mm/s. Geralmente, a velocidade relativa do fluido é modelada usando a Lei de Darcy:

$$\mathbf{w} = -\mathbf{k} \operatorname{grad} p, \quad (2.23)$$

onde \mathbf{k} é o tensor de permeabilidade hidráulica e p é a pressão do fluido ou pressão de poro. O tensor de permeabilidade hidráulica \mathbf{k} é estabelecido por meio de uma relação constitutiva, que descreve as interações friccionais entre as fases sólida e fluida, desempenhando um papel fundamental na modelagem do comportamento dissipativo de diversos tecidos biológicos. Na seção 2.2.4 são apresentados alguns tópicos referentes ao tensor de permeabilidade hidráulica.

2.2.2.2 Conservação da quantidade de movimento linear

A quantidade de movimento linear $\mathbf{l}^\alpha(t)$ de cada constituinte α pode ser definida na configuração espacial como

$$\mathbf{l}^\alpha(t) = \int_{\Omega_t} \rho^\alpha \mathbf{v}^\alpha dv. \quad (2.24)$$

O princípio da conservação da quantidade de movimento linear postula que, para qualquer instante de tempo t , a taxa de variação da quantidade de movimento linear $\dot{\mathbf{l}}^\alpha(t)$ sobre a região Ω_t^α deve ser igual a soma das forças de superfície \mathbf{t}^α que atuam na fronteira Γ_t^α com as forças de corpo \mathbf{b}^α que atuam na região Ω_t^α , *i.e.*,

$$\dot{\mathbf{l}}^\alpha(t) = \frac{D}{Dt} \int_{\Omega_t^\alpha} \rho^\alpha \mathbf{v}^\alpha dv = \int_{\partial\Omega_t^\alpha} \mathbf{t}^\alpha ds + \int_{\Omega_t^\alpha} \rho^\alpha \mathbf{b}^\alpha dv. \quad (2.25)$$

Usando o teorema de transporte de Reynolds e o princípio de conservação da massa no lado esquerdo da equação (2.25), bem como o teorema de Cauchy e o teorema da divergência no primeiro termo do lado direito dessa mesma equação, obtemos a forma global da equação da conservação da quantidade de momento linear

$$\int_{\Omega_t^\alpha} \rho^\alpha \dot{\mathbf{v}}^\alpha dv = \int_{\Omega_t^\alpha} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}^\alpha dv + \int_{\Omega_t^\alpha} \rho^\alpha \mathbf{b}^\alpha dv \quad (2.26)$$

Considerando que as forças inerciais e de corpo são geralmente desprezadas na modelagem de tecidos biológicos moles, a Eq. (2.26) resulta, portanto, em

$$\int_{\Omega_t^\alpha} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}^\alpha dv = \mathbf{0}. \quad (2.27)$$

Sendo a região Ω_t^α arbitrária, conclui-se que a forma local da conservação da quantidade de movimento linear do constituinte α é dada por

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}^\alpha = \mathbf{0} \quad (2.28)$$

Por fim, somando a contribuição de cada constituinte e aplicando a hipótese de decomposição aditiva da tensão total (2.12), obtém-se a expressão da conservação da quantidade de movimento linear para a mistura:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}. \quad (2.29)$$

2.2.2.3 Conservação da quantidade de movimento angular

A quantidade de movimento angular $\mathbf{h}^\alpha(t)$ do constituinte α é definida na configuração espacial como

$$\mathbf{h}^\alpha(t) = \int_{\Omega_t^\alpha} \mathbf{r} \times \rho^\alpha \mathbf{v}^\alpha dv, \quad (2.30)$$

onde \mathbf{r} caracteriza o braço do momento em relação a um ponto fixo \mathbf{x}_0 da seguinte forma:

$$\mathbf{r} = \mathbf{x}^\alpha - \mathbf{x}_0 = \boldsymbol{\chi}^\alpha(\mathbf{X}^\alpha, t) - \mathbf{x}_0. \quad (2.31)$$

O princípio da conservação da quantidade de movimento angular estabelece que a taxa de variação da quantidade de movimento angular $\dot{\mathbf{h}}^\alpha(t)$ deve ser igual ao momento provocado por todas as forças externas, ou seja,

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega_t^\alpha} \mathbf{r} \times \rho^\alpha \mathbf{v}^\alpha dv, = \int_{\partial\Omega_t^\alpha} \mathbf{r} \times \mathbf{t}^\alpha ds, + \int_{\Omega_t^\alpha} \mathbf{r} \times \rho^\alpha \mathbf{b}^\alpha dv. \quad (2.32)$$

De forma análoga a Eq. (2.25), usa-se o teorema de transporte de Reynolds, o princípio da conservação da massa e a relação (2.31) no lado esquerdo da Eq. (2.32), juntamente com o teorema de Cauchy e o teorema da divergência no primeiro termo do lado direito da Eq. (2.32), para obter

$$\int_{\Omega_t^\alpha} \mathbf{r} \times \rho^\alpha \dot{\mathbf{v}}^\alpha dv = \int_{\Omega_t^\alpha} \left(\mathbf{r} \times \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}^\alpha + \boldsymbol{\mathcal{E}} : (\boldsymbol{\sigma}^\alpha)^T \right) dv + \int_{\Omega_t^\alpha} \mathbf{r} \times \rho^\alpha \mathbf{b}^\alpha dv. \quad (2.33)$$

A expressão anterior pode ser reescrita como

$$\int_{\Omega_t^\alpha} \mathbf{r} \times [\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}^\alpha + \rho^\alpha \mathbf{b}^\alpha - \rho^\alpha \dot{\mathbf{v}}^\alpha] dv = \int_{\Omega_t^\alpha} \boldsymbol{\mathcal{E}} : (\boldsymbol{\sigma}^\alpha)^T dv, \quad (2.34)$$

evidenciando a expressão local da conservação da quantidade de movimento, que deve ser nula e considerando a arbitrariedade do volume espacial, pode-se concluir que

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} : (\boldsymbol{\sigma}^\alpha)^T = \mathbf{0}. \quad (2.35)$$

A expressão (2.35) somente é satisfeita se o tensor de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}^\alpha$ do constituinte α for simétrico. Portanto, a conservação da quantidade de movimento angular do constituinte α resulta em

$$\boldsymbol{\sigma}^\alpha = (\boldsymbol{\sigma}^\alpha)^T. \quad (2.36)$$

Somando a contribuição de cada constituinte α na equação (2.36), obtém-se a expressão da conservação da quantidade de movimento angular para a mistura:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T. \quad (2.37)$$

Em resumo, as Eqs. (2.21), (2.29) e (2.37) satisfazem as condições de conservação da massa, da quantidade de movimento linear e da quantidade de movimento angular para a mistura, respectivamente.

Na definição das condições de contorno e condições iniciais do problema bifásico, admite-se a decomposição da superfície Γ_t^α do corpo $\bar{\mathbf{B}}_t$, ocupando a região $\Omega_t^\alpha = \Omega_t^s + \Omega_t^f = \Omega_t$ da seguinte forma,

$$\Gamma_t^s = \Gamma_t^s|_{\mathbf{u}} \cup \Gamma_t^s|_t \quad \text{com} \quad \Gamma_t^s|_{\mathbf{u}} \cap \Gamma_t^s|_t = \emptyset \quad (2.38)$$

sendo $\Gamma_t^s|_u$ e $\Gamma_t^s|_t$ as superfícies do contorno onde são estabelecidos os deslocamentos $\bar{\mathbf{u}}$ e trações de superfície $\bar{\mathbf{t}}$ prescritos, respectivamente, para a matriz sólida porosa. E, similarmente para o fluido, temos

$$\Gamma_t^f = \Gamma_t^f|_p \cup \Gamma_t^f|_q \quad \text{com} \quad \Gamma_t^f|_p \cap \Gamma_t^f|_q = \emptyset \quad (2.39)$$

sendo $\Gamma_t^f|_p$ e $\Gamma_t^f|_q$ as superfícies do contorno onde prescreve-se a pressão \bar{p} e o fluxo de fluido \bar{q} , respectivamente. O conjunto de equações e restrições apresentados nesta seção resulta em:

Conservação da massa	$\text{div}(\mathbf{v}^s + \mathbf{w}) = 0$
Lei de Darcy	$\mathbf{w} = -\mathbf{k} \text{ grad } p$
Conservação da quantidade de movimento linear	$\text{div } \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$
Conservação da quantidade de movimento angular	$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T$
Decomposição da tensão de Cauchy	$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^s - p\mathbf{I}$
Condições de contorno de Dirichlet - Deslocamento	$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \text{ em } \Gamma_t^s _u$
Condição de contorno de Neumann - Tração na superfície	$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma}\mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} \text{ em } \Gamma_t^s _t$
Condições de contorno de Dirichlet - Pressão	$p = \bar{p} \text{ em } \Gamma_t^f _p$
Condição de contorno de Neumann - Fluxo na superfície	$\mathbf{q} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} = \bar{q} \text{ em } \Gamma_t^f _q$

2.2.3 Forma fraca das equações de governo

As equações de balanço mecânico e de massa apresentadas anteriormente se encontram na chamada forma forte ou diferencial do problema bifásico. Comumente, quando deseja-se a implementação numérica através do método de elementos finitos, torna-se necessário transformar essas equações para a forma fraca ou integral. De acordo com [Bonet e Wood \(2008\)](#), a forma fraca das equações de governo pode ser obtida através do princípio dos trabalhos virtuais. Sendo assim, a seguir é apresentado as operações necessárias para obter a formulação fraca (ou variacional) do problema em estudo.

A forma fraca da conservação da quantidade de movimento linear (equilíbrio estático do corpo) pode ser obtida multiplicando a Eq. (2.29) por um campo de deslocamento virtual $\delta\mathbf{u} \in \mathcal{V}_u$, sendo \mathcal{V}_u o espaço de deslocamentos cinematicamente admissíveis da mistura, e integrando os termos sobre todo o domínio Ω_t ,

$$\int_{\Omega_t} \text{div } \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta\mathbf{u} \, dv = 0. \quad \forall \delta\mathbf{u} \in \mathcal{V}_u. \quad (2.40)$$

Utilizando a regra,

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \mathbf{u} = \operatorname{div} (\boldsymbol{\sigma} \delta \mathbf{u}) - \boldsymbol{\sigma} : \operatorname{grad} \delta \mathbf{u}, \quad (2.41)$$

podemos expressar a Eq. (2.40) como

$$\int_{\Omega_t} \operatorname{div} (\boldsymbol{\sigma} \delta \mathbf{u}) \, dv - \int_{\Omega_t} \boldsymbol{\sigma} : \operatorname{grad} \delta \mathbf{u} \, dv = 0. \quad (2.42)$$

Utilizando a hipótese de decomposição aditiva da tensão total (2.12) e aplicando o teorema da divergência, obtém-se

$$\int_{\Omega_t} \boldsymbol{\sigma}^s : \delta \mathbf{e} \, dv - \int_{\Omega_t} p \operatorname{tr}(\delta \mathbf{e}) \, dv - \int_{\Gamma_t^s | \bar{\mathbf{t}}} \bar{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u} \, ds = 0, \quad \forall \delta \mathbf{u} \in \mathcal{V}_u, \quad (2.43)$$

onde $\delta \mathbf{e} = \operatorname{sym}(\operatorname{grad} \delta \mathbf{u})$ é o campo de variações do tensor de deformações de Euler-Almansi e $\bar{\mathbf{t}} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}$ é o vetor tração na superfície.

A obtenção da forma fraca da conservação da massa é realizada de maneira similar à conservação da quantidade de movimento linear. Dessa forma, multiplicando a Eq. (2.21) por um campo de pressão virtual $\delta p \in \mathcal{V}_p$, sendo \mathcal{V}_p o espaço das pressões virtuais cinematicamente admissíveis, e integrando os termos sobre todo o domínio Ω_t , obtém-se

$$\int_{\Omega_t} \operatorname{div} \mathbf{v}^s \delta p \, dv + \int_{\Omega_t} \operatorname{div} \mathbf{w} \delta p \, dv, \quad \forall \delta p \in \mathcal{V}_p \quad (2.44)$$

Usando a regra,

$$\operatorname{div} \mathbf{w} \delta p = \operatorname{div} (\mathbf{w} \delta p) - \mathbf{w} \cdot \operatorname{grad} \delta p, \quad (2.45)$$

e o teorema da divergência, pode-se reescrever a Eq. (2.44) como

$$\int_{\Gamma_t^f | \bar{q}} \delta p \bar{q} \, ds + \int_{\Omega_t} \delta p \operatorname{div} \mathbf{v}^s \, dv - \int_{\Omega_t} \operatorname{grad} \delta p \cdot \mathbf{w} \, dv = 0. \quad \forall \delta p \in \mathcal{V}_p \quad (2.46)$$

As Eqs. (2.43) e (2.46) apresentam a forma fraca da equação de conservação da quantidade de movimento linear e do balanço de massa, respectivamente. Em resumo, as equações variacionais do sistema bifásico, referentes as fases sólida e fluida, são expressas, respectivamente, por

$$\delta W^s = \int_{\Omega_t} \boldsymbol{\sigma}^s : \delta \mathbf{e} \, dv - \int_{\Omega_t} p \operatorname{tr}(\delta \mathbf{e}) \, dv - \int_{\Gamma_t^s | \bar{\mathbf{t}}} \bar{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u} \, ds = 0, \quad \forall \delta \mathbf{u} \in \mathcal{V}_u, \quad (2.47)$$

e

$$\delta W^f = \int_{\Omega_t} \delta p \operatorname{div} \mathbf{v}^s \, dv - \int_{\Omega_t} \operatorname{grad} \delta p \cdot \mathbf{w} \, dv + \int_{\Gamma_t^f | \bar{q}} \delta p \bar{q} \, ds = 0, \quad \forall \delta p \in \mathcal{V}_p. \quad (2.48)$$

2.2.4 Modelos de permeabilidade hidráulica

Como destacado nas seções anteriores, a permeabilidade hidráulica é uma propriedade de material que depende de diversos fatores e tem papel fundamental na modelagem do fluxo de fluido intersticial dos tecidos hidratados. Além disto, estes tecidos quando submetidos a grandes deformações e, dependendo da arquitetura da matriz sólida, podem induzir anisotropia sobre o fluxo de fluido. Embora este trabalho não utilize modelos de permeabilidade hidráulica anisotrópicos, optou-se por apresentar brevemente algumas relações constitutivas específicas, incluindo ortotropia, isotrópico transversal e isotropia.

2.2.4.1 Lei de transporte

O tensor de permeabilidade hidráulica descreve as interações entre o fluido intersticial e a matriz sólida porosa. A velocidade relativa entre as fases, dada pela equação (2.22), pode ser governada pela lei de Darcy,

$$\mathbf{w} = -\mathbf{k} \text{grad } p, \quad (2.49)$$

sendo \mathbf{k} o tensor de segunda ordem de permeabilidade hidráulica e p a pressão do fluido intersticial. A relação (2.49) é dada na configuração euleriana, portanto, \mathbf{k} representa o tensor de permeabilidade espacial. O tensor de permeabilidade material pode ser obtido por,

$$\mathbf{K} = J\mathbf{F}^{-1}\mathbf{k}\mathbf{F}^{-T}, \quad (2.50)$$

sendo \mathbf{F} e J , o gradiente de deformação e o Jacobiano de transformação volumétrica, respectivamente, definidos pelas Eqs. (2.6) e (2.7).

No âmbito de implementação numérica de elementos finitos não linear, a operação de linearização do tensor de permeabilidade hidráulica ao longo de incrementos de deslocamento $\Delta\mathbf{u}$ da matriz sólida é necessária, *i.e.*,

$$D\mathbf{K}[\Delta\mathbf{u}] = \mathbb{K} : \frac{1}{2}D\mathbf{C}[\Delta\mathbf{u}], \quad (2.51)$$

onde $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T\mathbf{F}$ é o tensor de Cauchy-Green à direita, D é o operador de derivada direcional, e

$$\mathbb{K} = 2\frac{\partial\mathbf{K}}{\partial\mathbf{C}} \quad (2.52)$$

é o tensor de quarta ordem representando a taxa de variação da permeabilidade hidráulica com a deformação na configuração material. A versão espacial desse tensor pode ser obtida usando a operação de *Push-Foward*:

$$\mathbb{k} = J^{-1}(\mathbf{F} \otimes \mathbf{F}) : \mathbb{K} : (\mathbf{F}^T \otimes \mathbf{F}^T). \quad (2.53)$$

2.2.4.2 Restrições adicionais

Nos modelos voltados à biomecânica de tecidos biológicos moles, é comum considerar restrições que relacionam a permeabilidade hidráulica com a deformação volumétrica da matriz sólida. Nesse caso, a restrição consiste em reduzir a permeabilidade hidráulica com o fechamento dos poros da matriz sólida, visando interromper o fluxo de fluido intersticial no limite do fechamento do poro. Quando os constituintes do material bifásico são admitidos ser intrinsecamente incompressíveis, e considerando a hipótese de saturação (2.12), a conservação da massa para a matriz sólida pode ser expressa por

$$\varphi^s = J^{-1}\varphi_r^s, \quad (2.54)$$

onde φ^s e φ_r^s representam as frações volumétricas da matriz sólida nas configurações espacial e referencial, respectivamente. O fechamento dos poros ocorre quando todo o fluido intersticial é expulso dos poros, *i.e.*, $\varphi^f = 0$ e $\varphi^s = 1$, resultando em $J = \varphi_r^f$, onde φ_r^f é a porosidade na configuração de referencial. Portanto, a restrição em questão requer a seguinte condição:

$$\lim_{J \rightarrow \varphi_r^s} \mathbf{K} = \mathbf{0}, \quad \lim_{J \rightarrow \varphi_r^s} \mathbf{k} = \mathbf{0}. \quad (2.55)$$

2.2.4.3 Exemplos de modelos de permeabilidade hidráulica

De acordo com Ateshian e Weiss (2010), o modelo mais genérico para o tensor de permeabilidade hidráulica é o modelo ortotrópico. Com base neste modelo, outros podem ser derivados, como o transversalmente isotrópico e o isotrópico. Sendo assim, a configuração material do tensor de permeabilidade hidráulica ortotrópico pode ser expressa como $\mathbf{K}(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3, \mathbf{C})$, sendo \mathbf{A}_a ($a = 1, 2, 3$) os vetores normais aos planos de ortotropia ($\mathbf{A}_a \cdot \mathbf{A}_b = \delta_{ab}$) e \mathbf{C} o tensor de Cauchy-Green à direita. A expressão para \mathbf{K} é dada por

$$\mathbf{K} = K_0 \mathbf{C}^{-1} + \sum_{a=1}^3 K_1^a \mathbf{M}_a + K_2^a (\mathbf{M}_a \mathbf{C} + \mathbf{C} \mathbf{M}_a), \quad \mathbf{M}_a = \mathbf{A}_a \otimes \mathbf{A}_a, \quad (2.56)$$

onde os escalares K_0, K_1^a, K_2^a são funções dos seguintes invariantes:

$$I_3 = \det \mathbf{C}, \quad I_{a+3} = \mathbf{M}_a : \mathbf{C}, \quad I_{a+6} = \mathbf{M}_a : \mathbf{C}^2, \quad a = 1, 2, 3. \quad (2.57)$$

Para garantir a consistência da formulação, é necessário impor as seguintes restrições às funções escalares:

$$K_i(I_j) \geq 0, \quad \forall I_j = 3, \dots, 9 \quad (2.58)$$

onde K_i representa K_0, K_1^a, K_2^a . Além disso, para satisfazer a restrição (2.55), tem-se que

$$\lim_{J \rightarrow \varphi_r^s} K_i = 0, \quad (2.59)$$

onde $J = \sqrt{I_3}$. Usando a operação de *push-forward*, obtêm-se o tensor de permeabilidade hidráulica espacial,

$$\mathbf{k} = k_0 \mathbf{I} + \sum_{a=1}^3 k_1^a \mathbf{m}_a + k_2^a (\mathbf{m}_a \mathbf{b} + \mathbf{b} \mathbf{m}_a), \quad \mathbf{m}_a = \mathbf{F} \mathbf{M}_a \mathbf{F}^T \quad (2.60)$$

onde

$$k_0 = J^{-1} K_0, \quad k_1^a = J^{-1} K_1^a, \quad k_2^a = J^{-1} K_2^a, \quad (2.61)$$

e $\mathbf{b} = \mathbf{F} \mathbf{F}^T$ é o tensor de Cauchy-Green à esquerda. A derivada do tensor de permeabilidade hidráulica em relação a deformação pode ser obtida por meio da relação (2.52) e da regra da cadeia de diferenciação. Logo, a configuração espacial dessa derivada pode ser obtida usando a relação (2.53).

