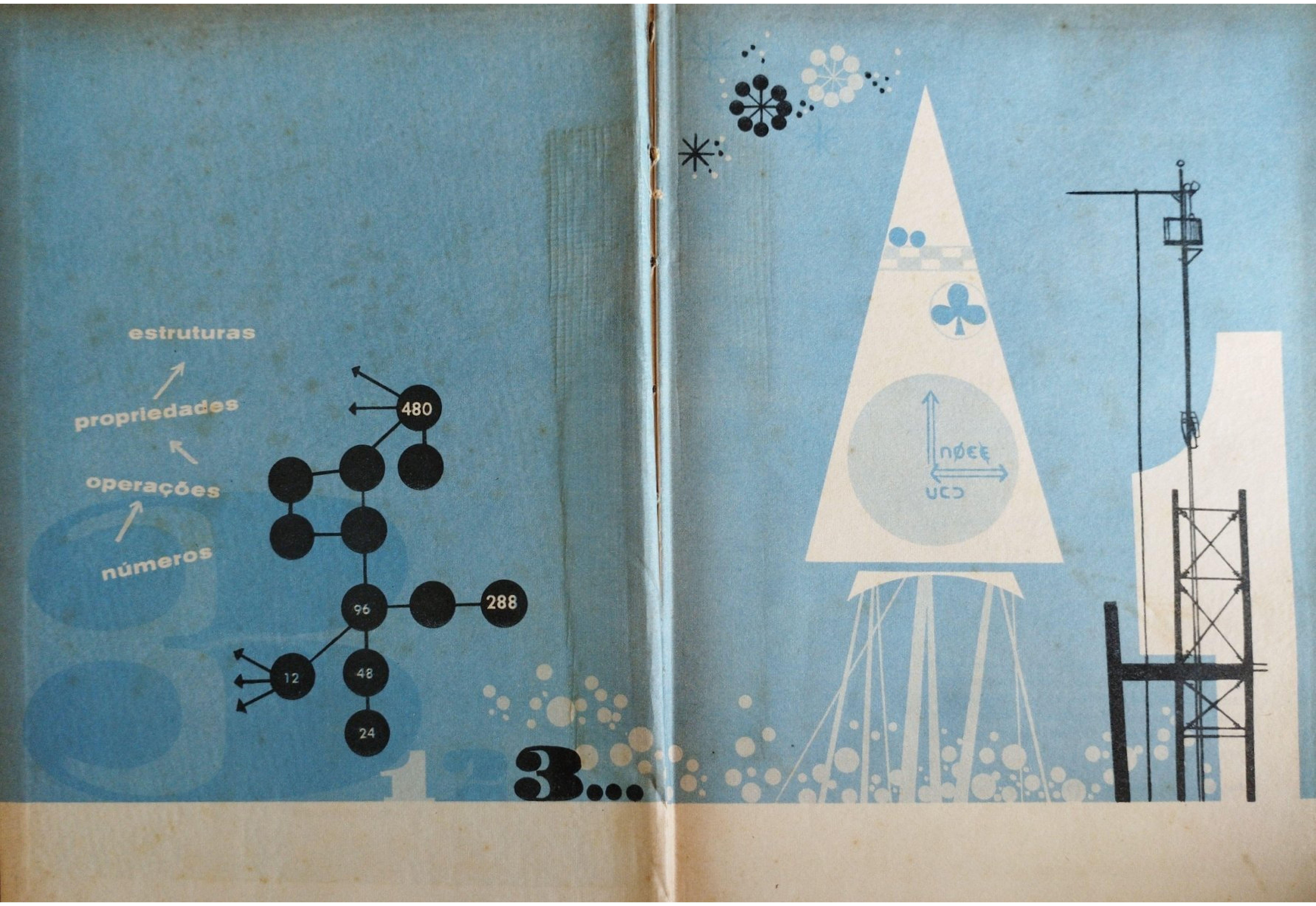
OSVALDO SANGIORGI

VOLUME 1

para os ginásios

matemática curso moderno


estruturas
propriedades
operações
números
480
96
288
12
48
24
1 2 3...

O autor agradece, sensibilizado, a todos aquêles que, direta ou indiretamente, colaboraram na feitura dêste livro, em particular aos colegas do "Grupo de Estudos do Ensino da Matemática" — GEEM — pelas magníficas sugestões e discussões de certos tópicos aqui presentes.

O. S.

(Rua Macapá, 17 — S. Paulo 5, SP.)

-1964-

OSVALDO SANGIORGI

Licenciado em Matemática pela Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras,
da Universidade de São Paulo

COMPANHIA
EDITORA NACIONAL

MATEMÁTICA 1

CURSO MODERNO

para cursos ginasiais

Exemplar Nº 99579

1963

obra composta e impressa
nas oficinas da
São Paulo Editora S. A.

Impresso nos Estados Unidos do Brasil
Printed in the United States of Brazil

PROGRAMA

para um

CURSO MODERNO

de

MATEMÁTICA

(*Para os cursos ginasiais*) *

Os seguintes assuntos, para serem desenvolvidos na primeira Série dos Ginásios, e distribuídos nos seguintes *seis* itens:

1. número e numeral — sistemas de numeração — bases;
2. operações (operações inversas) com os números inteiros propriedades estruturais;
3. divisibilidade — múltiplos e divisores; números primos; fatoração completa;
4. números fracionários — operações (operações inversas); propriedades estruturais;
5. estudo intuitivo das principais figuras geométricas planas e espaciais;
6. sistemas de medidas; sistema decimal e sistemas não-decimais,

estão explicados neste Volume 1, e fazem parte dos *vinte e quatro itens* que compõem os *Assuntos Mínimos para um Moderno Programa de Matemática para os Ginásios*, com as respectivas *sugestões* para seu desenvolvimento, apresentadas pelo Grupo de Estudos do Ensino da Matemática (GEEM), de São Paulo, em trabalho aprovado unânimemente pelo *IV Congresso Brasileiro do Ensino da Matemática* (Belém, Pará, julho de 1962), e readaptados no Curso de Treinamento Básico para Professôres Secundários (*Diretoria do Ensino Secundário* do *Ministério da Educação e Cultura*), realizado em Brasília, de 25 a 30 de novembro de 1963.

* Designação genérica do 1.º ciclo dos cursos médios, compreendendo os Ginásios, os Ginásios Modernos, os Ginásios Experimentais, os Ginásios Vocacionais, os Ginásios Industriais e os Ginásios Comerciais.

ÍNDICE DA MATÉRIA

1

3

2

4

Do mesmo autor:

Matemática, segunda série ginasial.

Matemática, terceira série ginasial.

Matemática, quarta série ginasial.

Matemática e *Estatística,* para os Institutos de Educação e Escolas Normais.

Programa de Admissão, para os ginásios (em colaboração).

EDIÇÕES DA

COMPANHIA EDITORA NACIONAL

Rua dos Gusmões, 639

São Paulo 2, SP

UMA PALAVRA PARA VOCÊ QUE INICIA O GINÁSIO . . .

Meu caro estudante:

Você vai iniciar agora o estudo da *Matemática* de um modo diferente daquele pelo qual seus irmãos e colegas mais velhos estudaram.

Sabe por quê?

Porque *Matemática*, para êles, na maioria das vêzes, era um "exagêro de cálculos", "problemas complicados, trabalhosos e fora da realidade" que a tornavam, quase sempre, um *fantasma!*

Hoje, na Era Atômica em que vivemos, isto é trabalho para as máquinas (os fabulosos computadores electrônicos de que tanto falam os jornais . . .), razão pela qual você vai aproveitar o seu precioso tempo aprendendo o verdadeiro *significado* e as belas *estruturas* da *Matemática Moderna*. Então, você perceberá, por exemplo, uma certa *semelhança* entre o modo de raciocinar em *Matemática* e nas outras matérias de seus estudos, como Português, História, Geografia, Ciências, Música, Educação Física, etc.

Conhecer *Matemática* dessa forma é o principal objetivo dêste livro em que você vai começar a estudar e que se completará com o auxílio indispensável de seu professor.

Vamos, pois, estudar *Matemática* com prazer!

Felicidades e até o próximo ano.

Osvaldo Sangiorgi

CAPÍTULO 1

número

numeral

sucessão de números
estrutura de ordem

comparação de números

PARTE 1ª

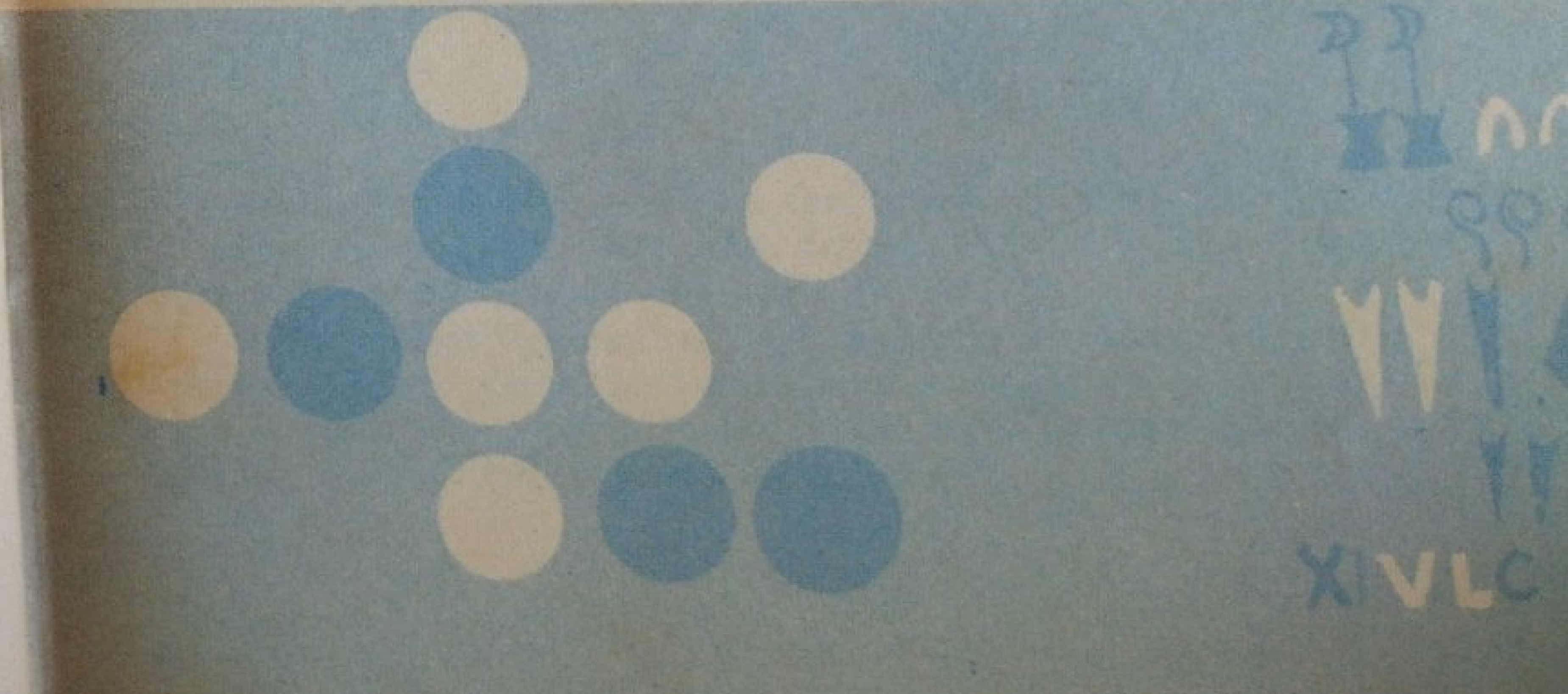
2ª PARTE

sistemas de numeração
bases

sistema de numeração
decimal

sistemas de numeração
antigos e modernos

experimentos sôbre
contagens em diversas
bases



número

numeral

sucessão de números
estrutura de ordem

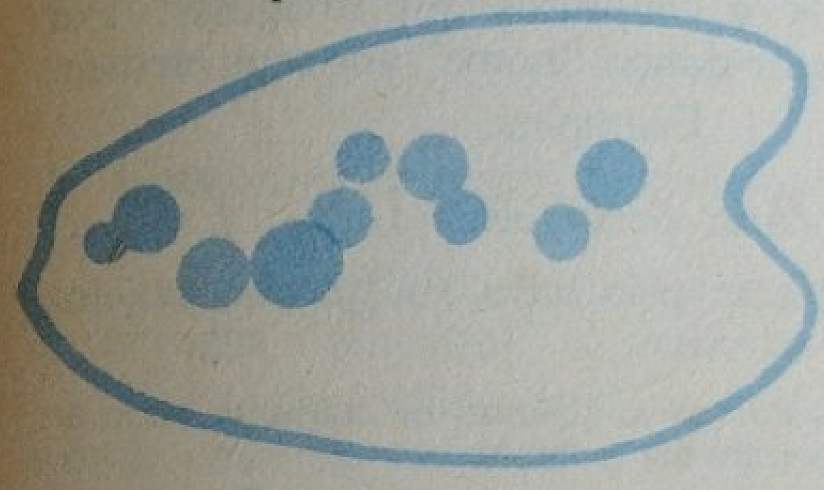
comparação de números

1ª

número

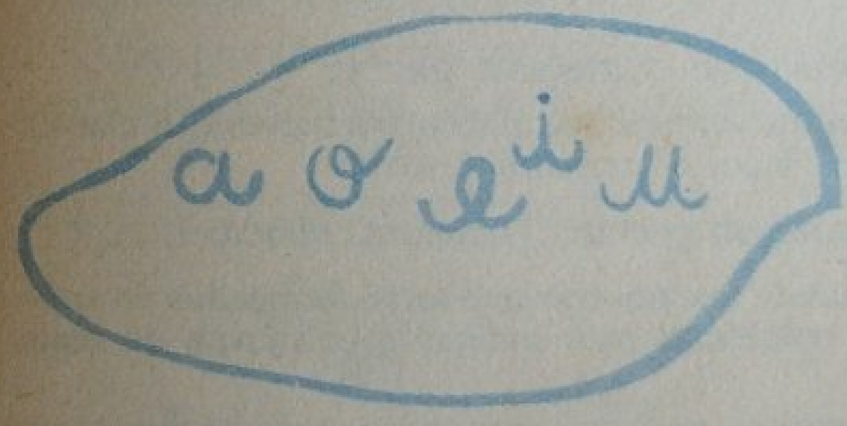
1. *Noção de conjunto*

Tôda coleção de objetos constitui um *conjunto*.
Exemplos:



Conjunto de bolinhas
da minha coleção

Conjunto dos alunos da minha classe que possuem 11 anos. Você *pertence* a êsse conjunto?



Conjunto das vogais de nosso alfabeto. Será que a letra *b* *pertence* a êsse conjunto?

Qualquer dos objetos dêsses conjuntos, considerado separadamente, é uma *unidade*. Você pode dizer, também, que a bolinha é um *elemento* que *pertence* ao conjunto das bolinhas.

Para melhor "gravar" a idéia de conjunto, vamos "desenhar" mais alguns. Preste, porém, bastante atenção, porque em Matemática a palavra *conjunto* tem um significado "mais amplo" daquele que, até êste momento, você estêve acostumado a "sentir".

Observe, pois, atentamente os conjuntos "desenhados" a seguir:

Conjunto de estrêlas

Conjunto de passarinhos

Conjunto de flôres (não estranhe que só tenha uma flôr)

Conjunto de "nada", isto é, vazio de alguma coisa.

Temos, então, exemplos de conjuntos com *muitos* elementos, com *poucos* elementos e com *nenhum* elemento. É lógico que você não pretenderá continuar "desenhando" todos os conjuntos que imaginar. Por isso, é costume representar-se um conjunto dando "nome" aos seus elementos e escrevendo-os entre chaves $\{\ \}$. Exemplos:

1. Conjunto das vogais do alfabeto português: $\{a,\ e,\ i,\ o,\ u\}$
2. Conjunto dos meses que começam pela letra j: $\{$*junho, janeiro, julho*$\}$

   Observação: a *ordem* com que os elementos figuram no conjunto pode ser *qualquer:* o conjunto continua o mesmo.

3. Conjunto dos dias da semana que começam por d: $\{$*domingo*$\}$

   Observação: êsse conjunto só contém *um elemento*, por isso é também chamado unitário.

4. Conjunto dos dias da semana que começam por r: $\{\ \ \}$

   Observação: *não há* nenhum dia da semana (na língua portuguêsa, é claro!) que comece por r; logo, o conjunto é vazio!

5. Conjunto das frutas que começam por a: $\{$*abacate, abacaxi, ...*$\}$

   Observação: como há mais frutas do que aquelas que estão nomeadas no conjunto, colocamos reticências para indicar a existência de mais elementos.

   Escreva, como exercício, por sua conta, mais duas frutas dêsse conjunto!

Nota importante: É quase certo que, nesta altura, você deverá estar pensando: será que existem conjuntos com *infinitos* elementos, isto é, conjuntos infinitos ?

De fato, existem. Sob certos aspectos o conjunto das estrêlas que brilham no céu é *infinito*, pois, sempre há mais uma entre "outras duas" e você não teria tempo suficiente e nem paciência para contá-las, não é? Espere só mais um pouco que você entrará logo em contacto com *conjuntos infinitos*, conhecidos desde a Escola Primária.

Lembra-se quais são? São os conjuntos de números.

Escrever, de acôrdo com o que foi ensinado (nomeando os elementos entre chaves) os seguintes *conjuntos*:

1. Conjunto dos alunos de sua classe (escreva os nomes) com mais de 12 anos.
2. Conjunto das estações do ano.
3. Conjunto das consoantes do alfabeto português.
4. Conjunto de cinco marcas de automóveis fabricados no Brasil.
5. Conjunto das côres da Bandeira brasileira.
6. Conjunto de seis frutas que começam por *m*.
7. Conjunto dos planêtas do Sistema Solar.
8. Conjunto dos meses que começam por *p*.
9. Conjunto dos tipos de veículos que você usa para ir ao Colégio. (OBS.: é lógico que se você fôr a pé o conjunto é *vaz*..)
10. Conjunto dos dias da semana que começam por *t*.
11. Conjunto dos Estados do Brasil banhados pelo Oceano Atlântico.
12. Conjunto de seus amigos cujos nomes começam por *A*.

2. *Comparação entre conjuntos: primeira idéia de número*

Foi comparando conjuntos que, desde a época mais remota até hoje, os homens "sentiram" a presença do número.

Tal comparação, como era de se esperar, tem sido feita com os recursos de cada época. Assim, por exemplo, os primitivos pastôres guardavam o "*número*" de suas ovelhas (sem saberem "contar" ainda!), fazendo *corresponder* a cada uma delas uma pedrinha (fig. 1). Estavam, pois, *comparando* dois conjuntos: o das ovelhas e o das pedrinhas.

Se, na hora de recolher as ovelhas, à última delas correspondesse a última pedrinha, os dois conjuntos conservavam, naturalmente, o *mesmo*

FIG. 1

número de elementos, ou seja, a *mesma quantidade*. Caso faltasse ou sobrasse alguma pedrinha, então os dois conjuntos *não apresentariam o mesmo número*.

O mesmo ocorria com os antigos índios Incas, quando queriam "contar" quantos dias tinham gasto para fazer uma certa viagem: num cordel que levavam, faziam um nó para cada pôr de Sol a que assistiam (fig. 2). No final da viagem, o conjunto de nós indicava o *número* de dias gastos.

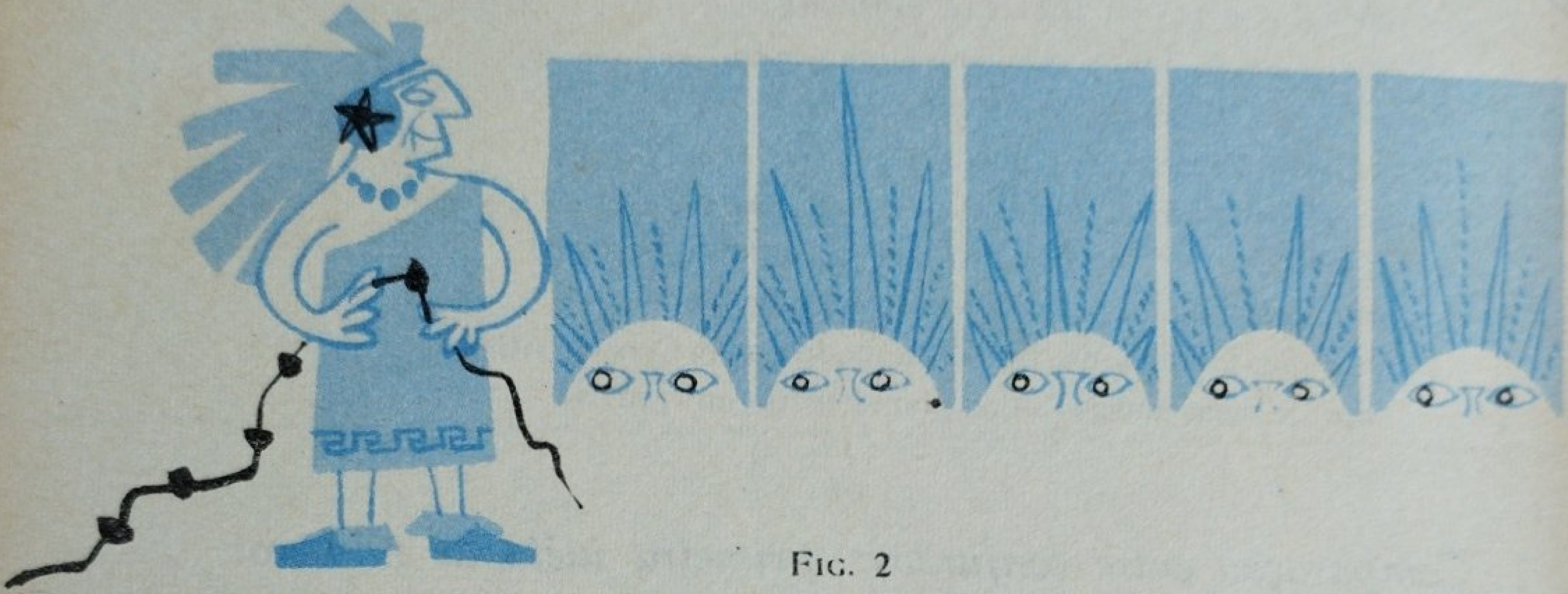


FIG. 2

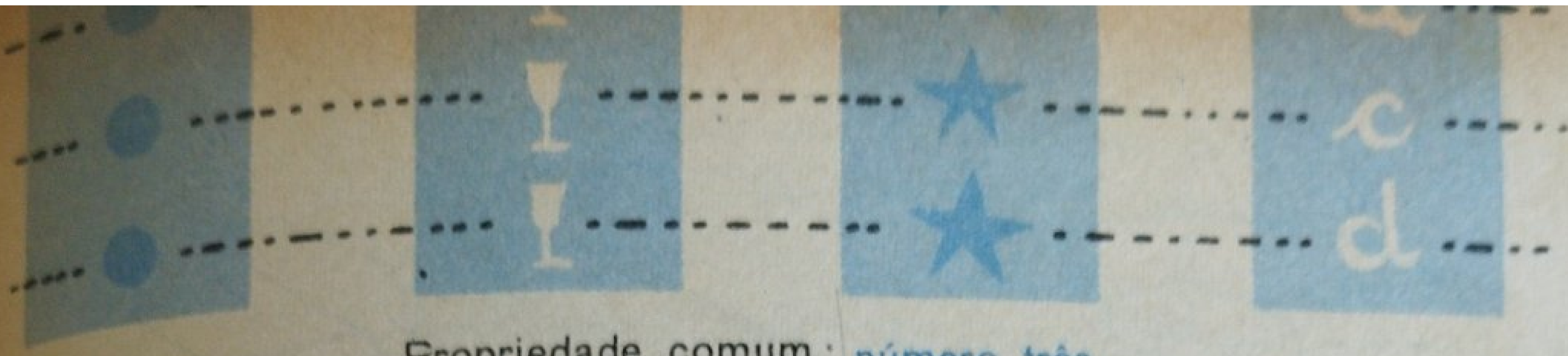
Repare que você, hoje em dia, procede da mesma forma quando, jogando uma partida de pingue-pongue, assinala num quadro negro os pontos ganhos (fig. 3), pois, está nesse instante *comparando* o conjunto dos *pontos ganhos* com o conjunto das *marcas* que, evidentemente, têm o *mesmo número* (mesma quantidade).

FIG. 3

Que é *número*, então?

Número é uma **idéia** que associamos a certos conjuntos que têm, em comum, uma *mesma propriedade*. Que é o *número* três(*)? É a *propriedade comum* a todos os conjuntos de três objetos. É uma propriedade essencial que *não depende* da *natureza dos objetos* e nem da *ordem* com que êles figuram nos conjuntos, como mostra a fig. 4.

(*) O uso que se faz do nome "*três*" (e nomes de outros números), antes da apresentação do sistema de numeração decimal, deve ser interpretado como palavra de uso corrente da *linguagem comum*.



Propriedade comum: número três

Fig. 4

Observe, com atenção, através das linhas pontilhadas, que:

1) a cada bola *corresponde* um copo e a cada copo *corresponde* uma bola;
2) a cada copo *corresponde* uma estrêla e a cada estrêla *corresponde* um copo;
3) a cada estrêla *corresponde* uma letra e a cada letra *corresponde* uma estrêla.

Quando isto acontece, dizemos que há uma **correspondência biunívoca** entre os elementos dêsses conjuntos, isto é, *a cada elemento de um conjunto corresponde um elemento do outro e vice-versa.*

Observação: É fácil verificar que também estão em *correspondência biunívoca:* o conjunto das bolas e o conjunto das letras, bem como o conjunto das bolas com o conjunto das estrêlas e o conjunto dos copos com o conjunto das letras. Experimente, por meio de linhas pontilhadas . . .

Logo, para você concluir se dois, ou mais conjuntos, têm o mesmo número basta verificar se entre os seus elementos existe uma correspondência biunívoca.

Outros exemplos explicativos: Os conjuntos (fig. 5) estão em **correspondência biunívoca** (comprove-o, unindo com linhas pontilhadas os elementos de um conjunto com os do outro, em *qualquer ordem*); portanto, a êles está associado o *mesmo número* (quatro!).

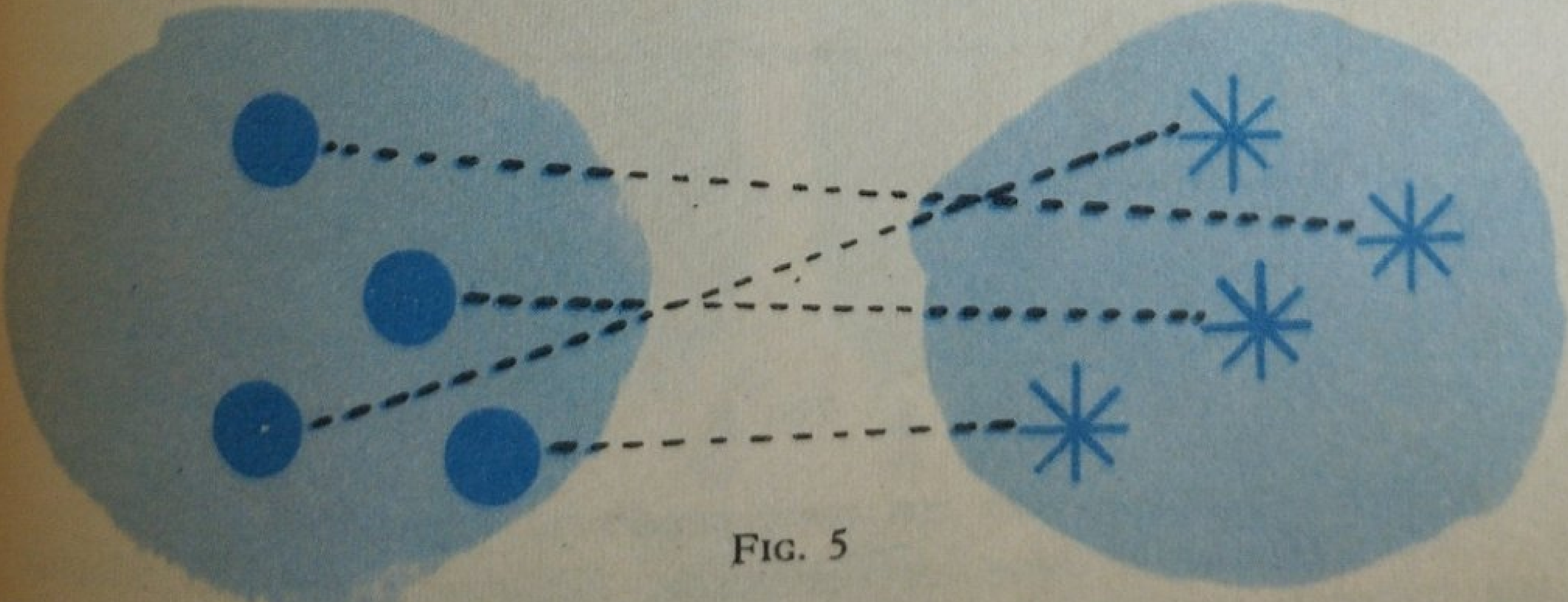
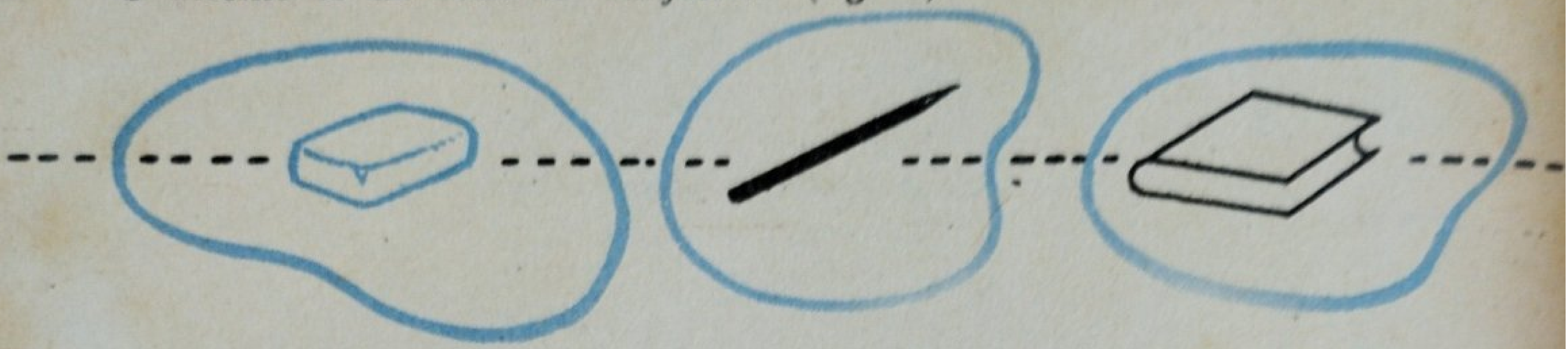


Fig. 5

Propriedade comum: número quatro

O mesmo se dá com os conjuntos (fig. 6):



Propriedade comum: número um

Fig. 6

Os conjuntos da fig. 7 *não possuem elemento algum* (são *vazios* de elementos).

Propriedade comum: número zero

Fig. 7

A propriedade comum a êsses conjuntos é o *número zero.*

Preste, agora, atenção aos seguintes conjuntos de bolinhas e de triângulos (fig. 8):

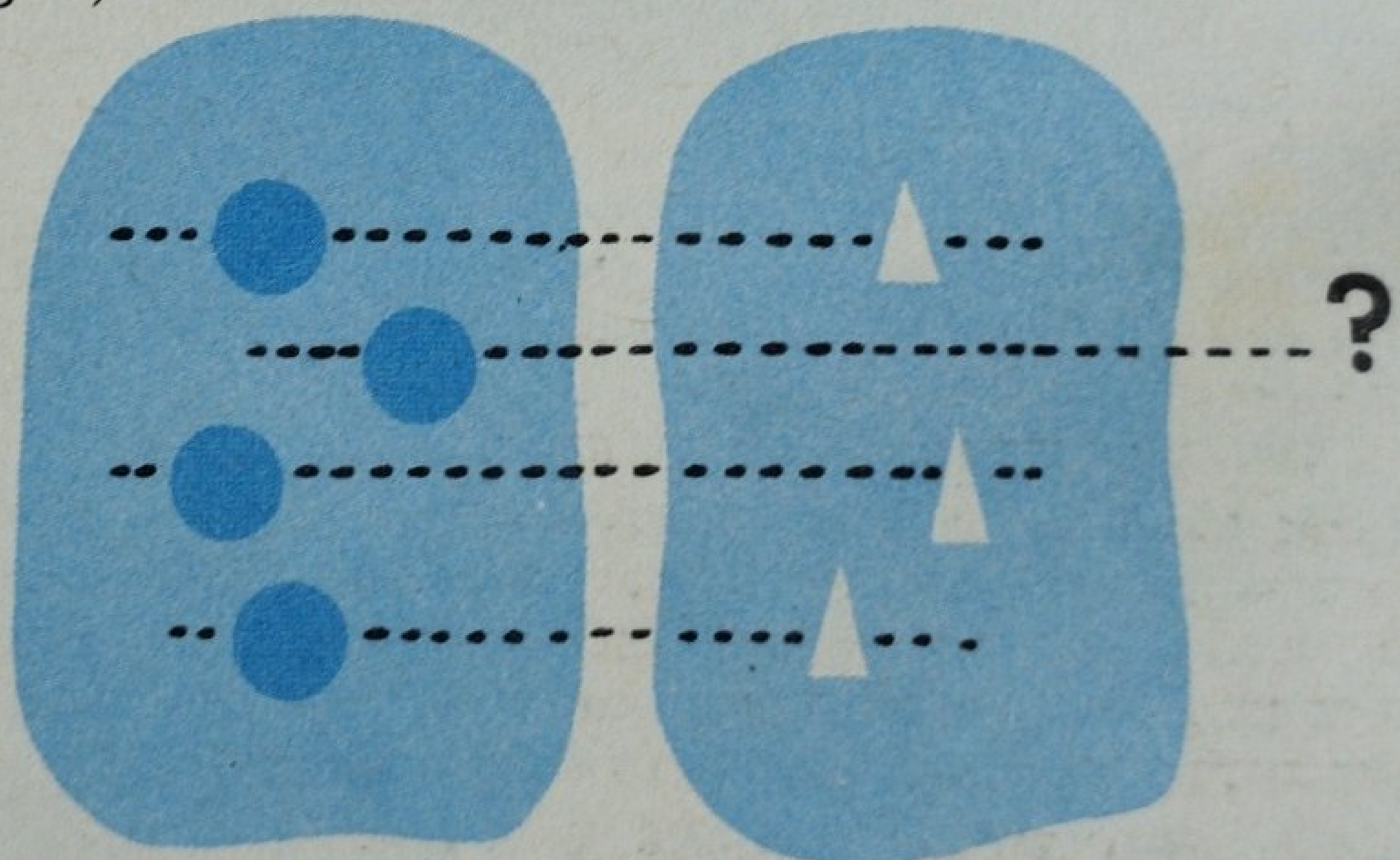


Fig. 8

Êstes conjuntos estão em *correspondência biunívoca*?

NÃO. E você já deve ter verificado, fàcilmente, que está faltando um triângulo no segundo conjunto. Portanto, a êsses conjuntos não está associado o *mesmo número.*

O mesmo se dá com os conjuntos (fig. 9):

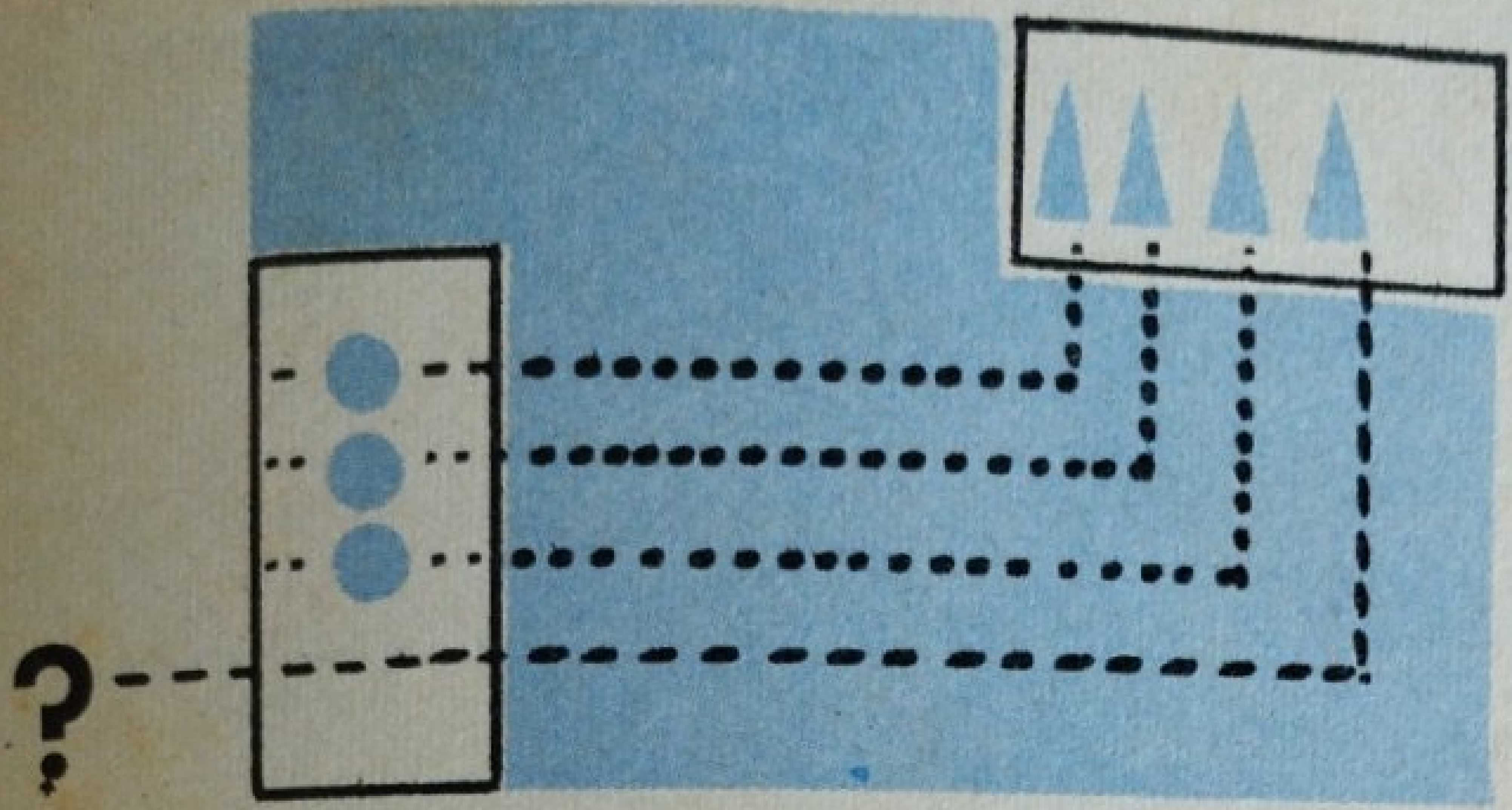


FIG. 9

onde, agora, está faltando uma bolinha no primeiro conjunto.

Mais um *exemplo diário:*

Se, a cada aluno da classe de aula corresponde uma carteira e a cada carteira da classe de aula corresponde um aluno, então a *correspondência* entre o *conjunto de alunos* e o *conjunto de carteiras é* biunívoca (fig. 10):

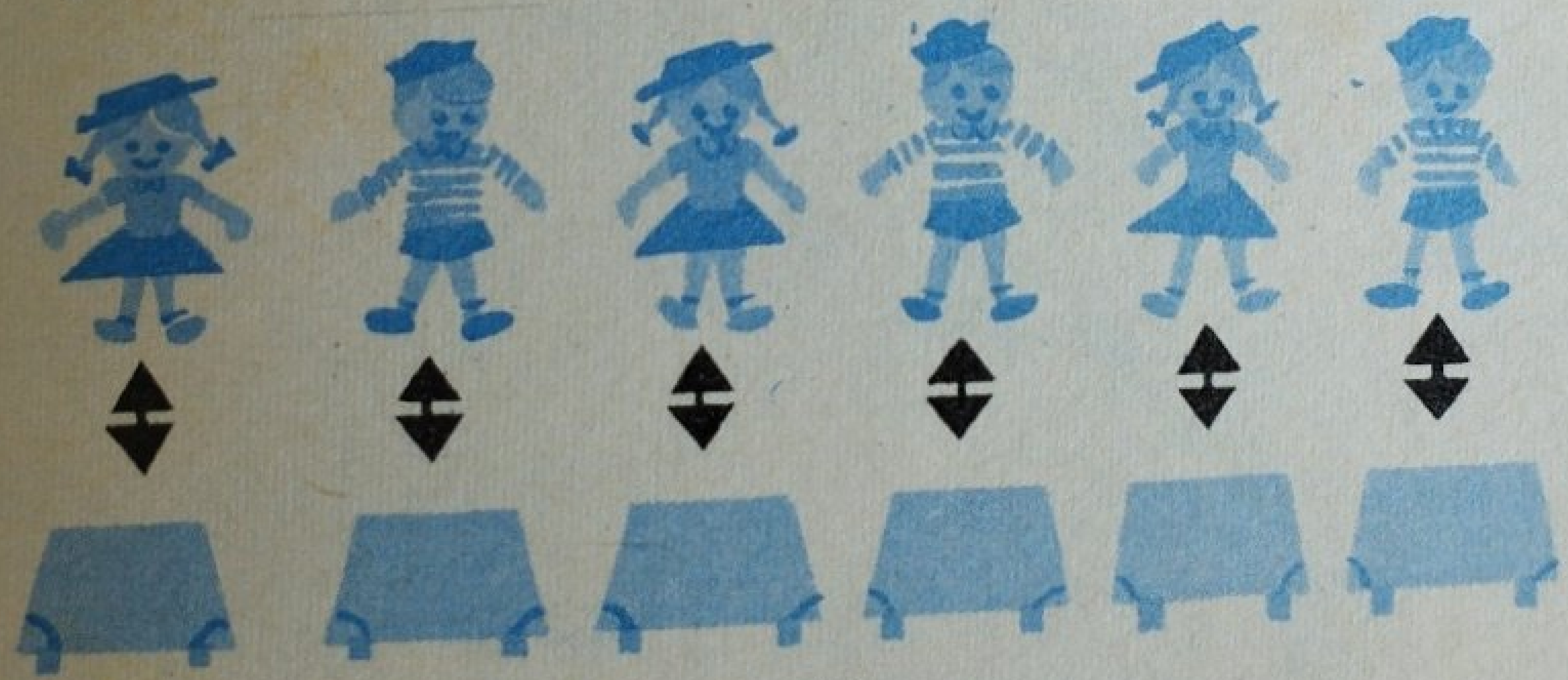


FIG. 10

Porém, se estiver faltando alguma carteira (fig. 11) na classe de aula, ou sobrando, então a correspondência entre êsses conjuntos não será mais biunívoca:

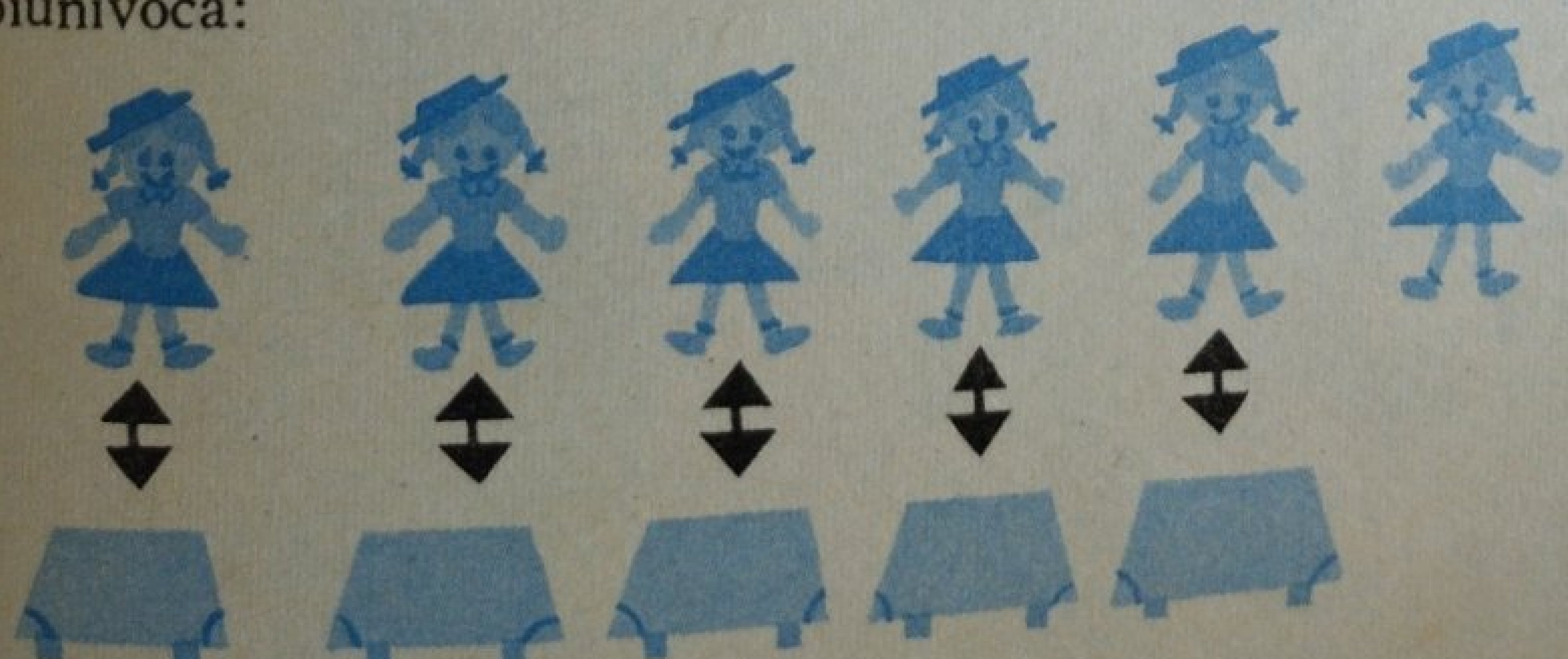
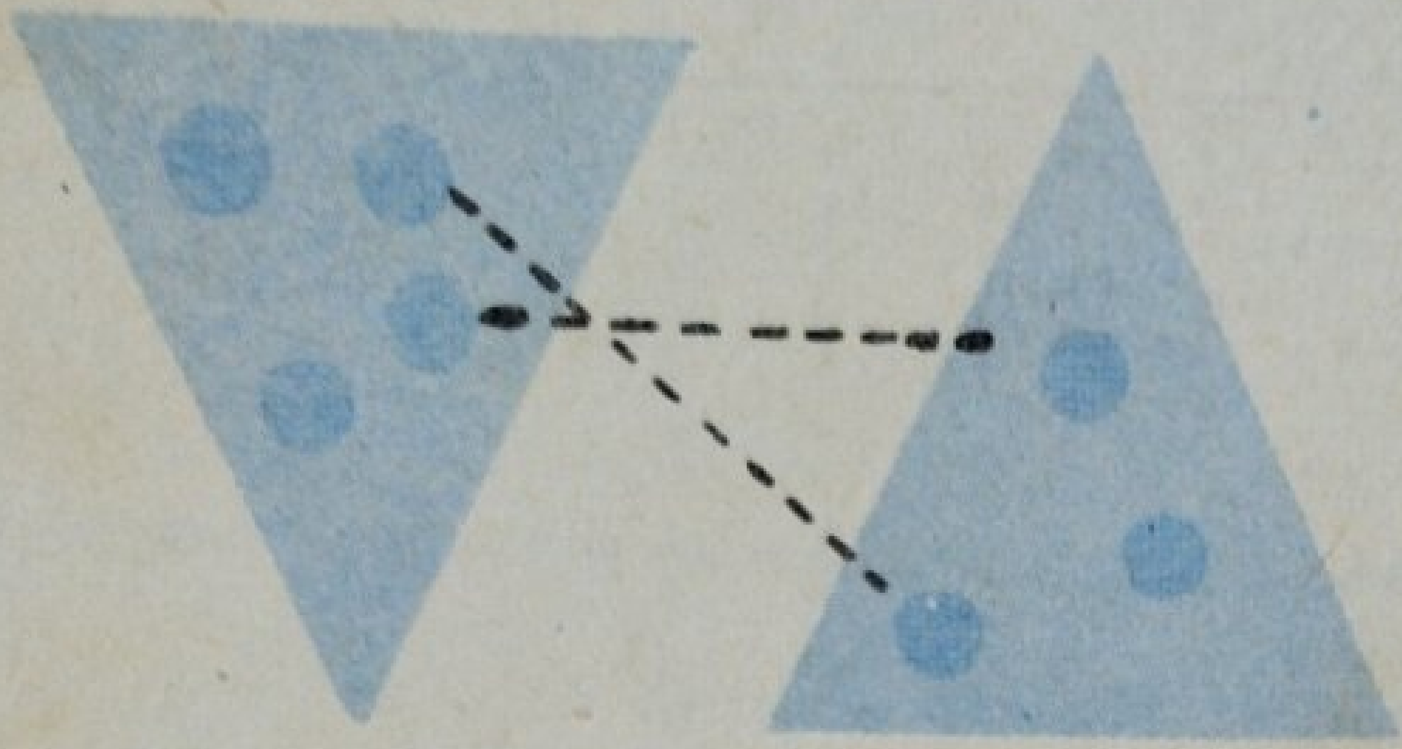


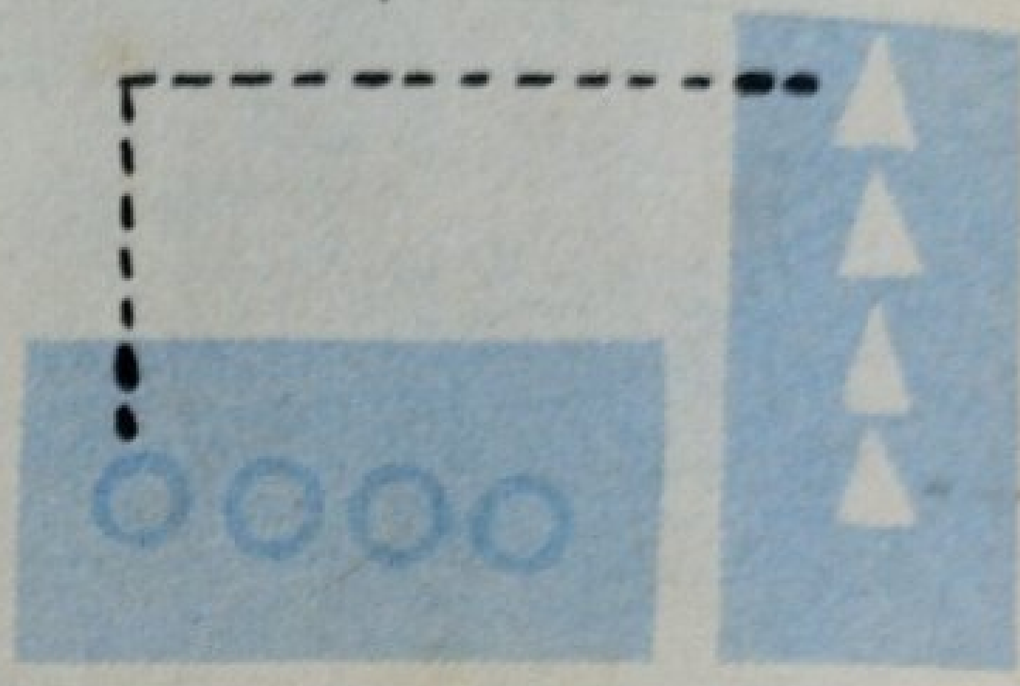
FIG. 11

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — Grupo 2

1. Verificar, por meio de linhas pontilhadas, se os seguintes pares de conjuntos estão em correspondência biunívoca:



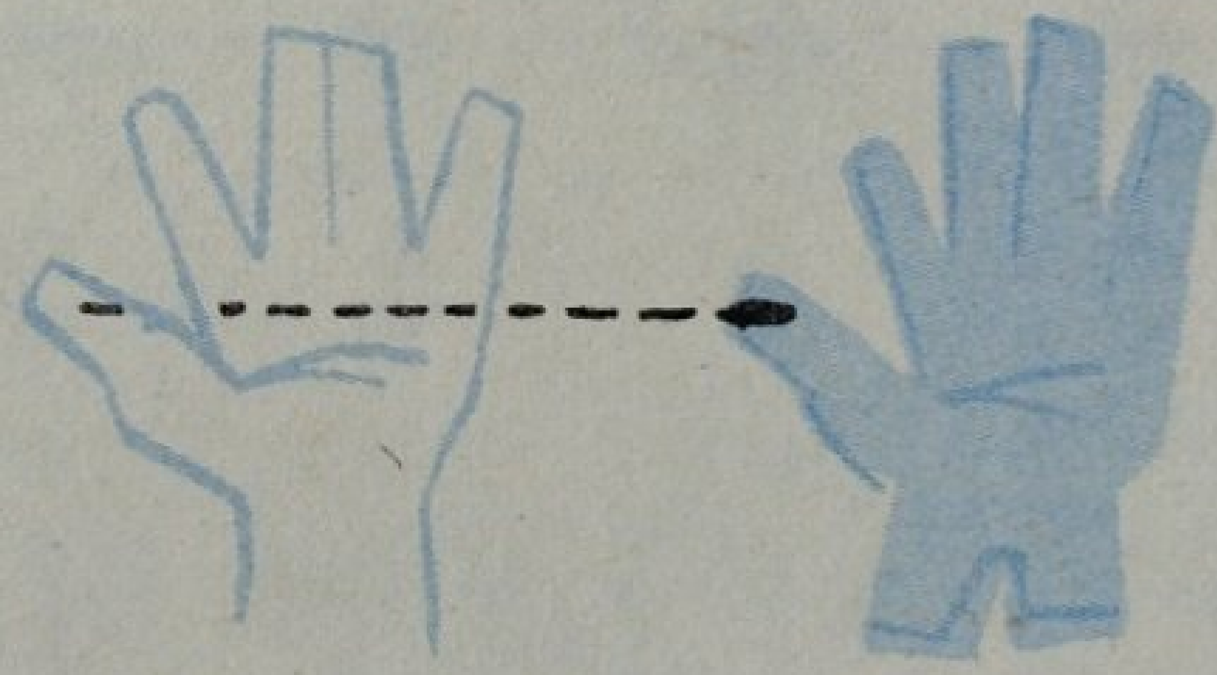
a)



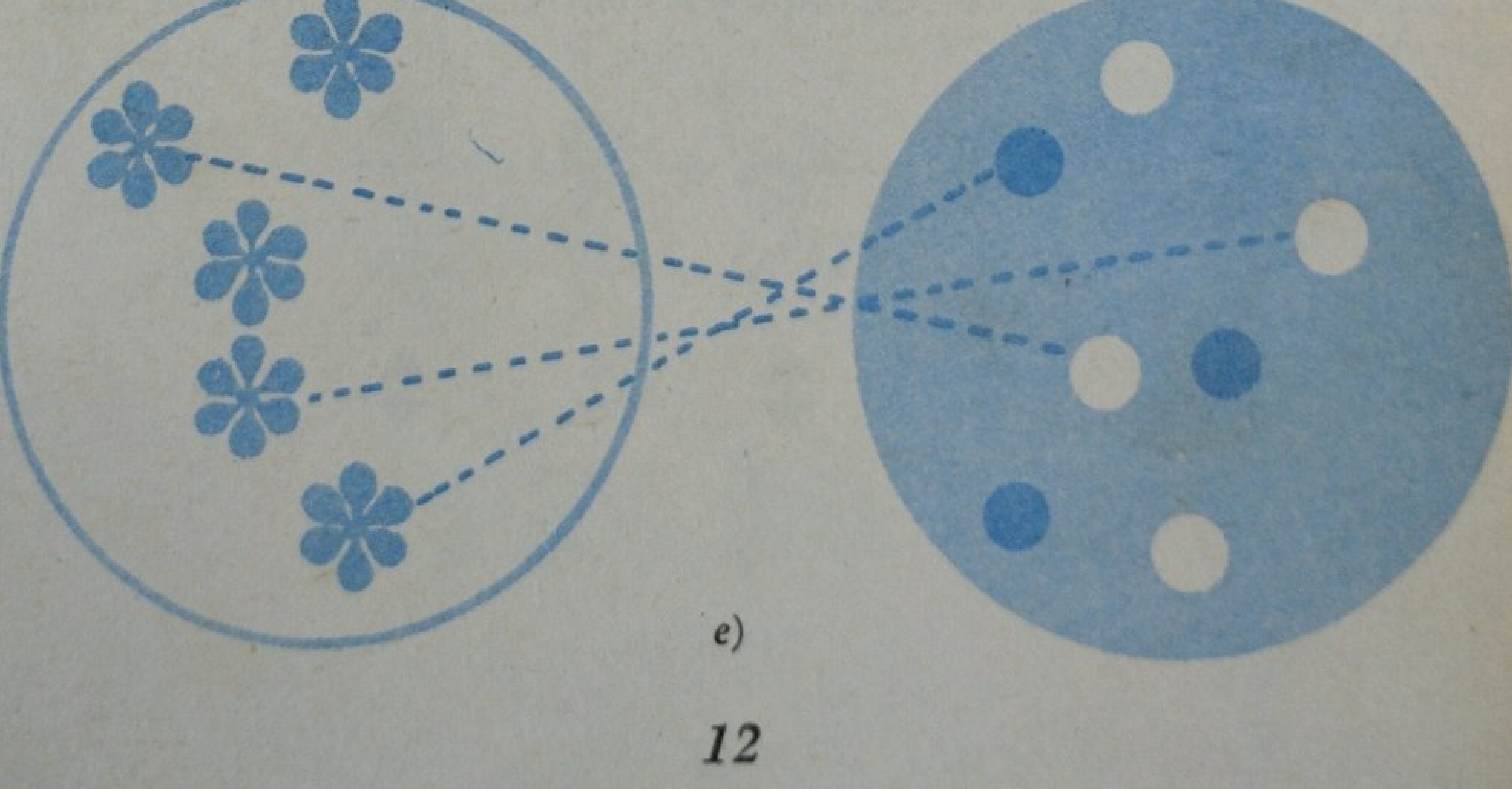
b)

Conjunto das *taças mundiais de futebol* conquistadas pelo Brasil até 1962 e o conjunto das *taças mundiais de bola-ao-cêsto,* conquistadas pelo Brasil até 1963.

c)



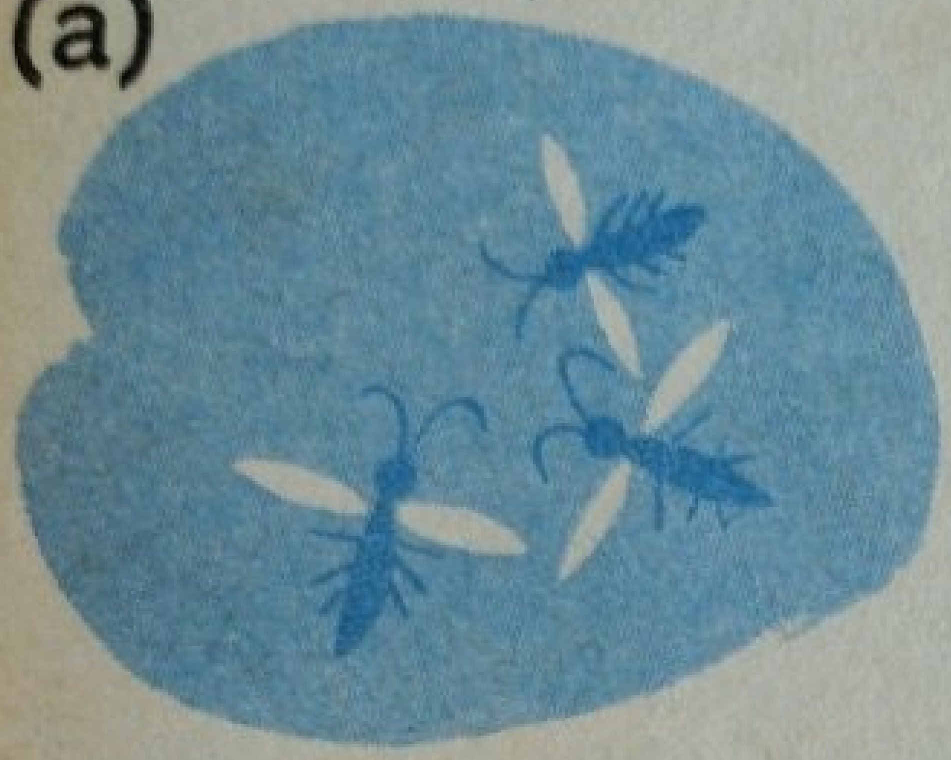
d)



e)

2. Na série dos seguintes conjuntos assinale dois que estejam em correspondência biunívoca: Ex. modêlo: (*a*) e (*i*).

(a)



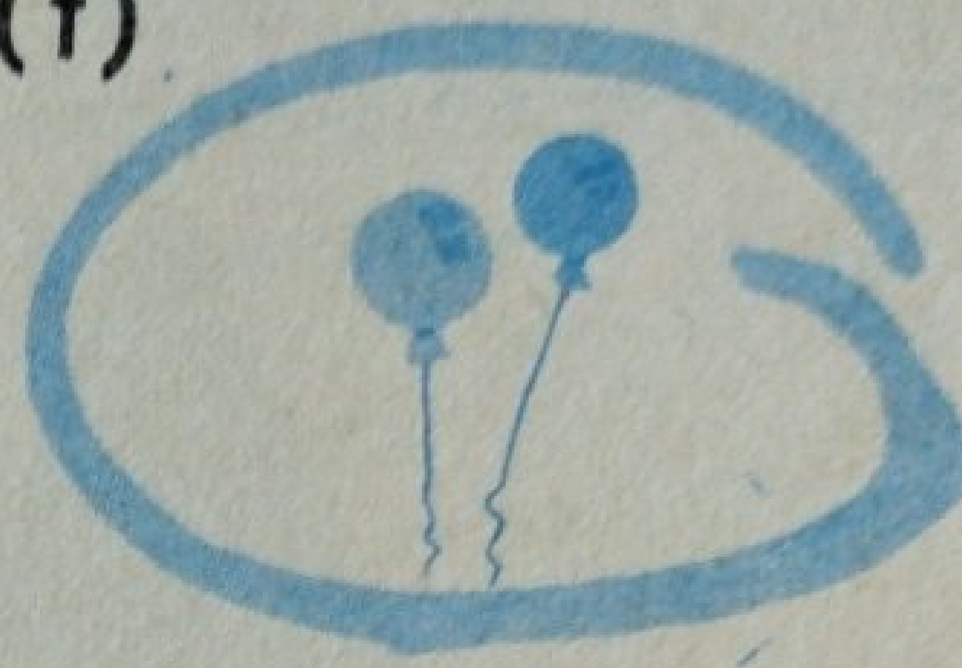
(b)

(c)

(d)

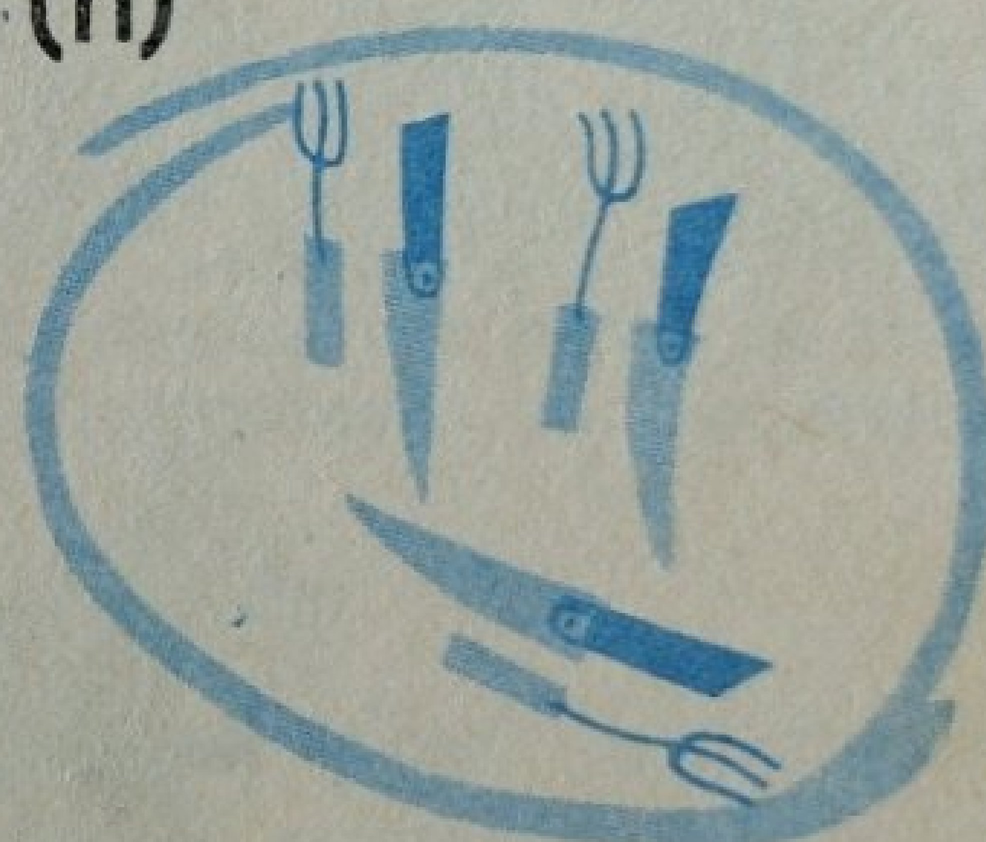
(e)

(f)



(g)

(h)



(i)

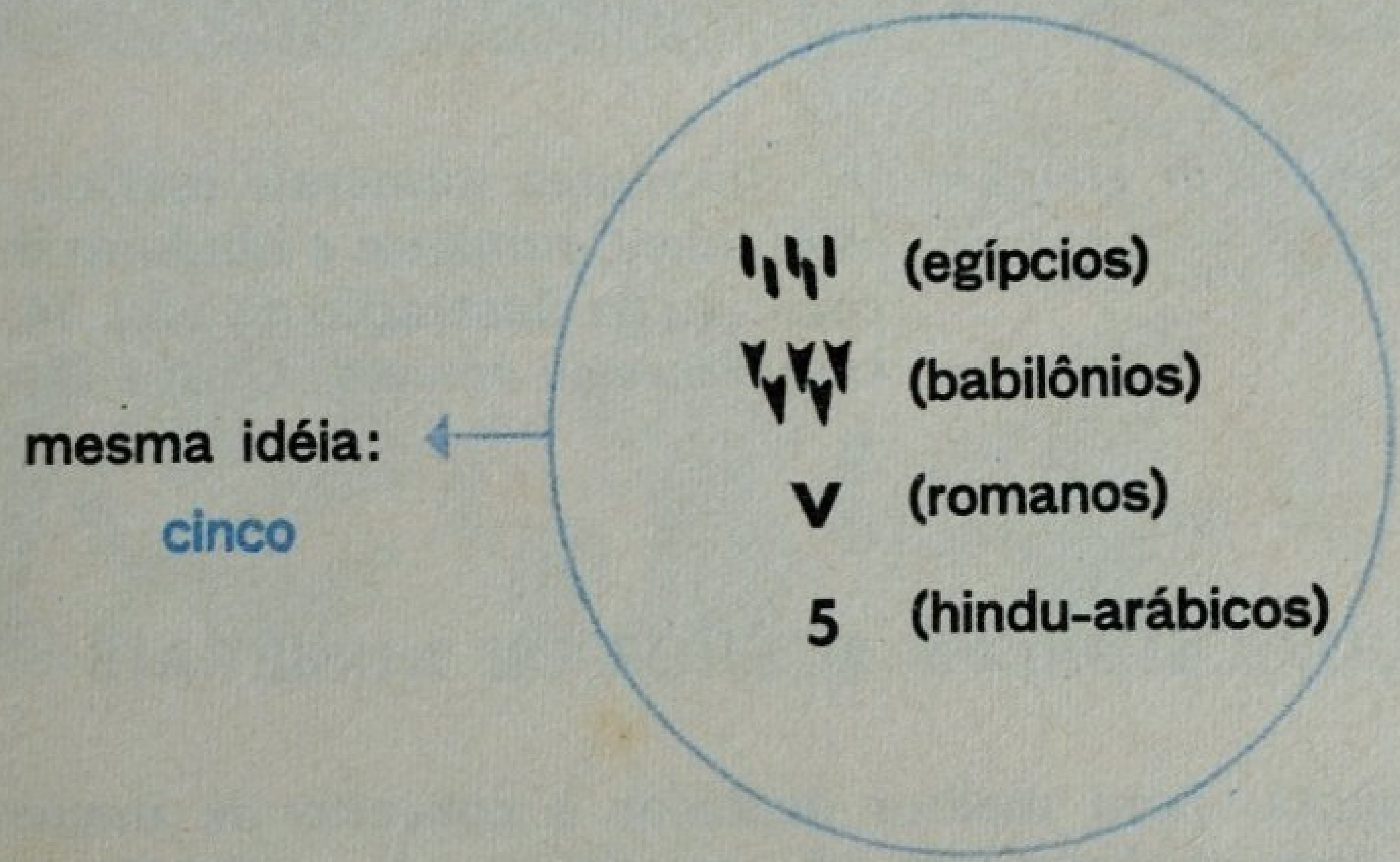
(j)

numeral

3. *Numerais*

As palavras *número* e *numeral*(*) têm significado diferente. Enquanto *número* é uma **idéia,** *numeral* é qualquer **símbolo** ou **nome** que usamos para exprimir o número, e portanto, a idéia que êle representa.

Assim, por exemplo, o número cinco — que é uma *idéia* — pode ser representada pelos seguintes *numerais:*



NOTA: Os numerais hindu-arábicos, que são os mais usados por todos os povos civilizados de hoje, são também chamados algarismos em homenagem ao matemático árabe Al-Karismi.

Também, quando falamos: "*cinq*" (em Francês) ou "*five*" (em Inglês) ou "*cinque*" (em Italiano), estamos usando *diferentes* numerais (falados) para exprimir a mesma *idéia:* o número cinco!

Logo, você está observando que um *mesmo número* (que é uma *idéia*!) pode ser representado por *diversos numerais* (escritos ou falados) *diferentes* entre si.

Por outro lado, quando você escreve:

"5" ou "$2 + 3$" ou "$2 + 1 + 2$" ou "5×1" ou "$10 : 2$" ou "$5 + 0$",

está usando *diferentes numerais* para exprimir sempre a mesma idéia: o número cinco!

Isso significa que *não devemos confundir* numeral com algarismo, pois, todo algarismo é um numeral, porém nem todo numeral é um algarismo, uma vez que o numeral pode envolver na sua representação *diversos algarismos* e *sinais de operações*.

(*) Não confundir com "adjetivo numeral".

Outro aspecto interessante que distingue bem *número* de *numeral:* enquanto os numerais podem ser "apagados" (quando escritos), "apanhados" (quando feitos de cartolina, por exemplo) ou "gritados" (quando você fala alto), o mesmo *não podemos fazer* com os números, que são idéias! Portanto:

Você pode escrever, apagar, pintar, desenhar ou falar alto sòmente os numerais e nunca os números!

Uma *pergunta de atenção:* os diferentes numerais escritos (egípcios, babilônios, romanos e hindu-arábicos), que constam da ilustração da pág. 14, representam o *mesmo número*. Qual é êsse *número?*

CURIOSIDADES ACÊRCA DE NUMERAIS

Vamos agora, para melhor destacar o conceito de *numeral*, trabalhar *sòmente* com *símbolos* que não envolvam, de nenhuma maneira, as idéias (número) que êsses símbolos. possam representar:

1. Mostre que a "metade" de **8** é **3**.

   É muito fácil: basta "dividir" ao meio (por uma vertical) o primeiro símbolo. . .

   Assim, de **8** resulta **3**.

   E, se a "divisão" ao meio fôsse por uma horizontal, qual seria a "metade" de **8**? Resolva você êste caso.

2. Mostre que a "metade" de **XII** é **VII**.

   Basta traçar a horizontal pelo meio e. . . . .

3. Mostre que "tirando" 3 de 32 resulta 2.

   Trata-se, evidentemente, de eliminar numeral 3 do numeral 32 (basta *apagar* o 3) e não, *subtrair* o número três do número trinta e dois que, como você sabe, é o número vinte e nove.

sucessão de números

estrutura de ordem

1 < 2 < 3 < 4 < . . .

4. *Sucessão dos números naturais. Primeira estrutura*

Ao conjunto dos números que, em português, chamamos:

um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete, oito,. . . . .

e que representamos com os *numerais* (símbolos hindu-arábicos):

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ...

atribui-se o nome de *sucessão dos números naturais*.

Chama-se *sucessivo* de um número, ao número que contém uma unidade a mais do que êsse outro. Por exemplo: cinco é o *sucessivo* de quatro, quatro é o *sucessivo* de três.

Como cada número da sucessão natural *tem um sucessivo*, diz-se que essa sucessão é *infinita* ou também que o *conjunto dos números naturais é infinito*.

Indicação do *conjunto dos números naturais:*

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \ldots\}$$

Observação: As reticências à direita do último número escrito indicam que *existem* outros números que o seguem.

Qual é a primeira **estrutura** que você "sente" no conjunto dos números naturais?

A experiência, antiga como a humanidade, destaca uma *estrutura de ordem* que se traduz por:

$$1 < 2 < 3 < 4 < 5 < 6 < 7 < 8 < 9 \ldots\ldots$$

onde < é o símbolo que significa *menor*. O símbolo simétrico: > significa *maior*.

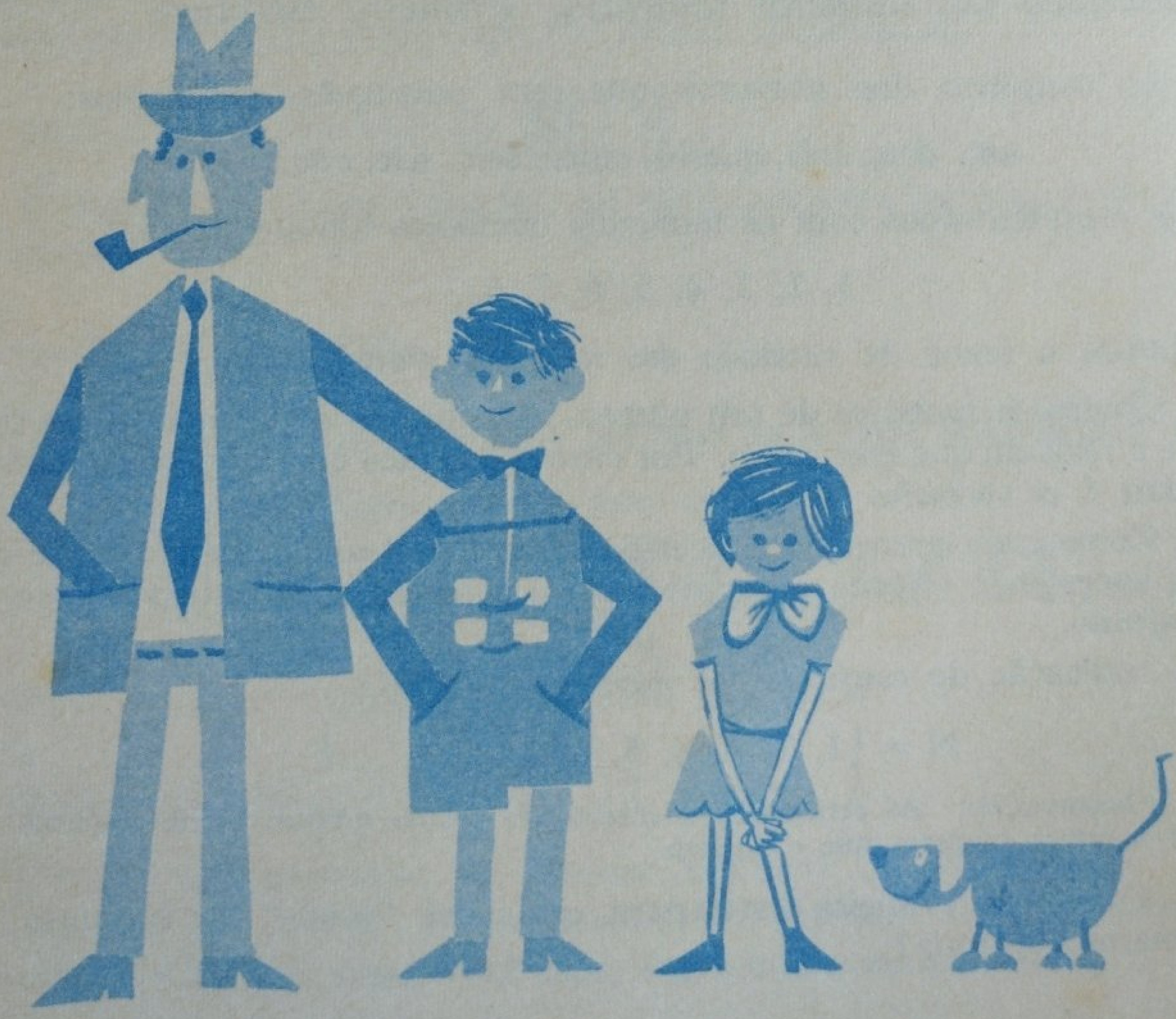
5. *Sucessão dos números inteiros*

Acrescentando ao conjunto dos números naturais o *número zero* (que é a idéia de *vazio*), representado pelo numeral: 0 (símbolo hindu-arábico), obtemos a *sucessão dos números inteiros*. O conjunto dos números inteiros é *infinito* e é indicado por:

$$I = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \ldots\ldots\}$$

É importante destacar, agora, que o conjunto dos números naturais e o conjunto dos números inteiros são os *primeiros exemplos* de conjuntos com *infinitos* elementos com os quais você entra em contacto.

"ESTRUTURA DE ORDEM"



comparação de números

6. *Relação de igualdade*

De agora em diante a *comparação* entre conjuntos se traduzirá mais fàcilmente pelos *números* que os identificam. Assim, se a dois conjuntos está associado o *mesmo número*, êste fato permite dizer que o número de elementos de um é **igual** ao número de elementos do outro.

Indicando pelo numeral a (que pode ser qualquer dos símbolos já conhecidos) o número de elementos do primeiro conjunto e por b o número de elementos do segundo conjunto, escrevemos:

$$a = b$$

Ex: $5 = V$

O sinal $=$ é o símbolo da importante *relação de igualdade*, onde a é o primeiro membro e b o segundo membro.

Observação: Valem, para a *relação de igualdade*, as seguintes *propriedades*:

1.ª) *reflexiva:* $a = a$ (isto é, todo número é igual a si mesmo)

Ex.: $5 = 5$

2.ª) *simétrica:* se $a = b$, então $b = a$ (isto é, a *ordem* dos números não altera a igualdade)

Ex.: $5 = V$, então $V = 5$

3.ª) *transitiva:* se $a = b$ e $b = c$, então $a = c$ (isto é, se um primeiro número é igual a um segundo e êste é igual a um terceiro, então o primeiro é igual ao terceiro)

Ex.: $5 = V$ e $V = \begin{smallmatrix}|||\\||\end{smallmatrix}$ então $5 = \begin{smallmatrix}|||\\||\end{smallmatrix}$

Podemos exprimir as duas últimas propriedades usando o símbolo lógico da *implicação* (*) $\Longrightarrow$ que se lê: "implica" ou "acarreta". Assim:

2.ª) se $a = b \Longrightarrow b = a$ 3.ª) se $\left.\begin{array}{l} a = b \\ b = c \end{array}\right\} \Longrightarrow a = c$

7. *Relações de desigualdade*

Se a dois conjuntos *não está associado o mesmo número*, então o número de elementos de um dêles é *desigual* (ou diferente) do número de elementos do outro. O sinal $\neq$ é o usado para indicar que dois números são *diferentes*. Assim, por exemplo, escrevemos:

$5 \neq 3$ (lê-se: cinco "diferente" de três)

e também que:

$$5 > 3 \quad e \quad 3 < 5$$

Qualquer dessas relações é denominada *desigualdade*.

Recorrendo ao *conjunto dos números inteiros* — que é o mais usado para comparar conjuntos — podemos dizer também que:

um número é *maior* que outro quando *segue*(**) êste outro na sucessão dos números inteiros;

um número é *menor* que outro quando *precede* êste outro na sucessão dos números inteiros

Assim, considerada a sucessão:

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \ldots\ldots$$

temos que: $6 > 4$, pois 6 *segue* 4
$5 < 8$, pois 5 *precede* 8

OBSERVAÇÃO: Atenção — uma *relação de desigualdade* é:

1.ª) *não-reflexiva:* um número *não* pode ser menor (ou maior) que êle próprio.
Ex.: $5 < 5$ é FALSO!

2.ª) *não-simétrica:* a ordem dos números *altera* a desigualdade.
Ex.: Se $5 < 6$ é VERDADE, então $6 < 5$ é FALSO.

3.ª) *transitiva:* vale a "transição", isto é:
se $7 > 5$ e $5 > 2$, então $7 > 2$ é VERDADE

(*) A ilustre pedagogista e matemática francêsa Lucienne FÉLIX aconselha o uso da côr *verde* para o símbolo da implicação $\Longrightarrow$, pois, dessa maneira o "trânsito" fica "*livre*" para a dedução.

(**) São primitivas as relações *segue* e *precede*.

Em símbolos, temos:

$$\left.\begin{array}{r} 7 > 5 \\ 5 > 2 \end{array}\right\} \Longrightarrow 7 > 2$$

O que permite escrever ainda a *dupla desigualdade:*

$$7 > 5 > 2$$

que indica estarem os números escritos em *ordem decrescente.*

No caso de : $2 < 5 < 7$ os números estão escritos em *ordem crescente.*

8. *Relação de ordem geral*

Ao lado das relações já estudadas, que são de *ordem restrita*, podemos utilizar a relação de *ordem geral* traduzida pelas expressões:

maior ou igual (ou seja, não-menor) pelo símbolo: $\geqslant$

menor ou igual (ou seja, não-maior) pelo símbolo: $\leqslant$

Exemplo: $a \leqslant 5$ significa que a é menor ou igual a 5. Se a representa um número inteiro, então a pode ser: 0, 1, 2, 3, 4 e 5.

SÍMBOLOS ATÉ AGORA USADOS

Para comparar números

$=$	lê-se	"igual"
$\neq$	lê-se	"diferente"
$>$	lê-se	"maior"
$<$	lê-se	"menor"
$\geqslant$	lê-se	"maior ou igual"
$\leqslant$	lê-se	"menor ou igual"

Para a implicação

$\Longrightarrow$ lê-se: "implicar"

1. Representar: 1.º) o conjunto dos números naturais; 2.º) o conjunto dos números inteiros.

2. Dados: 2 e 5 pergunta-se: 1.º) qual é o maior numeral (símbolo maior)? 2.º) qual é o maior número (idéia)?

3. Escrever à direita de cada sentença a letra V, se fôr *verdadeira*, e a letra F se fôr *falsa:*

   1.º) Número é uma idéia.
   2.º) Numeral é qualquer símbolo que representa um número.
   3.º) Um número pode ser representado sòmente por um numeral.
   4.º) Um número pode ser representado por diferentes numerais.
   5.º) 8 e 8 são numerais do mesmo número.
   6.º) 3 é um numeral menor que 2.
   7.º) Três é um número menor que dois.

4. Escrever à direita de cada igualdade ou desigualdade V ou F, dependendo de ela ser verdadeira ou falsa:

   1.ª) $7 > 5$ 2.ª) $3 < 2$ 3.ª) $4 = 5$ 4.ª) $4 = 4$ 5.ª) $1 > 1$
   6.ª) $0 < 2$ 7.ª) $0 = 0$ 8.ª) $2 > 3$ 9.ª) $2 < 3$ 10.ª) $5 < 5$

5. Colocar o símbolo que torne verdadeiras as seguintes relações:

   1.ª) 8 ? 5 (Exemplo: $8 > 5$) 2.ª) 7 ? 7 3.ª) 3 ? 4 4.ª) 4 ? 3
   5.ª) 0 ? 2 6.ª) 2 ? 0 7.ª) 1 ? 1 8.ª) 9 ? 1

6. Designando por a o número natural que indica os olhos de um lôbo, por b o número de suas patas e por c, o número de suas orelhas, escrever uma *igualdade* e duas *desigualdades* envolvendo êsses números.

7. Quais são os valôres que pode assumir o número inteiro n, se deve satisfazer as condições: $n > 3$ e $n < 7$?

8. Idem, para as condições: $n \geqslant 3$ e $n < 9$

9. Quais são os números inteiros não-maiores que 6?

10. Responder se são *verdadeiras* ou *falsas* as implicações:

    1.ª) $8 > 5 \Longrightarrow 5 < 8$
    2.ª) $4 < 6 \Longrightarrow 6 < 4$
    3.ª) $a > b \Longrightarrow b < a$

11. Quatro números: a, b, c, d, são tais que: $a < b$, $b < c$ e $c < d$. *Compare* os números a e d.

12. Uma urna contém a bolas distribuídas entre b bolas brancas e c bolas prêtas:

    1.º) compare os números a e b
    2.º) compare os números a e c
    3.º) quais as *relações* possíveis entre b e c?

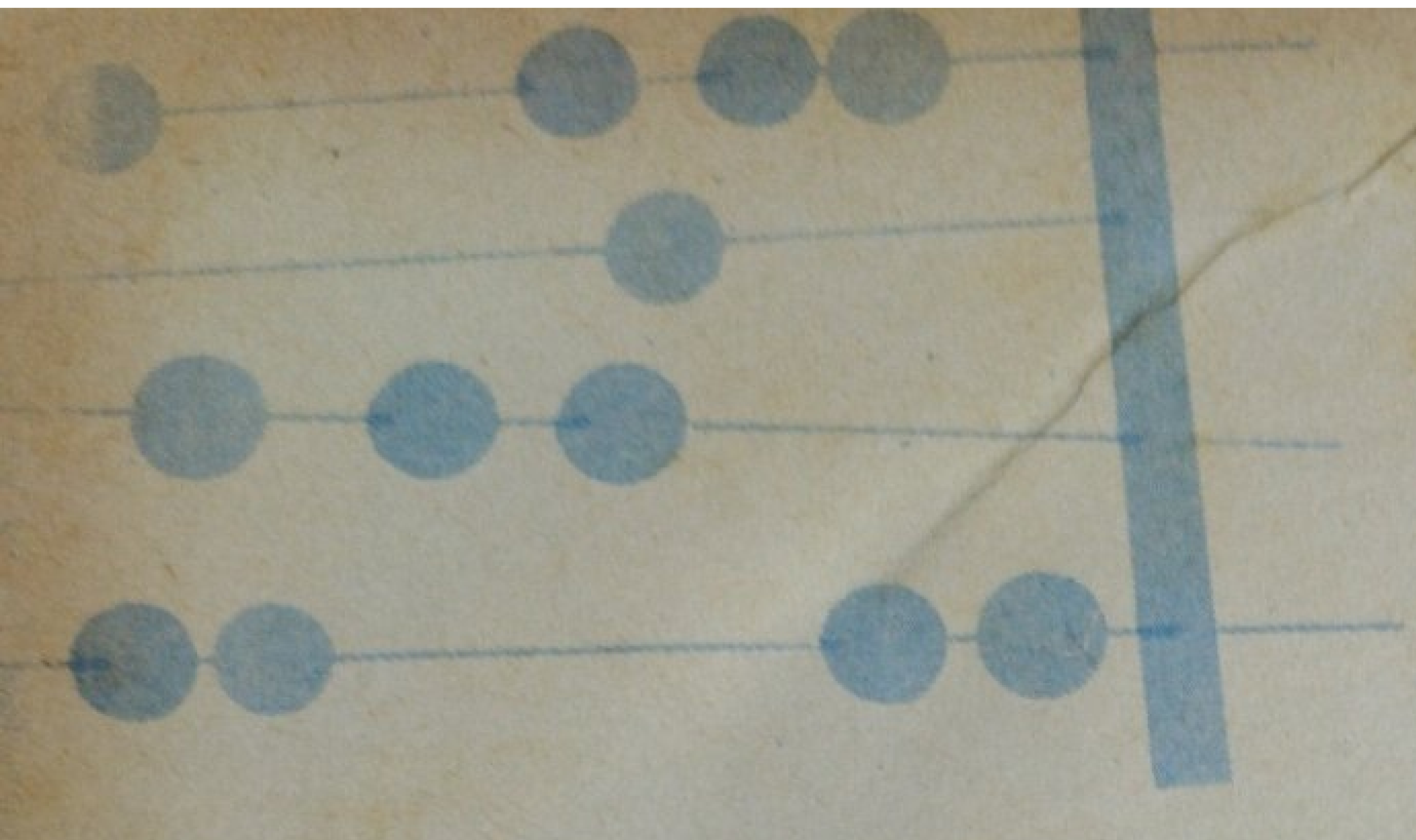
2ª

sistema de numeração
bases

sistema de numeração decimal

sistema de numeração
antigos e modernos

experimentos sôbre contagens
em diversas bases



sistemas de numeração. bases

1. *Sistemas de numeração*

Como existem *infinitos* números inteiros *é impossível* inventar um *nome especial* para cada número, bem como representar cada um dêles por um *símbolo especial*. Daí a necessidade de certas regras que permitam *ler* e *escrever* **qualquer** número, usando *poucas* palavras e *poucos* símbolos.

O conjunto de tais regras constitui um *sistema de numeração*. Êsses sistemas, como será visto adiante, têm variado com as épocas e com os povos.

2. *Base de um sistema de numeração*

Um fato importante para qualquer sistema de numeração é o seguinte: qual o *número de unidades* necessárias para formar um *conjunto-padrão* que auxilie a contagem de objetos?

Êsse número é chamado *base* do sistema de numeração.

Assim, por exemplo, quando falamos base *dez*, estamos *pensando* na formação de conjuntos com *dez elementos*, isto é, dada uma coleção de objetos, procuramos saber quantos conjuntos de **dez** podem ser formados. Por sinal é essa a base usada, desde a Antiguidade, dada a correspondência existente com os *dedos das duas mãos*, que são exatamente *dez*. Se tivéssemos oito dedos em nossas mãos, e não dez, provàvelmente a base seria *oito*, não?

Que é um sistema de base *doze*? É aquêle que forma conjuntos de *doze elementos* para contar os objetos de uma coleção. É nessa base que, costumeiramente, se contam (em *dúzias*) as frutas, os ovos, etc.

A *contagem do tempo*, desde os antigos babilônios, é feita na base *sessenta* (o conjunto de *sessenta segundos* constitui *um minuto*) e a civilização Maia, da América Central, usava a base *vinte* para a contagem de seus objetos.

As *máquinas eletrônicas* de hoje, operam no sistema de numeração *binário*, isto é, de base *dois*, que é a mais indicada para as altas velocidades com que são feitos os cálculos.

sistema de numeração decimal valor posição

3. *Que é Sistema de Numeração Decimal?*

O nome tão conhecido de *Sistema de Numeração Decimal* significa um sistema de numeração com os seguintes *característicos*:

1.º) é de base dez;
2.º) usa *sòmente* os dez numerais hindu-arábicos (algarismos):

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 0

para escrever *todos* os números;
3.º) obedece ao Princípio da Posição Decimal.

Para melhor conhecimento dos *três característicos* do Sistema de Numeração Decimal que, de certa forma, já é conhecido de todos pelo uso constante que tem, lembremos que:

1. Os conjuntos de *dez* elementos são denominados dezenas; agrupando as dezenas em conjuntos de *dez*, obtemos as centenas; e assim, sucessivamente aparecerão novas ordens, sempre agrupando os elementos de *dez* em *dez*. Reunindo as ordens em classes, simplificar-se-á a maneira de *falar* os números (numeração falada), de acôrdo com a seguinte disposição:

1.ª ordem: unidades simples 2.ª ordem: dezenas 3.ª ordem: centenas	}	1.ª classe (das *unidades simples*)
4.ª ordem: unidades de milhar 5.ª ordem: dezenas de milhar 6.ª ordem: centenas de milhar	}	2.ª classe (dos *milhares*)
7.ª ordem: unidades de milhão 8.ª ordem: dezenas de milhão 9.ª ordem: centenas de milhão	}	3.ª classe (dos *milhões*)
... .		....

e, assim por diante, *novas ordens* e *novas classes* aparecerão (dos bilhões, dos trilhões, dos quatrilhões, ...)

À guisa de exercitação, lembraremos que em *Português* os *nomes* para a leitura de *qualquer* número surgem das *combinações* dos primeiros nomes usados. Assim, por exemplo, *dizemos:*

"*onze*" (ao invés de *dez* e *um*);
"*doze*" (ao invés de *dez* e *dois*), etc. . .
"*vinte*" (ao invés de *dois* dez); "*trinta*" (ao invés de *três dez*), . . .;

2. Os *numerais hindu-arábicos* (algarismos): 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 0, que permitem *contar* usando-se as pontas dos *dedos*, são também denominados dígitos. Quando se diz *algarismo significativo*, trata-se de qualquer dos algarismos: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9. O algarismo 0 (zero) é denominado *não-significativo;*

3. Para poder *escrever* qualquer número (numeração escrita), usando *sòmente* os numerais hindu-arábicos (algarismos), é necessário empregar o *importantíssimo Princípio da Posição Decimal*, de invenção hindu:

Todo algarismo escrito à esquerda de outro representa unidades dez vêzes maiores que as dêsse outro.

Por êsse Princípio, um *mesmo algarismo* (e tome bem nota dêsse fato!) pode valer muitas ou poucas unidades. Assim, por exemplo, em:

33

o primeiro 3 "vale" *trinta* (3×10) e o segundo 3 "vale" *três* mesmo!

OBSERVAÇÕES:

1.ª) Cada *algarismo significativo* tem dois valôres: valor *absoluto* e valor *relativo*. Valor *absoluto* é o representado pelo algarismo *isoladamente* e valor *relativo* é o representado pelo algarismo de acôrdo com a *posição* que ocupa no numeral escrito;

2.ª) O *primeiro* algarismo escrito à direita indica as *unidades simples;*

3.ª) Caso *não contenha* as unidades de uma determinada ordem, escreve-se no lugar correspondente das mesmas o algarismo 0;

4.ª) Ao escrever-se um número de mais de três algarismos, deve-se separá-los em classes de três algarismos, a partir da direita; a separação é feita com um pequeno intervalo, não se devendo usar qualquer sinal, como ponto ou vírgula (*).

Exemplos:

1. Escrever, no *Sistema de Numeração Decimal*, o número que contenha: duas dezenas de milhar, quatro unidades de milhar, seis centenas, nenhuma dezena e duas unidades simples.

De acôrdo com o que foi ensinado, temos:

24 602

onde:

2 (o primeiro da esquerda, que representa as *dezenas de milhar*) tem

$$\begin{cases} \text{valor absoluto: } 2 \\ \text{valor relativo: } 20\,000 \end{cases}$$

4 (representa as *unidades de milhar*) tem

$$\begin{cases} \text{valor absoluto: } 4 \\ \text{valor relativo: } 4\,000 \end{cases}$$

6 (representa as *centenas*) tem

$$\begin{cases} \text{valor absoluto: } 6 \\ \text{valor relativo: } 600 \end{cases}$$

0 (representa "nenhuma" *dezena*)

2 (representa as *unidades simples*) tem

$$\begin{cases} \text{valor absoluto: } 2 \\ \text{valor relativo: } 2 \end{cases}$$

2. Escrever o número "oito milhões, seiscentos e seis mil e trezentos e um".

Temos:

8 606 301

3. Escrever a *leitura* do número: 3 567 918 015

Temos: "três bilhões, (**) quinhentos e sessenta e sete milhões, novecentos e dezoito mil e quinze"

(*) De acôrdo com o Decreto Federal 4 267, de 16-6-1 939.

(**) Não confundir o bilhão português, que vale *mil milhões*, com o bilhão usado pelos povos de línguas espanhola e inglêsa, que vale um *milhão de milhões.*

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 4

1. Para contar os botões do meu jôgo, agrupei-os em conjuntos de *doze* botões. Qual é a base que estou usando para essa contagem?

2. Se eu agrupar as minhas bolinhas de sete em sete eu as estarei contando num sistema de numeração de base . . . . .

Os exercícios a seguir referem-se ao *Sistema de Numeração Decimal:*

3. Um número tem seis algarismos. Qual é a *ordem* de sua unidade mais alta?

4. A que classe pertence a unidade de 2.ª ordem? De 5.ª ordem? De 9.ª ordem?

5. Quantas dezenas há num milhar? Quantas centenas há num milhão?

6. Qual é o maior número e qual é o menor número que se pode escrever com os algarismos 5, 3, 2 e 8, sem repetir nenhum algarismo?

7. Com os algarismos 7, 1 e 3 (sem repeti-los), escrever seis números dispostos em ordem decrescente.

8. Dado o número 293, pergunta-se: 1.º) Quantos algarismos possui? 2.º) Qual é o algarismo de maior valor absoluto? 3.º) Qual o algarismo de maior valor relativo?

9. Qual o valor relativo do 8 em cada um dos números: 8 315 e 12 080?

10. Escrever o maior e o menor número inteiro formado por dois algarismos significativos diferentes.

11. Quantos números de dois algarismos existem, cujo algarismo das unidades é 1? E cujo algarismo das dezenas é 3?

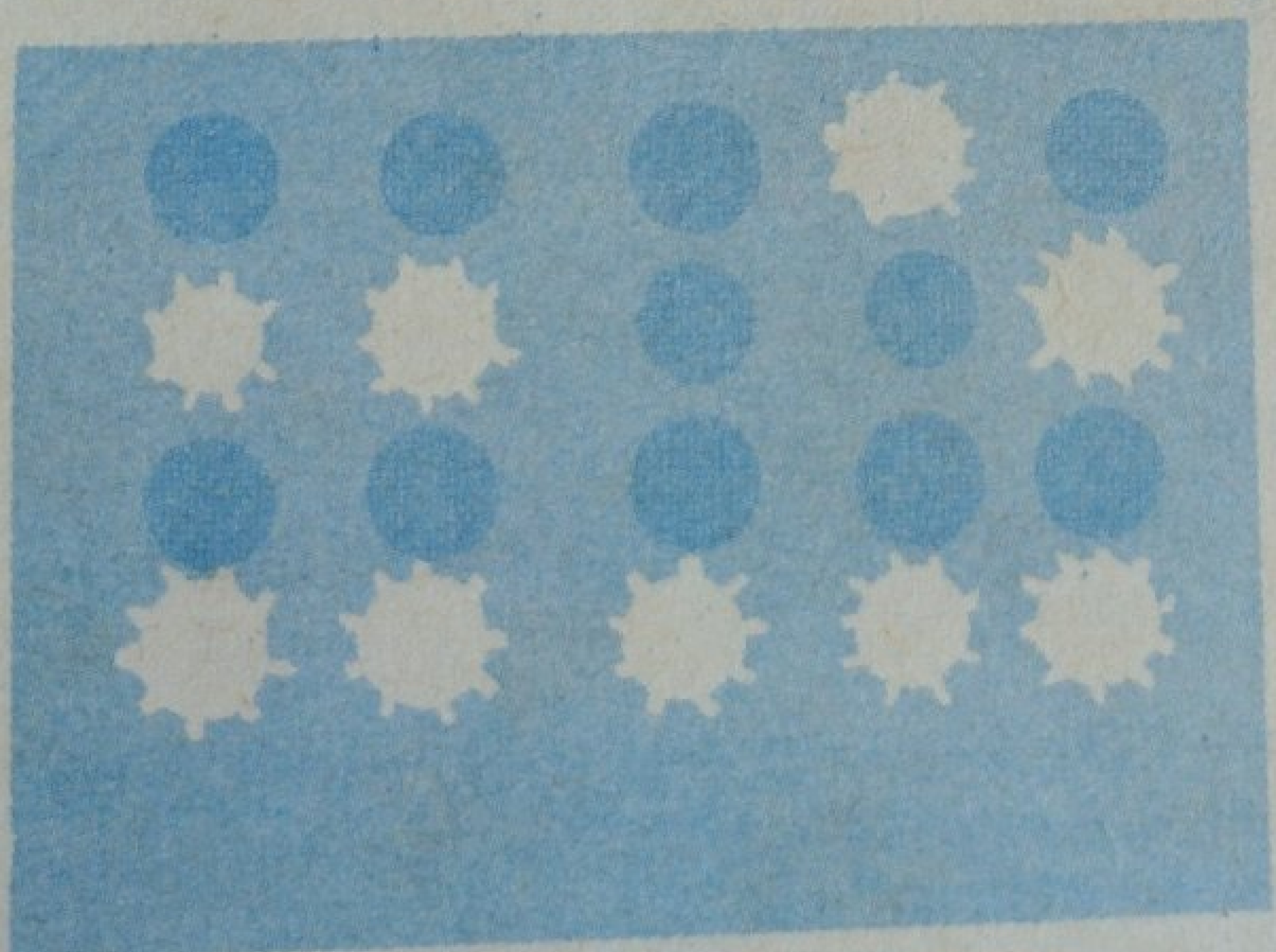
12. Qual é o maior número de cinco algarismos significativos, diferentes entre si, que se pode escrever? Qual o menor?

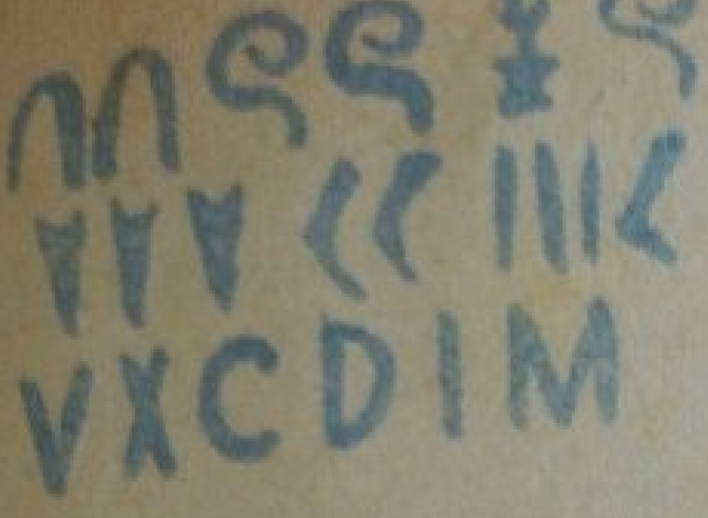
13. Quando é que, trocando as posições de todos os algarismos de um número, êste não muda de valor?

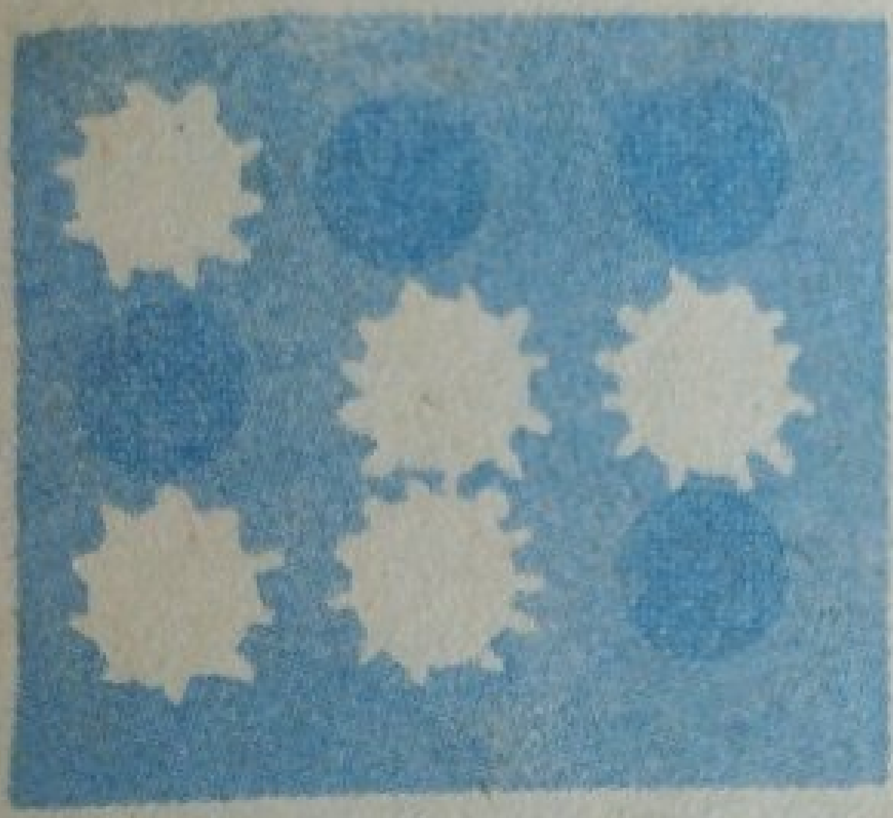
14. Qual é o sucessivo do maior número de sete algarismos?

15. Complete com uma desigualdade a seguinte implicação:

$$\left.\begin{array}{r} a = V \\ V < c \end{array}\right\} \Longrightarrow a \ldots c$$







sistemas de numeração antigos e modernos

4. *Preliminares*

Para melhor compreensão de qualquer *sistema de numeração* é necessário o conhecimento das *operações fundamentais*, cuja iniciação todos vocês já têm e que serão reestudadas, com a importância que merecem, no capítulo seguinte.

Assim, o uso corrente que todos trazem das operações de adição e da subtração permitirá uma apresentação simples, porém explicativa, de quadros comparativos entre sistemas de numeração usados pelos antigos (egípcios, babilônios, romanos) e hoje pelos modernos.

5. *Sistemas de numeração antigos*

a) **Sistema de numeração egípcio** (3 500 anos antes de Cristo!)

Numerais usados:

 (*um*: representava um cajado)

 (*dez:* representava um osso de calcanhar)

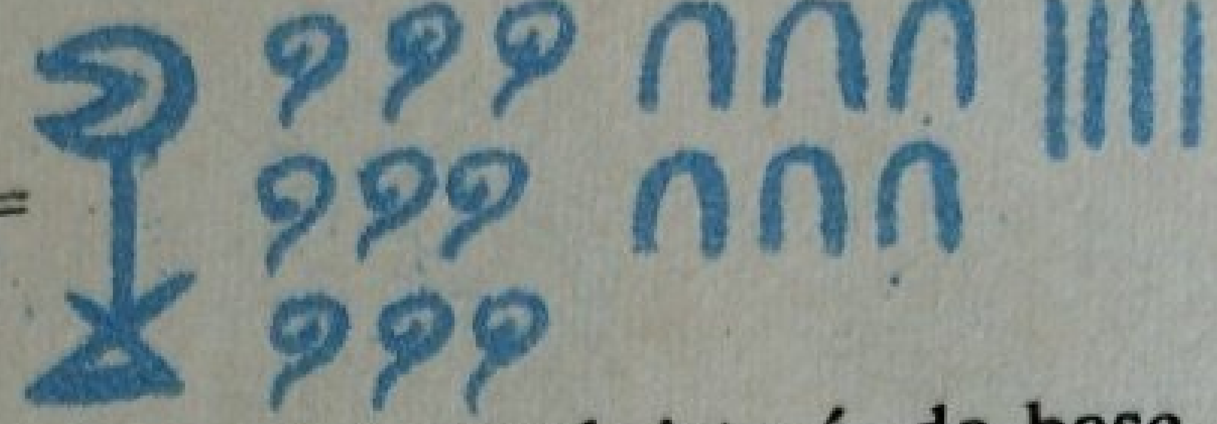
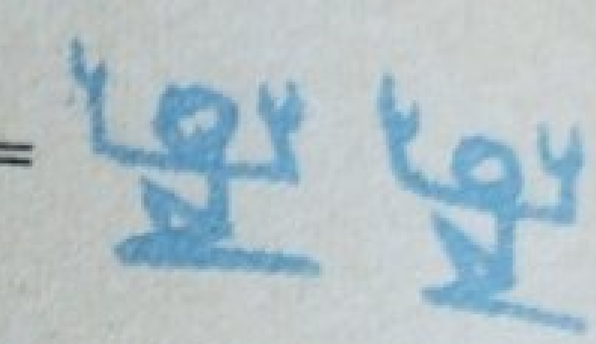
 (*cem*: representava uma corda enrolada)

 (*mil*: representava uma machadinha)

 (*milhão*: representava um homem assustado, talvez por representar um número tão grande!)

Regra para escrever: um numeral escrito à direita (ou abaixo) de outro soma o seu valor ao dêsse outro (princípio aditivo da justaposição).

Exemplos: 7 =  13 =  46 =  109 = 

1 964 =  2 000 000 = 

Observação: O sistema é decimal, isto é, de base *dez* (dez *cajados* vale um *osso*; dez *ossos* vale uma *corda enrolada*, etc...), porém não usam o Princípio da Posição (os egípcios não o conheciam ainda), razão porque se tornava difícil a representação de números grandes.

b) **Sistema de numeração babilônio** (3 000 anos antes de Cristo!)

Numerais usados:

 (*um*: representava uma cunha) } *símbolos cuneiformes*

 (*dez*: cunha em posição horizontal) }

Regras para escrever: 1.ª) Para números *menores* que sessenta obedece ao mesmo princípio da justaposição usado pelos egípcios. Exemplos:

6 =  23 =  59 = 

2.ª) Para números *maiores* que sessenta usa-se (e pela primeira vez na História!) o Princípio da Posição de base *sessenta* (Princípio Sexagesimal). Exemplos:

61 =  (agora o primeiro  vale 60 e o segundo , *um* mesmo!)

82 = 

Observação: O Sistema Sexagesimal, isto é, de base *sessenta*, usa o Princípio da Posição e ainda hoje é empregado, com algumas variações, para exprimir medidas de tempo (hora, minuto e segundo) e de ângulo (grau, minuto ângulo, segundo ângulo) conforme estudo que será feito no Cap. 4 (Sistemas de medidas *não-decimais*).

c) **Sistema de numeração romano** (alguns anos antes de Cristo!)

Numerais usados:	I	V	X	L	C	D	M
	(um)	(cinco)	(dez)	(cinqüenta)	(cem)	(quinhentos)	(mil)

que são letras maiúsculas do alfabeto latino.

Regras para escrever:

1.ª) *Sòmente* os numerais I, X, C e M podem ser repetidos no máximo três vêzes consecutivas;

2.ª) Se um numeral (ou mais) estiver escrito à direita de outro de igual ou maior valor, somam-se os seus valôres (princípio aditivo da justaposição) e se fôr (com exceção de V, L, D, e M) escrito à esquerda de outro de valor imediatamente superior, subtraem-se (princípio subtrativo da justaposição);

3.ª) Para aumentar o valor do número mil vêzes, coloca-se um traço horizontal sôbre o numeral (com exceção do I); para aumentar um milhão colocam-se dois traços e assim sucessivamente.

Exemplos:

Exemplos:	3 = III	206 = CCVI
	21 = XXI	1 964 = MCMLXIV
	9 = IX	4 719 002 = $\overline{\overline{\mathrm{IV}}}\,\overline{\mathrm{DCCXIX}}\,\mathrm{II}$

Observação: O *Sistema de Numeração Romano*, ainda hoje empregado para indicar capítulos de livros, datas históricas, mostradores de relógios (embora o *quatro* apareça escrito errado: IIII, para guardar uma antiga tradição relojoeira . . .), é decimal (base *dez*) porém não obedece a nenhum Princípio de Posição.

Outro aspecto que você deve observar é que os Sistemas de Numeração antigos apresentados não tinham *numerais* para representar o zero, que sòmente 500 anos depois de Cristo foi representado pelos hindus.

6. *Sistemas de numeração modernos*

Os diversos Sistemas de Numeração que hoje prevalecem, visam auxiliar o homem nas suas diversas atividades. Todos êles se valem do *Princípio da Posição*, que varia de acôrdo com a *base* adotada.

Em aplicações das mais diversas a base empregada *não é* mais *dez*. Alguns experimentos serão feitos no parágrafo seguinte, onde, para representar os números resultantes das contagens dos elementos de um conjunto, em *diversas bases*, serão empregados, de preferência, os *numerais hindu-arábicos* (algarismos).

Se, por exemplo, fôr adotada a *base cinco* (Sistema de Numeração Quinário), necessitaremos:

1.º) dos cinco numerais: 0, 1, 2, 3 e 4

2.º) do Princípio da Posição Quinário: todo algarismo escrito à esquerda de outro representa unidades cinco vêzes maiores que as dêsse outro.

Modernamente os *computadores eletrônicos* empregam a *base dois* (Sistema de Numeração Binário), usando portanto, sòmente *dois numerais*: 0 e 1, para escrever *qualquer número*.

O algarismo 0 traduz a *lâmpada apagada* (circuíto aberto) e o algarismo 1, a *lâmpada acêsa* (circuito fechado). Sabendo o *lugar* de cada lâmpada o operador poderá "ler" no quadro do computador os *números* que as lâmpadas acusarem.

Assim por exemplo, a disposição:

☼☼●☼

onde ☼ representa lâmpada acêsa e ● lâmpada apagada, é a do número:

1 1 0 1   (base *dois*)

Que número é êsse para você acostumado a trabalhar sòmente com números escritos no Sistema de Numeração Decimal?

No Sistema de Numeração Decimal, 1 1 0 1 representa 13.

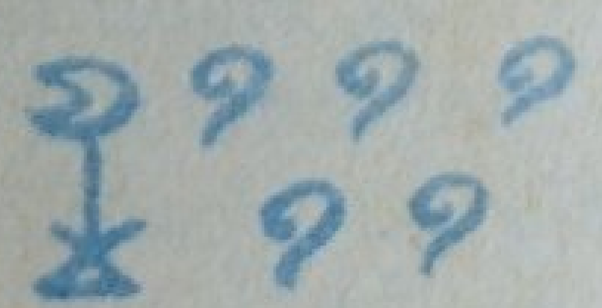
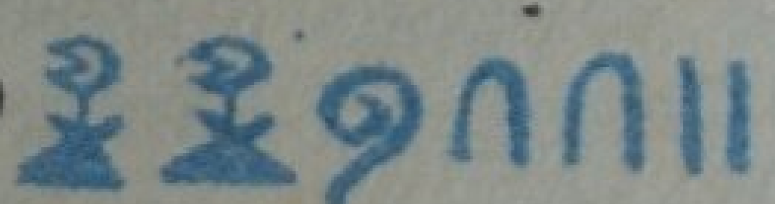
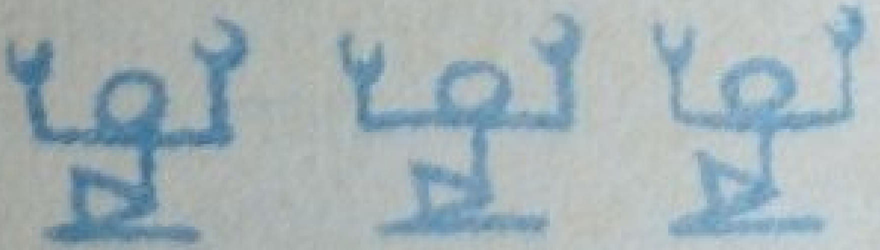
Para justificar êsse fato é necessário lembrar as operações de *multiplicação* e *potenciação* (que, repetimos, serão estudadas com a importância que merecem no próximo capítulo), pois:

$$\begin{aligned} 1\,1\,0\,1 &= 1\times2^3 + 1\times2^2 + 0\times2^1 + 1\times2^0 \\ &= 1\times8 + 1\times4 + 0\times2 + 1\times1 \\ &= 8+4+0+1 \\ &= 13 \end{aligned}$$

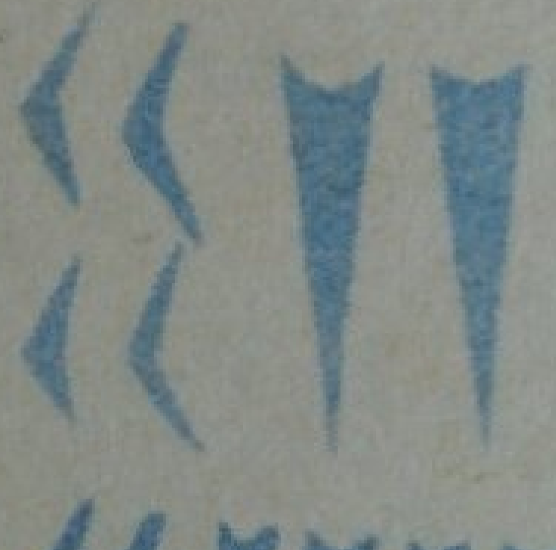
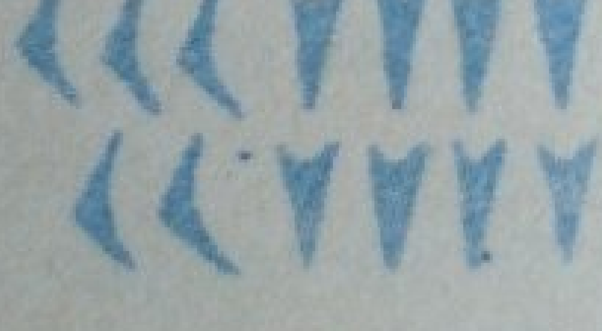
Logo: $1\,1\,0\,1_{\text{base dois}} = 1\,3_{\text{base dez}}$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — Grupo 5

1. Escreva, usando os numerais hindu-arábicos (algarismos) os seguintes números, que estão escritos com *numerais egípcios:*

1.º) 
3.º) 
5.º) 
2.º) 
4.º) 
6.º) 

2. Idem, sendo agora os números escritos com *numerais babilônios* (para facilitar a representação, vamos supor que se trata de números menores que sessenta):

1.º) 
3.º) 
5.º) 
2.º) 
4.º) 
6.º) 

3. Idem, sendo agora os números escritos com *numerais romanos*

1.º) XXIX 3.º) MCMLIV 5.º) $\overline{\text{M}}$DCIX

2.º) DCCCLXVI 4.º) $\overline{\text{IV}}$DCXLIII 6.º) $\overline{\overline{\text{XI}}}\overline{\text{CDXXXIX}}$DXXII

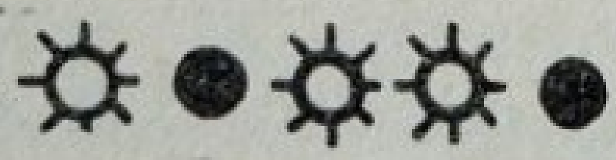
4. Qual o maior número que pode ser escrito usando sòmente numerais romanos e não usando a 3.ª regra de seu sistema de numeração?

5. Dados os seguintes números, escritos no sistema de numeração decimal, com numerais hindu-arábicos (algarismos), escrever os respectivos numerais egípcios e romanos:

1.º) 9 3.º) 210 5.º) 4 317

2.º) 36 4.º) 1 965 6.º) 8 016

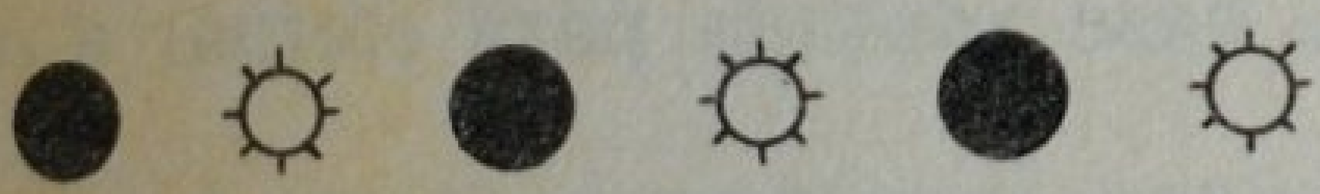
6. No quadro de um computador eletrônico vê-se:



Escreva o número que está sendo registrado na base dois.
(É fácil ver que se trata do número: 1 0 1 1 0_{dois})

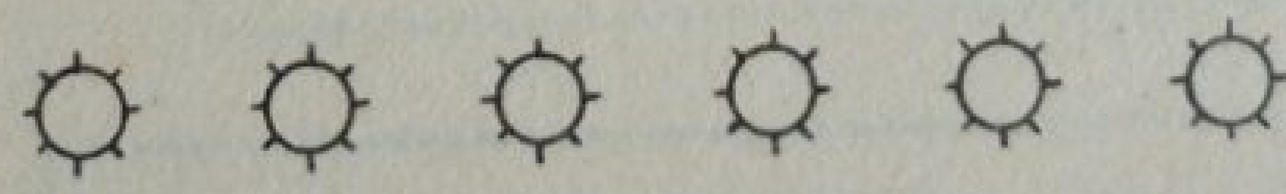
Escreva você, agora, os números (base dois) correspondentes às seguintes representações:

1.ª) 

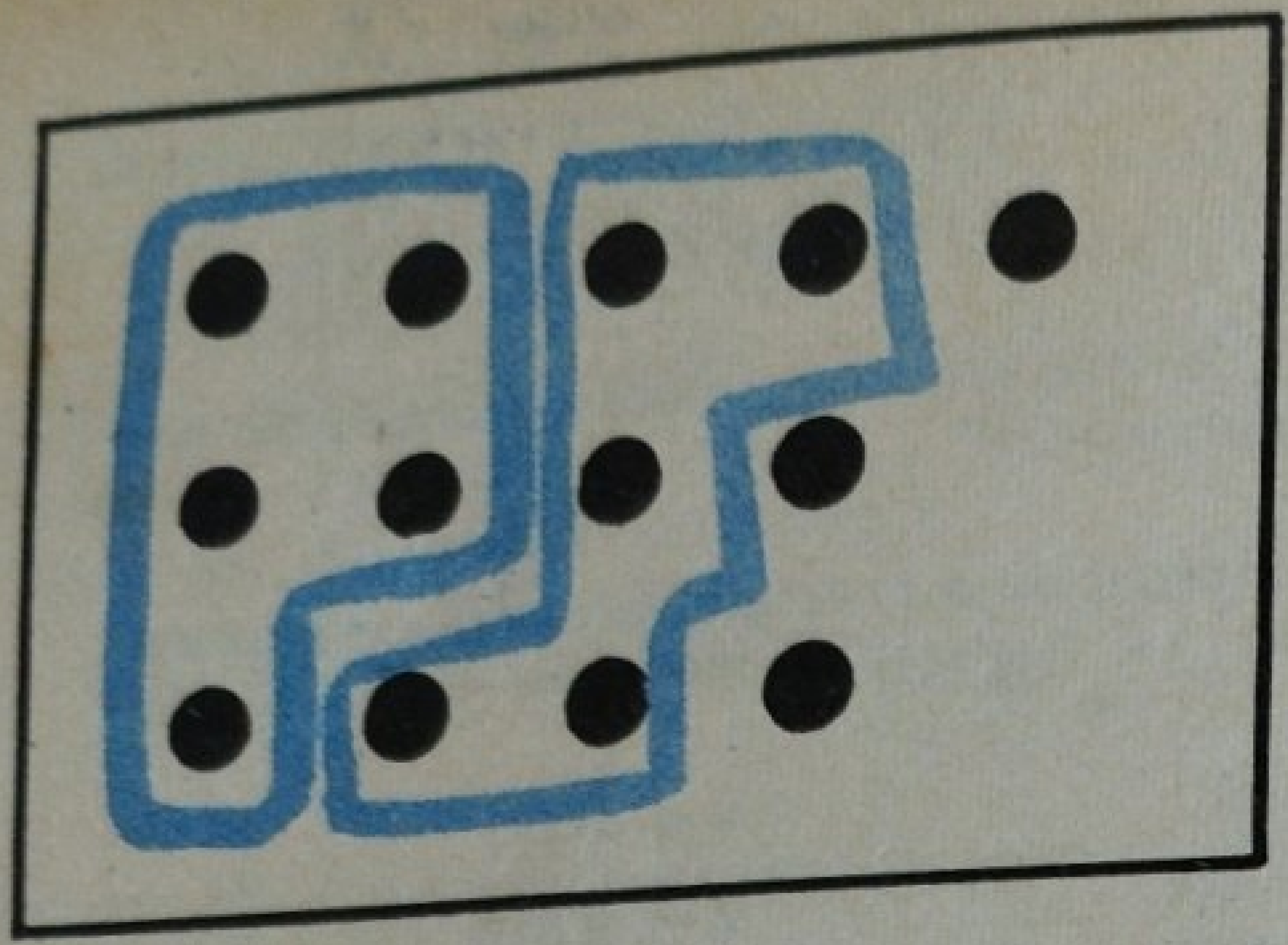
2.ª) 

3.ª) 

4.ª) 

5.ª) 

6.ª) 



experimentos sôbre contagens em diversas bases

7. Contagens em bases diversas. Princípio da Posição Geral

Os conjuntos de pontos desenhados nas figuras que se seguem, serão *agrupados* de acôrdo com as perguntas feitas. Para *escrever* o número resultante da contagem dos pontos de qualquer conjunto, vamos nos valer dos *numerais hindu-arábicos*, isto é, dos *algarismos* que estamos acostumados a trabalhar, e *mais* o Princípio da Posição Geral, que diz:

Todo algarismo escrito à esquerda de outro representa unidades de ordem imediatamente superior às dêsse outro.

É evidente que as unidades representadas pelo algarismo de ordem *imediatamente superior* vai depender da base adotada para efetuar a *contagem* dos pontos.

Com essa introdução, preste agora bastante ATENÇÃO:

1. No conjunto de pontos (fig. 12), quantos *grupos de dez* existem? Quantos pontos sobram?

Observe que reunindo êsses pontos em grupos de *dez* (em *qualquer* ordem!) você obtém: *um* grupo de dez e *sobram oito* pontos. Então o número resultante na base *dez* é:

$$18_{dez}$$

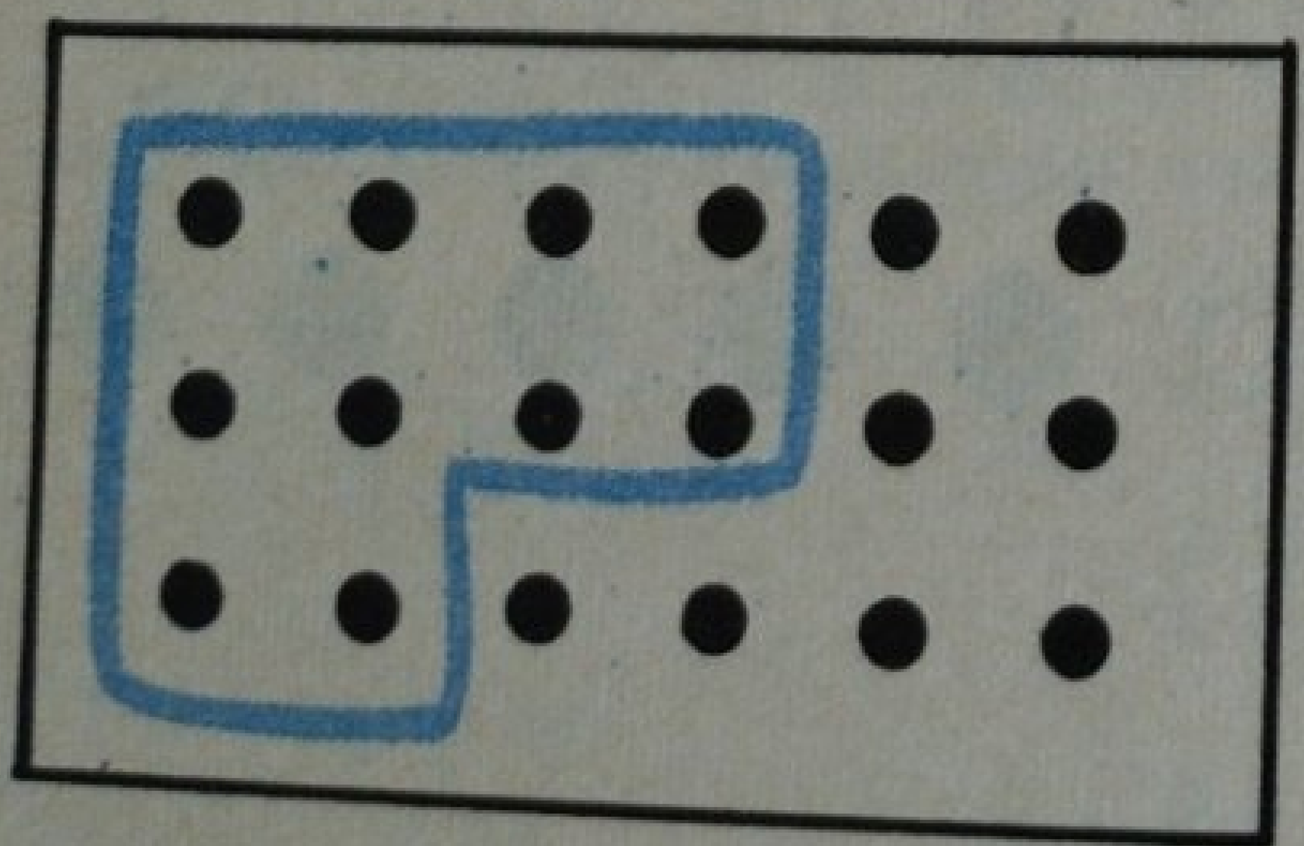


FIG. 12

Como se trata de contagem no usual Sistema de Numeração Decimal, pode-se dispensar de escrever a base dez como índice, logo abaixo de número encontrado. Logo:

18_{dez} ou simplesmente:

18 (lê-se: "dezoito")

2. No conjunto de pontos (fig. 13), quantos *grupos de cinco* existem? Quantos sobram? Escrever o número resultante na *base cinco* (Sistema de Numeração Quinário).

Existem *três* grupos de cinco e *sobram três* pontos. Logo, na *base cinco*, o número de pontos será dado pelo *numeral:*

33_{cinco} (lê-se: três, três — base cinco(*))

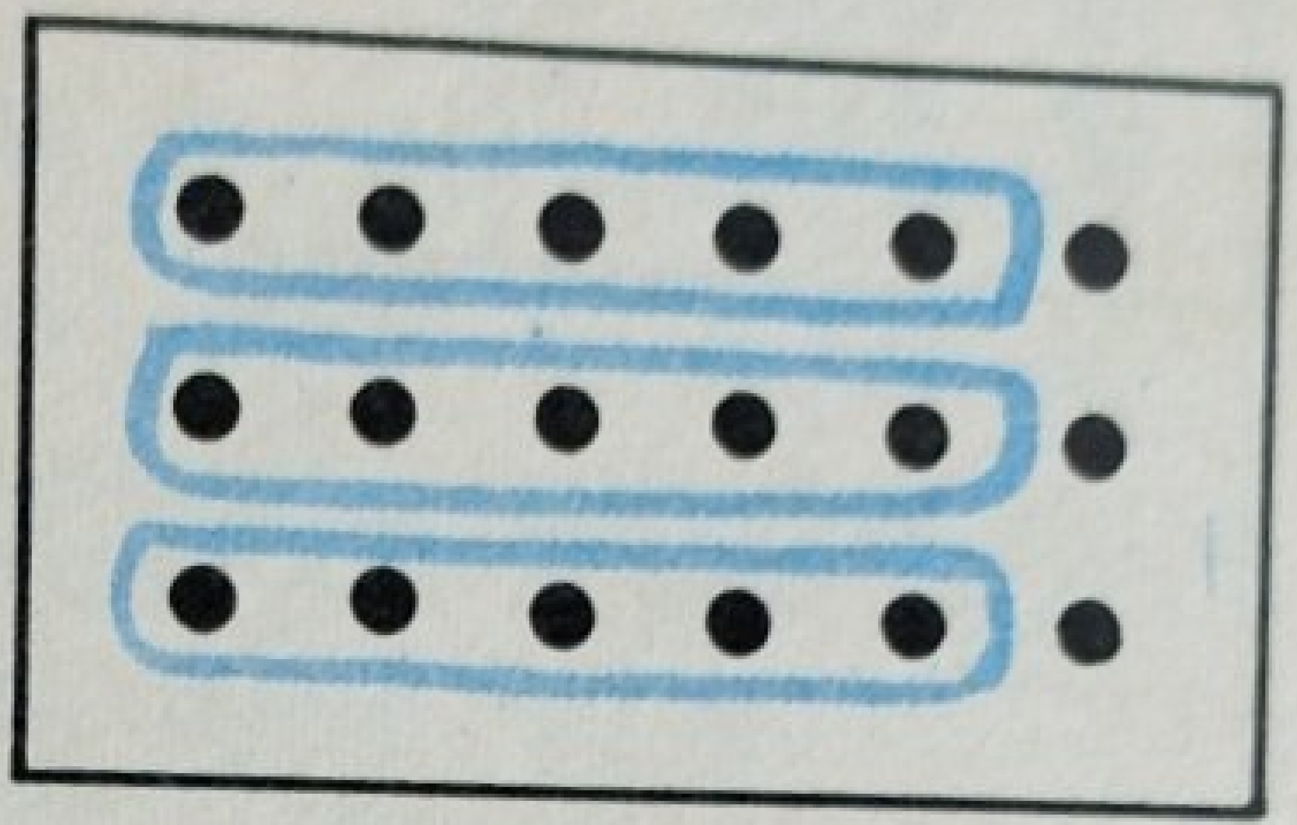


FIG. 13

3. No conjunto de pontos (fig. 14) quantos *grupos de seis* existem? Quantos *sobram*? Escrever o número resultante da *base seis*.

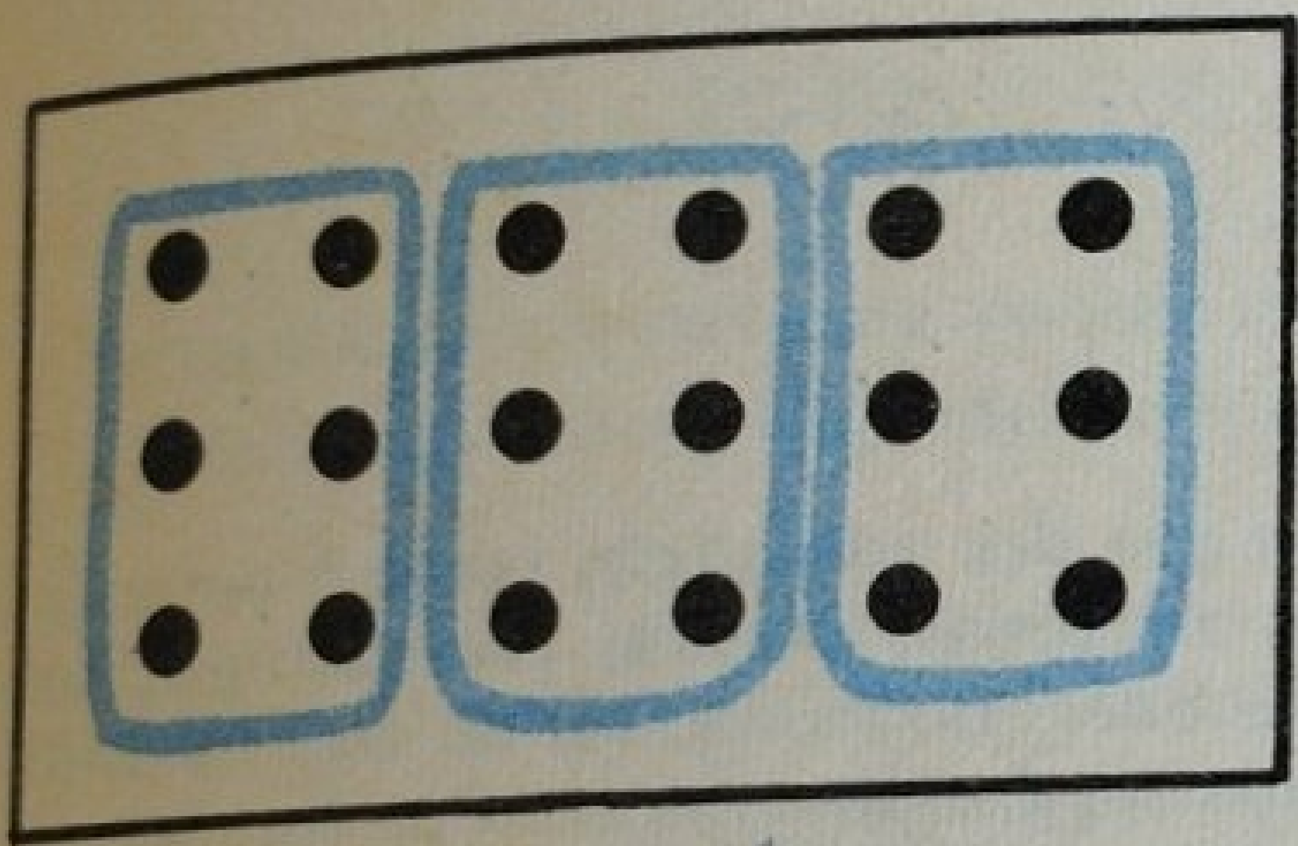


FIG. 14

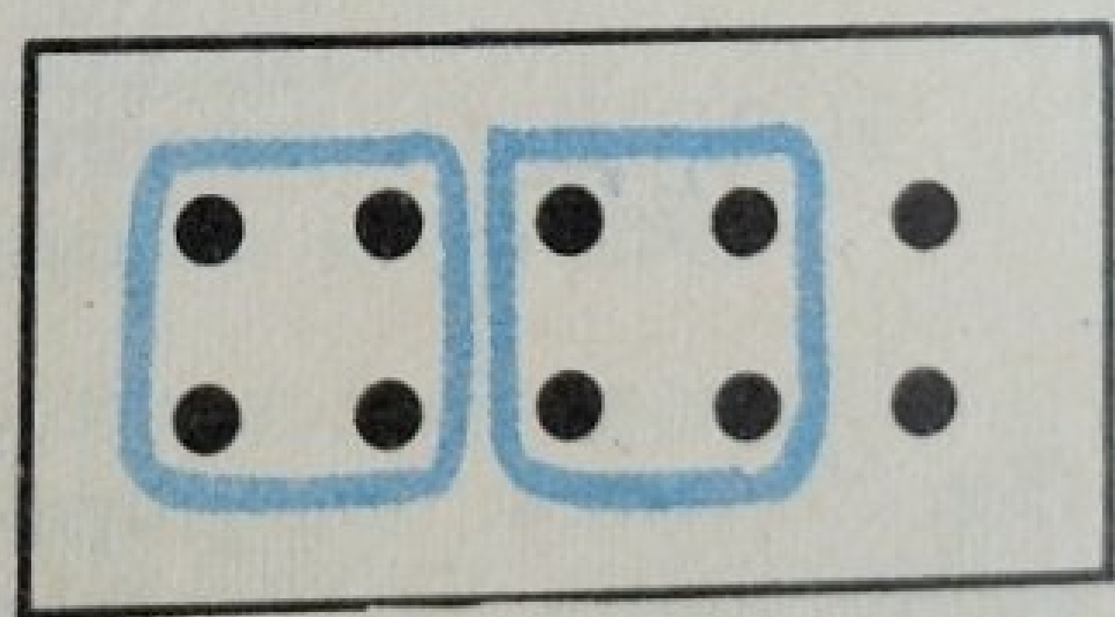
Existem *três* grupos de seis e *não sobra* ponto algum. Logo, temos, na *base seis*:

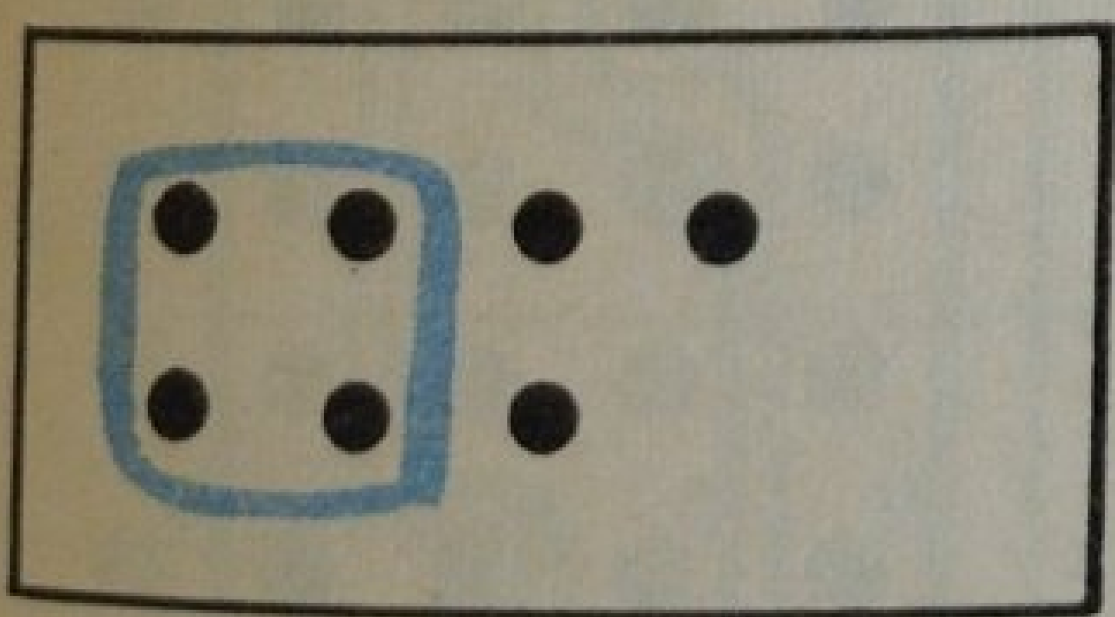
30_6 (lê-se: três, zero — base seis)

4. Agrupe os seguintes conjuntos de pontos, de *quatro* em *quatro*. Escrever o número resultante na *base quatro*.

1.º) Temos *dois* grupos de quatro e *sobram dois* pontos. Portanto, o número na *base quatro* é:

22_4

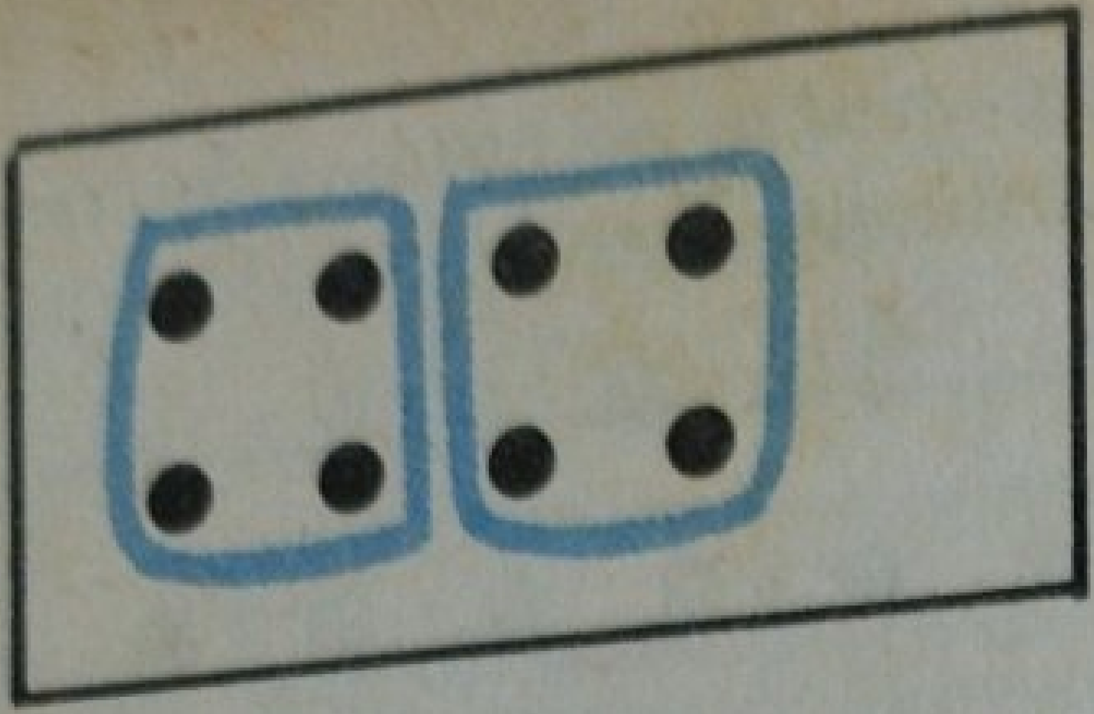




2.º) Agora, temos *um* grupo de quatro e sobram *três* pontos. Logo:

13_4

(*) Deve-se escrever "cinco" ao invés de 5, porque não existe o algarismo 5 nesse sistema. Todavia, para facilidade de cálculo, será escrito, de agora em diante o algarismo que indica a base.

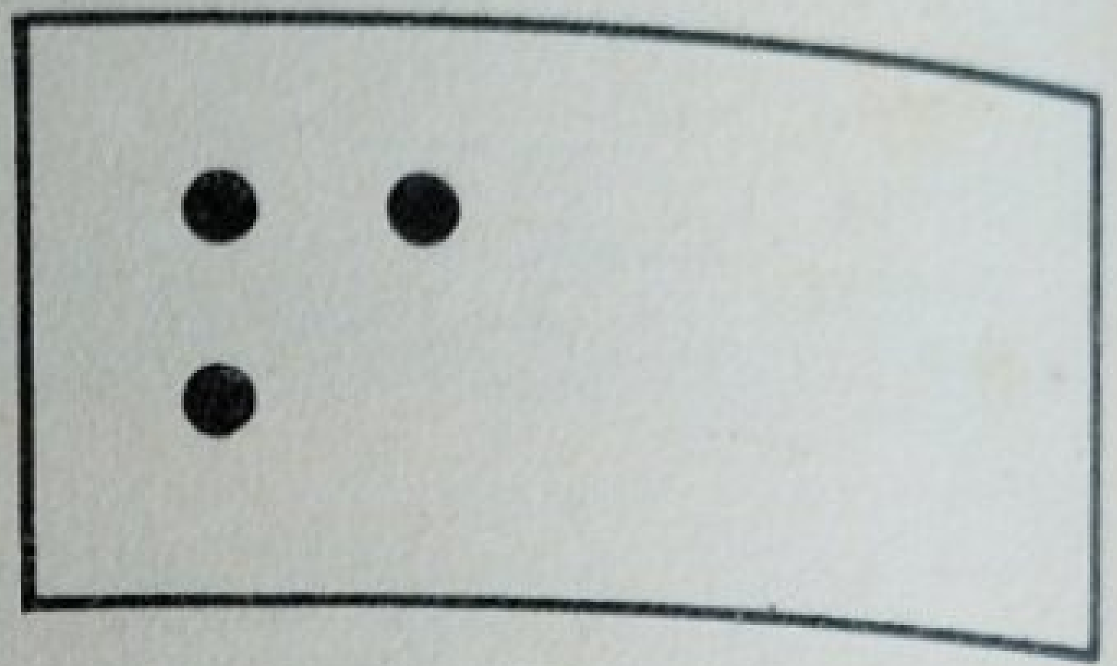


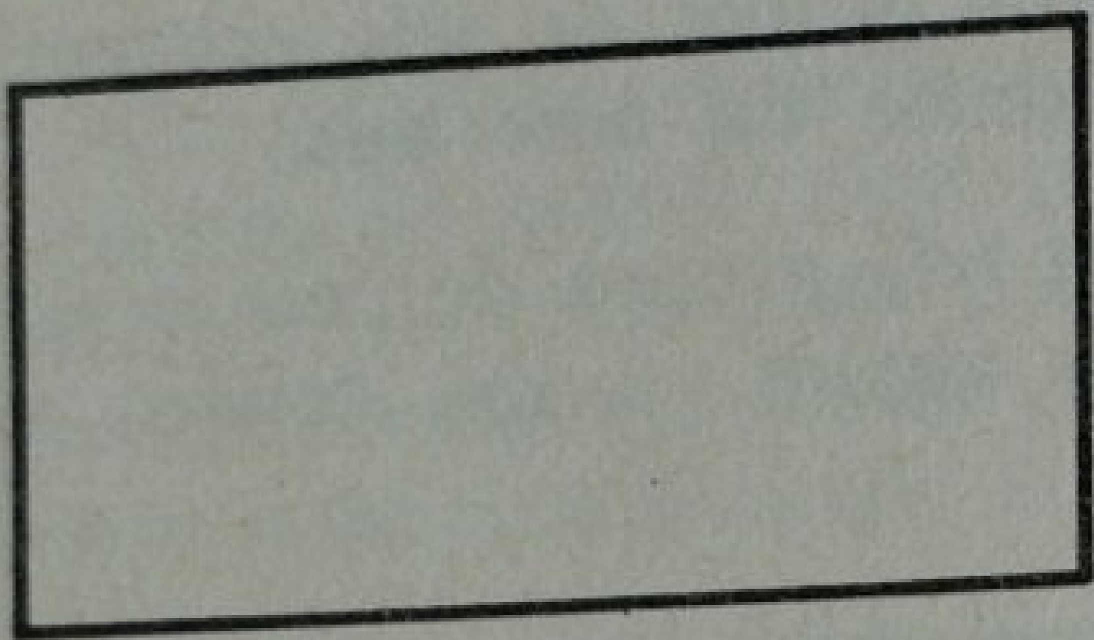
3.º) Existem *dois* grupos de quatro e *não sobra* nada. Logo:

20_4

4.º) *Nenhum* grupo de quatro pontos; *sòmente* existem *três* pontos. Portanto:

3_4





5.º) *Nenhum ponto* (conjunto vazio). Logo, o número resultante será:

0_4

OBSERVAÇÃO: A contagem em bases *maiores que dez* vai exigir, como é natural, o uso de *mais de dez numerais* para representar os números. Assim, por exemplo, contando em *base doze* (Sistema de Numeração Duodecimal) necessitamos de *doze numerais*. Para representar os números nesse Sistema, costuma-se, geralmente, usar os *dez numerais hindu-arábicos* (algarismos) e mais dois *numerais gregos:* α (alfa) e β (beta) que representam, respectivamente, os números: dez e onze.

Aplicações práticas: É comum você ter que contar em *outras* bases. Assim por exemplo:

1) 25 dias representam quantas semanas? Sobrariam alguns dias tomando a semana (7 dias) como base?

Usando a representação já conhecida (fig. 15) temos: *três* grupos de sete e sobram *quatro* pontos (que representam agora *dias*). Logo:

34_{sete} (3 semanas e 4 dias)

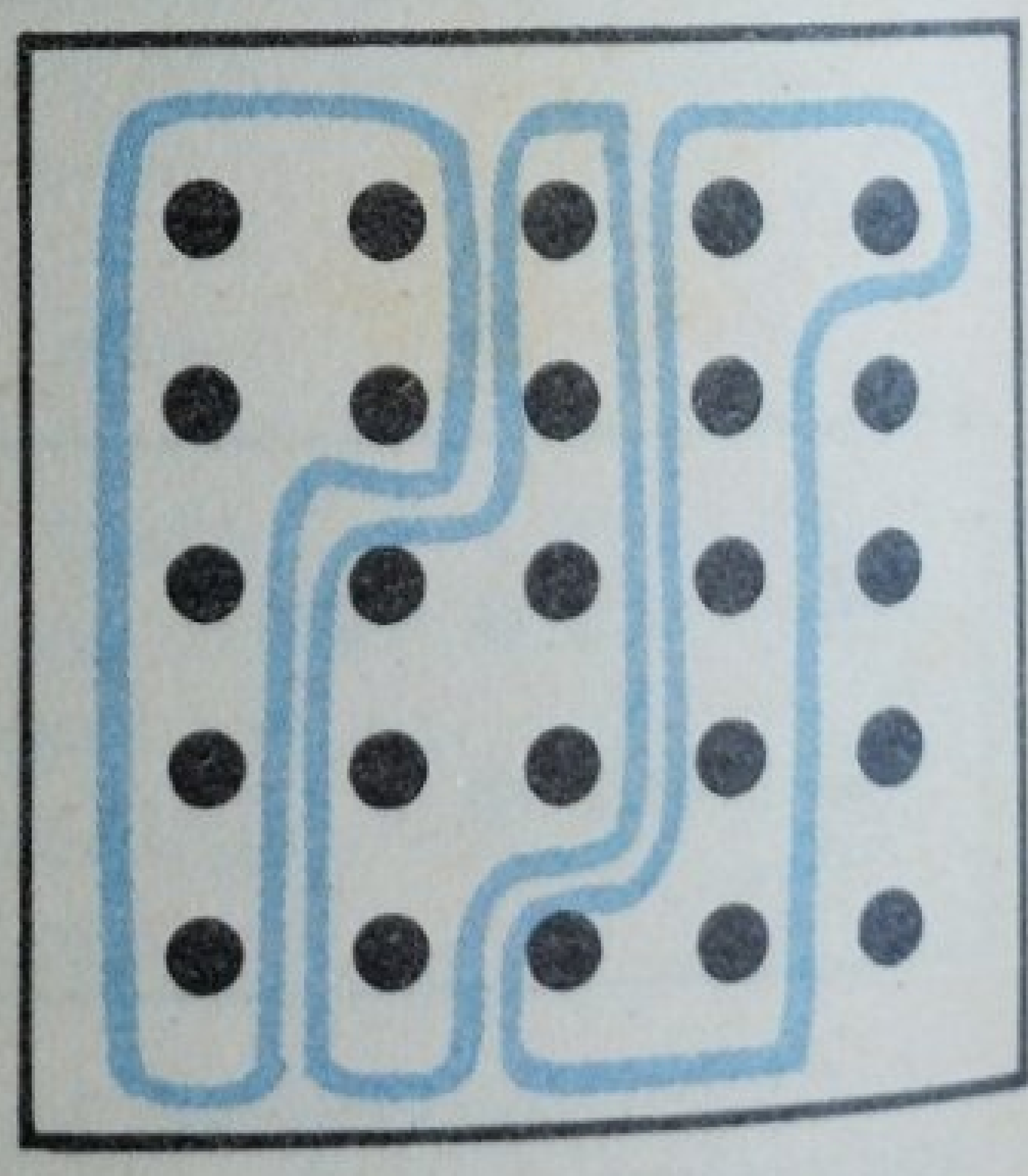


FIG. 15

2) 33 laranjas representam quantas dúzias? Sobram algumas?

Temos *dois* grupos de doze e sobram *nove* (fig. 16):

29_{doze} (2 dúzias e sobram nove)

NOTA: Caso sobrassem 10 ou 11 laranjas, os símbolos empregados seriam α e β, respectivamente.