Como já mencionado, outras relações constitutivas considerando simetrias maiores como isotropia transversal e isotropia podem ser derivadas dessa formulação genérica. Esses modelos também são apresentados no trabalho de [Ateshian e Weiss \(2010\)](#), no entanto, optou-se por apresentar o modelo mais empregado na literatura, especialmente no contexto de cinemática finita.

A relação constitutiva mais utilizada para o tensor de permeabilidade hidráulica é o modelo isotrópico de Holmes-Mow, expresso na configuração espacial como

$$\mathbf{k} = k_0(J) \mathbf{I}, \quad (2.62)$$

onde a função escalar $k_0(J)$ é dada por

$$k(J) = k_{0r} \left[\left(\frac{J - \varphi_r^s}{1 - \varphi_r^s} \right)^\alpha \exp \left(\frac{1}{2} M_0 (J^2 - 1) \right) \right], \quad (2.63)$$

sendo k_{0r} , α e M_0 parâmetros materiais. Essa formulação representa um caso especial da Equação (2.60), com $k_1^a = k_2^a = 0$, não exibindo anisotropia induzida por deformação, *i.e.*, o tensor de permeabilidade hidráulica é isotrópico na configuração espacial. No entanto, na configuração material, vale destacar que \mathbf{K} pode não ser um tensor isotrópico para estados de deformação arbitrários. Com base nas relações (2.52) e (2.53), pode-se obter a forma espacial da variação da permeabilidade hidráulica em relação a deformação, expressa por

$$\mathbb{k} = k_{0r} \left(\left[1 + J \left(\frac{\alpha}{J - \varphi_r^s} + M_0 J \right) \right] \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} - 2 \mathbf{I} \odot \mathbf{I} \right), \quad (2.64)$$

onde o símbolo \otimes define o seguinte produto tensorial:

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})_{ijkl} = (\mathbf{A})_{ij} (\mathbf{B})_{kl}, \quad (2.65)$$

e o símbolo \odot define a seguinte operação tensorial:

$$(\mathbf{A} \odot \mathbf{B})_{ijkl} = \frac{1}{2} [(\mathbf{A})_{ik} (\mathbf{B})_{jl} + (\mathbf{A})_{il} (\mathbf{B})_{jk}]. \quad (2.66)$$

2.3 Identificação de parâmetros constitutivos

O modelo bifásico apresentado na Seção 2.2 refere-se à formulação do problema direto. Esse tipo de problema requer um conhecimento completo e preciso das causas para a determinação dos efeitos, *i.e.*, ao definir as condições iniciais e de contorno, e as propriedades dos materiais, pode-se obter as variáveis de interesse como os campos de deslocamento e pressão de poro. Por outro lado, os problemas denominados de inversos utilizam a causa e o efeito para determinar parâmetros do sistema que justificam o efeito através da causa. Em geral, esse tipo de problema é mais complexo, sendo o problema direto apenas uma sub etapa do problema inverso (TARANTOLA, 2004).

A identificação de parâmetros constitutivos é frequentemente referida como um problema inverso, cujo objetivo é determinar os parâmetros materiais a partir de medidas experimentais (VAZ et al., 2016). A caracterização destes parâmetros pode ser muito desafiadora, especialmente quando o número de propriedades é significativo, por exemplo, quando materiais anisotrópicos e viscoelásticos fazem parte do problema. Neste caso, diferentes medidas experimentais podem ser necessárias para definir os parâmetros materiais. Além disso, a qualidade destes parâmetros depende de outros fatores como incertezas nas medições experimentais, imperfeições no modelo computacional e na solução do problema inverso. (MARKIEWICZ; LANGRAND; NOTTA-CUVIER, 2017; BUDDAY et al., 2017; VAZ et al., 2016).

Considerando que os problemas inversos não apresentam solução única ou contínua em função das variáveis observadas, a utilização de métodos numéricos tornou-se fundamental para a obtenção de soluções. Apesar do elevado custo computacional, o método FEMU (*finite element model updating method*) é a abordagem computacional mais comum no ajuste de parâmetros constitutivos quando quer se considerar características experimentais heterogêneas. Esse método consiste em um processo iterativo de simulações de elementos finitos de modo a determinar o conjunto de parâmetros materiais que minimiza a diferença entre as medições calculadas e as obtidas por meio de um ensaio mecânico (medições experimentais). Por se tratar de um problema de minimização (ou maximização), a estratégia mais vantajosa para determinar os parâmetros materiais de problemas mecânicos que envolvem modelos constitutivos sofisticados, cinemática finita e estados de tensão não uniformes é baseada em técnicas de otimização, as quais podem ser solucionados por meio de métodos clássicos baseados em gradiente ou em abordagens heurísticas. (AVRIL et al., 2008; MARKIEWICZ; LANGRAND; NOTTA-CUVIER, 2017; VAZ et al., 2016).

2.3.1 O problema de otimização

A formulação geral do problema de otimização requer um conjunto de variáveis de projeto \mathbf{p} (neste caso, os parâmetros constitutivos) e uma função objetivo $f(\mathbf{p})$ que depende

não somente das variáveis de projeto, mas também de um conjunto de restrições que asseguram parâmetros admissíveis, *i.e.*, que não violem determinadas regras fundamentais (KLEIBER, 1997). Matematicamente, o problema pode ser formulado como

$$\begin{aligned} & \text{Minimize } f(\mathbf{p}) \\ & \text{sujeita a } \mathbf{p} \in \mathcal{S}, \\ & \text{sendo } \mathcal{S} = \left\{ \mathbf{p} \in \mathbb{R}^k \mid h_j(\mathbf{p}) = 0, j = 1, \dots, n; g_i(\mathbf{p}) \leq 0, i = 1, \dots, m \right\}, \end{aligned} \quad (2.67)$$

onde $\mathbf{p} = [p_1 \ p_2 \ \dots \ p_k \ \dots \ p_{n_d}]^T$ é o vetor de projeto contendo n_d parâmetros materiais p_k e \mathcal{S} é o espaço de busca ou região factível (ou região viável). No caso da identificação de parâmetros constitutivos, a função objetivo representa uma medida de erro entre as medidas experimental e aquelas obtidas pelo modelo. A região factível \mathcal{S} (espaço de busca) é definida pelas n restrições de igualdade $h_j(\mathbf{p})$ e m restrições de desigualdade $g_i(\mathbf{p})$.

Comumente, as restrições impostas às variáveis de projetos são os limites inferior p_k^{inf} e superior p_k^{sup} , tal que $p_k^{\text{inf}} \leq p_k \leq p_k^{\text{sup}}$. Os problemas sem restrições ou que contém somente os limites laterais das variáveis de projeto são denominados de problemas otimização sem restrições (*unconstrained optimization problem*). Caso contrário, quando o problema contém restrições que delimitam o espaço de busca \mathcal{S} , além daquelas que definem o intervalo admissível das variáveis de projeto, são chamados de problemas de otimização com restrições (*constrained optimization problem*).

2.3.2 Métodos de solução

Diante da notável variedade de problemas de otimização, nota-se também uma diversidade significativa de métodos de solução. No contexto de soluções numéricas, esses métodos podem ser classificados da seguinte forma: métodos baseados em gradiente, métodos livres de gradiente, métodos de busca direta e métodos heurísticos.

A solução de problemas de otimização por meio de métodos baseados em gradiente requer um conhecimento preciso da formulação matemática do problema, uma vez que é necessário avaliar a derivada da função objetivo durante o processo de solução. No caso de problemas de otimização com restrições, além do gradiente da função objetivo, deve-se calcular as derivadas das funções de restrição em relação às variáveis de projeto, tornando este problema mais complexo. Em contrapartida, os métodos livres de gradiente não requerem o cálculo analítico das derivadas das funções do problema, contudo, utilizam estratégias numéricas como diferenças finitas para aproximar essas derivadas (ARORA, 2016).

As estratégias de solução que não dependem do uso do gradiente no problema de otimização, seja de forma analítica ou aproximada, são denominadas métodos de busca direta. Esses métodos utilizam apenas os valores da função no processo de busca, destacando-se pela capacidade de continuar a otimização mesmo quando alguns valores da

função objetivo não podem ser avaliados. Embora os métodos heurísticos sejam comumente classificados como métodos de busca direta, devido à não necessidade do cálculo do gradiente das funções envolvidas no problema de otimização, existem características que justificam a distinção dessa classe, como a capacidade de explorar de forma eficiente espaços de busca complexos, sem garantir a solução global. Neste contexto, as abordagens híbridas, que utilizam mais uma técnica de otimização no processo de busca, emergem como alternativa para suprir a deficiência dos métodos heurísticos. A combinação da solução aproximada obtida por um método heurístico é utilizada como ponto de partida em um método de busca local, permitindo a obtenção da solução global com precisão. Ainda assim, os métodos heurísticos podem ser empregados em quase todos os tipos de problemas, principalmente quando associados a abordagens de otimização híbrida. Entretanto, é importante observar que, mesmo para problemas de pequena escala, esses métodos podem demandar um grande número de avaliações da função objetivo, resultando em um custo computacional elevado (ARORA, 2016).

2.3.2.1 Particle Swarm Optimization

Pertencente à classe de métodos heurísticos inspirados na natureza e baseado em inteligência de enxame, o PSO (*Particle Swarm Optimization*) é um algoritmo de otimização que tenta modelar o comportamento coletivo de uma população de indivíduos durante a execução de um objetivo *i.e.*, a minimização de uma função objetivo. Essa técnica, desenvolvida inicialmente por Kennedy e Eberhart (1995), possui certas similaridades com algoritmos evolucionários, mas apresentando um algoritmo mais simples e com poucos parâmetros de controle quando comparado com algoritmos genéticos, por exemplo. Devido à sua versatilidade, podem ser utilizados em diferentes problemas como mecânicos, otimização estrutural, otimização multi-objetivo, treinamento de redes neurais artificiais, dentre outros (KENNEDY; EBERHART, 1995; ARORA, 2016; VAZ et al., 2016; PEDERSEN, 2010).

No primeiro passo do algoritmo do PSO, iteração $k = 0$, a população inicial $\{\mathbf{p}^{(0)}\}$ com n_p partículas e velocidades $\{\mathbf{v}^{(0)}\}$ são geradas de forma aleatória dentro dos limites do espaço de busca \mathcal{S} , sendo

$$\{\mathbf{p}^{(0)}\} = \{\mathbf{p}_1^{(0)}, \mathbf{p}_2^{(0)}, \dots, \mathbf{p}_{n_p}^{(0)}\} \quad (2.68)$$

e

$$\{\mathbf{v}^{(0)}\} = \{\mathbf{v}_1^{(0)}, \mathbf{v}_2^{(0)}, \dots, \mathbf{v}_{n_p}^{(0)}\}. \quad (2.69)$$

Sendo assim, o PSO consiste em conduzir cada partícula no espaço de busca através da modificação de sua velocidade sob três aspectos: a velocidade momentânea, a melhor posição individual e a posição do líder do enxame.

O aspecto da velocidade momentânea refere-se à tendência da partícula em manter sua trajetória, sendo definido através do parâmetro inercial w . O aspecto da melhor posição

individual lida com a capacidade de memória e autoconhecimento da partícula, *i.e.*, a inclinação da partícula de se mover na direção da sua melhor posição até o momento, sendo definido pelo parâmetro cognitivo c_1 . O aspecto da posição do líder do enxame diz respeito ao comportamento social, ou seja, a tendência da partícula de se mover em direção à posição do líder do enxame. Esse aspecto é definido pelo parâmetro social c_2 . Os parâmetros citados anteriormente e o tamanho do enxame são fundamentais e podem variar substancialmente dependendo do problema de otimização. Algumas considerações sobre a escolha desses e outros parâmetros podem ser encontradas em [Kennedy e Eberhart \(1995\)](#) e [Pedersen \(2010\)](#).

Nas iterações subsequentes do algoritmo, as operações mais comuns no PSO envolvem o cálculo da nova velocidade $\{\mathbf{v}^{(k+1)}\}$ e posição $\{\mathbf{p}^{(k+1)}\}$ como

$$\{\mathbf{v}^{(k+1)}\} = w \{\mathbf{v}^{(k)}\} + \mathbf{U}(0, c_1) \otimes (\mathbf{p}_{ib}^{(k)} - \mathbf{p}^{(k)}) + \mathbf{U}(0, c_2) \otimes (\mathbf{p}_{gb}^{(k)} - \mathbf{p}^{(k)}) \quad (2.70)$$

e

$$\{\mathbf{p}^{(k+1)}\} = \{\mathbf{p}^{(k)}\} + \{\mathbf{v}^{(k+1)}\}, \quad (2.71)$$

sendo k a iteração, \mathbf{p}_{ib} e \mathbf{p}_{gb} são as melhores posições individual e global, respectivamente, w é o parâmetro inercial, e $\mathbf{U}(0, c_1)$ e $\mathbf{U}(0, c_2)$ representam vetores com números aleatórios definidos no intervalo $[0, c_1]$ e $[0, c_2]$, onde c_1 e c_2 são os parâmetros cognitivo e social, respectivamente. O operador $(\bullet) \otimes (\bullet)$ indica o produto tensorial ([VAZ et al., 2015](#)). Mais detalhes do algoritmo podem ser encontrados em [Arora \(2016, p. 766\)](#).

Dentre as vantagens do PSO, pode-se destacar a habilidade de explorar diversas regiões do espaço de busca visando encontrar o potencial mínimo local do problema. Essa vantagem é especialmente utilizada em abordagens de otimização híbrida, nas quais emprega-se um método como o PSO para determinar aproximadamente o mínimo local e, na sequência, aplica-se um método de busca local para determinar o ponto mínimo com precisão ([TRELEA, 2003](#)). Apesar disso, o PSO tem a capacidade de concentrar a busca em torno de uma partícula propícia à solução, tornando possível a localização precisa do ponto ótimo. A exemplo disso, cita-se o trabalho de [Vaz, Cardoso e Stahlschmidt \(2013\)](#) que emprega o PSO na identificação de parâmetros constitutivos de modelos de elasto-plasticidade sob deformações finitas.

2.3.2.2 Método de Nelder-Mead

O método de Nelder-Mead é uma estratégia de otimização de busca local baseada nos métodos *simplex*. Trata-se de um método de busca direta, portanto, não necessita que as funções do problema sejam contínuas nem diferenciáveis, pois usam apenas valores discretos destas funções ([ARORA, 2016](#)). O conceito introduzido por [Nelder e Mead \(1965\)](#) é avaliar a função objetivo nos $n + 1$ vértices do *simplex* a fim de movê-lo na direção do ponto mínimo. Esse movimento envolve a substituição do vértice mais distante do ponto

mínimo, *i.e.*, que apresenta o maior valor da função objetivo, pelo vértice que contém o menor valor da função objetivo. Essa tarefa é obtida usando quatro operações: reflexão, expansão, contração e encolhimento.

No início de cada iteração do algoritmo, $k \geq 0$, é gerado um *simplex* Δ_k no espaço de busca \mathcal{S} , formado pelos $n + 1$ vértices $\mathbf{p}_1^{(k)}, \mathbf{p}_2^{(k)}, \dots, \mathbf{p}_{n+1}^{(k)}$ e avalia-se a função objetivo em todos esses vértices. Com base nesses valores, os vértices são renomeados e organizados do menor para o maior valor da função objetivo, ou seja:

$$f_1^{(k)} \leq f_2^{(k)} \leq \dots \leq f_{n+1}^{(k)}, \quad (2.72)$$

sendo $f_n^{(k)} = f_n^{(k)}(\mathbf{p}_n^{(k)})$. Assim, $\mathbf{p}_1^{(k)}$ e $\mathbf{p}_{n+1}^{(k)}$ representam os pontos com o menor e o maior valor da função objetivo, também chamados de melhor e pior ponto, respectivamente. Além do esquema de organização dos vértices, o centroide \mathbf{p}_0 do *simplex* é fundamental para as operações do método, sendo definido por

$$\mathbf{p}_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i^{(k)}, \quad (2.73)$$

sendo n os melhores pontos, ou seja, todos os pontos exceto o pior ($\mathbf{p}_{n+1}^{(k)}$).