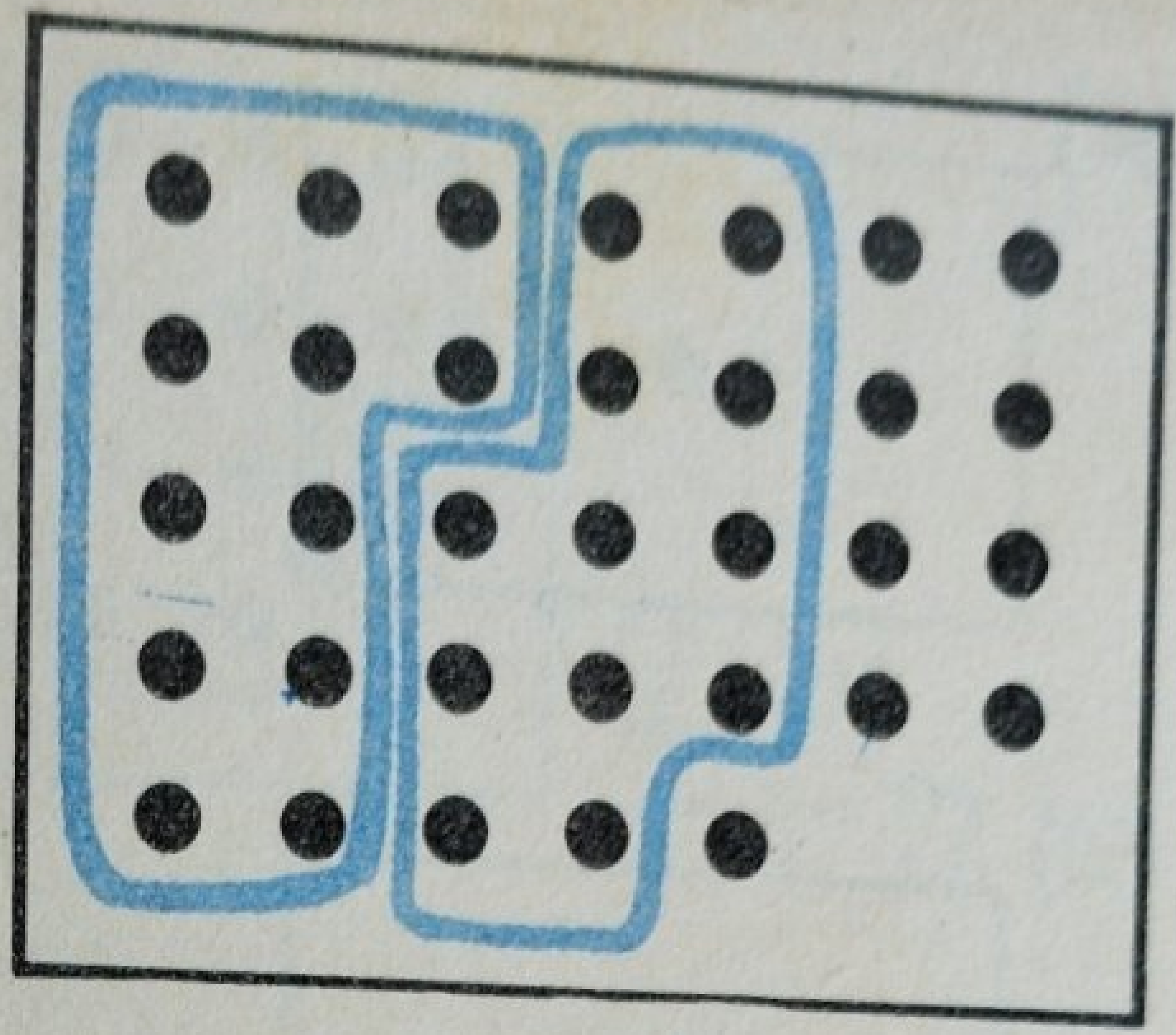


FIG. 16

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 6

1. No seguinte conjunto de pontos (fig. 17) fazer a contagem nos Sistemas de Numeração, de bases, respectivamente: *cinco*, *seis*, *sete*, *oito*, *nove* e *dez*.

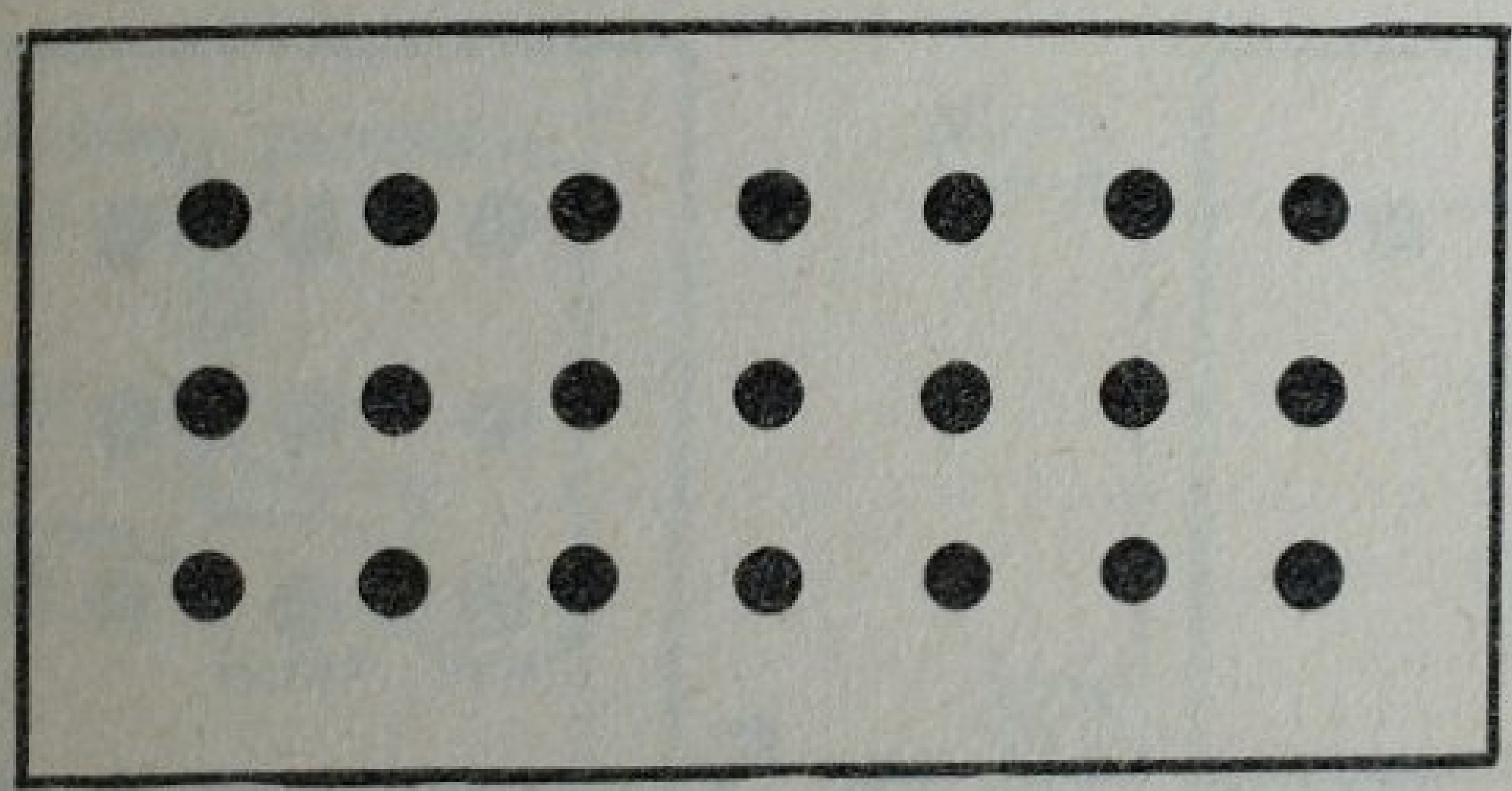
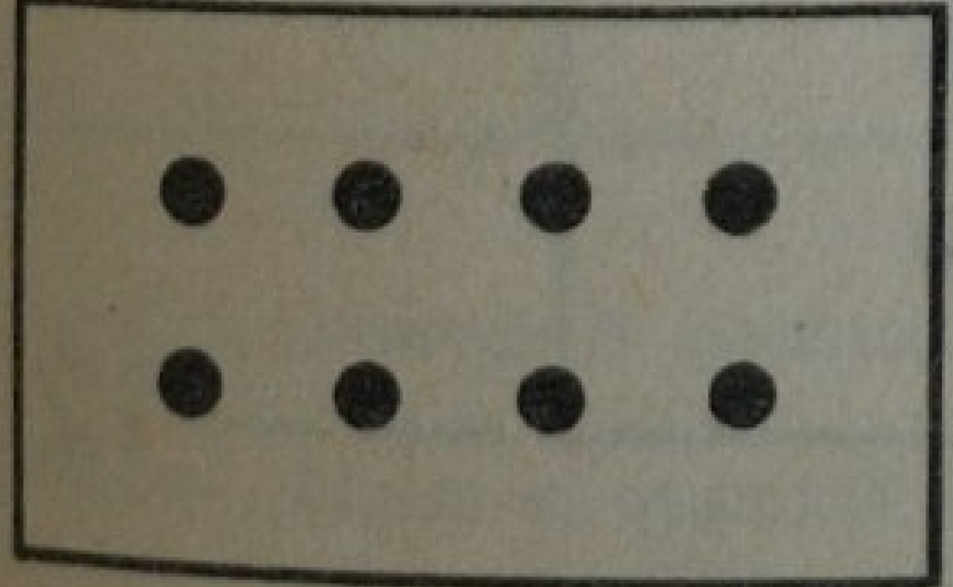


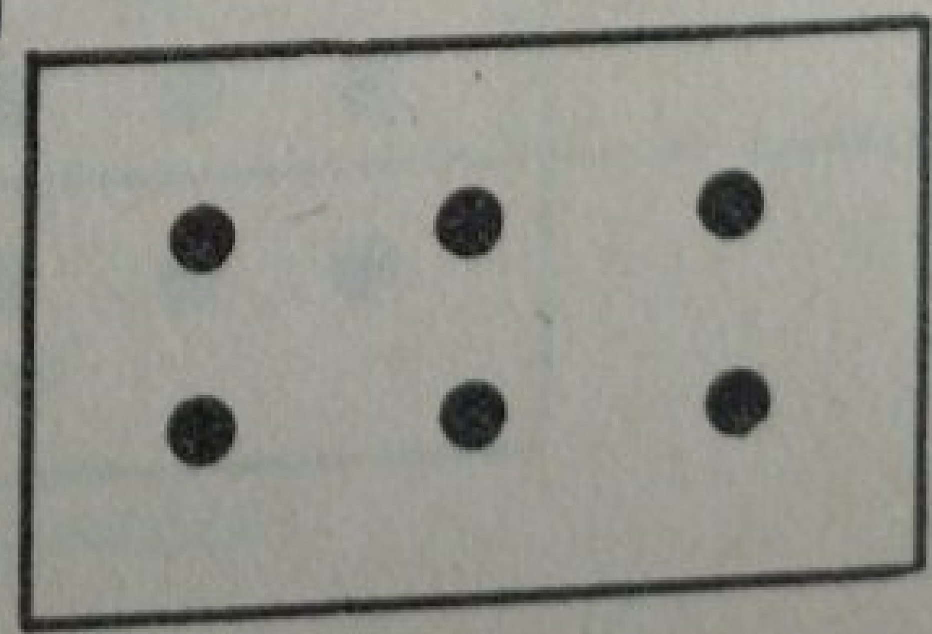
FIG. 17

2. Agrupar os seguintes conjuntos de pontos, de *três* em *três*. Escrever o número resultante na *base três:*

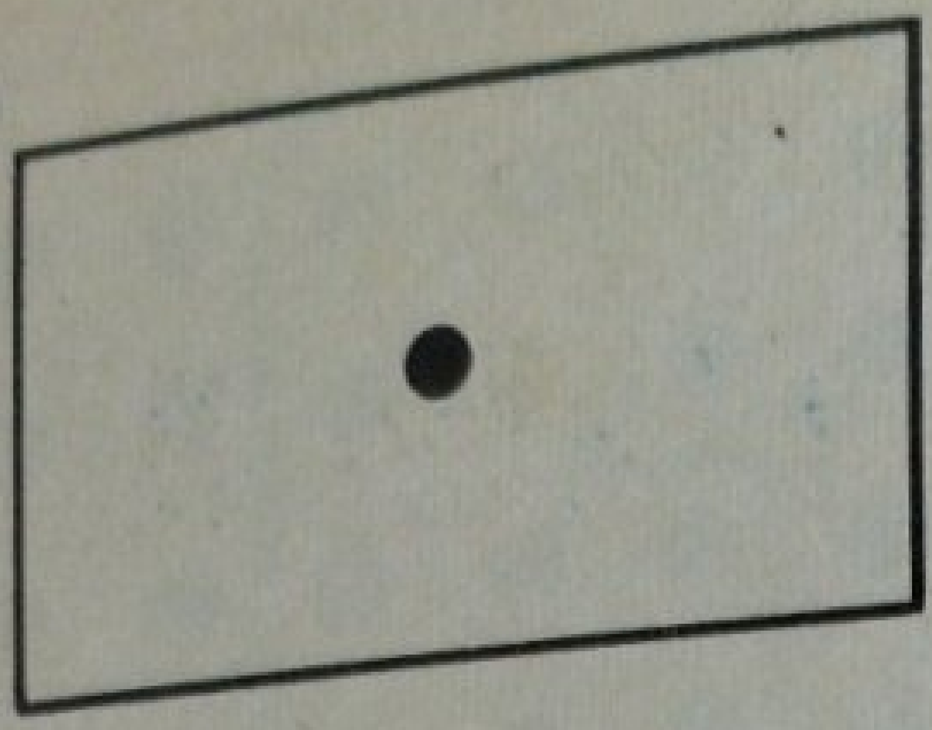
1º)



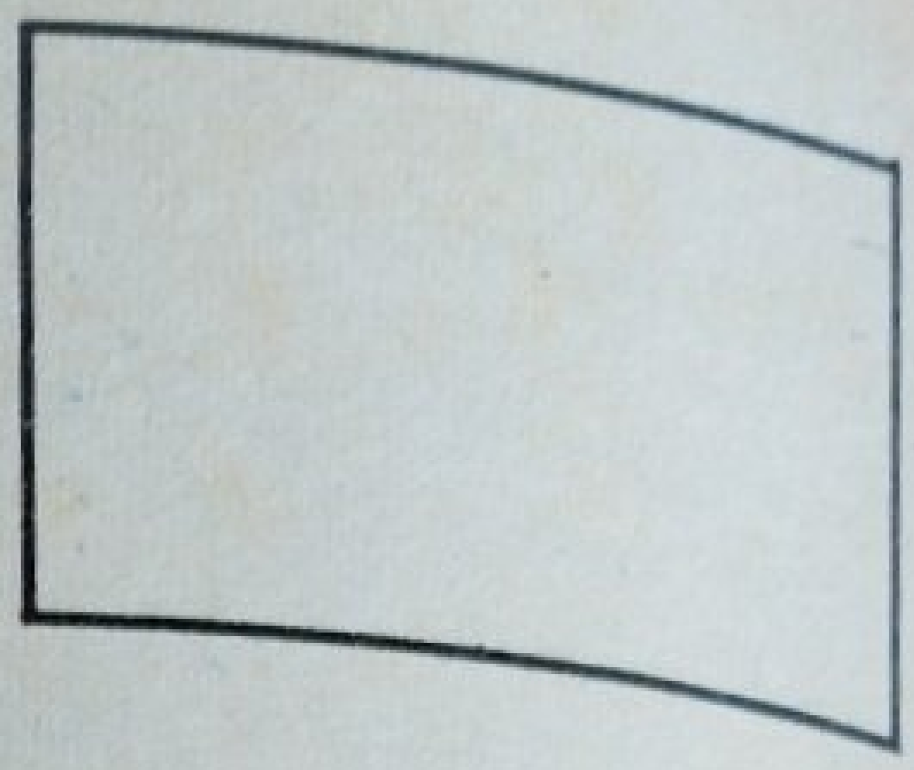
2º)



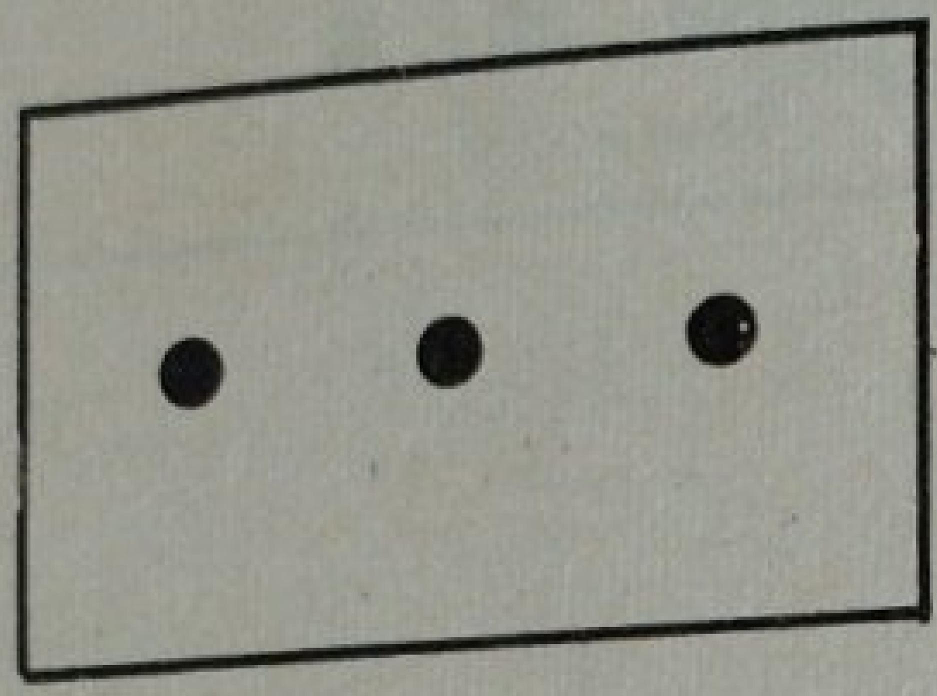
3º)



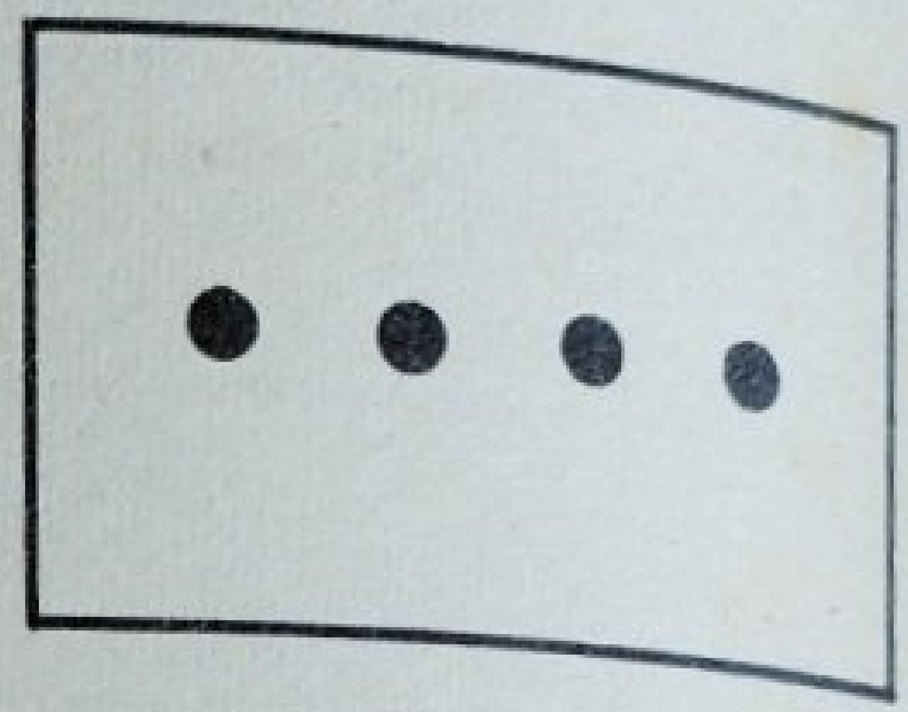
4º)



5º)

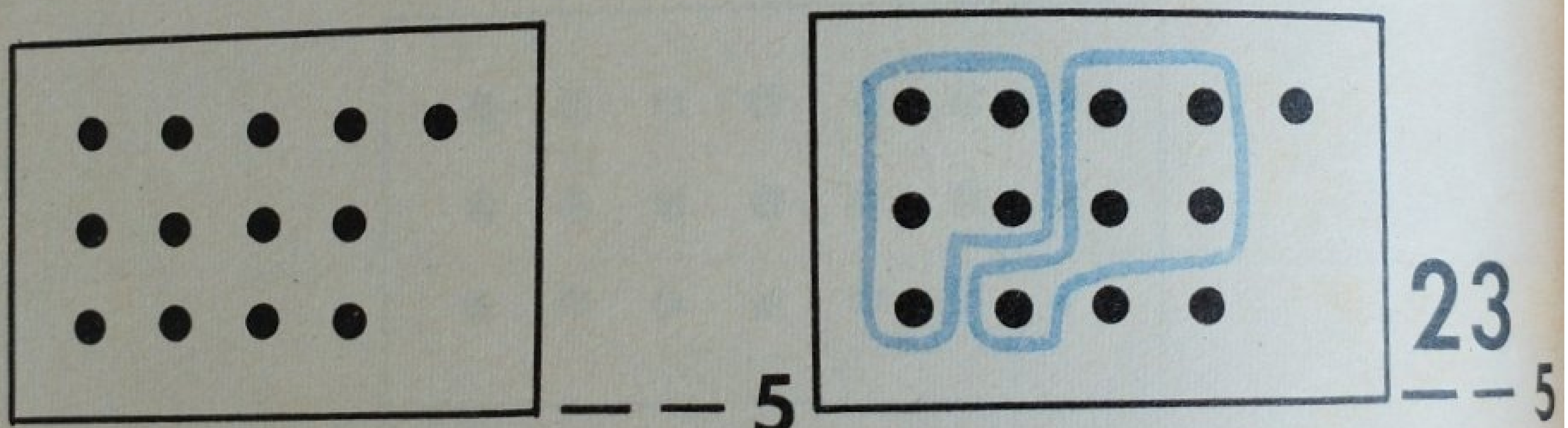


6º)



3. Agrupar os seguintes conjuntos de pontos numa *dada base*. Escrever o número resultante usando os numerais hindu-arábicos (algarismos) e α e β, caso seja necessário. Como *modêlo*, os dois primeiros exercícios estão resolvidos (figs. 18 e 19):

1º)



(solução)

Fig. 18

2º)

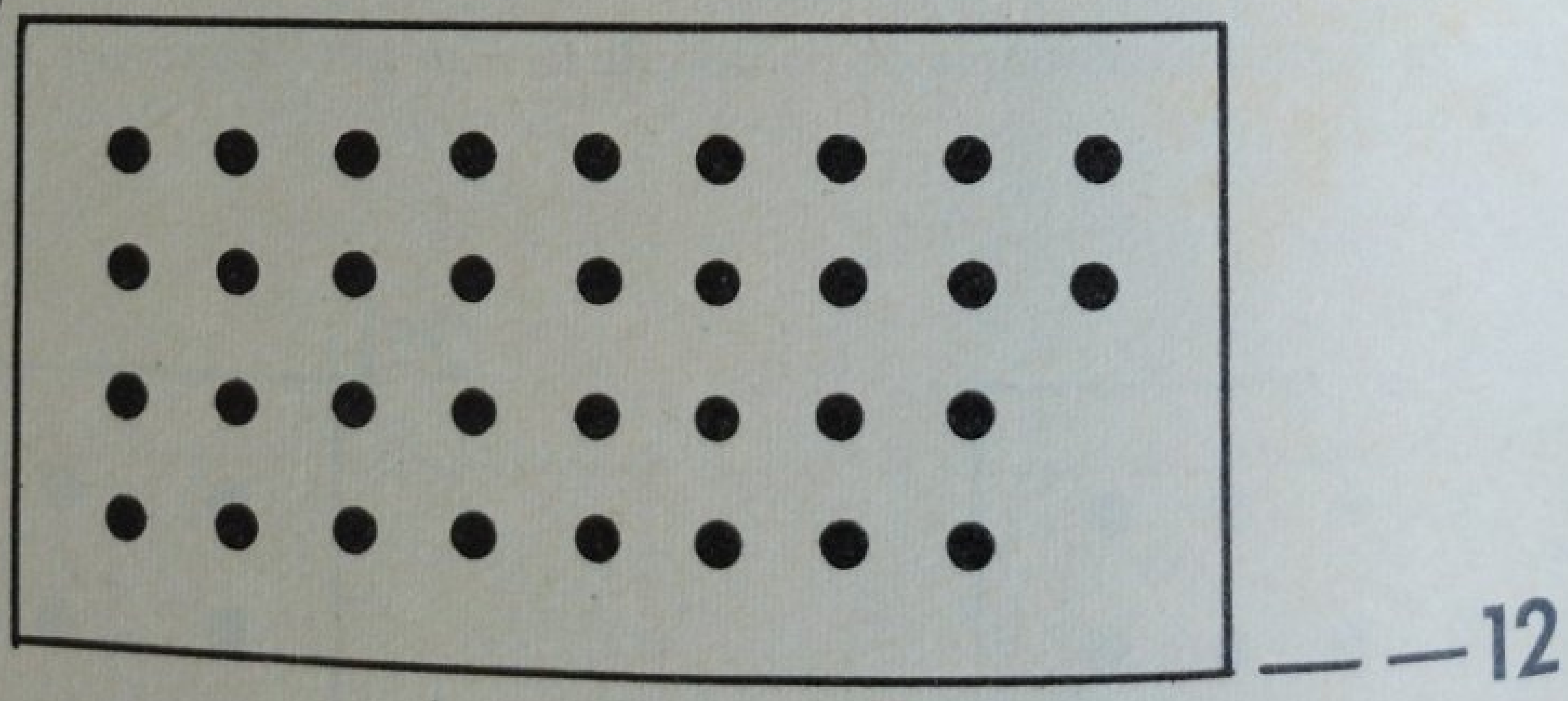
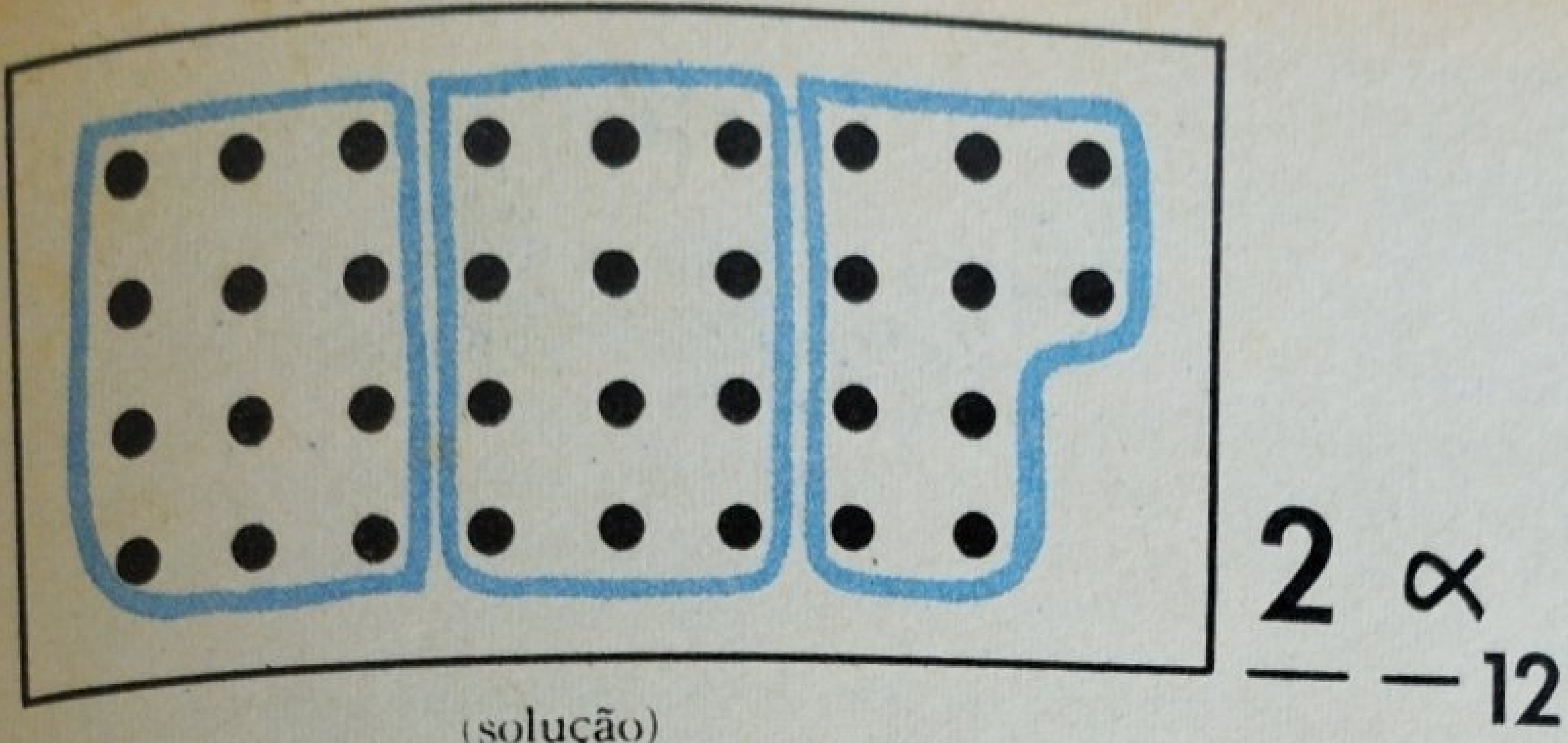


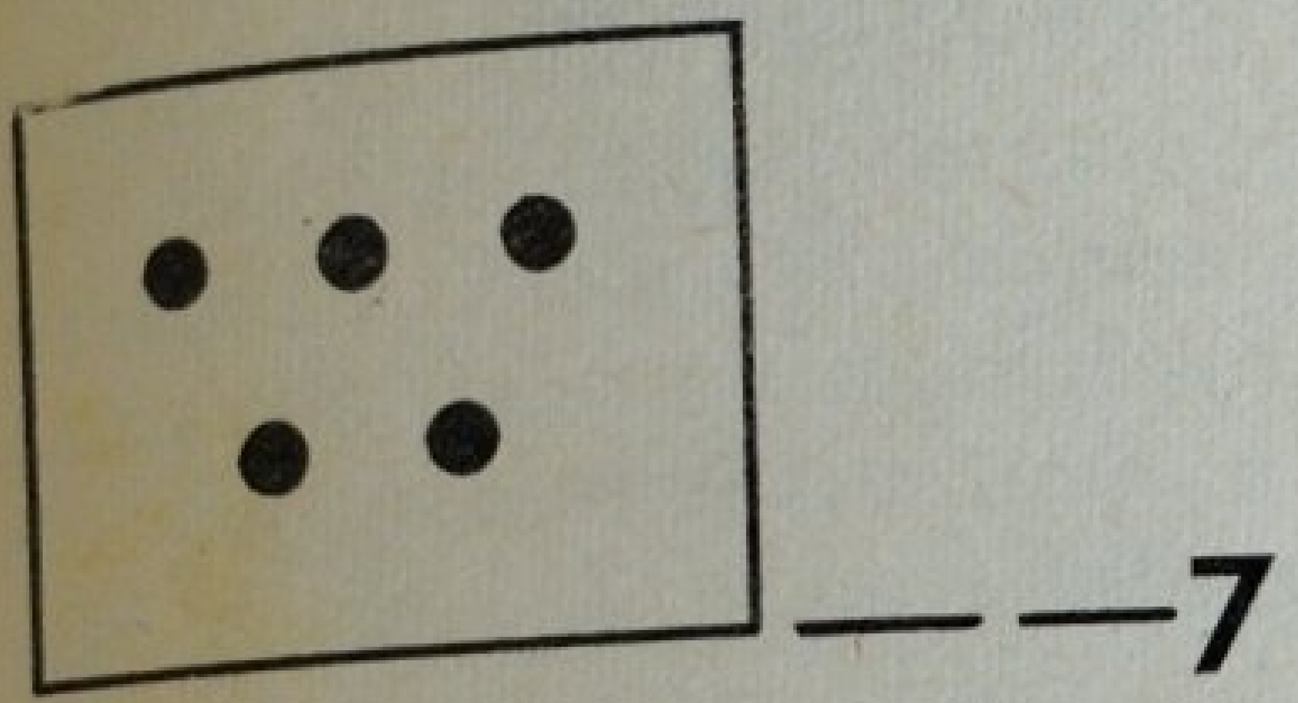
Fig. 19-a



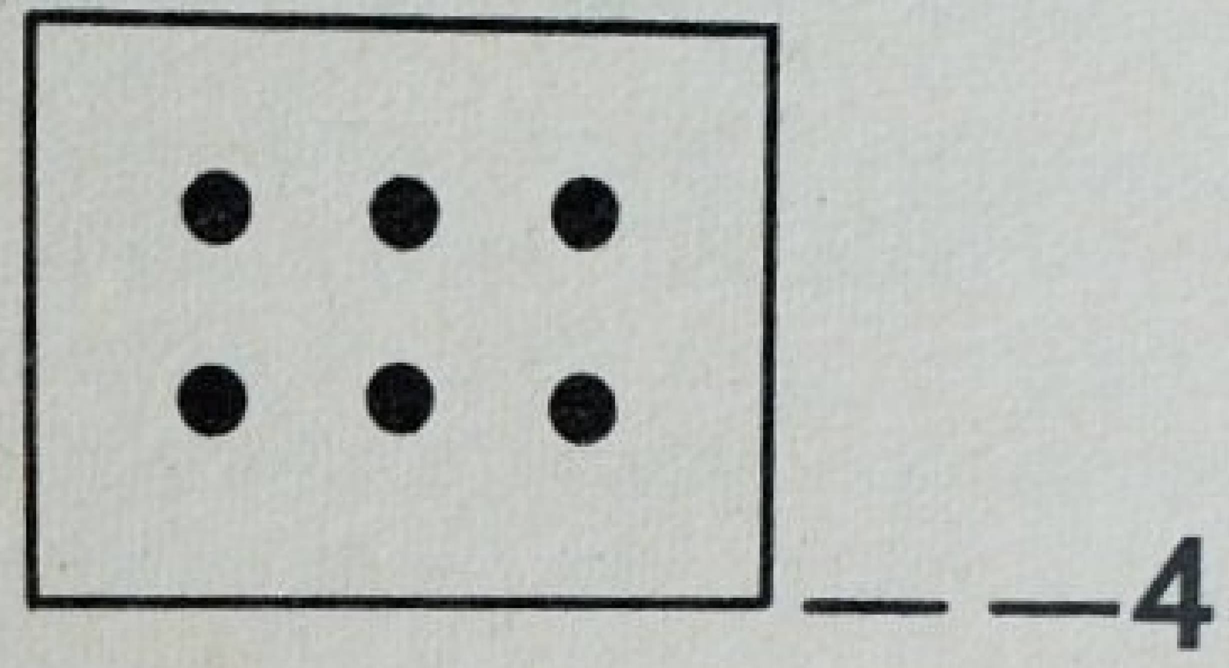
(solução)

Fig. 19-b

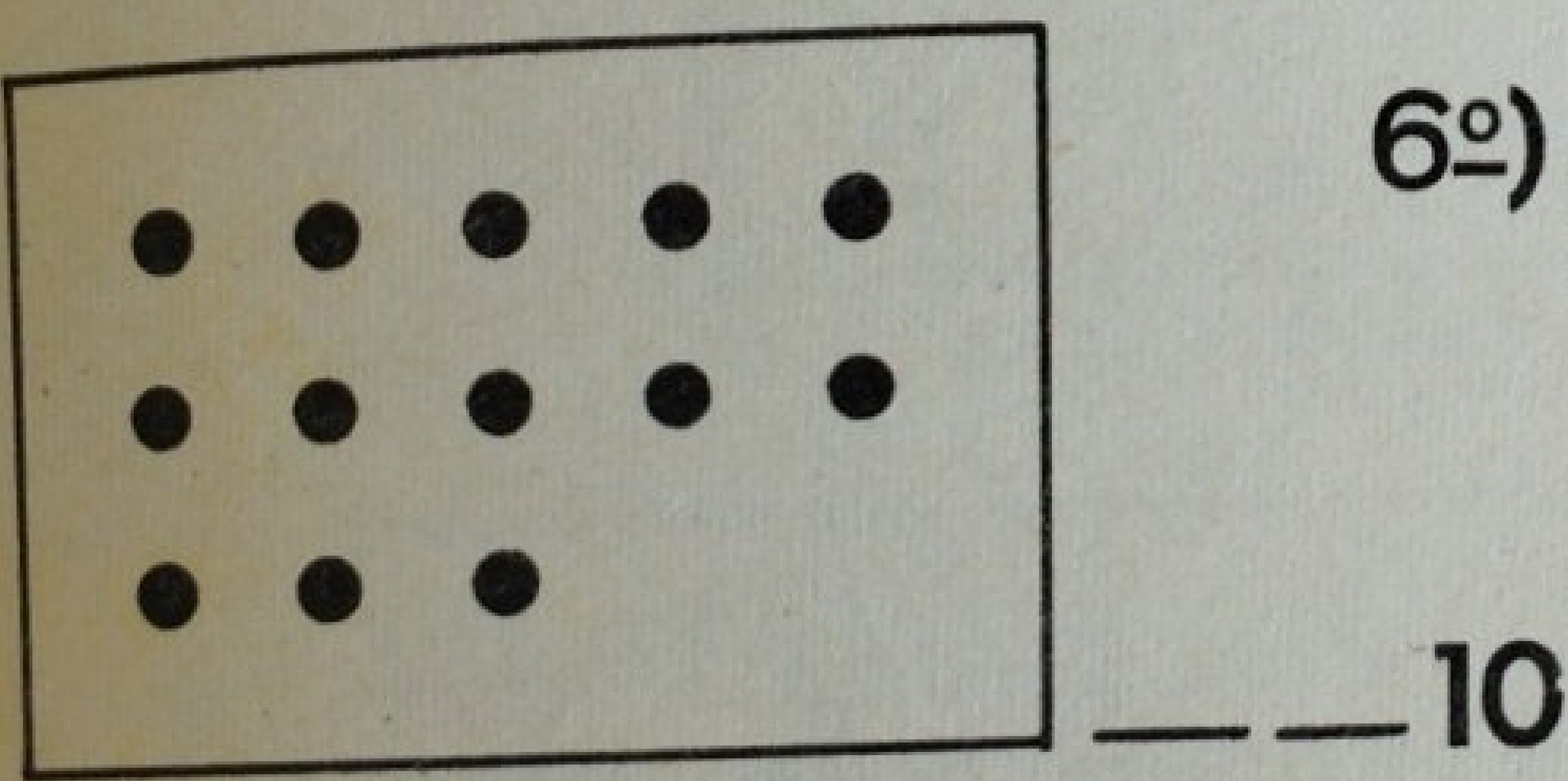
3º)



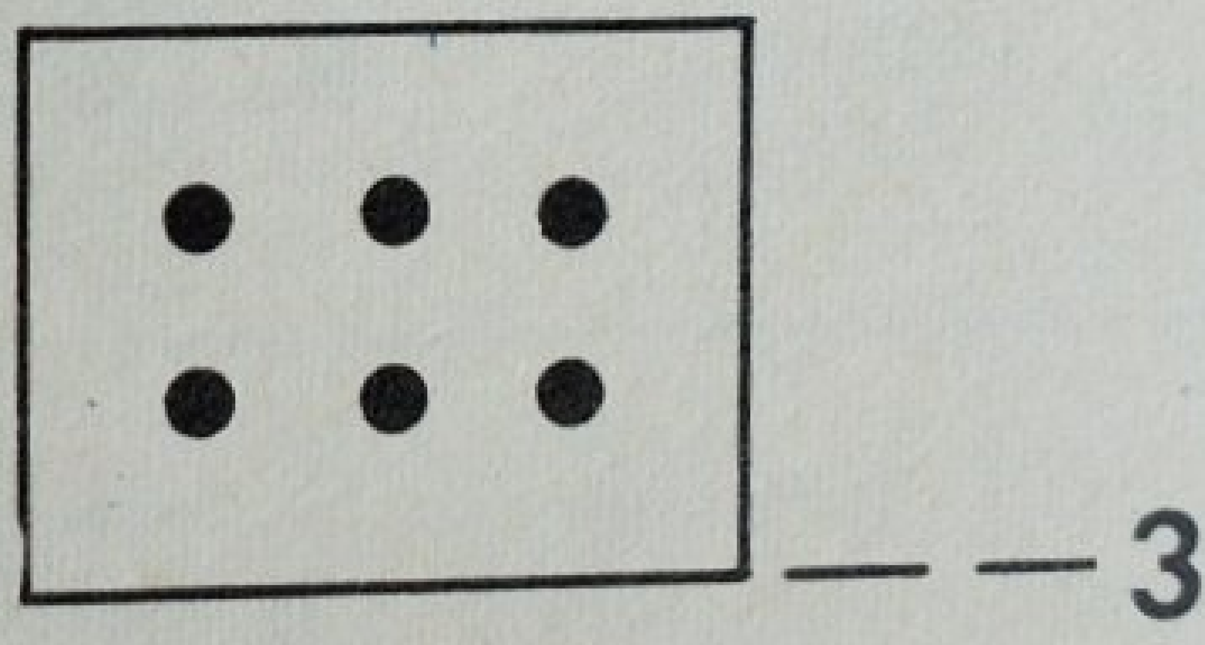
4º)



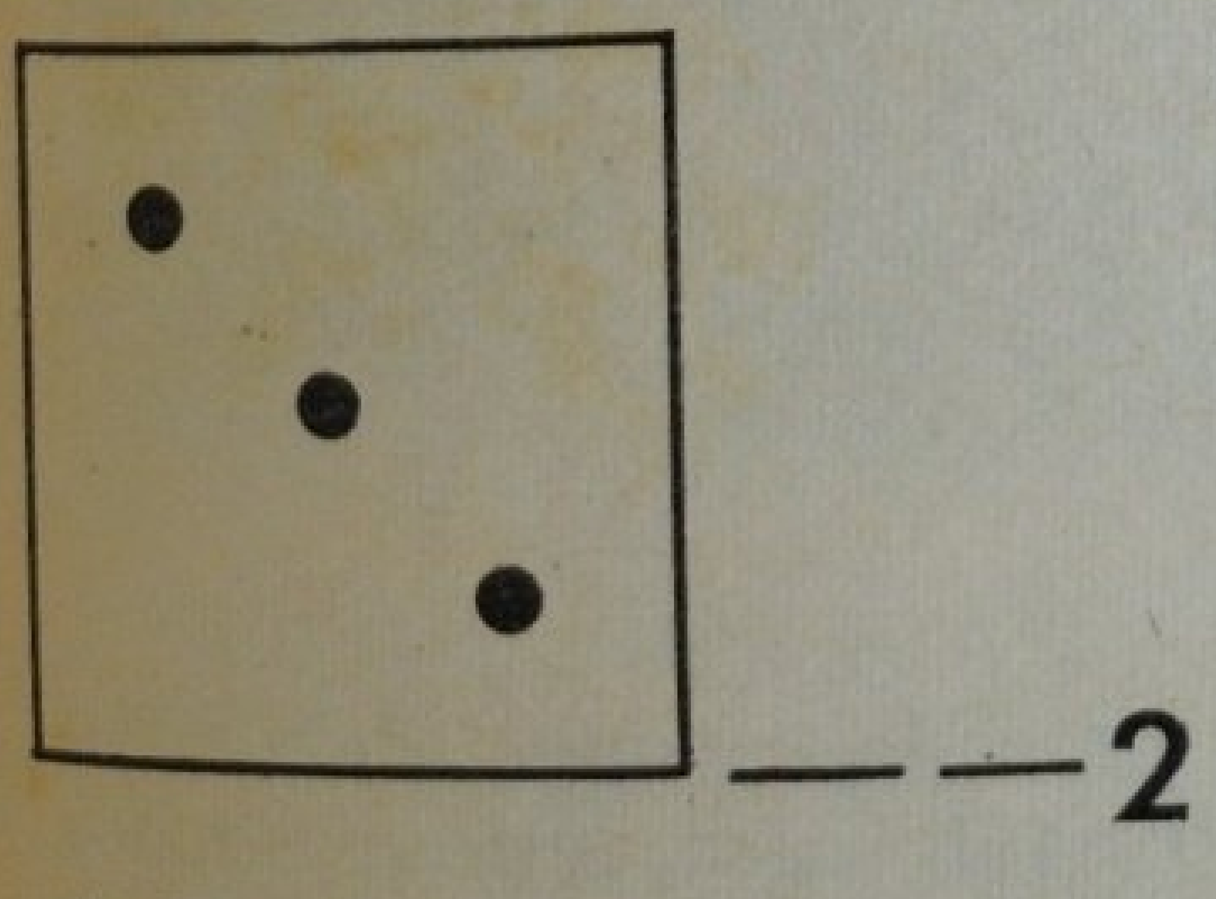
5º)



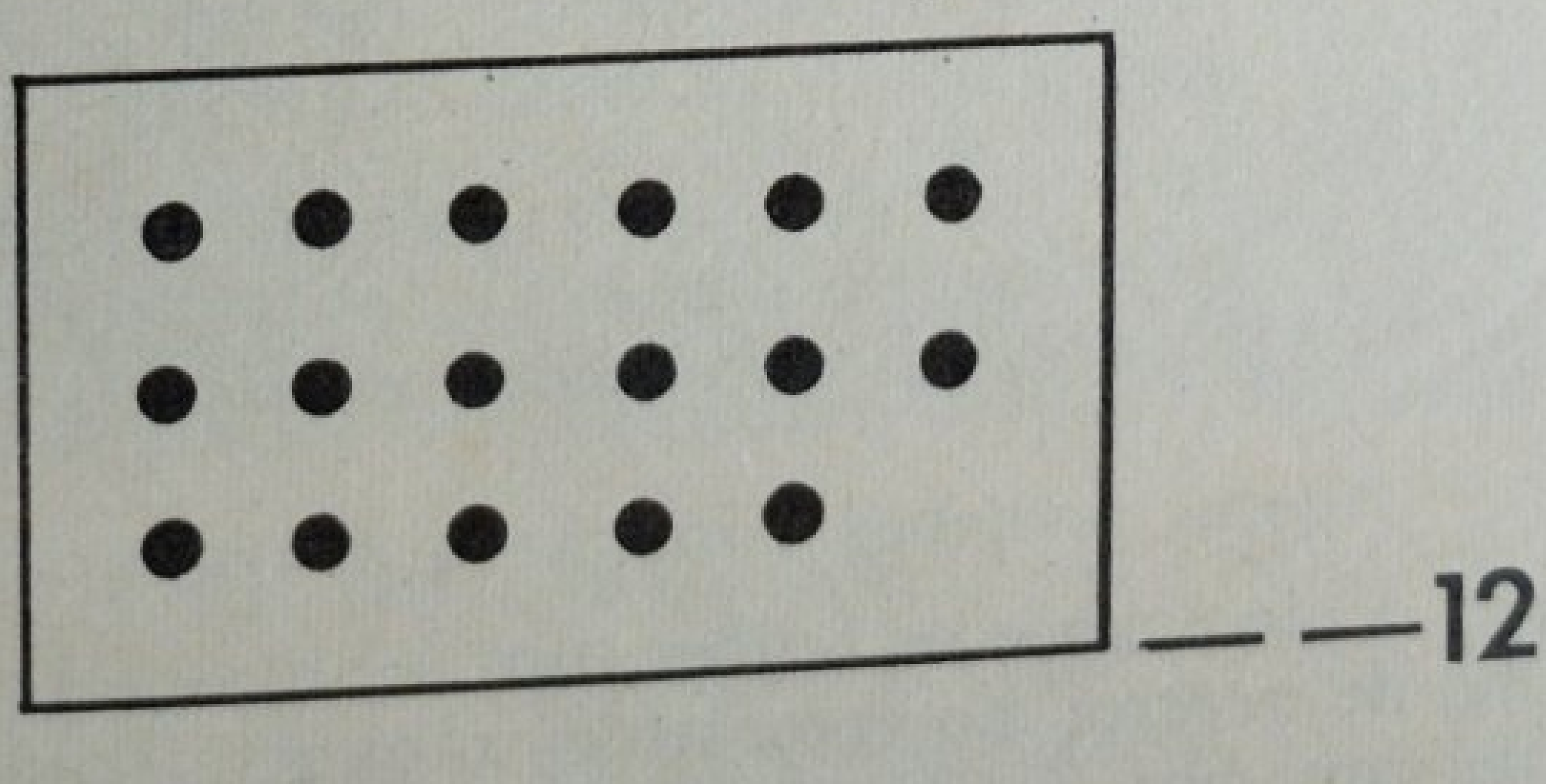
6º)



7º)



8º)



4. Quantas *semanas* e quantos dias representam 44 dias?

5. Quantas *dúzias* e quantas laranjas representam 35 laranjas?

Com relação a *Sistemas de Numeração* é útil mostrar aos jovens alunos da 1.ª Série Ginasial a possibilidade de "construir" sistemas diferentes do *Decimal*. A finalidade é propiciar um contacto "concreto" com as idéias de *conjunto* e de *ordem* que, constituem matéria importante para o desenvolvimento da Matemática Moderna.

A iniciação de um *Laboratório de Matemática*, que seria o local onde se concentrariam as atividades práticas, traria — sem dúvida — um novo interêsse pelo conhecimento "de perto" de certas partes da Matemática, a começar pela *contagem* dos elementos de um conjunto.

Essa contagem, em *qualquer base*, já foi feita através de "desenhos" reunindo em grupos os pontos de um conjunto. Agora, a nossa "experiência" pode ser concretizada com uma *caixinha* (de papelão, de madeira,.. ou mesmo uma série de caixas de fósforos ligadas entre si) que conste de repartições iguais (conforme fig. 20) e que chamaremos de "casas", na seguinte ordem, da direita para a esquerda: 1.ª casa, 2.ª casa, 3.ª casa,...

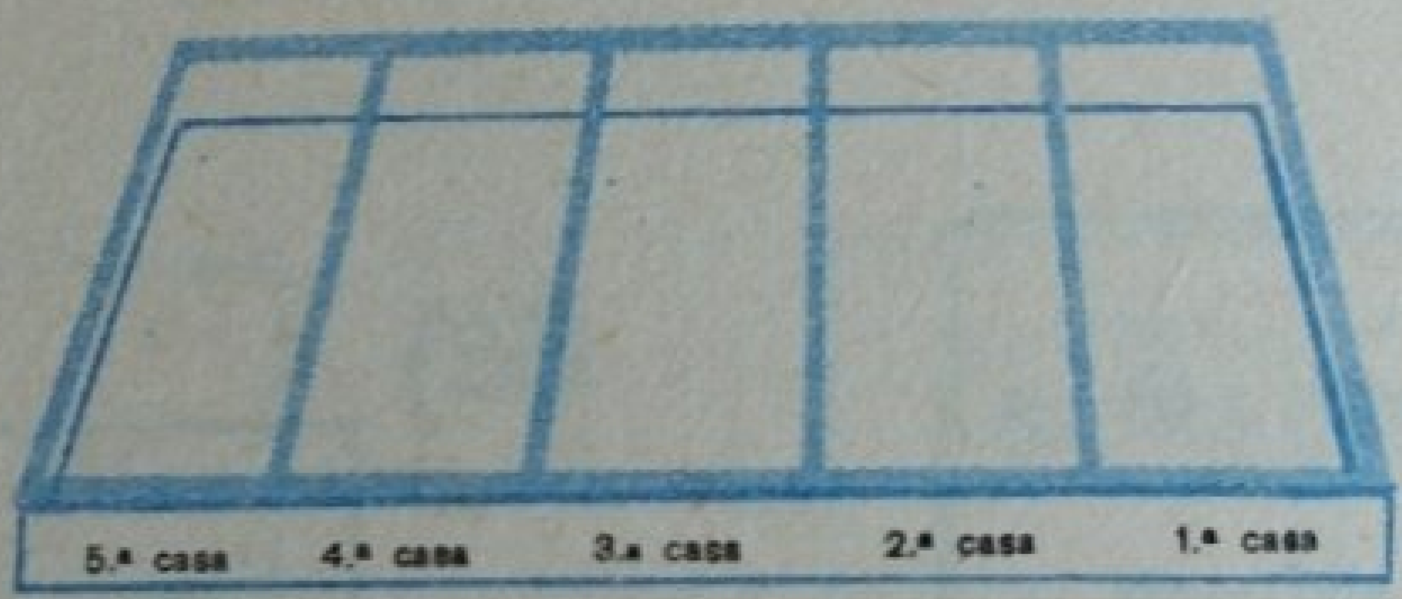


FIG. 20

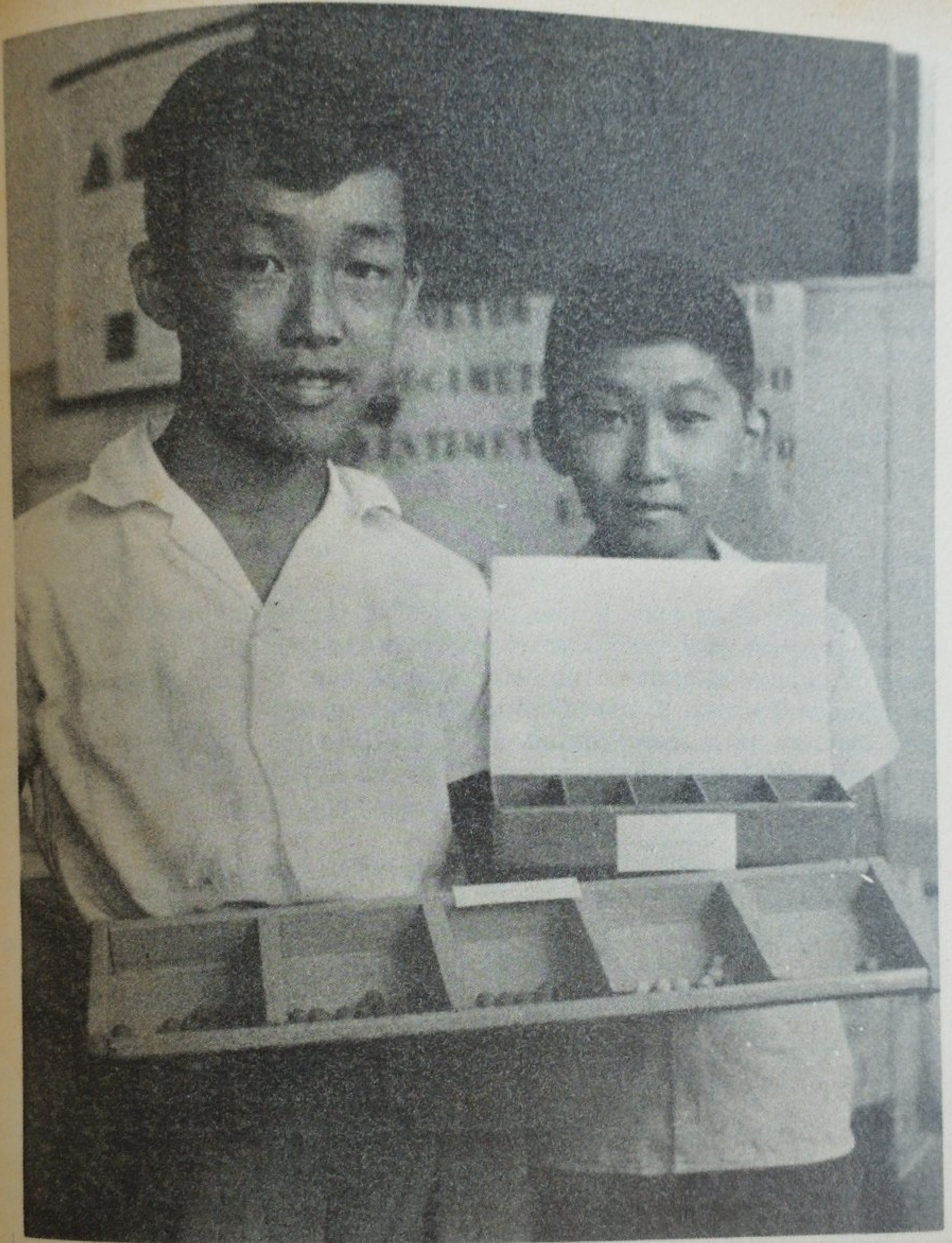
Vamos supor que você tenha um conjunto de feijões e que queira contá-los usando o Sistema de Numeração de *base quatro*. Que é necessário você lembrar, antes de começar a contagem? O seguinte:

1.º) usar *sòmente* os *quatro algarismos*: 0, 1, 2 e 3 para escrever qualquer número na base quatro;

2.º) usar o *Princípio da Posição* para a *base quatro*: todo algarismo escrito à esquerda de outro representa unidades *quatro vêzes maiores* que as dêsse outro.

Agora, podemos começar a *contagem:*

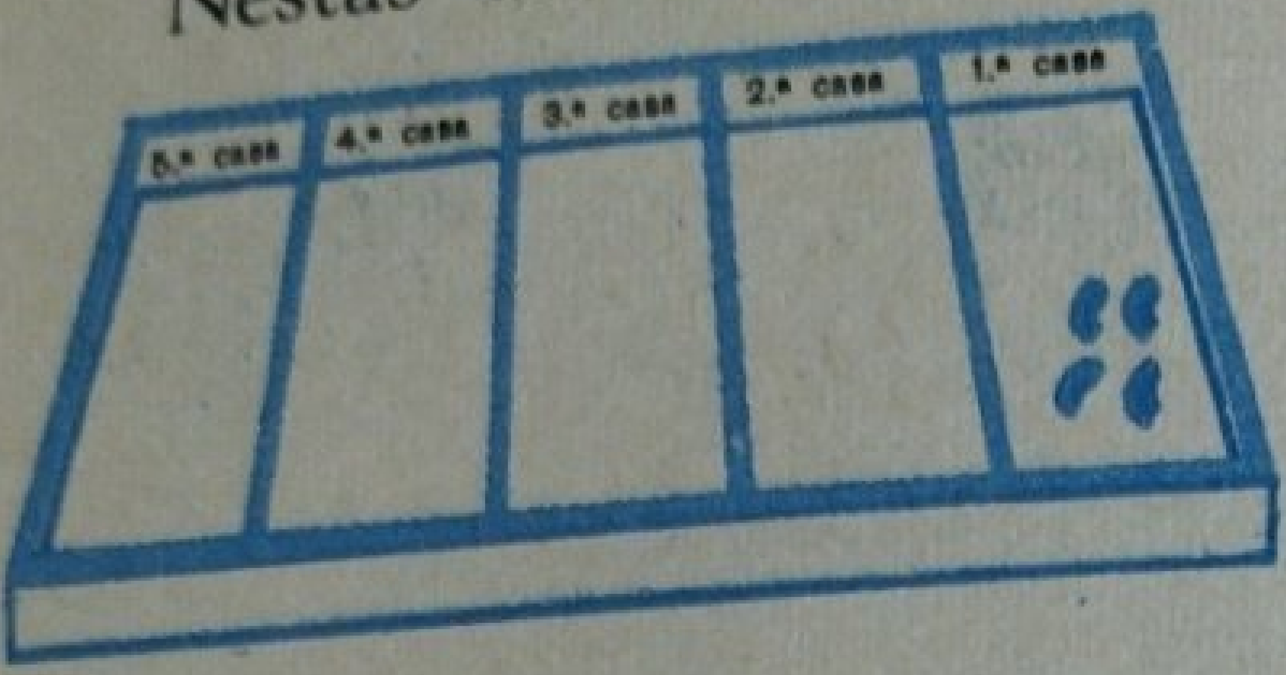
Coloquemos os feijões, um a um, na 1.ª casa da caixinha até o máximo de quatro; ao colocarmos o quarto feijão na 1.ª casa, retiramos todos de uma vez e colocamos *apenas um feijão* na "casa" imediatamente à esquerda (2.ª casa). Para não fazer confusão é preferível colocar um grão maior na 2.ª casa (um grão de milho, por exemplo) a fim de caracterizar melhor que agora são unidades de segunda ordem.



"Caixinha de numeração" auxiliar prático para escrever números em *qualquer base*.
(Da "Esposição de Matemática", realizada em 1961, pelo Prof. João W. Inkis, no Colégio Estadual de Pereira Barreto, Estado de São Paulo).

Para representar que a 1.ª casa (ou qualquer outra) não possui *nenhum* elemento, isto é, que representa um conjunto *vazio* de elementos, usamos o símbolo 0 (zero).

Nestas condições, as *duas representações* (fig. 21) se *equivalem* e



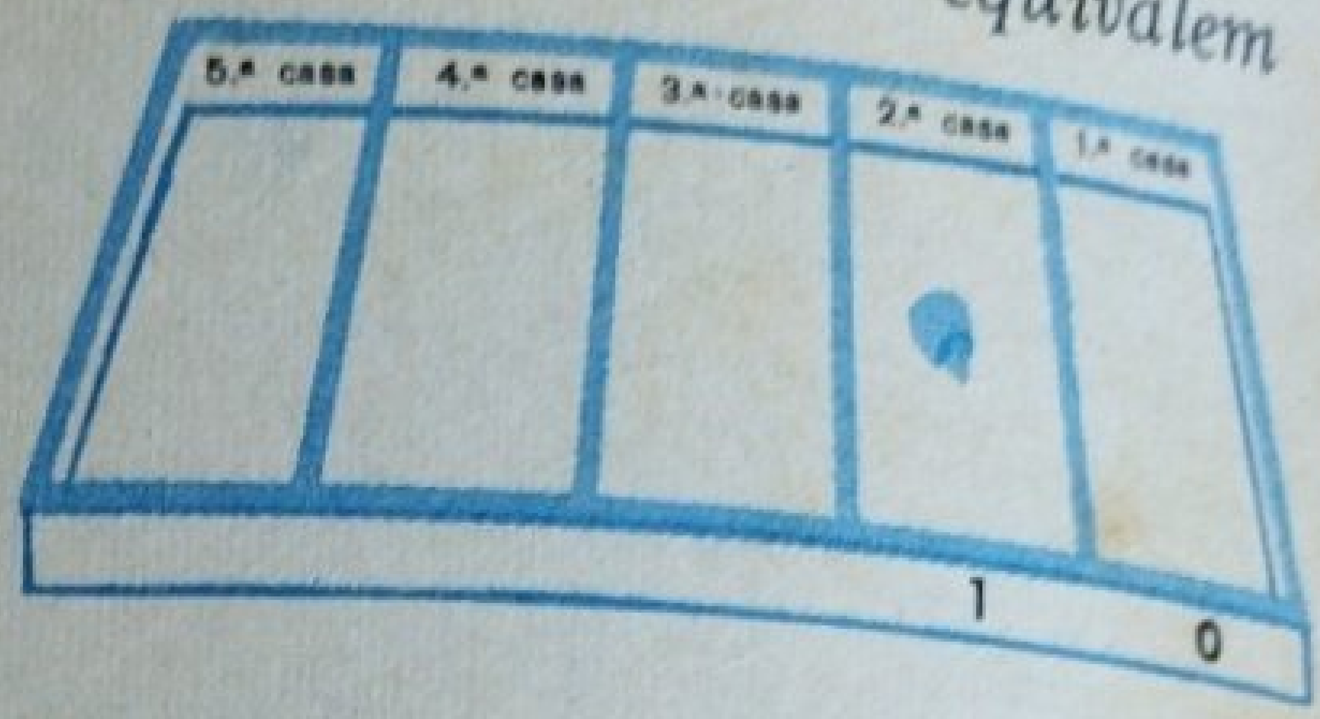


FIG. 21

se tivéssemos contando *sòmente* quatro feijões, por exemplo, o numeral que, no sistema de base quatro, representa êsse *número* seria:

$$10_4$$

(lê-se: "um, zero-base quatro) e não "dez" que seria leitura no sistema decimal)

Caso tenhamos mais feijões para contar continuamos a proceder da mesma maneira, isto é, colocamos feijões outra vez na 1.ª casa até o máximo de quatro, quando então os retiramos para colocar mais um grão de milho na 2.ª casa. E assim vamos agindo até que a 2.ª casa tenha atingido também um máximo de *quatro grãos de milho*. Neste instante, retiramos os quatro grãos de milho da 2.ª casa para colocar *apenas* um "grão-de-bico" (ou outro qualquer, de preferência maior que o do milho) na casa seguinte, ou seja, na 3.ª casa.

Se ainda houver mais feijões para contar (sempre no sistema de base quatro) o procedimento continua o mesmo.

O grupo de feijões (fig. 22) que são 39 no sistema decimal (base dez) contado no sistema *quaternário* (base quatro), dá com o processo(*) ensinado o número 213_4 (lê-se: "dois, um, três — base quatro).

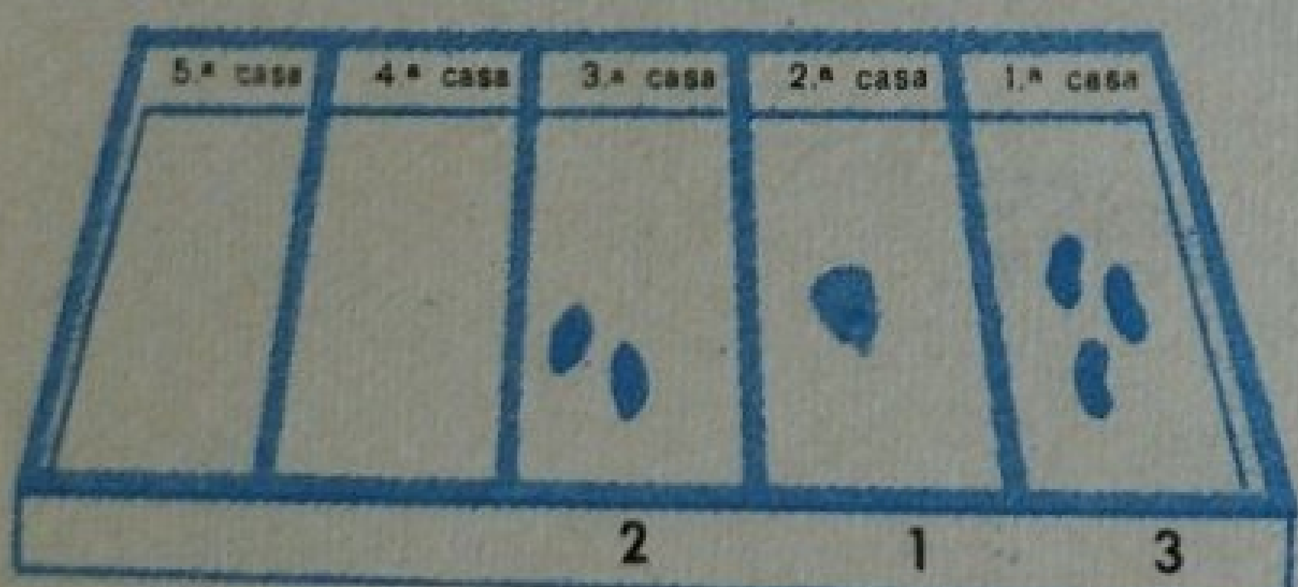


FIG. 22

Cada aluno pode, portanto, "fabricar" a sua *caixinha de numeração*, para iniciar as atividades do *Laboratório de Matemática*, aplicando-a na contagem dos elementos de qualquer conjunto, no sistema de numeração *que quiser!*

Como exemplo de aplicação imediata, sugerimos que cada aluno *conte*, com sua *caixinha de numeração*, os colegas de sua classe, no sistema de numeração que achar conveniente.

Os mais habilidosos poderiam, inclusive, "modernizar" sua caixinha, trabalhando com pilhas e lampadazinhas de côres, ao invés de usar sementes.

(*) Método introduzido na Classe Experimental (1.ª Série Ginasial, do Prof. Scipione Di Pierro Netto) do Colégio de Aplicação da Faculdade de Filosofia, da Universidade de São Paulo.

CAPÍTULO 2

conceito de operação
operação inversa
adição e subtração
multiplicação e divisão
potenciação e radiciação

1ª PARTE

2ª PARTE

divisibilidade

número um, números primos e números compostos

fatoração completa.

raiz quadrada aproximada

operações: m.d.c. e m.m.c.

1

conceito de operação
operação inversa

adição e subtração

multiplicação e divisão

potenciação e radiciação

3+4=7
7-4=3

que é uma operação?

qual é a operação inversa?

1. *Idéia geral de operação; operação inversa*

Quando de manhã você calça os seus sapatos, na verdade você está realizando uma "*operação*" que envolve os seus *pés* e *sapatos*.

Qual é o resultado dessa "operação"?

Resposta: *pés calçados*! (fig. 23)

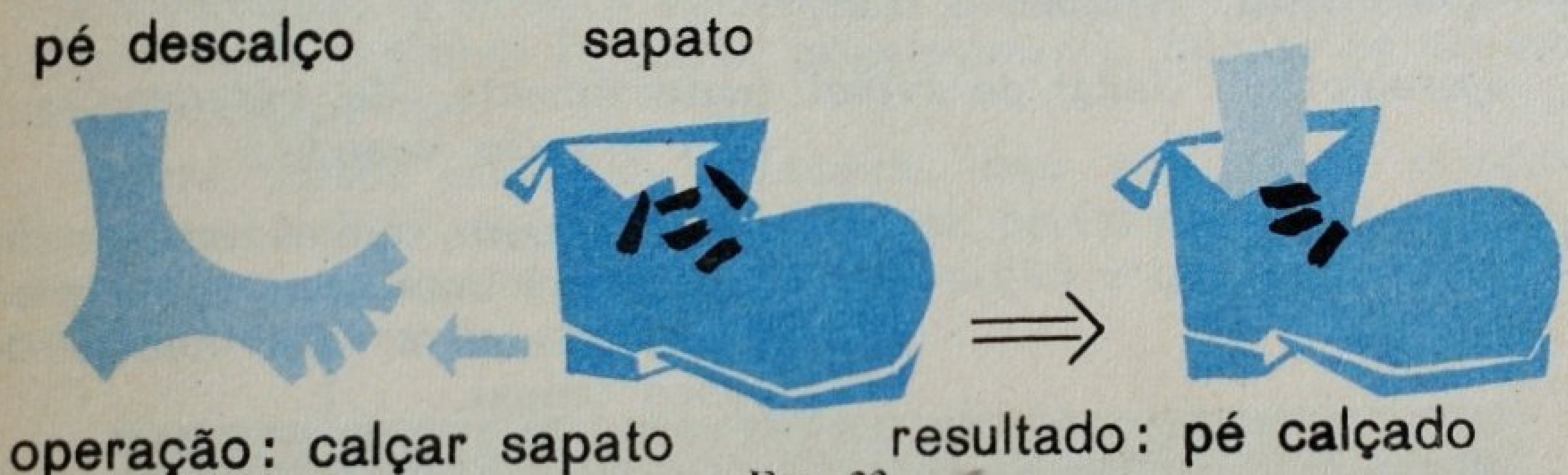


FIG. 23

À noitinha, quando você *tira* os sapatos, então estará sendo realizada a "operação" *inversa* e o resultado agora será: *pés descalços!* (fig. 24):

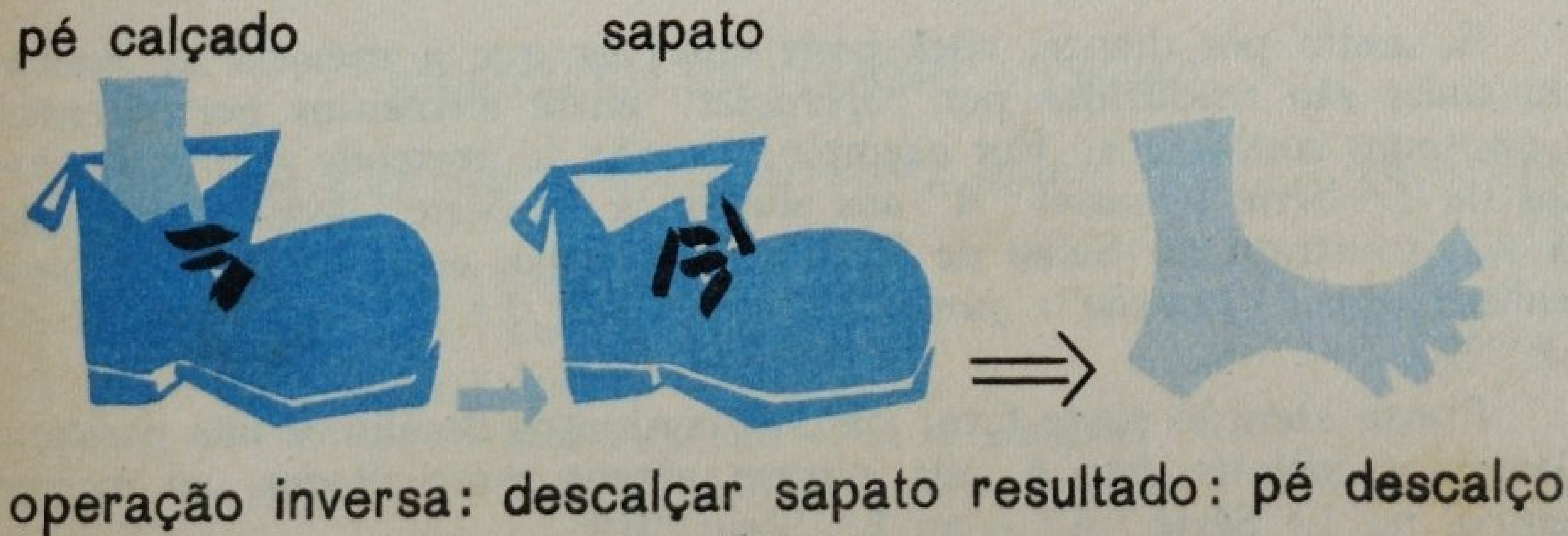


FIG. 24

Logo, aplicando a operação (direta): "*calçar sapato*" ao pé descalço o *resultado* dessa operação foi "*pé calçado*" e aplicando, a seguir, ao pé calçado a operação *inversa*: "*descalçar*" *sapato*, resultou *novamente* o *pé descalço*.

Êste fato nos permite dizer que:

Uma operação, seguida de sua inversa, volta à situação original por desfazer o que a primeira fêz.

Observações:

1.ª) Atenção! *não dizer* que a operação *inversa* de "*calçar sapato*" é "*não calçar sapato*", pois não calçar sapato não é uma "operação" que desfaz aquela de calçar sapato;

2.ª) Nem sempre é *possível* realizar a operação *inversa* de uma dada operação, como é fácil verificar pelos exemplos.

Exemplos:

operação:	*Pôr* o chapéu	
operação inversa:	*Tirar* o chapéu	
operação:	*Estender* a mão	
operação inversa:	*Recolher* a mão	
operação:	*Saltar* do avião!	(naturalmente, de pára-quedas e com o avião voando.....)
operação inversa:	?	(por enquanto, com os recursos que dispomos é impossível voltar para o avião; quem sabe dentro de pouco tempo.....)
operação:	*Cheirar* o bôlo	
operação inversa:	?	(por enquanto é impossível "des-"cheirar" o bôlo.....)

E, assim por diante, você pode observar que a maioria de nossas *atividades* são traduzidas por "*operações*" entre elementos pertencentes a *conjuntos* conhecidos. Por exemplo, quando se pretende *reunir* os alunos da 1.ª Série Ginasial "A" aos alunos da 1.ª Série Ginasial "B", que já se encontram no Salão de Festas do Colégio, estamos prontos para realizar uma "*operação*": *juntar* os alunos da 1.ª "A" aos alunos da 1.ª "B".

Preste atenção neste fato: os dois conjuntos de alunos *não* possuem elementos *comuns*, isto é, *não existem* alunos matriculados, ao mesmo tempo, na 1.ª Série "A" e na 1.ª Série "B".

Qual seria a *operação inversa*?

Seria *retirar* do Salão de Festas (onde se encontram reunidos os alunos da 1.ª "A" e 1.ª "B") os alunos da 1.ª "A", pois, dessa forma, estaríamos desfazendo o que a operação (direta) fêz.

2. *Operações fundamentais com números inteiros*

Tudo se passa da mesma maneira quando *operamos* com os *números* inteiros do conjunto:

$$I = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \ldots\ldots\ldots\}$$

Dados *dois* números inteiros uma *operação* (chamada *binária* porque emprega *dois* elementos) consiste em "*produzir* um número inteiro que *obedeça* uma determinada *lei*. Essa *lei* pode ser *qualquer* uma que desejarmos. Por exemplo:

reunir tôdas as unidades de dois números inteiros dados;
(mais tarde você chamará essa operação de *adição!*)

tirar as unidades do menor número contidas no maior;
(...e essa de *subtração!*)

Essas *operações* e mais a multiplicação e a divisão, que "produzem respectivamente: a *soma*, a *diferença*, o *produto* e o *quociente*, você as conhece desde o Curso Primário, principalmente, quanto as *técnicas de cálculo*, na base dez.

Agora vamos estudá-las *novamente*, SEM REPETIR as *técnicas de cálculo* que você já treinou *suficientemente*, porém destacando alguns aspectos novos, utilíssimos para sua FORMAÇÃO e que pertencem a Matemática de todos os graus, tais como:

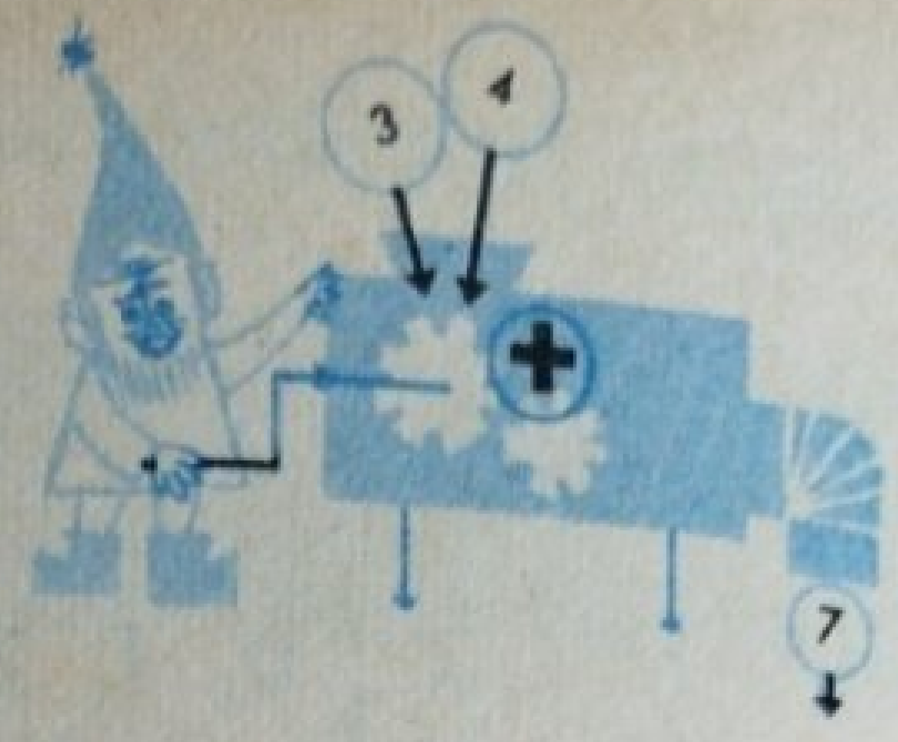
relações de uma operação com sua inversa; propriedades estruturais das operações.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 7

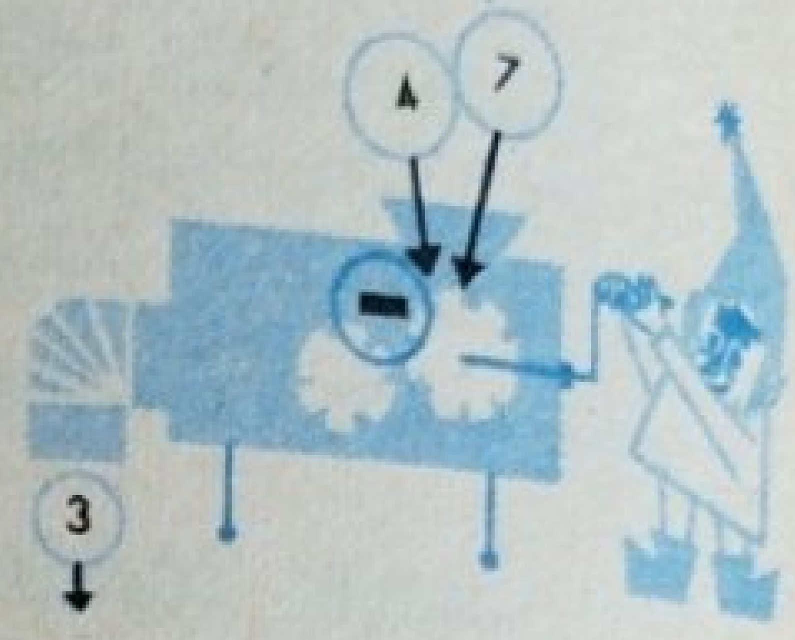
Dizer qual a operação inversa (naturalmente, quando existir ...) das seguintes operações:

1.ª) *Calçar* luvas;
2.ª) *Dar* um passo à frente;
3.ª) *Gritar;*
4.ª) *Guardar* o automóvel na garagem;
5.ª) *Saltar* do trampolim para a piscina;
6.ª) *Somar;*
7.ª) *Abrir* o livro;
8.ª) *Cortar* a vara;
9.ª) *Multiplicar;*
10.ª) *Estudar* Matemática!

adição e subtração



Adição de dois números inteiros



3. *Operação: Adição; resultado: Soma*

Preste bem atenção na seguinte *operação* a ser efetuada entre dois *conjuntos* de objetos, de mesma espécie, e no *resultado* que irá obter.

Sejam, por exemplo, dois conjuntos de lápis (na fig. 25 representados por "pauzinhos") um com *cinco* lápis e outro com *três* (não havendo lápis que pertença aos dois conjuntos ao mesmo tempo):

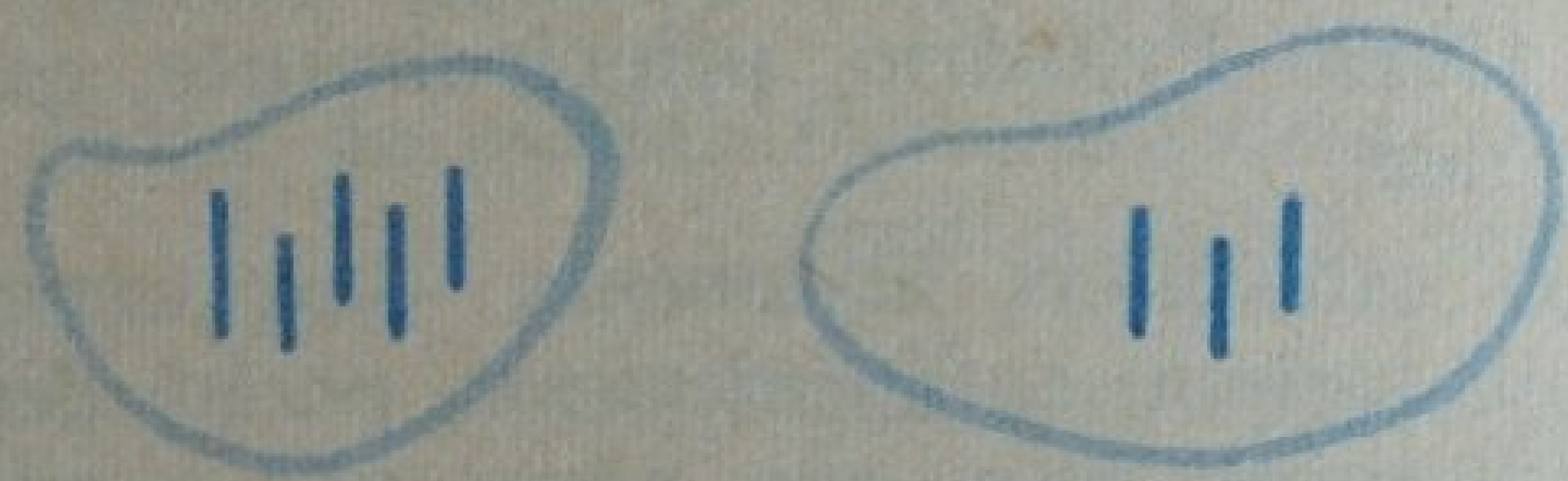


FIG. 25

Vamos efetuar a seguinte *operação:* reunir todos os lápis dos dois conjuntos formando um conjunto único, isto é, um conjunto-reunião com *oito* lápis.

Para indicar a *reunião* ou *união* de dois conjuntos usamos o símbolo U *que é nôvo para você*, fácil de ser guardado por ser a primeira letra da palavra UNIÃO. Logo, *efetuando* a operação, temos (fig. 26):

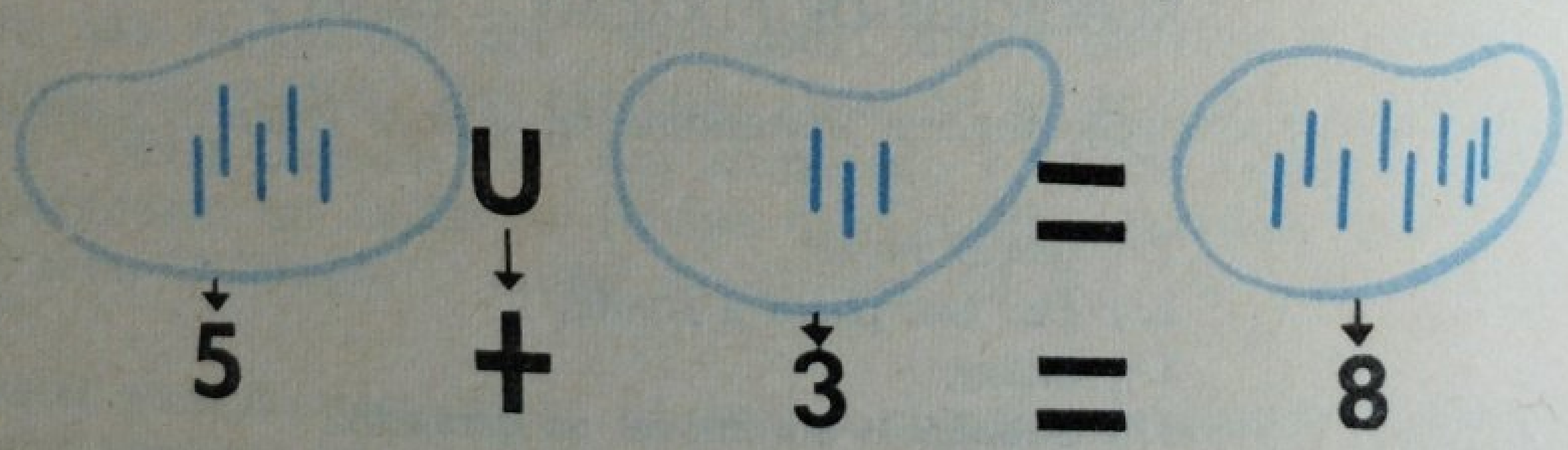


FIG. 26

A *sentença matemática* correspondente a essa UNIÃO entre conjuntos é:

$$\boxed{5+3=8}$$

que traduz a operação ADIÇÃO entre os números 5 e 3 e facilita o trabalho de cálculo. Como você está percebendo a *adição* reúne tôdas as unidades de dois números em um só número. Nessa sentença, temos:

o 5 e o 3 são os *têrmos* (ou parcelas)
o sinal + (lê-se "mais") é o símbolo da *adição*;
o 8, que é o *resultado*, diz-se *soma* (ou total)

Logo:

Adição de dois números inteiros é a operação que permite encontrar a Soma dêsses números.

A *técnica de cálculo* para a obtenção da SOMA de dois números inteiros *quaisquer*, no sistema de numeração decimal, já é do seu conhecimento (juntam-se as unidades de mesma ordem, etc...), pois, a ADIÇÃO é a primeira operação que se aprende fazer com os números. De um modo geral, se *a* e *b* representam *numerais* de dois números quaisquer, temos a sentença (igualdade):

$$\underbrace{a+b}_{\text{têrmos}} = s \ (\textit{soma})$$

Êrro comum: Confundir *adição*, que é uma OPERAÇÃO, com *soma*, que é o RESULTADO da operação e, portanto, um *número!*

Logo: *adição* e *soma* não são palavras sinônimas.

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO — GRUPO 8

Desenhar o *conjunto-reunião* dos seguintes conjuntos e exprimir em *sentença matemática* a operação adição. Exemplo (fig. 27):

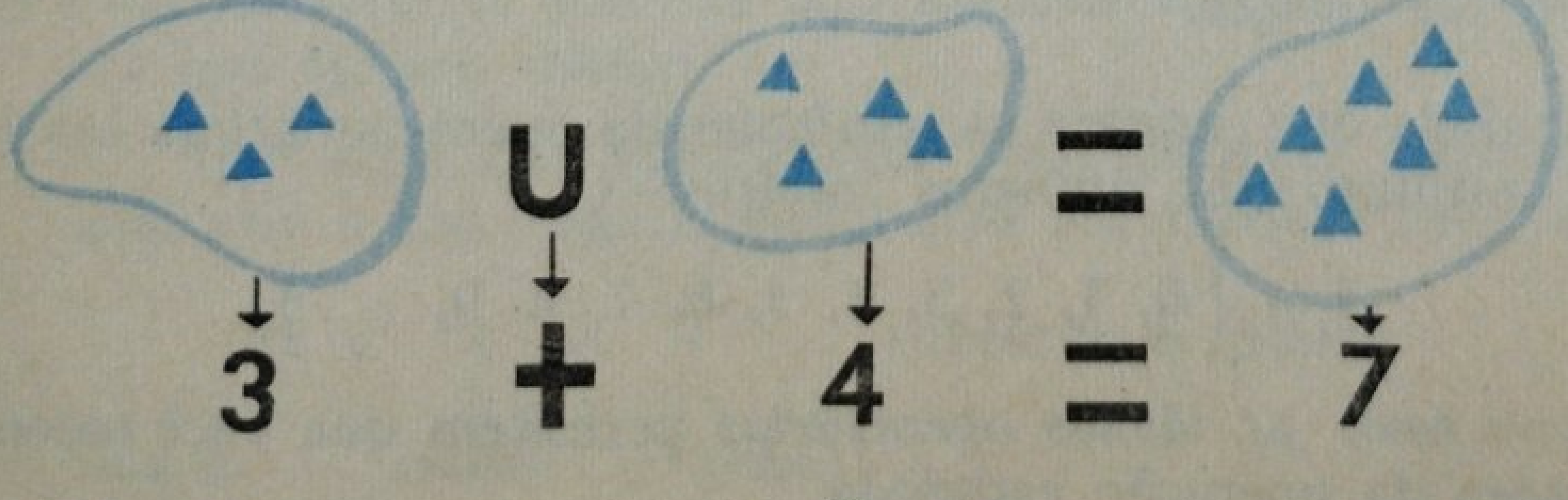
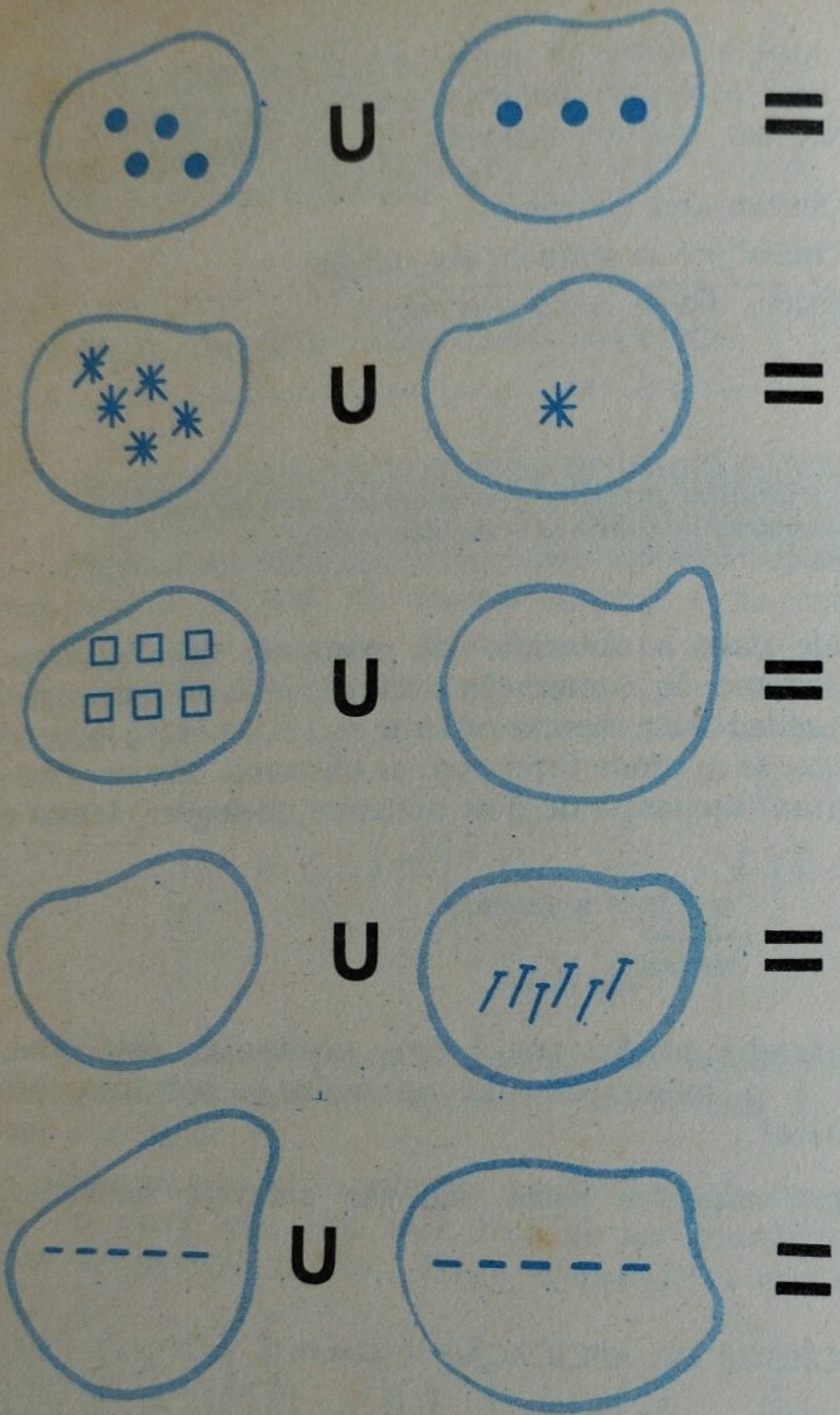


FIG. 27



4. *Tábua da adição*

É a tabela que registra os *resultados* da operação *adição* (na base 10) feita no conjunto dos números inteiros:

$$I = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9, \ldots\}$$

Observe bem: as *tábuas operatórias* permitem que você reconheça as propriedades da operação estudada.

elemento neutro

+	0	1	2	3	4	5	6	•	•	•
0	0	1	2	3	4	5	6	•	•	•
1	1	2	3	4	5	6	7	•	•	•
2	2	3	4	5	6	7	8	•	•	•
3	3	4	5	6	7	8	9	•	•	•
4	4	5	6	7	8	9	10	•	•	•
5	5	6	7	8	9	10	11	•	•	•
6	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
7	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•

Prática: Procura-se o *resultado* (que é a soma) no *cruzamento* das linhas horizontal e vertical, que "passam" pelos números operados (figuram na primeira coluna e primeira horizontal).

5. *Propriedades*

A *tábua da adição* permite reconhecer as seguintes *propriedades* da *adição*:

1.ª) FECHAMENTO: *A soma de dois números inteiros quaisquer é sempre um número inteiro.*

Isto significa: adicionando dois números inteiros você já sabe que o resultado também será um *número inteiro*! Ex.:

$$\underset{\text{inteiro}}{3} + \underset{\text{inteiro}}{4} = \underset{\text{inteiro}}{7}$$ (observe a tábua)

2.ª) COMUTATIVA: *Trocando-se a ordem de dois têrmos quaisquer a soma obtida é a mesma* (observe pela tábua!) Ex.:

$$3+4 = 4+3$$

que permite dizer: "*a ordem das parcelas não altera a soma*".
Abreviatura: p. c. a. (lê-se: propriedade comutativa da adição)

3.ª) ELEMENTO NEUTRO: 0 (zero); isto é, o *zero* é o *único* número inteiro que é neutro (ou indiferente) na adição, pois adicionando-o com qualquer número inteiro o resultado é o *próprio número inteiro*. Exemplo:

$$5+0 = 5 \text{ e } 0+5 = 5$$

Abreviatura: e. n. a. (lê-se elemento neutro da adição)

OBSERVAÇÕES:

1.ª) A soma de um número inteiro com 1 (um) chama-se consecutivo do primeiro. Exemplos:

o *consecutivo* de 5 é $5 + 1$
o *consecutivo* de a é $a + 1$

2.ª) Se dois números inteiros não são nulos então a sua *soma* será *maior* que qualquer um dêles. Exemplos:

$5 + 3 > 5$ (pois, $8 > 5$)
$5 + 3 > 3$ (pois, $8 > 3$)

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 9

1. Na igualdade: $8 + 5 = 13$

   1.º) Qual a *operação* efetuada?
   2.º) Qual o nome do *resultado*?

2. Dizer a *propriedade* que está sendo aplicada em:

   1.º) $4 + 2 = 2 + 4$
   2.º) $2 + 0 = 2$
   3.º) $a + b = b + a$
   4.º) $0 + a = a$
   5.º) $5 + 3 = 8$
   6.º) $\square + \triangle = \triangle + \square$

3. Se $9 + \ldots = 9$, então a segunda parcela é ...
4. Completar a *implicação:* $\square + 5 = 5 \Longrightarrow \square = \ldots$
5. Escrever de dois modos diferentes a soma de x com y.
6. Indicar tôdas as adições de dois números inteiros cuja soma seja 10.
7. Indicar tôdas as adições de dois números naturais cuja soma só tenha um algarismo.
8. Quais os *consecutivos* dos seguintes números: 0, 9, n e $n+1$?
9. A soma de dois números naturais é 8. Qual é o maior valor possível para uma das parcelas? Nesse caso qual o valor da outra?
10. Preencher ... com um numeral que torne verdadeiras as seguintes sentenças:

    1.ª) $\ldots + 3 = 3 + \ldots$
    2.ª) $6 + \ldots = 6$
    3.ª) $\ldots + 8 > 9 + 2$
    4.ª) $3 + \ldots \neq 5$
    5.ª) $4 + \ldots < 4 + 4$
    6.ª) $\ldots + 0 = \ldots$
    7.ª) $3 + \ldots \neq 3 + \ldots$
    8.ª) $\ldots + \ldots = \ldots + \ldots$
    9.ª) $0 + \ldots \neq \ldots + 0$
    10.ª) $\ldots + 1 < 1 + \ldots$

Subtração de dois números inteiros

6. *Operação inversa da adição: subtração; resultado: diferença*

Se, por exemplo, você "juntar" três lápis ao conjunto de 5 lápis que possui, a operação feita foi a *adição* e o resultado de 8 lápis é a *soma* obtida.

Qual seria a operação inversa?

Aquela que aplicada ao resultado obtido (8 lápis) faz voltar à posição inicial (5 lápis) por "desfazer" o que fêz a operação *adição*, isto é, a operação de "tirar" 3 lápis. Tal operação (inversa da operação de "juntar", já conhecida como *adição*) é denominada subtração e o resultado obtido, diferença. Logo:

Subtração de dois números inteiros, dados numa certa ordem, é a operação que permite encontrar a diferença dêsses números.

Indicação: $\underbrace{8-3}_{\text{têrmos}} = 5$ (diferença)

O sinal $-$, que indica a operação subtração, é lido "menos". Pode-se chamar, também, o primeiro dos números de *minuendo*, o segundo de *subtraendo* e a diferença de *resto*.

Êrro comum: Confundir *subtração*, que é uma OPERAÇÃO, com *diferença*, que é o RESULTADO da operação.

A *técnica operatória* que permite encontrar a *diferença* de dois números inteiros, dados numa certa ordem, você já sabe: basta procurar o número inteiro que *somado* com o segundo dê para resultado o primeiro. Assim, por exemplo:

$$8-3=5 \text{ porque } 5+3=8$$

Será que é sempre possível encontrar a *diferença* de dois números inteiros *quaisquer?*

ATENÇÃO: A operação Subtração nem sempre é possível com dois números inteiros quaisquer!

É necessário que o primeiro número (minuendo) seja maior ou igual ao segundo (subtraendo) para que exista a diferença entre êles. Assim, por exemplo, *não existe* a diferença entre 5 e 8 (preste atenção que é nessa ordem!), isto é:

$$5 - 8 = ?$$

porque *não há* número inteiro que somado com 8 dê para resultado 5.

Se os dois números inteiros *são iguais*, então a diferença entre êles é *zero*, como é fácil de se concluir. Exemplo:

$$5 - 5 = 0 \text{ porque } 0 + 5 = 5$$

7. *Tábua da subtração*

Tôda operação cmoporta uma tábua operatória. Na tábua da *subtração* o sinal "?" indica que não existe a *diferença*, sendo os cálculos feitos na base decimal e o primeiro têrmo (minuendo) tomado na primeira coluna vertical.

−	0	1	2	3	4	5	6	7	.	.	.
0	0	?	?	?	?	?	?	?	?		
1	1	0	?	?	?	?	?	?	?		
2	2	1	0	?	?	?	?	?	?		
3	3	2	1	0	?	?	?	?	?		
4	4	3	2	1	0	?	?	?	?		
5	5	4	3	2	1	0	?	?	?		
6	6	5	4	3	2	1	0	?	?		
7	7	6	5	4	3	2	1	0	?		
8	8	7	6	5	4	3	2	1	?		
.											
.											
.											

O que você, agora, observa com relação à operação *subtração*?

1.º) *não possui* a propriedade do *fechamento*, pois a *diferença* entre dois números inteiros *quaisquer* nem sempre é um número inteiro (como no caso de $2 - 3 = ?$);

2.º) *não possui* a propriedade *comutativa*, pois a ordem dos têrmos agora interessa a operação. Exemplo:

$$5 - 3 = 2 \text{ e } 3 - 5 = ?$$

permitindo dizer: a subtração é uma operação *não-comutativa;*

3.º) *não possui elemento neutro*, pois enquanto: $5 - 0 = 5$ *não existe* resultado para: $0 - 5 = ?$

8. *Símbolo da equivalência:* $\Longleftrightarrow$ *(nôvo para você!); aplicações.*

A operação *subtração* é inversa da operação da *adição*. Você poderá observar melhor êste fato com as ilustrações "vertical" e "horizontal" que se seguem:

$$-\left\{\begin{array}{c} 8 \\ 3 \\ \hline 5 \end{array}\right\}+ \qquad\qquad 8 - 3 = 5 \Longleftrightarrow 5 + 3 = 8$$

onde $\Longleftrightarrow$ é o símbolo da importante *relação de equivalência* entre as igualdades escritas. De um modo geral, pode-se escrever:

minuendo − subtraendo = diferença $\Longleftrightarrow$ **diferença + subtraendo = minuendo**

A segunda igualdade permite "tirar" a *prova* da subtração, isto é, verificar se a operação está certa.

APLICAÇÕES

A *equivalência* estudada permite calcular qualquer dos têrmos de uma *subtração* (ou de uma *adição*) usando a *adição* (ou *subtração*) correspondente, isto é:

$$\square + \triangle = \star \Longleftrightarrow \begin{cases} \square = \star - \triangle \\ \triangle = \star - \square \end{cases}$$

Exemplos:

1. Calcular o valor de $\square$ na subtração: $\square - 5 = 12$, usando a adição correspondente. Temos:

$$\square - 5 = 12 \Longleftrightarrow \square = 12 + 5$$
$$\text{ou } \square = 17$$

2. Determinar o valor de y tal que: $5+y = 9$
   Temos:

$$5+y = 9 \Longleftrightarrow y = 9-5$$
$$\text{ou } y = 4$$

3. O *subtraendo* é 8 e a *diferença* 15. Calcular o *minuendo*.
   Temos:

$$\text{minuendo} - 8 = 15 \Longleftrightarrow \text{minuendo} = 15+8$$
$$\text{ou minuendo} = 23$$

4. Determinar o valor de x tal que: $x+a = b$
   Temos:

$$x+a = b \Longleftrightarrow x = b - a$$

NOTA IMPORTANTE: *Conjunto dos números inteiros como conjunto-universo.*

Você está estudando as operações de *adição* e de *subtração* no conjunto dos números inteiros:

$$I = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots\}$$

que passou a ser o nosso universo de trabalho. Pois bem, depois do que foi visto para aquelas operações, costuma-se dizer que:

1. **O conjunto dos números inteiros é Fechado em relação à operação Adição, porque a soma de dois números inteiros quaisquer é sempre um número inteiro e, portanto, pertence ao mesmo conjunto dos números dados.**
2. **O conjunto dos números inteiros é Não-fechado em relação à operação Subtração, porque a diferença entre dois números inteiros quaisquer nem sempre é um número inteiro e, portanto, nem sempre pertence ao conjunto dos números dados.**

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 10

1. Na igualdade: $8 - 5 = 3$

   1.º) Qual a *operação* efetuada?
   2.º) Qual o nome do *resultado*?
   3.º) Qual a *adição* correspondente?

2. Indicar a subtração que dá a *diferença* entre os números:

   1.º) 17 e 15
   2.º) 8 e 8
   3.º) a e b (supondo $b \geqslant a$)

   e as *adições* correspondentes.

3. Numa subtração, o subtraendo é 12, a diferença 14. Qual o minuendo?

4. Substituir os pontos por algarismos que mantenham o cálculo indicado verdadeiro:

1.º) $- \left\{ \begin{array}{r} 8\,817 \\ \underline{\;.\;.\;.\;.\;} \\ 2\,539 \end{array} \right.$ 2.º) $+ \left\{ \begin{array}{r} .\;.\;.\;. \\ \underline{3\,572} \\ 8\,105 \end{array} \right.$ 3.º) $- \left\{ \begin{array}{r} 1\;.25 \\ \underline{4\,.\,.} \\ 1\,158 \end{array} \right.$ 4.º) $+ \left\{ \begin{array}{r} 310 \\ 37\,. \\ 1\,.5 \\ \underline{.\;.86} \\ 4\,000 \end{array} \right.$

5. Determinar o valor de $\square$ tal que:

1.º) $\square + 4 = 7$ 2.º) $\square - 2 = 5$ 3.º) $m + \square = n$

6. Nas subtrações que se seguem, calcular o valor da letra que torna verdadeira as seguintes sentenças (igualdades):

1.º) $a - 226 = 154$ 2.º) $10\,001 - x = 839$ 3.º) $0 = y - 32$

7. Qual o número que somado com 1 836 resulta 18 001 003?

8. Completar:

1.º) $7 + 5 = 12 \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 12 - \ldots = 5 \\ 12 - \ldots = 7 \end{array} \right.$ 2.º) $42 + 18 = 60 \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 60 - \ldots = 18 \\ \ldots - 18 = 42 \end{array} \right.$

9. Idem:

1.º $12 + 0 = 12 \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \ldots - \ldots = 0 \\ \ldots - 0 = \ldots \end{array} \right.$ 2.º) $m + n = p \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} p - \ldots = m \\ p - \ldots = n \end{array} \right.$

10. (*a*) Existe algum caso particular em que a *ordem* dos têrmos de uma subtração pode ser trocada sem que a *diferença* se altere? Exemplifique.

(*b*) O conjunto dos números inteiros é FECHADO em relação à operação *adição?* Por quê?

(*c*) O conjunto dos números inteiros é FECHADO em relação à operação *subtração?* Por quê?

Adição de vários números inteiros. Propriedades

9. *Cálculo da soma*

Para o caso de três números o cálculo é feito efetuando-se a *adição* dos dois primeiros (operação conhecida) e a seguir a *adição* da soma obtida com o terceiro número. A operação é facilitada com o uso dos *sinais de reunião*:

( ), denominados parênteses
[ ], denominados colchêtes
{ }, denominados chaves

Exemplo: Calcular a *soma* dos números: 12, 28 e 7

Temos: $12+28+7 = (12+28)+7 = 40+7 = 47$

A *soma* dos três números quaisquer: a, b e c é representada por:

$$a+b+c = (a+b)+c$$

Para o cálculo da *soma* de *mais de três números* procede-se de forma análoga. Exemplo: Calcular a soma dos números 8, 5, 12 e 3:

$$[(8+5)+12]+3 = [13+12]+3 = 25+3 = 28$$

De um modo geral, vem:

$$a+b+c+d = [(a+b)+c]+d$$

Propriedades: Valem as propriedades já estudadas (como é natural!):

FECHAMENTO: $\underbrace{(5+3)}_{\text{n.° inteiro}} + \underset{\text{n.° inteiro}}{\underset{\downarrow}{2}} = 10 \longrightarrow \text{n.° inteiro}$

COMUTATIVA: $5+3+2 = 2+3+5 = 3+2+5 = \ldots$

ELEMENTO NEUTRO: 0; $5+3+0 = 5+3$

e mais a *importante* propriedade denominada:

ASSOCIATIVA: $(5+3)+2 = 5+(3+2)$

isto é: a *soma* pode ser obtida *associando* os dois primeiros números com o terceiro ou *associando* o primeiro com os dois últimos. De um modo geral:

$$(a+b)+c = a+(b+c)$$

Abreviatura: p. a. a. (lê-se: propriedade associativa da adição)

OBSERVAÇÕES:

1.ª) Na prática a propriedade *associativa* permite simplificar a adição de diversas parcelas, substituindo algumas pela soma efetuada. Vale, também a recíproca, isto é, uma parcela pode ser substituída por números tais, cuja soma seja igual a essa parcela. Exemplo:

$$35 + 7 = (33 + 2) + 7$$

Nesse caso diz-se que a adição é *dissociativa*.

2.ª) A *soma* varia no mesmo sentido que o das parcelas, isto é, se as parcelas *aumentam* de valor a soma também *aumenta* e se as parcelas *diminuem* de valor então a soma *diminui*. Exemplos:

$$7 + 5 + 4 > 6 + 5 + 4$$
$$1 + 8 + 6 < 2 + 8 + 8$$

10. *Aplicações. Prova da adição*

Seja, por exemplo, efetuar:

$$4+(a+3)$$

Temos:

$$\begin{aligned} 4+(a+3) &= 4+(3+a) \text{ pela p. c. a.} \\ &= (4+3)+a \text{ pela p. a. a.} \\ &= 7+a \end{aligned}$$

A prova da operação adição, de diversos números, baseia-se na aplicação da propriedade *comutativa* (p. c. a), por meio da qual refaz-se a operação depois de trocadas a ordem das parcelas (na prática, isto equivale a efetuar a operação de "baixo para cima"). Se a operação estiver certa deve-se encontrar os mesmos resultados. Exemplo:

$$\begin{array}{r} 1\,024 \\ 20\,132 \\ 89 \\ \hline 21\,245 \end{array}$$

Associação de Adições e Subtrações

11. *Propriedade fundamental da diferença de dois números*

Somando ou subtraindo um mesmo número aos têrmos de uma subtração a diferença não se altera.

De fato, se você tem 8 selos e eu 5, a diferença é 3 selos. Agora, se cada um de nós ganhar mais 4 selos, a *diferença* entre o que passamos a possuir *continua sendo de 3 selos!* Logo:

$$8 - 5 = (8+4) - (5+4)$$

O mesmo ocorreria se ambos déssemos 2 selos dos que possuíamos, isto é:

$$8 - 5 = (8 - 2) - (5 - 2)$$

De um modo geral:

$$\boxed{a - b = (a + c) - (b+c)}$$

$$\boxed{a - b = (a - c) - (b - c)}$$

12. *Subtração de uma soma indicada*

Para subtrair de um número uma soma indicada de diversos números é suficientes subtrair sucessivamente cada um dos têrmos da soma.

Com efeito, se você subtrair sucessivamente 8, 5 e 4 selos de sua coleção de 50 selos, obterá o *mesmo resultado* se subtraísse dos 50 selos a *soma* dos selos subtraídos sucessivamente. Logo:

$$50-(8+5+4) = 50-8-5-4$$

De um modo geral, temos:

$$\boxed{a-(b+c+d) = a-b-c-d}$$

OBSERVAÇÃO: Valeria a propriedade associativa para a subtração?

Respondamos com um exemplo:

$$(8-5)-3 = 8-(5-3)$$

Ora: $3-3 = 8-2$

ou $0 = 6$ (FALSO!)

Logo: $(8-5)-3 \neq 8-(5-3)$, isto é, não vale a propriedade associativa para a operação subtração, pois basta existir um *contra-exemplo* para não valer a propriedade.

Expressões numéricas - "Pontuação"

13. *Que é uma expressão numérica? "Pontuação" de uma expressão*

Em $4+3$ você tem uma *soma* indicada, cujo numeral mais simples é 7; em $4+3-2$ você tem uma *soma* indicada e uma *diferença* indicada, cujo numeral mais simples é 5. O mesmo se dá com:

$$12-7+3$$

pois, desde que se efetuem as operações na *ordem indicada* (primeiro: $12-7 = 5$ e depois $5+3 = 8$), pode ser substituída por um valor (8), que é o seu numeral mais simples. As indicações, como:

$$\left.\begin{array}{r} 4+3 \\ 4+3-2 \\ 12-7+3 \end{array}\right\} \text{são chamadas } \textit{expressões numéricas}$$

que podem ser sempre substituídas, quando se efetuam as operações na ordem em que estão indicadas, por um valor que é o seu numeral mais simples!

Para melhor precisar a *ordem*, na qual as operações indicadas numa *expressão* serão efetuadas, usamos os *sinais de reunião* (parênteses, colchêtes, chaves, ...) para "pontuar" a expressão.

Você aprendeu em Português a importância da "*pontuação*" numa sentença. Conforme a *posição* de uma *vírgula* na sentença, esta pode mudar de sentido completamente.

Veja, por exemplo, como a *vida* de um homem ficou dependendo da *posição* de *uma vírgula* na seguinte história de um reinado antigo: um homem fôra condenado por um tribunal e o resultado dêsse julgamento dependia da ordem final do Rei que podia ou não absolver o réu.

Observe, então, que conforme a *posição* da vírgula, na ordem escrita pelo Rei, o homem poderá ser ou não absolvido!

(1) *O tribunal condenou; eu*, *não absolvo*!

(2) *O tribunal condenou; eu não*, *absolvo*!

Na (1) o Rei concorda com o tribunal e na (2), não.

Da mesma forma a "pontuação" de uma expressão numérica é decisiva para o resultado que se procura. Seja, por exemplo, as questões:

1.ª) "Pontuar" convenientemente, com parênteses, a fim de tornar verdadeira a sentença:

$$8 - 5 + 3 = 0$$

Ora, se os parênteses forem colocados de modo a envolverem $8 - 5$, obtemos:

$$\underbrace{(8-5)}_{3}+3 = 6, \text{ portanto, } \textit{diferente de } 0.$$

Porém, colocados os parênteses envolvendo $5+3$, obtemos:

$$8 - \underbrace{(5+3)}_{8} = 0$$

e a sentença proposta tornou-se verdadeira como desejávamos.

2.ª) "Pontuar", usando parênteses, a expressão: $10 - 6 - 3$, de modo que o seu *valor* seja igual a 6.

Só poderá ser envolvendo $6 - 3$, pois, $10 - \underbrace{(6-3)}_{\cancel{4}\ 3} = \cancel{6}\ 7$ e, de outro modo seria:

$$(10-6) - 3 = 1, \text{ cujo } \textit{valor} \text{ não é o procurado.}$$

Se além de conter operações indicadas entre parênteses, a expressão numérica possui indicações entre colchêtes, chaves, ... o seu valor (que é o *numeral mais simples* que a representa!) pode ser calculado efetuando-se, primeiramente, as operações indicadas entre parênteses, em seguida as que estão entre colchêtes e depois as que estão entre chaves. Exemplos:

Calcular o *valor* das seguintes *expressões numéricas:*

1.º) $35 - 4 + (5 - 3)$

Temos: $35 - [4 + \underbrace{(5 - 3)}_{2}] = 35 - \underbrace{[4 + 2]}_{6} = 35 - 6 = 29$

2.º) $25 - \{26 - [8 - (2+5)]\}$

Temos: $25 - \{26 - [8 - \underbrace{(2+5)}_{7}]\} = 25 - \{26 - \underbrace{[8 - 7]}_{1}\} = 25 - \underbrace{\{26 - 1\}}_{25} =$

$= 25 - 25 = 0$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — Grupo 11

1. Qual a propriedade que está sendo aplicada em:
   1.º) $(8 + 5) + 2 = 8 + (5 + 2)$?
   2.º) $8 + 5 + 2 = 5 + 8 + 2 = 2 + 5 + 8$?
   3.º) $7 + 8 + 0 = 7 + 8$?
   4.º) $(x + y) + z = x + (y + z)$?

2. Usando propriedades conhecidas, efetuar:
   1.º) $(x + 3) + 8$
   2.º) $5 + (a + 4)$
   3.º) $7 + (8 + b)$

3. É verdadeira ou falsa a igualdade (ou sentença): $(7 - 4) - 2 = 7 - (4 - 2)$? Por quê?

4. Escrever *V* ou *F*, conforme a sentença seja verdadeira ou falsa:
   1.ª) $5 - 3 = 3 - 5$
   2.ª) $5 - 3 = (5+2) - (3+2)$
   3.ª) $30 - 6 - 4 = 30 - (6 + 4)$

5. Qual é a diferença entre dois números *consecutivos?*

6. Numa adição de três parcelas soma-se 5 a cada uma delas. Qual é a alteração que sofre a *soma?*

7. Numa adição de três parcelas subtrai-se 8 de duas delas e soma-se 7 a outra. Que alteração sofre o *resultado* dessa adição?

8. Que alteração sofre a *diferença* entre dois números quando se soma 5 a cada um dêles?

9. Somando-se 15 ao minuendo de uma subtração que alteração sofre a *diferença?*

10. "Pontuar", usando parênteses, a expressão: $12 - 2 + 3$, de modo a obter *dois* resultados diferentes.

11. Usando parênteses tornar verdadeira as seguintes sentenças:
    1.ª) $5 - 3 + 2 = 4$
    2.ª) $5 - 3 + 2 = 0$
    3.ª) $15 - 8 - 2 = 5$
    4.ª) $15 - 8 - 2 = 9$

12. Calcular o *valor* das seguintes expressões numéricas ou seja: o numeral mais simples que representa cada uma delas:
    1.ª) $(12 + 3) - (4 + 8)$
    2.ª) $14 + \{8 - [(48 - 3) - (38 + 1 + 5)]\} - 1$
    3.ª) $\{213 - [(14 + 7) - (11 - 3)] - [(8+5) - [6 - (10 - 9)]]$

PROBLEMAS DE APLICAÇÃO

Todos vocês conhecem as inúmeras aplicações que as operações estudadas, adição e subtração, têm na resolução dos *primeiros problemas* da vida prática. "Juntar" e "tirar" consituem as "operações" mais usuais de nossas atividades e, portanto, são elas que fornecem o "material" para as primeiras estruturas operatórias do nosso raciocínio.

Essa é a razão porque se deve, sempre que houver oportunidade, empregar as *propriedades das operações* na resolução dos problemas. Exemplos:

1.º) *Depois de colar mais 30 figurinhas em meu álbum verifiquei que já tinha um total de 128 figurinhas coladas. Quantas figurinhas havia no álbum antes dessa "operação"?*

Vamos representar por $\square$ (ou qualquer outro *numeral*) o número de figurinhas que estamos procurando, isto é, aquelas que já deviam estar coladas no álbum.

Como "somando" 30 a $\square$ resulta 128, a sentença matemática que traduz êsse fato é a seguinte:

$$\square + 30 = 128$$

O *valor* de $\square$ será determinado, a partir dessa sentença, aplicando as propriedades já estudadas. Assim, procurando a *operação inversa* de "somar 30", que é "subtrair 30", obtemos:

$$\square = 128 - 30$$

ou $$\square = 98$$

Respostas: O álbum possuía 98 figurinhas coladas.

2.º) *Tinha algumas bolinhas no bôlso, não sei quantas. A seguir coloquei nesse bôlso 5 bolinhas que ganhei do Cid e tive que tirar 7, que perdi para o Mário. Então contei um total de 8 bolinhas no bôlso.*

Quantas eu tinha no início?

Representemos por $\square$, o número de bolinhas que eu tinha no bôlso no início.

Como "somando" 5 a $\square$ e "subtraindo" 7 do resultado obtenho 8, segue-se que a sentença matemática que traduz êsses fatos é:

$$(\square + 5) - 7 = 8$$

O valor de $\square$ será determinado procurando, primeiramente, a *operação inversa* de "subtrair 7", que é "somar 7", ou seja,

$$(\square+5) = 8+7$$

ou

$$\square+5 = 15$$

e a seguir procurando a *operação inversa* de "somar 5", que é "subtrair 5, isto é:

$$\square = 15-5$$

ou

$$\square = 10$$

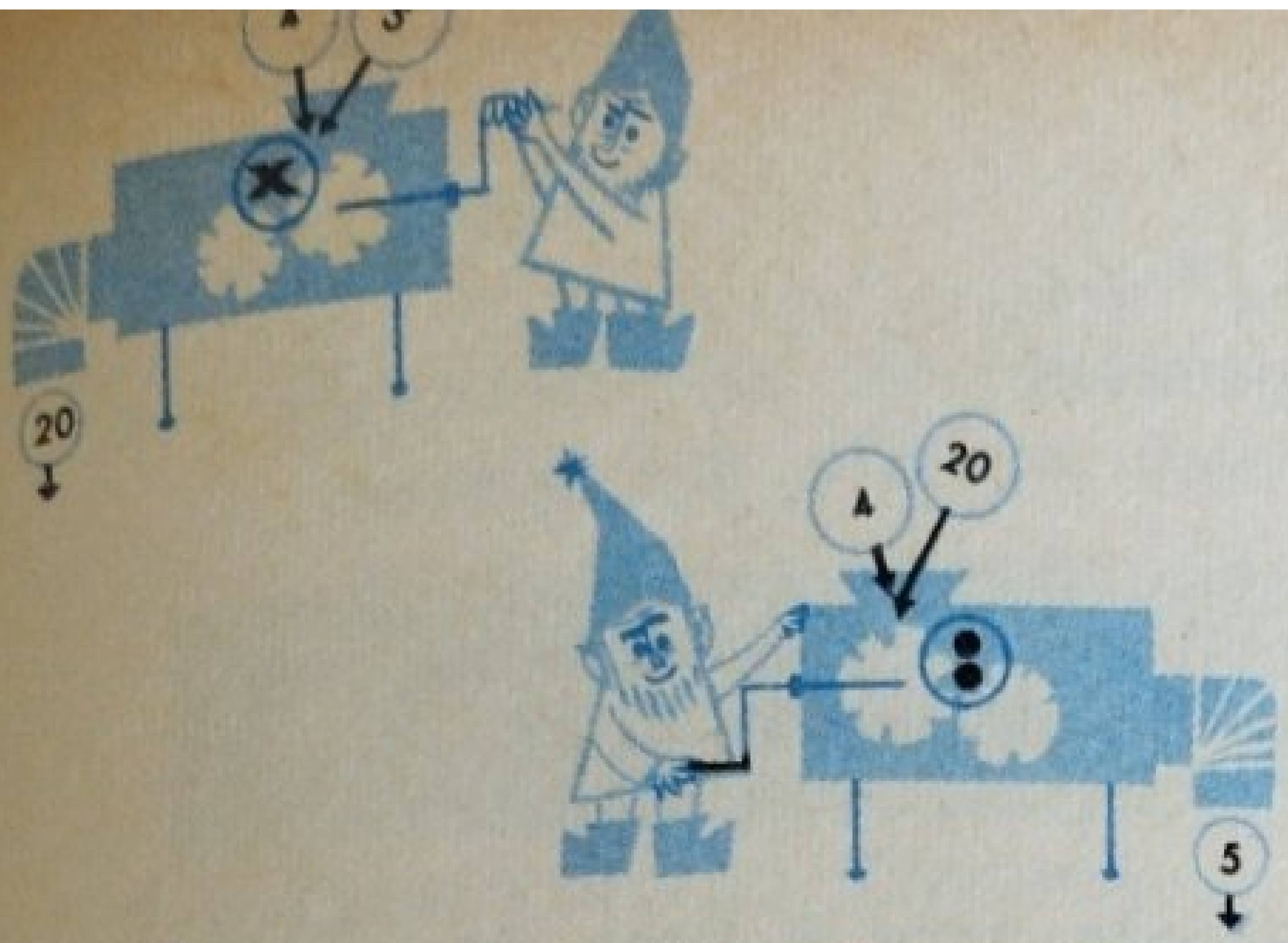
Resposta: Tinha 10 bolinhas no bôlso.

PROBLEMAS PARA SEREM RESOLVIDOS — GRUPO 12

1. Ganhei Cr$ 200,00 do papai e, com que eu já tinha, fiquei com Cr$ 318,00. Quanto possuía?
2. Num jôgo de bolinhas, perdi 2 na primeira partida, ganhei 8 na segunda e ainda saí com 10 bolinhas. Quantas eu possuía?
3. Se Elsa der à Lucília oito lápis de côr, ambas ficarão com duas dúzias de lápis de côr. Quantos lápis possuía cada uma?
4. Se Pedro der a Rubens Cr$ 100,00 ambos ficarão com a mesma quantia. Se Rubens der a Pedro Cr$ 100,00 acaba ficando sem nada. Quanto possuía cada um?
5. Francisco e Joel possuem, cada um dêles, um rádio de pilhas, sendo que o de Francisco possui 6 transístores. O meu rádio possui 2 transístores a mais que o de Joel e sei que o total de transístores dos nossos três rádios é 22. Quantos transístores tem o rádio de Joel?
6. Numa parada cívica desfilam os alunos de um Colégio distribuídos em três pelotões. O primeiro dêles é formado por 68 alunos; o segundo pelotão por dois alunos a mais que o primeiro e o tercerio é constituído de tantos alunos quantos os dois primeiros menos 48 alunos. Quantos alunos do Colégio estão desfilando?
7. Um pai tem 41 anos. Seus três filhos. Vera Maria, Osvaldo e Sílvia, têm respectivamente: 17, 15 e 13 anos. Qual era a idade do pai ao nascer cada um de seus filhos?
8. Isto acontece êste ano em minha casa: o meu irmão sendo mais velho do que eu 2 anos e minha irmã mais môça que eu, também 2 anos faz com que a soma das nossas três idades seja 22 anos. Qual é a minha idade?
9. No último concurso da T. V. Escolar, distribuíram-se Cr$ 20 000,00 em prêmios aos três primeiros classificados. O primeiro recebeu a Cr$ 10 000,00 e o segundo Cr$ 4 000,00 a menos que o primeiro. Quanto recebeu o terceiro classificado?
10. Acêrca dos vôos dos astronautas Gagarin e Glenn, sabe-se que:
    1.º) a cabine espacial de Gagarin pesou 3 225kg a mais do que a de Glenn;
    2.º) a altura máxima atingida por Glenn foi 45 km a menos da de Gagarin;
    3.º) o tempo de vôo de Glenn foi 186 minutos a mais do de Gagarin.

Pergunta-se:

1. qual o pêso da cabine de Glenn se a de Gagarin pesava 4 725 kg?
2. qual a altura máxima atingida por Gagarin se a de Glenn foi de 256 km?
3. qual o tempo de vôo de Gagarin se o de Glenn foi de 294 minutos?



multiplicação e divisão

Multiplicação de dois números inteiros

14. *Operação: Multiplicação; resultado: Produto*

Se em nossa classe de estudos há 5 fileiras, de 4 mesinhas cada uma (fig. 28), quantas mesinhas temos no *total*?

Ora, o *conjunto* de tôdas as mesinhas é a *reunião* dos conjuntos parciais formados pelas 5 fileiras e, portanto, o número total de mesinhas é a *soma* dos números de mesinhas de cada fileira, isto é:

$$4+4+4+4+4 = 20$$

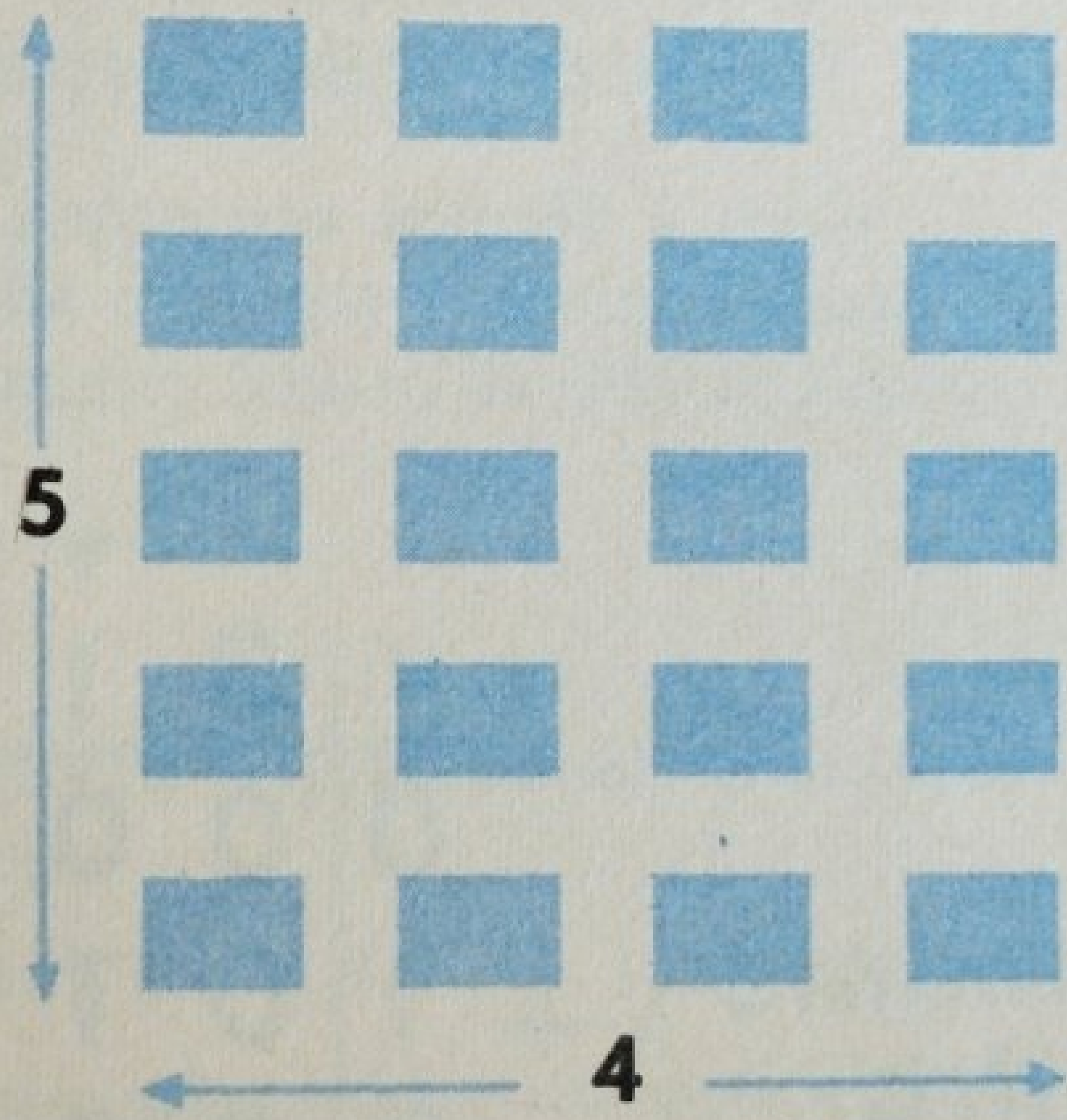


FIG. 28

Ésta soma, que apresenta como particularidade *tôdas as parcelas iguais* é denominada PRODUTO.

Dizemos então que o resultado 20 é o *produto* de 5 por 4 e a *operação* que permite determinar o produto de dois números é denominada MULTIPLICAÇÃO, comumente indicada pelos símbolos: $\times$ ou . que se lê "multiplicado por" ou "vêzes" e se coloca entre os dois números. Logo:

$$4+4+4+4+4 = 5\times 4$$
(cinco vêzes o quatro)

A parcela repetida (4) e o número de parcelas (5) são os *têrmos* ou *fatôres* da multiplicação, também denominados *multiplicando* e *multiplicador*, respectivamente. Outros exemplos:

$$3\times 5 = 5+5+5$$
$$2\times 2 = 2+2$$
$$4\times 0 = 0+0+0+0$$
$$6\times 1 = 1+1+1+1+1+1$$

De um modo geral, temos:

$$b \times a = a + a + a + a + \ldots$$
$$(b \text{ parcelas})$$

onde:

Multiplicação de dois números inteiros é a operação que permite encontrar o produto dêsses números.

Erro comum: Confundir *multiplicação*, que é uma OPERAÇÃO, com PRODUTO, que é um *número* resultado da operação.

OBSERVAÇÃO: Pode-se dispensar o uso dos sinais $\times$ e $\bullet$ quando não trouxer confusão. Exemplos: $3 \times a = 3a$; $a \times b = ab$.

É evidente que não se pode suprimir o sinal $\times$ entre dois números escritos com seus algarismos. Assim, por exemplo:

4 × 3 não pode ser escrito 43

15. *Tábua da multiplicação* (base 10):

Com a técnica operatória da multiplicação já conhecida (a clássica tabuada!) temos a seguinte *tábua*:

elemento neutro

×	0	1	2	3	4	5	6	7	•	•	•
0	0	0	0	0	0	0	0	0	•	•	•
1	0	1	2	3	4	5	6	7	•	•	•
2	0	2	4	6	8	10	12	14	•	•	•
3	0	3	6	9	12	15	18	21	•	•	•
4	0	4	8	12	16	20	24	28	•	•	•
5	0	5	10	15	20	25	30	35	•	•	•
6	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
7	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•

16. *Propriedades*

1.ª) FECHAMENTO: *O produto de dois números inteiros quaisquer é sempre um número inteiro.*

Fácil constatar pela tábua. Ex.: $5 \times 4 = 20$

inteiro inteiro inteiro

2.ª) COMUTATIVA: *Trocando-se a ordem de dois têrmos quaisquer o produto é o mesmo.* Ex.:

$$5 \times 4 = 4 \times 5$$

que permite dizer: "*a ordem dos fatôres não altera o produto*".

Abreviatura: p. c. m. (lê-se propriedade comutativa da multiplicação)

3.ª) ELEMENTO NEUTRO: 1 (um), isto é, o 1 é o *único* número inteiro que é neutro (ou indiferente) na multiplicação, pois, multiplicando-o por qualquer número inteiro o resultado é o *próprio número inteiro*. Exemplo:

$$5 \times 1 = 5 \text{ e } 1 \times 5 = 5$$

Abreviatura: e. n. m. (lê-se: elemento neutro da multiplicação)

17. *Múltiplos de um número inteiro*

Chama-se múltiplo de um número inteiro o *produto* dêsse número por um número inteiro qualquer. Exemplo:

3×4 é um múltiplo de 3 (e de 4)

Todos os *múltiplos* de um número inteiro são obtidos multiplicando-o pelos números que constituem o conjunto dos números inteiros. Exemplos:

múltiplos de 2: $2 \times 0 = 0$; $2 \times 1 = 2$; $2 \times 2 = 4$; .....; $2 \times n = 2n$; ....
múltiplos de 3: $3 \times 0 = 0$; $3 \times 1 = 3$; $3 \times 2 = 6$; .....; $3 \times n = 3n$; ....
múltiplos de 4: $4 \times 0 = 0$; $4 \times 1 = 4$; $4 \times 2 = 8$; .....; $4 \times n = 4n$; ....
....

Como o conjunto dos números inteiros é *infinito* dizemos que todos números inteiros têm uma *infinidade de múltiplos.*

OBSERVAÇÕES:

1.ª) Os múltiplos de 2: {0, 2, 4, 6, 8, 10, ... $2n$, ...} constituem o conjunto dos números pares; a terminação dêsses números é: 0, 2, 4, 6 e 8.

2.ª) Os números que não são múltiplos de 2, terminam necessàriamente em: 1, 3, 5, 7 e 9, e constituem o conjunto dos números ímpares: {1, 3, 5, 7, 9, 11, ... $2n+1$, ...}

3.ª) O *zero* é múltiplo de qualquer número natural.

De fato, 0 é múltiplo de 2, pois: $0 = 0 \times 2$
0 é múltiplo de 3, pois: $0 = 0 \times 3$, etc. . .

4.ª) Um número qualquer é sempre múltiplo de 1 e de si mesmo.

Realmente: 2 é múltiplo de 2, pois: $2 = 2 \times 1$
2 é múltiplo de 1, pois: $2 = 1 \times 2$, etc . . .

5.ª) Os produtos (múltiplos) de um número por 2, 3, 4, . . . , chamam-se, respectivamente: dôbro, triplo, quádruplo, . . . também chamados, na gramática portuguêsa, de *numerais multiplicativos*.

6.ª) Os múltiplos de 10, 100, 1 000, ... terminam por um, dois, três, . . ., zeros, respectivamente. Com efeito é fácil ver que:

$5 \times 10 = 50$ (múlt. de 10)
$4 \times 100 = 400$ (múlt. de 100), etc . . .

18. *"Pontuação" de expressões numéricas que envolvem adições, subtrações e multiplicações*

Seja, por exemplo, a expressão:

$$5+3\times4$$

que envolve uma *adição* e uma *multiplicação*. Tal expressão pode ser "pontuada" através de parênteses, das seguintes maneiras:

$$5+(3\times4) \text{ e } (5+3)\times4$$

cujos *resultados*, são respectivamente:

$$5+12 = 17 \text{ e } 8\times4 = 32$$

Preste atenção agora no seguinte "*acôrdo*" que vamos fazer, caso a expressão se apresente sem os parênteses:

1. efetuamos *primeiramente* as *multiplicações* (consideradas operações mais "fortes"!);
2. a seguir, efetuamos as *adições* e as *subtrações*, na ordem em que figuram. Exemplo: Calcular o *valor* da expressão: $4+3\times7$. Lembre-se que é o mesmo que procurar o *numeral mais simples* da expressão. Como não figuram parênteses, efetuamos *primeiramente* a multiplicação e a seguir a *adição*, isto é:

$$4+3\times7 = 4+21 = 25$$

Uma boa questão acêrca de expressões é a seguinte:

Usando parênteses, convenientemente, tornar verdadeira as seguintes sentenças:

1.ª) $3+4\times2-1 = 10$ Temos: $3+(4\times2)-1 = 10$
2.ª) $3+4\times2-1 = 13$ " $(3+4)\times2-1 = 13$
3.ª) $3+4\times2-1 = 7$ " $(3+4)\times(2-1) = 7$

Se além de parênteses, a expressão numérica contiver colchêtes e chaves, obedece-se a mesma *ordem* já estudada em outras expressões. Exemplo:

Calcular o valor da expressão: $54 - \{3 \times [12 + 3 \times (5 - 1) - 3 \times 2]\}$

Temos: $54 - \{3 \times [12 + 3 \times 4 - 6]\} = 54 - \{3 \times [12 + 12 - 6]\} = 54 - \{3 \times 18\} = 54 - 54 = 0$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 13

1. Na igualdade: $4 \times 3 = 12$
   1.º) Qual a *operação* efetuada?
   2.º) Qual o nome do *resultado?*

2. Qual é a outra maneira de escrever as seguintes adições:
   1.ª) $7+7+7+7$ — 4.ª) $\square+\square+\square+\square+\square$
   2.ª) $0+0+0$ — 5.ª) $\triangle+\triangle$
   3.ª) $a+a+a+a+a$ — 6.ª) $\underbrace{x+x+x+\ldots+x}_{y \text{ parcelas}}$

3. Escrever de dois modos diferentes à multiplicação dos números 12 e 5.

4. Escrever tôdas as multiplicações de dois números inteiros cujo produto é 12.

5. Qual a propriedade que está sendo aplicada nas seguintes sentenças (igualdades):
   1.ª) $4 \times 9 = 9 \times 4$? — 3.ª) $1 \times 8 = 8$?
   2.ª) $8 \times 1 = 8$? — 4.ª) $ab = ba$?

6. Completar as seguintes igualdades (sentenças), de modo a torná-las verdadeiras:
   1.ª) $5 \times \ldots = 0$ — 2.ª) $\ldots \times 1 = 5$ — 3.ª) $1 \times \ldots = 5$

7. Escrever todos os *múltiplos* de 5 compreendidos entre 32 e 71.

8. A soma do *dôbro* de um número com o próprio número representa o ...... dêsse número. Completar essa sentença tornando-a verdadeira.

9. Idem com a sentença: "Se um número é o *quádruplo* de outro a diferença entre êles representa o .... do menor.

10. Se a forma geral de um número par é $2n$ e, sabendo-se que um número ímpar é o *sucessivo* de um número par, qual é a forma geral dos números ímpares?

11. Calcular o valor das seguintes expressões numéricas:
    1.ª) $5 + 4 \times 3$ — 2.ª) $(5+4) \times 3$ — 3.ª) $5 \times 4 + 3$ — 4.ª) $5 \times (4 + 3)$

12. Usando os *parênteses* tornar verdadeiras as seguintes sentenças:
    1.ª) $5 + 3 \times 4 - 2 = 15$
    2.ª) $5 + 3 \times 4 - 2 = 30$
    3.ª) $5 + 3 \times 4 - 2 = 16$

13. "Pontue", usando sinais de reunião, a expressão: $3 + 7 \times 2 - 1$, a fim de obter três resultados diferentes.

14. Idem com a expressão: $7 - 3 \times 2 + 8 - 1$, a fim de obter quatro resultados diferentes.

15. Calcular o *valor* das seguintes expressões numéricas (ou procurar o numeral *mais simples* dessas expressões):
    1.ª) $(25 - 3 \times 7) \times [14 + 3 \times (12 - 3 \times 3) - 4 \times 2] - 4 \times (5 + 1 \times 4)$
    2.ª) $30 - 3 \times \{11 + [8 - (2 + 1 \times 3)] - 4\}$

Divisão de dois números inteiros

19. *Operação inversa da multiplicação: Divisão; resultado: Quociente*

Se, por exemplo, quisermos dispor as 20 mesinhas (fig. 29), de nossa classe de estudo, em *fileira*, de modo que cada fileira tenha 4 mesinhas, *quantas fileiras são necessárias?*

Você está percebendo que agora precisamos de uma operação inversa da multiplicação, pois *conhecemos*: o *produto* (20) de dois números, um dêles (4) e queremos determinar o *outro*. Trata-se, portanto, de "*desfazer*" o que a operação direta (multiplicação) fêz *determinando o número* ($\square = ?$) *que multiplicado por 4 dê 20 para resultado*, isto é:

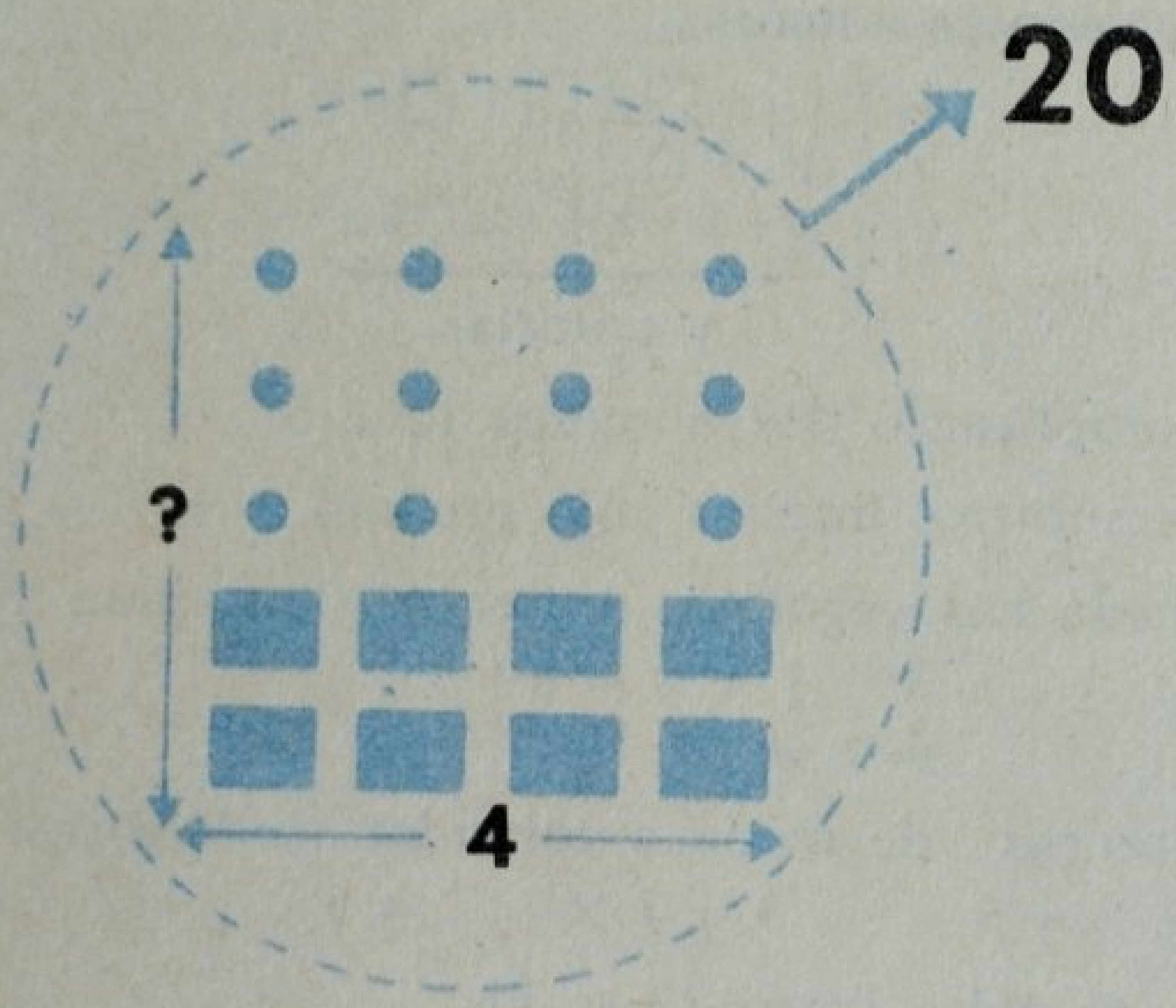


Fig. 29

$$\square \times 4 = 20$$

Pela tábua de multiplicação é fácil ver, fazendo caminho "inverso", que $\square$ é 5. Êsse resultado (5) é denominado QUOCIENTE de 20 por 4 e indicamos:

$$20 : 4 = 5$$

O sinal : , que indica a operação *divisão*, é lido "dividido por". O 20 e o 4 são os *têrmos* da divisão e são também denominados, respectivamente, DIVIDENDO e DIVISOR. Logo:

Divisão de dois números inteiros, dados numa certa ordem, é a operação que permite encontrar o Quociente dêsses números.

Erro comum: Confundir *divisão*, que é uma OPERAÇÃO, com *qüociente*, que é O RESULTADO da operação.

Usando o conhecido símbolo $\Longleftrightarrow$ de *eqüivalência*, temos:

$$20 : 5 = 4 \Longleftrightarrow 4 \times 5 = 20$$

que permite passar de uma igualdade a outra, mediante o emprêgo da operação *multiplicação* ($\times$) e de sua inversa, a *divisão* (:). Exemplos:

$$2 \times 4 = 8 \Longleftrightarrow 8 : 4 = 2$$
$$15 : 3 = 5 \Longleftrightarrow 5 \times 3 = 15$$

De um modo geral, se existir o qüociente q entre dois números inteiros a e b, temos:

$$a : b = q \Longleftrightarrow q \times b = a$$

ou

$$\boxed{\text{dividendo : divisor = quociente}} \Longleftrightarrow \boxed{\text{quociente} \times \text{divisor = dividendo}}$$

relação que permite "tirar" a *prova* da operação divisão.

> ATENÇÃO: A operação divisão nem sempre é possível com dois números inteiros quaisquer!

Como na subtração, *nem sempre* é possível determinar o qüociente de dois números inteiros *quaisquer* usando o *conjunto-universo dos números inteiros*. É necessário que o primeiro dêles (dividendo) seja múltiplo do segundo (divisor) para que exista o *quociente*. Exemplo:

$$20 : 3 = ?$$

Não existe o quociente entre 20 e 3, porque *não há* número inteiro que multiplicado por 3 dê como resultado 20!

OBSERVAÇÃO IMPORTANTÍSSIMA: Não é possível, em nenhum caso, dividir-se um número por zero!

Que seria, por exemplo, 7 : 0 ??? Se você "forçar" a equivalência, teria:

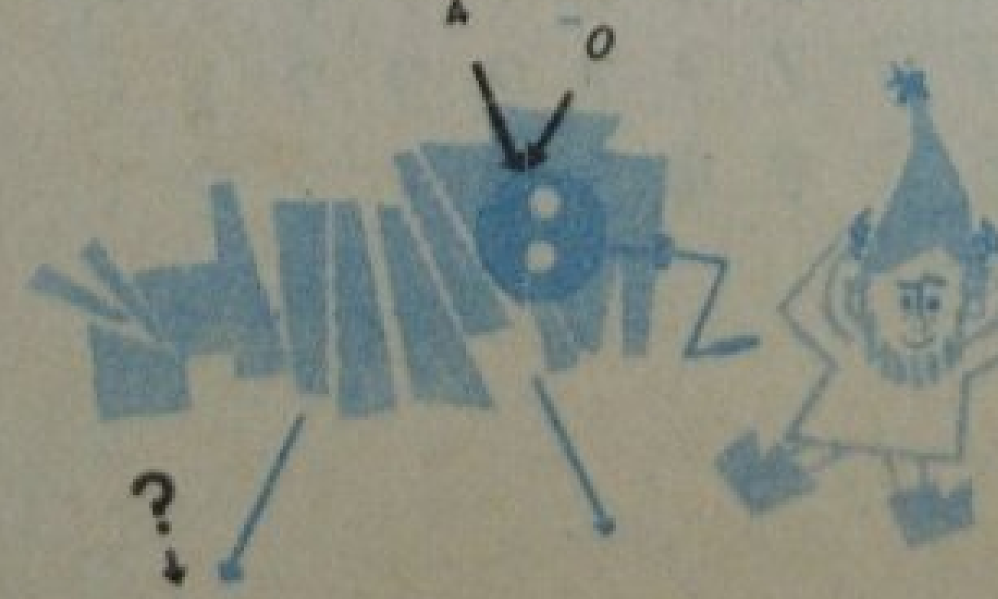
$$7 : 0 = ? \Longleftrightarrow ? \times 0 = 7,$$ que é FALSA!

pois, qualquer número multiplicado por zero resulta *zero* e não 7. Em outras palavras: "dividir por zero" *não é uma operação* e "multiplicar por zero" *não tem operação inversa*!

Aliás quem já teve curiosidade de "tentar dividir um número por zero", usando uma máquina de calcular (manual ou elétrica), deve ter notado como a máquina *emperra*, como se estivesse "protestando" contra tal fato! Porisso, cuidado com os "estalos" e "choques" se tentar essa "*espécie*" de divisão.

Você pode acrescentar então que:

ZERO, *como divisor, é o elemento* IMPOSSÍVEL!



Casos particulares comuns:

1.º) Se o *dividendo é zero* (e o divisor diferente de zero, como é natural) então *o quociente é zero*. De fato:

$$0 : 5 = 0 \text{ porque } 0 \times 5 = 0$$

2.º) *Se o dividendo e o divisor são iguais entre si então o quociente é* 1. Com efeito: $8 : 8 = 1$ porque $1 \times 8 = 8$

3.º) *Se o divisor é igual a* 1 *então o quociente é igual ao dividendo.* Ex.:

$$9 : 1 = 9 \text{ porque } 0 \times 1 = 9$$

> CUIDADO: O Símbolo 0 : 0 *não representa número!*

É só pensar que se o produto de dois números é 0, e um dêles é 0, você não poderá determinar o valor do outro, isto é:

$$0 \times ? = 0$$

pois, *qualquer* número tornaria *verdadeira* essa sentença.

20. *Tábua da divisão*

Também aqui o sinal "?" indica que não existe o quociente.

elemento impossível

:	0	1	2	3	4	5	6	7	·	·
0	?	0	0	0	0	0	0	0	·	·
1	?	1	?	?	?	?	?	?	·	·
2	?	2	1	?	?	?	?	?	·	·
3	?	3	?	1	?	?	?	?	·	·
4	?	4	2	?	1	?	?	?	·	·
5	?	5	?	?	?	1	?	?	·	·
6	?	6	3	2	?	?	1	?	·	·
7	?	7	?	?	?	?	?	1	·	·
8	?	8	4	?	2	?	?	?	1	·
·	·									
·	·									
·	·									

Que você observa agora com relação à operação *divisão*?

1.º) *não possui* a propriedade do *fechamento;* por quê? responda você mesmo.

2.º) *não possui* a propriedade *comutativa;* por quê? responda você mesmo.

3.º) *não possui elemento neutro*; por quê? responda você mesmo.

21. *Aplicações usando equivalência (novas para você!)*

Lembrando a *equivalência* que relaciona a *multiplicação* com a sua operação *inversa*, a *divisão*, como no exemplo:

$$4 \times 5 = 20 \begin{cases} 4 = 20 : 5 \\ 5 = 20 : 4 \end{cases} \text{ e, portanto } \square \times \triangle = \star \Longleftrightarrow \begin{cases} \square = \star : \triangle \\ \triangle = \star : \square \end{cases}$$

podemos fazer as seguintes *aplicações*, bem importantes pelo uso que terão:

1.ª) Calcular o valor de $\square$ na divisão: $\square : 3 = 12$

Temos: $\square : 3 = 12 \Longleftrightarrow \square = 12 \times 3$

ou $\square = 36$

2.ª) Determinar o valor de y tal que: $5 \times y = 30$

Temos: $5 \times y = 30 \Longleftrightarrow y = 30 : 5$

ou $y = 6$

3.ª) O dividendo é 8 e o quociente 4. Calcular o divisor.

Chamando o divisor de d, vem:

$8 : d = 4 \Longleftrightarrow 4 \times d = 8 \Longleftrightarrow d = 8 : 4$ ou $d = 2$

4.ª) Determinar o valor de x tal que: $x \times a = b$

Temos: $x \times a = b \Longleftrightarrow x = b : a$

NOTA IMPORTANTE: Também agora, diz-se que o conjunto-universo com o qual trabalhamos, isto é, o *conjunto dos números inteiros:*

$$I = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots\}$$

é:

1. FECHADO em relação à operação MULTIPLICAÇÃO, porque o *produto* de dois *números inteiros quaisquer* é sempre um *número inteiro.*
2. NÃO-FECHADO em relação à operação DIVISÃO, porque o *quociente* entre dois *números inteiros quaisquer* nem sempre é um *número inteiro.*

LEMBRETE AMIGO

Você nunca supôs que o 0 (zero) fôsse tão "saliente" em Matemática, não é? Sempre pensou no 0 sòmente agindo "à esquerda" ou "à direita" do numeral de um número. Pois bem, *de agora em diante*, lembre-se que:

0 é o elemento neutro na *adição* ($5+0 = 0+5 = 5$, ou seja, êle aqui é "bonzinho" por ser "indiferente" a operação);

0 é o elemento "terrível" na *multiplicação* ($5 \times 0 = 0$, aqui êle *anula* "tudo")

0 é o elemento "impossível", como divisor, na *divisão* ($5 : 0$, NÃO!. . .)

EXERCICIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 14

1. Na igualdade: $24 : 3 = 8$
   1.º) Qual a *operação* efetuada?
   2.º) Qual o nome do *resultado?*
   3.º) Qual a *multiplicação* correspondente?

2. Escrever a *divisão* que dá o *quociente* dos seguintes números e as *multiplicações* correspondentes:
   1.º) 42 e 6; 2.º) 9 e 9; 3.º) 0 e 5; 4.º) a e b ($b \neq 0$, a mult. de b)

3. Da igualdade: $12 = 4 \times 3$, deduzir duas *divisões* (use as equivalências!).

4. Tornar verdadeiras as seguintes sentenças:
   1.ª) $36 : 36 = \ldots$ 3.ª) $0 : 18 = \ldots$
   2.ª) $12 : \ldots = 12$ 4.ª) $\ldots : 1 = 10$

5. Assinalar quais das seguintes operações são *impossíveis* (no conj. dos números inteiros):
   1.ª) $8 : 8$ 3.ª) $0 : 9$ 5.ª) $5 : 3$ 7.ª) 0×0
   2.ª) $3 - 5$ 4.ª) $9 : 0$ 6.ª) $3 : 5$ 8.ª) $0 : 0$

6. Completar as seguintes igualdades, tornando-as verdadeiras:
   1.ª) $16 \times \ldots = 256$ 2.ª) $\ldots \times 20\,000 = 40\,000$

7. Idem com as *equivalências:*
   1.ª) $\square \times 4 = 20 \iff \square = 20 : \ldots$ 2.ª) $\square : 15 = 4 \iff \square = 15 \times \ldots$
   3.ª) $42 : a = 2 \iff 42 = \ldots \times 2 \iff a = 42 : \ldots$ ou $a = \ldots$

8. Idem: $m \times n = p \iff \begin{cases} p : \ldots = n \\ p : n = \ldots \end{cases}$

9. Existe algum caso particular que permite trocar a *ordem* dos *têrmos* de uma divisão sem que o *quociente* se altere?

10. O conjunto dos números inteiros (que tem sido o *conjunto-universo* das operações estudadas) é FECHADO em relação a que operações?

11. Supondo como *conjunto-universo* o conjunto dos *números pares:*

$$\{0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ \ldots\}$$

responder e justificar: o conjunto dos números pares é FECHADO em relação a que operações (adição, subtração, multiplicação, divisão)?

Sugestão: a *soma* de dois números *pares* é sempre um número *par.* (experimente)!

12. Idem, supondo agora o *conjunto-universo* como o conjunto dos números *ímpares:*

$$\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, \ldots\}$$

(Lembre-se que a *soma* de dois números *ímpares* é um número *par*, ... experimente!)

EXERCÍCIOS — RECORDAÇÃO — GRUPO 15

Tornar verdadeiras as seguintes sentenças:

1.ª) $\ldots + 6 = 8 + 4$	6.ª) $8 - 2 > \ldots : 1$
2.ª) $3 \times \ldots \neq 12 + 3$	7.ª) $\ldots : 12 = 1$
3.ª) $8 : \ldots = 1 + 3$	8.ª) $\ldots : 12 = 0$
4.ª) $15 > 4 \times \ldots$	9.ª) $\ldots : 12 \neq 0$
5.ª) $12 : 4 < 3 + \ldots$	10.ª) $\ldots + 4 = 0$

Multiplicação de vários números inteiros. Propriedades

22. *Cálculo do produto*

Para o caso de três números o cálculo é feito efetuando-se a *multiplicação* dos dois primeiros (operação conhecida) e a seguir a *multiplicação* do produto obtido com o terceiro número. Exemplos:

1. $5 \times 3 \times 2 = 15 \times 2 = 30$
2. $a.b.c = (ab)c$ (usando parênteses)

De maneira análoga calcula-se o *produto* de *mais de três números*.

23. *Propriedades*

Valem as propriedades já estudadas:

FECHAMENTO: $\underbrace{(5 \times 3)}_{\text{n.º inteiro}} \times \underbrace{2}_{\text{n.º inteiro}} = \underbrace{30}_{\text{n.º inteiro}}$

COMUTATIVA: $5 \times 3 \times 2 = 3 \times 2 \times 5 = 2 \times 5 \times 3 = \ldots$

ELEMENTO NEUTRO: 1; $5 \times 3 \times 1 = 5 \times 3$

ASSOCIATIVA: $(5 \times 3) \times 2 = 5 \times (3 \times 2)$

Abreviatura: p. a. m. (lê-se: propriedade associativa da multiplicação)

OBSERVAÇÃO: O zero (0) continua sendo o elemento "terrível", que já era para a multiplicação de dois números, isto é, *se um dos fatôres é nulo* o produto será *nulo*. Exemplo:

$$7 \times 5 \times 0 \times 4 \times 3 = 0$$

23. *Propriedade relacionando duas operações (nova para você!)*

DISTRIBUTIVA da *multiplicação* em relação a *adição* (ou *subtração*): A *multiplicação* se "distribui" pelos têrmos de uma adição ou subtração como mostram os seguintes exemplos:

$$4\times(5+3) = 4\times5+4\times3$$
$$4\times(5-3) = 4\times5-4\times3$$

Abreviatura: p.d.m.(a) (lê-se: propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição)
p.d.m.(s) (lê-se: ..... em relação a subtração)

Como "treino" das propriedades já estudadas vamos justificar a propriedade DISTRIBUTIVA, das mais importantes *propriedades estruturais*, por envolver duas operações. Temos:

$4\times(5+3) = (5+3)+(5+3)+(5+3)+(5+3)$ (pela definição de multiplicação)
$= (5+5+5+5)+(3+3+3+3)$ (pela p.a.a.)
$= 4\times5+4\times3$ (pela definição de multiplicação)

Visto a multiplicação ser *comutativa*, a propriedade DISTRIBUTIVA é feita nos "dois sentidos", isto é:

$$a\times(b+c) = a\times b+a\times c \text{ e } (b+c)\times a = b\times a+c\times a$$

Como aplicações da propriedade DISTRIBUTIVA temos:

1.ª) A multiplicação "distribui" a adição e a subtração ao mesmo tempo. Ex.:

$$8\times(5+3-1) = 8\times5+8\times3-8\times1$$

2.ª) Dá a regra para se efetuar o produto de *duas somas indicadas*. Ex.:

$$(6+3)\times(2+5) = 6\times(2+5)+3\times(2+5)$$
$$= 6\times2+6\times5+3\times2+3\times5$$

> ATENÇÃO: Inversamente não se pode "distribuir" a *adição* (ou *subtração*) em relação a *multiplicação*, pois:

$3 + (4 \times 5) = (3 + 4) \times (3 + 5)$ é FALSO! (faça os cálculos!)

Por isso, costuma-se dizer que a multiplicação "rompe" a adição, mas a adição "não rompe" a multiplicação; essa é uma das razões por que a multiplicação é considerada "mais forte" que a adição!

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO — Grupo 16

1. Usando a propriedade DISTRIBUTIVA tornar verdadeira a sentença:

$$5 \times (4 + \ldots) = 5 \times 4 + 5 \times 7$$

No lugar de ... só pode ser o 7. Verifique!

2. Somando-se 3 ao fator 4 do produto 5×4, de quanto *aumentará* o produto?
Ora, somando-se 3 ao fator 4 (que é o segundo fator), obtemos: $5 \times (4 + 3)$, que pela propriedade DISTRIBUTIVA nos dá:

$$5 \times (4 + 3) = 5 \times 4 + 5 \times 3$$

isto é o produto 5×4 aumenta de 5×3, ou seja, 3 *vêzes* o primeiro fator (5).

3. Subtraindo-se 2 do fator 5 do produto 5×3, qual é a variação que sofre êsse produto?
Subtraindo-se 2 de 5 (primeiro fator do produto), obtemos: $(5 - 2) \times 3$ e, pela propriedade DISTRIBUTIVA:

$$(5 - 2) \times 3 = 5 \times 3 - 2 \times 3$$

isto é, o produto 5×3 diminuirá de 2×3, ou seja, *duas vêzes* o outro fator.

4. Somando-se 4 ao fator a da multiplicação: $a \times b$, qual a alteração do produto?
Temos: $(a + 4) \times b = a \times b + 4 \times b$, ou seja, aumentará de 4 *vêzes* o outro fator (b)

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — Grupo 17

1. Dizer a *propriedade* da *multiplicação* que está sendo aplicada em:
   1.º) $(3 \times 5) \times 2 = 3 \times (5 \times 2)$
   2.º) $4 \times 5 \times 8 = 8 \times 5 \times 4 = 5 \times 4 \times 8$
   3.º) $3 \times 5 \times 1 = 3 \times 5$
   4.º) $9 \times (5 + 2) = 9 \times 5 + 9 \times 2$
   5.º) $3 \times (7 - 3) = 3 \times 7 - 3 \times 3$
   6.º) $(4 + 7) \times 3 = 4 \times 3 + 7 \times 3$

2. Calcular os seguintes produtos, *associando* os fatôres cujo produto efetuado seja 10 ou 100:
   1.º) $7 \times 2 \times 8 \times 5$ 2.º) $4 \times 32 \times 5 \times 25$

3. Escrever três multiplicações diferentes tendo cada uma três fatôres e por produto, 12.

4. Escrever de todos os modos possíveis (trocando a ordem dos fatôres) os produtos:
   1.º) 5×3 2.º) $a \times b \times c$ 3.º) $4 \times x \times y$

5. Completar as igualdades:
   1.ª) $32 \times 15 \times 0 \times 2 = \ldots$
   2.ª) $8 \times 96 \times \ldots \times 36 = 0$

6. Aplicar a propriedade DISTRIBUTIVA em:
   1.º) $4 \times (3 + 5)$ 3.º) $a \times (x + y)$
   2.º) $(7 - 1) \times 8$ 4.º) $(n + m) \times p$

7. Usando a propriedade DISTRIBUTIVA, tornar verdadeiras as seguintes sentenças:
   1.ª) $4 \times (3 + \ldots) = 4 \times 3 + 4 \times 5$ 4.ª) $\ldots \times 5 + \ldots \times 5 = (4 + 3) \times \ldots$
   2.ª) $2 \times (\ldots - 4) = 2 \times 5 - \ldots \times 4$ 5.ª) $4 \times 7 + \ldots \times 3 = 4 \times (\ldots + \ldots)$
   3.ª) $(6 + 9) \times 8 = \ldots \times 8 + 9 \times \ldots$ 6.ª) $6 \times (\ldots + 8) = \ldots \times 7 + \ldots \times 8$

8. Aplicar a propriedade DISTRIBUTIVA em:

1.º) $8 \times (4 + 5 - 7)$ 2.º) $a \times (b + c - d - e)$

9. Idem, nos seguintes produtos de *soma* por *soma* (indicadas);

1.º) $(4 + 5) \times (7 + 3)$ 3.º) $(3 + 0) \times (0 + 8)$

2.º) $(a + b) \times (c + d)$ 4.º) $(x + y + z) \times (m + n)$

10. Tornar verdadeiras as seguintes igualdades (sentenças):

1.ª) $(3 + \ldots) \times (4 + 9) = \ldots\times 4 + 3\times 9 + 2\times 4 + 2\times\ldots$

2.ª) $(\ldots + q) \times (m + \ldots) = p\times m + \ldots\times n + \ldots\times m + q\times\ldots$

11. Somando-se 2 ao fator 5 do produto 5×7, qual é a *variação do produto?*

12. Qual é a alteração sofrida pelo produto de dois números a e b, quando:

1.º) somamos 4 a a 3.º) somamos 5 a b

2.º) subtraímos 2 de a 4.º) subtraímos 1 de b

Associação de Multiplicações, Divisões, Adições e Subtrações

24. *Divisão de um produto por um número quando um dos fatôres é múltiplo dêsse número*

Neste caso, basta dividir êsse fator pelo número e multiplicar o quociente obtido pelos outros fatôres. Exemplo:

$$(7\times 12\times 5) : 3 = 7\times 4\times 5$$

Consequência: Se um número *é múltiplo de um outro* que, por sua vez, *é múltiplo de outros*, então o primeiro número será *múltiplo* dos *últimos*.

Exemplo:

48 é múltiplo de 12 que, por sua vez, é múltiplo de 3 e 4, então 48 é múltiplo de 3 e 4.

25. *Vale a propriedade Associativa na operação divisão? Não.*

Que significaria, por exemplo:

$$18 : 6 : 3 \ ?$$

Poderia ser:

$$(18 : 6) : 3 \text{ ou } 18 : (6 : 3)$$

usando os parênteses para "forçar" a propriedade associativa. Mas você já concluiu que estas duas expressões têm resultados diferentes (a primeira vale 1 e a segunda, 9) e, portanto:

$$(18 : 6) : 3 = 18 : (6 : 3) \text{ é FALSO !}$$

isto é, não vale a propriedade *associativa* para a *divisão*, a exemplo do que já fôra visto para a *subtração*.

Aplicação: Colocar parênteses em: $125 : 25 : 5$ de modo que o resultado da expressão seja igual a 1.

Ora, você tem duas possibilidades para colocar parênteses:

$$(125 : 25) : 5 \quad \text{e} \quad 125 : (25 : 5)$$

A primeira delas tem valor 1 (calcule!) e a segunda, 25.

Logo, a resposta é: $(125 : 25) : 5$

26. *Propriedade Distributiva da divisão em relação à adição e à subtração*

Essa propriedade só vale num sentido! (nova para você). Exemplo:

$$(15+18) : 3 = 15 : 3 + 18 : 3 \quad \text{é VERDADE}$$

(calcule o valor de cada uma das expressões; ambas valem 11)

A distributividade da divisão em relação a *adição* e a *subtração* não se faz nos *dois sentidos*, como foi visto na multiplicação, porque a divisão é *não-comutativa*. Assim, por exemplo:

$$12 : (4+2) = 12 : 4 + 12 : 2 \quad \text{é FALSO!}$$

(a primeira expressão vale 2 e a segunda, 9)

27. *Expressões numéricas envolvendo adições, subtrações, multiplicações e divisões*

O cálculo do valor (ou do numeral mais simples) dessas expressões, caso *não contenham* sinais de reunião, é feito na seguinte *ordem*: 1.º) multiplicações e divisões; 2.º) adições e subtrações.

Havendo *sinais de reunião*, você já sabe como deve proceder.

Exemplos:

1.º) $6+12 : 3$ (*não contém* parênteses!)

Temos: $6+12 : 3 = 6+4 = 10$

2.º) $(6+12) : 3$

Temos: $(6+12) : 3 = 18 : 3 = 6$

3.º) $46 - \{54 - 3\times[(7+6 : 2) - (4\times 3 - 5)]\}$

Temos:

$$46 - \{54 - 3\times[(7+\underbrace{6 : 2}_{3}) - (\underbrace{4\times 3}_{12} - 5)]\} = 46 - \{54 - 3\times[(7+3) - (12-5)]\} =$$

$$= 46 - \{54 - 3\times[10-7]\} = 46 - \{54 - 3\times 3\} = 46 - \{54 - 9\} = 46 - 45 = 1$$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 18

1. Qual o resultado de:
   1.º) $(8 \times 5 \times 7) : 4$? 2.º) $(3 \times 20 \times 25) : 5$? 3.º) $(a \times b \times c \times d) : d$?

2. Você sabe que 36 é múltiplo de 18 e que 18 é múltiplo de 3 e 6. Que pode concluir acêrca de 36 com relação a 3 e a 6?

3. Aplicar a propriedade *distributiva* em:
   1.º) $(12 + 8) : 4$ 2.º) $(18 - 12) : 3$

4. Idem, em:
   1.º) $(14 + 8 - 6) : 2$ 2.º) $(m + n) : p$ 3.º) $(m - n) : q$
   (supondo m e n múltiplos de p e q)

5. É possível aplicar-se a propriedade distributiva em: $(12 + 8) : 3$? Por quê?

6. Idem, em: $24 : (8 + 4)$? Por quê?

7. "Pontue" com parênteses a expressão: $8 : 8 : 8$ de modo que seu *valor* seja igual a 8.

8. Idem, a fim de tornar verdadeira as seguintes sentenças:
   1.ª) $24 : 8 : 4 = 12$
   2.ª) $36 : 9 : 6 : 3 = 2$

9. Para que caso a sentença: $(a : b) : c = a : (b : c)$ é verdadeira?

10. Calcular o valor das seguintes expressões numéricas:
    1.ª) $8 + 6 : 2$ 2.ª) $(8 + 6) : 2$ 3.ª) $8 : 2 + 6$
    4.ª) $(1 + 3 \times 5) \times (12 - 6 : 2)$
    5.ª) $\{130 - 2 \times [24 - 6 \times (10 - 2 \times 3)] : (15 \times 2 - 3)\} - 130$

EXERCÍCIOS COM OPERAÇÕES INVERSAS — GRUPO 19

Usando operações inversas, substituir $\square$ (ou qualquer outro numeral) por um valor que torne verdadeiras as seguintes sentenças (as quatro primeiras são "modelos"):

1.ª) $\square + 8 = 13$ $\square$?
$\square = 13 - 8$ (pela operação inversa diferença)
ou $\square = 5$

2.ª) $\triangle - 5 = 8$ $\triangle$?
$\triangle = 8 + 5$ (pela definição de *diferença*)
ou $\triangle = 13$

3.ª) $10 \times \square = 40$ $\square$?
$\square = 40 : 10$ (pela operação inversa divisão)
ou $\square = 4$

4.ª) $8 : \triangle = 7$ $\triangle$?
$\triangle = 7 \times 8$ (pela definição de *quociente*)
ou $\triangle = 56$

5.ª) $(\bigstar - 5) \times 4 = 20$ $\bigstar$? ($\bigstar$ será determinado em duas passagens)
$(\bigstar - 5) = 20 : 4$ (pela operação inversa divisão)
ou $\bigstar - 5 = 5$
$\bigstar = 5 + 5$ (pela definição de *diferença*)
ou $\bigstar = 10$

6.ª) $x + 6 = 9$ $\quad x$?

7.ª) $\square - 8 = 8$ $\quad \square$?

8.ª) $9 + \triangle = 15$ $\quad \triangle$?

9.ª) $7 \times \triangledown = 56$ $\quad \triangledown$?

10.ª) $\bigstar : 6 = 42$ $\quad \bigstar$?

11.ª) $\triangle \times 4 = 20$ $\quad \triangle$?

12.ª) $(\square - 6) \times 3 = 12$ $\quad \square$?

13.ª) $(\square \times 3) + 10 = 25$ $\quad \square$?

14.ª) $(x : 5) - 8 = 10$ $\quad x$?

15.ª) $(x + 8) \times 6 = 72$ $\quad x$?

16.ª) $(\triangle - 5) : 4 = 7$ $\quad \triangle$?

17.ª) $(30 : \triangle) + 2 = 4$ $\quad \triangle$?

18.ª) Expresse as seguintes proposições em *sentenças matemáticas* e determine o valor *desconhecido:*

(*a*) Qual o número que multiplicado por 5 resulta 55?

(*b*) Qual o número cujo dôbro é 128?

(*c*) Qual o número ao qual adicionando 15, subtraindo 8 do resultado, você obtém 50?

(*d*) Qual o número que multiplicado por 7 e depois dividindo por 7 o resultado, obtém-se 10?

(*e*) Qual o número ao qual subtraindo 3, multiplicando por 8 o resultado e dividindo por 5 êsse resutlado, obtém-se 24?

Divisão aproximada

28. *Quociente aproximado. Resto da divisão aproximada.*

Você já estudou que a operação *divisão* — inversa da multiplicação — só era *possível* no caso do dividendo ser *múltiplo* do divisor.

Contudo, pode-se estender a noção de divisão, estudando as *divisões por aproximação* que permitem interpretar problemas da vida prática, tais como:

Você quer repartir 53 figurinhas por 6 colegas. Quantas receberá cada um?

Ora, *não é possível* encontrar um número inteiro que multiplicado por 6 resulte 53, pois:

$8 \times 6 = 48$ é *menor* que 53

$9 \times 6 = 54$ é *maior* que 53

Então, se você der 8 figurinhas para cada colega *sobrarão* 5 ($53 - 48 = 5$) e dando 9 *faltará* 1 ($54 - 53 = 1$). Nestas condições, só cabe resolver o problema por *aproximação* uma vez que o "quociente" procurado não é nem o número inteiro 8 e nem o número inteiro 9.

Ao número 8, que é o maior número que multiplicado por 6 não ultrapassa 53, é denominado quociente aproximado por falta, a menos de uma unidade, porque o *êrro* que se comete, quando se toma o número 8 como quociente, *é menor que uma* unidade.

Da mesma forma o 9 é o quociente aproximado por excesso, a menos de uma unidade.

Para as nossas aplicações, quando se fizer necessária a *divisão aproximada*, escolheremos o *quociente aproximado por falta*. Daí a *definição:*

Divisão aproximada (por falta) de um número inteiro por outro (diferente de zero), dados numa certa ordem, é a operação que tem por fim determinar o maior número que, multiplicado pelo segundo, dê um resultado menor que o primeiro.

Os números dados continuam recebendo os nomes de *dividendo* (o primeiro) e *divisor* (o segundo).

Chama-se resto de uma divisão aproximada (por falta) a *diferença* entre o dividendo e o produto do divisor pelo quociente aproximado. A indicação de uma *divisão aproximada* é, geralmente, feita com a "chave de divisão":

$$\begin{array}{r|l} \text{dividendo} & \text{divisor} \\ \hline \text{resto} & \text{quociente (aprox.)} \end{array}$$

Para o exemplo estudado, temos:

$$\begin{array}{r|l} 53 & 6 \\ \hline 5 & 8 \end{array} \qquad \text{onde:} \quad \boxed{53 = 8 \times 6 + 5}$$

e de um modo geral:

$$\boxed{\text{dividendo} = \text{quociente} \times \text{divisor} + \text{resto}}$$

que é a *relação fundamental* entre o dividendo, divisor e o resto, para as divisões aproximadas. Pode-se pensar, naturalmente, a *divisão* (exata) como aquela de resto *nulo*, pois, para ela vale a relação:

$$\boxed{\text{dividendo} = \text{quociente} \times \text{divisor}}$$

O importante é você observar que, para as *divisões aproximadas* o resto é *sempre menor que o divisor*. Indicando-se, o dividendo, o divisor, o qüociente e o resto, respectivamente, pelas letras D, d, q, r, temos:

$$\begin{array}{r|l} D & d \\ \hline r & q \end{array} \qquad \boxed{D = q \times d + r} \qquad \text{onde } r \leqslant d$$

As *técnicas operatórias* para o cálculo das divisões aproximadas, por falta, já são do seu conhecimento. Pode-se, agora, ressaltar que, graças à relação fundamental estabelecida para as divisões aproximadas, pode-se efetuar a *prova* da operação: basta multiplicar o quociente pelo divisor e somar o resultado com o resto. Se a operação estiver certa deve-se encontrar o dividendo. Exemplo:

$$\begin{array}{r|l} 53 & \underline{6} \\ 5 & 8 \end{array} \qquad \text{Prova: } 8 \times 6 + 5 = 53$$

Observação: Cuidado, que de uma igualdade do tipo, por exemplo:

$26 = 3 \times 7 + 5$ só é possível *concluir* que: $\begin{array}{r|l} 26 & \underline{7} \\ 5 & 3 \end{array}$ e *não* $\begin{array}{r|l} 26 & \underline{3} \\ 5 & 7 \end{array}$ (o resto não pode ser maior que o divisor!).

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — Grupo 20

1. Preencher os claros das seguintes divisões aproximadas:

	Dividendo	divisor	quociente	resto
1.ª)	277	...	18	7
2.ª)	...	400	1	32
3.ª)	17 648	215	82	...
4.ª)	256	12	...	4

2. Quais os restos possíveis numa divisão aproximada de divisor 5?

3. Na divisão aproximada que corresponde à igualdade: $34 = 7 \times 4 + 6$ indicar o quociente e o resto.

4. Qual o número que dividido por 18 dá 25 para quociente e o resto é o maior possível (isto é, igual ao divisor menos uma unidade)?

5. Numa divisão aproximada o quociente é igual ao divisor e o resto é o maior possível. Se o divisor é 15, qual o valor do dividendo?

6. O divisor de uma divisão aproximada é 26 e o resto 15. Qual o maior número que se pode somar ao dividendo, sem alterar o quociente?

7. Numa divisão aproximada o quociente é igual ao divisor e o resto é o maior possível. Determinar o dividendo, sabendo-se que a soma do divisor com o quociente é 24.

8. Determinar o número que dividido por 213 dá para quociente 401 e resto 127.

9. Qual é a relação fundamental que liga os números: a, b, c, d em $\begin{array}{r|l} a & \underline{b} \\ d & c \end{array}$

10. Idem, com os números: x, y, z, 0 em $\begin{array}{r|l} x & \underline{y} \\ 0 & z \end{array}$

1. Estruturas das sentenças em Português e Matemática

Nos problemas seguintes (que podem envolver as quatro operações) você procurará empregar as *propriedades* estudadas para as operações, bem como ressaltar as *estruturas* de que participam as sentenças em Português e Matemática.

Acostume-se a ler, com *muita atenção*, o problema que você vai resolver, para poder destacar o que é *dado* e o que é *pedido* e estabelecer a correspondente *sentença matemática*.

Assim, por exemplo, para o problema:

"*Um número somado com 3 é igual a* 8" corresponde à seguinte *sentença matemática*:

$$\square + 3 = 8$$

onde $\square$ (ou qualquer outro numeral), que representa o *número* procurado, é, da sentença em Português, o sujeito, e, o sinal $= 8$, o predicado (é *igual* a 8).

Se o *predicado* fôsse: "é *maior* que 8" então a sentença matemática seria:

$$\square + 3 > 8$$

Também as "operações" de formar o plural ou singular, em Português, têm as suas equivalentes em Matemática. Exemplo:

Se 1 bombom (que é um "singular") custa .... Cr $ 50,00
4 bombons (que é um "plural") custam ...4×50,00 ou Cr $ 200,00

Logo, a passagem do *singular* para o *plural* é feita, em Matemática, através da operação multiplicação!

Qual a operação que permite passar do *plural* para o *singular*? É a divisão, que é a operação inversa da multiplicação. Assim, se:

4 bombons (que é um "plural") custam .... Cr$ 200,00
1 bombom (que é um "singular") custa...... 200,00 : 4 ou Cr$ 50,00

Portanto, em *Matemática:*

a passagem do singular para o plural é feita pela operação multiplicação
a passagem do plural para o singular é feita pela operação divisão

2. Alguns problemas de aplicação; "estruturas" diversas

1.º) *Comprei 6 bolinhas de pingue-pongue por* Cr$ 420,00. *Quanto pagarei por* 10 *dessas bolinhas?*

É *dado* um "plural" (preço de 6 bolinhas) e *pede-se* um outro "plural" (preço de 10 bolinhas).

Então, se □ representa o preço de uma bolinha de pingue-pongue, a sentença matemática, correspondente a essa parte do problema, é:

$$6 \times \square = 420{,}00 \text{ (plural } \textit{dado}\text{)}$$

e, portanto, $\square = 420{,}00 : 6$

ou $\square = 70{,}00$ (singular)

O preço de 10 bolinhas (plural *pedido*) será dado por:

$$10 \times \square = 10 \times 70{,}00$$

ou

$$10 \times \square = 700{,}00$$

Resposta: Pagarei Cr$ 700,00 por 10 bolinhas de pingue-pongue.

2.º) *Somando-se* 3 *a um certo número e multiplicando o resultado por* 5 *encontra-se* 90. *Qual é êsse número?*

Não se trata de "adivinhação" e sim de um *problema* que deve ser resolvido fàcilmente para quem já sabe trabalhar com as *operações inversas!*

De fato, se □ representa o número procurado, os seguintes "passos" serão dados para formar a *sentença matemática* correspondente ao problema:

I $\square + 3$ (somando-se 3)
II $(\square + 3) \times 5$ (multiplicando-se o resultado por 5)
III $(\square + 3) \times 5 = 90$ (sentença matemática)

Partindo da *sentença matemática* você já sabe determinar o valor de □:

$(\square + 3) \times 5 = 90$ □ ?

Temos: $\square + 3 = 90 : 5$ (pela operação inversa divisão)

ou $\square + 3 = 18$

$\square = 18 - 3$ (pela operação inversa diferença)

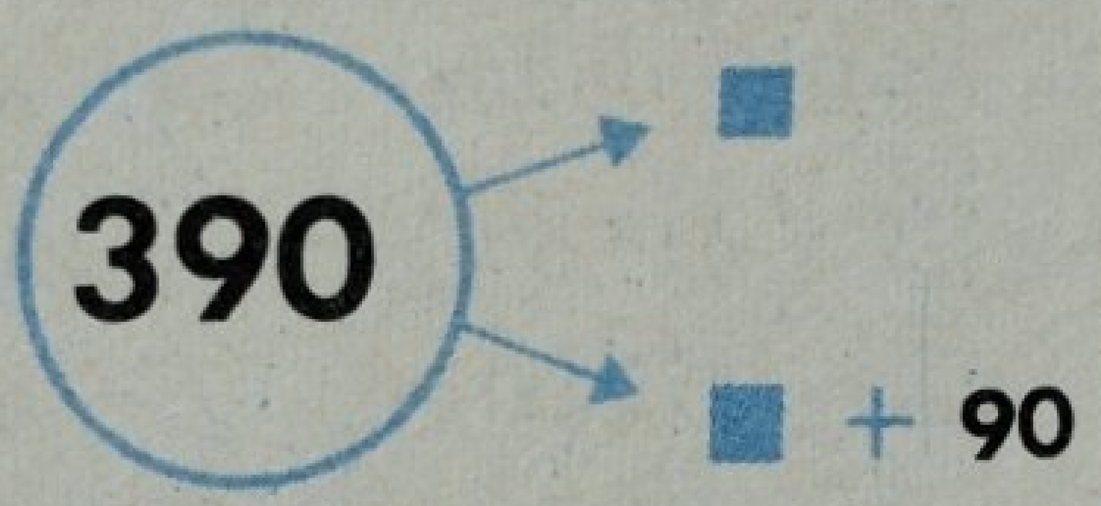
ou $\square = 15$

Resposta: O número procurado é 15
Prova: Somando 3 a 15 você obtém 18; multiplicando-o por 5, obtém 90.

3.º) *O seu caderno custou Cr$ 90,00 mais do que o meu. Ambos custaram Cr$ 390,00. Qual o preço de cada um?*

Agora, temos: se $\square$ representa o preço do meu caderno
$\square+90$ representará o preço do seu

A "estrutura" do problema será melhor "vista" através do desenho:



e a sentença matemática correspondente será:

$\square+(\square+90) = 390$

ou $(\square+\square)+90 = 390$ (pela propriedade associativa da adição: p.a.a.)

ou $2\times\square+90 = 390$

$2\times\square = 390 - 90$ (pela operação inversa diferença)

ou $2\times\square = 300$

$\square = 300 : 2$ (pela operação inversa divisão)

ou $\square = 150$

Resposta:

Logo:

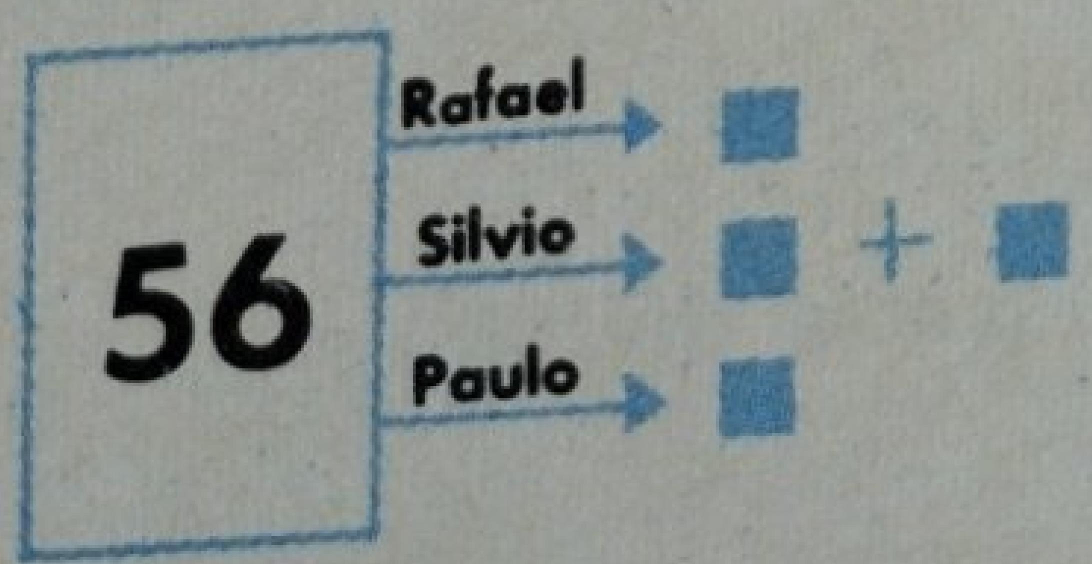
$\square$: 150,00 (preço do meu caderno)

$\square$ + 90,00 : 240,00 (preço do seu caderno)

390,00 (prova!)

4.º) *Repartir 56 figurinhas entre Rafael, Sílvio e Paulo, de modo que Rafael e Paulo recebam quantias iguais e Sílvio o* dôbro *do que recebe cada um dos outros.*

A *estrutura* do problema tem o seguinte "esquema":



Sentença matemática:

$\square+(\square+\square)+\square = 56$

ou $\square+\square+\square+\square = 56$

ou $4\times\square = 56$

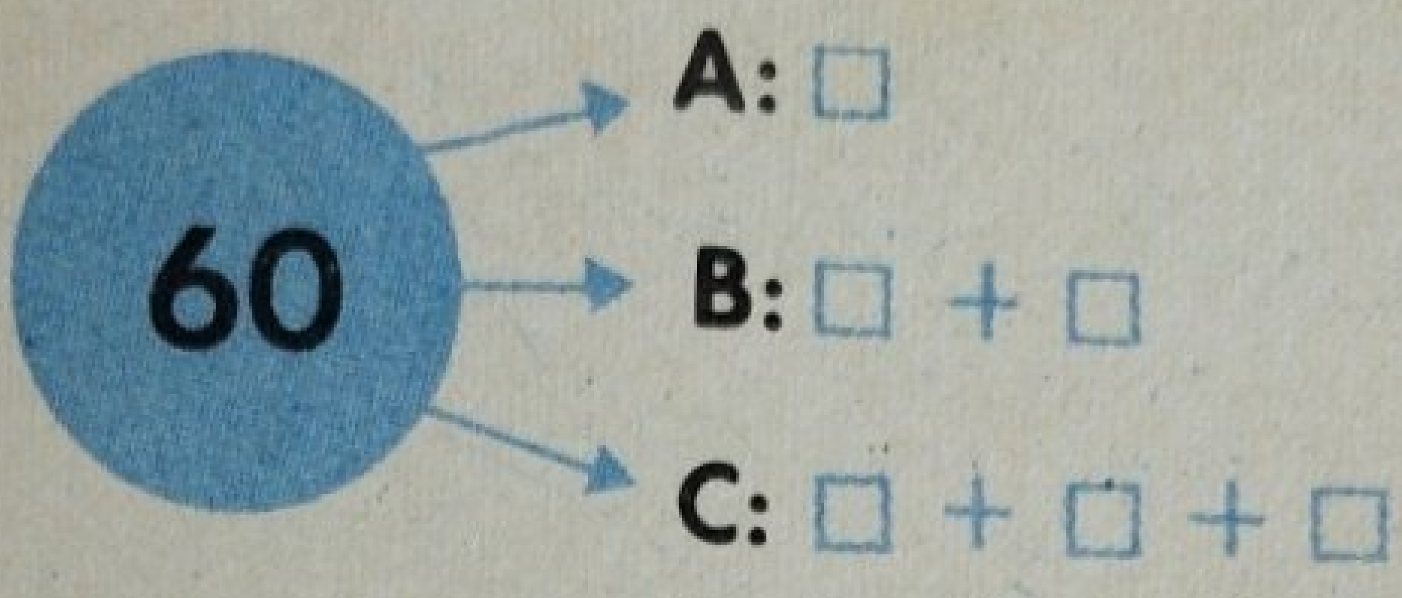
$\square = 56 : 4$

ou $\square = 14$

Resposta:

Rafael $(\square)$: 14
Sílvio $(\square+\square)$: 28
Paulo $(\square)$: 14
56 (prova!)

Agora uma NOVIDADE: Você está convidado a formular (ou seja *imaginar*!) um *problema* com a seguinte *estrutura*:



NOTA: Os 60 elementos do conjunto inicial (representado em "desenho" por um círculo ou qualquer outra figura geométrica) pode representar o que você quiser! Depois de formada a *sentença matemática* correspondente, você calculará as partes recebidas por A (seria o Antônio ?), B e C.

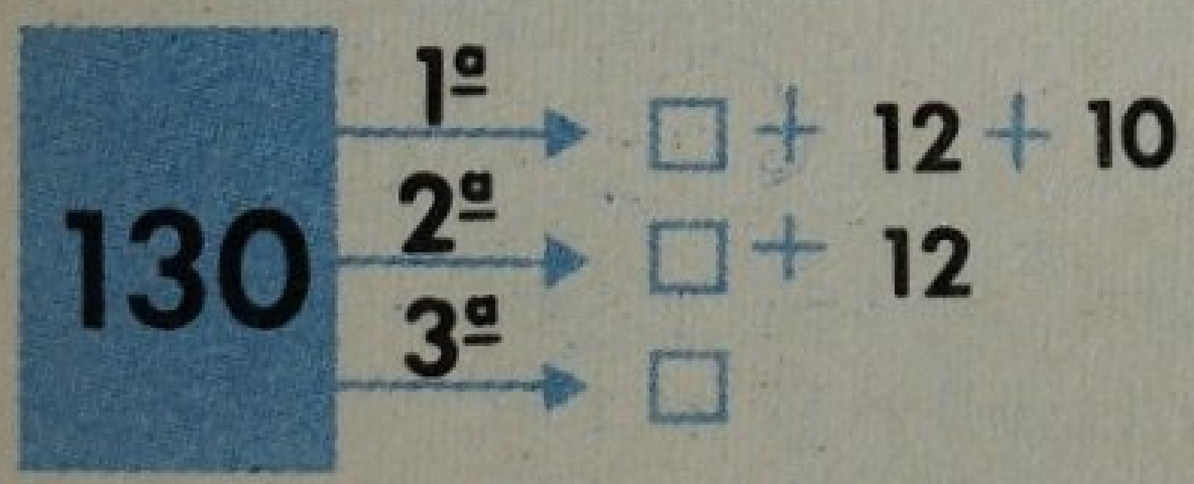
5.º) *Distribuir Cr* \$ 130 000,00 *entre três pessoas, de modo que a primeira receba Cr* \$ 10 000,00 *a mais que a segunda e esta Cr* \$ 12 000,00 *a mais que a terceira.*

Vamos "esquematizar" a *estrutura* do problema vindo do "fim":

□: representa o que recebe a terceira, portanto,
□ + 12: representa o que receberá a segunda, e
□ + 12 + 10: representa o que receberá a primeira. Logo:

Sentença matemática: $\square + (\square + 12) + (\square + 12 + 10) = 130$

$$(\square + \square + \square) + (12 + 12 + 10) = 130$$
$$3 \times \square + 34 = 130$$
$$3 \times \square = 130 - 34$$
ou $$3 \times \square = 96$$
$$\square = 96 : 3$$
ou $$\square = 32$$

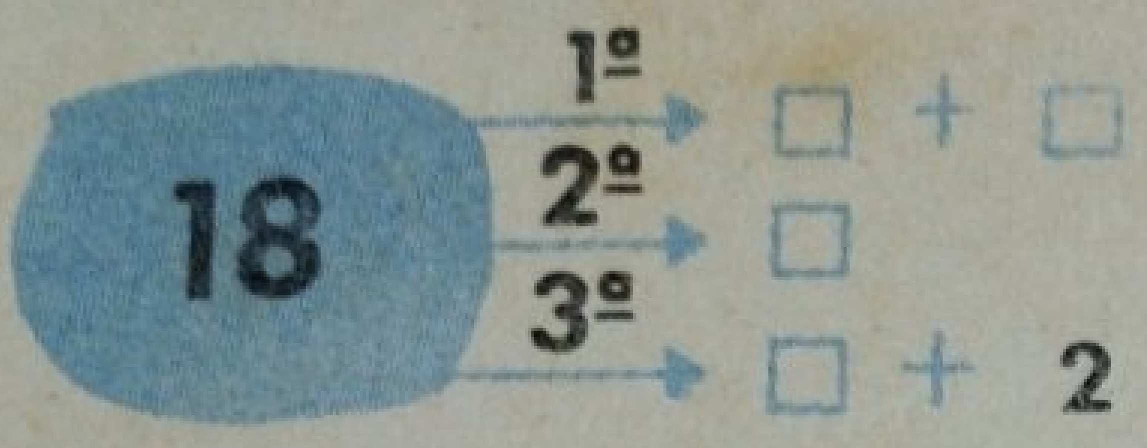


Resposta:

1.ª)	(□+12+10)	: Cr\$ 54 000,00
2.ª)	(□+12)	: Cr\$ 44 000,00
3.ª)	(□)	: Cr\$ 32 000,00
	Prova	: Cr\$ 130 000,00

6.º) *Um pacote de 18 balas vai ser distribuído entre três meninas. A primeira deve receber o* dôbro *do que receber a segunda e a terceira deve receber duas a mais do que receber a segunda.*

Observe atentamente que vamos "partir" da segunda que receberá □ e procure destacar bem, nessa *estrutura*, o que é "receber o dôbro" (□+□) e o que é "receber duas a mais" (□+2). Logo:



Sentença matemática:

$$(\square+\square)+\square+(\square+2) = 18$$

ou

$$(\square+\square+\square+\square)+\square+(\square+2) = 18$$

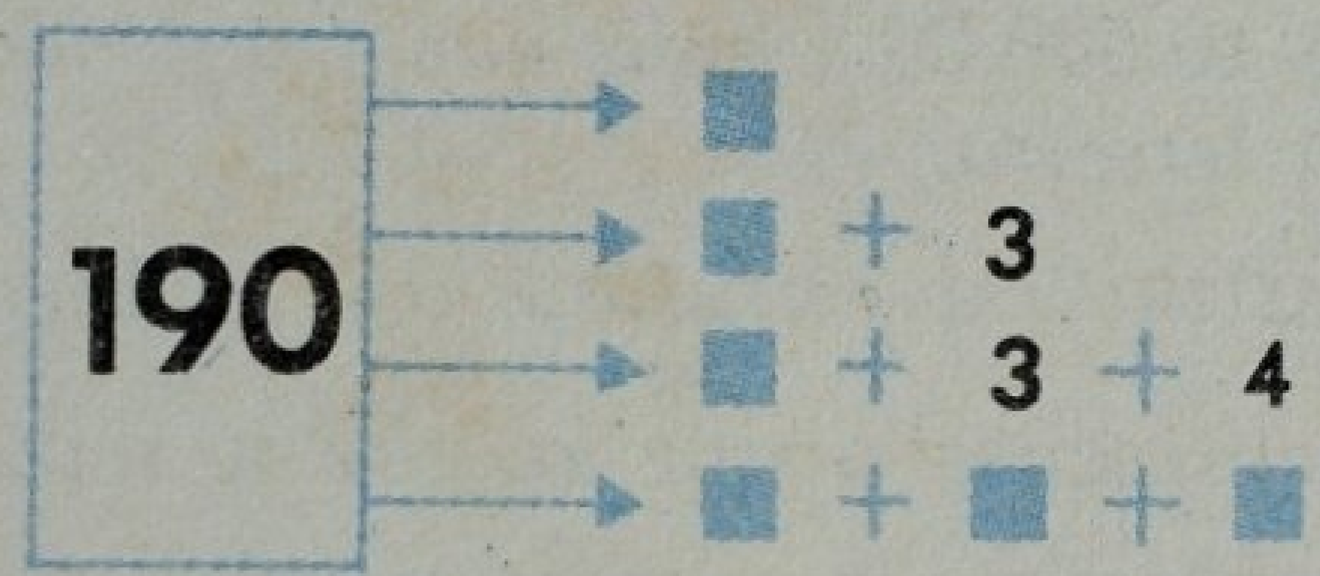
ou

$$\begin{aligned} 4\times\square+2 &= 18 \\ 4\times\square &= 18-2 \\ 4\times\square &= 16 \\ \square &= 16:4 \\ \square &= 4 \end{aligned}$$

Resposta:

1.ª)	$(\square+\square)$:	8
2.ª)	$(\square)$:	4
3.ª)	$(\square+2)$:	6
		18 (prova!)

7.º) O esquema, a seguir, representa a *estrutura* de uma série enorme de problemas, onde $\square$ está representando qualquer elemento.



Assim, por exemplo, pode ser do seguinte problema:

"*190 cavalos devem ser distribuídos a quatro herdeiros, de modo que o segundo herdeiro receba 3 cavalos a mais do que deve receber o primeiro; o terceiro 4 a mais do que recebe o segundo e, finalmente, o quarto deve receber o triplo do que irá receber o primeiro. Quantos cavalos vai receber cada herdeiro?*"

Sentença matemática:

$$\square+(\square+3)+(\square+3+4)+(\square+\square+\square) = 190$$

ou

$$(\square+\square+\square+\square+\square+\square)+(3+3+4) = 190$$

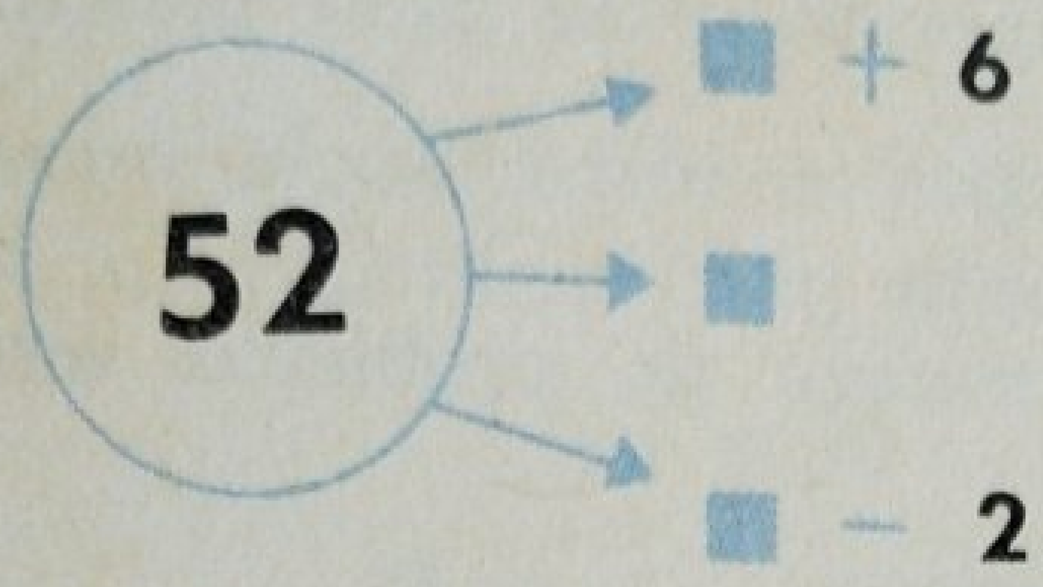
ou

$$\begin{aligned} 6\times\square+10 &= 190 \\ 6\times\square &= 190-10 \\ 6\times\square &= 180 \\ \square &= 180:6 \\ \square &= 30 \end{aligned}$$

Logo: o 1.º herdeiro	receberá:		....	30
2.º	,,	,, :	30+3	33
3.º	,,	,, :	30+3+4	37
4.º	,,	,, :	30+30+30 ..	90
				190 (prova!)

Redija você, agora, uma série de problemas com essa mesma *estrutura*.

8.º) Outra *estrutura*



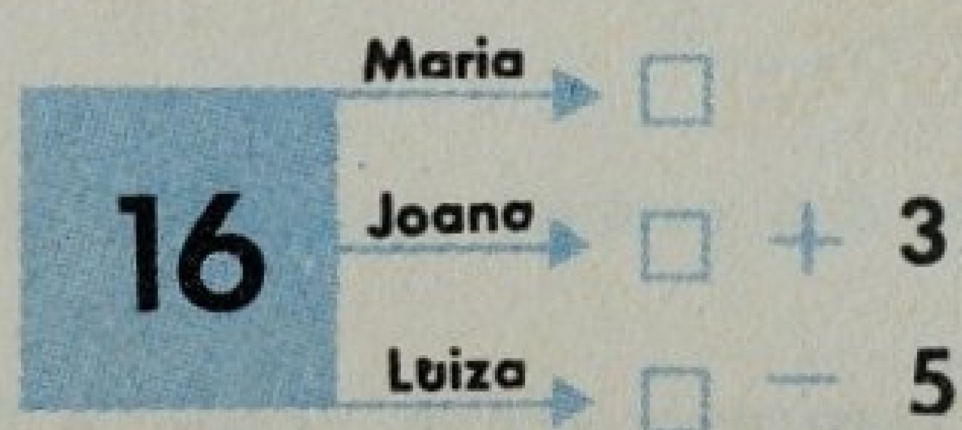
Sentença matemática: $(\square+6)+\square+(\square-2) = 52$

$$(\square+\square+\square)+(6-2) = 52$$
$$3\times\square+4 = 52$$
$$3\times\square = 52-4$$
$$3\times\square = 48$$
$$\square = 48:3$$
$$\square = 16$$

$$\text{Logo: }\left\{\begin{array}{llll}\square & +\ 6 & : 16+6 & = 22\\ \square & & : 16\ \ldots & = 16\\ \square & -\ 2 & : 16-2 & = \underline{14}\\ & & & \ 52\ \text{(prova!)}\end{array}\right.$$

9.º) *Distribuir* 16 *revistinhas entre Maria, Joana e Luiza, de maneira que Joana receba* 3 A MAIS *que Maria e Luiza,* 5 A MENOS *que Maria.*

Temos:



Sentença matemática:

$$\square+(\square+3)+(\square-5) = 16$$

(novidade!) $[(\square+\square+\square)+3]-5 = 16$ (propriedade associativa)

$[3\times\square+3] = 16+5$ (definição de diferença)

ou $3\times\square+3 = 21$

$3\times\square = 21-3$ (pela operação inversa diferença)

ou $3\times\square = 18$

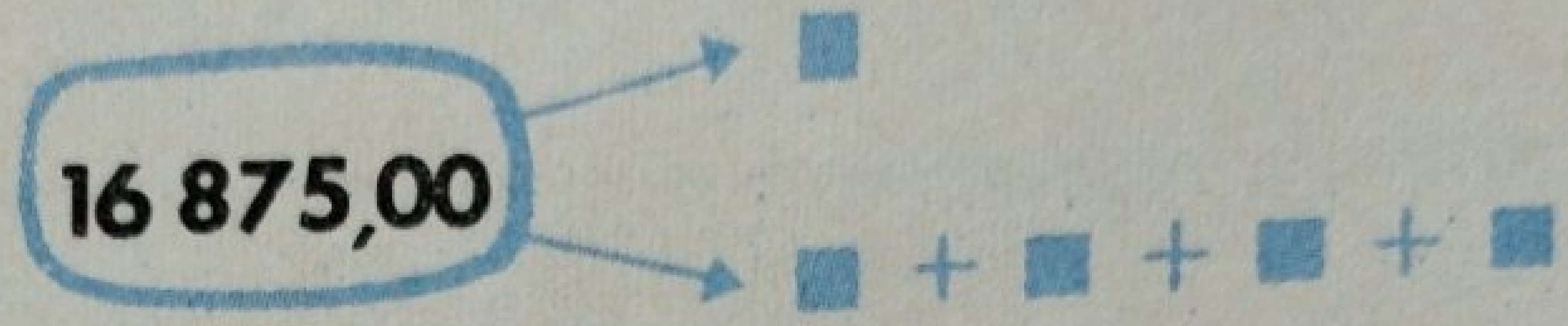
$\square = 18:3$ (pela operação inversa divisão)

ou $\square = 6$

$$\text{Logo: }\left\{\begin{array}{llll}\square & & : \ldots\ldots & = 6\\ \square & +\ 3 & : 6+3 & = 9\\ \square & -\ 5 & : 6-5 & = \underline{1}\\ & & & \ 16\ \text{(prova!)}\end{array}\right.$$

10.º) *Duas pessoas possuem juntas a importância de Cr $ 16 875,00. A diferença entre essas importâncias é igual ao* TRIPLO *da menor. Calcular a importância de cada pessoa.*

Ora, se □ representa a importância *menor*, a outra importância (*maior*) será representada por: □+□+□ *a mais*, ou seja, por: □+□+□+□ e a *estrutura* do problema será:



Sentença matemática:

$$
\begin{aligned}
\square+(\square+\square+\square+\square) &= 16\,875{,}00\\
\square+\square+\square+\square+\square &= 16\,875{,}00\\
5\times\square &= 16\,875{,}00\\
\square &= 16\,875{,}00 : 5\\
\square &= 3\,375{,}00
\end{aligned}
$$

A outra importância (maior) será: $\square+\square+\square+\square = 4\times 3\,375{,}00 = 13\,500{,}00$

Resposta: Uma das pessoas possui Cr$ 3 375,00 e a outra Cr$ 13 500,00.

11.º) *Papai comprou-me 6 lápis e 2 canetas esferográficas, tudo por Cr $ 1 300,00. Quis experimentar-me na parte de Matemática e propôs-me o seguinte problema: calcule o preço de cada lápis (eram todos iguais) e de cada caneta* (também iguais, porém de côres diferentes) *sabendo que o preço de uma caneta é* DEZ VÊZES *mais que o preço de um lápis.*

Tome *cuidado* que agora vamos usar propriedades que ainda não participaram dos problemas anteriores. Assim, se:

□ representa o preço de cada lápis

10×□ representará o preço de cada caneta esferográfica

Sentença matemática:

$6\times\square+2\times(10\times\square) = 1\,300$

(novidade!) ou $6\times\square+(2\times 10)\times\square = 1\,300$ (pela propriedade associativa da multiplicação: p.a.m.)

ou $\quad 6 \times \square + 20 \times \square = 1\,300$

(novidade!) $\quad (6+20) \times \square = 1\,300$ [pela propriedade distributiva: p.d.m (a)]

$$26 \times \square = 1\,300$$

$$\square = 1\,300 : 26$$

$$\square = 50$$

Logo: preço de um lápis ($\square$) : Cr\$ 50,00
preço de uma caneta ($10 \times \square$) : Cr\$ 500,00

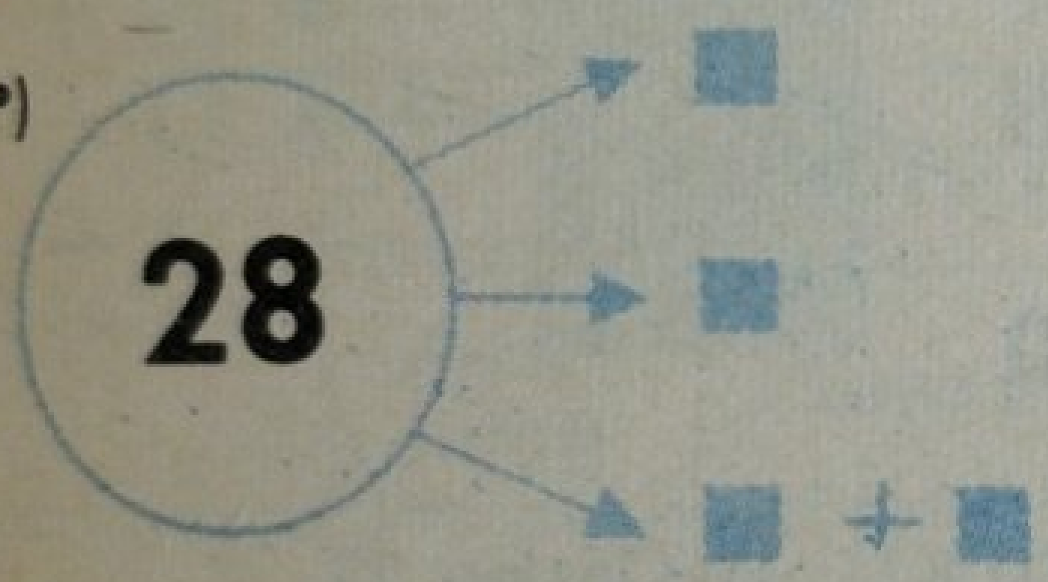
Prova:

6 lápis	: Cr\$	300,00
2 canetas	: Cr\$	1 000,00
	Cr\$	1 300,00

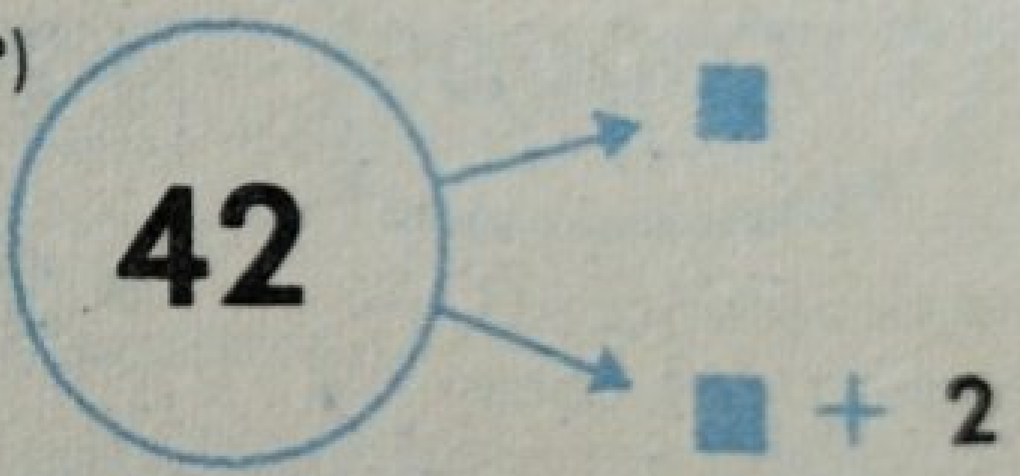
EXERCICIOS SOBRE ESTRUTURAS — Grupo 21

1. Determinar o valor de $\square$ nas seguintes estruturas, depois de estabelecidas as respectivas *sentenças matemáticas:*

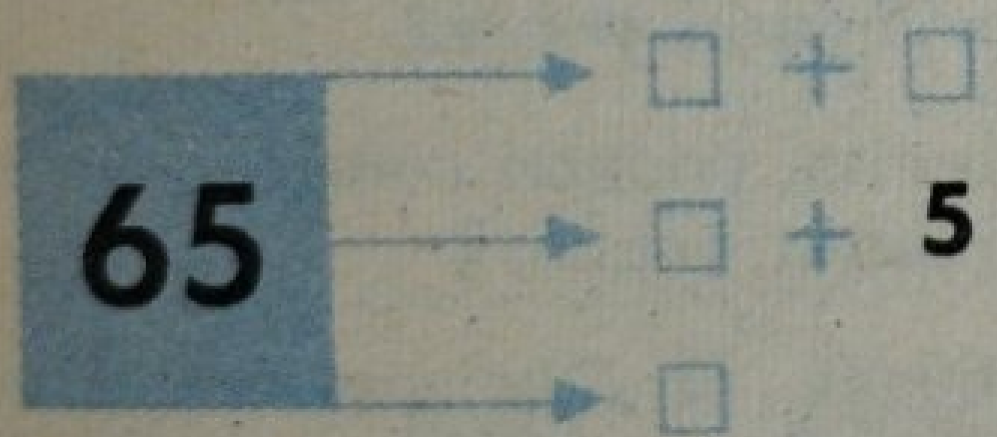
1.°)



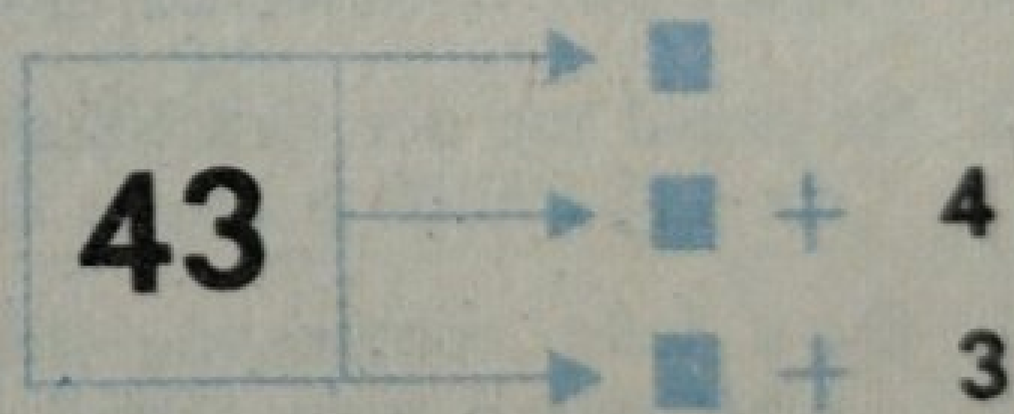
2.°)



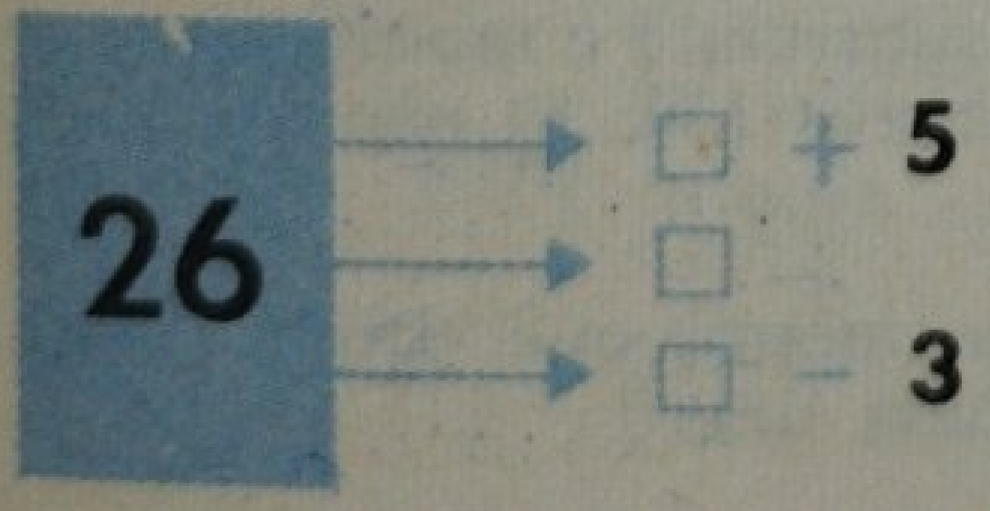
3.°)



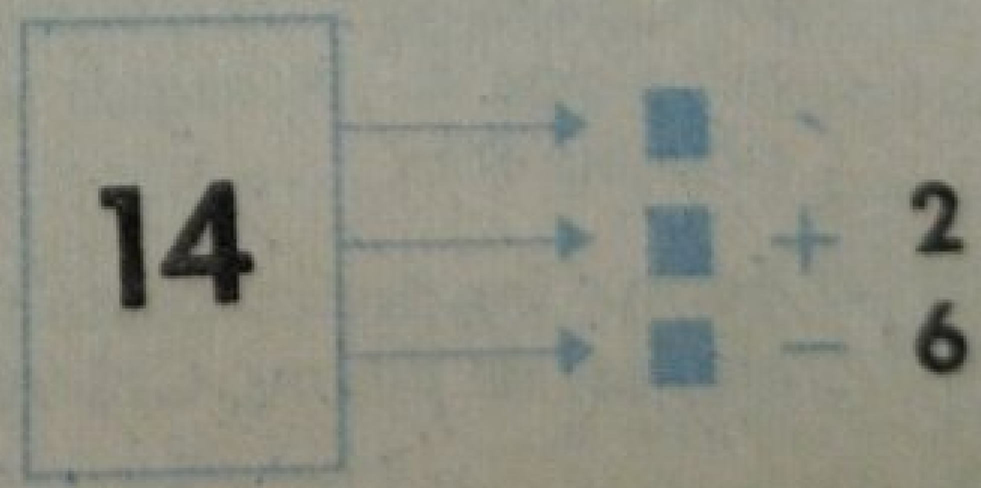
4.°)



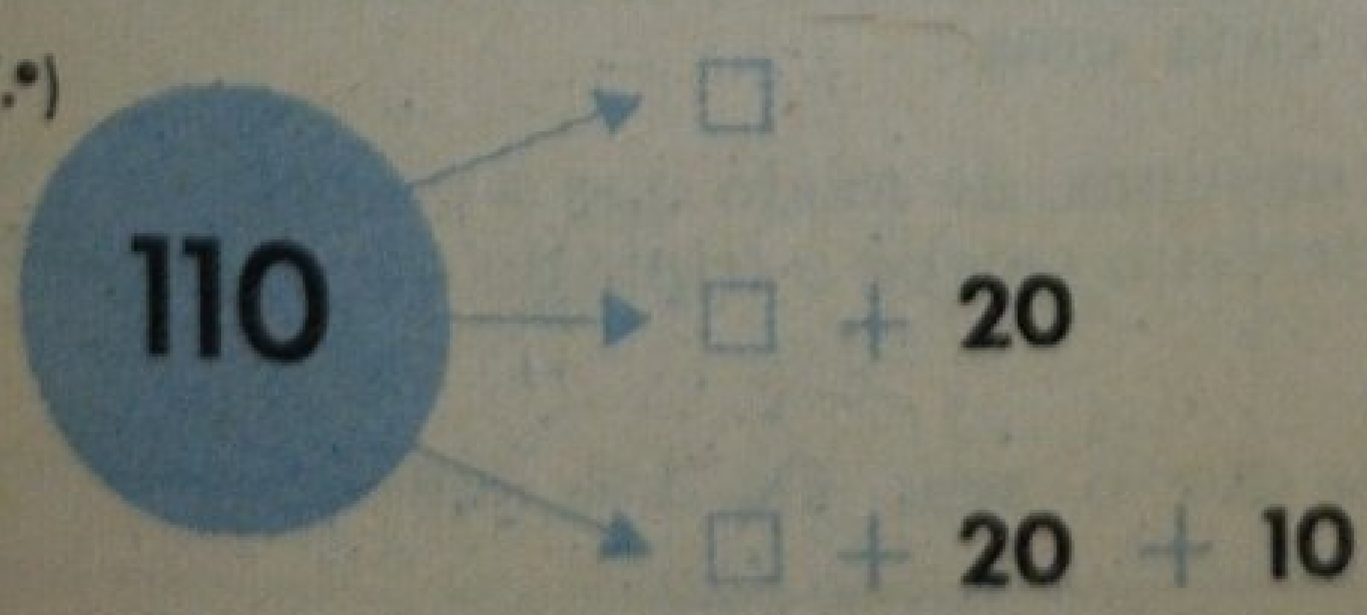
5.°)



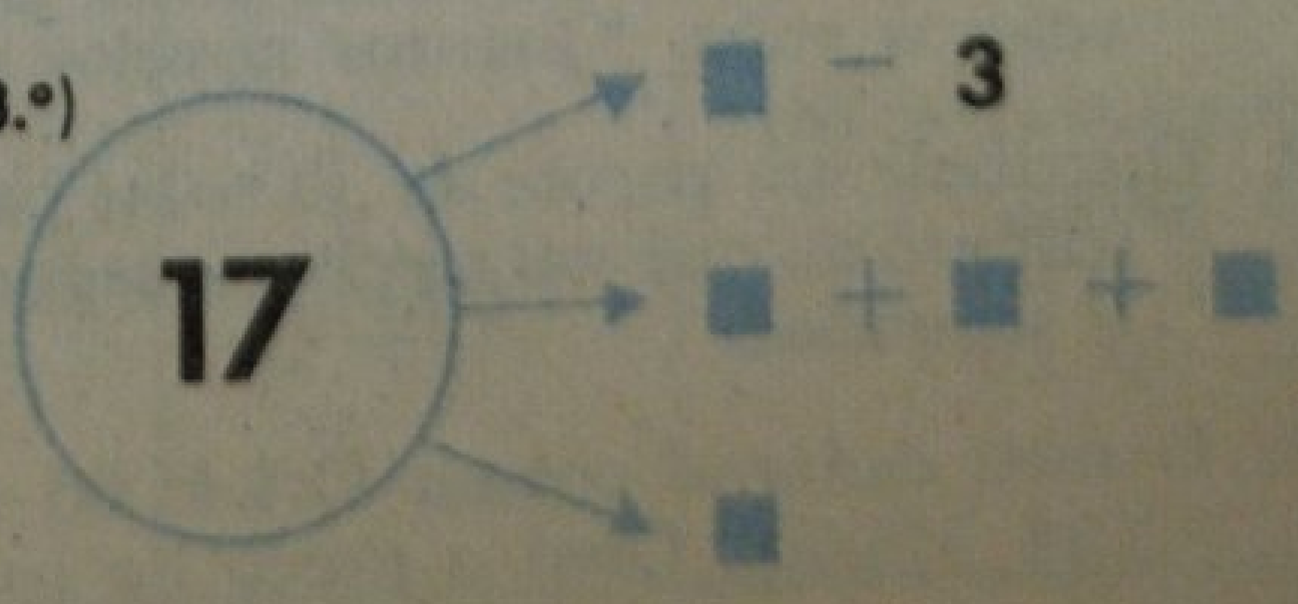
6.°)



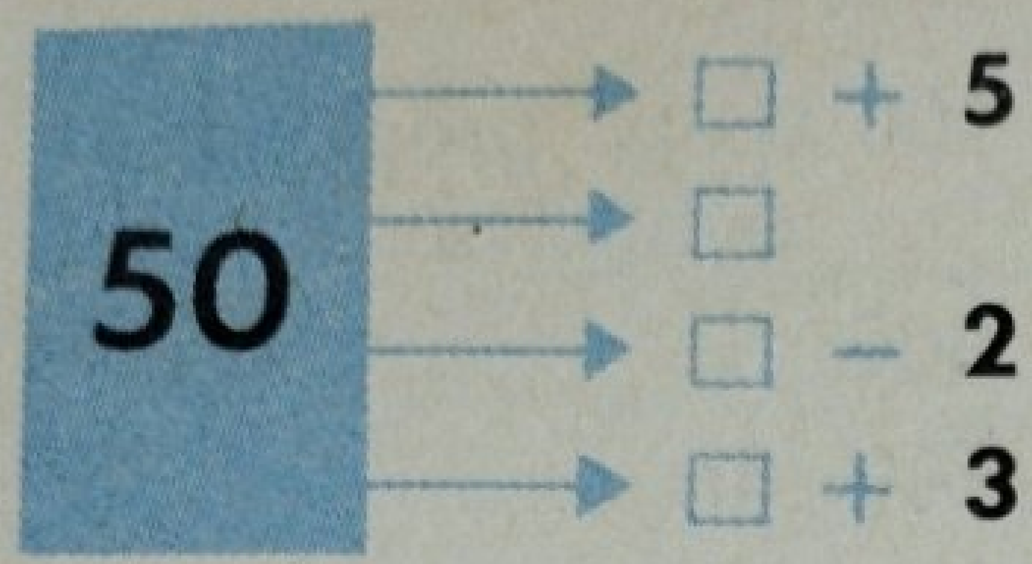
7.°)



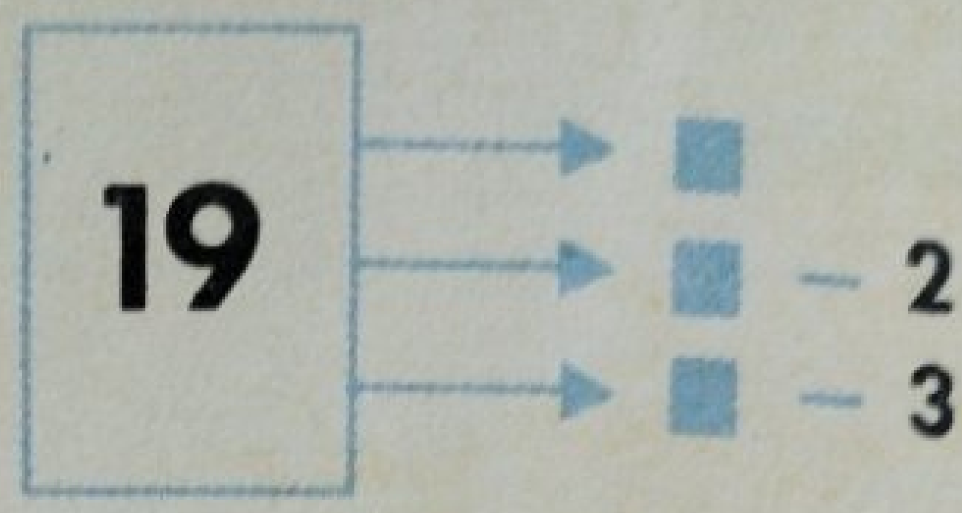
8.°)



9.°)

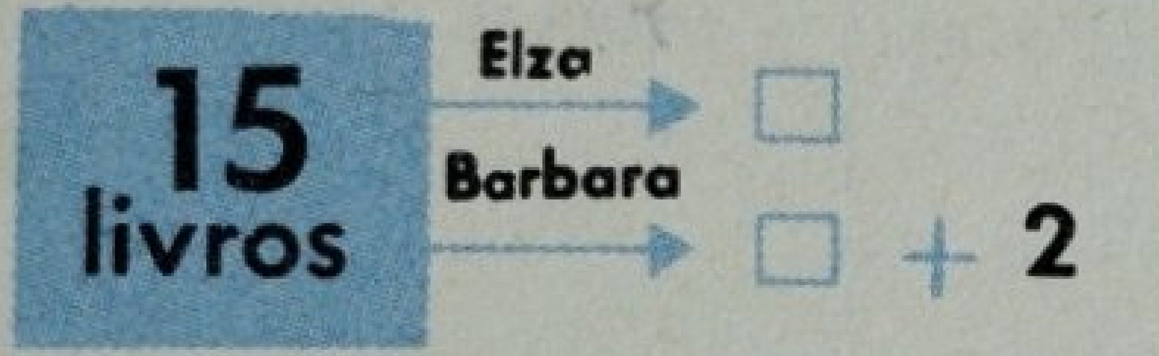


10.°)

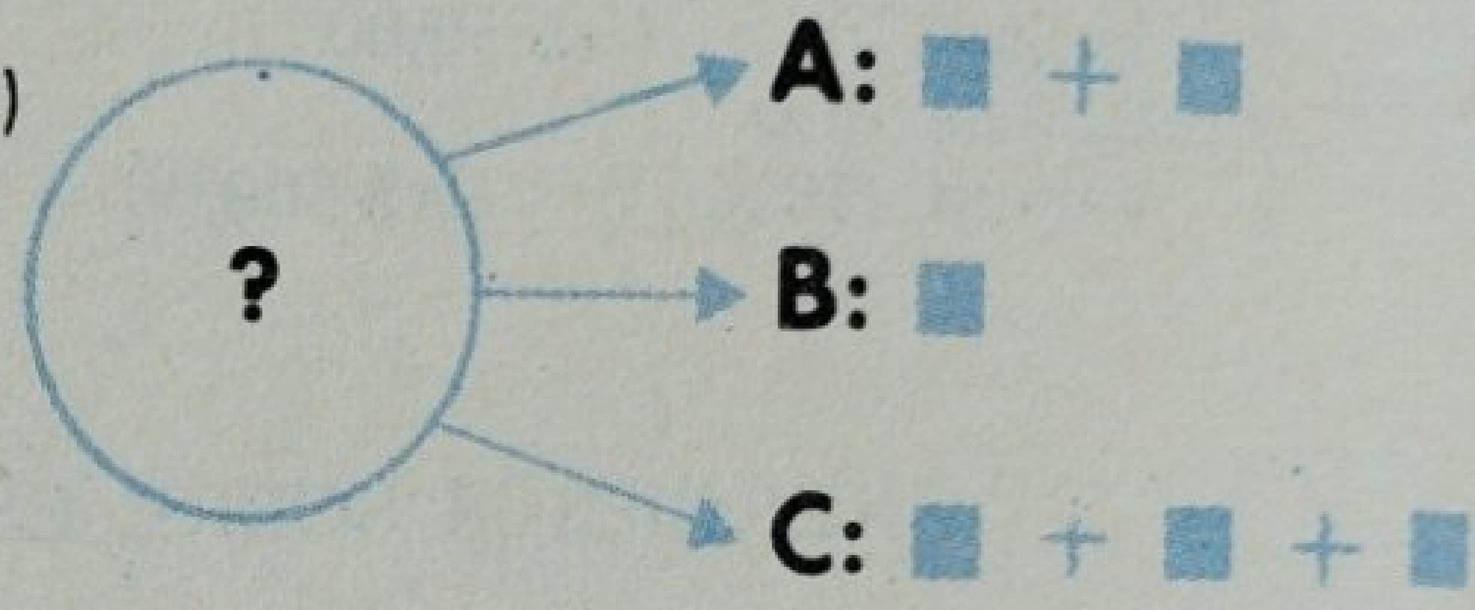


2. *"Formular"*, pelo menos um problema, que tenha a seguinte estrutura.

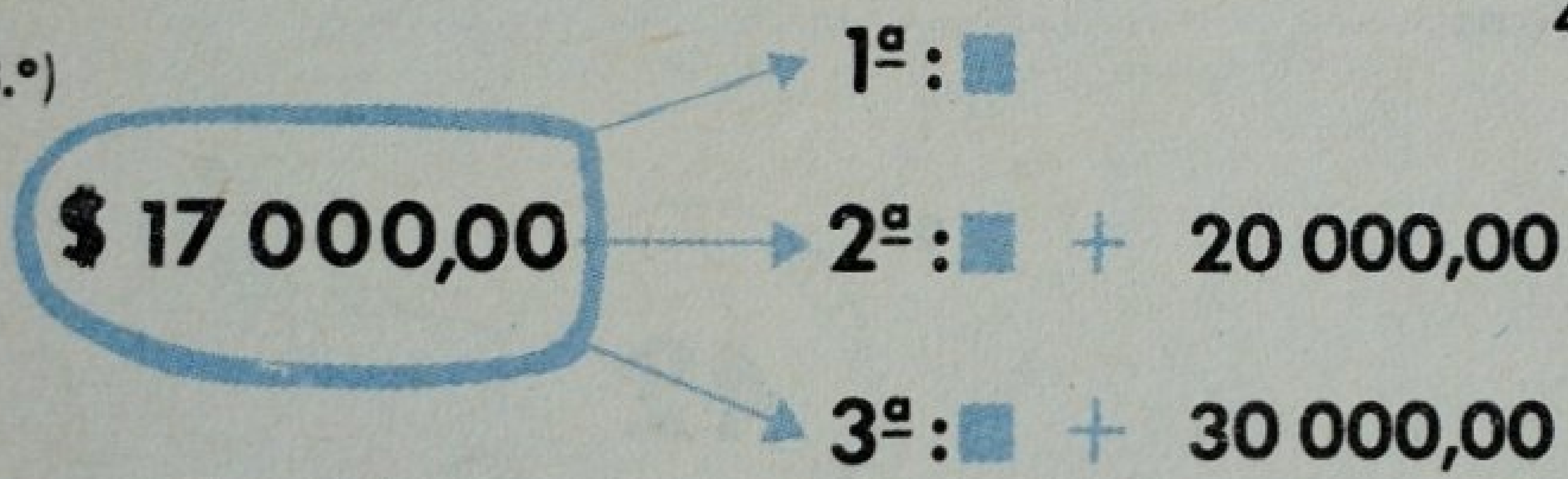
1.°)



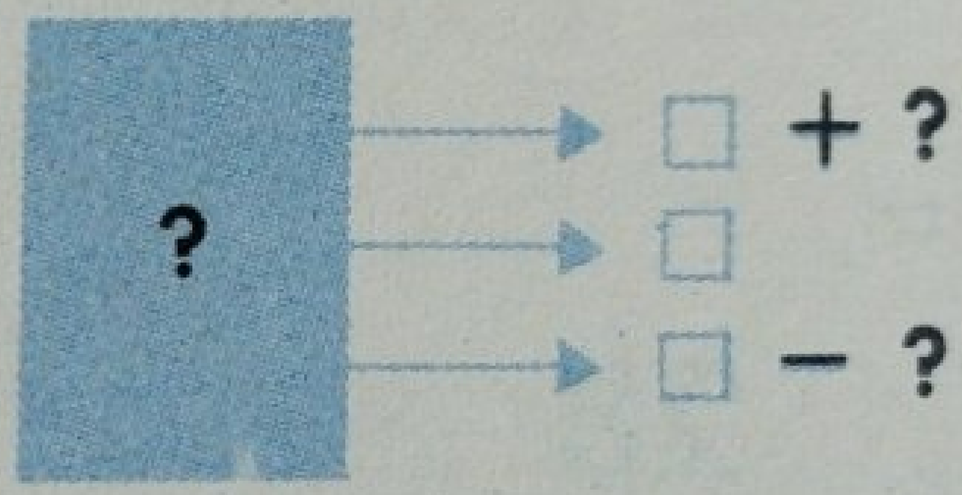
2.°)



3.°)



4.°)



PROBLEMAS PARA SEREM RESOLVIDOS — GRUPO 22

1. Paguei por 8 cadernos iguais Cr$ 960,00. Quanto pagaria por 9?

2. Se papai me der Cr$ 200,00 e eu juntar com que tenho, poderei comprar um livro de Cr$ 550,00 e ainda ficar com Cr$ 150,00. Quanto possuo?

3. Eu e João, comprando chocolate, gastamos Cr$ 360,00. O dêle custou três vêzes mais que o meu. Qual o preço pago por chocolate?

4. Pensei em um certo número. A seguir acrescentei 8 a êsse número e multipliquei o resultado por 3, obtendo então 36. Em que número pensei?

5. Agora é sua vez de pensar em um número do qual subtraiu 5 e multiplicou o resultado por 4. A seguir somou 10 no que deu e obteve 130. O número que você pensou foi ......

6. A minha lancheira custou três vêzes mais que a sua (mesmo que "triplo"...). Por ambas se pagou Cr$ 960,00. Qual o preço de cada uma?

7. Distribuir 12 novelos de lã entre Cecília e Sílvia, de modo que Sílvia receba 2 novelos *a mais*. Quantos novelos recebeu cada uma?

8. Distribuir um pacote de 30 balas para três meninos, de modo que o primeiro receba o dôbro do que vai receber o segundo e o terceiro receba o triplo do que vai receber o segundo.

9. O meu caderno custou Cr$ 45,00 *a menos* que o seu. Os dois juntos custaram Cr$ 355,00. Qual o preço de cada um?

10. Repartir 81 selos entre André, Nélson e Roberto, de modo que André receba o dôbro do que recebe Nélson e Roberto o triplo do que recebe André.

11. Distribuir 49 pregos em três caixinhas, sendo que a primeira caixinha tenha 2 pregos a mais que a segunda e esta 3 pregos a mais que a terceira.

12. Distribuir 16 bolinhas entre Paulo, Pedro e Joaquim, de modo que Pedro receba 3 a mais que Paulo e Joaquim 5 a menos que Paulo.

13. O Diretor de meu Ginásio vai distribuir um prêmio de Cr$ 14 500,00 aos alunos classificados nos dois primeiros lugares por média mais alta. A diferença entre as importâncias a serem distribuídas será de Cr$ 2 500,00. Quanto recebeu cada aluno classificado?

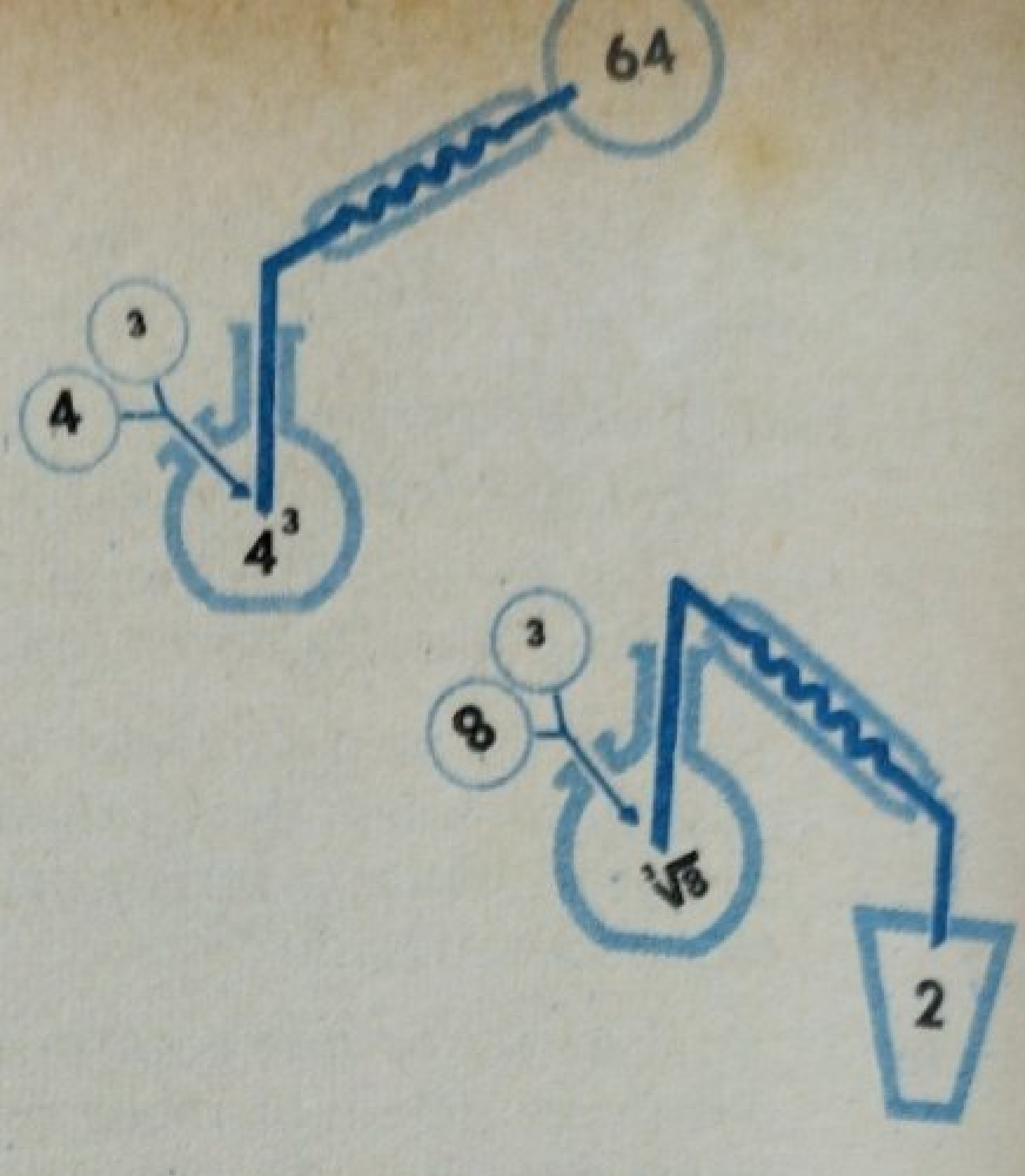
14. O total de livros que eu e meu colega possuímos é 88. A diferença entre o número dos livros dêle e os meus representa o dôbro do número de meus livros. Quantos livros possui cada um de nós?

15. Marina comprou para suas coleguinhas 5 réguas (iguais) e 3 estojos (iguais) tudo por Cr$ 1 600,00. Cada estôjo custou cinco vêzes mais que cada régua. Qual o preço pago por estôjo e por régua?

RESUMO

OPERAÇÃO	PROPRIEDADES ESTRUTURAIS OPERATÓRIAS				
	Fechamento	*Comutativa*	*Elemento Neutro*	*Associativa*	*Distributiva* (envolvendo *duas* operações)
Adição	SIM	SIM Ex.: $5+3=3+5$	SIM: 0 Ex.: $5+0=$ $=0+5=5$	SIM Ex.: $(5+3)+8=$ $=5+(3+8)$	—
Subtração	NÃO	NÃO	NÃO	NÃO	—
Multiplicação	SIM	SIM Ex.: $5\times3=3\times5$	SIM: 1 Ex.: $5\times1=$ $=1\times5=5$	SIM Ex.: $(5\times3)\times8=$ $=5\times(3\times8)$	SIM (nos *dois* sentidos) em relação a $\begin{cases}\text{adição}\\\text{subtração}\end{cases}$ Exs.: $\begin{cases}5\times(7+4)=\\=5\times7+5\times4\\5\times(7-4)=\\=5\times7-5\times4\end{cases}$
Divisão	NÃO	NÃO	NÃO	NÃO	SIM (em *um* sentido) Exs.: $\begin{cases}(12+8):4=\\=12:4+8:4\\(12-8):4=\\=12:4-8:4\end{cases}$

potenciação e radiciação



Potenciação de dois números inteiros

29. *Operação: Potenciação; resultado: Potência*

Da mesma forma como foram estudadas *somas* de parcelas *tôdas iguais*, cabe agora estudar *produtos* que apresentem *todos* os *fatôres iguais*, como por exemplo:

$$3 \times 3 \times 3 \times 3$$

Tal produto pode ser indicado, abreviadamente, escrevendo o fator igual *uma só vez* e, a seguir, um pouco mais acima à direita, em tamanho menor, o *número de fatôres iguais*:

$$3^4$$

que se lê: "três elevado à quarta potência" ou "quarta potência de três". Logo:

$$3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3$$

O fator que se repete (3, no exemplo) é chamado BASE; o número de fatôres iguais (4, no exemplo) é denominado EXPOENTE, que, também, indica o *grau* da potência. Outros exemplos:

$5^2 = 5 \times 5$ (lê-se: cinco ao *quadrado*, pelo fato da área de um quadrado ser dada pela *segunda potência* da medida de seu lado)

$4^3 = 4 \times 4 \times 4$ (lê-se: quatro ao *cubo*, em virtude do volume de um cubo ser dado pela *terceira potência* da medida de sua aresta)

$7^5 = 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7$ (lê-se: sete à quinta potência)

OBSERVAÇÃO: Quando o expoente fôr superior a 3, lemos o *ordinal feminino* correspondente, acrescentando-lhe a palavra *potência*.

De um modo geral:

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times a \times \ldots\ldots \times a}_{n \text{ fatôres}}$$

Portanto: *produtos de fatôres iguais dão lugar a uma nova operação denominada* POTENCIAÇÃO *e cujo resultado se chama* POTÊNCIA.

Erros comuns: 1. confundir *potenciação*, que é uma OPERAÇÃO com *potência*, que é um número (RESULTADO da operação);

2. confundir o *dôbro* de um número com o seu *quadrado*;
confundir o *triplo* de um número com o seu *cubo*.

Exemplos: o *dôbro de* 4 é........... $2 \times 4 = 8$
o *quadrado* de 4 é....... $4^2 = 16$
o *triplo* de 4 é........... $3 \times 4 = 12$
o *cubo* de 4 é........... $4^3 = 64$

OBSERVAÇÕES: Você pode concluir, ràpidamente, que:

$$\left.\begin{array}{lll} 0^5 & = 0 \times 0 \times 0 \times 0 \times 0 & = 0 \\ 0^3 & = 0 \times 0 \times 0 & = 0 \end{array}\right\} \textit{as potências de 0 são iguais a 0.}$$

$$\left.\begin{array}{lll} 1^4 & = 1 \times 1 \times 1 \times 1 & = 1 \\ 1^{10} & = \underbrace{1 \times 1 \ldots 1}_{10} & = 1 \end{array}\right\} \textit{as potências de 1 são iguais a 1.}$$

CASOS PARTICULARES: Pelo fato do expoente ser maior, ou no mínimo igual a 2 (pois não há multiplicação com menos de dois fatôres) *convencionou-se* que:

$\boxed{5^1 = 5}$ isto é, potência de "expoente" 1 é a *própria base*.

$\boxed{5^0 = 1}$ ou seja, potência de "expoente" 0 é o *número* 1.

Mais tarde você verá a *razão principal* dessas convenções: é que com elas continuaram válidas as *propriedades estruturais*, quando se opera com potências.

NOTA: À expressão: 0^0 não se atribui significado algum.

Potências úteis: Observe as potências de 10:

$10^1 = 10$
$10^2 = 100$
$10^3 = 1\,000$ — isto é, as potências de 10 são iguais a 1 *seguido de tantos zeros quantas são as unidades do expoente.*
$\cdot \quad \cdot$
$\cdot \quad \cdot$
$10^6 = 1\,000\,000$

As potências de 10 são cômodas para exprimirem grandes números. Por exemplo, o meridiano terrestre, que mede cêrca de 40 000 km, pode ser expresso assim:

$$40\,000 \text{ km} = 4 \times 10^4 \text{ km}$$

ou

$$4 \times 10^7 \text{ m ou } 4 \times 10^9 \text{ cm}$$

A distância da Terra ao Sol, cêrca de 150 milhões de quilômetros, pode ser escrita:

$$15 \times 10^7 \text{ km}$$

A velocidade da luz, cêrca de 300 000 quilômetros por segundo, pode ser expressa:

$$3 \times 10^5 \text{ km/s}$$

30. *Tábua operatória. Propriedades*

As *tábuas da potenciação* aparecem, freqüentemente, em tabelas de *quadrados*, *cubos*, etc..., razão por que não faremos uma tábua geral.

Treine, você mesmo, fazendo tabelas de *quadrado* e *cubo* dos dez primeiros números naturais.

Considerando o conjunto-universo dos números naturais, temos as *propriedades*:

1.ª) FECHAMENTO:

pois $\underset{\text{natural}}{2}^{\overset{\text{natural}}{3}} = \underset{\text{natural}}{8}$

2.ª) DISTRIBUTIVA em relação à *multiplicação* e à *divisão*:

$$(4 \times 3)^2 = 4^2 \times 3^2$$
$$(8 : 4)^2 = 8^2 : 4^2$$

Justifiquemos a primeira delas: $(4\times3)^2 = (4\times3)\times(4\times3)$ (definição de segunda potência)

$= (4\times4)\times(3\times3)$ (p.a.m.)

$= 4^2\times3^2$ (definição de potência)

OBSERVAÇÕES:

1.ª) *não possui* a propriedade *comutativa*, pois: $2^3 = 3^2$ é FALSA! $(8 = 9\,?)$;

2.ª) *não possui* a propriedade *associativa*, pois:

$$(2^3)^2 = 2^{(3^2)} \text{ é FALSA! } (64 = 256\,?)$$

3.ª) *não possui* a propriedade *distributiva* em relação à *adição* e à *subtração:*

De fato: $(4+3)^2 = 4^2 + 3^2$ é FALSA! $(49 = 25\,?)$

$(4-3)^2 = 4^2 - 3^2$ é FALSA! $(1 = 7\,?)$

Associação da Potenciação com Multiplicações e Divisões

31. *Regras das operações sôbre potências de mesma base*

1.ª) O *produto* de potências indicadas de mesma base é uma potência de mesma base que tem por expoente a *soma* dos expoentes. Assim, por exemplo:

$$4^3\times4^2 = 4^{3+2} = 4^5$$

pois, $4^3\times4^2 = \underbrace{4\times4\times4}_{3\text{ fat.}}\times\underbrace{4\times4}_{2\text{ fat.}} = 4^5$

De um modo geral: $\boxed{a^m\times a^n = a^{m+n}}$

2.ª) O *quociente* de duas potências indicadas de mesma base (com o expoente da primeira maior ou igual ao expoente da segunda) é uma potência de mesma base que tem por expoente a *diferença* dos expoentes. Exemplo:

$$2^5 : 2^3 = 2^{5-3} = 2^2$$

pois, $2^2\times2^3 = 2^5$ (operação inversa da multiplicação)

De um modo geral: $\boxed{a^m : a^n = a^{m-n}\ (m \geqslant n)}$

Se as potências têm o mesmo expoente:

$$3^2 : 3^2 = 3^{2-2} = 3^0 = 1$$

Observe, agora, como a convenção feita de que $3^0 = 1$, satisfaz o resultado da divisão das potências efetuadas:

$$3^2 : 3^2 = 9 : 9 = 1$$

3.ª) A *potência* de uma potência indicada, de certa base, é igual a uma potência com essa mesma base e cujo expoente é o *produto* dos expoentes dados. Por exemplo:

$(2^3)^2 = 2^{3\times 2} = 2^6$

pois, $(2^3)^2 = (2^3)\times(2^3)$ (definição de segunda potência)

$(2^3)^2 = 2^6$ (1ª Regra)

De um modo geral: $[(a)^n]^m = a^{n \cdot m}$

32. *Expressões numéricas contendo também potências*

No cálculo dessas expressões efetuam-se em *primeiro lugar* as *potências* e a seguir obedece-se à ordem já estabelecida para as outras operações. Exemplos:

Calcular o valor das seguintes expressões:

1.ª) $4+3^2\times 5$

Temos: $4+3^2\times 5 =$
$= 4+9\times 5 =$
$= 4+45 = 49$

2.ª) $\{5+[4^3 : (3^2-1)+1^5\times 3]\} : (6-2)^2$

Temos: $\{5+[64 : (9-1)+1\times 3]\} : 4^2$
$= \{5+[64 : 8+1\times 3]\} : 16 =$
$= \{5+[8+3]\} : 16 =$
$= \{5+11\} : 16 =$
$= 16 : 16 = 1$

EXERCICIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 23

1. Na igualdade: $2^3 = 8$
   1.º) Qual a *operação* efetuada?
   2.º) Qual o nome do *resultado*?
2. Escrever, sob forma de produto (fatôres iguais), as seguintes potências:
   1.ª) 2^3 2.ª) 8^2 3.ª) 1^5 4.ª) 10^4 5.ª) a^3 6.ª) a^n
3. Escrever, sob forma de potências, os seguintes produtos:
   1.º) $5\times5\times5$ 2.º) $9\times9\times9\times9\times9\times9\times9$ 3.º) 1×1 4.º) 8 5.º) $a\times a$ 6.º) 1
   7.º) $3\times3\times3\times2\times2$ 8.º) $8\times8\times5\times5\times5\times5\times11\times11\times11$
4. Calcular o valor das potências:
   1^{30}; 2^3; 3^2; 4^4; 6^2; 7^1; 8^0; 9^2; 10^6

5. Escrever as potências sucessivas de 10:

$10^2 = \ldots$ $10^3 = \ldots$ $10^4 = \ldots$ $10^5 = \ldots$

Como seria $10^n = \ldots\ldots$?

6. Escrever o número 3 000 000 000 com auxílio de uma potência de 10.

7. Aplicar a *propriedade distributiva* em:

1.º) $(2 \times 5)^3$ 2.º) $(3 \times 7 \times 8)^4$ 3.º) $(2 \times 5 \times 7 \times 11)^2$

8. Calcular: 5^2, 3^2, $(5+3)^2$ e $(5-3)^2$ e verifique que o *quadrado da soma* ou da *diferença* dos números 5 e 3 *não é igual* à soma ou à diferença dos *quadrados dêsses números*.

9. Efetuar: 1.º) $2^3 \times 2^2$ 2.º) $3 \times 3^2 \times 3^5$ 3.º) $6^3 \times 6 \times 6^2 \times 6^5$ 4.º) $a^p \times a^3$
5.º) $x^m \times x$ 6.º) $b^n \times b^m \times b^p$ 7.º) $8^3 : 8^2$ 8.º) $5^4 : 5^2$
9.º) $2^5 : 2^5$ 10.º) $a^p : a^q$ $(p \geq q)$

10. Calcular: 1.º) $(3^2)^4$ 2.º) $(3^4)^2$ 3.º) 2^{3^2}

11. Mostrar que: 1.º) 3^4 é diferente de 4^3
2.º) $(3^2)^4$ é diferente de $3^{(2^4)}$

12. Aplicar as regras de cálculo de potências em:

1.º) $(2^2 \times 3 \times 4^3)^2$ 2.º) $(2^3 \times 3^4)^2 \times (3^2 \times 2)^3$ 3.º) $(4^3 \times 4^2) : (4^2 \times 4)$

13. Calcular o *valor* das expressões (ou o numeral mais simples):

1.ª) $2^5 - 3^2 \times 1^8$ 2.ª) $(3+4+5)^2$ 3.ª) $(5+2)^2 + 3^4 \times 2^1$

14. Idem: $[3^4 : (5-2)^3 \times [15 - 2 \times (9 - 2^3)] - 6^2] : 3^0$

15. Idem: $\{(7^2 - 5 \times 3^2 + 1)^3 : [(2^3 - 6)^2 + 7 \times 3]\}^2 : [2^2 + (5-4)^3]$

Radiciação de números inteiros

33. *Operação inversa da potenciação: radiciação, resultado: raiz*

Esta é uma operação *nova* para você. Embora "sentida" nos casos simples (raiz quadrada, por exemplo), desde a Escola Primária, quando se quer saber "qual o número que multiplicado por si mesmo resulta um determinado número", não foi até agora ensinada, para essa nova operação, nenhuma *técnica de cálculo*.

Lembre-se que isso não ocorreu com as operações já estudadas (adição, subtração, ...) para as quais você trazia uma técnica de cálculo bem desenvolvida.

Sejam, por exemplo, os números 4 e 2. Considerando o primeiro dêles como *base* e o segundo como *expoente*, obtemos a *potência* (16):

$$4^2 = 16$$

graças à operação *potenciação* (que "mandava" multiplicar 4 por 4)

Qual será a *operação inversa* da potenciação?

Será a que permitir encontrar a *base* (4) conhecidos a *potência* (16) e o *expoente* (2), não é?

Como exemplo "popular" você sabe que a área de um quadrado é dada pelo *quadrado da medida de seu lado*, isto é, se o lado tiver 4m (fig. 30), então a área será:

$$4\text{m} \times 4\text{m} = (4\text{m})^2 = 16\text{m}^2$$

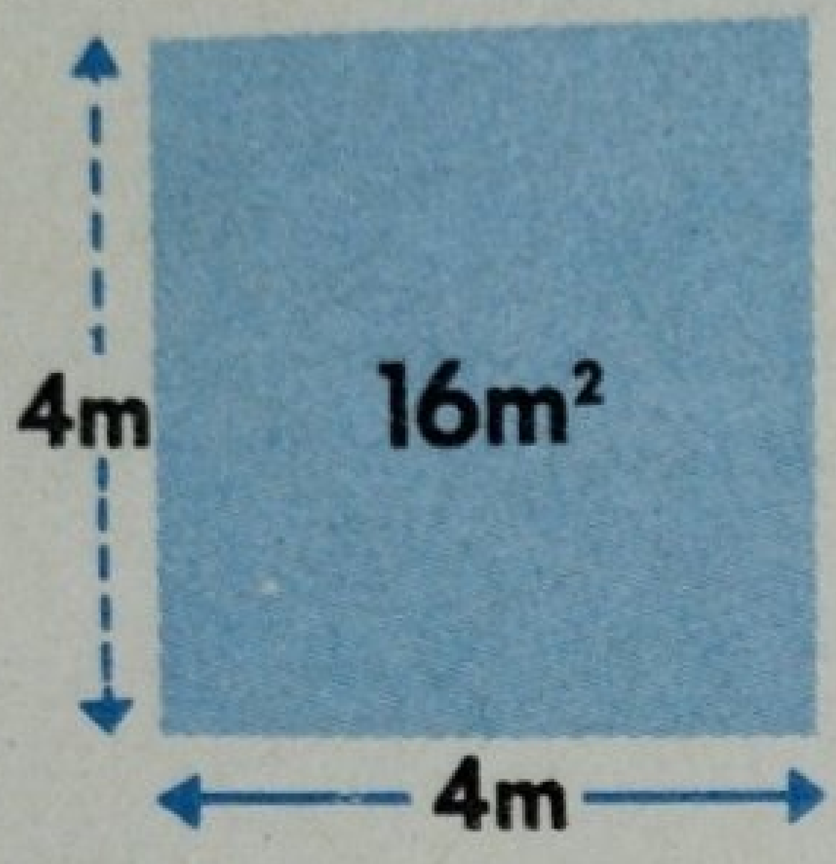


FIG. 30

Naturalmente, nasce o *problema inverso*: sabendo-se que 16m^2 é a área de um quadrado, qual é a medida do lado dêsse quadrado?

O número que vai dar essa medida — que sabemos ser 4 (pois $4 \times 4 = 4^2 = 16$) — chama-se *raiz quadrada* de 16 — e a operação que permite determiná-lo chama-se *radiciação*.

Indicação: $\sqrt[2]{16} = 4$

onde
- $\sqrt[2]{\ }$ (lê-se: "raiz quadrada") é o *radical* de índice 2 (normalmente dispensa-se escrever o 2)
- 16 é o *radicando*
- 4 é a *raiz quadrada* de 16

São, pois *equivalentes* as expressões que traduzem as operações que dão: $4^2 = 16$ (operação: "elevar ao quadrado") e $\sqrt{16} = 4$ (operação inversa: extração da raiz quadrada), isto é:

$$4^2 = 16 \Longleftrightarrow \sqrt{16} = 4$$

Outros exemplos:

$2^3 = 8 \Longleftrightarrow \sqrt[3]{8} = 2$ (lê-se: "raiz cúbica de oito")

$1^5 = 1 \Longleftrightarrow \sqrt[5]{1} = 1$ (lê-se: "raiz quinta de um")

De um modo geral:

$x^n = a \Longleftrightarrow \sqrt[n]{a} = x$ (lê-se: "raiz de ordem n de a")

Erros comuns:

1. Confundir *radiciação*, que é uma *operação*, com *raiz* que é o *resultado* dessa operação.
2. Confundir a operação "extração da raiz quadrada" que é *inversa*(*) da operação "elevar ao quadrado", com a *divisão por* 2. Assim, por exemplo, *não é dividindo* 16 por 2 que você encontrará a medida do lado do quadrado da fig. 30, pois $16 : 2 = 8$ e $8 \times 8 = 8^2 = 64$ está muito longe de 16....

(*) Com relação à *potenciação* podemos considerar uma *outra* operação inversa: conhecidas a *potência* e a *base*, determinar o *expoente*. Agora não é mais a *radiciação* que resolve e sim a *logaritmação*, operação que será estudada no 2.º ciclo.

34. Técnica de cálculo da radiciação; tábua operatória

A *técnica de cálculo* empregada na operação *radiciação* apresenta dificuldades que aumentam de acôrdo com o grau da potência (representado pelo expoente).

No Capítulo seguinte você aprenderá um *processo geral* e simples para efetuar a operação *radiciação*, baseado na fatoração completa de um número, a fim de destacá-la como operação inversa da potenciação.

Isto será feito sempre que a operação *radiciação* seja *possível* no conjunto-universo onde se trabalha, como ocorreu com as operações *subtração* (inversa da *adição*) e divisão (inversa da multiplicação).

Você já deve ter percebido (com o "treino" que já adquiriu com as outras operações!) que a *radiciação*:

1.º) *não possui* a propriedade do *fechamento*, pois a raiz de ordem *qualquer* de um número natural *nem sempre* é um número natural.
Ex.: $\sqrt[3]{5} = ?$

2.º) *não possui* a propriedade *comutativa*, pois a *ordem* do índice e do número de que se extrai a raiz, agora interessa à operação.
Ex.:

$$\sqrt[3]{8} = \sqrt[8]{3} \text{ é FALSA!}$$

Como dentro da *radiciação*, a extração da raiz quadrada é a operação mais usual no Ginásio, o seu estudo merecerá *maior destaque*, incluindo técnica de cálculo, bem útil para as aplicações que você tiver que efetuar.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 24

1. Na igualdade: $\sqrt{25} = 5$:
   1.º) Qual a *operação* efetuada?
   2.º) Qual o nome do *resultado*?
   3.º) Qual a *potenciação* correspondente?
2. *a*) Qual a operação inversa da operação "elevar ao quadrado"?
   b) Idem, da operação "elevar ao cubo"?

Preencha os claros das seguintes *equivalências:*

3. $3^2 = 9 \iff \sqrt{\ldots} = \ldots$
4. $4^3 = 64 \iff \sqrt[3]{\ldots} = 4$
5. $1^8 = 1 \iff \sqrt{\ldots} = 1$
6. $\square^* = \triangle \iff \sqrt[*]{\ldots} = \ldots$
7. $\sqrt[3]{27} = 3 \iff 3^{\ldots} = \ldots$
8. $\sqrt[5]{32} = 2 \iff \ldots^{\ldots} = 32$
9. $\sqrt[*]{\square} = \triangle \iff \triangle^{\ldots} = \ldots$
10. O conjunto dos números naturais é *fechado* em relação à operação *potenciação*? Por quê? E, em relação à operação *radiciação*? Por quê?

divisibilidade

número um, números primos
números compostos

fatoração completa

técnica operatória da radiciação
raiz quadrada aproximada

operações: m.d.c. e m.m.c.

2

20 : 5

divisibilidade

1. *Múltiplos e divisores; relações.*

Um número é *divisível* por outro quando a sua divisão por êsse outro *é exata*. Exemplo:

20 é divisível por 5, pois, $20 : 5 = 4$

20 é divisível por 4, pois, $20 : 4 = 5$

e

Se um número é *divisível* por outro, diz-se também que êle é *múltiplo* dêsse outro (que, aliás, é uma expressão já estudada por você); o outro passa a ser seu *divisor* ou submúltiplo. Assim, por exemplo, de:

$$\boxed{20 : 5 = 4}$$

temos que:

$\boxed{20}$ é *divisível por* 5 (e por 4) ou *múltiplo de* 5 (e de 4)

$\boxed{5}$ é *divisor de* 20 ou *submúltiplo de* 20

Você também pode ouvir a expressão (correta): 5 (ou 4) *divide* 20. Observe, agora, que:

múltiplo e divisor sempre andam juntos!

pois, se o primeiro número é *múltiplo* (ou divisível) do segundo, êste é *divisor* (ou submúltiplo) do primeiro. Êste fato permite dizer que no *conjunto dos números inteiros* a relação: "*ser divisível por*" ou sua *inversa* "*ser divisor de*" são relações de ordem, valendo, pois, a propriedade *transitiva*. Exemplo:

SE 20 é *divisível* por 10 e 10 é *divisível* por 5 ENTÃO 20 é *divisível* por 5.

Outro fato importante que você deve guardar é que:

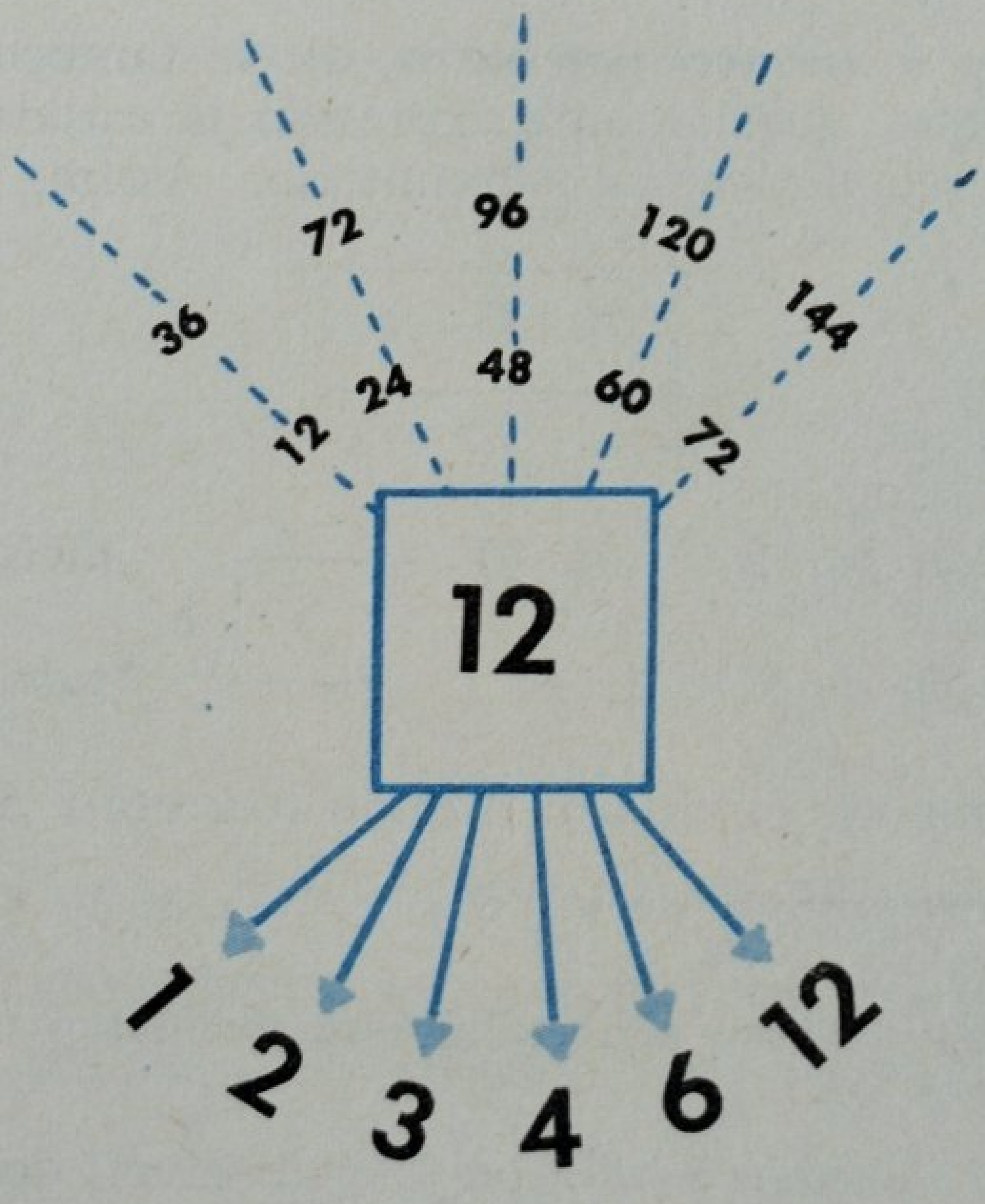
um número tem um conjunto infinito de múltiplos e um conjunto finito de divisores

Seja, por exemplo, o número 12, que tem os seguintes conjuntos de *múltiplos* e *divisores*, respectivamente:

$\boxed{12}$ ↗ *múltiplos*: {12, 24, 36, 48, 69, 72. . . . .} (conjunto infinito)
↘ *divisores*: {1, 2, 3, 4, 6, 12} (conjunto finito)

Por razões, que mais tarde você perceberá, não foi levado em conta, agora, como múltiplo de 12, o 0 (lembre-se que: $12 \times 0 = 0$).

Aliás, em tôda a divisibilidade, o 0 e o 1 desempenham papéis especiais: enquanto o 0 *é múltiplo de todos os números naturais* o 1 *é divisor de todos os números inteiros*!



Novos Símbolos: $\in$, $\notin$, $\supset$, $\subset$, $\emptyset$.

Antes que você relembre as técnicas operatórias da *divisibilidade*, convém ampliar a sua "linguagem" sôbre conjuntos, aprendendo *novos símbolos* que, agora, FACILITARÃO o estudo dos *divisores* e *múltiplos* de um número.

Considere o seu já conhecido *conjunto-universo dos números inteiros*

$$I = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \ldots\}.$$

Quais são, por exemplo, os *divisores de* 8? Fácil é ver que formam um conjunto (finito!):

$$\text{divisores de } 8\text{: } \{1, 2, 4, 8\}$$

Para você dizer que o 2 pertence a êsse conjunto, pode usar o símbolo $\in$ (lê-se: "pertence") e para dizer que o 3 não pertence, o símbolo $\notin$ (lê-se "não pertence"). Assim, temos:

$$2 \in \{1, 2, 4, 8\} \quad \text{e} \quad 6 \notin \{1, 2, 4, 8\}$$

Sejam agora os *divisores de* ~~12~~ 16, isto é:

$$\text{divisores de } \cancel{12}\ 16\text{: } \{1, 2, \cancel{3}, 4, \cancel{6}\ 8, \cancel{12}\ 16\}, \text{ temos:}$$

$$5 \notin \{1, 2, \cancel{3}, 4, \cancel{6}\ 8, \cancel{12}\ 16\} \quad \text{e} \quad \cancel{6}\ 8 \in \{1, 2, \cancel{3}, 4, \cancel{6}\ 8, \cancel{12}\ 16\}$$

Preste atenção agora: você está percebendo que o conjunto dos divisores de ~~12~~ 16 tem mais elementos que o conjunto dos divisores de 8. Diz-se então que o conjunto dos divisores de ~~12~~ 16 contém o conjunto dos divisores de 8. Êste por sua vez está contido no conjunto dos divisores de ~~12~~ 16. Os símbolos que traduzem êstes fatos são: $\supset$ (lê-se: "contém") e $\subset$ (lê-se: "contido")

Assim (fig. 31), temos:

$$\{1, 2, \cancel{3}, 4, \cancel{6}\ 8, \cancel{12}\ 16\} \supset \{1, 2, 4, 8\}$$

e

$$\{1, 2, 4, 8\} \subset \{1, 2, \cancel{3}, 4, \cancel{6}\ 8, \cancel{12}\ 16\}$$

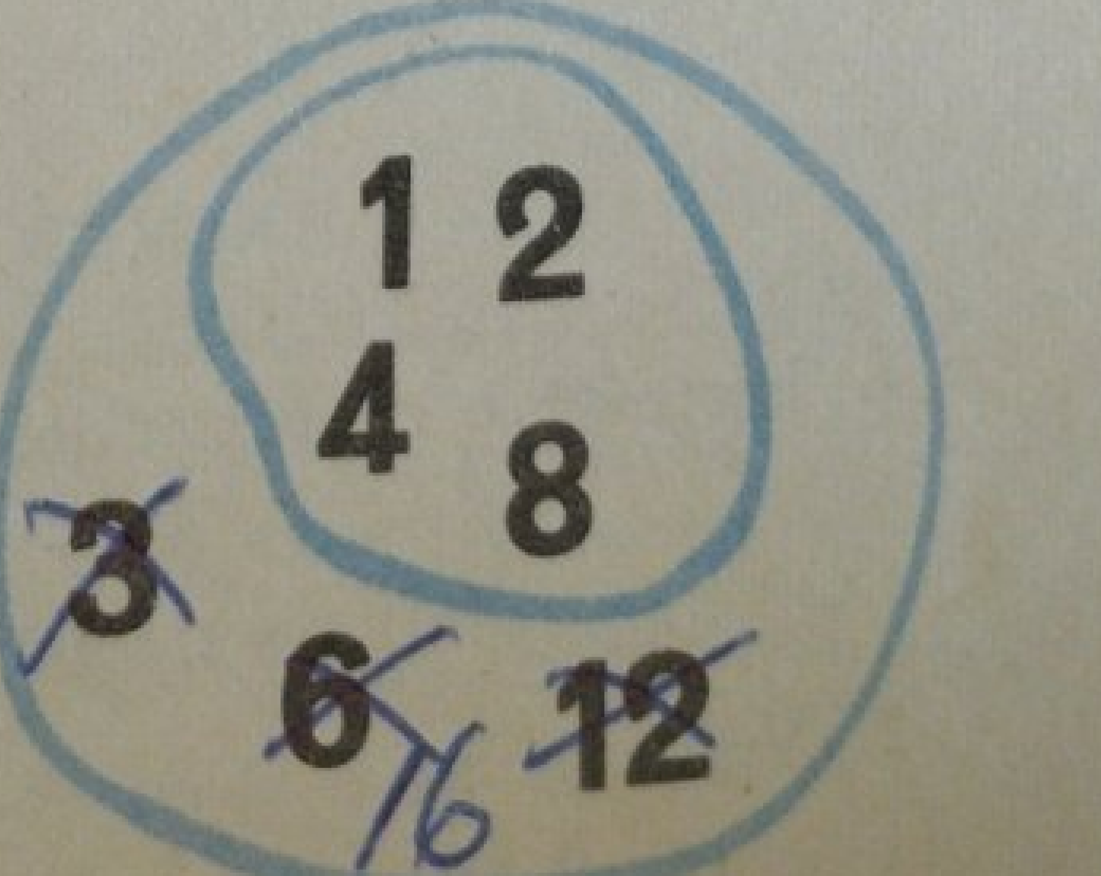


FIG. 31

Com relação aos *múltiplos* de um número procedemos da mesma forma, usando porém como conjunto-universo o conjunto dos *números naturais*:

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \ldots\}$$

para evitar de escrever sempre o 0, que é múltiplo de *todos os números*. Temos assim:

múltiplos de 3: $\{3, 6, 9, 12, 15, 18, \ldots\}$
múltiplos de 6: $\{6, 12, 18, 24, 30, 36, \ldots\}$

onde, por exemplo:

$6 \in \{3, 6, 9, 12, 15, 18, \ldots\}$ e $14 \notin \{3, 6, 9, 12, 15, 18, \ldots\}$
$6 \in \{6, 12, 18, 24, 36, \ldots\}$ e $20 \notin \{6, 12, 18, 24, 36, \ldots\}$

como também:

$\{3, 6, 9, 12, 15, 18, \ldots\} \supset \{6, 12, 18, 24, 30, 36, \ldots\}$
$\{6, 12, 18, 24, 30, 36, \ldots\} \subset \{3, 6, 9, 12, 15, 18, \ldots\}$

NOTA IMPORTANTE: Os símbolos $\in$ e $\notin$ relacionam *elementos* de um conjunto com o *conjunto;*

Os símbolos $\subset$ e $\supset$ relacionam *conjuntos* com *conjuntos.*

Exemplos:

$3 \in \{3, 5\}$ e não $3 \subset \{3, 5\}$
$\{3, 5\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e não $\{3, 5\} \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$

O conjunto vazio: $\{\ \}$ pode ser também representado pelo símbolo: ϕ. Logo: $\{\ \} = \phi$.

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO — GRUPO 25

1. Escrever o conjunto dos divisores dos seguintes números: 4, 18, 7 e 1. Temos:
   divisores de 4 : $\{1, 2, 4\}$
   divisores de 18 : $\{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$
   divisores de 7 : $\{1, 7\}$
   divisores de 1 : $\{1\}$
2. Verifique se é *V* ou *F*, as seguintes sentenças:
   1.ª) 9 *pertence ao conjunto dos divisores de* 12.
   Como: divisores de 12: $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$, temos que $9 \notin \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ e portanto a sentença é *F;*

2.ª) *O conjunto dos divisores de 9 está contido no conjunto dos divisores de 18.*
Fácil é ver que: $\{1, 3, 9\} \subset \{1, 3, 9, 18\}$ Logo, a sentença é V

3.ª) $0 \in \{0, 1, 2, 3\}$ V 4.ª) $\{0, 1\} \supset \{0, 1, 2, 3\}$ F 5.ª) $\{0, 1\} \subset \{0, 1, 2, 3\}$ V

6.ª) É vazio *o conjunto dos múltiplos de 4 compreendidos entre 9 e 11.*
Ora, o único inteiro compreendido entre 9 e 11 é 10, que não é múltiplo de 4, e portanto, o conjunto é ϕ. Sentença V

3. *O elemento neutro da adição pertence ao conjunto dos números inteiros?*
Sim, pois, o 0, que é o *elemento neutro* da adição, pertence ao conjunto:

$$I = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots\}$$

4. *O conjunto das vogais está* CONTIDO *no conjunto das letras de nosso alfabeto?*
Sim, pois como é fácil perceber:
$\{a, e, i, o, u\} \subset \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, x, z\}$

5. Usar o *símbolo* conveniente para exprimir as relações entre os seguintes conjuntos:
(1.º) $\{2, 3, 4, 5\}$ e $\{1, 2, 3\}$ (2.º) $\{m, n\}$ e $\{m, n, p, q\}$ (3.º) a e $\{a, b, c\}$
(4.º) a e $\{l, m, n\}$ (5.º) $\{\triangle, \square, \triangledown\}$ e $\{\triangle, \square\}$ (6.º) $\{\triangle, \square, \triangledown\}$ e $\{\triangle, \square, \triangledown, \star\}$
Temos: 1.º) $\supset$ 2.º) $\subset$ 3.º) $\in$ 4.º) $\notin$ 5.º) $\supset$ 6.º) $\subset$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 26

1. Escrever o conjunto dos divisores dos seguintes números: 5, 15, 12, 24 e 1.

2. Escrever V ou F, ao lado das seguintes sentenças, conforme seja verdadeira ou falsa:
1.ª) $9 \in \{1, 3, 5, 11\}$ 2.ª) $5 \notin \{2, 4, 6, 8, 10\}$ 3.ª) $\{2, 4\} \supset \{1, 2, 3, 4\}$
4.ª) $\{a, e, i, o, u\} \subset \{a, b, c, d, a, e, i, o, u\}$ 5.ª) $0 \in \{1, 2, 3\}$
6.ª) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6 \ldots\} \supset \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \ldots\}$ 7.ª) $\{2, 4, 6, 8\} = \{2, 4, 6, 8\}$
8.ª) $\{\ \} \subset \{1, 2, 3\}$ 9.ª) $\{0\} \in \{0, 1, 2\}$ 10.ª) $\{0\} \subset \{0, 1, 2\}$

3. O número 12 pertence ao conjunto dos *números naturais?* Escreva com símbolos.

4. O número 12 pertence ao conjunto dos *números inteiros?* Idem.

5. 6 pertence ao conjunto dos divisores de 20? Responda com símbolos essa sentença.

6. Escrever o conjunto dos múltiplos de 5 compreendidos entre 6 e 9.

7. O *elemento neutro* da multiplicação pertence ao conjunto dos números naturais? Por que?

8. O conjunto dos alunos da 1.ª Série "A" está *contido* no conjunto dos alunos do Ginásio? Por que?

9. Escrever o conjunto dos múltiplos de 3 compreendidos entre 10 e 22.

10. Usar o símbolo conveniente para exprimir as relações entre os seguintes conjuntos:
1.ª) $\{0, 1, 2\}$ e $\{0, 1, 2, 3\}$ 2.ª) 0 e $\{0, 1, 2, 3\}$ 3.ª) 4 e $\{0, 1, 2, 3\}$
4.ª) $\{a, b, c\}$ e $\{a, b, c\}$ 5.ª) l e $\{l, m\}$ 6.ª) $\{l\}$ e $\{l, m\}$ 7.ª) $\{\ \}$ e $\{a, b\}$
8.ª) $\triangle$ e $\{\triangle, \square\}$ 9.ª) $\{\triangle\}$ e $\{\triangle, \square\}$ 10.ª) $\{\triangle, \square, \triangledown, \star\}$ e $\{\triangle, \square, \triangledown\}$
11.ª) $\{\ \}$ e ϕ 12.ª) $\{\star\}$ e $\{\star\}$

2. *Técnicas*

A verificação de que um número é *divisível* por outro é feita, geralmente, por intermédio da *divisão;* se o resto fôr zero, o número será divisível pelo outro. Existem, porém, *regras especiais* que permitem verificar se um número é divisível ou não por outro, *sem efetuar a divisão*, bem como determinar o valor do *resto*, caso contrário.

Tais regras constituem os CRITÉRIOS OU CARACTERES DE DIVISIBILIDADE:

1.º) DIVISIBILIDADE POR 2:

Um número é divisível por 2 quando é par.

Exemplos:

358 é *divisível por* 2 porque é *par*

78 391 *não é divisível por* 2 por *não ser par*

De fato, todo número par é múltiplo de 2 (Cap. I, 1.ª parte n.º 17) e portanto, divisível por 2.

2.º) DIVISIBILIDADE POR 3:

Um número é divisível por 3 quando a soma dos valôres absolutos de seus algarismos fôr divisível por 3.

Exemplos:

7 536 é divisível por 3 porque a soma: $7+5+3+6 = 21$ é divisível por 3;

217 não é divisível por 3, pois, a soma: $2+1+7 = 10$ não o é.

Com efeito, vamos ver o que ocorre quando decompomos um número qualquer em suas unidades. Seja, por exemplo, o número 7 536. Temos:

$$7\,536 = 7\,000 + 500 + 30 + 6 \quad \text{pela p.d.a.}$$

ou

$$7\,536 = 7 \times 1\,000 + 5 \times 100 + 3 \times 10 + 6$$

Lembrando que:

$$\left.\begin{array}{r} 10 = 9 + 1 \\ 100 = 99 + 1 \\ 1\,000 = 999 + 1 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{array}\right\} \text{m. } 9 + 1 \text{ (indica m. 9 que uma das parcelas é } \textit{sempre} \text{ múltipla de 9)}$$

vem:

$$\begin{array}{rcll} 7\,536 & = & 7\times(\text{m}.9+1) + 5\times(\text{m}.9+1) + 3\times(\text{m}.9+1) + 6 & \\ & = & 7\times\text{m}.9+7\times1+5\times\text{m}.9+5\times1+3\times\text{m}.9+3\times1+6 & \text{p.d.m. (a)} \\ & = & \text{m}.9 + 7 + \text{m}.9 + 5 + \text{m}.9 + 3 + 6 & 7\times\text{m}.9 \text{ ainda é m}.9 \\ & = & (\text{m}.9+\text{m}.9+\text{m}.9) + (7+5+3+6) & \text{p.a.a} \\ 7\,536 & = & \text{m}.9 + (7+5+3+6) & \text{a soma de m}.9 \text{ ainda é m}.9 \end{array}$$

Logo: 7 536 (ou qualquer outro número) representa uma *soma* de duas parcelas das quais a primeira é *sempre divisível por* 9 (e portanto por 3, de acôrdo com a propriedade transitiva, n. 1) e a segunda é constituída pela soma dos valôres absolutos (7+5+3+6) de seus algarismos. Se esta segunda parcela fôr divisível por 3, então o número dado 7 536 (que é soma de duas parcelas divisíveis por 3) também será (Cap. II, 1.ª parte, n. 26).

3.º) Divisibilidade por 4:

Um número é divisível por 4 quando o número formado pelos seus dois últimos algarismos da direita fôr divisível por 4.

Exemplos:

1 964 é divisível por 4 porque 64, que é o número formado pelos seus *dois últimos* algarismos da direita, é divisível por 4 (como é fácil de se ver!)

873 215 não é divisível por 4, pois 15 não o é.

Realmente, todo número de mais de dois algarismos (por exemplo, 1 964) representa sempre a *soma* de duas parcelas assim:

$$1\,964 = 1\,900 + 64$$

isto é, a primeira delas é *múltipla* de 100 (termina em dois zeros).

A primeira parcela é sempre divisível por 100 (e, portanto, por 4 e 25, que são divisores de 100) e a segunda parcela é constituída pelos *dois últimos algarismos* da direita. Como a primeira delas é sempre divisível por 4, se a segunda parcela fôr divisível por 4, o número dado também será.

4.º) Divisibilidade por 5:

Um número é divisível por 5 quando termina em 0 ou 5.

Exemplos:

8 715 é divisível por 5 porque termina em 5;
432 540 também é, por que termina em 0;
92 387 não é divisível por 5 porque não termina em 5 ou 0.

A justificação dêsse critério é imediata, pois, todo número de mais de um algarismo (por exemplo: 8 175) pode ser decomposto em uma *soma* de duas parcelas, *das quais a primeira é sempre divisível por* 10, e portanto por 2 e 5 (seus divisores) e a segunda parcela é constituída pelo último algarismo da direita do número dado:

$$8\,715 = 8\,710 + 5$$

Se esta segunda parcela fôr divisível por 5 o número dado (que representa a *soma*) também será. Ora, os números de um algarismo divisíveis por 5 são só o 0 e o 5. Daí o critério.

5.º) Divisibilidade por 6:

Um número é divisível por 6 quando fôr divisível por 2 e por 3.

Exemplos:

36 384 é divisível por 6 porque é divisível por 2 (par) e por 3 (soma: 24);
1 412 não é divisível por 6 porque, apesar de par, não é divisível por 3 (soma: 8).

Êste critério, embora enunciado agora, por questão de *ordem*, será justificado depois.

6º.) Divisibilidade por 7: (Critério prático e rápido):

Um número é divisível por 7 quando: separando o primeiro algarismo da direita, multiplicando-o por 2 e subtraindo o produto obtido do que restou à esquerda, e assim sucessivamente, resultar 0 ou 7.

Observação: Se o produto do primeiro algarismo da direita por 2 não puder ser subtraído do que restou à esquerda, então trocam-se os têrmos da diferença.

Exemplos:

1.º) 588 *é divisível* por 7, pois:

$$\begin{array}{rl} 58'8 & \quad 8 \times 2 = 16 \\ -16 & \\ \hline 4'2 & \quad 2 \times 2 = 4 \\ -4 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

2.º) 18 351 *não* é divisível por 7, pois:

$$\begin{array}{rl}
18\,35'1 & \quad 1\times 2 = 2 \\
\underline{-2} & \\
1\,83'3 & \quad 3\times 2 = 6 \\
\underline{-6} & \\
17'7 & \quad 7\times 2 = 14 \\
\underline{-14} & \\
3 &
\end{array}$$

3.º) 512 099 *é divisível* por 7, porque:

$$\begin{array}{rl}
512\,09'9 & \quad 9\times 2 = 18 \\
\underline{-18} & \\
5119'1 & \quad 1\times 2 = 2 \\
\underline{-2} & \\
511'7 & \quad 7\times 2 = 14 \\
\underline{-14} & \\
49'7 & \quad 7\times 2 = 14 \\
\underline{-14} & \\
3'5 & \quad 5\times 2 = 10 \\
\underline{10} & \\
7 &
\end{array}$$

7.º) DIVISIBILIDADE POR 8:

Um número é divisível por 8 quando o número formado pelos seus TRÊS ÚLTIMOS algarismos da direita fôr divisível por 8.

Exemplos:

2 782 104 é divisível por 8 porque 104 (que é o número formado pelos *três últimos algarismos*) é divisível por 8;

847 417 não é divisível por 8, pois, 417 não o é.

De fato, todo número, de mais de três algarismos, é uma *soma* de duas parcelas, a primeira das quais é sempre divisível por 1 000, e portanto por 8 e 125, e a segunda parcela constituída pelos *três últimos algarismos*. Se esta segunda parcela fôr divisível por 8 o número dado também o será. Com o exemplo acima, vem:

$$2\,782\,104 = 2\,782\,000 + 104$$

e como 104 é divisível por 8, o número 2 782 104 também o é.

8.º) DIVISIBILIDADE POR 9:

Um número é divisível por 9 quando a SOMA dos valôres absolutos de seus algarismos fôr divisível por 9.

Exemplos:

27 738 é divisível por 9 porque a soma: $2+7+7+3+8=27$ o é;
44 319 não é divisível por 9, pois, a soma: $4+4+3+1+9=21$ não o é.

A justificativa é análoga à já estudada no caso da divisibilidade por 3.

9.º) DIVISIBILIDADE POR 10:

Um número é divisível por 10 quando termina em zero.

Exemplos:

19 230 é divisível por 10 porque termina em 0;
736 238 não é divisível por 10 porque não termina em 0.

Êsse caso já foi estudado quando se tratou da forma dos múltiplos de 10 (Cap. I, 1.ª parte, n. 17).

10.º) DIVISIBILIDADE POR 11:

Um número é divisível por 11 quando a DIFERENÇA entre as somas dos valôres absolutos dos algarismos de ordem ímpar e a dos de ordem par, fôr divisível por 11.

Os algarismos de *ordem ímpar* são os que ocupam o 1.º, 3.º, 5.º... lugares e os de ordem par, o 2.º, 4.º, 6.º,... lugares, a partir da direita. Exemplos:

$$\begin{array}{ccccc} 9 & 5 & 5 & 6 & 8 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 5.^{\circ} & 4.^{\circ} & 3.^{\circ} & 2.^{\circ} & 1.^{\circ} \end{array}$$

é divisível por 11, pois, a *diferença* entre a soma dos algarismos de ordem ímpar ($S_i = 8+5+9 = 22$) e os de ordem par ($S_p = 6+5 = 11$) é $22 - 11 = 11$ (que é divisível por 11).

736 não é divisível por 11, porque:

$$\begin{array}{rl} S_i = 6+7 = & 13 \\ S_p = \quad 3 = & 3 \; - \\ \hline & 10 \end{array}$$

(não é divisível por 11)

Observação: Se S_i fôr *menor* que S_p, acrescenta-se à primeira soma um conveniente múltiplo de 11, que torne possível a subtração.

Exemplo:

429 085 não é divisível por 11, pois:

$$\begin{array}{r} S_i = 5+0+2 = 7 \\ S_p = 8+9+4 = 21 \\ \hline ? \end{array}$$

Acrescentando-se 22 (mult. de 11) a S_i vem:

$$29 - 21 = 8 \text{ (que não é divisível por 11)}$$

Justificação: Basta observar que tôda potência de 10 é um múltiplo de 11 mais ou menos 1; *mais* 1 quando o número de zeros fôr par e *menos* 1, quando fôr ímpar. De fato:

$$\begin{array}{rcl} 10 = & 11 - 1 & = m.11 - 1 \\ 100 = & 99 + 1 & = m.11 + 1 \\ 1\,000 = & 1\,001 - 1 & = m.11 - 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

Seja agora, por exemplo, o número: 7 328 que se decompõe em:

$$\begin{aligned} 7\,328 &= 7\,000 + 300 + 20 + 8 && \text{pela p.d.a} \\ &= 7\times 1\,000 + 3\times 100 + 2\times 10 + 8 \\ &= 7\times(m.11 - 1) + 3\times(m.11+1) + 2\times(m.11 - 1) + 8 && \Big\} \text{p.d.m (a)} \\ &= 7\times m.11 - 7\times 1 + 3\times m.11 + 3\times 1 + 2\times m.11 - 2\times 1 + 8 \\ &= m.11 - 7 + m.11 + 3 + m.11 - 2 + 8 && \Big\} \text{p.a.a} \\ 7\,328 &= \underbrace{m.11}_{1.^a\ \text{par.}} + \underbrace{(8+1) - (2+7)}_{2.^a\ \text{parcela}} \end{aligned}$$

Como a primeira parcela é m.11, se a segunda parcela: $(8+1) - (2+7)$ fôr m.11 o número 7 328 também será m.11. Nesse exemplo, 7 328 é divisível por 11, pois a segunda parcela é $9 - 9 = 0$, que é divisível por 11.

11.º) Divisibilidade por 12:

Um número é divisível por 12 quando fôr divisível por 3 e por 4.

Exemplos:

324 é divisível por 12 porque é divisível por 3 (soma, 9) e por 4 (os dois últimos algarismos, 24);

8 618 não é divisível por 12, pois, não é divisível por 3 (e nem por 4).

A justificação é análoga a que irá ser estabelecida para o critério por 6.

RESUMO

Um número é $\boxed{\text{divisível}}$ por

$\boxed{2}$ quando fôr $\boxed{\text{par}}$ ou seja $\boxed{\text{quando terminar em 0, 2, 4, 6 ou 8}}$

$\boxed{3}$ " a $\boxed{\text{soma dos valôres absolutos}}$ de seus algarismos fôr : por 3

$\boxed{4}$ " o número formado pelos $\boxed{\text{dois últimos algarismos}}$ fôr : por 4

$\boxed{5}$ " $\boxed{\text{terminar em 0 ou 5}}$

$\boxed{6}$ " fôr divisível por $\boxed{\text{2 e 3}}$

$\boxed{7}$ " aplicando a $\boxed{\text{regra prática}}$ der 0 ou 7

$\boxed{8}$ " o número formado pelos $\boxed{\text{três últimos algarismos}}$ fôr : por 8

$\boxed{9}$ " a $\boxed{\text{soma dos valôres absolutos}}$ de seus algarismos fôr : por 9

$\boxed{10}$ " $\boxed{\text{terminar em 0}}$

$\boxed{11}$ " $\boxed{S_i - S_p}$ fôr divisível por 11

$\boxed{12}$ " fôr divisível por $\boxed{\text{3 e 4}}$

Guarde bem êsses critérios! Êles serão utilizados como "meio" para realizar outros estudos!

Observação importante: Os *critérios de divisibilidade* estudados foram estabelecidos para o *sistema decimal*, onde os numerais usados são os algarismos hindu-arábicos. Assim, por exemplo, dizer que um número é *par* quando terminar em 0, 2, 4, 6 ou 8, é uma propriedade do numeral hindu-arábico, que está representando o número. Logo:

Os critérios de divisibilidade em qualquer base, dependem dos numerais!

Exemplo de aplicação: Verificar por que números (até 12) é divisível 24 318. Temos, pelos critérios estudados:

24 318 é divisível por

- $\boxed{2}$ V (porque é *par*)
- $\boxed{3}$ V (porque a *soma*: 18, o é)
- 4 F
- 5 F
- $\boxed{6}$ V (porque é por 2 e 3)
- $\boxed{7}$ V (aplicando a regra prática)
- 8 F
- $\boxed{9}$ V (porque a *soma*: 18, o é)
- 10 F
- 11 F
- 12 F

V — Verdadeira
F — Falsa

3. *Propriedades elementares do resto. Prova das operações por um divisor*

As propriedades elementares dos restos podem ser resumidas nas seguintes:

1.ª) **O resto da divisão de uma soma por um número é igual ao resto da divisão, pelo mesmo número, da soma dos restos das parcelas.**

De fato, seja por exemplo a soma: $312+415+68 = 795$ e procuremos determinar os *restos das divisões, por* 9, das *parcelas* e da *soma*. Obteremos de acôrdo com o estudado:

$$\left.\begin{array}{rl} 312 & = m.9+(3+1+2) = m.9+6 \\ +\ 415 & = m.9+(4+1+5) = m.9+1 \\ 68 & = m.9+(6+8) \quad\ \ = m.9+5 \end{array}\right\} \text{somando: } m.9+(6+1+5) = \boxed{m.9+3}$$

$$795 \longrightarrow m.9+(7+9+5) = \boxed{m.9+3}$$

2.ª) **O resto da divisão de um produto por um número é igual ao resto da divisão, pelo mesmo número, do produto dos restos dos fatôres.**

Com efeito, seja, por exemplo, a multiplicação: $2\,315 \times 78 = 180\,570$, onde:

$$2\,315 = m.9+2$$
$$78 = m.9+3$$

e, portanto,

$$2\,375 \times 78 = (m.9+2)\,(m.9+3)$$

Aplicando a regra do *produto de duas somas* (Cap. II, 1.ª parte, n. 23-2.ª) obteremos uma soma de produtos, que são $m.9$ e o produto 2×3, isto é:

$$2\,375 \times 78 = m.9+2\times 3$$

e, portanto, o resto da divisão por 9 do produto: $2\,375 \times 78$ é o *mesmo resto* da divisão do produto 2×3 por 9, ou seja, 6.

APLICAÇÕES: prova por um divisor.

Como aplicação dessas propriedades, costuma-se verificar a *exatidão* das operações fundamentais mediante as PROVAS POR UM DIVISOR, de critério de divisibilidade conhecido. Pelas vantagens que oferecem, os divisores mais empregados são 9 e 11.

Contudo, deve-se notar que estas provas oferecem uma *probabilidade de acêrto* das operações sem, todavia, *garantir* que estejam *absolutamente certas*, como você terá oportunidade de ver. Exemplos:

1. Prova da *adição* usando o divisor 9 (chamada "Prova dos nove")

$$\begin{array}{rlll}
 & 4\,318 & (\text{Soma } 16:9) & \rightarrow \text{resto } 7 \\
+ & 2\,593 & (\text{Soma } 19:9) & \rightarrow \text{resto } 1 \\
 & \underline{1\,876} & (\text{Soma } 22:9) & \rightarrow \text{resto } 4 \\
 & 8\,787 & (\text{Soma } 30:9) & \rightarrow \text{resto } \boxed{3}
\end{array}
\quad \left.\begin{array}{l} 7 \\ 1 \\ 4 \end{array}\right\} \rightarrow (\text{Soma } 12:9) \rightarrow \text{resto } \boxed{3}$$

NOTA: Não podemos com essa prova garantir que a operação esteja absolutamente certa, pois, caso no resultado da soma figurasse, por engano, 7 887, ainda assim a prova pelo divisor 9 *daria certa* (lembre-se: a ordem das parcelas não altera a soma!)

2. Prova da *multiplicação*, usando o divisor 11 (Prova dos "onze").

$$\begin{array}{rl}
5\,713 & \text{resto da divisão por } 11 \rightarrow 4 \\
\underline{\times 32} & \text{resto da divisão por } 11 \rightarrow \underline{10} \\
11\,426 & \\
\underline{171\,39} & \qquad\qquad\qquad\qquad\quad 40 \rightarrow \boxed{7} \\
182\,816 & \text{resto da divisão por } 11 \rightarrow \boxed{7}
\end{array}
\quad \left.\begin{array}{l} 4 \\ 10 \end{array}\right\} \times$$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 27

1. Verificar se são divisíveis por: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 e 12 os seguintes números: 21 540; 8 433; 7 777; 194 180; 1 001; 397; 3 600 e 12 349.

2. Que restos pode dar na divisão por 5, um número que não seja divisível por 5?

3. Escrever à direita de 36 um algarismo tal que o número formado seja divisível, ao mesmo tempo, por 3 e por 11.

4. Indicar quais os algarismos, de menor valor absoluto, que devem ser colocados no lugar de □ para que:

   1.º) 532□ seja divisível por 3 e por 9; 2.º) 1□89 seja divisível por 11;
   3.º) 143□5 seja divisível por 3 e por 5; 4.º) 892□6 seja divisível por 4;
   5.º) 512□ seja divisível por 8; 6.º) 6□724 seja divisível por 2 e por 11.

5. Qual é o menor número que se deve somar a 4 831 para que resulte um número divisível por 3?

6. Qual é o menor número que se deve somar a 12 318 para que resulte um número divisível por 5?

7. *Sem efetuar a divisão*, calcular os restos das seguintes divisões:

   1.ª) 81 345 786 por 9 e por 11;
   2.ª) 18 315 por 4, 5 e 8;
   3.ª) 303 171 por 2, 3 e 10.

8. Verificar que a diferença entre dois números constituídos pelos mesmos algarismos, mas *escritos em ordem inversa*, é divisível por 9.

9. Verificar que a soma de dois números pares é um número par; que a soma de dois números ímpares é um número par e que a soma de um número par com um número ímpar é ímpar.

10. Numa caixinha existem menos de 60 bolinhas. Se elas forem contadas de 9 em 9 não sobrará nenhuma bolinha e se forem contadas de 11 em 11 sobrará uma. Quantas são as bolinhas?

11. "Tirar" a prova "dos nove", "dos três" e "dos onze" e verificar se estão certas as seguintes operações:

    1.ª) $8\,503 + 7\,128 + 564 = 16\,387$
    2.ª) $4\,018 - 3\,297 = 721$

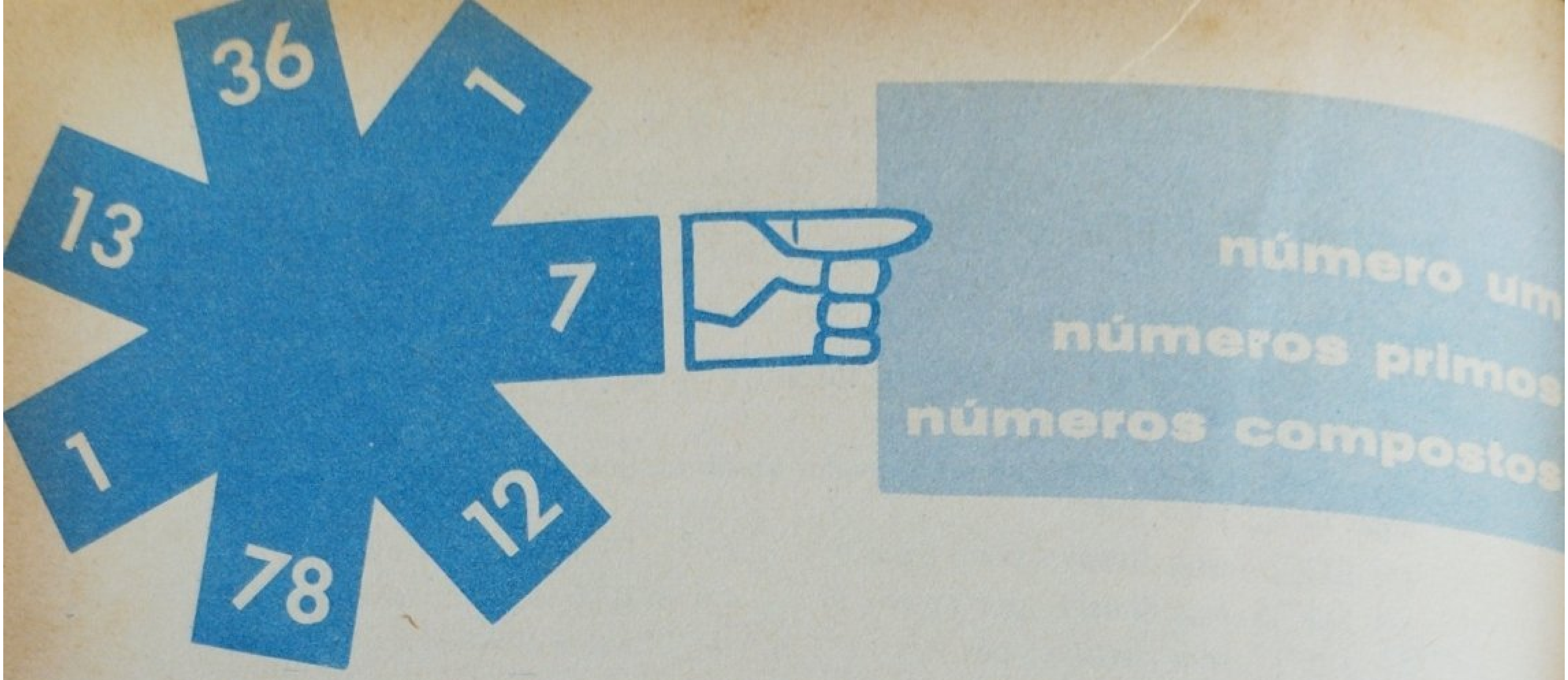
12. Idem, para as seguintes operações:

    1.ª) $4\,301 \times 45 = 192\,145$
    2.ª) $11\,414 : 26 = 439$

13. O conjunto dos números pares: {0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, ...} é *fechado* em relação à operação *adição?* Por quê? E, em relação, à *multiplicação?*

14. O conjunto dos números ímpares: {1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, ...} é *fechado* em relação à operação *adição?* Por quê? E, em relação, à *multiplicação?*

15. Dizer que um número é *ímpar* quando terminar em 1, 3, 5, 7 ou 9 é ou não uma propriedade do numeral hindu-arábico que o representa?



4. *Número 1; números primos; números compostos*

Você já percebeu que o *número* 1 tem uma posição privilegiada na divisibilidade, pois, é *divisor de qualquer número* ou, em outras palavras, *qualquer número é divisível por* 1.

Veja, agora, o que ocorre com os outros números da sucessão dos números naturais:

o 2	é divisível	por	1 e 2	(e só!)
o 3	"	"	1 e 3	(e só!)
o 4	"	"	1, 2 e 4	
o 5	"	"	1 e 5	(e só!)
o 6	"	"	1, 2, 3 e 6	
o 7	"	"	1 e 7	(e só!)
o 8	"	"	1, 2, 4 e 8	
o 9	"	"	1, 3 e 9 . . .	
. . .	.	.	. . . .	
. . .	.	.	. . . .	

Logo:

1º) Existem números (como: 2, 3, 5, 7, ...) divisíveis sòmente por 1 e por si mesmos; tais números chamam-se *primos*;

2º) Existem números (como: 4, 6, 8, 9, ...) que, além de serem divisíveis por 1 e por si mesmos, são divisíveis por outros números; tais números são chamados *compostos*.

Portanto, qualquer *número natural* apresenta-se como

$$\text{ou} \begin{cases} \nearrow \text{número } 1 \\ \rightarrow \text{número primo} \\ \searrow \text{número composto} \end{cases}$$

e, DENTRO DESTA CLASSIFICAÇÃO, valem as *definições*:

Número primo é o número (diferente de 1) que possui sòmente dois divisores: 1 e êle mesmo.

Número composto é o número que possui mais de dois divisores.

Êrro comum:

Confundir *número primo* (que é divisível *sòmente* por 1 e por si mesmo) com *número ímpar* (que pode ser *número composto*, como por exemplo: 9, 15, 21, ...)

É evidente que pode coincidir um número ser *primo* e *ímpar*, como por exemplo, os números 3, 5, 7, 11, 13,...

OBSERVAÇÃO CURIOSA: O *único* número primo par é o 2 (que é divisível sòmente por 1 e 2); qualquer outro número par *não poderá ser primo*, pois seria necessàriamente divisível por 2!

4. *Tábua dos números primos*

Quantos números primos existem? Você já conhece os primeiros:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, ...

que iniciam a *sucessão dos números primos* e que você percebe ser um *conjunto infinito, pois* é sempre possível encontar *novos* números primos.

Nestas condições constroem-se *tábuas*, onde são registrados, ordenadamente, todos os números primos *menores* que um certo número prefixado.

Aliás, êsse costume vem da antiguidade, pois, a primeira tábua conhecida e que recebeu o nome de *Crivo de Eratóstenes* (por se assemelhar a um *peneiro* quando eram furados os números compostos dispostos em ordem), deve-se a Eratóstenes, insigne matemático grego, que viveu antes de Cristo.

Apliquemos o processo do Crivo de Eratóstenes na construção de uma tábua dos números primos até 50. Veja como é fácil:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50

Riscam-se todos os múltiplos de 2, a partir de 2;

Riscam-se todos os múltiplos de 3, a partir de 3;

Riscam-se todos os múltiplos de 5, a partir de 5 (onde o primeiro múltiplo que ainda não foi riscado é o $25 = 5^2$);

e, assim do mesmo modo com o número 7, onde o primeiro múltiplo que ainda não foi riscado é o $49 = 7^2$. Agora, temos que parar, pois, o primeiro múltiplo ainda não riscado do 11 (que é o número primo seguinte ao 7) seria $11^2 = 121$ que está fora do quadro dos 50 números. Logo, os números não riscados:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43 e 47

constituem o *conjunto dos números primos até* 50.

Antes dos Exercícios de Fixação encontra-se uma *tábua dos números primos menores que* 1 000 (pág. 132).