As operações básicas do método envolvem a substituição do pior ponto $\mathbf{p}_{n+1}^{(k)}$ usando as operações de reflexão \mathbf{p}_R , expansão \mathbf{p}_E , contração externa \mathbf{p}_{CE} e \mathbf{p}_{CI} interna, definidas por

$$\mathbf{p}_R^{(k)} = \mathbf{p}_0^{(k)} + \rho (\mathbf{p}_0^{(k)} - \mathbf{p}_{n+1}^{(k)}) \quad (2.74)$$

$$\mathbf{p}_E^{(k)} = \mathbf{p}_0^{(k)} + \gamma (\mathbf{p}_R^{(k)} - \mathbf{p}_0^{(k)}) \quad (2.75)$$

$$\mathbf{p}_{CE}^{(k)} = \mathbf{p}_0^{(k)} + \beta (\mathbf{p}_R^{(k)} - \mathbf{p}_0^{(k)}) \quad (2.76)$$

$$\mathbf{p}_{CI}^{(k)} = \mathbf{p}_0^{(k)} - \beta (\mathbf{p}_0^{(k)} - \mathbf{p}_{n+1}^{(k)}), \quad (2.77)$$

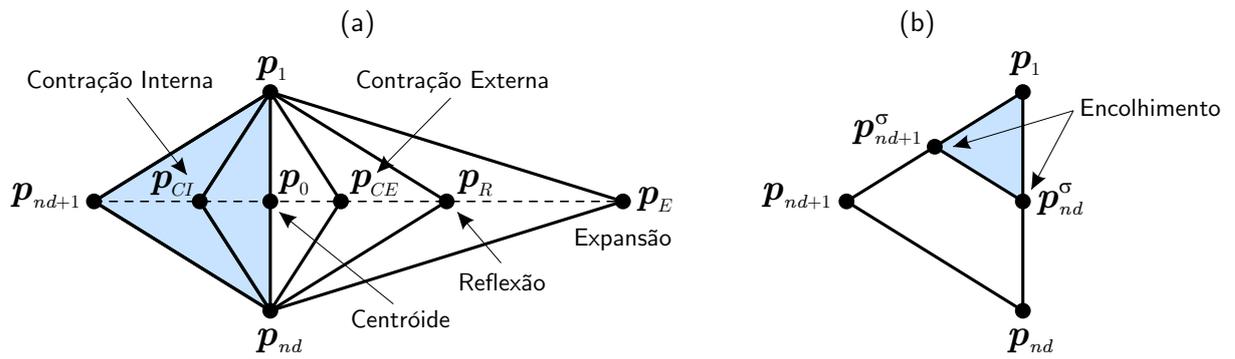
onde ρ , γ e β são os parâmetros que definem as operações de reflexão, expansão e contração, respectivamente. Essas operações são usadas de forma sequencial no algoritmo e quando nenhuma delas promove melhores resultados, o algoritmo realiza a operação de encolhimento, definida por

$$\mathbf{p}_m^{(k)} = \mathbf{p}_1^{(k)} + \sigma (\mathbf{p}_m^{(k)} - \mathbf{p}_1^{(k)}), \quad m = 2, \dots, n + 1 \quad (2.78)$$

onde σ é o parâmetro de encolhimento. Mais detalhes do método e algoritmo podem ser encontrados em [Nelder e Mead \(1965\)](#) e [Lagarias et al. \(1998\)](#).

O método de Nelder-Mead tem sido o mais utilizado dentro dos métodos de busca direta, sendo aplicado em problemas de otimização sem restrições, especialmente nas áreas de engenharia e medicina. Os principais fatores dessa popularidade deve-se à facilidade de implementação do método, a não utilização dos gradientes das funções envolvidas no problema e o relativo baixo custo computacional ([GONÇALVES, 2013](#)).

Figura 4 – Operações do método de Nelder-Mead.



Fonte: Adaptado de Vaz et al. (2015).

3 Material e Métodos

3.1 Ensaios experimentais

Como mencionado anteriormente na seção (1.2), os ensaios experimentais foram realizados pela Universidade Comunitária da Região de Chapecó - UNOCHAPECÓ, a qual é parceira do laboratório GRANTE da UFSC. Nesta seção, é fornecida uma descrição detalhada do ensaio realizado para uma melhor compreensão do modelo de elementos finitos, incluindo suas condições de contorno.

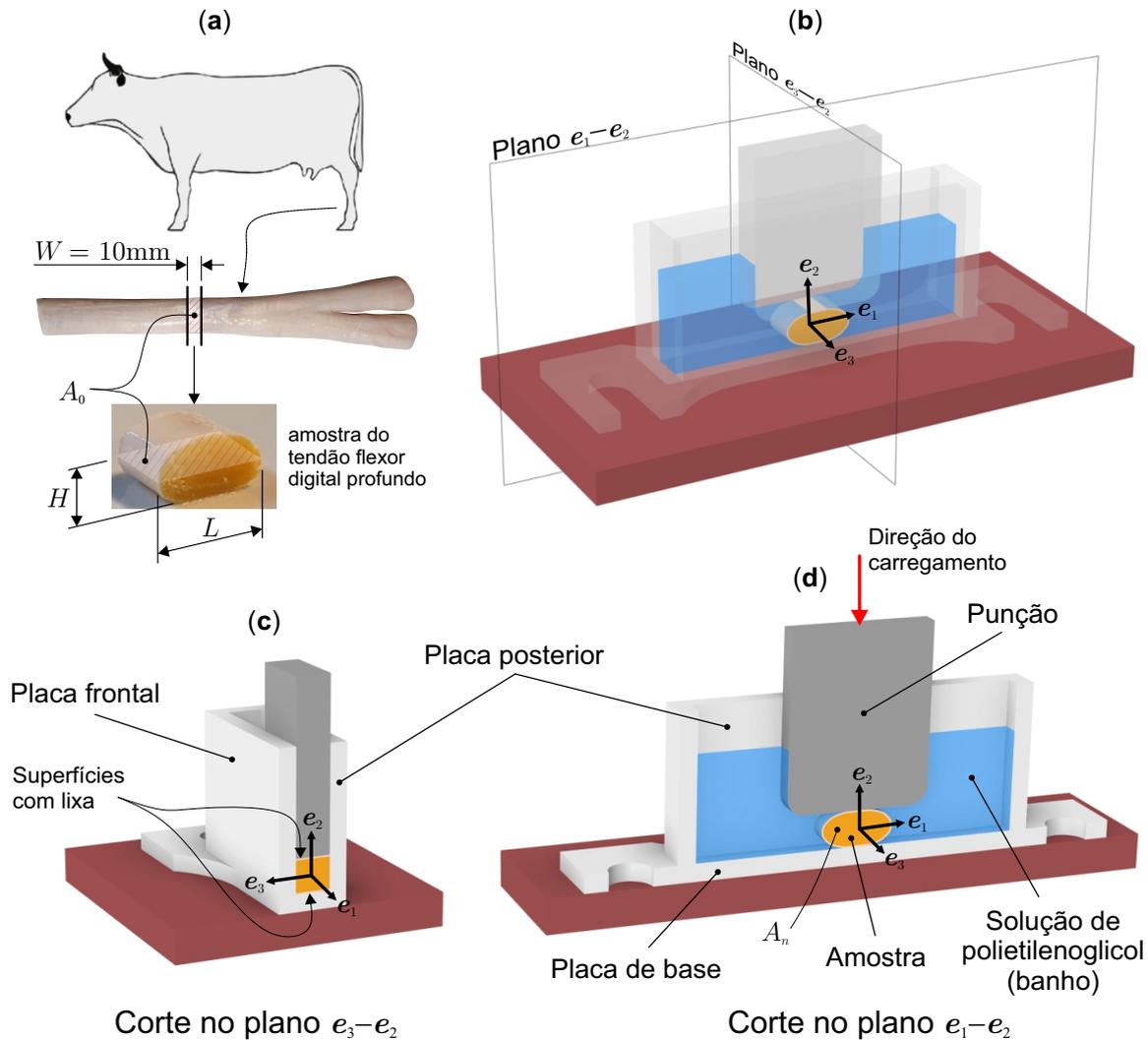
3.1.1 Preparação das amostras

As amostras utilizadas nos ensaios são partes de tendões flexores digitais profundos de membros posteriores de bovinos ($n = 10$). Logo após o sacrifício dos animais e a dissecação, os tendões e tecidos conjuntivos adjacentes foram congelados a -20°C . No dia anterior aos ensaios, os tendões foram descongelados à temperatura ambiente ($\sim 20^{\circ}\text{C}$) e todos os tecidos adjacentes foram removidos com cuidado a fim de não danificar o epitendão. Em seguida, amostras com um comprimento $W = 10\text{mm}$ foram cortadas a partir da porção média de cada tendão, transversalmente às fibras de colágeno (eixo longitudinal do tendão), conforme mostrado na Figura 5a. Um total de 15 amostras enquadradas dentro de uma geometria característica com altura $H = 10.12_{-0.12}^{+1.88}\text{mm}$ e largura $L = 20.18_{-1.18}^{+1.82}\text{mm}$ foram escolhidas para os ensaios mecânicos. Além disso, a fim de estabelecer um equilíbrio de concentrações antes dos ensaios, as amostras foram imersas em uma solução de Polietilenoglicol a 8% em peso (PEG-20kPa, Sigma-Aldrich) preparada com solução tampão Tris-HCl (TBS, 10mM, pH 7, 6, Sigma-Aldrich) e armazenadas a 4°C por 8 a 12 horas. Essa solução particular mostrou-se capaz de não alterar consideravelmente o teor de água encontrado em tendões recém congelados (SAFA et al., 2017).

3.1.2 Preparação do ensaio mecânico

Com base no trabalho de Böl et al. (2015), os ensaios de compressão semi-confinada foram realizados em um dispositivo construído para tal fim, ilustrado nas Figuras 5b, 5c e 5d. O dispositivo é composto por chapas de acrílico (PMMA) de 10mm de espessura, que foram cortadas a *laser* e montadas usando uma cola específica para acrílico, formando um recipiente fechado, já que os ensaios foram realizados em banho. A cinemática do ensaio consiste em comprimir a amostra na direção \mathbf{e}_2 , permitindo que a amostra se deforme na direção \mathbf{e}_1 , mas restringindo sua deformação na direção \mathbf{e}_3 por meio das placas frontal e posterior, conforme mostrado na Figura 5c. Dessa forma, a amostra é submetida a um estado de compressão com deformação confinada ao plano $\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$ (estado plano de deformação), sendo esse o plano de observação (transversal às fibras de colágeno).

Figura 5 – Representação esquemática do ensaio mecânico. (a) amostra com 10mm de comprimento obtida da porção média do tendão bovino flexor digital profundo. (b) detalhes do aparato experimental de compressão semi-confinada. (c) corte no plano $e_3 - e_2$ mostrando detalhes da restrição do movimento da amostra na direção e_3 pelas placas frontal e posterior. (d) corte no plano $e_1 - e_2$ mostrando detalhes do contato da amostra com o banho.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Os ensaios foram realizados à temperatura ambiente ($\sim 20^\circ\text{C}$) em uma máquina de ensaios universal (Biopdi, MBio 1) equipada com uma célula de carga de 50N. A deformação das amostras no plano $e_1 - e_2$ foi registrada por uma câmera monocromática com sensor CMOS de nível industrial (Basler, acA1300-200um) montada com uma lente de distância focal fixa de 50mm (Azure, AZ-5018M3M) a 25 quadros por segundo. Para reduzir os problemas de medição relacionados aos registros, um suporte rígido feito de perfis de alumínio, incluindo um suporte de câmera profissional com cabeça esférica e niveladores, foi usado para alinhar adequadamente a câmera com o plano de medição. Por fim, um anel de luz de microscopia foi usado para ajustar a iluminação.

3.1.3 Protocolo do ensaio e medições

As superfícies frontal e posterior das placas de acrílico que estabelecem o contato com a amostra em sua extensão, bem como as superfícies frontal e posterior do punção, foram revestidas com spray de silicone-politetrafluoretileno (PTFE) a fim de minimizar os problemas de atrito. Uma lixa de granulação 360 foi fixada na parte inferior do punção e na parte superior da placa de base que fazem contato com a amostra na direção do carregamento (ver Figura 5c). Isso garante uma condição sem escorregamento, ajudando a definir um modelo de contato apropriado para as simulações de elementos finitos (discutido na Seção 3.2). Em seguida, a mesma solução descrita na Seção 3.1.1 foi adicionada ao recipiente e as amostras foram colocadas submersas entre as placas frontal e posterior com os fascículos alinhados na direção e_3 (ver Figura 5d).

Logo no início do ensaio, a amostra é submetida a uma pré-carga de 0.1N por 30 segundos (precondicionamento). Em seguida, o relaxamento de tensão presente no teste consiste em prescrever 20% de compressão a 4%/s (fase de compressão), mantendo o punção fixo por 10 minutos (fase de relaxamento). Os dados experimentais são relatados com base na evolução das mudanças de volume das amostras e na razão entre a força de compressão F e a área transversal A_0 não deformada das amostras no plano $e_1 - e_3$. A área transversal foi calculada como $A_0 = LW$, onde L e W são a largura e o comprimento da amostra, conforme ilustrado na Figura 5a. Tendo em vista que o cálculo da força é direto, ou seja, F/A_0 , o procedimento realizado para obtenção do volume é melhor explicado na sequência.

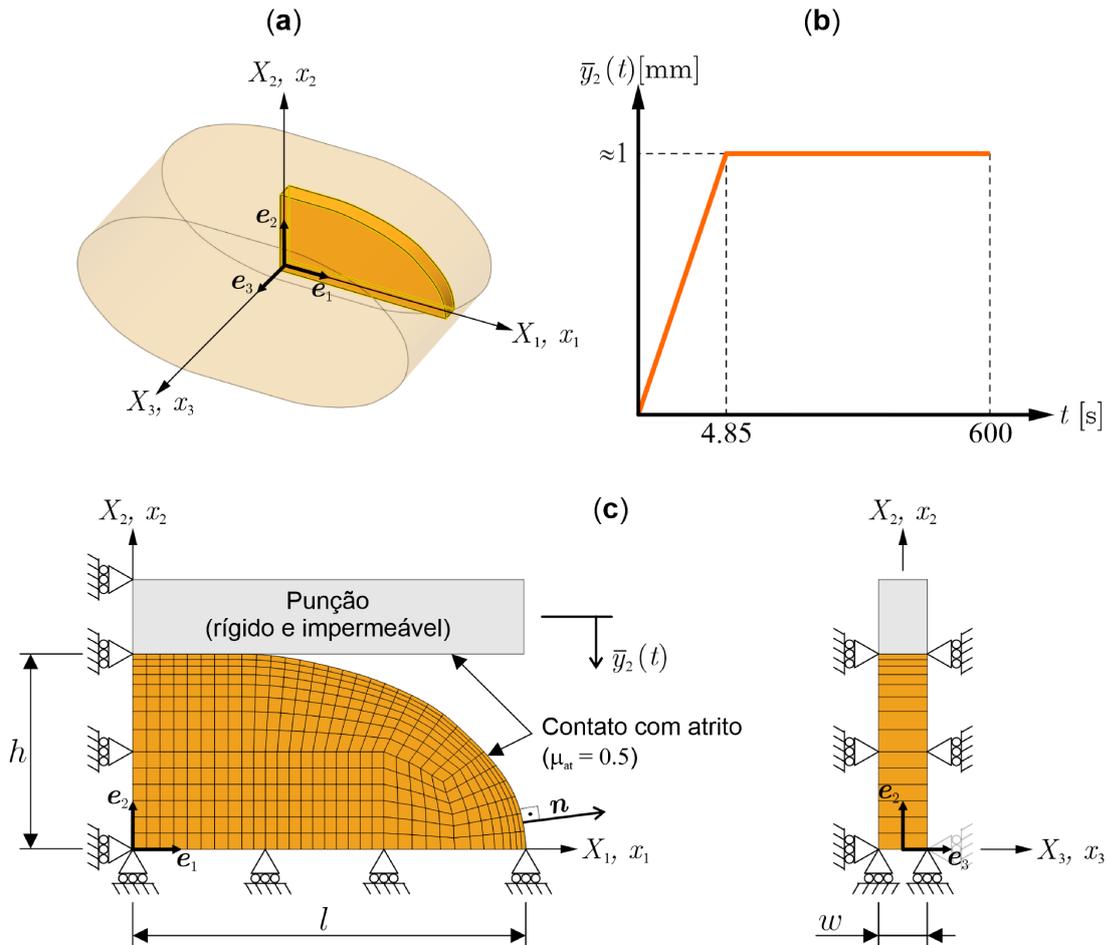
O procedimento para obter o volume V da amostra envolveu o ajuste do tempo de exposição, contraste e brilho da câmera, permitindo isolar o contorno da amostra por meio da saturação do caráter branco do tecido. A imagem digital associada a cada registro foi pós-processada por um código desenvolvido em MATLAB, cuja superfície da amostra no plano de observação $e_1 - e_2$ foi associada à cor branca e os demais *pixels* foram definidos como pretos, gerando uma imagem binária. A partir disso, calculou-se a área A_n (ver Figura 5d) da amostra pela quantidade de *pixels* brancos. Como o comprimento W da amostra é fixo durante todo o teste, o volume da amostra foi calculado por $V = WA_n$. Definindo V_0 como o volume não deformado da amostra, as mudanças de volume foram definidas pela relação V/V_0 .