5. *Reconhecimento de um número primo*

Dado um número como você faria para saber se êle é primo? A primeira resposta será: consulte-se uma tábua de números primos. Bem, consultando, por exemplo, a tábua de números primos que figura neste livro (pag. 132) só podemos usá-la se o número proposto fôr menor que 1 000. E para números maiores que 1 000? Bastaria consultar tábuas maiores.

Outro processo para reconhecer se um número é primo ou não, é *usar a própria sucessão dos números primos* e os *critérios de divisibilidade*, mediante a seguinte *Regra*:

Divide-se o número dado, sucessivamente pelos números primos: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ... até encontrar um quociente MENOR ou IGUAL ao divisor. Se nenhuma dessas divisões fôr exata o número dado é primo.

Nos exemplos dados será justificada essa regra. Reconhecer se é ou não *primo*:

1.º) 211

Divide-se 211, respectivamente, por 2, 3, 5, 11, 7, 13,.... Ora, algumas dessas divisões podem ser evitadas com a aplicação dos critérios de divisibilidade. Assim, não serão feitas as divisões por 2, 3, 5, 7 e 11, que autorizam, *por enquanto*, dizer que o 211 não é divisível por nenhum dêles e que também não é primo, pois os quocientes obtidos são *maiores* que os divisores. As outras divisões serão:

$$\begin{array}{r|l} 211 & 13 \\ \cline{2-2} 81 & 16 \\ 3 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 211 & 17 \\ \cline{2-2} 41 & 12 \\ 7 & \end{array} \left.\begin{array}{l} \text{— quociente menor que o divisor} \\ \\ \longrightarrow \text{resto diferente de zero} \end{array}\right\} 211 \text{ é } \textit{primo}$$

Como agora foi encontrado um quociente *menor* que o divisor e a divisão não é *exata* (resto 7) então podemos concluir que 211 *é primo*, pois, caso contrário, 211 seria divisível por um número maior que 17 e também pelo quociente dessa divisão, que necessàriamente seria um número primo menor que 12. Ora, isso é impossível dado que já foi verificado que 211 não é divisível por números primos menores que 12.

2.º) 5 277

Não é divisível por 2 (não é par); mas *é divisível por* 3 (soma 21). Logo, o número 5 277 não é primo.

3.º) 173

Não é divisível por 2, 3, 5, 7, 11. Por 13, temos:

$$\begin{array}{r|l} 173 & 13 \\ \cline{2-2} 43 & 13 \\ 4 \text{ (resto)} & \end{array} \text{— iguais}$$

Como foi encontrado um quociente (13) *igual* ao divisor (13) e a divisão não exata (resto 4), conclui-se que 173 *é primo*.

4.º) 1 027

Não é divisível por 2, 3, 5, 7 e 11. Por 13, temos:

$$\begin{array}{r|l} 1\,027 & 13 \\ \cline{2-2} 117 & 79 \\ 0 & \end{array}$$

Como a divisão é *exata* o número 1 027 é divisível por 13, e portanto, *não é primo*.

6. *Números primos entre si*

Quando dois ou mais números admitem sòmente o 1 como divisor comum êles são chamados de PRIMOS ENTRE SI. Exemplos:

12 e 7, cujo único divisor comum é o 1, são *primos entre si;*

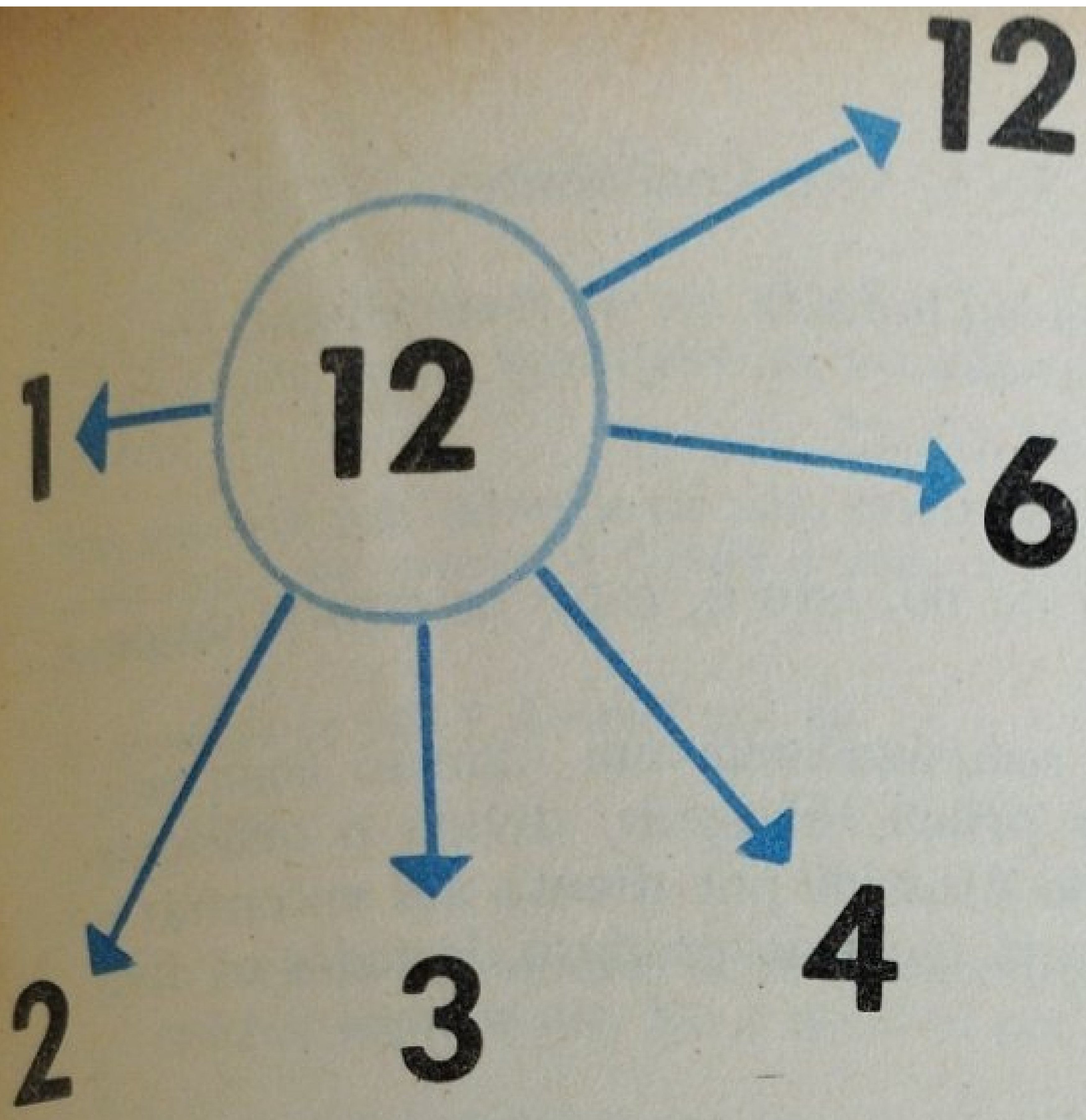
5, 10 e 14, também são *primos entre si*, pois o único divisor, que é de todos ao mesmo tempo, é o 1.

Êrro comum: pensar que os *números primos entre si* devam, necessàriamente, ser *primos* (no exemplo acima temos 5 primo e, 10 e 14, compostos).

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 28

1. Construir uma tábua dos números primos até 100.
2. Quais os números pares que são primos?
3. Qual é o menor número primo de dois algarismos? E o maior?
4. Um número pode ser ímpar e não ser primo? Exemplifique.
5. Sem usar a tábua de números primos, reconhecer quais, dos seguintes números, são primos: 109, 197, 243, 373, 641, 761, 863, 957, 1 181, 4 313 e 12 349.
6. Determinar os números primos, menores que 100, cuja diferença entre êles é 2 (Nota: tais números são chamados primos gêmeos).
7. Você é capaz de exprimir cada número par, desde 4 até 22, como soma de dois números primos? (Nota: os matemáticos acreditam que todo número par, maior que 2, é a soma de dois números primos, mas *não o provaram ainda*....).
8. Existiriam números primos trigêmeos, isto é, aquêles cuja diferença, entre dois dêles consecutivos é 2?
9. Escrever a sucessão dos números naturais até 15. Desenhar um *círculo* ao redor dos números primos; um *quadrado* ao redor dos números pares e um *triângulo* ao redor dos números ímpares.
10. Três números pares e um número ímpar são primos entre si? Por que?
11. Dois números primos diferentes, são primos entre si?
12. Verifique se 147 e 175 são números primos entre si.
13. Um número formado de dois algarismos iguais pode ser um número primo?

NOTA: Você percebeu que foi proposto "um número primo" de exercícios de fixação? E não tenha "receio" dêle porque é um número "tão bom" quanto os outros....



fatoração completa

7. *Fatôres de um número*

A palavra *fator*, por demais usada em Matemática, está associada à idéia de *multiplicação*. Assim, por exemplo:

em $5 \times 4 = 20$, temos que: 5 e 4 são *fatôres* de 20;
em $2 \times 3 \times 5 = 30$, " " 2, 3 e 5 são *fatôres* de 30

Em ambos os casos, diz-se que os números 20 e 30 foram *fatorados*, sendo que o 30 foi fatorado *completamente* (é fácil concluir por que...)

Observe, agora, com atenção que:

1.º) o 1 tem sòmente *um fator*: êle mesmo;

2.º) cada número primo tem exatamente dois fatôres: o 1 e êle mesmo.

Quantos fatôres tem um *número composto*?

8. *Fatoração Completa de um número composto*

Todo número composto pode ser fatorado de uma maneira única, num *produto de fatôres primos*. Assim, por exemplo, o número 60, que é composto, é igual ao produto:

$$60 = 2 \times 30$$

por sua vez o 30, que é composto, é igual a 2×15, logo:

$$60 = 2 \times 2 \times 15$$

e, como o 15 é número composto: 3×5, vem finalmente:

$$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$$

ou $$\boxed{60 = 2^2 \times 3 \times 5}$$

e temos assim a *fatoração completa* de 60, isto é, *todos* os fatôres da decomposição *são primos*.

Se você quiser, pode fatorar *completamente* um número composto, dividindo-o pelo seu *menor divisor primo*, a seguir, divida o quociente obtido pelo seu *menor divisor primo* e assim por diante até encontrar o quociente 1. O número composto será igual ao produto de todos os divisores primos encontrados.

$$\begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Na prática, dispõe-se os quocientes e os divisores respectivos em duas colunas separadas por um traço vertical. Aliás, essa técnica você já conhece, desde a Escola Primária.

Portanto: $60 = 2^2 \times 3 \times 5$

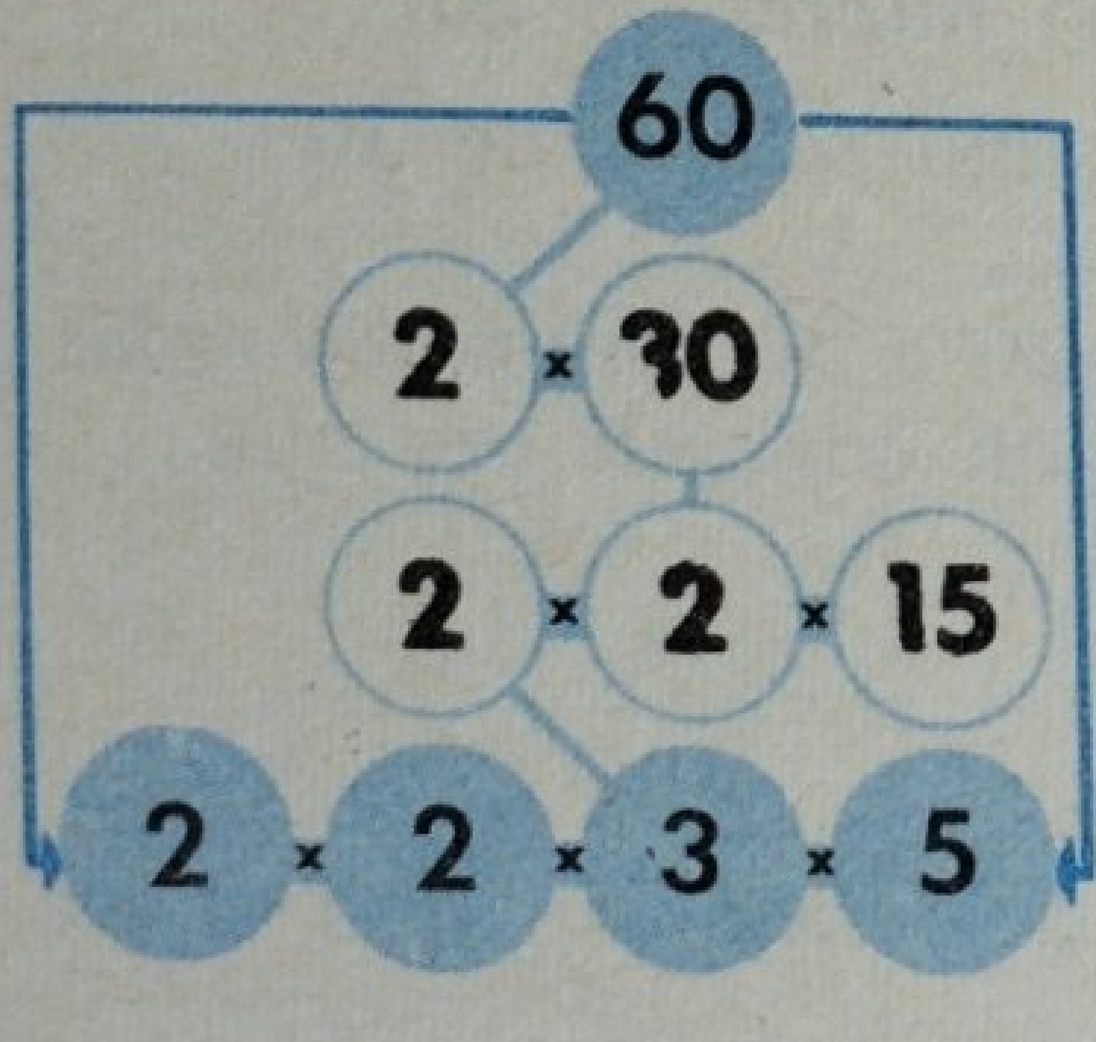


Fig. 32

Observação: A decomposição de 60 em fatôres primos é *única* (fig. 32), embora a ordem dos fatôres possa ser trocada. Assim:

$$60 = 5 \times 3 \times 2^2$$

ou $$60 = 3 \times 2^2 \times 5$$

representam a mesma *fatoração completa*.

Outros exemplos: Decompor os números 1 144 e 2 532, respectivamente, em seus fatôres primos (fatoração completa)

$$\begin{array}{r|l} 1\,144 & 2 \\ 572 & 2 \\ 286 & 2 \\ 143 & 11 \text{ (Ver nota)} \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2\,532 & 2 \\ 1\,266 & 2 \\ 633 & 3 \\ 211 & 211 \text{ (Ver nota)} \\ 1 & \end{array}$$

$1\,144 = 2^3 \times 11 \times 13$ $\qquad$ $2\,532 = 2^2 \times 3 \times 211$

Nota: É necessário verificar, com as regras estudadas (ou com a tábua), se os números 143 e 211 são ou não primos, pois à primeira vista podem enganar!

9. Aplicações gerais

1.ª) **Divisibilidade de um número por outro, mediante seus fatôres primos.** — Você pode, agora, reconhecer se um número é divisível por outro, com o seguinte critério:

"decompostos dois números em seus fatôres primos o primeiro é *divisível* pelo segundo se contiver, pelo menos, os fatôres primos do segundo com *expoentes iguais ou maiores*".

Exemplos:

1. Verificar se 504 é *divisível* por 36

Temos:
$$504 = 2^3 \times 3^2 \times 7$$
$$36 = 2^2 \times 3^2$$

Como 504 contém *todos* os fatôres primos de 36 (com expoentes iguais ou maiores) segue-se que 504 é divisível por 36.

2. Idem, se 360 é divisível por 54

Como:
$$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$$
$$54 = 2 \times 3^3$$

segue-se que 360 *não é divisível* por 54, pois, embora contenha todos os fatôres primos de 54, possui um dêles (3) com expoente menor do que tal fator figura em 54.

3. Qual é o menor número pelo qual se deve multiplicar 540 para se obter um número divisível por 126?

Decompondo êsses números em seus fatôres primos, vem:
$$540 = 2^2 \times 3^3 \times 5$$
$$126 = 2 \times 3^2 \times 7$$

Como o único fator que consta da decomposição do 126, e não consta da do 540, é o 7, basta multiplicar 540 por 7 para se obter um número divisível por 126.

Observação: Levado em conta que os fatôres primos da fatoração completa são *primos entre si*, pode-se agora justificar alguns critérios de divisibilidade enunciados (por 6 e por 12) dizendo: *um número divisível por dois números primos entre si é também divisível pelo produto dêles.* Assim:

um número divisível por 2 e por 3 o é por 6 (critério por 6)
um número divisível por 3 e por 4 o é por 12 (critério por 12)
um número divisível por 2 e por 7 o é por 14 (critério por 14)
um número divisível por 3 e por 5 o é por 15 (critério por 15)
etc.

2.ª) **Determinação de todos os divisores de um número.** — A decomposição de um número em seus fatôres primos (fatoração completa) permitiu que se conhecesse *alguns* de seus divisores. Assim, o número 60 que, decomposto em seus fatôres primos, apresentou como divisores sòmente os números primos: 2, 3 e 5 e o número 1, admite *outros* divisores, tais como: 4, 6, 10, 12, 15, 20, 30 e 60.

Vamos procurar determiná-los, lembrando o seguinte fato importante: os divisores de um número constituem um *conjunto finito*, pois devem ser *menores* que o número dado, sendo o maior dêles o próprio número.

Nestas condições, como:

$$60 = 2^2 \times 3^1 \times 5^1$$

é natural que os divisores de 60 serão todos os números que contiverem apenas os fatôres 2, 3 e 5 com *expoentes menores ou iguais* aos que figuram na fatoração completa de 60. Logo, os divisores de 60 aparecerão a partir dos fatôres:

$2^0, 2^1, 2^2$ (com expoentes menores ou iguais ao de 2^2)
$3^0, 3^1$ (com expoentes menores ou iguais ao de 3^1)
$5^0, 5^1$ (com expoentes menores ou iguais ao de 5^1)

ou

1.ª linha: 1, 2, 4 (lembre-se que $2^0 = 1$)
2.ª linha: 1, 3
3.ª linha: 1, 5

Quando multiplicamos cada número que figura na 1.ª linha por todos os números das demais linhas, depois cada número da 2.ª linha por todos os números da 3.ª e, finalmente, cada número da 1.ª linha por todos os números da 2.ª e 3.ª (produtos de três fatôres), obtemos, assim, os números:

(1 da 2.ª $\times$ 1.ª linha) : 1 2 4
(3 da 2.ª $\times$ 1.ª linha) : 3 6 12
(5 da 3.ª $\times$ 1.ª linha) : 5 10 20
(5 da 3.ª $\times$ 2.ª linha) : 5 15
(5(3.ª) $\times$ 3(2.ª) $\times$ 2(1.ª)) : 30
(5(3.ª) $\times$ 3(2.ª) $\times$ 4(1.ª)) : 60

Êsses produtos podem ser efetuados e distribuídos, mais fàcilmente, com a seguinte *disposição prática:*

		1
60	2	2
30	2	4
15	3	3 – 6 – 12
5	5	5 – 10 – 20 – 15 – 30 – 60
1		

Faz-se um traço vertical à direita dos fatôres da decomposição completa de 60 e escreve-se 1 um pouco acima do 1.º fator primo (2). Os divisores serão obtidos, a partir de 1, multiplicando cada um dos fatôres primos (que estão à esesquerda do traço) pelos números que vem à direita do traço, e situados acima dêle. Os divisores obtidos mais de uma vez não são repetidos.

e, portanto, o conjunto de divisores de 60 é:

{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30 e 60}

Outro exemplo: Determinar todos os divisores de 144. Temos:

		1
144	2	2
72	2	4
36	2	8
18	2	16
9	3	3 – 6 – 12 – 24 – 48
3	3	9 – 18 – 36 – 72 – 144

Conjunto de divisores de 144: {1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 36, 48, 72, 144}

3.ª) **Número de divisores de um número.** — Mesmo não se conhecendo todos os divisores de um número, você pode determinar o *número* (total) *dêles*, com a seguinte *regra*, fàcilmente justificável:

"o número (total) de divisores de um número é obtido somando 1 a cada expoente de seus fatôres primos (na fatoração completa) e multiplicando os resultados encontrados".

Exemplos: Determinar o número de divisores de

1.º) 60

Como: $60 = 2^2 \times 3^1 \times 5^1$

$$\text{temos} \begin{cases} \text{os expoentes são} : 2 \quad 1 \quad 1 \\ \text{aumentado 1} \quad : 3 \quad 2 \quad 2 \\ \text{e o produto} \quad : 3 \times 2 \times 2 = \boxed{12} \end{cases}$$

dá o número (total) de divisores de 60 (já conhecidos em exercícios).

2.º) 180

Temos: $180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$,

$$\text{onde} \begin{cases} \text{os expoentes são} : 2 \quad 2 \quad 1 \\ \text{aumentando 1} \quad : 3 \quad 3 \quad 2 \\ \text{e o produto} \quad : 3 \times 3 \times 2 = \boxed{18} \end{cases}$$

dá o número (total) de divisores de 180.

A justificativa da regra aplicada, decorre do fato de que o aumento do expoente de cada fator primo, de *uma unidade*, corresponde aos fatôres de expoente zero (2^0, por exemplo) que participam do cálculo dos divisores de um número. A multiplicação dos resultados encontrados representará o total de divisores procurados.

Observação: Podemos, recìprocamente, determinar números *que tenham um dado número de divisores*. Seja, por exemplo, determinar um número que tenha 45 divisores.

Você vai notar que muitos números respondem à questão.

Decompondo o 45 em seus fatôres primos (fatoração completa), temos:

$$45 = 3^2 \times 5$$

ou

$$45 = 3 \times 3 \times 5$$

ou

$$45 = (2+1) \times (2+1) \times (4+1)$$

Então os números: $\quad 2 \quad 2 \quad 4$ representam os expoentes de três fatôres primos *quaisquer* diferentes, cujos produtos dão os números que possuem 45 divisores.

Logo, você pode *escolher* uma *porção de números* que tenham 45 divisores.

Escolhendo, por exemplo, os três fatôres: 2, 3 e 5, vem:

$2^2 \times 3^2 \times 5^4 = 22\,500$ (número que tem 45 divisores!)

ou $2^2 \times 3^4 \times 5^2 = 8\,100$ (número que tem 45 divisores!)

ou $2^4 \times 3^2 \times 5^2 = 3\,600$ (número que tem 45 divisores!)

Escolha você, agora, outros três fatôres primos quaisquer e escreva os números que possuam êsses fatôres, na sua fatoração completa, e que tenham 45 *divisores*.

PENSANDO EM DIVISORES DE UM NÚMERO...

Você também pode determinar todos os divisores de um número "desenhando"(*)

Preste bem atenção! Seja, por exemplo, construir todos os divisores de 30 (que são oito).

Como: $30 = 2 \times 3 \times 5$

vamos usar três flechas, uma para cada fator primo: 2, 3 e 5, (de preferência de côres diferentes) indicando três direções diferentes, a partir do 1 que é o primeiro divisor de qualquer número (fig. 33).

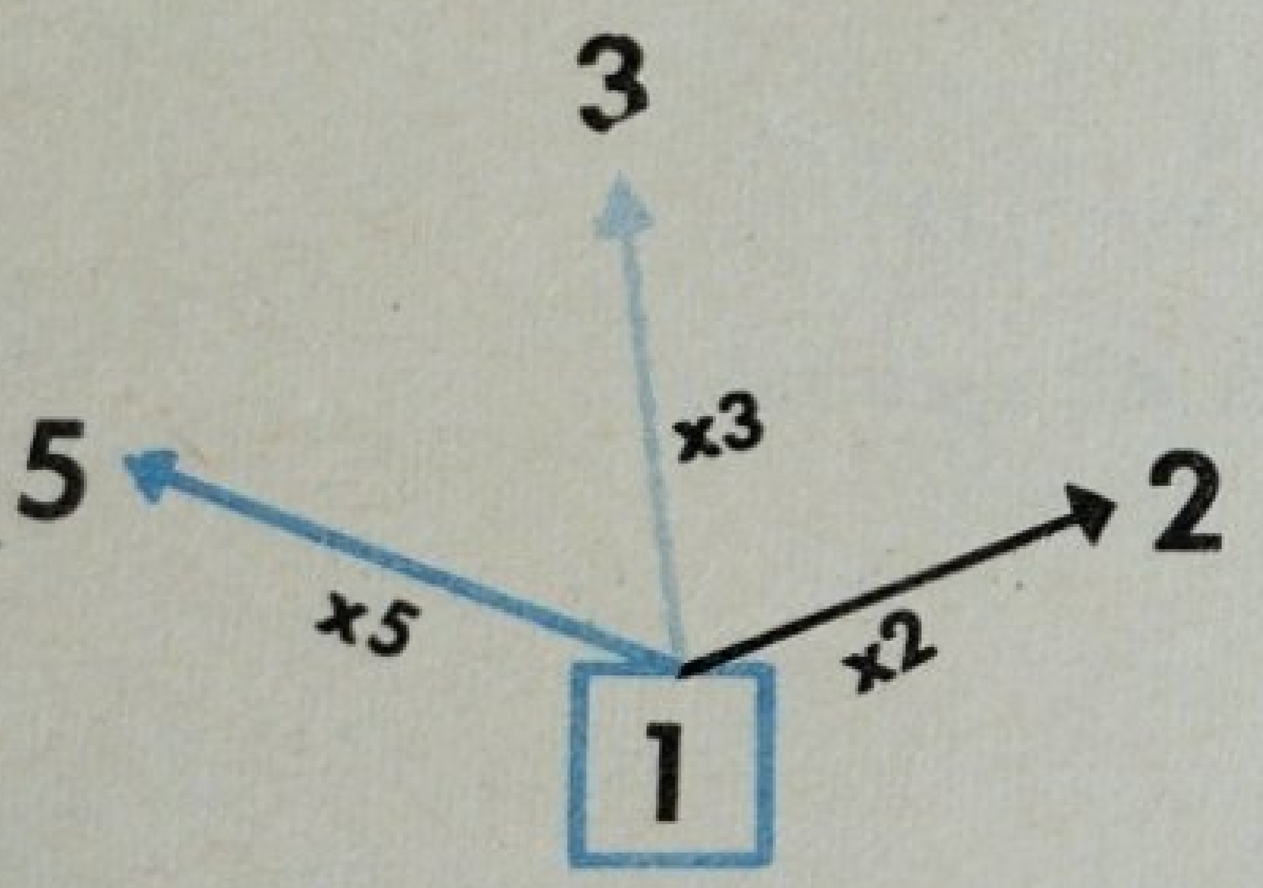


FIG. 33

A seguir traçam-se, pela extremidade de cada flecha, flechas respectivamente paralelas às outras duas, colocando nas respectivas extremidades os produtos obtidos pelas multiplicações do número da extremidade pelo número que representa cada uma das flechas iniciais. Êsse procedimento é feito até "fechar" a figura, que ocorre quando se obtém o número dado (que é o último divisor a se encontrar). No exemplo estudado os oito divisores de 30 são precisamente os "vértices" da figura desenhada (fig. 34).

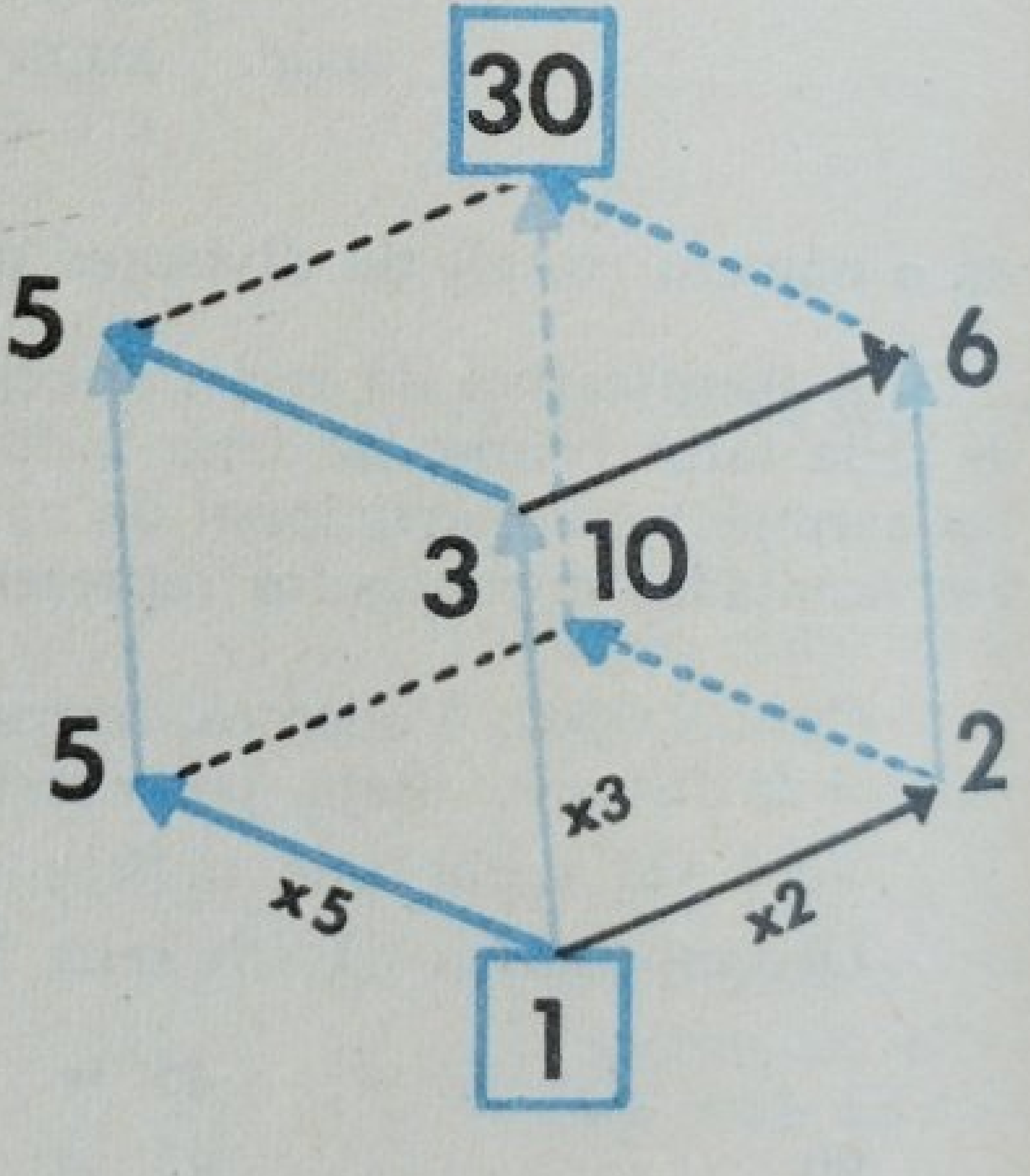


FIG. 34

Outro exemplo: determinar "desenhando" todos os divisores de 60.

Temos: $60 = 2^2 \times 3 \times 5$

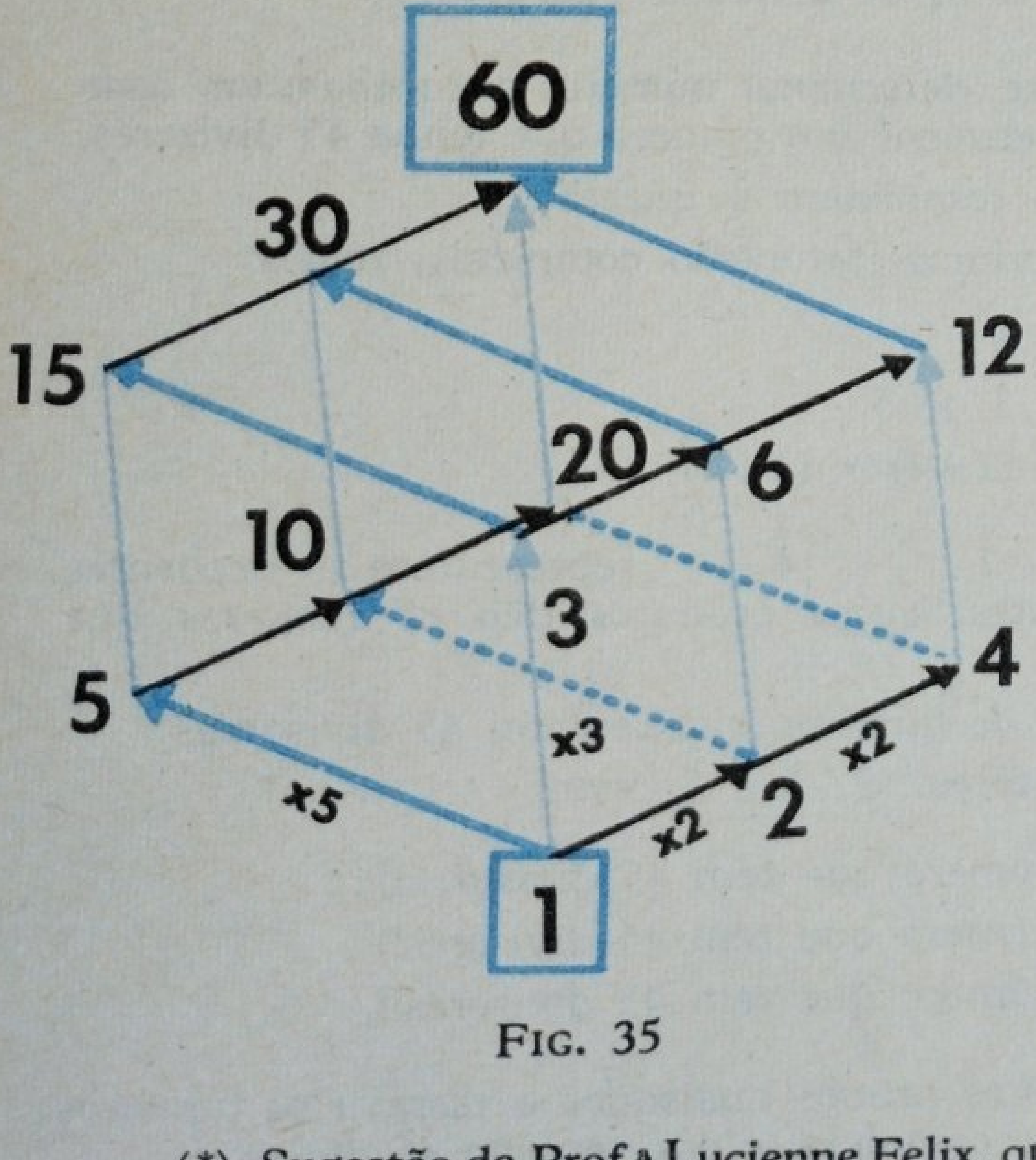


FIG. 35

Nesse caso o fator 2 figura com expoente 2, então se usa, na *mesma direção, duas* flechas consecutivas e se procede da mesma forma na construção da figura (fig. 35).

No caso de aparecer expoente 3 seriam usadas *três flechas na mesma direção* e assim por diante.

(*) Sugestão da Prof.ª Lucienne Felix, quando visitou o G.E.E.M. (S. Paulo — 1962).

NÚMEROS AMIGOS E NÚMEROS PERFEITOS

Você já conhece os números primos; conhece também os números primos entre si. Sabe que existem os números amigos e os números perfeitos?

Dois números são *amigos*, quando a soma de todos os divisores de um dêles, com a exclusão do próprio número, der o outro e vice-versa. Exemplo:

220 e 284 são amigos (verifiquem!!)

Um número é perfeito quando é igual à soma de seus divisores, com exclusão dêle próprio. Exemplo:

$$6 = 1 + 2 + 3$$

Seja você agora, "amigo", descobrindo um outro *número perfeito*!

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 29

1. Determinar qual o menor fator primo de cada um dos seguintes números:
   a) 125; *b*) 405; *c*) 1 964; *d*) 539; *e*) 121
2. Decompor em fatôres primos (fatoração completa) os seguintes números:
   68; 210; 243; 312; 540; 750; 1 001; 1 331; 5 250; 7 007; 14 157; 28 413; 12 349 e 256 000.
3. Decompor 144^2 em fatôres primos, sem calcular a potência.
4. Verificar se o número 1 280 é divisível por 32, uasndo a decomposição em fatôres primos.
5. Idem, para 2 016 e 48; 360 e 54.
6. Verificar se 180 é divisível por 15 e 12, sem efetuar a divisão.
7. Qual o menor número pelo qual se deve multiplicar 1 080 para se obter um número divisível por 252?
8. Idem, para os números 2 205 e 1 050.
9. Enunciar um critério de divisibilidade por 10, baseado na propriedade de dois números primos entre si.
10. Quais são os divisores e o número dêles dos seguintes números:
    68; 114; 148; 306; 581; 1 200; 1 331 e 4 332.
11. Quantos divisores tem um número que apresenta a seguinte fatoração completa:
    a) $2^3 \times 3 \times 5^2$? *b*) $3^4 \times 5 \times 7^3$? *c*) 13?
12. Achar todos os divisores comuns dos números 630 e 990 (são comuns os divisores de 630 e 990, ao mesmo tempo).
13. Determinar um número qualquer com 15 divisores; determinar, agora, outro também com 15 divisores.
14. Qual é o menor número com 18 divisores?
15. Escrever um número que seja divisível por 8 e tenha 16 divisores.

16. Os divisores de 60 que são número compostos são . . . . . .

17. Determinar o valor de n para que: $2^n \times 3^2$ tenha 15 divisores.

18. Qual é o número: $2^3 \times 3^n$ que possui 12 divisores?

19. Determinar os números de 8 divisores, cujos fatôres primos são 3 e 5.

20. Decompor em fatôres primos (fatoração completa) o número: 111 111 e depois, *sem repetir o processo*, decompor os números: 222 222 e 333 333.

Pensando em *divisores*, em números *amigos* e números *perfeitos* procurar fazer os seguintes exercícios:

1.º) Construir "desenhando", todos os divisores dos números:
a) 27 *b*) 90 *c*) 105.

2.º) Verificar se são "amigos" os números: 2 620 e 2 924.

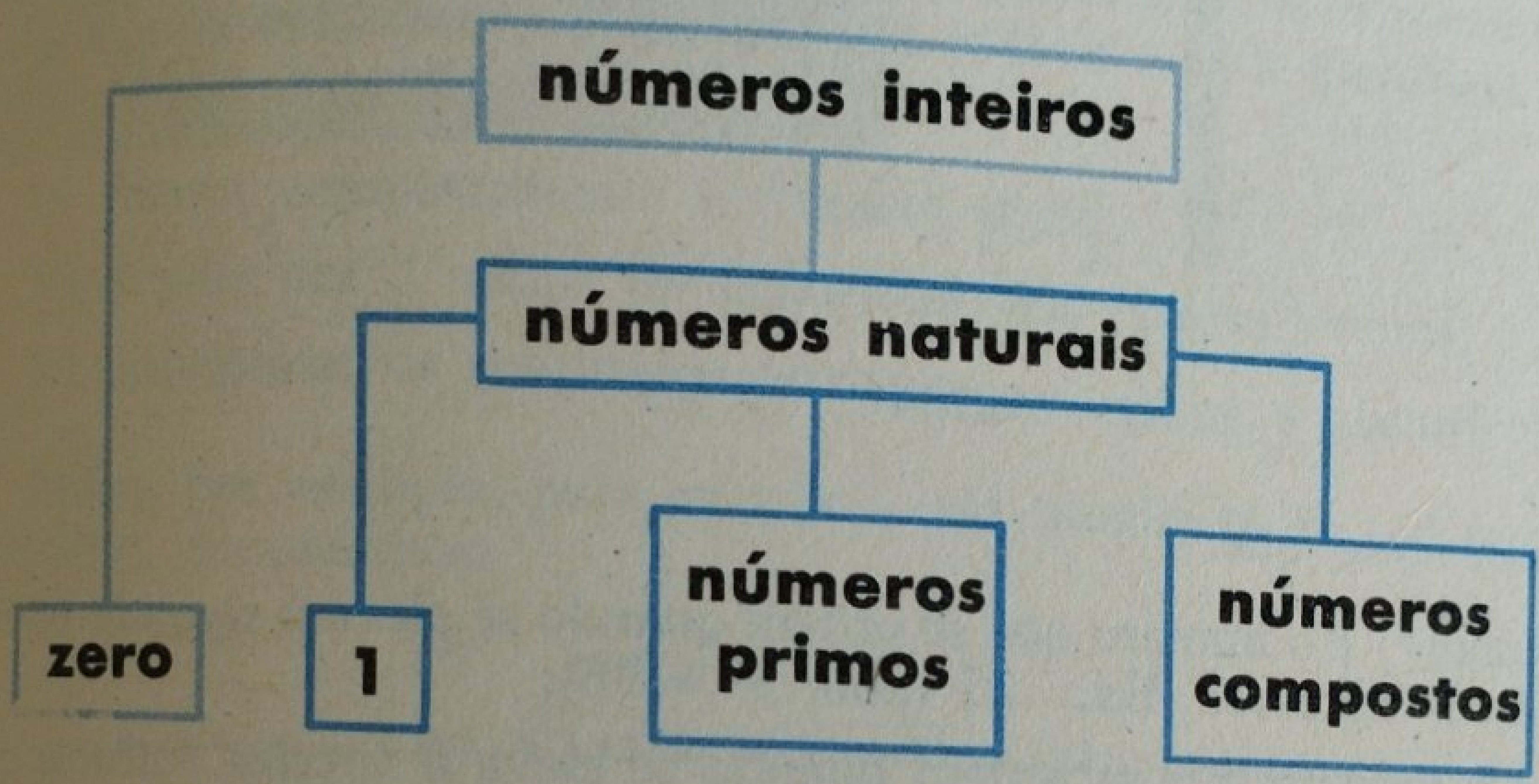
3.º) Verificar se o número 28 é "perfeito".

TÁBUA DOS NÚMEROS PRIMOS MENORES QUE 1 000

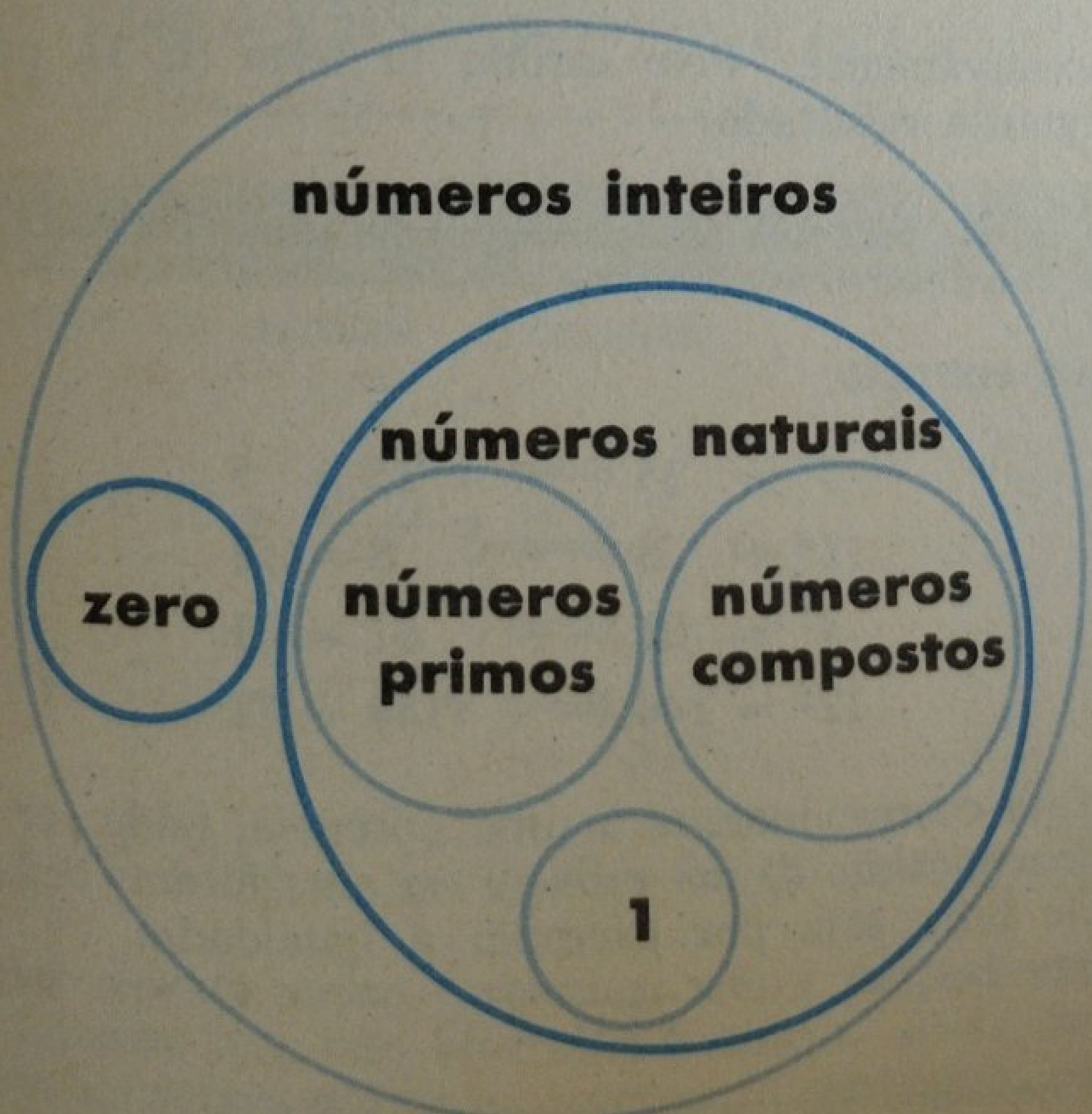
1	43	107	181	263	349	433	521	613	701	809	887
2	47	109	191	269	353	439	533	617	709	811	907
3	53	113	193	271	359	443	541	619	719	821	911
5	59	127	197	277	367	449	547	631	727	823	919
7	61	131	199	281	373	457	557	641	733	728	929
11	67	137	211	283	379	461	563	643	739	829	937
13	71	139	223	293	383	463	569	647	743	839	941
17	73	149	227	307	389	467	571	653	751	853	947
19	79	151	229	311	397	479	577	659	757	857	953
23	83	157	233	313	401	487	587	661	761	859	967
29	89	163	239	317	409	491	593	673	769	863	971
31	97	167	241	331	419	499	599	677	773	877	977
37	101	173	251	337	421	503	601	683	787	881	983
41	103	179	257	347	431	509	607	691	797	883	991
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	997

QUADRO — RESUMO

Neste Capítulo todo o estudo que você fêz foi no conjunto dos números inteiros e alguns subconjuntos (que são conjuntos "contidos" no conjunto dos números inteiros), todos importantes e que figuram no "esquema" abaixo:



Ou, representando os conjuntos e subconjuntos em "desenho":



$\sqrt{729} \quad 27$

técnica operatória da radiciação

raiz quadrada aproximada

10. *Potências e raízes exatas*

Lembre-se que:

QUADRADO(*) é o número que se obtém quando se eleva à *segunda potência* qualquer número. Ex.: 25 (pois $5^2 = 25$);

CUBO é o número que se obtém quando se eleva à *terceira potência* qualquer número. Ex.: 8 (pois $2^3 = 8$);

QUARTA POTÊNCIA é o número que se obtém quando se eleva ao *expoente* 4 qualquer número. Ex.: 81 (pois $3^4 = 81$)

e, assim, sucessivamente. Pelo estudo já feito (n. 33, pág. 102) você guardou o seguinte resultado:

a tôda potência deve corresponder uma raiz exata

Assim, por exemplo:

$$5^2 = 25 \Longleftrightarrow \sqrt{25} = 5$$
$$2^3 = 8 \Longleftrightarrow \sqrt[3]{8} = 2$$
$$3^4 = 81 \Longleftrightarrow \sqrt[4]{81} = 3$$
$$12^2 = 144 \Longleftrightarrow \sqrt{144} = 12$$

A raiz exata correspondente a uma potência, pode ser determinada, usando-se a *decomposição de um número em seus fatôres primos* (fatoração completa). De fato, seja por exemplo a igualdade:

$$\sqrt{144} = 12$$

(*) Não é necessário dizer quadrado *perfeito*.

Fatorando, completamente, os números 144 e 12, temos (sendo: $144 = 2^4 \times 3^2$ e $12 = 2^2 \times 3^1$) ainda a igualdade:

$$\sqrt{2^4 \times 3^2} = 2^2 \times 3^1$$

O que você está observando agora? É fácil ver que os *fatôres primos* de 144 e de 12 são os MESMOS. Note mais: os expoentes (2 e 1) que figuram nos fatôres da raiz, podem ser obtidos *dividindo por* 2 (que é o índice do radical, por se tratar de raiz quadrada), os expoentes (4 e 2) dos fatôres do radicando. Logo, para se extrair a raiz quadrada de um número quadrado pode-se:

1º) *fatorar* completamente o número dado;

2º) *dividir por* 2 todos os expoentes dos fatôres primos;

3º) *multiplicar* os resultados obtidos.

Assim, por exemplo, para extrair a raiz quadrada de 144 (que é um quadrado), procedemos:

1º) $144 = 2^4 \times 3^2$

2º) $\sqrt{144} = \sqrt{2^4 \times 3^2} = 2^2 \times 3^1$

3º) $\sqrt{144} = \boxed{12}$

Logo: $$\sqrt{144} = \sqrt{2^{\overset{:2}{4}} \times 3^{\overset{:2}{2}}} = 2^2 \times 3^1 = 4 \times 3 = \boxed{12}$$

Êsse processo é *geral* para a extração da raiz de ordem qualquer, desde que os expoentes dos fatôres primos da decomposição sejam divisíveis pelo índice do radical. Exemplos:

1º) $\sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^{\overset{:4}{4}}} = 2^1 = 2$

2º) $\sqrt[3]{2^{\overset{:3}{6}}} = 2^2 = 4$

3º) $\sqrt[3]{4\,096} = \sqrt[3]{2^{\overset{:3}{6}} \times 4^{\overset{:3}{3}}} = 2^2 \times 4^1 = 4 \times 4 = \boxed{16}$

Como você deverá estar prevendo, *não é possível* extrair-se a *raiz exata* de um número que não seja uma *potência*. Aliás, fato semelhante já ocorreu com as outras *operações inversas* já estudadas, pois a *subtração* de dois números não era possível quando o primeiro dêles era *menor* que o segundo e nem a *divisão* entre dois números era possível se o primeiro dêles não fôsse *múltiplo* do segundo. Por isso é que dizíamos que o conjunto dos números inteiros é NÃO-FECHADO, em relação às operações: *subtração* e *divisão*.

11. *Prática de extração de raiz quadrada por aproximação. Resto* .

Sendo a *extração da raiz quadrada* uma das operações que você, com mais freqüência, usará no Ginásio, vamos estudá-la no caso de o número, com o qual se vai operar, não ser um quadrado, pois para êste caso já conhecemos processo geral de extração (fatoração completa).

Então, no caso de o número dado *não ser quadrado*, a extração da raiz quadrada será denominada *por aproximação*. Estudaremos o caso da *aproximação por falta*, A MENOS DE UMA UNIDADE, isto é, será considerado o *maior número* cujo *quadrado* esteja *contido* no número dado. O êrro cometido será *menor* que uma unidade e a diferença entre o número dado e o maior quadrado nêle contido chama-se RESTO da raiz quadrada.

Destaquemos os casos:

1.º) *o número não ultrapassa* 100: a extração da raiz quadrada (exata ou aproximada) será feita de *memória*, pois, basta lembrar que os quadrados dos números:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 são respectivamente:

1 4 9 16 25 36 49 64 81 100 (*)

e, portanto:

$\sqrt{49} = 7$; $\sqrt{20} \sim 4$ (lê-se: raiz quadrada *aproximada* de 20 é 4)
$\sqrt{100} = 10$; $\sqrt{65} \sim 8$

2.º) *o número é maior que* 100: nesse caso vale a seguinte regra que será exposta em parte, num exemplo, e justificada a seguir. Seja extrair a raiz quadrada de 731. Temos os seguintes "passos" como técnica de extração:

1.º) Decompomos o número em grupos de dois algarismos, a partir da direita, podendo o último grupo conter um única algarismo; a cada grupo separado corresponde um algarismo na raiz. Então: 7.31 → a raiz possui *dois* algarismos (um para cada grupo)

(*) Observe que a *terminação* de um número quadrado só pode ser: 1, 4, 9, 6, 5, 00.

2.°) Extraímos a raiz quadrada aproximada, por falta, (se não fôr quadrado) do último grupo (no exemplo 7) encontrando o *primeiro algarismo da raiz.* Êste no ex. é 2.

3.°) Subtraímos do primeiro grupo o quadrado do número encontrado ($2^2 = 4$) e à direita do resto (3) "baixamos" o segundo grupo (31), separando com um ponto o *último* algarismo da direita. Logo:

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{7.31} & \underline{2} \\ \underline{4} & \\ 33.1 & \end{array}$$

4.°) Duplicamos o número da raiz ($2 \times 2 = 4$) escrevendo-o na linha logo abaixo da raiz e dividimos, por êsse número, o número que permaneceu à esquerda do ponto (33); o quociente aproximado obtido (8) escreve-se à direita daquêle dôbro e a seguir multiplicamos o número assim formado (48) pelo mesmo quociente (8). Temos então:

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{7.31} & \times 2 \quad \underline{2} \\ \underline{4} & \quad 48 \times 8 = 324 \\ 33.1 & \\ & \quad 33 \; \begin{array}{|l} \underline{4} \\ 8 \end{array} \end{array}$$

Nota: Se o quociente obtido fôr igual ou maior que 10 escreve-se 9; se fôr menor que 1, escreve-se 0.

5.°) Se fôr possível subtrair o produto obtido (384) do número (331) o quociente encontrado (8) será o *segundo* algarismo da raiz; caso contrário, diminuímos o quociente de uma unidade até que se encontre um produto que torne possível tal subtração. No exemplo, 384 não pode ser subtraído de 331, então ao invés de 8, usaremos 7, como quociente. Agora: $47 \times 7 = 329$ já pode ser subtraído de 331, então a raiz procurada (aproximada) é 27, sendo o *resto* 2. Logo:

$$\begin{array}{rr|r} & \sqrt{7.31} & \underline{27} \\ & \underline{4} & 47 \\ & 33.1 & \underline{7} \times \\ & \underline{32\,9} & 329 \\ \text{resto} & \rightarrow 2 & \end{array}$$

$\sqrt{731} \sim 27$ (resto: 2) Prova: $27 \times 27 = 729$

$729 + 2 = \boxed{731}$

OBSERVAÇÕES:

1.ª) Se o número dado possuir mais algarismos continua-se aplicando o mesmo processo;

2.ª) o resto da raiz quadrada deve ser sempre *menor que o dôbro da raiz;* se o resto fôr zero a raiz encontrada é *exata* e o número proposto é um *quadrado.*

Outros exemplos:

1)
$$\begin{array}{r|l} \sqrt{1.44} & 12 \\ \cline{2-2} 1 & 22\times 2 = 44 \\ \cline{1-1} 04.4 & \nearrow \\ 4\,4 & \quad 4 \;\underline{|2} \\ \cline{1-1} 0\,0 & \qquad\; 2 \end{array}$$

Logo: $\sqrt{144} = \boxed{12}$ (exata)

2)
$$\begin{array}{r|l} \sqrt{13.75} & 37 \\ \cline{2-2} 9 & 67\times 7 = 469 \\ \cline{1-1} 47.5 & \nearrow \\ 46\,9 & \quad 46 \;\underline{|6} \\ \cline{1-1} 6 & \qquad\;\; 7 \end{array}$$

Logo: $\sqrt{1\,375} \sim \boxed{37}$

resto: 6

3)
$$\begin{array}{r|l} \sqrt{16.16.84} & 402 \\ \cline{2-2} 16 & 80\times 0 = 0 \\ \cline{1-1} 01.6 & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 168.4 & \\ 160\,4 & 802\times 2 = 1\,604 \\ \cline{1-1} 84 & \end{array}$$

Logo: $\sqrt{161684} \sim \boxed{402}$

resto: 84

JUSTIFICAÇÃO: Seja o exemplo inicial 731. Sendo 731 um número maior que 100 a sua raiz será um *número maior que* 10 e, portanto, conterá dezenas (□) e unidades (△), ou seja, será um número da forma:

$$10 \times \square + \triangle$$

A *sentença matemática* correspondente é:

$$\boxed{731 = (10 \times \square + \triangle)^2}$$

ou

$731 = (10 \times \square + \triangle)\,(10 \times \square + \triangle)$ ⟶ definição de quadrado

$731 = 10\times\square\times 10\times\square + 10\times\square\times\triangle + 10\times\square\times\triangle + \triangle\times\triangle$ ⟶ produto de duas somas indicadas.

$731 = (10 \times \square)^2 + 2 \times 10 \times \square \times \triangle + \triangle^2$ ⟶ definições de potência e produto.

$731 = (10 \times \square)^2 + (20 \times \square + \triangle) \times \triangle$ ⟶ inversa da p.d.m. (a)

O que é preciso agora é determinar os valôres de □ e △ a fim de conhecer a raiz quadrada de 731 (exata ou aproximada).

$$\begin{array}{r|l} & \;\;\square \\ & \swarrow \\ \sqrt{7.31} & 2 \\ \hline 4\,0\,0 & 20\times\square+\triangle=40+8 \\ \hline 3\,3.1 & (20\times\square+\triangle)\,\triangle=48\times 8 \\ & \quad 33 \;|\underline{\;4\;} \\ & \qquad\;\; 8 \end{array}$$

Como o número de centenas (7) do 731 deve *conter* o quadrado das dezenas ($\square^2$) da raiz (na disposição prática êste fato foi indicado separando-se os algarismos de 731 em grupos de dois), segue-se que □ pode ser, no máximo 2, pois $2^2 = 4$, que está contido em 7. Em outras palavras, as 700 unidades das centenas do 731 contém as 400 unidades correspondentes ao quadrado das 20 unidades das dezenas da raiz procurada (daí a subtração: 731–400, efetuada na disposição prática) e mais um resto (300), que juntamente com as outras 31 unidades, devem ser distribuídas pelas outras partes que compõem o 731 :

$$(20\times\square+\triangle)\,\triangle.$$

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{7.31} & 2\;7 \\ \hline 4 & (20\times\square+\triangle)\,\triangle=47\times 7 \\ \hline 3\,3.1 & \\ 3\,2\,9 & 47\times 7=329 \\ \hline 2 & \end{array}$$

Ora, dividindo 331 por $20\times\square+\triangle$ (que na disposição prática equivale a dividir 33 por $2\times\square$, que está representando o dôbro do primeiro algarismo da raiz), vamos encontrar, por aproximação, o △, que é o segundo algarismo da raiz. Então:

$$33 \;|\underline{\;4\;} \qquad \text{e o número: } 20\times\square+\triangle \text{ poderá ser:}$$
$$\;\;\;\;8$$

$40+8 \doteq 48$ (essa é a razão por que se coloca o quociente 8 ao lado do dôbro do primeiro algarismo da raiz, que é 4). Logo, o produto:

$(20\times\square+\triangle)\,\triangle$ será: $48\times 8 = 384$ e, como é maior que 331, isto é, supera as unidades disponíveis, temos que tomar uma unidade a menos. Então: $\triangle = 7$ e teremos: $47\times 7 = 329$, agora possível de ser subtraído de 331. O *resto:* 2, jamais poderá superar o número: $2\times(10\times\square+\triangle)$ (que representa o *dôbro* da raiz), pois, caso contrário o △ teria sido tomado, por engano, com uma unidade a menos de seu valor verdadeiro.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — Grupo 30

1. Escrever as raízes (exatas) correspondentes às seguintes potências (como resultado da operação inversa):

   1.º) $4^2 = 16 \iff \sqrt{16} = 4$ (exemplo-modêlo)

   2.º) $2^5 = 32$ 3.º) $15^2 = 225$ 4.º) $3^3 = 27$ 5.º) $0^6 = 0$ 6.º) $1^8 = 1$

2. Preencher com um numeral que torne verdadeira as seguintes sentenças:

   1.º) $\sqrt{3^2} = \ldots$ 2.º) $\sqrt[4]{5^4} = \ldots$ 3.º) $\sqrt[3]{2^3} = \ldots$ 4.º) $\sqrt[8]{1^8} = \ldots$

3. Idem: 1.º) $\sqrt{5^{\cdots}} = 5$ 2.º) $\sqrt[\cdots]{2^3} = 2$ 3.º) $\sqrt[4]{3^{\cdots}} = 3$ 4.º) $\sqrt[3]{8^3}\ldots$

4. Extrair a raiz quadrada (exata) dos seguintes números, usando a fatoração completa:

   1.º) 289 2.º) 1 024 3.º) 2 401 4.º) 7 225

   5.º) 11 664 6.º) 36 100 7.º) 88 209 8.º) 651 249

5. O dôbro do quadrado de um número 288. Qual é êsse número?

6. Qual é o número cujo quadrado aumentado de 11 dá 300?

7. Calcular o valor de $\square$ nas seguintes sentenças matemáticas:

1.ª) $\square^2 + 3 = 52$

2.ª) $3 \times \square^2 = 147$

8. O produto de dois números iguais é 484. Qual é êsse número?

9. Extrair a raiz quadrada aproximada, por falta, dos seguintes números:

1.º) 120	2.º) 315	3.º) 6 245	4.º) 9 712
5.º) 16 130	6.º) 57 164	7.º) 163 516	8.º) 654 482

10. Calcular com aproximação (por falta) o valor de $\square$ na sentença matemática:

$$2 \times \square^2 = 816$$

11. Determinar o número cuja raiz quadrada aproximada, por falta, é 13 e o resto 18.

12. Qual o menor número que se deve somar a 272 para se obter um quadrado perfeito?

PARA VOCÊ GUARDAR....

Observe (êste é um fato importante!) que aplicando a um certo número, qualquer das operações estudadas: adição, multiplicação e potenciação, e, a seguir, aplicando ao resultado a respectiva operação inversa: subtração, divisão e radiciação, você obterá o *próprio número*. Exemplo:

Vamos "operar" com o número 3. Temos:

1) SOMANDO 2 ao 3 e SUBTRAINDO 2 do resultado, obteremos o próprio 3:

$$(3+2) - 2 = 3$$

2) MULTIPLICANDO por 2 o 3 e DIVIDINDO o resultado por 2, obteremos o próprio 3:

$$(3 \times 2) : 2 = 3$$

3) ELEVANDO AO QUADRADO O 3 e EXTRAINDO A RAIZ QUADRADA do resultado, obteremos o próprio 3:

$$\sqrt[2]{3^2} = 3$$

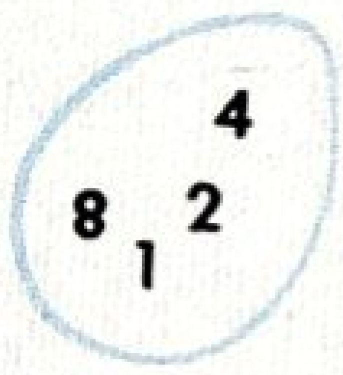
operações: m.d.c. e m.m.c.

Operação máximo divisor comum

12. *Divisores comuns · intersecção de conjuntos finitos*

Quais são todos os *divisores de* 8. Você sabe que são: 1, 2, 4 e 8, isto é, formam o conjunto:

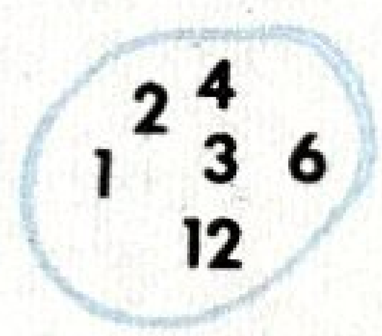
{1, 2, 4, 8}



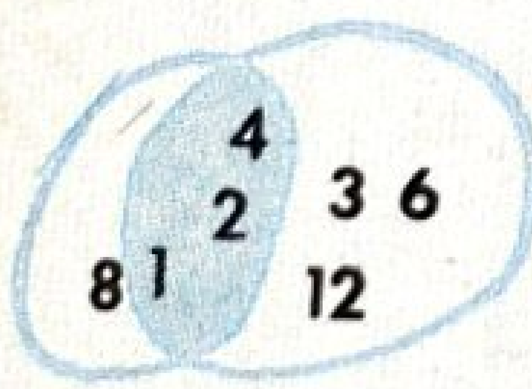
Quais são os divisores de 12?

São os elementos do conjunto:

{1, 2, 3, 4, 6, 12}



Quais são os divisores comuns de 8 e 12?



São aquêles que pertencem *ao mesmo tempo* aos dois conjuntos, ou seja, os que formam o conjunto:

{1, 2, 4}

denominado conjunto-intersecção dos dois conjuntos dados.

Você ficou, assim, conhecendo uma *operação* entre *conjuntos*, denominada intersecção, que é indicada pelo símbolo $\cap$ (nôvo para você!) que é lido "intersecção" ou "inter". Logo:

$$\{1, 2, 4\} \cap \{1, 2, 3, 4, 6, 12\} = \{1, 2, 4\}$$

13. *Operação: máximo divisor comum; resultado: maior divisor comum*

Dos divisores *comuns* de dois (ou mais números) tem muita importância o *maior* dêles. Assim, no exemplo considerado dos divisores comuns: {1, 2, 4} o *maior* dêles é o 4 (*maior* elemento do conjunto-intersecção).

A *operação* que permite determinar o *maior divisor comum* de dois (ou mais) números é denominada *máximo divisor comum*. Indicação:

$$\text{m.d.c. } (8,\ 12) = 4$$
ou
$$8 \text{ D } 12 = 4$$

Êrro comum: Confundir *máximo divisor comum*, que é uma OPERAÇÃO, com *maior divisor comum*, que é o RESULTADO da operação.

Consideremos outros exemplos da *operação m.d.c.* no conjunto-universo dos *números inteiros*:

1. Determinar o *maior divisor comum* dos números 12 e 18.

Temos:

divisores de 12: {1, 2, 3, 4, 6, 12}
divisores de 18: {1, 2, 3, 6, 9, 18}

divisores comuns: $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\} \cap \{1, 2, 3, 6, 9, 18\} = \{1, 2, 3, \underset{\substack{\downarrow \\ \text{maior divisor comum}}}{6}\}$

Logo: $12 \text{ D } 18 = 6$

2. Determinar o *maior divisor comum* dos números 4 e 5.

Temos:

divisores de 4: 1, 2, 4
divisores de 5: 1, 5

divisores comuns: $\{1, 2, 4\} \cap \{1, 5\} = \{1\}$ (*único* divisor *comum* e *maior*)

Logo: $4 \text{ D } 5 = 1$

OBSERVAÇÃO: Outra maneira de você dizer que dois números são *primos entre si* (4 e 5, por exemplo) é dizer que o *maior divisor comum* (D) entre êles é 1.

3. Determinar o *maior divisor comum* dos números: 18, 24 e 30

Temos:

divisores de 18: {1, 2, 3, 6, 9, 18}
divisores de 24: {1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24}
divisores de 30: {1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30}

Inicialmente, você determina a intersecção dos dois primeiros conjuntos, isto é, o conjunto dos *divisores comuns* de 18 e 24:

$$\{1, 2, 3, 6, 9, 18\} \cap \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\} = \{1, 2, 3, 6\}$$

A seguir, a intersecção do conjunto obtido com o terceiro conjunto, isto é,

$$\{1, 2, 3, 6\} \cap \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\} = \{1, 2, 3, 6\}$$

Logo: m.d.c. (18, 24, 30) = 6

ou 18D24D30 = 6

OBSERVAÇÃO: Você obterá o *mesmo resultado* se efetuar a intersecção do primeiro conjunto com o conjunto intersecção dos dois últimos. Portanto, a operação *máximo divisor comum* é associativa, ou seja:

(18D24)D30 = 18D(24D30) Verifique!

NOTA IMPORTANTE: *Lembre-se que agora você está aprendendo o conceito da operação* MÁXIMO DIVISOR COMUM, ou seja, que tipo de operação é!

A técnica de cálculo para efetua-la, que você já conhece desde a Escola Primária, será refeita neste livro depois que fôr entendida a *operação* e suas *propriedades*. Por isso, não se preocupe em pensar como deveria agir para determinar o *maior divisor comum* de números "grandes" usando a intersecção. O mesmo ocorreu, por exemplo, quando você estudou a operação *multiplicação*, onde: $4 \times 5 = 5 + 5 + 5 + 5 = 20$, foi calculado usando o *conceito* da operação, enquanto que 835×137, por exemplo, foi calculado com técnica de cálculo, por todos conhecida, (como você fazia no Grupo Escolar).

Operação mínimo múltiplo comum

14. *Múltiplos comuns: intersecção de conjuntos infinitos*

Com exceção do *zero*, que é múltiplo de *todos* os números, qual é o conjunto dos múltiplos de 4?

É: {4, 8, 12, 16, 20, 24, 28,...} (lembre-se que é un conjunto infinito!)

E o conjunto dos múltiplos de 6?

É: {6, 12, 18, 24, 30, 36, 42,...} (idem)

Os múltiplos comuns de 4 e 6, são aquêles que pertencem, *ao mesmo tempo*, aos dois conjuntos, e portanto, formam o conjunto-intersecção:

$$\{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, \ldots\} \cap \{6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, \ldots\} = \{12, 24, \ldots\}$$

Como você está observando, o conjunto dos *múltiplos comuns* de dois números é *infinito*, isto é, vai crescendo cada vez mais. Daí o fato de *não existir* o "maior múltiplo comum"; existe, porém, o menor múltiplo comum.

15. *Operação: mínimo múltiplo comum; resultado: menor múltiplo comum.*

O nome já está "dizendo": o *menor* dos múltiplos comuns de dois ou mais números é denominado MENOR MÚLTIPLO COMUM dêsses números. Assim, no exemplo acima, o menor dos múltiplos *comuns* dos números 4 e 6 é o 12 (o *menor* elemento do conjunto-intersecção).

A *operação* que permite determinar o *menor múltiplo comum* de dois (ou mais) números é denominada *mínimo múltiplo comum*. Indicação:

$$\text{m.m.c. } (4,\ 6) = 12$$

ou

$$4 \text{ M } 6 = 12$$

Êrro comum: Confundir *mínimo múltiplo comum*, que é uma OPERAÇÃO com *menor múltiplo comum*, que é o RESULTADO da operação.

Consideremos outros exemplos da *operação m.m.c.* no conjunto-universo dos *números naturais*:

1. Determinar o *menor múltiplo comum* dos números 4 e 5.

Temos:

$$\text{múltiplos de 4: } \{4,\ 8,\ 12,\ 16,\ 20,\ 24, \ldots\}$$
$$\text{múltiplos de 5: } \{5,\ 10,\ 15,\ 20,\ 25,\ 30, \ldots\}$$

$$\text{múltiplos comuns: } \{4, 8, 12, 16, 20, 24, \ldots\} \cap \{5, 10, 15, 20, 25, \ldots\} = \{\underset{\substack{\uparrow \\ \text{menor múltiplo comum}}}{20},\ 40, \ldots\}$$

Logo: $4\text{M}5 = 20$ ou m.m.c. $(4,\ 5) = 20$

OBSERVAÇÃO: Repare que os números 4 e 5, *primos entre si*, têm por *menor múltiplo comum* o produto dêles (20).

2. Determinar o *menor divisor comum* entre 4, 6 e 8. Temos:

múltiplos de 4: {4, 8, 12, 16, 20, 24, 28,...}
múltiplos de 6: {6, 12, 18, 24, 30, 36, 42,...}
múltiplos de 8: {8, 16, 24, 32, 40, 48, 56,...}

A primeira *intersecção* dá os múltiplos comuns de 4 e 6:

$$\{4, 8, 12, 16, 20, 24, \ldots\} \cap \{6, 12, 18, 24, 30, \ldots\} = \{12, 24, \ldots\}$$

A seguir, a *intersecção* do conjunto obtido com o terceiro conjunto dará:

$$\{12, 24, \ldots\} \cap \{8, 16, 24, 32, \ldots\} = \{\underset{\substack{\uparrow \\ \text{menor múltiplo comum}}}{24}, 48, \ldots\}$$

Logo: m.m.c. (4, 6, 8) = 24 ou 4M6M8 = 24

OBSERVAÇÃO: A operação mínimo múltiplo comum é também *associativa*, isto é:

(4M 6)M8 = 4M(6 M8) Verifique!

Atenção: Vale a mesma nota importante escrita para a operação máximo divisor comum, isto é, você está conhecendo, agora, o conceito da operação mínimo múltiplo comum. Depois, verá a técnica de cálculo dessa operação!

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 31

1. Escrever o conjunto dos *divisores* dos seguintes números:
   1.º) 6 2.º) 12 3.º) 15 4.º) 8 5.º) 36 6.º) 21 7.º) 48 8.º) 50
2. Calcular (usando a *intersecção*) o conjunto dos *divisores comuns* dos seguintes números:
   1.º) 6 e 26 2.º) 8 e 6 3.º) 6, 8 e 12 4.º) 21, 36 e 48
3. Valendo-se dos resultados anteriores dizer qual é o *maior divisor comum* dos números dos exercícios 1.º), 2.º), 3.º) e 4.º) do 1?
4. Qual é o *maior divisor comum* dos seguintes números:
   1.º) 8 e 8 2.º) 1 e 8 3.º) 8 e 1 4.º) 3 e 4 5.º) 4 e 3 6.º) 8 e 4
5. Efetuar: 1.º) 17D2 (o mesmo que m.d.c. (17, 2))
   2.º) 4D6D8 3.º) 8D12D16D28
6. Escrever o conjunto dos *múltiplos* dos seguintes números (lembre-se que são conjuntos infinitos!):
   1.º) 5 2.º) 4 3.º) 8 4.º) 12 5.º) 10 6.º) 6 7.º) 18 8.º) 20
7. Escrever o conjunto dos múltiplos, *menores que* 50, dos seguintes números (agora os conjuntos são finitos!):
   1.º) 5 2.º) 8 3.º) 10 4.º) 18

8. Calcular (usando a *intersecção*) o conjunto dos *múltiplos comuns* dos seguintes números:
   1.º) 5 e 4   2.º) 5 e 10   3.º) 8 e 12   4.º) 6, 12 e 18

9. Valendo-se dos resultados do Ex. 8, dizer qual é o *menor múltiplo comum* dos números dos exercícios 1.º), 2.º), 3.º) e 4.º).

10. Determinar a *intersecção* dos seguintes conjuntos:
   1.º) conj. dos múltiplos de 3 com o conj. dos múltiplos de 9 menores que 36;
   2.º) conj. dos números pares com o conj. dos múltiplos de 5 menores que 35;
   3.º) conj. dos números pares com o conj. dos números ímpares.

11. Qual é o *menor múltiplo comum* dos seguintes números:
   1.º) 8 e 8   2.º) 1 e 8   3.º) 8 e 1   4.º) 3 e 4   5.º) 4 e 3   6.º) 8 e 4

12. Efetuar: 1.º) 18M12 (mesmo que m.m.c. (18, 12))
   2.º) 2M5M6   3.º) 3M8M12M4

Propriedades Estruturais das Operações m.d.c. e m.m.c.

Você acabou de estudar mais duas *operações*: máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum, cujos conceitos foram fixados através da linguagem de *intersecção de conjuntos*.

É natural — como aliás aconteceu com as demais operações estudadas — que operando com números maiores que os apresentados nos exemplos, você conheça uma *técnica de cálculo* que facilite a obtenção dos *resultados* dessas operações. No caso das operações m.d.c. e m.m.c., essas técnicas (baseadas na decomposição em fatôres primos), conhecidas desde a Escola Primária, serão reestudadas a seguir.

Antes, porém, cabe uma pergunta:

As operações m.d.c. e m.m.c., definidas no conjunto-universo dos números inteiros, gozam das mesmas propriedades estruturais (fechamento, comutativa, elemento neutro,...) *válidas para as operações já estudadas* (adição, multiplicação,...)?

Resposta: SIM, também gozam das mesmas propriedades estruturais!

Observe:

Propriedades da operação m.d.c.:

1.ª) FECHAMENTO: o *maior divisor comum* de dois números inteiros *quaisquer* é *sempre* um número inteiro. Ex.:

$$\underset{\text{inteiro}}{4}\ D\ \underset{\text{inteiro}}{6} = \underset{\text{inteiro}}{2}$$

2.ª) COMUTATIVA: a *ordem* dos números *não altera* o *maior divisor comum* entre êles.

Ex.: 4 D 6 = 6 D 4 (Verifique você mesmo!)

3.ª) ELEMENTO NEUTRO: 0, pois: 4 D 0 = 0 D 4 = 4 (lembre-se que 0 é divisível por todos os números naturais e, portanto, pelo 4!)

4.ª) ASSOCIATIVA: (4 D 6) D 8 = 4 D (6 D 8) (É fácil verificar...)

OBSERVAÇÃO: Como aplicação do *elemento neutro* se o 0 figurar, juntamente com outros números, pode-se desprezá-lo na operação m.d.c.. Ex.: m.d.c. (8, 6, 0, 12) = = m.d.c. (8, 6, 12).

Propriedades da operação m.m.c. (conjunto-universo: conjunto dos números naturais)

1.ª) FECHAMENTO: o *menor múltiplo comum* de dois números naturais *quaisquer* é sempre um número natural. Ex.:

$$\underset{\text{natural}}{\underset{\swarrow}{4}}\ \mathrm{M}\ \underset{\text{natural}}{\underset{\downarrow}{6}} = \underset{\text{natural}}{\underset{\searrow}{12}}$$

2.ª) COMUTATIVA: a *ordem* dos números *não altera* o menor múltiplo comum entre êles.

4M6 = 6M4 (Verifique você mesmo!)

3.ª) ELEMENTO NEUTRO: 1, pois: 4M1 = 1M4 = 4 (lembre-se que o 1 é divisor de todos os números inteiros e, portanto, de 4)

4.ª) ASSOCIATIVA: (4M6)M8 = 4M(6M8) (É fácil verificar...)

OBSERVAÇÃO: Como aplicação do *elemento neutro* se o 1 figurar, juntamente com outros números, pode-se desprezá-lo na operação m.m.c.. Ex.:

m.m.c. (8, 6, 1, 12) = m.m.c. (8, 6, 12).

Propriedade DISTRIBUTIVA *que relaciona as duas operações:*

1.ª) Propriedade DISTRIBUTIVA do D em relação ao M:

8D(4M3) = (8D4)M(8D3) (Faça você os cálculos e verifique que essa sentença é verdadeira)

2.ª) Propriedade DISTRIBUTIVA do M em relação ao D:

8M(4D3) = (8M4)D(8M3) (idem)

NOTA CURIOSA: Repare bem que a propriedade DISTRIBUTIVA vale tanto de D para M como de M para D!

1. Nas seguintes igualdades dizer qual a *operação* efetuada e o nome do *resultado*:
   1.ª) 8 D 36 = 4 2.ª) 5 M 20 = 20
2. Dizer as *propriedades* que estão sendo aplicadas em:
   1.ª) 6 D 4 = 2
   2.ª) 12 D 8 = 8 D 12
   3.ª) 1 M 5 = 5
   4.ª) (4 D 8) D 7 = 4 D (8 D 7)
   5.ª) 3 M 4 = 4 M 3
   6.ª) 6 M 4 = 12
   7.ª) 9 D 0 = 9
   8.ª) 6 D (8 M 5) = (6 D 8) M (6 D 5)
   9.ª) (12 M 5) M 3 = 12 M (5 M 3)
   10.ª) 7 M (6 D 8) = (7 M 6) D (7 M 8)
3. Se 1 D 1 = 1, 2 D 2 = 2, 3 D 3 = 3, ... então a D a = ...
4. Verificar se é V ou F (assinale ao lado):
   1.ª) O maior divisor comum de 21 e 7 é a unidade.
   2.ª) O menor múltiplo comum entre 0 e 4 é 0.
   3.ª) O conjunto dos divisores de 12 é *fechado* em relação à operação D.
5. Colocar, convenientemente, os parênteses ("pontue"), a fim de tornar verdadeiras as seguintes sentenças:
   1.ª) 4 D 2 M 6 = 2 2.ª) 4 D 2 M 6 = 6

Técnicas de cálculo para as operações: m.d.c. e m.m.c.; conseqüências e aplicações

I. Operação máximo divisor comum (m.d.c.)

16. *Determinação do maior divisor comum por fatoração completa*

1.º) Decompõem-se os números em seus fatôres primos (fatoração completa);

2.º) Multiplicam-se os fatôres primos *comuns* tomados com seus *menores* expoentes; o produto dêles é o maior divisor comum. Exemplos:

1. Efetuar o m.d.c. (18, 24, 30)

Como:

$$\left.\begin{aligned} 18 &= 2^1 \times 3^2 \\ 24 &= 2^3 \times 3^1 \\ 30 &= 2^1 \times 3^1 \times 5 \end{aligned}\right\} \rightarrow \text{fatôres primos } \textit{comuns} \text{ (2 e 3) com os } \textit{menores} \text{ expoentes: } 2^1 \text{ e } 3^1$$

Logo: m.d.c. (18, 24, 30) = $2^1 \times 3^1 = \boxed{6}$

2. Efetuar o m.d.c. (693, 108, 90)

Como:

$$\left.\begin{array}{l} 693 = 3^2 \times 7^1 \times 11^1 \\ 108 = 2^2 \times 3^3 \\ \ \ 90 = 2 \times 3^2 \times 5 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l}\text{fatôres primos } \textit{comuns} \text{ (o único é o 3)} \\ \text{com os } \textit{menores} \text{ expoentes: } 3^2 \end{array}$$

Portanto: m.d.c. (693, 108, 90) = 3^2 = $\boxed{9}$

17. *Determinação do maior divisor comum por divisões sucessivas; disposição prática de Euclides*

Pode-se, também, determinar o m.d.c. de dois números, dividindo-se o maior pelo menor; se a divisão fôr exata o maior divisor comum será o *menor* dêles. Se a divisão não fôr exata, divide-se o menor pelo resto e assim sucessivamente. O *último divisor* será o maior divisor comum.

Êsse é o processo que você conhece desde o Curso Primário, não é?

Essas divisões você as fazia, usando um dispositivo prático atribuído a *Euclides*, que foi um dos mais notáveis matemáticos gregos da antiguidade. Exemplo:

1. Efetuar o m.d.c. (693, 108, 90)

Primeiramente podemos achar o maior divisor comum entre 693 e 108:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} & 6 & 2 & 2 & 2 \\ 693 & 108 & 45 & 18 & \boxed{9} \\ \hline 45 & 18 & 9 & 0 & \end{array}$$

e, a seguir, determinamos o maior divisor comum de 90 e o primeiro resultado encontrado: 3. Logo:

$$\begin{array}{c|c} & 10 \\ 90 & \boxed{9} \\ \hline 0 & \end{array}$$

Portanto: m.d.c. (703, 108, 90) = $\boxed{9}$

2. Efetuar o m.d.c. (4, 5)

Temos:

$$\begin{array}{c|c|c} & 1 & 4 \\ 5 & 4 & \boxed{1} \\ \hline 1 & 0 & \end{array}$$ Logo: m.d.c. (4,5) = $\boxed{1}$

18. *Conseqüências*

1.ª) *O maior divisor comum de dois números, em que o maior é divisível pelo menor, é o* MENOR. Exemplo:

m.d.c. (8,4) = 4 (bem natural, pois, o menor é *fator* do maior)

2.ª) *o maior divisor comum de dois números primos entre si é* 1. Exemplo:

m.d.c. (4,5) = 1 (já vimos que o 1 é o único fator e é o maior)

3.ª) *os divisores comuns de vários números são divisores de seu maior divisor comum*. De fato, os divisores comuns de vários números são constituídos de fatôres primos comuns que, necessàriamente, devem figurar no maior divisor comum. Exemplo:

Determinar os divisores comuns de 48 e 60.

Como: m.d.c. (48,60) = 12, os divisores comuns de 48 e 60 são, lògicamente, os divisores de 12: 1, 2, 3, 4, 6, 12

4.ª) *multiplicando ou dividindo dois ou mais números por um certo número* (diferente de zero), *seu maior divisor comum ficará multiplicado ou dividido por êsse número*. Com efeito, multiplicando os números dados por um certo número, você introduzirá novos fatôres que, forçosamente, figurarão no maior divisor comum. Exemplo:

Como: m.d.c. (18, 12) = 6, multiplicando 18 e 12 por 2, obteremos:

$$\text{m.d.c. } (18\times 2,\ 12\times 2) = 6\times 2 \text{ (Verifique!)}$$

No caso de você *dividir* os dois números pelo próprio *maior divisor comum* dêles (no exemplo 6), então os quocientes que você obterá serão *primos entre si*, pois: m.d.c. (18 : 6, 12 : 6) = 6 : 6 = 1

Esta conseqüência é aplicada para simplificar o *cálculo*. Assim, por exemplo: efetuar o m.d.c.(1 200, 1 800) é o mesmo que efetuar o m.d.c.(12,18) = 6, e a seguir multiplicar 6 por 100, isto é:

$$\text{m.d.c. } (1\,200,\ 1\,800) = 600$$

19. *Aplicações em exercícios diversos*

1. Determinar os dois *menores* números pelos quais *devemos* dividir 144 e 160, a fim de obter *quocientes iguais*.

   Primeiramente determina-se o maior divisor comum de 144 e 160, isto é: m.d.c.(144, 160) = 16.

Como: $144 : 16 = 9$ e sendo 16 o *maior* divisor de 144, o *menor* quociente será 9;

$160 : 16 = 10$ também 16 é o *maior* divisor de 160 e, portanto, o *menor* quociente será 10.

Logo, os números procurados são: 9 e 10, pois $\begin{cases} 144 : \ \ 9 = 16 \\ 160 : 10 = 16 \end{cases}$

2. Na procura do maior divisor comum de dois números, pelo processo das divisões sucessivas, encontrei os quocientes, 1, 2 e 6 e os restos 432, 72 e 0, respectivamente. Determine os dois números.

O exercício tem o seguinte "esquema":

	1	2	6
?	?	432	72
432	72	0	

Procedendo, inversamente da ordem que se emprega no método das divisões sucessivas, o 72, por ser o penúltimo resto (o último é o 0) é o maior divisor comum dos números procurados. Logo:

$2 \times 432 + \ 72 = \ \ 736$ (que é o segundo número procurado)
$1 \times 936 + 432 = 1\,368$ (que é o primeiro número procurado)

3. Um terreno de forma retangular tem as dimensões: 24m de frente e 56m de fundo. Qual deve ser o comprimento do *maior* cordel que sirva para medir *exatamente* as duas dimensões?

Como: m.d.c.(56, 24) = 8, segue-se que o *maior* cordel que pode ser usado para medir o terreno deve ter 8m, pois, 8 é o *maior divisor comum* de 56 e 24.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 33

1. Dos divisores comuns aos números 48 e 72, determinar (usando *qualquer* processo ensinado):
   1.º) os pares; 2.º) os múltiplos de 3; 3.º) o *maior* dêles
2. Efetuar (usando as *técnicas de cálculo* ensinadas):
   1.º) m.d.c. (120, 384); 2.º) m.d.c. (3 600, 4 050); 3.º) m.d.c. (185, 222, 259);
   4.º) m.d.c. (128, 136, 256, 440); 5.º) m.d.c. (6 804, 47 952, 228 456).
3. Usando as *consequências* estudadas, efetuar:
   1.º) m.d.c. (48, 2); 2.º) m.d.c. (7, 9); 3.º) m.d.c. (1 200, 60, 30);
   4.º) m.d.c. (15, 26, 29); 5.º) m.d.c. (12, 4, 0).
4. Encontrar todos os números compreendidos entre 100 e 500 que tenham 102 por *maior divisor comum*.
5. Na procura do maior divisor comum de dois números, pelo método das divisões sucessivas, encontrei os quocientes 1, 3 e 2, e os restos 48, 4 e 20, respectivamente. Quais são êsses dois números?

6. Calcular os dois menores números pelos quais devemos dividir 180 e 204, a fim de que os quocientes sejam iguais.

7. Determinar os divisores comuns dos números 80 e 130 que sejam múltiplos comuns de 5 e 10.

8. Dados dois números: 182 e 238, verificar que o maior divisor comum dêles é também o maior divisor comum entre o menor (182) e a sua diferença ($238 - 182 = 56$).

9. Quer-se dividir três peças de fazenda que medem, respectivamente, 90, 108 e 144 metros, em partes iguais e do *maior tamanho possível*. Determinar o número das partes de cada peça e o comprimento do maior tamanho.

10. Deseja-se circundar de árvores, plantadas a *maior distância comum* um terreno de forma quadrilátera. Quantas árvores são necessárias, se os lados do terreno medem, respectivamente, 3 150m, 1 980m, 1 512m e 1 890m?

> **LEMBRETE AMIGO**
>
> Não se esqueça que o maior divisor comum de dois números primos entre si é 1; dois números em que o maior é divisível pelo menor é o MENOR.

II. Operação mínimo múltiplo comum (m.m.c.)

20. *Determinação do menor múltiplo comum por fatoração completa*

1.º) Decompõem-se os números em seus fatôres primos (fatoração completa)

2.º) Multiplicam-se todos os fatôres primos (comuns e não-comuns) considerados, cada um, com seu *maior* expoente; o produto dêles é o *menor múltiplo comum.*

Esta *regra* é ràpidamente justificada, desde que você lembre o seguinte fato: um número para ser *múltiplo comum de outros* deve possuir, *pelo menos*, os fatôres dêsses outros. Exemplos:

1. Efetuar o m.m.c. (4, 6, 8)

Como:

$$\left.\begin{aligned} 4 &= 2^2 \\ 6 &= 2^1 \times 3^1 \\ 8 &= 2^3 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\rightarrow \text{fatôres primos comuns (maiores expoentes): } 2^3 \\ &\rightarrow \text{fatôres primos não-comuns (maiores expoentes): } 3^1 \end{aligned}$$

Logo: m.m.c. $(4, 6, 8) = 2^3 \times 3^1 = 8 \times 3 = \boxed{24}$

Êsse cálculo pode ser efetuado com um *dispositivo prático*, que você emprega há muito tempo:

$$\begin{array}{l|l} 4,\ 6,\ 8 & 2 \\ 2,\ 3,\ 4 & 2 \\ 1,\ 3,\ 2 & 2 \\ 1,\ 3,\ 1 & 3 \\ \hline 1,\ 1,\ 1 & 2^3 \times 3 = 8 \times 3 = 24 \end{array}$$

Logo: m.m.c. (4, 6, 8) = $\boxed{24}$

2. Efetuar o m.m.c. (4, 5). Temos:

$$\begin{array}{l|l} 4,\ 5 & 2 \\ 2,\ 5 & 2 \\ 1,\ 5 & 5 \\ \hline 1,\ 1 & 2^2 \times 5 = 4 \times 5 = 20 \end{array}$$

Logo: m.m.c. (4, 5) = $\boxed{20}$

21. *Determinação do menor múltiplo comum usando relação existente entre as operações m.d.c. e m.m.c.*

Outra técnica de cálculo que serve para a determinação do menor múltiplo comum de dois números é a que decorre da seguinte relação: "*O produto de dois números é igual ao produto do seu maior divisor comum pelo seu menor múltiplo comum*".

De fato, sejam por exemplo, os números: 12 e 15, onde $\begin{cases} 12 = 2^2 \times 3^1 \\ 15 = 3^1 \times 5^1 \end{cases}$

Como: $\begin{cases} \text{m.d.c. } (12,\ 15) = 3^1 \\ \text{m.m.c. } (12,\ 15) = 2^2 \times 3^1 \times 5^1 \end{cases}$

e o produto: $12 \times 15 = (2^2 \times 3^1) \times (3^1 \times 5^1) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{maior divisor comum}}}{3^1} \times \underbrace{(2^2 \times 3^1 \times 5^1)}_{\substack{\uparrow \\ \text{menor múltiplo comum}}} \begin{cases} \text{p.c.m.} \\ \text{p.a.m.} \end{cases}$

temos que: m.d.c.(12, 15) $\times$ m.m.c.(12, 15) = 12×15

relação que permite concluir:

$$\boxed{\text{m.m.c. } (12,\ 15) = (12 \times 15) : \text{m.d.c. } (12,\ 15)}$$

Exemplo: Determinar o *menor múltiplo comum* de 12 e 15, por intermédio da operação m.d.c. (12, 15).

Temos: Sendo o m.d.c.(12, 15) = 3 e o produto: $12 \times 15 = 180$, vem:

$$\text{m.m.c. } (12,\ 15) = 180 : 3 = \boxed{60}$$

22. *Conseqüências*

1.ª) *O menor múltiplo comum de dois números, em que o maior é divisível pelo menor, é o* MAIOR. Exemplo:

m.m.c.(8, 4) = 8 (o que é evidente, pois, o *maior* é o primeiro múltiplo comum)

2.ª) *O menor múltiplo comum de dois números primos ente si é o produto dêles*. Exemplo:

m.m.c.(4, 5) = 20 (bem natural, pois, o produto de dois números primos entre si é o primeiro múltiplo comum dêles)

3.ª) *Multiplicando ou dividindo dois ou mais números por um certo número* (diferente de zero), *seu menor múltiplo comum ficará multiplicado ou dividido por êsse número*. Vale a mesma explicação feita para a operação m.d.c. Exemplo:

Sendo: m.m.c.(18, 12) = 36, verifique você mesmo que, multiplicando por 2, os números 18 e 12, o menor múltiplo comum (36) aparecerá multiplicado, também, por 2.

23. *Aplicações em exercícios diversos*

1. Determinar os dois *menores* números pelos quais devemos multiplicar os números 24 e 36, a fim de obter *produtos iguais*.

   Sendo o m.m.c.(24, 36) = 72 e 72 : 24 = 3, 72 : 36 = 2, segue-se que: 2 e 3 são os *menores* números que, multiplicados, respectivamente, por 24 e 36 dão *produtos iguais*.

2. Determinar todos os números compreendidos entre 1 000 e 3 000 e que sejam divisíveis, ao mesmo tempo, por 48, 60 e 72.

   O primeiro múltiplo comum de 48, 60 e 72 é o menor múltiplo comum: 720. Logo, o exercício estará resolvido procurando os múltiplos de 720 compreendidos entre 1 000 e 3 000, isto é: $720 \times 2 = 1\,440$; $720 \times 3 = 2\,160$; $720 \times 4 = 2\,880$ (os demais múltiplos de 720 ultrapassam 3 000).

3. Três navios fazem viagens entre dois portos. O primeiro cada 4 dias, o segundo cada 6 e o terceiro cada 9 dias. Se êsses navios partirem juntos, depois de quantos dias voltarão a sair juntos?

O primeiro múltiplo comum dêsses números é o menor múltiplo comum: 36. Logo, depois de 36 dias êsses navios partirão juntos novamente.

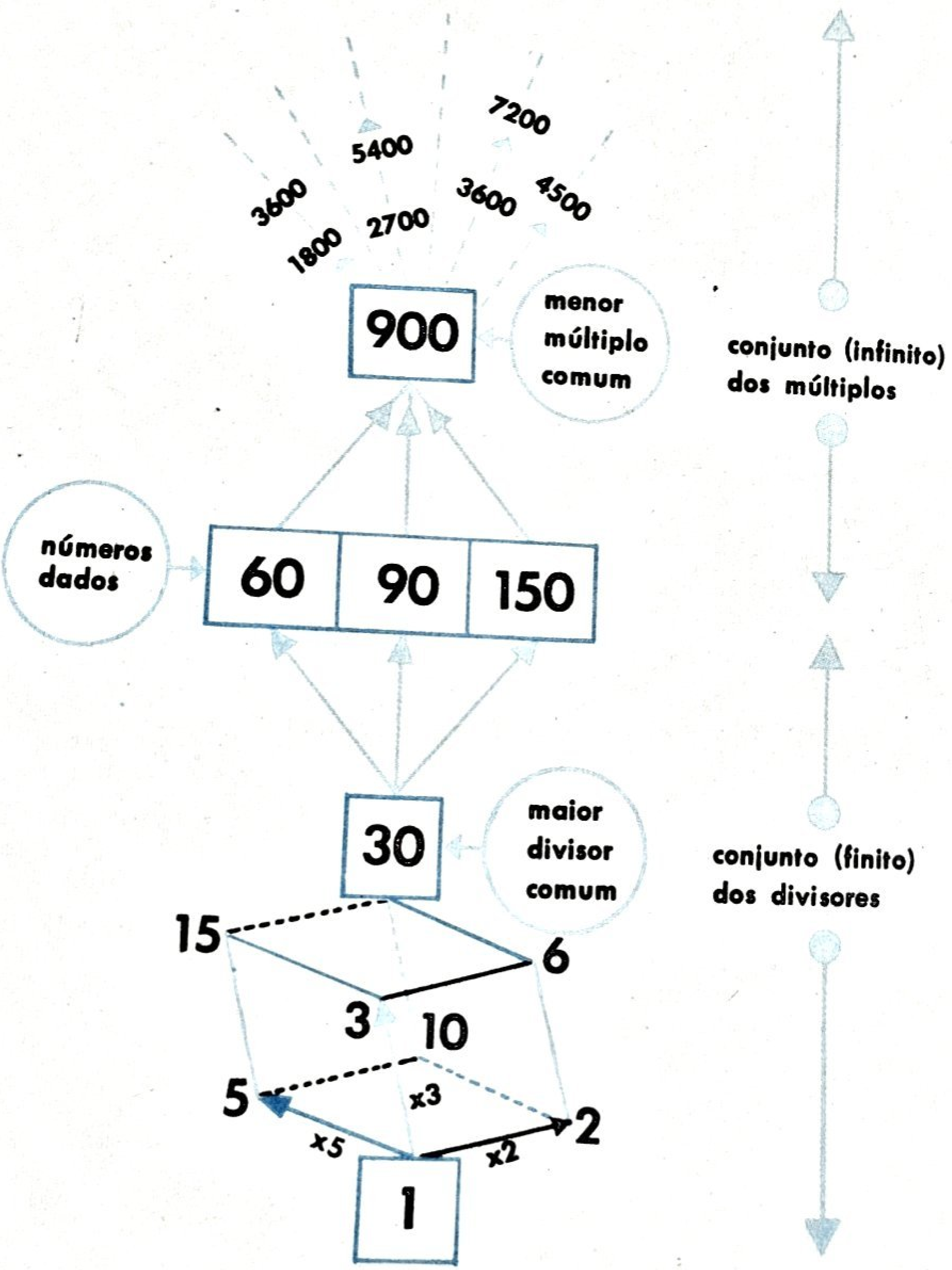
EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 34

1. Efetuar (usando as técnicas de cálculo ensinadas):
   1.º) m.m.c. (45, 12) 2.º) m.m.c. (36, 96, 112) 3.º) m.m.c. (48, 120, 96, 144)
   4.º) m.m.c. (4 320, 6 480) 5.º) m.m.c. (123, 205, 287)
2. Usando as *conseqüências* estudadas efetuar:
   1.º) m.m.c. (48, 2) 2.º) m.m.c. (7, 9) 3.º) m.m.c. (1 200, 60, 30)
   4.º) m.m.c. (5, 6, 11) 5.º) m.m.c. (12, 4, 1) 6.º) m.m.c. (8 916, 4)
3. Qual é a diferença entre o menor múltiplo comum e o maior divisor comum dos números 101 e 337?
4. O menor múltiplo comum de dois números é 11 352 e o maior divisor comum é 6 Se um dos números é 264 qual é o outro?
5. Qual é o produto de dois números, se o maior divisor comum entre êles é 8 e o menor múltiplo comum 48?
6. Determinar todos os números compreendidos entre 1 000 e 4 000 que sejam divisíveis, ao mesmo tempo, por 75, 150 e 180.
7. Calcular os dois menores números pelos quais devemos multiplicar os números 60 e 78, a fim de obter produtos iguais.
8. Numa República, o presidente deve permanecer 4 anos em seu cargo, os senadores 6 anos e os deputados 4 anos. Se em 1960 houve eleições para os três cargos em que ano realizar-se-ão novamente as eleições para êsses três cargos?
9. Duas rodas de uma engrenagem têm 14 e 21 dentes, respectivamente. Cada roda tem um dente estragado. Se, num dado instante, estão em contacto os dois dentes estragados, depois de quantas voltas repetir-se-á novamente êsse encontro?
10. Dois ciclistas percorrem a pista circular de um velódromo no mesmo sentido. O primeiro a percorre em 36 segundos e o segundo em 30. Tendo os ciclistas partido juntos, pergunta-se depois de quanto tempo encontrar-se-ão novamente no ponto de partida e quantas voltas dará cada um.

LEMBRETE AMIGO

Não se esqueça que o *menor múltiplo comum* de *dois números primos entre si é o* PRODUTO DÊLES; *o de dois números em que o maior é divisível pelo menor é o* MAIOR.

Representação "esquemática" dos divisores comuns e múltiplos comuns dos números: 60, 90 e 150.



CAPÍTULO 3

números fracionários

classe de frações equivalentes

estrutura de ordem com os números fracionários

PARTE 1ª

PARTE 2ª

operações com os números fracionários

problemas de aplicação

números decimais operações

números fracionários

classes de equivalência entre frações

estrutura de ordem nos números fracionários

números fracionários

1. *Noção intuitiva de fração*

Você tem a primeira idéia de *fração* quando, *repartindo* um objeto (que nesse instante representa a *unidade*) em um número qualquer de *partes iguais*, considera uma ou algumas dessas partes.

Assim, por exemplo, *repartindo-se* um tablete de chocolate (fig. 36) em três partes *iguais*, temos que:

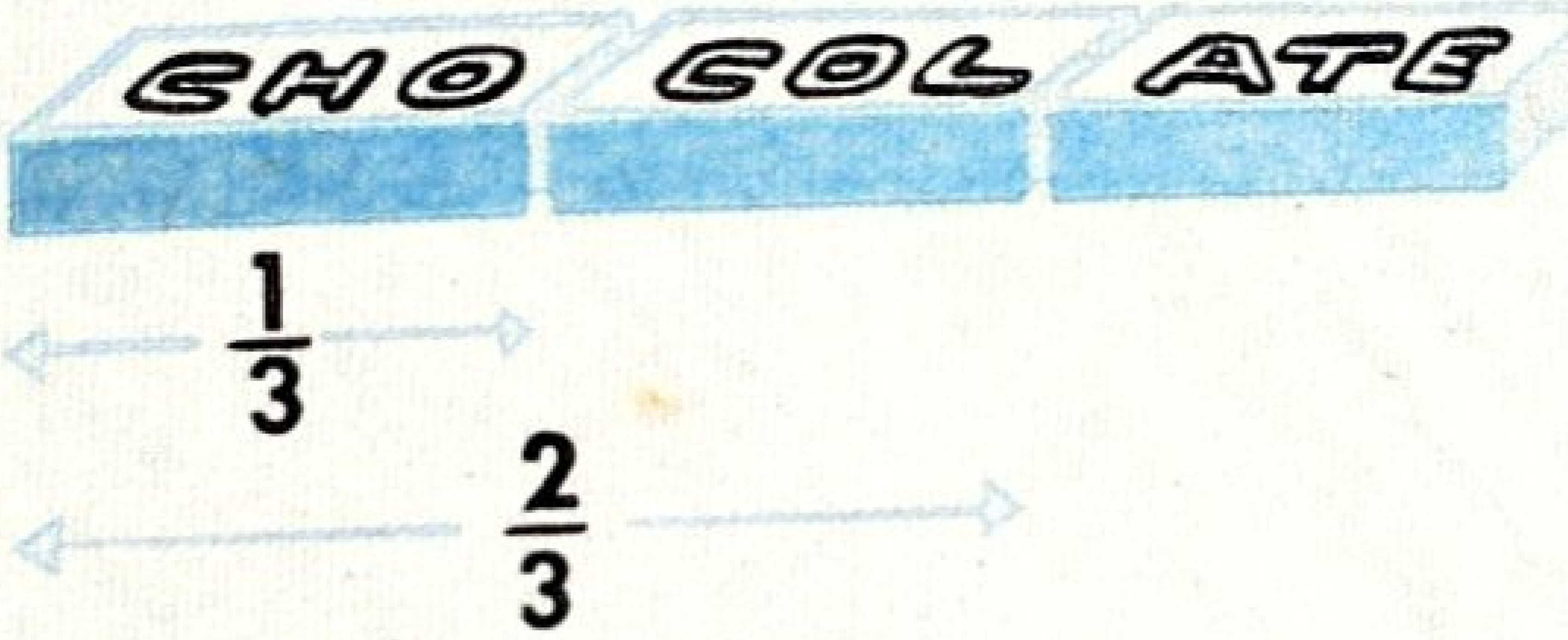


FIG. 36

1) uma dessas partes representa uma *fração* do chocolate, chamada *um têrço* e é indicada por $\frac{1}{3}$;

2) duas dessas partes representam outra *fração* do chocolate, chamada *dois terços* e é indicada por $\frac{2}{3}$.

Nasce, portanto, uma nova *espécie* de número (lembre-se que até agora você só "trabalhou" com os números naturais e números inteiros), denominado *fração* ou *número fracionário*, cuja representação é feita com *dois números inteiros*, tomados numa certa ordem, com o segundo dêles diferente de zero, sendo ambos separados por um traço horizontal.

Assim, com os dois números inteiros: 2 e 3 (o primeiro é o 2 e o segundo o 3) você tem o *número fracionário*: $\frac{2}{3}$.

O primeiro dêsses números é chamado *numerador* e o segundo, *denominador*.

O denominador indica em *quantas partes iguais* foi *dividida* a unidade e o numerador, quantas dessas partes foram *tomadas*. O numerador e o denominador constituem os *têrmos* da fração.

Então, o número fracionário $\frac{2}{3}$ (*numerador* 2 e *denominador* 3), "indica" que a *unidade* foi *dividida* em *três* partes iguais e foram tomadas *duas* dessas partes. A *unidade*, de que tanto se fala, é qualquer *grandeza*: o chocolate da fig. 36, a vareta da fig. 37, o círculo da fig. 38.

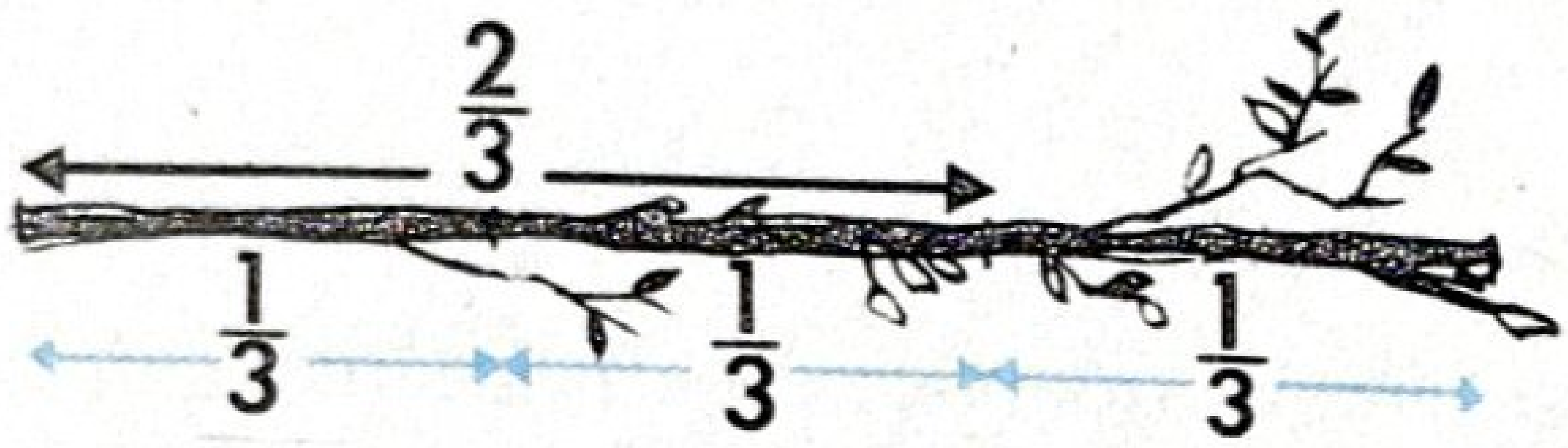


FIG. 37

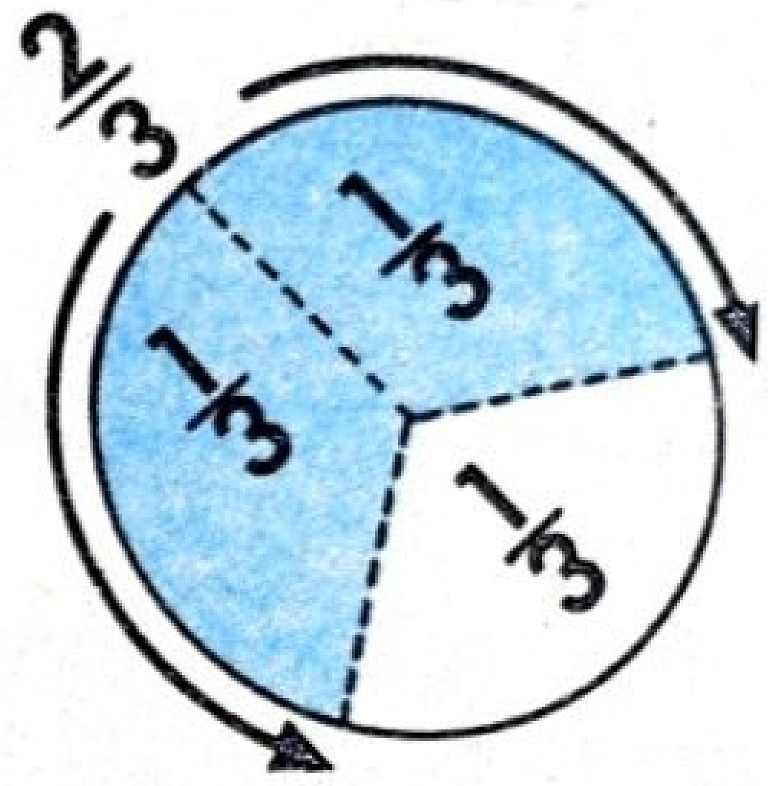


FIG. 38

NOTA HISTÓRICA: Desde a antiguidade conhecem-se os números fracionários. Os *egípcios* foram os primeiros a introduzirem os números fracionários, quando verificaram que sòmente com o conhecimento dos números naturais *não poderiam* efetuar *tôdas as medidas*! Num famoso documento histórico (Papiro de Rhind), datado de 1 700 anos *antes de Cristo*, encontram-se registradas as frações de maior uso: um meio, um têrço, um quarto, com as representações:

onde  significava "parte". A presente representação de número fracionário com um traço — foi introduzida sòmente no século XVI.

2. *Leitura de um número fracionário. Frações decimais.*

Se o numerador fôr 1 e o denominador, qualquer dos números:

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9

lê-se o numerador e em seguida, na mesma ordem, as palavras:

meio, têrço, quarto, quinto, sexto, sétimo, oitavo e nono

que são as *unidades fracionárias*. Se o numerador fôr maior que 1 formar-se-ão os respectivos *plurais*. Exemplos:

$\frac{1}{3}$ lê-se "um têrço"

$\frac{2}{5}$ lê-se "dois quintos"

$\frac{1}{2}$ lê-se "um meio" ou simplesmente "meio"

Se o denominador fôr uma *potência de* 10, isto é, 10, 100, 1 000, ... lê-se o numerador acompanhado das palavras:

décimo(s), centésimo(s), milésimo(s),.....

Exemplos:

$\frac{3}{10}$ lê-se "três décimos"

$\frac{1}{100}$ lê-se "um centésimo"

Em qualquer outro caso, lê-se o numerador e em seguida o denominador acrescido da palavra *avo* (no *plural, avos*). Exemplos:

$\frac{1}{13}$ lê-se "um treze avo"

$\frac{5}{13}$ lê-se "cinco treze avos"

As frações, cujos denominadores são potências de 10, são chamadas *decimais* e as demais *frações ordinárias*. As frações decimais desempenham um papel saliente no estudo dos números fracionários, por isso, receberão um tratamento à parte, posteriormente. Exemplos:

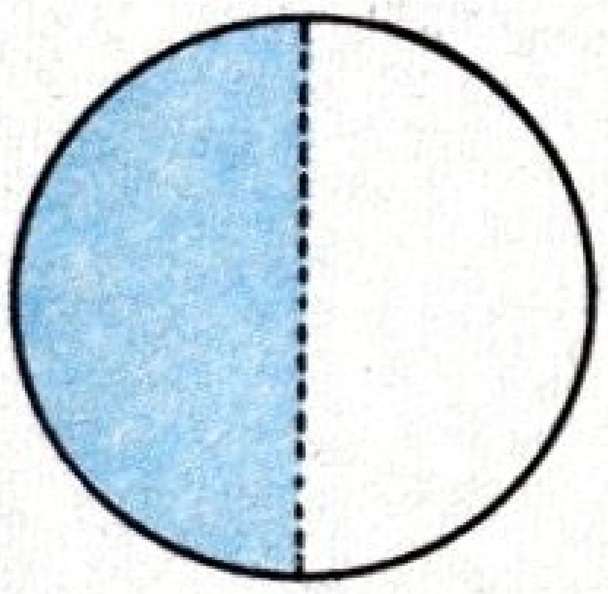
$\frac{2}{15}, \frac{1}{7}, \frac{4}{9}, \ldots\ldots\ldots\ldots$ são *frações ordinárias;*

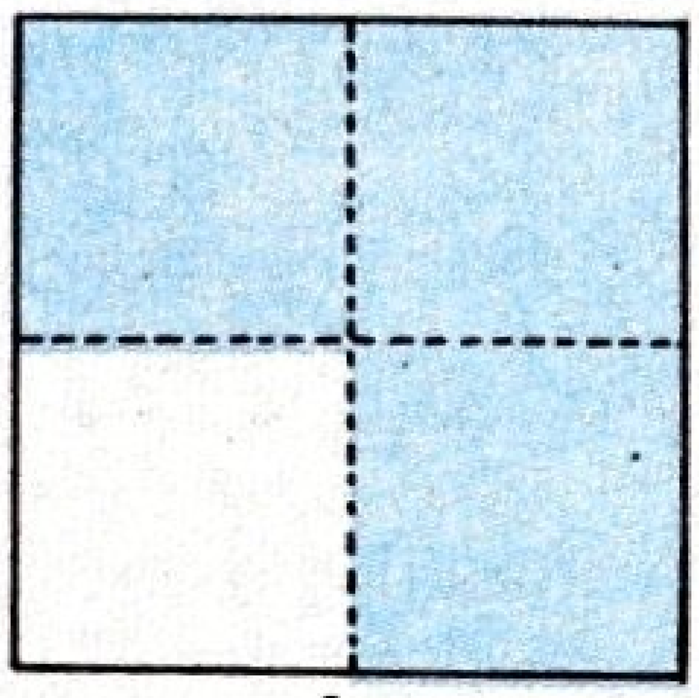
$\frac{3}{10}, \frac{1}{100}, \frac{7}{1\,000}, \ldots\ldots\ldots\ldots$ são *frações decimais*

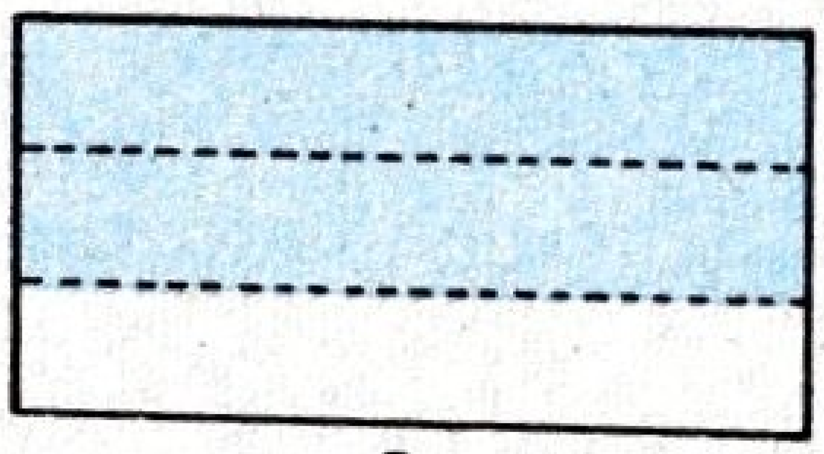
Êrro comum: Confundir, por exemplo: $\frac{3}{20}$ que é uma fração ordinária (três vinte avos) com fração decimal, pois, 20 *não é* uma potência de 10 e sim *múltiplo* de 10!

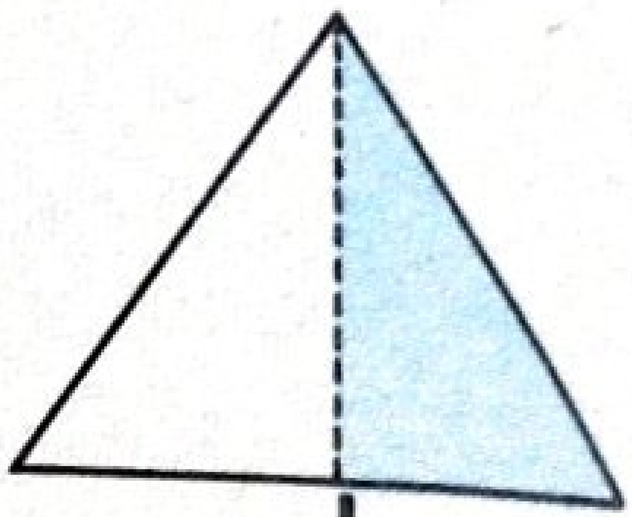
3. *Interpretação do número fracionário através de desenhos geométricos*

Que fração (número fracionário) representa a parte "colorida" das seguintes figuras:


a


b


c

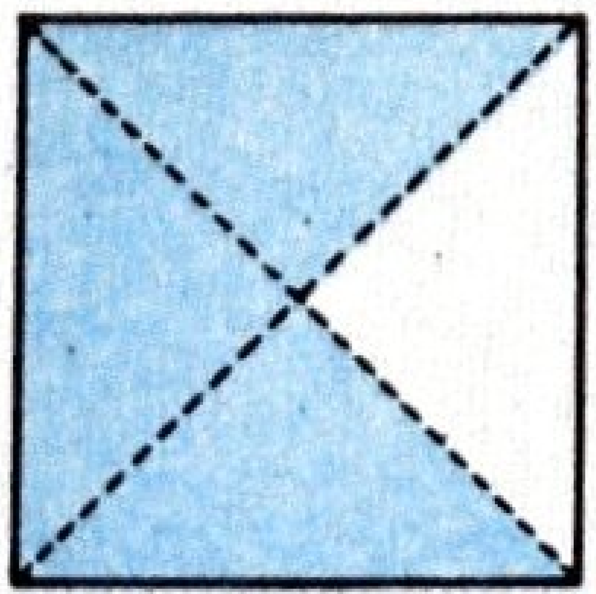

d

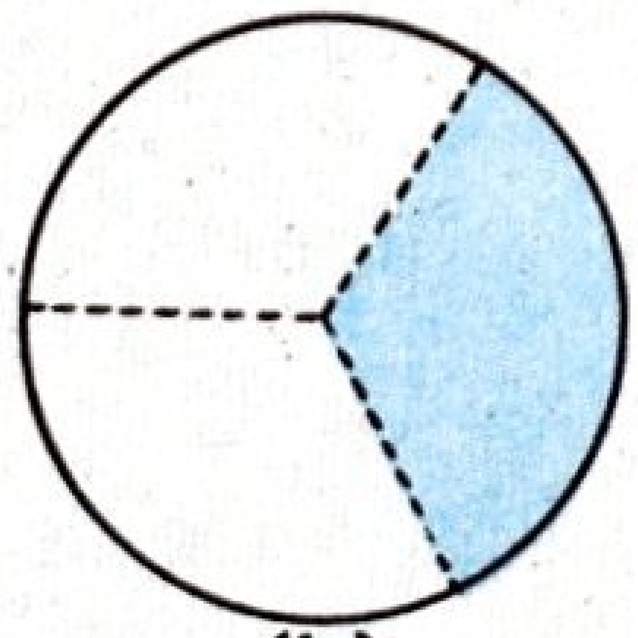
Como é fácil constatar, representam:

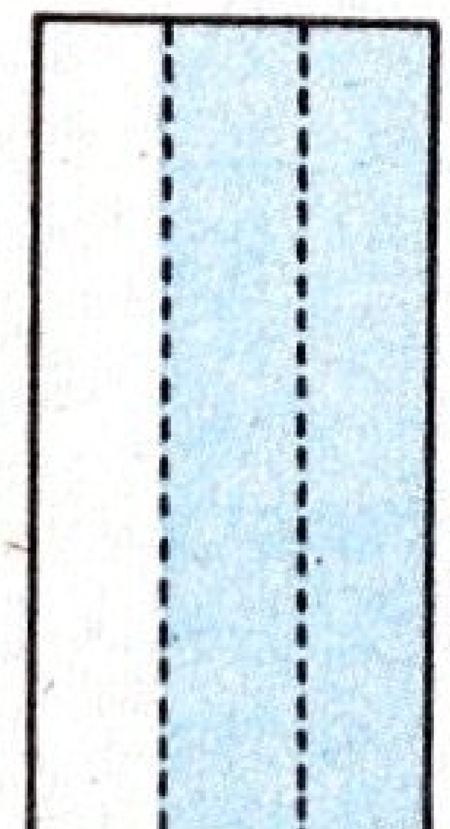
fig. a $\longrightarrow \frac{1}{2}$; fig. b $\longrightarrow \frac{3}{4}$; fig. c $\longrightarrow \frac{2}{3}$; fig. d $\longrightarrow \frac{1}{2}$

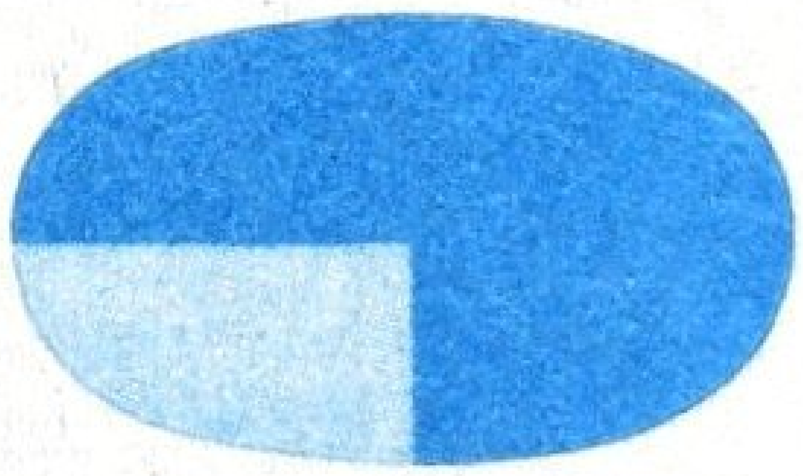
EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 35

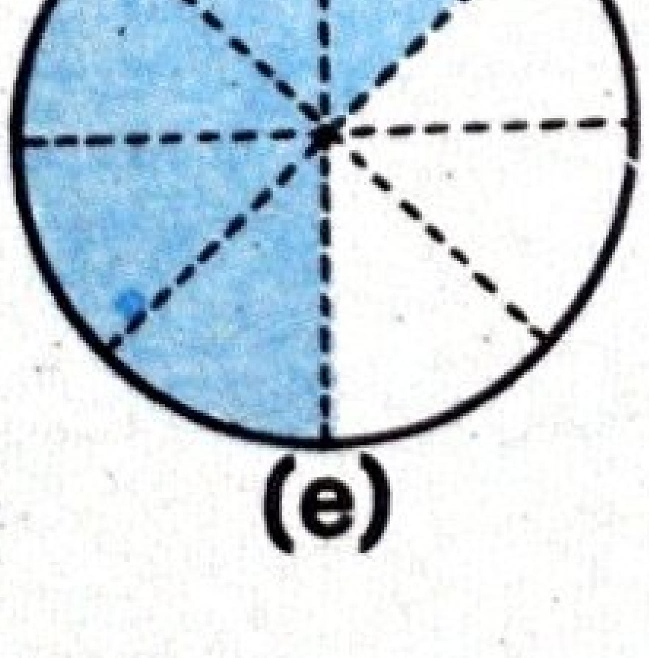
1. Que número fracionário representa a parte "colorida" das seguintes figuras:

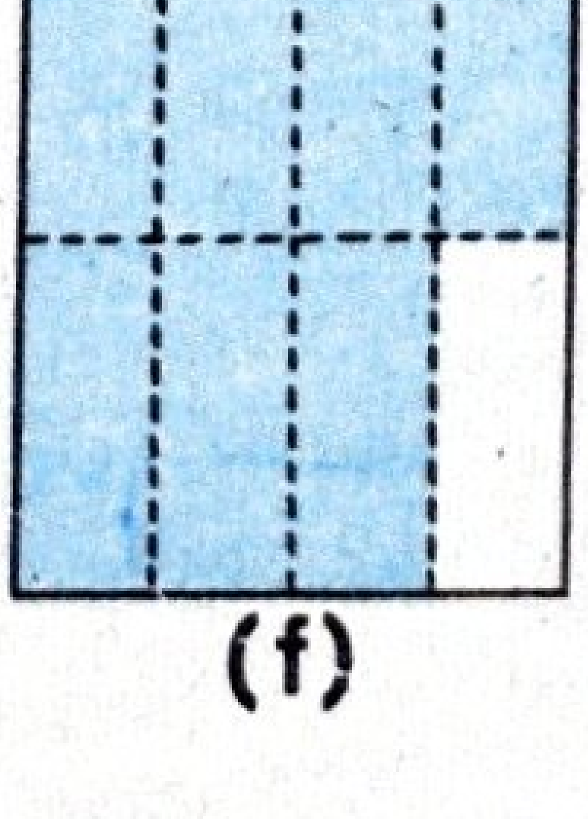

(a)

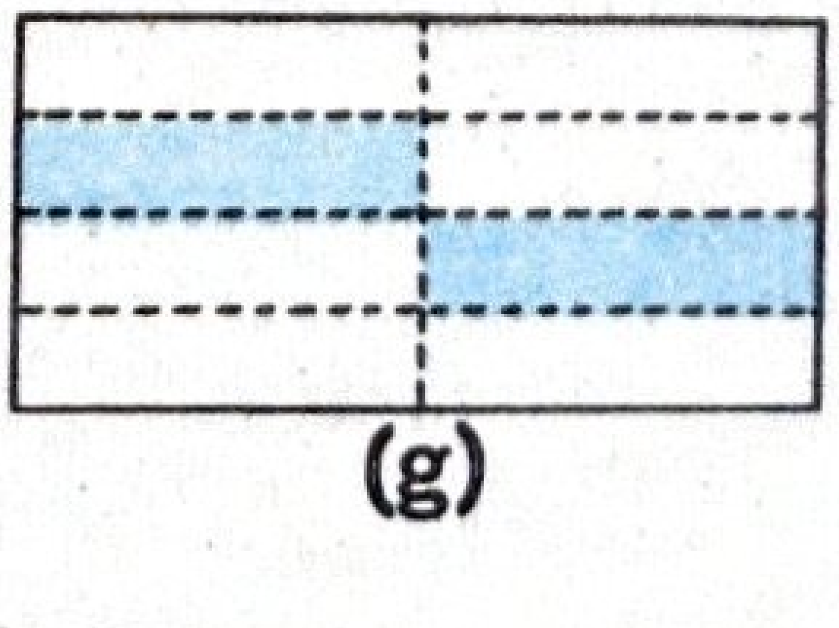

(b)

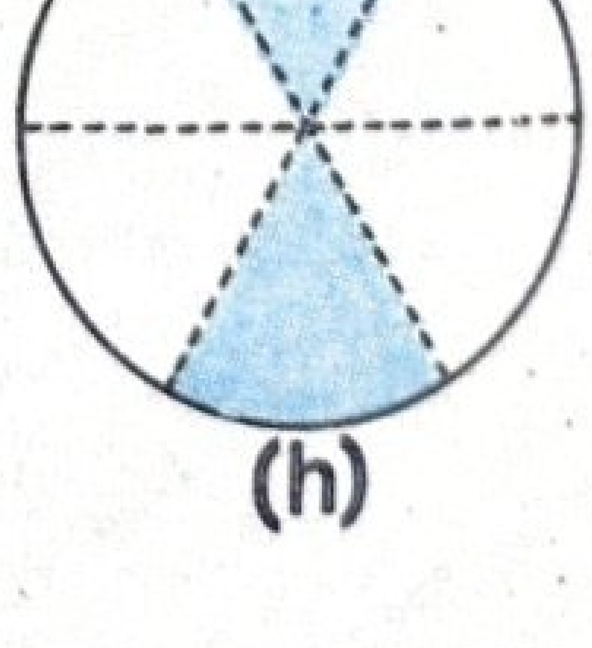

(c)


(d)

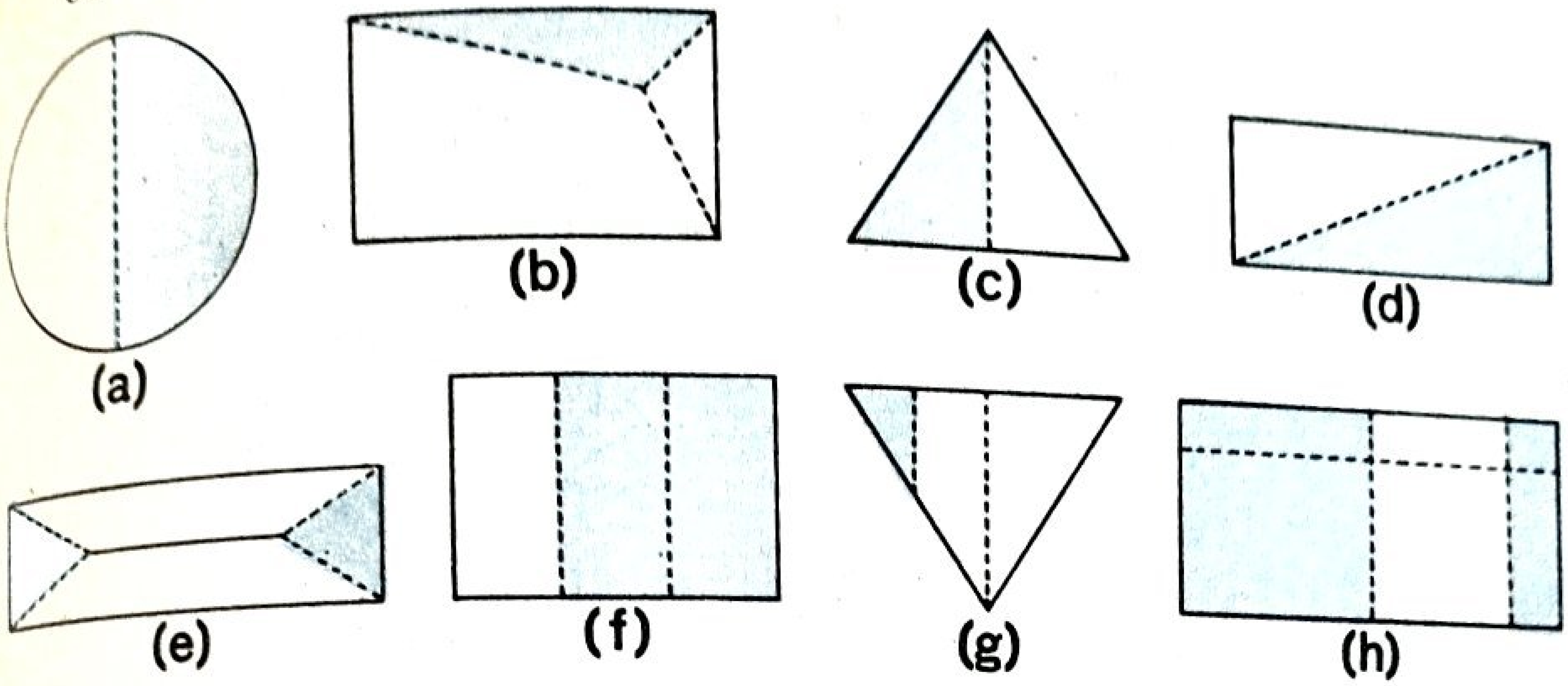

(e)


(f)


(g)


(h)

2. Das seguintes sentenças, correspondentes às figuras abaixo, dizer qual é Verdadeira (V) ou Falsa (F).



(a) "Um meio" da figura inteira foi "colorida".

(b) "Um quarto" da figura inteira foi "colorida".

(c) "dois terços" da figura inteira foi "colorida".

(d) "meio" da figura inteira foi "colorida".

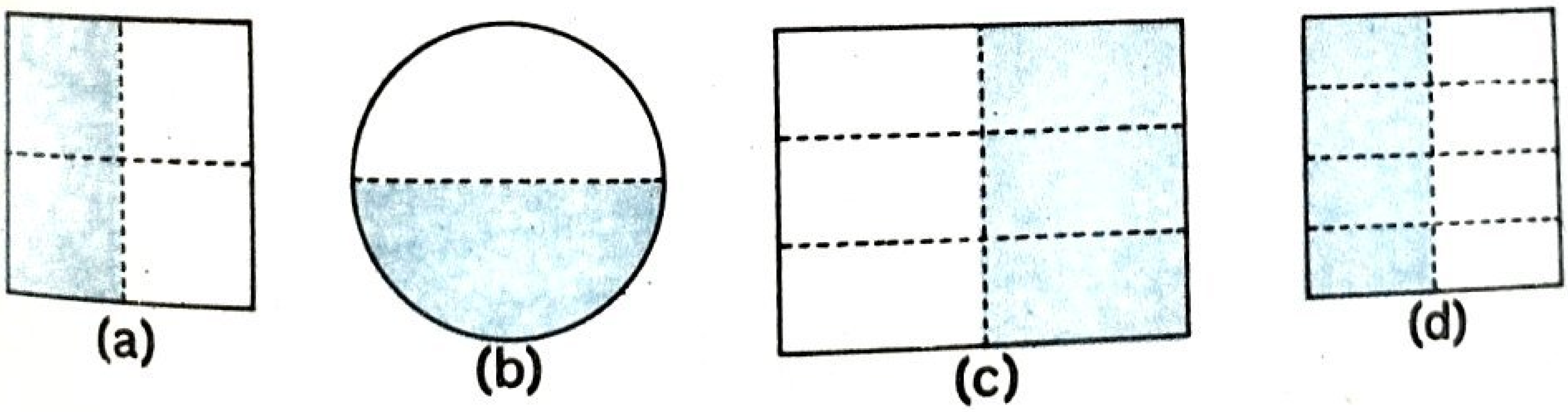
(e) "dois quartos" da figura inteira foi "colorida".

(f) "dois terços" da figura inteira foi "colorida".

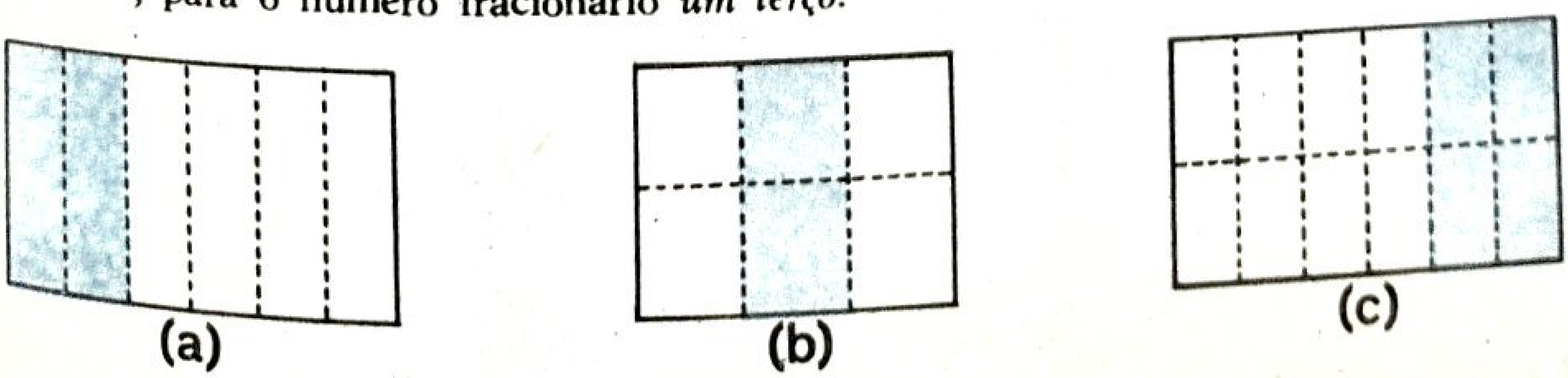
(g) "um meio" da figura inteira foi "colorida".

(h) "quatro sextos" da figura inteira foi "colorida".

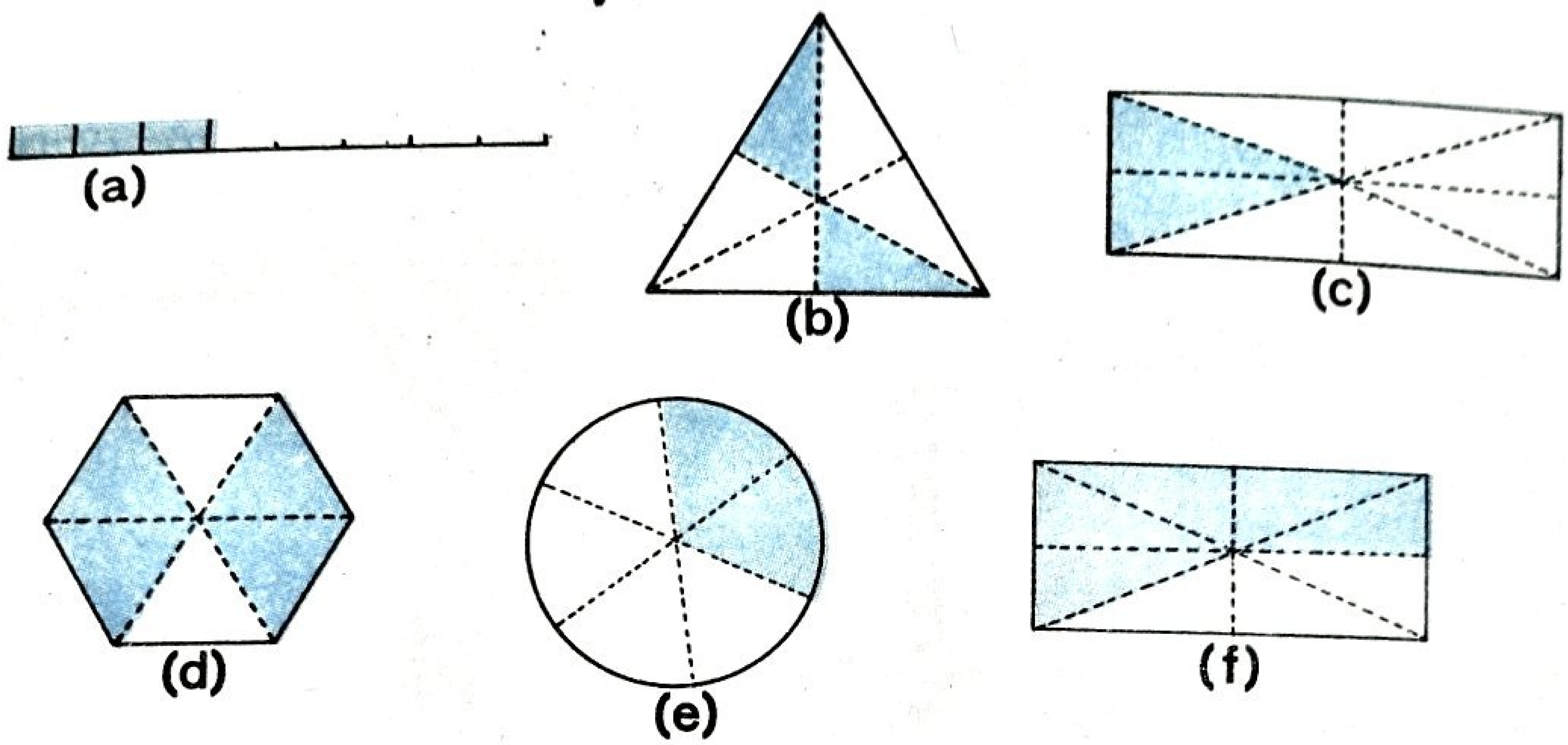
3. As partes "coloridas" das seguintes figuras sugerem o número fracionário *um meio*. Responda (escrevendo), para cada uma delas, que parte da figura inteira foi "colorida". (No exemplo (a) a resposta é $\frac{2}{4}$)



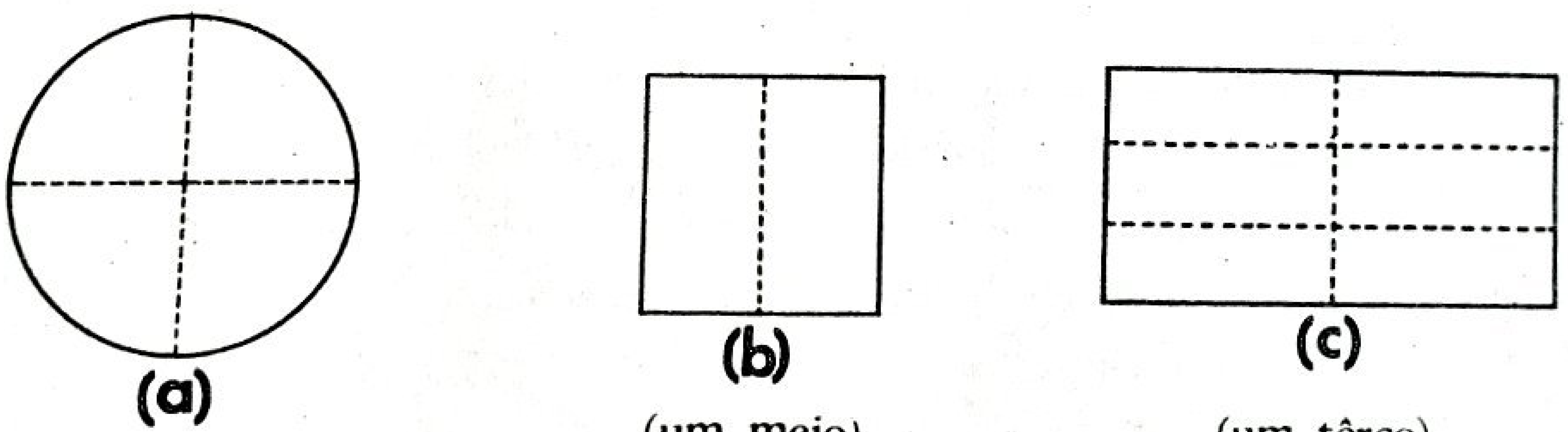
4. Idem, para o número fracionário *um têrço:*



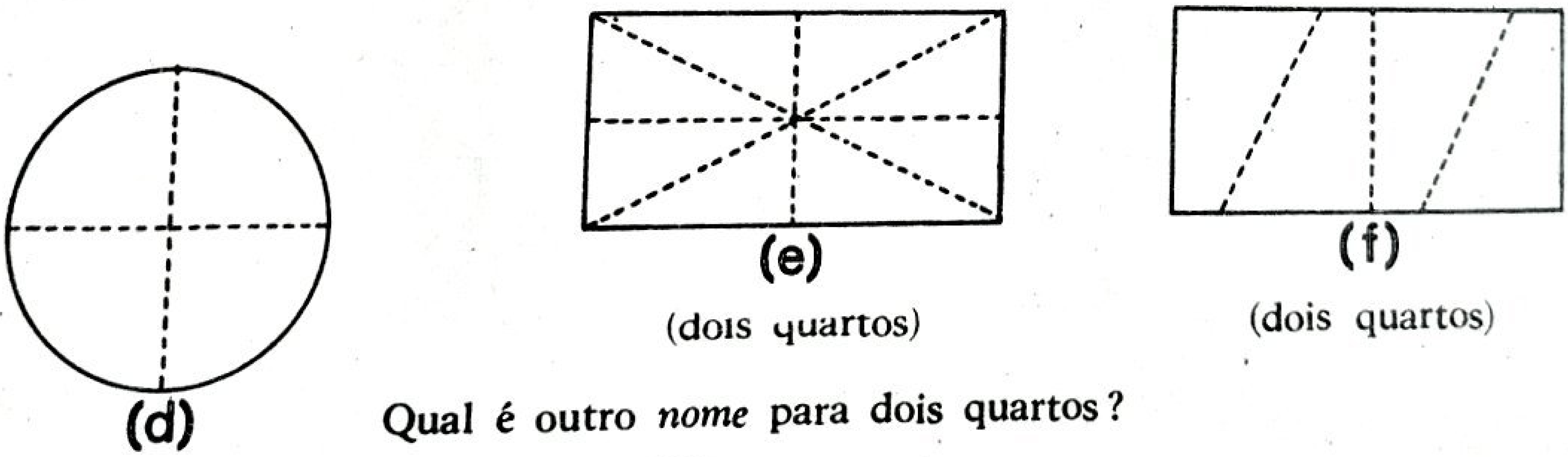
5. Que número fracionário representa a parte "colorida" das seguintes figuras:



6. Colorir, das seguintes figuras, as partes correspondentes às frações indicadas:



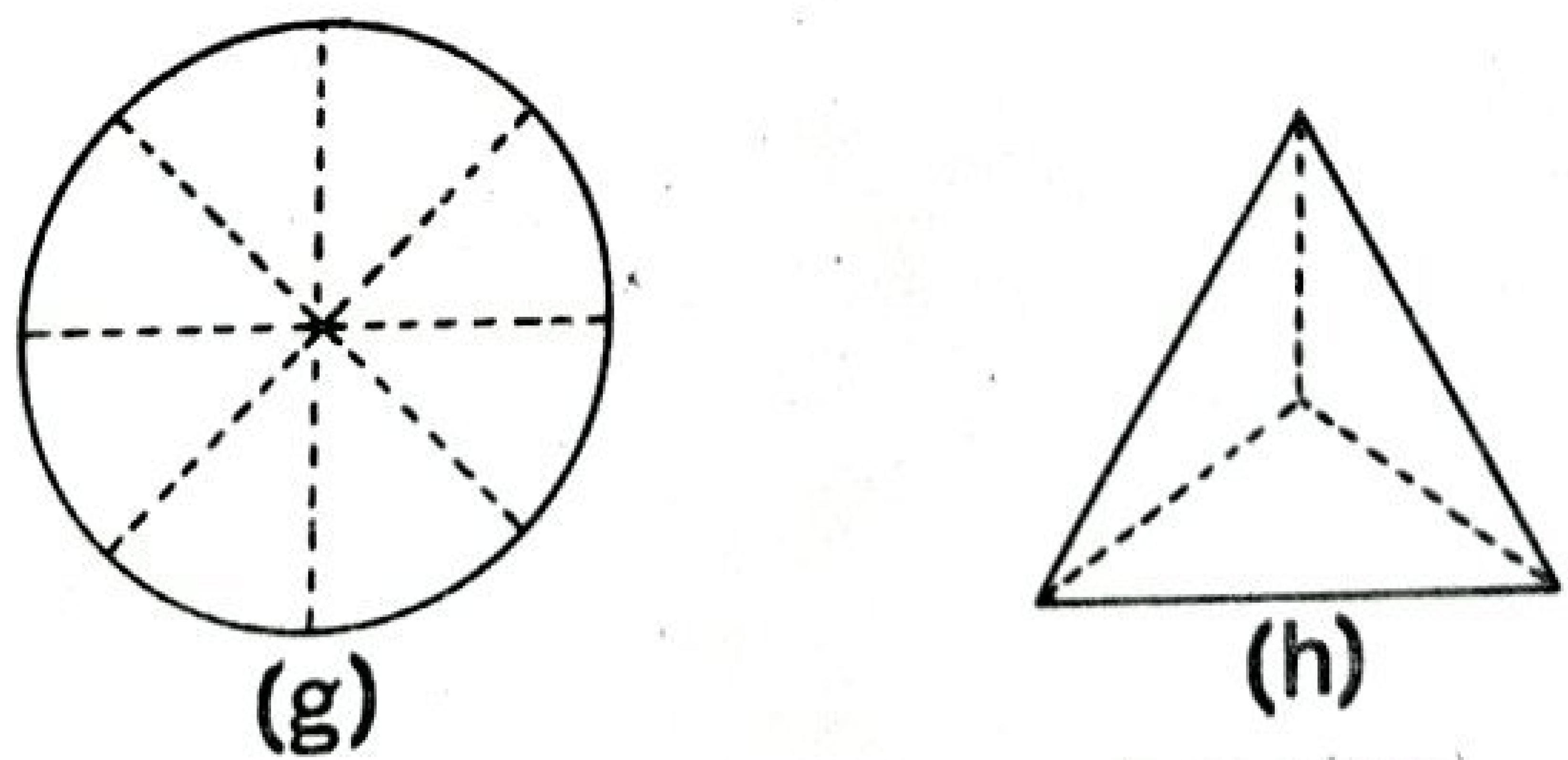
(três quartos) (um meio) (um têrço)



(dois quartos) (dois quartos)

(um meio)

Qual é outro *nome* para dois quartos?



(seis oitavos) (um têrço)

Qual é outro *nome* para seis oitavos?

4. Frações próprias, frações impróprias e frações aparentes: definição "geral" de número fracionário

Se, no exemplo dado do chocolate, fig. 36, forem consideradas *tôdas as três partes* da divisão feita, você obterá o chocolate *inteiro* (unidade). Êsse *fato*, — observe bem, pode ser representado pelo símbolo:

$$\boxed{\frac{3}{3}}$$

e você obteve agora um número fracionário constituído por um *par de números inteiros iguais*.

Se, além dêsse chocolate, você considerar *mais* a têrça parte de um chocolate *igual* (fig. 39)

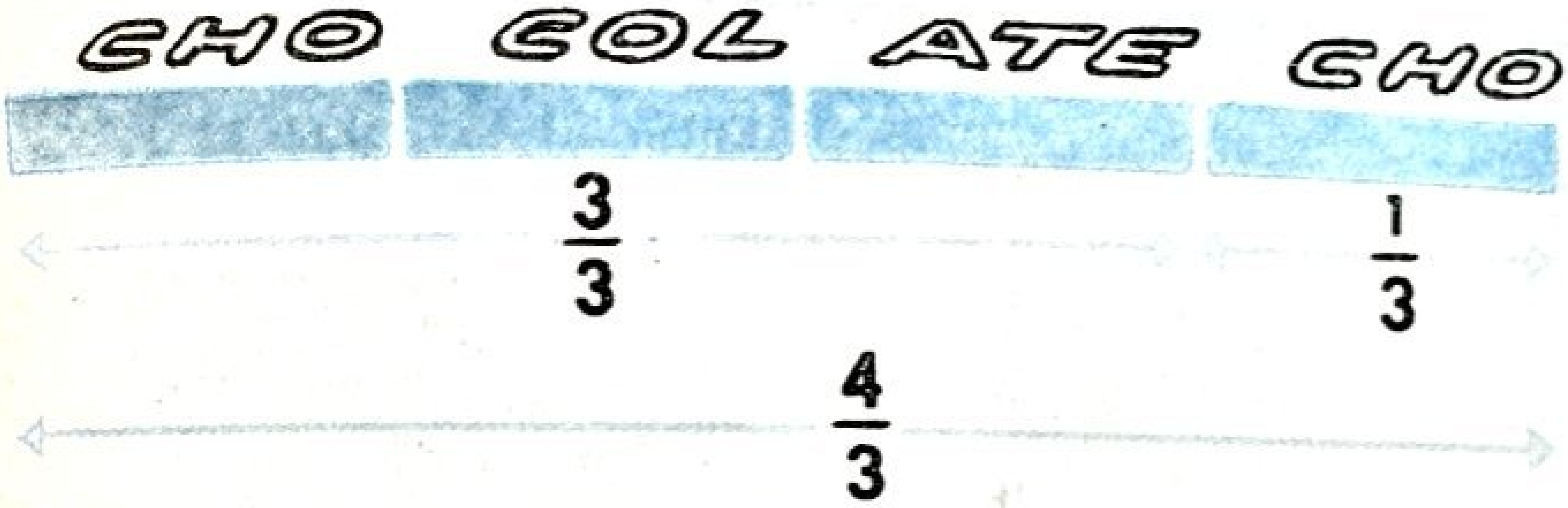


FIG. 39

o nôvo total de *quatro partes iguais* (três do primeiro e uma do segundo) pode ser representado com o símbolo:

$$\boxed{\frac{4}{3}}$$

e "nasce" um número fracionário constituído por um *par de números inteiros* com o primeiro *maior* que o segundo.

Até então a *noção intuitiva de fração* foi de dividir *uma só unidade* em partes iguais e considerar *algumas delas*. Para destacar bem êsse fato, aos novos símbolos:

$$\boxed{\frac{3}{3}} \quad \text{e} \quad \boxed{\frac{4}{3}}$$

que possuem o primeiro número (numerador) *igual ou maior* que o segundo (denominador), atribuímos o nome de frações *impróprias* (ou números fracionários *impróprios*) porque representam quantidades *iguais ou maiores* que a unidade.

Por acompanharem a noção intuitiva, recebem o qualificativo de *próprias* as frações (ou números fracionários) que possuem o primeiro número (numerador) *menor* que o segundo (denominador), porque representam quantidades *menores* que a unidade. Logo:

$$\left.\begin{matrix} \dfrac{2}{3} \\[2ex] \dfrac{4}{7} \\[2ex] \dfrac{123}{457} \end{matrix}\right\} < 1 \qquad \text{e} \qquad \left.\begin{matrix} \dfrac{3}{3} \\[2ex] \dfrac{4}{3} \\[2ex] \dfrac{217}{39} \end{matrix}\right\} > 1$$

são exemplos de frações *próprias* — são exemplos de frações *impróprias*

Entre as frações impróprias existem as que apresentam o numerador *divisível* pelo denominador. Tais frações (ou números fracionários) são denominadas *aparentes*, por serem *iguais* aos *números inteiros* que se obtém *dividindo* o numerador pelo denominador. Exemplos:

$$\boxed{\frac{3}{1} = 3} \qquad \boxed{\frac{3}{3} = 1} \qquad \boxed{\frac{20}{5} = 4} \qquad \boxed{\frac{196}{28} = 7}$$

Você, agora, já está "amadurecido" para receber uma *definição* "*geral*" de número fracionário que "apanhe" todos os casos estudados. Na verdade, em todos êles, foi destacado que em um número fracionário participam *dois números inteiros*: o primeiro (numerador) e o segundo (denominador). Êsse segundo número inteiro (denominador) jamais poderá ser *zero*, pois, de acôrdo com o que já foi estudado, é impossível "dividir" alguma coisa por zero! Logo:

Número fracionário é um par ordenado de números inteiros, com o segundo diferente de zero.

O par ordenado (primeiro: numerador; segundo: denominador) de números inteiros que "implica" numa fração (ou número fracionário) será indicado entre parênteses. Exemplos:

$(3,\ 4) \Longrightarrow \dfrac{3}{4}$ $\qquad$ $(0,\ 5) \Longrightarrow \dfrac{0}{5}$

$(4,\ 3) \Longrightarrow \dfrac{4}{3}$ $\qquad$ $(5,\ 0)\ \cdots\ ???$ (FALSO)

$(8,\ 8) \Longrightarrow \dfrac{8}{8}$

5. Relações entre números inteiros e números fracionários

1.ª) *Todo número inteiro pode ser considerado como uma fração de denominador igual a 1.*

Exemplos:

$\boxed{5 = \frac{5}{1}}$ $\boxed{16 = \frac{16}{1}}$ $\boxed{1 = \frac{1}{1}}$

n.º inteiro n.º fracionário

2.ª) *Um número fracionário indica, também, a divisão entre o numerador e o denominador.*

Se a divisão fôr *exata* o quociente é um *número inteiro.* Exemplo:

$\boxed{8 : 2}$ é o mesmo que $\boxed{\frac{8}{2} = 4}$

Se a divisão *não* fôr *exata* a indicação dessa operação será feita através de um *número fracionário.* Exemplo:

$\boxed{8 : 3}$ é o mesmo que $\boxed{\frac{8}{3}}$

Logo: Conhecendo OS NÚMEROS FRACIONÁRIOS, A DIVISÃO entre dois números inteiros É SEMPRE POSSÍVEL (naturalmente com o divisor diferente de zero).

Lembre-se, também, com o que você já estudou acêrca dos *numerais* de um *mesmo número* que:

$\boxed{8 : 3}$ e $\boxed{\frac{8}{3}}$

são agora NUMERAIS diferentes de um mesmo número

OBSERVAÇÃO:

Quanto vale $\frac{0}{2}$?

Vale 0, pois, dentro da *noção intuitiva* estudada, se você dividir a unidade em duas partes e considerar "nenhuma" dessas partes, ficará com zero . . . e, dentro do conceito da *operação divisão* o quociente é 0, pelo fato de: $0 \times 2 = 0$.

1. Você já sabe que o símbolo $\frac{8}{2}$ indica também a operação *divisão* (8 : 2). Logo:

   $\frac{8}{2} = 4$ e, portanto: $4 \times 2 = 8$, onde 4 é o quociente de 8 por 4

   Da mesma forma, se:

   $\frac{5}{2} = n$ então: $n \times 2 = 5$ e n é o quociente de 5 por 2

   Como exercício, *complete* as sentenças:

   1.ª) se $\frac{12}{4} = n$ então $n \times \ldots = 12$

   2.ª) se $\frac{8}{3} = m$ então $m \times 3 = \ldots$

   3.ª) se $\frac{0}{5} = a$ então $a \times \ldots = \ldots$

   4.ª) se $\frac{9}{1} = b$ então $b \times \ldots = \ldots$

2. Em que casos n, m, a, ou b são *números inteiros?* É fácil ver: 1.º e ...

3. Como aplicação, *sem efetuar* a *divisão*, diga qual das sentenças é VERDADEIRA (V) ou FALSA (F):

   Exemplo: se $\frac{42}{6} = 7$ então $7 \times 6 = 42$ (V)

   se $\frac{144}{12} = 11$ então $11 \times 12 = 144$ (F)

   1.ª) se $\frac{56}{8} = 12$ então $12 \times 8 = 56$ (...)

   2.ª) se $\frac{125}{25} = 5$ então $5 \times 25 = 125$ (...)

   3.ª) se $\frac{0}{7} = 7$ então $7 \times 7 = 0$ (...)

6. *Extração de inteiros de frações impróprias: números mistos*

Pode-se, sempre, *extrair os inteiros* de uma fração imprópria, bastando para isso *dividir* o numerador pelo denominador. O quociente obtido é a *parte inteira* da fração imprópria, enquanto que a parte fracionária, *menor do que* 1, tem o *mesmo denominador* e para numerador o *resto* da divisão:

O número, cuja representação consta de um número inteiro e de uma fração própria é denominado *número misto*. Exemplos:

1. A fração imprópria $\frac{19}{5}$ dá origem ao *número misto*: $3\frac{4}{5}$, pois: $\begin{array}{r|l} 19 & 5 \\ \hline 4 & 3 \end{array}$.

   Logo:

$$\boxed{\frac{19}{5} = 3\frac{4}{5}}$$

2. O número fracionário impróprio $\frac{7}{3}$ dá origem ao *número misto* $2\frac{1}{3}$, pois: $\begin{array}{r|l} 7 & 3 \\ \hline 1 & 2 \end{array}$.

   Logo:

$$\boxed{\frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}}$$

Inversamente, pode-se transformar um *número misto* numa *fração imprópria*, construindo-se uma fração de *mesmo denominador* e de numerador igual ao *produto do inteiro pelo denominador somado com o numerador*. Exemplo:

$$3\frac{4}{5} = \frac{19}{5} \longrightarrow \begin{cases} \text{numerador: } 5 \times 3 + 4 = 19 \\ \text{denominador: } \qquad\qquad\quad 5 \end{cases}$$

$$2\frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 37

1. Dê exemplo, de cada um dos seguintes números:

   1.º) número natural: . . . . . .
   2.º) número inteiro: . . . . . .
   3.º) número fracionário: . . . . . .
   4.º) número misto: . . . . . .

2. Dividi um torrão em cinco partes iguais. Dei três dessas partes à Luísa. Que fração de torrão recebeu Luísa?

3. Que fração do ano (12 meses) representam 7 meses?

4. Que fração do mês (30 dias) representam 3 dias?

5. Um pacote de balas foi repartido para três meninos, cabendo ao primeiro 5 balas, ao segundo 7 e ao terceiro 4 balas. Que número fracionário traduz as balas recebidas por menino?

6. Representar os números fracionários definidos pelos seguintes pares de números inteiros:

1.º) (4, 3) 2.º) (2, 5) 3.º) (8, 2) 4.º) (2, 8) 5.º) (0,3)
6.º) (7, 10) 7.º) (6, 1) 8.º) (9, 9) 9.º) (1, 30) 10.º) $(a,\ b)$ $(b \neq 0)$

7. Do exercício 6, quais os números fracionários: próprios, impróprios e aparentes?

8. Do mesmo exercício 6, diga quais as frações ordinárias e quais as decimais.

9. O *número inteiro* 3 pode ser considerado como um *número fracionário* de denominador igual a ... ; uma outra maneira de você escrever o *número inteiro* 3 é com a *fração aparente:* $\dfrac{6}{\dots}$.

10. Quanto vale $\dfrac{0}{8}$? Por quê?

11. Escreva quatro *numerais* diferentes dos seguintes *números*:

(Exemplo: *três* tem os seguintes: 3; III; 6 : 2; $\dfrac{6}{2}$; 3 : 1; 3×1, ...

1.º) cinco; 2.º) doze terços; 3.º) oito meios; 4.º) um

12. Complete as seguintes sentenças:

1.º) se $\dfrac{8}{4} = 2$ então $\dots \times 4 = \dots$

2.º) se $\dfrac{0}{9} = 0$ então $0 \times \dots = \dots$

3.º) se $\dfrac{7}{1} = 7$ então $\dots \times \dots = \dots$

13. Sem efetuar a *divisão*, quais da seguintes sentenças são *verdadeiras*?

1.º) se $\dfrac{105}{30} = 5$ então $5 \times 30 = 105$

2.º) se $\dfrac{196}{14} = 14$ então $14 \times 14 = 196$

3.º) se $\dfrac{0}{25} = 25$ então $25 \times 25 = 0$

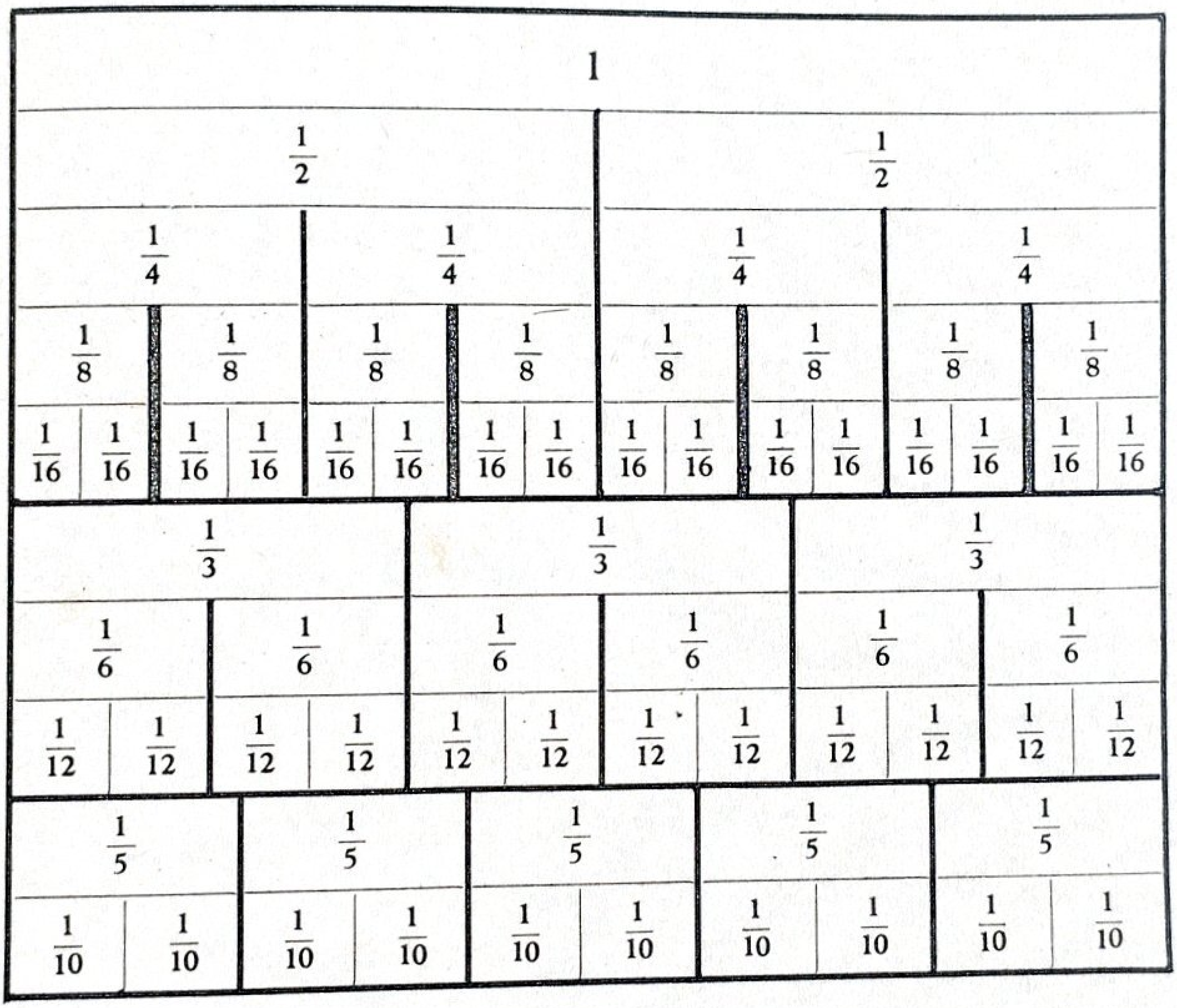
14. Extrair os *inteiros* das seguintes frações *impróprias*, e escrever, a seguir, os *números mistos* correspondentes:

1.ª) $\dfrac{18}{7}$ 2.ª) $\dfrac{5}{4}$ 3.ª) $\dfrac{12}{5}$ 4.ª) $\dfrac{179}{21}$ 5.ª) $\dfrac{4\,315}{2\,716}$

15. Escrever as frações *impróprias* correspondentes aos seguintes *números mistos*:

1.º) $4\dfrac{1}{3}$ 2.º) $21\dfrac{2}{5}$ 3.º) $7\dfrac{1}{4}$ 4.º) $43\dfrac{11}{12}$ 5.º) $1\dfrac{83}{87}$

QUADRO DE ALGUMAS UNIDADES FRACIONÁRIAS



Responda:

1. Que é $\frac{1}{2}$ de 1 ? . . .
2. Que é $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{2}$? . . .
3. Que é $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{4}$? . . .
4. Que é $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{8}$? . . .
5. Que é $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{3}$? . . .
6. Que é $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{6}$? . . .
7. Que é $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{5}$? . . .
8. Que é $\frac{1}{2}$ de $\frac{2}{5}$? . . .
9. Que é $\frac{1}{2}$ de $\frac{3}{8}$? . . .
10. Que é $\frac{1}{2}$ de $\frac{3}{5}$? . . .

classes de equivalência entre frações

7. *Frações equivalentes; frações iguais. Aplicações*

A noção de *equivalência*, entre frações, você "sentiu" através dos exercícios de fixação (Grupo 35), quando as frações representavam o *mesmo valor* (colorido), apesar dos *têrmos* serem *diferentes*. Assim, por exemplo, as frações:

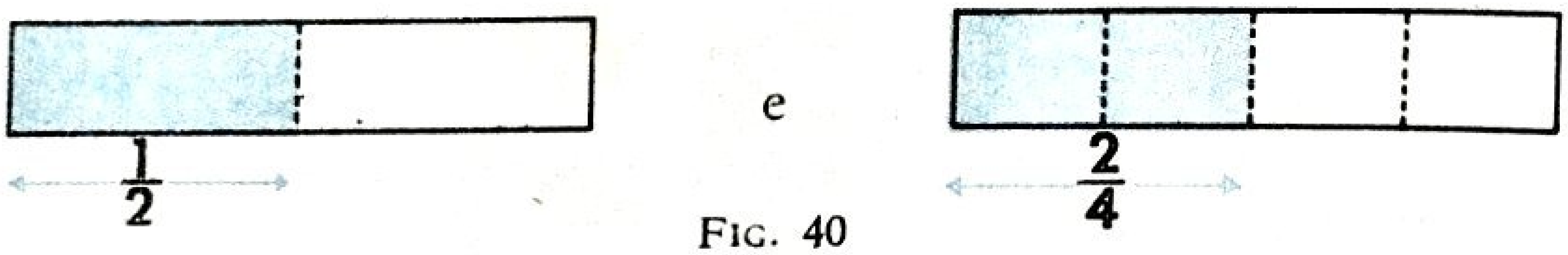


FIG. 40

que indicam as partes "coloridas" de retângulos iguais (fig. 40) representam o *mesmo valor* (quantitativo).

As frações (números fracionários) que representam o *mesmo valor* são denominadas equivalentes. Com o mesmo raciocínio você pode dizer que as frações:

$$\frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \frac{5}{10}, \ldots\ldots$$

são tôdas *equivalentes* à fração $\frac{1}{2}$. Indicação:

$$\frac{1}{2} \equiv \frac{2}{4} \equiv \frac{3}{6} \equiv \frac{4}{8} \equiv \ldots\ldots\ldots\ldots$$

onde tais frações representam NUMERAIS diferentes de um *mesmo número fracionário:* meio.

O *conjunto* das frações equivalentes a uma dada fração constitui uma classe de equivalência. A classe de equivalência, correspondente à fração $\frac{1}{2}$, pode ser escrita da seguinte maneira(*):

$$\boxed{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \ldots\ldots \right\}$$ (*Classe de equivalência* da fração: $\frac{1}{2}$)

(*) Essa é a maneira empregada pela Prof.ª Lucília Bechara que, em 1962, iniciou a introdução da *Matemática Moderna* na 1.ª Série do Ginásio Vocacional de São Paulo (Brooklin). Usa-se, também, representar a *classe de equivalência* da fração $\frac{1}{2}$ por $\frac{\bar{1}}{2}$.

Outros exemplos:

$$\boxed{\frac{3}{4}}\ \left\{\frac{6}{8}, \frac{9}{12}, \frac{12}{16}, \ldots\right\} \text{(\textit{Classe de equivalência} da fração: } \frac{3}{4}\text{)}$$

$$\boxed{\frac{5}{1}}\ \left\{\frac{10}{2}, \frac{15}{3}, \frac{20}{4}, \ldots\right\} \text{(\textit{Classe de equivalência} da fração: } \frac{5}{1}\text{)}$$

OBSERVAÇÃO: Na prática costuma-se, para facilitar os cálculos entre frações equivalentes, usar o sinal $=$ ao invés do $\equiv$. Contudo, é preciso destacar, desde já, o conceito de equivalência do conceito de *igualdade*. A equivalência é mais "ampla" que a *igualdade*, como você poderá concluir da seguinte interpretação:

Será que, dividindo uma certa fita em 30 pedaços iguais e tomando 20 dêsses pedaços, você faria o *mesmo laço* caso dividisse essa mesma fita em 3 pedaços iguais e tomasse 2 dêles?

Como você está notando, apesar de frações *equivalentes:* $\frac{2}{3}$ e $\frac{20}{30}$ (pois, pertencem à mesma *classe de equivalência*) a *igualdade* entre os laços é discutível . . . .

Dizemos, então, que duas frações são IGUAIS quando têm os numeradores e os denominadores respectivamente *iguais*. Assim, por exemplo:

$\frac{2}{3}$ só é IGUAL à fração $\frac{2}{3}$

e $\frac{2}{3}$ é EQUIVALENTE às frações: $\frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \frac{8}{12}, \frac{10}{15}, \ldots \frac{20}{30}, \ldots$

Como você resolveria êste exercício:

Qual o valor de a para que a fração $\frac{a}{5}$ seja igual à fração $\frac{2}{5}$?

Usando o *devido* sinal de $=$ você formaria a sentença:

$$\frac{a}{5} = \frac{2}{5}$$

e, fàcilmente, concluiria que $a = 2$.

8. *Técnica de cálculo*

Para se construir a *classe de equivalência* de uma dada fração, basta aplicar a seguinte *Regra Fundamental*:

Multiplicando-se (ou dividindo-se) os dois têrmos de uma fração por um mesmo número natural, obtém-se uma fração equivalente à dada.

Exemplo:

Dada a fração $\frac{2}{3}$ as suas equivalentes são:

$$\frac{2}{3} \underset{\times 2}{\overset{\times 2}{=}} \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \ldots\ldots$$

que, como já vimos, constituem a *classe de equivalência*:

$$\boxed{\frac{2}{3}} \left\{ \frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \frac{8}{12}, \ldots \right\}$$

NOTA: Tornamos a *repetir:* o sinal = que está sendo usado *também* para as frações *equivalentes* é mais para *facilitar* o trabalho de cálculo com essas frações.

O reconhecimento *imediato* de que duas frações são *equivalentes* pode ser feito verificando se são *iguais* os produtos: *numerador da primeira* $\times$ *denominador da segunda* e *denominador da primeira* $\times$ *numerador da segunda*. Exemplos:

1.º) São *equivalentes* as frações: $\frac{2}{3}$ e $\frac{4}{6}$?

Como: $2 \times 6 = 3 \times 4$ (ambos os produtos valem 12) as frações são *equivalentes*.

2.º) Qual deve ser o valor de a para que as frações: $\frac{a}{4}$ e $\frac{9}{12}$ resultem equivalentes?

Ora, é preciso que:

$$a \times 12 = 4 \times 9$$

ou

$$a \times 12 = 36$$

e, portanto:

$$a = 36 : 12 = \boxed{3}$$

9. *Simplificação de frações: frações irredutíveis*

Simplificar uma fração é obter uma fração que lhe seja *equivalente* e de têrmos, respectivamente, *menores*. Em outras palavras, você pode dizer que *simplificar* uma fração é, na verdade, procurar o *numeral* mais simples para representar essa fração.

De acôrdo com a Regra Fundamental, para *simplificar* uma fração basta *dividir* (quando possível) ambos os seus têrmos por um divisor comum. Exemplo:

$$\frac{24}{36} \underset{:2}{\overset{:2}{=}} \frac{12}{18} \underset{:2}{\overset{:2}{=}} \frac{6}{9} \underset{:2}{\overset{:2}{=}} \frac{2}{3}$$

Quando uma fração *não pode* ser mais simplificada, diz-se que ela é IRREDUTÍVEL ou que está reduzida à sua *expressão mais simples*. Nesse caso, o numerador e o denominador da fração devem ser *primos entre si*, isto é, não admitem divisor comum a não ser o 1.

Para se chegar mais ràpidamente à expressão mais simples (fração irredutível) basta, portanto, dividir ambos os têrmos da fração (suposta simplificável) pelo *maior divisor comum* entre êles. Exemplo:

Reduzir à expressão mais simples a fração $\frac{36}{54}$

Como: m.d.c.(36,54) = 18, temos:

$$\frac{36}{54} \underset{:18}{\overset{:18}{=}} \frac{2}{3} \text{ (fração irredutível)}$$

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO — GRUPO 38

1. Determinar uma fração equivalente à fração $\frac{15}{20}$ que possua:

1.º) denominador 4;

2.º) denominador 28.

Primeiramente, você deve determinar a fração *equivalente mais simples* da fração $\frac{15}{20}$ (que será naturalmente a fração *irredutível* de sua classe de equivalência), isto é:

$$\frac{15}{20} \underset{:5}{\overset{:5}{=}} \frac{3}{4}$$

Então: $\frac{3}{4}$ responde a 1.ª pergunta.

Para determinar a fração equivalente de denominador 28, basta procurar qual o fator (caso exista!) que multiplicado por 4 resulta 28. Êsse fator é $28 : 4 = 7$. Logo, multiplicando ambos os têrmos da fração $\frac{3}{4}$ por 7, vem:

$$\frac{3 \xrightarrow{\times 7} 21}{4 \xrightarrow[\times 7]{} 28} \qquad \text{que responde a 2.ª pergunta.}$$

Prova:

$$\underset{\substack{\downarrow \\ \text{1.ª pergunta}}}{\frac{3}{4}} \left\{ \frac{6}{8}, \frac{9}{12}, \frac{12}{16}, \underset{\substack{\downarrow \\ \text{fração dada}}}{\frac{15}{20}}, \frac{18}{24}, \underset{\substack{\downarrow \\ \text{2.ª pergunta}}}{\frac{21}{28}}, \ldots\ldots \right\}$$

2. Determinar a fração equivalente a $\frac{24}{32}$, cuja soma de seus têrmos seja 42.

Temos, inicialmente: $\frac{24 \xrightarrow{:8} 3}{32 \xrightarrow[:8]{} 4}$ (equivalente mais simples)

Como: $3+4 = 7$, para essa *soma* tornar-se 42, as suas parcelas deverão ser multiplicadas por 6 (pois, $42 : 7 = 6$). Logo:

$$\frac{24 \xrightarrow{:8} 3 \xrightarrow{\times 6} 18}{32 \xrightarrow[:8]{} 4 \xrightarrow[\times 6]{} 24} \qquad (\text{com } 18+24 = 42)$$

10. *Redução de frações ao mesmo denominador e ao menor denominador comum*

Reduzir frações ao *mesmo denominador* é transformá-las em frações *equivalentes* de mesmo denominador (denominador comum). De acôrdo com a *Regra fundamental* basta multiplicar os têrmos de cada fração pelos denominadores das outras. Exemplo:

Reduzir ao *mesmo denominador* as frações:

$$\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}$$

Temos: $$\frac{2\times(5\times6)}{3\times(5\times6)}, \frac{4\times(3\times6)}{5\times(3\times6)}, \frac{1\times(3\times5)}{6\times(3\times5)}$$

ou $$\frac{60}{90}, \frac{72}{90}, \frac{15}{90}$$

A fim de se evitar frações com têrmos muito grandes procura-se, nas reduções, usar o *menor denominador possível*. Em tais casos, diz-se que as frações foram reduzidas ao *menor denominador comum*, procedendo-se assim, no cálculo:

1.º) determina-se o menor denominador comum (operação m.d.c. dos denominadores);

2.º) calcula-se o quociente, do menor denominador comum pelo denominador de cada fração, multiplicando-o, a seguir, pelo numerador respectivo.

Exemplo: Reduzir ao menor denominador comum as frações:

$$\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}$$

Como: m.m.c.(3,5,6) = 30, vem:

$$\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6} \qquad 30 : 3 = 10$$

$$10 \times 2 = 20 \qquad \frac{20}{30}, \frac{24}{30}, \frac{5}{30}$$

ou

$$\frac{20}{30}, \frac{24}{30}, \frac{5}{30}$$

Observação: Embora não tenha a mesma aplicação pode-se, de maneira análoga, reduzir também frações ao *mesmo numerador* e ao *menor numerador comum*.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — Grupo 39

1. Determine o valor de a que torne *verdadeiras* as seguintes sentenças:

1.ª) $\frac{a}{5} = \frac{4}{10}$ 2.ª) $\frac{2}{a} = \frac{6}{3}$ 3.ª) $\frac{12}{9} = \frac{a}{3}$ 4.ª) $\frac{76}{95} = \frac{4}{a}$

2. Construir a *classe de equivalência* das seguintes frações:

1.ª) $\frac{1}{2}$ 2.ª) $\frac{2}{3}$ 3.ª) $\frac{5}{4}$ 4.ª) $\frac{3}{1}$ 5.ª) $\frac{1}{1}$

3. *Simplificar* as seguintes frações, reduzindo-as às respectivas expressões mais simples (*fração irredutível*):

1.ª) $\frac{18}{24}$ 2.ª) $\frac{80}{104}$ 3.ª) $\frac{189}{243}$ 4.ª) $\frac{150}{100}$

5.ª) $\frac{81}{729}$ 6.ª) $\frac{1512}{1620}$ 7.ª) $\frac{504}{672}$ 8.ª) $\frac{105}{147}$

4. Determinar:

1.º) uma *fração equivalente* a $\frac{12}{16}$ de *denominador* 8;

2.º) uma *fração equivalente* a $\frac{5}{6}$ de *denominador* 12;

3.º) uma *fração equivalente* a $\frac{30}{40}$ de *denominador* 24;

4.º) uma *fração equivalente* a $3\frac{4}{5}$ de *denominador* 15

5. Determinar a *fração equivalente* a $\frac{3}{4}$ cuja *soma* dos têrmos seja 14.

6. Determinar a *fração equivalente* a $\frac{21}{28}$ cuja *soma* dos têrmos seja 63.

7. Determinar a *fração equivalente* a $\frac{5}{2}$ cuja *diferença* dos têrmos (numerador menos o denominador) seja 12.

8. Reduzir ao *mesmo denominador* os seguintes conjuntos de frações:

1.º) $\frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}$ 2.º) $\frac{4}{7}, \frac{5}{6}, \frac{2}{5}$

3.º) $\frac{1}{9}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{4}{6}$ 4.º) $\frac{11}{24}, \frac{3}{11}$

9. Reduzir ao *menor denominador comum* os seguintes conjuntos de frações:

1.º) $\frac{3}{4}, \frac{5}{6}$ 2.º) $\frac{21}{48}, \frac{3}{15}, \frac{1}{30}, \frac{7}{96}$

3.º) $\frac{1}{36}, \frac{1}{9}, \frac{1}{3}, \frac{1}{18}$ 4.º) $\frac{16}{25}, \frac{1}{7}, \frac{4}{14}, \frac{3}{15}$, 4

10. Reduzir ao *menor numerador comum* os conjuntos de frações do Exercício 9.

estrutura de ordem nos números fracionários

11. *Comparação de frações de mesmo denominador*

Se duas frações têm o mesmo denominador então a maior é a que tem o maior numerador.

De fato, sejam, por exemplo, as frações de *mesmo denominador* (fig. 41):

$$\frac{5}{7} \quad \text{e} \quad \frac{2}{7}$$

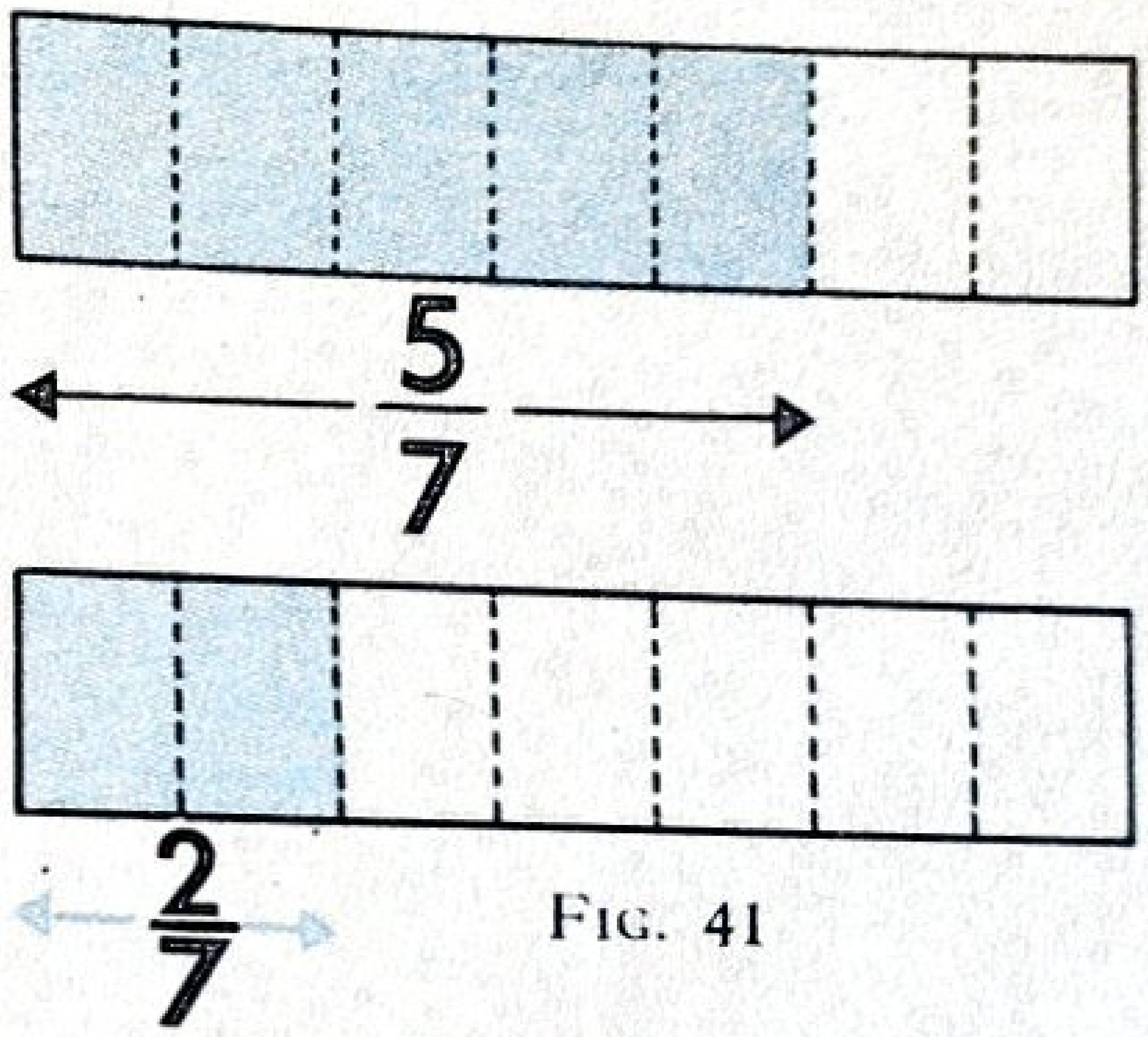


FIG. 41

Intuitivamente, você pode pensar assim: quem toma *cinco* partes iguais das sete em que ficou dividida a unidade (no exemplo, o retângulo) toma mais de quem toma sòmente *duas* dessas partes. Logo:

$$\boxed{\frac{5}{7} > \frac{2}{7}} \quad \text{ou} \quad \boxed{\frac{2}{7} < \frac{5}{7}}$$

Outros exemplos:

$$\boxed{\frac{3}{8} > \frac{1}{8}} \; ; \quad \boxed{\frac{a}{5} > \frac{b}{5} \text{ se } a > b}$$

12. *Comparação de frações de mesmo numerador*

Se duas frações têm o mesmo numerador então a maior é a que tem o menor denominador.

Sejam, por exemplo, as frações de *mesmo numerador* (fig. 42)

$$\frac{2}{7} \quad \text{e} \quad \frac{2}{5}$$

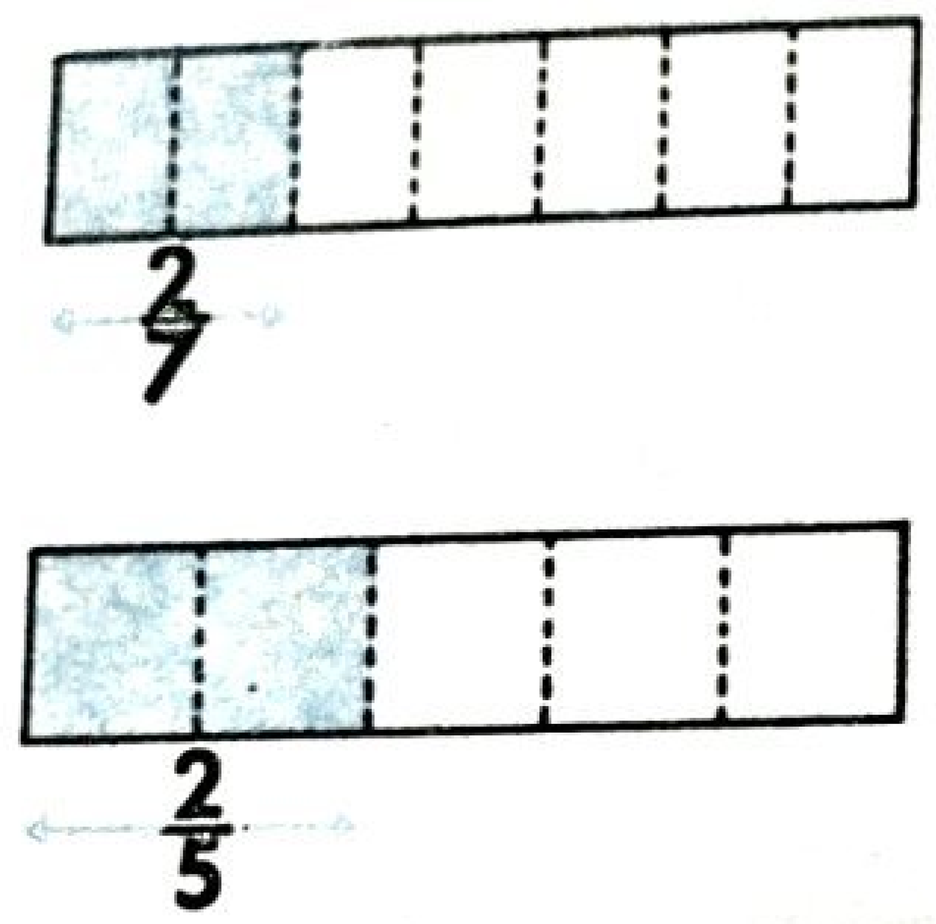


FIG. 42

Da mesma forma: as *duas* partes iguais tomadas da primeira divisão (em sete partes iguais) do retângulo, é menor que as duas partes iguais tomadas da segunda divisão (em cinco partes iguais) de retângulo igual. Logo:

$$\boxed{\frac{2}{7} < \frac{2}{5}} \quad \text{ou} \quad \boxed{\frac{2}{5} > \frac{2}{7}}$$

Outros exemplos:

$$\boxed{\frac{1}{8} < \frac{1}{4}} \;; \quad \boxed{\frac{3}{a} < \frac{3}{b} \text{ se } a > b}$$

13. *Comparação de frações quaisquer*

Dadas duas *frações quaisquer*, para se saber qual é a *maior* ou *menor* basta transformá-las em *equivalentes* de *mesmo denominador* (ou mesmo numerador). Exemplo:

Comparar as frações:

$$\frac{4}{5} \quad \text{e} \quad \frac{2}{3}$$

Reduzindo-as ao menor denominador comum (m.m.c.(5,3) = 15), vem:

$$\frac{12}{15}, \frac{10}{15}$$

e pelo já visto: $\frac{12}{15} > \frac{10}{15}$ e como estas são respectivamente *equivalentes* às frações dadas, vem:

$$\boxed{\frac{4}{5} > \frac{2}{3}}$$

NOTA: Chega-se ao mesmo resultado reduzindo as frações dadas ao *menor numerador comum*.

14. *Frações diferentes; reconhecimento*

Duas frações *não equivalentes* dizem-se DIFERENTES.

Indicação: $$\frac{4}{5} \neq \frac{2}{3}$$

Reconhece-se, fàcilmente, que duas frações são *diferentes* verificando se os produtos: *numerador da primeira*×*denominador da segunda* e *denominador da primeira*×*numerador da segunda* são *diferentes*. Exemplo:

$$\frac{4}{5} \neq \frac{2}{3} \qquad \text{pois:} \qquad 4 \times 3 \neq 5 \times 2$$

De um modo geral:

$$\boxed{\frac{a}{b} \neq \frac{c}{d} \text{ se } a \times d \neq b \times c}$$

EXERCÍCIO DE APLICAÇÃO — GRUPO 40

Dispor em ordem de valor *crescente* as frações: $\frac{7}{12}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}$.

Seguindo a *estrutura da ordem natural* temos que, em primeiro lugar, deve vir a *menor* fração, em seguida a que lhe é imediatamente maior e assim por diante. Assim, reduzindo-se as frações ao *menor denominador comum*, para poder *compará-las*, vem:

$$\frac{7}{12}, \quad \frac{9}{12}, \quad \frac{6}{12} \qquad \text{(suas equivalentes)}$$

ou

$$\frac{6}{12} < \frac{7}{12} < \frac{9}{12}$$

e, portanto:

$$\boxed{\frac{1}{2} < \frac{7}{12} < \frac{3}{4}}$$

NOTA: Se a disposição das frações fôsse em ordem de valor *decrescente*, teríamos:

$$\boxed{\frac{3}{4} > \frac{7}{12} > \frac{1}{2}}$$

15. *Variação do valor de uma fração*

Operando-se com os têrmos de uma fração, o seu *valor* pode se *alterar*. Observe essas *variações*, através das seguintes *Regras*:

1.ª) **Multiplicando-se (ou dividindo-se) o numerador de uma fração por um número natural, o valor da fração fica multiplicado (ou dividido) por êsse número.**

Com efeito, seja por exemplo, a fração: $\frac{4}{9}$ (fig. 43-a)

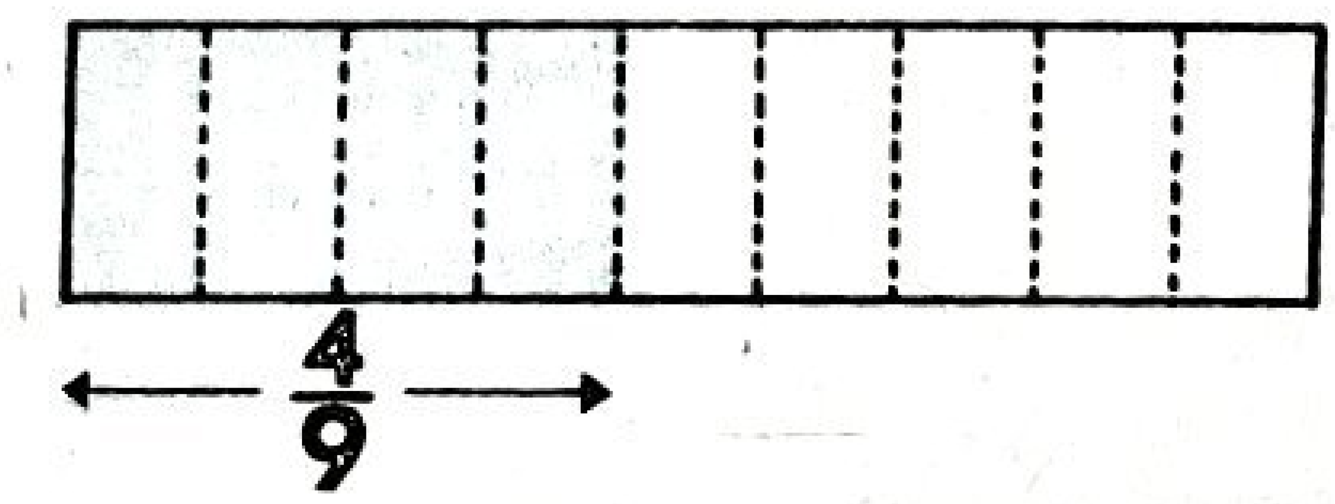


FIG. 43-a

Multiplicando o numerador por 2, obtém-se a fração $\frac{8}{9}$ (fig. 43-b) que é, precisamente, de valor duas vêzes maior que o valor de $\frac{4}{9}$.

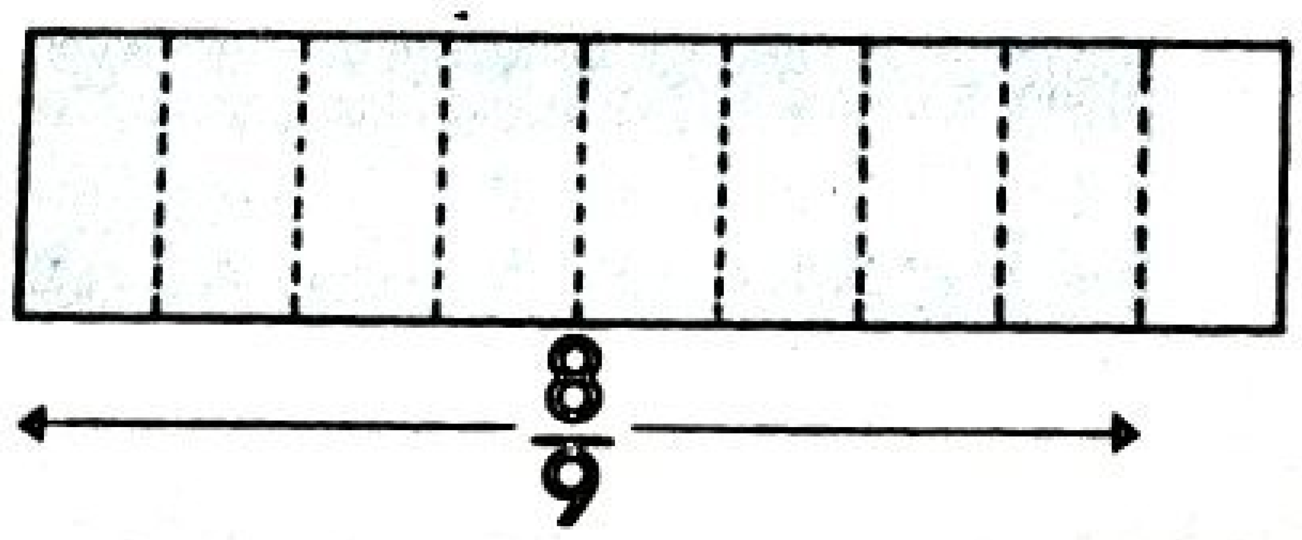


FIG. 43-b

No caso de se *dividir* o numerador da fração $\frac{8}{9}$ por 2, obtém-se a fração $\frac{4}{9}$, cujo valor é duas vêzes menor que o valor de $\frac{8}{9}$. Logo:

As operações efetuadas com o numerador de uma fração *refletem-se diretamente* no valor da fração, isto é, aumentando o valor do numerador, o *valor* da fração aumenta (ou diminuindo o valor do numerador, o valo da fração diminui).

Multiplicando-se (ou dividindo-se) o denominador de uma fração por um número natural, o valor da fração fica dividido (ou multiplicado) por êsse número.

Seja, por exemplo, a fração $\frac{3}{4}$ (fig. 44-a)

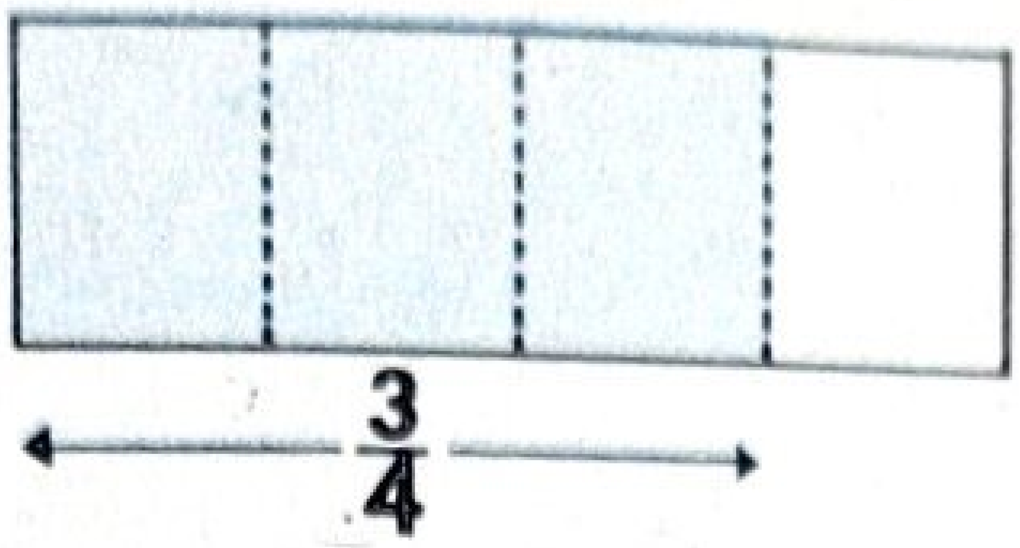


FIG. 44-a

Multiplicando-se o denominador por 2, obtém-se a fração $\frac{3}{8}$ (fig. 44-b), de valor duas vêzes menor que o valor de $\frac{3}{4}$, como é fácil de se constatar.

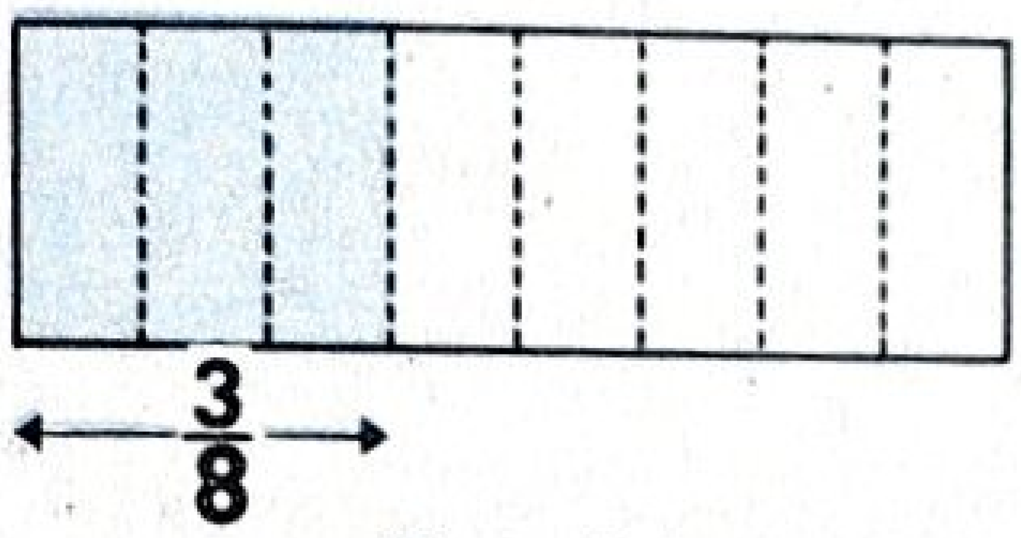


FIG. 44-b

No caso de se *dividir* o denominador da fração $\frac{3}{8}$ por 2, obtém-se a fração $\frac{3}{4}$, cujo valor é duas vêzes maior que $\frac{3}{8}$.

Agora, as operações efetuadas com o denominador *refletem-se inversamente* no valor da fração, isto é, aumentando o valor do denominador, o *valor* da fração diminui (ou diminuindo o valor do denominador, o valor da fração aumenta).

OBSERVAÇÃO: É natural que, multiplicando-se (ou dividindo-se) *ambos os têrmos de uma fração* por um mesmo número natural, o valor da fração não se altere, pois, obtém-se, de acôrdo com o que já foi estudado, uma *fração equivalente* à dada.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 41

1. Qual é a *maior?*

1.º) $\frac{3}{5}$ ou $\frac{4}{5}$ 2.º) $\frac{1}{6}$ ou $\frac{1}{7}$ 3.º) $\frac{3}{4}$ ou $\frac{4}{5}$ 4.º) $\frac{7}{1}$ ou $\frac{9}{1}$

2. Dispor em ordem de valor *crescente* o conjunto das seguintes frações:

1.º) $\frac{4}{5}$, $\frac{8}{5}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{3}{5}$ 2.º) $\frac{4}{7}$, $\frac{4}{2}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{4}{9}$

3.º) $\frac{5}{2}$, $\frac{14}{5}$, $\frac{7}{4}$, $\frac{11}{3}$ 4.º) 3, $\frac{15}{3}$, $\frac{7}{2}$

3. Dispor em ordem de valor *decrescente* o conjunto das seguintes frações:

1.º) $\frac{4}{9}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{10}$ 2.º) $\frac{132}{144}$, $\frac{34}{72}$, $\frac{12}{63}$, $\frac{1}{3}$

4. Verificar se são *verdadeiras* ou *falsas* (colocando V ou F) as seguintes sentenças:

1.ª) $\frac{2}{7} = \frac{2}{7}$ (V) ⎫
2.ª) $\frac{3}{4} = \frac{2}{5}$ (F) ⎭ Exemplo

3.ª) $\frac{3}{4} \neq \frac{2}{5}$

4.ª) $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \frac{4}{12}$

5.ª) $\frac{3}{8} \neq \frac{3}{8}$

6.ª) $\frac{3}{4} = \frac{21}{28}$

7.ª) $\frac{2}{5} > \frac{3}{6}$

8.ª) $\frac{3}{5} < \frac{3}{5}$

9.ª) $\frac{10}{2} > \frac{12}{3} > 3$

10.ª) $\frac{3}{11} < \frac{2}{7} < \frac{3}{11}$

11.ª) $\frac{3}{5} < 1 < \frac{5}{3}$

12.ª) $3\frac{2}{5} \geq 4\frac{1}{2}$

5. $\frac{20}{4}$ e $20 : 4$ são *numerais* diferentes de um *mesmo número*. É V ou F?

6. $\frac{4}{8}$, $\frac{2}{4}$ e $\frac{1}{2}$ são *numerais* diferentes de *números diferentes*. É V ou F?

7. Da igualdade: $3 \times 4 = 2 \times 6$, conclui-se que: $\frac{3}{6} = \frac{2}{4}$. É V ou F?

8. Completar as igualdades seguintes:

1.ª) $\frac{4}{1} = \ldots$ 2.ª) $\frac{0}{4} = \ldots$ 3.ª) $\frac{4}{4} = \ldots$

4.ª) $\frac{6}{2} = \ldots$ 5.ª) $\frac{2}{6} = \ldots$ 6.ª) $3\frac{2}{5} = \ldots$

9. Qual das seguintes expressões *não tem sentido*?

1.ª) 5×0 2.ª) $5 : 0$ 3.ª) $0 - 5$ 4.ª) $5 - 0$ 5.ª) $5 : 5$ 6.ª) $0 : 5$

7.ª) $6 : 3$ 8.ª) $3 : 6$ 9.ª) $\frac{8}{1}$ 10.ª) $\frac{8}{0}$ 11.ª) $\frac{0}{8}$ 12.ª) $\frac{8}{8}$

10. Quanto à *variação* do valor de uma fração, dizer:

1.º) O que acontece com o valor de uma fração quando se multiplica o seu numerador por 3? E quando se divide o numerador por 2?

2.º) O que acontece com o valor de uma fração quando se multiplica o seu denominador por 5? E quando se divide o denominador por 3?

3.º) O que acontece com o valor de uma fração quando se multiplica o seu numerador por 2 e se divide o seu denominador por 3?

4.º) Qual é a alteração sofrida por uma fração quando se multiplica *ambos* os seus têrmos por 3? E quando se divide *ambos* por 2?

2

operações com números fracionários

propriedades estruturais

problemas de aplicação

números decimais

operações com números fracionários propriedades estruturais

1. *Introdução*

São possíveis com os números fracionários as *mesmas operações* estudadas com os números inteiros, isto é:

ADIÇÃO e sua inversa SUBTRAÇÃO
MULTIPLICAÇÃO e sua inversa DIVISÃO
POTENCIAÇÃO e sua inversa RADICIAÇÃO

A técnica de cálculo das quatro primeiras operações no conjunto dos números fracionários, já é bem conhecida desde a Escola Primária. Também, agora, o que será mais ressaltado, ao lado do *conceito* de cada operação, são as *propriedades estruturais* existentes para essas operações no conjunto dos números fracionários.

Comece guardando bem êste fato: As Propriedades Estruturais das Operações definidas no Conjunto dos Números Inteiros Continuam *Valendo* no Conjunto dos Números Fracionários!

Assim, PERMANECERÃO com as operações entre números fracionários, as propriedades conhecidas:

fechamento, comutativa, associativa, elemento neutro, distributiva e

mais uma *nova propriedade* que aparecerá na operação multiplicação: existência do elemento inverso.

Adição

2. *Operação: adição; resultado: soma*

Adição de duas frações é a operação que permite determinar a *soma* dessas frações. Há dois casos a destacar:

1.º) **As frações têm o mesmo denominador:** Seja, por exemplo, adicionar $\frac{2}{7}$ com $\frac{3}{7}$, isto é:

$$\frac{2}{7} + \frac{3}{7}$$

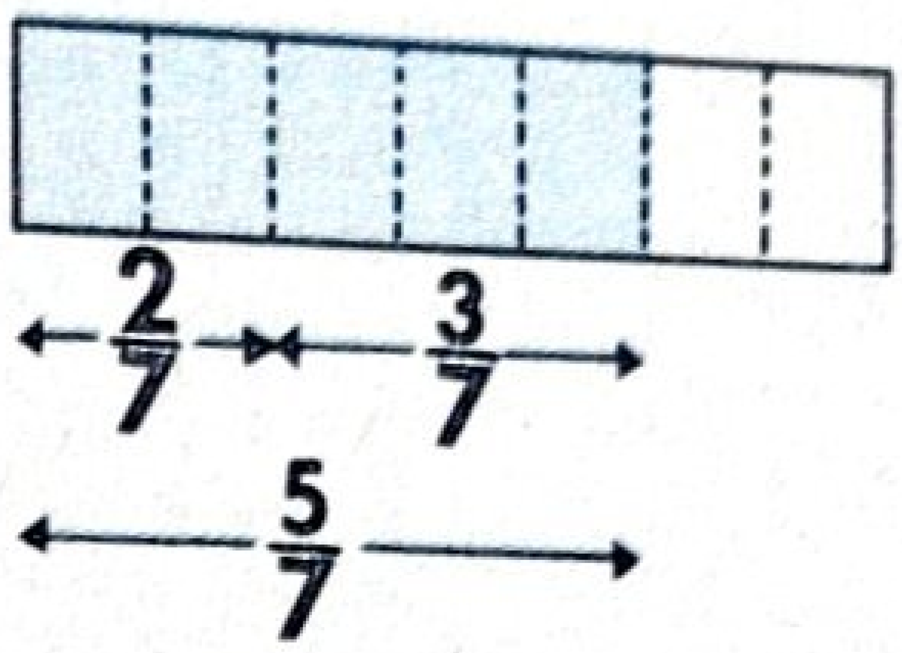


FIG. 45

As parcelas contêm, respectivamente, duas e três unidades fracionárias (sétimos), e portanto a *soma*, que é a *reunião* dessas unidades, contém cinco (conforme fig. 45). Logo:

A soma de duas frações de *mesmo denominador* é uma fração que tem por numerador a *soma dos numeradores* e por denominador o *denominador comum*.

2.º) **As frações têm denominadores diferentes:** Nesse caso basta considerar frações *equivalentes* às dadas, e que tenham o *mesmo denominador*.

Assim procedendo, reduz-se êste caso ao anterior. A técnica de cálculo a ser empregada para êsse fim é a da *redução das frações ao menor denominador comum*. Exemplo:

Efetuar: $\frac{4}{5} + \frac{2}{3}$

Temos: $\frac{4}{5} + \frac{2}{3} = \frac{12}{15} + \frac{10}{15} = \frac{22}{15} = 1\frac{7}{15}$

ou, usando um *traço único* (o que é aconselhável):

$$\frac{4}{5} + \frac{2}{3} = \frac{12+10}{15} = \frac{22}{15} = 1\frac{7}{15}$$

OBSERVAÇÃO IMPORTANTE: Reparar que a *técnica de cálculo* agora empregada (e que você já conhecia há tempo!) visa, tão-sòmente, a simplificar a procura das frações *equivalentes* de mesmo denominador, pertencentes às classes de equivalência das frações $\frac{4}{5}$ e $\frac{2}{3}$, respectivamente:

$$\boxed{\frac{4}{5}} \left\{ \frac{8}{10}, \boxed{\frac{12}{15}}, \frac{16}{20}, \frac{20}{25}, \frac{24}{30}, \ldots \right\} \qquad \boxed{\frac{12}{15}}$$

$$\boxed{\frac{2}{3}} \left\{ \frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \frac{8}{12}, \boxed{\frac{10}{15}}, \frac{12}{18}, \ldots \right\} \qquad \boxed{\frac{10}{15}}$$

Se a adição envolver números *inteiros* e números *mistos*, a operação pode ser feita transformando os números mistos em *frações impróprias* e os números inteiros em *frações aparentes*. Exemplo:

Efetuar: $$2\frac{1}{5}+6$$

Temos: $$\frac{11}{5}+\frac{6}{1}=\frac{11+30}{5}=\frac{41}{5}=8\frac{1}{5}$$

Ou, também, pode-se somar as *partes inteiras entre si, assim como as partes fracionárias*. Assim:

$$2\frac{1}{5}+6=8+\frac{1}{5}=\frac{41}{5}=8\frac{1}{5}$$

Note você que o número misto $8\frac{1}{5}$ *equivale* à soma: $8+\frac{1}{5}$, que são *numerais* diferentes de um mesmo número. Êste resultado é de grande valor para o *cálculo*.

Propriedades: 1.ª) *Fechamento:*

$$\underset{\text{fração}}{\underset{\downarrow}{\frac{2}{3}}}+\underset{\text{fração}}{\underset{\downarrow}{\frac{4}{5}}}=\underset{\text{fração}}{\underset{\downarrow}{\frac{22}{15}}}$$

2.ª) *Comutativa:*

$$\frac{2}{3}+\frac{4}{5}=\frac{4}{5}+\frac{2}{3}\quad\text{(é fácil de verificar)}$$

3.ª) *Elemento neutro*: 0

De fato: $$\frac{2}{3}+0=\frac{2}{3}$$

pois: $$\frac{2}{3}+0=\frac{2}{3}+\frac{0}{3}=\frac{2+0}{3}=\frac{2}{3}$$

3. *Adição de várias frações*

Como na soma de vários números inteiros, *somam-se as duas primeiras frações, depois, soma-se o resultado obtido com a terceira, e assim por diante*. A indicação dêste cálculo pode ser feita com um traço apenas, como no exemplo:

$$\frac{2}{3} + \frac{4}{5} + \frac{1}{6} = \frac{20+24+5}{30} = \frac{49}{30} = 1\frac{19}{30}$$

Propriedades: 1.ª) *Comutativa:*

$$\frac{2}{3} + \frac{4}{5} + \frac{1}{6} = \frac{4}{5} + \frac{2}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{6} + \frac{2}{3} + \frac{4}{5} = \ldots\ldots$$

2.ª) *Associativa:*

$$\left(\frac{2}{3} + \frac{4}{5}\right) + \frac{1}{6} = \frac{2}{3} + \left(\frac{4}{5} + \frac{1}{6}\right)$$

3.ª) *Elemento neutro:* 0

Ou seja: $\frac{2}{3} + \frac{4}{5} + \frac{1}{6} + 0 = \frac{2}{3} + \frac{4}{5} + \frac{1}{6}$

Subtração — **operação inversa da adição**

4. *Operação: subtração; resultado: diferença*

Dadas duas frações, numa certa *ordem*, chama-se *diferença*, entre a primeira fração e a segunda, a *fração*, se existir, que *somada* à segunda produz a primeira. Assim, por exemplo, se □ representa a *diferença* entre as frações: $\frac{3}{4}$ e $\frac{2}{5}$, temos a seguinte sentença matemática:

$$\frac{3}{4} - \frac{2}{5} = \square, \text{ o que acarreta: } \square + \frac{2}{5} = \frac{3}{4}$$

A operação que permite determinar a *diferença* (□) entre duas frações é denominada *subtração*. Também, agora, destacam-se dois casos:

1.º) **As frações têm o mesmo denominador:** basta *subtrair* o numerador da segunda fração do numerador da primeira e conservar o denominador comum. Ex.:

$$\frac{5}{7} - \frac{3}{7} = \frac{2}{7} \quad \text{pois} \quad \frac{2}{7} + \frac{3}{7} = \frac{5}{7}$$

2.º) **As frações têm denominadores diferentes:** basta considerar frações *equivalentes* às dadas e que tenham o *mesmo denominador*. Exemplo:

$$\frac{6}{7} - \frac{3}{4} = \frac{24}{28} - \frac{21}{28} = \frac{24 - 21}{28} = \frac{3}{28}$$

Valem as técnicas de cálculo análogas às observadas para a adição de frações. Assim, por exemplo:

1. Efetuar: $3\frac{2}{5} - \frac{3}{10}$

   Temos: $\frac{17}{5} - \frac{3}{10} = \frac{34 - 3}{10} = \frac{31}{10} = 3\frac{1}{10}$

2. Efetuar: $1 - \frac{3}{4}$

   Temos: $\frac{1}{1} - \frac{3}{4} = \frac{4 - 3}{4} = \frac{1}{4}$

3. Efetuar: $5\frac{3}{4} - 2\frac{1}{8}$

   Temos: $5\frac{3}{4} - 2\frac{1}{8} = \frac{23}{4} - \frac{17}{8} = \frac{46 - 17}{8} = \frac{29}{8} = 3\frac{5}{8}$

   ou também: $5\frac{3}{4} - 2\frac{1}{8} = 5\frac{6}{8} - 2\frac{1}{8} = 3\frac{5}{8}$

CONDIÇÃO DE POSSIBILIDADE: A *primeira* fração dada (minuendo) deve ser *maior* ou *igual* ($\geqslant$) que a segunda fração (subtraendo).

Você percebe, assim, por que as frações são dadas *numa certa ordem*.

A subtração é, pois, uma operação *não-comutativa*, pelo fato de a *ordem* influir no resultado da operação.

Associação de Adições e Subtrações

5. *Técnica de cálculo*

É a mesma já estudada com os números inteiros: efetua-se, primeiramente, as operações indicadas entre os sinais de reunião, a partir dos mais internos. Exemplo:

Efetuar: $\dfrac{23}{5} - \left[3 - \left(\dfrac{4}{7} + \dfrac{2}{3}\right)\right]$

Temos: $\dfrac{23}{5} - \left[3 - \left(\dfrac{12 + 14}{21}\right)\right] = \dfrac{23}{5} - \left[3 - \dfrac{26}{21}\right] = \dfrac{23}{5} -$

$$- \left[\frac{63 - 26}{21}\right] = \frac{23}{5} - \frac{37}{21} = \frac{483 - 185}{105} = \frac{298}{105} = 2\,\frac{88}{105}$$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 42

1. Na igualdade: $\dfrac{2}{9} + \dfrac{5}{9} = \dfrac{7}{9}$

   Qual a *operação* indicada? Qual o nome do *resultado*?

2. Dizer que propriedade está sendo aplicada nas seguintes sentenças:

   1.ª) $\dfrac{3}{4} + \dfrac{2}{5} = \dfrac{2}{5} + \dfrac{3}{4}$ 3.ª) $\left(\dfrac{2}{5} + \dfrac{1}{7}\right) + \dfrac{3}{8} = \dfrac{2}{5} + \left(\dfrac{1}{7} + \dfrac{3}{8}\right)$

   2.ª) $\dfrac{1}{2} + 0 = \dfrac{1}{2}$ 4.ª) $0 + \dfrac{a}{b} = \dfrac{a}{b}$

3. Na igualdade: $\dfrac{2}{5} - \dfrac{1}{5} = \dfrac{1}{5}$

   Qual a *operação* indicada? Qual o nome do *resultado*?

4. Procurar o valor de $\square$ que torne *verdadeiras* as seguintes sentenças:

   1.ª) $\dfrac{5}{8} - \dfrac{3}{8} = \square$ 2.ª) $\square + \dfrac{4}{7} = \dfrac{2}{3}$ 3.ª) $\dfrac{1}{2} + \square = 5$

5. Da adição: $\dfrac{3}{4} + \dfrac{2}{5} = \dfrac{23}{20}$ resultam duas subtrações: $\begin{cases} \dfrac{23}{20} - \ldots = \dfrac{3}{4} \\ \dfrac{23}{20} - \ldots = \ldots \end{cases}$

6. Calcular o valor de x na seguinte subtração, usando a adição correspondente:

$$x - 1\,\frac{3}{8} = 0$$

7. Efetuar: 1.º) $2\,\dfrac{1}{3} + \dfrac{4}{6} + 5$ 2.º) $\left(8 - \dfrac{4}{7}\right) + \left(1 - \dfrac{3}{5}\right)$

8. Colocar os parênteses de modo que seja *possível* efetuar a expressão:

$$\frac{2}{3} - \frac{3}{4} - \frac{1}{2}$$

9. Efetuar: $4 - \left[\left(\dfrac{21}{10} + \dfrac{7}{12}\right) - \left(\dfrac{5}{3} - \dfrac{8}{12}\right)\right]$

10. Efetuar: $\dfrac{55}{20} - \left\{\dfrac{2}{5} + \left[3 - \left(\dfrac{1}{4} + \dfrac{2}{5}\right)\right]\right\}$

6. *Operação: multiplicação; resultado: produto*

Multiplicação de duas frações é a *operação* que permite determinar o *produto* das duas frações. Destacamos os casos:

1.º) MULTIPLICAÇÃO DE UM NÚMERO INTEIRO POR UMA FRAÇÃO. Seja, por exemplo:

$$3 \times \frac{2}{7}$$

que corresponde à *soma*:

$$\frac{2}{7} + \frac{2}{7} + \frac{2}{7}$$

Portanto, o *produto* procurado será:

$$3 \times \frac{2}{7} = \frac{2}{7} + \frac{2}{7} + \frac{2}{7} = \frac{6}{7}$$

valendo a seguinte *técnica operatória*:

O produto de um número inteiro por uma fração é uma fração de mesmo denominador e cujo numerador é o produto do número inteiro pelo numerador da fração.

CUIDADO: Não *confundir:* $3\frac{2}{7}$ (que é um *número misto* igual à fração imprópria $\frac{23}{7}$) com $3 \times \frac{2}{7}$ ou $3 \cdot \frac{2}{7}$ (que são *produtos indicados* de valor $\frac{6}{7}$)

2.º) MULTIPLICAÇÃO DE UMA FRAÇÃO POR OUTRA FRAÇÃO: É feita com a seguinte *técnica de cálculo*:

constrói-se uma fração cujo numerador é o produto dos numeradores e cujo denominador é o produto dos denominadores das frações dadas.

Exemplo:

$$\frac{3}{4} \times \frac{5}{7} = \frac{3 \times 5}{4 \times 7} = \frac{15}{28}$$

De fato, se ao invés de multiplicar $\frac{3}{4}$ por $\frac{5}{7}$, multiplicássemos $\frac{3}{4}$ por 5, teríamos: $\frac{3}{4} \times 5 = \frac{3 \times 5}{4}$, que representa um valor 7 vêzes maior que se tivéssemos multiplicado por $\frac{5}{7}$. Portanto, o verdadeiro valor será obtido se dividirmos $\frac{3 \times 5}{4}$ por 7, o que equivale, de acôrdo com o estudado (n.° 15), a multiplicar o denominador por 7, isto é: $\frac{3 \times 5}{4 \times 7}$.

Observações:

1.ª) Para multiplicar *números mistos*, costuma-se reduzi-los a frações impróprias e aplicar as técnicas já conhecidas. Ex.:

$$3\frac{2}{5} \times \frac{4}{7} = \frac{17}{5} \times \frac{4}{7} = \frac{68}{35}$$

2.ª) Quando se multiplica uma fração por outra fração diz-se, também, que se calculou uma *"fração de fração"*. Assim, por exemplo, obtém-se os $\frac{2}{5}$ dos $\frac{3}{7}$, efetuando-se o produto:

$$\frac{2}{5} \times \frac{3}{7} = \frac{6}{35}$$

Propriedades: 1.ª) *Fechamento:*

$$\underset{\text{fração}}{\frac{3}{4}} \times \underset{\text{fração}}{\frac{5}{7}} = \underset{\text{fração}}{\frac{15}{28}}$$

2.ª) *Comutativa:*

$$\frac{3}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} \quad \text{(é fácil de verificar)}$$

3.ª) *Elemento neutro*: 1

De fato: $\frac{2}{3} \times 1 = \frac{2}{3}$

4.ª) *Elemento inverso* (propriedade nova!)

Que é que você obtém multiplicando, por exemplo, $\frac{3}{5}$ por $\frac{5}{3}$?

Vejamos:

$$\frac{3}{5} \times \frac{5}{3} = \frac{15}{15} = 1 \quad \text{(elemento neutro)}$$

Então: quando o produto de duas frações é igual a 1 (que é o elemento neutro da multiplicação) as frações dizem-se INVERSAS uma da outra. Nas frações inversas o *denominador de cada uma é o numerador da outra.* Exemplos:

Fração dada		*Fração inversa*	*Produto*
$\frac{3}{4}$		$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{4} \times \frac{4}{3} = 1$
$\frac{1}{5}$		$\frac{5}{1}$	$\frac{1}{5} \times \frac{5}{1} = 1$
$\frac{3}{1}$		$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{1} \times \frac{1}{3} = 1$
$\frac{0}{7}$		não há!	???
$\frac{a}{b}$	$\begin{pmatrix} a \neq o \\ b \neq o \end{pmatrix}$	$\frac{b}{a}$	$\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = 1$

Nestas condições, há mais uma importante *propriedade* a figurar no *conjunto dos números fracionários*, com relação à operação *multiplicação*: a que dá "vida" ao *elemento inverso* de um dado elemento. Logo:

> **Tôda fração, não nula, admite um elemento inverso, que é a fração inversa da fração considerada; o produto dessas frações é igual ao elemento neutro (1) da multiplicação.**

Observe, com atenção, que o INVERSO de um *número natural* n é o *número fracionário* $\frac{1}{n}$.

7. *Multiplicação de várias frações*

O procedimento é o mesmo já conhecido com os números inteiros: *multiplicam-se as duas primeiras frações*, depois o *resultado obtido* com a *terceira* e assim por diante. Como *técnica de cálculo* pode-se multiplicar os numeradores entre si, bem como os denominadores. Exemplo:

$$\frac{3}{4} \times \frac{2}{5} \times \frac{7}{6} = \frac{3 \times 2 \times 7}{4 \times 5 \times 6} = \frac{42}{120} = \frac{14}{40} = \frac{7}{20}$$

OBSERVAÇÃO: Sempre que possível, efetua-se a operação *simplificando-se* as frações, cancelando os fatôres comuns a qualquer numerador com qualquer denominador. Assim, por exemplo:

$$\frac{3}{4} \times \frac{2}{5} \times \frac{7}{6} = \frac{\overset{1}{\cancel{3}} \times \overset{1}{\cancel{2}} \times 7}{\underset{2}{\cancel{4}} \times 5 \times \underset{2}{\cancel{6}}} = \frac{7}{20}$$

Propriedades: 1.ª) *Comutativa:*

$$\frac{3}{4} \times \frac{2}{5} \times \frac{7}{6} = \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{7}{6} = \frac{7}{6} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{5} = \ldots\ldots$$

2.ª) *Associativa:*

$$\left(\frac{2}{3} \times \frac{4}{5}\right) \times \frac{1}{6} = \frac{2}{3} \times \left(\frac{4}{5} \times \frac{1}{6}\right)$$

3.ª) *Elemento neutro:* 1

De fato: $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times 1 = \frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$

4.ª) *Distributiva da multiplicação em relação à adição* (ou subtração):

$$\frac{4}{5} \times \underbrace{\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{6}\right)} = \underbrace{\frac{4}{5} \times \frac{3}{4}} + \underbrace{\frac{4}{5} \times \frac{1}{6}}$$

$$\underbrace{\frac{4}{5} \times \frac{11}{12}}_{\frac{11}{15}} \qquad\qquad \underbrace{\frac{3}{5} + \frac{2}{15}}_{\frac{11}{15}}$$

Divisão

operação inversa da multiplicação

8. *Operação: divisão; resultado: quociente*

Dadas duas frações, numa certa ordem, chama-se *quociente* da primeira fração pela segunda, a *fração*, se existir, que multiplicada pela segunda produz a primeira. Assim, por exemplo, se □ representa o *quociente* entre as frações: $\frac{3}{4}$ e $\frac{2}{5}$, temos a seguinte sentença matemática:

$$\frac{3}{4} : \frac{2}{5} = \square, \quad \text{o que acarreta: } \square \times \frac{2}{5} = \frac{3}{4}$$

A operação que permite determinar o *quociente* (□) entre duas frações é denominada *divisão*.

A *técnica de cálculo* usada para determinar o *quociente* de duas frações, está baseada na existência do elemento inverso (fração inversa) da primeira fração dada. De fato, seja, por exemplo, a *divisão*:

$$\frac{3}{4} : \frac{2}{5} = \square$$

que equivale a

$$\square \times \frac{2}{5} = \frac{3}{4}$$

O valor de $\square$ será conhecido quando você multiplicar *ambos* os têrmos dessa igualdade por $\frac{5}{2}$, isto é, a fração inversa de $\frac{2}{5}$, pois:

$$\square \times \underbrace{\frac{2}{5} \times \frac{5}{2}}_{1 \text{ (elemento neutro)}} = \frac{3}{4} \times \frac{5}{2}$$

e, portanto:

$$\square \times 1 = \frac{3}{4} \times \frac{5}{2} \quad \text{ou} \quad \square = \frac{3}{4} \times \frac{5}{2}$$

Vale, assim, a seguinte *regra* como técnica operatória:

Para se dividir uma fração por outra basta multiplicar a primeira fração pela fração inversa da segunda.

Exemplos:

1.º) $\frac{3}{4} : \frac{2}{5} = \frac{3}{4} \times \frac{5}{2} = \frac{15}{8} = \boxed{1\frac{7}{8}}$

2.º) $\frac{7}{9} : 4 = \frac{7}{9} \times \frac{1}{4} = \frac{7}{36}$

3.º) $5 : \frac{2}{9} = \frac{5}{1} \times \frac{9}{2} = \frac{45}{2} = 22\frac{1}{2}$

OBSERVAÇÕES:

1.ª) Para dividirmos *números mistos*, reduzimo-los primeiramente a frações impróprias. Exemplo:

$$3\,\frac{4}{5} : 2\,\frac{1}{7} = \frac{19}{5} : \frac{15}{7} = \frac{19}{5} \times \frac{7}{15} = \frac{133}{75} = \boxed{1\,\frac{58}{75}}$$

2.ª) Pode-se, também, indicar o *quociente de duas frações* com uma *nova fração*, cujos têrmos são as frações dadas: Exemplo:

$$\frac{2}{5} : \frac{4}{7} = \cfrac{\frac{2}{5}}{\frac{4}{7}} \qquad \text{e} \qquad \text{vice-versa:} \quad \cfrac{\frac{2}{5}}{\frac{4}{7}} = \frac{2}{5} : \frac{4}{7}$$

CUIDADO com o *traço de separação* das duas frações que deve ser um pouco maior do que os traços das frações dadas.

3.ª) Não se esquecer também, que a *ordem* com que as frações são consideradas na *divisão* é importantíssima; a divisão é uma operação *não-comutativa*!

9. *Quociente exato de dois números inteiros*

Suponha você, agora, que o dividendo e o divisor sejam *números inteiros*: 53 e 6, por exemplo. Então, pelo visto, vem:

$$\boxed{53 : 6} = 53 \times \frac{1}{6} = \boxed{\frac{53}{6}}$$

e a fração $\frac{53}{6}$ será denominada quociente exato de 53 por 6, para distinguir do *quociente aproximado* de 53 por 6, estudado no Cap. 2, 1.ª parte (n. 28).

Logo, o símbolo da *divisão exata* de um número inteiro por outro número inteiro pode ser, ao invés do sinal (:), o *traço de fração*. Assim, por exemplo, escrever $\frac{12}{4}$ não é *sòmente* escrever uma *fração;* é também, indicar que você deseja calcular o *quociente exato* de 12 por 4, que é, neste caso, 3.

Se fôsse escrito $\frac{12}{5}$, o *quociente exato* de 12 por 5 seria, precisamente, o número fracionário $\frac{12}{5}$.

LEMBRETE AMIGO

Enquanto que a *divisão* com os *números inteiros* só era *possível* quando o dividendo fôsse múltiplo do divisor, agora, com os *números fracionários*, a divisão é *sempre possível* (desde que o divisor seja diferente de zero).

Então o conjunto dos números fracionários é "mais amplo" que o conjunto dos números inteiros (recorde-se que o número inteiro é um número fracionário de denominador 1) e como tal possibilita "ampliar" as operações.

O conjunto de todos os números inteiros e fracionários recebe uma única denominação de CONJUNTO DOS NÚMEROS RACIONAIS, que você estudará mais tarde.

10. *Expressões numéricas com frações*

O cálculo dessas expressões é feito seguindo a *mesma ordem* estudada no cálculo das expressões numéricas com os números inteiros:

1.º) as multiplicações e divisões;

2.º) as adições e subtrações, respeitadas as ordens dos parênteses, colchetes e chaves, caso existam. Exemplos:

1.º) Calcular o *valor* da expressão:

$$\frac{3}{4} + \frac{2}{5} \times 10$$

Temos:

$$\frac{3}{4} + \frac{2}{\cancel{5}_1} \times \cancel{10}^{2} = \frac{3}{4} + \frac{4}{1} = \boxed{4\frac{3}{4}}$$

OBSERVAÇÃO:

$4\frac{3}{4}$ é um numeral mais simples da expressão: $\frac{3}{4} + \frac{2}{5} \times 10$

2.º) Idem da expressão:

$$\left[\underbrace{\left(2 + \frac{1}{3}\right)}_{*} \times \frac{3}{4} + \underbrace{\frac{1}{6} : 3}_{**}\right] \times \frac{4}{5} + 2$$

Temos, efetuando, os seguintes cálculos parciais:

$$* \; 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

$$** \; \frac{1}{6} : 3 = \frac{1}{18}$$

$$= \left[\frac{7}{3} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{18}\right] \times \frac{4}{5} + 2 =$$

$$= \left[\frac{7}{4} + \frac{1}{18}\right] \times \frac{4}{5} + 2 =$$

$$= \frac{65}{36} \times \frac{4}{5} + 2 = \frac{13}{9} + 2 = \frac{31}{9} = \boxed{3\frac{4}{9}}$$

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO — Grupo 43

1.º) Determinar o valor de $\square$ tal que:

$$\square \times \frac{3}{4} = \frac{2}{5}$$

Ora, essa expressão (que é uma sentença matemática) equivale a esta outra:

$$\square = \frac{2}{5} : \frac{3}{4} \quad \text{(pela operação inversa divisão)}$$

ou

$$\square = \frac{2}{5} \times \frac{4}{3} = \boxed{\frac{8}{15}}$$

2.º) Idem em:

$$\square : \frac{3}{7} = 8$$

Temos:

$$\square = 8 \times \frac{3}{7} = \boxed{\frac{24}{7}} \quad \text{(pela definição de } \textit{quociente}\text{)}$$

3.º) Determinar o valor de x na expressão:

$$\left(x + \frac{1}{7}\right) \times \frac{3}{4} = \frac{4}{9}$$

Temos:

$$\left(x + \frac{1}{7}\right) = \frac{4}{9} : \frac{3}{4}$$

ou

$$x + \frac{1}{7} = \frac{4}{9} \times \frac{4}{3} = \frac{16}{27}$$

e, portanto:

$$x = \frac{16}{27} - \frac{1}{7} = \boxed{\frac{85}{189}}$$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — Grupo 44

1. Na igualdade: $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$

   Qual a *operação* indicada? Qual o nome do *resultado*?

2. Qual a propriedade que está sendo aplicada nas seguintes sentenças:

   1.ª) $\frac{3}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{5} \times \frac{3}{4}$?

   2.ª) $\frac{2}{9} \times 1 = \frac{2}{9}$?

   3.ª) $\left(\frac{2}{3} \times \frac{4}{5}\right) \times \frac{3}{7} = \frac{2}{3} \times \left(\frac{4}{5} \times \frac{3}{7}\right)$?

   4.ª) $1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$?

3. Na igualdade: $\frac{3}{5} : \frac{2}{3} = \frac{9}{10}$

   Qual a *operação* indicada? Qual o nome do *resultado*?

4. Da multiplicação: $\frac{2}{5} \times \frac{4}{9} = \frac{8}{45}$ resultam duas divisões: $\begin{cases} \frac{8}{45} : \ldots = \frac{4}{9} \\ \frac{8}{45} : \ldots = \frac{2}{5} \end{cases}$

5. Procurar o valor de $\square$ tal que:

1.º) $\frac{1}{8} : \frac{3}{5} = \square$ 2.º) $\square \times \frac{2}{3} = \frac{1}{4}$ 3.º) $\frac{3}{8} \times \square = \frac{1}{8}$

6. Calcular o valor de $\square$ nas seguintes *divisões* usando as multiplicações correspondentes:

1.º) $\square : \frac{4}{9} = \frac{1}{2}$ 2.º) $\frac{2}{5} : \square = 1$ 3.º) $8 : \square = 8$

7. Efetuar (simplificando onde couber):

1.º) $\frac{3}{4} \times \frac{1}{3}$ 2.º) $\frac{1}{8} \times 8$ 3.º) $\frac{3}{8} \times 16 \times \frac{2}{5}$

4.º) $2\frac{4}{5} \times \frac{3}{4} \times 1$ 5.º) $\frac{3}{5} : 6$ 6.º) $4 : \frac{8}{3}$

7.º) $\frac{3}{8} : \frac{1}{4}$ 8.º) $2\frac{3}{4} : 2$ 9.º) $\frac{1}{a} : \frac{1}{b}$

8. Calcular:

1.º) os $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5}$ 2.º) os $\frac{3}{4}$ dos $\frac{2}{3}$ de $\frac{1}{2}$ 3.º) o $\frac{1}{5}$ de 20

4.º) os $\frac{3}{5}$ dos $\frac{2}{3}$ de 5 5.º) o $\frac{1}{2}$ dos $2\frac{1}{5}$ de $3\frac{1}{4}$

9. Completar as seguintes sentenças:

1.º) $1 \times \ldots = \frac{4}{5}$ 3.º) $\frac{3}{7} \times \ldots = 1$

2.º) $1 : \ldots = \frac{4}{5}$ 4.º) $\frac{5}{6} : \ldots = \frac{2}{3}$

10. Multiplicamos uma fração por $\frac{2}{3}$, depois o produto obtido por $\frac{4}{5}$ e encontramos o resultado $\frac{2}{5}$. Que fração é essa?

11. Determinar o valor de x nas seguintes sentenças:

1.ª) $x \times \frac{2}{5} = \frac{3}{7}$ 2.ª) $\frac{5}{8} : x = 2$ 3.ª) $2 : x = \frac{1}{2}$

4.ª) $\left(x \times \frac{2}{3}\right) : \frac{4}{5} = \frac{1}{10}$ 5.ª) $\left(x : \frac{1}{9}\right) \times \frac{2}{3} = 1$ 6.ª) $\left(x - \frac{1}{3}\right) \times \frac{5}{6} = \frac{6}{5}$

12. Completar as seguintes sentenças de modo que se tornem verdadeiras (V):

1.ª) $\frac{15}{8} = \frac{3}{4} \times \ldots$ 2.ª) $\ldots = \frac{2}{5} : \frac{5}{2}$

3.ª) $0 = \frac{3}{4} \times \ldots$ 4.ª) $1 = \frac{3}{4} \times \ldots$

13. Assinale V (verdadeira) ou F (falsa) nas seguintes sentenças:

1.ª) $4 \times \frac{2}{3} = 4\,\frac{2}{3}$ 2.ª) $4 \times \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$ 3.ª) $4 + \frac{2}{3} = 4\,\frac{2}{3}$

4.ª) $4 \cdot \frac{2}{3} = \frac{14}{3}$ 5.ª) $\frac{2}{3} + 4 = 4\,\frac{2}{3}$ 6.ª) $4\,\frac{2}{3} = \frac{14}{3}$

14. Calcular o valor das expressões:

1.ª) $\left(\frac{2}{5} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{8}\right) \times \left(1 - \frac{1}{79}\right)$ 2.ª) $\dfrac{3 \times \frac{2}{5} + 1}{2 - \frac{3}{4} : 2} - 1\,\frac{23}{65}$

3.ª) $\left\{\left[\left(3 + \frac{2}{3}\right) \times \frac{4}{11} + 3 : \frac{1}{2}\right] \times \frac{3}{22} + 5\right\} + 4$

15. O conjunto dos números fracionários é FECHADO em relação às operações:
(a) *adição* (por quê?); (b) *subtração* (por quê?); (c) *multiplicação* (por quê?); (d) *divisão* (por quê?).

Potenciação

11. *Operação: potenciação; resultado: potência*

Potência de uma fração é um produto de *fatôres iguais* a essa fração. Da mesma forma que foi estudada para os números inteiros, a *potenciação* é a *operação* que permite determinar a potência. Assim, por exemplo:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3}$$

ou

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2}{3 \times 3 \times 3 \times 3} = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81}$$

A *técnica de cálculo* é dada pela seguinte *regra*:

Para se elevar uma fração a uma potência, elevam-se os seus dois têrmos a essa potência.

Para os expoentes *especiais* 0 e 1, tem-se, também, como no caso dos números inteiros:

$\left(\frac{3}{5}\right)^0 = 1$ (tôda fração elevada ao expoente zero é igual a 1)

$\left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{2}{3}$ (tôda fração elevada ao expoente 1 é igual à própria fração)

Observações:

1.ª) Se o número fôr *misto* reduzimo-lo, primeiramente, a uma fração *imprópria*. Exemplo:

$$\left(2\,\frac{3}{7}\right)^2 = \left(\frac{17}{7}\right)^2 = \frac{17^2}{7^2} = \frac{289}{49}$$

2.ª) É indispensável o uso de *parênteses* para evitar confusões, como, por exemplo:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2^3}{3^3} = \boxed{\frac{8}{27}} \quad \text{e} \quad \frac{2^3}{3} = \boxed{\frac{8}{3}}$$

3.ª) Continuam válidas as propriedades operatórias estudadas na *potenciação com os números inteiros*. Assim, por exemplo:

$\left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^5$ isto é, para *multiplicar* potências de *mesma base*, basta conservar a base e somar os expoentes.

Nota: Estudamos, por enquanto, a operação *potenciação* com *expoente inteiro*. No caso da *potenciação* com *expoentes fracionários*, como por exemplo: $5^{\frac{1}{2}}$, $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{4}{5}}$ é preciso ampliar o conjunto dos números já conhecidos, estudo que será feito em outras séries.

Radiciação — operação inversa da potenciação

12. *Operação: radiciação; resultado: raiz*

Conhecida a *potência* de uma fração, bem como o *expoente*, a que essa fração está elevada, pode-se determinar a *base* (que é a fração de que se está falando) pela *operação inversa* da potenciação, que é a *radiciação*. Assim, por exemplo:

$$\text{de } \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} \quad \text{temos } \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$$

ou também:

$$\boxed{\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3} \Longleftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}}$$

Outros exemplos:

$$\sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2} \Longleftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

$$\sqrt[4]{\frac{81}{16}} = \frac{3}{2} \Longleftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{81}{16}$$

13. *Expressões numéricas envolvendo potenciações e radiciações de frações*

São calculadas, levando-se em conta a seguinte ordem:

1.º) potenciações e radiciações;

2.º) multiplicações e divisões

3.º) adições e subtrações

Exemplo: Calcular o valor das seguintes expressões:

1.ª) $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times 8$

Temos:

$$1 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times 8 = 1 - \frac{1}{\cancel{8}} \times \cancel{8} = 1 - 1 = \boxed{0}$$

2.ª) $9 + \sqrt{\frac{4}{25}} : \frac{2}{5}$

Temos:

$$9 + \sqrt{\frac{4}{25}} : \frac{2}{5} = 9 + \underbrace{\frac{2}{5} : \frac{2}{5}}_{1} = 9 + 1 = \boxed{10}$$

1. Na igualdade: $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

   Qual a *operação indicada?* Qual o nome do *resultado?*

2. Efetuar:

   1.º) $\left(\frac{1}{3}\right)^2$ 2.º) $\left(\frac{3}{4}\right)^3$ 3.º) $\left(\frac{1}{3}\right)^4$ 4.º) $\left(3\frac{2}{5}\right)^3$ 5.º) $\left(\frac{1}{100}\right)^2$ 6.º) $\left(\frac{19}{21}\right)^0$

   7.º) $\left(1\frac{1}{2}\right)^1$ 8.º) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3$ 9.º) $\left(3+\frac{1}{2}\right)^2 : \frac{7}{2}$ 10.º) $\left(\frac{3}{4}\right)^2 \times \left(\frac{4}{3}\right)^2$

3. Calcular o valor de $\square$ nas seguintes sentenças:

   1.ª) $\square = 5 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 : \frac{1}{4}$ 2.ª) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \square = \left(\frac{1}{2}\right)^0$

   3.ª) $\square = \left[\left(2 - \frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{3}{5}\right] : \left[5 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times 12^1\right]$ 4.ª) $\square - \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^4$

4. Na igualdade: $\sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$

   Qual a *operação indicada?* Qual o nome do *resultado?*

5. Escrever, usando a *operação inversa*, as igualdades correspondentes:

   Exemplo: $\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27} \Longleftrightarrow \sqrt[3]{\frac{1}{27}} = \frac{1}{3}$

   1.º) $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81}$ 2.º) $\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$ 3.º) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

6. Efetuar:

   1.º) $\sqrt{\frac{1}{16}}$ 2.º) $\sqrt[3]{\frac{8}{1}}$ 3.º) $\sqrt[4]{\frac{1}{16}}$ 4.º) $\sqrt[3]{\frac{1}{1\,000}}$ 5.º) $\sqrt{\frac{25}{144}}$

7. Qual é maior: $\sqrt{\frac{1}{16}}$ ou $\sqrt[3]{\frac{1}{8}}$?

8. Se $1^8 = 1$ então $\sqrt[8]{1} = \ldots$

9. Calcular o valor de $\square$ nas seguintes sentenças:

   1.ª) $\square = \sqrt{\frac{1}{4}} : \sqrt[3]{\frac{1}{8}}$ 2.ª) $\sqrt{\frac{1}{9}} \times \square = \sqrt{\frac{1}{9}}$

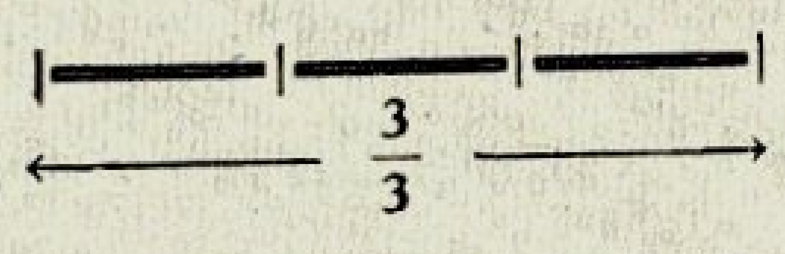
10. Calcular o valor das seguintes expressões:

    1.ª) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \sqrt{\frac{1}{16}} \times 4$ 2.ª) $3^2 - \sqrt[3]{\frac{8}{125}} : \frac{2}{5}$

problemas de aplicação

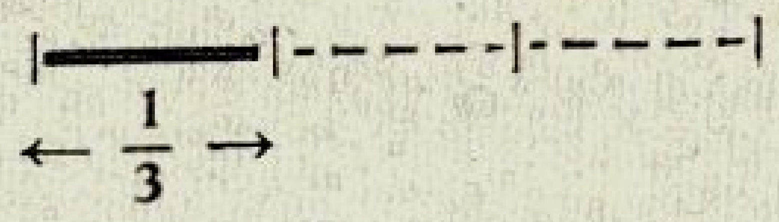
Aproveitando as *mesmas estruturas* usadas nos "problemas de aplicação" com os números inteiros, procuremos examinar alguns exemplos de problemas com números fracionários, onde serão destacados:

o **inteiro** (ou *unidade*, que é o "objeto dado" considerado no seu "todo"; por comodidade será, agora, representado por um *segmento*). Ex. :



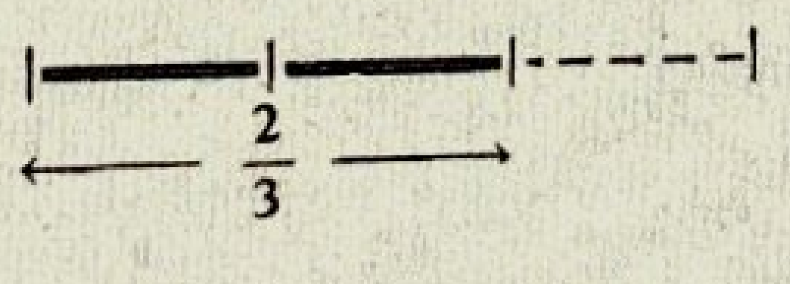
:

o **singular** (ou *unidade fracionária*, que é *uma* fração da unidade considerada). Ex. :



×

o **plural** (soma de *diversas* unidades fracionárias, cada uma representando o singular). Ex. :



É óbvio que o *inteiro* é, por sua vez, um *plural*.

Lembre-se, *com atenção*, que:

1. a passagem do *singular* para o *plural* é feita com a operação multiplicação;
2. a passagem do *plural* para o *singular* é feita com a operação divisão;
3. as frações *só podem* ser operadas entre elas; os seus valôres correspondentes também *só podem* ser operados *entre êles*. Exemplos:

1. *O preço de um objeto é* Cr$ 180,00. *Quanto custa* $\frac{1}{3}$ *dêsse objeto?*

Temos:

$$\begin{array}{ll} \text{inteiro:} & \frac{3}{3} \longrightarrow 180 \\ & \qquad\qquad\ \searrow\!\!\swarrow : 3 \\ \text{singular:} & \frac{1}{3} \longrightarrow 60 \end{array}$$

Resposta: $\frac{1}{3}$ do objeto *custa* $\boxed{\text{Cr\$ 60,00}}$.

2. *No problema anterior, quanto* custam $\frac{2}{3}$ *do objeto?*

Temos:

$$\begin{array}{ll} \text{inteiro:} & \frac{3}{3} \longrightarrow 180 \\ & \qquad\qquad\ \searrow\!\!\swarrow : 3 \\ \text{singular:} & \frac{1}{3} \longrightarrow 60 \\ & \qquad\qquad\ \searrow\!\!\swarrow \times 2 \\ \text{plural:} & \frac{2}{3} \longrightarrow 120 \end{array}$$

Resposta: $\frac{2}{3}$ do objeto custam $\boxed{\text{Cr\$ 120,00}}$.

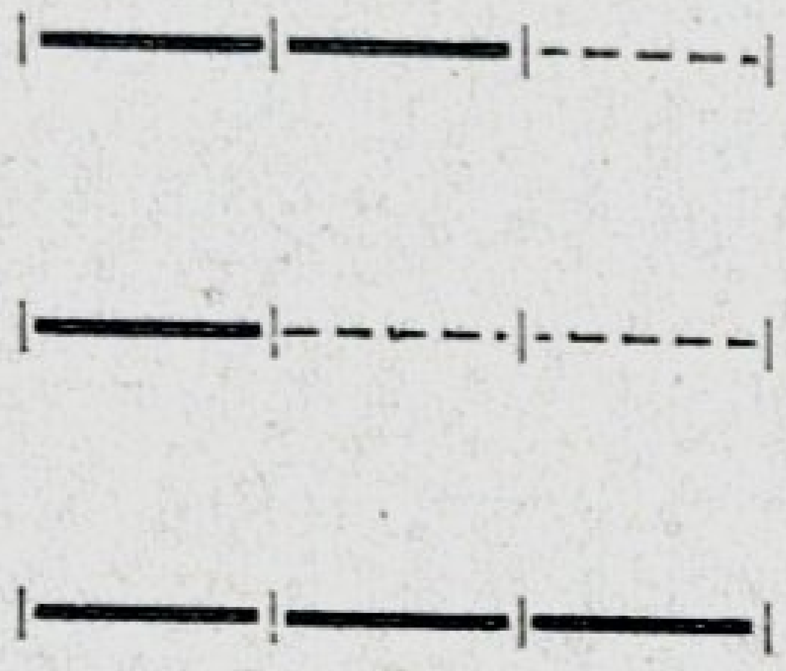
3. *No mesmo problema* (o preço de um objeto é Cr$ 180,00) *quanto custam* $\frac{4}{5}$ *do objeto?*

Temos:

$$\begin{array}{ll} \text{inteiro:} & \frac{5}{5} \longrightarrow 180 \\ & \qquad\qquad\ \searrow\!\!\swarrow : 5 \\ \text{singular:} & \frac{1}{5} \longrightarrow 36 \\ & \qquad\qquad\ \searrow\!\!\swarrow \times 4 \\ \text{plural:} & \frac{4}{5} \longrightarrow 144 \end{array}$$

Resposta: $\frac{4}{5}$ do objeto custam $\boxed{\text{Cr\$ 144,00}}$.

4. *Se* $\frac{2}{3}$ *do pêso de uma pessoa é igual a 60 kg, qual é o pêso dessa pessoa?*

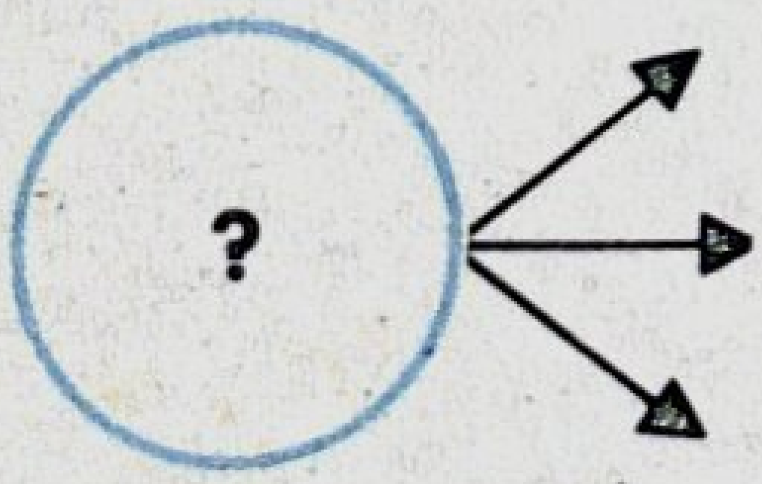


$$\begin{array}{lll} \text{plural:} & \frac{2}{3} \longrightarrow 60\text{kg} & \\ & & :2 \\ \text{singular:} & \frac{1}{3} \longrightarrow 30\text{kg} & \\ & & \times 3 \\ \text{inteiro:} & \frac{3}{3} \longrightarrow 90\text{kg} & \end{array}$$

Resposta: O pêso é de $\boxed{\text{90 kg}}$.

5. *Uma certa fortuna foi repartida entre três herdeiros, cabendo ao primeiro a importância equivalente a* $\frac{2}{3}$ *da fortuna, ao segundo* $\frac{1}{4}$ *e ao terceiro a fração restante. Qual o valor dessa fortuna, sabendo-se que a importância recebida pelo terceiro foi de* Cr\$ 300 000,00?

Temos que calcular, primeiramente, a *fração correspondente* a cada herdeiro:



$$\left.\begin{array}{l} 1.^{\circ})\ \boxed{\frac{2}{3}} \\ 2.^{\circ})\ \boxed{\frac{1}{4}} \end{array}\right\} \frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{8+3}{12} = \frac{11}{12}$$

$$3.^{\circ})\ \frac{12}{12} - \frac{11}{12} = \boxed{\frac{1}{12}}$$

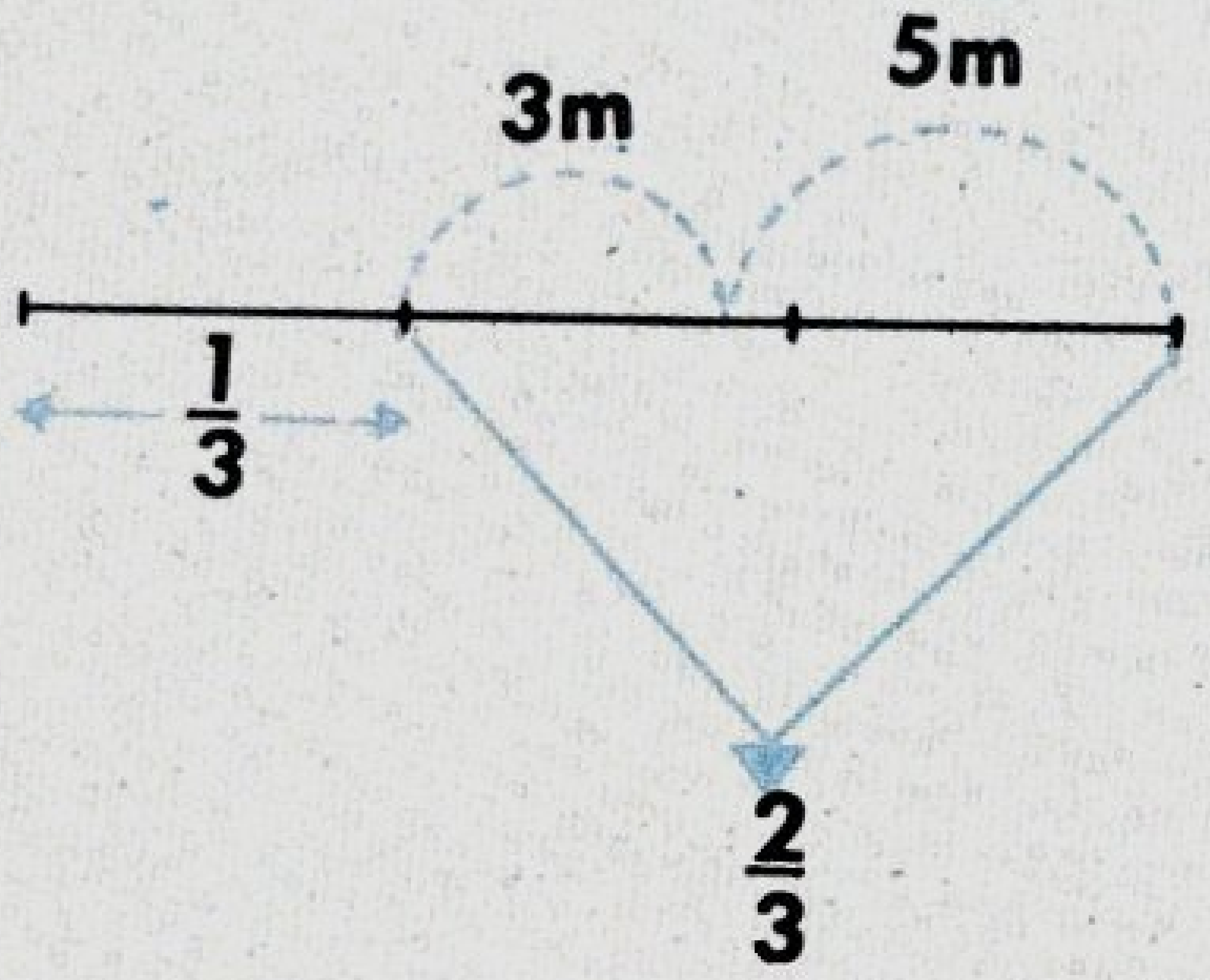
Logo:

$$\begin{array}{lll} \text{singular:} & \frac{1}{12} \longrightarrow 300\,000 & \\ & & \times 12 \\ \text{inteiro:} & \frac{12}{12} \longrightarrow 3\,600\,000 & \end{array}$$

Resposta: A fortuna é de $\boxed{\text{Cr\$ 3 600 000,00}}$.

6. *Corto* $\frac{1}{3}$ *de um fio. Depois corto* 3m *e restam-me, ainda,* 5m. *Qual é o comprimento do fio?*

Temos, agora, o seguinte "esquema":



e, portanto, $\frac{2}{3} \longrightarrow (3\text{m} + 5\text{m}) = 8\text{m}$

Logo:

$$\frac{2}{3} \longrightarrow 8\text{m}$$

$$\downarrow : 2$$

$$\frac{1}{3} \longrightarrow 4\text{m}$$

$$\downarrow \times 3$$

$$\frac{3}{3} \longrightarrow 12\text{m}$$

Resposta: o fio mede $\boxed{12\text{m}}$.

7. *Tenho uma certa importância. Gastei* $\frac{1}{4}$ *dessa importância na mercearia; no açougue gastei* $\frac{1}{9}$ *do resto e ainda fiquei com* Cr\$ 4 800,00. *Quanto possuo?*

O "esquema" que envolve *inteiro* e *frações* de um lado e os *valôres correspondentes* (que é "dinheiro" neste exemplo) de outro, é:

$\frac{4}{4}$ (inteiro correspondente à importância que tenho)

$\boxed{\frac{1}{4}}$ (fração correspondente ao gasto na mercearia)

$\longrightarrow \frac{3}{4}$ (fração correspondente ao resto)

$\frac{1}{9} \times \frac{3}{4} = \boxed{\frac{1}{12}}$ (fração correspondente ao gasto no açougue

$+ \rightarrow \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \boxed{\frac{1}{3}}$

$\downarrow$

(todos os gastos)

Então: $\frac{3}{3} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ (fração correspondente à importância que sobrou depois dos gastos, que é Cr\$ 4 800,00)

Logo: se $\frac{2}{3} \longrightarrow 4\,800{,}00$, então $\frac{3}{3} \longrightarrow 7\,200{,}00$

Resposta: possuo $\boxed{\text{Cr\$ } 7\,200{,}00}$.

8. *Três rádios portáteis de pilha custaram* Cr\$ 74 490,00. *Sabendo-se que o preço do segundo foi os* $\frac{2}{3}$ *do preço do primeiro e também os* $\frac{4}{5}$ *do do terceiro, qual é o preço de cada um dos rádios?*

NOTA: Êste problema é considerado "difícil"; todavia, levando-se em conta o que já foi estudado (guardadas certas reservas dos dados do problema com a "realidade") a sua resolução é simples.

Temos:

$$\begin{array}{rl} & \nearrow \frac{2}{3} \text{ do preço do } 1.^{\circ} \\ \textit{preço do } 2.^{\circ} & \\ \text{(ao mesmo tempo)} & \searrow \frac{3}{5} \text{ do preço do } 3.^{\circ} \end{array}$$

logo:

$$\begin{array}{llcll} & \frac{2}{3} \text{ do } 1.^{\circ} & \Longleftrightarrow & \frac{3}{5} \text{ do } 3.^{\circ} & \\ & & & & :2 \\ \text{ou} & \frac{1}{3} \text{ do } 1.^{\circ} & \Longleftrightarrow & \frac{3}{10} \text{ do } 3.^{\circ} & \\ & & & & \times 3 \\ \text{ou} & \frac{3}{3} \text{ do } 1.^{\circ} & \Longleftrightarrow & \frac{9}{10} \text{ do } 3.^{\circ} & \\ \text{ou} & 1.^{\circ} & \Longleftrightarrow & \frac{9}{10} \text{ do } 3.^{\circ} & \end{array}$$

Então, se o 3.º (inteiro) é representado por $\frac{10}{10}$, temos:

$$\begin{array}{ccc} & 1.^{\circ} \longrightarrow \frac{9}{10} & \\ \boxed{74\ 490{,}00} \longrightarrow & 2.^{\circ} \longrightarrow \frac{3}{5} = \frac{6}{10} & \longleftarrow \boxed{\frac{9}{10} + \frac{6}{10} + \frac{10}{10} = \frac{25}{10}} \\ & 3.^{\circ} \longrightarrow \frac{10}{10} & \end{array}$$

Portanto: se $\frac{25}{10} \longrightarrow 74\ 490{,}00$, então:

$$\begin{array}{lll} \frac{6}{10} \longrightarrow 17\ 877{,}60 & \text{(preço do } 1.^{\circ}) & \\ \frac{9}{10} \longrightarrow 26\ 816{,}40 & \text{(preço do } 2.^{\circ}) \longrightarrow & \boxed{\text{Cr\$ } 74\ 490{,}00} \text{ (prova)} \\ \frac{10}{10} \longrightarrow 29\ 796{,}00 & \text{(preço do } 3.^{\circ}) & \end{array}$$

PROBLEMAS PARA SEREM RESOLVIDOS — GRUPO 46

1. Paguei por um certo objeto Cr$ 360,00. Quanto pagaria por:

   1.º) $\frac{1}{4}$ dêsse objeto ?

   2.º) $\frac{3}{4}$ dêsse objeto ?

   3.º) $\frac{2}{3}$ dêsse objeto ?

2. Se $\frac{3}{4}$ do percurso de minha casa ao Colégio equivale a 3km, qual é, em quilômetros, o percurso total ?

3. Para encher os três quintos de uma piscina são necessários 240 000 litros de água. Qual é a capacidade, em litros, dessa piscina ?

4. Você efetuou, em um dia, os $\frac{2}{5}$ de uma certa tarefa e no dia seguinte mais $\frac{1}{3}$ da mesma tarefa. Nesses dois dias você fez *mais* ou *menos* da metade de tôda tarefa ?

5. Um negociante pagou $\frac{3}{5}$ de sua dívida bancária e ficou ainda devendo ...... Cr$ 840 000,00. Quanto devia êsse negociante ?

6. Um avião percorre 1 800 km em 2 horas. Quantos quilômetros percorrerá em $3\frac{1}{4}$ horas de vôo ?

7. Para construir os $\frac{3}{7}$ de uma certa estrada, a Prefeitura de minha cidade gastou Cr$ 2 853 000,00. Quanto gastaria para construir uma estrada que fôsse os $\frac{2}{5}$ daquela ?

8. Prêmios em livros foram distribuídos aos três primeiros alunos classificados na 1.ª série Ginasial. Ao primeiro coube $\frac{1}{2}$ dos livros, ao segundo $\frac{1}{3}$ e ao terceiro, o restante, 2 livros. Quantos livros receberam os dois primeiros classificados ?

9. Se um menino gasta por dia $\frac{2}{7}$ de um lápis, quantos dias durará meia dúzia de lápis iguais ao primeiro ?

10. Quero atingir o cume de um morro. Percorri $\frac{2}{7}$ do percurso e em seguida mais $\frac{3}{5}$, faltando-me ainda 24m. Qual o percurso total em metros ?

11. Uma emprêsa transporta em dois dias 5 390 sacas de feijão de um armazém para outro. No primeiro dia transporta $\frac{3}{7}$ das sacas. Quantas deve transportar no dia seguinte ?

12. Quantas garrafas de $\frac{3}{4}$ de litro podem ser enchidas com uma partida de $55\frac{1}{2}$ litros ?

13. Um vasilhame de 32 litros de capacidade contém leite sòmente até os seus $\frac{3}{4}$. Tirando $\frac{2}{3}$ do leite contido, quantos litros restam ?

14. Um automobilista, depois de ter percorrido os $\frac{2}{3}$ de uma estrada, faz mais 12 km e assim percorre os $\frac{3}{4}$ do percurso que deve fazer. Quanto percorreu o automobilista e qual o total do percurso em quilômetros?

15. Uma estante de livros tem três prateleiras. A altura da primeira é os $\frac{3}{7}$ da altura da estante e a da segunda, os $\frac{2}{5}$. Qual é a altura da terceira prateleira sabendo-se que a da primeira é 60 cm?

16. Titio ficou $\frac{1}{3}$ de sua vida solteiro, $\frac{2}{5}$ casado e ainda viveu mais 20 anos viúvo. Com que idade faleceu?

17. Um operário gastou no empório $\frac{2}{3}$ do que possuía na carteira. A seguir, $\frac{1}{4}$ do resto na quitanda e, ainda ficou com Cr$ 2 500,00. Quanto tinha na carteira?

18. Antônio possuía 75 bolinhas. Deu ao seu colega Pedro $\frac{1}{3}$ delas; ao Luís, $\frac{2}{5}$ do resto e a João, $\frac{1}{6}$ do segundo resto. Com quantas bolinhas ficaram Antônio e seus colegas?

19. Numa corrida, $\frac{2}{9}$ dos atletas, que dela participam, desistem depois de darem a primeira volta na pista; na segunda volta desiste $\frac{1}{7}$ do que restou e terminam a corrida 18 corredores. Quantos atletas participaram da corrida, desde o início?

20. Uma vara foi fincada numa lagoa de maneira que os seus $\frac{3}{7}$ ficaram fora da água, enquanto que os seus $\frac{2}{5}$ ficaram dentro. Pede-se o comprimento da parte da vara que está fincada no fundo da lagoa, sabendo-se que a parte que ficou fora da água mede 1,35 m.

21. Na festa da uva dividiram-se 920 kg de uvas em pequenos sacos de $\frac{5}{8}$ kg cada um, que foram vendidos à razão de Cr$ 50,00 cada. Quanto foi apurado na venda da uva?

22. $\frac{8}{9}$ dos eleitores de uma certa cidade apresentaram-se às urnas por ocasião das últimas eleições. Se a população era de 91 440 pessoas, das quais a quarta parte não é eleitora, quantos são os eleitores que se abstiveram de votar?

23. Uma certa importância em dinheiro foi repartida entre três herdeiros. O primeiro recebeu os dois sétimos da importância, o segundo os três quintos e o terceiro o resto. Determinar a importância de cada herdeiro, sabendo-se que um quinto da importância que coube ao primeiro foi de Cr$ 169 000,00.

24. Respondendo a uma pergunta sôbre sua idade e a de sua espôsa, Carlos disse: os três oitavos de minha idade representam 15 anos, e a idade de minha espôsa é os três quartos da que possuo. Qual a idade de Carlos e de sua espôsa?

25. Três automóveis custaram juntos Cr$ 7 250 000,00. O preço do primeiro foi os $\frac{3}{4}$ do preço do segundo e também os $\frac{2}{5}$ do do terceiro. Qual o preço de cada automóvel?

números decimais
operações
dízimas periódicas

14. *Frações decimais como números decimais*

Você já viu que *fração decimal* é tôda fração cujo denominador é uma *potência de* 10:

$$\frac{3}{10}, \frac{25}{100}, \frac{4\,139}{1\,000}, \ldots$$

Há outra maneira de se representar *fração decimal*? Ou seja: há outros numerais para representar as frações decimais?

Sim. O fato de o denominador dessas frações ser uma *potência de* 10 (base do sistema de numeração que empregamos) facilita uma representação semelhante à usada para escrever os *números inteiros*, com a única introdução de UMA VÍRGULA!

Basta lembrar que, pelo *princípio da numeração decimal escrita*, um algarismo escrito à esquerda de outro representa unidades dez vêzes maiores que as dêsse outro. Assim, por exemplo, em 35, temos:

3 5
5 → unidades
3 → dezenas

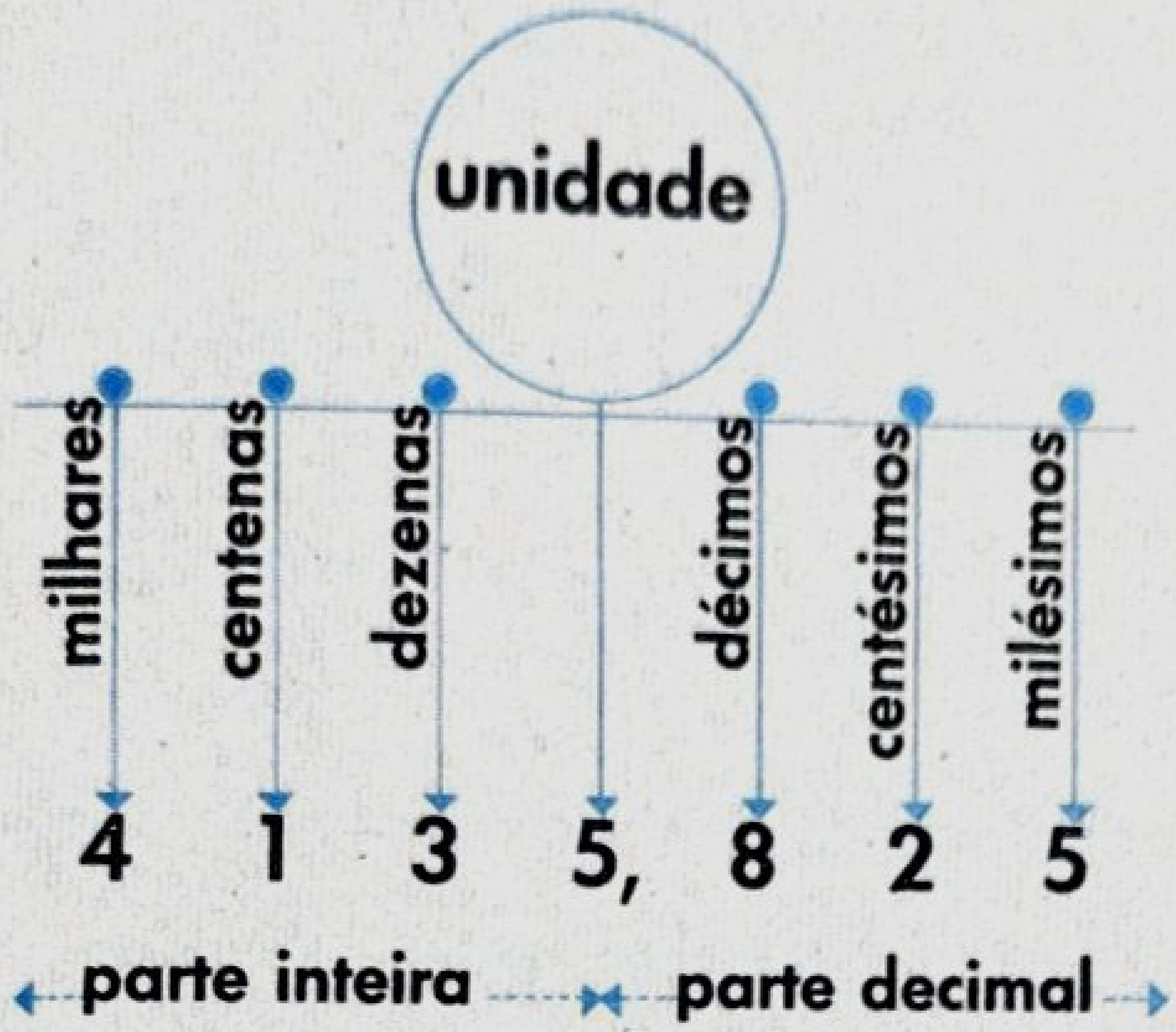
E se fôsse escrito mais um algarismo à direita do 5, por exemplo, 8? Êle estará representando *também* um valor dez vêzes menor que o representado pelo 5, e portanto, representará 8 décimos. Para fixar que o 5 representa o algarismo das unidades, escreve-se a sua direita uma vírgula (os povos da língua inglêsa usam o *ponto*). Então:

$$35{,}8$$

significa: 3 *dezenas*, 5 *unidades* e 8 *décimos* e, costuma-se ler: *"trinta e cinco inteiros e oito décimos"*.

Pode-se, ainda, *continuar* escrevendo novos algarismos à direita, que êles passarão a ter um significado *semelhante* ao dado às *centenas*, *dezenas*, ... escritas à esquerda.

Há, portanto, uma simetria em relação ao algarismo das unidades:



Logo: uma *nova maneira* (ou seja um *novo numeral!*) de se escrever a fração:

$\frac{8}{10}$ é 0,8 [o 0 indica que a fração (própria) *não contém* inteiros]

$\frac{82}{100}$ é 0,82

$\frac{5\,825}{1\,000} = 5\frac{825}{1\,000}$ é 5,825

Os numerais: 0,8, 0,82 e 5,825 são denominados números decimais.

Tais números, que você conhece desde a Escola Primária, e de uso obrigatório nos sistemas de medidas, incluindo o nosso sistema *monetário* (Ex.: Cr$ 0,50: cinqüenta centavos ou cinqüenta centésimos de cruzeiro), são escritos com uma técnica que obedece à seguinte *regra:*

Para se escrever uma fração decimal, sob forma de número decimal, escreve-se o seu numerador e separa-se com uma vírgula (a partir da direita) *tantos algarismos quantos são os zeros do denominador.*

Outros exemplos:

$\frac{3\,258}{100} = \boxed{32,58}$ lê-se: *"trinta e dois inteiros e cinqüenta e oito centésimos"*

$\frac{29}{10\,000} = \boxed{0,002\,9}$ lê-se: *"vinte e nove décimos milésimos"*

$\frac{8\,005}{1\,000} = \boxed{8,005}$ lê-se: *"oito inteiros e cinco milésimos"*

Por sua vez, *um número decimal é igual à fração que se obtém, escrevendo para numerador o número sem vírgula e dando para denominador a unidade, seguida de tantos zeros quantos são os algarismos decimais.* Exemplos:

$$\boxed{1{,}9} = \frac{19}{10} \quad \text{(fração irredutível)}$$

$$\boxed{0{,}25} = \frac{25}{100} = \frac{1}{4} \qquad \boxed{0{,}000\,1} = \frac{1}{10\,000}$$

LEMBRETE AMIGO

Os números decimais não constituem uma nova categoria de números; êles são as *frações decimais escritas de* outra maneira.

Portanto: $\boxed{\frac{25}{100}}$; $\boxed{0{,}25}$; $\boxed{\frac{1}{4}}$

são numerais diferentes do MESMO NÚMERO FRACIONÁRIO!!

15. *Propriedade características dos números decimais. Aplicações*

O número decimal não troca de valor quando se acrescentam ou se suprimem zeros à direita do seu último algarismo.

De fato: seja, por exemplo, a fração decimal $\frac{23}{100}$, que possui *valor igual* à fração $\frac{23 \times 10}{100 \times 10} = \frac{230}{1\,000}$ (pois pertencem a mesma *classe de equivalência*). Essas frações decimais, de igual valor, sob forma de *número decimal*, permitem escrever:

$$\boxed{0{,}23 = 0{,}230}$$

Aplicações:

1. Um *número inteiro* pode ser sempre *escrito* sob forma de *número decimal*. Exemplo:

$$5 = 5{,}0 = 5{,}00 = 5{,}000 \ldots$$

pois, correspondem às *frações equivalentes*:

$$\frac{5}{1} = \frac{50}{10} = \frac{500}{100} = \frac{5\,000}{1\,000} = \ldots$$

2. Dois ou mais números inteiros ou decimais podem ser sempre escritos de modo que todos tenham o *mesmo número de decimais*. Exemplos:

   7,43; 0,2; 56 podem ser escritos:
   7,430; 0,200; 56,000

   Dessa forma, a redução de frações decimais a um mesmo denominador é imediata, desde que essas frações sejam escritas sob forma de números decimais.

16. *Comparação de dois números decimais*

É feita *comparando*, a partir da esquerda, os algarismos que representam unidades decimais de *mesma ordem*. Exemplos:

$8{,}32 > 5{,}9$	pois $8 > 5$
$4{,}528 > 4{,}52$	pois o algarismo 8 (dos milésimos) do primeiro número é *maior* que o algarismo 0 (não escrito) dos milésimos do segundo número.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 47

1. Escrever, sob forma de *números decimais*, as seguintes frações decimais:

   $$\frac{541}{1\,000}; \quad \frac{832}{10}; \quad \frac{23}{100\,000}; \quad \frac{1\,279}{100}$$

2. Idem, para as frações decimais:

   $$\frac{50}{100}; \quad \frac{250}{10}; \quad \frac{78\,500}{1\,000}; \quad \frac{10}{10}$$

3. Escrever, sob forma de *fração decimal*, os seguintes números decimais:

   5,6 ; 0,001 ; 0,0008 ; 0,3245

4. Idem, para os números decimais:

   0,10 ; 1,010 ; 53,400 ; 2,9030

5. Multiplicar os dois têrmos das seguintes frações:

   $$\frac{2}{5}; \quad \frac{3}{2}; \quad \frac{1}{4}; \quad \frac{6}{25}$$

   por um mesmo número inteiro, a fim de achar as frações decimais *equivalentes* e, a seguir, escrevê-las sob forma de *números decimais*.

6. Para as seguintes frações, dizer se existem frações decimais *equivalentes:*

$$\frac{1}{6}; \quad \frac{1}{5}; \quad \frac{1}{4}; \quad \frac{4}{7}; \quad \frac{9}{12}$$

7. Escrever, sob forma de fração decimal, e simplificar (quando possível) os seguintes números decimais:

$$0,5 \,; \quad 0,4 \,; \quad 1,25 \,; \quad 0,0015$$

8. Escrever, em ordem de *valor crescente,* os seguintes números decimais:

$$2,718 \,; \quad 2,7182 \,; \quad 2,708$$

9. Escrever, em ordem de *valor decrescente,* os seguintes números decimais:

$$0,30 \,; \quad 0,039 \,; \quad 0,0391$$

10. Assinalar quais, dos seguintes numerais, representam o *mesmo número:*

$$5,0 \,; \quad 0,5 \,; \quad 2\times 3 \,; \quad 5\times 1$$

$$\frac{1}{2}; \quad 25:5 \,; \quad 6:1 \,; \quad \frac{50}{100}$$

$$4:8 \,; \quad \frac{60}{10}; \quad \frac{10}{2}; \quad 6,00$$

Operações com os números decimais

↗ **Adição e Subtração**

↘ **Multiplicação e Divisão**

17. *Adição*

Reduz-se, primeiramente, os números decimais a unidades de *mesma ordem* (que é sempre possível pela Propriedade Característica) e procede-se como na adição de números inteiros. Como *técnica de cálculo* escrevem-se os números decimais uns sob os outros, de modo que as vírgulas se correspondam; somam-se, a seguir, os números como se *fôssem inteiros,* colocando-se a vírgula na *soma* em correspondência com as das parcelas. Exemplo:

Efetuar: $13,81 + 0,052 + 2,9$

Temos:

$$\begin{array}{r} 13,81 \\ 0,052 \\ 2,9 \\ \hline 16,762 \end{array} \qquad \text{ou} \qquad \begin{array}{r} 13,810 \\ 0,052 \\ 2,900 \\ \hline 16,762 \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{r} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array}}\right\} +$$

Valem as mesmas *propriedades estruturais* conhecidas para os números fracionários:

1. Fechamento: $\underset{\substack{\text{n.º} \\ \text{decimal}}}{3,2} + \underset{\substack{\text{n.º} \\ \text{decimal}}}{0,58} = \underset{\substack{\text{n.º} \\ \text{decimal}}}{3,78}$

2. Comutativa: $3{,}2 + 0{,}58 = 0{,}58 + 3{,}2$
3. Associativa: $(3{,}2 + 1{,}8) + 0{,}1 = 3{,}2 + (1{,}8 + 0{,}1)$
4. Elemento neutro: 0, pois: $4{,}03 + 0 = 4{,}03$

18. *Subtração*

Procede-se de forma semelhante à de adição. Exemplo:

Efetuar: $5{,}08 - 3{,}4852$

Temos:

$$\begin{array}{r} 5{,}0800 \\ \underline{3{,}4852} \\ 2{,}5948 \end{array} \Big\} -$$

Nota: As *provas*, tanto para a adição como para a subtração, são as mesmas estudadas com os números inteiros.

19. *Multiplicação*

A *técnica operatória* para se obter o *produto* será enunciada após a aplicação num exemplo. Seja multiplicar: 5,32 por 3,8.

Como: $5{,}32 = \dfrac{532}{100}$ e $3{,}8 = \dfrac{38}{10}$

temos:

$$5{,}32 \times 3{,}8 = \frac{532}{100} \times \frac{38}{10} = \frac{20216}{1000} = 20{,}216$$

isto é:

Multiplicam-se os dois números decimais como se fôssem inteiros e separam-se no resultado, a partir da direita, tantas casas decimais quantos forem os algarismos dos números dados.

Valem as *propriedades estruturais:*

1. Fechamento: $5{,}32 \times 3{,}8 = 20{,}216$

$$\begin{array}{ccc} 5{,}32 & 3{,}8 & 20{,}216 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \text{n.º decimal} & \text{n.º decimal} & \text{n.º decimal} \end{array}$$

2. Comutativa: $5{,}32 \times 3{,}8 = 3{,}8 \times 5{,}32$
3. Elemento neutro: 1, pois: $0{,}53 \times 1 = 0{,}53$
4. Associativa: $(5{,}32 \times 0{,}1) \times 3{,}8 = 5{,}32 \times (0{,}1 \times 3{,}8)$

5. Distributiva em relação à adição e à subtração:

$$3{,}2 \times (0{,}04 + 2{,}5) = 3{,}2 \times 0{,}04 + 3{,}2 \times 2{,}5$$
$$0{,}2 \times (8{,}01 - 2{,}581) = 0{,}2 \times 8{,}01 - 0{,}2 \times 2{,}581$$

Observação: O elemento inverso, que existe sempre para uma fração ordinária, nem sempre existe para um número decimal. Exemplo:

$0{,}3 = \frac{3}{10}$ tem por fração *inversa* $\frac{10}{3}$ que não é número decimal.

Caso particular: Para multiplicar um número decimal por uma *potência de* 10, 100, 1000, ... desloca-se a vírgula para *a direita* uma, duas, três, ... casas. Exemplos:

1.º) $4{,}532 \times 100 = \frac{4532}{1000} \times 100 = \frac{4532}{10} = 453{,}2$

2.º) $134{,}5 \times 1000 = 134500$

3.º) $0{,}0027 \times 10 = 0{,}027$

20. *Divisão*

A *divisão* de dois números decimais deve ser tratada com mais cuidado, pois, ao contrário do que aconteceu com a adição, subtração e multiplicação, o *quociente* de dois números decimais *pode não ser* um número decimal. Exemplos:

1. Efetuar: $4{,}12 : 8{,}273$

Considerando as frações decimais correspondentes, temos:

$$\frac{412}{100} : \frac{8273}{1000} = \frac{412}{100} \times \frac{1000}{8273} = \frac{4120}{8273}$$

onde $\boxed{\frac{4120}{8273}}$ *não é uma fração decimal.*

2. Efetuar: $0{,}92 : 2{,}3$

Temos: $\frac{92}{100} : \frac{23}{10} = \frac{92}{100} \times \frac{10}{23} = \boxed{0{,}4}$

e, agora, o quociente *é um número decimal.*

De qualquer maneira a *divisão de dois números decimais* reduz-se, sempre, à *divisão de dois números inteiros*. A obtenção dêsse quociente, sob forma de *número decimal* é, na maioria das vêzes, apresentado como valor aproximado (quociente aproximado) cometendo-se, então, um êrro que pode ser controlado, conforme a aproximação desejada.

Antes dêsse estudo, destaquemos o seguinte *caso particular:*

Para dividir um número decimal por uma potência de 10, 100, 1000, ... desloca-se a vírgula para *a esquerda* uma, duas, três, ... casas.

Exemplos:

1.º) $3{,}28 : 1\,000 = \dfrac{328}{100} : 1\,000 = \dfrac{328}{100} \times \dfrac{1}{1\,000} = \dfrac{328}{1\,00000} = 0{,}00328$

2.º) $196{,}3 : 100 = 1{,}963$

21. *Quociente aproximado*

Seja, por exemplo, a *divisão* de 73 por 14, onde:

$$\left.\begin{array}{ll} 73 \;\; \underline{|14} & \text{(é pouco} \rightarrow \text{quociente } \textit{por falta} \\ \;\;3 \quad\;\; 5 & \\ & \\ 73 \;\; \underline{|14} & \text{(é muito} \rightarrow \text{quociente } \textit{por excesso} \\ \qquad\;\; 6 & \end{array}\right\} \textit{quocientes aproximados}$$

Quer se tome o quociente *por falta* (5), ou *por excesso* (6), comete-se um êrro *menor que uma unidade*, pois o quociente verdadeiro está entre 5 e 6. Logo:

$$\boxed{5 < \frac{73}{14} < 6}$$

Seja, agora, a divisão de 730 por 14. Obteremos:

$$52 < \frac{730}{14} < 53$$

como quociente aproximado, respectivamente, *por falta* e *por excesso*, a *menos de uma unidade*. Dividindo todos os números por 10, vem:

$$\frac{52}{10} < \frac{730}{14 \times 10} < \frac{53}{10}$$

ou

$$\boxed{5{,}2 < \frac{73}{14} < 5{,}3}$$

onde 5,2 e 5,3 são, neste instante, os quocientes aproximados, respectivamente, *por falta* e *por excesso*, a *menos de* 0,1 (isto é, o êrro cometido é menor que um décimo).

Vale, pois, a seguinte *técnica de cálculo* que dá a *regra* para se obter o quociente aproximado de dois números inteiros, sob a forma de *número decimal:*

> **Obtém-se o quociente aproximado, por falta, a menos de 0,1; 0,01; 0,001; . . . de dois números inteiros, acrescentando-se ao dividendo um, dois, três, . . . zeros e efetuando-se a divisão como é conhecida. No quociente obtido separa-se com uma vírgula, respectivamente, uma, duas, três, . . . casas decimais.**

Exemplos de *quocientes aproximados:*

1.º)

$$\begin{array}{r|l} 73 & 14 \\ \cline{2-2} 03 & 5 \end{array}$$

a menos de *uma unidade*

$$\begin{array}{r|l} 73{,}0 & 14 \\ \cline{2-2} 30 & 5{,}2 \\ 2 & \end{array}$$

a menos de *um décimo* (0,1)

$$\begin{array}{r|l} 73{,}00 & 14 \\ \cline{2-2} 30 & 5{,}25 \\ 20 & \\ 0 & \end{array}$$

quociente *exato* na casa dos centésimos.

2.º)

$$\begin{array}{r|l} 3 & 7 \\ \cline{2-2} & 0\ (*) \end{array}$$

a menos de *uma unidade*

$$\begin{array}{r|l} 3{,}0 & 7 \\ \cline{2-2} 2 & 0{,}4 \end{array}$$

a menos de 0,1

$$\begin{array}{r|l} 3{,}00 & 7 \\ \cline{2-2} 20 & 0{,}42 \\ 6 & \end{array}$$

a menos de 0,01

$$\begin{array}{r|l} 3{,}000 & 7 \\ \cline{2-2} 20 & 0{,}428 \\ 60 & \\ 4 & \end{array}$$

a menos de 0,001

3.º) Calcular o *quociente aproximado*, por falta, a menos de 0,01, de 43 por 15.

Temos:

$$\begin{array}{r|l} 43{,}00 & 15 \\ \cline{2-2} 130 & 2{,}86 \\ 100 & \\ 10 & \end{array}$$

No caso da divisão de *dois números decimais*, reduzem-se, primeiramente, o dividendo e o divisor *ao mesmo número de casas decimais* e procede-se como na divisão de dois números inteiros. Exemplos:

(*) No caso do dividendo ser *menor* que o divisor o primeiro algarismo do quociente é 0.

1.º) Calcular o *quociente aproximado*, por falta, a menos de 0,1 ou $\left(\frac{1}{10}\right)$, de 4,3 por 8,25.

Temos as seguintes *passagens:*

$$4{,}3 \;\underline{|\,8{,}25} \qquad 4{,}30 \;\underline{|\,8{,}25} \qquad 430 \;\underline{|\,825}$$

e, portanto: $\begin{array}{r|l} 430{,}0 & \underline{825} \\ 175 & 0{,}5 \end{array}$, isto é, o *quociente aproximado* procurado é $\boxed{0{,}5}$

2.º) Calcular o *quociente aproximado*, por falta, a *menos de* 0,01, de 52,18 por 0,859.

Temos: $52{,}18 \;\underline{|\,0{,}859} \qquad 52{,}180 \;\underline{|\,0{,}859} \qquad \begin{array}{r|l} 5218000 & \underline{859} \\ 6400 & \underline{60{,}74} \leftarrow \\ 3870 & \\ 434 & \end{array}$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — Grupo 48

1. Efetuar as seguintes operações:

   1.ª) $12{,}1 + 0{,}0039 + 1{,}98 + 6$
   2.ª) $(1 - 0{,}7321) + (4{,}82 + 0{,}18)$
   3.ª) $(13{,}01 + 0{,}01 \times 100) - (2{,}3 \times 5{,}261 - 4 \times 1{,}001)$

2. Tornar *verdadeiras* as seguintes sentenças:

   1.ª) $5{,}32 \times 0{,}01 = 0{,}01 \times \ldots$
   2.ª) $3{,}029 \times \ldots = 3{,}029$
   3.ª) $3{,}029 + \ldots = 3{,}029$
   4.ª) $2{,}1 \times (0{,}3 + 0{,}7) = 2{,}1 \times 0{,}3 + 2{,}1 \times \ldots$

3. Calcular o valor das seguintes expressões:

   1.ª) $\left(3{,}069 + \frac{32}{1\,000}\right) - \left(3\,\frac{1}{10} + 0{,}001\right)$

   2.ª) $1{,}2 \times 0{,}021 \times 4 + \frac{41}{100} \times 3{,}01$

4. Tornar *verdadeiras* as seguintes sentenças:

   1.ª) $3{,}461 \times 10 = \ldots$
   2.ª) $3{,}461 : 10 = \ldots$
   3.ª) $482{,}1 \times 100 = \ldots$
   4.ª) $482{,}1 : 100 = \ldots$
   5.ª) $84{,}5 \times 0{,}01 = \ldots$
   6.ª) $84{,}5 : 0{,}01 = \ldots$

5. Dar os *quocientes aproximados*, por falta, a menos de uma unidade, um décimo, um centésimo, das seguintes divisões:

1.ª) 62 : 13	2.ª) 5 : 8	3.ª) 2,9 : 3,7
4.ª) 72,6 : 0,21	5.ª) 0,048 : 1,2	6.ª) 0,396 : 29

6. Calcular os seguintes *quocientes aproximados*, por falta:

1.º) 56 por 17 a menos de 0,01
2.º) 3,9 por 2,5 a menos de 0,1
3.º) 5 por 7 a menos de 0,001
4.º) 42,7 por 0,315 a menos de 0,01
5.º) 0,0321 por 1,27 a menos de 0,001

7. Multiplicar um número por 0,01 significa também dividi-lo por . . .

8. Dividir um número por 100 significa também multiplicá-lo por . . .

9. O produto de 2 por 0,3 é equivalente ao produto de 0,2 por . . .

10. O quociente de dois números decimais é sempre um número decimal. É verdadeira ou falsa essa sentença?

Conversões - Dízimas Periódicas

22. *Conversão de fração ordinária em números decimais e viceversa. Dízimas periódicas*

Já vimos que *tôda* fração decimal pode ser escrita como *número decimal* (ex.: $\frac{75}{100} = 0{,}75$).

Existem também *algumas* frações ordinárias que podem ser *transformadas* em *números decimais:* basta que tenham como equivalentes frações decimais. É o que acontece, por exemplo, com a fração ordinária $\frac{3}{4}$, onde:

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \times 25}{4 \times 25} = \frac{75}{100} = 0{,}75$$

Já o mesmo não ocorre, por exemplo, com a fração ordinária $\frac{3}{7}$, que *não admite* uma fração decimal equivalente. Daí a expressão: *conversão de uma fração ordinária em número decimal,* só ter sentido em *alguns casos.*

Pràticamente, a procura da fração decimal equivalente a uma fração ordinária dada, é feita dividindo-se o numerador dessa fração pelo seu denominador. Podem acontecer *dois casos:*

1.º) a divisão é *exata:* nesse caso diz-se que a fração ordinária *converteu-se* numa decimal exata (mesmo que *número decimal*), pelo fato de o quociente dessa divisão admitir, na sua representação, um número finito de casas decimais;

2.º) a divisão *não é exata:* nesse caso existirão restos *não-nulos* que se repetirão *periòdicamente*; o quociente, por sua vez, prolongar-se-á *indefinidamente* e diz-se que a fração ordinária converteu-se numa decimal periódica ou dízima periódica. Exemplos:

Efetuar a *conversão* das seguintes *frações ordinárias:*

$$\frac{3}{25}, \quad \frac{47}{20} \quad \frac{8}{11}, \quad \frac{308}{90}$$

Fazendo as respectivas divisões, temos:

$$\frac{3}{25} = 0,12 \longrightarrow \text{decimal exata} \qquad \begin{array}{l|l} 30 & 25 \\ \cline{2-2} 50 & 0,12 \\ 0 & \end{array}$$

$$\frac{47}{20} = 2,35 \longrightarrow \text{decimal exata} \qquad \begin{array}{l|l} 47 & 20 \\ \cline{2-2} 70 & 2,35 \\ 100 & \\ 0 & \end{array}$$

$$\frac{8}{11} = 0,727272\ldots \longrightarrow \text{dízima periódica} \qquad \begin{array}{l|l} 80 & 11 \\ \cline{2-2} 30 & 0,7272\ldots \\ \;80 & \\ \;\;30 & \\ \;\;\;80 & \\ \;\;\;\;\vdots & \end{array}$$

$$\frac{308}{90} = 3,4222\ldots \longrightarrow \text{dízima periódica} \qquad \begin{array}{l|l} 308 & 90 \\ \cline{2-2} 380 & 3,4222\ldots \\ \;200 & \\ \;\;200 & \\ \;\;\;200 & \\ \;\;\;\;\vdots & \end{array}$$

23. *Condição para que uma fração ordinária se converta numa decimal exata*

Como numa fração decimal o denominador é *uma potência de 10*, segue-se que tôda fração ordinária cujo denominador possa ser *transformado* numa potência de 10 resultará, na conversão, uma decimal exata (número decimal!). Sendo 2 e 5, com determinados expoentes, os únicos fatôres das potências de 10, vale a seguinte *técnica de cálculo* que permite saber o resultado da conversão, sem efetuar a divisão!

> **Fatora-se completamente o denominador da fração ordinária (irredutível); se êle contiver sòmente os fatôres 2 e 5, a fração converter-se-á numa decimal exata; o número de casas decimais é igual ao maior dos expoentes de 2 ou 5.**

Exemplos:

1.º) *Converter* a fração: $\dfrac{27}{120}$

Primeiramente, tornamo-la irredutível: $\dfrac{27}{120} = \dfrac{9}{40}$ e como o denominador $40 = 2^3 \times 5$ só contém os fatôres 2 e 5, segue-se que a fração $\dfrac{9}{40}$ converter-se-á numa *decimal exata* com três casas decimais (que é o expoente de 2). Logo:

$$\frac{27}{120} \longrightarrow \text{decimal exata (com três casas decimais)}$$

Verifique você êste resultado *efetuando* a divisão!

2.º) *Converter* a fração: $\dfrac{13}{4}$

Temos: $4 = 2^2$ e portanto: $\dfrac{13}{4} \longrightarrow$ decimal exata (com duas casas)

Nota: O fato de aparecer no denominador sòmente o fator 2 (ou 5) ainda satisfaz a técnica empregada, pois a ausência de um dos fatôres significa que no produto êsse fator figura com o expoente *zero* que, como sabemos, vale 1. No exemplo, temos: $4 = 2^2 \times 5^0$.

3.º) *Converter* a fração: $\dfrac{1}{100}$

Temos: $100 = 2^2 \times 5^2$ e, portanto: $\dfrac{1}{100} \longrightarrow$ decimal exata (com duas casas).

24. *Condição para que uma fração ordinária se converta numa dízima periódica*

Seja a fração $\frac{8}{11}$. Dividindo-se 8 por 11, os restos que se vão obtendo (nunca são *nulos*) devem ser menores que 11, e portanto, depois de um certo número de vêzes êles se *repetirão*, provocando no quociente os mesmos algarismos sempre na mesma ordem. Assim:

$$\begin{array}{l|l}
80 & \underline{11\qquad\qquad} \\
\ \ 30 & 0{,}727272\ldots \\
\ \ \ \ 80 & \\
\ \ \ \ \ \ 30 & \\
\ \ \ \ \ \ \ \ 80 & \\
\quad\ \ \ \ \ \ \ \ \cdot & \\
\quad\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \cdot & \\
\quad\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \cdot &
\end{array}$$

Dêsse modo, o quociente é um número cuja representação decimal apresenta um grupo de algarismos — chamado período — que se repete *indefinidamente*. Tal quociente é a dízima periódica ou decimal periódica.

Se o *período* vier logo *depois da vírgula*, a dízima periódica diz-se simples e no caso de existir entre a vírgula e o período *uma parte decimal*, a dízima periódica diz-se composta. Tal parte decimal é, geralmente, denominada *não-periódica*. Exemplos:

1.º) 0,727272... que também se representa por $0{,}\overline{72}$, é uma dízima periódica simples, *de período* 72; (*)

2.º) 8,513513513... ou $8{,}\overline{513}$ é uma dízima periódica simples de *período* 513;

3.º) 0,82646464... ou $0{,}82\overline{64}$ é uma dízima periódica composta de *período* 64 e cuja parte *não-periódica* é 82;

4.º) 67,0333... ou $67{,}0\dot{3}$ é uma dízima periódica composta de *período* 3 e *parte não-periódica* 0.

Também, agora, é possível prever-se a *espécie* da dízima periódica, quando se converte uma fração ordinária, *sem efetuar a divisão*. A *técnica de cálculo* é a seguinte:

Fatora-se completamente o denominador da fração ordinária (irredutível); se êle não contiver os fatôres 2 e 5 a fração converter-se-á numa dízima periódica simples; caso contenha um dêsses fatôres e outros, a dízima periódica será composta.

(*) Costuma-se usar também a notação: 0, [72] para representar a dízima periódica 0,727272...

Exemplos:

1.º) Converter a fração: $\frac{4}{11}$

Como o denominador não contém os fatôres 2 e 5, esta fração converter-se-á numa dízima periódica simples. Logo:

$\frac{4}{11} \longrightarrow$ dízima periódica simples. (Verifique efetuando a divisão!)

2.º) Converter a fração: $\frac{21}{45}$

Simplificando, temos: $\frac{21}{45} = \frac{7}{15}$

Como o denominador $15 = 3 \times 5$, além do fator 5, contém o fator 3, a fração converter-se-á numa dízima periódica composta. Logo:

$\frac{21}{45} \longrightarrow$ dízima periódica composta

3.º) Converter a fração: $\frac{191}{60}$

Como $60 = 2^2 \times 3 \times 5$, além dos fatôres 2 e 5, contém o fator 3, então:

$\frac{191}{60} \longrightarrow$ dízima periódica composta

Geratrizes

25. *Conversão das dízimas periódicas em frações ordinárias*

Conhecendo-se uma dízima periódica (simples ou composta), pode-se determinar a fração ordinária que a gerou. Tal fração ordinária chama-se GERATRIZ.

Observando que:

$$\frac{1}{9} = 0,111\ldots$$

$$\frac{1}{99} = 0{,}010101\ldots$$

$$\frac{1}{999} = 0{,}001001001\ldots$$

$$\vdots$$

segue-se que a *geratriz* de uma dízima periódica *simples*, de período igual a uma unidade decimal (0,1; 0,01; 0,001; ...), é *uma fração cujo numerador é* 1 *e o denominador é formado de tantos noves quantos forem os algarismos do período.*

Para uma dízima periódica simples qualquer, como por exemplo:

$$0{,}525252\ldots\ldots\ldots\ldots$$

pode-se sempre escrevê-la sob a forma:

$$0{,}525252\ldots = 52 \times 0{,}010101\ldots =$$

e, portanto:

$$= 52 \times \frac{1}{99} =$$

$$= \frac{52}{99}$$

isto é,

A geratriz de uma dízima periódica simples (de parte inteira nula) é uma fração que tem para numerador o período e para denominador um número formado por tantos noves quantos forem os algarismos do período.

NOTA: Se a parte inteira da dízima periódica não é nula, *soma-se* a parte inteira com a geratriz da dízima. Exemplo:

Calcular a geratriz da dízima periódica: 3,444 ...

Temos:

$$3{,}444\ldots = 3 + 0{,}444\ldots =$$

$$= 3 + \frac{4}{9} =$$

$$= 3\,\frac{4}{9}$$

Estudemos agora a *técnica de cálculo* que permite determinar a *geratriz* de uma dízima periódica *composta*.

Seja a dízima periódica composta: 0,3484848...

Como:

$$0{,}3484848\ldots = \frac{3{,}484848\ldots}{10} = \frac{3 + 0{,}484848\ldots}{10} = \frac{3 + \frac{48}{99}}{10} =$$

$$= \frac{\frac{3 \times 99 + 48}{99}}{10} = \frac{3 \times 99 + 48}{990} = \frac{3 \times (100 - 1) + 48}{990} =$$

$$= \frac{300 - 3 + 48}{990} = \frac{348 - 3}{990}$$

vale a seguinte *técnica de cálculo:*

A geratriz de uma dízima periódica composta (de parte inteira nula) é uma fração que tem para numerador a diferença entre o número formado pela parte não-periódica, acompanhada de um período e a parte não-periódica; e, para denominador, um número formado de tantos noves quantos forem os algarismos do período, seguidos de tantos zeros quantos forem os algarismos da parte não-periódica.

Nota: Se existir a parte inteira, procede-se como no caso anterior. Exemplo: Calcular a geratriz da dízima periódica: 5,27333...

Temos:

$$5{,}27333\ldots = 5 + 0{,}27333\ldots =$$

$$= 5 + \frac{273 - 27}{900} = 5\,\frac{246}{900}$$

Observação: As dízimas periódicas de período 9, como por exemplo:

0,999... denominada *pura*

e 7,34999... denominada *mista*

não têm geratrizes no sentido até agora estudado, por isso serão evitadas neste curso.

26. *Expressões envolvendo dízimas periódicas*

Como as dízimas periódicas não são *valôres exatos*, tôda vêz que elas figurarem em expressões, serão substituídas pelas respectivas *geratrizes*. Exemplos:

1.º) Efetuar: $0,\overline{42} + 3,2\dot{1}$

Tomando as respectivas *geratrizes*, vem:

$$0,\overline{42} + 3,2\dot{1} = \frac{42}{99} + 3\,\frac{21-2}{90} = \frac{42}{99} + \frac{289}{90} = \frac{3599}{990} = 3\,\frac{629}{990}$$

2.º) Efetuar: $5,\overline{34} : 0,\dot{8}$

Temos: $$5,\overline{34} : 0,\dot{8} = 5\,\frac{34}{99} : \frac{8}{9} = \frac{529}{99} \times \frac{9}{8} = \frac{4761}{792} = 6\,\frac{1}{88}$$

3.º) Efetuar: $1,21 + 0,\dot{3} \times \dfrac{1}{0,\dot{1}}$.

Temos: $$1,21 + 0,\dot{3} \times \frac{1}{0,\dot{1}} = 1,21 + \frac{3}{9} \times \frac{1}{\frac{1}{9}} = 1,21 + \frac{1}{\cancel{3}} \times \overset{3}{\cancel{9}} =$$

$$= 1,21 + 3 = 4,21$$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 49

1. *Converter* as seguintes frações ordinárias em decimal exata ou dízima periódica:

1.ª) $\frac{3}{4}$ 2.ª) $\frac{8}{3}$ 3.ª) $\frac{5}{11}$ 4.ª) $\frac{11}{200}$ 5.ª) $\frac{27}{75}$

6.ª) $\frac{50}{99}$ 7.ª) $\frac{13}{125}$ 8.ª) $\frac{1}{50}$ 9.ª) $\frac{7}{6}$ 10.ª) $\frac{18}{74}$

2. Indicar, sem efetuar a divisão, qual o resultado que se obtém ao se *converter* as seguintes frações ordinárias:

1.ª) $\frac{10}{24}$ 2.ª) $\frac{7}{15}$ 3.ª) $\frac{36}{48}$ 4.ª) $\frac{9}{64}$ 5.ª) $\frac{4}{50}$ 6.ª) $\frac{3}{11}$

3. Calcular as *geratrizes* das seguintes dízimas periódicas:

1.ª) $0,\dot{7}$ 2.ª) $3,\overline{45}$ 3.ª) $0,85\overline{34}$ 4.ª) $2,0\dot{3}$ 5.ª) $5,143\overline{21}$

6.ª) $0,00\overline{16}$ 7.ª) $22,3\overline{001}$ 8.ª) $0,01001\overline{002}$ 9.ª) $1,20\dot{2}$ 10.ª) $0,0\overline{415}$

4. É dízima periódica a expressão: 0,01001000100001 . . . ?

5. É verdadeira ou falsa a sentença: "Tôda fração ordinária é equivalente a uma fração decimal"?

6. Efetuar a multiplicação: (0,444 . . .) × (2,555 . . .)

7. Efetuar a divisão: (0,323232 . . .) : (0,232323 . . .)

8. Calcular o valor da expressão: $0,\overline{31} + 0,0\dot{1}$.

9. Idem da expressão: $0,\overline{345} + 3,\dot{2} \times \dfrac{4}{0,3\dot{1}}$

10. Idem: $\left[(0,\overline{30} - 0,\overline{16}) : 0,\dot{7} + 1,\dot{4} \times \dfrac{9}{13}\right] : \dfrac{13}{11}$

Potenciação e Radiciação de Números Decimais

27. *Potenciação*

O cálculo da *potência* (resultado da operação potenciação) de um número decimal, pode ser efetuado transformando-o na *fração decimal correspondente*. Exemplos:

$(0,9)^3 = \left(\dfrac{9}{10}\right)^3 = \dfrac{729}{1000} = \boxed{0,729}$ que equivale a $(0,9)^3 = 0,9 \times 0,9 \times 0,9 = 0,729$

$(3,01)^2 = \left(\dfrac{301}{100}\right)^2 = \dfrac{90601}{10000} = \boxed{9,0601}$ que equivale a $(3,01)^2 = 3,01 \times 3,01 = 9,0601$

Observações:

1.ª) Pode-se, também, calcular a potência de um número decimal não se levando em conta a vírgula (isto é, como se fôsse inteiro) e depois, separar do resultado um número de casas decimais igual ao produto do número que indica as casas decimais do número dado pelo expoente da potência. Exemplo:

$$(3,01)^2 \qquad (301)^2 = 90\,601 \qquad 9,0601$$

2.ª) O cálculo da potência de uma dízima periódica é feito por intermédio da respectiva *geratriz*. Exemplo:

$$(0,777\ldots)^2 = \left(\frac{7}{9}\right)^2 = \boxed{\frac{49}{81}}$$

28. *Radiciação. Raiz quadrada aproximada.*

Conhecida a *potência* de um número decimal o cálculo de sua raiz (quadrada, cúbica, ...) é feito da mesma maneira como foi estudado para os números fracionários. Exemplos:

1.º) de $(0,9)^3 = 0,729$ temos $\sqrt[3]{0,729} = 0,9$

ou também:

$$\sqrt[3]{0,729} = 0,9 \qquad (0,9)^3 = 0,729$$

2.º) de $(0,3)^2 = 0,09$ temos $\sqrt{0,09} = 0,3$

ou também:

$$\sqrt{0,09} = 0,3 \qquad (0,3)^2 = 0,09$$

Se o número decimal dado *não é uma potência*, o cálculo de sua raiz é feito sòmente com certa aproximação.