3.2 Modelo de elementos finitos

O modelo de elementos finitos elaborado neste trabalho destinou-se à reprodução dos comportamentos mecânicos observados nos ensaios de compressão semi-confinados. Para este fim, utilizou-se o programa *FEBioStudio* versão 1.8.0, desenvolvido por [Maas, Ateshian e Weiss \(2017\)](#), o qual contém um *solver* de elementos finitos implícito não linear,

open source, dedicado à solução de problemas em biomecânica computacional (Safa et al. (2020), Finley et al. (2018), Herron et al. (2020)).

Figura 6 – Características do modelo numérico. (a) domínio da amostra e posição do sistema de coordenadas. (b) curva de deslocamento prescrito do punção. (c) dimensões da geometria CAD, malha de elementos finitos e condições de contorno.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Em vista das características do ensaio de compressão semi-confinada, apenas 1/10 do comprimento W e 1/4 da seção transversal A_n do domínio da amostra foram considerados no modelo de elementos finitos, conforme destacado na Figura 6a. Foram empregados 398 elementos hexaédricos trilineares na discretização da geometria, totalizando 876 nós. O elemento isoparamétrico mencionado emprega a formulação $\mathbf{u} - p$ para solucionar o problema acoplado sólido-fluido e utiliza as mesmas funções de forma para aproximar os campos de deslocamento e pressão de poro dentro do elemento. Além disso, o elemento conta com uma formulação baseada no método da dilatação média para evitar o problema de *Locking*, observado na resposta de materiais quase incompressíveis (MAAS et al., 2012). Como pode ser visto Figura 6c, a malha foi ajustada para ter mais elementos próximo à

superfície externa da amostra para melhor capturar o gradiente de pressão esperado nesta área.

Ainda na Figura 6c, são mostradas as condições de contorno essenciais que satisfazem as hipóteses de simetria, bem como as dimensões da geometria, que foram obtidas por meio dos valores médios reportados experimentalmente. Sendo assim, a largura l , a altura h e o comprimento w da geometria CAD foram definidos da seguinte forma: $l = L/2$, $h = H/2$ e $w = W/10$, resultando em $l = 10.09$ mm, $h = 5.06$ mm e $w = 1$ mm. O punção foi modelado como um corpo rígido e impermeável, sendo empregado apenas um elemento em sua discretização. A amostra é comprimida pelo punção, que se movimenta na direção \mathbf{e}_2 de acordo com o deslocamento prescrito mostrado na Figura 6b. Portanto, o movimento do punção resulta em comprimir a amostra a uma taxa de cerca de 0.2 mm/s durante os primeiros 4.85 s, provocando uma compressão de 20% na amostra. Essa primeira etapa é denominada de fase de compressão. Em seguida, a placa é mantida nesta posição até o tempo $t = 600$ s, sendo esse período chamado de fase de relaxação. A interface punção-amostra, indicada na Figura 6c, foi modelada por meio de um contato bifásico (ZIMMERMAN et al., 2022), com coeficiente de atrito elevado ($\mu_{at} = 0.5$) afim de reproduzir o comportamento da lixa utilizada nos ensaios. Essa formulação de contato assume-se que o fluxo de fluido é livre ($p = 0$) quando o contato se encontra aberto, caso contrário, quando o contato se encontra fechado, o fluxo de fluido é possível apenas na direção tangencial à superfície do punção.

3.2.1 Modelos constitutivos

Nesta seção apresentam-se as equações constitutivas utilizadas na modelagem do comportamento mecânico das fases sólida e fluida. As formulações resultantes do emprego destas relações, *i.e.*, os modelos viscoelástico, poroelástico e poroviscoelástico são apresentados na Seção 3.4.

3.2.1.1 Modelo viscoelástico

O modelo viscoelástico¹ adotado neste trabalho assume que a amostra é um meio isotrópico e homogêneo, cujo comportamento viscoso atua somente na parcela isocórica da deformação, mantendo a parcela volumétrica puramente elástica. Devido ao tratamento desacoplado das deformações isocórica e volumétrica, esse modelo depende de uma função de energia livre de Helmholtz Ψ^e desacoplada. Considerando a decomposição multiplicativa do gradiente de deformação em partes isocórica (distorcional) e volumétrica (dilatacional),

$$\mathbf{F} = J^{1/3} \tilde{\mathbf{F}}, \quad (3.1)$$

¹ No FEBio, o modelo viscoelástico utilizado chama-se *Uncoupled Viscoelastic*.

onde $\tilde{\mathbf{F}}$ é o gradiente de deformação modificado, associado às deformações isocóricas, e $J^{1/3}$ é o termo associado às deformações volumétricas, a função de energia livre de Helmholtz desacoplada pode ser escrita como

$$\Psi^e(\tilde{\mathbf{C}}, J) = \Psi_{\text{iso}}^e(\tilde{\mathbf{C}}) + \Psi_{\text{vol}}^e(J), \quad (3.2)$$

onde $J = \det \mathbf{F}$ é o jacobiano de transformação volumétrica e $\tilde{\mathbf{C}} = \tilde{\mathbf{F}}^T \tilde{\mathbf{F}}$ é o tensor de Cauchy-Green à direita modificado.

Em particular, a função de energia livre de Helmholtz empregada pertence a classe de modelos *neo-Hookean*², com parcelas isocórica e volumétrica definidas por

$$\Psi_{\text{iso}}^e = \frac{\mu}{2} [\text{tr}(\tilde{\mathbf{C}}) - 3] \quad \text{e} \quad \Psi_{\text{vol}}^e = \frac{K}{2} (\ln J)^2, \quad (3.3)$$

onde μ e K são parâmetros materiais, denominados de módulo de cisalhamento e módulo volumétrico, respectivamente. Esses parâmetros podem ser relacionados com o módulo de elasticidade E e coeficiente de Poisson ν por

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad \text{e} \quad K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)}. \quad (3.4)$$

A resposta elástica deste modelo em termos do tensor de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}^e$ pode ser obtida usando a operação de *push-forward* sobre o segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff \mathbf{S}^e , ou seja, $\boldsymbol{\sigma}^e = J^{-1} \mathbf{F} \mathbf{S}^e \mathbf{F}^T$. Devido à natureza desacoplada do potencial elástico, o segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff pode ser escrito como $\mathbf{S}^e = \mathbf{S}_{\text{iso}}^e + \mathbf{S}_{\text{vol}}^e$, cujas parcelas isocórica e volumétrica são definidas, respectivamente, por

$$\mathbf{S}_{\text{iso}}^e = 2 \frac{\partial \Psi_{\text{iso}}^e(\tilde{\mathbf{C}})}{\partial \tilde{\mathbf{C}}} \quad \text{e} \quad \mathbf{S}_{\text{vol}}^e = 2 \frac{\partial \Psi_{\text{vol}}^e(J)}{\partial J}. \quad (3.5)$$

Sendo assim, a resposta elástica em termos do tensor de Cauchy, $\boldsymbol{\sigma}^e = \boldsymbol{\sigma}_{\text{iso}}^e + \boldsymbol{\sigma}_{\text{vol}}^e$, pode ser expressa por

$$\boldsymbol{\sigma}^e = \frac{\mu}{J} (\tilde{\mathbf{b}} - \mathbf{I}) + K \ln(J) \mathbf{I}, \quad (3.6)$$

sendo $\tilde{\mathbf{b}} = \tilde{\mathbf{F}} \tilde{\mathbf{F}}^T$ o tensor de Cauchy-Green à esquerda modificado e \mathbf{I} o tensor identidade.

Como mencionado acima, o presente modelo viscoelástico assume que a tensão total $\boldsymbol{\sigma}_{\text{ve}}$ é composta de uma parcela isocórica $\boldsymbol{\sigma}_{\text{iso}}(t)$, a qual contabiliza comportamento dissipativo em função da deformação isocórica, e uma parcela volumétrica $\boldsymbol{\sigma}_{\text{vol}}^e$ puramente elástica, *i.e.*,

$$\boldsymbol{\sigma}_{\text{ve}} = \boldsymbol{\sigma}_{\text{iso}}(t) + \boldsymbol{\sigma}_{\text{vol}}^e \quad (3.7)$$

² No FEBio, o modelo *neo-Hookean* desacoplado foi obtido por meio do modelo de Mooney-Rivlin com o parâmetro $c_2 = 0$.

A contribuição da tensão isocórica $\boldsymbol{\sigma}_{\text{iso}}(t)$ é obtida por meio de uma integral de convolução de uma função de relaxação $G(t)$ com a resposta elástica $\boldsymbol{\sigma}_{\text{iso}}^e$ (ver primeiro termo do lado direito da Eq. (3.6), permitindo escrever a tensão total como

$$\boldsymbol{\sigma}_{\text{ve}} = J^{-5/3} \int_{-\infty}^t G(t-s) \frac{d(\text{dev}[\boldsymbol{\sigma}_{\text{iso}}^e])}{ds} ds + K \ln(J) \mathbf{I}. \quad (3.8)$$

A função de relaxação é dada por

$$G(t) = \gamma_0 + \sum_{i=1}^N \gamma_i \exp(-t/\tau_i), \quad (3.9)$$

onde γ_i e τ_i são parâmetros materiais, chamados de coeficiente relaxação e tempo de relaxação, respectivamente, e N é o número de braços viscoelásticos. Neste trabalho, considerou-se $N = 3$. Portanto, o conjunto de parâmetros materiais que define esse modelo é

$$\mathbf{p}_{\text{ve}} = \{E, \nu, g_1, g_2, g_3, \tau_1, \tau_2, \tau_3\}. \quad (3.10)$$

3.2.1.2 Modelo poroelástico

O modelo poroelástico³ utilizado neste trabalho se enquadra no modelo bifásico descrito na Seção 2.2. Esse modelo assume que a amostra é uma mistura de uma matriz sólida porosa, isotrópica e homogênea, e um fluido intersticial, contido nos poros da matriz sólida de tal forma que não existem vazios. Neste caso, o efeito dissipativo emerge unicamente da interação entre as fases sólida e fluida (MAK, 1986a; MAK, 1986b).

De acordo com as hipóteses (2.12) e (2.13), a tensão total deste modelo pode ser escrita como

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^s - p \mathbf{I}, \quad (3.11)$$

onde $\boldsymbol{\sigma}^s$ é a tensão na matriz sólida e p é a pressão de poro ou pressão do fluido. A resposta mecânica da matriz sólida neste modelo é puramente elástica. Sendo assim, empregou-se o modelo de *neo-Hookean*, apresentado anteriormente (ver Eq. (3.6)), para descrever o comportamento mecânico da matriz sólida $\boldsymbol{\sigma}^s$, permitindo reescrever a tensão total (3.11) como

$$\boldsymbol{\sigma}_{\text{pe}} = \frac{\mu}{J} (\tilde{\mathbf{b}} - \mathbf{I}) + K \ln(J) \mathbf{I} - p \mathbf{I}. \quad (3.12)$$

Para o governo da fase fluida, foi assumido o modelo de permeabilidade hidráulica isotrópico de Holmes-Mow, o qual é descrito na configuração espacial como

$$\mathbf{k} = k(J) \mathbf{I}, \quad (3.13)$$

onde \mathbf{I} é o tensor de segunda ordem de identidade e $k(J)$ é uma função escalar que estabelece a dependência da permeabilidade hidráulica sobre a deformação volumétrica da

³ Os modelos poromecânicos foram criados no módulo *Biphasic Analysis* do FEBio.

matriz sólida. Neste modelo, essa função é definida por

$$k(J) = k_0 \left[\left(\frac{J - \varphi_r^s}{1 - \varphi_r^s} \right)^\alpha \exp \left(\frac{1}{2} M (J^2 - 1) \right) \right], \quad (3.14)$$

onde k_0 , α e M são parâmetros materiais, e φ_r^s é a fração volumétrica referencial da fase sólida. Com base no estudo de [Carniel et al. \(2023\)](#), definiu-se a fração volumétrica referencial da fase sólida dos modelos poromecânicos como $\varphi_r^s = 0.2$. Sendo assim, o conjunto de parâmetros materiais que define o modelo poroelástico é

$$\mathbf{p}_{pe} = \{E, \nu, k_0, \alpha, M\}. \quad (3.15)$$

3.2.1.3 Modelo poroviscoelástico

Em contraste ao modelo poroelástico descrito anteriormente, o modelo poroviscoelástico assume que a matriz sólida porosa possui comportamento viscoelástico intrínseco. Neste caso, o modelo adotado para o governo da resposta mecânica da matriz sólida porosa foi o modelo viscoelástico descrito na seção 3.2.1.1. Vale enfatizar que o modelo viscoelástico adotado considera efeitos viscosos somente na parcela isocórica da deformação, mantendo a parcela volumétrica puramente elástica.

Considerando que a contribuição da matriz sólida $\boldsymbol{\sigma}^s$ é dada por (3.8), a tensão total do modelo poroviscoelástico (ver Eq. (3.12)), pode ser escrita como

$$\boldsymbol{\sigma}_{pve} = J^{-5/3} \int_{-\infty}^t G(t-s) \frac{d(\text{dev}[\boldsymbol{\sigma}_{iso}^e])}{ds} ds + K \ln(J) \mathbf{I} - p \mathbf{I}. \quad (3.16)$$

O modelo de permeabilidade hidráulica assumido neste caso foi idêntico ao do modelo poroelástico, conforme Eqs. (3.13) e (3.14). Assim sendo, o conjunto de parâmetros materiais que define o modelo poroviscoelástico é o seguinte:

$$\mathbf{p}_{pve} = \{E, \nu, g_1, g_2, g_3, \tau_1, \tau_2, \tau_3, k_0, \alpha, M\}. \quad (3.17)$$

3.3 Estratégia de ajuste de curvas

A estratégia adotada para determinar o conjunto de parâmetros materiais consiste em uma abordagem de otimização híbrida global-local baseada na combinação do PSO e do método de Nelder-Mead (NM). Essa abordagem permite reduzir o espaço de busca com o método de otimização global, permitindo determinar o ponto mínimo usando o método de otimização local com uma taxa de convergência mais elevada ([VAZ et al., 2016](#)).

O presente problema de ajuste de curvas foi formulado usando otimização sem restrições (requer somente restrições laterais):

$$\begin{aligned} & \text{Minimize } f(\mathbf{p}) \\ & \text{sujeita a } \mathbf{p} \in \mathcal{S}, \\ & \text{tal que } \mathcal{S} = \left\{ \mathbf{p} \in \mathbb{R}^{n_d} \mid p_k^{\text{inf}} \leq p_k \leq p_k^{\text{sup}} \right\}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

O vetor de parâmetros materiais \mathbf{p} depende do modelo constitutivo, podendo ser definido como \mathbf{p}_{ve} , \mathbf{p}_{pe} ou \mathbf{p}_{pve} , referentes aos modelos viscoelástico, poroelástico e poroviscoelástico, conforme mostrado em (3.10), (3.15) e (3.17), respectivamente. Os limites inferiores e superiores dos parâmetros p_k^{inf} e p_k^{sup} que delimitam o espaço de busca \mathcal{S} , foram considerados fixos para todos os modelos constitutivos, os quais são mostrados na Tabela 1.

Tabela 1 – Limites inferior e superior dos parâmetros materiais.

Parâmetro	Limite inferior	Limite superior
E [MPa]	0.01	0.1
ν [-]	0.05	0.45
g_1 [MPa]	0.01	50
g_2 [MPa]	0.01	50
g_3 [MPa]	0.01	50
τ_1 [s]	0.01	1000
τ_2 [s]	0.01	1000
τ_3 [s]	0.01	1000
k [mm ⁴ /Ns]	0.01	1500
M [-]	0	50
α [-]	0	50

Para contabilizar mais de uma medida experimental de forma simultânea, *i.e.*, as curvas de força e volume, foi empregada uma estratégia de otimização multiobjetivo. Esse problema foi solucionado usando um método bastante comum na literatura, chamado de método das somas ponderadas (*Weighted Sum Method*), que permitiu expressar a função objetivo $f(\mathbf{p})$ da seguinte forma:

$$f(\mathbf{p}) = w_F f_F(\mathbf{p}) + w_V f_V(\mathbf{p}), \quad (3.19)$$

onde w_F e w_V são os pesos das funções objetivo $f_F(\mathbf{p})$ e $f_V(\mathbf{p})$, referentes as curvas de força e volume, respectivamente. As funções objetivos foram avaliadas por meio do método dos mínimos quadráticos, fornecendo um erro relativo quadrático entre as medidas experimentais, F^{Exp} e V^{Exp} , e as medidas numéricas, F^{Num} e V^{Num} . Com base no trabalho de Vaz et al. (2015), definiu-se a função objetivo como

$$f(\mathbf{p}) = w_F \sqrt{\frac{1}{N_F} \left[\sum_{i=1}^{N_F} \left(\frac{F_i^{\text{Exp}} - F_i^{\text{Num}}(\mathbf{p})}{F_i^{\text{Exp}}} \right)^2 \right]} + w_V \sqrt{\frac{1}{N_V} \left[\sum_{j=1}^{N_V} \left(\frac{V_j^{\text{Exp}} - V_j^{\text{Num}}(\mathbf{p})}{V_j^{\text{Exp}}} \right)^2 \right]}, \quad (3.20)$$

onde N_F e N_V são os números de pontos experimentais das curvas de força e volume, respectivamente.

Apesar da simplicidade dessa formulação, a definição dos pesos w_F e w_V é, geralmente, bastante desafiadora. Neste trabalho, os valores dos pesos foram estabelecidos de forma empírica. Além disso, a definição dos pesos foi feita atribuindo valores apenas para o peso da curva de força w_F , uma vez que foi estabelecido a seguinte relação: $w_V = 1 - w_F$.

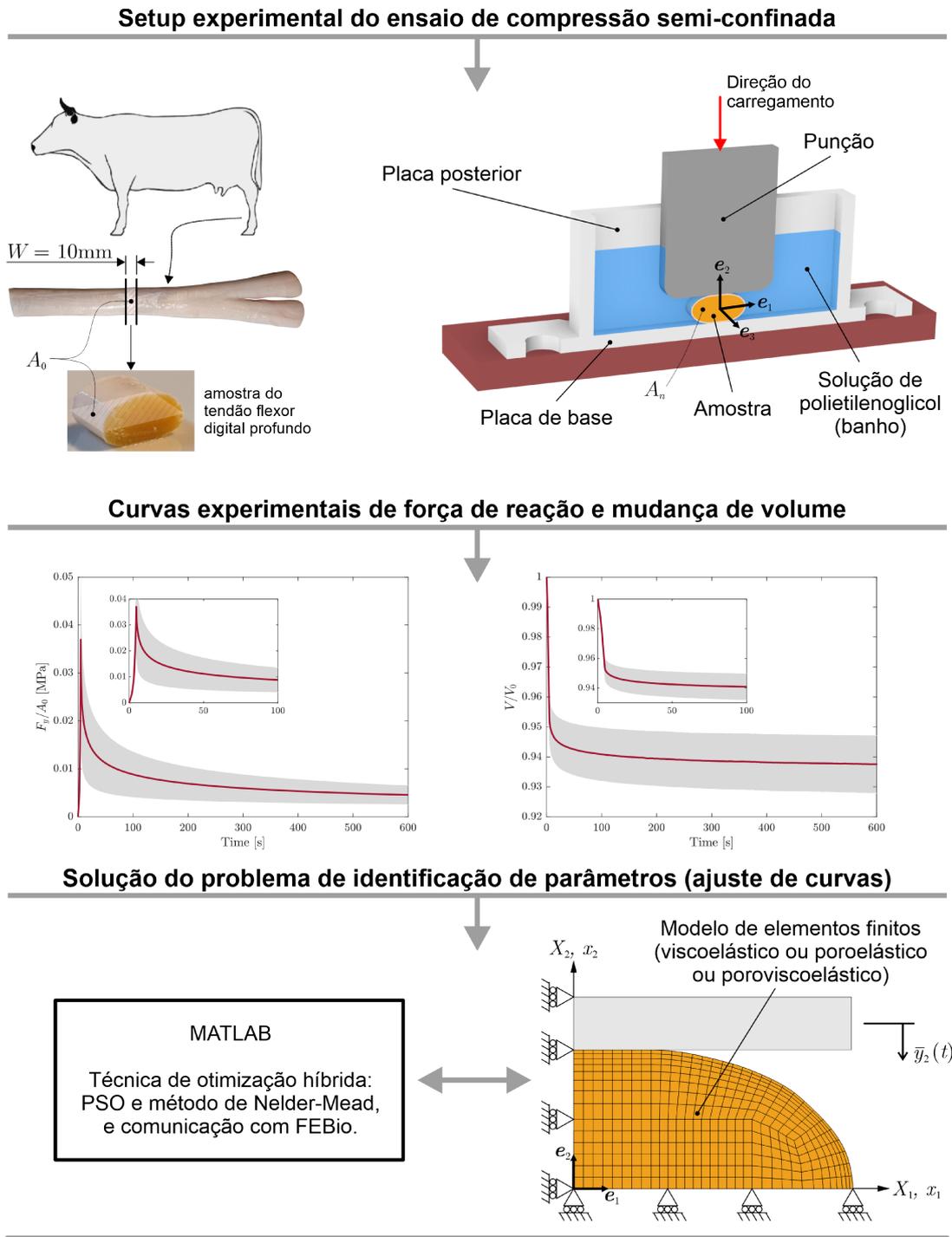
As características da técnica de otimização híbrida empregada consiste em duas etapas: busca global e busca local. A busca global é realizada usando o PSO e caracteriza a etapa de exploração do espaço de busca \mathcal{S} , o qual é definido pelos limites inferior e superior, p_k^{inf} e p_k^{sup} , de cada parâmetro material. A busca local é realizada pelo método de Nelder-Mead usando as variáveis de projeto da melhor partícula do PSO como estimativa inicial, ou seja, esta etapa visa aumentar a capacidade de exploração com um custo computacional reduzido. A definição dos parâmetros do PSO e do método de Nelder-Mead foi realizada com base nos trabalhos de [Vaz, Cardoso e Stahlschmidt \(2013\)](#) e [Vaz et al. \(2016\)](#). A respeito do PSO, foi utilizado o parâmetro inercial $w \in [0.5, 0.7]$ e os parâmetros cognitivo e social $c_1 = c_2 = 2$. Tendo em vista que o problema direto envolve não linearidades geométrica, de material e de contato, o tamanho da população (enxame) foi assumido como $n_p = 300$. Os parâmetros de controle utilizados no método de Nelder-Mead foram os seguintes: reflexão $\rho = 1.0$, expansão $\gamma = 2.0$, contração $\beta = 0.5$, e encolhimento $\sigma = 0.5$. De acordo com [Lagarias et al. \(1998\)](#), esses parâmetros são escolhas quase universais para o algoritmo de Nelder-Mead. O critério de convergência adotado consistiu no limite máximo de iterações, estabelecendo-se 100 iterações para o PSO e 250 iterações para o método de Nelder-Mead.

Dessa forma, a solução para este problema foi implementada utilizando o MATLAB. Este programa não apenas disponibiliza os métodos de otimização mencionados anteriormente como funções intrínsecas do programa, mas também permite a criação de funções personalizadas para estruturar a estratégia de otimização bem como a comunicação com o *FEBio*. A comunicação desempenha três tarefas essenciais: gerar o arquivo de entrada para o modelo de elementos finitos, coordenar a simulação do experimento numérico e realizar a leitura dos resultados, incluindo as curvas numéricas de força e volume. Essa comunicação tornou possível a avaliação da função objetivo (3.20) e o fornecimento dos resultados para os algoritmos de otimização. A Figura 7 oferece uma visão geral do procedimento de identificação de parâmetros.

3.4 Casos de estudo

Neste trabalho, três casos de estudo foram considerados. Cada caso de estudo consistiu em submeter o modelo de elementos finitos, descrito na Seção 3.2, associado a um dos modelos constitutivos proposto: viscoelástico, poroelástico ou poroviscoelástico, no procedimento de identificação de parâmetros materiais, descrito na Seção 2.3. Dessa forma,

Figura 7 – Fluxograma do procedimento de identificação de parâmetros (ajuste de curvas).



Fonte: Elaborada pelo autor.

o objetivo principal dos casos de estudo foi determinar os conjuntos de parâmetros materiais que definem os modelos viscoelástico (3.10), poroelástico (3.15) e poroviscoelástico (3.17), afim de verificar qual desses modelos constitutivos fornece o melhor ajuste de curvas numérico-experimental.

A partir disso, o modelo constitutivo que melhor caracterizou as respostas experimentais de força e volume foi selecionado para ser analisado em termos de comportamentos fenomenológicos, permitindo assim, elucidar o comportamento mecânico, transversal às fibras de colágeno, das amostras de tecido tendinoso bovino durante o ensaio de compressão semi-confinada.

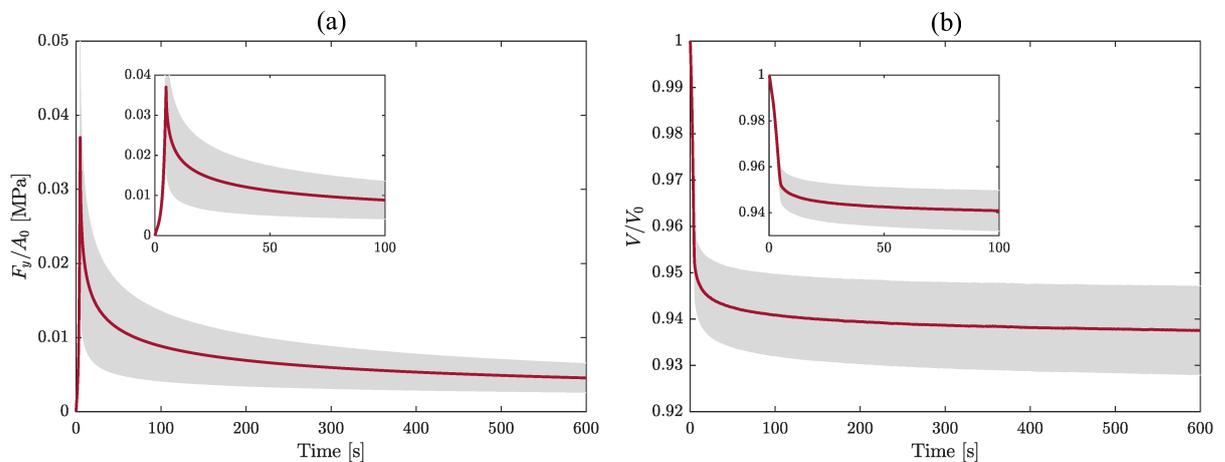
4 Resultados e Discussões

Nesta seção são apresentados os parâmetros identificados para os modelos viscoelástico, poroelástico e poroviscoelástico, bem como as curvas numéricas e experimentais de força e volume. A física do modelo que melhor representou as respostas experimentais também é abordada.

4.1 Resultados do ensaio mecânico

Considerando o ensaio mecânico descrito na Seção 3.1, são mostradas nas Figuras 8a e 8b as curvas experimentais de força e volume, respectivamente. As curvas vermelhas indicam o valor médio obtido, as quais foram usadas no procedimento de identificação de parâmetros, cujos resultados são descritos a seguir.

Figura 8 – Resultados experimentais: (a) curva de força de reação e (b) curva de mudança de volume. As curvas vermelhas indicam o valor médio, enquanto a área cinza representa o desvio padrão.



4.2 Resultados dos ajustes de curvas

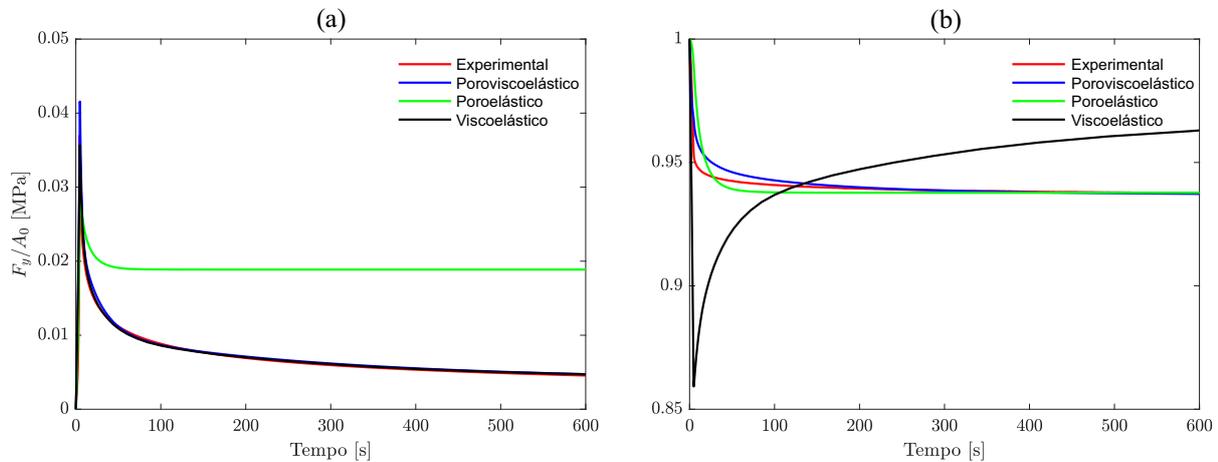
A Tabela 2 mostra os parâmetros materiais dos modelos viscoelástico, poroelástico e poroviscoelástico obtidos nos procedimentos de identificação de parâmetros. A Figura 9 apresenta as curvas numéricas de força e volume obtidas usando os parâmetros mostrados na Tabela 2. A Figura 10 mostra em detalhes as curvas numéricas de força e volume para cada um dos modelos propostos, permitindo uma verificação mais detalhada.

Com base nos resultados mostrados na Figura 9, pode-se verificar que os modelos viscoelástico e poroelástico não foram capazes de caracterizar ambas as curvas experimentais

Tabela 2 – Parâmetros identificados para os modelos poroelástico, viscoelástico e poroviscoelástico.

Modelo	Parâmetro	Viscoelástico	Poroelástico	Poroviscoelástico
<i>neo-Hookean</i>	E [MPa]	0.02191	0.1051	0.0199
	ν [-]	0.3794	0.3795	0.3512
Função de relaxação	g_1 [MPa]	19.7658	—	7.526
	g_2 [MPa]	5.2742	—	2.778
	g_3 [MPa]	1.9327	—	1.446
	τ_1 [s]	2.756	—	1.9857
	τ_2 [s]	18.67	—	24.368
	τ_3 [s]	226.53	—	307.77
Holmes-Mow	k [mm ⁴ /Ns]	—	12.698	450.5
	M [-]	—	0	40.396
	α [-]	—	9.866	48.028

Figura 9 – Comparação simultânea: curvas ajustadas dos modelos viscoelástico, poroelástico e poroviscoelástico sobre as curvas experimentais de força e volume.

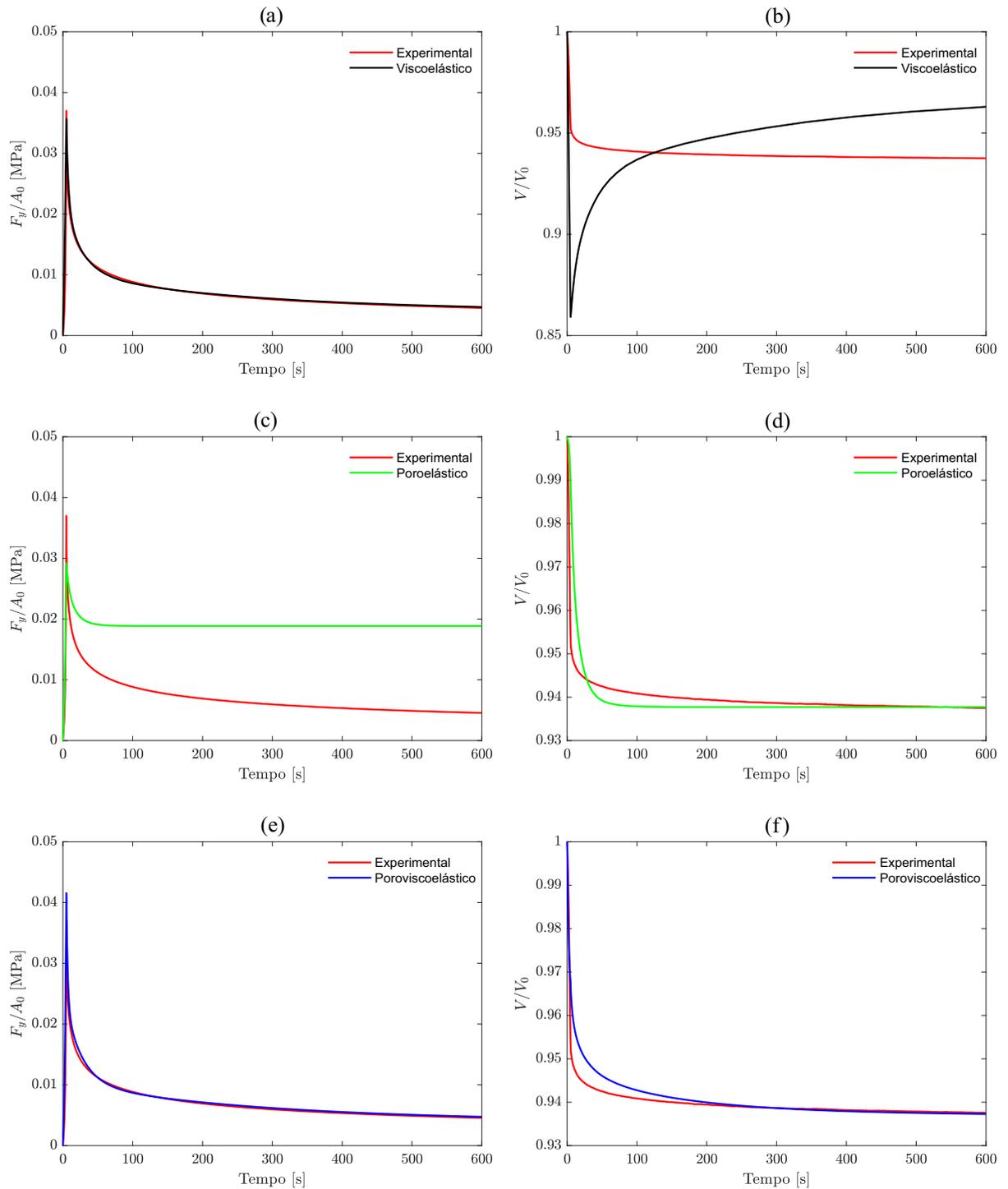


Fonte: Elaborada pelo autor.

de força e volume simultaneamente. O único modelo que reproduziu satisfatoriamente o comportamento experimental observado foi o modelo poroviscoelástico.

Considerando as curvas de força e volume do modelo viscoelástico, mostradas nas Figuras 10a e 10b, é possível observar que esse modelo descreve adequadamente a curva experimental de força, mas o mesmo revela incapacidade de descrever a curva experimental de volume, exibindo um comportamento diferente do observado experimentalmente. A cinemática desse modelo exibe uma drástica diminuição no volume da amostra durante o período de compressão. Já no período de relaxação, quando o punção permanece

Figura 10 – Comparação individual: curvas numéricas ajustadas sobre as curvas experimentais de força e volume; (a) e (b) modelo viscoelástico em (a) e (b), modelo poroelástico em (c) e (d) e modelo poroviscoelástico em (e) e (f).



Fonte: Elaborada pelo autor.

estacionado, a parcela viscosa inicia o processo de relaxação recuperando a perda de volume ocorrida durante a fase de compressão.

Em relação ao modelo poroelástico, é possível observar na Figura 10c que este modelo falha em caracterizar a curva experimental de força, principalmente pela rápida estabilização da curva de força no período de relaxação. No entanto, este modelo foi capaz de representar o comportamento da curva experimental de volume, conforme mostrado na Figura 10d. A curva de volume deste modelo apresenta um rápido decaimento no período de compressão, seguido de um patamar quase que constante no período de relaxação. Esse declínio gradual pode ser atribuído à convergência da pressão do fluido para zero nas fronteiras laterais da amostra que estão em contato com o banho e, por conseguinte, à expulsão do fluido durante o período de relaxação, resultando na contração lateral da amostra.