Dada a aplicação que tem, estudaremos sòmente o caso da *extração da raiz quadrada* com determinadas *aproximações:* décimos (0,1); centésimos (0,01); milésimos (0,001), ...

Êsse estudo reduz-se ao cálculo da raiz quadrada de *números inteiros*, com *aproximação por falta, a menos de uma unidade*, a partir da seguinte *Regra:*

Extrai-se a raiz quadrada aproximada, por falta a menos de 0,1; 0,01; 0,001; ... de um número inteiro, extraindo-se a sua raiz quadrada aproximada por falta, a menos de uma unidade e colocando-se, a seguir, à direita da raiz uma vírgula. Acrescentando-se dois zeros à direita do número inteiro dado, a continuação da extração da raiz permitir-nos-á encontrar o algarismo dos décimos da raiz procurada; acrescentando-se quatro zeros, a operação permitirá encontrar o algarismo dos centésimos da raiz quadrada e, assim por diante, até a ordem da aproximação desejada.

A representação, por exemplo, da *raiz quadrada aproximada de* 8 nas diversas aproximações decimais é:

$\sqrt{8} \sim 2$ (por falta a menos de uma unidade)

$\overset{0,1}{\sqrt{8,00}} \sim 2,8$ [por falta a menos de um décimo (0,1)]

$\overset{0,01}{\sqrt{8,0000}} \sim 2,82$ [por falta a menos de um centésimo (0,01)]

Exemplo:

Extrair a *raiz quadrada aproximada*, por falta, a menos de 0,01, do número 2.

Como a aproximação é de centésimos (0,01) deve-se acrescentar quatro zeros à direita do 2; logo:

$$
\begin{array}{l|l}
\sqrt{2{,}00\,00} & \underline{\;1{,}41\;} \\
\underline{\;1\;} & 24 \times 4 = 96 \\
10.0 & 281 \times 1 = 281 \\
\underline{\;96\;} & \\
\;\;40.0 & \\
\;\;\underline{28\;1} & \\
\;\;11\;9 &
\end{array}
$$

Portanto: $\overset{0,01}{\sqrt{2}} \sim 1,41$ (por falta, a menos de 0,01) e o *resto* é 0,0119, da mesma espécie do radicando

Prova: $(1,41)^2 = 1,41 \times 1,41 = 1,9881$; $1,9881 + 0,0119 = \boxed{2}$

Do estudo feito, segue-se que *a extração da raiz quadrada de um número decimal qualquer* obedece à seguinte *técnica de cálculo:*

1.º) faz-se o número decimal dado ter duas, quatro, seis, . . . casas decimais, conforme a aproximação desejada seja a menos de 0,1; 0,01; 0,001; . . . (você sabe que isso é sempre possível!);

2.º) extrai-se a raiz quadrada do número decimal assim preparado, como se a vírgula *não existisse;*

3.º) separa-se, com uma vírgula, no resultado obtido, respectivamente, uma, duas, três, . . . casas decimais.

Exemplo:

Extrair a raiz quadrada aproximada, por falta, a menos de 0,01, do número 0,941.

Como a aproximação é de centésimos (0,01) o número decimal deve possuir quatro casas decimais. Logo:

$$
0{,}9410 \longrightarrow
\begin{array}{r|l}
\sqrt{9410} & \underline{\;\;97\;\;} \\
\underline{81} & 187 \times 7 = 1309 \\
1310 & \\
\underline{1309} & \\
1 &
\end{array}
$$

Portanto: $\overset{0,01}{\sqrt{0{,}941}} \sim 0{,}97$ (por falta, a menos de 0,01) e o *resto* 0,0001

Prova: $(0{,}97)^2 = 0{,}9409\,;\ \ 0{,}9409 + 0{,}0001 = \boxed{0{,}941}$

NOTA: No final dêste Capítulo consta uma Tábua dos quadrados, cubos, raízes quadradas e raízes cúbicas dos números de 1 a 100.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 50

1. Calcular as seguintes potências:

   1.ª) $(0{,}3)^2$ 2.ª) $(0{,}01)^3$ 3.ª) $(1{,}2)^4$ 4.ª) $(13{,}001)^0$ 5.ª) $(0{,}01)^1$
   6.ª) $(0{,}444\ldots)^3$ 7.ª) $(3{,}2666\ldots)^2$ 8.ª) $(8{,}01333\ldots)$

2. Escrever as raízes (exatas) correspondentes às seguintes potências, como resultado da operação inversa:

   1.ª) $(0{,}2)^2 = 0{,}04 \Longleftrightarrow \sqrt{0{,}04} = 0{,}2$ (exemplo-modêlo)
   2.ª) $(3{,}10)^3 = 29{,}791$ 3.ª) $(0{,}1)^4 = 0{,}0001$ 4.ª) $(0{,}2)^5 = 0{,}00032$

3. Qual a raiz quadrada (exata) dos seguintes números decimais?

   1.ª) 0,04 2.ª) 0,01 3.ª) 0,16 4.ª) 1,44 5.ª) 4,41

4. Idem das seguintes frações decimais:

   1.ª) $\dfrac{1}{100}$ 2.ª) $\dfrac{4}{10\,000}$ 3.ª) $\dfrac{9}{100}$ 4.ª) $\dfrac{49}{10\,000}$

5. Extrair a raiz quadrada aproximada, por falta, a menos de 0,1 dos seguintes *números inteiros:*

   1.º) 3 2.º) 5 3.º) 8 4.º) 12 5.º) 17 6.º) 82

6. Idem, a menos de 0,01

7. Idem, a menos de 0,001

8. Extrair a raiz quadrada aproximada, por falta, a menos de 0,1 dos seguintes *números decimais:*

   1.º) 4,3 2.º) 0,09 3.º) 1,231 4.º) 0,3 5.º) 2,16

9. Idem, a menos de 0,01 dos seguintes números decimais:

   1.º) 0,52 2.º) 3,214 3.º) 33,8 4.º) 0,00781

10. Idem, a menos de 0,001, das seguintes *frações ordinárias:*

    1.ª) $\dfrac{5}{9}$ 2.ª) $\dfrac{144}{166}$ 3.ª) $\dfrac{16}{3}$ 4.ª) $\dfrac{1}{8}$ (sugestão: *convertê-las!*)

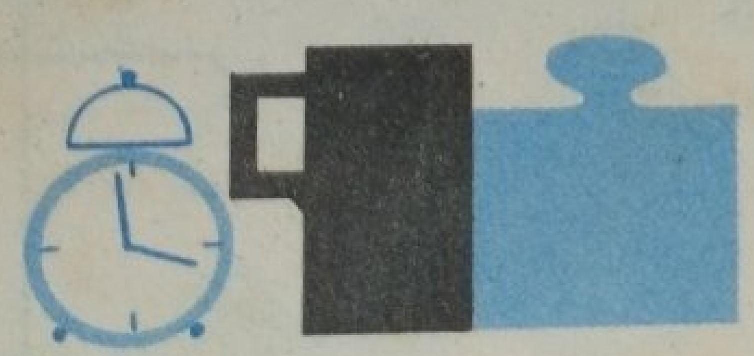
TÁBUA DOS QUADRADOS, CUBOS, RAÍZES QUADRADAS E RAÍZES CÚBICAS DOS NÚMEROS DE 1 A 100

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$
1	1	1	1,0000	1,0000	51	26 01	132 651	7,1414	3,8084
2	4	8	1,4142	1,2599	52	27 04	140 608	7,2111	3,7325
3	9	27	1,7321	1,4422	53	28 09	148 877	7,2801	3,7563
4	16	64	2,0000	1,5874	54	29 16	157 464	7,3485	3,7798
5	25	125	2,2361	1,7100	55	30 25	166 375	7,4162	3,8030
6	36	216	2,4495	1,8171	56	31 36	175 616	7,4833	3,8259
7	49	343	2,6458	1,9129	57	32 49	185 193	7,5498	3,8385
8	64	512	2,8284	2,0000	58	33 64	195 112	7,6158	3,8709
9	81	729	3,0000	2,0801	59	34 81	205 379	7,6811	3,8930
10	1 00	1 000	3,1623	2,1544	60	36 00	216 000	7,7460	3,9149
11	1 21	1 331	3,3166	2,2240	61	37 21	226 981	7,8102	3,9365
12	1 44	1 728	3,4641	2,2894	62	38 44	238 328	7,8740	3,9579
13	1 69	2 197	3,6056	2,3513	63	39 69	250 047	7,9373	3,9791
14	1 96	2 744	3,7517	2,4101	64	40 96	262 144	8,0000	4,0000
15	2 25	3 375	3,8730	2,4662	65	42 25	274 625	8,0623	4,0207
16	2 56	4 096	4,0000	2,5198	66	43 56	287 496	8,1240	4,0412
17	2 89	4 913	4,1231	2,5713	67	44 89	300 763	8,1854	4,0615
18	3 24	5 832	4,2426	2,6207	68	46 24	314 432	8,2462	4,0817
19	3 61	6 859	4,3589	2,6684	69	46 71	328 509	8,3066	4,1016
20	4 00	8 000	4,4721	2,7144	70	49 00	343 000	8,3666	4,1213
21	4 41	9 261	4,5826	2,7589	71	50 41	357 911	8,4261	4,1408
22	4 84	10 648	4,6904	2,8020	72	51 84	373 248	8,4853	4,1602
23	5 29	12 167	4,7958	2,8439	73	53 29	389 017	8,5440	4,1793
24	5 76	13 824	4,8990	2,8845	74	54 76	405 224	8,6023	4,1983
25	6 25	15 625	5,0000	2,9240	75	56 25	421 875	8,6603	4,2172
26	6 76	17 576	5,0990	2,9625	76	57 76	438 976	8,7178	4,2358
27	7 29	19 783	5,6192	3,0000	77	59 29	546 533	8,7750	4,2543
28	7 84	21 952	5,2915	3,0366	78	60 84	474 552	8,8318	4,2727
29	8 41	24 389	5,3852	3,0723	79	62 41	493 039	8,8882	4,2908
30	9 00	27 000	5,4772	3,1072	80	64 00	512 000	8,9443	4,3089
31	9 61	29 791	5,5678	3,1414	81	65 61	531 441	9,0000	4,3267
32	10 24	32 768	5,6569	3,1748	82	67 24	551 368	9,0554	4,3445
33	10 89	35 397	5,7446	3,2075	83	68 89	571 787	9,1104	4,3621
34	11 56	39 304	5,8310	3,2396	84	70 56	592 704	9,1652	4,3795
35	12 25	42 875	5,9161	3,2711	85	72 25	614 125	9,2195	4,3968
36	12 96	46 656	6,0000	3,3019	86	73 96	636 056	9,2736	4,4140
37	13 69	50 653	6,0828	3,3322	87	75 69	658 503	9,3274	4,4310
38	14 44	54 872	6,1644	3,3620	88	77 44	681 472	9,3808	4,4480
39	15 21	59 319	6,2450	3,3912	89	79 21	704 969	9,4340	4,4647
40	16 00	64 000	6,3246	3,4200	90	81 00	729 000	9,4868	4,4814
41	16 81	68 921	6,4031	3,4482	91	82 81	753 571	9,5394	4,4979
42	17 64	74 088	6,4807	3,4760	92	84 64	778 688	9,5917	4,5144
43	18 49	79 507	6,5574	3,5034	93	86 49	804 357	9,6437	4,5307
44	19 36	85 184	6,6332	3,5303	94	88 36	830 584	9,6954	4,5468
45	20 25	91 125	6,7082	3,5569	95	90 25	857 375	9,7468	4,5629
46	21 16	97 336	6,7823	3,5830	96	92 16	884 637	9,7980	4,5789
47	22 09	103 823	6,5887	3,6088	97	94 09	912 673	9,8489	4,5947
48	23 04	110 592	6,9282	3,6342	98	96 04	941 192	9,8995	4,6104
49	24 01	117 649	7,0000	3,5693	99	98 01	970 299	9,9499	4,6261
50	25 00	125 000	7,0711	3,6840	100	1 00 00	1 000 000	10,0000	4,6415

1 — 100

CAPÍTULO 4

medidas



sistemas de medidas usuais.

sistema metrico decimal (s. m. d.)

sistemas de medida não-decimal

sistemas de medidas usuais

1. Contagem e medida

Saber *medir* "qualquer coisa" é dos mais importantes conhecimentos da vida moderna. As perguntas diárias:

Quantos alunos tem o 1.º Ano "B"?
Qual a distância daqui a Brasília? *Qual o comprimento* desta corda?
Quanto de carne você vai comprar? E de azeite?
Qual a capacidade de produção da Usina de "Paulo Afonso"?
Qual a superfície do nôvo Estado da Guanabara?
Quantos jogadores foram convocados para a seleção?
Qual a velocidade com que passou o "jacto"?

envolvem *medidas* das mais diversas, cujas respostas são dadas *sempre* por meio de números!

Alguns dêsses *números* são determinados por *contagens* (geralmente no Sistema de Numeração Decimal) e outros *medindo* "algo" (geralmente no Sistema Métrico Decimal). Assim, por exemplo, a resposta à pergunta:

Quantos alunos tem o 1.º Ano "B"? ou *Quantos* jogadores foram convocados? são determinadas por contagens, pois cada pessoa é um *objeto inteiro*. Logo, para "medir" um conjunto de pessoas, animais, casas, bolinhas de gude, etc. e de todos aquêles, cujos elementos são "separáveis" por inteiro, valemo-nos *sòmente* dos números inteiros. Assim podem existir 35 ou 40 alunos no 1.º Ano "B", mas *nunca* poderiam existir 35,6 *alunos* ("frações" de alunos!)

Agora, para responder a pergunta:

Qual o comprimento desta corda?

não vamos dizer *contando*, porque a corda é um objeto *contínuo*, isto é, não é feita por partes "separadas" que possam ser contadas.

Então, neste caso, *medimos* e a *medida* é feita através de números inteiros e números fracionários (*) de certas *unidades*. Exemplo: a corda mede 3,8m ou 4m, ou ainda 2,93m.

(*) Referimo-nos à prática de *medidas*. Para a teoria *da medida*, num estudo posterior, seriam necessários também os números *irracionais*.

Para destacar as *quantidades* que podem ser contadas das que podem ser medidas, chamamos de:

quantidades discretas — aquelas que respondem a pergunta: *quantos são?*
(Ex.: conjunto de pessoas, de animais, etc.)

quantidades contínuas — aquelas que respondem a pergunta: *qual o comprimento? qual a superfície? quanto pesa?*
(Ex.: comprimento de uma estrada, o seu pêso, etc.)

Vamos, neste Capítulo, estudar as *medidas* das quantidades *contínuas* como mais uma operação!

2. *Operação: medir; resultado: medida (número)*

Para melhor conhecimento das grandezas contínuas usuais, tais como: *comprimento, superfície, volume, capacidade, massa, dinheiro, tempo*, etc... costuma-se compará-las com outras grandezas, de *mesma espécie*, conhecidas como unidades de medidas.

Assim, por exemplo, o *comprimento* de uma régua pode ser determinado *comparando-a* com o *comprimento* de 1cm (que seria a unidade). A *superfície* de um terreno pode ser conhecida *comparando-a* com a *superfície de um quadrado de* 1m *de lado* ($1m^2$) (que seria a unidade) e assim por diante.

Entre as unidades de medidas são escolhidas algumas como *principais* ou *padrões*, das quais derivam outras maiores (múltiplos) e menores (submúltiplos), denominadas *unidades secundárias*. O conjunto das unidades *principais* e *secundárias* constitui um Sistema de Medidas. Os de maior uso entre os povos, são:

O SISTEMA MÉTRICO DECIMAL (S.M.D.)
e O SISTEMA INGLÊS DE MEDIDAS (S.I.M.)

Como você pode perceber, fàcilmente, o ato de comparar duas grandezas *contínuas* de mesma espécie, sendo uma delas tomada como unidade, é uma OPERAÇÃO. O nome dessa nova operação é: MEDIR e o resultado, que é um *número*, MEDIDA.

Assim, por exemplo, para se efetuar a medição ou medir o comprimento do segmento $\overline{AB}$ (*) (fig. 46) deve-se, primeiramente, escolher a unidade de medida que permitirá realizar a *operação*.

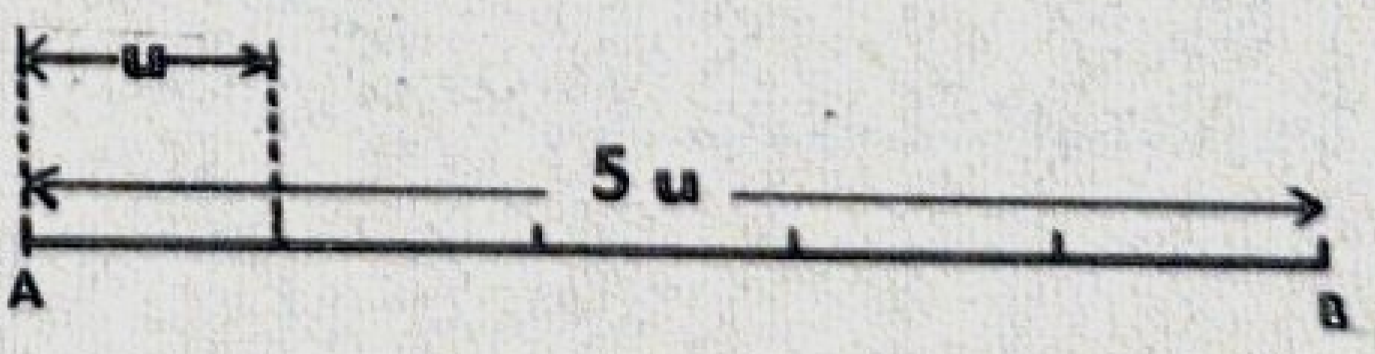


FIG. 46

(*) De acôrdo com a sugestão de Max Beberman (Grupo de Illinois, U.S.A.) o *segmento geométrico* será indicado, usando-se um *traço horizontal* sôbre as letras que indicam suas extremidades (Ex.: $\overline{AB}$). A representação sem o traço (Ex.: AB) indicará a *medida* do segmento geométrico.

Indiquemos por u tal unidade de medida, que poderá ser tanto do S.M.D. (*cm*, por exemplo) ou do S.I.M. (*polegada*, por exemplo).

Preste bem atenção agora na *operação:* se, "colocando" u sôbre $\overline{AB}$, resultar que u esteja contido *exatamente* em $\overline{AB}$ então a medida é um *número inteiro* (de unidades). No exemplo, u está contida, exatamente, *cinco vêzes*, em $\overline{AB}$ e escreve-se:

$m(\overline{AB})_u = 5$ (lê-se: medida de $\overline{AB}$, em relação à unidade u, é 5).

Para facilitar os cálculos com as medidas, em relação a determinadas unidades, vamos indicar de agora em diante, simplesmente por

$$\boxed{AB = 5\,u}$$

Se u for cm, temos: $\boxed{AB = 5 \text{ cm}}$

Se u *não* estiver contida exatamente em $\overline{AB}$, então a medida *não* será um *número inteiro* (poderá ser fracionário, decimal, . . .). Seja, por exemplo, *medir* o comprimento de $\overline{CD}$ (fig. 47) usando a unidade u. Comparando u com $\overline{CD}$, verifica-se que $\overline{CD}$ contém *duas vêzes* u e *mais uma fração* de u.

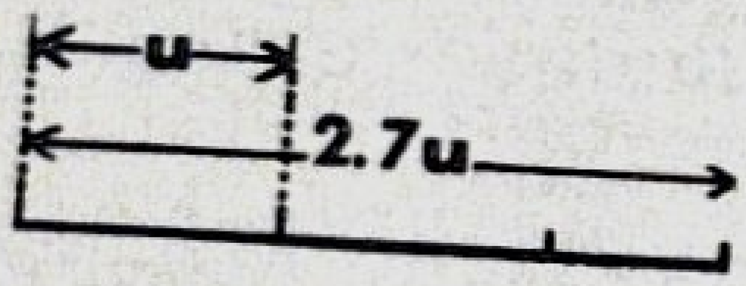


FIG. 47

Se forem considerados os *submúltiplos decimais* de u, você encontrará

$\boxed{CD = 2{,}7\,u}$ (Experimente!)

O mesmo ocorrerá quando você pretender medir:

superfície (fig. 48)

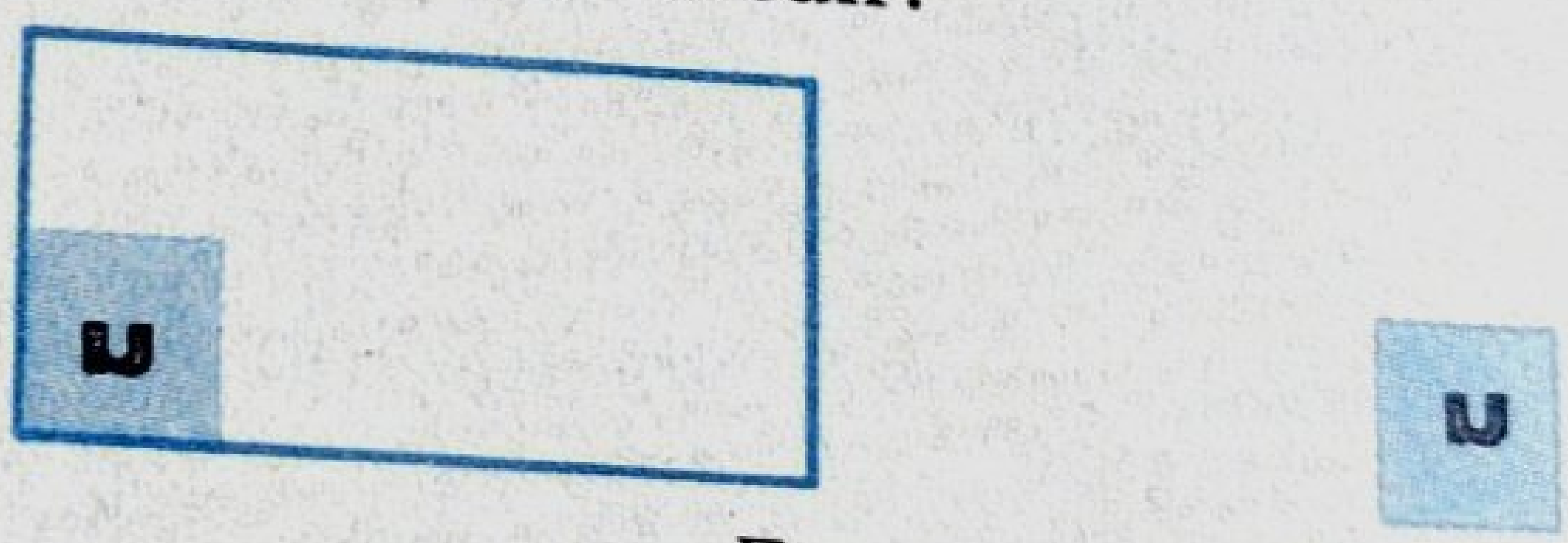
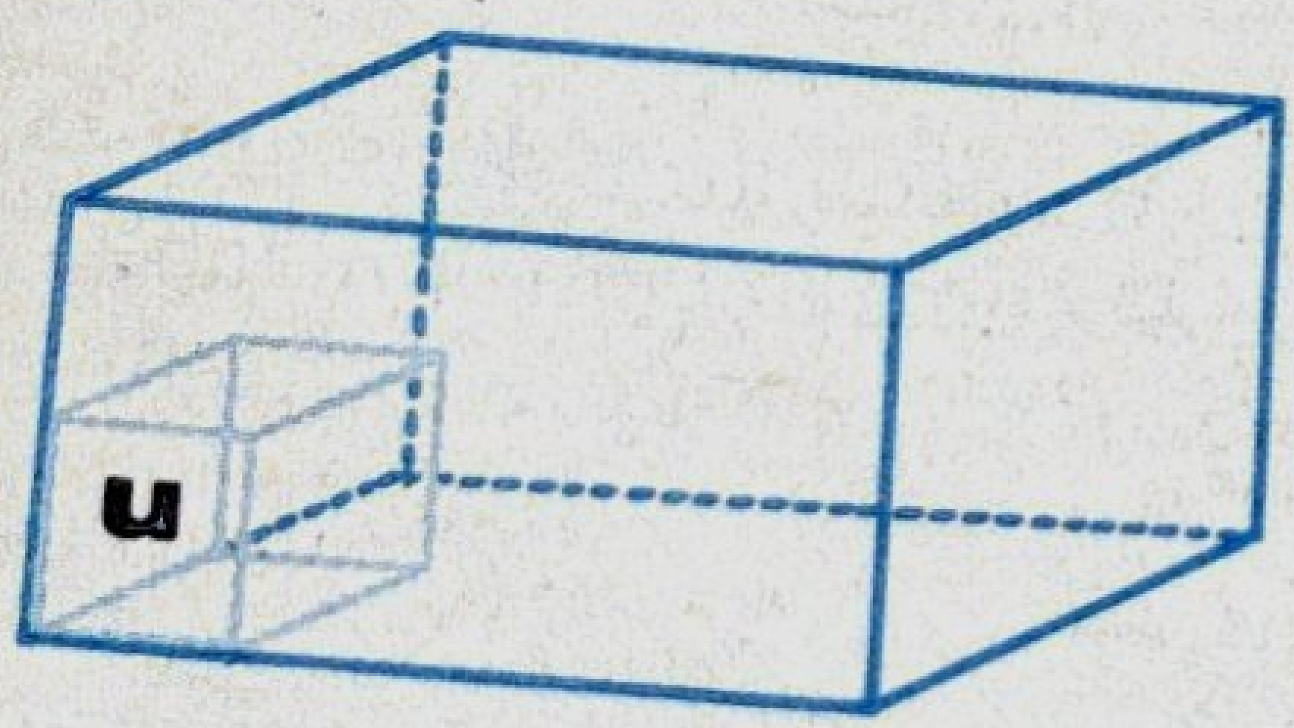
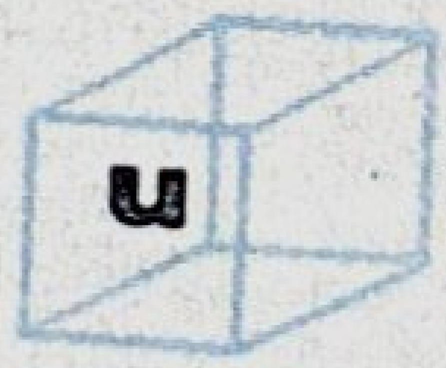


FIG. 48





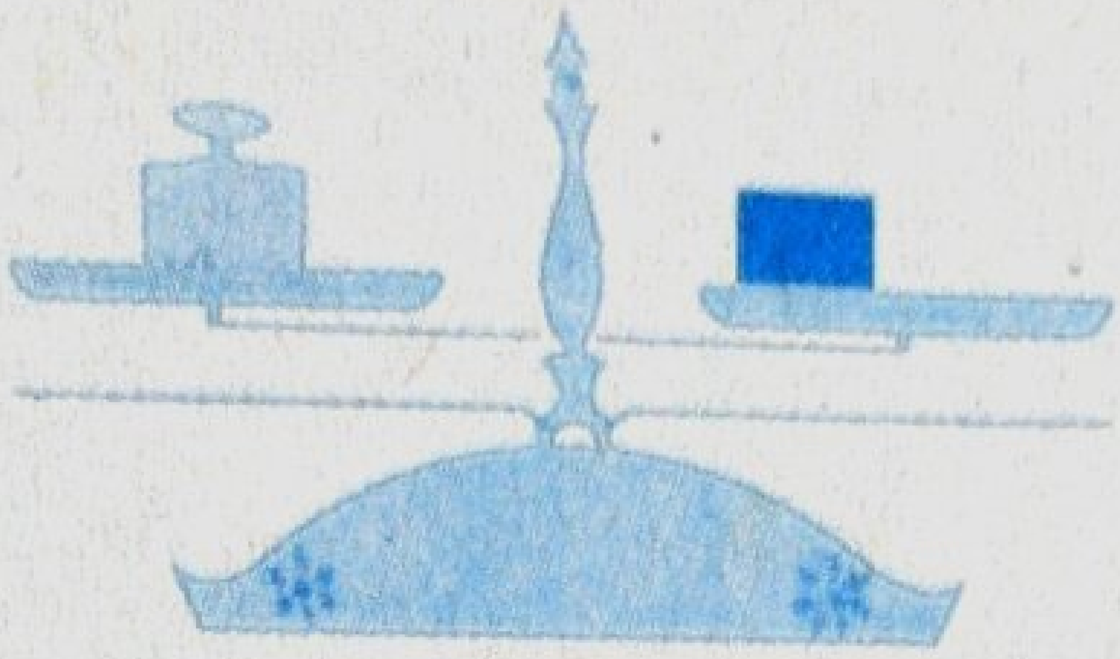
volume (fig. 49)

FIG. 49

capacidade (fig. 50):

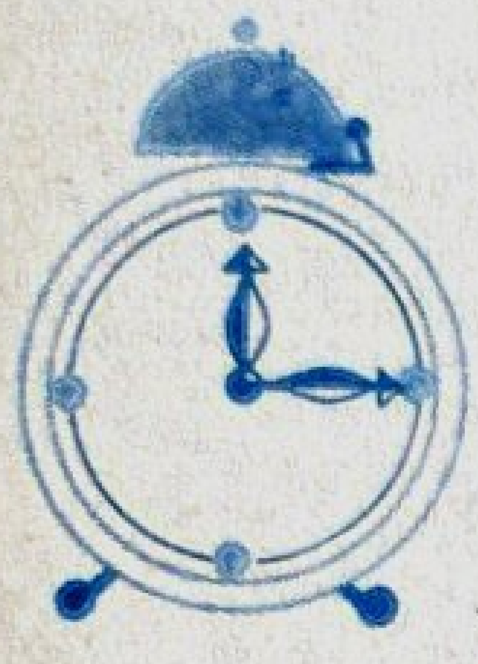
FIG. 50

massa (fig. 51)



u

Fig. 51



dinheiro (fig. 53)

tempo (fig. 52)

u

Fig. 52

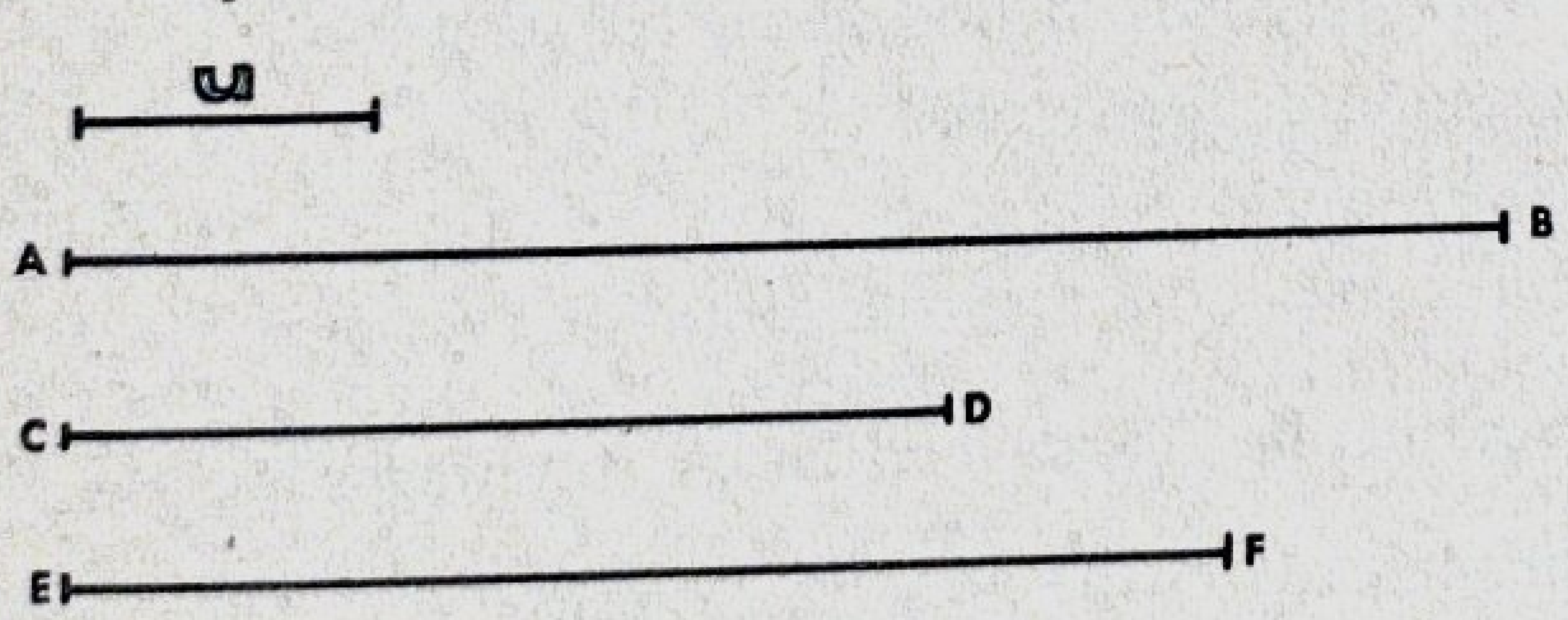
u

Fig. 53

onde a *unidade* u *variará* de acôrdo com o Sistema de Medidas escolhido.

EXERCÍCIOS PRÁTICOS DE APLICAÇÃO — Grupo 51

1. Usando **u** como *unidade*, meça os seguintes *segmentos*, dando a resposta na unidade **u**. (Sugestão: corte uma fita de cartolina do tamanho de **u** para poder *operar* melhor)

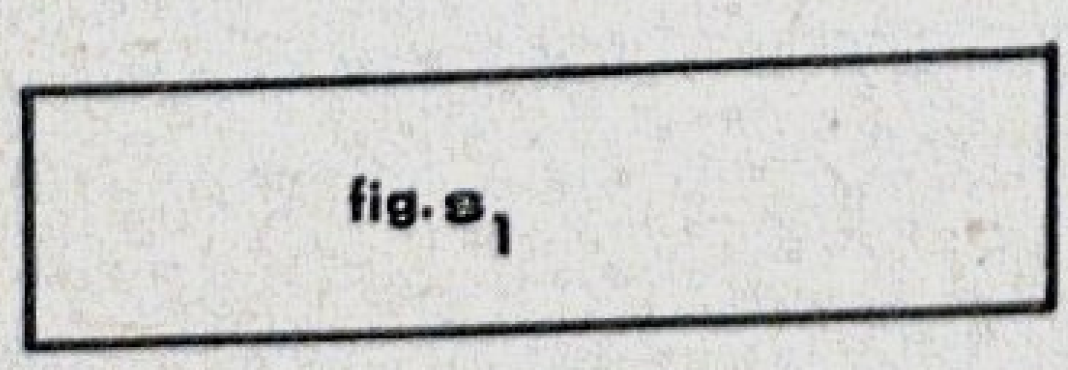


$AB = \ldots$ **u**

$CD = \ldots$ **u**

$EF = \ldots$ **u**

2. Usando a *unidade* **u** meça as seguintes figuras (planas) (vale a sugestão do exercício anterior):



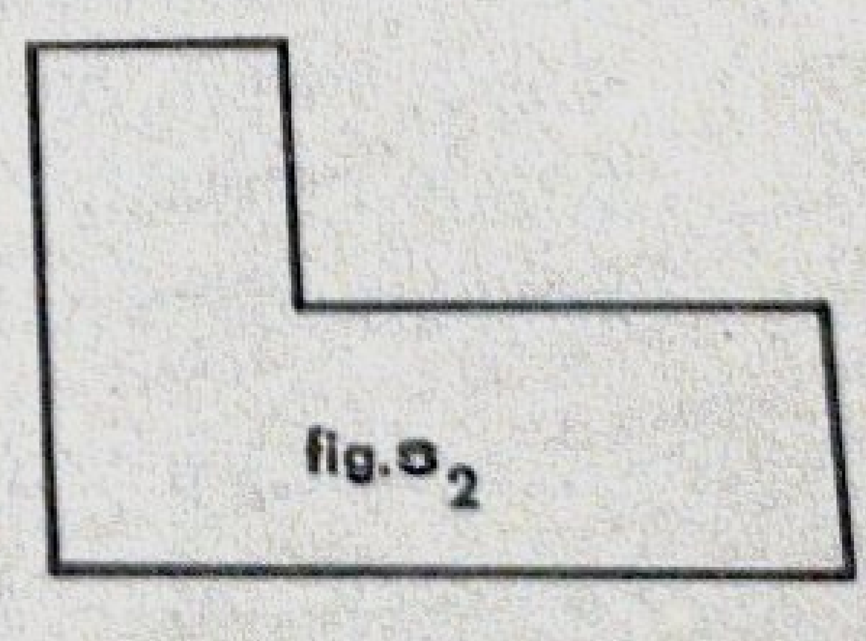


fig. $S_1 = \ldots$ **u**

fig. $S_2 = \ldots$ **u**

3. Idem, meça a figura *F* usando a unidade **u**:

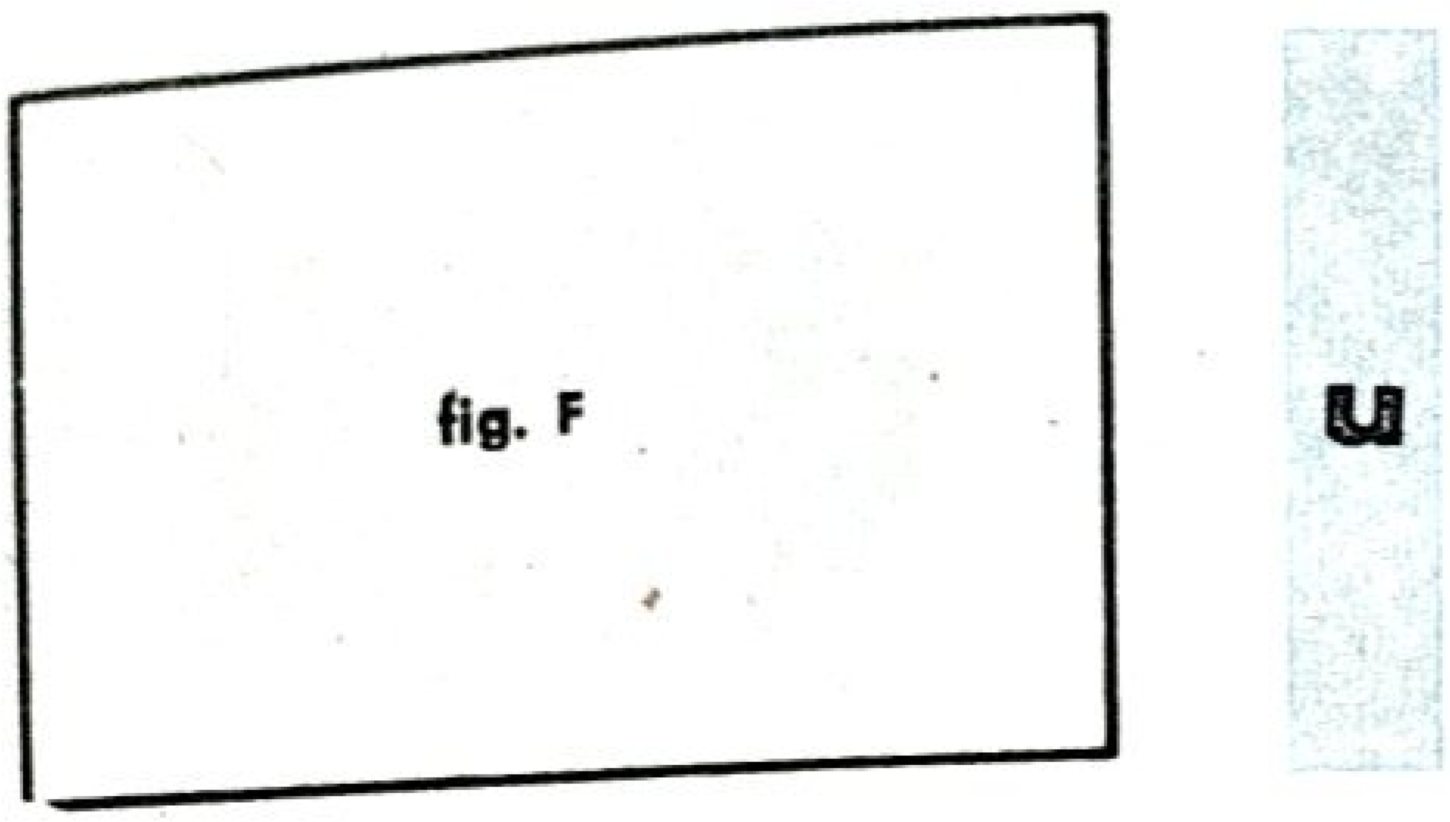
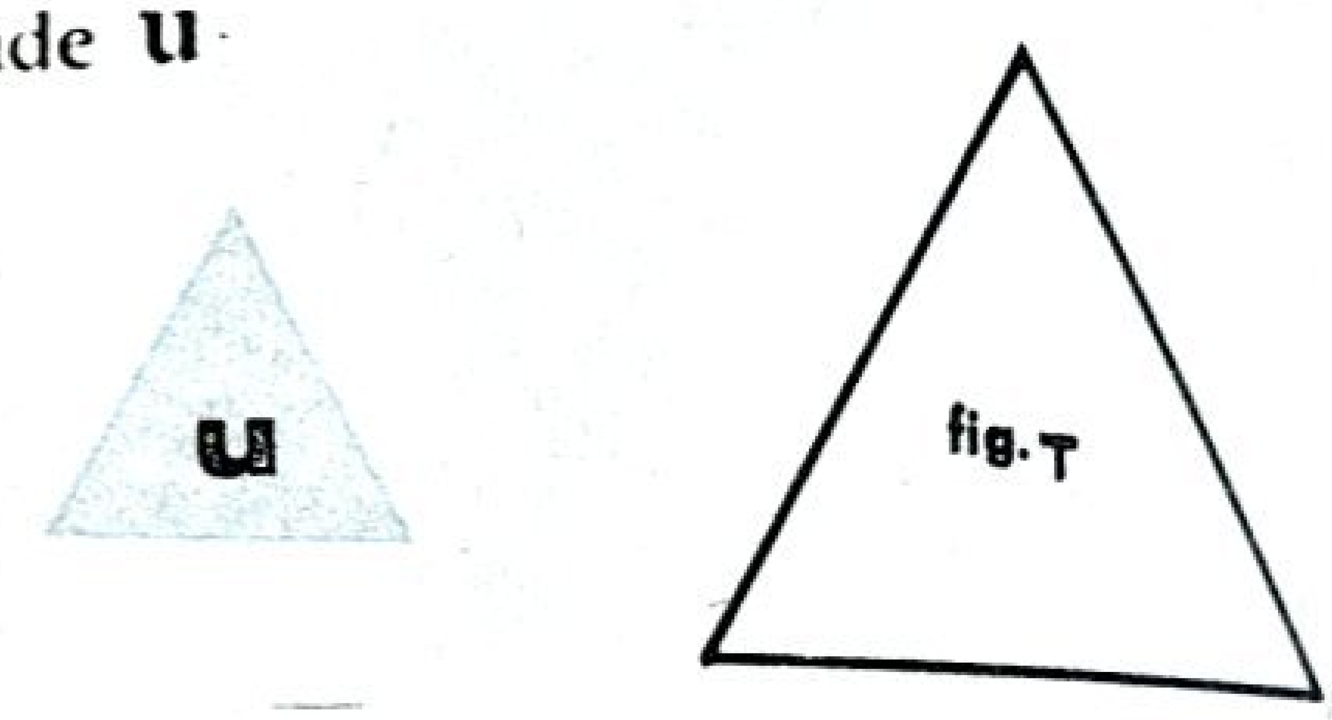


fig. F = . . . **u**

4. Idem, meça a figura *T* usando a unidade **u**·

fig. T = . . . **u**



5. Observe a figura *C* que representa uma *caixa*. Meça êsse sólido usando a caixinha *u* como unidade. Você obterá:

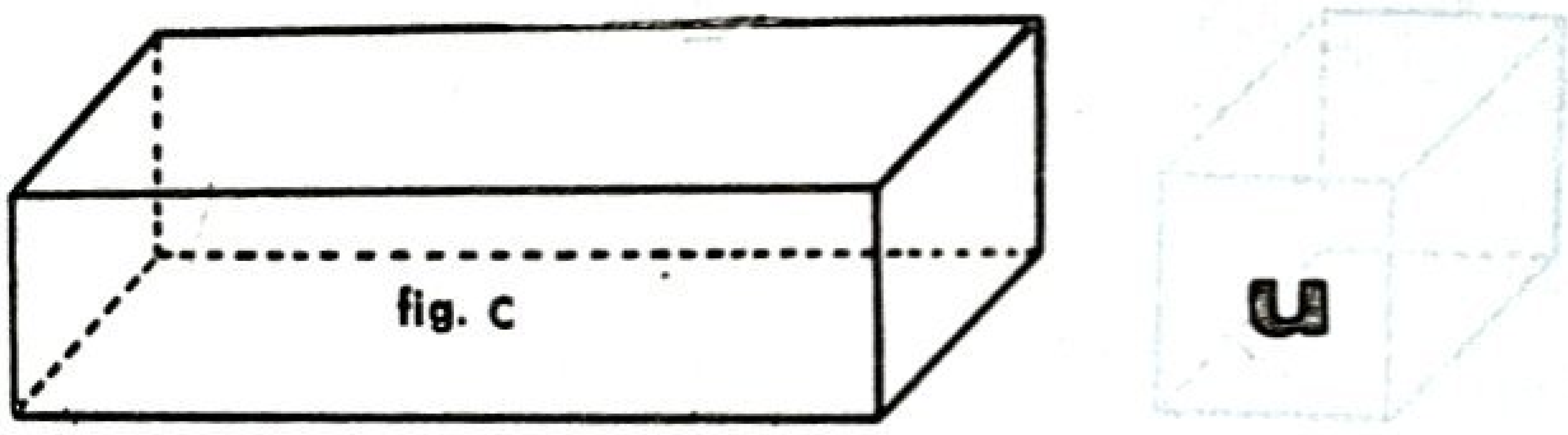


fig. C = . . . *u*

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 52

1. Quais das seguintes perguntas você responderia CONTANDO OU MEDINDO?
   1.ª) Quantas pessoas compareceram ao Maracanã?
   2.ª) Qual a distância daqui à Lua?
   3.ª) Ufa! Que calor está fazendo?
   4.ª) Qual é a sua idade?
   5.ª) Quantos pneus foram trocados na última corrida de Interlagos?

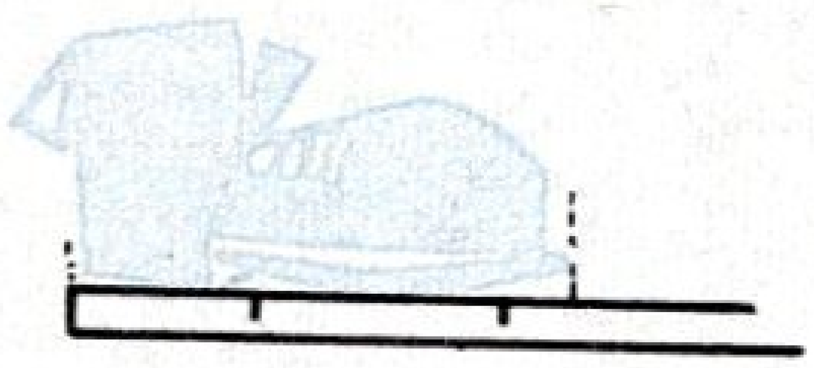
2. Classifique as seguintes quantidades em CONTÍNUAS e DISCRETAS:
   1.ª) Seu pêso
   2.ª) Os alunos de sua classe com mais de 11 anos
   3.ª) Os números pares compreendidos entre 0 e 25.
   4.ª) A altura da Renata
   5.ª) A quantidade de água daquela piscina

Questões sôbre medida de quantidades contínuas:

3. Se a unidade *u* estiver contida:
   1. exatamente *três vêzes* no segmento $\overline{AB}$, então: $AB = \ldots u$;
   2. *quatro inteiros e três décimos* no segmento $\overline{CD}$, então: $\overline{CD} = \ldots u$.

4. Usando o seu *palmo* meça o comprimento de sua carteira de classe. Que unidade você empregou? E se você sabe que seu palmo mede 20 cm, qual será o comprimento da carteira em cm?

5. Utilize o seu *pé* (calçado, naturalmente . . .) para medir a largura de sua classe em *pés*. Depois, meça o comprimento de seu *pé* com uma régua usual, graduada em cm, e responda: Quantos *pés* (iguais ao seu, lògicamente . . .) tem a largura da classe? E quantos centímetros?



6. Sílvio mediu o comprimento de uma vara de pescar com uma certa unidade u (era um pedaço de pau que encontrou) e obteve como medida: $8\,u$. O seu irmão Fernando mediu a mesma vara usando uma outra unidade v, que era a metade de u $\left(\text{isto é: } v = \frac{1}{2}u\right)$. Qual o resultado encontrado por Fernando na unidade v?

7. Antônio Carlos mediu a mesma vara do problema anterior usando o seu palmo que é precisamente $\frac{2}{3}$ de u. Sabendo-se que o palmo de Antônio Carlos mede 18 cm, qual a medida da vara, em centímetros?

8. Houve uma falta perigosa no jôgo de futebol entre as duas primeiras séries ginasiais. O juiz deu cinco passos para que os nossos adversários formassem barreira. Descobri que cada três passos do juiz equivalia a quatro dos meus. Qual o comprimento de meu passo se o do juiz é de 80 cm?

9. Usar os símbolos $=$, $>$, $<$ para tornar *verdadeiras* as seguintes sentenças, sabendo-se que a unidade u é três vêzes maior que a unidade v (isto é: $u = 3v$)

1.º) $4u \; ? \; 12v$ (exemplo-modêlo: $4u = 12v$, pois sendo $u = 3v$, temos: $12v = 12v$)
2.º) $5u \; ? \; 13v$ (exemplo-modêlo: $5u > 13v$, pois, $15v > 13v$
3.º) $6u \; ? \; 20v$
4.º) $2u \; ? \; 6v$

10. Idem nas seguintes sentenças, sendo $u = \frac{1}{3}v$:

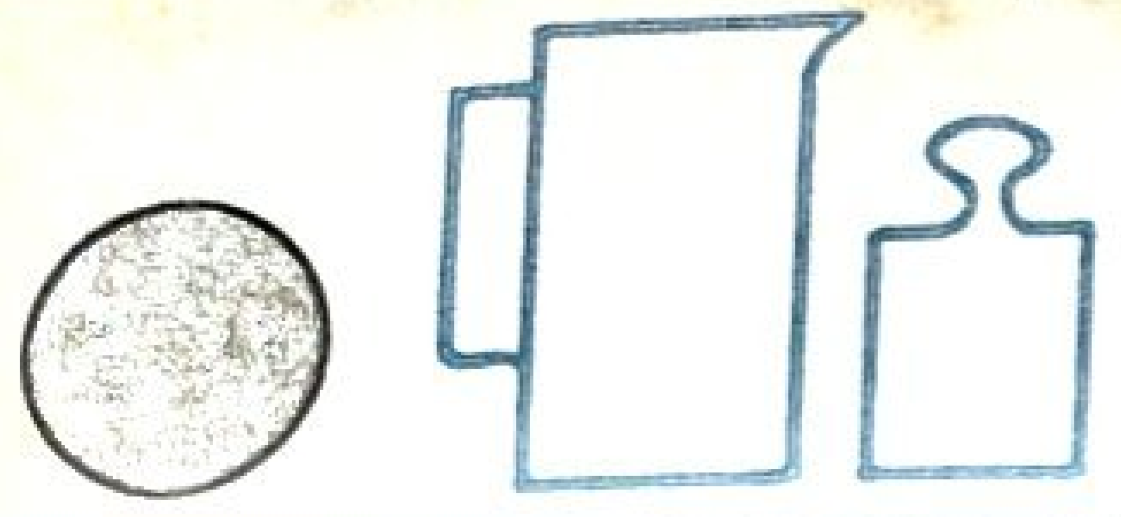
1.ª) $u \; ? \; v$ 2.ª) $3u \; ? \; v$ 3.ª) $u \; ? \; \frac{2}{3}v$

11. Idem nas seguintes sentenças, sendo $u = v$:

1.ª) $3u \; ? \; 2v$ 2.ª) $u \; ? \; v$ 3.ª) $u \; ? \; 2v$

12. Idem nas seguinte sentenças, sendo $u = 2v$

1.ª) $2u + 3u \; ? \; 4v + 3v$ 2.ª) $8u - 6u \; ? \; 6v$



sistema metrico decimal (s. m. d.)

1. *Importância*

O S.M.D., dos mais importantes do Universo, é adotado oficialmente pela maioria dos países, com exceção apenas dos povos de língua inglêsa (Inglaterra, Estados Unidos, ...).

A *unidade fundamental* de comprimento é o *metro* (do grego: "metron", que significa *medida*). O importante é você *não esquecer* as vantagens que o S.M.D. apresenta, com relação a outros sistemas de medidas, e que se resumem:

1.º) *possui as unidades secundárias* (*múltiplos e submúltiplos*) *do metro em relações decimais e, portanto, os cálculos nesse sistema enquadram-se no mesmo critério da representação dos números decimais;*

2.º) *possui as unidades de superfície, volume, capacidade e massa, também relacionadas com o metro.*

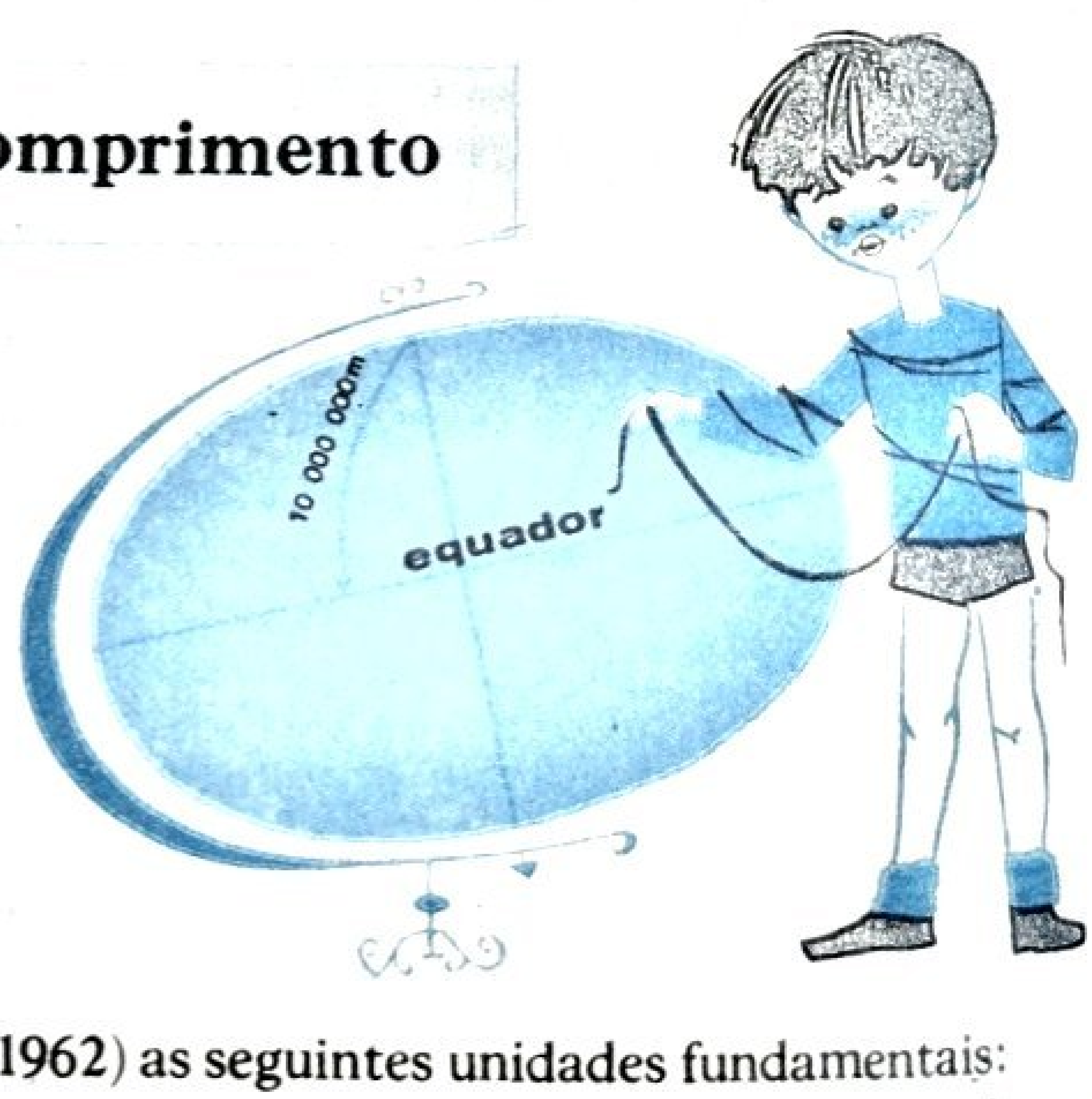
Outro aspecto importantíssimo para todos nós:

O Sistema Métrico Decimal é o único legal e de uso obrigatório no Brasil(*)

Unidades de Comprimento

2. *Unidade fundamental: metro*

O metro é um comprimento aproximadamente igual à décima milionésima $\left(\frac{1}{10000000}\right)$ parte do quarto do meridiano terrestre.



(*) O Instituto Nacional de Pesos e Medidas, de acôrdo com o Sistema Internacional de Unidades (S.I.), resolveu que sejam adotadas como legais no Brasil (D.O. 4-9-1962) as seguintes unidades fundamentais:

metro (m) para *comprimento*; *quilograma* (kg) para *massa*; *segundo* (s) para *tempo*.

que pertencem ao S.M.D.

Também, por essa resolução, *não é permitido* o uso de unidades diferentes das legais em: documentos, contratos, propaganda comercial, invólucros e envoltórios de mercadorias.

Diz-se *aproximadamente*, porque o metro construído de platina iridiada (fig. 54), depositado na Repartição Internacional de Pesos e Medidas (Sèvres-França) e que *serviu* de *padrão* para todos os países que o adotaram, possui dois décimos de milímetro *a menos* do quarto do meridiano terrestre.

OBSERVAÇÃO: De acôrdo com o Sistema Internacional de Unidades (S.I.), a partir de 1 962, a definição de metro, como padrão *internacional de comprimento* não seria mais a barra de platina iridiada, e sim um comprimento de onda emitido por um isótopo de KRYPTON, de pêso atômico 86, que é cêrca de *cem vêzes* mais preciso! Como êsse "nôvo" *metro* é um pouco difícil para você entender agora, basta lembrar que *modernamente* o *metro é dado por* UM COMPRIMENTO DE ONDA!

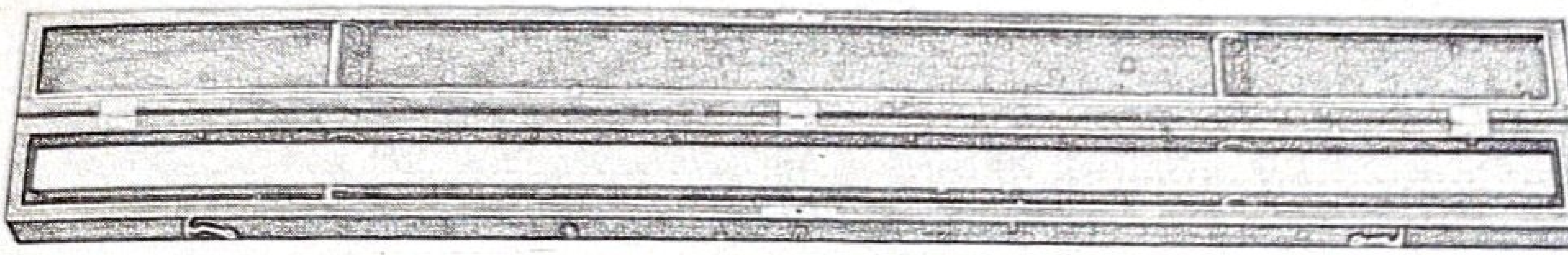


FIG. 54 — *Metro-padrão* (terciário) existente no Departamento de Pesos e Medidas da Prefeitura Municipal de São Paulo.

3. *Unidades secundárias do metro: múltiplos e submúltiplos*

Os principais *múltiplos* e *submúltiplos* do metro constam da seguinte tabela:

	NOMES	SÍMBOLOS	VALÔRES EM METRO
Múltiplos	quilômetro	*km*	1 000 m
	hectômetro	*hm*	100 m
	decâmetro	*dam*	10 m
Unidade	*metro*	*m*	1 m
Submúltiplos ...	decímetro	*dm*	0,1 m
	centímetro	*cm*	0,01 m
	milímetro	*mm*	0,001 m

Para as medidas de *pequenos comprimentos*, onde se exige *precisão*, usa-se o:

mícron (μ) que é igual a 0,001 do milímetro e para *mais precisão* ainda, emprega-se o

milimícron ($m\mu$) que é igual a 0,001 do micron.

Os *físicos* usam ainda o angström (Å) que vale 0,1 do mícron.

Para os *grandes comprimentos*, tais como as *distâncias astronômicas*, emprega-se como unidade de comprimento o *segundo-luz*, que é a distância percorrida pela luz em um segundo (aproximadamente 300 000 km!). Assim, por exemplo, dizer que a Lua dista cêrca de um *segundo-luz*, significa que a Lua encontra-se cêrca de 300 000 km da Terra.

O mesmo acontece quando se diz que o Sol se encontra cêrca de 8 minutos e 20 segundos-luz da Terra (ou seja, cêrca de 150 000 000 km!). Se acontecesse de o Sol se apagar de repente, você sabe que durante 8 minutos e 20 segundos continuaríamos recebendo sua luz e seu calor!

E, você sabia que, depois do Sol, a estrêla mais próxima da Terra está a cêrca de 4 anos-luz!

Para as medidas de *comprimentos marítimos* emprega-se a milha marítima (*M*) que é igual a 1 852 m.

4. *Representação e leitura dos números que exprimem comprimentos. Numerais diferentes da mesma medida.*

Representam-se os números inteiros e decimais, escrevendo-se à *direita* o símbolo da unidade correspondente. A *leitura* da medida é completada acrescentando-se o nome relativo ao símbolo usado. Exemplos:

$\boxed{8 \text{ m}}$

lê-se: oito *metros*

$\boxed{39{,}215 \text{ km}}$

lê-se: trinta e nove *quilômetros* e duzentos e quinze *milésimos do quilômetro* ou 39 *quilômetros* e 215 *metros*

$\boxed{0{,}07 \text{ dm}}$

lê-se: sete centésimos do decímetro ou 7 *milímetros*

Êrro comum: Escrever "ms" para abreviar metros; está errado! pois, *não há* plural para a abreviatura dos nomes das unidades. Também *não se deve* colocar a abreviatura do metro *acima* do número. Logo, NÃO ESCREVA:

8 *ms*, ou 8 *mts* e nem 8^m

Assim como existem *numerais* diferentes que representam o *mesmo número*, também agora você tem *numerais* diferentes para representar a *mesma medida*. Assim, por exemplo:

1m, 10dm, 100cm

são *numerais diferentes* que representam a *mesma medida*. O sinal = permite relacioná-los, isto é:

$$\boxed{1\text{m} = 10\text{dm} = 100\text{cm}}$$

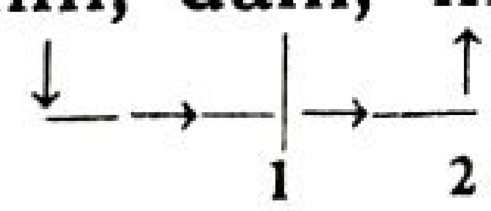
5. *Mudança de unidade*

A técnica, sabendo-se que uma unidade qualquer de comprimento é 10 vêzes maior que a unidade imediatamente inferior e 10 vêzes menor que a unidade imediatamente superior, é a seguinte:

> *Passa-se de uma unidade para outra que lhe seja menor* (ou *maior*) *deslocando-se a vírgula para a direita* (ou *para a esquerda*) *de tantas casas decimais quantas são os espaços que separam as duas unidades na série*:
>
> km, hm, dam, m, dm, cm, mm
>
> *usando zeros para as posições vagas*. Exemplos:

1.º) Reduzir: 28,569 hm a *metros*

Como: km, hm, dam, m, dm, cm, mm

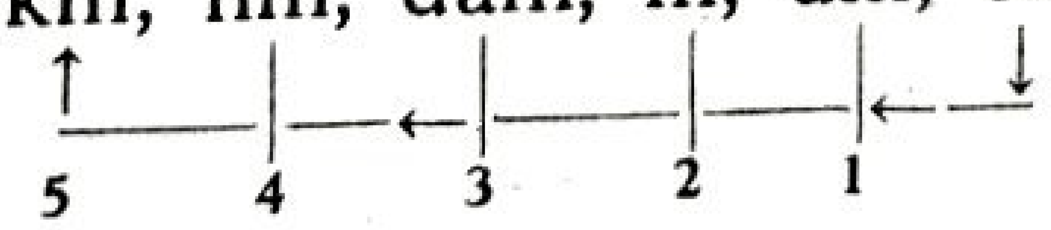


desloca-se a vírgula duas casas para a DIREITA. Logo:

28,569 hm = 2856,9 m

2.º) Exprimir: 456,835 cm a *quilômetros*

Como: km, hm, dam, m, dm, cm, mm



desloca-se a vírgula cinco casas para a ESQUERDA

3.º) Quantos *metros* existem em 8dm?

Como: 1 dm = 0,1 m

segue-se que: 8 dm = 0,8 m

6. *Instrumentos usuais para medir comprimentos*

Os mais comuns são os que medem comprimentos da ordem de um metro. Há os que medem grandes distâncias e os que medem pequenas distâncias, inclusive os de grande precisão. Destacamos:

metro de madeira (comerciantes) fig. 55; *antena de radar* (para medir distâncias astronômicas) fig. 55-A; *odômetro* (computador quilométrico para medir distâncias percorridas) fig. 55-B; *metro articulável* (pedreiros) fig. 55-C; *metro de fita* (costureiras) fig. 55-D; *marco de estrada* — fig. 55-E; *pálmer* (para medidas micrométricas) fig. 55-F.

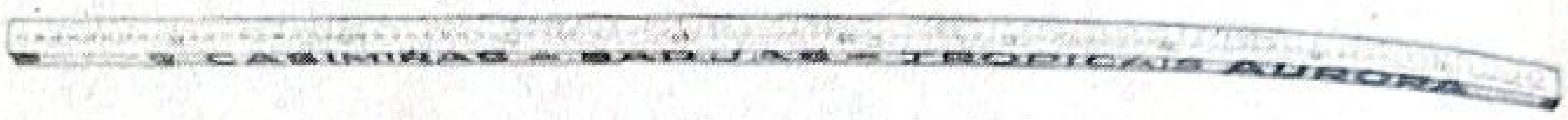


FIG. 55 – *Metro de madeira*

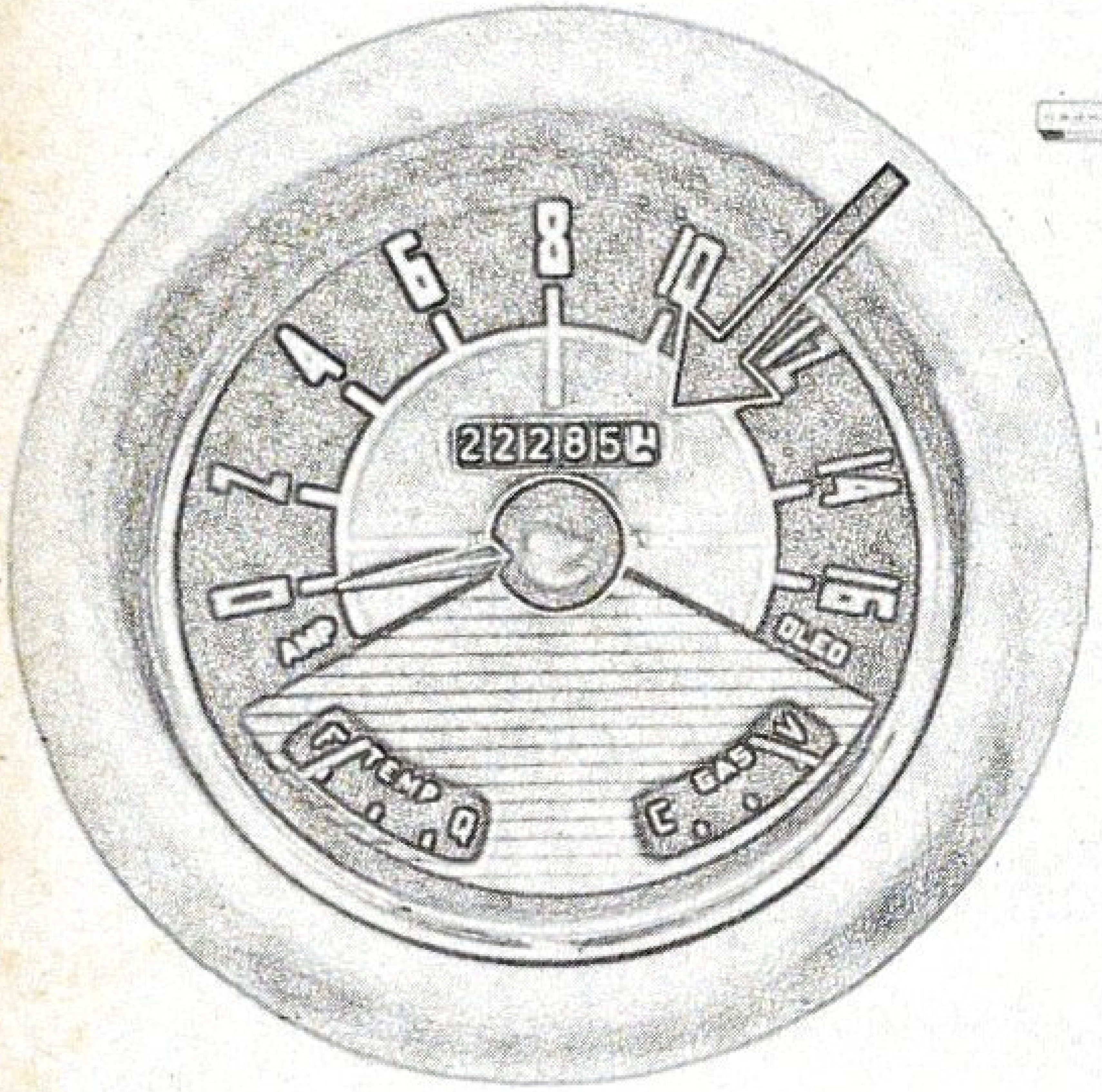


FIG. 55-B – *Odômetro*

FIG. 55-A – *Antena de radar*

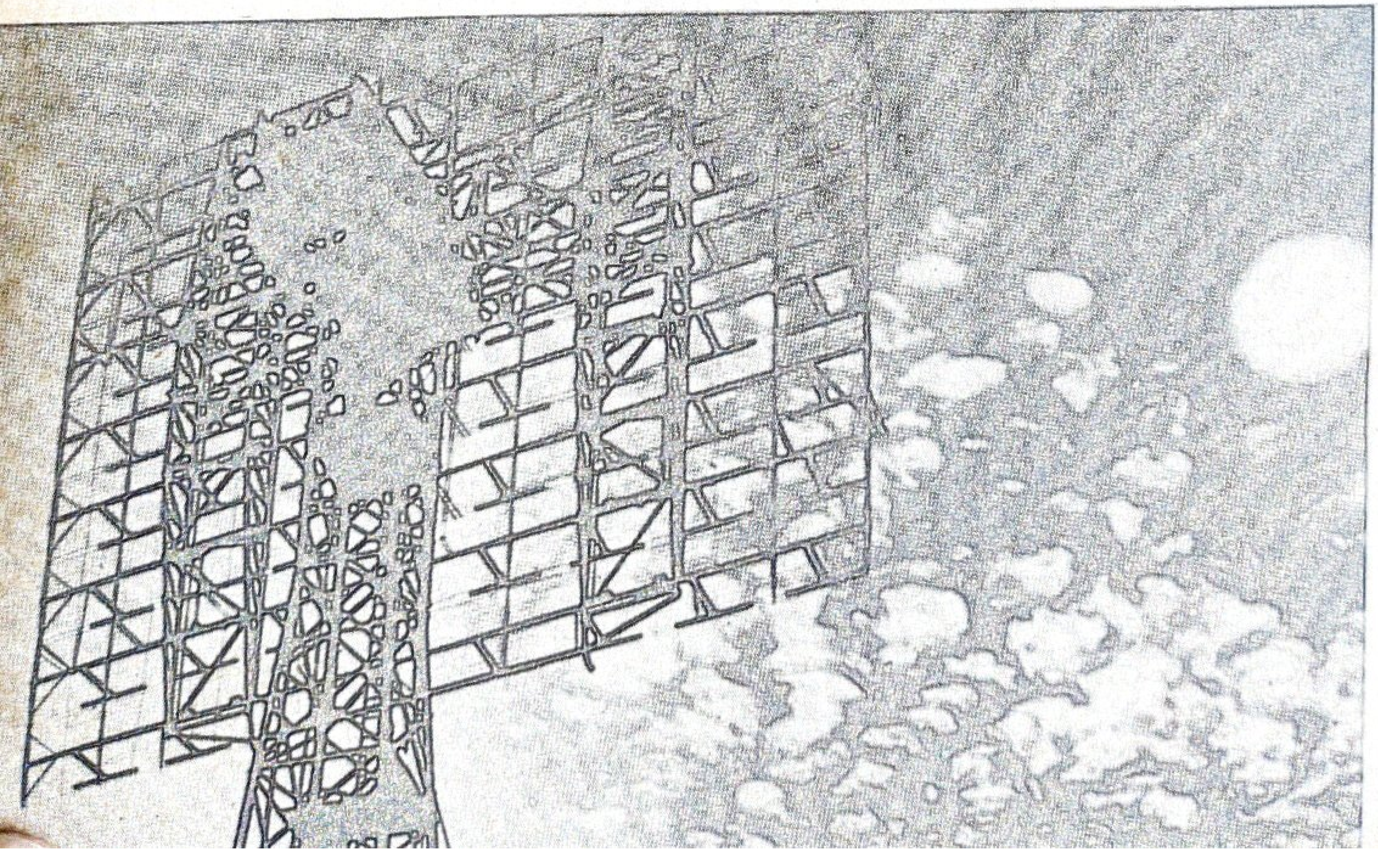


FIG. 55-C – *Metro articulável*

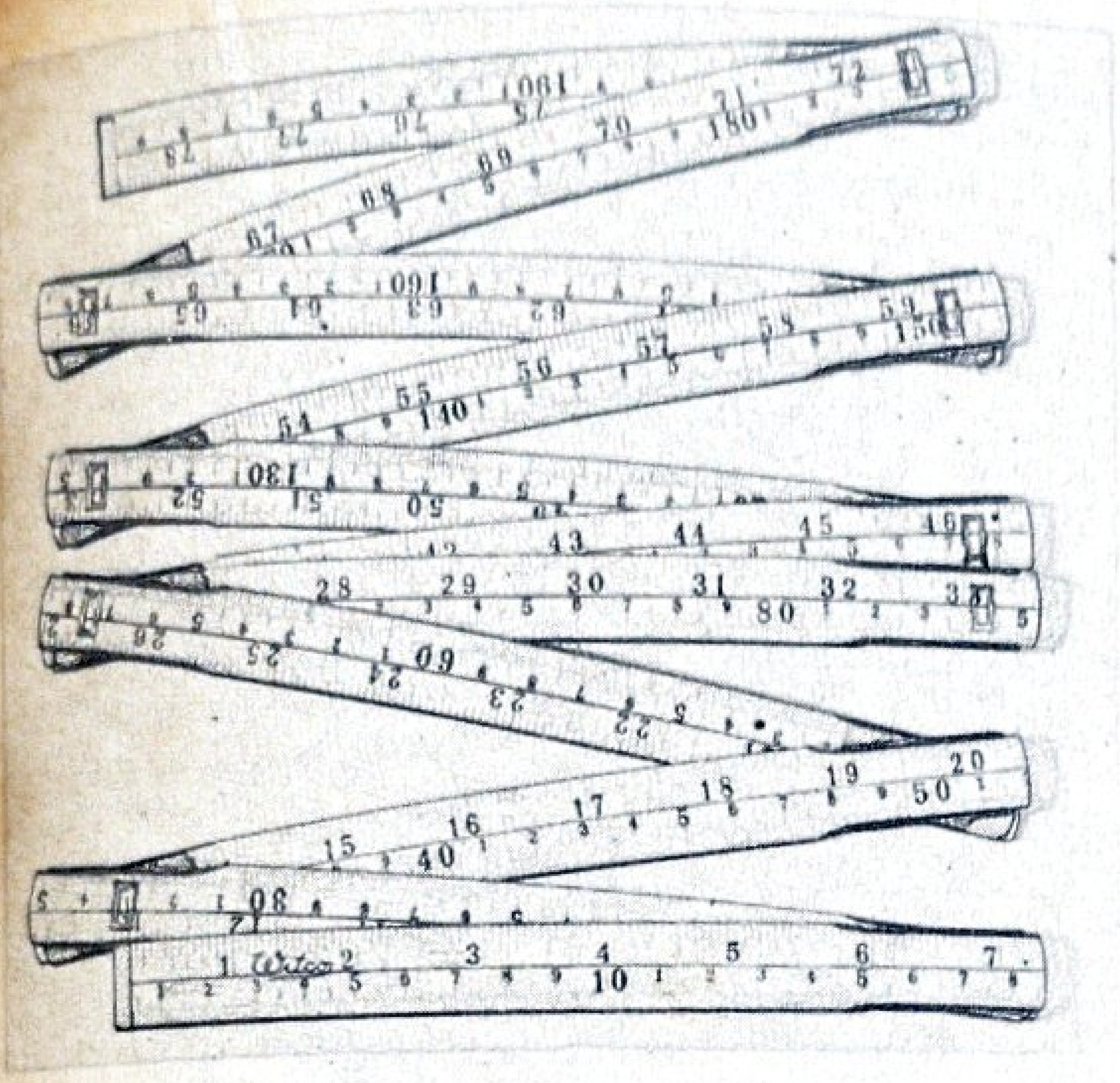
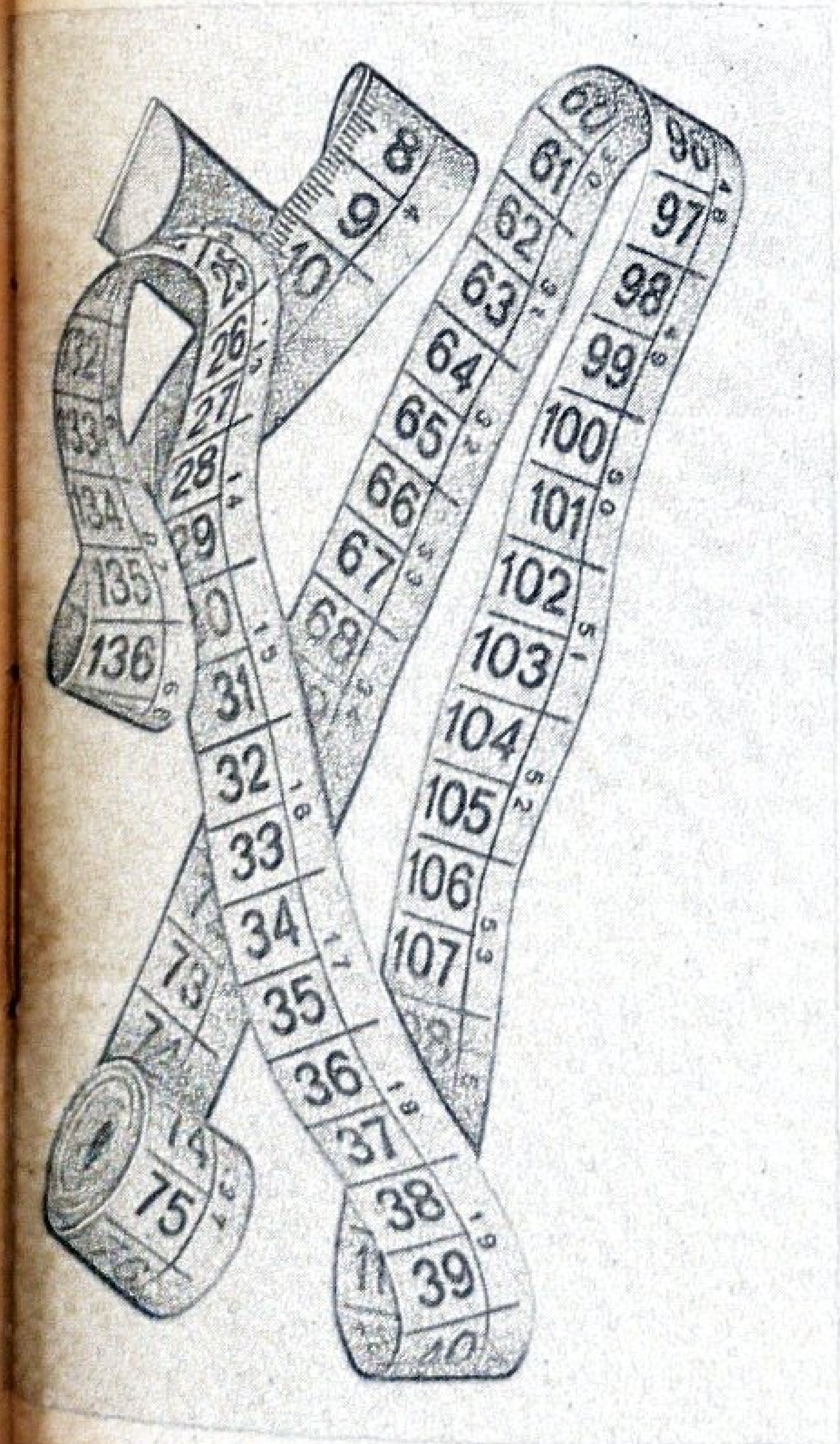


FIG. 55-D – *Metro de fita*



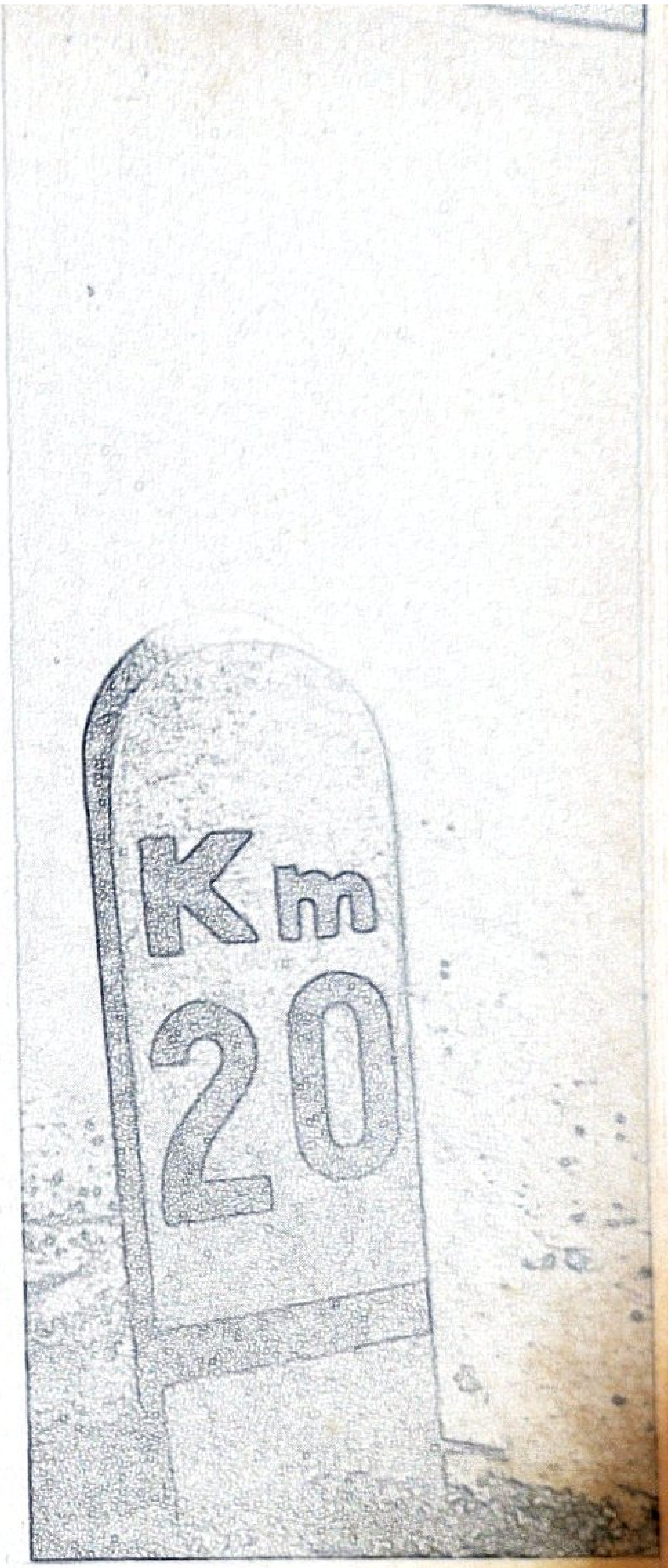
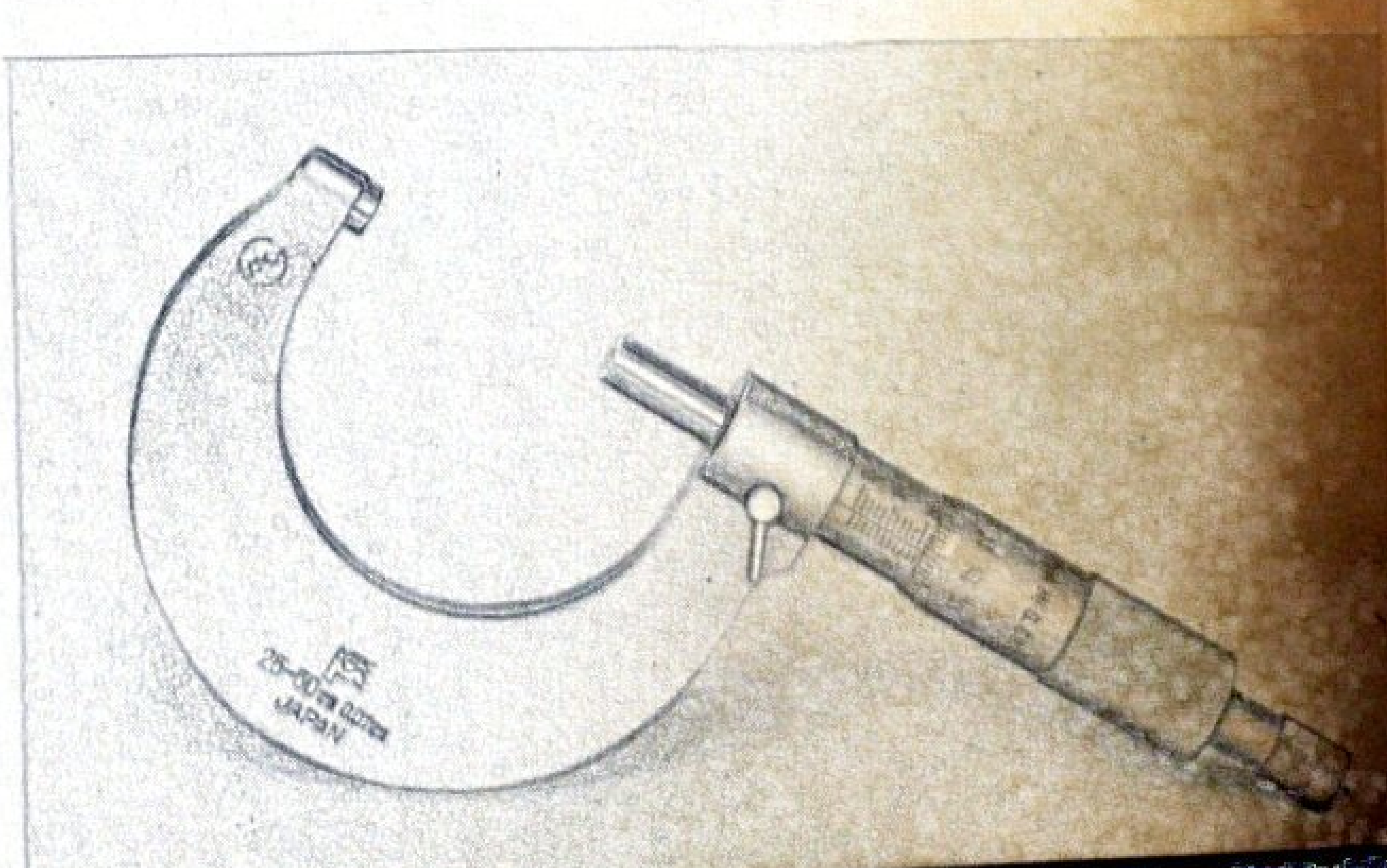
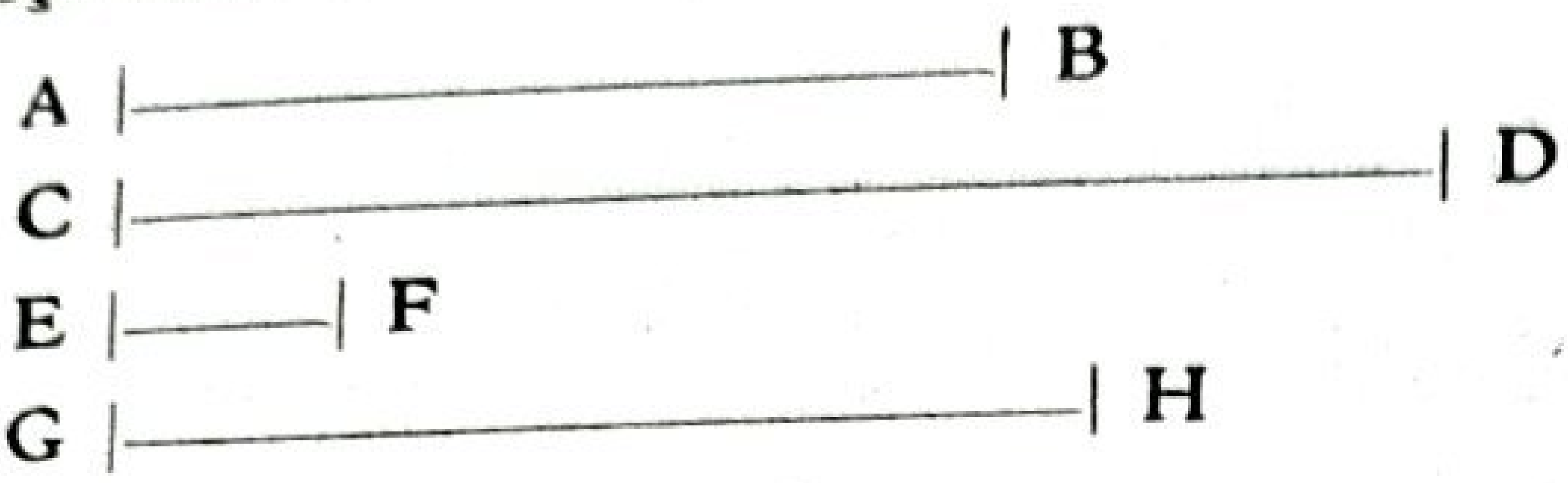


FIG. 55-E – *Marco de estrada*

FIG. 55-F – *Pálmer*



1. Meça cada um dos seguintes segmentos tomando por unidade o *mm:*

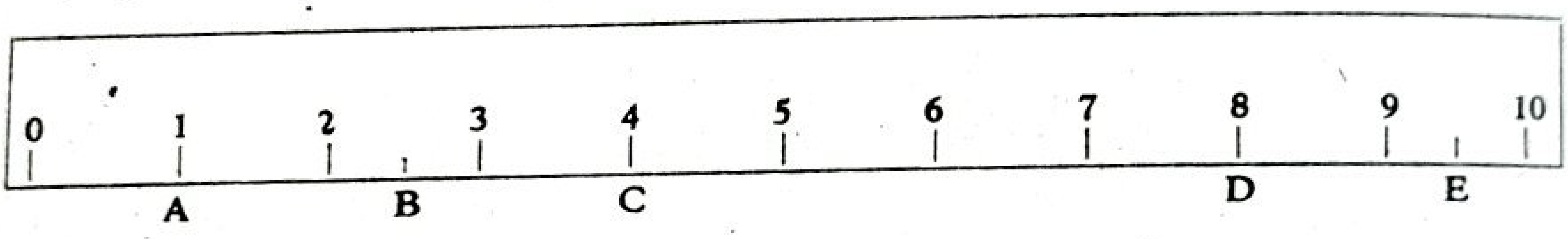


AB = . . . mm
CD = . . . mm
EF = . . . mm
GH = . . . mm

2. Na régua graduada de 10 cm, pergunta-se:

1.º) quais os números dá régua que correspondem, respectivamente, aos pontos A, B, C, D e E?

2.º) quanto mede cada um dos segmentos: $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{CD}$, $\overline{BE}$?



AB = . . . cm $\quad$ AC = . . . cm
CD = . . . cm $\quad$ BE = . . . cm

3. Um ponto P marcado sôbre o segmento $\overline{AB}$ dista 62mm do extremo A e 28mm do extremo B:

Calcule: 1.º) o comprimento da *metade* de $\overline{AB}$;
2.º) a distância de P ao *ponto médio* (isto é, que está no *meio*) do segmento $\overline{AB}$.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 54

1. Completar as seguintes sentenças, de modo a torná-las *verdadeiras:*

1.ª) 1 m = . . . dm	7.ª) $2\frac{3}{4}$ dm = . . . cm
2.ª) 1 m = . . . cm	8.ª) 12 dam = . . . dm
3.ª) 1 m = . . . mm	9.ª) $3\frac{1}{4}$ hm = . . . m
4.ª) $\frac{1}{4}$ m = . . . cm	10.ª) 200 cm = . . . m
5.ª) $\frac{1}{5}$ m = . . . dm	11.ª) 8 mm = . . . cm
6.ª) $\frac{3}{5}$ m = . . . mm	12.ª) 12 dm = . . . dam

13.ª) . . . m = 46 dm

14.ª) . . . dam = 250 dm

15.ª) . . . dm = $2 \frac{1}{2}$ m

16.ª) . . . cm = 12 m

17.ª) . . . mm = 500 dm

18.ª) . . . km = 12 dam

19.ª) . . . hm = 20 km

20.ª) . . . km = 20 hm

2. Assinalar qual, das seguintes sentenças, é *verdadeira* ou *falsa:*

1.ª) 1 dm = 100 cm

2.ª) 1 m = 100 cm

3.ª) 1 dm = 0,1 m

4.ª) $\frac{1}{2}$ dm = 2 cm

5.ª) 3 m = $\frac{1}{3}$ dam

6.ª) $\frac{1}{4}$ m = $20 \frac{1}{2}$ cm

7.ª) $\frac{4}{10}$ dm = 40 cm

8.ª) 120 mm = 12 dm

9.ª) 5 dm = $\frac{1}{5}$ m

10.ª) 1 000 mm = 1 m

3. Dizer:

1.º) Quantos metros existem em 5 decímetros?
2.º) Um decâmetro quantos milímetros tem?
3.º) Quantos centímetros existem num hectômetro?

4. Efetuar as seguintes operações, exprimindo os resultados em km e cm:

1.º) 21,32 hm + 309 dm + 0,0152 km + 432,52 m + 1 235 dam
2.º) (48,392 km − 832 dam) + [3,568 km − (8,01 hm − 223 m)]

5. Idem:

1.º) 4,32 cm × 12
2.º) 131,89 hm + (8,32 km − 5,2 dam) × 10
3.º) 82,256 hm : 4
4.º) 0,3 × (89,5 km − 125 hm) + 12 km

6. O comprimento de uma estrada é de 38,41 km; de uma segunda é 256,15 hm e de uma terceira tanto quanto as duas primeiras juntas. Exprimir em *metros*, o comprimento das três estradas juntas.

7. Quanto dista, em quilômetros, a Terra da Lua, sabendo-se que essa distância equivale, em média, a 60 raios terrestres? (Nota: raio da Terra 6 370 000 m).

8. Um viajante percorreu em 7 horas, 33 600 metros. Quantos quilômetros fêz, em média, por hora?

9. O passo de um homem mede cêrca de 0,80 m. Quanto tempo empregará êsse homem para percorrer 4,240 km de uma estrada, sabendo-se que anda à razão de 100 passos por minuto?

10. Uma senhora comprou 20 metros de fazenda à razão de Cr$ 840,00 o metro. Se esta fazenda foi medida com uma régua que era 1 cm mais curta que o metro verdadeiro, pergunta-se: 1.º) Quanto de fazenda a senhora recebeu? 2.º) Quanto pagou a mais?

7. *Que é poligonal?*

Linha poligonal ou simplesmente *poligonal* (fig. 56) é o conjunto de segmentos de retas consecutivos, não pertencentes à mesma reta, tais que a extremidade do primeiro coincide com a origem do segundo, a extremidade do segundo com a origem do terceiro, e assim por diante. Tais segmentos dizem-se *lados* da poligonal.

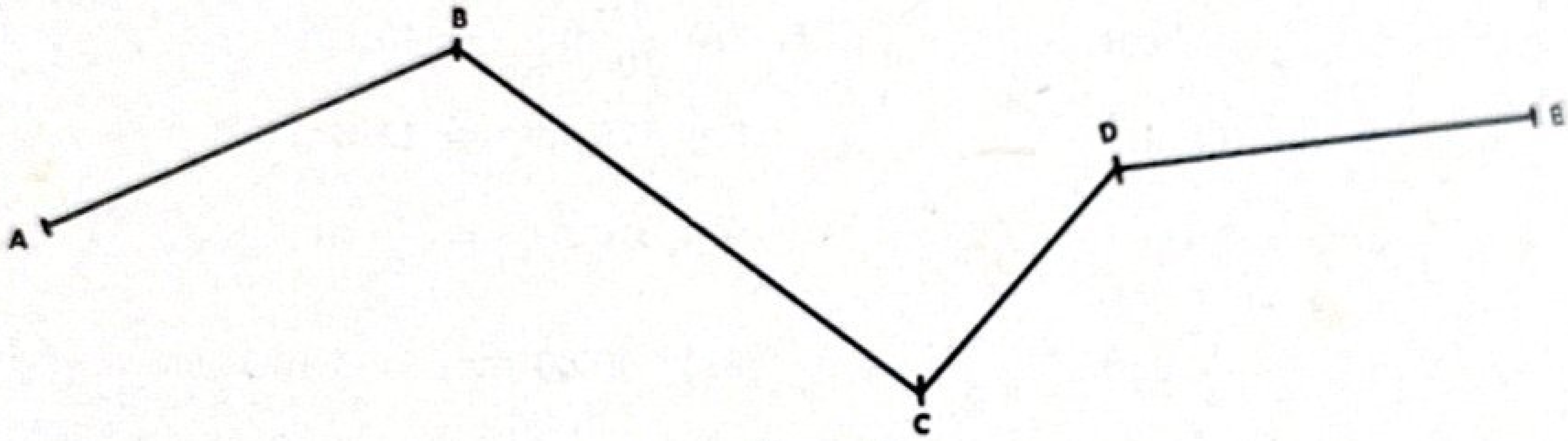


FIG. 56

A medida do comprimento de uma poligonal é dada pelo seu perímetro, que é a *soma das medidas dos comprimentos dos lados* que a compõem. Exemplo:

Calcular o *perímetro* da poligonal (fig. 56), cujos lados medem, respectivamente: $\overline{AB} = 3\text{cm}$; $\overline{BC} = 4\text{cm}$; $\overline{CD} = 2\text{cm}$; $\overline{DE} = 3\text{cm}$

Temos: perímetro $= AB + BC + CD + DE$

$$= 3\text{cm} + 4\text{cm} + 2\text{cm} + 3\text{cm} = 12\text{cm}$$

8. *Polígono; contôrno de um polígono*

Se a linha poligonal fôr *fechada*, isto é, a extremidade do último segmento *coincide* com a origem do primeiro, então a figura geométrica plana limitada por essa poligonal é denominada POLÍGONO (fig. 57).

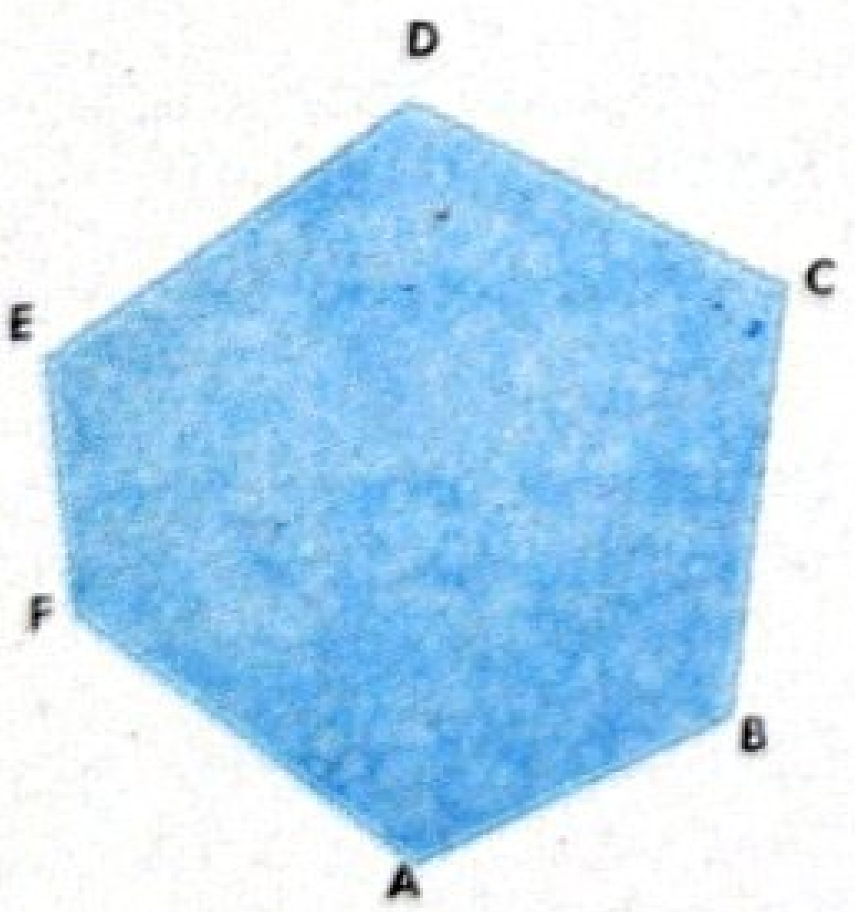


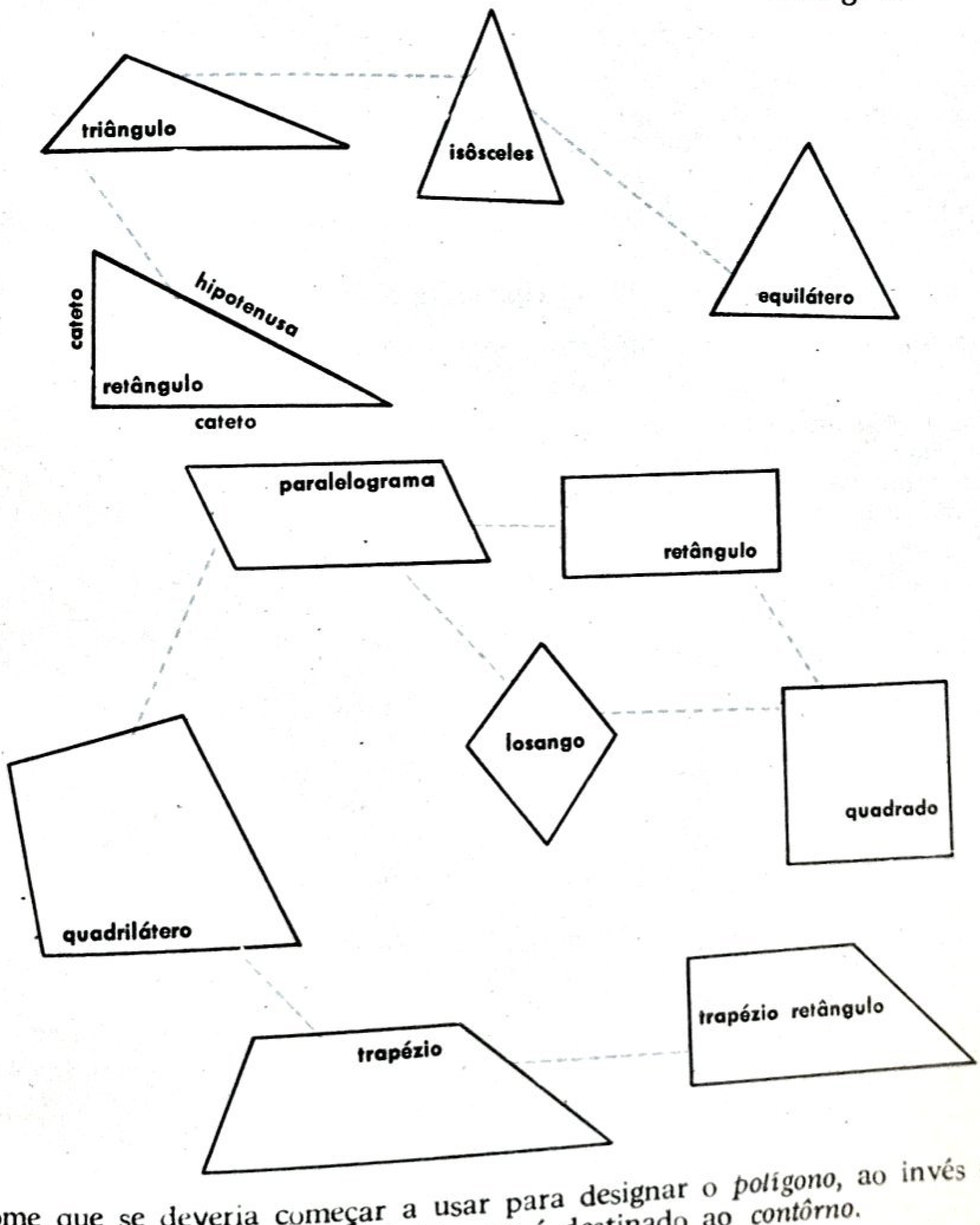
FIG. 57

Os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$ e $\overline{EF}$ são os *lados* e os pontos A, B, C, D, E e F, os *vértices* do polígono. Os ângulos (internos) do polígono são: FAB, ABC, BCD, CDE, DEF e EFA.

A linha poligonal fechada que determina o polígono constitui o seu contôrno. Os contornos, bem como os polígonos determinados, recebem denominações especiais, de acôrdo com o número de lados que possuem.

Assim, temos:

número de lados	nome do contôrno	nome do polígono
3	trilátero	triângulo
4	quadrilátero	quadrângulo (*)
5	pentalátero	pentágono
6	hexalátero	hexágono
.	.	.
.	.	.
.	.	.
10	decalátero	decágono



(*) Nome que se deveria começar a usar para designar o *polígono*, ao invés de *quadrilátero* (cujo sufixo designa *lado*), que é destinado ao *contôrno*.

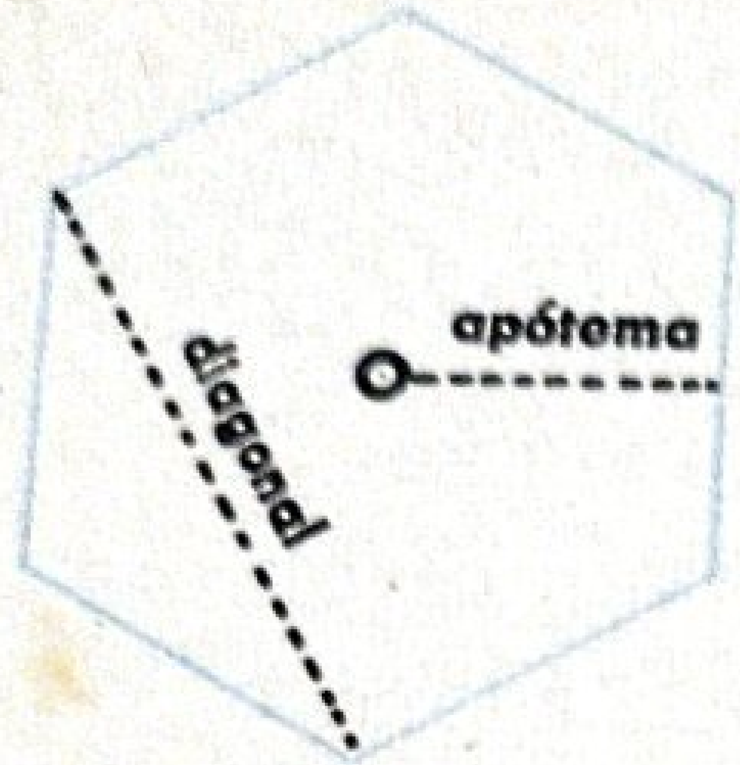


FIG. 58

Um polígono é REGULAR quando possui *todos* os seus *lados* iguais, assim como *todos* os seus *ângulos* (fig. 58).

Chama-se *apótema* de um polígono regular a *distância* do centro do polígono a um de seus lados (portanto, é o segmento de reta que une o centro do polígono ao meio do lado). O segmento de reta, cujas extremidades são *vértices* não consecutivos do polígono, diz-se DIAGONAL.

Qualquer polígono, com exceção do triângulo, admite diagonais.

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO — GRUPO 55

1. Num triângulo isósceles de perímetro igual a 32 dm (é o mesmo que dizer trilátero de perímetro 32 dm), o lado desigual mede 64 cm. Quanto mede (em cm) cada um dos lados iguais?

Primeiramente reduzem-se os *dados* do problema sempre na *mesma unidade*. Logo: *perímetro:* 32dm = 320cm

Então: 320cm − 64cm = 156cm representa a *soma* dos dois lados iguais e, portanto, 156cm : 2 = $\boxed{\text{78cm}}$ representa a *medida* de cada um dos lados iguais.

2. Uma das dimensões de um retângulo é o *dôbro* da outra. A soma de ambas é igual a 24m. Qual é o perímetro dêsse retângulo e a medida de cada uma das dimensões? Indicada uma das dimensões (comprimento da base, por exemplo) por □ a *sentença matemática* correspondente ao problema é:

$$\underbrace{2\,\square + \square}\; = 24 \text{ dm}$$

ou $$3\,\square = 24 \text{ dm}$$

e $$\square = 24 \text{ dm} : 3 = 8 \text{ dm}$$

Logo, uma das dimensões mede 8m; a outra, 16m e o perímetro:

$$16\text{m} + 16\text{m} + 8\text{m} + 8\text{m} = \boxed{48\text{m}}$$

3. Um decágono (o mesmo que decalátero para o problema) regular tem um perímetro *seis vêzes maior* que o perímetro de um quadrado, cujo lado mede 5cm. Quanto mede o lado do decágono?

Se o lado do quadrado mede 5cm, então o seu perímetro vale: 4 × 5cm = 20cm e, portanto, o perímetro do decágono será igual a: 6 × 20cm = 120 cm.

Logo, cada lado do decágono mede:

$$120\text{cm} : 10 = \boxed{12\text{cm}}$$

MEDIDA DO COMPRIMENTO DA CIRCUNFERÊNCIA

9. *Comprimento de uma circunferência*

Como é que você *mediria* o "comprimento" de uma circunferência qualquer? Qual o seu "*perímetro*"?

Agora, você deverá levar em conta, necessàriamente, o raio ou o diâmetro (que equivale a dois raios):

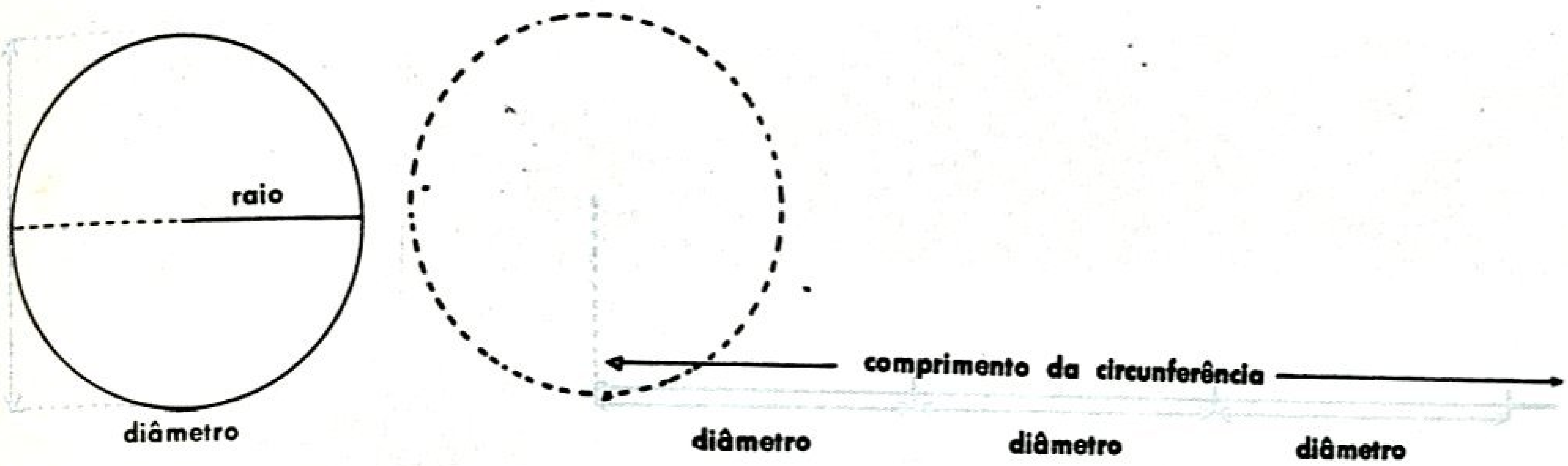


FIG. 59

A figura (59) mostra que o *comprimento* da circunferência vale um pouco mais do *triplo* do seu diâmetro!

Experimentalmente é fácil você mesmo constatar: contorne, por exemplo, uma roda de bicicleta com um barbante que fique bem ajustado à sua periferia e sôbre uma régua graduada procure ler, com a melhor aproximação possível, o resultado dessa *medida*. A seguir divida o número encontrado na régua pela medida do diâmetro da roda e você encontrará para quociente, mais ou menos, o número:

$$\boxed{3{,}14\ldots.}$$

Êsse número (que dá *quantas vêzes* a circunferência contém o seu diâmetro) é muito famoso em Matemática, pois **não é inteiro** e nem decimal (exato ou periódico), e é conhecido desde a Antiguidade (egípcios, babilônios, gregos, . . .). Recebe o nome de "pi", sendo representado pelo numeral π, que é uma letra do alfabeto grego.

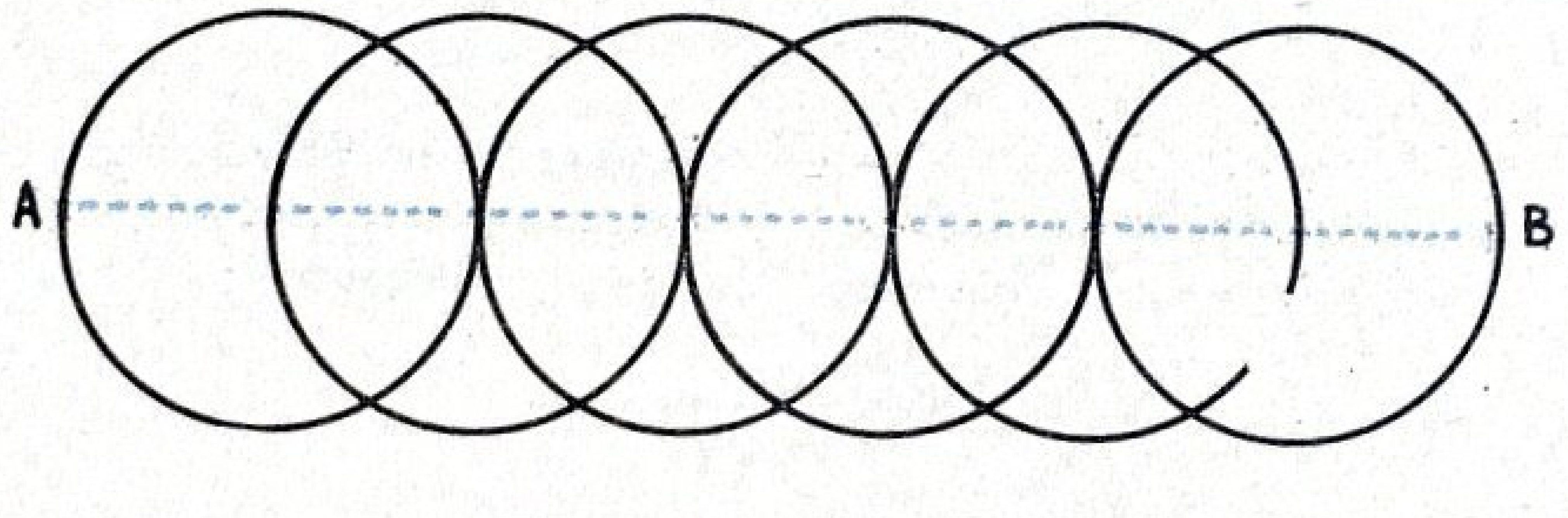
1. Observe o "nascimento" de π, efetuando a medida do contôrno de qualquer objeto de forma circular, como por exemplo: fundo de garrafas, a "bôca" de um copo, discos (dos diversos tamanhos que você conhece), direção de automóvel, etc . . . justapondo sempre um barbante ao redor do objeto escolhido e *dividindo* a medida encontrada pela do diâmetro dêsse mesmo objeto. O quociente que você encontrará (com aproximação, naturalmente) será sempre:

$$\boxed{3{,}1415\ldots}$$

E, se como exemplo "não palpável", você considerasse agora a circunferência da Terra, isto é, a medida do Equador (cêrca de 40 000 km) e dividisse pela medida do diâmetro da Terra (cêrca de 12 740 km), que encontraria como *quociente?*

Ainda: $\underline{3{,}1415\ldots!}$

2. Tôdas as circunferências têm 2cm de diâmetro. Calcule o comprimento do segmento AB e verifique o resultado encontrado sôbre uma régua graduada.



10. *"Fórmula" que dá o comprimento das circunferências*

Do que já foi estudado você pode concluir que:

$$\left[\begin{array}{c}\text{medida do comprimento da}\\ \text{circunferência}\end{array}\right] : \left[\begin{array}{c}\text{medida do}\\ \text{diâmetro}\end{array}\right] = \underline{3{,}141\ldots}$$

ou, representando por C a medida do comprimento de qualquer (*) circunferência; por $2R$, a medida de seu diâmetro e por π o $3{,}141\ldots$, temos:

$$C \quad : \quad 2R \quad = \quad \pi$$

ou

$\boxed{C = 2R \times \pi}$ como também $\boxed{C = 2 \times \pi \times R = 2\pi R}$ (lembrando a propriedade comutativa do produto)

(*) Representando o comprimento de *qualquer* circunferência por C, já se pode pensar C como uma *variável*, isto é, pode assumir infinitos valôres. O mesmo se pode dizer de R, enquanto que π, por ser uma *constante*, tem sempre o *mesmo valor* (3,1415926 . . . .).

Observação: Nos cálculos práticos o valor de π é tomado com um êrro por falta (3,14) ou por excesso (3,1416) quando se emprega a "fórmula": $C = 2R\pi$. De preferência usaremos o valor de π, por falta, nos dois problemas fundamentais:

1.º) Determinar o *comprimento* de uma circunferência conhecido o valor do *raio* (ou diâmetro);

2.º) Determinar o valor do *raio* (ou diâmetro) de uma circunferência da qual se conhece o *comprimento*.

Exemplos:

1. Calcular o *comprimento* de uma circunferência que possui 5cm de raio.

   Aplicando a "fórmula": $C = 2R \times \pi$ e tomando π como 3,14, temos:

$$C = 2 \times 5\text{cm} \times 3{,}14$$

ou

$$\boxed{C = 31{,}4 \text{ cm}}$$

2. Determinar o valor do *raio* de uma circunferência, cujo comprimento é 12,56dm.

   Agora conhece-se o C da fórmula e, portanto, dividindo-se (operação inversa da multiplicação) C por π, obtém-se o valor de $2R$ (diâmetro). O raio é a metade dêsse valor. Logo:

$$12{,}56\text{dm} : 3{,}14 = 4 \text{ dm (diâmetro)}$$

e

$$4\text{m} : 2 = \boxed{2 \text{ dm}} \quad \text{(raio)}$$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — Grupo 57

1. Uma poligonal é constituída de cinco segmentos tais que o primeiro mede 10cm e os seguintes sempre 5cm a mais que o anterior. Qual é, em decímetros, o valor de seu perímetro?
2. Num triângulo isósceles (mesmo que trilátero isósceles) o lado desigual mede 10dm. Um dos lados iguais mede 120cm. Qual é, em cm, o perímetro dessa figura?
3. Uma das dimensões de um retângulo é o triplo da outra. A soma das duas é igual a 36m. Qual o perímetro dêsse retângulo?
4. Complete a seguinte tabela relativa às dimensões de cinco retângulos:

comprimento . . .	8m	9m	. . .	4dam	68m
largura	6m	. . .	8m	27m	. . .
perímetro	. . .	32m	40m	. . .	2hm

5. Uma roda de bicicleta tem 65cm de diâmetro. Qual é o seu "perímetro"? Que distância percorreu um ciclista depois de a roda ter dado 1 000 voltas?

6. Complete o quadro:

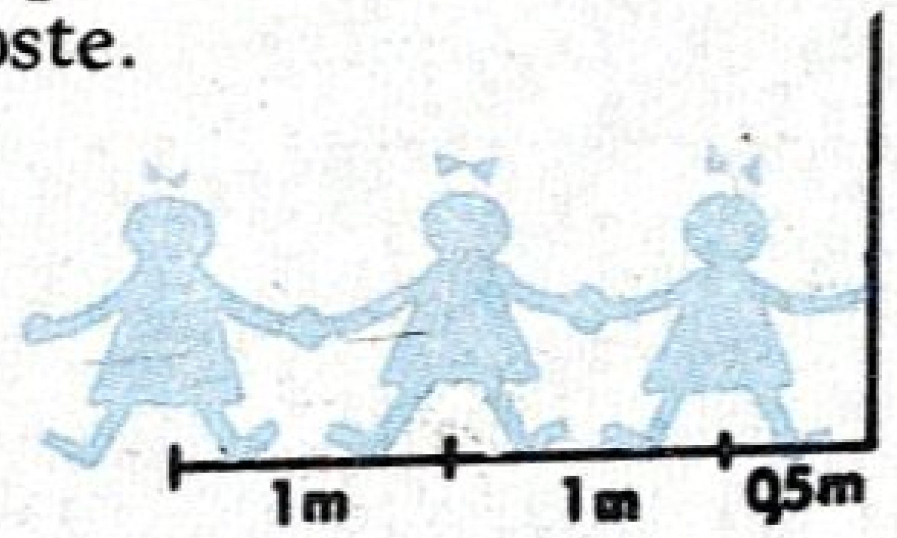
raio	5dm	...	3,5cm
comprimento	...	62,8cm	22cm
π	3,141	3,14	...

7. Cada uma das rodas, de 0,30m de raio, de um automóvel, deu 4 500 voltas percorrendo um certo trajeto. Quantos quilômetros percorreu êsse automóvel?

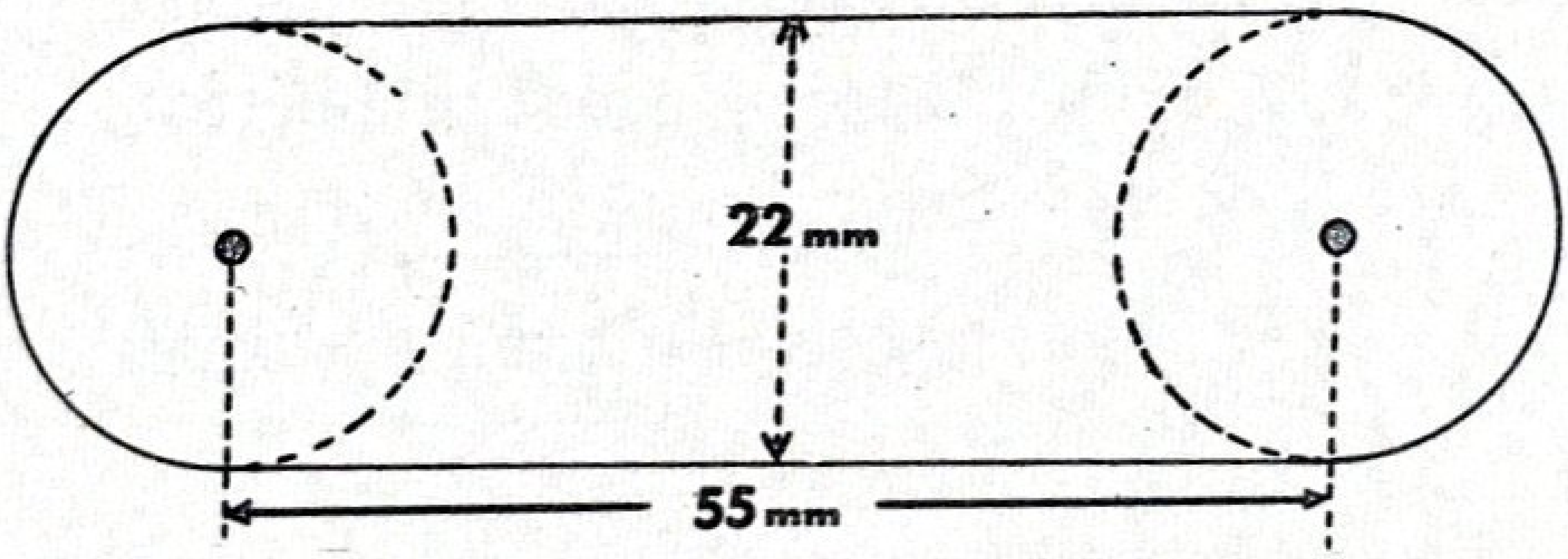
8. Qual o diâmetro da roda de minha bicicleta, sabendo-se que tem 31,4dm de comprimento? (Usar π com o valor de 3,14).

9. Meu carrinho andou 628 metros. Sei que cada uma de suas rodas tem 2cm de raio. Quantas voltas deu cada uma das rodas?

10. Calcular o percurso feito pelos meninos *A*, *B* e *C*, sabendo-se que cada um dá uma volta em tôrno do poste.



11. Qual é o comprimento da correia que passa pelas duas polias de mesmo diâmetro?



12. Complete as seguintes sentenças tornando-as *verdadeiras:*

a) $\pi = \dfrac{c}{2 \times \ldots}$ *b)* $c = 2 \times \ldots \times R$ *c)* $\ldots = \dfrac{c}{2\pi}$

Unidades de Superfície

11. *Área de uma superfície; unidade fundamental (S.M.D.): metro quadrado*

A MEDIDA de uma superfície é denominada área. Assim, é bom não *confundir*: superfície é uma GRANDEZA (de duas dimensões) e área é a MEDIDA dessa grandeza (portanto, um *número*).

Unidade fundamental: metro quadrado, que é a área de um quadrado de 1 m de lado.

Símbolo: m^2 (o expoente 2 "lembra" as duas *dimensões* da superfície).

Os *múltiplos* e *submúltiplos* do *metro quadrado* são as áreas dos quadrados que têm para lados os *múltiplos* e *submúltiplos* do metro. Assim, por exemplo, um *decímetro quadrado*, que se indica por 1 dm², é a área do quadrado (fig. 60) que tem para lado 1 dm.

Como: $1 \text{ dm} = 10 \text{ cm}$

dividindo-se dois lados consecutivos de um quadrado em 10 partes iguais e traçando-se paralelas aos lados, obteremos 100 quadrados menores, cada um dêles tendo 1 cm de lado e portanto 1 cm² de área. Logo:

$$\boxed{1 \text{ dm}^2 \doteq 100 \text{ cm}^2}$$

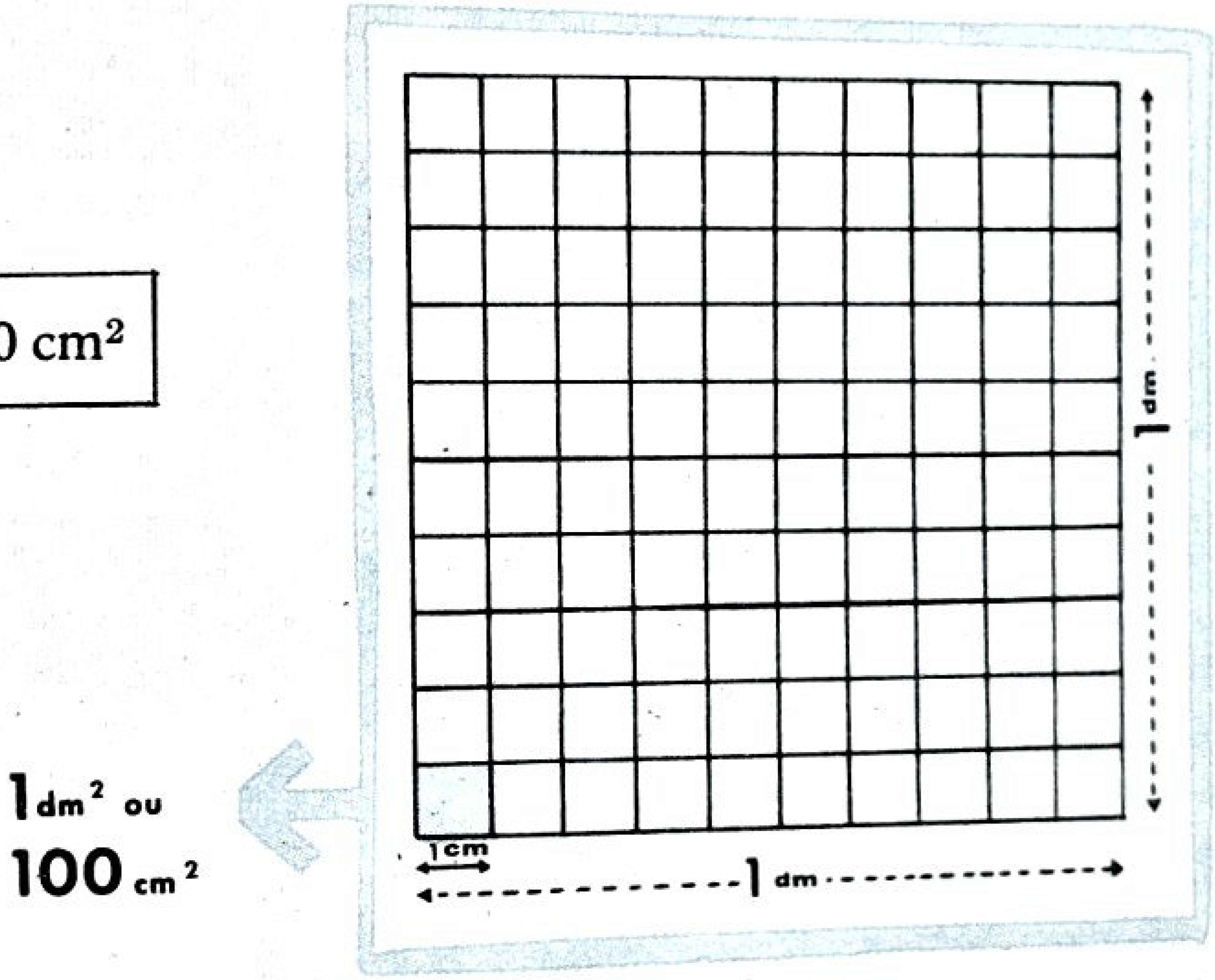


FIG. 60

e dizemos:

As unidades de superfície variam de 100 em 100, isto é, cada unidade vale 100 vêzes a que lhe é imediatamente inferior.

12. *Unidades secundárias do metro quadrado: múltiplos e submúltiplos*

Os principais múltiplos e submúltiplos do *metro quadrado*, figuram na tabela:

	NOMES	SÍMBOLOS	VALÔRES EM m^2
Múltiplos	quilôm. quadrado	km^2	1 000 000 m^2
	hectôm. quadrado	hm^2	10 000 m^2
	decâm. quadrado	dam^2	100 m^2
Unidade	*metro quadrado*	m^2	1 m^2
Submúltiplos .	decím. quadrado	dm^2	0,01 m^2
	centím. quadrado	cm^2	0,000 1 m^2
	milím. quadrado	mm^2	0,000 001 m^2

13. *Representação e leitura dos números que exprimem medidas de superfície*

Pelo fato de as unidades de superfície variarem de 100 em 100, os números decimais que exprimem medidas de superfície devem possuir um número par de algarismos decimais. Assim, por exemplo, ao invés de se escrever:

$$43{,}2 \ dm^2$$

deve-se escrever: $\boxed{43{,}20 \ dm^2}$

e lê-se: "quarenta e três decímetros quadrados e vinte centímetros quadrados".

14. *Mudança de unidade*

A mudança de unidade é, agora, feita deslocando-se a vírgula duas casas (*) para a *direita* ou para a *esquerda*, segundo se passa para uma unidade de ordem imediatamente *menor* ou *maior* e suprindo de zeros, caso faltem algarismos. Exemplos:

1.º) Reduzir: 34,5697 dam^2 a metros quadrados.

Nessa redução deve-se passar para *uma* unidade imediatamente inferior (m^2), portanto, basta deslocar a vírgula sòmente duas casas para a direita. Logo:

$$\boxed{34{,}5697 \ dam^2 = 3456{,}97 \ m^2}$$

(*) O expoente 2, usado para escrever as medidas de superfície, "lembra" também que o deslocamento da vírgula, agora, é de duas em duas casas.

2.º) Exprimir 126,80 dm^2 em decâmetros quadrados.

Agora, deve-se passar para *duas* unidades imediatamente superiores (m^2 e dam^2) e portanto a vírgula deve ser deslocada de QUATRO casas para a esquerda. Logo:

$$\boxed{126{,}80 \ dm^2 = 0{,}012680 \ dam^2}$$

3.º) Exprimir: 19,0130 m^2 nas outras unidades de superfície.

Temos:

$$\begin{aligned} 19{,}0130 \ m^2 &= 190130 \ cm^2 \\ &= 1901{,}30 \ dm^2 \\ &= 0{,}190130 \ dam^2 \\ &= 0{,}00190130 \ hm^2 \\ &= 0{,}0000190130 \ km^2 \end{aligned}$$

15. *Medidas agrárias*

Para medir as superfícies de campos, utilizam-se algumas das unidades já conhecidas, que recebem denominações especiais. A unidade agrária principal é o ARE que equivale a 1 dam^2 ou seja 100 m^2. Um múltiplo: hectare e um submúltiplo: centiare, completam o quadro.

Os símbolos e valôres correspondentes são:

hectare (ha)	$\Longleftrightarrow$	hectômetro quadrado	$\Longleftrightarrow$	10 000 m^2
are (a)	$\Longleftrightarrow$	decâmetro quadrado	$\Longleftrightarrow$	100 m^2
centiare (ca)	$\Longleftrightarrow$	metro quadrado	$\Longleftrightarrow$	1 m^2

É evidente que:

$$1 \ ha = 100 \ a$$
$$1 \ ca = 0{,}01 \ a$$

A mudança de unidade entre ca, a e ha é feita da mesma forma que nas medidas de superfície (deslocando-se a vírgula DUAS casas). Exemplos:

1.º) Reduzir 32,56 a a centiares.

Temos: 32,56 a = 3256 ca

2.º) Reduzir: 0,6892 ca a hectares.

Temos: 0,6892 ca = 0,00006892 ha

OBSERVAÇÃO: As medidas agrárias visam a concentrar as unidades de superfície do S.M.D. sòmente nas três mais usuais: m^2, dam^2, hm^2, respectivamente, com os nomes de centiare, are e hectare. Nestas condições deve-se empregar, principalmente, o hectare (ha) nas medidas das superfícies das *fazendas*, *sítios*, etc. . . . ao invés do *alqueire* que, apesar de muito usado ainda, *não é* unidade oficial (basta lembrar êste inconveniente: o alqueire *varia* de valor em diversos estados brasileiros!).

EXERCÍCIOS EXPLORATÓRIOS — Grupo 58

1. Desenhe um quadrado de 5cm de lado e verifique quantos cm^2 possui êsse quadrado.
2. Justifique, desenhando, que $\frac{1}{4}$ $dm^2 = 25\ cm^2$.
3. Mostre quantos quadrados de 1cm de lado existem num quadrado de 0,8dm de lado.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — Grupo 59

1. Complete as seguintes sentenças, de modo a torná-las *verdadeiras:*

   1.ª) $1\ m^2 = \ldots\ dm^2$
   2.ª) $1\ m^2 = \ldots\ cm^2$
   3.ª) $\frac{1}{4}\ m^2 = \ldots\ dm^2$
   4.ª) $\frac{3}{4}\ dam^2 = \ldots\ m^2$
   5.ª) $\frac{1}{2}\ m^2 = \ldots\ cm^2$
   6.ª) $\frac{1}{5}\ km^2 = \ldots\ m^2$
   7.ª) $\frac{3}{5}\ dm^2 = \ldots\ cm^2$
   8.ª) $2\frac{1}{4}\ hm^2 = \ldots\ m^2$
   9.ª) $1\frac{3}{4}\ dam^2 = \ldots\ dm^2$
   10.ª) $200\ cm^2 = \ldots\ m^2$
   11.ª) $\ldots\ dm^2 = 200\ cm^2$
   12.ª) $\ldots\ dam^2 = 46\ m^2$
   13.ª) $\ldots\ m^2 = 30\ dm^2$
   14.ª) $\ldots\ hm^2 = 84\ dam^2$
   15.ª) $\ldots\ cm^2 = 2\ m^2$
   16.ª) $\ldots\ km^2 = 768315\ m^2$
   17.ª) $\ldots\ mm^2 = 200\ cm^2$
   18.ª) $\ldots\ m^2 = 4500\ cm^2$
   19.ª) $\ldots\ cm^2 = 24\ dm^2$
   20.ª) $\ldots\ m^2 = 20\ dm^2$

2. Assinalar qual, das seguintes sentenças, é verdadeira ou falsa:

   1.ª) $1\ m^2 = 100\ dm^2$
   2.ª) $1\ m^2 = 100\ cm^2$
   3.ª) $1\ dm^2 = 0{,}01\ m^2$
   4.ª) $\frac{1}{2}\ m^2 = 5\ dm^2$
   5.ª) $\frac{1}{4}\ m^2 = 5\ dm^2$
   6.ª) $10\,000\ mm^2 = 10\ cm^2$
   7.ª) $\frac{3}{5}\ m^2 = 600\ dm^2$
   8.ª) $\frac{1}{2}\ cm^2 = 50\ mm^2$
   9.ª) $1\ hm^2 = 10\,000\ cm^2$
   10.ª) $1\ km^2 = 10\,000\ m^2$

3. Exprimir:

   1.º) em ares: 6 ha; 500 ca; 3 ha 25 a; 4 ha 8a
   2.º) em centiares: 5 a; 3 ha; 5a 15 ca; 3a 8ca; 1 ha 5 a 20 ca
   3.º) em hectares: 400 a; 13 500 ca; 8 000 a; 80 000 ca.

4. Completar:

1.º) 350 ca = ... a — 3.º) 4 315 a = ... ha — 5.º) 8,5 ha = ... a

2.º) 35 ca = ... a — 4.º) 207 a = ... ha — 6.º) 0,92 ha = ... a

5. Exprimir:

1.º) em ares: 6 400 m^2; 32 dam^2; 80 hm^2

2.º) em hectares: 12 hm^2; 400 dam^2; 50 000 m^2

3.º) em centiares: 36 m^2; 8 dam^2; 0,8750 hm^2

6. Completar:

1.º) 6 ha 15a 10 ca = ... m^2 — 3.º) 53 560 m^2 = ... ha ... a ... ca

2.º) 36a 9 ca = ... m^2 — 4.º) 8 709 m^2 = ... a ... ca

7. Efetuar as seguintes *operações*, exprimindo os resultados em m^2:

1.º) 42,35 dam^2 + 0,0181 km^2 + 4 351 m^2 + 2,01 hm^2

2.º) 131,25 dam^2 − 9 835,10 m^2

8. Idem, exprimindo os resultados em km^2:

1.º) 8 400 km^2 × 10 — 3.º) 12 300 000 m^2 : 300

2.º) 35 25,21 hm^2 + 5681,50 dam^2 × 0,5 — 4.º) 1,90 × (3,21 km^2 − 15,35 hm^2)

9. Um país de superfície igual a 8 500 000 km^2 tem uma população de 85 milhões de habitantes. Qual a população dêsse país por km^2?

10. Um estado tem a população de 10 000 000 habitantes e uma média de 40 habitantes por km^2. Qual é a sua superfície?

11. Uma fazenda de pasto, com a superfície de 480 ha 25 a foi vendida à razão de Cr$ 100 000,00 o hectare. Qual foi o preço da venda?

12. Em um campo de 3ha de superfície, um fazendeiro deseja colher 250 kg de certo tipo de grão, por hectare. Quantos sacos de 50 kg, dêsse grão, poderá colher?

ÁREAS DAS PRINCIPAIS FIGURAS GEOMÉTRICAS PLANAS

16. *Medida de um polígono*

A *medida* da superfície de um *polígono* é expressa pela sua *área*. Assim, pode-se escolher *qualquer* figura geométrica conhecida (triângulo, quadrado, etc ...) para medir a superfície de um polígono.

Seja, por exemplo, *medir* a superfície de um *hexágono regular* (fig. 61), de 1cm de lado, tomando por *unidade* o *triângulo equilátero* **u**, de 1cm de lado.

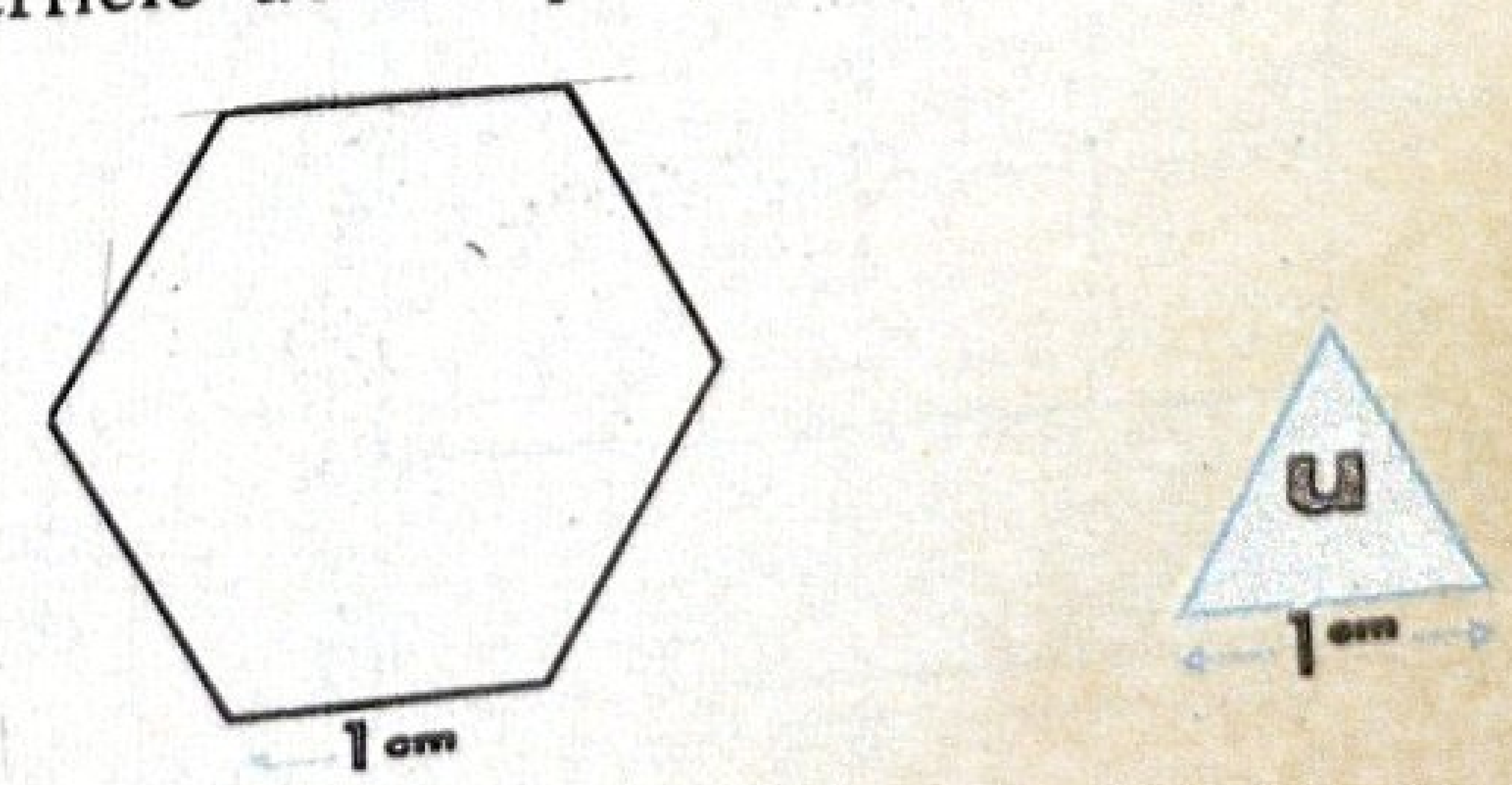


FIG. 61

É fácil verificar, *experimentalmente*, que o hexágono conterá exatamente 6 dêsses triângulos. Basta desenhar, em papel à parte, o triângulo equilátero **u** e, a seguir, com uma tesoura (que siga o contôrno do triângulo) destacar o pedaço de papel que contenha a sua superfície e constatar que tal superfície está contida 6 vêzes na superfície do hexágono. Logo:

$$\left[\begin{array}{c}\text{medida da superfície do hexágono,}\\ \text{em relação à unidade } \mathbf{u}\end{array}\right] = 6$$

ou

$$\text{m (Hexágono)}_u = 6$$

e, mais pràticamente:

$$\boxed{\text{área do Hexágono} = 6\,\mathbf{u}}$$

Calcule você, agora, como exercício, a área do *triângulo equilátero* (fig. 62) que possui 2cm de lado, usando a mesma unidade anterior **u**.

O resultado será:

$$\boxed{\text{área do Triângulo} = \ldots\ \mathbf{u}}$$

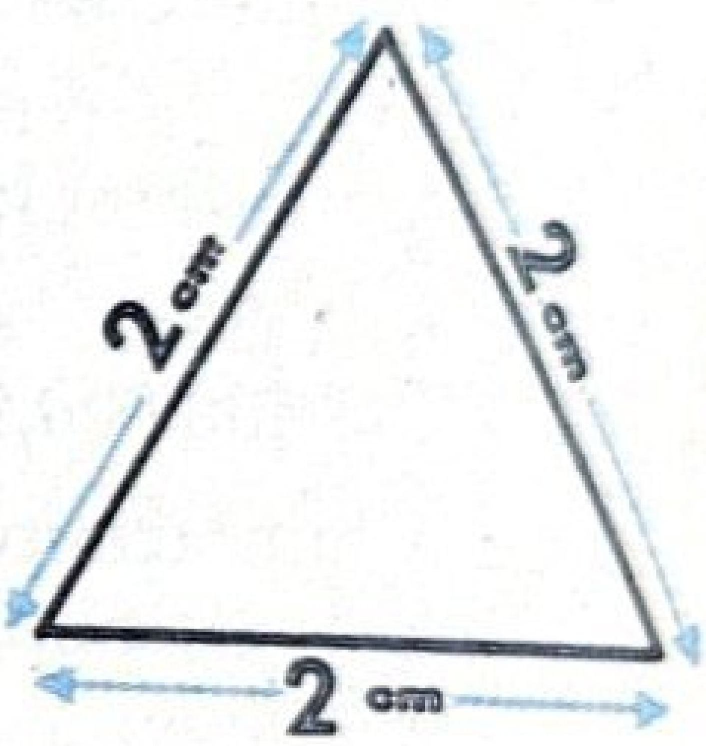


FIG. 62

Nas expressões usuais da *área* de uma figura plana, dentro do S.M.D., emprega-se como *unidade de medida* o quadrado, cujo lado é dado pelas unidades de comprimento (do S.M.D.) conhecidas.

17. *Área do quadrado*

Seja, por exemplo, calcular a área do quadrado de 4cm de lado (fig. 63) tomando por *unidade de medida* o quadrado que possui 1cm de lado, isto é:

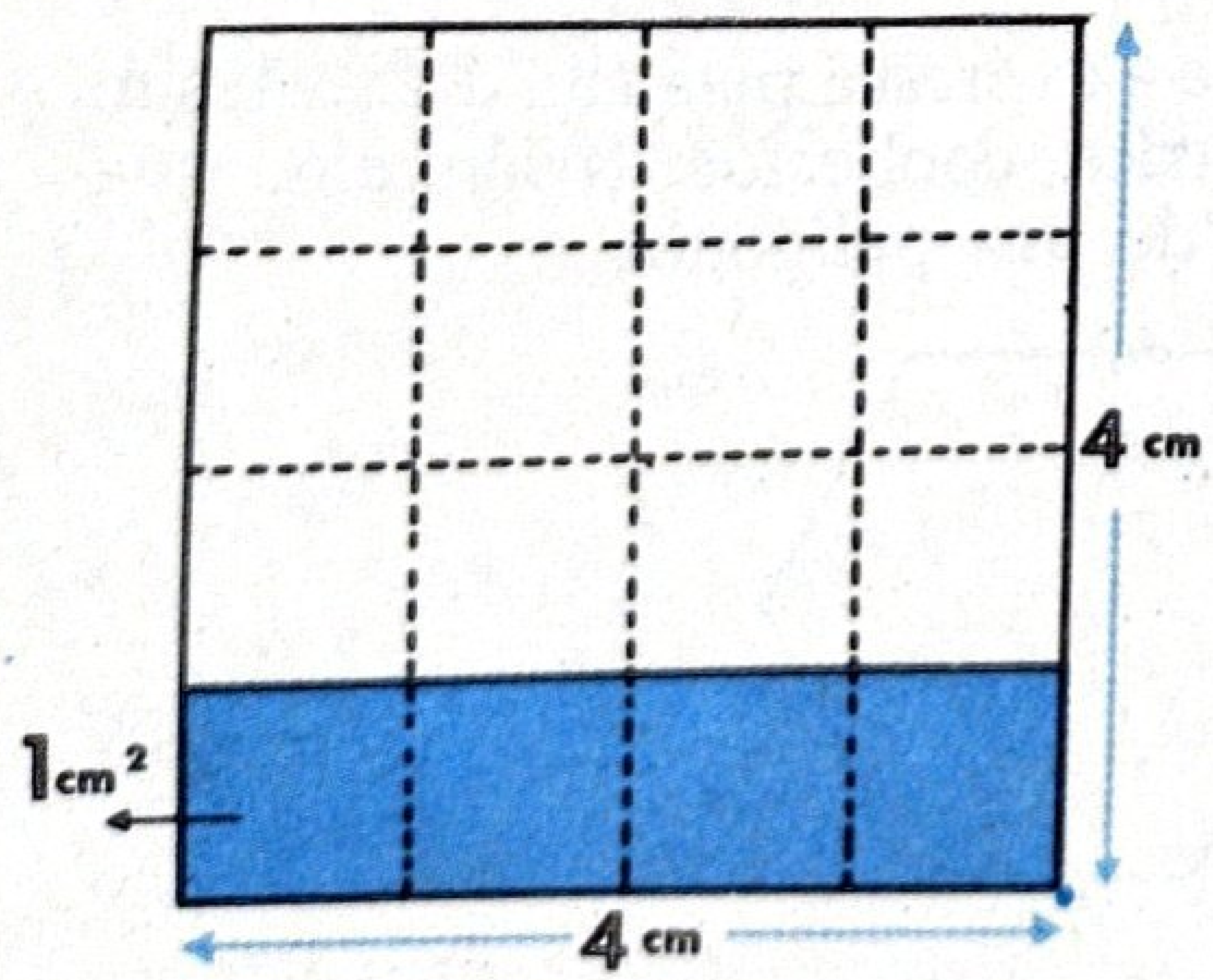


FIG. 63

$$u = 1\ cm^2$$

Como cada "faixa" do quadrado dado contém 4u e existindo quatro faixas no total, segue-se que a *medida* do quadrado, ou seja, a sua *área* é dada por: $4 \times 4u = 16u$, isto é:

$$\boxed{A_{\square} = 16\ cm^2}$$

Se o lado do quadrado fôr medido em m a área será expressa em m^2; se fôr em dm, a área será em dm^2, e assim por diante. Portanto: *a área do quadrado é expressa sempre na unidade de superfície que corresponde à unidade de comprimento utilizada para a medida do lado.*

Do que foi visto decorre que a área de um quadrado é obtida multiplicando a medida de seu lado por si mesma. Como técnica de cálculo, usa-se a fórmula:

$$\boxed{\text{área do quadrado} = \text{lado} \times \text{lado}}$$

ou indicando o lado de um quadrado *qualquer* por l:

$$A_{\square} = l \times l = l^2$$

Observação: Pode acontecer, que o quadrado não contenha um *número exato de centímetros quadrados*, como por exemplo, no caso do lado medir (fig. 64)

$$34 \text{ mm} = 3{,}4 \text{ cm}$$

a área será:

$$34\text{mm} \times 34\text{mm} = \boxed{1\,156 \text{ mm}^2} = \boxed{11{,}56 \text{ cm}^2}$$

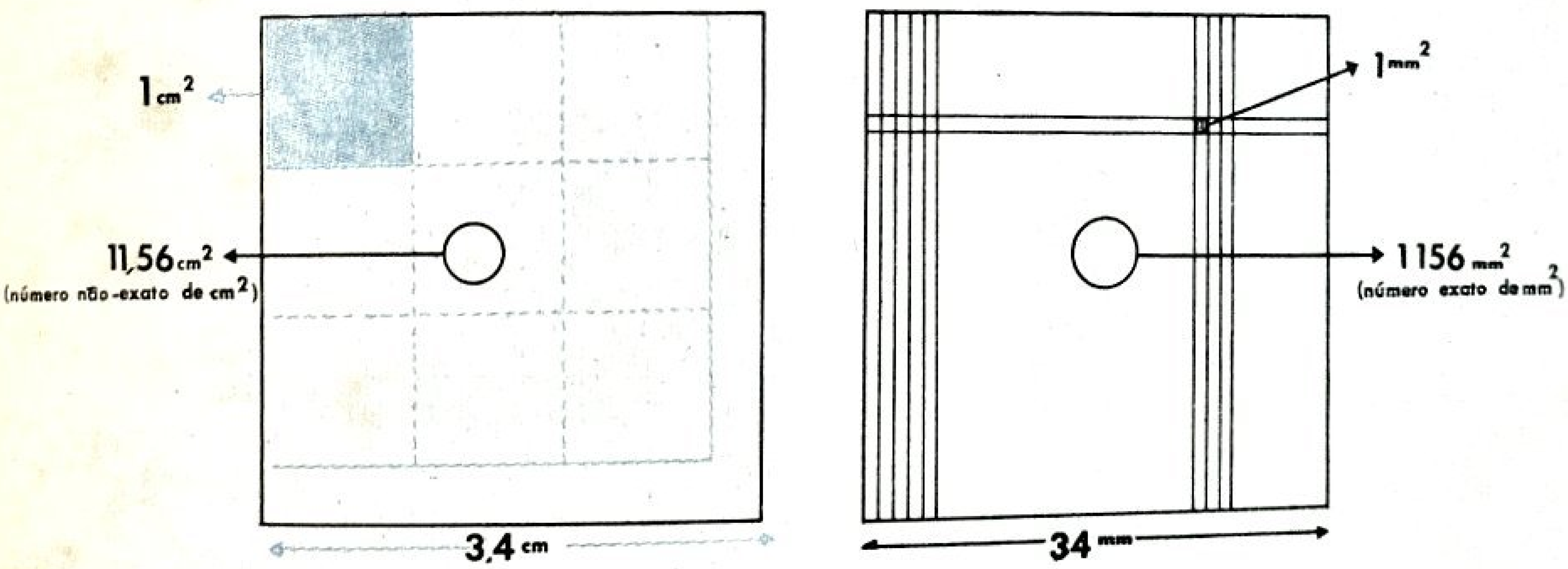


Fig. 64

Preste, agora, atenção nas duas importantes questões:

1.ª) Para calcular a área de um quadrado, conhecida a medida de seu lado, basta elevar ao quadrado essa medida;

2.ª) Inversamente, conhecida a área do quadrado, a medida de seu lado é calculada aplicando a operação inversa de "elevar ao quadrado", isto é, extrair a raiz quadrada.