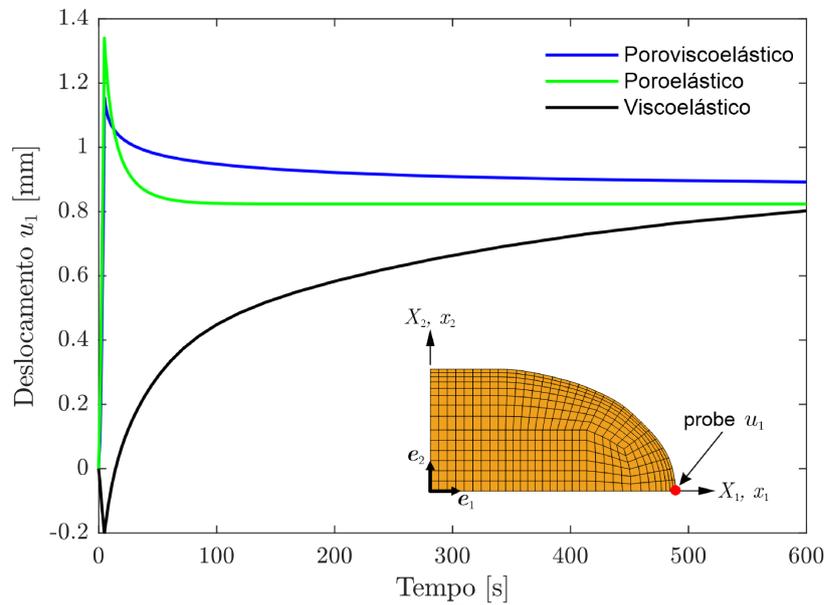
Buscando ilustrar e comparar o comportamento lateral de contração e expansão da amostra, bem como fornecer um complemento para o entendimento da curva de mudança de volume, a Figura 11 apresenta o deslocamento u_1 do nó mais externo encontrado na seção transversal, conforme indicado nesta figura. Pode-se notar que, para os modelos poromecânicos, a amostra apresenta expansão na fase de compressão e contração na fase de relaxamento. Por outro lado, o modelo viscoelástico mostrou comportamento inverso, onde a amostra apresentou uma contração sucinta na fase de compressão e uma expansão considerável na fase de relaxação. Esse comportamento destaca a importância de considerar medidas experimentais cinemáticas na caracterização do comportamento mecânico de tecidos tendinosos. Por fim, dentre os modelos usados neste estudo, o modelo poroviscoelástico foi o único que representou satisfatoriamente ambas as curvas experimentais de força e volume, conforme mostrado nas Figuras 10e e 10f, respectivamente. Este modelo foi capaz não somente de capturar a curva de força, mas também a mudança de volume da amostra ao longo do tempo. Antes de apresentar os comportamentos fenomenológicos do modelo que melhor ajustou as curvas experimentais, isto é, do modelo poroviscoelástico, apresenta-se um breve relato do processo de definição dos pesos w_F e w_V , utilizados na função objetivo.

Os valores dos pesos usados foram diferentes para cada modelo proposto, conforme mostrado na Tabela 3. Pode-se notar que, para o modelo viscoelástico, foi adotado um peso

Tabela 3 – Pesos w_F e w_V utilizados para os modelos poroelástico, viscoelástico e poroviscoelástico.

Modelo	w_F	w_V
Poroelástico	0.1	0.9
Viscoelástico	0.9	0.1
Poroviscoelástico	0.015	0.985

Figura 11 – Comparação do comportamento lateral da amostra para os diferentes modelos.



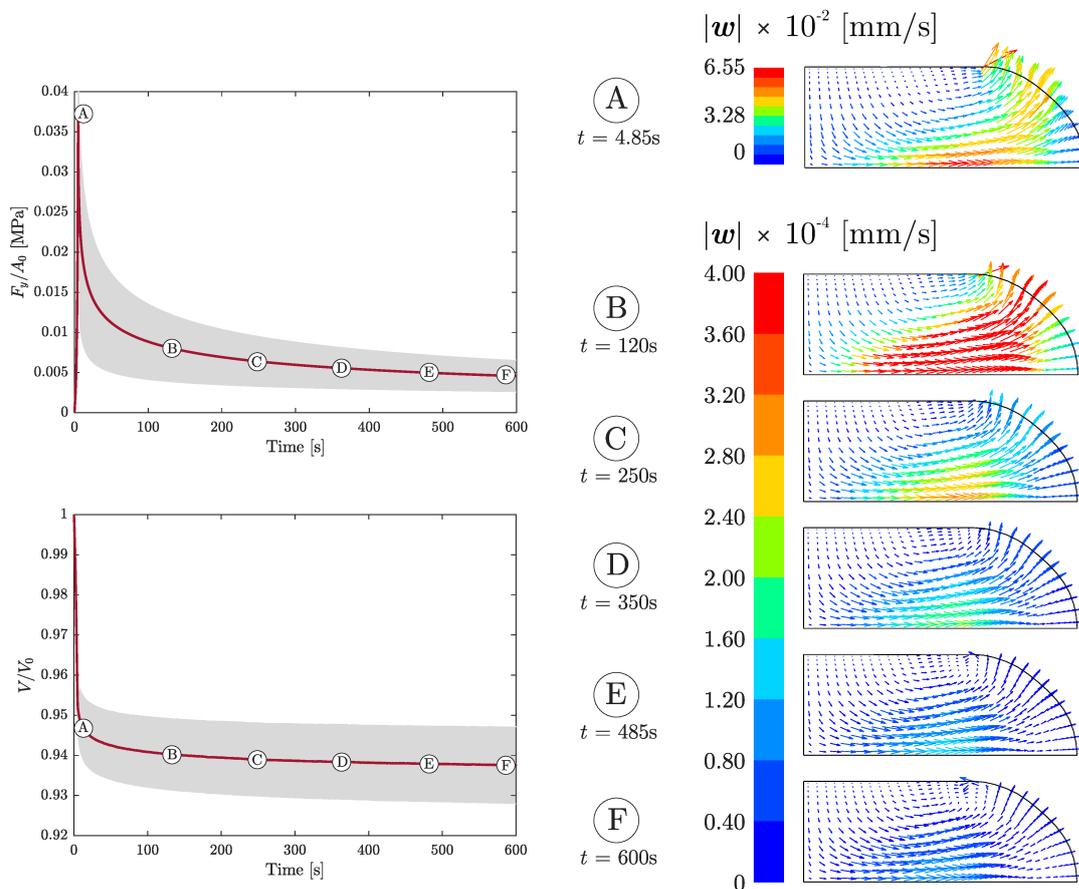
Fonte: Elaborada pelo autor.

maior para a curva de força e um peso menor para a curva de volume. Embora o modelo não consiga descrever a curva de volume, como mostrado na Figura 10b, foi necessário utilizar um valor maior para o peso w_F para representar adequadamente a curva de força. Ou seja, atribuir valores balanceados ou maiores para o peso w_V da curva de volume resulta na descaracterização da curva de força, além de não conseguir capturar a curva de volume, o que é uma característica intrínseca deste modelo. Em relação aos modelos poromecânicos, foram utilizados pesos menores para a curva de força e pesos maiores para a curva de volume. Devido à incapacidade do modelo poroelástico em representar a curva de força, o uso de um valor maior para o peso da curva de força não resultou em melhorias, além de comprometer a representação da curva de volume. Por outro lado, o modelo poroviscoelástico, único capaz de representar simultaneamente ambas as curvas de força e volume, apresentou facilidade em caracterizar a curva de força independentemente do valor considerado para o peso w_F . No entanto, a caracterização da curva de volume mostrou-se bastante dependente dos valores dos pesos.

4.3 Comportamentos fenomenológicos

A Figura 12 apresenta o campo da norma da velocidade relativa do fluido \mathbf{w} sobre o domínio da amostra em diferentes instantes de tempo t . Pode-se notar que o fluxo de fluido ocorre do centro para a superfície lateral da amostra, que está em contato com o banho. Este comportamento é consistente com a condição de contorno imposta pelo contato bifásico, que assume uma pressão nula ($p = 0$) para as regiões em que o contato se encontra aberto. Os resultados mostrados na Figura 13 referem-se ao campo do Jacobiano

Figura 12 – Campo da norma da velocidade relativa do fluido \mathbf{w} sobre o domínio da amostra em diferentes instantes de tempo t .

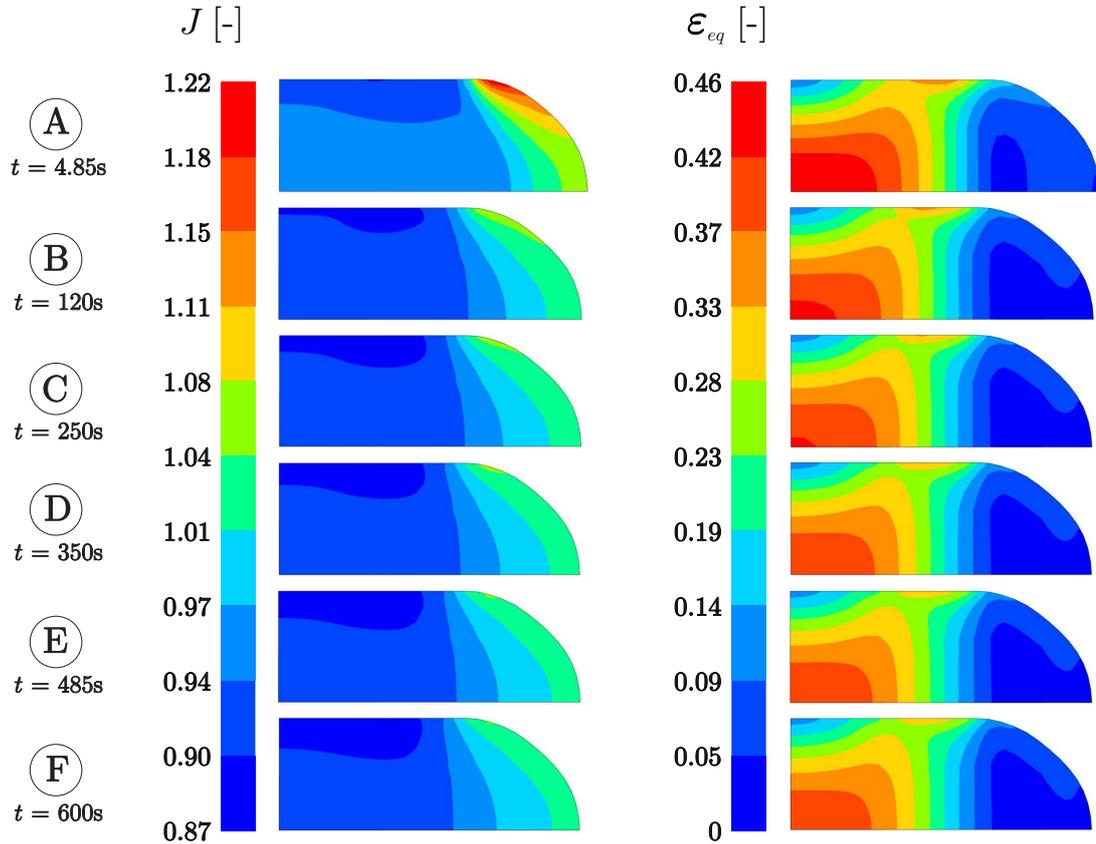


Fonte: Elaborada pelo autor.

de transformação volumétrica, $J = \det \mathbf{F}$, e ao campo de deformação equivalente de Hencky à esquerda, $\varepsilon_{\text{eq}} = \ln(\mathbf{V}) = \ln(\sqrt{\mathbf{F}\mathbf{F}^T})$. Em relação ao Jacobiano, mesmo com a deformação nominal compressiva de 20% imposta pelo punção, pode ser verificado que a região próxima à fronteira que faz contato com o banho é propensa ao aumento de volume. Em relação ao campo de deformação equivalente, este apresenta uma redução suave ao longo do tempo, mostrando valores mais elevados no centro da amostra. Em particular,

esse resultado revela uma contribuição importante das deformações deviatóricas sobre a resposta constitutiva de tensões da parcela viscoelástica do modelo.

Figura 13 – Campos de deformação: Jacobiano de transformação volumétrica J e deformação equivalente de Hencky à esquerda ε_{eq} em diferentes instantes de tempo t .



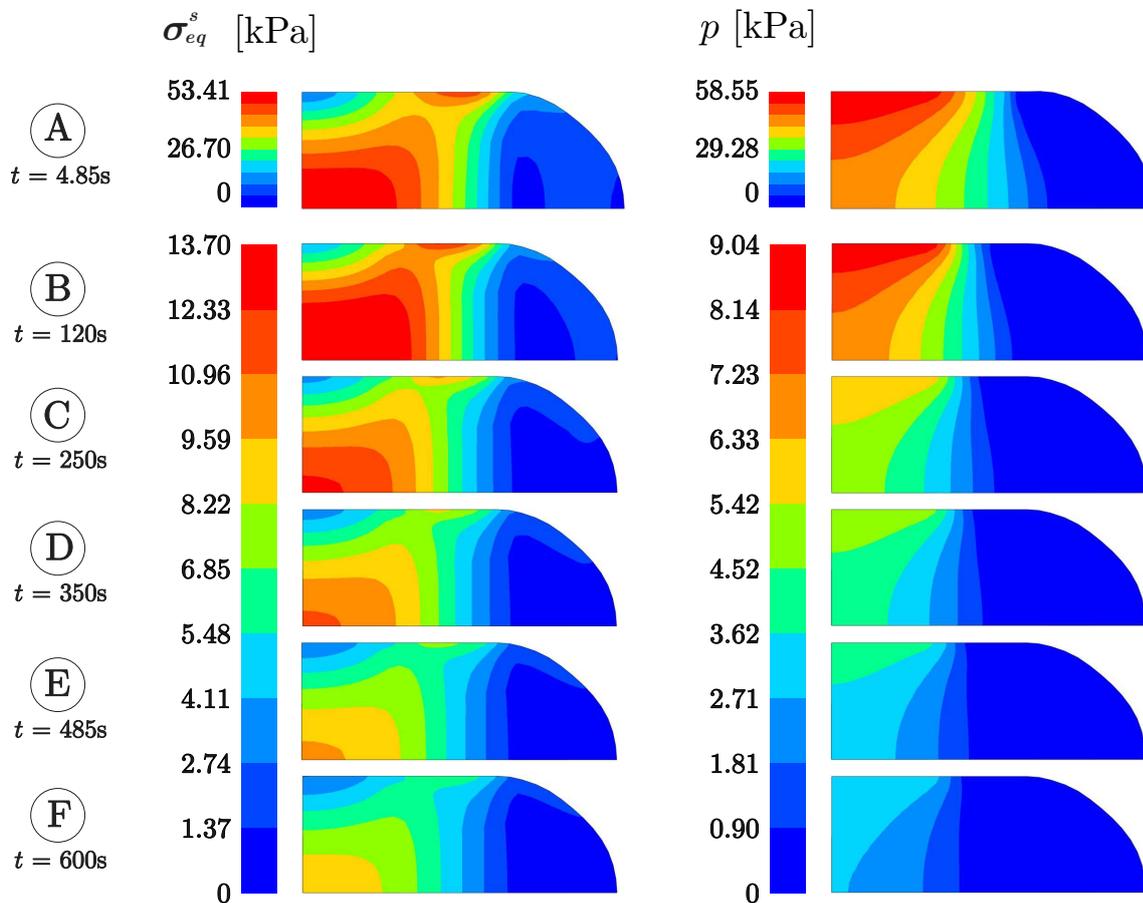
Fonte: Elaborada pelo autor.

Em relação aos campos de tensão, a Figura 14 mostra a pressão de poro p e a tensão equivalente no esqueleto sólido,

$$\sigma_{eq}^s = \sqrt{\frac{3}{2} \text{dev}\sigma^s : \text{dev}\sigma^s} . \quad (4.1)$$

Pode-se notar que a tensão equivalente no esqueleto sólido apresenta valores de mesma magnitude que o campo de pressão de poro no final da fase de compressão (ponto A na Figura 14). No entanto, o campo de pressão de poro apresenta um decaimento acelerado

Figura 14 – Campos de tensão: tensão equivalente no esqueleto sólido σ_{eq}^s e pressão de poro p^f em diferentes instantes de tempo t .



Fonte: Elaborada pelo autor.

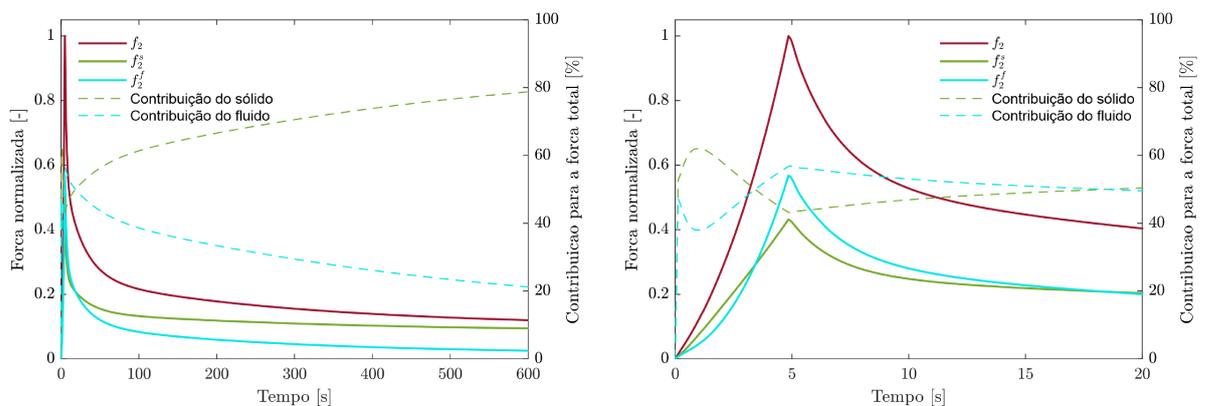
no tempo subsequente. De fato, no final do período de relaxação, a magnitude da pressão de poro é cerca de duas vezes menor do que a magnitude da tensão no esqueleto sólido. Isso indica que as fases sólida e fluida podem contribuir de forma distinta no suporte de carga ao longo do tempo do ensaio.

A fim de obter detalhes da contribuição de cada fase no suporte de carga, a Figura 15 apresenta as curvas de força de reação, normal à seção transversal A_0 (ver Figura 5),

referente às parcelas do esqueleto sólido f_2^s e da pressão de poro f_2^f , que somadas resultam na força de reação total f_2 , ou seja, $f_2 = f_2^s + f_2^f$ (os detalhes operacionais da decomposição da força de reação total são apresentados no Anexo A).

Nota-se que ambas as fases contribuem de forma semelhante no suporte de carga no período de compressão e nos instantes iniciais da fase de relaxação (cerca de 20 segundos). No entanto, com o decaimento da força total no tempo subsequente, a influência do fluido é consideravelmente reduzida devido à expulsão do fluido pelas fronteiras laterais da amostra e pela redução da pressão de poro. Na verdade, apenas 20% da força total é atribuída à pressão de poro no final do período de relaxação ($t = 600\text{s}$). Essas distintas contribuições de força destacam novamente a importância de levar em conta os diferentes mecanismos dissipativos na modelagem do comportamento mecânico dos tendões, associados tanto à fase sólida quanto à fase fluida.

Figura 15 – Força de reação total f_2 e suas parcelas correspondentes às fases sólida f_2^s e fluida f_2^f . Os valores de força foram normalizados pelo valor máximo da força de reação total. As linhas tracejadas mostram a contribuição de cada fase sobre a força de reação total.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Como já mencionado no texto, a permeabilidade hidráulica é a propriedade material mais importante para o fluxo de fluido intersticial em tecidos hidratados. Neste estudo, essa propriedade foi modelada por meio do modelo de Holmes-Mow (Eqs. (3.13) e (3.14)), que contabiliza a dependência da permeabilidade hidráulica em função do jacobiano de transformação volumétrica J . Devido às condições do ensaio experimental, o campo do jacobiano de transformação volumétrica é não homogêneo, conforme mostrado na Figura 13. Isso implica que a permeabilidade hidráulica varia localmente sobre o domínio da amostra. Sendo assim, foram escolhidos três pontos situados na seção média da amostra, partindo no centro para a superfície externa (pontos A, B e C, respectivamente), conforme mostrado na Figura 16, para analisar o comportamento da permeabilidade hidráulica ao

longo do tempo do ensaio.

Começando pelos pontos internos A e B, pode-se notar uma elevada permeabilidade hidráulica no período de compressão, mas com um decaimento acelerado na fase de relaxação, atingindo valores em torno de 0.14 e 0.21 mm⁴/Ns ($\sim 10^{-1}$ mm⁴/Ns), respectivamente. Já para o ponto C, localizado na superfície externa, verifica-se uma permeabilidade hidráulica muito alta durante todo o tempo do ensaio, tornando este ponto uma via de baixa resistência para o fluxo de fluido. Os valores de permeabilidade hidráulica encontrados neste trabalho são, em geral, distintos dos valores relatados na literatura de tendões e ligamentos, cujos valores são da ordem de $\sim 10^{-6}$ a $\sim 10^{-1}$ mm⁴/Ns (SAFA et al., 2020; OFTADEH et al., 2018; LAVAGNINO et al., 2008). Assim, os valores de permeabilidade hidráulica obtidos neste estudo são maiores que os valores relatados na literatura, corroborando com os valores reportados apenas no final da fase de relaxação. Diante disso, descreve-se a seguir alguns aspectos que podem influenciar fortemente este parâmetro.

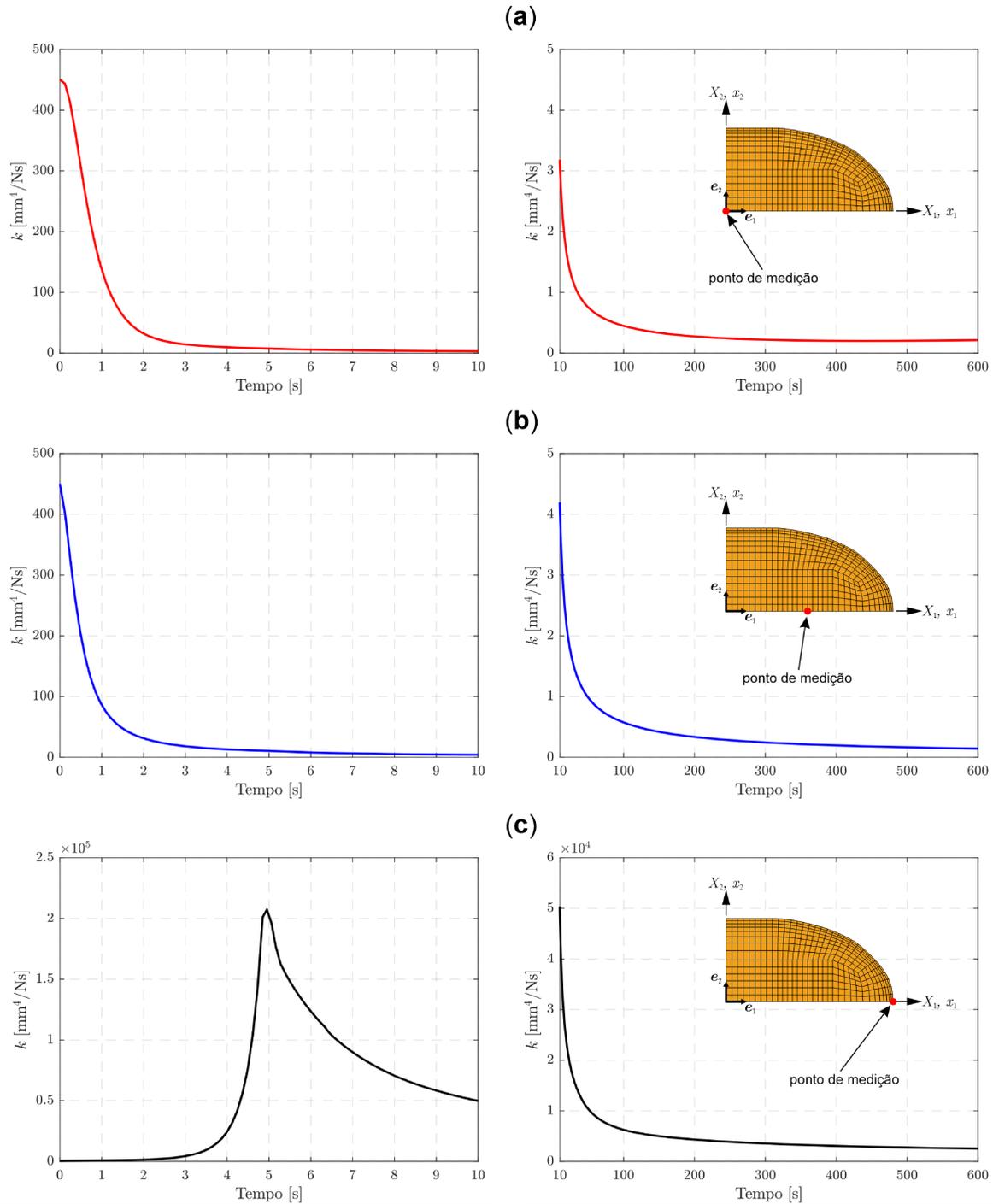
A disparidade entre os valores de permeabilidade hidráulica obtidos neste trabalho e os reportados na literatura, pode estar associada à modelagem da permeabilidade hidráulica como uma função da deformação volumétrica J , cujo campo varia localmente no domínio da amostra (ver Figura 13), sendo altamente não linear. Além disso, fatores externos relacionados ao *setup* experimental, dimensões da amostra, velocidade do carregamento e condições de contorno podem afetar consideravelmente os modelos poromecânicos. O modelo de permeabilidade hidráulica isotrópico assumido neste trabalho também pode ter contribuído para a discrepância observada, uma vez que o tendão é considerado um material transversalmente isotrópico, pelo menos ao nível do tecido (CARNIEL; FANCELLO, 2017). Dessa forma, a ausência de fluxo de fluido na direção paralela aos fascículos pode ter superestimado a permeabilidade hidráulica do tecido. Apesar disso, vale ressaltar que grande parte dos valores de permeabilidade hidráulica reportados na literatura são oriundos de experimentos realizados em tendões de animais menores como ratos e porcos, diferentemente do tecido tendinoso bovino utilizado neste trabalho. Por conseguinte, é possível que diferentes permeabilidades hidráulicas sejam encontradas ao modelar diferentes experimentos, tendões e protocolos de ensaios. Por fim, essas questões sugerem uma investigação mais detalhada, uma vez que a permeabilidade hidráulica desempenha um papel fundamental não somente no comportamento mecânico, mas também nos aspectos biológicos e fisiopatológicos dos tendões (SAFA et al., 2020; MAGNUSSON; KJAER, 2019; LAVAGNINO et al., 2008; YANG; CRAWFORD; WANG, 2004).

Outro aspecto que pode ter influenciado tanto o parâmetro da permeabilidade hidráulica quanto os outros parâmetros dos modelos poromecânicos, diz respeito ao procedimento de identificação de parâmetros. No estudo realizado por Safa et al. (2020), foi empregado uma abordagem *multi-start* para quantificar parâmetros de um modelo

bifásico que modelou o comportamento transversal de fascículos de tendões de ratos sob carregamento osmótico. Nesse estudo, os autores identificaram uma correlação linear entre o módulo de elasticidade E e o coeficiente de Poisson ν , revelando que existem múltiplas combinações desses parâmetros que podem ser utilizadas como solução. Os autores destacam ainda que é praticamente impossível definir os parâmetros E e ν usando apenas as respostas do experimento osmótico, que foram baseadas em curvas do tipo tempo-força. Consequentemente, é possível que os parâmetros do modelo de permeabilidade hidráulica também tenham múltiplas soluções, uma vez que o coeficiente de Poisson ν controla a rigidez volumétrica elástica do esqueleto sólido (elástico ou viscoelástico). Ou seja, aumentar o valor do coeficiente de Poisson resulta na amplificação do comportamento quase incompressível do esqueleto sólido e, por conseguinte, resulta na redução dos efeitos poromecânicos, e vice-versa (KLAHR et al., 2021).

Além disso, diferentes modelos bifásicos podem prever diferentes permeabilidades hidráulicas, especialmente quando se utiliza apenas uma medida experimental como dados tempo-força no procedimento de identificação de parâmetros (KLAHR et al., 2021). A esse respeito, Klahr et al. (2021) destacam a importância de contabilizar mais de uma medida experimental, como as curvas de força e volume investigadas neste trabalho, para evitar a não unicidade da solução. Contudo, fica evidente que a obtenção de parâmetros materiais confiáveis para modelos poromecânicos depende tanto da quantidade de dados experimentais quanto da estratégia e robustez do algoritmo de otimização empregado na solução do problema de identificação de parâmetros.

Figura 16 – Evolução da permeabilidade hidráulica efetiva k no tempo em três locais diferentes na seção média da amostra, partindo do centro para a superfície externa.



Fonte: Elaborada pelo autor.

5 Conclusão

5.1 Considerações finais

Este trabalho buscou destacar a contribuição do fluido intersticial, assim como a contribuição do esqueleto sólido, no comportamento global de tendões submetidos a ensaios de compressão semi-confinada, realizados transversalmente às fibras de colágeno. O ensaio experimental incluiu testes de relaxação de tensão, que permitiu a obtenção de curvas de força de reação e mudança de volume ao longo do tempo do ensaio. Essas curvas foram utilizadas para investigar o desempenho de três modelos constitutivos clássicos: viscoelástico, poroelástico e poroviscoelástico, frequentemente empregados na modelagem do comportamento mecânico de tecidos biológicos moles. A investigação da capacidade desses modelos foi realizada por meio de um procedimento de identificação de parâmetros (ajuste de curvas) baseado em uma abordagem de otimização multiobjetivo híbrida, cuja solução foi obtida com a combinação do PSO e método de Nelder-Mead.

Com base nos resultados do ajuste de curvas, verificou-se que somente o modelo poroviscoelástico foi capaz de caracterizar as respostas experimentais de força de reação e mudança de volume. Destaca-se que ambas as respostas dependentes do tempo, associadas às deformações volumétrica e deformativa, foram necessárias para ajustar os dados experimentais. Além disso, verificou-se que enquanto a cinemática da amostra é principalmente governada pelo fluxo de fluido (dissipação volumétrica), o comportamento intrinsecamente associado ao esqueleto sólido viscoelástico (dissipação deformativa) contribui de maneira significativa para a resposta de força experimental. Isso indica que ambos os fenômenos estão presentes na mecânica do tendão, enfatizando a importância de levar em consideração tanto a cinemática experimental quanto a cinética dos tecidos tendinosos durante o processo de caracterização constitutiva.

A exploração dos comportamentos fenomenológicos do modelo poroviscoelástico revelou que o fluido intersticial tem um papel importante na mecânica do tendão, podendo ser relevante também nos aspectos biológicos e fisiopatológicos do tecido. A contribuição do fluido no suporte de carga mostrou-se relevante na fase de compressão e instantes iniciais da fase de relaxação, sendo responsável por suportar cerca de 50% da força de reação total nesse período, mas atingindo 20% no final do ensaio. Esse resultado ressalta a importância do fluido intersticial na proteção do esqueleto sólido contra danos induzidos por deformação (MERZA et al., 2021). Além disso, o escoamento intersticial pode estar envolvido na homeostase do tecido, remodelação da matriz tecidual e adaptações celulares (MERZA et al., 2021; LAVAGNINO et al., 2008; BUTLER et al., 1997).

Em relação à permeabilidade hidráulica, observou-se que os valores obtidos neste estudo são superiores aos valores relatados na literatura, corroborando com os valores

reportados apenas no final da fase de relaxação. Essa discrepância pode estar associada a diversos fatores, tais como: fonte do tecido tendinoso (*e.g.*, animal e local do tendão no corpo), dimensões da amostra, *setup* experimental, taxa de deformação, condições de contorno, modelagem da permeabilidade hidráulica como isotrópica e dependente da deformação volumétrica J e procedimento de identificação de parâmetros. Em vista disso, pode-se notar que a caracterização experimental do comportamento mecânico de tecidos biológicos moles é bastante complexa e desafiadora. Portanto, investigações nesse campo de pesquisa são imprescindíveis não somente para o entendimento fisiológico e fisiopatológico, mas também no desenvolvimento de novos produtos e tratamentos inovadores que podem impactar diretamente a qualidade de vida de muitas pessoas.

5.2 Sugestões para trabalhos futuros

Diante disso, propõe-se a seguir alguns trabalhos futuros que visam estender as investigações do presente estudo e explorar suas eventuais limitações.

- Verificar a influência das condições de contorno e modelos de permeabilidade hidráulica, incluindo o fluxo de fluido na direção paralela aos fascículos, sobre os parâmetros materiais do modelo poroviscoelástico por meio da estratégia de ajuste de curvas utilizada neste trabalho.
- Empregar diferentes estratégias de ajuste de curvas visando verificar as possíveis diferenças na identificações dos parâmetros constitutivos do modelo poroviscoelástico. Considerar pelo menos uma abordagem de otimização multi-start, juntamente com métodos de inspeção visual como coordenadas paralelas e correlação matricial, conforme sugerido por (SAFA et al., 2020).
- Estudar a eficiência computacional de diferentes técnicas de otimização multiobjetivo na identificação de parâmetros materiais de modelos poromecânicos.
- Realizar ensaios experimentais de compressão semi-confinada ou tração uniaxial cíclicos, visando verificar o comportamento do escoamento intersticial, bem como da permeabilidade hidráulica, na resposta mecânica do tecido tendinoso sob solicitações cíclicas, com base em curvas tempo-força e tempo-volume.