Logo: $A_{\square} = l^2 \iff l = \sqrt{A_{\square}}$

Aplicações:

1. Determinar a área do quadrado, cujo lado mede 15cm.

Temos: $A_{\square} = l^2$

ou $A_{\square} = (15\text{cm})^2 = \boxed{225 \text{ cm}^2}$

2. Um quadrado tem 144 m² de área. Qual a medida de seu *lado*?

Temos: $l = \sqrt{A_{\square}}$

ou $l = \sqrt{144\text{m}^2} = \boxed{12 \text{ m}}$

3. O perímetro de um quadrado é de 52 dm. Calcular a área do quadrado.

Temos: medida de um lado: $52\text{dm} : 4 = 13 \text{ dm}$

área do quadrado : $(13\text{dm})^2 = \boxed{169 \text{ dm}^2}$

18. *Área do retângulo*

Seja, por exemplo, o *retângulo* (fig. 65) de 5cm de *base* e 3 cm de *altura*. Êsse retângulo contém: $3 \times 5 = 15$ quadrados de 1 cm de lado ou seja 15 cm². Portanto, a *área* do retângulo, em cm² é obtida pelo produto:

$$3\text{cm} \times 5\text{cm} = 15 \text{ cm}^2$$

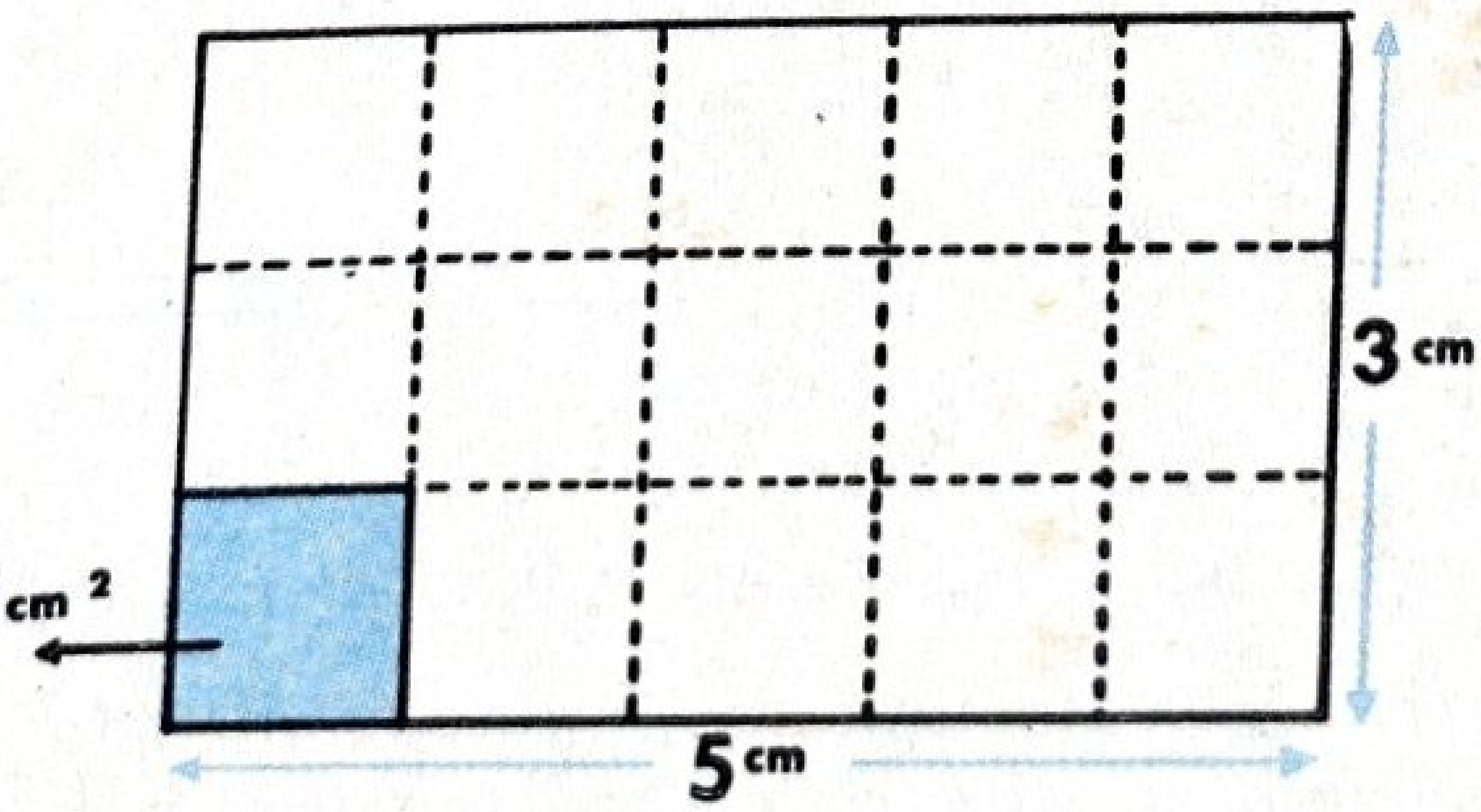


FIG. 65

Logo: a área de um *retângulo* é calculada multiplicando a medida da base pela medida da altura.

$$\boxed{\text{Área do retângulo} = \text{base} \times \text{altura}}$$

Indicando a medida da base por b e a da altura por a a técnica de cálculo usa a *fórmula*:

$$\boxed{A_{\square} = b \times a}$$

DUAS IMPORTANTES QUESTÕES:

1.ª) Para calcular a *área* de um *retângulo*, conhecidas as medidas da *base* e da *altura*, basta *multiplicar* essas medidas;

2.ª) INVERSAMENTE, conhecidas a *área do retângulo* e a *medida* de *uma* das dimensões, para calcular a medida da outra dimensão, basta *dividir* a área pela medida conhecida.

Logo:

$$\boxed{A_{\square} = b \times a} \iff \boxed{b = A_{\square} : a}$$
$$\boxed{A_{\square} = b \times a} \iff \boxed{a = A_{\square} : b}$$

Aplicações:

1. Calcular a área do retângulo que possui 3,5 dm de base e 22 cm de altura.
   Reduzem-se, primeiramente, as medidas da base e da altura à *mesma unidade de medida* (de preferência na menor delas), isto é:

$$\left.\begin{array}{l} \text{base} = 3{,}5\text{dm} = 35\text{cm} \\ \text{altura} = 22\text{cm} \end{array}\right\} \text{área} = 35\text{cm} \times 22\text{cm} = \boxed{770\ \text{cm}^2}$$

2. Um retângulo tem 96 cm^2 de área. Sabendo-se que a base mede 12cm, calcular a medida da altura.

Como: $\quad a = A_{\square} : b$

vem: $\quad a = 96\text{cm}^2 : 12\text{cm} = \boxed{8\text{cm}}$

19. *Área do paralelogramo*

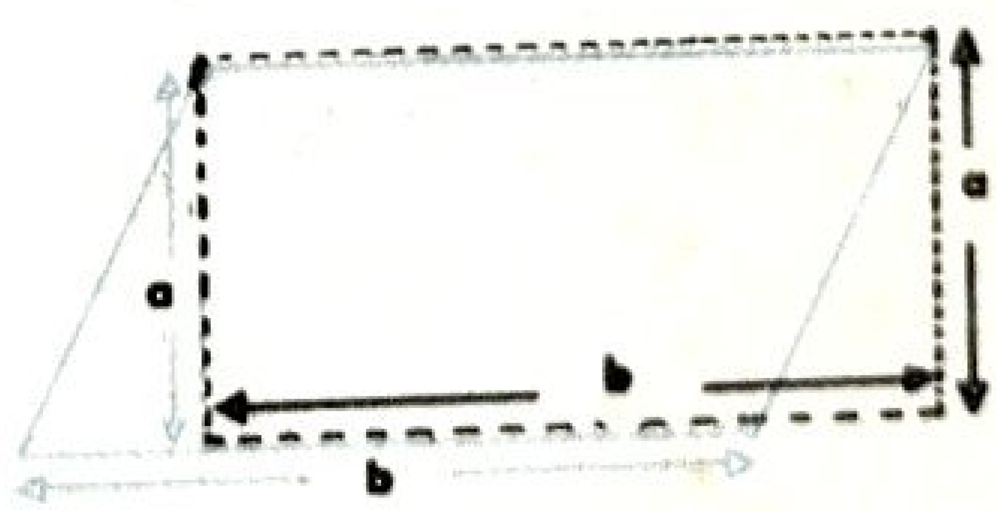


FIG. 66

Consideremos o *paralelogramo* (fig. 66) de base b e altura a. É fácil concluir que o paralelogramo "vermelho" compõe-se das *mesmas partes* que o retângulo "azul", isto é, são *equivalentes*.

Nestas condições êles têm a *mesma área.*

Logo:

$$\boxed{\text{Área do paralelogramo} = \text{base} \times \text{altura}}$$

ou $$A_{\square} = b \times a$$

Continuam valendo as DUAS IMPORTANTES QUESTÕES (direta e inversa) estudadas com o retângulo.

20. *Área do triângulo*

Seja o *triângulo* (fig. 67) que, como é fácil de se constatar, é a metade do paralelogramo pontilhado.

Logo:

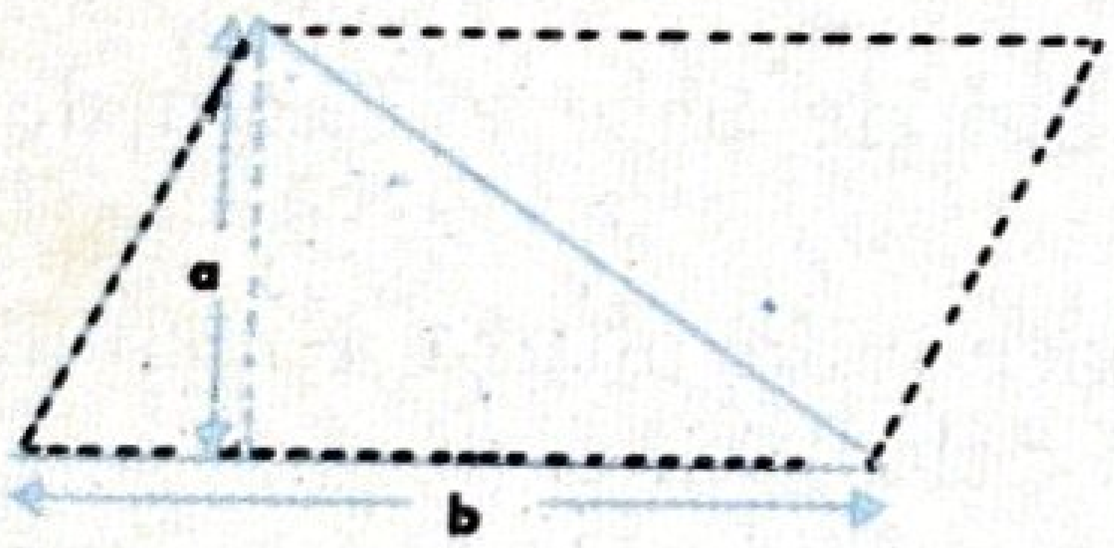


FIG. 67

$$\boxed{\text{Área do triângulo} = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}}$$

ou $$A_{\triangle} = \frac{b \times a}{2}$$

No caso do triângulo ser *retângulo* a *base* e a *altura* são os *catetos* do triângulo e, portanto, a área será igual ao semi-produto dos catetos.

DUAS IMPORTANTES QUESTÕES:

1.ª) Para calcular a *área* de um *triângulo*, conhecidas as medidas da *base* e da *altura*, basta multiplicar essas medidas e dividir o resultado por 2;

2.ª) INVERSAMENTE, conhecidas a *área do triângulo* e a medida de *uma* das dimensões, para calcular a medida da outra dimensão, basta dividir o dôbro da área (isto é, área multiplicada por 2) pela medida conhecida.

Logo:

$$A_{\triangle} = \frac{b \times a}{2} \iff b = (2 \times A_{\triangle}) : a$$

$$\iff a = (2 \times A_{\triangle}) : b$$

Aplicações:

1. Calcular a *área* do triângulo, sabendo-se que a base mede 1,8 dm e a altura 50cm.

   Temos: 1,8dm = 18cm e, portanto: $A_{\triangle} = \dfrac{18\text{cm} \times 50\text{cm}}{2} = \boxed{450\ \text{cm}^2}$

2. Calcular a *base* de um triângulo, cuja área é 500 cm^2, sabendo-se que a sua altura é de 20cm.

   Temos:

   $$b = (2 \times 500\ \text{cm}^2) : 20\text{cm} =$$

   $$b = 1\,000\ \text{cm}^2 : 20\text{cm} = \boxed{50\ \text{cm}}$$

21. *Área do trapézio*

Seja o *trapézio* (fig. 68), onde b_1, b_2 e a, representam as medidas das *base maior, base menor* e *altura*, respectivamente.

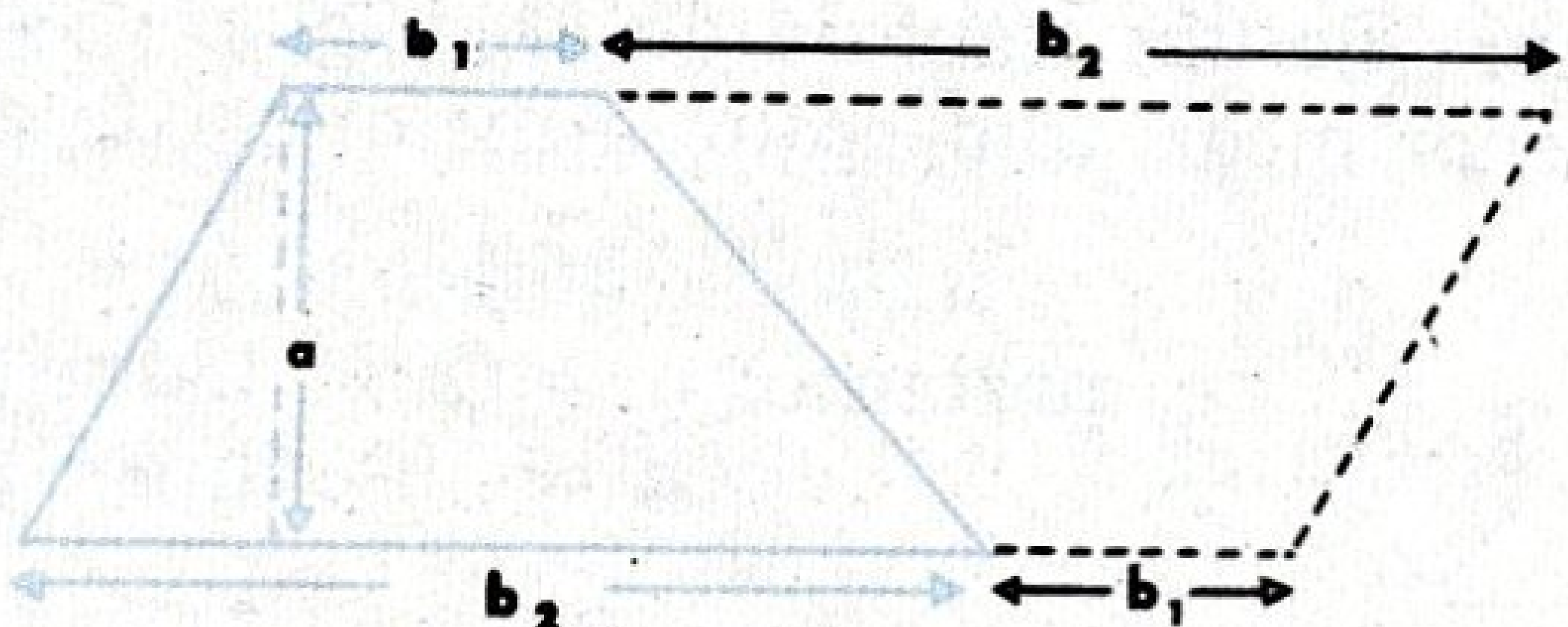


FIG. 68

A figura pontilhada, obtida completando a base maior com a menor e a base menor com a maior, é um paralelogramo de base (b_1+b_2) e altura a, cuja área é:

$$(b_1+b_2) \times a$$

Fácil é verificar que o trapézio dado é a *metade* dêsse paralelogramo e, portanto, a sua área será igual a:

$$\boxed{A = \frac{(b_1 + b_2) \times a}{2}}$$

ou seja:

$$\boxed{\text{Área do trapézio} = \frac{(\text{base maior} + \text{base menor}) \times \text{altura}}{2}}$$

Duas importantes questões:

1.ª) Conhecidos: (b_1+b_2) e a, determina-se $A_{\square}$ por meio de uma multiplicação e uma divisão por 2;

2.ª) Inversamente, conhecidos $A_{\square}$ e (b_1+b_2), determina-se a por meio de uma multiplicação por 2 e uma divisão; o mesmo processo é aplicado quando se conhece $A_{\square}$ e a, e deseja-se (b_1+b_2).

Logo:

$$\boxed{A_{\square} = \frac{(b_1+b_2)\times a}{2}} \iff \boxed{a = (2\times A_{\square}):(b_1+b_2)}$$

$$\iff \boxed{(b_1+b_2) = (2\times A_{\square}):a}$$

Aplicações:

1. Calcular a área do trapézio cujas bases medem, respectivamente, 16cm e 12cm e a altura, 8cm.

   Temos:

$$A_{\square} = \frac{(12\text{cm}+16\text{cm})\times 8\text{cm}}{2} = \frac{28\text{cm}\times 8\text{cm}}{2} = \boxed{112\ \text{cm}^2}$$

2. Calcular a altura de um trapézio de área igual a 48 dm², sabendo-se que a base menor mede 4dm e que a maior mede o triplo da menor.

   Temos:

$$\left.\begin{array}{l} b_2 = 4\ \text{dm} \\ b_1 = 12\ \text{dm} \end{array}\right\} b_1+b_2 = 16\ \text{dm}$$

e, portanto: $a = (2\times 48\text{dm}^2):16\text{dm}$

$a = 96\ \text{dm}^2 : 16\text{dm} = \boxed{6\text{dm}}$

22. Área do losango

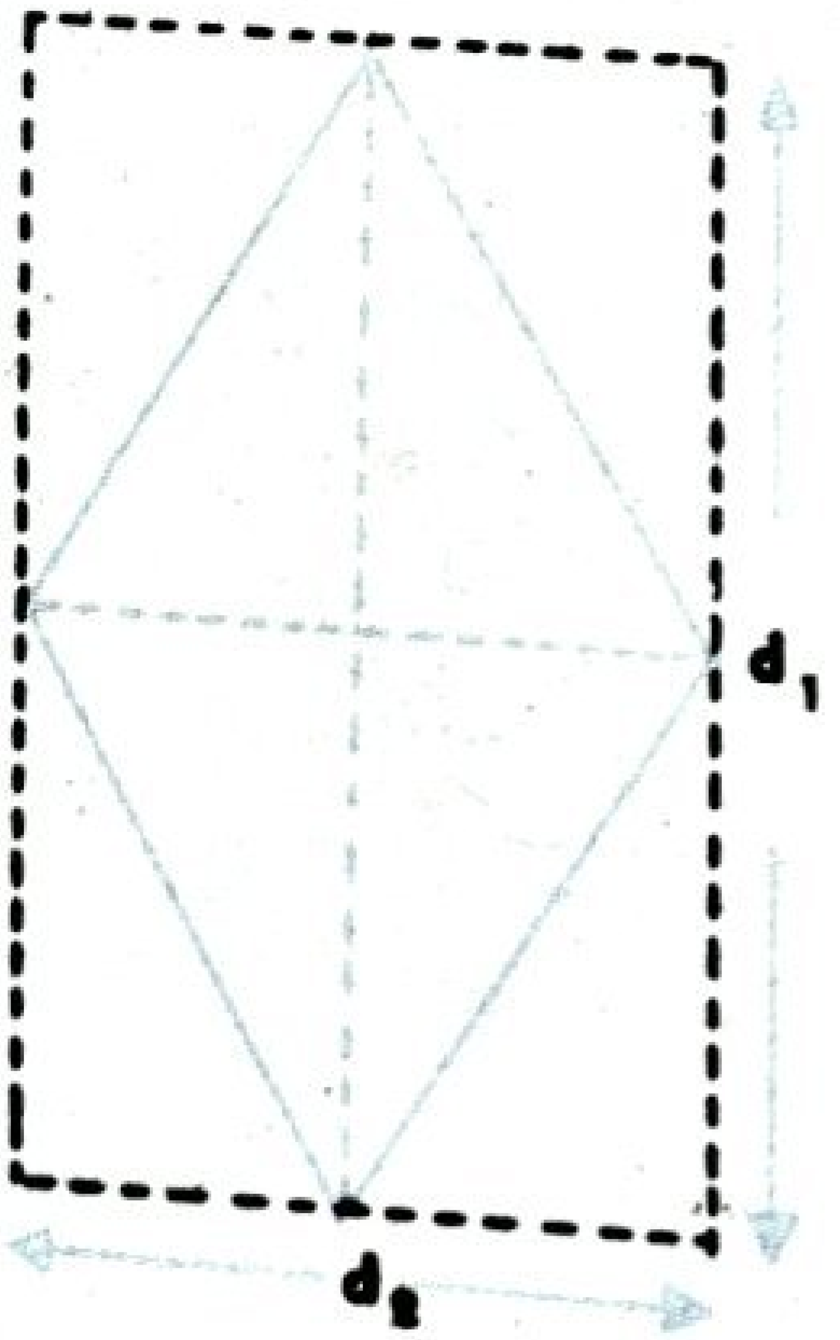


Fig. 69

Seja o *losango* (fig. 69), onde d_1 e d_2, representam as medidas das diagonais *maior* e *menor*, respectivamente.

A figura pontilhada, que é um retângulo, contém oito triângulos *iguais*, dos quais quatro compõem o losango. Portanto, a área do losango é a metade da área do retângulo de dimensões d_1 e d_2. Logo:

$$\boxed{\text{Área do losango} = \frac{\text{diagonal maior}\times\text{diagonal menor}}{2}}$$

ou

$$\boxed{A_{\Diamond} = \frac{d_1\times d_2}{2}}$$

DUAS IMPORTANTES QUESTÕES:

1.ª) Para calcular a *área* de um *losango*, conhecidas as medidas das *diagonais*, basta MULTIPLICAR essas medidas e DIVIDIR O RESULTADO POR 2;

2.ª) INVERSAMENTE, conhecidas a *área do losango* e a medida de *uma* das diagonais, para calcular a medida da outra, basta DIVIDIR O DÔBRO DA ÁREA pela medida conhecida.

Logo:

$$A_{\lozenge} = \frac{d_1 \times d_2}{2} \iff d_1 = (2 \times A_{\lozenge}) : d_2$$

$$\iff d_2 = (2 \times A_{\lozenge}) : d_1$$

Aplicações:

1. As diagonais de um losango medem, respectivamente, 14dm e 6dm. Calcular a área dêsse losango.

   Temos:

$$A_{\lozenge} = \frac{14\text{dm} \times 6\text{dm}}{2} = \boxed{42 \text{ dm}^2}$$

2. A área de um losango, cuja diagonal maior mede 14dm, é igual a 42 dm². Quanto mede a outra diagonal dêsse losango?

   Temos:

$$d_2 = (2 \times 42\text{dm}^2) : 14\text{dm}$$

$$d_2 = 84 \text{ dm}^2 : 14\text{dm} = \boxed{6 \text{ dm}}$$

23. *Área do círculo*

Consideremos o *círculo* de centro *O* e cujo RAIO meça *R* (fig. 70):

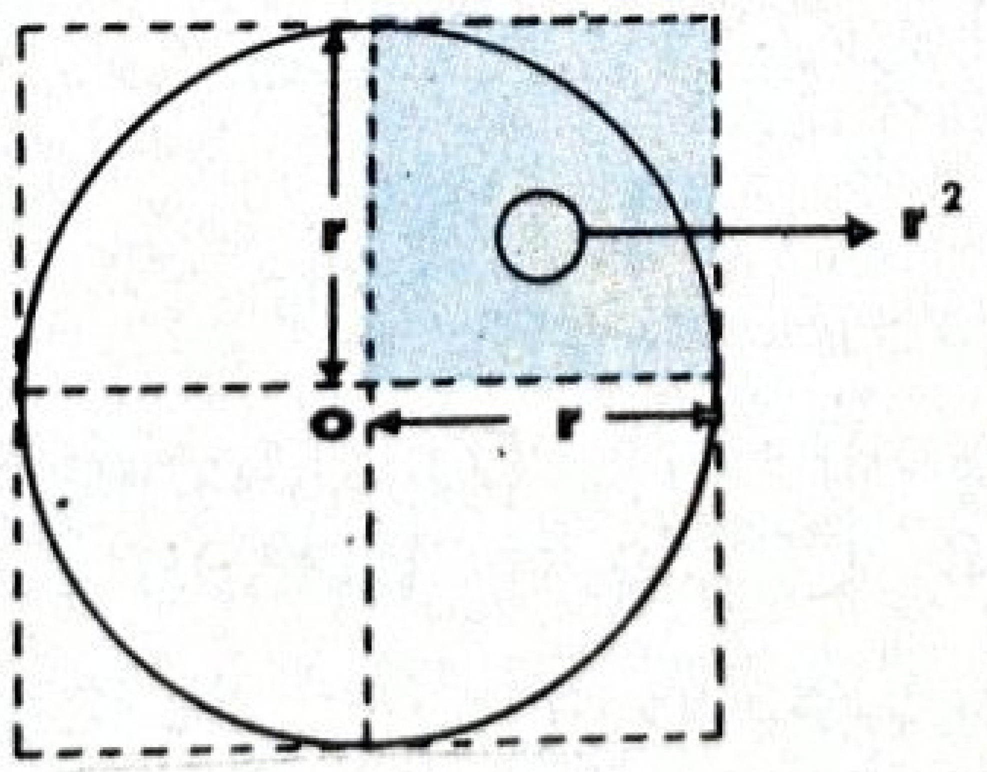
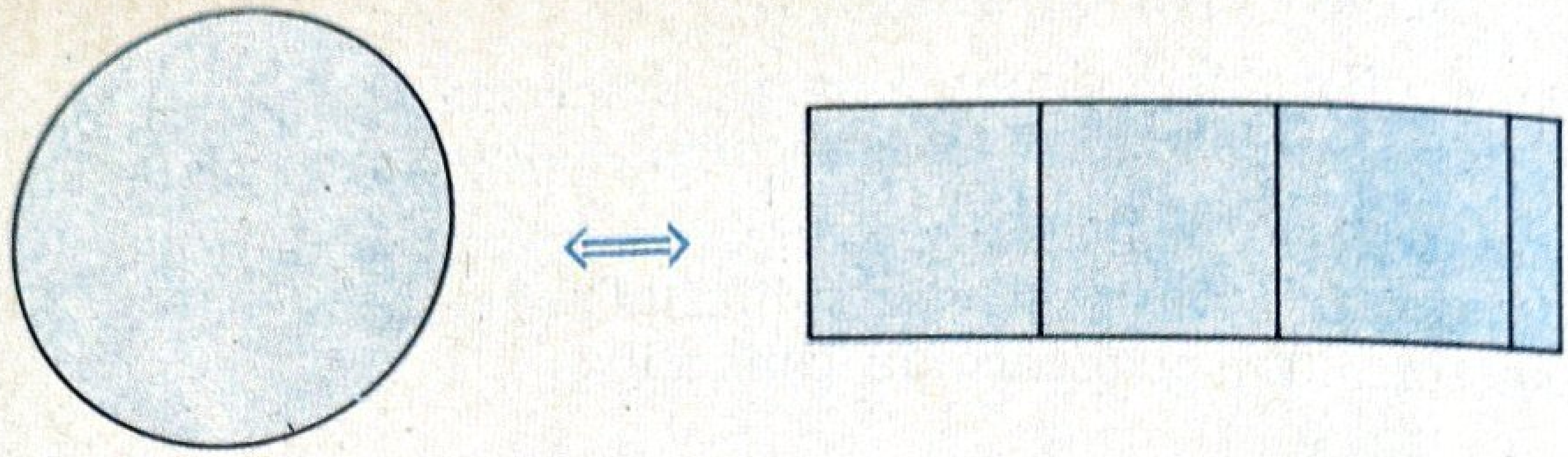


FIG. 70

Observe, atentamente, que a superfície de tal círculo é menor que a superfície dos *quatro* quadrados *iguais* (pontilhados na fig. 70) de lado *R*, porém um pouco maior que três dêles, sugerindo, assim o seguinte "*esquema*":



Logo: a *área do círculo* vale *um pouco mais* do triplo da *área do quadrado* que tem para *lado* o *raio do círculo*, ou seja:

$$\boxed{\text{área do círculo} = 3{,}1\ \ldots \times R^2}$$

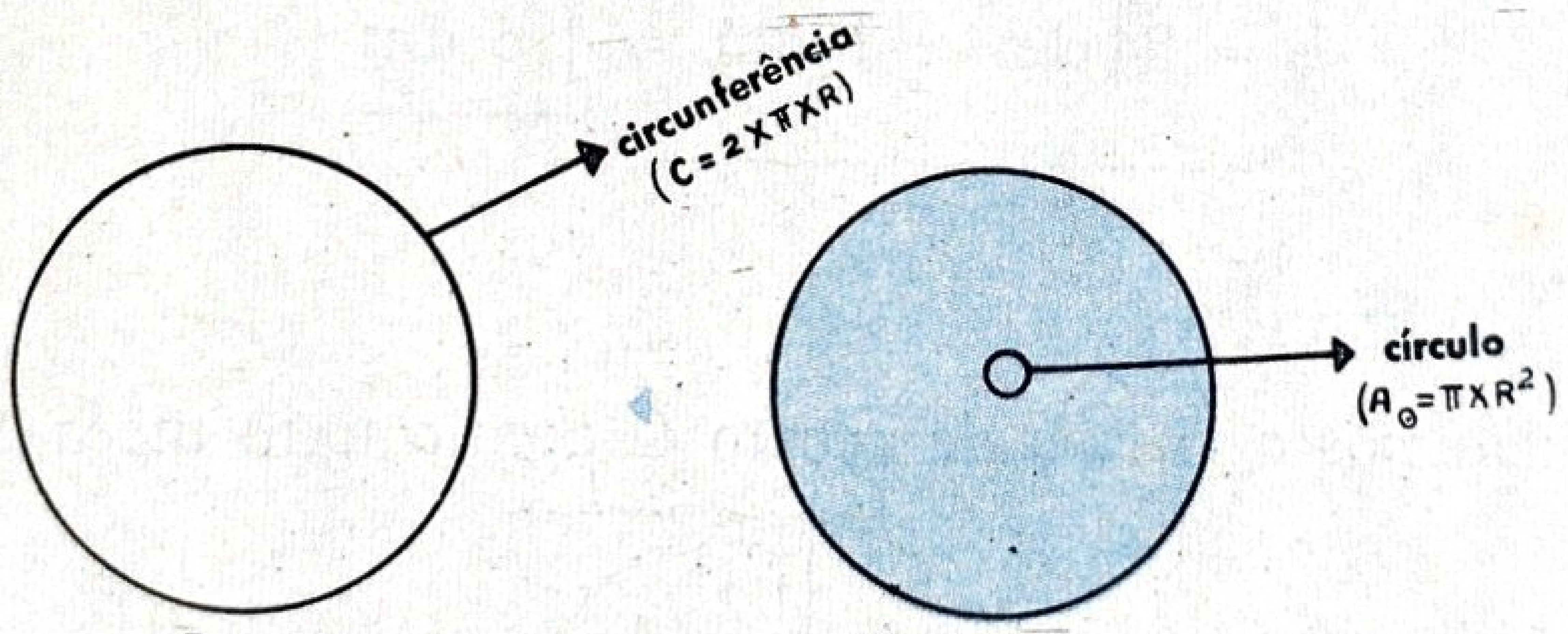
Com *mais precisão*, podemos adiantar que êsse 3,1... é o já famoso "pi" (π) e, portanto:

$$\boxed{\text{Área do círculo} = \text{"pi"} \times (\text{raio})^2}$$

ou

$$A_{\odot} = \pi \times R^2$$

Êrro comum: Confundir *circunferência* (que possui *comprimento* $\Longleftrightarrow$ uma dimensão) com *círculo* (que possui *superfície* $\Longleftrightarrow$ duas dimensões).



DUAS IMPORTANTES QUESTÕES:

1.ª) Para calcular a *área* de um *círculo*, conhecida a medida de seu *raio*, basta MULTIPLICAR π pelo QUADRADO DA MEDIDA DO RAIO;

2.ª) INVERSAMENTE, conhecida a *área* de um *círculo*, para calcular a medida de seu *raio*, basta EXTRAIR A RAIZ QUADRADA do QUOCIENTE DA ÁREA POR π.

Logo:

$$A_{\odot} = \pi \times R^2 \quad \Longleftrightarrow \quad R = \sqrt{A_{\odot} : \pi}$$

Aplicações:

1. Calcular a área do círculo, cujo diâmetro mede 20cm. Usar $\pi = 3{,}14$.

Temos: $$R = 20\text{cm} : 2 = 10\text{cm}$$

e $$A_{\odot} = 3{,}14 \times (10\text{cm})^2 = \boxed{314\ \text{cm}^2}$$

2. Determinar a medida do raio de um círculo que possui 28,26 dm² de área. Usar π com aproximação de 0,01.

Temos: $$R = \sqrt{28{,}26\text{dm}^2 : 3{,}14} = \sqrt{9\text{dm}^2} = \boxed{3\text{dm}}$$

RESUMO

$$A_{\square} = l^2$$

$$A = \frac{(b_1 + b_2) \times a}{2}$$

$$A_{\square} = b \times a$$

$$A_{\lozenge} = \frac{d_1 \times d_2}{2}$$

$$A_{\square} = b \times a$$

$$A_{\triangle} = \frac{b \times a}{2}$$

$$A_{\odot} = \pi \times R^2$$

ÁREA DE UMA FIGURA PLANA QUALQUER

24. *Cálculo por decomposição*

A área de uma *figura plana qualquer*, no caso de ser possível decompô-la em figuras de áreas conhecidas, é calculada somando e, às vêzes, subtraindo tais áreas. Exemplos:

1.º) Calcular a área do seguinte polígono (fig. 71):

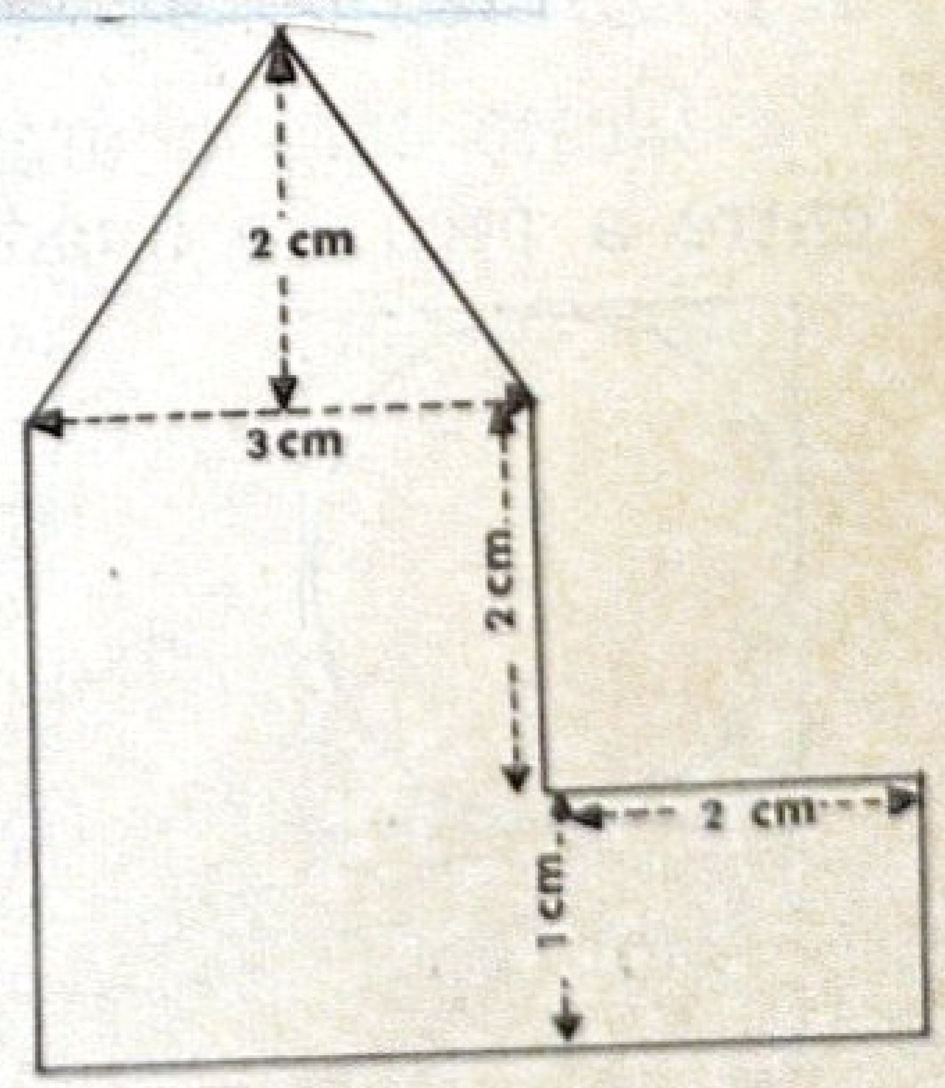


FIG. 71

Êsse polígono pode ser decomposto nas figuras: triângulo, quadrado e retângulo, tôdas de áreas fàcilmente calculáveis, isto é:

$$A_{\triangle} = \frac{3\text{cm} \times 2\text{cm}}{2} = 3\text{cm}^2 \qquad A_{\square} = (3\text{cm})^2 = 9\text{cm}^2$$

e

$$A_{\square} = 2\text{cm} \times 1\text{cm} = 2\text{cm}^2$$

Logo: $A_{\text{figura}} = 3\text{cm}^2 + 9\text{cm}^2 + 2\text{cm}^2 = \boxed{14\ \text{cm}^2}$

2.º) Calcular a área da seguinte figura plana (fig. 72):

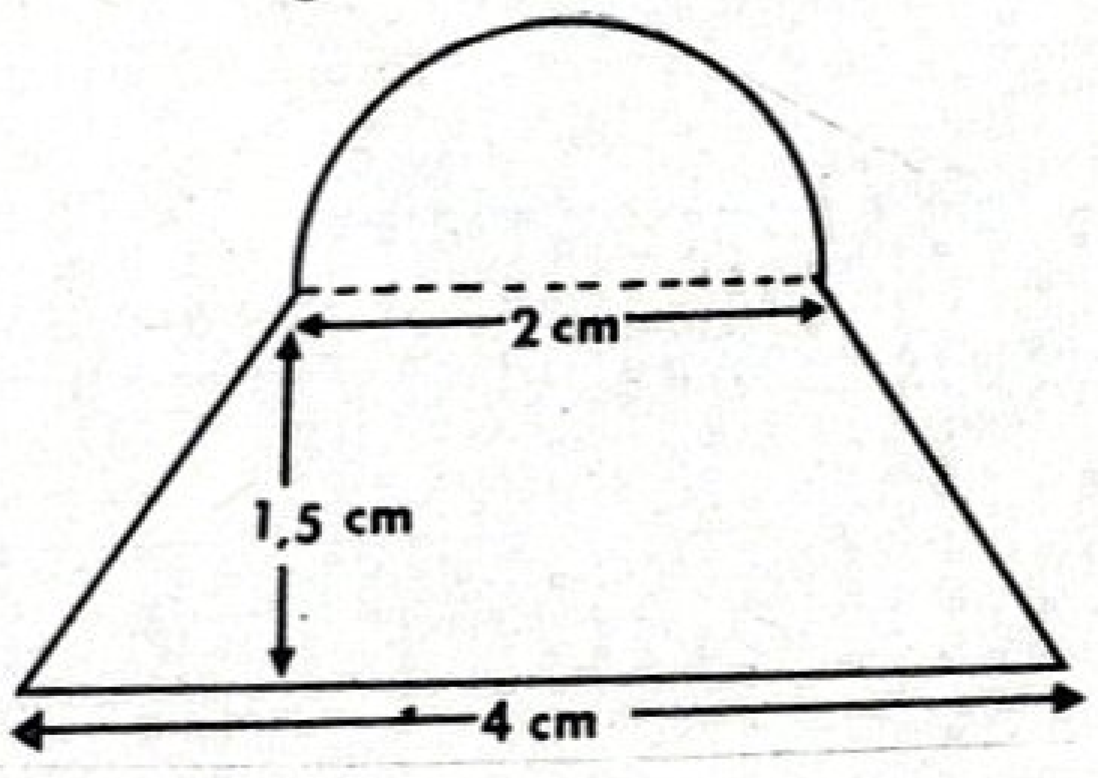


FIG. 72

Temos, agora, um trapézio e um semicírculo e, portanto:

$$A_{\text{trapézio}} = \frac{(4\text{cm}+2\text{cm}) \times 1{,}5\text{cm}}{2} = \frac{6\text{cm} \times 1{,}5\text{cm}}{2} = 4{,}5\text{cm}^2$$

$$A_{\frown} = \frac{\pi \times R^2}{2} = \frac{3{,}14 \times 1\text{cm}^2}{2} = 1{,}57\text{cm}^2$$

Logo: $A_{\text{figura}} = 4{,}5\text{cm}^2 + 1{,}57\text{cm}^2 = \boxed{6{,}07\text{cm}^2}$

3.º) Calcular a área da parte colorida da seguinte figura (fig. 73):

Neste caso a área da parte colorida é dada, fazendo-se a *diferença* entre a área do quadrado e a área do círculo. Assim:

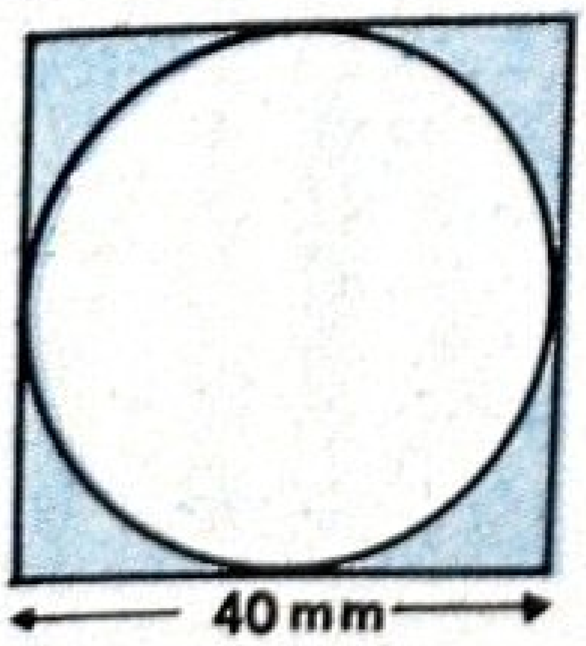


FIG. 73

$$\begin{aligned} A_{\text{figura}} &= A_{\square} - A_{\odot} \\ &= (40\text{mm})^2 - \pi \, . \, (20\text{mm})^2 = \\ &= 1600\text{mm}^2 - 3{,}14 \times 400\text{mm}^2 = \\ &= \boxed{344\ \text{mm}^2} \end{aligned}$$

EXERCÍCIOS EXPLORATÓRIOS — GRUPO 60

1. Você quer medir a superfície do retângulo da fig. 74 e dispõe das seguintes unidades: quadrado u (desenhe-o numa cartolina para poder trabalhar melhor) e triângulo retângulo v (idem)

   Exprima a medida do retângulo nas unidades u e v.

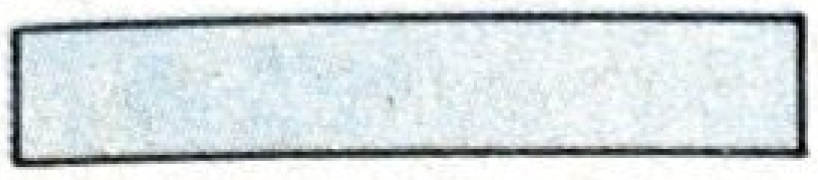


FIG. 74

2. Os dois terrenos (fig. 75), o primeiro de forma quadrada e o segundo de forma retangular, têm o *mesmo perímetro*. Calcular a *área* de cada um dêles.

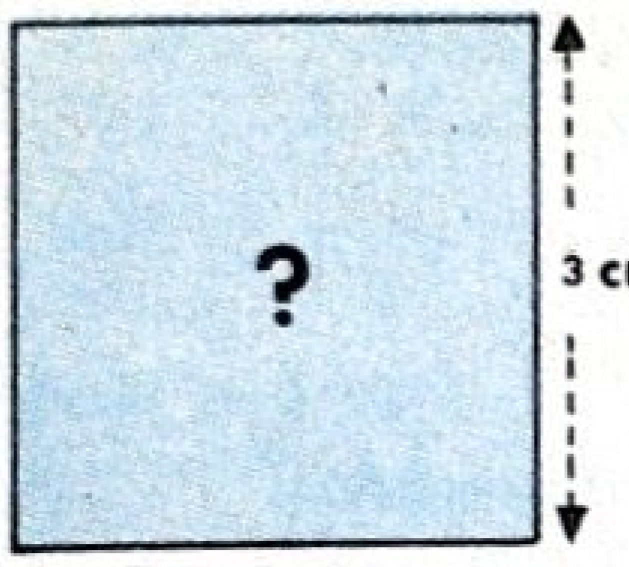
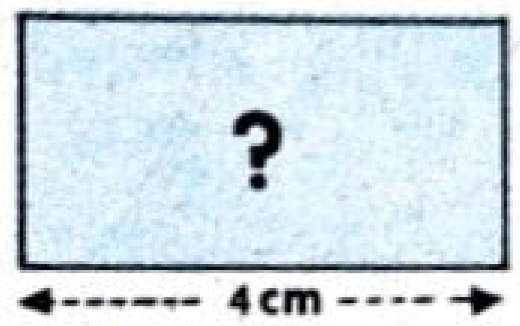


FIG. 75



3. Que diz você das áreas dos três triângulos construídos em retângulos iguais (fig. 76)? Por quê?

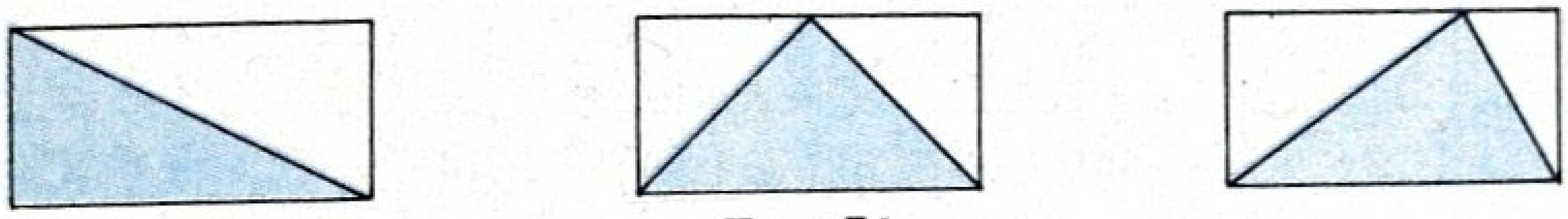


FIG. 76

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 61

1. Completar o seguinte quadro, relativo a dados de *retângulos:*

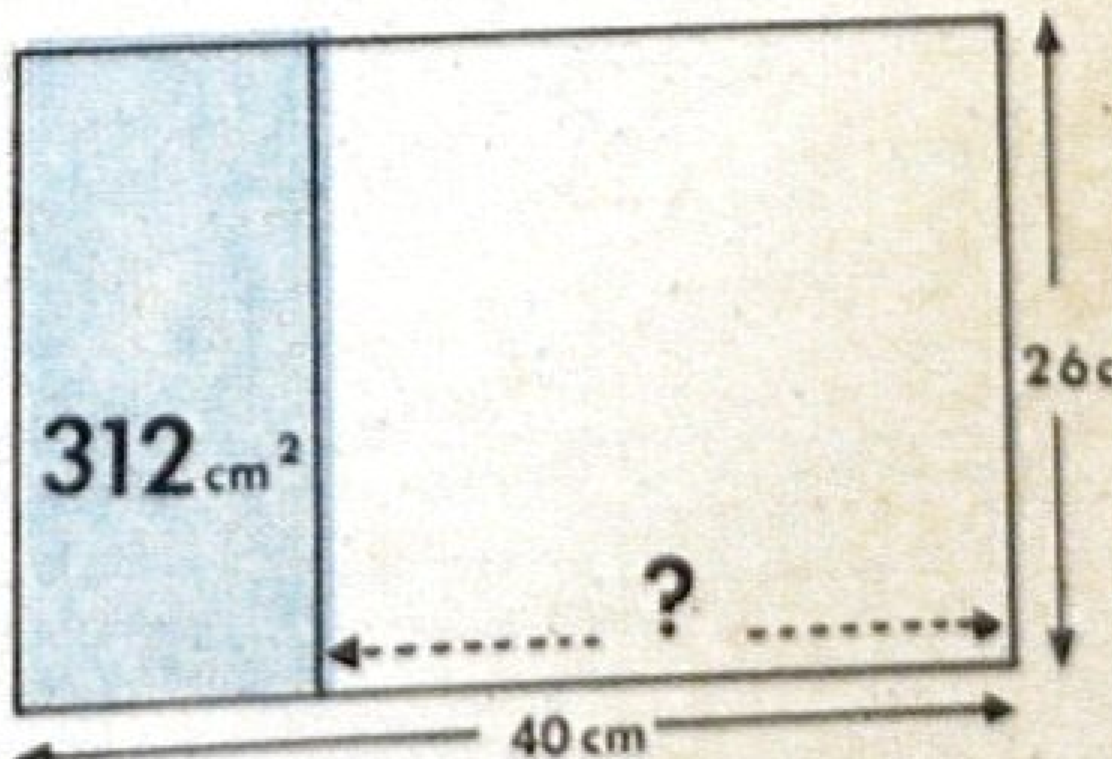
base	9cm	8cm	5dm	. . .	. . .	3mm	2m	. . .
altura. . .	6cm	. . .	35cm	18m	5m	. . .	. . .	95m
perímetro	. . .	. . .	. . .	1hm	34m	32mm	. . .	39dam
área	. . .	32cm²	. . .	. . .	. . .	. . .	200dm²	. . .m²

2. Paulo pretende medir as dimensões de um jardim retangular usando o seu passo de 80 cm como unidade. Calcular as dimensões do jardim, bem como a sua área, sabendo-se que Paulo contou 30 passos de largura e 45 de comprimento.

3. Qual é, em m², a área de um aeroporto de forma retangular que possui 3,2km de comprimento por 93dam de largura?

4. Determinar o *comprimento* (?) do retângulo na fig. 77, sabendo-se que:

FIG. 77



5. O quadrado e o retângulo (fig. 78) têm a *mesma área*. Calcular:

1.º) *comprimento* do retângulo

2.º) o *perímetro* de cada um dêles

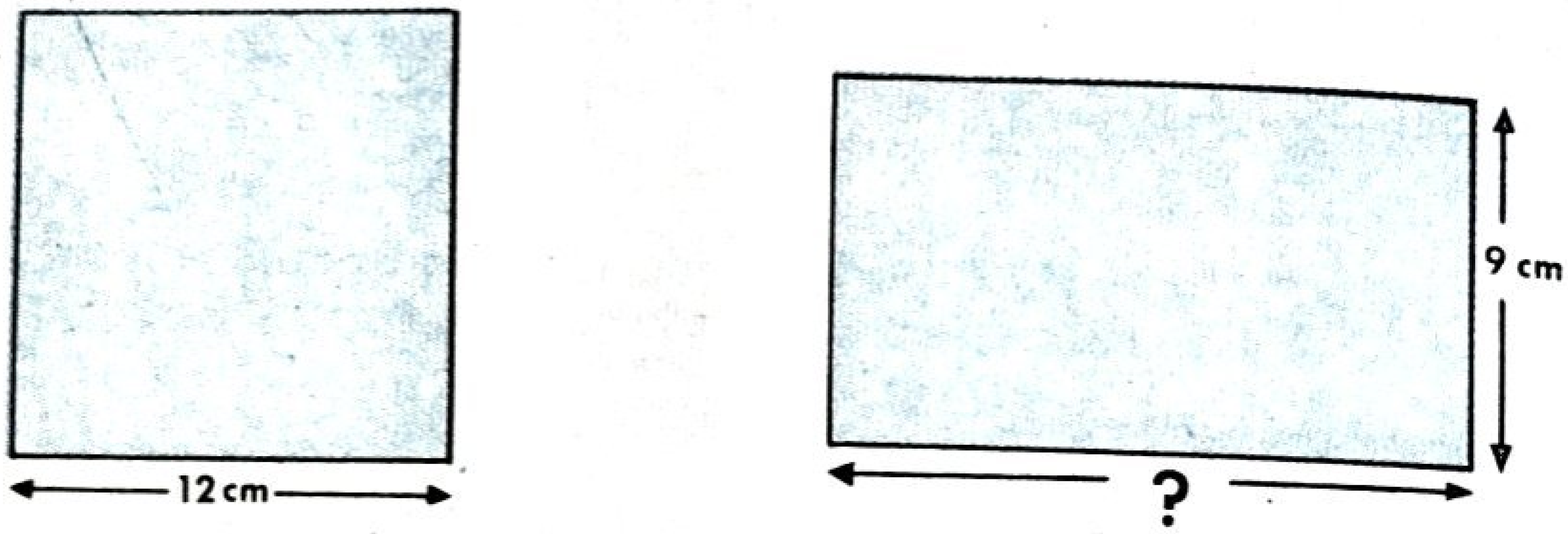


FIG. 78

6. Completar o seguinte quadro relativo a dados de *quadrados:*

lado	2m	3,5m	...	0,25m	...	...	...cm
perímetro...	...	...	24m	...cm	...	...	....
área	...	...dm²	...	...cm²	49m²	225m²	210,25dm²

7. Calcular a área de um paralelogramo que possui 18,36m de base e cuja altura mede um têrço da medida da base.

8. Completar o seguinte quadro relativo a dados de *triângulos:*

base	20cm	8dm	10m	...cm
altura	1,2dm	50cm	...	15dm
área	...	...dm²	40m²	60m²

9. Calcular a área do triângulo retângulo e isósceles, sabendo-se que o seu perímetro é igual a 24 dm e a hipotenusa mede 10dm.

10. Verificar se os triângulos (fig. 79) têm a *mesma área:*

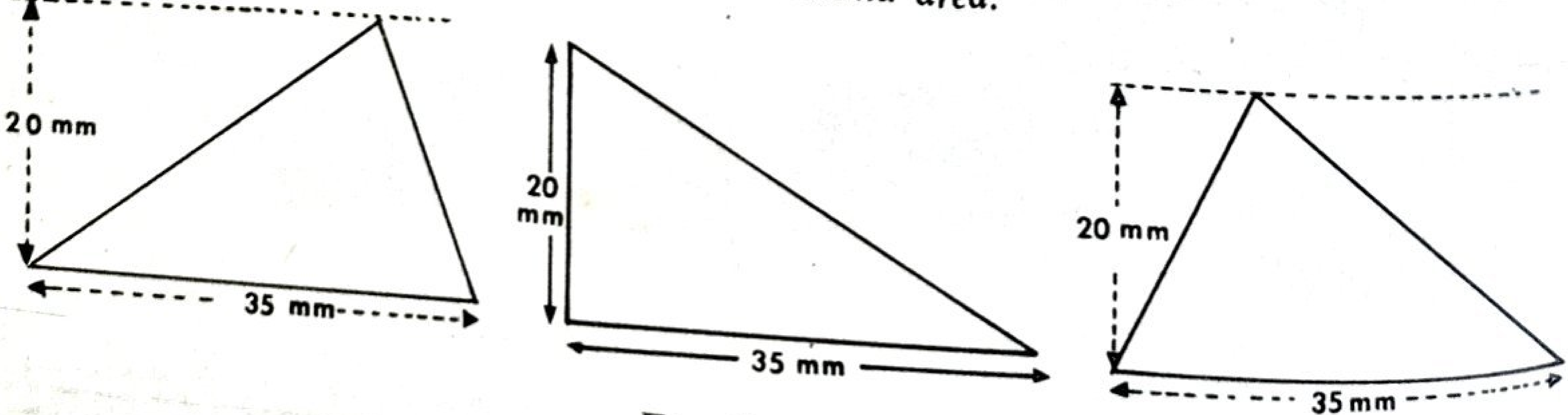


FIG. 79

11. Completar o seguinte quadro relativo a dados de *trapézios:*

base maior	3,8m	18cm	15dm	...	2m
base menor	2,6m	12cm	120cm	10dm	1m
altura	3,2m	...	0,80m	15dm	...
área	...	$150cm^2$	...	$225dm^2$	$15m^2$

12. Completar o seguinte quadro relativo a dados de *losangos:*

diagonal menor ...	12dm	...	12cm	4,8dam
diagonal maior ...	8dm	60cm	...	60m
área	...	$72dm^2$	$48cm^2$	...

13. Completar o seguinte quadro relativo a dados de um *círculo* e da *circunferência* que o contorna:

raio	5cm	...	...	10dm
comprimento da circunferência	...	31,4cm	...	...m
área do círculo	...	...	$12,56m^2$	$...dm^2$
π	3,14	3,14	3,14	3,14

14. Calcular a área de um semicírculo pertencente a uma circunferência de 20dm de diâmetro (tomar π como 3,14).

15. Determinar o valor da área da *coroa* (superfície compreendida entre dois círculos de mesmo centro) na figura 80:

16. Uma corda estendida mede 3m. Qual é a *área máxima* de terreno de pasto que o animal (fig. 81) pode dispor?

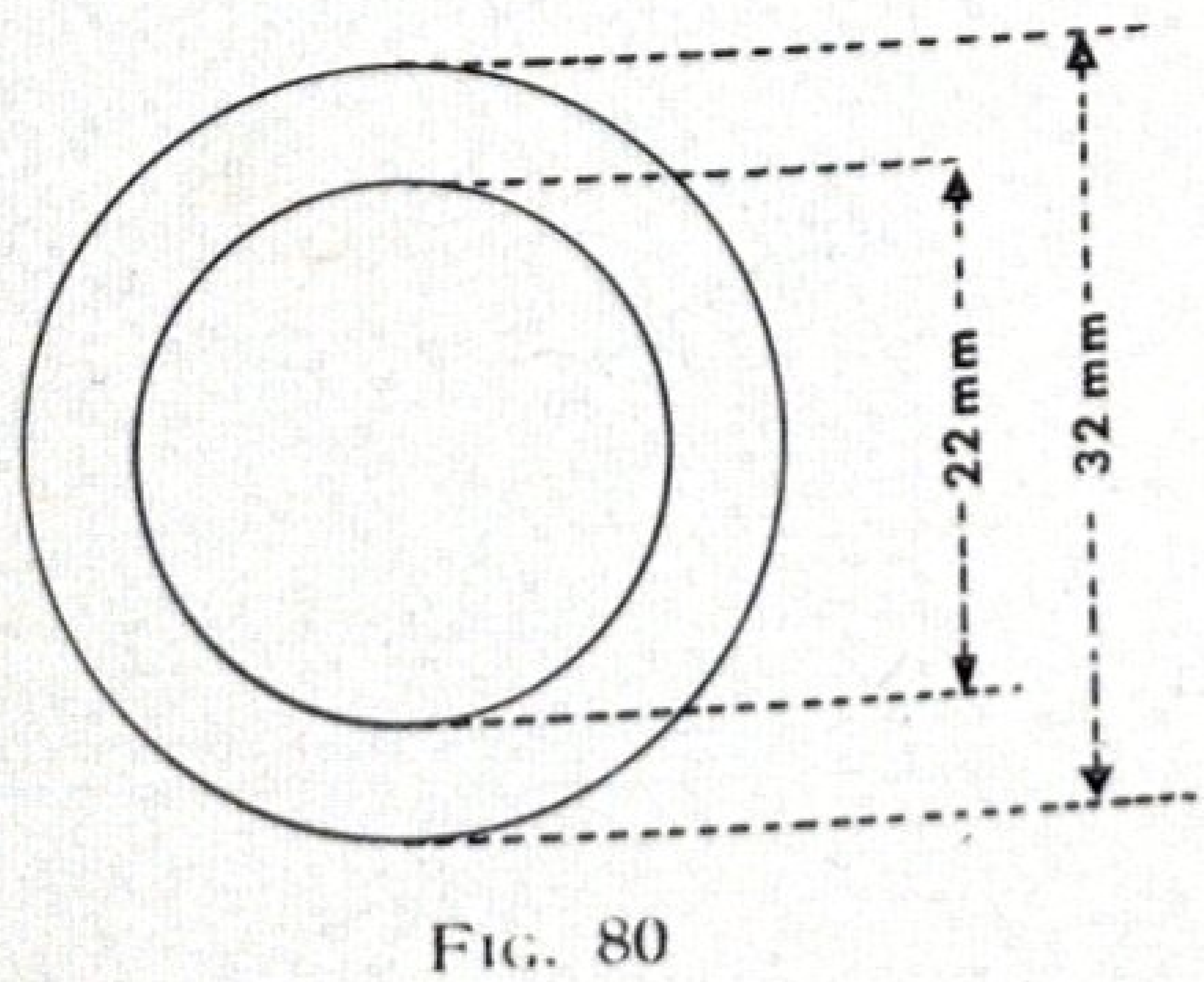


Fig. 80

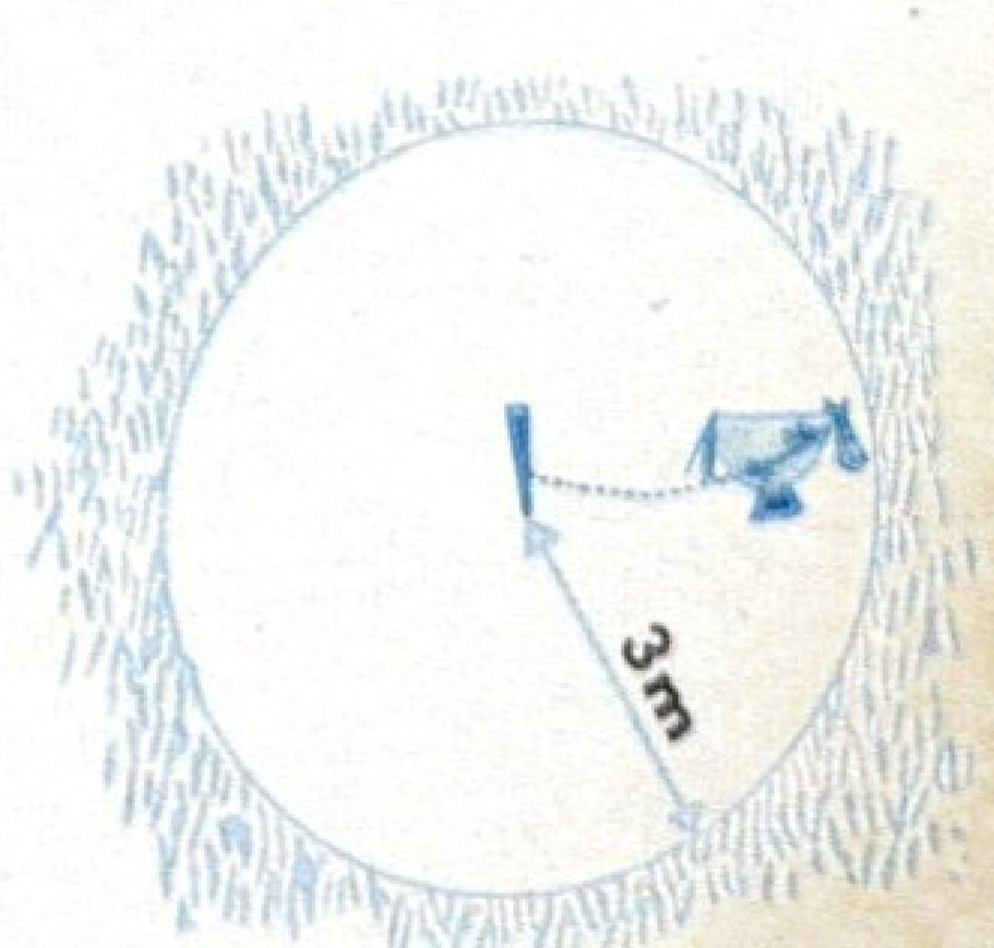
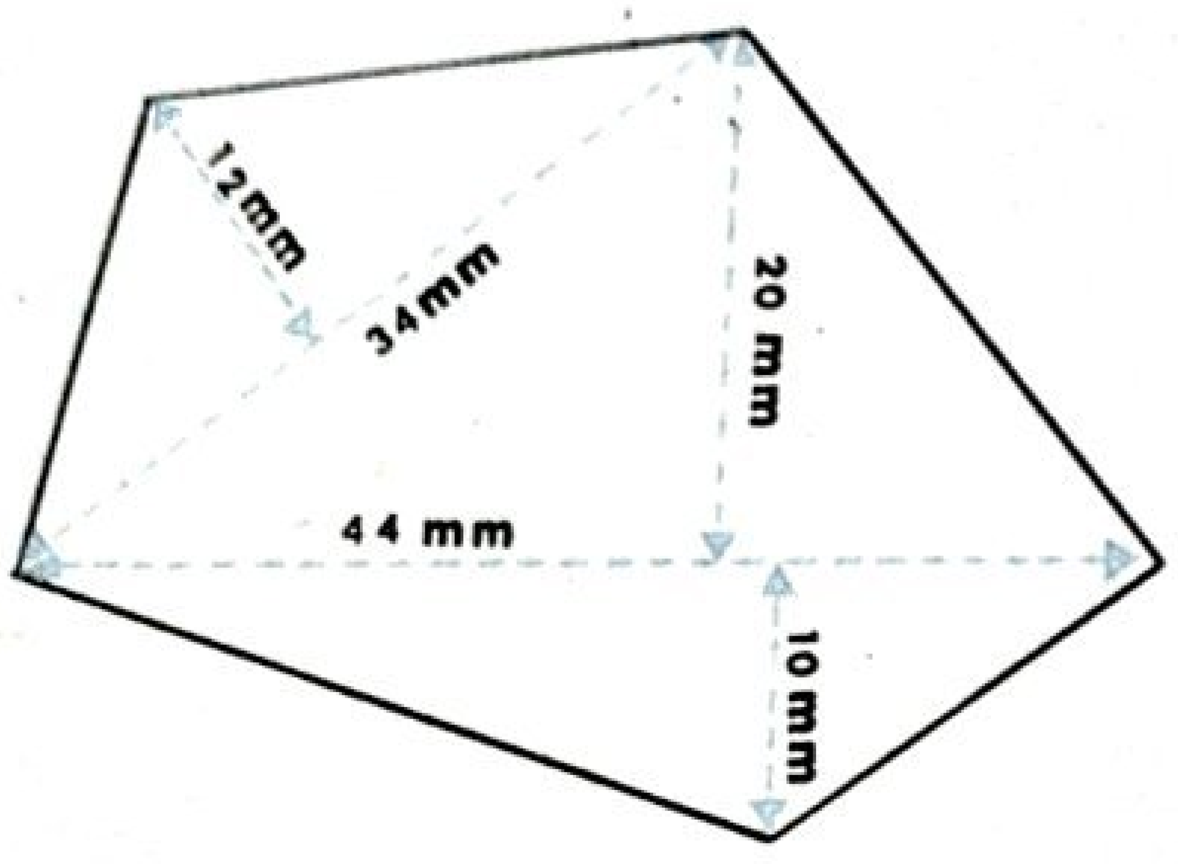
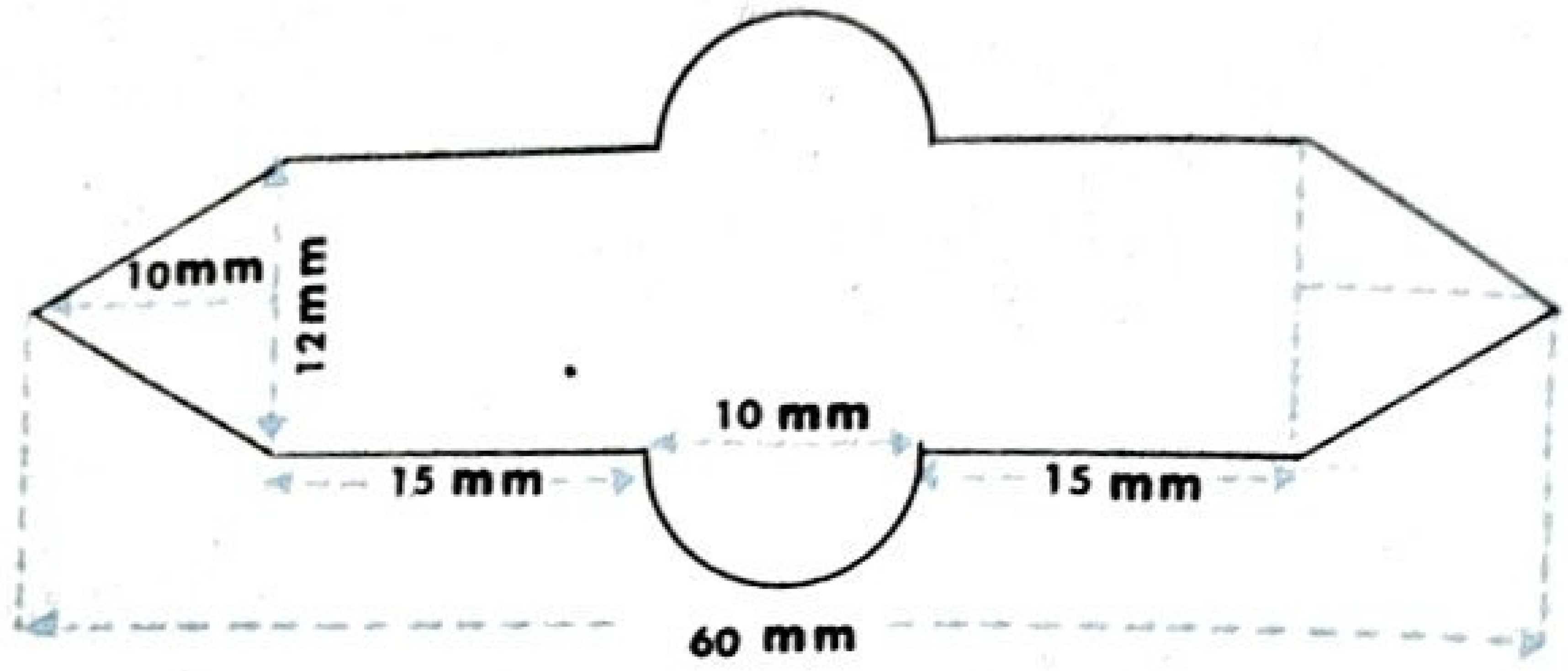


Fig. 81

17. Calcular a área das seguintes figuras (1) e (2), que se compõem de figuras planas conhecidas:

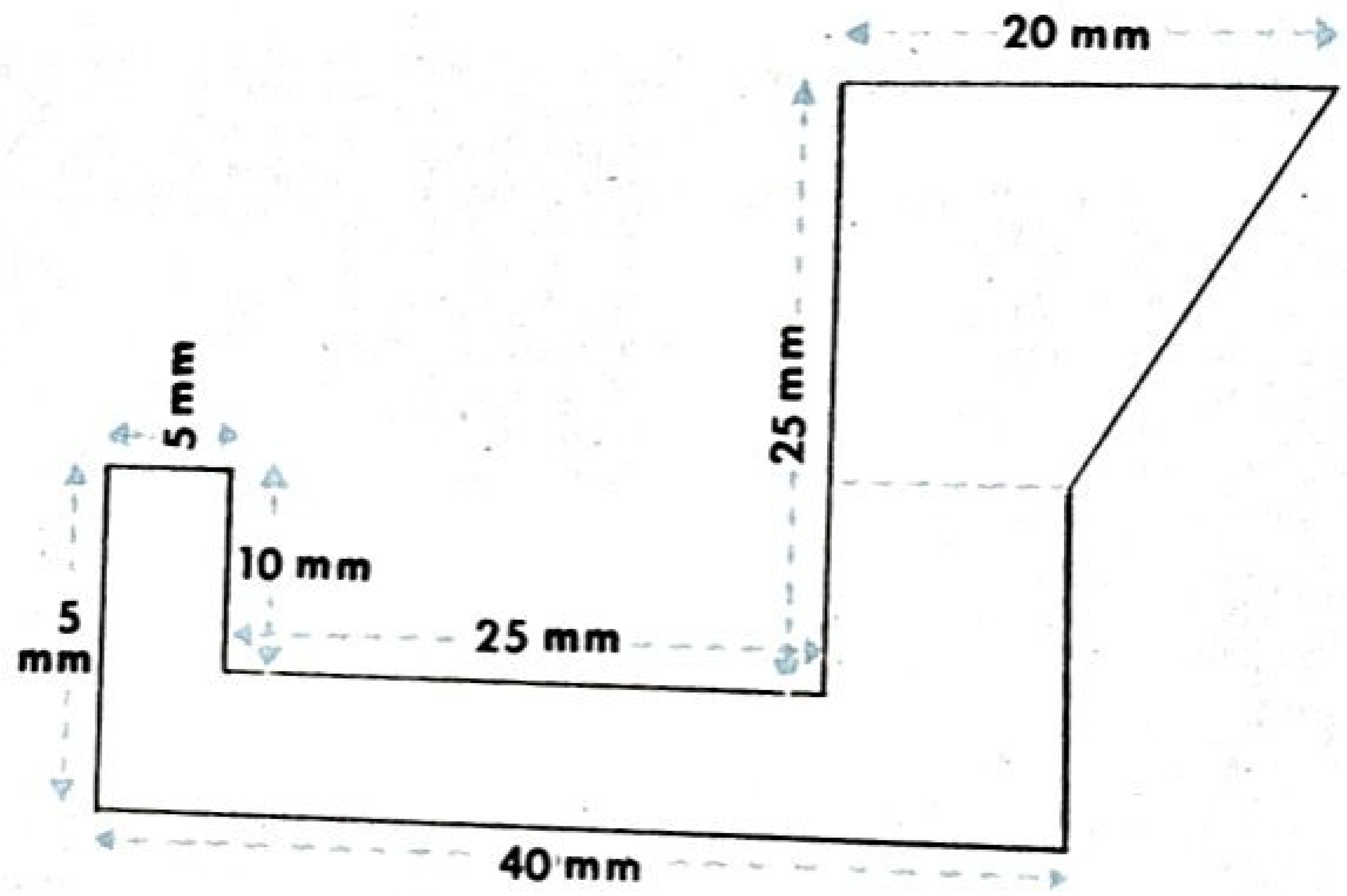


(1)



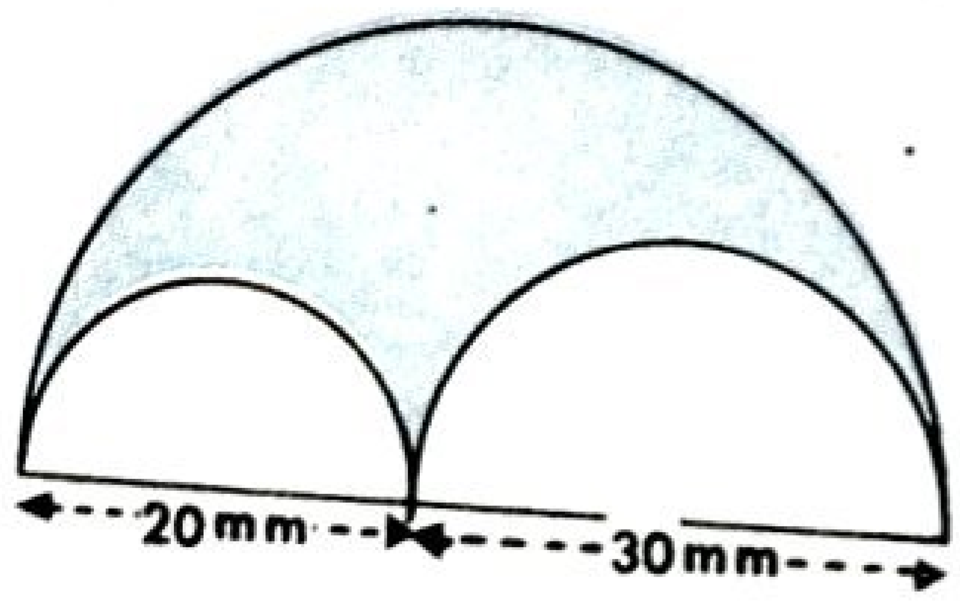
(2)

18. Calcular a área do seguinte terreno (figura 3).

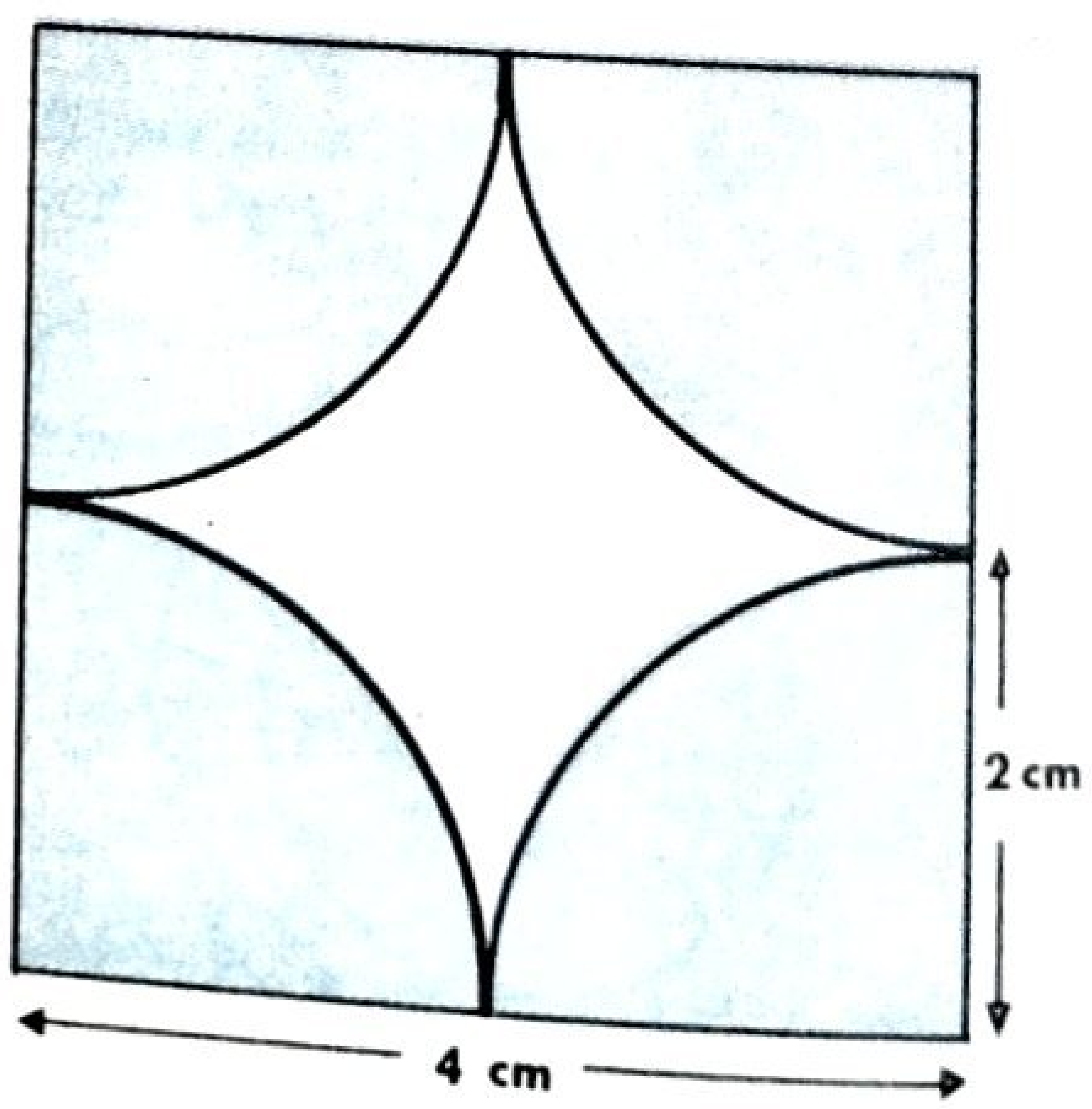


(3)

19. Calcular a área da parte colorida das seguintes figuras: (1) e (2).

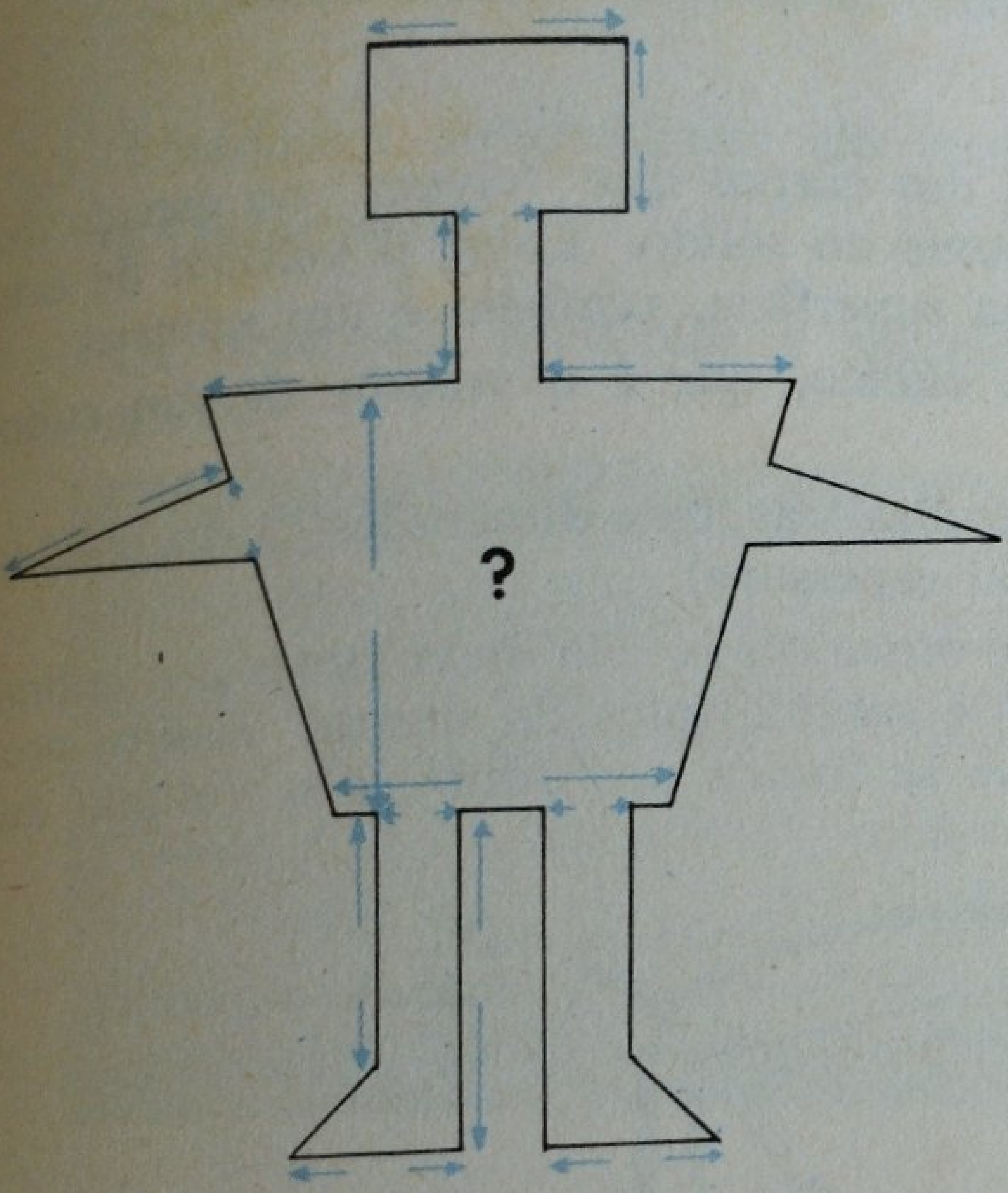


(1)



(2)

20. Calcule, em cm^2, a área da superfície ocupada pela figura do "ZÉ-ROBÔ", composta de figuras geométricas conhecidas (fig. 82). Use sua régua comum *graduada* para determinar as medidas assinaladas.



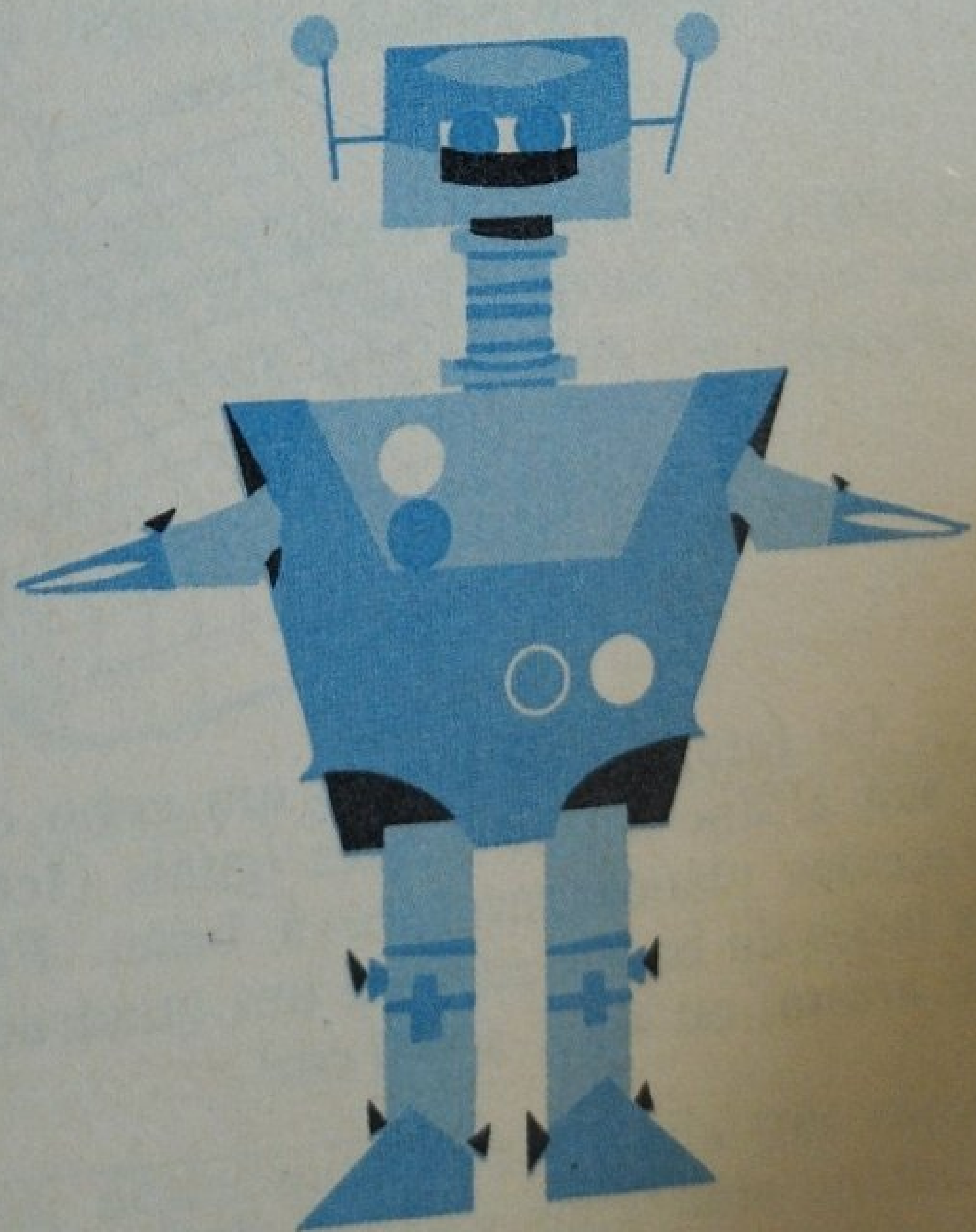


FIG. 82

Unidades de Volume

25. *Volume de um corpo; unidade fundamental (S.M.D.): metro cúbico*

A medida dos *sólidos*, isto é, dos corpos que "vivem" no espaço de *três dimensões*, é chamada de volume do sólido. Logo, o volume de um sólido, a exemplo da *área* de uma superfície, também é um *número*.

Unidade fundamental: metro cúbico, que é o volume de um cubo de 1m de *aresta*.

Símbolo: m^3 (expoente 3 "lembra" as três dimensões(*) do sólido: comprimento, largura e altura (ou espessura).

Os *múltiplos* e *submúltiplos* do *metro cúbico* são os volumes dos cubos que têm por arestas os múltiplos e submúltiplos do metro. Assim, por exemplo, um *decímetro cúbico*, que se indica por $1dm^3$, é o volume do cubo (fig. 83) que tem por *aresta* 1dm.

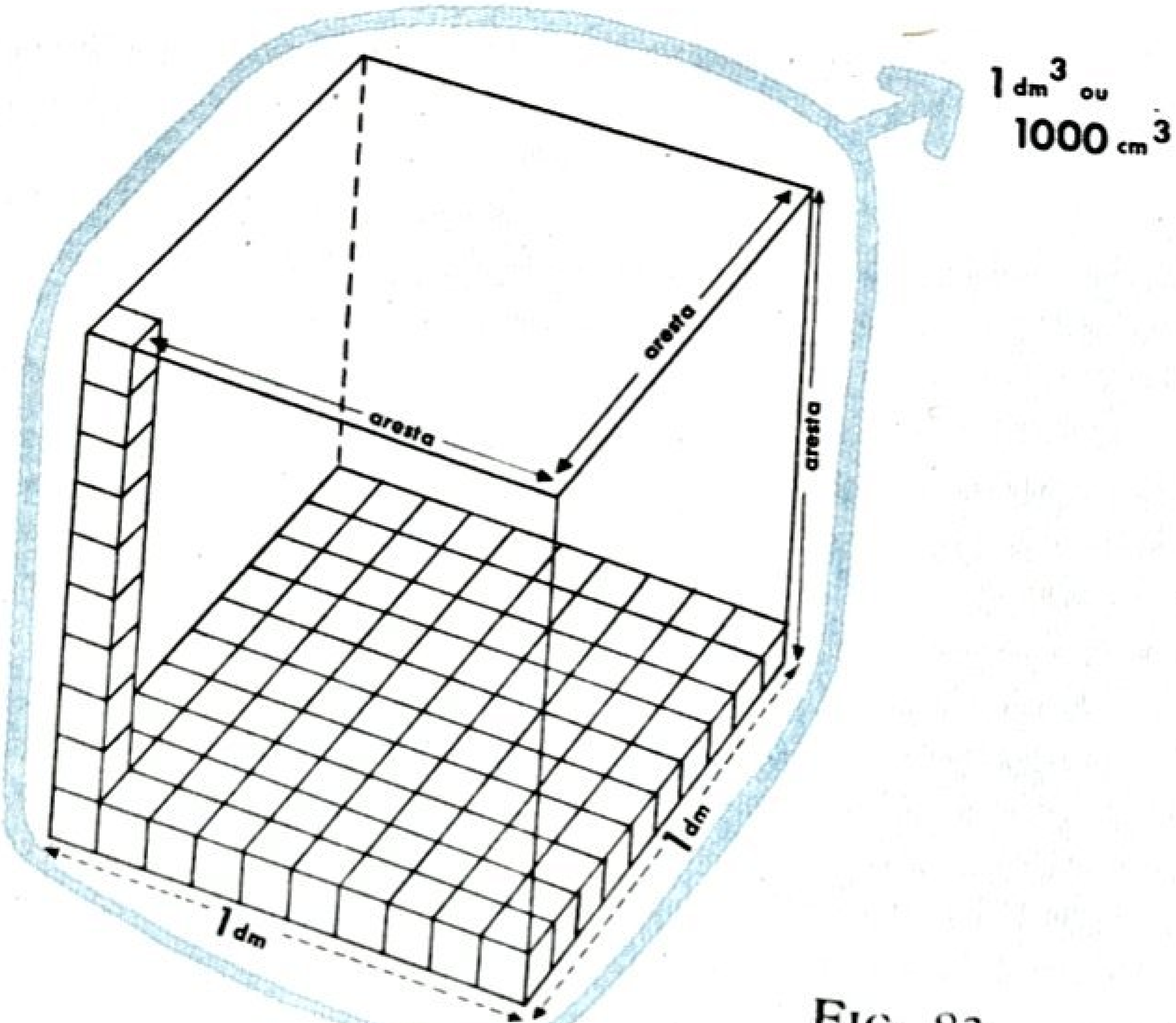


FIG. 83

De fato, consideremos um cubo com a aresta de 1dm e dividamos a sua altura em 10 partes iguais (1cm cada). Pelos pontos de divisão tracemos planos paralelos à base. Fazendo-se a mesma operação com os lados da base (lados de um quadrado), obteremos 1 000 cubos de 1cm de aresta, ou seja, 1 000 cm^3.

Logo: $\boxed{1\ dm^3 = 1\,000\ cm^3}$

(*) No caso do cubo essas dimensões são *iguais* entre si e caracterizadas pela *aresta*.

e dizemos:

As unidades de volume variam de 1 000 em 1 000, isto é, cada unidade vale 1 000 vêzes a que lhe é imediatamente inferior.

26. *Unidades secundárias do metro cúbico: múltiplos e sub-múltiplos*

Os principais múltiplos e submúltiplos do *metro cúbico*, figuram na tabela:

	NOMES	SÍMBOLOS	VALÔRES EM m^3
Múltiplos . . .	quilôm. cúbico	km^3	1 000 000 000 m^3
	hectôm. cúbico	hm^3	1 000 000 m^3
	decâm. cúbico	dam^3	1 000 m^3
Unidade	*metro cúbico*	m^3	1 m^3
Submúltiplos	decím. cúbico	dm^3	0,001 m^3
	centím. cúbico	cm^3	0,000 001 m^3
	milím. cúbico	mm^3	0,000 000 001 m^3

27. *Representação e leitura dos números que exprimem medidas de volume*

Pelo fato de as unidades de volume variarem de 1 000 em 1 000, os números decimais que exprimem medidas de volume devem possuir um número de algarismos decimais múltiplos de três. Assim, por exemplo, ao invés de se escrever:

35,24 dm^3

deve-se escrever: $\boxed{35{,}240\ dm^3}$

e lê-se: "trinta e cinco decímetros cúbicos e duzentos e quarenta centímetros cúbicos".

28. *Mudança de unidade*

A mudança da unidade é feita, deslocando-se a vírgula três casas para a *direita* ou para a *esquerda*, segundo se passa para uma unidade de ordem imediatamente *menor* ou *maior*, e suprindo de zeros, caso faltem algarismos. Exemplos:

1.º) Exprimir 65,300 dm³ em centímetros cúbicos.

Basta deslocar a vírgula três casas para a *direita:*

$$\boxed{65{,}300\ \text{dm}^3 = 65\ 300\ \text{cm}^3}$$

2.º) Exprimir 12 mm³ em metros cúbicos.

Como: $1\ \text{mm}^3 = 0{,}000\ 000\ 001\ \text{m}^3$

temos: $12\ \text{mm}^3 = 0{,}000\ 000\ 012\ \text{m}^3$

29. *Medida prática de lenha*

Quando o metro cúbico é empregado para medir o volume aparente de lenha, geralmente empilhada como mostra a fig. 84, recebe o nome de ESTÉREO, cujo símbolo é st.

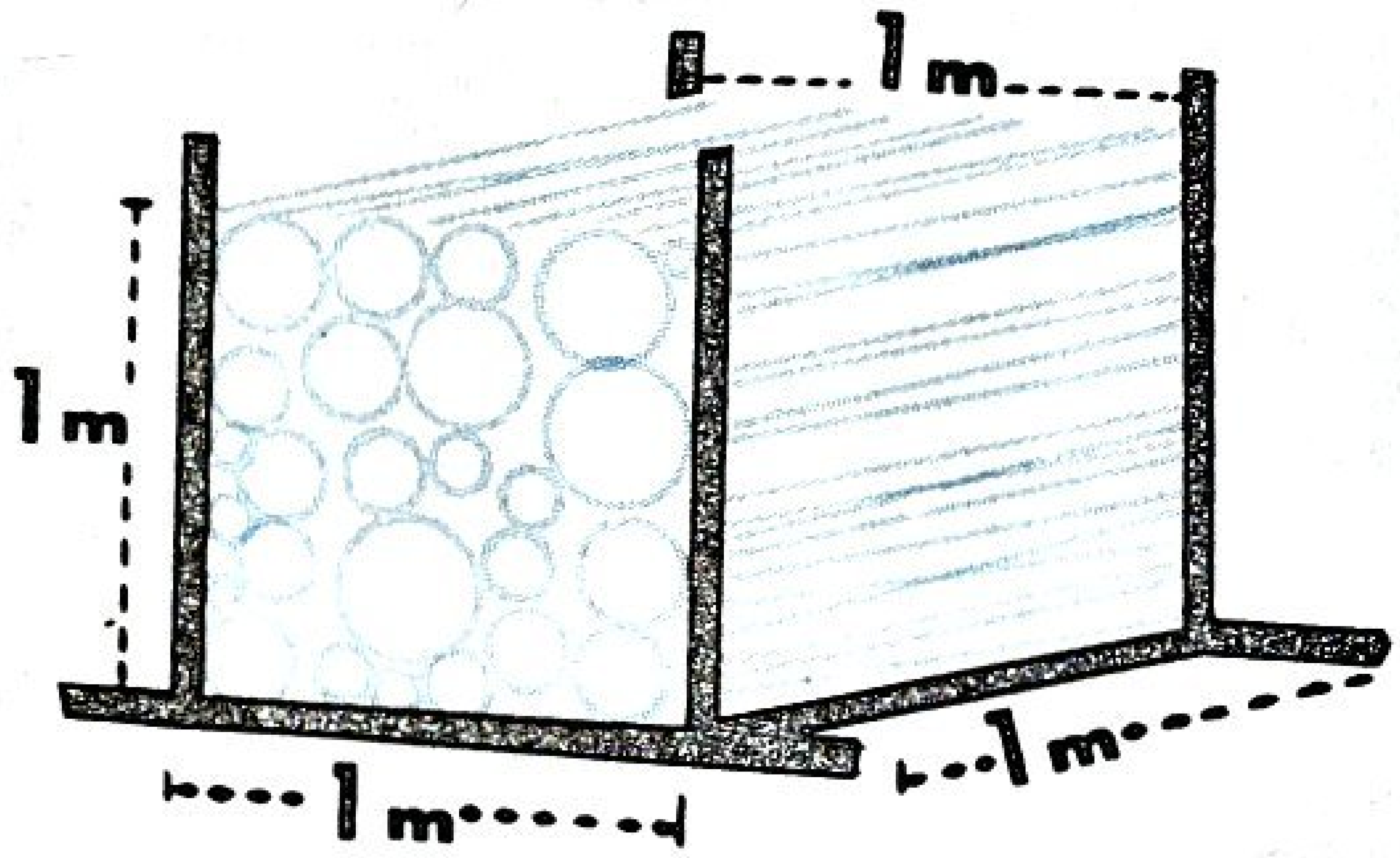


FIG. 84

Um múltiplo: decastéreo e um submúltiplo: decistéreo, completam o quadro. Os símbolos e valôres correspondentes são:

decastéreo	(dast)	$\Longleftrightarrow$	$10\ \text{st} = 10\ \text{m}^3$
estéreo	(st)	$\Longleftrightarrow$	$1\ \text{st} = 1\ \text{m}^3$
decistéreo	(dst)	$\Longleftrightarrow$	$0{,}1\ \text{st} = 0{,}1\ \text{m}^3$

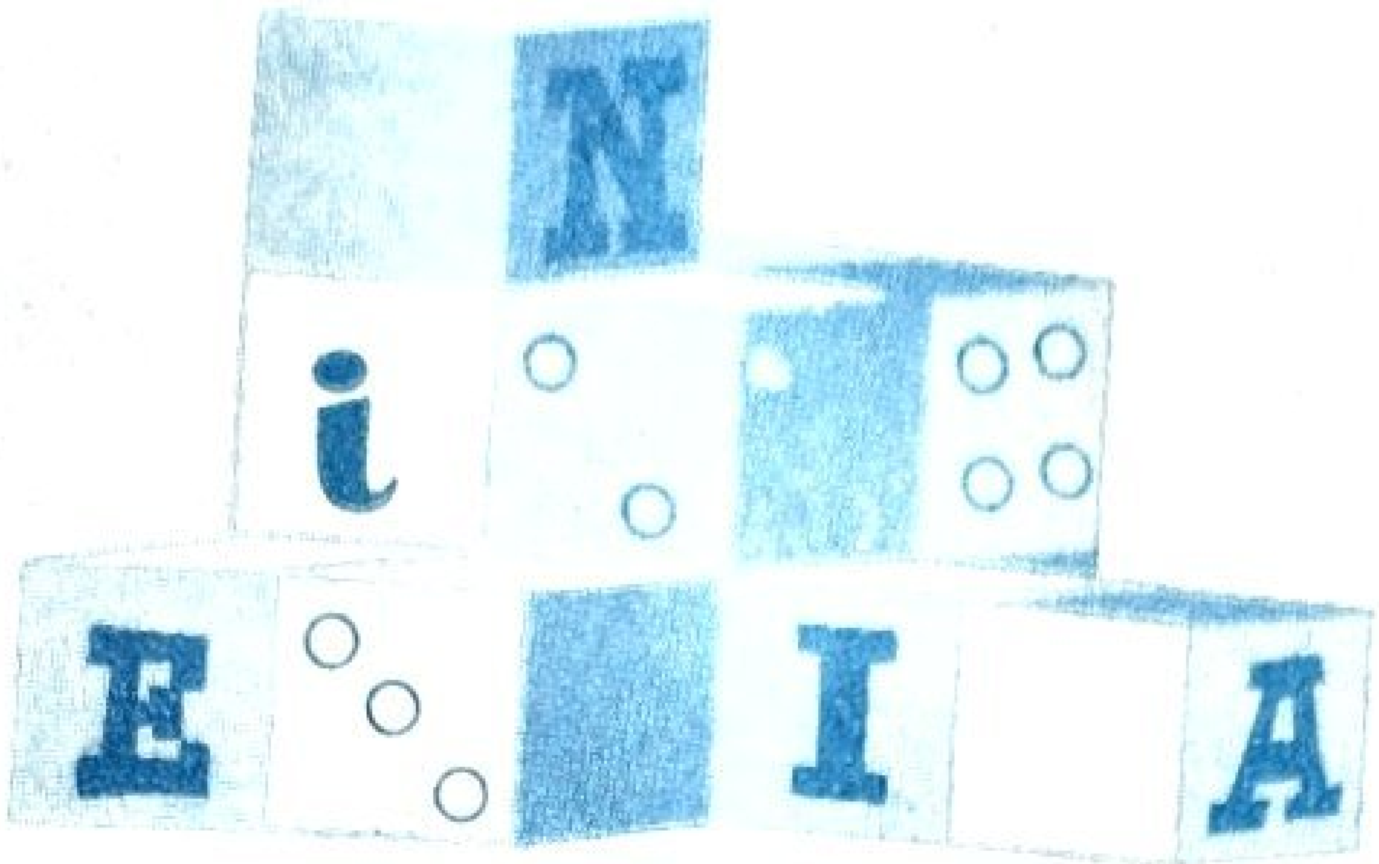
A *mudança de unidade* entre dast, st e dst, é feita de modo análogo às unidades de comprimento, isto é, de dez em dez. Note você ser essa a *vantagem* em usar tais unidades, uma vez que as unidades de volume (m³, dam³, hm³, . . .) variam de mil em mil. Exemplo:

Reduzir: 3,8 dast

Temos: 3,8 dast = 38 st = 380 dst

EXERCÍCIOS EXPLORATÓRIOS — GRUPO 62

1. Quantos cubos de 1cm de aresta você acha que existem na figura abaixo?



2. De quantos cubinhos de 1cm de aresta você precisaria para formar um cubo de 1dm de aresta?

3. Você tem em sua frente um monte de areia e um carrinho de transporte (fig. 85). Imagine um enunciado para um problema à sua escolha e resolva-o.

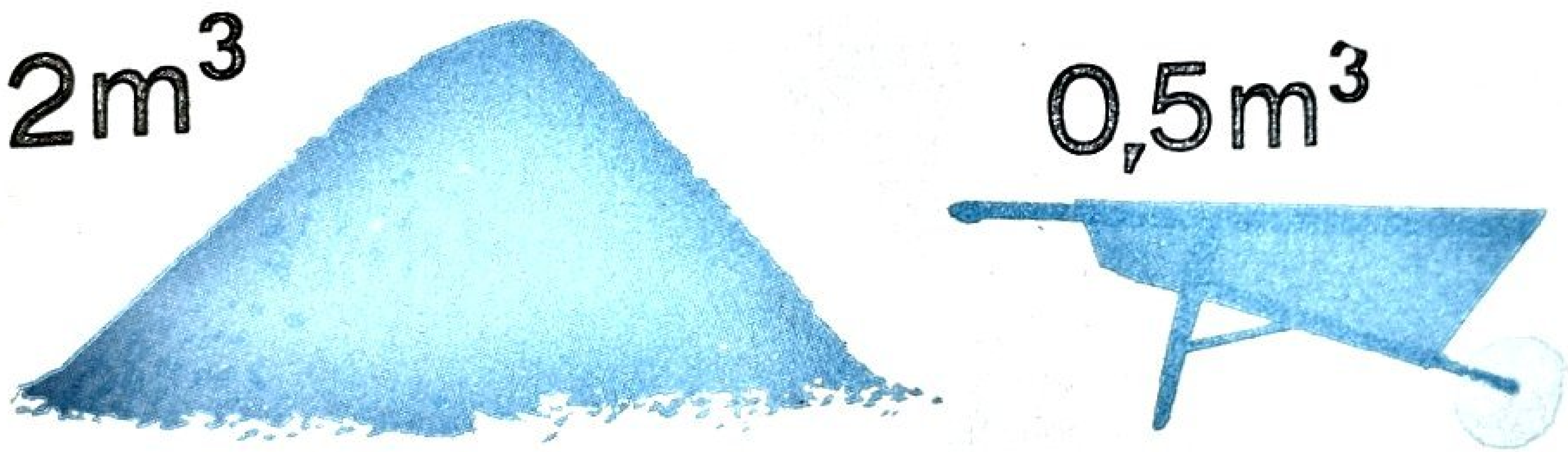


FIG. 85

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 63

1. Complete as seguintes sentenças de modo a torná-las verdadeiras:

1.ª) $1m^3 = \ldots dm^3$

2.ª) $1m^3 = \ldots cm^3$

3.ª) $\frac{1}{4} m^3 = \ldots dm^3$

4.ª) $\frac{3}{4} dm^3 = \ldots m^3$

5.ª) $\frac{1}{2} m^3 = \ldots cm^3$

6.ª) $\frac{1}{5} km^3 = \ldots m^3$

7.ª) $2\frac{1}{4} m^3 = \ldots dm^3$

8.ª) $200cm^3 = \ldots m^3$

9.ª) $0{,}050m^3 = \ldots dm^3$

10.ª) $1\,000dm^3 = \ldots m^3$

11.ª) $\ldots dam^3 = 2\,350\ m^3$

12.ª) $\ldots dm^3 = 1\,964\ cm^3$

13.ª) $\ldots m^3 = 12\ dam^3$

14.ª) $\ldots cm^3 = 5dm^3$ e $120cm^3$

15.ª) $5\ldots$ e $7\ldots = 5\,007\ cm^3$

16.ª) $3\ldots$ e $28\ldots = 3\,028\ m^3$

17.ª) $\frac{1}{2} \ldots = 500\ dm^3$

18.ª) $35 \ldots = 35\,000cm^3$

19.ª) $4\,000 \ldots = 4\ m^3$

20.ª) $\ldots m^3 = \ldots dm^3$

2. Assinalar qual, das seguintes sentenças, é verdadeira ou falsa:

1.ª) $1\ m^3 = 100\ dm^3$	4.ª) $\frac{1}{2}\ m^3 = 5\ dm^3$
2.ª) $1\ m^3 = 1\,000\ dm^3$	5.ª) $\frac{1}{2}\ m^3 = 500\ dm^3$
3.ª) $1\ dm^3 = 0{,}001\ m^3$	6.ª) $\frac{1}{2}\ m^3 = 50\ dm^3$

3. Exprimir:
   1.º) em estéreos: 5 dast; 3dast 10st; $50\ m^3$
   2.º) em decistéreos: 8st; 5,35dast; $12\ cm^3$
   3.º) em decastéreos: 25st; 6,32 dts; $4\ dm^3$
4. Efetuar as seguintes operações, exprimindo os resultados em m^3:
   1.º) $31{,}512\ dam^3 + 0{,}0008000\ hm^3 + 120{,}035\ m^3$
   2.º) $8{,}25\ dam^3 - (412\ cm^3 + 12{,}150\ dm^3)$
5. Idem, exprimindo os resultados em dm^3:
   1.º) $24{,}391\ m^3 + 0{,}219\ dam^3 \times 0{,}002$
   2.º) $(1\,512\ dm^3 : 3) : 7$
6. É a mesma coisa dizer: um centímetro cúbico e um centésimo de metro cúbico?
7. Quantas vêzes $10\ m^3$ é maior que $100\ dm^3$?
8. Valendo 1 dast de certa lenha Cr$ 10 000,00, qual é o preço de $1\ m^3$ dessa lenha?
9. Se $1\ dm^3$ de determinada substância custa Cr$ 180,00, quanto custam $2\ m^3$ dessa substância?
10. Uma caixa de injeções contém cinco ampôlas, de $2\ cm^3$ cada, de um produto antigripal. Quantas dessas caixas podem ser produzidas por um laboratório que dispõe de $5\ dm^3$ dêsse produto?

Medidas de Capacidade

31. *As capacidades são também volumes*

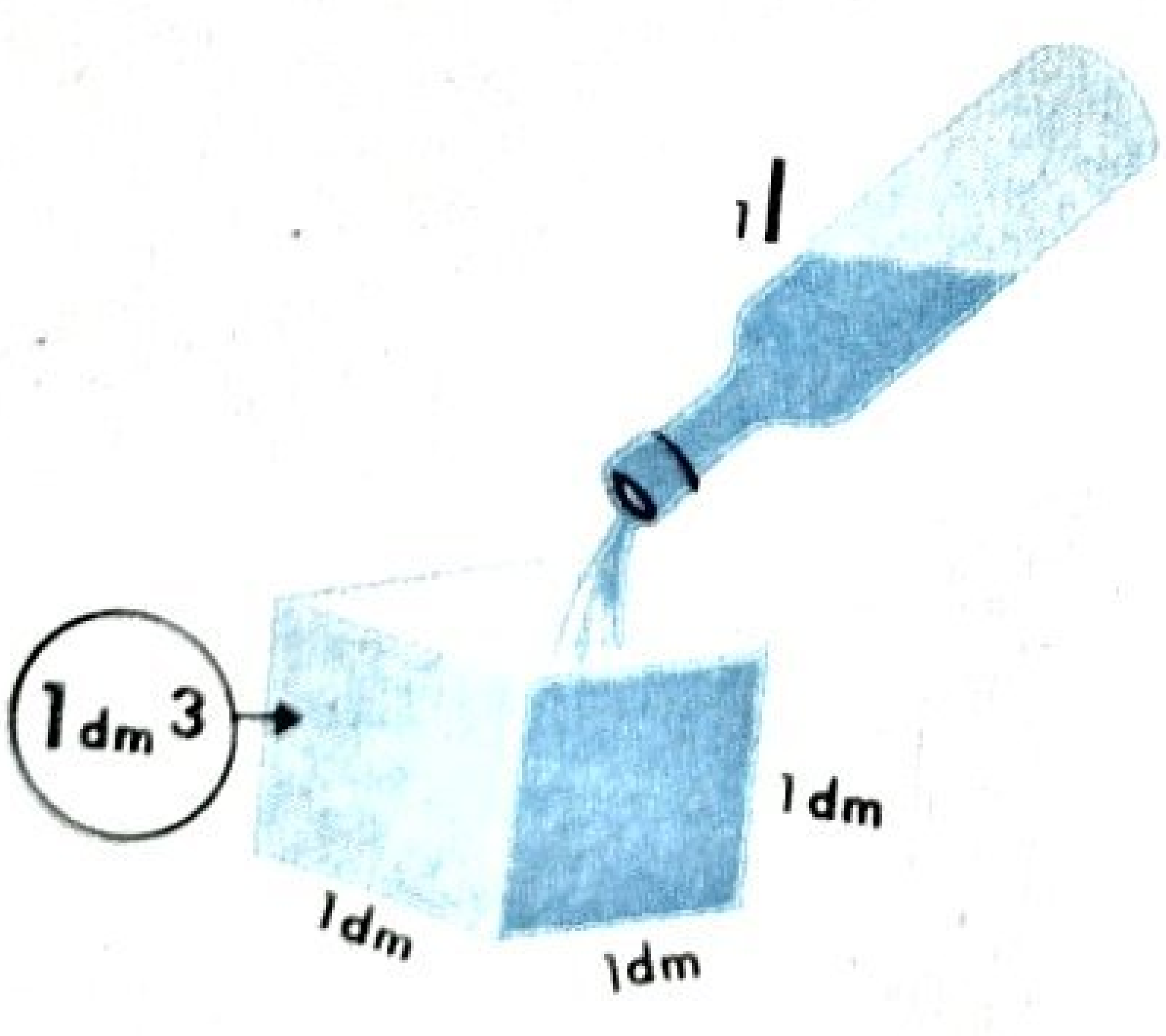


FIG. 86

Para medir volumes de recipientes que contenham líquidos e gases (outrora também grãos, como arroz, feijão, etc.) usamos como unidade o litro, que é o volume pràticamente igual a 1dm³.

O *litro*, cujo símbolo é *l* passa a ser a *segunda unidade legal de volume* do S.M.D., e, para você ter uma idéia do litro, observe a figura 86, onde um litro enche completamente uma caixinha de 1dm³ de volume. Logo:

$$\boxed{1\ l = 1dm^3}$$

Os principais múltiplos e submúltiplos do litro constam do quadro:

	NOMES	SÍMBOLOS	VALÔRES EM LITROS
Múltiplos	quilolitro	*kl*	1 000 *l*
	hectolitro	*hl*	100 *l*
	decalitro	*dal*	10 *l*
Unidade	*litro*	*l*	1 *l*
Submúltiplos	decilitro	*dl*	0,1 *l*
	centilitro	*cl*	0,01 *l*
	mililitro	*ml*	0,001 *l*

As *unidades de capacidade* variam de dez em dez, e, portanto, a *mudança* de unidade é feita como nas medidas de comprimento. Exemplos:

1. Reduzir 6,287 da*l* em *l*, d*l*, c*l* e m*l*.

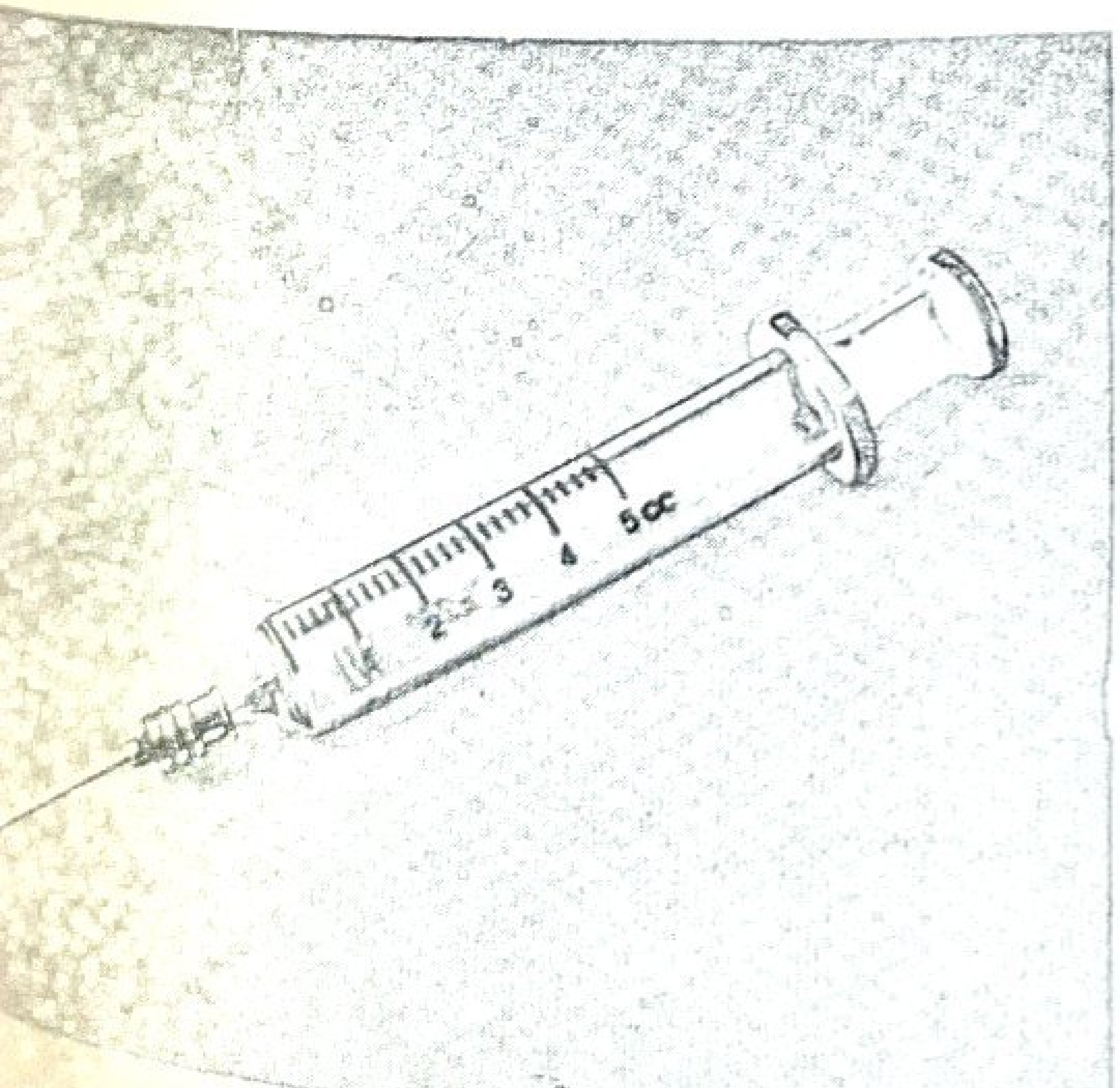
   Temos: 6,287 da*l* = 62,87 *l*
   = 628,7 d*l*
   = 6 287 c*l*
   = 62 870 m*l*

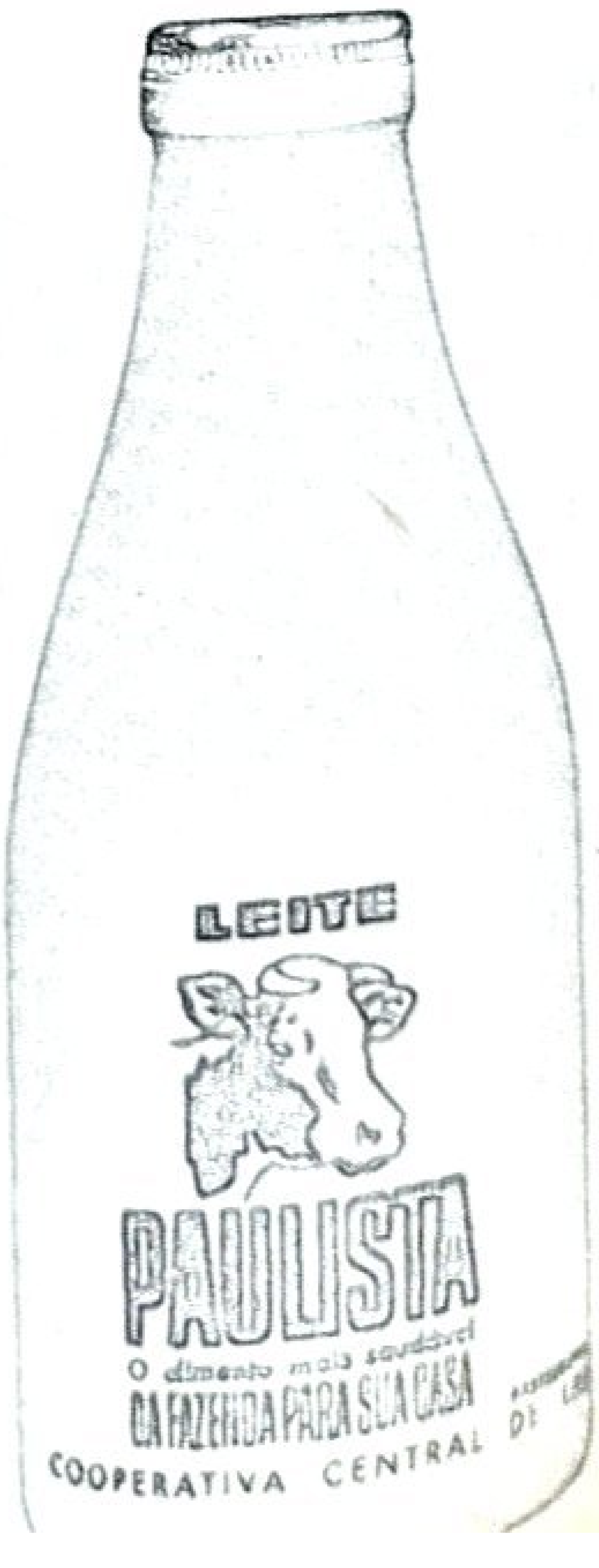
2. Exprimir: 42,5 *l* em hectolitros.

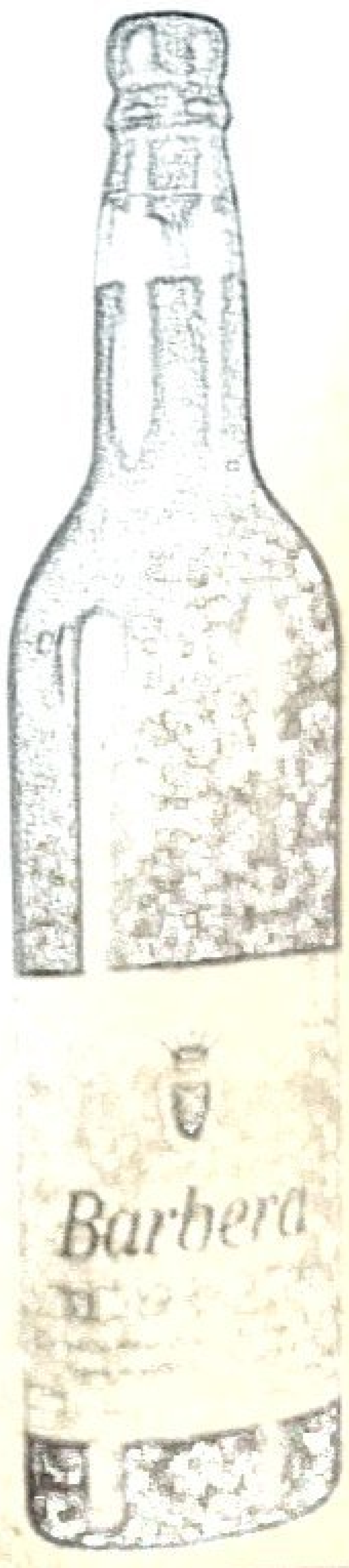
   Temos: 42,5 *l* = 0,425 h*l*

Os recipientes usados como *medidas efetivas* de capacidade são, geralmente, de *forma cilíndrica* (fig. 87) e constituídos dos mais variados materiais, de acôrdo com a aplicação que passam a ter.

FIG. 87







Erros comuns:

1. Confundir litro com garrafa (que é menos de um litro, pois, vale $\frac{3}{4}$, isto é, 7,5 d*l*);
2. escrever e dizer para as capacidades das seringas de injeção, símbolos e enunciado sem sentido. Exemplo: *Não* se deve dizer 3 cc e sim 3 cm³.

EXERCICIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 64

1. Complete as seguintes sentenças de modo a torná-las verdadeiras:

1.ª) $1\ l = \ldots\ dm^3$	7.ª) $2\ m^3 = \ldots\ l$
2.ª) $5\ l = \ldots\ dm^3$	8.ª) $3\,000\ cm^3 = \ldots\ l$
3.ª) $\frac{1}{4}\ l = \ldots\ dm^3$	9.ª) $100\ mm^3 = \ldots\ l$
4.ª) $2\ hl = \ldots\ l$	10.ª) $100\ l = \ldots\ hl$
5.ª) $100\ cl = \ldots\ dal$	11.ª) $1\ l = \ldots\ cl$
6.ª) $40\ kl = \ldots\ cl$	12.ª) $\frac{1}{4}\ l = \ldots\ ml$

2. Assinalar qual, das seguintes sentenças, é verdadeira ou falsa:

1.ª) $1\ l = 1\ cm^3$	4.ª) $1\ cm^3 = 1\ cc$
2.ª) $1\ l = 1\ dm^3$	5.ª) $1\ m^3 = 1\,000\ l$
3.ª) $1\ cl = 1\ cm^3$	6.ª) $1\ m^3 = 100\ l$

3. Completar, juntando o nome *verdadeiro* da unidade correspondente:

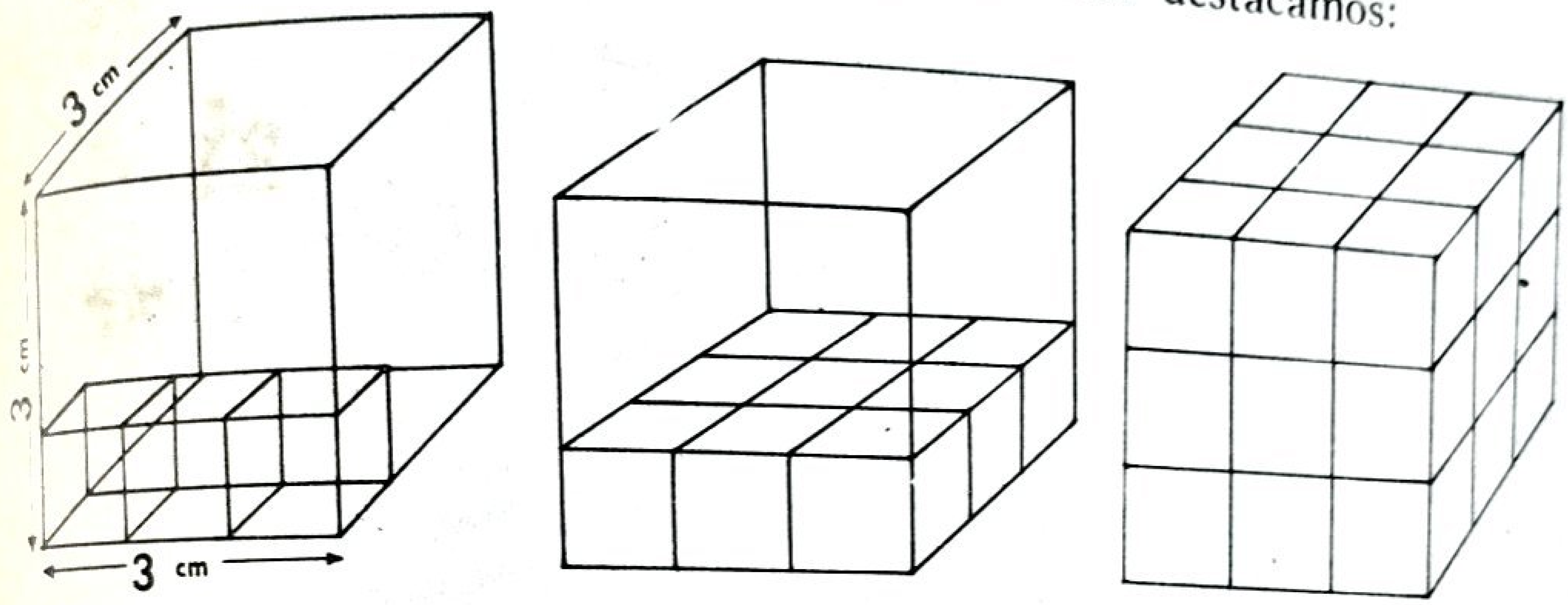
1.ª) $15\ m^3 = 15\,000\ \ldots$	4.ª) $3{,}28\ hl = 328\ \ldots$
2.ª) $20\ l = 24\ \ldots$	5.ª) $300\ cm^3 = 30\ \ldots$
3.ª) $3\ l = 3\,000\ \ldots$	6.ª) $7\ dl = 700\ \ldots$

4. Efetuar as seguintes *operações*, exprimindo os resultados em *l*:
   1.ª) $42{,}3\ l + 212{,}25\ dl + 0{,}31\ kl$
   2.ª) $5\ m^3 - (26{,}315\ dm^3 + 4\,657\ cm^3)$
   3.ª) $18{,}32\ hl + 3{,}900\ m^3 + 1\,250\ cm^3 + 36{,}4\ dal$
5. Uma caixa tem 1 m³ de volume. Pergunta-se: quantos *litros* de água pode conter? Quantos *hl*? Quantos *dal*?
6. Um negociante comprou, em barris, 46 *dal* de vinho e já vendeu 2,3 *hl*. Quantos *litros* possui ainda?
7. Uma pessoa vendeu 45,30 *l* de um certo produto à razão de Cr$ 1 500,00 o *dal*. Quanto recebeu?
8. Quantos vasilhames de 5*dl* são necessários para engarrafar a bebida que está num recipiente de capacidade igual a 8,4 *hl*?
9. Se 1 cm³ de uma droga custa Cr$ 580,00, qual é o preço de 2 *dl* dessa droga?
10. Cada meio litro de um certo refresco custa Cr$ 50,00. Um caminhão, que transporta 4 hl dêsse refresco, deixa $\frac{3}{8}$ da sua carga para um negociante. Quanto deve pagar o negociante pela mercadoria recebida?

VOLUME DOS PRINCIPAIS SÓLIDOS GEOMÉTRICOS

CUBO

Seja o *cubo* de 3cm de aresta (fig. 88), onde destacamos:



3 cubos de $1cm^3$ — $3 \times 3 = 9$ (cubos de $1cm^3$) — $3 \times 3 \times 3 = 27$ (cubos de $1cm^3$)

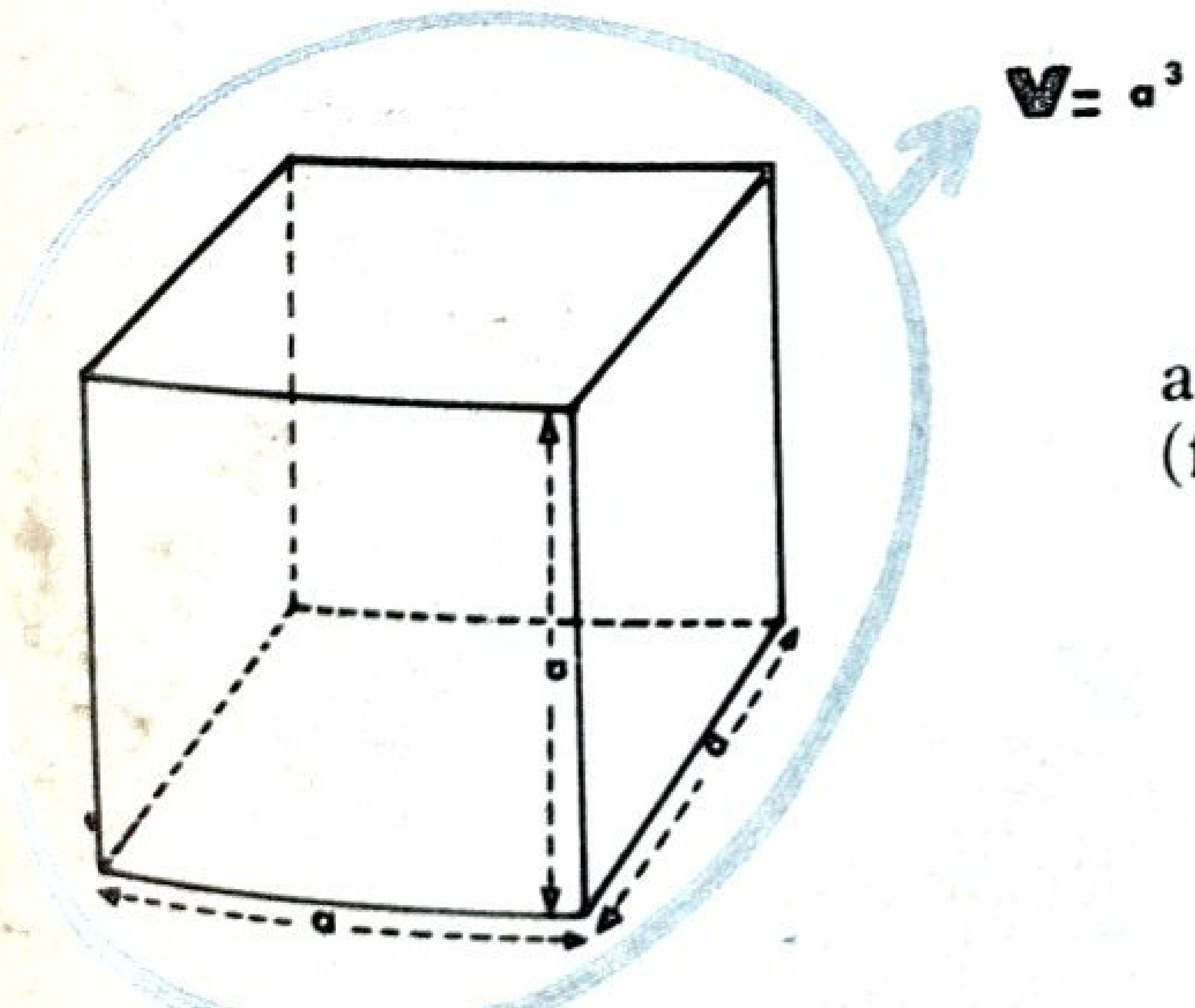
FIG. 88

Portanto, o volume de um cubo de 3cm de aresta é:

$$3cm \times 3cm \times 3cm = 27cm^3, \text{ ou seja:}$$

VOLUME DO CUBO = med. *aresta* × med. *aresta* × med. *aresta*

notando-se que a unidade de volume corresponde à unidade de comprimento utilizada para a medida da aresta (nesse caso em cm).



Indicando por a a medida da aresta e por V o volume do cubo (fig. 108) temos a *"fórmula"*:

$$V = a \times a \times a = a^3$$

Problema inverso:

Conhecido o *volume* de um cubo, como você poderia determinar a *medida da aresta* dêsse cubo?

Ora, a operação inversa da operação "elevar ao cubo" é a operação "extração da raiz cúbica" e, portanto, se o volume de um cubo é, por exemplo, 64 cm^3, a medida de sua aresta será:

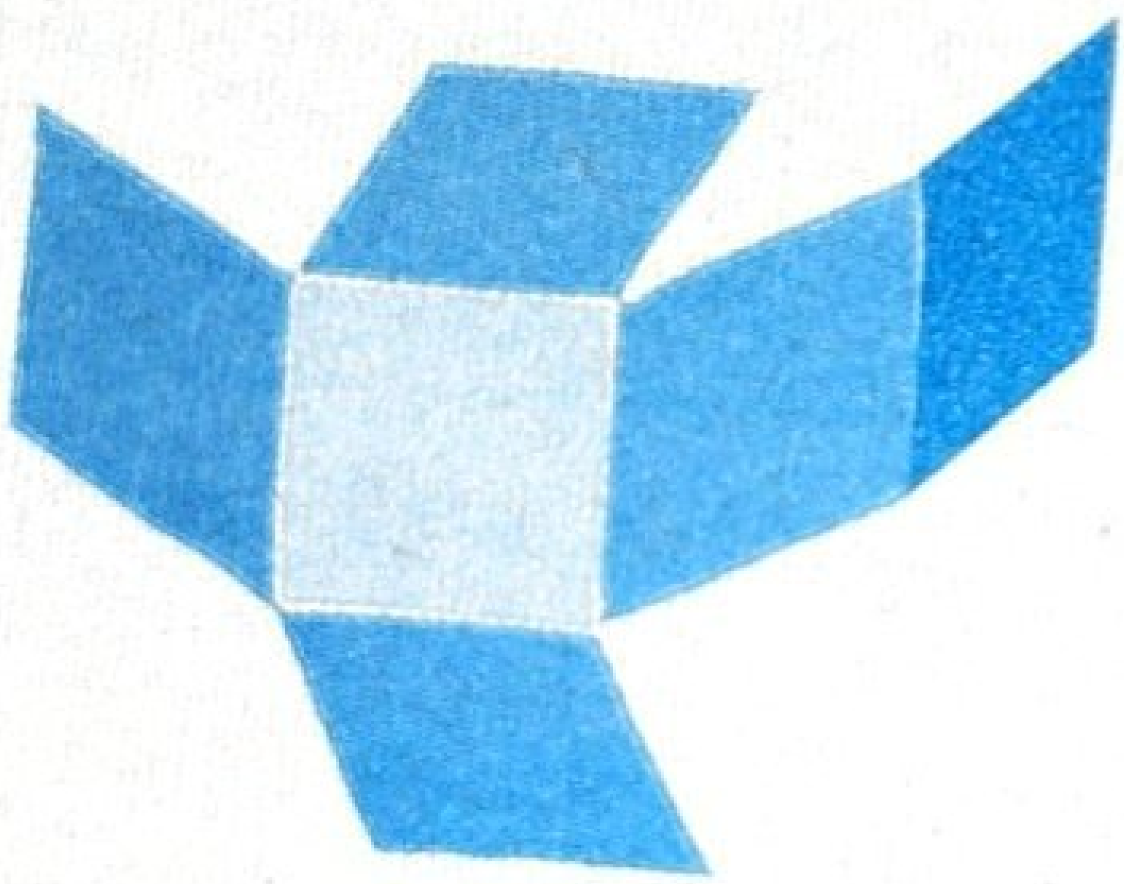
$$\boxed{\sqrt[3]{64 \text{ cm}^3} = 4 \text{ cm}}$$

Se o volume fôsse 65 cm^3, como 65 *não é um cubo* perfeito . . .), a medida da aresta só poderá ser expressa por *aproximação:* (não precisa dizer

$\sqrt[3]{65} \text{ cm}^3 \sim 4\text{cm}$ (aproximação por falta!)

Área lateral e área total: Um cubo possui 6 *faces* iguais (são os quadrados que o "limitam"), 12 *arestas* iguais (são os lados dos quadrados das faces) e 8 *vértices* (são os vértices dos quadrados).

É fácil *desenvolver* a superfície (fig. 89) que "contorna" o cubo:



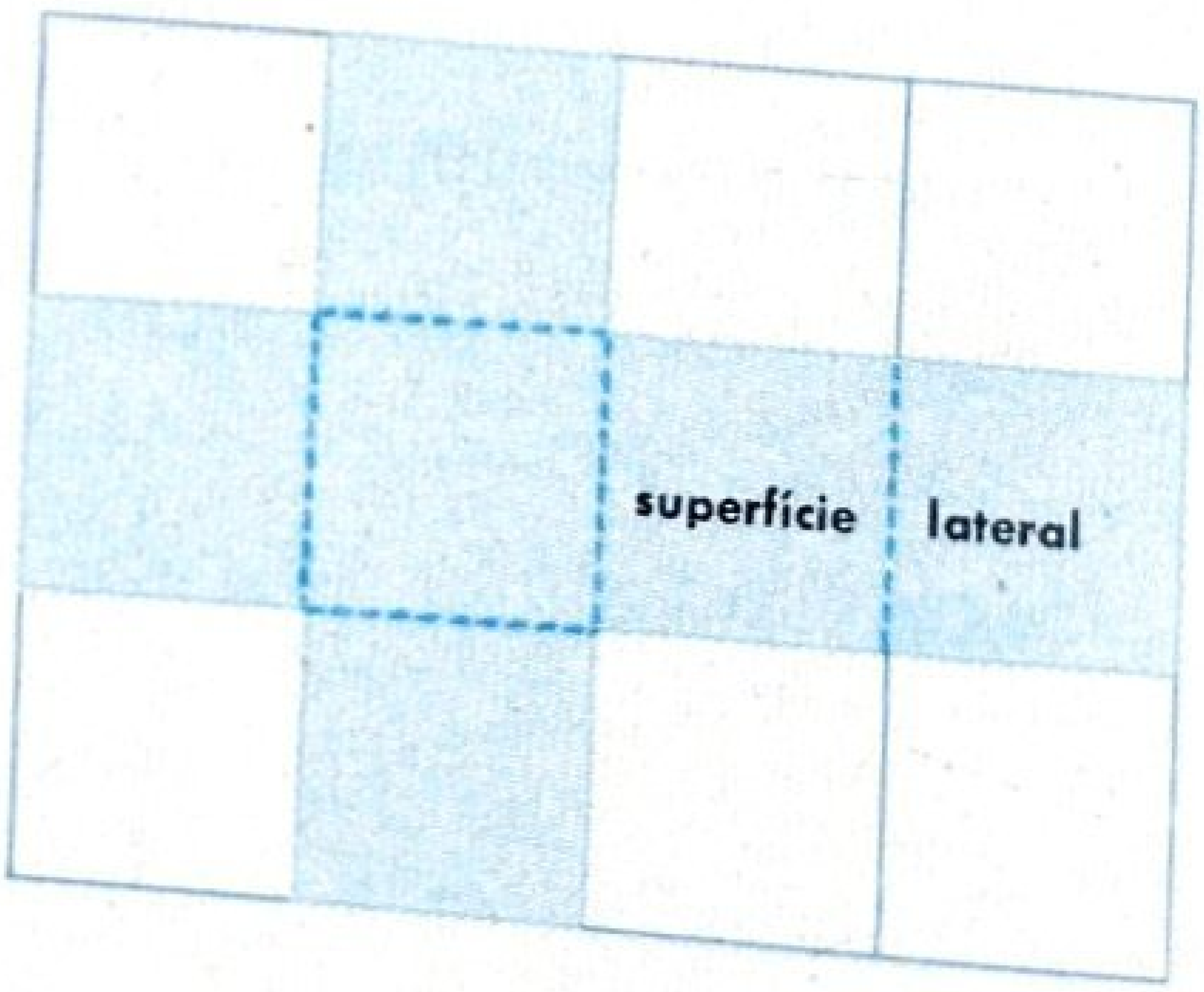


FIG. 89

A medida de tal superfície, que é igual à soma das seis áreas dos quadrados das faces, é chamada *área total do cubo*. Não considerando as faces do "fundo" e a de "cima", isto é, sòmente a soma de quatro *faces laterais*, temos a área lateral do cubo.

Assim, por exemplo, o cubo de 3cm de aresta possui:

$6 \times (3\text{cm})^2 = 6 \times 9\text{cm}^2 = \boxed{54 \text{ cm}^2}$ como área total

e

$4 \times (3\text{cm})^2 = 4 \times 9\text{cm}^2 = \boxed{36 \text{ cm}^2}$ como área lateral

Paralelepípedo Retângulo

Trata-se do sólido geométrico que possui 6 faces *retangulares*, iguais *duas a duas*. As três dimensões (comprimento, largura e altura) estão caracterizadas na fig. 90, onde também são notadas 12 arestas iguais, *quatro a quatro*.

Os "paralelepípedos" usados no calçamento das ruas, por exemplo, têm a *forma* de um paralelepípedo retângulo. E as caixas de fósforo? Também, não é?

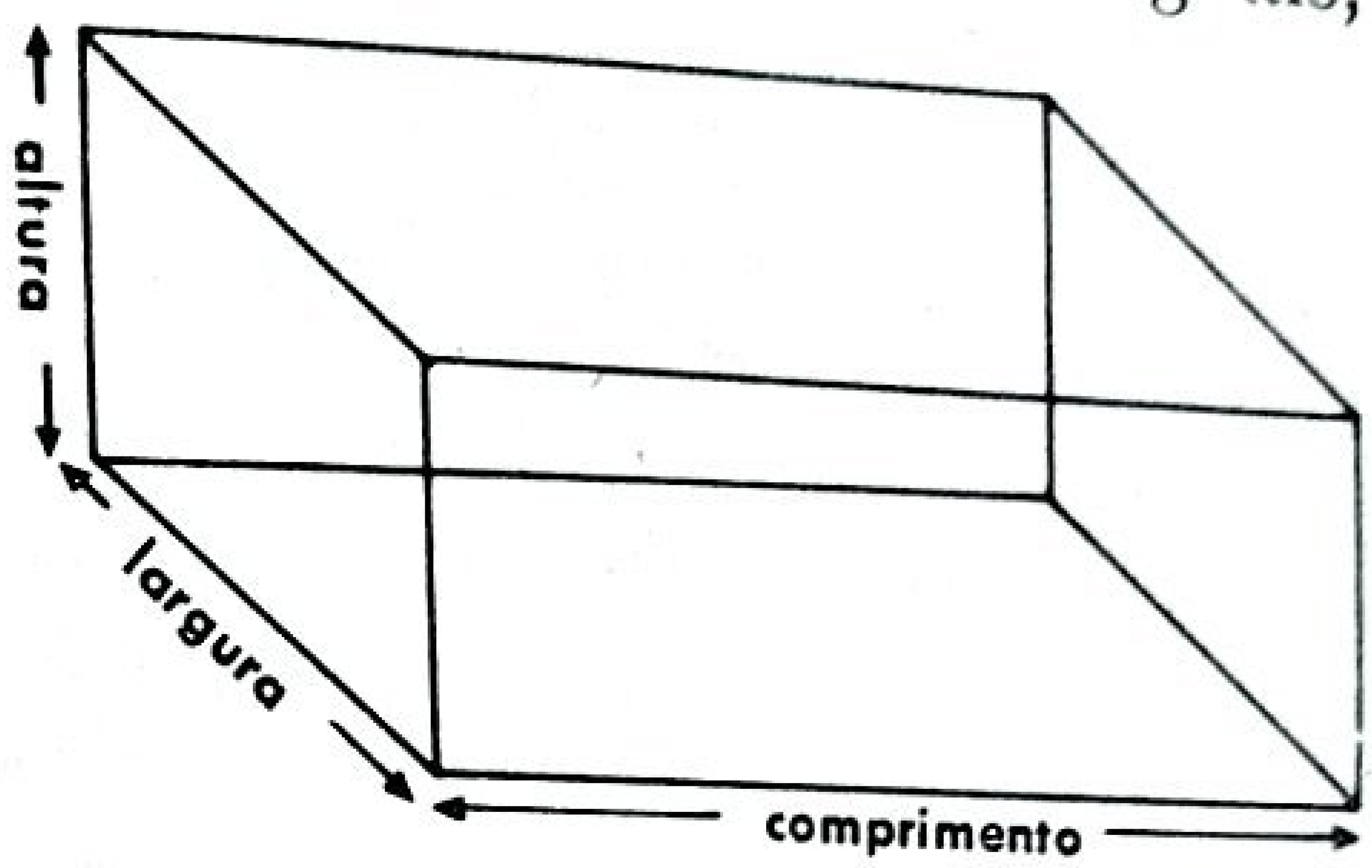
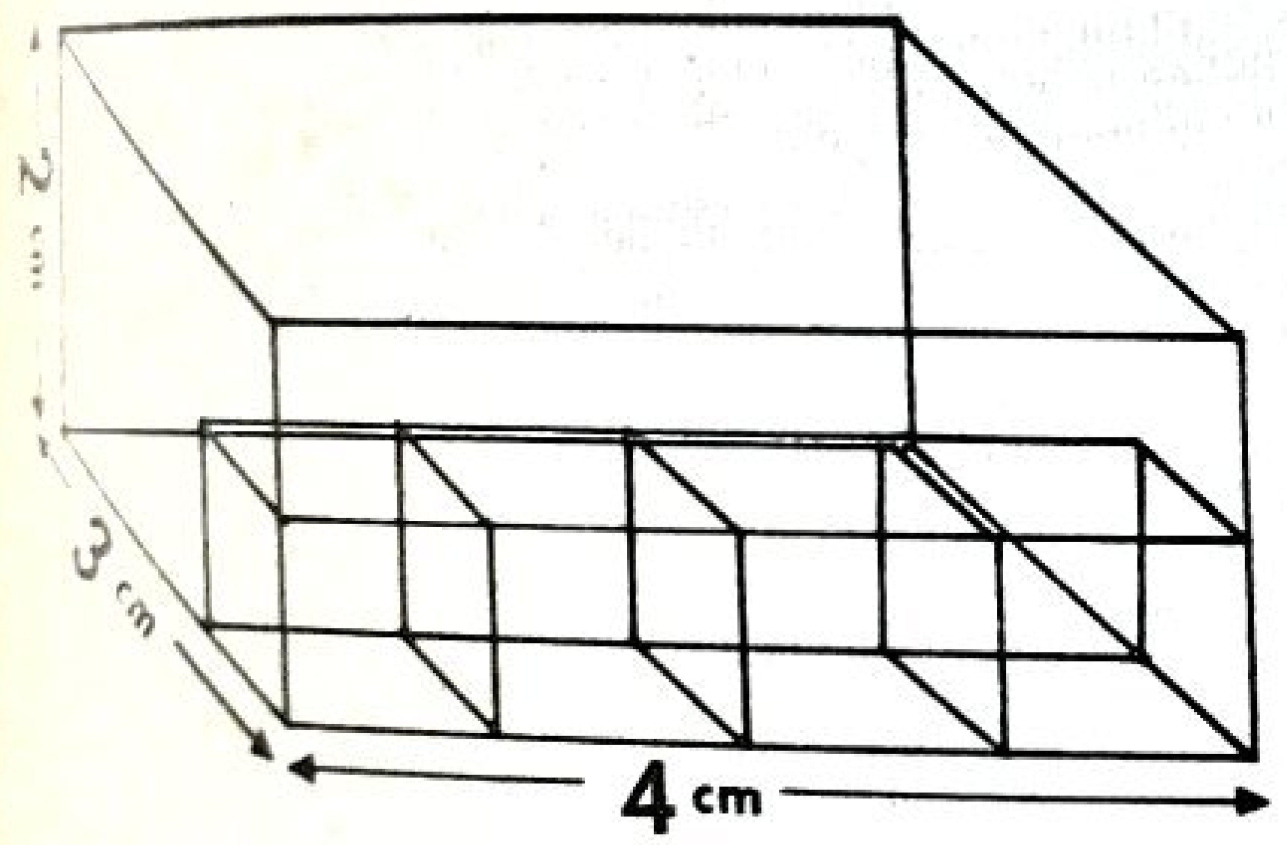
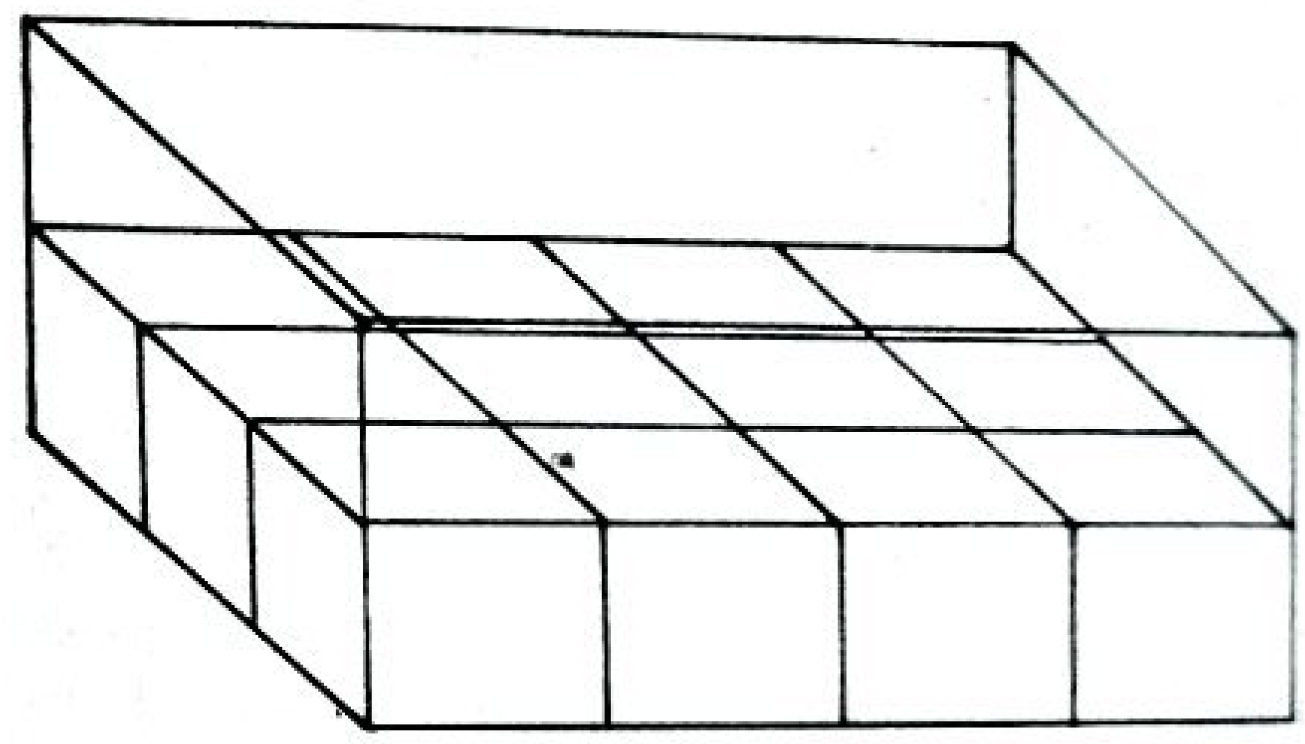


FIG. 90

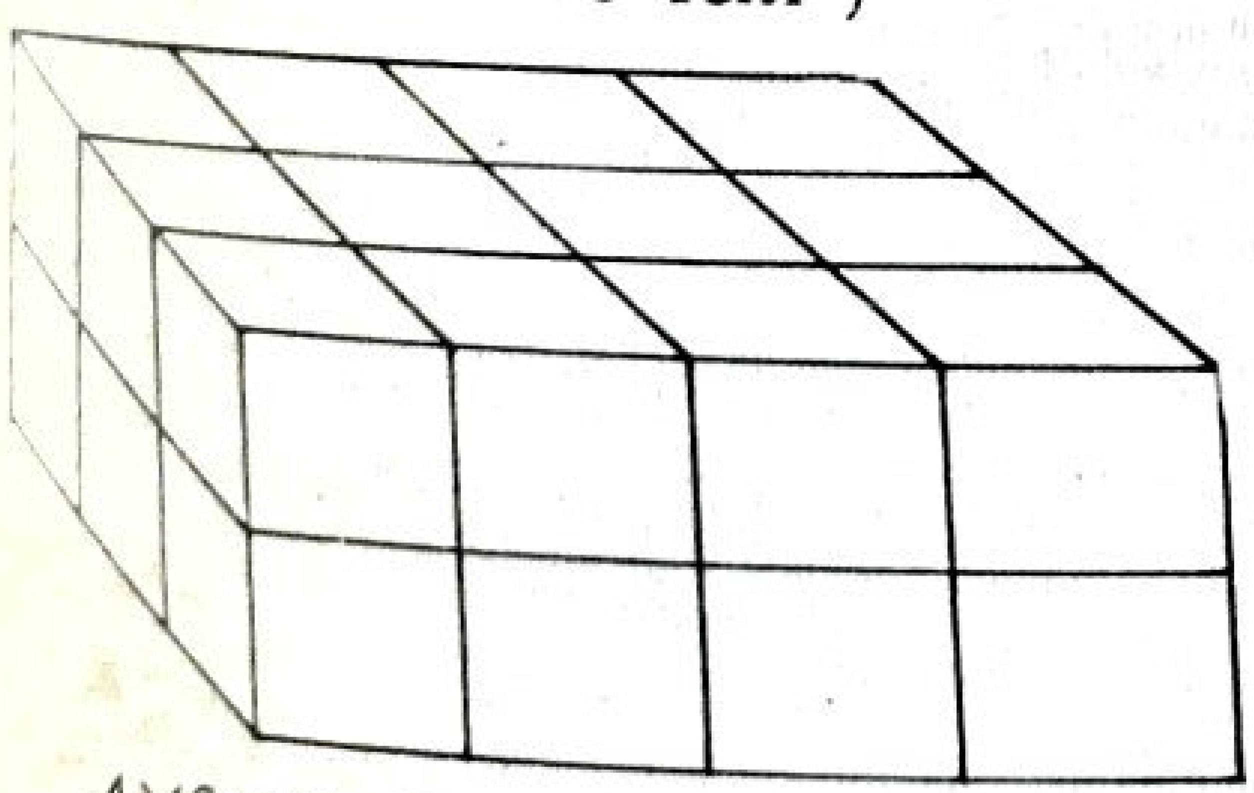
Vamos calcular o ***volume*** de um paralelepípedo retângulo. Seja o da fig. 91:



(4 cubos de 1cm³)



$4 \times 3 = 12$ (cubos de 1cm³)



$4 \times 3 \times 2 = 24$ (cubos de 1cm³)

FIG. 91

Portanto, o volume do paralelepípedo retângulo, cujas dimensões são: 4cm, 2cm e 3cm, respectivamente, é: 4cm × 3cm × 2cm = 24 cm³, ou seja:

> VOLUME DO PARALELEPÍPEDO RETÂNGULO
> = med. *comprimento* × med. *largura* × med. *altura*.