Referências

- ALFREDSON, H. et al. Heavy-load eccentric calf muscle training for the treatment of chronic achilles tendinosis. *The american journal of sports medicine*, v. 16, n. 3, p. 360–366, 1998. Citado na página 24.
- ARO, A.; B.C., V.; E.R., P. Biochemical and anisotropical properties of tendons. *Micron*, v. 43, n. 2, p. 205–214, 2012. ISSN 0968-4328. Citado na página 28.
- ARORA, J. S. *Introduction to Optimum Design*. [S.l.: s.n.], 2016. ISBN 978-0-12-800806-5. Citado 3 vezes nas páginas 45, 46 e 47.
- ATESHIAN, G. A.; WEISS, J. A. Anisotropic hydraulic permeability under finite deformation. *Journal of Biomechanical Engineering*, v. 132, n. 11, November 2010. ISSN 0148-0731. Citado 5 vezes nas páginas 24, 31, 32, 42 e 43.
- AVRIL, S. et al. Overview of identification methods of mechanical parameters based on full-field measurements. *Experimental Mechanics*, v. 48, p. 381–402, 2008. Citado na página 44.
- BONET, J.; WOOD, R. *Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2008. ISBN 9781139467544. Citado na página 39.
- BOZEC, L.; van der Heijden, G.; HORTON, M. Collagen fibrils: Nanoscale ropes. *Biophysical Journal*, v. 92, n. 1, p. 70–75, 2007. ISSN 0006-3495. Citado na página 28.
- BUDDAY, S. et al. Viscoelastic parameter identification of human brain tissue. *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*, v. 74, p. 463–476, 2017. ISSN 1751-6161. Citado na página 44.
- BUTLER, S. L. et al. Interstitial fluid flow in tendons or ligaments: a porous medium finite element simulation. *Medical, Biological Engineering, Computing*, v. 35, n. 6, p. 742–746, 1997. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 75.
- BöL, M. et al. Tissue-scale anisotropy and compressibility of tendon in semi-confined compression tests. *Journal of Biomechanics*, v. 48, n. 6, p. 1092–1098, 2015. ISSN 0021-9290. Citado 3 vezes nas páginas 23, 27 e 51.
- CANOSA-CARRO, L. et al. Current understanding of the diagnosis and management of the tendinopathy: An update from the lab to the clinical practice. *Disease-a-Month*, v. 68, n. 10, p. 101314, 2022. ISSN 0011-5029. Citado na página 24.
- CARNIEL, T. A. et al. Is the fluid volume fraction equal to the water content in tendons? insights on biphasic modeling. *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*, v. 140, p. 105703, 2023. ISSN 1751-6161. Citado na página 58.
- CARNIEL, T. A.; FANCELLO, E. A. A transversely isotropic coupled hyperelastic model for the mechanical behavior of tendons. *Journal of Biomechanics*, v. 54, p. 49–57, 2017. ISSN 0021-9290. Citado 5 vezes nas páginas 23, 24, 25, 32 e 72.
- CARNIEL, T. A.; KLAHR, B.; FANCELLO, E. A. On multiscale boundary conditions in the computational homogenization of an rve of tendon fascicles. *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*, v. 91, p. 131–138, 2019. ISSN 1751-6161. Disponível em:

- <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1751616118313511>>. Citado na página 23.
- CHEN, C.-T.; MALKUS, D.; JR, R. V. A fiber matrix model for interstitial fluid flow and permeability in ligaments and tendons. *Biorheology*, v. 35, n. 2, p. 103–118, 1998. Citado na página 31.
- COOK, J.; PURDAM, C. Is compressive load a factor in the development of tendinopathy? *British journal of sports medicine*, v. 46, n. 3, p. 163–168, 2012. Citado na página 31.
- COOK, J. L.; PURDAM, C. R. Is tendon pathology a continuum? a pathology model to explain the clinical presentation of load-induced tendinopathy. *British journal of sports medicine*, v. 43, n. 6, p. 409–416, 2009. Citado na página 24.
- COWIN, S. C.; DOTY, S. B. *Tissue Mechanics*. 10. ed. [S.l.: s.n.], 2007. ISBN 978-0-387-36825-2. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 29.
- DUENWALD S.E., V. R. . L. R. Viscoelastic relaxation and recovery of tendon. *Ann Biomed Eng*, v. 37, p. 1131–1140, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 30.
- FANG, F.; LAKE, S. P. Modelling approaches for evaluating multiscale tendon mechanics. *Interface Focus*, v. 6, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 28.
- FANG, F.; LAKE, S. P. Experimental evaluation of multiscale tendon mechanics. *Journal of orthopaedic research: official publication of the Orthopaedic Research Society*, v. 35, n. 7, p. 1353–1365, 2017. Citado na página 23.
- FINLEY, S. M. et al. Febio finite element models of the human lumbar spine. *Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering*, Taylor & Francis, v. 21, n. 6, p. 444–452, 2018. Citado na página 54.
- FIRMINGER, C. R.; EDWARDS, W. B. Effects of cyclic loading on the mechanical properties and failure of human patellar tendon. *Journal of Biomechanics*, v. 120, p. 110345, 2021. ISSN 0021-9290. Citado na página 30.
- FRANCHI, M. et al. Collagen structure of tendon relates to function. *TheScientificWorldJournal*, v. 7, p. 404–420, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 29.
- FREEDMAN, B. R. et al. Tendon healing affects the multiscale mechanical, structural and compositional response of tendon to quasi-static tensile loading. *Journal of the Royal Society*, v. 15, p. 1353–1365, 2017. Citado na página 23.
- GONÇALVES, A. M. S. *O Problema de Min-Max-Min com restrições pelo Método de Nelder-Mead*. 2013. Citado na página 48.
- GU, W. Y. et al. The anisotropic hydraulic permeability of human lumbar annulus fibrosus: Influence of age, degeneration, direction, and water content. *Spine*, v. 24, n. 23, p. 2449–2455, 1999. Citado na página 32.
- HERRON, M. R. et al. Febio finite element models of the human cervical spine. *Journal of Biomechanics*, v. 113, p. 110077, 2020. ISSN 0021-9290. Citado na página 54.

- HOLZAPFEL, G.; OGDEN, R. *Biomechanics: Trends in Modeling and Simulation*. [S.l.: s.n.], 2017. v. 20. ISBN 978-3-319-41473-7. Citado na página 32.
- JOHNSON, G. et al. Tensile and viscoelastic properties of human patellar tendon. *Journal of Orthopaedic Research*, v. 6, n. 12, p. 796–803, 1994. Citado na página 29.
- JUNQUEIRA, L. C.; CARNEIRO, J. *Histologia Básica*. [S.l.]: Guanabara Koogan, 2013. ISBN 978-85-277-2311-4. Citado na página 27.
- KANNUS, P. Structure of the tendon connective tissue. *Scandinavian Journal of Medicine and Science in Sports*, v. 10, p. 312–320, 2000. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 28.
- KEMPSON, G. E. Mechanical properties of articular cartilage. *The Journal of physiology*, v. 223, n. 1, p. 23p, 1972. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 31.
- KENNEDY, J.; EBERHART, R. Particle swarm optimization. In: *Proceedings of ICNN'95 - International Conference on Neural Networks*. [S.l.: s.n.], 1995. v. 4, p. 1942–1948 vol.4. Citado 2 vezes nas páginas 46 e 47.
- KLAHR, B. et al. Cell mechanics: Are poroviscoelastic parameters reliable? *Mechanics Research Communications*, v. 118, p. 103793, 2021. ISSN 0093-6413. Citado na página 73.
- KLEIBER, M. *Parameter sensitivity in nonlinear mechanics: theory and finite element computations*. [S.l.: s.n.], 1997. ISBN 0-471-96854-4. Citado na página 45.
- LAGARIAS, J. C. et al. Convergence properties of the nelder–mead simplex method in low dimensions. *SIAM Journal on Optimization*, v. 9, n. 1, p. 112–147, 1998. Disponível em: <<https://doi.org/10.1137/S1052623496303470>>. Citado 2 vezes nas páginas 48 e 60.
- LAVAGNINO, M. et al. A finite element model predicts the mechanotransduction response of tendon cells to cyclic tensile loading. *Biomechanics and Modeling in Mechanobiology*, v. 7, p. 405–416, 2008. Citado 4 vezes nas páginas 24, 32, 72 e 75.
- LEVENSTON, M. E.; FRANK, E. H.; GRODZINSKY, A. J. Variationally derived 3-field finite element formulations for quasistatic poroelastic analysis of hydrated biological tissues. *Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering*, v. 156, n. 1-4, p. 231–246, 1998. ISSN 00457825. Citado na página 32.
- LIMA, L. et al. Mecanotransdução: Importância de impor stress na reparação tecidual. *Revista da Sociedade Portuguesa de Medicina Física e de Reabilitação*, v. 29, n. 1, p. 33–39, 2017. Citado na página 24.
- MAAS, S. A.; ATESHIAN, G. A.; WEISS, J. A. Febio: History and advances. *annual review of biomedical engineering*, v. 19, p. 279–299, 2017. FEBio. Citado na página 53.
- MAAS, S. A. et al. Febio: finite elements for biomechanics. *journal of biomechanical engineering*. *Journal of biomechanical engineering*, v. 134, n. 1, 2012. FEBio. Citado na página 54.
- MAGANARIS, C. N.; NARICI, M. V. Mechanical properties of tendons. In: _____. *Tendon Injuries: Basic Science and Clinical Medicine*. London: Springer London, 2005. p. 14–21. ISBN 978-1-84628-050-4. Citado na página 29.

MAGNUSSON, S. P.; KJAER, M. The impact of loading, unloading, ageing and injury on the human tendon. *The Journal of Physiology*, v. 5, n. 597, p. 1283–1298, 2019. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 72.

MAK, A. The apparent viscoelastic behavior of articular cartilage—the contributions from the intrinsic matrix viscoelasticity and interstitial fluid flows. *Journal of biomechanical engineering*, v. 108, n. 2, p. 123–130, 1986. ISSN 0148-0731. Citado 3 vezes nas páginas 23, 24 e 57.

MAK, A. Unconfined compression of hydrated viscoelastic tissues: A biphasic poroviscoelastic analysis. *Biorheology*, v. 23, n. 4, p. 123–130, 1986. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 57.

MANSUR, N. S. B. et al. Lesões do aquiles - parte 1: Tendinopatias. *Revista Brasileira de Ortopedia*, v. 55, n. 6, p. 657–664, 2021. Citado na página 24.

MARKIEWICZ Éric; LANGRAND, B.; NOTTA-CUVIER, D. A review of characterisation and parameters identification of materials constitutive and damage models: From normalised direct approach to most advanced inverse problem resolution. *International Journal of Impact Engineering*, v. 110, p. 371–381, 2017. ISSN 0734-743X. Special Issue in honor of Seventy Fifth Birthday of Professor N. K. Gupta. Citado na página 44.

MATHEWS, M. B. *Connective Tissue: Macromolecular Structure and Evolution*. [S.l.]: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1975. v. 19. (Molecular Biology, Biochemistry and Biophysics, v. 19). Citado na página 27.

MERZA, E. et al. Immediate and long-term effects of mechanical loading on achilles tendon volume: A systematic review and meta-analysis. *Journal of Biomechanics*, v. 118, p. 110289, 2021. ISSN 0021-9290. Citado na página 75.

MOW, V. C. et al. Biphasic creep and stress relaxation of articular cartilage in compression: theory and experiments. *Journal of biomechanical engineering-transactions of the ASME*, v. 102, n. 1, p. 73–84, 1980. ISSN 0148-0731. Citado na página 23.

MOW, V. C. et al. Biphasic creep and stress relaxation of articular cartilage in compression: theory and experiments. *Journal of biomechanical engineering-transactions of the ASME*, v. 102, n. 1, p. 73–84, 1980. ISSN 0148-0731. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 32.

NELDER, J. A.; MEAD, R. A Simplex Method for Function Minimization. *The Computer Journal*, v. 7, n. 4, p. 308–313, 01 1965. ISSN 0010-4620. Citado 2 vezes nas páginas 47 e 48.

NORDIN, M.; FRENKEL, V. H. *Basic biomechanics of the musculoskeletal system*. 4. ed. [S.l.: s.n.], 2012. ISBN 978-1-60913-335-1. Citado na página 27.

OFTADEH, R. et al. Biological connective tissues exhibit viscoelastic and poroelastic behavior at different frequency regimes: Application to tendon and skin biophysics. *Acta Biomaterialia*, v. 70, p. 249–259, 2018. ISSN 1742-7061. Citado 2 vezes nas páginas 32 e 72.

PEDERSEN, M. E. *Good Parameters for Particle Swarm Optimization*. [S.l.], 2010. Citado 2 vezes nas páginas 46 e 47.

- PRINGELS, L. et al. Exploring the role of intratendinous pressure in the pathogenesis of tendon pathology: a narrative review and conceptual framework. *British Journal of Sports Medicine*, British Association of Sport and Exercise Medicine, v. 57, n. 16, p. 1042–1048, 2023. ISSN 0306-3674. Citado na página 31.
- ROSS, M. H.; PAWLINA, W.; BARNASH, T. A. *Atlas de Histologia Descritiva*. [S.l.]: Artmed, 2012. ISBN 978-85-363-2749-5. Citado na página 27.
- SAFA, B. N. et al. Evaluation of transverse poroelastic mechanics of tendon using osmotic loading and biphasic mixture finite element modeling. *Journal of Biomechanics*, v. 109, p. 109892, 2020. ISSN 0021-9290. Citado 6 vezes nas páginas 24, 31, 32, 54, 72 e 76.
- SAFA, B. N. et al. Exposure to buffer solution alters tendon hydration and mechanics. *Journal of Biomechanics*, v. 61, p. 18–25, 2017. ISSN 0021-9290. Citado na página 51.
- SHAW, K.; LEWIS, G. Tensile properties of human achilles tendon. In: *Proceedings of the 1997 16 Southern Biomedical Engineering Conference*. [S.l.: s.n.], 1997. p. 338–341. Citado na página 29.
- SPIPKER, R. L.; SUH, J. K. Formulation and evaluation of a finite element model for the biphasic model of hydrated soft tissues. *Computers and Structures*, v. 35, n. 4, p. 425–439, 1990. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 32.
- TARANTOLA, A. *Inverse Problem Theory*. [S.l.: s.n.], 2004. Citado na página 44.
- THORPE, C. T.; SCREEN, H. R. C. Tendon structure and composition. In: _____. *Metabolic Influences on Risk for Tendon Disorders*. [S.l.]: Springer International Publishing, 2016. p. 3–10. Citado na página 28.
- TRELEA, I. C. The particle swarm optimization algorithm: convergence analysis and parameter selection. *Information Processing Letters*, v. 85, n. 6, p. 317–325, 2003. ISSN 0020-0190. Citado na página 47.
- VAZ, M. et al. Identification of constitutive parameters – optimization strategies and applications. *Materialwissenschaft und Werkstofftechnik*, v. 46, n. 4-5, p. 477–491, 2015. Disponível em: <<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/mawe.201500423>>. Citado 3 vezes nas páginas 47, 49 e 59.
- VAZ, M.; CARDOSO, E. L.; STAHLSCHEMIDT, J. Particle swarm optimization and identification of inelastic material parameters. *Engineering Computations*, v. 30, n. 7, p. 936–960, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 47 e 60.
- VAZ, M. et al. Considerations on parameter identification and material response for gurson-type and lemaître-type constitutive models. *International Journal of Mechanical Sciences*, v. 106, p. 254–265, 2016. ISSN 0020-7403. Citado 4 vezes nas páginas 44, 46, 58 e 60.
- VIDAL, B. de C. Image analysis of tendon helical superstructure using interference and polarized light microscopy. *Micron*, v. 34, n. 8, p. 423–432, 2003. ISSN 0968-4328. Citado na página 28.
- WANG, J. H. C. Mechanobiology of tendon. *Journal of Biomechanics*, v. 39, n. 9, p. 1563–1582, 2006. Citado 6 vezes nas páginas 23, 24, 27, 28, 29 e 30.

- WEISS, J. A.; MAAKESTAD, B. J. Permeability of human medial collateral ligament in compression transverse to the collagen fiber direction. *Journal of Biomechanics*, v. 39, n. 2, p. 276–283, 2006. ISSN 0021-9290. Citado na página [31](#).
- WREN, T.; BEAUPRÉ, G.; CARTER, D. Mechanobiology of tendon adaptation to compressive loading through fibrocartilaginous metaplasia. *Journal of Rehabilitation Research and Development*, v. 37, n. 2, p. 135–143, 2000. Citado na página [31](#).
- YANG, G.; CRAWFORD, R. C.; WANG, J. H.-C. Proliferation and collagen production of human patellar tendon fibroblasts in response to cyclic uniaxial stretching in serum-free conditions. *Journal of Biomechanics*, v. 37, n. 10, p. 1543–1550, 2004. ISSN 0021-9290. Citado 2 vezes nas páginas [31](#) e [72](#).
- ZHANG, S. et al. Hierarchical ultrastructure: An overview of what is known about tendons and future perspective for tendon engineering. *Bioactive Materials*, v. 8, p. 124–139, 2022. ISSN 2452-199X. Citado na página [28](#).
- ZIMMERMAN, B. K. et al. A finite element algorithm for large deformation biphasic frictional contact between porous-permeable hydrated soft tissues. *Journal of biomechanical engineering*, v. 144, 2022. Citado na página [55](#).

Apêndices

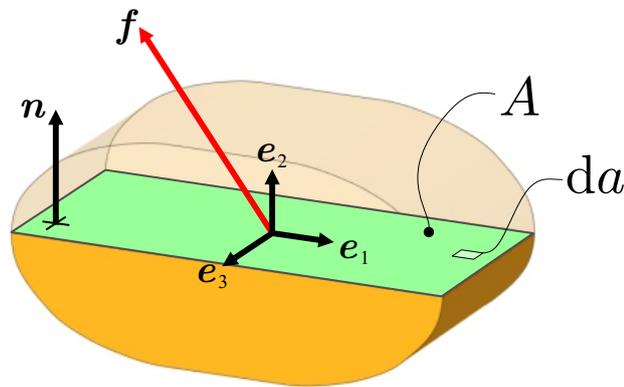
APÊNDICE A – Decomposição da força de reação total

Considere um vetor de força total \mathbf{f} que atua em uma superfície A com normal \mathbf{n} , conforme ilustrado na Figura 17, definido por

$$\mathbf{f} = \int_A \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} da. \quad (\text{A.1})$$

No contexto do modelo bifásico descrito na Seção (2.2), podemos considerar as hipóteses

Figura 17 – Vetor de força total \mathbf{f} atuando na superfície A com normal \mathbf{n} .



Fonte: Elaborada pelo autor.

de decomposição aditiva da tensão total (2.12) e contribuição de tensão hidrostática no fluido (2.12) para reescrever a Equação (A.1) como

$$\mathbf{f} = \int_A (\boldsymbol{\sigma}^s - p\mathbf{I}) \mathbf{n} da, \quad (\text{A.2})$$

ou ainda,

$$\mathbf{f} = \int_A \boldsymbol{\sigma}^s \mathbf{n} da + \int_A -p\mathbf{n} da. \quad (\text{A.3})$$

A Equação (A.3) indica que a força total que atua na área A depende tanto da tensão na matriz sólida $\boldsymbol{\sigma}^s$ quanto da pressão de poro p . Sendo assim, define-se: $\mathbf{f} = \mathbf{f}^s + \mathbf{f}^f$, sendo

$$\mathbf{f}^s = \int_A \boldsymbol{\sigma}^s \mathbf{n} da \quad \text{e} \quad \mathbf{f}^f = \int_A -p\mathbf{n} da, \quad (\text{A.4})$$

ou, em notação indicial,

$$f_i^s = \int_A \sigma_{ij}^s n_j da \quad \text{e} \quad f_i^f = \int_A -p n_i da, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (\text{A.5})$$

Em particular, a área A possui normal $\mathbf{n} = [0 \ 1 \ 0]^T$, por conseguinte, a equação (A.5) pode ser reescrita como

$$f_i^s = \int_A \sigma_{i2}^s da \quad \text{e} \quad f_i^f = \int_A -p da. \quad (\text{A.6})$$

Sendo assim, a força total que atua normal à área A , ou seja, a força resultante na direção $i = 2$, pode ser calculada por $f_2 = f_2^s + f_2^f$, onde

$$f_2^s = \int_A \sigma_{22}^s da \quad \text{e} \quad f_2^f = \int_A -p da. \quad (\text{A.7})$$