Indicando, por *a*, *b* e *c*, as medidas das dimensões do paralelepípedo, temos a "fórmula":

$$V = a \times b \times c$$

Substituindo o produto $a \times b$ (que indica a área do retângulo da base do paralelepípedo), por B, e a outra dimensão c (altura) por h, o volume do paralelepípedo retângulo pode, *também*, ser dado pela *fórmula:*

$$\boxed{V = B \times h}$$

Problema inverso:

O conhecimento do *volume* e da *área da base*, de um paralelepípedo retângulo, permite calcular a *altura* dêsse paralelepípedo.

Basta dividir (operação *inversa* da multiplicação), isto é:

$$\boxed{\text{altura} = \text{volume} : \text{área da base}}$$

Da mesma forma, conhecendo-se o *volume* e a *altura* de um paralelípípedo retângulo, pode-se determinar a *área de sua base:*

$$\boxed{\text{área da base} = \text{volume} : \text{altura}}$$

Exemplo:

O volume de um paralelepípedo retângulo é igual a 448 dm^3. Sabendo-se que a área da base é de 56 dm^2, calcular o valor da *altura*.

Temos: 448 dm^3 : 56 dm^2 = 8dm (altura)

Área lateral e área total: Um paralelepípedo retângulo tem 6 *faces* retangulares, iguais, *duas* a *duas* (fig. 92);

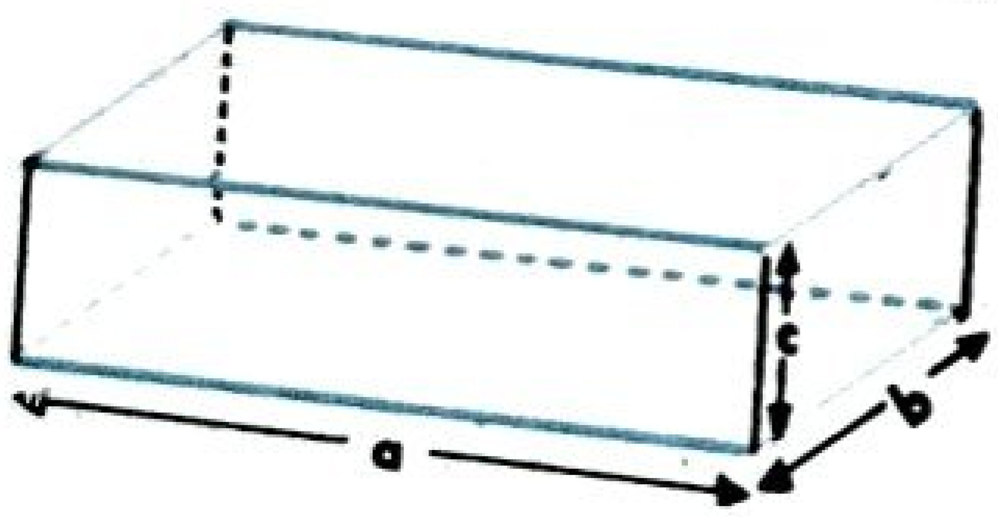
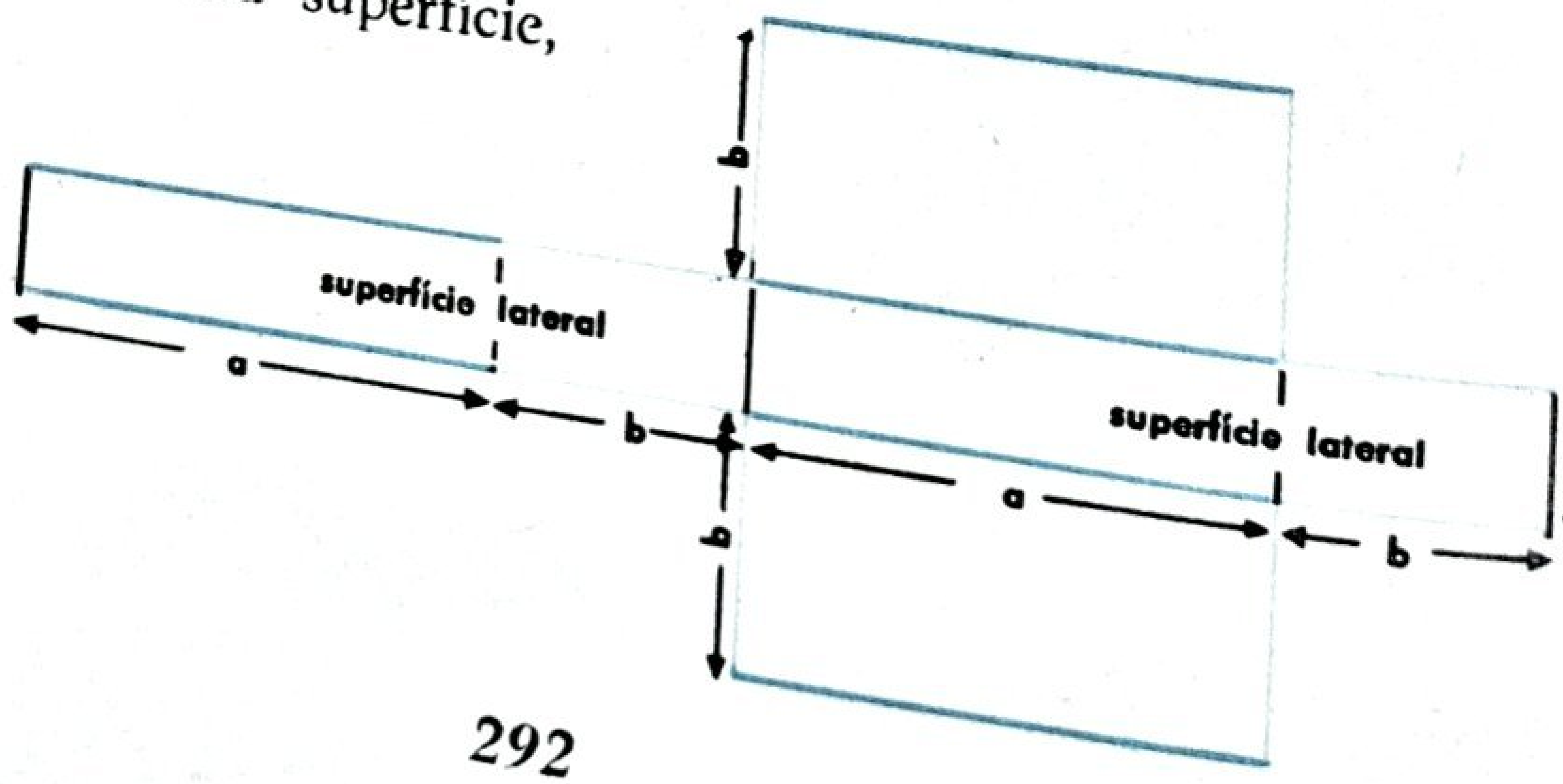


FIG. 92

12 *arestas*, iguais *quatro* a *quatro* e 8 *vértices*.

Desenvolvendo a sua superfície, obtemos:



ou seja:

área lateral = perímetro da base × med. altura	Verifique!
área total = área lateral + 2 × área da base	Verifique!

No exemplo da fig. 91 temos:

área lateral : $2\times(4\times3) + 2\times(2\times3) = 24\text{cm}^2 + 12\text{cm}^2 = 36\ \text{cm}^2$

área total : $2\times(4\times3) + 2\times(2\times3) + 2\times(4\times2) = 36\text{cm}^2 +$
$+ 16\text{cm}^2 = 52\ \text{cm}^2$.

EXERCÍCIOS EXPLORATÓRIOS (de aplicação) — GRUPO 65

1. Qual o comprimento do barbante que você deve usar para amarrar a caixa (fig. 93) de forma *cúbica*, sabendo-se que são necessários 10cm para dar o nó?

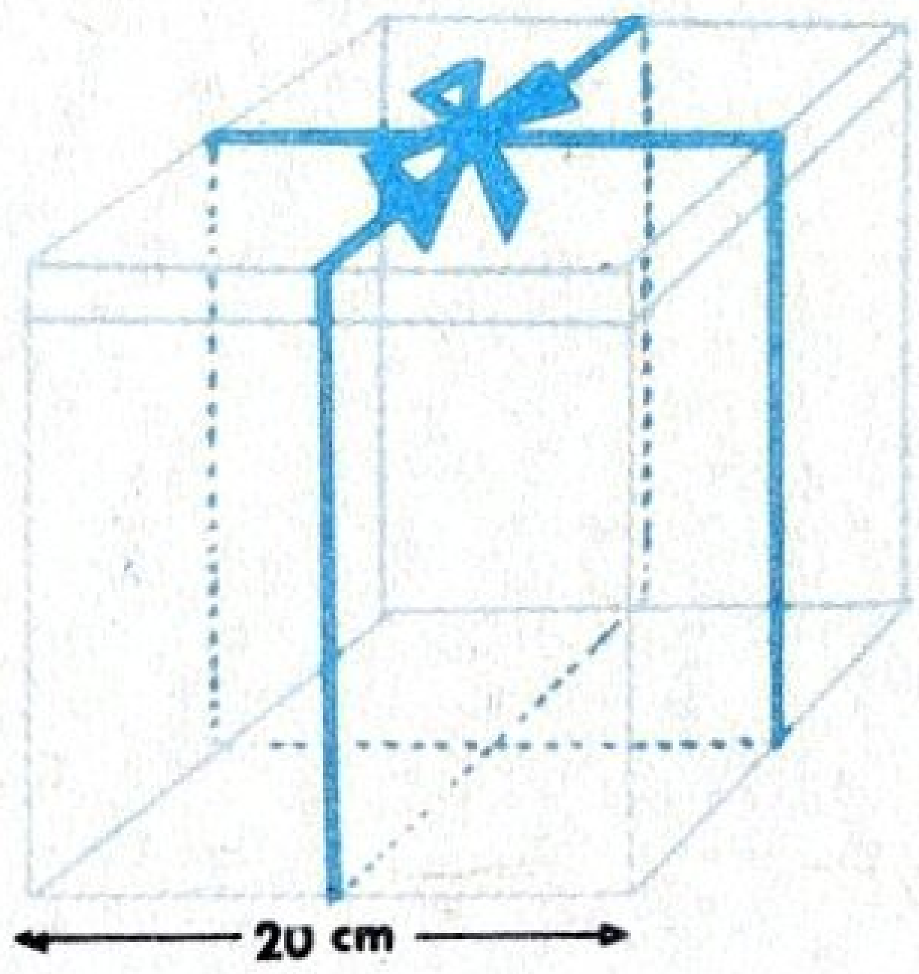


FIG. 93

2. Observe bem as figuras abaixo (fig. 94):

   Quanto vale a soma dos pontos de duas faces opostas?

   Então complete, agora, os pontos na segunda figura.

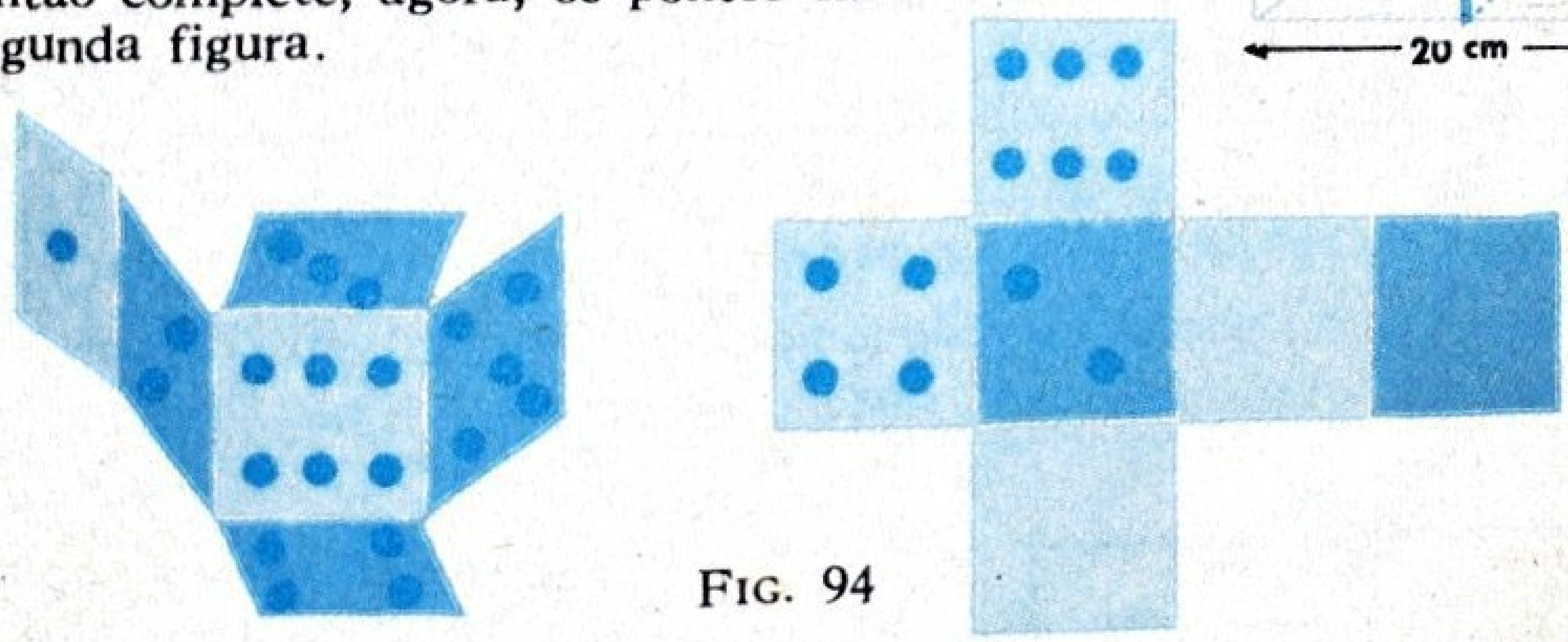


FIG. 94

3. Preste atenção: Se você *duplicar* a aresta de um cubo, será que o seu volume também *duplica?* Experimente, "saindo" de um cubo de 2cm de aresta, e conclua.

4. Você vai construir uma *caixinha retangular* com uma fôlha de cartolina (fig. 95). Recortando nos quatro cantos quadradinhos de 2cm, e dobrando onde se vê linha pontilhada, calcule a área lateral da caixinha construída.

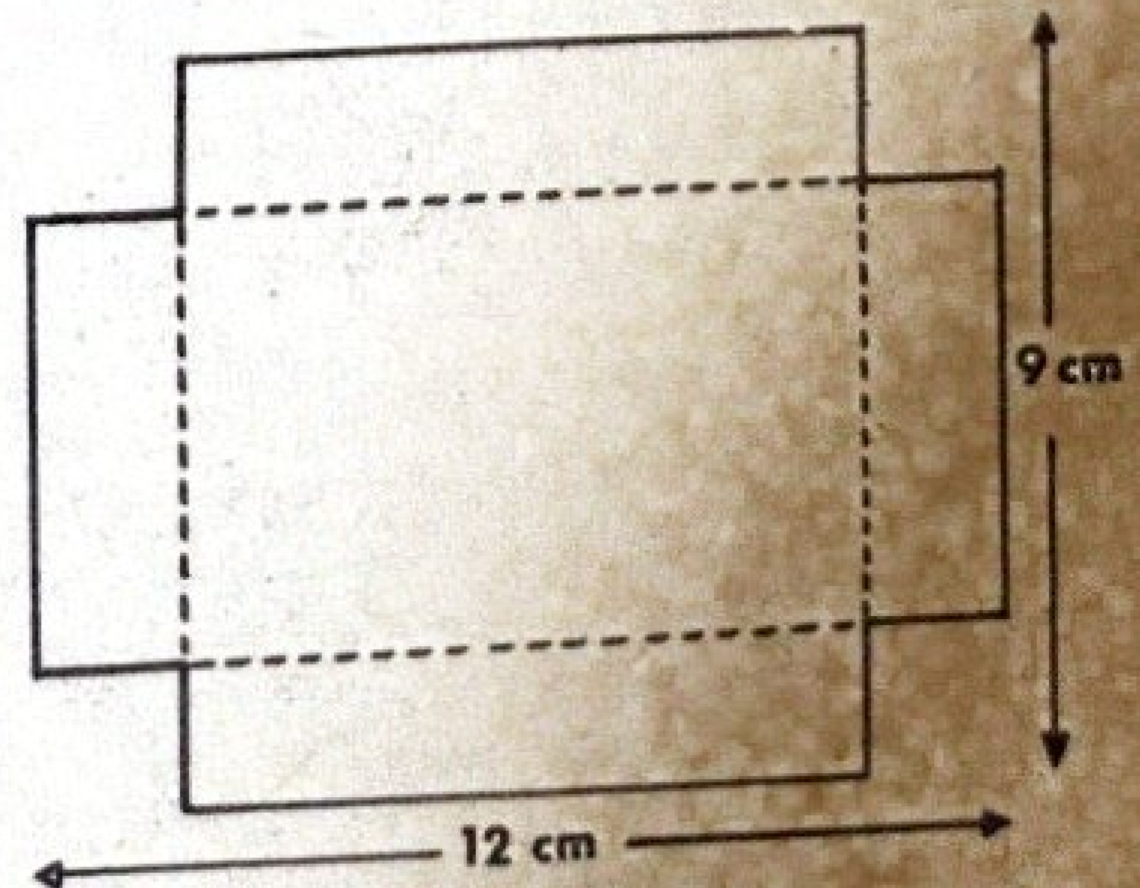


FIG. 95

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 66

1. Complete o seguinte quadro relativo às dimensões e medidas de *cubos.*

medida da aresta	5cm	...	...	...	...
área de uma face	...	$36dm^2$	...	...	...
área lateral	...	...	$64cm^2$	...	...
área total	...	...	...	$54m^2$	...
volume	...	...	...	...	$216cm^3$

2. Complete o seguinte quadro relativo às dimensões e medidas de um paralelepípedo retângulo (cuidado! transforme as medidas na mesma unidade para poder operar...)

comprimento	3m	120cm	8cm	...	1m
largura	4m	6dm	...	60cm	...
altura	5m	400mm	3cm	...	...
área da base	...	...	$16cm^2$	$48dm^2$	$2m^2$
área lateral	...	...	...	...	...
área total	...	...	...	...	...
volume	...	...	...	$192dm^3$	$2m^3$

3. As dimensões de meu quarto de dormir são: 4,5m (comprimento), 3m (largura) e 2,90m (altura). Qual o volume ocupado por meu quarto?

4. As três caixas (fig. 96) têm as mesmas dimensões. Em qual delas estamos usando mais "durex"?

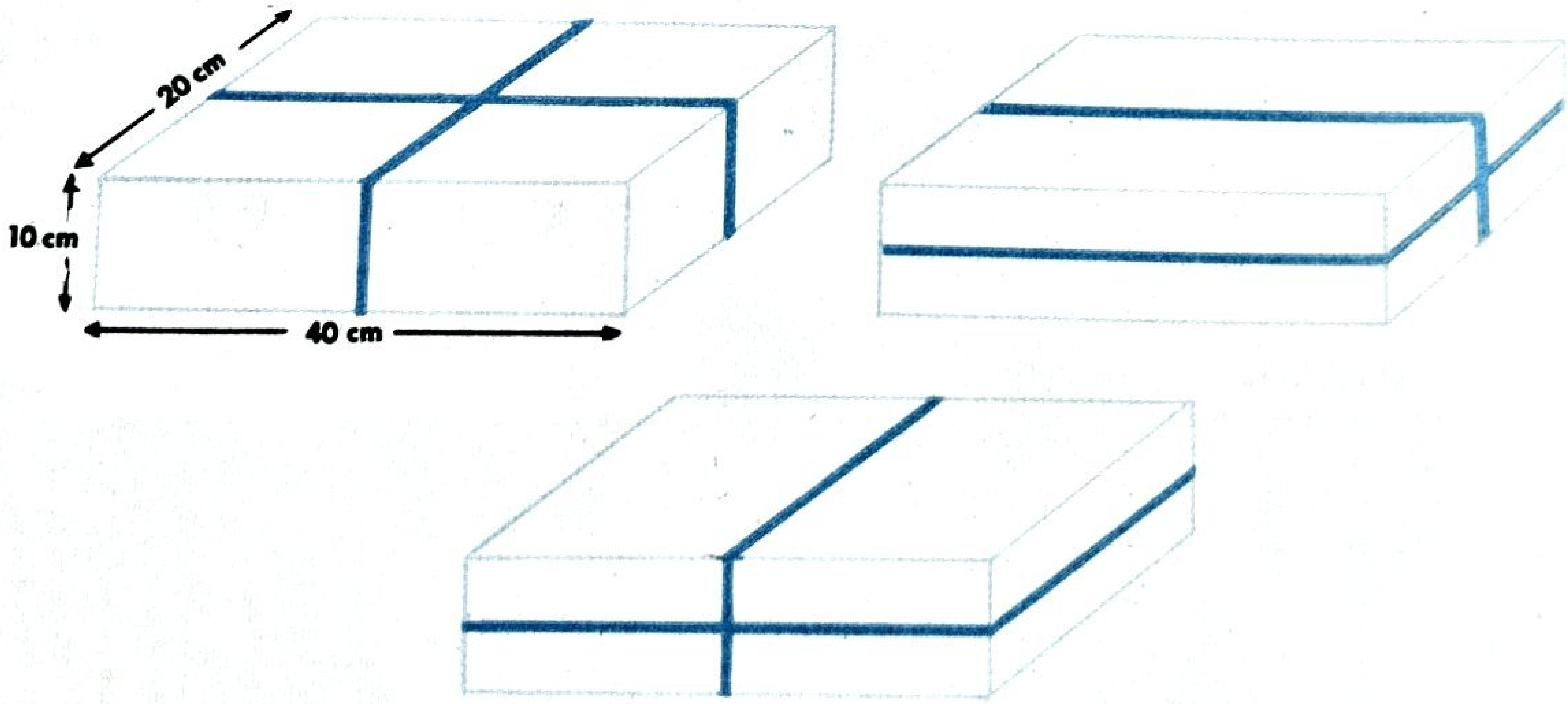


FIG. 96

31. *Prisma reto; cilindro reto*

Considere as seguintes figuras geométricas (fig. 97):

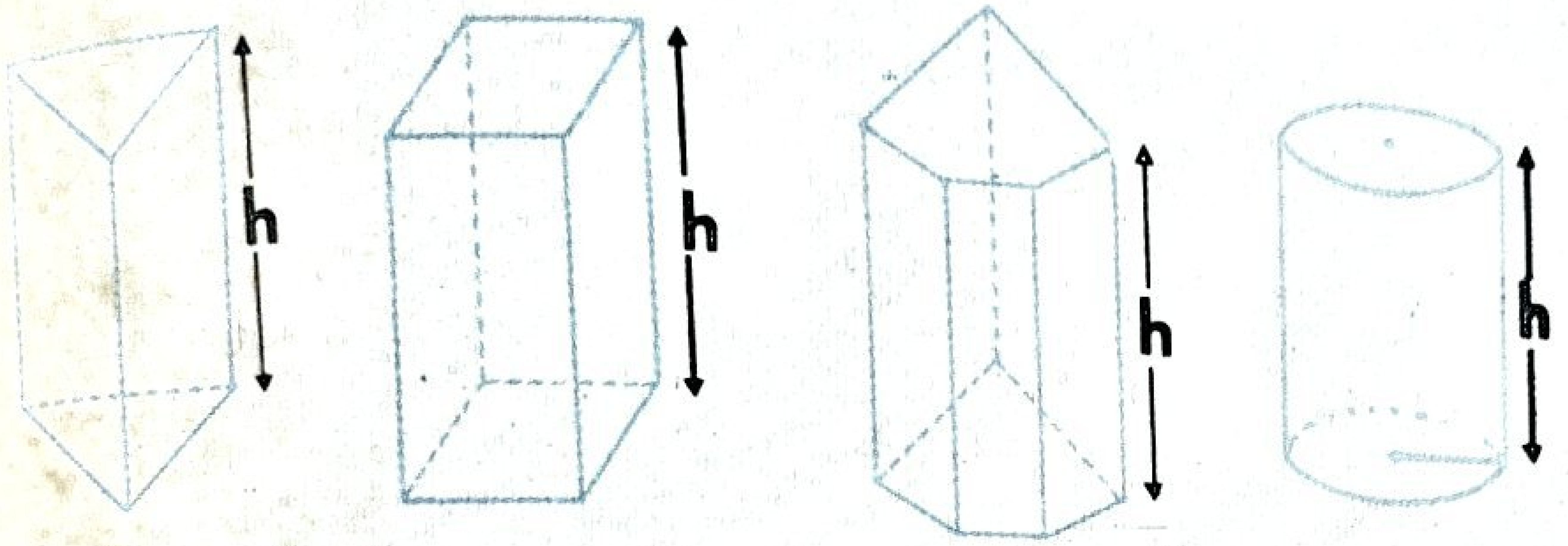


Fig. 97

Os sólidos representados por essas figuras são bem conhecidos, através dos contactos que todos nós temos com os objetos que guardam essas *formas*.

Os três primeiros sólidos são exemplos de prismas e o último de cilindro, todos retos ("de pé"!), pois os *oblíquos* ("inclinados") serão estudados mais tarde.

Observe bem que nos *prismas* as *bases* são polígonos (no primeiro é um *triângulo*, no segundo um *retângulo*, no terceiro um *pentágono*, ...) e nos *cilindros* as bases são *sempre* círculos.

Como são as *faces laterais* dos prismas? É fácil ver que são sempre paralelogramos, onde um dos lados (que é a aresta lateral) representa a altura do prisma.

O cilindro é também chamado "um corpo redondo", o que é natural pela forma da superfície que o "envolve". A sua altura é a *distância* entre as bases inferior e superior.

Observação: Você deve agora estar pensando que o segundo prisma (fig. 97) é também um paralelepípedo. É mesmo! Portanto, *todo prisma de base retangular é um paralelepípedo*.

32. *Cálculo do volume*

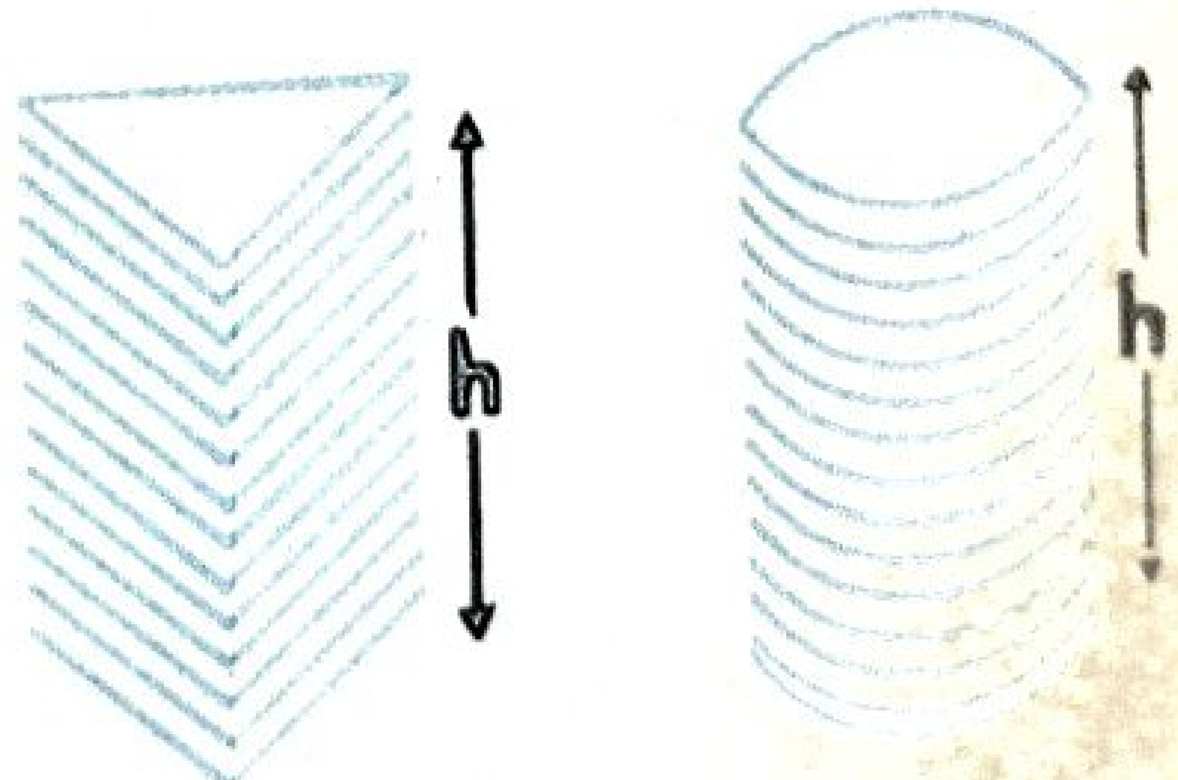


Fig. 98

O volume, tanto do prisma como o do cilindro, será calculado *intuitivamente*. Suponhamos, por exemplo, que se deseja calcular o volume do prisma triangular (fig. 98), isto é, cuja base é um triângulo.

Você poderia "pensar" êsse prisma como um *conjunto* de triângulos, todos *iguais* à base, desenhados sôbre um cartão de espessura unitária (1mm, 1cm, ...) e a seguir "empilhados", depois de recortados.

O prisma assim formado, "compõe-se" de *tantas bases triangulares* quantas forem as unidades da *altura* do prisma. Logo, o volume do prisma será conhecido *multiplicando-se a área da base pela medida da altura* (nas mesmas unidades).

Êsse mesmo raciocínio poderá ser feito com *qualquer* base.

Se a base fôr um círculo, a figura "composta" será um cilindro. Aliás, você já deve ter visto as "rodelas" que são empregadas como descanso dos copos em que são servidas bebidas. Elas constituem um ótimo exemplo para sua "experiência" (não para ser feita nas festas, naturalmente...).

Logo:

$$\text{VOLUME} \begin{cases} \textit{prisma} \Longleftrightarrow \\ \textit{cilindro} \Longleftrightarrow \end{cases} \boxed{\text{área da base} \times \text{med. altura}}$$

valendo as "fórmulas":

para o

- PRISMA : $\boxed{V = B \times h}$ onde B representa a *área* do polígono da base e h a *altura* do prisma.
- CILINDRO : $\boxed{V = \pi \times r^2 \times h}$ onde $\pi . r^2$ é a *área* do círculo da base e h a altura do cilindro.

Exemplos:

1. Calcular o volume do *prisma triangular* de altura igual a 12dm e cujo triângulo da base tem as seguintes dimensões: base do triângulo, 5dm; altura do triângulo, 4dm.

Temos: $V = B \times h$, onde $B = \dfrac{5\text{dm} \times 4\text{dm}}{2} = 10\text{dm}^2$ (área do triângulo da base)

e, portanto: $V = 10\text{dm}^2 \times 12\text{dm} = 120\ \text{dm}^3$.

2. Calcular o volume do cilindro (reto) de 10cm de altura, sabendo-se que o raio do círculo da base mede 3cm.

Sendo: $V = \pi . r^2 . h$ $\boxed{r = 3\text{cm}}$ $h = 10\text{cm}$, temos:

$$V = 3{,}14 \times (3\text{cm})^2 \times (10\text{cm}) = \boxed{282{,}600\ \text{cm}^3}$$ (por aproximação).

Problemas inversos:

1. Um prisma reto tem 336 dm^3 de volume e 60cm de altura. Qual a área da base dêsse prisma?

Da fórmula $V = B \times h$, concluímos que a área da base (B) é obtida dividindo-se o volume (V) pela medida da altura (h), isto é:

$$336 \text{ dm}^3 : 6 \text{ dm} = 56 \text{ dm}^2$$

2. São conhecidos o volume de um cilindro (785cm^3) e a medida da altura dêsse cilindro (10cm). Calcular o valor do raio do cilindro.

Agora, as operações inversas são:

$$785 \text{ cm}^3 : 10\text{cm} = 78{,}50 \text{ cm}^2 \text{ (área da base)}$$
$$78{,}50 \text{ cm}^2 : 3{,}14 = 25 \text{ cm}^2 \text{ (quadrado do raio)}$$

logo, $$r = \sqrt{25\text{cm}^2} = 5\text{cm}$$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 67

1. Complete o seguinte quadro relativo a medidas de *prismas retos:*

Base	Área da base	Altura	Volume
quadrado: lado: 4cm	...	1 dm	... cm^3
retângulo: comprimento: 6dm largura: 40cm....	...	...	360 cm^3
triângulo: base: 12cm ...... altura :	36cm^2	...	1 440cm^3
trapézio: base maior: 6dm base menor: 4dm altura: 3dm	...	15dm	... dm^3

2. Complete o seguinte quadro relativo a medidas de *cilindros retos:*

Raio da base	Altura	Área da base	Perímetro da base	Volume
10cm	12cm	... cm^2	...	...
...	20cm	... dm^2	125,6m	...
...	0,5m	... dm^2	...	141,300dm^3
2m	...	... m^2	...	125,600m^3

33. *Pirâmide reta; cone circular reto*

Consideremos os seguintes *sólidos* — também do conhecimento de todos — através das figuras geométricas (fig. 99):

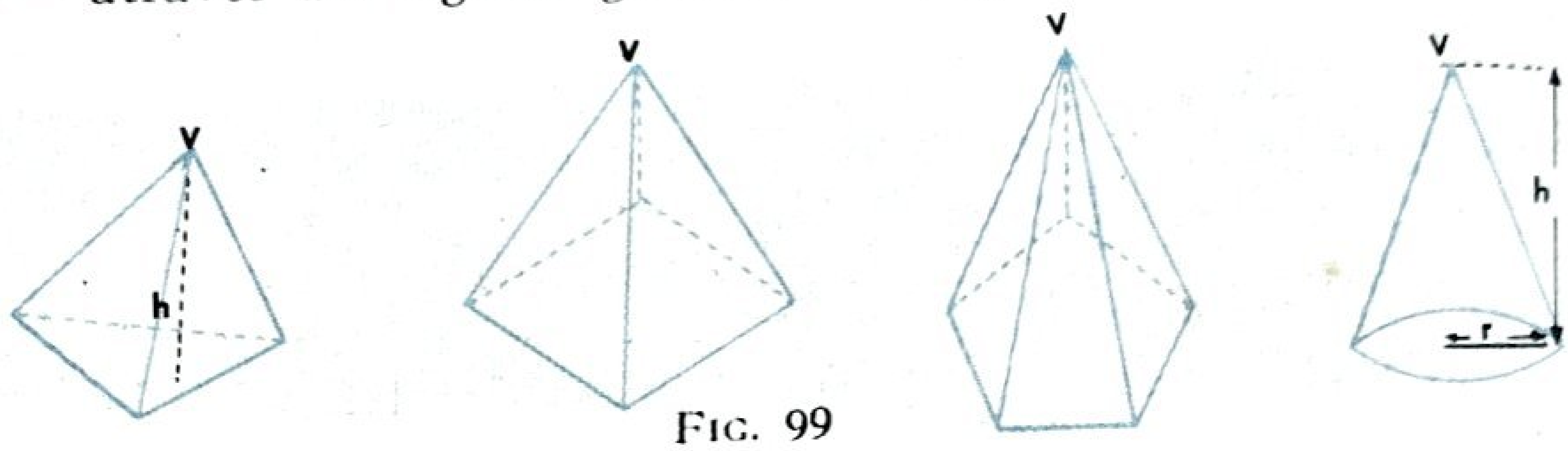


FIG. 99

Os três primeiros são exemplos de pirâmides (lembra-se das Pirâmides do Egito?) e o último de cone (lembra-se da forma dos chapéus de palhaço?), todos retos.

A *base* das pirâmides são polígonos (triângulo na primeira, quadrado na segunda, pentágono na terceira, ...) e a do cone sempre círculo.

Como são as *faces laterais* das pirâmides? São *sempre* triângulos, não é? Todos êsses triângulos têm um *vértice comum* (ponto V na fig. 99) chamado vértice da pirâmide. A *distância* dêsse vértice à base determina a altura da pirâmide.

O cone, por sua vez, é mais um "corpo redondo" que possui um vértice; a *distância* dêsse vértice à base (que é um círculo) determina a altura do cone.

34. *Cálculo do volume*

Intuitivamente é simples calcular o volume dêsses sólidos. Suponhamos, como exemplo, que uma pirâmide triangular e um cone (fig. 100) estejam completamente cheios de areia fina. Se a areia da pirâmide fôr tôda despejada num prisma triangular, de *mesma base e altura* que ela, e a do cone, num cilindro de *mesma base e altura* que êle, que acontecerá quando *tôda* a areia fôr despejada?

Você pode observar (fig. 100) ou também verificar, fazendo a experiência, que *sòmente* $\frac{1}{3}$ (um têrço!) da capacidade do prisma e do cone ficará coberta. Em outras palavras, isto significa que você deve operar três vêzes, se quiser encher *totalmente* o prisma ou o cone. Logo:

> os volumes da pirâmide e do cone são, respectivamente, um têrço dos volumes do prisma e do cone, de mesma base e altura.

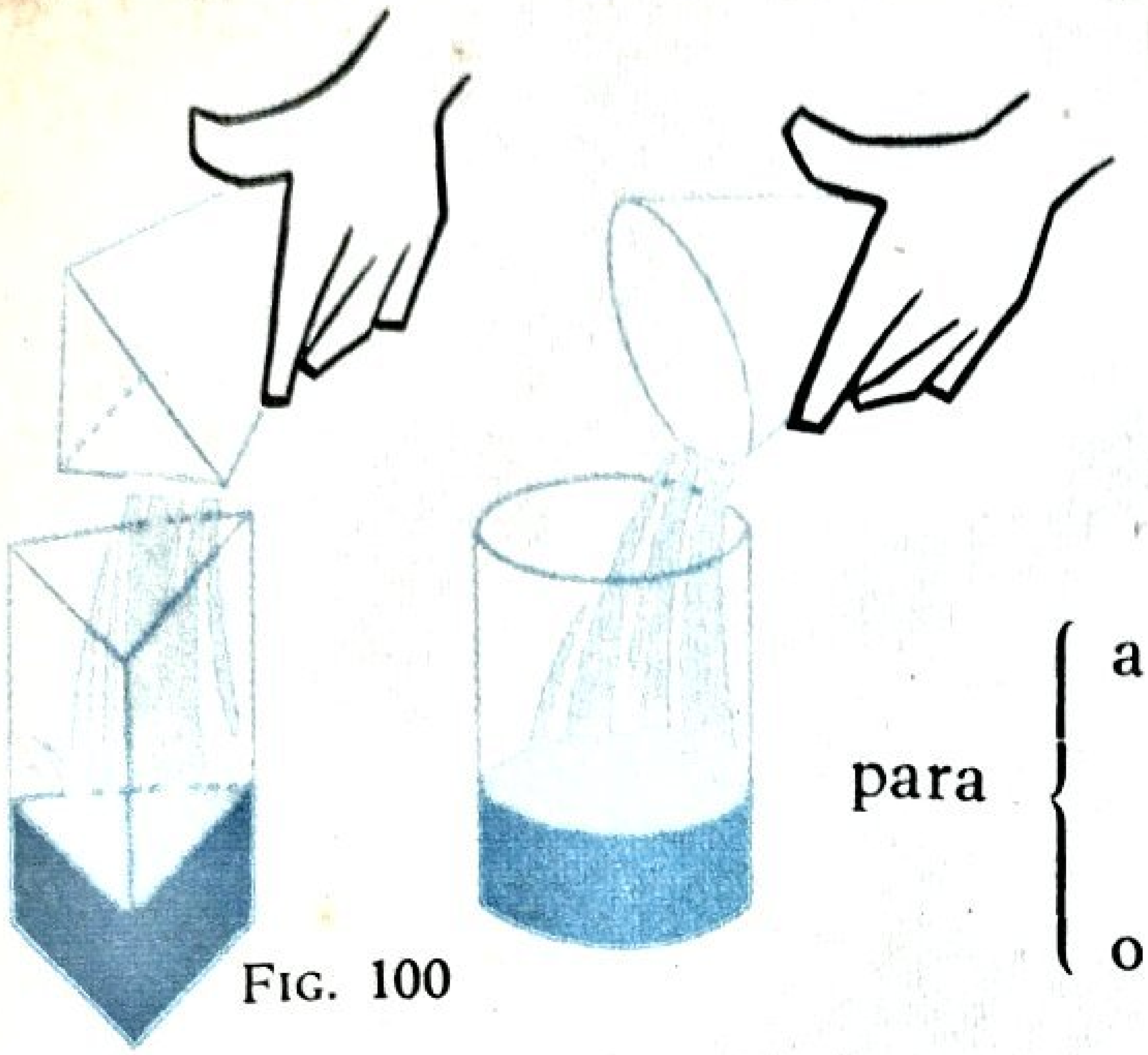


Fig. 100

Agora, valem as *"fórmulas"*:

para
- a PIRÂMIDE : $V = \dfrac{B \times h}{3}$
- o CONE : $V = \dfrac{\pi . r^2 \times h}{3}$

Exemplos:

1. Calcular o *volume* de uma pirâmide de 12dm de altura, cuja base é um quadrado de perímetro igual a 16dm.

A "fórmula" a ser aplicada é: $V = \frac{B \times h}{3}$ onde B representa a área do quadradó (que é a base) e h a altura da pirâmide. Sendo 16dm o perímetro do quadrado, cada lado vale:

16dm: 4 = 4dm e a área da base valerá: $(4\text{dm})^2 = 16\text{dm}^2$.

Portanto: $V = \dfrac{16\text{dm}^2 \times 12\text{dm}}{3} = 64 \text{ dm}^3$

Problema inverso: *Conhecidos* o volume e a área da base (ou a altura), a medida da altura (ou a área da base) será dada por:

$$h = \frac{3 \times V}{B} \left(\text{ou a área da base: } B = \frac{3 \times V}{h}\right)$$

aplicando as respectivas operações inversas.

2. Calcular o volume de um cone que possui 4dm de diâmetro e 9dm de altura. Como o diâmetro vale 4dm, o raio mede: 4dm : 2 = 2dm e, portanto:

$$V = \frac{\pi \times r^2 \times h}{3} = \frac{3{,}14 \times (2\text{dm})^2 \times 9\text{dm}}{3} = \frac{3{,}14 \times 4\text{dm}^2 \times 9\text{dm}}{3} =$$

$$= 37{,}68 \text{ dm}^3 \text{ (por aproximação)}$$

Resolva você mesmo o *problema inverso*, aplicando naturalmente as operações inversas das empregadas no problema (direto): são conhecidos o volume, 37,68 dm³, e a altura, 9dm, de um cone. Quanto mede o *diâmetro* dêsse cone?

35. *O "mais redondo" dos sólidos*

Sòmente por razões de curiosidade você vai conhecer a "fórmula" que dá o volume da esfera (fig. 101) que, afinal, é realmente o corpo "re-

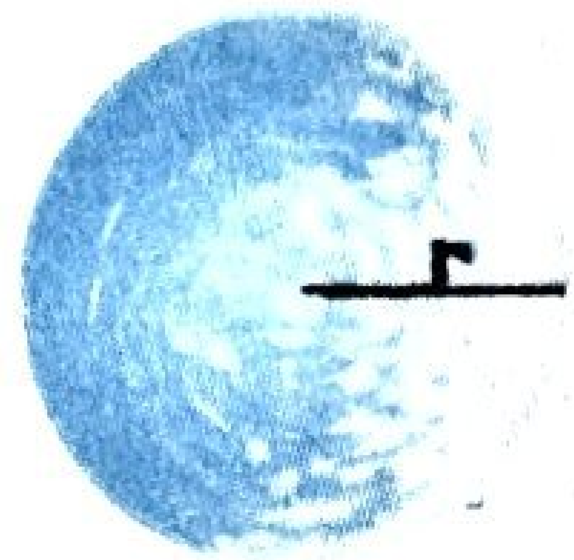


FIG. 101

dondo" por excelência. Isto porque o cálculo do volume da esfera — mesmo intuitivo — exigiria aqui um esfôrço maior do que os que foram empregados até agora. Por enquanto, contente-se em "guardar" o seguinte *resultado*, que será mais tarde "deduzido":

> O volume de uma esfera é igual a $\frac{4}{3}$ do produto de π pelo cubo do raio

ou seja:

$$V = \frac{4}{3} \times \pi \times r^3$$

Portanto, *basta* que se conheça o *raio* de uma esfera para que o seu volume fique prontamente determinado.

Exemplo: Calcular o volume da esfera cujo raio mede 3cm.

Temos: $V = \frac{4}{3} \times 3{,}14 \times (3\text{cm})^3 = 113{,}040\ \text{cm}^3$ (por aproximação)

Problema inverso: É mais trabalhoso do que difícil, pois, conhecido o volume da esfera, a medida de seu raio é encontrada efetuando as operações inversas das que constam na "fórmula" $V = \frac{4}{3} \times \pi \times r^3$, isto é: *multiplica-se* o V por 3; *divide-se* o resultado por 4; *divide-se* ainda por 3,14 (π) e finalmente extrai-se a *raiz cúbica* (por fatoração completa, naturalmente) do resultado encontrado. Experimente, partindo da resposta do problema do exemplo ($V = 113,\ 040\ \text{cm}^3$) e veja se encontra 3cm para o raio!

EXERCICIOS DE FIXAÇAO — GRUPO 68

1. Complete o seguinte quadro relativo a medidas de *pirâmides retas:*

Base	Área da base	Altura	Volume
quadrado: lado: 2dm	...	8 dm	... dm^3
triângulo: base: 6cm.......... altura: 4cm	...	21 cm	... dm^3
retângulo: comprimento: 12cm. . largura:	36 cm^2	...	324 cm^3

2. Complete o seguinte quadro relativo a medidas de *cones* (circular reto): [Usar π com a aproximação: 3,14].

Raio da base	Área da base	Perímetro da base	Altura	Volume
5cm	... cm^2	... cm	15 cm	... cm^3
... m	... dm^2	62,8 m	20 m	... dm^3
... dm	... dm^2	... dm	3 m	3,14 m^3
2 m	... m^2	... m	... dm	25,12 m^3

3. Qual o volume da esfera, cujo diâmetro é 6 dm?
4. Qual, em cm, o raio da esfera de volume igual a 904,320 cm^3?

ATENÇÃO

Peso 60 kg, estou na TERRA e pronto para partir para a LUA! Quanto pesarei lá? (Leia a pág. seguinte e ... a solução na pág. 306).

36. *Pêso e massa de um corpo*

Pêso de um corpo é a *fôrça* com que a Terra o atrai para o seu centro. Como essa fôrça de atração *não é a mesma* para todos os lugares da Terra, porque esta não se apresenta rigorosamente esférica (basta lembrar as informações prestadas pelos atuais *satélites-observatórios* que dão à Terra a forma aproximada de uma *pera*!), um mesmo corpo pode ter diferentes pesos conforme a posição que ocupa na Terra.

Massa de um corpo é a *quantidade de matéria* que êsse corpo contém. Como a quantidade de matéria de um certo corpo é *sempre a mesma* para qualquer lugar da Terra, a massa de um corpo não varia qualquer que seja a posição que esteja ocupando.

Veja que *curioso:* se você estivesse na Lua o seu *pêso* seria cêrca de seis vêzes menor do que seu *pêso* aqui na Terra, enquanto que a sua *massa* continuaria a mesma.

Na prática a medida da *massa* é feita por *balanças* que variam de tipo, de acôrdo com a natureza da medida. Dado o fato de se empregar usualmente a palavra *pêso* para significar *massa,* diz-se vulgarmente *pesagem* ao invés *medir massa* (não soaria bem dizer *massagem . . . !*).

Para o comércio, as balanças mais usuais são do tipo *Roberval* (fig. 102) e as *automáticas* (fig. 103).

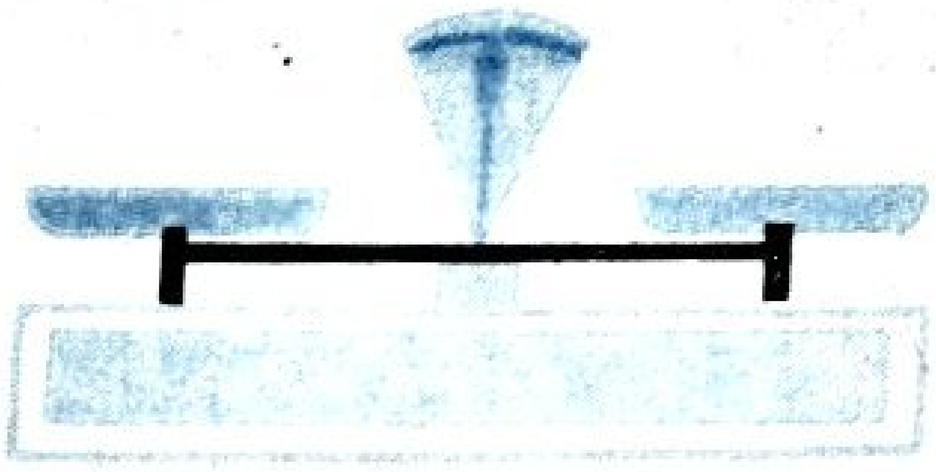


FIG. 102

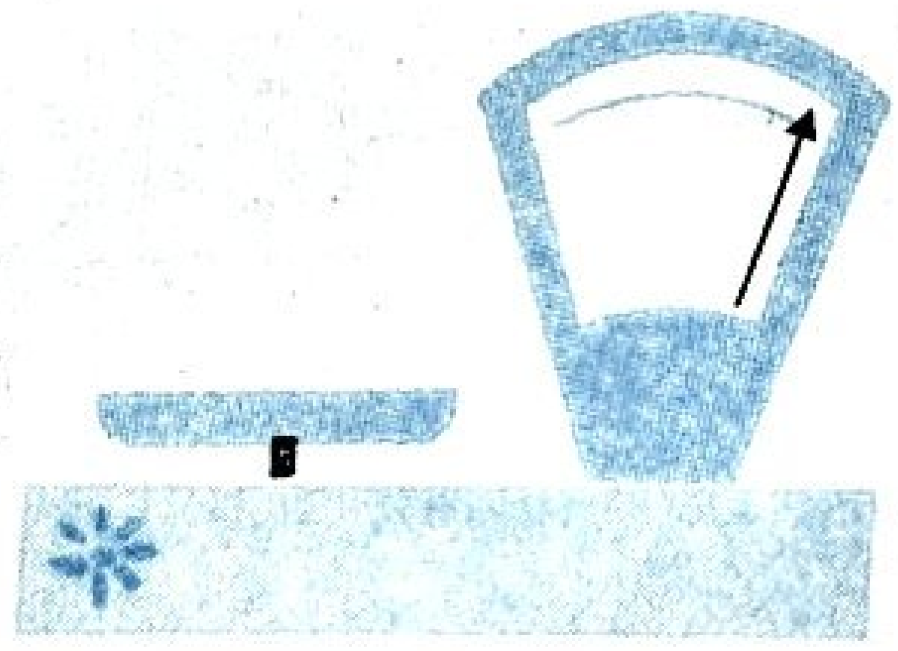


FIG. 103

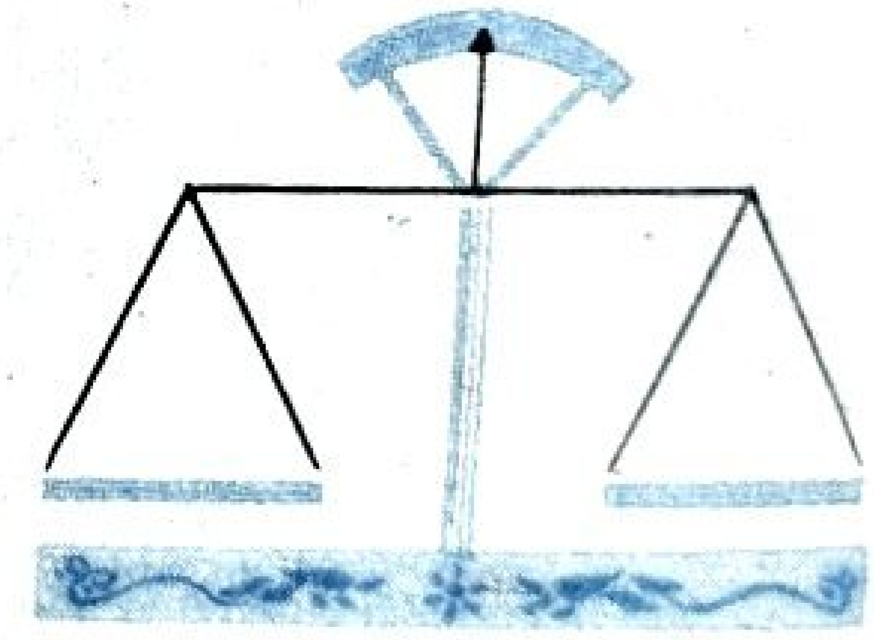


FIG. 104

Para as farmácias usam-se as balanças de *pratos suspensos* (fig. 104) e para os laboratórios as balanças de *precisão* que são as de tipo de pratos suspensos, porém protegidas por paredes de vidro, pois até a respiração do operador pode influenciar numa medida de precisão.

Para as "pesadas" médias (sacos de cereais, de viagens, etc. . .) usam-se balanças tipo *báscula* (fig. 105) e para as grandes "pesadas" (veículos de transporte: caminhões, vagões, etc. . .) usam-se as *pontes-básculas* (fig. 106).

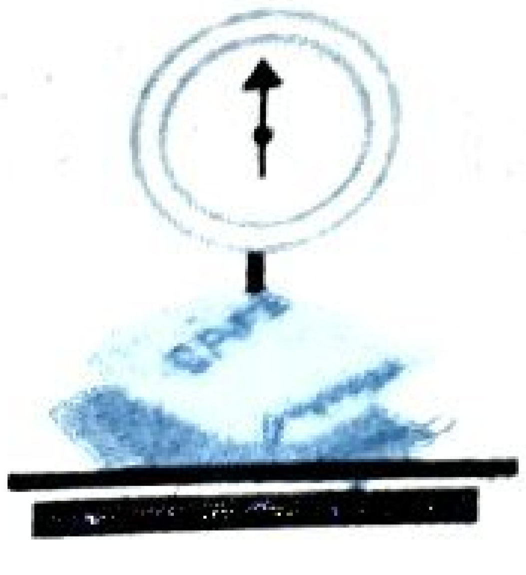


FIG. 105

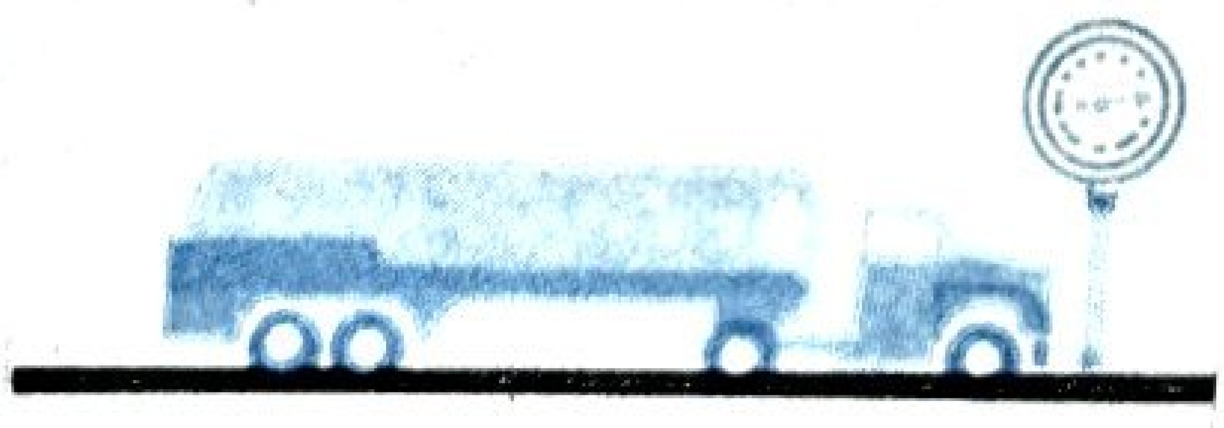


FIG. 106

37. *Unidade fundamental de massa*

É o *quilograma*. Abreviatura: kg

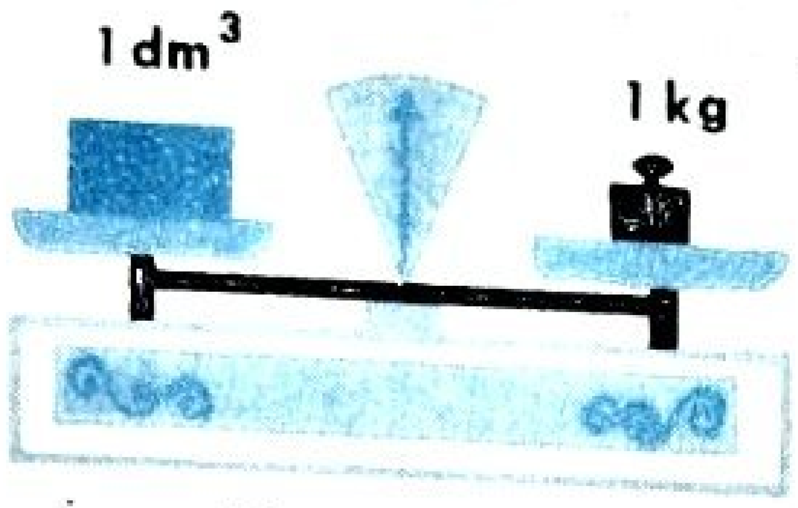


FIG. 107

> Quilograma é a massa *aproximada* de um decímetro cúbico de água destilada (pura) (fig. 107).

A unidade principal usada na prática é o grama, que é a milésima parte do quilograma, a partir do qual se constroem os múltiplos que constam do seguinte quadro:

	NOMES	SÍMBOLOS	VALÔRES EM GRAMAS
Múltiplos.......	tonelada	*t*	1 000 000g ou 1 000kg
	quintal	*q*	100 000g ou 100kg
	quilograma	*kg*	1 000g
	hectograma	*hg*	100g
	decagrama	*dag*	10g
Unidade	*grama*	*g*	1g
Submúltiplos....	decigrama	*dg*	0,1g
	centigrama	*cg*	0,01g
	miligrama	*mg*	0,001g

As medidas relativas a pedras preciosas e metais preciosos são avaliadas em quilates, sendo 1 quilate equivalente à massa de 2 dg.

As unidades de massa variam de dez em dez. As regras para a *mudança de unidade* são idênticas às estudadas para as unidades de comprimento. Exemplos:

1. Reduzir 3,825 kg a gramas

   Temos: 3,825 kg = 3 825 g

2. Exprimir 703,02 hg em dag, g, cg e t

   Temos: 703,02 hg = 7 030,2 dag
   = 70 302 g
   = 7 030 200 cg
   = 0,070 302 t

As formas mais comuns dos "pesos" efetivos aprovados pelas nossas leis são fabricadas em ferro fundido (grandes pesadas), em latão (médias pesadas) e em lâminas de cobre (pequenas pesadas) (fig. 108).

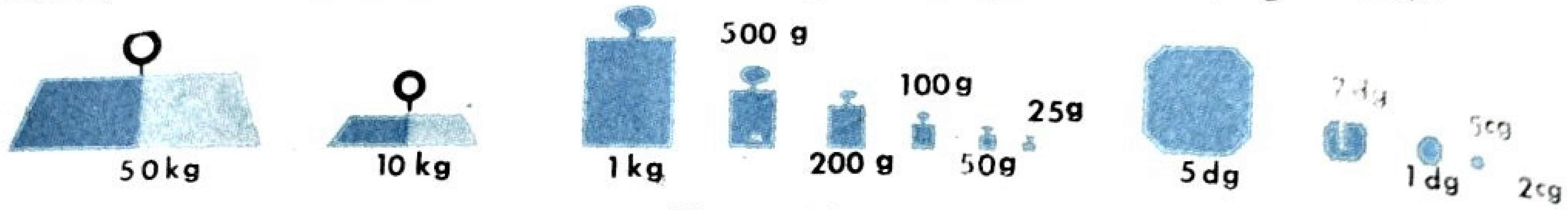


FIG. 108

EXERCÍCIOS EXPLORATÓRIOS — GRUPO 69

1. Calcule quantos *gramas* pesa a mercadoria do embrulho (fig. 109):
2. Quanto pesa o "frango" (fig. 110) ?

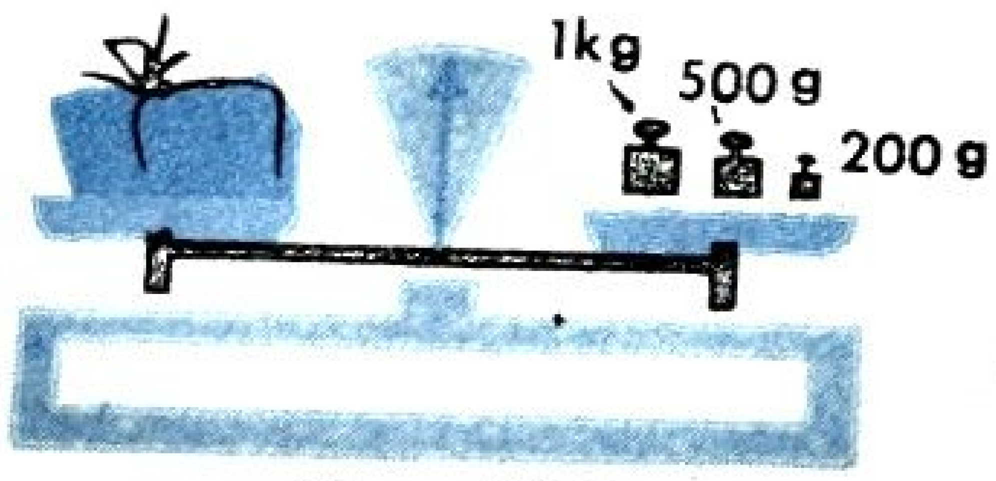


FIG. 109

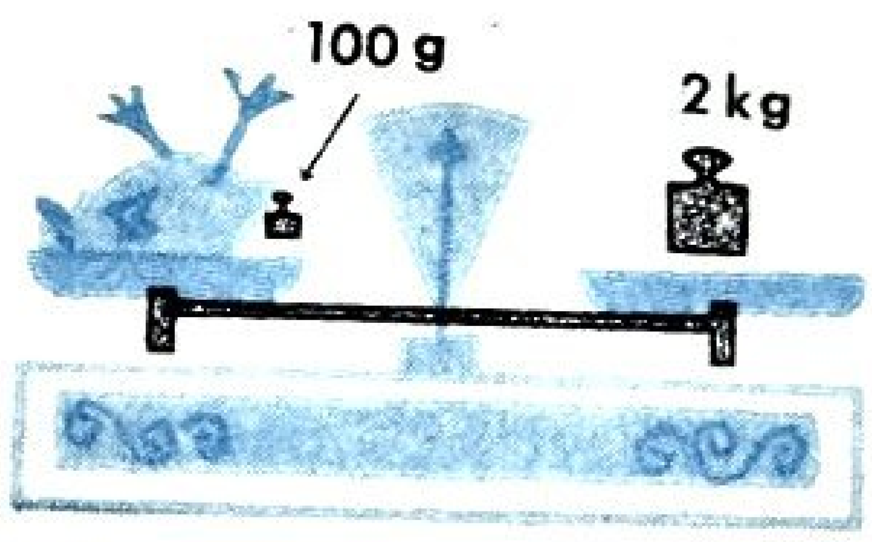


FIG. 110

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 70

1. Tornar *verdadeira* a seguinte sentença:

1.ª) 3 kg = ... g
2.ª) 3,5kg = ... g
3.ª) 1 q = ... kg
4.ª) 2 t = ... kg
5.ª) 4,018t = ... q
6.ª) ... t = 10 q
7.ª) ... dag = 320 hg
8.ª) 14 hg e 12 cg = ... g
9.ª) 3dg e 8 cg = ... mg
10.ª) $\frac{20}{8}$ g = ... dg

2. Efetuar, exprimindo os resultados em kg, as seguintes operações:

1.ª) 32,55 hg + 48,01 dag + 3,81 kg + 69 dg
2.ª) 4,039 t − 21,05 q
3.ª) 8,01 hg − (20,01 g + 3,1 dag) × 4

38. *Pêso bruto, pêso líquido e tara*

São nomes comuns a todo dia. Chama-se:

pêso bruto: ao pêso de uma mercadoria com a sua embalagem;
pêso líquido: ao pêso da mercadoria sòmente;
tara: ao pêso da embalagem sòmente.

Assim, por exemplo, numa lata de manteiga das comuns lê-se na própria lata:

pêso bruto: 500 g
pêso líquido: 390 g

Isto significa que a lata vazia (tara) pesa 110 g, não é?

Nos veículos de transporte de carga, a *tara* figura escrita no próprio veículo, a fim de controlar o pêso da carga, tendo em vista o pêso máximo permitido por estradas, pontes, etc. . .

OBSERVAÇÃO IMPORTANTE: $\boxed{\text{1 litro de água pesa 1 kg!}}$

Para a *água pura* vale a seguinte *equivalência* entre as unidades de volume, capacidade e massa:

$$\boxed{1\ dm^3 \iff 1\ l \iff 1\ kg}$$

Vale também para os respectivos *múltiplos:*

$$\boxed{1\ m^3 \iff 1\ kl \iff 1\ t}$$

e *submúltiplos:*

$$\boxed{1\ cm^3 \iff 1\ ml \iff 1\ g}$$

Isto é *sòmente* para água pura! Para um outro corpo qualquer, embora $1 dm^3$ seja equivalente a 1 *l*, êle *não pesa* 1 kg. Assim, por exemplo, $1\ dm^3$ de ferro pesa quase 8 kg! enquanto que $1\ dm^3$ de óleo pesa menos de 1 kg (razão por que quando você tenta "misturar" volumes iguais de água e óleo, êste, como é menos "pesado", fica "em cima"). Exemplos:

1. Calcular a *capacidade* e o *pêso* dè uma caixa de água de 2m de comprimento, por 1m de largura e 0,80m de altura.

   Temos, para *volume* da caixa: $2m \times 1m \times 0{,}80m = 1{,}600m^3 = 1\,600dm^3$.

   Logo: $1\,600dm^3 = 1\,600\ l$ (capacidade), e como cada litro de água pesa 1 kg, a caixa *pesará* 1 600 kg.

2. Qual é, em litros, a *capacidade* de uma caldeira que, cheia de água, pesa 680 kg (pêso bruto, portanto), e vazia 140 kg (o mesmo que tara)?

   A diferença: 680kg − 140kg = 540 kg, representa o pêso líquido da água que enche a caldeira. Como 1 kg de água ocupa o volume de 1 litro, conclui-se que a *capacidade* da caldeira é de 540 *litros*.

PROBLEMAS DE APLICAÇÕES DO S.M.D. — GRUPO 71

1. Preencha com as unidades fundamentais do S.M.D. correspondentes:
   a) a *capacidade* daquele tanque é de 3 200 . . .
   b) o *pêso* que êste carrinho transportou foi de 75 . . .
   c) o *volume* de minha caixa de brinquedos é de 1 200 . . .
   d) a *área* do corredor de meu ginásio é de 240 . . .
   e) o *comprimento* do varal de casa é de 12 . . .

2. A nossa sala de aula tem as seguintes dimensões: comprimento 9m, largura 7m e altura 4m. Somos 35 alunos. Com o professor presente, quantos m^3 de ar caberá a cada pessoa?

3. Uma bola de futebol cheia de ar tem 20 cm de diâmetro interno. Quantos mm^3 de ar ela contém?

4. Quantos litros de água cabem numa jarra de forma cilíndrica de 23cm de altura, sendo de 5cm o raio da base da jarra?

5. Sabendo-se que 4 kg de certo produto custam Cr$ 600,00, qual o preço que você pagará por 450g dêsse produto?

6. Uma lata vazia pesa 1,40kg e cheia de água pura pesa 11,40kg. Qual é a capacidade dessa lata em litros?

7. Uma lata cheia de balas pesa 3,100kg. Vazia pesa 0,600g. Pergunta-se:
   a) qual o pêso das balas; *b*) qual o preço de 1kg de balas se a lata cheia custou Cr$ 3 000,00; *c*) quantos potes, que comportam 500g de balas cada um, são necessários para distribuir tôdas as balas da lata?

8. Um recipiente vazio pesa 1,500kg. Com óleo pela metade pesa 6,225kg. Pergunta-se:
   a) o pêso do óleo que enche o recipiente; *b*) a capacidade dêsse recipiente, sabendo que 1 litro de óleo pesa 0,900kg; *c*) o pêso dêsse recipiente cheio de água pura.

9. Um caminhão, cuja tara é de 3 toneladas, deve atravessar uma ponte que suporta carga máxima de 7 000 quilos:
   a) quantos quintais de cereais pode carregar êsse caminhão?
   b) qual é o menor número de viagens que deverá fazer para poder transportar 14 toneladas de cereal? Uma das viagens terá pêso diferente das outras, qual o pêso da carga dessa viagem?

10. Um cargueiro deixou 330 t de açúcar num certo pôrto:
    a) sabendo-se que o açúcar encontra-se em sacos de 60 kg cada um, quantos sacos o cargueiro transportou?
    b) na descarga foram usados vagões que transportam 220 sacos cada um; quantos vagões foram usados para o transporte de tôda a carga?

sistemas de medidas não-decimais

1. *O que é um sistema de medidas não-decimal; números não-decimais*

Todo sistema de medidas, cuja unidade principal não está em relação decimal com seus múltiplos e submúltiplos, diz-se não-decimal.

Os números que exprimem as medidas das grandezas, em um sistema *não-decimal*, são chamados *não-decimais* (ou "complexos" (*), porque apresentam a medida por meio de *dois* ou *mais* múltiplos ou submúltiplos (não decimais, naturalmente) da unidade principal.

Assim, por exemplo, o Sistema Inglês de Medidas (S.I.M.) é *não-decimal*, pois para exprimir-se um comprimento de 10 *jardas* e 5 *pés*, (você está acostumado a ouvir essas medidas no futebol, no cinema, . . .) escreve-se:

10 yd 5 ft

e *nunca* 10,5 jardas (não!

porque 10 jardas e meia *não correspondem* à medida expressa pelo número não-decimal 10 yd 5 ft!

Portanto, a vantagem do uso da vírgula pertence ao S.M.D., que se vale das regras do *sistema de numeração decimal*. É por isso que um comprimento, por exemplo, de 3 metros e 25 centímetro pode ser expresso pelo *número decimal*

3,25 m (sim!)

Observe, também, que essa medida envolve sòmente *uma* espécie de unidade (o metro), coisa que não ocorre com os números não-decimais.

Também quando você diz que são 8 *horas* e 20 *minutos*, não pode escrever:

8,20 h (não!)

que, em absoluto, significa a hora que você disse, e sim 8 *horas* e 12 *minutos*, pois os 12 minutos equivalem aos 2 décimos da hora (cada décimo vale 6 minutos!)

Dentro do sistema de *medida de tempo*, que é *não-decimal* (é *sexagesimal*), a hora que você disse só poderá ser escrita através do *número* não-decimal:

8h 20min (sim!)

(*) A expressão número complexo pertence a importante classe de números que será estudada no 2.º ciclo.

2. *O tempo "voa". Calendários*

Você bem sabe como "passa" o *tempo* através de:

o *dia* (solar) que é o intervalo de tempo que a Terra leva para dar uma volta sôbre si mesma;

o *ano* (solar) que é o intervalo de tempo que a Terra leva para dar uma volta ao redor do Sol.

Como o ano é um pouco mais de 365 dias, ou seja: 365,2421985 dias, evita-se trabalhar com tal número decimal, tomando-se para o ano 365 dias com o nome de ano civil. O êrro que se comete é compensado cada 4 anos, quando se acrescenta um dia ao ano civil que passa a ter 366 dias e recebe o nome de bissexto.

Assim, o ano civil está dividido em 12 *meses:* janeiro (31 d), fevereiro (28d ou 29d), março (31d), abril (30d), maio (31d), junho (30d), julho (31d), agôsto (31d), setembro (30d), outubro (31d), novembro (30d), dezembro (31d).

Uma semana compõe-se de 7 dias.

Os anos são contados a partir de um acontecimento marcante; para nós é o nascimento de Cristo (Era Cristã), há 1 964 anos!

As tábuas que registram dias e anos chamam-se calendários e são conhecidos por todos como "folhinhas". O calendário que usamos é o Gregoriano (do Papa Gregório XIII), responsável pelas correções do ano bissexto.

São *bissextos* os anos divisíveis por 4 (ex.: 1 964), excetuando-se os terminados por dois zeros, a menos que os dois primeiros algarismos formem um número divisível por 4. Exemplos:

1 900 não foi bissexto; 2 000 será bissexto

3. *Unidade principal (legal)*

É o segundo, cujo símbolo é: *s* ou *seg*.

> *Segundo* é o intervalo de tempo igual à fração $\frac{1}{86400}$ do dia solar (*)

(*) Trata-se do dia solar *médio* definido de acôrdo com as convenções da Astronomia.

As *unidades secundárias*, que se apresentam sòmente como múltiplos, constam do quadro:

NOMES	SÍMBOLOS	VALÔRES
segundo	s ou seg	1 s (unidade)
minuto	m ou min	60 s
hora	h	3 600 s = 60min
dia	d ou da	86 400 s = 14 400min × 24 h

Logo:

$$\boxed{1\ \text{d}} = 24\ \text{h} = 14\,400\ \text{min} = \boxed{86\,400\ \text{s}}$$

A *representação* do número não-decimal que indica unidades de tempo, é feita escrevendo-se em ordem *decrescente de valor*, os números correspondentes às diversas unidades acompanhados dos respectivos símbolos. Exemplo:

4d 12h 35min que se lê: quatro *dias*, doze *horas* e trinta e cinco *minutos*.

OBSERVAÇÃO: Para aplicação no comércio e em outras atividades sociais, temos:

o ano comercial .... 360 dias
o trimestre .... 3 meses
o semestre .... 6 meses

Ainda é bom você guardar os nomes dos seguintes períodos de anos:

2 anos: *biênio;* 3 anos: *triênio;* 4 anos: *quadriênio;* 5 anos: *qüinqüênio;* 10 anos: *decênio* ou *década;* 100 anos: *século;* 1 000 anos: *milênio*!

4. *Instrumentos que "medem" o tempo*

Os instrumentos que medem "o passar" do tempo são conhecido de todos vocês, pelo menos os modernos: relógios e cronômetros. Através dos tempos as mais diferentes espécies de "relógios" foram usados: desde as clepsidras ou "relógios" de água, dos antigos egípcios, que mediam o tempo enchendo de água um recipiente em forma de vaso, com uma pequena abertura na base por onde escoava pouco a pouco o liquido: à medida que o nível descia, a "hora" ficava sendo conhecida. A seguir os relógios de sol que muitos de vocês conhecem (*); as ampulhetas e os pêndulos de precisão, que medem o tempo com um mínimo de êrro, usados pelos Observatórios.

(*) A cidade de FRANCA (Est. São Paulo) possui um famoso "relógio de sol" numa de suas principais praças.

1. Assinalar, nas seguintes sentenças, quais as verdadeiras:

   a) 12 yd 8 ft é um *número decimal*
   b) 106,450 km é um *número decimal*
   c) 7h 30min é um *número não-decimal*

2. Divida 365 por 7. Quantas semanas há num ano? Quantos dias sobram?

3. Pelo fato de haver um dia a mais do que 52 semanas num ano comum (365d), qualquer data que caia numa têrça-feira dêsse ano, cairá no próximo ano na quarta-feira, se não houver fevereiro com 29 dias entre êles. Assim, por exemplo, se 9 de maio cai neste ano numa sexta-feira, e se o próximo ano não fôr bissexto, em que dia da semana cairá 9 de maio do próximo ano?

4. Um ano bissexto (366d) tem dois dias a mais que 52 semanas. Se 14 de julho de 1 963 caiu num domingo, em que dia cairá 14 de julho de 1 964 (que é bissexto)?

5. Há 10 anos numa década e 100 num século. Quantas décadas há num século?

6. O último ano do século I foi o ano 100 e o primeiro ano do século II foi o ano 101. Qual foi o último ano do século II? do século VII? do século XV? do século XX?

7. Qual foi o primeiro ano do século XIX? do século XX? Quantos anos bissextos houve no século XIX? Quantos haverá no século XX?

8. Em que séculos foram os anos: 1 612? 1 690? 1 964? Qual foi a data (mês e dia) do último dia do século XIX? do primeiro dia do século XX?

9. Dê a data (mês e dia) em que a primeira metade do século XX terminou; quando a segunda metade do século XX começou.

10. Um homem foi aos Estados Unidos em dezembro de 1 900 e retornou ao Brasil em abril de 1 901. Em quantos séculos diferentes estêve nos Estados Unidos?

Medida de Ângulos Planos

5. *Que é ângulo?*

Não é demais lembrar que:

1.º) um *ângulo* não é uma figura formada por duas semi-retas tendo a mesma origem, mas a porção do plano compreendida entre essas semi-retas (fig. 111) que são seus *lados*;

2.º) a *grandeza* de um ângulo não depende do *comprimento de seus lados*, (pois as duas semi-retas podem ser prolongadas tanto quanto se queira), mas sim do "afastamento" entre êles;

3.º) duas retas que se interceptam (fig. 112) formam quatro ângulos; se êsses ângulos forem todos *iguais*, as retas dizem-se *perpendiculares* (fig. 113) e os ângulos retos.

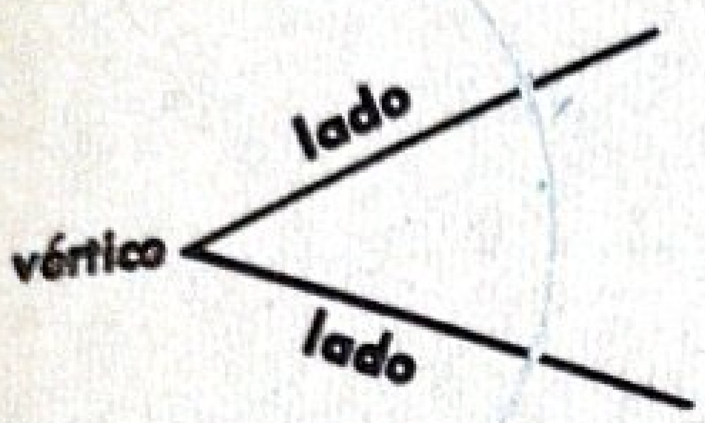


FIG. 111

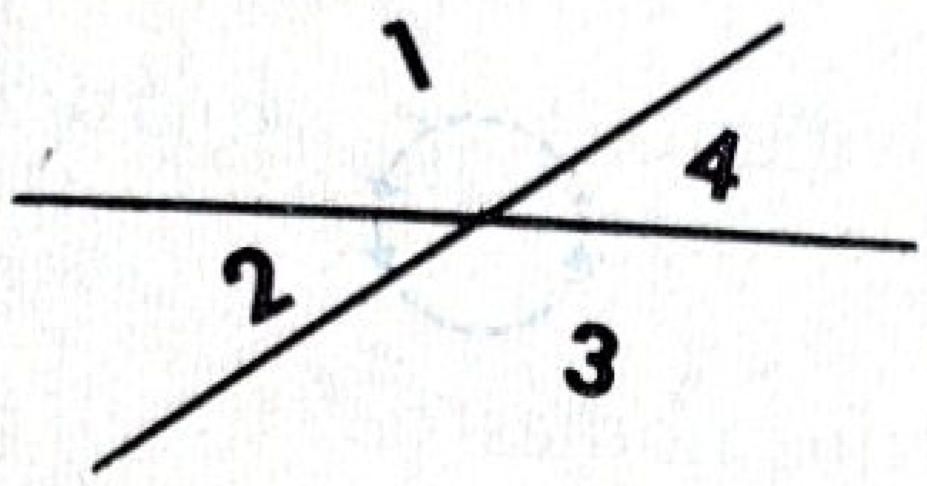


FIG. 112

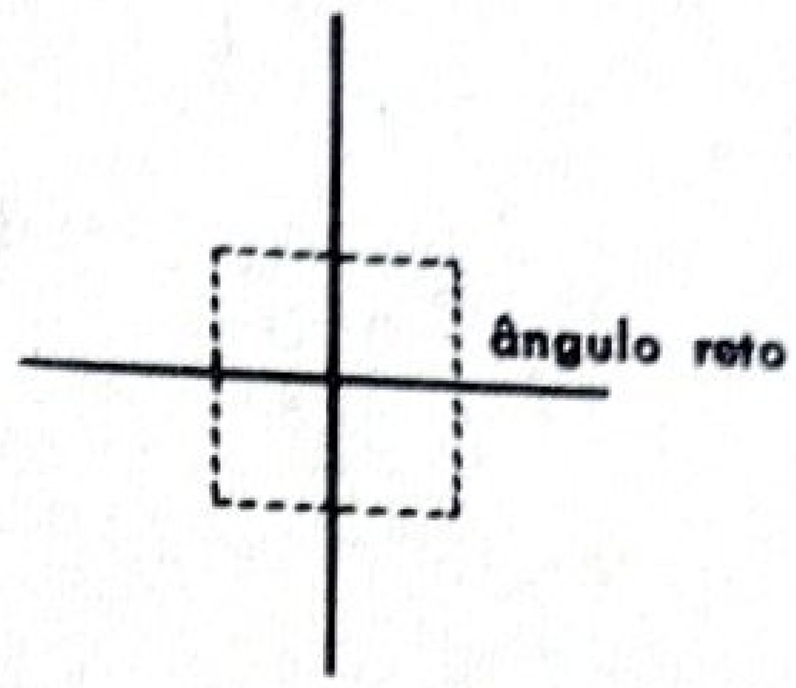


FIG. 113

6. *Unidade principal; unidades secundária*

unidade *principal:* ângulo reto; símbolo: r

Entre as unidades *secundárias* do ângulo reto constam as sexagesimais (dos antigos babilônios), que figuram no seguinte quadro:

NOMES	SÍMBOLOS	VALÔRES
grau.	°	$\frac{1}{90}$ r
minuto (de ângulo)	′	$\frac{1}{60}$ °
segundo (de ângulo)	″	$\frac{1}{60}$ ′

Logo:

$$\boxed{\text{1 grau tem } 60' \text{ e um minuto } 60''}$$

A representação do número *não-decimal* que exprime a medida de um *ângulo*, em unidades sexagesimais, é feita escrevendo-os em ordem de valor decrescente, como nas unidades de tempo. Exemplo:

$42^\circ\ 18'\ 26''$ que se lê: quarenta e dois graus, dezoito minutos e vinte e seis segundos.

OBSERVAÇÃO IMPORTANTE: A tendência de "medir" grandezas num sistema decimal, naturalmente pelas vantagens que êste apresenta sôbre os demais (uso de vírgula, operações decimais, etc. . .), é hoje em dia bem acentuada em países como os Estados Unidos e Inglaterra, onde o S.M.D. não é o oficial. Basta ver que em diversos setores da medicina, dos esportes (corrida dos 100m, . . .), da fotografia (filmes de 8mm, 16mm, . . .) êsses países já o tomam oficialmente. Na Inglaterra a Câmara dos Comuns votou proposição no sentido de transformar o seu histórico, mas complicado sistema monetário, em decimal, como aliás já é feito nos Estados Unidos.

Para a medida de ângulos planos já se adota também um sistema decimal, cuja unidade — o grado — está relacionado *decimalmente* com o seu múltiplo (ângulo reto) e com seus submúltiplos.

O grado é o ângulo equivalente a $\frac{1}{100}$ do ângulo reto. Símbolo: gr (*)

Seus submúltiplos, cujos nomes têm os prefixos do S.M.D., constam do quadro:

NOMES	SÍMBOLOS	VALÔRES
decigrado	dgr	$\frac{1}{10}$ gr
centígrado	cgr	$\frac{1}{100}$ gr
miligrado	mgr	$\frac{1}{1\,000}$ gr

Agora sim a representação da medida de um ângulo, nesse sistema, é bem simples. Exemplo:

36,28 gr que se lê: trinta e seis grados e vinte e oito centígrados.

Erros comuns:

1. Confundir o *minuto* e o *segundo*, das unidades de tempo com o *minuto* (de ângulo) e o *segundo* (de ângulo) das unidades de ângulo, escrevendo-os, inclusive, conjuntamente! Exemplo:

   8h 15min 23s não pode ser escrito 8h 15′ 23″

2. Usar a vírgula na representação da medida de um ângulo no sistema sexagesimal. Exemplo:

   32, 6° como se fôsse 32° 6′ .(não pode!)

7. *Instrumentos que medem ângulos planos*

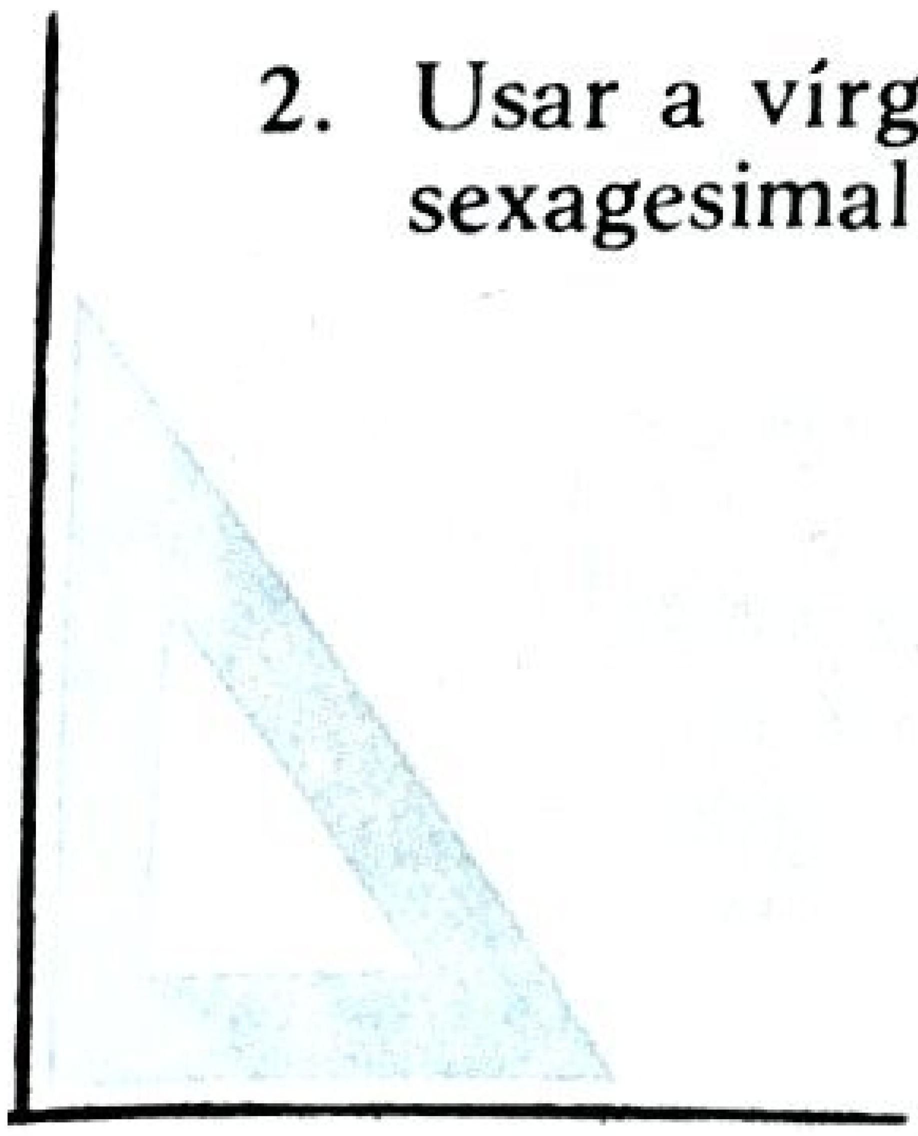


FIG. 114

Para construir um ângulo reto (que é a unidade principal de medida) usa-se o esquadro (fig. 114), que é um instrumento bem popular entre os alunos. O *esquadro* é também usado para a construção de uma *reta perpendicular* a outra, passando por um ponto.

(*) Não confundir *grado* (gr) com *grama* (g).

Então, sabendo que um *ângulo reto* vale 90° ou 100 gr, você pode concluir fàcilmente que:

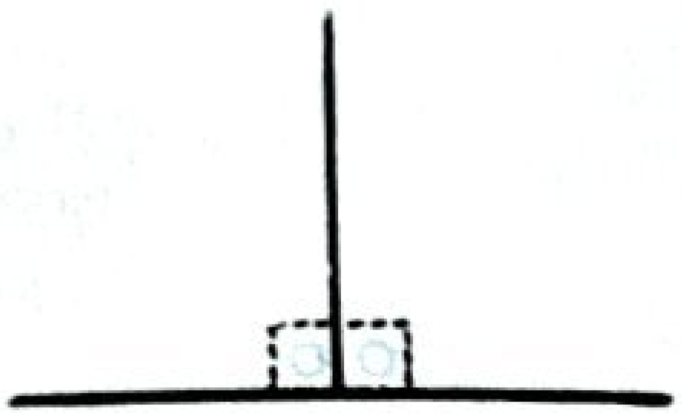


Fig. 115

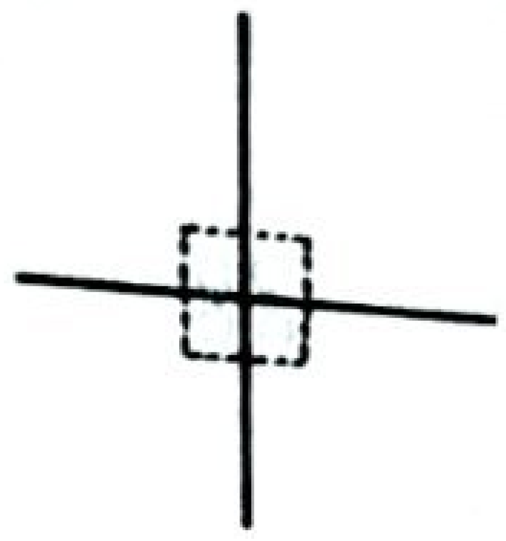


Fig. 116

dois ângulos retos valem 180° ou 200 gr (fig. 115)

quatro ângulos retos valem 360° ou 400 gr (fig. 116).

A *construção* e a *medida* dos ângulos planos são feitas com o transferidor (fig. 117), instrumento feito, geralmente, de material transparente e que consta, substancialmente, de um semicírculo graduado (em 180° ou 200 gr).

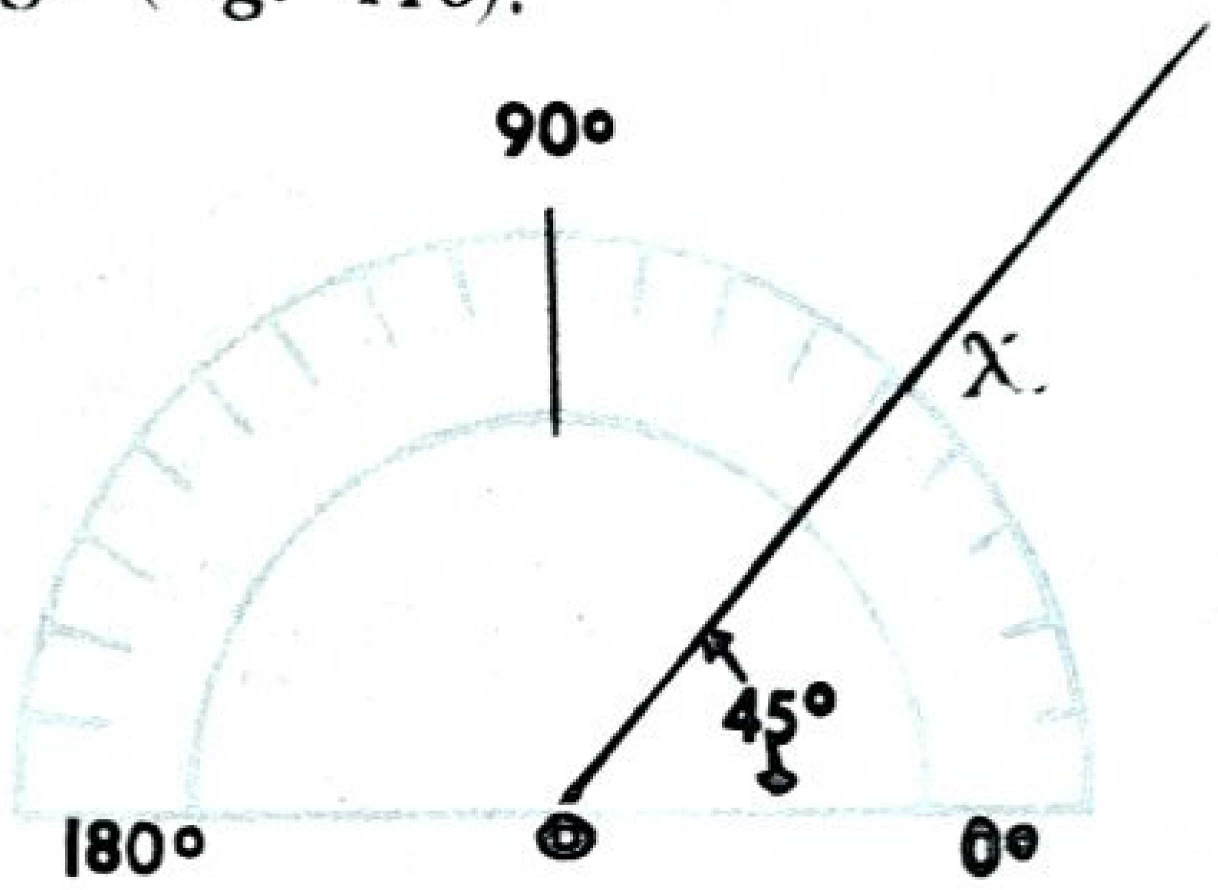


Fig. 117

Para usá-lo, coloca-se o seu centro O no vértice do ângulo que se quer medir, de modo que a sua "linha base" coincida com um dos lados do ângulo. A medida do ângulo é dada pela leitura da graduação por onde passa o outro lado do ângulo.

Para *traçar* um ângulo (na fig. 117, quer-se construir um ângulo de 45°), escolhe-se uma semi-reta como um dos lados do ângulo sôbre a qual se apóia a "linha base" do transferidor, de modo que o centro O coincida com a origem da semi-reta, que passa a ser o vértice do ângulo que se está construindo. A seguir, marca-se na graduação a medida do ângulo que se deseja obter, assinalando-se um ponto X. A semi-reta $\overrightarrow{OX}$ é o outro lado do ângulo procurado.

Um ângulo *menor* que o ângulo reto é denominado ângulo agudo (fig. 118) e um ângulo *maior* que o ângulo reto é chamado obtuso (fig. 119).

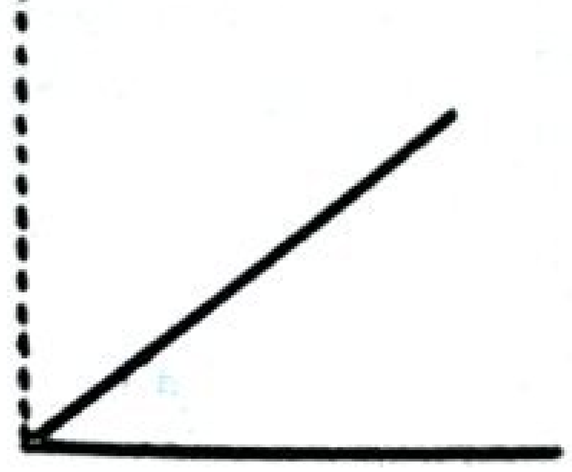


Fig. 118

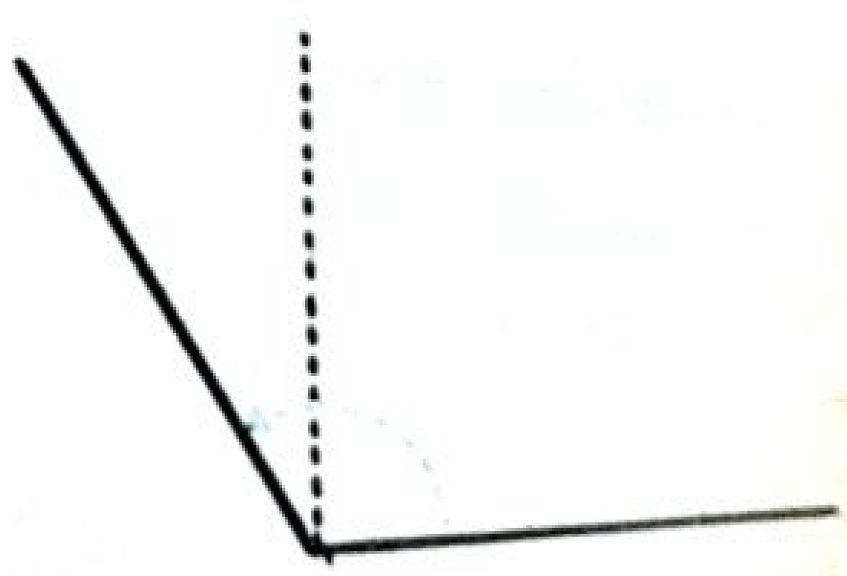
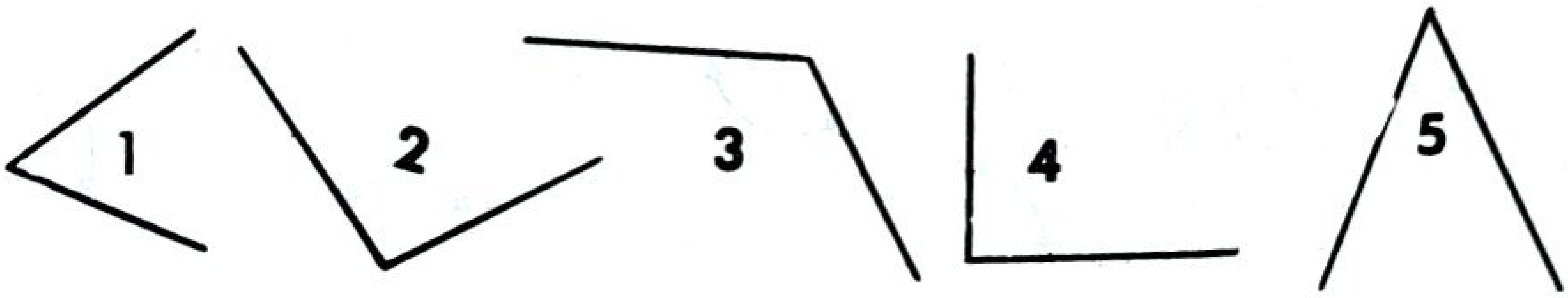


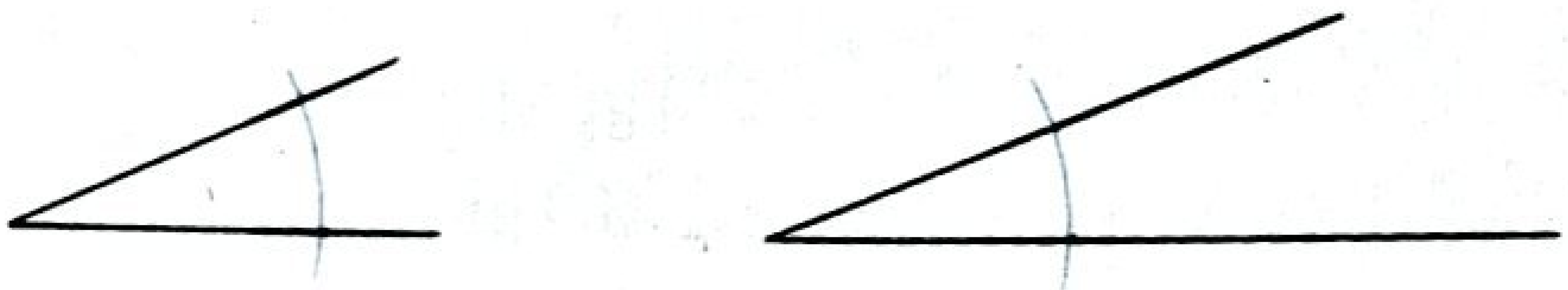
Fig. 119

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO — GRUPO 73

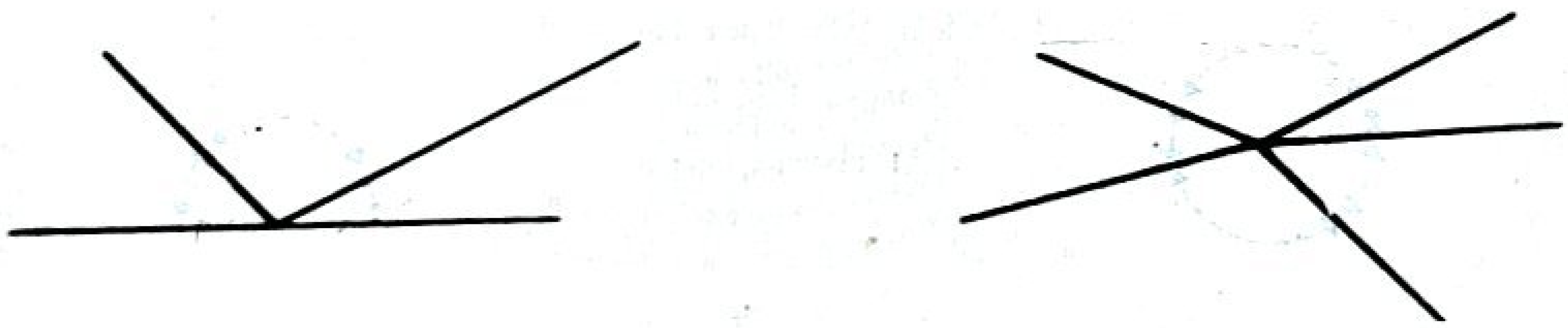
1. Quais os ângulos *agudos*, *retos* e *obtusos* das figuras abaixo (fig. 146) ?



2. Meça os dois seguintes ângulos e diga o que você encontrou de interessante:



3. Meça todos os ângulos das seguintes figuras e calcule a soma dêles (pode ser em graus).



4. Desenhe um triângulo isósceles (lembre-se: é o que tem dois lados iguais) e verifique como são os ângulos da base dêsse triângulo.

5. Calcule, em graus, o valor dos ângulos de um triângulo *equilátero*.

6. Quanto é a soma dos dois ângulos agudos de um triângulo *retângulo?* Quanto vale cada um dos ângulos agudos de um triângulo *retângulo e isósceles?*

7. Desenhe um triângulo ABC, tal que: $BC = 3\text{cm}$, $\hat{B} = 60°$ e $\hat{C} = 30°$.

8. Desenhe um triângulo ABC, tal que: $BC = 6\text{cm}$, $\hat{B} = 120°$ e $\hat{C} = 30°$.

9. Desenhe um triângulo ABC, tal que: $\hat{A} = 65°$, $AB = 6\text{cm}$ e $AC = 7\text{cm}$.

10. Meça os ângulos de seu *esquadro*: quanto vale a soma? Meça os ângulos de um *triângulo qualquer* que você queira desenhar; quanto vale a soma? Que você pode concluir depois de efetuadas essas medidas?

Sistema Inglês de Medidas (S.I.M.)

8. *Preliminares*

É o sistema de medidas usado, principalmente, pelos U.S.A. e Inglaterra. Vale a pena insistir: trata-se de um sistema não-decimal e, portanto, não desfruta das vantagens do S.M.D.

Apresentaremos, resumidamente, as unidades de medidas do S.I.M. mais usuais entre nós.

9. *Unidades de comprimento*

Algumas dessas unidades foram construídas tomando-se como modelos as dimensões de certas partes corporais do homem (pé, braço, polegar, . . .). Conta-se até que, em 1 324, o Rei Eduardo III da Inglaterra, decretou que a unidade de comprimento a ser adotada em todo o império seria exatamente expressa pela medida de seu "real pé".

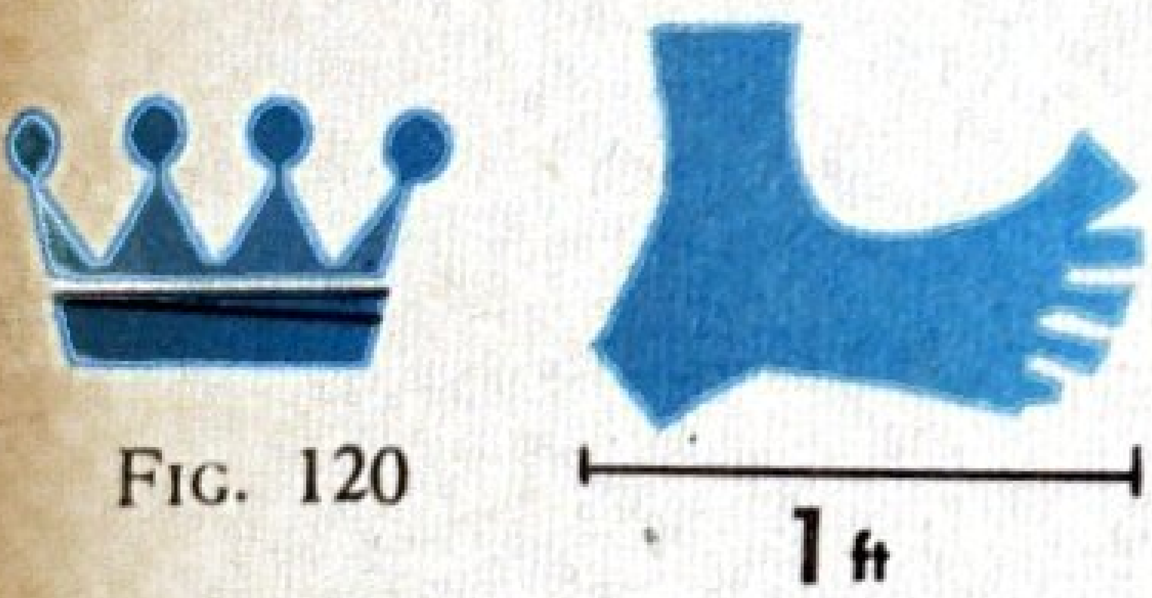


FIG. 120

Assim, um calculista mediu com tôda a solenidade o pé de sua majestade (fig. 120) e a medida encontrada foi tornada oficial: pé (foot, em inglês), símbolo: ft.

A jarda (yard, em inglês), símbolo: yd, corresponde ao comprimento da distância entre o *nariz* e o polegar da mão direita quando uma pessoa "estica" o braço direito (fig. 121).

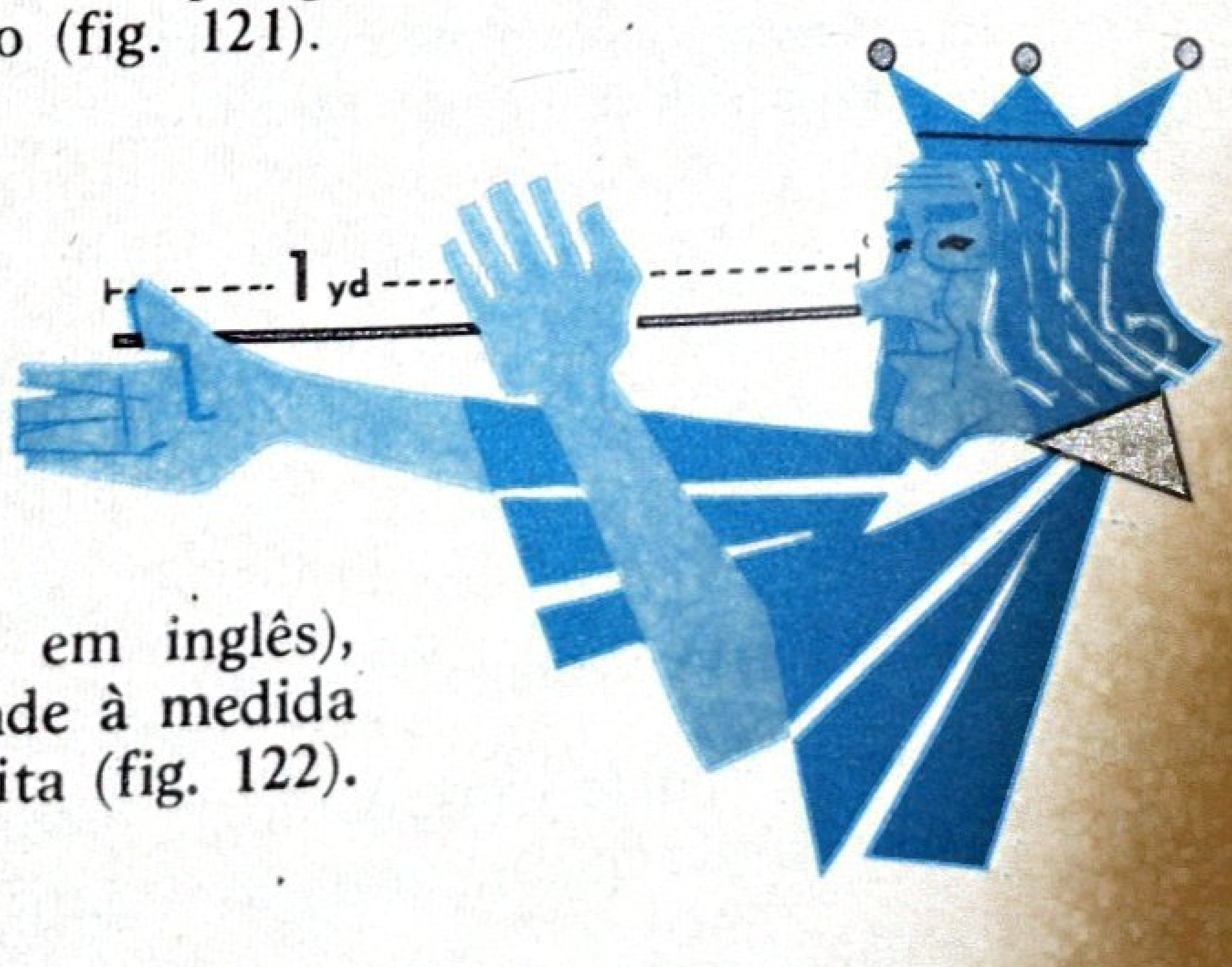


FIG. 121

A polegada (inch, em inglês), símbolo: (in), corresponde à medida do polegar da mão direita (fig. 122).

FIG. 122

No quadro abaixo, constam os valôres aproximados dessas medidas em metros, e outras relações julgadas importantes pelo uso que têm;

NOMES		SÍMBOLOS	VALÔRES EM JARDAS	VALÔRES APROXIMADOS EM METROS
inglês	*português*			
1 yard	uma jarda	yd	1 yd	0,914 m
1 foot	um pé	ft	1/3 yd	0,305 m
1 inch	uma polegada	in	1/36 yd	0,025 m
1 mile	uma milha	mi	1 760 yd	1,609 m

Convém lembrar, também, as conversões do S.M.D. ao S.I.M. Assim, temos:

$\boxed{1\text{m} = 1{,}09 \text{ yd}}$ $\boxed{1\text{m} = 3{,}28 \text{ ft}}$ $\boxed{1\text{m} = 39{,}37 \text{ in}}$

$\boxed{1 \text{ km} = 0{,}62 \text{ mi}}$

Logo:

uma jarda vale — ↗ 3 pés e 1 pé vale 12 polegadas
↘ 36 polegadas

(Observe como as relações não são decimais)

NOTA: Nas conversões oficiais (americanas) uma polegada é tomada "exatamente" como: 2,54 cm, isto é: 1 *in* = 2,54 cm.

10. *Unidades de superfície e de volume*

Derivam das unidades de comprimento.

Assim, por exemplo, tem-se:

uma jarda quadrada (square yard, em inglês), símbolo: *sq. yd.*: é a área da superfície de um quadrado de *uma jarda de lado*;

um pé cúbico (cubic foot, em inglês), símbolo: *cu. ft.*: é o volume de um cubo de *um pé de aresta*.

11. Unidades de capacidade (norte-americanas)

Constam do quadro:

NOMES		SÍMBOLO	VALÔRES APROXIMADOS EM LITROS
inglês	*português*		
1 liquid quart	uma quarta	liq. qt.	0,946 *l*
1 gallon	um galão	gal.	3,785 *l*

12. Unidades de massa

NOMES		SÍMBOLOS	VALÔRES APROXIMADOS EM GRAMAS (ou kg)
inglês	*português*		
1 ounce	uma onça	oz.	28,350 g
1 pound	uma libra	lb.	453,592 g
1 ton.	uma tonelada	tn.	1 016 kg

13. Moeda inglêsa (só na Inglaterra e Commonwealth)

Unidade: Libra esterlina; símbolo: £

A Libra esterlina tem 20 shillings (sh) e o shilling tem 12 pence (d) (*); pence é o plural de penny. Logo: a libra esterlina tem 240 *pence*.

A representação, por exemplo, de 8 libras, 12 shillings e 9 pence é feita do seguinte modo:

£ 8 – 12 – 9

Observações:

1.º) A conversão da Libra em *cruzeiros* (moeda nacional) depende do "câmbio do dia", que é fornecido pelo Banco do Brasil.

(*) Pence também é chamado *dinheiro*, razão porque é abreviado por d.

2.º) As unidades monetárias (moedas) dos demais países, como por exemplo: peso (Argentina), escudo (Portugal), dólar (U.S.A.), franco (França), lira (Itália), marco (Alemanha), rublo (U.R.S.S.), yen (Japão), são tôdas subdivididas *decimalmente*.

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO — Grupo 74

1. Escrever V na frente das sentenças consideradas verdadeiras:

a) uma *jarda* é menor que um *metro*;

b) o *centímetro* é maior que a *polegada*;

c) uma *milha* é igual a um *quilômetro*;

d) um *pé* equivale mais ou menos a 30 *centímetros*;

e) um *galão* americano não chega a 4 *litros*.

2. Completar as seguintes sentenças, de modo a torná-las verdadeiras:

a) um avião que está a 1 500 pés de altitude está a .... metros de altitude;

b) a altura daquela "miss" é de 5,8 pés, isto é, cêrca de .... cm;

c) cano de uma polegada de diâmetro, significa que êsse diâmetro mede .... cm; de 3/4 de polegada significa .... cm.

d) o "bíceps" de 15 polegadas daquêle lutador equivale a .... cm;

e) a luta foi com luvas de 11 onças, isto é, ... g;

f) o nosso automóvel percorreu 230 milhas, ou seja .... km;

g) comprei 2 galões de óleo, isto é, ... *l*;

h) Para bater o "penalty" o juiz contou 11 jardas, ou seja .... m;

i) 1.º) 1 yd = ...in ; 2.º) 1 yd = ...ft ; 3.º) 6 mi = ...yd = ...m;

j) 1.º) 100m = ...yd ; 2.º) 100m = ...ft ; 3.º) 100km = ... mi.

Conversões com os Números Não-Decimais

14. *Primeiro caso*

Converter um número não-decimal em um número inteiro de unidades inferiores.

Exemplos:

1) Converter 3d 8h 13min em minutos é o mesmo que: quantos minutos há em 3d 8h 13min?

Como um dia vale 24h, temos que 3 dias valerão:
$3 \times 24h = 72h$ ....
que, somadas com 8h, resulta 80h ....

Valendo 1h, 60 minutos, temos que 80h valerão:
$80 \times 60min = 480min$ que, com mais 13min, dá um
total de..
4 813 minutos

(a técnica de cálculo pode ser a que figura ao lado)

$$\begin{array}{r} 24h \\ \times 3 \\ \hline 72h \\ +8h \\ \hline 80h \\ \times 60 \\ \hline 4\,800min \\ +\ 13min \\ \hline 4\,813min \end{array}$$

2) Reduzir £3–16–7 a pence (dinheiro)

Uma libra vale 20sh, logo 3 libras valerão:
$3 \times 20sh = 60sh$ que, somadas com 16sh, resultam 76sh.

Como 1sh vale 12 pence, segue-se que 76sh valerão: $76 \times 12d = 912d$ que, com mais 7d, dá o total de 919 pence

$$\begin{array}{r} 20sh \\ \times 3 \\ \hline 60sh \\ +16sh \\ \hline 76sh \\ \times 12 \\ \hline 912d \\ +\ 7d \\ \hline 919d \end{array}$$

15. *Segundo caso*

Converter um número inteiro de unidades inferiores em um número não-decimal. Exemplos:

1) Converter 4 813 minutos (de tempo) em número não-decimal.

É o mesmo que: quantos dias, horas e segundos há em 4 813 minutos?

Basta efetuar as operações *inversas* do problema anterior. Assim:

$$\begin{array}{llll} 4\,813min & \underline{|\ 60\quad} & & \\ 13min & 80h & \underline{|\ 24} & \\ & 8h & 3d & \end{array} \qquad 3d\ 8h\ 13min$$

2) Converter 919 pence (dinheiro) em número não-decimal.

Temos:

$$\begin{array}{llll} 919d & \underline{|\ 12\quad} & & \\ 79 & 76sh & \underline{|\ 20} & \\ 7d & 16sh & 3£ & \end{array} \qquad £3\text{–}16\text{–}7$$

OBSERVAÇÃO: No caso de se querer converter um número fracionário de unidades inferiores em um número não-decimal, procede-se de maneira análoga à empregada no seguinte exemplo:

Converter $\frac{3}{8}$ do ano em número não-decimal.

É o mesmo que: quantos meses e dias há na fração $\frac{3}{8}$ do ano?

Como cada *ano* tem 12 *meses*, vem: $\frac{3}{8}\,a = \frac{3}{8} \times 12\,me = \frac{9}{2}\,me = 4\,\frac{1}{2}\,me$ ou 4 me e $\frac{1}{2}$ me.

Valendo cada *mês* 30 *dias* (salvo quando o problema declarar 31d ou 29d), temos:

$\frac{1}{2}\,me = \frac{1}{2} \times 30\,d = 15\,d$ e, portanto:

$\frac{3}{8}\,a = 4\,me\ 15\,d.$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 75

1. Tornar verdadeiras as seguintes sentenças:

   1.º) Numa hora há .... minutos e .... segundos
   2.º) Num dia há .... horas, ... minutos e .... segundos
   3.º) Numa semana há .... minutos
   4.º) Em duas semanas e três dias há .... horas
   5.º) Um arco de 42º possui .... segundos (de ângulo!)
   6.º) 150 milésimos de um dia equivale a .... minutos (de tempo)
   7.º) Em 8 yd 1 ft 7 in há .... polegadas (in)
   8.º) Em 5 pés há .... polegadas
   9.º) Em £ 30–12–5 há .... pence (d)
   10.º) Em 56 shillings há .... dinheiro (ou pence).

2. Converter em *número inteiro de unidades* (as menores dos números não-decimais indicados):

   1.º) 2d 12h 15min = ... minutos
   2.º) 8h 10min 36s = ... segundos
   3.º) 4a 8me 12d = ... dias
   4.º) 5yd 2ft 9in = ... polegadas
   5.º) 1ft 5in = ... polegadas
   6.º) 88º 12′ = ... ′
   7.º) 36º 8′ 23″ = ... ″
   8.º) 12′ 56″ = ... ″
   9.º) £14–40–8 = ... d
   10.º) £37–15 = ... sh

3. Converter em número não-decimal os seguintes números inteiros de unidades:

   1.º) 192s (segundos-tempo)
   2.º) 8 000s (segundos-tempo)
   3.º) 18 540min (minutos-tempo)
   4.º) 192″ (segundos-ângulo)
   5.º) 8 565in (polegadas)
   6.º) 116 045″ (segundos-ângulo)
   7.º) 500 in (polegadas)
   8.º) 1 692d (dias)
   9.º) 1 318d (dinheiro ou pence)
   10.º) 336h (horas)
   11.º) 7 349d (dinheiro ou pence)

4. Tornar verdadeiras as seguintes sentenças (usando frações):

1.ª) 1h = ... do dia
2.ª) 6h = ... do dia
3.ª) 1 minuto = ... da hora
4.ª) 15 minutos = ... da hora
5.ª) 1 segundo = ... do minuto
6.ª) 1 segundo = ... da hora
7.ª) 1 segundo = ... do dia
8.ª) 1′ = ... do grau
9.ª) 1″ = ... do grau
10.ª) 20″ = ... do grau
11.ª) 1 pé = ... da jarda
12.ª) 1 polegada = ... do pé
13.ª) 1 polegada = ... da jarda
14.ª) 1 shilling = ... da libra
15.ª) 1 pence = ... do shilling
16.ª) 1 pence = ... da libra

5. Converter os seguintes números fracionários de unidades em números não-decimais:

1.º) Quantos meses e dias contém a fração $\frac{5}{8}$ do ano?

2.º) Quantas horas e minutos representam a fração $\frac{7}{32}$ de um dia?

3.º) Quantos dias, horas e minutos representam $\frac{4}{5}$ de uma semana?

4.º) Quantos graus são $\frac{2}{5}$ de um ângulo reto?

5.º) Quantas jardas, pés e polegadas há em $\frac{15}{4}$ de uma jarda?

Operações com os Números Não-Decimais

16. *Adição*

Vamos aprender a técnica da operação através de problemas.

1. Hoje tenho 20 minutos de ginástica ritmada no colégio. Tendo começado às 8h 15min a que horas terminarei?

Temos:

$$\begin{array}{rr} & 8\text{h}\ 15\text{min} \\ + & 20\text{min} \\ \hline & 8\text{h}\ 35\text{min} \end{array} \quad \text{(sem qualquer dificuldade!)}$$

2. A prova de Matemática vai ser só de 50 minutos! Se começarmos às 9h 20min até que horas poderemos entregar a prova?

Temos:

$$\begin{array}{rr} & 9\text{h}\ 20\text{min} \\ + & 50\text{min} \\ \hline & ?\ \ 70\text{min} \end{array}$$

Agora há uma "aparente dificuldade", pois 70m já é mais de 1h. Caímos então no segundo caso da conversão:

$$\begin{array}{r|l} 70\text{min} & 60 \\ \cline{2-2} 10\text{min} & 1\text{h} \end{array}$$

e usamos a seguinte disposição prática:

$$\begin{array}{rr} & 1\text{h}\ \ 70\text{min}* \\ & 9\text{h}\ \ 20\text{min}* \\ + & 50\text{min} \\ \hline & 10\text{h}\ \ 10\text{min} \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 70\text{min} & 60 \\ \cline{2-2} 10\text{min} & 1\text{h} \end{array}$$

3. Três motores ficaram "amaciando" respectivamente:

3h 45min 36s ; 2h 54min 48s e 4h 36min 55s

Qual o tempo total gasto pelos três motores?

Temos, procedendo de forma semelhante à do exercício anterior:

$$\begin{array}{rrrr} & 2h & 2min & \\ & 3h & 45min & 36s \\ + & 2h & 54min & 48s \\ & 4h & 36min & 55s \\ \hline & 11h & 17min & 19s \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 139s & 60 \\ \hline 19s & 2min \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 137min & 60 \\ \hline 17min & 2h \end{array} \qquad 11h$$

4. Calcular a soma das três seguintes importâncias (dadas em moeda inglêsa):

£32–15–8 ; £24–5–7 e £3–13–10 : Temos:

$$\begin{array}{rrrrrr} & 1 & & 2 & & \\ £ & 32 & - & 15 & - & 8 \\ £ & 24 & - & 5 & - & 7 \\ £ & 3 & - & 13 & - & 10 \\ \hline £ & 60 & - & 15 & - & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 25d & 12 \\ \hline 1d & 2sh \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 35sh & 20 \\ \hline 15sh & 1£ \end{array}$$

17. *Subtração*

Sejam, por exemplo, os problemas:

1. Qual a diferença entre as horas registradas pelos relógios (fig. 123)

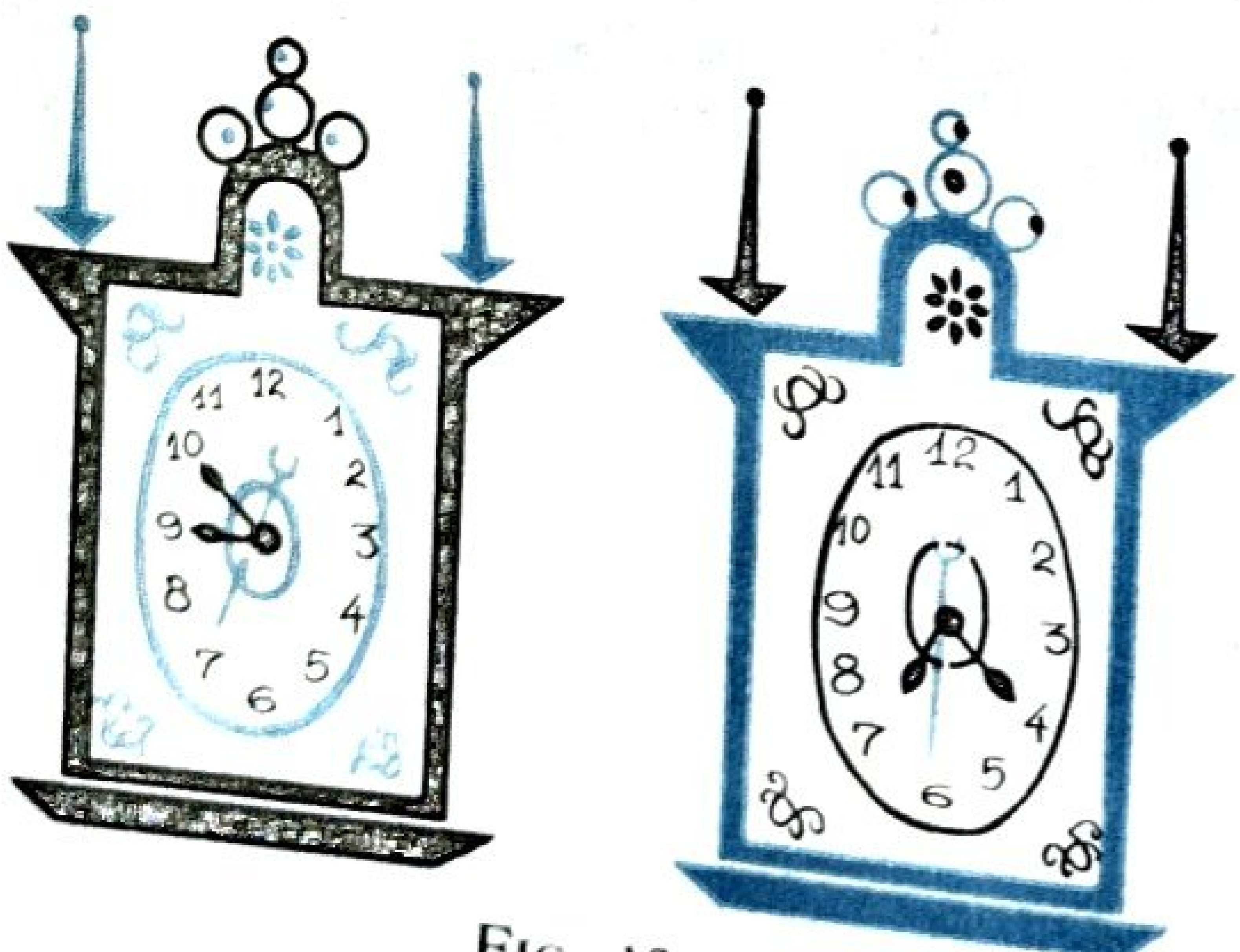


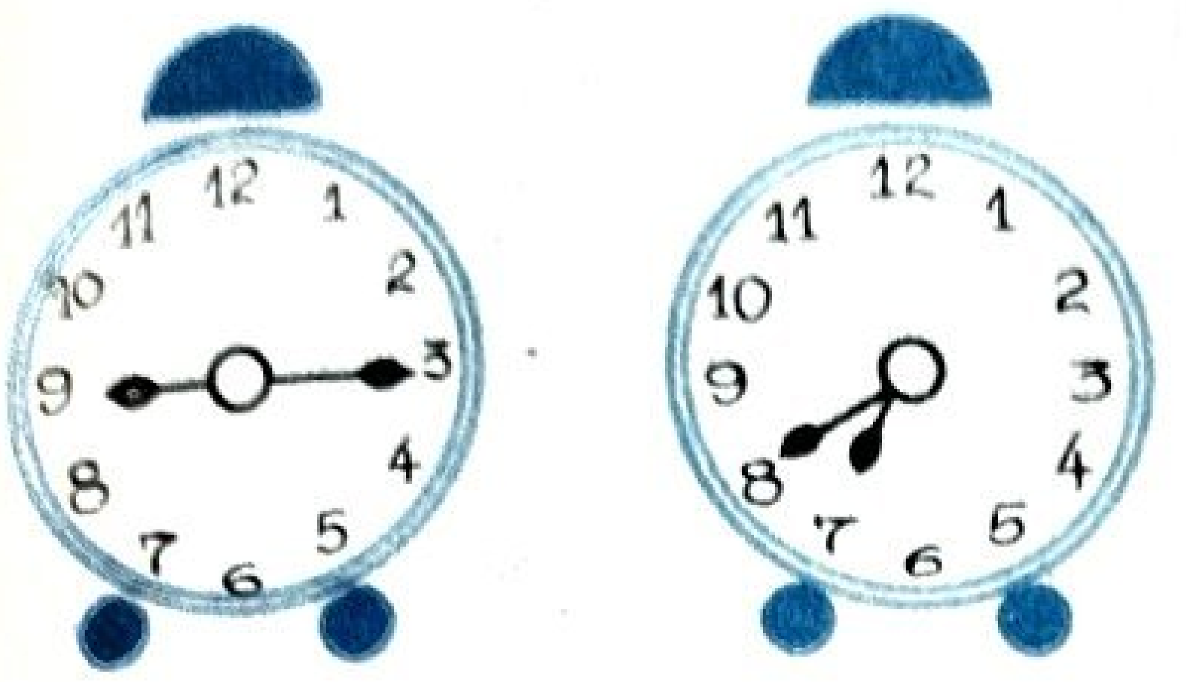
FIG. 123

Temos:

$$\begin{array}{rrr} & 9h & 50min \\ - & 7h & 20min \\ \hline & 2h & 30min \end{array}$$

(sem qualquer dificuldade!)

2. E agora (fig. 124):



$$\begin{array}{rr} & 9\text{h}\ \ 15\text{min} \\ - & 7\text{h}\ \ 40\text{min} \\ \hline & ? \end{array}$$

Fig. 124

Não se podendo subtrair (40min de 15min) juntamos aos 15 minutos da segunda coluna, 60 minutos = 1 hora da primeira coluna (que passará a ter 8h) tornando a operação possível: 75min − 40min = 35min. Disposição prática:

$$\begin{array}{rr} 8\text{h} & 75\text{min} \\ \cancel{9}\text{h} & \cancel{15}\text{min} \\ 7\text{h} & 40\text{min} \\ \hline 1\text{h} & 35\text{min} \end{array}$$

3. Dois ângulos têm rèspectivamente as medidas: 48° 25″ e 35° 43′ 36″ Calcular a diferença entre êles.

Temos:

$$\begin{array}{rrr} & 59' & \\ 47^\circ & \cancel{60}' & 85'' \\ 48^\circ & 0' & 25'' \\ 35^\circ & 43' & 36'' \\ \hline 12^\circ & 16' & 49'' \end{array}$$

18. *Multiplicação e Divisão*

Estudaremos os casos da multiplicação e da divisão de um número não-decimal por um *número inteiro*, que são os casos mais usuais na vida prática. Para efetuar essas operações, *basta multiplicar ou dividir* o número inteiro pelas unidades que compõem o número não-decimal, efetuando-se as *reduções*, sempre que se fizerem necessárias. Exemplos:

1. Cada um dos cinco funcionários de um escritório registrou num mês: 25d 30h de trabalho efetivo. Exprimir o total de trabalho efetivo dos *cinco* funcionários, em dias e horas.

   Trata-se de multiplicar por 5 o número não-decimal 25d 30h.

Temos:

$$\begin{array}{rr} \scriptstyle 6d & \\ 25d & 30h \\ & \times\ 5 \\ \hline 131d & 6h \end{array} \qquad \begin{array}{r} 30h \\ \times\ 5 \\ \hline 150h \\ 6h \end{array}\begin{array}{|l} 24 \\ \hline 6d \end{array} \qquad \begin{array}{r} 25d \\ \times 5 \\ \hline 125d \\ +6d \\ \hline 131d \end{array}\ (*)$$

2. Qual é a medida do ângulo cujo valor é o *triplo* da do ângulo: $18^\circ\,56'\,28''$?

Temos:

$$\begin{array}{rrr} \scriptstyle 2^\circ & \scriptstyle 1' & \\ 18^\circ & 56' & 28'' \\ & & \times\ 3 \\ \hline 56^\circ & 49' & 24'' \end{array} \qquad \begin{array}{r} 28'' \\ \times 3 \\ \hline 84'' \\ 24'' \end{array}\begin{array}{|l} 60 \\ \hline 1' \end{array} \qquad \begin{array}{r} 56' \\ \times 3 \\ \hline 168' \\ +1' \\ \hline 169' \\ 49' \end{array}\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ |\,60 \\ \hline 2^\circ \end{array} \qquad \begin{array}{r} 18^\circ \\ \times 3 \\ \hline 54^\circ \\ +2^\circ \\ \hline 56^\circ \end{array}$$

3. Um operário durante um mês trabalhou efetivamente 25d 22h 30m. Um segundo operário, por ter estado doente, trabalhou sòmente a *têrça parte* dêsse período. Qual o tempo de trabalho do segundo operário?

Basta *dividir* por 3 o número não-decimal: 25d 20h 30min. Temos:

$$\begin{array}{r} 25d \\ -\ 24d \\ \hline 1d \\ \times 24 \\ \hline 24h \rightarrow \end{array} \quad \begin{array}{r} 20h \\ \rightarrow +24h \\ \hline 44h \\ -\ 42h \\ \hline 2h \\ \times 60 \\ \hline 120min \rightarrow \end{array} \quad \begin{array}{r} 30min \\ \rightarrow +\ 120min \\ \hline 150min \\ -\ 150min \\ \hline 0min \end{array}\begin{array}{|l} 3 \\ \hline 8d\ \ 14h\ \ 50min \end{array}$$

(*) Cuidado! *Primeiro* multiplicar 25d por 5 e *só depois* somar 6d ao total (125d) obtido, pois, se fôsse somado antes (6d em 25d, isto é: 31d) e depois multiplicado (31d × 6 = 186d) na realidade estaríamos *somando:* 5 × 6d = 30d a mais!

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 76

1. Efetuar as seguintes *operações:*

1.ª) 13d 15h 42min + 8d 22h 30min

2.ª) 28° 52′ 55″ + 36° 24″ + 18′ 27″

3.ª) 8h 48min − (3h 12min 50s + 2h 30min)

4.ª) 90° − 36° 20′ 54″

5.ª) 5yd 2ft + 16yd 1ft 9in + 8yd 6in

6.ª) £ 54–12–4 − £ 18–19–10

7.ª)
```
 2h 30min
 1h 30min +
    20min
 5h 40min
 ---------
 .........
```

8.ª)
```
 5h 34min
 2h 55min −
 ---------
 .........
```

9.ª)
```
 3h 20min
 ......... +
 ---------
 8h 10min
```

10.ª) 6 × (27d 21h 13min)

11.ª) (3a 6me 20d) : 5

12.ª) $(30° \; 13' \; 5'') \times \dfrac{2}{5}$

13.ª) (£ 171–1–2) : 13

14.ª) $\dfrac{1}{3} \times (180° - 53° \; 17')$

15.ª) (48′ : 3) : (12′ : 3)

2. Assinalar qual das respostas é verdadeira:

1.ª) Trabalhando das 7h 30min às 11h 15min, trabalhei:

(a) 3h 15min (b) 3h 45min (c) 3h 30min

2.ª) "1 hora e $\frac{1}{4}$" corresponde:

(a) 1h 20min (b) 1h 45min (c) 1h 15min

3.ª) (2h 45min × 5) × 0 é igual a :

(a) 0 (b) 13h 45min (c) 13h 15min

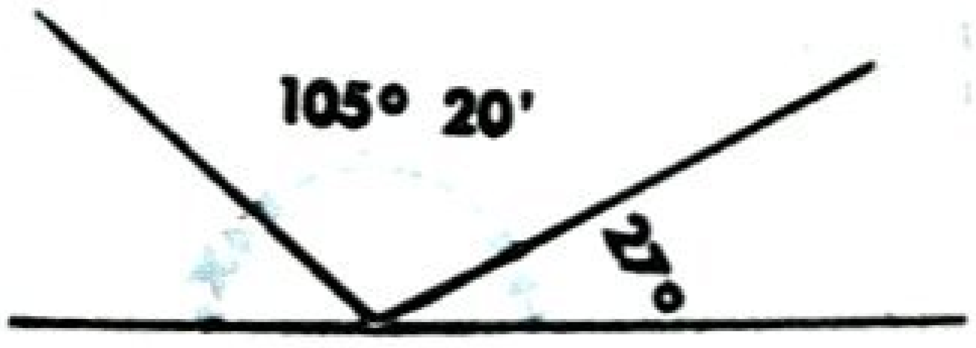
4.ª) Se um campo de futebol possui 100 jardas de comprimento, então êle possui:

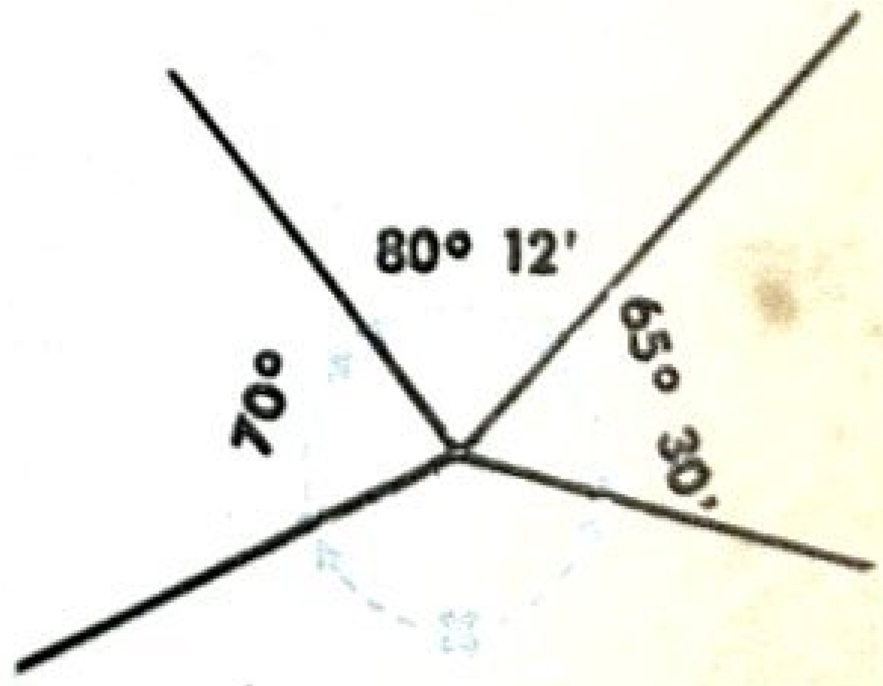
(a) 150metros (b) 91metros (c) 100metros

5.ª) Dormi 500 minutos! Portanto, dormi:

(a) 8h 20min (b) 20h 8min (c) 5h 100min

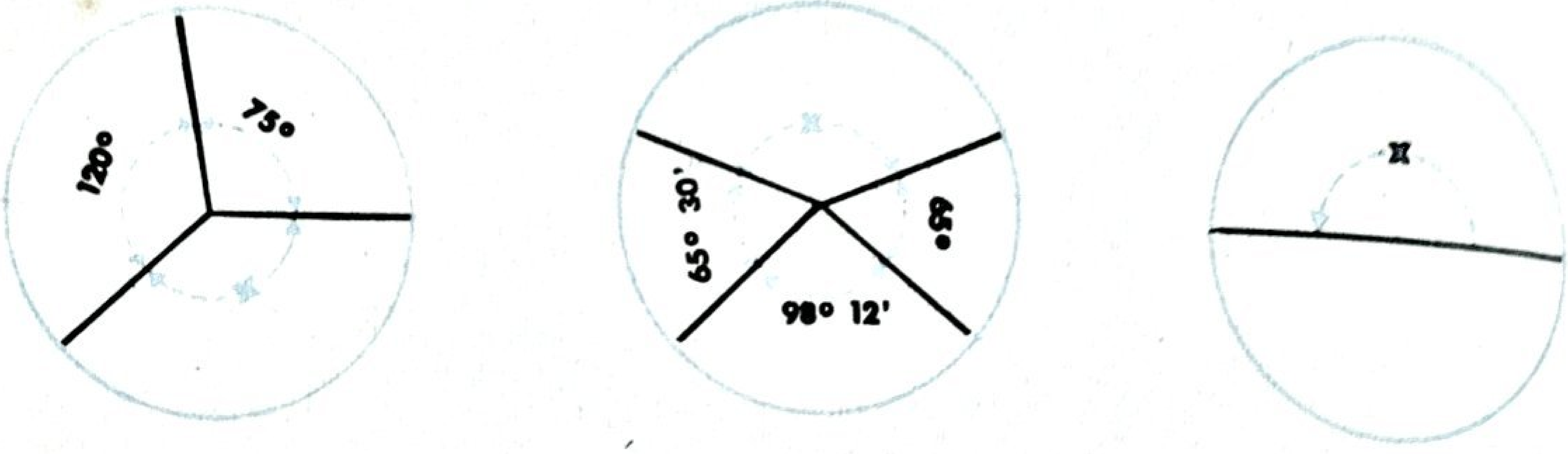
3. Calcular a medida do ângulo **X** nas seguintes figuras:





4. Quantos graus existem: *numa* circunferência? em *meia* circunferência? num *têrço* de circunferência? num *décimo* de circunferência?

5. Calcular a medida do ângulo X nas seguintes figuras:



PROBLEMAS DE APLICAÇÃO — GRUPO 77

1. Em 3 horas uma máquina impressora produz 1 620 gravuras. Em 25 minutos, uma segunda produz 200 das mesmas gravuras. Qual das máquinas produz mais?

2. Conte as batidas do seu coração (basta apertar levemente o indicador da mão direita na artéria principal do pulso esquerdo) por minuto. Quanto bate seu coração por dia?

3. Um relógio adianta 3 segundos por hora. No fim de uma semana, quantos minutos êle adiantou?

4. Às 9 horas da manhã acertou-se um relógio que atrasa 6 minutos cada 24 horas. Que horas serão, na verdade, quando o relógio estiver marcando 5 horas da tarde?

5. Um trem parte de São Paulo às 7h 50min e chega a Campinas às 9h 40min.
   (*a*) qual é a duração da viagem?
   (*b*) quando Raimundo fêz essa viagem o trem só chegou às 10h 5min; qual foi o atraso do trem?

6. Um "bico de gás" consome 18 litros de gás por hora. Se ficar aceso 2h 40min quanto consumirá?

7. Uma pessoa nasceu em 12 de outubro de 1 953. Qual será sua idade (anos, meses e dias) em 15 de setembro de 1 964?

8. Numa certa fábrica um operário trabalhou 3a 10me e 15d e um outro 2a 11me 28d. Quanto tempo trabalhou a mais o primeiro operário?

9. Um operário ganha por determinado serviço $\frac{2}{3}$ do que ganha um operário especializado. Tendo o operário especializado recebido £ 96–14, quanto ganhou o primeiro?

10. Paulo pulou 10ft 8in. Seu irmão pulou 12ft 6 in. Quanto pulou Paulo a mais do seu irmão?

ATENÇÃO(*)

— Não diga "a grama", mas "o grama".

— Não escreva 3m,25 mas 3,25m.

— Não coloque o símbolo no alto, como se fôsse expoente mas na mesma linha do número: 3km. Esta regra só admite exceção no caso de unidades de temperatura e tempo e das unidades sexagesimais de ângulo.

— Não separe por ponto, mas por vírgula, a parte inteira da decimal: 3,35m e não 3.25m.

— Não coloque ponto após o símbolo das unidades: escreva 3g, 4m, e não 3g. e 4m.

— Não pluralize os símbolos de medidas, isto é, não escreva 3gs, 4ts, mas 3g, 4t.

— Não escreva cc, mas cm^3, por centímetro cúbico.

— Não fale mais em "miriâmetro" para designar 10 quilômetros.

— Os minutos e os segundos relativos a tempo devem ser representados por *m* (ou *min*) e *s*, e não por $'$ e $''$. Assim, escreva 5h 10m 7s ou 5h 10min 7s e não 5h 10$'$ 7$''$.

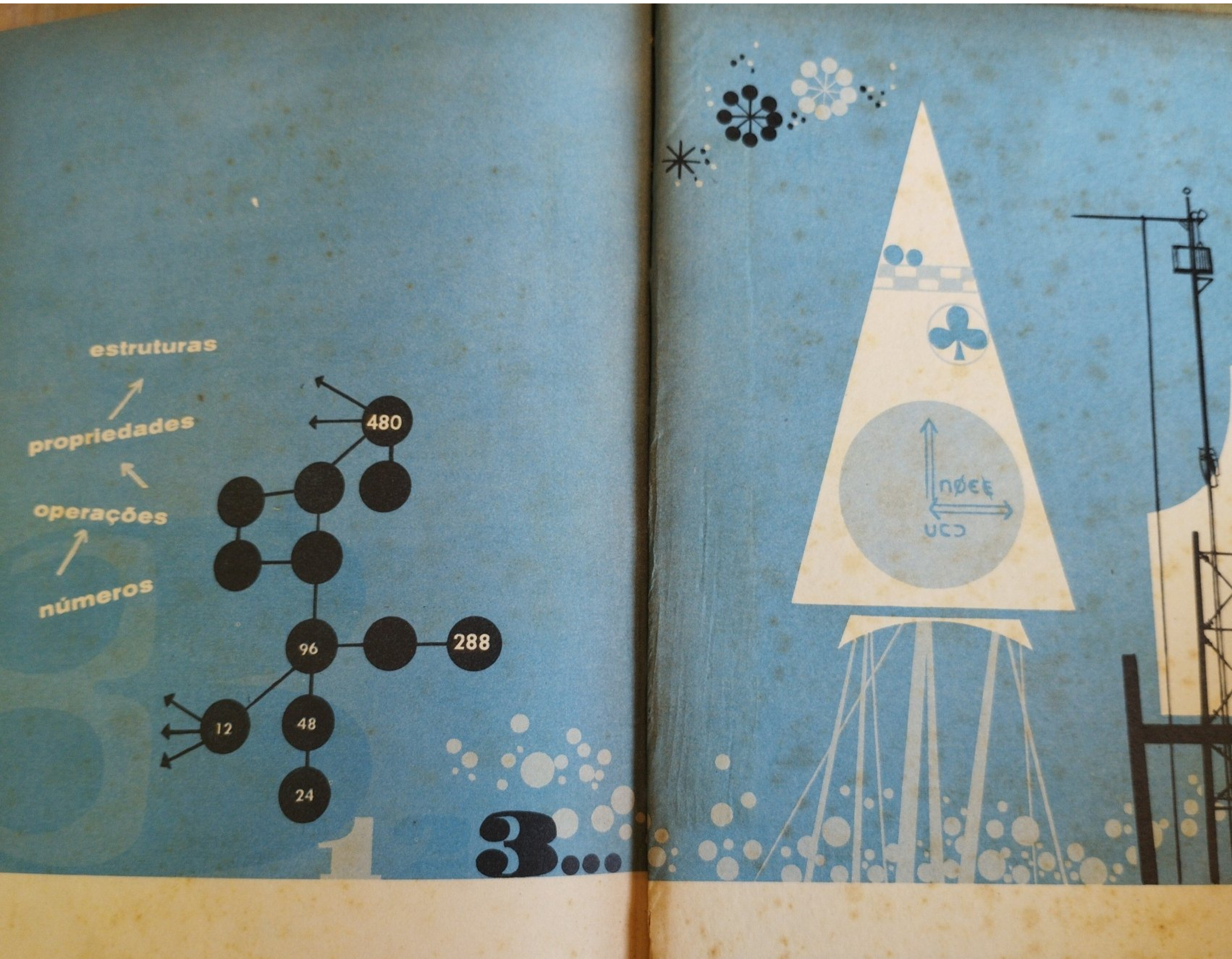
— Não fale em "milhas", "polegadas", "libras", "pés", "graus Fahrenheit". Quando tiver de traduzir escritos em que apareçam essas medidas, converta-os ao sistema métrico decimal.

A inobservância da legislação metrológica é mais do que infração. É prova de ignorância e falta de brasilidade.

(*) Transcrito da "Fôlha de São Paulo", de 17/6/1 962 — Trabalho do Dr. J. Reis — por ocasião das comemorações do *centenário* do uso do Sistema Métrico Decimal no Brasil (26/6/1 962).

Ilustrações e diagramação dêste livro:

NESTOR BATTAGLIERO


estruturas
propriedades
operações
números
480
96
288
12
48
24
1
3...

COMPANHIA EDITORA NACIONAL